

MỤC LỤC

1. Lời giới thiệu	1
2. Tên sáng kiến: giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số giá trị tuyệt đối	1
3. Tác giả sáng kiến	1
4. Chủ đầu tư	1
5. Lĩnh vực áp dụng sáng kiến	1
6. Ngày sáng kiến được áp dụng lần đầu hoặc áp dụng thử	1
7. Mô tả bản chất sáng kiến	1
Nội dung sáng kiến	1
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT	3
B. DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP	3
Dạng 1. GTLN-GTNN thỏa mãn điều kiện cụ thể	3
Ví dụ minh họa	3
Bài tập tự luyện	3
Dạng 2. Tìm điều kiện của tham số.....	9
Ví dụ minh họa	9
Bài tập tự luyện	11
Dạng 3. Bài toán max đạt min	14
Ví dụ minh họa	15
Bài tập tự luyện	16
Dạng 4. Bài toán min đạt min.....	16
Ví dụ minh họa	17
C. CÁC BÀI TẬP VD-VDC TRONG CÁC ĐỀ THI.....	18
8. Những thông tin cần được bảo mật	30
9. Các điều kiện cần thiết để áp dụng sáng kiến	30
10. Đánh giá lợi ích thu được hoặc dự kiến có thể thu được do áp dụng sáng kiến	30

BÁO CÁO KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU, ỨNG DỤNG SÁNG KIẾN

① Lời giới thiệu:

Sau khi học xong các kiến thức về đạo hàm, đầu chương trình toán lớp 12 học sinh được học lại đầy đủ hơn và hệ thống hơn về hàm số. Bằng việc sử dụng các kiến thức về đạo hàm, học sinh nghiên cứu lần lượt về sự đồng biến của hàm số, cực trị, giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất, tiệm cận và cuối cùng là khảo sát hàm số. Đây là những nội dung mới đối với học sinh lớp 12 và xuất hiện trong các đề thi trong những năm gần đây ngày càng nhiều với đầy đủ bốn mức độ. Đặc biệt là các câu ở mức độ VD-VDC trong các đề thi, nó không theo một khuôn mẫu nào cả nhất là các bài toán về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số trị tuyệt đối. Để chinh phục được các câu ở dạng này, đòi hỏi học sinh phải có một kiến thức cơ bản thật vững và có một con mắt toán học thật tinh tế.

Với mong muốn giúp các em giải được các bài toán về giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số giá trị tuyệt đối, tôi đã sưu tầm các bài toán về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số giá trị tuyệt đối trong các đề thi THPTQG qua mấy năm gần đây, đề thi TNTHPT và có chia dạng chúng nhằm giúp các em tiếp cận các bài toán này đồng thời cũng giúp các em có cái nhìn tổng quát, đầy đủ hơn về dạng toán giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số giá trị tuyệt đối.

Vì vậy tôi đã chọn đề tài: Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số giá trị tuyệt đối.

Mặc dù vậy, vì điều kiện thời gian còn hạn chế nên sự phân dạng có thể chưa được triệt để và chỉ mang tính chất tương đối, rất mong được các bạn bè đồng nghiệp góp ý kiến chỉnh sửa để tài liệu này được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn.

② Tên sáng kiến: Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số giá trị tuyệt đối.

③ Tác giả sáng kiến

Họ và tên: Nguyễn Thành Tiến

Địa chỉ: Trường THPT Yên Lạc 2, Yên Lạc, Vĩnh Phúc.

Số điện thoại: 0985.11.22.66 Email: tiennt.thpt@gmail.com.

④ Chủ đầu tư tạo ra sáng kiến: Nguyễn Thành Tiến.

⑤ Lĩnh vực áp dụng sáng kiến: Toán học.

⑥ Ngày sáng kiến được áp dụng lần đầu hoặc áp dụng thử: Tháng 09/2020.

⑦ Mô tả bản chất của sáng kiến:

- Về nội dung của sáng kiến:

Trong nghiên cứu khoa học, việc tìm ra quy luật, phương pháp chung để giải quyết một vấn đề là rất quan trọng vì nó giúp chúng ta có định hướng tìm lời giải của một lớp bài toán tương tự nhau. Trong dạy học giáo viên có nhiệm vụ thiết kế và điều khiển sao cho học sinh thực hiện và luyện tập các hoạt động tương thích với những nội dung dạy học trong điều kiện được gợi động cơ, có hướng đích, có kiến thức về phương pháp tiến hành và có trải nghiệm thành công. Do vậy việc trang bị về phương pháp cho học sinh là một nhiệm vụ quan trọng của giáo viên.

Sáng kiến trình bày các dạng toán giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

giá trị tuyệt đối hay gặp trong các đề thi của BGD, các đề thi thử của SGD và của các trường cùng với phương pháp giải của các dạng bài toán đó. Sau mỗi dạng toán, đều có bài tập cho học sinh thực hành.

Về khả năng áp dụng của sáng kiến: Dành cho học sinh có lực học từ trung bình khá trở lên.

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT HÀM SỐ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI.

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Bài toán

Cho hàm số $y = |f(x)|$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số trên $[a; b]$.

Phương pháp chung:

— Tìm $\max_{[a;b]} f(x) = M$ và $\min_{[a;b]} f(x) = m$.

— Xét các trường hợp

✓ Nếu $M \cdot m \leq 0$ thì $\begin{cases} \min_{[a;b]} |f(x)| = 0 \\ \max_{[a;b]} |f(x)| = \max\{|M|; |m|\} \end{cases}$

✓ Nếu $m > 0$ thì $\begin{cases} \min_{[a;b]} |f(x)| = m \\ \max_{[a;b]} |f(x)| = M \end{cases}$

✓ Nếu $M < 0$ thì $\begin{cases} \min_{[a;b]} |f(x)| = |M| = -M \\ \max_{[a;b]} |f(x)| = |m| = -m \end{cases}$

B. DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

📁 DẠNG 1. GTLN-GTNN thỏa mãn điều kiện cụ thể

Tìm tham số để $\begin{cases} \min_{[a;b]} |f(x)| \leq k, (\geq k) \\ \max_{[a;b]} |f(x)| \leq k, (\geq k). \end{cases}$

VÍ DỤ MINH HỌA

📁 **Ví dụ 1.** Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^4 + 4x^3 - m|$ trên đoạn $[-4; -2]$ bằng 2020?
A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

💡 Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^4 + 4x^3 - m$, trên đoạn $[-4; -2]$. Ta có $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 = 4x^2(x+3)$.
Khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin (-4; -2) \\ x = -3 \in (-4; -2). \end{cases}$

Ta có $f(-4) = -m$, $f(-3) = -m - 27$, $f(-2) = -m - 16$.

Do đó $\max_{[-4;-2]} f(x) = f(-4) = -m$ và $\min_{[-4;-2]} f(x) = f(-3) = -m - 27$.

— Nếu $-m(-m - 27) \leq 0 \Leftrightarrow -27 \leq m \leq 0$, thì

$$\max_{[-4;-2]} y = \max\{|-m - 27|; |-m|\} = \max\{m + 27; -m\}.$$

$$\text{Theo yêu cầu của bài toán ta có } \begin{cases} m + 27 = 2020 \\ -m = 2020 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1993 & (\text{loại}) \\ m = -2020 & (\text{loại}) \end{cases}$$

— Nếu $-m - 27 < 0 \Leftrightarrow m > -27$, thì $\max_{[-4;-2]} y = |-m| = |m|$.

$$\text{Theo yêu cầu của bài toán, ta có } |m| = 2020 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2020 & (\text{loại}) \\ m = 2020 & (\text{thỏa mãn}). \end{cases}$$

— Nếu $-m > 0 \Leftrightarrow m < 0$ thì $\max_{[-4;-2]} y = \max\{|-m - 27|; |-m|\} = |m + 27|$.

Theo yêu cầu của bài toán, ta có

$$|m + 27| = 2020 \Leftrightarrow \begin{cases} m + 27 = 2020 \\ m + 27 = -2020 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1993 & (\text{loại}) \\ m = -2047 & (\text{thỏa mãn}) \end{cases}$$

Vậy có hai giá trị m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án **B**

□

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(\sin x + 1) + m|$ bằng 4. Tổng các phần tử của S bằng

- A. 4. B. 2. C. 0. D. 6.

🔍 Lời giải

Đặt $t = \sin x + 1 \Rightarrow t \in [0; 2]$. Khi đó, ta có

$$y = |f(\sin x + 1) + m| = |f(t) + m| = |t^3 - 3t + m|.$$

Xét hàm số $g(t) = t^3 - 3t + m$ hàm số liên tục trên $[0; 2]$ và có $g'(t) = 3t^2 - 3$.

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \in [0, 2] \\ t = -2 \notin [0, 2] \end{cases}.$$

Ta có $g(0) = m$, $g(1) = m - 2$, $g(2) = m + 2$.

Suy ra $\max_{[0;2]} g(t) = m + 2$ và $\min_{[0;2]} g(t) = m - 2$.

— Nếu $(m - 2)(m + 2) \leq 0 \Leftrightarrow m \in [-2; 2]$. Từ giả thiết, ta có

$$\begin{cases} \begin{cases} |m - 2| = 4 \\ |m - 2| \geq |m + 2| \end{cases} \Rightarrow m = -2. \text{ (thỏa mãn)} \\ \begin{cases} |m + 2| = 4 \\ |m + 2| \geq |m - 2| \end{cases} \Rightarrow m = 2. \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

— Nếu $m + 2 < 0 \Leftrightarrow m < -2$.

Ta có $\max_{[0;2]} |g(t)| = |m - 2| = 4 \Leftrightarrow m = -2$. (loại)

— Nếu $m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$.

Ta có $\max_{[0;2]} |g(t)| = m + 2 = 4 \Leftrightarrow m = 2$. (loại)

Vậy $S \in \{-2; 2\}$. Suy ra, tổng các phần tử của S bằng $-2 + 2 = 0$. □

📌 Ví dụ 3. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{x^2 - mx + 2m}{x - 2} \right|$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 3. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

A. $-\frac{8}{3}$. B. 5. C. $\frac{5}{3}$. D. -1.

🔗 Lời giải

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2 - mx + 2m}{x - 2}$ trên $[-1; 1]$ có $f'(x) = 1 - \frac{4}{(x - 2)^2}$.

Suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in (-1; 1) \\ x = 4 \notin (-1; 1). \end{cases}$

Ta có $f(-1) = -m - \frac{1}{3}$, $f(0) = -m$, $f(1) = -m - 1$.

Suy ra $\max_{[-1;1]} f(x) = -m$ và $\min_{[-1;1]} f(x) = -m - 1$.

— Nếu $-m(-m - 1) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0$ thì

$$\max_{[-1;1]} y = \max \{ |-m - 1|; |-m| \} = \max \{ m + 1; -m \}$$

Có hai khả năng là $\begin{cases} -m = 3 \\ m + 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = 2 \end{cases}$, không thỏa mãn điều kiện.

— Nếu $f(0) = -m < 0 \Leftrightarrow m > 0$. Khi đó $\max_{[-1;1]} y = |-m - 1| = m + 1$.

Theo yêu cầu bài toán, ta có $m + 1 = 3 \Leftrightarrow m = 2$. (thỏa mãn)

— Nếu $f(1) = -m - 1 > 0 \Leftrightarrow m < -1$, thì $\max_{[-1;1]} y = -m$.

Theo yêu cầu bài toán ta có $-m = 3 \Leftrightarrow m = -3$. (thỏa mãn)

Vậy tập các giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $S = \{-3; 2\}$.

Suy ra tổng tất cả các phần tử của tập S là $-3 + 2 = -1$.

Chọn đáp án **D** □

📌 Ví dụ 4. Cho hàm số $y = |x^3 - x^2 - x + m|$, với $m \in \mathbb{Z}$. Có tất cả bao nhiêu số nguyên m để $\min_{[1;3]} y < 3$?

A. 21.

B. 22.

C. 4.

D. 20.

🔗 Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^3 - x^2 - x + m$, trên đoạn $[1; 3]$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \notin (1; 3) \\ x = -\frac{1}{3} \notin (1; 3). \end{cases}$

Ta có $f(1) = m - 1$ và $f(3) = m + 15$.

— Nếu $(m - 1)(m + 15) \leq 0 \Leftrightarrow -15 \leq m \leq 1$, thì $\min_{[1;3]} y = 0 < 3$. Trường hợp này có 17 số nguyên m thỏa mãn.

— Nếu $m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$, thì $\min_{[1;3]} y = m - 1$.

Theo yêu cầu bài toán ta có $m - 1 < 3 \Leftrightarrow m < 4$, kết hợp điều kiện ta được $1 < m < 4$. Trường hợp này có 2 số nguyên m thỏa mãn.

— Nếu $m + 15 < 0 \Leftrightarrow m < -15$, thì $\min_{[1;3]} y = |m + 15| = -m - 15$.

Theo yêu cầu bài toán ta có $-m - 15 < 3 \Leftrightarrow m > -18$, kết hợp điều kiện ta được $-18 < m < -15$. Trường hợp này có 2 số nguyên m thỏa mãn.

Vậy có tất cả $17 + 2 + 2 = 21$ số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **A**

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^4 - 2x^2 - m|$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 2. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -2.

B. 7.

C. 14.

D. 3.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 - m$ trên đoạn $[-1; 2]$ có $f'(x) = 4x^3 - 4x$.

Khi $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \notin (-1; 2) \\ x = 0 \in (-1; 2) \\ x = -1 \notin (-1; 2). \end{cases}$

Khi đó $f(0) = -m$; $f(-1) = f(1) = -m - 1$; $f(2) = -m + 8$. Suy ra $\max_{[-1;2]} f(x) = -m + 8$

và $\min_{[-1;2]} f(x) = -m - 1$.

— Nếu $(-1 - m)(8 - m) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 8$ thì $\min_{[-1;2]} |f(x)| = 0$, không thỏa mãn điều kiện đề bài.

— Nếu $-m - 1 > 0 \Leftrightarrow m < -1$ thì $\min_{[-1;2]} |f(x)| = |-m - 1| = -m - 1$.

Khi đó, theo đề ta có $-m - 1 = 2 \Leftrightarrow m = -3$. (thỏa mãn)

— Nếu $-m + 8 < 0 \Leftrightarrow m > 8$ thì $\min_{[-1;2]} |f(x)| = |-m + 8| = m - 8$.

Khi đó, theo đề ta có $m - 8 = 2 \Leftrightarrow m = 10$. (thỏa mãn)

Vậy tập các giá trị thỏa mãn là $S = \{-3; 10\}$. Suy ra tổng tất cả các phần tử của S là $-3 + 10 = 7$.

Chọn đáp án **B**

□

BÀI 2. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{x^2 + mx + 3m}{x + 3} \right|$ trên đoạn $[-2; 2]$ bằng 5. Gọi T là tổng tất cả các phần tử của S .
Tính T .

- A. $T = 4$. B. $T = -5$. C. $T = 1$. D. $T = -4$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2 + mx + 3m}{x + 3}$ trên đoạn $[-2; 2]$.

$$f'(x) = \frac{x^2 + 6x}{(x + 3)^2}, \text{ và } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in (-2; 2) \\ x = -6 \notin (-2; 2). \end{cases}$$

Ta có $f(-2) = m + 4$, $f(0) = m$, $f(2) = m + \frac{4}{5}$. Suy ra $\max_{[-2; 2]} f(x) = m + 4$ và $\min_{[-2; 2]} f(x) = m$.

— Nếu $m(m + 4) \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 0$, thì $\max_{[-2; 2]} y = \max\{m + 4; -m\}$.

$$\text{theo yêu cầu đề bài ta có } \begin{cases} m + 4 = 5 \\ -m = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 & (\text{loại}) \\ m = -5. & (\text{loại}) \end{cases}$$

— Nếu $m > 0$, thì $\max_{[-2; 2]} y = m + 4$.

Theo yêu cầu đề bài ta có $m + 4 = 5 \Leftrightarrow m = 1$. (thỏa mãn)

— Nếu $m + 4 < 0 \Leftrightarrow m < -4$, thì $\max_{[-2; 2]} y = -m$.

Theo yêu cầu đề bài ta có $-m = 5 \Leftrightarrow m = -5$. (thỏa mãn)

Vậy tập hợp các giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $S = \{-5; 1\}$.

Do đó, tổng tất cả các phần tử của tập S là $T = -5 + 1 = -4$.

Chọn đáp án **D**

□

BÀI 3. Cho S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |-x^4 + 2x^2 + m| + 1$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 6. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

- A. 7. B. 17. C. -3. D. -7.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = -x^4 + 2x^2 + m$ trên $[0; 2]$.

$$\text{Ta có } g'(x) = -4x^3 + 4x \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [0; 2] \\ x = 1 \in [0; 2] \\ x = -1 \notin [0; 2]. \end{cases}$$

$$\text{Ta có } f(0) = |m| + 1; f(1) = |m + 1| + 1; f(2) = |m - 8| + 1 \Rightarrow \begin{cases} \max_{[0; 2]} f(x) = |m + 1| + 1 \\ \max_{[0; 2]} f(x) = |m - 8| + 1. \end{cases}$$

$$\text{Nếu } \max_{[0; 2]} f(x) = |m + 1| + 1 \Rightarrow \begin{cases} |m + 1| + 1 = 6 \\ |m + 1| \geq |m - 8| \end{cases} \Leftrightarrow m = 4.$$

$$\text{Nếu } \max_{[0; 2]} f(x) = |m - 8| + 1 \Rightarrow \begin{cases} |m - 8| + 1 = 6 \\ |m - 8| \geq |m + 1| \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

Vậy tổng các giá trị của m bằng 7.

Chọn đáp án **A**

□

BÀI 4. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = |x^2 - 3x + 2 + m|$ thỏa mãn $\min_{[-2; 2]} y = 5$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. $-\frac{47}{4}$.

B. -10 .

C. $\frac{-31}{4}$.

D. $\frac{9}{4}$.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 3x + 2 + m$ trên đoạn $[-2; 2]$, có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

$$\max_{[-2;2]} g(x) = \max \left\{ g(-2), g\left(\frac{3}{2}\right), g(2) \right\} = m + 12.$$

$$\min_{[-2;2]} g(x) = \min \left\{ g(-2), g\left(\frac{3}{2}\right), g(2) \right\} = m - \frac{1}{4}.$$

Nếu $m - \frac{1}{4} \geq 0$ hay $m \geq \frac{1}{4}$ thì $\min_{[-2;2]} y = m - \frac{1}{4} = 5 \Leftrightarrow m = \frac{21}{4}$ (thỏa mãn).

Nếu $m + 12 \leq 0$ hay $m \leq -12$ thì $\min_{[-2;2]} y = -m - 12 = 5 \Leftrightarrow m = -17$ (thỏa mãn).

Nếu $-12 < m < \frac{1}{4}$ thì $\min_{[-2;2]} y = 0$ (không thỏa mãn).

Ta có $S = \left\{ -17; \frac{21}{4} \right\}$. Vậy tổng các phần tử của S bằng $-\frac{47}{4}$.

Chọn đáp án **A**

□

BÀI 5. Có tất cả bao nhiêu số thực m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-3; 2]$ bằng 10.

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Đặt $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$, $x \in [-3; 2]$.

$$\text{Ta có } f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-3; 2] \\ x = -1 \in [-3; 2] \\ x = 2 \in [-3; 2]. \end{cases}$$

$$\text{Mà } f(-3) = 243 + m, f(-1) = -5 + m, f(0) = m, f(2) = -32 + m.$$

$$\text{Suy ra } \min_{[-3;2]} f(x) = -32 + m, \max_{[-3;2]} f(x) = 243 + m.$$

Nếu $(243 + m)(-32 + m) \leq 0$ suy ra $\min_{[-3;2]} y = \min_{[-3;2]} |f(x)| = 0$, không thỏa mãn.

Yêu cầu bài toán $\min_{[-3;2]} y = 10$ suy ra điều kiện cần là $(243 + m)(-32 + m) > 0$.

Trường hợp 1: $m > 32 \Rightarrow \min_{[-3;2]} y = |-32 + m| = 10 \Leftrightarrow m - 32 = 10 \Leftrightarrow m = 42$.

Trường hợp 2: $m < -243 \Rightarrow 10 = \min_{[-3;2]} y = |243 + m| = -m - 243 \Leftrightarrow m = -253$.

Vậy có 2 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án **C**

□

BÀI 6. Cho hàm số $f(x) = \left| \frac{x^2 - mx + 2m}{x - 2} \right|$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để $\max_{[-1;1]} f(x) \leq 5$. Tổng tất cả các phần tử của S là

A. -11 .

B. 9.

C. -5 .

D. -1 .

Lời giải.

$$\text{Xét hàm số } g(x) = \frac{x^2 - mx + 2m}{x - 2} \Rightarrow g'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x - 2)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4. \end{cases}$$

$$\text{Khi } x = 0 \Rightarrow g(0) = -m.$$

$$\text{Ta có } g(-1) = \frac{1}{3}(-3m - 1) = -m - \frac{1}{3}; g(1) = \frac{1 + m}{-1} = -1 - m.$$

$$\text{Mà } -1 - m < -\frac{1}{3} - m < -m.$$

Suy ra $\max_{[-1;1]} f(x) = \max \left\{ |m|; |m+1|; \left| m + \frac{1}{3} \right| \right\} = \max\{|m|; |m+1|\}.$

Trường hợp 1: $\begin{cases} |m+1| \geq |m| \\ |m+1| \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{1}{2} \\ -6 \leq m \leq 4 \end{cases} \Rightarrow m \in \{0; 1; 2; 3; 4\}.$

Trường hợp 2: $\begin{cases} |m+1| < |m| \\ |m| \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{1}{2} \\ -5 \leq m \leq 5 \end{cases} \Rightarrow m \in \{-5; -4; -3; -2; -1\}.$

Suy ra tổng các phần tử của S bằng -5 .

Chọn đáp án **C**

□

📁 DẠNG 2. Tìm điều kiện của tham số

Tìm tham số để $\alpha \cdot \min_{[a;b]} |f(x)| \pm \beta \cdot \max_{[a;b]} |f(x)| \leq k, (\geq k).$

VÍ DỤ MINH HỌA

📌 Ví dụ 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + m$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho $\min_{[0;2]} |y| + \max_{[0;2]} |y| = 6$. Số phần tử của S là

A. 0.

B. 6.

C. 1.

D. 2.

💡 Lời giải

Xét hàm số $y = x^3 - 3x + m, x \in [0; 2].$

$$y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \text{ (loại)} \end{cases}.$$

Ta có $y(0) = m; y(1) = m - 2; y(2) = m + 2$.

Suy ra $\min_{[0;2]} y = m - 2; \max_{[0;2]} y = m + 2$.

Trường hợp 1: $(m+2)(m-2) \leq 0 \Rightarrow -2 \leq m \leq 2$.

Suy ra $\min_{[0;2]} |y| = 0, \max_{[0;2]} |y| = \{|m-2|; |m+2|\}.$

$$\text{Do đó } \min_{[0;2]} |y| + \max_{[0;2]} |y| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 + 2 - m = 6 \\ m + 2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm 4 \text{ (không thỏa mãn)}.$$

Trường hợp 2: $m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$.

Suy ra $\min_{[0;2]} |y| = |m-2| = m-2, \max_{[0;2]} |y| = |2+m| = m+2$.

Do đó $\min_{[0;2]} |y| + \max_{[0;2]} |y| = 6 \Leftrightarrow m-2 + m+2 = 6 \Leftrightarrow m = 3 \text{ (thỏa mãn)}.$

Trường hợp 3: $2+m < 0 \Leftrightarrow m < -2$.

Suy ra $\min_{[0;2]} |y| = |2+m| = -2-m; \max_{[0;2]} |y| = |-2+m| = -(-2+m) = 2-m$.

Do đó $\min_{[0;2]} |y| + \max_{[0;2]} |y| = 6 \Leftrightarrow -2-m + 2-m = 6 \Leftrightarrow m = -3 \text{ (thỏa mãn)}.$

Vậy có 2 số nguyên thỏa mãn.

Chọn đáp án **D**

□

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + m$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-20; 20]$ sao cho $\max_{[0;2]} |f(x)| < 3 \min_{[0;2]} |f(x)|$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 63. B. 51. C. 195. D. 23.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + m$ trên đoạn $[0; 2]$.

Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 4x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1. \end{cases}$

$f(1) = m - 1$; $f(2) = m + 8$; $f(0) = m$.

$\max_{[0;2]} f(x) = m + 8$; $\min_{[0;2]} f(x) = m - 1$.

TH1: Nếu $m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 1$ thì $\max_{[0;2]} |f(x)| = m + 8$, $\min_{[0;2]} |f(x)| = m - 1$.

Khi đó: $\max_{[0;2]} |f(x)| < 3 \min_{[0;2]} |f(x)| \Leftrightarrow m + 8 < 3(m - 1) \Leftrightarrow m > \frac{11}{2}$.

Kết hợp với $m \geq 1$, ta được $m > \frac{11}{2}$.

TH2: Nếu $m + 8 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -8$ thì $\max_{[0;2]} |f(x)| = 1 - m$, $\min_{[0;2]} |f(x)| = -m - 8$.

Khi đó: $\max_{[0;2]} |f(x)| < 3 \min_{[0;2]} |f(x)| \Leftrightarrow 1 - m < 3(-m - 8) \Leftrightarrow m < -\frac{25}{2}$.

Kết hợp với $m \leq -8$, ta được $m < -\frac{25}{2}$.

TH3: Nếu $(m - 1)(m + 8) < 0 \Leftrightarrow -8 < m < 1$ thì $\max_{[0;2]} |f(x)| = \max\{|m + 8|, |m - 1|\} > 0$;
 $\min_{[0;2]} |f(x)| = 0$.

Khi đó, không thỏa mãn điều kiện $\max_{[0;2]} |f(x)| < 3 \min_{[0;2]} |f(x)|$.

Do đó: $\begin{cases} m < -\frac{25}{2} \\ m > \frac{11}{2} \end{cases}$ kết hợp với $m \in [-20; 20]$, ta có $m \in \left[-20; -\frac{25}{2}\right) \cup \left(\frac{11}{2}; 20\right]$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow S = \{-20; -19; -18; \dots; -13; 6; 7; \dots, 20\}$.

Tổng các phần tử của S bằng $6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 63$.

Chọn đáp án **A** □

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x + m}{x - 1}$. Tính tổng các giá trị của tham số m để $\left| \max_{[2;3]} f(x) - \min_{[2;3]} f(x) \right| = 2$.

A. -4. B. -2. C. -1. D. -3.

Lời giải

Hàm số $y = f(x) = \frac{2x + m}{x - 1}$ xác định và liên tục trên đoạn $[2; 3]$.

Với $m = -2$, hàm số trở thành $y = 2 \Rightarrow \max_{[2;3]} f(x) = \min_{[2;3]} f(x) = 2$ (không thỏa).

Với $m \neq -2$, ta có $y' = \frac{-2 - m}{(x - 1)^2}$. Khi đó hàm số luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên

đoạn $[2; 3]$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \max_{[2;3]} f(x) = f(2); & \min_{[2;3]} f(x) = f(3) \\ \max_{[2;3]} f(x) = f(3); & \min_{[2;3]} f(x) = f(2). \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } \left| \max_{[2;3]} f(x) - \min_{[2;3]} f(x) \right| = |f(3) - f(2)| = \left| \frac{6+m}{2} - (4+m) \right| = \left| \frac{2+m}{2} \right|.$$

$$\text{Theo giả thiết } \left| \max_{[2;3]} f(x) - \min_{[2;3]} f(x) \right| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{2+m}{2} \right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -6. \end{cases}$$

Vậy tổng các giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán là -4 .

Chọn đáp án **A**

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + m$, (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên $m \in [-10; 10]$ sao cho $\max_{[1;2]} |f(x)| + \min_{[1;2]} |f(x)| \geq 10$. Số phần tử của S là

A. 9.

B. 10.

C. 11.

D. 12.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + m$, hàm số liên tục trên đoạn $[1; 2]$.

Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 4x > 0, \forall x \in (1; 2) \Rightarrow$ hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[1; 2]$, do đó ta có $\max_{[1;2]} f(x) = m + 8; \min_{[1;2]} f(x) = m - 1$.

TH 1 : $m - 1 \geq 0 \Rightarrow 1 \leq m \leq 10$ thì $\max_{[1;2]} |f(x)| = m + 8; \min_{[1;2]} |f(x)| = m - 1$.

$$\text{Khi đó: } \max_{[1;2]} |f(x)| + \min_{[1;2]} |f(x)| \geq 10 \Leftrightarrow m + 8 + m - 1 \geq 10 \Rightarrow m \geq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow m \in \{2; 3; 4; \dots 10\}.$$

Suy ra trường hợp này có 9 số nguyên.

TH 2 : $m + 8 \leq 0 \Rightarrow -10 \leq m \leq -8$ thì $\max_{[1;2]} |f(x)| = -m + 1; \min_{[1;2]} |f(x)| = -m - 8$.

$$\text{Khi đó: } \max_{[1;2]} |f(x)| + \min_{[1;2]} |f(x)| \geq 10 \Leftrightarrow -m + 1 - m - 8 \geq 10$$

$$\Rightarrow -10 \leq m \leq \frac{-17}{2} \Rightarrow m \in \{-10; -9\}$$

Suy ra trường hợp này có 2 giá trị nguyên.

TH 3 : $-8 < m < 1$ thì $\min_{[1;2]} |f(x)| = 0; \max_{[1;2]} |f(x)| = \begin{cases} -m + 1 \text{ khi } -8 < m \leq \frac{-7}{2} \\ m + 8 \text{ khi } \frac{-7}{2} < m < 1 \end{cases}$

$$\text{Do } m \text{ là số nguyên nên } \max_{[1;2]} |f(x)| + \min_{[1;2]} |f(x)| \geq 10 \Leftrightarrow \begin{cases} -m + 1 \text{ khi } -8 < m \leq \frac{-7}{2} \\ m + 8 \text{ khi } \frac{-7}{2} < m < 1. \end{cases}$$

Suy ra không tồn tại m thỏa mãn.

Vậy số phần tử của tập S là 11.

Chọn đáp án **C**

□

BÀI 2. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + m$ với m là tham số. Biết $\max_{[1;2]} |f(x)| = p$, $\min_{[1;2]} |f(x)| = q$ và S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên $m \in [-10; 10]$ sao cho bộ ba số $p, q, 19$ là độ dài ba cạnh của một tam giác. Số phần tử của tập S bằng

A. 5.

B. 10.

C. 4.

D. 21.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + m$, hàm số liên tục trên đoạn $[1; 2]$. Ta có

$$f'(x) = 4x^3 - 4x > 0, \forall x \in (1; 2),$$

suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[1; 2]$. Do đó

$$\max_{[1;2]} f(x) = m + 8, \quad \min_{[1;2]} f(x) = m - 1. \text{ Suy ra } q < p < 19, \forall m \in [-10; 10].$$

$$\text{Từ đó suy ra yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} p + q > 19 \\ p, q > 0. \end{cases}$$

TH1. $m - 1 > 0 \Rightarrow 1 < m \leq 10$ thì $p = m + 8, q = m - 1$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow p + q > 19 \Leftrightarrow m + 8 + m - 1 > 19 \Leftrightarrow m > 6 \Rightarrow m \in \{7; 8; 9; 10\}$.

Trường hợp này có 4 số nguyên.

TH2. $m + 8 < 0 \Rightarrow -10 \leq m < -8$ thì $p = -m + 1, q = -m - 8$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow p + q > 19 \Leftrightarrow -m + 1 - m - 8 > 19 \Rightarrow m < -13$.

Suy ra trường hợp này không tồn tại $m \in [-10; 10]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TH3. $-8 < m < 1$ thì $q = 0$. Suy ra không thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy số phần tử của tập S là 4.

Chọn đáp án **C**

□

BÀI 3. Cho hàm số $f(x) = x^3 - x^2 + x - m - 2$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max_{[0;3]} |f(x)| + \min_{[0;3]} |f(x)| = 16$. Tổng các phần tử của S là

A. 3.

B. 17.

C. 34.

D. 31.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - x^2 + x - m - 2$ trên đoạn $[0; 3]$. Ta có

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(0) = -m - 2, f(3) = -m + 9.$$

TH1. $(m + 2)(m - 19) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 19$. Khi đó suy ra

$$\begin{cases} \min_{[0;3]} |f(x)| = 0 \\ \max_{[0;3]} |f(x)| = \max \{|m + 2|, |m - 19|\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max_{[0;3]} |f(x)| = m + 2, \text{ khi } \frac{17}{2} \leq m \leq 19 \\ \max_{[0;3]} |f(x)| = 19 - m, \text{ khi } -2 \leq m < \frac{17}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \max_{[0;3]} |f(x)| + \min_{[0;3]} |f(x)| = 16 \Rightarrow \begin{cases} m + 2 = 16, \text{ khi } \frac{17}{2} \leq m \leq 19 \\ 19 - m = 16, \text{ khi } 0 \leq m < \frac{17}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 14 \\ m = 3. \end{cases}$$

TH2. $(m + 2)(m - 19) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 19 \\ m < -2 \end{cases}$. Khi đó

$$\min_{[0;3]} |f(x)| + \max_{[0;3]} |f(x)| = |m + 2| + |m - 19| = |2m - 17| = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} & (\text{không thỏa mãn}) \\ m = \frac{33}{2} & (\text{không thỏa mãn}). \end{cases}$$

Vậy $S = \{3; 14\}$.

Chọn đáp án **B** □

BÀI 4. Cho hàm số $y = |x^4 - 2x^3 + x^2 + m|$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m để $\min_{[-1;2]} y + \max_{[-1;2]} y = 20$ là

A. -10.

B. -4.

C. 20.

D. -21.

Lời giải.

Xét $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + m$ trên đoạn $[-1; 2]$. Ta có

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = \frac{1}{2}.$$

Ta có

$$f(0) = m, \quad f(1) = m, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = m + \frac{1}{16}, \quad f(-1) = f(2) = m + 4.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \max_{[-1;2]} f(x) = f(2) = m + 4 \\ \min_{[-1;2]} f(x) = f(0) = f(1) = m. \end{cases}$$

$$\text{TH1. Nếu } m \geq 0 \text{ thì } \begin{cases} m \geq 0 \\ m + m + 4 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow m = 8.$$

$$\text{TH2. Nếu } m \leq -4 \text{ thì } \begin{cases} m \leq -4 \\ -(m + 4) - m = 20 \end{cases} \Leftrightarrow m = -12.$$

$$\text{TH3. Nếu } -4 < m < 0 \text{ thì } \min_{[-1;2]} y = 0, \max_{[-1;2]} y = \max\{|m + 4|, |m|\} = \max\{m + 4, -m\}.$$

Suy ra

$$\min_{[-1;2]} y + \max_{[-1;2]} y < 4 < 0 + 20 = 20 \quad \text{không thỏa mãn.}$$

Vậy tổng các giá trị của m bằng -4.

Chọn đáp án **B** □

BÀI 5. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x - m}{x + 2}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max_{[0;2]} |f(x)| + 2 \min_{[0;2]} |f(x)| \geq 4$. Hỏi trong đoạn $[-30; 30]$, tập S có bao nhiêu số nguyên?

A. 53.

B. 52.

C. 55.

D. 54.

Lời giải.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{4 + m}{(x + 2)^2}.$$

$$\text{— Nếu } m = -4 \text{ thì } f(x) = 2 \text{ thỏa mãn } \max_{[0;2]} |f(x)| + 2 \min_{[0;2]} |f(x)| \geq 4.$$

$$\text{— Xét } m \neq -4. \text{ Ta có } f(0) = -\frac{m}{2}, \quad f(2) = \frac{4 - m}{4}.$$

$$\text{TH1. } -\frac{m}{2} \cdot \frac{4 - m}{4} \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4. \text{ Khi đó } \min_{[0;2]} |f(x)| = 0 \text{ và } \max_{[0;2]} |f(x)| = \frac{4 - m}{4}$$

$$\text{hoặc } \max_{[0;2]} |f(x)| = \frac{m}{2}. \text{ Theo giả thiết ta phải có}$$

$$\begin{cases} \frac{4 - m}{4} \geq 4 \\ \frac{m}{2} \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -12 \\ m \geq 8 \end{cases} \quad (\text{loại}).$$

TH2. – Xét $-4 < m < 0$. Hàm số $f(x)$ đồng biến, hơn nữa $f(0) = -\frac{m}{2} > 0$,
 $f(2) = \frac{4-m}{4} > 0$ nên

$$\max_{[0;2]} |f(x)| + 2 \min_{[0;2]} |f(x)| \geq 4 \Leftrightarrow \frac{4-m}{4} + 2 \left(-\frac{m}{2}\right) \geq 4 \Leftrightarrow m \leq -\frac{12}{5}.$$

Vậy $-4 < m \leq -\frac{12}{5} \Rightarrow m = -3$.

– Xét $m < -4$. Hàm số $f(x)$ nghịch biến, hơn nữa $f(0) = -\frac{m}{2} > 0$, $f(2) = \frac{4-m}{4} > 0$ nên

$$\max_{[0;2]} |f(x)| + 2 \min_{[0;2]} |f(x)| \geq 4 \Leftrightarrow -\frac{m}{2} + 2 \cdot \frac{4-m}{4} \geq 4 \Leftrightarrow m \leq -2.$$

Vậy $m < -4$.

– Xét $m > 4$. Hàm số $f(x)$ đồng biến, hơn nữa $f(0) = -\frac{m}{2} < f(2) = \frac{4-m}{4} < 0$ nên

$$\max_{[0;2]} |f(x)| + 2 \min_{[0;2]} |f(x)| \geq 4 \Leftrightarrow \frac{m}{2} + 2 \cdot \frac{4-m}{4} \geq 4 \Leftrightarrow m \geq 6.$$

Vậy $m \geq 6$.

Tóm lại $m \in \left(-\infty; -\frac{12}{5}\right) \cup [6; +\infty)$. Suy ra trong đoạn $[-30; 30]$, tập S có 53 số nguyên.

Chọn đáp án **A**

□

DẠNG 3. Bài toán max đạt min

Tìm tham số để GTLN của hàm số $y = |f(x) + g(m)|$ trên đoạn $[a; b]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

 **Ghi nhớ:**

$$\text{— } \max\{\alpha; \beta\} \geq \frac{\alpha + \beta}{2}, \text{ dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

$$\text{— } |\alpha| + |\beta| \geq |\alpha + \beta|, \text{ dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta \geq 0.$$

Cụ thể:

$$\text{— Bước 1: Tìm } \alpha = \max_{[a;b]} f(x); \beta = \min_{[a;b]} f(x).$$

– Bước 2: Gọi M là giá trị lớn nhất của $y = |f(x) + g(m)|$ thì

$$M = \max\{|\alpha + g(m)|; |\beta + g(m)|\} \geq \frac{|\alpha + g(m)| + |\beta + g(m)|}{2} = \frac{|\alpha + g(m)| + |-\beta - g(m)|}{2}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow |\alpha + g(m)| = |-\beta - g(m)|.$$

Áp dụng bất đẳng thức

$$\frac{|\alpha + g(m)| + |-\beta - g(m)|}{2} \geq \frac{|\alpha + g(m) - \beta - g(m)|}{2} = \frac{|\alpha - \beta|}{2},$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow [\alpha + g(m)] \cdot [-\beta - g(m)] \geq 0$.

– Kết luận $\min M = \frac{|\alpha - \beta|}{2}$ khi $g(m) = \frac{-\alpha - \beta}{2}$.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 + 2x + m - 4|$ trên đoạn $[-2; 1]$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của tham số m bằng

A. 1.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

🔍 **Lời giải**

Đặt $f(x) = x^2 + 2x$.

Ta có $f'(x) = 2x + 2$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 1)$.

$f(-2) = 0$; $f(1) = 3$; $f(-1) = -1$.

Do đó $\max_{[-2;1]} f(x) = 3$; $\min_{[-2;1]} f(x) = -1$.

Suy ra $\max_{[-2;1]} y = \max\{|m - 5|; |m - 1|\} \geq \frac{|m - 5| + |m - 1|}{2} \geq \frac{|5 - m + m - 1|}{2} = 2$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} |m - 5| = |m - 1| \\ (5 - m)(m - 1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow m = 3$ (thỏa mãn).

Chọn đáp án **(B)**

□

Ví dụ 2. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |\sqrt{2x - x^2} - 3m + 4|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m = \frac{3}{2}$.

B. $m = \frac{5}{3}$.

C. $m = \frac{4}{3}$.

D. $m = \frac{1}{2}$.

🔍 **Lời giải**

Tập xác định $\mathcal{D} = [0; 2]$.

Đặt $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$, $x \in \mathcal{D}$, ta có $f'(x) = \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$f(0) = 0$; $f(2) = 0$; $f(1) = 1$.

Suy ra

$P = \max_{\mathcal{D}} y = \max\{|3m - 4|; |3m - 5|\} \geq \frac{|3m - 4| + |3m - 5|}{2} \geq \frac{|5 - 3m + 3m - 4|}{2} = \frac{1}{2}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} |3m - 4| = |3m - 5| \\ (5 - 3m)(3m - 4) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow m = \frac{5}{2}$ (thỏa mãn).

Chọn đáp án **(A)**

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + 2m - 1|$ trên đoạn $[0; 2]$ là nhỏ nhất. Giá trị của m thuộc khoảng

- A. $[-1; 0]$. B. $(0; 1)$. C. $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$. D. $\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = x^3 - 3x - 1 + 2m$ trên đoạn $[0; 2]$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin (0; 2) \\ x = 1 \in (0; 2) \end{cases}$.

$f(0) = -1 + 2m$; $f(1) = -3 + 2m$; $f(2) = 1 + 2m$ nên ta có $\max_{[0;2]} y = \max\{|2m - 3|; |2m + 1|\}$.

Ta có $\max_{[0;2]} y \geq \frac{|2m + 1| + |2m - 3|}{2} \geq \frac{|2m + 1 + 3 - 2m|}{2} = 2$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow m = 2$.

Chọn đáp án **(B)** □

BÀI 2. Để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^3 - 12x + m + 1|$ trên đoạn $[1; 3]$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của m bằng

- A. $\frac{23}{2}$. B. $\frac{7}{2}$. C. $-\frac{23}{2}$. D. $-\frac{7}{2}$.

Lời giải.

Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $[1; 3]$.

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 12x + m + 1$ trên đoạn $[1; 3]$. Ta có

$g'(x) = 3x^2 - 12$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \in (1; 3) \\ x = -2 \notin (1; 3) \end{cases}$.

Ta có $f(1) = |m - 10|$; $f(2) = |m - 15|$; $f(3) = |m - 8|$

$\Rightarrow \max_{[1;3]} f(x) = M = \max\{|m - 8|; |m - 15|\}$

$\Rightarrow \begin{cases} M \geq |m - 8| \\ M \geq |m - 15| \end{cases}$

$\Rightarrow 2M \geq |m - 8| + |m - 15| = |m - 8| + |15 - m| \geq |m - 8 + 15 - m| \geq 7$

$\Rightarrow M \geq \frac{7}{2}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} |m - 8| = |m - 15| \\ (m - 8)(15 - m) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{23}{2}$.

Vậy $m = \frac{23}{2}$.

Chọn đáp án **(A)** □

DẠNG 4. Bài toán min đạt min

Phương pháp

— Tìm $\max_{[a;b]} f(x) = M$ và $\min_{[a;b]} f(x) = m$.

— Xét các trường hợp

✓ Nếu $M \cdot m \leq 0$ thì $\min_{[a;b]} |f(x)| = 0$.

✓ Nếu $m > 0$ thì $\min_{[a;b]} |f(x)| = m$.

✓ Nếu $M < 0$ thì $\min_{[a;b]} |f(x)| = |M| = -M$.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^3 - mx^2 - 9x + 9m|$ trên đoạn $[-2; 2]$ đạt giá trị nhỏ nhất.
A. 3. B. 5. C. 4. D. 6.

Lời giải

Đặt $f(x) = x^3 - mx^2 - 9x + 9m$.

Ta có $\min_{[-2;2]} |f(x)| \geq 0$. Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow f(x) = 0$ có nghiệm thuộc $[-2; 2]$.

Mặt khác, ta có $f(x) = x^2(x - m) - 9(x - m) = (x - m)(x^2 - 9)$.

Suy ra $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = 3 \notin [-2; 2] \\ x = -3 \notin [-2; 2] \end{cases}$.

Do đó, điều kiện cần và đủ để $f(x) = 0$ có nghiệm $x \in [-2; 2]$ là $m \in [-2; 2]$.

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **B**

□

Ví dụ 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = |-x^4 + 8x^2 + m|$ trên đoạn $[-1; 3]$ đạt giá trị nhỏ nhất.
A. 23. B. 24. C. 25. D. 26.

Lời giải

Ta có $y = f(x) = |-x^4 + 8x^2 + m| = |x^4 - 8x^2 - m| = |(x^2 - 4)^2 - 16 - m|$.

Đặt $t = (x^2 - 4)^2$, vì $x \in [-1; 3]$, suy ra $t \in [0; 25]$.

Khi đó $y = g(t) = |t - 16 - m|$.

Ta có $\min_{[-1;3]} f(x) = \min_{[0;25]} g(t) = \min\{|m - 9|, |m + 16|\}$.

— Nếu $m - 9 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 9$.

Khi đó, ta có $\min_{[-1;3]} f(x) = m - 9 \geq 0$, suy ra $\min_{[-1;3]} f(x) = 0 \Leftrightarrow m = 9$.

— Nếu $m + 16 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -16$.

Khi đó, ta có $\min_{[-1;3]} f(x) = -m - 16 \geq 0$, suy ra $\min_{[-1;3]} f(x) = 0 \Leftrightarrow m = -16$.

— Nếu $(m - 9)(m + 16) < 0 \Leftrightarrow -16 < m < 9$.

Khi đó $\min_{[-1;3]} f(x) = 0$, suy ra $\min_{[-1;3]} f(x) = 0$.

Vậy $\min_{[-1;3]} f(x) = 0 \Leftrightarrow -16 \leq m \leq 9$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$, nên có 26 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **D**

□

BÀI TẬP VẬN DỤNG - VẬN DỤNG CAO TRONG CÁC ĐỀ THI

BÀI 1 (KSCL lần 1, THPT Trần Hưng Đạo, Nam Định, 2020-2021). Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + m$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị của m sao cho $\max_{[0;2]} |f(x)| + \min_{[0;2]} |f(x)| = 7$. Tổng các phần tử của S là

A. -7.

B. -14.

C. 7.

D. 14.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 4x$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin [0; 2] \\ x = 0 \in [0; 2] \\ x = 1 \in [0; 2] \end{cases}$. Ta có $\begin{cases} f(0) = m \\ f(1) = m - 1 \\ f(2) = m + 8 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên của $f(x)$

x	0	1	2	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	m	$m-1$	$m+8$	

Trường hợp 1: $m - 1 \geq 0$.

Ta có $\max_{[0;2]} |f(x)| + \min_{[0;2]} |f(x)| = 7 \Rightarrow (m - 1) + (m + 8) = 7 \Leftrightarrow m = 0$ (loại).

Trường hợp 2: $m + 8 \leq 0$.

Ta có $\max_{[0;2]} |f(x)| + \min_{[0;2]} |f(x)| = 7 \Rightarrow -(m - 1) - (m + 8) = 7 \Leftrightarrow m = -7$ (loại).

Trường hợp 3: $-8 < m < 1$.

Ta có $\max_{[0;2]} |f(x)| + \min_{[0;2]} |f(x)| = 7 \Rightarrow \begin{cases} m + 8 = 7 \\ -(m - 1) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -6 \end{cases}$.

Vậy tổng các phần tử của S bằng -7.

Chọn đáp án **A** □

BÀI 2 (Thi thử L2, Chuyên Đại học Vinh, Nghệ An). Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 2]$.

Có bao nhiêu số nguyên a thuộc đoạn $[-3; 3]$ sao cho $M \leq 2m$?

A. 5.

B. 7.

C. 3.

D. 6.

Lời giải.

Đặt $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a$.

$$g'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Khi đó:

$$\max_{[0;2]} g(x) = \max \{g(0), g(1), g(2)\} = \max \{a, a + 1, a\} = a + 1.$$

$$\min_{[0;2]} g(x) = \min \{g(0), g(1), g(2)\} = \min \{a, a + 1, a\} = a.$$

Nếu $a \geq 0 \Rightarrow m = a, M = a + 1 \Rightarrow 2a \geq a + 1 \Leftrightarrow a \geq 1 \Rightarrow a \in \{1; 2; 3\}$.

Nếu $a \leq -1 \Rightarrow m = -(a + 1), M = -a \Rightarrow -2(a + 1) \geq -a \Leftrightarrow a \leq -2 \Rightarrow a \in \{-3; -2\}$.

Vậy có 5 số nguyên a thỏa mãn.

Chọn đáp án **A** □

BÀI 3 (Đề thi thử tốt nghiệp 2020 Sở GD&ĐT Kiên Giang).

Cho hàm số $f(x) = |x^3 - 3x^2 + m^2 - m - 1|$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 3]$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng các phần tử của S là

- A. $-\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. 1. D. -1.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x^2 + m^2 - m - 1$.

Ta có $g'(x) = 3x^2 - 6x$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$

Ta tính được $g(0) = g(3) = m^2 - m - 1$, $g(2) = m^2 - m - 5$.

Khi đó $\max_{[0;3]} f(x) = \max\{|m^2 - m - 1|; |m^2 - m - 5|\}$.

Đặt $M = \max_{[0;3]} f(x)$,

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \begin{cases} M \geq |m^2 - m - 1| \\ M \geq |m^2 - m - 5| \end{cases} \Rightarrow M \geq |-m^2 + m + 5| \\ \Rightarrow & 2M \geq |m^2 - m - 1| + |-m^2 + m + 5| \geq |m^2 - m - 1 - m^2 + m + 5| = 4 \\ \Rightarrow & M \geq 2. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$-m^2 + m + 5 = m^2 - m - 1 \Leftrightarrow 2m^2 - 2m - 6 = 0.$$

Vậy M đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi m là nghiệm của phương trình $2m^2 - 2m - 6 = 0$.

Gọi m_1, m_2 là nghiệm của phương trình $2m^2 - 2m - 6 = 0$ thì $m_1 + m_2 = 1$.

Chọn đáp án **C**

□

BÀI 4. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20 \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng bao nhiêu?

- A. 210. B. -195. C. 105. D. 300.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x - 20$ trên đoạn $[0; 2]$.

Ta có $g'(x) = x^3 - 19x + 30$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \text{ (loại)} \\ x = 3 \text{ (loại)} \\ x = 2 \text{ (nhận)}. \end{cases}$

Mà $g(0) = -20$, $g(2) = 6$.

Suy ra $y(0) = |-20 + m|$, $y(2) = |6 + m|$.

Mặt khác $\max_{[0;2]} y = \max\{|-20 + m|, |6 + m|\} = \frac{|2m - 14| + 26}{2} \leq 20 \Leftrightarrow |2m - 14| \leq 14 \Leftrightarrow$

$0 \leq m \leq 14$. (do $\max\{|a|, |b|\} = \frac{|a + b| + |a - b|}{2}$)

Suy ra $m \in \{0; 1; 2; 3; \dots; 14\} \Rightarrow S = \{0; 1; 2; 3; \dots; 14\}$.

Do đó, tổng các phần tử của S bằng 105.

Chọn đáp án **C**

□

BÀI 5 (Đề KSCL Chuyên Hưng Yên L2, 2019 - 2020). Cho hàm số $y = \left| \frac{x^4 + ax + a}{x + 1} \right|$,

với a là tham số thực. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[1; 2]$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để $M \geq 2m$?

A. 20.

B. 10.

C. 14.

D. 5.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^4 + ax + a}{x + 1}$ trên $[1; 2]$.

Trên $[1; 2]$, ta có $f'(x) = \frac{3x^4 + 4x^3}{(x + 1)^3} > 0$, với mọi $x \in [1; 2]$.

Ta có $f(1) = a + \frac{1}{2}$, $f(2) = a + \frac{16}{3}$.

Do đó $m = \min \left\{ \left| a + \frac{1}{2} \right|, \left| a + \frac{16}{3} \right| \right\}$, $M = \max \left\{ \left| a + \frac{1}{2} \right|, \left| a + \frac{16}{3} \right| \right\}$.

Ta luôn có $M > m$ do nếu không thì hàm số đã cho là hàm hằng.

Xét các trường hợp sau đây

TH 1. $\left| a + \frac{1}{2} \right| > \left| a + \frac{16}{3} \right|$. Khi đó, yêu cầu bài toán tương đương với

$$\begin{aligned} \begin{cases} \left| a + \frac{1}{2} \right| > \left| a + \frac{16}{3} \right| \\ \left| a + \frac{1}{2} \right| \geq 2 \left| a + \frac{16}{3} \right| \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq \frac{-16}{3} \\ \left| a + \frac{1}{2} \right| \geq 2 \left| a + \frac{16}{3} \right| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq \frac{-16}{3} \\ \left(a + \frac{1}{2} \right)^2 \geq 4 \left(a + \frac{16}{3} \right)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq \frac{-16}{3} \\ 3a^2 + \frac{125a}{3} + \frac{4087}{36} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-61}{6} \leq a < \frac{-16}{3} \\ \frac{-16}{3} < a \leq \frac{-67}{18} \end{cases}. \end{aligned}$$

TH 2. $\left| a + \frac{16}{3} \right| > \left| a + \frac{1}{2} \right|$. Khi đó, yêu cầu bài toán tương đương với

$$\begin{aligned} \begin{cases} \left| a + \frac{16}{3} \right| > \left| a + \frac{1}{2} \right| \\ \left| a + \frac{16}{3} \right| \geq 2 \left| a + \frac{1}{2} \right| \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -\frac{1}{2} \\ \left| a + \frac{16}{3} \right| \geq 2 \left| a + \frac{1}{2} \right| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -\frac{1}{2} \\ \left(a + \frac{16}{3} \right)^2 \geq 4 \left(a + \frac{1}{2} \right)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -\frac{1}{2} \\ 3a^2 - \frac{20a}{3} - \frac{247}{9} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-19}{9} \leq a < \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} < a \leq \frac{13}{3} \end{cases}. \end{aligned}$$

Từ kết quả thu được từ trường hợp 1 và 2, kết hợp với a là số nguyên, ta xác định được 14 giá trị của a thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$$a \in \{-10; -9; -8; -7; -6; -5; -4; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}.$$

Chọn đáp án  □

BÀI 6 (THPT Đội Cấn - Vĩnh Phúc - lần 1 - Năm 2019). Cho hàm số $y = |x^2 + 2x + a - 4|$. Tìm a để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 1]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $a = 1$.B. $a = 3$.C. $a = 2$.

D. Một giá trị khác.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = x^2 + 2x + a - 4$ trên đoạn $[-2; 1]$, ta có $g'(x) = 2x + 2$ và $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Ta lại có $g(-2) = a - 4$, $g(-1) = a - 5$ và $g(1) = a - 1$ nên giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $g(x)$ là $a - 1$ và $a - 5$.

Từ đó suy ra giá trị lớn nhất của $y = |g(x)|$ là $\max\{|a - 1|; |a - 5|\}$.

Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số đã cho, ta có

$$\begin{cases} M \geq |a - 1| \\ M \geq |a - 5| \end{cases} \Rightarrow 2M \geq |a - 1| + |5 - a| \geq |a - 1 + 5 - a| = 4 \Rightarrow M \geq 2.$$

Để giá trị của M nhỏ nhất thì $M = 2$.

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} |a - 1| = |a - 5| = 2 \\ (a - 1)(5 - a) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 3.$$

Chọn đáp án **B**

□

BÀI 7 (Chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định, 2019, lần 1). Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-5; 5]$ để $\min_{[1;3]} |x^3 - 3x^2 + m| \geq 2$.

A. 5.

B. 4.

C. 6.

D. 3.

Lời giải.

Xét $f(x) = x^3 - 3x^2 + m$ trên $[1; 3]$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [1; 3] \\ x = 2 \in [1; 3] \end{cases}$. Ta có bảng biến thiên

x	1	2	3
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$m - 2$	$m - 4$	m

$$\text{Từ đó ta có } \min_{[1;3]} |x^3 - 3x^2 + m| \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m - 4 > 0 \\ m - 4 \geq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} m < 0 \\ -m \geq 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 6 \\ m \leq -2. \end{cases}$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-5; 5]$ nên ta được $m \in \{-5; -4; -3; -2\}$.

Vậy có 4 giá trị m thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án **B**

□

BÀI 8 (Đề thi thử THPT quốc gia, Trần Phú, Lâm Đồng 2018). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 2.

B. 1.

C. 6.

D. 0.

Lời giải.

Đặt $f(x) = x^3 - 3x + m$, $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

x	0	1	2
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	m	$m - 2$	$m + 2$

— Nếu $m \geq 0$ thì $\max_{[0;2]} y = |m + 2|$. Khi đó $|m + 2| = 3 \Leftrightarrow m = 1$.

— Nếu $m < 0$ thì $\max_{[0;2]} y = |m - 2|$. Khi đó $|m - 2| = 3 \Leftrightarrow m = -1$.

Vậy có 2 giá trị m thỏa đề.

Chọn đáp án **(A)** □

BÀI 9 (TT, THPT Nguyễn Khuyến - TP.HCM, 2019). Gọi S là tập hợp giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Lời giải.

Xét $y = f(x) = x^3 - 3x + m$ có $y' = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$.

Ta có: $\min_{x \in [0;2]} f(x) = \min\{f(0); f(1); f(2)\} = \min\{m; m - 2; m + 2\} = m - 2$.

$\max_{x \in [0;2]} f(x) = \max\{f(0); f(1); f(2)\} = \max\{m; m - 2; m + 2\} = m + 2$.

Do đó: $\max|f(x)| = \max\{|m - 2|; |m + 2|\} = 3$.

Trường hợp 1:

$$\begin{cases} |m - 2| = 3 \\ |m + 2| \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = -1 \end{cases} \Rightarrow m = -1.$$

Trường hợp 2:

$$\begin{cases} |m + 2| = 3 \\ |m - 2| \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -5 \end{cases} \Rightarrow m = 1.$$

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn yêu cầu của đề.

Chọn đáp án **(B)** □

BÀI 10 (Thi thử Lần 1, Thanh Chương 3 Nghệ An, 2018). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 + 2x + m - 4|$ trên đoạn $[-2; 1]$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của m là

A. 4.

B. 1.

C. 5.

D. 3.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^2 + 2x + m - 4$ trên đoạn $[-2; 1]$. Ta có $f'(x) = 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Ta có $f(-2) = m - 4$, $f(1) = m - 1$ và $f(-1) = m - 5$.

Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho là $\max\{|m - 4|, |m - 1|, |m - 5|\}$.

Ta thấy $m - 5 < m - 4 < m - 1$ nên $|m - 4| < \max\{|m - 1|, |m - 5|\}$. Do đó $\max\{|m - 4|, |m - 1|, |m - 5|\} = \max\{|m - 1|, |m - 5|\}$.

Đặt $A = m - 1 = (m - 3) + 2$ và $B = m - 5 = (m - 3) - 2$.

— $m - 3 > 0 \Rightarrow \max\{|A|, |B|\} \geq |A| > 2$.

— $m - 3 < 0 \Rightarrow \max\{|A|, |B|\} > 2$.

— $m - 3 = 0 \Rightarrow \max\{|A|, |B|\} = |A| = |B| = 2$

Vậy để giá trị lớn nhất của hàm số đạt giá trị nhỏ nhất thì $m = 3$.

Chọn đáp án **(D)** □

BÀI 11 (Thi thử kênh giáo dục Quốc Gia - VTV7). Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |\sin^2 x - 2 \sin x - 2|$ lần lượt là a, b thì giá trị $a + b$ là

- A. 1. B. 3. C. 0. D. 4.

Lời giải.

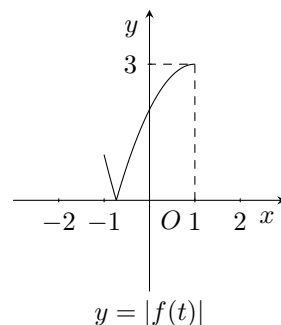
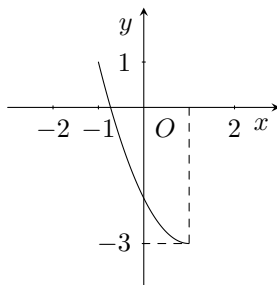
Đặt $t = \sin x$ với $\forall t \in [-1; 1]$.

Xét hàm số $y = t^2 - 2t - 2, \forall t \in [-1; 1]$.

$y' = 2t - 2 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Đồ thị hàm số $f(t)$ và $|f(t)|$ như hình bên.

$$\text{Vậy } \begin{cases} \max_{t \in [-1; 1]} |f(t)| = 3 \\ \min_{t \in [-1; 1]} |f(t)| = 0 \end{cases} \Rightarrow a + b = 3.$$



Chọn đáp án **B**

□

BÀI 12 (Thi thử TN lần 1, năm học 2019 - 2020, THPT Đặng Thúc Hứa, Nghệ An).

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{3}x^3 - 9x + m + 10 \right|$ trên đoạn $[0; 3]$ không vượt quá 12. Tổng giá trị các phần tử của tập hợp S bằng bao nhiêu?

- A. -7. B. 12. C. 3. D. 0.

Lời giải.

Xét $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x + m + 10 \Rightarrow g'(x) = x^2 - 9x \leq 0, \forall x \in [0; 3]$.

Suy ra $\max_{[0; 3]} g(x) = g(0) = m + 10$ và $\min_{[0; 3]} g(x) = g(3) = m - 8$.

Khi đó $\max_{[0; 3]} y = \max \{|m + 10|, |m - 8|\} \leq 12 \Leftrightarrow \begin{cases} |m + 10| \leq 12 \\ |m - 8| \leq 12 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 2$.

Vậy tổng các giá trị nguyên của m là $-4 - 3 - 2 - 1 + 0 + 1 + 2 = -7$.

Chọn đáp án **A**

□

BÀI 13 (GHK2, THPT Yên Định 2 - Thanh Hóa, 2019). Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^2 + 2x + m - 4|$ trên đoạn $[-2; 1]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $m = 2$. B. $m = 4$. C. $m = 3$. D. $m = 1$.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = x^2 + 2x + m - 4$ trên đoạn $[-2; 1]$.

Ta có: $g'(x) = 2x + 2, g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Bảng biến thiên:

x	-2	-1	1
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$m - 4$	$m - 5$	$m - 1$

Từ bảng biến thiên ta luôn có: $m - 5 < m - 4 < m - 1$.

Mặt khác $f(x) = |g(x)|$, suy ra: $\max_{[-2; 1]} f(x) = \max_{[-2; 1]} \{|m - 5|; |m - 1|\}$.

Nếu $|m - 5| \leq |m - 1| \Leftrightarrow 8m \geq 24 \Leftrightarrow m \geq 3$ thì $\max_{[-2; 1]} f(x) = |m - 1| = m - 1 \geq 2$.

Nếu $|m - 5| \geq |m - 1| \Leftrightarrow 8m \leq 24 \Leftrightarrow m \leq 3$ thì $\max_{[-2; 1]} f(x) = |m - 5| = 5 - m \geq 2$.

Từ và suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^2 + 2x + m - 4|$ trên đoạn $[-2; 1]$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $m = 3$.

Chọn đáp án **C**

□

BÀI 14 (Thi thử, Chuyên Chu Văn An Lạng Sơn, 2018). Gọi S là tập hợp các giá trị tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 - 2x + m|$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 5. Tính tổng bình phương các phần tử của S .

A. 20.

B. 40.

C. 2.

D. 6.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 2x + m$.

Hàm $g(x)$ liên tục trên $[-1; 2]$ và $g'(x) = 2x - 2$ và $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Có $g(-1) = 3 + m$, $g(1) = m - 1$, $g(2) = m$. Suy ra $\min_{[-1; 2]} g(x) = m - 1$ và $\max_{[-1; 2]} g(x) = m + 3$.

Suy ra $\max_{[-1; 2]} y \in \{|m - 1|; |m + 3|\}$.

— Trường hợp 1: $|m - 1| \leq |m + 3| \Leftrightarrow m \geq -1$, khi đó $\max_{[-1; 2]} y = |m + 3| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -8. \end{cases}$

Kết hợp điều kiện, ta được $m = 2$.

— Trường hợp 2: $|m - 1| > |m + 3| \Leftrightarrow m < -1$, khi đó $\max_{[-1; 2]} y = |m - 1| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m = -4. \end{cases}$

Kết hợp điều kiện, ta được $m = -4$.

Vậy $S = \{-4; 2\}$ và tổng bình phương các phần tử của S bằng $(-4)^2 + 2^2 = 20$.

Chọn đáp án **A**

□

<MyLT2>

BÀI 15 (GHK1, THPT Hồng Quang, Hải Dương, 2020 - 2021). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 5. Số phần tử của S là

A. 2.

B. 0.

C. 6.

D. 1.

Lời giải.

Đặt $y = f(x) = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $\mathcal{D} = [0; 2]$. Với $x = 0$, $f(0) = |m|$ và $x = 2$ thì $f(2) = |m + 2|$.

Xét $g(x) = x^3 - 3x + m$ có tập xác định là $\mathbb{R}$, liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $g'(x) = 3x^2 - 3$.

Với $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1. \end{cases}$

Vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{m}{x^3}\right) = \pm\infty$ nên $g(x)$ đạt cực đại tại $x = -1$ và cực tiểu tại $x = 1$ với $g(1) = m - 2$.

— Với $g(1) \geq 0$, khi đó $\min_{\mathcal{D}} f(x) = f(1)$ và $m \geq 2$. Suy ra $\max_{\mathcal{D}} f(x) = \max\{f(0), f(2)\}$.

Với $m \geq 2$ thì $f(0) = |m| = m$ và $f(2) = |m + 2| = m + 2 > m$.

Suy ra $\max_{\mathcal{D}} f(x) = f(2)$.

Theo đề bài, $f(2) = 5 = m + 2 \Leftrightarrow m = 3$.

— $g(1) < 0 \Rightarrow m < 2$. Khi đó $\max_{\mathcal{D}} f(x) = \max\{f(0), f(1), f(2)\}$ với $f(1) = |m - 2|$.

Vì $m + 2 > m > m - 2$ nên với $\max\{|m|, |m + 2|, |m - 2|\} = 5$, điều này tương đương

$$\begin{cases} m + 2 = 5 \\ m - 2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -3. \end{cases}$$

Vậy có hai giá trị của m là $m = 3$ và $m = -3$ thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **A**

□

BÀI 16 (GHK1 L2, THPT Đội Cấn, Vĩnh Phúc, 2019). Để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + 2m - 1|$ trên đoạn $[0; 2]$ là nhỏ nhất thì giá trị của m thuộc

- A. $(0; 1)$. B. $[-1; 0]$. C. $(1; 2)$. D. $(-2; -1)$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2m - 1$, với $x \in [0; 2]$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin [0; 2] \\ x = 1 \in [0; 2] \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	0	1	2	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$2m-1$		$2m-3$	$2m+1$

Đặt $M = \max_{[0;2]} y$. Khi đó $M = \max \{|2m + 1|, |2m - 3|\}$. Ta có

$$\begin{cases} M \geq |2m + 1| \\ M \geq |3 - 2m| \end{cases} \Rightarrow 2M \geq |2m + 1| + |3 - 2m| \geq |2m + 1 + 3 - 2m| = 4 \Rightarrow M \geq 2.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} (2m + 1)(3 - 2m) \geq 0 \\ |2m + 1| = 2 \\ |2m - 3| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{2} \\ 2m + 1 = \pm 2 \\ 2m - 3 = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

Vậy $\min M = 2$ khi $m = \frac{1}{2} \in (0; 1)$.

Chọn đáp án **A**

□

BÀI 17 (Thi thử, Sở GD và ĐT - Hà Tĩnh, 2020). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn $|x^3 - 3x^2 + m| \leq 4$ với mọi $x \in [1; 3]$

- A. 6. B. 3. C. 4. D. 5.

Lời giải.

Ta có $|x^3 - 3x^2 + m| \leq 4$ với mọi $x \in [1; 3] \Leftrightarrow \max_{[1;3]} |x^3 - 3x^2 + m| \leq 4$.

Đặt $f(x) = x^3 - 3x^2 + m$. Suy ra $f'(x) = 3x^2 - 6x$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 2. \end{cases}$

Ta có $f(1) = m - 2$, $f(2) = m - 4$, $f(3) = m$.

Suy ra $\max_{[1;3]} f(x) = m$ và $\min_{[1;3]} f(x) = m - 4$.

Khi đó ta có $\max_{[1;3]} |x^3 - 3x^2 + m| = \frac{|m + m - 4| + |m - (m - 4)|}{2} = |m - 2| + 2$.

Theo giả thiết ta có $|m - 2| + 2 \leq 4 \Leftrightarrow |m - 2| \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4$.

Do m nguyên nên có tất cả 5 giá trị thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án **D**

□

BÀI 18 (Thi thử L2, Sở Bắc Giang, 2018). Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0; 2]$. Có bao nhiêu số nguyên $a \in [-4; 4]$ sao cho $M \leq 2m$?

- A. 4. B. 6. C. 7. D. 5.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a$.

$$\text{Ta có } g'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2. \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$				$a+1$				$+\infty$
				a			a		

Trên đoạn $[0, 2]$ ta xét các trường hợp

— Nếu $\begin{cases} a+1 > 0 \\ a < 0 \end{cases}$ thì $m = f_{\min} = 0$, suy ra $0 \leq M \leq 2m = 0 \Rightarrow f_{\max} = M = 0$ (vô lý).

— Nếu $a > 0$ thì $M = f_{\max} = a+1$ và $m = f_{\min} = a$, khi đó ta có

$$M \leq 2m \Leftrightarrow a+1 \leq 2a \Leftrightarrow a \geq 1. \quad (1)$$

— Nếu $a+1 < 0 \Leftrightarrow a < -1$ thì $M = f_{\max} = |a|$ và $f_{\min} = |a+1|$, khi đó ta có

$$M \leq 2m \Leftrightarrow -a \leq -2(a+1) \Leftrightarrow a \leq -2. \quad (2)$$

Từ (1), (2) và kết hợp giả thiết, suy ra $a \in [-4; -2] \cup [1; 4]$.

Vậy a có 7 giá trị nguyên thỏa mãn.

Chọn đáp án **C**

□

BÀI 19 (Đề kKSCL K12, THPT Sào Nam, Quảng Nam, lần 3 năm học 2017 - 2018).

Tìm giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |4x^2 + 2x + m|$ trên đoạn $[-1; 1]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $m = -\frac{7}{8}$. B. $m = -\frac{9}{8}$. C. $m = -\frac{25}{8}$. D. $m = -\frac{23}{8}$.

Lời giải.

Ta có

x	-1	$-\frac{1}{4}$	1
$4x^2 + 2x + m$	$2+m$	$-\frac{1}{4}+m$	$6+m$

Từ bảng biến thiên ta có $\max_{[-1;1]} y = \max \left\{ |6+m|, \left| -\frac{1}{4} + m \right| \right\}$. Ta lại có

$$\begin{aligned} |6+m| \geq \left| -\frac{1}{4} + m \right| &\Leftrightarrow (6+m)^2 \geq \left(-\frac{1}{4} + m \right)^2 \\ &\Leftrightarrow 36 + 12m + m^2 \geq \frac{1}{16} - \frac{1}{2}m + m^2 \\ &\Leftrightarrow m \geq -\frac{23}{8}. \end{aligned}$$

— Với $m \geq -\frac{23}{8}$, $\max_{[-1;1]} y = |6+m| = 6+m \geq 6 - \frac{23}{8} = \frac{25}{8}$.

— Với $m < -\frac{23}{8}$, $\max_{[-1;1]} y = \left| -\frac{1}{4} + m \right| = \frac{1}{4} - m > \frac{1}{4} + \frac{23}{8} = \frac{25}{8}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y = |4x^2 + 2x + m|$ trên đoạn $[-1; 1]$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{25}{8}$ khi $m = -\frac{23}{8}$.

Chọn đáp án **D**

□

BÀI 20 (Thi thử, Krong Bong - Đắk Lắk, 2020). Cho hàm số $y = \left| \frac{x^4 + ax + a}{x+1} \right|$. Gọi

M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[1; 2]$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để $M \geq 2m$.

A. 14.

B. 15.

C. 16.

D. 13.

Lời giải.

Xét hàm số $y = f(x) = \frac{x^4 + ax + a}{x+1}$ trên đoạn $[1; 2]$.

$y' = f'(x) = \frac{3x^4 + 4x^3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in [1; 2]$, suy ra hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $[1; 2]$. Khi đó

$$\max_{x \in [1;2]} f(x) = f(2) = \frac{3a+16}{3}, \min_{x \in [1;2]} f(x) = f(1) = \frac{2a+1}{2}.$$

Do đó

$$M = \min \left\{ \left| \frac{2a+1}{2} \right|; \left| \frac{3a+16}{3} \right| \right\}, \quad m = \min \left\{ \left| \frac{2a+1}{2} \right|; \left| \frac{3a+16}{3} \right| \right\}$$

Ta xét hai trường hợp

TH 1. Nếu $\left| \frac{2a+1}{2} \right| \leq \left| \frac{3a+16}{3} \right|$ hay $a \geq -\frac{35}{12}$ (1). Khi đó

$$2m \leq M \Leftrightarrow 2 \left| \frac{2a+1}{2} \right| \leq \left| \frac{3a+16}{3} \right| \Leftrightarrow \left(a - \frac{13}{3} \right) \left(3a + \frac{19}{3} \right) \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{19}{9} \leq a \leq \frac{13}{3}.$$

So với điều kiện (1), ta được $-\frac{19}{9} \leq m \leq \frac{13}{3}$, và vì $a \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

TH 2. Nếu $\left| \frac{2a+1}{2} \right| > \left| \frac{3a+16}{3} \right|$ hay $a < -\frac{35}{12}$ (2). Khi đó

$$M \geq 2m \Leftrightarrow \left| \frac{2a+1}{2} \right| \geq 2 \left| \frac{3a+16}{3} \right| \Leftrightarrow \left(a + \frac{61}{6} \right) \left(3a + \frac{67}{6} \right) \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{61}{6} \leq a \leq -\frac{67}{18}.$$

So với điều kiện (2), ta được

$$\begin{cases} -\frac{61}{6} \leq a \leq -\frac{67}{18} \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow a \in \{-10; -9; -8; -7; -6; -5; -4\}$$

Vậy số giá trị nguyên của a thỏa bài toán là 14.

Chọn đáp án **A**

□

BÀI 21 (Đề Thi thử, Sở GD-ĐT Quảng Bình 2018). Có bao nhiêu giá trị của m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |-x^4 + 8x^2 + m|$ trên đoạn $[-1; 3]$ bằng 2018?

A. 0.

B. 4.

C. 6.

D. 2.

Lời giải.

Ta có $y = |-x^4 + 8x^2 + m| = |(x^2 - 4)^2 - m - 16|$.

Đặt $(x^2 - 4)^2 = t$. Khi $x \in [-1; 3]$ thì $t \in [0; 25]$.

Khi đó ta có $y = f(t) = |t - m - 16|$. Ta có $\max_{[-1;3]} y = \max_{[0;25]} f(t) = \max\{|m + 16|, |9 - m|\}$.

— Trường hợp 1: $\begin{cases} |m + 16| > |9 - m| \\ |m + 16| = 2018 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2002.$

— Trường hợp 2: $\begin{cases} |m + 16| < |9 - m| \\ |9 - m| = 2018 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2009.$

— Trường hợp 3: $\begin{cases} |m + 16| = |9 - m| \\ |m + 16| = 2018 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$

Vậy, có hai giá trị của m thỏa mãn đề bài là $m = -2009$ và $m = 2002$.

Chọn đáp án **D**

□

BÀI 22 (Đề thi thử lần 1, Ninh Bình-2021). Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2x - 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = |f^2(x) - 2f(x) + m|$ trên đoạn $[-1; 3]$ bằng 8.

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)$, ta có bảng biến thiên

x	-2	-1	1	2	3
y	7	2	-2	-1	2

Đặt $u = f(f(x))$, từ bảng biến thiên ta thấy $u \in [-2; 7]$.

Suy ra $g(u) = |u + m + 1|$, $u \in [-2; 7]$.

Ta có $g(-2) = |m - 1|$ và $g(7) = |m + 8|$. Do đó

$$\max_{[-2;7]} g(u) = \max\{|m - 1|, |m + 8|\}$$

— Trường hợp 1. $\max_{[-2;7]} g(u) = |m - 1|$. Khi đó, ta có

$$\begin{cases} |m - 1| = 8 \\ |m - 1| \geq |m + 8| \end{cases} \Leftrightarrow m = -7.$$

— Trường hợp 2. $\max_{[-2;7]} g(u) = |m + 8|$. Suy ra

$$\begin{cases} |m + 1| = 8 \\ |m - 1| \leq |m + 8| \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **D**

□

8. Những thông tin cần được bảo mật:

9. Các điều kiện cần thiết để áp dụng sáng kiến: Học sinh học lớp 12.

10. Đánh giá lợi ích thu được hoặc dự kiến có thể thu được do áp dụng sáng kiến theo ý kiến của tác giả: Sau khi học xong, các em học sinh lớp 12 không còn bỡ ngỡ trước các dạng toán về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số giá trị tuyệt đối. Bước đầu giúp các em có các hướng để giải quyết và chinh phục các bài toán ở dạng này.

11. Danh sách tổ chức, cá nhân tham gia áp dụng thử hoặc áp dụng sáng kiến lần đầu (nếu có)

STT	Tên tổ chức, cá nhân	Địa chỉ	Phạm vi, Lĩnh vực áp dụng sáng kiến
1			
2			

...ngày...tháng...năm

Thủ trưởng đơn vị

...ngày...tháng...năm

CHỦ TỊCH HỘI ĐỒNG
SÁNG KIẾN CẤP CƠ SỞ

...ngày...tháng...năm

Tác giả sáng kiến

Nguyễn Thành Tiến