NGUYỄN HỮU BẮC
Chủ biên

CHINH PHỤC NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN TỪ A ĐẾN Z

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

CHƯƠNG MỞ ĐẦU

Đạo hàm và tích phân không xác định là hai phép toán ngược nhau, chúng thuộc lĩnh vực toán cao cấp nhưng lại liên quan mật thiết và giúp giải quyết nhiều bài toán sơ cấp. Trước hết việc tìm nguyên hàm cơ bản được chứng minh bằng đạo hàm, sau đó để tìm nguyên hàm ta thường dùng các công thức hoặc biến đổi đưa về nguyên hàm cơ bản. Có rất nhiều cách để tìm nguyên hàm của một hàm số như dùng bảng nguyên hàm cơ bản, đổi biến số... Tuy nhiên trong một số trường hợp ta có thể dùng đạo hàm để kiểm chứng nh+anh hơn dùng các phương pháp khác.

❖ MỐI LIÊN HỆ GIỮA NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

Cho hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng $(a;b)$. Một hàm số $F(x)$ cũng xác định trong khoảng này sao cho $F'(x)=f(x)$ với mọi x thuộc $(a;b)$. Ta gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

Do nguyên hàm $F(x)$ là phần ngược lại tiến trình khi lấy đạo hàm của hàm số $f(x)$ nên tính chất về tính đạo hàm của hàm số $f(x)$ đều áp dụng được vào cho nguyên hàm $F(x)$.

Nguyên hàm ta hiểu như "khôi phục trở lại" một hàm số đã được lấy đạo hàm trước đó một cấp.

Cách tìm nguyên hàm cũng giống như đi giải phương trình mà ẩn số của nó là nguyên hàm được để dưới dạng đạo hàm của các hàm số nào đó, và người ta gọi là giải phương trình vi phân.

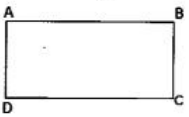
Ta đã biết cách tìm nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp $f(x)$ bằng cách đi ngược lại tiến trình lấy đạo hàm. Dựa vào cách này để tìm nguyên hàm cho một hàm số $f(x)$ phức tạp là việc làm không hề dễ dàng. Do đó, người ta mới đưa ra khái niệm tích phân, ký hiệu là $\int$, đây là một phương pháp dùng để tìm nguyên hàm của một hàm số nào đó với sự sắp đặt ký hiệu khoa học nên cách tìm nguyên hàm khi dùng tích phân trở nên dễ dàng.

❖ Ý NGHĨA

Ta thấy rằng trong cuộc sống thường ngày thì toán học nó rất gần gũi với chúng ta trong mọi mặt đời sống. Chính vì thế mà xã hội ngày càng phát triển thì toán học lại phát triển lên một tầm cao mới. Vì vậy mà tích phân ra đời nhằm

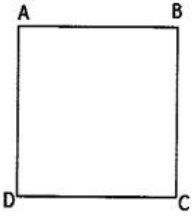
phục vụ vấn đề thiết yếu của cuộc sống. Tích phân dùng để tính diện tích và thể tích của vật thể.

Từ thời xa xưa lắm người ta chỉ cộng các số đơn giản nhằm phụ vụ công việc mua bán, trao đổi. Anh mua tôi 5 đồng rau, 7 đồng gạo vậy anh nợ tôi 5+7=12 đồng. Nếu anh đưa tôi 20 đồng thì 20-12 =8 đồng, nhưng nếu anh có 8 +8+8 được lập lại 3 lần thì 8x3=24 khi các số cộng giống nhau theo một số lần nhất định. Khi đó phép nhân bắt đầu xuất nhằm rút gắn công tác viết của phép cộng thay vì 7+7+7+7+7+7=6x7=42 vì số 7 được lập lại 6 lần. Nhưng khi nhân nhiều số giống nhau như $7x7x7x7x7x7=7^6$ thì ông cha ta lại nghĩ tới phép lũy thừa. Trong thực thế cuộc sống ngày càng phát triển thì vấn đề chia đất cho mỗi người dân. Nếu diện tích đất là những hình dạng quen thuộc chữ nhật, vuông, hình bình hành... thì công tác chia trở lên đơn giản, thể tích của những vật thể có hình dạng bất kỳ.



Diện tích mọi hình đều xuất phát từ diện tích hình chữ nhật có cạnh là b và b:

$$S_{hcn} = a.b$$

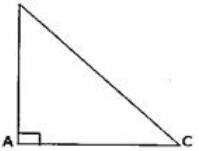


Khi chiều dài bằng chiều rộng thì $a = b$, lúc đó diện tích hình vuông:

$$S_{hv} = a^2$$

nhưng khi hình chữ nhật chia làm 2 khi đó diện tích tam giác vuông

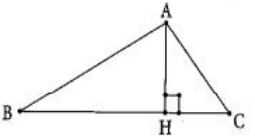
$$S = \frac{1}{2}.a.b$$



nhưng tam giác ABC thường ta kẻ đường cao AHB nó thành 2 tam giác vuông AHB và AHC.

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AHC} + S_{\Delta AHB} = \frac{1}{2}.AH.BH + \frac{1}{2}.HC.AH$$

$$= \frac{1}{2}AH.(HB + HC) = \frac{1}{2}.AH.BC$$

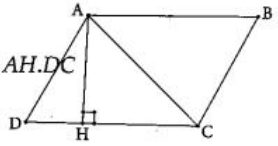


bằng một nửa đáy nhân chiều cao

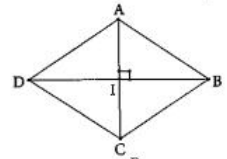
Diện tích hình bình hành $ABCD$:

$$S_{ABCD} = S_{\Delta ADC} + S_{\Delta ABC} = 2.S_{\Delta ADC} = 2.\frac{1}{2}AH.DC = AH.DC$$

$= AH.DC$ (Bằng đáy nhân chiều cao)



Diện tích hình thoi $ABCD$:

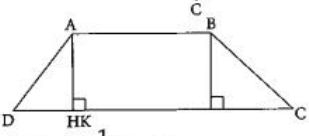


$$S_{ABCD} = S_{\Delta ADC} + S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}DI.AC + \frac{1}{2}IB.AC$$

$$= \frac{1}{2}.AC(DI + BI) = \frac{1}{2}.AC.BD$$

bằng nửa tích 2 đường chéo.

Diện tích hình thang $ABCD$:



$$S_{ABCD} = S_{\Delta AHD} + S_{ABKH} + S_{\Delta BKC} = \frac{1}{2}AH.DH + AH.AB + \frac{1}{2}BK.KC$$

$$= AH.\left(\frac{DH}{2} + AB + \frac{KC}{2}\right) = \frac{AH.(DH + KC + AB + AB)}{2} = \frac{AH.(DC + AB)}{2}$$

"Muốn tính diện tích hình thang, đáy lớn đáy nhỏ ta mang cộng vào, thế rồi nhân với chiều cao, chia đôi lấy nửa, thế nào cũng ra."

Vì sao lại có thể tính, diện tích đường tròn thông qua diện tích hình chữ nhật:

Do phương trình đường tròn $x^2 + y^2 = R^2$ nhận tâm O làm tâm đối xứng, các trục Ox, Oy chia đường tròn tâm $O(0, 0)$ bán kính R thành 4 phần bằng nhau. Ta gọi diện tích cung tròn: $S_{\overset{\frown}{AOB}} = S_1$

Ta chia cung tròn thành những dải nhỏ: chiều rộng dx, chiều dài y mà diện tích hình chữ nhật $y.dx$ khi cộng vô số dải nhỏ sẽ thành diện tích cung tròn:

$$S_{\overset{\frown}{AOB}} = S_1 = \int_0^R y dx = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx.$$

Đặt $x = R.\sin t \Rightarrow dx = R.\cos t.dt$.

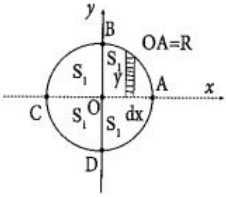
$$R^2 - x^2 = R^2 - R^2.\sin^2 t = R^2\left(1 - \sin^2 t\right) = R^2.\cos^2 t \Rightarrow \sqrt{R^2 - x^2} = R.|\cos t|$$

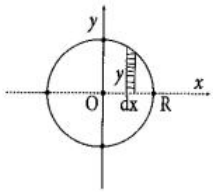
Đổi cận $\begin{cases} x = R = R\sin t \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2} \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{cases}$.

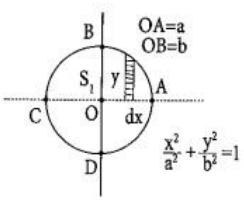
$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R.|\cos t|.R\cos t.dt = R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{R^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt$$

$$= \frac{R^2}{2}\left(t + \sin\frac{2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\left(2.\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right] - \frac{R^2}{2}\left[0 + \frac{\sin(2.0)}{2}\right] = \frac{\pi R^2}{4}$$

$$\Rightarrow S = 4.S_1 = \pi R^2$$







Ta chia cung elíp thành những dải nhỏ: chiều rộng dx, chiều dài y mà diện tích hình chữ nhật $y.dx$ khi cộng vô số dải nhỏ sẽ thành diện tích cung Elíp:

$$S_{\overset{\frown}{AOB}} = S_1 = \int_0^a y dx = \int_0^a \frac{b}{a}.\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

Đặt $x = a\sin t \Rightarrow dx = a\cos t dt$.

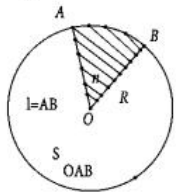
Ta có $a^2 - x^2 = a^2 - a^2.\sin^2 t = a^2\left(1 - \sin^2 t\right) = a^2.\cos^2 t \Rightarrow \sqrt{a^2 - x^2} = a.|\cos t|$

Đổi cận $\begin{cases} x = a\sin t \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2} \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{cases}$

$$S_1 = \frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a.|\cos t|.a\cos t dt = \frac{b}{a}.a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t) dt$$

$$= \frac{ab}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab}{2}\left|\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\left(2.\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right| - \frac{R^2}{2}\left[0 + \frac{\sin(2.0)}{2}\right| = \frac{\pi.ab}{4}$$

$\Rightarrow S = 4.S_1 = \pi.a.b$.



Ta thấy rằng khi quay 360^0 ta mới được đường tròn tâm O, bán kính R. Nhưng cung tròn tâm O, bán kính R khi quét 1 góc n^0 thì chiều dài cung $AB = l$; diện tích hình quạt OAB sẽ bằng bao nhiêu.

$$\begin{cases} 360^0 \to C = 2\pi R \\ n^0 \to l_{\overset{\frown}{AB}} = \dfrac{2\pi R.n}{360^0} = \dfrac{\pi R n}{180^0} \end{cases} \qquad \begin{cases} 360^0 \to S = \pi R^2 \\ n^0 \to S_{\overset{\frown}{AOB}} = \dfrac{\pi R^2.n}{360^0}. \end{cases}$$

Qua đó ta thấy tính thể tích, diện tích các khối vật thể bằng tích phân mà bản chất cơ bản vẫn là diện tích hình chữ nhật cơ bản từ ngàn năm nay. Tích phân là một khái niệm toán học,và cùng với nghịch đảo của nó vi phân đóng vai trò là 2 phép tính cơ bản và chủ chốt trong lĩnh vực giải tích Có thể hiểu đơn giản

tích phân như là diện tích hoặc diện tích tổng quát hóa. Giả sử cần tính diện tích một hình phẳng được bao bởi các đoạn thẳng, ta chỉ việc chia hình đó thành các hình nhỏ đơn giản hơn và đã biết cách tính diện tích như hình tam giác, hình vuông, hình thang, hình chữ nhật... Tiếp theo, xét một hình phức tạp hơn mà nó được bao bởi cả đoạn thẳng lẫn đường cong, ta cũng chia nó thành các hình nhỏ hơn, nhưng bây giờ kết quả có thêm các hình thang cong. Tích phân giúp ta tính được diện tích của hình thang cong đó.

Bản chất của vi phân và cách viết gọn để tính tích phân:

$df(x)=f'(x).dx$ do vậy $f(u)=g(x)$ thì khi ta lấy đạo hàm 2 vế thì hàm $f(u)$ đạo hàm theo u nhung đồng thời nhân $s(x)$, còn hàm $g(x)$ đạo hàm theo x nhưng đồng thời nhân dx: $f(u)=g(x)\Leftrightarrow f'(u).du=g(x)'.dx$

Ví dụ 1

$u=2x+3\Leftrightarrow u'.du=(2x+3)'.dx\Leftrightarrow du=2.dx$

$u=\sqrt{2x+3}\Leftrightarrow u^2=2x+3\Leftrightarrow 2udu=2dx\Leftrightarrow udu=dx$

$u=ax+b\Leftrightarrow du=adx\Leftrightarrow dx=\dfrac{du}{a}$

$u=\sqrt[n]{ax+b}\Leftrightarrow u^n=ax+b\Leftrightarrow nu^{n-1}.du=adx\Leftrightarrow dx=\dfrac{nu^{n-1}.du}{a}$

$u=\tan x\Leftrightarrow du=\dfrac{dx}{\cos^2 x}\Rightarrow\int f(\tan x).\dfrac{dx}{\cos^2 x}=\int f(u)du$

$u=\ln x\Leftrightarrow du=\dfrac{dx}{x}\Rightarrow\int f(\ln x).d(\ln x)=\int f(u)du$

Vi phân là cách viết tắt

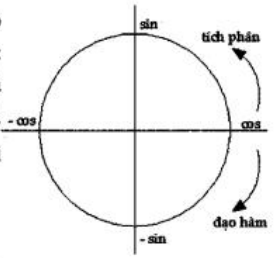
Ví dụ 1

$I=\int(2x^2+3)^5 xdx$.

Ta thấy rằng khi quan sát ta thấy đạo hàm $(2x^2+3)'$ bằng $4x$ mà ở đây có xdx nên ta $xdx=\dfrac{d(2x^2+3)}{4}$

$I=\int(2x^2+3)^5 xdx=\dfrac{1}{4}\int(2x^2+3)^5 d(2x^2+3)$

$=\dfrac{1}{4}.\dfrac{(2x^2+3)^6}{6}+C=\dfrac{(2x^2+3)^6}{24}+C$.



Hai trục Ox, Oy của vòng tròn tượng trưng cho trục sin và cos. Nhưng được mô phỏng bởi câu: "Sống đứng – chết nằm" tức là trục đứng trục Oy là sin tức sống còn trục nằm là trục Ox là cos tức chết.

Nó giống như quy luật cuộc sống là đứng đi lại được thì là sống.

Còn nằm xuống bất động thì là chết.

Ngược chiều đứng hướng lên là sin là trừ sin, ngược chiều dương cos là trừ như hình vẽ.

Trong vòng tròn lượng giác thì quy ước là cùng chiều kim đồng hồ là chiều âm và ngược chiều dương đồng hồ là chiều dương nhưng các em học sinh không hiểu vì sao như vậy?

Tôi xin mạn phép giải thích theo quy luận "âm dương ngũ hành" của cuộc sống. Trong cuộc sống hay trong toán học luôn tồn tại hai mặt đối lập nó chính là động lực của sự pháp triển. Khi chiều này quy ước là dương thì chiều khác quy ước là âm. Nhưng trong toán học thì chiều âm là chiều cùng chiều kim đồng hồ vì trục đứng là trục Oy là sin tức sống, khi cùng chiều là nằm Ox là cos tức là chết. Khi kim đồng hồ quay cùng chiều tức là quá trình sống nhưng thời gian càng trôi thì ta càng già và mau chết nên nó chiều âm. Chính vì vậy con người chúng ta thời gian quay trở lại nên ngược chiều kim đồng hồ là chiều dương.

"Đạo hàm là gì? Đạo là đường đi, hàm là nhai tức là ăn.

Đạo hàm là muốn đi đường thì phải ăn để sống mới tiếp tục đi tức là đạo hàm là cùng chiều kim đồng hồ.

Đi theo chiều kim đồng hồ thì được hiểu là lấy đạo hàm.

Bài toán:

$$(\sin x)' = \cos x;\ (\cos x)' = -\sin x;\ (-\sin x)' = -\cos x;\ (-\cos x)' = +\sin x.$$

Ngược lại với quá trình ăn vào để sống là qua trời thải ra, thải ít là phân, thải nhiều là tích phân.

Vậy đi ngược chiều kim đồng hồ thì được hiểu là lấy tích phân.

Bài toán:

$$\int \sin x dx = -\cos x;\ \int (-\cos x) dx = -\sin x;\ \int (-\sin x) dx = \cos x;$$
$$\int \cos x dx = \sin x.$$

A LÝ THUYẾT

Chương I

NGUYÊN HÀM

I. KHÁI NIỆM NGUYÊN HÀM

Hàm số $f(x)$ xác định trên K. Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của $f(x)$ trên K nếu:

$F(x)=f(x)+C,\ \forall x\in K$.

Hàm số $F(x)$ xác định trên K. Hàm số $f(x)$ được gọi là họ nguyên hàm của $F(x)$ trên K nếu:

$\int f(x)dx=F(x)+C,\ const=C\in\mathbb{R}$.

Nếu mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

Ví dụ

Hàm số $f(x)=2x$ có nguyên hàm là $F(x)=x^2+C$, vì $\left(x^2+C\right)'=2x$.

Hàm số $f(x)=\sin x$ có nguyên hàm là $F(x)=-\cos x+C$,
vì $\left(-\cos x+C\right)'=\sin x$.

II. TÍNH CHẤT NGUYÊN HÀM

Tính chất 1: $\left[\int f(x)dx\right]'=\int f'(x)dx=f(x)+C$.

Tính chất 2: $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ với $(k\neq 0)$.

Tính chất 3: $\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx+C$.

Tính chất 4: $\int f(x)dx=F(x)+C\Rightarrow\int f\left(u(x)\right)u'(x)dx=F\left(u(x)\right)+C$.

Chương II

TÍCH PHÂN

I. KHÁI NIỆM VỀ TÍCH PHÂN

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên K và $a,b\in K$. Hàm số $F(x)$ gọi là nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì $F(b)-F(a)$ được gọi là tích phân của $f(x)$ từ a đến b và có ký hiệu

$\int\limits_a^b f(x)dx$ và $\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$.

Đối với biến số lấy tích phân, ta có thể chọn bất kỳ một chữ cái khác nhau thay cho x, nghĩa là:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^b f(t)dt=\int\limits_a^b f(u)du=\ldots\ldots\ldots\ldots=F(b)-F(a).$$

➢ Ý nghĩa hình học:

Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a,b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a,x=b$ là $S=\int\limits_a^b f(x)dx$.

II. TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

$\int\limits_a^a f(x)dx=0$.

$\int\limits_b^a f(x)dx=-\int\limits_a^b f(x)dx$.

$\int\limits_a^b kf(x)dx=k\int\limits_a^b f(x)dx\ \ (k\neq 0)$.

$\int\limits_a^b\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int\limits_a^b f(x)dx\pm\int\limits_a^b g(x)dx$.

$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx$ (công thức phân đoạn).

Nếu $f(x)\geq 0,\forall x\in[a,b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx\geq 0$.



Nếu $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a,b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Nếu $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a,b]$ thì $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Cho t biến thiên trên đoạn $[a,b]$ thì $G(t) = \int_a^t f(x)dx$ là nguyên hàm của $f(t)$ và $G(a) = 0$.

III. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN THƯỜNG GẶP

Tích của đa thức hoặc lũy thừa PP khai triển.

Tích của hàm mũ PP khai triển theo công thức mũ.

Chứa căn thức PP chuyển về lũy thừa.

Tích lượng giác bậc một PP biến đổi tổng thành tích.

Bậc chẵn của $\sin x$ và $\cos x$ PP dùng công thức hạ bậc.

Hàm hữu tỷ (không chứa căn)

Nếu: bậc tử $\geq$ bậc mẫu PP chia tử cho mẫu.

Nếu: bậc tử $<$ bậc mẫu PP đồng nhất thức.

➢ Phương pháp đổi biến số:

Nếu $\int f(u)du = F(u) + C;\ C \in \mathbb{R}$ và $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục thì:

$\int [f(x)]u'(x)dx = F[u(x)] + C$.

Chương III

BẢNG NGUYÊN HÀM CÁC HÀM SỐ CƠ BẢN

$\int 0.dx = C$	
$\int dx = x + C$	
$\int x.dx = \frac{x^2}{2} + C$	$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$
$\int (ax+b)dx = \frac{ax^2}{2} + bx + C$	$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$ với $a \neq 0$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{dx}{x^n} = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + C$ với $n \neq 1$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b} + C$
$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C$ với $a \neq 0$	
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ với $0 < a \neq 1$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$ với $0 < a \neq 1$
$\int a^{kx} dx = \frac{a^{kx}}{k.\ln a} + C$ với $0 \neq k, 0 < a \neq 1$	$\int a^{bx+c} dx = \frac{a^{bx+c}}{b.\ln a} + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \sin(ax+b)dx$ $= -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$	$\int \cos(ax+b)dx$ $= \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$

$\int \tan x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$ với $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\int \cot x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$ với $x \neq k\pi$
$\int \tan(ax+b)dx$ $= -\frac{1}{a}\ln\lvert\cos(ax+b)\rvert + C$	$\int \cot(ax+b)dx$ $= \frac{1}{a}\ln\lvert\sin(ax+b)\rvert + C$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$ với $x \neq k\pi$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$ với $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\int \frac{dx}{\sin(ax+b)} = \frac{1}{a}\ln\left\lvert\tan\frac{ax+b}{2}\right\rvert + C$	$\int \frac{dx}{\cos(ax+b)}$ $= -\frac{1}{a}\ln\left\lvert\cot\frac{ax+b}{2}\right\rvert + C$
$\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$
$\int \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)dx = x - \frac{1}{x} + C$	$\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)dx = x + \frac{1}{x} + C$

Chương IV

CÁCH TẠO DẠNG TÍCH PHÂN

Ta thấy tích phân cơ bản có 8 công thức quen thuộc nhưng chúng được sếp thành các cặp anh em sinh đôi của nhau:

$I_1=\int u^\alpha du=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq-1).$	$I_5=\int \sin u du=-\cos u+C.$
$I_2=\int\frac{du}{u}=\ln\lvert u\rvert+C\ (\alpha=-1).$	$I_6=\int \cos u du=\sin u+C.$
$I_3=\int a^u du=\frac{a^u}{\ln a}+C.$	$I_7=\int\frac{du}{\sin^2 u}=-\cot u+C.$
$I_4=\int e^u du=\frac{e^u}{\ln e}+C=e^u+C.$	$I_8=\int\frac{du}{\cos^2 u}=\tan u+C.$

Ta thấy 2 cặp có sự tương đồng giống nhau, thông thường. Bài toán tích phân ta phải đưa bài toán về dạng 8 cơ bản như trên thì mới xuất ra kết quả .

Tích phân cơ bản họ nhà sin mang dấu trừ

$I_5=\int \sin u du=-\cos u+C$, $I_7=\int\frac{du}{\sin^2 u}=-\cot u+C.$

Tích phân cơ bản họ nhà cos mang dấu cộng

$I_6=\int \cos u du=\sin u+C$, $I_8=\int\frac{du}{\cos^2 u}=\tan u+C$.

Trước tiên ta phải hiểu về vi phân trước đã: $u=f(x)\Rightarrow d\big(f(x)\big)=du=f'(x)dx$ một số cách viết ngược.

Cách viết vi phân	Cách tích áp dụng công thức $I_1=\int u^\alpha du=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq-1).$
$d(\sin x)=(\sin x)' dx$ $=\cos x dx$	$\int \sin^n x\cos x dx=\int \sin^n x d(\sin x)=\frac{\sin^{n+1}x}{n+1}+C$

$d(\cos x)=(\cos x)'dx$ $=-\sin x dx$	$\int \cos^n x \sin x dx=-\int \cos^n x d(\cos x)$ $=-\frac{\cos^{n+1}x}{n+1}+C$
$d(\tan x)=(\tan x)'dx$ $=\frac{dx}{\cos^2 x}$	$\int \tan^n x\frac{dx}{\cos^2 x}=\int \tan^n x d(\tan x)$ $\frac{\tan^{n+1}x}{n+1}+C$
$d(e^x)=(e^x)'dx=e^x dx$	$\int e^{ax+b}dx=\frac{1}{a}\int e^{ax+b}d(ax+b)=\frac{e^{ax+b}}{a}+C$
$d(a^x)=(a^x)'dx=a^x \ln a dx$	$I=\int 2^{3x+2}dx=\frac{2^{3x+2}}{\ln 2}+C$
$d(\sin^2 x)=(\sin^2 x)'dx=2\sin x(\sin x)'dx=2\sin x\cos x dx=\sin 2x dx$	
$d(\cos^2 x)=(\cos^2 x)'dx=2\cos x(\cos x)'dx=-2\cos x\sin x dx=-\sin 2x dx$	
$d(ax+b)=(ax+b)dx=adx\Rightarrow dx=\frac{1}{a}d(ax+b)$ $I=\int(2x+3)^5 dx=\frac{1}{2}\int(2x+3)^5 d(2x+3)=\frac{(2x+3)^6}{12}+C$	
$d(ax^n+b)=(ax^n+b)'dx=an.x^{n-1}dx\Rightarrow x^{n-1}dx=\frac{1}{an}d(ax+b)$ $I=\int(2x^2+3)^5 x dx=\frac{1}{4}\int(2x^2+3)^5 d(2x^2+3)=\frac{(2x^2+3)^6}{6}+C$	

Tôi muốn giới thiệu với các bạn cách tạo dạng và kỹ thuật xử lý nó:

$$I_1=\int u^\alpha du=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \text{ với } \alpha\neq -1.$$

Ta cho giá trị u bằng các biểu thức khác nhau sẽ cho ta những bài toán tích phân khác nhau.

a. Cho $u=2x+1;\ \alpha=5$, ta có $du=2dx$

$$\Rightarrow I_1=\int_0^1(2x+1)^5\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1(2x+1)^5\,d(2x+1)=\frac{1}{2}.\frac{(2x+1)^6}{6}\Bigg|_0^1=\frac{182}{3}.$$

b. Cho $u=2\ln x+3;\ \alpha=4$, ta có $du=\frac{2}{x}dx\Rightarrow\frac{1}{2}du=\frac{dx}{x}$

$$\Rightarrow I_1=\int_1^e(2\ln x+3)^4.\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\int_1^e(2\ln x+3)^4\,d(2\ln x+3)$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{(2\ln x+3)^5}{5}\Bigg|_1^e=\frac{1441}{5}.$$

c. Cho $u=3\tan x-2;\ \alpha=6$,

ta có $du=d(3\tan x-2)=\frac{3}{\cos^2 x}dx=3(1+\tan^2 x)dx\Rightarrow\frac{du}{3}=\frac{dx}{\cos^2 x}$.

$$\Rightarrow I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(3\tan x-2)^6}{\cos^2 x}dx=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(3\tan x-2)^6\,d(3\tan x-2)$$

$$=\frac{1}{3}.\frac{(3\tan x-2)^7}{7}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{43}{7}.$$

d. Cho $u=2e^x-1;\ \alpha=-3$, ta có $du=2e^x dx$.

$$I_1=\int_0^1(2e^x-1)^{-3}.e^x dx=\frac{1}{2}\int_0^1(2e^x-1)^{-3}\,d(2e^x-1)$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{(2e^x-1)^{-2}}{-2}\Bigg|_0^1=\frac{e(e-1)}{(1-2e)^2}.$$

e. Cho $u=\ln(\ln x);\ \alpha=4$, ta có $du=\frac{dx}{x\ln x}$.

$$I_1=\int_2^e\ln^4(\ln x).\frac{dx}{x\ln x}=\int_2^e\ln^4(\ln x).d(\ln(\ln x))=\frac{\ln^5(\ln x)}{5}\Bigg|_2^e=-\frac{1}{5}\ln^5(\ln 2).$$

f. Cho $u=ax+b$ thì $du=adx$.

$$I_1=\int(ax+b)^\alpha\,dx=\frac{1}{a}.\int(ax+b)^\alpha\,d(ax+b)=\frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ \ (\alpha\neq-1).$$

g. Cho $u=\sin(ax+b)\Rightarrow du=a\cos(ax+b)dx$ thì $\cos(ax+b)dx=\frac{du}{a}$.

$$I_1=\int \sin^{\alpha}(ax+b)\cos(ax+b)dx=\frac{1}{a}.\int u^{\alpha}du=\frac{1}{a}.\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ \ (\alpha\neq -1).$$

h. Cho $u=\cos(ax+b)\Rightarrow du=-a\sin(ax+b).dx$ thì $\sin(ax+b)dx=\frac{du}{a}$.

$$I_1=\int \cos^{\alpha}(ax+b)\sin(ax+b)dx=-\frac{1}{a}\int u^{\alpha}du=-\frac{1}{a}.\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ \ (\alpha\neq -1).$$

i. Cho $u=\ln(ax+b)\Rightarrow du=a.\frac{dx}{ax+b}\Rightarrow \frac{du}{a}=\frac{dx}{ax+b}$

$$I_1=\int \ln^{\alpha}(ax+b).\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}.\int u^{\alpha}du=\overset{+}{-}\frac{1}{a}.\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ \ (\alpha\neq -1).$$

j. Cho $u=e^{ax+b}\Rightarrow du=a.e^{ax+b}dx\Rightarrow e^{ax+b}dx=\frac{du}{a}$.

$$I_1=\int e^{ax+b}.dx=\frac{1}{a}.\int udu=-\frac{1}{a}.\frac{u^2}{2}+C.$$

$$\boxed{I_2=\int \frac{du}{u}=\ln|u|+C.}$$

Ta cho giá trị u bằng các biểu thức khác nhau sẽ cho ta những bài toán tích phân khác nhau.

a. Cho $u=2x+1\Rightarrow du=2dx$

$$\Rightarrow I_2=\int_0^1 \frac{2dx}{2x+1}=\int_0^1 \frac{d(2x+1)}{2x+1}=\ln|2x+1|\Big|_0^1=\ln 3.$$

b. Cho $u=2\ln x+3\Rightarrow du=\frac{2}{x}dx$

$$\Rightarrow I_2=2\int_1^2 \frac{dx}{x(2\ln x+3)}=\int_1^2 \frac{d(2\ln x+3)}{2\ln x+3}=\ln|2\ln x+3|\Big|_1^2=\ln\left(\frac{2\ln 2}{3}+1\right).$$

c. Cho $u=\sin x+1\Rightarrow du=\cos x dx$

$$\Rightarrow I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+1}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin x+1)}{\sin x+1}=\ln|\sin x+1|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\ln 2$$

d. Cho $u=\dfrac{x}{2x+1}\Rightarrow du=\dfrac{dx}{(2x+1)^2}$

$$\Rightarrow I_2=\int_1^2\frac{dx}{x(2x+1)}=\int_1^2\frac{d\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)}{\dfrac{x}{2x+1}}=\ln\left|\frac{x}{2x+1}\right|_1^2=\ln\frac{6}{5}.$$

e. Cho $u=\ln x+1\Rightarrow du=\dfrac{dx}{x}$

$$\Rightarrow I_2=\int_1^2\frac{dx}{x(\ln x+1)}=\int_1^2\frac{d(\ln x+1)}{\ln x+1}=\ln|\ln x+1|_1^2=\ln(\ln 2+1).$$

$$I_3=\int a^u du=\frac{a^u}{\ln a}+C.$$

a. Cho $u=x+2\Rightarrow du=dx$

$$\Rightarrow I_3=\int_0^1 2^{x+2}dx=\int_0^1 2^{x+2}d(x+2)=\frac{2^{x+2}}{\ln 2}\Big|_0^1=\frac{4}{\ln 2}.$$

b. Cho $u=\dfrac{1}{x}\Rightarrow du=-\dfrac{dx}{x^2}$

$$\Rightarrow I_3=-\int_1^2\frac{3^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx=\int_1^2 3^{\frac{1}{x}}d\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3^{\frac{1}{x}}}{\ln 3}\Big|_1^2=\frac{\sqrt{3}-3}{\ln 3}.$$

c. Cho $u=\ln x\Rightarrow du=\dfrac{dx}{x}$

$$\Rightarrow I_3=\int_2^4\frac{2^{\ln x}}{x}dx=\int_2^4 2^{\ln x}d(\ln x)=\frac{2^{\ln x}}{\ln 2}\Big|_2^4=\frac{2^{\ln 4}}{\ln 2}-\frac{2^{\ln 2}}{\ln 2}=\frac{2^{\ln 2}}{\ln 2}.$$

d. Cho $u=2\cos x-1\Rightarrow du=-2\sin x dx$

$$\Rightarrow I_3=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}2\sin x.2^{2\cos x-1}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}2^{2\cos x-1}d(2\cos x-1)$$

$$=\frac{2^{2\cos x-1}}{\ln 2}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}=\frac{4.2^{\sqrt{2}}-1}{\ln 256}.$$

e. Cho $u=e^x\Rightarrow du=e^x dx$

$$\Rightarrow I_3=\int_0^1 4^{e^x}.e^x dx=\int_0^1 4^{e^x}d(e^x)=\frac{4^{e^x}}{\ln 4}\Big|_0^1=\frac{4^e-4}{\ln 4}.$$

$I_4=\int e^u du=\frac{e^u}{\ln e}+C=e^u+C\cdot$

a. Cho $u=x\Rightarrow du=dx$

$\Rightarrow I_4=\int\limits_0^1 e^x dx=e^x\Big|_0^1=e-1.$

b. Cho $u=x+1\Rightarrow du=dx$

$\Rightarrow I_4=\int\limits_0^3 e^{x+1}dx=\int\limits_0^3 e^{x+1}d(x+1)=e^{x+1}\Big|_0^3=e\left(e^3-1\right).$

c. Cho $u=\frac{1}{2x-3}\Rightarrow du=-\frac{2}{(2x-3)^2}dx.$

$\Rightarrow I_4=-\int\limits_2^3 e^{\frac{1}{2x-3}}\frac{2}{(2x-3)^2}dx=\int\limits_2^3 e^{\frac{1}{2x-3}}d\left(\frac{1}{2x-3}\right)=e^{\frac{1}{2x-3}}\Big|_2^3=\sqrt[3]{e}-e.$

d. Cho $u=\ln(x-1)\Rightarrow du=\frac{dx}{x-1}$

$\Rightarrow I_4=\int\limits_2^3 e^{\ln(x-1)}.\frac{dx}{x-1}=\int\limits_2^3 e^{\ln(x-1)}d\left(\ln(x-1)\right)=e^{\ln(x-1)}\Big|_2^3=1.$

e. Cho $u=\sin x-1\Rightarrow du=\cos x dx$

$\Rightarrow I_4=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin(x-1)}\cos x dx=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin(x-1)}d(\sin(x-1))=e^{\sin(x-1)}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=1-\frac{1}{\sqrt{e}}\cdot$

$I_5=\int \sin u du=-\cos u+C\cdot$

a. Cho $u=2x+1\Rightarrow du=2dx$

$\Rightarrow I_5=\int\limits_0^2 2\sin(2x+1)dx=\int\limits_0^2 \sin(2x+1)d(2x+1)$

$=-\cos(2x+1)\Big|_0^2=\cos 1-\cos 5.$

b. Cho $u=\frac{1}{3x+2}\Rightarrow du=-\frac{3}{(3x+2)^2}dx$

$\Rightarrow I_5=-3\int_0^1\frac{\sin\left(\frac{1}{3x+2}\right)}{(3x+2)^2}dx=\int_0^1\sin\left(\frac{1}{3x+2}\right)d\left(\frac{1}{3x+2}\right)$

$$= -\cos\left(\frac{1}{3x+2}\right)\Big|_0^1 = \cos\frac{1}{2} - \cos\frac{1}{5}$$

c. Cho $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$

$$\Rightarrow I_5 = -\int \sin x \sin(\cos x) dx = \int \sin(\cos x) d(\cos x) = -\cos(\cos x) + C.$$

d. Cho $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

$$\Rightarrow I_5 = \int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = \int \sin(\ln x) d(\ln x) = -\cos(\ln x) + C.$$

e. Cho $u = e^x - x \Rightarrow du = (e^x - 1)dx$

$$\Rightarrow I_5 = \int (e^x - 1)\sin(e^x - x) dx = \int \sin(e^x - x) d(e^x - x) = -\cos(e^x - x) + C.$$

$I_6 = \int \cos u du = \sin u + C.$

a. Cho $u = 3x + 2 \Rightarrow du = 3dx$

$$\Rightarrow I_6 = \int 3\cos(3x+2) dx = \int \cos(3x+2) d(3x+2) = \sin(3x+2) + C.$$

b. Cho $u = \frac{1}{2x-3} \Rightarrow du = -\frac{2}{(2x-3)^2} dx$

$$\Rightarrow I_6 = -2\int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{1}{2x-3}\right)}{(2x-3)^2} dx = \int_0^1 \cos\left(\frac{1}{2x-3}\right) d\left(\frac{1}{2x-3}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{1}{2x-3}\right)\Big|_0^1 = \sin\frac{1}{3} - \sin 1.$$

c. Cho $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx = d(\sin x)$

$$\Rightarrow I_6 = \int \cos x \cos(\sin x) dx = \int \cos(\sin x) d(\sin x) = \mathrm{Sin}(\sin x) + C.$$

d. Cho $u = \ln x + 1 \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

$$\Rightarrow I_6 = \int \frac{\cos(\ln x + 1)}{x} dx = \int \cos(\ln x + 1) d(\ln x + 1) = \mathrm{Sin}(\ln x + 1) + C.$$

e. Cho $u = xe^x \Rightarrow du = e^x(x+1)dx$

$$\Rightarrow I_6 = \int e^x(x+1)\cos(xe^x) dx = \int \cos(xe^x) d(xe^x) = \sin(xe^x) + C.$$

$I_7 = \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\cot u + C.$



a. Cho $u=x+2\Rightarrow du=dx$

$$\Rightarrow I_7=\int\frac{dx}{\sin^2(x+2)}=\int\frac{d(x+2)}{\sin^2(x+2)}=-\cot(x+2)+C.$$

b. Cho $u=\frac{2}{3x-1}\Rightarrow du=-\frac{6}{(3x-1)^2}dx$

$$\Rightarrow I_7=-6\int\frac{dx}{(3x-1)^2\sin^2(3x-1)}=\int\frac{d(3x-1)}{\sin^2(3x-1)}=-\cot(3x-1)+C.$$

c. Cho $u=\tan x\Rightarrow du=\frac{dx}{\cos^2 x}$

$$\Rightarrow I_7=\int\frac{dx}{\cos^2 x\sin^2(\tan x)}=\int\frac{d(\tan x)}{\sin^2(\tan x)}=-\cot(\tan x)+C$$

d. Cho $u=\ln x+x\Rightarrow du=\left(\frac{1}{x}+1\right)dx$

$$\Rightarrow I_7=\int\frac{x+1}{x.\sin^2(\ln x+x)}dx=\int\frac{\frac{1}{x}+1}{\sin^2(\ln x+x)}dx$$

$$=\int\frac{d(\ln x+x)}{\sin^2(\ln x+x)}=-\cot(\ln x+x)+C\cdot$$

e. Cho $u=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow du=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

$$\Rightarrow I_7=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}.\sin^2\left(\sqrt{x^2+1}\right)}dx=\int\frac{d\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{\sin^2\left(\sqrt{x^2+1}\right)}=-\cot\left(\sqrt{x^2+1}\right)+C\cdot$$

$$I_8=\int\frac{du}{\cos^2 u}=\tan u+C.$$

a. Cho $u=-3x+4\Rightarrow du=-3dx$

$$\Rightarrow I_8=-3\int\frac{dx}{\cos^2(-3x+4)}=\int\frac{d(-3x+4)}{\cos^2(-3x+4)}=\tan(-3x+4)+C.$$

b. Cho $u=\frac{2}{3x+1}\Rightarrow du=\frac{-6}{(3x+1)^2}dx$

$$\Rightarrow I_8=-6\int\frac{dx}{(3x+1)^2\cos^2\left(\frac{2}{3x+1}\right)}=\int\frac{d\left(\frac{2}{3x+1}\right)}{\cos^2\left(\frac{2}{3x+1}\right)}=\tan\left(\frac{2}{3x+1}\right)+C\cdot$$

c. Cho $u=\cot x \Rightarrow du=-\dfrac{dx}{\sin^2 x}$

$$\Rightarrow I_8=-\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2(\cot x)}=\int \frac{d(\cot x)}{\cos^2(\cot x)}=\tan(\cot x)+C.$$

d. Cho $u=\dfrac{\ln x}{x}\Rightarrow du=\dfrac{1-\ln x}{x^2}dx$

$$\Rightarrow I_8=\int \frac{1-\ln x}{x^2\cos^2\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)}dx=\int \frac{d\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)}{\cos^2\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)}=\tan\left(\frac{\ln x}{x}\right)+C.$$

e. Cho $u=\dfrac{e^x}{x+1}\Rightarrow du=\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}dx$

$$\Rightarrow I_8=\int \frac{xe^x}{(x+1)^2\cos^2\left(\dfrac{e^x}{x+1}\right)}dx=\int \frac{d\left(\dfrac{e^x}{x+1}\right)}{\cos^2\left(\dfrac{e^x}{x+1}\right)}=\tan\left(\frac{e^x}{x+1}\right)+C.$$

B PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN

Chương I

PHƯƠNG PHÁP VI PHÂN

I. ĐỊNH NGHĨA – PHƯƠNG PHÁP

Định nghĩa: Vi phân của hàm số $y=f(x)$ là biểu thức $f'(x).d(x)$. Nếu ký hiệu dy hay $d(f(x))$ là vi phân của y hay $f(x)$ thì $dy=f'(x).dx$ hay $d(f(x))=f'(x).dx$.

Trong chương trình sách giáo khoa các em đã làm quen với khái niệm vi phân của một hàm số và ứng dụng của nó trong tính gần đúng. Nhưng để dễ hiểu thì ta chỉ cần nhớ công thức tính vi phân như sau $d(f(x))=f'(x).dx$.

Sử dụng vi phân là một cách thức mở rộng bảng nguyên hàm. Có nghĩa học sinh nên hiểu nếu có một công thức trong bảng nguyên hàm là $\int dx=x+C$ thì ta sẽ có công thức tương ứng là

$$\int d(f(x))=f(x)+C.$$

Ví dụ

$\int d(\sin x)=\sin x+C;\ \int d(x^2-x)=x^2-x+C$.

Mở rộng ra thì sử dụng vi phân còn đưa các bài toán phức tạp về các bài toán quen thuộc;

(Ví dụ: $\int\frac{dx}{4x^2-4x-3}=\int\frac{dx}{(2x-1)^2-4}=\frac{1}{2}\int\frac{d(2x-1)}{(2x-1)^2-4}$).

Ví dụ

- $d(x^2-2x+2)=(x^2-2x+2)'dx=(2x-2)dx$.
- $d(\sin x+2\cos x)=(\sin x+2\cos x)'dx=(\cos x-2\sin x)dx$.

Chú ý: Từ công thức vi phân trên ta dễ dàng thu được một số kết quả sau

- $dx=\frac{1}{a}d(ax+b)=-\frac{1}{a}d(b-ax)$.

- $d(kx)=kdx\Rightarrow dx=\frac{1}{k}d(kx)$.
- $xdx=d\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{1}{2}d(x^2)=\frac{1}{2}d(x^2\pm a)=-\frac{1}{2}d(a-x^2)$.
- $\frac{dx}{x}=d(\ln x)=d(\ln x\pm a)=-d(a-\ln x)$.
- $x^2dx=d\left(\frac{x^3}{3}\right)=\frac{1}{3}d(x^3)=\frac{1}{3}d(x^3\pm a)=-\frac{1}{3}d(a-x^3)$.
- $\frac{dx}{2\sqrt{x}}=d(\sqrt{x})=d(\sqrt{x}\pm a)=-d(a-\sqrt{x})$.
- $\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\frac{d(ax+b)}{ax+b}=\frac{1}{a}d(\ln|ax+b|)\Rightarrow\frac{dx}{x}=d(\ln|x|)$.
- $\sin(ax+b)dx=\frac{1}{a}\sin(ax+b)d(ax+b)$
$=-\frac{1}{a}d(\cos(ax+b))\Rightarrow\sin 2xdx=-\frac{1}{2}d(\cos 2x)$.
- $\cos(ax+b)dx=\frac{1}{a}\cos(ax+b)d(ax+b)$
$=-\frac{1}{a}d(\sin(ax+b))\Rightarrow\cos 2xdx=\frac{1}{2}d(\sin 2x)$.
- $e^xdx=d(e^x)=d(e^x\pm a)=-d(a-e^x)$.
- $e^{ax+b}dx=\frac{1}{a}e^{ax+b}d(ax+b)=\frac{1}{a}d(e^{ax+b})\Rightarrow e^{2x}dx=\frac{1}{2}d(e^{2x})$
- $\frac{dx}{\cos^2(ax+b)}=\frac{1}{a}\frac{d(ax+b)}{\cos^2(ax+b)}=\frac{1}{a}d[\tan(ax+b)]\Rightarrow\frac{dx}{\cos^2 2x}=\frac{1}{2}d(\tan 2x)$.
- $\frac{dx}{\sin^2(ax+b)}=\frac{1}{a}\frac{d(ax+b)}{\sin^2(ax+b)}=-\frac{1}{a}d[\cot(ax+b)]\Rightarrow\frac{dx}{\sin^2 2x}=-\frac{1}{2}d(\cot 2x)$

Bài tập minh họa

Bài 1. Tìm nguyên hàm sau

a. $I_1=\int\frac{x}{1+x^2}dx$.

b. $I_2=\int x(1+x^2)^{10}dx$.

c. $I_3=\int\frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx$.



➢ **Lời giải**

a. Sử dụng các công thức vi phân $\begin{cases} xdx = d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}d\left(x^2 \pm a\right). \\ \frac{du}{u} = d\left(\ln u\right) \end{cases}$

Ta có $I_1 = \int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2\right)}{1+x^2}$

$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} \xleftarrow{\int \frac{du}{u} = \int d(\ln u) = \ln u + C} I_1 = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C.$

b. Sử dụng các công thức vi phân $\begin{cases} xdx = d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}d\left(x^2\right) = \frac{1}{2}d\left(x^2 \pm a\right). \\ u^n du = d\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right) \end{cases}$

Ta có $I_2 = \int x\left(1+x^2\right)^{10}dx = \frac{1}{2}\int \left(1+x^2\right)^{10} d\left(x^2+1\right)$

$= \frac{\left(1+x^2\right)^{11}}{22} + C.$

c. Sử dụng các công thức vi phân $\begin{cases} x^2dx = d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{1}{3}d\left(x^3 \pm a\right) \\ \frac{du}{2\sqrt{u}} = d\left(\sqrt{u}\right) \end{cases}$.

Ta có $I_3 = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(x^3+1\right)}{\sqrt{x^3+1}}$

$= \frac{2}{3}\int \frac{d\left(x^3+1\right)}{2\sqrt{x^3+1}} = \frac{2\sqrt{x^3+1}}{3} + C.$

Bài 2. Tìm nguyên hàm sau

a. $I_4 = \int x\sqrt{1-x^2}dx.$

b. $I_5 = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}}.$

c. $I_6 = \int \sqrt{5-2x}dx.$

➢ **Lời giải**

a. Sử dụng các công thức vi phân

$$\begin{cases} xdx = d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}d\left(x^2\right) = \frac{1}{2}d\left(a - x^2\right) \\ u^n du = d\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right) \end{cases}.$$

Ta có $I_4 = \int x\sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\int \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(x^2\right)$

$$= -\frac{1}{2}\int \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1-x^2\right) = \frac{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}{3} + C.$$

b. Sử dụng các công thức vi phân

$$\begin{cases} dx = \frac{1}{a}d\left(ax+b\right) = -\frac{1}{a}d\left(b-ax\right) \\ \frac{du}{2\sqrt{u}} = d\left(\sqrt{u}\right) \end{cases}.$$

Ta có: $I_5 = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(2x-1\right)}{\sqrt{2x-1}}$

$$= \int \frac{d\left(2x-1\right)}{2\sqrt{2x-1}} \xleftarrow{\frac{du}{2\sqrt{u}} = d\left(\sqrt{u}\right)} I_5 = \sqrt{2x-1} + C.$$

c. Sử dụng các công thức vi phân

$$\begin{cases} dx = \frac{1}{a}d\left(ax+b\right) = -\frac{1}{a}d\left(b-ax\right) \\ u^n du = d\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right) \end{cases}.$$

Ta có $I_6 = \int \sqrt{5-2x}dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{5-2x}d\left(2x\right)$

$$= -\frac{1}{2}\int \left(5-2x\right)^{\frac{1}{2}} d\left(5-2x\right) = -\frac{2\left(5-2x\right)^{\frac{3}{2}}}{6} + C = \frac{\sqrt{\left(5-2x\right)^3}}{3} + C.$$

Bài 3. Tìm nguyên hàm sau

a. $I_7 = \int \frac{2x^3}{\sqrt[5]{x^4-5}}dx.$

b. $I_8 = \int \frac{dx}{\left(3-2x\right)^5}.$

c. $I_9 = \int \frac{\ln^3 x}{x}dx.$

➢ **Lời giải**

a. Sử dụng các công thức vi phân

$$\begin{cases} x^3dx = d\left(\dfrac{x^4}{4}\right) = \dfrac{1}{4}d\left(x^4 \pm a\right) = -\dfrac{1}{4}d\left(a - x^4\right) \\ \dfrac{du}{u^n} = d\left(\dfrac{u^{-n+1}}{-n+1}\right) \end{cases}$$

Ta có $I_7 = \int \dfrac{2x^3}{\sqrt[5]{x^4-5}}dx = 2\int \dfrac{d\left(\dfrac{x^4}{4}\right)}{\sqrt[5]{x^4-5}}$

$$= \frac{1}{2}\int \left(x^4-5\right)^{-\frac{1}{5}} d\left(x^4-5\right) = \frac{1}{2}.\frac{5\left(x^4-5\right)^{\frac{4}{5}}}{4} + C = \frac{5\sqrt[5]{\left(x^4-5\right)^4}}{8} + C$$

b. Ta có $I_8 = \int \dfrac{dx}{\left(3-2x\right)^5} = -\dfrac{1}{2}\int \left(3-2x\right)^5 d\left(3-2x\right)$

$$= -\frac{\left(3-2x\right)^6}{12} + C.$$

c. Sử dụng công thức vi phân $\dfrac{dx}{x} = d\left(\ln|x|\right)$, ta được:

$$I_9 = \int \frac{\ln^3 x}{x}dx = \int \ln^3 x d\left(\ln x\right) = \frac{\ln^4 x}{4} + C.$$

Bài 4. Tìm nguyên hàm sau

a. $I_{10} = \int \dfrac{3}{\left(4-2x\right)^{2010}}dx.$

b. $I_{11} = \int \dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx.$

c. $I_{12} = \int \sqrt{\cos x}\sin x dx.$

➢ **Lời giải**

a. Ta có $I_{10} = \int \dfrac{3}{\left(4-2x\right)^{2010}}dx = -\dfrac{3}{2}\int \left(4-2x\right)^{-2010} d\left(4-2x\right)$

$$= -\frac{3}{2}\frac{\left(4-2x\right)^{-2009}}{-2009} + C = \frac{3}{4018\left(4-2x\right)^{2009}} + C.$$

b. Sử dụng công thức vi phân $\begin{cases}\cos u du = d(\sin u)\\ \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} = d(\sqrt{x})\end{cases}$.

Ta có $I_{11} = \int \dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx = 2\int \cos\sqrt{x}\,d(\sqrt{x}) = 2\sin\sqrt{x} + C$

c. Sử dụng công thức vi phân $\begin{cases}\cos u du = d(\sin u)\\ \sin x dx = -d(\cos x)\end{cases}$.

Ta có $I_{12} = \int \sqrt{\cos x}\sin x dx = -\int (\cos x)^{\frac{1}{2}} d(\cos x)$

$= -\dfrac{2(\cos x)^{\frac{3}{2}}}{3} = -\dfrac{2\sqrt{\cos^3 x}}{3} + C$.

Bài 5. Tìm nguyên hàm sau

a. $I_{13} = \int \sqrt[3]{\sin x}\cos x dx$.

b. $I_{14} = \int \dfrac{\sin x}{\cos^5 x}dx$.

c. $I_{15} = \int \sin^4 x \cos x dx$.

➢ **Lời giải**

a. Sử dụng công thức vi phân $\begin{cases}\sin u du = -d(\cos u)\\ \cos x dx = d(\sin x)\end{cases}$.

Ta có $I_{13} = \int \sqrt[3]{\sin x}\cos x dx = \int (\sin x)^{\frac{1}{3}} d(\sin x)$

$\xleftarrow{u^{\frac{1}{3}}du = \frac{3}{4}d\left(u^{\frac{4}{3}}\right)} I_{13} = \dfrac{3(\sin x)^{\frac{4}{3}}}{4} + C = \dfrac{3\sqrt[3]{\sin^4 x}}{4} + C$.

b. Ta có $I_{14} = \int \dfrac{\sin x}{\cos^5 x}dx = -\int \dfrac{d(\cos x)}{\cos^5 x} = -\dfrac{(\cos x)^{-4}}{-4} + C = \dfrac{1}{4\cos^4 x} + C$.

c. Sử dụng công thức vi phân $\begin{cases}\cos x dx = d(\sin x)\\ u^n du = d\left(\dfrac{u^{n+1}}{n+1}\right)\end{cases}$.

Ta có $I_{15} = \int \sin^4 x \cos x dx = \int \sin^4 x d(\sin x) \xleftarrow{u^4 du = d\left(\frac{u^5}{5}\right)} I_{15} = \dfrac{\sin^5 x}{5} + C$.



Bài 6. Tìm nguyên hàm sau

a. $I_{16}=\int \tan x dx$.

b. $I_{17}=\int \sqrt{\sin 4x}\cos 4x dx$.

c. $I_{18}=\int \frac{\sin x}{1+3\cos x}dx$.

➢ **Lời giải**

a. Sử dụng các công thức $\begin{cases}\sin x dx=-d(\cos x)\\ \int\frac{du}{u}=\ln|u|+C\end{cases}$.

Ta có $I_{16}=\int \tan x dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C$.

b. Ta có $I_{17}=\int \sqrt{\sin 4x}\cos 4x dx=\frac{1}{4}\int\sqrt{\sin 4x}\cos 4x d(4x)$

$=\frac{1}{4}\int\sqrt{\sin 4x}d(\sin 4x)=\frac{1}{4}.\frac{2(\sin 4x)^{\frac{3}{2}}}{3}+C=\frac{\sqrt{\sin^3 4x}}{6}+C$.

c. Ta có $I_{18}=\int \frac{\sin x}{1+3\cos x}dx=-\int\frac{d(\cos x)}{1+3\cos x}$

$=-\frac{1}{3}\int\frac{d(3\cos x+1)}{1+3\cos x}=-\frac{1}{3}\ln|1+3\cos x|+C$.

Bài 7. Tìm nguyên hàm sau

a. $I_{19}=\int \frac{2\cos x}{(2-5\sin x)^2}dx$.

b. $I_{20}=\int \frac{\cos x}{\sqrt{4\sin x-3}}dx$.

c. $I_{21}=\int \tan x.\ln(\cos x)dx$.

➢ **Lời giải**

a. Sử dụng công thức vi phân $\begin{cases}\cos x dx=d(\sin x)\\ \frac{du}{u^2}=d\left(-\frac{1}{u}\right)\end{cases}$.

Ta có $I_{19}=\int \frac{2\cos x}{(2-5\sin x)^2}dx=\int\frac{2d(\sin x)}{(2-5\sin x)^2}$

$$=-\frac{2}{5}\int\frac{d(2-5\sin x)}{(2-5\sin x)^2}=\frac{2}{5(2-5\sin x)}+C.$$

b. Sử dụng công thức vi phân $\begin{cases}\cos x dx=d(\sin x)\\ \dfrac{du}{2\sqrt{u}}=d(\sqrt{u})\end{cases}$.

Ta được $I_{20}=\int\frac{\cos x}{\sqrt{4\sin x-3}}dx=\int\frac{d(\sin x)}{\sqrt{4\sin x-3}}$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{d(4\sin x)}{\sqrt{4\sin x-3}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(4\sin x-3)}{2\sqrt{4\sin x-3}}=\frac{1}{2}\sqrt{4\sin x-3}+C.$$

c. Sử dụng công thức nguyên hàm cơ bản

$$\begin{cases}\int\tan x dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C\\ \int u du=\frac{u^2}{2}+C\end{cases}.$$

Ta có $I_{21}=\int\tan x.\ln(\cos x)dx=\int\ln(\cos x)\frac{\sin x}{\cos x}dx$

$$=-\int\ln(\cos x)\frac{d(\cos x)}{\cos x}=-\int\ln(\cos x)d(\ln|\cos x|)=-\frac{\ln^2(\cos x)}{2}+C$$

$$\Rightarrow I_{21}=-\frac{\ln^2(\cos x)}{2}+C.$$

Bài 8. Tìm nguyên hàm sau

a. $I_{22}=\int\frac{\tan x}{\cos^2 x}dx$.

b. $I_{23}=\int\frac{\tan^3 x}{\cos^4 x}dx$.

c. $I_{24}=\int\frac{\tan 2x+1}{\cos^2 2x}dx$.

➢ **Lời giải**

a. Sử dụng các công thức $\begin{cases}\dfrac{dx}{\cos^2 x}=d(\tan x)\\ \int\dfrac{du}{u}=\dfrac{u^2}{2}+C\end{cases}$.



Ta có $I_{22}=\int\frac{\tan x}{\cos^2 x}dx=\int\tan x.\frac{dx}{\cos^2 x}$

$=\int\tan x d(\tan x)=\frac{\tan^2 x}{2}+C$

$\Rightarrow I_{22}=\frac{\tan^2 x}{2}+C.$

b. Sử dụng các công thức $\begin{cases}\frac{dx}{\cos^2 x}=d(\tan x)\\ \int\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x\end{cases}.$

Ta có $I_{23}=\int\frac{\tan^3 x}{\cos^4 x}dx=\int\tan^3 x.\frac{1}{\cos^2 x}.\frac{dx}{\cos^2 x}$

$=\int\tan^3 x.\left(1+\tan^2 x\right)d\left(\tan x\right)=\int\left(\tan^5 x+\tan^3 x\right)d\left(\tan x\right)$

$=\frac{\tan^6 x}{6}+\frac{\tan^4 x}{4}+C\Rightarrow I_{23}=\frac{\tan^6 x}{6}+\frac{\tan^4 x}{4}+C.$

c. Sử dụng các công thức $\begin{cases}\frac{dx}{\cos^2 x}=\frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}(ax)}{\cos^2 ax}=\frac{1}{a}d\left(\tan(ax)\right)\\ \int udu=\frac{u^2}{2}+C\end{cases}.$

Ta có $I_{24}=\int\frac{\tan 2x+1}{\cos^2 2x}dx=\int\frac{\tan 2x}{\cos^2 2x}dx+\int\frac{dx}{\cos^2 2x}$

$=\frac{1}{2}\int\frac{\tan 2x}{\cos^2 2x}d(2x)+\frac{1}{2}\int\frac{d(2x)}{\cos^2 2x}=\frac{1}{2}\int\tan 2x d\left(\tan 2x\right)+\frac{1}{2}\int d\left(\tan 2x\right)$

$=\frac{\tan^2 2x}{4}+\frac{\tan 2x}{2}+C$

$\Rightarrow I_{24}=\frac{\tan^2 2x}{4}+\frac{\tan 2x}{2}+C.$

Bài tập bạn đọc tự giải

Tìm nguyên hàm

1) $I_1 = \int \frac{x}{1+x^2}dx$

2) $I_2 = \int x\left(1+x^2\right)^{10}dx$

3) $I_3 = \int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

4) $I_4 = \int \sqrt{\cos x}\sin x dx$

5) $I_5 = \int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$

6) $I_6 = \int \sqrt[3]{\sin x}\cos x dx$

7) $I_7 = \int \frac{x}{x^2+5}dx$

8) $I_8 = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}}$

9) $I_9 = \int \sqrt{5-2x}dx$

10) $I_{10} = \int \frac{\ln^3 x}{x}dx$

11) $I_{11} = \int x.e^{x^2+1}dx$

12) $I_{12} = \int \sin^4 x\cos x dx$

13) $I_{13} = \int \frac{\sin x}{\cos^5 x}dx$

14) $I_{14} = \int \cot x dx$

15) $I_{15} = \int \frac{\tan x}{\cos^2 x}dx$

16) $I_{16} = \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx$

17) $I_{17} = \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

18) $I_{18} = \int x\sqrt{x^2+1}dx$

19) $I_{19} = \int \frac{dx}{(3-2x)^5}$

20) $I_{20} = \int x^2\sqrt{x^3+5}dx$

21) $I_{21} = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx$

22) $I_{22} = \int x\sqrt{1-x^2}dx$

23) $I_{23} = \int \cos x\sqrt{1+4\sin x}dx$

24) $I_{24} = \int x\sqrt{x^2+1}dx$

25) $I_{25} = \int e^{\cos x}\sin x dx$

26) $I_{26} = \int x.e^{x^2+2}dx$

27) $I_{27} = \int \frac{\sin x}{1+3\cos x}dx$

28) $I_{28} = \int x.e^{1-x^2}dx$

29) $I_{29} = \int \left(e^{\sin x}+\cos x\right)\cos x dx$

30) $I_{30} = \int \frac{e^{2\ln x+1}}{x}dx$

Chương II

PHƯƠNG PHÁP BẢNG NGUYÊN HÀM

I. PHƯƠNG PHÁP

Để sử dụng được phương pháp này, học sinh ngoài việc sử dụng thành thạo bảng nguyên hàm còn cần nắm vững các phép tính vi phân, và biến đổi thành thạo các đẳng thức về vi phân.

Bài tập minh họa

Bài1.

Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$.

➢ **Lời giải**

Ta có $I=\int(\sin x-\cos x)^{-\frac{1}{3}}d(\sin x-\cos x)$

$=\frac{(\sin x-\cos x)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+C=\frac{3}{2\sqrt[3]{(\sin x-\cos x)^2}}+C$.

Chú ý: $(\sin x+\cos x)dx=d(\sin x-\cos x)$.

Bài 2.

Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{x^3}{x^2+1}dx$.

➢ **Lời giải**

Ta có $I=\int\left(x-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\int xdx-\int\frac{x}{x^2+1}dx$

$=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$.

Chú ý: $xdx=\frac{1}{2}d(x^2+1)$.

Bài 3.

Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{1+e^x}$.

➢ Lời giải

Ta có $I=\int\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx=\int dx-\int\frac{e^x}{1+e^x}dx$

$=x-\int\frac{d\left(1+e^x\right)}{1+e^x}=x-\ln\left(1+e^x\right)+C$.

Chú ý: Ta đã sử dụng kỹ thuật thêm bớt hạng tử, với mục đích đơn giản phân tích đa thức và dẫn tới dễ dàng sử dụng bảng nguyên hàm.

Bài 4.

Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\cos x+1}dx$.

➢ Lời giải

Ta có $I=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{\cos x+1}dx=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\left(\cos x+1\right)-\sin x}{\cos x+1}dx$

$=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx-2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+1}dx=-2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\left(\cos x+1\right)}{\cos x+1}$

$=2+2\ln\left(1+\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2-2\ln 2$.

Bài 5.

Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos^2 x\sqrt{1+\cos^2 x}}dx$.

➢ Lời giải

Ta có $I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}d\left(\tan x\right)$

$=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\tan x}{\sqrt{1+\frac{1}{\cos^2 x}}}d\left(\tan x\right)=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\tan x}{\sqrt{2+\tan^2 x}}d\left(\tan x\right)$

$=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\left(\left(2+\tan^2 x\right)^{\frac{1}{2}}\right)=\sqrt{2+\tan^2 x}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

Chương III

PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

I. PHƯƠNG PHÁP

Đổi biến số là một trong những phương pháp quan trọng nhất để tìm nguyên hàm hay tính tích phân. Phép đổi biến số dựa trên hai mệnh đề sau:

Mệnh đề 1: Cho $y=f(u)$ và $u=g(x)$.

Nếu $\int f(x)dx=F(x)+C$,

thì $\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(u)du=F(u)+C$.

Mệnh đề 2: Cho $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$, hàm $x=\varphi(t)$ khả vi, liên tục trên đoạn $[m;n]$ và có miền giá trị là $[a;b]$, $\varphi(m)=a$, $\varphi(n)=b$.

Khi đó ta có $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_m^n f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ (1).

Ý nghĩa của việc đổi biến số

Giống như trong phép đổi biến số nguyên hàm, ý nghĩa của công thức (1) là ở chỗ sau khi đổi biến $x=\varphi(t)$, thì $\int\limits_a^b f(x)dx$ trở thành $\int\limits_m^n f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ và tích phân thứ hai này có hàm dưới dấu tích phân $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ có dạng đơn giản hơn và tính nguyên hàm dễ hơn so với nguyên hàm $f(x)$ ban đầu.

II. ĐỔI BIẾN SỐ HÀM VÔ TỶ

Phương pháp: Nếu hàm $f(x)$ có chứa $\sqrt[n]{g(x)}$

thì đặt $t=\sqrt[n]{g(x)}\Leftrightarrow t^n g(x)\Rightarrow nt^{n-1}=g'(x)dx$

Khi đó $I=\int f(x)dx=\int h(t)dt$, việc tính nguyên hàm $\int h(t)dt$ đơn giản hơn so với việc tính $\int f(x)dx$.

Bài tập minh họa

Tìm nguyên hàm

a. $I_1=\int\frac{x}{\sqrt{4x+1}}dx$.

b. $I_2=\int x^3\sqrt{x^2+2}dx$.

c. $I_3=\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x}}dx$.

d. $I_4=\int\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$.

e. $I_5=\int\frac{\ln^2 x}{x\sqrt[3]{2-\ln x}}dx$.

f. $I_6=\int\frac{\ln x\sqrt{3+2\ln x}}{x}dx$.

g. $I_7=\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$.

h. $I_8=\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$.

i. $I_9=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$.

j. $I_{10}=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^4+1}}$.

k. $I_{11}=\int\frac{dx}{1+\sqrt{2-5x}}$.

$I_{12}=\int\frac{x}{1-\sqrt{2+x^2}}dx$.

l. $I_{13}=\int\frac{x^3}{\sqrt[3]{4+x^2}}dx$.

m. $I_{14}=\int\frac{\sqrt{1+4\ln^2 x\ln x}}{x}dx$.

➢ Lời giải

a. Đặt $t=\sqrt{4x+1}\Rightarrow t^2=4x+1\Rightarrow x=\frac{t^2-1}{4}\Rightarrow dx=\frac{t}{2}dt$.

$$I_1=\int\frac{x}{\sqrt{4x+1}}dx=\int\frac{\frac{t^2-1}{4}\cdot\frac{t}{2}}{t}dt=\frac{1}{8}\int\left(t^2-1\right)dt$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)+C=\frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{(4x+1)^3}}{3}-\sqrt{4x+1}\right)+C.$$

b. Đặt $t=\sqrt{x^2+2}\Rightarrow t^2=x^2+2\Rightarrow x^2=t^2-2$

$\Rightarrow xdx=tdt\Rightarrow x^3dx=x^2.xdx=\left(t^2-2\right)tdt$.

$$I_2=\int\sqrt{x^2+2}.x^3dx=\int t.\left(t^2-2\right)tdt=\int\left(t^4-2t^2\right)dt$$

$$=\frac{t^5}{5}-2\frac{t^3}{3}+C=\frac{\sqrt{\left(x^2+2\right)^5}}{5}-\frac{2\sqrt{\left(x^2+2\right)^3}}{3}+C.$$



c. Đặt $t=\sqrt{1-x}\Rightarrow t^2=1-x\Rightarrow x=1-t^2\Rightarrow\begin{cases}dx=-2tdt\\x^2=\left(1-t^2\right)^2\end{cases}$

$$I_3=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x}}=-2\int\frac{\left(1-t^2\right)^2tdt}{t}=-2\int\left(1-t^2\right)^2dt=-2\int\left(t^4-2t^2+1\right)dt$$

$$=-2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}+t\right)+C=-2\left(\frac{\sqrt{\left(1-x\right)^5}}{5}-\frac{2\sqrt{\left(1-x\right)^3}}{3}+\sqrt{\left(1-x\right)}\right)+C.$$

d. Đặt $t=\sqrt{1+\ln x}\Rightarrow t^2=1+\ln x\Rightarrow\ln x=t^2-1\Rightarrow\frac{dx}{x}=2tdt$.

$$I_4=\int\frac{\ln x}{\sqrt{1+\ln x}}.\frac{dx}{x}=\int\frac{\left(t^2-1\right).2t}{t}dt=2\int\left(t^2-1\right)dt$$

$$=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)+C=2\left(\frac{\sqrt{\left(1+\ln x\right)^3}}{3}-\sqrt{1+\ln x}\right)+C.$$

e. Đặt $t=\sqrt[3]{2-\ln x}\Rightarrow t^3=2-\ln x\Rightarrow\ln x=2-t^3\Rightarrow\frac{dx}{x}=-3t^2dt$.

$$I_5=\int\frac{\ln^2x}{\sqrt[3]{2-\ln x}}.\frac{dx}{x}=\int\frac{\left(2-t^3\right)-3t^2}{t}dt=-3\int\left(t^7-4t^4+4t\right)dt$$

$$=-3\left(\frac{t^8}{8}-\frac{4t^5}{5}+2t^2\right)+C$$

$$=-3\left(\frac{\sqrt[3]{\left(2-\ln x\right)^8}}{8}-\frac{4\sqrt[3]{\left(2-\ln x\right)^5}}{5}+2\sqrt[3]{\left(2-\ln x\right)^2}\right)+C.$$

f. Đặt $t=\sqrt{3+2\ln x}\Rightarrow t^2=3+2\ln x\Rightarrow\ln x=\frac{t^2-3}{2}\Rightarrow\frac{dx}{x}=tdt$.

$$I_6=\int\frac{\ln x\sqrt{3+2\ln x}}{x}dx=\int\ln x\sqrt{3+2\ln x}\frac{dx}{x}$$

$$=\int\left(\frac{t^2-3}{2}\right).t.tdt=\frac{1}{2}\int\left(t^4-3t^2\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{t^5}{5}-t^3\right)+C=\frac{t^5}{10}-\frac{t^3}{2}+C=\frac{\sqrt{\left(3+2\ln x\right)^5}}{10}-\frac{\sqrt{\left(3+2\ln x\right)^3}}{2}+C.$$

g. Đặt $t=\sqrt{e^x-1}\Rightarrow t^2=e^x-1\Rightarrow e^x=t^2+1\Rightarrow$ Sai hết phần sau.

$$\Rightarrow e^xdx=2tdt\Rightarrow dx=\frac{2t}{e^x}dt\Rightarrow dx=\frac{2t}{t^2-1}dt.$$

$$I_7=\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\int\frac{2t}{t\left(t^2-1\right)}dt=\int\frac{2}{t^2-1}dt$$

$$=\int\frac{2}{(t-1)(t+1)}dt=\int\frac{(t+1)-(t-1)}{(t-1)(t+1)}dt=\int\frac{dt}{t-1}-\int\frac{dt}{t+1}$$

$$=\ln|t-1|-\ln|t+1|+C=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{e^x-1}-1}{\sqrt{e^x-1}+1}\right|+C.$$

h. Đặt $t=\sqrt{e^x+1}\Rightarrow t^2=e^x+1\Rightarrow e^x=t^2-1\Rightarrow e^xdx=2tdt.$

$$I_8=\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{\left(e^x+1\right)^3}}=\int\frac{e^x.e^xdx}{\sqrt{\left(e^x+1\right)^3}}=\int\frac{\left(t^2-1\right)2tdt}{t^3}$$

$$=2\int\frac{t^2-1}{t^2}dt=2\left(\int dt-\int\frac{dt}{t^2}\right)$$

$$=2\left(t+\frac{1}{t}\right)+C=2\left(\sqrt{e^x+1}+\frac{1}{\sqrt{e^x+1}}\right)+C.$$

i. $I_9=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}=\int\frac{x}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx$

Đặt $t=\sqrt{x^2+4}\Rightarrow t^2=x^2+4\Rightarrow x^2=t^2-4\Rightarrow xdx=tdt.$

$$I_9=\int\frac{x}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx=\int\frac{t}{\left(t^2-4\right)t}dt=\int\frac{dt}{t^2-4}$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{(t+2)-(t-2)}{(t+2)(t-2)}dt=\frac{1}{4}\left(\int\frac{dt}{t-2}-\int\frac{dt}{t+2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}(\ln|t-2|-\ln|t+2|)+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+4}+2}\right|+C.$$

j. $I_{10}=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^4+1}}=\int\frac{x^3}{x^4\sqrt{x^4+1}}dx.$

Đặt $t=\sqrt{x^4+1}\Rightarrow t^2=x^4+1\Rightarrow x^4=t^2-1\Rightarrow x^3dx=\frac{t}{2}dt.$

$$I_{10}=\int\frac{x^3}{x^4\sqrt{x^4+1}}dx=\int\frac{\frac{t}{2}}{\left(t^2-1\right)t}dt=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-1}$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{(t+1)-(t-1)}{(t+1)(t-1)}dt=\frac{1}{4}\left(\int\frac{dt}{t-1}-\int\frac{dt}{t+1}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\ln(|t-1|-\ln|t+1|)+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{x^4+1}-1}{\sqrt{x^4+1}+1}\right|+C.$$

k. Đặt $t=\sqrt{2-5x}\Rightarrow t^2=2-5x\Rightarrow 2tdt=-5dx\Rightarrow dx=-\frac{2t}{5}dt.$

$$I_{11}=\int\frac{dx}{1+\sqrt{2-5x}}=-\frac{2}{5}\int\frac{t}{1+t}dt=-\frac{2}{5}\int\frac{1+t-1}{1+t}dt$$

$$=-\frac{2}{5}\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=-\frac{2}{5}\left(t-\ln|t+1|\right)+C$$

$$\Rightarrow I_{11}=-\frac{2}{5}\left(\sqrt{2-5x}-\ln\left|\sqrt{2-5x}+1\right|\right)+C.$$

l. Đặt $t=\sqrt{2+x^2}\Rightarrow t^2=2+x^2\Rightarrow 2tdt=2xdx\Rightarrow xdx=tdt.$

$$I_{12}=\int\frac{dx}{1-\sqrt{2+x^2}}=\int\frac{t}{1-t}dt=\int\frac{1-(1-t)}{1-t}dt$$

$$=\int\left(\frac{1}{1-t}-1\right)dt=-\int\frac{d(1-t)}{1-t}-\int dt=-\ln|t-1|-t+C$$

$$\Rightarrow I_{12}=-\ln\left|1-\sqrt{2+x^2}\right|-\sqrt{2+x^2}+C.$$

m. $I_{13}=\int\frac{x^3}{\sqrt[3]{4+x^2}}dx=\int\frac{x^2.x}{\sqrt[3]{4+x^2}}dx$

Đặt $t=\sqrt[3]{4+x^2}\Rightarrow t^3=4+x^2\Rightarrow x^2=t^3-4\Rightarrow xdx=\frac{3}{2}t^2dt.$

$$I_{13}=\int\frac{x^2.x}{\sqrt[3]{4+x^2}}dx=\int\frac{\left(t^3-4\right).\frac{3}{2}t^2}{t}dt=\frac{3}{2}\int\left(t^4-4t\right)dt$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{t^5}{5}-2t^2\right)+C=\frac{3\sqrt[3]{\left(4+x^2\right)^5}}{10}-3\sqrt[3]{\left(4+x^2\right)^2}.$$

n. Đặt $t=\sqrt{1+4\ln^2 x}\Rightarrow t^2=1+4\ln^2 x$

$$\Rightarrow 2tdt=4.2\ln x\frac{dx}{x}\Rightarrow\frac{\ln x}{x}dx=\frac{t}{4}dt.$$

$$I_{14}=\int\sqrt{1+4\ln^2 x}\frac{\ln x}{x}dx=\int t.\frac{t}{4}dt=\frac{1}{4}\int t^2dt$$

$$=\frac{t^3}{12}+C=\frac{\sqrt{\left(1+4\ln^2 x\right)^3}}{12}+C.$$

Bài tập bạn đọc tự giải

Tìm nguyên hàm

1) $I_1=\int\frac{dx}{1+\sqrt{1+3x}}$

2) $I_2=\int\frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}}dx$

3) $I_3=\int\frac{\sqrt{1+3\ln x}\ln x}{x}dx$

4) $I_4=\int x^3\sqrt{1-x^2}dx$

5) $I_5=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^3+1}}$

6) $I_6=\int\frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx$

7) $I_7=\int x\sqrt[3]{x+4}dx$

8) $I_8=\int\frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$

9) $I_9=\int\frac{x}{1+\sqrt{x-1}}dx$

10) $I_{10}=\int x^2\sqrt{3-2x}dx$

11) $I_{11}=\int\frac{\sqrt{4-3x}}{x+1}dx$

12) $I_{12}=\int\frac{e^{2x}}{1+\sqrt{e^x-1}}dx$

III. ĐỔI BIẾN HÀM ĐA THỨC BẬC CAO

Phương pháp: Nếu hàm $f(x)$ có chứa $(ax+b)^n$ thì đặt

$$t=ax+b\Rightarrow\begin{cases}dt=adx\\x=\dfrac{t-b}{a}\end{cases}.$$

Bài tập minh họa

Tìm nguyên hàm của các hàm số

a. $I_1=\int x(3x+1)^{19}dx$.

b. $I_2=\int x^2(2-x)^{99}dx$.

c. $I_3=\int\frac{x^2+2}{(x+1)^{2010}}dx$.

➢ Lời giải

a. Đặt $t=3x+1\Rightarrow x=\frac{t-1}{3}\Rightarrow dx=\frac{dt}{3}$.

$$I_1=\int x(3x+1)^{19}dx=\int\frac{t-1}{3}.t^{19}.\frac{dt}{3}=\frac{1}{9}\int\left(t^{20}-t^{19}\right)dt=\frac{1}{9}\left(\frac{t^{21}}{21}-\frac{t^{20}}{20}\right)+C$$

$$\Rightarrow I_1=\frac{1}{9}\left[\frac{(3x+1)^{21}}{21}-\frac{(3x+1)^{20}}{20}\right]+C.$$

b. Đặt $t=2-x\Rightarrow x=2-t\Rightarrow dx=-dt$.

$$\Rightarrow I_2=\int x^2(2-x)^{99}dx=-\int(2-t)^2.t^{99}.dt=-\int\left(4t^{99}-4t^{100}+t^{101}\right)dt$$

$$=-\left(4.\frac{t^{100}}{100}-4.\frac{t^{101}}{101}+\frac{t^{102}}{102}\right)+C=\frac{t^{100}}{25}+4.\frac{-t^{101}}{101}-\frac{t^{102}}{102}+C$$

$$=\frac{-(2-x)^{100}}{25}+\frac{4(2-x)^{101}}{101}-\frac{(2-x)^{102}}{102}+C$$

$$\Rightarrow I_2=\frac{(2-x)^{100}}{25}+\frac{4(2-x)^{101}}{101}-\frac{(2-x)^{102}}{102}+C.$$

c. Đặt $t=x+1\Rightarrow x=t-1\Rightarrow dt=dx$.

$$\Rightarrow I_3=\int\frac{(t-1)^2+2}{t^{2010}}dx=\int\frac{t^2-2t+3}{t^{2010}}dt=\int\left(\frac{1}{t^{2008}}-\frac{2}{t^{2009}}+\frac{3}{t^{2010}}\right)dt$$

$$=-\frac{1}{2007t^{2007}}+\frac{1}{1004t^{2008}}-\frac{3}{2009t^{2009}}+C$$

$$=-\frac{1}{2007(x+1)^{2007}}+\frac{1}{1004(x+1)^{2008}}-\frac{3}{2009(x+1)^{2009}}+C$$

$$\Rightarrow I_3=-\frac{1}{2007(x+1)^{2007}}+\frac{1}{1004(x+1)^{2008}}-\frac{3}{2009(x+1)^{2009}}+C.$$

Bài tập bạn đọc tự giải

Tìm nguyên hàm của các hàm số

1) $I_1=\int x(1-x)^{20}dx$

2) $I_2=\int x(3x+1)^9dx$

3) $I_3=\int(2x+1)(x+3)^4dx$

4) $I_4=\int\frac{x^2+2x+2}{(2x-1)^6}dx$

5) $I_5=\int\left(x^2+3x-5\right)(2x-3)^{10}dx$

6) $I_6=\int(x-1)^2(x+2)^{21}dx$

IV. ĐỔI BIẾN HÀM LƯỢNG GIÁC

Phương pháp: Sử dụng các phương pháp sau cho từng lại biểu thức

a. Nếu hàm $f(x)$ có chứa $\sqrt{a^2-x^2}$

thì đặt $x=a\sin t \Rightarrow \begin{cases} dx=d(a\sin t)=a\cos t dt \\ \sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\cos t \end{cases}$.

b. Nếu hàm $f(x)$ có chứa $\sqrt{a^2+x^2}$

thì đặt $x=a\tan t \Rightarrow \begin{cases} dx=d(a\tan t)=\dfrac{adt}{\cos^2 t} \\ \sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+a^2\tan^2 t}=\dfrac{|a|}{\cos t} \end{cases}$.

c. Nếu hàm $f(x)$ có chứa $\sqrt{x^2-a^2}$

thì đặt $x=\dfrac{a}{\sin t} \Rightarrow \begin{cases} dx=d\left(\dfrac{a}{\sin t}\right)=-\dfrac{a\cos t dt}{\sin^2 t} \\ \sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\dfrac{a^2}{\sin^2 t}-a^2}=\dfrac{|a|}{\cot t} \end{cases}$.

d. Nếu hàm $f(x)$ có chứa $(1+x^2)^k$

thì đặt $x=\tan t \Rightarrow \begin{cases} dx=d(\tan t)=\dfrac{dt}{\cos^2 t} \\ (1+x^2)^k=(1+\tan^2 x)^k=\dfrac{1}{\cos^{2k} t} \end{cases}$.

Chú ý: Tổng hợp các kết quả ta thu được một số kết quả quan trọng sau:

- $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2}=\dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)+C$.
- $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x+a}{x-a}\right|+C$.
- $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+C$.
- $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2\pm a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a}\right|+C$.

Bài tập minh họa

Tìm nguyên hàm của các hàm số sau

a. $I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

b. $I_2=\int\sqrt{1-x^2}dx$.

c. $I_3=\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

d. $I_4=\int x^2\sqrt{9-x^2}dx$.

e. $I_5=\int\frac{dx}{x^2+1}$.

f. $I_6=\int\sqrt{x^2+2x+5}dx$.

g. $I_7=\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx$.

g. $I_7=\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx$.

h. $I_8=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

i. $I_9=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$.

j. $I_{10}=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-2}}$.

h. $I_8=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

i. $I_9=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$.

j. $I_{10}=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-2}}$.

➢ Lời giải

a. Đặt $x=2\sin t\Rightarrow dx=2\cos tdt$ và $\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\sin^2 t}=2\cos t$.

$$I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\int\frac{2\cos t}{2\cos t}dt=\int dt=t+C$$

Từ $x=2\sin t\Rightarrow t\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\Rightarrow I_1=\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+C$.

b. Đặt $x=\sin t\Rightarrow dx=\cos tdt$ và $\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\cos t$.

$$I_2=\int\sqrt{1-x^2}dx=\int\cos t\cos tdt$$

$$=\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{2}\int dt+\frac{1}{2}\int\cos 2tdt=\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t+C.$$

Từ $x=\sin t\Rightarrow\begin{cases}\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-x^2}\\ t=\arcsin x\end{cases}$

$$\Rightarrow\sin 2t=2\sin t\cos t=2x\sqrt{1-x^2}$$

$I_2 = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$.

c. Đặt $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$ và $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$.

$I_3 = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{\sin^2 t \cos t}{\cos t} dt$

$= \int \sin^2 t dt = \int \frac{1-\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t + C$.

Từ $x = \sin t \Rightarrow \begin{cases} \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x^2} \\ t = \arcsin x \end{cases}$

$\Rightarrow \sin 2t = 2\sin t \cos t = 2x\sqrt{1-x^2}$.

$I_3 = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$.

d. Đặt $x = 3\sin t \Rightarrow dx = 3\cos t dt$ và $\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\sin^2 t} = 3\cos t$.

$I_4 = \int x^2\sqrt{9-x^2} dx = \int 9\sin^2 t.3\cos t.3\cos t dt$

$= 81\int \sin^2 \cos^2 t dt = \frac{81}{4}\int \sin^2 2t dt = \frac{81}{4}\int \frac{1-\cos 4t}{2} dt$

$= \frac{81}{4}\left[\frac{1}{2}\int dt - \frac{1}{2}\int \cos 4t dt\right] = \frac{81}{4}\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{8}\sin 4t\right) + C$

Từ $x = 3\sin t \Rightarrow \begin{cases} \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\frac{x^2}{9}} \\ t = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) \end{cases}$

$\Rightarrow \sin 2t = \frac{2x}{3}\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}$.

Mặt khác $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t = 1 - 2\left(\frac{x}{3}\right)^2 = 1 - \frac{2x^2}{9}$

$\Rightarrow \sin 4t = 2\sin 2t \cos 2t = 2.\frac{2x}{3}\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}.\left(1-\frac{2x^2}{9}\right)$.

Từ đó ta được:

$I_4 = \frac{81}{4}\left[\frac{\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)}{2} - \frac{x}{6}\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}.\left(1-\frac{2x^2}{9}\right)\right] + C$.

e. Đặt $x=\tan t \Rightarrow dx=\dfrac{dt}{\cos^2 t}=\left(1+\tan^2 t\right)dt$ và $1+x^2=1+\tan^2 t$.

$$I_1=\int\frac{1+\tan^2 t}{1+\tan^2 t}dt=\int dt=t+C.$$

Từ $x=\tan t \Rightarrow t=\arctan x \Rightarrow I_1=\arctan x+C$.

f. Ta có $I_2=\int\sqrt{x^2+2x+5}dx=\int\sqrt{(x+1)^2+4}d(x+1)$

$$\xrightarrow{t=x+1} I=\int\sqrt{t^2+4}dt$$

Đặt $x=2\tan u \Rightarrow dx=\dfrac{2}{\cos^2 t}du$

và $\sqrt{4+t^2}=\sqrt{4+4\tan^2 u}=\dfrac{2}{\cos u}$.

$$I_2=\int\frac{2}{\frac{2}{\cos u}.\cos^2 u}du=\int\frac{du}{\cos u}=\int\frac{\cos u}{\cos^2 u}du=\int\frac{d(\sin u)}{1-\sin^2 u}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(1+\sin u)+(1-\sin u)}{(1+\sin u)(1-\sin u)}d(\sin u)$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(\sin u)}{1-\sin u}+\frac{1}{2}\int\frac{d(\sin u)}{1+\sin u}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin u}{1-\sin u}\right|+C.$$

Từ $t=2\tan u \Leftrightarrow \tan u=\dfrac{t}{2}\Rightarrow\dfrac{1}{\cos^2 u}=1+\dfrac{t^2}{4}$

$$\Rightarrow \sin^2 u=1-\cos^2 u=1-\frac{4}{4+t^2}=\frac{t^2}{4+t^2}.$$

Từ đó ta được $I_2=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+\sin u}{1-\sin u}\right|+C$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{t}{\sqrt{4+t^2}}}{1-\frac{t}{\sqrt{4+t^2}}}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}}{1-\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}}\right|+C.$$

g. Đặt $x=2\tan t \Rightarrow dx=\dfrac{2}{\cos^2 t}dt=2\left(1+\tan^2 t\right)dt$

và $\sqrt{x^2+4}=\sqrt{4\tan^2 t+4}=2\sqrt{\tan^2 t+1}$.

$$I_3=\int\frac{4\tan^2 t.2\left(1+\tan^2 t\right)}{2\sqrt{1+\tan^2 t}}dt=4\int\tan^2 t\sqrt{1+\tan^2 t}dt$$

$$=4\int\frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}dt=4\int\frac{\sin^2 t\cos t}{\cos^4 t}dt=4\int\frac{\sin^2 t}{\left(1-\sin^2 t\right)^2}d\left(\sin t\right).$$

Đặt $u=\sin t\Rightarrow du=d\left(\sin t\right)$.

$$I_3=4\int\frac{u^2}{\left(1-u^2\right)^2}du=4\int\left(\frac{u}{1-u^2}\right)^2du$$

$$=4\int\left[\frac{1}{2}.\frac{(1+u)-(1-u)}{(1+u)(1-u)}\right]^2du=\int\left(\frac{1}{1-u}-\frac{1}{1+u}\right)^2du$$

$$=\int\frac{du}{(1-u)^2.}+\int\frac{du}{(1+u)^2}-\int\frac{2}{(1-u)(1+u)}du$$

$$=-\int\frac{d(1-u)}{(1-u)^2}+\int\frac{d(1+u)}{(1+u)^2}-\int\frac{(1-u)+(1+u)}{(1-u)(1+u)}du$$

$$=-\frac{1}{1-u}-\frac{1}{1+u}-\int\frac{du}{1+u}-\int\frac{du}{1-u}$$

$$=-\frac{1}{1-u}-\frac{1}{1+u}-\ln|1+u|+\ln|u-1|+C$$

$$=\frac{1}{u-1}-\frac{1}{1+u}+\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C$$

$$\Rightarrow I_3=\frac{1}{\sin t-1}-\frac{1}{\sin t+1}+\ln\left|\frac{\sin t-1}{\sin t+1}\right|+C.$$

Từ $x=2\tan t\Rightarrow\tan t=\frac{x}{2}$

$$\Rightarrow\frac{1}{\cos^2 t}=1+\tan^2 t=1+\frac{x^2}{4}\Rightarrow\cos^2 t=\frac{4}{4+x^2}$$

$$\Rightarrow\sin^2 t=\frac{x^2}{4+x^2}\Leftrightarrow\sin t=\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$$

$$\Rightarrow I_3=\frac{1}{\frac{x^2}{4+x^2}-1}-\frac{1}{\frac{x^2}{4+x^2}+1}+\ln\left|\frac{\frac{x^2}{4+x^2}-1}{\frac{x^2}{4+x^2}+1}\right|+C.$$



h. Đặt $x=\frac{1}{\sin t}\Rightarrow dx=-\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt$ và $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1}=\cot t$.

$$I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=-\int\frac{\cos t}{\sin^2 t\cot t}dt$$

$$=-\int\frac{\sin t}{\sin^2 t}dt=\int\frac{d(\cos t)}{1-\cos^2 t}=\int\frac{d(\cos t)}{(1-\cos t)(1+\cos t)}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(1-\cos t)+(1+\cos t)}{(1-\cos t)(1+\cos t)}d(\cos t)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+\cos t)}{(1-\cos t)}\right|+C$$

Từ $x=\frac{1}{\sin t}\Rightarrow\cos^2 t=1-\sin^2 t=1-\frac{1}{x^2}\Rightarrow\cos t=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

$$\Rightarrow I_1=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}}{1-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}}\right|+C.$$

i. Đặt $x=\frac{2}{\sin t}\Rightarrow dx=-\frac{2\cos t}{\sin^2 t}dt$ và $\sqrt{x^2-4}=\sqrt{\frac{4}{\sin^2 t}-4}=2\cot t$

$$\Rightarrow x^2\sqrt{x^2-4}=\frac{8\cot t}{\sin^2 t}.$$

$$I_2=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}=\int\frac{-2\cos t}{\sin^2 t.\frac{8\cot t}{\sin^2 t}}dt$$

$$=-\frac{1}{4}\int\sin t dt=\frac{1}{4}\cos t+C.$$

Từ $x=\frac{2}{\sin t}\Rightarrow\cos^2 t=1-\sin^2 t=1-\frac{4}{x^2}\Rightarrow\cos t=\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}$

$$\Rightarrow I_2=\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}+C.$$

j. Đặt $x=\frac{\sqrt{3}}{\sin u}\Rightarrow dx=\frac{-\sqrt{3}\cos u}{\sin^2 u}du$

và $\sqrt{t^2-3}=\sqrt{\frac{3}{\sin^2 u}-3}=\sqrt{3}\cot u$.

$$I_3=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-3}}=-\int\frac{\sqrt{3}\cos u}{\sin^2 u\sqrt{3}\cot u}du=-\int\frac{\sin u}{\sin^2 u}du$$

$$= \int \frac{d(\cos u)}{1-\cos^2 u} = \int \frac{d(\cos u)}{(1-\cos u)(1+\cos u)}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(1-\cos u)+(1+\cos u)}{(1-\cos u)(1+\cos u)} d(\cos u) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+\cos u)}{(1-\cos u)}\right| + C.$$

Từ $x = \frac{\sqrt{3}}{\sin u} \Rightarrow \cos^2 u = 1 - \frac{3}{t^2} \Rightarrow \cos u = \frac{\sqrt{t^2-3}}{t}$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{\sqrt{t^2-3}}{t}}{1-\frac{\sqrt{t^2-3}}{t}}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{\sqrt{x^2-2x-2}}{x-1}}{1-\frac{\sqrt{x^2-2x-2}}{x-1}}\right| + C.$$

Bài tập bạn đọc tự giải

Tìm nguyên hàm

1) $I_1 = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+4}}$

2) $I_2 = \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$

3) $I_3 = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$

4) $I_4 = \int \frac{1}{\sqrt{3x^2-2x}} dx$

5) $I_5 = \int \sqrt{2x^2+1} dx$

6) $I_6 = \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-5}}$

V. HÀM DƯỚI DẤU TÍCH PHÂN CHỨA CÁC BIỂU THỨC BẬC NHẤT CỦA SINX; COSX

Phương pháp: Với những tích phân thuộc loại này, ta có thể sử dụng phép đổi biến $t = \tan\frac{x}{2}$.

Khi đó $dt = \frac{1}{2}.\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt$.

Áp dụng các công thức liên hệ $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ta quy tích phân cần tính về tích phân có hàm dưới dấu tích phân là các biểu thức hữu tỷ của t, như vậy bài toán trở nên dễ dàng hơn.

Bài tập minh họa

Bài 1.

Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{\sin x}$.

➢ Lời giải

Đặt $t=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow dx=\frac{2}{1+t^2}dt$.

$$I=\int\frac{2}{\left(1+t^2\right).\frac{2t}{1+t^2}}dt=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

Bài 2.

Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

➢ Lời giải

Đặt $t=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow dx=\frac{2}{1+t^2}dt$. Khi $\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1\\ x=0\Rightarrow t=0\end{cases}$.

$$I=\int\limits_0^1\frac{2}{\left(1+t^2\right)\left(1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}dt=\int\limits_0^1\frac{dt}{t+1}=\ln(t+1)\Big|_0^1=\ln 2.$$

VI. ĐỔI BIẾN DỰA VÀO CẬN

I. DẠNG 1. PHÉP ĐỔI BIẾN $x=-t$

Phương pháp: Phép đổi biến $x=-t$ rất thích hợp trong hai dạng bài toán:

› Khi biểu thức dưới dấu tích phân là hàm chẵn, hoặc lẻ và tích phân cần tính có dạng $\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx$. Ta sử dụng kết quả

• Nếu $f(x)$ là hàm số lẻ và khả tích trên $[-a;a]$ thì $\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx=0$.

Chứng minh: $I=\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx=\int\limits_{-a}^{0}f(x)dx+\int\limits_{0}^{a}f(x)dx$

$=\int\limits_{a}^{0}f(-t)d(-t)+\int\limits_{0}^{a}f(x)dx$

$$= \int_0^a f(-t)dt + \int_0^a f(x)dx = -\int_0^a f(t)dt + \int_0^a f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 0.$$

• Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn và khả tích trên $[-a; a]$ thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

Chứng minh: $I = \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$

$$= \int_a^0 f(-t)d(-t) + \int_0^a f(x)dx$$

$$= -\int_a^0 f(t)dt + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(t)dt + \int_0^a f(x)dx$$

$$= \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

▸ Khi tích phân có dạng $I = \int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{m^x+1}dx = \int_0^a f(x)dx$, trong đó $f(x)$ là hàm số chẵn trên đoạn $[-a; a]$.

Chứng minh: Trước hết, ta có $f(x)$ là hàm số chẵn nên $f(-x) = f(x)$.

$$I = \int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{m^x+1}dx = \int_{-a}^{0} \frac{f(x)}{m^x+1}dx + \int_0^a \frac{f(x)}{m^x+1}dx \quad (1).$$

Đặt $x = -t \Rightarrow dx = d(-t)$. Khi $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = -a \Rightarrow t = a \end{cases}$.

$$\Rightarrow \int_{-a}^{0} \frac{f(x)}{m^x+1}dx = \int_a^0 \frac{f(-t)}{m^{-t}+1}d(-t) = \int_0^a \frac{f(-t)}{\frac{1}{m^t}+1}dt = \int_0^a \frac{m^t.f(-t)}{m^t+1}dt$$

$$= \int_0^a \frac{m^x f(-x)}{m^x+1}dx = \int_0^a \frac{m^x f(x)}{m^x+1}dx \quad (2).$$

Lấy (1) + (2), ta được

$$I = \int_0^a \frac{m^x f(x)}{m^x+1}dx + \int_0^a \frac{f(x)}{m^x+1}dx = \int_0^a \frac{(m^x+1)f(x)}{m^x+1}dx = \int_0^a f(x)dx.$$

Bài tập minh họa

Ví dụ 1

Tính tích phân $I = \int_{-1}^{1} \frac{\tan x}{x^2+1}dx$.



➢ Lời giải

Ta có $\frac{\tan(-x)}{(-x)^2+1}=-\frac{\tan x}{x^2+1}, \forall x\in[-1;1]\Rightarrow\frac{\tan x}{x^2+1}$ là hàm lẻ.

Suy ra $I=\int_{-1}^{1}\frac{\tan x}{x^2+1}dx=0$.

➢ *Bài tập tự luyện:*

Tính tích phân $I=\int_{-1}^{1}\ln^{2007}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$.

Đáp số: $I=0$.

Ví dụ 2

Tính tích phân $I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^7 x dx$.

➢ Lời giải

Ta có $\cos^7(-x)=\cos^7 x\Rightarrow\cos^7 x$ là hàm chẵn.

Suy ra $A=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^7 x dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\cos^7 x dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos^2 x\right)^3\cos x dx$

$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\left(1-\sin^2 x\right)^3 d(\sin x)=2\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\left(1-3\sin^2 x+3\sin^4 x-\sin^6 x\right)d(\sin x)$

$=2\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(1-3t^2+3t^4-t^6\right)dt=2\left(t-t^3+\frac{3}{5}t^5-\frac{1}{7}t^7\right)\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{8}+\frac{27\sqrt{3}}{160}-\frac{27\sqrt{3}}{896}\right)=\frac{1181\sqrt{3}}{2240}$.

➢ *Bài tập tự luyện:*

Tính tích phân $I=\int_{-1}^{1}\left(x^2+\cos 6x+\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}\right)\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)dx$.

Đáp số: $I=0$.

Ví dụ 3.1

Tính tích phân $I=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\left(2^x+1\right)\left(x^2+1\right)}$.

➢ Lời giải

Do $\frac{1}{x^2+1}$ là hàm chẵn, liên tục trên $[-1;1]$ nên ta có:

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(2^x+1)(x^2+1)}=\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2+1}=\frac{\pi}{4}.$$

Ví dụ 3.2

Tính tích phân $I=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{(e^x+1)\sqrt{1-x^2}}$.

➢ Lời giải

Do $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ là hàm chẵn, liên tục trên $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ nên ta có:

$$I=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{(e^x+1)\sqrt{1-x^2}}=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{6}.$$

Bài tập bạn đọc tự giải

a. Tính tích phân $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2|\sin x|}{2006^x+1}dx$. *Đáp số:* $I=\pi-2$.

b. Tính tích phân $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\sin 2x\sin 5x}{e^x+1}dx$. *Đáp số:* $I=0$.

c. Tính tích phân $I=\int_{-1}^{1}\frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\left(3^x+1\right)\sqrt{1+x^2}}dx$.

Đáp số: $I=\sqrt{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-1$.

d. Tính tích phân $I=\int_{-1}^{1}\frac{x^2\ln\left(x^2+1\right)}{2^x+1}dx$. *Đáp số:* $I=\frac{1}{3}\ln 2-\frac{\pi}{6}+\frac{4}{3}$.

e. Tính tích phân $I=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{e^x+1}dx$.



Đáp số: $I=\frac{5}{24}-\frac{15}{8}\ln 3+2\ln 2$.

f. Tính tích phân $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2\cos x}{e^x+1}dx$. *Đáp số:* $I=\frac{\pi^2}{4}-\pi$.

2. DẠNG 2. PHÉP ĐỔI BIẾN $x=a+b-t$

Phương pháp: Nếu $f(x)$ lên tục trên $[a;b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^b f(a+b-x)dx$.

Chứng minh: Đặt $t=a+b-x$ với $x\in[a;b]$, suy ra $dx=-dt$.

Khi $\begin{cases}x=b\Rightarrow t=b\\x=a\Rightarrow t=b\end{cases}$.

$$I=\int\limits_a^b f(a+b-x)dx=-\int\limits_b^a f(t)dt=\int\limits_a^b f(t)dt=\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Ví dụ 1

Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$.

➢ **Lời giải:** Đặt $f(x)=\ln(1+\tan x)$

$$\Rightarrow f\left(0+\frac{\pi}{4}-x\right)=\ln\left[1+\tan\left(0+\frac{\pi}{4}-x\right)\right]=\ln\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]$$

$$=\ln\left(1+\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}.\tan x}\right)=\ln\left(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{1}{1+\tan x}\right)=\ln 2-\ln(1+\tan x)\cdot\Rightarrow I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}f\left(0+\frac{\pi}{4}-x\right)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\ln 2-\ln(1+\tan x)\right]dx$$

$$=x\ln 2\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)=\frac{\pi}{4}\ln 2-I\Rightarrow 2I=\frac{\pi}{4}\ln 2\Rightarrow I=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

➢ *Bài tập tự luyện:*

Tính tích phân $I=\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{1+x^2}dx$. *Đáp số:* $I=\frac{\pi}{8}\ln 2$.

3. DẠNG 3. HÀM SỐ DƯỚI DẤU TÍCH PHÂN CÓ TRỤC ĐỐI XỨNG THẲNG ĐỨNG

Bài toán: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và thỏa mãn điều kiện $f(a+b-x)=f(x), \forall x\in[a;b]$.

Khi đó $I=\int_a^b xf(x)dx=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$.

Chứng minh: Đặt $t=a+b-x\Rightarrow dx=-dt$. Khi $\begin{cases}x=a\Rightarrow t=b\\x=b\Rightarrow t=a\end{cases}$.

$$I=\int_a^b xf(x)dx=\int_a^b xf(a+b-x)dx=-\int_b^a (a+b-t)f(t)dt$$

$$=\int_a^b (a+b-t)f(t)dt=(a+b)\int_a^b f(t)dt-\int_a^b tf(t)dt$$

$$=(a+b)\int_a^b f(x)dx-\int_a^b xf(x)dx$$

$$\Rightarrow 2\int_a^b (a+b-t)f(t)dt=(a+b)\int_a^b f(x)dx\Rightarrow\int_a^b xf(x)dx=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

Ví dụ 1

Tính tích phân $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{9+4\cos^2 x}dx$.

➢ Lời giải: Đặt $f(x)=\frac{\sin x}{9+4\cos^2 x}; x\in[0;\pi]$.

Ta có $f(0+\pi-x)=f(\pi-x)=\frac{\sin(\pi-x)}{9+4\cos^2(\pi-x)}=\frac{\sin x}{9+4\cos^2 x}=f(x)$.

Suy ra $I=\int_0^{\pi}xf(x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{9+4\cos^2 x}dx$

$$=-\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{d(\cos x)}{9+4\cos^2 x}=-\frac{\pi}{8}\int_0^{\pi}\frac{d(\cos x)}{\cos^2 x+\left(\frac{3}{2}\right)^2}.$$

Đặt $\cos x=\frac{3}{2}\tan t\Rightarrow d(\cos x)=\frac{3}{2}(1+\tan^2 t)dt$.



Khi $\begin{cases} x=\pi \Rightarrow t=\arctan\left(-\frac{2}{3}\right) \\ x=0 \Rightarrow t=\arctan\left(\frac{2}{3}\right) \end{cases}$.

$$I=-\frac{\pi}{8}.\frac{3}{2}\int\limits_{\arctan\left(\frac{2}{3}\right)}^{\arctan\left(-\frac{2}{3}\right)}\frac{1+\tan^2 t}{\frac{9}{4}\left(1+\tan^2 t\right)}dt=-\frac{\pi}{12}\int\limits_{\arctan\left(\frac{2}{3}\right)}^{\arctan\left(-\frac{2}{3}\right)}dt$$

$$=-\frac{\pi}{12}t\Big|_{\arctan\left(\frac{2}{3}\right)}^{\arctan\left(-\frac{2}{3}\right)}=-\frac{\pi}{12}\left[\arctan\left(-\frac{2}{3}\right)-\arctan\left(\frac{2}{3}\right)\right].$$

➢ *Bài tập tự luyện:*

Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\pi}x\sin^3 x dx$. *Đáp số:* $I=\frac{2\pi}{3}$.

4. DẠNG 4. TÍCH PHÂN CỦA CÁC HÀM SỐ ĐỐI XỨNG NHAU

➢ Bài toán:

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thì $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx$.

Chứng minh: đặt $t=\frac{\pi}{2}-x\Rightarrow dx=-dt$. Khi $\begin{cases} x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0 \\ x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \end{cases}$.

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos t)dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx.$$

Ví dụ 1

Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{\cos^2(\sin x)}-\tan^2(\cos x)\right]dx$.

➢ Lời giải:

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos^2(\sin x)}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^2(\cos x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos^2(\sin x)}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^2(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{\cos^2(\sin x)}-\tan^2(\sin x)\right]dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2(\sin x)}{\cos^2(\sin x)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2(\sin x)}{\cos^2(\sin x)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}.$$

➢ *Bài tập tự luyện:*

a. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x\cos x}{\sin^{n-1}x\cos^{n-1}x}dx$. *Đáp số:* $I=\frac{1}{4}$.

b. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\tan x)dx$. *Đáp số:* $I=0$.

c. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx$. *Đáp số:* $I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

d. Tính tích phân $I=\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}dx$. *Đáp số:* $I=1$.

5. DẠNG 5. BIẾN ĐỔI TÁCH ĐÔI HÀM SỐ VÀ CO CẬN TÍCH PHÂN

Bài toán:

Nếu $f(x)$ liên tục trên $[0;2a]$ thì $I=\int_0^{2a}f(x)dx=\int_a^{2a}\left[f(x)+f(2a-x)\right]dx$.

Chứng minh: Đặt $t=2a-x\Rightarrow dx=-dt$. Khi $\begin{cases}x=2a\Rightarrow t=0\\x=0\Rightarrow t=2a\end{cases}$.

$$I=\int_0^{2a}f(x)dx=\int_0^{a}f(x)dx+\int_a^{2a}f(x)dx=\int_0^{a}f(x)dx-\int_a^{0}f(2a-t)dt$$

$$=\int_0^{a}f(x)dx+\int_0^{a}f(2a-x)dx=\int_0^{a}\left[f(x)+f(2a-x)\right]dx.$$

Ví dụ 1

Tính tích phân $I=\int_0^{3\pi}\sin x\sin 2x\sin 3xdx$.

➢ Lời giải: $I=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\left[\sin x\sin 2x\sin 3x+\sin(3\pi-x)\sin(6\pi-2x)\sin(9\pi-3x)\right]dx$

$$= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \left(\sin x \sin 2x \sin 3x - \sin x \sin 2x \sin 3x\right) dx = 0.$$

➢ *Bài tập tự luyện:*

a. Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} \sqrt[3]{\frac{\sin 5x}{\sin 5x}} dx$.

Đáp số: $I = 0$.

b. Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} \sqrt[3]{\sin 3x}.\sqrt[5]{\sin 5x}.\sqrt[7]{\sin 7x}\left(\cos x\right)^9 dx$.

Đáp số: $I = 0$.

Chương IV

PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

I. KỸ THUẬT CHỌN HỆ SỐ C

Phương pháp tích phân từng phần được sử dụng rộng rãi trong chương trình phổ thông và tỏ ra rất hiệu quả khi giải một số tích phân mà hàm số dưới dấu tích phân là tích của hai hàm khác nhau

$$\int_a^b udv = u.v\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Trong đó $u = f(x)$ và $dv = g(x)$.

Suy ra $v = \int g(x)dx$ nên $v(x)$ xác định không phải là duy nhất, các hàm số $v(x)$ có thể sai khác nhau một hằng số c $(c \in \mathbb{R})$, $v(x) = v_0(x) + c$. Căn cứ vào mỗi bài toán cụ thể mà ta có cách xác định $v(x)$ phù hợp cho bài toán tích phân $\int vdu$ là đơn giản, dễ dàng tính được. Đây chính là kỹ thuật chọn $v(x)$ thông qua hệ số điều chỉnh c.

Ví dụ 1

Tính tích phân $I = \int_1^3 \frac{3+\ln x}{(x+1)^2}dx$.

Nhận xét: Học sinh thường làm

Đặt $\begin{cases} u = 3+\ln x \\ dv = \dfrac{dx}{(x+1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = -\dfrac{1}{x+1} \end{cases}$.

$$I = -\frac{3+\ln x}{x+1}\Big|_1^3 + \int_1^3 \frac{dx}{x(x+1)} = -\frac{3+\ln x}{x+1}\Big|_1^3 + \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \left(-\frac{3+\ln x}{x+1} + \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right)\Big|_1^3 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\ln 3 - \ln 2.$$

Lời bình: Ta thấy học sinh thường chọn hệ số $c=0$ trong tính tích phân từng phần, và nó trở nên phức tạp hơn ở bước tính tiếp theo là $\int\frac{dx}{x(x+1)}$ (ta phải sử dụng đồng nhất thức để tách ra).

➢ Lời giải: Chọn hệ số $c=1$.

$$\text{Đặt}\begin{cases}u=3+\ln x\\ dv=\dfrac{dx}{(x+1)^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{dx}{x}\\ \int v=\dfrac{dx}{(x+1)^2}=-\dfrac{1}{x+1}+1=\dfrac{x}{x+1}\end{cases}.$$

$$I=-\frac{x(3+\ln x)}{x+1}\Big|_1^3+\int_1^3\frac{dx}{x+1}=\left(-\frac{x(3+\ln x)}{x+1}+\ln|x+1|\right)\Big|_1^3=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\ln 3-\ln 2.$$

Lời bình: Ta thấy, khi chọn hệ số $c\neq 0$ đã biến sự phức tạp trở nên dễ dàng hơn nhiều là $\int\frac{dx}{x+1}$.

Ví dụ 3

Tính tích phân $I=\int_0^1\frac{3x+4}{(2x+1)^2(5x+3)}dx$.

➢ Lời giải: Chọn hệ số $c=-\frac{5}{2}$.

$$\text{Đặt}\begin{cases}u=\dfrac{3x+4}{5x+3}\\ dv=\dfrac{dx}{(2x+1)^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-\dfrac{11}{(5x+3)^2}dx\\ v=\displaystyle\int\frac{dx}{(2x+1)^2}=-\frac{1}{2(2x+1)}-\frac{5}{2}=-\frac{5x+3}{2x+1}\end{cases}.$$

$$I=-\frac{3x+4}{2x+1}\Big|_0^1-11\int_0^1\frac{dx}{(2x+1)(5x+3)}=\frac{5}{3}+11\int_0^1\left(\frac{5}{5x+3}-\frac{2}{2x+1}\right)dx$$

$$=\frac{5}{3}+\ln\left|\frac{5x+3}{2x+1}\right|\Big|_0^1=\frac{5}{3}+11\ln\frac{8}{9}.$$

Ví dụ 4

Tính tích phân $I=\int\frac{\ln(2x^2+4x+1)}{(x+1)^3}dx$.

➢ Lời giải:Chọn hệ số $c=1$

$$\text{Đặt}\begin{cases}u=\ln\left(2x^2+4x+1\right)\\ dv=\dfrac{dx}{\left(x+1\right)^3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{4x+4}{2x^2+4x+1}dx\\ v=-\dfrac{1}{2\left(x+1\right)^2}+1=\dfrac{2x^2+4x+1}{2\left(x+1\right)^2}\end{cases}.$$

$$I=\frac{\left(2x^2+4x+1\right)\ln\left(2x^2+4x+1\right)}{\left(2x+1\right)^2}\Bigg|_0^1-2\int_0^1\frac{dx}{x+1}$$

$$=\frac{7}{8}\ln 7-2\int_0^1\frac{dx}{x+1}=\frac{7}{8}\ln 7-2\ln\left|x+1\right|\Big|_0^1=\frac{7}{8}\ln 7-2\ln 2.$$

Ví dụ 5

Tính tích phân $I=\int_0^1 x\ln\left(1+x^2\right)dx$.

➢ Lời giải:Chọn hệ số $c=\dfrac{1}{2}$.

$$\text{Đặt}\begin{cases}u=\ln\left(1+x^2\right)\\ dv=xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{2x}{1+x^2}dx\\ v=\int xdx=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{x^2+1}{2}\end{cases}.$$

$$I=\frac{\left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)}{2}\Bigg|_0^1-\int_0^1 xdx=\frac{\left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)-x^2}{2}\Bigg|_0^1=\ln 2-\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 6

Tính tích phân $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\left(\sin x+\cos x\right)}{\sin^2 x}dx$.

➢ Lời giải:

Nhận xét: Học sinh thường làm

$$\text{Đặt}\begin{cases}u=\ln\left(\sin x+\cos x\right)\\ dv=\dfrac{dx}{\sin^2 x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx\\ v=\int\dfrac{dx}{\sin^2 x}=-\cot x\end{cases}.$$

$$I=-\cot x\ln\left(\sin x+\cos x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cot x\left(\cos x-\sin x\right)}{\sin x+\cos x}dx$$

$$-\sqrt{2}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cot x(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}dx=-\sqrt{2}+\underbrace{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x(\cos x-\sin x)}{\sin x(\sin x+\cos x)}dx}_{H}.$$

Lời bình: Ta thấy, để hoàn thành bài tích phân này thì ta còn phải giải một bài tích phân H khá phức tạp nữa, vậy để trở nên dễ dàng thì ta lựa chọn hệ số c phù hợp để nhằm đơn giản hóa tích phân H.

➢ Lời giải: Chọn hệ số $c=-1$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u=\ln(\sin x+\cos x) \\ dv=\dfrac{dx}{\sin^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx \\ v=-\cot x-1=-\dfrac{\cos x+\sin x}{\sin x} \end{cases}.$$

$$I=-(\cot x+1)\ln(\sin x+\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{\sin x}dx$$

$$=2\ln\sqrt{2}+\ln|\sin x|-x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=3\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}.$$

Bài tập bạn đọc tự giải

1. $I=\int_{2}^{3}\ln(x^2-x)dx$.
2. $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\sin x+\cos x)}{\cos^2 x}dx$.
3. $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(2\sin x+\cos x)}{\cos^2 x}dx$.
4. $I=\int_{1}^{e}\frac{\ln(x^3+3x^2+3x-2)}{(x+1)^4}dx$.
5. $I=\int_{-1}^{0}\frac{3x+1}{4x^3+28x^2+65x+50}dx$.

II. KỸ THUẬT TÍNH NHANH

Nhằm giúp tính nhanh các tích phân có dạng tích phân từng phần. Giả sử u và v là hai hàm số khả vi của x.

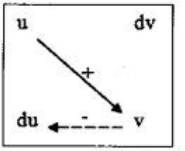
Khi đó, như ta đã biết, vi phân của tích uv được tính theo công thức: $d(uv)=udv+vdu$ suy ra $udv=uv-vdu$ hay $\int udv=uv-\int vdu$.

Công thức này gọi là công thức lấy tích phân từng phần.

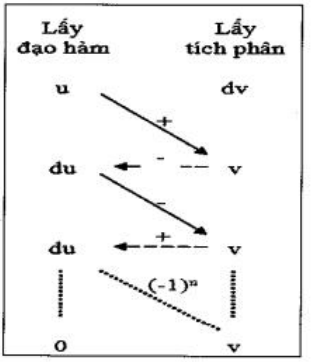
Công thức này thường được dùng để lấy tích phân các biểu thức có thể biểu diễn dưới dạng tích của hai nhân tử u và dv, sao cho việc hàm số v theo vi phân dv của nó và việc tính tích phân là những bài toán đơn giản hơn so với việc tính trực tiếp tích phân. Ý nghĩa tách biểu thức dưới dấu tích phân thành các thừa số u và dv thường xảy ra trong quá trình giải các bài toán có dạng sau

$$\int P_n(x)\sin axdx;\ \int P_n(x)dx\cos ax;\ \int P_n(x).e^{ax}dx;\ \int P_n(x)\ln xdx$$

Trong đó là đa thức bậc n. Với các dạng trên, thì thông thường vai trò của u luôn là đa thức P, và là phần còn lại. Như vậy, ta có sơ đồ sau:



Khi được tích phân mới, ta lại được một tích phân lại là một trong các dạng, và phần đa thức mới lại đóng vai trò là u, còn phần còn lại tiếp tục đóng vai trò là v... Cứ thế cho đến khi bậc của đa thức là bậc 0 thì sẽ có kết quả. Như vậy, các đa thức luôn đóng vai trò u (nghĩa là lấy đạo hàm), còn phần cò lại luôn là dv (lấy tích phân), nên ta sẽ xây dựng thật toán gồm 2 cột: "1 cột chuyên lấy đạo hàm của đa thức cho đến khi giá trị bằng 0; 1 cột luôn lấy tích phân tương ứng với cột kia. Sau đó, ghép các giá trị uv lại ta sẽ có kết quả. Hay ta có sơ đồ sau:



Ví dụ 1

Tìm nguyên hàm $I=\int\left(x^3+5x^2-3x+2\right)\cos 2xdx$.

Lấy đạo hàm	Lấy tích phân
x^3+5x^2-3x+2	$\cos 2x$



	+
$3x^2+10x-3$	$\frac{1}{2}\sin 2x$
	−
$6x+10$	$-\frac{1}{4}\cos 2x$
	+
6	$-\frac{1}{8}\sin 2x$
	−
0	$\frac{1}{16}\cos 2x$

$I=\int\left(x^3+5x^2-3x+2\right)\cos 2x dx$

$=\frac{1}{2}\left(x^3+5x^2-3x+2\right)\sin 2x+\frac{1}{4}\left(3x^2+10x-3\right)\cos 2x$

$-\frac{1}{8}(6x+10)\sin 2x-\frac{3}{8}\cos 2x+C$

Ví dụ 2

Tìm nguyên hàm $I=\int\left(3x^3+2x^2-4x+6\right)e^{-x}dx$.

Lấy đạo hàm $3x^3+2x^2-4x+6$	Lấy tích phân e^{-x}
	+
$9x^2+4x-4$	$-e^{-x}$
	−
$18x+4$	e^{-x}
	+
18	$-e^{-x}$
	−
0	e^{-x}

$I=\int\left(3x^3+2x^2-4x+6\right)e^{-x}dx$

$=-\left(3x^3+2x^2-4x+6\right)e^{-x}-\left(9x^2+4x-4\right)e^{-x}$

$-(18x+4)e^{-x}-18e^{-x}+C$.

Bài tập bạn đọc tự giải

Tìm nguyên hàm

a. $I=\int\left(x^2+7x-5\right)\cos 2xdx$.

Đáp số: $I=\frac{1}{2}\left(x^2+7x-5\right)\sin 2x+\frac{1}{4}\left(2x+7\right)\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x$.

b. $I=\int\left(x^3+4x^2-5x+6\right)e^{-x}dx$.

Đáp số: $I=-\left(x^3+7x^2+9x+15\right)e^{-x}+C$.

c. $I=\int\left(x^2+4x+1\right)e^{2x}dx$.

Đáp số: $I=\frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2+3x\right)+\frac{3}{4}e^{2x}+C$.

d. $I=\int e^x\left(x^3+4x^2+1\right)dx$.

Đáp số: $I=e^x\left(x^3+x^2-2x+1\right)+C$.

e. $I=\int e^{2x}\left(x^5-4x^3+x+1\right)dx$.

Đáp số: $I=\frac{1}{2}e^x\left(x^5-\frac{5}{2}x^4+x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2}x-\frac{1}{4}\right)+C$.

f. $I=\int\left(\frac{x^2\ln x+2x^2+2}{x}\right)\ln^3 xdx$.

Đáp số: $I=\frac{\left(x^2+1\right)\ln^4 x}{2}+C$.

III. PHÂN DẠNG - PHƯƠNG PHÁP

1. Dạng 1: $I=\int_\alpha^\beta P_n(x)Q(x)dx$ *với* $P_n(x)$ *là một đa thức bậc* n

$Q(x)=\frac{1}{\cos^2 x};\frac{1}{\sin^2 x};\sin x;\cos x;e^x;a^x$

hoặc các hàm này cộng thêm một hằng số thì cách đặt vẫn là:

Đặt $\begin{cases}u=P_n(x)\\dv=Q(x)dx\end{cases}$ (nếu $P_n(x)$ có bậc n thì ta phải tính tích phân từng phần n lần).



Chú ý:

• Nếu $Q(x)=\ln x;\ln^n x;\log_m x;\ln\left[f(x)\right]$

Đặt $\begin{cases}u=Q(x)\\dv=P_n(x)dx\end{cases}$ (nếu $Q(x)=\ln^n x$ thì ta phải tính n lần tích phân).

• Nếu $Q(x)=\sin(\ln x);\cos(\ln x);\sin(\log_a x);\cos(\log_a x)$

Đặt $\begin{cases}u=Q(x)\\dv=P_n(x)dx\end{cases}$ (thường thì người ta chọn $P_n(x)=1;Q(x)=x^k$ để đơn giản hơn).

Chú ý: Để dễ dàng nhớ và nhận biết cách đặt theo phép ưu tiên các hàm thì ta có câu: "*Nhất Lô, Nhì Đa, Tam Lượng, Tứ Mũ*"; tức là trong một phép tích phân hay nguyên hàm, nếu xuất hiện nhiều hàm khác nhau thì chúng ta sẽ ưu tiên cách đặt như câu nói trên.

a. Loại 1: Nếu $Q(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x};\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Ví dụ 1 Tính tích phân $I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{x}{\sin^2 x}dx$.

➢ Lời giải:

Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=\dfrac{dx}{\sin^2 x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=-\cot x\end{cases}$.

$$I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\sin^2 x}dx=-x\cot x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}+\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cot x dx$$

$$=-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}+\ln\left|\sin x\right|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi\left(9-4\sqrt{3}\right)}{36}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

Bình luận: Ta thấy, hàm số có chứa hàm đa thức và hàm lượng giác.

Như phép đặt ưu tiên "*Nhất Lô, Nhì Đa, Tam Lượng, Tứ Mũ*" thì ta sẽ đặt $u=$ hàm đa thức (tức là $u=x$) và $dv=$ hàm lượng giác (tức là $dv=\dfrac{dx}{\sin^2 x}$).

Bài toán trở nên dễ dàng hơn bằng cách áp dụng công thức *Tích phân từng phần.*

Ví dụ 1

Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{x}{\cos^2 x}dx$.

➢ Lời giải: Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}$.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + \ln|\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \ln 2.$$

Bài tập bạn đọc tự giải có hướng dẫn

Bài 1.

Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x + \sin x}{\cos^2 x} dx$ *(HVNH HCM - 2000).*

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases} u = x + \sin x \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (1 + \cos x) dx \\ v = \tan x \end{cases}$.

Bài 2.

Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1 + \cos 2x} dx$ *(Dự bị ĐH - A - 2003).*

Hướng dẫn: Sử dụng công thức nhân đôi $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$

Như vậy $I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}$.

Bài 3.

Tính tích phân $I = \int_0^1 x \tan^2 x dx$ *(HVKTMM – 2000).*

Hướng dẫn: Sử dụng công thức $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.

$$I=\int_0^1 \frac{x}{\cos^2 x}dx-\int_0^1 dx.$$

Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=\dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=\tan x \end{cases}.$

Bài 4.

Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\sin 2x}dx$.

Hướng dẫn: Phân tích $1+\sin 2x=1+\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}d\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=\dfrac{d\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}.$

b. Loại 2: Nếu $Q(x)=\sin x;\cos x$.

Bước 1: $I=\int P(x)\cos x dx=A(x)\sin\alpha x+B(x)\cos\alpha x+C$ (1).

Trong đó: $A(x)$ và $B(x)$ cùng bậc với $P(x)$.

Bước 2: Lấy đạo hàm hai vế của (1).

$P(x)=\left[A'(x)+B(x)\right]\sin\alpha+\left[A(x)+B'(x)\right]\cos\alpha$.

Sử dụng phương pháp hệ số bất định tìm được $A(x)$ và $B(x)$.

Bước 3: Thay $A(x)$ và $B(x)$ vào (1) rồi kết luận.

Ví dụ 1

Tính tích phân $I=\int_0^1 x^2\sin^2\pi x dx$.

Lời giải: $I=\int_0^1 x^2.\frac{1-\cos 2\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2dx-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\cos(2\pi x)dx$

$$=\frac{x^3}{6}\Big|_0^1-\frac{1}{4\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2d(\sin 2\pi x)=\frac{1}{6}-\frac{1}{4\pi}x^2\sin 2\pi x\Big|_0^1-2\int_0^1 x\sin 2\pi x dx$$

$$=\frac{1}{6}-\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}xd(\cos 2\pi x)=\frac{1}{6}-\frac{1}{4\pi^2}x\cos 2\pi x\Big|_0^1+\frac{1}{4\pi^2}\int_0^1\cos 2\pi x dx$$

$$=\frac{1}{6}-\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{8\pi^2}\sin 2\pi x\Big|_0^1=\frac{1}{6}-\frac{1}{4\pi^2}.$$

Ví dụ 2

Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\sin 2x dx$ *(Dự bị ĐH - 2006).*

➢ Lời giải:

Đặt $\begin{cases}u=x+1\\dv=\sin 2xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=-\frac{1}{2}\cos 2x\end{cases}$.

$$I=-\frac{x+1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x dx=\frac{\pi}{4}+1+\frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}+1$$

Ví dụ 3

Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi^2}{4}}\cos\sqrt{x}dx$.

➢ Lời giải:

Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow x=t^2\Rightarrow dx=2tdt$. Khi $\begin{cases}x=\frac{\pi^2}{4}\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}\\x=0\Rightarrow t=0\end{cases}$.

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos t dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}td(\sin t)=2t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\pi-2.$$

Ví dụ 4

Tính nguyên hàm $I=\int(x^3-x^2+2x-3)\sin x dx$.

➢ Lời giải:

Cách 1: $I=(ax^3+bx^2+cx+d)\cos x+(a'x^3+b'x^2+c'x+d')\sin x+C$ (1).

Lấy đạo hàm hai vế của (1).

$$\left(x^3-x^2+2x-3\right)\sin x=\left[a'x^3+\left(3a+b'\right)x^2+\left(2b+c'\right)x+c+d'\right]\cos x$$

$$-\left[ax^3-\left(3a'-b\right)x^2-\left(2b'-c\right)x+c'+d\right]\sin x \quad (2).$$

Đồng nhất đẳng thức trên ta có hệ phương trình $\begin{cases}a'=0\\3a+b'=0\\2b+c'=0\\c+d'=0\end{cases}$ và $\begin{cases}-a=1\\3a'-b=-1\\2b'-c=2\\c'+d=3\end{cases}$

Giải hệ trên tìm được: $a=-1;b=1;c=4;d=1$ và $a'=0;\ b'=3;\ c'=-2;$ $d'=-4$.

Vậy $I=\left(-x^3+x^2+4x+1\right)\cos x+\left(3x^2-2x+4\right)\sin x+C$.

Cách 2: Đặt $\begin{cases}u=x^3-x^2+2x-3\\dv=\sin x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\left(3x^2-2x+2\right)dx\\v=-\cos x\end{cases}$.

Bài tập bạn đọc tự giải có hướng dẫn

Bài1.

Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(x^2-4x+3\right)\sin 2x dx$.

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases}u=x^2-4x+3\\dv=\sin 2x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\left(2x-4\right)dx\\v=-\dfrac{1}{2}\cos 2x\end{cases}$.

Bài 2.

Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x dx$.

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases}u=x^2\\dv=\cos x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2x dx\\v=\sin x\end{cases}$.

Bài 3.

Tính nguyên hàm $I=\int x\sin\sqrt{x}dx$ *(ĐH Mỏ - Địa chất - 1998).*

Hướng dẫn: Đặt $t=\sqrt{x}$, sau đó đặt $\begin{cases}u=t^3\\dv=\sin t dt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=3t^2dt\\v=-\cos t\end{cases}$.

Bài 4.

Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\pi}x^2\sin^2 x dx$ *(ĐHAN-D-1999).*

Hướng dẫn: Sử dụng công thức $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$.

Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$.

Bài 5.

Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x dx$ *(ĐHBKHN - 1994).*

Hướng dẫn: Sử dụng công thức $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$.

Bài 6.

Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x + \sin^2 x\right)\cos x dx$ *(TN – 2005).*

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases} u = x + \sin^2 x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \left(1 + \sin 2x\right)dx \\ v = \sin x \end{cases}$.

Bài 7.

Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2x - 1\right)\cos^2 x dx$ *(Dự bị ĐH – D – 2005).*

Hướng dẫn: Sử dụng công thức $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.

Đặt $\begin{cases} u = 2x - 1 \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ \int \cos 2x dx \end{cases}$.

Bài 8.

Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2 + 1\right)\sin x dx$ *(ĐH Mở - 1997).*

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases} u = x^2 + 1 \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = -\cos x \end{cases}$.

c. Loại 3: Nếu $Q(x) = e^x; a^x$



Ví dụ 1

Tính tích phân $I=\int_0^1 xe^x dx$.

➢ Lời giải:

Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=e^x \end{cases}$.

$I=xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx=e-e^x\Big|_0^1=1$.

Bình luận: Ta thấy, hàm số có chứa hàm đa thức và hàm mũ.

Như phép đặt ưu tiên "*Nhất Lô, Nhì Đa, Tam Lượng, Tứ Mũ*" thì ta sẽ đặt $u=$ hàm đa thức (tức là $u=x$) và $dv=$ hàm mũ (tức là $dv=e^x dx$).

Bài toán trở nên dễ dàng hơn bằng cách áp dụng công thức *Tích phân từng phần.*

Ví dụ 2

$I=\int_1^{\ln 3}\left(x^2-2x\right)e^x dx$.

➢ Lời giải:

Đặt $\begin{cases} u=x^2-2x \\ dv=e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=(2x-2)dx \\ v=e^x \end{cases}$.

$I=\left(x^2-2x\right)e^x\Big|_1^{\ln 3}-\int_1^{\ln 3}(2x-2)e^x dx=\ln^2 3-2\ln 3+e-A$.

Tính $A=\int_1^{\ln 3}(2x-2)e^x dx$.

Đặt $\begin{cases} u=2x-2 \\ dv=e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=2dx \\ v=e^x \end{cases}$.

$A=(2x-2)e^x\Big|_1^{\ln 3}-2\int_1^{\ln 3}e^x dx=(2x-4)e^x\Big|_1^{\ln 3}=6\ln 3+12-2e$.

Vậy $I=\ln^2 3-8\ln 3+3e-12$.

Ví dụ 3

Tính tích phân $I=\int_0^1 \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}dx$.

➢ Lời giải: Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow x=t^2\Rightarrow dx=2tdt$. Khi $\begin{cases} x=1\Rightarrow t=1 \\ x=0\Rightarrow t=0 \end{cases}$.

$$I=2\int_0^1 t^2e^t dt=2t^2e^t\Big|_0^1-4\int_0^1 te^t dt=2e-4\left(te^t\Big|_0^1-\int_0^1 e^t dt\right)=2e-4.$$

Ví dụ 4

Tính tích phân $I=\int_0^1 x^2e^x dx$.

➢ Lời giải: Đặt $\begin{cases}u=x^2\\dv=e^x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2xdx\\v=e^x\end{cases}$.

$I=x^2e^x\Big|_0^1-2\int_0^1 xe^x dx=e-2A$.

Tính $A=\int_0^1 xe^x dx$.

Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=e^x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=e^x\end{cases}$.

$A=xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx=e^x(x-1)\Big|_0^1=1$.

Vậy $I=e-2$.

Ví dụ 5

Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\sin 2x dx$.

➢ Lời giải: $I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\sin x\cos x dx$.

Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\sin x\cos x$. Khi $\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1\\x=0\Rightarrow t=0\end{cases}$.

$I=2\int_0^1 te^t dt$.

Đặt $\begin{cases}u=t\\dv=e^t dt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dt\\v=e^t\end{cases}$.

$I=2\left(te^t\Big|_0^1-\int_0^1 e^t dt\right)=2e^t(t-1)\Big|_0^1=2$.

Bình luận: Ta thấy, hàm số có chứa hàm đa thức và hàm mũ.

Như phép đặt ưu tiên "*Nhất Lô, Nhì Đa, Tam Lượng, Tứ Mũ*" thì ta sẽ đặt $u=$ hàm đa thức (tức là $u=t$) và $dv=$ hàm mũ (tức là $dv=e^t dt$).

Bài toán trở nên dễ dàng hơn bằng cách áp dụng công thức *Tích phân từng phần*.

Bài tập bạn đọc tự giải có hướng dẫn

Bài1. Tính tích phân $I=\int_0^1 x^5 e^{x^3} dx$.

Hướng dẫn: Đặt $t=x^3$.

Bài 2. Tính tích phân $I=\int_0^1 x\left(e^x+1\right)dx$.

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=\left(e^x+1\right)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=e^x+x \end{cases}$.

Bài3. Tính tích phân $I=\int_0^1 (x-2)e^{2x} dx$.

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases} u=x-1 \\ dv=e^{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=\dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$.

Bài 4. Tính tích phân $I=\int_0^1 \dfrac{x^3-2x^2+3x+1}{e^{2x}} dx$.

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases} u=x^3-2x^2+3x+1 \\ dv=\dfrac{dx}{e^{2x}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=\left(3x^2-4x+3\right)dx \\ v=-\dfrac{2}{e^{2x}} \end{cases}$.

Bài 5. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3x}\sin 5x dx$.

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases} u=\sin 5x \\ dv=e^{3x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=5\cos 5x dx \\ v=\dfrac{e^{3x}}{3} \end{cases}$.

Bài 6. Tính nguyên hàm $I=\int \left(2x^2+x+1\right)e^x dx$ *(ĐHHH HCM-1999).*

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases} u=2x^2+x+1 \\ dv=e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\left(4x+1\right)dx \\ v=e^x \end{cases}$.

Bài7. Tính tích phân $I=\int_0^1 \left(1+x\right)^2 e^{2x} dx$ *(ĐHCĐ-1998).*

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases} u=(1+x)^2 \\ dv=e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=2(1+x)dx \\ v=\dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$.

Bài 8. Tính tích phân $I=\int_0^2 xe^{-\frac{x}{2}}dx$ *(HVKTQY – 1997).*

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=e^{-\frac{x}{2}}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=-2e^{-\frac{x}{2}} \end{cases}$.

Bài 9. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x}\sin x\cos^3 x dx$ *(ĐHKT HN – 1999).*

Hướng dẫn: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x}\sin x\cos x\left(1-\sin^2 x\right)dx$.

Đặt $t=\sin^2 x \Rightarrow \dfrac{dt}{2}=\sin x\cos x dx$, sau đó sử dụng tích phân từng phần.

Bài 10. Tính tích phân $I=\int_0^{\sqrt{3}} \dfrac{x^3 e^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

Hướng dẫn: $I=\int_0^{\sqrt{3}} \dfrac{x^2 e^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}xdx$.

Đặt $t=\sqrt{x^2+1} \Rightarrow x^2=t^2-1 \Rightarrow xdx=tdt$, sau đó sử dụng tích phân từng phần.

d. Loại 4: Nếu $Q(x)=\ln x;\ln^n x;\log_m x;\ln\left[f(x)\right]$

Ví dụ 1

Tính tích phân $I=\int_0^1 \dfrac{\ln(x+1)}{(x+2)^2}dx$.

➢ Lời giải: Đặt $\begin{cases} u=\ln(x+1) \\ dv=\dfrac{dx}{(x+2)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{dx}{x+1} \\ v=-\dfrac{1}{x+2} \end{cases}$.

$I=-\left.\dfrac{\ln(x+1)}{x+2}\right|_0^1+\int_0^1 \dfrac{dx}{(x+1)(x+2)}=-\dfrac{1}{3}\ln 2+A$.

Tính $A=\int_0^1 \dfrac{dx}{(x+1)(x+2)}$.

$$A=\int_0^1 \frac{dx}{x+1}-\int_0^1 \frac{dx}{x+2}=\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|_0^1=\ln\frac{4}{3}.$$

Vậy $I=-\frac{1}{3}\ln 2+\ln\frac{4}{3}$.

Bình luận: Ta thấy, hàm số có chứa hàm lôgarit và hàm đa thức.

Như phép đặt ưu tiên *"Nhất Lô, Nhì Đa, Tam Lượng, Tứ Mũ"* thì ta sẽ đặt $u=$ hàm lôgarit (tức là $u=\ln(x+1)$ và $dv=$ hàm đa thức (tức là $dv=\frac{dx}{(x+2)^2}$).

Bài toán trở nên dễ dàng hơn bằng cách áp dụng công thức *Tích phân từng phần.*

Ví dụ 2

Tính tích phân $I=\int_1^e x\ln x dx$.

➢ Lời giải:

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\dv=xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{dx}{x}\\v=\frac{x^2}{2}\end{cases}$.

$$I=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e xdx=\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big|_1^e=\frac{e^2+1}{4}.$$

Bình luận: Ta thấy, hàm số có chứa hàm lôgarit và hàm đa thức.

Như phép đặt ưu tiên *"Nhất Lô, Nhì Đa, Tam Lượng, Tứ Mũ"* thì ta sẽ đặt $u=$ hàm lôgarit (tức là $u=\ln x$) và $dv=$ hàm đa thức (tức là $dv=xdx$).

Bài toán trở nên dễ dàng hơn bằng cách áp dụng công thức *Tích phân từng phần.*

Ví dụ 3

Tính tích phân $I=\int_1^2 \frac{\ln x}{x^5}dx$.

Lời giải: Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\dv=\frac{dx}{x^5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{dx}{x}\\v=-\frac{1}{4x^4}\end{cases}$.

$$I=-\frac{\ln x}{4x^4}\Big|_1^2+\frac{1}{4}\int_1^2\frac{dx}{x^5}=-\frac{\ln 2}{64}-\frac{1}{16x^4}\Big|_1^2=\frac{15-4\ln 2}{256}.$$

Ví dụ 4

Tính tích phân $I=\int_0^1 x\ln\left(x^2+1\right)dx$.

Lời giải:

Cách 1: Đặt $t=x^2+1\Rightarrow dt=2xdx$. Khi $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=2\\x=0\Rightarrow t=1\end{cases}$.

$$I=\frac{1}{2}\int_1^2\ln t dt.$$

Đặt $\begin{cases}u=\ln t\\dv=dt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{dt}{t}\\v=t\end{cases}$.

$$I=t\ln t\Big|_1^2-\int_1^2 dt=2\ln 2-1.$$

Cách 2: Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(x^2+1\right)\\dv=xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{2x}{x^2+1}dx\\v=\dfrac{x^2}{2}\end{cases}$

Ví dụ 5

Tính tích phân $I=\int_1^2(2x-1)\ln x dx$.

Lời giải: Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\dv=(2x-1)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{dx}{x}\\v=\int(2x-1)dx=x^2-x\end{cases}$.

$$I=\left(x^2-x\right)\ln x\Big|_1^2-\int_1^2\frac{x^2-x}{x}dx=2\ln 2-\int_1^2(x-1)dx$$

$$=2\ln 2-\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_1^2=2\ln 2-\frac{1}{2}.$$

Bài tập bạn đọc tự giải có hướng dẫn

Bài 1. Tính tích phân $I=\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx$ *(ĐHH – D – 1998).*

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=\frac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{dx}{x} \\ v=-\frac{1}{x} \end{cases}$.

Bài 2. Tính nguyên hàm $I=\int \frac{x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

Hướng dẫn: $\begin{cases} u=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \\ dv=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}dx=\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \\ v=\sqrt{x^2+1} \end{cases}$.

Bài 3. Tính tích phân $I=\int_1^e \left(2x-\frac{3}{x}\right)\ln x dx$ *(ĐH – D – 2010).*

Hướng dẫn: $I=2\int_1^e x\ln x dx-3\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx=2A-3B$.

Tính A; đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{dx}{x} \\ v=\frac{x^2}{2} \end{cases}$.

Tính B; đặt $t=\ln x \Rightarrow dt=\frac{dx}{x}$.

Bài4. Tính tích phân $I=\int_1^3 \frac{3+\ln x}{(x+1)^2}dx$.

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases} u=3+\ln x \\ dv=\frac{dx}{(x+1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{dx}{x} \\ v=-\frac{1}{x+1} \end{cases}$.

Bài 5. Tính tích phân $I=\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$ *(TN – 2007).*

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases} u=\ln^2 x \\ dv=\frac{dx}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=2\frac{\ln x}{x}dx \\ v=\ln x \end{cases}$.

Bài 6. Tính tích phân $I=\int_1^2 \frac{\ln x}{x^3}dx$ *(ĐH – D – 2008).*

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=\frac{dx}{x^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{dx}{x} \\ v=-\frac{1}{2x^2} \end{cases}$.

Bài 7. Tính tích phân $I=\int_2^3 \ln\left(x^2-x\right)dx$

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases} u=\ln\left(x^2-x\right) \\ dv=dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{2x-1}{x^2-x}dx \\ v=x \end{cases}$.

Bài 8. Tính tích phân $I=\int_1^e x^2\ln x dx$ *(Dự bị ĐH – 2005).*

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=x^2dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{dx}{x} \\ v=\frac{1}{3}x^3 \end{cases}$.

Bài 9. Tính tích phân $I=\int_0^1 x\ln\left(x^2+x+1\right)dx$ *(HVKTQS – 1997).*

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases} u=\ln\left(x^2+x+1\right) \\ dv=x^2dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx \\ v=\frac{x^2}{2} \end{cases}$.

Bài 10. Tính tích phân $I=\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{\ln x}{\left(x+1\right)^2}dx$.

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=\frac{dx}{\left(x+1\right)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{dx}{x} \\ v=-\frac{1}{x+1} \end{cases}$.

e. Loại 5: Nếu $Q(x)=\sin\left(\ln x\right);\cos\left(\ln x\right);\sin\left(\log_a x\right);\cos\left(\log_a x\right)$

Ví dụ 1

Tính tích phân sau $I=\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos^2\left(\ln x\right)dx$.

Lời giải: $I=\frac{1}{2}\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}\left[1+\cos\left(2\ln x\right)\right]dx=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}-1\right)+\frac{1}{2}\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}\cos\left(2\ln x\right)dx.$

Tính $A=\frac{1}{2}\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}\cos(2\ln x)dx$

$=\frac{1}{2}x\cos(2\ln x)\Big|_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}+\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}\sin(2\ln x)dx$

$=-\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}+1\right)+x\sin(2\ln x)\Big|_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}-\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}\cos(2\ln x)dx=-\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}+1\right)-4A$.

Suy ra $A=-\frac{1}{10}\left(e^{\frac{\pi}{2}}+1\right)\Rightarrow I=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}-1\right)-\frac{1}{10}\left(e^{\frac{\pi}{2}}+1\right)=\frac{1}{5}\left(2e^{\frac{\pi}{2}}-3\right)$.

Ví dụ 2

Tính tích phân $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\ln(\sin x)dx$.

Lời giải: Đặt $\begin{cases}u=\ln(\sin x)\\dv=\cos xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{\cos x}{\sin x}dx\\v=\sin x\end{cases}$.

$I=\sin x\ln(\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=\left[\sin x\ln(\sin x)-\sin x\right]\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}(\ln 2-1)$.

Bình luận: Ta thấy, hàm số có chứa hàm lôgarit và hàm lượng giác.

Như phép đặt ưu tiên "*Nhất Lô, Nhì Đa, Tam Lượng, Tứ Mũ*" thì ta sẽ đặt $u=$ hàm lôgarit (tức là $u=\ln(\sin x)$) và $dv=$ hàm lượng giác (tức là $dv=\cos xdx$).

Bài toán trở nên dễ dàng hơn bằng cách áp dụng công thức *Tích phân từng phần.*

Ví dụ 3

Tính tích phân $I=\int_1^e\sin(\ln x)dx$.

Lời giải: Đặt $t=\ln x\Rightarrow x=e^t\Rightarrow dx=e^tdt$. Khi $\begin{cases}x=e\Rightarrow t=1\\x=1\Rightarrow t=0\end{cases}$.

$I=\frac{\sin t-\cos t}{2}e^t\Big|_0^1=\frac{(\sin 1-\cos 1)e+1}{2}$.

Bài tập bạn đọc tự giải có hướng dẫn

Bài 1. Tính tích phân $I=\int_1^{e^\pi}\cos(\ln x)dx$ *(ĐHSPQN - 1995).*

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases}u=\cos(\ln x)\\dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-\dfrac{\sin(\ln x)}{x}dx\\v=x\end{cases}$.

Bài 2. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\ln(\cos x)dx$.

Hướng dẫn: $\begin{cases}u=\ln(\cos x)\\dv=\cos 2xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-\dfrac{\sin x}{\cos x}dx\\v=\dfrac{\sin 2x}{2}\end{cases}$.

2. Dạng 2: $I=\int_\alpha^\beta\begin{bmatrix}e^x\\a^x\\\ln x\end{bmatrix}Q(x)dx$ *với* $Q(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x};\dfrac{1}{\cos^2 x};\sin x;\cos x$.

Đặt $\begin{cases}u=\begin{bmatrix}e^x\\a^x\\\ln x\end{bmatrix}\\dv=Q(x)dx\end{cases}$.

Chú ý: Với hai dạng $I=\int_\alpha^\beta e^{ax}\sin bxdx$ và $J=\int_\alpha^\beta e^{ax}\cos bxdx$.

Tính I.

Đặt $\begin{cases}u=e^{ax}\\dv=\sin bxdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{e^{ax}}{a}dx\\v=-\dfrac{1}{b}\cos bx\end{cases}$.

$I=A+mJ\Leftrightarrow I-mJ=A$ (1).

Tính J.

Đặt $\begin{cases}u=e^{ax}\\dv=\cos bxdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{e^{ax}}{a}dx\\v=\dfrac{1}{b}\sin bx\end{cases}$.

$J=B+nI\Leftrightarrow J-nI=B$ (2).

Giải hệ gồm phương trình (1) và (2) ta tìm được I và J.



Ví dụ 1 Tính tích phân $I=\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$.

➢ Lời giải: Đặt $\begin{cases} u=e^x \\ dv=\sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=e^x dx \\ v=-\cos x \end{cases}$.

$I=-e^x \cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi} e^x \cos x dx=e^{\pi}+1+J$ (1).

Đặt $\begin{cases} u=e^x \\ dv=\cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=e^x dx \\ v=\sin x \end{cases}$ $J=e^x \sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi} e^x \sin x dx=-I$.

Thế vào (1), ta được $2I=e^{\pi}+1 \Rightarrow I=\frac{e^{\pi}+1}{2}$.

Ví dụ 2 Tính tích phân sau $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$.

➢ Lời giải: Đặt $\begin{cases} u=e^x \\ dv=\cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=e^x dx \\ v=\sin x \end{cases}$.

$I=e^x \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx=e^{\frac{\pi}{2}}-A$.

Đặt $\begin{cases} u=e^x \\ dv=\sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=e^x dx \\ v=-\cos x \end{cases}$.

$A=-e^x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx=-1+I$

$\Rightarrow I=e^{\frac{\pi}{2}}+1-I \Rightarrow I=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}$.

Ví dụ 3 Tính tích phân $I=\int_0^1 e^x \sin^2 \pi x dx$ *(ĐHQG HCM - 2000).*

➢ Lời giải:

$I=\int_0^1 \sin^2 \pi x d\left(e^x\right)=e^x \sin^2 \pi x\Big|_0^1-\int_0^1 2\pi \sin \pi x \cos \pi x . e^x dx=-\pi \int_0^1 \mathrm{Sin}(2\pi x)\left(e^x\right)$

$A=\int_0^1 \sin 2\pi x d\left(e^x\right)=e^x \sin 2\pi x\Big|_0^1-2\pi \int_0^1 \cos 2\pi x d\left(e^x\right)$

$$=-2\pi e^x\cos 2\pi x\Big|_0^1-4\pi^2\int_0^1 e^x\sin 2x dx=-2\pi(e-1)-4\pi^2.A$$

$$\Rightarrow A=\frac{2\pi(1-e)}{1+4\pi^2}\Rightarrow I=\frac{2\pi^2(e-1)}{1+4\pi^2}.$$

Ví dụ 4 Tính tích phân $I=\int_{-1}^{1}\left(e^{x^2}\sin x+e^x x^2\right)dx$ *(ĐHTN - 2000).*

➢ Lời giải: $I=\int_{-1}^{0}\left(e^{x^2}\sin x+e^x x^2\right)dx+\int_{0}^{1}\left(e^{x^2}\sin x+e^x x^2\right)dx=A+B.$

Tính A: Đặt $t=-x\Rightarrow dt=-dx$. Khi $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\x=-1\Rightarrow t=1\end{cases}$.

$$A=\int_1^0 e^{t^2}\sin(-t)(-dt)=-\int_0^1 e^{t^2}\sin t dt=-\int_0^1 e^{x^2}\sin x dx=-A$$

$$\Rightarrow 2A=0\Leftrightarrow A=0.$$

Tính B: Đặt $\begin{cases}u=x^2\\dv=e^x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2xdx\\v=e^x\end{cases}$.

$$B=x^2e^x\Big|_0^1-2\int_0^1 xe^x dx=e-2\int_0^1 xd\left(e^x\right)=e-2\left(xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx\right)=e-2.$$

$$\Rightarrow I=e-2.$$

Ví dụ 5 Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{3x}\sin 5x dx$ *(CĐKTKT - 2005).*

➢ Lời giải: Đặt $\begin{cases}u=e^{3x}\\dv=\sin 5x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=3e^{3x}dx\\v=-\frac{1}{5}\cos 5x\end{cases}$.

$$I=-\frac{1}{5}e^{3x}\cos 5x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{3}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{3x}\cos 5x dx=\frac{e^{\frac{3\pi}{2}}}{5}+\frac{3}{5}A\Rightarrow I-\frac{3}{5}A=\frac{e^{\frac{3\pi}{2}}}{5}.\quad(1)$$

Đặt $\begin{cases}u=e^{3x}\\dv=\cos 5x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=3e^{3x}dx\\v=\frac{1}{5}\sin 5x\end{cases}$.

$$I=\frac{1}{5}e^{3x}\sin 5x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{3}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{3x}\sin 5x dx=\frac{e^{\frac{3\pi}{2}}}{5}-\frac{3}{5}I\Rightarrow A+\frac{3}{5}I=\frac{1}{5}e^{\frac{3\pi}{2}}.\quad(2)$$

Từ (1) và (2) ta tính được $I=\frac{1}{4}A=\frac{1}{20}e^{\frac{3\pi}{2}}$.

Ví dụ 6 Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}\sin 2x dx$ (Dự bị ĐH – 2004).

➢ Lời giải: $I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}\cos x\sin x dx$.

Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin x dx$. Khi $\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0\\ x=0\Rightarrow t=1\end{cases}$.

$I=2\int_1^0 e^t t(-dt)=2\int_0^1 e^t t dt$.

Đặt $\begin{cases}u=t\\ dv=e^t dt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dt\\ v=e^t\end{cases}$.

$I=2te^t\Big|_0^1-2\int_0^1 e^t dt=2e-2e^t\Big|_0^1=2e-2(e-1)=2$.

Bài tập bạn đọc tự giải có hướng dẫn

Bài 1. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin 3x dx$ *(ĐHNN I – B – 1998).*

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases}u=\sin 3x\\ dv=e^{2x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=3\cos 3x dx\\ v=\frac{e^{2x}}{2}\end{cases}$.

Bài 2. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos^2 x dx$ *(ĐHTL - 1996).*

Hướng dẫn: Sử dụng công thức $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$.

Đặt $\begin{cases}u=\cos 2x\\ dv=e^x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-2\sin 2x dx\\ v=e^x\end{cases}$ (cho tích phân thứ hai).

Bài 3. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x}\sin 4x dx$ *(ĐHCS – 1997).*

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases}u=\sin 4x\\ dv=e^{3x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=4\cos 4x dx\\ v=\frac{e^{3x}}{3}\end{cases}$.

3. Dạng 3: **Dạng đặc biệt**

a. Loại 1: $\begin{cases} I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\dfrac{dx}{\sin^n x} \\ I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\dfrac{dx}{\cos^n x} \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} u=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sin^{n-2}x}\\ \dfrac{1}{\cos^{n-2}x}\end{bmatrix} \\ dv=\begin{bmatrix}\dfrac{dx}{\sin^2 x}\\ \dfrac{dx}{\cos^2 x}\end{bmatrix}\end{cases}$.

b. Loại 2: $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{ax^2+bx+c}dx$

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{ax^2+bx+c} \\ dv=dx \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=\dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \\ v=x \end{cases}$.

$I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x^2+a^2}dx$. Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x^2+a^2} \\ dv=dx \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx \\ v=x \end{cases}$.

Ví dụ 1 Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{1}\sqrt{x^2+1}dx$ *(ĐHSPV – B – 1999).*

➢ Lời giải:

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x^2+1} \\ dv=dx \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx \\ v=x \end{cases}$.

$I=x\sqrt{x^2+1}\Big|_0^1-\int\limits_0^1\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx=\sqrt{2}-\int\limits_0^1\dfrac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\sqrt{2}-I+\int\limits_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

$\Rightarrow I=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

Đặt $t=x+\sqrt{x^2+1}\Rightarrow dt=\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$

$=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}dx=\dfrac{t}{\sqrt{x^2+1}}dx\Rightarrow\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{dt}{t}$.



Khi $\begin{cases} x=1\Rightarrow t=1+\sqrt{2} \\ x=0\Rightarrow t=1 \end{cases}$.

$I=\int\limits_{1}^{1+\sqrt{2}}\frac{dt}{t}=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\Rightarrow I=\frac{1}{2}\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$.

Ví dụ 2 Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^4 x}$.

➢ Lời giải:

Đặt $\begin{cases} u=\frac{1}{\cos^2 x} \\ dv=\frac{dx}{\cos^2 x} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=2\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx \\ v=\tan x \end{cases}$.

$I=\frac{\tan x}{\cos^2 x}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos^3 x}\tan x dx=2-2A$.

Tính $A=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos^3 x}\tan x dx$

$=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x}dx=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^4 x}-\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}=I-\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=I-1$.

Vậy $I=2-2A=2-2(I-1)\Rightarrow I=\frac{4}{3}$.

4. Dạng 4: $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\ln\left[f(x)\right]Q(x)dx$ *với* $Q(x)=\frac{1}{\sin^2 x};\frac{1}{\cos^2 x};\sin x;\cos x$.

Đặt $\begin{cases} u=\ln\left[f(x)\right] \\ dv=Q(x) \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=\frac{f'(x)}{f(x)}dx \\ v=\int Q(x)dx \end{cases}$.

Ví dụ 1 Tích phân phân $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\ln(1+\cos x)dx$ *(HVKHQS – 1999).*

➢ Lời giải:

Đặt $\begin{cases} u=\ln(1+\cos x) \\ dv=\cos x dx \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=-\frac{\sin x}{1+\cos x}dx \\ v=\sin x \end{cases}$.

$$I=\ln(1+\cos x)\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)dx$$

$$=(x-\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1.$$

Ví dụ 2 Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+x\sin x}{\cos^2 x}dx$ *(ĐH – B – 2011).*

➢ Lời giải: $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos^2 x}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx=\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx=\sqrt{3}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx.$

Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=\dfrac{1}{\cos x}\end{cases}.$

$$I=\sqrt{3}+\frac{x}{\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos x}=\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\sin^2 x-1}dx$$

$$=\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{2}\ln\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}.$$

Bài tập bạn đọc tự giải có hướng dẫn

Bài 1. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$ *(ĐHTL – 2001).*

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases}u=\ln(1+\tan x)\\dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{dx}{\cos^2 x(1+\tan x)}\\v=x\end{cases}.$

Bài 2. Tính tích phân $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos x\ln(\tan x)dx.$

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases}u=\ln(\tan x)\\dv=\cos x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{dx}{\cos^2 x\tan x}=\dfrac{dx}{\cos x\sin x}\\v=\sin x\end{cases}.$

Bài3. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\ln(1+\sin x)dx.$

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases} u = \ln(1+\sin x) \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{\cos x}{1+\sin x} dx \\ v = \sin x \end{cases}$.

Bài 4. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x} dx$.

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases} u = \ln(\cos x) \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\dfrac{\sin x}{\cos x} dx = -\tan x dx \\ v = \tan x \end{cases}$.

Bài 5. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x} dx$.

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases} u = \ln(\cos x) \\ dv = \dfrac{dx}{\sin^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\dfrac{\sin x}{\cos x} dx = -\sin x dx \\ v = -\cot x \end{cases}$.

Bài 6. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x \ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx$.

Hướng dẫn: Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$; sau đó sử dụng tích phân từng phần.

Bài 7. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\ln(\tan x)}{\cos^2 x} dx$.

Hướng dẫn: Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$; sau đó sử dụng tích phân từng phần.

5. Dạng 5:

a. Loại 1: $I = \int_\alpha^\beta P(x).Q(x).Q'(x)dx$.

Đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = Q(x).Q'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x)dx \\ v = \int Q(x).Q'(x) \end{cases}$

b. Loại 2: $I = \int_\alpha^\beta \dfrac{P(x)}{Q_n(x)} dx = \int_\alpha^\beta \dfrac{f(x)Q'(x)}{Q_n(x)} dx$.

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \dfrac{Q'(x)}{Q(x)}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \displaystyle\int \dfrac{Q'(x)}{Q(x)}dx \end{cases}$.

Ví dụ 1 Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x (1+\cos x)^2 dx$ *(ĐHTS – 1999).*

➢ Lời giải: Đặt $\begin{cases} u = \cos x \\ dv = \sin x (1+\cos x)^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin x dx \\ v = -\dfrac{(1+\cos x)^3}{3} \end{cases}$.

$$I = -\frac{1}{3}\cos x (1+\cos x)^3 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x (1+\cos x)^3 dx$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^3 d(1+\cos x) = \frac{2}{3} - \frac{1}{12}(1+\cos x)^4 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{23}{12}.$$

Ví dụ 2 Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1+3\cos x}} dx$ *(ĐH – A – 2005).*

➢ Lời giải: $\begin{cases} u = 2\cos x + 1 \\ dv = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2\sin x dx \\ v = -\dfrac{2}{3}\sqrt{1+3\cos x} \end{cases}$.

$$I = -\frac{2}{3}(2\cos x + 1)\sqrt{1+3\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sqrt{1+3\cos x} dx$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{4}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+3\cos x} d(1+3\cos x) = \frac{2}{3} + \frac{8}{27}\sqrt{(1+3\cos x)^3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{-38}{27}$$

Ví dụ 3 Tính tích phân $I = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x(2+\ln x)^2} dx$ *(ĐH – B – 2010).*

➢ Lời giải: Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \dfrac{dx}{x(2+\ln x)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = -\dfrac{1}{2+\ln x} \end{cases}$.

$$I = -\frac{\ln x}{2+\ln x}\Big|_1^e + \int_1^e \frac{dx}{x(2+\ln x)} = -\frac{1}{3} + \int_1^e \frac{d(2+\ln x)}{2+\ln x}$$

$$=-\frac{1}{3}+\ln\left(2+\ln x\right)\Big|_1^e=-\frac{1}{3}+\ln\frac{3}{2}.$$

Ví dụ 4 Tính tích phân $I=\int\limits_{\ln 2}^{\ln 5}\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx$ *(Dự bị ĐH – B – 2003).*

➢ Lời giải: $I=\int\limits_{\ln 2}^{\ln 5}\frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}e^x dx$. Đặt $\begin{cases}u=e^x\\ dv=\dfrac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=e^x dx\\ v=2\sqrt{e^x-1}\end{cases}$.

$$I=2e^x\sqrt{e^x-1}\Big|_{\ln 2}^{\ln 5}-2\int\limits_{\ln 2}^{\ln 5}e^x\sqrt{e^x-1}dx$$

$$=16-2\int\limits_{\ln 2}^{\ln 5}\sqrt{e^x-1}d\left(e^x-1\right)=16-\frac{4}{3}\left(e^x-1\right)\sqrt{e^x-1}\Big|_{\ln 2}^{\ln 5}=\frac{20}{3}.$$

Ví dụ 5 Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{x^3}{x^2+1}dx$.

➢ Lời giải:

Đặt $\begin{cases}u=x^2\\ dv=\dfrac{x}{x^2+1}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2xdx\\ v=\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{2}\end{cases}$.

$$I=\frac{1}{2}x^2\ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^{\sqrt{3}}-\int\limits_0^{\sqrt{3}}x\ln\left(x^2+1\right)dx$$

$$=3\ln 2-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}}\ln\left(x^2+1\right)d\left(x^2+1\right)=3\ln 2-\frac{1}{2}A.$$

Tính $A=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\ln\left(x^2+1\right)d\left(x^2+1\right)$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(x^2+1\right)\\ dv=d\left(x^2+1\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}\\ v=x^2+1\end{cases}$

$$A=\left(x^2+1\right)\left[\ln\left(x^2+1\right)-1\right]\Big|_0^{\sqrt{3}}\Rightarrow I=\frac{3}{2}-\ln 2.$$

Ví dụ 6 Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{x^3}{x^2+2x+1}dx$.

➢ Lời giải:

Đặt $\begin{cases}u=x^3\\dv=\dfrac{dx}{(x+1)^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=3x^2dx\\v=-\dfrac{1}{x+1}\end{cases}$.

$$I=-\frac{x^3}{x+1}+3\int\frac{x^2}{x+1}dx=-\frac{x^3}{x+1}+3\int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=-\frac{x^3}{x+1}+3\left(\frac{x^2}{2}-x\right)+\ln|x+1|+C.$$

Ví dụ 7 Tính tích phân $I=\int\limits_1^{\sqrt{5}}x^3\sqrt{x^2-1}dx$.

➢ Lời giải:

Đặt $\begin{cases}u=x^2\\dv=x\sqrt{x^2-1}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2xdx\\v=\dfrac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{2}{3}}\end{cases}$.

$$I=\frac{x^2}{3}(x^2-1)^{\frac{2}{3}}\Big|_1^{\sqrt{5}}-\frac{2}{3}\int\limits_0^1x(x^2-1)^{\frac{2}{3}}dx=\frac{25\sqrt[3]{16}-3\sqrt[3]{1024}}{15}=-\frac{1}{3}.$$

Ví dụ 8 Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2x\cos2xdx$.

➢ Lời giải:

Đặt $\begin{cases}u=\cos^2x\\dv=\cos2xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-2\cos x\sin xdx=-\sin2xdx\\v=\dfrac{1}{2}\sin2x=\int\cos2xdx\end{cases}$.

$$I=\frac{1}{2}\cos^2x\sin2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^22xdx=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos4x}{2}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}dx-\frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos4xdx=\left(\frac{x}{4}-\frac{\sin4x}{16}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=+\frac{\pi}{16}.$$

Ví dụ 9 Tính tích phân $I=\int_0^{\pi} x\sin x\cos^2 x dx$.

➢ Lời giải: $I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\sin 2x\cos x dx=\frac{1}{4}\int_0^{\pi} x\left(\sin 3x+\sin x\right)dx$.

Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=\left(\sin 3x+\sin x\right)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=-\frac{1}{3}\left(\cos 3x+\cos x\right)\end{cases}$.

$$I=-\frac{1}{4}x\left(\frac{1}{3}\cos 3x+\cos x\right)\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{3}\cos 3x+\cos x\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{3}+\frac{1}{4}\left(\sin x+\frac{1}{9}\sin 3x\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{3}.$$

Ví dụ 10 Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$.

➢ Lời giải:

Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=\frac{1}{2\cos^2 x}\end{cases}$.

$$I=\frac{x}{2\cos^2 x}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{2\cos^2 x}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

Bài tập bạn đọc tự giải có hướng dẫn

Bài 1. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\tan x}\sin x}{\cos^3 x}dx$.

Hướng dẫn: Đặt $t=\tan x\Rightarrow dt=\frac{dx}{\cos^2 x}$; sau đó sử dụng tích phân từng phần.

Bài 2. Tính tích phân $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\ln(\tan x)dx$.

Hướng dẫn: $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}\ln(\tan x)dx$.

Đặt $t=\tan x \Rightarrow dt=\dfrac{dx}{\cos^2 x}$; sau đó sử dụng tích phân từng phần.

Bài 3. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases}u=x^2\\ dv=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\dfrac{d\left(1+x^2\right)}{2\sqrt{1+x^2}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2xdx\\ v=\sqrt{1+x^2}\end{cases}$.

Bài 4. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{x\sin^2 x}{\sin 2x\cos^2 x}dx$.

Hướng dẫn: $I=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{x\sin^2 x}{\sin x\cos x\cos^2 x}dx=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{x\tan x}{\cos^2 x}dx$; sau đó sử dụng tích phân từng phần.

Bài 5. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{1}\dfrac{x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x+\sqrt{x^2+1}}dx$.

Hướng dẫn:

Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\\ dv=\dfrac{x}{x+\sqrt{x^2+1}}dx=x\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}}\\ v=\dfrac{1}{3}\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}-\dfrac{1}{3}x^3\end{cases}$.

Bài 6. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{1}\dfrac{x^2e^x}{\left(x+2\right)^2}dx$.

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases}u=x^2e^x\\ dv=\dfrac{dx}{\left(x+2\right)^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=x\left(x+2\right)e^x dx\\ v=-\dfrac{1}{x+2}\end{cases}$.

Bài 7. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{1}\dfrac{1-\sin x}{\left(1+\cos x\right)e^x}dx$.

Hướng dẫn: $\begin{cases}u=\dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}\\ dv=\dfrac{dx}{e^x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{1-\cos x+\sin x}{1+\cos x}dx\\ v=-e^{-x}\end{cases}$.

C NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN CÁC LOẠI HÀM SỐ

Chương I

NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN CÁC HÀM ĐA THỨC

I. HÀM SỐ TÌM NGUYÊN HÀM

Dạng 1: $I=\int (ax+b)^n dx$; $J=\int \frac{dx}{(ax+b)^n}$	Dạng 2: $I=\int x(ax+b)^n dx$
Dạng 3: $I=\int (ax+b)(cx+d)^n dx$	Dạng 4: $I=\int (ax^n+b)^k x^{n-1}dx$
Dạng 5: $I=\int \frac{cx+d}{(ax+b)^n}dx$	Dạng 6: $I=\int \frac{a+bx^n}{x(cx^n+d)}dx$
Dạng 7: $I=\int \frac{x^{n-1}}{(ax^n+b)^k}dx$	Dạng 8: $I=\int \frac{(ax+b)^n}{(cx+d)^{n+2}}dx$
Dạng 9: $I=\int \frac{1}{x^2}\left(m+\frac{n}{x}\right)^k dx$	Dạng 10: $I=\int \sqrt[n]{x^m}dx$; $J=\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x^m}}$
Dạng 11: $I=\int \sqrt[n]{x\sqrt[m]{x\sqrt[q]{x^r}}}dx$	Dạng 12: $I=\int x^m(a+bx^n)^p dx$
Dạng 13: $I=\int R\left(x,x^{\frac{r_1}{q_1}},.....x^{\frac{r_n}{q_n}}\right)dx$	Dạng 14: $I=\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},.....,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$
Dạng 15: $I=\int \sqrt[n]{x}\left(1+\sqrt[2n]{x}\right)^k dx$	Dạng 16: $I=\int \sqrt[n]{(ax+b)^m}dx$; $J=\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(ax+b)^m}}$

II. PHƯƠNG PHÁP

Dạng 1: $I=\int (ax+b)^n dx$; $J=\int \frac{dx}{(ax+b)^n}$

Phương pháp: $I=\frac{1}{a}\int (ax+b)^n d(ax+b)=\frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+C$.

$J=\frac{1}{a}\int (ax+b)^{-n} d(ax+b)=\frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{-n+1}}{-n+1}+C=\frac{1}{(a-n+1)(ax+b)^{n-1}}+C$

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm $I=\int\left(\frac{1}{2}x-5\right)^5 dx$.

Lời giải: $I=2\int\left(\frac{1}{2}x-5\right)^5 d\left(\frac{1}{2}x-5\right)=2.\frac{\left(\frac{1}{2}x-5\right)^6}{6}+C=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x-5\right)^6+C$.

Ví dụ 2: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{(2x-5)^3}$.

Lời giải: $I=\int (2x-5)^{-3} dx=\frac{1}{2}\int (2x-5)^{-3} d(2x-5)$

$=\frac{1}{2}.\frac{(2x-5)^{-2}}{-2}+C=\frac{(2x-5)^{-2}}{-4}+C=-\frac{1}{4(2x-5)^2}+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int (2x+1)^3 dx=\frac{(2x+1)^4}{8}+C$.

b. $I=\int (x-3)^5 dx=\frac{(x-3)^6}{6}+C$.

c. $I=\int (-3x+2)^7 dx=-\frac{(-3x+2)^8}{24}+C$.

d. $I=\int (4x+1)^8 dx=\frac{(4x+1)^9}{36}+C$.

e. $I=\int (-5x+4)^2 dx=-\frac{(-5x+4)^3}{15}+C$.



f. $J=\int\frac{dx}{(2x+1)^3}=-\frac{(2x+1)^{-2}}{4}+C=-\frac{1}{4(2x+1)^2}+C.$

g. $J=\int\frac{dx}{(x-3)^5}=-\frac{(x-3)^{-4}}{4}+C=-\frac{1}{4(x-3)^4}+C.$

h. $J=\int\frac{dx}{(-3x+2)^7}=\frac{(-3x+2)^{-6}}{18}+C=\frac{1}{18(-3x+2)^6}+C.$

i. $J=\int\frac{dx}{(4x+1)^8}=-\frac{(4x+1)^{-7}}{28}+C=-\frac{1}{28(4x+1)^7}+C.$

j. $J=\int\frac{dx}{(-5x+4)^2}=\frac{(-5x+4)^{-1}}{5}+C=\frac{1}{5(-5x+4)}+C.$

Dạng 2: $I=\int x(ax+b)^n dx$

Phương pháp: $I=\frac{1}{a^2}\int(ax+b-b)(ax+b)^n d(ax+b)$

$=\frac{1}{a^2}\int\left[(ax+b)^{n+1}-b(ax+b)^n\right]d(ax+b)$

$=\frac{1}{a^2}\left[\frac{(ax+b)^{n+2}}{n+2}-b\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}\right]+C.$

Ví dụ:Tìm nguyên hàm $I=\int x\left(-3x+\frac{1}{5}\right)^4 dx.$

Lời giải: $I=\frac{1}{9}\int\left(-3x+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\right)\left(-3x+\frac{1}{5}\right)^4 d\left(-3x+5\right)$

$=\frac{1}{9}\int\left[\left(-3x+\frac{1}{5}\right)^5-\frac{1}{5}\left(-3x+\frac{1}{5}\right)^4\right]d\left(-3x+\frac{1}{5}\right)$

$=\frac{1}{9}\left[\frac{\left(-3x+\frac{1}{5}\right)^6}{6}-\frac{1}{5}.\frac{\left(-3x+\frac{1}{5}\right)^5}{5}\right]+C.$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int x(x+1)^3\,dx=\dfrac{(x+1)^5}{5}-\dfrac{(x+1)^4}{4}+C.$

b. $I=\int x(-x+2)^4\,dx=\dfrac{(-x+2)^6}{6}-2\dfrac{(-x+2)^5}{5}+C.$

c. $I=\int x(-3x+1)^5\,dx=\dfrac{1}{9}\left[\dfrac{(-3x+1)^7}{7}-\dfrac{(-3x+1)^6}{6}\right]+C.$

d. $I=\int x(x+3)^6\,dx=\dfrac{(x+3)^8}{8}-\dfrac{3(x+3)^7}{7}+C.$

e. $I=\int x(-5x+2)^7\,dx=\dfrac{1}{25}\left[\dfrac{(-5x+2)^9}{9}-\dfrac{(-5x+2)^8}{4}\right]+C.$

Dạng 3: $I=\int (ax+b)(cx+d)^n\,dx$

Phương pháp: $I=\int\left[\dfrac{a}{c}(cx+d)+b-\dfrac{ad}{c}\right](cx+d)^n\,dx$

$=\dfrac{1}{c^2}\int\left[a(cx+d)^{n+1}+(bc-ad)(cx+d)^n\right]d(cx+d)$

$=\dfrac{1}{c^2}\left[\dfrac{a(cx+d)^{n+2}}{n+2}+\dfrac{(bc-ad)(cx+d)^{n+1}}{n+1}\right]+C.$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int (3x-2)(5x+1)^3\,dx.$

Lời giải: $I=\int\left[\dfrac{3}{5}(5x+1)-2-\dfrac{3}{5}\right](5x+1)^3\,dx$

$=\dfrac{1}{25}\int\left[3(5x+1)^{3+1}-13(5x+1)^3\right]d(5x+1)$

$=\dfrac{1}{25}\left[\dfrac{3(5x+1)^{3+2}}{3+2}+\dfrac{-13(5x+1)^{3+1}}{3+1}\right]+C$

$=\dfrac{1}{25}\left[\dfrac{3(5x+1)^5}{5}-\dfrac{13(5x+1)^4}{4}\right]+C.$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int(x+1)(4x-1)^5dx=\frac{1}{16}\left[\frac{(4x-1)^7}{7}+\frac{5(4x-1)^6}{6}\right]+C.$

b. $I=\int(-7x+3)(x+1)^4dx=\frac{-7(x+1)^6}{6}+\frac{10(x+1)^5}{5}+C.$

c. $I=\int(x-3)(x-4)^3dx=\frac{(x-4)^5}{5}+\frac{(x-4)^4}{4}+C.$

d. $I=\int\left(x-\frac{27}{4}\right)(-2x+7)^8dx=\frac{1}{4}\left[\frac{(-2x+7)^{10}}{10}+\frac{13(-2x+7)^9}{18}\right]+C.$

e. $I=\int(2x+5)\left(\frac{2}{3}x-3\right)^4dx=\frac{9}{4}\left[\frac{\left(\frac{2}{3}x-3\right)^6}{3}+\frac{28\left(\frac{2}{3}x-3\right)^5}{15}\right]+C.$

Dạng 4: $I=\int(ax^n+b)^k x^{n-1}dx$

Phương pháp: $I=\frac{1}{an}\int(ax^n+b)^k d(ax^n+b)=\frac{1}{an}.\frac{(ax^n+b)^{k+1}}{k+1}+C.$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int(2x^3+5)x^2dx.$

Lời giải:

$I=\frac{1}{6}\int(2x^3+5)d(2x^3+5)=\frac{1}{6}.\frac{(2x^3+5)^2}{2}+C=\frac{(2x^3+5)^2}{12}+C.$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int(2x^2+1)^3xdx=\frac{1}{4}.\frac{(2x^2+1)^4}{4}+C$

b. $I=\int(x^3-3)^5x^2dx=\frac{1}{3}.\frac{(x^3-3)^6}{6}+C$

c. $I=\int\left(-x^4+2\right)^7 x^3dx=\frac{1}{-4}.\frac{\left(-x^4+2\right)^8}{8}+C.$

d. $I=\int\left(4x^5+1\right)^8 x^4dx=\frac{1}{20}.\frac{\left(4x^5+1\right)^9}{9}+C.$

e. $I=\int\left(-8x^6+1\right)^2 x^5dx=-\frac{1}{48}.\frac{\left(-8x^6+1\right)^3}{3}+C.$

Dạng 5: $I=\int\frac{cx+d}{(ax+b)^n}dx$

Phương pháp: $I=\frac{1}{a}\int\left[\frac{c}{a}(ax+b)+d-\frac{bc}{a}\right](ax+b)^{-n}d(ax+b)$

$=\frac{1}{a^2}\left[c.\frac{(ax+b)^{2-n}}{2-n}+(ad-bc).\frac{(ax+b)^{1-n}}{1-n}\right]+C.$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{3x+2}{(x+1)^5}dx.$

Lời giải:

$I=\int\frac{3x+2}{(x+1)^5}dx=\int\frac{3(x+1)-1}{(x+1)^5}dx=\int\left[\frac{3(x+1)}{(x+1)^5}-\frac{1}{(x+1)^5}\right]dx$

$=\int\left[3.(x+1)^{-4}-(x+1)^{-5}\right]dx=-\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{1}{4(x+1)^4}+C$

Bài tập minh họa

➢ **Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây**

a. $I=\int\frac{3x+2}{(2x+1)^5}dx=\frac{1}{4}\left[3.\frac{(2x+1)^{-3}}{-3}-\frac{(2x+1)^{-4}}{4}\right]+C$

b. $I=\int\frac{5x+6}{(x-2)^7}dx=5.\frac{(x-2)^{-5}}{-5}-16.\frac{(x-2)^{-6}}{6}+C$



c. $I=\int\frac{x+1}{(3x+1)^6}dx=\frac{1}{9}.\left[\frac{(3x+1)^{-4}}{-4}-2.\frac{(3x+1)^{-5}}{5}\right]+C$

d. $I=\int\frac{7x-4}{(4x+1)^4}dx=\frac{1}{16}.\left[7.\frac{(4x+1)^{-2}}{-2}+23.\frac{(4x+1)^{-3}}{3}\right]+C$

Dạng 6: $I=\int\frac{a+bx^n}{x(cx^n+d)}dx$

Phương pháp: $I=\int\frac{(a+bx^n)x^{n-1}}{x^n(cx^n+d)}dx$.

Đặt $t=cx^n+d\Rightarrow x^n=\frac{t-d}{c}\Rightarrow\frac{dt}{nc}=x^{n-1}dx$.

$$I=\int\frac{a+b.\frac{t-d}{c}}{t\left(\frac{t-d}{c}\right)}.\frac{dt}{nc}=\frac{1}{nc}\int\frac{ac-bd+bt}{t(t-d)}dt$$

$$=\frac{ac-bd}{dnc}\int\frac{t-(t-d)}{t(t-d)}dt+\frac{b}{nc}\int\frac{dx}{t-d}$$

$$=\left(\frac{ac-bd}{dnc}+\frac{b}{nc}\right)\int\frac{dt}{t-d}-\frac{ac-bd}{dnc}\int\frac{dt}{t}$$

$$=\left(\frac{ac-bd}{dnc}+\frac{b}{nc}\right)\ln|t-d|-\frac{ac-bd}{dnc}\ln|t|+C.$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{2x^2+3}{x.(3x^2+1)}dx$.

Lời giải:

Đặt $t=3x^2+1\Rightarrow dt=6xdx=6.x^2.\frac{dx}{x}=2(t-1).\frac{dx}{x}\Leftrightarrow\frac{dt}{2(t-1)}=\frac{dx}{x};x^2=\frac{t-1}{3}$

$$I=\int\frac{2x^2+3}{x.(3x^2+1)}dx=\int\frac{2.\frac{t-1}{3}+3}{t}.\frac{dt}{2(t-1)}=\frac{1}{6}.\int\frac{(2t+7)dt}{(t-1).t}.$$

$$=\frac{1}{6}.\int\left(\frac{-7}{t}+\frac{9}{t-1}\right)dt=\frac{1}{6}.\left[-7\ln|t|+9.\ln|t-1|\right]+C$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{x^2+1}{x.\left(2x^2+1\right)}dx=\frac{1}{4}\left(-\ln|u|+2\ln|u-1|\right)+C;u=2x^2+1$

b. $I=\int\frac{3x^2-2}{x.\left(x^2+3\right)}dx=\frac{11}{6}\ln|u|-\frac{1}{3}\ln|u-3|+C;u=x^2+3$

c. $I=\int\frac{4x^2+3}{x.\left(7x^2+1\right)}dx=\frac{1}{14}\left[-17.\ln|u|+21\ln|u-1|\right]+C;u=7x^2+1$

d. $I=\int\frac{6x^2-1}{x.\left(5x^2+2\right)}dx=\frac{1}{10}.\left[\frac{17}{2}\ln|u|-\frac{5}{2}\ln|u-2|\right]+C;u=5x^2+2$

Dạng 7: $I=\int\frac{x^{n-1}}{\left(ax^n+b\right)^k}dx$

Phương pháp: $I=\frac{1}{a}\int\left(ax^n+b\right)^{-k}d\left(ax^n+b\right)=\frac{1}{an}.\frac{\left(ax^n+b\right)^{-k+1}}{-k+1}+C.$

Ví dụ Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{x^6}{\left(3x^7+2\right)^4}dx.$

Lời giải: Đặt $t=3x^7+2\Rightarrow dt=21x^6dx\Leftrightarrow\frac{dt}{21}=x^6dx$

$\Rightarrow I=\frac{1}{21}.\int\frac{dt}{t^4}=\frac{1}{21}.\frac{t^{-3}}{(-3)}+C=\frac{-1}{63.\left(3x^7+2\right)^3}+C.$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{x^2}{\left(x^3+1\right)^3}dx=-\frac{1}{6}.\frac{1}{\left(x^3+1\right)^2}+C$

b. $I=\int\frac{x^3}{\left(-x^4+2\right)^2}dx=\frac{1}{4\left(-x^4+2\right)}+C;$

c. $I=\int\frac{x^4}{\left(x^5-3\right)^3}dx=\frac{-1}{10\left(x^5-3\right)^2}+C;$



d. $I=\int\frac{x^5}{\left(x^6+4\right)^5}dx=\frac{-1}{24\left(x^6+4\right)^4}+C;$

e. $I=\int\frac{x^6}{\left(-5x^7+2\right)^3}dx=\frac{1}{70.\left(-5x^7+2\right)^2}+C.$

Dạng 8: $I=\int\frac{(ax+b)^n}{(cx+d)^{n+2}}dx$

Phương pháp: $I=\int\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^n.\frac{1}{(cx+d)^2}dx=\frac{1}{ad-bc}.\int\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^n d\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)$

$=\frac{1}{ad-bc}.\frac{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{n+1}}{n+1}+C.$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{(2x+1)^5}{(3x+2)^7}dx.$

Lời giải: $I=\int\frac{(2x+1)^5}{(3x+2)^7}dx=\int\left(\frac{2x+1}{3x+2}\right)^5.\frac{dx}{(3x+2)^2}$

Đặt $t=\frac{2x+1}{3x+2}\Rightarrow dt=\frac{dx}{(3x+2)^2}$

$\Rightarrow I=\int t^5dt=\frac{t^6}{6}+C=\frac{1}{6}.\left(\frac{2x+1}{3x+2}\right)^6+C.$



Bài tập minh họa

➢ **Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây**

a. $I=\int\frac{(4x+3)^5}{(3x-1)^7}dx=\frac{-1}{78}.\left(\frac{4x+3}{3x-1}\right)^6+C;$

b. $I=\int\frac{(x+1)^4}{(3x+2)^6}dx=\frac{-1}{5}.\left(\frac{x+1}{3x+2}\right)^5+C;$

c. $I=\int\frac{(6x+1)^7}{(x+2)^9}dx=\frac{1}{88}.\left(\frac{6x+1}{x+2}\right)^8+C;$

Dạng 10: $I_1=\int \sqrt[n]{x^m}dx$; $I_2=\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x^m}}$

Phương pháp: $I_1=\int x^{\frac{m}{n}}dx=\frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1}+C=\frac{n.x^{\frac{m+n}{n}}}{m+n}+C$.

$I_2=\int x^{-\frac{m}{n}}dx=\frac{x^{-\frac{m}{n}+1}}{-\frac{m}{n}+1}+C=\frac{n.x^{\frac{n-m}{n}}}{n-m}+C=\frac{n}{(n-m)\sqrt[n]{x^{m-n}}}+C$.

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm $I_1=\int \sqrt[9]{x^{11}}dx$.

Lời giải: $I_1=\int x^{\frac{11}{9}}dx=\frac{x^{\frac{11}{9}+1}}{\frac{11}{9}+1}+C=\frac{x^{\frac{20}{9}}}{\frac{20}{9}}+C=\frac{9\sqrt[9]{x^{20}}}{20}+C$.

Ví dụ 2: Tìm nguyên hàm $I_2=\int \frac{dx}{\sqrt[9]{x^{17}}}$.

Lời giải: $I_2=\int x^{-\frac{17}{9}}dx=\frac{x^{-\frac{17}{9}+1}}{-\frac{17}{9}+1}+C=\frac{x^{-\frac{8}{9}}}{-\frac{8}{9}}+C=-\frac{9}{8\sqrt[9]{x^8}}+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \sqrt[3]{x^5}dx=\frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8}+C$;

b. $I=\int \sqrt[3]{x^7}dx=\frac{3}{10}\sqrt[3]{x^{10}}+C$;

c. $I=\int \sqrt[5]{x^9}dx=\frac{5}{14}\sqrt[5]{x^{14}}+C$;

d. $I=\int \sqrt[7]{x^5}dx=\frac{7}{12}\sqrt[7]{x^{12}}+C$;

e. $I=\int \sqrt[5]{x^{11}}dx=\frac{5}{16}\sqrt[5]{x^{16}}+C$.

f. $J=\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}}=-\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}}+C$;

g. $J=\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^7}}=-\frac{3}{4\sqrt[3]{x^4}}+C$;

h. $J=\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^9}}=-\frac{5}{4\sqrt[5]{x^4}}+C$;

i. $J=\int \frac{dx}{\sqrt[7]{x^5}}=-\frac{7}{2\sqrt[7]{x^2}}+C$;

k. $J=\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^{11}}}=-\frac{5}{6\sqrt[5]{x^6}}+C$.

Dạng 11: $I=\int \sqrt[n]{x^m\sqrt[q]{x^q\sqrt[r]{x^r}}}\,dx$

Phương pháp: $I=\int x^{\frac{r}{nmq}+\frac{1}{mn}+\frac{1}{n}}dx=\dfrac{x^{\frac{r}{nmq}+\frac{1}{mn}+\frac{1}{n}+1}}{\frac{r}{nmq}+\frac{1}{mn}+\frac{1}{n}+1}+C$

$=\dfrac{x^{\frac{nmq+mq+q+r}{mnq}}}{\frac{nmq+mq+q+r}{mnq}}+C=\dfrac{mnq.x^{\frac{nmq+mq+q+r}{mnq}}}{nmq+mq+q+r}+C.$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int \sqrt[2]{x^5\sqrt[4]{x^6}}\,dx$.

Lời giải: $I=\int x^{\frac{3}{20}+\frac{1}{10}+\frac{1}{2}}dx=\dfrac{x^{\frac{3}{20}+\frac{1}{10}+\frac{1}{2}+1}}{\frac{3}{20}+\frac{1}{10}+\frac{1}{2}+1}+C=\dfrac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}}+C=\dfrac{4\sqrt[4]{x^7}}{7}+C.$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \sqrt[3]{x^5\sqrt[7]{x^7\sqrt{x^9}}}\,dx=\dfrac{35\sqrt[35]{x^{52}}}{52}+C.$

b. $I=\int \sqrt[9]{x^5\sqrt[7]{x^7\sqrt{x^3}}}\,dx=\dfrac{7\sqrt[7]{x^8}}{8}+C.$

c. $I=\int \sqrt[3]{x^9\sqrt[7]{x^7\sqrt{x^{11}}}}\,dx=\dfrac{7\sqrt[7]{x^{10}}}{10}+C.$

d. $I=\int \sqrt[7]{x^5\sqrt[7]{x^7\sqrt{x^2}}}\,dx=\dfrac{245\sqrt[245]{x^{289}}}{289}+C.$

e. $I=\int \sqrt[11]{x^5\sqrt[3]{x^3\sqrt{x^8}}}\,dx=\dfrac{165\sqrt[165]{x^{191}}}{191}+C.$

Dạng 12: $I=\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ (với m,n,p là các số hữu tỷ)

Phương pháp:

Nếu $p\in\mathbb{Z}$ thì đặt $x=t^s$, với s là mẫu số chung nhỏ nhất của các phân số tối giản biểu thị bởi m,n

Nếu $\frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$ thì đặt $a+bx^n=t^s$ với s là mẫu số của p.

Nếu $\frac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}$ thì đặt $ax^{-n}+b=t^s$, với s là mẫu số của p.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int x\left(1+x^2\right)^2 dx$.

Lời giải: Đặt $t=1+x^2\Rightarrow dt=2xdx\Rightarrow xdx=\frac{dt}{2}$.

$$I=\frac{1}{2}\int t^4dt=\frac{t^5}{10}+C=\frac{\left(1+x^2\right)^5}{10}+C.$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int x^2\left(x^3-4\right)^4 dx=\frac{\left(x^3-4\right)^5}{15}+C.$

b. $I=\int x^2\left(5-x^3\right)^3 dx=-\frac{\left(5-x^3\right)^4}{12}+C.$

c. $I=\int x^3\left(5+3x^4\right)^2 dx=\frac{\left(5+3x^4\right)^3}{36}+C.$

d. $I=\int x\left(7-x^2\right)^6 dx=-\frac{\left(7-x^2\right)^7}{14}+C.$

e. $I=\int x^5\left(2+5x^6\right)^3 dx=\frac{\left(2+5x^6\right)^4}{120}+C.$

Dạng 13: $I=\int R\left(x,x^{\frac{r_1}{q_1}},.....x^{\frac{r_n}{q_n}}\right)dx$ (với $r_1,q_1,.....,r_n,q_n\in\mathbb{Z}^+$)

Phương pháp:

Gọi s là bội số chung nhỏ nhất của các mẫu số $q_1,.....,q_n$.

Khi đó: $\frac{r_1}{q_1}=\frac{\alpha_1}{s},.....,\frac{r_n}{q_n}=\frac{\alpha_n}{s}$. Đặt $x=t^s\Rightarrow I=\int R\left(t^s,t^{\alpha_1},.....,t^{\alpha_n}\right).s.t^{s-1}dt$

Thí dụ: $I=\int\frac{f(x)}{\sqrt[m]{x}+\sqrt[n]{x}}dx$

Gọi s là bội số chung nhỏ nhất của các mẫu số m,n.

Đặt $\sqrt[m]{x}=t\Rightarrow t^k=x\Rightarrow dx=k.t^{k-1}dt$, suy ra $I=\int\frac{f\left(t^k\right)}{t^m+t^n}k.t^{k-1}dt$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{x^2-x-2}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}dx=6.\int\frac{t^{15}-t^9-2t^3}{1+t}dt$.

b. $I=\int\frac{3x^3-x+5}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}dx=6.\int\frac{3t^{21}-t^9+5t^3}{1+t}dt$.

c. $I=\int\frac{6x^5+2x^3-1}{\sqrt[5]{x}+\sqrt{x}}dx=10.\int\frac{6t^{57}+2t^{37}-1t^7}{1+t^3}dt$.

d. $I=\int\frac{4x^2+5x-3}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}dx=15.\int\frac{4t^{41}+5t^{26}-3t^{11}}{t^2+1}dt$.

e. $I=\int\frac{x^2+4}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}dx=8.\int\frac{t^{21}+4t^5}{1+t^2}dt$.

Dạng 14: $I=\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},.....,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$ (với $m,n,.....,r,s\in\mathbb{Z}^+$)

Phương pháp: Đặt $t=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow x=\frac{td-b}{a-ct}\Rightarrow dx=\frac{ad-bc}{(a-ct)^2}dt$

$I=\int R\left(\frac{td-b}{a-ct},t^{\frac{m}{n}},.....,t^{\frac{r}{s}}\right)\frac{ad-bc}{(a-ct)^2}dt$.

Gọi k là bội số chung nhỏ nhất của các số $n,.....,s$.

Đặt $t=u^k$, ta có

$I=\int R\left(\frac{u^kd-b}{a-u^kc},u^{m_1},.....,u^{r_1}\right)\frac{ad-bc}{(a-u^kc)^2}ku^{k-1}du$.

Dạng 15: $I=\int \sqrt[n]{x}\left(1+\sqrt[2n]{x}\right)^k dx$

Phương pháp: Đặt $t=\sqrt[2n]{x}\Rightarrow t^{2n}=x\Rightarrow 2n.t^{2n-1}dt=dx$.

$I=\int t^2(1+t)^k\,2n.t^{2n-1}dt=2n\int t^{2n+1}(1+t)^k\,dt$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^3 dx$.

Lời giải: Đặt $t=\sqrt[4]{x}\Rightarrow t^4=x\Rightarrow dx=4t^3dt$.

$I=4\int t^5(1+t)^3\,dt=4\int t^5\left[t^3+3t^2+3t+1\right]dt$

$=4\int\left[t^8+3t^7+3t^6+t^5\right]dt=4.\left[\frac{t^9}{9}+3.\frac{t^8}{8}+3.\frac{t^7}{7}+\frac{t^6}{6}\right]+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \sqrt[3]{x}\left(1+\sqrt[6]{x}\right)^5 dx=6\int t^7(1+t)^5\,dt$.

b. $I=\int \sqrt[3]{x}\left(1+\sqrt[6]{x}\right)^3 dx=6\int t^7(1+t)^3\,dt$.

c. $I=\int \sqrt[3]{x}\left(1+\sqrt[6]{x}\right)^4 dx=6\int t^7(1+t)^4\,dt$.

d. $I=\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^4 dx=4\int t^5(1+t)^4\,dt$.

e. $I=\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^5 dx=4\int t^5(1+t)^5\,dt$.

Dạng 16: $I=\int \sqrt[n]{(ax+b)^m}dx$; $J=\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(ax+b)^m}}$

Phương pháp: $I=\frac{1}{a}\int (ax+b)^{\frac{m}{n}}d(ax+b)=\frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1}+C$.

$J=\frac{1}{a}\int (ax+b)^{-\frac{m}{n}}d(ax+b)=\frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{-\frac{m}{n}+1}}{-\frac{m}{n}+1}+C$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I_1=\int \sqrt[5]{(-2x+1)^6}dx$.

Lời giải: $I=-\frac{1}{2}\int (-2x+1)^{\frac{6}{5}}d(-2x+1)=-\frac{1}{2}.\frac{(-2x+1)^{\frac{6}{5}+1}}{\frac{6}{5}+1}+C$

$=-\frac{5(-2x+1)^{\frac{11}{5}}}{22}+C=-\frac{5}{22}\sqrt[5]{(-2x+1)^{11}}+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \sqrt[3]{(2x+3)^2}dx=\frac{3}{10}\sqrt[3]{(2x+3)^5}+C$.

b. $I=\int \sqrt[3]{(3x-2)^4}dx=\frac{1}{7}\sqrt[3]{(3x-2)^7}+C$.

c. $I=\int \sqrt[3]{(x+7)^5}dx=\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x+7)^8}+C$;

d. $I=\int \sqrt[4]{(x-3)^6}dx=\frac{2}{5}\sqrt{(x-3)^5}+C$;

e. $I=\int \sqrt[5]{(-3x+5)^7}dx=-\frac{5}{36}\sqrt[5]{(-3x+5)^{12}}+C$;

f. $J=\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+3}+C$;

g. $J=\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3x-2)^4}}=-\frac{1}{\sqrt[3]{3x-2}}+C$;

h. $J=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+7)^5}}=-\frac{3}{2\sqrt[3]{(x+7)^2}}+C$;

i. $J=\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x-3)^6}}=-\frac{2}{\sqrt{x-3}}+C$;

k. $J=\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(-3x+5)^7}}=\frac{5}{6.\sqrt[5]{(-3x+5)^2}}+C$.

III. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1 Tính tích phân

a) $I=\int_0^1 x^3dx$.

b) $I=\int_0^1(2x+1)^3dx$.

c) $I=\int_0^1(1-4x)^3dx$.

d) $I=\int_0^1(x-1)(x^2-2x+5)^3dx$.

e) $I=\int_0^1(2x-3)(x^2-3x+1)^3dx$.

➢ Lời giải

a) $I=\int_0^1 x^3dx=\frac{x^4}{4}\Big|_0^1=\frac{1}{4}$.

b) $I=\frac{1}{2}\int_0^1(2x+1)^3d(2x+1)=\frac{1}{2}.\frac{(2x+1)^4}{4}\Big|_0^1=\frac{81}{8}-\frac{1}{8}=10$.

c) $I=\int_0^1(1-4x)^3dx=-\frac{1}{4}\int_0^1(1-4x)^3d(1-4x)$

$=-\frac{1}{4}.\frac{(1-4x)^4}{4}\Big|_0^1=-\frac{81}{16}+\frac{1}{16}=-5$.



d) $I=\int_0^1 (x-1)\left(x^2-2x+5\right)^3 dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2-2x+5\right)^3 d\left(x^2-2x+5\right)$

$=\frac{1}{2}.\frac{\left(x^2-2x+5\right)^4}{4}\Big|_0^1=32-\frac{625}{8}=\frac{-369}{8}.$

e) $I=\int_0^1 (2x-3)\left(x^2-3x+1\right)^3 dx=\int_0^1 \left(x^2-3x+1\right)^3 d\left(x^2-3x+1\right)$

$=\frac{\left(x^2-3x+1\right)^4}{4}\Big|_0^1=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0.$

Bài 2. Tính tích phân

a) $I=\int_0^1 \sqrt{x}dx.$

b) $I=\int_2^7 \sqrt{x+2}dx.$

c) $I=\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx.$

d) $I=\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx.$

e) $I=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx.$

f) $I=\int_0^1 (1-x)\sqrt{x^2-2x+3}dx.$

g) $I=\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}dx.$

h) $I=\int_0^1 \left(x^2-2x\right)\sqrt{x^3-3x^2+2}dx.$

➢ Lời giải:

a) $I=\int\limits_0^1\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^1=\frac{2}{3}.$

b) $I=\int\limits_2^7\sqrt{x+2}dx=\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2}\Big|_2^7=18-\frac{16}{3}=\frac{38}{3}.$

c) $I=\int\limits_0^4\sqrt{2x+1}dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^4\sqrt{2x+1}d(2x+1)$

$=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}\Big|_0^4=9-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}.$

d) $I=\int\limits_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\sqrt{1+x^2}d(1+x^2)$

$=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}(1+x^2)\sqrt{1+x^2}\Big|_0^1=\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}.$

e) $I=\int\limits_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}d(1-x^2)$

$=-\frac{1}{2}.\frac{2}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1=0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$

f) $I=\int\limits_0^1(1-x)\sqrt{x^2-2x+3}dx=-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\sqrt{x^2-2x+3}d(x^2-2x+3)$

$=-\frac{1}{2}.\frac{2}{3}(x^2-2x+3)\sqrt{x^2-2x+3}\Big|_0^1=-\frac{2\sqrt{2}}{3}+\sqrt{3}.$

g) $I=\int\limits_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}dx=\frac{1}{3}\int\limits_0^1\sqrt{x^3+1}d(x^3+1)$

$=\frac{1}{3}.\frac{2}{3}(x^3+1)\sqrt{x^3+1}\Big|_0^1=\frac{4\sqrt{2}-2}{9}.$

h) $I=\int\limits_0^1(x^2-2x)\sqrt{x^3-3x^2+2}dx=\frac{1}{3}\int\limits_0^1\sqrt{x^3-3x^2+2}d(x^3-3x^2+2)$

$=\frac{1}{3}.\frac{2}{3}(x^3-3x^2+2)\sqrt{x^3-3x^2+2}\Big|_0^1=0-\frac{4\sqrt{2}}{9}=-\frac{4\sqrt{2}}{9}.$

Bài 3 Tính tích phân

a) $I=\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

b) $I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$.

c) $I=\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-2x}}$.

d) $I=\int_0^1 \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

e) $I=\int_0^1 \frac{(x-2)dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$.

➢ Lời giải:

a) $I=\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}\Big|_1^4=4-2=2$.

b) $I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(2x+1)}{\sqrt{2x+1}}=\sqrt{2x+1}\Big|_0^1=\sqrt{3}-1$.

c) $I=\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-2x}}=-\frac{1}{2}\int_{-1}^0 \frac{d(1-2x)}{\sqrt{1-2x}}=-\sqrt{1-2x}\Big|_{-1}^0=-1+\sqrt{3}$.

d) $I=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(x^2+2x+2)}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\sqrt{x^2+2x+2}\Big|_0^1=\sqrt{5}-\sqrt{2}$.

e) $I=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(x^2-4x+5)}{\sqrt{x^2-4x+5}}=\sqrt{x^2-4x+5}\Big|_0^1=\sqrt{2}-\sqrt{5}$.

Bài 4 Tính tích phân

a) $I=\int_1^e \frac{dx}{x}$.

b) $I=\int_{-1}^0 \frac{dx}{1-2x}$.

c) $I=\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+1}$.

d) $I=\int_0^1 \frac{(x+1)dx}{x^2+2x+2}$.

e) $I=\int_0^1 \frac{x-2}{x^2-4x+5}dx$.

➢ Lời giải:

a) $I=\int_1^e \frac{dx}{x}=\ln|x|\Big|_1^e=\ln e-\ln 1=1$.

b) $I=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\frac{d(1-2x)}{1-2x}=-\frac{1}{2}\ln|1-2x|\Big|_{-1}^{0}=-\frac{1}{2}(\ln 1-\ln 3)=\frac{\ln 3}{2}$.

c) $I=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln|x^2+1|\Big|_0^1=\frac{1}{2}(\ln 2-\ln 1)=\frac{\ln 2}{2}$.

d) $I=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2}=\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2|\Big|_0^1=\frac{1}{2}(\ln 5-\ln 2)=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$.

e) $I=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d(x^2-4x+5)}{x^2-4x+5}=\frac{1}{2}\ln|x^2-4x+5|\Big|_0^1=\frac{1}{2}(\ln 2-\ln 5)=\frac{1}{2}\ln\frac{2}{5}$.

Bài 5 Tính tích phân

a) $I=\int_1^2\frac{dx}{x^2}$.

b) $I=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{(2x-1)^2}$.

c) $I=\int_0^1\frac{dx}{(3x+1)^2}$.

➢ Lời giải:

a) $I=\int_1^2\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_1^2=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$.

b) $I=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\frac{d(2x-1)}{(2x-1)^2}=-\frac{1}{2}.\frac{1}{2x-1}\Big|_{-1}^{0}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.

c) $I=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{d(3x+1)}{(3x+1)^2}=-\frac{1}{3}.\frac{1}{3x+1}\Big|_0^1=-\frac{1}{12}+\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$.

Bài 6 Tính tích phân

a) $I=\int_0^1 e^{3x}dx$.

b) $I=\int_0^1 e^x\left(2e^x+1\right)^3dx$.

c) $I=\int_0^1 e^x\left(1-4e^x\right)^3dx$.

d) $I=\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$.

e) $I=\int_1^2 \frac{e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2}dx$.

f) $I=\int_1^2 \frac{e^{2x}}{\left(1-3e^{2x}\right)^3}dx$.

g) $I=\int_0^1 e^x\sqrt{2e^x+1}dx$.

h) $I=\int_0^1 e^{2x}\sqrt{1+3e^{2x}}dx$.

i) $I=\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx$.

➢ Lời giải:

a) $I=\int_0^1 e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}\Big|_0^1=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}$.

b) $I=\frac{1}{2}\int_0^1\left(2e^x+1\right)^3d\left(2e^x+1\right)=\frac{1}{2}.\frac{\left(2e^x+1\right)^4}{4}\Big|_0^1$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{\left(2e+1\right)^4}{4}-\frac{81}{4}\right)=\frac{\left(2e+1\right)^4}{8}-\frac{81}{8}$.

c) $I=-\frac{1}{4}\int_0^1\left(1-4e^x\right)^3d\left(1-4e^x\right)=-\frac{1}{4}\frac{\left(1-4e^x\right)^4}{4}\Big|_0^1$

$=-\frac{1}{4}\left[\frac{\left(1-4e\right)^4}{4}-\frac{81}{4}\right]=\frac{81-\left(1-4e\right)^4}{16}$.

d) $I=\int_0^1\frac{d\left(e^x+1\right)}{e^x+1}=\ln\left|e^x+1\right|\Big|_0^1=\ln\left(e+1\right)-\ln 2=\ln\frac{e+1}{2}$.

e) $I=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{d\left(e^{2x}-1\right)}{\left(e^{2x}-1\right)^2}=-\frac{1}{2}.\frac{1}{e^{2x}-1}\Big|_1^2=-\frac{1}{2\left(e^4-1\right)}+\frac{1}{2\left(e^2-1\right)}=\frac{e^2}{2\left(e^4-1\right)}$.

f) $I=-\frac{1}{6}\int_1^2\frac{d\left(1-3e^{2x}\right)}{\left(1-3e^{2x}\right)^3}=-\frac{1}{6}.\frac{-1}{2\left(1-3e^{2x}\right)^2}\Big|_1^2=\frac{1}{12\left(1-3e^4\right)}-\frac{1}{12\left(1-3e^2\right)}$.

g) $I=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{2e^x+1}d\left(2e^x+1\right)=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}\left(2e^x+1\right)\sqrt{2e^x+1}\Big|_0^1$

$=\frac{1}{3}\left(2e+1\right)\sqrt{2e+1}-\sqrt{3}.$

h) $I=\frac{1}{6}\int_0^1\sqrt{1+3e^{2x}}d\left(1+3e^{2x}\right)=\frac{1}{6}.\frac{2}{3}\left(1+3e^{2x}\right)\sqrt{1+3e^{2x}}\Big|_0^1$

$=\frac{1}{9}\left(1+3e^2\right)\sqrt{1+3e^2}-\frac{8}{9}.$

i) $I=\int_0^1\frac{d\left(e^x+1\right)}{\sqrt{e^x+1}}=2\sqrt{e^x+1}\Big|_0^1=2\sqrt{e+1}-2\sqrt{2}.$

Bài 7 Tính tích phân

a) $I=\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx.$

b) $I=\int_1^e\frac{3\ln x+1}{x}dx.$

c) $I=\int_1^e\frac{\left(3\ln x+1\right)^3}{x}dx.$

d) $I=\int_1^e\frac{4\ln^3 x+3\ln^2 x-2\ln x+1}{x}dx.$

e) $I=\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}.$

f) $I=\int_1^e\frac{dx}{x\left(3\ln x+1\right)}.$

g) $I=\int_1^e\frac{\sqrt{3\ln x+1}}{x}dx.$

h) $I=\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{3\ln x+1}}.$

➢ Lời giải:

a) $I=\int_1^e\ln xd\left(\ln x\right)=\frac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^e=\frac{\ln^2 e}{2}-\frac{\ln^2 1}{2}=\frac{1}{2}.$

b) $I=\int_1^e\left(3\ln x+1\right)d\left(\ln x\right)=\left(\frac{3\ln^2 x}{2}+\ln x\right)\Big|_1^e=\left(\frac{3}{2}+1\right)-0=\frac{5}{2}.$

c) $I=\frac{1}{3}\int_1^e\left(3\ln x+1\right)^3 d\left(3\ln x+1\right)=\frac{1}{3}\frac{\left(3\ln x+1\right)^4}{4}\Big|_1^e=\frac{64}{3}-\frac{1}{12}=\frac{85}{4}.$

d) $I=\int_1^e\left(4\ln^3 x+3\ln^2 x-2\ln x+1\right)d\left(\ln x\right)$

$=\left(\ln^4 x+\ln^3 x-\ln^2 x+\ln x\right)\Big|_1^e=2.$

e) $I=\int\limits_{e}^{e^2}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\ln(\ln x)\Big|_{e}^{e^2}=\ln(\ln e^2)-\ln(\ln e)=\ln 2.$

f) $I=\frac{1}{3}\int\limits_{1}^{e}\frac{d(3\ln x+1)}{3\ln x+1}=\frac{1}{3}\ln(3\ln x+1)\Big|_{1}^{e}=\frac{1}{3}(\ln 4-\ln 1)=\frac{\ln 4}{3}.$

g) $I=\frac{1}{3}\int\limits_{1}^{e}\sqrt{3\ln x+1}d(3\ln x+1)=\frac{1}{3}.\frac{2}{3}(3\ln x+1)\sqrt{3\ln x+1}\Big|_{1}^{e}=\frac{14}{9}.$

h) $I=\frac{1}{3}\int\limits_{1}^{e}\frac{d(3\ln x+1)}{\sqrt{3\ln x+1}}=\frac{1}{3}.2\sqrt{3\ln x+1}\Big|_{1}^{e}=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}.$

Bài 8. Tính tích phân

a) $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin x dx.$

b) $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x dx.$

c) $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin^3 2x\cos 2x dx.$

d) $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx.$

e) $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sqrt{3\cos x+1}dx.$

f) $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sqrt{3\sin x+1}}dx.$

➢ Lời giải:

a) $I=-\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x d(\cos x)=-\frac{\cos^3 x}{3}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}.$

b) $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x d(\sin x)=-\frac{\sin^3 x}{3}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}.$

c) $I=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin^3 2x d(\sin 2x)=\frac{\sin^4 2x}{8}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{8}.$

d) $I=-\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(\cos x)}{\cos x}=-\ln(\cos x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}+\ln 1=-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}.$

e) $I=-\frac{1}{3}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{3\cos x+1}d(3\cos x+1)=-\frac{1}{3}.\frac{2}{3}(3\cos x+1)\sqrt{3\cos x+1}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{14}{9}$

f) $I=\frac{1}{3}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(3\sin x+1)}{\sqrt{3\sin x+1}}=\frac{2}{3}\sqrt{3\sin x+1}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}.$

Chương II

TÍCH PHÂN HÀM HỮU TỶ

I. HÀM SỐ TÌM NGUYÊN HÀM

Dạng 1: $I=\int\frac{dx}{x^2+a^2}$	Dạng 11: $I=\int\frac{(ax+b)^n}{(cx+d)^{n+2}}dx$
Dạng 2: $I=\int\frac{dx}{x^2-a^2}$	Dạng 12: $I=\int\frac{x^{2n-3}}{(ax^2+b)^n}dx$
Dạng 3: $I=\int\frac{dx}{a^2-x^2}$	Dạng 13: $I=\int\frac{x^{mn-m-1}}{(ax^m+b)^n}dx$
Dạng 4: $I=\int_0^1\frac{x^{n-1}}{x^{2n}+1}dx$	Dạng 14: $I=\int\frac{x^2+1}{ax^4+bx^2+a}dx$
Dạng 5: $I=\int\frac{x^{n-1}}{(ax^n+b)^k}dx$	Dạng 15: $I=\int\frac{x^2-1}{ax^4+bx^2+a}dx$
Dạng 6: $I=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$	Dạng 16: $I=\int\frac{x^2-1}{ax^4+bx^3+cx^2+bx+a}dx$
Dạng 7: $I=\int\frac{x}{ax^2+bx+c}dx$	Dạng 17: $I=\int\frac{dx}{(x-a)^2(x-b)^2}$
Dạng 8: $I=\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx$	Dạng 18: $I=\int\frac{dx}{(ax+b)^n.(cx+d)^{n+2}}$
Dạng 9: $I=\int\frac{cx+d}{(ax+b)^n}dx$	Dạng 19: $I=\int\frac{x^{2n-1}}{ax^{2n}+bx^n+c}dx$
Dạng 10: $I=\int\frac{a+bx^n}{x(cx^n+d)}dx$	Dạng 20: $I=\int\frac{amx^{m-1}+bnx^{n-1}}{ax^m+bx^n+c}dx$

II. PHƯƠNG PHÁP

Dạng 1: $I=\int\frac{dx}{x^2+a^2}$

Phương pháp: Đặt $x=a\tan t\Rightarrow dx=a\left(1+\tan^2 t\right)dt$.

$$I=\int\frac{a\left(1+\tan^2 t\right)}{a^2\left(1+\tan^2 t\right)}dt=\frac{1}{a}\int dt=\frac{t}{a}+C.$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{x^2+1}$.

Lời giải: Đặt $x=\tan t\Rightarrow dx=\left(1+\tan^2 t\right)dt$.

$$I=\int\frac{1+\tan^2 t}{\tan^2 t+1}dt=\int dt=t+C.$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{dx}{x^2+4}=\frac{t}{2}+C$. b. $I=\int\frac{dx}{x^2+9}=\frac{t}{3}+C$. c. $I=\int\frac{dx}{x^2+16}=\frac{t}{4}+C$.

Dạng 2: $I=\int\frac{dx}{x^2-a^2}$

Phương pháp: $I=\frac{1}{2a}\int\frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)(x+a)}dx=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx$

$$=\frac{1}{2a}\left[\ln|x-a|-\ln|x+a|\right]=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{x^2-1}$.

Lời giải: $I=\frac{1}{2}\int\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)(x-1)}dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln|x-1|-\ln|x+1|\right)+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{dx}{x^2-4}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$.

b. $I=\int\frac{dx}{x^2-16}=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right|+C$.

c. $I=\int\frac{dx}{x^2-25}=\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right|+C$.

Dạng 3: $I=\int\frac{dx}{a^2-x^2}$

Phương pháp: $I=\frac{1}{2a}\int\frac{(a-x)+(a+x)}{(a+x)(a-x)}dx=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x-a}\right)dx$

$=\frac{1}{2a}\left[\ln|a+x|-\ln|x-a|\right]=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{1-x^2}$.

Lời giải: $I=\frac{1}{2}\int\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)(1+x)}dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)dx$

$=\frac{1}{2}\left[\ln|1+x|-\ln|x-1|\right]+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{dx}{4-x^2}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right|+C$.

b. $I=\int\frac{dx}{9-x^2}=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right|+C$.

c. $I=\int\frac{dx}{49-x^2}=\frac{1}{14}\ln\left|\frac{x+7}{x-7}\right|+C$.

Dạng 4: $I=\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}dx$

Phương pháp: Đặt $t=x^n \Rightarrow dt=n.x^{n-1}dx$. Khi $\begin{cases} x=1\Rightarrow t=1 \\ x=0\Rightarrow t=0 \end{cases}$.

$I=\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{dt}{t^2+1}$.

Đặt $t=\tan u \Rightarrow dt=\left(1+\tan^2 u\right)du$. Khi $\begin{cases} t=1\Rightarrow u=\frac{\pi}{4} \\ t=0\Rightarrow u=0 \end{cases}$.

$I=\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2 u}{\tan^2 u+1}du=\frac{u}{n}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4n}$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int \frac{x^5}{x^{12}+1}dx$.

Lời giải: $I=\frac{1}{6}\int \frac{d\left(x^6\right)}{x^{12}+1}=\frac{1}{6}\int \frac{dt}{t^2+1}$.

Đặt $t=\tan u \Rightarrow dt=\left(1+\tan^2 u\right)du$.

$I=\frac{1}{6}\int \frac{\tan^2 u+1}{\tan^2 u+1}du=\frac{u}{6}+C=\frac{\arctan t}{6}+C=\frac{\arctan x^6}{6}+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \frac{x^2}{x^6+1}dx=\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+1}=\frac{\arctan x^3}{3}+C$;

b. $I=\int \frac{x^3}{x^8+1}dx=\frac{1}{5}\int \frac{dt}{t^2+1}=\frac{\arctan x^4}{4}+C$;

c. $I=\int \frac{dx}{x^2+1}=\arctan x+C$;

d. $I=\int \frac{x^4}{x^{10}+1}dx=\frac{1}{5}\int \frac{dt}{t^2+1}=\frac{\arctan x^5}{5}+C$;

e. $I=\int \frac{x}{x^4+1}dx=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1}=\frac{\arctan x^2}{2}+C$.

Dạng 5: $I=\int\frac{x^{n-1}}{\left(ax^n+b\right)^k}dx$

Phương pháp: $I=\frac{1}{a}\int\left(ax^n+b\right)^{-k}d\left(ax^n+b\right)=\frac{1}{an}.\frac{\left(ax^n+b\right)^{-k+1}}{-k+1}+C.$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{x^3}{\left(-2x^4+3\right)^5}dx.$

Lời giải: $I=-\frac{1}{2}\int\left(-2x^4+3\right)^{-5}d\left(-2x^4+3\right)=-\frac{1}{8}.\frac{\left(-2x^4+3\right)^{-4}}{-4}+C.$

Bài tập minh họa

➢ **Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây**

a. $I=\int\frac{x^2}{\left(x^3+1\right)^3}dx=-\frac{1}{6}\left(x^3+1\right)^{-2}+C.$

b. $I=\int\frac{x^3}{\left(-x^4+2\right)^2}dx=\frac{1}{4}\left(-x^4+2\right)^{-1}+C.$

c. $I=\int\frac{x^4}{\left(x^5-3\right)^3}dx=-\frac{1}{10}\left(x^5-3\right)^{-2}+C.$

d. $I=\int\frac{x^5}{\left(x^6+4\right)^2}dx=-\frac{1}{6}\left(x^6+4\right)^{-1}+C.$

e. $I=\int\frac{x^6}{\left(-5x^7+2\right)^3}dx=\frac{1}{70}\left(-5x^7+2\right)^{-2}+C.$

Dạng 6: $I=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$

+ TH1: $\Delta<0$ (phương trình $ax^2+bx+c=0$ vô nghiệm).

Phương pháp: $I=\int\frac{dx}{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2\right]}.$

Đặt $\begin{cases} X = x + \dfrac{b}{2a} \Rightarrow dX = d\left(x + \dfrac{b}{2a}\right) \\ A = \sqrt{\dfrac{c}{a}} \end{cases}$.

$I = \dfrac{1}{a}\int \dfrac{dX}{X^2 + A^2}$. Đặt $X = \tan t \Rightarrow dX = \left(1 + \tan^2 t\right)dt$

$I = \dfrac{1}{a}\int \dfrac{1 + \tan^2 t}{A\left(\tan^2 t + 1\right)}dt = \dfrac{t}{aA}$.

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm $I = \int \dfrac{dx}{x^2 + x + 1}$.

Lời giải: Ta có $I = \int \dfrac{dx}{\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}}$. Đặt $t = x + \dfrac{1}{2} \Rightarrow dt = d\left(x + \dfrac{1}{2}\right) = dx$.

$I = \int \dfrac{dt}{t^2 + \dfrac{3}{4}}$. Đặt $t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.\tan u \Rightarrow dt = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.\left(1 + \tan^2 u\right)du$.

$I = \int \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(1 + \tan^2 u\right)}{\dfrac{3}{4}.\tan^2 u + \dfrac{3}{4}}du = \dfrac{2}{\sqrt{3}}.\int du = \dfrac{2}{\sqrt{3}}.u + C$.

+ TH2: $\Delta = 0$ (phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm kép $x = -\dfrac{b}{2a}$).

Phương pháp: $I = \int \dfrac{dx}{a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2} = \dfrac{1}{a}\int \dfrac{d\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)}{\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2} = -\dfrac{1}{a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2} + C$

Ví dụ 2: Tìm nguyên hàm $I = \int \dfrac{dx}{x^2 - 2x + 1}$.

Lời giải: Ta có $I = \int \dfrac{dx}{(x-1)^2} = \int \dfrac{d(x-1)}{(x-1)^2} = -\dfrac{1}{x-1} + C$.

+ TH3: $\Delta > 0$ (phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$).

Phương pháp:

$$I=\int\frac{dx}{a\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\int\frac{\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)-\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)}{\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\int\left(\frac{1}{x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}-\frac{1}{x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}\right)dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\int\left(\frac{d\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)}{x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}-\frac{d\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)}{x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}\right)=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\ln\left|\frac{x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}{x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}\right|+C.$$

Ví dụ 3: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{x^2+3x+2}$.

Lời giải: Ta có $I=\int\frac{dx}{(x+1)(x+2)}=-\int\frac{(x+1)-(x+2)}{(x+1)(x+2)}dx$

$$=-\int\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1}\right)dx=-\ln\left|\frac{x+2}{x+1}\right|+C.$$

Bài tập minh họa

➢ **Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây**

a. $I=\int\frac{dx}{x^2+2x+1}=-\frac{1}{x+1}+C.$

b. $I=\int\frac{dx}{x^2-8x+15}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-5}{x-3}\right|+C.$

Dạng 7: $I=\int\frac{x}{ax^2+bx+c}dx$

Phương pháp: $I=\frac{1}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$

$=\frac{1}{2a}\int\frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{ax^2+bx+c}-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$

$=\frac{1}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right|-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ *(Dạng 6).*

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{x}{2x^2-7x+5}dx$.

Lời giải: $I=\frac{1}{4}\int\frac{4x-7}{2x^2-7x+5}dx+\frac{7}{4}\int\frac{dx}{2x^2-7x+5}$

$=\frac{1}{4}\int\frac{d\left(2x^2-7x+5\right)}{2x^2-7x+5}+\frac{7}{4}\int\frac{dx}{2x^2-7x+5}$

$=\frac{1}{4}\ln\left|2x^2-7x+5\right|+\frac{7}{4}\int\frac{dx}{2x^2-7x+5}$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{x}{-3x^2+4x+1}dx=-\frac{1}{6}\ln\left|-3x^2+4x+1\right|+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{-3x^2+4x+1}$.

b. $I=\int\frac{x}{4x^2-x+2}dx=\frac{1}{8}\ln\left|4x^2-x+2\right|-\frac{1}{8}\int\frac{dx}{4x^2-x+2}$.

c. $I=\int\frac{x}{3x^2+2x-10}dx=\frac{1}{6}\ln\left|3x^2+2x-10\right|-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{3x^2+2x-10}$.

Dạng 8: $I=\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx$

Phương pháp: $I=\int\frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{ax^2+bx+c}=\ln\left|ax^2+bx+c\right|+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx$.

Lời giải: $I=\int\frac{d\left(x^2+2x+5\right)}{x^2+2x+5}=\ln\left|x^2+2x+5\right|+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{4x-3}{2x^2-3x+12}dx=\ln\left|2x^2-3x+12\right|+C$.

b. $I=\int\frac{-6x+1}{-3x^2+x+1}dx=\ln\left|-3x^2+x+1\right|+C$.

c. $I=\int\frac{x+2}{\frac{x^2}{2}+2x+7}dx=\ln\left|\frac{x^2}{2}+2x+7\right|+C$.

Dạng 9: $I=\int\frac{cx+d}{(ax+b)^n}dx$

Phương pháp: $I=\frac{1}{a}\int\left[\frac{c}{a}(ax+b)+d-\frac{bc}{a}\right](ax+b)^{-n}d(ax+b)$

$=\frac{1}{a^2}\left[c.\frac{(ax+b)^{2-n}}{2-n}+(ad-bc).\frac{(ax+b)^{1-n}}{1-n}\right]+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{2x+3}{(x-1)^4}dx$.

Lời giải: Ta có $I=\int\left[2(x-1)+3+2\right](x-1)^{-4}d(x-1)$

$=\left[-(x-1)^{-2}-5\frac{(x-1)^{-3}}{3}\right]+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{-x+3}{(2x+7)^5}dx=\frac{1}{4}\left[\frac{(2x+7)^{-3}}{3}-3(2x+7)^{-4}\right]+C$.

b. $I=\int\frac{3x+4}{(3x-5)^6}dx=\frac{1}{9}\left[-\frac{3}{4}(3x+4)^{-4}-\frac{27}{5}(3x+4)^{-5}\right]+C$.

c. $I=\int\frac{x-9}{(-4x+1)^3}dx=\frac{1}{16}\left[-\frac{(x-9)^{-1}}{2}-\frac{35}{2}(x-9)^{-2}\right]+C$.

d. $I=\int\frac{\frac{2}{7}x-5}{(-3x+1)^7}dx=\frac{1}{9}\left[-\frac{2}{35}(-3x+1)^{-5}-\frac{103}{42}(-3x+1)^{-6}\right]+C$.

e. $I=\int\frac{4x-1}{(x-2)^8}dx=-\frac{2}{3}(x-2)^{-6}-\frac{5}{7}(x-2)^{-7}+C$.

Dạng 10: $I=\int\frac{a+bx^n}{x(cx^n+d)}dx$

Phương pháp: $I=\int\frac{(a+bx^n)x^{n-1}}{x^n(cx^n+d)}dx$.

Đặt $t=cx^n+d\Rightarrow x^n=\frac{t-d}{c}\Rightarrow\frac{dt}{nc}=x^{n-1}dx$.

$$I=\int\frac{a+b.\frac{t-d}{c}}{t\left(\frac{t-d}{c}\right)}.\frac{dt}{nc}=\frac{1}{nc}\int\frac{ac-bd+bt}{t(t-d)}dt$$

$$=\frac{ac-bd}{dnc}\int\frac{t-(t-d)}{t(t-d)}dt+\frac{b}{nc}\int\frac{dx}{t-d}$$

$$=\left(\frac{ac-bd}{dnc}+\frac{b}{nc}\right)\int\frac{dt}{t-d}-\frac{ac-bd}{dnc}\int\frac{dt}{t}$$

$$=\left(\frac{ac-bd}{dnc}+\frac{b}{nc}\right)\ln|t-d|-\frac{ac-bd}{dnc}\ln|t|+C.$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{5+x^3}{x(x^3+4)}dx=\int\frac{(5+x^3)x^2}{x^3(x^3+4)}dx$.

Lời giải: Đặt $t=x^3+4\Rightarrow x^3=t-4\Rightarrow 3x^2dx=dt\Rightarrow x^2dx=\frac{dt}{3}$.

$$I=\int\frac{5+t-4}{t(t-4)}.\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\int\frac{t+1}{t(t-4)}dt$$

$$=\frac{1}{12}\int\left[\frac{5}{t-4}-\frac{1}{t}\right]dt=\frac{5}{12}\ln|t-4|-\frac{1}{12}\ln|t|+C.$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{3+2x^4}{x\left(-x^4+5\right)}dx=-\frac{1}{4}\int\frac{2t-13}{t\left(t-5\right)}dt=\frac{1}{20}\left(3\ln\left|5-t\right|-13\ln\left|t\right|\right)+C.$

b. $I=\int\frac{1-9x^6}{x\left(x^6-2\right)}dx=\frac{1}{6}\int\frac{19-9t}{t\left(t+2\right)}dt=\frac{47}{12}\ln\left|t+2\right|-\frac{3}{4}\ln\left|t\right|+C.$

c. $I=\int\frac{5-6x^5}{x\left(3x^5-2\right)}dx=\frac{1}{15}\int\frac{27-6t}{t\left(t-2\right)}dt=\frac{1}{10}\left(5\ln\left|2-t\right|-9\ln\left|t\right|\right)+C.$

d. $I=\int\frac{2+7x^7}{x\left(5x^7-3\right)}dx=\frac{1}{35}\int\frac{7t+31}{t\left(t+3\right)}dt=\frac{1}{105}\left(31\ln\left|t\right|-10\ln\left|t+3\right|\right)+C.$

e. $I=\int\frac{-3+2x^8}{x\left(3x^8+1\right)}dx=\frac{1}{24}\int\frac{2t-20}{t\left(t-1\right)}dt=\frac{5\ln\left|t\right|}{6}-\frac{3}{4}\ln\left|1-t\right|+C.$

Dạng 11: $I=\int\frac{\left(ax+b\right)^n}{\left(cx+d\right)^{n+2}}dx$

Phương pháp: $I=\int\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^n.\frac{dx}{\left(cx+d\right)^2}$

$=\frac{1}{ad-bc}\int\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^n d\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)=\frac{1}{ad-bc}.\frac{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{n+1}}{n+1}+C.$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{\left(x-1\right)^2}{\left(2x+3\right)^4}dx.$

Lời giải: Ta có $I=\int\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)^3.\frac{dx}{\left(2x+3\right)^2}$

$=\frac{1}{5}\int\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)^3 d\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)=\frac{1}{20}\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)^4+C.$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{(-x+1)^3}{(3x-4)^5}dx=\frac{1}{4}\left(\frac{-x+1}{3x-4}\right)^4+C.$

b. $I=\int\frac{(-2x+5)^4}{(x+4)^6}dx=-\frac{1}{65}\left(\frac{-2x+5}{x+4}\right)^5+C.$

c. $I=\int\frac{(x+2)^5}{(x-4)^7}dx=-\frac{1}{36}\left(\frac{x+2}{x-4}\right)^6+C.$

d. $I=\int\frac{(3x+2)^4}{(2x-3)^6}dx=-\frac{1}{65}\left(\frac{3x+2}{2x-3}\right)^4+C.$

e. $I=\int\frac{\left(-\frac{1}{2}x+1\right)^3}{(x-4)^5}dx=\frac{1}{4}\left(\frac{-\frac{1}{2}x+1}{x-4}\right)^4+C.$

Dạng 12: $I=\int\frac{x^{2n-3}}{\left(ax^2+b\right)^n}dx$

Phương pháp: $I=\int\left(\frac{x^2}{ax^2+b}\right)^n.\frac{dx}{x^3}=\int\left(\frac{1}{a+bx^{-2}}\right)^n.\frac{dx}{x^3}$

$=-\frac{1}{2b}\int\left(a+bx^{-2}\right)^{-n}d\left(a+bx^{-2}\right)=-\frac{\left(a+bx^{-2}\right)^{1-n}}{2b(1-n)}+C.$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}dx.$

Lời giải:

$I=\int\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^2.\frac{dx}{x^3}=\int\left(\frac{1}{1+x^{-2}}\right)^2.\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2}\int\left(1+x^{-2}\right)^{-2}d\left(1+x^{-2}\right)$

Đặt $t=1+x^{-2}\Rightarrow dt=-2x^{-3}dx\Rightarrow\frac{dx}{x^3}=-\frac{dt}{2}.$

$I=-\frac{1}{2}\int t^{-2}dt=\frac{1}{2}t^{-1}+C=\frac{1}{2t}+C=\frac{1}{2\left(1+x^{-2}\right)}+C.$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{x^3}{\left(-2x^2+3\right)^3}dx=\frac{1}{12}t^{-2}+C=\frac{1}{12t^2}+C$.

b. $I=\int\frac{x^5}{\left(3x^2-4\right)^4}dx=-\frac{1}{24}t^{-3}+C=-\frac{1}{24t^3}+C$.

c. $I=\int\frac{x^7}{\left(5x^2+3\right)^5}dx=\frac{1}{24}t^{-4}+C=\frac{1}{24t^4}+C$.

d. $I=\int\frac{x^9}{\left(-x^2+5\right)^6}dx=-\frac{1}{50}t^{-5}+C=-\frac{1}{50t^5}+C$.

e. $I=\int\frac{x^3}{\left(3x^2+7\right)^3}dx=\frac{1}{28}t^{-2}+C=\frac{1}{28t^2}+C$.

Dạng 13: $I=\int\frac{x^{mn-m-1}}{\left(ax^m+b\right)^n}dx$

Phương pháp: $I=\int\left(\frac{x^m}{ax^m+b}\right)^n.\frac{dx}{x^{m+1}}=\int\left(\frac{1}{a+bx^{-m}}\right)^n d\left(a+bx^{-m}\right)$

$=-\frac{1}{bm}\int\left(a+bx^{-m}\right)^n d\left(a+bx^{-m}\right)=-\frac{\left(a+bx^{-m}\right)^{n+1}}{bm(n+1)}+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{x^2}{\left(x^3+1\right)^2}dx$.

Lời giải:

$I=\int\left(\frac{x^3}{x^3+1}\right)^2.\frac{dx}{x^4}=\int\left(\frac{1}{1+x^{-3}}\right)^2 d\left(1+x^{-3}\right)$

$=-\frac{1}{3}\int\left(1+x^{-3}\right)^2 d\left(1+x^{-3}\right)=-\frac{\left(1+x^{-3}\right)^3}{9}+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{x^4}{\left(2x^3-1\right)^3}dx=\frac{\left(2-x^{-3}\right)^4}{12}+C.$

b. $I=\int\frac{x^8}{\left(-3x^3+1\right)^4}dx=-\frac{\left(-3+x^{-3}\right)^5}{15}+C.$

c. $I=\int\frac{x^3}{\left(4x^4+3\right)^2}dx=-\frac{\left(4+3x^{-4}\right)^3}{36}+C.$

d. $I=\int\frac{x^7}{\left(-7x^4+3\right)^3}dx=-\frac{\left(-7+3x^{-4}\right)^4}{48}+C.$

e. $I=\int\frac{x^4}{\left(x^5+3\right)^2}dx=-\frac{\left(1+3x^{-5}\right)^3}{45}+C.$

Dạng 14: $I=\int\frac{x^2+1}{ax^4+bx^2+a}dx$

Phương pháp:

$$I=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b}dx=\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{a\left[\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\right]+b}=\int\frac{dt}{at^2+2a+b}.$$

Chú ý: Không áp dụng phương pháp này cho tích phân có đoạn cận đi qua 0.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{x^2+1}{-4x^4+2x^2-4}dx$.

Lời giải:

$$I=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{-4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2}dx=\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{-4\left[\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\right]+2}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{2t^2+3}.$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx$;

b. $I=\int\frac{x^2+1}{-x^4+x^2-1}dx$;

c. $I=\int\frac{x^2+1}{-x^4+2x^2-1}dx$;

d. $I=\int\frac{x^2+1}{x^4-2x^2+1}dx$;

e. $I=\int\frac{x^2+1}{4x^4+x^2+4}dx$.

Dạng 15: $I=\int\frac{x^2-1}{ax^4+bx^2+a}dx$

Phương pháp:

$$I=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b}dx=\int\frac{d\left(1+\frac{1}{x}\right)}{a\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^2-2\right]+b}=\int\frac{dt}{at^2-2a+b}.$$

Chú ý: Không áp dụng phương pháp này cho tích phân có đoạn cận đi qua 0.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{x^2-1}{3x^4+2x^2+3}dx$.

Lời giải: $I=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2}dx=\int\frac{d\left(1+\frac{1}{x}\right)}{3\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^2-2\right]+2}=\int\frac{dt}{3t^2-2}.$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx=\int\frac{dt}{t^2-1}$;

b. $I=\int\frac{x^2-1}{-x^4+x^2-1}dx=\int\frac{dt}{-t^2+3}$;

c. $I=\int\frac{x^2-1}{-x^4+2x^2-1}dx=\int\frac{dt}{-t^2+4}$;

d. $I=\int\frac{x^2-1}{x^4-2x^2+1}dx=\int\frac{dt}{t^2-4}$;

e. $I=\int\frac{x^2-1}{4x^4+x^2+4}dx=\int\frac{dt}{4t^2-7}$.

Dạng 16: $I=\int\frac{x^2-1}{ax^4+bx^3+cx^2+bx+a}dx$

Phương pháp: $I=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c}dx$

$=\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{a\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^2-2\right]+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c}=\int\frac{dt}{at^2+bt-2a+c}$.

Chú ý: Không áp dụng phương pháp này cho tích phân có đoạn cận đi qua 0.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{x^2-1}{11x^4+13x^3+15x^2+13x+11}dx$.

Lời giải:

$I=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{11\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+13\left(x+\frac{1}{x}\right)+15}dx=\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{11\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right]+13\left(x+\frac{1}{x}\right)+15}$

$=\int\frac{dt}{11t^2+13t-7}$.

Bài tập minh họa

➢ **Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây**

a. $I=\int\frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}dx=\int\frac{dt}{t^2+t-1}$.

b. $I=\int\frac{x^2-1}{-x^4+2x^3+3x^2+2x-1}dx=\int\frac{dt}{-t^2+2t+5}$.

c. $I=\int\frac{x^2-1}{x^4-3x^3+x^2-3x+1}dx=\int\frac{dt}{t^2-3t-1}$.

d. $I=\int\frac{x^2-1}{-x^4-4x^3+5x^2-4x-1}dx=\int\frac{dt}{-t^2-4t+7}$.

e. $I=\int\frac{x^2-1}{x^4+9x^3-3x^2+9x+1}dx=\int\frac{dt}{t^2+9t-5}$.

Dạng 17: $I=\int\frac{dx}{(x-a)^2(x-b)^2}$

Phương pháp: $I=\frac{1}{(b-a)^2}\int\frac{[x-a-(x-b)]^2}{(x-a)(x-b)}dx$

$=\frac{1}{(b-a)^2}\int\frac{(x-a)^2-2(x-a)(x-b)+(x-b)^2}{(x-a)^2(x-b)^2}dx$

$I=\frac{1}{(b-a)^2}\int\left[\frac{1}{(x-a)^2}+\frac{1}{(x-b)^2}-\frac{2}{(x-a)(x-b)}\right]dx$

$=\frac{1}{(b-a)^2}\int\left[\frac{1}{(x-a)^2}+\frac{1}{(x-b)^2}-\frac{2}{b-a}\left(\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-a}\right)\right]dx$

$=\frac{1}{(b-a)^2}\left[-\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}-\frac{2}{(b-a)}\ln\left|\frac{x-b}{x-a}\right|\right]+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{(x-1)^2(x-2)^2}$.

Lời giải:

$I=\int\frac{[(x-1)-(x-2)]^2}{(x-1)^2(x-2)^2}dx=\int\frac{(x-1)^2-2(x-1)(x-2)+(x-2)^2}{(x-1)^2(x-2)^2}dx$

$=\int\left[\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{2}{(x-1)(x-2)}\right]dx$

$=\int\left[\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-2)^2}-2\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)\right]dx$

$=-\frac{1}{(x-1)}-\frac{1}{(x-2)}-2\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{dx}{(x+1)^2(x+5)^2}=\frac{1}{16}\left[-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+5)^2}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+5}\right|\right]+C.$

b. $I=\int\frac{dx}{(x-2)^2(x+7)^2}=\frac{1}{81}\left[-\frac{1}{(x-2)}-\frac{1}{(x+7)}-\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x+7}{x-2}\right|\right]+C.$

c. $I=\int\frac{dx}{(x-3)^2(x+5)^2}=\frac{1}{64}\left[-\frac{1}{(x-3)}-\frac{1}{(x+5)}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+5}{x-3}\right|\right]+C.$

d. $I=\int\frac{dx}{(x+4)^2(x-5)^2}=\frac{1}{81}\left[-\frac{1}{(x+4)}-\frac{1}{(x-5)}-\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-5}{x+4}\right|\right]+C.$

e. $I=\int\frac{dx}{(x-3)^2(x+1)^2}=\frac{1}{16}\left[-\frac{1}{(x-3)}-\frac{1}{(x+1)}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|\right]+C.$

Dạng 18: $I=\int\frac{dx}{(ax+b)^n(cx+d)^{n+2}}$

Phương pháp: $I=\int\frac{1}{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^n}\cdot\frac{1}{\left(\frac{bc}{a}-d\right)}\left[\frac{c}{a}\cdot\frac{ax+b}{cx+d}-1\right]^{-2n}\cdot\frac{dx}{(cx+d)^2}.$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{(x-1)(x-2)^3}.$

Lời giải: $I=\int\frac{1}{\left(\frac{x-1}{x-2}\right)}\cdot\frac{1}{(2-x)}\cdot\left[\frac{x-1}{x-2}-1\right]^{-2}\cdot\frac{dx}{(x-2)^2}.$

Đặt $t=\frac{x-1}{x-2}\Rightarrow -dt=\frac{dx}{(x-2)^2}.$

$I=\int(t-1)^2\,dt=\int(t-1)^2\,d(t-1)=\frac{(t-1)^3}{3}+C.$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{dx}{(1-x)^2(x-5)^4}=\frac{1}{16}\int\frac{(t+1)^4}{t^2}dt$.

b. $I=\int\frac{dx}{(x-2)^3(3x-7)^5}=-\int\frac{(3t-1)^6}{t^3}dt$.

c. $I=\int\frac{dx}{(5-2x)^4(2x-3)^6}=\frac{1}{2048}\int\frac{(2t+2)^8}{t^4}dt$.

d. $I=\int\frac{dx}{(x-3)^5(x+1)^7}=-\frac{1}{16}\int\frac{(t-1)^{10}}{t^5}dt$.

e. $I=\int\frac{dx}{(x+3)^3(2x-5)^5}=-\frac{1}{121}\int\frac{(2t-1)^6}{t^3}dt$.

Dạng 19: $I=\int\frac{x^{2n-1}}{ax^{2n}+bx^n+c}dx$

Phương pháp: $I=\int\frac{x^{2n}}{x\left(ax^{2n}+bx^n+c\right)}dt$.

Đặt $t=x^n\Rightarrow dt=n.x^{n-1}dx=n.\frac{x^n}{x}dx\Rightarrow\frac{dt}{nt}=\frac{dx}{x}$.

$I=\frac{1}{n}\int\frac{t^2}{t\left(at^2+bt+c\right)}dt=\frac{1}{n}\int\frac{t}{at^2+bt+c}dt$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{x^3}{3x^4-5x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{t}{3t^2-5t+1}dt$.

b. $I=\int\frac{x^5}{5x^6+2x^3-11}dx=\frac{1}{3}\int\frac{t}{5t^2+2t-11}dt$.

c. $I=\int\frac{x^7}{13x^8-25x^4}dx=\frac{1}{4}\int\frac{t}{13t^2-25t}dt$.

Dạng 20: $I=\int\frac{amx^{m-1}+bnx^{n-1}}{ax^m+bx^n+c}dx$

Phương pháp: $I=\int\frac{d\left(ax^m+bx^n+c\right)}{ax^m+bx^n+c}=\ln\left|ax^m+bx^n+c\right|+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{9x^2+4x}{3x^3+2x^2+1}dx$.

Lời giải: $I=\int\frac{d\left(3x^3+2x^2+1\right)}{3x^3+2x^2+1}=\ln\left|3x^3+2x^2+1\right|+C$.

Bài tập minh họa

➢ **Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây**

a. $I=\int\frac{42x^5+30x^4}{7x^6+6x^5+4}dx=\ln\left|7x^6+6x^5+4\right|+C$.

b. $I=\int\frac{2x+12x^3}{x^2+3x^4+10}dx=\ln\left|x^2+3x^4+10\right|+C$.

c. $I=\int\frac{15x^4+15x^2}{3x^5+5x^3+7}dx=\ln\left|3x^5+5x^3+7\right|+C$.

III. KỸ THUẬT NHẨM HỆ SỐ TRONG ĐỒNG NHẤT THỨC

Trong các bài tính tích phân bất định, hoặc những bài tính tích phân của hàm phức bằng lý thuyết thặng dư, chúng ta ắt sẽ gặp những dạng phân thức hữu tỷ mà để tính được thì phải chuyển về các phân thức hữu tỷ thật sự (có bậc tử bé hơn bậc mẫu và mẫu số là nhị thức bậc nhất hoặc tam thức bậc hai vô nghiệm).

Phương pháp chung của dạng toán này là bạn phải sử dụng phương pháp đồng nhất hệ số. Tuy nhiên, nếu làm theo cách này sẽ rất lâu và tốn nhiều công sức.

1. Phương pháp 1: Kỹ thuật che hạng tử

Này nhé:

Với $\frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}$ (bậc của $P(x)$ nhỏ hơn 2) thì ta phải phân tích thành: $\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}$.

Sau đó, quy đồng mẫu số rồi đồng nhất hệ số hai vế để xác định các hệ số A, B, C.

Tuy nhiên việc này rất mất thời gian nên chúng ta sẽ tiếp cận với một thủ thuật khác, giúp ta tính nhanh các hệ số mà không cần phải trải qua bước quy đồng mẫu số.

Thật vậy, giả sử:

$$\frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}$$

Để xác định hệ số A, ta chỉ cần che biểu thức $(x-x_1)$ ở vế trái lại, nghĩa là khi đó ở vế trái ta sẽ có $\frac{P(x)}{(x-x_2)(x-x_3)}$ (*).

Sau đó thế $x=x_1$ vào (*) thì giá trị tính được chính là hệ số A, hay:

$$A=\frac{P(x_1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

Tương tự:

Để xác định hệ số B, ta chỉ cần che biểu thức $(x-x_2)$ ở vế trái lại, nghĩa là khi đó ở vế trái ta sẽ có $\frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_3)}$ (*).

Sau đó thế $x=x_2$ vào (*) thì giá trị tính được chính là hệ số B, hay:

$$B=\frac{P(x_2)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

Tương tự đối với việc xác định hệ số C:

$$C=\frac{P(x_3)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Ví dụ 1

Phân tích $\frac{3x+2}{(x-3)(x+1)(x-2)}$.

Ta có $\frac{3x+2}{(x-3)(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}$.

Che thừa số $(x-3)$ ở mẫu số và thế $x=3$ vào phân thức mới là $\frac{3x+2}{(x+1)(x-2)}$ ta được $A=\frac{3.3+2}{(3+1)(3-2)}=\frac{11}{4}$.

Tương tự, che thừa số $(x+1)$ ở mẫu số rồi thế $x=-1$ vào phân thức mới là $\frac{3x+2}{(x-3)(x-2)}$, ta được $B=\frac{3(-1)+2}{(-1-3)(-1-2)}=-\frac{1}{12}$.

Tiếp tục che thừa số $(x-2)$ lại rồi thế $x=2$ vào phân thức mới là $\frac{3x+2}{(x-3)(x+1)}$, ta được $C=\frac{3.2+2}{(2-3)(2+1)}=-\frac{8}{3}$.

Như vậy ta sẽ có:

$$\frac{3x+2}{(x-3)(x+1)(x-2)}=\frac{11}{4(x-3)}-\frac{1}{12(x+1)}-\frac{8}{3(x-2)}.$$

Ví dụ 2 Phân tích $\frac{x+5}{x(x+2)(x-4)}$.

Ta có $\frac{x+5}{x(x+2)(x-4)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-4}$.

Che thừa số x ở mẫu số và thế $x=0$ vào phân thức mới là $\frac{x+5}{(x+2)(x-4)}$, ta được $A=\frac{0+5}{(0+2)(0-4)}=-\frac{5}{8}$.

Tương tự, che thừa số $(x+2)$ ở mẫu số rồi thế $x=-2$ vào phân thức mới là $\frac{x+5}{x(x-4)}$, ta được $B=\frac{-2+5}{-2(-2-4)}=\frac{1}{4}$.

Tiếp tục che thừa số $(x-4)$ lại rồi thế $x=4$ vào phân thức mới là $\frac{x+5}{x(x+2)}$ ta được $C=\frac{4+5}{4(4+2)}=\frac{3}{8}$.

Như vậy ta sẽ có:

$$\frac{x+5}{x(x+2)(x-4)}=-\frac{5}{8x}+\frac{1}{4(x+2)}+\frac{3}{8(x-4)}.$$

2. Phương pháp 2: Kỹ thuật sử dụng máy tính bỏ túi

Bài toán: Tính tích phân $I=\int_1^2\frac{x^2+x-1}{(x+3)^4}dx$.

Lời bình: Để tính được tích phân này ta phải thực hiện thao tác đồng nhất thức (giải hệ phương trình, hoặc như Phương pháp 1). Tuy nhiên, nó đều có mặt hạn chế, nên trong phương pháp này, các bạn sẽ được tiếp cận 1 thủ thuật mới mà không cần dùng tới giấy nháp.

➢ Lời giải: Trước hết ta phải phân tích hàm $\frac{x^2+x-1}{(x+3)^4}$ trở về đơn gian hơn.

- *Bước 1:* Viết lại biểu thức dưới dạng

$$\frac{x^2+x-1}{(x+3)^4}=\frac{a}{(x+3)^4}+\frac{b}{(x+3)^3}+\frac{c}{(x+3)^2}+\frac{d}{x+3}+e.$$

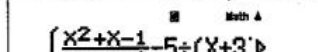
- *Bước 2:*

a. Tìm hệ số a.

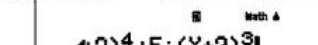
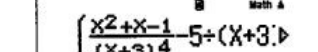
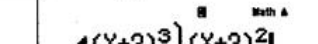
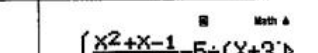
Thao tác trên máy tính	Máy tính hiển thị
Nhập $\frac{x^2+x-1}{(x+3)^4}\times(x+3)^4$	$\frac{X^2+X-1}{(X+3)^4}\times(X+3)^4$
Ấn CALC	X? 0
Nhập $-3+10^{-8}$	-3+10^(-8) 0
Ấn =	$\frac{X^2+X-1}{(X+3)^4}\times(X+3)^4$ 4.99999995
Vậy $a=5$.	

b. Tìm hệ số b.

Thao tác trên máy tính	Máy tính hiển thị
Nhập $\frac{x^2+x-1}{(x+3)^4}-5:(x+3)^4$	$\frac{X^2+X-1}{(X+3)^4}-5\div(X+3)^4$
Ấn =	$\frac{X^2+X-1}{(X+3)^4}-5\div(X+3)^4$ -4.99999999×10^{24}

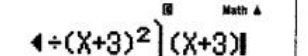
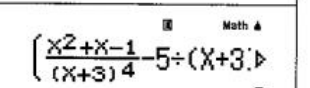
Nhập $\left(\frac{x^2+x-1}{(x+3)^4}-5:(x+3)^4\right)(x+3)^3$	
Ấn =	
Vậy $b=-5$.	

c. Tìm hệ số c.

Thao tác trên máy tính	Máy tính hiển thị
Nhập $\frac{x^2+x-1}{(x+3)^4}-5:(x+3)^4+5:(x+3)^3$	
Ấn =	
Nhập $\left(\frac{x^2+x-1}{(x+3)^4}-5:(x+3)^4+5:(x+3)^3\right)(x+3)^2$	
Ấn =	
Vậy $c=1$.	

d. Tìm hệ số d.

Thao tác trên máy tính	Máy tính hiển thị
Nhập $\frac{x^2+x-1}{(x+3)^4}-5:(x+3)^4+5:(x+3)^3-1:(x+3)^2$	

Nhập $\left(\begin{matrix}\frac{x^2+x-1}{(x+3)^4}-5:(x+3)^4\\ +5:(x+3)^3-1:(x+3)^2\end{matrix}\right)(x+3)$	
Ấn =	
Vậy $d=0$.	

Nên ta có các hệ số là $a=5; b=-5; c=1; d=0$ và không cần tính ta cũng biết $e=0$).

Bước 3: Như vậy $\frac{x^2+x-1}{(x+3)^4}=\frac{5}{(x+3)^4}-\frac{5}{(x+3)^3}+\frac{1}{(x+3)^2}$.

Bước 4: Suy ra $I=\int_1^2\frac{x^2+x-1}{(x+3)^4}dx=\int_1^2\left[\frac{5}{(x+3)^4}-\frac{5}{(x+3)^3}+\frac{1}{(x+3)^2}\right]dx$

$=\left[-\frac{5}{3(x+3)^3}+\frac{5}{2(x+3)^2}-\frac{1}{x+3}\right]\Bigg|_1^2=\frac{3}{4800}$.

Bằng hai cách này chúng ta sẽ thấy rằng việc phân tích phân thức hữu tỷ cũng không quá phức tạp và chúng ta đã giải quyết bài toán phân tích một cách nhẹ nhàng.

IV. NGUYÊN TẮC GIẢI

Xét nguyên hàm của hàm phân thức hữu tỉ $I=\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$

Nguyên tắc: Khi bậc của tử số $P(x)$ lớn hơn $Q(x)$ thì ta phải chia đa thức để quy về nguyên hàm có bậc của tử số nhỏ hơn mẫu số.

1. Dạng 1: Mẫu số là bậc nhất

Khi đó $Q(x)=ax+b$.

- Nếu bậc của $P(x)$ lớn hơn thì ta chia đa thức.



• Khi $P(x)$ là hằng số (bậc bằng 0) thì ta có

$$I=\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int\frac{k}{ax+b}dx=\frac{k}{a}\int\frac{d(ax+b)}{ax+b}=\frac{k}{a}\ln|ax+b|+C.$$

Ví dụ 1 Tìm nguyên hàm của hàm số

a. $I_1=\int\frac{4}{2x-1}dx.$ b. $I_2=\int\frac{x+1}{x-1}dx.$

c. $I_3=\int\frac{2x+1}{3-4x}dx.$ d. $I_4=\int\frac{x^2+x+4}{x+3}dx.$

➢ Lời giải

a. $I_1=\int\frac{4}{2x-1}dx=\frac{4}{2}\int\frac{d(2x-1)}{2x-1}=2\ln|2x-1|+C.$

b. $I_2=\int\frac{x+1}{x-1}dx=\int\frac{x-1+2}{x-1}dx=\int\left(1+\frac{2}{x-1}\right)dx$

$=\int dx+2\int\frac{dx}{x-1}=x+2\ln|x-1|+C.$

c. $I_3=\int\frac{2x+1}{3-4x}dx=\int\frac{-\frac{1}{2}(3-4x)+\frac{5}{2}}{3-4x}dx=\int\left[-\frac{1}{2}+\frac{5}{2(3-4x)}\right]dx$

$=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\int\frac{dx}{3-4x}=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{8}\int\frac{d(3-4x)}{3-4x}=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{8}\ln|3-4x|+C$

$\Rightarrow I_3=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{8}\ln|3-4x|+C.$

d. $I_4=\int\frac{x^2+x+4}{x+3}dx=\int\left(x-2+\frac{10}{x+3}\right)dx$

$=\int(x-2)dx+10\int\frac{d(x+3)}{x+3}=\frac{x^2}{2}-2x+10\ln|x+3|+C.$

Ví dụ 2 Tìm nguyên hàm của các hàm số

a. $I_1=\int\frac{x^3-x+7}{2x+5}dx.$

b. $I_6=\int\frac{3x^3+3x^2+x+2}{x-1}dx.$

c. $I_7=\int\frac{4x^4+3x^2+x+2}{2x+1}dx.$

➢ Lời giải

a. Chia tử số cho mẫu số, ta được $\frac{x^3-x+7}{2x+5}=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{21}{8}-\frac{\frac{49}{8}}{2x+5}$.

$$I_1=\int\frac{x^3-x+7}{2x+5}dx=\int\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{21}{8}-\frac{\frac{49}{8}}{2x+5}\right)dx$$

$$=\int\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{21}{8}\right)dx-\frac{49}{8}\int\frac{dx}{2x+5}$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{x^3}{3}-\frac{5}{4}.\frac{x^2}{2}+\frac{21}{8}x-\frac{49}{16}\int\frac{d(2x+5)}{2x+5}$$

$$=\frac{x^3}{6}-\frac{5x^2}{8}+\frac{21}{8}x-\frac{49}{16}\ln|2x+5|+C.$$

b. $I_2=\int\frac{3x^3+3x^2+x+2}{x-1}dx=\int\left(3x^2+6x+7+\frac{9}{x-1}\right)dx$

$$=x^3+3x^2+7x+9\ln|x-1|+C.$$

c. Chia tử số cho mẫu số ta được

$$\frac{4x^4+3x^2+x+2}{2x+1}=2x^3-x^2+2x-\frac{1}{2}+\frac{\frac{5}{2}}{2x+1}$$

$$I_3=\int\frac{4x^4+3x^2+x+2}{2x+1}dx=\int\left(2x^3-x^2+2x-\frac{1}{2}+\frac{\frac{5}{2}}{2x+1}\right)dx.$$

Bài tập bạn đọc tự giải

1) $I_1=\int\frac{2x-1}{x+3}dx$.

2) $I_2=\int\frac{x^2+3x-1}{x+1}dx$.

3) $I_3=\int\frac{3x^3+3x^2+x+2}{x-1}dx$.

4) $I_4=\int\frac{x^3-x+7}{2x+5}dx$.

5) $I_5=\int\frac{x+1}{4-3x}dx$.

6) $I_6=\int\frac{5x^4-3x^2+x}{3x+1}dx$.

2. Dạng 2: Mẫu số là tam thức bậc hai

Khi đó $Q(x)=ax^2+bx+c$. Ta có ba khả năng xảy ra với $Q(x)$

a. *TH1:* $Q(x)=0$ *có hai nghiệm phân biệt* x_1,x_2.

• Nếu $P(x)$ là hằng số thì ta sử dụng thuật phân tích tử số có chứa nghiệm của mẫu số.

• Nếu $P(x)$ bậc nhất thì ta phân tích

$$Q(x)=a(x-x_1)(x-x_2)\Rightarrow\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{a(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{1}{a}\left(\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}\right)$$

Đồng nhất hệ số ở hai vế ta được A,B. Từ đó, quy về bài toán nguyên hàm có mẫu số là hàm bậc nhất đã xét ở trên.

• Nếu $P(x)$ có bậc lớn hơn hoặc bằng 2 thì ta chia đa thức, quy bài toán về hai trường hợp có bậc của $P(x)$ như trên để giải.

Chú ý: Việc phân tích đa thức thành nhân tử với các phương trình bậc hai có hệ số a khác 1 phải theo quy tắc $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Ví dụ: $3x^2-4x+1=\begin{cases}(x-1)(3x-1) & \text{Đúng}\\ (x-1)\left(x-\frac{1}{3}\right) & \text{Sai}\end{cases}$

• Khi tử số là bậc nhất thì ngoài cách đồng nhất ở trên, ta có thể phân tích tử số có chứa đạo hàm của mẫu, rồi tách thành 2 nguyên hàm (xem các ví dụ ở đây).

Ví dụ 1 Tìm nguyên hàm của các hàm số

a. $I_1=\int\frac{dx}{x^2-2x-3}$. **b.** $I_2=\int\frac{2}{-3x^2+4x-1}dx$.

c. $I_3=\int\frac{2x+3}{x^2-3x-4}dx$. **d.** $I_4=\int\frac{3x+4}{5x^2+6x+1}dx$.

➢ Lời giải

a. $I_1=\int\frac{dx}{x^2-2x-3}=\int\frac{dx}{(x+1)(x-3)}$

$=\frac{1}{4}\left(\int\frac{dx}{x-3}-\int\frac{dx}{x+1}\right)=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|+C$.

b. $I_2=\int\frac{2}{-3x^2+4x-1}dx=-2\int\frac{dx}{3x^2-4x+1}$

$$=-2\int\frac{dx}{(x-1)(3x-1)}=-1\int\frac{(3x-1)-3(x-1)}{(x-1)(3x-1)}dx$$

$$=-1\left(\int\frac{dx}{x-1}-3\int\frac{dx}{3x-1}\right)=-\ln|x-1|+\ln|3x-1|+C=1\ln\left|\frac{3x-1}{x-1}\right|+C.$$

c. Cách 1: Nhận thấy mẫu số có hai nghiệm $x=-1;x=4$, khi đó

$$\frac{2x+3}{x^2-3x-4}=\frac{2x+3}{(x+1)(x-4)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-4}$$

Đồng nhất thức, ta được

$$2x+3=A(x-4)+B(x+1)\Leftrightarrow\begin{cases}2=A+B\\3=-4A+B\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-\dfrac{1}{5}\\B=\dfrac{11}{5}\end{cases}.$$

Từ đó $I_3=\int\frac{2x+3}{x^2-3x-4}dx=\int\left(\frac{-1}{5(x+1)}+\frac{11}{5(x-4)}\right)dx$

$$=-\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{11}{5}\int\frac{dx}{x-4}=-\frac{1}{5}\ln|x+1|+\frac{11}{5}\ln|x-4|+C.$$

Vậy $I_3=-\frac{1}{5}\ln|x+1|+\frac{11}{5}\ln|x-4|+C$.

Cách 2: Do mẫu số có đạo hàm là $2x-3$ nên ta sẽ phân tích tử số có chứa đạo hàm của mẫu số như sau

$$I_3=\int\frac{2x+3}{x^2-3x-4}dx=\int\frac{2x-3+6}{x^2-3x-4}dx$$

$$=\int\frac{2x-3}{x^2-3x-4}dx+6\int\frac{dx}{x^2-3x-4}=\int\frac{d\left(x^2-3x-4\right)}{x^2-3x-4}+6\int\frac{dx}{(x-4)(x+1)}$$

$$=\ln\left|x^2-3x-4\right|+\frac{6}{5}\int\frac{(x+1)-(x-4)}{(x+1)(x-4)}dx$$

$$=\ln\left|x^2-3x-4\right|+\frac{6}{5}\left(\int\frac{dx}{x-4}-\int\frac{dx}{x+1}\right)=\ln\left(x^2-3x-4\right)+\frac{6}{5}\ln\left|\frac{x-4}{x+1}\right|+C.$$

Nhận xét: Nhìn hai cách giải, thoạt nhìn chúng ta lầm tưởng là bài toán hai đáp số. Nhưng chỉ bằng một vài phép biến đổi logarit đơn giản ta có ngay cùng kết quả .

$$\ln\left(x^2-3x-4\right)+\frac{6}{5}\ln\left|\frac{x-4}{x+1}\right|$$

$$=\ln|x-4|+\ln|x+1|+\frac{6}{5}\ln|x-4|-\frac{6}{5}\ln|x+1|+C$$

$$=-\frac{1}{5}\ln|x+1|+\frac{11}{5}\ln|x-4|.$$

Rõ ràng, chúng ta thấy ngay ưu điểm của cách 2 là không phải đồng nhất, và cũng không dung đến giấy nháp ta có thể giải quyết nhanh gọn bài toán và đó là điều mà tôi mong muốn các bạn thực hiện được.

d. Cách 1: Ta có $\frac{3x+4}{(x+1)(5x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{5x+1}$

$$\Rightarrow 3x+4=A(5x+1)+B(x+1)\Leftrightarrow\begin{cases}3=5A+B\\4=A+B\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-\frac{1}{4}\\B=\frac{17}{4}\end{cases}.$$

Từ đó $I_4=\int\frac{3x+4}{(x+1)(5x+6)}dx=\int\left[-\frac{1}{4(x+1)}+\frac{17}{4(5x+1)}\right]dx$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{17}{4}\int\frac{dx}{5x+1}$$

$$\Rightarrow I_4=-\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{17}{20}\ln|5x+1|+C.$$

Cách 2: Do mẫu số có đạo hàm là $10x+6$ nên ta sẽ phân tích tử số có chưa đạo hàm của mẫu như sau:

$$I_4=\int\frac{3x+4}{5x^2+6x+1}dx=\int\frac{\frac{3}{10}(10x+6)+\frac{22}{10}}{5x^2+6x+1}dx$$

$$=\frac{3}{10}\int\frac{(10x+6)}{5x^2+6x+1}dx+\frac{22}{10}\int\frac{dx}{5x^2+6x+1}$$

$$=\frac{3}{10}\int\frac{d\left(5x^2+6x+1\right)}{5x^2+6x+1}+\frac{22}{10}\int\frac{dx}{(5x+1)(x+1)}$$

$$=\frac{3}{10}\ln|5x^2+6x+1|-\frac{22}{40}\int\frac{(5x+1)-5(x+1)}{(5x+1)(x+1)}dx$$

$$=\frac{3}{10}\ln\left|5x^2+6x+1\right|-\frac{22}{40}\left(\int\frac{dx}{x+1}-5\int\frac{dx}{5x+1}\right)$$

$$=\frac{3}{10}\ln\left|5x^2+6x+1\right|-\frac{11}{20}\ln\left|\frac{x+1}{5x+1}\right|+C.$$

Ví dụ 2 Tìm nguyên hàm của các hàm số

a. $I_1=\int\frac{4x^3+2x-1}{x^2-1}dx.$

b. $I_2=\int\frac{5-x}{3-2x-x^2}dx.$

➢ Lời giải

a. Do tử số có bậc lớn hơn mẫu nên chia đa thức ta được

$$I_1=\int\frac{4x^3+2x-1}{x^2-1}dx=\int\left(4x+\frac{6x-1}{x^2-1}\right)dx$$

Ta có $\frac{6x-1}{x^2-1}=\frac{6x-1}{(x-1)(x+1)}$

$$=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}\Rightarrow 6x-1=A(x-1)+B(x+1)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}6=A+B\\-1=-A+B\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\frac{7}{2}\\B=\frac{5}{2}\end{cases}$$

$$I_1=\int\left[4x+\frac{7}{2(x+1)}+\frac{5}{2(x-1)}\right]dx=2x^2+\frac{7}{2}\ln|x+1|+\frac{5}{2}\ln|x-1|+C.$$

b. Ta có $\frac{5-x}{3-2x-x^2}=\frac{x-5}{x^2+2x-3}=\frac{x-5}{(x-1)(x+3)}$

$$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}\Rightarrow x-5=A(x+3)+B(x-1)\Rightarrow\begin{cases}1=A+B\\-5=3A-B\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-1\\B=2\end{cases}.$$

Từ đó $I_2=\int\frac{x-5}{3-2x-x^2}dx=\int\left(\frac{-1}{x-1}+\frac{2}{x+3}\right)dx$

$$=-\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{x+3}=-\ln|x-1|+2\ln|x+3|+C=\ln\left|\frac{(x+3)^2}{x-1}\right|+C$$

$$\Rightarrow I_2=\ln\left|\frac{(x+3)^2}{x-1}\right|+C.$$



b. TH2: $Q(x)=0$ có nghiệm kép

Khi đó $Q(x)$ được biểu diễn dưới dạng

$$Q(x)=(ax+b)^2 \Rightarrow I=\int \frac{P(x)}{(ax+b)^2}dx.$$

• Nếu $P(x)$ là hằng số thì ta sử dụng các biến đổi sau

$$\begin{cases} dx=\frac{1}{a}d(ax+b) \\ \int \frac{du}{u^2}=-\frac{1}{u}+C \end{cases}.$$

• Nếu $P(x)=mx+n$

$$\Rightarrow I=\int \frac{mx+n}{(ax+b)^2}dx=\int \frac{\frac{m}{a}(ax+b)+n-\frac{bm}{a}}{(ax+b)^2}dx$$

$$=\frac{m}{a}\int \frac{dx}{ax+b}+\left(n-\frac{bm}{a}\right)\int \frac{dx}{(ax+b)^2}=\frac{m}{a^2}\int \frac{d(ax+b)}{ax+b}+\frac{n-\frac{bm}{a}}{a}\int \frac{d(ax+b)}{(ax+b)^2}$$

$$=\frac{m}{a^2}\ln|ax+b|-\left(\frac{na-bm}{a^2}\right).\frac{1}{ax+b}+C.$$

• Nếu $P(x)$ có bậc lớn hơn hoặc bằng 2 thì ta chia đa thức, quy bài toán về hai trường hợp có bậc của $P(x)$ như trên để giải.

Chú ý: Ngoài cách giải đã nêu trên, dạng nguyên hàm này có cách giải tổng quát là đặt $t=ax+b \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{t-b}{a} \\ dt=adx \end{cases}$.

Ví dụ 1 Tìm nguyên hàm của các hàm số

a. $I_1=\int \frac{2}{x^2-2x+1}dx$.

b. $I_2=\int \frac{dx}{6x^2+9x+1}$.

c. $I_3=\int \frac{dx}{25x^2-10x+1}$.

➢ Lời giải

a. $I_1=\int\frac{2dx}{x^2-2x+1}=2\int\frac{dx}{(x-1)^2}=2\int\frac{d(x-1)}{(x-1)^2}=-\frac{2}{x-1}+C$

$\Rightarrow I_1=-\frac{2}{x-1}+C$.

b. $I_2=\int\frac{dx}{6x^2+9x+1}=\int\frac{dx}{(3x+1)^2}=\frac{1}{3}\int\frac{d(3x+1)}{(3x+1)^2}=-\frac{1}{3(3x+1)}+C$

$\Rightarrow I_2=-\frac{1}{3(3x+1)}+C$.

c. $I_3=\int\frac{dx}{25x^2-10x+1}=\int\frac{dx}{(5x-1)^2}=\frac{1}{5}\int\frac{d(5x-1)}{(5x-1)^2}=-\frac{1}{5(5x-1)}+C$

$\Rightarrow I_3=-\frac{1}{5(5x-1)}+C$.

Ví dụ 2 Tìm nguyên hàm của các hàm số

a. $I_1=\int\frac{2x-1}{4x^2+4x+1}dx$.

b. $I_2=\int\frac{4x^2-3}{4x^2+12x+9}dx$.

c. $I_3=\int\frac{1-5x}{9x^2-24x+16}dx$.

➢ Lời giải

a. $I_1=\int\frac{2x-1}{4x^2+4x+1}dx=\int\frac{2x-1}{(2x+1)^2}dx$

Cách 1: Đặt $t=2x+1\Rightarrow\begin{cases}2x=t-1\\dt=2dx\end{cases}$.

$I_1=\int\frac{2x-1}{(2x+1)^2}dx=\int\frac{t-2}{t^2}\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\left(\int\frac{dt}{t}-\int\frac{2dt}{t^2}\right)=\frac{1}{2}\ln|t|+\frac{1}{t}+C$

$\Rightarrow I_1=\frac{1}{2}\ln|2x+1|+\frac{1}{2x+1}+C$.

Cách 2: $I_1=\int\frac{2x-1}{4x^2+4x+1}dx=\int\frac{\frac{1}{4}(8x+4)-2}{4x^2+4x+1}dx$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{(8x+4)}{4x^2+4x+1}dx-2\int\frac{dx}{(2x+1)^2}=\frac{1}{4}\int\frac{d(4x^2+4x+1)}{4x^2+4x+1}-\int\frac{d(2x+1)}{(2x+1)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\ln|4x^2+4x+1|+\frac{1}{2x+1}+C=\frac{1}{2}\ln|2x+1|+\frac{1}{2x+1}+C.$$

b. $I_2=\int\frac{4x^2-3}{4x^2+12x+9}dx=\int\left(1-\frac{12x+12}{4x^2+12x+9}\right)dx$

$$=\int dx-12\int\frac{dx}{(2x+3)^2}=x-6\int\frac{d(2x+3)}{(2x+3)^2}=x+\frac{6}{2x+3}+C$$

c. $I_3=\int\frac{1-5x}{9x^2-24x+16}dx=\int\frac{1-5x}{(3x-4)^2}dx.$

Cách 1: Đặt $t=3x-4\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{t+4}{3}\\dt=3dx\end{cases}.$

$$I_3=\int\frac{1-5x}{(3x-4)^2}dx=\int\frac{1-\frac{5(t+4)}{3}}{t^2}\frac{dt}{3}$$

$$=-\frac{1}{9}\int\frac{5t+17}{t^2}dt=-\frac{1}{9}\left(5\ln|t|+\frac{17}{t}\right)+C$$

$$\Rightarrow I_3=-\frac{1}{9}\left(5\ln|3x-4|+\frac{17}{3x-4}\right)+C=-\frac{5}{9}\ln|3x-4|+\frac{17}{9(3x-4)}+C.$$

Cách 2: $I_3=\int\frac{1-5x}{(3x-4)^2}dx=\int\frac{-\frac{5}{3}(3x-4)-\frac{17}{3}}{(3x-4)^2}dx$

$$=-\frac{5}{3}\int\frac{dx}{3x-4}-\frac{17}{3}\int\frac{dx}{(3x-4)^2}=-\frac{5}{9}\int\frac{d(3x-4)}{3x-4}-\frac{17}{9}\int\frac{d(3x-4)}{(3x-4)^2}$$

$$=-\frac{5}{9}\ln|3x-4|+\frac{17}{9}.\frac{1}{3x-4}+C$$

$$\Rightarrow I_3=-\frac{5}{9}\ln|3x-4|+\frac{17}{9(3x-4)}+C.$$

c. TH3: $Q(x)=0$ vô nghiệm

Khi đó, $Q(x)$ được biểu diễn dưới dạng

$$Q(x)=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}=(mx+n)^2+k^2$$

• Nếu $P(x)$ là hằng số thì ta sử dụng các biến đổi sau

$$\begin{cases} dx=\frac{1}{a}d(ax+b) \\ \int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right)+C \end{cases}$$

• Nếu $P(x)=\alpha x+\beta$ thì ta có phân tích sau:

$$I=\int\frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{\frac{\alpha}{2a}(2ax+b)+\beta-\frac{b\alpha}{2a}}{ax^2+bx+c}dx$$

$$=\frac{\alpha}{2a}\int\frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c}+\left(\beta-\frac{b\alpha}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

$$=\frac{\alpha}{2a}\int\frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c}+\left(\beta-\frac{b\alpha}{2a}\right)\int\frac{dx}{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}}$$

$$=\frac{\alpha}{2a}\ln|ax^2+bx+c|+\frac{\beta-\frac{b\alpha}{2a}}{a}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}$$

$$=\frac{\alpha}{2a}\ln|ax^2+bx+c|+\frac{\beta-\frac{b\alpha}{2a}}{a}\int\frac{d\left(x+\frac{b}{2a}\right)}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}$$

$$=\frac{\alpha}{2a}\ln|ax^2+bx+c|+\frac{2\left(\beta-\frac{b\alpha}{2a}\right)}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C.$$

• Nếu $P(x)$ có bậc lớn hơn hoặc bằng 2 thì ta chia đa thức, quy bài toán về 2 trường hợp có bậc của $P(x)$ như trên để giải.

Nhận xét: Nhìn vào biểu thức của bài toán tổng quát trên có thể ban đầu làm cho các bạn phát hoảng, nhưng đừng quá bận tâm đến nó, bạn chỉ cần nắm được ý tưởng thực hiện của nó là phân tích tử số có chứa đạo hàm của mẫu số, rồi tách thành hai bài toán nhỏ hơn đều thuộc dạng đơn giản đã học.

Chú ý: Khi mẫu là bậc 2 có 2 nghiệm phân biệt và trên tử là hằng số thì ta xét hiệu hai đơn thức lấy mẫu lớn trừ mẫu nhỏ ra hằng số dương, sau đó ta viết 1 trên hiệu vừa tìm. Sau đó trong một trên mẫu số nhỏ trừ một trên mẫu số lớn.

VD1: $I_1=\int\frac{dx}{x^2-8x+15}=\int\frac{dx}{(x-3).(x-5)}$

Ta thấy x-3>x-5 do đó x-3-(x-5)=2 >0 $\frac{1}{(x-3).(x-5)}=\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-3}\right)$

$I_1=\int\frac{dx}{x^2-8x+15}=\frac{1}{2}.\int\left(\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-3}\right).dx=\frac{1}{2}.\left(\ln|x-5|-\ln|x-3|\right)+C$

VD2: $I_1=\int\frac{dx}{x^2-x-6}=\int\frac{dx}{(x+2).(x-3)}$

Ta thấy x+2>x-3 do đó x+2-(x-3)=5 >0 $\frac{1}{(x+2).(x-3)}=\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-3}\right)$

$I_2=\int\frac{dx}{x^2-8x+15}=\frac{1}{2}.\int\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-3}\right).dx=\frac{1}{2}.\left(\ln|x+2|-\ln|x-3|\right)+C$

VD3:

$I_1=\int\frac{dx}{5x^2-3x-2}=\int\frac{dx}{(x-1).(5x+2)}=\int\frac{5.dx}{(5x-5).(5x+2)}=\int\frac{d(5x)}{(5x-5).(5x+2)}$

Ta thấy 5x+2>5x-5 do đó 5x+2-(5x-5)=7>0

$\frac{1}{(5x+2).(5x-5)}=\frac{1}{7}.\left(\frac{1}{5x-5}-\frac{1}{5x+2}\right)$

$I_2=\int\frac{dx}{5x^2-3x-2}=\frac{1}{7}.\int\left(\frac{1}{5x-5}-\frac{1}{5x+2}\right).dx=\frac{1}{7}.\left(\ln|5x-5|-\ln|5x+2|\right)+C$

Ví dụ 1 Tìm nguyên hàm của các hàm số

a. $I_1=\int\frac{dx}{x^2+2x+3}$.

b. $I_2=\int\frac{dx}{4x^2+4x+2}$.

c. $I_3=\int\frac{dx}{9x^2+24x+20}$.

➢ Lời giải

a. $I_1=\int\frac{dx}{x^2+2x+3}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+2}$

$=\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+C.$

b. $I_2=\int\frac{dx}{4x^2+4x+2}=\int\frac{dx}{(2x+1)^2+1}$

$=\frac{1}{2}\int\frac{d(2x+1)}{(2x+1)^2+1^2}=\frac{1}{2}\arctan(2x+1)+C.$

c. $I_3=\int\frac{dx}{9x^2+24x+20}=\int\frac{dx}{(3x+4)^2+4}$

$=\int\frac{d(3x+4)}{(3x+4)^2+2^2}=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{3x+4}{2}\right)+C.$

Ví dụ 2 Tìm nguyên hàm của các hàm số

a. $I_1=\int\frac{3x+5}{2x^2+x+10}dx.$ b. $I_2=\int\frac{4x-1}{6x^2+9x+4}dx.$

c. $I_3=\int\frac{2x^4-x}{x^2+2x+7}dx.$

➢ Lời giải

a. $I_1=\int\frac{3x+5}{2x^2+x+10}dx=\int\frac{\frac{3}{4}(4x+1)+\frac{17}{4}}{2x^2+x+10}dx$

$=\frac{3}{4}\int\frac{(4x+1)dx}{2x^2+x+10}+\frac{17}{4}\int\frac{dx}{2x^2+x+10}$

$=\frac{3}{4}\int\frac{d(2x^2+x+10)}{2x^2+x+10}+\frac{17}{8}\int\frac{dx}{x^2+\frac{x}{2}+5}$

$=\frac{3}{4}\ln(2x^2+x+10)+\frac{17}{8}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{79}{16}}$

$$=\frac{3}{4}\ln\left(2x^2+x+10\right)+\frac{17}{8}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{4}\right)}{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{79}}{4}\right)^2}$$

$$=\frac{3}{4}\ln\left(2x^2+x+10\right)+\frac{17}{8}.\frac{4}{\sqrt{79}}\arctan\left(\frac{4x+1}{\sqrt{79}}\right)+C$$

Vậy $I_1=\frac{3}{4}\ln\left(2x^2+x+10\right)+\frac{17}{2\sqrt{79}}\arctan\left(\frac{4x+1}{\sqrt{79}}\right)+C$.

b. $I_2=\int\frac{4x-1}{6x^2+9x+4}dx=\int\frac{\frac{1}{3}(12x+9)-4}{6x^2+9x+4}dx$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{(12x+9)dx}{6x^2+9x+4}-4\int\frac{dx}{6x^2+9x+4}$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{d\left(6x^2+9x+4\right)}{6x^2+9x+4}-4\int\frac{dx}{(3x+1)^2+3}$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left(6x^2+9x+4\right)-\frac{4}{3}\int\frac{d(3x+1)}{(3x+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left(6x^2+9x+4\right)-\frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{3x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

$$\Rightarrow I_2=\frac{1}{3}\ln\left(6x^2+9x+4\right)-\frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{3x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

c. $I_3=\int\frac{2x^4-x}{x^2+2x+7}dx=\int\left(2x^2-4x+1+\frac{25x-7}{x^2+2x+7}\right)dx$

$$=\frac{2x^3}{3}-2x^2+x+\int\frac{25x-7}{x^2+2x+7}dx.$$

Đặt $J=\int\frac{25x-7}{x^2+2x+7}dx$

$$=\int\frac{\frac{25}{2}(2x+2)-32}{x^2+2x+7}dx=\frac{25}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+7}dx-32\int\frac{dx}{x^2+2x+7}$$

$$=\frac{25}{2}\int\frac{d\left(x^2+2x+7\right)}{x^2+2x+7}dx-32\int\frac{dx}{\left(x+1\right)^2+6}$$

$$=\frac{25}{2}\ln\left(x^2+2x+7\right)-32\int\frac{d\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}$$

$$=\frac{25}{2}\ln\left(x^2+2x+7\right)-\frac{32}{\sqrt{6}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow I_3=\frac{2x^3}{3}-2x+x+\frac{25}{2}\ln\left(x^2+2x+7\right)-\frac{32}{\sqrt{6}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{6}}+C.$$

Tổng kết: Qua ba phần trình bày về hàm số phân thức có mẫu số là bậc hai, chúng ta nhận thấy điểm mấu chốt giải quyết bài toán là xử lý mẫu số.

Nếu $\frac{P(x)}{ax^2+bx+c}$

- $ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$
  $\Rightarrow\frac{P(x)}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\left(\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}\right)$
- $ax^2+bx+c=\left(mx+n\right)^2+k^2$
  $\Rightarrow\int\frac{du}{u^2+\alpha^2}=\frac{1}{\alpha}\arctan\frac{u}{\alpha}+C$
- $ax^2+bx+c=\left(mx+n\right)^2$
  $\Rightarrow\int\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{u}+C$

Bài tập bạn đọc tự giải

➢ **Phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt**

1) $I_1=\int\frac{2x-1}{x^2+3x+2}dx.$

2) $I_2=\int\frac{3x+4}{5x^2+6x+1}dx.$

3) $I_3=\int\frac{3x^2+1}{2x^2+3x+1}dx.$

4) $I_4=\int\frac{5+4x}{3-2x-x^2}dx.$

5) $I_5=\int\frac{5x+3}{2x^2-x-1}dx.$

6) $I_6=\int\frac{1-5x}{4x^2+5x+1}dx.$



➢ Phương trình bậc hai có nghiệm kép

7) $I_7 = \int \frac{4x-1}{x^2+2x+1}dx$.

8) $I_8 = \int \frac{3x+7}{4x^2+4x+1}dx$.

9) $I_9 = \int \frac{3x^2+1}{9x^2+6x+1}dx$.

10) $I_{10} = \int \frac{4x^2-3x+1}{4x^2-4x+1}dx$.

11) $I_{11} = \int \frac{2x^2+3x+2}{x^2-4x+4}dx$.

12) $I_{12} = \int \frac{3-2x}{x^2-6x+9}dx$.

➢ Phương trình bậc hai vô nghiệm

13) $I_{13} = \int \frac{2-3x}{x^2-4x+5}dx$.

14) $I_{14} = \int \frac{3x+1}{x^2+x+2}dx$.

15) $I_{15} = \int \frac{dx}{2x^2-x+1}$.

16) $I_{16} = \int \frac{2x-1}{x^2-x+4}dx$.

17) $I_{17} = \int \frac{x+1}{4x^2+x+1}dx$.

18) $I_{18} = \int \frac{4x+1}{x^2-x+1}dx$.

3. Mẫu số là đa thức bậc 3

Khi đó $Q(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Ta có 4 khả năng xảy ra với $Q(x)$.

a. TH1: $Q(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt $x_1; x_2; x_3$.

Tương tự như trường hợp mẫu số là hàm bậc hai có hai nghiệm phân biệt. Ta có cách giải truyền thống là phân tích và đồng nhất hệ số. Ngoài ra ta còn có thể sự dụng phương pháp biến đổi tử số chứa đạo hàm của mẫu (tùy thuộc vào biểu thức của tử số là bậc bao nhiêu).

Ta có $Q(x)=ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$$\Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}.$$

Đồng nhất hệ số hai vế ta được A,B,C. Bài toán này quy về nguyên hàm có mẫu số là bậc nhất đã xét ở trên.

Chú ý: Để việc đồng nhất được thì ta vẫn phải tuân thủ nguyên tắc là biến đổi sao cho bậc của tử số phải nhỏ hơn bậc của mẫu số.

Ví dụ 1 Tìm nguyên hàm của các hàm số

a. $I_1=\int\frac{dx}{(x-2)(x^2-9)}$.

b. $I_2=\int\frac{6x^2+x-2}{x(x^2-1)}dx$.

c. $I_3=\int\frac{3x^4-x^2+3x-7}{x(x^2+x-2)}dx$.

➢ Lời giải

a. $I_1=\int\frac{dx}{(x-2)(x^2-9)}=\int\frac{dx}{(x-2)(x+3)(x-3)}$

Ta có $\frac{1}{(x-2)(x+3)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-3}$

$\Rightarrow 1=A(x^2-9)+B(x-2)(x-3)+C(x-2)(x+3)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}0=A+B+C\\0=-5B+C\\1=-9A+6B-6C\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-\frac{1}{5}\\B=\frac{1}{30}\\C=\frac{1}{6}\end{cases}$.

Nhận xét: Ngoài cách giải truyền thống trên, chúng ta có thể biến đổi cách khác như sau mà không mất nhiều thời gian cho việc tính toán,suy nghĩ:

$I_1=\int\frac{dx}{(x-2)(x+3)(x-3)}=\frac{1}{6}\int\frac{(x+3)-(x-3)}{(x-2)(x+3)(x-3)}dx$

$=\frac{1}{6}\int\frac{dx}{(x-2)(x-3)}-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{(x-2)(x+3)}$.

Đến đây, bài toán trở về các dạng biến đổi đơn giản đã xét đến!

b. $I_2=\int\frac{6x^2+x-1}{x(x^2-1)}dx=I\int\frac{6x^2+x-1}{x(x+1)(x-1)}dx$

Cách 1: Ta có $\frac{6x^2+x-1}{x(x+1)(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}$

$\Rightarrow 6x^2+x-1=A(x^2-1)+Bx(x-1)+Cx(x+1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 = A + B + C \\ 1 = -B + C \\ -2 = -A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = \dfrac{3}{2} \\ C = \dfrac{5}{2} \end{cases}.$$

$$I_2 = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{\frac{3}{2}}{x+1} + \frac{\frac{5}{2}}{x-1} \right) dx = 2\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x+1| + \frac{5}{2}\ln|x-1| + C.$$

Cách 2: $I_2 = \int \frac{6x^2 + x - 2}{x(x^2-1)} dx = \int \frac{2(3x^2-1) + (x-1) + 1}{x^3 - x} dx$

$$= 2\int \frac{(3x^2-1)dx}{x^3-x} + \int \frac{(x-1)dx}{x^3-x} + \int \frac{dx}{x^3-x}.$$

c. $I_3 = \int \frac{3x^4 - x^2 + 3x - 7}{x(x^2+x-2)} dx = \int \left[3x - 3 + \frac{8x^2 - 3x + 7}{x(x^2+x-2)} \right] dx = \frac{3x^2}{2} - 3x + J$

Với $J = \int \frac{8x^2 - 3x + 7}{x(x^2+x-2)} dx = \int \frac{8x^2 - 3x + 7}{x(x-1)(x+2)} dx$.

Ta có $\frac{8x^2 - 3x + 7}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$

$$\Rightarrow 8x^2 - 3x + 7 = A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8 = A + B + C \\ -3 = A + 2B - C \\ 7 = -2A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{7}{2} \\ B = 4 \\ C = \dfrac{15}{2} \end{cases}.$$

$$J = \int \left(\frac{-\frac{7}{2}}{x} + \frac{4}{x-1} + \frac{\frac{15}{2}}{x+2} \right) dx = -\frac{7}{2}\ln|x| + 4\ln|x-1| + \frac{15}{2}\ln|x+2| + C.$$

Vậy $I_3 = \frac{3x^2}{2} - 3x - \frac{7}{2}\ln|x| + 4\ln(x-1) + \frac{15}{2}\ln(x+2) + C$.

b. TH2: $Q(x)=0$ có hai nghiệm (một nghiệm đơn, một nghiệm kép)

Khi đó ta có $Q(x)=ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)^2$.

Để đồng nhất thức, ta phải phân tích theo quy tắc

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{a(x-x_1)(x-x_2)^2}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{Bx+C}{(x-x_2)^2}$$

Đồng nhất hệ số hai vế ta được A,B,C. Bài toán trở về dạng cơ bản đã xét đến.

Chú ý: Ngoài việc sử dụng đồng nhất, ta cũng có thể phân tích tử số theo đạo hàm của mẫu để giải.

Ví dụ 2 Tìm nguyên hàm của các hàm số

a. $I_1=\int\frac{dx}{x^2(x+2)}$.

b. $I_2=\int\frac{x-1}{(x+1)^2(2x-3)}dx$.

c. $I_3=\int\frac{2x^2+x+4}{x^2(2x-1)}dx$.

➢ Lời giải

a. Cách 1: (Đồng nhất 2 vế).

Ta có $\frac{1}{x^2(x+2)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2}$

$$\Rightarrow 1=Ax^2+(Bx+C)(x+2)\Leftrightarrow\begin{cases}0=A+B\\0=2B+C\\1=2C\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{4}\\B=-\frac{1}{4}\\C=\frac{1}{2}\end{cases}.$$

$$I_1=\int\frac{dx}{x^2(x+2)}=\int\left[\frac{\frac{1}{4}}{(x+2)}+\frac{-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2}\right]dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+2}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2}=\frac{1}{4}\ln|x+2|-\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{2}x+C.$$

Cách 2: (Sử dụng kĩ thuật phân tích nhảy tầng lầu ta được).

$$\frac{1}{x^2(x+2)}=\frac{1}{x^3+2x^2}=\frac{1}{4}.\frac{3x^2+4x-3x(x+2)+2x+4}{x^3+2x^2}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{3x^2+4x}{x^3+2x^2}-\frac{3x(x+2)}{x^3+2x^2}+\frac{2x+4}{x^3+2x^2}\right]=\frac{1}{4}\left(\frac{3x^2+4x}{x^3+2x^2}-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)$$

$$\Rightarrow I_1=\int\frac{dx}{x^2(x+2)}=\frac{1}{4}\int\frac{3x^2+4x}{x^3+2x^2}-\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2}$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{d(x^3+2x^2)}{x^3+2x^2}-\frac{3}{4}\ln|x|-\frac{1}{2}x=\frac{1}{4}\ln|x^3+2x^2|-\frac{3}{4}\ln|x|-\frac{1}{2}x+C$$

$$\Rightarrow I_1=\frac{1}{4}\ln|x^3+2x^2|-\frac{3}{4}\ln|x|-\frac{1}{2}x+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln|x+2|-\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{2}x+C.$$

b. $I_2=\int\frac{(x+1)-2}{(x+1)^2[2(x+1)-5]}d(x+1)=\int\frac{t-2}{t^2(2t-5)}dt$ (với $t=x+1$).

Cách 1: (Đồng nhất hai vế).

Ta có $\frac{t-2}{t^2(2t-5)}=\frac{At+B}{t^2}+\frac{C}{2t-5}$

$$\Rightarrow t-2=(At+B)(2t-5)+Ct^2\Leftrightarrow\begin{cases}0=2A+C\\1=2B-5A\\-2=-5B\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-\frac{1}{25}\\B=\frac{2}{5}\\C=\frac{2}{25}\end{cases}.$$

$$I_2=\int\frac{t-2}{t^2(2t-5)}dt=\int\left(\frac{-\frac{1}{25}t+\frac{2}{5}}{t^2}+\frac{\frac{2}{25}}{2t-5}\right)dt$$

$$=-\frac{1}{25}\int\frac{dt}{t}+\frac{2}{5}\int\frac{dt}{t^2}+\frac{1}{25}\int\frac{d(2t-5)}{2t-5}$$

$$=-\frac{1}{25}\ln|t|-\frac{2}{5t}+\frac{1}{25}\ln|2t-5|+C=\frac{1}{25}\ln\left|\frac{2t-5}{t}\right|-\frac{2}{5t}+C$$

$$=\frac{1}{25}\ln\left|\frac{2x-3}{x+1}\right|-\frac{2}{5(x+1)}+C.$$

Cách 2: (Sử dụng kĩ thuật phân tích nhảy tầng lầu ta được).

$$\frac{t-2}{t^2(2t-5)}=\frac{1}{t(2t-5)}-\frac{2}{t^2(2t-5)}$$

$$=-\frac{1}{5}\frac{(2t-5)-2t}{t(2t-5)}-\frac{4}{25}.\frac{(6t^2-10t)-3t(2t-5)-\frac{5}{2}(2t-5)}{t^2(2t-5)}$$

$$=-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{2t-5}\right)-\frac{4}{25}\left(\frac{6t^2-10t}{2t^3-5t^2}-\frac{3}{t}-\frac{5}{2t^2}\right)$$

$$\Rightarrow I_2=-\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t}+\frac{1}{5}\int\frac{d(2t-5)}{2t-5}-\frac{4}{25}\int\frac{6t^2-10t}{2t^3-5t^2}dt+\frac{12}{25}\int\frac{dt}{t}+\frac{2}{5}\int\frac{dt}{t^2}$$

$$\frac{7}{25}\int\frac{dt}{t}+\frac{1}{5}\ln|2t-5|-\frac{4}{25}\ln|2t^3-5t^2|-\frac{2}{5t}+C$$

$$=\frac{7}{25}\int\frac{dt}{t}+\frac{1}{5}\int\frac{d(2t-5)}{2t-5}-\frac{4}{25}\int\frac{d(2t^3-5t^2)}{2t^3-5t^2}dt+\frac{2}{5}\int\frac{dt}{t^2}$$

$$=\frac{7}{25}\int\frac{dt}{t}+\frac{1}{5}\ln|2t-5|-\frac{4}{25}\ln|2t^3-5t^2|-\frac{2}{5t}+C$$

$$\Rightarrow I_2=-\frac{1}{25}\ln|t|+\frac{1}{25}\ln|2t-5|-\frac{2}{5t}+C=\frac{1}{25}\ln\left|\frac{2t-5}{t}\right|-\frac{2}{5t}+C$$

Thay $t=x+1$, ta được $I_2=\frac{1}{25}\ln\left|\frac{2x-3}{x+1}\right|-\frac{2}{5(x+1)}+C$.

c. Cách 1: (Đồng nhất hai vế).

Ta có $\frac{2x^2+x+4}{x^2(2x-1)}=\frac{Ax+B}{x^2}+\frac{C}{2x-1}$

$$\Rightarrow 2x^2+x+4=(Ax+B)(2x-1)+Cx^2\Leftrightarrow\begin{cases}2=2A+C\\1=-A+2B\\4=-B\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-9\\B=-4\\C=20\end{cases}.$$

$$I_3=\int\frac{2x^2+x+4}{x^2(2x-1)}dx=\int\left(\frac{-9x-4}{x^2}+\frac{20}{2x-1}\right)dx$$

$$=-9\int\frac{dx}{x}-4\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{20}{2x-1}dx$$

$$=-9\ln|x|+\frac{4}{x}+10\ln|2x-1|+C.$$

Cách 2: (Sử dụng kĩ thuật phân tích nhảy tầng lầu ta được).

Ta có $\frac{2x^2+x+4}{x^2(2x-1)}=\frac{2}{2x-1}-\frac{1}{x(2x-1)}+\frac{4}{x^2(2x-1)}$

$=\frac{2}{2x-1}-\frac{(2x-1)-2x}{x(2x-1)}-4.\frac{(6x^2-2x)-6x^2+(2x-1)}{x^2(2x-1)}$

$=\frac{2}{2x-1}-\frac{1}{x}+\frac{2}{2x-1}-4.\frac{6x^2-2x}{2x^3-x^2}+\frac{24}{2x-1}-\frac{4}{x^2}$

$\Rightarrow I_3=\int\left(-\frac{1}{x}-4.\frac{6x^2-2x}{x^2(2x-1)}+\frac{28}{2x-1}-\frac{4}{x^2}\right)dx$

$=-\ln|x|-4\ln|2x^3-x^2|+14\ln|2x-1|+\frac{4}{x}+C$

$=-9\ln|x|+10\ln|2x-1|+\frac{4}{x}+C.$

c. TH3: $Q(x)=0$ có một nghiệm đơn

Khi đó ta có $Q(x)=ax^3+bx^2+cx+d=(x-x_1)(mx^2+nx+p)$.

Trong đó $mx^2+nx+p=0$ vô nghiệm.

Để đồng nhất được, ta phải phân tích theo quy tắc

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-x_1)(mx^2+nx+p)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{Bx+C}{mx^2+nx+p}.$$

Đồng nhất hệ số hai vế ta được A,B,C. Bài toán trở về các dạng cơ bản đã xét đến.

Chú ý:

• Nguyên hàm $\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{u}\arctan\left(\frac{u}{a}\right)+C$.

• Ngoài việc sử dụng đồng nhất, ta có thể phân tích tử số theo đạo hàm của mẫu để giải.

Ví dụ 3 Tìm nguyên hàm của các hàm số

a. $I_1=\int\frac{dx}{x(x^2+1)}$.

b. $I_2=\int\frac{2x+3}{(x-1)(x^2+4)}dx$.

➢ Lời giải

a. Cách 1: (Đồng nhất hai vế)

$$\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow 1=A\left(x^2+1\right)+\left(Bx+C\right)x\Leftrightarrow\begin{cases}0=A+B\\0=C\\1=A\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow I_1=\int\frac{dx}{x\left(x^2+1\right)}=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{-x}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\int\frac{dx}{x}+\int\frac{-x}{x^2+1}dx=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C.$$

Cách 2: (Sử dụng kĩ thuật phân tích nhảy tầng lầu ta được).

$$\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{\left(x^2+1\right)-x^2}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}$$

$$I_1=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{x}{x^2+1}dx=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C.$$

b. Cách 1: (Đồng nhất hai vế).

$$\frac{2x+3}{\left(x-1\right)\left(x^2+4\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$\Rightarrow 2x+3=A\left(x^2+4\right)+(Bx+C)(x-1)\Leftrightarrow\begin{cases}0=A+B\\2=B-C\\3=4A-C\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{5}\\B=\frac{-1}{5}\\C=\frac{-11}{5}\end{cases}$$

$$I_2=\int\frac{2x+3}{\left(x-1\right)\left(x^2+4\right)}dx=\frac{3}{5}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{5}\int\frac{-3x+7}{x^2+4}$$

⇒ Sai hết phần sau.

$$=\frac{3}{5}\ln|x-1|-\frac{3}{5}\int\frac{x}{x^2+4}dx+\frac{7}{5}\int\frac{dx}{x^2+4}$$

$$=\frac{3}{5}\ln|x-1|-\frac{3}{10}\ln\left(x^2+4\right)+\frac{7}{5}.\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

$$=\frac{3}{5}\ln|x-1|-\frac{3}{10}\ln\left(x^2+4\right)+\frac{7}{10}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+C.$$

Cách 2: (Sử dụng kĩ thuật phân tích nhảy tầng lầu ta được).

Ta có $\frac{2x+3}{(x-1)\left(x^2+4\right)}=\frac{2(x-1)+3}{(x-1)\left[(x-1)^2+2(x-1)+5\right]}$

$$=\frac{2t+3}{t\left(t^2+2t+5\right)}=\frac{2}{t^2+2t+5}+\frac{3}{t\left(t^2+2t+5\right)}\quad(t=x-1)$$

Mà $\frac{3}{t\left(t^2+2t+5\right)}=-\frac{1}{5}.\frac{\left(3t^2+4t\right)-3\left(t^2+2t+5\right)+2t}{t\left(t^2+2t+5\right)}$

$$=-\frac{1}{5}.\frac{3t+4}{t^2+2t+5}+\frac{3}{5t}-\frac{2}{5}.\frac{1}{t^2+2t+5}$$

suy ra $\frac{2}{t^2+2t+5}+\frac{3}{t\left(t^2+2t+5\right)}$

$$=-\frac{1}{5}.\frac{3t^2+4t}{t^2+2t+5}+\frac{3}{5t}-\frac{2}{5}.\frac{1}{t^2+2t+5}+\frac{2}{t^2+2t+5}$$

$$=-\frac{1}{5}.\frac{3t^2+4t}{t^3+2t^2+5}+\frac{3}{5t}-\frac{8}{5}.\frac{1}{t^3+2t^2+5}.$$

$$I_2=\int\frac{2x+3}{(x-1)\left(x^2+4\right)}dx=\int\frac{2t+3}{t\left(t^2+2t+5\right)}dt$$

$$=-\frac{1}{5}.\frac{3t^2+4t}{t^3+2t^2+5}+\frac{3}{5t}-\frac{8}{5}.\frac{1}{t^3+2t^2+5}$$

$$=-\frac{1}{5}\ln\left|t^3+2t^2+5\right|+\frac{3}{5}\ln|t|-\frac{8}{5}.\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{t+1}{2}\right)+C.$$

Bài tập bạn đọc tự giải

Dạng 1: Phương trình bậc 3 có ba nghiệm phân biệt

1) $I_1 = \int \frac{dx}{x(x^2-1)}$.

2) $I_2 = \int \frac{2x+1}{(x+1)(x^2-9)}dx$.

3) $I_3 = \int \frac{x^2+x+1}{(x+2)(x^2+4x+3)}dx$.

4) $I_4 = \int \frac{5x+2}{(1+x)(4-x^2)}dx$.

5) $I_5 = \int \frac{x+1}{x(x^2-4)}dx$.

Dạng 2: Phương trình bậc 3 có hai nghiệm (một nghiệm đơn, một nghiệm kép)

7) $I_7 = \int \frac{x-1}{x^2(x+1)}dx$.

8) $I_8 = \int \frac{x^2+3}{(x+2)^2(2x-1)}dx$.

9) $I_9 = \int \frac{2x^2+1}{x(x^2+2x+1)}dx$.

10) $I_{10} = \int \frac{4x+1}{(2x-1)(x+1)^2}dx$.

11) $I_{11} = \int \frac{4-x}{2x^2(3-2x)}dx$.

12) $I_{12} = \int \frac{x+5}{(x+2)^2(x+3)}dx$.

Dạng 3: Phương trình bậc 3 có một nghiệm (nghiệm bội ba)

13) $I_{13} = \int \frac{2-x}{(x+2)^3}dx$.

14) $I_{14} = \int \frac{3x-2}{(2x+1)^3}dx$.

15) $I_{15} = \int \frac{(3x^2+2x)}{(4x+3)^3}dx$.

16) $I_{16} = \int \frac{x^4}{(x+2)^3}dx$.

17) $I_{17} = \int \frac{x^3-1}{(x+1)^3}dx$.

18) $I_{18} = \int \frac{x^2-4}{(x-1)^3}dx$.

Dạng 4: Phương trình bậc 3 có một nghiệm đơn

19) $I_{19}=\int\frac{2x+5}{x\left(x^2+x+1\right)}dx$.

20) $I_{20}=\int\frac{3x+4}{x^3-1}dx$.

21) $I_{21}=\int\frac{2x}{x^3+1}dx$.

22) $I_{22}=\int\frac{x^2+1}{\left(x^2+3\right)x}dx$.

23) $I_{23}=\int\frac{x+2}{\left(2x^2+3\right)(x-1)}dx$.

24) $I_{24}=\int\frac{4x^2-3}{\left(3x^2+1\right)(1-2x)}dx$.

V. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Dạng 1: $\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$

➢ Tính tích phân

a) $I=\int_0^1\frac{dx}{3x+1}$.

b) $I=\int_{-1}^0\frac{dx}{1-3x}$.

c) $I=\int_0^1\left(\frac{1}{2x+1}-\frac{3}{4-2x}\right)dx$.

d) $I=\int_1^2\frac{x^4+3x^3-2x^2+5x-1}{x^2}dx$.

e) $I=\int_0^1\frac{x^3-3x^2+2x-1}{x-2}dx$.

g) $I=\int_{-1}^0\frac{2x^3-3x^2+4x-1}{1-2x}dx$.

➢ Lời giải

a) $I=\frac{1}{3}\ln|3x+1|\Big|_0^1=\frac{1}{3}(\ln 4-\ln 1)=\frac{\ln 4}{3}$.

b) $I=-\frac{1}{3}\ln|1-3x|\Big|_{-1}^0=-\frac{1}{3}(\ln 1-\ln 4)=\frac{\ln 4}{3}$..

c) $I=\left(\frac{1}{2}\ln|2x+1|+\frac{3}{2}\ln|4-2x|\right)\Big|_0^1=\left(\frac{1}{2}\ln 3+\frac{3}{2}\ln 2\right)-\left(\frac{1}{2}\ln 1+\frac{3}{2}\ln 4\right)$

$=\frac{1}{2}\ln 3+\frac{3}{2}\ln\frac{1}{2}$.

d) $I=\int_1^2\left(x^2+3x-2+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-2x+5\ln x+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2$

$=\left(\frac{8}{3}+6-4+5\ln 2+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-2+5\ln 1+1\right)=\frac{13}{3}+5\ln 2$.

e) $I=\int_0^1\left(x^2-x-\frac{1}{x-2}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-\ln|x-2|\right)\Big|_0^1$

$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\ln 1\right)-(-\ln 2)=\ln 2-\frac{1}{6}.$

f) $I=\int_{-1}^{0}\left|-x^2+x-\frac{3}{2}+\frac{1}{2(-2x+1)}\right|dx$

$=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}\ln|-2x+1|\right)\Big|_{-1}^{0}$

$=\left(-\frac{1}{4}\ln 1\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\ln 3\right)=\frac{\ln 3}{4}-\frac{7}{3}.$

Dạng 2: $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$

Bài 2.1 ♦ Tính tích phân

a) $I=\int_0^1\frac{dx}{(x+1)(x+2)}.$

b) $I=\int_0^1\frac{dx}{(x+1)(3-x)}.$

c) $I=\int_0^1\frac{dx}{(x+1)(2x+3)}.$

d) $I=\int_0^1\frac{dx}{x^2-x-12}.$

e) $I=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{2x^2-5x+2}.$

g) $I=\int_1^2\frac{dx}{1-2x-3x^2}.$

➢ Lời giải

a) $I=\int_0^1\frac{(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)}dx=\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

$=\left(\ln|x+1|-\ln|x+2|\right)\Big|_0^1=\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\Big|_0^1=\ln\frac{2}{3}-\ln\frac{1}{2}=\ln\frac{4}{3}.$

b) $I=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{(x+1)+(3-x)}{(x+1)(3-x)}dx=\frac{1}{4}\int_0^1\left(\frac{1}{3-x}+\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=\frac{1}{4}\left(-\ln|3-x|+\ln|x+1|\right)\Big|_0^1=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{3-x}\right|\Big|_0^1=\frac{1}{4}\left(\ln 1-\ln\frac{1}{3}\right)=-\frac{\ln 3}{4}.$



c) $I=\int_0^1 \frac{(2x+3)-2(x+1)}{(x+1)(2x+3)}dx=\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{2}{2x+3}\right)dx$

$=\left(\ln|x+1|-\ln|2x+3|\right)\Big|_0^2=\ln\left(\frac{x+1}{2x+3}\right)\Big|_0^1=\ln\frac{2}{5}-\ln\frac{1}{3}=\ln\frac{6}{5}.$

d) $I=\int_0^1 \frac{dx}{(x+3)(x-4)}=\frac{1}{7}\int_0^1\frac{(x+3)-(x-4)}{(x+3)(x-4)}dx=\frac{1}{7}\left(\int_0^1\frac{1}{x-4}-\int_0^1\frac{1}{x+3}\right)dx$

$=-\frac{1}{7}\left(\ln|x-4|-(\ln|x+3|\right)\Big|_0^1$

$=\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-4}{x+3}\right|_0^1=\frac{1}{7}\ln\frac{9}{16}.$

e) $I=\int_{-1}^0\frac{dx}{2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)}=\int_{-1}^0\frac{dx}{(x-2)(2x-1)}=\frac{1}{3}\int_{-1}^0\frac{(2x-1)-2(x-2)}{(x-2)(2x-1)}dx$

$=\frac{1}{3}\int_{-1}^0\left(\frac{1}{x-2}-\frac{2}{2x-1}\right)dx=\frac{1}{3}\left(\ln|x-2|-\ln|2x-1|\right)\Big|_{-1}^0$

$=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{2x-1}\right|_{-1}^0=\frac{1}{3}(\ln 2-\ln 1)=\frac{\ln 2}{3}$

f) $I=\int_1^2\frac{dx}{-3(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right)}=\int_1^2\frac{dx}{(x+1)(1-3x)}=\frac{1}{4}\int_1^2\frac{3(x+1)+(1-3x)}{(x+1)(1-3x)}dx$

$=\frac{1}{4}\int_1^2\left(\frac{3}{1-3x}+\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{1}{4}\left(-\ln|1-3x|+\ln|x+1|\right)\Big|_1^2$

$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{1-3x}\right|_1^2=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{3}{5}-\ln 1\right)=\frac{1}{4}\ln\frac{3}{5}.$

Bài 2.2 ♦ **Tính tích phân**

a) $I=\int_1^2\frac{dx}{x^2}.$

b) $I=\int_0^1\frac{dx}{(3x+1)^2}.$

c) $I=\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{(1-2x)^2}$.

d) $I=\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{9x^2-6x+1}$.

e) $I=\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{-16x^2+8x-1}$.

➢ Lời giải

a) $I=\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_1^2=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$.

b) $I=\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{(3x+1)^2}=-\frac{1}{3}.\frac{1}{(3x+1)}\Big|_0^1=-\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{4}$.

c) $I=\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{(1-2x)^2}=\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{(2x-1)^2}=-\frac{1}{2}.\frac{1}{2x-1}\Big|_{-1}^0=-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{3}$.

d) $I=\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{(3x-1)^2}=-\frac{1}{3}.\frac{1}{3x-1}\Big|_{-1}^0=-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{4}$.

e) $I=-\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{16x^2-8x+1}=-\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{(4x-1)^2}=\frac{1}{4}.\frac{1}{4x-1}\Big|_{-1}^0=-\frac{1}{4}+\frac{1}{20}=-\frac{1}{5}$.

Chương III

TÍCH PHÂN HÀM VÔ TỶ

I. HÀM SỐ TÌM NGUYÊN HÀM

Dạng 1: $I=\int x\sqrt[n]{ax+b}dx$	Dạng 2: $I=\int x^k\sqrt{ax^k+b}dx$ (với $0\le k\le 2$)
Dạng 3: $I=\int x^{k-1}\sqrt{ax^k+b}dx$	Dạng 4: $I=\int x^{2k-1}\sqrt{ax^k+b}dx$
Dạng 5: $I=\int x^{n-1}\sqrt[m]{\left(ax^n+1\right)^k}dx$	Dạng 6: $I=\int x^{2k+1}\sqrt{ax^2+b}dx$
Dạng 7: $I=\int\sqrt{x^2+a^2}dx$	Dạng 8: $I=\int\sqrt{x^2-a^2}dx$
Dạng 9: $I=\int\sqrt{a^2-x^2}dx$	Dạng 10: $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$
Dạng 11: $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$	Dạng 12: $I=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$
Dạng 13: $I=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$	Dạng 14: $I=\int\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$
Dạng 15: $I=\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$	Dạng 16: $I=\int\frac{dx}{(x-k)\sqrt{ax^2+bx+c}}$
Dạng 17: $I=\int\frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}$	Dạng 18: $I=\int\frac{mx+n}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$
Dạng 19: $I=\int\frac{dx}{\left(ax^2+b\right)\sqrt{cx^2+d}}$	Dạng 20: $I=\int\frac{x}{\left(ax^2+b\right)\sqrt{cx^2+d}}dx$

Dạng 21: $I=\int \frac{mx+n}{\left(ax^2+b\right)\sqrt{cx^2+d}}dx$	Dạng 22: $I=\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax+b}+c}dx$
Dạng 23: $I=\int \frac{v(x)}{\sqrt{u^2(x)\pm\alpha}}dx$	Dạng 24: $I=\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^n+b}}$
Dạng 25: $I=\int \frac{dx}{x\left(1+\sqrt[2n]{x}\right)^k}$	Dạng 26: $I=\int \frac{mx+n}{\sqrt[k]{ax+b}}dx$
Dạng 27: $I=\int \frac{dx}{\left(1+x^n\right)\sqrt[n]{x^n+1}}$	Dạng 28: $I=\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$
Dạng 29: $I=\int \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}dx$	Dạng 30: $I=\int \sqrt{(x-a)(b-x)}dx$
Dạng 31: $I=\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$	Dạng 32: $I=\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(ax+b)^k(cx+d)^{2n-k}}}$
Dạng 33: $I=\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}-\sqrt{ax+c}}$; $J=\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax+c}}$	

II. PHƯƠNG PHÁP

Dạng 1: $I=\int x\sqrt[n]{ax+b}dx$

Phương pháp: Đặt $t=\sqrt[n]{ax+b}\Rightarrow t^n=ax+b\Rightarrow x=\dfrac{t^n-b}{a}\Rightarrow dx=n.t^{n-1}dt$.

$$I=n\int\left(\frac{t^n-b}{a}\right).t.t^{n-1}dt=\frac{n}{a}\int\left(t^n-b\right)t^n dt$$

$$=\frac{n}{a}\int\left(t^{2n}-b.t^n\right)dt=\frac{2n}{a.(2n+1)}t^{2n+1}-\frac{bn}{a(n+1)}.t^{n+1}+C.$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int x.\sqrt[6]{3x-\frac{1}{2}}dx$.

Lời giải: Đặt $t=\sqrt[6]{3x-\frac{1}{2}}\Rightarrow t^6=3x-\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{t^6+\frac{1}{2}}{3}\Rightarrow dx=6t^5dt$

$$I=6\int\left(\frac{t^6+\frac{1}{2}}{3}\right).t.t^5dt=2\int t^6.\left(t^6+\frac{1}{2}\right).dt$$

$$=2\int\left(t^{12}+\frac{t^6}{2}\right)dt=2\left(\frac{t^{13}}{13}+\frac{t^7}{14}\right)+C.$$

Bài tập áp dụng

➢ **Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây**

a. $I=\int x\sqrt[3]{x+1}dx=3\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)+C;t=\sqrt[3]{x+1}$

b. $I=\int x\sqrt[4]{-x+2}dx=-4\left(\frac{t^9}{9}-2\frac{t^5}{5}\right)+C;t=\sqrt[4]{-x+2}$.

c. $I=\int x\sqrt[5]{-3x+1}dx=-\frac{5}{3}\left(\frac{t^{11}}{11}-\frac{t^6}{6}\right)+C;t=\sqrt[5]{-3x+1}$.

d. $I=\int x\sqrt[7]{5x-4}dx=\frac{7}{5}\left(\frac{t^{15}}{15}+4\frac{t^8}{8}\right)+C;t=\sqrt[7]{5x-4}$.

e. $I=\int x.\sqrt[10]{-7x+3}dx=-\frac{10}{7}\left(\frac{t^{21}}{21}-3\frac{t^{11}}{11}\right)+C;t=\sqrt[10]{-7x+3}$.

Dạng 2: $I=\int x^k\sqrt{ax^k+b}.dx$ (với $0\le k\le 2$)

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int x^2\sqrt{x^2-1}.dx=\int x.x\sqrt{x^2-1}dx$.

Lời giải: Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=x\sqrt{x^2-1}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=\frac{1}{2}\int\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}d\left(x^2-1\right)=\frac{1}{3}\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}\end{cases}$

$I=\frac{1}{3}x\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\int\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-1}.dx$

$\Rightarrow\frac{4}{3}.I=\frac{1}{3}x\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}\int\sqrt{x^2-1}dx$

$\Rightarrow\frac{4}{3}.I=\frac{1}{3}x\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}\int\sqrt{x^2-1}dx$

$\frac{4}{3}.I=\frac{1}{3}x\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}\left(\frac{x.\sqrt{x^2-1}}{2}+\frac{1}{2}.\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right)+C$

$J=\int\sqrt{x^2-a}.dx;\begin{cases}u=\sqrt{x^2-a}\\dv=dx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}du=\frac{2x.dx}{2\sqrt{x^2-a}}\\v=x\end{cases}$

$\Rightarrow J=x.\sqrt{x^2-a}-\int\frac{x^2-a+a}{\sqrt{x^2-a}}dx=x.\sqrt{x^2-a}-\int\sqrt{x^2-a}.dx+a.\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a}}$

$u=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a}\right|\Leftrightarrow du=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-a}\right)'}{x+\sqrt{x^2-a}}.dx=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-a}}}{x+\sqrt{x^2-a}}.dx=\frac{dx}{\sqrt{x^2-a}}$

$\Leftrightarrow\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a}\right|$

$\Leftrightarrow 2J=x.\sqrt{x^2-a}+a.\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a}}\Rightarrow J=\frac{x.\sqrt{x^2-a}}{2}+\frac{a}{2}.\ln\left|x+\sqrt{x^2-a}\right|+C$



Bài tập áp dụng

➢ **Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây**

a. $I=\int x\sqrt{2x+3}dx\Rightarrow\frac{5}{3}I=\frac{1}{3}x.(2x+3)^{\frac{3}{2}}-\int\sqrt{2x+3}dx$.

b. $I=\int x^2\sqrt{3x^2+1}dx\Rightarrow\frac{4}{3}I=\frac{1}{9}x\left(3x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{9}\int\sqrt{3x^2+1}dx$.

c. $I=\int x^2\sqrt{-x^2+5}dx \Rightarrow \frac{2}{3}I=-\frac{1}{3}x.\left(-x^2+5\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{5}{3}\int\sqrt{-x^2+5}.dx$.

d. $I=\int x.\sqrt{-3x+7}dx \Rightarrow \frac{5}{3}I=-\frac{2}{9}x.\left(-3x+7\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{14}{9}\int\sqrt{-3x+7}.dx$.

e. $I=\int x\sqrt{4x+1}dx \Rightarrow \frac{5}{3}I=\frac{1}{6}x\left(4x+1\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{6}\int\sqrt{4x+1}dx$.

Dạng 3: $I=\int x^{k-1}\sqrt{ax^k+b}dx$

Phương pháp: Đặt $t=\sqrt{ax^k+b}\Rightarrow t^2=ax^k+b\Rightarrow x^k=\frac{t^2-b}{a}$

$\Rightarrow k.x^{k-1}dx=\frac{2t}{a}dt\Rightarrow x^{k-1}dx=\frac{2t}{ak}dt$.

$I=\int t.\frac{2t}{ak}dt=\frac{2}{ak}\int t^2dt=\frac{2}{3ak}t^3+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int x^4\sqrt{-2x^5+3}dx$.

Lời giải: Đặt $t=\sqrt{-2x^5+3}\Rightarrow t^2=-2x^5+3\Rightarrow x^5=\frac{3-t^2}{2}$

$\Rightarrow 5x^4dx=-tdt\Rightarrow x^4dx=-\frac{t}{5}dt$.

$I=\int\left(-\frac{1}{5}t.\right)t.dt=-\frac{1}{5}\int t^2dt=-\frac{t^3}{15}+C$.

Bài tập áp dụng

➢ **Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây**

a. $I=\int x^2\sqrt{x^3+1}dx=\frac{2t^3}{9}+C;t=\sqrt{x^3+1}$.

b. $I=\int x^4\sqrt{3x^5-2}dx=\frac{t^3}{18}+C;t=\sqrt{3x^5-2}$.

c. $I=\int x^6\sqrt{x^7-4}dx=\frac{t^3}{9}+C;t=\sqrt{x^7-4}$.

d. $I=\int x^8\sqrt{2x^9+1}dx=\frac{t^3}{24}+C;t=\sqrt{2x^9+1}$.

e. $I=\int x^{10}\sqrt{x^{11}+2}dx=\frac{t^3}{15}+C;t=\sqrt{x^{11}+2}$.

Dạng 4: $I=\int x^{2k-1}.\sqrt{ax^k+b}dx$

Phương pháp: Đặt $t=\sqrt{ax^k+b}\Rightarrow t^2=ax^k+b\Rightarrow x^k=\frac{t^2-b}{a}$

$\Rightarrow k.x^{k-1}dx=\frac{2t}{a}dt\Rightarrow x^{k-1}dx=\frac{2t}{ak}dt$.

$I=\int x^k.\sqrt{ax^k+b}.x^{k-1}dx=\int\frac{t^2-b}{a}.t.\frac{2t}{ak}dt$

$=\frac{2}{a^2k}\int\left(t^2-b\right)t^2.dt=\frac{2}{a^2k}\left(\frac{t^5}{5}-\frac{b}{3}t^3\right)+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int x^7\sqrt{-2x^4+3}dx$.

Lời giải: Đặt $t=\sqrt{-2x^4+3}\Rightarrow t^2=-2x^4+3$

$\Rightarrow x^4=\frac{3-t^2}{2}\Rightarrow 4x^3dx=-tdt\Rightarrow x^3dx=-\frac{tdt}{4}$.

$I=\int x^4\sqrt{-2x^4+3}.x^3dx=\int\frac{3-t^2}{2}.t.\left(-\frac{t}{4}\right)dt$

$=-\frac{1}{8}\int\left(3t^2-t^4\right)dt=-\frac{1}{8}\left(t^3-\frac{t^5}{5}\right)+C$.

Bài tập áp dụng

➢ **Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây**

a. $I=\int x^3\sqrt{x^2+1}dx=\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}+C$.

b. $I=\int x^9\sqrt{3x^5-2}dx=\frac{2}{45}\left(\frac{t^5}{5}+\frac{2t^3}{3}\right)+C$.

c. $I=\int x^{11}\sqrt{x^6-4}dx=\frac{1}{3}\left(\frac{t^5}{5}+\frac{4t^3}{3}\right)+C$.

d. $I=\int x^{15}\sqrt{2x^8+1}dx=\frac{1}{16}\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)+C$.

e. $I=\int x^{19}\sqrt{x^{10}+2}dx=\frac{1}{5}\left(\frac{t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}\right)+C$.

Dạng 5: $I=\int x^{n-1}.\sqrt[m]{\left(ax^n+b\right)^k}dx$

Phương pháp: $I=\frac{1}{an}\int\left(ax^n+b\right)^{\frac{k}{m}}d\left(ax^n+b\right)=\frac{1}{an}.\frac{\left(ax^n+b\right)^{\frac{k}{m}+1}}{\frac{k}{m}+1}+C$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int x^2\sqrt[5]{\left(-x^3+1\right)^4}dx$.

Lời giải: $I=-\frac{1}{3}\int\left(-x^3+1\right)^{\frac{4}{5}}d\left(-x^3+1\right)=-\frac{1}{3}\frac{\left(-x^3+1\right)^{\frac{9}{5}}}{\frac{9}{5}}+C$

$=-\frac{5}{27}\left(-x^3+1\right)^{\frac{9}{5}}+C$.

Bài tập áp dụng

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int x\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}dx=\frac{3}{10}\left(x^2-1\right)^{\frac{5}{3}}+C$.

b. $I=\int x^2\sqrt[5]{\left(-2x^3+3\right)^7}dx=-\frac{5}{27}\left(-2x^3+3\right)^{\frac{12}{5}}+C$.

c. $I=\int x^3\sqrt[7]{\left(x^4+1\right)^5}dx=\frac{7}{48}\left(x^4+1\right)^{\frac{12}{7}}+C$.

d. $I=\int x^4\sqrt[3]{\left(-3x^5+2\right)^9}dx=-\frac{1}{60}\left(-3x^5+2\right)^4+C$.

e. $I=\int x^5\sqrt[4]{\left(x^6-2\right)^5}dx=\frac{2}{27}\left(x^6-2\right)^{\frac{9}{4}}+C$.

Dạng 6: $I=\int x^{2k+1}.\sqrt{ax^2+b}dx$

Phương pháp: Đặt $t=\sqrt{ax^2+b}\Rightarrow t^2=ax^2+b\Rightarrow x^2=\frac{t^2-b}{a}\Rightarrow xdx=tdt$.

$I=\int x^{2k}.x.\sqrt{ax^2+b}dx=\frac{1}{a^k}\int\left(t^2-b\right)^k t^2dt$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=x^9\sqrt{-2x^2+3}dx$.

Lời giải: Đặt $t=\sqrt{-2x^2+3}\Rightarrow t^2=-2x^2+3\Rightarrow x^2=\frac{3-t^2}{2}\Rightarrow 2xdx=-tdt$

$I=\int x^8x\sqrt{-2x^2+3}dx=\frac{1}{4}\int\left(t^2-3\right)^4.t^2dt$.

Bài tập áp dụng

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int x^3\sqrt{x^2+1}dx=\int\left(t^2-1\right).t^2dt;t=\sqrt{x^2+1}$.

b. $I=\int x^5\sqrt{3x^2-2}dx=\frac{1}{9}\int\left(t^2+2\right)^2t^2dt;t=\sqrt{3x^2-2}$.

c. $I=\int x^7\sqrt{x^2-4}dx=\int\left(t^2+4\right)^3t^2dt;t=\sqrt{x^2-4}$.

d. $I=\int x^9\sqrt{2x^2+1}dx=\frac{1}{16}\int\left(t^2-1\right)^4t^2dt;t=\sqrt{2x^2+1}$.

e. $I=\int x^{11}\sqrt{x^2+2}dx=\int\left(t^2-2\right)^5t^2dt;t=\sqrt{x^2+2}$.

Dạng 7: $I=\int\sqrt{x^2+a^2}dx$

Phương pháp 1: Đặt $\begin{cases}u=\sqrt{x^2+a^2}\\dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx\\v=x\end{cases}$.

$$I=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\sqrt{x^2+a^2}dx+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\Rightarrow 2I=x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|$$

$$I=\frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2}+\frac{a^2}{2}.\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|;\text{Do } u=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a}\right|$$

$$\Leftrightarrow du=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)'}{x+\sqrt{x^2+a^2}}.dx=\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{x^2+a^2}}dx=\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int du=u=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|$$

Phương pháp 2: Đặt $x = a\tan t; t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right); dx = a\left(1+\tan^2 t\right)dt = \frac{a}{\cos^2 t}dt$

$$I = \int \frac{a}{\cos^2 t}\sqrt{a^2\left(1+\tan^2 t\right)}dt = a^2\int \frac{dt}{\cos^3 t}.$$

Đặt $J = \int \frac{dt}{\cos^3 t} = \int \frac{\cos t}{\cos^4 t}dt = \int \frac{\cos t}{\left(1-\sin^2 t\right)^2}.dt$

$u = \sin t \Leftrightarrow du = \cos t.dt$

$$\Rightarrow J = \int \frac{du}{\left(1-u^2\right)^2} = \int \frac{du}{(u-1)^2.(u+1)^2} = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)^2.du$$

$$J = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{(u-1)^2}+\frac{1}{(u+1)^2}-\frac{2}{(u-1).(u+1)}\right)du$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{(u-1)^2}+\frac{1}{(u+1)^2}+\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1}\right)du$$

$$J = \frac{1}{4}.\left(-\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1}+\ln|u+1|-\ln|u-1|\right)+C = \frac{1}{4}.\left(-\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1}+\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|\right)+C$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I = \int \sqrt{x^2+1}dx$.

Lời giải: Đặt $x = \tan t; t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right), dx = \left(1+\tan^2 t\right)dt = \frac{dt}{\cos^2 t}$

$$I = \int \frac{1}{\cos^2 t}\sqrt{1+\tan^2 t}dt = \int \frac{dt}{\cos^3 t} = \frac{1}{4}.\left(-\frac{1}{\sin x+1}-\frac{1}{\sin x-1}+\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|\right)+C$$

Bài tập áp dụng

➢ **Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây**

a. $I = \int \sqrt{x^2+4}dx = \frac{x}{2}.\sqrt{x^2+4}+2.\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|+C = 4\int \frac{dt}{\cos^3 t}; x = \tan t.$

b. $I = \int \sqrt{x^2+9}.dx = \frac{x}{2}.\sqrt{x^2+9}+2.\ln\left|x+\sqrt{x^2+9}\right|+C = 9.\int \frac{dt}{\cos^3 t}; x = \tan t.$

c. $I = \int \sqrt{x^2+25}.dx = \frac{x}{2}.\sqrt{x^2+25}+\frac{25}{2}.\ln\left|x+\sqrt{x^2+25}\right|+C = 25.\int \frac{dt}{\cos^3 t}; x = \tan t$

Dạng 8: $I=\int\sqrt{x^2-a^2}dx$

Phương pháp 1: Đặt $x=\frac{a}{\cos t};t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$ và $dx=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$.

$$I=a\int\frac{\sin t}{\cos^2 t}\sqrt{a^2\left(\frac{1}{\cos^2 t}-1\right)}dt=a^2\int\frac{\sin t}{\cos^2 t}\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}dt$$

$$=a^2\int\frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}dt=a^2\int\frac{1-\cos^2 t}{\cos^3 t}dt=a^2\left(\int\frac{dt}{\cos^3 t}-\int\frac{dt}{\cos t}\right).$$

Đến đây ta xem dạng *Dạng 7:* $J=\int\frac{dt}{\cos^3 t}$ và dạng 11: $K=\int\frac{dt}{\cos t}$

Phương pháp 2: Đặt $t=x+\sqrt{x^2-a^2}\Rightarrow t-x=\sqrt{x^2-a^2}$

$$\Rightarrow(t-x)^2=x^2-a^2\Leftrightarrow x=\frac{t^2+a^2}{2t}\Rightarrow dx=\left(\frac{1}{2}-\frac{a^2}{2t^2}\right)dt.$$

$$I=\int\left(t-\frac{t^2+a^2}{2t}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{a^2}{2t^2}\right)dt=\frac{1}{4}\int\frac{\left(a^2-t^2\right)^2}{t^3}dt=\frac{1}{4}\int\frac{t\left(a^2-t^2\right)^2}{t^4}dt$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{\left(a^2-t^2\right)^2}{t^4}d\left(t^2\right)=\frac{1}{8}\int\frac{\left(a^2-u\right)^2}{u^2}du$$

$$=\frac{1}{8}\int\left(\frac{a^4}{u^2}-\frac{2a^2}{u}+1\right)du=\frac{1}{8}\left(-\frac{a^4}{u}-2a^2.\ln|u|+u\right).$$

Phương pháp 3: Đặt $\begin{cases}u=\sqrt{x^2-a^2}\\dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}dx\\v=x\end{cases}$.

$$I=x\sqrt{x^2-a^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=x\sqrt{x^2-a^2}-\int\frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$$

$$=x\sqrt{x^2-a^2}-\int\sqrt{x^2-a^2}dx-a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$\Rightarrow 2I=x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|$$

$$I=\frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2}-\frac{a^2}{2}.\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|;\text{Do } u=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|$$

$$\Leftrightarrow du=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)'}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.dx=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}}{x+\sqrt{x^2-a^2}}dx=\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int du=u=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\sqrt{x^2-1}dx$.

Lời giải: Đặt $x=\frac{1}{\cos t};t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right),dx=\frac{\sin tdt}{\cos^2 t}$

$$I=\int\frac{\sin t}{\cos^2 t}\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}dt=\int\frac{\sin t}{\cos^2 t}\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}dt=\int\frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}dt$$

$$=\int\frac{1-\cos^2 t}{\cos^3 t}dt=\int\frac{dt}{\cos^3 t}-\int\frac{dt}{\cos t}$$

$$J=\int\frac{dt}{\cos^3 t}=\int\frac{\cos t}{\cos^4 t}dt=\int\frac{\cos t}{\left(1-\sin^2 t\right)^2}.dt$$

Đặt $u=\sin t\Leftrightarrow du=\cos t.dt$

$$\Rightarrow J=\int\frac{du}{\left(1-u^2\right)^2}=\int\frac{du}{(u-1)^2.(u+1)^2}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)^2.du$$

$$J=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{(u-1)^2}+\frac{1}{(u+1)^2}-\frac{2}{(u-1).(u+1)}\right).du$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{(u-1)^2}+\frac{1}{(u+1)^2}+\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1}\right)du$$

$$J=\frac{1}{4}.\left(-\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1}+\ln|u+1|-\ln|u-1|\right)+C=\frac{1}{4}.\left(-\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1}+\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|\right)+C$$

$$K=\int\frac{dt}{\cos t}=\int\frac{\cos t.dt}{\cos^2 t}=\int\frac{\cos t.dt}{1-\sin^2 t}=$$

$$-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\sin t-1}-\frac{1}{\sin t+1}\right).d(\sin t)=\frac{1}{2}\left(\ln|\sin t+1|-\ln|\sin t+1|\right)$$

Bài tập áp dụng

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\sqrt{x^2-4}dx=4\left(\int\frac{dt}{\cos^3 t}-\int\frac{dt}{\cos t}\right)$.

b. $I=\int\sqrt{x^2-25}dx=25\left(\int\frac{dt}{\cos^3 t}-\int\frac{dt}{\cos t}\right)$.

c. $I=\int\sqrt{x^2-36}dx=36\left(\int\frac{dt}{\cos^3 t}-\int\frac{dt}{\cos t}\right)$.

Dạng 9: $I=\int\sqrt{a^2-x^2}dx$

Phương pháp: Đặt $x=a\sin t;t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right];dx=a\cos tdt$.

$I=a\int\sqrt{a^2\left(1-\sin^2 t\right)}\cos tdt=a^2\int\cos^2 tdt$

$=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\sqrt{1-x^2}dx$.

Lời giải: Đặt $x=\sin t;t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right];dx=\cos tdt$

$I=\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt=\int\cos^2 tdt=\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}+C$.

Bài tập áp dụng

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\sqrt{4-x^2}dx=2t+\sin 2t+C$.

b. $I=\int\sqrt{9-x^2}dx=\frac{9t}{2}+\frac{9\sin 2t}{4}+C$.

c. $I=\int\sqrt{4-x^2}dx=2t+\sin 2t+C$.

Dạng 10: $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$

Phương pháp: Đặt $t=x+\sqrt{x^2+a^2}\Rightarrow dt=\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)dx=\frac{t}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$

$\Rightarrow\frac{dt}{t}=\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

$I=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

Lời giải:

Đặt: $t=x+\sqrt{x^2+1}\Rightarrow dt=\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=\frac{t}{\sqrt{x^2+1}}dx\Rightarrow\frac{dt}{t}=\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

$I=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C$.

Bài tập áp dụng

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+9}\right|+C$.

b. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+16}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+16}\right|+C$.

c. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+64}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+64}\right|+C$.

Dạng 11: $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$

Phương pháp 1: Đặt $x=\frac{a}{\cos t};t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right);dx=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$.

$I=a\int\frac{\sin t}{\cos^2 t\sqrt{a^2\left(\frac{1}{\cos^2 t}-1\right)}}dt=\int\frac{\sin t}{\cos^2 t\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}}dt=\int\frac{dt}{\cos t}$.

Dạng 11: $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$

Phương pháp 1: Đặt $x=\frac{a}{\cos t};t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right);dx=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$.

$$I=a\int\frac{\sin t}{\cos^2 t\sqrt{a^2\left(\frac{1}{\cos^2 t}-1\right)}}dt=\int\frac{\sin t}{\cos^2 t\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}}dt=\int\frac{dt}{\cos t}.$$

Phương pháp 2:

Đặt $t=x+\sqrt{x^2-a^2}\Rightarrow dt=\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\right)dx=\frac{t}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$

$\Rightarrow\frac{dt}{t}=\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

$$I=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C.$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

Lời giải: Đặt $x=\frac{1}{\cos t};t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left[0;\frac{3\pi}{2}\right);dx=\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt$

$$I=a\int\frac{\sin t}{\cos^2 t\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}}dt=\int\frac{\sin t}{\cos^2 t\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}}dt=\int\frac{dt}{\cos t}.$$

$$K=\int\frac{dt}{\cos t}=\int\frac{\cos t}{\cos^2 t}dt=\int\frac{\cos t}{1-\sin^2 t}dt;u=\sin t\Leftrightarrow du=\cos t.dt$$

$$K=-\int\frac{du}{u^2-1}=-\int\frac{du}{(u-1).(u+1)}=\frac{-1}{2}\int\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|+C$$

Bài tập áp dụng

➢ **Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây**

a. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|+C=\int\frac{dt}{\cos t}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin t+1}{\sin t-1}\right|+C;x=\frac{2}{\cos t}$.

b. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-9}\right|+C=\int\frac{dt}{\cos t}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin t+1}{\sin t-1}\right|+C;x=\frac{3}{\cos t}$.

c. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-16}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-16}\right|+C=\int\frac{dt}{\cos t}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin t+1}{\sin t-1}\right|+C;x=\frac{4}{\cos t}$.

Dạng 12: $I=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

Phương pháp: Đặt $x=a\sin t;t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right];dx=a\cos tdt$.

$I=\int\frac{a\cos t}{\sqrt{a^2\left(1-\sin^2 t\right)}}dt=\int dt=t+C=\arcsin\frac{x}{a}+C$ (với $a>0$).

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Lời giải: Đặt $x=\sin t;t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right];dx=\cos tdt$

$I=\int\frac{\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}dt=\int dt=t+C=\arcsin x+C$.

Bài tập áp dụng

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\arcsin\frac{x}{2}+C$.

b. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}=\arcsin\frac{x}{4}+C$.

c. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}=\arcsin\frac{x}{5}+C$.

Dạng 13: $I=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Phương pháp: *Hướng phân tích thứ nhất:*

+ TH1: $a>0$.

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{d\left(x+\frac{b}{2a}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dX}{\sqrt{X^2-A^2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|X+\sqrt{X^2-A^2}\right|+C$$

+ TH2: $a<0$.

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{-a\left[\frac{\Delta}{4a^2}-\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\right]}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\int\frac{d\left(x+\frac{b}{2a}\right)}{\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}-\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}.\int\frac{dX}{\sqrt{A^2-X^2}}$$

$$=\frac{t}{\sqrt{-a}};X=A.\sin t$$

Hướng phân tích thứ hai:

+ TH1: $I=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(mx+n)^2+k}}=\frac{1}{m}\int\frac{d(mx+n)}{\sqrt{(mx+n)^2+k}}$

$$=\frac{1}{m}\ln\left|(mx+n)+\sqrt{(mx+n)^2+k}\right|.$$

+ TH2: $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{dx}{\sqrt{p^2-(mx+n)^2}}$

$$=\frac{1}{m}\int\frac{d(mx+n)}{\sqrt{p^2-(mx+n)^2}}=\frac{1}{m}\int\frac{dX}{\sqrt{A^2-X^2}}.$$

Ví dụ 1: **Tính tích phân** $I=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$.

Lời giải: Đặt $t=x-1+\sqrt{x^2-2x+5}\Rightarrow dt=\left(1+\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}\right)dx$

$$=\frac{\sqrt{x^2-2x+5}+x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx=\frac{t}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx\Rightarrow\frac{dt}{t}=\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}.$$

Khi $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=2\\x=-1\Rightarrow t=2\sqrt{2}-2\end{cases}$.

$$I=\int_{2\sqrt{2}-2}^{2}\frac{dt}{t}=\ln|t|\Big|_{2\sqrt{2}-2}^{2}=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right).$$

Ví dụ 2: Tính tích phân $I=\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$.

Lời giải: $I=\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}=\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-(x-1)^2}}$

Đặt $x-1=\sqrt{2}\sin t; t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]; dx=\sqrt{2}\cos t dt$.

Khi $\begin{cases} x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{4} \\ x=0\Rightarrow t=-\frac{\pi}{4} \end{cases}$.

$$I=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{\sqrt{2\left(1-\sin^2 t\right)}}dt=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{\sqrt{2\cos^2 t}}=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dt=t\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}.$$

Bài tập áp dụng

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \frac{2}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx=2.\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right|+C$.

b. $I=\int \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+2}}dx=\ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+2}\right|$.

c. $I=\int \frac{1}{\sqrt{3+4x-x^2}}dx=t+C; x-2=\sin t$.

Dạng 14: $I=\int\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

Phương pháp: $I=\int\frac{\frac{m}{2a}(2ax+b)+n-\frac{mb}{2a}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

$$=\frac{m}{2a}\int\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$=\frac{m}{2a}\int\frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$=\frac{m}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$.

Lời giải: $I=\int\frac{(2x+1)+2}{\sqrt{x^2+x+1}}dx=\int\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx+2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

$$=\int\frac{d\left(x^2+x+1\right)}{\sqrt{x^2+x+1}}+2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=2\sqrt{x^2+x+1}+2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Bài tập áp dụng

➢ **Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây**

a. $I=\int\frac{x-3}{\sqrt{x^2+x+1}}dx=\frac{1}{2}\sqrt{2x^2-4x+5}-2\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-4x+5}}.$

b. $I=\int\frac{x+9}{\sqrt{3x^2+x+2}}dx=\frac{1}{3}\sqrt{3x^2+x+2}+\frac{53}{6}\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2+x+2}}.$

c. $I=\int\frac{4x}{\sqrt{x^2-2x+3}}dx=4\sqrt{x^2-2x+3}+4\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+3}}.$

Dạng 15: $I=\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

Phương pháp: Sử dụng đồng nhất thức.

$$I=\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+R\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$.

Lời giải:

$$I=\int\frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=(ax^2+bx+c)\sqrt{x^2+2x+2}+R\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

Đạo hàm hai vế ta được $\frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

$$=(2ax+b)\sqrt{x^2+2x+2}+(ax^2+bx+c)\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}+R\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

$$\Rightarrow x^3+2x^2+3x+4\equiv(2ax+b)(x^2+2x+2)+(ax^2+bx+c)(x+1)+R$$

Đồng nhất hệ số ta có $a=\frac{1}{3};b=\frac{1}{6};c=\frac{7}{6};\ R=\frac{5}{2}$

Vậy $I=\int\frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

$$=\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{7}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}|+C.$$

Dạng 16: $I=\int\frac{dx}{(x-k)\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Phương pháp: Đặt $x-k=\frac{1}{t}\Rightarrow dx=-\frac{dt}{t^2}$.

$$I=-\int\frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{a\left(\frac{1}{t}+k\right)^2+b\left(\frac{1}{t}+k\right)+c}}=-\int\frac{dt}{t\sqrt{a\left(\frac{1+tk}{t}\right)^2+b\left(\frac{1+tk}{t}\right)+c}}$$

$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{a(1+tk)^2+bt(1+tk)+ct^2}}$$

$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{a+2atk+at^2k^2+bt+bt^2k+ct^2}}$$

$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{(ak^2+bk+c)t^2+(2ak+b)t+a}}$$ (đã có dạng ở trên).

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+2x+3}}$.

Lời giải:

$$I=-\int\frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}+1\right)^2+2\left(\frac{1}{t}+1\right)+3}}=-\int\frac{dt}{t\sqrt{\left(\frac{1+t}{t}\right)^2+2\left(\frac{1+t}{t}\right)+3}}$$

$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{(1+t)^2+2t(1+t)+3t^2}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{1+2t+t^2+2t+2t^2+3t^2}}$$

$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{6t^2+4t+1}}.$$

Bài tập áp dụng

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{dx}{(x+5)\sqrt{2x^2-6x+4}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{84t^2-26t+2}}$.

b. $I=\int\frac{dx}{(x-3)\sqrt{x^2+2x+7}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{22t^2+8t+1}}$.

c. $I=\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{3x^2+17x-10}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{48t^2+29t+3}}$.

Dạng 17: $I=\int\frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Phương pháp: Đặt $px+q=\frac{1}{t}\Rightarrow x=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{t}-q\right)\Rightarrow dx=\frac{-dt}{pt^2}$.

$$I=\int\frac{\frac{-dt}{pt^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{a}{p^2}\left(\frac{1}{t}-p\right)^2+\frac{b}{p}\left(\frac{1}{t}-q\right)+c}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{\alpha t^2+\beta t+\gamma}}.$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

➢ Lời giải: Đặt $x+1=\frac{1}{t}\Rightarrow x=\left(\frac{1}{t}-1\right)\Rightarrow dx=-\frac{dt}{t^2}$

$$I=\int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+\left(\frac{1}{t}-1\right)+1}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-t+1}}=-\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+1}\right|+C$$

Bài tập áp dụng

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{dx}{(x-3)\sqrt{2x^2+x+3}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{24t^2+15t+2}}$.

b. $I=\int\frac{dx}{(x-8)\sqrt{6x^2+x-5}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{387t^2+97t+6}}$.

c. $I=\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{3x^2-6x+5}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{14t^2-12t+3}}$.

Dạng 18: $I=\int\frac{mx+n}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

Phương pháp: $I=\int\frac{\frac{m}{p}(px+q)+n-\frac{mq}{p}}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

$=\frac{m}{p}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\left(n-\frac{mq}{p}\right)\int\frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}.$

(đã có dạng ở trên).

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{x+2}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}dx$.

Lời giải:

$I=\int\frac{(x+1)+1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}+\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$

$=\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|-\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+1}\right|+C;t=\frac{1}{x+1}$

Bài tập áp dụng

➢ **Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây**

a. $I=\int\frac{2x+3}{(x+3)\sqrt{x^2-6x+2}}dx=2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+2}}-3\int\frac{dx}{(x+3)\sqrt{x^2-6x+2}}.$

b. $I=\int\frac{4x-5}{(2x-1)\sqrt{-x^2+3x-1}}dx=2\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-1}}-3\int\frac{dx}{(2x-1)\sqrt{-x^2+3x-1}}.$

c. $I=\int\frac{3x-1}{(x+3)\sqrt{x^2+2x-9}}dx=3\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-9}}-10\int\frac{dx}{(x+3)\sqrt{x^2+2x-9}}.$

Dạng 19: $I=\int\frac{dx}{\left(ax^2+b\right)\sqrt{cx^2+d}}$

Phương pháp:

Đặt $xt=\sqrt{cx^2+d}\Rightarrow x^2t^2=cx^2+d\Rightarrow x^2=\frac{d}{t^2-c}\Rightarrow xdx=\frac{-td}{\left(t^2-c\right)^2}dt$

$$\Rightarrow\frac{dx}{\sqrt{cx^2+d}}=\frac{dx}{xt}=\frac{xdx}{x^2t}\Rightarrow\frac{\frac{-td}{\left(t^2-c\right)^2}dt}{\frac{d}{t^2-c}t}=\frac{-dt}{t^2-c}.$$

$$I=-\int\frac{dt}{\left(t^2-c\right)\left(\frac{a}{t^2-c}d+b\right)}=-\int\frac{dt}{bt^2+ad-bc}$$ (đã có dạng ở trên).

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)\sqrt{2x^2+3}}$.

Lời giải:

Đặt $xt=\sqrt{2x^2+3}\Rightarrow x^2t^2=2x^2+3\Rightarrow x^2=\frac{3}{t^2-2}\Rightarrow xdx=\frac{-3t}{\left(t^2-2\right)^2}dt$

$$\Rightarrow\frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}}=\frac{dx}{xt}=\frac{x}{x^2t}dx\Rightarrow\frac{\frac{-3t}{\left(t^2-2\right)^2}dt}{\frac{3}{t^2-2}t}=-\frac{dt}{t^2-2}.$$

$$I=\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)\sqrt{2x^2+3}}=-\int\frac{dt}{\left(\frac{3}{t^2-2}+1\right).\left(t^2-2\right)}=-\int\frac{dt}{t^2+1}=-u+C;t=\tan u$$

Bài tập áp dụng

➢ **Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây**

a. $I=\int\frac{dx}{\left(-2x^2+3\right)\sqrt{4x^2+1}}=-\int\frac{dt}{3t^2-14}.$

b. $I=\int\frac{dx}{\left(3x^2-2\right)\sqrt{2x^2+6}}=-\int\frac{dt}{-2t^2+22}.$

c. $I=\int\frac{dx}{\left(x^2+5\right)\sqrt{3x^2-2}}=-\int\frac{dt}{5t^2-17}.$

Dạng 20: $I=\int\frac{x}{\left(ax^2+b\right)\sqrt{cx^2+d}}dx$

Phương pháp: Đặt $t=\sqrt{cx^2+d}\Rightarrow t^2=cx^2+d\Rightarrow x^2=\frac{t^2-d}{c}\Rightarrow xdx=\frac{t}{c}dt$

$I=\frac{1}{c}\int\frac{t}{\left[a\frac{t^2-d}{c}+b\right]t}dt=\int\frac{dt}{at^2+bc-ad}$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{2x^2-1}}dx$.

Lời giải: Đặt $t=\sqrt{2x^2-1}\Rightarrow t^2=2x^2-1\Rightarrow x^2=\frac{t^2+1}{2}\Rightarrow xdx=\frac{t}{2}dt$

$I=\frac{1}{2}\int\frac{t}{\left(\frac{t^2+1}{2}+1\right)t}dt=\int\frac{dt}{t^2+3}=\frac{u}{\sqrt{3}}+C;t=\sqrt{3}.\tan u$.

Bài tập áp dụng

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{x}{\left(-3x^2+2\right)\sqrt{2x^2+5}}dx=\int\frac{dt}{-3t^2+19}$.

b. $I=\int\frac{x}{\left(-2x^2+3\right)\sqrt{4x^2+1}}dx=\int\frac{dt}{-2t^2+14}$.

c. $I=\int\frac{x}{\left(9x^2-4\right)\sqrt{5x^2-7}}dx=\int\frac{dt}{9t^2+43}$.

Dạng 21: $I=\int\frac{mx+n}{\left(ax^2+b\right)\sqrt{cx^2+d}}dx$

Phương pháp: $I=m\int\frac{x}{\left(ax^2+b\right)\sqrt{cx^2+d}}dx+n\int\frac{dx}{\left(ax^2+b\right)\sqrt{cx^2+d}}$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{2x+1}{\left(x^2+2\right)\sqrt{3x^2+4}}dx$.

Lời giải: $I=2\int\frac{x}{\left(x^2+2\right)\sqrt{3x^2+4}}dx+\int\frac{dx}{\left(x^2+2\right)\sqrt{3x^2+4}}$.

Bài tập áp dụng

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{3x+7}{\left(-4x^2+1\right)\sqrt{2x^2+9}}dx$

$=3\int\frac{x}{\left(-4x^2+1\right)\sqrt{2x^2+9}}dx+7\int\frac{dx}{\left(-4x^2+1\right)\sqrt{2x^2+9}}$

b. $I=\int\frac{-2x}{\left(4x^2+3\right)\sqrt{3x^2+11}}dx=-2\int\frac{x}{\left(4x^2+3\right)\sqrt{3x^2+11}}dx$

c. $I=\int\frac{11x+17}{\left(13x^2+2\right)\sqrt{7x^2+9}}dx$

$=11\int\frac{x}{\left(13x^2+2\right)\sqrt{7x^2+9}}dx+17\int\frac{dx}{\left(13x^2+2\right)\sqrt{7x^2+9}}.$

Dạng 22: $I=\int\frac{P(x)}{\sqrt{ax+b}+c}dx$

Phương pháp:

Đặt $t=\sqrt{ax+b}+c\Rightarrow t-c=\sqrt{ax+b}\Rightarrow x=\frac{(t-c)^2-b}{a}\Rightarrow dx=\frac{2}{a}(t-c)dt.$

$I=\int\frac{P\left(\frac{(t-c)^2-b}{a}\right)}{t}.\frac{2}{c}(t-c)dt=\frac{2}{c}\int\frac{P\left(\frac{(t-c)^2-b}{a}\right)}{t}(t-c)dt.$

Ví dụ: Tính tích phân $I=\int_1^2\frac{x}{1+\sqrt{x-1}}dx$ (A_2004).

Lời giải: Đặt $t=\sqrt{x-1}+1\Rightarrow t-1=\sqrt{x-1}$

$\Rightarrow x=(t-1)^2+1\Rightarrow dx=2(t-1)dt.$

Khi $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=1\\x=2\Rightarrow t=2\end{cases}.$

$I=\int_1^2\frac{(t-1)^2+1}{t}\cdot 2(t-1)dt=2\int_1^2\frac{(t-1)^3+(t-1)}{(t-1)+1}d(t-1)=\frac{11}{3}-4\ln 2.$

Bài tập áp dụng

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \frac{2x+1}{\sqrt{3x+2}+4}dx=\frac{1}{2}.\int \frac{2\left[\frac{(t-4)^2-2}{3}\right]+1}{t}.(t-2)dt.$

b. $I=\int \frac{3x-2}{\sqrt{4x-3}+5}dx=\frac{2}{5}.\int \frac{3\left[\frac{(t-5)^2+3}{4}\right]-2}{t}.(t-5)dt.$

c. $I=\int \frac{3x+5}{\sqrt{x-2}+6}dx=\frac{1}{3}.\int \frac{3\left[(t-6)^2+2\right]+5}{t}.(t-6)dt.$

Dạng 23: $I=\int \frac{v(x)}{\sqrt{u^2(x)\pm\alpha}}dx$

Phương pháp:

Phân tích $\frac{v(x)}{\sqrt{u^2(x)\pm\alpha}}=\frac{a\left[u^2(x)+\alpha\right]}{\sqrt{u^2(x)\pm\alpha}}+\frac{b.u(x)}{\sqrt{u^2(x)\pm\alpha}}+\frac{c}{\sqrt{u^2(x)\pm\alpha}}.$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int \frac{2x^2+6x-5}{\sqrt{x^2-3}}dx.$

Lời giải: Phân tích

$$\frac{2x^2+6x-5}{\sqrt{x^2-3}}=\frac{a.(x^2-3)}{\sqrt{x^2-3}}+\frac{b\cdot 2x}{\sqrt{x^2-3}}+\frac{c}{\sqrt{x^2-3}}=\frac{ax^2+2bx+c-3a}{\sqrt{x^2-3}}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\2b=6\\c-3a=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=3\\c=1\end{cases}\Rightarrow\frac{2x^2+6x-5}{\sqrt{x^2-3}}=\frac{2.(x^2-3)}{\sqrt{x^2-3}}+\frac{3\cdot 2x}{\sqrt{x^2-3}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-3}}.$$

$$I=\int\left(2.\sqrt{x^2-3}+\frac{3\cdot 2x}{\sqrt{x^2-3}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-3}}\right)dx=$$

$$=2.\left(\frac{x}{2}.\sqrt{x^2-3}-\frac{3}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right|\right)+6.\sqrt{x^2-3}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right|+C$$

$J=\frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2}-\frac{a^2}{2}.\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|$; $K=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

(áp dụng dạng đã học)

Bài tập áp dụng

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{6x^2+12x-15}{\sqrt{3x^2-7}}dx=\int\left[\frac{2\left(3x^2-7\right)}{\sqrt{3x^2-7}}+\frac{2\cdot 6x}{\sqrt{3x^2-7}}+\frac{-1}{\sqrt{3x^2-7}}\right]dx.$

b. $I=\int\frac{3x^2+4x+20}{\sqrt{x^2+5}}dx=\int\left[\frac{3.\left(x^2+5\right)}{\sqrt{x^2+5}}+\frac{2\cdot 2x}{\sqrt{x^2+5}}+\frac{5}{\sqrt{x^2+5}}\right]dx.$

c. $I=\int\frac{-x^2+6x+1}{\sqrt{x^2+8}}dx=\int\left[\frac{-\left(x^2+8\right)}{\sqrt{x^2+8}}-\frac{3\cdot 2x}{\sqrt{x^2+8}}+\frac{9}{\sqrt{x^2+8}}\right]dx.$

Dạng 24: $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{ax^n+b}}$

Phương pháp: $I=\int\frac{x^{n-1}}{x^n\sqrt{ax^n+b}}dx.$

Đặt $\sqrt{ax^n+b}=t\Rightarrow t^2=ax^n+b\Rightarrow x^n=\frac{t^2-b}{a}$

$\Rightarrow n.x^{n-1}dx=\frac{2t}{a}.dt\Rightarrow x^{n-1}dx=\frac{2.t}{an}dt.$

$I=\int\frac{x^{n-1}}{x^n\sqrt{ax^n+b}}dx=\frac{2}{an}.\int\frac{t}{\frac{t^2-b}{a}.t}dt=\frac{2}{n}.\int\frac{dt}{t^2-b}.$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{x.\sqrt{3x^2+4}}.$

Lời giải: Đặt

$t=\sqrt{3x^2+4}\Leftrightarrow t^2=3x^2+4\Leftrightarrow 2t.dt=6x.dx=6x^2.\frac{dx}{x}=6.\left(\frac{t^2-4}{3}\right).\frac{dx}{x}\Leftrightarrow\frac{t}{t^2-4}.dt=\frac{dx}{x}$

$I=\int\frac{t}{t.\left(t^2-4\right)}.dt=\int\frac{dt}{t^2-4}=\int\frac{dt}{(t+2).(t-2)}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right).dt=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C$

Bài tập áp dụng

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C;t=\sqrt{x^2+1}$

b. $I=\int\frac{dx}{x.\sqrt{-x^3+2}}=\frac{2}{3}.\int\frac{dt}{t^2-2}=\frac{2}{3}.\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C;t=\sqrt{-x^3+2}$

c. $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{2x^4+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C;t=\sqrt{2x^4+1}$

d. $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{3x^5+9}}=\frac{2}{5}.\int\frac{dt}{t^2-9}=\frac{1}{15}.\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right|+C;t=\sqrt{3x^5+9}$

e. $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^6+3}}=\frac{1}{3}.\int\frac{dt}{t^2-3}=\frac{1}{3.\left(2\sqrt{3}\right)}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|+C;t=\sqrt{x^6+3}$

Dạng 25: $I=\int\frac{dx}{x\left(1+\sqrt[2n]{x}\right)^k}$

Phương pháp: Đặt $t=\sqrt[2n]{x}\Rightarrow t^{2n}=x\Rightarrow 2n.t^{n-1}dt=dx$.

$I=\int\frac{2n.t^{n-1}dt}{t^{2n}(1+t)^k}=2n\int\frac{dt}{t^{n+1}\left(t+1\right)^k}$ (với $k\le 2$).

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{x.\left(1+\sqrt[4]{x}\right)}$.

Lời giải: Đặt $t=\sqrt[4]{x}\Rightarrow t^4=x\Rightarrow 4t^3dt=dx$

$I=4\int\frac{1}{t(1+t)}dt=4.\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=4\left(\ln|t|-\ln|t+1|\right)+C$

Bài tập áp dụng

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

$$I=\int\frac{dx}{x\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2}=4\int\frac{dt}{t^3.(1+t)^2}=4.\int\frac{(t+1-t)^3}{t^3.(1+t)^2}.dt$$

a. $$=\int\frac{(t+1)^3-3(t+1)^2.t+3(t+1).t^2-t^3}{t^3.(1+t)^2}.dt;t=\sqrt[4]{x}$$

b. $I=\int\frac{dx}{x\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^3}=4\int\frac{dt}{t^3.(1+t)^3};t=\sqrt[4]{x}$.

c. $I=\int\frac{dx}{x\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^4}=4\int\frac{dt}{t^3.(1+t)^4};t=\sqrt[4]{x}$.

d. $I=\int\frac{dx}{x\left(1+\sqrt[6]{x}\right)}=6\int\frac{dt}{t^4(1+t)};t=\sqrt[6]{x}$.

e. $I=\int\frac{dx}{x\left(1+\sqrt[6]{x}\right)^3}=6\int\frac{dt}{t^4(1+t)^3};t=\sqrt[6]{x}$.

Dạng 26: $I=\int\frac{mx+n}{\sqrt[k]{ax+b}}dx$

Phương pháp 1: $I=\frac{1}{a}\int\frac{\frac{m}{a}(ax+b)+n-\frac{mb}{a}}{(ax+b)^{\frac{1}{k}}}d(ax+b)$

$$=\frac{1}{a^2}\int\left[m(ax+b)^{1-\frac{1}{k}}+(an-mb)(ax+b)^{-\frac{1}{k}}\right]d(ax+b).$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{x+2}}dx$.

Lời giải: $$I=\int\frac{(x+2)-1}{(x+2)^{\frac{1}{3}}}d(x+2)=\int\left[(x+2)^{\frac{2}{3}}-(x+2)^{-\frac{1}{3}}\right]d(x+2)$$

$$=\frac{3}{5}.(x+2)^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{2}(x+2)^{\frac{2}{3}}+C$$

Phương pháp 2: $I=\int\frac{mx+n}{\sqrt[k]{ax+b}}dx$

Đặt

$$t=\sqrt[k]{ax+b}\Leftrightarrow x=\frac{t^k-b}{a}\Leftrightarrow dx=\frac{k.t^{k-1}}{a}.dt\,.$$

$$I=\int\frac{mx+n}{\sqrt[k]{ax+b}}dx=\int\frac{m\left(\frac{t^k-b}{a}\right)+n}{t}.\frac{k.t^{k-1}}{a}.dt$$

$$=\frac{k}{a^2}\int\left[m.t^{2k-2}+(an-bm).t^{k-2}\right].dt=\frac{k}{a^2}.\left[\frac{m.t^{2k-1}}{2k-1}+(an-bm).\frac{t^{k-1}}{k-1}\right]+C$$

Bài tập áp dụng

➢ **Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây**

a. $I=\int\frac{-2x+3}{\sqrt[4]{3x+7}}dx=\frac{1}{16}\int\left[-2(3x+7)^{\frac{3}{4}}+23(3x+7)^{-\frac{1}{4}}\right]d(3x+7).$

b. $I=\int\frac{x-9}{\sqrt[5]{5x+6}}dx=\frac{1}{25}\int\left[(5x+6)^{\frac{4}{5}}-51(5x+6)^{-\frac{1}{5}}\right]d(5x+6).$

c. $I=\int\frac{-x}{\sqrt[6]{9x-1}}dx=\frac{1}{36}\int\left[-2(9x-1)^{\frac{5}{6}}-(9x-1)^{-\frac{1}{6}}\right]d(9x-1).$

d. $I=\int\frac{2x-5}{\sqrt[7]{x-8}}dx=\frac{1}{49}\int\left[2(x-8)^{\frac{6}{7}}+11(x-8)^{-\frac{1}{7}}\right]d(x-8).$

e. $I=\int\frac{x+9}{\sqrt[8]{4x-3}}dx=\frac{1}{64}\int\left[(4x-3)^{\frac{7}{8}}+39(4x-3)^{-\frac{1}{8}}\right]d(4x-3).$

Dạng 27: $I=\int\frac{dx}{(1+x^n)\sqrt[n]{x^n+1}}$

Phương pháp: $I=\int\frac{dx}{x^n(1+x^{-n}).x.\sqrt[n]{1+x^{-n}}}=\int\frac{dx}{x^{n+1}(1+x^{-n})^{\frac{1}{n}}}$

$$=-\frac{1}{n}\int(1+x^{-n})^{-\frac{1}{n}}d(x^{-n})=-\frac{1}{n}.\frac{(1+x^{-n})^{1-\frac{1}{n}}}{1-\frac{1}{n}}+C.$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)\sqrt{x^2+1}}$.

Lời giải: $I=\int\frac{dx}{x^2\left(1+x^{-2}\right)x\sqrt{x^{-2}+1}}=\int\frac{dx}{x^3\left(1+x^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}}$.

Đặt $t=1+x^{-2}\Rightarrow dt=-2x^{-3}dx\Rightarrow-\frac{dt}{2}=\frac{dx}{x^3}$.

$I=-\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=-t^{\frac{1}{2}}+C$.

Bài tập áp dụng

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{dx}{\left(1+x^3\right)\sqrt[3]{x^3+1}}=-\frac{1}{2}t^{\frac{2}{3}}+C$.

b. $I=\int\frac{dx}{\left(1+x^4\right)\sqrt[4]{x^4+1}}=-\frac{1}{3}t^{\frac{3}{4}}+C$.

c. $I=\int\frac{dx}{\left(1+x^5\right)\sqrt[5]{x^5+1}}=-\frac{1}{4}t^{\frac{4}{5}}+C$.

d. $I=\int\frac{dx}{\left(1+x^6\right)\sqrt[6]{x^6+1}}=-\frac{1}{5}t^{\frac{5}{6}}+C$.

e. $I=\int\frac{dx}{\left(1+x^7\right)\sqrt[7]{x^7+1}}=-\frac{1}{6}t^{\frac{7}{6}}+C$.

Dạng 28: $I=\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$

Phương pháp 1: Đặt $x=a\cos(2t);t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; ta có $dx=-2a\sin 2tdt$.

Ta có $\begin{cases}x+a=a+a\cos 2t=a\left(1+\cos 2t\right)=2a\cos^2 t\\a-x=a-a\cos 2t=a\left(1-\cos 2t\right)=2a\sin^2 t\end{cases}$.

$I=\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx=-2a\int\sqrt{\frac{2a\cos^2 t}{2a\sin^2 t}}\sin 2tdt=-2a\int\frac{\cos t}{\sin t}\sin 2tdt$

$=-4a\int\cos^2 tdt=-4a\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=-2a\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C$.

Phương pháp 2:

Đặt $t=\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\Rightarrow t^2=\frac{a+x}{a-x}\Rightarrow x=\frac{a\left(t^2-1\right)}{t^2+1}\Rightarrow dx=\frac{4at}{\left(t^2+1\right)^2}dt$.

$I=4a\int\frac{t^2}{\left(t^2+1\right)^2}dt$. Đặt $t=\tan u\Rightarrow dt=\left(1+\tan^2 u\right)du$.

$$I=4a\int\frac{\tan^2 u\left(1+\tan^2 u\right)}{\left(\tan^2 u+1\right)^2}du=4a\int\frac{\tan^2 u}{\tan^2 u+1}du=4a\int\frac{\frac{\sin^2 u}{\cos^2 u}}{\frac{1}{\cos^2 u}}du$$

$$=4a\int\sin^2 u du=4a\int\frac{1-\cos 2u}{2}du=2a\left(u-\frac{\sin 2u}{2}\right).$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\sqrt{\frac{6+x}{6-x}}dx$

Lời giải: Đặt $x=6\cos(2t);t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; ta có $dx=-12\sin 2t dt$

Ta có $\begin{cases}x+6=6+6\cos 2t=6\left(1+\cos 2t\right)=12\cos^2 t\\6-x=6-6\cos 2t=6\left(1-\cos 2t\right)=12\sin^2 t\end{cases}$

$$I=-12\int\sqrt{\frac{12\cos^2 t}{12\sin^2 t}}\sin 2t dt=-12\int\frac{\cos t}{\sin t}\sin 2t dt$$

$$=-24\int\cos^2 t dt=-24\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=-12\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C.$$

Bài tập áp dụng

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=-2\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C;x=\cos 2t$.

b. $I=\int\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}dx=-4\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C;x=2\cos 2t$

c. $I=\int\sqrt{\frac{3-x}{3+x}}dx=-6\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C;x=3\cos 2t$.

d. $I=\int\sqrt{\frac{4+2x}{4-2x}}dx=-8\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C;x=4\cos 2t$

e. $I=\int\sqrt{\frac{5-3x}{5+3x}}dx=-10\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C;x=5\cos 2t$.

Dạng 29: $I=\int \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}dx$

Phương pháp:

Đặt $t=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\Rightarrow t^2=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow x=\frac{b-dt^2}{ct^2-a}\Rightarrow dx=\frac{2(ad-bc)t}{(ct^2-a)^2}dt.$

$$I=\int t.\frac{2(ad-bc)t}{(ct^2-a)^2}dt=2(ad-bc)\int\frac{t^2}{(ct^2-a)^2}dt=\frac{2(ad-bc)}{c^2}\int\frac{t^2}{\left(t^2-\frac{a}{c}\right)^2}dt$$

+ Nếu $\frac{a}{c}>0\Rightarrow t^2-\frac{a}{c}=\left(t+\sqrt{\frac{a}{c}}\right)\left(t-\sqrt{\frac{a}{c}}\right)$; suy ra

$$I=\frac{2(ad-bc)}{4c^2}\int\frac{\left[\left(t+\sqrt{\frac{a}{c}}\right)+\left(t-\sqrt{\frac{a}{c}}\right)\right]^2}{\left(t+\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^2\left(t-\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^2}dt=\frac{ad-bc}{2c^2}\int\left[\frac{1}{t-\sqrt{\frac{a}{c}}}+\frac{1}{t+\sqrt{\frac{a}{c}}}\right]^2dt$$

$$=\frac{ad-bc}{2c^2}\left[\int\frac{d\left(t-\sqrt{\frac{a}{c}}\right)}{\left(t-\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^2}+\int\frac{d\left(t+\sqrt{\frac{a}{c}}\right)}{\left(t+\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^2}+2\int\frac{dt}{t^2-\frac{a}{c}}\right]$$

$$=\frac{bc-ad}{2c^2}\left(\frac{1}{t-\sqrt{\frac{a}{c}}}+\frac{1}{t+\sqrt{\frac{a}{c}}}\right)+\frac{ad-bc}{c^2}.\int\frac{dt}{t^2-\frac{a}{c}}+C.$$

Trong đó:

$$\int\frac{dt}{t^2-\frac{a}{c}}=\frac{1}{2\sqrt{\frac{a}{c}}}\int\frac{\left(t+\sqrt{\frac{a}{c}}\right)-\left(t-\sqrt{\frac{a}{c}}\right)}{\left(t+\sqrt{\frac{a}{c}}\right)\left(t-\sqrt{\frac{a}{c}}\right)}dt=\frac{1}{2\sqrt{\frac{a}{c}}}\int\left(\frac{1}{t-\sqrt{\frac{a}{c}}}-\frac{1}{t+\sqrt{\frac{a}{c}}}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\frac{a}{c}}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{\frac{a}{c}}}{t+\sqrt{\frac{a}{c}}}\right|+C.$$

+ Nếu $\frac{a}{c}<0$. Tích phân là $I=\frac{2(ad-bc)}{c^2}\int\frac{t^2}{\left[t^2+\left(-\frac{a}{c}\right)\right]^2}dt$.

Đặt $t=\sqrt{-\frac{a}{c}}\tan u\Rightarrow dt=\sqrt{-\frac{a}{c}}\left(1+\tan^2 u\right)du$.

$$I=\frac{2(ad-bc)}{c^2}\int\frac{-\frac{a}{c}\sqrt{-\frac{a}{c}}\left(1+\tan^2 u\right)\tan^2 u}{\left[-\frac{a}{c}\tan^2 u+\left(-\frac{a}{c}\right)\right]^2}du$$

$$=\frac{2(ad-bc)}{c^2}\int\frac{-\frac{a}{c}\sqrt{-\frac{a}{c}}\left(1+\tan^2 u\right)\tan^2 u}{\frac{a}{c}\left(\tan^2 u+1\right)^2}du$$

$$=\frac{2(ad-bc)}{c^2}\sqrt{-\frac{a}{c}}\int\frac{\tan^2 u}{\tan^2 u+1}du=\frac{ad-bc}{c^2}\sqrt{-\frac{a}{c}}\left(u-\frac{\sin 2u}{2}\right).$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\sqrt{\frac{x+3}{2x+4}}dx$.

➢ Lời giải: Đặt $t=\sqrt{\frac{x+3}{2x+4}}\Rightarrow t^2=\frac{x+3}{2x+4}\Rightarrow x=\frac{3-4t^2}{2t^2-1}\Rightarrow dx=\frac{-4t}{\left(2t^2-1\right)}dt$

$$I=\int t\cdot\frac{-4t}{\left(2t^2-1\right)^2}dt=-4\int\frac{t^2}{\left(2t^2-1\right)^2}dt=-\int\frac{t^2}{\left(t^2-\frac{1}{2}\right)^2}dt$$

$$=-\int\left(\frac{1}{t+\frac{1}{\sqrt{2}}}+\frac{1}{t-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^2dt=\left(\frac{1}{t+\frac{1}{\sqrt{2}}}+\frac{1}{t-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)+\sqrt{2}\ln\left|\frac{t-\frac{1}{\sqrt{2}}}{t+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right|+C$$

Bài tập áp dụng

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\sqrt{\frac{x+2}{2x+3}}dx=\frac{-1}{2}\int\frac{t^2}{\left(t^2-\frac{1}{2}\right)^2}dt;\sqrt{\frac{x+2}{2x+3}}=t$.



b. $I=\int\sqrt{\frac{2x+5}{-x+1}}dx=14.\int\frac{t^2}{\left(t^2+2\right)^2}.dt;t=\sqrt{\frac{2x+5}{-x+1}}$.

c. $I=\int\sqrt{\frac{-2x+1}{3x+2}}dx=-\frac{14}{9}\int\frac{t^2}{\left(t^2+\frac{2}{3}\right)^2}.dt$.

d. $I=\int\sqrt{\frac{-3x-1}{5x+4}}dx=\frac{-14}{25}\int\frac{t^2}{\left(t^2+\frac{3}{5}\right)^2}.dt;t=\sqrt{\frac{-3x-1}{5x+4}}$.

e. $I=\int\sqrt{\frac{5x+3}{4x-7}}dx=\frac{-94}{16}\int\frac{t^2}{\left(t^2-\frac{5}{4}\right)^2}.dt;t=\sqrt{\frac{5x+3}{4x-7}}$.

Dạng 30: $I=\int\sqrt{(x-a)(b-x)}dx$

Phương pháp:

Đặt $x=a+(b-a)\sin^2 t\Rightarrow\begin{cases}x-a=(b-a)\sin^2 t\\b-x=b-a-(b-a)\sin^2 t=(b-a)\cos^2 t\end{cases}$

$\Rightarrow dx=(b-a)\sin 2tdt$.

$I=\int(b-a)\sin 2t\sqrt{(b-a)^2\sin^2 t\cos^2 t}dt=\frac{1}{2}\int(b-a)^2|\sin 2t|\sin 2tdt$

$=\frac{(b-a)^2}{2}\int\sin^2 2tdt=\frac{(b-a)^2}{2}\left(1-\frac{\sin 4t}{4}\right)$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\sqrt{(x-1)(2-x)}dx$.

Lời giải: Đặt $x=1+\sin^2 t\Rightarrow\begin{cases}x-1=\sin^2 t\\2-x=1-\sin^2 t=\cos^2 t\end{cases}\Rightarrow dx=\sin 2tdt$

$I=\int\sin 2t\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t}dt=\frac{1}{2}\int|\sin 2t|\sin 2tdt=\frac{1}{2}\int\sin^2 2tdt$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sin 4t}{4}\right)+C$.

Bài tập áp dụng

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\sqrt{(x-2)(4-x)}dx=2\left(1-\frac{\sin 4t}{4}\right)+C$.

b. $I=\int\sqrt{(x+6)(-7-x)}dx=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sin 4t}{4}\right)+C$.

c. $I=\int\sqrt{(x+3)(2-x)}dx=\frac{25}{2}\left(1-\frac{\sin 4t}{4}\right)+C$.

Dạng 31: $I=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$

Phương pháp 1:

+ TH1: nếu $\begin{cases}x+a>0\\x+b>0\end{cases}$.

Đặt $t=\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}$

$\Rightarrow dt=\left(\frac{1}{2\sqrt{x+a}}+\frac{1}{2\sqrt{x+b}}\right)dx=\frac{t}{2\sqrt{(x+a)(x+b)}}dx$

$\Rightarrow\frac{2}{t}dt=\frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$.

$I=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}=\int\frac{2}{t}dt=2\ln|t|+C=2\ln\left|\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}\right|+C$

+ TH2: nếu $\begin{cases}x+a<0\\x+b<0\end{cases}$.

Đặt $t=\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x-b}$

$\Rightarrow dt=\left(\frac{-1}{2\sqrt{-x-a}}+\frac{-1}{2\sqrt{-x-b}}\right)dx=-\frac{t}{2\sqrt{(x+a)(x+b)}}dx$

$\Rightarrow-\frac{2}{t}dt=\frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$.

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}=-\int\frac{2}{t}dt=-2\ln|t|+C$$

$$=-2\ln\left|\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x-b}\right|+C.$$

Phương pháp 2: Ta biến đổi

$$\sqrt{(x+a)(x+b)}=\sqrt{x^2+(a+b)x+ab}$$

$$=\sqrt{\left(x+\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}=\sqrt{X^2-A^2}.$$

Đây là dạng ta biết cách đặt

$$u=\ln\left|X+\sqrt{X^2-A^2}\right|;\int\frac{dX}{\sqrt{X^2-A^2}}=\ln\left|X+\sqrt{X^2-A^2}\right|$$

hoặc đặt $X=\frac{A}{\sin t};t\in\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+3)(x+2)}}$.

Lời giải: Ta biến đổi

$$\sqrt{(x+3)(x+2)}=\sqrt{x^2+5x+6}=\sqrt{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{X^2-A^2}$$

Đây là dạng ta đã biết cách đặt $u=\ln\left|X+\sqrt{X^2-A^2}\right|$

Bài tập áp dụng

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-5)(x+4)}}=2\ln\left|\sqrt{x-5}+\sqrt{x+4}\right|+C;x>5.$

b. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+6)(x+7)}}=2\ln\left|\sqrt{-x-6}+\sqrt{-x-7}\right|+C;x<-7.$

c. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x-8)}}=2\ln\left|\sqrt{x+1}+\sqrt{x-8}\right|+C;x>8.$

Dạng 32: $I=\int\frac{dx}{\sqrt[n]{(ax+b)^k(cx+d)^{2n-k}}}$

Phương pháp:

Ta có $I=\int\frac{dx}{\sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^k}(cx+d)^2}=\int\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{-\frac{k}{n}}.\frac{dx}{(cx+d)^2}$

$=\frac{1}{ad-bc}\int\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{-\frac{k}{n}}d\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)=\frac{1}{ad-bc}.\frac{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1-\frac{k}{n}}}{1-\frac{k}{n}}+C.$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x+2)^4}}.$

Lời giải: $I=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2}(x+2)^2}=\int\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{-\frac{2}{3}}.\frac{dx}{(x+2)^2}$

$=\int\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{-\frac{2}{3}}d\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=\int t^{\frac{-2}{3}}.dt=3t^{\frac{1}{3}}+C=3\left(\frac{x+1}{x+1}\right)^{\frac{1}{3}}+C$

Do Đặt $t=\frac{x+1}{x+2}\Rightarrow dt=\frac{dx}{(x+2)^2}.$

Bài tập áp dụng

➢ **Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây**

a. $I=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(-2x+3)^5(3x-2)}}=\frac{3}{10}\left(\frac{-2x+3}{3x-2}\right)^{-\frac{2}{3}}+C.$

b. $I=\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(x-5)(4x+7)^9}}=\frac{5}{108}\left(\frac{x-4}{4x+7}\right)^{\frac{4}{5}}+C.$

c. $I=\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(-x+4)^3(4x-5)^5}}=-\frac{4}{11}\left(\frac{-x+4}{4x-5}\right)^{\frac{1}{4}}+C.$



d. $I=\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(2x-7)^6(x-2)^2}}=-\frac{2}{3}\left(\frac{2x-7}{x-2}\right)^{-\frac{1}{2}}+C.$

e. $I=\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(4x-1)^3(x+6)}}=\frac{1}{10}\left(\frac{4x-1}{x+6}\right)^{\frac{2}{5}}+C.$

Dạng 33: $I=\int\frac{dx}{\sqrt{ax+b}-\sqrt{ax+c}}$; $J=\int\frac{dx}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax+c}}$

Phương pháp: $I=\int\frac{\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax+c}}{\left(\sqrt{ax+b}-\sqrt{ax+c}\right)\left(\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax+c}\right)}dx$

$=\int\frac{\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax+c}}{ax+b-ax-c}dx=\frac{1}{a(b-c)}\int\left[(ax+b)^{\frac{1}{2}}+(ax+c)^{\frac{1}{2}}\right]d(ax)$

$=\frac{2(ax+b)^{\frac{3}{2}}+2(ax+c)^{\frac{3}{2}}}{3a(b-c)}+C.$

Phương pháp: $J=\int\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{ax+c}}{\left(\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax+c}\right)\left(\sqrt{ax+b}-\sqrt{ax+c}\right)}dx$

$=\int\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{ax+c}}{ax+b-ax-c}dx=\frac{1}{a(b-c)}\int\left[(ax+b)^{\frac{1}{2}}-(ax+c)^{\frac{1}{2}}\right]d(ax)$

$=\frac{2(ax+b)^{\frac{3}{2}}-2(ax+c)^{\frac{3}{2}}}{3a(b-c)}+C.$

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-1}}$.

Lời giải:

$I=\int\frac{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}}{\left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-1}\right)\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}\right)}dx$

$=\int\frac{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}}{4}dx=\frac{1}{8}\int\left[(2x+3)^{\frac{1}{2}}+(2x-1)^{\frac{1}{2}}\right]d(2x)$

$=\frac{1}{8}\left(\frac{(2x+3)^{\frac{3}{2}}+(2x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)+C=\frac{1}{12}\left[\sqrt{(2x+3)^3}+\sqrt{(2x-1)^3}\right]+C.$

Ví dụ 2: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-2}}$.

Lời giải:

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-2}}=\int\frac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-2}}{3x+1-3x+2}.dx$$

$$=\frac{1}{9}\int\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-2}\right).d(3x)=\frac{2}{27}\left[\sqrt{(3x+1)^3}-\sqrt{(3x-2)^3}\right]+C$$

Bài tập áp dụng

➢ **Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây**

a. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}}=\frac{2}{9}\left[\sqrt{(x+1)^3}+\sqrt{(x-2)^3}\right]+C$.

b. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{4x+5}-\sqrt{4x+1}}=\frac{1}{24}\left[\sqrt{(4x+5)^3}-\sqrt{(4x+1)^3}\right]+C$.

III. BÀI TẬP ỨNG DỤNG

Bài 1. Tính tích phân

a) $I=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

b) $I_2=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

c) $I=\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+1}dx$.

d) $I=\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}dx$.

e) $I=\int_{-1}^{0}x.\sqrt[3]{x+1}dx$.

➢ Lời giải

a) $I=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{d\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}\Big|_0^{\sqrt{3}}=2-1=1$.

b) Đặt $x+\sqrt{x^2+1}=t\Rightarrow\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=dt$

$\Rightarrow\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}dx=dt\Rightarrow\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{dt}{t}$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1;\ x=\sqrt{3}\Rightarrow t=\sqrt{3}+2$.

$I_2=\int\limits_1^{\sqrt{3}+2}\frac{dt}{t}=\ln|t|\Big|_1^{\sqrt{3}+2}=\ln\left(\sqrt{3}+2\right)$.

c) Đặt $\begin{cases}u=\sqrt{x^2+1}\\dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx\\v=x\end{cases}$.

$I=x\sqrt{x^2+1}\Big|_0^{\sqrt{3}}-\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx=2\sqrt{3}-\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}dx$

$=2\sqrt{3}-\int\limits_0^{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+1}dx+\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=2\sqrt{3}-I+I_2$

$=2\sqrt{3}-I+\ln\left(\sqrt{3}+2\right)\ \Rightarrow 2I=2\sqrt{3}+\ln\left(\sqrt{3}+2\right)\Rightarrow I=\sqrt{3}+\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{3}+2\right)$.

d) $I=\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}.xdx$.

Đặt $\sqrt{1-x^2}=t\left(t\ge 0\right)\Rightarrow x^2=1-t^2\Leftrightarrow xdx=-tdt$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1;\ x=1\Rightarrow t=0$.

$I=-\int\limits_0^1\left(1-t^2\right)t.tdt=\int\limits_0^1\left(t^2-t^4\right)dt=\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$.

e) Đặt $t=\sqrt[3]{x+1}\Rightarrow t^3=x+1\Leftrightarrow dx=3t^2dt$.

Đổi cận: $x=-1\Rightarrow t=0;\ x=0\Rightarrow t=1$.

$I=\int\limits_0^1 3t^3\left(t^3-1\right)dt=3\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)\Big|_0^1=-\frac{9}{28}$.

Bài 2. Tính tích phân

a) $I=\int\limits_0^1\left(x-1\right)^3\sqrt{2x-x^2}dx$.

b) $I=\int\limits_0^4\frac{\sqrt{2x+1}}{1+\sqrt{2x+1}}dx$.

c) $I=\int\limits_2^6\frac{dx}{2x+1+\sqrt{4x+1}}$.

d) $I=\int\limits_0^1\frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$.

e) $I=\int\limits_0^3\frac{x-3}{3\sqrt{x+1}+x+3}dx$.

➢ Lời giải

a) $I=\int_0^1\left(x^2-2x+1\right)\sqrt{2x-x^2}\left(x-1\right)dx$.

Đặt $t=\sqrt{2x-x^2}\Rightarrow t^2=2x-x^2\Rightarrow 2tdt=\left(2-2x\right)dx\Leftrightarrow -tdt=\left(x-1\right)dx$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$; $x=1\Rightarrow t=1$.

$I=-\int_0^1\left(-t^2+1\right)t.tdt=\int_0^1\left(t^4-t^2\right)dt=\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1=-\frac{2}{15}$.

b) Đặt $t=\sqrt{2x+1}\Rightarrow t^2=2x+1\Rightarrow 2tdt=2dx\Leftrightarrow tdt=dx$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=4\Rightarrow t=3$.

$I=\int_1^3\frac{t^2}{1+t}dt=\int_1^3\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt=\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln\left|t+1\right|\right)\Big|_1^3$

$=\left(\frac{9}{2}-3+\ln 4\right)-\left(\frac{1}{2}-1+\ln 2\right)=2+\ln 2$.

c) Đặt $t=\sqrt{4x+1}\Rightarrow t^2=4x+1\Rightarrow 2tdt=4dx\Rightarrow\frac{t}{2}dt=dx$.

Đổi cận: $x=2\Rightarrow t=3$; $x=6\Rightarrow t=5$.

$I=\frac{1}{2}\int_3^5\frac{t}{\frac{t^2-1}{2}+1+t}dt=\int_3^5\frac{t}{t^2+2t+1}dt$

$=\int_3^5\frac{t}{\left(t+1\right)^2}dt=\int_3^5\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{\left(t+1\right)^2}\right)dt$

$=\left(\ln\left|t+1\right|+\frac{1}{t+1}\right)\Big|_3^5=\left(\ln 6+\frac{1}{6}\right)-\left(\ln 4+\frac{1}{4}\right)=\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{12}$.

d) Đặt $t=1+\sqrt{x}\Rightarrow\left(t-1\right)^2=x\Rightarrow 2\left(t-1\right)dt=dx$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=1\Rightarrow t=2$.

$I=\int_1^2\frac{1+\left(t-1\right)^2}{t}dt=\int_1^2\left(t-2+\frac{2}{t}\right)dt=\left(\frac{t^2}{2}-2t+2\ln\left|t\right|\right)\Big|_1^2=\frac{-1}{2}+2\ln 2$.

e) Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow 2tdt=dx$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=3\Rightarrow t=2$.

$I=\int_1^2\frac{2t^3-8t}{t^2+3t+2}dt=\int_1^2\left(2t-6\right)dt+6\int_1^2\frac{1}{t+1}dt=-3+6\ln\frac{3}{2}$.

Bài 3. Tính tích phân

a) $I=\int_1^5 \frac{x^2+1}{x\sqrt{3x+1}}dx$.

b) $I=\int_0^3 \frac{2x^2+x-1}{\sqrt{x+1}}dx$.

c) $I=\int_0^1 \frac{x^2}{(x+1)\sqrt{x+1}}dx$.

d) $I=\int_0^4 \frac{x+1}{\left(1+\sqrt{1+2x}\right)^2}dx$.

e) $I=\int_0^2 \frac{2x^3-3x^2+x}{\sqrt{x^2-x+1}}dx$.

➢ Lời giải

a) Đặt $t=\sqrt{3x+1}\Rightarrow \frac{2tdt}{3}=dx$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=2$; $x=5\Rightarrow t=4$.

$$I=\int_2^4 \frac{\left(\frac{t^2-1}{3}\right)^2+1}{\frac{t^2-1}{3}.t}\frac{2t}{3}.dt=\frac{2}{9}\int_2^4 \left(t^2-1\right)dt+2\int_2^4 \frac{dt}{t^2-1}$$

$$=\frac{2}{9}\int_2^4 \left(t^2-1\right)dt+2\int_2^4 \left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\frac{2}{9}\left(\frac{1}{3}t^3-t\right)\Big|_2^4+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Big|_2^4=\frac{100}{27}+\ln\frac{9}{5}.$$

b) Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow t^2-1=x\Rightarrow 2tdt=dx$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=3\Rightarrow t=2$.

$$I=\int_1^2 \frac{2\left(t^2-1\right)^2+\left(t^2-1\right)-1}{t}.2tdt=2\int_1^2 \left(2t^4-3t^2\right)dt=\left(\frac{4t^5}{5}-2t^3\right)\Big|_1^2=\frac{54}{5}.$$

c) Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow t^2=x+1\Rightarrow 2tdt=dx$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}$.

$$I=\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\left(t^2-1\right)^2}{t^3}2tdt=2\int_1^{\sqrt{2}} \left(t-\frac{1}{t}\right)^2 dt=2\left(\frac{t^3}{3}-2t-\frac{1}{t}\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{16-11\sqrt{2}}{3}.$$

d) Đặt $t=1+\sqrt{1+2x}\Rightarrow dt=\dfrac{dx}{\sqrt{1+2x}}\Rightarrow (t-1)dt=dx$ và $x=\dfrac{t^2-2t}{2}$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=2$; $x=4\Rightarrow t=4$.

$$I=\frac{1}{2}\int_2^4\frac{(t^2-2t+2)(t-1)}{t^2}dt=\frac{1}{2}\int_2^4\frac{t^3-3t^2+4t-2}{t^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_2^4\left(t-3+\frac{4}{t}-\frac{2}{t^2}\right)dt=\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}-3t+4\ln|t|+\frac{2}{t}\right)\Bigg|_2^4=2\ln 2-\frac{1}{4}.$$

e) $I=\displaystyle\int_0^2\frac{(x^2-x)(2x-1)}{\sqrt{x^2-x+1}}dx$.

Đặt $t=\sqrt{x^2-x+1}\Rightarrow 2tdt=(2x-1)dx$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=2\Rightarrow t=\sqrt{3}$.

$$I=2\int_1^{\sqrt{3}}(t^2-1)dt=\frac{4}{3}.$$

Bài 4. Tính tích phân

a) $I=\displaystyle\int_0^2\frac{x^3}{\sqrt[3]{4+x^2}}dx$.

b) $I=\displaystyle\int_1^2\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}dx$.

c) $I=\displaystyle\int_2^{2\sqrt{5}}\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+5}}dx$.

d) $I=\displaystyle\int_1^{27}\frac{\sqrt{x}-2}{x+\sqrt[3]{x^2}}dx$.

d) $I=\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

➢ Lời giải

a) Đặt $t=\sqrt[3]{4+x^2}\Rightarrow t^3-4=x^2\Rightarrow 3t^2dt=2xdx$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=\sqrt[3]{4}$; $x=2\Rightarrow t=2$.

$$I=\frac{3}{2}\int_{\sqrt[3]{4}}^2(t^4-4t)dt=\frac{3}{2}\left(\frac{t^5}{5}-2t^2\right)\Bigg|_{\sqrt[3]{4}}^2=-\frac{3}{2}\left(\frac{8}{5}+4\sqrt[3]{2}\right).$$

b) Ta có $I=\displaystyle\int_1^2\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}xdx$.

Đặt $t=\sqrt{4-x^2}\Rightarrow t^2=4-x^2\Rightarrow tdt=-xdx$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=\sqrt{3}$; $x=2\Rightarrow t=0$.

$$I=\int_{\sqrt{3}}^{0}\frac{t(-tdt)}{4-t^2}=\int_{\sqrt{3}}^{0}\frac{t^2}{t^2-4}dt=\int_{\sqrt{3}}^{0}\left(1+\frac{4}{t^2-4}\right)dt$$

$$=\left(t+\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\right)\Bigg|_{\sqrt{3}}^{0}=-\left(\sqrt{3}+\ln\left|\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right|\right).$$

c) Đặt $t=\sqrt{x^2+5}\Rightarrow t^2=x^2+5\Rightarrow tdt=xdx$.

Đổi cận: $x=2\Rightarrow t=3$; $x=2\sqrt{5}\Rightarrow t=5$.

$$I=\int_{3}^{5}\frac{dt}{t^2-4}=\frac{1}{4}\int_{3}^{5}\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)dt=\frac{1}{4}\ln\frac{15}{7}.$$

d) Đặt $t=\sqrt[6]{x}\Rightarrow t^6=x\Rightarrow 6t^5dt=dx$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=1$; $x=27\Rightarrow t=\sqrt{3}$.

$$I=5\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{t^3-2}{t\left(t^2+1\right)}dt=5\int_{1}^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{2}{t}+\frac{2t}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt$$

$$=5\left(\sqrt{3}-1+\ln\frac{2}{3}\right)-\frac{5\pi}{12}.$$

e) $$I=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{d\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+1}}dx-\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\left[\sqrt{x^2+1}-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]\Bigg|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}=1+\ln\left(\sqrt{3}+2\right)-\ln\left(\sqrt{8}+3\right).$$

Bài 5. Tính tích phân

a) $I=\int_{0}^{4}\frac{x^2+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x\sqrt{x}}}dx$.

b) $I=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$.

c) $I=\int_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{\left(x-x^3\right)^{\frac{1}{3}}}{x^4}dx$.

d) $I=\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

e) $I=\int_{0}^{3}\frac{x^2}{\left(1+\sqrt{1+x}\right)^2\left(2+\sqrt{1+x}\right)^2}dx$.

➢ Lời giải

a) $I=\int\limits_0^4 \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sqrt{x}}}dx+\int\limits_0^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x\sqrt{x}}}dx$.

Tính $I_1=\int\limits_0^4 \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sqrt{x}}}dx$.

Đặt $t=\sqrt{1+x\sqrt{x}}\Rightarrow t^2-1=x\sqrt{x}\Rightarrow\left(t^2-1\right)^2=x^3\Rightarrow\frac{4}{3}t\left(t^2-1\right)dt=x^2dx$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=4\Rightarrow t=3$.

$I_1=\int\limits_1^3 \frac{4}{3}\left(t^2+1\right)dt=\left(\frac{4}{9}t^3-\frac{4}{3}t\right)\Big|_1^3=\frac{80}{9}$

$I_2=\int\limits_0^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x\sqrt{x}}}dx=\frac{2}{3}\int\limits_0^4 \frac{d\left(1+x\sqrt{x}\right)}{\sqrt{1+x\sqrt{x}}}=\frac{4}{3}\sqrt{1+x\sqrt{x}}\Big|_0^4=\frac{8}{3}$.

Vậy $I=I_1+I_2=\frac{80}{9}+\frac{8}{3}=\frac{104}{9}$.

b) Đặt $t=x+\sqrt{1+x^2}\Rightarrow t-x=\sqrt{1+x^2}$

$\Rightarrow\left(t-x\right)^2=1+x^2\Rightarrow t^2-2tx=1\Rightarrow x=\frac{t^2-1}{2t}\Rightarrow dx=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2t^2}\right)dt$.

Đổi cận: $x=-1\Rightarrow t=-1+\sqrt{2}$; $x=1\Rightarrow t=1+\sqrt{2}$.

$I=\int\limits_{-1+\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \frac{\left(t^2+1\right)}{2t^2\left(1+t\right)}dt=\frac{1}{2}\int\limits_{-1+\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}\left(\frac{2}{1+t}+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}\right)dt$

$=\frac{1}{2}\left(\ln|1+t|-\frac{1}{t}-\ln|t|\right)\Big|_{-1+\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{\left(t+1\right)^2}{t}-\frac{1}{t}\right)\Big|_{-1+\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}$

$=\frac{1}{2}\left(\ln\left(2+2\sqrt{2}\right)+1-\sqrt{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\ln\left(2+2\sqrt{2}\right)-1-\sqrt{2}\right)=1$.

c) Ta có $I=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1}\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{dx}{x^3}$.

Đặt $t=\frac{1}{x^2}-1\Leftrightarrow dt=-\frac{2}{x^3}dx\Rightarrow-\frac{dt}{2}=\frac{dx}{x^3}$.

Đổi cận: $x=\frac{1}{3}\Rightarrow t=8$; $x=1\Rightarrow t=0$.

$$I=-\frac{1}{2}\int_{8}^{0}t^{\frac{1}{3}}dt=\frac{1}{2}\int_{0}^{8}t^{\frac{1}{3}}dt=\frac{1}{2}.\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}\Big|_{0}^{8}=6.$$

d) $I=\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}.$

Đặt $t=x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}$

$$\Rightarrow dt=\left(1+\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\right)dx\Rightarrow dt=\left(\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x+1}}\right)dx.$$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=\frac{3}{2};\ x=1\Rightarrow t=\frac{3}{2}+\sqrt{3}.$

$$I=\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}+\sqrt{3}}\frac{dt}{t}=\ln|t|\Big|_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}+\sqrt{3}}=\ln\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)-\ln\frac{3}{2}=\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}.$$

e) Đặt $t=2+\sqrt{1+x}\Rightarrow t-2=\sqrt{1+x}$

$$\Rightarrow (t-2)^2=1+x\Rightarrow 2(t-2)dt=dx.$$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=3;\ x=3\Rightarrow t=4.$

$$I=\int_{3}^{4}\frac{\left((t-2)^2-1\right)^2.2(t-2)}{(t-1)^2t^2}dt=\int_{3}^{4}\frac{(t-1)^2(t-3)^2.2(t-2)}{(t-1)^2t^2}dt$$

$$=\int_{3}^{4}\frac{2(t-3)^2(t-2)}{t^2}dt=\int_{3}^{4}\left(2t-16+\frac{42}{t}-\frac{36}{t^2}\right)dt$$

$$=\left(t^2-16t+42\ln|t|+\frac{36}{t}\right)\Big|_{3}^{4}=-12+42\ln\frac{4}{3}.$$

Bài 6. Tính tích phân

a) $I=\int_{0}^{3}\frac{x^2}{2(x+1)+2\sqrt{x+1}+x\sqrt{x+1}}dx.$ **b)** $I=\int_{1}^{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt[3]{x-x^3}+2011x}{x^4}dx.$

c) $I=\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}\frac{x^4}{\left(x-\frac{1}{x}\right)\sqrt{x^2+1}}dx.$ **d)** $I=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\frac{x}{3x+\sqrt{9x^2-1}}dx.$

➢ Lời giải

a) Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow t^2=x+1\Rightarrow 2tdt=dx$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1;\ x=3\Rightarrow t=2$.

$$I=\int_1^2\frac{2t\left(t^2-1\right)^2}{t\left(t+1\right)^2}dt=2\int_1^2\left(t-1\right)^2dt=\frac{2}{3}\left(t-1\right)^2\Big|_1^2=\frac{2}{3}.$$

b) $I=\int_1^{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}-1}}{x^3}dx+\int_1^{2\sqrt{2}}\frac{2011x}{x^3}dx=M+N$.

Tính $M=\int_1^{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}-1}}{x^3}dx$.

Đặt $t=\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}-1}\Rightarrow t^3=\frac{1}{x^2}-1\Rightarrow 3t^2dt=-\frac{2}{x^3}dx\Rightarrow\frac{dx}{x^3}=-\frac{3}{2}t^2dt$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=0;\ x=2\sqrt{2}\Rightarrow t=-\frac{\sqrt[3]{7}}{2}$.

$$M=-\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\sqrt[3]{7}}{2}}t^3dt=-\frac{21\sqrt[3]{7}}{128}.$$

Tính $N=\int_1^{2\sqrt{2}}\frac{2011}{x^3}dx=\int_1^{2\sqrt{2}}2011x^{-3}dx=-\frac{2011}{2x^2}\Big|_1^{2\sqrt{2}}=\frac{14077}{16}$.

Vậy $I=\frac{14077}{16}-\frac{21\sqrt[3]{7}}{128}$.

c) $I=\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}\frac{x^4.x}{\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2+1}}dx$.

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow dt=\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$.

Đổi cận: $x=\sqrt{3}\Rightarrow t=2;\ x=2\sqrt{2}\Rightarrow t=3$.

$$I=\int_2^3\frac{\left(t^2-1\right)^2}{t^2-2}dt=\int_2^3\frac{t^4-2t^2+1}{t^2-2}dt$$

$$=\int_2^3t^2dt+\int_2^3\frac{1}{t^2-2}dt=\frac{19}{3}+\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\frac{4+\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}\right).$$

d) $I=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}x\left(3x-\sqrt{9x^2-1}\right)dx=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}3x^2dx-\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}x\sqrt{9x^2-1}dx.$

Tính $I_1=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}3x^2dx=x^3\Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}=\frac{8}{27}-\frac{1}{27}=\frac{7}{27}.$

Tính $I_2=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}x\sqrt{9x^2-1}dx.$

$I_2=\frac{1}{18}\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\sqrt{9x^2-1}d\left(9x^2-1\right)=\frac{1}{27}\left(9x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{9}.$

Vậy $I=I_1+I_2=\frac{7-3\sqrt{3}}{27}.$

Bài 7. Tính tích phân

a) $I=\int\limits_0^2x^2\sqrt{4-x^2}dx.$

b) $I=\int\limits_{-1}^0\sqrt{-x^2-2x}dx.$

c) $I=\int\limits_0^1\sqrt{3+2x-x^2}dx.$

d) $I=\int\limits_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^6}}.$

e) $I=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-2x\sqrt{1-x^2}}dx.$

f) $I=\int\limits_0^1\frac{x^2}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx.$

g) $I=\int\limits_{-2}^2\left(x^5+x^2\right)\sqrt{4-x^2}dx.$

h) $I=\int\limits_1^2\frac{\left(3-\sqrt{4-x^2}\right)}{2x^4}dx.$

i) $I=\int\limits_0^2\sqrt{\frac{2-x}{x+2}}dx.$

j) $I=\int\limits_0^1\left[\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}-2x\ln\left(1+x\right)\right]dx.$

➢ Lời giải

a) Đặt $x=2\sin t$, với $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\cos t\geq 0$, suy ra $dx=2\cos tdt$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0;x=2\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}.$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin^2t\sqrt{4-4\sin^2t}.2\cos t.dt=16\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\sqrt{1-\sin^2t}.\cos t.dt$

$=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t.|\cos t|\cos t dt=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t.\cos^2 t.dt$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 4t.dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 8t)dt=2\left(t-\frac{\sin 8t}{8}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi$.

b) $I=\int_{-1}^{0}\sqrt{1-(x+1)^2}dx$.

Đặt $x+1=\sin t$, với $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow \cos t\geq 0$, suy ra $dx=\cos t dt$.

Đổi cận: $x=-1\Rightarrow t=0; x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$.

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t.dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t.dt$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=\frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$.

c) $I=\int_0^{1}\sqrt{4-(x-2)^2}dx$.

Đặt $x-2=2\sin t$, với $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow \cos t\geq 0$, suy ra $dx=2\cos t dt$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=-\frac{\pi}{2}; x=1\Rightarrow t=-\frac{\pi}{6}$.

$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}}\sqrt{4-4\sin^2 t}.2\cos t.dt=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}}\cos^2 t.dt$

$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2t)dt=2\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}}=-\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

d) Đặt $t=x^3\Rightarrow dt=3x^2dx$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0; x=1\Rightarrow t=1$.

$I=\frac{1}{3}\int_0^{1}\frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}$.

Đặt $t=2\sin u$, với $u\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, suy ra $dt=2\cos u du$.

Đổi cận: $t=0\Rightarrow u=0;\ t=1\Rightarrow u=\frac{\pi}{6}$.

$$I=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos u.du}{\sqrt{4-4\sin^2 u}}=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}du=\frac{u}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{18}.$$

e) Đặt $x=\sin t$, với $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\cos t\geq 0;\cos t>\sin t$, suy ra $dx=\cos t dt$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0;x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1-2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}}.\cos t.dt=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1-2\sin t.\cos t}.\cos t.dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{(\sin t-\cos t)^2}\cos t.dt=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos t-\sin t).\cos t dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\cos^2 t-\sin t.\cos t\right)dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2t-\sin 2t)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}+\frac{\cos 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{8}.$$

f) $I=\int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{2^2-(x-1)^2}}$.

Đặt $x-1=2\sin t$, với $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\cos t\geq 0$, suy ra $dx=2\cos t dt$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=-\frac{\pi}{2};x=1\Rightarrow t=-\frac{\pi}{6}$.

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}}\frac{(1+2\sin t)^2 2\cos t}{\sqrt{4-(2\sin t)^2}}dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}}(1+4\sin t+4\sin^2 t)dt$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}}(1+4\sin t+2-2\cos 8t)dt=\left(3t-4\cos t-\frac{\sin 8t}{4}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}-4.$$

g) $I=\int_{-2}^2 x^5\sqrt{4-x^2}dx+\int_{-2}^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx=A+B$.

Tính $A=\int_{-2}^2 x^5\sqrt{4-x^2}dx=\int_{-2}^2 x^4\sqrt{4-x^2}xdx$.

Đặt $t=\sqrt{4-x^2}\Rightarrow t^2=4-x^2\Rightarrow xdx=-tdt$.

Đổi cận: $x=-2\Rightarrow t=0; x=2\Rightarrow t=0$.

$I=\int\limits_0^0\left(4-t^2\right)^2.t^2.dt=0$.

Tính $B=\int\limits_{-2}^{2}x^2\sqrt{4-x^2}dx$.

Đặt $x=2\sin t$, với $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\cos t\geq 0$, suy ra $dx=2\cos t dt$.

Đổi cận: $x=-2\Rightarrow t=-\frac{\pi}{2}; x=2\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$

$I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\sin^2 t\sqrt{4-4\sin t^2}.2\cos t.dt=16\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\sqrt{1-\sin t^2}.\cos t.dt$

$=16\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t.\left|\cos t\right|.\cos t.dt=16\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t.\cos^2 t.dt$

$=4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 4t dt=2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos 8t\right).dt=2\left(t-\frac{\sin 8t}{8}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2\pi$.

Vậy $I=2\pi$.

h) $I=\int\limits_1^2\frac{3}{2x^4}dx-\int\limits_1^2\frac{\sqrt{4-x^2}}{2x^4}dx$.

Tính $A=\int\limits_1^2\frac{3}{2x^4}dx=\frac{3}{2}\int\limits_1^2x^{-4}dx=\frac{7}{16}$.

Tính $B=\int\limits_1^2\frac{\sqrt{4-x^2}}{2x^4}dx$.

Đặt $x=2\sin t\Rightarrow dx=2\cos t.\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}; x=2\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$.

$I=\frac{1}{8}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t.dt}{\sin^4 t}=\frac{1}{8}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\left(\frac{1}{\sin^2 t}\right)dt=-\frac{1}{8}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t.d\left(\cos t\right)=\frac{\sqrt{3}}{8}$.

Vậy $I=\frac{1}{16}\left(7-2\sqrt{3}\right)$.

i) Đặt $x=2\cos t \Rightarrow \mathrm{d}x=-2\sin t dt$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$; $x=2\Rightarrow t=0$.

$$I=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{\frac{2-2\cos t}{2+2\cos t}}.2\sin t dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2}}}.2\sin t dt$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}.4\sin\frac{t}{2}.\cos\frac{t}{2}dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}2\left(1-\cos t\right)dt=2\left(t-\sin t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi-2.$$

j) $I=\int_{0}^{1}\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}dx-\int_{0}^{1}2x\ln\left(1+x\right)dx$.

Tính $H=\int_{0}^{1}\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}dx$.

Đặt $\sqrt{x}=\cos t; t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

$H=2-\frac{\pi}{2}$.

Tính $K=\int_{0}^{1}2x\ln\left(1+x\right)dx$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(1+x\right)\\dv=2xdx\end{cases}$.

$K=\frac{1}{2}$. Vậy $I=\frac{3}{2}-\frac{\pi}{2}$.

Chương IV

TÍCH PHÂN HÀM LƯỢNG GIÁC

I. HÀM SỐ TÌM NGUYÊN HÀM

Dạng 1: $I=\int \sin(ax+b)dx$	Dạng 2: $I=\int \cos(ax+b)dx$
Dạng 3: $I=\int \tan(ax+b)dx$	Dạng 4: $I=\int \cot(ax+b)dx$
Dạng 5: $I=\int \frac{dx}{a+b\sin x}$	Dạng 6: $I=\int \frac{dx}{a+b\cos x}$
Dạng 7: $I=\int \frac{dx}{a+b\tan x}$	Dạng 8: $I=\int \frac{dx}{a+b\cot x}$
Dạng 9: $I=\int \sin^{2n} x dx$	Dạng 10: $I=\int \cos^{2n} x dx$
Dạng 11: $I=\int \sin^{2n+1} x dx$	Dạng 12: $I=\int \cos^{2n+1} x dx$
Dạng 13: $I=\int \tan^{2k} x dx$	Dạng 14: $I=\int \cot^{2k} x dx$
Dạng 15: $I=\int \tan^{2k+1} x dx$	Dạng 16: $I=\int \cot^{2k+1} x dx$
Dạng 17: $I=\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)}$	Dạng 18: $I=\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)}$
Dạng 19: $I=\int \frac{dx}{\sin^{2k}(ax+b)}$	Dạng 20: $I=\int \frac{dx}{\cos^{2k}(ax+b)}$
Dạng 21: $I=\int \frac{mx+n}{\sin^2(ax+b)}dx$	Dạng 22: $I=\int \frac{mx+n}{\cos^2(ax+b)}dx$
Dạng 23: $I=\int \frac{x^{n-1}}{\sin^2(ax^n+b)}dx$	Dạng 24: $I=\int \frac{x^{n-1}}{\cos^2(ax^n+b)}dx$

Dạng 25: $I=\int\frac{dx}{\sin^{2k+1}(ax+b)}$	Dạng 26: $I=\int\frac{dx}{\cos^{2k+1}(ax+b)}$
Dạng 27: $I=\int\sin(ax+b)\sin(cx+d)dx$	Dạng 28: $I=\int\cos(ax+b)\cos(cx+d)dx$
Dạng 29: $I=\int\sin(ax+b)\cos(cx+d)dx$	Dạng 30: $I=\int\tan x\tan(x+\alpha)dx$
Dạng 31: $I=\int\frac{dx}{\sin(ax+b)\sin(ax+c)}$	Dạng 32: $I=\int\frac{dx}{\cos(ax+b)\cos(ax+c)}$
Dạng 34: $I=\int\sin^n x\cos x dx$	Dạng 35: $I=\int\cos^n x\sin x dx$
Dạng 36: $I=\int\sin^n(ax+b)\cos(ax+b)dx$	Dạng 37: $I=\int\cos^n(ax+b)\sin(ax+b)dx$
Dạng 38: $I=\int\sin^{2n}x\cos^{2k}x dx$	Dạng 39: $I=\int\sin^{2n}x\cos^{2k+1}x dx$
Dạng 40: $I=\int\sin^{2n+1}x\cos^{2k}x dx$	Dạng 41: $I=\int\sin^{2n+1}x\cos^{2k+1}x dx$
Dạng 42: $I=\int\frac{dx}{\sin^n x\cos^m x}$	Dạng 43: $I=\int\frac{dx}{\sin^{2k}x\cos^{2n}x}$
Dạng 44: $I=\int\frac{dx}{\sin^{2k}x\cos^{2n+1}x}$	Dạng 45: $I=\int\frac{dx}{\sin^{2k+1}x\cos^{2n}x}$
Dạng 46: $I=\int\frac{\tan^m x}{\cos^n x}dx$	Dạng 47: $I=\int\frac{\cot^m x}{\sin^n x}dx$
Dạng 48: $I=\int\frac{\tan^{2k}x}{\cos 2x}dx$	Dạng 49: $I=\int\frac{\cot^{2k}x}{\cos 2x}dx$
Dạng 50: $I=\int\frac{\tan^m x}{\cos^{2k}x}dx$	Dạng 51: $I=\int\frac{\cos x}{\sin^n x}dx$

Dạng 52: $I=\int\frac{\sin^n x\cos x}{a+b\sin x}dx$	Dạng 53: $I=\int\frac{\cos^n x\sin x}{a+b\cos x}dx$
Dạng 54: $I=\int\frac{a\sin 2x+b\sin x}{\sqrt{c+d\cos x}}dx$	Dạng 55: $I=\int\frac{a\sin 2x+b\cos x}{\sqrt{c+d\sin x}}dx$
Dạng 56: $I=\int\left[m\sin(ax+b)+n\right]^k\cos(ax+b)dx$	Dạng 57: $I=\int\left[m\cos(ax+b)+n\right]^k\sin(ax+b)dx$
Dạng 58: $I=\int\frac{\sin x+\cos x}{a\sin 2x+b(\sin x-\cos x)+c}dx$	Dạng 59: $I=\int\frac{\sin x-\cos x}{a\sin 2x+b(\sin x+\sin x)+c}dx$
Dạng 60: $I=\int\frac{\cos x+\sin x}{(\sin x-\cos x+a)^n}dx$	Dạng 61: $I=\int\frac{\cos x-\sin x}{(\sin x+\cos x+a)^n}dx$
Dạng 62: $I=\int\frac{\sin x}{\sqrt{a\cos 2x+b}}dx$	Dạng 63: $I=\int\frac{\cos x}{\sqrt{a\cos 2x+b}}dx$
Dạng 64: $I=\int\sin x\sqrt{a\cos 2x+b}dx$	Dạng 65: $I=\int\cos x\sqrt{a\cos 2x+b}dx$
Dạng 66: $I=\int\sin x\sqrt{a\sin^2 x+b}dx$	Dạng 67: $I=\int\cos x\sqrt{a\sin^2 x+b}dx$
Dạng 68: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{n-1}x\cos x}{1+\sin^{2n}x}dx$	Dạng 69: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{n-1}x\sin x}{1+\cos^{2n}x}dx$
Dạng 70: $I=\int\frac{a\sin x+b\cos x}{(\sin x+\cos x)^3}dx$	Dạng 71: $I=\int\frac{a\sin x+b\cos x}{(\sin x-\cos x)^3}dx$
Dạng 72: $I=\int\frac{a\sin x+b\cos x}{(\sqrt{3}\sin x+\cos x)^2}dx$	Dạng 73: $I=\int\frac{a\sin x+b\cos x}{(\sqrt{3}\sin x-\cos x)^2}dx$
Dạng 74: $I=\int(ax^2+bx+c)\sin xdx$	Dạng 75: $I=\int(ax^2+bx+c)\cos xdx$
Dạng 76: $I=\int f(\sin x)\cos xdx$	Dạng 77: $I=\int f(\cos x)\sin xdx$

Dạng 78: $I=\int f(\tan x)\frac{1}{\cos^2 x}dx$	Dạng 79: $I=\int f(\cot x)\frac{1}{\sin^2 x}dx$
Dạng 80: $I=\int \frac{dx}{a\sin x+b\cos x+c}$	Dạng 81: $I=\int \frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a_2\sin x+b_2\cos x}dx$
Dạng 82: $I=\int \frac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a_2\sin x+b_2\cos x+c_2}dx$	Dạng 83: $I=\int \frac{\sin(ax+b)}{m+n\cos(ax+b)}dx$
Dạng 84: $I=\int \frac{\sin(ax+b)}{\sqrt[n]{\left[m+n\cos(ax+b)\right]^k}}dx$	Dạng 85: $I=\int (ax+b)\cos(mx+n)dx$
Dạng 86: $I=\int \frac{\sin 2x}{\left(a\sin^2 x+b\cos^2 x+c\right)^n}dx$	Dạng 87: $I=\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{a\cos^2 x+b\sin^2 x+c}}dx$
Dạng 88: $I=\int \frac{\cos 2x}{(\sin x-\cos x+a)^n}dx$	Dạng 89: $I=\int \frac{\cos^2 x}{a\sin x+b\cos x}dx$
Dạng 90: $I=\int \frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^2}$	Dạng 91: $I=\int \frac{\ln\left[\tan(ax+b)\right]}{\sin(2ax+2b)}dx$
Dạng 92: $I=\int \frac{dx}{a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x+d}$	
Dạng 93: $I=\int f(\sin^2 x,\cos^2 x,\cos 2x)\sin 2x dx$	
Dạng 94: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}dx$	
Dạng 95: $I=\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx; x=\pi-t$	
Dạng 96: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[n]{\sin x}}{\sqrt[n]{\sin x}+\sqrt[n]{\cos x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[n]{\cos x}}{\sqrt[n]{\cos x}+\sqrt[n]{\sin x}}dx=\frac{\pi}{4}$	

Dạng 97: $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx=\frac{\pi}{4}$

Dạng 98: $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx$

II. PHƯƠNG PHÁP

Dạng 1: $I=\int\sin(ax+b)dx$

Phương pháp: $I=\frac{1}{a}\int\sin(ax+b)d(ax+b)=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\sin(x+1)dx$.

Lời giải: $I=\int\sin(x+1)d(x+1)=-\cos(x+1)+C$.

Bài tập minh họa

➢ **Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây**

a. $I=\int\sin(2x+3)dx=-\frac{1}{2}\cos(2x+3)+C$.

b. $I=\int\sin(3x+2)dx=-\frac{1}{3}\cos(3x+2)+C$.

c. $I=\int\sin(6x-1)dx=-\frac{1}{6}\cos(6x-1)+C$.

Dạng 2: $I=\int\cos(ax+b)dx$

Phương pháp:

$I=\int\cos(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int\cos(ax+b)d(ax+b)=\frac{1}{a}.\sin(ax+b)+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\cos(5x+2)dx$

Lời giải:

$I=\int\cos(5x+2)dx=\frac{1}{5}\int\cos(5x+2)d(5x+2)=\frac{1}{5}\sin(5x+2)+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \cos(9x-2)dx=\frac{1}{9}\sin(9x-2)+C$.

b. $I=\int \cos(3x+5)dx=\frac{1}{3}\sin(3x+5)+C$.

c. $I=\int \cos(2-7x)dx=-\frac{1}{7}\sin(2-7x)+C$.

Dạng 3: $I=\int \tan(ax+b)dx$

Phương pháp: $I=\frac{1}{a}\int \frac{\sin(ax+b)}{\cos(ax+b)}d(ax+b)=-\frac{1}{a}\int \frac{d(\cos(ax+b))}{\cos(ax+b)}$

$=-\frac{1}{a}\ln|\cos(ax+b)|+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int \tan(2x+1)dx$.

Lời giải: $I=\frac{1}{2}\frac{\sin(2x+1)}{\cos(2x+1)}d(2x+1)=-\frac{1}{2}\int \frac{d(\cos(2x+1))}{\cos(2x+1)}$

$=-\frac{1}{2}\ln|\cos(2x+1)|+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \tan(9x-2)dx=-\frac{1}{9}\ln|\cos(9x-2)|+C$.

b. $I=\int \tan(6x-5)dx=-\frac{1}{6}\ln|\cos(6x+5)|+C$.

c. $I=\int \tan(5-6x)dx=\frac{1}{6}\ln|\cos(5-6x)|+C$

Dạng 4: $I=\int \cot(ax+b)dx$

Phương pháp:

$I=\frac{1}{a}\int \frac{\cos(ax+b)}{\sin(ax+b)}d(ax+b)=\frac{1}{a}\int \frac{d(\sin(ax+b))}{\sin(ax+b)}=\frac{1}{a}\ln|\sin(ax+b)|+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm. $I=\int \cot(5x+3)dx$.

Lời giải:

$$I=\frac{1}{5}\int\frac{\cos(5x+3)}{\sin(5x+3)}d(5x+3)=\frac{1}{5}\int\frac{d(\sin(5x+3))}{\sin(5x+3)}=\frac{1}{5}\ln|\sin(5x+3)|+C.$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \cot(9x-7)dx=\frac{1}{9}\ln|\sin(9x-7)|+C$.

b. $I=\int \cot(6-2x)dx=-\frac{1}{2}\ln|\sin(6-2x)|+C$.

c. $I=\int \cot(2x+2)dx=\frac{1}{2}\ln|\sin(2x+2)|+C$.

Dạng 5: $I=\int\frac{dx}{a+b\sin x}$

Phương pháp:

$$I=\int\frac{dx}{a\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)+2b\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int\frac{\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}}{a\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+2b\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}+a}$$

$$=\int\frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{a\tan^2\frac{x}{2}+2b\tan\frac{x}{2}+a}=\int\frac{dt}{at^2+bt+a}$$

(Dạng 1_Tích phân hữu tỷ).

Ví dụ:Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{2+4\sin x}$.

Lời giải: $I=\int\frac{dx}{2\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)+2.4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$$=\int\frac{\dfrac{dx}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}}{2\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}}+8\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}}+2}=\int\frac{d\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)}{2\tan^2\dfrac{x}{2}+8\tan\dfrac{x}{2}+2}=\int\frac{dt}{2t^2+8t+2}$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{dx}{1+2\sin x}=\int\frac{dt}{t^2+2t+1}$ (với $t=\tan\frac{x}{2}$).

b. $I=\int\frac{dx}{3+2\sin x}=\int\frac{dt}{3t^2+2t+3}$ (với $t=\tan\frac{x}{2}$).

c. $I=\int\frac{dx}{4+\sin x}=\int\frac{dt}{4t^2+t+4}$ (với $t=\tan\frac{x}{2}$).

Dạng 6: $I=\int\frac{dx}{a+b\cos x}$

Phương pháp:

$$I=\int\frac{dx}{a\left(\sin^2\dfrac{x}{2}+\cos^2\dfrac{x}{2}\right)+b\left(\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}\right)}=\int\frac{\dfrac{dx}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}}{(a-b)\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}}+a+b}$$

$$=\int\frac{d\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)}{(a-b)\tan^2\dfrac{x}{2}+a+b}=\int\frac{dt}{(a-b)t^2+a+b}=\frac{1}{a-b}\int\frac{dt}{t^2+\dfrac{a+b}{a-b}}$$

(Dạng 1_Tích phân hữu tỷ).

Ví dụ: nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{6+4\cos x}$.

Lời giải: $I=\int\frac{dx}{6\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)+4\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}$

$$=\int\frac{\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}}{2\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+10}=\int\frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{2\tan^2\frac{x}{2}+10}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+5}.$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{dx}{5+3\cos x}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+4}$ (với $t=\tan\frac{x}{2}$).

b. $I=\int\frac{dx}{5+4\cos x}=\int\frac{dt}{t^2+9}$ (với $t=\tan\frac{x}{2}$).

c. $I=\int\frac{dx}{7+3\cos x}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2+\frac{5}{2}}$ (với $t=\tan\frac{x}{2}$).

Dạng 7: $I=\int\frac{dx}{a+b\tan x}$

Phương pháp 1:

$$I=\int\frac{\cos x}{a\cos x+b\sin x}dx=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{\cos x}{\sin(x+\alpha)}dx.$$

Đặt $u=x+\alpha\Rightarrow du=dx$.

$$I=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{\cos(u-\alpha)}{\sin u}dx=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{\cos u\cos\alpha+\sin u\sin\alpha}{\sin u}du.$$

Phương pháp 2:

Đặt $u=\tan x \Rightarrow du=\left(1+\tan^2 x\right)dx=\left(1+u^2\right)dx \Rightarrow dx=\frac{du}{1+u^2}$.

$$I=\int \frac{du}{(a+bu)\left(1+u^2\right)}=\int\left(\frac{A}{a+bu}+\frac{Bu+C}{u^2+1}\right)du$$

$$=\frac{A}{b}\ln|a+bu|+\frac{B}{2}\ln\left|u^2+1\right|+C\int\frac{du}{u^2+1}.$$

Đặt $u=\tan t \Rightarrow du=\left(1+\tan^2 t\right)dt$.

$$\int\frac{du}{u^2+1}=\int\frac{1+\tan^2 t}{\tan^2 t+1}dt=t.$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{\sqrt{3}+\tan x}$.

Lời giải: $I=\int\frac{\cos x}{\sqrt{3}\cos x+\sin x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\cos x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}dx$

$$=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx+\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{\cos x}{\cos x}dx=\ln|\sin x|+\frac{1}{\sqrt{3}}x+C.$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{dx}{3+7\tan x}$.

b. $I=\int\frac{dx}{2+5\tan x}$.

c. $I=\int\frac{dx}{6+\tan x}$.

Dạng 8: $I=\int\frac{dx}{a+b\cot x}$

Phương pháp:

Đặt $u=\cot x\Rightarrow du=-\left(1+\cot^2 x\right)dx=-\left(1+u^2\right)dx\Rightarrow dx=-\frac{du}{1+u^2}$.

$I=-\int\frac{du}{\left(a+bu\right)\left(1+u^2\right)}$.

Ta có $\frac{1}{\left(a+bu\right)\left(1+u^2\right)}=\frac{A}{a+bu}+\frac{Bu+C}{1+u^2}$

$=\frac{A\left(1+u^2\right)+\left(Bu+C\right)\left(a+bu\right)}{\left(a+bu\right)\left(1+u^2\right)}=\frac{\left(A+Bb\right)u^2+\left(Ba+Cb\right)u+Ca+A}{\left(a+bu\right)\left(1+u^2\right)}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}A+Bb=0\\Ba+Cb=0\\Ca+A=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\frac{b^2}{a^2+b^2}\\B=-\frac{b}{a^2+b^2}\\C=\frac{a}{a^2+b^2}\end{cases}$.

Vậy $I=-\int\left(\frac{\frac{b^2}{a^2+b^2}}{a+bu}+\frac{-\frac{b}{a^2+b^2}u+\frac{a}{a^2+b^2}}{1+u^2}\right)du$

$=-\frac{b^2}{a^2+b^2}\int\frac{du}{a+bu}-\frac{1}{a^2+b^2}\int\frac{-bu+a}{1+u^2}du$

$=-\frac{b}{a^2+b^2}\ln\left|a+bu\right|-\frac{1}{a^2+b^2}\int\frac{-bu+a}{1+u^2}du$

$=-\frac{b}{a^2+b^2}\ln\left|a+bu\right|+\frac{b}{2\left(a^2+b^2\right)}\int\frac{2u}{1+u^2}du-\frac{a}{a^2+b^2}\int\frac{du}{1+u^2}$

$=\frac{b}{a^2+b^2}\ln\left|a+bu\right|+\frac{b}{2\left(a^2+b^2\right)}\ln\left|1+u^2\right|-\frac{a}{a^2+b^2}\int\frac{du}{1+u^2}$

(Dạng 1_Tích phân hữu tỷ).

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{2+\cot x}$.

Lời giải:

Đặt $u=\cot x\Rightarrow du=-\left(1+\cot^2 x\right)dx=-\left(1+u^2\right)dx\Rightarrow dx=-\frac{du}{1+u^2}$.

$$I=\int\frac{du}{(2+u)\left(1+u^2\right)}=\frac{1}{5}\int\frac{2-u}{1+u^2}du+\frac{1}{5}\int\frac{du}{u+2}$$

$$=\frac{2}{5}\int\frac{du}{1+u^2}-\frac{1}{10}\int\frac{2u}{1+u^2}du+\frac{1}{5}\int\frac{du}{u+2}$$

$$=\frac{2}{5}\int\frac{du}{1+u^2}-\frac{1}{10}\ln\left|1+u^2\right|+\frac{1}{5}\ln|u+2|.$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{dx}{5+2\cot x}=-\int\frac{du}{(5+2u)\left(1+u^2\right)}$ (với $u=\cot x$).

b. $I=\int\frac{dx}{6+3\cot x}=-\int\frac{du}{(6+3u)\left(1+u^2\right)}$ (với $u=\cot x$).

c. $I=\int\frac{dx}{3+4\cot x}=-\int\frac{du}{(3+4u)\left(1+u^2\right)}$ (với $u=\cot x$).

Dạng 9: $I=\int\sin^{2n}x dx$

Phương pháp: $I=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^n dx=\frac{1}{2^n}\int(1-\cos 2x)^n dx$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\sin^4 x dx$.

Lời giải: $I=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx=\frac{1}{2^2}\int(1-\cos 2x)^2 dx$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \sin^2 x dx=\int \frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)dx$.

b. $I=\int \sin x^6 dx=\int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 dx=\frac{1}{2^3}\int (1-\cos 2x)^3 dx$.

c. $I=\int \sin^8 x dx=\int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^4 dx=\frac{1}{2^4}\int (1-\cos 2x)^4 dx$.

Dạng 10: $I=\int \cos^{2n} x dx$

Phương pháp:

$I=\int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^n dx=\frac{1}{2^n}\int (1+\cos 2x)^n dx$.

Lưu ý. $I=\int \cos^2 ax=\int \left(\frac{1+\cos 2ax}{2}\right)^n dx$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int \cos^2 x dx$.

Lời giải: $I=\int \frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)dx$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \cos^4 x dx=\int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx=\frac{1}{2^2}\int (1+\cos 2x)^2 dx$.

b. $I=\int \cos^8 x dx=\int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^4 dx=\frac{1}{2^4}\int (1+\cos 2x)^4 dx$.

Dạng 11: $I=\int \sin^{2n+1} x dx$

Phương pháp:

$I=\int \sin^{2n} x \sin x dx=\int \left(1-\cos^2 x\right)^n \sin x dx=-\int \left(1-u^2\right)^n du$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int \sin^3 x dx$.

Lời giải: $I=\int \sin^2 x \sin x dx=\int \left(1-\cos^2 x\right)\sin x dx=-\int \left(1-u^2\right)^n du$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \sin^5 x dx=-\int \left(1-u^2\right)^2 du$.

b. $I=\int \sin^7 x dx=-\int \left(1-u^2\right)^3 du$.

Dạng 12: $I=\int \cos^{2n+1} x dx$

Phương pháp:

$I=\int \left(\cos^2 x\right)^n \cos x dx=\int \left(1-\sin^2 x\right)^n \cos x dx=\int \left(1-u^2\right)^n du$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int \cos^3 x dx$.

Lời giải: $I=\int \cos^2 x.\cos x dx=\int \left(1-\sin^2 x\right)\cos x dx=\int \left(1-u^2\right)^n du$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \cos^5 x dx=\int \left(1-\sin^2 x\right)^2 \cos x dx=\int \left(1-u^2\right)^2 du$.

b. $I=\int \cos^7 x dx=\int \left(1-\sin^2 x\right)^3 \cos x dx=\int \left(1-u^2\right)^3 du$.

Dạng 13: $I=\int \tan^{2k} x dx$

Phương pháp:

$$I=\int\left(\begin{array}{l}\tan^{2k} x+\tan^{2k-2} x-\tan^{2k-2} x-\tan^{2k-4} x\\ +\tan^{2k-4} x+\tan^{2k-6} x-...-\tan^2 x+\tan^2 x+1-1\end{array}\right)dx$$

$$=\int\left[\begin{array}{l}\tan^{2k-2} x\left(1+\tan^2 x\right)-\tan^{2k-4} x.\left(1+\tan^2 x\right)\\ +.....+\left(1+\tan^2 x\right)-1\end{array}\right]dx$$

$$=\int\left[\tan^{2k-2} x\frac{1}{\cos^2 x}-\tan^{2k-4} x\frac{1}{\cos^2 x}+.....+\frac{1}{\cos^2 x}-1\right]dx$$

$$=\frac{\tan^{2k-1} x}{2k-1}-\frac{\tan^{2k-3} x}{2k-3}+.....+tgx-x+C.$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int \tan^4 x dx$.

Lời giải: $I=\int\left(\tan^4 x+\tan^2 x-\tan^2 x-1+1\right)dx$

$$=\int\left[\tan^2 x\left(1+\tan^2 x\right)-\left(\tan^2 x+1\right)+1\right]dx$$

$$=\int\left(\tan^2 x.\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}+1\right)dx=\frac{\tan^3 x}{3}-\tan x+x+C.$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \tan^6 x dx=\frac{\tan^5 x}{5}-\frac{\tan^3 x}{3}-\tan x-x+C.$

b. $I=\int \tan^8 x dx=\frac{\tan^7 x}{7}-\frac{\tan^5 x}{5}+\frac{\tan^3 x}{3}-\tan x+x+C.$

c. $I=\int \tan^{10} x dx=\frac{\tan^9 x}{9}-\frac{\tan^7 x}{7}+\frac{\tan^5 x}{5}-\frac{\tan^3 x}{3}+\tan x-x+C.$

Dạng 14: $I=\int \cot^{2k} x dx$

Phương pháp:

$$I=\int\begin{pmatrix}\cot^{2k}x+\cot^{2k-2}x-\cot^{2k-2}x-\cot^{2k-4}x+\cot^{2k-4}x+\cot^{2k-6}x\\ -...-\cot^2 x+\cot^2 x+1-1\end{pmatrix}dx$$

$$=\int\left[\cot^{2k-2}x\left(1+\cot^2 x\right)-\cot^{2k-4}x\left(1+\cot^2 x\right)+.....+\left(1+\cot^2 x\right)-1\right]dx$$

$$=\int\left(\frac{\cot^{2k-2}x}{\sin^2 x}-\frac{\cot^{2k-4}x}{\sin^2 x}+.....+\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx$$

$$=-\frac{\cot^{2k-1}x}{2k-1}+\frac{\cot^{2k-3}x}{2k-3}+.....-\cot x-x+C.$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int \cot^4 x dx$.

Lời giải: $I=\int\left(\cot^4 x+\cot^2 x-\cot^2 x+1-1\right)dx$

$$=\int\left[\cot^2 x\left(\cot^2 x+1\right)-\left(\cot^2 x+1\right)+1\right]dx$$

$$=\int\left(\cot^2 x.\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}+1\right)dx=-\frac{\cot^3 x}{3}+\cot x+x+C.$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \cot^6 x dx=-\frac{\cot^5 x}{5}+\frac{\cot^3 x}{3}-\cot x-x+C.$

b. $I=\int \cot^{10} x dx=-\frac{\cot^9 x}{9}+\frac{\cot^7 x}{7}+\frac{\cot^5 x}{5}+\frac{\cot^3 x}{3}-\cot x-x+C.$

c. $I=\int \cot^{12} x dx=-\frac{\cot^{11} x}{11}+\frac{\cot^9 x}{9}+\frac{\cot^7 x}{7}+\frac{\cot^5 x}{5}+\frac{\cot^3 x}{3}$
$-\cot x-x+C.$

Dạng 15: $I=\int \tan^{2k+1}x dx$

Phương pháp:

$$I=\int\left(\begin{matrix}\tan^{2k+1}x+\tan^{2k-1}x-\tan^{2k-1}x-\tan^{2k-3}x+\tan^{2k-5}x+\tan^{2k-7}x\\ -...-\tan^{3}x+\tan^{3}x+\tan x-\tan x\end{matrix}\right)dx$$

$$=\int\left[\begin{matrix}\tan^{2k-1}x\left(1+\tan^{2}x\right)-\tan^{2k-3}x\left(1+\tan^{2}x\right)\\ +.....+\tan x\left(1+\tan^{2}x\right)-\tan x\end{matrix}\right]dx$$

$$=\int\left(\frac{\tan^{2k-1}x}{\cos^{2}x}-\frac{\tan^{2k-3}x}{\cos^{2}x}+.....+\frac{\tan x}{\cos^{2}x}-\tan x\right)dx$$

$$=\frac{\tan^{2k}x}{2k}-\frac{\tan^{2k-2}x}{2k-2}+.....+\frac{\tan^{2}x}{2}+\ln\left|\cos x\right|+C.$$

Bổ trợ: $\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d\left(\cos x\right)}{\cos x}=-\ln\left|\cos x\right|+C.$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int \tan^{3}x dx$.

Lời giải: $I=\int\left(\tan^{3}x+\tan x-\tan x\right)dx=\int\left[\tan x\left(\tan^{2}x+1\right)-\tan x\right]dx$

$$=\int\left(\frac{\tan x}{\cos^{2}x}-\tan x\right)dx=\frac{\tan^{2}x}{2}+\ln\left|\cos x\right|+C.$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \tan^{5}x dx=\frac{\tan^{4}x}{4}-\frac{\tan^{2}x}{2}+\ln\left|\cos x\right|+C.$

b. $I=\int \tan^{7}x dx=\frac{\tan^{6}x}{6}-\frac{\tan^{4}x}{4}+\frac{\tan^{2}x}{2}+\ln\left|\cos x\right|+C.$

c. $I=\int \tan^{9}x dx=\frac{\tan^{8}x}{8}-\frac{\tan^{6}x}{6}+\frac{\tan^{4}x}{4}+\frac{\tan^{2}x}{2}+\ln\left|\cos x\right|+C.$

Dạng 16: $I=\int \cot^{2k+1} x dx$

Phương pháp:

$$I=\int \begin{pmatrix} \cot^{2k+1} x+\cot^{2k-1} x-\cot^{2k-1} x-\cot^{2k-3} x+\cot^{2k-5} x+\cot^{2k-7} x \\ -...-\cot^3 x+\cot^3 x+\cot x-\cot x \end{pmatrix} dx$$

$$=\int \begin{bmatrix} \cot^{2k-1} x\left(1+\cot^2 x\right)-\cot^{2k-3} x\left(1+\cot^2 x\right) \\ +.....+\cot x\left(1+\cot^2 x\right)-\cot x \end{bmatrix} dx$$

$$=\int \left(\frac{\cot^{2k-1} x}{\sin^2 x}-\frac{\cot^{2k-3} x}{\sin^2 x}+.....+\frac{\cot x}{\sin^2 x}-\cot x\right) dx$$

$$=-\frac{\cot^{2k} x}{2k}+\frac{\cot^{2k-2} x}{2k-2}+.....-\frac{\cot^2 x}{2}-\ln\left|\sin x\right|+C.$$

Bổ trợ: $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx=\int \frac{d\left(\sin x\right)}{\sin x}=\ln\left|\sin x\right|.$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int \cot^5 x dx$.

Lời giải: $I=\int \left(\cot^5 x+\cot^3 x-\cot^3 x+\cot x-\cot x\right) dx$

$$=\int \left[\cot^3 x\left(\cot^2 x+1\right)-\cot x\left(\cot^2 x+1\right)+\cot x\right] dx$$

$$=-\frac{\cot^4 x}{4}+\frac{\cot^2 x}{2}+\ln\left|\sin x\right|+C.$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \cot^7 x dx=-\frac{\cot^6 x}{6}+\frac{\cot^4 x}{4}-\frac{\cot^2 x}{2}-\ln\left|\sin x\right|+C.$

b. $I=\int \cot^9 x dx=-\frac{\cot^8 x}{8}+\frac{\cot^6 x}{6}+\frac{\cot^4 x}{4}-\frac{\cot^2 x}{2}-\ln\left|\sin x\right|+C.$

c. $I=\int \cot^{11} x dx=-\frac{\cot^{10} x}{10}+\frac{\cot^8 x}{8}+\frac{\cot^6 x}{6}+\frac{\cot^4 x}{4}$

$-\frac{\cot^2 x}{2}-\ln\left|\sin x\right|+C.$

Dạng 17: $I=\int\frac{dx}{\sin^2(ax+b)}$

Phương pháp: $I=\frac{1}{a}\int\frac{d(ax+b)}{\sin^2(ax+b)}=-\frac{1}{a}\cot(ax+b)+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{\sin^2(2x+3)}$.

Lời giải: $I=\frac{1}{3}\int\frac{d(2x+3)}{\sin^2(2x+3)}=-\frac{1}{2}\cot(2x+3)+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{dx}{\sin^2(4x+2)}=-\frac{1}{4}\cot(4x+2)+C$.

b. $I=\int\frac{dx}{\sin^2(5x+4)}=-\frac{1}{5}\cot(5x+4)+C$.

c. $I=\int\frac{dx}{\sin^2(2x+1)}=-\frac{1}{2}\cot(2x+1)+C$.

Dạng 18: $I=\int\frac{dx}{\cos^2(ax+b)}$

Phương pháp: $I=\frac{1}{a}\int\frac{d(ax+b)}{\cos^2(ax+b)}=\frac{1}{a}\tan(ax+b)+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{\cos^2(3x+1)}$.

Lời giải: $I=\frac{1}{3}\int\frac{d(3x+1)}{\cos^2(3x+1)}=\frac{1}{3}\tan(3x+1)+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{dx}{\cos^2(7x+2)}=\frac{1}{7}\tan(7x+2)+C.$

b. $I=\int\frac{dx}{\cos^2(8x+5)}=\frac{1}{8}\tan(8x+5)+C.$

c. $I=\int\frac{dx}{\cos^2(2x+3)}=\frac{1}{2}\tan(2x+3)+C.$

Dạng 19: $I=\int\frac{dx}{\sin^{2k}(ax+b)}$

Phương pháp:

$$I=\int\frac{dx}{\sin^{2k-2}(ax+b)\sin^2(ax+b)}=\int\frac{dx}{\sin^{2k-2}(ax+b)\sin^2(ax+b)}.$$

Đặt $u=\cot(ax+b)\Rightarrow du=-\frac{a}{\sin^2 x}dx.$

$$I=-\frac{1}{a}\int\left[1+\cot^2(ax+b)\right]^{k-1}d(\cot(ax+b)).$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{\sin^4(5x+1)}.$

Lời giải: $I=\int\frac{dx}{\sin^2(5x+1)\sin^2(5x+1)}=\int\frac{dx}{\sin^2(5x+1)\sin^2(5x+1)}.$

Đặt $t=\cot(5x+1)\Rightarrow dt=-\frac{5}{\sin^2(5x+1)}dx.$

$$I=-\frac{1}{5}\int\left[1+\cot^2(5x+1)\right]d(\cot(5x+1))$$

$$=-\frac{1}{5}\cot(5x+1)+\frac{1}{15}\cot^3(5x+1)+C.$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{dx}{\sin^6(4x+1)}=-\frac{1}{4}\int\left[1+\cot^2(4x+1)\right]^2d(\cot(4x+1))$

$$=-\frac{\cot^5(4x+1)}{20}-\frac{\cot^3(4x+1)}{6}-\frac{\cot(4x+1)}{4}+C.$$

b. $I=\int\frac{dx}{\sin^8(3x+7)}=-\frac{1}{3}\int\left[1+\cot^2(3x+7)\right]^3 d\left(\cot(3x+7)\right)$

$$=-\frac{\cot^7(3x+7)}{21}-\frac{\cot^5(3x+7)}{5}-\frac{\cot^3(3x+7)}{3}-\frac{\cot(3x+7)}{3}+C.$$

c. $I=\int\frac{dx}{\sin^{10}(5x+2)}-\frac{1}{5}\int\left[1+\cot^2(5x+2)\right]^4 d\left(\cot(5x+2)\right)$

$$=-\frac{\cot^9(5x+2)}{45}-\frac{4\cot^7(5x+2)}{35}-\frac{6\cot^5(5x+2)}{25}$$

$$-\frac{4\cot^3(5x+2)}{15}-\frac{\cot(5x+2)}{5}+C.$$

Dạng 20: $I=\int\frac{dx}{\cos^{2k}(ax+b)}$

Phương pháp:

$$I=\int\frac{dx}{\cos^{2k-2}(ax+b)\cos^2(ax+b)}=\int\left[\frac{1}{\cos^2(ax+b)}\right]^{k-1}\cdot\frac{dx}{\cos^2(ax+b)}$$

$$=\frac{1}{a}\int\left[1+\tan^2(ax+b)\right]^{k-1}d\left(\tan(ax+b)\right).$$

Đặt $u=\tan(ax+b)\Rightarrow du=\frac{1}{a}.\frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx.$

$$I=\frac{1}{a}\int\left(1+u^2\right)^{n-1}du.$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{\cos^4(5x+4)}.$

Lời giải: $I=\int\frac{dx}{\cos^2(5x+4)\cos^2(5x+4)}=\int\left[\frac{1}{\cos^2(5x+4)}\right].\frac{dx}{\cos^2(5x+4)}$

$$=\frac{1}{5}\int\left[1+\tan^2(5x+4)\right]d\left(\tan(5x+4)\right).$$

Đặt $t=\tan(5x+4)\Rightarrow dt=\frac{1}{5}.\frac{1}{\cos^2(5x+4)}dx.$

$$I=\frac{1}{5}\int\left(1+t^2\right)dt=\frac{t}{5}+\frac{t^3}{15}+C.$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{dx}{\cos^6(2x+1)}=\frac{1}{2}\int\left(1+t^2\right)^2dt$ (với $t=\tan(2x+1)$).

b. $I=\int\frac{dx}{\cos^8(9x+6)}=\frac{1}{9}\int\left(1+t^2\right)^3dt$ (với $t=\tan(9x+6)$).

c. $I=\int\frac{dx}{\cos^{10}(7x+2)}=\frac{1}{7}\int\left(1+t^2\right)^4dt$ (với $t=\tan(7x+2)$).

Dạng 21: $I=\int\frac{mx+n}{\sin^2(ax+b)}dx$

Phương pháp:

Đặt $\begin{cases}u=mx+n\\dv=\dfrac{dx}{\sin^2(ax+b)}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=mdx\\v=\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2(ax+b)}=-\frac{\cot(ax+b)}{a}\end{cases}$.

$$I=-\frac{(mx+n)\cot(ax+b)}{a}+\frac{m}{a}\int\cot(ax+b)dx$$

$$=-\frac{(mx+n)\cot(ax+b)}{a}+\frac{m}{a}\int\frac{d(\sin(ax+b))}{\sin(ax+b)}.$$

Ví dụ:Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{2x+3}{\sin^2(4x+6)}dx$.

Lời giải:

Đặt $\begin{cases}u=2x+3\\dv=\dfrac{dx}{\sin^2(4x+6)}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2dx\\v=\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2(4x+6)}=-\frac{\cot(4x+6)}{4}\end{cases}$.

$$I=-\frac{(2x+3)\cot(4x+6)}{4}+\frac{1}{2}\int\cot(4x+6)dx$$

$$=-\frac{(2x+3)\cot(4x+6)}{4}+\frac{1}{2}\int\frac{d(\sin(4x+6))}{\sin(4x+6)}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\sin(4x+6)\right|-\frac{(2x+3)\cot(4x+6)}{4}+C.$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{5x+2}{\sin^2(4x+2)}dx=-\frac{(5x+2)\cot(4x+2)}{4}+\frac{5}{4}\int\frac{d(\sin(4x+2))}{\sin(4x+2)}$

$=\frac{5}{4}\ln|\sin(4x+2)|-\frac{(5x+2)\cot(4x+2)}{4}+C.$

b. $I=\int\frac{7x+9}{\sin^2(2x+1)}dx=-\frac{(7x+9)\cot(2x+1)}{2}+\frac{7}{2}\int\frac{d(\sin(2x+1))}{\sin(2x+1)}$

$=\frac{7}{2}\ln|\sin(2x+1)|-\frac{(7x+9)\cot(2x+1)}{2}+C.$

c. $I=\int\frac{4x+5}{\sin^2(3x+2)}dx=-\frac{(4x+5)\cot(3x+2)}{3}+\frac{4}{3}\int\frac{d(\sin(3x+2))}{\sin(3x+2)}$

$=\frac{4}{3}\ln|\sin(3x+2)|-\frac{(4x+5)\cot(3x+2)}{3}+C.$

Dạng 22: $I=\int\frac{mx+n}{\cos^2(ax+b)}dx$

Phương pháp:

Đặt $\begin{cases}u=mx+n\\dv=\dfrac{dx}{\cos^2(ax+b)}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=mdx\\v=\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^2(ax+b)}=\frac{\tan(ax+b)}{a}\end{cases}.$

$I=\frac{(mx+n)\tan(ax+b)}{a}-\frac{m}{a}\int\tan(ax+b)dx$

$=\frac{(mx+n)\tan(ax+b)}{a}-\frac{m}{a}\int\frac{d(\cos(ax+b))}{\cos(ax+b)}$

$=\frac{(mx+n)\tan(ax+b)}{a}-\frac{m}{a}\ln|\cos(ax+b)|+C.$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{2x+3}{\cos^2(4x+5)}dx$.

Lời giải: Đặt

$$\begin{cases}u=2x+3\\dv=\dfrac{dx}{\cos^2(4x+5)}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2dx\\v=\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^2(4x+5)}=\frac{\tan(4x+5)}{4}\end{cases}.$$

$$I=\frac{(2x+3)\tan(4x+5)}{4}-\frac{1}{2}\int\tan(4x+5)dx$$

$$=\frac{(2x+3)\tan(4x+5)}{4}-\frac{1}{2}\int\frac{d(\cos(4x+5))}{\cos(4x+5)}$$

$$=\frac{(2x+3)\tan(4x+5)}{4}-\frac{1}{2}\ln|\cos(4x+5)|+C.$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{7x+3}{\cos^2(5x+1)}dx=\frac{(7x+3)\tan(5x+1)}{5}-\frac{7}{5}\ln|\cos(5x+1)|+C.$

b. $I=\int\frac{8x+2}{\cos^2(5x+4)}dx=\frac{(8x+2)\tan(5x+4)}{5}-\frac{8}{5}\ln|\cos(5x+4)|+C.$

c. $I=\int\frac{6x+1}{\cos^2(8x+7)}dx=\frac{(6x+1)\tan(8x+7)}{8}-\frac{4}{3}\ln|\cos(8x+7)|+C.$

Dạng 23: $I=\int\frac{x^{n-1}}{\sin^2(ax^n+b)}dx$

Phương pháp: $I=\frac{1}{an}\int\frac{d(ax^n+b)}{\sin^2(ax^n+b)}=-\frac{1}{an}\cot(ax^n+b)+C.$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{x^2}{\sin^2(2x^3+4)}dx$.

Lời giải: $I=\frac{1}{6}\int\frac{d(2x^3+4)}{\sin^2(2x^3+4)}=-\frac{1}{6}\cot(2x^3+4)+C.$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{x^3}{\sin^2\left(3x^4+7\right)}dx=-\frac{1}{9}\cot\left(3x^4+7\right)+C$.

b. $I=\int\frac{x^5}{\sin^2\left(3x^6+8\right)}dx=-\frac{1}{18}\cot\left(3x^n+8\right)+C$.

c. $I=\int\frac{x^{10}}{\sin^2\left(2x^{11}+9\right)}dx=-\frac{1}{22}\cot\left(2x^{11}+9\right)+C$.

Dạng 24: $I=\int\frac{x^{n-1}}{\cos^2\left(ax^n+b\right)}dx$

Phương pháp: $I=\frac{1}{an}\int\frac{d\left(ax^n+b\right)}{\cos^2\left(ax^n+b\right)}=\frac{1}{an}\tan\left(ax^n+b\right)+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{x^3}{\cos^2\left(4x^4+3\right)}dx$.

Lời giải: $I=\frac{1}{16}\int\frac{d\left(4x^4+3\right)}{\cos^2\left(4x^4+3\right)}=\frac{1}{16}\tan\left(4x^4+3\right)+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{x^5}{\cos^2\left(7x^6+2\right)}dx=\frac{1}{42}\tan\left(7x^6+2\right)+C$.

b. $I=\int\frac{x^6}{\cos^2\left(5x^7+2\right)}dx=\frac{1}{35}\tan\left(5x^7+2\right)+C$.

c. $I=\int\frac{x^9}{\cos^2\left(x^{10}+5\right)}dx=\frac{1}{10}\tan\left(x^{10}+5\right)+C$.

Dạng 25: $I=\int\frac{dx}{\sin^{2k+1}(ax+b)}$

Phương pháp:

$$I=\int\frac{\sin(ax+b)}{\sin^{2k+2}(ax+b)}dx=\frac{1}{a}\int\frac{d(\cos(ax+b))}{\left[1-\cos^2(ax+b)\right]^{k+1}}=\frac{1}{a}\int\frac{du}{\left(1-u^2\right)^{k+1}}$$

với $k=1;2$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{\sin^3(2x+3)}$.

Lời giải:

$$I=\int\frac{\sin(2x+3)}{\sin^4(2x+3)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(\cos(2x+3))}{\left[1-\cos^2(2x+3)\right]^2}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{\left(1-u^2\right)^2}.$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{dx}{\sin^5(6x+2)}=\frac{1}{6}\int\frac{du}{\left(1-u^2\right)^3}$ (với $t=\cos(6x+2)$).

b. $I=\int\frac{dx}{\sin^7(7x+2)}=\frac{1}{7}\int\frac{du}{\left(1-u^2\right)^4}$ (với $t=\cos(7x+2)$).

c. $I=\int\frac{dx}{\sin^9(9x+1)}=\frac{1}{9}\int\frac{du}{\left(1-u^2\right)^5}$ (với $t=\cos(9x+1)$).

Dạng 26: $I=\int\frac{dx}{\cos^{2k+1}(ax+b)}$

Phương pháp: $I=\int\frac{\cos(ax+b)}{\cos^{2k+2}(ax+b)}dx=\frac{1}{a}\int\frac{d(\sin(ax+b))}{\left[1-\sin^2(ax+b)\right]^{k+1}}$.

Đặt $u=\sin(ax+b)\Rightarrow du=\frac{1}{a}\cos(ax+b)$.

$I=\frac{1}{a}\int\frac{du}{\left(1-u^2\right)^{k+1}}$ với $k=1,2$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{\cos^3(4x+3)}$.

Lời giải: $I=\int\frac{\cos(4x+3)}{\cos^4(4x+3)}dx=\frac{1}{4}\int\frac{d(\sin(4x+3))}{\left[1-\sin^2(4x+3)\right]^2}$.

Đặt $t=\sin(4x+3)\Rightarrow dt=\frac{1}{4}\cos(4x+3)$.

$I=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{(1-t^2)^2}$.

Bài tập minh họa

➢ **Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây**

a. $I=\int\frac{dx}{\cos^5(6x+4)}=\frac{1}{6}\int\frac{dt}{(1-t^2)^3}$ (với $t=\sin(6x+4)$).

b. $I=\int\frac{dx}{\cos^7(2x+9)}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(1-t^2)^4}$ (với $t=\sin(2x+9)$).

c. $I=\int\frac{dx}{\cos^9(3x+1)}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{(1-t^2)^5}$ (với $t=\sin(3x+1)$).

Dạng 27: $I=\int\sin(ax+b)\sin(cx+d)dx$

Phương pháp: $I=\frac{1}{2}\int\left\{\cos\left[(a-c)x+b-d\right]-\cos\left[(a+c)x+b+d\right]\right\}dx$

$=\frac{1}{2(a-c)}\sin\left[(a-c)x+b-d\right]-\frac{1}{2(a+c)}\sin\left[(a+c)x+b+d\right]+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\sin(2x+3)\sin(7x+9)dx$.

Lời giải: $I=\frac{1}{2}\int\left[\cos(5x+6)-\cos(9x+12)\right]dx$

$=\frac{1}{90}\left[9\sin(5x+6)-5(9x+12)\right]+C$.



Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \sin(5x+4)\sin(3x+9)dx=\frac{1}{2}\int\left[\cos(2x-5)-\cos(8x+13)\right]dx$

$=\frac{1}{4}\sin(2x-5)-\frac{1}{16}\sin(8x+13)+C.$

b. $I=\int \sin(21x+8)\sin(18x+9)dx=\frac{1}{2}\int\left[\cos(3x-1)-\cos(39x+17)\right]dx$

$=\frac{1}{6}\sin(3x-1)-\frac{1}{78}\sin(39x+17)+C.$

c. $I=\int \sin(6x+5)\sin(3x+2)dx=\frac{1}{2}\int\left[\cos(3x+3)-\cos(9x+7)\right]dx$

$=\frac{1}{6}\sin(3x+3)-\frac{1}{18}\sin(9x+7)+C.$

Dạng 28: $I=\int \cos(ax+b)\cos(cx+d)dx$

Phương pháp:

$I=\frac{1}{2}\int\left\{\cos\left[(a+c)x+b+d\right]+\cos\left[(a-c)x+b-d\right]\right\}dx$

$=\frac{1}{2(a+c)}\sin\left[(a+c)x+b+d\right]+\frac{1}{2(a-c)}\sin\left[(a-c)x+b-d\right]+C.$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int \cos(5x+2)\cos(3x+1)dx$.

Lời giải: $I=\frac{1}{2}\int\left[\cos(8x+3)+\cos(2x+1)\right]dx$

$=\frac{1}{16}\sin(8x+3)+\frac{1}{4}\sin(2x+1)+C.$



Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \cos(3x+7)\cos(2x+1)dx=\frac{1}{2}\int\left[\cos(5x+8)+\cos(x+6)\right]dx$

$=\frac{1}{10}\sin(5x+8)+\frac{1}{2}\sin(x+6)+C.$

b. $I=\int \cos(9x+8)\cos(5x+2)dx=\frac{1}{2}\int\left[\cos(14x+10)+\cos(4x+6)\right]dx$

$=\frac{1}{28}\sin(14x+10)+\frac{1}{8}\sin(4x+6)+C.$

c. $I=\int\cos(7x+6)\cos(4x+1)dx=\frac{1}{2}\int\left[\cos(11x+7)+\cos(3x+5)\right]dx$

$=\frac{1}{22}\sin(11x+7)+\frac{1}{6}\sin(3x+5)+C.$

Dạng 29: $I=\int\sin(ax+b)\cos(cx+d)dx$

Phương pháp: $I=\frac{1}{2}\int\left\{\sin\left[(a+c)x+b+d\right]+\sin\left[(a-c)x+b-d\right]\right\}dx$

$=-\frac{1}{2(a+c)}\cos\left[(a+c)x+b+d\right]-\frac{1}{2(a-c)}\cos\left[(a-c)x+b-d\right]+C.$

Ví dụ:Tìm nguyên hàm $I=\int\sin(7x+2)\cos(5x+1)dx$.

Lời giải: $I=\frac{1}{2}\int\left[\sin(12x+3)+\sin(2x+1)\right]dx$

$=-\frac{1}{26}\cos(12x+3)-\frac{1}{4}\cos(2x+1)+C.$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\sin(7x+1)\cos(2x+5)dx=\frac{1}{2}\int\left[\sin(9x+6)+\sin(5x-4)\right]dx$

$=-\frac{1}{18}\cos(9x+6)-\frac{1}{10}\cos(5x-4)+C.$

b. $I=\int\sin(6x+7)\cos(2x+3)dx=\frac{1}{2}\int\left[\sin(8x+10)+\sin(4x+4)\right]dx$

$=-\frac{1}{16}\cos(8x+10)-\frac{1}{8}\cos(4x+4)+C.$

c. $I=\int\sin(2x+3)\cos(x+5)dx=\frac{1}{2}\int\left[\sin(3x+8)+\sin(x-2)\right]dx$

$=-\frac{1}{6}\cos(3x+8)-\frac{1}{2}\cos(x-2)+C.$

Dạng 30: $I=\int \tan x\tan(x+\alpha)dx$

Phương pháp:

$$I=\int \frac{\sin x\sin(x+\alpha)}{\cos x\cos(x+\alpha)}dx=\int\left[\frac{\cos x\cos(x+\alpha)+\sin x\sin(x+\alpha)}{\cos x\cos(x+\alpha)}-1\right]dx$$

$$=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\int \frac{\sin(x+\alpha-x)}{\cos x\cos(x+\alpha)}dx-x$$

$$=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\int \frac{\sin(x+\alpha)\cos x-\sin x\cos(x+\alpha)}{\cos x\cos(x+\alpha)}dx-x$$

$$=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\int\left[\frac{\sin(x+\alpha)}{\cos(x+\alpha)}-\frac{\sin x}{\cos x}\right]dx-x$$

$$=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ln\left|\frac{\cos(x+\alpha)}{\cos x}\right|-x+C.$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int \tan x\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$.

Lời giải:

$$I=\int \frac{\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}dx=\int\left[\frac{\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}-1\right]dx$$

$$=\int \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}dx-x=\int \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos x-\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}dx-x$$

$$=\int\left[\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}-\frac{\sin x}{\cos x}\right]dx-x=-\ln\left|\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos x}\right|-x+C.$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \tan x \tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)dx=-\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos x}\right|-x+C.$

b. $I=\int \tan x \tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)dx=-\sqrt{3}\ln\left|\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos x}\right|-x+C.$

Dạng 31: $I=\int \frac{dx}{\sin(ax+b)\sin(ax+c)}$

Phương pháp: $I=\frac{1}{\sin(b-c)}\int \frac{\sin\left[(ax+b)-(ax+c)\right]}{\cos(ax+b)\cos(ax+c)}dx$

$=\frac{1}{\sin(b-c)}\int \frac{\sin(ax+b)\cos(ax+c)-\cos(ax+b)\sin(ax+c)}{\sin(ax+b)\sin(ax+c)}dx$

$=\frac{1}{\sin(b-c)}\int \left[\frac{\cos(ax+c)}{\sin(ax+c)}-\frac{\cos(ax+b)}{\sin(ax+b)}\right]dx$

$=\frac{1}{a\sin(b-c)}\left[\ln\left|\sin(ax+c)\right|-\ln\left|\sin(ax+b)\right|\right]+C$

$=\frac{1}{a\sin(b-c)}\ln\left|\frac{\sin(ax+c)}{\sin(ax+b)}\right|+C.$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int \frac{dx}{\sin(x+2)\sin(x+4)}$.

Lời giải: $I=\frac{1}{\sin(-2)}\int \frac{\sin\left[(x+2)-(x+4)\right]}{\cos(x+2)\cos(x+4)}dx$

$=-\frac{1}{\sin 2}\int \frac{\sin(x+2)\cos(x+4)-\cos(x+2)\sin(x+4)}{\sin(x+2)\sin(x+4)}dx$

$$=-\frac{1}{\sin 2}\int\left[\frac{\cos(x+4)}{\sin(x+4)}-\frac{\cos(x+2)}{\sin(x+2)}\right]dx$$

$$=-\frac{1}{2\sin 2}\left[\ln\left|\sin(x+4)\right|-\ln\left|\sin(x+2)\right|\right]+C$$

$$=-\frac{1}{2\sin 2}\ln\left|\frac{\sin(x+4)}{\sin(x+2)}\right|+C.$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{dx}{\sin(5x+2)\sin(5x+6)}=-\frac{1}{5\sin 4}\ln\left|\frac{\sin(5x+6)}{\sin(5x+2)}\right|+C.$

b. $I=\int\frac{dx}{\sin(6x+6)\sin(6x+3)}=\frac{1}{7\sin 3}\ln\left|\frac{\sin(6x+3)}{\sin(6x+6)}\right|+C.$

c. $I=\int\frac{dx}{\sin(2x+3)\sin(2x+2)}=-\frac{1}{2\sin 1}\ln\left|\frac{\sin(2x+2)}{\sin(2x+3)}\right|+C.$

Dạng 32: $I=\int\frac{dx}{\cos(ax+b)\cos(ax+c)}$

Phương pháp: $I=\frac{1}{\sin(b-c)}\int\frac{\sin\left[(ax+b)-(ax+c)\right]}{\cos(ax+b)\cos(ax+c)}dx$

$$=\frac{1}{\sin(b-c)}\int\frac{\sin(ax+b)\cos(ax+c)-\cos(ax+b)\sin(ax+c)}{\cos(ax+b)\cos(ax+c)}dx$$

$$=\frac{1}{\sin(b-c)}\int\left[\frac{\sin(ax+b)}{\cos(ax+b)}-\frac{\sin(ax+c)}{\cos(ax+c)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{a\sin(b-c)}\left[\ln\left|\cos(ax+c)\right|-\ln\left|\cos(ax+b)\right|\right]+C$$

$$=\frac{1}{a\sin(b-c)}\ln\left|\frac{\cos(ax+c)}{\cos(ax+b)}\right|+C.$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{\cos(3x+4)\cos(3x+5)}$.

Lời giải: $I=\frac{1}{\sin(-1)}\int\frac{\sin[(3x+4)-(3x+5)]}{\cos(3x+4)\cos(3x+5)}dx$

$=-\frac{1}{\sin 1}\int\frac{\sin(3x+4)\cos(3x+5)-\cos(3x+4)\sin(3x+5)}{\cos(3x+4)\cos(3x+5)}dx$

$=-\frac{1}{\sin 1}\int\left[\frac{\sin(3x+4)}{\cos(3x+4)}-\frac{\sin(3x+5)}{\cos(3x+5)}\right]dx$

$=-\frac{1}{3\sin 1}\left[\ln\left|\cos(3x+5)\right|-\ln\left|\cos(3x+4)\right|\right]+C$

$=-\frac{1}{3\sin 1}\ln\left|\frac{\cos(3x+5)}{\cos(3x+4)}\right|+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{dx}{\cos(5x+8)\cos(5x+4)}=\frac{1}{5\sin 4}\ln\left|\frac{\cos(5x+4)}{\cos(5x+8)}\right|+C$.

b. $I=\int\frac{dx}{\cos(6x+9)\cos(6x+7)}=\frac{1}{6\sin 2}\ln\left|\frac{\cos(6x+7)}{\cos(6x+9)}\right|+C$.

c. $I=\int\frac{dx}{\cos(2x+6)\cos(2x+3)}=\frac{1}{2\sin 3}\ln\left|\frac{\cos(2x+3)}{\cos(2x+6)}\right|+C$.

Dạng 33: $I=\int\frac{dx}{\sin(ax+b)\cos(ax+c)}$

Phương pháp: $I=\frac{1}{\cos(b-c)}\int\frac{\cos[(ax+b)-(ax+c)]}{\sin(ax+b)\cos(ax+c)}dx$

$$=\frac{1}{\cos(b-c)}\int\frac{\cos(ax+b)\cos(ax+c)+\sin(ax+b)\sin(ax+c)}{\sin(ax+b)\cos(ax+c)}dx$$

$$=\frac{1}{\cos(b-c)}\int\left[\frac{\cos(ax+b)}{\sin(ax+b)}-\frac{\sin(ax+c)}{\cos(ax+c)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{a\cos(b-c)}\left[\ln\left|\sin(ax+b)\right|-\ln\left|\cos(ax+c)\right|\right]+C.$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{\sin(2x+7)\cos(2x+6)}$.

Lời giải: $I=\frac{1}{\cos(1)}\int\frac{\cos\left[(2x+7)-(2x+6)\right]}{\sin(2x+7)\cos(2x+6)}dx$

$$=\frac{1}{\cos 1}\int\frac{\cos(2x+7)\cos(2x+6)+\sin(2x+7)\sin(2x+6)}{\sin(2x+7)\cos(2x+6)}dx$$

$$=\frac{1}{\cos 1}\int\left[\frac{\cos(2x+7)}{\sin(2x+7)}-\frac{\sin(2x+6)}{\cos(2x+6)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{2\cos 1}\left[\ln\left|\sin(2x+7)\right|-\ln\left|\cos(2x+6)\right|\right]+C=\frac{1}{2\cos 1}\ln\left|\frac{\sin(2x+7)}{\cos(2x+6)}\right|+C.$$

Bài tập minh họa

➢ **Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây**

a. $I=\int\frac{dx}{\sin(8x+6)\cos(8x+2)}=\frac{1}{8\cos 4}\ln\left|\frac{\sin(8x+6)}{\cos(8x+2)}\right|+C.$

b. $I=\int\frac{dx}{\sin(4x+2)\cos(4x+1)}=\frac{1}{4\cos 1}\ln\left|\frac{\sin(4x+2)}{\cos(4x+1)}\right|+C.$

c. $I=\int\frac{dx}{\sin(3x+4)\cos(3x+5)}=-\frac{1}{3\cos 1}\ln\left|\frac{\sin(3x+4)}{\cos(3x+5)}\right|+C.$

Dạng 34: $I=\int \sin^n x\cos x dx$

Phương pháp: $I=\int \sin^n x d(\sin x)=\frac{\sin^{n+1}x}{n+1}+C.$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int \sin^6 x\cos x dx.$

Lời giải: $I=\int \sin^6 x d(\sin x)=\frac{\sin^7 x}{7}+C.$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \sin^3 x\cos x dx=\frac{\sin^4 x}{4}+C.$

b. $I=\int \sin^5 x\cos x dx=\frac{\sin^6 x}{6}+C.$

c. $I=\int \sin^7 x\cos x dx=\frac{\sin^8 x}{8}+C.$

Dạng 35: $I=\int \cos^n x\sin x dx$

Phương pháp: $I=-\int \cos^n x d(\cos x)=-\frac{\cos^{n+1}x}{n+1}+C.$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int \cos^7 x\sin x dx.$

Lời giải: $I=-\int \cos^7 x d(\cos x)=-\frac{\cos^8 x}{8}+C.$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \cos^5 x\sin x dx=-\frac{\cos^6 x}{6}+C.$

b. $I=\int \cos^4 x\sin x dx=-\frac{\cos^5 x}{5}+C.$

c. $I=\int \cos^2 x\sin x dx=-\frac{\cos^3 x}{3}+C.$

Dạng 36: $I=\int \sin^n(ax+b)\cos(ax+b)dx$

Phương pháp:

$$I=\frac{1}{a}\int \sin^n(ax+b)d\left(\sin(ax+b)\right)=\frac{1}{a}.\frac{\sin^{n+1}(ax+b)}{n+1}+C.$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int \sin^2(5x+1)\cos(5x+1)dx$.

Lời giải: $I=\frac{1}{5}\int \sin^2(5x+5)d\left(\sin(5x+1)\right)=\frac{1}{5}.\frac{\sin^3(5x+1)}{3}+C.$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \sin^3(6x+4)\cos(6x+4)dx=\frac{1}{6}.\frac{\sin^4(6x+4)}{4}+C.$

b. $I=\int \sin^5(3x+7)\cos(3x+7)dx=\frac{1}{3}.\frac{\sin^6(3x+7)}{6}+C.$

c. $I=\int \sin^8(2x+1)\cos(2x+1)dx=\frac{1}{2}.\frac{\sin^9(2x+1)}{9}+C.$

Dạng 37: $I=\int \cos^n(ax+b)\sin(ax+b)dx$

Phương pháp:

$$I=-\frac{1}{a}\int \cos^n(ax+b)d\left(\cos(ax+b)\right)=-\frac{1}{a}.\frac{\cos^{n+1}(ax+b)}{n+1}.$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int \cos^2(8x+2)\sin(8x+2)dx$.

Lời giải:

$$I=-\frac{1}{8}\int \cos^2(8x+2)d\left(\cos(8x+2)\right)=-\frac{1}{8}.\frac{\cos^3(8x+2)}{3}+Ç$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \cos^6(7x+4)\sin(7x+4)dx=-\frac{1}{7}.\frac{\cos^7(7x+4)}{7}+C.$

b. $I=\int \cos^9(8x+2)\sin(8x+2)dx=-\frac{1}{8}.\frac{\cos^{10}(8x+2)}{10}+C.$

c. $I=\int \cos^9(14x+2)\sin(14x+2)dx=-\frac{1}{14}.\frac{\cos^{10}(14x+2)}{10}+C.$

Dạng 38: $I=\int \sin^{2n}x\cos^{2k}xdx$

Phương pháp:

$$I=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^n\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^k dx=\int\frac{1}{2^{n+k}}(1+\cos 2x)^k(1-\cos 2x)^n dx.$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx.$

Lời giải: $I=\frac{1}{8}\int(1+\cos 2x)^2(1-\cos 2x)dx.$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \sin^2 x\cos^2 xdx=\frac{1}{4}\int(1+\cos 2x)(1-\cos 2x)dx.$

b. $I=\int \sin^4 x\cos^2 xdx=\frac{1}{8}\int(1+\cos 2x)(1-\cos 2x)^2 dx.$

c. $I=\int \sin^6 x\cos^6 xdx=\frac{1}{64}\int(1+\cos 2x)^3(1-\cos 2x)^3 dx.$

Dạng 39: $I=\int \sin^{2n} x\cos^{2k+1} x dx$

Phương pháp:

$I=\int \sin^{2n} x\cos^{2k} x\cos x dx=\int \sin^{2n} x\left(1-\sin^2 x\right)^k \cos x dx$.

Đặt $u=\sin x\Rightarrow du=\cos x dx$.

$I=\int u^{2n}\left(1-u^2\right)^k du$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int \sin^6 x\cos^7 x dx$.

Lời giải: Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos x dx$

$I=\int t^6\left(1-t^2\right)^3 dt$.



Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \sin^4 x\cos^3 x dx=\int t^4\left(1-t^2\right)dt$ (với $t=\sin x$).

b. $I=\int \sin^6 x\cos^5 x dx=\int t^6\left(1-t^2\right)^2 dt$ (với $t=\sin x$).

c. $I=\int \sin^4 x\cos^7 x dx=\int t^4\left(1-t^2\right)^3 dt$ (với $t=\sin x$).

Dạng 40: $I=\int \sin^{2n+1} x\cos^{2k} x dx$

Phương pháp:

$I=\int \sin^{2n} x\cos^{2k} x\sin x dx=\int \left(1-\cos^2 x\right)^n \cos^{2k} x\sin x dx$

Đặt $u=\cos x\Rightarrow du=-\sin x dx$.

$I=-\int \left(1-u^2\right)^n u^{2k} du$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int \sin^5 x\cos^2 x dx$.

Lời giải: $I=\int \sin^4 x\cos^2 x\sin x dx=\int \left(1-\cos^2 x\right)^2 \cos^2 x\sin x dx$.

Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin x dx$

$I=-\int \left(1-t^2\right)^2 t^2 dt$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \sin^3 x\cos^2 x dx=-\int\left(1-t^2\right)t^2dt$ (với $t=\cos x$).

b. $I=\int \sin^7 x\cos^4 x dx=-\int\left(1-t^2\right)^3 t^4dt$ (với $t=\cos x$).

c. $I=\int \sin^9 x\cos^4 x dx=-\int\left(1-t^2\right)^4 t^4dt$ (với $t=\cos x$).

Dạng 41: $I=\int \sin^{2n+1} x\cos^{2k+1} x dx$

Phương pháp:

$I=\int \sin^{2n+1} x\cos^{2k} x\cos x dx=\int \sin^{2n+1} x\left(1-\sin^2 x\right)^k\cos x dx$.

Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos x dx$.

$I=\int t^{2n+1}\left(1-t^2\right)^k dt$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \sin^3 x\cos^2 x dx=\int t^3\left(1-t^2\right)dt$ (với $t=\sin x$).

b. $I=\int \sin^5 x\cos^4 x dx=\int t^5\left(1-t^2\right)^2 dt$ (với $t=\sin x$).

c. $I=\int \sin^9 x\cos^2 x dx=\int t^9\left(1-t^2\right)dt$ (với $t=\sin x$).

Dạng 42: $I=\int\dfrac{dx}{\sin^n x\cos^m x}$

Phương pháp:

$$I=\int\frac{dx}{\sin^{m+n}x\dfrac{\cos^m x}{\sin^m x}}=\int\frac{dx}{\sin^{m+n}x\cot^m x}=\int\frac{\left(1+\cot^2 x\right)^{\frac{m+n-2}{2}}}{\cot^m x}\cdot\frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$=\int\frac{\left(1+\cot^2 x\right)^{k-1}}{\cot^m x}d\left(\cot x\right)\ (\text{với } n+m=2k).$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^3 x}$.

Lời giải: $I=\int\frac{dx}{\sin^5 x\frac{\cos^3 x}{\sin^3 x}}=\int\frac{dx}{\sin^5 x\cot^3 x}$

$=\int\frac{\left(1+\cot^2 x\right)^{\frac{3}{2}}}{\cot^3 x}\cdot\frac{dx}{\sin^2 x}=\int\frac{\left(1+\cot^2 x\right)^{\frac{3}{2}}}{\cot^3 x}d\left(\cot x\right)$

$=\sqrt{1+\cot^2 x}\left(1-\frac{1}{2\cot^2 x}\right)-\frac{3}{2}\ln\left(\sqrt{1+\cot^2 x}+1\right)+\frac{3}{2}\ln x+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}=\int\frac{\left(1+\cot^2 x\right)^2}{\cot^2 x}d\left(\cot x\right)$.

b. $I=\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}=\int\frac{\left(1+\cot^2 x\right)^3}{\cot^5 x}d\left(\cot x\right)$.

c. $I=\int\frac{dx}{\sin^6 x\cos^4 x}=\int\frac{\left(1+\cot^2 x\right)^4}{\cot^4 x}d\left(\cot x\right)$.

Dạng 43: $I=\int\frac{dx}{\sin^{2k} x\cos^{2n} x}$

Phương pháp:

$I=\int\frac{dx}{\sin^{2k} x\cos^{2n-2} x\cos^2 x}=\int\left(1+\tan^2 x\right)^k\left(1+\tan^2 x\right)^{n-1}d\left(\tan x\right)$

$=\int\left(1+t^2\right)^k\left(1+t^2\right)^{n-1}dt=\int\left(1+t^2\right)^{k+n-1}dt$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}$.

Lời giải: $I=\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x\cos^2 x}=\int\left(1+\tan^2 x\right)\left(1+\tan^2 x\right)d\left(\tan x\right)$

$=\int\left(1+t^2\right)^2dt=1+\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}=\int\left(1+t^2\right)^3 dt$ (với $t=\tan x$).

b. $I=\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^6 x}=\int\left(1+t^2\right)^3 dt$ (với $t=\tan x$).

c. $I=\int\frac{dx}{\sin^8 x\cos^6 x}=\int\left(1+t^2\right)^6 dt$ (với $t=\tan x$).

Dạng 44: $I=\int\frac{dx}{\sin^{2k} x\cos^{2n+1} x}$

Phương pháp: $I=\int\frac{\cos x}{\sin^{2k} x\cos^{2n+2} x}dx=\int\frac{\cos x}{\sin^{2k} x\left(1-\sin^2 x\right)^{n+1}}dx$.

Đặt $u=\sin x\Rightarrow du=\cos x dx$.

$I=\int\frac{du}{u^{2k}\left(1-u^2\right)^{n+1}}$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^3 x}$.

Lời giải: $I=\int\frac{\cos x}{\sin^2 x\cos^4 x}dx=\int\frac{\cos x}{\sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)^2}dx$

Đặt $u=\sin x\Rightarrow du=\cos x dx$.

$I=\int\frac{du}{u^2\left(1-u^2\right)^2}$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^3 x}=\int\frac{du}{u^4\left(1-u^2\right)^2}$ (với $u=\sin x$).

b. $I=\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^5 x}=\int\frac{du}{u^2\left(1-u^2\right)^3}$ (với $u=\sin x$).

c. $I=\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^7 x}=\int\frac{du}{u^2\left(1-u^2\right)^4}$ (với $u=\sin x$).

Dạng 45: $I=\int \frac{dx}{\sin^{2k+1}x\cos^{2n}x}$

Phương pháp: $I=\int \frac{\sin x}{\sin^{2k+2}x\cos^{2n}x}dx=\int \frac{\sin x}{\cos^{2n}x\left(1-\cos^2 x\right)^{k+1}}dx$.

Đặt $u=\cos x \Rightarrow du=-\sin x dx$.

$I=-\int \frac{du}{u^{2n}\left(1-u^2\right)^{k+1}}$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^2 x}=-\int \frac{du}{u^2\left(1-u^2\right)^2}$ (với $u=\cos x$).

b. $I=\int \frac{dx}{\sin^5 x\cos^4 x}=-\int \frac{du}{u^4\left(1-u^2\right)^3}$ (với $u=\cos x$).

c. $I=\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^6 x}=-\int \frac{du}{u^6\left(1-u^2\right)^2}$ (với $u=\cos x$).

Dạng 46: $I=\int \frac{\tan^m x}{\cos^n x}dx$

Phương pháp:

Nếu n chẵn (n = 2k) thì biến đổi:

$I=\int \frac{\tan^m x}{\cos^{2k}x}dx=\int \tan^m x\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{k-1}\frac{dx}{\cos^2 x}$

$=\int \tan^m x\left(1+\tan^2 x\right)^{k-1}d\left(\tan x\right)=\int u^m\left(1+u^2\right)^{k-1}du$.

Nếu m chẵn, n lẻ (m = 2k, n = 2h + 1) thì sử dụng biến đổi:

$I=\int \frac{\tan^{2k}x}{\cos^{2h+1}x}dx=\int \frac{\sin^{2k}x\cos x}{\cos^{2(k+h+1)}x}dx=\int \frac{\sin^{2k}x}{\left(1-\sin^2 x\right)^{k+h+1}}d(\sin x)$

(với $u=\sin x$).

$$J=\int\frac{u^{2k}}{(1-u^2)^{k+h+1}}du=\int\frac{u^{2k-2}\left[1-(1-u^2)\right]}{(1-u^2)^{k+h+1}}du$$

$$=\int\frac{u^{2k-2}}{(1-u^2)^{k+h+1}}du-\int\frac{u^{2k-2}}{(1-u^2)^{k+h}}du.$$

Nếu m lẻ, n lẻ ($m=2k+1, n=2h+1$) thì biến đổi:

$$I=\int\frac{\tan^{2k+1}x}{\cos^{2h+1}x}dx=\int\tan^{2k}x\left(\frac{1\cdot}{\cos x}\right)^{2k}\frac{\tan x}{\cos x}dx$$

$$=\int\tan^{2k}x\left(\frac{1}{\cos x}\right)^{2k}\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)^k\left(\frac{1}{\cos x}\right)^{2h}d\left(\frac{1}{\cos x}\right)=\int(u^2-1)^k u^{2h}du\ (\text{với } u=\frac{1}{\cos x}).$$

Nếu m chẵn, n lẻ ($m=2k$, $n=2h+1$) thì sử dụng biến đổi:

$$J=\int\frac{\tan^{2k}x}{\cos^{2h+1}x}dx=\int\frac{\sin^{2k}x\cos x}{\cos^{2(k+h+1)}x}dx=\int\frac{\sin^{2k}x}{(1-\sin^2 x)^{k+h+1}}d(\sin x)$$

với $u=\sin x\Rightarrow du=d(\sin x)$.

$$J=\int\frac{u^{2k}}{(1-u^2)^{k+h+1}}du=\int\frac{u^{2k-2}\left[1-(1-u^2)\right]}{(1-u^2)^{k+h+1}}du$$

$$=\int\frac{u^{2k-2}}{(1-u^2)^{k+h+1}}du-\int\frac{u^{2k-2}}{(1-u^2)^{k+h}}du.$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}dx$.

Lời giải: $I=\int\tan^2 x d(\tan x)=\frac{\tan x^3}{3}+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{\tan^3 x}{\cos^6 x}dx=\int u^3\left(1+u^2\right)^2du$ (với $u=\tan x$).

b. $I=\int\frac{\tan^5 x}{\cos^5 x}dx=\int u^4\left(-1+u^2\right)^2du$ (với $u=\tan x$).

c. $I=\int\frac{\tan 4x}{\cos^8 x}dx=\int u^4\left(1+u^2\right)^3du$ (với $u=\tan x$).

Dạng 48: $I=\int\frac{\tan^{2k}}{\cos 2x}dx$

Phương pháp: $I=\int\frac{\tan^{2k}x}{\cos^2x-\sin^2x}dx=\int\frac{\tan^{2k}x}{1-\frac{\sin^2x}{\cos^2x}}.\frac{1}{\cos^2x}dx$

$I=\int\frac{\tan^4x}{\cos^2x-\sin^2x}dx=\int\frac{\tan^4x}{1-\frac{\sin^2x}{\cos^2x}}.\frac{1}{\cos^2x}dx$

$=\int\frac{\tan^4x}{1-\tan^2x}d(\tan x)=\int\frac{t^4-1+1}{1-t^2}dt$

$=\int\left[\frac{-(t^2-1)\left(t^{2(k-1)}+t^{2(k-2)}+....+t^2+1\right)}{t^2-1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)\right]dt$

$=-\left(\frac{t^{2(k-1)+1}}{2k-1}+\frac{t^{2(k-2)+1}}{2k-3}+....+\frac{t^3}{3}+t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\right).$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{\tan^4x}{\cos 2x}dx$.

Lời giải: $I=\int\frac{\tan^4x}{\cos^2x-\sin^2x}dx=\int\frac{\tan^4x}{1-\frac{\sin^2x}{\cos^2x}}.\frac{1}{\cos^2x}dx$

$=\int\frac{\tan^4x}{1-\tan^2x}d(\tan x)=\int\frac{t^4-1+1}{1-t^2}dt$

$=\int\left[\frac{-(t^2-1)(t^2+1)}{t^2-1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)\right]dt=\frac{t^3}{3}+t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C.$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{\tan^6}{\cos 2x}dx=-\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}-t-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C.$

b. $I=\int\frac{\tan^{10}}{\cos 2x}dx=\frac{t^9}{9}-\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}-t-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C.$

c. $I=\int\frac{\tan^8}{\cos 2x}dx=\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}-t-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C.$

Dạng 49: $I=\int\frac{\cot^{2k}}{\cos 2x}dx$

Phương pháp: $I=\int\frac{\cot^{2k}x}{\cos^2x-\sin^2x}dx=\int\frac{\cot^{2k}x}{\frac{\cos^2x}{\sin^2x}-1}.\frac{dx}{\sin^2x}$

$=-\int\frac{\cot^{2k}x}{\cot^2x-1}d(\cot x)=\int\frac{t^{2k}-1+1}{1-t^2}dt$

$=\int\left[\frac{-(t^2-1)\left(t^{2(k-1)}+t^{2(k-2)}+....+t^2+1\right)}{t^2-1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)\right]dt$

$=-\left(\frac{t^{2(k-1)+1}}{2k-1}+\frac{t^{2(k-2)+1}}{2k-3}+....+\frac{t^3}{3}+t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\right).$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{\cot^4x}{\cos 2x}dx$.

Lời giải: $I=\int\frac{\cot^4x}{\cos^2x-\sin^2x}dx=\int\frac{\cot^4x}{\frac{\cos^2x}{\sin^2x}-1}.\frac{dx}{\sin^2x}$

$=\int\frac{\cot^4x}{\cot^2x-1}d(\cot x)=\int\frac{t^4-1+1}{1-t^2}dt$

$=\int\left[\frac{-(t^2-1)(t^2+1)}{t^2-1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)\right]dt=\frac{t^3}{3}+t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C.$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{\cot^6}{\cos 2x}dx=\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}-t-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C$ (với $t=\cot x$).

b. $I=\int\frac{\tan^8}{\cos 2x}dx=\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}-t-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C$ (với $t=\cot x$).

c. $I=\int\frac{\tan^{10}}{\cos 2x}dx=\frac{t^9}{9}-\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}-t-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C$ (với $t=\cot x$).

Dạng 50: $I=\int \frac{\tan^m x}{\cos^{2k} x}dx$

Phương pháp: Đặt $t=\tan x \Rightarrow dt=\frac{dx}{\cos^2 x}$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int \frac{\tan^5 x}{\cos^2 x}dx$.

Lời giải: Đặt $t=\tan x \Rightarrow dt=\frac{dx}{\cos^2 x}; I=\int t^5 dt=\frac{t^6}{6}+C=\frac{\tan^6 x}{6}+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \frac{\tan^3 x}{\cos^4 x}dx=\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}+C=\frac{\tan^5 x}{5}+\frac{\tan^3 x}{3}+C$.

b. $I=\int \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}dx=\frac{t^3}{3}+C=\frac{\tan^3 x}{3}+C$.

c. $I=\int \frac{\tan^6 x}{\cos^4 x}dx=\frac{t^9}{9}+\frac{t^7}{7}+C=\frac{\tan^9 x}{9}+\frac{\tan^7 x}{7}+C$.

Dạng 51: $I=\int \frac{\cos x}{\sin^n x}dx$

Phương pháp: $I=\int \frac{d(\sin x)}{\sin^n x}=\frac{\sin^{1-n} x}{1-n}+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$.

Lời giải: $I=\int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin x}+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}dx=-\frac{1}{3\sin^3 x}+C$.

b. $I=\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx=-\frac{1}{2\sin^2 x}+C$.

c. $I=\int \frac{\cos x}{\sin^7 x}dx=-\frac{1}{6\sin^6 x}+C$.

Dạng 52: $I=\int\frac{\sin^n x\cos x}{a+b\sin x}dx$

Phương pháp: Đặt $u=a+b\sin x\Rightarrow\sin x=\frac{u-a}{b}\Rightarrow\cos x dx=\frac{du}{b}$.

$$I=\int\frac{\left(\frac{u-a}{b}\right)^n}{bu}du=\frac{1}{b^{n+1}}\int\frac{(u-a)^n}{u}du.$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{\sin^2 x\cos x}{1+2\sin x}dx$.

Lời giải: Đặt $u=1+2\sin x\Rightarrow\sin x=\frac{u-1}{2}\Rightarrow\cos x dx=\frac{du}{2}$.

$$I=\int\frac{\left(\frac{u-1}{2}\right)^2}{2u}du=\frac{1}{2^3}\int\frac{(u-1)^2}{u}du=\frac{1}{8}\int\left(u-2-\frac{1}{u}\right)du$$

$$=\frac{u^2}{16}-\frac{u}{4}-\frac{\ln|u|}{8}+C=\frac{(1+2\sin x)^2}{16}-\frac{1+2\sin x}{4}-\frac{\ln|1+2\sin x|}{8}+C.$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{\sin^3 x\cos x}{5+6\sin x}dx=\frac{1}{6^4}\int\frac{(u-5)^3}{u}du$ (với $u=5+6\sin x$).

b. $I=\int\frac{\sin^3 x\cos x}{4+5\sin x}dx=\frac{1}{5^4}\int\frac{(u-4)^3}{u}du$ (với $u=4+5\sin x$).

c. $I=\int\frac{\sin^3 x\cos x}{4+6\sin x}dx=\frac{1}{6^4}\int\frac{(u-4)^3}{u}du$ (với $u=4+6\sin x$).

Dạng 53: $I=\int\frac{\cos^n x\sin x}{a+b\cos x}dx$

Phương pháp: Đặt $u=a+b\cos x\Rightarrow\cos x=\frac{u-a}{b}\Rightarrow\sin x dx=-\frac{du}{b}$.

$$I=-\int\frac{\left(\frac{u-a}{b}\right)^n}{bu}du=-\frac{1}{b^{n+1}}\int\frac{(u-a)^n}{u}du.$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{\cos^2 x\sin x}{3+2\cos x}dx$.

Lời giải: Đặt $u=3+2\cos x\Rightarrow\cos x=\frac{u-3}{2}\Rightarrow\sin x dx=-\frac{du}{2}$

$$I=-\int\frac{\left(\frac{u-3}{2}\right)^2}{2u}du=-\frac{1}{8}\int\frac{(u-3)^2}{u}du=-\frac{u^2-12u}{16}-18\ln|u|+C$$

$$=\frac{12\cos x-2\cos 2x+25}{16}-18\ln|3+2\cos x|+C.$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{\cos^3 x\sin x}{4+5\cos x}dx=-\frac{1}{5^4}\int\frac{(u-4)^3}{u}du$ (với $u=4+5\cos x$).

b. $I=\int\frac{\cos^4 x\sin x}{11+2\cos x}dx=-\frac{1}{2^5}\int\frac{(u-11)^4}{u}du$ (với $u=11+2\cos x$).

c. $I=\int\frac{\cos^3 x\sin x}{2+4\cos x}dx=-\frac{1}{4^4}\int\frac{(u-2)^3}{u}du$ (với $u=2+4\cos x$).

Dạng 54: $I=\int\frac{a\sin 2x+b\cos x}{\sqrt{c+d\sin x}}dx$

Phương pháp: $I=\int\frac{2a\sin x\cos x+b\cos x}{\sqrt{c+d\sin x}}dx=\int\frac{\cos x(2a\sin x+b)}{\sqrt{c+d\sin x}}dx$.

Đặt $u=\sqrt{c+d\sin x}\Rightarrow u^2=c+d\sin x\Rightarrow\sin x=\frac{u^2-c}{d}\Rightarrow\cos x dx=\frac{2u}{d}du$.

$$I=\int\frac{\left[2a\left(\frac{u^2-c}{d}\right)+b\right].\frac{2u}{d}}{u}du=\frac{1}{d^2}\int(2au^2+bd-2ac)du$$

$$=\frac{1}{d^2}\left[2a\frac{u^3}{3}+(bd-2ac)u\right]+C.$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{2\sin 2x+3\cos x}{\sqrt{4+5\sin x}}dx$.

Lời giải:

Đặt $u=\sqrt{4+5\sin x}$

$\Rightarrow u^2=4+5\sin x\Rightarrow \sin x=\frac{u^2-4}{5}\Rightarrow \cos x dx=\frac{2u}{5}du.$

$$I=\int\frac{\left[4.\left(\frac{u^2-4}{5}\right)+3\right].\frac{2u}{5}}{u}du=\frac{1}{25}\int\left(4u^2+15-16\right)du=\frac{4}{75}u^3-\frac{u}{25}+C$$

$$=\frac{8}{15}\sin x\sqrt{4+5\sin x}+\frac{26}{75}\sqrt{4+5\sin x}+C.$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{4\sin 2x+2\cos x}{\sqrt{3+4\sin x}}dx=\frac{4}{3}\sin x\sqrt{3+4\sin x}-\sqrt{3+4\sin x}+C.$

b. $I=\int\frac{5\sin 2x+4\cos x}{\sqrt{2+3\sin x}}dx=\frac{20}{9}\sin x\sqrt{2+3\sin x}-\frac{8}{27}\sqrt{2+3\sin x}+C.$

c. $I=\int\frac{3\sin 2x+6\cos x}{\sqrt{1+5\sin x}}dx=\frac{4}{5}\sin x\sqrt{1+5\sin x}-\frac{52}{25}\sqrt{1+5\sin x}+C.$

Dạng 55: $I=\int\frac{a\sin 2x+b\sin x}{\sqrt{c+d\cos x}}dx$

Phương pháp:

$$I=\int\frac{2a\sin x\cos x+b\sin x}{\sqrt{c+d\cos x}}dx=\int\frac{(2a\cos x+b)\sin x}{\sqrt{c+d\cos x}}dx.$$

Đặt

$u=\sqrt{c+d\cos x}\Rightarrow u^2=c+d\cos x\Rightarrow \cos x=\frac{u^2-c}{d}\Rightarrow \sin x dx=-\frac{2u}{d}du.$

$$I=-\int\frac{2a\left(\frac{u^2-c}{d}\right)+b}{u}.\frac{2u}{d}du=-\frac{1}{d^2}\int\left(2au^2+bd-2ac\right)du$$

$$=-\frac{1}{d^2}\left[\frac{2a}{3}u^3+(bd-2ac)u\right]+C.$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{3\sin 2x+4\sin x}{\sqrt{5+6\cos x}}dx$.

Lời giải: $I=\int\frac{6\sin x\cos x+4\sin x}{\sqrt{5+6\cos x}}dx=\int\frac{(6\cos x+4)\sin x}{\sqrt{5+6\cos x}}dx$.

Đặt $u=\sqrt{5+6\cos x}\Rightarrow u^2=5+6\cos x\Rightarrow\cos x=\frac{u^2-5}{6}\Rightarrow\sin x dx=-\frac{u}{3}du$.

$$I=-\int\frac{6\left(\frac{u^2-5}{6}\right)+4}{u}.\frac{u}{3}du=-\frac{1}{3}\int\left(u^2-1\right)du=-\frac{1}{3}\left(\frac{u^3}{3}-u\right)+C$$

$$=-\frac{2}{3}\cos x\sqrt{5+6\cos x}-\frac{2}{9}\sqrt{5+6\cos x}+C.$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{3\sin 2x+7\sin x}{\sqrt{6+5\cos x}}dx=-\frac{4}{5}\cos x\sqrt{6+5\cos x}-\frac{22}{25}\sqrt{6+5\cos x}+C$.

b. $I=\int\frac{5\sin 2x+2\sin x}{\sqrt{6+4\cos x}}dx=-\frac{5\sqrt{2}}{3}\cos x\sqrt{3+2\cos x}+4\sqrt{3+2\cos x}+C$.

c. $I=\int\frac{7\sin 2x+2\sin x}{\sqrt{3+2\cos x}}dx=-\frac{14}{3}\cos x\sqrt{3+2\cos x}+12\sqrt{3+2\cos x}+C$.

Dạng 56: $I=\int\left[m\sin(ax+b)+n\right]^k\cos(ax+b)dx$

Phương pháp: Đặt $t=m\sin(ax+b)+n\Rightarrow dt=\frac{m}{a}\cos(ax+b)dx$

$\Rightarrow\frac{a}{m}dt=\cos(ax+b)dx$.

$I=\frac{a}{m}\int t^k dt=\frac{a}{m}.\frac{t^{k+1}}{k+1}$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\left[2\sin(2x+1)+1\right]^2\cos(2x+1)dx$.

Lời giải: Đặt $t=2\sin(2x+1)+1\Rightarrow dt=\cos(2x+1)dx$

$\Rightarrow dt=\cos(2x+1)dx$.

$I=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}+C=\frac{[2\sin(2x+1)+1]^3}{3}+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int[4\sin(2x+3)+2]^3\cos(2x+3)dx=\frac{1}{2}\int t^3dt=\frac{t^4}{8}+C$

$=\frac{[4\sin(2x+3)+2]^4}{8}+C$.

b. $I=\int[5\sin(2x+6)+7]^4\cos(2x+6)dx=\frac{2}{5}\int t^4dt=\frac{2t^5}{25}+C$

$=\frac{2[5\sin(2x+6)+7]^5}{25}+C$.

c. $I=\int[5\sin(3x+1)+6]^2\cos(3x+1)dx=\frac{3}{5}\int t^2dt=\frac{t^3}{5}+C$

$=\frac{[5\sin(3x+1)+6]^3}{5}+C$.

Dạng 57: $I=\int[m\cos(ax+b)+n]^k\sin(ax+b)dx$

Phương pháp: Đặt $t=m\cos(ax+b)+n\Rightarrow dt=-\frac{m}{a}\sin(ax+b)dx$

$\Rightarrow -\frac{a}{m}dt=\sin(ax+b)dx$.

$I=-\frac{a}{m}\int t^kdt=-\frac{a}{m}.\frac{t^{k+1}}{k+1}+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int[2\cos(3x+4)+5]^2\sin(3x+4)dx$.

Lời giải: Đặt $t=2\cos(3x+4)+5\Rightarrow dt=-\frac{2}{3}\sin(3x+4)dx$

$\Rightarrow -\frac{3}{2}dt=\sin(3x+4)dx$.

$I=-\frac{3}{2}\int t^2dt=-\frac{3}{2}.\frac{t^3}{3}+C=-\frac{t^3}{2}+C=-\frac{[2\cos(3x+4)+5]^3}{2}+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\left[5\cos(2x+6)+4\right]^4\sin(2x+6)dx=-\dfrac{2\left[5\cos(2x+6)+4\right]^5}{25}+C.$

b. $I=\int\left[3\cos(7x+6)+8\right]^3\sin(7x+6)dx=-\dfrac{7\left[3\cos(7x+6)+8\right]^4}{12}+C.$

c. $I=\int\left[7\cos(5x+2)+3\right]^5\sin(5x+2)dx=-\dfrac{5\left[7\cos(5x+2)+3\right]^6}{42}+C.$

Dạng 58: $I=\int\dfrac{\sin x-\cos x}{a\sin 2x+b(\sin x+\cos x)+c}dx$

Phương pháp: $I=\int\dfrac{\sin x-\cos x}{a(\sin 2x+1)+b(\sin x+\cos x)+c-a}dx$

$=-\int\dfrac{d(\sin x+\cos x)}{a(\sin x+\cos x)^2+b(\sin x+\cos x)+c-a}=-\int\dfrac{dt}{at^2+bt+c-a}.$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\dfrac{\sin x-\cos x}{2\sin 2x+3(\sin x+\sin x)+4}dx.$

Lời giải: $I=\int\dfrac{\sin x-\cos x}{2(\sin 2x+1)+3(\sin x+\sin x)+2}dx$

$=-\int\dfrac{d(\sin x+\cos x)}{2(\sin x+\cos x)^2+3(\sin x+\sin x)+2}=-\int\dfrac{dt}{2t^2+3t+2}$

(Dạng 6_Tích phân hữu tỷ).

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\dfrac{\sin x-\cos x}{4\sin 2x+6(\sin x+\cos x)+5}dx=-\int\dfrac{dt}{4t^2+6t+1}$

(với $t=\sin x+\cos x$).

b. $I=\int\frac{\sin x-\cos x}{5\sin 2x+10(\sin x+\cos x)+6}dx=-\int\frac{dt}{5t^2+10t+1}$

(với $t=\sin x+\cos x$).

c. $I=\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin 2x+2(\sin x+\cos x)+2}dx=-\int\frac{dt}{t^2+2t+1}$

(với $t=\sin x+\cos x$).

Dạng 59: $I=\int\frac{\sin x+\cos x}{a\sin 2x+b(\sin x-\cos x)+c}dx$

Phương pháp: Đặt $u=\sin x-\cos x\Rightarrow du=(\sin x+\cos x)dx$;

$u^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=1+\sin 2x\Rightarrow u^2-1=\sin 2x$.

$I=\int\frac{du}{a(u^2-1)+bu+c}=\int\frac{du}{au^2+bu+c-a}$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{\sin x+\cos x}{2\sin 2x+4(\sin x-\cos x)+4}dx$.

Lời giải: Đặt $u=\sin x-\cos x\Rightarrow du=(\sin x+\cos x)dx$.

Ta có $u^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=1+\sin 2x\Rightarrow u^2-1=\sin 2x$.

$I=\int\frac{du}{2(u^2-1)+4u+4}=\int\frac{du}{2u^2+4u+2}$ (Dạng 6_Tích phân hữu tỷ).

Bài tập minh họa

➢ **Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây**

d. $I=\int\frac{\sin x+\cos x}{\sin 2x+5(\sin x-\cos x)+7}dx=\int\frac{du}{u^2+5u+6}$

(với $t=\sin x-\cos x$).

e. $I=\int\frac{\sin x+\cos x}{2\sin 2x+7(\sin x-\cos x)+5}dx=\int\frac{du}{2u^2+7u+3}$

(với $t=\sin x-\cos x$).

f. $I=\int\frac{\sin x+\cos x}{3\sin 2x+7(\sin x-\cos x)-3}dx=\int\frac{du}{3u^2+7u-6}$

(với $t=\sin x-\cos x$).

Dạng 60: $I=\int\frac{\cos x+\sin x}{(\sin x-\cos x+a)^n}dx$

Phương pháp: $I=\int\frac{d(\sin x-\cos x+a)}{(\sin x-\cos x+a)^n}=\int\frac{dt}{t^n}=-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+C$.

với $t=\sin x-\cos x+a$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{\cos x+\sin x}{(\sin x-\cos x+2)^2}dx$.

Lời giải:

$I=\int\frac{d(\sin x-\cos x+2)}{(\sin x-\cos x+2)^2}dx=\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{\sin x-\cos x+2}+C$.

Bài tập minh họa

➢ **Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây**

a. $I=\int\frac{\cos x+\sin x}{(\sin x-\cos x+3)^3}dx=-\frac{1}{2(\sin x-\cos x+3)^2}+C$.

b. $I=\int\frac{\cos x+\sin x}{(\sin x-\cos x+7)^4}dx=-\frac{1}{3(\sin x-\cos x+7)^3}+C$.

c. $I=\int\frac{\cos x+\sin x}{(\sin x-\cos x+11)^5}dx=-\frac{1}{4(\sin x-\cos x+11)^4}+C$.

Dạng 61: $I=\int\frac{\cos x-\sin x}{(\sin x+\cos x+a)^n}dx$

Phương pháp: $I=\int\frac{d(\sin x+\cos x)}{(\sin x+\cos x+a)^n}dx=\int\frac{dt}{t^n}=\int t^{-n}dt=\frac{t^{1-n}}{1-n}+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{\cos x-\sin x}{(\sin x+\cos x+2015)^2}dx$.

Lời giải: $I=\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{\sin x+\cos x+2015}+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{\cos x-\sin x}{(\sin x+\cos x+1)^7}dx=-\frac{1}{30(\sin x+\cos x+1)^5}+C.$

b. $I=\int\frac{\cos x-\sin x}{(\sin x+\cos x+20)^5}dx=-\frac{1}{12(\sin x+\cos x+20)^3}+C.$

Dạng 62: $I=\int\frac{\sin x}{\sqrt{a\cos 2x+b}}dx$

Phương pháp: $I=\int\frac{\sin x}{\sqrt{a(2\cos^2 x-1)+b}}dx=\int\frac{\sin x}{\sqrt{2a\cos^2 x+b-a}}dx.$

Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin x dx.$

$$I=-\frac{1}{\sqrt{2a}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{a-b}{2a}}}=-\frac{1}{\sqrt{2a}}\ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{a-b}{2a}}\right|+C.$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{\sin x}{\sqrt{2\cos 2x+4}}dx.$

Lời giải: $I=\int\frac{\sin x}{\sqrt{2(2\cos^2 x-1)+4}}dx=\int\frac{\sin x}{\sqrt{4\cos^2 x+2}}dx.$

Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin x dx.$

$$I=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{1}{2}}\right|+C.$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{\sin x}{\sqrt{3\cos 2x+2}}dx=-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{1}{6}}\right|+C$

$=-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\cos x+\sqrt{\cos^2 x-\frac{1}{6}}\right|+C.$



b. $I=\int\frac{\sin x}{\sqrt{4\cos 2x+5}}dx=-\frac{1}{\sqrt{8}}\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{1}{8}}\right|+C$

$=-\frac{1}{\sqrt{8}}\ln\left|\cos x+\sqrt{\cos^2 x+\frac{1}{8}}\right|+C.$

c. $I=\int\frac{\sin x}{\sqrt{5\cos 2x+2}}dx=-\frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{3}{10}}\right|+C$

$=-\frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\cos x+\sqrt{\cos^2 x-\frac{3}{10}}\right|+C.$

Dạng 63: $I=\int\frac{\cos x}{\sqrt{a\cos 2x+b}}dx$

Phương pháp: $I=\int\frac{\cos x}{\sqrt{a\left(1-2\sin^2 x\right)+b}}dx=\int\frac{\cos x}{\sqrt{a+b-2a\sin^2 x}}dx.$

Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos x dx.$

$I=\int\frac{dt}{\sqrt{a+b-2at^2}}=\frac{1}{\sqrt{2a}}\int\frac{dt}{\sqrt{\frac{a+b}{2a}-t^2}}.$

Đặt $t=\sqrt{\frac{a+b}{2a}}\cos u\Rightarrow dt=-\sqrt{\frac{a+b}{2a}}\sin u du.$

$I=-\frac{1}{\sqrt{2a}}\int\frac{\sqrt{\frac{a+b}{2a}}\sin u}{\sqrt{\frac{a+b}{2a}\left(1-\cos^2 u\right)}}du=-\frac{u}{\sqrt{2a}}+C.$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{\cos x}{\sqrt{5\cos 2x+6}}dx.$

Lời giải: $I=\int\frac{\cos x}{\sqrt{5(1-2\sin^2 x)+6}}dx=\int\frac{\cos x}{\sqrt{11-2a\sin^2 x}}dx.$

Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos x dx$

$I=\int\frac{dt}{\sqrt{11-2at^2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}\int\frac{dt}{\sqrt{\frac{11}{10}-t^2}}.$

Đặt $t=\sqrt{\frac{11}{10}}\cos u \Rightarrow dt=-\sqrt{\frac{11}{10}}\sin u du$

$$I=-\frac{1}{\sqrt{10}}\int\frac{\sqrt{\frac{11}{10}}\sin u}{\sqrt{\frac{11}{10}\left(1-\cos^2 u\right)}}du=-\frac{u}{\sqrt{10}}+C.$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{\cos x}{\sqrt{2\cos 2x+6}}dx=-\frac{u}{4}+C.$

b. $I=\int\frac{\cos x}{\sqrt{3\cos 2x+4}}dx=-\frac{u}{\sqrt{6}}+C.$

c. $I=\int\frac{\cos x}{\sqrt{4\cos 2x+5}}dx=-\frac{u}{\sqrt{8}}+C.$

Dạng 64: $I=\int\sin x\sqrt{a\cos 2x+b}dx$

Phương pháp:

$$I=\int\sin x\sqrt{a\left(2\cos^2 x-1\right)+b}dx=-\sqrt{2a}\int\sqrt{\cos^2 x-\frac{a-b}{2a}}d(\cos x).$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\sin x\sqrt{2\cos 2x+4}dx$.

Lời giải:

$$I=\int\sin x\sqrt{2\left(2\cos^2 x-1\right)+4}dx=-\sqrt{4}\int\sqrt{\cos^2 x+\frac{1}{2}}d(\cos x).$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\sin x\sqrt{3\left(2\cos^2 x-1\right)+7}dx=-\sqrt{6}\int\sqrt{\cos^2 x+\frac{2}{3}}d(\cos x).$

b. $I=\int\sin x\sqrt{6\left(2\cos^2 x-1\right)+7}dx=-\sqrt{12}\int\sqrt{\cos^2 x+\frac{1}{12}}d(\cos x).$

c. $I=\int\sin x\sqrt{4\left(2\cos^2 x-1\right)+3}dx=-\sqrt{8}\int\sqrt{\cos^2 x-\frac{1}{8}}d(\cos x).$

Dạng 65: $I=\int \cos x\sqrt{a\cos 2x+b}dx$

Phương pháp:

$I=\int \cos x\sqrt{a\left(1-2\sin^2 x\right)+b}dx=\int \cos x\sqrt{a+b-2a\sin^2 x}dx$

$=\sqrt{2a}\int \sqrt{\frac{a+b}{2a}-\sin^2 x}d\left(\sin x\right).$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int \cos x\sqrt{2\cos 2x+7}dx.$

Lời giải: $I=\int \cos x\sqrt{2\left(1-2\sin^2 x\right)+7}dx=\int \cos x\sqrt{9-4\sin^2 x}dx$

$=\sqrt{4}\int \sqrt{\frac{9}{4}-\sin^2 x}d\left(\sin x\right).$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \cos x\sqrt{5\cos 2x+3}dx=\sqrt{10}\int \sqrt{\frac{4}{5}-\sin^2 x}d\left(\sin x\right).$

b. $I=\int \cos x\sqrt{8\cos 2x+2}dx=\sqrt{16}\int \sqrt{\frac{5}{8}-\sin^2 x}d\left(\sin x\right).$

c. $I=\int \cos x\sqrt{\cos 2x+2}dx=\sqrt{2}\int \sqrt{\frac{3}{2}-\sin^2 x}d\left(\sin x\right).$

Dạng 66: $I=\int \sin x\sqrt{a\sin^2 x+b}dx$

Phương pháp:

$I=\int \sin x\sqrt{a\left(1-\cos^2 x\right)+b}dx=\int \sin x\sqrt{a+b-a\cos^2 x}dx.$

Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx.$

$I=-\int \sqrt{a+b-at^2}dt=-\sqrt{a}\int \sqrt{\frac{a+b}{a}-t^2}dt.$

Đặt $t=\sqrt{\frac{a+b}{a}}\sin u\Rightarrow dt=\sqrt{\frac{a+b}{a}}\cos u du$.

$I=-\sqrt{a}\int\sqrt{\frac{a+b}{a}}\cos u\sqrt{\frac{a+b}{a}\left(1-\sin^2 u\right)}du=-\frac{a+b}{\sqrt{a}}\int\cos^2 u du$

$=-\frac{a+b}{2\sqrt{a}}\int\left(1+\cos 2u\right)du=-\frac{a+b}{2\sqrt{a}}u-\frac{a+b}{4\sqrt{a}}\sin 2u+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\sin x\sqrt{2\sin^2 x+2}dx$.

Lời giải: $I=\int\sin x\sqrt{2\left(1-\cos^2 x\right)+b}dx=\int\sin x\sqrt{4-2\cos^2 x}dx$.

Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx$.

$I=-\int\sqrt{4-at^2}dt=-\sqrt{4}\int\sqrt{2-t^2}dt$.

Đặt $t=2\sin u\Rightarrow dt=2\cos u du$.

$I=-2\int 2\cos u\sqrt{2\left(1-\sin^2 u\right)}du=-\frac{4}{\sqrt{2}}\int\cos^2 u du$

$=-\frac{2}{\sqrt{2}}\int\left(1+\cos 2u\right)du=-\frac{2}{\sqrt{2}}u-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2u+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\sin x\sqrt{5\sin^2 x+2}dx=-\frac{7}{\sqrt{5}}\int\cos^2 u du$

$=-\frac{7}{2\sqrt{5}}\int\left(1+\cos 2u\right)du=-\frac{7}{2\sqrt{5}}u-\frac{7}{4\sqrt{5}}\sin 2u+C$.

b. $I=\int\sin x\sqrt{6\sin^2 x+8}dx=-\frac{14}{\sqrt{6}}\int\cos^2 u du$

$=-\frac{7}{\sqrt{6}}\int\left(1+\cos 2u\right)du=-\frac{7}{\sqrt{6}}u-\frac{7}{2\sqrt{6}}\sin 2u+C$.

c. $I=\int\sin x\sqrt{3\sin^2 x+8}dx=-\frac{11}{\sqrt{3}}\int\cos^2 u du$

$=-\frac{11}{2\sqrt{3}}\int\left(1+\cos 2u\right)du=-\frac{11}{2\sqrt{3}}u-\frac{11}{4\sqrt{3}}\sin 2u+C$.

Dạng 67: $I=\int \cos x\sqrt{a\sin^2 x+b}dx$

Phương pháp:

$I=\int \cos x\sqrt{a\left(1-\sin^2 x\right)+b}dx=\int \cos x\sqrt{a+b-a\sin^2 x}dx$.

Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos xdx$.

$I=\int \sqrt{a+b-at^2}dt=\sqrt{a}\int \sqrt{\frac{a+b}{a}-t^2}dt$.

Đặt $t=\sqrt{\frac{a+b}{a}}\sin u\Rightarrow dt=\sqrt{\frac{a+b}{a}}\cos udu$.

$I=\sqrt{a}\int \sqrt{\frac{a+b}{a}}\cos u\sqrt{\frac{a+b}{a}\left(1-\sin^2 u\right)}du=\frac{a+b}{\sqrt{a}}\int \cos^2 udu$

$=\frac{a+b}{2\sqrt{a}}\int \left(1+\cos 2u\right)du=\frac{a+b}{2\sqrt{a}}u+\frac{a+b}{2\sqrt{a}}\sin 2u+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int \cos x\sqrt{2\sin^2 x+3}dx$.

Lời giải: $I=\int \cos x\sqrt{2\left(1-\sin^2 x\right)+3}dx=\int \cos x\sqrt{5-2\sin^2 x}dx$.

Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos xdx$.

$I=\sqrt{2}\int \sqrt{\frac{5}{2}}\cos u\sqrt{\frac{5}{2}\left(1-\sin^2 u\right)}du=\frac{5}{\sqrt{2}}\int \cos^2 udu$.

Đặt $t=\sqrt{\frac{5}{2}}\sin u\Rightarrow dt=\sqrt{\frac{5}{2}}\cos udu$.

$I=\sqrt{2}\int \sqrt{\frac{5}{2}}\cos u.\sqrt{\frac{5}{2}\left(1-\sin^2 u\right)}du=\frac{5}{\sqrt{2}}\int \cos^2 udu$

$=\frac{5}{2\sqrt{2}}\int \left(1+\cos 2u\right)du=\frac{5}{2\sqrt{2}}u+\frac{5}{4\sqrt{2}}\sin 2u+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \cos x\sqrt{4\sin^2 x+3}dx=\frac{7}{\sqrt{4}}\int \cos^2 u du$

$=\frac{7}{2\sqrt{4}}\int\left(1+\cos 2u\right)du=\frac{7}{2\sqrt{4}}u+\frac{7}{4\sqrt{4}}\sin 2u+C.$

b. $I=\int \cos x\sqrt{9\sin^2 x+1}dx=\frac{10}{3}\int \cos^2 u du$

$=\frac{5}{3}\int\left(1+\cos 2u\right)du=\frac{5}{3}u+\frac{5}{6}\sin 2u+C.$

c. $I=\int \cos x\sqrt{5\sin^2 x+2}dx=\frac{7}{\sqrt{5}}\int \cos^2 u du$

$=\frac{7}{2\sqrt{5}}\int\left(1+\cos 2u\right)du=\frac{7}{2\sqrt{5}}u+\frac{7}{4\sqrt{5}}\sin 2u+C.$

Dạng 68: $I=\int\frac{\sin^{n-1}x\cos x}{1+\sin^{2n}x}dx$

Phương pháp:

Đặt $u=\sin^n x\Rightarrow du=n\sin^{n-1}x\cos xdx\Rightarrow \sin^{n-1}x\cos xdx=\frac{du}{n}.$

$I=\frac{1}{n}\int\frac{du}{1+u^2}.$

Đặt $u=\tan t\Rightarrow du=\left(1+\tan^2 t\right)dt.$

$I=\frac{1}{n}\int\frac{1+\tan^2 t}{1+\tan^2 t}dt=\frac{t}{n}.$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx.$

Lời giải: Đặt $u=\sin x\Rightarrow du=\cos xdx\Rightarrow \cos xdx=du.$

$I=\int\frac{du}{1+u^2}.$

Đặt $u=\tan t\Rightarrow du=\left(1+\tan^2 t\right)dt.$

$I=\int\frac{1+\tan^2 t}{1+\tan^2 t}dt=t+C=\arctan u+C=\arctan\sin x+C.$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx=\frac{t}{2}+C=\frac{\arctan u}{2}+C=\frac{\arctan\sin x}{2}+C$.

b. $I=\int\frac{\sin^2 x\cos x}{1+\sin^6 x}dx=\frac{t}{3}+C=\frac{\arctan u}{3}+C=\frac{\arctan\sin x}{3}+C$.

c. $I=\int\frac{\sin^3 x\cos x}{1+\sin^8 x}dx=\frac{t}{4}+C=\frac{\arctan u}{4}+C=\frac{\arctan\sin x}{4}+C$.

Dạng 69: $I=\int\frac{\cos^{n-1}x\sin x}{1+\cos^{2n}x}dx$

Phương pháp: Đặt $u=\cos^n x\Rightarrow du=-\cos^{n-1}x\sin x dx$.

$I=-\int\frac{du}{1+u^2}$.

Đặt $u=\tan t\Rightarrow du=\left(1+\tan^2 t\right)dt$

$I=-\frac{1}{n}\int\frac{1+\tan^2 t}{1+\tan^2 t}dt=-\frac{t}{n}+C=-\frac{\arctan u}{n}+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

Lời giải: Đặt $u=\cos x\Rightarrow du=-\sin x dx$. $I=-\int\frac{du}{1+u^2}$.

Đặt $u=\tan t\Rightarrow du=\left(1+\tan^2 t\right)dt$.

$I=-\int\frac{1+\tan^2 t}{1+\tan^2 t}dt=-t+C=-\arctan u+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{\cos^2 x\sin x}{1+\cos^6 x}dx=-\frac{\arctan u}{3}+C=-\frac{\arctan\cos x}{3}+C$.

b. $I=\int\frac{\cos^3 x\sin x}{1+\cos^8 x}dx=-\frac{\arctan u}{4}+C=-\frac{\arctan\cos x}{4}+C$.

c. $I=\int\frac{\cos^4 x\sin x}{1+\cos^{10} x}dx=-\frac{\arctan u}{5}+C=-\frac{\arctan\cos x}{5}+C$.

Dạng 70: $I=\int\frac{a\sin x+b\cos x}{(\sin x+\cos x)^3}dx$

Phương pháp: $I=\int\frac{A(\sin x+\cos x)'+B(\sin x+\cos x)}{(\sin x+\cos x)^3}dx$

$=\int\frac{A(\cos x-\sin x)+B(\sin x+\cos x)}{(\sin x+\cos x)^3}dx$

$=\int\frac{(A+B)\sin x+(B-A)\cos x}{(\sin x+\cos x)^3}dx.$

Đặt $\begin{cases}a=A+B\\b=B-A\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{a-b}{2}\\B=\frac{a+b}{2}\end{cases}.$

$I=\frac{a-b}{2}\int\frac{d(\sin x+\cos x)}{(\sin x+\cos x)^3}+\frac{a+b}{2}\int\frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}$

$=\frac{a-b}{2}.\frac{-1}{2(\sin x+\cos x)^2}+\frac{a+b}{2}\int\frac{dx}{\left[\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]^2}$

$=-\frac{a-b}{4(\sin x+\cos x)^2}+\frac{a+b}{4}\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{4\sin x+2\cos x}{(\sin x+\cos x)^3}dx.$

Lời giải: $I=\int\frac{A(\sin x+\cos x)'+B(\sin x+\cos x)}{(\sin x+\cos x)^3}dx$

$=\int\frac{A(\cos x-\sin x)+B(\sin x+\cos x)}{(\sin x+\cos x)^3}dx$

$=\int\frac{(A+B)\sin x+(B-A)\cos x}{(\sin x+\cos x)^3}dx.$

Đặt $\begin{cases} a = A + B \\ b = B - A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 3 \end{cases}$.

$$I = \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{(\sin x + \cos x)^3} + 3\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{-1}{2(\sin x + \cos x)^2} + 3\int \frac{dx}{\left[\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]^2}$$

$$= -\frac{2}{4(\sin x + \cos x)^2} + \frac{3}{2}\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + C.$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I = \int \frac{6\sin x + 3\cos x}{(\sin x + \cos x)^3} dx = -\frac{3}{4(\sin x + \cos x)^2} + \frac{9}{4}\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + C.$

b. $I = \int \frac{5\sin x + 3\cos x}{(\sin x + \cos x)^3} dx = -\frac{1}{2(\sin x + \cos x)^2} + 2\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + C.$

c. $I = \int \frac{4\sin x + 3\cos x}{(\sin x + \cos x)^3} dx = -\frac{1}{4(\sin x + \cos x)^2} + \frac{7}{4}\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + C.$

Dạng 71: $I = \int \frac{a\sin x + b\cos x}{(\sin x - \cos x)^3} dx$

Phương pháp: $I = \int \frac{A(\sin x - \cos x)' + B(\sin x - \cos x)}{(\sin x + \cos x)^3} dx$

$$= \int \frac{A(\cos x + \sin x) + B(\sin x - \cos x)}{(\sin x + \cos x)^3} dx$$

$$= \int \frac{(A + B)\sin x + (A - B)\cos x}{(\sin x + \cos x)^3} dx.$$

Đặt $\begin{cases} a = A + B \\ b = A - B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{a+b}{2} \\ B = \dfrac{a-b}{2} \end{cases}$.

$$I = \frac{a+b}{2}\int \frac{d(\sin x - \cos x)}{(\sin x - \cos x)^3} + \frac{a-b}{2}\int \frac{dx}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{a+b}{2}\cdot\frac{-1}{2(\sin x + \cos x)^2} + \frac{a-b}{2}\int \frac{dx}{\left[-\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2}$$

$$= -\frac{a+b}{4(\sin x + \cos x)^2} + \frac{a-b}{4}\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{7\sin x + 3\cos x}{(\sin x + \cos x)^3} dx$.

Lời giải: $I = \int \frac{A(\sin x - \cos x)' + B(\sin x - \cos x)}{(\sin x + \cos x)^3} dx$

$$= \int \frac{A(\cos x + \sin x) + B(\sin x - \cos x)}{(\sin x + \cos x)^3} dx.$$

Đặt $\begin{cases} a = A + B \\ b = A - B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 5 \\ B = 2 \end{cases}$.

$$I = -\frac{5}{2(\sin x + \cos x)^2} + \tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + C.$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I = \int \frac{5\sin x + 6\cos x}{(\sin x + \cos x)^3} dx = -\frac{11}{4(\sin x + \cos x)^2} - \frac{1}{4}\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + C.$

b. $I = \int \frac{4\sin x + 8\cos x}{(\sin x + \cos x)^3} dx = -\frac{3}{(\sin x + \cos x)^2} - \tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + C.$

c. $I = \int \frac{5\sin x + 3\cos x}{(\sin x + \cos x)^3} dx = -\frac{2}{(\sin x + \cos x)^2} + \frac{1}{2}\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + C.$

Dạng 72: $I=\int \frac{a\sin x+b\cos x}{\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)^2}dx$

Phương pháp: $I=\int \frac{A\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)'+B\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)}{\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)^2}dx$

$=\int \frac{A\left(\sqrt{3}\cos x-\sin x\right)+B\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)}{\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)^2}dx.$

Đặt $\begin{cases}a=B\sqrt{3}-A\\ b=B+A\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{b\sqrt{3}-a}{4}\\ B=\frac{a\sqrt{3}+b}{4}\end{cases}.$

$I=\frac{b\sqrt{3}-a}{4}\int \frac{d\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)}{\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)^2}+\frac{a\sqrt{3}+b}{4}\int \frac{dx}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)}$

$=\frac{b\sqrt{3}-a}{4}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}\sin x+\cos x}\right)+\frac{a\sqrt{3}+b}{8}\int \frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}.$

Bổ trợ: $\int \frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right|.$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int \frac{6\sin x+2\cos x}{\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)^2}dx.$

Lời giải: $I=\int \frac{A\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)'+B\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)}{\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)^2}dx$

$=\int \frac{A\left(\sqrt{3}\cos x-\sin x\right)+B\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)}{\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)^2}dx.$

Đặt $\begin{cases} a = B\sqrt{3} - A \\ b = B + A\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{2\sqrt{3}-6}{4} \\ B = \dfrac{2\sqrt{3}+6}{4} \end{cases}$.

$$I = \frac{2\sqrt{3}-6}{4}\int \frac{d\left(\sqrt{3}\sin x + \cos x\right)}{\left(\sqrt{3}\sin x + \cos x\right)^2} + \frac{6\sqrt{3}+2}{4}\int \frac{dx}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right)}$$

$$= \frac{6-2\sqrt{3}-6}{4\left(\sqrt{3}\sin x + \cos x\right)} + \frac{6\sqrt{3}+2}{8}\int \frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}.$$

Bài tập minh họa

➢ **Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây**

a. $I = \int \frac{5\sin x + 4\cos x}{\left(\sqrt{3}\sin x + \cos x\right)^2} dx$

$$= \frac{5-4\sqrt{3}}{4\left(\sqrt{3}\sin x + \cos x\right)} + \frac{5\sqrt{3}+4}{8}\int \frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}.$$

b. $I = \int \frac{4\sin x + 6\cos x}{\left(\sqrt{3}\sin x + \cos x\right)^2} dx$

$$= \frac{4-6\sqrt{3}}{4\left(\sqrt{3}\sin x + \cos x\right)} + \frac{4\sqrt{3}+6}{8}\int \frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}.$$

c. $I = \int \frac{3\sin x + 2\cos x}{\left(\sqrt{3}\sin x + \cos x\right)^2} dx$

$$= \frac{3-2\sqrt{3}}{4\left(\sqrt{3}\sin x + \cos x\right)} + \frac{3\sqrt{3}+2}{8}\int \frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}.$$

Dạng 73: $I=\int \frac{a\sin x+b\cos x}{\left(\sqrt{3}\sin x-\cos x\right)^2}dx$

Phương pháp: $I=\int \frac{A\left(\sqrt{3}\sin x-\cos x\right)'+B\left(\sqrt{3}\sin x-\cos x\right)}{\left(\sqrt{3}\sin x-\cos x\right)^2}dx$

$=\int \frac{A\left(\sqrt{3}\cos x+\sin x\right)+B\left(\sqrt{3}\sin x-\cos x\right)}{\left(\sqrt{3}\sin x-\cos x\right)^2}dx$

Đặt $\begin{cases}a=A+B\sqrt{3}\\ b=A\sqrt{3}-B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{b\sqrt{3}+a}{4}\\ B=\frac{a\sqrt{3}-b}{4}\end{cases}$.

$I=\frac{b\sqrt{3}+a}{4}\int \frac{d\left(\sqrt{3}\sin x-\cos x\right)}{\left(\sqrt{3}\sin x-\cos x\right)^2}+\frac{a\sqrt{3}-b}{4}\int \frac{dx}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)}$

$=\frac{b\sqrt{3}+a}{4}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}\sin x-\cos x}\right)+\frac{a\sqrt{3}-b}{4}\int \frac{dx}{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}$.

Bổ trợ: $\int \frac{dx}{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right|$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int \frac{6\sin x+5\cos x}{\left(\sqrt{3}\sin x-\cos x\right)^2}dx$.

Lời giải: $I=\int \frac{A\left(\sqrt{3}\sin x-\cos x\right)'+B\left(\sqrt{3}\sin x-\cos x\right)}{\left(\sqrt{3}\sin x-\cos x\right)^2}dx$

$=\int \frac{A\left(\sqrt{3}\cos x+\sin x\right)+B\left(\sqrt{3}\sin x-\cos x\right)}{\left(\sqrt{3}\sin x-\cos x\right)^2}dx$.

Đặt $\begin{cases} a = A + B\sqrt{3} \\ b = A\sqrt{3} - B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{5\sqrt{3}+6}{4} \\ B = \dfrac{6\sqrt{3}-5}{4} \end{cases}$.

$$I = \frac{5\sqrt{3}+6}{4}\int \frac{d\left(\sqrt{3}\sin x - \cos x\right)}{\left(\sqrt{3}\sin x - \cos x\right)^2} + \frac{6\sqrt{3}-5}{4}\int \frac{dx}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right)}$$

$$= -\frac{5\sqrt{3}+6}{4\left(\sqrt{3}\sin x - \cos x\right)} + \frac{6\sqrt{3}-5}{4}\int \frac{dx}{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}.$$

Bài tập minh họa

➢ **Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây**

a. $I = \int \frac{8\sin x + 5\cos x}{\left(\sqrt{3}\sin x - \cos x\right)^2} dx = -\frac{5\sqrt{3}+8}{4\left(\sqrt{3}\sin x - \cos x\right)} + \frac{8\sqrt{3}-5}{4}\int \frac{dx}{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}$

b. $I = \int \frac{3\sin x + 8\cos x}{\left(\sqrt{3}\sin x - \cos x\right)^2} dx$

$$= -\frac{8\sqrt{3}+3}{4\left(\sqrt{3}\sin x - \cos x\right)} + \frac{3\sqrt{3}-8}{4}\int \frac{dx}{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}.$$

c. $I = \int \frac{9\sin x + 2\cos x}{\left(\sqrt{3}\sin x - \cos x\right)^2} dx$

$$= -\frac{2\sqrt{3}+9}{4\left(\sqrt{3}\sin x - \cos x\right)} + \frac{9\sqrt{3}-2}{4}\int \frac{dx}{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}.$$

Dạng 74: $I=\int\left(ax^2+bx+c\right)\sin xdx$

Phương pháp: Đặt $\begin{cases}u=ax^2+bx+c\\dv=\sin xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\left(2ax+b\right)dx\\v=-\cos x\end{cases}$.

$I=-\left(ax^2+bx+c\right)\cos x+\int\left(2ax+b\right)\cos xdx$.

Đặt $\begin{cases}u=2ax+b\\dv=\cos xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2adx\\v=\sin x\end{cases}$.

$I=-\left(ax^2+bx+c\right)\cos x+\left(2ax+b\right)\sin x-\int 2a\sin xdx$

$=-\left(ax^2+bx+c\right)\cos x+\left(2ax+b\right)\sin x+2a\cos x$.

Dạng 75: $I=\int\left(ax^2+bx+c\right)\cos xdx$

Phương pháp: Đặt $\begin{cases}u=ax^2+bx+c\\dv=\cos xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\left(2ax+b\right)dx\\v=\sin x\end{cases}$.

$I=\left(ax^2+bx+c\right)\sin x-\int\left(2ax+b\right)\sin xdx$.

Đặt $\begin{cases}u=2ax+b\\dv=\cos xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2adx\\v=-\cos x\end{cases}$.

$I=\left(ax^2+bx+c\right)\sin x-\left(2ax+b\right)\cos x+\int 2a\cos xdx$

$=\left(ax^2+bx+c\right)\sin x-\left(2ax+b\right)\cos x+2a\sin x+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\left(ax^2+bx+c\right)\cos xdx$.

Lời giải: Đặt $\begin{cases}u=ax^2+bx+c\\dv=\cos xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\left(2ax+b\right)dx\\v=\sin x\end{cases}$.

$I=\left(ax^2+bx+c\right)\sin x-\int\left(2ax+b\right)\sin xdx$.

Đặt $\begin{cases}u=2ax+b\\dv=\cos xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2adx\\v=-\cos x\end{cases}$.

$I=\left(ax^2+bx+c\right)\sin x-\left(2ax+b\right)\cos x+\int 2a\cos xdx$

$=\left(ax^2+bx+c\right)\sin x-\left(2ax+b\right)\cos x+2a\sin x+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\left(2x^2+3x+6\right)\cos x dx$

$=\left(2x^2+3x+6\right)\sin x-\left(4x+3\right)\cos x+4\sin x+C$.

b. $I=\int\left(6x^2+7x+2\right)\cos x dx$

$=\left(6x^2+7x+2\right)\sin x-\left(12x+7\right)\cos x+12\sin x+C$.

c. $I=\int\left(7x^2+2x+3\right)\cos x dx$

$=\left(7x^2+2x+3\right)\sin x-\left(14x+2\right)\cos x+14\sin x+C$

Dạng 76: $I=\int f\left(\sin x\right)\cos x dx$

Phương pháp: Đặt $u=\sin x\Rightarrow du=\cos x dx$.

$I=\int f\left(u\right)du$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\sin^2 x\cos x dx$.

Lời giải: Đặt $u=\sin x\Rightarrow du=\cos x dx$.

$I=\int u^2 du=\frac{u^3}{3}+C=\frac{\sin^3 x}{3}+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\sin^3\cos x dx=\frac{u^4}{4}+C=\frac{\sin^4 x}{4}+C$.

b. $I=\int\sin^5 x\cos x dx=\frac{u^6}{6}+C=\frac{\sin^6 x}{6}+C$.

c. $I=\int\sin^8 x\cos x dx=\frac{u^9}{9}+C=\frac{\sin^9 x}{9}+C$.

Dạng 77: $I=\int f(\cos x)\sin x dx$

Phương pháp: Đặt $u=\cos x \Rightarrow du=-\sin x dx$.

$I=\int f(u)du$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int \cos x^5 \sin x dx$.

Lời giải: Đặt $u=\cos x \Rightarrow du=-\sin x dx$.

$I=-\int u^5 du=-\frac{u^6}{6}+C=-\frac{\cos^6 x}{6}+C$.

Bài tập minh họa

➢ **Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây**

a. $I=\int \cos x^7 \sin x dx=-\frac{u^8}{8}+C=-\frac{\cos^8 x}{8}+C$.

b. $I=\int \cos^3 x \sin x dx=\frac{-u^4}{4}+C=\frac{-\cos^4 x}{4}+C$.

c. $I=\int \cos x^9 \sin x dx=\frac{u^{10}}{10}+C=\frac{\cos^{10} x}{10}+C$.

Dạng 78: $I=\int f(\tan x)\frac{1}{\cos^2 x}dx$

Phương pháp: Đặt $u=\tan x \Rightarrow du=\frac{dx}{\cos^2 x}$.

$I=\int f(u)du$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int \tan^2 x \frac{1}{\cos^2 x}dx$.

Lời giải: Đặt $u=\tan x \Rightarrow du=\frac{dx}{\cos^2 x}$.

$I=\int u^2 du=\frac{u^3}{3}+C=\frac{\tan^3 x}{3}+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \tan^4 x\frac{1}{\cos^2 x}dx=\frac{u^5}{5}+C=\frac{\tan^5 x}{5}+C.$

b. $I=\int \tan^5 x\frac{1}{\cos^2 x}dx=\frac{u^6}{6}+C=\frac{\tan^6 x}{6}+C.$

c. $I=\int \tan^6 x\frac{1}{\cos^2 x}dx=\frac{u^7}{7}+C=\frac{\tan^7 x}{7}+C.$

Dạng 79: $I=-\int f(\cot x)\frac{1}{\sin^2 x}dx$

Phương pháp: Đặt $u=\cot x\Rightarrow du=-\frac{dx}{\sin^2 x}$.

$I=-\int f(u)du.$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=-\int \cot^2 t\frac{1}{\sin^2 x}dx.$

Lời giải: Đặt $u=\cot x\Rightarrow du=-\frac{dx}{\sin^2 x}$.

$I=-\int u^2du=-\frac{u^3}{3}+C=-\frac{\cot^3 x}{3}+C.$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=-\int \cot^3 t\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\frac{u^4}{4}+C=-\frac{\cot^4 x}{4}+C.$

b. $I=-\int \cot^7 t\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\frac{u^8}{8}+C=-\frac{\cot^8 x}{8}+C.$

c. $I=-\int \cot^9 t\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\frac{u^{10}}{10}+C=-\frac{\cot^{10} x}{10}+C.$

Dạng 80: $I=\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x+c}$

Phương pháp:

$$I=\int\frac{dx}{a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+b\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)+c\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\int\frac{\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}}{(c-b)\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+a\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}+b+c}$$

$$=\int\frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{(c-b)\tan^2\frac{x}{2}+a\tan\frac{x}{2}+b+c}$$

$$=\int\frac{dt}{(c-b)t^2+at+b+c}.$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{2\sin x+4\cos x+5}$.

Lời giải: $I=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+4\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)+5\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)}$

$$=\int\frac{\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}+9}=\int\frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}+9}.$$

Đặt $t=\tan x\Rightarrow dt=d(\tan x)$.

$I=\int\frac{dt}{t^2+2t+9}$ (Dạng 6_Tích phân hữu tỷ).

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{dx}{3\sin x+7\cos x+5}=\int\frac{dt}{-2t^2+3t+12}$ (với $t=\tan x$).

b. $I=\int\frac{dx}{5\sin x+4\cos x+1}=\int\frac{dt}{-3t^2+5t+5}$ (với $t=\tan x$).

c. $I=\int\frac{dx}{7\sin x+3\cos x+1}=\int\frac{dt}{-2t^2+7t+4}$ (với $t=\tan x$).

Dạng 81: $I=\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a_2\sin x+b_2\cos x}dx$

Phương pháp: $I=\int\frac{A\left(a_2\sin x+b_2\cos x\right)'+B\left(a_2\sin x+b_2\cos x\right)}{a_2\sin x+b_2\cos x}dx$

$=\int\frac{A\left(a_2\cos x-b_2\sin x\right)+B\left(a_2\sin x+b_2\cos x\right)}{a_2\sin x+b_2\cos x}dx$

$=A\int\frac{d\left(a_2\sin x+b_2\cos x\right)}{a_2\sin x+b_2\cos x}+B=A\ln\left|a_2\sin x+b_2\cos x\right|+Bx.$

Tìm A,B bằng cách giải hệ phương trình $\begin{cases}-Ab_2+Ba_2=a_1\\Aa_2+Bb_2=b_1\end{cases}$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{2\sin x+3\cos x}{4\sin x+5\cos x}dx$.

Lời giải: $I=\int\frac{\frac{7}{8}\left(4\sin x+5\cos x\right)'+\frac{3}{10}\left(4\sin x+5\cos x\right)}{4\sin x+5\cos x}dx$

$=\int\frac{\frac{7}{8}\left(4\cos x-5\sin x\right)+\frac{3}{10}\left(4\sin x+5\cos x\right)}{4\sin x+5\cos x}dx$

$=\frac{7}{8}\int\frac{d\left(4\sin x+5\cos x\right)}{4\sin x+5\cos x}+\frac{3}{10}=\frac{7}{8}\ln\left|4\sin x+5\cos x\right|+\frac{3}{10}x+C.$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{6\sin x+3\cos x}{2\sin x+4\cos x}dx=\frac{9}{4}\ln\left|2\sin x+4\cos x\right|-\frac{3}{8}x+C$.

b. $I=\int\frac{3\sin x+4\cos x}{7\sin x+9\cos x}dx=\frac{1}{14}\ln\left|7\sin x+9\cos x\right|+\frac{7}{18}x+C$.

c. $I=\int\frac{5\sin x+6\cos x}{8\sin x+2\cos x}dx=\frac{1}{16}\ln\left|8\sin x+2\cos x\right|+\frac{11}{4}x+C$.

Dạng 82: $I=\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a_2\sin x+b_2\cos x+c_2}dx$

Phương pháp:

$$I=\int\frac{A\left(a_2\sin x+b_2\cos x+c_2\right)'+B\left(a_2\sin x+b_2\cos x+c_2\right)+C}{a_2\sin x+b_2\cos x+c_2}dx$$

$$=\int\frac{A\left(a_2\cos x-b_2\sin x\right)+B\left(a_2\sin x+b_2\cos x+c_2\right)+C}{a_2\sin x+b_2\cos x+c_2}dx$$

$$I=A\int\frac{d\left(a_2\sin x+b_2\cos x+c_2\right)}{a_2\sin x+b_2\cos x+c_2}+B\int dx+\int\frac{C.dx}{a_2\sin x+b_2\cos x+c_2}.$$

$$=A\ln\left|a_2\sin x+b_2\cos x+c_2\right|+Bx+\int\frac{C.dx}{a_2\sin x+b_2\cos x+c_2}$$

Tìm A, B, C bằng cách giải hệ phương trình $\begin{cases}-Ab_2+Ba_2=a_1\\Aa_2+Bb_2=b_1\\Bc_2+C=c_1\end{cases}$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{7\sin x+6\cos x+5}{4\sin x+3\cos x+1}dx$.

Lời giải:

$$I=\int\frac{\frac{3}{25}\left(4\sin x+3\cos x+1\right)'+\frac{46}{25}\left(4\sin x+3\cos x+1\right)+\frac{79}{25}}{4\sin x+3\cos x+1}dx$$

$$= \int \frac{\frac{3}{25}(4\cos x - 3\sin x) + \frac{46}{25}(4\sin x + 3\cos x + 1) + \frac{79}{25}}{4\sin x + 3\cos x + 1} dx$$

$$= \frac{3}{25}\int \frac{d(4\sin x + 3\cos x + 1)}{4\sin x + 3\cos x + 1} + \frac{46}{25}x + \frac{79}{25}\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 1}$$

$$= \frac{3}{25}\ln\left|4\sin x + 3\cos x + 1\right| + \frac{46}{25}x + \frac{79}{25}\int \frac{dt}{-2t^2 + 4t + 4}.$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I = \int \frac{5\sin x + 2\cos x + 7}{3\sin x + 6\cos x + 4} dx$

$$= \frac{-8}{15}\ln\left|3\sin x + 6\cos x + 4\right| + \frac{3}{5}x + \frac{23}{5}\int \frac{dt}{-2t^2 + 3t + 10}.$$

b. $I = \int \frac{6\sin x + 7\cos x + 8}{5\sin x + 2\cos x + 7} dx$

$$= \frac{23}{29}\ln\left|4\sin x + 3\cos x + 1\right| + \frac{44}{29}x - \frac{76}{29}\int \frac{dt}{5t^2 + 5t + 9}.$$

c. $I = \int \frac{8\sin x + 5\cos x + 2}{6\sin x + 2\cos x + 5} dx$

$$= \frac{7}{20}\ln\left|4\sin x + 3\cos x + 1\right| + \frac{29}{20}x - \frac{21}{4}\int \frac{dt}{-2t^2 + 4t + 4}.$$

Dạng 84: $I = \int \frac{\sin(ax+b)}{\sqrt[n]{\left[m + n\cos(ax+b)\right]^k}} dx$

Phương pháp:

$$I = -\frac{1}{an}\int \frac{d\left(m + n\cos(ax+b)\right)}{\left[m + n\cos(ax+b)\right]^{\frac{k}{n}}}$$

$$= -\frac{1}{an}\int \left[m + n\cos(ax+b)\right]^{-\frac{k}{n}} d\left(m + n\cos(ax+b)\right)$$

$$=-\frac{1}{an}.\frac{\left[m+n\cos(ax+b)\right]^{-\frac{k}{n}+1}}{-\frac{k}{n}+1}+C.$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{\sin(4x+3)}{\sqrt[2]{\left[6+2\cos(ax+b)\right]}}dx$.

Lời giải: $I=-\frac{1}{8}\int\frac{d\left(6+2\cos(4x+3)\right)}{\left[6+2\cos(4x+3)\right]^{\frac{1}{2}}}$

$$=-\frac{1}{8}\int\left[6+2\cos(4x+3)\right]^{-\frac{1}{2}}d\left(6+2\cos(4x+3)\right)$$

$$=-\frac{1}{8}.\frac{\left[6+2\cos(ax+b)\right]^{\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}+1}+C.$$

Bài tập minh họa

➢ **Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây**

a. $I=\int\frac{\sin(5x+6)}{\sqrt[3]{\left[2+3\cos(5x+6)\right]^2}}dx=-\frac{1}{15}.\frac{\left[2+3\cos(5x+6)\right]^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+C$

b. $I=\int\frac{\sin(7x+2)}{\sqrt[4]{\left[2+4\cos(7x+2)\right]^2}}dx=-\frac{1}{25}.\frac{\left[2+5\cos(7x+2)\right]^{-\frac{3}{5}+1}}{-\frac{3}{5}+1}+C.$

c. $I=\int\frac{\sin(5x+3)}{\sqrt[5]{\left[2+5\cos(5x+3)\right]^3}}dx=-\frac{1}{25}.\frac{\left[2+5\cos(5x+3)\right]^{-\frac{3}{5}+1}}{-\frac{3}{5}+1}+C.$

Dạng 85: $I=\int(ax+b)\cos(mx+n)dx$

Phương pháp:

Đặt $\begin{cases}u=ax+b\\dv=\cos(mx+n)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=adx\\v=\int\cos(mx+n)dx=\frac{\sin(mx+n)}{m}\end{cases}$.

$$I=(ax+b)\frac{\sin(mx+n)}{m}+\frac{a}{m}\int\sin(mx+n)dx$$

$$=(ax+b)\frac{\sin(mx+n)}{m}-\frac{a}{m^2}\cos(mx+n)+C$$

Ví dụ:Tìm nguyên hàm $I=\int(2x+3)\cos(4x+5)dx$.

Lời giải: Đặt $\begin{cases}u=2x+3\\dv=\cos(4x+5)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2dx\\v=\dfrac{\sin(4x+5)}{4}\end{cases}$.

$$I=(2x+3)\frac{\sin(4x+5)}{4}+\frac{2}{4}\int\sin(4x+5)dx$$

$$=(2x+3)\frac{\sin(4x+5)}{4}-\frac{2}{4^2}\cos(4x+5)+C.$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int(7x+8)\cos(6x+5)dx=\dfrac{(7x+8)\sin(6x+5)}{6}-\dfrac{7}{6^2}\cos(6x+5)+C$.

b. $I=\int(5x+4)\cos(9x+2)dx=\dfrac{(5x+4)\sin(9x+2)}{9}-\dfrac{5}{9^2}\cos(9x+2)+C$.

c. $I=\int(7x+3)\cos(2x+1)dx=\dfrac{(7x+3)\sin(2x+1)}{2}-\dfrac{7}{2^2}\cos(2x+1)+C$.

Dạng 86: $I=\int\dfrac{\sin 2x}{(a\sin^2x+b\cos^2x+c)^n}dx$

Phương pháp:Đặt $u=a\sin^2x+b\cos^2x+c$

$\Rightarrow du=(a\sin 2x-b\sin 2x)dx=(a-b)\sin 2xdx$.

$$I=\int\frac{du}{(a-b)u^n}=\frac{1}{a-b}.\frac{u^{1-n}}{1-n}+C$$

$$=\frac{1}{a-b}.\frac{\left(a\sin^2 x+b\cos^2 x+c\right)^{1-n}}{1-n}+C.$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{\sin 2x}{\left(3\sin^2 x+2\cos^2 x+1\right)^2}dx$.

Lời giải: Đặt $u=3\sin^2 x+2\cos^2 x+1$

$\Rightarrow du=\left(3\sin 2x-2\sin 2x\right)dx=\sin 2xdx$

$$I=\int\frac{t-3}{t^2}dt=\int\left(t-\frac{3}{t^2}\right)dt=\frac{t^2}{2}+\frac{3}{t}+C$$

$$=\frac{\left(3\sin^2 x+2\cos^2 x+1\right)^2}{2}+\frac{3}{3\sin^2 x+2\cos^2 x+1}+C.$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{\sin 2x}{\left(4\sin^2 x+6\cos^2 x+2\right)^3}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^3}=\frac{1}{4u^2}+C$

$$=\frac{1}{4\left(4\sin^2 x+6\cos^2 x+2\right)^2}+C.$$

b. $I=\int\frac{\sin 2x}{\left(7\sin^2 x+2\cos^2 x+3\right)^7}dx=\frac{1}{5}\int\frac{du}{u^7}=-\frac{1}{30u^6}+C$

$$=-\frac{1}{30\left(7\sin^2 x+2\cos^2 x+3\right)^6}+C.$$

c. $I=\int\frac{\sin 2x}{\left(5\sin^2 x+2\cos^2 x+3\right)^4}dx=\frac{1}{3}\int\frac{du}{u^4}=-\frac{1}{9u^3}+C$

$$=-\frac{1}{9\left(5\sin^2 x+2\cos^2 x+3\right)^3}+C.$$

Dạng 87: $I=\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{a\cos^2 x+b\sin^2 x+c}}dx$

Phương pháp: Đặt $u=\sqrt{a\cos^2 x+b\sin^2 x+c}$

$\Rightarrow u^2=a\cos^2 x+b\sin^2 x+c\Rightarrow 2udu=(b-a)\sin 2xdx$.

$I=\frac{2}{b-a}\int\frac{u}{u}du=\frac{2u}{b-a}+C=\frac{2}{b-a}\sqrt{a\cos^2 x+b\sin^2 x+c}+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{2\cos^2 x+3\sin^2 x+4}}dx$.

Lời giải: Đặt $u=\sqrt{2\cos^2 x+3\sin^2 x+4}$

$\Rightarrow u^2=2\cos^2 x+3\sin^2 x+4\Rightarrow 2udu=\sin 2xdx$.

$I=2\int\frac{u}{u}du=2u+C=2\sqrt{2\cos^2 x+3\sin^2 x+4}+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{9\cos^2 x+5\sin^2 x+3}}dx=-\frac{1}{2}\sqrt{9\cos^2 x+5\sin^2 x+3}+C$.

b. $I=\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{7\cos^2 x+5\sin^2 x+7}}dx=-\sqrt{7\cos^2 x+5\sin^2 x+7}+C$.

c. $I=\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{4\cos^2 x+9\sin^2 x+2}}dx=\frac{2}{5}\sqrt{4\cos^2 x+9\sin^2 x+2}+C$.

Dạng 88: $I=\int\frac{\cos 2x}{(\sin x-\cos x+a)^n}dx$

Phương pháp:

$I=\int\frac{(\cos x-\sin x)(\sin x+\cos x)}{(\sin x-\cos x+a)^n}dx=\int\frac{t-a}{t^n}dt$.

Đặt $t=\sin x-\cos x+a\Rightarrow dt=(\sin x+\cos x)dx$

$$I=\int\left(t^{n-1}-at^{-n}\right)dt=\frac{t^n}{n}-a\frac{t^{-n+1}}{1-n}+C$$

$$=\frac{\left(\sin x-\cos x+a\right)^n}{n}-a\frac{\left(\sin x-\cos x+a\right)^{1-n}}{1-n}+C.$$

Ví dụ : Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{\cos 2x}{\left(\sin x-\cos x+3\right)^2}dx$.

Lời giải: $I=\int\frac{\left(\cos x-\sin x\right)\left(\sin x+\cos x\right)}{\left(\sin x-\cos x+3\right)^2}dx$.

Đặt $t=\sin x-\cos x+3\Rightarrow dt=\left(\sin x+\cos x\right)dx$.

$$I=\int\frac{t-3}{t^2}dt=\int\left(t-\frac{3}{t^2}\right)dt=\frac{t^2}{2}+\frac{3}{t}+C$$

$$=\frac{\left(\sin x-\cos x+3\right)^2}{2}+\frac{3}{\sin x-\cos x+3}+C.$$

Bài tập minh họa

➢ **Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây**

a. $I=\int\frac{\cos 2x}{\left(\sin x-\cos x+4\right)^3}dx=\int\left(t^2-\frac{4}{t^3}\right)dt=\frac{t^3}{3}+\frac{2}{t^2}+C$

$$=\frac{\left(\sin x-\cos x+4\right)^3}{3}+\frac{2}{\left(\sin x-\cos x+4\right)^2}+C.$$

b. $I=\int\frac{\cos 2x}{\left(\sin x-\cos x+5\right)^4}dx=\int\left(t^3-\frac{5}{t^4}\right)dt=\frac{t^4}{4}+\frac{5}{3t^3}+C$

$$=\frac{\left(\sin x-\cos x+5\right)^4}{4}+\frac{5}{3\left(\sin x-\cos x+5\right)^3}+C.$$

c. $I=\int\frac{\cos 2x}{\left(\sin x-\cos x+4\right)^6}dx=\int\left(t^5-\frac{4}{t^6}\right)dt=\frac{t^6}{6}+\frac{4}{5t^5}+C$

$$=\frac{\left(\sin x-\cos x+4\right)^6}{6}+\frac{4}{5\left(\sin x-\cos x+4\right)^5}+C.$$

Dạng 89: $I=\int\frac{\cos^2 x}{a\sin x+b\cos x}dx$

Phương pháp: $I=\int\frac{\cos^2 x}{\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)}dx$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{\cos^2 x}{\sin(x+\alpha)}dx=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{\cos^2(u-\alpha)}{\sin u}du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{\cos^2\alpha\cos^2 u-2\sin\alpha\cos\alpha\sin u\cos u+\sin^2\alpha\sin^2 u}{\sin u}du$$

(với $x=u-\alpha;\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha;\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha$).

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{\cos^2 x}{a\sin x+b\cos x}dx$.

Lời giải:

$$I=\int\frac{\cos^2 x}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\cos^2 x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\cos^2\left(u-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin u}du$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos^2 u-2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin u\cos u+\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin^2 u}{\sin u}du$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\frac{3}{4}\cos^2 u-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin u\cos u+\frac{1}{4}\sin^2 u}{\sin u}du$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\frac{1}{2}\cos^2 u-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin u\cos u+1}{\sin u}du.$$





Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{\cos^2 x}{2\sin x+3\cos x}dx$

$=\frac{1}{\sqrt{13}}\int\frac{\cos^2\alpha\cos^2 u-2\sin\alpha\cos\alpha\sin u\cos u+\sin^2\alpha\sin^2 u}{\sin u}du.$

b. $I=\int\frac{\cos^2 x}{2\sin x+\cos x}dx$

$=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{\cos^2\alpha\cos^2 u-2\sin\alpha\cos\alpha\sin u\cos u+\sin^2\alpha\sin^2 u}{\sin u}du.$

c. $I=\int\frac{\cos^2 x}{5\sin x+1\cos x}dx$

$=\frac{1}{\sqrt{26}}\int\frac{\cos^2\alpha\cos^2 u-2\sin\alpha\cos\alpha\sin u\cos u+\sin^2\alpha\sin^2 u}{\sin u}du.$

Dạng 90: $I=\int\frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^2}$

Phương pháp 1:

$$I=\int\frac{dx}{a^2\sin^2 x+2ab\sin x\cos x+b^2\cos^2 x}=\int\frac{d(\tan x)}{a^2\tan^2 x+2ab\tan x+b^2}.$$

Đặt $t=\tan x\Rightarrow dt=d(\tan x)$.

$I=\int\frac{dt}{a^2t^2+2abt+b^2}$ (Dạng 6_Tích phân hữu tỷ).

Phương pháp 2:

$$I=\int\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{(a\tan x+b)^2}=\int\frac{d(\tan x)}{(a\tan x+b)^2}=-\frac{1}{a(a\tan x+b)}+C.$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{\left(3\sin x+3\cos x\right)^2}$.

Lời giải: $I=\int\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\left(3\tan x+3\right)^2}=\int\frac{d\left(\tan x\right)}{\left(3\tan x+3\right)^2}=-\frac{1}{3\left(3\tan x+3\right)}+C$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{dx}{\left(4\sin x+5\cos x\right)^2}-\frac{1}{4\left(4\tan x+5\right)}+C$.

b. $I=\int\frac{dx}{\left(8\sin x+2\cos x\right)^2}=-\frac{1}{8\left(8\tan x+2\right)}+C$.

c. $I=\int\frac{dx}{\left(4\sin x+2\cos x\right)^2}=-\frac{1}{4\left(4\tan x+2\right)}+C$.

Dạng 91: $I=\int\frac{\ln\left[\tan\left(ax+b\right)\right]}{\sin\left(2ax+2b\right)}dx$

Phương pháp: Đặt $u=\ln\left|\tan\left(ax+b\right)\right|$

$\Rightarrow du=\frac{1}{a\tan\left(ax+b\right)}.\frac{1}{\cos^2\left(ax+b\right)}dx=\frac{2}{\sin\left(2ax+2b\right)}dx$.

$I=\frac{1}{2}\int udu=\frac{u^2}{4}+C=\frac{\ln^2\left|\tan\left(ax+b\right)\right|}{4}+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{\ln\left[\tan\left(3x+2\right)\right]}{\sin\left(6x+4\right)}dx$.

Lời giải: Đặt $u=\ln\left|\tan\left(2x+3\right)\right|$

$\Rightarrow du=\frac{1}{2\tan\left(2x+3\right)}.\frac{1}{\cos^2\left(2x+3\right)}dx=\frac{2}{\sin\left(4x+6\right)}dx$.

$I=\frac{1}{2}\int udu=\frac{u^2}{4}+C=\frac{\ln^2\left|\tan\left(2x+3\right)\right|}{4}+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{\ln\left[\tan\left(2x+4\right)\right]}{\sin\left(4x+8\right)}dx=\frac{1}{2}\int udu=\frac{u^2}{4}+C=\frac{\ln^2\left[\tan\left(2x+4\right)\right]}{4}+C.$

b. $I=\int\frac{\ln\left[\tan\left(x+2\right)\right]}{\sin\left(2x+4\right)}dxI=\frac{1}{2}\int udu=\frac{u^2}{4}+C=\frac{\ln^2\left[\tan\left(x+2\right)\right]}{4}+C.$

c. $I=\int\frac{\ln\left[\tan\left(3x+5\right)\right]}{\sin\left(6x+10\right)}dx=\frac{1}{2}\int udu=\frac{u^2}{4}+C=\frac{\ln^2\left[\tan\left(3x+5\right)\right]}{4}+C.$

Dạng 92: $I=\int\frac{dx}{a\sin^2x+b\sin x\cos x+c\cos^2x+d}$

Phương pháp: $I=\int\frac{\frac{dx}{\cos^2x}}{a\frac{\sin^2x}{\cos^2x}+b\frac{\sin x\cos x}{\cos^2x}+c\frac{\cos^2x}{\cos^2x}+d\frac{1}{\cos^2x}}$

$=\int\frac{d\left(\tan x\right)}{a\tan^2x+b\tan x+c+d\left(1+\tan^2x\right)}.$

Đặt $t=\tan x\Rightarrow dt=d\left(\tan x\right).$

Ta có $I=\int\frac{dt}{\left(a+d\right)t^2+bt+c+d}$ (Dạng 6_Tích phân hữu tỷ).

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{\sin^2x+2\sin x\cos x+3\cos^2x+4}.$

Lời giải: $I=\int\frac{\frac{dx}{\cos^2x}}{\frac{\sin^2x}{\cos^2x}+2\frac{\sin x\cos x}{\cos^2x}+3\frac{\cos^2x}{\cos^2x}+4\frac{1}{\cos^2x}}$

$=\int\frac{d\left(\tan x\right)}{\tan^2x+2\tan x+3+4\left(1+\tan^2x\right)}.$

Đặt $t=\tan x\Rightarrow dt=d\left(\tan x\right).$

Ta có $I=\int\frac{dt}{4t^2+2t+7}$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{dx}{5\sin^2 x+4\sin x\cos x+5\cos^2 x+2}$

$=\int\frac{d(\tan x)}{5\tan^2 x+4\tan x+4+2(1+\tan^2 x)}=\int\frac{dt}{7t^2+4t+6}(t=\tan x).$

b. $I=\int\frac{dx}{7\sin^2 x+8\sin x\cos x+2\cos^2 x+3}$

$=\int\frac{d(\tan x)}{7\tan^2 x+8\tan x+2+3(1+\tan^2 x)}=\int\frac{dt}{10t^2+8t+5}(t=\tan x).$

c. $I=\int\frac{dx}{6\sin^2 x+3\sin x\cos x+2\cos^2 x+1}$

$=\int\frac{d(\tan x)}{6\tan^2 x+3\tan x+2+(1+\tan^2 x)}=\int\frac{d}{7t^2+3t+3}(t=\tan x).$

Dạng 93: $I=\int f(\sin^2 x,\cos^2 x,\cos 2x)\sin 2x dx$

Phương pháp: $I=\int f(\sin^2 x)d(\sin^2 x)=-\int f(\cos^2 x)d(\cos^2 x)$

$=-\frac{1}{2}\int f(\cos 2x)d(\cos 2x).$

III. CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC THƯỜNG SỬ DỤNG

Các hằng đẳng thức lượng giác:

- $\sin^2 x+\cos^2 x=1.$
- $\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x.$
- $\frac{1}{\sin^2 x}=1+\cot^2 x.$
- $\tan x.\cot x=1.$



Công thức hạ bậc hai:

- $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$.
- $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$.

Công thức biến đổi tỉ thành tổng:

- $\cos a\cos b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$.
- $\sin a\sin b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$.
- $\sin a.\cos b = \dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$.

Chú ý: $\begin{cases}\sin(-x) = -\sin x \\ \cos(-x) = \cos x\end{cases}$

Công thức biến đổi tổng thành tích:

- $\sin a + \sin b = 2\sin\dfrac{a+b}{2}.\cos\dfrac{a-b}{2}$.
- $\sin a - \sin b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}.\sin\dfrac{a-b}{2}$.
- $\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}.\cos\dfrac{a-b}{2}$.
- $\cos a - \cos b = -2\sin\dfrac{a+b}{2}.\sin\dfrac{a-b}{2}$.

Công thức cộng:

- $\sin(a\pm b) = \sin a\cos b \pm \sin b\cos a$.
- $\cos(a\pm b) = \cos a\cos b \mp \sin a\sin b$.

(sin thì dùng dấu khác loài, cos thì khác dấu nhưng loài giống nhau)

Chú ý:

- Trong trường hợp $a = b$ ta được công thức góc nhân đôi:

- $\sin 2a = 2\sin a\cos a$.
- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$.

- Trong trường hợp $2a = b$ ta được công thức góc nhân ba:

- $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$.
- $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$.

VI. CÁC DẠNG NGUYÊN HÀM LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

Dạng 1: Nguyên hàm dùng công thức lượng giác thuần túy

Chú ý: Với các nguyên hàm có chứa $\sin^n x$ và $\cos^m x$ thì ta dùng phép hạ bậc khi m, n chẵn. Ngược lại, ta dung biến đổi vi phân.

➢ Ví dụ: *Tìm nguyên hàm các hàm số*

a. $I_1 = \int \sin^2 2x dx$.

b. $I_2 = \int \cos^2 4x dx$.

c. $I_3 = \int \cos^4 x dx$.

d. $I_4 = \int \sin^3 x dx$.

e. $I_5 = \int \cos^5 x dx$.

f. $I_6 = \int \cos^2 x \sin^4 x dx$.

g. $I_7 = \int \sin 3x \cos x dx$.

h. $I_8 = \int \cos 2x \cos 3x dx$.

i. $I_9 = \int \frac{dx}{\sin 3x + \sin x}$.

➢ Lời giải

a. $I_1 = \int \sin^2 2x dx = \int \frac{1-\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 4x) dx$

$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C = \frac{x}{2} - \frac{1}{8}\sin 4x + C$.

b. $I_2 = \int \cos^2 4x dx = \int \frac{1+\cos 8x}{2} dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 8x) dx$

$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{8}\sin 8x\right) + C = \frac{x}{2} + \frac{1}{16}\sin 8x + C$.

c. Sử dụng liên tiếp công thức hạ bậc hai ta được:

$\cos^4 x = \left(\cos^2 x\right)^2 = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x\right)$

$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$

Khi đó $I_3 = \int \cos^4 x dx = \int \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x\right) dx$

$= \frac{3x}{8} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$.

Bình luận: Trong nguyên hàm trên ta thấy $\cos^4 x$ chẵn nên chỉ sử dụng duy nhất được phép hạ bậc. Nếu ở đây là $\cos^3 x$ hoặc $\cos^5 x$ thì chúng ta tách, và sử dụng vi phân.

d. $I_4 = \int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \sin x dx = -\int (1-\cos^2 x) d(\cos x)$

$= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$.

e. $I_5 = \int \cos^5 x dx = \int \cos^4 x \cos x dx = \int (1-\sin^2 x)^2 d(\sin x)$

$= \int (1 - 2\sin x + \sin^2 x) d(\sin x) = = \sin x - \sin^2 x + \frac{\sin^3 x}{3} + C$

$\Rightarrow I_5 = \sin x - \sin^2 x + \frac{\sin^3 x}{3} + C$.

f. Sử dụng liên tiếp các công thức hạ bậc hai cho $\sin^2 x$ và $\cos^2 x$ ta được:

$\cos^2 x \sin^4 x = \cos^2 x (\sin^2 x)^2 = \frac{1+\cos 2x}{2} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2$

$= \frac{1+\cos 2x}{2} \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1-\cos^2 2x}{4} \cdot \frac{1-\cos 2x}{2}$

$= \frac{1}{8} \sin^2 2x (1 - \cos 2x) = \frac{1}{8} \sin^2 2x - \frac{1}{8} \sin^2 2x \cos 2x$.

Khi đó $I_6 = \int \cos^2 x \sin^4 x dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx$

$= \frac{1}{8} \int \frac{1-\cos 4x}{2} dx - \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d(\sin 2x)$

$= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{16} \frac{\sin^3 2x}{3} + C$

$\Rightarrow I_6 = \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C$

g. Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng ta được

$\sin 3x \cos x = \frac{1}{2} (\sin 4x + \sin 2x)$

$I_7 = \int \frac{1}{2} (\sin 4x + \sin 2x) dx = \frac{1}{2} \int (\sin 4x + \sin 2x) dx$

$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) + C = -\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{4} \cos 2x + C$.

h. $I_8=\int\cos 2x\cos 3xdx=\int\frac{1}{2}(\cos 5x+\cos x)dx$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\sin 5x+\sin x\right)+C=\frac{1}{10}\sin 5x+\frac{1}{2}\sin x+C$.

i. $I_9=\int\frac{dx}{\sin 3x+\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin 2x\cos x}=\int\frac{dx}{4\sin x\cos^2 x}$

$=\frac{1}{4}\int\frac{\sin x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=-\frac{1}{4}\int\frac{d(\cos x)}{(1-\cos^2 x)\cos^2 x}$.

d. $I_4=\int\sin^3 xdx=\int\sin^2 x\sin xdx=-\int(1-\cos^2 x)d(\cos x)$

$=-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+C$.

e. $I_5=\int\cos^5 xdx=\int\cos^4 x\cos xdx=\int(1-\sin^2 x)^2 d(\sin x)$

$=\int(1-2\sin x+\sin^2 x)d(\sin x)=\ =\sin x-\sin^2 x+\frac{\sin^3 x}{3}+C$

$\Rightarrow I_5=\sin x-\sin^2 x+\frac{\sin^3 x}{3}+C$.

f. Sử dụng liên tiếp các công thức hạ bậc hai cho $\sin^2 x$ và $\cos^2 x$ ta được:

$\cos^2 x\sin^4 x=\cos^2 x(\sin^2 x)^2=\frac{1+\cos 2x}{2}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2$

$=\frac{1+\cos 2x}{2}.\frac{1-\cos 2x}{2}.\frac{1-\cos 2x}{2}\ =\frac{1-\cos^2 2x}{4}.\frac{1-\cos 2x}{2}$

$=\frac{1}{8}\sin^2 2x(1-\cos 2x)=\frac{1}{8}\sin^2 2x-\frac{1}{8}\sin^2 2x\cos 2x$.

Khi đó $I_6=\int\cos^2 x\sin^4 xdx=\frac{1}{8}\int\sin^2 2xdx-\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\cos 2xdx$

$=\frac{1}{8}\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx-\frac{1}{16}\int\sin^2 2xd(\sin 2x)$

$=\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{16}\frac{\sin^3 2x}{3}+C\ \Rightarrow I_6=\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C$.

g. Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng ta được

$\sin 3x\cos x=\frac{1}{2}(\sin 4x+\sin 2x)$

$I_7=\int\frac{1}{2}(\sin 4x+\sin 2x)dx=\frac{1}{2}\int(\sin 4x+\sin 2x)dx$

$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C=-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}\cos 2x+C.$

h. $I_8=\int \cos 2x\cos 3x dx=\int \frac{1}{2}(\cos 5x+\cos x)dx$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\sin 5x+\sin x\right)+C=\frac{1}{10}\sin 5x+\frac{1}{2}\sin x+C$

i. $I_9=\int \frac{dx}{\sin 3x+\sin x}=\int \frac{dx}{2\sin 2x\cos x}=\int \frac{dx}{4\sin x\cos^2 x}$

$=\frac{1}{4}\int \frac{\sin x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=-\frac{1}{4}\int \frac{d(\cos x)}{(1-\cos^2 x)\cos^2 x}$

Đặt $\cos x=t\Rightarrow d(\cos x)=dt$.

$I_9=-\frac{1}{4}\int \frac{dt}{(1-t^2)t^2}=-\frac{1}{4}\int\left(\frac{(1-t^2)+t^2}{(1-t^2)t^2}\right)dt=-\frac{1}{4}\left[\int \frac{dt}{t^2}+\int \frac{dt}{1-t^2}\right].$

Mà

$+\int \frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{t}+C_1.$

$+\int \frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\int \frac{(1-t)+(1+t)}{(1-t)(1+t)}dt=\frac{1}{2}\left[\int \frac{dt}{1+t}+\int \frac{dt}{1-t}\right]=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C_2.$

Vậy $I_9=-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right)+C.$

Thay $t=\cos x$ vào ta được $I_9=-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|\right)+C.$

Dạng 2: Nguyên hàm sử dụng biến đổi vi phân $\begin{cases}\sin u du=-d(\cos u)\\ \cos u du=d(\sin u)\end{cases}$.

➢ Ví dụ: Tính các nguyên hàm số

a. $I_1=\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x+3\sin x+2}.$

b. $I_2=\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx.$

c. $I_3=\int \frac{dx}{\cos x}.$

d. $I_4=\int \frac{dx}{\cos^3 x}.$

e. $I_5=\int\frac{dx}{\sin x\cos x}$.

g. $I_6=\int\frac{4\sin^4 xdx}{1+\cos x}$.

h. $I_7=\int\frac{\sin xdx}{\cos^3 x-1}$.

➢ Lời giải

a. Ta có $I_1=\int\frac{\cos x}{\sin^2 x+3\sin x+2}dx=\int\frac{d(\sin x)}{\sin^2 x+3\sin x+2}$.

Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=d(\sin x)$.

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2+3t+2}=\int\frac{(t+2)-(t+1)}{(t+2)(t+1)}dt=\int\frac{dt}{t+1}-\int\frac{dt}{t+2}$$

$$=\ln\left|\frac{t+1}{t+2}\right|+C=\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x+2}\right|+C.$$

b. $I_2=\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx=\int\frac{\sin^2 x\cos x}{\cos^2 x}dx$

$$=-\int\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}d(\sin x)=\int\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x-1}d(\sin x)$$

Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=d(\sin x)$.

$$I_2=\int\frac{t^2dt}{t^2-1}=\int\frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt$$

$$=t+\int\frac{dt}{t^2-1}=t+\frac{1}{2}\int\frac{(t+1)-(t-1)}{(t+1)(t-1)}dt$$

$$=t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\sin x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|+C$$

$$\Rightarrow I_2=\sin x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|+C.$$

c. $I_3=\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{\cos xdx}{\cos^2 x}=-\int\frac{d(\sin x)}{1-\sin^2 x}=\int\frac{d(\sin x)}{\sin^2 x-1}$.

Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=d(\sin x)$.

$$I_3=\int\frac{d(\sin x)}{\sin^2 x-1}=\int\frac{dt}{t^2-1}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(t+1)-(t-1)}{(t+1)(t-1)}dt=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|+C.$$

d. $I_4=\int\frac{dx}{\cos^3 x}=\int\frac{\cos x dx}{\cos^4 x}=-\int\frac{d(\sin x)}{\left(1-\sin^2 x\right)^2}.$

Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=d(\sin x).$

$$I_4=-\int\frac{dt}{\left(1-t^2\right)^2}=-\int\frac{dt}{\left(t^2-1\right)^2}$$

$$=\int\left[\frac{(t+1)-(t-1)}{2(t+1)(t-1)}\right]^2dt=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)^2dt$$

$$=\frac{1}{4}\left[\int\frac{dt}{(t-1)^2}+\int\frac{dt}{(t-1)^2}+\int\frac{2dt}{(t-1)(t+1)}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}+\int\frac{(t+1)-(t-1)dt}{(t+1)(t-1)}\right]=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)+C.$$

Thay $t=\sin x$ vào ta được

$$I_4=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{\sin x-1}-\frac{1}{\sin x+1}+\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|\right)+C$$

e. $I_5=\int\frac{dx}{\sin x\cos x}=\int\frac{\cos x}{\sin x\cos^2 x}dx=\int\frac{d(\sin x)}{\sin x\left(1-\sin^2 x\right)}.$

Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=d(\sin x).$

$$I_5=\int\frac{dt}{t\left(1-t^2\right)}=\int\frac{t^2+\left(1-t^2\right)}{t\left(1-t^2\right)}dt$$

$$=\int\frac{tdt}{1-t^2}+\int\frac{dt}{t}=-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1-t^2\right)}{1-t^2}+\ln|t|=-\frac{1}{2}\ln\left|1-t^2\right|+\ln|t|+C.$$

Thay $t=\sin x$ vào ta được $I_5=-\frac{1}{2}\ln\left|1-\sin^2 x\right|+\ln|\sin x|+C$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\cos^2 x\right|+\ln|\sin x|+C=\ln|\tan x|+C.$$

Vậy $I_5=\int\frac{dx}{\sin x\cos x}=\ln|\tan x|+C.$

f. Sử dụng phép biến đổi lượng giác ta có:

$$\frac{4\sin^3 x}{1+\cos x}=\frac{4\sin^2 x.\sin x}{1+\cos x}=\frac{4(1-\cos^2 x)\sin x}{1+\cos x}$$

$$=4(1-\cos x)\sin x=4\sin x-2\sin 2x.$$

Từ đó $I_6=\int\frac{4\sin^3 x}{1+\cos x}dx=\int(4\sin x-2\sin 2x)dx=-4\cos x+\cos 2x+C.$

g. $I_7=\int\frac{\sin x}{\cos^3 x-1}dx=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos^3 x-1}.$

Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=d(\cos x).$

$$I_7=-\int\frac{dt}{t^3-1}=-\int\frac{dt}{(t-1)(t^2+t+1)}.$$

Bằng kỹ thuật phân tích nhảy tầng lầu ta được

$$\frac{1}{(t-1)(t^2+t+1)}=\frac{3t^2-3(t^2+t+1)+3(t-1)}{-6(t-1)(t^2+t+1)}.$$

Khi đó $I_7=\frac{1}{6}\int\frac{3t^2-3(t^2+t+1)+3(t-1)}{(t-1)(t^2+t+1)}dt$

$$=\frac{1}{6}\int\frac{3t^2dt}{t^3-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t-1}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+t+1}.$$

+ Với $\int\frac{3t^2}{t^3-1}dt=\int\frac{d(t^3-1)}{t^3-1}=\ln|t^3-1|+C_1.$

+ Với $\int\frac{dt}{t-1}=\ln|t-1|+C_2.$

+ Với $\int\frac{dt}{t^2+t+1}=\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\arctan\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+C_3$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+C_3.$$

Vậy $I_7=\frac{1}{6}\ln|t^3-1|-\frac{1}{2}\ln|t-1|+\frac{1}{2}.\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+C$

$$=\frac{1}{6}\ln|t^3-1|-\frac{1}{2}\ln|t-1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

Bình luận: Ngoài cách sử dụng kĩ thuật nhảy tầng lầu trực tiếp như trên,

chúng ta có thể biến đổi theo hướng khác như sau

$$I_7 = -\int \frac{dt}{t^3-1} = -\int \frac{dt}{(t-1)(t^2+t+1)}$$

$$= -\int \frac{d(t-1)}{(t-1)\left[(t-1)^2+3(t-1)+3\right]} = -\int \frac{du}{u(u^2+3u+3)}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{u(u^2+3u+3)} = \frac{-1}{u^3+3u^2+3u}$$

$$= \frac{1}{6}\frac{(3u^2+6u+3)-3(u^2+3u^2+3u)+3u}{u(u^2+3u+3)}$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{3u^2+6u}{u^3+3u^2+3u} - \frac{1}{2u} + \frac{1}{2(u^2+3u+3)}.$$

Thay vào ta được

$$I_7 = \frac{1}{6}\ln\left|u^3+3u^2+3u\right| - \frac{1}{2}\ln|u| + \frac{1}{2}\int \frac{du}{\left(u+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|u^3+3u^2+3u\right| - \frac{1}{2}\ln|u| + \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2u+3}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Bài tập bạn đọc tự giải

Tìm nguyên hàm các hàm số

1) $I_1 = \int \cos^2 3x dx$

2) $I_2 = \int \sin^4 x dx$

3) $I_3 = \int \sin^5 x dx$

4) $I_4 = \int \sin x \cos 2x dx$

5) $I_5 = \int \sin 3x \cos x dx$

6) $I_6 = \int \frac{\tan^4 x}{\cos x} dx$

7) $I_7 = \int \frac{dx}{\sin^3 x}$

8) $I_8 = \int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^5 x}$

9) $I_9 = \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos x}$

10) $I_{10} = \int \frac{dx}{\sin x \cos^6 x}$

Dạng 3. Nguyên hàm dùng biến đổi vi phân $\begin{cases}\dfrac{du}{\cos^2 x}=d(\tan u)\\ \dfrac{du}{\sin^2 x}=-d(\cot u)\end{cases}$

Phương pháp: Các nguyên hàm chứa $\tan x$ và $\cot x$ thì ta thường dùng hằng đẳng thức

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x\\ \dfrac{1}{\sin^2 x}=1+\cot^2 x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\tan^2 x=1-\dfrac{1}{\cos^2 x}\\ \cot^2 x=1-\dfrac{1}{\sin^2 x}\end{cases}.$$

Nguyên hàm mà mẫu số là đẳng cấp bậc hai với $\sin x$ và $\cos x$:

$A\sin^2 x+B\sin x.\cos x+C\cos^2 x$ thì ta chia cả tử và mẫu cho $\cos^2 x$ hoặc $\sin^2 x$.

➢ *Ví dụ 1: Tìm các nguyên hàm của các hàm số*

a. $I_1=\int\tan^2 x dx$.

b. $I_2=\int\tan^3 x dx$.

c. $I_3=\int\left(\tan^3 x+\tan x\right)dx$.

➢ Lời giải

a. $I_1=\int\tan^2 x dx=\int\left(1-\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)dx=x-\tan x+C$.

b. Cách 1:

$$I_2=\int\tan^3 x dx=\int\tan^2 x\tan x dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\tan x dx$$

$$=\int\tan x\frac{dx}{\cos^2 x}-\int\tan x dx=\frac{\tan^2 x}{2}-\int\frac{\sin x}{\cos x}dx$$

$$=\frac{\tan^2 x}{2}+\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=\frac{\tan^2 x}{2}+\ln|\cos x|+C.$$

Cách 2:

$$I_2=\int\tan^3 x dx=\int\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}dx=\int\frac{\sin^2 x\sin x dx}{\cos^3 x}=-\int\frac{\left(1-\cos^2 x\right)d(\cos x)}{\cos^3 x}$$

$$=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos^3 x}+\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=\frac{1}{2\cos^2 x}+\ln|\cos x|+C.$$

Bình luận: Nhìn vào hai kết quả thu được từ hai phương án tính khác nhau, thoạt nhìn gây chúng ta cho cảm giác không biết cách nào đúng, cách nào sai. Nhưng quan sát kỹ, và thực hiện một phép biến đổi đơn giản ta thu được ngay cùng kết quả.

Thật vậy $\frac{\tan^2 x}{2}+\ln|\cos x|+C=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)+\ln|\cos x|+C$

$=\frac{1}{2\cos^2 x}+\ln|\cos x|+C-\frac{1}{2}$.

Do $\left(C-\frac{1}{2}\right)'=(C)'=0$ nên thực chất hai nguyên hàm có cùng kết quả.

c. $I_3=\int\left(\tan^3 x+\tan x\right)dx=\int\tan^3 x dx+\int\tan x dx$

$=\int\tan^2 x\tan x dx+\int\tan x dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\tan x dx+\int\tan x dx$

$=\int\tan x.\frac{dx}{\cos^2 x}-\int\tan x dx+\int\tan x dx=\frac{\tan^2 x}{2}+C.$

Bình luận: Cách giải bài trên là dựa vào cách giải truyền thống cho dạng toán này. Với các nguyên hàm có chứa $\tan^n x$ thì thông thường ta tách theo sơ đồ:

$$\tan^n x=\tan^{n-2}x\tan^2 x=\tan^{n-2}x.\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)=\tan^{n-2}x.\frac{1}{\cos^2 x}-\tan^{n-2}x...$$

với $n>2$.

Qua trình tách cứ tiếp diễn đến cuối cùng xuất hiện $\tan x$ hoặc $\tan x$, mà cách nguyên hàm này đều có công thức tính.

Tuy nhiên. Với bài toán trên có một đặc điểm riêng mà ta có thể trình bày cách giải ngắn gọn hơn như sau:

$$I_3=\int\left(\tan^3 x+\tan x\right)dx$$

$$=\int\left(\tan^2 x+1\right)\tan x dx=\int\tan x\frac{dx}{\cos^2 x}=\int\tan x d\left(\tan x\right)=\frac{\tan^2 x}{2}+C.$$

➢ Ví dụ 2: Tìm các nguyên hàm của các hàm số

a. $I_4 = \int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

b. $I_5 = \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$.

c. $I_6 = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^5 x \cos x}}$.

➢ Lời giải

a. $I_4 = \int \frac{1}{\cos^2 x}\frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1+\tan^2 x)d(\tan x) = \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + C$.

Bình luận: Với những nguyên hàm có xuất hiện tanx kèm theo $\cos^{2n} x$ ở mẫu số thì ta sử dụng phép phân tích như sau

$$\begin{cases} \frac{1}{\cos^{2n} x} = \frac{1}{\cos^{2n-2} x}.\frac{1}{\cos^2 x} = (\tan^2 x+1)^{n-1}.\frac{1}{\cos^2 x}. \\ \frac{dx}{\cos^2 x} = d(\tan x) \end{cases}$$

Dựa trên phép phân tích như trên ta có thể mở rộng them một số bài toan như sau:

$$J_1 = \int \frac{dx}{\cos^6 x} = \int \frac{1}{\cos^4 x}\frac{dx}{\cos^2 x} = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$= \int (1+\tan^2 x)^2 d(\tan x) = \frac{\tan^5 x}{5} + \frac{2\tan^3 x}{3} + \tan x + C$$

$$J_2 = \int \frac{\tan^{2010} x}{\cos^4 x} dx = \int \tan^{2010} x.\frac{1}{\cos^2 x}\frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$= \int \tan^{2010} x(1+\tan^2 x)d(\tan x) = \frac{\tan^{2013} x}{2013} + \frac{\tan^{2011} x}{2011} + C.$$

b. $I_5 = \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x} = \int \frac{dx}{\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^3 \cos^8 x}$

$$= \int \frac{1}{\tan^3 x}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^3 \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\left(1-\tan^2 x\right)^3}{\left(\tan x\right)^3} d\left(\tan x\right)$$

$$= \int \frac{1+3\tan^2 x+3\tan^4 x+\tan^6 x}{\tan^3 x} d\left(\tan x\right)$$

$$= \int \left[\left(\tan x\right)^{-3} + \frac{3}{\tan x} + 3\tan x + \tan^3 x\right] d\left(\tan x\right)$$

$$= -\frac{1}{2\tan^2 x} + 3\ln\left|\tan x\right| + \frac{3\tan^2 x}{2} + \frac{\tan^4 x}{4} + C.$$

c. $I_6 = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^5 x \cos x}} = \int \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^5}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

$$= \int \left(\tan x\right)^{\frac{-5}{3}} d(\tan x) = -\frac{3}{2}\left(\tan x\right)^{\frac{-2}{3}} + C = \frac{-3}{2\sqrt[3]{\tan^2 x}} + C.$$

Bình luận: Trong cả hai nguyên hàm I_5 và I_6 ở trên chúng ta dễ dàng nhận thấy đặc điểm chung của hai nguyên hàm là mẫu số có chứa $\sin x$ và $\cos x$ với tổng lũy thừa là một số chẵn. Phương pháp giải trên là cách giải tổng quát cho dạng nguyên hàm này. Tuy nhiên, nếu tổng lũy thừa quá lớn thì bài toán sẽ trở nên phức tạp hơn nhiều!

➢ **Ví dụ 3: Tìm các nguyên hàm của các hàm số**

a. $I_7 = \int \frac{dx}{2\sin^2 x - 5\sin x \cos x - 3\cos^2 x}.$

b. $I_8 = \int \frac{dx}{\left(\cos x - \sqrt{3}\sin x\right)^2}.$

➢ **Lời giải**

a. Ở mẫu số ta thấy co dạng biểu thức đẳng thức bậc hai với $\sin x$ và $\cos x$. Trong chuyên đề về phương trình lượng giác ta cũng biết cách giải cho loại phương trình đẳng cấp bậc hai này, với nguyên hàm cũng tương tự. Chia cả tử và mẫu số cho $\cos^2 x$ ta được:

$$I_7=\int\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x}-\frac{5\sin x\cos x}{\cos^2 x}-\frac{3\cos^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$=\int\frac{d(\tan x)}{2\tan^2 x-5\tan x-3}=\int\frac{dt}{2t^2-5t-3};(t=\tan x)$$

$$\Rightarrow I_7=\int\frac{dt}{(t-3)(2t+1)}=\int\frac{(2t+1)-2(t-3)}{7.(t-3)(2t+1)}dt$$

$$=\frac{1}{7}\int\frac{dt}{t-3}-\frac{1}{7}\int\frac{2dt}{2t+1}=\frac{1}{7}\ln\left|\frac{t-3}{2t+1}\right|+C=\frac{1}{7}\ln\left|\frac{\tan x-3}{2\tan x+1}\right|+C.$$

b. $I_8=\int\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\left(1-\sqrt{3}\tan x\right)^2}=\int\frac{d(\tan x)}{\left(1-\sqrt{3}\tan x\right)^2}$

$$=\frac{-1}{\sqrt{3}}\int\frac{d\left(1-\sqrt{3}\tan x\right)}{\left(1-\sqrt{3}\tan x\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}\left(1-\sqrt{3}\tan x\right)}+C.$$

Bình luận: Mẫu số trong nguyên hàm trên có dạng là một biểu thức lượng giác khá đặc biệt, thế nên a cũng có thể tìm ra một cách giải dặc biệt khác.

Thật vậy $\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)=2\cos x\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

Từ đó $I_8=\int\frac{dx}{\left(\cos x-\sqrt{3}\sin x\right)^2}$

$$=\int\frac{dx}{4\cos^2 x\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{1}{4}\int\frac{d\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos^2 x\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{1}{4}\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+C.$$

Bằng phép biến đổi lượng giác cho cách giải trên, hoặc khai triển công thức lượng giác cho cách giải dưới ta sẽ thu được cùng một kết quả. Nếu các em không tự tin với khẳng định đó thấy sẽ chứng minh điều này.

Thật vậy $\frac{1}{4}\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+C=\frac{1}{4}.\frac{\tan x+\tan\frac{\pi}{3}}{1-\tan x\tan\frac{\pi}{3}}+C=\frac{1}{4}\frac{\tan x+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\tan x}+C$

$$=\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\sqrt{3}\tan x\right)+\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}{4\left(1-\sqrt{3}\tan x\right)}+C=-\frac{1}{4\sqrt{3}}+\frac{\frac{4}{\sqrt{3}}}{4\left(1-\sqrt{3}\tan x\right)}+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}\left(1-\sqrt{3}\tan x\right)}+C-\frac{1}{4\sqrt{3}}.$$

Rõ ràng $\left(C-\frac{1}{4\sqrt{3}}\right)'=(C)'=0$.

Ví dụ 4: Tìm các nguyên hàm của các hàm số

a. $I_9=\int\cot^4 x dx$.

b. $I_{10}=\int\frac{\cos x}{\sin^5 x}dx$.

c. $I_{11}=\int\frac{dx}{1+\sin 2x}$.

➢ Lời giải

a. $I_9=\int\cot^4 x dx=\int\cot^2 x\cot^2 x dx=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)\cot^2 x dx$

$$=\int\cot^2 x\frac{dx}{\sin^2 x}-\int\cot^2 x dx=-\int\cot^2 x d\left(\cot^2 x\right)-\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx$$

$$=\frac{-\cot^3 x}{3}+\cot x+x+C.$$

b. Xét $I_{10}=\int\frac{\cos x}{\sin^5 x}dx$.

Cách 1: $I_{10}=\int\frac{\cos x}{\sin^5 x}dx=\int\frac{d\left(\sin x\right)}{\sin^5 x}=\frac{-1}{4\sin^4 x}+C$.

Cách 2: $I_{10}=\int\frac{\cos x}{\sin x}.\frac{dx}{\sin^4 x}=\int\cot x.\frac{1}{\sin^2 x}.\frac{dx}{\sin^2 x}$

$$=-\int\cot x.\left(1+\cot^2 x\right)d\left(\cot x\right)=-\frac{\cot^4 x}{4}-\frac{\cot^2 x}{2}+C.$$

Bình luận: Bằng phép xử lý lượng giác đơn giản ta cũng thu được cùng kết quả với hai cách giải trên.

Tương tự như nguyên hàm $\tan x$, với nguyên hàm $\cot x$ mà cho chúng ta cũng sử dụng thủ thuật phân tích

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sin^{2n}x}=\dfrac{1}{\sin^{2n-2}x}\cdot\dfrac{1}{\sin^2 x}=\left(1+\cot^2 x\right)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{\sin^2 x}\\ \dfrac{dx}{\sin^2 x}=-d\left(\cot x\right)\end{cases}$$

để đưa về nguyên hàm cơ bản có chứa $\cot x$ và $\cot^2 x$ đã biết.

c. $I_{11}=\int\dfrac{dx}{\left(\sin x+\cos x\right)^2}=\int\dfrac{dx}{2\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}$

$=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{d\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}=-\dfrac{1}{2}\cot\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot$

Dạng 4. Nguyên hàm dung biến đổi vi phân

$$\begin{cases}d\left(A\sin x+B\cos x+C\right)=\left(A\cos x-B\sin x\right)dx\\ d\left(A'\sin x-B'\cos x+C\right)=\left(A'\cos x+B'\sin x\right)dx\end{cases}$$

Phương pháp: Các nguyên hàm dạng này thường sử dụng một số công thức lượng giác $\begin{cases}1\pm\sin 2x=\left(\sin x\pm\cos x\right)^2\\ \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x\end{cases}$.

Để tìm nguyên hàm, ta thường tìm vi phân của mẫu số:

$d\left(A\sin x+B\cos x+C\right)=\left(A\cos x-B\sin x\right)dx$.

➢ Ví dụ: Tìm các nguyên hàm của các hàm số

a. $I_1=\int\dfrac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx$.

b. $I_2=\int\dfrac{\cos 2x}{1+\sin 2x}dx$.

c. $I_3=\int\dfrac{\sin 2x+2\cos 4x}{\cos 2x-\sin 4x}dx$.

➢ Lời giải

a. Ta có $d\left(\sin x+\cos x\right)=\left(\cos x-\sin x\right)dx$

$$I_1=\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\ln\left|\sin x+\cos x\right|+C.$$

b. $I_2=\int\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}dx=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{(\sin x+\cos x)^2}dx$

$$=\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=\ln\left|\sin x+\cos x\right|+C.$$

Bình luận: Do $\cos 2x=\frac{1}{2}d(\sin 2x)=\frac{1}{2}d(1+\sin 2x)$ nên ta còn có thể giải theo cách lấy vi phân trực tiếp như sau

$$I_2=\int\frac{\cos 2xdx}{1+\sin 2x}=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+\sin 2x)}{1+\sin 2x}=\frac{1}{2}\ln\left|1+\sin 2x\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|(\sin x+\cos x)^2\right|+C=\ln\left|\sin x+\cos x\right|+C.$$

c. Xét $I_3=\int\frac{\sin 2x+2\cos 4x}{\cos 2x-\sin 4x}dx$.

Vi phân mẫu số ta có $d(\cos 2x-\sin 4x)=(-2\sin 2x-4\cos 4x)dx$

$$\Rightarrow(\sin 2x+2\cos 4x)dx=\frac{d(\cos 2x-\sin 4x)}{2}.$$

Từ đó ta thu được $I_3=\int\frac{\sin 2x+2\cos 4x}{\cos 2x-\sin 4x}dx$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{d(\cos 2x-\sin 4x)}{\cos 2x-\sin 4x}=-\frac{1}{2}\ln\left|\cos 2x-\sin 4x\right|+C.$$

Bài tập bạn đọc tự giải

Tìm nguyên hàm các hàm số

1) $I_1=\int\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}dx$.

2) $I_2=\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos^3 x}$.

3) $I_3=\int\frac{dx}{(\sin x-2\cos x)^2}$.

4) $I_4=\int\frac{dx}{\sin^2 x-6\cos^2 x}$.

5) $I_5=\int\frac{dx}{\sin^2 x-9\cos^2 x}$.

6) $I_6=\int\frac{dx}{\sin^2 x-2\cos^2 x+1}$.

7) $I_7=\int(\cot^3 x+\cot x)dx$.

8) $I_8=\int\frac{2\cos x-3\sin x}{2\sin x-3\cos x+1}dx$.

Dạng 5. Nguyên hàm dung biến đổi vi phân

$$\begin{cases} d\left(A\sin^2 x \pm B\cos^2 x \pm C\right) \rightleftarrows (A \mp B)\sin 2x dx \\ d\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) \rightleftarrows -\sin 4x dx \end{cases}$$

Phương pháp: Ta có $\sin^4 x + \cos^4 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2}.\frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x.$$

Từ đó $d\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) = d\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x\right) = -\sin 4x dx$.

Dạng nguyên hàm thường được gọi là "ngụy trang" vào cáo hàm số có vẻ phức tạp, nên các bạn hãy cố gắng nhớ các vi phân của nó.

Với các nguyên hàm lượng giác mà mẫu số có vẻ "dài dòng" thì một kinh nghiệm là các em hãy lấy vi phân của mẫu số xem tử số có quan hệ với vi phân sđó hay không?

Chú ý: Ngoài hai công thức trên dạng nguyên hàm này có thể chứa

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x.$$

➢ Ví dụ 1: Tìm các nguyên hàm của các hàm số

a. $I_1 = \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}} dx$.

b. $I_2 = \int \frac{\sin 2x}{2\sin^2 x - 4\cos 2x + 5\cos^2 x} dx$.

➢ Lời giải

a. Ta có $d\left(\cos^2 x + 4\sin^2 x\right) = \left(-2\sin x\cos x + 8\sin x\cos x\right)dx$

$= 6\sin x\cos x dx = 3\sin 2x dx \Rightarrow \sin 2x dx = \frac{1}{3}d\left(\cos^2 x + 4\sin^2 x\right)$.

Từ đó $I_1 = \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}} dx = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(\cos^2 x + 4\sin^2 x\right)}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}}$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{d\left(\cos^2 x + 4\sin^2 x\right)}{2\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}} = \frac{2}{3}\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x} + C.$$

Bình luận: Ngoài cách giải như trên, chúng ta có thể mạnh dạn vận dụng kiến thức lượng giác để biến đổi mẫu số gọn gàng hơn như sau

$$\cos^2 x+4\sin^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}+4\frac{1-\cos 2x}{2}=-\frac{3}{2}\cos 2x+\frac{5}{2}.$$

$$\text{Khi đó } I_1=\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{-\frac{3}{2}\cos 2x+\frac{5}{2}}}dx=\frac{1}{3}\int\frac{d\left(-\frac{3}{2}\cos 2x+\frac{5}{2}\right)}{\sqrt{-\frac{3}{2}\cos 2x+\frac{5}{2}}}$$

$$=\frac{2}{3}\int\frac{d\left(-\frac{3}{2}\cos 2x+\frac{5}{2}\right)}{2\sqrt{-\frac{3}{2}\cos 2x+\frac{5}{2}}}=\frac{2}{3}\sqrt{-\frac{3}{2}\cos 2x+\frac{5}{2}}+C.$$

Rõ ràng hai kết quả thu được hoàn toàn giống nhau!

b. Ta có $2\sin^2 x-4\cos 2x+5\cos^2 x$

$$=(1-\cos 2x)-4\cos 2x+\frac{5}{2}(1+\cos 2x)=-\frac{5}{2}\cos 2x+\frac{7}{2}.$$

$$\text{Khi đó } I_2=\int\frac{\sin 2x}{-\frac{5}{2}\cos 2x+\frac{7}{2}}dx=-2\int\frac{\sin 2x}{5\cos 2x-7}dx$$

$$=\frac{2}{5}\int\frac{d(5\cos 2x-7)}{5\cos 2x-7}=\frac{2}{5}\ln|5\cos 2x-7|+C.$$

➢ Ví dụ 2: Tìm các nguyên hàm của các hàm số

a. $I_1=\int\frac{2\sin 4x}{\sqrt{\sin^4 x+\cos^4 x}}dx.$ **b.** $I_2=\int\frac{\sin 4x}{\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)^{2010}}dx.$

c. $I_3=\int\frac{\sin 2x+2\cos 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx.$ **d.** $I_4=\int\frac{\sin x\cos x}{\sin^6 x+\cos^6 x}dx.$

➢ Lời giải

Bình luận: Ngoài cách giải truyền thống cho loại nguyên hàm này bằng cách lấy vi phân trực tiếp cho biểu thức ở mẫu số, ở đây thầy giới thiệu cách làm them về biến đổi lượng giác kết hợp với vi phân.

a. Ta có $\sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\frac{1}{2}.\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$

$$\Rightarrow I_1=\int\frac{2\sin 4x}{\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x}}dx=\int\frac{4\sin 4x}{\sqrt{3+\cos 4x}}dx$$

$$=\int\frac{d(\cos 4x)}{\sqrt{3+\cos 4x}}=-2\int\frac{d(3+\cos 4x)}{2\sqrt{3+\cos 4x}}=-2\sqrt{3+\cos 4x}+C.$$

b. Tương tự, thay $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$

$$\Rightarrow I_2=\int\frac{\sin 4x}{\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x\right)^{2010}}dx=-\frac{1}{4}\int\frac{d(\cos 4x)}{\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x\right)^{2010}}$$

$$=-\int\frac{d\left(\frac{1}{4}\cos 4x+\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x\right)^{2010}}=\frac{1}{2009\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x\right)^{2009}}+C$$

$$=\frac{1}{2009\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)^{2009}}+C.$$

c. $I_3=\int\frac{\sin 2x+2\cos 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=\int\frac{\sin 2x+2\cos 2x}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}dx$

$$=\int\frac{2\sin 2x+4\cos 2x}{2-\sin^2 2x}dx=\int\frac{2\sin 2x}{2-\sin^2 2x}dx+\int\frac{4\cos 2x}{2-\sin^2 2x}dx.$$

$$+\int\frac{2\sin 2x}{2-\sin^2 2x}dx=\int\frac{2\sin 2x}{2-\left(1-\cos^2 2x\right)}dx=\int\frac{2\sin 2x}{1+\cos^2 2x}dx$$

$$=\int\frac{d(\cos 2x)}{1+\cos^2 2x}=\arctan(\cos 2x)+C_1.$$

$$+\int\frac{4\cos 2x}{2-\sin^2 2x}dx=2\int\frac{d(\sin 2x)}{2-\sin^2 2x}=2\int\frac{dt}{2-t^2}$$

$$=\frac{-2}{2\sqrt{2}}\int\frac{\left(t+\sqrt{2}\right)-\left(t-\sqrt{2}\right)}{\left(t+\sqrt{2}\right)\left(t-\sqrt{2}\right)}dt=\frac{-1}{\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{t-\sqrt{2}}-t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)dt$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C_2=\frac{-1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sin 2x-\sqrt{2}}{\sin 2x+\sqrt{2}}\right|+C_2.$$

Từ đó ta được $I_3 = \arctan(\cos 2x) + C_1 + \frac{-1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sin 2x - \sqrt{2}}{\sin 2x - \sqrt{2}} \right| + C_2$

$= \arctan(\cos 2x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sin 2x - \sqrt{2}}{\sin 2x - \sqrt{2}} \right| + C$.

d. Ta có $\begin{cases} \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \\ \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \end{cases}$.

$$I_4 = \int \frac{\frac{1}{2} \sin 2x}{1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x} dx = \int \frac{2 \sin 2x}{4 - 3 \sin^2 2x} dx = -\int \frac{d(\cos 2x)}{4 - 3 + 3 \cos^2 2x}.$$

Đặt $t = \cos 2x \Rightarrow dt = d(\cos 2x)$.

$$I_4 = \int \frac{-dt}{1 + 3t^2} = -\int \frac{dt}{\left(\sqrt{3}t\right)^2 + 1} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d\left(\sqrt{3}t\right)}{\left(\sqrt{3}t\right)^2 + 1} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\sqrt{3}t\right) + C$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\sqrt{3} \cos 2x\right) + C.$$

Dạng 6. Nguyên hàm dùng biến đổi vi phân

$$d\left(\tan \frac{x}{2}\right) \rightleftarrows \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \rightleftarrows \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) dx.$$

a. Xét nguyên hàm $I_1 = \int \frac{dx}{A \sin x + B \cos x + C}$.

Phương pháp: Để tính nguyên hàm trên ta xét hai trường hợp:

- Nếu $C = \pm\sqrt{A^2 + B^2}$

$\Rightarrow A \sin x + B \cos x + C = A \sin x + B \cos x \pm \sqrt{A^2 + B^2}$

$= \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x + \varphi) \pm \sqrt{A^2 + B^2}$.

Ở dây, ta đã biết phép biến đổi lượng giác

$$A \sin x + B \cos x = \begin{cases} \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x + \alpha) \\ \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x + \beta) \end{cases}.$$

Khi đó $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{A^2 + B^2} \cos(x + \alpha) \pm \sqrt{A^2 + B^2}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}\int\frac{dx}{\cos(x+\alpha)\pm 1}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}\displaystyle\int\frac{dx}{2\cos^2\left(\dfrac{x+\alpha}{2}\right)}\\ \dfrac{-1}{\sqrt{A^2+B^2}}\displaystyle\int\frac{dx}{2\sin^2\left(\dfrac{x+\alpha}{2}\right)}\end{cases}.$$

- Nếu $C\neq\pm\sqrt{A^2+B^2}$ thì ta đặt

$$t=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow\begin{cases}dt=\dfrac{1}{2}\dfrac{dx}{\cos^2\dfrac{x}{2}}=\dfrac{1}{2}\left(1+\tan^2\dfrac{x}{2}\right)dx\Rightarrow dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}\\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2};\ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{cases}.$$

Thay vào ta tính được I_1 theo ẩn t.

Chú ý: Một số công thức tính nhanh:

$$\begin{cases}\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\\ \sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\\ \sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\end{cases}.$$

➢ Ví dụ 1: Tìm các nguyên hàm của các hàm số

a. $I_1=\int\frac{dx}{\sin x+\cos x+\sqrt{2}}$.

b. $I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{3}\sin x-\cos x-2}$.

c. $I_3=\int\frac{dx}{3\sin x+\cos x+1}$.

d. $I_4=\int\frac{dx}{\sin x-\cos x-1}$.

➢ Lời giải

a. Ta có $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$$\Rightarrow\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{1+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{2\cos^2\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{8}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)+C.$$

Vậy $I_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)+C.$

Bình luận: Trong nguyên hàm trên, ở biểu thức $\sin x+\cos x$ ta thống nhất chuyển về hàm cos để sử dụng công thức lượng giác

$$1+\cos a=2\cos^2\frac{a}{2}\Rightarrow\int\frac{dx}{1+\cos a}=\int\frac{dx}{2\cos^2\frac{a}{2}}.$$

b. Ta có $\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)=-2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right).$

$$I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{3}\sin x-\cos x-2}=\int\frac{dx}{-2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2}=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}=-\frac{1}{2}\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+C.$$

c. Đặt $t=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow dt=\frac{1}{2}\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx\Rightarrow dx=\frac{2}{1+t^2}dt.$

Ta có $\sin x=\frac{2t}{1+t^2};\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$

Khi đó $I_3=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{6t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}dt=2\int\frac{dt}{6t+1-t^2+1+t^2}$

$$=2\int\frac{dt}{6t+2}=\frac{1}{3}\int\frac{d(6t+2)}{6t+2}=\frac{1}{3}\ln|6t+2|+C=\frac{1}{3}\ln\left|6\tan\frac{x}{2}+2\right|+C.$$

d. Đặt $t=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow dt=\frac{1}{2}\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx\Rightarrow dx=\frac{2}{1+t^2}dt$

Ta có $\sin x=\frac{2t}{1+t^2};\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$

Khi đó $I_4=\int\frac{dx}{\sin x-\cos x-1}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}-1}dt$

$=\int\frac{2dt}{2t-1+t^2-1-t^2}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$

b. Xét nguyên hàm $I_2=\int\frac{A\sin x+B\cos x+C}{A'\sin x+B'\cos x+C'}dx$

Với dạng nguyên hàm này ta sẽ sử dụng phương pháp đồng nhất như với nguyên hàm của hàm phân thức hữu tỉ đã xét bằng việc phân tích:

$$\frac{A\sin x+B\cos x+C}{A'\sin x+B'\cos x+C'}=\frac{m\left(A'\cos x-B'\sin x\right)+n\left(A'\sin x+B'\cos x+C'\right)+p}{A'\sin x+B'\cos x+C'}$$

Đồng nhất theo các hệ số của $\sin x$ và $\cos x$ ta được

$$\begin{cases}A=-mB'+nA'\\B=mA'+nB'\\C=nC'+p\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m\\n\\p\end{cases}.$$

Từ đó ta được $I_2=\int\frac{A\sin x+B\cos x+C}{A'\sin x+B'\cos x+C'}dx$

$=\int\frac{m\left(A'\cos x-B'\sin x\right)}{A'\sin x+B'\cos x+C'}dx+p\int\frac{dx}{A'\sin x+B'\cos x+C'}$

$=m\ln\left|A'\sin x+B'\cos x+C'\right|+nx+p\int\frac{dx}{A'\sin x+B'\cos x+C'}.$

Ví dụ: Tìm các nguyên hàm của các hàm số

a. $I_1=\int\frac{\sin x+3\cos x-1}{\sin x+\cos x+2}dx.$

b. $I_2=\int\frac{7\sin x-5\cos x}{\left(3\sin x+4\cos x\right)^2}dx.$

➢ **Lời giải**

a. Ta có phân tích

$$\frac{\sin x+3\cos x-1}{\sin x+\cos x+2}=\frac{A\left(\cos x-\sin x\right)+B\left(\sin x+\cos x+2\right)+C}{\sin x+\cos x+2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1=-A+B \\ 3=A+B \\ -1=2B+C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=2 \\ C=-5 \end{cases}.$$

$$I_1=\int \frac{(\cos x-\sin x)+2(\sin x+\cos x+2)-5}{\sin x+\cos x+2}dx$$

$$=\int \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x+2}dx+2\int dx-5\int \frac{dx}{\sin x+\cos x+2}$$

$$=\int \frac{d(\sin x+\cos x+2)}{\text{in}x+\cos x+2}+2x-5J=\ln\left|\sin x+\cos x+2\right|+2x-5J.$$

Xét $J=\int \frac{dx}{\sin x+\cos x+2}$.

Đặt $t=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow d\begin{cases} dt=\frac{1}{2}\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx\Rightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2};\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$

$$J=\int \frac{dx}{\sin x+\cos x+2}=\int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}+2}dt$$

$$=2\int \frac{dt}{2t+1-t^2+2+2t^2}=2\int \frac{dt}{t^2+2t+3}=2\int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)+C=\sqrt{2}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}}\right)+C_1$$

$$\Rightarrow I_1=\ln\left|\sin x+\cos x+2\right|+2x-5\sqrt{2}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

b. Ta có phân tích

$$\frac{7\sin x-5\cos x}{(3\sin x+4\cos x)^2}=\frac{A(3\cos x-4\sin x)+B(3\sin x+4\cos x)}{(3\sin x+4\cos x)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7 = -4A + 3B \\ -5 = 3A + 4B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{43}{25} \\ B = \dfrac{1}{25} \end{cases}.$$

$$I_2 = \int \frac{7\sin x - 5\cos x}{(3\sin x + 4\cos x)^2} dx = \int \frac{-\frac{43}{25}(3\cos x - 4\sin x) + \frac{1}{25}(3\sin x + 4\cos x)}{(3\sin x + 4\cos x)^2} dx$$

$$= -\frac{43}{25}\int \frac{3\cos x - 4\sin x}{(3\sin x + 4\cos x)^2} dx + \frac{1}{25}\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}$$

$$= -\frac{43}{25}\int \frac{d(3\sin x + 4\cos x)}{(3\sin x + 4\cos x)^2} + \frac{1}{25}\int \frac{dx}{(3\sin x + 4\cos x)}$$

$$= \frac{43}{25(3\sin x + 4\cos x)} + \frac{1}{25}J.$$

Xét $J = \int \frac{dx}{(3\sin x + 4\cos x)}$.

Đặt $t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} dt = \frac{1}{2}\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right)dx \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2};\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$.

$$J = \int \frac{dx}{(3\sin x + 4\cos x)} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{6t}{1+t^2} - \frac{4(1-t^2)}{1+t^2}} dt = \int \frac{dt}{2t^2 + 3t - 2}$$

$$= \int \frac{dt}{(2t-1)(t+2)} = -\frac{1}{5}\int \frac{(2t-1) - 2(t+2)}{(2t-1)(t+2)} dt$$

$$= -\frac{1}{5}\ln|t+2| + \frac{2}{5}\int \frac{dt}{2t-1} = -\frac{1}{5}\ln|t+2| + \frac{1}{5}\ln|2t-1| + C_1$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{2t-1}{t+2}\right| + C = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{2\tan\frac{x}{2} - 1}{\tan\frac{x}{2} + 2}\right| + C.$$

Vậy $I_2=\dfrac{43}{25\left(3\sin x+4\cos x\right)}+\dfrac{1}{125}\ln\left|\dfrac{2\tan\dfrac{x}{2}-1}{\tan\dfrac{x}{2}+2}\right|+C$.

Bài tập bạn đọc tự giải

➢ Tìm các nguyên hàm của các hàm số

1) $I_1=\int\dfrac{\sin 2x}{3\sin^2 x+\cos^2 x}dx$.

2) $I_2=\int\dfrac{\cos x\sin x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}dx$.

3) $I_3=\int\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x+2}dx$.

4) $I_4=\int\dfrac{dx}{\cos x-\sin x-\sqrt{2}}$.

5) $I_5=\int\dfrac{dx}{\sqrt{3}\cos x-\sin x+2}$.

6) $I_6=\int\dfrac{dx}{\cos x+\sin x+\sqrt{2}}$.

7) $I_7=\int\dfrac{\sin x+3\cos x-1}{\sin x+\cos x+2}dx$.

8) $I_8=\int\dfrac{dx}{3\sin x+\cos x}$.

9) $I_9=\int\dfrac{\sin x-\cos x+1}{\sin x+2\cos x+3}dx$.

10) $I_{10}=\int\dfrac{\sin 4x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$.

11) $I_{11}=\int\dfrac{\sin 4x}{\cos^2 x\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)}dx$.

12) $I_{12}=\int\dfrac{\sin 4x}{\tan\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)}dx$.

Bài 1 Tính các tích phân

a. $I=\int\limits_0^{\pi}\cos^4 x dx$.

b. $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)dx$.

c. $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\sin 5x dx$.

d. $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{4\sin^3 x}{1+\cos x}dx$.

e. $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos x}dx$.

➢ Lời giải

a. $I=\int_0^{\pi}\cos^4 x dx=\int_0^{\pi}\left(\cos^2 x\right)^2 dx=\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$

$=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{\cos 4x}{2}\right)dx$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x+\sin 2x+\frac{\sin 4x}{8}\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{3\pi}{8}.$

b. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x\right)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-3\sin^2 x\cos^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\right)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x\right)dx=\left(\frac{5}{8}x+\frac{3}{32}\sin 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{5\pi}{16}.$

c. $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\sin 5x dx$

$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos 3x-\cos 7x\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 7x}{7}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{4}{21}.$

d. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\sin^3 x}{1+\cos x}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\left(1-\cos^2 x\right)\sin x}{1+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\left(1-\cos x\right)d\left(1-\cos x\right)=2\left(1-\cos x\right)^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2.$

e. $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\sin x}{\cos x}-1\right)dx$

$=\left(-\ln\left|\cos x\right|-x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\ln 2-\frac{\pi}{3}.$

Bài 2. Tính các tích phân

a. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+\cos 2x}$.

b. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cos 2x dx$.

c. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^3 x-1\right)\cos^2 x dx$.

d. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^6 x}$.

e. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)dx$.

➢ Lời giải

a. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+\cos 2x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{2\cos^2 x}=\frac{1}{2}\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}$.

b. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cos 2x dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2x\right)\cos 2x dx$

$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2x+\cos 4x\right)dx=\frac{1}{4}\left(x+\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{8}$.

c. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^3 x-1\right)\cos^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^5 x-\cos^2 x\right)dx$.

$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 x\right)^2 d\left(\sin x\right)=\frac{8}{15}$.

$B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2x\right)dx=\frac{\pi}{4}$.

Vậy $I=\frac{8}{15}-\frac{\pi}{4}$.

d. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^6 x}$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^4 x\cos^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+2\tan^2 x+\tan^4 x\right)d\left(\tan x\right)=\frac{28}{15}$.

e. Ta có $\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)=\frac{33}{64}+\frac{7}{16}\cos 4x+\frac{3}{64}\cos 8x$

$\Rightarrow I=\frac{33}{128}\pi$.

Bài 3. Tính các tích phân

a. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)dx$.

b. $I=\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}}\frac{\cot x-\tan x-2\tan 2x}{\sin 4x}dx$.

c. $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{2\sin x-\sqrt{3}}$.

d. $I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{dx}{2+\sqrt{3}\sin x-\cos x}$.

e. $I=\int\frac{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)}{\sin 2x+\cos 2x+\sqrt{2}}dx$.

➢ Lời giải

a. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)d\left(\sin 2x\right)=0$.

b. Ta có $I=\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}}\frac{2\cot 2x-2\tan 2x}{\sin 4x}dx=\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}}\frac{2\cot 4x}{\sin 4x}dx=2\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}}\frac{\cos 4x}{\sin^2 4x}dx$

$=-\frac{1}{2\sin 4x}\Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}}=\frac{2\sqrt{3}-3}{6}$.

c. Ta có

$I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{\sin x-\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{\sin x-\sin\frac{\pi}{3}}$

$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\sin x-\sin\frac{\pi}{3}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos\left(\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)-\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right)}{2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right).\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}dx+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}dx$$

$$=\ln\left|\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{6}}-\ln\left|\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{6}}.$$

d. $I=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{dx}{1-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}=I=\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{dx}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{4\sqrt{3}}.$

e. Ta có $I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{1+\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}{1+\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}dx$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\int\frac{\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}{1+\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}dx+\int\frac{dx}{\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\right]^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\int\frac{\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}{1+\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin^2\left(x+\frac{3\pi}{8}\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\ln\left|1+\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\cot\left(x-\frac{3\pi}{8}\right)\right]+C.$$

Bài 4. Tính các tích phân

a. $I=\int\frac{8\cos^2x-\sin2x-3}{\sin x-\cos x}dx.$

b. $I=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin x}dx.$

c. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin2x}{(2+\sin x)^2}dx.$

d. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin4x}{\sqrt{\sin^6x+\cos^6x}}dx.$

e. $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos x\sqrt{3+\sin^2x}}dx.$

➢ Lời giải

a. $I=\int\frac{(\sin x-\cos x)^2+4\cos 2x}{\sin x-\cos x}dx=\int\left[\sin x-\cos x-4(\sin x+\cos x)\right]dx$

$=3\cos x-5\sin x+C$.

b. $I=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}dx=\int\limits_0^{2\pi}\left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|dx=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}\left|\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|dx$

$=\sqrt{2}\left[\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dx-\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dx\right]=4\sqrt{2}$.

c. Ta có $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}dx=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{(2+\sin x)^2}dx$.

Đặt $t=2+\sin x$.

$I=2\int\limits_2^3\frac{t-2}{t^2}dt=2\int\limits_2^3\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}\right)dt=2\left(\ln t+\frac{2}{t}\right)\Big|_2^3=2\ln\frac{3}{2}-\frac{2}{3}$.

d. $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 4x}{\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2 2x}}dx$.

Đặt $t=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$; $I=\int\limits_1^{\frac{1}{4}}\left(-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt=\frac{4}{3}\sqrt{t}\Big|_{\frac{1}{4}}^1=\frac{2}{3}$.

e. Đặt $t=\sqrt{3+\sin^2 x}=\sqrt{4-\cos^2 x}$.

Ta có $\cos^2 x=4-t^2$ và $dt=\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{3+\sin^2 x}}dx$.

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos x\sqrt{3+\sin^2 x}}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x\sqrt{3+\sin^2 x}}dx$

$=\int\limits_{\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{15}}{2}}\frac{dt}{4-t^2}=\frac{1}{4}\int\limits_{\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{15}}{2}}\left(\frac{1}{t+2}-\frac{1}{t-2}\right)dt$

$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+2}{t-2}\right|\Big|_{\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{15}}{2}}=\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{\sqrt{15}+4}{\sqrt{15}-4}\right|-\ln\left|\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2}\right|\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{15}+4}{\sqrt{3}+2}$.



Bài 5. Tính các tích phân

a. $I=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{x+(x+\sin x)\sin x}{\sin^3 x+\sin^2 x}dx$.

b. $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x.\sqrt{\sin^2 x+\frac{1}{2}}dx$.

c. $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin x+4\cos x}{3\sin^2 x+4\cos^2 x}dx$.

d. $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}}dx$.

e. $I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{2\sin x\cos x-3}dx$.

➢ Lời giải

a. $I=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{x}{\sin^2 x}dx+\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{dx}{1+\sin x}$

+ Tính $I_1=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{x}{\sin^2 x}dx$.

Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=\frac{dx}{\sin^2 x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=-\cot x\end{cases}$.

$I_1=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

+ Tính $I_2=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{dx}{1+\sin x}$

$=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{dx}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{dx}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}=4-2\sqrt{3}$.

Vậy $I=\frac{\pi}{\sqrt{3}}+4-2\sqrt{3}$.

b. Đặt $\cos x=\sqrt{\frac{3}{2}}\sin t,\left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$.

$$I=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t\,dt=\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right).$$

c. Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin x+4\cos x}{3+4\cos^2 x}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin x}{3+\cos^2 x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\cos x}{3+\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin x}{3+\cos^2 x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\cos x}{4-\sin^2 x}dx.$$

+) Tính $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin x}{3+\cos^2 x}dx$.

Đặt $t_1=\cos x\Rightarrow dt_1=-\sin x dx$.

$$I_1=\int_0^1\frac{3}{3+t_1^2}dt_1.$$

Đặt $t_1=\sqrt{3}\tan u\Rightarrow dt_1=\sqrt{3}\left(1+\tan^2 u\right)du$.

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{3\sqrt{3}\left(1+\tan^2 u\right)}{3\left(1+\tan^2 u\right)}du=\frac{\pi\sqrt{3}}{6}.$$

+) Tính $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\cos x}{4-\sin^2 x}dx$.

Đặt $t_2=\sin x\Rightarrow dt_1=\cos x dx$.

$$I_2=\int_0^1\frac{4}{4-t_1^2}dt_2=\ln 3.$$

Vậy $I=\frac{\pi\sqrt{3}}{6}+\ln 3$.

d. Ta có $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{\cos^2 x\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}+1}}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{\cos^2 x\sqrt{\tan^2 x+2}}dx.$

Đặt $u=\tan x\Rightarrow du=\frac{1}{\cos^2 x}dx$.

$$I=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1\frac{u}{\sqrt{u^2+2}}du.$$

Đặt $t=\sqrt{u^2+2}\Rightarrow dt=\frac{u}{\sqrt{u^2+2}}du$.

$$I=\int_{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}dt=t\Big|_{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\frac{3-\sqrt{7}}{\sqrt{3}}.$$

e. Ta có $I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{(\sin x-\cos)x^2+2}dx$.

Đặt $t=\sin x-\cos x$.

$$I=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1\frac{dt}{t^2+2}.$$

Đặt $t=\sqrt{2}\tan u$.

$$I=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{\sqrt{2}\left(1+\tan^2 u\right)}{2\tan^2 u+2}du=-\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Bài 6. Tính các tích phân

a. $I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$.

b. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)e^x dx$.

c. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}dx$.

d. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 4x}{\sqrt{\sin^6 x+\cos^6 x}}dx$.

e. $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos x\sqrt{3+\sin^2 x}}dx$.

➢ Lời giải

a. Sử dụng công thức tích phân từng phần ta có:

$$I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}xd\left(\frac{1}{\cos x}\right)=\frac{x}{\cos x}\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}-\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos x}=\frac{4\pi}{3}-K.$$

Với $K=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos x}$.

Đặt $t=\sin x$.

$$K=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos x}=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dt}{1-t^2}=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\ln\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}.$$

Vậy $I=\frac{4\pi}{3}-\ln\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$.

b. Ta có $\frac{1+\sin x}{1+\cos x}=\frac{1+2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}+\tan\frac{x}{2}$.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\tan\frac{x}{2}dx=e^{\frac{\pi}{2}}.$$

c. Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=\frac{\cos 2x}{(1+\sin 2x)^2}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=-\frac{1}{1+\sin 2x}\end{cases}$.

$$I=x\left(-\frac{1}{2}.\frac{1}{1+\sin 2x}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+\sin 2x}=-\frac{\pi}{16}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{dx}{\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=-\frac{\pi}{16}+\frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}.\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{\pi}{16}+\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}(0+1)\Big|=\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\pi}{16}.$$

Chương V

TÍCH PHÂN HÀM MŨ - LOGARIT

I. NGUYÊN HÀM CÁC HÀM

Dạng 1: $I=\int \frac{a\ln x+b}{x^n}dx$	Dạng 19: $I=\int a^{mx+n}dx$
Dạng 2: $I=\int \frac{m\ln(ax+b)+k}{x^n}dx$	Dạng 20: $I=\int e^{ax+b}dx$
Dạng 3: $I=\int x^n \ln x dx$	Dạng 21: $I=\int (ax^2+bx+c)e^x dx$
Dạng 4: $I=\int (ax+b)\ln(mx+n)dx$	Dạng 22: $I=\int \frac{dx}{ae^x+b}$
Dạng 5: $I=\int (ax^2+bx+c)\ln x dx$	Dạng 23: $I=\int \frac{dx}{(ae^x+b)e^x}$
Dạng 6: $I=\int (ax+b)\ln^2(mx+n)dx$	Dạng 24: $I=\int \frac{e^{nx}}{1+e^{2nx}}dx$
Dạng 7: $I=\int (ax+b)^2 \ln^2 x dx$	Dạng 25: $I=\int \frac{cx^2+d}{(ax+b)^2}e^x dx$
Dạng 8: $I=\int (ax+b)\ln^k x dx$	Dạng 26: $I=\int x^{n-1}e^{ax^n+b}dx$
Dạng 9: $I=\int \ln(ax^2+bx+c)dx$	Dạng 27: $I=\int x^{2n-1}e^{x^n}dx$
Dạng 10: $I=\int x^{n-1}\ln(ax^n+b)dx$	Dạng 28: $I=\int \frac{e^{m\ln(ax+b)+n}}{ax+b}dx$
Dạng 11: $I=\int \frac{dx}{x(a\ln x+b)^k}$	Dạng 29: $I=\int \frac{e^{nx}}{\sqrt{a+be^x}}dx$

Dạng 12: $I=\int\frac{\ln(ax+b)}{(ax+b)^k}dx$	Dạng 30: $I=\int\frac{e^x}{\sqrt[m]{(a+be^x)^n}}dx$
Dạng 13: $I=\int_1^e\frac{\ln^{n-1}x}{x(1+\ln^{2n}x)}dx$	Dạng 31: $I=\int\frac{e^{ax+b}}{\sqrt[k]{me^{ax+b}+n}}dx$
Dạng 14: $I=\int\frac{\ln^{n-1}x}{x(a\ln^n x+b)}dx$	Dạng 32: $I=\int\frac{dx}{ae^x+be^{-x}+c}$
Dạng 15: $I=\int\frac{\ln^{k-1}x}{x\sqrt{a\ln^k x+b}}dx$	Dạng 33: $I=\int\sqrt[n]{a+be^x}e^x dx$
Dạng 16: $I=\int\frac{\ln^{2k-1}x}{x\sqrt[m]{(a\ln^k x+b)^n}}dx$	Dạng 34: $I=\int\sqrt[k]{(me^{ax+b}+n)^q}e^{ax+b}dx$
Dạng 17: $I=\int\frac{\ln^{m-1}x\sqrt[n]{(a\ln^m x+b)^k}}{x}dx$	
Dạng 18: $I=\int\frac{\left[\frac{a}{m}(mx+n)+b-\frac{an}{m}\right]^3\ln(mx+n)}{mx+n}dx$	
	Dạng 35: $I=\int e^{m\cos(ax+b)+n}\sin(ax+b)dx$
	Dạng 36: $I=\int e^{m\sin(ax+b)+n}\cos(ax+b)dx$
	Dạng 37: $I=\int\frac{e^{\tan(ax+b)}}{\cos^2(ax+b)}dx$
	Dạng 38: $I=\int\frac{e^{m\cot(ax+b)+n}}{\cos^2(ax+b)}dx$

II. PHƯƠNG PHÁP

Dạng 1: $I=\int\frac{a\ln x+b}{x^n}dx$

Phương pháp 1: $I=\int\left(ax^{-n}\ln x+bx^{-n}\right)dx=a\int x^{-n}\ln xdx+b\frac{x^{1-n}}{1-n}$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\dv=x^{-n}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{dx}{x}\\v=\int x^{-n}dx=\dfrac{x^{1-n}}{1-n}\end{cases}$.

$I=a\int x^{-n}\ln xdx=\frac{ax^{1-n}}{1-n}\ln x-a\int\frac{x^{1-n}}{1-n}.\frac{dx}{x}=\frac{ax^{1-n}}{1-n}\ln x-\frac{ax^{1-n}}{(1-n)^2}+C$ (với $n>1$).

Phương pháp 2: Đặt $\begin{cases}u=a\ln x+b\\dv=\dfrac{dx}{x^n}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{a}{x}dx\\v=\int\dfrac{dx}{x^n}=\int x^{-n}dx=\dfrac{x^{1-n}}{1-n}\end{cases}$.

$I=\frac{x^{1-n}}{1-n}(a\ln x+b)-\frac{a}{1-n}\int\frac{x^{1-n}}{x}dx=\frac{x^{1-n}}{1-n}(a\ln x+b)-\frac{ax^{1-n}}{(1-n)^2}+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{2\ln x+3}{x^2}dx$.

Lời giải: Đặt $\begin{cases}u=2\ln x+3\\dv=\dfrac{dx}{x^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{2}{x}dx\\v=-\dfrac{1}{x}\end{cases}$.

$I=-\frac{2\ln x+3}{x}+2\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{2\ln x+3}{x}-\frac{2}{x}+C=-\frac{2\ln x+5}{x}+C$.

Bài tập minh họa

➢ **Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây**

a. $I=\int\frac{\ln x+2}{x^3}dx=-\frac{2\ln x+5}{4x^2}+C$.

b. $I=\int\frac{3\ln x+1}{x^4}dx=-\frac{3\ln x+2}{3x^3}+C$.

c. $I=\int\frac{2\ln x+3}{x^5}dx=-\frac{4\ln x+13}{16x^4}+C$.

Dạng 2: $I=\int\frac{m\ln(ax+b)+k}{x^n}dx$

Phương pháp:

$$I=m\int\ln(ax+b)x^{-n}dx+k\int x^{-n}dx=m\underbrace{\int\ln(ax+b)x^{-n}dx}_{H}+k\frac{x^{1-n}}{1-n}.$$

Tính $H=\int\ln(ax+b)x^{-n}dx$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln(ax+b)\\dv=x^{-n}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{a}{ax+b}dx\\v=\displaystyle\int x^{-n}dx=\frac{x^{1-n}}{1-n}\end{cases}$.

$$H=\frac{x^{1-n}}{1-n}\ln(ax+b)+\frac{a}{n-1}\int\frac{x^{1-n}}{ax+b}dx.$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{\ln(x+1)+2}{x^2}dx$.

Lời giải: $I=\int\frac{\ln(x+1)}{x^2}dx+2\int\frac{dx}{x^2}=\int\frac{\ln(x+1)}{x^2}dx+\frac{-2}{x}$.

Tính $H=\int\frac{\ln(x+1)}{x^2}dx$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln(x+1)\\dv=\dfrac{dx}{x^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{dx}{x+1}\\v=-\dfrac{1}{x}\end{cases}$.

$$H=-\frac{\ln(x+1)}{x}+\int\frac{dx}{x(x+1)}=-\frac{\ln(x+1)}{x}+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C.$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{2\ln(3x-1)+4}{x^3}dx=-\frac{\ln(3x-1)+2}{x^2}+\frac{3}{x}+9\ln\left|\frac{3x-1}{x}\right|+C.$

b. $I=\int\frac{3\ln(x+5)+2}{x^4}dx=-\frac{\ln(x+5)+\frac{2}{3}}{x^3}-\frac{1}{10x^2}+\frac{1}{25x}+\frac{1}{125}\ln\left|\frac{x}{x+5}\right|+C.$

c. $I=\int\frac{5\ln(2x+1)+6}{x^5}dx=-\frac{\frac{3}{4}\ln(2x+11)+\frac{3}{2}}{x^4}-\frac{1}{2x^3}$
$+\frac{3}{2x^2}-\frac{6}{x}-12\ln\left|\frac{x}{2x+1}\right|+C.$

Dạng 3: $I=\int x^n \ln x dx$

Phương pháp: Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=x^n dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{dx}{x} \\ v=\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$.

$$I=\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x-\int \frac{x^{n+1}}{x(n+1)}dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x-\int \frac{x^n}{n+1}dx$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int x\ln x dx$.

Lời giải: Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{dx}{x} \\ v=\dfrac{x^2}{2} \end{cases}$.

$$I=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C.$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int x^2\ln x dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+C$.

b. $I=\int x^3\ln x dx=\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{x^4}{16}+C$.

c. $I=\int x^4\ln x dx=\frac{x^5}{5}\ln x-\frac{x^5}{25}+C$.

Dạng 4: $I=\int (ax+b)\ln(mx+n)dx$

Phương pháp: Đặt $\begin{cases} u=\ln(mx+n) \\ dv=(ax+b)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{m}{mx+n}dx \\ v=\int (ax+b)dx=a\dfrac{x^2}{2}+bx \end{cases}$.

$$I=\left(a\frac{x^2}{2}+bx\right)\ln(ax+b)-2m\int \frac{ax^2+2bx}{mx+n}dx.$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int(x+1)\ln(3x+2)dx$.

Lời giải: Đặt $\begin{cases}u=\ln(3x+2)\\dv=(x+1)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{3}{3x+2}dx\\v=\dfrac{x^2}{2}+x\end{cases}$.

$I=\left(\dfrac{x^2}{2}+x\right)\ln(x+1)-6\int\dfrac{3x^2+2x}{3x+2}dx$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int(5x+2)\ln(x-3)dx=\left(\dfrac{5}{2}x^2+2x\right)\ln(5x+2)-2\int\dfrac{5x^2+4x}{5x-3}dx$.

b. $I=\int(-x+6)\ln(2x-3)dx=\left(-\dfrac{x^2}{2}+6x\right)\ln(-x+6)-4\int\dfrac{-x^2+12x}{2x-3}dx$.

c. $I=\int(x+3)\ln(x-1)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+3x\right)\ln(x+3)-2\int\dfrac{x^2+6x}{x-1}dx$.

Dạng 5: $I=\int(ax^2+bx+c)\ln xdx$

Phương pháp: Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\dv=(ax^2+bx+c)dx\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{dx}{x}\\v=\int(ax^2+bx+c)dx=a\dfrac{x^3}{3}+b\dfrac{x^2}{2}+cx\end{cases}$.

$I=\left(a\dfrac{x^3}{3}+b\dfrac{x^2}{2}+cx\right)\ln x-\int\left(a\dfrac{x^2}{3}+b\dfrac{x}{2}+c\right)dx$

$=\left(a\dfrac{x^3}{3}+b\dfrac{x^2}{2}+cx\right)\ln x-\left(a\dfrac{x^3}{9}+b\dfrac{x^2}{4}+cx\right)+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int(x^2+x+1)\ln xdx$.

Lời giải: Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=\left(x^2+x+1\right)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{dx}{x} \\ v=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x \end{cases}$.

$$I=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x-\int\left(\frac{x^2}{3}+\frac{x}{2}+1\right)dx$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x-\left(\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{4}+x\right)+C.$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\left(-x^2+3x+5\right)\ln x dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+5x\right)\ln x-\left(-\frac{x^3}{9}+\frac{3x^2}{4}+5x\right)+C.$

b. $I=\int\left(x^2-7x+2\right)\ln x dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{7x^2}{2}+2x\right)\ln x-\left(\frac{x^3}{9}-\frac{7x^2}{4}+2x\right)+C.$

c. $I=\int\left(x^2+5x-17\right)\ln x dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-17x\right)\ln x-\left(\frac{x^3}{9}+\frac{5x^2}{4}-17x\right)+C.$

Dạng 6: $I=\int(ax+b)\ln^2(mx+n)dx$

Phương pháp: Đặt $\begin{cases} u=\ln^2(mx+n) \\ dv=(ax+b)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=2\dfrac{\ln(mx+n)}{mx+n}dx \\ v=a\dfrac{x^2}{2}+bx \end{cases}$.

$$I=\left(a\frac{x^2}{2}+bx\right)\ln^2(mx+n)-\underbrace{\int\frac{ax^2+2bx}{mx+n}\ln(mx+n)dx}_{H}.$$

Tính $H=\int\frac{\left(ax^2+2bx\right)}{mx+n}\ln(mx+n)dx$.

Đặt $\begin{cases} u=\ln(mx+n) \\ dv=\dfrac{\left(ax^2+2bx\right)}{mx+n}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{m}{mx+n}dx \\ v=\displaystyle\int\frac{ax^2+2bx}{mx+n}dx \end{cases}$.

$$H=\ln(mx+n)\frac{ax^2+2bx}{mx+n}-m\int\frac{ax^2+2bx}{(mx+n)^2}dx\ .$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int(x+1)\ln^2(2x+3)dx$.

Lời giải: Đặt $\begin{cases}u=\ln^2(2x+3)\\dv=(x+1)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2.\dfrac{\ln(2x+3)}{2x+3}dx\\v=\dfrac{x^2}{2}+x\end{cases}$.

$$I=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln^2(2x+3)-\int\frac{x^2+2x}{2x+3}\ln(2x+3)dx.$$

Tính $H=\int\dfrac{x^2+2x}{2x+3}\ln(2x+3)dx$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln(2x+3)\\dv=\dfrac{x^2+2x}{2x+3}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{2}{2x+3}dx\\v=\displaystyle\int\frac{x^2+2x}{2x+3}dx\end{cases}$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int(-x+2)\ln^2(2x-1)dx$

$$=\left(-\frac{x^2}{2}+2x\right)\ln^2(2x-1)-\frac{-x^2+4x}{2x-1}\ln(2x-1)+2\int\frac{-x^2+4x}{(2x-1)^2}dx.$$

b. $I=\int(3x+5)\ln^2(-4x+9)dx$

$$=\left(\frac{3x^2}{2}+5x\right)\ln^2(-4x+9)-\frac{3x^2+10x}{-4x+9}\ln(-4x+9)-4\int\frac{3x^2+10x}{(-4x+9)^2}dx.$$

c. $I=\int(-x-6)\ln^2(-5x-3)dx$

$$=\left(-\frac{x^2}{2}-6x\right)\ln^2(-5x-3)-\frac{x^2+12x}{5x+3}\ln(-5x-3)+5\int\frac{x^2+12x}{(5x+3)^2}dx.$$

Dạng 7: $I=\int (ax+b)^2 \ln^2 x dx$

Phương pháp: Đặt $\begin{cases} u=\ln^2 x \\ dv=(ax+b)^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{\ln x}{x}dx \\ v=\dfrac{(ax+b)^3}{3a} \end{cases}$.

$$I=\frac{(ax+b)^3}{3a}\ln^2 x-\frac{1}{3a}\int (ax+b)^3 \frac{\ln x}{x}dx.$$

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=\dfrac{(ax+b)^3}{x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{dx}{x} \\ v=\displaystyle\int \frac{(ax+b)^3}{x}dx \end{cases}$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int (x+1)^2 \ln^2 x dx$.

Lời giải: Đặt $\begin{cases} u=\ln^2 x \\ dv=(x+1)^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{\ln x}{x}dx \\ v=\dfrac{(x+1)^3}{3} \end{cases}$.

$$I=\frac{(x+1)^3}{3}\ln^2 x-\frac{1}{3}\int \frac{(x+1)^3 \ln x}{x}dx.$$

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=\dfrac{(x+1)^3}{x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{dx}{x} \\ v=\displaystyle\int \frac{(x+1)^3}{x}dx \end{cases}$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

Dạng 8: $I=\int(ax+b)\ln^k x dx$

Phương pháp: Đặt $\begin{cases}u=\ln^k x\\dv=(ax+b)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=k\dfrac{\ln^{k-1}x}{x}dx\\v=a\dfrac{x^2}{2}+bx\end{cases}$.

$I=\left(a\dfrac{x^2}{2}+bx\right)\ln^k x-k\int\left(a\dfrac{x^2}{2}+bx\right)\dfrac{\ln^{k-1}x}{x}dx$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int(x+1)\ln^2 x dx$.

Lời giải: Đặt $\begin{cases}u=\ln^2 x\\dv=(x+1)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{2\ln x}{x}dx\\v=\dfrac{x^2}{2}+x\end{cases}$.

$I=\left(\dfrac{x^2}{2}+x\right)\ln^2 x-2\int\left(\dfrac{x^2}{2}+x\right).\dfrac{\ln x}{x}dx$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int(-x+3)\ln^3 x dx=\left(-\dfrac{x^2}{2}+3x\right)\ln^3 x-2\int\left(-\dfrac{x^2}{2}+3x\right).\dfrac{\ln^3 x}{x}dx$.

b. $I=\int(-3x-5)\ln^6 x dx=\left(-\dfrac{3x^2}{2}-5x\right)\ln^6 x-6\int\left(-\dfrac{3x^2}{2}-5x\right).\dfrac{\ln^5 x}{x}dx$.

c. $I=\int(5x-7)\ln^8 x dx=\left(\dfrac{5x^2}{2}-7x\right)\ln^8 x-8\int\left(\dfrac{5x^2}{2}-7x\right).\dfrac{\ln^6 x}{x}dx$.

Dạng 9: $I=\int\ln(ax^2+bx+c)dx$

Phương pháp: Đặt $\begin{cases}u=\ln(ax^2+bx+c)\\dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx\\v=x\end{cases}$.

$I=x\ln(ax^2+bx+c)-\int\dfrac{2ax^2+bx}{ax^2+bx+c}dx$

$= x\ln\left(ax^2+bx+c\right) - \int\left(2 - \frac{bx+c}{ax^2+bx+c}\right)dx.$

Ví dụ : Tìm nguyên hàm $I = \int \ln\left(x^2+x+1\right)dx.$

Lời giải: Đặt $\begin{cases} u = \ln\left(x^2+x+1\right) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx \\ v = x \end{cases}.$

$I = x\ln\left(x^2+x+1\right) - \int \frac{2x^2+x}{x^2+x+1}dx$

$= x\ln\left(x^2+x+1\right) - \int\left(2 - \frac{x+1}{x^2+x+1}\right)dx.$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I = \int \ln\left(x^2+2x+1\right)dx = x\ln\left(x^2+2x+1\right) - \int\left(2 - \frac{2x+1}{x^2+2x+1}\right)dx.$

b. $I = \int \ln\left(-x^2-5x+6\right)dx = x\ln\left(-x^2-5x+6\right) - \int\left(2 - \frac{-4x+6}{-x^2-4x+6}\right)dx.$

c. $I = \int \ln\left(3x^2+8x-6\right)dx = x\ln\left(3x^2+8x-6\right) - \int\left(2 - \frac{8x-6}{3x^2+8x-6}\right)dx.$

Dạng 10: $I = \int x^{n-1}\ln\left(ax^n+b\right)dx$

Phương pháp: Đặt $t = ax^n+b \Rightarrow dt = anx^{n-1}dx \Rightarrow x^{n-1}dx = \frac{dt}{an}.$

$I = \int \ln t \frac{1}{an}dt = \frac{1}{an}\int \ln t dt.$

Đặt $\begin{cases} u = \ln t \\ dv = dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dt}{t} \\ v = t \end{cases}.$

$I = \frac{1}{an}\left(t\ln t - \int dt\right) = \frac{t}{an}\left(\ln t - 1\right) + C.$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int x\ln\left(x^2+3\right)dx$.

Lời giải: Đặt $t=x^2+3\Rightarrow xdx=\frac{dt}{2}$.

$I=\frac{1}{2}\int \ln t dt$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln t\\ dv=dt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{dt}{t}\\ v=t\end{cases}$.

$I=\frac{1}{2}\left(t\ln t-\int dt\right)=\frac{1}{2}\left(t\ln t-t\right)+C=\frac{1}{2}\left(x^2+3\right)\left[\ln\left(x^2+3\right)-1\right]+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int x^2\ln\left(5x^3+9\right)dx=\frac{t}{15}\left(\ln t-1\right)+C=\frac{5x^3+9}{15}\left(\ln\left|5x^3+9\right|-1\right)+C$.

b. $I=\int x^3\ln\left(2x^4-7\right)dx=\frac{t}{8}\left(\ln t-1\right)+C=\frac{2x^4-7}{8}\left(\ln\left|2x^4-7\right|-1\right)+C$.

c. $I=\int x^4\ln\left(-2x^5-8\right)dx=-\frac{t}{10}\left(\ln t-1\right)+C=\frac{2x^5+8}{10}\left(\ln\left|-2x^5-8\right|-1\right)+C$.

Dạng 11: $I=\int\frac{dx}{x\left(a\ln x+b\right)^k}$

Phương pháp: $I=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(a\ln x+b\right)}{\left(a\ln x+b\right)^k}=\frac{1}{a}\int\left(a\ln x+b\right)^{-k}d\left(a\ln x+b\right)$

$=\frac{1}{a}.\frac{\left(a\ln x+b\right)^{1-k}}{1-k}+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{x\left(\ln x+1\right)^2}$.

Lời giải: $I=\int\frac{d\left(\ln x+1\right)}{\left(\ln x+1\right)^2}=-\frac{1}{\ln x+1}+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{dx}{x(2\ln x+3)^4}=-\frac{1}{6(2\ln x+3)^3}+C.$

b. $I=\int\frac{dx}{x(3\ln x+4)^5}=-\frac{1}{12(3\ln x+4)^4}+C.$

c. $I=\int\frac{dx}{x(4\ln x+5)^6}=-\frac{1}{20(4\ln x+5)^5}+C.$

Dạng 12: $I=\int\frac{\ln(ax+b)}{(ax+b)^k}dx$

Phương pháp: Đặt $\begin{cases}u=\ln(ax+b)\\ du=(ax+b)^{-k}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{a}{ax+b}dx\\ v=\int(ax+b)^{-k}dx=\frac{(ax+b)^{1-k}}{a(1-k)}\end{cases}.$

$$I=\frac{(ax+b)^{1-k}}{a(1-k)}\ln(ax+b)-\int\frac{a}{ax+b}.\frac{(ax+b)^{1-k}}{a(1-k)}dx$$

$$=\ln(ax+b)\frac{(ax+b)^{1-k}}{a(1-k)}+\frac{1}{k-1}\int\frac{dx}{(ax+b)^k}$$

với $\int\frac{dx}{(ax+b)^k}=\frac{1}{a}\int\frac{d(ax+b)}{(ax+b)^k}=\frac{1}{a(1-k)(ax+b)^{k-1}}+C.$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}dx.$

Lời giải: Đặt $\begin{cases}u=\ln(x+1)\\ dv=\frac{dx}{(x+1)^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{dx}{x+1}\\ v=-\frac{1}{x+1}\end{cases}.$

$$I=-\frac{\ln(x+1)}{x+1}+\int\frac{dx}{(x+1)^2}=-\frac{\ln(x+1)}{x+1}-\frac{1}{x+1}+C.$$

Dạng 13: $I=\int_1^e \frac{\ln^{n-1} x}{x\left(1+\ln^{2n} x\right)}dx$

Phương pháp:

Đặt $u=\ln^n x \Rightarrow du=n.\ln^{n-1} xdx \Rightarrow \ln^{n-1} xdx=\frac{du}{n}$.

Đặt $u=\tan t \Rightarrow du=\left(1+\tan^2 t\right)dt$

$I=\int \frac{1+\tan^2 t}{1+\tan^2 t}dt=\int dt=t$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int \frac{\ln x}{x\left(1+\ln^4 x\right)}dx$.

Lời giải: Đặt $t=\ln^2 x \Rightarrow dt=\frac{2\ln x}{x}dx$.

$I=\frac{1}{2}\int \frac{2\ln x}{x\left(1+\ln^4 x\right)}dx=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2}$.

Đặt $t=\tan u \Rightarrow dt=\left(1+\tan^2 u\right)du$.

$I=\int \frac{1+\tan^2 u}{1+\tan^2 u}du=\int du=u+C=\arctan t+C=\arctan \ln^2 x+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \frac{\ln^2 x}{x\left(1+\ln^6 x\right)}$.

b. $I=\int \frac{\ln^3 x}{x\left(1+\ln^8 x\right)}$.

c. $I=\int \frac{\ln^5 x}{x\left(1+\ln^{10} x\right)}$.

Dạng 14: $I=\int\frac{\ln^{n-1}x}{x\left(a\ln^n x+b\right)}dx$

Phương pháp: Đặt $t=a\ln^n x+b\Rightarrow dt=\frac{an\ln^{n-1}x}{x}dx$.

$I=\int\frac{du}{an.u}=\frac{1}{an}\ln|u|+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{\ln x}{x\left(2\ln^2 x+2\right)}dx$.

Lời giải: Đặt $t=2\ln^2 x+2\Rightarrow dt=\frac{4\ln x}{x}dx$.

$I=\frac{1}{4}\int\frac{4\ln x}{x\left(2\ln^2 x+2\right)}dx=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{4}\ln|t|+C=\frac{1}{4}\ln\left|2\ln^2 x+2\right|+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{\ln^2 x}{x\left(3\ln^3 x+3\right)}dx=\frac{1}{9}\left|3\ln^3 x+3\right|+C$.

b. $I=\int\frac{\ln^3 x}{x\left(4\ln^4 x+4\right)}dx=\frac{1}{16}\left|4\ln^4 x+4\right|+C$.

c. $I=\int\frac{\ln^4 x}{x\left(5\ln^5 x+5\right)}dx=\frac{1}{25}\left|5\ln^5 x+5\right|+C$.

Dạng 15: $I=\int\frac{\ln^{k-1}x}{x\sqrt{a\ln^k x+b}}dx$

Phương pháp: Đặt $u=\sqrt{a\ln^k x+b}\Rightarrow u^2=a\ln^k x+b$

$\Rightarrow 2udu=ak.\frac{\ln^{k-1}x}{x}dx\Rightarrow\frac{2u}{ak}du=\frac{\ln^{k-1}x}{x}dx$.

$I=\int\frac{2u}{aku}du=\frac{2u}{ak}+C=\frac{2\sqrt{a\ln^k x+b}}{ak}+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{\ln x}{x\sqrt{\ln^2 x+1}}dx$.

Lời giải: Đặt $t=\sqrt{\ln^2 x+1}\Rightarrow t^2=\ln^2 x+1\Rightarrow tdt=\frac{\ln x}{x}dx$.

$I=\int dt=t+C=\sqrt{\ln^2 x+1}+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{\ln^2 x}{x\sqrt{-\ln^3 x+4}}dx=-\frac{2}{3}\sqrt{-\ln^3 x+4}+C.$

b. $I=\int\frac{\ln^3 x}{x\sqrt{-5\ln^4 x+7}}dx=-\frac{\sqrt{-5\ln^4 x+7}}{10}+C.$

c. $I=\int\frac{\ln^4 x}{x\sqrt{-7\ln^5 x+2}}dx=\frac{2\sqrt{-7\ln^5 x+2}}{35}+C.$

Dạng 16: $I=\int\frac{\ln^{2k-1}x}{x\sqrt[m]{\left(a\ln^k x+b\right)^n}}dx$

Phương pháp:

Đặt $u=a\ln^k x+b\Rightarrow\ln^k x=\frac{u-b}{a}\Rightarrow\frac{\ln^{k-1}x}{x}dx=\frac{du}{ak}.$

$$I=\int\frac{1}{\sqrt[m]{u^n}}.\frac{u-b}{a}.\frac{du}{ak}=\frac{1}{a^2k}\int(u-b)u^{\frac{-n}{m}}du=\frac{1}{a^2k}\left(\frac{u^{2-\frac{n}{m}}}{2-\frac{n}{m}}-b.\frac{u^{1-\frac{n}{m}}}{1-\frac{n}{m}}\right)+C.$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{\ln^3 x}{x\sqrt[3]{\left(2\ln^2 x+1\right)^2}}dx.$

Lời giải: Đặt $t=2\ln^2 x+1\Rightarrow\ln^2 x=\frac{t-1}{2}\Rightarrow\frac{\ln x}{x}dx=\frac{dt}{4}.$

$$I=\int\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}.\frac{t-1}{2}.\frac{dt}{4}=\frac{1}{8}\int(t-1)t^{\frac{-2}{3}}dt=\frac{3}{8}\left(\frac{t^{\frac{4}{3}}}{4}-t^{\frac{1}{3}}\right)+C$$

$$=\frac{3}{8}\left[\frac{\left(2\ln^2 x+1\right)^{\frac{4}{3}}}{4}-\left(2\ln^2 x+1\right)^{\frac{1}{3}}\right]+C.$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{\ln^5 x}{x\sqrt[4]{\left(4\ln^3 x-3\right)^3}}dx=\frac{1}{12}\left(\frac{t^{\frac{5}{4}}}{5}+3t^{\frac{1}{4}}\right)+C$ (với $t=4\ln^3 x-3$).

b. $I=\int\frac{\ln^7 x}{x\sqrt[5]{\left(-8\ln^4 x+5\right)^3}}dx=\frac{5}{256}\left(\frac{t^{\frac{7}{5}}}{7}-\frac{5}{2}t^{\frac{2}{5}}\right)+C$ (với $t=-8\ln^4 x+5$).

c. $I=\int\frac{\ln^9 x}{x\sqrt[4]{\left(\ln^5 x+8\right)^2}}dx=\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3}-8t^{\frac{1}{2}}+C$ (với $t=\ln^5 x+8$).

Dạng 17: $I=\int\frac{\ln^{m-1}x\sqrt[n]{\left(a\ln^m x+b\right)^k}}{x}dx$

Phương pháp: Đặt $t=\ln x\Rightarrow dt=\frac{dx}{x}$.

$I=\int\left[t^{m-1}\sqrt[n]{\left(at^m+b\right)^k}\right]dt=\frac{1}{am}\int u^{\frac{k}{n}}du=\frac{1}{am}.\frac{u^{\frac{k}{n}+1}}{\frac{k}{n}+1}+C$; với $u=at^m+b$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{\ln x\sqrt[3]{\left(\ln^2 x+1\right)^4}}{x}dx$.

Lời giải: Đặt $t=\ln x\Rightarrow dt=\frac{dx}{x}$.

$I=\int t\sqrt[3]{\left(t^2+1\right)^4}dt=\frac{1}{2}\int u^{\frac{4}{3}}=\frac{3}{14}u^{\frac{7}{3}}+C$ với $u=t^2+1$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{\ln^2 x\sqrt[4]{\left(2\ln^3 x+5\right)^3}}{x}dx=\frac{2}{21}u^{\frac{7}{4}}+C$ (với $u=2t^3+5$).

b. $I=\int\frac{\ln x\sqrt[4]{\left(3\ln^2 x+2\right)^5}}{x}dx=\frac{2}{27}u^{\frac{9}{4}}+C$ (với $u=3t^2+2$).

c. $I=\int\frac{\ln^3 x\sqrt[3]{\left(-5\ln^4 x-7\right)^5}}{x}dx=-\frac{2}{360}u^{\frac{13}{3}}+C$ (với $u=-5t^4-7$).

Dạng 18: $I=\int\frac{\left[\frac{a}{m}(mx+n)+b-\frac{an}{m}\right]^3\ln(mx+n)}{mx+n}dx$

Phương pháp: Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ v=\int\frac{a^3x^3+3a^2x^2b+3axb^2+b^3}{x}dx\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{dx}{x}\\ v=\frac{a^3}{3}x^3+\frac{3a^2b}{2}x^2+3ab^2+b^3\ln x\end{cases}$.

Bổ sung: $H=\int\frac{\ln x}{x}dx$; đặt $t=\ln x\Rightarrow dt=\frac{dx}{x}$.

$H=\int tdt=\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}\ln^2 x+C$.

Dạng 19: $I=\int a^{mx+n}dx$

Phương pháp: $I=\frac{1}{m}\int a^{mx+n}d(mx+n)=\frac{1}{am}.\frac{a^{mx+n}}{\ln a}+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int 2^{x+1}dx$.

Lời giải: $I=\int 2^{x+1}d(x+1)=\frac{1}{2}.\frac{2^{x+1}}{\ln 2}+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int 3^{2x-5}dx=\frac{3^{2x-5}}{6\ln 3}+C$.

b. $I=\int 4^{-x+2}dx=-\frac{4^{-x+2}}{4\ln 4}+C$.

c. $I=\int 5^{-x-5}dx=-\frac{5^{-x-5}}{5\ln 5}+C$.

Dạng 20: $I=\int e^{ax+b}dx$

Phương pháp: $I=\frac{1}{a}\int e^{ax+b}d(ax+b)=\frac{1}{a}e^{ax+b}+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int e^{x+2}dx$.

Lời giải: $I=\int e^{x+2}d(x+2)=e^{x+2}+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int e^{-2x+5}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x+5}+C$.

b. $I=\int e^{-x-4}dx=-e^{-x-4}+C$.

c. $I=\int e^{3x-11}dx=\frac{1}{3}e^{3x-11}+C$.

Dạng 21: $I=\int(ax^2+bx+c)e^x dx$

Phương pháp: Đặt $\begin{cases}u=ax^2+bx+c\\dv=e^x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=(2ax+b)dx\\v=\int e^x dx=e^x\end{cases}$.

$I=(ax^2+bx+c)e^x-\int(2ax+b)e^x dx$.

Đặt $\begin{cases}u=2ax+b\\dv=e^x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2adx\\v=\int e^x dx=e^x\end{cases}$.

$I=(ax^2+bx+c)e^x-(2ax+b)e^x+\int 2ae^x dx$

$=(ax^2+bx+c)e^x-(2ax+b)e^x+2ae^x+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int(x^2+x+1)e^x dx$.

Lời giải: Đặt $\begin{cases}u=x^2+x+1\\dv=e^x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=(2x+1)dx\\v=e^x\end{cases}$.

$I=(x^2+x+1)e^x-\int(2x+1)e^x dx$.

Đặt $\begin{cases}u=2x+1\\dv=e^x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2dx\\v=e^x\end{cases}$.

$I=(x^2+x+1)e^x-(2x+1)e^x+2\int e^x dx=(x^2-x+2)e^x+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\left(2x^2+x+2\right)e^x dx=\left(2x^2-3x+5\right)e^x+C$.

b. $I=\int\left(3x^2+2x+4\right)e^x dx=\left(3x^2-4x+8\right)e^x+C$.

c. $I=\int\left(5x^2+x-11\right)e^x dx=\left(5x^2-9x-2\right)e^x+C$.

Dạng 22: $I=\int\frac{dx}{ae^x+b}$

Phương pháp: $I=\int\frac{e^x}{\left(ae^x+b\right)e^x}dx$.

Đặt $u=ae^x+b\Rightarrow e^x=\frac{u-b}{a}du\Rightarrow e^x dx=\frac{du}{a}$.

$I=a\int\frac{du}{u(u-b)}=\frac{a}{b}\int\left(\frac{1}{u-b}-\frac{1}{u}\right)du=\frac{a}{b}\ln\left|\frac{u-b}{u}\right|+C=\frac{a}{b}\ln\left|\frac{ae^x}{ae^x+b}\right|+C$.

Dạng 23: $I=\int\frac{dx}{\left(ae^x+b\right)e^x}$

Phương pháp: $I=\int\frac{e^x}{\left(ae^x+b\right)e^{2x}}dx$.

Đặt $u=ae^x+b\Rightarrow e^x=\frac{u-b}{a}\Rightarrow e^x dx=\frac{du}{a}$; $I=a\int\frac{du}{u\left(u-b\right)^2}=\frac{a}{b}\int\frac{u-(u-b)}{u\left(u-b\right)^2}du$

$=\frac{a}{b}\int\left[\frac{1}{\left(u-b\right)^2}+\frac{1}{u}-\frac{1}{u-b}\right]du=\frac{a}{b}\left(\frac{-1}{u-b}+\ln\left|\frac{u}{u-b}\right|\right)+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{\left(e^x+1\right)e^x}$.

Lời giải: $I=\int\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)e^{2x}}dx$.

Đặt $t=e^x+1\Rightarrow e^x=t-1\Rightarrow e^x dx=dt$.

$I=\int\frac{dt}{t\left(t-1\right)^2}=\int\frac{t-(t-1)}{t\left(t-1\right)^2}dt=\int\left[\frac{1}{\left(t-1\right)^2}+\frac{1}{t}-\frac{1}{t-1}\right]dt$

$=\left(-\frac{1}{t-1}+\ln|t|-\ln|t-1|\right)+C=\left(-\frac{1}{t-1}+\ln\left|\frac{t}{t-1}\right|\right)+C$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{dx}{\left(2e^x+2\right)e^x}=\left(-\frac{1}{t-2}+\ln\left|\frac{t}{t-2}\right|\right)+C$ (với $t=2e^x+2$).

b. $I=\int\frac{dx}{\left(5e^x+7\right)e^x}=\frac{5}{7}\left(-\frac{1}{t-7}+\ln\left|\frac{t}{t-7}\right|\right)+C$ (với $t=5e^x+7$).

c. $I=\int\frac{dx}{\left(2e^x+3\right)e^x}=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{t-3}+\ln\left|\frac{t}{t-3}\right|\right)+C$ (với $t=2e^x+3$).

Dạng 24: $I=\int\frac{e^{nx}}{1+e^{2nx}}dx$

Phương pháp: $I=\frac{1}{n}\int\frac{d\left(e^{nx}\right)}{1+e^{2nx}}=\frac{1}{n}\int\frac{dt}{1+t^2}$.

Đặt $t=\tan u\Rightarrow dt=\left(1+\tan^2 u\right)du$.

$I=\frac{1}{n}\int\frac{1+\tan^2 u}{1+\tan^2 u}du=\frac{u}{n}+C=\frac{\arctan t}{n}+C=\frac{\arctan e^{nx}}{n}+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$.

Lời giải: $I=\int\frac{d\left(e^x\right)}{1+e^{2x}}=\int\frac{dt}{1+t^2}$.

Đặt $t=\tan u\Rightarrow dt=\left(1+\tan^2 u\right)du$.

$I=\int\frac{1+\tan^2 u}{1+\tan^2 u}du=\int du=u+C=\arctan t+C=\arctan e^x+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}dx=\frac{u}{2}+C=\frac{\arctan t}{2}+C=\frac{\arctan e^{2x}}{2}+C$.

b. $I=\int\frac{e^{3x}}{1+e^{6x}}dx=\frac{u}{3}+C=\frac{\arctan t}{3}+C=\frac{\arctan e^{3x}}{3}+C$.

c. $I=\int\frac{e^{4x}}{1+e^{8x}}dx=\frac{u}{4}+C=\frac{\arctan t}{4}+C=\frac{\arctan e^{4x}}{4}+C$.

Dạng 25: $I=\int \frac{cx^2+d}{(ax+b)^2}e^x dx$

Phương pháp: $I=\int \frac{\frac{c}{a^2}(ax+b-b)^2+d}{(ax+b)^2}e^x dx$

$=\frac{c}{a^2}\int e^x dx-\frac{2bc}{a^2}\int \frac{e^x}{ax+b}dx+\frac{2b^2c+d}{a^2}\int \frac{e^x}{(ax+b)^2}dx.$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int \frac{x^2+2}{(2x+3)^3}e^x dx.$

Lời giải: $I=\int \frac{x^2-2}{(2x+3)^2}e^x dx=\frac{1}{4}\int e^x dx-\frac{3}{2}\int \frac{e^x}{2x+3}dx+5\int \frac{e^x}{(2x+3)^2}dx.$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \frac{2x^2+1}{(x+4)^2}e^x dx=\int e^x dx-6\int \frac{e^x}{x+4}dx+33\int \frac{e^x}{(x+4)^2}dx.$

b. $I=\int \frac{3x^2-5}{(x-7)^2}e^x dx=3\int e^x dx+42\int \frac{e^x}{x-7}dx+289\int \frac{e^x}{(x-7)^2}dx.$

c. $I=\int \frac{x^2-3}{(x+5)^2}e^x dx=\int e^x dx-10\int \frac{e^x}{x+5}dx+47\int \frac{e^x}{(x+5)^2}dx.$

Dạng 26: $I=\int x^{n-1}e^{ax^n+b}dx$

Phương pháp: $I=\frac{1}{an}\int e^{ax^n+b}d(ax^n+b)=\frac{1}{an}e^{ax^n+b}+C.$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int xe^{x^2+3}dx.$

Lời giải: $I=\frac{1}{2}\int 2xe^{x^2+3}dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2+3}d(x^2+3)=\frac{1}{2}e^{x^2+3}+C.$



Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int x^2e^{-x^3-2}dx=-\frac{1}{3}e^{-x^3-2}+C$.

b. $I=\int x^3e^{4x^4-5}dx=\frac{1}{16}e^{4x^4-5}+C$.

c. $I=\int x^{-3}e^{3x^{-2}+1}dx=-\frac{1}{6}e^{3x^{-2}+1}+C$.

Dạng 27: $I=\int x^{2n-1}e^{x^n}dx$

Phương pháp: Đặt $t=x^n\Rightarrow dt=nx^{n-1}dx$.

$I=\frac{1}{n}\int te^tdt=\frac{t}{n}\left(e^t-1\right)+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int x^3e^{x^2}dx$.

Lời giải: Đặt $t=x^2\Rightarrow dt=2xdx$.

$I=\frac{1}{2}\int te^tdt=\frac{t}{2}\left(e^t-1\right)+C$



Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int x^9e^{x^5}dx=\frac{e^{x^5}}{5}\left(x^5-1\right)+C$.

b. $I=\int x^7e^{x^4}dx=\frac{e^{x^4}}{4}\left(x^4-1\right)+C$.

c. $I=\int x^5e^{x^3}dx=\frac{e^{x^3}}{3}\left(x^3-1\right)+C$.

Dạng 28: $I=\int \frac{e^{m\ln(ax+b)+n}}{ax+b}dx$

Phương pháp: $I=\frac{1}{am}\int e^{m\ln(ax+b)+n}d\left(m\ln(ax+b)+n\right)=\frac{1}{am}e^{m\ln(ax+b)+n}+C.$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int \frac{e^{\ln(x+1)+2}}{x+1}dx.$

Lời giải: $I=\int e^{\ln(x+1)+2}d\left(\ln(x+1)+2\right)=e^{\ln(x+1)+2}+C.$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \frac{e^{2\ln(2x+1)+1}}{2x+1}dx=e\left(x^2+x\right)+C.$

b. $I=\int \frac{e^{2\ln(3x-1)+3}}{3x-1}dx=e^3\left(\frac{3}{2}x^2-x\right)+C.$

c. $I=\int \frac{e^{4\ln(x-2)-1}}{x-2}dx=\frac{(x-2)^4}{4e}+C.$

Dạng 29: $I=\int \frac{e^{nx}}{\sqrt{a+be^x}}dx$

Phương pháp: Đặt $t=\sqrt{a+be^x}\Rightarrow t^2=a+be^x\Rightarrow e^x=\frac{t^2-a}{b}\Rightarrow e^xdx=\frac{2t}{b}dt$

$$I=\int \frac{\left(e^x\right)^{n-1}e^x}{\sqrt{a+be^x}}dx=\int \frac{\left(\frac{t^2-a}{b}\right)^{n-1}}{t}\frac{2t}{b}dt=\frac{2}{b^n}\int\left(t^2-a\right)^{n-1}dt \text{ với } n\geq 1.$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx.$

Lời giải: Đặt $t=\sqrt{1+e^x}\Rightarrow t^2=1+e^x\Rightarrow e^x=t^2-1\Rightarrow e^xdx=2tdt.$

$$I=2\int \frac{dt}{t}=2\ln|t|+C=2\ln\left(\sqrt{1+e^x}\right)+C.$$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{2+3e^x}}dx=\frac{2}{27}\left(3e^x-4\right)\sqrt{3e^x+2}+C$.

b. $I=\int\frac{e^{3x}}{\sqrt{1-4e^x}}dx=-\frac{1}{60}\left(6e^{2x}+2e^x+1\right)\sqrt{1-4e^x}+C$.

Dạng 30: $I=\int\frac{e^x}{\sqrt[m]{\left(a+be^x\right)^n}}dx$

Phương pháp: $I=\int\frac{e^x}{\left(a+be^x\right)^{\frac{n}{m}}}dx$.

Đặt $u=a+be^x\Rightarrow du=be^xdx\Rightarrow e^xdx=\frac{du}{b}$.

$I=\int\frac{du}{bu^{\frac{n}{m}}}=\frac{1}{b}\int u^{-\frac{n}{m}}du=\frac{1}{b}\frac{u^{1-\frac{n}{m}}}{1-\frac{n}{m}}+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{e^x}{\sqrt[3]{\left(3+2e^x\right)^2}}dx$.

Lời giải: Đặt $t=3+2e^x\Rightarrow dt=2e^xdx\Rightarrow e^xdx=\frac{dt}{2}$.

$I=\int\frac{dt}{2t^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{2}{3}}dt=\frac{1}{2}.\frac{t^{1-\frac{2}{3}}}{1-\frac{2}{3}}+C=\frac{3\sqrt[3]{t}}{2}+C=\frac{3\sqrt[3]{3+2e^x}}{2}+C$.

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{e^x}{\sqrt[4]{\left(1-3e^x\right)^3}}dx=-\frac{4}{3}\sqrt[4]{1-3e^x}+C$.

b. $I=\int\frac{e^x}{\sqrt[5]{\left(2+e^x\right)^6}}dx=-\frac{5}{\sqrt[5]{2+e^x}}+C$.

c. $I=\int\frac{e^x}{\sqrt[6]{\left(5-2e^x\right)^5}}dx=-3\sqrt[6]{5-2e^x}+C$.

Dạng 31: $I=\int\frac{e^{ax+b}}{\sqrt[k]{me^{ax+b}+n}}dx$

Phương pháp: Đặt $u=\sqrt[k]{me^{ax+b}+n}\Rightarrow u^k=me^{ax+b}+n$

$\Rightarrow ku^{k-1}du=mae^{ax+b}dx\Rightarrow\frac{k}{ma}u^{k-1}du=e^{ax+b}dx$.

$I=\frac{k}{am}\int\frac{u^{k-1}}{u}du=\frac{k}{am}\int u^{k-2}du=\frac{ku^{k-1}}{am(k-1)}+C$.

Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{e^{x+1}}{\sqrt[3]{e^{x+1}+1}}dx$.

Lời giải: Đặt $t=\sqrt[3]{e^{x+1}+1}\Rightarrow t^3=e^{x+1}+1\Rightarrow e^{x+1}dx=3t^2dt$.

$I=\int\frac{3t^2}{t}dt=3\int tdt=\frac{3}{2}t^2+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(e^{x+1}+1\right)^2}+C$.

Dạng 32: $I=\int\frac{dx}{ae^x+be^{-x}+c}$

Phương pháp: $I=\int\frac{dx}{ae^x+\frac{b}{e^x}+c}=\int\frac{e^x}{ae^{2x}+ce^x+b}dx$.

Đặt $t=e^x\Rightarrow dt=e^xdx$.

$I=\int\frac{dt}{at^2+ct+b}$.

Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}+1}$.

Lời giải: $I=\int\frac{e^x}{e^{2x}+e^x+1}dx$.

Đặt $t=e^x\Rightarrow e^xdx=dt$.

$I=\int\frac{dt}{t^2+t+1}$.



Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{dx}{2e^x+e^{-x}+3}=\int\frac{dt}{2t^2+3t+1}$.

b. $I=\int\frac{dx}{-4e^x+e^{-x}-3}=\int\frac{dt}{-4t^2-3t+1}$.

c. $I=\int\frac{dx}{6e^x-e^{-x}+9}=\int\frac{dt}{6t^2+9t-1}$.

Dạng 33: $I=\int\sqrt[n]{a+be^x}e^xdx$

Phương pháp: $I=\frac{1}{b}\int\sqrt[n]{a+be^x}d\left(a+be^x\right)=\frac{1}{b}\int\left(a+be^x\right)^{\frac{1}{n}}d\left(a+be^x\right)$

$=\frac{1}{b}.\frac{\left(a+be^x\right)^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}+C$.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int\sqrt[3]{1+2e^x}e^xdx$.

Lời giải:

$I=\frac{1}{2}\int\sqrt[3]{1+2e^x}d\left(1+2e^x\right)=\frac{1}{2}.\frac{\left(1+2e^x\right)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+C=\frac{3\sqrt[3]{\left(1+2e^x\right)^4}}{8}+C$



Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\sqrt[4]{2+e^x}e^xdx=\frac{4\sqrt[4]{\left(2+e^x\right)^5}}{5}+C$.

b. $I=\int\sqrt[5]{4+2e^x}e^xdx=\frac{5\sqrt[5]{\left(4+2e^x\right)^6}}{.\ 3\sqrt[5]{16}}+C$.

c. $I=\int\sqrt[7]{1-2e^x}e^xdx=-\frac{7\sqrt[7]{\left(1-2e^x\right)^8}}{16}+C$.

Dạng 34: $I=\int \sqrt[k]{\left(me^{ax+b}+n\right)^q}e^{ax+b}dx$

Phương pháp:

$$I=\frac{1}{am}\int \left(me^{ax+b}+n\right)^{\frac{q}{k}}d\left(me^{ax+b}+n\right)=\frac{1}{am}.\frac{\left(m.e^{ax+b}+n\right)^{\frac{q}{k}+1}}{\frac{q}{k}+1}+C.$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int \sqrt[3]{\left(e^{x+1}+1\right)^2}e^{x+1}dx$.

Lời giải: $I=\int \left(e^{x+1}+1\right)^{\frac{2}{3}}d\left(e^{x+1}+1\right)=\frac{3\left(e^{x+1}+1\right)^{\frac{5}{3}}}{5}+C=\frac{3\sqrt[3]{\left(e^{x+1}+1\right)^5}}{5}+C$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int \sqrt[4]{\left(2e^{x+2}+3\right)^3}e^{x+2}dx=\frac{2\sqrt[4]{\left(2e^{x+2}+3\right)^7}}{7}+C.$

b. $I=\int \sqrt[5]{\left(e^{2x+1}-2\right)^2}e^{2x+1}dx=\frac{5\sqrt[5]{\left(e^{2x+1}-2\right)^7}}{14}+C.$

c. $I=\int \sqrt[6]{\left(3e^{x-3}+1\right)^5}e^{x-3}dx=\frac{2\sqrt[6]{\left(3e^x+e^3\right)^{11}}}{11\sqrt{e^{11}}}+C.$

Dạng 35: $I=\int e^{m\cos(ax+b)+n}\sin(ax+b)dx$

Phương pháp:

$$I=-\frac{1}{am}\int e^{m\cos(ax+b)+n}d\left(m\cos(ax+b)+n\right)=-\frac{1}{am}e^{m\cos(ax+b)+n}+C.$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int e^{\cos(x+1)+1}\sin(x+1)dx$.

Lời giải: $I=-\int e^{\cos(x+1)+1}d\left(\cos(x+1)+1\right)=-e^{\cos(x+1)+1}+C.$





Bài tập minh họa

➢ **Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây**

a. $I=\int e^{2\cos(3x-1)+3}\sin(3x-1)dx=-\frac{1}{6}e^{2\cos(3x-1)+3}+C.$

b. $I=\int e^{3\cos(2x+1)-4}\sin(2x+1)dx=-\frac{1}{6}e^{3\cos(2x+1)-4}+C.$

c. $I=\int e^{\cos(4x+3)-2}\sin(4x+3)dx=-\frac{1}{4}e^{\cos(4x+3)-2}+C.$

Dạng 36: $I=\int e^{m\sin(ax+b)+n}\cos(ax+b)dx$

Phương pháp:

$I=\frac{1}{am}\int e^{m\sin(ax+b)+n}d(m\sin(ax+b)+n)=\frac{1}{am}e^{m\sin(ax+b)+n}+C.$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int e^{\sin(x+2)+3}\cos(x+2)dx$.

Lời giải: $I=\int e^{\sin(x+2)+3}d(\sin(x+2)+3)=e^{\sin(x+2)+3}+C.$



Bài tập minh họa

➢ **Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây**

a. $I=\int e^{2\sin(3x+5)+7}\cos(3x+5)dx=\frac{1}{6}e^{2\sin(3x+5)+7}+C.$

b. $I=\int e^{-3\sin(x-1)+4}\cos(x-1)dx=-\frac{1}{3}e^{-3\sin(x-1)+4}+C.$

c. $I=\int e^{4\sin(-6x+5)+2}\cos(-6x+5)dx=-\frac{1}{24}e^{4\sin(-6x+5)+2}+C.$

Dạng 37: $I=\int \frac{e^{\tan(ax+b)}}{\cos^2(ax+b)}dx$

Phương pháp: $I=\frac{1}{a}\int e^{\tan(ax+b)}d\left(\tan(ax+b)\right)=\frac{1}{a}e^{\tan(ax+b)}+C.$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int \frac{e^{\tan(x+1)}}{\cos^2(x+1)}dx.$

Lời giải: $I=\int e^{\tan(x+1)}d\left(\tan(x+1)\right)=e^{\tan(x+1)}+C.$

Bài tập minh họa

➢ **Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây**

a. $I=\int \frac{e^{\tan(2x-1)}}{\cos^2(2x-1)}dx=\frac{e^{\tan(2x-1)}}{2}+C.$

b. $I=\int \frac{e^{\tan(3x-2)}}{\cos^2(3x-2)}dx=\frac{e^{\tan(3x-2)}}{3}+C.$

c. $I=\int \frac{e^{\tan(2x+3)}}{\cos^2(2x+3)}dx=\frac{e^{\tan(2x+3)}}{2}+C.$

Dạng 38: $I=\int \frac{e^{m\cot(ax+b)+n}}{\sin^2(ax+b)}dx$

Phương pháp:

$I=-\frac{1}{am}\int e^{m\cot(ax+b)+n}d\left(m\cot(ax+b)+n\right)=-\frac{1}{am}e^{m\cot(ax+b)+n}+C.$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm $I=\int \frac{e^{2\cot(x+1)+1}}{\sin^2(x+1)}dx.$

Lời giải: $I=-\frac{1}{2}\int e^{2\cot(x+1)+1}d\left(2\cot(x+1)+1\right)=-\frac{1}{2}e^{2\cot(x+1)+1}+C.$

Bài tập minh họa

➢ Tìm nguyên hàm các hàm số sau đây

a. $I=\int\frac{e^{3\cot(2x-1)-2}}{\sin^2(2x-1)}dx=-\frac{1}{6}e^{3\cot(2x-1)-2}+C$.

b. $I=\int\frac{e^{2\cot(3-2x)+3}}{\sin^2(3-2x)}dx=\frac{1}{4}e^{3\cot(3-2x)+3}+C$.

c. $I=\int\frac{e^{4\cot(2-x)-1}}{\sin^2(2-x)}dx=\frac{1}{4}e^{4\cot(2-x)-1}+C$.

III. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Tính các tích phân

a. $I=\int\frac{e^{2x}}{1+\sqrt{e^x}}dx$.

b. $I=\int\frac{(x^2+x)e^x}{x+e^{-x}}dx$.

c. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+9}}$.

d. $I=\int\frac{\ln(1+x^2)^x+2011x}{\ln\left[(ex^2+e)^{x^2+1}\right]}dx$.

e. $I=\int_1^e\frac{xe^x+1}{x(e^x+\ln x)}dx$.

➢ Lời giải

a. Đặt $t=\sqrt{e^x}\Rightarrow t^2=e^x\Rightarrow 2tdt=e^xdx$.

$I=2\int\frac{t^3}{1+t}dt=\frac{2}{3}t^3-t^2+2t-2\ln|t+1|+C$

$=\frac{2}{3}e^x\sqrt{e^x}-e^x+2\sqrt{e^x}-2\ln\left|\sqrt{e^x}+1\right|+C$.

b. $I=\int\frac{xe^x(x+1)}{xe^x+1}dx$

Đặt $t=xe^x+1\Rightarrow I=xe^x+1-\ln|xe^x+1|+C$.

c. Đặt $t=\sqrt{e^{2x}+9}\Rightarrow t^2-9=e^{2x}$

$\Rightarrow tdt = e^{2x}dx = \left(t^2-9\right)dx \Rightarrow dx = \frac{t}{t^2-9}dt.$

$I = \int \frac{t}{t\left(t^2-9\right)}dt = \int \frac{dt}{t^2-9} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right| + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{\sqrt{e^{2x}+9}-3}{\sqrt{e^{2x}+9}+3}\right| + C.$

d. Ta có $I = \int \frac{\left[\ln\left(x^2+1\right)+2011\right]x}{\left(x^2+1\right)\left[\ln\left(x^2+1\right)+1\right]}dx.$

Đặt $t = \ln\left(x^2+1\right)+1.$

$I = \frac{1}{2}\int \frac{t+2010}{t}dt = \frac{1}{2}t + 1005\ln|t| + C$

$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \frac{1}{2} + 1005\ln\left[\ln\left(x^2+1\right)+1\right] + C.$

e. $I = \int_1^e \frac{d\left(e^x+\ln x\right)}{e^x+\ln x} = \ln\left|e^x+\ln x\right|\Big|_1^e = \ln\frac{e^e+1}{e}$

Bài 2. Tính các tích phân

a. $I = \int_0^{\ln 2} \frac{2e^{3x}+e^{2x}-1}{e^{3x}+e^{2x}-e^x+1}dx.$ **b.** $I = \int_0^{3\ln 2} \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{e^x}+2\right)^2}.$

c. $I = \int_0^{\ln 2} \sqrt[3]{e^x-1}dx.$ **d.** $I = \int_{3\ln 2}^{\ln 15} \frac{e^{2x}-24e^x}{e^x\sqrt{e^x+1}+5e^x-3\sqrt{e^x+1}-15}dx.$

e. $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{e^x-1+\sqrt{e^x-2}}dx.$

➢ Lời giải

a. $I = \int_0^{\ln 2} \frac{3e^{3x}+2e^{2x}-e^x-\left(e^{3x}+e^{2x}-e^x+1\right)}{e^{3x}+e^{2x}-e^x+1}dx$

$= \int_0^{\ln 2}\left(\frac{3e^{3x}+2e^{2x}-e^x}{e^{3x}+e^{2x}-e^x+1}-1\right)dx = \ln\left(e^{3x}+e^{2x}-e^x+1\right)\Big|_0^{\ln 2} - x\Big|_0^{\ln 2}$

$= \ln 11 - \ln 4 = \ln\frac{14}{4}.$

b. $I=\int_0^{3\ln 2}\frac{e^{\frac{x}{3}}}{e^{\frac{x}{3}}\left(\sqrt[3]{e^x}+2\right)^2}dx$

Đặt $t=e^{\frac{x}{3}}\Rightarrow dt=\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}dx$.

$I=\frac{3}{4}\left(\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\right)$.

c. Đặt $\sqrt[3]{e^x-1}=t\Rightarrow dx=\frac{3t^2dt}{t^3+1}$.

$I=3\int_0^1\left(1-\frac{1}{t^3+1}\right)dt=3-3\int_0^1\left(\frac{1}{t^3+1}\right)dt$.

Tính $I_1=3\int_0^1\left(\frac{1}{t^3+1}\right)dt=\int_0^1\left(\frac{1}{t+1}+\frac{2-t}{t^2-t+1}\right)dt=\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\ln 2$.

Vậy $I=3-\ln 2-\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

d. Đặt: $t=\sqrt{e^x+1}\Rightarrow t^2+1=e^x\Rightarrow 2tdt=e^xdx$.

$I=\int_3^4\frac{\left(2t^2-10t\right)}{t^2-4}dt=\int_3^4\left(2-\frac{3}{t-2}-\frac{7}{t+2}\right)dt$

$=\left(2t-3\ln|t-2|-7\ln|t+2|\right)\Big|_3^4=2-3\ln 2-7\ln 6+7\ln 5$.

e. Đặt $t=\sqrt{e^x-2}\Rightarrow 2tdt=e^{2x}dx$.

$I=2\int_0^1\frac{\left(t^2+2\right)t}{t^2+t+1}dt=2\int_0^1\left(t-1+\frac{2t+1}{t^2+t+1}\right)dt$

$=2\int_0^1(t-1)dt+2\int_0^1\frac{d\left(t^2+t+1\right)}{t^2+t+1}=\left(t^2-2t\right)\Big|_0^1+2\ln\left(t^2+t+1\right)\Big|_0^1$

$=2\ln 3-1$.

Bài 3. Tính các tích phân

a. $I=\int_0^{\ln 3}\frac{2e^{3x}-e^{2x}}{e^x\sqrt{4e^x-3}+1}dx$.

b. $I=\int_{\ln\frac{8}{3}}^{\ln\frac{16}{3}}\sqrt{3e^x-4}dx$.

c. $I=\int_0^{\ln 3}\frac{e^x}{\sqrt{\left(e^x+1\right)^3}}dx$.

d. $I=\int_{\ln 2}^{\ln 5}\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx$.

e. $I=\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx$.

➢ Lời giải

a. Đặt $t=\sqrt{4e^{3x}-3e^{2x}}\Rightarrow t^2=4e^{3x}-3e^{2x}$

$\Rightarrow 2tdt=\left(14e^{3x}-3e^{2x}\right)dx\Rightarrow\frac{tdt}{3}=\left(2e^{3x}-e^{2x}\right)dx$.

$I=\frac{1}{3}\int_1^9\frac{tdt}{t+1}=\frac{1}{3}\int_1^9\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{1}{3}\left(t-\ln\left|t+1\right|\right)\Big|_1^9=\frac{8-\ln 5}{3}$.

b. Đặt $t=\sqrt{3e^x-4}\Rightarrow e^x=\frac{t^2+4}{3}\Rightarrow dx=\frac{2t}{t^2+4}dt$.

$I=\int_2^{2\sqrt{3}}\frac{2t^2}{t^2+4}dt=2\int_2^{2\sqrt{3}}dt-8\int_2^{2\sqrt{3}}\frac{dt}{t^2+4}=4\left(\sqrt{3}-1\right)-8H$.

Với $H=\int_2^{2\sqrt{3}}\frac{dt}{t^2+4}$.

Đặt $t=2\tan u, u\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow dt=2\left(1+\tan^2 u\right)du$.

$H=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}du=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{24}$.

Vậy $I=4\left(\sqrt{3}-1\right)-\frac{\pi}{3}$.

c. Đặt $t=\sqrt{e^x+1}\Leftrightarrow t^2=e^x+1\Rightarrow 2tdt=e^xdx\Rightarrow dx=\frac{2tdt}{e^x}$.

$I=2\int_{\sqrt{2}}^2\frac{tdt}{t^3}=\sqrt{2}-1$.

d. Đặt $t=\sqrt{e^x-1}\Leftrightarrow t^2=e^x-1\Rightarrow dx=\frac{2t}{e^x}dt$.

$$I=2\int_1^2\left(t^2+1\right)dt=2\left(\frac{t^3}{3}+t\right)\Big|_1^2=\frac{20}{3}.$$

e. Đặt $t=\sqrt{e^x-1}\Rightarrow t^2=e^x-1\Rightarrow 2tdt=e^xdx\Rightarrow dx=\frac{2tdt}{e^x}=\frac{2tdt}{t^2+1}.$

$$I=\int_0^1\frac{2t^2}{t^2+1}dt=2\int_0^1\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=\frac{4-\pi}{2}.$$

Bài 4. Tính các tích phân

a. $I=\int_1^2\frac{2^x-2^{-x}}{4^x+4^{-x}-2}dx.$

b. $I=\int_0^1\frac{6^x}{9^x+3.6^x+2.4^x}dx.$

c. $I=\int_1^e\left(\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}+3x^2\ln x\right)dx.$

d. $I=\int_1^e\left(\frac{\ln x\sqrt[3]{2+\ln^2 x}}{x}\right)dx.$

e. $I=\int_e^{e^2}\frac{dx}{x.\ln x.\ln ex}.$

➢ Lời giải

a. Đặt $t=2^x-2^{-x}\Rightarrow 4^x+4^{-x}-2=\left(2^x+2^{-x}\right)^2-4$. $I=\frac{1}{4\ln 2}\ln\frac{81}{25}.$

b. $I=\int_0^1\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}+3.\left(\frac{3}{2}\right)^x+2}dx$. Đặt $t=\left(\frac{3}{2}\right)^x$

$$I=\frac{1}{\ln 3-\ln 2}\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{dt}{t^2+3t+2}=\frac{\ln 15-\ln 14}{\ln 3-\ln 2}.$$

c. $I=\frac{2\left(2-\sqrt{2}\right)}{3}+\frac{2e^3+1}{3}=\frac{5-2\sqrt{2}+2e^3}{3}$

d. Đặt $t=2+\ln^2 x\Rightarrow dt=\frac{2\ln x}{x}dx.$

$$I=\frac{1}{2}\int_2^3\sqrt[3]{t}dt=\frac{3}{8}\left(\sqrt[3]{3^4}-\sqrt[3]{2^4}\right).$$

e. $I=\int_e^{e^2}\frac{dx}{x.\ln x.\left(1+\ln x\right)}=\int_e^{e^2}\frac{d\left(\ln x\right)}{\ln x.\left(1+\ln x\right)}$

$$=\int_e^{e^2}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{1+\ln x}\right)d\left(\ln x\right)=2\ln 2-\ln 3.$$

Bài 5. Tính các tích phân

a. $I=\int\limits_{\ln 4}^{\ln 6}\frac{e^{2x}}{e^x+6e^{-x}-5}dx$.

b. $I=\int\limits_{1}^{e}\frac{\log_2^3 x}{x\sqrt{1+3\ln^2 x}}dx$.

c. $I=\int\limits_{1}^{e}\frac{x+(x-2)\ln x}{x(1+\ln x)}dx$.

d. $I=\int\limits_{e^2}^{e^3}\frac{2x\ln^2 x-x\ln x^2+3}{x(1-\ln x)}dx$.

e. $I=\int\limits_{1}^{e^2}\frac{\sqrt{\ln^2 x-\ln x^2+1}}{x^2}dx$.

➢ Lời giải

a. Đặt $t=e^x\Rightarrow e^x dx=dt$.

$I=2+9\ln 3-4\ln 2$.

b. $I=\int\limits_{1}^{e}\frac{\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right)^3}{x\sqrt{1+3\ln^2 x}}dx=\frac{1}{\ln^3 2}\int\limits_{1}^{e}\frac{\ln^2 x}{\sqrt{1+3\ln^2 x}}.\frac{\ln x}{x}dx$

Đặt $t=\sqrt{1+3\ln^2 x}\Rightarrow \ln^2 x=\frac{t^2-1}{3}\Rightarrow \frac{\ln x}{x}dx=\frac{t}{3}dt$.

$I=\frac{1}{9\ln^3 2}\left(\frac{1}{3}t^3-t\right)\Big|_1^2=\frac{4}{27\ln^3 2}$.

c. $I=\int\limits_{1}^{e}dx-2\int\limits_{1}^{e}\frac{\ln x}{x(1+\ln x)}dx=e-1-2\underbrace{\int\limits_{1}^{e}\frac{\ln x}{x(1+\ln x)}dx}_{H}$

Tính $H=\int\limits_{1}^{e}\frac{\ln x}{x(1+\ln x)}dx$

Đặt $t=1+\ln x\Rightarrow dt=\frac{dx}{x}$.

$H=\int\limits_{1}^{2}\frac{t-1}{t}dt=1-\ln 2$.

Vậy $I=e-3+2\ln 2$.

d. $I=3\int\limits_{e^2}^{e^3}\frac{1}{x(1-\ln x)}dx-2\int\limits_{e^2}^{e^3}\ln x dx=-3\ln 2-4e^3+2e^2$.

e. Đặt $t=\ln x\Rightarrow dt=\dfrac{dx}{x}$.

$$I=\int_0^2\frac{\sqrt{t^2-2t+1}}{e^t}dt=\int_0^2\frac{|t-1|}{e^t}dt=\underbrace{-\int_0^1\frac{t-1}{e^t}dt}_{H}+\underbrace{\int_1^2\frac{t-1}{e^t}dt}_{K}.$$

$$H=-\left(\int_0^1\frac{tdt}{e^t}-\int_0^1\frac{dt}{e^t}\right)=-\left(-te^{-t}\Big|_0^1+\int_0^1\frac{dt}{e^t}-\int_0^1\frac{dt}{e^t}\right)=\frac{1}{e}.$$

$$K=\int_1^2\frac{tdt}{e^t}-\int_1^2\frac{dt}{e^t}=-te^{-t}\Big|_1^2+\int_1^2\frac{dt}{e^t}-\int_1^2\frac{dt}{e^t}=-te^{-t}\Big|_1^2=\frac{1}{e}-\frac{2}{e^2}.$$

Vậy $I=\dfrac{2(e-1)}{e^2}$.

Bài 6. Tính các tích phân

a. $I=\displaystyle\int_2^5\frac{\ln\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{x-1+\sqrt{x-1}}dx$.

b. $I=\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}}\frac{3-2\ln x}{x\sqrt{1+2\ln x}}dx$.

c. $I=\displaystyle\int_1^e\frac{xe^x+1}{x\left(e^x+\ln x\right)}dx$.

d. $I=\displaystyle\int_1^{e^3}\frac{\ln^3 x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$.

e. $I=\displaystyle\int_1^e\frac{\ln x\sqrt[3]{2+\ln^2 x}}{x}dx$.

➢ Lời giải

a. Đặt $t=\ln\left(\sqrt{x-1}+1\right)\Rightarrow 2dt=\dfrac{dx}{x-1+\sqrt{x-1}}$.

$I=2\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3}dt=(\ln 3-\ln 2).2$.

b. Đặt $t=\sqrt{1+\ln x}\Rightarrow 1+\ln x=t^2\Rightarrow\dfrac{dx}{x}=2tdt$ và $x=\left(t^2-1\right)^3$.

$$I=\int_1^2\frac{\left(t^2-1\right)^3}{t}dt=\int_1^2\frac{t^6-3t^4+3t^2-1}{t}dt$$

$$=\int_1^2\left(t^5-3t^3+3t-\frac{1}{t}\right)dt=\frac{15}{4}-\ln 2.$$

c. Đặt $t=\sqrt{1+2\ln x};t^2=1+2\ln x\to 2tdt=\dfrac{2dx}{x};\ tdt=\dfrac{dx}{x}$

$I=\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\left(2-t^2\right)dt=\left(2t-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_1^{\sqrt{3}}$.

$$=\left(2\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{3}}{3}\right)-\left(2-\frac{1}{3}\right)$$

$$=\sqrt{3}-\frac{5}{3}=\frac{3\sqrt{3}-5}{3}$$

d. Đặt $t=2+\ln^2 x \Rightarrow \frac{2\ln x}{x}dx=dt$.

$I=\frac{3}{8}\left[\sqrt[3]{3^4}-\sqrt[3]{2^4}\right]$.

e. Đặt $t=e^x+\ln x \Rightarrow dt=\left(e^x+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{xe^x+1}{x}dx$.

$I=\ln\frac{e^e+1}{e}$.

Bài 7. Tính các tích phân

a. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\sin 2x dx$.

b. $I=\int_0^1 x\ln\left(x^2+x+1\right)dx$.

c. $I=\int_3^8 \frac{\ln x}{\sqrt{x+1}}dx$.

d. $I=\int_1^e \frac{x^2+x\ln x+1}{x}e^x dx$.

e. $I=\int_1^e \left(\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}+\ln^2 x\right)dx$.

➢ Lời giải

a. $I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\sin x\cos x dx$

Đặt $\begin{cases}u=\sin x\\ dv=e^{\sin x}\cos x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\cos x dx\\ v=e^{\sin x}\end{cases}$.

$I=2e^{\sin x}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos x dx=2e-2e^{\sin x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2$.

b. Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(x^2+x+1\right)\\ dv=xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx\\ v=\frac{x^2}{2}\end{cases}$.

$I=\frac{x^2}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x^3+x^2}{x^2+x+1}dx$

$=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{2}\int_0^1(2x-1)dx+\frac{1}{4}\int_0^1\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx-\frac{3}{4}\int_0^1\frac{dx}{x^2+x+1}$

$=\frac{3}{4}\ln 3-\frac{\sqrt{3}\pi}{12}$.

c. Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=\dfrac{dx}{\sqrt{x+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{dx}{x} \\ v=2\sqrt{x+1} \end{cases}$.

$I=\left(2\sqrt{x+1}.\ln x\right)\Big|_3^8-2\int_3^8\frac{\sqrt{x+1}}{x}dx=6\ln 8-4\ln 3-2H$

Tính $H=\int_3^8\frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$

Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow t^2=x+1\Rightarrow x=t^2-1\Rightarrow dx=2tdt$.

$H=\int_2^3\frac{t}{t^2-1}.2tdt=2\int_2^3\frac{t}{t^2-1}dt=\int_2^3\left(2+\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$

$=\left(2t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Big|_2^3=2+\ln 3-\ln 2$.

$I=20\ln 2-6\ln 3-4$.

d. $I=\underbrace{\int_1^e x.e^x dx}_{H}+\underbrace{\int_1^e \ln x.e^x dx}_{K}+\int_1^e\frac{e^x}{x}dx$.

Tính $H=\int_1^e x.e^x dx=x.e^x\Big|_1^e-\int_1^e e^x dx=e^e\left(e-1\right)$.

Tính $K=\int_1^e \ln x.e^x dx=e^x\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{e^x}{x}dx=e^e-\int_1^e\frac{e^x}{x}dx$.

Vậy $I=H+K+\int_1^e\frac{e^x}{x}dx=e^{e+1}$.

e. $I=\underbrace{\int_1^e\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx}_{H}+\underbrace{\int_1^e\ln^2 x dx}_{K}$.

Tính $H=\int_1^e\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$.

Đặt $t=\sqrt{1+\ln x}\Rightarrow t^2=1+\ln x\Rightarrow \ln x=t^2-1\Rightarrow\frac{dx}{x}=2tdt$.

$I_1=\frac{4}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Tính $K=\int_1^e\ln^2 x dx$.

Lấy tích phân từng phần 2 lần ta được $I_2 = e-2$.

Vậy $I = e-\frac{2}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Bài 8. Tính các tích phân

a. $I=\int_1^2 \frac{\ln(x^2+1)}{x^3}dx$.

b. $I=\int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{x^2}dx$.

c. $I=\int_1^{\frac{1}{2}} x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx$.

d. $I=\int_1^2 x^2.\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)dx$.

e. $I=\int_0^1 x^2.\ln(1+x^2)dx$.

➢ Lời giải

a. Đặt $\begin{cases}u=\ln(x^2+1)\\dv=\frac{dx}{x^3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{2x}{x^2+1}dx\\v=-\frac{1}{2x^2}\end{cases}$. $I=\frac{\ln(x^2+1)}{2x^2}\Big|_1^2+\int_1^2\frac{dx}{x(x^2+1)}$

$=\frac{\ln 2}{2}-\frac{\ln 5}{8}+\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\frac{\ln 2}{2}-\frac{\ln 5}{8}+\int_1^2\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int_1^2\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}$

$=\frac{\ln 2}{2}-\frac{\ln 5}{8}+\left(\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|\right)\Big|_1^2=2\ln 2-\frac{5}{8}\ln 5$.

b. Đặt $\begin{cases}u=\ln(x+1)\\dv=\frac{dx}{x^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{dx}{x+1}\\v=-\frac{1}{x}\end{cases}$.

$I=-\frac{1}{x}\ln(x+1)\Big|_1^2+\int_1^2\frac{dx}{x(x+1)}=3\ln 2-\frac{3}{2}\ln 3$.

c. Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\\dv=xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{2}{(1-x)^2}dx\\v=\frac{x^2}{2}\end{cases}$.

$$I=\frac{1}{2}\left[x^2\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\Big|_1^{\frac{1}{2}}-\int_1^{\frac{1}{2}}x^2\left(\frac{2}{1-x^2}\right)dx\right]$$

$$=\frac{\ln 3}{8}+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^2}{x^2-1}dx=\frac{\ln 3}{8}+\int_0^{\frac{1}{2}}\left[1+\frac{1}{(x-1)(x+1)}\right]dx$$

$$=\frac{\ln 3}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}.$$

d. Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)\\dv=x^2dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{x^2-1}{x^3+x}dx\\v=\frac{x^3}{3}\end{cases}$.

$$I=3\ln 3-\frac{10}{3}\ln 2+\frac{1}{6}.$$

e. Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(1+x^2\right)\\dv=x^2dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{2x}{1+x^2}dx\\v=\frac{x^3}{3}\end{cases}$.

$$I=\frac{1}{3}.\ln 2+\frac{4}{9}-\frac{\pi}{6}.$$

Bài 9. Tính các tích phân

a. $I=\int_1^3\frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$.

b. $I=\int_1^e\frac{\ln^2 x+e^x\left(e^x+\ln^2 x\right)}{1+e^x}dx$.

c. $I=\int_{\frac{1}{2}}^2\left(x+1-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$.

d. $I=\int_0^4\ln\left(\sqrt{x^2+9}-x\right)dx$.

➢ Lời giải

a. Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\dv=\frac{dx}{(x+1)^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{dx}{x}\\v=-\frac{1}{x+1}\end{cases}$.

$$I=-\frac{\ln x}{x+1}\Big|_1^3+\int_1^3\frac{dx}{x(x+1)}=\left(-\frac{\ln x}{x+1}+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right)\Big|_1^3=-\frac{1}{4}.\ln 3+\ln\frac{3}{2}.$$

b. Ta có $I=\underbrace{\int_1^e \ln^2 x dx}_{H}+\underbrace{\int_1^e \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx}_{K}$.

Tính $H=\int_1^e \ln^2 x dx$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln^2 x\\ dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{2\ln x}{x}dx\\ v=x\end{cases}$.

$H=x\ln^2 x\Big|_1^e-2\int_1^e \ln x dx=e-2$.

Tính $K=\int_1^e \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx$.

Đặt $t=e^x+1\Rightarrow e^x dx=dt$.

$K=\int_{e+1}^{e^e+1}\frac{t-1}{t}dt=e^e-e+\ln\frac{e+1}{e^e+1}$.

Vậy $I=e^e-2+\ln\frac{e+1}{e^e+1}$.

c. Ta có $I=\underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^2 e^{x+\frac{1}{x}}dx}_{H}+\underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^2\left(x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx}_{K}$

Tính H theo phương pháp từng phần

$H=\int_{\frac{1}{2}}^2 e^{x+\frac{1}{x}}dx=xe^{x+\frac{1}{x}}\Big|_{\frac{1}{2}}^2-\int_{\frac{1}{2}}^2\left(x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx=\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}-K$

$\Rightarrow I=\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}$.

d. Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(\sqrt{x^2+9}-x\right)\\ dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+9}}\\ v=x\end{cases}$.

$I=x\ln\left(\sqrt{x^2+9}-x\right)\Big|_0^4+\int_0^4\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx=2$.

Chương VI

TÍCH PHÂN HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI

I. PHƯƠNG PHÁP

Sử dụng tính chất cơ bản $\int_a^b g(x)dx = \int_a^c g(x)dx + \int_c^b g(x)dx$.

Cách 1: Xét dấu biểu thức $f(x)$ để khử dấu giá trị tuyệt đối.

Cách 2: (Không cần xét dấu).

Giải phương trình $f(x)=0$ trên khoảng $(a;b)$. Giả sử trên khoảng $(a;b)$ phương trình có nghiệm $a<x_1<....<x_n<b$. Do trên mỗi khoảng $(x_i;x_{i+1})$ biểu thức $f(x)$ luôn mang cùng một dấu nên ta có

$$\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^{x_1} |f(x)|dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|dx + ... + \int_{x_n}^b |f(x)|dx$$

$$= \left|\int_a^{x_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| + ... + \left|\int_{x_n}^b f(x)dx\right|.$$

Bài tập minh họa

Ví dụ 1 Tính tích phân $I = \int_0^2 |1-x|dx$.

➢ Lời giải:

Cách 1: Lập bảng xét dấu hàm số $|1-x|$ trên đoạn $[-2;2]$.

Ta có $1-x=0 \Leftrightarrow x=1 \in [0;2]$.

Bảng xét dấu

x	0		1		2
$1-x$		$+$		$-$	

Do đó $I = \int_0^1 |1-x|dx + \int_1^2 |1-x|dx = \int_0^1 (1-x)dx - \int_1^2 (1-x)dx$

$$=\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=1.$$

Cách 2: Ta có $1-x=0\Leftrightarrow x=1\in[0;2]$.

Do đó $I=\int_0^1|1-x|dx+\int_1^2|1-x|dx=\left|\int_0^1(1-x)dx\right|+\left|\int_1^2(x-1)dx\right|$

$$=\left|\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1\right|+\left|\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_1^2\right|=\left|1-\frac{1}{2}\right|+\left|1-\frac{1}{2}\right|=1.$$

Ví dụ 2 Tính tích phân $I=\int_0^2|x^2-x|dx$.

➢ Lời giải:

Cách 1: Lập bảng xét dấu hàm số $|x^2-x|$ trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $x^2-x=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=0\\x=1\end{bmatrix}\in[0;2]$.

Bảng xét dấu

x	0		1		2
x^2-x	0	−	0	+	

Do đó $I=\int_0^1|x^2-x|dx+\int_1^2|x^2-x|dx=-\int_0^1(x^2-x)dx+\int_1^2(x^2-x)dx$

$$=-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2=-\left(-\frac{1}{6}\right)+\frac{5}{6}=1.$$

Cách 2: Ta có $x^2-x=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=0\\x=1\end{bmatrix}\in[0;2]$.

Do đó $I=\int_0^1|x^2-x|dx+\int_1^2|x^2-x|dx=\left|\int_0^1(x^2-x)dx\right|+\left|\int_1^2(x^2-x)dx\right|$

$$=\left|\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1\right|+\left|\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2\right|=\left|\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right|+\left|\left(\frac{8}{3}-\frac{4}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\right|=1.$$



Ví dụ 3 Tính tích phân $I=\int_{-2}^{4}\left|x^2-4x+3\right|dx$.

➢ Lời giải:

Cách 1: Lập bảng xét dấu hàm số $\left|x^2-4x+3\right|$ trên đoạn $[-2;4]$.

Ta có $x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.\in[-2;4]$.

Bảng xét dấu

x	-2		1		3		4
x^2-4x+3		$+$	0	$-$	0	$+$	

Do đó $I=\int_{-2}^{1}\left|x^2-4x+3\right|dx+\int_{1}^{3}\left|x^2-4x+3\right|dx+\int_{3}^{4}\left|x^2-4x+3\right|dx$

$=\int_{-2}^{1}\left(x^2-4x+3\right)dx-\int_{1}^{3}\left(x^2-4x+3\right)dx+\int_{3}^{4}\left(x^2-4x+3\right)dx$

$=\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Big|_{-2}^{1}-\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Big|_{1}^{3}+\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Big|_{3}^{4}=\frac{8}{3}+\frac{50}{3}+\frac{4}{3}=\frac{62}{3}$

Cách 2: Ta có $x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.\in[-2;4]$.

Do đó $I=\int_{-2}^{1}\left|x^2-4x+3\right|dx+\int_{1}^{3}\left|x^2-4x+3\right|dx+\int_{3}^{4}\left|x^2-4x+3\right|dx$

$=\left|\int_{-2}^{1}\left(x^2-4x+3\right)dx\right|+\left|\int_{1}^{3}\left(x^2-4x+3\right)dx\right|+\left|\int_{3}^{4}\left(x^2-4x+3\right)dx\right|$

$=\left|\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Big|_{-2}^{1}\right|+\left|\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Big|_{1}^{3}\right|+\left|\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Big|_{3}^{4}\right|$

$=\left|\left(\frac{1}{3}-2+3\right)-\left(\frac{-8}{3}-8-6\right)\right|+\left|\left(\frac{27}{3}-18+9\right)-\left(\frac{1}{3}-2+3\right)\right|$

$+\left|\left(\frac{64}{3}-32+12\right)-\left(\frac{27}{3}-18+9\right)\right|=\frac{62}{3}$.

Ví dụ 4 Tính tích phân $I=\int_0^3 \frac{|x^2-3x+2|}{x+1}dx$.

➢ Lời giải: Lập bảng xét dấu hàm số $\frac{|x^2-3x+2|}{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$.

Ta có $x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=1\\x=2\end{bmatrix}\in[0;3]$ và $x+1>0\ \forall x\in[0;3]$.

Bảng xét dấu

x	0		1		2		3
x^2-3x+2		+	0	−	0	+	

Do đó $I=\int_0^1 \frac{|x^2-3x+2|}{x+1}dx+\int_1^2 \frac{|x^2-3x+2|}{x+1}dx+\int_2^3 \frac{|x^2-3x+2|}{x+1}dx$

$=\int_0^1 \frac{x^2-3x+2}{x+1}dx-\int_1^2 \frac{x^2-3x+2}{x+1}dx+\int_2^3 \frac{x^2-3x+2}{x+1}dx$

$=\int_0^1\left(x-4+\frac{6}{x+1}\right)dx-\int_1^2\left(x-4+\frac{6}{x+1}\right)dx+\int_2^3\left(x-4+\frac{6}{x+1}\right)dx$

$=\left(\frac{x^2}{2}-4x+6\ln|x+1|\right)\Big|_0^1-\left(\frac{x^2}{2}-4x+6\ln|x+1|\right)\Big|_1^2+\left(\frac{x^2}{2}-4x+6\ln|x+1|\right)\Big|_2^3$

$=24\ln 2-12\ln 3-\frac{5}{2}$.

Ví dụ 5 Tính tích phân $I=\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$.

➢ Lời giải: Ta có $I=\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2 x}dx=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}|\sin x|dx$.

Lập bảng xét dấu hàm số $\sin x$ trên đoạn $[0;2\pi]$.

Ta có $\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi$, chọn $k=1\Rightarrow x=\pi\in[0;2\pi]$.

Bảng xét dấu

x	0		π		2π
$\sin x$		+	0	−	

Do đó $I=\sqrt{2}\int_0^{\pi}|\sin x|dx+\sqrt{2}\int_{\pi}^{2\pi}|\sin x|dx=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin x dx-\sqrt{2}\int_{\pi}^{2\pi}\sin x dx$

$=\sqrt{2}(-\cos x)\Big|_0^{\pi}-\sqrt{2}(-\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi}=\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}=4\sqrt{2}$.

Ví dụ 6 Tính tích phân $I=\int_0^3\left|2^x-4\right|dx$.

➢ Lời giải: Lập bảng xét dấu hàm số $\left|2^x-4\right|$ trên đoạn $[0;3]$.

Ta có $2^x-4=0\Leftrightarrow x=2\in[0;3]$.

Bảng xét dấu

x	0		2		3
2^x-4		$-$	0	$+$	

Do đó $I=\int_0^2\left|2^x-4\right|dx+\int_2^3\left|2^x-4\right|dx=-\int_0^2\left(2^x-4\right)dx+\int_2^3\left(2^x-4\right)dx$

$=-\left(\frac{2^x}{\ln 2}-4x\right)\Big|_0^2+\left(\frac{2^x}{\ln 2}-4x\right)\Big|_2^3=4+\frac{1}{\ln 2}$.

Ví dụ 7 Tính tích phân $I=\int_{-2}^2\left|2x-\left|x+1\right|\right|dx$.

➢ Lời giải: Lập bảng xét dấu hàm số $\left|x+1\right|$ trên đoạn $[-2;2]$.

Ta có $x+1=0\Leftrightarrow x=-1\in[-2;2]$.

Bảng xét dấu

x	-2		-1		2
$x+1$		$-$	0	$+$	

Do đó $I=\int_{-2}^{-1}\left|2x+(x+1)\right|dx+\int_{-1}^2\left|2x-(x+1)\right|dx$

$=\int_{-2}^{-1}\left|3x+1\right|dx+\int_{-1}^2\left|x-1\right|dx$.

Lập bảng xét dấu hàm số $\left|3x+1\right|$ trên đoạn $[-2;-1]$.

Ta có $3x+1=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}\notin[-2;-1]$.

x	-2		-1		$-\frac{1}{3}$
$3x+1$		$-$		$-$	0

Lập bảng xét dấu hàm số $\left|x-1\right|$ trên đoạn $[-1;2]$.

Ta có $x-1=0\Leftrightarrow x=1\in[-1;2]$.

x	-1		1		2
$3x+1$		$-$	0	$+$	

Do đó $I=\int\limits_{-2}^{-1}|3x+1|dx+\int\limits_{-1}^{2}|x-1|dx$

$=\int\limits_{-2}^{-1}|3x+1|dx+\int\limits_{-1}^{1}|x-1|dx+\int\limits_{1}^{2}|x-1|dx$

$=-\int\limits_{-2}^{-1}(3x+1)dx-\int\limits_{-1}^{1}(x-1)dx+\int\limits_{1}^{2}(x-1)dx$

$=-\left(\frac{3}{2}x^2+x\right)\Big|_{-2}^{-1}-\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_{-1}^{1}+\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_{1}^{2}=\frac{7}{2}+2+\frac{1}{2}=6.$

Ví dụ 8 Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{4}\sqrt{x^3-2x^2+x}dx$.

➢ Lời giải: Ta có $I=\int\limits_{0}^{4}\sqrt{x(x-1)^2}dx=\int\limits_{0}^{4}|x-1|\sqrt{x}dx$.

Lập bảng xét dấu hàm số $|x-1|$ trên đoạn $[0;4]$.

Ta có $x-1=0\Leftrightarrow x=1\notin[0;4]$.

x	0		1		4
$x-1$		$-$	0	$+$	

Do đó

$I=\int\limits_{0}^{1}|x-1|\sqrt{x}dx+\int\limits_{1}^{4}|x-1|\sqrt{x}dx=-\int\limits_{0}^{1}(x-1)\sqrt{x}dx+\int\limits_{1}^{4}(x-1)\sqrt{x}dx$

$=-\int\limits_{0}^{1}\left(x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)dx+\int\limits_{1}^{4}\left(x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)dx=-\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{0}^{1}+\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{1}^{4}=8.$

Bài tập bạn đọc tự giải

1. Tính tích phân $I_1=\int\limits_{-3}^{3}|x^2-1|dx$. *Đáp số:* $I_1=\frac{44}{3}$.

2. Tính tích phân $I_2=\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\frac{|x^2-1|}{x^2+1}dx$. *Đáp số:* $I_2=\sqrt{3}-2+\frac{\pi}{3}$.

3. Tính tích phân $I_3=\int\limits_{-2}^{3}|x^3-2x^2-x+2|dx$. *Đáp số:* $I_3=\frac{133}{12}$.



4. Tính tích phân $I_4 = \int_0^4 |3-x|dx$. *Đáp số:* $I_4 = 5$.

5. Tính tích phân $I_5 = \int_{-2}^3 \left(|x+1|+|x-2|\right)dx$. *Đáp số:* $I_5 = 17$.

6. Tính tích phân $I_6 = \int_0^3 \left|\sqrt{x^2-4x+4}-1\right|dx$. *Đáp số:* $I_6 = \frac{3}{2}$.

7. Tính tích phân $I_7 = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\sin x}dx$. *Đáp số:* $I_7 = 4\sqrt{2}$.

8. Tính tích phân $I_8 = \int_0^3 \left|\frac{x^2-3x+2}{x+1}\right|dx$.

Đáp số: $I_8 = \ln\frac{16777216}{531441} - \frac{5}{2}$.

Chương VII

TÍCH PHÂN LIÊN KẾT

Trong nhiều trường hợp việc tính tích phân I phức tạp, ta tìm cách xét thêm tích phân J (gọi là tích phân liên kết, có quan hệ với I) sao cho ta tính được $mI+nJ$ và $nI-mJ$ (thường là $I+J$, $I-J$) tương đối dễ dàng, từ đó suy ra I. Vấn đề là lúc nào thì dùng tích phân liên kết và liên kết đến tích phân nào?

Tính các tích phân sau nhờ sử dụng tích phân liên kết.

Bài toán. Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$.

➢ Lời giải: Xét tích phân liên kết $J=\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$.

Ta có

$$\begin{cases} I+J=\int\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int dx=x+C_1 \\ I-J=\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx=-\int\frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=-\ln\left|\sin x+\cos x\right|+C_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 2I=x+C_1-\ln\left|\sin x+\cos x\right|+C_2 \\ 2J=x+C_1+\ln\left|\sin x+\cos x\right|-C_2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} I=\frac{1}{2}\left(x-\ln\left|\sin x+\cos x\right|\right)+C \\ J=\frac{1}{2}\left(x+\ln\left|\sin x+\cos x\right|\right)+C \end{cases}.$$

Như vậy $I=\frac{1}{2}\left(x-\ln\left|\sin x+\cos x\right|\right)+C$.

Ví dụ 1 Tích tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{(\sin x+\cos x)^3}dx$.

➢ Lời giải: Xét tích phân $J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{(\sin x+\cos x)^3}dx$.

Ta có $I+J=\int\frac{\sin x+\cos x}{(\sin x+\cos x)^3}dx=\int\frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\left[\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{1}{2}\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$$

Và $I-J=\int\frac{\cos x-\sin x}{(\sin x+\cos x)^3}dx=\int\frac{d(\sin x+\cos x)}{(\sin x+\cos x)^2}$

$$=-\frac{1}{2(\sin x+\cos x)^2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=0.$$

Vậy $2I=1\Leftrightarrow I=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 2 Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 3x.\cos^2 6x dx$.

➢ Lời giải: Xét tích phân $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 3x.\cos^2 6x dx$.

Ta có $I+J=\int(\cos^2 3x+\sin^2 3x)\cos^2 6x dx=\int\cos^2 6x dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 12x)dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{\sin 12x}{12}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

Và $I-J=\int(\cos^2 3x-\sin^2 3x)\cos^2 6x dx=\int\cos 6x.\cos^2 6x dx$

$$=\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 6x)d(\sin 6x)=\frac{1}{6}\left(\sin 6x-\frac{\sin^3 6x}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=0.$$

Vậy $2I=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow I=\frac{\pi}{8}$.

Ví dụ 3 Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{\cos^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$.

Lời giải: Xét nguyên hàm $J=\int\frac{\sin^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$.

Ta có $I+J=\int\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=\int dx=x+C_1$.

Và $I-J=\int\frac{\sin^4 x-\cos^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=-\int\frac{(\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^2 x-\sin^2 x)}{(\cos^2 x+\sin^2 x)^2-2\cos^2 x\sin^2 x}dx$

$$= -\int \frac{\cos 2x}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}dx = -\int \frac{d(\sin 2x)}{2-\sin^2 2x} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sin x}{\sqrt{2}-\sin x}\right| + C_2.$$

Vậy $2I = x + C_1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sin x}{\sqrt{2}-\sin x}\right| + C_2 \Leftrightarrow I = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sin x}{\sqrt{2}-\sin x}\right|\right) + C.$

Ví dụ 4 Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{\cos 3x}{2\cos 3x - 5\sin 3x}dx.$

➢ Lời giải: Xét nguyên hàm $J = \int \frac{\sin 3x}{2\cos 3x - 5\sin 3x}dx.$

Ta có $2I - 5J = \int \frac{2\cos 3x - 5\sin 3x}{2\cos 3x - 5\sin 3x}dx = \int x dx + C_1$

Và $5I + 2J = \int \frac{5\cos 3x + 2\sin 3x}{2\cos 3x - 5\sin 3x}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{d(2\cos 3x - 5\sin 3x)}{2\cos 3x - 5\sin 3x}$

$= -\frac{1}{3}\ln|2\cos 3x - 5\sin 3x| + C_2.$

Vậy $29I = 2x + 2C_1 - \frac{5}{3}\ln|2\cos 3x - 5\sin 3x| + 5C_2$

$\Rightarrow I = \frac{1}{29}\left(2x - \frac{5}{3}\ln|2\cos 3x - 5\sin 3x|\right) + C.$

Ví dụ 5 Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{\sin 5x}{9\cos 5x - 7\sin 5x}dx.$

➢ Lời giải: Xét nguyên hàm $J = \int \frac{\cos 5x}{9\cos 5x - 7\sin 5x}dx.$

Ta có $9J - 7I = \int \frac{9\cos 5x - 7\sin 5x}{9\cos 5x - 7\sin 5x}dx = \int x dx + C_1$

Và $7J + 9I = \int \frac{7\cos 5x + 9\sin 5x}{9\cos 5x - 7\sin 5x}dx = -\frac{1}{5}\int \frac{d(9\cos 5x - 7\sin 5x)}{9\cos 5x - 7\sin 5x}$

$= -\frac{1}{5}\ln|9\cos 5x - 7\sin 5x| + C_2.$

Vậy $130I = -\frac{9}{5}\ln|9\cos 5x - 7\sin 5x| + 9C_2 - 7x - C_1$

$\Rightarrow I = \frac{1}{130}\left(-\frac{9}{5}\ln|9\cos 5x - 7\sin 5x| - 7x\right) + C.$



Ví dụ 6 Tính tích phân $I=\int_1^2 \frac{e^x}{e^x-e^{-x}}dx$.

➢ Lời giải: Xét tích phân $J=\int_1^2 \frac{e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx$.

Ta có $\begin{cases} I+J=\int_1^2 \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx=\int_1^2 \frac{d\left(e^x-e^{-x}\right)}{e^x-e^{-x}}=\ln\left(e^x-e^{-x}\right)\Big|_1^2=\ln\left(e^2+1\right)-1 \\ I-J=\int_1^2 \frac{e^x-e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx=\int_1^2 dx=x\Big|_1^2=1 \end{cases}$

$\Rightarrow 2I=\ln\left(e^2+1\right)\Leftrightarrow I=\frac{1}{2}\ln\left(e^2+1\right)$.

Ví dụ 7 Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2b}} e^{ax}\cos bxdx$ với $a;b\neq 0$.

➢ Lời giải: Xét tích phân $J=\int_0^{\frac{\pi}{2b}} e^{ax}\sin bxdx$.

Đặt $\begin{cases} u=\cos bx \\ dv=e^{ax}dx \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=-b\sin bxdx \\ v=\frac{1}{a}e^{ax} \end{cases}$.

$\Rightarrow I=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx\Big|_0^{\frac{\pi}{2b}}+\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2b}} e^{ax}\sin bxdx=-\frac{1}{a}+\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2b}} e^{ax}\sin bxdx$

$\Rightarrow I-\frac{b}{a}J=-\frac{1}{a}\Leftrightarrow aI-bJ=-1$.

Đặt $\begin{cases} u=\sin bx \\ dv=e^{ax}dx \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=b\cos bxdx \\ v=\frac{1}{a}e^{ax} \end{cases}$.

$\Rightarrow J=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx\Big|_0^{\frac{\pi}{2b}}-\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2b}} e^{ax}\cos bxdx=\frac{1}{a}e^{\frac{\pi}{2b}}-\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2b}} e^{ax}\cos bxdx$

$\Rightarrow J+\frac{b}{a}I=\frac{1}{a}e^{\frac{\pi a}{2b}}\Leftrightarrow bI+aJ=e^{\frac{\pi a}{2b}}$.

Ta có $\begin{cases} a^2I-abJ=-a \\ b^2I+abJ=b.e^{\frac{\pi a}{2b}} \end{cases}\Rightarrow\left(a^2+b^2\right)I=-a+b.e^{\frac{\pi a}{2b}}$

$\Rightarrow I=\frac{-a+b.e^{\frac{\pi a}{2b}}}{a^2+b^2}$.

Bài tập bạn đọc tự giải

1. Tìm nguyên hàm $I=\int \frac{\cos 3x}{4\sin 3x+3\cos 3x}dx$.

   Đáp số: $I=\frac{1}{75}\left(9x+4\ln\left|4\sin 3x+3\cos 3x\right|\right)+C$.

2. Tìm nguyên hàm $I=\int \frac{\sin 4x}{4\sin 4x-9\cos 4x}dx$.

   Đáp số: $I=\frac{1}{388}\left(16x+9\ln\left|9\cos 4x-4\sin 4x\right|\right)+C$.

3. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{99} x}{\sin^{99} x+\cos^{99} x}dx$.

   Đáp số: $I=\frac{\pi}{4}$.

4. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x}{\cos 2x}dx$.

   Đáp số:

5. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\pi} \cos^n x.\sin x dx$; $J=\int\limits_0^{\pi} \cos^{n-1} x.\cos nx.\sin x dx$ với $\forall n\in N$.

6. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}dx$.

7. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx$.

Chương VIII

TÍCH PHÂN TRONG ĐỀ THI ĐẠI HỌC
Từ năm 2002 đến 2015

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\left|x^2-4x+3\right|$ và $y=x+3$.

(ĐH_A_2002)

➢ Lời giải: Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=\left|x^2-4x+3\right|$ với đồ thị hàm số $y=x+3$ là: $\left|x^2-4x+3\right|=x+3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=5\end{array}\right.$.

Mặt khác $\left|x^2-4x+3\right|\le x+3\,\forall x\in[0;5]$.

Vậy $S=\int\limits_1^3\left(x+3-\left|x^2-4x+3\right|\right)dx$

$=\int\limits_0^1\left(x+3-x^2+4x-3\right)dx+\int\limits_1^3\left(x+3+x^2-4x+3\right)dx$

$+\int\limits_3^5\left(x+3-x^2+4x-3\right)dx$

$=\int\limits_0^1\left(-x^2+5x\right)dx+\int\limits_1^3\left(x^2-3x+6\right)dx+\int\limits_3^5\left(-x^2+5x\right)dx$

$=\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2\right)\Big|_0^1+\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+6x\right)\Big|_1^3+\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2\right)\Big|_3^5$

$=\frac{13}{6}+\frac{26}{3}+\frac{22}{3}=\frac{109}{6}$ (đvdt).

Nhận xét: Bài toán tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y=f(x)$ và $y=g(x)$, thì thực hiện theo các bước:

+ *Bước 1:* Phương trình hoành độ giao điểm của các đồ thị $f(x)=g(x)$ (tìm hoành độ giao điểm).

+ *Bước 2:* Khảo sát dấu của biểu thức $f(x)-g(x)$ trên đoạn nghiệm.

+ *Bước 3:* Chia nhỏ đoạn cận ra thành nhiều đoạn cận (nếu biểu thức có đổi dấu trên toàn bộ đoạn cận).

+ *Bước 4:* Áp dụng bảng nguyên hàm cơ bản để tính.

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}$ và $y=\frac{x^2}{4\sqrt{2}}$.

(ĐH_B_2002)

➢ Lời giải: Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}$ với đồ thị hàm số $y=\frac{x^2}{4\sqrt{2}}$ là:

$$\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}=\frac{x^2}{4\sqrt{2}}\Leftrightarrow\frac{x^4}{32}+\frac{x^2}{4}-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\sqrt{2}\\x=2\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Ta có $\frac{x^2}{4\sqrt{2}}\le\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}\ \forall x\in\left[-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right]$ và do hình đối xứng qua trục tung nên diện tích cần xác định là:

$$S=2\int_0^{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}-\frac{x^2}{4\sqrt{2}}\right)dx=\underbrace{\int_0^{2\sqrt{2}}\sqrt{16-x^2}dx}_{S_1}-\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\sqrt{2}}x^2dx}_{S_2}.$$

Tính S_1: Đặt $x=4\sin t\Rightarrow dx=4\cos t dt$. Khi $\left\{\begin{array}{l}x=2\sqrt{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}\\x=0\Rightarrow t=0\end{array}\right.$.

$$S_1=16\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t dt=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)dt=2\pi+4.$$

Tính S_2: $S_2=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\sqrt{2}}x^2dx=\frac{1}{6\sqrt{2}}x^3\Big|_0^{2\sqrt{2}}=\frac{8}{3}$.

Vậy $S=S_1-S_2=2\pi+\frac{4}{3}$ (đvdt).

Nhận xét: Bài toán tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y=f(x)$ và $y=g(x)$, thì thực hiện theo các bước:

+ *Bước 1:* Phương trình hoành độ giao điểm của các đồ thị $f(x)=g(x)$

(tìm hoành độ giao điểm).

+ *Bước 2:* Khảo sát dấu của biểu thức $f(x)-g(x)$ trên đoạn nghiệm.

+ *Bước 3:* Chia nhỏ đoạn cận ra thành nhiều đoạn cận (nếu biểu thức có đổi dấu trên toàn bộ đoạn cận).

+ *Bước 4:* Áp dụng bảng nguyên hàm cơ bản để tính.

Ở bài toán này, chúng ta lưu ý:

+ Khi hình phẳng cần tính diện tích có tính đối xứng qua trục tọa độ, thì ta chỉ cần tính một nửa, sau đó nhân 2 lên là xong.

+ Khi tính S_1 thì ta đã sử dụng phương pháp đổi biến (lượng giác hóa) để tính toán.

Nguyên hàm ở dạng $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$ thì ta thường đặt $x=a\sin t$ hoặc $x=a\cos t$.

+ Sử dụng công thức hạ bậc $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$.

+ $\int\cos 2xdx=\frac{1}{2}\int\cos 2xd(2x)=\frac{1}{2}\sin 2x+C$.

+ Khi tính S_2 thì ta sử dụng công thức $\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$.

> Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{-3x-1}{x-1}$ và hai trục tọa độ.
>
> (ĐH_D_2002)

➢ Lời giải: Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=\frac{-3x-1}{x-1}$ với trục hoành là: $\frac{-3x-1}{x-1}=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$.

x	$-\frac{1}{3}$	0
$\frac{-3x-1}{x-1}$	0	$+$

Ta có bảng xét dấu hàm số $y=\frac{-3x-1}{x-1}$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{3};0\right]$

Vậy diện tích cần xác định là:

$$S=\int_{-\frac{1}{3}}^{0}\left|\frac{-3x-1}{x-1}\right|dx=\int_{-\frac{1}{3}}^{0}\left(\frac{-3x-1}{x-1}\right)dx=-\int_{-\frac{1}{3}}^{0}\left(\frac{4}{x-1}+3\right)dx$$

$$=-\left(4\ln|x-1|+3x\right)\Big|_{-\frac{1}{3}}^{0}=4\ln\frac{4}{3}-1 \text{ (đvdt).}$$

Nhận xét: Bài toán tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y=f(x)$ và $y=g(x)$, thì thực hiện theo các bước:

+ *Bước 1:* Phương trình hoành độ giao điểm của các đồ thị $f(x)=g(x)$ (tìm hoành độ giao điểm).

+ *Bước 2:* Khảo sát dấu của biểu thức $f(x)-g(x)$ trên đoạn nghiệm.

+ *Bước 3:* Chia nhỏ đoạn cận ra thành nhiều đoạn cận (nếu biểu thức có đổi dấu trên toàn bộ đoạn cận).

+ *Bước 4:* Áp dụng bảng nguyên hàm cơ bản để tính.

Ở bài toán này, chúng ta lưu ý:

+ Tính phân ở dạng tích phân hữu tỷ, bậc ở tử bằng bậc ở mẫu nên ta thực hiện phép chia tử cho mẫu.

Tính tích phân $I=\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$.

(ĐH_A_2003)

➢ Lời giải: Đặt $t=\sqrt{x^2+4}\Rightarrow x^2=t^2-4\Rightarrow xdx=tdt$. Khi $\begin{cases}x=2\sqrt{3}\Rightarrow t=4\\x=\sqrt{5}\Rightarrow t=3\end{cases}$.

$$I=\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}=\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}}\frac{x}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx=\int_{3}^{4}\frac{t}{\left(t^2-4\right)t}dt=\int_{3}^{4}\frac{dt}{t^2-4}$$

$$=\int_{3}^{4}\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)dt=\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\Big|_{3}^{4}=\frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}.$$

Nhận xét:

+ Bài toán sử dụng phương pháp đổi biến, đặt $t=\sqrt{x^2+4}$.

+ Sử dụng phương pháp biến đổi quen thuộc trong tích phân hữu tỷ,

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\int\frac{dx}{(x-a)(x+a)}=\frac{1}{2a}\int\frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)(x+a)}dx=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx$$



+ Sử dụng công thức $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$.

Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x} dx$.

(ĐH_B_2003)

➢ Lời giải: Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{1+\sin 2x} dx$.

Đặt $t = 1+\sin 2x \Rightarrow dt = 2\cos 2x dx$. Khi $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 2 \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \end{cases}$.

$I = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t|\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\ln 2$.

Nhận xét: Bài toán sử dụng công thức nhân đôi $\cos 2x = 1-2\sin^2 x$.

+ Đổi biến $t = 1+\sin 2x$.

+ $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

Tính tích phân $I = \int_0^2 |x^2 - x| dx$.

(ĐH_D_2003)

➢ Lời giải: Lập bảng xét dấu hàm số $|x^2 - x|$ trên đoạn $[0; 2]$.

Ta có $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = 1 \end{bmatrix} \in [0; 2]$.

Bảng xét dấu

x	0		1		2
$x^2 - x$	0	−	0	+	

Do đó $I = \int_0^1 |x^2 - x| dx + \int_1^2 |x^2 - x| dx = -\int_0^1 (x^2 - x) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx$

$= -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 = -\left(-\frac{1}{6}\right) + \frac{5}{6} = 1$.

Nhận xét: Bài toán là tích phân hàm trị tuyệt đối.

Để giải quyết bài toán, ta cần phải mở trị tuyệt đối ra, bằng cách xét dấu trên đoạn cận.

Tính tích phân $I=\int_1^2 \frac{x}{1+\sqrt{x-1}}dx$.
(ĐH_A_2004)

➢ Lời giải: Đặt $t=\sqrt{x-1}\Rightarrow x=t^2+1\Rightarrow dx=2tdt$. Khi $\begin{cases}x=2\Rightarrow t=1\\x=1\Rightarrow t=0\end{cases}$.

$$I=\int_0^1 \frac{t^2+1}{1+t}.2tdt=2\int_0^1 \frac{t^3+t}{1+t}=2\int\left(t^2-t+2-\frac{2}{1+t}\right)dt$$

$$=2\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+2t-2\ln|t+1|\right)\Big|_0^1=\frac{11}{3}-4\ln 2.$$

Nhận xét: Bài toán sử dụng phương pháp đổi biến quen thuộc.

Đặt $t=\sqrt{x-1}$.

Ta được một tích phân mới là tích phân hữu tỷ.

Để giải bài toán này, ta nhận thấy bậc ở tử cao hơn bậc ở mẫu, nên ta thực hiện phép chia tử số cho mẫu số.

Sử dụng công thức $\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$; công thức vi phân và $\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C$

Tính tích phân $I=\int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}\ln x}{x}dx$.
(ĐH_B_2004)

➢ Lời giải: Đặt $t=\sqrt{1+3\ln x}\Rightarrow t^2=1+3\ln x\Rightarrow 2tdt=\frac{3}{x}dx$.

Khi $\begin{cases}x=e\Rightarrow t=2\\x=1\Rightarrow t=1\end{cases}$.

$$I=\frac{2}{3}\int_1^2 \frac{t^2-1}{3}.t^2dt=\frac{2}{9}\int_1^2\left(t^4-t^2\right)dt=\frac{116}{135}.$$

Nhận xét: Phép đổi biến, đặt $t=\sqrt{1+3\ln x}$.

+ Công thức đạo hàm cần nhớ $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$.



+ Công thức nguyên hàm $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$.

Tính tích phân $I = \int_2^3 \ln\left(x^2 - x\right)dx$.

(ĐH_D_2004)

➢ Lời giải: Đặt $\begin{cases} u = \ln\left(x^2 - x\right) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2x-1}{x^2-x}dx \\ v = x \end{cases}$.

$$I = x\ln\left(x^2 - x\right)\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{2x-1}{x-1}dx = 3\ln 6 - 2\ln 2 - \int_1^2 \left(2 + \frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$= 2\ln 6 - 2\ln 2 - \left(2x + \ln|x-1|\right)\Big|_1^2 = 3\ln 3 - 2.$$

Nhận xét: Sử dụng phương pháp tích phân từng phần.

+ Xuất hiện tích phân hữu tỷ có bậc bằng nhau, ta thực hiện chia tử số cho mẫu số.

+ Sử dụng công thức $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$.

Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx$.

(ĐH_A_2005)

➢ Lời giải: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\cos x + 1)\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx$.

Đặt $t = \sqrt{1+3\cos x} \Rightarrow \cos x = \frac{t^2-1}{3} \Rightarrow \sin x dx = -\frac{2}{3}tdt$.

Khi $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \\ x = 0 \Rightarrow t = 2 \end{cases}$.

$$I = \int_2^1 \frac{\left(2.\frac{t^2-1}{3} + 1\right)}{t}.\left(-\frac{2}{3}t\right)dt = -\frac{2}{9}\int_2^1 \left(2t^2 + 1\right)dt = -\frac{2}{9}\left(\frac{2}{3}t^3 + t\right)\Big|_2^1 = \frac{34}{27}.$$

Nhận xét: Tích phân hàm lượng giác có chứa căn thức.

Ta thực hiện phép đổi biến, đặt $t=\sqrt{1+3\cos x}$.

Chú ý: $(\cos x)'=-\sin x$.

Được tích phân hữu tỷ, sau khi biến đổi rút gọn, ta đưa về dạng đơn giản, sử dụng công thức $\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$ và các nguyên hàm cơ bản.

Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x\cos x}{1+\cos x}dx$.

(ĐH_B_2005)

➢ Lời giải: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x\cos x}{1+\cos x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x\sin x}{1+\cos x}dx$.

Đặt $t=1+\cos x\Rightarrow \sin x dx=-dt$. Khi $\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1\\ x=0\Rightarrow t=2\end{cases}$.

$$I=-2\int_2^1\frac{(t-1)^2}{t}dt=2\int_1^2\left(t-2+\frac{1}{t}\right)dt=2\left(\frac{t^2}{2}-2t+\ln|t|\right)\Big|_1^2=2\ln 2-1.$$

Nhận xét: Tích phân hàm lượng giác, ta biến đổi một chút để thống nhất về 1 loại cung duy nhất.

Thực hiện phép đổi biến (hoặc vi phân) để đưa về dạng hữu tỷ.

Chia tử số cho mẫu số (bậc ở tử cao hơn bậc ở mẫu) và sử dụng công thức $\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$; $\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C$.

Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^{\sin x}+\cos x\right)\cos x dx$.

(ĐH_D_2005)

➢ Lời giải: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^{\sin x}+\cos x\right)\cos x dx=\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}\cos x dx}_{A}+\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx}_{B}$.

Tính A: Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos x dx$. Khi $\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1\\ x=0\Rightarrow t=0\end{cases}$.

$A=\int_0^1 e^t dt=e^t\Big|_0^1=e-1$.

Tính B: $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2x+1)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x+x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$.

Vậy $I=A+B=e+\frac{\pi}{4}-1$.

Nhận xét: Tích phân của tổng thì bằng tổng các tích phân (tính chất tích phân).

Ta chia tích phân I thành tích phân A và tích phân B.

Thực hiện phép đổi biến đổi với tích phân A, đặt $t=\sin x$.

Sử dụng công thức hạ bậc $\cos^2 x=\frac{1}{2}(\cos 2x+1)$ để đơn giản tích phân B.

Công thức nguyên hàm cơ bản $\int \cos u du=\sin u+C$.

Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x}}dx$.

(ĐH_A_2006)

➢ Lời giải: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+3\sin^2 x}}dx$.

Đặt $t=\sqrt{1+3\sin^2 x}\Rightarrow t^2=1+3\sin^2 x\Rightarrow \frac{2t}{3}dt=\sin 2x dx$.

Khi $\begin{cases}x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=2\\ x=0\Rightarrow t=1\end{cases}$.

$I=\int_1^2\frac{\frac{2}{3}t}{t}dt=\frac{2}{3}\int_1^2 dt=\frac{2}{3}t\Big|_1^2=\frac{2}{3}$.

Nhận xét: Thực hiện phép đổi biến $t=\sqrt{1+3\sin^2 x}$ sau khi biến đổi mẫu số.

+ Công thức tính đạo hàm $(\sin^2 x)'=2\sin x(\sin x)'=2\sin x\cos x=\sin 2x$.

+ Công thức nguyên hàm $\int du=u+C$.

Tính tích phân $I=\int\limits_{\ln 3}^{\ln 5}\frac{dx}{e^x+2e^{-x}-3}$.

(ĐH_B_2006)

➢ Lời giải: $I=\int\limits_{\ln 3}^{\ln 5}\frac{dx}{e^x+2e^{-x}-3}=I=\int\limits_{\ln 3}^{\ln 5}\frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2}dx$.

Đặt $t=e^x=dt=e^xdx$. Khi $\begin{cases}x=\ln 5\Rightarrow t=5\\ x=\ln 3\Rightarrow t=3\end{cases}$.

$I=\int\limits_3^5\frac{dt}{(t-1)(t-2)}=\int\limits_3^5\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t-1}\right)dt=\ln\left|\frac{t-2}{t-1}\right|\Big|_3^5=\ln\frac{3}{2}$.

Nhận xét: Ta biến đổi một chút để bài toán trở nên gọn đẹp hơn.

Chú ý: $e^{-x}=\frac{1}{e^x}$.

+ Đổi biến, đặt $t=e^x$.

+ Công thức đạo hàm $\left(e^x\right)'=e^x$.

+ Sử dụng phương pháp biến đổi quen thuộc trong tích phân hữu tỷ,

$$\int\frac{dx}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{b-a}\int\frac{(x-a)-(x-b)}{(x-a)(x-b)}dx=\frac{1}{b-a}\int\left(\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-a}\right)dx.$$

+ Công thức nguyên hàm $\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C$.

Tính tích phân $I=\int\limits_0^1(x-2)e^{2x}dx$.

(ĐH_D_2006)

➢ Lời giải: Đặt $\begin{cases}u=x-2\\ dv=e^{2x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{cases}$.

$I=\frac{1}{2}(x-2)e^{2x}\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int\limits_0^1e^{2x}dx=-\frac{e^2}{2}+1-\frac{e^{2x}}{4}\Big|_0^1=\frac{5-3e^2}{4}$.

Nhận xét: Bài toán sử dụng phương pháp tích phân từng phần.

+ $\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}\int e^{2x}d(2x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C$.

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=(e+1)x$ và $y=(1+e^x)x$.

(ĐH_A_2007)

➢ Lời giải: Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=(e+1)x$ với đồ thị hàm số $y=(1+e^x)x$ là: $(e+1)x=(1+e^x)x \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0 \\ x=1 \end{bmatrix}$.

Ta có bảng xét dấu hàm số $(e+1)x-(1+e^x)x$ trên đoạn $[0;1]$

x	0		1
$(e+1)x-(1+e^x)x$	0	$+$	0

Vậy diện tích cần xác định là:

$$S=\int_0^1 \left|(e+1)x-(1+e^x)x\right|dx=\int_0^1 x(e-e^x)dx=\underbrace{e\int_0^1 xdx}_{A}-\underbrace{\int_0^1 xe^x dx}_{B}.$$

Tính $A=e\int_1^2 xdx=\dfrac{ex^2}{2}\Big|_1^2=\dfrac{e}{2}$.

Tính B: Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=e^x \end{cases}$.

$$B=xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx=\left(xe^x-e^x\right)\Big|_0^1=1.$$

Vậy $S=A-B=\dfrac{e}{2}-1$ (đvdt).

Nhận xét: Bài toán tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y=f(x)$ và $y=g(x)$, thì thực hiện theo các bước:

+ *Bước 1:* Phương trình hoành độ giao điểm của các đồ thị $f(x)=g(x)$ (tìm hoành độ giao điểm).

+ *Bước 2:* Khảo sát dấu của biểu thức $f(x)-g(x)$ trên đoạn nghiệm.

+ *Bước 3:* Chia nhỏ đoạn cận ra thành nhiều đoạn cận (nếu biểu thức có đổi dấu trên toàn bộ đoạn cận).

+ *Bước 4:* Áp dụng bảng nguyên hàm cơ bản để tính.

Để tích A, ta sử dụng công thức nguyên hàm $\int u^n du=\dfrac{u^{n+1}}{n+1}+C$.

Để tính B, ta sử dụng phương pháp tích phân từng phần.

Chú ý: $\int e^x dx=e^x+C$.

Cho hình phẳng H được giới hạn bởi các đường $y=x\ln x$, $y=0$, $x=e$. Tính thể tích của khối tròn xoay khi quay hình H quanh trục hoành.

(ĐH_B_2007)

➢ Lời giải: Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=x\ln x$ với trục hoành là: $x\ln x=0\Leftrightarrow x=1$.

Thể tích cần tìm là: $V=\pi\int_1^e y^2dx=\pi\int_1^e\left(x\ln x\right)^2dx=\pi\int_1^e x^2\ln^2 xdx$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln^2 x\\dv=x^2dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{2\ln x}{x}dx\\v=\dfrac{x^3}{3}\end{cases}$.

$V=\dfrac{\pi}{3}x^3\ln^2 x\Big|_1^e-\dfrac{2}{3}\pi\int_1^e x^2\ln xdx=\dfrac{\pi e^3}{3}-\dfrac{2}{3}\pi A$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\dv=x^2dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{dx}{x}\\v=\dfrac{x^3}{3}\end{cases}$.

$A=\dfrac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^e-\dfrac{1}{3}\int_1^e x^2dx=\dfrac{e^3}{3}-\dfrac{x^3}{9}\Big|_1^e=\dfrac{2e^3+1}{9}$.

Vậy $V=\dfrac{\pi\left(5e^3-2\right)}{27}$ (đvtt).

Nhận xét:

+ Bước 1: Phân đường cong kín (C) thành hai cung $(C_1):y=f_1(x)$ và $(C_2):y=f_2(x)$ với $a\le x\le b$ và $f_1(x);f_2(x)$ cùng dấu.

+ Bước 2: Thể tích cần xác định là: $V=\pi\int_a^b\left|f_1^2(x)-f_2^2(x)\right|dx$.

Sử dụng phương pháp tích phân từng phần.

Tính tích phân $I=\int_1^e x^3\ln^2 xdx$.

(ĐH_D_2007)

➢ Lời giải: Đặt $\begin{cases}u=\ln^2 x\\dv=x^3dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{2\ln x}{x}dx\\v=\dfrac{x^4}{4}\end{cases}$.

$$I=\frac{x^4}{4}\ln^2 x\Big|_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e x^3\ln x\,dx=\frac{e^4}{4}-\frac{1}{2}\underbrace{\int_1^e x^3\ln x\,dx}_{A}.$$

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\dv=x^3dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{dx}{x}\\v=\dfrac{x^4}{4}\end{cases}$.

$$A=\frac{x^4}{4}\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{4}\int_1^e x^3dx=\frac{e^4}{4}-\frac{x^4}{16}\Big|_1^e=\frac{3e^4+1}{16}.$$

Vậy $I=\dfrac{5e^4-1}{32}$.

Nhận xét: Sử dụng phương pháp tích phân từng phần 2 lần để tính.

Công thức nguyên hàm $\int u^n du=\dfrac{u^{n+1}}{n+1}+C$.

Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{\tan^4 x}{\cos 2x}dx$.

(ĐH_A_2008)

➢ Lời giải: $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{\tan^4 x}{\cos 2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{\tan^4 x}{\left(1-\tan^2 x\right)\cos^2 x}dx$.

Đặt $t=\tan x\Rightarrow dt=\dfrac{dx}{\cos^2 x}$. Khi $\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\x=0\Rightarrow t=0\end{cases}$.

$$I=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{t^4}{1-t^2}dt=-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\left(t^2-t\right)dt+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)dt$$

$$=\left(-\frac{t^3}{3}-t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\right)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)-\frac{10}{9\sqrt{3}}.$$

Nhận xét: Biến đổi hàm số dưới dấu tích phân để đơn giản bài toán

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos^2 x\left(1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)=\cos^2 x\left(1-\tan^2 x\right).$$

Đổi biến, đặt $t=\tan x\Rightarrow dt=d\left(\tan x\right)=\left(\tan^2 x+1\right)dx=\dfrac{dx}{\cos^2 x}$.

Ta được tích phân hữu tỷ, thực hiện chia tử số cho mẫu số (vì bậc ở tử số cao hơn bậc ở mẫu số).

+ Sử dụng công thức: $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$.

+ Kỹ thuật tách mẫu

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \int \frac{dx}{(a-x)(a+x)} = \frac{1}{2a}\int \frac{(a-x)+(a+x)}{(a-x)(a+x)}dx = \frac{1}{2a}\int \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right)dx$$

Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2x + 2(1 + \sin x + \cos x)}dx$.

(ĐH_B_2008)

➢ Lời giải: Đặt $t = \sin x + \cos x \Rightarrow dt = (\cos x - \sin x)dx = -\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx$.

Khi $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \sqrt{2} \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \end{cases}$.

$$I = -\frac{\sqrt{2}}{2}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{(t+1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{t+1}\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{4 - 3\sqrt{2}}{4}.$$

Nhận xét: Sử dụng công thức lượng giác $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x - \sin x)$.

Ta có $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x - \sin x)dx = -\frac{1}{\sqrt{2}}d(\sin x + \cos x)$ (công thức vi phân).

Đổi biến, đặt $t = \sin x + \cos x$.

Công thức nguyên hàm $\int \frac{du}{u^n} = \frac{-1}{(n-1)u^{n-1}} + C$ với $n \neq 1$.

Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^3}dx$.

(ĐH_D_2008)

➢ Lời giải: Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{x^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = -\frac{1}{2x^2} \end{cases}$.

$$I=-\frac{\ln x}{2x^2}\Big|_1^2+\int_1^2\frac{dx}{2x^3}=-\frac{\ln 2}{8}-\frac{1}{4x^2}\Big|_1^2=\frac{3-2\ln 2}{16}.$$

Nhận xét: Sử dụng phương pháp tích phân từng phần.

Công thức nguyên hàm $\int\frac{du}{u^n}=\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}+C$ với $n\neq 1$.

Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^3 x-1\right)\cos^2 x dx$.

(ĐH_A_2009)

➢ Lời giải: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^3 x-1\right)\cos^2 x dx=\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x dx}_{A}-\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx}_{B}$.

Tính A: Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos x dx$. Khi $\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1\\ x=0\Rightarrow t=0\end{cases}$.

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 x\right)^2\cos x dx=\int_0^1\left(1-t^2\right)^2 dt=\left(t-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5\right)\Big|_0^1=\frac{8}{15}.$$

Tính B: $B=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$.

Vậy $I=A-B=\frac{8}{15}-\frac{\pi}{4}$.

Nhận xét: Tích phân được tách thành 1 tích phân thành phần.

Để tính A, ta thực hiện phép biến đổi, sau đó dùng phương pháp đổi biến.

Tính B, sử dụng công thức nguyên hàm

$\int\cos x 2x dx=\frac{1}{2}\int\cos 2x d(2x)=\frac{1}{2}\sin 2x+C$.

Tính tích phân $I=\int_1^3\frac{3+\ln x}{(x+1)^2}dx$.

(ĐH_B_2009)

➢ Lời giải: Đặt $\begin{cases}u=3+\ln x\\ dv=\frac{dx}{(x+1)^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{dx}{x}\\ v=-\frac{1}{x+1}+1=\frac{x}{x+1}\end{cases}$.

$$I=-\frac{x(3+\ln x)}{x+1}\Big|_1^3+\int_1^3\frac{dx}{x+1}=\left[-\frac{x(3+\ln x)}{x+1}+\ln|x+1|\right]\Big|_1^3=\frac{1}{4}\left(3+\ln\frac{27}{16}\right).$$

Nhận xét: Sử dụng phương pháp tích phân từng phần.

Sử dụng kỹ thuật chọn hằng số c để đơn giản hóa phần tích phân sau đó.

Cụ thể, chọn $c=1\Rightarrow v=\frac{x}{x+1}$, nên $\int vdu$ sẽ trở nên đơn giản hơn nhiều.

Công thức vi phân và nguyên hàm $\int\frac{dx}{x+1}=\int\frac{d(x+1)}{x+1}=\ln|x+1|+C$.

Tính tích phân $I=\int_1^3\frac{dx}{e^x-1}$.

(ĐH_D_2009)

➢ Lời giải: Đặt $t=e^x\Rightarrow dt=e^xdx\Rightarrow dx=\frac{dt}{t}$. Khi $\begin{cases}x=3\Rightarrow t=e^3\\x=1\Rightarrow t=e\end{cases}$.

$$I=\int_e^{e^3}\frac{dt}{t(t-1)}=\int_e^{e^3}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt=\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|\Big|_e^{e^3}=\ln\left(e^2+e+1\right)-2.$$

Nhận xét: Phép đổi biến được thực hiện ngay từ đầu, và biến đổi khử x hoàn toàn.

Sử dụng kỹ thuật tách mẫu $\frac{1}{t(t-1)}=\frac{t-(t-1)}{t(t-1)}=\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}$.

Tính tích phân $I=\int_0^1\frac{x^2+e^x+2x^2e^x}{1+2e^x}dx$.

(ĐH_A_2010)

➢ Lời giải:

$$I=\int_0^1\frac{x^2+e^x+2x^2e^x}{1+2e^x}dx=\int_0^1\left(x^2+\frac{e^x}{1+2e^x}\right)dx=\underbrace{\int_0^1x^2dx}_{A}+\underbrace{\int_0^1\frac{e^x}{1+2e^x}dx}_{B}.$$

Tính A: $A=\int_0^1x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$.

Tính B: $B=\int_0^1\frac{e^x}{1+2e^x}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d\left(1+2e^x\right)}{1+2e^x}=\frac{1}{2}\ln\left|1+2e^x\right|\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln\frac{1+2e}{3}$.

Vậy $I=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+2e}{3}$.

Nhận xét: Phân tích tử số thành mẫu số, nhằm rút gọn.

Tích phân A, sử dụng công thức nguyên hàm $\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$.

Tính phân B, sử dụng phép biến đổi vi phân $e^x dx=\frac{1}{2}d\left(1+2e^x\right)$.

Công thức nguyên hàm $\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C$.

Tính tích phân $I=\int_1^e\frac{\ln x}{x(2+\ln x)^2}dx$.

(ĐH_B_2010)

➢ Lời giải: Đặt $t=2+\ln x\Rightarrow dt=\frac{dx}{x}$. Khi $\begin{cases}x=e\Rightarrow t=3\\x=1\Rightarrow t=2\end{cases}$.

$$I=\int_2^3\frac{t-2}{t^2}dt=\int_2^3\frac{dt}{t}-2\int_2^3\frac{dt}{t^2}=\ln|t|\Big|_2^3+\frac{2}{t}\Big|_2^3=-\frac{1}{3}\ln\frac{3}{2}.$$

Nhận xét: Thực hiện phép đổi biến.

Tách tích phân thành các tích phân thành phần.

Công thức nguyên hàm $\int\frac{du}{u^n}=\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}+C$ với $n\neq 1$.

Tính tích phân $I=\int_1^e\left(2x-\frac{3}{x}\right)\ln x dx$.

(ĐH_D_2010)

➢ Lời giải: $I=\underbrace{\int_1^e\left(2x-\frac{3}{x}\right)\ln x dx}=\underbrace{2\int_1^e x\ln x}_{A}-\underbrace{3\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx}_{B}$.

Tính A: Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\dv=2xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{dx}{x}\\v=x^2\end{cases}$.

$$A=x^2\ln x\Big|_1^e-\int_1^e x dx=e^2-\frac{x^2}{2}\Big|_1^e=\frac{e^2+1}{2}.$$

Tính B: $B=3\int_1^e \ln x d(\ln x)=\left.\frac{3\ln^2 x}{2}\right|_1^e=\frac{3}{2}$.

Vậy $I=A-B=\frac{e^2}{2}-1$.

Nhận xét: Tách tích phân thành các tích phân thành phần.

Để tính A, ta dùng phương pháp tích phân từng phần.

Để tính B, ta dùng phương pháp vi phân, $\frac{dx}{x}=d(\ln x)$.

> Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x+(x+1)\cos x}{x\sin x+\cos x}dx$.
>
> (ĐH_A_2011)

➢ Lời giải: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x+x\cos x+\cos x}{x\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\frac{x\cos x}{x\sin x+\cos x}\right)dx$

$=\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx}_{A}+\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\cos x}{x\sin x+\cos x}dx}_{B}$.

Tính A: $A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx=\frac{\pi}{4}$.

Tính B:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\cos x}{x\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(x\sin x+\cos x)}{x\sin x+\cos x}=\ln\left|x\sin x+\cos x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln\frac{\sqrt{2}(\pi+4)}{8}$$

Vậy $I=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}(\pi+4)}{8}$.

Nhận xét: Phân tích tử thành mẫu, với mục đích rút gọn.

Sử dụng phương pháp vi phân để tính B, $x\cos x dx=d(x\sin x+\cos x)$.

> Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+x\sin x}{\cos^2 x}dx$.
>
> (ĐH_B_2011)

➢ Lời giải: $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{x\sin x}{\cos^2 x}\right)dx=\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos^2 x}}_{A}+\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx}_{B}$.



Tính A: $A=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}$.

Tính B: Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=-\int\dfrac{d(\cos x)}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos x}\end{cases}$.

$$B=\frac{x}{\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos x}=\frac{2\pi}{3}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx=\frac{2\pi}{3}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d(\sin x)}{1-\sin^2 x}$$

$$=\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\sin x+1}-\frac{1}{1-\sin x}\right)d(\sin x)$$

$$=\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x+1}{1-\sin x}\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{3}+\ln\left(2-\sqrt{3}\right).$$

Vậy $I=^3+\frac{2\pi}{3}+\ln\left(2-\sqrt{3}\right)$.

Tính tích phân $I=\int_0^4\frac{4x-1}{\sqrt{2x+1}+2}dx$.

(ĐH_D_2011)

➢ Lời giải: Đặt $t=\sqrt{2x+1}\Rightarrow x=\frac{t^2-1}{2}\Rightarrow dx=tdt$.

Khi $\begin{cases}x=4\Rightarrow t=3\\ x=0\Rightarrow t=1\end{cases}$.

$$I=\int_1^2\frac{2t^3-3t}{t+2}dt=\int_1^3\left(2t^2-4t+5-\frac{10}{t+2}\right)dt$$

$$=\left(\frac{2}{3}t^3-2t^2+5t-10\ln|t+2|\right)\Big|_1^3=\frac{34}{3}+10\ln\frac{3}{5}.$$

Nhận xét: Sử dụng phương pháp đổi biến.

Ta được tích phân hữu tỷ, thực hiện chia tử số cho mẫu số (vì bậc ở tử cao hơn bậc ở mẫu).

Công thức nguyên hàm $\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$; $\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C$.

Tính tích phân $I=\int_1^3 \frac{1+\ln(x+1)}{x^2}dx$.

(ĐH_A-A1_2012)

➢ Lời giải: Đặt $\begin{cases}u=1+\ln(x+1)\\ dv=\frac{dx}{x^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{dx}{x+1}\\ v=-\frac{1}{x}-1=-\frac{x+1}{x}\end{cases}$.

$$I=-\frac{(x+1)\left[1+\ln(x+1)\right]}{x}\Big|_1^3+\int_1^3\frac{dx}{x}=-\frac{(x+1)\left[1+\ln(x+1)\right]}{x}+\ln|x|\Big|_1^3$$

$$=\frac{2}{3}+\ln 3-\frac{2}{3}\ln 2.$$

Nhận xét: Sử dụng phương pháp tích phân từng phần.

Sử dụng kỹ thuật chọn hằng số c để đơn giản phần tích phân sau đó.

Chọn $c=-1\Rightarrow v=-\frac{x+1}{x}$, nên $\int vdu$ đơn giản hơn nhiều.

Công thức nguyên hàm $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$.

Tính tích phân $I=\int_0^1 \frac{x^3}{x^4+3x^2+2}dx$.

(ĐH_B_2012)

➢ Lời giải: $I=\int_0^1\frac{x^3}{x^4+3x^2+2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x^2.x}{x^4+3x^2+2}dx$.

Đặt $t=x^2\Rightarrow dt=2xdx$. Khi $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=1\\ x=0\Rightarrow t=0\end{cases}$.

$$I=\int_0^1\frac{t}{(t+1)(t+2)}dt=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{2}{t+2}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$\left(\ln|t+2|-\frac{1}{2}\ln|t+1|\right)\Big|_0^1=\ln 3-\frac{3}{2}\ln 2.$$

Nhận xét: Phân tích tử số, sau đó dùng phương pháp đổi biến.



Thực hiện tách mẫu số $\frac{t}{(t+1)(t+2)}=\frac{2(t+1)-(t+2)}{(t+1)(t+2)}=\frac{2}{t+2}-\frac{1}{t+1}$ hoặc sử dụng phương pháp đồng nhất thức để tách.

Công thức nguyên hàm $\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C$.

Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}x(1+\sin 2x)dx$.

(ĐH_D_2012)

➢ Lời giải: $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}xdx+\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}x\sin 2xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}x\sin 2xdx=\frac{\pi^2}{32}+A$.

Tính A: Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=\sin 2xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=-\frac{1}{2}\cos 2x\end{cases}$.

$A=-\frac{x}{2}.\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2xdx=-\frac{x}{2}.\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{4}$.

Vậy $I=\frac{\pi^2}{32}+\frac{1}{4}$.

Nhận xét: Tách thành 2 tích phân.

Tính A, sử dụng phương pháp tích phân từng phần.

Công thức nguyên hàm $\int\cos 2xdx=\frac{1}{2}\int\cos 2xd(2x)=\frac{1}{2}\sin 2x+C$.

Tính tích phân $I=\int\limits_1^2\frac{x^2-1}{x^2}\ln xdx$.

(ĐH_A-A1_2013)

➢ Lời giải: Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\dv=\frac{x^2-1}{x^2}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{dx}{x}\\v=x+\frac{1}{x}\end{cases}$.

$I=\left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x\Big|_1^2-\int\limits_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right).\frac{dx}{x}=\frac{5}{2}\ln 2-\int\limits_1^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$

$$=\frac{5}{2}\ln 2-\left(x-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2=\frac{5}{2}\ln 2-\frac{3}{2}.$$

Nhận xét: Sử dụng phương pháp tích phân từng phần.

Công thức nguyên hàm $\int\frac{du}{u^n}=\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}+C$ với $n\neq 1$.

Tính tích phân $I=\int_0^1 x\sqrt{2-x^2}dx$.

(ĐH_B_2013)

➢ Lời giải: Đặt $t=\sqrt{2-x^2}\Rightarrow x^2=2-t^2\Rightarrow xdx=tdt$.

Khi $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=1\\ x=0\Rightarrow t=\sqrt{2}\end{cases}$.

$$I=\int_1^{\sqrt{2}}t^2dt=\frac{t^3}{3}\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}.$$

Nhận xét: Sử dụng phương pháp tích phân từng phần.

Công thức nguyên hàm $\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$ với $n\neq -1$.

Tính tích phân $I=\int_0^1\frac{(x+1)^2}{x^2+1}dx$.

(ĐH_D_2013)

➢ Lời giải:

$$I=\int_0^1\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}dx=\int_0^1\left(1+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=\left(x+\ln\left|x^2+1\right|\right)\Big|_0^1=1+\ln 2.$$

Nhận xét: Phân tích tử để xuất hiện mẫu, nhằm rút gọn.

Công thức vi phân $2xdx=d\left(x^2\right)=d\left(x^2+1\right)$.

Công thức nguyên hàm $\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C$.

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=x^2-x+3$ và đường thẳng $y=2x+1$.

(ĐH_A-A1_2014)

➢ Lời giải: Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong $y=x^2-x+3$ và đường thẳng $y=2x+1$ là: $x^2-x+3=2x+1\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=1\\x=2\end{bmatrix}$.

Ta có bảng xét dấu hàm số $x^2-x+3-2x-1$ trên đoạn $[1;2]$

x	1		2
$x^2-x+3-2x-1$	0	–	0

Vậy diện tích cần xác định là:

$$S=\int_1^2\left|x^2-x+3-2x-1\right|dx=-\int_1^2\left(x^2-x+3-2x-1\right)dx$$

$$=-\int_1^2\left(x^2-3x+2\right)dx=-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x\right)\Big|_1^2=\frac{1}{6}\ \text{(đvdt)}.$$

Nhận xét: Bài toán tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y=f(x)$ và $y=g(x)$, thì thực hiện theo các bước:

+ *Bước 1:* Phương trình hoành độ giao điểm của các đồ thị $f(x)=g(x)$ (tìm hoành độ giao điểm).

+ *Bước 2:* Khảo sát dấu của biểu thức $f(x)-g(x)$ trên đoạn nghiệm.

+ *Bước 3:* Chia nhỏ đoạn cận ra thành nhiều đoạn cận (nếu biểu thức có đổi dấu trên toàn bộ đoạn cận).

+ *Bước 4:* Áp dụng bảng nguyên hàm cơ bản để tính.

Tính tích phân $I=\int_1^2\frac{x^2+3x+1}{x^2+x}dx$.

(ĐH_B_2014)

➢ Lời giải: $I=\int_1^2\frac{x^2+3x+1}{x^2+x}dx=\int_1^2\frac{x^2+x+2x+1}{x^2+x}dx=\underbrace{\int_1^2dx}_{A}+\underbrace{\int_1^2\frac{2x+1}{x^2+x}dx}_{B}$.

Tính A: $A=\int_1^2dx=x\Big|_1^2=1$.

Tính B: $B=\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x}dx=\int_1^2 \frac{d\left(x^2+x\right)}{x^2+x}=\ln\left|x^2+x\right|\Big|_1^2=\ln 3$.

Vậy $I=1+\ln 3$.

Nhận xét: Phân tích tử để xuất hiện mẫu, nhằm rút gọn.

Tính A, sử dụng bảng nguyên hàm cơ bản.

Tính B, sử dụng phương pháp vi phân, $(2x+1)dx=d\left(x^2+x\right)$.

Công thức nguyên hàm $\int \frac{du}{u}=\ln|u|+C$.

Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x+1)\sin 2xdx$.

(ĐH_D_2014)

➢ Lời giải: Đặt $\begin{cases}u=x+1\\dv=\sin 2xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=-\frac{1}{2}\cos 2x\end{cases}$.

$I=-\frac{1}{2}(x+1)\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2xdx=\left[-\frac{1}{2}(x+1)\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{3}{4}$.

Nhận xét: Sử dụng phương pháp tích phân từng phần.

Công thức nguyên hàm $\int\cos 2xdx=\frac{1}{2}\int\cos 2xd(2x)=\frac{1}{2}\sin 2x+C$.

Tính tích phân $I=\int_0^1(x-3)e^xdx$.

(THPTQG_2015)

➢ Lời giải: Đặt $\begin{cases}u=x-3\\dv=e^xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=e^x\end{cases}$.

$I=(x-3)e^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^xdx=\left[(x-3)e^x-e^x\right]\Big|_0^1=4-3e$.

Nhận xét: Sử dụng phương pháp tích phân từng phần.

Công thức nguyên hàm $\int e^xdx=e^x+C$.

Chương IX

TÍCH PHÂN TRONG CÁC ĐỀ THI THỬ ĐẠI HỌC

Bài 1. Tính các tích phân

a. $I=\int\limits_0^1\left(x^2e^{x^3}+\frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}\right)dx$.

b. $I=\int\limits_1^2 x\left(e^x-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^3}\right)dx$.

c. $I=\int\limits_0^1\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\left(e^{2x}.\sqrt{4-x^2}-x^2\right)dx$.

d. $I=\int\limits_0^1\frac{x^2+1}{(x+1)^2}e^x dx$.

e. $I=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{x^3e^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

➢ Lời giải

a. $I=\int\limits_0^1 x^2e^{x^3}dx+\int\limits_0^1\frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx=I_1+I_2$.

+) Tính $I_1=\int\limits_0^1 x^2e^{x^3}dx$.

Đặt $t=x^3\Rightarrow I_1=\frac{1}{3}\int\limits_0^1 e^t dt=\frac{1}{3}e^t\Big|_0^1=\frac{1}{3}e-\frac{1}{3}$.

+) Tính $I_2=\int\limits_0^1\frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$.

Đặt $t=\sqrt[4]{x}\Rightarrow I_2=4\int\limits_0^1\frac{t^4}{1+t^2}dt=4\left(-\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$.

Vậy $I=\frac{1}{3}e+\pi-3$.

b. $I=\int\limits_1^2 x.e^x dx+\int\limits_1^2\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx=I_1+I_2$.

+) Tính $I_1=\int\limits_1^2 x.e^x dx=e^2$.

+) Tính $I_2=\int\limits_1^2\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$.

Đặt $x=2\sin t, t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

$I_2=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt=\left(-\cos t-t\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$.

Vậy $I=e^2+\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$.

c. $I=\int\limits_0^1 xe^{2x}dx-\int\limits_0^1\frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}dx=I_1+I_2$.

+) Tính $I_1=\int\limits_0^1 xe^{2x}dx=\frac{e^2+1}{4}$.

+) Tính $I_2=\int\limits_0^1\frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}dx$.

Đặt $t=\sqrt{4-x^2}\Rightarrow I_2=-3\sqrt{3}+\frac{16}{3}$.

$I=\frac{e^2}{4}+3\sqrt{3}-\frac{61}{12}$.

d. Đặt $t=x+1\Rightarrow dx=dt$

$I=\int\limits_1^2\frac{t^2-2t+2}{t^2}e^{t-1}dt=\int\limits_1^2\left(1+\frac{2}{t^2}-\frac{2}{t}\right)e^{t-1}dt$

$=e-1+\frac{2}{e}\left(-\frac{e^2}{2}+e\right)=1$.

e. Đặt: $t=\sqrt{1+x^2}\Rightarrow dx=tdt$.

$I=\int\limits_1^2\left(t^2-1\right)e^t dt=\int\limits_1^2 t^2e^t dt-e^t\Big|_1^2=E-\left(e^2-e\right)$.

Tính $E=\int\limits_1^2 t^2e^t dt=t^2e^t\Big|_1^2-\int\limits_1^2 2te^t dt$

$=4e^2-e-2\left(te^t\Big|_1^2-\int\limits_1^2 e^t dt\right)=4e^2-e-2\left(te^t-e^t\right)\Big|_1^2$.

Vậy $I=e^2$.

Bài 2. Tính các tích phân

a. $\int \frac{x\ln\left(x^2+1\right)+x^3}{x^2+1}dx$.

b. $I=\int_0^4 \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)-3x^3}{\sqrt{x^2+9}}dx$.

c. $I=\int_1^e \frac{\left(x^3+1\right)\ln x+2x^2+1}{2+x\ln x}dx$.

d. $I=\int_1^{e^3} \frac{\ln^3 x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$.

e. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$.

➢ Lời giải

a. Ta có $f(x)=\frac{x\ln\left(x^2+1\right)}{x^2+1}+\frac{x\left(x^2+1\right)-x}{x^2+1}=\frac{x\ln\left(x^2+1\right)}{x^2+1}+x-\frac{x}{x^2+1}$

$\Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\frac{1}{2}\int \ln\left(x^2+1\right)d\left(x^2+1\right)+\int xdx-\frac{1}{2}\int d\ln\left(x^2+1\right)$

$=\frac{1}{4}\ln^2\left(x^2+1\right)+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C$.

b. $I=\int_0^4 \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)}{\sqrt{x^2+9}}dx-3\int_0^4 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+9}}dx=I_1-3I_2$.

Tính $I_1=\int_0^4 \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)}{\sqrt{x^2+9}}dx$.

Đặt $u=\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)\Rightarrow du=\frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$.

$I_1=\int_{\ln 3}^{\ln 9} udu=\frac{u^2}{2}\Big|_{\ln 3}^{\ln 9}=\frac{\ln^2 9-\ln^2 3}{2}$.

Tính $I_2=\int_0^4 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+9}}dx$.

Đặt $\sqrt{x^2+9}=v\Rightarrow dv=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx$, $x^2=v^2-9$.

$I_2=\int_3^5 \left(u^2-9\right)du=\left(\frac{u^3}{3}-9u\right)\Big|_3^5=\frac{44}{3}$.

Vậy $I=\int\limits_0^4 \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)-3x^3}{\sqrt{x^2+9}}dx=I_1-3I_2=\frac{\ln^2 9-\ln^2 3}{2}-44$.

c. $I=\int\limits_1^e x^2dx+\int\limits_1^e \frac{1+\ln x}{2+x\ln x}dx=I_1+I_2$.

Tính $I_1=\int\limits_1^e x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_1^e=\frac{e^3-1}{3}$.

Tính $I_2=\int\limits_1^e \frac{1+\ln x}{2+x\ln x}dx=\int\limits_1^e \frac{d\left(2+x\ln x\right)}{2+x\ln x}=\ln\left|2+x\ln x\right|\Big|_1^e=\ln\frac{e+2}{2}$.

Vậy $I=\frac{e^3-1}{3}+\ln\frac{e+2}{2}$.

d. Đặt $t=\sqrt{1+\ln x}\Rightarrow 1+\ln x=t^2\Rightarrow\frac{dx}{x}=2tdt$ và $\ln^3 x=\left(t^2-1\right)^3$.

$I=\int\limits_1^2 \frac{\left(t^2-1\right)^3}{t}dt=\int\limits_1^2 \frac{t^6-3t^4+3t^2-1}{t}dt$

$=\int\limits_1^2\left(t^5-3t^3+3t-\frac{1}{t}\right)dt=\frac{15}{4}-\ln 2$.

e. Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=\frac{1}{\cos x}\end{cases}$.

$I=\frac{x}{\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}$

$K=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$

Đặt $t=\sin x$.

$K=\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$.

Vậy $I=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$.

Bài 3. Tính các tích phân

a. $I=\int_1^4 \frac{\ln(5-x)+x^3.\sqrt{5-x}}{x^2}dx$.

b. $I=\int_0^2 \left[\sqrt{x(2-x)}+\ln(4+x^2)\right]dx$.

c. $I=\int_3^8 \frac{\ln x}{\sqrt{x+1}}dx$.

d. $I=\int_1^2 \frac{1+x^2}{x^3}\ln x dx$.

e. $I=\int_1^e \frac{x^2+x\ln x+1}{x}e^x dx$.

➢ Lời giải

a. Ta có $I=\int_1^4 \frac{\ln(5-x)}{x^2}dx+\int_1^4 x\sqrt{5-x}dx=K+H$.

+) $K=\int_1^4 \frac{\ln(5-x)}{x^2}dx$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln(5-x)\\dv=\frac{dx}{x^2}\end{cases}$.

$K=\frac{3}{4}\ln 4$.

+) $H=\int_1^4 x\sqrt{5-x}dx$.

Đặt $t=\sqrt{5-x}$. $H=\frac{164}{15}$.

Vậy $I=\frac{3}{5}\ln 4+\frac{164}{15}$

b. $I_2=\int_0^2 \ln(4+x^2)dx=x\ln(4+x^2)\Big|_0^2-2\int_0^2 \frac{x^2}{4+x^2}dx$

$I=\int_0^2 \left[\sqrt{x(2-x)}+\ln(4+x^2)\right]dx=\underbrace{\int_0^2 \sqrt{x(2-x)}dx}_{I_1}+\underbrace{\int_0^2 \ln(4+x^2)dx}_{I_2}$.

+) $I_1=\int_0^2 \sqrt{x(2-x)}dx=\int_0^2 \sqrt{1-(x-1)^2}dx=\frac{\pi}{2}$

(Sử dụng đổi biến: $x=1+\sin t$).

+) $I_2=\int_0^2 \ln\left(4+x^2\right)dx=x\ln\left(4+x^2\right)\Big|_0^2-2\int_0^2\frac{x^2}{4+x^2}dx$ (Sử dụng tích phân từng phần)

$=6\ln 2+\pi-4$ (Đổi biến $x=2\tan t$)

Vậy $I=I_1+I_2=\frac{3\pi}{2}-4+6\ln 2$.

c. Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=\frac{dx}{\sqrt{x+1}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{dx}{x}\\ v=2\sqrt{x+1}\end{cases}$.

$I=2\sqrt{x+1}\ln x\Big|_3^8-2\int_3^8\frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$.

+) Tính $A=\int_3^8\frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$.

Đặt $t=\sqrt{x+1}$.

$A=\int_2^3\frac{2t^2dt}{t^2-1}=2\int_2^3\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=2+\ln 3-\ln 2$

$\Rightarrow I=6\ln 8-4\ln 3-2\left(2+\ln 3-\ln 2\right)=20\ln 2-6\ln 3-4$.

d. $I=\int_1^2\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}\right)\ln x dx$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}\right)dx\end{cases}$.

$I=\left(\frac{-1}{4x^4}+\ln x\right)\ln x\Big|_1^2-\int_1^2\left(\frac{-1}{4x^5}+\frac{1}{x}\ln x\right)dx=-\frac{1}{64}\ln 2+\frac{63}{4}+\frac{1}{2}\ln^2 2$.

e. $I=\int_1^e xe^x dx+\int_1^e e^x\ln x dx+\int_1^e\frac{e^x}{x}dx=M+N+O$.

+) $M=\int_1^e xe^x dx=xe^x\Big|_1^e-\int_1^e e^x dx=e^e(e-1)$.

+) $N=\int_1^e e^x\ln x dx=e^x\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{e^x}{x}dx=e^e-\int_1^e\frac{e^x}{x}dx=e^e-O$.

Vậy $I=M+N+O=e^{e+1}-e^e+e^e-O+O=e^{e+1}$.

Bài 4. Tính các tích phân

a. $I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$.

b. $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$.

c. $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(x+\sin^2 x\right)}{1+\sin 2x}dx$.

d. $I=\int\limits_{0}^{\pi}\frac{x\left(\cos^3 x+\cos x+\sin x\right)}{1+\cos^2 x}dx$.

e. $I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{x+\left(x+\sin x\right)\sin x}{\left(1+\sin x\right)\sin^2 x}dx$.

➤ Lời giải

a. Ta có $\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)'=-\frac{2\cos x}{\sin^3 x}$.

Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=-\frac{1}{2\sin^2 x}\end{cases}$.

$I=-\frac{1}{2}x.\frac{1}{\sin^2 x}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^2 x}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}\cot x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$.

b. Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=\frac{1}{2\cos^2 x}\end{cases}$.

$I=\frac{1}{2}x.\frac{1}{\cos^2 x}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\tan x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

c. $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1+\sin 2x}dx+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{1+\sin 2x}dx=H+K$.

+) Tính $H=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1+\sin 2x}dx=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}dx$.

Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=\frac{1}{2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=\frac{1}{2}\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\end{cases}$.

$$H=\frac{x}{2}\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\left(\frac{1}{2}\ln\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

+) Tính $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{1+\sin 2x}dx$.

Đặt $t=\frac{\pi}{2}-x$.

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{1+\sin 2x}dx$$

$$\Rightarrow 2K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2}\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

$$\Rightarrow K=\frac{1}{2}.$$

Vậy $I=H+K=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$.

d. $I=\int_0^{\pi}x\left|\frac{\cos x\left(1+\cos^2 x\right)+\sin x}{1+\cos^2 x}\right|dx=\int_0^{\pi}x.\cos x.dx+\int_0^{\pi}\frac{x.\sin x}{1+\cos^2 x}dx=H+K.$

+) Tính $H=\int_0^{\pi}x.\cos x.dx$.

Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=\cos x dx\end{cases}$.

$$H=(x\sin x)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin x dx=0+\cos x\Big|_0^{\pi}=-2.$$

+) Tính $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

Đặt $x=\pi-t\Rightarrow dx=-dt$.

$$K=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-t).\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}dt=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-t).\sin t}{1+\cos^2 t}dt=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x).\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$\Rightarrow 2K=\int_0^{\pi}\frac{(x+\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$\Rightarrow K=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$



Đặt $t=\cos x \Rightarrow dt=-\sin x dx$. $K=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{dt}{1+t^2}$.

Đặt $t=\tan u \Rightarrow dt=\left(1+\tan^2 u\right)du$.

$K=\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\left(1+\tan^2 u\right)du}{1+\tan^2 u}=\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}du=\frac{\pi}{2}.u\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2}{4}$.

Vậy $I=H+K=\frac{\pi^2}{4}-2$.

e. $I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{x\left(1+\sin x\right)\sin^2 x}{\left(1+\sin x\right)\sin^2 x}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{x}{\sin^2 x}dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{dx}{1+\sin x}=H+K$.

+) Tính $H=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{x}{\sin^2 x}dx$.

Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=\frac{dx}{\sin^2 x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=-\cot x\end{cases}$. $H=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

+) Tính $K=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{dx}{1+\sin x}$.

$K=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{dx}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{dx}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}=\sqrt{3}-2$.

Vậy $I=\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}-2$.

Bài 5. Tính các tích phân

a. $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x+\sin^2 x}{1+\cos 2x}dx$.

b. $I=\int_{0}^{3}\sqrt{x+1}\sin\sqrt{x+1}dx$.

c. $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1+\cos x}.e^x dx$.

d. $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{e^x\left(1+\sin 2x\right)}dx$.

e. $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^6 x+\cos^6 x}{6^x+1}dx$.

➢ Lời giải

a. $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{2\cos^2 x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x}{2\cos^2 x}dx=H+K.$

+) Tính $H=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{2\cos^2 x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos^2 x}dx.$

Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=\dfrac{dx}{\cos^2 x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=\tan x\end{cases}.$

$H=\frac{1}{2}\left[x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x dx\right]=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\ln 2.$

+) Tính $K=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x}{2\cos^2 x}dx.$

$K=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 x dx=\frac{1}{2}(\tan x-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right).$

Vậy $I=H+K=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi\left(\sqrt{3}-1\right)}{6}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-\ln 2\right).$

b. Đặt $t=\sqrt{x+1}$.

$I=\int_1^2 t.\sin t.2tdt=\int_1^2 2t^2\sin t dt=\int_1^2 2x^2\sin x dx.$

Đặt $\begin{cases}u=2x^2\\dv=\sin x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=4xdx\\v=-\cos x\end{cases}.$

$I=-2x^2\cos x\Big|_1^2+\int_1^2 4x\cos x dx.$

Đặt $\begin{cases}u=4x\\dv=\cos x.dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=4dx\\v=\sin x\end{cases}$. Từ đó suy ra kết quả.

c. $I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{\cos^2\frac{x}{2}}.dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}.e^x dx.$

+) Tính $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}e^x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}.e^x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2}.e^x dx.$

+) Tính $I_2=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{\cos^2\frac{x}{2}}dx$.

Đặt $\begin{cases}u=e^x\\dv=\dfrac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=e^xdx\\v=\tan\frac{x}{2}\end{cases}$.

$I_2=e^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2}.e^xdx\Rightarrow I=I_1+I_2=e^{\frac{\pi}{2}}$.

d. Đặt $\begin{cases}u=\dfrac{\cos x}{e^x}\\dv=\dfrac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{-(\sin x+\cos x)}{e^x}dx\\v=\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}\end{cases}$.

$I=\frac{\cos x}{e^x}.\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{e^x}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{e^x}dx$

Đặt $\begin{cases}u_1=\sin x\\dv_1=\dfrac{dx}{e^x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du_1=\cos xdx\\v_1=\dfrac{-1}{e^x}\end{cases}$.

$I=\sin x.\frac{-1}{e^x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{e^x}dx=\frac{-1}{e^{\frac{\pi}{2}}}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{e^x}dx$.

Đặt $\begin{cases}u_2=\cos x\\dv_1=\dfrac{dx}{e^x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du_2=-\sin xdx\\v_1=\dfrac{-1}{e^x}\end{cases}$.

$I=\frac{-1}{e^{\frac{\pi}{2}}}+\cos x.\frac{-1}{e^x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{e^x}dx=\frac{-1}{e^{\frac{\pi}{2}}}+1-I\Rightarrow 2I=-e^{-\frac{\pi}{2}}+1$

$\Rightarrow I=\frac{-e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}+\frac{1}{2}$.

e. Đặt $t=-x\Rightarrow dt=-dx$.

$I=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}6^t\frac{\sin^6t+\cos^6t}{6^t+1}dt=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}6^x\frac{\sin^6x+\cos^6x}{6^x+1}dx$

$$\Rightarrow 2I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(6^x+1\right)\frac{\sin^6 x+\cos^6 x}{6^x+1}dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)dx$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x\right)dx=\frac{5\pi}{16}\Rightarrow I=\frac{5\pi}{32}.$$

Bài 6. Tính các tích phân

a. $I=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^4 x}{2^{-x}+1}dx$.

b. $I=\int_{1}^{e^\pi}\cos(\ln x)dx$.

c. $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin^2 x}.\sin x.\cos^3 x dx$.

d. $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$.

e. $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x.\ln(1+\sin x)dx$.

➢ Lời giải

a. $I=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{2^x\sin^4 x}{2^x+1}dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\frac{2^x\sin^4 x}{2^x+1}dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{2^x\sin^4 x}{2^x+1}dx=I_1+I_2$.

+) Tính $I_1=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\frac{2^x\sin^4 x}{2^x+1}dx$.

Đặt $x=-t$.

$$I_1=-\int_{\frac{\pi}{6}}^{0}\frac{2^{-t}\sin^4(-t)}{2^{-t}+1}dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{0}\frac{\sin^4 t}{2^t+1}dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{0}\frac{\sin^4 x}{2^x+1}dx$$

$$\Rightarrow I=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^4 x}{2^x+1}dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{2^x\sin^4 x}{2^x+1}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\sin^4 x dx=\frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos 2x)^2 dx$$

$$=\frac{1}{8}\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}(3-4\cos 2x+\cos 4x)dx=\frac{4\pi-7\sqrt{3}}{64}.$$

b. Đặt $t=\ln x\Rightarrow x=e^t\Rightarrow dx=e^t dt$.

$I=\int_{0}^{\pi}e^t\cos t dt=-\frac{1}{2}\left(e^\pi+1\right)$ (Dùng pp tích phân từng phần).



c. Đặt $t=\sin^2 x$.

$I=\frac{1}{2}\int_0^1 e^t(1-t)dt=\frac{1}{2}e$ (Dùng tích phân từng phần).

d. Đặt $t=\frac{\pi}{4}-x$.

$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{2}{1+\tan t}dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)dt=t.\ln 2\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-I$

$\Rightarrow 2I=\frac{\pi}{4}\ln 2\Rightarrow I=\frac{\pi}{8}\ln 2$.

e. Đặt $\begin{cases}u=\ln(1+\sin x)\\dv=\sin x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{\cos x}{1+\sin x}dx\\v=-\cos x\end{cases}$.

$I=-\cos x.\ln(1+\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{1+\sin x}dx$

$=0+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{1+\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)dx=\frac{\pi}{2}-1$.

Bài 7. Tính các tích phân

a. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x.\ln(\cos x)}{\cos x}dx$.

b. $I=\int_1^e\left(\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}+\ln^2 x\right)dx$.

c. $I=\int_1^e\frac{\ln(1+\ln^2 x)}{x}dx$.

d. $I=\int_1^e\frac{\ln x-2}{x\ln x+x}dx$.

e. $I=\int_1^e\left(\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}+3x^2\ln x\right)dx$.

➢ Lời giải

a. Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin x dx$.

$I=-\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{\ln t}{t^2}dt=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\frac{\ln t}{t^2}dt$,

Đặt $\begin{cases} u=\ln t \\ dv=\dfrac{dt}{t^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{dt}{t} \\ v=-\dfrac{1}{t} \end{cases}$.

$I=\sqrt{2}-1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ln 2$.

b.+) $I_1=\int\limits_1^e \dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$, đặt $t=\sqrt{1+\ln x}$.

$I_1=\dfrac{4}{3}-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

+) $I_2=\int\limits_1^e \left(\ln^2 x\right)dx$, lấy tích phân từng phần 2 lần được $I_2=e-2$.

Vậy $I=I_1+I_2=e-\dfrac{2}{3}-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

c.Đặt $\ln x=t$.

$I=\int\limits_0^1 \ln\left(1+t^2\right)dt$.

Đặt $\begin{cases} u=\ln\left(1+t^2\right) \\ dv=dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{2t}{1+t^2}dt \\ v=t \end{cases}$.

$I=t\ln\left(1+t^2\right)\Big|_0^1-2\int\limits_0^1 \dfrac{t^2}{1+t^2}dt=\ln 2-2\left(\int\limits_0^1 dt-\underbrace{\int\limits_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2}}_{I_1}\right)$ (*).

Đặt $t=\tan u$.

$I_1=\int\limits_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2}=\dfrac{\pi}{4}$.

Thay vào (*) ta có $I=\ln 2-2+\dfrac{\pi}{2}$.

d. $I=\int\limits_1^e \dfrac{\ln x-2}{x(\ln x+1)}dx$

Đặt $t=\ln x+1\Rightarrow dt=\dfrac{1}{x}dx$. Khi $\begin{cases} x=e\Rightarrow t=2 \\ x=1\Rightarrow t=1 \end{cases}$.

$I=\int\limits_1^2 \dfrac{t-3}{t}dt=\int\limits_1^2 \left(1-\dfrac{3}{t}\right)dt=\left(t-\ln|t|\right)\Big|_1^2=1-\ln 2$.

e. $I=\int\limits_1^e \dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx+3\int\limits_1^e x^2\ln x dx=I_1+3I_2$.

+) Tính $I_1=\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$.

Đặt $t=\sqrt{1+\ln x}\Rightarrow t^2=1+\ln x\Rightarrow 2tdt=\frac{dx}{x}$. Khi $\begin{cases}x=e\Rightarrow t=\sqrt{2}\\ x=1\Rightarrow t=1\end{cases}$.

$$\Rightarrow I_1=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{\left(t^2-1\right)}{t}.2tdt=2\int_1^{\sqrt{2}}\left(t^2-1\right)dt=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2\left(2-\sqrt{2}\right)}{3}.$$

+) Tính $I_2=\int_1^e x^2\ln x dx$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=x^2dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{dx}{x}\\ v=\frac{x^3}{3}\end{cases}$.

$$I_2=\frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{3}\int_1^e x^2dx=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}.\frac{x^3}{3}\Big|_1^e=\frac{e^3}{3}-\frac{e^3}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2e^3+1}{9}$$

$$\Rightarrow I=I_1+3I_2=\frac{5-2\sqrt{2}+2e^3}{3}.$$

Bài 8. Tính các tích phân

a. $I=\int_1^e\frac{(x-2)\ln x+x}{x(1+\ln x)}dx$.

b. $I=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\left[\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}+x\left(\frac{x}{\cos^2 x}+2\tan x\right)\right]dx$.

c. $I=\int_{e^2}^{e^3}\frac{2x\ln x(\ln x-1)+3}{x(1-\ln x)}dx$.

d. $I=\int_1^2\frac{x^3.3^{x^2+1}+\ln(x+1)}{x^2}dx$.

e. $I=\int_1^e\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$.

➢ Lời giải

a. $I=\int_1^e\frac{x(1+\ln x)-2\ln x}{x(1+\ln x)}dx=\int_1^e dx-2\int_1^e\frac{\ln x}{x(1+\ln x)}dx$.

Ta có $\int_1^e dx=e-1$.

Tính $B=\int_1^e\frac{\ln x}{x(1+\ln x)}dx$. Đặt: $t=1+\ln x\Rightarrow dt=\frac{dx}{x}$.

$B=\int_1^2 \frac{t-1}{t}dt=\int_1^2\left(1-\frac{1}{t}\right)dt=\left(t-\ln|t|\right)\Big|_1^2=1-\ln 2.$

Vậy $I=e-1-2(1-\ln 2)=e-3+2\ln 2.$

b. Ta có $I=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} e^{\frac{1}{x}}.\frac{1}{x^2}dx+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\frac{x^2}{\cos^2 x}dx+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}2x\tan x dx=M+N+O$ (1).

+) Tính $M=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} e^{\frac{1}{x}}.\frac{1}{x^2}dx=-\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} e^{\frac{1}{x}}d\left(\frac{1}{x}\right)=-e^{\frac{1}{x}}\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}=-e^{\frac{1}{\pi}}+e^{\frac{4}{3\pi}}.$

+) Tính $I=\frac{117}{\ln 3}+3\ln 2-\frac{3}{2}\ln 3.$

Đặt $\begin{cases}u=x^2\\ dv=\dfrac{dx}{\cos^2 x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2xdx\\ v=\tan x\end{cases}.$

$N=\left(x^2\tan x\right)\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}-\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}2x\tan x dx=\frac{9\pi^2}{16}-\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}2x\tan x dx.$

Thay vào (1), ta có $I=-e^{\frac{1}{\pi}}+e^{\frac{4}{3\pi}}+\frac{9\pi^2}{16}.$

c. $I=3\int_{e^2}^{e^3}\frac{dx}{x(1-\ln x)}-2\int_{e^2}^{e^3}\ln x dx=3\int_{e^2}^{e^3}\frac{d(\ln x)}{x(1-\ln x)}-2\left(x\ln x\Big|_{e^2}^{e^3}-\int_{e^2}^{e^3}dx\right)$

$=-3\ln\left(|1-\ln x|\right)\Big|_{e^2}^{e^3}-2\left(x\ln x\Big|_{e^2}^{e^3}-x\Big|_{e^2}^{e^3}\right)=-3\ln 2-4e^3+2e^2.$

d. Ta có $I=\int_1^2 x.3^{x^2+1}dx+\int_1^2\frac{\ln(x+1)}{x^2}dx=J+K.$

Tính $J=\int_1^2 x.3^{x^2+1}dx$

$=\frac{1}{2}\int_1^2 3^{x^2+1}d\left(x^2+1\right)=\frac{3^{x^2+1}}{2\ln 3}\Big|_1^2=\frac{117}{\ln 3}.$

Tính $K=\int_1^2\frac{\ln(x+1)}{x^2}dx.$

Đặt $\begin{cases}u=\ln(x+1)\\ dv=\dfrac{dx}{x^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-\dfrac{dx}{x+1}\\ v=-\dfrac{1}{x}\end{cases}.$

$$K=-\frac{\ln(x+1)}{x}\Big|_1^2+\int_1^2\frac{dx}{x(x+1)}=-\frac{\ln 3}{2}+\ln 2+\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\frac{2\ln 2-\ln 3}{2}+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Big|_1^2.$$

Vậy $I=\frac{117}{\ln 3}+3\ln 2-\frac{3}{2}\ln 3.$

e. Đặt $t=\sqrt{1+\ln x}\Rightarrow 2tdt=\frac{dx}{x}$. Khi $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=1\\ x=e\Rightarrow t=\sqrt{2}\end{cases}$.

$$I=\int_1^e\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{t^2-1}{t}.2tdt=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2\left(2-\sqrt{2}\right)}{3}.$$

Bài 9. Tính các tích phân

a. $I=\int_1^e\frac{x\ln x+\ln(xe^2)}{x\ln x+1}dx.$

b. $I=\int_1^e\frac{(x^3+1)\ln x+2x^2+1}{2+x\ln x}dx.$

c. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\ln(1+\sin^2 x)dx.$

d. $I=\int_1^e\frac{\ln x-2}{x\ln x+x}dx.$

e. $I=\int_{\sqrt{2}}^e x^3\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}dx.$

➢ Lời giải

a. $I=\int_1^e\frac{x\ln x+1+\ln x+1}{x\ln x+1}dx=\int_1^e dx+\int_1^e\frac{\ln x+1}{x\ln x+1}dx$

$$=x\Big|_1^e+\int_1^e\frac{d(x\ln x+1)}{x\ln x+1}=e-1+\ln|x\ln x+1|\Big|_1^e=e-1+\ln(e+1)$$

b. $I=\int_1^e\frac{(x^3+1)\ln x+2x^2+1}{2+x\ln x}dx=\int_1^e x^2dx+\int_1^e\frac{1+\ln x}{2+x\ln x}dx.$

Ta có $\int_1^e x^2dx=\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^e=\frac{e^3-1}{3}.$

Vậy $I=\frac{e^3-1}{3}+\ln\frac{e+2}{2}.$

c. $I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\ln\left(1+\sin^2 x\right)dx$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(1+\sin^2 x\right)\\dv=\sin 2xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx\\v=1+\sin^2 x\end{cases}$.

$I=\frac{1}{2}\left[\left(1+\sin^2 x\right)\ln\left(1+\sin^2 x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xdx\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\left(1+\sin^2 x\right)\ln\left(1+\sin^2 x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\left(\sin^2 x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]=\frac{\ln 4-1}{2}$.

d.Ta có $I=\int_1^e\frac{\ln x-2}{x\ln x+x}dx=\int_1^e\frac{\ln x-2}{(\ln x+1)x}dx$.

Đặt $t=\ln x+1\Rightarrow dt=\frac{1}{x}dx$. Khi $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=1\\x=e\Rightarrow t=2\end{cases}$.

$I=\int_1^2\frac{t-3}{t}dt=\int_1^2\left(1-\frac{3}{t}\right)dt=\left(t-\ln|t|\right)\Big|_1^2=1-\ln 2$.

e.Đặt $\begin{cases}u=\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}\\dv=x^3dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{4x}{x^4-1}dx\\v=\frac{x^4-1}{4}\end{cases}$.

$I=\frac{x^4-1}{4}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}\Big|_{\sqrt{2}}^e-\int_{\sqrt{2}}^e xdx=\frac{e^4-1}{4}\ln\frac{e^2-1}{e^2+1}-\frac{x^2}{2}\Big|_{\sqrt{2}}^e$

$=\frac{e^4-1}{4}\ln\frac{e^2-1}{e^2+1}+\frac{3}{4}\ln 3-\frac{e^2}{2}+1$.

Bài 10. Tính các tích phân

a. $I=\int_1^e\frac{x^2\ln x+x\ln^2 x+x+1}{x^2+x\ln x}dx$.

b. $I=\int_0^1 x\ln\left(x^2+x+1\right)dx$.

c. $I=\int_{\frac{1}{2}}^2\left(x+1-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$.

d. $I=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$.

e. $I=\int_0^1 x^3\ln\left(\frac{4-x^2}{4+x^2}\right)dx$.

➢ Lời giải

a. $I=\int_1^e \ln x dx+\int_1^e \frac{1+\frac{1}{x}}{x+\ln x}dx=x(\ln x-1)\Big|_1^e+\int_1^e \frac{d(x+\ln x)}{x+\ln x}$

$=\left[x(\ln x-1)+\ln(x+\ln x)\right]\Big|_1^e=\ln\left[e(e+1)\right].$

b. Đặt $\begin{cases}u=\ln(x^2+x+1)\\ dv=xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx\\ v=\frac{x^2}{2}\end{cases}$.

$I=\frac{x^2}{2}\ln(x^2+x+1)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x^3+x^2}{x^2+x+1}dx=\frac{3}{4}\ln 3-\frac{3}{4}J.$

Tính $J=\int_0^1\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$

Đặt $x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right).$

$J=\frac{2\sqrt{3}}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}dt=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$

Vậy $I=\frac{3}{4}\ln 3-\frac{\pi\sqrt{3}}{12}.$

c. $I=\int_{\frac{1}{2}}^2\left(x+1-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx=\int_{\frac{1}{2}}^2 e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^2\left(x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx=I_1+I_2.$

Tính I_1 theo phương pháp từng phần:

$I_1=xe^{x+\frac{1}{x}}\Big|_{\frac{1}{2}}^2-\int_{\frac{1}{2}}^2\left(x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx=\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}-I_2\Rightarrow I=\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}$

d. Đặt $t=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow t^2=1-x^2\Rightarrow 2tdt=-2xdx\Rightarrow\frac{dx}{x}=-\frac{tdt}{x^2}$

$\Rightarrow\frac{dx}{x}=-\frac{tdt}{1-t^2}=\frac{tdt}{t^2-1}$. Khi $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow t=\frac{1}{2}\\ x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$.

$$I=\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{t^2-1}=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{1-t}\right|\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{7+4\sqrt{3}}{3}\right).$$

e. Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(\dfrac{4-x^2}{4+x^2}\right)\\dv=x^3dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{16x}{x^4-16}dx\\v=\dfrac{x^4-16}{4}\end{cases}$.

$$I=\frac{1}{4}\left(x^4-16\right)\ln\left(\frac{4-x^2}{4+x^2}\right)\Bigg|_0^1-4\int_0^1 xdx=-\frac{15}{4}\ln\left(\frac{3}{5}\right)-2.$$

Bài 11. Tính các tích phân

a. $I=\int_{\frac{1}{\sqrt{26}}}^{\frac{1}{\sqrt{7}}}\frac{3x^4+x^2+1}{x^2\sqrt[3]{x^3+x}}dx$.

b. $I=\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\frac{x^4}{\left(x-\frac{1}{x}\right)\sqrt{x^2+1}}dx$.

c. $I=\int_1^2\frac{1-x^5}{x\left(1+x^5\right)^2}dx$.

d. $I=\int_0^1\left(x^2e^{x^3}+\frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}\right)dx$.

e. $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(x+2\sin x-3\right)\cos x}{\sin^3 x}dx$.

➢ Lời giải

a. $I=\int_{\frac{1}{\sqrt{26}}}^{\frac{1}{\sqrt{7}}}\frac{3x^4+x^2+1}{x^2\sqrt[3]{x^3+x}}dx=\int_{\frac{1}{\sqrt{26}}}^{\frac{1}{\sqrt{7}}}\frac{3x^4+x^2}{x^2\sqrt[3]{x^3+x}}dx+\int_{\frac{1}{\sqrt{26}}}^{\frac{1}{\sqrt{7}}}\frac{1}{x^2\sqrt[3]{x^3+x}}dx=I_1+I_2$.

Tính $I_2=\int_{\frac{1}{\sqrt{26}}}^{\frac{1}{\sqrt{7}}}\frac{3x^4+x^2}{x^2\sqrt[3]{x^3+x}}dx$.

$$I_2=\int_{\frac{1}{\sqrt{26}}}^{\frac{1}{\sqrt{7}}}\frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}}\frac{1}{x^3}dx=-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{26}}}^{\frac{1}{\sqrt{7}}}\frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}}d\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2}\Bigg|_{\frac{1}{\sqrt{26}}}^{\frac{1}{\sqrt{7}}}=\frac{15}{4}.$$

Vậy $I=\frac{322}{91}$.



b. Ta có $I=\int\limits_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}\frac{x^5}{\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2+1}}dx$.

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow dt=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx;\ x^2=t^2-1$. Khi $\begin{cases}x=2\sqrt{2}\Rightarrow t=3\\ x=\sqrt{3}\Rightarrow t=2\end{cases}$.

$$I=\int\limits_2^3\frac{\left(t^2-1\right)^2}{t^2-2}dt=\int\limits_2^3\frac{t^4-2t^2+1}{t^2-2}dt=\int\limits_2^3 t^2dt+\int\limits_2^3\frac{dt}{t^2-2}.$$

$$=\frac{1}{3}t^3\Big|_2^3+\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\limits_2^3\left(\frac{1}{t-\sqrt{2}}-\frac{1}{t+\sqrt{2}}\right)dt$$

$$=\frac{19}{3}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\ln\left|t-\sqrt{2}\right|-\ln\left|t+\sqrt{2}\right|\right]\Big|_2^3=\frac{19}{3}+\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\frac{4+\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}\right).$$

c. $I=\int\limits_1^2\frac{1-x^5}{x\left(1+x^5\right)^2}dx=\int\limits_1^2\frac{1+x^5-2x^5}{x\left(1+x^5\right)^2}dx=\underbrace{\int\limits_1^2\frac{dx}{x\left(1+x^5\right)}}_{I_1}-\underbrace{\int\limits_1^2\frac{2x^4}{\left(1+x^5\right)^2}dx}_{I_2}$.

Đặt $x=\frac{1}{t}\Rightarrow dx=-\frac{dt}{t^2}$.

$$I_1=\int\limits_1^{\frac{1}{2}}\frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}\left(1+\frac{1}{t^5}\right)}dt=\int\limits_{\frac{1}{2}}^1\frac{t^4}{t^5+1}dt=\frac{1}{5}\int\limits_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{t^5+1}d\left(t^5+1\right)$$

$$=\frac{1}{5}\ln\left|t^5+1\right|\Big|_{\frac{1}{2}}^1=\frac{1}{5}\left(6\ln 2-\ln 33\right).$$

$$I_2=\frac{2}{5}\int\limits_1^2\frac{d\left(x^5+1\right)}{\left(1+x^5\right)^2}=-\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{x^5+1}\right)\Big|_1^2=\frac{31}{165}.$$

Vậy $I=\frac{1}{5}\left(6\ln 2-\ln 33\right)-\frac{31}{165}$.

d. $I=\int\limits_0^1\left(x^2e^{x^3}+\frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}\right)dx=\int\limits_0^1 x^2e^{x^3}dx+\int\limits_0^1\frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$.

Tính $I_1=\int\limits_0^1 x^2e^{x^3}dx$. Đặt $t=x^3\Rightarrow x^2dx=\frac{dt}{3}$. Khi $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=1\\ x=0\Rightarrow t=0\end{cases}$.

$$I_1=\frac{1}{3}\int\limits_0^1 e^tdt=\frac{1}{3}e^t\Big|_0^1=\frac{1}{3}e-\frac{1}{3}.$$

Tính $I_2=\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$. Đặt $t=\sqrt[4]{x}\Rightarrow x=t^4\Rightarrow dx=4t^3dt$.

$$I_2=4\int_0^1 \frac{t^4}{1+t^2}dx=4\int_0^1\left(t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)dt=4\left(-\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}\right).$$

Vậy $I=I_1+I_2=\frac{1}{3}e+\pi-3.$

e. $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(x+2\sin x-3)\cos x}{\sin^3 x}dx=\underbrace{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx}_{I_1}+\underbrace{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(2\sin x-3)\cos x}{\sin^3 x}dx}_{I_2}.$

Tính $I_1=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx.$

$$I_1=-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}xd\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)=-\frac{1}{2}\frac{x}{\sin^2 x}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}\cot x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}.$$

Tính $I_2=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(2\sin x-3)\cos x}{\sin^3 x}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x-3}{\sin^3 x}d(\sin x)=2\sqrt{2}-\frac{7}{2}.$

Vậy $I=I_1+I_2=2\sqrt{2}-3.$

Chương X

NHỮNG BÀI TOÁN TÍCH PHÂN KHÓ

Bài 1. Tính tích phân $I=\int_0^1 \frac{x^2+2x+2}{x^2+4x+4}e^x dx$.

➢ Lời giải: $I=\int_0^1 \frac{(x+1)^2+1}{(x+2)^2}e^x dx=\int_0^1 \frac{(x+2-1)^2+1}{(x+2)^2}e^x dx$

$=\int_0^1 \frac{(x+2)^2-2(x+2)+2}{(x+2)^2}e^x dx=\int_0^1 e^x dx-2\int_0^1 \frac{e^x}{x+2}dx+2\int_0^1 \frac{e^x}{(x+2)^2}dx$

Tính $A=\int_0^1 \frac{e^x}{x+2}dx$.

Đặt $\begin{cases}u=\frac{1}{x+2}\\ dv=e^x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{-1}{(x+2)^2}dx\\ v=\int e^x dx=e^x\end{cases}$.

$A=\frac{e^x}{x+2}\Big|_0^1+\int_0^1 \frac{e^x}{(x+2)^2}dx$.

Vậy $I=\left(e^x-\frac{2e^x}{x+2}\right)\Big|_0^1-2\int_0^1 \frac{e^x}{(x+2)^2}dx+2\int_0^1 \frac{e^x}{(x+2)^2}dx=\left(e^x-\frac{2e^x}{x+2}\right)\Big|_0^1$.

Bài 2. Tính tích phân $I=\int_{\frac{1}{3}}^1 \left[\ln\left(3x^4+x^2\right)-2\ln x\right]dx$.

➢ Lời giải: $I=\int_{\frac{1}{3}}^1 \left[\ln\left(3x^4+x^2\right)-\ln x^2\right]dx=\int_{\frac{1}{3}}^1 \ln\left(3x^2+1\right)dx$

Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(3x^2+1\right)\\ dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{6x}{3x^2+1}dx\\ v=x\end{cases}$.

$\Rightarrow I=x\ln\left(3x^2+1\right)\Big|_{\frac{1}{3}}^1-6\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{x^2}{3x^2+1}dx=\ln\left(2\sqrt[3]{6}\right)-2\int_{\frac{1}{3}}^1 dx+\frac{2}{3}\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{dx}{x^2+\frac{1}{3}}$

$=\ln\left(2\sqrt[3]{6}\right)-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}A.$

Tính $A=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{dx}{x^2+\frac{1}{3}}.$

Đặt $x=\frac{\sqrt{3}}{3}\tan t\Rightarrow dx=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\tan^2 t+1\right)dt$. Khi $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{3}\\ x=\frac{1}{3}\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}\end{cases}$.

$A=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\tan^2 t+1}{\frac{1}{3}\tan^2 t+\frac{1}{3}}dt=\frac{1}{3}t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{18}.$

Vậy $I=\ln\left(2\sqrt[3]{6}\right)-\frac{4}{3}+\frac{2\pi}{54}.$

Bài 3. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^2}{\left(x\sin x+\cos x\right)^2}dx.$

➢ Lời giải: $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x.\cos x}{\left(x\sin x+\cos x\right)^2}.\frac{x}{\cos x}dx.$

Đặt $\begin{cases}u=\frac{x}{\cos x}\\ dv=\frac{x.\cos x}{\left(x\sin x+\cos x\right)^2}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}dx\\ v=\int\frac{d\left(x\sin x+\cos x\right)}{\left(x\sin x+\cos x\right)^2}=-\frac{1}{x\sin x+\cos x}\end{cases}$

$I=\frac{-1}{x\sin x+\cos x}.\frac{x}{\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}=\left(\frac{-1}{x\sin x+\cos x}.\frac{x}{\cos x}+\tan x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}.$

Bài 4. Tính tích phân $I=\int\limits_{1}^{e}\frac{\left[1-(x-1)e^x\right]\ln x}{\left(1+e^x\right)^2}dx.$

➢ Lời giải:

$I=\int\limits_{1}^{e}\frac{\left(1+e^x\right)\ln x}{\left(1+e^x\right)^2}dx-\int\limits_{1}^{e}\frac{xe^x\ln x}{\left(1+e^x\right)^2}dx=\underbrace{\int\limits_{1}^{e}\frac{\ln x}{\left(1+e^x\right)}dx}_{A}-\underbrace{\int\limits_{1}^{e}\frac{xe^x\ln x}{\left(1+e^x\right)^2}dx}_{B}.$

Đặt $\begin{cases}u=\frac{1}{e^x+1}\\ dv=\ln x.dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{-e^x}{\left(e^x+1\right)^2}dx\\ v=\int\ln x dx=x\ln x-x\end{cases}.$

$$A=\int_1^e \frac{\ln x}{\left(1+e^x\right)}dx=\frac{x\ln x-x}{e^x+1}\Big|_1^e+\int_1^e \frac{\left(x\ln x-x\right)e^x}{\left(e^x+1\right)^2}dx$$

$$=\frac{1}{e+1}+\int_1^e \frac{xe^x\ln x}{\left(e^x+1\right)^2}dx-\int_1^e \frac{xe^x}{\left(e^x+1\right)^2}dx.$$

Nên $I=\frac{1}{e+1}-\int_1^e \frac{xe^x}{\left(e^x+1\right)^2}dx.$

Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=\int\frac{d\left(e^x+1\right)}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{-1}{e^x+1}\end{cases}.$

$$\int_1^e \frac{xe^x}{\left(e^x+1\right)^2}dx=\frac{-x}{e^x+1}\Big|_1^e+\int_1^e \frac{dx}{e^x+1}=\frac{1}{e+1}-\frac{e}{e^e+1}+\int_1^e \frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}dx$$

$$=\frac{1}{e+1}-\frac{e}{e^e+1}+\int_1^e dx-\int_1^e \frac{d\left(e^x+1\right)}{e^x+1}=\frac{1}{e+1}-\frac{e}{e^e+1}+e-1-\ln\left(\frac{e^e+1}{e+1}\right).$$

Vậy $I=-\frac{e}{e^e+1}+e-1-\ln\left(\frac{e^e+1}{e+1}\right).$

Bài 5. Tính tích phân $I=\int_0^1 \frac{\ln\left(x+1\right)}{x^2+1}dx.$

➢ Lời giải: Đặt $x=\tan t\Rightarrow dx=\frac{dt}{\cos^2 t}.$

Ta có $x^2+1=\tan^2 t+1=\frac{1}{\cos^2 t}.$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan t\right)dt.$$

Đặt $t=\frac{\pi}{4}-u\Rightarrow dt=-du.$

$$I=-\int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\right]du=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan u}{1+\tan\frac{\pi}{4}.\tan u}\right)du$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{1-\tan u}{1+\tan u}\right)du=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\tan u}\right)du$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2du - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan u)du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2du - I$$

$$\Rightarrow 2I = u\ln 2\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow I = \frac{\pi.\ln 2}{8}.$$

Bài 6. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\left(x\sin x + \sqrt{x}\right) - \sin x}{x-1} dx$.

➢ Lời giải: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\left(x^2-1\right)\sin x + x\sqrt{x}}{x-1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+1)\sin x dx + \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sqrt{x}}{x-1} dx}_{A}$

$$= \left[\sin x - (x+1)\cos x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + A = -\frac{1}{2} + A.$$

Đặt $u = \sqrt{x} \Rightarrow u^2 = x \Rightarrow 2udu = dx$. Khi $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ x = 0 \Rightarrow u = 0 \end{cases}$.

$$A = 2\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{u^3}{u^2-1}.udu = 2\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{u^4-1+1}{u^2-1} du = 2\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \left(u^2+1+\frac{1}{u^2-1}\right) du$$

$$= 2\left(\frac{u^3}{3} + u + \frac{1}{2}.\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right)\Big|_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}.$$

Bài 7. Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{\ln^2 x + \ln x}{\left(\ln x + x + 1\right)^3} dx$.

➢ Lời giải: $I = \int_1^e \frac{\ln x(\ln x+1)}{x^3\left(\frac{\ln x+1}{x}+1\right)^3} dx = \int_1^e \frac{\ln x+1}{x}.\frac{1}{\left(\frac{\ln x+1}{x}+1\right)^3}.\frac{\ln x}{x^2} dx.$

Đặt $t = \frac{\ln x+1}{x} + 1 \Rightarrow dt = -\frac{\ln x}{x^2} dx$. Khi $\begin{cases} x = e \Rightarrow t = \frac{2+e}{e} \\ x = 1 \Rightarrow t = 2 \end{cases}$.

$$I = -\int_2^{\frac{2+e}{e}} \frac{t-1}{t^3} dt = \int_2^{\frac{2+e}{e}} \left(\frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^2}\right) dt = \left(\frac{-1}{2t^2} + \frac{1}{t}\right)\Big|_2^{\frac{2+e}{e}} = -\frac{e^2}{2(2+e)^2} + \frac{e}{2+e} - \frac{3}{8}.$$

D ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

Chương I

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH DIỆN TÍCH

I. DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐƯỜNG CONG

1. Dạng 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases}(C): y=f(x)\\(Ox): y=0\\x=a;\ x=b\end{cases}$

Phương pháp:

Bước 1: Gọi S là diện tích cần xác định, ta có: $S=\int\limits_a^b |f(x)|dx$.

Bước 2: Xét dấu biểu thức $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

Từ đó chia đoạn $[a;b]$ thành các đoạn nhỏ hơn, sao cho $f(x)$ không bị đổi dấu trên đoạn đó, giả sử $[a;b]=[a;c_1]\cup[c_1;c_2]\cup...\cup[c_n;b]$.

Bước 3: Khi đó, diện tích cần tìm là:

$$S=\int\limits_a^{c_1}|f(x)|dx+\int\limits_{c_1}^{c_2}|f(x)|dx+...+\int\limits_{c_n}^{b}|f(x)|dx.$$

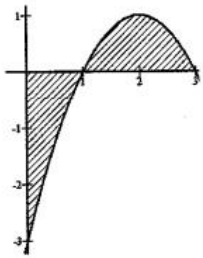
Ví dụ 1 Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=-x^2+4x-3$; $x=0$; $x=3$ và trục hoành.

➢ Lời giải: Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=-x^2+4x-3$ với trục hoành là:

$$-x^2+4x-3=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=1\\x=3\end{bmatrix}.$$

x	0		1		3
$-x^2+4x-3$		$-$	0	$+$	0

Ta có bảng xét dấu hàm số $y=-x^2+4x-3$ trên đoạn $[0;3]$



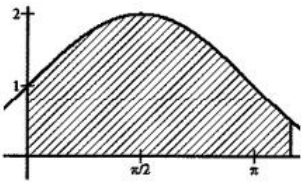
Vậy diện tích cần xác định là:

$$S=\int_0^3\left|-x^2+4x-3\right|dx=-\int_0^1\left(-x^2+4x-3\right)dx+\int_1^3\left(-x^2+4x-3\right)dx$$

$$=-\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2+3x\right)\Big|_0^1+\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2+3x\right)\Big|_1^3=\frac{8}{3}\text{ (đvdt).}$$

Ví dụ 2 Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=\sin x+1$; $x=0$; $x=\frac{7\pi}{6}$ và trục hoành.

➢ Lời giải:



Do $\sin x+1\geq 0\,\forall x$, suy ra diện tích cần xác định là: $S=\int_0^{\frac{7\pi}{6}}\left|\sin x+1\right|dx=\int_0^{\frac{7\pi}{6}}\left(\sin x+1\right)dx$

$$=\left(-\cos x+x\right)\Big|_0^{\frac{7\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{7\pi}{6}+1\text{ (đvdt).}$$

Bài tập minh họa

a. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=x^3-1$; $x=0$; $x=2$ và trục hoành.

b. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=\ln x$; $x=1$; $x=e$ và trục hoành.

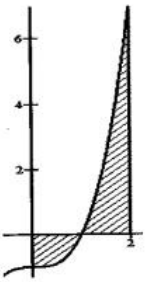
c. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=x^2-2x$; $x=-1$; $x=2$ và trục hoành.

d. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$; $x=1$; $x=e$ và trục hoành.

e. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}$; $x=1$; $x=e$ và trục hoành.

f. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=x(x+1)(x-2)$; $x=-2$; $x=2$ và trục hoành.

➢ Lời giải



a. Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=x^3-1$ với trục hoành là: $x^3-1=0\Leftrightarrow x=1$.

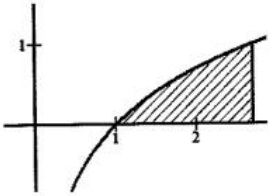
Ta có bảng xét dấu hàm số $y=x^3-1$ trên đoạn $[0;2]$

x	0		1		2
x^3-1		−	0	+	0

Vậy diện tích cần xác định là:

$$S=\int_0^2\left|x^3-1\right|dx=-\int_0^1\left(x^3-1\right)dx+\int_1^2\left(x^3-1\right)dx$$

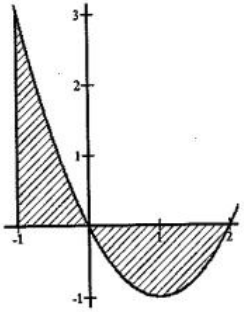
$$=-\left(\frac{x^4}{4}-x\right)\Big|_0^1+\left(\frac{x^4}{4}-x\right)\Big|_1^2=\frac{7}{2}\text{ (đvdt).}$$



b. Do $\ln x\geq 0\ \forall x\in[1;e]$, suy ra diện tích cần xác định là:

$$S=\int_1^e\left|\ln x\right|dx=\int_1^e\ln x dx=x\left(\ln x-1\right)\Big|_1^e=1$$

(đvdt).



c. Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=x^2-2x$ với trục hoành là: $x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

x	−1		0		2
x^2-2x		+	0	−	0

Ta có bảng xét dấu hàm số $y=x^2-2x$ trên đoạn $[-1;2]$

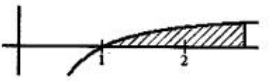
Vậy diện tích cần xác định là:

$$S=\int_{-1}^2\left|x^2-2x\right|dx=\int_{-1}^0\left(x^2-2x\right)dx-\int_0^2\left(x^2-2x\right)dx$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{-1}^0-\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_0^2=\frac{8}{3}\text{ (đvdt).}$$

d. Do $\ln x \geq 0 \ \forall x \in [1; e] \Rightarrow \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} > 0 \Rightarrow \left|\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right| = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$, suy ra diện tích cần xác định là:

$$S = \int_1^e \left|\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right| dx = \int_1^e \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx.$$



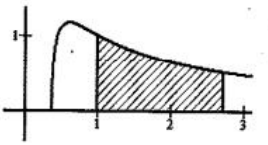
Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \sqrt{x} \end{cases}$.

$$S = \sqrt{x}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{\sqrt{x}}{x} dx = \left(\sqrt{x}\ln x - 2\sqrt{x}\right)\Big|_1^e = 2 - \sqrt{e} \text{ (đvdt).}$$

e. Do

$$\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} \geq 0 \ \forall x \in [1; e] \Rightarrow \left|\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\right| = \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}$$

suy ra diện tích cần xác định là:



$$S = \int_1^e \left|\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\right| dx = \int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx.$$

Đặt $t = \sqrt{1+\ln x} \Rightarrow t^2 = 1 + \ln x \Rightarrow 2tdt = \frac{dx}{x}$.

Khi $\begin{cases} x = e \Rightarrow t = \sqrt{2} \\ x = 1 \Rightarrow t = 1 \end{cases}$.

$$S = \int_1^{\sqrt{2}} t.2tdt = \int_1^{\sqrt{2}} 2t^2 dt = \frac{2}{3}t^3\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}-2}{3} \text{ (đvdt).}$$

f. Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y = x(x+1)(x-2)$ với trục hoành là: $x(x+1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Ta có bảng xét dấu hàm số $y = x(x+1)(x-2)$ trên đoạn $[-2; 2]$

x	-2		-1		0	
$x(x+1)(x-2)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Vậy diện tích cần xác định là: $S = \int_{-2}^{2} \left|x(x+1)(x-2)\right| dx$

$$= -\int_{-2}^{-1}\left(x^3 - x^2 - 2x\right)dx + \int_{-1}^{0}\left(x^3 - x^2 - 2x\right)dx - \int_{0}^{2}\left(x^3 - x^2 - 2x\right)dx$$

$$= -\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_{-2}^{-1} + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0} - \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_{0}^{2} = \frac{37}{6} \text{ (đvdt).}$$

Bài tập bạn đọc tự giải

1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x^3$; $x = -1$; $x = 2$ và trục hoành.

   Đáp số: $S = \frac{17}{4}$ (đvdt).

2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = \sin x\left(2 + \cos x\right)$; $x = \frac{\pi}{2}$; $x = \frac{3\pi}{2}$ và trục hoành.

   Đáp số: $S = 3$ (đvdt).

3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = \ln x$; $x = 2$; $x = e$ và trục hoành.

   Đáp số: $S = 2 - 2\ln 2$ (đvdt).

4. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = xe^x$; $x = -1$; $x = 2$ và trục hoành.

   Đáp số: $S = \frac{e^3 + 2e - 2}{e}$ (đvdt).

5. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = \sin^2 x \cos^3 x$; $x = 0$; $x = \frac{\pi}{2}$ và trục hoành.

   Đáp số: $S = \frac{7}{15}$ (đvdt).

2. Dạng 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases}(C_1): y = f(x)\\(C_2): y = g(x)\\x = a;\ x = b\end{cases}$

Phương pháp:

Bước 1: Gọi S là diện tích cần xác định, ta có: $S = \int_a^b \left|f(x) - g(x)\right|dx$.

Bước 2: Xét dấu biểu thức $f(x) - g(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Từ đó chia đoạn $[a;b]$ thành các đoạn nhỏ hơn, sao cho $f(x)-g(x)$ không bị đổi dấu trên đoạn đó, giả sử $[a;b]=[a;c_1]\cup[c_1;c_2]\cup...\cup[c_n;b]$.

Bước 3: Khi đó, diện tích cần tìm là:

$$S=\int_a^{c_1}|f(x)-g(x)|dx+\int_{c_1}^{c_2}|f(x)-g(x)|dx+...+\int_{c_n}^{b}|f(x)-g(x)|dx.$$

Ví dụ 1 Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=\dfrac{1}{\sin^2 x}$; $y=\dfrac{1}{\cos^2 x}$; $x=\dfrac{\pi}{6}$ $x=\dfrac{\pi}{3}$.

➢ Lời giải: Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=\dfrac{1}{\sin^2 x}$ với đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ là: $\dfrac{1}{\sin^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}\Leftrightarrow \sin^2 x=\cos^2 x$

$\Leftrightarrow \sin^2 x=1-\sin^2 x\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x=0\Leftrightarrow \cos 2x=0\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi$.

Vì $x\in\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right]\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}$.

Ta có bảng xét dấu hàm số $\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{\cos^2 x}$ trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right]$

x	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$
$\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}$		$+$	0	$-$	

Vậy diện tích cần xác định là: $S=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left|\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{\cos^2 x}\right|dx$

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)dx$

$=(-\cot x-\tan x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}-(-\cot x-\tan x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}-4$ (đvdt).

Ví dụ 2 Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=x^3+11x-6$; $y=6x^2$; $x=0$; $x=2$.

➢ Lời giải: Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=x^3+11x-6$

với đồ thị hàm số $y=6x^2$ là: $x^3+11x-6=6x^2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{bmatrix}$.

Ta có bảng xét dấu hàm số $x^3+11x-6-6x^2$ trên đoạn $[0;2]$

x	0		1		2
$x^3+11x-6-6x^2$		$-$	0	$+$	0

Vậy diện tích cần xác định là: $S=\int_0^2 \left|x^3+11x-6-6x^2\right|dx$

$=-\int_0^1 \left(x^3+11x-6-6x^2\right)dx+\int_1^2 \left(x^3+11x-6-6x^2\right)dx$

$=-\left(\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{11x^2}{2}-6x\right)\Big|_0^1+\left(\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{11x^2}{2}-6x\right)\Big|_1^2=\frac{5}{2}$ (đvdt).

Bài tập minh họa

a. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=x^3$; $y=4x$; $x=-1$; $x=2$.

b. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=-x^2-5$; $y=-6x$; $x=0$; $x=1$.

➢ Lời giải

a. Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=x^3$ với đồ thị hàm số $y=4x$ là: $x^3=4x \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=-2 \\ x=0 \\ x=2 \end{bmatrix}$.

Ta có bảng xét dấu hàm số x^3-4x trên đoạn $[-1;2]$

x	-1		0		2
x^3-4x		$+$	0	$-$	0

Vậy diện tích cần xác định là: $S=\int_{-1}^2 \left|x^3-4x\right|dx$

$=\int_{-1}^0 \left(x^3-4x\right)dx-\int_0^2 \left(x^3-4x\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)\Big|_{-1}^0-\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)\Big|_0^2=\frac{23}{4}$ (đvdt).

b. Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=-x^2-5$ với đồ thị hàm số $y=-6x$ là: $-x^2-5=-6x \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=1 \\ x=2 \end{bmatrix}$.

Ta có bảng xét dấu hàm số $(-x^2-5)-(-6x)$ trên đoạn $[0;1]$

x	0		1
$(-x^2-5)-(-6x)$		$-$	0

Vậy diện tích cần xác định là: $S=\int_0^1 \left|(-x^2-5)-(-6x)\right|dx$

$=-\int_0^1 (-x^2+6x-5)dx=-\left(-\frac{x^3}{3}+3x^2-5x\right)\Big|_0^1=\frac{7}{3}$ (đvdt).

Bài tập bạn đọc tự giải

1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=-x^2-2$; $y=-3x$; $x=0$; $x=2$.

Đáp số: $S=1$ (đvdt).

2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=x^3-x$; $y=x-x^2$; $x=-2$; $x=1$.

Đáp số: $S=\frac{37}{12}$ (đvdt).

3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=\cos x$; $y=\sin x$; $x=0$; $x=\pi$.

Đáp số: $S=2\sqrt{2}$ (đvdt).

3. Dạng 3: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\begin{bmatrix} (C_1): y=f(x) \\ (C_2): y=g(x) \end{bmatrix}$

Phương pháp:

Bước 1: Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là: $f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow$ nghiệm.

Nghiệm này được sắp xếp theo thứ tự tăng dần, giả sử $x_1<x_2<...<x_n$.

Bước 2: Gọi S là diện tích cần xác định, ta có

$$S=\int_a^{x_1}\left|f(x)-g(x)\right|dx+\int_{x_1}^{x_2}\left|f(x)-g(x)\right|dx+...+\int_{x_n}^{b}\left|f(x)-g(x)\right|dx.$$

Ví dụ 1 Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=x^2-2x$; $y=-x^2+4x$

➢ Lời giải: Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=x^2-2x$ với đồ thị hàm số $y=-x^2+4x$ là: $x^2-2x=-x^2+4x \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0 \\ x=3 \end{bmatrix}$.

Ta có bảng xét dấu hàm số $\left(x^2-2x\right)-\left(-x^2+4x\right)$ trên đoạn $[0;3]$

x	0		3
$\left(x^2-2x\right)-\left(-x^2+4x\right)$		$-$	

Vậy diện tích cần xác định là: $S=\int_0^3 \left|\left(x^2-2x\right)-\left(-x^2+4x\right)\right|dx$

$$=-\int_0^3 \left(2x^2-6x\right)dx=-\left(\frac{2x^3}{3}-3x^2\right)\Big|_0^3=9 \text{ (đvdt).}$$

Ví dụ 2

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=x^3-2x^2-x+2$ và trục hoành.

➢ Lời giải: Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=x^3-2x^2-x+2$ với trục hoành là:

$$x^3-2x^2-x+2=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=-1 \\ x=1 \\ x=2 \end{bmatrix}.$$

Ta có bảng xét dấu hàm số x^3-2x^2-x+2 trên đoạn $[1;2]$

x	-1		1		2
x^3-2x^2-x+2		$+$	0	$-$	

Vậy diện tích cần xác định là: $S=\int_{-1}^2 \left|x^3-2x^2-x+2\right|dx$

$$S=\int_{-1}^1 \left(x^3-2x^2-x+2\right)dx-\int_1^2 \left(x^3-2x^2-x+2\right)dx$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_{-1}^1-\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_1^2=\frac{37}{12} \text{ (đvdt).}$$

Bài tập minh họa

a. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=-x^2-2x$; $y=-x-2$.

b. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=x^3$; $y=4x$.

➢ Lời giải

a. Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=-x^2-2x$ với đồ thị hàm số $y=-x-2$ là: $-x^2-2x=-x-2\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=-2\\x=1\end{bmatrix}$.

Ta có bảng xét dấu hàm số $(-x^2-2x)-(-x-2)$ trên đoạn $[-2;1]$

x	-2		1
$(-x^2-2x)-(-x-2)$	0	$+$	0

Vậy diện tích cần xác định là: $S=\int_{-2}^{1}\left|(-x^2-2x)-(-x-2)\right|dx$

$=\int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)dx=\left(-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_{-2}^{1}=\frac{9}{2}$ (đvdt).

b. Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=x^3$ với đồ thị hàm số $y=4x$ là: $x^3=4x\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=-2\\x=0\\x=2\end{bmatrix}$.

Ta có bảng xét dấu hàm số x^3-4x trên đoạn $[-2;2]$

x	-2		0		2
x^3-4x	0	$+$	0	$-$	0

Vậy diện tích cần xác định là: $S=\int_{-2}^{2}\left|x^3-4x\right|dx$

$=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)dx-\int_{0}^{2}(x^3-4x)dx=\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)\Big|_{-2}^{0}-\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)\Big|_{0}^{2}=8$ (đvdt).

Bài tập bạn đọc tự giải

1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=-\sqrt{4-x^2}$; $y=-\frac{x^2}{3}$.

   Đáp số: $S=\frac{4\pi+\sqrt{3}}{3}$ (đvdt).

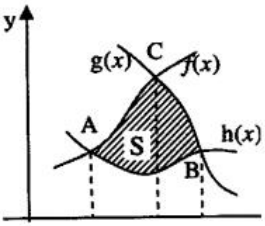
2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=\left|x^2-4x+3\right|$; $y=3$.

   Đáp số: $S=8$ (đvdt).

4. Dạng 4: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases}(C_1):y=f(x)\\(C_2):y=g(x)\\(C_3):y=h(x)\end{cases}$

Phương pháp:

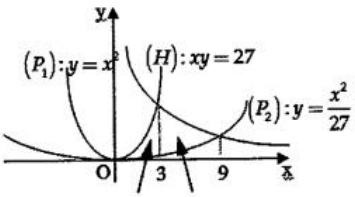
Bước 1: Xét các phương trình hoành độ giao điểm của các đồ thị hàm số là: $\begin{cases}C=(C_1)\cap(C_2)\\A=(C_2)\cap(C_3)\\B=(C_3)\cap(C_1)\end{cases}$.



Bước 2: Gọi S là diện tích cần xác định, ta có:

$$S=\int_a^c\left[f(x)-h(x)\right]dx+\int_c^b\left[g(x)-h(x)\right]dx.$$

Ví dụ 1 Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=x^2$; $y=\frac{x^2}{27}$; $y=\frac{27}{x}$.



➢ Lời giải: Các hoành độ giao điểm

$$\begin{cases}x^2=\frac{x^2}{27}\Leftrightarrow x=0\\x^2=\frac{27}{x}\Leftrightarrow x=3\\\frac{x^2}{27}=\frac{27}{x}\Leftrightarrow x=9\end{cases}.$$

Gọi S là diện tích cần xác định, ta có $S=S_1+S_2$

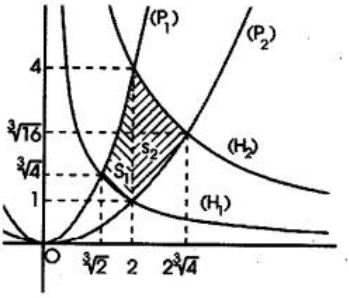
$$=\int_0^3\left(x^2-\frac{x^2}{27}\right)dx+\int_3^9\left(\frac{27}{x}-\frac{x^2}{27}\right)dx$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^3}{81}\right)\Big|_0^3+\left(27\ln x-\frac{x^3}{81}\right)\Big|_3^9=27\ln 3 \text{ (đvdt).}$$

Ví dụ 2 Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=x^2;\ y=\frac{x^2}{4};\ y=\frac{2}{x};\ y=\frac{8}{x}$.

➢ Lời giải: Các hoành độ giao điểm

$$\begin{cases} x^2=\frac{2}{x}\Leftrightarrow x^3=2\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2} \\ x^2=\frac{8}{x}\Leftrightarrow x^3=8\Leftrightarrow x=2 \\ \frac{x^2}{4}=\frac{2}{x}\Leftrightarrow x^3=9\Leftrightarrow x=2 \\ \frac{x^2}{4}=\frac{8}{x}\Leftrightarrow x^3=32\Leftrightarrow x=2\sqrt[3]{4} \end{cases}$$



Gọi S là diện tích cần xác định, ta có $S=S_1+S_2$

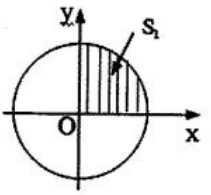
$$=\int_{\sqrt[3]{2}}^{2}\left(x^2-\frac{2}{x}\right)dx+\int_{2}^{2\sqrt[3]{4}}\left(\frac{8}{x}-\frac{x^2}{4}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-2\ln x\right)\Big|_{\sqrt[3]{2}}^{2}+\left(8\ln x-\frac{x^3}{12}\right)\Big|_{2}^{2\sqrt[3]{4}}$$

$=4\ln 2$ (đvdt).

II. DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN

Phương pháp:

Cho đường tròn $(C):x^2+y^2=R^2$, suy ra phương trình của (C) trong góc phần tư thứ I là $y=\sqrt{R^2-x^2}$. Gọi S là diện tích cần xác định, ta có $S=4S_1=4\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}dx$.



Đặt $x=R\sin t$ với $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$, suy ra $dx=R\cos t dt$

Khi $\begin{cases} x=R\Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \\ x=0\Rightarrow t=0 \end{cases}$.

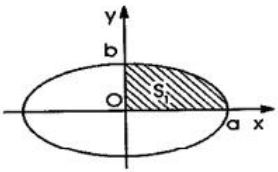
Vậy $S=4R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{R^2-R^2\sin^2 t}.\cos t dt=4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|.\cos t dt$

$=4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=2R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=2R^2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi R^2.$

III. DIỆN TÍCH HÌNH ELIP

Phương pháp:

Cho Elip $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, suy ra phương trình của (E) trong góc phần tư thứ I là $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$.



Gọi S là diện tích cần xác định, ta có $S=4S_1=\frac{4b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx.$

Đặt $x=a\sin t$ với $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$, suy ra $dx=a\cos t dt$.

Khi $\begin{cases}x=a\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}\\ x=0\Rightarrow t=0\end{cases}$.

Vậy $S=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}.\cos t dt=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|.\cos t dt$

$=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=2ab\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi ab.$

Chương II

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH THỂ TÍCH

I. THỂ TÍCH V SINH BỞI DIỆN TÍCH S (TẠO BỞI MỘT ĐƯỜNG CONG VỚI TRỤC)

1. Dạng 1. Khi quay xung quanh trục Ox

Phương pháp: Cho $S:\begin{cases}(C):y=f(x)\\ Ox:y=0\\ \Delta_1:x=a;\ \Delta_2:x=b\end{cases}$.

Thể tích cần xác định là: $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$.

Ví dụ 1 Tính thể tích vật tròn xoay sinh bởi diện tích S quay xung quanh trục Ox; với $S:\begin{cases}y=x\ln x\\ y=0\\ x=1\\ x=e\end{cases}$.

➢ Lời giải: Thể tích cần xác định là: $V=\pi\int\limits_1^e(x\ln x)^2dx$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln^2 x\\ dv=x^2dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{2}{x}\ln xdx\\ v=\dfrac{x^3}{3}\end{cases}$.

Khi đó $V=\pi\left(\dfrac{x^3}{3}\ln^2 x\right)\Big|_1^e-\dfrac{2\pi}{3}\int\limits_1^e x^2\ln xdx=\dfrac{\pi e^3}{3}-\dfrac{2\pi}{3}\underbrace{\int\limits_1^e x^2\ln xdx}_{I}$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=x^2dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{dx}{x}\\ v=\dfrac{x^3}{3}\end{cases}$.

Khi đó $I=\dfrac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^e-\dfrac{1}{3}\int\limits_1^e x^2dx=\dfrac{e^3}{3}-\dfrac{x^3}{9}\Big|_1^e=\dfrac{2e^3+1}{9}$.

Vậy $V=\dfrac{\pi}{27}\left(5e^3-3\right)$ (đvtt).

Ví dụ 2 Tính thể tích vật tròn xoay sinh bởi diện tích S quay xung quanh trục Ox; với $S:\begin{cases}y=\ln x\\y=0\\x=2\end{cases}$.

➢ Lời giải: Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=\ln x$ với đồ thị hàm số $y=0$ là: $\ln x=0\Leftrightarrow x=1$.

Thể tích cần xác định là: $V=\pi\int_1^2 \ln^2 x dx$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln^2 x\\dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{2}{x}\ln x dx\\v=x\end{cases}$.

Khi đó $V=\pi x\ln^2 x\Big|_1^2-2\int_1^2 \ln x dx=\left[\pi x\ln^2 x-2x(\ln x-1)\right]\Big|_1^2$

$=2\pi(\ln 2-1)^2$ (đvtt).

Bài tập minh họa

a. Tính thể tích do hình phẳng giới hạn bởi đường Ellipse $(E):\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ quay quanh Ox.

b. Tính thể tích do hình phẳng giới hạn bởi đường $y^2=(x-1)^3$; $y=0$; $x=2$ quay quanh Ox.

➢ Lời giải

a. Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $(E):\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ với trục hoành là: $\dfrac{x^2}{16}+0=1\Leftrightarrow\begin{bmatrix}y=-4\\y=4\end{bmatrix}$.

Ta có $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1\Leftrightarrow y^2=9-\dfrac{9}{16}x^2$.

Thể tích cần xác định là:

$$V=\pi\int_{-4}^{4}y^2dx=9\pi\int_{-4}^{4}\left(1-\frac{x^2}{16}\right)dx=9\pi\left(x-\frac{y^3}{48}\right)\Big|_{-4}^{4}=48\pi \text{ (đvtt).}$$

b. Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y^2=(x-1)^3$ với trục hoành là: $(x-1)^3=0\Leftrightarrow x=1$.

Thể tích cần xác định là:

$$V=\pi\int_1^2 y^2dx=\pi\int_1^2(x-1)^3\,dx=\left.\frac{\pi(x-1)^4}{4}\right|_1^2=\frac{\pi}{4}\ (\text{đvtt}).$$

2. Dạng 2. Khi quay xung quanh trục Oy

Phương pháp: Cho $S:\begin{cases}(C):x=f(y)\\ Oy:x=0\\ \Delta_1:y=a;\ \Delta_2:y=b\end{cases}$.

Thể tích cần xác định là: $V=\pi\int_a^b x^2dy=\pi\int_a^b f^2(y)dy$.

Ví dụ Tính thể tích vật tròn xoay sinh bởi diện tích S quay xung quanh trục Oy; với $S:\begin{cases}y=\dfrac{x^2}{2}\\ x=0\\ y=2\\ y=4\end{cases}$.

➢ Lời giải: Ta có $y=\dfrac{x^2}{2}\Leftrightarrow x^2=2y$.

Thể tích cần xác định là: $V=\pi\int_2^4 x^2dy=\pi\int_2^4 2ydy=\pi y^2\Big|_2^4=12\pi$ (đvtt).

Bài tập minh họa

a. Tính thể tích do hình phẳng giới hạn bởi đường Ellipse $(E):\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ quay quanh Oy.

b. Tính thể tích do hình phẳng giới hạn bởi đường tròn $(C):x^2+(y-4)^2=4$ quay quanh Oy.

➢ Lời giải

a. Phương trình tung độ giao điểm của đồ thị $(E):\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ với trục tung là: $\dfrac{0}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1\Leftrightarrow\begin{bmatrix}y=-3\\ y=3\end{bmatrix}$.

Ta có $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1\Leftrightarrow x^2=16-\dfrac{16}{9}y^2$.

Thể tích cần xác định là:

$$V=\pi\int_0^3 x^2dy=16\pi\int_0^3\left(1-\frac{y^2}{9}\right)dy=16\pi\left(y-\frac{y^3}{27}\right)\Big|_0^3=32\pi \text{ (đvtt).}$$

b. Phương trình tung độ giao điểm của đồ thị $(C):x^2+(y-4)^2=4$ với trục tung là: $0+(y-4)^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=2\\y=6\end{array}\right.$.

Ta có $x^2+(y-4)^2=4\Leftrightarrow x^2=4-(y-4)^2$.

Thể tích cần xác định là: $V=\pi\int_2^6 x^2dy=\pi\int_2^6\left[4-(y-4)^2\right]dy$

$$=\pi\left(-\frac{y^3}{3}+4y^2-12y\right)\Big|_2^6=\frac{32\pi}{3} \text{ (đvtt).}$$

II. THỂ TÍCH *V* SINH BỞI DIỆN TÍCH *S* (TẠO BỞI TỪ HAI ĐƯỜNG CONG)

1. Dạng 1: Khi quay quanh trục Ox.

Phương pháp:

Bước 1: Phân đường cong kín (C) thành hai cung $(C_1):y=f_1(x)$ và $(C_2):y=f_2(x)$ với $a\le x\le b$ và $f_1(x);f_2(x)$ cùng dấu.

Bước 2: Thể tích cần xác định là: $V=\pi\int_a^b\left|f_1^2(x)-f_2^2(x)\right|dx$.

Ví dụ 1 Tính thể tích vật tròn xoay sinh bởi diện tích S quay xung quanh trục Ox; với $S:\left\{\begin{array}{l}y=3x\\y=x\\x=0\\x=1\end{array}\right.$.

➢ Lời giải: Thể tích cần xác định là: $V=\pi\int_0^1\left|(3x)^2-x^2\right|dx$

$$=8\pi\int_0^1 x^2dx=\frac{8\pi x^2}{3}\Big|_0^1=\frac{8\pi}{3} \text{ (đvtt).}$$

Ví dụ 2 Tính thể tích vật tròn xoay sinh bởi diện tích S quay xung quanh trục Ox; với $S:\left\{\begin{array}{l}y=x^2-4x+6\\y=-x^2-2x+6\end{array}\right.$.

Lời giải: Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=x^2-4x+6$ với đồ thị hàm số $y=-x^2-2x+6$ là:

$$x^2-4x+6=-x^2-2x+6 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0 \\ x=1 \end{bmatrix}.$$

Thể tích cần xác định là: $V=\pi\int\limits_0^1\left|\left(x^2-4x+6\right)^2-\left(-x^2-2x+6\right)^2\right|dx$

$$=\pi\int\limits_0^1\left(12x^3-36x^2+24x\right)dx=\pi\left(3x^4-12x^3+12x^2\right)\Big|_0^1=3\pi \text{ (đvtt).}$$

Bài tập minh họa

a. Tính thể tích vật tròn xoay sinh bởi diện tích S quay xung quanh trục Ox; với $S:\begin{cases} y=x^2+2 \\ y=4-x^2 \end{cases}$.

b. Tính thể tích vật tròn xoay sinh bởi diện tích S quay xung quanh trục Ox; với $S:\begin{cases} y=-\sqrt{4-x^2} \\ y=-\dfrac{x^2}{3} \end{cases}$.

➢ Lời giải

a. Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=x^2+2$ với đồ thị hàm số $y=4-x^2$ là:

$$x^2+2=4-x^2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=-1 \\ x=1 \end{bmatrix}.$$

Thể tích cần xác định là: $V=\pi\int\limits_{-1}^1\left|\left(x^2+2\right)^2-\left(4-x^2\right)^2\right|dx$

$$=12\pi\int\limits_{-1}^1\left|x^2-1\right|dx=-12\pi\int\limits_{-1}^1\left(x^2-1\right)dx=-12\pi\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_{-1}^1=16\pi \text{ (đvtt).}$$

Chú thích: $x^2-1\le 0\,\forall x\in[-1;1]\Rightarrow\left|x^2-1\right|=-\left(x^2-1\right)$.

b. Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=-\sqrt{4-x^2}$ với đồ thị hàm số $y=-\dfrac{x^2}{3}$ là:

$$-\sqrt{4-x^2}=-\frac{x^2}{3}\Leftrightarrow\begin{bmatrix} x=-\sqrt{3} \\ x=\sqrt{3} \end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix} x=-1 \\ x=1 \end{bmatrix}.$$

Thể tích cần xác định là:

$$V=\pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left|\left(4-x^2\right)-\frac{x^4}{9}\right|dx=\pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left|-\frac{x^4}{9}-x^2+4\right|dx.$$

$$=\pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(-\frac{x^4}{9}-x^2+4\right)dx=\pi\left(-\frac{x^5}{45}-\frac{x^3}{3}+4x\right)\Bigg|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}=\frac{28\pi\sqrt{3}}{5}\ (\text{đvtt}).$$

Chú thích:

$$-\frac{x^4}{9}-x^2+4\geq 0\,\forall x\in\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]\Rightarrow\left|-\frac{x^4}{9}-x^2+4\right|=\left(-\frac{x^4}{9}-x^2+4\right).$$

Bài tập bạn đọc tự giải

1. Tính thể tích vật tròn xoay sinh bởi diện tích S quay xung quanh trục Ox; với $S:\begin{cases}y=\dfrac{1}{x^2+1}\\ y=\dfrac{x^2}{2}\end{cases}$.

Đáp số: $V=\dfrac{\pi^2}{4}+\dfrac{3\pi}{10}$ (đvtt).

2. Dạng 2: Khi quay quanh trục Oy.

Phương pháp:

Bước 1: Phân đường cong kín (C) thành hai cung $(C_1):x=f_1(y)$ và $(C_2):x=f_2(y)$ với $a\leq y\leq b$ và $f_1(y);f_2(y)$ cùng dấu.

Bước 2: Thể tích cần xác định là: $V=\pi\int_a^b\left|f_1^2(y)-f_2^2(y)\right|dy$.

Ví dụ 1 Tính thể tích vật tròn xoay sinh bởi diện tích S quay xung quanh trục Oy; với $S:\begin{cases}y^2=4-x\\ x=0\end{cases}$.

➢ Lời giải: Phương trình tung độ giao điểm của đồ thị $y^2=4-x$ với trục tung là: $y^2=4-0\Leftrightarrow\begin{cases}y=-2\\ y=2\end{cases}$.

Thể tích cần xác định là: $V=\pi\int_{-2}^{2}\left(4-y^2\right)^2dy$

$$= 2\pi\left(16y - \frac{8y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{512\pi}{15} \text{ (đvtt).}$$

Ví dụ 2 Tính thể tích vật tròn xoay sinh bởi diện tích S quay xung quanh trục Oy; với $S: \begin{cases} x = -y^2 + 5 \\ x = 3 - y \end{cases}$.

➢ Lời giải: Phương trình tung độ giao điểm của đồ thị $x = -y^2 + 5$ với đồ thị hàm số $x = 3 - y$ là: $-y^2 + 5 = 3 - y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y = -1 \\ y = 2 \end{bmatrix}$.

Thể tích cần xác định là: $V = \pi\int_{-1}^{2}\left|\left(-y^2+5\right)^2 - \left(3-y\right)^2\right|dy$

$$= \pi\left|\int_{-1}^{2}\left(y^4 - 11y^2 + 6y + 16\right)dy\right| = \pi\left|\left(\frac{y^5}{5} - \frac{11y^3}{3} + 3y^2 + 16y\right)\Bigg|_{-1}^{2}\right|$$

$$= \frac{153\pi}{5} \text{ (đvtt).}$$

Chú thích: chúng ta vẫn có thể dùng phương pháp $\int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$ để tính tích phân, mà không nhất thiết phải xét dấu biểu thức trong dấu trị tuyệt đối là $f(x)$ để mở trị tuyệt đối.

Chương III

SAI LẦM KHI TÍNH TÍCH PHÂN

Bài 1. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-x^2}dx$.

➢ Lời giải sai: Đặt $x=\sin t\Rightarrow dx=\cos tdt$.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos tdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 tdt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2t}{2}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}.$$

Lý do sai: Đổi biến số nhưng không đổi cận.

➢ Lời giải đúng: $x=\sin t\Rightarrow dx=\cos tdt$. Khi $\begin{cases}x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=\arcsin\frac{\pi}{4}\\ x=0\Rightarrow t=0\end{cases}$.

$$I=\int_0^{\arcsin\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos tdx=\int_0^{\arcsin\frac{\pi}{4}}\cos^2 tdt=\int_0^{\arcsin\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2t}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{\pi}{4}\right).$$

Bài 2. Tính tích phân $I=\int_0^1\frac{dx}{(2x+1)^5}$.

➢ Lời giải sai: Đặt $t=2x+1$. Khi $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=3\\ x=0\Rightarrow t=1\end{cases}$.

$$I=\int_1^3\frac{dt}{t^5}=-\frac{t^4}{4}\Big|_1^3=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3^4}-1\right)=\frac{20}{81}.$$

Lý do sai: Đổi biến không tính vi phân.

➢ Lời giải đúng: Đặt $t=2x+1\Rightarrow dt=2dx$. $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=3\\ x=0\Rightarrow t=1\end{cases}$.

$$I=\int_1^3\frac{dt}{2t^5}=-\frac{t^{-4}}{8}\Big|_1^3=-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3^4}-1\right)=\frac{10}{81}.$$

Bài 3. Tính tích phân $I=\int_0^2 xe^x dx$.

➢ Lời giải sai: Đặt $\begin{cases}u=x\\v'=e^x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u'=1\\v=e^x\end{cases}$.

$I=\left(xe^x\right)\Big|_0^2-\int_0^2 e^x dx=e^2-1$.

Lý do sai: Hiểu sai bản chất công thức từng phần.

➢ Lời giải đúng: Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=e^x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=e^x\end{cases}$.

$I=\left(xe^x\right)\Big|_0^2-\int_0^2 e^x dx=e^2-1$.

Bài 4. Cho $n\in N$; chứng minh $I=\int_0^{2\pi}\sin\left(\sin x+nx\right)dx=0$.

➢ Lời giải sai: Xét hàm số $f(x)=\sin x\left(\sin x+nx\right)$ trên $[0;2\pi]$.

Ta có $f(x)$ là hàm liên tục trên $[0;2\pi]$ và $f(-x)=\sin\left(\sin(-x)-nx\right)=-f(x)$

Vậy $f(x)$ là hàm lẻ, suy ra $I=0$.

Lý do sai: Học sinh hiểu sai về định lý "Nếu hàm số $f(x)$ là hàm lẻ, liên tục trên $[-a;a]$ thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$".

➢ Lời giải đúng: Đặt $x=\pi+y\Rightarrow dx=dy$.

$I=\int_0^{2\pi}\sin\left(\sin x+nx\right)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin\left(\sin y+ny+n\pi\right)dy$

$=(-1)^n\int_{-\pi}^{\pi}\sin\left(ny-\sin y\right)dy$.

Mặt khác ta có: $g(y)=\sin\left(ny-\sin y\right)$ xác định trên $[-\pi;\pi]$ là hàm liên tục và $g(-y)=\sin\left(-ny-\sin(-y)\right)=-\sin\left(ny-\sin y\right)=-g(y)$.

Suy ra $g(y)$ là hàm lẻ.

Vậy $I=0$.



Bài 5. Cho hàm số f liên tục trên $[0;\pi]$; hãy so sánh $I=\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx$ và $J=\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$.

➢ Lời giải sai: Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=f(\sin x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=-f(\cos x)\end{cases}$.

$I=-xf(\cos x)\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi} f(\cos x)dx$.

Do f liên tục trên $[0;\pi]$, suy ra $f(\cos\pi)=f(0)=0\Rightarrow I=\int_0^{\pi} f(\cos x)dx$ (1).

Mà $J=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $I\neq J$.

Lý do sai: Học sinh không hiểu về hàm liên tục, tích phân và vi phân.

➢ Lời giải đúng: Đặt $x=\pi-t\Rightarrow dx=-dt$.

$I=-\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin(\pi-t))dt=\pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx-\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx$

$\Rightarrow 2I=\pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$.

Vậy ta có $I=J$.

Bài 6. Cho hàm số f liên tục trên $[a;b]$; chứng minh tồn tại ít nhất một điểm $C\in[a;b]$ sao cho $\int_a^c[f(x)-f(c)]dx=\int_c^b[f(c)-f(x)]dx$.

➢ Lời giải sai: Do f liên tục trên $[a;b]$, suy ra $f(x)-f(c)$ trên $[a,c]$ bằng $f(x)-f(c)$ trên $[b,c]$, vậy ta có

$\int_a^c[f(x)-f(c)]dx=\int_b^c[f(x)-f(c)]dx=\int_c^b[f(c)-f(x)]dx$.

Lý do sai: Không hiểu về hàm liên tục nên tính tích phân sai.

➢ Lời giải đúng: Áp dụng định lý về giá trị trung bình của tích phân, suy ra tồn tại ít nhất một điểm $C\in[a;b]$ sao cho $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)=\int_a^b f(c)dx$

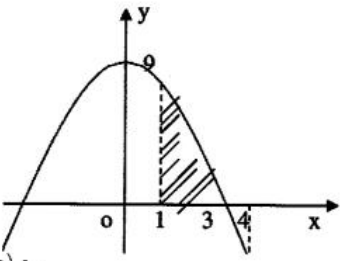
Suy ra $\int_a^b[f(x)-f(c)]dx=\int_a^c[f(x)-f(c)]dx+\int_c^b[f(x)-f(c)]dx=0$.

Hay ta có $\int_a^c[f(x)-f(c)]dx=\int_c^b[f(c)-f(x)]dx$ (đpcm).

Bài7. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases}y=0;x=1;x=4\\y=9-x^2\end{cases}$.

➢ Lời giải sai: Diện tích hình phẳng là:

$S=\int_1^4(9-x^2)dx=\left(9x-\frac{1}{3}x^2\right)\Big|_1^4=7$



Lý do sai: Áp dụng sai công thức, không ghi "đvdt – đơn vị diện tích".

➢ Lời giải đúng: Diện tích hình phẳng là:

$S=\int_1^3|9-x^2|dx=\int_1^3(9-x^2)dx+\int_3^4(x^2-9)dx$

$=\left(9x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_1^3+\left(\frac{1}{3}x^3-9x\right)\Big|_3^4=\frac{28}{3}-\frac{10}{3}=\frac{38}{3}$ (đvdt).

Bài 8. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases}y=0;y=1\\y^2=x-1;x=0\end{cases}$

Lời giải sai: $y^2=x-1\Rightarrow y=\pm\sqrt{x-1}$

$y=0\Rightarrow x=1;\ y=1\Rightarrow x=2$.

Diện tích hình phẳng là: $S=\int_1^2\sqrt{x-1}dx=\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2=\frac{2}{3}$ (đvdt).

Lý do sai: Xác định sai hình cần tính diện tích.

➢ Lời giải đúng: Diện tích hình giới hạn là: $S=S_1+S_2$

Ta có $S_1 = 1^2 = 1$ (đvdt).

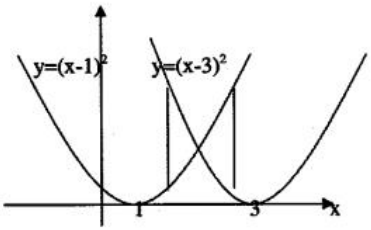
$$S_2 = \int_1^2 \left(1 - \sqrt{x-1}\right) dx = \left[x - \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_1^2 = \frac{1}{3}$$

$$S = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \text{ (đvdt).}$$

Bài 9. Tính diện tích hình giới hạn bởi $\begin{cases} y = x^2 + 2x + 1 \,(C_1) \\ y = x^2 + 6x + 9 \,(C_2) \\ x = \frac{3}{2}; x = \frac{5}{2} \end{cases}$.

➢ Lời giải sai: $C_1 \cap C_2 = (2;1)$.

Vậy diện tích của hình giới hạn là:



$$S = \int_{\frac{3}{2}}^{2} (x-1)^2 dx + \int_2^{\frac{5}{2}} (x-3)^2 dx$$

$$= \frac{1}{3}(x-1)^3\Big|_{\frac{3}{2}}^{2} + \frac{1}{3}(x-3)^3\Big|_2^{\frac{5}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{24}\right) + \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{12} \text{ (đvdt).}$$

Lý do sai: Xác định sai hình cần tính giới hạn.

➢ Lời giải đúng: $C_1 \cap C_2 = (2;1)$.

Diện tích hình giới hạn là:

$S = S_1 + S_2$.

$$S_1 = \int_{\frac{3}{2}}^{2} \left[(x-3)^2 - (x-1)^2\right] dx = \int_{\frac{3}{2}}^{2} (-4x+8) dx = \left(-2x^2 + 8x\right)\Big|_{\frac{3}{2}}^{2} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \int_2^{\frac{5}{2}} \left[(x-1)^2 - (x-3)^2\right] dx = \int_2^{\frac{5}{2}} (4x-8) dx = \left(2x^2 - 8x\right)\Big|_2^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ (đvdt).}$$

Bài 10. Tính thể tích hình xuyến gây bởi hình tròn $x^2+(y-b)^2\le a^2$; $(0<a<b)$ quay quanh trục Ox.

➢ Lời giải sai: Phương trình đường tròn $(C): x^2+(y-b)^2=a^2$ hay

$(y-b)^2=a^2-x^2$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y=b+\sqrt{a^2-x^2}\ (C_1) \\ y=b-\sqrt{a^2-x^2}\ (C_2) \end{bmatrix}$ $(|x|\le a)$.

Vậy thể tích của hình xuyến là:

$V=\pi\int\limits_{-a}^{a}\left|\left(b+\sqrt{a^2-x^2}\right)^2-\left(b-\sqrt{a^2-x^2}\right)^2\right|dx=2\pi a^2b$ (đvtt).

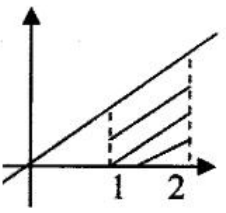
Lý do sai: Sai công thức tính thể tích: $V\ne\pi\int\limits_a^b\left(y_1^2-y_2^2\right)dx$ mà là $V=\pi\int\limits_a^b\left|y_a^2-y_2^2\right|dx$.

➢ Lời giải đúng: $V=\pi\int\limits_{-a}^{a}\left|\left(b+\sqrt{a^2-x^2}\right)^2-\left(b-\sqrt{a^2-x^2}\right)^2\right|dx=2\pi a^2b$.

Bài 11. Tính thể tích hình giới hạn bởi $\begin{cases} y=x^2 \\ x=1 \\ x=2 \end{cases}$.

➢ Lời giải sai: $V=\pi\int\limits_1^2 x^4dx=\pi\dfrac{x^5}{5}\Big|_1^2=\dfrac{31\pi}{5}$ (đvtt).

Lý do sai: Đã sử dụng công thức $V=\pi\int\limits_a^b y^2dx$.



➢ Lời giải đúng: $V=2\pi\int\limits_1^2 x.x^2dx=\dfrac{15\pi}{2}$ (đvtt).

MỤC LỤC

CHƯƠNG MỞ ĐẦU 5

❖ *Mối liên hệ giữa nguyên hàm và tích phân* 5

❖ *Ý nghĩa* 5

A. LÝ THUYẾT

CHƯƠNG I: NGUYÊN HÀM 11

I. Khái niệm nguyên hàm 11

II. Tính chất nguyên hàm 11

CHƯƠNG II: TÍCH PHÂN 12

I. Khái niệm về tích phân 12

II. Tính chất của tích phân 12

III. Các phương pháp tính nguyên hàm - tích phân thường gặp 13

CHƯƠNG III: BẢNG NGUYÊN HÀM CÁC HÀM SỐ CƠ BẢN 14

CHƯƠNG IV: CÁCH TẠO DẠNG TÍCH PHÂN 16

B. PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN

CHƯƠNG I: PHƯƠNG PHÁP VI PHÂN 25

I. Định nghĩa - Phương pháp 25

CHƯƠNG II: PHƯƠNG PHÁP BẢNG NGUYÊN HÀM 35

I. Phương pháp 35

CHƯƠNG III: PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ 37

I. Phương pháp 37

II. Đổi biến số hàm vô tỷ 37

III. Đổi biến hàm đa thức bậc cao 42

IV. Đổi biến hàm lượng giác 44
V. Hàm dưới dấu tích phân chứa các biểu thức bậc nhất của sinx; cosx 50
VI. Đổi biến dựa vào cận 51

CHƯƠNG IV: PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN 60
I. Kỹ thuật chọn hệ số C 60
II. Kỹ thuật tính nhanh 64
III. Phân dạng - phương pháp 66

C. NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN CÁC LOẠI HÀM SỐ

CHƯƠNG I: NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN CÁC HÀM ĐA THỨC 95
I. Hàm số tìm nguyên hàm 95
II. Phương pháp 96
III. Bài tập vận dụng 110

CHƯƠNG II: TÍCH PHÂN HÀM HỮU TỶ 118
I. Hàm số tìm nguyên hàm 118
II. Phương pháp 119
III. Kỹ thuật nhẩm hệ số trong đồng nhất thức 137
IV. Nguyên tắc giải 142
V. Bài tập áp dụng 167

CHƯƠNG III: TÍCH PHÂN HÀM VÔ TỶ 171
I. Hàm số tìm nguyên hàm 171
II. Phương pháp 173
III. Bài tập ứng dụng 210

CHƯƠNG IV: TÍCH PHÂN HÀM LƯỢNG GIÁC 224
I. Hàm số tìm nguyên hàm 224
II. Phương pháp 228
III. Các công thức lượng giác thường sử dụng 310

IV. Các dạng nguyên hàm lượng giác thường gặp 312

CHƯƠNG V: TÍCH PHÂN HÀM MŨ - LOGARIT 347

I. Nguyên hàm các hàm 347
II. Phương pháp 348
III. Bài tập vận dụng 377

CHƯƠNG VI: TÍCH PHÂN HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI 389

I. Phương pháp 389

CHƯƠNG VII: TÍCH PHÂN LIÊN KẾT 396

CHƯƠNG VIII: TÍCH PHÂN TRONG ĐỀ THI ĐẠI HỌC TỪ NĂM 2002 ĐẾN 2015 401

CHƯƠNG IX: TÍCH PHÂN TRONG CÁC ĐỀ THI THỬ ĐẠI HỌC 425

CHƯƠNG X: NHỮNG BÀI TOÁN TÍCH PHÂN KHÓ 447

D. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

CHƯƠNG I: ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH DIỆN TÍCH 451

I. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong 451
II. Diện tích hình tròn 462
III. Diện tích hình Elip 463

CHƯƠNG II: ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH THỂ TÍCH 464

I. Thể tích V sinh bởi diện tích S (tạo bởi một đường cong với trục) 464
II. Thể tích V sinh bởi diện tích S (tạo bởi từ hai đường cong) 467

CHƯƠNG III: SAI LẦM KHI TÍNH TÍCH PHÂN 471

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối, Hai Bà Trưng, Hà Nội.
Điện thoại: Biên tập (04) 39714896
Quản lý xuất bản: (04) 39728806; Tổng biên tập: (04) 39715011
Fax: (04) 39729436

Chịu trách nhiệm xuất bản
Giám đốc - Tổng biên tập:
TS. PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập:	**Đặng Văn Anh, Lê Thị Thanh Hoa**
Sửa bản in:	**Tác giả**
Chế bản:	**Vân Hương**
Vẽ bìa:	**Lưu Phúc**

LIÊN KẾT XUẤT BẢN
CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH VÀ GIÁO DỤC TRỰC TUYẾN MEGABOOK
Số 14, ngõ 93 Vũ Hữu, Phường Thanh Xuân Bắc, Quận Thanh Xuân, Hà Nội

NGHỆ THUẬT TIẾP CẬN CHINH PHỤC NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN

Mã số: 1L-21PT2016
In 3000 cuốn, khổ 17x24cm, tại Công ty In và Thương Mại Hải Nam
Địa chỉ: Số 18, ngách 68/53/9, phường Quan Hoa, Cầu Giấy, Hà Nội
Số xuất bản: 28-2016/CXBIPH/37-01/ĐHQGHN ngày 5/01/2016
Quyết định xuất bản số: 68 LK-/QĐ-NXB ĐHQGHN, ngày 24/02/2016
In xong và nộp lưu chiểu năm 2016
Mã ISBN: 978-604-62-4423-3