ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

TRẮC NGHIỆM VD - VDC

HÀM SỐ

* CÓ ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT
* PHÂN LOẠI CÁC DẠNG TOÁN
* CHIA PHẦN BÀI TẬP VÀ LỜI GIẢI RIÊNG

NEW

ÔN THI THPT QUỐC GIA

MỤC LỤC

1. SỰ ĐỒNG BIẾN NGHICH BIẾN CỦA HÀM SỐ……1

DANG 1. XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ CHO BỞI CÔNG THỨC

DANG 2. XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU DỰA VÀO BẢNG BIẾN THIÊN, ĐỒ THỊ

DANG 3. SỰ ĐƠN ĐIỆU CHỨA THAM SỐ

2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ……32

DANG 1. TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ CHO BỞI CÔNG THỨC

DANG 2. TÌM CỰC TRỊ DỰA VÀO BBT, ĐỒ THỊ

DẠNG 3. CỰC TRỊ VỚI HÀM BẬC BA CHỨA THAM SỐ

DẠNG 4. CỰC TRỊ VỚI HÀM BẬC BỐN CHỨA THAM SỐ

DẠNG 5. CỰC TRỊ VỚI CÁC HÀM SỐ KHÁC CHỨA THAM SỐ

DẠNG 6. CỰC TRỊ HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI KHÔNG CHỨA THAM SỐ

DẠNG 7. CỰC TRỊ HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI CHỨA THAM SỐ

3. GTLN, GTNN CỦA HÀM SỐ……87

DẠNG 1. GTLN, GTNN TRÊN ĐOẠN, KHOẢNG

DẠNG 2. GTLN, GTNN HÀM NHIỀU BIẾN

4. TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ……...107

5. ĐỒ THỊ HÀM SỐ VÀ SỰ TƯƠNG GIAO……118

DANG 1. ĐỒ THỊ HÀM SỐ, ĐỒ THỊ ĐẠO HÀM

DANG 2. BIỆN LUẬN SỐ GIAO ĐIỂM DỰA VÀO ĐỒ THỊ, BẢNG BIẾN THIÊN

DANG 3. SỰ TƯƠNG GIAO BẰNG SỐ NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH

6. TIẾP TUYẾN……167

7. KHOẢNG CÁCH VÀ ĐIỂM ĐẶC BIỆT……...176

8. GIẢI PT, BPT BẰNG PP HÀM SỐ……179

9. ỨNG DỤNG THỰC TẾ……198

TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

A – LÝ THUYẾT CHUNG

Cho hàm số $y = f(x,m)$, m là tham số, có taaph xác định D.

□ Hàm số f đồng biến trên $D \Leftrightarrow f' \geq 0, \forall x \in D$.

□ Hàm số f nghịch biến trên $D \Leftrightarrow f' \leq 0, \forall x \in D$.

Từ đó suy ra điều kiện của m.

1 - Sử dụng GTLN, GTNN của hàm số trên tập D để giải quyết bài toán tìm giá trị của tham số để hàm số đơn điệu.

Lí thuyết nhắc lại:

Cho bất phương trình:

$f(x,m) \geq 0, \forall x \in D \Leftrightarrow f(x) \geq g(m), \forall x \in D \Leftrightarrow \min\limits_{x \in D} f(x) \geq g(m)$

Cho bất phương trình:

$f(x,m) \leq 0, \forall x \in D \Leftrightarrow f(x) \leq g(m), \forall x \in D \Leftrightarrow \min\limits_{x \in D} f(x) \leq g(m)$

Phương pháp: Để điều kiện để hàm số luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên tập xác định (hoặc từng khoảng xác định) của hàm số $y = f(x,m)$, ta thực hiện các bước sau:

- Bước 1: Tìm TXĐ của hàm số.
- Bước 2: Tính y'. Để hàm số đồng biến $y' \geq 0, \forall x \in D$, (để hàm số nghịch biến $y' \leq 0, \forall x \in D$) thì ta sử dụng lý thuyết nhắc lại phần trên.
- Bước 3: Kết luận giá trị của tham số.

Chú ý:

+ Phương pháp trên chỉ sử dụng được khi ta có thể tách được thành $f(x)$ và $g(m)$ riêng biệt.

+ Nếu ta không thể tách được thì phải sử dụng dấu của tam thức bậc 2.

2 - Sử dụng phương pháp tham thức bậc hai để tìm điều kiện của tham số:

Lý thuyết nhắc lại:

□ $y' = 0$ chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm.

Nếu $y' = ax^2 + bx + c$ thì:

- $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = b = 0 \\ c \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$
- $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = b = 0 \\ c \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$

□ Định lí về dấu của tam thức bậc hai $g(x) = ax^2 + bx + c$

□ Nếu $\Delta < 0$ thì $g(x)$ luôn cùng dấu với a.

□ Nếu $\Delta = 0$ thì $g(x)$ luôn cùng dấu với a, trừ $x = -\dfrac{b}{2a}$

□ Nếu $\Delta > 0$ thì $g(x)$ có hai nghiệm x_1, x_2 và trong khoảng hai nghiệm thì $g(x)$ khác dấu với a, ngoài khoảng hai nghiệm thì $g(x)$ cùng dấu với a.

3 - So sánh các nghiệm x_1, x_2 của tam thức bậc hai $g(x) = ax^2 + bx + c$ với số 0.

- $x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$
- $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$
- $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P < 0$

4 - Để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có độ dài khoảng đồng biến (nghịch biến) $(x_1; x_2)$ bằng d thì ta thực hiện các bước sau:

□ Tính y'.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

□ Tìm điều kiện để hàm số có khoảng đồng biến và ngịch biến: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ (1)

□ Biến đổi $|x_1 - x_2| = d$ thành $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = d^2$ (2)

□ Sử dụng định kí Vi-et đưa (2) thành phương trình theo m.

□ Giải phương trình, so với điều kiện (1) để chọn nghiệm.

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

DANG 1: XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ CHO BỞI CÔNG THỨC

Câu 1. Cho hàm số $y = \frac{x}{2} + \sin^2 x, x \in [0;\pi]$. Hỏi hàm số đồng biến trên các khoảng nào?

A. $\left(0;\frac{7\pi}{12}\right)$ và $\left(\frac{11\pi}{12};\pi\right)$. **B.** $\left(\frac{7\pi}{12};\frac{11\pi}{12}\right)$.

C. $\left(0;\frac{7\pi}{12}\right)$ và $\left(\frac{7\pi}{12};\frac{11\pi}{12}\right)$. **D.** $\left(\frac{7\pi}{12};\frac{11\pi}{12}\right)$ và $\left(\frac{11\pi}{12};\pi\right)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2-1)(x+1)(5-x)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng?**

A. $f(1) < f(4) < f(2)$. **B.** $f(1) < f(2) < f(4)$.

C. $f(2) < f(1) < f(4)$. **D.** $f(4) < f(2) < f(1)$.

Câu 3. (ĐH Vinh Lần 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x^2-1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = 2f(-x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(0;2)$.

Câu 4. (ĐH Vinh Lần 1) Cho hàm số $y = f(x)$ nghịch biến $\forall x \in (a;b)$. Hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(2-b;2-a)$. **B.** $(-\infty;2-a)$. **C.** $(a;b)$. **D.** $(2-b;+\infty)$.

Câu 5. (Cụm 8 trường Chuyên Lần 1) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (1-x)(2+x)(\sin x + 2) + 2019$. Hàm số $y = f(1-x) + 2019x - 2018$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 6. (THTT lần5) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f\left(2 - \sqrt{x^2+1}\right) - \sqrt{x^2+1} - 3$ đồng biến trên các khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(2;3)$.

Câu 7. (Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-9)(x-4)^2$. Khi đó hàm số $y = f(x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(-3;0)$. **C.** $(-\infty;-3)$. **D.** $(-2;2)$.

Câu 8. (Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-9)(x-4)^2$. Khi đó hàm số $y = f(x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(-3;0)$. **C.** $(-\infty;-3)$. **D.** $(-2;2)$.

Câu 9. (Chuyên Bắc Giang) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2-1)(x^2-x-2)$. Hỏi hàm số $g(x) = f(x - x^2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $(-1;1)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 10. (THPT SỐ 1 TƯ NGHĨA LẦN 2 NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-2x$. Hàm số $g(x)=-f(x^2-1)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 11. (ĐH Vinh Lần 1) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^3-2x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(2-x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(-4;2)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 12. (HSG 12 Bắc Giang) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(3-x)(x^2-1)+2x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(x)-x^2-1$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-2x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f\left(1-\frac{x}{2}\right)+4x$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-\infty;-6)$. **B.** $(-6;6)$. **C.** $(-6\sqrt{2};6\sqrt{2})$. **D.** $(-6\sqrt{2};+\infty)$.

Câu 14. (THPT-Nguyễn-Công-Trứ-Hà-Tĩnh-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(x-2)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;4)$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-9)(x-4)^2$. Khi đó hàm số $g(x)=f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-2;2)$ **B.** $(3;+\infty)$ **C.** $(-\infty;-3)$ **D.** $(-\infty;-3)\cup(0;3)$

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x^2-2x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hỏi số thực nào dưới đây thuộc khoảng đồng biến của hàm số $g(x)=f(x^2-2x+2)$?

A. -2. **B.** -1. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** 3.

Câu 17. (CHUYÊN THÁI BÌNH LẦN V NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-1)(x-4).u(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $u(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Câu 18. (SỞ NAM ĐỊNH 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(1-x)(x+2)g(x)+2018$ với $g(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(1-x)+2018x+2019$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Câu 19. (THPT SỐ 1 TƯ NGHĨA LẦN 2 NĂM 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f(x)+x.f'(x)=x(x-1)(x-2)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=x.f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(0;2)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

DANG 2: XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU DỰA VÀO BẢNG BIẾN THIÊN, ĐỒ THỊ

Câu 1: **(Sở Ninh Bình Lần1)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		-1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=-2f(x)+2019$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-4;2)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(2;4)$.

Câu 2: **(PHÂN TÍCH BL_PT ĐỀ ĐH VINHL3 -2019.)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên dưới

x	$-\infty$		-3		-2		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f(1-2x)$ đồng biến trên khoảng

A. $\left(0;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(-\frac{1}{2};1\right)$. **C.** $\left(-2;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{2};3\right)$.

Câu 3: **(KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(-1;1)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(-1;3)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 4: **(Chuyên Vinh Lần 3)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên dưới

x	$-\infty$		-3		-2		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f(1-2x)$ đồng biến trên khoảng

A. $\left(0;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(-\frac{1}{2};1\right)$. **C.** $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{2};3\right)$.

Câu 5: **(THCS-THPT-NGUYỄN-KHUYẾN-TP-HCM-24THÁNG3)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f(2-3x)$ nghịch biến trên khoảng

A. $\left(-\frac{1}{4};0\right)$. **B.** $\left(-\frac{1}{2};0\right)$. **C.** $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. **D.** $\left(0;\frac{1}{4}\right)$.

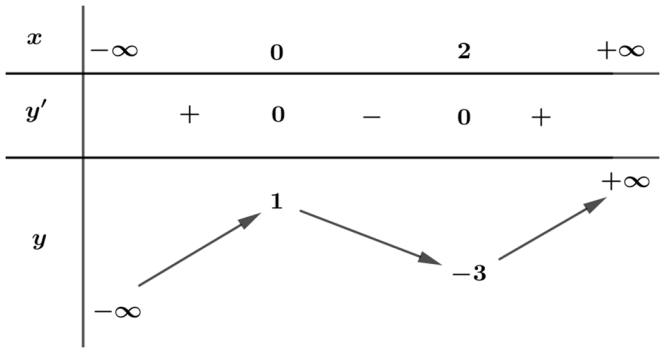
Câu 6: **(Lê Quý Đôn Điện Biên Lần 3)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f\left(x^2-2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 7: (THPT Nghèn Lần1) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



Hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(1;2)$.

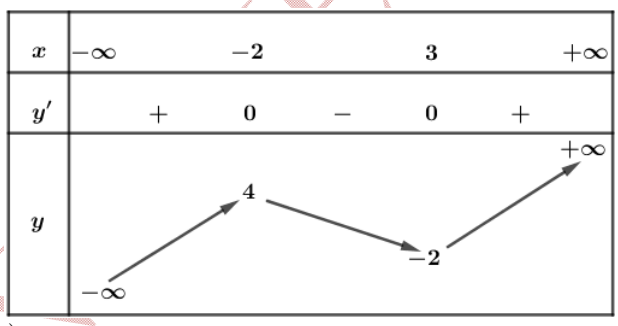
Câu 8: (KHTN Hà Nội Lần 3) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-3;-2)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;0)$.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biên thiên như hình vẽ



Hàm số $g(x)=f\left(2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $\left(-1;\frac{1}{4}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{4};1\right)$. **C.** $\left(1;\frac{5}{4}\right)$. **D.** $\left(\frac{9}{4};+\infty\right)$.

Câu 10: (THPT ISCHOOL NHA TRANG) Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

	$-\infty$		-1		1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Cho hàm số
nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-1)$ **B.** $(-1;0)$ **C.** $(0;2)$ **D.** $(2;+\infty)$

Câu 11: (Đặng Thành Nam Đề 1) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	$+$	0	$+$	0	-	0	$+$	

Hàm số $y=3f\left(x+2\right)-x^3+3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;2)$.

Câu 12: **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên Lần2)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f(x-1)+x^3-12x+2019$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(1;2)$ **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(3;4)$.

Câu 13: **(Trung-Tâm-Thanh-Tường-Nghệ-An-Lần-2)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		-1		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Xét hàm số $g(x)=f\left(\frac{x-1}{2}\right)-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2-2x+3$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-1;0)$.

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-4;-1)$.

D. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

Câu 14: **(GIỮA-HKII-2019-NGHĨA-HƯNG-NAM-ĐỊNH)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=3f(x+2)-2x^3-\frac{3}{2}x^2+3x+2019$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $(0;2)$.

Câu 15: **(CỤM TRƯỜNG SÓC SƠN MÊ LINH HÀ NỘI)** Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+5x+3$ và hàm số $g(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-6		6		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

Hàm số $y=g(f(x))$ nghịch biến trên khoảng

A. $(-1;1)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(0;4)$.

Câu 16: **(THPT PHỤ DỰC – THÁI BÌNH)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Đặt $g(x)=f\left(x^2-2x+2\right)+x^3-3x^2-6x$.

Xét các khẳng định

i) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

ii) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

iii) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$.

Số khẳng định đúng trong các khẳng định trên là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 17: (Quỳnh Lưu Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-4		-1		2		7		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f(2x+1)+\frac{2}{3}x^3-8x+2019$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $(-1;7)$.

Câu 18: (Lý Nhân Tông) Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=3f(-x+2)+x^3+3x^2-9x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(-2;1)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 19: (KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG) Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=g(x)=f\left(x^2\right)+\frac{x^4}{2}+\frac{2x^3}{3}-6x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-4;-3)$. **D.** $(-6;-5)$.

Câu 20: (THPT ĐÔ LƯƠNG 3 LẦN 2) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Gọi $g(x)=2f(1-x)+\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2-5$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

C. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Câu 21: **(THPT-Ngô-Quyền-Hải-Phòng-Lần-2-2018-2019-Thi-24-3-2019)**Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn:

x	$-\infty$	-2		0		2		3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y=f(3-x)-x-\sqrt{x^2+2}$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(3;5)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(2;6)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 22: **(Chuyên Phan Bội Châu Lần2)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y=2f(1-x)+\sqrt{x^2+1}-x$ nghịch biến trên những khoảng nào dưới đây

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-3;-2)$.

Câu 23: **(Đặng Thành Nam Đề 5)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ

x	$-\infty$		1		2		3		4	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Biết $1<f(x)<3, \forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=g(x)=f(f(x))+x^3-6x^2-1$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(3;4)$. **B.** $(-3;-2)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-2;1)$.

Câu 24: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x		1		2		3		4	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	3		1		2		0	$+\infty$

Hàm số $y=(f(x))^3-3.(f(x))^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(2;3)$.

Câu 25: **(SỞ QUẢNG BÌNH NĂM 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên.

Hàm số $y=e^{3f(2-x)+1}+3^{f(2-x)}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây.

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

A $(1;+\infty)$ **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-1;3)$. **D.** $(-2;1)$.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng đạo hàm ta thấy $f'(x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ 1<x<4 \end{array}\right.$

$y=e^{3f(2-x)+1}+3^{f(2-x)}$

$\Rightarrow y'=-3.f'(2-x).e^{3f(2-x)+1}-f'(2-x).3^{f(2-x)}.\ln 3$

$\Leftrightarrow y'=-f'(2-x).\left(3.e^{3f(2-x)+1}+3^{f(2-x)}.\ln 3\right)$

Để hàm số đồng biến thì $y'=-f'(2-x).\left(3.e^{3f(2-x)+1}+3^{f(2-x)}.\ln 3\right)>0$

$\Leftrightarrow -f'(2-x)>0$ (Vì $3.e^{3f(2-x)+1}+3^{f(2-x)}.\ln 3>0$)

$\Leftrightarrow f'(2-x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-x<-1 \\ 1<2-x<4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ -2<x<1 \end{array}\right.$

$\Rightarrow x\in(-2;1)$.

Câu 26: **(Lương Thế Vinh Lần 3)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f(x+m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 27: **(Đặng Thành Nam Đề 6)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ bên.

x	$-\infty$		-10		-2		3		8		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=f\left(x^2+4x+m\right)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$?

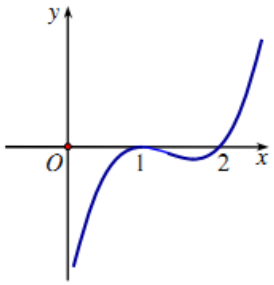
A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 28: **(Đặng Thành Nam Đề 10)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=f(3x-1)+x^3-3mx$ đồng biến trên khoảng $(-2;1)$?

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

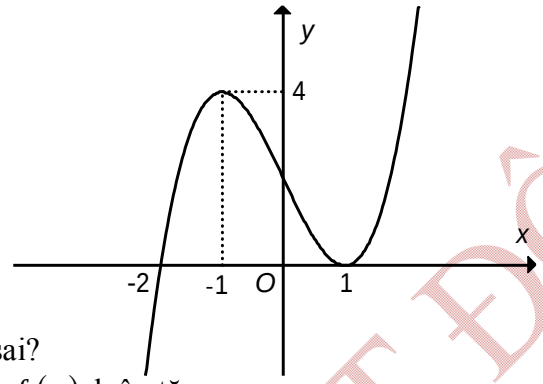
A. 8. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 5.

Câu 29: Hình bên là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$. Hỏi đồ thị hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây



A. $(2;+\infty)$ **B.** $(1;2)$ **C.** $(0;1)$ **D.** $(0;1)$ và $(2;+\infty)$

Câu 30: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ $(a\neq 0)$. Biết rằng hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Khi đó nhận xét nào sau đây sai?

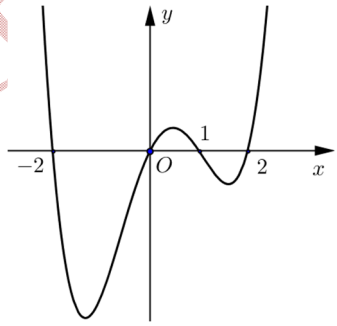
A. Trên $(-2;1)$ thì hàm số $f(x)$ luôn tăng.

B. Hàm $f(x)$ giảm trên đoạn có độ dài bằng 2.

C. Hàm $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

D. Hàm $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$

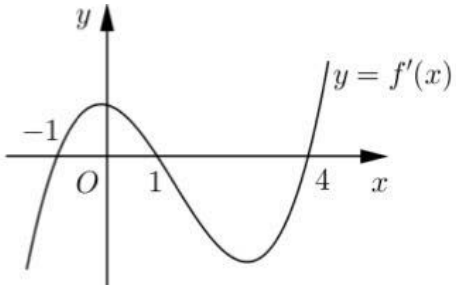
Câu 31: **(Hùng Vương Bình Phước)** Cho hàm số $y=f(x)$, biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên



Hàm số $y=f(2-x)+2019$ đồng biến trên các khoảng

A. $(-2;0)$ và $(1;2)$. **B.** $(-2;0)$ và $(2;4)$. **C.** $(0;1)$ và $(1;2)$. **D.** $(0;1)$ và $(2;4)$.

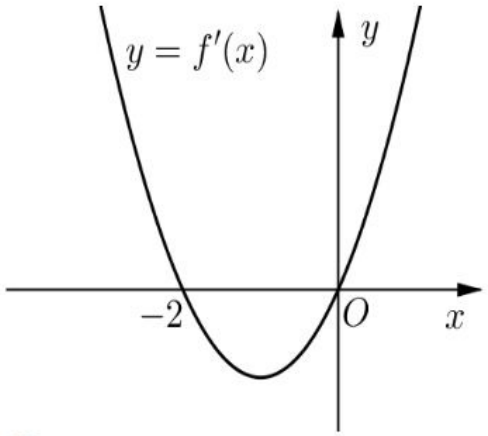
Câu 32: Cho hàm số $y=f(x)$.Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y=f(x^2)$ đồng biến trên khoảng:



ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

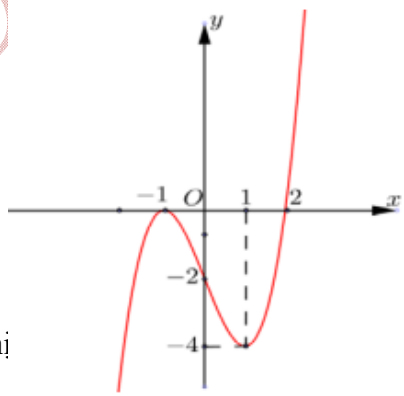
A. $(1;2)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(-1;1)$.

Câu 33: **(THPT LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NGÃI)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y=f(x^2-1)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(-1;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 34: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên R. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$.



Xét hàm số $g(x)=f(x^2-2)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

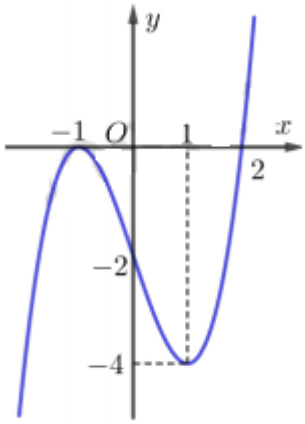
A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1;0)$

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0;2)$

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị ẽ.



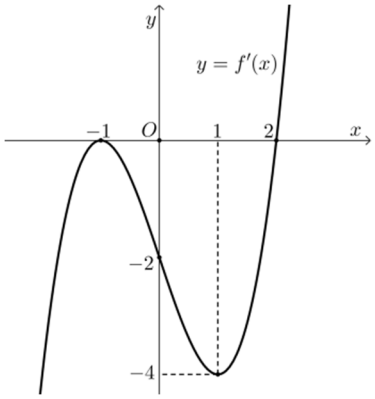
Xét hàm số $g(x)=f(2-x^2)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x=2$ **B.** Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;2)$

C. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$ **D.** Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-1;0)$

Câu 36: **(SỞ GD & ĐT CÀ MAU)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ sau

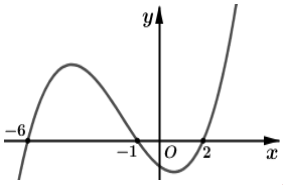
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Hàm số $g(x)=f\left(x^2-2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;3)$. **B.** $(-3;-1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(4;+\infty)$.

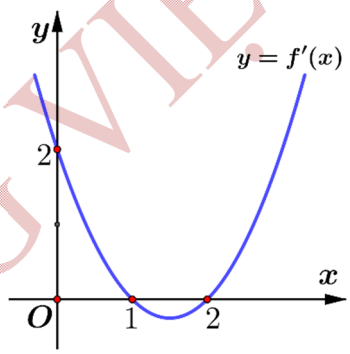
Câu 37: Cho hàm số $y=f(x)$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $y=f\left(3-x^2\right)$ đồng biến trên khoảng

A. $(0;1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(-2;-1)$.

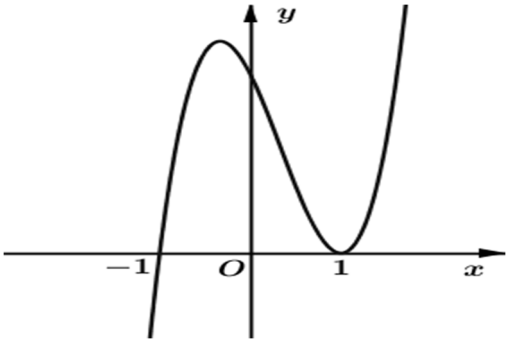
Câu 38: **(Chuyên-Thái-Nguyên-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$.



Hàm số $g(x)=f\left(x-x^2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$.

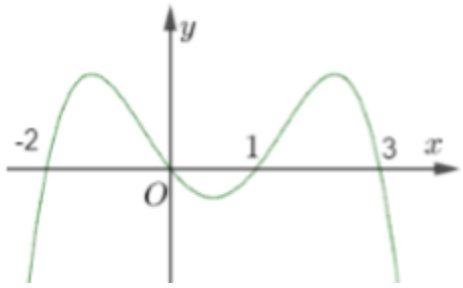
Câu 39: **(THTT lần 5)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $g(x)=f\left(x^2+x-1\right)$ đồng biến trên khoảng



ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $(0;1)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

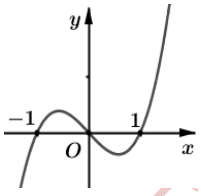
Câu 40: **(THANH CHƯƠNG 1 NGHỆ AN 2019 LẦN 3)** Cho hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau



Hàm số $y=f\left(x^2+2x+3\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;+\infty)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-2;-1)$.

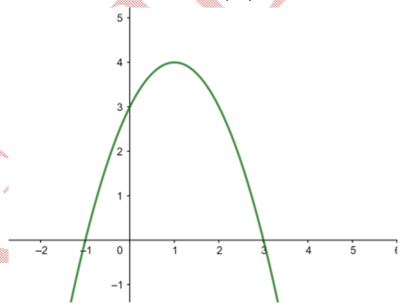
Câu 41: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x)=f\left(x^3\right)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(0;1)$.

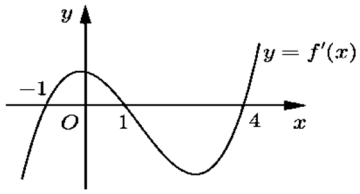
Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ sau



Hàm số $g(x)=f\left(2x^4-1\right)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

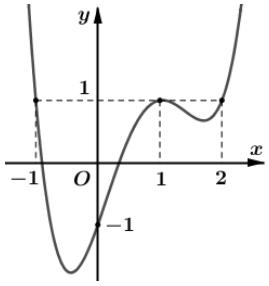
A. $(-\infty;-1)$. **B.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$. **C.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 43: **(SGD-Nam-Định-2019)** Cho hàm số y=f(x) có đồ thị y=f '(x) như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y=f(3-2x)+2019$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(1;2)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(-1;1)$.

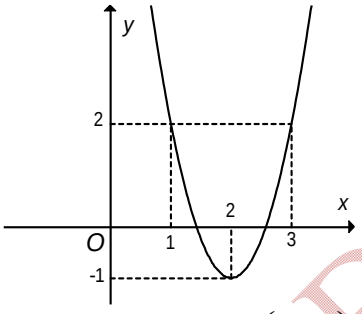
Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Đặt $g(x)=f(x)-x$, khẳng định nào sau đây là đúng?

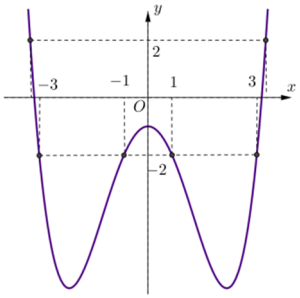
A. $g(2)<g(-1)<g(1)$. **B.** $g(-1)<g(1)<g(2)$. **C.** $g(-1)>g(1)>g(2)$. **D.** $g(1)<g(-1)<g(2)$.

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x-2)+2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?



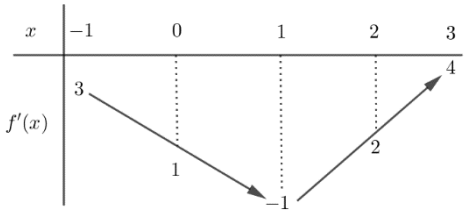
A. $(-\infty;2)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 46: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x+2)-2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?



A. $(-3;-1),(1;3)$. **B.** $(-1;1),(3;5)$. **C.** $(-\infty;-2),(0;2)$. **D.** $(-5;-3),(-1;1)$.

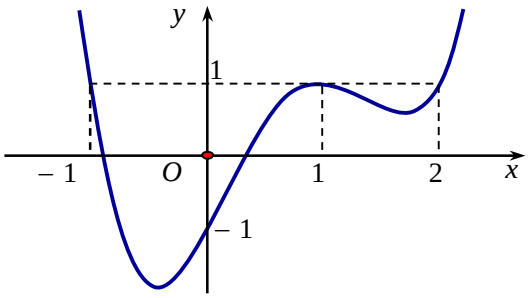
Câu 47: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y=f\left(1-\frac{x}{2}\right)+x$ nghịch biến trên khoảng



A. $(2;4)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-4;-2)$.

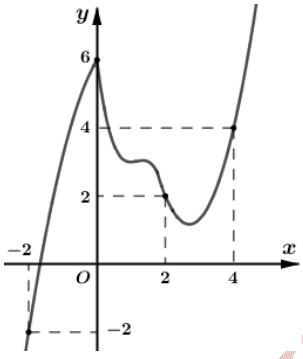
Câu 48: **(Hoàng Hoa Thám Hưng Yên)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x-1)+\frac{2019-2018x}{2018}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



A. $(2\,;3)$. **B.** $(0\,;1)$. **C.** $(-1\,;0)$. **D.** $(1\,;2)$.

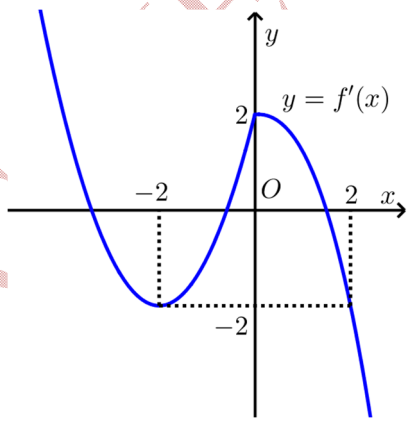
Câu 49: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x)=2f(x)-x^2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-2;2)$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(2;+\infty)$.

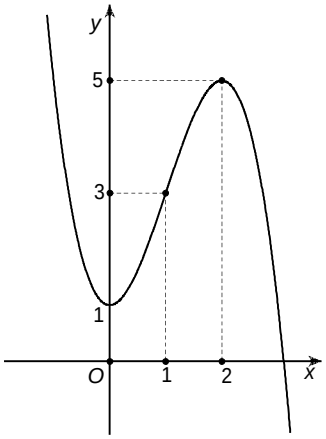
Câu 50: **(Chuyên Vinh Lần 3)** Cho $f(x)$ mà đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Hàm số $y=f(x-1)+x^2-2x$ đồng biến trên khoảng



A. $(1;2)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;-1)$.

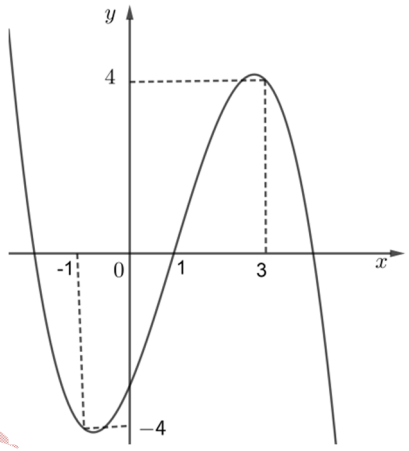
Câu 51: **(Sở Bắc Ninh 2019)** Cho $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc 4, có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y=f(5-2x)+4x^2-10x$ đồng biến trong khoảng nào trong các khoảng sau đây?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



A. $(3;4)$. **B.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};2\right)$. **D.** $\left(0;\frac{3}{2}\right)$.

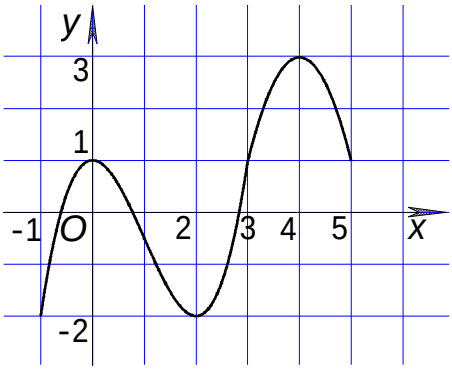
Câu 52: **(Sở Cần Thơ 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới.



Hàm số $y=f(x)-x^2+2x$ nghịch biến trên khoảng

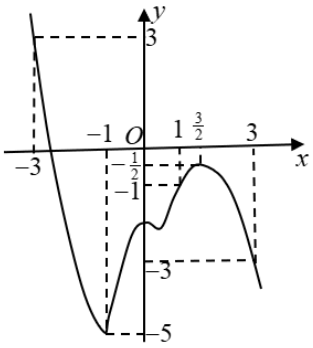
A. $(-1;2)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Câu 53: **(KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình bên. Hàm số $y=-2f(2-x)+x^2$ nghịch biến trên khoảng



A. $(-3;-2)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;2)$.

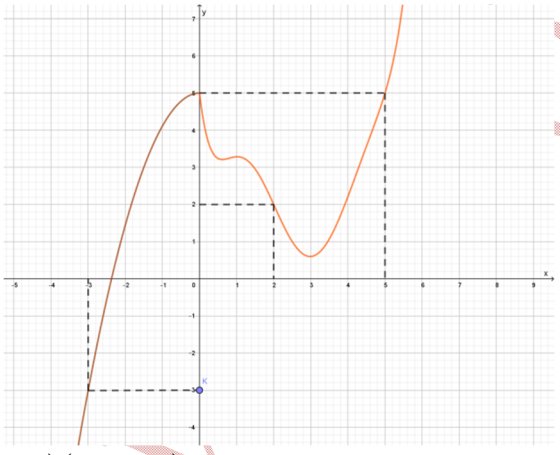
Câu 54: **(THPT NÔNG CỐNG 2 LẦN 4 NĂM 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y=f\left(1-x\right)+\dfrac{x^2}{2}-x$ nghịch biến trên khoảng

A. $\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(1;3\right)$. **C.** $\left(-3;1\right)$. **D.** $\left(-2;0\right)$.

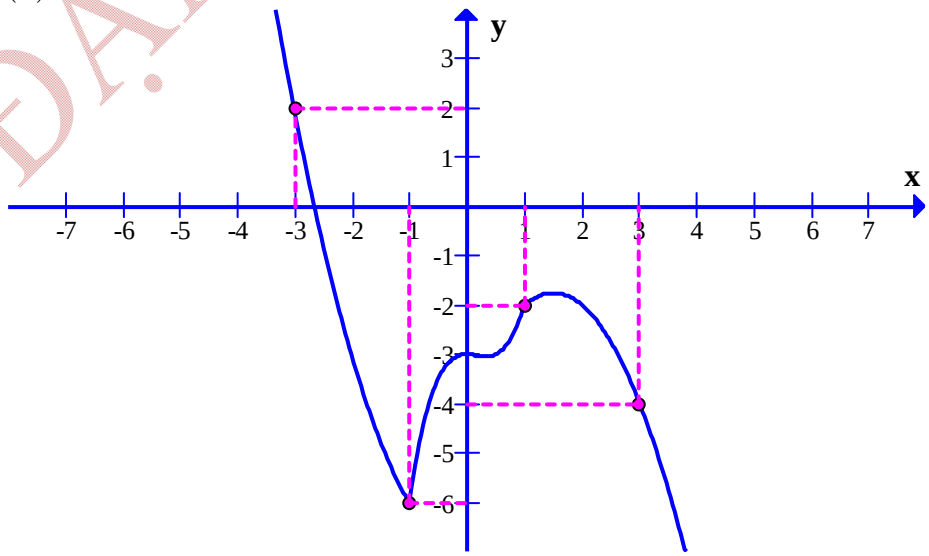
Câu 55: **(Sở Phú Thọ)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ:



Hàm số $g\left(x\right)=f\left(-2x+1\right)+\left(x+1\right)\left(-2x+4\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-2;\dfrac{-1}{2}\right)$ **B.** $\left(-\infty;-2\right)$ **C.** $\left(\dfrac{-1}{2};+\infty\right)$ **D.** $\left(\dfrac{-1}{2};2\right)$

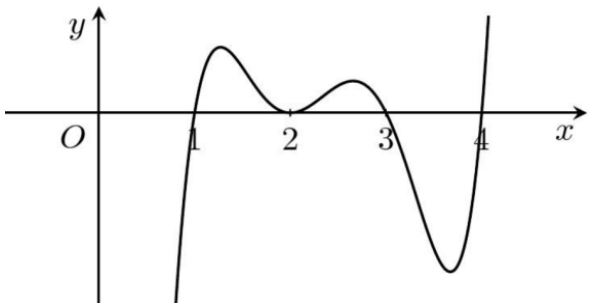
Câu 56: **(Nguyễn Du số 1 lần3)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ.



Hỏi hàm số $g(x)=2f(x)+\left(x+1\right)^2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(-3;1)$. **D.** $(-\infty;3)$.

Câu 57: **(Chuyên Sơn La Lần 3 năm 2018-2019)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

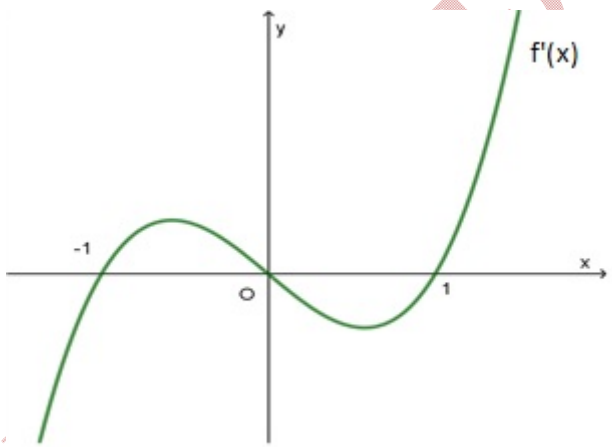


Hàm số $y=f\left(x^2-2\right)-\left(\frac{x^3}{3}+x^2-3x+4\right)$ nghịch biến trong khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$. **B.** $(-3;0)$. **C.** $\left(1;\sqrt{3}\right)$. **D.** $\left(-\sqrt{3};+\infty\right)$.

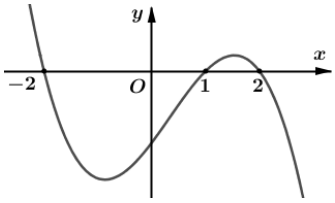
Câu 58: **(SỞ PHÚ THỌ LẦN 2 NĂM 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $f'(x)=x^3+ax^2+bx+c\left(a,b,c\in\mathbb{R}\right)$ có đồ thị như hình vẽ.

Hàm số $g(x)=f\left(f'(x)\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



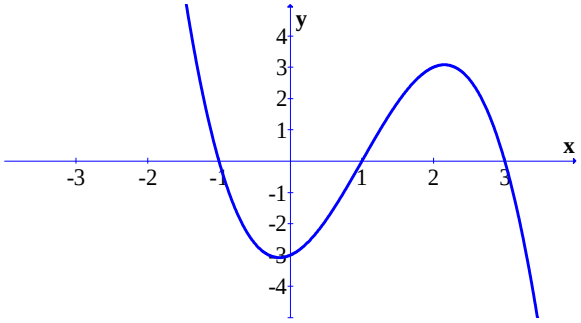
A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Câu 59: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thoả $f(2)=f(-2)=0$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ có dạng như hình bên. Hàm số $y=\left(f(x)\right)^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?



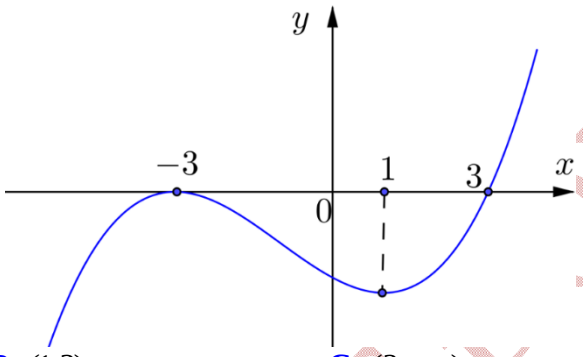
A. $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(1;2)$.

Câu 60: **(Chuyên Hưng Yên Lần 3)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(-1)=f(3)=0$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ có dạng như hình dưới đây. Hàm số $y=\left(f(x)\right)^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



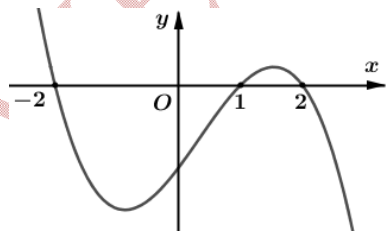
A. $(-2;2)$. **B.** $(0;4)$. **C.** $(-2;1)$. **D.** $(1;2)$.

Câu 61: **(THĂNG LONG HN LẦN 2 NĂM 2019)** Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=[f(x)]^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty;3)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(-3;1)$.

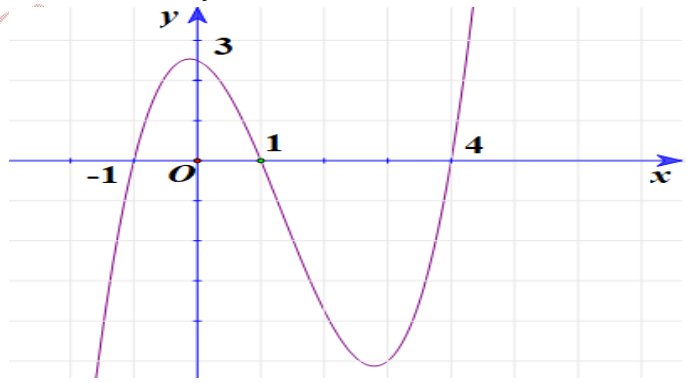
Câu 62: **(Sở Thanh Hóa 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên và $f(2)=f(-2)=0$.



Hàm số $g(x)=\left[f(3-x)\right]^2$ nghịch biến trong khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(1;2)$. **B.** $(2;5)$. **C.** $(5;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

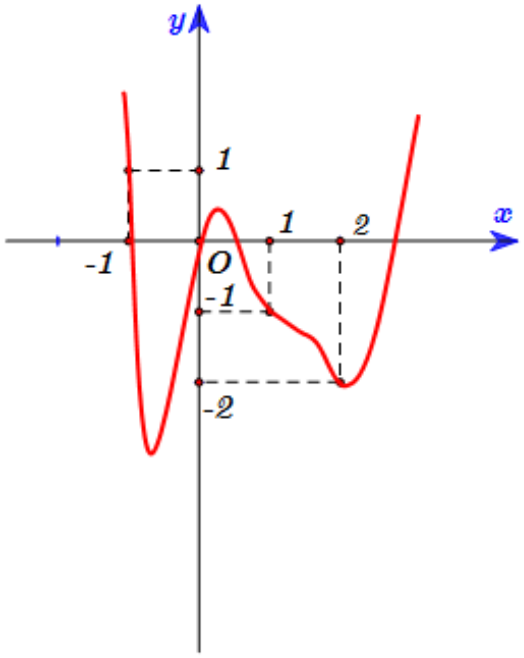
Câu 63: **(THPT-Gia-Lộc-Hải-Dương-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3)**Cho hàm số $f(x)$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $y=f(|3-x|)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(4;6)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(2;3)$.

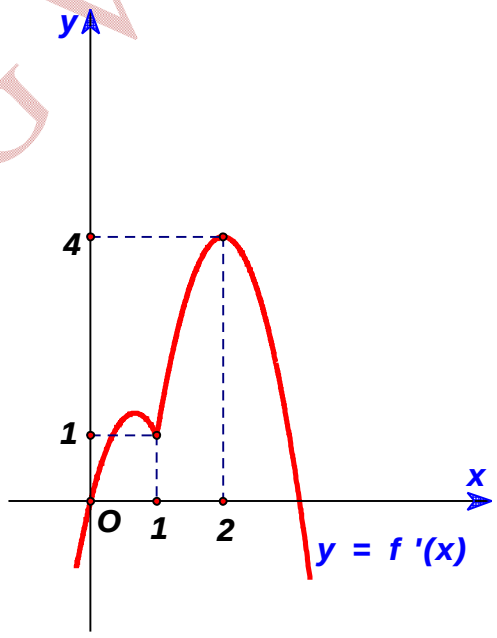
Câu 64: **(Chuyên Vinh Lần 2)**Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(0)=\frac{1}{2}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y=\left|2f(x+2)+(x+1)(x+3)\right|$ nghịch biến trên khoảng

A. $(-3;-2)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-\infty;-3)$. **D.** $(-2;-1)$.

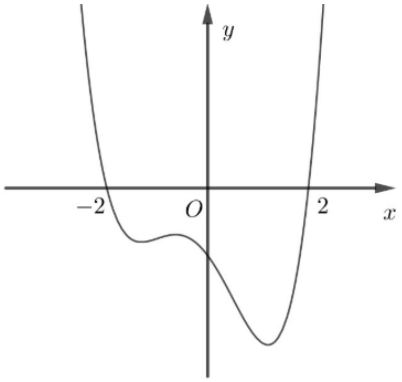
Câu 65: **(Chuyên Vinh Lần 2)**Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(0)=0$ và đồ thị hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y=\left|3f(x)-x^3\right|$ đồng biến trên khoảng

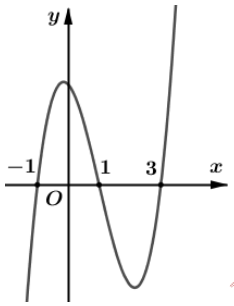
A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(1;3)$.

Câu 66: **(Đặng Thành Nam Đề 9)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Biết $f(-2)<0$, hàm số $y=\left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(-\sqrt[2018]{3};\sqrt[2018]{3}\right)$. **B.** $(-1;+\infty)$. **C.** $\left(-\infty;-\sqrt[2018]{3}\right)$. **D.** $\left(-\sqrt[2018]{3};0\right)$.

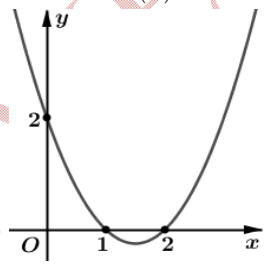
Câu 67: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $\left(-\infty;-1-2\sqrt{2}\right)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $\left(1;2\sqrt{2}-1\right)$. **D.** $\left(2\sqrt{2}-1;+\infty\right)$.

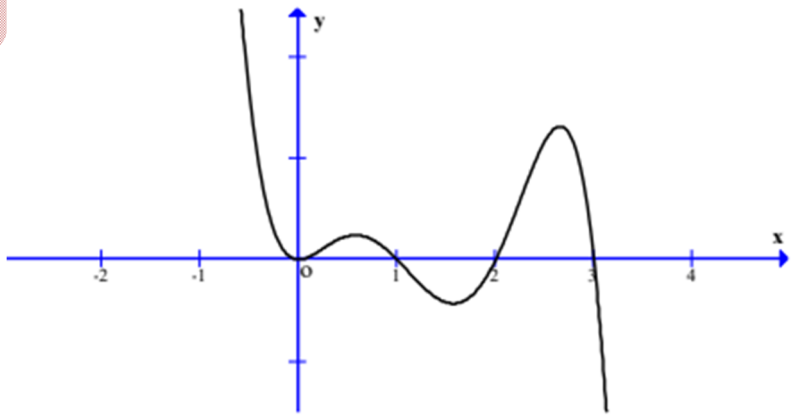
Câu 68: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Câu 69: **(Cụm THPT Vũng Tàu)** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Xét hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+5}-\sqrt{x^2+2x+4}\right)+2019$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

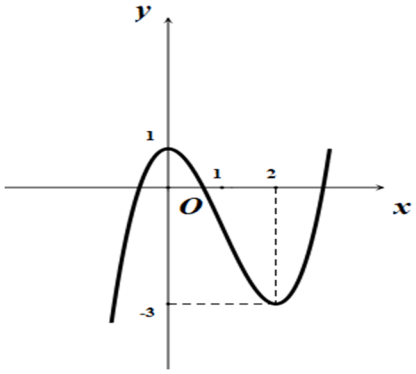
A. Hàm số $y=g(x)$ có giá trị nhỏ nhất là $f\left(2-\sqrt{3}\right)+2019$.

B. Hàm số $y=g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

C. Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

D. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

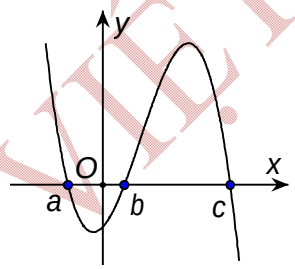
Câu 70: **(THTT số 3)** Cho hàm số $y=ax^3+3bx^2-2cx+d$ $(a,b,c,\mathrm{d}$ là hằng số, $a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y=\frac{a}{4}x^4+(a+b)x^3+(3b-c)x^2+(d-2c)x+d-2019$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 71: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a<b<c$ như hình vẽ.

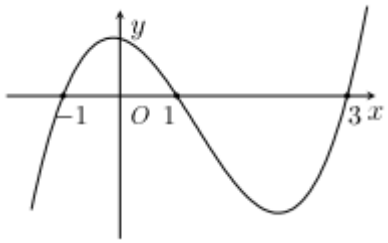


Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $f(c)>f(b)>f(a)$. **B.** $f(a)>f(b)>f(c)$.

C. $\left(f(b)-f(a)\right)\left(f(b)-f(c)\right)<0$. **D.** $f(c)+f(a)-2f(b)>0$.

Câu 72: **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định Lần 1)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên $m\in[-5;5]$ để hàm số $g(x)=f(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?



A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 73: **(CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – NAM ĐỊNH 2019 – LẦN 1)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ sau:

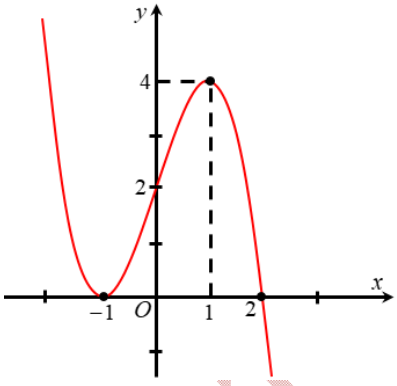
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

x	$-\infty$		-2		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Có bao nhiêu số nguyên $m\in(0;2020)$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2-x+m\right)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$?

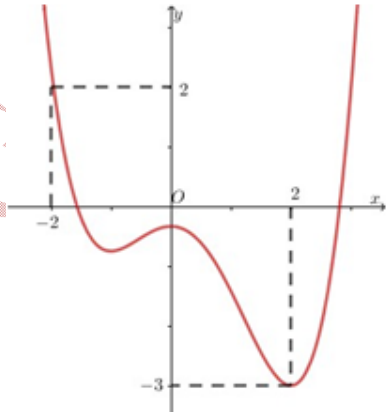
A. 2018. **B.** 2017. **C.** 2016. **D.** 2015.

Câu 74: **(Thị Xã Quảng Trị)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=f(x+1)+\frac{20}{m}\ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$?



A. 3 . **B.** 6 . **C.** 4 . **D.** 5 .

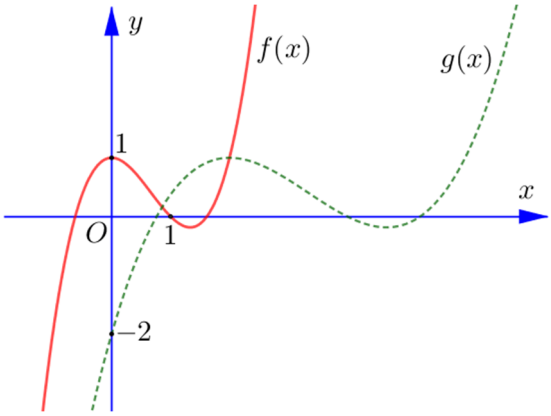
Câu 75: **(Thuận Thành 2 Bắc Ninh)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của $m\in(-20;20)$ để hàm số $g(x)=f\left(\frac{x^3}{4}\right)-\frac{m\left(x^2+4\right)^2}{20}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. 6 . **B.** 7 . **C.** 17 . **D.** 18 .

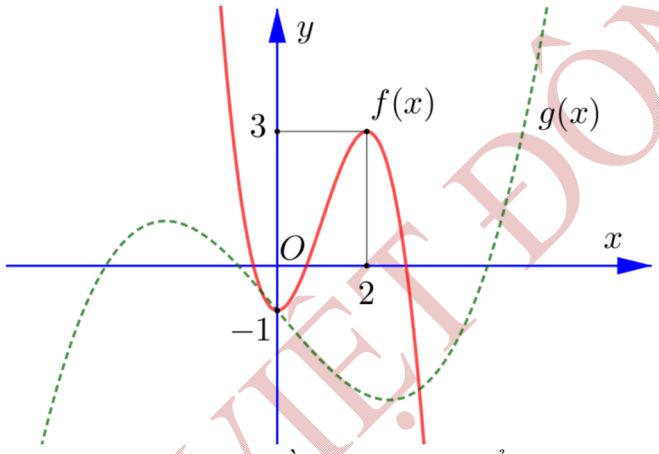
Câu 76: Cho hàm số $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ và $g(x)=f(mx+n)$ có đồ thị như hình vẽ:



Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng có độ dài bằng k, hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng có độ dài bằng $2k$. Giá trị biểu thức $2m+n$ là

A. 3. **B.** 0. **C.** -1. **D.** 5.

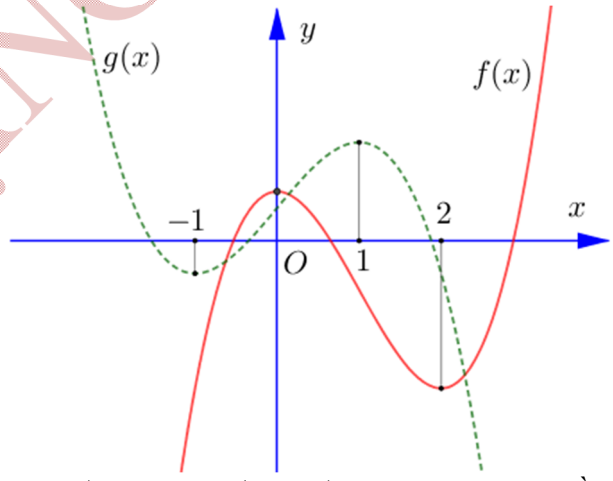
Câu 77: Cho hàm số bậc ba $f(x)$ và $g(x)=-f(mx+n)$, $(m;n\in\mathbb{Q})$ có đồ thị như hình vẽ:



Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng 5. Giá trị biểu thức $3m+2n$ là

A. -5. **B.** $-\frac{13}{5}$. **C.** $\frac{16}{5}$. **D.** 4.

Câu 78: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đồ thị như hình vẽ:

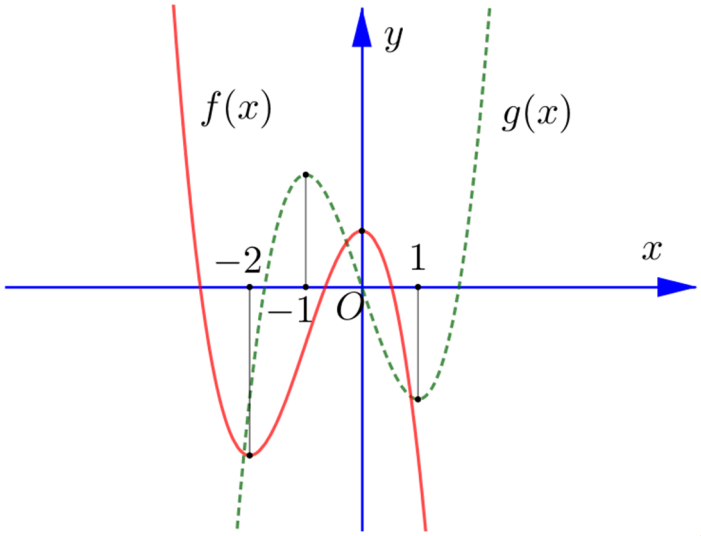


Biết rằng hai hàm số $y=f(-2x+1)$ và $y=3g(ax+b)$ có cùng khoảng đồng biến. Giá trị biểu thức $a+2b$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 6.

Câu 79: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đồ thị như hình vẽ:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Biết rằng hai hàm số $y=3f\left(3x-1\right)$ và $y=2g\left(ax+b\right)$ có cùng khoảng đồng biến. Giá trị biểu thức $2a+b$ là

A. 5. **B.** 2. **C.** -4. **D.** -6.

Câu 80: (ĐH Vinh Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y=f(\cos x)+x^2-x$ đồng biến trên khoảng

A. $(1;2)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;-1)$.

Câu 81: (ĐH Vinh Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y=f\left(\frac{3\cos x+4\sin x}{5}\right)+x^4-3x+2019$ đồng biến trên khoảng

A. $(1;2)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;-1)$.

DANG 3: SỰ ĐƠN ĐIỆU CHỨA THAM SỐ

Câu 1. (Hàm Rồng) Tìm tập hợp S tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=\frac{x^3}{3}+mx^2+(2m+3)x+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $[-1;3]$. **B.** $(-1;3)$. **C.** $(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$.

Câu 2. (THPT TX QUẢNG TRỊ LẦN 1 NĂM 2019) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left(m^2-9\right)x^3+\left(m-3\right)x^2-x+1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. 6. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 3. (Chuyên Sơn La Lần 3 năm 2018-2019) Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc đoạn $[-2018\,;\,2019]$ để hàm số $y=x^3-2x^2-(2m-5)x+5$ đồng biến trên khoảng $(0\,;+\infty)$?

A. 2020. **B.** 2022. **C.** 2021. **D.** 2019.

Câu 4. (TTHT Lần 4) Cho hàm số $f(x)=x^3-3mx^2+3(2m-1)x+1$. Với giá trị nào của m thì $f'(x)-6x>0$ với mọi $x\geq 2$?

A. $m>\frac{1}{2}$. **B.** $m<-\frac{1}{2}$. **C.** $m>1$. **D.** $m\leq 0$.

Câu 5. (Kim Liên) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số thực m nhỏ hơn 2020 để hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3+(m-1)x^2+(m+3)x-10$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$.

A. 2020 **B.** 2018 **C.** 2019 **D.** Vô số

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 6. (Sở Ninh Bình 2019 lần 2) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y=x^3-3x^2+3mx+2019$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$?

A. 10. **B.** 20. **C.** 11. **D.** 21.

Câu 7. (Sở Thanh Hóa 2019) Cho X là tập hợp tất cả các giá trị nguyên thuộc đoạn $[-5;5]$ của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx-2$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$. Số phần tử của X là

A. 3. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số:

$y=\frac{1}{3}mx^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+\frac{1}{3}$ đồng biến trên $[2;+\infty)$

A. $m\ge\frac{2}{3}$ **B.** $m\le 1$ **C.** $m\ge -1$ **D.** $m\le -1$

Câu 9. (TTHT Lần 4) Cho hàm số $f(x)=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$. Với giá trị nào của tham số m thì $f'(x)>0$ với mọi $x\ge -1$?

A. $m\in\left(-\frac{7}{3};+\infty\right)$ **B.** $m\in\left(-\infty;\frac{5}{4}\right)$ **C.** $m\in\left(-\frac{7}{3};\frac{5}{4}\right)$ **D.** $m\in\left(-\frac{7}{3};-1\right)\cup\left(-1;\frac{5}{4}\right)$.

Câu 10. (Quỳnh Lưu Lần 1) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;3]$ để hàm số $y=-x^3-6x^2+(m-9)x+2019$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 9. **B.** 13. **C.** 8. **D.** 14.

Câu 11. Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x+2017$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ sao cho $b-a>3$ là

A. $m>6$. **B.** $m=9$. **C.** $m<0$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m<0\\m>6\end{array}\right.$.

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2+2mx-3m+4$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài là 3?

A. $m=-1;m=9$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=9$. **D.** $m=1;m=-9$.

Câu 13. (THPT-Ngô-Quyền-Hải-Phòng-Lần-2-2018-2019-Thi-24-3-2019) Biết hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+3(m-1)x^2+9x+1$ nghịch biến trên khoảng $(x_1;x_2)$ và đồng biến trên các khoảng còn lại của tập xác định. Nếu $|x_1-x_2|=6\sqrt{3}$ thì có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m thỏa mãn đề bài?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 14. (Chuyên Hùng Vương Gia Lai) Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số thực m để hàm số $y=-x^3+3x^2+(m-1)x+2m-3$ đồng biến trên đoạn có độ dài lớn hơn 1?

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 15. Tìm tham số m để hàm số $y=x^3+3mx^2+3(m+1)x+2$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài lớn hơn 4.

A. $m<\frac{1-\sqrt{21}}{2}$ **B.** $m<\frac{1-\sqrt{21}}{2}$ hoặc $m>\frac{1+\sqrt{21}}{2}$

C. $m>\frac{1+\sqrt{21}}{2}$ **D.** $\frac{1-\sqrt{21}}{2}<m<\frac{1+\sqrt{21}}{2}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^4-2(m-1)x^2+m-2$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$?

A. $m\in[-5;2)$. **B.** $m\in(-\infty;2]$. **C.** $m\in(2,+\infty)$. **D.** $m\in(-\infty;-5)$.

Câu 17. (SỞ GDĐT KIÊN GIANG 2019) Cho hàm số $y=\frac{x^4}{4}-\frac{mx^3}{3}+\frac{x^2}{2}-mx+2019$ (m là tham số). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(6;+\infty)$. Tính số phần tử của S biết rằng $|m|\le 2020$.

A. 4041. **B.** 2027. **C.** 2026. **D.** 2015.

Câu 18. (Đặng Thành Nam Đề 2) Có bao nhiêu số thực m để hàm số $y=(m^3-3m)x^4+m^2x^3-mx^2+x+1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. 3. **B.** 1. **C.** Vô số. **D.** 2.

Câu 19. (PHÂN-TÍCH-BL-VÀ-PT-ĐẠI-HỌC-SP-HÀ-NỘI) Gọi S là tập hợp các số thực m thỏa mãn hàm số $y=mx^4+x^3-(m+1)x^2+9x+5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Số phần tử của S là

A. 3 **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 20. (Triệu Thái Vĩnh Phúc Lần 3) Số giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2018;2018]$ để hàm số $y=x^4+mx^2-m-2$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ là

A. 2019. **B.** 2018. **C.** 2021. **D.** 2020.

Câu 21. (THPT-Nguyễn-Công-Trứ-Hà-Tĩnh-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^4-2(m-1)x^2+m-2$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$?

A. $m\in[-5;2)$. **B.** $m\in(-\infty;2]$. **C.** $m\in(2;+\infty)$. **D.** $m\in(-\infty;-5)$.

Câu 22. (THPT-Ngô-Quyền-Hải-Phòng-Lần-2-2018-2019-Thi-24-3-2019) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^4+(2+m)x^2+4+2m$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

A. $m\le -4$. **B.** $m<-4$. **C.** $m\ge -2$. **D.** $m>-2$.

Câu 23. (Trần Đại Nghĩa) Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=-x^4+(2m-3)x^2+m$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ là $\left(-\infty;\frac{p}{q}\right]$, trong đó phân số $\frac{p}{q}$ tối giản và $q>0$. Hỏi tổng $p+q$ là?

A. 7. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 9.

Câu 24. (Đặng Thành Nam Đề 12) Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=m^2x^4-2(4m-1)x^2+1$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

A. 7. **B.** 16. **C.** 15. **D.** 6.

Câu 25. (THPT ISCHOOL NHA TRANG) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\frac{1}{5}m^2x^5-\frac{1}{3}mx^3+10x^2-(m^2-m-20)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** -2. **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số: $y=\frac{mx+1}{x+m}$ luôn đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

A. $m\le 1$ hoặc $m\ge -1$. **B.** $m<-1$ hoặc $m>1$.

C. $m\le 2$ hoặc $m\ge -1$. **D.** $m\le 2$ hoặc $m\ge 1$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 27. (SỞ GD & ĐT CÀ MAU) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx+1}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-3)$.

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 28. (Nam Tiền Hải Thái Bình Lần1) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+m^2}{x+4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 29. (Chuyên Phan Bội Châu Lần2) Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{(m+1)x+2m+2}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$ là

A. $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $[1;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 30. (THPT SỐ 1 TƯ NGHĨA LẦN 2 NĂM 2019) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)=\dfrac{(m-2)x+9}{x+m-2}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$. Số phần tử của tập S là:

A. 4. **B.** 2. **C.** Vô số. **D.** 3.

Câu 31. Hàm số $y=\dfrac{x^2-4x}{x+m}$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ thì giá trị của m là:

A. $m\in\left(-\dfrac{1}{2};2\right]\setminus\{-1\}$. **B.** $m\in(-1;2]\setminus\{-1\}$. **C.** $m\in\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $m\in\left(-1;\dfrac{1}{2}\right]$.

Câu 32. (Thanh Chương Nghệ An Lần 2) Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ là

A. $\left(-\infty;-\dfrac{8}{5}\right)$. **B.** $\left[-3;-\dfrac{8}{5}\right]$. **C.** $\left(-\dfrac{8}{5};+\infty\right)$. **D.** $\left[-\dfrac{8}{5};+\infty\right)$.

Câu 33. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{2x^2+(1-m)x+1+m}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 34. (Chuyên Thái Nguyên) Số các giá trị nguyên của tham số $m\in[-2019;2019]$ để hàm số $y=\dfrac{(m+1)x^2-2mx+6m}{x-1}$ đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$?

A. 2034. **B.** 2018. **C.** 2025. **D.** 2021.

Câu 35. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2+x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-3;-2]$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $(-\infty;-2]$.

Câu 36. (HSG Bắc Ninh) Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y=x^3+mx-\dfrac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 12. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 37. Tìm m để hàm số sau đồng biến trên $\mathbb{R}$: $y=\dfrac{2}{3}e^{3x}-me^{x}+4x-2018$.

A. $m\ge -6$ **B.** $m\le 6$ **C.** $m\le -5$ **D.** $m\ge 6$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 38. (Chuyên Vinh Lần 3) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-2019;2019)$ để hàm số $y=\sin^3 x-3\cos^2 x-m\sin x-1$ đồng biến trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

A. 2028. **B.** 2018 **C.** 2020. **D.** 2019.

Câu 39. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\sin x+\cos x+mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-\sqrt{2}\le m\le\sqrt{2}$. **B.** $m\le-\sqrt{2}$. **C.** $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$. **D.** $m\ge\sqrt{2}$.

Câu 40. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=(m-3)x-(2m+1)\cos x$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $-4\le m\le\dfrac{2}{3}$. **B.** $m\ge 2$. **C.** $\begin{cases}m>3\\ m\ne 1\end{cases}$. **D.** $m\le 2$.

Câu 41. Cho hàm số $y=(2m-1)x-(3m+2)\cos x$. Gọi X là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Tổng giá trị hai phần tử nhỏ nhất và lớn nhất của X bằng

A. -4. **B.** -5. **C.** -3. **D.** 0.

Câu 42. (THANH CHƯƠNG 1 NGHỆ AN 2019 LẦN 3) Cho hàm số $y=-2\sin^3 x+3\sin^2 x+6(2m-1)\sin x+2019$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m thuộc khoảng $(-2016;2019)$ để hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$?

A. 2019. **B.** 2017. **C.** 2021. **D.** 2018.

Câu 43. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{m\cos x-4}{\cos x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right)$

A. $1\le m<2$. **B.** $\begin{cases}-2<m\le 0\\ \dfrac{1}{2}\le m<2\end{cases}$. **C.** $m\ge 2$. **D.** $-2<m\le 0$.

Câu 44. (KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG) Tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{2\cos x-1}{\cos x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ là

A. $m>1$. **B.** $m>\dfrac{1}{2}$. **C.** $m\ge\dfrac{1}{2}$. **D.** $m\ge 1$.

Câu 45. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số: $y=\dfrac{\tan x-2}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$

A. $m\le 0$ hoặc $1\le m<2$. **B.** $m\le 0$.
C. $1\le m<2$. **D.** $m\ge 2$.

Câu 46. (Lý Nhân Tông) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-19;19)$ để hàm số $y=\dfrac{\tan x-3m+3}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

A. 17. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 9.

Câu 47. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{\cot x-1}{m\cot x-1}$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$

.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $m\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$. **B.** $m\in(-\infty;0)$.

C. $m\in(1;+\infty)$. **D.** $m\in(-\infty;1)$.

Câu 48. (Hoàng Hoa Thám Hưng Yên) Cho hàm số $y=\dfrac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong khoảng $(-10;10)$ sao cho hàm số đồng biến trên khoảng $(-8;5)$?

A. 14. **B.** 13. **C.** 12. **D.** 15.

Câu 49. (KHTN Hà Nội Lần 3) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x+m\sqrt{x^2+2}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 50. (Đặng Thành Nam Đề 9) Hàm số $y=\dfrac{2x+m}{\sqrt{x^2+1}}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi?

A. $m\le 0$. **B.** $m<0$. **C.** $m\le 2$. **D.** $m<2$.

Câu 51. (CHUYÊN THÁI BÌNH – L4) Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y=\left(m-x^3\right)\sqrt{1-x^3}$ đồng biến trên $(0;\,1)$.

A. $m\ge -2$. **B.** $m\le -2$. **C.** $m>1$. **D.** $m<1$.

Câu 52. Tập tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $m\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+3\right)+2\sqrt{1-x^2}-5=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt là một nửa khoảng $(a;b]$. Tính $b-\dfrac{5}{7}a$.

A. $\dfrac{6-5\sqrt{2}}{35}$ **B.** $\dfrac{6-5\sqrt{2}}{7}$. **C.** $\dfrac{12-5\sqrt{2}}{35}$ **D.** $\dfrac{12-5\sqrt{2}}{7}$.

Câu 53. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2\left(x^2+mx+9\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $g(x)=f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 54. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-1)\left(x^2+mx+5\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x)=f\left(x^2\right)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 55. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2\left(3x^4+mx^3+1\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x)=f\left(x^2\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 56. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2\left(x^2-2x\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m<100$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2-8x+m\right)$ đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$?

A. 18. **B.** 82. **C.** 83. **D.** 84.

Câu 57. (Nguyễn Khuyến) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-2)\left(x^2-6x+m\right)$ với mọi $x\in R$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $g(x)=f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$?

A. 2012. **B.** 2011. **C.** 2009. **D.** 2010.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 58. (Sở Đà Nẵng 2019) Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{6}x^3+ax^2+bx+c$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $f(0)=f(1)=f(2)$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của c để hàm số $g(x)=f\left(f\left(x^2+2\right)\right)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ là

A. 1. **B.** $1-\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $1+\sqrt{3}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

I – LÝ THUYẾT CHUNG

1 - Khái niệm cực trị của hàm số

Giả sử hàm số f xác định trên tập $D\left(D\subset\mathbb{R}\right)$ và $x_0\in D$.

a) x_0 là điểm cực đại của f nếu tồn tại khoảng $\left(a;b\right)\subset D$ và $x_0\in\left(a;b\right)$ sao cho $f\left(x\right)<f\left(x_0\right),\in\left(a;b\right)\setminus\left\{x_0\right\}$

Khi đó $f\left(x_0\right)$ được gọi là giá trị cực đại (cực đại) của f.

b) x_0 là điểm cực tiểu của f nếu tồn tại khoảng $\left(a;b\right)\subset D$ và $x_0\in\left(a;b\right)$ sao cho $f\left(x\right)>f\left(x_0\right),\in\left(a;b\right)\setminus\left\{x_0\right\}$

Khi đó $f\left(x_0\right)$ được gọi là giá trị cực tiểu (cực tiểu) của f.

c) Nếu $f\left(x_0\right)$ được gọi là cực trị của f thì điểm $\left(x_0;f\left(x_0\right)\right)$ được gọi là điểm cực trị của đồ thị hàm số f.

2 - Điều kiện cần để hàm số có cực trị

Nếu hàm số f có đạo hàm tại x_0 và đạt cực trị tại điểm đó thì $f'\left(x_0\right)=0$.

Chú ý: Hàm số f chỉ có thể đạt cực trị tại những điểm mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm.

3 - Điều kiện đủ để hàm số có cực trị.

Định lí 1: giả sử hàm số f liên tục trên khoảng $\left(a;b\right)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên $\left(a;b\right)\setminus\left\{x_0\right\}$

a) Nếu $f'\left(x\right)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua x_0 thì f đạt cực tiểu tại x_0

b) Nếu $f'\left(x\right)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua x_0 thì f đạt cực đại tại x_0.

Định lí 2: Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng $\left(a;b\right)$ chứa điểm x_0, $f'\left(x_0\right)=0$ và có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0.

*) Nếu $f''\left(x_0\right)<0$ thì f đạt cực đại tại x_0.

*) Nếu $f''\left(x_0\right)>0$ thì f đạt cực tiểu tại x_0.

4 - Kiến thức cần nhớ:

a) Khoảng cách giữa hai điểm A, B $AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$

b) Khoảng cách từ điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ đến đường thẳng $\Delta:ax+by+c=0$:

$$d\left(M,\Delta\right)=\frac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

c) Diện tích tam giác ABC:

$$S=\frac{1}{2}AB.AC.\sin A=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2-\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Tích vô hướng của hai vecto $\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ với $\vec{a}=(a_1;a_2);\vec{b}=(b_1;b_2)$.

Chú ý: $\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$.

II - HÀM BẬC BA

1 - Cực trị của hàm số

Xét hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$.

□ $b^2-3ac\le 0$ hàm số **không** có điểm cực trị.

□ $\begin{cases}b^2-3ac>0\\a=0\end{cases}$ hàm số có duy nhất một điểm cực trị.

□ $\begin{cases}b^2-3ac>0\\a\neq 0\end{cases}$ hàm số có hai điểm cực trị x_1,x_2 là nghiệm của phương trình:

Với $y'=0\Leftrightarrow 3ax^2+2bx+c=0$, có $x_1+x_2=\dfrac{-2b}{3a}$, $x_1.x_2=\dfrac{c}{3a}\Rightarrow|x_1-x_2|=\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{b^2-3ac}{a^2}}$.

Khi đó:

□ Đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $d:y=\dfrac{2}{3}\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)x+d-\dfrac{bc}{9a}$.

□ Hệ số góc của đường thẳng qua hai điểm cực trị là $k=\dfrac{2}{3}\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)$.

□ Tọa độ 2 điểm cực trị là $A\left(x_1;\dfrac{2}{3}\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)x_1+d-\dfrac{bc}{9a}\right)$, $B\left(x_2;\dfrac{2}{3}\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)x_2+d-\dfrac{bc}{9a}\right)$.

□ Độ dài đoạn thẳng AB là $\sqrt{1+\dfrac{4}{9}\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)^2}\,|x_1-x_2|$.

□ Diện tích tam giác OAB là $S=\dfrac{1}{2}\left|\left(d-\dfrac{bc}{9a}\right)(x_1-x_2)\right|$.

□ Trung điểm I của AB cũng chính là điểm uốn của đồ thị hàm số, tức hoành độ của I là nghiệm của phương trình $y''=0$, vì vậy $I\left(-\dfrac{b}{3a};d-\dfrac{bc}{3a}+\dfrac{2b^3}{27a^2}\right)$.

2 - Các dạng toán hay gặp:

□ $AB\perp\Delta\Leftrightarrow k.k_\Delta=-1$

□ $AB//\Delta\Rightarrow k=k_\Delta$

□ $(AB,\Delta)=\alpha\Leftrightarrow\tan\alpha=\left|\dfrac{k-k_\Delta}{1+k.k_\Delta}\right|$

□ A,B cách đều $\Delta\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}AB//\Delta\\I\in\Delta\end{array}\right.$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

□ >> **Cụ thể:** $AB//\Delta$ (A,B nằm cùng phía Δ); $I\in\Delta$ (A,B nằm về hai phía với Δ).

□ A,B đối xứng $\Delta\Leftrightarrow\begin{cases}I\in\Delta\\k.k_{\Delta}=-1\end{cases}$.

□ A,B nằm về hai phía trục hoành $\Leftrightarrow y=0$ có ba nghiệm phân biệt

□ ΔABC cân tại $C\Leftrightarrow\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AB}=0$

□ ΔABC đều $\Leftrightarrow\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AB}=0, CI=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AB$

□ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=ax^3+bx^2+cx+d$ và trục hoành chia thành hai phần, phần phía trên trục hoành và phần phía dưới trục hoành và chúng có diện tích bằng nhau khi và chỉ khi tâm đối xứng thuộc trục hoành, tức $y\left(-\dfrac{b}{3a}\right)=0\Leftrightarrow d-\dfrac{bc}{3a}+\dfrac{2b^3}{27a^2}=0$.

3 - Thủ thuật casio (tham khảo) viết phương trình đường thẳng qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số

*** Chú ý:** có $y''=6ax+2b\Rightarrow y=\dfrac{y'.y''}{18a}+\dfrac{2}{3}\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)x+d-\dfrac{bc}{9a}$

Suy ra $\dfrac{2}{3}\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)x+d-\dfrac{bc}{9a}=y-\dfrac{y'.y''}{18a}$

Do đó bằng máy tính ta có thể tìm nhanh được đường thẳng đi qua hai điểm cực trị hàm số bằng cách

MODE 2 (Vào môi trường số phức)

Nhập biểu thức $y-\dfrac{y'.y''}{18a}$

Calc với $x=i$, **(CALC ENG)**

Ta được kết quả là $mi+n$, khi đó đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y=mx+n$.

III - HÀM TRÙNG PHƯƠNG

1 - Cực trị của hàm số

Xét hàm số $y=ax^4+bx^2+c$

□ Với điều kiện $ab<0$ hàm số có 3 cực trị.

□ Khi hàm số có 3 điểm cực trị thì 3 điểm cực trị là $0;-\sqrt{-\dfrac{b}{2a}};\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$.

□ Tọa độ 3 điểm cực trị tương ứng của đồ thị hàm sô là: $\begin{cases}A(0;c)\\B\left(-\sqrt{\dfrac{-b}{2a}};c-\dfrac{b^2}{4a}\right);C\left(\sqrt{\dfrac{-b}{2a}};c-\dfrac{b^2}{4a}\right)\end{cases}$

Nhận xét: tam giác ABC cân tại A, có $A\in Oy$; $AB=AC=\sqrt{\dfrac{b^4-8ab}{16a^2}}$; $BC=\sqrt{\dfrac{-b}{2a}}$

□ Các điểm cực trị đồ thị hàm số thuộc các trục tọa độ $\Leftrightarrow b^2=4ac$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

□ Điểm $(0;y_0)$ là trọng tâm tam giác $ABC \Leftrightarrow 3y_0 = 3c - \frac{b^2}{2a}$.

□ Điểm $(0;y_0)$ là trực tâm tam giác $ABC \Leftrightarrow y_0 - c = -\frac{8a+b^3}{4ab}$.

□ Điểm $(0;y_0)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Leftrightarrow y_0 - c = \frac{8a-b^3}{4ab}$.

Do đó $\cos\widehat{BAC} = \frac{b^3+8a}{b^3-8a}(*)$ và $S_{\Delta ABC} = \sqrt{\frac{-b^5}{32a^3}}$

□ Tam giác ABC vuông tại $A \Leftrightarrow \cos\widehat{BAC} = 0 \Leftrightarrow b^3 = -8a$.

□ Tam giác ABC đều $\Leftrightarrow \cos\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b^3 = -24a$.

□ Tam giác ABC có một góc bằng $120°$ $\Leftrightarrow \cos\widehat{BAC} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3b^3 = -8a$

Lưu ý, chỉ cần nhớ công thức $(*)$ để suy ra 3 trường hợp đặc biệt trên.

□ Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = \left|\frac{b^3-8a}{8ab}\right|$.

□ Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là $r = \frac{b^2}{|a|\left(4+\sqrt{16-\frac{2b^3}{a}}\right)}$.

Xét hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$.

2 - Giao điểm với trục hoành

Với $ab<0; ac>0; b^2-4ac>0$ đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt, khi đó:

□ Hoành độ 4 giao điểm lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow 9b^2 = 100ac$.

□ Cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt, tạo thành 3 đoạn thẳng có độ dài bằng nhau $\Leftrightarrow 9b^2 = 100ac$

□ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và trục hoành có phần phía trên Ox và phần phía dưới Ox bằng nhau $5b^2 = 36ac$.

IV – CÁC DẠNG TOÁN

DANG 1: TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ CHO BỞI CÔNG THỨC

Câu 1.(THPT Nghèn Lần 1) Trên khoảng $(0;\pi)$, hàm số $f(x) = x + 2\cos x$ đạt cực tiểu tại

A. $x = \frac{\pi}{6}$. **B.** $x = \frac{\pi}{3}$. **C.** $x = \frac{5\pi}{6}$. **D.** $x = \frac{2\pi}{3}$.

Câu 2. (Hội các trường chuyên 2019 lần 3) Hỏi hàm số $y = |\sin 2x + x|$ có bao nhiêu điểm cực trị trên $(-\pi;\pi)$?

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 7.

Câu 3.(Nguyễn Trãi Hải Dương Lần1) Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|\sin x-\frac{x}{4}\right|$, $x\in(-\pi;\pi)$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 4.Gọi A,B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+5$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB.

A. $R=5$. **B.** $R=\sqrt{5}$. **C.** $R=10$. **D.** $R=2\sqrt{5}$.

Câu 5. [THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - PHÚ THỌ 2018 - LẦN 1] Đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị $A(1;-7),B(2;-8)$. Tính $y(-1)$?

A. $y(-1)=7$. **B.** $y(-1)=11$. **C.** $y(-1)=-11$. **D.** $y(-1)=-35$

Câu 6. (Nam Tiền Hải Thái Bình Lần1) Cho hàm số $y=x^4-2x^2+1$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác, gọi là ΔABC. Tính diện tích ΔABC.

A. $S=2$. **B.** $S=1$. **C.** $S=\frac{1}{2}$. **D.** $S=4$.

Câu 7. (Nguyễn Du Dak-Lak 2019) Gọi A, B, C là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng

A. $\sqrt{2}+1$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{2}-1$. **D.** 1.

Câu 8. Cho hàm số $y=3x^4-6x^2+2$ có đồ thị (C). Gọi A là điểm cực đại của (C); B, C la hai điểm cực tiểu của (C). Gọi d là đưởng thẳng qua A; S la tổng khoảng cách từ B, C đến d. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của S.

A. $4+\frac{4\sqrt{5}}{5}$. **B.** $6+\frac{3\sqrt{10}}{5}$. **C.** $4+4\sqrt{5}$. **D.** $2+\sqrt{2}$.

Câu 9. (THPT Nghèn Lần1) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(3-x)(x^2-1)+2x,\forall x\in\mathbb{R}$. Hỏi hàm số $y=f'(x)-x^2-1$ có bao nhiêu điểm cực tiểu.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 10. (ĐỀ THI CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH KSCL HK1 2018) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-1)(x-4)^2$. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y=f(x^2)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2

Câu 11. (Ba Đình Lần2) Cho hàm số $y=f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2;-1;0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y=f(x^2-2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 12. (Nam Tiền Hải Thái Bình Lần1) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^2-1)(x-4)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(3-x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-2x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(x^2-8x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-1)^2(x-2)+1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$g(x)=f(x)-x$ đạt cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 3, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x).f'''(x)=x(x-1)^2(x+4)^3$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=\left[f'(x)\right]^2-2f(x).f''(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2+f(x)f''(x)=15x^4+12x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(x).f'(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 17. (KIM LIÊN HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 03) Cho hàm số $f(x)=x^2(x-1)e^{3x}$ có một nguyên hàm là hàm số $F(x)$. Số điểm cực trị của hàm số $F(x)$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 18. (Nguyễn Trãi Hải Dương Lần1) Số điểm cực trị của hàm số $f(x)=\int_{2x}^{x^2}\frac{2tdt}{1+t^2}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 19. (Đặng Thành Nam Đề 15) Biết rằng đồ thị hàm số $y=\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{1}{x}$ có ba điểm cực trị thuộc một đường tròn (C). Bán kính của (C) gần đúng với giá trị nào dưới đây?

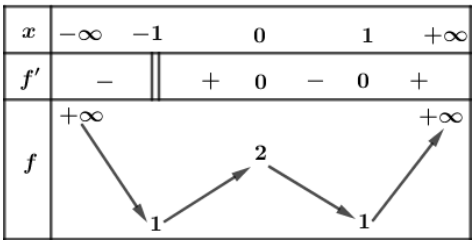
A. 12,4. **B.** 6,4. **C.** 4,4. **D.** 27.

Câu 20. Cho hàm số $y=|x|^3-mx+5$, m là tham số. Hỏi hàm số đã cho có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

DANG 2: TÌM CỰC TRỊ DỰA VÀO BBT, ĐỒ THỊ DỰA VÀO BBT

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau ?

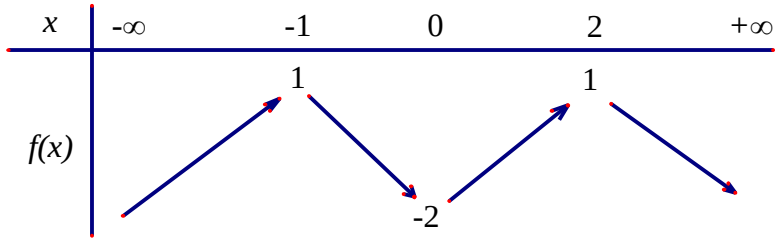


Hàm số $g(x)=3f(x)+1$ đạt **cực tiểu** tại điểm nào sau đây ?

A. $x=-1$. **B.** $x=1$. **C.** $x=\pm1$. **D.** $x=0$.

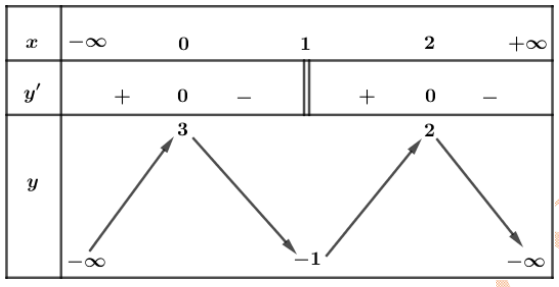
Câu 2. (ĐH Vinh Lần 1) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(-x+3)$ đạt cực đại tại

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



A. $x=-1$ **B.** $x=2$. **C.** $x=0$. **D.** $x=3$.

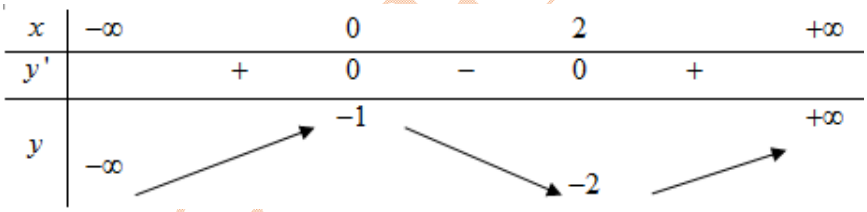
Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau ?



Hàm số $g(x)=f(3-x)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 4. Suy ra hàm số $y=f(-x+3)$ đạt cực đại tại $-x+3=0$ hay Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau



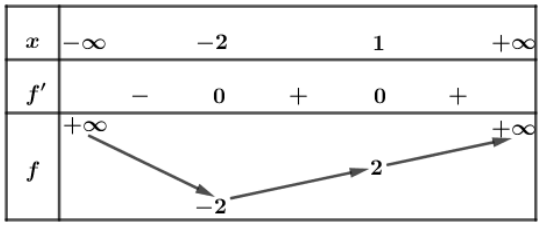
Có bao nhiêu mệnh đề **đúng** trong số các mệnh đề sau đối với hàm số $g(x)=f(2-x)-2$?

(I) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-4;-2)$. (II) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

(III) Hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại điểm -2.(IV) Hàm số $g(x)$ có giá trị cực đại bằng -3.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

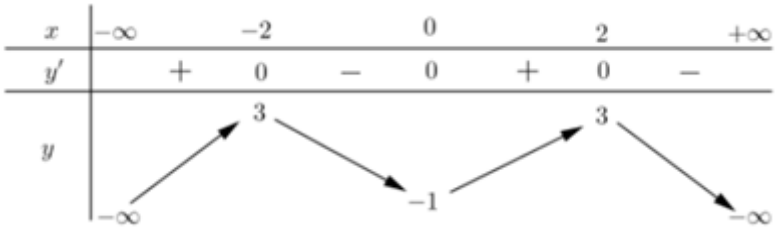
Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau ?



Hàm số $g(x)=f(x^2+1)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:



Hàm số $y=f\left(x^2-2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;0)$ **B.** $(2;+\infty)$ **C.** $(0;2)$ **D.** $(-\infty;-2)$

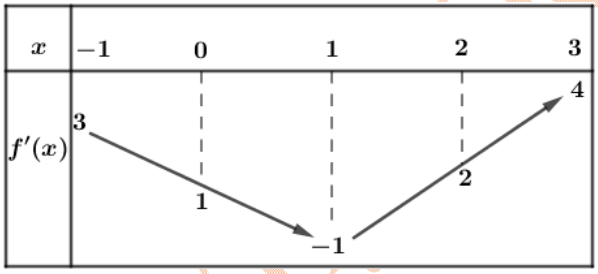
Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $y=f'(x)$ như sau.

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ có bao nhiêu điểm **cực tiểu**.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $g(x)=f\left(1-\frac{x}{2}\right)+x$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-4;-2)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;4)$.

Câu 9. (Thuận Thành 2 Bắc Ninh) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hỏi hàm số $g(x)=f(1-x)+\frac{x^3}{3}-x^2-3x$ đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây?

A. $x=-1$. **B.** $x=3$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-3$.

Câu 10. (Sở Phú Thọ) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		-2		-1		-2		$+\infty$

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=2f^3(x)+4f^2(x)+1$ là

A. 4. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 11. (Cổ Loa Hà Nội) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm

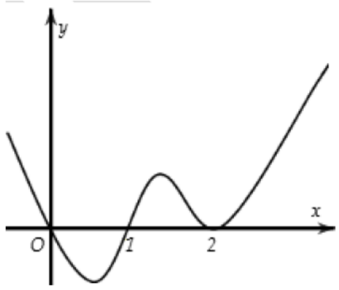
x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=3f(-x^4+4x^2-6)+2x^6-3x^4-12x^2$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

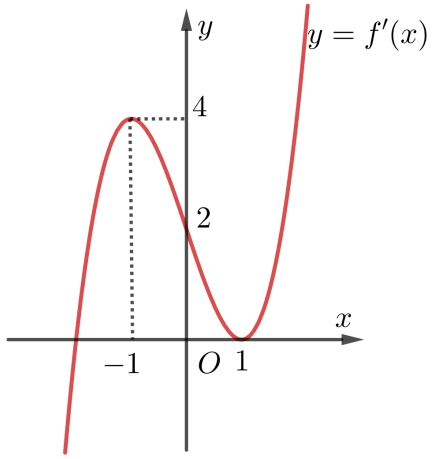
DỰA VÀO ĐỒ THỊ

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị của $y=f'(x)$ như hình vẽ sau. Xác định số điểm cực trị của hàm $y=f(x)$.



A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

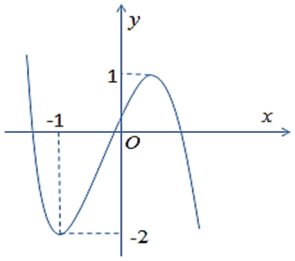
Câu 13. (Ngô Quyền Hà Nội) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)-5x$ là

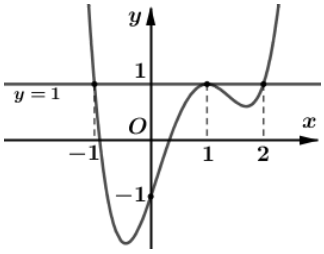
A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)+2x$ là



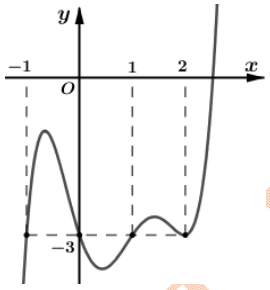
A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau. Đặt $g(x)=f(x)+x$. Tìm số cực trị của hàm số $g(x)$?



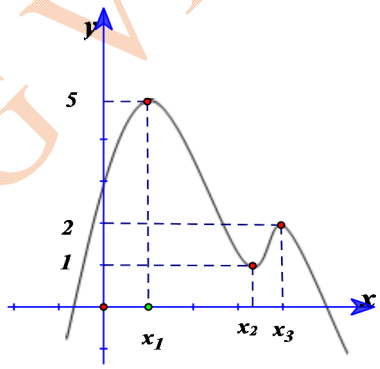
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi hàm số $g(x)=f(x)+3x$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



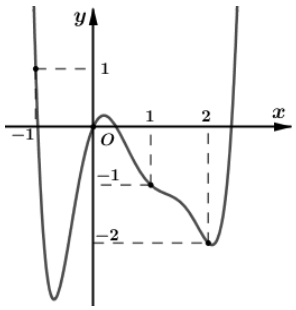
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 7.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=g(x)=f(x)+\dfrac{2017-2018x}{2017}$ có bao nhiêu cực trị?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

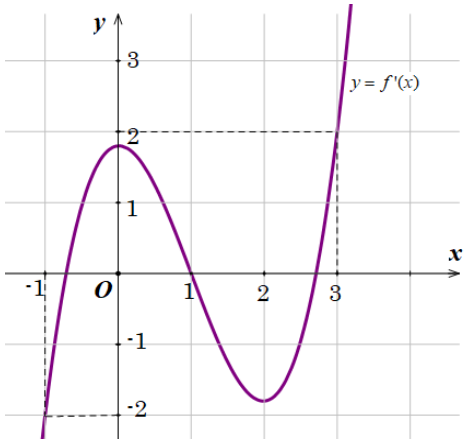
Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x)=2f(x)+x^2$ đạt cực tiểu tại điểm



A. $x=-1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 19. (CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 3) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2+x+1$. Biết đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Khẳng định nào sau đây **đúng ?**

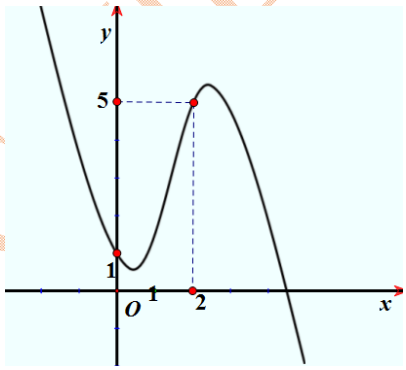
A. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.

B. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 2 điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.

C. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại.

D. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.

Câu 20. (SGD-Nam-Định-2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên.



Khẳng định nào dưới đây đúng ?

A. Hàm số $y=f(x)-x^2-x+2019$ đạt cực đại tại $x=0$.

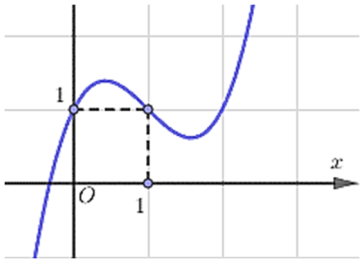
B. Hàm số $y=f(x)-x^2-x+2019$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

C. Hàm số $y=f(x)-x^2-x+2019$ không có cực trị.

D. Hàm số $y=f(x)-x^2-x+2019$ không có cực trị tại $x=0$.

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ.

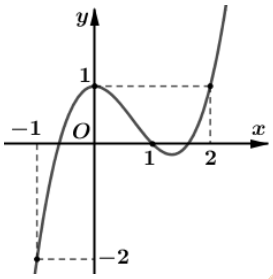
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Số điểm **cực tiểu** của hàm số $g(x)=f(x)-\frac{1}{9}x^3$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

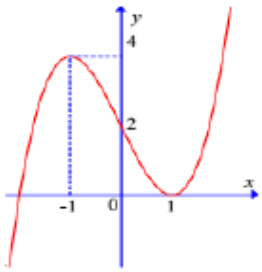
Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $g(x)=f(x)-\frac{x^3}{3}+x^2-x+2$ đạt cực đại tại

A. $x=-1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

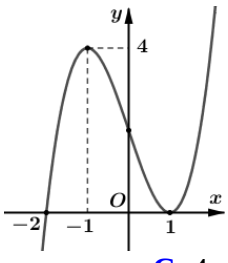
Câu 23. (Văn Giang Hưng Yên) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x-2018)-2019x+1$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ và đồ thị hình bên là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^2-3)$.

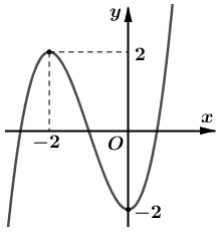


A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Hàm số $g(x)=f(-x^2+3x)$ có bao nhiêu điểm **cực đại**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ có **đúng** ba điểm cực trị là $-2;-1;0$. Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

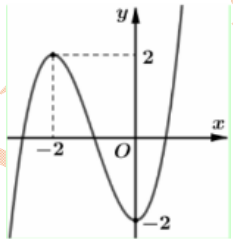
Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm $f'(x)$ như sau :

x	$-\infty$	-2		1		3	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Hỏi hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x\right)$ có bao nhiêu điểm **cực tiểu** ?

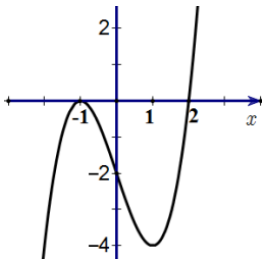
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm $f'(x)$ như đồ thị hình bên dưới. Hỏi hàm số $g(x)=f\left(-x^2+3x\right)$ có bao nhiêu điểm **cực đại** ?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



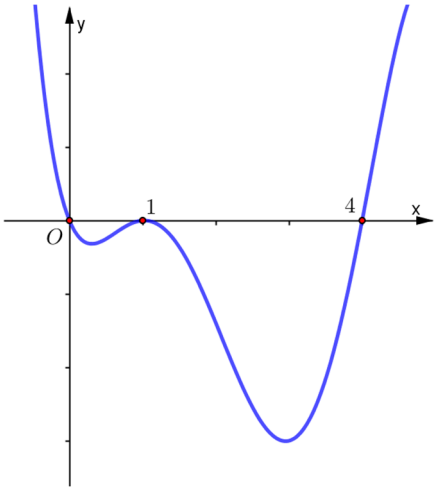
Xét hàm số $g(x)=f(x^2-2x-1)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số có sáu cực trị. **B.** Hàm số có năm cực trị.

C. Hàm số có bốn cực trị. **D.** Hàm số có ba cực trị.

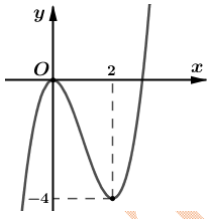
Câu 30. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đồ thị đạo hàm như hình vẽ. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f\left(x^3\right)$ là:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



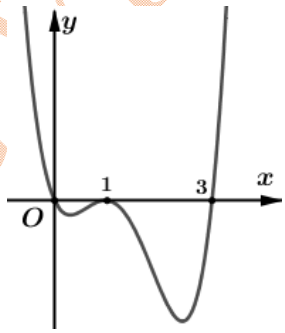
A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Hàm số $g(x)=f(f(x))$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 32. (Chuyên Thái Nguyên) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.

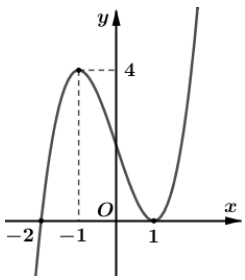


Khi đó đồ thị hàm số $y=[f(x)]^2$ có

A. 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu **B.** 3 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.

C. 1 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu. **D.** 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0)<0$, đồng thời đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới



ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

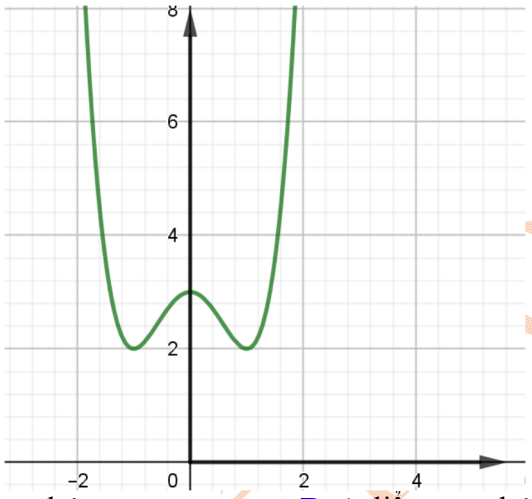
Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f^2(x)$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Đồ thị của hàm số $y=\left(f(x)\right)^3$ có bao nhiêu điểm cực trị?

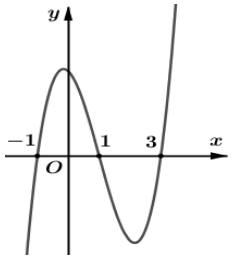
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 8.

Câu 35. Cho hàm số $y=f(x)$ luôn dương và có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Đồ thị hàm số $y=\sqrt{f(x)}$ có bao nhiêu điểm cực đại, bao nhiêu điểm cực tiểu?



A. 1 điểm cực tiểu, 2 điểm cực đại. **B.** 1 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.
C. 1 điểm cực tiểu, 1 điểm cực đại. **D.** 1 điểm cực tiểu, 0 điểm cực đại.

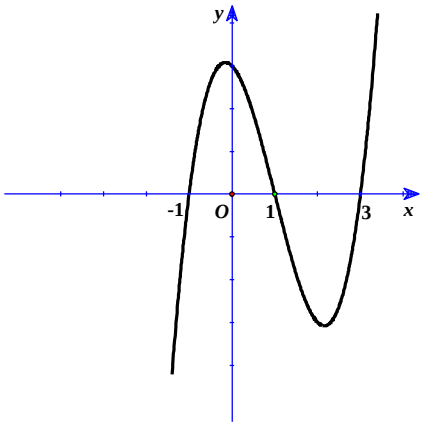
Câu 36. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

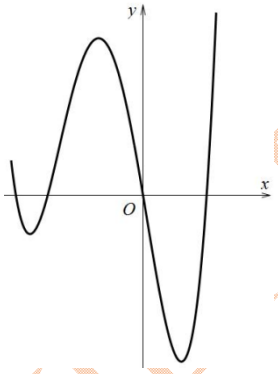
Câu 37. (Nguyễn Du Dak-Lak 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc bốn. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $f\left(\sqrt{x^2+2x+2019}\right)$ là

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

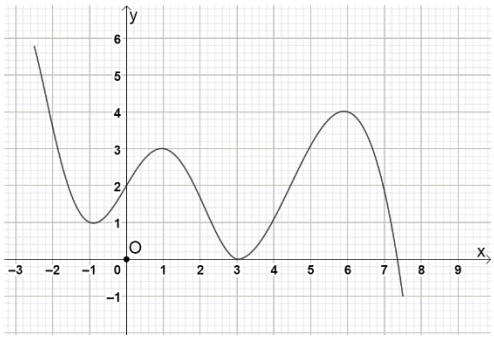
Câu 38. (CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG QUẢNG NAM LẦN 2 NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Tìm số điểm cực đại của hàm số $y=\left(\frac{1}{2018}\right)^{f(x)}-2019^{f(x)}$

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

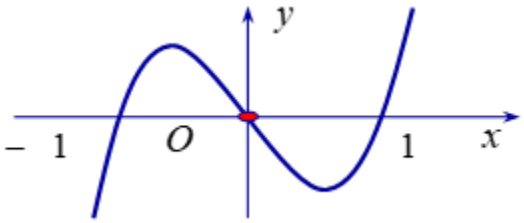
Câu 39. (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – NAM ĐỊNH 2019 – LẦN 1) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=2019^{f(f(x)-1)}$.



A. 13. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 12.

Câu 40. (HSG Bắc Ninh) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại $\forall x\in\mathbb{R}$, hàm số $f'(x)=x^3+ax^2+bx+c$ Có đồ thị (như hình vẽ)

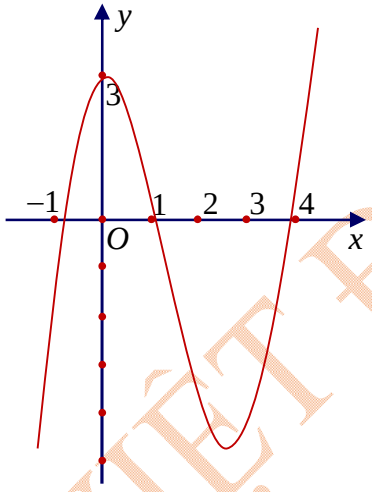
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left[f'(x)\right]$ là

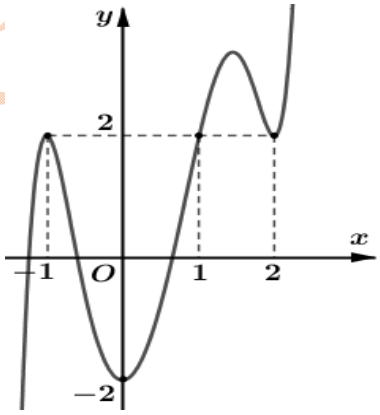
A. 7. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 8.

Câu 41. (Hoàng Hoa Thám Hưng Yên) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Đặt $g(x)=3f(f(x))+4$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)$?



A. 2. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 6.

Câu 42. (Hoàng Hoa Thám Hưng Yên) Cho hàm số $y=f'(x-1)$ có đồ thị như hình vẽ.

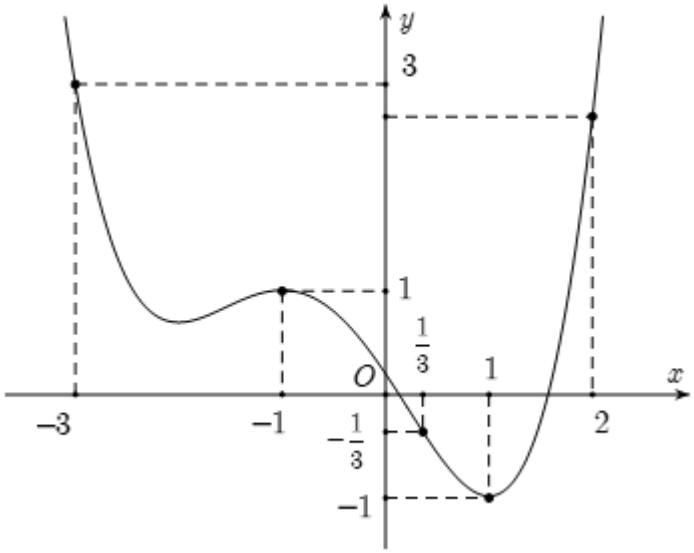


Hàm số $y=\pi^{2f(x)-4x}$ đạt cực tiểu tại điểm nào?

A. $x=1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-1$.

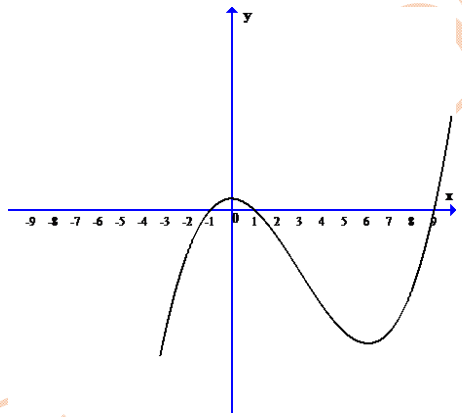
Câu 43. (THĂNG LONG HN LẦN 2 NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=2f\left(\frac{5\sin x-1}{2}\right)+\frac{(5\sin x-1)^2}{4}+3$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0;2\pi)$?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



A. 9. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 8.

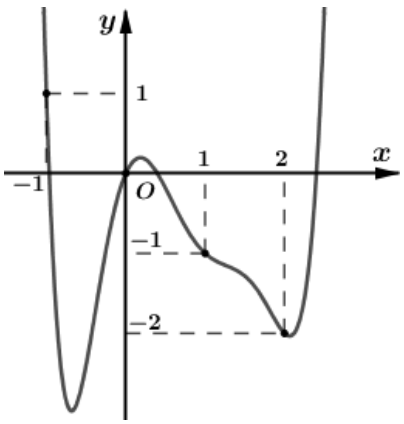
Câu 44. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới.



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f(x^3+1)$ là :

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

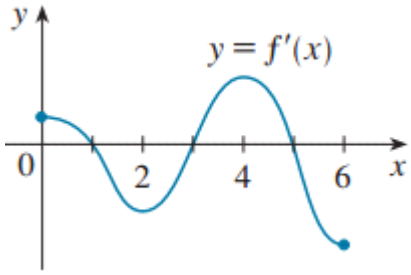
Câu 45. (Liên Trường Nghệ An) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=2f(x+2)+(x+1)(x+3)$ là

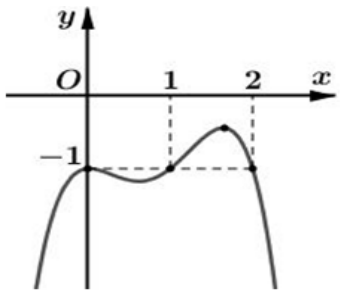
A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 46. (THPT NÔNG CỐNG 2 LẦN 4 NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0;6]$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[0;6]$ được cho bởi hình bên dưới. Hỏi hàm số $y=[f(x)]^2+2019$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị trên đoạn $[0;6]$.



A. 7. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

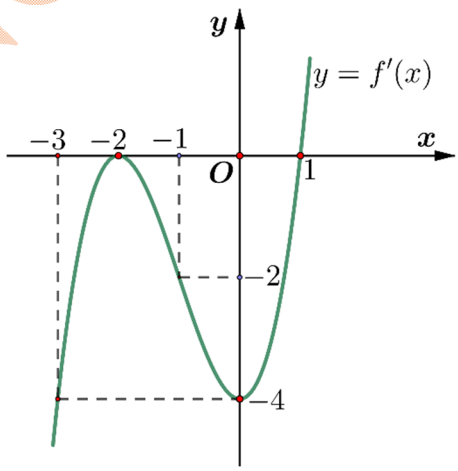
Câu 47. (Kim Liên) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x)+x$ đạt cực tiểu tại điểm.



A. $x=1$. **B.** $x=2$.

C. không có điểm cực tiểu. **D.** $x=0$.

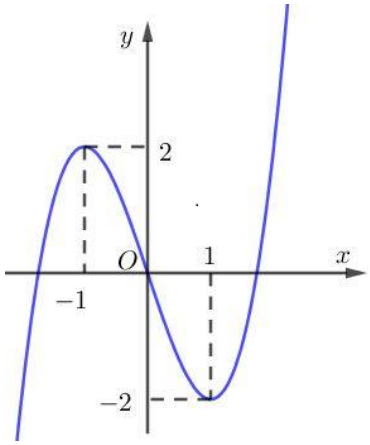
Câu 48. (THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Số điểm cực đại của hàm số $g(x)=f(x^3-3x)$ là

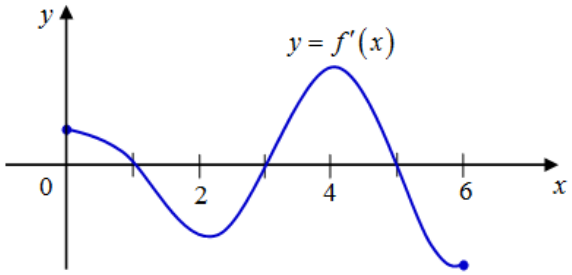
A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 49. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên Lần2) Biết đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=f(x)-2x$ có bao nhiêu điểm cực trị?



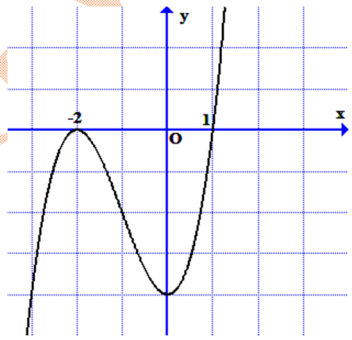
A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 50. (Lê Xoay lần1) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0;6]$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[0;6]$ được cho bởi hình bên dưới. Hỏi hàm số $y=[f(x)]^2$ có tối đa bao nhiêu cực trị?



A. 7. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 51. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên.



Xét hàm số $g(x)=f(x^2-3)$ và các mệnh đề sau:

I. Hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

II. Hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

III. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x=2$.

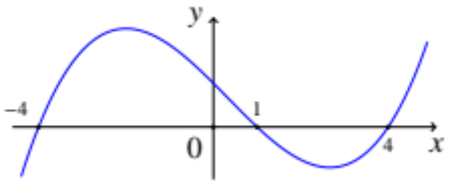
IV. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

V. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Có bao nhiêu mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề trên?

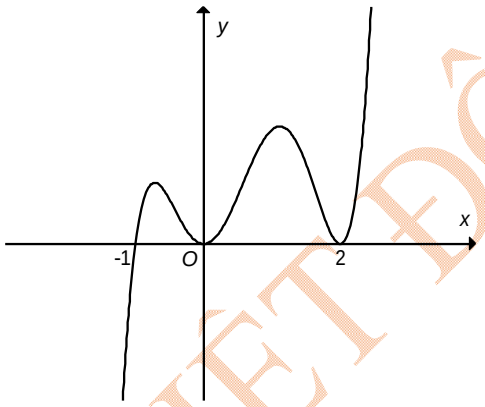
A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 52. **(ĐỀ-THI-THU-ĐH-THPT-CHUYÊN-QUANG-TRUNG-L5-2019)** Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y=f\left(2x-x^2\right)$ có bao nhiêu điểm cực đại?



A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

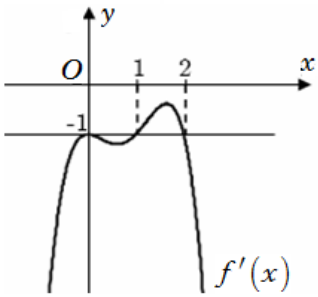
Câu 53. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng K. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên khoảng K.



Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ trên là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 54. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Xác định điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f(x)+x$.

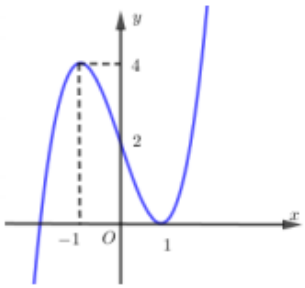


A. Không có điểm cực tiểu. **B.** $x=0$.

C. $x=1$. **D.** $x=2$.

Câu 55. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:

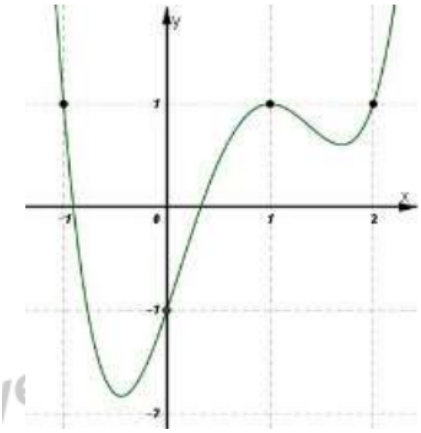
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)-2x$ là

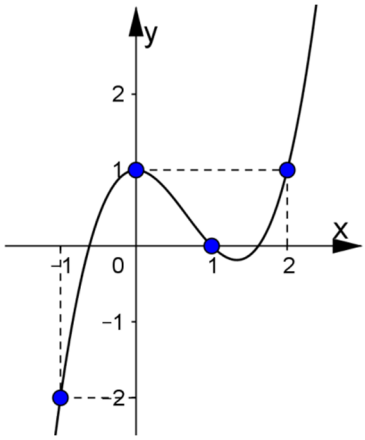
A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 4

Câu 56. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên R và có đồ thị $f(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x)=f(x)-x$. Hàm số $g(x)$ đặt cực đại tại điểm nào sau đây?



A. $x=1$ **B.** $x=2$ **C.** $x=0$ **D.** $x=-1$

Câu 57. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x)-\frac{x^3}{3}+x^2-x+2$ đạt cực đại tại điểm nào?



A. $x=1$ **B.** $x=-1$ **C.** $x=0$ **D.** $x=2$

DẠNG 3: CỰC TRỊ VỚI HÀM BẬC BA CHỨA THAM SỐ

Câu 1. (THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(7m-3)x$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số không có cực trị. Số phần tử của S là

A. 2. **B.** 4. **C.** 0. **D.** Vô số.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x + 2$ đạt cực tiểu tại $x = 1$

A. $m = 3$ **B.** $m = 1 \vee m = 3$ **C.** $m = -1$ **D.** $m = 1$

Câu 3. (THPT-Toàn-Thắng-Hải-Phòng) Tìm m để hàm số $y = mx^3 - (m^2+1)x^2 + 2x - 3$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $-\frac{3}{2}$. **C.** 0. **D.** -1.

Câu 4. Cho hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (m+1)x + m - 1$. Có bao nhiêu giá trị của số tự nhiên $m < 20$ để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành?

A. 18. **B.** 19. **C.** 21. **D.** 20.

Câu 5. (Đoàn Thượng) Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ có cực trị và giá trị của hàm số tại các điểm cực đại, điểm cực tiểu nhận giá trị dương.

A. $m > 2$. **B.** $m \in \left(2; \frac{2+2\sqrt{7}}{3}\right)$. **C.** $\frac{2-2\sqrt{7}}{3} < m < -1$. **D.** $m < -1$.

Câu 6. (THPT Nghèn Lần1) Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 12mx + 2019$ có 2 điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = -8$.

A. $m = -1$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = -2$.

Câu 7. (Chuyên Thái Bình Lần 3) Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 - 4x - 10$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)$.

A. 9. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 8.

Câu 8. Biết rằng hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 + (m+1)x^2 + (m^2+4m+3)x + \frac{1}{2}$ đạt cực trị tại x_1, x_2. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)$

A. $\min P = -9$. **B.** $\min P = -1$. **C.** $\min P = -\frac{1}{2}$. **D.** $\min P = -\frac{9}{2}$.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + mx - 1$ đạt cực trị tại hai điểm $x_1; x_2$ sao cho: $|x_1 - x_2| \geq 8$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $\left[\begin{array}{l} m \ge \dfrac{1+\sqrt{64}}{2} \\ m \le \dfrac{1-\sqrt{64}}{2} \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m \ge \dfrac{1+\sqrt{63}}{2} \\ m \le \dfrac{1-\sqrt{63}}{2} \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m \ge \dfrac{1+\sqrt{61}}{2} \\ m \le \dfrac{1-\sqrt{61}}{2} \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m \ge \dfrac{1+\sqrt{65}}{2} \\ m \le \dfrac{1-\sqrt{65}}{2} \end{array}\right.$.

Câu 10. Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$. Xác định m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2;3)$.

A. $m \in (-1;3) \cup (3;4)$. **B.** $m \in (1;3)$. **C.** $m \in (3;4)$. **D.** $m \in (-1;4)$.

Câu 11. Tập hợp tất cả các giá trị tham số m sao cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 18$ có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-5;5)$ là

A. $(-\infty;-3) \cup (7;+\infty)$ **B.** $(-3;+\infty) \setminus \{3\}$ **C.** $(-\infty;7) \setminus \{3\}$ **D.** $(-3;7) \setminus \{3\}$

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - \dfrac{3m}{2}x^2 + m$ nằm khác phía với đường thẳng $y = x$.

A. $m > 0$. **B.** $m < 0$. **C.** $m \ne 0$. **D.** $0 < m \ne 2$.

Câu 13. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2-1)x$ có hai điểm cực trị A, B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $y = 5x - 9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 0. **B.** 6. **C.** –6. **D.** 3.

Câu 14. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có hai điểm cực trị A, B nằm cùng một phía và cách đều đường thẳng $x + 2y - 1 = 0$. Tính tổng các phần tử S.

A. 0. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^3$ có hai điểm cực trị tạo thành 1 tam giác OAB có diện tích bằng 48

A. $m = 2$. **B.** $m = \pm 2$ **C.** $m = -2$ **D.** $m = \pm 3$

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^3$ có hai cực trị A và B sao cho góc $\widehat{AOB} = 120^o$?

A. $m = \pm 2\sqrt[4]{\dfrac{27}{25}}$. **B.** $m = \pm 6\sqrt{\dfrac{3}{5}}$. **C.** $m = \pm 2\sqrt{\dfrac{3}{5}}$. **D.** $m = \pm\dfrac{12}{5}$.

Câu 17. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^3 - 3x$ có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC đều với $C(2;1)$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 0. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** 3.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+m^3$ có hai điểm cực trị cùng với điểm $C\left(1;\frac{7}{8}\right)$ tạo thành một tam giác cân tại C.

A. $m=1$. **B.** $m=\frac{1}{2}$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=-\frac{1}{2}$.

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=x^3-mx^2+\frac{4}{27}m^3$ có hai điểm cực trị A,B cùng với gốc tọa độ tạo thành một tam giác có tâm đường tròn ngoại tiếp $I(1;2)$.

A. $0<m<12$. **B.** $m=6$. **C.** $m=3$. **D.** $m=12$.

Câu 20. Cho hàm số $y=(x-m)^3-3x+m^2\ (1)$. Gọi M là điểm cực đại của đồ thị hàm số (1) ứng với một giá trị m thích hợp đồng thời là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số (1) ứng với một giá trị khác của m. Số điểm M thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 0

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=mx^3-3mx^2+3m-3$ có hai điểm cực trị A,B sao cho $2AB^2-(OA^2+OB^2)=20$ (Trong đó O là gốc tọa độ).

A. $m=-1$. **B.** $m=1$.

C. $m=-1$ hoặc $m=-\frac{17}{11}$. **D.** $m=1$ hoặc $m=-\frac{17}{11}$.

Câu 22. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với đường tròn (C_m): $x^2+y^2-2mx-4my+5m^2-1=0$.

A. $1<m<\frac{5}{3}$. **B.** $-1<m<\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{3}{5}<m<1$. **D.** $-\frac{3}{5}<m<1$.

Câu 23. Cho (C_m) là đồ thị hàm số $y=x^3+3mx+1$ (với $m<0$ là tham số thực). Gọi d là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C_m). Đường thẳng d cắt đường tròn tâm $I(-1;0)$ bán kính $R=3$ tại hai điểm phân biệt A,B. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất. Hỏi S có tất cả bao nhiêu phần tử.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 24. Với $m\in[-1;1]$, đồ thị của hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3+m$ có hai điểm cực trị A, B và tam giác OAB có bán kính đường tròn nội tiếp có giá trị lớn nhất là M_0, đạt tại $m=m_0$. Tính $P=M_0+m_0$.

A. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=2x^3-3(m+1)x^2+6mx$ có hai điểm cực trị A,B sao cho đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng: $y=x+2$.

A. $\left[\begin{array}{l}m=-3\\m=2\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=-2\\m=3\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m=0\\m=2\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-3\end{array}\right.$.

Câu 26. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^3-3x^2-mx+2$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu cách đều đường thẳng có phương trình: $y=x-1\,(d)$.

A. $m=0$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-\dfrac{9}{2} \end{array}\right.$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-\dfrac{9}{2}$.

Câu 27. Cho hai hàm số $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+ax+1$ và $g(x)=\dfrac{x^3}{3}+x^2+3ax-a$; với a là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của a sao cho mỗi hàm số có hai cực trị đồng thời giữa hai hoành độ cực trị của hàm số này có một hoành độ cực trị của hàm số kia.

A. $-\dfrac{15}{4}<a<\dfrac{1}{5}$. **B.** $-4<a<15$. **C.** $-\dfrac{15}{4}<a<0$. **D.** $-4<a<0$.

Câu 28. Kí hiệu $d_{\min}$ là khoảng cách nhỏ nhất giữa hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+1$. Tìm $d_{\min}$.

A. $d_{\min}=\dfrac{2}{3}$. **B.** $d_{\min}=\dfrac{4\sqrt{13}}{3}$. **C.** $d_{\min}=\dfrac{4}{3}$. **D.** $d_{\min}=\dfrac{2\sqrt{13}}{3}$.

Câu 29. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-1\right)x-1$ có đồ thị (C_m). Biết rằng tồn tại duy nhất điểm $A(a;b)$ sao cho A là điểm cực đại (C_m) tương ứng với $m=m_1$ và A là điểm cực tiểu (C_m) tương ứng với $m=m_2$. Tính $S=a+b$.

A. $S=1$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=-2$. **D.** $S=-3$.

Câu 30. (Thuận Thành 2 Bắc Ninh) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+m$ nhỏ hơn hoặc bằng $\sqrt{5}$.

A. 5. **B.** 2. **C.** 11. **D.** 4.

Câu 31. (Sở Quảng Ninh Lần1) Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3$ với m là tham số, gọi (C) là đồ thị của hàm số đã cho. Biết rằng, khi m thay đổi, điểm cực đại của đồ thị (C) luôn nằm trên một đường thẳng d cố định. Xác định hệ số góc k của đường thẳng d.

A. $k=-3$. **B.** $k=\dfrac{1}{3}$. **C.** $k=3$. **D.** $k=-\dfrac{1}{3}$.

Câu 32. (KÊNH TRUYỀN HÌNH GIÁO DỤC QUỐC GIA VTV7 –2019) Tìm tất các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+3m^2$ có hai điểm cực trị là A,B mà $\triangle OAB$ có diện tích bằng 24 (O là gốc tọa độ).

A. $m=2$. **B.** $m=1$. **C.** $m=\pm 2$. **D.** $m=\pm 1$.

Câu 33. (Đặng Thành Nam Đề 2) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-(m+1)x^2+(m^2-2)x-m^2+3$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị đó nằm về cùng một phía đối với trục hoành?

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 34. (THPT NINH BÌNH – BẠC LIÊU LẦN 4 NĂM 2019) Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=x^3-3x^2-mx+4$ có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-3;3)$?

A. 12. **B.** 11. **C.** 13. **D.** 10.

Câu 35. (Chuyên Quốc Học Huế Lần1) Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2mx^2+(m-1)x+2m^2+1$ (m là tham số). Xác định khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ $O(0;0)$ đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số trên.

A. $\frac{2}{9}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Câu 36. (Sở Ninh Bình Lần1) Cho hàm số $y=x^3+2(m-2)x^2-5x+1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ thỏa mãn $|x_1|-|x_2|=-2$.

A. $\frac{7}{2}$. **B.** -1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 5.

Câu 37. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên Lần2) Cho hàm số $y=-x^3+3mx^2-3m-1$ với m là tham số thực. Giá trị của m thuộc tập hợp nào để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x+8y-74=0$.

A. $m\in(-1;1]$. **B.** $m\in(-3;-1]$. **C.** $m\in(3;5]$. **D.** $m\in(1;3]$.

Câu 38. (Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019) Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+m$ có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn $OA=OB$ (O là gốc tọa độ)?

A. $m=\frac{3}{2}$. **B.** $m=3$. **C.** $m=\frac{1}{2}$. **D.** $m=\frac{5}{2}$.

Câu 39. (Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019) Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+m$ có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn $OA=OB$ (O là gốc tọa độ)?

A. $m=\frac{3}{2}$. **B.** $m=3$. **C.** $m=\frac{1}{2}$. **D.** $m=\frac{5}{2}$.

Câu 40. (THPT ISCHOOL NHA TRANG) Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=-(x-1)^3+3m^2(x-1)-2$ có hai điểm cực trị cách đều gốc tọa độ.

A. $m=\pm\frac{1}{3}$. **B.** $m=\pm\frac{1}{2}$. **C.** $m=-5$. **D.** $m=5$.

Câu 41. Với giá trị thực dương của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+3x+1$ có các điểm cực trị A và B sao cho tam giác ΔOAB có diện tích bằng $8\sqrt{2}$ thì mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $1<m<2$ **B.** $2<m<\frac{7}{2}$ **C.** $3<m<4$ **D.** $m<1$

Câu 42. Cho hàm số $y=\frac{x^3}{3}-ax^2-3ax+4$. Để hàm số đạt cực trị tại $x_1;x_2$ thỏa mãn $\frac{x_1^2+2ax_2+9a}{a^2}+\frac{x_2^2+2ax_1+9a}{a^2}=2$ thì a thuộc khoảng nào?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $a\in\left(-3;\frac{-5}{2}\right)$. **B.** $a\in\left(-5;\frac{-7}{2}\right)$. **C.** $a\in(-2;-1)$. **D.** $a\in\left(-\frac{7}{2};-3\right)$

Câu 43. (KIM LIÊN HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 03) Cho hàm số $y=x^3-6mx+4$ có đồ thị (C_m). Gọi m_0 là giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, điểm cực tiểu của (C_m) cắt đường tròn tâm $I(1;0)$, bán kính $\sqrt{2}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất. Chọn khẳng định đúng

A. $m_0\in(3;4)$. **B.** $m_0\in(1;2)$. **C.** $m_0\in(0;1)$. **D.** $m_0\in(2;3)$.

Câu 44. (Quỳnh Lưu Lần 1) Biết hai hàm số $f(x)=x^3+ax^2+2x-1$ và $g(x)=-x^3+bx^2-3x+1$ có chung ít nhất một điểm cực trị. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|a|+|b|$

A. $\sqrt{30}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $3+\sqrt{6}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Câu 45. (Sở Vĩnh Phúc) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R=1$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất?

A. $m=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$. **B.** $m=\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$. **C.** $m=\frac{2\pm\sqrt{5}}{2}$. **D.** $m=\frac{2\pm\sqrt{3}}{3}$.

Câu 46. (Phan Đình Tùng Hà Tĩnh) Tìm các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ cắt đường tròn $(C):(x-1)^2+y^2=2$ có tâm I tại hai điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất.

A. $m=\frac{3}{8}$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ m=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$. **C.** $m=\frac{8}{3}$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=\frac{3}{2} \\ m=\frac{1}{2}\end{array}\right.$.

DẠNG 4: CỰC TRỊ VỚI HÀM BẬC BỐN TRÙNG PHƯƠNG CHỨA THAM SỐ

Câu 1. (THPT-Gia-Lộc-Hải-Dương-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3) Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y=x^4+2(m-2)x^2+3m-2$ có ba điểm cực trị.

A. $m\in(2;+\infty)$. **B.** $m\in(-2;2)$. **C.** $m\in(-\infty;2)$. **D.** $m\in(0;2)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=(m+1)x^4-(m-1)x^2+1$. Số các giá trị nguyên của m để hàm số có một điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu là:

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 3. (Hoàng Hoa Thám Hưng Yên) Tìm tất cả tham số thực m để hàm số $y=(m-1)x^4-(m^2-2)x^2+2019$ đạt cực tiểu tại $x=-1$

A. $m=0$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 4. (THPT LƯƠNG THẾ VINH 2019LẦN 3) Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+3m-2$ (với m là tham số). Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị đều nằm trên các trục tọa độ?

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 5. (Lương Thế Vinh Lần 3) Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+3m-2$ (với m là tham số). Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị đều nằm trên các trục tọa độ?

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 6. (CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 3) Biết $m=m_0$; $m_0\in\mathbb{R}$ là giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4+2mx^2+1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m_0\in(0;3)$. **B.** $m_0\in[-5;-3)$. **C.** $m_0\in(-3;0]$. **D.** $m_0\in(3;7)$.

Câu 7. Biết rằng đồ thị hàm số: $y=x^4-2mx^2+2$ có 3 điểm cực trị là 3 đỉnh của một tam giác vuông cân. Tính giá trị của biểu thức: $P=m^2+2m+1$.

A. $P=1$ **B.** $P=4$ **C.** $P=0$ **D.** $P=2$.

Câu 8. (Lê Xoay lần1) Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m^4+2m$. Tìm tất cả các giá trị của m để các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành một tam giác đều.

A. $m=2\sqrt{2}$. **B.** $m=1$. **C.** $m=\sqrt[3]{3}$. **D.** $m=\sqrt[3]{4}$.

Câu 9. (Trần Đại Nghĩa) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-4(m-1)x^2+2m-1$ có 3 điểm cực trị thao thành 3 đỉnh của một tam giác đều.

A. $m=1+\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$. **B.** $m=1-\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$. **C.** $m=1$ **D.** $m=0$.

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị m sao cho đồ thị hàm số $y=x^4+(m+1)x^2-2m-1$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác có một góc bằng $120°$.

A. $m<-1$. **B.** $m=-1-\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$, $m=-1$.

C. $m=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$. **D.** $m=-1-\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$.

Câu 11. (Sở Lạng Sơn 2019) Để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+m-1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2, giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(2;3)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;2)$.

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4+(3m+1)x^2-3$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác cân có độ dài cạnh đáy bằng $\dfrac{2}{3}$ độ dài cạnh bên.

A. $m=-\dfrac{5}{3}$. **B.** $-\dfrac{3}{5}$. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{5}$.

Câu 13. Cho hàm số $y=x^4-2(1-m^2)x^2+m+1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành tam giác có diện tích lớn nhất.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $m=1$. **B.** $m=-\frac{1}{2}$. **C.** $m=\frac{1}{2}$. **D.** $m=0$.

Câu 14. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+1-m$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác nhận gốc toạ độ O làm trực tâm.

A. $m=-1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Câu 15. Để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+m-1$ có ba điểm cực trị nhận gốc tọa độ O làm trực tâm thì giá trị của tham số m bằng

A. 1**B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** 2

Câu 16. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2-2m^2+m^4$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, Cho hàm số $y=x^4+2mx^2+m^2+m$. Giá trị m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có trọng tâm là gốc toạ độ O thoả mãn.

A. $m\in[-4;-3]$. **B.** $m\in[-2;-1]$. **C.** $m\in[-1;0]$. **D.** $m\in[0;1]$.

Câu 17. (Nguyễn Khuyến)Tìm số thực k để đồ thị hàm số $y=x^4-2kx^2+k$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận điểm $G\left(0;\frac{1}{3}\right)$ làm trọng tâm.

A. $k=-1;k=\frac{1}{2}$. **B.** $k=1;k=\frac{1}{3}$. **C.** $k=1;k=\frac{1}{2}$. **D.** $k=\frac{1}{3};k=\frac{1}{2}$.

Câu 18. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^4-2m^2x^2+m^4+1$ có ba điểm cực trị. Đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc O tạo thành 1 tứ giác nội tiếp.

A. $m=-1$. **B.** $m=\pm1$. **C.** $m=1$. **D.** Không tồn tại m.

Câu 19. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2-2m^2+m^4$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, C và ABDC là hình thoi, trong đó $D(0;-3)$, A thuộc trục tung. Khi đó m thuộc khoảng nào?

A. $m\in\left(\frac{9}{5};2\right)$. **B.** $m\in\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $m\in(2;3)$. **D.** $m\in\left(\frac{1}{2};\frac{9}{5}\right)$.

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{8}x^4-(2m-1)x^2+m+3$ có ba điểm cực trị cùng với gốc tọa độ là bốn đỉnh của một hình chữ nhật.

A. $m>\frac{1}{2}$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=4$.

Câu 21. (THPT-Chuyên-Sơn-La-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có 3 điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm cực trị này có bán kính bằng 1. Tổng giá trị của các phần tử của S bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Câu 22. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^4-2mx^2+m$ có ba điểm cực trị. Đồng thời ba điểm cực trị đó là ba đỉnh của một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn hơn 1.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $m<-1$. **B.** $m>2$.

C. $m\in(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$. **D.** Không tồn tại m.

Câu 23. (Đoàn Thượng) Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+1\,(1)$. Tổng lập phương các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm này có bán kính $R=1$ bằng

A. $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **C.** $2+\sqrt{5}$. **D.** $-1+\sqrt{5}$.

Câu 24. Cho hàm số $y=x^4-2(m^8+16)x^2+m^2+2018$. Biết rằng $I(0;m^2)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác tạo bởi ba điểm cực trị của đồ thị hàm số. Bán kính đường tròn đó có giá trị là

A. $R=4$. **B.** $R=2$. **C.** $R=\sqrt{2018}$. **D.** $R=2018$.

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+2m+m^4$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 2 lần bán kính đường tròn nội tiếp?

A. $m=1$ **B.** $m=\sqrt[3]{3}$ **C.** $m=\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ **D.** $m=\frac{\sqrt[3]{6}}{2}$

Câu 26. (CHUYÊN HUỲNH MẪN ĐẠT 2019 lần 1) Cho hàm số $y=x^4-2\left(m^2-m+1\right)x^2+m-1$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu là nhỏ nhất.

A. $m\ge 1$. **B.** $m\le 1$. **C.** $m=1$. **D.** $m=\frac{1}{2}$.

Câu 27. (Phan Đình Tùng Hà Tĩnh) Cho hàm số $y=x^4-2(m^2+m+1)x^2+m$ có đồ thị (C). Tìm m để đồ thị hàm số (C) có 3 điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu nhỏ nhất.

A. $m=\frac{1}{2}$. **B.** $m=-\frac{1}{2}$. **C.** $m=\sqrt{3}$. **D.** $m=0$.

Câu 28. Cho hàm số $y=x^4-2\left(m^2+1\right)x^2+m^4$ có đồ thị (C). Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của (C), S_1 và S_2 lần lượt là phần diện tích của tam giác ABC phía trên và phía dưới trục hoành. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m sao cho $\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{3}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

DẠNG 5: CỰC TRỊ VỚI CÁC HÀM SỐ KHÁC CHỨA THAM SỐ

Câu 1. Biết hàm số $f(x)=\frac{x^2+mx+n}{x^2+1}$ có hai cực trị x_1,x_2. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

A. $y=mx+n$. **B.** $y=\frac{m}{2}x+n$. **C.** $y=-mx+n$. **D.** $y=\frac{-m}{2}x+n$.

Câu 2. Biết rằng hàm số $f(x)=\frac{x^2-2x+m}{x^2+2}$ có hai cực trị x_1,x_2. Tính $k=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$.

A. $k=\frac{-2}{m}$. **B.** $k=1$. **C.** $k=\frac{2}{m}$. **D.** $k=\frac{-1}{2}$.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\frac{mx^2-2x+m-1}{2x+1}$ vuông góc với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

A. $m=1$. **B.** $m=\frac{1}{2}$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=-\frac{1}{2}$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y'=x^2-\sqrt{12}x+\frac{1}{4}(b+3a)\ \forall x\in R$,biết hàm số luôn có hai cực trị với a,b là các số thực không âm thỏa mãn $3b-a\le 6$ .Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2a+b$?

A. 1 **B.** 9 **C.** 8 **D.** 6

Câu 5. Cho hàm số $y=x^4-mx^3+4x+m+2$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số ban đầu có 3 cực trị và trọng tâm của tam giác với 3 đỉnh là toạ độ các điểm cực trị trùng với tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y=\frac{4x}{4x-m}$.

A. $m=2$ **B.** $m=1$ **C.** $m=4$ **D.** $m=3$

Câu 6. (CHUYÊN HUỲNH MẪN ĐẠT 2019 lần 1) Cho hàm số $y=\frac{x^5}{5}-(2m-1)x^4-\frac{m}{3}x^3+2019$ .Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$?

A. Vô số. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 7. (CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ HÒA BÌNH LẦN 4 NĂM 2019)Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019;2019)$ để hàm số $y=\frac{m-1}{5}x^5+\frac{m+2}{4}x^4+m+5$ đạt cực đại tại $x=0$?

A. 110. **B.** 2016. **C.** 100. **D.** 10.

Câu 8. (Lý Nhân Tông)Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^9+(m-2)x^7-(m^2-4)x^6+7$ đạt cực tiểu tại $x=0$?

A. 3. **B.** 4. **C.** Vô số. **D.** 5.

Câu 9. (Chuyên Phan Bội Châu Lần2) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $|f(x+h)-f(x-h)|\le h^2,\forall x\in\mathbb{R},\ \forall h>0$.Đặt $g(x)=[x+f'(x)]^{2019}+[x+f'(x)]^{29-m}-(m^4-29m^2+100)\sin^2 x-1$, m là tham số nguyên và $m<27$ .Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m sao cho hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$ .Tính tổng bình phương các phần tử của S.

A. 100. **B.** 50. **C.** 108. **D.** 58.

Câu 10. (THPT ĐÔ LƯƠNG 3 LẦN 2) Cho hàm số $f(x)=(x-1)^2(mx^2+4mx-m+n-2)$ với $m,\ n\in\mathbb{R}$. Biết trên khoảng $\left(-\frac{7}{6};0\right)$ hàm số đạt cực đại tại $x=-1$. Trên đoạn $\left[-\frac{7}{2};-\frac{5}{4}\right]$ hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $x=-\frac{7}{2}$. **B.** $x=-\frac{3}{2}$. **C.** $x=-\frac{5}{2}$. **D.** $x=-\frac{5}{4}$.

Câu 11. (HSG Bắc Ninh) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$ .Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị?

A. 0. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 12. (THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho hàm số $y=f(x)$ biết $f'(x)=x^2(x-1)^3(x^2-2mx+m+6)$.Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị là

A. 7. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 18. (GIA LỘC TỈNH HẢI DƯƠNG 2019 lần 2) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$.Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị,tìm số tập con khác rỗng của S?

A. 127. **B.** 15. **C.** 63. **D.** 31.

Câu 13. (Quỳnh Lưu Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+2)^4(x+4)^3\left[x^2+2(m+3)x+6m+18\right]$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có **đúng** một điểm cực trị?

A. 7. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 6.

Câu 14. (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐĂK LĂK LẦN X NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=(x-2)^2(x^2+3x-4)$.Gọi S là tập các số nguyên $m\in[-10;10]$để hàm số $y=f(x^2-4x+m)$ có đúng 3 điểm cực trị.Số phần tử của S bằng:

A. 10. **B.** 5. **C.** 14. **D.** 4.

Câu 15. (Sở Hà Nam) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2(x^2-4x)$.Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f(2x^2-12x+m)$ có đúng 5 điểm cực trị ?

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 19.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x^2-2x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f(x^2-8x+m)$ có 5 điểm cực trị?

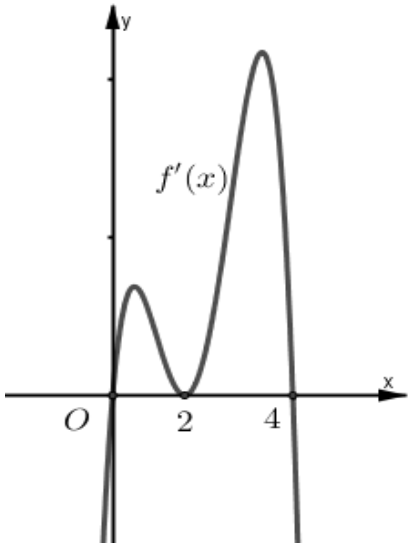
A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Câu 17. (Hàm Rồng) Cho hàm số $f'(x)=(x-2)^2(x^2-4x+3)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=f(x^2-10x+m+9)$ có 5 điểm cực trị?

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 15.

Câu 18. (THPT TX QUẢNG TRỊ LẦN 1 NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f(x^2-m)$ có ba điểm cực trị?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 19. (THTT lần5) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m không vượt quá 2019 để hàm số $y=\frac{x^2}{8}+\sqrt{x+m+2}$ không có điểm cực trị?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2018. **D.** 2019.

DẠNG 6: CỰC TRỊ HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI

Trước khi đi vào các bài toán ta cần nhớ những kiến thức sau.

□ Số điểm cực trị của hàm số $|f(x)|$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ và số lần đổi dấu của hàm số $f(x)$.

□ Số điểm cực trị của hàm số $f(|mx+n|)$ bằng $2a+1$, trong đó a là số điểm cực trị lớn hơn $-\frac{n}{m}$ của hàm số $f(x)$

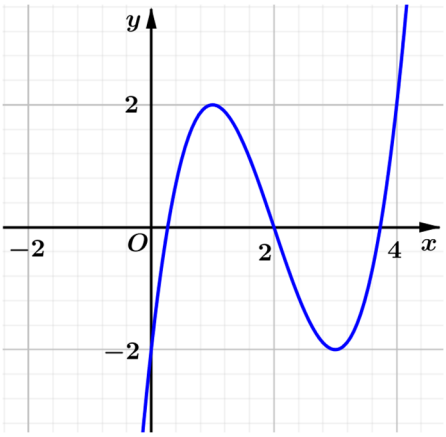
□ Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ bằng $2a+1$, trong đó a là số điểm cực trị dương của hàm số.

□ Cho hàm số có dạng $y=|ax^2+bx+c|+mx$, tìm điều kiện của tham số m để giá trị cực tiểu của hàm số đạt giá trị lớn nhất, khi đó ta có $\begin{cases}\max(y_{ct})=c\\ m=-b\end{cases}$

CỰC TRỊ HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI KHÔNG CHỨA THAM SỐ

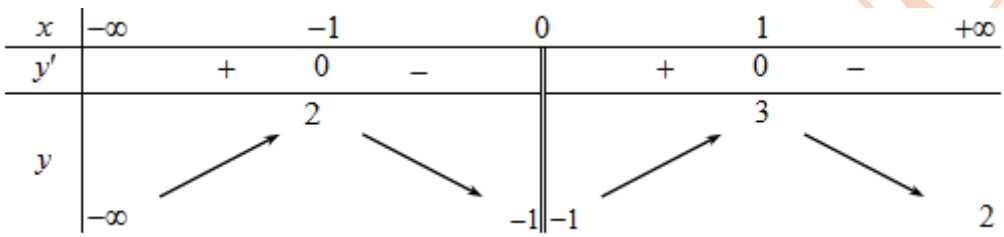
Câu 1. (Trung-Tâm-Thanh-Tường-Nghệ-An-Lần-2) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y=|f(x)|$ là

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



A. 5 . **B.** 4 . **C.** 3 . **D.** 6 .

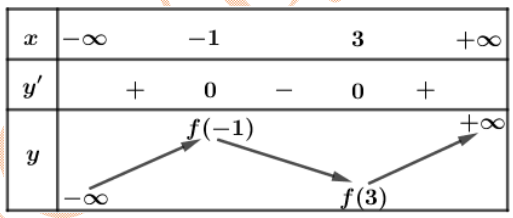
Câu 2. (Thuận Thành 2 Bắc Ninh) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Số điểm cực trị của hàm số $y=|f(x)|$ là

A. 7 . **B.** 5 . **C.** 6 . **D.** 8 .

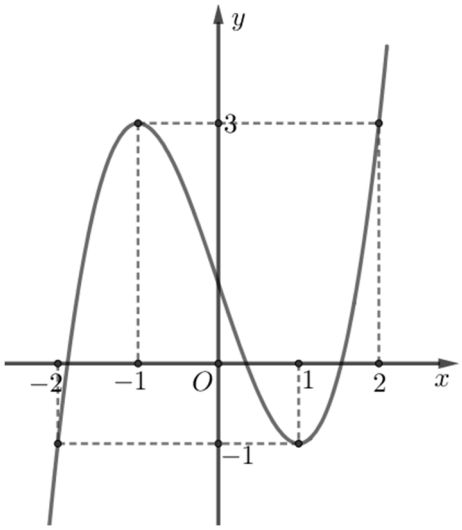
Câu 3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau ?



Hỏi đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(\left|x\right|\right)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị ?

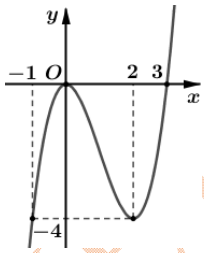
A. 5. **B.** 7. **C.** 11. **D.** 13.

Câu 4. (Chuyên Vinh Lần 3) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y=\left|f\left(\left|x\right|\right)\right|$
có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



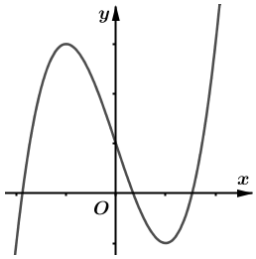
A. 6 . **B.** 8 . **C.** 7. **D.** 9.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đồ thị hàm số $g(x)=|f(x)+4|$ có tổng tung độ của các điểm cực trị bằng ?



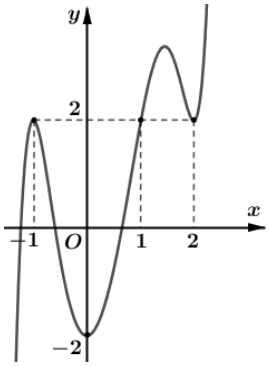
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $g(x)=f(|x|)+2018$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

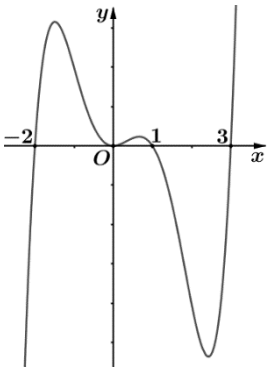
Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đồ thị hàm số $g(x)=|2f(x)-3|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

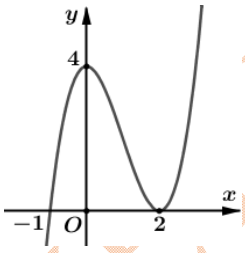
A. 4. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đồ thị hàm số $h(x)=f(|x|)+2018$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đồ thị hàm số $g(x)=f(|x|-2)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^4(x-2)^5(x+3)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ là

A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x-2)^4(x^2-4)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(|x|)$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+2)^4(x^2+4)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(|x|)$ là

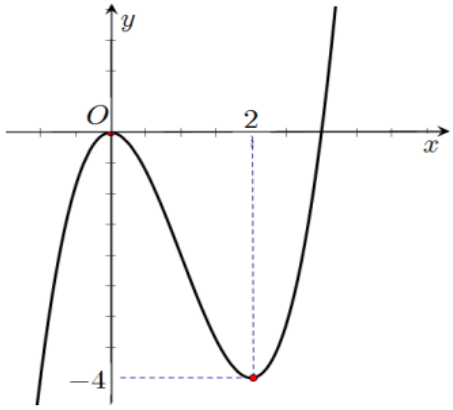
A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 13. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^3(x-2)^5(x+3)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 2.

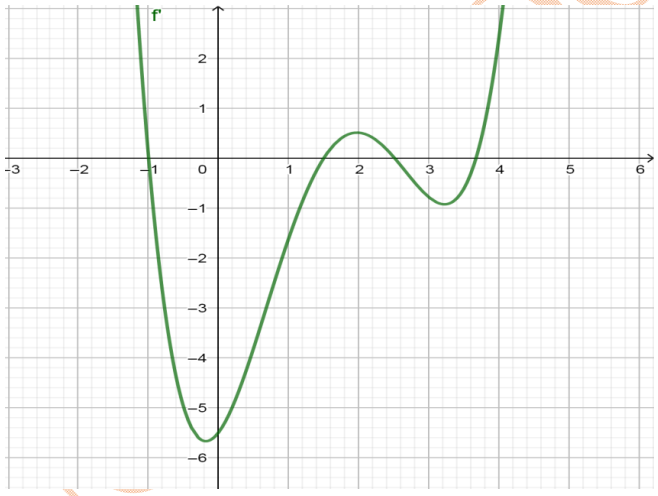
Câu 14. (Thị Xã Quảng Trị) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y=|2f(x)+5|+3$ là

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

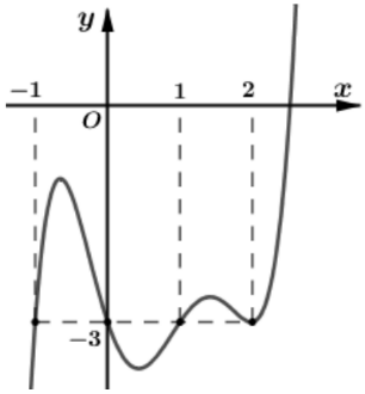
Câu 15. (THPT PHỤ DỰC – THÁI BÌNH) Cho hàm số đa thức $f(x)=mx^5+nx^4+px^3+qx^2+hx+r$, $(m,n,p,q,h,r\in\mathbb{R})$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ (như hình vẽ bên dưới) cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ lần lượt là $-1;\ \frac{3}{2};\ \frac{5}{2};\ \frac{11}{3}$.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f(x)-(m+n+p+q+h+r)\right|$ là

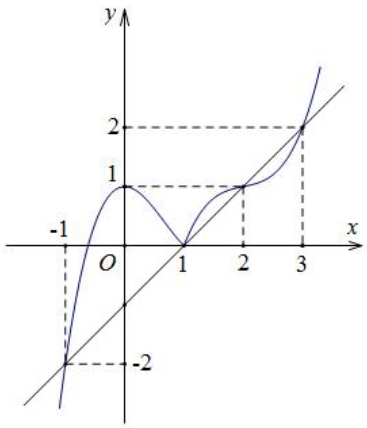
A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 16. (KINH MÔN II LẦN 3 NĂM 2019) Cho hàm số đa thức $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(0)<0$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi hàm số $g(x)=\left|f(x)+3x\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



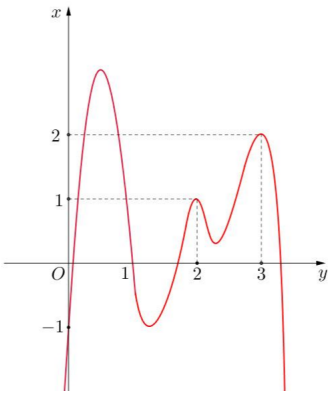
A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 17. (THPT Sơn Tây Hà Nội 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có $f(-3)>8$; $f(4)>\frac{9}{2}$; $f(2)<\frac{1}{2}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $y=\left|2f(x)-(x-1)^2\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?



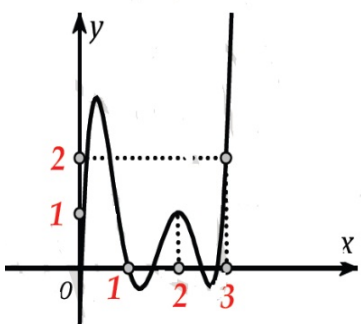
A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 18. (Đặng Thành Nam Đề 9) Cho $f(x)$ là một hàm đa thức và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=\left|2f(x)-(x-1)^2\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 9. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 5.

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ và đồ thị hình bên là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi đồ thị của hàm số $g(x)=\left|2f(x)-(x-1)^2\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị ?

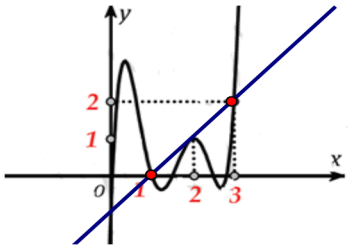


A. 9. **B.** 11. **C.** 8. **D**

Lời giải

Chọn B

Đặt $h(x)=2f(x)-(x-1)^2 \Rightarrow h'(x)=2f'(x)-2(x-1)$. Ta vẽ thêm đường thẳng $y=x-1$.



Ta có $h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x-1 \Leftrightarrow x=0; x=1; x=2; x=3; x=a\left(a\in(1;2)\right)$

Theo đồ thị $h'(x)>0 \Leftrightarrow f'(x)>x-1 \Leftrightarrow x\in(0;1)\cup(a;2)\cup(3;+\infty)$.

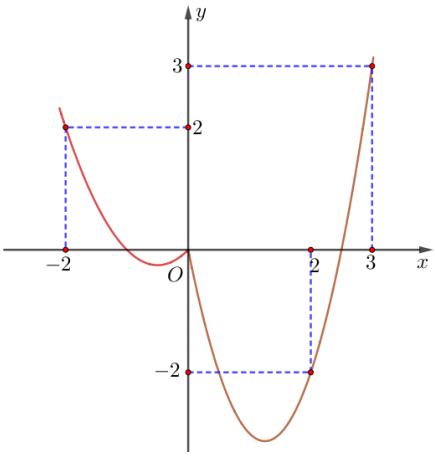
Lập bảng biến thiên của hàm số $h(x)$.

x	$-\infty$		0		1		a		2		3		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Đồ thị hàm số $g(x)$ có nhiều điểm cực trị nhất khi $h(x)$ có nhiều giao điểm với trục hoành nhất, vậy đồ thị hàm số $h(x)$ cắt trục hoành tại nhiều nhất 6 điểm, suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có tối đa 11 điểm cực trị.

Câu 20. (Chuyên Vinh Lần 3) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên.

Hàm số $y=\left|f(x)+\frac{1}{2}x^2-f(0)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị trong khoảng $(-2;3)$?

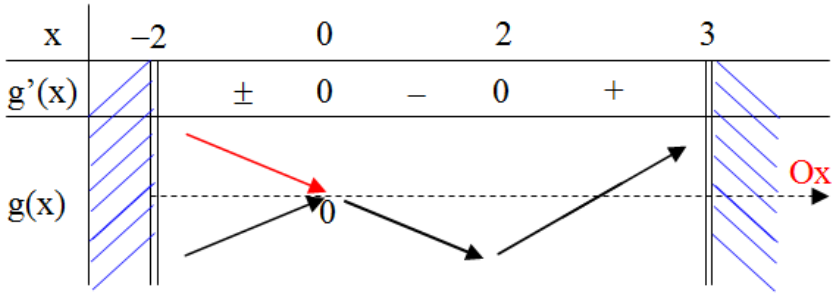


Lời giải

Đặt $g(x)=f(x)+\frac{x^2}{2}-f(0)$

Ta có: $g'(x)=f'(x)+x$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2(L) \\ x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

(Nhận xét: $x=2$ là nghiệm bội lẻ, $x=0$ có thể nghiệm bội lẻ hoặc nghiệm bội chẵn tuy nhiên không ảnh hưởng đáp số bài toán)



Suy ra hàm số $y=\left|g\left(x\right)\right|$ có nhiều nhất 3 điểm cực trị trong khoảng $\left(-2;3\right)$

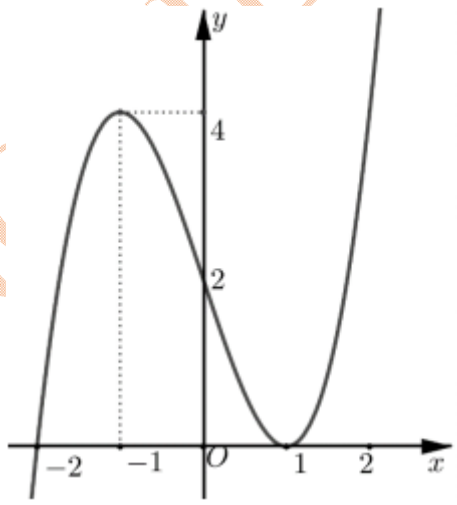
Câu 21. (CHUYÊN THÁI BÌNH LẦN V NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ là một hàm đa thức có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^2-\left|x\right|\right)$ là

A. 5. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 1.

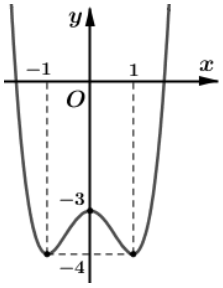
Câu 22. (Đặng Thành Nam Đề 17) Cho hàm số $y=f(x)$ là một hàm đa thức có đồ thị như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-2\left|x\right|\right)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 23. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đồ thị hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|x-2\right|\right)+1$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^3-2x^2)(x^3-2x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=|f(1-2018x)|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 9. **B.** 2018. **C.** 2022. **D.** 11.

Câu 25. (Chuyên KHTN lần2) Xét các hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^2-x)(x^3-3x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=|f(1-2019x)|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 9 . **B.** 7 . **C.** 8 . **D.** 6 .

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

	$-\infty$		-1	3	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0 $-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	↗	2018	↘ -2018	↗ $+\infty$

Đồ thị h

àm số $y=|f(x-2017)+2018|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 4

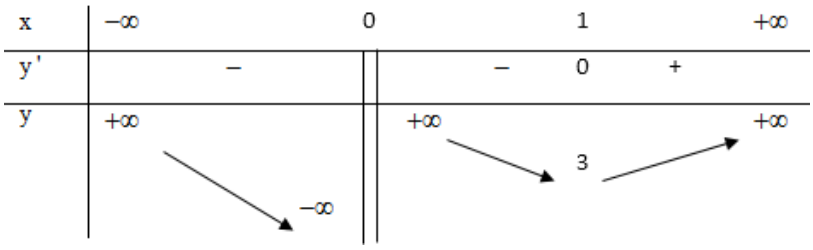
Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	-3	↗	$+\infty$

Phương trình $|f(1-3x)+1|=3$ có bao nhiêu nghiệm.

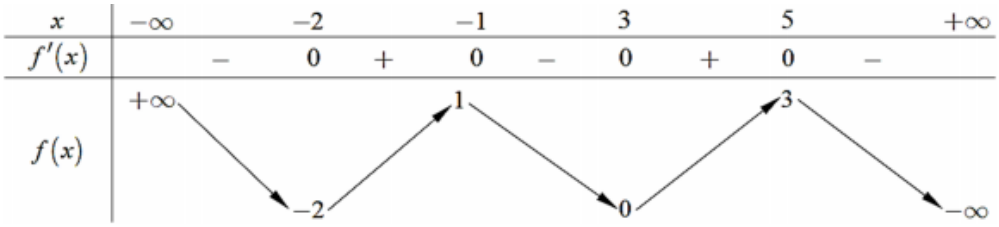
A. 4 . **B.** 3. **C.** 6 . **D.** 5.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathrm{R}\setminus\{0\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $3|f(2x-1)|-10=0$ là



A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

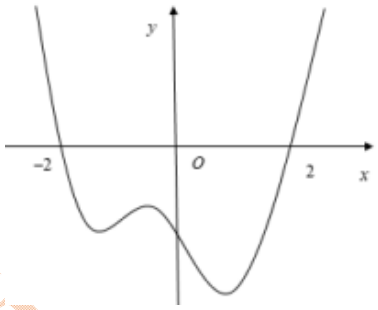
Câu 29. (SỞ PHÚ THỌ LẦN 2 NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ



Xét hàm số $y=g(x)=f\left(\left|x-4\right|\right)+2018^{2019}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng

A. 5. **B.** 1. **C.** 9. **D.** 2.

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f(-2)<0$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai** ?



A. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$ có hai cực tiểu.

C. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$ có hai cực đại và một cực tiểu.

D. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

CỰC TRỊ HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI CÓ CHỨA THAM SỐ

Câu 31. (Chuyên Hưng Yên Lần 3) Biết phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0\ (a\neq 0)$ có đúng hai nghiệm thực. Hỏi đồ thị hàm số $y=\left|ax^3+bx^2+cx+d\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 32. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số

$y=\left|x^3+(2m-1)x^2+\left(2m^2-2m-9\right)x-2m^2+9\right|$ có 5 điểm cực trị.

A. 7. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 33. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=|x|^3-3mx^2+3\left(m^2-4\right)|x|+1$ có đúng 3 điểm cực trị.

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 34. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=|x|^3-3mx^2+3\left(m^2-4\right)|x|+1$ có đúng 5 điểm cực trị.

A. 3. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 7.

Câu 35. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\left|3x^5-15x^3-60x+m\right|$ có 5 điểm cực trị.

A. 289. **B.** 287. **C.** 286. **D.** 288.

Câu 36. Có tất cả bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2017;2017]$ để hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m\right|$ có 3 điểm cực trị?

A. 4032. **B.** 4034. **C.** 4030. **D.** 4028.

Câu 37. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m\right|$ có 5 điểm cực trị.

A. $-4<m<0$. **B.** $-4\le m\le 0$. **C.** $0<m<4$. **D.** $m\ge 4$ hoặc $m\le 0$.

Câu 38. Cho hàm số $y=|x|^3-mx+5$. Gọi a là số điểm cực trị của hàm số đã cho. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a=0$. **B.** $a\le 1$. **C.** $1<a\le 3$. **D.** $a>3$.

Câu 39. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=|x|^3-(2m+1)x^2+3m|x|-5$ có 5 điểm cực trị.

A. $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$. **B.** $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$.

Câu 40. Cho hàm số $f(x)=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$. Tìm tập hợp giá trị thực của tham số m để hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có năm điểm cực trị.

A. $-\frac{5}{4}<m<2$. **B.** $\frac{5}{4}<m<2$. **C.** $\frac{1}{2}<m<2$. **D.** $-2<m<\frac{5}{4}$.

Câu 41. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=|x|^3-(2m+1)x^2+3m|x|-5$ có 3 điểm cực trị.

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $\left[0;\frac{1}{4}\right)$.

Câu 42. Cho hàm số $f(x)=x^3-(2m+1)x^2+(m+2)x+1$. Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-5;5]$ để hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có đúng ba điểm cực trị.

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 43. Cho hàm số $f(x)=x^3-(2m+1)x^2+(m+2)x+1$. Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-5;5]$ để hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có năm điểm cực trị.

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 44. Có bao nhiêu số nguyên $m<10$ để hàm số $y=\left|x^3-mx+1\right|$ có 5 điểm cực trị.

A. 9. **B.** 7. **C.** 11. **D.** 8.

Câu 45. Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-10;10]$ để hàm số

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$y=\left|mx^3-3mx^2+(3m-2)x+2-m\right|$ có 5 điểm cực trị.

A. 7. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 11.

Câu 46. (Lê Xoay lần1) Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=|x|^3-(2m+1)x^2+3m|x|-5$ có 3 điểm cực trị.

A. $(1;+\infty)$. **B.** $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$.

Câu 47. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-9$. Tìm m để đồ thị hàm số $y=\left|f(x)+m\right|$ có ba điểm **cực tiểu**.

A. $m<5$. **B.** $5<m<9$. **C.** $5\le m<9$. **D.** $5<m\le 9$.

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x)=\left|x^3+3x^2-3+m\right|$ có ba điểm cực trị.

A. $m=3$ hoặc $m=-1$. **B.** $m\ge 1$ hoặc $m\le -3$.

C. $1\le m\le 3$. **D.** $m\ge 3$ hoặc $m\le -1$.

Câu 49. (Nguyễn Đình Chiểu Tiền Giang) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|x^3-3x^2-m\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 50. Cho hàm số $f(x)=mx^3-3mx^2+(3m-2)x+2-m$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để hàm số $g(x)=\left|f(x)\right|$ có **đúng** 5 điểm cực trị ?

A. 7. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Câu 51. (CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU ĐỒNG THÁP 2019 LẦN 2) Các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}|x|^3-mx^2+(m+6)|x|+2019$ có 5 điểm cực trị là

A. $m<-2$. **B.** $-2<m<0$. **C.** $0<m<3$. **D.** $m>3$.

Câu 52. (Chuyên Bắc Giang) Cho hàm số $f(x)=(m-1)x^3-5x^2+(m+3)x+3$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị ?

A. 1. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 53. (Hải Hậu Lần1) Gọi S là tập giá trị nguyên $m\in[0;100]$ để hàm số $y=\left|x^3-3mx^2+4m^3-12m-8\right|$ có 5 cực trị. Tính tổng các phần tử của S.

A. 10096. **B.** 10094. **C.** 4048. **D.** 5047.

Câu 54. [THPT Hoàng Hoa Thám, Hưng Yên, lần 1, năm 2018]

Tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|x^3-3x^2-9x-5+\frac{m}{2}\right|$ có 5 điểm cực trị là

A. 2016. **B.** 1952. **C.** –2016. **D.** –496.

Câu 55. (Đặng Thành Nam Đề 3) Xét các số thực $c>b>a>0$. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ. Đặt $g(x)=f\left(\left|x^3\right|\right)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)$ là

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

x	$-\infty$		0		a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

A. 3. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 56. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $\begin{cases}-8+4a-2b+c>0\\8+4a+2b+c<0\end{cases}$. Số điểm cực trị của hàm số $y=|f(x)|$ bằng

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 5

Câu 57. (NGÔ SĨ LIÊN BẮC GIANG LẦN IV NĂM 2019) Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ thỏa mãn $c>2019$, $a+b+c-2018<0$. Số điểm cực trị của hàm số $y=|f(x)-2019|$ là

A. $S=3$. **B.** $S=5$. **C.** $S=2$. **D.** $S=1$.

Câu 58. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $a>0$, $d>2018$, $a+b+c+d-2018<0$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=|f(x)-2018|$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 59. Biết rằng phương trình $2x^3+bx^2=-cx+1$ có đúng hai nghiệm thực dương phân biệt. Hỏi đồ thị hàm số $y=\left|2|x|^3+bx^2+c|x|-1\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 60. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx-2$ thỏa mãn $\begin{cases}a+b>1\\3+2a+b<0\end{cases}$. Số điểm cực trị của hàm số $y=|f(|x|)|$ bằng

A. 11 **B.** 9 **C.** 2 **D.** 5

Câu 61. Cho hàm số bậc ba $f(x)=x^3+mx^2+nx-1$ với $m,n\in\mathbb{R}$, biết $m+n>0$ và $7+2(2m+n)<0$. Khi đó số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x)=|f(|x|)|$ là

A. 2. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 11.

Câu 62. Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ có đồ thị nhận hai điểm $A(0;3)$ và $B(2;-1)$ làm hai điểm cực trị. Khi đó số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x)=\left|ax^2|x|+bx^2+c|x|+d\right|$ là

A. 5. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 11.

Câu 63. Cho các số thực a,b,c thoả mãn $\begin{cases}a+b+c<-1\\4a-2b+c>8\\bc<0\end{cases}$. Đặt $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Số điểm cực trị của hàm số $|f(|x|)|$ lớn nhất có thể có là

A. 2. **B.** 9. **C.** 11 **D.** 5.

Câu 64. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx-2$ thỏa mãn $\begin{cases}a+b>1\\3+2a+b<0\end{cases}$. Số điểm cực trị của hàm số $y=|f(|x|)|$ bằng

A. 11 **B.** 9 **C.** 2 **D.** 5

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 65. Biết phương trình $ax^4+bx^2+c=0\ (a\neq 0)$ bốn nghiệm thực. Hàm số $y=\left|ax^4+bx^2+c\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị.

A. 7. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 66. Cho hàm số $y=\left|x^4-2(m-1)x^2+2m-3\right|$. Có bao nhiêu số nguyên không âm m để hàm số đã cho có ba điểm cực trị.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 67. Cho hàm số $y=\left|x^4-2(m-1)x^2+2m-3\right|$. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho có đúng 5 điểm cực trị là

A. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)\setminus\{2\}$. **C.** $(1;+\infty)\setminus\{2\}$. **D.** $\left(1;\frac{3}{2}\right]$.

Câu 68. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để hàm số $y=\left|x^4-(m+1)x^2+m\right|$ có 7 điểm cực trị.

A. 18. **B.** 20. **C.** 19. **D.** 21.

Câu 69. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để hàm số $y=\left(x^2+2\right)\left|x^2-m\right|$ có đúng 5 điểm cực trị.

A. 1. **B.** 17. **C.** 2. **D.** 16.

Câu 70. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\left|x^4-mx^2+m\right|$ có 7 điểm cực trị.

A. $(4;+\infty)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 71. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\left|x^4-4x^2+m\right|$ có 7 điểm cực trị.

A. 5. **B.** 15. **C.** 3. **D.** 13.

Câu 72. (Chuyên Lam Sơn Lần 2) Cho hàm số $f(x)=x^4-2mx^2+4-2m^2$. Có tất cả bao nhiêu số nguyên $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 73. (Đặng Thành Nam Đề 14) Cho hàm số $y=\left|x^4-2(m-1)x^2+2m-3\right|$. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho có đúng 5 điểm cực trị là

A. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)\setminus\{2\}$. **C.** $(1;+\infty)\setminus\{2\}$. **D.** $\left(1;\frac{3}{2}\right]$.

Câu 74. (Cầu Giấy Hà Nội 2019 Lần 1) Gọi S là tập hợp tất cả các số thực m thỏa mãn đồ thị hàm số $y=\left|x^4-10x^2+m\right|$ có đúng 7 điểm cực trị. Số phần tử của tập hợp $S\cap\mathbb{Z}$ là

A. 24. **B.** 23. **C.** 26. **D.** 25.

Câu 75. (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – NAM ĐỊNH 2019 – LẦN 1) Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-7;7)$ để đồ thị hàm số $y=\left|x^4-3mx^2-4\right|$ có đúng ba điểm cực trị A,B,C và diện tích tam giác ABC lớn hơn 4.

A. 4. **B. 2.** **C. 1.** **D. 3**

Câu 76. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\ (a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$ và $a>0$.

Biết $f(-1)<0, f(0)>0, f(1)<0$. Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f(x)\right|$ bằng

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 9.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 77. (THPT NINH BÌNH – BẠC LIÊU LẦN 4 NĂM 2019) Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ với $a>0$, $c>2018$ và $a+b+c<2018$. Số điểm cực trị của hàm số $y=|f(x)-2018|$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 78. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ với $a>0$, $c>2017$ và $a+b+c<2017$. Số cực trị của hàm số $y=|f(x)-2017|$ là:

A. 1 **B.** 5 **C.** 3 **D.** 7

Câu 79. Cho hàm số $f(x)=(m^4+1)x^4+(-2^{m+1}.m^{2.-4})x^2+4^m+16$ với m là tham số thực. Số cực trị của đồ thị hàm số $g(x)=|f(x)-1|$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 80. Cho hàm số $f(x)=(m^{2018}+1)x^4-(2m^{2018}+2m^2+3)x^2+m^{2018}+2020$. Hàm số $y=|f(x)-2019|$ có bao nhiêu điểm cực trị.

A. 7. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 81. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để hàm số $y=|x^2-2x+m|+2x+1$ có ba điểm cực trị.

A. 17. **B.** 16. **C.** 19. **D.** 18.

Câu 82. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-2019;2019)$ để hàm số $y=|x^2-4x+m|+6x+1$ có ba điểm cực trị.

A. 2014. **B.** 2016. **C.** 2013. **D.** 2015.

Câu 83. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để hàm số $y=x^2-2m|x-m+1|+1$ có ba điểm cực trị.

A. 17. **B.** 19. **C.** 18. **D.** 20.

Câu 84. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để hàm số $y=x^2-2m|x-m+6|+1$ có ba điểm cực trị.

A. 17. **B.** 16. **C.** 18. **D.** 15.

Câu 85. (Nguyễn Du số 1 lần3) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=|3x^4-4x^3-12x^2+m|$ có 7 điểm cực trị ?

A. 6. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 86. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-5;5]$ để hàm số $y=\left|x^4+x^3-\frac{1}{2}x^2+m\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 87. Cho hàm số $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$. Có bao nhiêu số nguyên $m>-10$ để hàm số $y=f(|x|+m)$ có 7 điểm cực trị.

A. 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 8.

Câu 88. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=|3x^5-25x^3+60x+m|$ có 7 điểm cực trị.

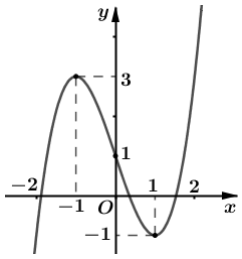
A. 42. **B.** 21. **C.** 44. **D.** 22.

Câu 89. Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ có ba điểm cực trị $x=1;x=2;x=3$. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=f(|x+m|)$ có 7 điểm cực trị.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. 8. **B.** 10. **C.** 2. **D.** 19.

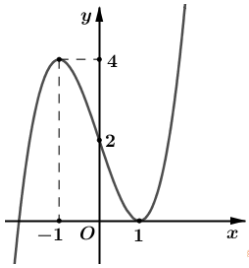
Câu 90. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Với $m<-1$ thì hàm số $g(x)=f(|x+m|)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

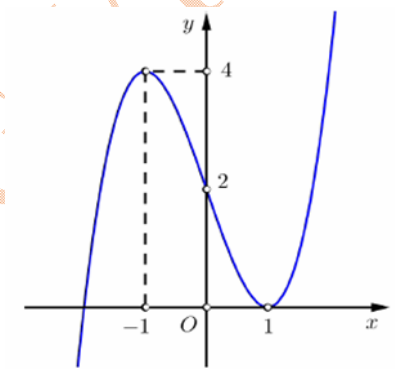
Câu 91. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x)=f(|x|+m)$ có 5 điểm cực trị.

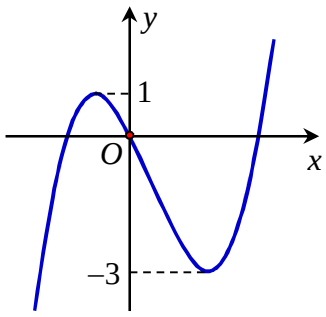
A. $m<-1$. **B.** $m>-1$. **C.** $m>1$. **D.** $m<1$.

Câu 92. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm tập hợp tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số $y=f(|x|+m)$ có 5 điểm cực trị.



A. $m>1$. **B.** $m<-1$. **C.** $m>-1$. **D.** $m<1$.

Câu 93. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên.



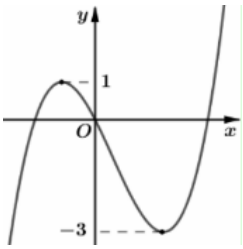
Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=|f(x)+m|$ có ba điểm cực trị là

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $m \le -1$ hoặc $m \ge 3$. **B.** $m \le -3$ hoặc $m \ge 1$.

C. $m = -1$ hoặc $m = 3$. **D.** $1 \le m \le 3$.

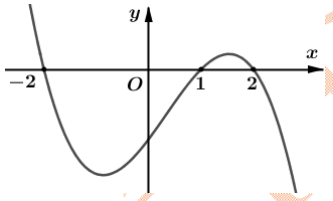
Câu 94. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x) = |f(x) + m|$ có 5 điểm cực trị là



A. $m \le -1$ hoặc $m \ge 3$. **B.** $-1 < m < 3$.

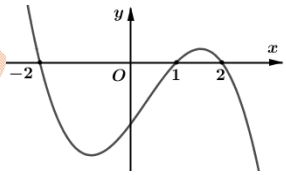
C. $m = -1$ hoặc $m = 3$. **D.** $1 < m < 3$.

Câu 95. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên R và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đặt $g(x) = f(|x + m|)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** Vô số.

Câu 96. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên R và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đặt $g(x) = f(|x| + m)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)$ có **đúng** 5 điểm cực trị?



A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** Vô số.

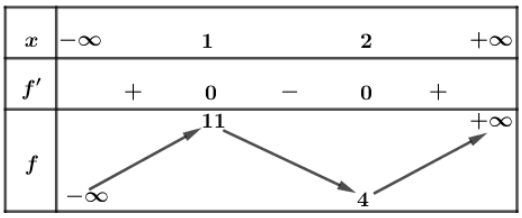
Câu 97. (Nguyễn Du Dak-Lak 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

Hỏi có bao nhiêu giá trị của tham số m (với $m \in \mathbb{Z}; |m| \le 2019$) để đồ thị hàm số $y = |m + f(|x|)|$ có đúng 7 điểm cực trị?

A. 2024. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2020.

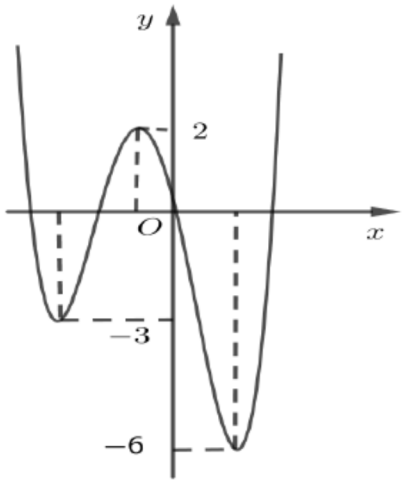
Câu 98. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.



Đồ thị hàm số $g(x)=\left|f(x)-2m\right|$ có 5 điểm cực trị khi

A. $m\in(4;11)$. **B.** $m\in\left[2;\frac{11}{2}\right]$. **C.** $m\in\left(2;\frac{11}{2}\right)$. **D.** $m=3$.

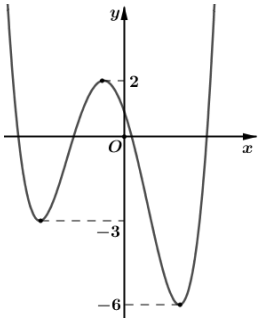
Câu 99. (KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG) Hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số $y=f(x)$.



Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|f(x+1)+m\right|$ có 5 điểm cực trị ?

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 0

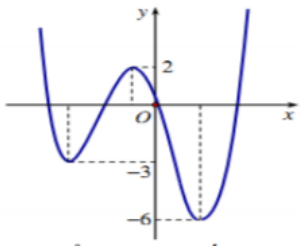
Câu 100. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-4;4]$ để hàm số $g(x)=\left|f(x-1)+m\right|$ có 5 điểm cực trị ?

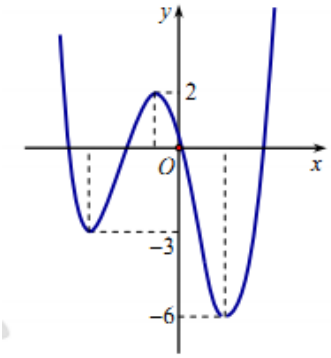
A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 101. (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐĂK LĂK LẦN X NĂM 2019) Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|f(x+1)+m\right|$ có 7 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng



A. 6. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 3.

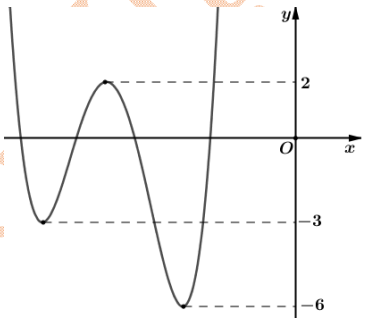
Câu 102. Cho đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ dưới đây:



Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|f(x-2017)+m\right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng tất cả các giá trị của các phần tử của tập S bằng

A. 12 **B.** 15 **C.** 18 **D.** 9

Câu 103. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đồ thị hàm số $g(x)=\left|f(x+2018)+m\right|$ có 7 điểm cực trị khi

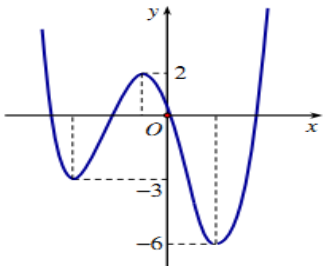
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 104. (Chuyên Vinh Lần 3) Hàm số $f(x)=\left|\dfrac{x}{x^2+1}-m\right|$ (với m là tham số thực) có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

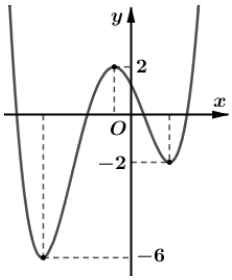
Câu 105.Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|f(x-1)+m\right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



A. 12 **B.** 15 **C.** 18 **D.** 9

Câu 106. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đồ thị hàm số $g(x)=\left|f(x+2018)+m^2\right|$ có 5 điểm cực trị khi

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 107. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)\left(x^2+2mx+5\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m>-10$ để hàm số $g(x)=f\left(|x|\right)$ có 5 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 108. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)\left(x^2+2mx+5\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(|x|\right)$ có **đúng** 1 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 109. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)\left(x^2+2mx+5\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m>-10$ để hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có 5 điểm cực trị.

A. 7. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 110. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2\left(x+m^2-3m-4\right)^3(x+3)^5$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có 3 điểm cực trị.

A. 3. **B.** 6. **C.** 4 **D.** 5.

Câu 111. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\left(x^3-2x^2\right)\left(x^3-2x\right)$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=\left|f\left(1-2018x\right)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị.

A. 9. **B.** 2022. **C.** 11. **D.** 2018.

Câu 112. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2\left(x^2+m^2-3m-4\right)^3(x+3)^5$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(|x|\right)$ có 3 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

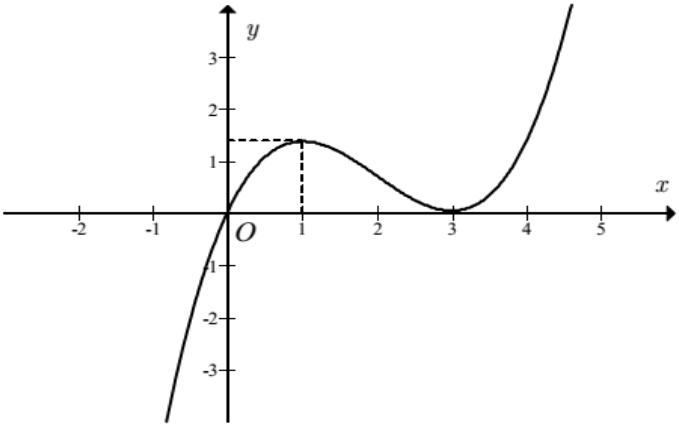
Câu 113. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^4(x-m)^5(x+3)^3$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-5;5]$ để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 3 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 114. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=e^{|x^3-3x^2+m|}$ có 5 điểm cực trị.

A. $(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$. **D.** $(0;4)$.

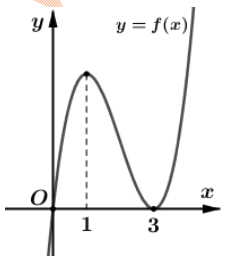
Câu 115. (Cụm THPT Vũng Tàu) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-100;100]$ để hàm số $h(x)=\left|f^2(x+2)+4f(x+2)+3m\right|$ có đúng 3 điểm cực trị. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. 5047. **B.** 5049. **C.** 5050. **D.** 5043.

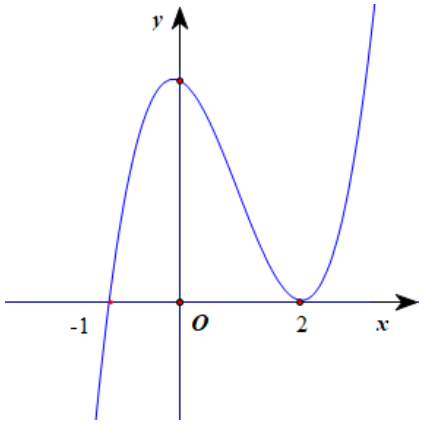
Câu 116. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h(x)=\left|f^2(x)+f(x)+m\right|$ có đúng 3 điểm cực trị.

A. $m>\frac{1}{4}$. **B.** $m\geq\frac{1}{4}$. **C.** $m<1$. **D.** $m\leq 1$.

Câu 117. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x)=|f^2(x)+2f(x)+m|$ có đúng 3 điểm cực trị.



A. $m \geq 1$. **B.** $m > 1$ **C.** $m \leq -1$ **D.** $m < -1$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

GTLN, GTNN CỦA HÀM SỐ

A – LÝ THUYẾT CHUNG

1. Định nghĩa GTLN, GTNN

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trong khoảng K (đoạn, khoảng, nửa khoảng)

+ Nếu có $x_0 \in K$ sao cho $f(x) \le f(x_0), \forall x \in K$ thì $f(x_0)$ được gọi là giá trị lớn hất của hàm số trên khoảng K. Kí hiệu: $\max\limits_K y = f(x_0)$

+ Nếu có $x_0 \in K$ sao cho $f(x) \ge f(x_0), \forall x \in K$ thì $f(x_0)$ được gọi là giá trị nhỏ hất của hàm số trên khoảng K. Kí hiệu: $\min\limits_K y = f(x_0)$.

2. Phương pháp tìm GTLN, GTNN.

Bài toán 1: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng K:

Phương pháp: Lập bảng biến thiên trên khoảng K, rồi nhìn trên đó để kết luận max, min.

Bài toán 2: Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[a;b]$:

Phương pháp 1: Lập bảng biến thiên trên khoảng đó và kết luận.

Phương pháp 2: Nếu hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a;b] thì ta có các bước làm sau:

1. Tính đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ đã cho.

2. Tìm các điểm $x_1;x_2;...;x_n$ trên đoạn $[a;b]$, tại đó $f'(x)=0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

3. Tính: $f(a); f(x_1); f(x_2);...; f(x_n); f(b)$.

4. Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên (ở mục 3)

Khi đó: $M = \max\limits_{[a;b]} f(x); \text{m} = \min\limits_{[a;b]} f(x)$

Chú ý:

1. Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì hàm số f(x) luôn tồn tại giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất và tất cả các giá trị trung gian nằm giữa giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số f(x) trên đoạn đó.
2. Nếu đề bài không cho rõ tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng, đoạn nào cón nghĩa là ta tìm GTLN, GTNN của hàm số trên tập xác định của hàm số đó.
3. Tính đạo hàm y'. Nếu $y' \ge 0, \forall x \in [a;b] \Rightarrow \begin{cases} \min f(x) = f(a) \\ \max f(x) = f(b) \end{cases}$
4. Tính đạo hàm y'. Nếu $y' \le 0, \forall x \in [a;b] \Rightarrow \begin{cases} \min f(x) = f(b) \\ \max f(x) = f(a) \end{cases}$

B – CÁC DẠNG BÀI TẬP

DẠNG 1. GTLN, GTNN TRÊN ĐOẠN, KHOẢNG

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

TÌM GTLN, GTNN CỦA HÀM SỐ CHO BỞI CÔNG THỨC

Câu 1: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{2\sin^2 x}{\sin^4\dfrac{x}{2}+\cos^4\dfrac{x}{2}}$ là

A. 0 **B.** 4 **C.** 8 **D.** 2

Câu 2: Cho hàm số $y=\dfrac{2\cos^2 x+|\cos x|+1}{|\cos x|+1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Khi đó $M+m$ bằng

A. -4. **B.** -5. **C.** -6. **D.** 3.

Câu 3: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $(C): y=\left(x^7+7x^4-4\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)^3$

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 4: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x\left(2017+\sqrt{2019-x^2}\right)$ trên tập xác định của nó. Tính $M-m$.

A. $2019\sqrt{2019}+2017\sqrt{2017}$. **B.** 4036.

C. $4036\sqrt{2018}$. **D.** $\sqrt{2019}+\sqrt{2017}$.

Câu 5: Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=5\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}\right)+\sqrt{(x-1)(3-x)}$ lần lượt là m và M, tính $S=m^2+M^2$.

A. $S=170$. **B.** $S=169$. **C.** $S=172$. **D.** $S=171$.

Câu 6: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{1-x^2}+3\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^2}$. Hỏi điểm $A(M;m)$ thuộc đường tròn nào sau đây?

A. $x^2+(y-1)^2=1$. **B.** $(x-3)^2+(y+1)^2=20$

C. $(x-3)^2+(y-1)^2=2$. **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

Câu 7: Giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y=\sqrt{x^3+2\left(1+\sqrt{x^3+1}\right)}+\sqrt{x^3+2\left(1-\sqrt{x^3+1}\right)}$ là:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 8: **(HSG Bắc Ninh)** Cho hàm số $y=ax^3+cx+d$, $a\neq 0$ có $\min\limits_{x\in(-\infty;0)} f(x)=f(-2)$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ bằng

A. $d-11a$. **B.** $d-16a$. **C.** $d+2a$. **D.** $d+8a$.

Câu 9: **(PHÂN-TÍCH-BL-VÀ-PT-ĐẠI-HỌC-SP-HÀ-NỘI)** Cho hàm số $y=\left(x^3-3x+m\right)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng 1 là

A. 1. **B.** -4. **C.** 0. **D.** 4.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 10: **(Đặng Thành Nam Đề 5)** Cho hàm số $y=\left(x^2+x+m\right)^2$. Tổng tất cả các giá trị thực tham số m sao cho $\min\limits_{[-2;2]} y=4$ bằng

A. $-\frac{31}{4}$. **B.** -8. **C.** $-\frac{23}{4}$. **D.** $\frac{9}{4}$.

Câu 11: **(CHUYÊN SƯ PHẠM HÀ NỘI LẦN 4 NĂM 2019)** Hàm số $y=x^4+ax^3+bx^2+1$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=a+b$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** -2. **D.** -1.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c(a\neq 0)$ có điều kiện $\min\limits_{(-\infty;0)} f(x)=f(-1)$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};2\right]$ bằng:

A. $c+8a$ **B.** $c-\frac{7a}{16}$ **C.** $c+\frac{9a}{16}$ **D.** $c-a$

Câu 13: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x+m+2$. Có bao nhiêu số nguyên dương $m<2018$ sao cho với mọi bộ ba số thực $a,b,c\in[-1;3]$ thì $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài ba cạnh một tam giác nhọn.

A. 1989 **B.** 1969 **C.** 1997 **D.** 2008

Câu 14: Cho hàm số $y=\left|x^2+2x+a-4\right|$. Tìm a để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2;1]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $a=3$ **B.** $a=2$ **C.** $a=1$ **D.** $a=4$

Câu 15: Với m để hàm số $y=\left|x^2+mx+1\right|$ trên $[-1;2]$ đạt giá trị nhỏ nhất là 1 thì mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. $2<|m|<4$ **B.** $1<|m|<2$ **C.** $0<|m|<1$ **D.** $|m|>4$

Câu 16: **(CỤM-CHUYÊN-MÔN-HẢI-PHÒNG)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $\max\limits_{[1;3]}\left|x^3-3x^2+m\right|\leq 4$?

A. Vô số. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 17: **(HSG Bắc Ninh)** Xét hàm số $f(x)=\left|x^2+ax+b\right|$, với a, b là tham số. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a+2b$.

A. 2. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 3.

Câu 18: **(THTT lần 5)** Gọi A, a lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y=\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$. Gọi S là tập các giá trị thực của tham số m để $Aa=12$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 1

Câu 19: **(THPT PHỤ DỰC – THÁI BÌNH)** Gọi S là tập hợp các giá trị của m để hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m\right|$ đạt giá trị lớn nhất bằng 50 trên $[-2;4]$. Tổng các phần tử thuộc S là

A. 4. **B.** 36. **C.** 140. **D.** 0.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 20: **(Nguyễn Khuyến)**Gọi S là tập hợp giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Số phần tử của S là:

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 21: Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x+m-20\right|$ trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng

A. 210. **B.** -195. **C.** 105. **D.** 300.

Câu 22: **(GIA LỘC TỈNH HẢI DƯƠNG 2019 lần 2)** Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x+m-20\right|$ trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng

A. 210. **B.** -195. **C.** 105. **D.** 300.

Câu 23: **(CỤM TRƯỜNG SÓC SƠN MÊ LINH HÀ NỘI)** Cho hàm số $y=f(x)=\left|x^4-4x^3+4x^2+a\right|$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;2]$. Số giá trị nguyên a thuộc đoạn $[-3;3]$ sao cho $M\le 2m$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 24: **(Đặng Thành Nam Đề 15)** Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^4-38x^2+120x+4m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 26. **B.** 13. **C.** 14. **D.** 27.

Câu 25: **(Liên Trường Nghệ An)** Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^4-38x^2+120x+4m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của tham số m bằng

A. -12. **B.** -13. **C.** -14. **D.** -11.

Câu 26: Cho hàm số $f(x)=\left|8x^4+ax^2+b\right|$, trong đó a, b là tham số thực. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 1. Hãy chọn khẳng định đúng?

A. $a>0$, $b<0$ **B.** $a<0$, $b<0$ **C.** $a>0$, $b>0$ **D.** $a<0$, $b>0$

Câu 27: **(Chuyên Hưng Yên Lần 3)** Gọi T là tập hợp tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{mx+1}{x+m^2}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[2;3]$ bằng $\frac{5}{6}$. Tính tổng của các phần tử trong T.

A. $\frac{17}{5}$. **B.** $\frac{16}{5}$. **C.** 2. **D.** 6.

Câu 28: **(Lương Thế Vinh Lần 3)** Cho hàm số $y=f(x)=\frac{2x+m}{x-1}$.

Tính tổng các giá trị của tham số m để $\max\limits_{[2;3]}f(x)-\min\limits_{[2;3]}f(x)=2$.

A. -4. **B.** -2. **C.** -1. **D.** -3.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 29: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x+m^2}{x-1}$ trên đoạn $[2;3]$ bằng 14.

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 4.

Câu 30: **(Sở Bắc Ninh)** Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x-m^2-2}{x-m}$ trên đoạn $[0;4]$ bằng -1.

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 31: Trên đoạn $[-2;2]$, hàm số $y=\dfrac{mx}{x^2+1}$ đạt giá trị lớn nhất tại $x=1$ khi và chỉ khi

A. $m=2$. **B.** $m\ge 0$. **C.** $m=-2$. **D.** $m<0$.

Câu 32: **(Nguyễn Trãi Hải Dương Lần1)** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x^3+x^2-m}{x+1}$ trên $[0;\ 2]$ bằng 5. Tham số m nhận giá trị là

A. -5. **B.** 1. **C.** -3. **D.** -8.

Câu 33: **(Chuyên Thái Bình Lần 3)** Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{x^2-mx+2m}{x-2}\right|$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 3. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. $-\dfrac{8}{3}$. **B.** 5. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** -1.

Câu 34: **(Chuyên Hạ Long lần 2-2019)** Có bao nhiêu số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2-4x+m+3\right|-4x$ bằng -5.

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 35: **(CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 3)** Cho hàm số $f(x)=(x-1)^2\left(ax^2+4ax-a+b-2\right)$, với a, $b\in\mathbb{R}$. Biết trên khoảng $\left(-\dfrac{4}{3};0\right)$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=-1$. Hỏi trên đoạn $\left[-2;-\dfrac{5}{4}\right]$ hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại giá trị nào của x?

A. $x=-\dfrac{5}{4}$. **B.** $x=-\dfrac{4}{3}$. **C.** $x=-\dfrac{3}{2}$. **D.** $x=-2$.

Câu 36: **(Lương Thế Vinh Lần 3)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max\limits_{x\in[0;10]} f(x)=f(2)=4$. Xét hàm số $g(x)=f\left(x^3+x\right)-x^2+2x+m$. Giá trị của tham số m để $\max\limits_{x\in[0;2]} g(x)=8$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** -1. **D.** 3.

Câu 37: **(Cụm 8 trường Chuyên Lần 1)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=3$. Xét

$g(x)=f(3x-1)+m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $\max\limits_{[0;1]} g(x)=-10$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. 13. **B.** -7. **C.** -13. **D.** -1.

Câu 38: **(Sở Cần Thơ 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $[f(x)-x]f(x)=x^6+3x^4+2x^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;2]$. Giá trị của $3M-m$ bằng

A. 4. **B.** -28. **C.** -3. **D.** 33.

Câu 39: Cho hàm số $y=|x-1|+|x-2|+...+|x-2019|$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là

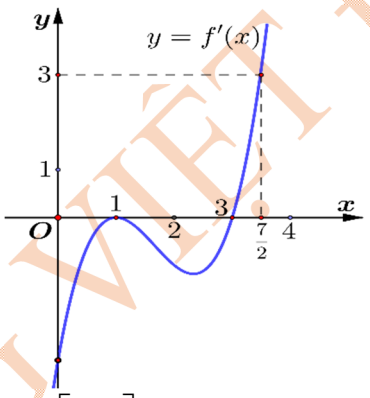
A. 2020^2. **B.** 2.1010^2. **C.** 1010^2. **D.** 1009.1010.

Câu 40: Cho hàm số $y=|x-1|+|x-2|+|x-3|+...+|x-2019|+|x-2020|$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là:

A. 2.1011^2. **B.** 1010^2. **C.** 1011^2. **D.** 1010.2021.

TÌM GTLN, GTNN CỦA HÀM SỐ CHO BỞI BBT, ĐỒ THỊ

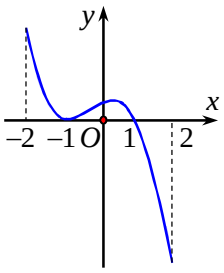
Câu 41: **(THPT-Yên-Mô-A-Ninh-Bình-2018-2019-Thi-tháng-4)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\left[0;\frac{7}{2}\right]$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:



Hàm số $y=f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $\left[0;\frac{7}{2}\right]$ tại điểm x_0 nào dưới đây ?

A. $x_0=0$. **B.** $x_0=\frac{7}{2}$. **C.** $x_0=3$. **D.** $x_0=1$.

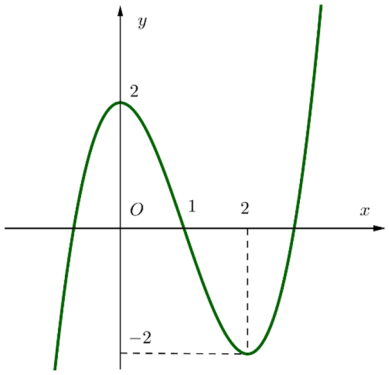
Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $[-2;2]$, có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Tìm giá trị x_0 để hàm số $y=f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $[-2;2]$.



A. $x_0=2$. **B.** $x_0=-1$. **C.** $x_0=-2$. **D.** $x_0=1$.

Câu 43: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:

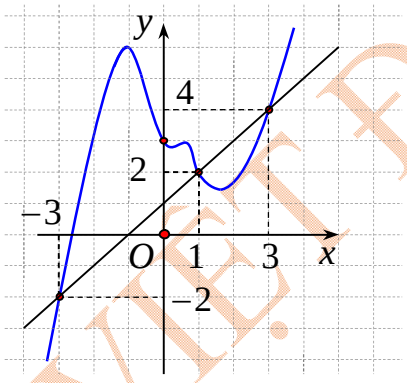
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{3}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)$ trên đoạn $[0;2]$. Khi đó $M+m$ là

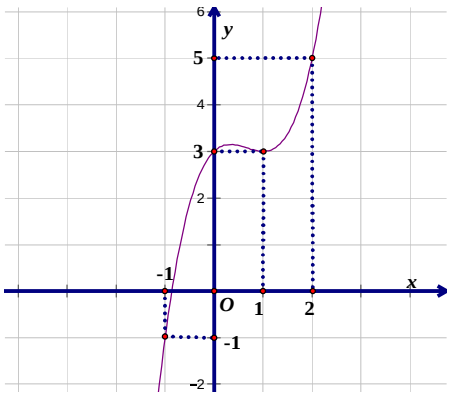
A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 44: **[Chuyên Thái Bình, lần 3, năm 2017-2018-]** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x)=2f(x)-(x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**.



A. $\underset{[-3;3]}{Min}\, g(x)=g(1)$. **B.** $\underset{[-3;3]}{Max}\, g(x)=g(1)$. **C.** $\underset{[-3;3]}{Max}\, g(x)=g(3)$. **D.** Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của $g(x)$ trên $[-3;3]$.

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như dưới đây.

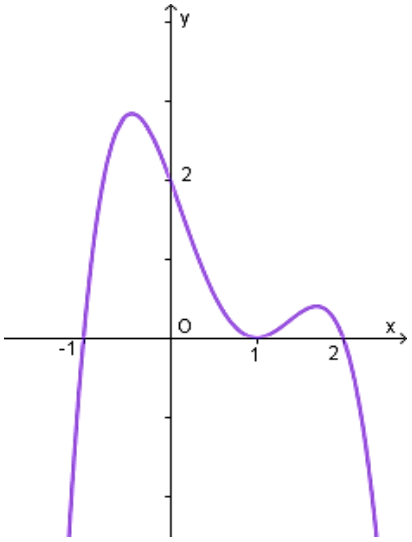


Lập hàm số $g(x)=f(x)-x^2-x$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $g(-1)>g(1)$. **B.** $g(-1)=g(1)$. **C.** $g(1)=g(2)$. **D.** $g(1)>g(2)$.

Câu 46: **(Thuận Thành 2 Bắc Ninh)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ

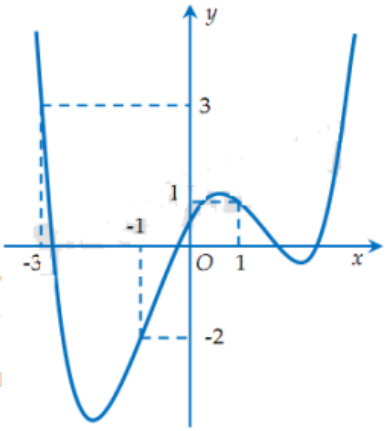
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3+x-1$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A. $f(-1)-\frac{5}{3}$. **B.** $f(1)-\frac{1}{3}$. **C.** $f(2)-\frac{5}{3}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Câu 47: Hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x+2017$

Trong các mệnh đề dưới đây:

I) $g(0)<g(1)$

II) $\min\limits_{x\in[-3;1]} g(x)=g(-1)$

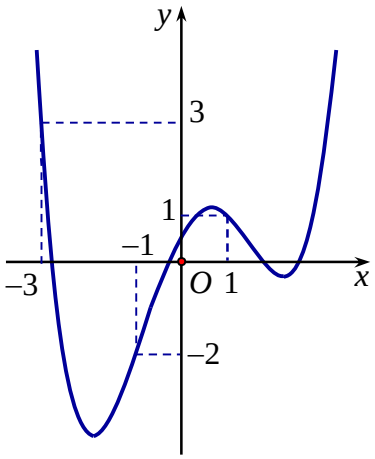
III) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-3;-1)$

IV) $\max\limits_{x\in[-3;1]} g(x)=\max\{g(-3);g(1)\}$

Số mệnh đề đúng là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 48: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x+2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



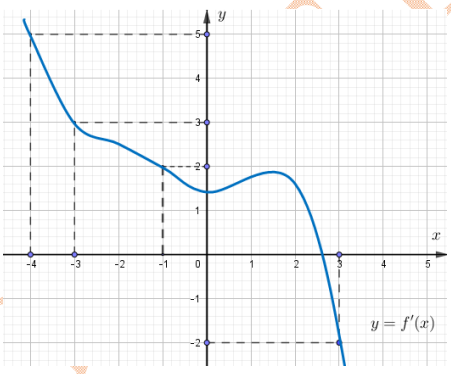
A. $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.

B. $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(1)$.

C. $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(-3)$.

D. $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = \dfrac{g(-3)+g(1)}{2}$.

Câu 49: **(HKII-CHUYÊN-NGUYỄN-HUỆ-HÀ-NỘI)** Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Trên đoạn $[-4;3]$, hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm



A. $x_0 = -4$.

B. $x_0 = -1$.

C. $x_0 = 3$.

D. $x_0 = -3$.

Câu 50: **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định Lần 1)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f\left(4x - x^2\right) + \dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \dfrac{1}{3}$ trên đoạn $[1;3]$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	5	↘	$-\infty$

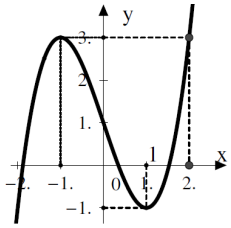
A. 15.

B. $\dfrac{25}{3}$.

C. $\dfrac{19}{3}$.

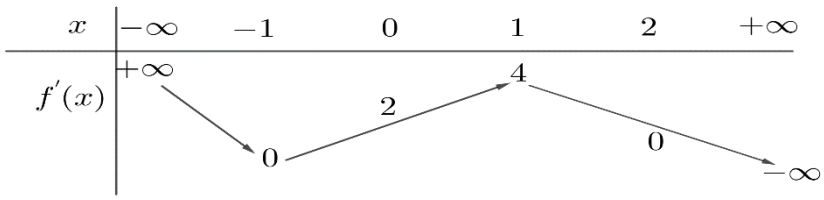
D. 12.

Câu 51: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đặt hàm số $y = g(x) = f\left(2x^3 + x - 1\right) + m$. Tìm m để $\max\limits_{[0;1]} g(x) = -10$.



A. $m=-13$. **B.** $m=3$. **C.** $m=-12$. **D.** $m=-1$.

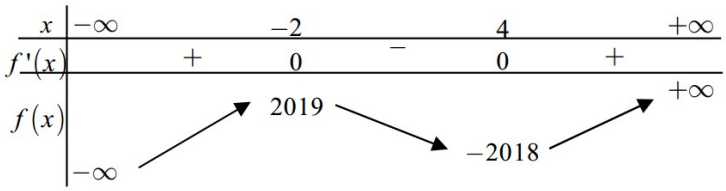
Câu 52: **(KINH MÔN HẢI DƯƠNG 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên tập số thực và có bảng biến thiên như sau:



Biết rằng $f(-1)=\frac{10}{3}$, $f(2)=6$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f^3(x)-3f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A. $\frac{10}{3}$. **B.** $\frac{820}{27}$. **C.** $\frac{730}{27}$. **D.** 198.

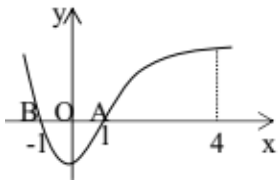
Câu 53: **(Nam Tiền Hải Thái Bình Lần 1)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x\right)-\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+3x-\frac{2}{15}$ trên đoạn $[-1;2]$?

A. 2022. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2021.

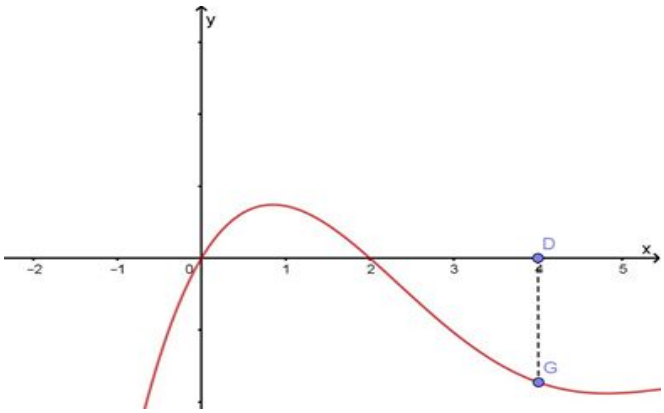
Câu 54: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên R và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Biết rằng $f(-1)+f(2)=f(1)+f(4)$, các điểm $A(1;0),B(-1;0)$ thuộc đồ thị. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;4]$ lần lượt là

A. $f(1);f(-1)$. **B.** $f(0);f(2)$. **C.** $f(-1);f(4)$. **D.** $f(1);f(4)$.

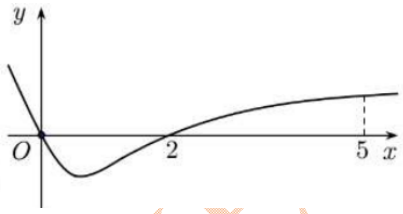
Câu 55: **(KÊNH TRUYỀN HÌNH GIÁO DỤC QUỐC GIA VTV7 –2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ cho như hình vẽ.



Biết rằng $f(2)+f(4)=f(3)+f(0)$. Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0;4]$ lần lượt là

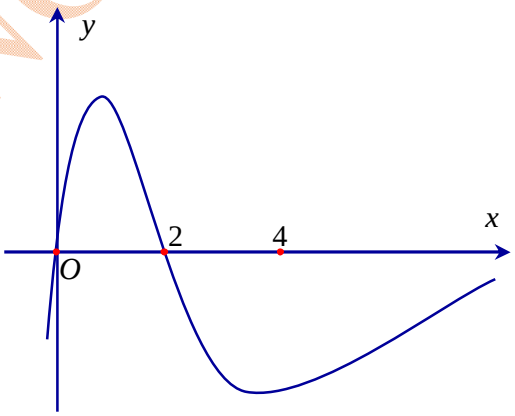
A. $f(2), f(0)$. **B.** $f(4), f(2)$. **C.** $f(0), f(2)$. **D.** $f(2), f(4)$.

Câu 56: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên R và có đồ thị hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $f(0)+f(3)=f(2)+f(5)$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn của $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$ làn lượt là:



A. $f(2); f(0)$ **B.** $f(0); f(5)$ **C.** $f(2); f(5)$ **D.** $f(1); f(3)$

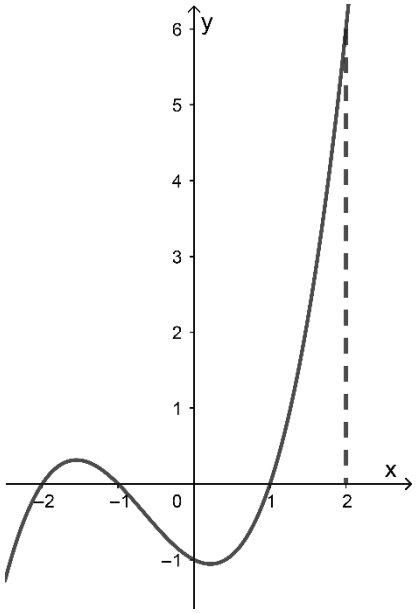
Câu 57: **(Lý Nhân Tông)** Cho hàm số có $f(x)$ có đạo hàm là hàm $f'(x)$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0)+f(1)-2f(2)=f(4)-f(3)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0;4]$.



A. $m=f(4), M=f(2)$. **B.** $m=f(1), M=f(2)$

C. $m=f(4), M=f(1)$. **D.** $m=f(0), M=f(2)$.

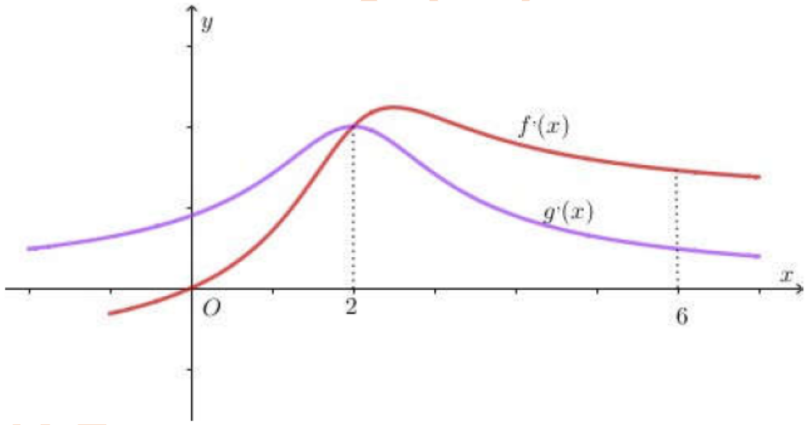
Câu 58: **(HSG 12 Bắc Giang)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây:



Biết rằng $f(-1)+f(0)<f(1)+f(2)$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ lần lượt là:

A. $f(1);\ f(2)$. **B.** $f(2);\ f(0)$. **C.** $f(0);\ f(2)$. **D.** $f(1);\ f(-1)$.

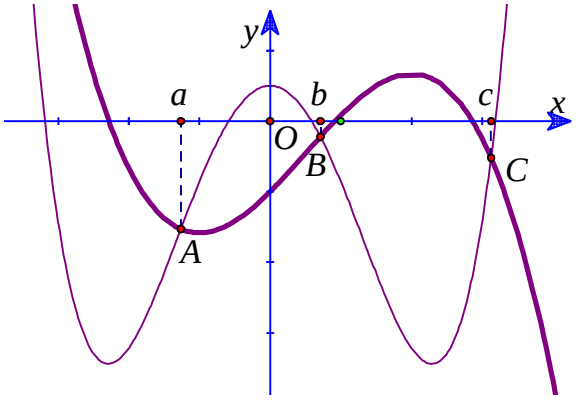
Câu 59: Cho hai hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$, $g'(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và $g'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới.



Biết rằng $f(0)-f(6)<g(0)-g(6)$. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x)=f(x)-g(x)$ trên đoạn $[0;6]$ lần lượt là:

A. $h(2),h(0)$. **B.** $h(2),h(6)$. **C.** $h(0),h(2)$. **D.** $h(6),h(2)$.

Câu 60: đường cong nét đậm và $y=g'(x)$ là đường cong nét mảnh như hình vẽ. Gọi ba giao điểm A,B,C của $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ trên hình vẽ lần lượt có hoành độ a,b,c. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x)=f(x)-g(x)$ trên đoạn $[a;c]$?



A. $\min\limits_{[a;c]} h(x)=h(a)$. **B.** $\min\limits_{[a;c]} h(x)=h(b)$. **C.** $\min\limits_{[a;c]} h(x)=h(c)$. **D.** $\min\limits_{[a;c]} h(x)=h(0)$.

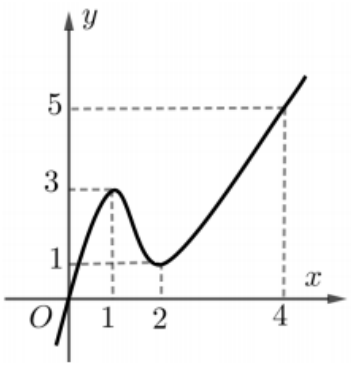
Câu 61: **(Chuyên Vinh Lần 3)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0)=3$, $f'(2)=-2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(x+2017)+2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-2017)$. **B.** $(2017;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-2017;0)$.

Câu 62: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Đặt $M=\max\limits_{\mathbb{R}} f\left(2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\right)$, $m=\min\limits_{\mathbb{R}} f\left(2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\right)$. Tổng $M+m$ bằng

A. 6 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 3.

Câu 63: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$ thỏa mãn $(f(0)-f(2)).(f(3)-f(2))>0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

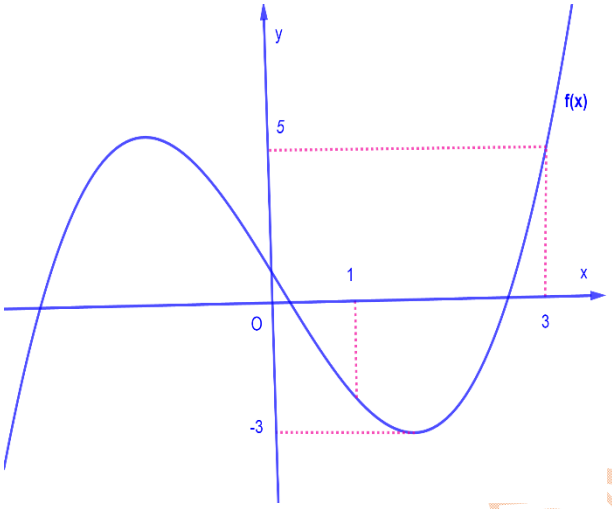
A. Hàm số $f(x)$ có hai cực trị.

B. Phương trình $f(x)=0$ luôn có 3 nghiệm phân biệt.

C. Hàm số $f(x)$ không có cực trị.

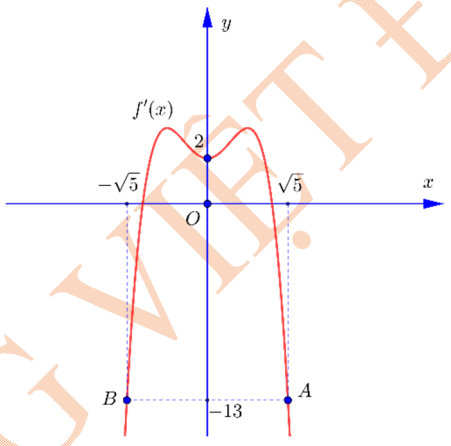
D. Phương trình $f(x)=0$ luôn có nghiệm duy nhất.

Câu 64: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Xét hàm số $y=g(x)=\left|2f(x)+3m-1\right|$. Khi $m=m_0$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $y=g(x)$ trên đoạn $[1;3]$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng:



A. 6. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 8.

Câu 65: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ:



Xét hàm số $g(x)=2f(x)+2x^3-4x-3m-6\sqrt{5}$, $(m\in\mathbb{R})$. Để $g(x)\le 0$ với $\forall x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$ thì điều kiện của m là:

A. $m\ge\frac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$. **B.** $m\le\frac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$.

C. $m\le\frac{2}{3}f(0)-2\sqrt{5}$. **D.** $m\ge\frac{2}{3}f\left(-\sqrt{5}\right)-4\sqrt{5}$.

Câu 66: **(CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG QUẢNG NAM LẦN 2 NĂM 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $3x.f(x)-x^2f'(x)=2f^2(x)$, với $f(x)\ne 0$, $\forall x\in(0;+\infty)$ và $f(1)=\frac{1}{3}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;2]$. Tính $M+m$.

A. $\frac{9}{10}$. **B.** $\frac{21}{10}$. **C.** $\frac{7}{3}$. **D.** $\frac{5}{3}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

DẠNG 2. GTLN, GTNN HÀM NHIỀU BIẾN
ÁP DỤNG CÁC BĐT CỔ ĐIỂN

Câu 1: **(Thuận Thành 2 Bắc Ninh)** Biết hai hàm số $f(x)=x^3+ax^2+4x-2$ và $g(x)=-x^3+bx^2-2x+3$ có chung ít nhất một điểm cực trị. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|a|+|b|$.

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $6\sqrt{2}$. **C.** 6. **D.** 3.

Câu 2: Xét phương trình $ax^3-x^2+bx-1=0$ với a, b là các số thực, $a\neq 0$, $a\neq b$ sao cho các nghiệm đều là số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{5a^2-3ab+2}{a^2(b-a)}$.

A. $8\sqrt{2}$. **B.** $11\sqrt{6}$. **C.** $12\sqrt{3}$. **D.** $15\sqrt{3}$.

Câu 3: Giả sử phương trình $x^3-(a+b)x^2+\dfrac{(a+b)^2-1}{2}x+1=0$ có ba nghiệm.

Gọi M, m là GTLN và GTNN của $P=\dfrac{a^2+b^2-1}{2}+ab$. Khi đó $M+m$ bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** –1. **D.** 2.

Câu 4: Cho các số thực x,y thỏa mãn $x+y=2\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}\right)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(x^2+y^2\right)+15xy$ là

A. $\min P=-83$. **B.** $\min P=-63$. **C.** $\min P=-80$. **D.** $\min P=-91$.

Câu 5: Cho x, y là hai số thực thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+xy+4=4y+3x$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=3\left(x^3-y^3\right)+20x^2+2xy+5y^2+39x$.

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 100. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

ÁP DỤNG HÀM SỐ

Câu 6: Cho biểu thức $P=3x\sqrt{a-y^2}-3y\sqrt{a-x^2}+4xy+4\sqrt{a^2-ax^2-ay^2+x^2y^2}$ trong đó a là số thực dương cho trước. Biết rằng giá trị lớn nhất của P bằng 2018. Khi đó, mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $a\in(500;525]$. **B.** $a\in(400;500]$. **C.** $a\in(340;400]$. **D.** $a=\sqrt{2018}$.

Câu 7: **(CHUYÊN NGUYỄN DU ĐĂK LĂK LẦN X NĂM 2019)** Cho phương trình $x^4+ax^3+bx^2+cx+1=0$ có nghiệm. Giá trị nhỏ nhất $P=a^2+b^2+c^2$ bằng

A. 2. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{8}{3}$. **D.** 4.

Câu 8: Với $a,b>0$ thỏa mãn điều kiện $a+b+ab=1$, giá trị nhỏ nhất của $P=a^4+b^4$ bằng.

A. $\left(\sqrt{2}-1\right)^4$. **B.** $\left(\sqrt{2}+1\right)^4$. **C.** $2\left(\sqrt{2}+1\right)^4$. **D.** $2\left(\sqrt{2}-1\right)^4$.

Câu 9: Cho x, y, z là ba số thực dương và $P=\dfrac{3}{2x+y+\sqrt{8yz}}-\dfrac{8}{\sqrt{2\left(x^2+y^2+z^2\right)+4xz}+3}-\dfrac{1}{x+y+z}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $x+y+z$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. 1. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 3. **D.** $3\sqrt{3}$.

Câu 10: Cho hai số thực $x\neq 0,\ y\neq 0$ thay đổi và thỏa mãn điều kiện $(x+y)xy=x^2+y^2-xy$. Giá trị lớn nhất M của biểu thức $A=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}$ là:

A. $M=0$. **B.** $M=0$. **C.** $M=1$. **D.** $M=16$.

Câu 11: Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x+y=\sqrt{x-1}+\sqrt{2y+2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=x^2+y^2+2(x+1)(y+1)+8\sqrt{4-x-y}$. Khi đó, giá trị của $M+m$ bằng.

A. 41. **B.** 42. **C.** 43. **D.** 44.

Câu 12: Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2+2xy+3y^2=4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=(x-y)^2$ là:

A. $\max P=16$. **B.** $\max P=12$. **C.** $\max P=4$. **D.** $\max P=8$.

Câu 13: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases}x^2-xy+3=0\\2x+3y-14\le 0\end{cases}$. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3x^2y-xy^2-2x^3+2x$

A. 0. **B.** 12. **C.** 4. **D.** 8.

Câu 14: Cho các số thực x, y thay đổi thỏa điều kiện $y\le 0$, $x^2+x=y+12$. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $M=xy+x+2y+17$ lần lượt bằng

A. $10;-6$. **B.** $5;-3$. **C.** $20;-12$. **D.** $8;-5$.

Câu 15: Cho các số thực x, y thỏa mãn $x+y=2\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(x^2+y^2\right)+15xy$.

A. $\min P=-91$. **B.** $\min P=-83$. **C.** $\min P=-63$. **D.** $\min P=-80$.

Câu 16: Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}+2-y$.

A. $P_{\min}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$. **B.** $P_{\min}=2+\sqrt{3}$. **C.** $P_{\min}=2\sqrt{2}$. **D.** $P_{\min}=\frac{191}{50}$.

Câu 17: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x\ge 0$, $y\ge 1$, $x+y=3$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^3+2y^2+3x^2+4xy-5x$ lần lượt bằng:

A. $P_{\max}=18$ và $P_{\min}=15$. **B.** $P_{\max}=15$ và $P_{\min}=13$.

C. $P_{\max}=20$ và $P_{\min}=18$. **D.** $P_{\max}=20$ và $P_{\min}=15$.

Câu 18: Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $2y^3+7y+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x}+3\left(2y^2+1\right)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x+2y$.

A. $P=8$. **B.** $P=10$ **C.** $P=4$. **D.** $P=6$.

Câu 19: Cho x,y là hai số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $(xy+1)\left(\sqrt{xy+1}-\sqrt{y}\right)\le 1-x-\frac{1}{y}$. Tìm

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+3y^2}}-\dfrac{x-2y}{6(x+y)}$?

A. $\dfrac{\sqrt{5}+7}{30}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{3}-\dfrac{7}{30}$. **C.** $\dfrac{7}{30}-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{3}+\dfrac{7}{30}$.

Câu 20: Cho $a,b\in\mathbb{R}$; $a,b>0$ thỏa mãn $2(a^2+b^2)+ab=(a+b)(ab+2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(\dfrac{a^3}{b^3}+\dfrac{b^3}{a^3}\right)-9\left(\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}\right)$ bằng

A. $\dfrac{23}{4}$. **B.** -10. **C.** $\dfrac{-21}{4}$. **D.** $\dfrac{-23}{4}$.

Câu 21: Cho hai số thực x,y thỏa mãn: $9x^3+\left(2-y\sqrt{3xy-5}\right)x+\sqrt{3xy-5}=0$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=x^3+y^3+6xy+3(3x^2+1)(x+y-2)$

A. $\dfrac{296\sqrt{15}-18}{9}$. **B.** $\dfrac{36+296\sqrt{15}}{9}$. **C.** $\dfrac{36-4\sqrt{6}}{9}$. **D.** $\dfrac{-4\sqrt{6}+18}{9}$.

Câu 22: Cho x,y là hai số thực không âm thỏa mãn $x^2+y^2+2x-3=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2x-y-2$ (làm tròn đến hai chữ số thập phân).

A. $-3,70$. **B.** $-3,73$. **C.** $-3,72$. **D.** $-3,71$.

Câu 23: Cho hai số thực x,y thỏa mãn: $9x^3+\left(2-y\sqrt{3xy-5}\right)x+\sqrt{3xy-5}=0$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=x^3+y^3+6xy+3(3x^2+1)(x+y-2)$

A. $\dfrac{296\sqrt{15}-18}{9}$. **B.** $\dfrac{36+296\sqrt{15}}{9}$. **C.** $\dfrac{36+296\sqrt{15}}{9}$. **D.** $\dfrac{-4\sqrt{6}+18}{9}$.

Câu 24: **(Hải Hậu Lần1)** Cho hai số thực dương x,y thỏa mãn $\dfrac{9x^3+x}{y+1}=\sqrt{3y+2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $S=6x-y$ là:

A. $\dfrac{89}{12}$. **B.** $\dfrac{11}{3}$. **C.** $\dfrac{17}{12}$. **D.** $\dfrac{82}{3}$.

Câu 25: **(SỞ NAM ĐỊNH 2018-2019)** Cho $x,y\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $x+y\neq -1$ và $x^2+y^2+xy=x+y+1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{xy}{x+y+1}$. Tính $M+m$.

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Câu 26: Cho hai số thực $x\neq 0$, $y\neq 0$ thay đổi và thỏa mãn điều kiện $(x+y)xy=x^2+y^2-xy$. Giá trị lớn nhất M của biểu thức $A=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}$ là:

A. $M=0$. **B.** $M=0$. **C.** $M=1$. **D.** $M=16$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 27: Cho x, y là hai số không âm thỏa mãn $x+y=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{3}x^3+x^2+y^2-x+1$

A. $\min P=5$. **B.** $\min P=\frac{7}{3}$. **C.** $\min P=\frac{17}{3}$. **D.** $\min P=\frac{115}{3}$.

Câu 28: **(TTHT Lần 4)** Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x^2-xy+y^2=1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{x^4+y^4+1}{x^2+y^2+1}$. Giá trị của $A=M+15m$ là:

A. $17-2\sqrt{6}$. **B.** $17+\sqrt{6}$ **C.** $17+2\sqrt{6}$ **D.**

Câu 29: **(Sở Bắc Ninh)** Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2+y^2-4x+6y+4+\sqrt{y^2+6y+10}=\sqrt{6+4x-x^2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\left|\sqrt{x^2+y^2}-a\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-10;10]$ của tham số a để $M\geq 2m$?

A. 17. **B.** 15. **C.** 18. **D.** 16.

Câu 30: **(Chuyên Thái Bình Lần3)** Cho x, y là các số thực thỏa mãn $(x-3)^2+(y-1)^2=5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{3y^2+4xy+7x+4y-1}{x+2y+1}$.

A. 3. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{114}{11}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 31: **(SGD Phú Thọ – lần 1 - năm 2017 – 2018)** Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=4$ và $xy+yz+zx=5$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ bằng

A. 20. **B.** 25. **C.** 15. **D.** 35.

Câu 32: **(Kim Liên)** Cho các số thực dương a,b thỏa mãn $2\left(a^2+b^2\right)+ab=(a+b)(ab+2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}\right)-9\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)$ thuộc khoảng nào?

A. (-6 ;-5). **B.** (-10 ;-9).
C. (-11 ;-9). **D.** (-5 ;-4).

Câu 33: **(Chuyên Lam Sơn Lần 2)** Cho các số thực x, y thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $3x^2-2xy-y^2=5$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+xy+2y^2$ thuộc khoảng nào sau đây.

A. $(4;7)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(1;4)$. **D.** $(7;10)$.

Câu 34: **(Chuyên Lam Sơn Lần 2)** Cho x, y thỏa mãn $\log_3\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-9)+y(y-9)+xy$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{3x+2y-9}{x+y+10}$ khi x, y thay đổi.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

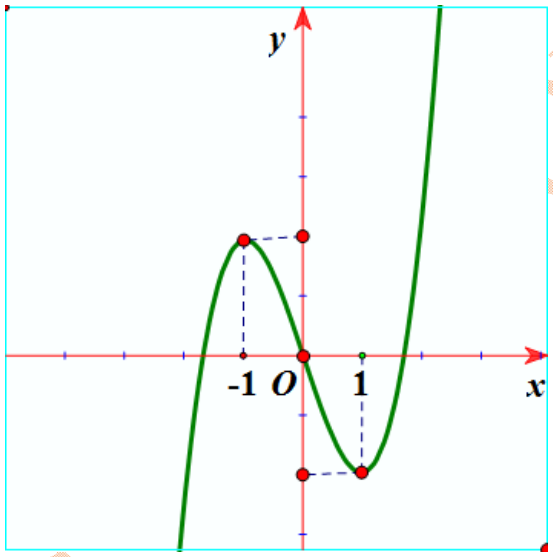
A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 35: (PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH) Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x^2+y^2-xy=1$ và hàm số $f(t)=2t^3-3t^2+1$.

Gọi M, m tương ứng là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $Q=f\left(\dfrac{5x-y+2}{x+y+4}\right)$. Tổng $M+m$ bằng

A. $-4-3\sqrt{2}$. **B.** $-4-5\sqrt{2}$. **C.** $-4-4\sqrt{2}$. **D.** $-4-2\sqrt{2}$.

Câu 36: (PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH) Cho 2 số x,y thỏa mãn $x^2+5y^2=1+4xy$ và hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M,m tương ứng là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P=f\left(\dfrac{2x-3y-3}{-x+4y+4}\right)$.



Tích $M.m$ bằng

A. $\dfrac{-1436}{1331}$ **B.** $\dfrac{3380}{1331}$ **C.** $\dfrac{1436}{1331}$ **D.** $\dfrac{1944}{1331}$

Câu 37: (PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH) Cho các số thực x,y thay đổi thỏa mãn $x^2+5y^2+2xy=1$ và hàm số $f(t)=t^4-2t^2+2$ Gọi M,m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $Q=f\left(\dfrac{x+y-1}{x+3y-2}\right)$.

Tổng $M+m$

A. $4\sqrt{3}+2$. **B.** $8\sqrt{3}-2$. **C.** 66. **D.** $9\sqrt{3}+17$

Câu 38: (2D1-4) (THPT Chuyên Trần Phú-Hải Phòng-lần 2 năm 2017-2018) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases}x^2-xy+3=0\\2x+3y-14\le 0\end{cases}$. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3x^2y-xy^2-2x^3+2x$.

A. 8. **B.** 0. **C.** 12. **D.** 4.

Câu 39: **(PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH)** Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $\begin{cases} xy+yz+zx=8 \\ x+y+z=5 \end{cases}$ và hàm số $f(x)=x^2-4x+5$

Gọi M, m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x)$. Tổng $M+m$

A. 3. **B.** $\frac{28}{9}$ **C.** $\frac{19}{9}$. **D.** 2

Câu 40: Cho $x, y \in [0;+\infty)$, $x+y=1$. Biết $m \in [a;b]$ thì phương trình $(5x^2+4y)(5y^2+4x)+40xy=m$ có nghiệm thực. Tính $T=25a+16b$.

A. $T=829$. **B.** $T=825$. **C.** $T=816$. **D.** $T=820$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A – KIẾN THỨC CHUNG

1 - Định nghĩa:

+) Đường thẳng $x=a$ là TCĐ của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu có một trong các điều kiện sau:

$\lim\limits_{x\to a^+} y=+\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to a^+} y=-\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to a^-} y=+\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to a^-} y=-\infty$

+) Đường thẳng $y=b$ là TCN của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu có một trong các điều kiện sau:

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=b$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty} y=b$

2 - Cho $y=f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

Đkiện cần: giải $Q(x)=0\Leftrightarrow x=x_0$ **là TCĐ khi thỏa mãn đk đủ.**

Điều Kiện đủ:

Đkiện 1: x_0 làm cho $P(x)$ và $Q(x)$ xác định

Đkiện 2: ① x_0 không phải nghiệm $P(x)\Rightarrow x=x_0$ là TCĐ

② x_0 là nghiệm $P(x)\Rightarrow x=x_0$ là TCĐ nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$

Cần nhớ: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$ *luôn có đường tiệm cận đứng là:* $x=-\dfrac{d}{c}$

3 - Hàm số *y = f(x)* có TXD: D

Đkiện cần: D phải chứa $+\infty$ hoặc $-\infty$

Đkiện đủ:

Dạng 1: $y=f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

+ Bậc của $P(x)$ nhỏ hơn bậc của $Q(x)\Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} y=0\Rightarrow$ Tiệm cận ngang $Ox: y=0$.

+ Bậc của $P(x)$ bằng bậc của $Q(x)\Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\dfrac{\text{Hệ số bậc cao của P(x)}}{\text{Hệ số bậc cao của Q(x)}}=\alpha$.

Suy ra tiệm cận ngang $y=\alpha$.

+ Bậc của $P(x)$ lớn hơn bậc của $Q(x)\Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\pm\infty\Rightarrow$ Không có tiệm cận ngang.

Dạng 2: $y=f(x)=u-\sqrt{v}$ (hoặc $\sqrt{u}-\sqrt{v}$): **Nhân liên hợp** $\Rightarrow y=f(x)=\dfrac{u^2-v}{u+\sqrt{v}}$ (hoặc $\dfrac{u-v}{\sqrt{u}+\sqrt{v}}$)

3 - Kĩ thuật "*ước lượng bậc nhỏ hơn*"

Ví dụ câu **13**

$y=\dfrac{\sqrt{x^2+x+4}}{x-3}\approx\dfrac{|x|}{x}=\pm 1$ khi $x\to\pm\infty\Rightarrow y=\pm 1$ là hai đường **TCN**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

4 - Kỹ năng sử dụng máy tính (tham khảo):

+ Tính $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x = x_0 + 10^{-9}$.

+ Tính $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x = x_0 - 10^{-9}$.

B – BÀI TẬP

DẠNG 1. TIỆM CẬN KHÔNG CHỨA THAM SỐ

Câu 1: **(THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4)** Đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{2x-1}+1}{x^2-2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 2: **(Thị Xã Quảng Trị)** Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x\sqrt{x^2-4}}{(x-1)(x+5)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 3: **(KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG)** Đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{1-x^2}+x}{x^2-2x-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 4: **(Phan Đình Tùng Hà Tĩnh)** Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2019}-x}$ là

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 5: **(Ngô Quyền Hà Nội)** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x}$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 6: **(CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU)** Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị $y = \dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x}$ là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 7: Đồ thị hàm số $y = \sqrt{4x^2+4x+3} - \sqrt{4x^2+1}$ có bao nhiêu tiệm cận ngang?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 8: Số tiệm cận của đồ thị hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2-x}}$ là:

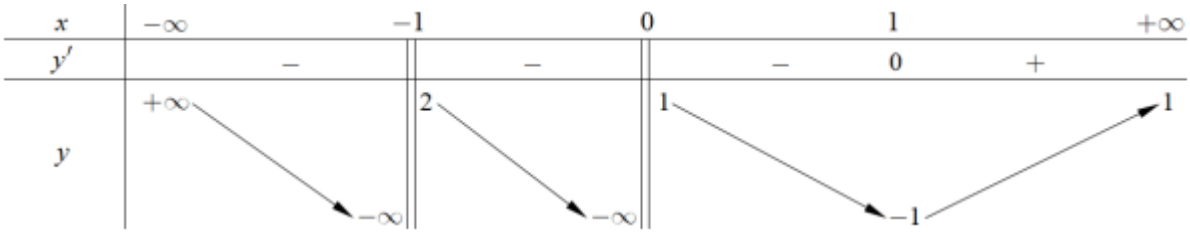
A. 2. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 9: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2-x}}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 10: **(SỞ PHÚ THỌ LẦN 2 NĂM 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



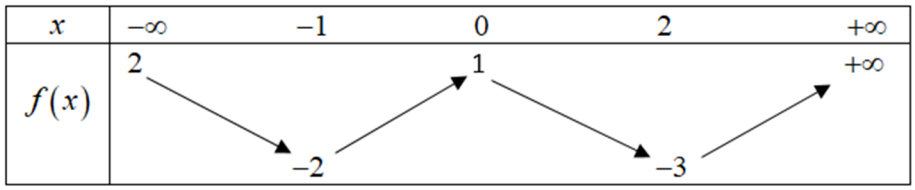
Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2}{3f(x)-2}$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 11: **(Đặng Thành Nam Đề 9)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ và $f(x)=1\Leftrightarrow x=0$. Tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-1}$ là:

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

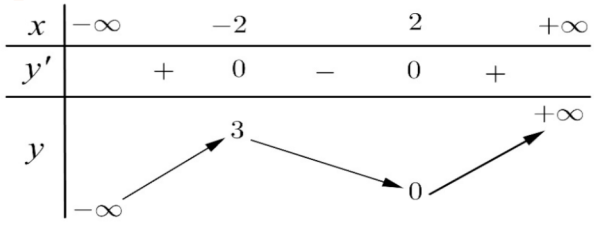
Câu 12: **(CổLoa Hà Nội)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau:



Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)+2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận (tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

A. 5. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

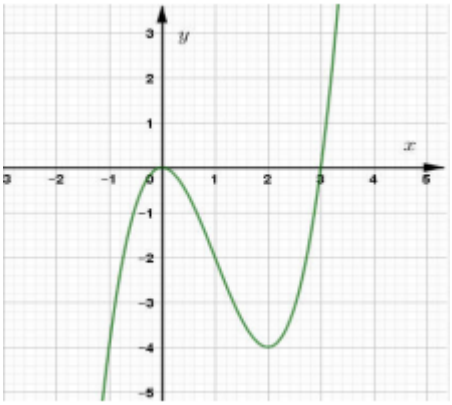
Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(3-x)-2}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

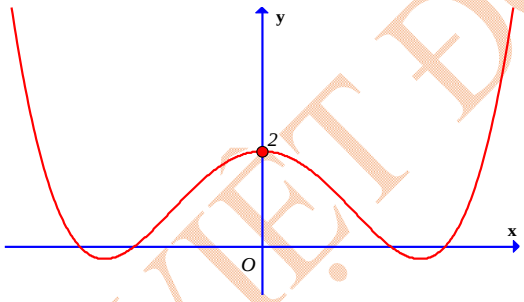
Câu 14: **(KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau



Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f\left(x^2-2x+2\right)+5}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

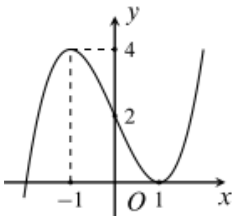
A. 2. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2018x}{f(x)\left(f(x)-1\right)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?



A. 2. **B.** 9. **C.** 4. **D.** 3.

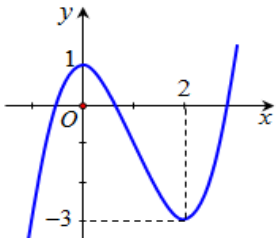
Câu 16: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm $f\left(x\right)$ như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{x^2-1}{f^2\left(x\right)-4f\left(x\right)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận **đứng**?



A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

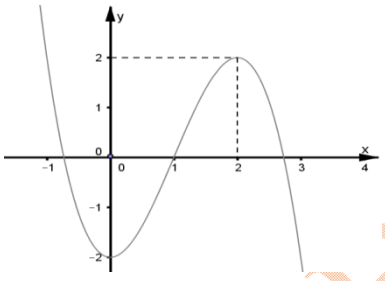
Câu 17: Cho hàm số bậc ba $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{\left(x^2-2x\right).\sqrt{1-x}}{\left(x-3\right).\left[f^2\left(x\right)+3f\left(x\right)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



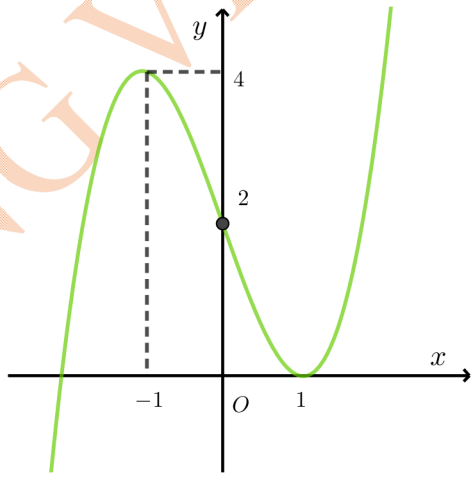
A. 5. **B.** 4 . **C.** 6 . **D.** 3.

Câu 18: Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\left(x-2\sqrt{x}\right).\sqrt{2-x}}{(x-4).\left[f^2(x)+2f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 5. **B.** 4 . **C.** 2 . **D.** 3.

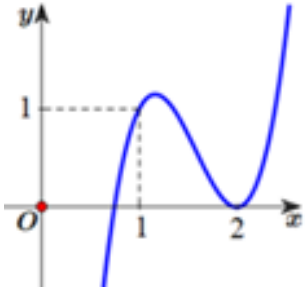
Câu 19: **(Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019)** Cho $f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị hàm như hình vẽ dưới đây. Đặt $g(x)=\dfrac{x^2-x}{f^2(x)-2f(x)}$, hỏi đồ thị hàm số $y=g(x)$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?



A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

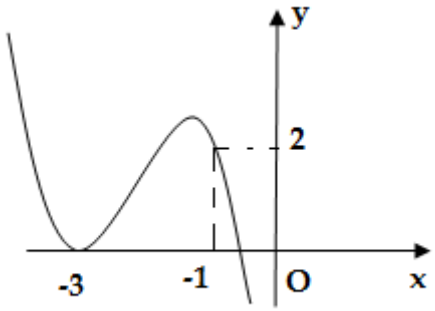
Câu 20: **(Lý Nhân Tông)** Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\left(x^2-3x+2\right)\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



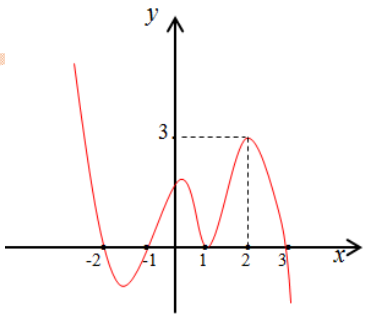
A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 21: **(Chuyên Thái Nguyên)** Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in R)$ có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\left(x^2+4x+3\right)\sqrt{x^2+x}}{x\left[\left(f(x)\right)^2-2f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



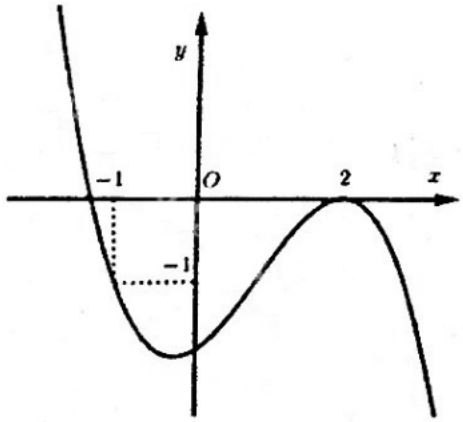
A. 3. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 22: **(THPT SỐ 1 TƯ NGHĨA LẦN 2 NĂM 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x-2)^2\sqrt{x}}{(x+3)\left(f^2(x)-3f(x)\right)}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?



A. 6. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 23: **(THCS-THPT-NGUYỄN-KHUYẾN-TP-HCM-24THÁNG3)** Đồ thị hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ như hình vẽ.



Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{(x^2-2x-3)\sqrt{x+2}}{(x^2-x)\left[(f(x))^2+f(x)\right]}$ là

A. 8. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 24: Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị hàm số (C) tạo với hai đường tiệm cận một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất. Khi đó, khoảng cách từ tâm đối xứng của đồ thị (C) đến Δ bằng?

A. $\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Câu 25: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}(C)$. Gọi M là điểm bất kỳ trên (C), d là tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của đồ thị (C). Giá trị nhỏ nhất của d là

A. 5. **B.** 10. **C.** 6. **D.** 2.

Câu 26: Số điểm thuộc đồ thị (H) của hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có tổng các khoảng cách đến hai tiệm cận của (H) nhỏ nhất là

A. 3**B.** 2 **C.** 1 **D.** 0

Câu 27: **(Sở Vĩnh Phúc)** Cho M là điểm có hoành độ dương thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-2}$, sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số là nhỏ nhất. Tọa độ điểm M là:

A. $(4;3)$. **B.** $(0;-1)$. **C.** $(1;-3)$. **D.** $(3;5)$.

Câu 28: Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-2}$, có đồ thị (C). Gọi P, Q là 2 điểm phân biệt nằm trên (C) sao cho tổng khoảng cách từ P hoặc Q tới 2 đường tiệm cận là nhỏ nhất. Độ dài đoạn thẳng PQ là:

A. $4\sqrt{2}$ **B.** $5\sqrt{2}$ **C.** 4 **D.** $2\sqrt{2}$

Câu 29: Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi d là khoảng cách từ giao điểm hai tiệm cận của đồ thị (C) đến một tiếp tuyến của (C). Giá trị lớn nhất của d có thể đạt được là:

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

DẠNG 2. TIỆM CẬN CHỨA THAM SỐ

Câu 30: **(ĐH Vinh Lần 1)** Có bao nhiêu giá trị m nguyên để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-mx+m}$ có đúng một tiệm cận đứng.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 31: **(Chuyên-Thái-Nguyên-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3)** Cho hàm số $y=\dfrac{1-x}{x^2-2mx+4}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

A. $\begin{cases} m\neq\dfrac{5}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right. \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} m>2 \\ m\neq\dfrac{5}{2} \end{cases}$. **C.** $-2<m<2$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right.$.

Câu 32: **(LÝ TỰ TRỌNG – TPHCM)** Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+x-1}{4x^2+bx+9}$ có đồ thị (C) (a,b là các hằng số dương, $ab=4$). Biết rằng (C) có tiệm cận ngang $y=c$ và có đúng 1 tiệm cận đứng. Tính tổng $T=3a+b-24c$

A. $T=1$. **B.** $T=4$. **C.** $T=7$. **D.** $T=11$.

Câu 33: **(Cụm THPT Vũng Tàu)** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-mx-m+5}$ **không** có đường tiệm cận đứng?

A. 10. **B.** 1. **C.** 12. **D.** 9.

Câu 34: **(Sở Bắc Ninh)** Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)\text{x}-\text{m}}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-6;6]$ của tham số m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận?

A. 8. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 11.

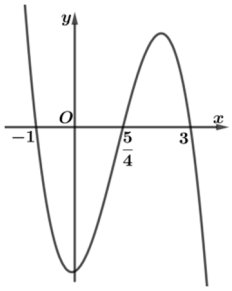
Câu 35: **(CHUYÊN ĐHSP HN)** Tập hợp các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{(mx^2-2x+1)(4x^2+4mx+1)}$ có đúng 1 đường tiệm cận là

A. $\{0\}$. **B.** $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

C. $\varnothing$ **D.** $(-\infty;-1)\cup\{0\}\cup(1;+\infty)$.

Câu 36: **(CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 3)** Cho hàm số $g(x)=\dfrac{2018}{h(x)-m^2-m}$ với $h(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx$ $(m,n,p,q\in\mathbb{R})$. Hàm số $y=h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Tìm các giá trị m nguyên để số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$ là 2

A. 11. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 20.

Câu 37: **(Chuyên Quốc Học Huế Lần1)** Tìm số giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019;2019]$ của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. 2007. **B.** 2010. **C.** 2009. **D.** 2008.

Câu 38: **(THPT-Phúc-Trạch-Hà-Tĩnh-lần-2-2018-2019-thi-tháng-4)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-2019;2019)$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{4036x+2}{\sqrt{mx^2+3}}$ có hai đường tiệm cận ngang.

A. 0. **B.** 2018. **C.** 4036. **D.** 25.

Câu 39: **(Đặng Thành Nam Đề 14)** Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{ax^2+1}}$ có đồ thị (C). Biết rằng (C) có tiệm cận ngang và tồn tại tiếp tuyến của (C) song song và cách tiệm cận ngang của (C) một khoảng bằng 3. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $a\in\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. **B.** $a\in\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **C.** $a\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $a\in\left(\dfrac{3}{2};2\right)$.

Câu 40: **(-Mai-Anh-Tuấn-Thanh-Hóa-lần-1-2018-2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1}$ có đúng một đường tiệm cận.

A. $-1\le m<0$. **B.** $-1\le m\le 0$. **C.** $m<-1$. **D.** $m>0$.

Câu 41: Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{mx^4+3}}$ có hai đường tiệm cận ngang.

A. $m=0$ **B.** $m<0$ **C.** $m>0$ **D.** $m>3$

Câu 42: **(Hai Bà Trưng Huế Lần1)** Cho hàm số $y=\dfrac{1}{\left[x^2-(2m+1)x+2m\right]\sqrt{x-m}}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

A. $\begin{cases}0<m<1\\ m\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}m<1\\ m\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}$. **C.** $m>1$. **D.** $\begin{cases}0\le m\le 1\\ m\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

Câu 43: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-\sqrt{(m-1)x^2+1}}{x-1}$ có đúng hai tiệm cận ngang?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $m=1$ **B.** $m\in(1;4)\cup(4;+\infty)$ **C.** $m<1$ **D.** $m>1$

Câu 44: **(TTHT Lần 4)** Cho hàm số $y=\dfrac{12+\sqrt{4x-x^2}}{\sqrt{x^2-6x+2m}}$ có đồ thị (C_m). Tìm tập S tất cả các giá trị của tham số thực m để (C_m) có đúng hai tiệm cận đứng.

A. $S=[8;9)$. **B.** $S=\left[4;\dfrac{9}{2}\right)$. **C.** $S=\left(4;\dfrac{9}{2}\right)$. **D.** $S=(0;9]$.

Câu 45: **(Thuận Thành 2 Bắc Ninh)** Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+3}+ax+b}{(x-1)^2}$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị hàm số (C) không có tiệm cận đứng. Tính giá trị $T=2a-3b$.

A. $-\dfrac{11}{4}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{19}{4}$. **D.** $\dfrac{7}{2}$.

Câu 46: **(TTHT Lần 4)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{1+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-mx-3m}}$ có đúng hai tiệm cận đứng là

A. $(0;+\infty)$. **B.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $\left[\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right]$. **D.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right]$.

Câu 47: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-1}+2017}{\sqrt{x^2-2mx+m+2}}$ có đúng ba đường tiệm cận?

A. $m>2$ hoặc $m<-1$. **B.** $2<m<3$.
C. $2\le m\le 3$. **D.** $m<2$.

Câu 48: Số các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\sqrt{mx^2-4x}-mx+1$ có tiệm cận ngang là:

A. 3**B.** 0 **C.** 1 **D.** 2

Câu 49: **(PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH)** Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\sqrt[3]{x^3+3x^2+2}-\sqrt{4x^2+3x+2}+mx$ có tiệm cận ngang. Tổng các phần tử của S là

A. -2. **B.** 2. **C.** -3. **D.** 3.

Câu 50: **(PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH)** Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\sqrt[3]{8x^3-5x^2-2}-\sqrt{25x^2-7x+2}-\dfrac{m}{2}x$ có tiệm cận ngang. Tích các phần tử của S là

A. 8. **B.** -84. **C.** 21. **D.** -21.

Câu 51: **(PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH)** Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\sqrt{9x^2-5x+3}-\sqrt[3]{64x^3+3x^2-5x+2}+mx$ có tiệm cận ngang. Tổng bình phương tất cả các phần tử của S là

A. 10. **B.** 15. **C** 50. **D.** 51.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 52: **(Thuận Thành 2 Bắc Ninh)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+m}-3}{x+5}$ có đúng một đường tiệm cận?

A. 5. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 6.

Câu 53: **(Kim Liên)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(\tan x)=\cos^4 x$. Tìm tất cả các số thực m để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2019}{f(x)-m}$ có hai đường tiệm cận đứng.

A. $m<0$. **B.** $0<m<1$ **C.** $m>0$. **D.** $m<1$.

Câu 54: Cho hàm số $y=\dfrac{2mx+m}{x-1}$. Với giá trị nào của tham số m thì đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang cùng hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 8.

A. $m=2$. **B.** $m=\pm\dfrac{1}{2}$. **C.** $m=\pm 4$. **D.** $m\neq\pm 2$.

Câu 55: Cho đồ thị hai hàm số $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$ và $g(x)=\dfrac{ax+1}{x+2}$ với $a\neq\dfrac{1}{2}$. Tìm tất cả các giá trị thực dương của a để các tiệm cận của hai đồ thị hàm số tạo thành một hình chữ nhật có diện tích là 4.

A. $a=3$. **B.** $a=6$. **C.** $a=1$. **D.** $a=4$.

Câu 56: **(Phan Đình Tùng Hà Tĩnh) (Phan Đình Tùng Hà Tĩnh)** Cho hàm số $y=\dfrac{x+a}{x-a}$ có đồ thị (C) (với a là số thực dương). Gọi P, Q là 2 điểm phân biệt nằm trên (C) sao cho tổng khoảng cách từ P tới hai đường tiệm cận của (C) là nhỏ nhất và tổng khoảng cách từ Q tới hai đường tiệm cận của (C) là nhỏ nhất. Độ dài đoạn thẳng PQ là

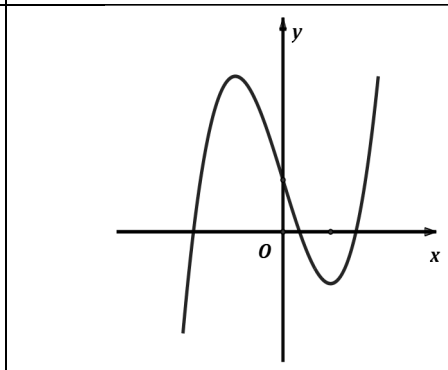
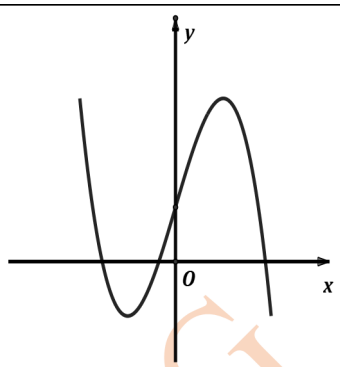
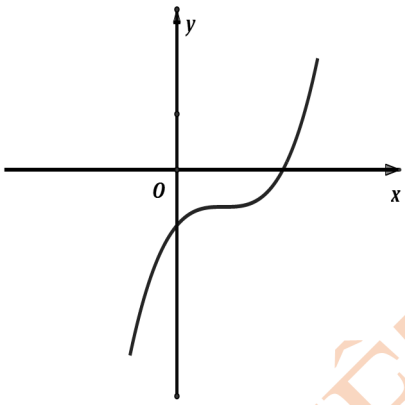
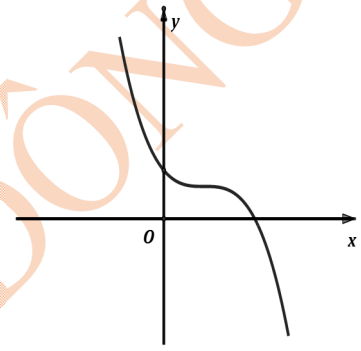
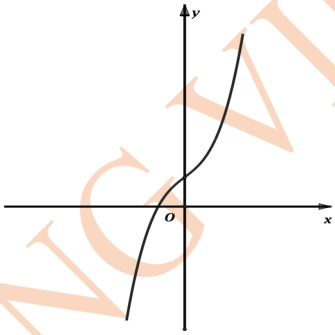
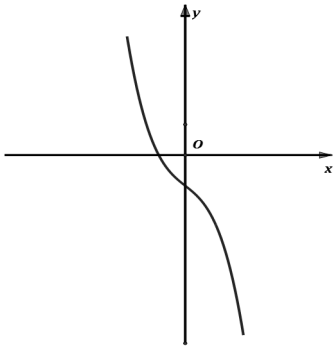
A. $2\sqrt{2a+1}$. **B.** $2\sqrt{a}$. **C.** $\sqrt{2a+1}$. **D.** $4\sqrt{a}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A – KIẾN THỨC CHUNG

ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. Định hình hàm số bậc 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

	$a>0$	$a<0$
$y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt hay $\Delta_{y'} > 0$		
$y' = 0$ có hai nghiệm kép hay $\Delta_{y'} = 0$		
$y' = 0$ vô nghiệm hay $\Delta_{y'} > 0$		

2. Đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương: $y = ax^4 + bx^2 + c$

+) Đạo hàm: $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x\left(2ax^2 + b\right)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2ax^2 + b = 0 \end{array}\right.$

+) Để hàm số có 3 cực trị: $ab < 0$

- Nếu $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực đại và 2 cực tiểu

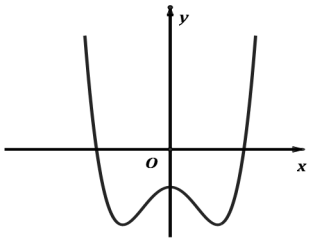
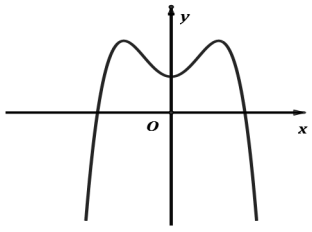
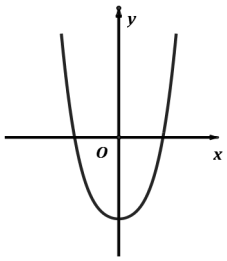
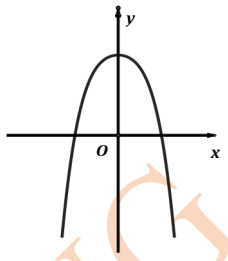
- Nếu $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$ hàm số có 2 cực đại và 1 cực tiểu

+) Để hàm số có 1 cực trị $ab \ge 0$

- Nếu $\begin{cases} a > 0 \\ b \ge 0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực tiểu và không có cực đại

- Nếu $\begin{cases} a < 0 \\ b \le 0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực đại và không có cực tiểu

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

	a>0	a<0
$y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt hay $ab<0$		
$y'=0$ có đúng 1 nghiệm hay $ab\geq 0$		

3. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

+) Tập xác định: $D=R\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$

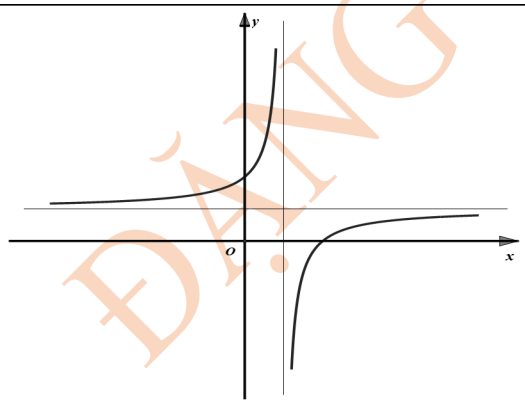
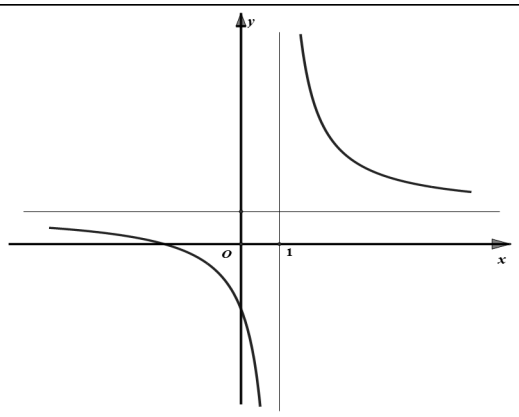
+) Đạo hàm: $y=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

- Nếu $ad-bc>0$ *hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định. Đồ thị nằm góc phần tư 2 và 4.*

- Nếu $ad-bc<0$ *hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định. Đồ thị nằm góc phần tư 1 và 3.*

+) Đồ thị hàm số có: TCĐ: $x=-\dfrac{d}{c}$ và TCN: $y=\dfrac{a}{c}$

+) Đồ thị có tâm đối xứng: $I\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$

$ad-bc>0$	$ad-bc<0$
	

4. Đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối

Dạng 1: Từ đồ thị (C) của hàm số $y=f(x)$, suy ra cách vẽ đồ thị (G) của hàm số $y=|f(x)|$

$$y=|f(x)|=\begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x)\geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x)<0 \end{cases}$$

Suy ra $(G)=(C_1)\cup(C_2)$

+ (C_1) là phần đồ thị (C) nằm phía trên trục hoành $(y_{(C)}\geq 0)$.

+ (C_2) là phần đối xứng qua trục hoành của phần đồ thị (C) nằm phía dưới trục hoành $(y_{(C)}<0)$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Dạng 2: Từ đồ thị (C) của hàm số $y=f(x)$, suy ra cách vẽ đồ thị (H) của hàm số $y=f(|x|)$

Vì $|-x|=|x|$ nên $y=f(|x|)$ là hàm số chẵn, suy ra đồ thị (H) nhận trục tung làm trục đối xứng. Vì Suy ra

$(H)=(C_3)\cup(C_4)$

+ (C_3) là phần đồ thị của (C) nằm bên phải trục tung $(x\ge 0)$.

+ (C_4) là phần đối xứng của (C_3) qua trục tung.

SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1 - Tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số:

Phương pháp:

Cho 2 hàm số $y=f(x), y=g(x)$ có đồ thị lần lượt là (C) và (C').

+) Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (C'): $f(x)=g(x)$

+) Giải phương trình tìm x từ đó suy ra y và tọa độ giao điểm.

+) Số nghiệm của (*) là số giao điểm của (C) và (C').

2 - Tương giao của đồ thị hàm bậc 3

Phương pháp 1: Bảng biến thiên (PP đồ thị)

+) Lập phương trình hoành độ giao điểm dạng $F(x,m)=0$ *(phương trình ẩn x tham số m)*

+) Cô lập m đưa phương trình về dạng $m=f(x)$

+) Lập BBT cho hàm số $y=f(x)$.

+) Dựa và giả thiết và BBT từ đó suy ra m.

***) Dấu hiệu:** Sử dụng PP bảng biến thiên khi m độc lập với x.

Phương pháp 2: Nhẩm nghiệm – tam thức bậc 2.

+) Lập phương trình hoành độ giao điểm $F(x,m)=0$

+) Nhẩm nghiệm: (Khử tham số). Giả sử $x=x_0$ *là 1 nghiệm của phương trình.*

+) Phân tích: $F(x,m)=0\Leftrightarrow(x-x_0).g(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_0\\g(x)=0\end{array}\right.$ *(là* $g(x)=0$ *là phương trình bậc 2 ẩn x tham số m).*

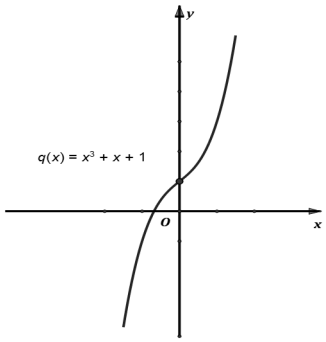
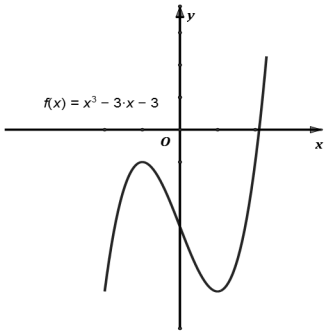
+) Dựa vào yêu cầu bài toán đi xử lý phương trình bậc 2 $g(x)=0$.

Phương pháp 3: Cực trị

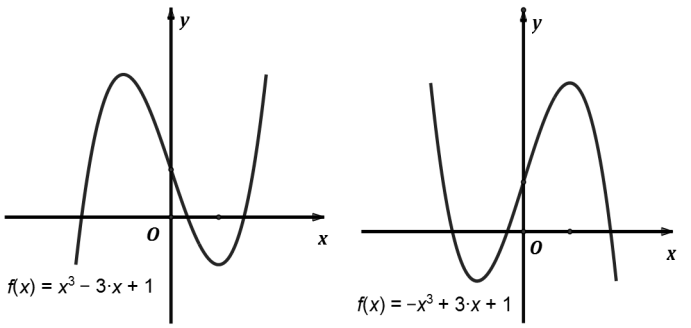
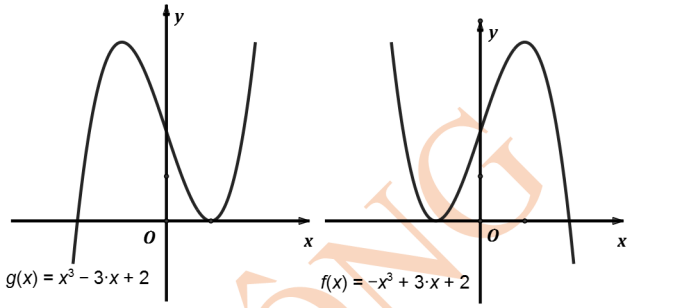
***) Nhận dạng:** Khi bài toán không cô lập được m và cũng không nhẩm được nghiệm.

***) Quy tắc:**

+) Lập phương trình hoành độ giao điểm $F(x,m)=0$ (1). Xét hàm số $y=F(x,m)$

+) Để (1) có đúng 1 nghiệm thì đồ thị $y=F(x,m)$ cắt trục hoành tại đúng 1 điểm. (2TH) - Hoặc hàm số luôn đơn điệu trên R $\Leftrightarrow$ hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta_{y'}\le 0$ - Hoặc hàm số có CĐ, CT và $y_{cd}.y_{ct}>0$ (hình vẽ)	 

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

+) Để (1) có đúng 3 nghiệm thì đồ thị $y=F(x,m)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{cd}.y_{ct}<0$	
+) Để (1) có đúng 2 nghiệm thì đồ thị $y=F(x,m)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{cd}.y_{ct}=0$	

Bài toán: Tìm m để đồ thị hàm bậc 3 cắt trục hoành tại 3 điểm lập thành 1 cấp số cộng:

1. Định lí vi ét:

*) Cho bậc 2: Cho phương trình $ax^2+bx+c=0$ có 2 nghiệm x_1,x_2 thì ta có: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}, x_1x_2=\frac{c}{a}$

*) Cho bậc 3: Cho phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ có 3 nghiệm x_1,x_2,x_3 thì ta có:

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}, x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{c}{a}, x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}$$

2.Tính chất của cấp số cộng:

+) Cho 3 số a,b,c theo thứ tự đó lập thành 1 cấp số cộng thì: $a+c=2b$

3. Phương pháp giải toán:

+) Điều kiện cần: $x_0=-\frac{b}{3a}$ là 1 nghiệm của phương trình. Từ đó thay vào phương trình để tìm m.

+) Điều kiện đủ: Thay m tìm được vào phương trình và kiểm tra.

3 - Tương giao của hàm số phân thức

Phương pháp

Cho hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}(C)$ và đường thẳng $d: y=px+q$. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):

$\frac{ax+b}{cx+d}=px+q \Leftrightarrow F(x,m)=0$ (phương trình bậc 2 ẩn x tham số m).

*) Các câu hỏi thường gặp:

1. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt khác $-\frac{d}{c}$.

2. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh phải của (C) $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 và thỏa mãn $:-\frac{d}{c}<x_1<x_2$.

3. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh trái của (C) $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 và thỏa mãn $x_1<x_2<-\frac{d}{c}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

4. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt thuộc 2 nhánh của (C) $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn $x_1 < -\frac{d}{c} < x_2$.

5. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A và B thỏa mãn điều kiện hình học cho trước:

+) Đoạn thẳng $AB = k$

+) Tam giác ABC vuông.

+) Tam giác ABC có diện tích S_0

*** Quy tắc:**

+) Tìm điều kiện tồn tại A, B $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt.

+) Xác định tọa độ của A và B (chú ý Vi ét)

+) Dựa vào giả thiết xác lập phương trình ẩn m. Từ đó suy ra m.

***) Chú ý:** Công thức khoảng cách:

+) $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B): AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

+) $\begin{cases} M(x_0; y_0) \\ \Delta: Ax_0 + By_0 + C = 0 \end{cases} \Rightarrow d(M, \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

4 - Tương giao của hàm số bậc 4

NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC 4 TRÙNG PHƯƠNG: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (1)

1. Nhẩm nghiệm:

- Nhẩm nghiệm: Giả sử $x = x_0$ là một nghiệm của phương trình.
- Khi đó ta phân tích: $f(x, m) = (x^2 - x_0^2)g(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm x_0 \\ g(x) = 0 \end{array}\right.$
- Dựa vào giả thiết xử lý phương trình bậc 2 $g(x) = 0$

2. Ẩn phụ - tam thức bậc 2:

- Đặt $t = x^2, (t \ge 0)$. Phương trình: $at^2 + bt + c = 0$ (2).
- Để (1) có đúng 1 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $\left[\begin{array}{l} t_1 < 0 = t_2 \\ t_1 = t_2 = 0 \end{array}\right.$
- Để (1) có đúng 2 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $\left[\begin{array}{l} t_1 < 0 < t_2 \\ 0 < t_1 = t_2 \end{array}\right.$
- Để (1) có đúng 3 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 = t_1 < t_2$
- Để (1) có đúng 4 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 < t_1 < t_2$

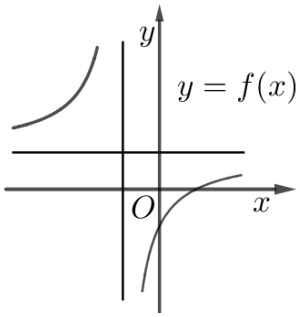
3. Bài toán: Tìm m để (C): $y = ax^4 + bx^2 + c (1)$ cắt (Ox) tại 4 điểm có hoành độ lập thành cấp số cộng.

- Đặt $t = x^2, (t \ge 0)$. Phương trình: $at^2 + bt + c = 0$ (2).
- Để (1) cắt (Ox) tại 4 điểm phân biệt thì (2) phải có 2 nghiệm dương $t_1, t_2 (t_1 < t_2)$ thỏa mãn $t_2 = 9t_1$.
- Kết hợp $t_2 = 9t_1$ với định lý vi – ét tìm được m.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

B – BÀI TẬP
DANG 1. ĐỒ THỊ HÀM SỐ, ĐỒ THỊ ĐẠO HÀM

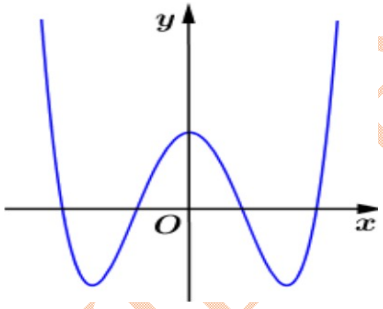
Câu 1. (Chuyên Hùng Vương Gia Lai) Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ($c\neq 0$ và $ad-bc\neq 0$) có đồ thị như hình vẽ.



Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $ad<0, ab>0$. **B.** $bd>0, ad<0$. **C.** $ad>0, ab<0$. **D.** $ab<0, ad<0$.

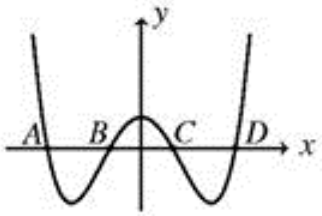
Câu 2. (Phan Đình Tùng Hà Tĩnh) Cho hàm số $y=(a-1)x^4+(b+2)x^2+c-1$ có đồ thị như hình vẽ bên



Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $a>1,\ b>-2,\ c>1$. **B.** $a>1,\ b<-2,\ c>1$. **C.** $a<1,\ b>-2,\ c>1$. **D.** $a>1,\ b<2,\ c>1$.

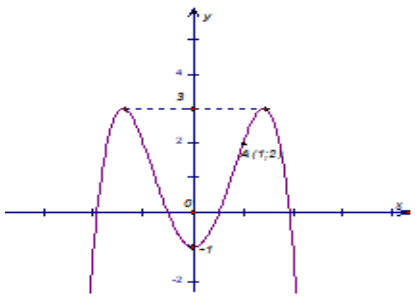
Câu 3. Cho đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ hình vẽ bên. Biết rằng $AB=BC=CD$, mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $a>0, b<0, c>0, 100b^2=9ac$. **B.** $a>0, b>0, c>0, 9b^2=100ac$.

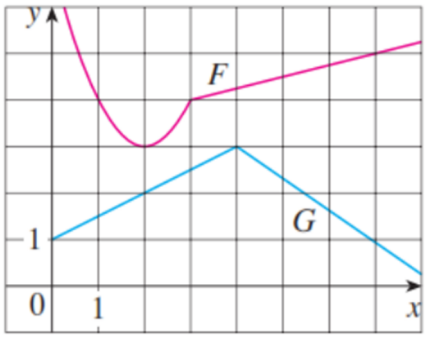
C. $a>0, b<0, c>0, 9b^2=100ac$. **D.** $a>0, b>0, c>0, 100b^2=9ac$.

Câu 4. (Chuyên Hùng Vương Gia Lai) Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=ax^4+bx^2+c$. Giá trị của biểu thức $M=a^2+b^2+c^2$ có thể nhận giá trị nào trong các giá trị sau



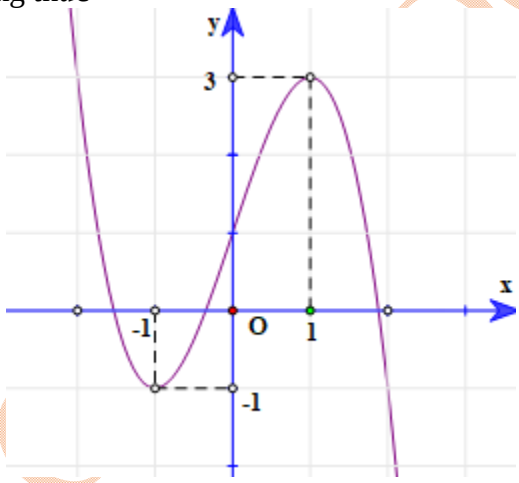
A. $M=18$. **B.** $M=6$. **C.** $M=20$. **D.** $M=24$.

Câu 5. **(Chuyên Hưng Yên Lần 3)** Cho $y=F(x)$ và $y=G(x)$ là những hàm số có đồ thị cho trong hình bên dưới, đặt $P(x)=F(x)G(x)$. Tính $P'(2)$.



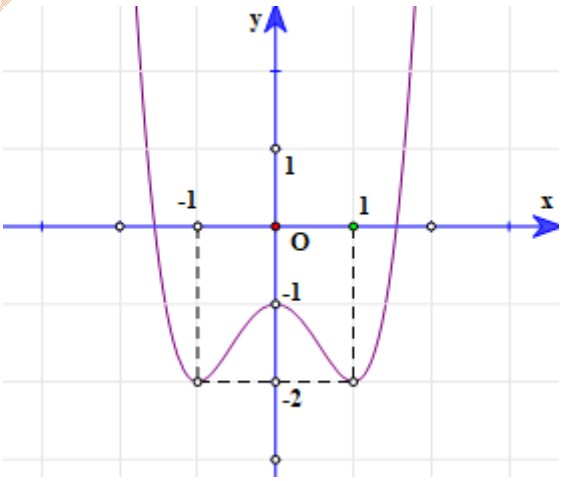
A. $\frac{3}{2}$. **B.** 4. **C.** 6. **D.** $\frac{5}{2}$.

Câu 6. **(PHÂN TÍCH BL_PT ĐỀ ĐH VINHL3 -2019.)** Cho $f(x)=(x-1)^3-3x+3$. Đồ thị hình bên dưới là của hàm số có công thức



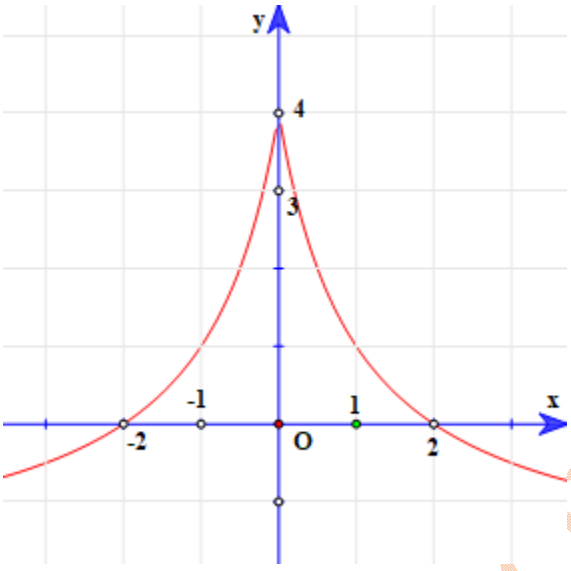
A. $y=-f(x+1)-1$. **B.** $y=-f(x+1)+1$. **C.** $y=-f(x-1)-1$. **D.** $y=-f(x-1)+1$.

Câu 7. Cho $f(x)=(x-1)^2-2x$. Đồ thị hình bên dưới là của hàm số có công thức



A. $y=-f(x^2+1)-1$. **B.** $y=-f(x^2+1)+1$. **C.** $y=f(x^2+1)-1$. **D.** $y=f(x^2+1)+1$.

Câu 8. Cho $f(x)=\dfrac{-\sqrt{(x-2)^2+2x-3}+5}{\sqrt{(x-2)^2+2x-3}+1}$. Đồ thị hình bên dưới là của hàm số có công thức

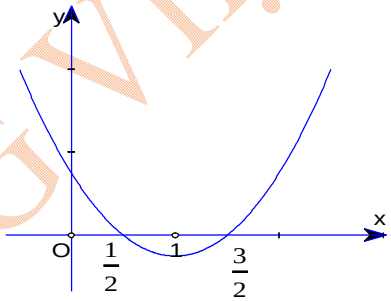


A. $y=-f(x+1)-1$. **B.** $y=f(x+1)+1$. **C.** $y=f(x+1)-1$. **D.** $y=-f(x-1)+1$.

Câu 9. (Chuyên Vinh Lần 3) Cho $f(x)=(x-1)^3-3x+3$. Đồ thị hình bên là của hàm số có công thức

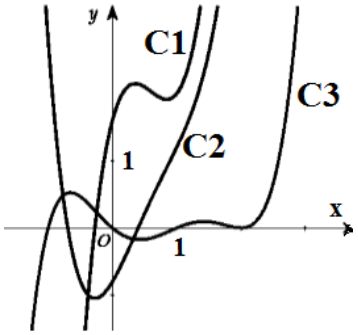
A. $y=-f(x+1)-1$. **B.** $y=-f(x+1)+1$. **C.** $y=-f(x-1)-1$. **D.** $y=-f(x-1)+1$.

Câu 10. (Thuan-Thanh-Bac-Ninh) Cho hàm số bậc ba $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$. Biết đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Giá trị của $\dfrac{c}{b}$ là



A. $-\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{3}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{3}{4}$.

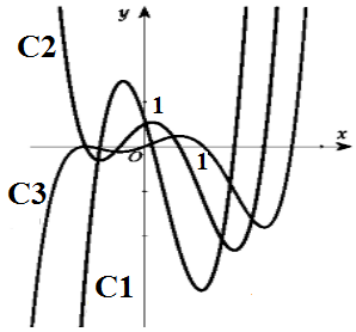
Câu 11. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?



A. $(C_3);(C_2);(C_1)$. **B.** $(C_2);(C_1);(C_3)$. **C.** $(C_2);(C_3);(C_1)$. **D.** $(C_1);(C_2);(C_3)$.

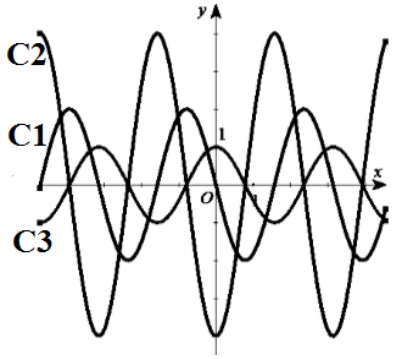
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 12. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?



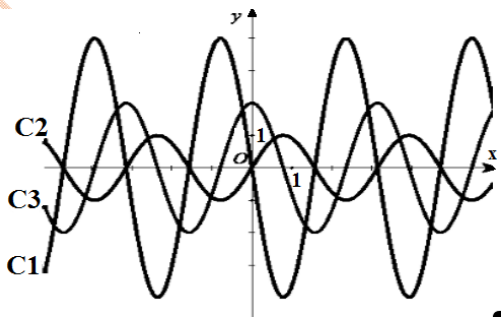
A. $(C_3);(C_2);(C_1)$. **B.** $(C_2);(C_1);(C_3)$. **C.** $(C_2);(C_3);(C_1)$. **D.** $(C_1);(C_2);(C_3)$.

Câu 13. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?



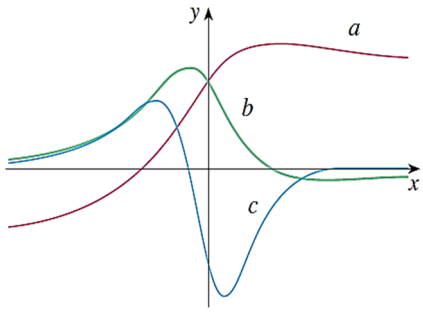
A. $(C_1);(C_2);(C_3)$. **B.** $(C_2);(C_1);(C_3)$. **C.** $(C_3);(C_2);(C_1)$. **D.** $(C_3);(C_1);(C_2)$.

Câu 14. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?



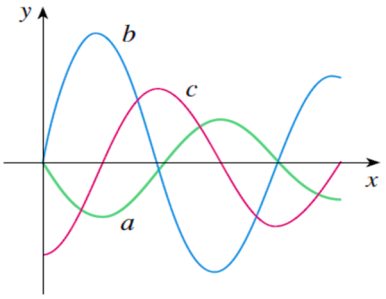
A. $(C_1);(C_2);(C_3)$. **B.** $(C_1);(C_3);(C_2)$. **C.** $(C_3);(C_2);(C_1)$. **D.** $(C_2);(C_3);(C_1)$.

Câu 15. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?



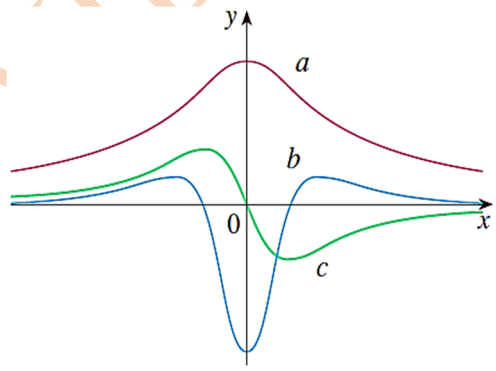
A. $a,b,c.$ **B.** $b,a,c.$ **C.** $a,c,b.$ **D.** $b,c,a.$

Câu 16. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?



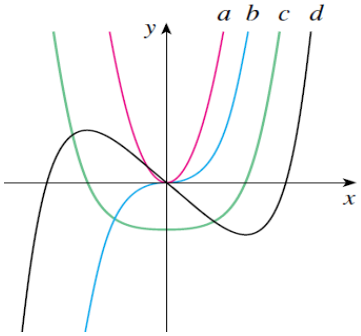
A. $a,b,c.$ **B.** $b,a,c.$ **C.** $a,c,b.$ **D.** $b,c,a.$

Câu 17. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?



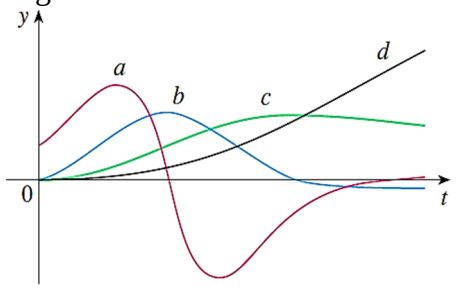
A. $a,b,c.$ **B.** $b,a,c.$ **C.** $a,c,b.$ **D.** $b,c,a.$

Câu 18. Cho đồ thị của bốn hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$, $y=f'''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ và $y=f'''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?



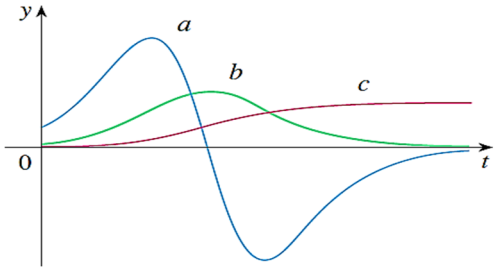
A. $c,d,b,a.$ **B.** $d,c,b,a.$ **C.** $d,c,a,b.$ **D.** $d,b,c,a.$

Câu 19. Cho đồ thị của bốn hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$, $y=f'''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$, $y=f'''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?



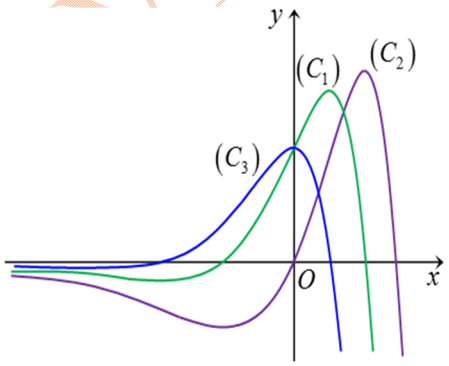
A. $c,d,b,a.$ **B.** $d,c,a,b.$ **C.** $d,c,b,a.$ **D.** $d,b,c,a.$

Câu 20. Một vật chuyển động có đồ thị của hàm quãng đường, hàm vật tốc và hàm gia tốc theo thời gian t được mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số trên theo thứ tự là các đường cong nào?



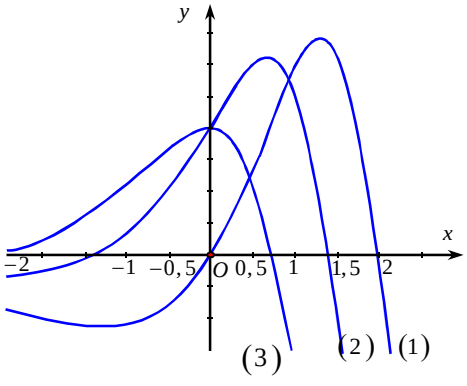
A. $b,c,a.$ **B.** $c,a,b.$ **C.** $a,c,b.$ **D.** $c,b,a.$

Câu 21. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?



A. $(C_3);(C_2);(C_1)$. **B.** $(C_2);(C_1);(C_3)$. **C.** $(C_2);(C_3);(C_1)$. **D.** $(C_1);(C_3);(C_2)$.

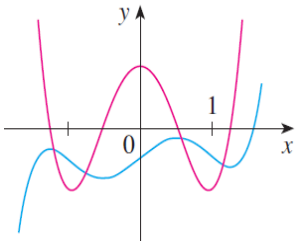
Câu 22. Cho 3 hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)=f'(x)$, $y=h(x)=g'(x)$ có đồ thị là 3 đường cong trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?



A. $g(-1)>h(-1)>f(-1)$. **B.** $h(-1)>g(-1)>f(-1)$.

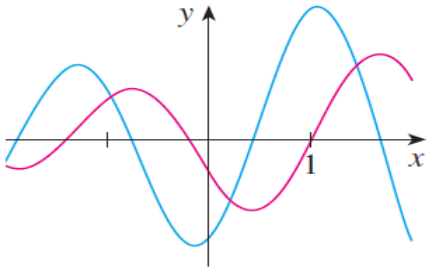
C. $h(-1)>f(-1)>g(-1)$. **D.** $f(-1)>g(-1)>h(-1)$.

Câu 23. Cho đồ thị của hàm số f và f' như hình bên dưới. Khẳng định nào sau đây **đúng**?



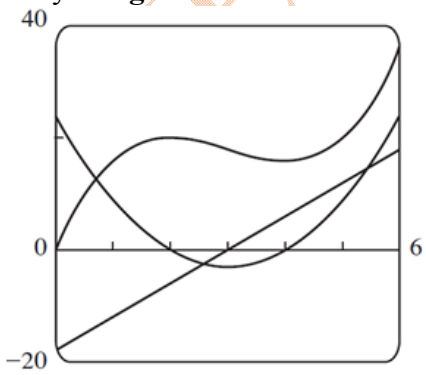
A. $f'(-1)<f''(1)$. **B.** $f'(-1)>f''(1)$. **C.** $f'(-1)=f''(1)$. **D.** $f''(0)\neq f''(1)$.

Câu 24. Cho đồ thị của hàm số f và f' như hình bên dưới. Khẳng định nào sau đây **đúng**?



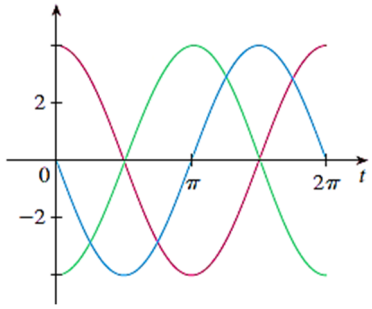
A. $f'(-1)<f''(1)$. **B.** $f'(-1)>f''(1)$. **C.** $f'(-1)=f''(1)$. **D.** $f'(-1)=2f''(1)$.

Câu 25. Cho 3 hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)=f'(x)$, $y=h(x)=g'(x)$ có đồ thị là 3 đường cong trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?



A. $g(1)>h(1)>f(1)$. **B.** $h(1)>g(1)>f(1)$. **C.** $h(1)>f(1)>g(1)$. **D.** $f(1)>g(1)>h(1)$.

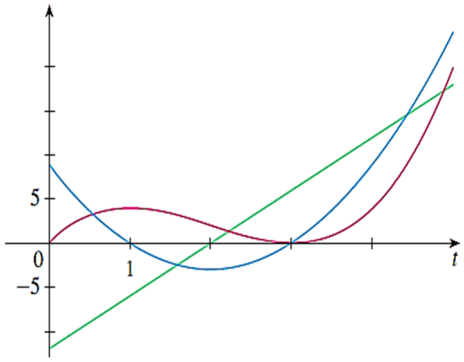
Câu 26. Một vật chuyển động có đồ thị của hàm quãng đường $s(t)$, hàm vật tốc $v(t)$ và hàm gia tốc $a(t)$ theo thời gian t được mô tả ở hình dưới đây. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?



A. $s(\pi)<v(\pi)<a(\pi)$. **B.** $a(\pi)<v(\pi)<s(\pi)$.

C. $s(\pi)<a(\pi)<v(\pi)$. **D.** $v(\pi)<a(\pi)<s(\pi)$.

Câu 27. Một vật chuyển động có đồ thị của hàm quãng đường $s(t)$, hàm vật tốc $v(t)$ và hàm gia tốc $a(t)$ theo thời gian t được mô tả ở hình dưới đây. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?



A. $s(4)<v(4)<a(4)$. **B.** $a(4)<v(4)<s(4)$. **C.** $s(4)<a(4)<v(4)$. **D.** $v(4)<a(4)<s(4)$.

DẠNG 2. BIỆN LUẬN SỐ GIAO ĐIỂM DỰA VÀO ĐỒ THỊ, BẢNG BIẾN THIÊN

BẰNG BẢNG BIẾN THIÊN

Câu 1. (Phan Đình Tùng Hà Tĩnh) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

Khi đó phương trình $f(x)+1=m$ có ba nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi

A. $1<m<2$. **B.** $1\le m\le 2$. **C.** $0\le m\le 1$. **D.** $0<m<1$.

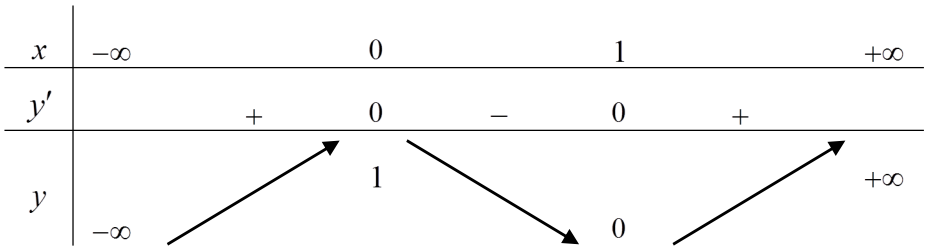
Câu 2. (Chuyên Sơn La Lần 3 năm 2018-2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây:

x	$-\infty$		-1		x_1		x_2		x_3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	1	↘	-1	↗	2	↘	0	↘	$-\infty$

Để phương trình $3f(2x-1)=m-2$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $[0;1]$ thì giá trị của tham số m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-3)$ **B.** $(1;6)$ **C.** $(6;+\infty)$ **D.** $(-3;1)$

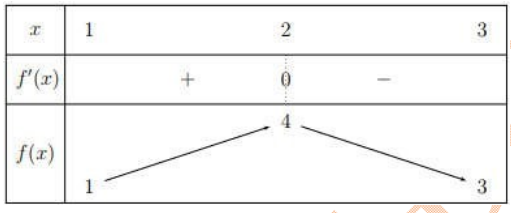
Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như sau:



Khi đó $|f(x)|=m$ có bốn nghiệm phân biệt $x_1<x_2<x_3<\frac{1}{2}<x_4$ khi và chỉ khi

A. $\frac{1}{2}<m<1$. **B.** $\frac{1}{2}\le m<1$. **C.** $0<m<1$. **D.** $0<m\le 1$.

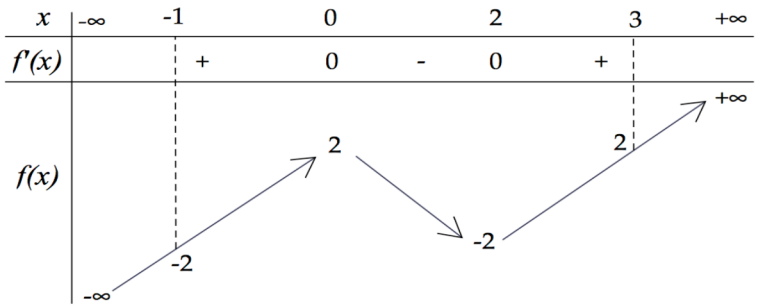
Câu 4. (KINH MÔN HẢI DƯƠNG 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[1;3]$ và có bảng biến thiên như sau



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(x+1)=\frac{m}{x^2-4x+5}$ có nghiệm trên khoảng $(1;2)$.

A. 10. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 0.

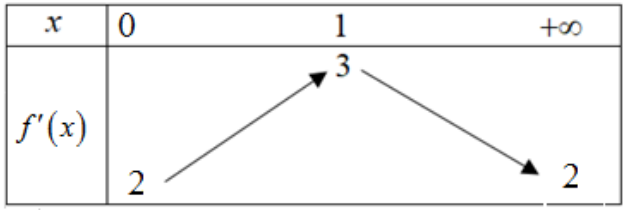
Câu 5. (Thuận Thành 2 Bắc Ninh) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên:



Có bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình $f(2\sin x+1)=f(m)$ có nghiệm thực?

A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

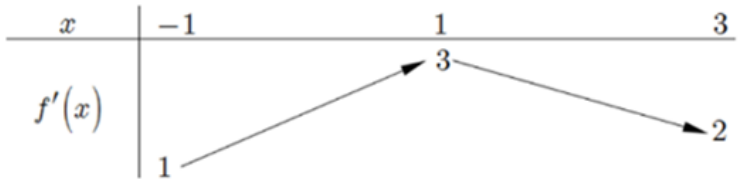
Câu 6. (ĐH Vinh Lần 1) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ như hình dưới



Tìm m để bất phương trình $m+2\sin x\le f(x)$ nghiệm đúng với mọi $x\in(0;+\infty)$.

A. $m\ge f(0)$. **B.** $m\le f(1)-2\sin 1$. **C.** $m\le f(0)$. **D.** $m\ge f(1)-2\sin 1$.

Câu 7. (ĐH Vinh Lần 1) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ như hình dưới



Tìm m để bất phương trình $m+x^2 \le f(x)+\frac{1}{3}x^3$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0;3)$.

A. $m < f(0)$. **B.** $m \le f(0)$. **C.** $m \le f(3)$. **D.** $m < f(1)-\frac{2}{3}$.

Câu 8. (SỞ PHÚ THỌ LẦN 2 NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(0)<\frac{7}{6}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$\frac{15}{13}$	↘	$-\infty$

Giá trị lớn nhất của tham số m để phương trình $e^{2f^3(x)-\frac{13}{2}f^2(x)+7f(x)-\frac{1}{2}}=m$ có nghiệm trên đoạn $[0;2]$ là

A. e^2. **B.** $e^{\frac{15}{13}}$. **C.** e^4. **D.** e^3.

Câu 9. (Đặng Thành Nam Đề 17) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	0		1		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
y'		$-$		$+$	0	$-$		$+$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	4	↘	$-\infty$	↗	$+\infty$
			$-\infty$				-1		

Phương trình $f\left(2^{\sin x}\right)=3$ có bao nhiêu nghiệm trên đoạn $\left[0;\frac{5\pi}{6}\right]$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

BẰNG ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Bản chất bài toán: Bài toán đã cho là giải phương trình hay bất phương trình bằng phương pháp tương giao giữa hai đồ thị $y=g(x)$ và $y=h(m)$

- Đồ thị hàm số $y=h(m)$ bản chất là một đường thẳng song song hoặc trùng với trục Ox và đi qua điểm có tung độ có giá trị là $h(m)$.

- Đồ thị hàm số $y=g(x)$ xác định được tính chất dựa vào các dữ kiện đã cho hàm số $y=f(x)$ ban đầu; hàm số $y=f(x)$ có thể cho bằng công thức, bằng đồ thị, bằng hàm đạo hàm của nó, đồ thị của đạo hàm.

Vì đây là phần kiến thức tương đối rộng nên tôi xin chỉ khai thác ở một góc độ nào đó của bài toán.

Khó khăn đối với học sinh:

-Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $y=g(x)$.

-Trong trường hợp không thể dùng đồ thị hàm số thì học sinh khó khăn trong việc kiểm soát đặc điểm của hàm số $y=g(x)$ do hàm số $y=g(x)$ có chứa biểu thức hàm hợp phức tạp của hàm $y=f(x)$.

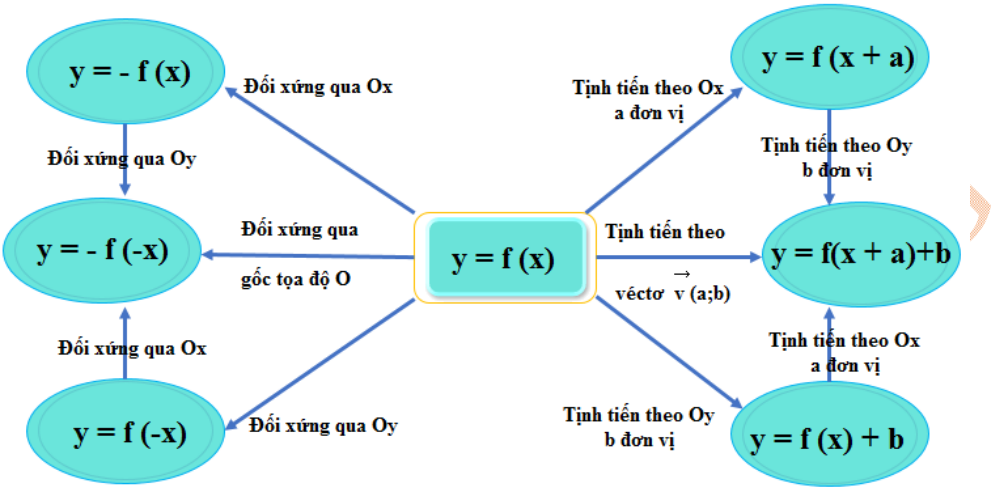
-Phần lớn học sinh chưa phân biệt được kiến thức: "Số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của đồ thị hai hàm số" và "Nghiệm của phương trình chính là hoành độ của giao điểm".

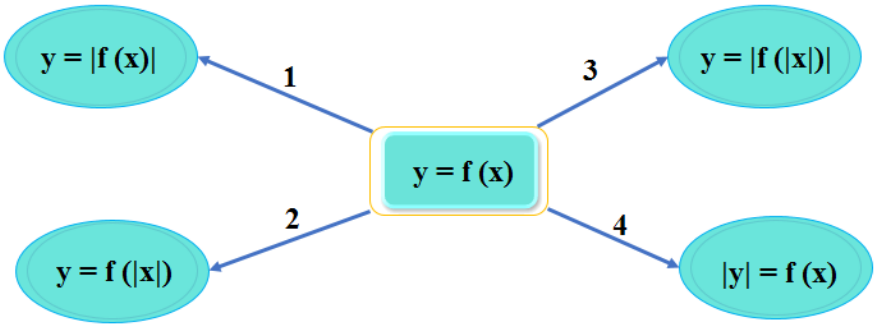
Giải pháp:

-Sử dụng một số phép biến đổi đồ thị cơ bản

-Sử dụng cách đặt ẩn phụ đưa về hàm số theo ẩn mới có chứa $y=f(t)$.

Kiểu 1: Sử dụng một số phép biến đổi đồ thị cơ bản.

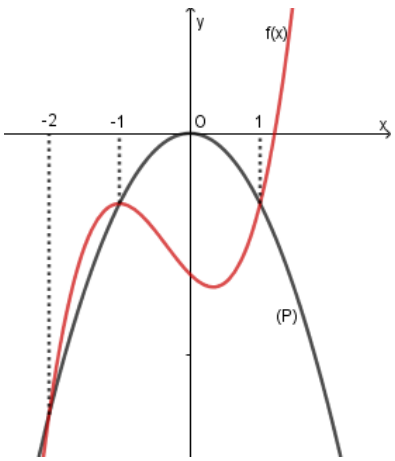




Kiểu 2: Sử dụng cách đặt ẩn phụ đưa về hàm số theo ẩn mới có chứa $y=f(t)$.

Sau đây tôi xin đưa ra lớp bài toán sưu tầm theo mức độ để giúp học sinh có cách nhìn dễ dàng trong các bài thi trắc nghiệm:

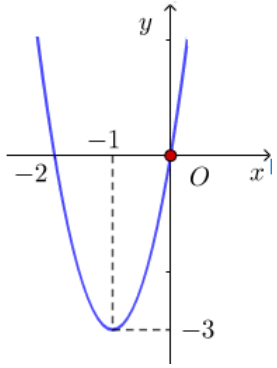
Câu 10. (Thuận Thành 2 Bắc Ninh) Cho $(P): y=-x^2$ và đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx-2$ như hình vẽ.



Tính giá trị biểu thức $P=a-3b-5c$.

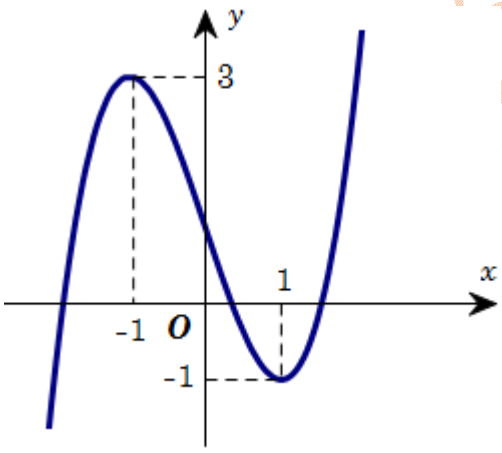
A. 3. **B.** -7. **C.** 9. **D.** -1.

Câu 11. (Hàm Rồng) Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đạo hàm là hàm số $y=f'(x)$ với đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ âm. Khi đó đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là bao nhiêu?



A. 4. **B.** 1. **C.** -4. **D.** 2.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



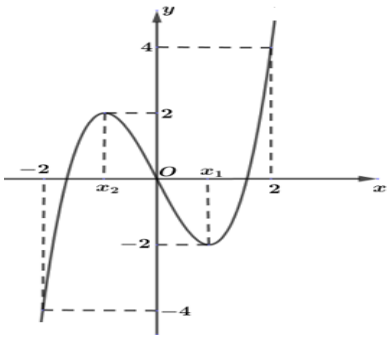
Khi đó, phương trình $f(|x-2|)=-\frac{1}{2}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 2. **B.** 0. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c$ thoả điều kiện $\begin{cases} ab<0 \\ ac\left(b^2-4ac\right)>0 \end{cases}$. Số nghiệm lớn nhất có thể có của phương trình $|f(x)|=m$, $m\in\mathbb{R}$ là

A. 4 **B.** 6. **C.** 8. **D.** 12.

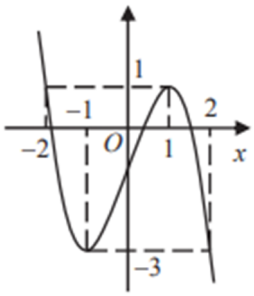
Câu 14. (THPT-Yên-Mô-A-Ninh-Bình-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong như trong hình vẽ.



Hỏi phương trình $|f(x)-1|=1$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên đoạn $[-2;2]$?

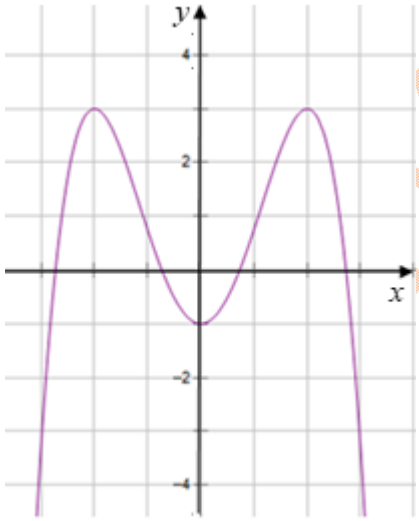
A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 15. **(CổLoa Hà Nội)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hỏi phương trình $f(2-f(x))=1$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 4.

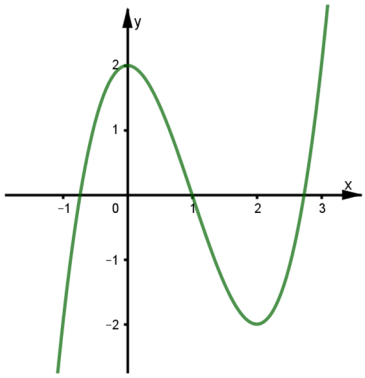
Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình sau:



Số nghiệm của phương trình $\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}=2$ là:

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

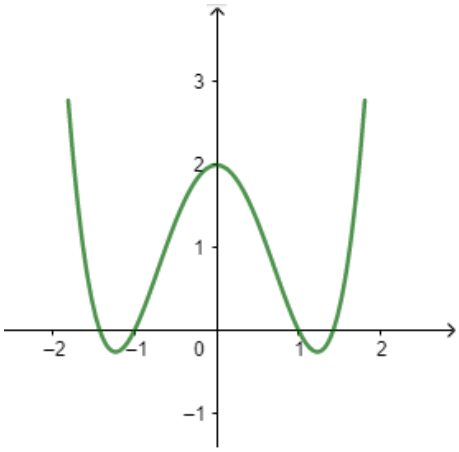
Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình v



Gọi m là số nghiệm của phương trình $f(f(x))=1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $m=7$. **B.** $m=5$. **C.** $m=9$. **D.** $m=6$.

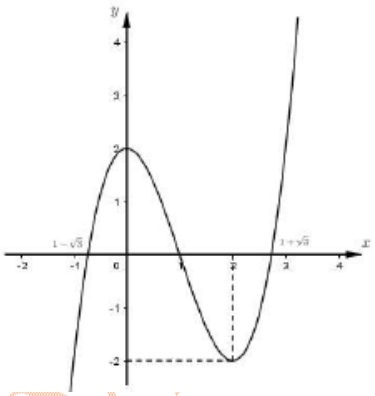
Câu 18. **(Trung-Tâm-Thanh-Tường-Nghệ-An-Lần-2)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như sau.



Số nghiệm thực của phương trình $f^2(x)-1=0$ là

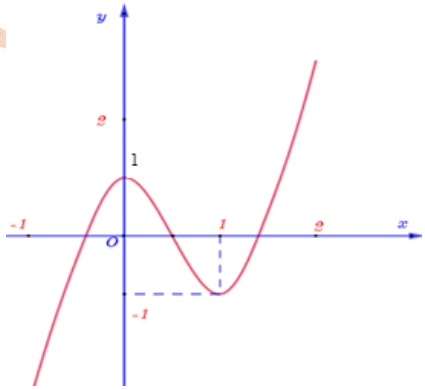
A. 7. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 8.

Câu 43. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+2$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hỏi phương trình $\left(x^3-3x^2+2\right)^3-3\left(x^3-3x^2+2\right)^2+2=0$ có bao nhiêu nghiệm thực dương phân biệt?



A. 3 **B.** 5 **C.** 7 **D.** 1

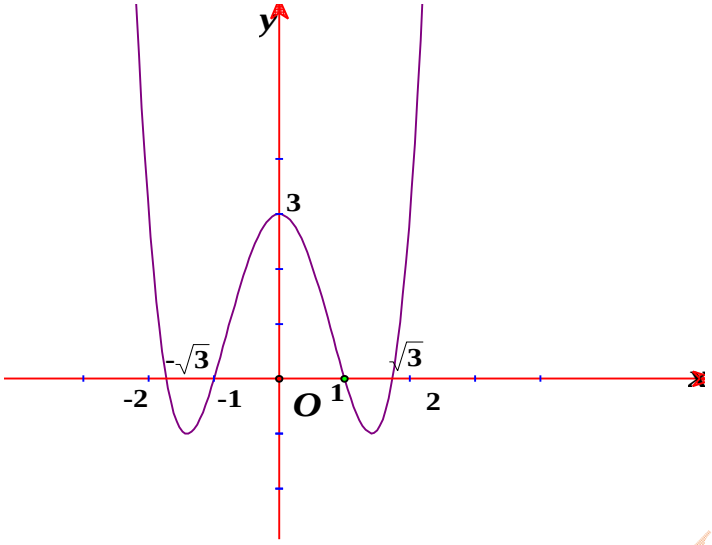
Câu 19. (Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019) Cho hàm số $y=4x^3-6x^2+1$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới đây.



Khi đó phương trình $4\left(4x^3-6x^2+1\right)^3-6\left(4x^3-6x^2+1\right)^2+1=0$ có bao nhiêu nghiệm thực.

A. 9. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 3.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)=x^4-4x^2+3$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hỏi phương trình $\left(x^4-4x^2+3\right)^4-4\left(x^4-4x^2+3\right)^2+3=0$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt ?

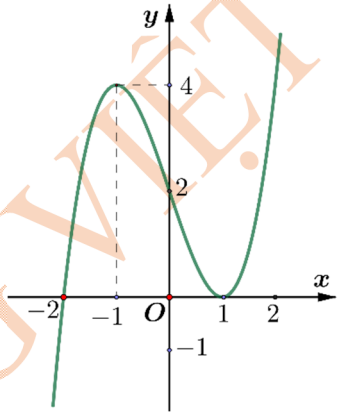


A. 0. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 4.

Câu 21. (-Mai-Anh-Tuấn-Thanh-Hóa-lần-1-2018-2019) Cho hàm số $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x+1$. Khi đó phương trình $f\left(f(x)\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 9. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

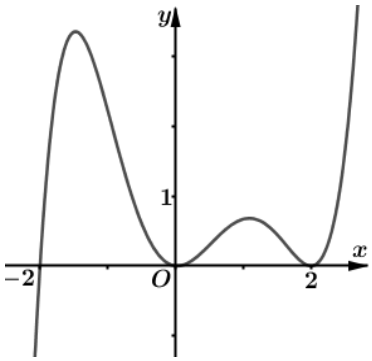
Câu 22. (THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây:



Đặt $g(x)=f\left(f(x)\right)$. Số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ là

A. 6. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 7.

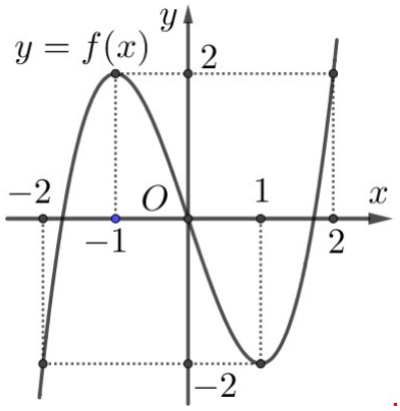
Câu 23. (Nguyễn Tất Thành Yên Bái) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trơn (không bị gãy khúc), hình vẽ bên. Gọi hàm $g(x)=f\left[f(x)\right]$. Hỏi phương trình $g'(x)=0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?



A. 10. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 14.

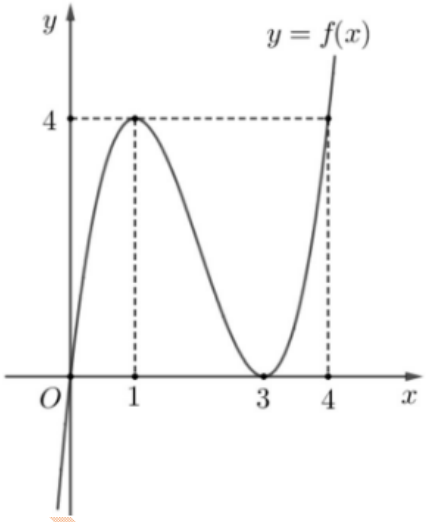
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 24. (Đặng Thành Nam Đề 9) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(f(x)\right)=f(x)$ bằng



A. 7. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 9.

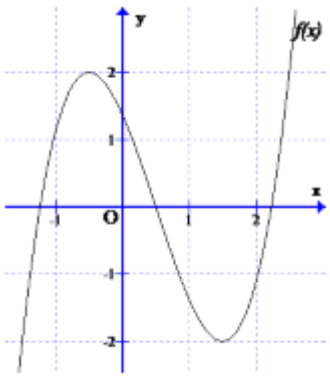
Câu 25. (Đặng Thành Nam Đề 5) Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d\left(a,b,c,d\in\mathbb{R}\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Phương trình $f\left(f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right)\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 12. **B.** 40. **C.** 41. **D.** 16.

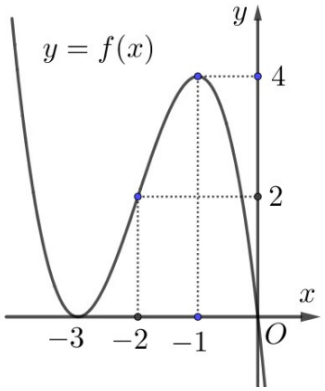
Câu 26. (THANH CHƯƠNG 1 NGHỆ AN 2019 LẦN 3) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(\left|f\left(x\right)\right|\right)\right|-\left|f\left(x\right)\right|=0$ là

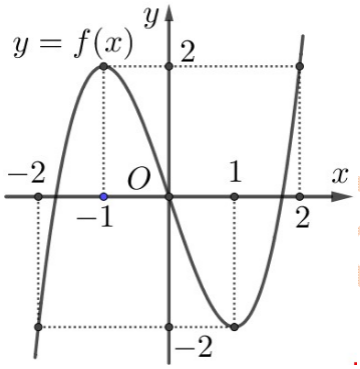
A. 20. **B.** 24. **C.** 10. **D.** 4.

Câu 27. (Đặng Thành Nam Đề 5) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $2f\left(x^2-1\right)-5=0$ là



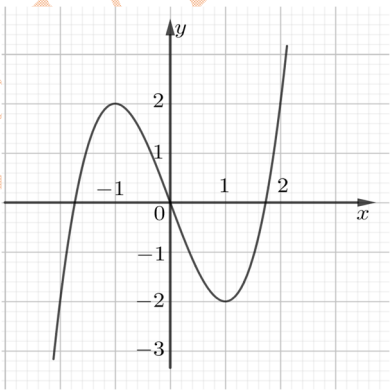
A. 3. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 28. (Đặng Thành Nam Đề 3) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(f(x)\right)=0$ bằng



A. 7. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 9.

Câu 29. (Cầu Giấy Hà Nội 2019 Lần 1) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình dưới đây.

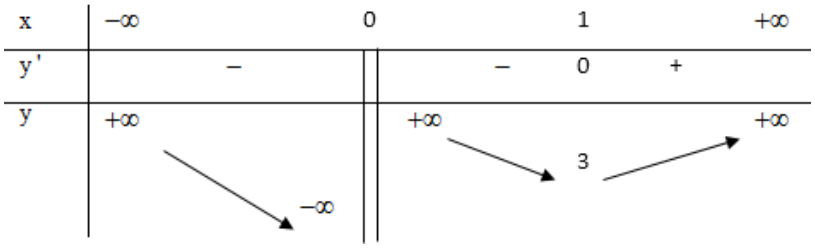


Số nghiệm phân biệt của phương trình $f\left(f(x)\right)+1=0$ là

A. 9. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 7.

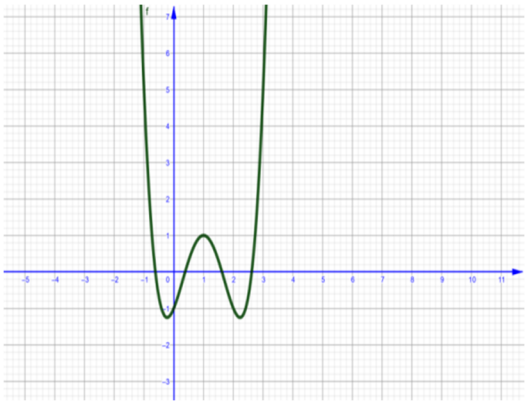
Câu 30. (Hải Hậu Lần1) Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

Số nghiệm của phương trình $3\left|f(3-2x)\right|-10=0$ là



A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 31. (Thuan-Thanh-Bac-Ninh) Biết rằng đồ thị hàm số bậc 4: $y=f(x)$ được cho như hình vẽ sau:



Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y=g(x)=\left[f'(x)\right]^2-f(x).f''(x)$ và trục Ox.

A. 6. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 0.

Câu 32. (Chuyên Lý Tự Trọng Cần Thơ) Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đường thẳng $y=2m-1$ cắt đồ thị hàm số $y=|x|^3-3|x|+1$ tại 4 điểm phân biệt

A. $0\le m\le 1$. **B.** $m\ge 1$. **C.** $0<m<1$. **D.** $m<0$.

Câu 33. (Đặng Thành Nam Đề 14) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R, $f(2)=3$ và có đồ thị như hình vẽ bên

A. 2. **B.** 18. **C.** 4. **D.** 19.

Câu 34. (SỞ NAM ĐỊNH 2018-2019) Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2$. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $g(x)=f(|x|)+m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

A. 3. **B.** 10. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 35. (Chuyên Hùng Vương Gia Lai) Cho hàm số $(C):y=|x^3-6x^2+9x|$ và đường thẳng $d:y=2m-m^2$. Tìm số giá trị của tham số thực m để đường thẳng d và đồ thị (C) có hai điểm chung.

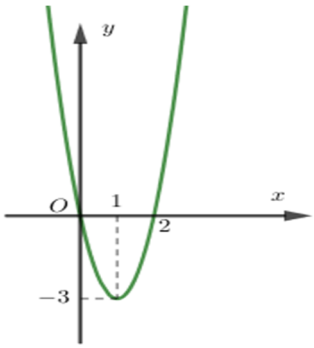
A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** Vô số.

Câu 36. (HKII-CHUYÊN-NGUYỄN-HUỆ-HÀ-NỘI) Tìm m để phương trình $|x^4-5x^2+4|=\log_2 m$ có 8 nghiệm phân biệt:

A. $0<m<\sqrt[4]{2^9}$. **B.** $-\sqrt[4]{2^9}<m<\sqrt[4]{2^9}$.

C. Không có giá trị của m. **D.** $1<m<\sqrt[4]{2^9}$.

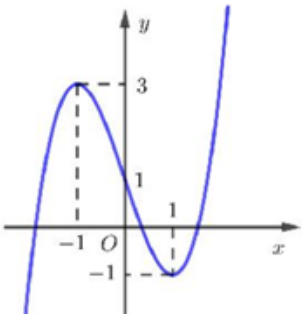
Câu 37. (THĂNG LONG HN LẦN 2 NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left[f(x)+m\right]=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

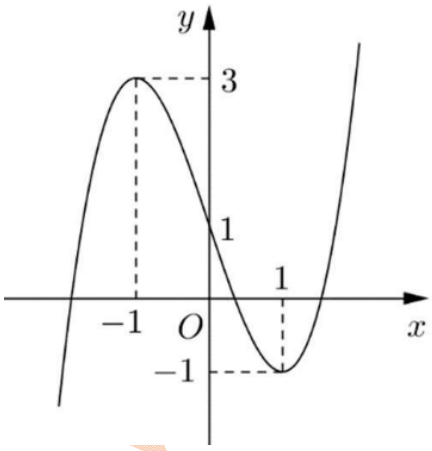
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 38. (Lý Nhân Tông) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $f(\sin x)=2\sin x+m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$. Tổng các phần tử của S bằng:



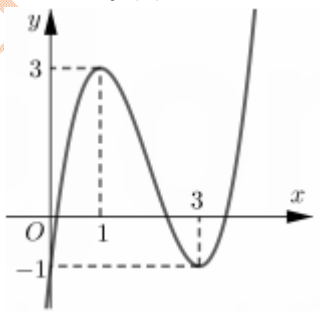
A. -10 **B.** -8. **C.** -6. **D.** -5.

Câu 39. (Đặng Thành Nam Đề 2) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(\sin x)=m$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $[0;\pi]$.



A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 40. (Đặng Thành Nam Đề 6) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|x+m|)=m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

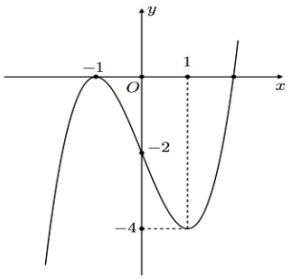
Câu 41. (Chuyên Lam Sơn Lần 2) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R có đồ thị như hình bên. Phương trình $f(f(x)-1)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4.

Câu 42. (Triệu Thái Vĩnh Phúc Lần 3) Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x+1$. Số nghiệm của phương trình $[f(x)]^3-3f(x)+1=0$ là:

A. 1. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

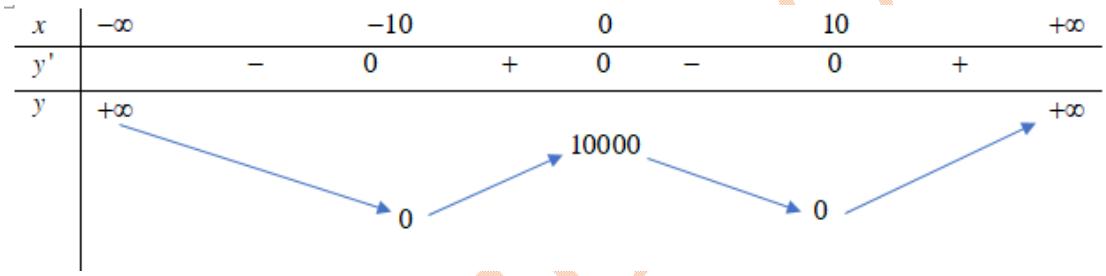
Câu 43. (Đặng Thành Nam Đề 15) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(1-2\cos x)+m=0$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ là



A. $[-4;0]$. **B.** $[-4;0)$. **C.** $[0;4)$. **D.** $(0;4)$.

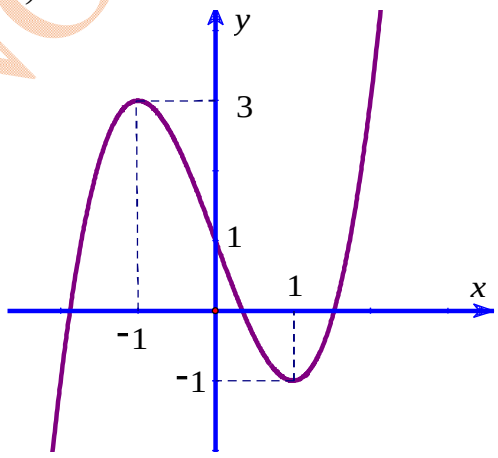
Câu 44. (Cầu Giấy Hà Nội 2019 Lần 1) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây

Số các số nguyên m thỏa mãn phương trình $f(3\sin x+4\cos x+5)=m$ có nghiệm là



A. 10001. **B.** 20000. **C.** 20001. **D.** 10000.

Câu 45. (THẠCH THÀNH I - THANH HÓA 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(\cos x)=-2m+1$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ là



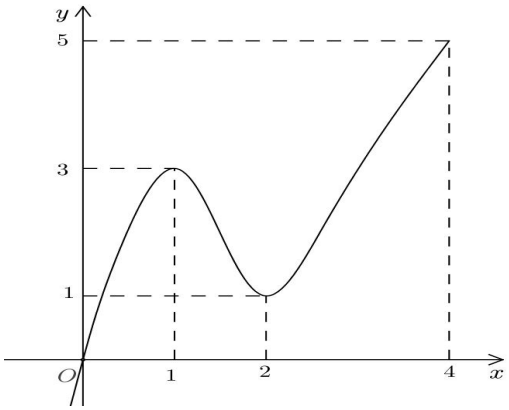
A. $(-1;1]$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(0;1]$.

Câu 46. (SỞ QUẢNG BÌNH NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(2\sin x+1)=m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $\left[0;\frac{\pi}{6}\right)$ là:

A. $(-2;0]$. **B.** $(0;2]$. **C.** $[-2;2)$. **D.** $(-2;0)$.

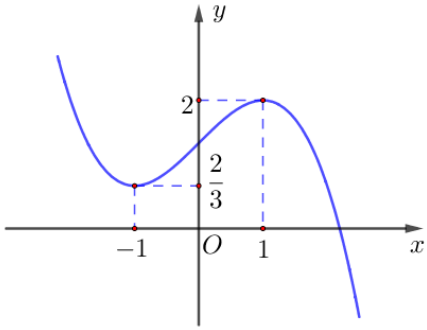
Câu 47. (THPT ISCHOOL NHA TRANG) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f\left[4\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\right]=m$ có nghiệm?



A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

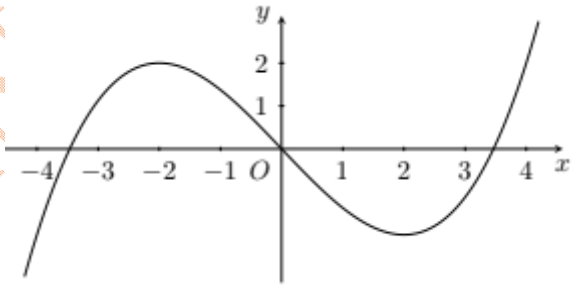
Câu 48. (Cụm 8 trường chuyên lần1) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số giá trị nguyên dương của m để phương trình $f\left(x^2-4x+5\right)+1=m$ có nghiệm là

A. 3. **B.** 4. **C.** 0. **D.** Vô số.

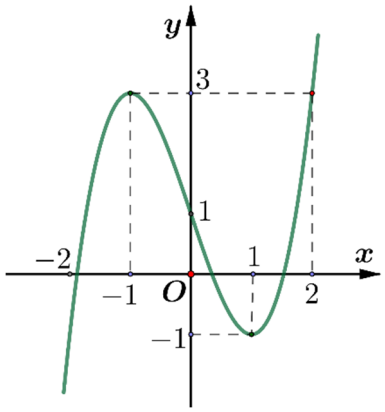
Câu 49. (THPT NINH BÌNH – BẠC LIÊU LẦN 4 NĂM 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$ của phương trình $f\left(2\sin x+2\right)=1$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

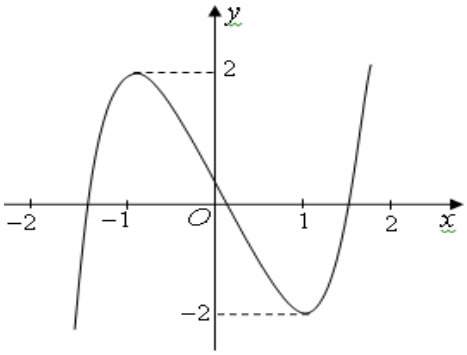
Câu 50. (THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f\left(\sqrt{4-x^2}\right)=m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $\left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$ là

A. $(-1;3]$. **B.** $\left(-1;f\left(\sqrt{2}\right)\right]$. **C.** $[-1;3]$. **D.** $\left[-1;f\left(\sqrt{2}\right)\right]$.

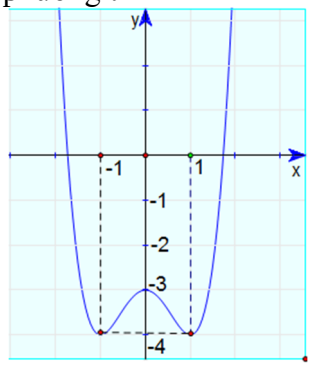
Câu 51. (THPT-Nguyễn-Công-Trứ-Hà-Tĩnh-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3) Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ:



Phương trình $f\left(f(x)\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

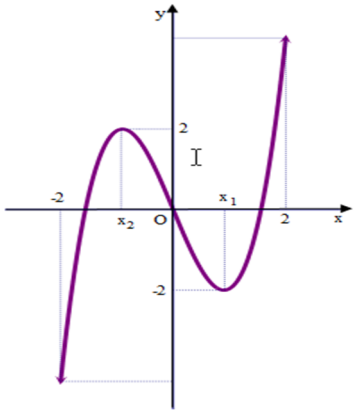
A. 3. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 5.

Câu 52. (Nam Tiền Hải Thái Bình Lần1) Cho hàm số $y=x^4-2x^2-3$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $x^4-2x^2-3=2m-4$ có hai nghiệm phân biệt?



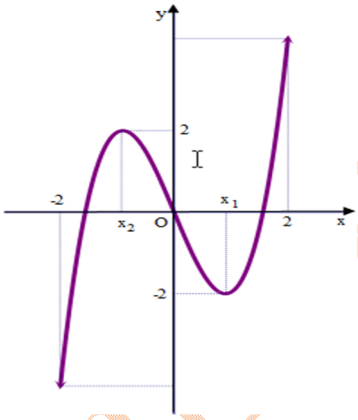
A. $m\le\dfrac{1}{2}$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$. **C.** $0<m<\dfrac{1}{2}$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m>\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

Câu 53. (TTHT Lần 4) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$, và có đồ thị là đường cong như trong hình vẽ bên. Hỏi phương trình $\left|f(x)-1\right|=2$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên đoạn $[-2;2]$.



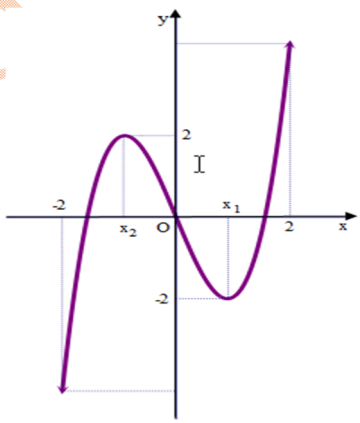
A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 54. (TTHT Lần 4) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$, và có đồ thị là đường cong như trong hình vẽ bên. Hỏi phương trình $f(|x|)=-1$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên đoạn $[-2;2]$.



A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 55. (TTHT Lần 4) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$, và có đồ thị là đường cong như trong hình vẽ bên. Hỏi phương trình $|f(|x|)-1|=2$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên đoạn $[-2;2]$.



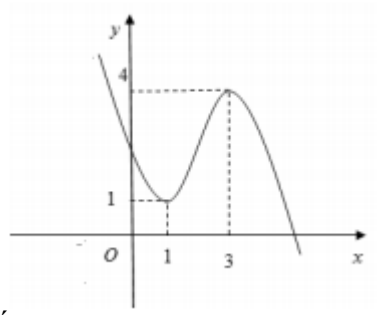
A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 56. (TTHT Lần 4) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$, và có đồ thị là đường cong như trong hình vẽ bên. Hỏi phương trình $|f(x)-1|=2-x$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên đoạn $[-2;2]$.

A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

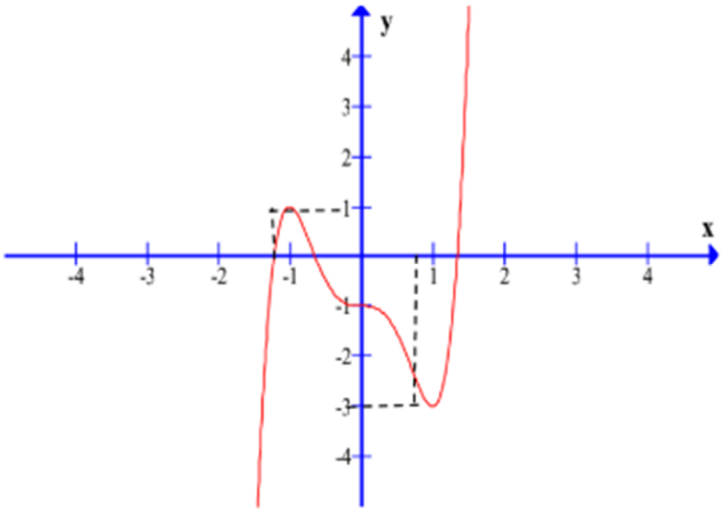
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 57. (Đặng Thành Nam Đề 17) Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ với a,b,c,d là các số thực, có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|x-m|+1)=m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.



A. 3. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 58. (-Mai-Anh-Tuấn-Thanh-Hóa-lần-1-2018-2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(|x|-1)=m$ có 4 nghiệm phân biệt ?

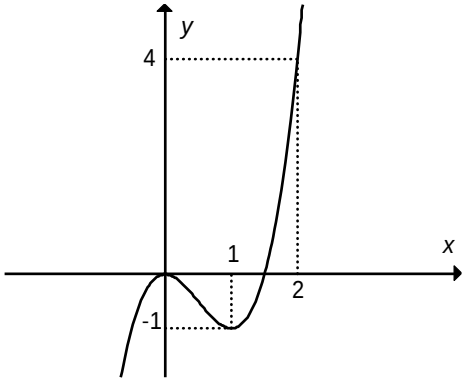
A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 59. Tìm tất cả các giá trị thực k để phương trình $\left|-2x^3-\frac{3}{2}x^2+3x+\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{k}{2}-1\right|$ có đúng 4 nghiệm phân biệt

A. $k\in\left(\frac{19}{4};5\right)$. **B.** $k\in\varnothing$.

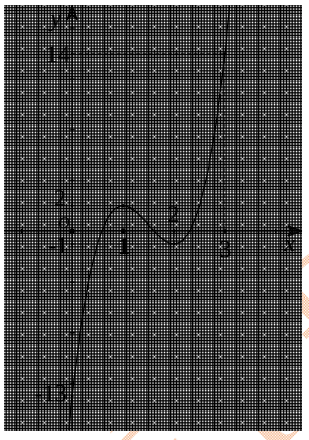
C. $k\in(-2;-1)\cup\left(1;\frac{19}{4}\right)$. **D.** $k\in\left(-2;-\frac{3}{4}\right)\cup\left(\frac{19}{4};6\right)$.

Câu 60. Hình bên là đồ thị của hàm số $y=2x^3-3x^2$. Sử dụng đồ thị đã cho tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $16|x|^3-12x^2\left(x^2+1\right)=m\left(x^2+1\right)^3$ có nghiệm.



A. Với mọi m. **B.** $-1\le m\le 4$. **C.** $-1\le m\le 0$. **D.** $1\le m\le 4$.

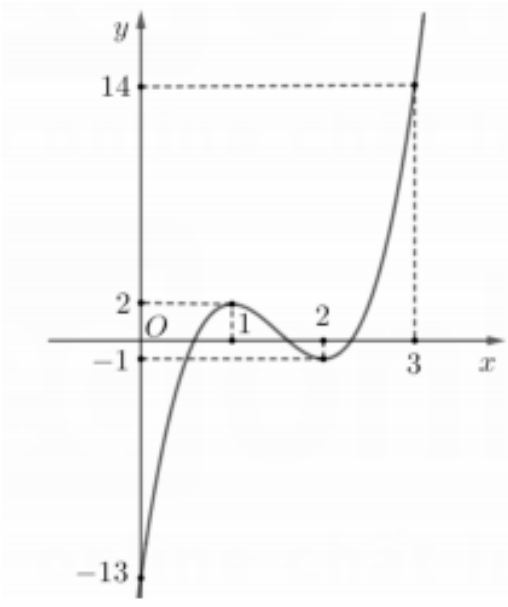
Câu 61. (Thanh Chương Nghệ An Lần 2) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tổng các giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(f\left(x\right)+1\right)=m$ có 3 nghiệm phân biệt bằng

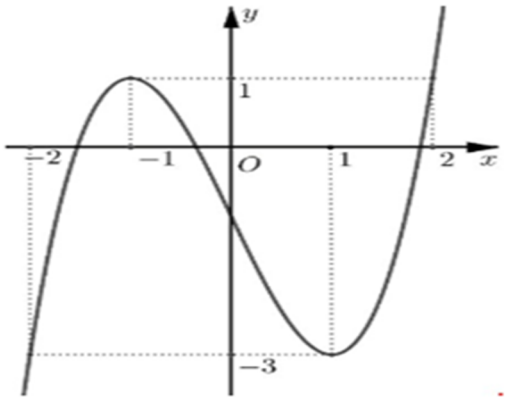
A. 15. **B.** 1. **C.** 13. **D.** 11.

Câu 62. (Đặng Thành Nam Đề 17) Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(f\left(x+1\right)\right)=m$ có ít nhất 6 nghiệm thực phân biệt?



A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

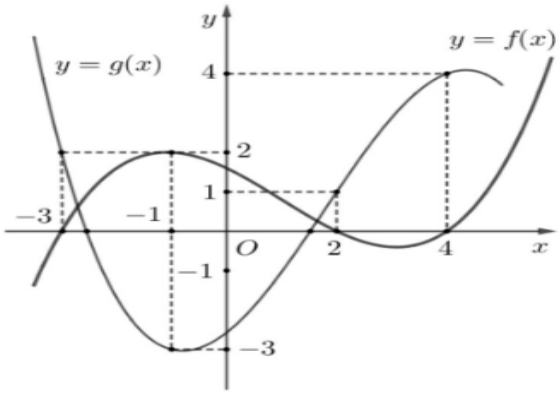
Câu 63. (Đặng Thành Nam Đề 10) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(f\left(x\right)-m\right)=0$ có tất cả 9 nghiệm thực phân biệt?

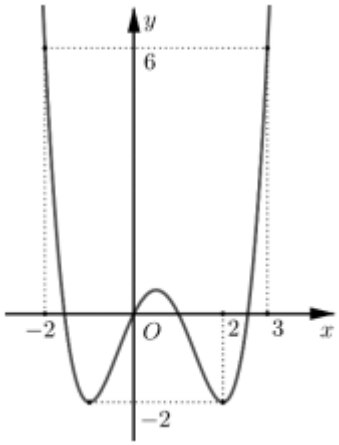
A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 64. (Đặng Thành Nam Đề 3) Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là các hàm xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên (trong đó đường cong đậm hơn là của đồ thị hàm số $y=f(x)$). Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(1-g(2x-1)\right)=m$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[-1;\frac{5}{2}\right]$.



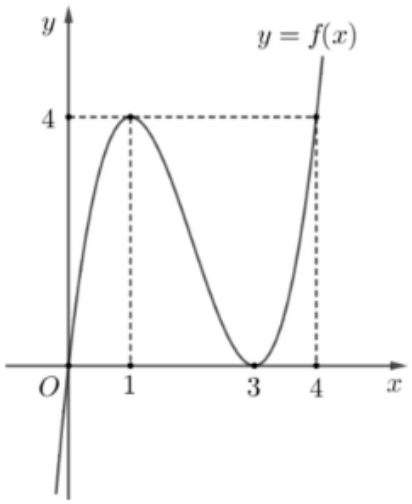
A. 8. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 65. (ĐH Vinh Lần 1) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(x^3-3x\right)=m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-1;2\right]$?



A. 3. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 66. (Đặng Thành Nam Đề 10) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên dưới



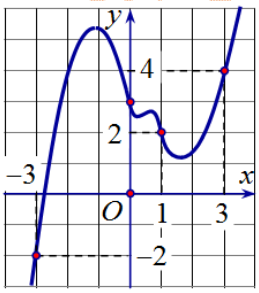
Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(x(x-3)^2\right)=m$ có 9 nghiệm thực thuộc đoạn $[0;4]$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 67. (KSCL-Lần-2-2019-THPT-Nguyễn-Đức-Cảnh-Thái-Bình) Cho $f(x)=x^3-3x^2+1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2019.f\left(f(x)\right)=m$ có 7 nghiệm phân biệt?

A. 4037. **B.** 8076. **C.** 8078. **D.** 0.

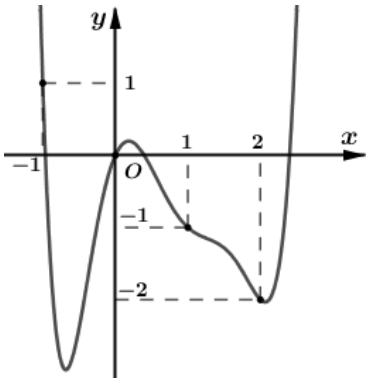
Câu 68. (ĐH Vinh Lần 1) ***(Phát triển từ đề thi đại học 2018)*** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình dưới



Tìm m để bất phương trình $m+x^2+4\ge 2\left(f(x+1)-2x\right)$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-4;2]$.

A. $m\ge 2f(0)-1$. **B.** $m\ge 2f(-3)-4$. **C.** $m\ge 2f(3)-16$. **D.** $m\ge 2f(1)-4$.

Câu 69. (ĐH Vinh Lần 1) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.

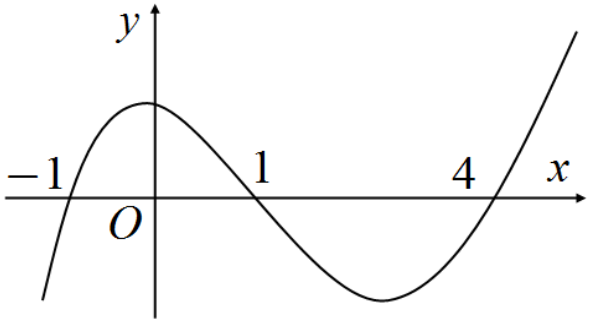


Tìm m để bất phương trình $m-x^2\le 2f(x+2)+4x+3$ nghiệm đúng với mọi $x\in(-3;+\infty)$.

A. $m\ge 2f(0)-1$. **B.** $m\le 2f(0)-1$. **C.** $m\le 2f(-1)$. **D.** $m\ge 2f(-1)$.

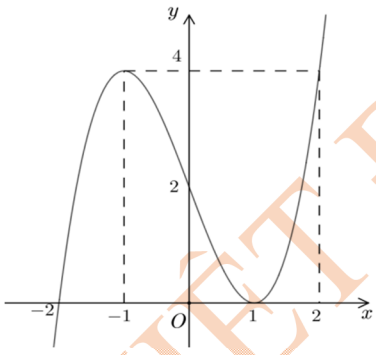
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 70. (Sở Cần Thơ 2019) Cho hàm số $y=f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$, trong đó $m, n, p, q, r \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Số nghiệm của phương trình $f(x)=16m+8n+4p+2q+r$ là



A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

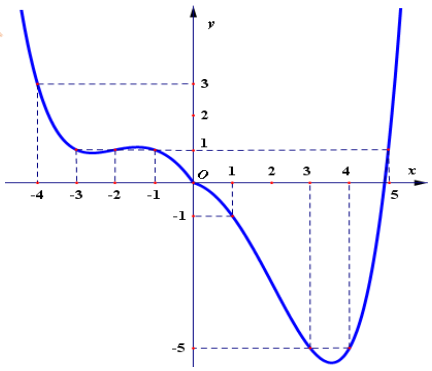
Câu 71. (CHUYÊN HUỲNH MẪN ĐẠT 2019 lần 1) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương m để phương trình $3f(x)=m\sqrt{9-x^2}$ có 3 nghiệm

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

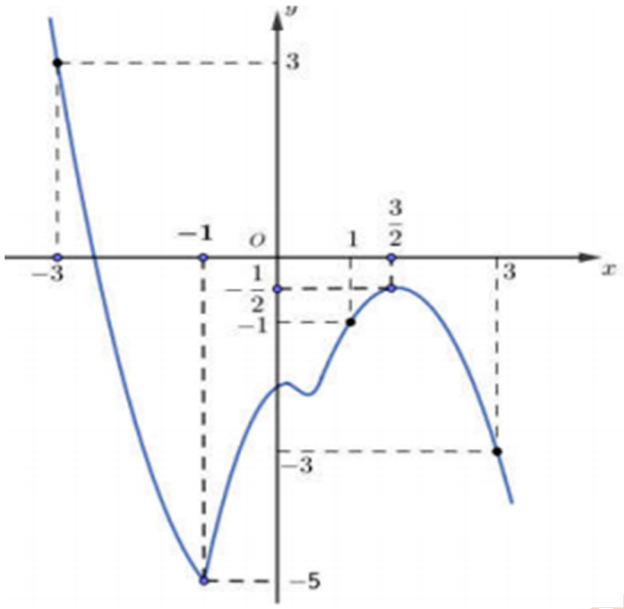
Câu 72. (Hoàng Hoa Thám Hưng Yên) Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2.f\left(3-3\sqrt{-9x^2+30x-21}\right)=m-2019$ có nghiệm.



A. 15. **B.** 14. **C.** 10. **D.** 13.

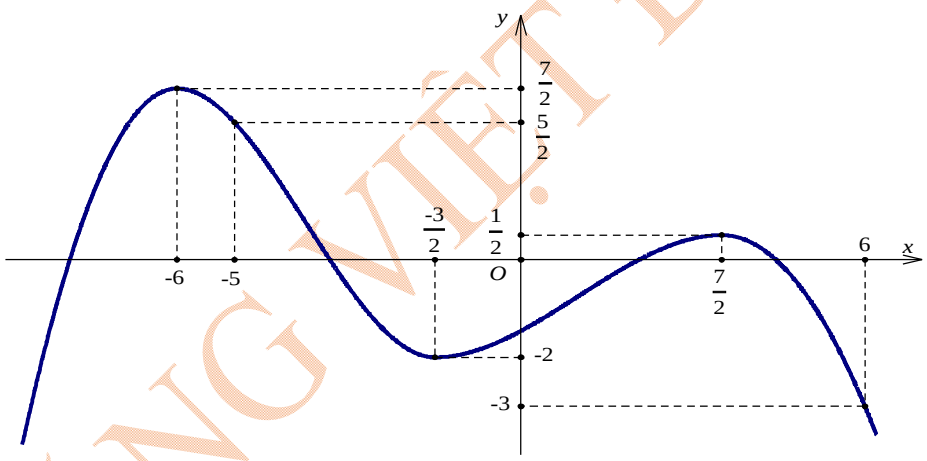
Câu 73. (CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ HÒA BÌNH LẦN 4 NĂM 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)+1+m^2=0$ có nghiệm là

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



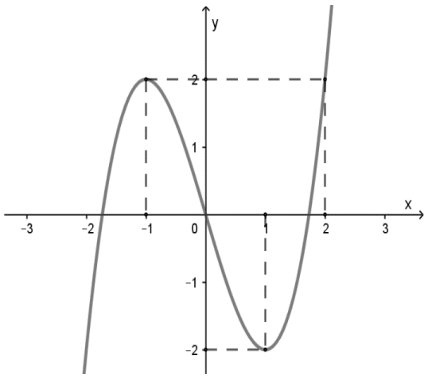
A. 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 74. (CổLoa Hà Nội) Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{408-x}+\sqrt{392+x}-34\right)=m$ có đúng 6 nghiệm phân biệt?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 75. (Sở Thanh Hóa 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.

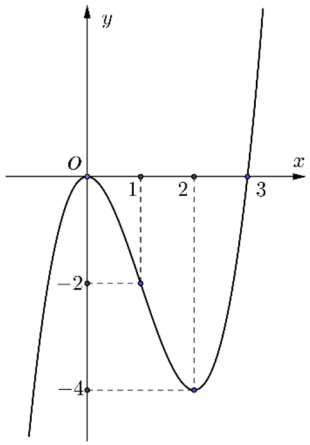


Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{2f(\cos x)}\right)=m$ có nghiệm $x\in\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$.

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

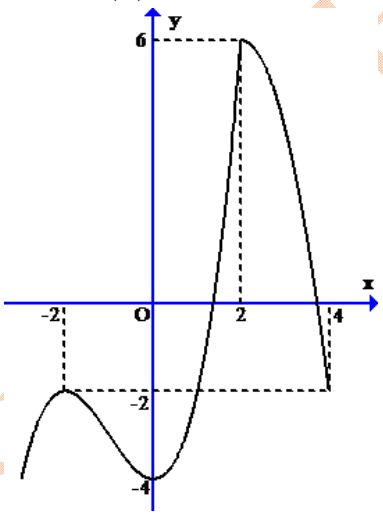
Câu 76. (NGÔ SĨ LIÊN BẮC GIANG LẦN IV NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên trên R có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $7f\left(5-2\sqrt{1+3cosx}\right)=3m-7$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$?

A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

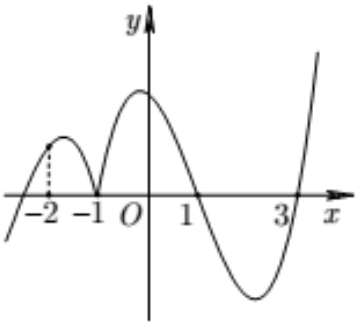
Câu 77. (ĐH Vinh Lần 1) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2}+1\right)+x=m$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[-2;2\right]$?

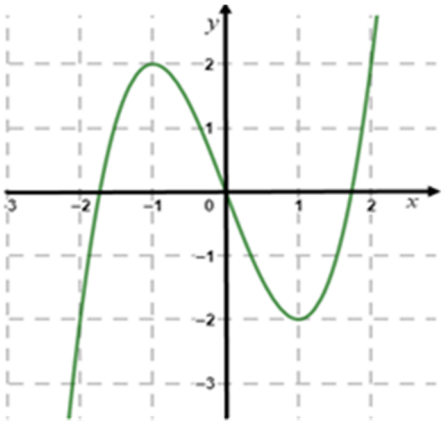
A. 11. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 78. (Chuyên Vinh Lần 2) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên m để bất phương trình $\left(mx+m^2\sqrt{5-x^2}+2m+1\right)f(x)\geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-2;2]$?



A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2

Câu 79. **(Trung-Tâm-Thanh-Tường-Nghệ-An-Lần-2)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình $f\left(f\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)\right)=m$ có nghiệm là

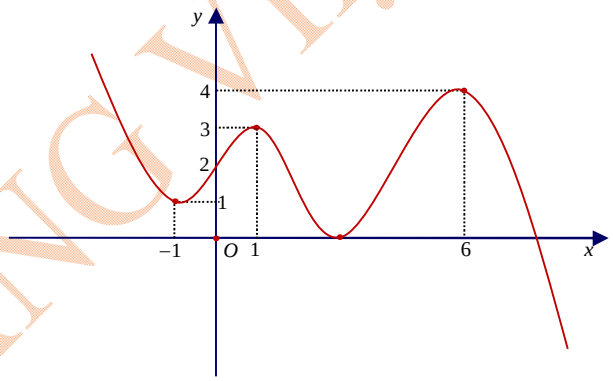


A. $[-1;2]$. **B.** $[0;2]$. **C.** $[-1;1]$. **D.** $[-2;2]$.

Câu 80. **(Thị Xã Quảng Trị)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị của tham số m để phương trình $\frac{m^3+m}{\sqrt{f^2(x)+1}}=f^2(x)+2$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt.

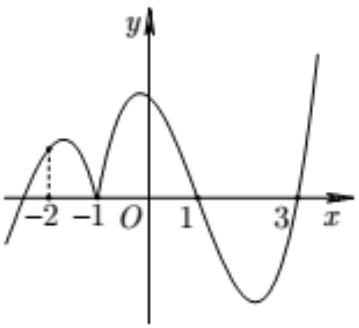
A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=\sqrt{26}$. **C.** $m=\sqrt{10}$. **D.** $m=1$.

Câu 81. **(Yên Phong 1)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt $\frac{4m^3+m}{\sqrt{2f^2(x)+5}}=f^2(x)+3$.



A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

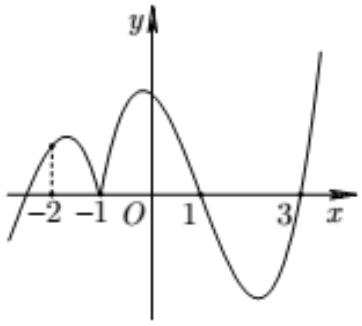
Câu 82. **(Chuyên Vinh Lần 2)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\sqrt{\left(mx+m^2\frac{4-x^2}{1+\sqrt{5-x^2}}+m^2+2m+1\right)f(x)}$ có tập xác định $[-2;2]$



ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

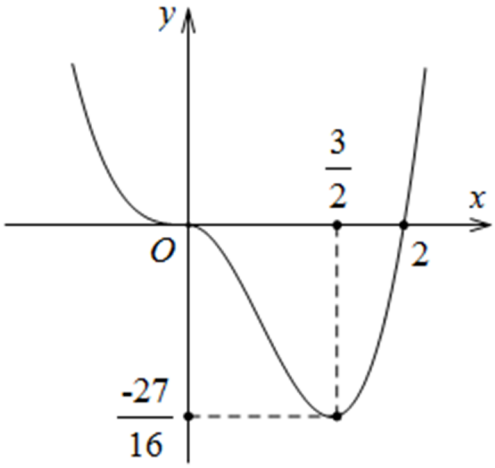
A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3

Câu 83. (Chuyên Vinh Lần 2) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. S là tập các số nguyên m để bất phương trình $\left(m^3.\sqrt{2x^2-2x+4}-mx+2m+3\right)\left(f(x)+2019f^{2019}(x)\right)\geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-2;2019)$. Tổng các phần tử của S là



A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2

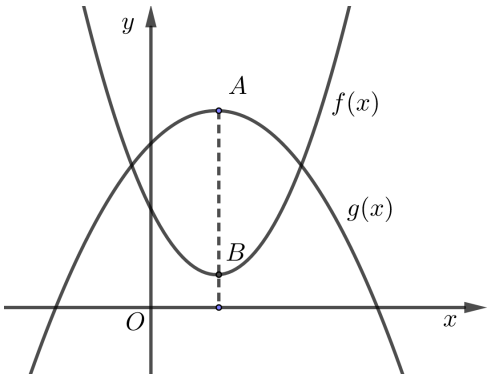
Câu 84. (THPT Sơn Tây Hà Nội 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi A là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(|2\sin x|\right)=f\left(\frac{m}{2}\right)$ có 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$. Tính tổng tất cả các phần tử của A.

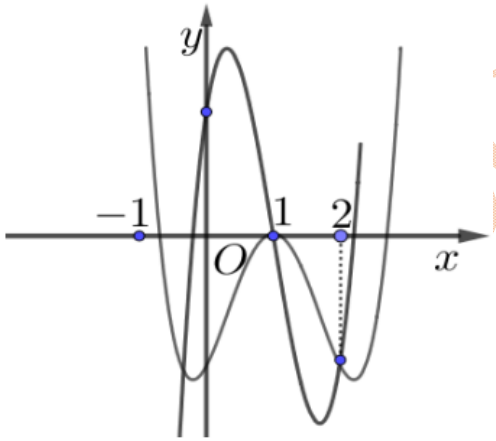
A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 6.

Câu 85. (Sở Quảng NamT) Cho hai hàm đa thức $y=f(x), y=g(x)$ có đồ thị là hai đường cong ở hình vẽ bên. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đúng một điểm cực trị là B, đồ thị hàm số $y=g(x)$ có đúng một điểm cực trị là A và $AB=\frac{7}{4}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-5;5)$ để hàm số $y=\left|\left|f(x)-g(x)\right|+m\right|$ có đúng 5 điểm cực trị ?



A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

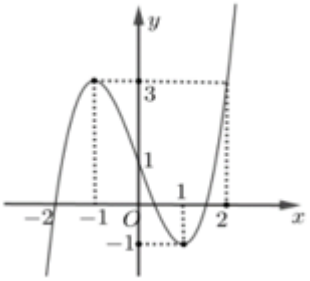
Câu 86. (Trung-Tâm-Thanh-Tường-Nghệ-An-Lần-2) Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức với hệ số thực. Hình vẽ bên dưới là một phần đồ thị của hai hàm số: $y=f(x)$ và $y=f'(x)$.



Tập các giá trị của tham số m để phương trình $f(x)=me^x$ có hai nghiệm phân biệt trên $[0;2]$ là nửa khoảng $[a;b)$. Tổng $a+b$ gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. −0.81. **B.** −0.54. **C.** −0.27. **D.** 0.27.

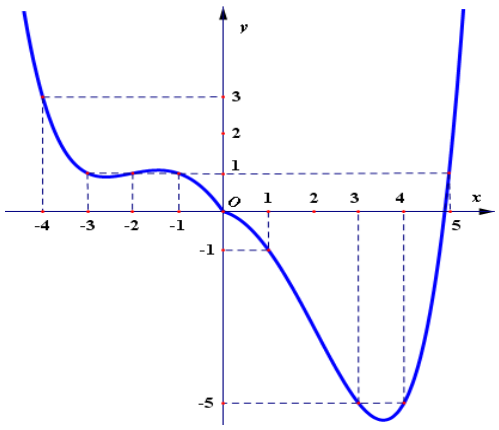
Câu 87. (KIM LIÊN HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 03) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f\left(3-\sqrt{4-x^2}\right)=m$ có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right]$. Tìm tập S.



A. $S=\left(-1;f\left(3-\sqrt{2}\right)\right]$. **B.** $S=\left(f\left(3-\sqrt{2}\right);3\right]$.

C. $S=\varnothing$. **D.** $S=[-1;3]$.

Câu 88. (GIỮA-HKII-2019-NGHĨA-HƯNG-NAM-ĐỊNH) Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2.f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)=m-3$ có nghiệm.

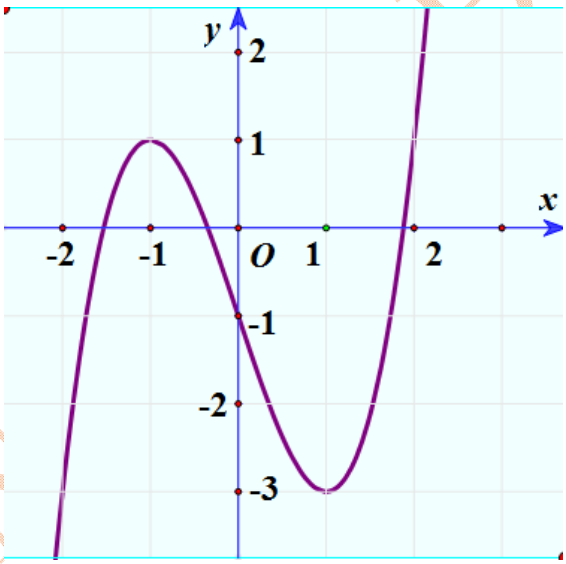


A. 13. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 89. (Nguyễn Du Dak-Lak 2019) Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (với $a,b,c,d\in\mathbb{R},a>0$). Biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ này có điểm cực đại $A(0;1)$ và điểm cực tiểu $B(2;-3)$. Hỏi tập nghiệm của phương trình $f^3(x)+f(x)-2\sqrt[3]{f(x)}=0$ có bao nhiêu phần tử?

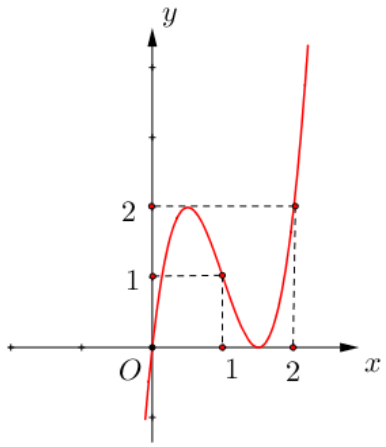
A. 2019. **B.** 2018. **C.** 9. **D.** 8.

Câu 90. (Chuyên Hà Nội Lần1) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Phương trình $f(2\sin x)=m$ có đúng ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi;\pi]$ khi và chỉ khi



A. $m\in\{-3;1\}$. **B.** $m\in(-3;1)$. **C.** $m\in[-3;1)$. **D.** $m\in(-3;1]$.

Câu 91. (ĐỀ-THI-THU-ĐH-THPT-CHUYÊN-QUANG-TRUNG-L5-2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Bất phương trình $f\left(2\sin x\right)-2\sin^2 x<m$ đúng với mọi $x\in\left(0;\pi\right)$ khi và chỉ khi

A. $m>f\left(1\right)-\frac{1}{2}$. **B.** $m\geq f\left(1\right)-\frac{1}{2}$. **C.** $m\geq f\left(0\right)-\frac{1}{2}$. **D.** $m>f\left(0\right)-\frac{1}{2}$.

Câu 92. (THPT LƯƠNG THẾ VINH 2019LẦN 3) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng $f'\left(x\right)>0$ với mọi $x\in\left(-\infty;-3\right)\cup\left(2;+\infty\right)$. Số nghiệm nguyên thuộc khoảng $\left(-10;10\right)$ của bất phương trình $\left[f\left(x\right)+x-1\right]\left(x^2-x-6\right)>0$ là

A. 9. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 7.

Câu 93. (THPT Nghèn Lần1) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases}x^2+4x+y=m\\\left(2x^2+xy\right)\left(x+2\right)=9\end{cases}$$

A. $m\geq 6$. **B.** $-10\leq m\leq 6$. **C.** $m\leq -10$. **D.** $m\leq -10$ hoặc $m\geq 6$.

Câu 94. Gọi $\left(H\right)$ là hình phẳng giới hạn bởi parabol $\left(P\right):y=8x-x^2$ và trục hoành. Các đường thẳng $y=a,y=b,y=c$ với $0<a<b<c<16$ chia $\left(H\right)$ thành bốn phần có diện tích bằng nhau. Giá trị của biểu thức $\left(16-a\right)^3+\left(16-b\right)^3+\left(16-c\right)^3$ bằng:

A. 2048 **B.** 3584 **C.** 2816 **D.** 3480

DẠNG 3. SỰ TƯƠNG GIAO BẰNG SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH HÀM BẬC BA

Câu 1: (THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4) Biết hai đồ thị hàm số $y=x^3+x^2-2$ và $y=-x^2+x$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt A, B, C. Khi đó, diện tích tam giác ABC bằng

A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 2: Biết rằng đồ thị của hàm số $y=P\left(x\right)=x^3-2x^2-5x+2$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt lần lượt có hoành độ là x_1,x_2,x_3. Khi đó giá trị của biểu thức $T=\frac{1}{x_1^{\,2}-4x_1+3}+\frac{1}{x_2^{\,2}-4x^2+3}+\frac{1}{x_3^{\,2}-4x_3+3}$ bằng

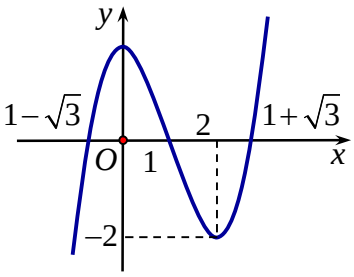
A. $T=\frac{1}{2}\left[-\frac{P'(1)}{P(1)}+\frac{P'(3)}{P(3)}\right]$ **B.** $T=\frac{1}{2}\left[-\frac{P'(1)}{P(1)}-\frac{P'(3)}{P(3)}\right]$

C. $T=\frac{1}{2}\left[\frac{P'(1)}{P(1)}-\frac{P'(3)}{P(3)}\right]$ **D.** $T=\frac{1}{2}\left[\frac{P'(1)}{P(1)}+\frac{P'(3)}{P(3)}\right]$

Câu 3: Biết đồ thị hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1,x_2,x_3. Tính giá trị của biểu thức $T=\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}+\dfrac{1}{f'(x_3)}$.

A. $T=\dfrac{1}{3}$ **B.** $T=3$ **C.** $T=1$ **D.** $T=0$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+2$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Hỏi phương trình $\left(x^3-3x^2+2\right)^3-3\left(x^3-3x^2+2\right)^2+2=0$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 5: Cho hàm số $y=x^3-2009x$ có đồ thị là (C). M_1 là điểm trên (C) có hoành độ $x_1=1$. Tiếp tuyến của (C) tại M_1 cắt (C) tại điểm M_2 khác M_1, tiếp tuyến của (C) tại M_2 cắt (C) tại điểm M_3 khác M_2, …, tiếp tuyến của (C) tại M_{n-1} cắt (C) tại M_n khác M_{n-1} $(n=4;5;...)$, gọi $(x_n;y_n)$ là tọa độ điểm M_n. Tìm n để: $2009x_n+y_n+2^{2013}=0$.

A. $n=685$. **B.** $n=679$. **C.** $n=672$. **D.** $n=675$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=x^3-6x^2+9x$. Đặt $f^k(x)=f\left(f^{k-1}(x)\right)$ với k là số nguyên lớn hơn 1. Hỏi phương trình $f^5(x)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm phân biệt ?

A. 363. **B.** 122. **C.** 120. **D.** 365.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=x^3-6x^2+9x$. Đặt $f^k(x)=f\left(f^{k-1}(x)\right)$ với k là số nguyên lớn hơn 1. Hỏi phương trình $f^6(x)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm phân biệt.

A. 1092. **B.** 363. **C.** 365. **D.** 1094.

Câu 8: Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x+m$ có đồ thị (C), với m là tham số. Giả sử đồ thị (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ thỏa mãn $x_1<x_2<x_3$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $1<x_1<x_2<3<x_3<4$ **B.** $0<x_1<1<x_2<3<x_3<4$

C. $x_1<0<1<x_2<3<x_3<4$ **D.** $1<x_1<3<x_2<4<x_3$

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+m$ (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt với các hoành độ lập thành cấp số cộng.

A. $m=11$. **B.** $m=10$. **C.** $m=9$. **D.** $m=8$.

Câu 10: **(THPT-Nguyễn-Công-Trứ-Hà-Tĩnh-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3)** Cho đồ thị hàm số $y=2x^3+3mx^2-m-6$ (m là tham số) cắt trục hoành tại đúng một điểm khi giá trị của m là

A. $m=0$. **B.** $-6<m<2$. **C.** $0\le m<2$. **D.** $-6<m\le 0$.

Câu 11: Đường thẳng $d:y=x+4$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4$ tại 3 điểm phân biệt $A(0;4)$, B và C sao cho diện tích tam giác MBC bằng 4, với $M(1;3)$. Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

A. $m=2$ hoặc $m=3$. **B.** $m=-2$ hoặc $m=3$.

C. $m=3$. **D.** $m=-2$ hoặc $m=-3$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 12: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+x-1$ có đồ thị là (C). Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đường thẳng $y=(m-2)x+3$ tạo với đồ thị (C) có hai phần diện tích khép kín bằng nhau?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 13: Cho hàm số $y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m), đường thẳng d có phương trình $y=x+4$ và điểm $K(1;3)$. Tìm các giá trị của tham số m để d cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B, C sao cho tam giác KBC có diện tích bằng $8\sqrt{2}$.

A. $m=\dfrac{1\pm\sqrt{37}}{2}$ **B.** $m=\dfrac{1\pm\sqrt{137}}{2}$ **C.** $m=\dfrac{1\pm\sqrt{7}}{2}$ **D.** $m=\dfrac{1\pm\sqrt{142}}{2}$

Câu 14: Đường thẳng $d:y=x+4$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4$ tại 3 điểm phân biệt $A(0;4)$, B và C sao cho diện tích tam giác MBC bằng 4, với $M(1;3)$. Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

A. $m=2$ hoặc $m=3$. **B.** $m=-2$ hoặc $m=3$.
C. $m=3$. **D.** $m=-2$ hoặc $m=-3$.

Câu 15: Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+\dfrac{2}{3}$ (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $x_1;x_2;x_3$ thỏa mãn điều kiện $x_1^2+x_2^2+x_3^2>15$.

A. $\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>4\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>1\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>2\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m<0\\m>1\end{array}\right.$.

Câu 16: **(Ba Đình Lần2)** Cho hàm số $y=x^3+3mx^2-m^3$ có đồ thị (C_m) và đường thẳng $d:y=m^2x+2m^3$. Biết rằng m_1,m_2 $(m_1>m_2)$ là hai giá trị thực của m để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^4+x_2^4+x_3^4=83$. Phát biểu nào sau đây là ***đúng*** về quan hệ giữa hai giá trị m_1, m_2 ?

A. $m_1+m_2=0$. **B.** $m_1^2+2m_2>4$. **C.** $m_2^2+2m_1>4$. **D.** $m_1-m_2=0$.

Câu 17: Cho hàm số $y=x^3-2x^2+(1-m)x+m$ có đồ thị (C). **G**iá trị của m thì (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt x_1,x_2,x_3 sao cho $x_1^2+x_2^2+x_3^2<4$ là

A. $m<1$ **B.** $\begin{cases}-\dfrac{1}{4}<m<1\\m\neq 0\end{cases}$ **C.** $-\dfrac{1}{4}<m<1$ **D.** $\dfrac{1}{4}<m<1$

Câu 18: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+(3m-1)x+6m$ có đồ thị là (C). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2x_3=20$.

A. $m=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{3}$. **B.** $m=\dfrac{2\pm\sqrt{22}}{3}$. **C.** $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{3}$. **D.** $m=\dfrac{3\pm\sqrt{33}}{3}$.

Câu 19: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases}-8+4a-2b+c>0\\8+4a+2b+c<0\end{cases}$. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ và trục Ox là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 20: **(THPT-Phúc-Trạch-Hà-Tĩnh-lần-2-2018-2019-thi-tháng-4)**Tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $(C):y=-2x^3+3x^2+2m-1$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt là

A. $0\le m\le\dfrac{1}{2}$. **B.** $0<m<\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{4}\le m<\dfrac{1}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{1}{2}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 21: Biết đường thẳng $y=(3m-1)x+6m+3$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ tại ba điểm phân biệt sao cho một giao điểm cách đều hai giao điểm còn lại. Khi đó m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;\frac{3}{2})$. **D.** $(\frac{3}{2};2)$.

Câu 22: (Chuyên Thái Bình Lần3) Cho hàm số $f(x)=x^3+3x^2+mx+1$. Gọi S là tổng tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt đường thẳng $y=1$ tại ba điểm phân biệt $A(0;1)$, B, C sao cho các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại B, C vuông góc với nhau. Gía trị của S bằng

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{9}{5}$. **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** $\frac{11}{5}$.

Câu 23: (Đặng Thành Nam Đề 9) Có bao nhiêu số thực m để đường thẳng $y=-x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+(2-m)x^2+3(2m-3)x+m$ tại ba điểm phân biệt $A(0;m)$, B, C sao cho đường thẳng OA là phân giác của góc $\widehat{BOC}$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 24: (Sở Ninh Bình 2019 lần 2) Cho hàm số $f(x)=x^3-3x+1$. Tìm số nghiệm của phương trình $f(f(x))=0$.

A. 5. **B.** 9. **C.** 4. **D.** 7.

Câu 25: (Sở Thanh Hóa 2019) Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2-6x+1$. Phương trình $\sqrt{f(f(x)+1)+1}=f(x)+2$ có số nghiệm thực là

A. 7. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 9.

Câu 26: (HKII-CHUYÊN-NGUYỄN-HUỆ-HÀ-NỘI) Cho hàm số $y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4\ (C_m)$. Giá trị của tham số m để đường thẳng $(d):y=x+4$ cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B, C sao cho tam giác KBC có diện tích bằng $8\sqrt{2}$ với điểm $K(1;3)$ là:

A. $m=\frac{1+\sqrt{137}}{2}$. **B.** $m=\frac{\pm 1+\sqrt{137}}{2}$. **C.** $m=\frac{1\pm\sqrt{137}}{2}$. **D.** $m=\frac{1-\sqrt{137}}{2}$.

Câu 27: (Cụm 8 trường chuyên lần1) Tính tổng S tất cả các giá trị tham số m để đồ thị hàm số $f(x)=x^3-3mx^2+3mx+m^2-2m^3$ tiếp xúc với trục hoành.

A. $S=0$. **B.** $S=1$. **C.** $S=\frac{2}{3}$. **D.** $S=\frac{4}{3}$.

Câu 28: (Đặng Thành Nam Đề 15) Có bao nhiêu số thực m để đường thẳng $y=(m-6)x-4$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+x^2-3x-1$ tại ba điểm phân biệt có tung độ y_1, y_2, y_3 thỏa mãn $\frac{1}{y_1+4}+\frac{1}{y_2+4}+\frac{1}{y_3+4}=\frac{2}{3}$.

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 29: (Chuyên Sơn La Lần 3 năm 2018-2019) Cho hai hàm số $y=x^2+x-1$ và $y=x^3+2x^2+mx-3$. Giá trị của tham số m để đồ thị của hai hàm số có 3 giao điểm phân biệt và 3 giao điểm đó nằm trên đường tròn bán kính bằng 3 thuộc vào khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-4)$. **B.** $(-4;-2)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-2;0)$.

Câu 30: (CỤM TRƯỜNG SÓC SƠN MÊ LINH HÀ NỘI) Cho đồ thị (C) của hàm số $y=x^3-2mx^2+(m^2+m-2)x+m$ và parabol $(P):y=x^2-x-1$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

D,E,F. Tổng các giá trị của m để đường tròn đi qua ba điểm D,E,F cũng đi qua điểm $G\left(0;-\frac{2}{3}\right)$ là

A. $\frac{4}{3}$. **B.** -1. **C.** $-\frac{4}{3}$. **D.** 1.

Câu 31: **(THANH CHƯƠNG 1 NGHỆ AN 2019 LẦN 3)** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-3\pi;3\pi)$ để đồ thị của hàm số $y=2|x|^3-3(m+1)x^2+6m|x|+m^2-3$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

A. 8. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 32: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

.

Khi đó $|f(x)|=m$ có bốn nghiệm phân biệt $x_1<x_2<x_3<\frac{1}{2}<x_4$ khi và chỉ khi.

A. $0<m\le 1$. **B.** $\frac{1}{2}\le m<1$. **C.** $\frac{1}{2}<m<1$. **D.** $0<m<1$.

HÀM BẬC BỐN

Câu 33: Gọi (C_m) là độ thì hàm số $y=x^4-2x^2-m+2017$. Tìm m để (C_m) có đúng 3 điểm chung phân biệt với trục hoành, ta có kết quả:

A. $m=2017$ **B.** $2016<m<2017$ **C.** $m\ge 2017$ **D.** $m\le 2017$

Câu 34: **(Chuyên Hưng Yên Lần 3)** Một đường thẳng cắt đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2$ tại bốn điểm phân biệt có hoành độ là 0, 1, m và n. Tính $S=m^2+n^2$.

A. $S=0$. **B.** $S=1$. **C.** $S=2$. **D.** $S=3$.

Câu 35: **(Chuyên Hạ Long lần 2-2019)** Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+m^2-1$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

A. $m>1$. **B.** $-1\le m\le 1$. **C.** $m\le -1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m\le -1 \\ m\ge 1 \end{array}\right.$.

Câu 36: Cho hàm số $y=x^4-mx^2+m$ (m là tham số) có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3,x_4 thỏa mãn $x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=30$ khi $m=m_0$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $4<m_0\le 7$. **B.** $0<m_0<4$. **C.** $m_0>7$. **D.** $m_0\le -2$.

Câu 37: Cho hàm số $y=x^4-mx^2+m$ (m là tham số) có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3,x_4 thỏa mãn $x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=30$ khi $m=m_0$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $4<m_0\le 7$. **B.** $0<m_0<4$. **C.** $m_0>7$. **D.** $m_0\le -2$.

Câu 38: Gọi m là số thực dương sao cho đường thẳng $y=m+1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2-2$ tại hai điểm A,B thỏa mãn tam giác OAB vuông tại O (O là gốc tọa độ). Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $m\in\left(\frac{7}{9};\frac{9}{4}\right)$. **B.** $m\in\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$. **C.** $m\in\left(\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right)$. **D.** $m\in\left(\frac{5}{4};\frac{7}{4}\right)$.

Câu 39: **(THTT lần5)** Cho hàm số $y=x^4-2x^2$ có đồ thị (C), có bao nhiêu đường thẳng d có đúng 3 điểm chung với đồ thị (C) và các điểm chung có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-1$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 40: Gọi (C_m) là độ thì hàm số $y=x^4-2x^2-m+2017$. Tìm m để (C_m) có đúng 3 điểm chung phân biệt với trục hoành, ta có kết quả:

A. $m=2017$ **B.** $2016<m<2017$ **C.** $m\ge 2017$ **D.** $m\le 2017$

Câu 41: Gọi m là số thực dương sao cho đường thẳng $y=m+1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2-2$ tại hai điểm A, B thỏa mãn tam giác OAB vuông tại O (O là gốc tọa độ). Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $m\in\left(\frac{7}{9};\frac{9}{4}\right)$. **B.** $m\in\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$. **C.** $m\in\left(\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right)$. **D.** $m\in\left(\frac{5}{4};\frac{7}{4}\right)$.

Câu 42: **(ĐOÀN THƯỢNG-HẢI DƯƠNG LẦN 2 NĂM 2019)** Gọi m là số thực dương sao cho đường thẳng $y=m+1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2-2$ tại hai điểm phân biệt M, N thỏa mãn tam giác OMN vuông tại O (O là gốc tọa độ). Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $m\in\left(\frac{11}{4};\frac{15}{4}\right)$. **B.** $m\in\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$. **C.** $m\in\left(\frac{7}{4};\frac{9}{4}\right)$. **D.** $m\in\left(\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right)$.

Câu 43: **(Sở Ninh Bình 2019 lần 2)** Cho phương trình $\left(x^2-3x+m\right)^2+x^2-8x+2m=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-20;20]$ để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt?

A. 19. **B.** 18. **C.** 17. **D.** 20.

HÀM PHÂN THỨC

Câu 44: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}(H)$ và đường thẳng $d: y=x+m2x+m$ giao nhau tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB=\sqrt{5}$.

A. $m=4$. **B.** $m=3$. **C.** $m=0$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=10 \\ m=-2 \end{array}\right.$.

Câu 45: Tìm tất cả các giá trị thực của m để đường thẳng $y=x+m-1$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB=2\sqrt{3}$.

A. $m=4\pm\sqrt{10}$. **B.** $m=4\pm\sqrt{3}$. **C.** $m=2\pm\sqrt{3}$. **D.** $m=2\pm\sqrt{10}$.

Câu 46: **(GIỮA-HKII-2019-NGHĨA-HƯNG-NAM-ĐỊNH)** Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y=x+m-1$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB=2\sqrt{3}$. Tính tổng bình phương các phần tử của S.

A. 38. **B.** 52. **C.** 28. **D.** 14.

Câu 47: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}(H)$ và đường thẳng $d: y=x+m2x+m$ giao nhau tại hai điểm phân biệt A, B thuộc 2 nhánh khác nhau. Xác định m để đoạn AB có độ dài ngắn nhất.

A. $m=5$. **B.** $m=-3$. **C.** $m=0$. **D.** $m=-1$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 48: **(Chuyên Bắc Giang)** Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = x - m + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho độ dài AB ngắn nhất.

A. $m = -3$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = 1$.

Câu 49: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \dfrac{m-x}{x+2}(H_m)$ và đường thẳng $d: 2x + 2y - 1 = 0$ giao nhau tại hai điểm cùng với gốc tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích là $S = \dfrac{3}{8}$.

A. $m = 3$. **B.** $m = \dfrac{1}{2}$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 1$.

Câu 50: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \dfrac{2x}{x-2}(H)$ và đường thẳng $d: y = x + m$ giao nhau tại hai điểm phân biệt thuộc 2 nhánh khác nhau của đồ thị sao cho khoảng cách giữa hai điểm đó là nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

A. $m = 4$ và $\sqrt{30}$. **B.** $m = \dfrac{1}{2}$ và $\sqrt{31}$. **C.** $m = 0$ và $\sqrt{32}$. **D.** $m = -1$ và $\sqrt{33}$.

Câu 51: Tìm tất cả các giá trị thực của a và b sao cho đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}(C)$ và đường thẳng $d: y = ax + b$ giao nhau tại hai điểm phân biệt, đối xứng nhau qua đường thẳng $\Delta: x - 2y + 3 = 0$.

A. $\begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} a = -2 \\ b = -4 \end{cases}$

Câu 52: Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị của hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}(C)$ và đường thẳng $d: y = mx + 3$ giao nhau tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O. (O là gốc tọa độ)

A. $m = 3 \pm \sqrt{5}$. **B.** $m = 3 - \sqrt{5}$. **C.** $m = 3 + \sqrt{5}$. **D.** $m = 2 \pm \sqrt{5}$.

Câu 53: Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và điểm $P(2;5)$. Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho tam giác PAB đều. Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng d và đồ thị (C) là:

A. $m = 1,\ m = -5$ **B.** $m = 1,\ m = 4$ **C.** $m = 6,\ m = -5$ **D.** $m = 1,\ m = -8$

Câu 54: Cho hàm số $y = \dfrac{2x-4}{x+1}$ có đồ thi (C) điểm $A(-5;5)$. Tìm m để đường thẳng $y = -x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt M và N sao cho tứ giác $OAMN$ là hình bình hành (O là gốc toạ độ).

A. $m = 0$ **B.** $m = 0; m = 2$ **C.** $m = 2$ **D.** $m = -2$

Câu 55: Cho hàm số $y = \dfrac{3x - 2m}{mx + 1}$ với m là tham số. Xác định m để đường thẳng d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại C, D sao cho diện tích ΔOAB bằng 2 lần diện tích ΔOCD.

A. $m = \pm\dfrac{5}{3}$ **B.** $m = \pm 3$ **C.** $m = \pm\dfrac{2}{3}$ **D.** $m = \pm\dfrac{1}{3}$

Câu 56: Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}(C)$. Tìm k để đường thẳng $d: y = kx + 2k + 1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A và B đến trục hoành bằng nhau.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. 12 **B.** -4 **C.** -3 **D.** 1

Câu 57: Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^3+2mx^2+3(m-1)x+2(C)$ và đường thẳng $\Delta: y=-x+2$ tại 3 điểm phân biệt $A(0;2)$; B; C sao cho tam giác MBC có diện tích $2\sqrt{2}$, với $M(3;1)$

A. $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=3 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=3 \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=3 \end{array}\right.$.

Câu 58: **(CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU ĐỒNG THÁP 2019 LẦN 2)** Giá trị k thỏa mãn đường thẳng $d: y=kx+k$ cắt đồ thị $(H): y=\dfrac{x-4}{2x-2}$ tại hai điểm phân biệt A, B cùng cách đều đường thẳng $y=0$. Khi đó k thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 59: **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên Lần2)** Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x+3}$ (1). Đường thẳng $d: y=ax+b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1). Biết d cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB cân tại O. Khi đó $a+b$ bằng

A. -1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -3.

Câu 60: **(THPT Nghèn Lần1)** Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x}{x-2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=-2x$. Biết d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Tích các hệ số góc của các tiếp tuyến của (C) tại A và B bằng

A. 0. **B.** 4. **C.** $-\dfrac{1}{6}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Câu 61: **(SGD-Nam-Định-2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{x}{1-x}$ (C) và điểm $A(-1;1)$. Tìm m để đường thẳng $d: y=mx-m-1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho AM^2+AN^2 đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m=-1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=-\dfrac{2}{3}$.

Câu 62: **(Quỳnh Lưu Lần 1)** Cho hàm số $y=\dfrac{-x+1}{2x-1}$ (C), $y=x+m$ (d). Với mọi m đường thẳng (d) luôn cắt đồ thị (C) tại hai hai điểm phân biệt A và B Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B; Giá trị nhỏ nhất của $T=k_1^{2020}+k_2^{2020}$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Câu 63: **(CHUYÊN NGUYỄN DU ĐĂK LĂK LẦN X NĂM 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}$ (C) và đường thẳng $d: y=-x+m$. Gọi S là tập hợp các số thực m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB (O là gốc tọa độ) có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $2\sqrt{2}$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 8. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

HÀM SỐ KHÁC

Câu 64: Cho hàm số $y=f(x)=2^{2018}x^3+3.2^{2018}x^2-2018$ có đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3. Tính giá trị biểu thức: $P=\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}+\dfrac{1}{f'(x_3)}$

A. $P=2^{2018}$. **B.** $P=0$. **C.** $P=-2018$. **D.** $P=3.2^{2018}-1$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 65: **(Chuyên Thái Nguyên)** Tính tổng các giá trị nguyên của tham số $m\in[-50;50]$ sao cho bất phương trình $mx^4-4x+m\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

A. 1272. **B.** 1275. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 66: **(Sở Ninh Bình 2019 lần 2)** Cho 2 số thực a và b. Tìm giá trị nhỏ nhất của a^2+b^2 để đồ thị hàm số $y=f(x)=3x^4+ax^3+bx^2+ax+3$ có điểm chung với trục Ox.

A. $\frac{9}{5}$. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** $\frac{36}{5}$. **D.** $\frac{4}{5}$.

Câu 67: **(Sở Hà Nam)** Cho hàm số $y=f(x)=x^2-4x+3$ có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $f^2(|x|)-(m-6)f(|x|)-m+5=0$ có 6 nghiệm thực phân biệt.

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 68: **(THPT Chuyên Hùng Vương-Gia Lai-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hàm số đa thức bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị đi qua các điểm $A(2;4)$, $B(3;9)$, $C(4;16)$. Các đường thẳng AB, AC, BC lại cắt đồ thị tại lần lượt tại các điểm D, E, F (D khác A và B, E khác A và C, F khác B và C). Biết rằng tổng các hoành độ của D, E, F bằng 24. Tính $f(0)$.

A. -2. **B.** 0. **C.** $\frac{24}{5}$. **D.** 2.

Câu 69: **(Quỳnh Lưu Nghệ An)**Tìm tất cả các giá trị của tham số $m\in\mathbb{R}$ sao cho phương trình $\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1$ có hai nghiệm thực.

A. $m>\frac{7}{12}$. **B.** $m\ge-\frac{7}{2}$. **C.** $m\ge\frac{3}{2}$. **D.** $m\ge\frac{9}{2}$.

Câu 70: **(SGD Bà Rịa Vũng Tàu-đề 2 năm 2017-2018)** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^2+m\sqrt{4-x^2}+m-7$ có điểm chung với trục hoành là $[a;b]$ (với $a;b\in\mathbb{R}$). Tính giá trị của $S=2a+b$.

A. $S=\frac{19}{3}$. **B.** $S=7$. **C.** $S=5$. **D.** $S=\frac{23}{3}$.

Câu 71: Cho hàm số $y=x^2+m\left(\sqrt{2018-x^2}+1\right)-2021$ với m là tham số thực. Gọi S là tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị của hàm số đã cho cắt trục hoành tại đúng hai điểm phân biệt. Tính S.

A. 960. **B.** 986. **C.** 984. **D.** 990.

Câu 72: **(Sở Quảng NamT)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-1;7)$ để phương trình: $(m-1)x+(m+2)\sqrt{x\left(x^2+1\right)}=x^2+1$ có nghiệm?

A. 6 **B.** 7 **C.** 1 **D.** 5

Câu 73: **(Sở Hưng Yên Lần1)** Có bao nhiêu giá trị âm của tham số m để phương trình $\sqrt{2019m+\sqrt{2019m+x^2}}=x^2$ có hai nghiệm thực phân biệt

A. 1. **B.** 0. **C.** Vô số. **D.** 2.

Câu 74: **(THPT LƯƠNG THẾ VINH 2019LẦN 3)** Cho hàm số $f(x)=x^5+3x^3-4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x)+m}\right)=x^3-m$ có nghiệm thuộc đoạn $[1;2]$?

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 75: Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x^2+x+\frac{3}{2}$. Phương trình $\frac{f\left(f\left(x\right)\right)}{2f\left(x\right)-1}=1$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt ?

A. 4 nghiệm. **B.** 9 nghiệm. **C.** 6 nghiệm. **D.** 5 nghiệm.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

TIẾP TUYẾN

A – LÝ THUYẾT CHUNG

Bài toán 1: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của $(C): y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; y_0)$

Nếu cho x_0 thì tìm $y_0 = f(x_0)$

Nếu cho y_0 thì tìm x_0 là nghiệm của phương trình $f(x) = y_0$

Tính $y' = f'(x)$. Suy ra $y'(x_0) = f'(x_0)$.

Phương trình tiếp tuyến Δ là: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Bài toán 2: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của $(C): y = f(x)$ biết Δ có hệ số góc k cho trước

Cách 1: Tìm tọa độ tiếp điểm.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Tính $f'(x_0)$

Δ có hệ số góc $k \Rightarrow f'(x_0) = k \quad (1)$

Giải phương trình (1), tìm được x_0 và tính $y_0 = f(x_0)$. Từ đó viết phương trình của Δ.

Cách 2: Dùng điều kiện tiếp xúc.

Phương trình đường thẳng Δ có dạng $y = kx + m$.

Δ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} f(x) = kx + m \\ f'(x) = k \end{cases} (*)$

Giải hệ (*), tìm được m. Từ đó viết phương trình của Δ.

Chú ý: Hệ số góc k của tiếp tuyến Δ có thể được cho gián tiếp như sau:

+ Δ tạo với chiều dương trục hoành góc α thì $k = \tan\alpha$

+ Δ song song với đường thẳng $d: y = ax + b$ thì $k = a$

+ Δ vuông góc với đường thẳng $d: y = ax + b (a \neq 0)$ thì $k = -\dfrac{1}{a}$

+ Δ tạo với đường thẳng $d: y = ax + b$ một góc α thì $\left|\dfrac{k - a}{1 + ka}\right| = \tan\alpha$.

Bài toán 3: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của $(C): y = f(x)$, biết Δ đi qua điểm $A(x_A; y_A)$

Cách 1: Tìm tọa độ tiếp điểm.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Khi đó: $y_0 = f(x_0), y_0' = f'(x_0)$

Phương trình tiếp tuyến Δ tại $M: y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0)$

Δ đi qua $A(x_A; y_A)$ nên: $y_A - y_0 = f'(x_0).(x_A - x_0) \quad (2)$

Giải phương trình (2), tìm được x_0. từ đó viết phương trình của Δ.

Cách 2: Dùng điều kiện tiếp xúc.

Phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(x_A; y_A)$ và có hệ số góc $k: y - y_A = k(x - x_A)$

Δ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$\begin{cases} f(x) = k(x - x_A) + y_A \\ f'(x) = k \end{cases} (*)$

Giải hệ (*), tìm được x (suy ra k). Từ đó viết phương trình tiếp tuyến Δ.

Bài toán 4: Tìm những điểm trên đường thẳng d mà từ đó có thể vẽ được 1,2,3,… tiếp tuyến với đồ thị $(C): y = f(x)$.

Giả sử $d: ax + by + c = 0. M(x_M; y_M) \in d$

Phương trình đường thẳng Δ qua M có hệ số góc $k: y = k(x - x_M) + y_M$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Δ tiếp xúc với (C) khi hệ pt sau có nghiệm: $\begin{cases} f(x)=k(x-x_M)+y_M & (1) \\ f'(x)=k & (2) \end{cases}$

+ Thế k từ (2) vào (1) ta được $f(x)=(x-x_M).f'(x)+y_M \quad (C)$

+ Số tiếp tuyến của (C) vẽ từ M = số nghiệm của x của (C).

Bài toán 5:

Tìm những điểm mà từ đó có thể vẽ được 2 tiếp tuyến với đồ thị $(C): f = f(x)$ và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

Gọi $M(x_M;y_M)$

Phương trình đường thẳng Δ qua M có hệ số góc $k: y=k(x-x_M)+y_M$

Δ tiếp xúc với (C) khi hệ pt sau có nghiệm: $\begin{cases} f(x)=k(x-x_M)+y_M & (1) \\ f'(x)=k & (2) \end{cases}$

+ Thế k từ (2) vào (1) ta được $f(x)=(x-x_M).f'(x)+y_M \quad (C)$

+ Qua M vẽ được 2 tiếp tuyến với (C) $\Leftrightarrow$ (C) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau $\Leftrightarrow f'(x_1).f'(x_2)=-1$.

Từ đó ta tìm được M .

Chú ý: Qua M vẽ được 2 tiếp tuyến với (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía với trục hoành thì

$$\begin{cases} (C) \text{ có 2 nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \\ f(x_1).f(x_2)<0 \end{cases}$$

Bài toán 6: Tìm giá trị tham số mà tiếp tuyến của hàm số thỏa mãn các tính chất hình học Oxy ta sử dụng cách viết phương trình tiếp tuyến của các dạng trên

Δ tiếp xúc với (C) khi hệ pt sau có nghiệm: $\begin{cases} f(x)=k(x-x_M)+y_M & (1) \\ f'(x)=k & (2) \end{cases}$

Sử dụng công thức cơ bản của hình học Oxy về công thức khoảng cách, độ dài, vectơ,…

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^3+(1-2m)x^2+(2-m)x+m^2+2m-5 \quad (C)$ có tiếp tuyến tạo với đường thẳng $d: x+y+7=0$ góc α, biết $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{26}}$

A. $m\le-\dfrac{1}{4}$ hoặc $m\ge\dfrac{1}{2}$. **B.** $m\le-1$ hoặc $m\ge\dfrac{1}{3}$.

C. $m\le-\dfrac{1}{3}$ hoặc $m\ge\dfrac{1}{4}$. **D.** $m\le-\dfrac{1}{5}$ hoặc $m\ge\dfrac{1}{3}$.

Câu 2: (CHUYÊN HUỲNH MẪN ĐẠT 2019 lần 1) Tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hai đường cong $(C_1): y=x^3$ và $(C_2): y=x^2+x+m$ có 4 tiếp tuyến chung là

A. $\dfrac{4}{27}<m<\dfrac{3}{8}$. **B.** $\dfrac{1}{27}<m<\dfrac{1}{8}$. **C.** $\dfrac{5}{27}<m<\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{8}<m<\dfrac{3}{8}$.

Câu 3: (SGD Bắc Giang – năm 2017 – 2018) Cho hàm số $y=x(x^2-3)$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị (C) thỏa mãn tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) tại điểm A (khác M) và cắt Ox tại điểm B sao cho M là trung điểm của đoạn AB?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 4: Cho hàm số $y=-x^3+4x^2+1$ có đồ thị là (C) và điểm $M(m;1)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m để qua M kẻ được đúng 2 tiếp tuyến đến đồ thị (C). Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 5. **B.** $\frac{40}{9}$. **C.** $\frac{16}{9}$. **D.** $\frac{20}{3}$.

Câu 5: **(THPT Chuyên ĐH Vinh – lần 1 - năm 2017 – 2018)** Cho đồ thị $(C): y=x^3-3x^2$. Có bao nhiêu số nguyên $b\in(-10;10)$ để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $B(0;b)$?

A. 2. **B.** 9. **C.** 17. **D.** 16.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị thực của thàm số m sao cho hàm số $y=x^3-3x+1(C)$, đường thẳng $d: y=mx+m+3$ giao nhau tại $A(-1;3), B, C$ và tiếp tuyến của (C) tại B và C vuông góc nhau.

A. $\left[\begin{array}{l} m=\frac{-3+2\sqrt{2}}{3} \\ m=\frac{-3-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m=\frac{-2+2\sqrt{2}}{3} \\ m=\frac{-2-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} m=\frac{-4+2\sqrt{2}}{3} \\ m=\frac{-4-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m=\frac{-5+2\sqrt{2}}{3} \\ m=\frac{-5-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$

Câu 7: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}mx^3+(m-1)x^2+(4-3m)x+1$ có đồ thị là (C_m), m là tham số. Tìm các giá trị của m để trên (C_m) có duy nhất một điểm có hoành độ âm mà tiếp tuyến của (C_m) tại điểm đó vuông góc với đường thẳng $d: x+2y=0$.

A. $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>\frac{2}{3} \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>1 \end{array}\right.$ **C.** $0<m<\frac{1}{3}$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>\frac{5}{3} \end{array}\right.$

Câu 8: Cho hàm số $y=x^3-12x+12$ có đồ thị (C) và điểm $A(m;-4)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m nguyên thuộc khoảng $(2;5)$ để từ A kẻ được ba tiếp tuyến với đồ thị (C). Tổng tất cả các phần tử nguyên của S bằng

A. 7. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 9: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2x-1$ có đồ thị (C). Hai điểm A, B phân biệt trên (C) có hoành độ lần lượt là a và b$(a>b)$ và tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau. $AB=2$. Tính $S=2a+3b$.

A. $S=4$. **B.** $S=6$. **C.** $S=7$. **D.** $S=8$.

Câu 10: Cho hàm số $y=2x^3-3x^2+1$ có đồ thị (C). Xét điểm A thuộc (C). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của a sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại điểm thứ hai B$(B\neq A)$ thỏa mãn $ab=-\frac{1}{2}$ trong đó a, b lần lượt là hoành độ của A và **B.** Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. $S=4$. **B.** $S=6$. **C.** $S=7$. **D.** $S=8$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 11: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để trên đồ thị hàm số $y=-\frac{2}{3}x^3+(m-1)x^2+(3m-2)x-\frac{5}{3}$ tồn tại hai điểm $M_1(x_1;y_1),M_2(x_2;y_2)$ có toạ độ thoả mãn $x_1.x_2>0$ sao cho tiếp tuyến với đồ thị hàm số đồ thị hàm số tại hai điểm đó cùng vuông góc với đường thẳng $x-2y+1=0$. Tìm số nguyên âm lớn nhất thuộc tập S.

A. -1. **B.** -3. **C.** -2. **D.** -4.

Câu 12: **(Chuyên KHTN)** Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+9x$ có đồ thị (C). Gọi A,B,C,D là bốn điểm trên đồ thị (C) với hoành độ lần lượt là a,b,c,d sao cho tứ giác $ABCD$ là một hình thoi đồng thời hai tiếp tuyến tại A và C song song với nhau và đường thẳng AC tạo với hai trục tọa độ tam giác cân. Tính tích $abcd$.

A. 60. **B.** 120. **C.** 144. **D.** 180.

Câu 13: **(THPT-Chuyên-Sơn-La-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-4)** Cho hàm số $y=(m+1)x^3-(2m+1)x-m+1$ có đồ thị (C_m), biết rằng đồ thị (C_m) luôn đi qua ba điểm cố định A, B, C thẳng hàng. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-10;10]$ để (C_m) có tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng chứa ba điểm A, B, C?

A. 19. **B.** 1. **C.** 20 .**D.** 10.

Câu 14: **(THPT NINH BÌNH – BẠC LIÊU LẦN 4 NĂM 2019)** Cho đồ thị $(C):y=x^3-3x^2$. Có bao nhiêu số nguyên $b\in(-10;10)$ để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $B(0;b)$?

A. 2. **B.** 9. **C.** 17. **D.** 16.

Câu 15: Cho hàm số $y=2x^3-3x^2+1$ có đồ thị (C). Xét điểm A_1 có hoành độ $x_1=1$ thuộc (C). Tiếp tuyến của (C) tại A_1 cắt (C) tại điểm thứ hai $A_2\neq A_1$ có hoành độ x_2. Tiếp tuyến của (C) tại A_2 cắt (C) tại điểm thứ hai $A_3\neq A_2$ có hoành độ x_3. Cứ tiếp tục như thế, tiếp tuyến của (C) tại A_{n-1} cắt (C) tại điểm thứ hai $A_n\neq A_{n-1}$ có hoành độ x_n. Tìm giá trị nhỏ nhất của n để $x_n>5^{100}$.

A. 235 **B.** 234 **C.** 118 **D.** 117

Câu 16: Cho hàm số $y=2x^3-3x^2+1$ có đồ thị (C). Xét điểm A_1 có hoành độ $x_1=\frac{5}{2}$ thuộc (C). Tiếp tuyến của (C) tại A_1 cắt (C) tại điểm thứ hai $A_2\neq A_1$ có hoành độ x_2. Tiếp tuyến của (C) tại A_2 cắt (C) tại điểm thứ hai $A_3\neq A_2$ có hoành độ x_3. Cứ tiếp tục như thế tiếp tuyến của (C) tại A_{n-1} cắt (C) tại điểm thứ hai $A_n\neq A_{n-1}$ có hoành độ x_n. Tìm x_{2018}.

A. $x_{2018}=-2^{2018}+\frac{1}{2}$. **B.** $x_{2018}=-2^{2018}-\frac{1}{2}$.

C. $x_{2018}=-3.2^{2017}-\frac{1}{2}$. **D.** $x_{2018}=3.2^{2017}-\frac{1}{2}$.

Câu 17: Cho hàm số: $y=x^3-2009x$ có đồ thị là (C). M_1 là điểm trên (C) có hoành độ $x_1=1$. Tiếp tuyến của (C) tại M_1 cắt (C) tại điểm M_2 khác M_1, tiếp tuyến của (C) tại M_2 cắt (C) tại điểm M_3 khác M_2, tiếp tuyến của (C) tại điểm M_{n-1} cắt (C) tại điểm M_n khác M_{n-1} (n = 4; 5;…), gọi $(x_n;y_n)$ là tọa độ điểm M_n. Tìm n để: $2009x_n+y_n+2^{2013}=0$

A. $n=685$ **B.** $n=627$ **C.** $n=675$ **D.** $n=672$

Câu 18: Gọi A là điểm thuộc đồ thị hàm số $y=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{5}{2}$ (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt B, C khác A sao cho $AC=3AB$ (với B nằm giữa A và C). Tính độ dài đoạn thẳng O**A.**

A. $OA=\sqrt{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{14}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

Câu 19: Cho hàm số: $y=\frac{x^4}{2}-3x^2+\frac{5}{2}(C)$ và điểm M $\in(C)$ có hoành độ x_M = a. Với giá trị nào của a thì tiếp tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) 2 điểm phân biệt khác M.

A. $\begin{cases}|a|<\sqrt{3}\\ a\neq\pm1\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}|a|<\sqrt{3}\\ a\neq1\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}a<\sqrt{3}\\ a\neq\pm1\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}|a|<\sqrt{7}\\ a\neq\pm2\end{cases}$

Câu 20: Cho đồ thị $(C):y=\frac{x}{2}+\sqrt{x^2+x+1}$. Gọi $M(0;m)$ là điểm nằm trên trục tung mà từ đó kẻ được ít nhất một tiếp tuyến đến đồ thị (C). Biết tập hợp các giá trị của m là nửa khoảng $(a;b]$. Giá trị của $a+b$ bằng

A. 1. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** -1.

Câu 21: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}(C)$ và đường thẳng $d:y=2x+m$ giao nhau tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau.

A. $m=-1$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=-3$ **D.** $m=-4$

Câu 22: Cho điểm $A(0;m)$, tìm tất cả các giá trị thực của m để từ điểm A kẻ được hai tiếp tuyến tới hàm số $y=\frac{x+2}{x-1}(C)$ sao cho hai tiếp điểm tương ứng nằm về hai phía trục Ox.

A. $\begin{cases}-2<m\\ m\neq1\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}\frac{-2}{3}<m\\ m\neq1\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}\frac{-2}{5}<m\\ m\neq1\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}\frac{-2}{7}<m\\ m\neq1\end{cases}$

Câu 23: Tìm tất cả các điểm M thuộc đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{2x+2}(C)$ sao cho tiếp tuyến tại M của (C) tạo với trục tọa độ một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng $d:y=-4x$.

A. $M\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right), M\left(-\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$ **B.** $M\left(2;\frac{1}{5}\right), M\left(-\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$

C. $M\left(3;\frac{1}{4}\right), M\left(-\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$ **D.** $M\left(5;\frac{1}{3}\right), M\left(-\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$

Câu 24: Tìm tất cả các điểm M thuộc đồ thị hàm số $y=\frac{2x-3}{x-2}(C)$ sao cho tiếp tuyến tại M với (C) cắt các đường tiệm cận của (C) tại A và B để đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất, với I là giao điểm của 2 tiệm cận.

A. $M\left(4;\frac{5}{2}\right)$ *và* $M(3;3)$ **B.** $M\left(0;\frac{3}{2}\right)$ *và* $M(3;3)$

C. $M(1;1)$ *và* $M(3;3)$ **D.** $M\left(5;\frac{7}{3}\right)$ *và* $M(3;3)$

Câu 25: Tìm tất cả các điểm M thuộc đồ thị hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}(C)$ sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất.

A. $M\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right), M\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$

B. $M(0;-1), M\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$

C. $M(2;1), M\left(1;\frac{1}{2}\right)$

D. $M(0;-1), M(2;1)$

Câu 26: Tìm tất cả các điểm M thuộc đồ thị hàm số $y=\frac{2x-3}{x-2}(C)$ sao cho tiếp tuyến tại M của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại A, B và có độ dài AB ngắn nhất.

A. $M(3;3), M\left(0;\frac{3}{2}\right)$ **B.** $M(3;3), M\left(4;\frac{5}{2}\right)$

C. $M\left(6;\frac{9}{4}\right), M(1;1)$ **D.** $M(3;3), M(1;1)$.

Câu 27: Cho hàm số $y=\frac{x-1}{2(x+1)}$ có đồ thị là (C). Gọi điểm $M(x_0;y_0)$ với $x_0>-1$ là điểm thuộc (C), biết tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A,B và tam giác OAB có trọng tâm G nằm trên đường thẳng $d: 4x+y=0$. Hỏi giá trị của x_0+2y_0 bằng bao nhiêu?

A. $-\frac{7}{2}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $-\frac{5}{2}$.

Câu 28: Cho hàm số $y=\frac{-x+1}{2x-1}$ có đồ thị là (C), đường thẳng $d: y=x+m$. Với mọi m ta luôn có d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A,B. Gọi k_1,k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A,B. Tìm m để tổng k_1+k_2 đạt giá trị lớn nhất.

A. $m=-1$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=-5$.

Câu 29: Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Biết khoảng cách từ $I(-1;2)$ đến tiếp tuyến của (C)tại M là lớn nhấtthì tung độ của điểm M nằm ở góc phần tư thứ hai, gần giá trị nào nhất?

A. $3e$. **B.** $2e$. **C.** e. **D.** $4e$.

Câu 30: **(KINH MÔN II LẦN 3 NĂM 2019)** Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}$ (C). Điểm M thuộc (C) có hoành độ lớn hơn1 , tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai tiệm cận của (C) lần lượt tại A, B. Diện tích nhỏ nhất của tam giác OAB bằng

A. $4+2\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $4+\sqrt{2}$.

Câu 31: Cho hàm số $y=\frac{x^2+x-2}{x-2}$. Điểm trên đồ thị mà tiếp tuyến tại đó lập với đường tiệm cận đứng và đường thẳng $d: y=x+3$ một tam giác có chu vi nhỏ nhất thì hoành độ bằng

A. $2\pm\sqrt[4]{10}$. **B.** $2\pm\sqrt[4]{6}$. **C.** $2\pm\sqrt[4]{12}$. **D.** $2\pm\sqrt[4]{8}$.

Câu 32: Cho hàm số: $y=x+1+\frac{1}{x-1}$ (C) Tìm những điểm trên đồ thị (C) có hoành độ lớn hơn 1 sao cho tiếp tuyến tại diểm đó tạo với 2 đường tiệm cận một tam giác có chu vi nhỏ nhất.

A. $M=\left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}};2-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$ **B.** $M=\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}};2+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$

C. $M=\left(1;2+\sqrt{2}\right)$ **D.** $M=\left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}};2+\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$

Câu 33: Cho các hàm số $y=f(x),y=f(x^2),y=\frac{f(x)}{f(x^2)}$ có đồ thị lần lượt là $(C_1),(C_2),(C_3)$. Hệ số góc các tiếp tuyến của $(C_1),(C_2),(C_3)$ tại điểm có hoành độ $x_0=1$ lần lượt là k_1,k_2,k_3 thỏa mãn $k_1+2k_2=3k_3\neq 0$. Tính $f(1)$.

A. $f(1)=-\frac{1}{5}$. **B.** $f(1)=-\frac{2}{5}$. **C.** $V=-\frac{3}{5}$ **D.** $f(1)=-\frac{4}{5}$.

Câu 34: Cho các hàm số $y=f(x),y=g(x),y=\frac{f(x)}{g(x)}$. Nếu các hệ số góc của các tiếp tuyến của các đồ thị các hàm số đã cho tại điểm có hoành độ $x=0$ bằng nhau và khác 0 thì:

A. $f(0)<\frac{1}{4}$. **B.** $f(0)\le\frac{1}{4}$. **C.** $f(0)>\frac{1}{4}$. **D.** $f(0)\ge\frac{1}{4}$.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x);y=g(x)$ dương có đạo hàm $f'(x);g'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_o=0$ của đồ thị hàm số $y=f(x);y=g(x)$ và $y=\frac{f(x)+1}{g(x)+1}$ có cùng hệ số góc và khác 0. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $f(0)\le-\frac{3}{4}$. **B.** $f(0)\ge-\frac{3}{4}$. **C.** $f(0)\le\frac{3}{4}$. **D.** $f(0)\ge\frac{3}{4}$.

Câu 36: Cho hàm số $y=\frac{x+1}{2x-1}$ có đồ thị (H). Gọi hai điểm $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2)$ là hai điểm phân biệt thuộc (H) sao cho tiếp tuyến của (H) tại A,B có cùng hệ số góc k. Biết diện tích tam giác OAB bằng. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $k<-9$. **B.** $-9\le k\le-6$. **C.** $-6\le k\le-3$. **D.** $-3\le k<0$.

Câu 37: Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $I(1;2)$ Tiếp tuyến của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại A và B sao cho tam giác IAB có chu vi nhỏ nhất là $4\sqrt{a}+2\sqrt{b}$ với a,b là các số nguyên dương. Tính $S=a+b$.

A. $S=8$. **B.** $S=5$. **C.** $S=6$. **D.** $S=7$.

Câu 38: **(Ngô Quyền Hà Nội)** Cho hàm số $y=\frac{x+3}{x-1}$ có đồ thị là (C), điểm M thay đổi thuộc đường thẳng $d:y=1-2x$ sao cho qua M có hai tiếp tuyến của (C) với hai tiếp điểm tương ứng là A, B. Biết rằng đường thẳng AB luôn đi qua điểm cố định là H. Độ dài đoạn OH là

A. $\sqrt{34}$. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{58}$.

Câu 39: Cho hàm số $y=\frac{x+3}{x-1}$ có đồ thị là (C), điểm M thay đổi thuộc đường thẳng $d:y=1-2x$ sao cho qua M có hai tiếp tuyến của (C) với hai tiếp điểm tương ứng là A, B. Khoảng cách từ O đến đường thẳng AB lớn nhất bằng

A. $\sqrt{34}$. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{58}$. **D.** $\sqrt{29}$.

Câu 40: Cho hàm số $y=\frac{x+3}{x-1}$ có đồ thị là (C), điểm M thay đổi thuộc đường thẳng $d:y=1-2x$ sao cho qua M có hai tiếp tuyến của (C) với hai tiếp điểm tương ứng là A, B. Gọi K là hình chiếu

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

vuông góc của O trên AB. Khi M di chuyển trên d thì K di chuyển trên đường tròn cố định có bán kính bằng

A. $\sqrt{58}$. **B.** $\sqrt{29}$. **C.** $\frac{\sqrt{58}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{29}}{2}$.

Câu 41: Cho hàm số $y=\frac{x+3}{x-1}$ có đồ thị là (C), điểm M thay đổi thuộc đường thẳng $d: y=1-2x$ sao cho qua M có hai tiếp tuyến của (C) với hai tiếp điểm tương ứng là A, B. Chọn khẳng định đúng dưới đây.

A. Đường thẳng AB luôn cắt hai trục tọa độ.

B. Tồn tại điểm M sao cho AB song song với trục Ox

C. Tồn tại điểm M sao cho AB song song với trục Oy.

D. Không tồn tại điểm M sao cho AB đi qua gốc tọa độ O.

Câu 42: **(Trần Đại Nghĩa)** Cho hàm số $y=\frac{x-1}{2(x+1)}$ có đồ thị là (C). Gọi điểm $M(x_0;y_0)$ với $x_0>-1$ là điểm thuộc (C), biết tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB có trọng tâm G nằm trên đường thẳng $d: 4x+y=0$. Giá trị của x_0+2y_0 bằng bao nhiêu?

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** $-\frac{5}{2}$. **D.** $-\frac{7}{2}$.

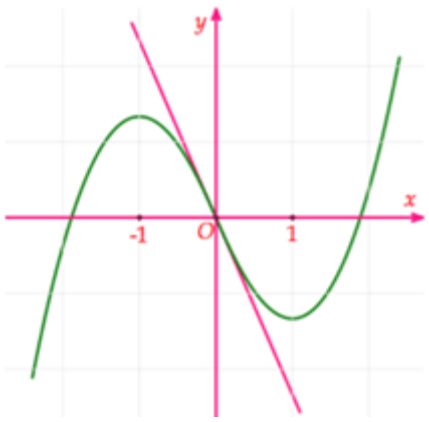
Câu 43: **(Chuyên KHTN)** Gọi (C) là đồ thị hàm số $y=x^2+2x+2$ và điểm M di chuyển trên (C). Gọi d_1, d_2 là các đường thẳng đi qua M sao cho d_1 song song với trục tung và d_1, d_2 đối xừng nhau qua tiếp tuyến của (C) tại M. Biết rằng khi M di chuyển trên (C) thì d_2 luôn đi qua một điểm $I(a;b)$ cố định. Đẳng thức nào sau đây là đúng ?

A. $3a+2b=0$. **B.** $a+b=0$. **C.** $ab=-1$. **D.** $5a+4b=0$.

Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn điều kiện $f^2(1+2x)=x-f^3(1-x)$. Lập phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$?

A. $y=-\frac{1}{7}x-\frac{6}{7}$ **B.** $y=-\frac{1}{7}x+\frac{6}{7}$ **C.** $y=\frac{1}{7}x-\frac{6}{7}$ **D.** $y=\frac{1}{7}x+\frac{6}{7}$

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đường thẳng trong hình vẽ bên là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại gốc tọa độ. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f'(x)$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?



A. $m<-2$ **B.** $-2<m<0$ **C.** $0<m<2$ **D.** $m>2$

Câu 46: Biết rằng tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=(x+a)^3+(x+b)^3+(x+c)^3$ có hệ số góc nhỏ nhất tại tiếp điểm có hoành độ $x=-1$ đồng thời a,b,c là các số thực không âm. Tìm GTLN tung độ của giao điểm đồ thị hàm số với trục tung?

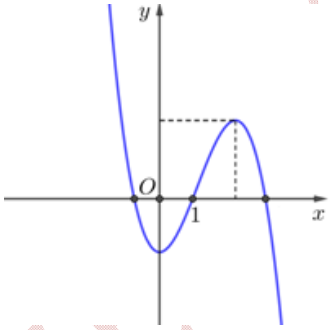
A. 27 **B.** 3 **C.** 9 **D.** 18

Câu 47: **(Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x)+\dfrac{f(x)}{x}=4x^2+3x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là

A. $y=-16x-20$. **B.** $y=16x-20$.

C. $y=16x+20$. **D.** $y=-16x+20$.

Câu 48: **(Ngô Quyền Hà Nội)** Cho hàm đa thức bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị (C). Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Gọi đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 1. Hỏi Δ và (C) có bao nhiêu điểm chung?



A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

KHOẢNG CÁCH VÀ ĐIỂM ĐẶC BIỆT

Câu 1: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$ có đồ thị (C). Tổng khoảng cách từ một điểm M thuộc (C) đến hai hai trục tọa độ đạt giá trị nhỏ nhất bằng?

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 2: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) và A là điểm thuộc (C). Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách từ A đến các tiệm cận của (C).

A. $2\sqrt{2}$ **B.** 2 **C.** 3 **D.** $2\sqrt{3}$

Câu 3: **(THPT-Gia-Lộc-Hải-Dương-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3)**Gọi (H) là đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$. Điểm $M(x_0;y_0)$ thuộc (H) có tổng khoảng cách đến hai đường tiệm cận là nhỏ nhất, với $x_0<0$ khi đó x_0+y_0 bằng

A. -1. **B.** -2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 4: Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ có đồ thị là (C). Gọi I là giao điểm của 2 đường tiệm cận của (C). Tìm tọa độ điểm M trên (C) sao cho độ dài IM là ngắn nhất?

A. $M_1(0;-3)$ và $M_2(-2;5)$ **B.** $M_1(1;-1)$ và $M_2(-3;3)$

C. $M_1\left(2;-\dfrac{1}{3}\right)$ và $M_2\left(-4;\dfrac{7}{3}\right)$ **D.** $M_1\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{5}{3}\right)$ và $M_2\left(-\dfrac{5}{2};\dfrac{11}{3}\right)$

Câu 5: Hai điểm M, N thuộc hai nhánh của đồ thị $y=\dfrac{3x-1}{x-3}$. Khi đó độ dài đoạn thẳng MN ngắn nhất bằng?

A. 8 **B.** 4 **C.** $x_M<3$ **D.** $8\sqrt{2}$.

Câu 6: Gọi $M(a;b)$ là điểm trên đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+2}$ mà có khoảng cách đến đường thẳng $d:y=3x+6$ nhỏ nhất. Khi đó

A. $a+2b=1$ **B.** $a+b=2$ **C.** $a+b=-2$ **D.** $a+2b=3$

Câu 7: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x+1-m^2$. Tìm m để trên đồ thị hàm số có hai điểm đối xứng qua gốc tọa độ

A. $-1\le m\le 0$ hoặc $m\ge 1$ **B.** $-1<m<0$ hoặc $m>1$

C. $1>m>0$ hoặc $m<-1$ **D.** $1\ge m\ge 0$ hoặc $m\le -1$

Câu 8: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x+1-m^2$. Tìm m để trên đồ thị hàm số có hai điểm đối xứng qua gốc tọa độ

A. $-1\le m\le 0$ hoặc $m\ge 1$ **B.** $-1<m<0$ hoặc $m>1$

C. $1>m>0$ hoặc $m<-1$ **D.** $1\ge m\ge 0$ hoặc $m\le -1$

Câu 9: Tọa độ cặp điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+4}{x-2}$ đối xứng nhau qua đường thẳng $d:x-2y-6=0$ là

A. $(4;4)$ và $(-1;-1)$. **B.** $(1;-5)$ và $(-1;-1)$.

C. $(0;-2)$ và $(3;7)$. **D.** $(1;-5)$ và $(5;3)$.

Câu 10: **(THTT số 3)** Tìm quỹ tích điểm uốn của đồ thị hàm số $y=x^3-mx^2+x-1$ (với m là tham số).

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $y=x^3-x+1$. **B.** $y=x^3-x^2+x-1$.

C. $y=2x^3+x^2-1$. **D.** $y=-2x^3+x-1$.

Câu 11: **(Nguyễn Khuyến)**Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Hai điểm M, N thuộc hai nhánh của đồ thị (C) sao cho MN nhỏ nhất. Khi đó độ dài MN bằng

A. 2. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 4.

Câu 12: **(Chuyên Lam Sơn Lần 2)** Cho đồ thị hàm số $f(x)=2x^3+mx+3$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt hoành độ a,b,c. Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{1}{f'(a)}+\dfrac{1}{f'(b)}+\dfrac{1}{f'(c)}$.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** 0. **C.** $1-3m$. **D.** $3-m$.

Câu 13: **(SỞ GDĐT KIÊN GIANG 2019)** Gọi m là số thực âm để đồ thị hàm số $y=x^3-6mx^2+32m^3$ có hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ Oxy. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $m\in\left(-\dfrac{3}{2};-1\right)$. **B.** $m\in\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $m\in\left(-2;-\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $m\in\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$.

Câu 14: **(Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội)** Gọi (C) là đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-7}{x+1}$, A; B là các điểm thuộc (C) có hoành độ lần lượt là 0 và 3, M là điểm thay đổi trên (C) sao cho $0<x_M<3$. Giá trị lớn nhất của diện tích tam giác ABM là

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** $3\sqrt{5}$.

Câu 15: **(Đặng Thành Nam Đề 5)** Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x}$ có đồ thị (C). Hai điểm A, B trên (C) sao cho tam giác OAB nhận điểm $H(8;-4)$ làm trực tâm. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{6}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 16: **(Trần Đại Nghĩa)** Đồ thị hàm số $y=2x^3+3mx^2-3m+2$ có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ O khi $m\in(-\infty;a)\cup(b;+\infty)$. Tính $a+b$.

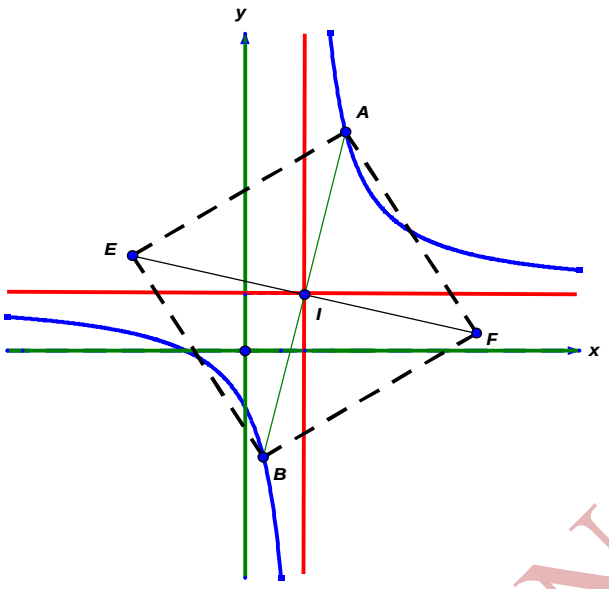
A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Câu 17: **(Quỳnh Lưu Nghệ An)** Cho $f(x)$ là một đa thức có hệ số thực và thỏa mãn $f(x^2)=x^2(x^2+1)f(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(2)=12$. Giá trị $f(3)$ bằng:

A. 72. **B.** 56. **C.** 96. **D.** 48.

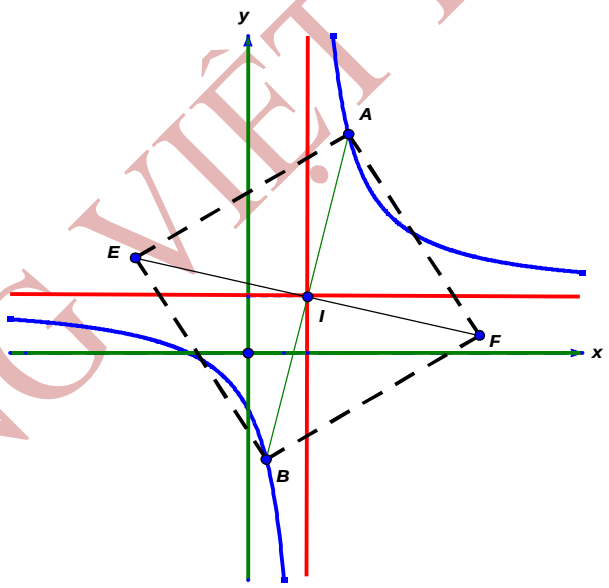
Câu 18: **(TTHT Lần 4)** Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Giả sử A,B là hai điểm thuộc (C) và đối xứng với nhau qua giao điểm của hai đường tiệm cận. Dựng hình vuông $AEBF$. Diện tích nhỏ nhất của hình vuông $AEBF$ là:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



A. $8\sqrt{2}$. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** 8. **D.** 16.

Câu 19: **(TTHT Lần 4)** Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Giả sử A,B là hai điểm thuộc (C) và đối xứng với nhau qua giao điểm của hai đường tiệm cận. Dựng hình vuông $AEBF$. Diện tích nhỏ nhất của hình vuông $AEBF$ là:



A. $8\sqrt{2}$. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** 8. **D.** 16.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

ỨNG DỤNG HÀM SỐ GIẢI PT, BPT, HPT

DẠNG 1: ỨNG DỤNG TÍNH ĐƠN VÀO PT, BPT, HPT

Câu 1: (SGD Hà Nội-lần 11 năm 2017-2018) Phương trình $\sqrt{x-512}+\sqrt{1024-x}=16+4\sqrt[8]{(x-512)(1024-x)}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 4 nghiệm. **B.** 3 nghiệm. **C.** 8 nghiệm. **D.** 2 nghiệm.

Câu 2: Bất phương trình $\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}-\sqrt{4-x}\ge 2\sqrt{3}$ có tập nghiệm là $[a;b]$. Hỏi tổng $a+b$ có giá trị là bao nhiêu?

A. -2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 3: Bất phương trình $\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2-6x+11}>\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}$ có tập nghiệm $(a;b]$. Hỏi hiệu $b-a$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** -1.

DẠNG 2: ỨNG DỤNG GTNN, GTLN VÀO PT, BPT, HPT

Câu 4: (CHUYÊN THÁI BÌNH – L4) Phương trình $2017^{\sin x}=\sin x+\sqrt{2-\cos^2 x}$ có bao nhiêu nghiệm thực trong $[-5\pi;2017\pi]$?

A. vô nghiệm. **B.** 2017. **C.** 2022. **D.** 2023.

Câu 5: (ĐHQG TPHCM – Cơ Sở 2 – năm 2017 – 2018) Cho $f(x)=x^3-3x^2-6x+1$. Phương trình $\sqrt{f(f(x)+1)+1}=f(x)+2$ có số nghiệm thực là

A. 4. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 6: Tìm m để bất phương trình $\dfrac{3\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x+4\cos^2 x+1}\le m+1$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

A. $m\ge\dfrac{3\sqrt{5}}{4}$. **B.** $m\ge\dfrac{3\sqrt{5}+9}{4}$. **C.** $m\ge\dfrac{\sqrt{65}-9}{4}$. **D.** $m\ge\dfrac{3\sqrt{5}-9}{4}$.

Câu 7: Tập tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $m\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+3\right)+2\sqrt{1-x^2}-5=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt là một nửa khoảng $(a;b]$. Tính $b-\dfrac{5}{7}a$.

A. $\dfrac{6-5\sqrt{2}}{35}$ **B.** $\dfrac{6-5\sqrt{2}}{7}$. **C.** $\dfrac{12-5\sqrt{2}}{35}$ **D.** $\dfrac{12-5\sqrt{2}}{7}$.

Câu 8: (SGD Hưng Yên - 2019) Có bao nhiêu giá trị âm của tham số m để phương trình $\sqrt{2019m+\sqrt{2019m+x^2}}=x^2$ có hai nghiệm thực phân biệt ?

A. 1. **B.** 0. **C.** Vô số. **D.** 2.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 9: **(2D1-4)** Cho phương trình $\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\left(m\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+16\sqrt[4]{x^2-x}\right)=1$, với m là tham số thực. Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt.

A. 11. **B.** 9. **C.** 20. **D.** 4.

Câu 10: **(Cụm THPT Vũng Tàu)** Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên âm của tham số m để phương trình $x+\sqrt{4-x^2}=\dfrac{m}{2}$ có nghiệm. Tập S có bao nhiêu phần tử?

A. 10. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 11: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2-4x+m=2\sqrt{5+4x-x^2}+5$ có nghiệm.

A. $0\le m\le 15$. **B.** $m\ge -1$. **C.** $m\ge 0$. **D.** $-1\le m\le 2\sqrt{3}$.

Câu 12: Tìm m để phương trình $x^6+6x^4-m^3x^3+\left(15-3m^2\right)x^2-6mx+10=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

A. $\dfrac{11}{5}<m<4$. **B.** $2<m\le\dfrac{5}{2}$. **C.** $0<m<\dfrac{9}{4}$. **D.** $\dfrac{7}{5}\le m<3$.

Câu 13: **(SỞ QUẢNG BÌNH NĂM 2019)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình sau $x^6+3x^4-m^3x^3+4x^2-mx+2\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in[1;3]$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng:

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 14: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho mọi nghiệm của bất phương trình: $x^2-3x+2\le 0$ cũng là nghiệm của bất phương trình $mx^2+(m+1)x+m+1\ge 0$?

A. $m\le -1$. **B.** $m\le -\dfrac{4}{7}$. **C.** $m\ge -\dfrac{4}{7}$. **D.** $m\ge -1$.

Câu 15: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $2\sqrt{x+1}=x+m$ có nghiệm thực?

A. $m\ge 2$. **B.** $m\le 2$. **C.** $m\ge 3$. **D.** $m\le 3$.

Câu 16: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình: $-x^3+3mx-2<-\dfrac{1}{x^3}$ nghiệm đúng $\forall x\ge 1$?

A. $m<\dfrac{2}{3}$. **B.** $m\ge\dfrac{2}{3}$. **C.** $m\ge\dfrac{3}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}\le m\le\dfrac{3}{2}$.

Câu 17: **(Gang Thép Thái Nguyên)** Cho phương trình $\sqrt{2x^2-2mx-4}=x-1$ (m là tham số). Gọi p, q lần lượt là các giá trị m nguyên nhỏ nhất và giá trị lớn nhất thuộc $[-10;\ 10]$ để phương trình có nghiệm. Khi đó giá trị $T=p+2q$ là

A. 10. **B.** 19. **C.** 20. **D.** 8.

Câu 18: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1$ có hai nghiệm thực?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $m \ge -\frac{7}{2}$. **B.** $m \ge \frac{3}{2}$. **C.** $m \ge \frac{9}{2}$. **D.** $\forall m \in \mathbb{R}$.

Câu 19: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\sqrt{x^2-4x+5} = m+4x-x^2$ có đúng 2 nghiệm dương?

A. $1 \le m \le 3$. **B.** $-3 < m < \sqrt{5}$. **C.** $-\sqrt{5} < m < 3$. **D.** $-3 \le m < 3$.

Câu 20: **(Phân tích đề báo THTT 2018-2019)** Có bao nhiêu giá trị m nguyên để phương trình $\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}+2\sqrt{-x^2+4}-2m+3=0$ có nghiệm.

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 21: **(SỞ GD BẮC NINH)** Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sqrt{2-x}+\sqrt{1-x} = \sqrt{m+x-x^2}$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $m \in \left[5;\frac{23}{4}\right]$. **B.** $m \in [5;6]$. **C.** $m \in \left(5;\frac{23}{4}\right) \cup \{6\}$. **D.** $m \in \left[5;\frac{23}{4}\right) \cup \{6\}$.

Câu 22: **(Sở Hà Nam)** Cho phương trình $(m-2)\sqrt{x+3}+(2m-1)\sqrt{1-x}+m=1$. Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình có nghiệm là đoạn $[a;b]$. Giá trị của biểu thức $5a+3b$ bằng

A. 13. **B.** 7. **C.** 19. **D.** 8.

Câu 23: Tập tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $m\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+3\right)+2\sqrt{1-x^2}-5=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt là một nửa khoảng $(a;b]$. Tính $b-\frac{5}{7}a$.

A. $\frac{12-5\sqrt{2}}{7}$. **B.** $\frac{6-5\sqrt{2}}{7}$. **C.** $\frac{12-5\sqrt{2}}{35}$. **D.** $\frac{6-5\sqrt{2}}{35}$.

Câu 24: **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-9;9]$ để phương trình:
$\sqrt{1-x^2}-m\left(2\sqrt{1+x}+2\sqrt{1-x}-3\right)+1=0$ có nghiệm?

A. 14. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 12.

Câu 25: **(SỞ NAM ĐỊNH 2018-2019)** Số các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để phương trình $x^2+(m+2)x+4=(m-1)\sqrt{x^3+4x}$ có nghiệm là

A. 2011. **B.** 2012. **C.** 2013. **D.** 2014.

Câu 26: **(Đặng Thành Nam Đề 17)** Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2-3x+4$. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $\sqrt{f(f(x)-2)-2}=3-f(x)$ là

A. 7. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 9.

Câu 27: **(Gang Thép Thái Nguyên)** Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $m+\sqrt{m+1+\sqrt{1+\sin x}}=\sin x$ có nghiệm là $[a,b]$. Giá trị $a+b$ bằng

A. $-\frac{1}{4}-\sqrt{2}$. **B.** $-\frac{1}{4}+\sqrt{2}$. **C.** $-\frac{1}{2}-\sqrt{2}$. **D.** $-\frac{1}{2}+\sqrt{2}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 28: **(GIA LỘC TỈNH HẢI DƯƠNG 2019 lần 2)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos 2x = m\sqrt{1+\tan x}.\cos^2 x$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 29: **(THPT Chuyên Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018)** Cho phương trình:

$$\sin x\left(2-\cos 2x\right)-2\left(2\cos^3 x+m+1\right)\sqrt{2\cos^3 x+m+2}=3\sqrt{2\cos^3 x+m+2}.$$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình trên có đúng 1 nghiệm $x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right)$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 30: **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên Lần2)** Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số $m\in[0;2019]$ để bất phương trình: $x^2-m+\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}\le 0$ đúng với mọi $x\in[-1;1]$. Số phần tử của tập S bằng:

A. 1. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2.

Câu 31: **(Quỳnh Lưu Lần 1)** Cho phương trình $16m^2x^3+16x+\sqrt{8x^3+2x+2}=2m^2+10$ (m là tham số). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Phương trình đã cho vô nghiệm.

B. Phương trình đã cho có đúng một nghiệm thực.

C. Phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt.

D. Số nghiệm của phương trình phụ thuộc vào giá trị của tham số m.

Câu 32: **(CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ HÒA BÌNH LẦN 4 NĂM 2019)** Tổng các giá trị nguyên dương của m để tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{\frac{m}{72}x^2+1}<\sqrt{x}$ có chứa đúng hai số nguyên là

A. 27. **B.** 29. **C.** 28. **D.** 30.

Câu 33: **(Hàm Rồng)** Cho hàm số $f(x)=\left(1-m^3\right)x^3+3x^2+(4-m)x+2$ với m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-2018;2018]$ sao cho $f(x)\ge 0$ với mọi giá trị $x\in[2;4]$.

A. 2021. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 4037.

Câu 34: **(Hậu Lộc Thanh Hóa)** Tìm số thực m lớn nhất để bất phương trình sau có nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ $m\left(|\sin x|+|\cos x|+1\right)\le|\sin 2x|+|\sin x|+|\cos x|-2018$.

A. $-\frac{1}{3}$. **B.** -2018. **C.** $-\frac{2017}{2}$. **D.** -2017.

Câu 35: **(Chuyên-Thái-Nguyên-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3)** Số giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để bất phương $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}-\sqrt{18+3x-x^2}\le m^2-m+1$ nghiệm đúng $\forall x\in[-3;6]$.

A. 28. **B.** 20. **C.** 4. **D.** 19.

Câu 36: **(Thanh Chương Nghệ An Lần 2)** Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{3}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2019f\left(\sqrt{15x^2-30x+16}\right)-m\sqrt{15x^2-30x+16}-m=0$ có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0;2]$.

A. 1513. **B.** 1512. **C.** 1515. **D.** 1514.

Câu 37: (Sở Ninh Bình Lần1) Số giá trị nguyên của tham số m nằm trong khoảng $(0;2020)$ để phương trình $\big||x-1|-|2019-x|\big|=2020-m$ có nghiệm là

A. 2020. **B.** 2021. **C.** 2019. **D.** 2018.

Câu 38: (Lương Thế Vinh Lần 3) Cho hàm số $f(x)=x^5+3x^3-4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x)+m}\right)=x^3-m$ có nghiệm thuộc đoạn $[1;2]$?

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Câu 39: (Chuyên Phan Bội Châu Lần2) Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+...+\dfrac{x^{2019}}{2019!}-e^x & \text{khi } x\ge 0\\ -x^2-10x & \text{khi } x<0\end{cases}$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương và chia hết cho 5 của tham số m để bất phương trình $m-f(x)\le 0$ có nghiệm?

A. 25. **B.** 0. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 40: (SỞ GD & ĐT CÀ MAU) Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-2019;2019]$ để bất phương trình $\left(1-m^3\right)x^3+3\left(2-m^3\right)x^2+\left(13-m-3m^3\right)x+10-m-m^3\ge 0$ đúng với mọi $x\in[1;3]$. Số phần tử của tập S là

A. 4038. **B.** 2021. **C.** 2022. **D.** 2020.

Câu 41: (Chuyên Phan Bội Châu Lần2) Cho hàm số $f(x)=\cos 2x$. Bất phương trình $f^{(2019)}(x)>m$ đúng với mọi $x\in\left(\dfrac{\pi}{12};\dfrac{3\pi}{8}\right)$ khi và chỉ khi

A. $m<2^{2019}$. **B.** $m\le^{2018}$. **C.** $m<2^{2018}$. **D.** $m\le 2^{2019}$.

Câu 42: (KIM LIÊN HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 03) Cho bất phương trình $\sqrt[3]{x^4+x^2+m}-\sqrt[3]{2x^2+1}+x^2\left(x^2-1\right)>1-m$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x>1$.

A. $m\ge\dfrac{1}{2}$. **B.** $m>1$. **C.** $m>\dfrac{1}{2}$. **D.** $m\ge 1$.

Câu 43: (Chuyên Hà Nội Lần1) Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=-x^2-2\ \ \forall x\in\mathbb{R}$. Bất phương trình $f(x)<m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$ khi và chỉ khi

A. $m\ge f(1)$. **B.** $m\ge f(0)$. **C.** $m>f(0)$. **D.** $m>f(1)$.

Câu 44: (THPT-Ngô-Quyền-Hải-Phòng-Lần-2-2018-2019-Thi-24-3-2019) Cho bất phương trình $m\sqrt{1-x}+12\sqrt{1-x^2}\ge 16x+3m\sqrt{1+x}+2m+15$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-9;9]$ để bất phương trình có nghiệm đúng với mọi $x\in[-1;1]$?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. 4. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 45: **(Ngô Quyền Hà Nội)** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $m+\sqrt{m+1+\sqrt{1+\sin x}}=\sin x$ có nghiệm là đoạn $[a;b]$. Khi đó giá trị của biểu thức $T=4a-\frac{1}{b}-\sqrt{2}$ bằng

A. -4. **B.** -5. **C.** -3. **D.** 3.

Câu 46: **(Chuyên Thái Bình Lần3)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x)+m}\right)=x^3-m$ có nghiệm $x\in[1;2]$ biết $f(x)=x^5+3x^3-4m$.

A. 16. **B.** 15. **C.** 17. **D.** 18.

Câu 47: **(Chuyên Bắc Giang)** Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $x^4+1-x^2+x\sqrt{2mx^4+2m}\ge 0$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ là $S=[a;b]$. Tính $a\sqrt{2}+8b$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 48: **(Chuyên Thái Bình Lần3)** Biết rằng phương trình $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R},a\ne 0,b\ne 0)$ có 4 nghiệm thực phân biệt. Hỏi phương trình sau có bao nhiêu nghiệm thực?

$$\left(4ax^3+3bx^2+2cx+d\right)^2-2\left(6ax^2+3bx+c\right).\left(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\right)=0$$

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 49: **(Đặng Thành Nam Đề 5)** Có bao nhiêu số nguyên $x\in(-100;100)$ thỏa mãn bất phương trình

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^{2019}}{2019!}\right)\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+...-\frac{x^{2019}}{2019!}\right)<1.$$

A. 199 **B.** 0 **C.** 99 **D.** 198

Câu 50: **(Trung-Tâm-Thanh-Tường-Nghệ-An-Lần-2)** Cho hàm số $f(x)=\sqrt[3]{7+3x}-\sqrt[3]{7-3x}+2019x$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện $f\left(\left|x^3-2x^2+3x-m\right|\right)+f\left(2x-2x^2-5\right)<0,\forall x\in(0;1)$. Số phần tử của S là?

A. 7. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 5.

Câu 51: Cho hàm số $f(x)=x^3-6x^2+9x$. Đặt $f^k(x)=f\left(f^{k-1}(x)\right)$ với k là số nguyên lớn hơn 1. Hỏi phương trình $f^6(x)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm phân biệt ?

A. 365. **B.** 1092. **C.** 1094. **D.** 363.

Câu 52: **(HSG Bắc Ninh)** Cho hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\xy+yz+xz=-3\\x^6+y^6+z^6=m\end{cases}$ với x,y,z là ẩn số thực, m là tham số.

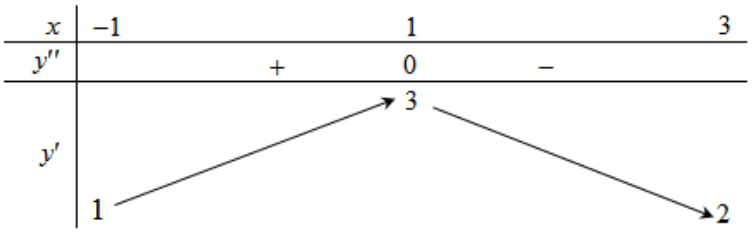
Số giá trị nguyên của m để hệ phương trình có nghiệm là

A. 25. **B.** 24. **C.** 12. **D.** 13.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

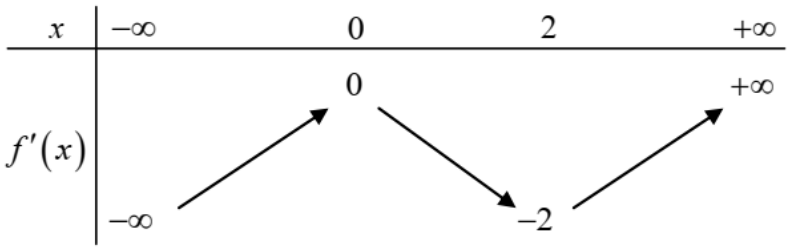
DẠNG 3: GIẢI PT, BPT KHI CHO BBT VÀ ĐỒ THỊ

Câu 1: (Đặng Thành Nam Đề 6) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Bất phương trình $m+x^2\le f(x)+\frac{1}{3}x^3$ nghiệm đúng với mọi $x\in(0;3)$ khi và chỉ khi



A. $m<f(0)$. **B.** $m\le f(3)$. **C.** $m\le f(0)$. **D.** $m<f(1)-\frac{2}{3}$.

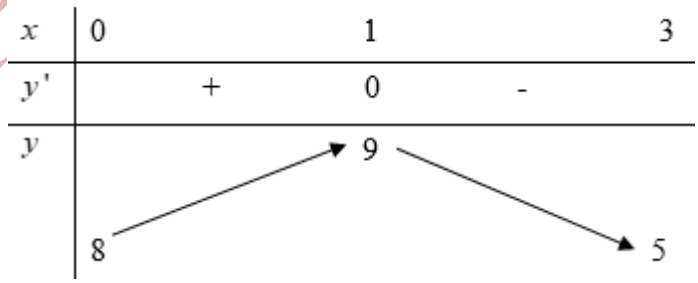
Câu 2: (Thanh Chương Nghệ An Lần 2) Cho hàm số $y=f(x)$ có $f(-2)=m+1$, $f(1)=m-2$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên.



Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\frac{1}{2}f(x)-\frac{2x+1}{x+3}=m$ có nghiệm $x\in(-2;1)$ là

A. $\left(-5;-\frac{7}{2}\right)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(-2;7)$. **D.** $\left(-\frac{7}{2};7\right)$.

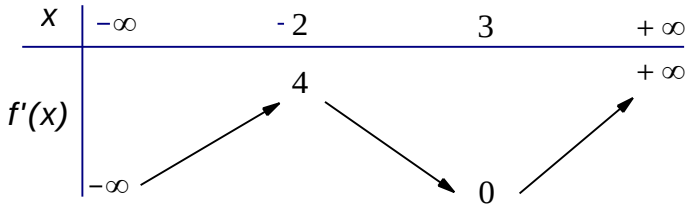
Câu 3: (Đặng Thành Nam Đề 9) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$ và có bảng biến thiên như sau:



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x)=m\left(x^4-2x^2+2\right)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$.

A. 9. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 7.

Câu 4: (Sở Đà Nẵng 2019) Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới. Bất phương trình $x.f(x)>mx+1$ nghiệm đúng với mọi $x\in(1;2019)$ khi



A. $m \ge f(1)-1$. **B.** $m \le f(1)-1$.

C. $m \ge f(2019)-\dfrac{1}{2019}$. **D.** $m \le f(2019)-\dfrac{1}{2019}$.

Câu 5: (Ngô Quyền Hà Nội) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	0		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	8	↗	9	↘	5

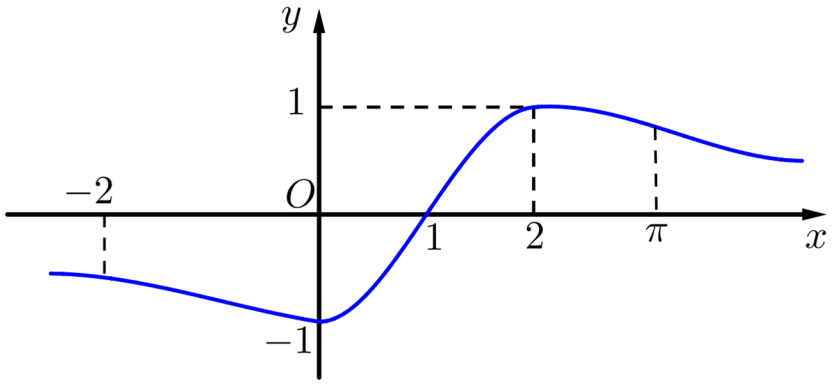
Gọi S là tập hợp các số nguyên dương m để bất phương trình $f(x) \ge mx^2(x^2-2)+2m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$. Số phần tử của tập S là

A. Vô số. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 0.

Câu 6: Hình vẽ bên là đường biểu diễn của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sqrt{3x^2-3}=\sqrt{-x^3+m}$ có hai nghiệm thực âm phân biệt.

A. $-1 \le m \le 1$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-3 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-1 \end{array}\right.$. **D.** $m=-4$.

Câu 7: (Chuyên Vinh Lần 3) Cho $f(x)$ mà đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên

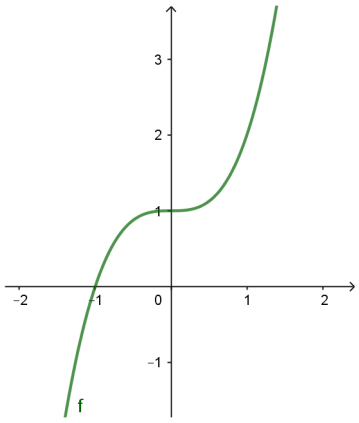


Bất phương trình $f(x) > \sin\dfrac{\pi x}{2}+m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1;3]$ khi và chỉ khi

A. $m < f(0)$. **B.** $m < f(1)-1$. **C.** $m < f(-1)+1$. **D.** $m < f(2)$.

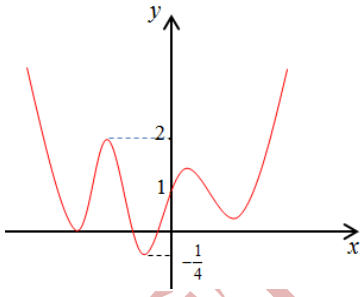
Câu 8: (Nguyễn Du số 1 lần3) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của n để phương trình sau có nghiệm $x \in \mathbb{R}$. $f\left(-16\sin^2 x+6\sin 2x+8\right)=f\left(n(n+1)\right)$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



A. 10. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 8.

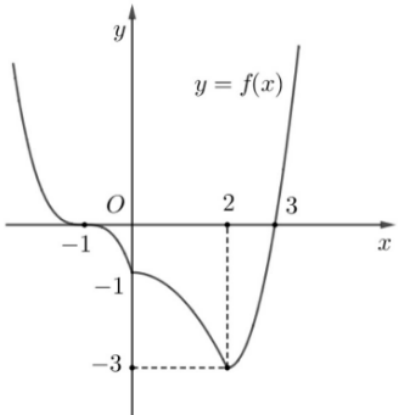
Câu 9: **(THPT SỐ 1 TƯ NGHĨA LẦN 2 NĂM 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số nghiệm của phương trình $\frac{f^3(x)+3f^2(x)+4f(x)+2}{\sqrt{3f(x)+1}}=3f(x)+2$ là:

A. 6. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 8.

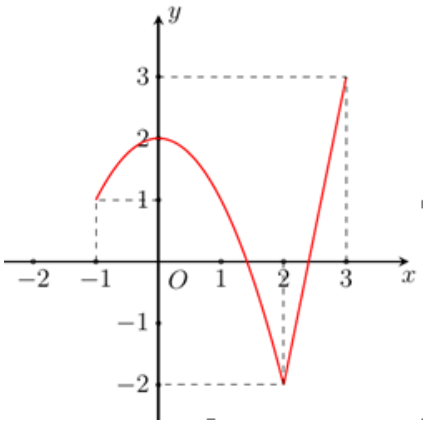
Câu 10: **(Đặng Thành Nam Đề 2)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $2f(x)+x^3>2m+3x^2$ nghiệm đúng với mọi $x\in(-1;3)$ khi và chỉ khi



A. $m<-10$. **B.** $m<-5$. **C.** $m<-3$. **D.** $m<-2$.

Câu 11: **(THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ sau:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

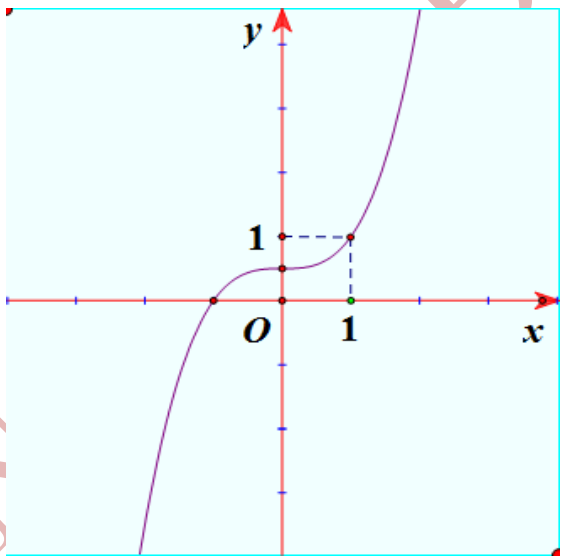


Bất phương trình $f(x)+\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}\ge m$ có nghiệm thuộc $[-1;3]$ khi và chỉ khi

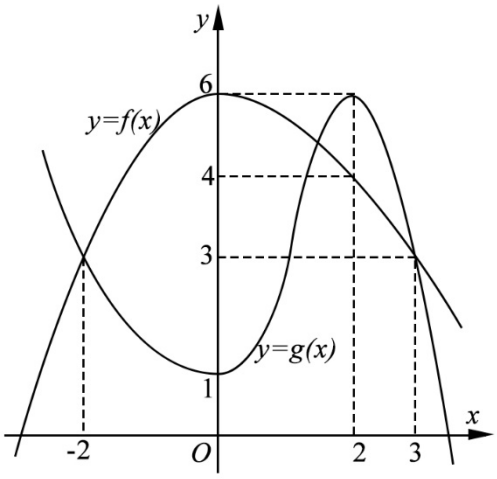
A. $m\le 7$. **B.** $m\ge 7$. **C.** $m\le 2\sqrt{2}-2$. **D.** $m\ge 2\sqrt{2}-2$.

Câu 12: **(ĐỀ-THI-THU-ĐH-THPT-CHUYÊN-QUANG-TRUNG-L5-2019)** Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. gọi S là tập hợp các giá trị của $m\ (m\in\mathbb{R})$ sao cho $(x-1)\left[m^3 f(2x-1)-mf(x)+f(x)-1\right]\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}$. Số phần tử của tập S là?

A 2. **B.** 0. **C.** 3 **D.** 1.



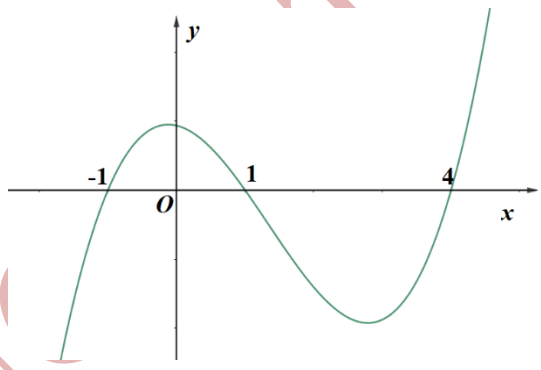
Câu 13: **(NGÔ SĨ LIÊN BẮC GIANG LẦN IV NĂM 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ và hàm số $y=g(x)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\dfrac{f(x)}{g(x)}=m$ có nghiệm thuộc $[-2;3]$?

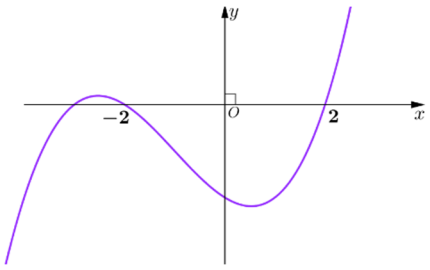
A. 4. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 6.

Câu 14: **(CHUYÊN NGUYỄN DU ĐĂK LĂK LẦN X NĂM 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Bất phương trình $f(1-x)<e^{x^2}+m$ nghiệm đúng với mọi $x\in(-1;1)$ khi và chỉ khi



A. $m\ge f(1)-1$. **B.** $m\ge f(1)-e^2$. **C.** $m>f(-1)-e^2$. **D.** $m>f(1)-1$.

Câu 15: **(Chuyên Sơn La Lần 3 năm 2018-2019)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như sau:



Bất phương trình $f(x)>x^2-2x+m$ đúng với mọi $x\in(1;2)$ khi và chỉ khi

A. $m\le f(2)$. **B.** $m<f(1)-1$. **C.** $m\ge f(2)-1$. **D.** $m\ge f(1)+1$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

DẠNG 4: GẢI VÀ BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ.

A – LÝ THUYẾT CHUNG

1 - Đối với phương trình chứa tham số

Xét phương trình $f(x,m) = g(m)$, (1)

B1: Lập luận số nghiệm phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị (C): $y = f(x,m)$ và đường thẳng d: $y = g(m)$.

B2: Lập bảng biến thiên cho hàm số $y = f(x,m)$

B3: Kết luận: * phương trình có nghiệm: $\min\limits_{x\in D} f(x,m) \le g(m) \le \max\limits_{x\in D} f(x,m)$.

* phương trình có k nghiệm: d cắt (C) tại k điểm.

* phương trình vô nghiệm khi: d không cắt (C).

2 - Đối với bất phương trình chứa tham số

$f(x) \le g(m)$ với mọi $x \in D \Leftrightarrow g(m) \ge \max\limits_{x\in D} f(x)$

$f(x) \le g(m)$ có nghiệm khi và chỉ khi $g(m) \ge \min\limits_{x\in D} f(x)$

$f(x) \ge g(m)$ với mọi $x \in D \Leftrightarrow g(m) \le \min\limits_{x\in D} f(x)$

$f(x) \ge g(m)$ có nghiệm khi và chỉ khi $g(m) \le \max\limits_{x\in D} f(x)$

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tập tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $m\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+3\right)+2\sqrt{1-x^2}-5=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt là một nửa khoảng $(a;b]$. Tính $b-\frac{5}{7}a$.

A. $\frac{6-5\sqrt{2}}{35}$. **B.** $\frac{6-5\sqrt{2}}{7}$. **C.** $\frac{12-5\sqrt{2}}{35}$. **D.** $\frac{12-5\sqrt{2}}{7}$.

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $m\sqrt{2+\tan^2 x} = m+\tan x$ có ít nhất một nghiệm thực.

A. $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$. **B.** $-1 < m < 1$. **C.** $-\sqrt{2} \le m \le \sqrt{2}$. **D.** $-1 < m < 1$.

Câu 3: Phương trình $x^3 + x(x+1) = m\left(x^2+1\right)^2$ có nghiệm thực khi và chỉ khi:

A. $-6 \le m \le -\frac{3}{2}$. **B.** $-1 \le m \le 3$. **C.** $m \ge 3$. **D.** $-\frac{1}{4} \le m \le \frac{3}{4}$.

Câu 4: Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sqrt{2-x}+\sqrt{1-x} = \sqrt{m+x-x^2}$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $m \in \left[5;\frac{23}{4}\right]$. **B.** $m \in [5;6]$. **C.** $m \in \left(5;\frac{23}{4}\right) \cup \{6\}$. **D.** $m \in \left[5;\frac{23}{4}\right) \cup \{6\}$.

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình: $m\sqrt{x^2-2x+2}+m+2x-x^2 \le 0$ có nghiệm $x \in \left[0;1+\sqrt{3}\right]$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $m \le \frac{2}{3}$. **B.** $m \le -1$. **C.** $m \ge \frac{2}{3}$. **D.** $m \le 0$.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\sqrt{x^2-4x+5} = m+4x-x^2$ có đúng 2 nghiệm dương?

A. $1 \le m \le 3$. **B.** $-3 < m < \sqrt{5}$. **C.** $-\sqrt{5} < m < 3$. **D.** $-3 \le m < 3$.

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình:

$m\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}+2\right) = 2\sqrt{1-x^4}+\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$ có nghiệm.

A. $m \le \sqrt{2}-1$. **B.** $\sqrt{2}-1 \le m \le 1$. **C.** $m \ge 1$. **D.** $m \le 1$.

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình:

$3\sqrt{x-1}+m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1}$ (1) có nghiệm.

A. $m \le \sqrt{2}-1$. **B.** $\sqrt{2}-1 \le m \le 1$. **C.** $-1 < m \le \frac{1}{3}$. **D.** $m \le -1$.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình:

$\sqrt{x^2+mx+2} = 2x+1$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

A. $m \le 9$. **B.** $m \ge \frac{9}{2}$. **C.** $-1 < m$. **D.** $m \le 7$.

Câu 10: Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có đúng hai nghiệm thực phân biệt $\sqrt[4]{2x}+\sqrt{2x}+2\sqrt[4]{6-x}+2\sqrt{6-x} = m, (m \in \mathbb{R})$

A. $2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6} \le m \le 3\sqrt{2}+6$ **B.** $2\sqrt{6}+3\sqrt[4]{6} \le m \le 3\sqrt{2}+8$

C. $\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6} \le m \le 3\sqrt{2}+6$ **D.** $\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6} \le m \le 3\sqrt{2}+6$

Câu 11: Tìm m để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$

$\sin^4 x + \cos^4 x + \cos^2 4x = m$.

A. $m \le \frac{47}{64}; \frac{3}{2} \le m$ **B.** $\frac{49}{64} < m \le \frac{3}{2}$ **C.** $\frac{47}{64} < m \le \frac{3}{2}$ **D.** $\frac{47}{64} \le m \le \frac{3}{2}$

Câu 12: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m thuộc $[10;10]$ để phương trình $\sqrt{1-x^2}-m\left(2\sqrt{1+x}+2\sqrt{1-x}-3\right)+1=0$ có nghiệm?

A. 12 **B.** 13 **C.** 8 **D.** 9

Câu 13: Tìm m để phương trình $x^4-(2m+3)x^2+m+5=0$ có 4 nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 thoả mãn:

$-2 < x_1 < -1 < x_2 < 0 < x_3 < 1 < x_4 < 3$

A. Không có m **B.** $m=1$ **C.** $m=4$ **D.** $m=3$

Câu 14: Cho phương trình $2m^2x^3+8x+\sqrt{x^3+x+2} = 2m^2+10$ (m là tham số). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Phương trình đã cho vô nghiệm.

B. Phương trình đã cho có đúng một nghiệm thực.

C. Phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt.

D. Số nghiệm của phương trình phụ thuộc vào giá trị của tham số m.

Câu 15: Tìm tham số thực m để bất phương trình: $\sqrt{x^2-4x+5} \ge x^2-4x+m$ (1) có nghiệm thực trong đoạn $[2;3]$.

A. $m < -1$ **B.** $m \le -1$ **C.** $m \le -\frac{1}{2}$ **D.** $m < -\frac{1}{2}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 16: Tìm m để bpt sau có tập nghiệm là $(-\infty;+\infty)$: $(x+1)(x+3)+m>5\sqrt{x^2+4x+29}$

A. $m<26$. **B.** $m\ge 26$. **C.** $m\ge -\frac{129}{4}$. **D.** $m\le -\frac{129}{4}$.

Câu 17: **(SGD Hưng Yên - 2019)** Có bao nhiêu giá trị âm của tham số m để phương trình $\sqrt{2019m+\sqrt{2019m+x^2}}=x^2$ có hai nghiệm thực phân biệt ?

A. 1. **B.** 0. **C.** Vô số. **D.** 2.

Câu 18: **(2D1-4)** Cho phương trình $\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\left(m\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}+16\sqrt[4]{x^2-x}\right)=1$, với m là tham số thực. Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt.

A. 11. **B.** 9. **C.** 20. **D.** 4.

Câu 19: **(THPT Chuyên Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018)** Cho phương trình:

$$\sin x\left(2-\cos 2x\right)-2\left(2\cos^3 x+m+1\right)\sqrt{2\cos^3 x+m+2}=3\sqrt{2\cos^3 x+m+2}.$$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình trên có đúng 1 nghiệm $x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right)$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 20: **(Chuyên Lý Tự Trọng Cần Thơ)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Bất phương trình $f(x)<e^x+m$ đúng với mọi $x\in(-1;1)$ khi và chỉ khi:

A. $m>f(-1)-\frac{1}{e}$. **B.** $m\ge f(1)-e$. **C.** $m>f(1)-e$. **D.** $m\ge f(-1)-\frac{1}{e}$.

Câu 21: **(Sở Đà Nẵng 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới. Bất phương trình $x.f(x)>mx+1$ nghiệm đúng với mọi $x\in(1;2019)$ khi

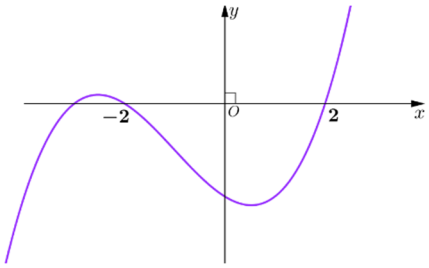
x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

A. $m\ge f(1)-1$. **B.** $m\le f(1)-1$.

C. $m\ge f(2019)-\frac{1}{2019}$. **D.** $m\le f(2019)-\frac{1}{2019}$.

Câu 22: **(Chuyên Sơn La Lần 3 năm 2018-2019)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như sau:

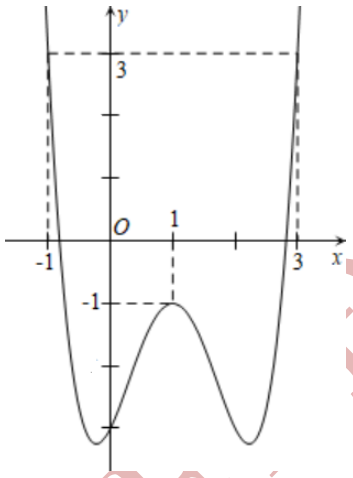
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Bất phương trình $f(x)>x^2-2x+m$ đúng với mọi $x\in(1;2)$ khi và chỉ khi

A. $m\le f(2)$. **B.** $m<f(1)-1$. **C.** $m\ge f(2)-1$. **D.** $m\ge f(1)+1$.

Câu 23: **(Sở Ninh Bình 2019 lần 2)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.



Bất phương trình $3f(x)\le x^3-3x^2+m$ đúng với mọi $x\in(-1;3)$ khi và chỉ khi

A. $m>3f(3)$. **B.** $m\ge 3f(3)$. **C.** $m>3f(-1)+4$. **D.** $m\ge 3f(-1)+4$.

Câu 24: **(Đặng Thành Nam Đề 2)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
y	4	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	3

Bất phương trình $f(x)<3e^{x+2}+m$ có nghiệm $x\in(-2;2)$ khi và chỉ khi:

A. $m\ge f(-2)-3$. **B.** $m>f(2)-3e^4$. **C.** $m\ge f(2)-3e^4$. **D.** $m>f(-2)-3$.

Câu 25: **(Đặng Thành Nam Đề 5)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Bất phương trình $f(x)<e^{x^2}+m$ đúng với mọi $x\in(-1;1)$ khi và chỉ khi

A. $m\ge f(0)-1$. **B.** $m>f(-1)-e$. **C.** $m>f(0)-1$. **D.** $m\ge f(-1)-e$.

Câu 26: **(Chuyên Phan Bội Châu Lần2)** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+...+\dfrac{x^{2019}}{2019!}-e^x & \text{khi } x\ge 0\\ -x^2-10x & \text{khi } x<0\end{cases}$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương và chia hết cho 5 của tham số m để bất phương trình $m-f(x)\le 0$ có nghiệm?

A. 25. **B.** 0. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 27: **(SỞ GD & ĐT CÀ MAU)** Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-2019;2019]$ để bất phương trình $(1-m^3)x^3+3(2-m^3)x^2+(13-m-3m^3)x+10-m-m^3\ge 0$ đúng với mọi $x\in[1;3]$. Số phần tử của tập S là

A. 4038. **B.** 2021. **C.** 2022. **D.** 2020.

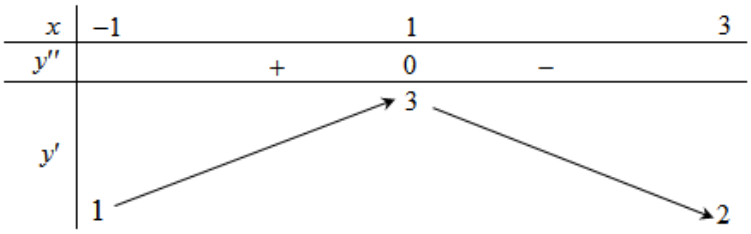
Câu 28: **(CHUYÊN THÁI BÌNH – L4)** Phương trình $2017^{\sin x}=\sin x+\sqrt{2-\cos^2 x}$ có bao nhiêu nghiệm thực trong $[-5\pi;2017\pi]$?

A. vô nghiệm. **B.** 2017. **C.** 2022. **D.** 2023.

Câu 29: **(Chuyên Phan Bội Châu Lần2)** Cho hàm số $f(x)=\cos 2x$. Bất phương trình $f^{(2019)}(x)>m$ đúng với mọi $x\in\left(\frac{\pi}{12};\frac{3\pi}{8}\right)$ khi và chỉ khi

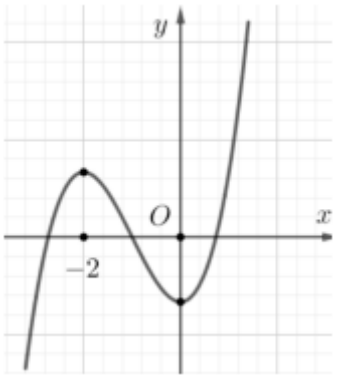
A. $m<2^{2019}$. **B.** $m\le^{2018}$. **C.** $m<2^{2018}$. **D.** $m\le 2^{2019}$.

Câu 30: **(Đặng Thành Nam Đề 6)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Bất phương trình $m+x^2\le f(x)+\frac{1}{3}x^3$ nghiệm đúng với mọi $x\in(0;3)$ khi và chỉ khi



A. $m<f(0)$. **B.** $m\le f(3)$. **C.** $m\le f(0)$. **D.** $m<f(1)-\frac{2}{3}$.

Câu 31: **(CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 3)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $5x^2+12x+16=m(x+2)\sqrt{x^2+2}$ có hai nghiệm thực phân biệt thoả mãn $2018^{2x+\sqrt{x+1}}-2018^{2+\sqrt{x+1}}+2019x\le 2019$.



A. $m\in\left(2\sqrt{6};\frac{11\sqrt{3}}{3}\right)$. **B.** $m\in\left(2\sqrt{6};3\sqrt{3}\right]$.

C. $m\in\left[2\sqrt{6};3\sqrt{3}\right]$. **D.** $m\in\left(3\sqrt{3};\frac{11\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left\{2\sqrt{6}\right\}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

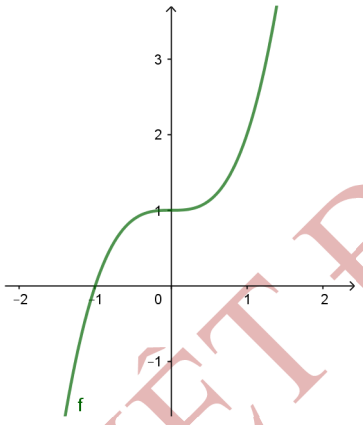
Câu 32: **(Đặng Thành Nam Đề 12)** Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\left|2^{x+1}-8\right|=\frac{1}{2}x^2+m$ có 3 nghiệm thực phân biệt?

A. 8. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 33: **(KIM LIÊN HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 03)** Cho bất phương trình $\sqrt[3]{x^4+x^2+m}-\sqrt[3]{2x^2+1}+x^2\left(x^2-1\right)>1-m$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x>1$.

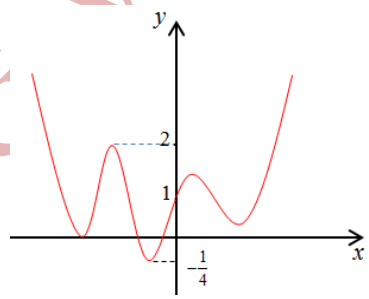
A. $m\ge\frac{1}{2}$. **B.** $m>1$. **C.** $m>\frac{1}{2}$. **D.** $m\ge1$.

Câu 34: **(Nguyễn Du số 1 lần3)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của n để phương trình sau có nghiệm $x\in\mathbb{R}$. $f\left(-16\sin^2 x+6\sin 2x+8\right)=f\left(n(n+1)\right)$



A. 10. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 8.

Câu 35: **(THPT SỐ 1 TƯ NGHĨA LẦN 2 NĂM 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây .



Số nghiệm của phương trình $\frac{f^3(x)+3f^2(x)+4f(x)+2}{\sqrt{3f(x)+1}}=3f(x)+2$ là:

A. 6 . **B.** 9 . **C.** 7 . **D.** 8.

Câu 36: **(ĐHQG TPHCM – Cơ Sở 2 – năm 2017 – 2018)** Cho $f(x)=x^3-3x^2-6x+1$. Phương trình $\sqrt{f\left(f(x)+1\right)+1}=f(x)+2$ có số nghiệm thực là

A. 4. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 37: **(Chuyên Hà Nội Lần1)** Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=-x^2-2\ \ \forall x\in\mathbb{R}$. Bất phương trình $f(x)<m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$ khi và chỉ khi

A. $m\ge f(1)$. **B.** $m\ge f(0)$. **C.** $m>f(0)$. **D.** $m>f(1)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 38: (PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH) Cho cấp số cộng (a_n), cấp số nhân (b_n) thoả mãn $a_2 > a_1 \ge 0$, $b_2 > b_1 \ge 1$ và hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ sao cho $f(a_2) + 2 = f(a_1)$ và $f(\log_2 b_2) + 2 = f(\log_2 b_1)$. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $b_n > 2019a_n$

A. 17. **B.** 14. **C.** 15. **D.** 16.

Câu 39: Tìm m để bất phương trình $x + 2\sqrt{(2-x)(2x+2)} > m + 4\left(\sqrt{2-x} + \sqrt{2x+2}\right)$ có nghiệm?

A. $m < -7$. **B.** $-8 < m < -7$. **C.** $m < -8$. **D.** $m < -1 - 4\sqrt{3}$.

Câu 40: Giá trị của m để phương trình:

$$\sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x} + \sqrt{6-x} + 2\sqrt[4]{6-x} = m.$$

có hai nghiệm phân biệt là.

A. $\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6} \le m < 2\sqrt{3} + 4\sqrt[4]{3}$. **B.** $\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6} < m < 2\sqrt{3} + 4\sqrt[4]{3}$.

C. $\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6} < m \le 2\sqrt{3} + 4\sqrt[4]{3}$. **D.** $\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6} \le m \le 2\sqrt{3} + 4\sqrt[4]{3}$.

Câu 41: Biết rằng phương trình $\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} - \sqrt{4-x^2} = m$ có nghiệm khi m thuộc $[a;b]$ với a, $b \in \mathbb{R}$. Khi đó giá trị của $T = (a+2)\sqrt{2} + b$ là?

A. $T = 8$. **B.** $T = 0$. **C.** $T = 3\sqrt{2} + 2$. **D.** $T = 6$.

Câu 42: (THPT-Ngô-Quyền-Hải-Phòng-Lần-2-2018-2019-Thi-24-3-2019) Cho bất phương trình $m\sqrt{1-x} + 12\sqrt{1-x^2} \ge 16x + 3m\sqrt{1+x} + 2m + 15$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-9;9]$ để bất phương trình có nghiệm đúng với mọi $x \in [-1;1]$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 43: (Ngô Quyền Hà Nội) Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $m + \sqrt{m+1+\sqrt{1+\sin x}} = \sin x$ có nghiệm là đoạn $[a;b]$. Khi đó giá trị của biểu thức $T = 4a - \frac{1}{b} - \sqrt{2}$ bằng

A. -4. **B.** -5. **C.** -3. **D.** 3.

Câu 44: (Chuyên Thái Bình Lần3) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x)+m}\right) = x^3 - m$ có nghiệm $x \in [1;2]$ biết $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4m$.

A. 16. **B.** 15. **C.** 17. **D.** 18.

Câu 45: (Chuyên Bắc Giang) Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $x^4 + 1 - x^2 + x\sqrt{2mx^4 + 2m} \ge 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ là $S = [a;b]$. Tính $a\sqrt{2} + 8b$.

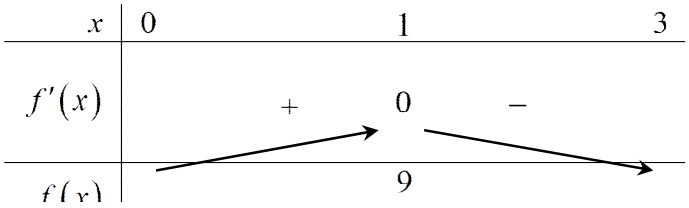
A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 46: (Chuyên Thái Bình Lần3) Biết rằng phương trình $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ $(a, b, c, d, e \in \mathbb{R}, a \ne 0, b \ne 0)$ có 4 nghiệm thực phân biệt. Hỏi phương trình sau có bao nhiêu nghiệm thực?

$$\left(4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d\right)^2 - 2\left(6ax^2 + 3bx + c\right).\left(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e\right) = 0$$

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 47: (Ngô Quyền Hà Nội) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau



ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Gọi S là tập hợp các số nguyên dương m để bất phương trình $f(x) \ge mx^2(x^2-2)+2m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$. Số phần tử của tập S là

A. Vô số. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 0.

Câu 48: **(Đặng Thành Nam Đề 5)** Có bao nhiêu số nguyên $x \in (-100;100)$ thỏa mãn bất phương trình

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^{2019}}{2019!}\right)\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+...-\frac{x^{2019}}{2019!}\right)<1.$$

A. 199 **B.** 0 **C.** 99 **D.** 198

Câu 49: **(Trung-Tâm-Thanh-Tường-Nghệ-An-Lần-2)** Cho hàm số $f(x)=\sqrt[3]{7+3x}-\sqrt[3]{7-3x}+2019x$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện $f\left(\left|x^3-2x^2+3x-m\right|\right)+f\left(2x-2x^2-5\right)<0, \forall x \in (0;1)$. Số phần tử của S là?

A. 7. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 5.

Câu 50: **(Nguyễn Du Dak-Lak 2019)** Phương trình $\sqrt{2-f(x)}=f(x)$ có tập nghiệm $T_1=\{20;18;3\}$. Phương trình $\sqrt{2g(x)-1}+\sqrt[3]{3g(x)-2}=2g(x)$ có tập nghiệm $T_2=\{0;3;15;19\}$. Hỏi tập nghiệm của phương trình $\sqrt{f(x)g(x)}+1=\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}$ có bao nhiêu phần tử?

A. 4. **B.** 3. **C.** 11. **D.** 6.

Câu 51: Cho hàm số $f(x)=x^3-6x^2+9x$. Đặt $f^k(x)=f\left(f^{k-1}(x)\right)$ với k là số nguyên lớn hơn 1. Hỏi phương trình $f^6(x)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm phân biệt ?

A. 365. **B.** 1092. **C.** 1094. **D.** 363.

Câu 52: **(HSG Lớp 12 - Bắc Ninh 2019)** Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ xy+yz+xz=-3 \\ x^6+y^6+z^6=m \end{cases}$ với x, y, z là ẩn số thực, m là tham số.

Số giá trị nguyên của m để hệ phương trình có nghiệm là

A. 25. **B.** 24. **C.** 12. **D.** 13.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

ỨNG DỤNG THỰC TẾ

Câu 1: **(Hậu Lộc Thanh Hóa)** Một chất điểm chuyển động thẳng với quãng đường biến thiên theo thời gian bởi quy luật $s(t)=t^3-4t^2+12$ (m), trong đó t (s) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Vận tốc của chất điểm đó đạt giá trị bé nhất khi t bằng bao nhiêu?

A. 2 (s). **B.** $\frac{8}{3}$ (s). **C.** 0 (s). **D.** $\frac{4}{3}$ (s).

Câu 2: **(Triệu Thái Vĩnh Phúc Lần 3)** Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{3}t^3+6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 243. **B.** 144. **C.** 27. **D.** 36.

Câu 3: Một vật chuyển động có phương trình là $S(t)=40\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right),(t(s))$, quãng đường tính theo đơn vị mét.

a. Tính vận tốc của vặt chuyển động tại thời điểm t=4(s)

b. Tính gia tốc của vật chuyển động tại thời điểm t=6(s).

Câu 4: Một vật rơi tự do có phương trình chuyển động là $S(t)=50t^2,(t(s))$, độ cao tính theo đơn vị là mét.

a. Tính vận tốc của vật rơi tự do tại thời điểm t=6(s).

b. Sau thời gian bao lâu thì vật rơi tự do đạt vận tốc $50(m/s)$.

Câu 5: Một vật chuyển động có vận tốc được biểu thị bởi công thức là $v(t)=5t^2+7t,(t(s))$, trong đó $v(t)$ tính theo đơn vị là (m/s)

a. Tính gia tốc của vật tại thời điểm t=2(s).

b. Tính gia tốc của vật tại thời điểm vận tốc chuyển động của vật bằng 12 m/s.

Câu 6: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t)=1+3t^2-t^3,t(s)$. Vận tốc $v(m/s)$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất khi t bằng bao nhiêu.

A. $t=4$ **B.** $t=3$ **C.** $t=2$ **D.** $t=1$

Câu 7: Hằng ngày mực nước của hồ thủy điện ở miền Trung lên và xuống theo lượng nước mưa, và các suối nước đổ về hồ. Từ lúc 8h sáng, độ sâu của mực nước trong hồ tính theo mét và lên xuống theo thời gian t (giờ) trong ngày cho bởi công thức $h(t)=24t+5t^2-\frac{t^3}{3}$. Biết rằng phải thông báo cho các hộ dân phải di dời trước khi xả nước theo quy đinh trước 5 giờ. Hỏi cần thông báo cho hộ dân di dời trước khi xả nước mấy giờ. Biết rằng mực nước trong hồ phải lên cao nhất mới xả nước.

A. 15*h* **B.** 16*h* **C.** 17*h* **D.** 18*h*

Câu 8: Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+10,(t(s))$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

A. 0,2m **B.** 2m **C.** 10m **D.** 20m.

Câu 9: Một con cá hồi bơi ngược dòng (từ nơi sinh sống) để vượt khoảng cách 300km (tới nơi sinh sản). Vận tốc dòng nước 6km/h. Giả sử vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v km/h thì năng lượng tiêu hao của cá trong thời gian t giờ cho bởi công thức $E(v)=cv^3t$, trong đó c là hằng số; E tính

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

bằng jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất là bao nhiêu?

A. 9km/h **B.** 6km/h **C.** 10km/h **D.** 12km/h

Câu 10: Chi phí về nhiên liệu của một tàu được chia làm hai phần. Trong đó phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 ngàn đồng/giờ. Phần thứ hai tỉ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi $v=10km/h$ thì phần thứ hai bằng 30 ngàn đồng/giờ. Hãy xác định vận tốc của tàu để tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường là nhỏ nhất?

A. 10km/h **B.** 15km/h **C.** 20km/h **D.** 25km/h

Câu 11: Một vật rơi tự do với phương trình chuyển động $S=\frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g=9,8m/s^2$ và t tính bằng giây (s). Vận tốc của vật tại thời điểm t = 5s bằng:

A. 49m/s **B.** 25m/s **C.** 10m/s **D.** 18m/s

Câu 12: Một chất điểm chuyển động thẳng theo phương trình $S=t^3-3t^2+4t$, trong đó t tính bằng giấy (s) và S tính bằng mét (m). Gia tốc của chất điểm lúc t=2s là:

A. $4m/s^2$ **B.** $6m/s^2$ **C.** $8m/s^2$ **D.** $12m/s^2$

Câu 13: Cho chuyển động thẳng theo phương trình $S=t^3+3t^2-9t+27$, trong đó t tính bằng giấy (s) và S tính bằng mét (m).Gia tốc chuyển động tại thời điểm vận tốc triệt tiêu là:

A. $0m/s^2$ **B.** $6m/s^2$ **C.** $24m/s^2$ **D.** $12m/s^2$

Câu 14: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S=\frac{1}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2+2t-100$, trong đó t tính bằng giấy (s). Chất điểm đạt giá trị nhỏ nhất tại thời điểm:

A. $t=1$ **B.** $t=16$ **C.** $t=5$ **D.** $t=3$

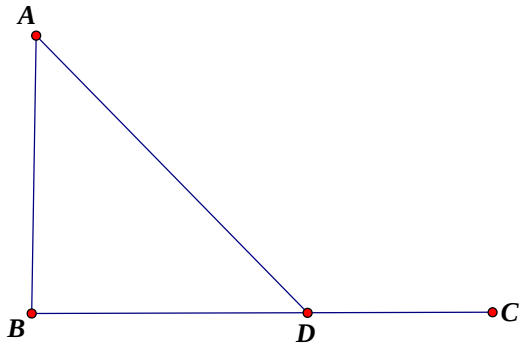
Câu 15: Một vật đang chuyển động với vận tốc 10m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=3t+t^2\left(m/s^2\right)$. Hỏi quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc?

A. $11100m$ **B.** $\frac{6800}{3}m$ **C.** $\frac{4300}{3}m$ **D.** $\frac{5800}{3}m$

Câu 16: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)(m/s)$, có gia tốc $v'(t)=\frac{3}{t+1}\left(m/s^2\right)$. vận tốc ban đầu của vật là $6m/s$. Vận tốc của vật sau 10 giây là (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị):

A. 14m/s **B.** 13m/s **C.** 11m/s. **D.** 12m/s.

Câu 17: Một đoàn cứu trợ lũ lụt đang ở vị trí A của tỉnh Quảng Ninh muốn tiếp cận vị trí C để tiếp tế lượng thực phải đi theo con đường từ A đến B và từ B đến C (như hình vẽ). Tuy nhiên do nước ngập con đường từ A đến B nên đoàn cứu trợ không thể đi đến C bằng xe, nhưng đoàn cứu trợ có thể chèo thuyền từ A đến D với vận tốc 6km/h rồi đi bộ từ D đến C với vận tốc 4km/h. Biết A cách B 5km, B cách C 7km. Xác định vị trí điểm D cách B bao nhiêu km để đoàn cứu trợ đến C nhanh nhất.



A. $BD=5km$. **B.** $BD=2\sqrt{2}km$. **C.** $BD=4km$. **D.** Không tồn tại.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

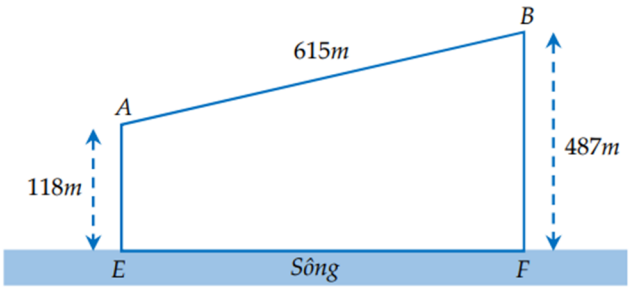
Câu 18: Có hai chiếc cọc cao $10m$ và $30m$ lần lượt đặt hai vị trí A, B. Biết khoảng cách giữa hai cọc bằng $24m$. Người ta chọn một cái chốt ở vị trí M trên mặt đất nằm giữa hai chân cột để giăng dây nối đến hai đỉnh C và D của cọc như hình vẽ. Hỏi ta phải đặt chốt ở vị trí nào để tổng độ dài của hai sợi dây đó là ngắn nhất?

A. $AM = 6m,\ BM = 18m$.
B. $AM = 7m,\ BM = 17m$.
C. $AM = 4m,\ BM = 20m$.
D. $AM = 12m,\ BM = 12m$.

Câu 19: Một người lính đặc công thực hiện bơi luyện tập từ vị trí A trên bờ biển đến một chiếc thuyền đang neo đậu tại vị trí C trên biển. Sau khi bơi được $1,25$km do khát nước người này đã bơi vào vị trí E trên bờ biển để uống nước rồi mới từ E bơi đến C. Hãy tính xem người lính này phải bơi ít nhất bao nhiêu kilomet. Biết rằng khoảng cách từ A đến C là $6,25$km và khoảng cách ngắn nhất từ C vào bờ là 5km.

A. $3\sqrt{5}$ km.
B. $\frac{5}{2}$ km.
C. $\sqrt{26}+\sqrt{5}$ km.
D. $\frac{15}{2}$ km

Câu 20: Hai vị trí A, B cách nhau 615m và cùng nằm về một phía bờ sông. Khoảng cách từ A và từ B đến bờ dông lần lượt là 118m và 478m. Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B. Đoạn đường ngắn nhất mà người đó có thể đi là bao nhiêu (làm trong đến chữ số thập phân thứ nhất).



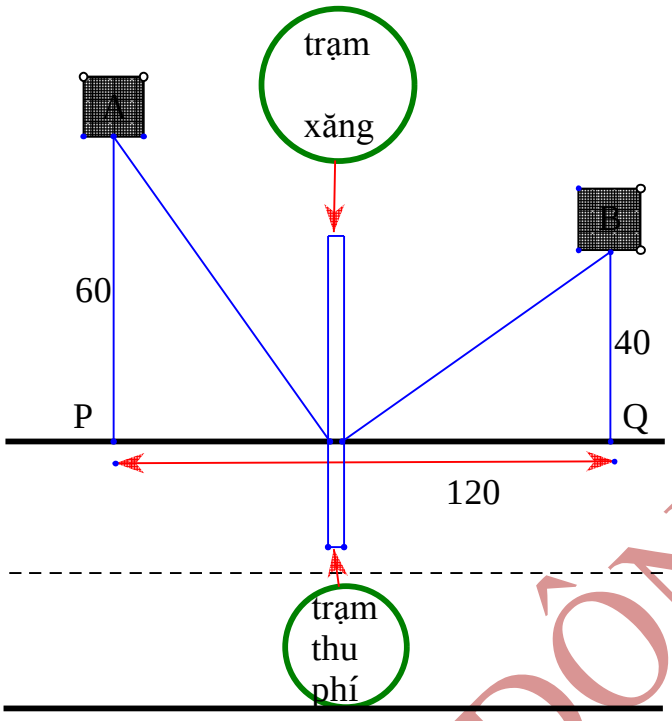
A. $569,5$m.
B. $671,4$m.
C. $779,8$m.
D. $741,2$m.

Câu 21: **(KINH MÔN II LẦN 3 NĂM 2019)** Một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 25$m, chiều rộng $AD = 20$m được chia thành hai phần bằng nhau bởi vạch chắn MN (M, N lần lượt là trung điểm BC và AD). Một đội xây dựng làm một con đường đi từ A đến C qua vạch chắn MN, biết khi làm đường trên miền $ABMN$ mỗi giờ làm được 15m và khi làm trong miền $CDNM$ mỗi giờ làm được 30m. Tính thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C.

A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.
B. $\frac{10+2\sqrt{725}}{30}$.
C. $\frac{20+\sqrt{725}}{30}$.
D. 5.

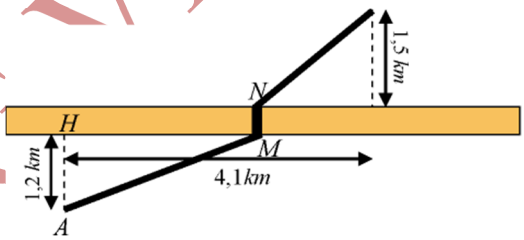
Câu 22: Đường cao tốc mới xây nối hai thành phố A và B. Hai thành phố này muốn xây một trạm thu phí và trạm xăng ở trên đường cao tốc như hình vẽ. Để tiết kiệm chi phí đi lại, hai thành phố này quyết định tính toán xem dựng trạm thu phí ở vị trí nào để tổng khoảng cách từ hai trung tâm thành phố đến trạm là ngắn nhất, biết khoảng cách từ trung tâm thành phố A, B đến đường cao tốc lần lượt là 60km và 40km; khoảng cách giữa hai trung tâm thành phố là 120km (được tính theo khoảng cách của hình chiếu vuông góc của hai trung tâm thành phố lên đường cao tốc, tức là PQ kí hiệu như hình vẽ). Tìm vị trí của trạm thu phí và trạm xăng? (Giả sử chiều rộng của trạm thu phí không đáng kể)

ĐẶNG ĐÔNG



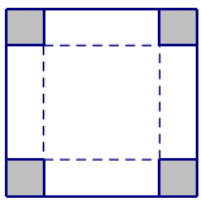
A. 72km kể từ P. **B.** 42 km kể từ Q. **C.** 48km kể từ P. **D.** Tại P.

Câu 23: Người ta muốn làm một con đường từ địa điểm A đến địa điểm B ở hai bên bờ một con sông, các số liệu được thể hiện trên hình vẽ, con đường được làm theo đường gấp khúc $AMNB$. Biết rằng chi phí xây dựng $1km$ đường bên bờ sông có điểm B gấp 1,3 lần chi phí xây dựng 1km đường bên bờ sông có điểm A, còn chi phí làm cầu MN tại điểm nào cũng như nhau. Hỏi phải xây dựng cầu tại điểm M cách điểm H bao nhiêu (làm tròn đến $0,001km$) để chi phí làm đường là nhỏ nhất.



A. 1,758 *km*. **B.** 2,630 *km*. **C.** 2,360 *km*. **D.** Kết quả khác.

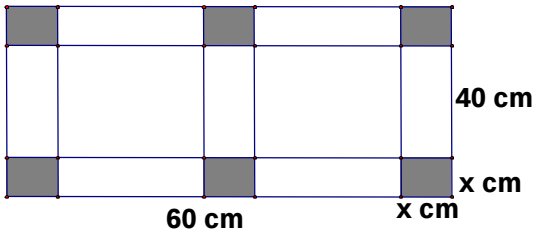
Câu 24: Từ một tấm bìa cứng hình vuông cạnh a, người ta cắt bốn góc với bốn hình vuông bằng nhau *(như hình vẽ)* rồi gấp lại tạo thành một hình hộp không nắp. Tìm cạnh của hình vuông bị cắt để thể tích khối hộp lớn nhất.



A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a}{8}$. **C.** $\frac{a}{3}$. **D.** $\frac{a}{6}$.

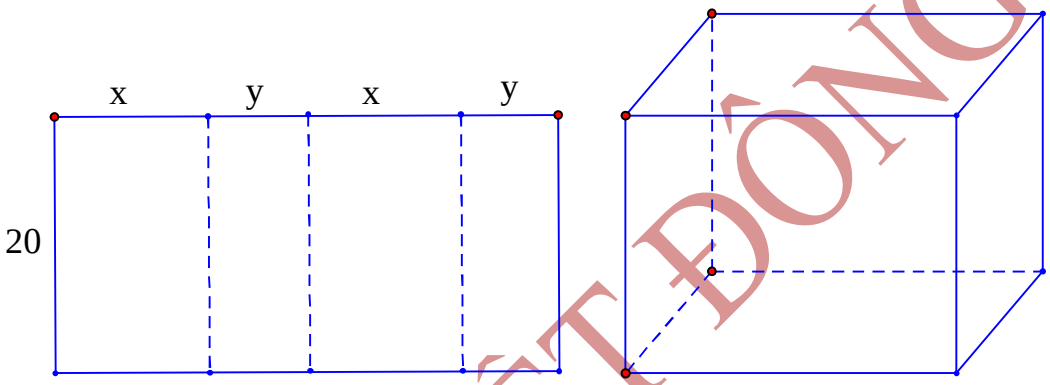
Câu 25: Cho một tấm bìa hình chữ nhật chiều dài $AB=60\text{cm}$ chiều rộng $BC=40\text{cm}$. Người ta cắt 6 hình vuông bằng nhau như hình vẽ, mỗi hình vuông cạnh bằng $x\text{cm}$, rồi gập tấm bìa lại như hình vẽ dưới đây để được một hộp quà có nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



A. $\frac{20}{3}$cm.. **B.** 4cm. **C.** 5cm. **D.** $\frac{10}{3}$cm.

Câu 26: Người ta gập một miếng bìa hình chữ nhật có kích thước $60\text{cm}\times 20\text{cm}$ như hình vẽ để ghép thành một chiếc hộp hình hộp đứng (hai đáy trên và dưới được cắt từ miếng tôn khác để ghép vào). Tính diện tích toàn phần của hộp khi thể tích của hộp lớn nhất.

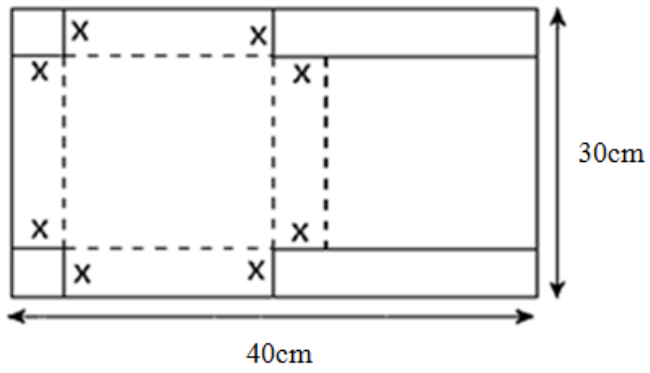


A. $1425\left(\text{cm}^3\right)$. **B.** $1200\left(\text{cm}^3\right)$. **C.** $2150\left(\text{cm}^3\right)$. **D.** $1650\left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 27: **(GIỮA-HKII-2019-NGHĨA-HƯNG-NAM-ĐỊNH)** Một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 48 và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chất liệu làm đáy và 4 mặt bên của hộp có giá thành gấp ba lần giá thành của chất liệu làm nắp hộp. Gọi h là chiều cao của hộp để giá thành của hộp là thấp nhất. Biết $h=\frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tổng $m+n$ là

A. 12. **B.** 13. **C.** 11. **D.** 10.

Câu 28: **(Trần Đại Nghĩa)** Với tấm nhôm hình chữ nhật có kích thước $30cm;\ 40cm$. Người ta phân chia tấm nhôm như hình vẽ và cắt bỏ một phần để được gấp lên một cái hộp có nắp. Tìm x để thể tích hộp lớn nhất.



A. $\frac{35+5\sqrt{13}}{3}cm$. **B.** $\frac{35-4\sqrt{13}}{3}cm$. **C.** $\frac{35-5\sqrt{13}}{3}cm$. **D.** $\frac{35+4\sqrt{13}}{3}cm$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 29: **(SỞ GD & ĐT CÀ MAU)** Người ta muốn xây một cái bể hình hộp đứng có thể tích $V=18\left(m^3\right)$, biết đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng và bể không có nắp. Hỏi cần xây bể có chiều cao h bằng bao nhiêu mét để nguyên vật liệu xây dựng là ít nhất (biết nguyên vật liệu xây dựng các mặt là như nhau)?

A. $2\left(m\right)$. **B.** $\frac{5}{2}\left(m\right)$. **C.** $1\left(m\right)$. **D.** $\frac{3}{2}\left(m\right)$.

Câu 30: **(Sở Ninh Bình Lần1)** Một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 48 và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chất liệu làm đáy và 4 mặt bên của hộp có giá thành gấp ba lần giá thành của chất liệu làm nắp hộp. Gọi h là chiều cao của hộp để giá thành của hộp là thấp nhất. Biết $h=\frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tổng $m+n$ là

A. 12. **B.** 13. **C.** 11. **D.** 10.

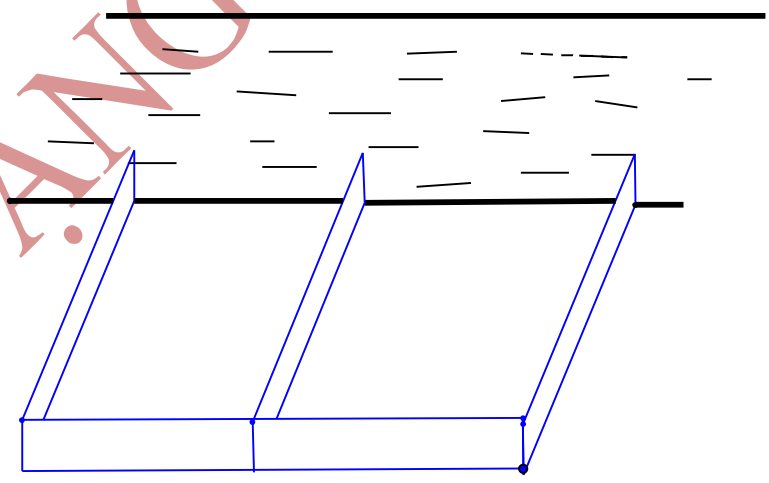
Câu 31: **(Thuận Thành 2 Bắc Ninh)** Để thiết kế một chiếc bể cá không có nắp đậy hình hộp chữ nhật có chiều cao $60\,\text{cm}$, thể tích là $96.000\,\text{cm}^3$, người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành là 70.000 đồng/m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là 100.000 đồng/m^2. Chi phí thấp nhất để làm bể cá là

A. 283.000 đồng. **B.** 382.000 đồng. **C.** 83.200 đồng. **D.** 832.000 đồng.

Câu 32: **(Nguyễn Khuyến)** Ông A dự định sử dụng hết $6,5\text{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng khối hình hộp chữ nhật chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng(các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. $2,26\text{m}^3$. **B.** $1,01\text{m}^3$. **C.** $1,33\text{m}^3$. **D.** $1,50\text{m}^3$.

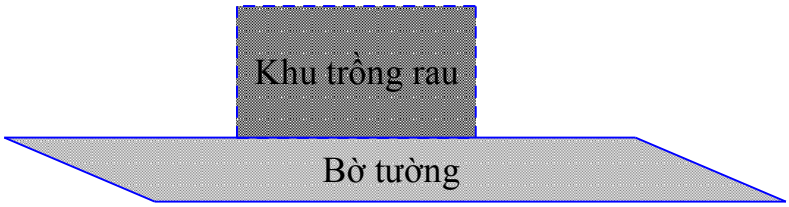
Câu 33: Một người nông dân có $15.000.000$ đồng để làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để ngăn khu đất thành hai hình chữ nhật bằng nhau với mục đích trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông, chi phí nguyên vật liệu 60.000 đồng/mét. Còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50.000 đồng/mét. Tìm diện tích lớn nhất của đất rào thu được?



A. $6250\,\text{m}^2$. **B.** $1250\,\text{m}^2$. **C.** $3125\,\text{m}^2$. **D.** $50\,\text{m}^2$.

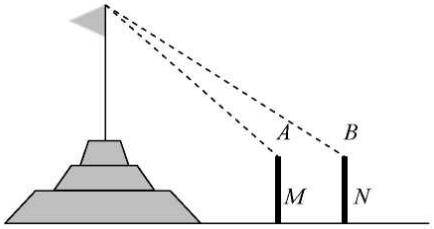
Câu 34: Bác nông dân làm một hàng rào trồng rau hình chữ nhật có chiều dài song song với bờ tường. Bác chỉ làm ba mặt, mặt thứ tư bác tận dụng luôn bờ tường. Bác dự tính sẽ dùng $200\,\text{m}$ lưới sắt để làm nên toàn bộ hàng rào đó. Hỏi diện tích lớn nhất bác có thể rào là bao nhiêu.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



A. $1500\,\text{m}^2$. **B.** $10000\,\text{m}^2$. **C.** $2500\,\text{m}^2$. **D.** $5000\,\text{m}^2$.

Câu 35: Để đo chiều cao từ mặt đất đến đỉnh cột cờ của một Kỳ đài trước Ngọ Môn (Đại Nội - Huế), người ta cắm hai cọc bằng nhau MA và NB cao $1,5m$ so với mặt đất. Hai cọc này song song, cách nhau $10m$ và thẳng hàng so với tim cột cờ (như hình vẽ). Đặt giác kế đứng tại A và B để nhắm đến đỉnh cột cờ, người ta đo được các góc lần lượt là $51^0 40'12"$ và $45^0 39'$ so với đường song song mặt đất. Hãy tính chiều cao của cột cờ (Làm tròn đến $0,01m$).

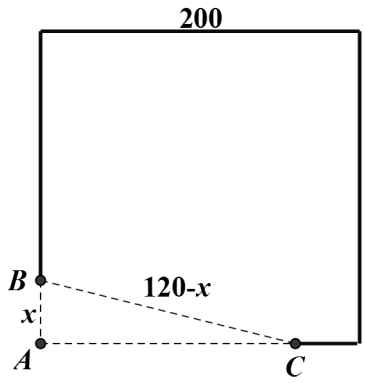


A. $63,48m$. **B.** $52,29m$. **C.** $62,29m$. **D.** $53,48m$.

Câu 36: Cho một tờ giấy hình chữ nhật có chiều dài $12cm$, chiều rộng $8cm$. Gấp góc bên phải tờ giấy sao cho khi gấp, đỉnh của nó có chạm với đáy dưới (như hình vẽ). Gọi độ dài nếp gấp là y thì giá trị nhỏ nhất của y là bao nhiêu.

A. $3\sqrt{7}$. **B.** $3\sqrt{5}$. **C.** $6\sqrt{3}$. **D.** $6\sqrt{2}$.

Câu 38: Cho một tấm gỗ hình vuông cạnh $200cm$. Người ta cắt một tấm gỗ có hình một tam giác vuông ABC từ tấm gỗ hình vuông đã cho như hình vẽ sau. Biết $AB = x\left(0 < x < 60cm\right)$ là một cạnh góc vuông của tam giác ABC và tổng độ dài cạnh góc vuông AB với cạnh huyền BC bằng $120cm$. Tìm x để tam giác ABC có diện tích lớn nhất.



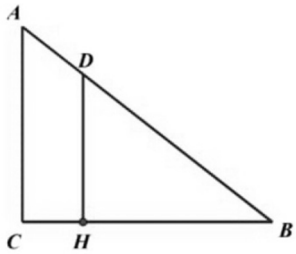
A. $x = 40cm$. **B.** $x = 50cm$. **C.** $x = 30cm$. **D.** $x = 20cm$.

Câu 39: Cho một tấm bìa hình vuông cạnh 5 dm. Để làm một mô hình kim tự tháp Ai Cập, người ta cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy chính là cạnh của hình vuông rồi gấp lên, ghép lại thành một hình chóp tứ giác đều. Để mô hình có thể tích lớn nhất thì cạnh đáy của mô hình là:

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 40: Chiều dài bé nhất của cái thang AB để nó có thể tựa vào tường AC và mặt đất BC, ngang qua cột đỡ DH cao 4m, song song và cách tường CH=0,5m là:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

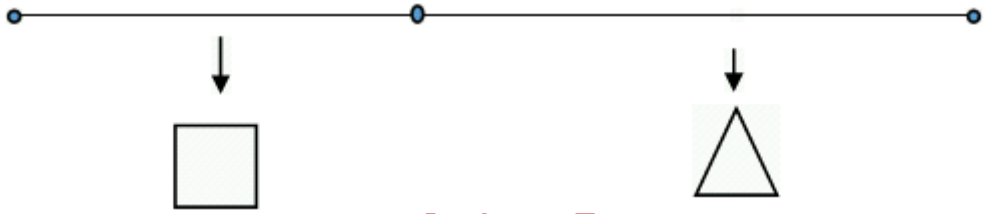


A. Xấp xỉ 5,602 **B.** Xấp xỉ 6,5902 **C.** Xấp xỉ 5,4902 **D.** Xấp xỉ 5,5902

Câu 41: Trong bài thực hành của môn huấn luyện quân sự có tình huống chiến sĩ phải bơi qua một con sông để tấn công một mục tiêu ở phía bờ bên kia sông. Biết rằng lòng sông rộng 100m và vận tốc bơi của chiến sĩ bằng một nửa vận tốc chạy trên bộ. Bạn hãy cho biết chiến sĩ phải bơi bao nhiêu mét để đến được mục tiêu nhanh nhất, nếu như dòng sông là thẳng, mục tiêu ở cách chiến sĩ 1km theo đường chim bay.

A. $\frac{400}{3}$ **B.** $\frac{40}{33}$ **C.** $\frac{100}{3}$ **D.** $\frac{200}{3}$

Câu 42: Một sợi dây có chiều dài là 6 m, được chia thành 2 phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phần thứ hai uốn thành hình vuông. Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để diện tích 2 hình thu được là nhỏ nhất?



A. $\frac{18}{9+4\sqrt{3}}$ (m) **B.** $\frac{36\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$ (m) **C.** $\frac{12}{4+\sqrt{3}}$ (m) **D.** $\frac{18\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$ (m)

Câu 43: **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai)** Để chuẩn bị cho đợt phát hành sách giáo khoa mới, một nhà xuất bản yêu cầu xưởng in phải đảm bảo các yêu cầu sau: Mỗi cuốn sách giáo khoa cần một trang chữ có diện tích là $384cm^2$, lề trên và lề dưới là $3\,cm$, lề trái và lề phải là $2\,cm$. Muốn chi phí sản xuất là thấp nhất thì xưởng in phải in trang sách có kích thước tối ưu nhất, với yêu cầu chất lượng giấy và mực in vẫn đảm bảo. Tìm chu vi của trang sách.

A. $82\,cm$. **B.** $100\,cm$. **C.** $90\,cm$. **D.** $84\,cm$.

Câu 44: Một khách sạn có 50 phòng. Hiện tại mỗi phòng cho thuê với giá 400 ngàn đồng một ngày thì toàn bộ phòng được thuê hết. Biết rằng cứ mỗi lần tăng giá thêm 20 ngàn đồng thì có thêm 2 phòng trống. Giám đốc phải chọn giá phòng mới là bao nhiêu để thu nhập của khách sạn trong ngày là lớn nhất.

A. 480 ngàn. **B.** 50 ngàn. **C.** 450 ngàn. **D.** 80 ngàn.

Câu 45: Hai con chuồn chuồn bay trên hai quỹ đạo khác nhau tại cùng một thời điểm. Một con bay trên quỹ đạo đường thẳng từ điểm $A(0;0)$ đến điểm $B(0;100)$ với vận tốc $5m/s$. Con còn lại bay trên quỹ đạo đường thẳng từ $C(60;80)$ về A với vận tốc $10m/s$. Hỏi trong quá trình bay, thì khoảng cách ngắn nhất mà hai con đạt được là bao nhiêu?

A. $20(m)$ **B.** $50(m)$ **C.** $20\sqrt{10}(m)$ **D.** $20\sqrt{5}(m)$

Câu 46: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu?

A. 2.250.000 **B.** 2.350.000 **C.** 2.450.000 **D.** 2.550.000

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 47: Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 40 quả bưởi. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 5000 đồng thì số bưởi bán được tăng thêm là 50 quả. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi quả là 30.000 đồng.

A. 44.000đ **B.** 43.000đ **C.** 42.000đ **D.** 41.000đ

Câu 48: Một xe khách đi từ Việt Trì về Hà Nội chở tối đa được là 60 hành khách một chuyến. Nếu một chuyến chở được m hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách được tính là $\left(30-\frac{5m}{2}\right)^2$ đồng. Tính số hành khách trên mỗi chuyến xe để nhà xe thu được lợi nhuận mỗi chuyến xe là lớn nhất.?

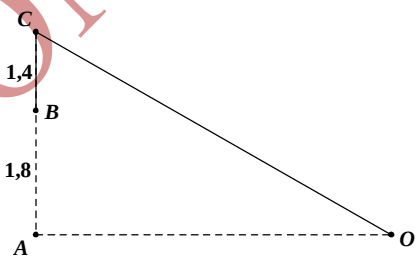
A. 30 **B.** 40 **C.** 50 **D.** 60

Câu 49: Cuốn sách giáo khoa cần một trang chữ có diện tích là $384cm^2$. Lề trên và dưới là $3cm$, lề trái và lề phải là $2cm$. Kích thước tối ưu của trang giấy?

A. Dài $24cm$, rộng $17cm$ **B.** Dài $30cm$, rộng $20cm$

C. Dài $24cm$, rộng $18cm$ **D.** Dài $24cm$, rộng $19cm$

Câu 50: Một màn ảnh hình chữ nhật cao 1,4 mét và đặt ở độ cao 1,8 mét so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đó? Biết rằng góc $\widehat{BOC}$ là góc nhọn.



A. $AO=2,4m$ **B.** $AO=2m$

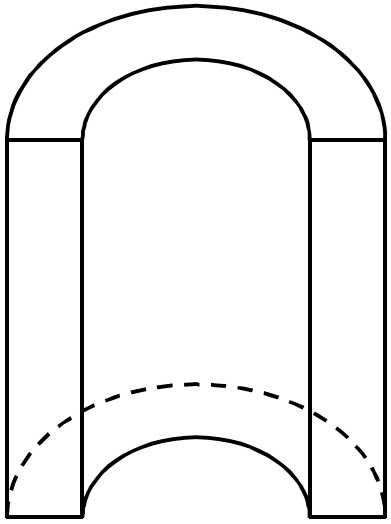
C. $AO=2,6m$ **D.** $AO=3m$

Câu 51: Một công trình nghệ thuật kiến trúc trong công viên thành phố Việt Trì có dạng là một tòa nhà hình chóp tứ giác đều nội tiếp một mặt cầu có bán kính 5(m). Toàn bộ tòa nhà đó được trang trí các hình ảnh lịch sử và tượng anh hùng, do vậy để có không gian rộng bên trong tòa nhà người ta đã xây dựng tòa nhà sao cho thể tích lớn nhất. Tính chiều cao của tòa nhà đó.

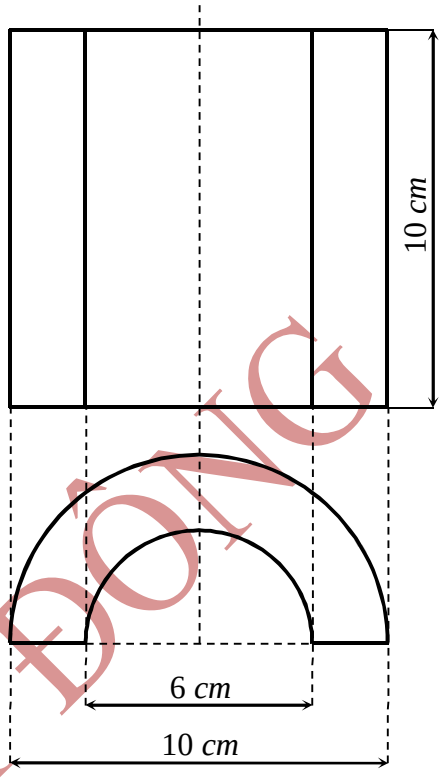
A. $h=\frac{20}{3}(m)$ **B.** $h=\frac{22}{3}(m)$ **C.** $h=\frac{23}{3}(m)$ **D.** $h=\frac{25}{3}(m)$

Câu 52: Một chi tiết máy có hình dạng như hình vẽ 1, các kích thước được thể hiện trên hình vẽ 2 (hình chiếu bằng và hình chiếu đứng).

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Hình vẽ 1



Hình vẽ 2

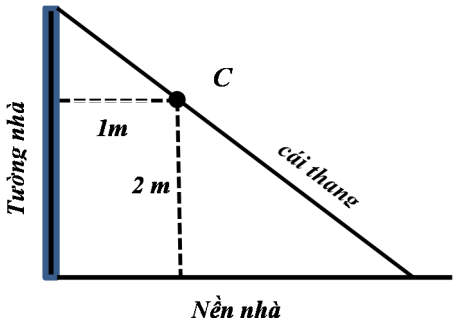
Người ta mạ toàn phần chi tiết này bằng một loại hợp kim chống gỉ. Để mạ $1m^2$ bề mặt cần số tiền 150000 đồng. Số tiền nhỏ nhất có thể dùng để mạ 10000 chi tiết máy là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng đơn vị nghìn đồng).

A. 48238 (nghìn đồng). **B.** 51238 (nghìn đồng).

C. 51239 (nghìn đồng). **D.** 37102 (nghìn đồng).

Câu 53: Ông An cần sản xuất một cái thang để trèo qua một bức tường nhà. Ông muốn cái thang phải luôn được đặt qua vị trí C, biết rằng điểm C cao $2m$ so với nền nhà và điểm C cách tường nhà $1m$ (như hình vẽ bên).

Giả sử kinh phí để sản xuất thang là 300.000 đồng/1 mét dài. Hỏi ông An cần ít nhất bao nhiêu tiền để sản xuất thang? (Kết quả làm tròn đến hàng nghìn đồng).



A. 2.350.000 đồng. **B.** 3.125.000 đồng.

C. 1.249.000 đồng. **D.** 600.000 đồng.

Câu 54: Một xe buýt của hãng xe A có sức chứa tối đa là 50 hành khách. Nếu một chuyến xe buýt chở x hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách là $20\left(3-\frac{x}{40}\right)^2$ (nghìn đồng). Khẳng định đúng là:

A. Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất bằng 3.200.000 (đồng).

B. Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất khi có 45 hành khách.

C. Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất bằng 2.700.000 (đồng).

D. Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất khi có 50 hành khách.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 55: Một công ti dự kiến chi 1 tỉ đồng để sản xuất các thùng đựng sơn hình trụ có dung tích 5 lít. Biết rằng chi phí đề làm mặt xung quanh của thùng đó là 100,000 $đ/m^2$, chi phí để làm mặt đáy là 120 000 $đ/m^2$. Hãy tính số thùng sơn tối đa mà công ty đó sản xuất (giả sử chi phí cho các mối nối không đáng kể).

A. 57582 thùng. **B.** 58135 thùng. **C.** 18209 thùng. **D.** 12525 thùng.

Câu 56: Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30.000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18.000. Hỏi cơ sở sản xuất phải bán với giá mới là bao nhiêu để đạt lợi nhuận lớn nhất.

A. 42.000 đồng. **B.** 40.000 đồng. **C.** 43.000 đồng. **D.** 39.000 đồng.

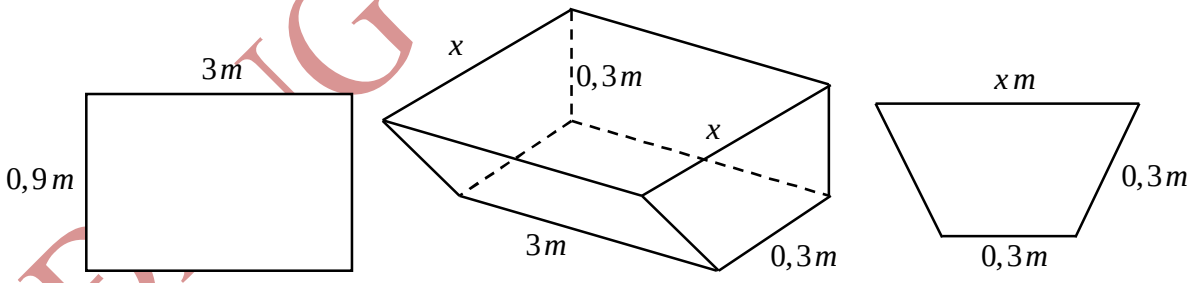
Câu 57: **(THPT-Phúc-Trạch-Hà-Tĩnh-lần-2-2018-2019-thi-tháng-4)** Một trang trại rau sạch mỗi ngày thu hoạch được một tấn rau. Mỗi ngày, nếu bán rau với giá 30000 đồng/kg thì hết rau sạch, nếu giá bán rau tăng 1000 đồng/kg thì số rau thừa tăng thêm 20 kg. Số rau thừa này được thu mua làm thức ăn chăn nuôi với giá 2000 đồng/kg. Hỏi tiền bán rau nhiều nhất trang trại có thể thu được mỗi ngày là bao nhiêu ?

A. 32400000 đồng. **B.** 34400000 đồng. **C.** 32420000 đồng. **D.** 34240000 đồng.

Câu 58: Người ta xây một bể chứa nước với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3} m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây bể là 600.000 *đồng/m*^{2}. Hãy xác định kích thước của bể sao cho chi phí thuê nhân công thấp nhất. Chi phí đó là

A. 85 triệu đồng. **B.** 90 triệu đồng. **C.** 75 triệu đồng. **D.** 86 triệu đồng.

Câu 59: Để làm một máng xối nước, từ một tấm tôn kích thước $0,9m \times 3m$ người ta gấp tấm tôn đó như hình vẽ dưới. Biết mặt cắt của máng xối (bị cắt bởi mặt phẳng song song với hai mặt đáy) là một hình thang cân và máng xối là một hình lăng trụ có chiều cao bằng chiều dài của tấm tôn. Hỏi $x(m)$ bằng bao nhiêu thì thể tích máng xối lớn nhất?



(a) Tấm tôn (b) Máng xối (c) Mặt cắt

A. $x = 0,5m$. **B.** $x = 0,65m$. **C.** $x = 0,4m$. **D.** $x = 0,6m$.

Câu 60: Một sợi dây kim loại dài $0,9m$ được cắt thành hai đoạn. Đoạn thứ nhất được uốn thành tam giác đều, đoạn thứ hai được uốn thành hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Tìm độ dài cạnh của tam giác đều (tính theo đơn vị cm) sao cho tổng diện tích của tam giác và hình chữ nhật là nhỏ nhất.

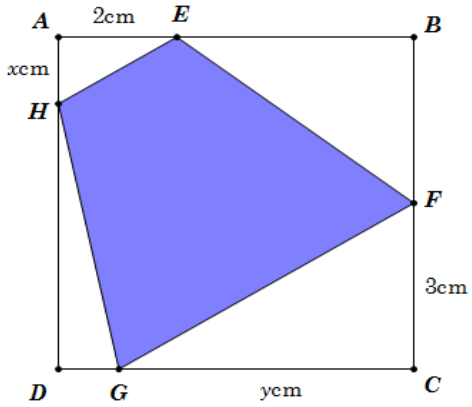
A. $\frac{60}{2-\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{60}{\sqrt{3}+2}$. **C.** $\frac{30}{1+\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{240}{\sqrt{3}+8}$.

Câu 61: Bạn A có một đoạn dây dài $20m$. Bạn chia đoạn dây thành hai phần. Phần đầu uốn thành một tam giác đều. Phần còn lại uốn thành một hình vuông. Hỏi độ dài phần đầu bằng bao nhiêu để tổng diện tích hai hình trên là nhỏ nhất?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

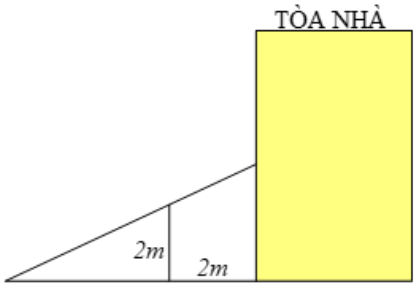
A. $\frac{40}{9+4\sqrt{3}}m.$ **B.** $\frac{180}{9+4\sqrt{3}}m.$ **C.** $\frac{120}{9+4\sqrt{3}}m.$ **D.** $\frac{60}{9+4\sqrt{3}}m.$

Câu 62: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ. Tìm tổng $x+y$ để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất.



A. 7. **B.** 5. **C.** $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. **D.** $4\sqrt{2}$.

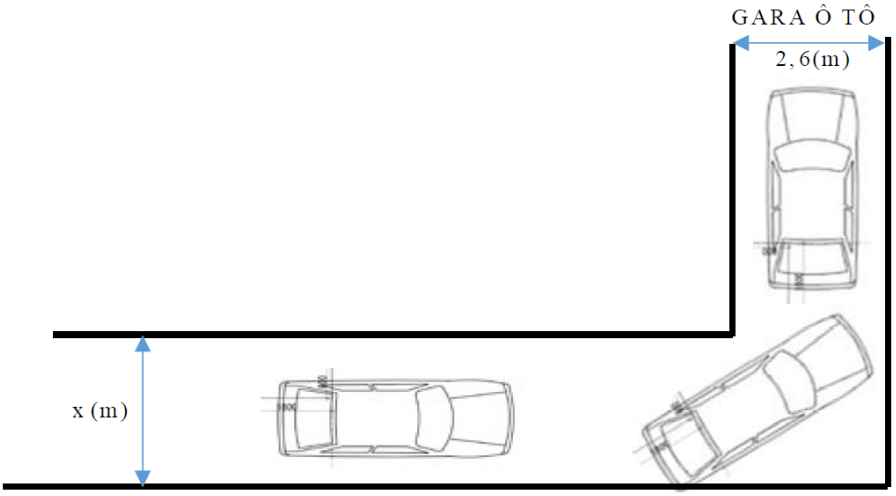
Câu 63: Cho bức tường cao 2m, nằm song song vuới tòa nhà và cách tòa nhà 2m. Người ta muốn chế tạo một chiếc thang bắc từ mặt đất bên ngoài bức tường, gác qua bức tường và chạm vào tòa nhà (xem hình vẽ). Hỏi chiều dài tối đa của thang bằng bao nhiêu mét



A. $\frac{5\sqrt{13}}{3}m$ **B.** $4\sqrt{2}m$ **C.** 6m **D.** $3\sqrt{5}m$

Câu 64: **(Cụm 8 trường chuyên lần1)** Hình vẽ bên dưới mô tả đoạn đường đi vào GARA Ô TÔ nhà cô Hiền. Đoạn đường đầu tiên có chiều rộng bằng $x\,(\text{m})$, đoạn đường thẳng vào cổng GARA có chiều rộng $2,6\,(\text{m})$. Biết kích thước xe ô tô là $5\text{m}\times 1,9\text{m}$ (chiều dài $\times$ chiều rộng). Để tính toán và thiết kế đường đi cho ô tô người ta coi ô tô như một khối hộp chữ nhật có kích thước chiều dài $5\,(\text{m})$, chiều rộng $1,9\,(\text{m})$. Hỏi chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị bên dưới để ô tô có thể đi vào GARA được ? (giả thiết ô tô không đi ra ngoài đường, không đi nghiêng và ô tô không bị biến dạng)

ĐANG ĐÔNG



A. $x=3,7$ (m). **B.** $x=2,6$ (m). **C.** $x=3,55$ (m). **D.** $x=4,27$ (m).

Câu 65: **(Chuyên-Thái-Nguyên-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3)** Tính diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp trong nửa đường tròn có bán kính $10cm$ (hình vẽ).

A. $160cm^2$. **B.** $100cm^2$. **C.** $80cm^2$. **D.** $200cm^2$.

Câu 66: **(PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH)** Ông An có một khu đất hình elip với độ dài trục lớn 10 m và độ dài trục bé 8 m. Ông An muốn chia khu đất thành hai phần, phần thứ nhất là một hình chữ nhật nội tiếp elip dùng để xây bể cá cảnh và phần còn lại dùng để trồng hoa. Biết chi phí xây bể cá là 1000000 đồng trên $1m^2$ và chi phí trồng hoa là 1200000 đồng trên $1m^2$. Hỏi ông An có thể thiết kế xây dựng như trên với tổng chi phí thấp nhất gần nhất với số nào sau đây?

A. 67398224 đồng. **B.** 67593346 đồng. **C.** 63389223 đồng. **D.** 67398228 đồng.

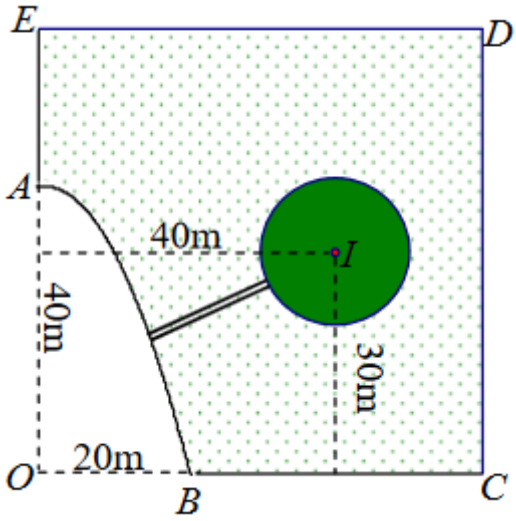
Câu 67: **(PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH)** Một cái hồ rộng có hình chữ nhật. Tại một góc nhỏ của hồ người ta đóng một cái cọc ở vị trí K cách bờ AB là 1 m và cách bờ AC là 8 m, rồi dùng một cây sào ngăn một góc nhỏ của hồ để thả bèo (như hình vẽ). Tính chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB, AC và cây cọc K (bỏ qua đường kính của sào).

A. $\frac{5\sqrt{65}}{4}$. **B.** $5\sqrt{5}$. **C.** $9\sqrt{2}$. **D.** $\frac{5\sqrt{71}}{4}$.

Câu 68: **(SGD Thanh Hóa – năm 2017 – 2018)** Một cái ao hình $ABCDE$ (như hình vẽ), ở giữa ao có một mảnh vườn hình tròn có bán kính 10 m. Người ta muốn bắc một câu cầu từ bờ AB của ao đến vườn. Tính gần đúng độ dài tối thiểu l của cây cầu biết :

- Hai bờ AE và BC nằm trên hai đường thẳng vuông góc với nhau, hai đường thẳng này cắt nhau tại điểm O ;
- Bờ AB là một phần của một parabol có đỉnh là điểm A và có trục đối xứng là đường thẳng OA ;
- Độ dài đoạn OA và OB lần lượt là 40 m và 20 m;
- Tâm I của mảnh vườn lần lượt cách đường thẳng AE và BC lần lượt 40 m và 30m.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



A. $l \approx 17,7$ m. **B.** $l \approx 25,7$ m. **C.** $l \approx 27,7$ m. **D.** $l \approx 15,7$ m.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

A – LÝ THUYẾT CHUNG

Cho hàm số $y = f(x,m)$, m là tham số, có taaph xác định D.

□ Hàm số f đồng biến trên $D \Leftrightarrow f' \geq 0, \forall x \in D$.

□ Hàm số f nghịch biến trên $D \Leftrightarrow f' \leq 0, \forall x \in D$.

Từ đó suy ra điều kiện của m.

1 - Sử dụng GTLN, GTNN của hàm số trên tập D để giải quyết bài toán tìm giá trị của tham số để hàm số đơn điệu.

Lí thuyết nhắc lại:

Cho bất phương trình:

$$f(x,m) \geq 0, \forall x \in D \Leftrightarrow f(x) \geq g(m), \forall x \in D \Leftrightarrow \min_{x \in D} f(x) \geq g(m)$$

Cho bất phương trình:

$$f(x,m) \leq 0, \forall x \in D \Leftrightarrow f(x) \leq g(m), \forall x \in D \Leftrightarrow \min_{x \in D} f(x) \leq g(m)$$

Phương pháp: Để điều kiện để hàm số luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên tập xác định (hoặc từng khoảng xác định) của hàm số $y = f(x,m)$, ta thực hiện các bước sau:

- Bước 1: Tìm TXĐ của hàm số.
- Bước 2: Tính y'. Để hàm số đồng biến $y' \geq 0, \forall x \in D$, (để hàm số nghịch biến $y' \leq 0, \forall x \in D$) thì ta sử dụng lý thuyết nhắc lại phần trên.
- Bước 3: Kết luận giá trị của tham số.

Chú ý:

+ Phương pháp trên chỉ sử dụng được khi ta có thể tách được thành $f(x)$ và $g(m)$ riêng biệt.

+ Nếu ta không thể tách được thì phải sử dụng dấu của tam thức bậc 2.

2 - Sử dụng phương pháp tham thức bậc hai để tìm điều kiện của tham số:

Lý thuyết nhắc lại:

□ $y' = 0$ chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm.

Nếu $y' = ax^2 + bx + c$ thì:

- $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = b = 0 \\ c \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$
- $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = b = 0 \\ c \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$

□ Định lí về dấu của tam thức bậc hai $g(x) = ax^2 + bx + c$

□ Nếu $\Delta < 0$ thì $g(x)$ luôn cùng dấu với a.

□ Nếu $\Delta = 0$ thì $g(x)$ luôn cùng dấu với a, trừ $x = -\dfrac{b}{2a}$

□ Nếu $\Delta > 0$ thì $g(x)$ có hai nghiệm x_1, x_2 và trong khoảng hai nghiệm thì $g(x)$ khác dấu với a, ngoài khoảng hai nghiệm thì $g(x)$ cùng dấu với a.

3 - So sánh các nghiệm x_1, x_2 của tam thức bậc hai $g(x) = ax^2 + bx + c$ với số 0.

- $x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$
- $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$
- $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P < 0$

4 - Để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có độ dài khoảng đồng biến (nghịch biến) $(x_1; x_2)$ bằng d thì ta thực hiện các bước sau:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

□ Tính y'.

□ Tìm điều kiện để hàm số có khoảng đồng biến và ngịch biến: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ (1)

□ Biến đổi $|x_1 - x_2| = d$ thành $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = d^2$ (2)

□ Sử dụng định kí Vi-et đưa (2) thành phương trình theo m.

□ Giải phương trình, so với điều kiện (1) để chọn nghiệm.

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

DANG 1: XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ CHO BỞI CÔNG THỨC

Câu 1. Cho hàm số $y = \frac{x}{2} + \sin^2 x, x \in [0;\pi]$. Hỏi hàm số đồng biến trên các khoảng nào?

A. $\left(0;\frac{7\pi}{12}\right)$ và $\left(\frac{11\pi}{12};\pi\right)$.

B. $\left(\frac{7\pi}{12};\frac{11\pi}{12}\right)$.

C. $\left(0;\frac{7\pi}{12}\right)$ và $\left(\frac{7\pi}{12};\frac{11\pi}{12}\right)$.

D. $\left(\frac{7\pi}{12};\frac{11\pi}{12}\right)$ và $\left(\frac{11\pi}{12};\pi\right)$.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. $y' = \frac{1}{2} + \sin 2x$. Giải $y' = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$

Vì $x \in [0;\pi]$ nên có 2 giá trị $x = \frac{7\pi}{12}$ và $x = \frac{11\pi}{12}$ thỏa mãn điều kiện.

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{7\pi}{12}$		$\frac{11\pi}{12}$		π
y'	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	‖
y		↗		↘		↗	

Hàm số đồng biến $\left(0;\frac{7\pi}{12}\right)$ và $\left(\frac{11\pi}{12};\pi\right)$

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x+1)(5-x)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng?**

A. $f(1) < f(4) < f(2)$.

B. $f(1) < f(2) < f(4)$.

C. $f(2) < f(1) < f(4)$.

D. $f(4) < f(2) < f(1)$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào sự so sánh ở các phương án, ta thấy chỉ cần xét sự biến thiên của hàm số trên khoảng $(1;4)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta có: $f'(x)=(x+1)^2(x-1)(5-x)>0,\forall x\in(1;4)$.

Nên hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(1;4)$ mà $1<2<4\Rightarrow f(1)<f(2)<f(4)$.

Lưu ý: Có thể dùng máy tính casio

Bấm: $\int_1^2 f'(x)dx$ thấy dương $\Rightarrow f(2)>f(1)$; Bấm: $\int_2^4 f'(x)dx$ thấy dương $\Rightarrow f(4)>f(2)$.

Vậy: $f(1)<f(2)<f(4)$.

Câu 3. (ĐH Vinh Lần 1) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x^2-1),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=2f(-x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Chọn C

+ Ta có $f'(x)=x^2(x^2-1)$ suy ra $f(x)=\int f'(x)dx=\int x^2(x^2-1)dx=\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+C$

+ Suy ra $y=g(x)=2f(-x)=\frac{2(-x)^5}{5}-\frac{2(-x)^3}{3}+2C=-\frac{2x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+2C$

+ Tính $g'(x)=-2f'(-x)=\left(-\frac{2x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+2C\right)'=-2x^4+2x^2=-2x^2(x^2-1)$

$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\x^2-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\end{array}\right.$.

+ Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	+	0	-	

+ Hàm số $y=g(x)=2f(-x)$ đồng biến trên $(-1;1)$.

Câu 4. (ĐH Vinh Lần 1) Cho hàm số $y=f(x)$ nghịch biến $\forall x\in(a;b)$. Hàm số $y=f(2-x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(2-b;2-a)$. **B.** $(-\infty;2-a)$. **C.** $(a;b)$. **D.** $(2-b;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

+ Vì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến $\forall x\in(a;b)$ nên $f'(x)<0;\forall x\in(a;b)$.

+ Xét $y=g(x)=f(2-x)$ có $g'(x)=-f'(2-x)$

+ Hàm số $y=f(2-x)$ đồng biến thì $g'(x)>0\Leftrightarrow -f'(2-x)>0\Leftrightarrow f'(2-x)<0$

Suy ra $a<2-x<b\Leftrightarrow 2-b<x<2-a$.

Câu 5. (Cụm 8 trường Chuyên Lần 1) Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=(1-x)(2+x)(\sin x+2)+2019$. Hàm số $y=f(1-x)+2019x-2018$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y=f(1-x)+2019x-2018$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y'=-f'(1-x)+2019$

$=-[1-(1-x)].(2+1-x)[\sin(1-x)+2]-2019+2019$

$=-x(3-x)[\sin(1-x)+2]$.

Mặt khác $\sin(1-x)+2>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Do đó $y'=0\Leftrightarrow -x(3-x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$.

Dấu của y' là dấu của biểu thức $-x(3-x)$.

Ta có bảng biến thiên.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y=f(1-x)+2019x-2018$ nghịch biến trên khoảng $(0;3)$.

Câu 6. (THTT lần5) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-2x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f\left(2-\sqrt{x^2+1}\right)-\sqrt{x^2+1}-3$ đồng biến trên các khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(2;3)$.

Lời giải

Chọn A

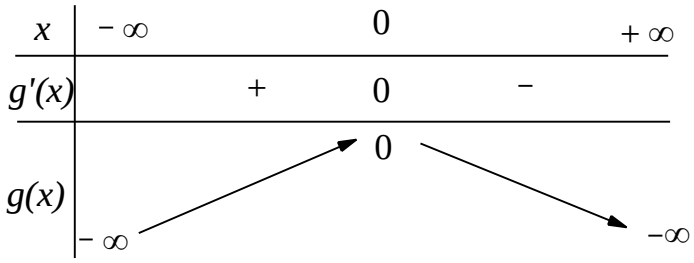
Ta có $g'(x)=f'\left(2-\sqrt{x^2+1}\right).\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+1}}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+1}}\left[f'\left(2-\sqrt{x^2+1}\right)+1\right]$.

Vì $f'(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$ nên $f'(x)\geq -1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ hay $f'(x)+1\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

$f'(x)=-1\Leftrightarrow x^2-2x=-1\Leftrightarrow x=1$. Do đó $f'\left(2-\sqrt{x^2+1}\right)+1+1\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Và $f'\left(2-\sqrt{x^2+1}\right)+1=0\Leftrightarrow f'\left(2-\sqrt{x^2+1}\right)=-1\Leftrightarrow 2-\sqrt{x^2+1}=1\Leftrightarrow x=0$.

BBT:



Dựa vào BBT, suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên $(-2;-1)$.

Câu 7. (Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-9)(x-4)^2$. Khi đó hàm số $y=f(x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(-3;0)$. **C.** $(-\infty;-3)$. **D.** $(-2;2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=\left[f(x^2)\right]'=(x^2)'x^4(x^2-9)(x^2-4)^2=2x^5(x-3)(x+3)(x-2)^2(x+2)^2$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow x=-3$ hoặc $x=-2$ hoặc $x=0$ hoặc $x=2$ hoặc $x=3$.

Ta có bảng xét dấu của y'

x	$-\infty$		-3		-2		0		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, hàm số $y=f(x^2)$ nghịch biến trên $(-\infty;-3)$ và $(0;3)$.

Câu 8. (Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-9)(x-4)^2$. Khi đó hàm số $y=f(x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(-3;0)$. **C.** $(-\infty;-3)$. **D.** $(-2;2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=\left[f(x^2)\right]'=(x^2)'x^4(x^2-9)(x^2-4)^2=2x^5(x-3)(x+3)(x-2)^2(x+2)^2$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow x=-3$ hoặc $x=-2$ hoặc $x=0$ hoặc $x=2$ hoặc $x=3$.

Ta có bảng xét dấu của y'

x	$-\infty$		-3		-2		0		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, hàm số $y=f(x^2)$ nghịch biến trên $(-\infty;-3)$ và $(0;3)$.

Câu 9. (Chuyên Bắc Giang) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^2-1)(x^2-x-2)$. Hỏi hàm số $g(x)=f(x-x^2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-1;1)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-1=0 \\ x^2-x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right. .$$

Bảng xét dấu $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta có $g'(x)=(1-2x)\,f'(x-x^2)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow (1-2x)\,f'(x-x^2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-2x=0 \\ f'(x-x^2)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x-x^2=-1 \\ x-x^2=1 \\ x-x^2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. .$$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số $g(x)=f(x-x^2)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Câu 10. (THPT SỐ 1 TƯ NGHĨA LẦN 2 NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-2x$. Hàm số $g(x)=-f(x^2-1)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Ta có: $g'(x)=-2x.f'(x^2-1) \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2-1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-1=0 \\ x^2-1=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right. .$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
g		↗		↘		↗		↘		↗		↘	

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên $(0;1)$.

Câu 11. (ĐH Vinh Lần 1) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^3-2x^2,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(2-x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(-4;2)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn A

+ Ta có $f'(x)=x^3-2x^2$ suy ra $f(x)=\int f'(x)dx=\int(x^3-2x^2)dx=\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+C$

+ Suy ra $y=g(x)=f(2-x)=\frac{(2-x)^4}{4}-\frac{2(2-x)^3}{3}+C$

+ Tính $g'(x)=f'(2-x)=\left(\frac{(2-x)^4}{4}-\frac{2(2-x)^3}{3}+C\right)'=-(2-x)^3+2(2-x)^2=(2-x)^2x$

+ Hàm số đồng biến suy ra $g'(x)>0\Leftrightarrow x>0$.

Câu 12. (HSG 12 Bắc Giang) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(3-x)(x^2-1)+2x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(x)-x^2-1$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x)=f'(x)-2x$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)-2x=0\Leftrightarrow(3-x)(x^2-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=1\\x=-1\end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗		↘		↗		↘	

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$. Suy ra hàm số đồng biến trên $(1;2)$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-2x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f\left(1-\frac{x}{2}\right)+4x$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-\infty;-6)$. **B.** $(-6;6)$. **C.** $(-6\sqrt{2};6\sqrt{2})$. **D.** $(-6\sqrt{2};+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=-\frac{1}{2}f\left(1-\frac{x}{2}\right)+4=-\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{x}{2}\right)^2-2\left(1-\frac{x}{2}\right)\right]+4=\frac{9}{2}-\frac{x^2}{8}$.

Xét $\frac{9}{2}-\frac{x^2}{8}>0\Leftrightarrow x^2<36\longrightarrow -6<x<6$. Chọn B

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 14. (THPT-Nguyễn-Công-Trứ-Hà-Tĩnh-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(x-2)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;4)$.

Lời giải

Chọn D

Cho $f'(x)=0\Leftrightarrow x(x-1)^2(x-2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1(\text{nghiệm kép})\\x=2\end{array}\right.$

Ta có $g'(x)=\frac{-5x^2+20}{\left(x^2+4\right)^2}f'\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)$

Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow\frac{-5x^2+20}{\left(x^2+4\right)^2}f'\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)=0$

Dựa và $f'(x)$ ta có: $\left[\begin{array}{l}-5x^2+20=0\\\frac{5x}{x^2+4}=0\\\frac{5x}{x^2+4}=1\\\frac{5x}{x^2+4}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm2\\x=0\\x=1(\text{nghiệm kép})\\x=4(\text{nghiệm kép})\end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		0		1		2		4		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(2;4)$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-9)(x-4)^2$. Khi đó hàm số $g(x)=f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-2;2)$ **B.** $(3;+\infty)$ **C.** $(-\infty;-3)$ **D.** $(-\infty;-3)\cup(0;3)$

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=x^2(x-9)(x-4)^2\Rightarrow f'(x^2)=2xx^4(x^2-9)(x^2-4)^2$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow 2x^5(x^2-9)(x^2-4)^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm3\\x=\pm2\end{array}\right.$. Do $x=0;\ x=\pm2$ không đổi dấu

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

x	$-\infty$	-3		-2		0		2		3	$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
g		↘		↗		↗		↘		↘		↗

Vậy hàm số $y=f\left(x^2\right)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2\left(x^2-2x\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hỏi số thực nào dưới đây thuộc khoảng đồng biến của hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x+2\right)$?

A. -2. **B.** -1. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=2(x-1)f'\left(x^2-2x+2\right)$

$=2(x-1)\left[\left(x^2-2x+2-1\right)^2\left(\left(x^2-2x+2\right)^2-2\left(x^2-2x+2\right)\right)\right]=2(x-1)^5\left[(x-1)^4-1\right]$.

Xét $2(x-1)^5\left[(x-1)^4-1\right]>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<1\\x>2\end{array}\right.$.

Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(0;1)$, $(2;+\infty)$. Vậy số 3 thuộc khoảng đồng biến của hàm số $g(x)$.

Câu 17. (CHUYÊN THÁI BÌNH LẦN V NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-1)(x-4).u(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $u(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f\left(x^2\right)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=2x.f'\left(x^2\right)=2x.\left(x^2\right)^2\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right).u\left(x^2\right)$.

Thấy $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=\pm2\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu $g'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$.

Câu 18. (SỞ NAM ĐỊNH 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(1-x)(x+2)g(x)+2018$ với $g(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(1-x)+2018x+2019$ nghịch biến trên khoảng nào?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt: $y=h(x)=f(1-x)+2018x+2019$.

Ta có: $h'(x)=-f'(1-x)+2018=-x(3-x)g(1-x)$.

Xét $h'(x)\le 0\Leftrightarrow x(3-x)\le 0$ (vì $g(1-x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$)

$x(3-x)\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le 0\\x\ge 3\end{array}\right.$.

Xét $h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$.

Vậy hàm số $h(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;0)$ và $(3;+\infty)$ nên đáp án đúng là đáp án D

Câu 19. (THPT SỐ 1 TƯ NGHĨA LẦN 2 NĂM 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f(x)+x.f'(x)=x(x-1)(x-2)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=x.f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x)=\left[x.f(x)\right]'=f(x)+x.f'(x)=x(x-1)(x-2)$

$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

DẠNG 2: XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU DỰA VÀO BẢNG BIẾN THIÊN, ĐỒ THỊ DỰA VÀO BẢNG BIẾN THIÊN

Câu 1. (Sở Ninh Bình Lần1) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		-1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=-2f(x)+2019$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-4;2)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(2;4)$.

Lời giải

Chọn B

Xét $y=g(x)=-2f(x)+2019$.

Ta có $g'(x)=\left(-2f(x)+2019\right)'=-2f'(x)$, $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=-1\\x=2\\x=4\end{array}\right.$.

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$, ta có bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		-2		-1		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$.

Câu 2. (PHÂN TÍCH BL_PT ĐỀ ĐH VINHL3 -2019.) Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên dưới

x	$-\infty$		-3		-2		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f(1-2x)$ đồng biến trên khoảng

A. $\left(0;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(-\frac{1}{2};1\right)$. **C.** $\left(-2;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{2};3\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=-2f'(1-2x)$

Cách 1:

$$y'=-2f'(1-2x)\geq 0\Leftrightarrow f'(1-2x)\leq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-2x\leq -3\\-2\leq 1-2x\leq 1\\1-2x\geq 3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq 2\\0\leq x\leq\frac{3}{2}\\x\leq -1\end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$, $\left(0;\frac{3}{2}\right)$ và $(2;+\infty)$.

Cách 2:

Từ bảng xét dấu $f'(x)$ ta có

$$y'=-2f'(1-2x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-2x=-3\\1-2x=-2\\1-2x=0\\1-2x=1\\1-2x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=\frac{3}{2}\\x=\frac{1}{2}\\x=0\\x=-1\end{array}\right.$$ (trong đó nghiệm $x=\frac{1}{2}$ là nghiệm bội chẵn)

Bảng xét dấu y' như sau :

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$f'(1-2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$, $\left(0;\frac{3}{2}\right)$ và $(3;+\infty)$.

Cách 3(Trắc nghiệm)

Ta có : $y'\left(-\frac{1}{4}\right)=-2f'\left(\frac{3}{2}\right)<0$, mà $-\frac{1}{4}\in\left(-\frac{1}{2};1\right)$ và $-\frac{1}{4}\in\left(-2;\frac{1}{2}\right)$ nên loại đáp án B và **C.**

$y'\left(\frac{7}{4}\right)=-2f'\left(-\frac{5}{2}\right)<0$, mà $\frac{7}{4}\in\left(\frac{3}{2};3\right)$ nên loại đáp án **D**

Bài toán tổng quát : Xét tính đơn điệu của hàm số $y=f\left[u(x)\right]$ khi biết bảng xét dấu của $f'(x)$ hoặc đồ thị hàm số $f'(x)$.

Phương pháp :

- Xác định $y'=u'(x).f'\left[u(x)\right]$.
- Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ hoặc đồ thị hàm số $f'(x)$ suy ra bảng xét dấu của y'.
- Từ đó kết luận được về khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y=f\left[u(x)\right]$ và có thể phát triển bài toán thành tìm số cực đại, cực tiểu của hàm số.

Câu 3. (KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG) Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(-1;1)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(-1;3)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

$y=f(1-x)\Rightarrow y'=-f'(1-x)$.

Hàm số $y=f(1-x)$ nghịch biến $\Rightarrow -f'(1-x)\le 0 \Leftrightarrow f'(1-x)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-x\ge 1\\ -1\le 1-x\le 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\le 0\\ 1\le x\le 2\end{array}\right.$. Vậy hàm số $y=f(1-x)$ có nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

Câu 4. (Chuyên Vinh Lần 3) Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên dưới

x	$-\infty$		-3		-2		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f(1-2x)$ đồng biến trên khoảng

A. $\left(0;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(-\frac{1}{2};1\right)$. **C.** $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{2};3\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=-2f'(1-2x)\ge 0 \Leftrightarrow f'(1-2x)\le 0$

Từ bảng xét dấu ta có $f'(1-2x)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-2x\le -3\\ -2\le 1-2x\le 1\\ 1-2x\ge 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge 2\\ 0\le x\le \frac{3}{2}\\ x\le -1\end{array}\right.$

Từ đây ta suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{3}{2}\right)$

Câu 5. (THCS-THPT-NGUYỄN-KHUYẾN-TP-HCM-24THÁNG3) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f(2-3x)$ nghịch biến trên khoảng

A. $\left(-\frac{1}{4};0\right)$. **B.** $\left(-\frac{1}{2};0\right)$. **C.** $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. **D.** $\left(0;\frac{1}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Đặt $g(x)=f(2-3x)$. Khi đó

$g'(x)=-3f'(2-3x)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(2-3x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2-3x=-1\\ 2-3x=1\\ 2-3x=2\\ 2-3x=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\frac{1}{3}\\ x=0\\ x=-\frac{1}{3}\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-1/3$		0		$1/3$		1		$+\infty$
-3		$-$	$\|$	$-$	$\|$	$-$	$\|$	$-$	$\|$	$-$	
$f'(2-3x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Vậy, hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $\left(-\frac{1}{4};0\right)$.

Cách 2:

$$g'(x)<0 \Leftrightarrow -3f'(2-3x)<0 \Leftrightarrow f'(2-3x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2-3x<-1\\2<2-3x<3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>1\\-\frac{1}{3}<x<0\end{array}\right.$$

mà $\left(-\frac{1}{4};0\right)\subset\left(-\frac{1}{3};0\right)$ nên hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $\left(-\frac{1}{4};0\right)$.

Câu 6. (Lê Quý Đôn Điện Biên Lần 3) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f\left(x^2-2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x)=f\left(x^2-2\right)$. Ta có: $g'(x)=2x.f'\left(x^2-2\right)$.

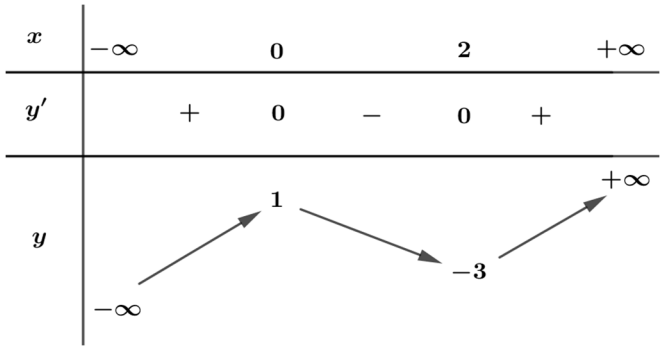
$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\f'\left(x^2-2\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-2=-1\\x^2-2=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=1\\x^2=4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-1\\x=2\\x=-2\end{array}\right..$$

Ta có bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'\left(x^2-2\right)$		$+$	0	$-$	0	$-$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $g'(x)$ ta thấy hàm số $y=f\left(x^2-2\right)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

Câu 7. (THPT Nghèn Lần1) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



Hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Chọn B

$$y'=(2x-2)\,f'\left(x^2-2x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\ f'\left(x^2-2x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-2x=0\\ x^2-2x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=0\\ x=2\\ x=1+\sqrt{3}\\ x=1-\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Lập bảng xét dấu y'

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		0		1		2		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$2x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'\left(x^2-2x\right)$		$+$	0	$-$	0		$+$		0	$-$	0	$+$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu hàm số nghịch biến trên $(0;1)$.

Câu 8. (KHTN Hà Nội Lần 3) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-3;-2)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;0)$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $g(x)=f\left(x^2+2x\right)$. Ta có $g'(x)=f'\left(x^2+2x\right).(2x+2)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=-1\\x^2+2x=-2\\x^2+2x=0\\x^2+2x=3\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=-1\\x=0\\x=-2\\x=1\\x=-3\end{bmatrix}.$$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		1		$+\infty$
$2x+2$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x^2+2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu của $g'(x)$ suy ra hàm số $g(x)=f\left(x^2+2x\right)$ đồng biến trên $(0;1)$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biên thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $g(x)=f\left(2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $\left(-1;\frac{1}{4}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{4};1\right)$. **C.** $\left(1;\frac{5}{4}\right)$. **D.** $\left(\frac{9}{4};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $f'(x)>0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x<-2\\x>3\end{bmatrix}$ và $f'(x)<0\Leftrightarrow -2<x<3.$

Ta có $g'(x)=\left(4x-\frac{5}{2}\right)f'\left(2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)$. Xét $g'(x)<0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\begin{cases}4x-\frac{5}{2}>0\\f'\left(2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)<0\end{cases}\\\begin{cases}4x-\frac{5}{2}<0\\f'\left(2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)>0\end{cases}\end{bmatrix}$.

- $\begin{cases}4x-\frac{5}{2}>0\\f'\left(2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{5}{8}\\-2<2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}<3\end{cases}\Leftrightarrow 1<x<\frac{9}{4}.$

- $\begin{cases} 4x-\frac{5}{2}<0 \\ f'\left(2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<\frac{5}{8} \\ 2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}>3 \end{cases} \\ \begin{cases} x<\frac{5}{8} \\ 2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}<-2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ \frac{1}{4}<x<\frac{5}{8} \end{array}\right.$.

Đối chiếu các đáp án, ta chọn C

Câu 10. (THPT ISCHOOL NHA TRANG) Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

	$-\infty$	-1	1	2	5	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$ 0 $+$	0	$+$ 0	$-$

Cho hàm số nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-1)$ **B.** $(-1;0)$ **C.** $(0;2)$ **D.** $(2;+\infty)$

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=x+3$ khi đó $y(t)=3f(t)-(t-3)^3+12(t-3)$ Ta có

$y'(t)=3f'(t)-3(t-3)^2+12=3f'(t)-(t-1)(t-5)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $t>5$ thì $f'(t)<0;-(t-1)(t-5)<0$ nên hàm số nghịch biến với $t>5$ hay $x>2$.

Câu 11. (Đặng Thành Nam Đề 1) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0 $+$	0 $+$	0	$-$ 0	$+$

Hàm số $y=3f(x+2)-x^3+3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Ta có $y'>0 \Leftrightarrow 3f'(x+2)-3x^2+3>0 \Leftrightarrow f'(x+2)>x^2-1$.

Đặt $t=x+2$, bất phương trình trở thành: $f'(t)>(t-2)^2-1$.

Xét hệ bất phương trình $\begin{cases} (t-2)^2-1<0 \\ f'(t)>0 \end{cases},(I)$.

Ta có $(I) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<t-2<1 \\ \left[\begin{array}{l} 1<t<2 \\ 2<t<3 \end{array}\right. \\ t>4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1<t<3 \\ \left[\begin{array}{l} 1<t<2 \\ 2<t<3 \end{array}\right. \\ t>4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1<t<2 \\ 2<t<3 \end{array}\right.$.

Khi đó $\left[\begin{array}{l} 1<x+2<2 \\ 2<x+2<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x<0 \\ 0<x<1 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$.

Cách 2:

Xét hàm số $y=3f(x+2)-x^3+3x$

$y'=3f'(x+2)-3x^2+3=3\left[f'(x+2)+(1-x^2)\right]$.

Ta có $y'\left(\frac{3}{2}\right)=3\left[f'\left(\frac{7}{2}\right)-\frac{5}{4}\right]<0$ nên loại đáp án A,

D.

$y'(-2)=3\left[f'(0)-3\right]<0$ nên loại đáp án

B.

Vậy ta chọn đáp án

C.

Câu 12. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên Lần2) Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f(x-1)+x^3-12x+2019$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(1;2)$ **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(3;4)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $g(x)=f(x-1)+x^3-12x+2019$, ta có $g'(x)=f'(x-1)+3x^2-12$.

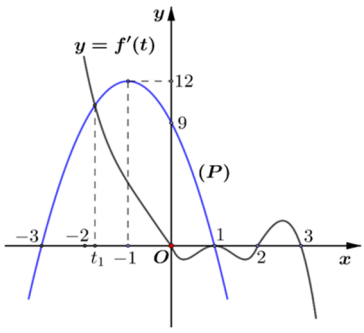
Đặt $t=x-1\Rightarrow x=t+1$

$\Rightarrow g'(x)=f'(t)+3t^2+6t-9=f'(t)-(-3t^2-6t+9)$.

Hàm số nghịch biến khi $g'(x)<0\Leftrightarrow f'(t)<-3t^2-6t+9$ (1).

Dựa vào đồ thị của hàm $f'(t)$ và parabol(P): $y=-3t^2-6t+9$

(Hình bên) ta có:



$(1)\Leftrightarrow t_1<t<1\Rightarrow -3<t<1\Rightarrow -3<x-1<1\Rightarrow -2<x<2$

$\Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên (-2;2)

$\Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên (1; 2).

Câu 13. (Trung-Tâm-Thanh-Tường-Nghệ-An-Lần-2) Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		-1		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Xét hàm số $g(x)=f\left(\frac{x-1}{2}\right)-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2-2x+3$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-1;0)$.

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-4;-1)$.

D. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Ta có $g'(x)=\frac{1}{2}f'\left(\frac{x-1}{2}\right)-\left(x^2-3x+2\right)$

$$f'\left(\frac{x-1}{2}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x-1}{2}=-\frac{5}{2}\\ \frac{x-1}{2}=-1\\ \frac{x-1}{2}=\frac{1}{2}\\ \frac{x-1}{2}=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-4\\ x=-1\\ x=2\\ x=7\end{array}\right.$$

$$f'\left(\frac{x-1}{2}\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x-1}{2}<-\frac{5}{2}\\ \frac{1}{2}<\frac{x-1}{2}<3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-4\\ 2<x<7\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu cho các biểu thức

x	$-\infty$		-4		-1		0		1		2		7		$+\infty$
$f'\left(\frac{x-1}{2}\right)$		$+$	0	$-$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$-\left(x^2-3x+2\right)$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$g'(x)$				$-$		$-$		$-$						$-$	

Từ bảng xét dấu đáp án B sai, vì $x\in(0;1)\subset(0;2)$ thì $g'(x)<0$. Hàm số nghịch biến.

Cách 2: Thử trực tiếp

Ta có $g'(x)=\frac{1}{2}f'\left(\frac{x-1}{2}\right)-\left(x^2-3x+2\right)$

Đáp án A: chọn $x=-\frac{1}{2}\in(-1;0)$ thì $g'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}f'\left(-\frac{3}{4}\right)-\frac{15}{4}<0$

Đáp án B: chọn $x=\frac{1}{2}\in(0;2)$ thì $g'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}f'\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{4}<0$, sai

Tương tự cho các đáp án còn lại.

Câu 14. (GIỮA-HKII-2019-NGHĨA-HƯNG-NAM-ĐỊNH) Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=3f\left(x+2\right)-2x^3-\frac{3}{2}x^2+3x+2019$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Chọn C

$y=3f\left(x+2\right)-2x^3-\frac{3}{2}x^2+3x+2019$

$\Rightarrow y' = 3f'(x+2) - 6x^2 - 3x + 3 = 3\left[f'(x+2) - \left(2x^2 + x - 1\right)\right]$.

Đặt $t = x+2 \Rightarrow x = t-2$. Ta có:

$$f'(x+2) - \left(2x^2 + x - 1\right) = f'(t) - \left(2t^2 - 7t + 5\right)$$

t	$-\infty$		1		2		$\frac{5}{2}$		3		4		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$2t^2 - 7t + 5$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	

Dựa vào bảng biến thiên hàm $f'(t)$ và hàm $g(t) = 2t^2 - 7t + 5$ ta thấy

Nếu $t < 1 \Leftrightarrow x + 2 < 1 \Leftrightarrow x < -1$ thì

$f'(t) < \left(2t^2 - 7t + 5\right), \forall t < 1 \Leftrightarrow y' < 0, \forall x < -1$. Loại

B.

Nếu $t \in (3;4) \Leftrightarrow x \in (1;2)$ thì

$f'(t) < \left(2t^2 - 7t + 5\right), \forall t \in (3;4) \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (1;2)$. Loại A,

D.

Nếu $t \in \left(1;\frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow x \in \left(-1;\frac{1}{2}\right)$ thì

$f'(t) > \left(2t^2 - 7t + 5\right), \forall t \in \left(1;\frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in \left(-1;\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow$ Hàm số đã cho đồng biến trên $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.

Vậy đáp án đúng là đáp án

C.

Câu 15. (CỤM TRƯỜNG SÓC SƠN MÊ LINH HÀ NỘI) Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 3$ và hàm số $g(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-6		6		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

Hàm số $y = g\left(f(x)\right)$ nghịch biến trên khoảng

A. $(-1;1)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(0;4)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x + 5$; $f'(x) = 3(x-1)^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$y' = \left[g\left(f(x)\right)\right]' = g'\left(f(x)\right).f'(x)$.

$y' < 0 \Leftrightarrow g'\left(f(x)\right) < 0 \Leftrightarrow -6 < f(x) < 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 5x + 9 > 0 \\ x^3 - 3x^2 + 5x - 3 < 0 \end{cases}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x^2-4x+9)>0 \\ (x-1)(x^2-2x+3)<0 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<1.$

Câu 16. (THPT PHỤ DỰC – THÁI BÌNH) Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Đặt $g(x)=f(x^2-2x+2)+x^3-3x^2-6x$.

Xét các khẳng định

i) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

ii) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

iii) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$.

Số khẳng định đúng trong các khẳng định trên là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x)=(2x-2)f'(x^2-2x+2)+3x^2-6x-6$.

Do $g'\left(\frac{5}{2}\right)=3.f'\left(\frac{13}{4}\right)-\frac{9}{4}<0$ vì $f'\left(\frac{13}{4}\right)<0$ (dựa vào bảng dấu của $f'(x)$), do đó hàm số $g(x)$ không thể đồng biến trên khoảng $(2;3)$. Vậy mệnh đề 1) là sai.

Do $g'\left(\frac{1}{2}\right)=-1.f'\left(\frac{5}{4}\right)-\frac{33}{4}<0$ vì $f'\left(\frac{5}{4}\right)>0$ (dựa vào bảng dấu của $f'(x)$), do đó hàm số $g(x)$ không thể đồng biến trên khoảng $(0;1)$. Vậy mệnh đề 2) là sai.

Với $x\in(4;+\infty)=E$, ta thấy:

$x^2-2x+2=(x-1)^2+1>10\Rightarrow f'(x^2-2x+2)>0$ và $2x-2>0$ nên

$(2x-2).f'(x^2-2x+2)>0,\forall x\in(4;+\infty)$ (a);

Dễ thấy $3x^2-6x-6>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<1-\sqrt{3} \\ x>1+\sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow 3x^2-6x-6>0,\forall x\in(4;+\infty)$ (b).

Cộng theo vế của (a) và (b) suy ra $g'(x)=(2x-2)f'(x^2-2x+2)+3x^2-6x-6>0,\forall x\in(4;+\infty)$.

Vậy $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$. Do đó 3) là mệnh đề đúng.

Câu 17. (Quỳnh Lưu Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-4		-1		2		7		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f(2x+1)+\frac{2}{3}x^3-8x+2019$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $(-1;7)$.

Lời giải

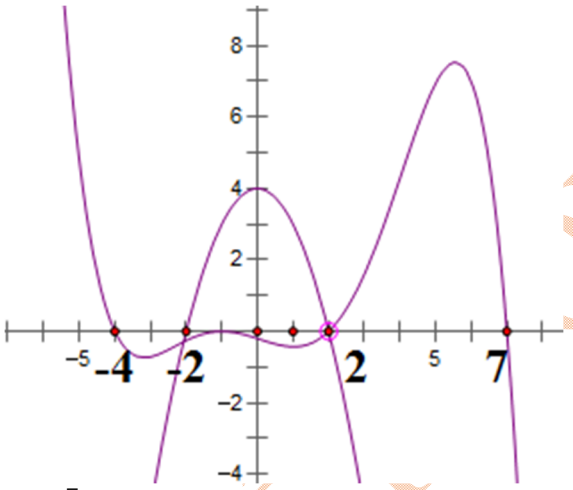
Chọn C

$g(x)=f(2x+1)+\frac{2}{3}x^3-8x+2019$.

$g'(x)=2f'(2x+1)+2x^2-8$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(2x+1)=4-x^2\,(1)$.

Hàm số $f'(2x+1)$ có bảng xét dấu như hàm số $f'(x)$ nên ta có:



$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c}2x+1=x_1\,(-4<x_1<-2)\\2x+1=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{x_1-1}{2}\left(-\frac{5}{2}<x<\frac{-3}{2}\right)\\x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu của $g'(x)$ như sau:

	$-\infty$ $\frac{x_1-1}{2}$ -1 $\frac{1}{2}$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$ 0 $-$ 0 $+$

Câu 18. (Lý Nhân Tông) Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=3f(-x+2)+x^3+3x^2-9x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(-2;1)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Theo đề bài: $y'=\left[3f(-x+2)+x^3+3x^2-9x\right]'=-3f'(-x+2)+3x^2+6x-9$.

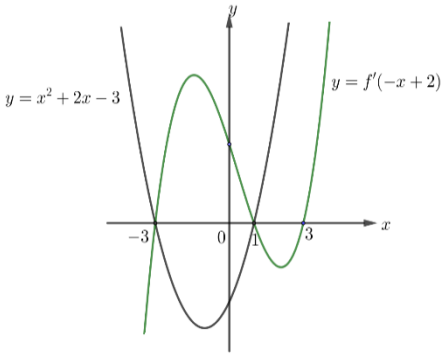
Để hàm số nghịch biến $\Leftrightarrow y'<0\Leftrightarrow -3f'(-x+2)+3x^2+6x-9<0$

$\Leftrightarrow f'(-x+2)>x^2+2x-3$

Từ BXD $f'(x)$ ta có BXD của $f'(-x+2)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		0		1		3		$+\infty$
$f'(-x+2)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ BXD trên, ta có hình dạng đồ thị của hàm số $y'=f'(-x+2)$ và $y=x^2+2x-3$ được vẽ trên cùng hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Dựa vào đồ thị ta có hàm số nghịch biến trên $(-3;1)$.

Câu 19. (KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG) Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=g(x)=f\left(x^2\right)+\frac{x^4}{2}+\frac{2x^3}{3}-6x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-4;-3)$. **D.** $(-6;-5)$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Giải nhanh

Ta có: $y'=2x.f'\left(x^2\right)+2x^3+2x^2-12x$

+ Chọn $x=-5,5\in(-6;-5) \Rightarrow y'(-5,5)=-11f'(30,25)-\frac{825}{4}<0$

vì theo BBT $30,25>4\Rightarrow f'(30,25)>0\Rightarrow -11f'(30,25)<0$ nên loại bỏ đáp án **D**

+ Tương tự chọn $x=-4,5$ ta đều được $y'(-4,5)<0$ nên loại bỏ đáp án **C**

+ Chọn $x=1,5$ ta đều được $y'(1,5)=3f'(2,25)-\frac{27}{4}<0$

vì theo BBT $1<2,25<4\Rightarrow f'(2,25)<0\Rightarrow 3f'(2,25)<0$ nên loại bỏ đáp án **B**

Cách 2: Tự luận

Ta có $y'=2x.f'\left(x^2\right)+2x^3+2x^2-12x=2x\left[f'\left(x^2\right)+x^2+x-6\right]$

$f'\left(x^2\right)=0\Leftrightarrow x\in\{\pm1;\pm2\}$

Mặt khác: $x^2+x-6=0\Leftrightarrow x=2\vee x=-3$

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x^2)$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
x^2+x-6		$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	kxđ	|	$+$	0	kxđ	0	kxđ	|	$-$	0	$+$	

(kxđ: không xác định)

Vậy hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 20. (THPT ĐỒ LƯƠNG 3 LẦN 2) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Gọi $g(x)=2f(1-x)+\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2-5$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

C. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Xét $g'(x)=-2f'(1-x)+x^3-3x^2+2x=-2f'(1-x)-(1-x)^3+1-x$

Đặt $1-x=t$, khi đó $g'(x)$ trở thành $h(t)=-2f'(t)-t^3+t$

Bảng xét dấu

t	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
$-2f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
t^3-t		$-$	|	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(t)$	Không xác định		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		

Từ bảng xét dấu ta suy ra $h(t)$ nhận giá trị dương trên các khoảng $(-2;-1)$ và $(0;1)$,nhận giá trị âm trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

$\Rightarrow$ hàm số $g'(x)$ nhận giá trị dương trên $(2;3)$ và $(0;1)$,nhận giá trị âm trên $(1;2)$ và $(-\infty;0)$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 21. (THPT-Ngô-Quyền-Hải-Phòng-Lần-2-2018-2019-Thi-24-3-2019) Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn:

x	$-\infty$		-2		0		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(3-x)-x-\sqrt{x^2+2}$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(3;5)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(2;6)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=-f'(3-x)-1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}} \Leftrightarrow y'=-\left(f'(3-x)+1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}\right)$.

Ta thấy $f'(3-x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2<3-x<0\\3-x>3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3<x<5\\x<0\end{array}\right.$;

Trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(3;5)$ thì $1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$ đều có giá trị dương.

Suy ra trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(3;5)$ thì: $f'(3-x)+1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}>0 \Rightarrow y'<0$

Vậy hàm số $y=f(3-x)-x-\sqrt{x^2+2}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(3;5)$.

Câu 22. (Chuyên Phan Bội Châu Lần2) Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=2f(1-x)+\sqrt{x^2+1}-x$ nghịch biến trên những khoảng nào dưới đây

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-3;-2)$.

Lời giải.

Chọn C

$y'=-2f'(1-x)+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1$.

Có $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1<0,\ \forall x\in(-2;0)$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(1-x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

$\Rightarrow -2f'(1-x)<0,\ \forall x\in(-2;0)$

$\Rightarrow -2f'(1-x)+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1<0,\ \forall x\in(-2;0)$.

Câu 23. (Đặng Thành Nam Đề 5) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Biết $1<f(x)<3, \forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=g(x)=f(f(x))+x^3-6x^2-1$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(3;4)$. **B.** $(-3;-2)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-2;1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g'(x)=f'(x)f'(f(x))+3x^2-12x$.

Hàm số nghịch biến nên $g'(x)=f'(x)f'(f(x))+3x^2-12x<0$.

Dựa vào bảng xét dấu $f'(x)$ đề bài cho:

Vì $1<f(x)<3, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f'(f(x))\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Xét trường hợp: $\begin{cases} f'(x)<0 \\ 3x^2-12x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<1 \\ 3<x<4 \end{array}\right. \\ 0<x<4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<1 \\ 3<x<4 \end{array}\right.$. Chọn đáp án **A.**

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x		1		2		3		4	
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	3	↘	1	↗	2	↘	0	↗ $+\infty$

Hàm số $y=(f(x))^3-3.(f(x))^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(2;3)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=3.(f(x))^2.f'(x)-6.f(x).f'(x)$

$=3f(x).f'(x).[f(x)-2]$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \quad (1) \\ f(x)=2 \quad (2) \\ f'(x)=0 \quad (3) \end{array}\right.$.

$(1) \Leftrightarrow x\in\{x_1,4 \mid x_1<1\}$

$(2) \Leftrightarrow x\in\{x_2,x_3,3,x_4 \mid x_1<x_2<1<x_3<2;4<x_4\}$.

$(3) \Leftrightarrow x\in\{1,2,3,4\}$

Lập bảng xét dấu ta có

x	$-\infty$		x_1		x_2		1		x_3		2		3		4		x_4		$+\infty$
f (x)	-	0	+		+		+		+		+		+	0	+		+		
f (x) - 2	-		-	0	+		+	0	-		-	0	-		-	0	+		
f '(x)	+		+		+	0	-		-	0	+	0	-	0	+		+		
y'	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+		

Do đó ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.

NHẬN XÉT

Bài toán xét dấu y'. Do đó lưu ý kỹ thuật xét dấu sau

Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ và vô nghiệm trên khoảng $(a;b)$. Khi đó biểu thức $A=f(x)$ không đổi dấu trên khoảng $(a;b)$

+ Chọn bất kỳ $\alpha \in (a;b)$

Nếu $f(\alpha)>0$ suy ra $f(x)>0, \forall x \in (a;b)$

Nếu $f(\alpha)<0$ suy ra $f(x)<0, \forall x \in (a;b)$

Lời giải trên của tác giả chúng ta có thể lập BBT gọn hơn.

x	$-\infty$		x_1		x_2		1		x_3		2		3		4		x_4		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	

Bản chất xét dấu y' do đó với trắc nghiệm chúng ta còn có những con đường tiếp cận bài toán

Cách 2. Ta có $y'=3.f^2(x).f'(x)-6.f(x).f'(x)=3.f(x).f'(x).(f(x)-2)$

Xét dấu y' trên từng khoảng đáp án.

Chọn $a \in (1;2)$ và a rất gần 2 suy ra $y'(a)>0$. Loại đáp án A

$y'\left(\frac{7}{2}\right)>0$. Loại đáp án B

$y'(0)>0$. Loại đáp C

Cách 3. Ta có $y'=3.f(x).f'(x).(f(x)-2)$.

Vì cần xét dấu y' quan sát xét dấu $f(x)$ với 0 và 2. Nhìn bảng biến thiên bài toán xuất hiện giá trị $f(x)$ ứng với 1, 2, 0 tương ứng chúng ta nhìn vào khoảng $(2;3)$.

Ta có $f'_{(2;3)}(x)>0, 1<f_{(2;3)}(x)<2 \Rightarrow y'<0, \forall x \in (2;3)$.

Câu 25. (SỞ QUẢNG BÌNH NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên. Hàm số $y=e^{3f(2-x)+1}+3^{f(2-x)}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây.

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

A $(1;+\infty)$ **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-1;3)$. **D.** $(-2;1)$.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng đạo hàm ta thấy $f'(x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ 1<x<4 \end{array}\right.$

$y=e^{3f(2-x)+1}+3^{f(2-x)}$

$\Rightarrow y'=-3.f'(2-x).e^{3f(2-x)+1}-f'(2-x).3^{f(2-x)}.\ln 3$

$\Leftrightarrow y'=-f'(2-x).\left(3.e^{3f(2-x)+1}+3^{f(2-x)}.\ln 3\right)$

Để hàm số đồng biến thì $y'=-f'(2-x).\left(3.e^{3f(2-x)+1}+3^{f(2-x)}.\ln 3\right)>0$

$\Leftrightarrow -f'(2-x)>0$ (Vì $3.e^{3f(2-x)+1}+3^{f(2-x)}.\ln 3>0$)

$\Leftrightarrow f'(2-x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-x<-1 \\ 1<2-x<4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ -2<x<1 \end{array}\right.$

$\Rightarrow x \in (-2;1)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 26. (Lương Thế Vinh Lần 3) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f(x+m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết suy ra hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-1;1)$, $(1;3)$ và liên tục tại $x=1$ nên đồng biến trên $(-1;3)$.

Ta có $g'(x)=f'(x+m)$ và $x\in(0;2)\Leftrightarrow x+m\in(m;m+2)$.

$g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)\Leftrightarrow(m;2+m)\subset(-1;3)\Leftrightarrow\begin{cases}m\geq -1\\2+m\leq 3\end{cases}\Leftrightarrow -1\leq m\leq 1$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên m có 3 giá trị là $m=-1;m=0;m=1$.

Câu 27. (Đặng Thành Nam Đề 6) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ bên.

x	$-\infty$		-10		-2		3		8		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=f(x^2+4x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y=f(x^2+4x+m)$.

Ta có: $y'=(2x+4)f'(x^2+4x+m)$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)\Leftrightarrow y'=(2x+4)f'(x^2+4x+m)\leq 0,\forall x\in(-1;1)$

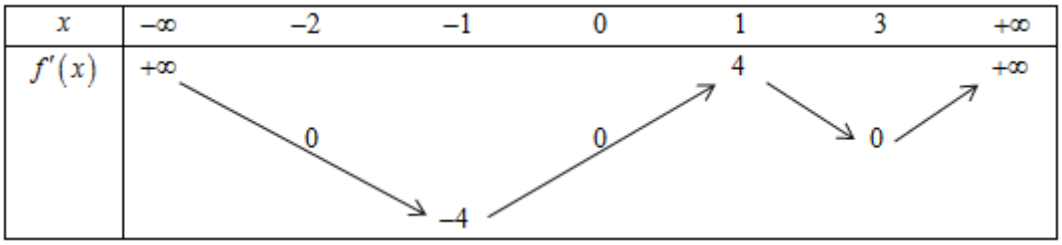
(chú ý rằng $2x+4>0,\forall x\in(-1;1)$)

$\Leftrightarrow f'(x^2+4x+m)\leq 0,\forall x\in(-1;1)\Leftrightarrow -2\leq x^2+4x+m\leq 8,\forall x\in(-1;1)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m\geq g(x)=-x^2-4x-2\\m\leq h(x)=-x^2-4x+8\end{cases},\forall x\in(-1;1)\Leftrightarrow\begin{cases}m\geq \max\limits_{[-1;1]}g(x)=g(-1)=1\\m\leq \min\limits_{[-1;1]}h(x)=h(1)=3\end{cases}\Rightarrow m\in\{1;2;3\}$

(do hàm số $y=-x^2-4x+c$ có $y'=-2x-4<0,\forall x\in(-1;1)$).

Câu 28. (Đặng Thành Nam Đề 10) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=f(3x-1)+x^3-3mx$ đồng biến trên khoảng $(-2;1)$?



A. 8 . **B.** 6 . **C.** 7 . **D.** 5 .

Lời giải

Chọn B

Để hàm số $y=f\left(3x-1\right)+x^3-3mx$ đồng biến biến trên khoảng $\left(-2;1\right)$

$\Leftrightarrow y'\geq 0,\ \forall x\in\left(-2;1\right)$

$\Leftrightarrow 3f'\left(3x-1\right)+3x^2-3m\geq 0,\ \forall x\in\left(-2;1\right)$

$\Leftrightarrow m\leq f'\left(3x-1\right)+x^2,\ \forall x\in\left(-2;1\right)$ (*)

Đặt $k\left(x\right)=f'\left(3x-1\right)$, $h\left(x\right)=x^2$ và $g\left(x\right)=f'\left(3x-1\right)+x^2=k\left(x\right)+h\left(x\right)$

Ta có $\min\limits_{(-2;1)}h\left(x\right)=h\left(0\right)=0$

Từ bảng biến thiên suy ra: $\min\limits_{(-2;1)}f'\left(x\right)=f'\left(-1\right)=-4$.

Do đó ta có: $\min\limits_{(-2;1)}f'\left(3x-1\right)=f'\left(-1\right)=-4$ khi $3x-1=-1\Leftrightarrow x=0$

$\Rightarrow \min\limits_{(-2;1)}k\left(x\right)=k\left(0\right)=-4$

Do đó $\min\limits_{(-2;1)}g\left(x\right)=g\left(0\right)=k\left(0\right)+h\left(0\right)=0-4=-4$

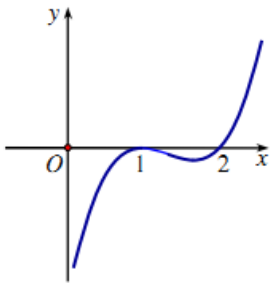
Từ (*) ta có $m\leq f'\left(3x-1\right)+x^2,\ \forall x\in\left(-2;1\right)\Leftrightarrow m\leq \min\limits_{(-2;1)}g\left(x\right)\Leftrightarrow m\leq -4$

Mà $m\in\left(-10;10\right)\Rightarrow m\in\left\{-9,...,-4\right\}$

Vậy có tất cả 6 số nguyên thoả mãn.

DỰA VÀO ĐỒ THỊ

Câu 29. Hình bên là đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$. Hỏi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây



A. $\left(2;+\infty\right)$ **B.** $\left(1;2\right)$ **C.** $\left(0;1\right)$ **D.** $\left(0;1\right)$ và $\left(2;+\infty\right)$

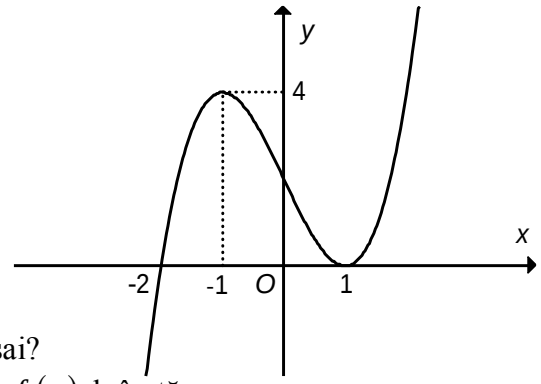
Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị $f'\left(x\right)$ ta có $f'\left(x\right)>0$ khi $x\in\left(2;+\infty\right)\Rightarrow$ hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(2;+\infty\right)$

Câu 30. Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\ \left(a\neq 0\right)$. Biết rằng hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm là $f'\left(x\right)$ và hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Khi đó nhận xét nào sau đây sai?

A. Trên $(-2;1)$ thì hàm số $f(x)$ luôn tăng.

B. Hàm $f(x)$ giảm trên đoạn có độ dài bằng 2.

C. Hàm $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

D. Hàm $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$

Lời giải

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta thấy:

- $f'(x)>0$ khi $\left[\begin{array}{l}-1<x<1\\x>1\end{array}\right.\longrightarrow f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-2;1)$, $(1;+\infty)$.

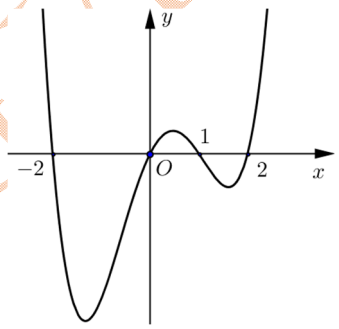
Suy ra A và C đều đúng.

- $f'(x)<0$ khi $x<-2\longrightarrow f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

Suy ra D đúng, B sai.

Chọn B

Câu 31. (Hùng Vương Bình Phước) Cho hàm số $y=f(x)$, biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên



Hàm số $y=f(2-x)+2019$ đồng biến trên các khoảng

A. $(-2;0)$ và $(1;2)$. **B.** $(-2;0)$ và $(2;4)$. **C.** $(0;1)$ và $(1;2)$. **D.** $(0;1)$ và $(2;4)$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

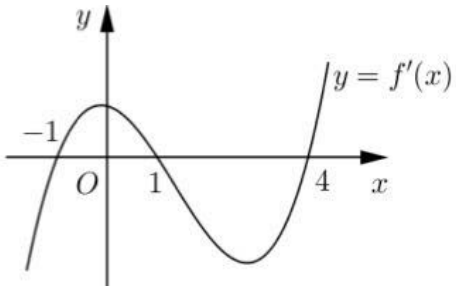
Ta có: $y'=-f'(2-x)$. Suy ra $y'=0\Leftrightarrow f'(2-x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-x=-2\\2-x=0\\2-x=1\\2-x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=2\\x=1\\x=0\end{array}\right.$

Bảng xét dấu $y'=-f'(2-x)$:

x	$-\infty$		0		1		2		4		$+\infty$
$y' = -f'(2-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Suy ra hàm số đồng biến trên $(0;1),(2;4)$.

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$.Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y=f(x^2)$ đồng biến trên khoảng:



A. $(1;2)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(-1;1)$.

Lời giải

Chọn C

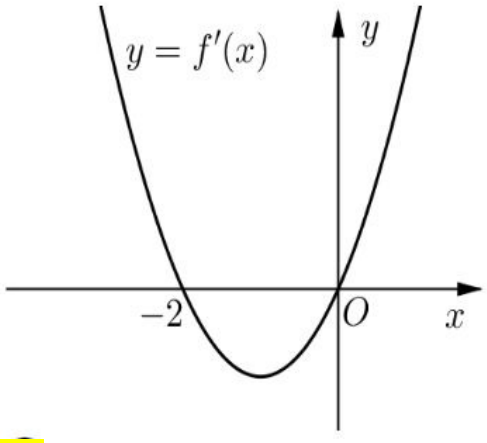
Ta có: $\left(f\left(x^2\right)\right)'=\left(x^2\right)'.f'\left(x^2\right)=2xf'\left(x^2\right)$

Ta có: $\left(f\left(x^2\right)\right)'>0\Leftrightarrow 2xf'\left(x^2\right)>0$.

TH1: $\begin{cases}x>0\\f'\left(x^2\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\-1<x^2<1\vee x^2>4\end{cases}\Leftrightarrow 0<x<1\vee x>2$.

TH2: $\begin{cases}x<0\\f'\left(x^2\right)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<0\\x^2<-1\vee 1<x^2<4\end{cases}\Leftrightarrow -2<x<-1$.

Câu 33. (THPT LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NGÃI) Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-1\right)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(-1;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=2x.f'\left(x^2-1\right)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

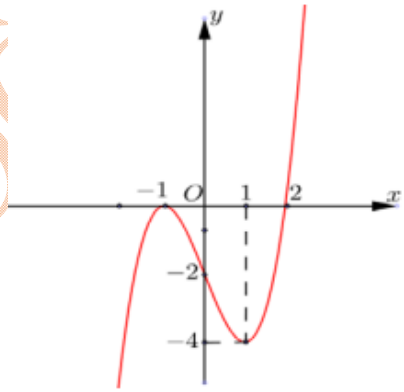
$$y'=0\Leftrightarrow 2x.f'\left(x^2-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-1=-2\\x^2-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=-1\\x^2=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-1\end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗	

Nhìn bảng biến thiên hàm số $y=f(x^2-1)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 34. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên R. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$.



Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2-2\right)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Hàm số $g\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left(-\infty;-2\right)$

B. Hàm số $g\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(2;+\infty\right)$

C. Hàm số $g\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left(-1;0\right)$

D. Hàm số $g\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left(0;2\right)$

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số

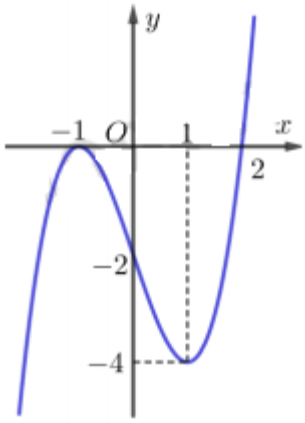
$g(x)=f(x^2-2)$

$g'(x)=2x.f'(x^2-2)$

$$g'(x)=0<=>2x.f(x^2-2)=0<=>\left[\begin{array}{l}x=0\\f'(x^2-2)=0\end{array}\right.<=>\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-2=-1\\x^2-2=2\end{array}\right.<=>\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=\pm2\end{array}\right.$$

Ta lập bảng xét dấu => đáp án D

Câu 35. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ.



ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Xét hàm số $g(x)=f\left(2-x^2\right)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x=2$ **B.** Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;2)$

C. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$ **D.** Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-1;0)$

Lời giải

Chọn D

Dễ thấy $f'(x)=(x+1)^2(x-2)$

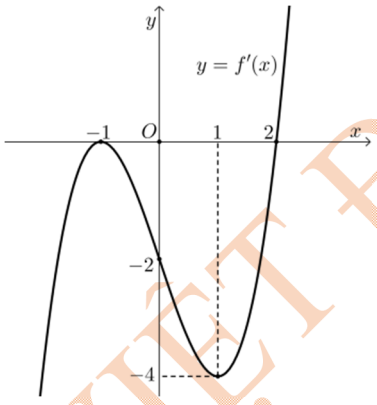
Do $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua điểm $x=2$ nên $f(x)$ đạt cực trị tại $x=2$

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;2)$ do $f'(x)<0(\forall x<2)$

Đặt $t=2-x^2\Rightarrow g(x)=f(t)\Rightarrow g'(x)=f'(t).t'(x)=f'\left(2-x^2\right)(-2x)$

$=\left(2-x^2+1\right)^2\left(2-x^2-2\right)(-2x)=\left(3-x^2\right)^2.3x^2\Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

Câu 36. (SỞ GD & ĐT CÀ MAU) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ sau



Hàm số $g(x)=f\left(x^2-2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;3)$. **B.** $(-3;-1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

$g'(x)=\left[f\left(x^2-2\right)\right]'=\left(x^2-2\right)'.f'\left(x^2-2\right)=2x.f'\left(x^2-2\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=0\\f'\left(x^2-2\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-2=-1\\x^2-2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=\pm2\end{array}\right.$$

$$f'\left(x^2-2\right)>0\Leftrightarrow x^2-2>2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>2\\x<-2\end{array}\right.,\ f'\left(x^2-2\right)\le0\Leftrightarrow x^2-2\le2\Leftrightarrow-2\le x\le2.$$

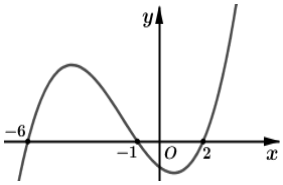
Bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x^2-2)$		$+$	0	$-$	0	$-$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Vậy $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 37. Cho hàm số $y=f(x)$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $y=f(3-x^2)$ đồng biến trên khoảng

A. $(0;1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(-2;-1)$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Ta có: $\left[f(3-x^2)\right]'=0\Leftrightarrow f'(3-x^2).(-2x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'(3-x^2)=0\end{array}\right.$.

Từ đồ thị hàm số suy ra $f'(3-x^2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3-x^2=-6\\3-x^2=-1\\3-x^2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm3\\x=\pm2\\x=\pm1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

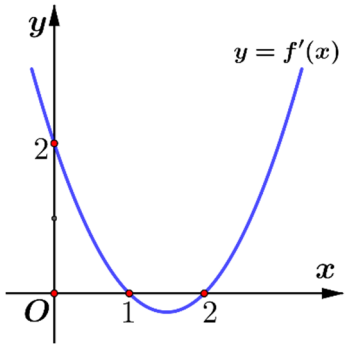
x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘		↗		↘		↗		↘		↗

Lập bảng xét dấu của hàm số $y=f(3-x^2)$ ta được hàm số đồng biến trên $(-1;0)$.

Cách 2: Ta có $g'(x)=-2xf'(3-x^2)$. Hàm số $g(x)$ đồng biến $\Leftrightarrow g'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>0\\f'(3-x^2)<0\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}x<0\\f'(3-x^2)>0\end{array}\right.\end{array}\right.$

$\xleftarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>0\\\left[\begin{array}{l}3-x^2<-6\\-1<3-x^2<2\end{array}\right.\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}x<0\\\left[\begin{array}{l}-6<3-x^2<-1\\3-x^2>2\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>0\\\left[\begin{array}{l}x^2>9\\4>x^2>1\end{array}\right.\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}x<0\\\left[\begin{array}{l}4<x^2<9\\x^2<1\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\2>x>1\\-3<x<-2\\-1<x<0\end{array}\right.$.

Câu 38. **(Chuyên-Thái-Nguyên-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$.



ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Hàm số $g(x)=f\left(x-x^2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

• Từ đồ thị ta thấy: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

• Ta có: $g'(x)=\left[f\left(x-x^2\right)\right]'=\left(x-x^2\right)'.f'\left(x-x^2\right)=(1-2x).f'\left(x-x^2\right)$;

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-2x=0 \\ f'\left(x-x^2\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x-x^2=1 \\ x-x^2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗		↘	

Vậy hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Cách 2:

• Ta có: $g'(x)=\left[f\left(x-x^2\right)\right]'=\left(x-x^2\right)'.f'\left(x-x^2\right)=(1-2x).f'\left(x-x^2\right)$.

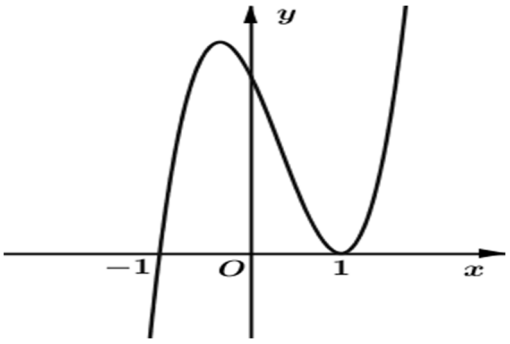
• Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$

$\Leftrightarrow g'(x)\le 0,\ \forall x\in(a;b)$ và $g'(x)=0$ chỉ tại hữu hạn điểm thuộc khoảng $(a;b)$.

• Chọn $x=0$ ta có: $g'(0)=(1-2.0).f'(0)=f'(0)>0$.

Suy ra loại các đáp án **A**, **B**, **D**. Vậy chọn đáp án **C**

Câu 39. (THTT lần 5) Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $g(x)=f\left(x^2+x-1\right)$ đồng biến trên khoảng



ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $(0;1)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị ta có: $f'(x)=a(x+1)(x-1)^2$ với $a>0$

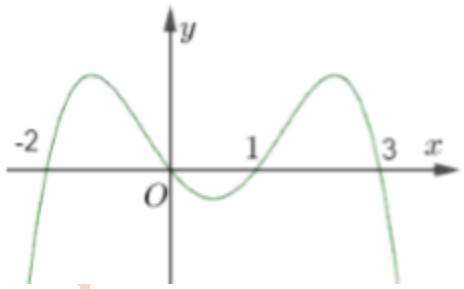
$$g'(x)=(2x+1)f'(x^2+x-1)=a(2x+1)(x^2+x)(x^2+x-2)^2$$
$$=ax(2x+1)(x+1)(x-1)^2(x+2)^2$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	-1	$\frac{-1}{2}$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	-	0	+	0	-	0	+	0	+
$g(x)$	↘		↗		↘		↗		

Dựa vào bảng biến thiên chọn A.

Câu 40. (THANH CHƯƠNG 1 NGHỆ AN 2019 LẦN 3) Cho hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau



Hàm số $y=f\left(x^2+2x+3\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;+\infty)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-2;-1)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x)=f\left(x^2+2x+3\right)\Rightarrow g'(x)=2(x+1)f'\left(x^2+2x+3\right)$.

Do $x^2+2x+3=(x+1)^2+2\geq 2$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có:

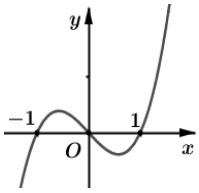
$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=0\\f'\left(x^2+2x+3\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x^2+2x+3=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=0\\x=-2\end{array}\right.$$

Ta có bảng xét dấu $g'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	−	0	+	0	−

Suy ra hàm số $y=f\left(x^2+2x+3\right)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-2;-1)$ và $(0;+\infty)$

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x)=f(x^3)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn C

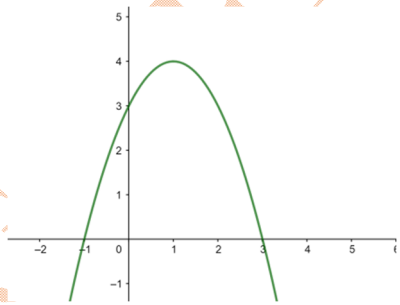
Ta có $g'(x)=3x^2f'(x^3)$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\f'(x^3)=0\end{array}\right.\xleftrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)}\left[\begin{array}{l}x^2=0\\x^3=0\\x^3=-1\\x^3=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
g		↘		↗		↘		↗

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn C**

Câu 42. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ sau



Hàm số $g(x)=f(2x^4-1)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$. **C.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

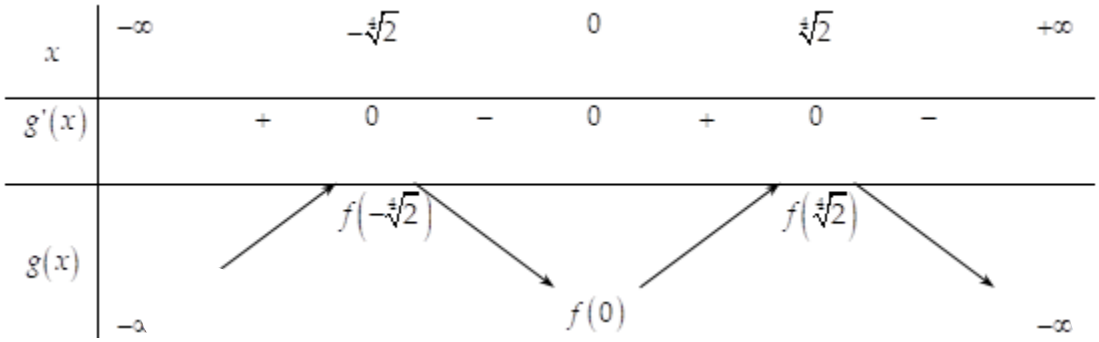
Chọn B

Ta có $g'(x)=8x^3f'(2x^4-1)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3=0\\f'(2x^4-1)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\2x^4-1=-1\\2x^4-1=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\sqrt[4]{2}\\x=-\sqrt[4]{2}\end{array}\right.$$

(Trong đó $x=0$ là nghiệm bội lẻ (bội 7)).

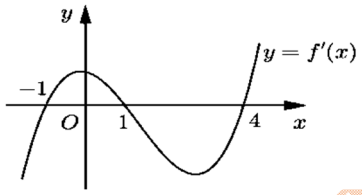
Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ và dấu của $g'(x)$, ta có BBT như sau:



$\Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $\left(-\infty;-\sqrt[4]{2}\right)$ và $\left(0;\sqrt[4]{2}\right)$.

Vậy $g(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Câu 43. (SGD-Nam-Định-2019) Cho hàm số y=f(x) có đồ thị y=f '(x) như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y=f(3-2x)+2019$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(1;2)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(-1;1)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x)=f(3-2x)+2019\Rightarrow g'(x)=-2f'(3-2x)$.

Cách 1: Hàm số nghịch biến khi $g'(x)=-2f'(3-2x)<0\Leftrightarrow f'(3-2x)>0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<3-2x<1\\3-2x>4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<x<2\\x<\frac{-1}{2}\end{array}\right.$. Chọn đáp án A

Cách 2: Lập bảng xét dấu

$$g'(x)=-2f'(3-2x)=0\Leftrightarrow f'(3-2x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3-2x=-1\\3-2x=1\\3-2x=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=1\\x=\frac{-1}{2}\end{array}\right.$$

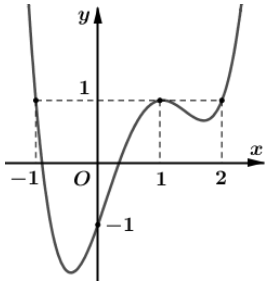
Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		1		2		$+\infty$
g'(x)		-	0	+	0	-	0	+	

Lưu ý : các
h xác đinh dấu của g'(x). Ta lấy $3\in(2;+\infty), g'(3)=-2.f'(3-2.3)=-2f'(-3)>0$ (vì theo đồ thị thì f'(-3) nằm dưới trục Ox nên $f'(-3)<0$)

Câu 44. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Đặt $g(x)=f(x)-x$, khẳng định nào sau đây là đúng?

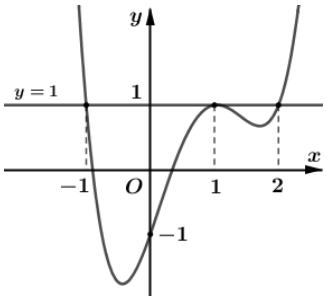
A. $g(2)<g(-1)<g(1)$. **B.** $g(-1)<g(1)<g(2)$. **C.** $g(-1)>g(1)>g(2)$. **D.** $g(1)<g(-1)<g(2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=f'(x)-1 \longrightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=1$.

Số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $d: y=1$ (như hình vẽ bên dưới).



Dựa vào đồ thị, suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

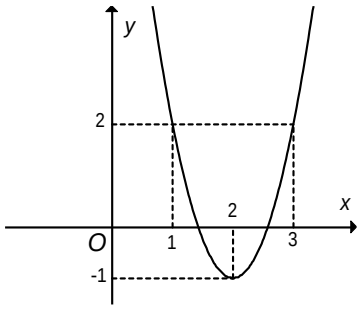
x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
g		↗	$g(-1)$	↘	$g(1)$	↘	$g(2)$	↗	

Bảng biến thiên

Dựa vào bảng biến thiên $\longrightarrow g(2)<g(-1)<g(1)$. Chọn C

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ xét trên khoảng $(2;+\infty)$, ta thấy đồ thị hàm số nằm phía trên đường thẳng $y=1$ nên $g'(x)=f'(x)-1$ mang dấu $+$.

Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x-2)+2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?



A. $(-\infty;2)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Dựa vào đồ thị (C) ta có: $f'(x-2)+2<2, \forall x\in(1;3) \Leftrightarrow f'(x-2)<0, \forall x\in(1;3)$.

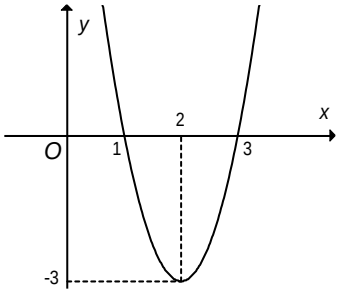
Đặt $x^*=x-2$ thì $f'(x^*)<0, \forall x^*\in(-1;1)$.

Vậy: Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

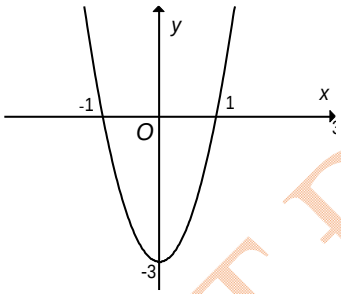
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Phân tích: Cho biết đồ thị của hàm số $f'(x)$ sau khi đã tịnh tiến và dựa vào đó để xét sự đồng biến của hàm số $f(x)$.

Cách khác. Từ đồ thị hàm số $f'(x-2)+2$ tịnh tiến xuống dưới 2 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $f'(x-2)$ (tham khảo hình vẽ bên dưới).

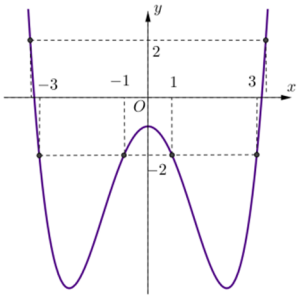


Tiếp tục tịnh tiến đồ thị hàm số $f'(x-2)$ sang trái 2 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $f'(x)$ (tham khảo hình vẽ bên dưới).



Từ đồ thị hàm số $f'(x)$, ta thấy $f'(x)<0$ khi $x\in(-1;1)$.

Câu 46. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x+2)-2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?



A. $(-3;-1),(1;3)$. **B.** $(-1;1),(3;5)$. **C.** $(-\infty;-2),(0;2)$. **D.** $(-5;-3),(-1;1)$.

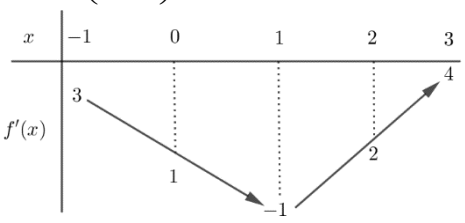
Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị (C) ta có: $f'(x+2)-2<-2,\forall x\in(-3;-1)\cup(1;3)\Leftrightarrow f'(x+2)<0,\forall x\in(-3;-1)\cup(1;3)$.

Đặt $x^*=x+2$ suy ra: $f'(x^*)<0,\forall x^*\in(-1;1)\cup(3;5)$. Vậy: hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1),(3;5)$.

Câu 47. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y=f\left(1-\dfrac{x}{2}\right)+x$ nghịch biến trên khoảng



A. $(2;4)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-4;-2)$.

Lời giải

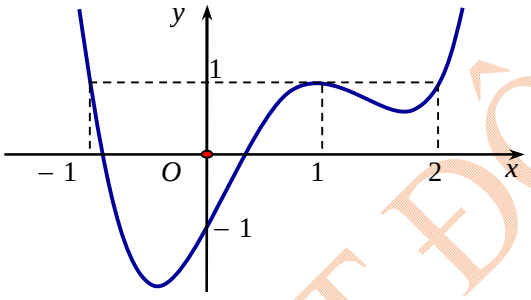
Chọn D

Hàm số $y=f\left(1-\frac{x}{2}\right)+x$ có $y'=\left(f\left(1-\frac{x}{2}\right)+x\right)'=-\frac{1}{2}f'\left(1-\frac{x}{2}\right)+1$.

Để hàm số nghịch biến thì $y'<0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}f'\left(1-\frac{x}{2}\right)+1<0 \Leftrightarrow f'\left(1-\frac{x}{2}\right)>2$.

Khi đó, dựa vào bảng biến thiên ta có $2<1-\frac{x}{2}<3 \Leftrightarrow -4<x<-2$.

Câu 48. (Hoàng Hoa Thám Hưng Yên) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x-1)+\frac{2019-2018x}{2018}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(2;3)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

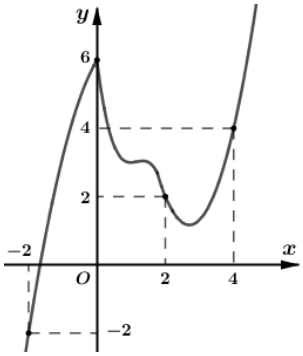
Chọn C

Ta có $g'(x)=f'(x-1)-1$.

$g'(x)\ge 0 \Leftrightarrow f'(x-1)-1\ge 0 \Leftrightarrow f'(x-1)\ge 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1\le -1 \\ x-1\ge 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le 0 \\ x\ge 3 \end{array}\right.$.

Từ đó suy ra hàm số $g(x)=f(x-1)+\frac{2019-2018x}{2018}$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Câu 49. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



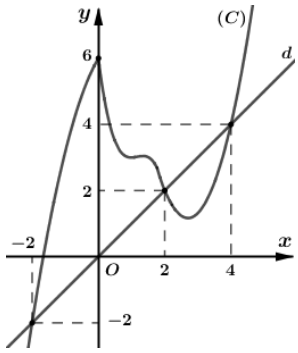
Hàm số $g(x)=2f(x)-x^2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-2;2)$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Chọn B



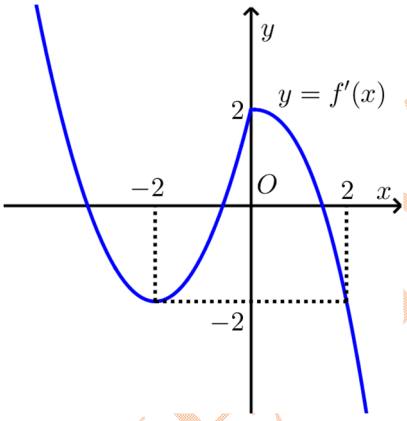
Ta có $g'(x)=2f'(x)-2x \longrightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x$.

Số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $d: y=x$ (như hình vẽ bên dưới).

Dựa vào đồ thị, suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=-2 \\ x=2 \\ x=4 \end{bmatrix}$.

Lập bảng biến thiên (hoặc ta thấy với $x\in(-2;2)$ thì đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên đường thẳng $y=x$ nên $g'(x)>0$) $\longrightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-2;2)$.

Câu 50. (Chuyên Vinh Lần 3) Cho $f(x)$ mà đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Hàm số $y=f(x-1)+x^2-2x$ đồng biến trên khoảng



A. $(1;2)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;-1)$.

Lời giải

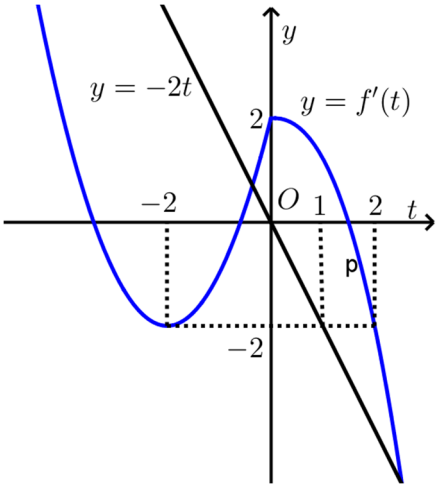
Chọn A

Ta có $y=f(x-1)+x^2-2x$

Khi đó $y'=f'(x-1)+2x-2$. Hàm số đồng biến khi $y'\ge 0 \Leftrightarrow f'(x-1)+2(x-1)\ge 0\ (1)$

Đặt $t=x-1$ thì (1) trở thành: $f'(t)+2t\ge 0 \Leftrightarrow f'(t)\ge -2t$.

Quan sát đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và $y=-2t$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ.



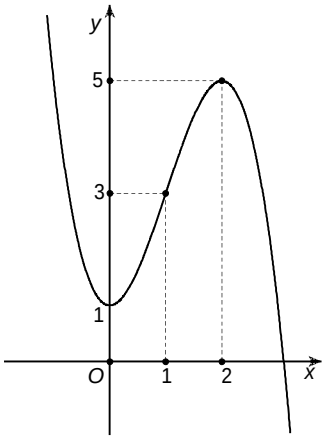
Khi đó ta thấy với $t\in(0;1)$ thì đồ thị hàm số $y=f'(t)$ luôn nằm trên đường thẳng $y=-2t$.

Suy ra $f'(t)+2t>0, \forall t\in(0;1)$. Do đó $\forall x\in(1;2)$ thì hàm số $y=f(x-1)+x^2-2x$ đồng biến.

Câu 51. (Sở Bắc Ninh 2019) Cho $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc 4, có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

vẽ. Hàm số $y=f\left(5-2x\right)+4x^2-10x$ đồng biến trong khoảng nào trong các khoảng sau đây?



A. $\left(3;4\right)$. **B.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};2\right)$. **D.** $\left(0;\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị của $y=f'\left(x\right)$ ta suy ra $y=f'\left(x\right)$ có hai điểm cực trị $A\left(0;1\right),B\left(2;5\right)$.

Ta có $f''\left(x\right)=ax\left(x-2\right)=ax^2-2ax$, do đó $y=f'\left(x\right)=\frac{ax^3}{3}-ax^2+b\ \left(1\right)$.

Thay tọa độ các điểm A,B vào $\left(1\right)$ ta được hệ: $\begin{cases}b=1\\\frac{8a}{3}-4a+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1\\a=-3\end{cases}$.

Vậy $f'\left(x\right)=-x^3+3x^2+1$.

Đặt $g\left(x\right)=f\left(5-2x\right)+4x^2-10x$ hàm có TXĐ $\mathbb{R}$.

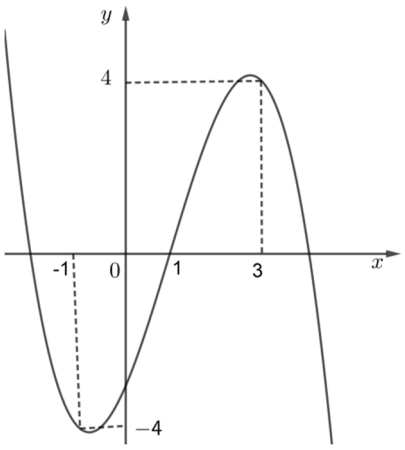
Đạo hàm $g'\left(x\right)=-2\left[f'\left(5-2x\right)-4x+5\right]=-4\left(4x^3-24x^2+43x-22\right)$, $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=\frac{4\pm\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$

Ta có bảng xét dấu của $g'\left(x\right)$

x	$-\infty$		$\frac{4-\sqrt{5}}{2}$		2		$\frac{4+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Câu 52. (Sở Cần Thơ 2019) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên R và có đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ dưới.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Hàm số $y=f(x)-x^2+2x$ nghịch biến trên khoảng

A. $(-1;2)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

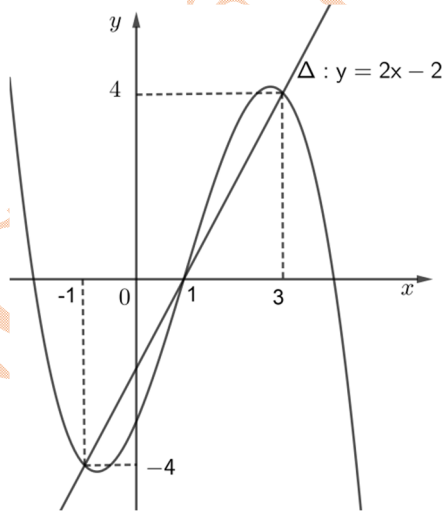
Chọn C

Đặt $y=g(x)=f(x)-x^2+2x$.

Ta có: $g'(x)=(f(x)-x^2+2x)'=f'(x)-2x+2$.

$\Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=2x-2$.

Số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ chính bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $(\Delta): y=2x-2$ (như nhình vẽ dưới).



Dựa vào đồ thị ta thấy $g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \\ x=3 \end{cases}$

Dấu của $g'(x)$ trên khoảng $(a;b)$ được xác định như sau:

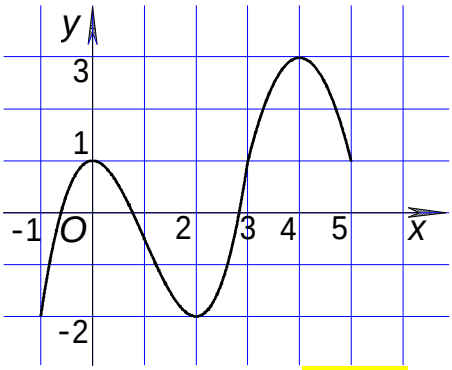
Nếu trên khoảng $(a;b)$ đồ thị hàm $f'(x)$ nằm hoàn toàn phía trên đường thẳng $(\Delta): y=2x-2$ thì $g'(x)\geq 0 \ \forall x\in(a;b)$.

Nếu trên khoảng $(a;b)$ đồ thị hàm $f'(x)$ nằm hoàn toàn phía dưới đường thẳng $(\Delta): y=2x-2$ thì $g'(x)\leq 0 \ \forall x\in(a;b)$.

Dựa vào đồ thị ta thấy trên $(-1;1)$ đồ thị hàm $f'(x)$ nằm hoàn toàn phía dưới đường thẳng $(\Delta): y=2x-2$ nên $g'(x)\leq 0 \ \forall x\in(-1;1)$.

Do đó hàm số $y=f(x)-x^2+2x$ nghịch biến trên $(-1;1)$ mà $(0;1)\subset(-1;1)$ nên hàm số nghịch biến trên $(0;1)$.

Câu 53. (KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình bên. Hàm số $y=-2f(2-x)+x^2$ nghịch biến trên khoảng



A. $(-3;-2)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Giải nhanh

Ta có: $y'=2f(2-x)+2x$.

+ Chọn $x=-2,1\in(-3;-2) \Rightarrow y'(-2,1)=2f'(4,1)-4,2>0$

vì theo đồ thị $f'(4,1)\approx 3\Rightarrow 2f'(4,1)-4,2>0$ .Nên đáp án **A sai.**

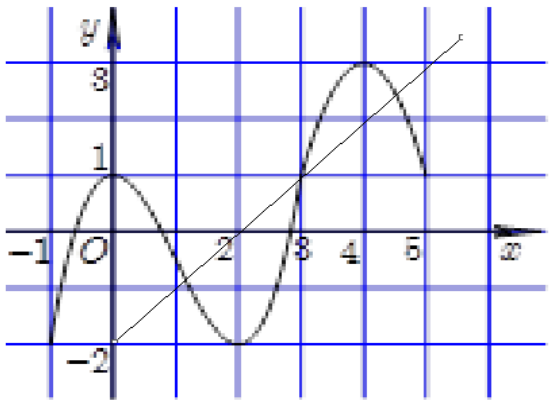
+ Chọn $x=-1,9\in(-2;-1) \Rightarrow y'(-1,9)=2f'(3,9)-3,8>0$

vì theo đồ thị $f'(3,9)\approx 3\Rightarrow 2f'(3,9)-3,8>0$ .Nên đáp án **B sai.**

+ Chọn $x=1,5\in(0;2) \Rightarrow y'(1,5)=2f'(0,5)+3>0$

vì theo đồ thị $f'(0,5)>0\Rightarrow 2f'(0,5)+3>0$ .Nên đáp án **D sai.**

Cách 2: Giải tự luận



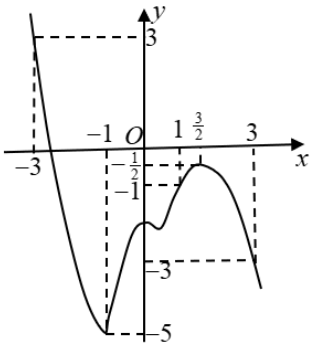
Ta có $y=-2f(2-x)+x^2\Rightarrow y'=-(2-x)'2f'(2-x)+2x$

$y'=2f'(2-x)+2x \Rightarrow y'<0\Leftrightarrow f'(2-x)+x<0\Leftrightarrow f'(2-x)<(2-x)-2$.

Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y=x-2$ cắt đồ thị $y=f'(x)$ tại hai điểm có hoành độ nguyên liên tiếp là $\left[\begin{array}{l}1<x_1<2\\ x_2=3\end{array}\right.$ và cũng từ đồ thị ta thấy $f'(x)<x-2$ trên miền $2<x<3$ nên $f'(2-x)<(2-x)-2$ trên miền $2<2-x<3\Leftrightarrow -1<x<0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

Câu 54. (THPT NÔNG CỐNG 2 LẦN 4 NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y=f(1-x)+\frac{x^2}{2}-x$ nghịch biến trên khoảng

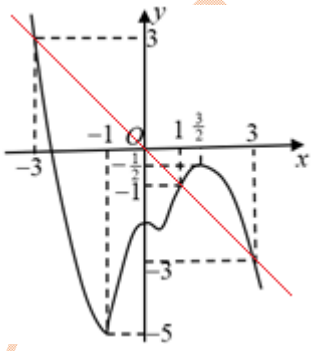
A. $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(-3;1)$. **D.** $(-2;0)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x)=f(1-x)+\frac{x^2}{2}-x$. Ta có $g'(x)=-f'(1-x)-(1-x)$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(1-x)=-(1-x)$ (*)



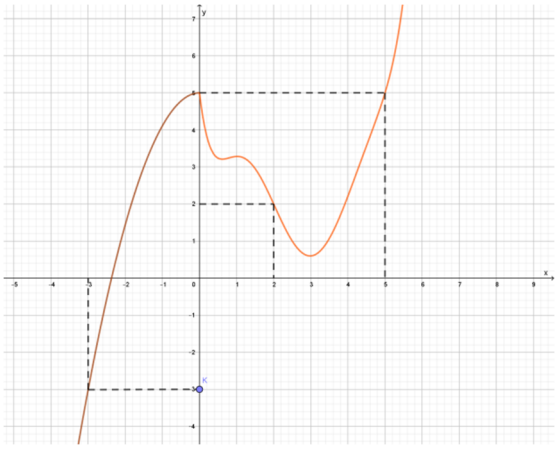
Dựa vào đồ thị ta có (*) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-x=-3\\1-x=1\\1-x=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\x=0\\x=-2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$:

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗		↘		↗		↘	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y=g(x)=f(1-x)+\frac{x^2}{2}-x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-2;0)$ và $(4;+\infty)$.

Câu 55. (Sở Phú Thọ) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ:



Hàm số $g(x)=f(-2x+1)+(x+1)(-2x+4)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-2;\frac{-1}{2}\right)$ **B.** $(-\infty;-2)$ **C.** $\left(\frac{-1}{2};+\infty\right)$ **D.** $\left(\frac{-1}{2};2\right)$

Lời giải

Chọn A

$g(x)=f(-2x+1)+(x+1)(-2x+4)$

$g(x)=f(-2x+1)+(-2x^2+2x+4)$

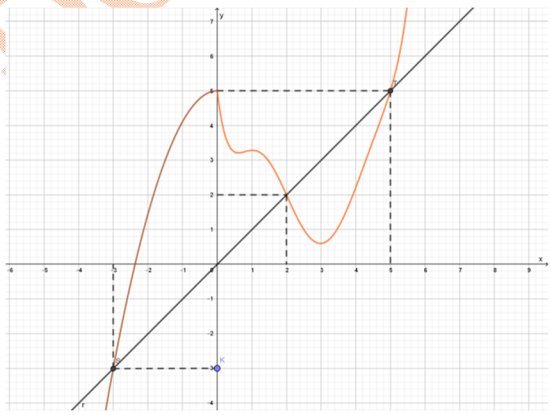
$g'(x)=-2f'(-2x+1)-4x+2$

$g'(x)=-2\left[f'(-2x+1)+2x-1\right]$

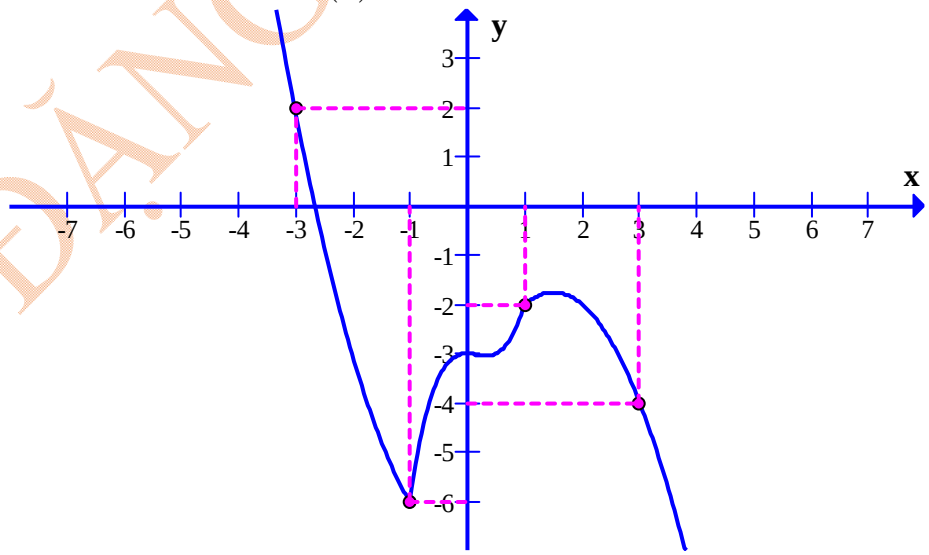
Để hàm số đồng biến thì $g'(x)>0 \Leftrightarrow f'(-2x+1)<-2x+1$

Dựa vào đồ thị ta có $2<-2x+1<5$

$\Rightarrow -2<x<\frac{-1}{2}$



Câu 56. (Nguyễn Du số 1 lần3) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Hỏi hàm số $g(x)=2f(x)+(x+1)^2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(-3;1)$. **D.** $(-\infty;3)$.

Lời giải

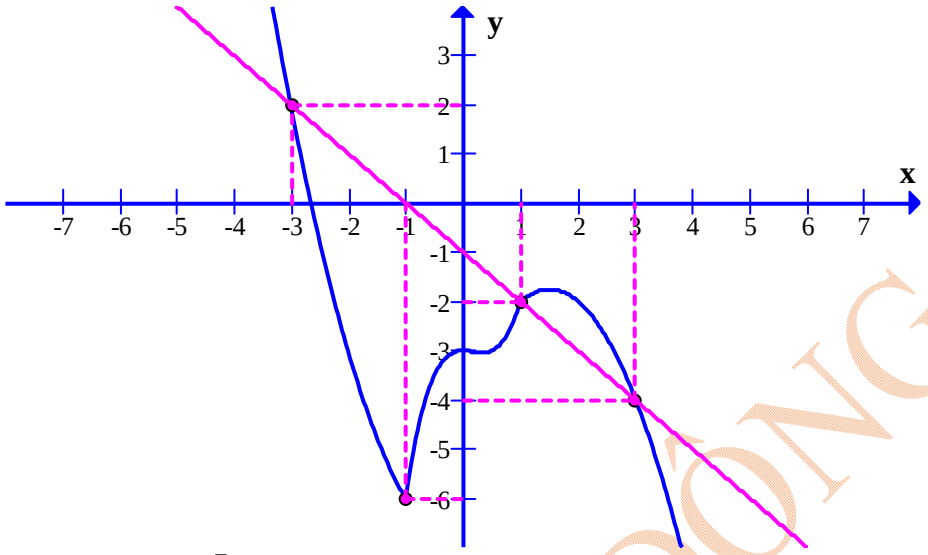
Chọn B

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

TXĐ của $g(x)$ là $\mathbb{R}$. Ta có $g'(x)=2\left[f'(x)+x+1\right]$.

Hàm số đồng biến khi và chỉ khi $f'(x)\ge -x-1$, (Dấu bằng chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm).

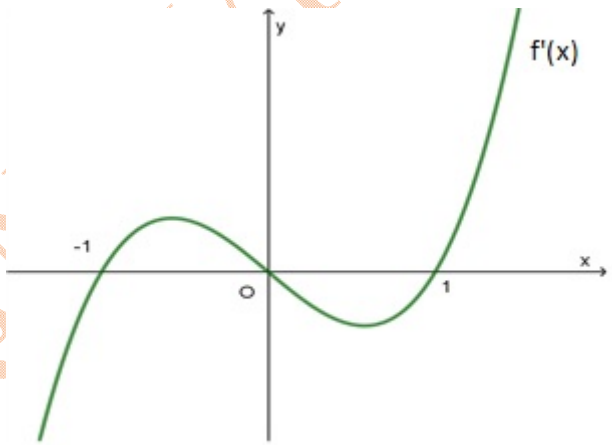
Vẽ chung đồ thị $y=f'(x)$ và $y=-x-1$ trên cùng một hệ trục như sau.



Từ đồ thị ta có $f'(x)\ge -x-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le -3\\1\le x\le 3\end{array}\right.$.

Câu 57. (SỞ PHÚ THỌ LẦN 2 NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $f'(x)=x^3+ax^2+bx+c\left(a,b,c\in\mathbb{R}\right)$ có đồ thị như hình vẽ.

Hàm số $g(x)=f\left(f'(x)\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Dựa vào đồ thị ta có: $f'(x)=x(x-1)(x+1)=x^3-x$.

$g(x)=f\left(f'(x)\right)=f\left(x^3-x\right)\Rightarrow g'(x)=\left(3x^2-1\right)f'\left(x^3-x\right).$

Xét $g'(x)<0\Leftrightarrow\left(3x^2-1\right)f'\left(x^3-x\right)<0\Leftrightarrow\left[\begin{cases}3x^2-1>0\\f'\left(x^3-x\right)<0\end{cases}\right.$

$\left.\begin{cases}3x^2-1<0\\f'\left(x^3-x\right)>0\end{cases}\right.$.

Xét $\begin{cases}3x^2-1>0\\f'\left(x^3-x\right)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left(-\infty;-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right)\\\left[\begin{array}{l}x^3-x<-1\\0<x^3-x<1\end{array}\right.\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left(-\infty;-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right)\\x\in\left(-\infty;-1,32...\right)\cup\left(-1;0\right)\cup\left(1;1,32....\right)\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-1,32...\right)\cup\left(-1;-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(1;1,32....\right).$

Xét $\begin{cases}3x^2-1<0\\f'\left(x^3-x\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\\\left[\begin{array}{l}-1<x^3-x<0\\x^3-x>1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\\x\in\left(-1,32...;-1\right)\cup\left(0;1\right)\cup\left(1,32...;+\infty\right)\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-1,32...\right);\left(-1;-\frac{\sqrt{3}}{3}\right);\left(0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right);\left(1;1,32...\right)$

Cách 2:

Dựa vào đồ thị ta có: $f'(x)=x(x-1)(x+1)=x^3-x$.

$g(x)=f\left(f'(x)\right)=f\left(x^3-x\right)\Rightarrow g'(x)=\left(3x^2-1\right)f'\left(x^3-x\right).$

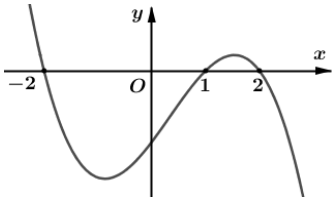
Xét đáp án B: $x\in(-\infty;-2)$.

* $x\in(-\infty;-2)\Rightarrow\left(3x^2-1\right)\in(11;+\infty)\Rightarrow 3x^2-1>0$.

* $x\in(-\infty;-2)\Rightarrow\left(x^3-x\right)\in(-\infty;-6)\Rightarrow f'\left(x^3-x\right)<0$ (dựa vào đồ thị của $f'(x)$).

Câu 58. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thoả $f(2)=f(-2)=0$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ có dạng như hình bên. Hàm số $y=\left(f(x)\right)^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



A. $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1; x=\pm 2$; $f(2)=f(-2)=0$. Ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘		↗	0	↘	$-\infty$

$\Rightarrow f(x)<0; \forall x \neq \pm 2.$

Xét $y=\left(f(x)\right)^2 \Rightarrow y'=2f(x).f'(x)$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f'(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 2 \\ x=1; x=\pm 2 \end{array}\right.$

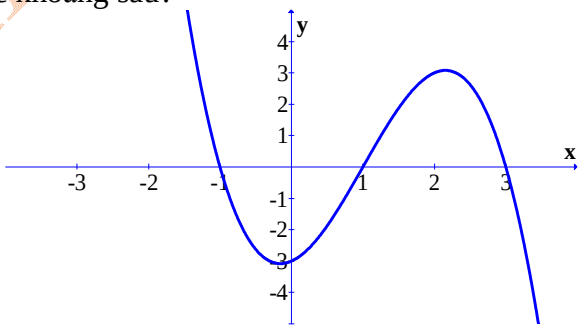
Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$-$		$-$	0	$-$	
$y=\left[\left(f(x)\right)^2\right]'$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hoặc Ta có $g'(x)=2f'(x).f(x)$. Xét $g'(x)<0 \Leftrightarrow f'(x).f(x)<0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(x)>0 \\ f(x)<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ 1<x<2 \end{array}\right.$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$, $(1;2)$.

Câu 59. (Chuyên Hưng Yên Lần 3) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(-1)=f(3)=0$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ có dạng như hình dưới đây. Hàm số $y=\left(f(x)\right)^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



A. $(-2;2)$. **B.** $(0;4)$. **C.** $(-2;1)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị và giả thiết, ta có bảng biến thiên của $y=f(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	↗	0	↘	$f(1)$	↗	0	↘	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

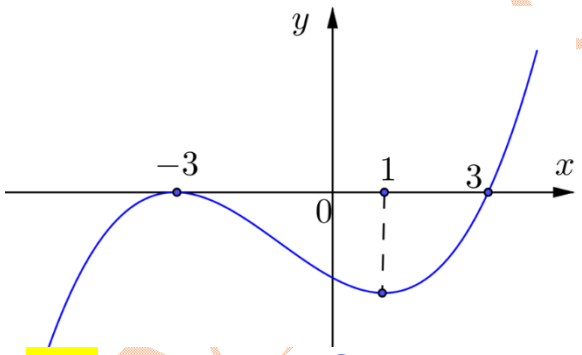
$y'=\left(\left(f(x)\right)^2\right)'=2f(x).f'(x).$

Ta có bảng xét dấu của $y'=\left(\left(f(x)\right)^2\right)'$:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$-$	
$2f(x).f'(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	

Ta được hàm số $y=\left(f(x)\right)^2$ nghịch biến trên $(1;2)$.

Câu 60. (THĂNG LONG HN LẦN 2 NĂM 2019) Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=[f(x)]^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty;3)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(-3;1)$.

Lời giải

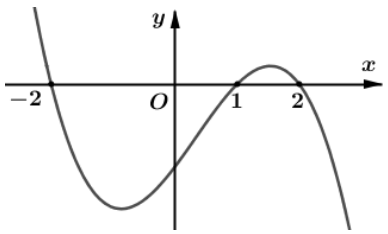
Chọn B

$g'(x)=2f'(x).f(x)\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f(x)=0\end{array}\right.$, ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ và $(1;3)$.

Câu 61. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới và $f(-2)=f(2)=0$.



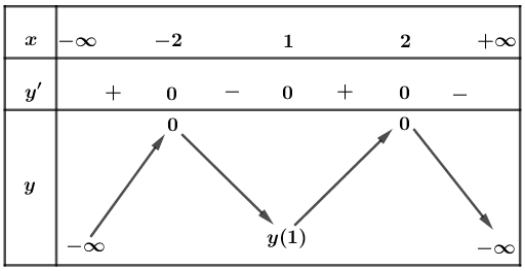
Hàm số $g(x)=\left[f(3-x)\right]^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;5)$. **D.** $(5;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$, suy ra bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau



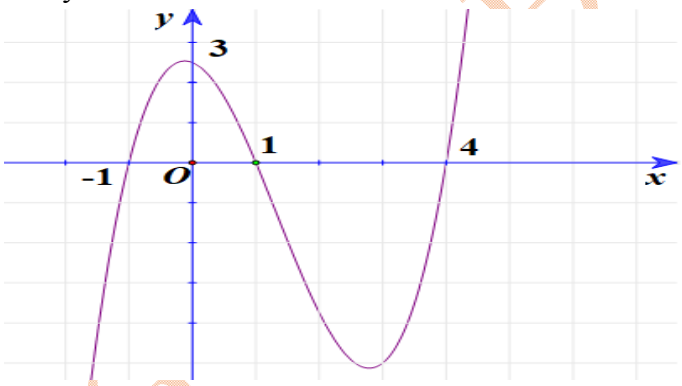
Từ bảng biến thiên suy ra $f(x)\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x)=-2f'(3-x).f(3-x)$.

Xét $g'(x)<0\Leftrightarrow f'(3-x).f(3-x)>0\Leftrightarrow\begin{cases}f'(3-x)<0\\f(3-x)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}-2<3-x<1\\3-x>2\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}2<x<5\\x<1\end{cases}$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$, $(2;5)$.

Câu 62. (THPT-Gia-Lộc-Hải-Dương-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3) Cho hàm số $f(x)$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $y=f(|3-x|)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(4;6)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(2;3)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$y=f(|3-x|)\Rightarrow f'(|3-x|)=-\frac{(3-x)}{|3-x|}f'(|3-x|)\ (x\neq 3)$$

$$f'(|3-x|)=0\Leftrightarrow-\frac{(3-x)}{|3-x|}f'(|3-x|)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}f'(|3-x|)=0\\3-x=0\end{bmatrix}$$

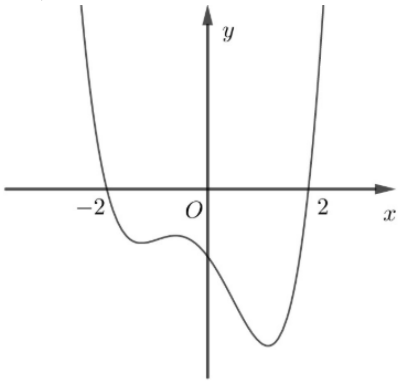
$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}|3-x|=-1(L)\\|3-x|=1(N)\\|3-x|=4(N)\\x=3(L)\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=-1\\x=7\\x=2\\x=4\end{bmatrix}$$

Ta có bảng xét dấu của $f'(|3-x|)$:

x	$-\infty$		-1		2		3		4		7		$+\infty$
$f'\left\|3-x\right\|$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta thấy hàm số $y=f\left(\left|3-x\right|\right)$ đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

Câu 63. (Đặng Thành Nam Đề 9) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Biết $f(-2)<0$, hàm số $y=\left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(-\sqrt[2018]{3};\sqrt[2018]{3}\right)$. **B.** $(-1;+\infty)$. **C.** $\left(-\infty;-\sqrt[2018]{3}\right)$. **D.** $\left(-\sqrt[2018]{3};0\right)$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đường thẳng hàm số $y=f'(x)$ và $f(-2)<0$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$f(-2)<0$	↘	$f(2)$	↗	$+\infty$

Ta có $1-x^{2018}\le 1\ \forall x\in\mathbb{R}$ mà $\max\limits_{(-\infty;2)} f(x)=f(-2)<0\Rightarrow f\left(1-x^{2018}\right)<0$

Do đó $y=\left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|=-f\left(1-x^{2018}\right)\Rightarrow y'=2018x^{2017}f'\left(1-x^{2018}\right)$.

Hàm số đồng biến $\Rightarrow y'>0\Leftrightarrow 2018x^{2017}f'\left(1-x^{2018}\right)>0$.

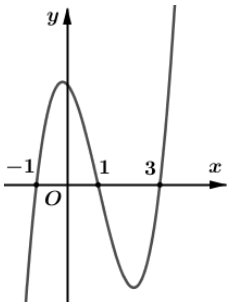
Trường hợp 1. Với $x>0$

$$y'>0\Leftrightarrow f'\left(1-x^{2018}\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-x^{2018}>2\\1-x^{2018}<-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^{2018}<-1(loai)\\x^{2018}>3\end{array}\right.\Rightarrow x>\sqrt[2018]{3}\ (\text{vì } x>0).$$

Trường hợp 2. Với $x<0$

$$y'>0\Leftrightarrow f'\left(1-x^{2018}\right)<0\Leftrightarrow -2<1-x^{2018}<2\Leftrightarrow -1<x^{2018}<3\Rightarrow -\sqrt[2018]{3}<x<0.$$

Câu 64. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-\infty;-1-2\sqrt{2})$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(1;2\sqrt{2}-1)$. **D.** $(2\sqrt{2}-1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

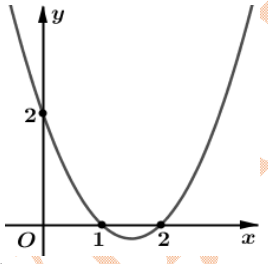
Dựa vào đồ thị, suy ra $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=3\end{array}\right.$. Ta có $g'(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$;

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=0\\f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)=0\end{array}\right.\xleftarrow{\text{theo do thi } f'(x)}\left[\begin{array}{l}x+1=0\\\sqrt{x^2+2x+2}=1\\\sqrt{x^2+2x+2}=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\ (\text{nghiem boi ba})\\x=-1-2\sqrt{2}\\x=-1+2\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên và ta chọn A

Chú ý: Cách xét dấu $g'(x)$ như sau: Ví dụ xét trên khoảng $(-1;-1+2\sqrt{2})$ ta chọn $x=0$. Khi đó $g'(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}f'\left(\sqrt{2}\right)<0$ vì dựa vào đồ thị $f'(x)$ ta thấy tại $x=\sqrt{2}\in(1;3)$ thì $f'\left(\sqrt{2}\right)<0$. Các nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ là nghiệm bội lẻ nên qua nghiệm đổi dấu.

Câu 65. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=(x+1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\right)f'\left(\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+2x+2}\right)$.

- $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}<0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. (1)
- $0<u=\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+2x+2}=\dfrac{1}{\sqrt{(x+1)^2+2}+\sqrt{(x+1)^2+1}}\le\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}<1\xrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)}f'(u)>0,\forall x\in\mathbb{R}$. (2)

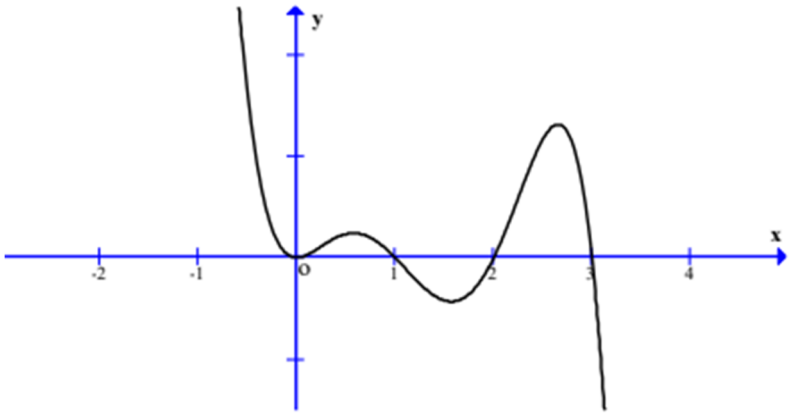
Từ (1) và (2), suy ra dấu của $g'(x)$ phụ thuộc vào dấu của nhị thức $x+1$ (ngược dấu)

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g		↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta chọn A

Câu 66. (Cụm THPT Vũng Tàu) Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Xét hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+5}-\sqrt{x^2+2x+4}\right)+2019$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số $y=g(x)$ có giá trị nhỏ nhất là $f\left(2-\sqrt{3}\right)+2019$.

B. Hàm số $y=g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

C. Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

D. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x)=\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}-\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}\right)f'\left(\sqrt{x^2+2x+5}-\sqrt{x^2+2x+4}\right)$

$=(x+1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+4}}\right)f'\left(\sqrt{x^2+2x+5}-\sqrt{x^2+2x+4}\right).$

Nhận xét: $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+4}}=\dfrac{1}{\sqrt{(x+1)^2+4}}-\dfrac{1}{\sqrt{(x+1)^2+3}}<0,\forall x\in\mathbb{R}$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=0\\ f'\left(\sqrt{x^2+2x+5}-\sqrt{x^2+2x+4}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ \sqrt{x^2+2x+5}-\sqrt{x^2+2x+4}=0\\ \sqrt{x^2+2x+5}-\sqrt{x^2+2x+4}=1\\ \sqrt{x^2+2x+5}-\sqrt{x^2+2x+4}=2\\ \sqrt{x^2+2x+5}-\sqrt{x^2+2x+4}=3\end{array}\right.$$

Xét $h(x)=\sqrt{x^2+2x+5}-\sqrt{x^2+2x+4}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $h'(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}-\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}=(x+1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+4}}\right)$.

$h'(x)=0\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	↗	$2-\sqrt{3}$	↘	0

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $h(x)$, ta có:

+ Phương trình $\sqrt{x^2+2x+5}-\sqrt{x^2+2x+4}=0$ vô nghiệm.

+ Phương trình $\sqrt{x^2+2x+5}-\sqrt{x^2+2x+4}=1$ vô nghiệm.

+ Phương trình $\sqrt{x^2+2x+5}-\sqrt{x^2+2x+4}=2$ vô nghiệm.

+ Phương trình $\sqrt{x^2+2x+5}-\sqrt{x^2+2x+4}=3$ vô nghiệm.

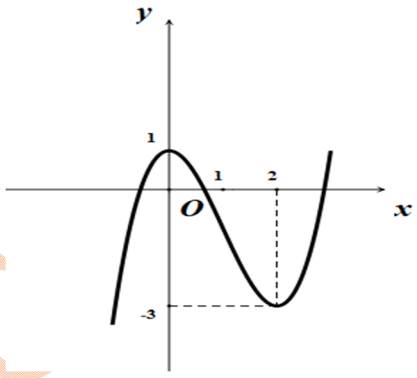
Mà $0<h(x)\le 2-\sqrt{3}<1, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f'(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Bảng biến thiên của $y=g(x)$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$f(0)+2019$	↗	$f\left(2-\sqrt{3}\right)+2019$	↘	$f(0)+2019$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$, ta có: hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Câu 67. (THTT số 3) Cho hàm số $y=ax^3+3bx^2-2cx+d$ $(a,b,c,\mathrm{d}$ là hằng số, $a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y=\frac{a}{4}x^4+(a+b)x^3+(3b-c)x^2+(d-2c)x+d-2019$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải:

Chọn C

Cách 1: Ta có: $y=ax^3+3bx^2-2cx+d \Rightarrow y'=3ax^2+6bx-2c$.

Theo đề, có: $\begin{cases} y'(0)=0 \\ y(0)=1 \\ y'(2)=0 \\ y(2)=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=0 \\ d=1 \end{cases}$.

Suy ra hàm số cần tìm là $y=\frac{1}{4}x^4-3x^2+x-2018 \Rightarrow y'=x^3-6x+1$.

Cho $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\approx -2.5 \\ x\approx 0.16 \\ x\approx 2.36 \end{array}\right.$

Lập BBT:

x	$-\infty$		≈ -2.5		≈ 0.17		≈ 2.36		$+\infty$
$y'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$y(x)$	$+\infty$	↘		↗	0	↘		↗	$+\infty$

Theo đề, ta có được hàm số $y=\frac{a}{4}x^4+(a+b)x^3+(3b-c)x^2+(d-2c)x+d-2019$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

Cách 2: Đặt $f(x)=ax^3+3bx^2-2cx+d \Rightarrow f'(x)=3ax^2+6bx-2c$,

$h(x)=\frac{a}{4}x^4+(a+b)x^3+(3b-c)x^2+(d-2c)x+d-2019$

Suy ra $h'(x)=ax^3+3(a+b)x^2+2(3b-c)x+(d-2c)$.

$=\left(ax^3+3bx^2-2cx+d\right)+(3ax^2+6bx-2c)$

$=f(x)+f'(x)$

Lập BBT:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘		↘	-3	↗	$+\infty$

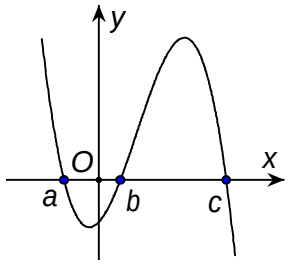
Trên $(1,2)$ ta thấy: $f'(x)<0$ (theo bảng biến thiên)

$f(x)$ giảm từ số âm xuống -3 nên $f(x)<0$ (theo đồ thị).

$\Rightarrow f(x)+f'(x)<0$.

Vậy $h(x)=\frac{a}{4}x^4+(a+b)x^3+(3b-c)x^2+(d-2c)x+d-2019<0$ trên $(1,2)$.

Câu 68. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a<b<c$ như hình vẽ.



Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $f(c)>f(b)>f(a)$.

B. $f(a)>f(b)>f(c)$.

C. $\left(f(b)-f(a)\right)\left(f(b)-f(c)\right)<0$.

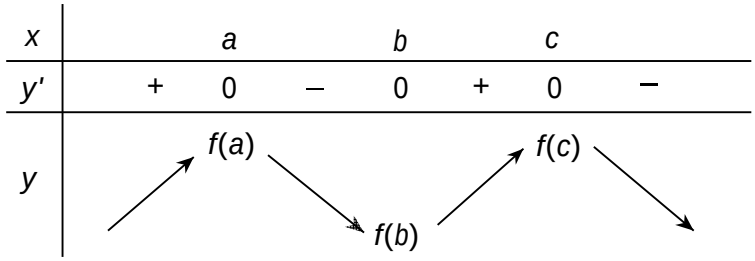
D. $f(c)+f(a)-2f(b)>0$.

Lời giải

Chọn D

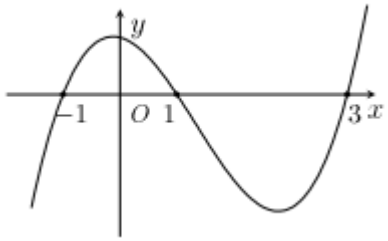
Từ đồ thị hàm $y=f'(x)$, suy ra $f'(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt $x=a,\ x=b,\ x=c$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ như sau



Từ đây, suy ra $\begin{cases} f(a)>f(b) \\ f(c)>f(b) \end{cases} \Rightarrow f(a)+f(c)>2f(b) \Rightarrow f(a)+f(c)-2f(b)>0.$

Câu 69. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định Lần 1) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên $m\in[-5;5]$ để hàm số $g(x)=f(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?



A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=f'(x+m)$. Vì $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $g'(x)=f'(x+m)$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$. Căn cứ vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta thấy

$$g'(x)<0 \Leftrightarrow f'(x+m)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+m<-1 \\ 1<x+m<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1-m \\ 1-m<x<3-m \end{array}\right..$$

Hàm số $g(x)=f(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\le -1-m \\ \begin{cases} 3-m\ge 2 \\ 1-m\le 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le -3 \\ 0\le m\le 1 \end{array}\right..$$

Mà m là số nguyên thuộc đoạn $[-5;5]$ nên ta có $S=\{-5;-4;-3;0;1\}$.

Vậy S có 5 phần tử.

Câu 70. (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – NAM ĐỊNH 2019 – LẦN 1) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Có bao nhiêu số nguyên $m\in(0;2020)$ để hàm số $g(x)=f(x^2-x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$?

A. 2018. **B.** 2017. **C.** 2016. **D.** 2015.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $g(x)=f\left(x^2-x+m\right)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$

$\Leftrightarrow g'(x)=(2x-1).f'\left(x^2-x+m\right)\le 0\ \ \forall x\in(-1;0)$

$\Leftrightarrow f'\left(x^2-x+m\right)\ge 0\ \ \forall x\in(-1;0)$ (do $2x-1<0\ \ \forall x\in(-1;0)$)

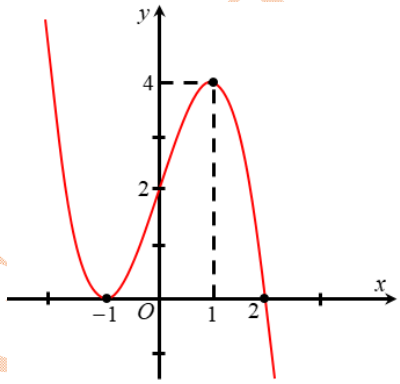
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-x+m\le 1\\ x^2-x+m\ge 4\end{array}\right.\ \forall x\in(-1;0)\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m-1\le -x^2+x\\ m-4\ge -x^2+x\end{array}\right.\ \forall x\in(-1;0)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m-1\le \min\limits_{[-1;0]}\left(h(x)=-x^2+x\right)=h(-1)=-2\\ m-4\ge \max\limits_{[-1;0]}\left(h(x)=-x^2+x\right)=h(0)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le -1\\ m\ge 4\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện $m\in(0;2020)$, suy ra: $m\in[4;2020)$.

Vậy có 2016 giá trị m nguyên thỏa đề.

Câu 71. (Thị Xã Quảng Trị) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=f(x+1)+\dfrac{20}{m}\ln\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$?



A. 3. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=f'(x+1)+\dfrac{20}{m}.\dfrac{-4}{4-x^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ khi $y'\le 0,\forall x\in(-1;1)$

$\Rightarrow f'(x+1)-\dfrac{80}{m}.\dfrac{1}{4-x^2}\le 0,\forall x\in(-1;1)\ \ (*)$.

Đặt $t=x+1$ khi đó $x\in(-1;1)$ suy ra $t\in(0;2)$.

Từ $(*)$ ta có $f'(t)-\dfrac{80}{m}.\dfrac{1}{(3-t)(t+1)}\le 0,\forall t\in(0;2)\Rightarrow\dfrac{80}{m}\ge f'(t).(3-t)(t+1),\forall t\in(0;2)\ \ (1)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ thì ta có $f'(x)=-(x+1)^2(x-2)$.

Suy ra ta có $f'(t)=-(t+1)^2(t-2)$.

Xét hàm số $g(t)=-(t+1)^2(t-2)(3-t)(t+1),\ \ \forall t\in(0;2)$.

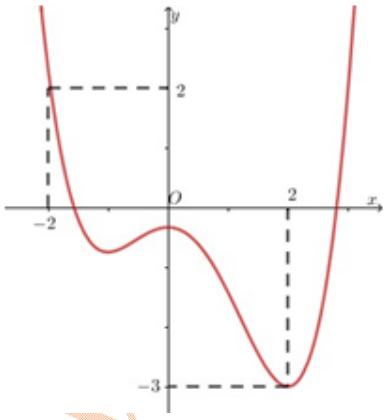
$g'(t)=-(t+1)^2(-5t^2+18t-13)$; $g'(t)=0 \Leftrightarrow -(t+1)^2(-5t^2+18t-13)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=\dfrac{13}{5} \\ t=1 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

t	0		1		2
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$		↗	$g(1)$	↘	

Dựa vào bảng xét dấu và từ (1) ta có $\dfrac{80}{m} \geq \max\limits_{(0;2)} g(t)=g(1) \Leftrightarrow \dfrac{80}{m} \geq 16 \Leftrightarrow m \leq 5$.

Câu 72. (Thuận Thành 2 Bắc Ninh) Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của $m \in (-20;20)$ để hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{x^3}{4}\right)-\dfrac{m\left(x^2+4\right)^2}{20}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. 6. **B.** 7. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=\dfrac{3x^2}{4}\cdot f'\left(\dfrac{x^3}{4}\right)-\dfrac{mx\left(x^2+4\right)}{5}$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x) \geq 0,\ \forall x \in (0;+\infty)$ ($g'(x)=0$ chỉ tại hữu hạn điểm). Điều này tương đương với

$$\frac{3x}{4}\cdot f'\left(\frac{x^3}{4}\right) \geq \frac{m\left(x^2+4\right)}{5} \Leftrightarrow m \leq \frac{15x}{4\left(x^2+4\right)}\cdot f'\left(\frac{x^3}{4}\right),\ \forall x \in (0;+\infty).$$

Với $x>0$ thì $\dfrac{x^3}{4}>0 \Rightarrow f'\left(\dfrac{x^3}{4}\right) \geq -3$. Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{x^3}{4}=2 \Leftrightarrow x^3=8 \Leftrightarrow x=2$.

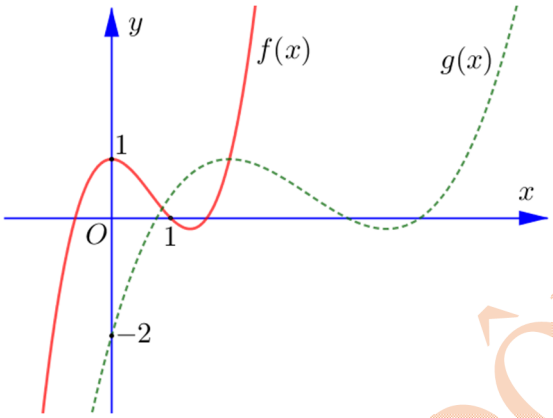
Ta có $0<\dfrac{x}{x^2+4} \leq \dfrac{x}{4x}=\dfrac{1}{4},\ \forall x>0$. Đẳng thức xảy ra khi $x=2$.

Suy ra $\frac{15x}{4\left(x^2+4\right)}\cdot f'\left(\frac{x^3}{4}\right)\ge\frac{15}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot(-3)=-\frac{45}{16}$. Đẳng thức xảy ra khi $x=2$.

Như thế, $m\le-\frac{45}{16}$. Kết hợp với m nguyên âm và $m\in(-20;20)$ thì $m\in\{-19;-18;\cdots;-3\}$.

Vậy có 17 số nguyên âm của $m\in(-20;20)$ để hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Câu 73. Cho hàm số $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ và $g(x)=f(mx+n)$ có đồ thị như hình vẽ:



Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng có độ dài bằng k, hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng có độ dài bằng $2k$. Giá trị biểu thức $2m+n$ là

A. 3. **B.** 0. **C.** -1. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)=x^3-2ax^2+cx+d\Rightarrow f'(x)=3x^2+2bx+c$.

Hàm số đạt cực trị tại $x=0$ và đồ thị hàm số qua điểm $(1;0)$ nên

$$\begin{cases}a=1\\f'(0)=0\\f(0)=1\\f(1)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2\\c=0\\d=1\end{cases}\Rightarrow f(x)=x^3-2x^2+1.$$

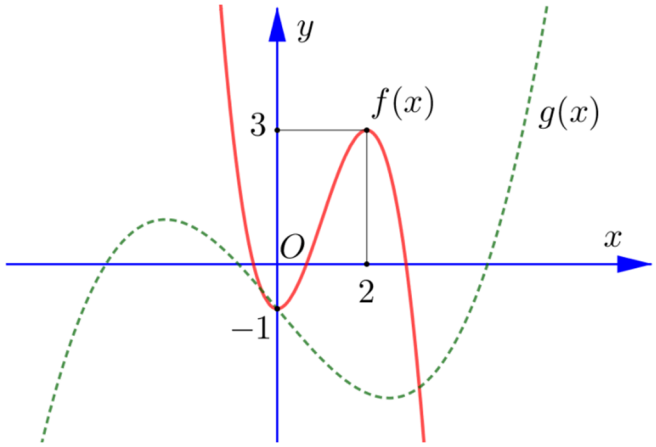
Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng có độ dài bằng k, hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng có độ dài bằng $2k$ suy ra $m=\frac{1}{2}$.

Ta có $g(x)=(mx+n)^3-2(mx+n)^2+1$. Hệ số tự do bằng: n^3-2n^2+1. Đồ thị hàm số $g(x)$ cắt trục tung tại điểm $(0;-2)$ nên $n^3-2n^2+1=-2\Rightarrow n^3-2n^2+3=0\Rightarrow n=-1$.

Vậy $2m+n=0$

Câu 74. Cho hàm số bậc ba $f(x)$ và $g(x)=-f(mx+n)$, $(m;n\in\mathbb{Q})$ có đồ thị như hình vẽ:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng 5. Giá trị biểu thức $3m+2n$ là

A. -5. **B.** $-\frac{13}{5}$. **C.** $\frac{16}{5}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Hàm số đạt cực trị tại $x=0;x=2$ và đồ thị hàm số qua điểm $(0;-1)$, $(2;3)$ nên

$$\begin{cases} f'(0)=0 \\ f'(2)=0 \\ f(0)=-1 \\ f(2)=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \\ c=0 \\ d=-1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=-x^3+3x^2-1.$$

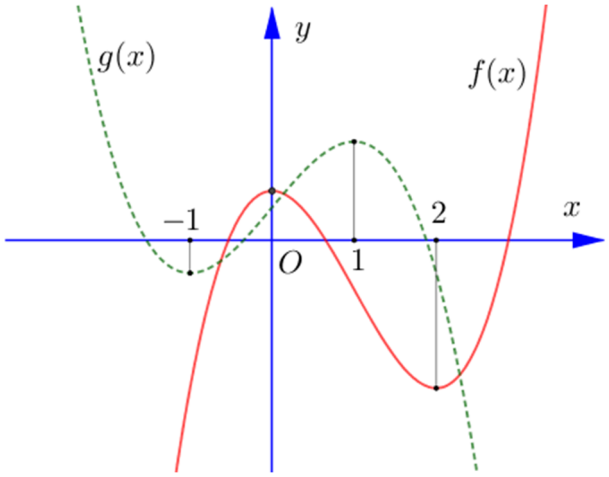
Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;2)$, độ dài khoảng đồng biến bằng 2

Hàm số $g(x)=-f(mx+n)$ nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng 5 nên $g(x)=f(mx+n)$ đồng biến trên khoảng có độ dài bằng 5 suy ra $m=\frac{2}{5}$.

Ta có $g(x)=-\left[-(mx+n)^3+3(mx+n)^2-1\right]$. Hệ số tự do bằng: n^3-3n^2+1. Đồ thị hàm số $g(x)$ cắt trục tung tại điểm $(0;-1)$ nên $n^3-3n^2+1=-1 \Rightarrow n^3-3n^2+2=0 \xrightarrow{n\in\mathbb{Q}} n=1$.

Vậy $3m+2n=\frac{16}{5}$

Câu 75. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Biết rằng hai hàm số $y=f\left(-2x+1\right)$ và $y=3g\left(ax+b\right)$ có cùng khoảng đồng biến. Giá trị biểu thức $a+2b$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

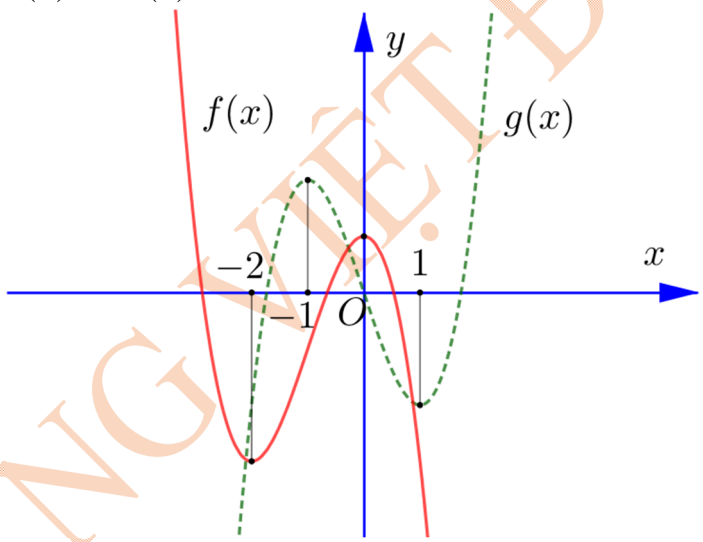
Ta có hàm số $f\left(x\right)$ nghịch biến trong khoảng $\left(0;2\right)$ nên hàm số $f\left(-2x\right)$ đồng biến trong khoảng $\left(-1;0\right)$. Hàm số $y=f\left(-2x+1\right)=f\left(-2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$ đồng biến trong khoảng $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Để hàm số $y=3g\left(ax+b\right)$ có cũng đồng biến trong khoảng $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ thì $y=g\left(ax+b\right)$ đồng biến trong khoảng $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ *(nhân thêm số dương không làm thay đổi khoảng đơn điệu).*

Mà hàm số $g\left(x\right)$ đồng biến trong khoảng $\left(-1;1\right)$ nên $a=\frac{1-\left(-1\right)}{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}=2;b=0$

$\Rightarrow a+2b=2$

Câu 76. Cho hai hàm số $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ:



Biết rằng hai hàm số $y=3f\left(3x-1\right)$ và $y=2g\left(ax+b\right)$ có cùng khoảng đồng biến. Giá trị biểu thức $2a+b$ là

A. 5. **B.** 2. **C.** −4. **D.** −6.

Lời giải

Chọn D

Ta có hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến trong khoảng $\left(-2;0\right)$ nên hàm số $f\left(3x\right)$ đồng biến trong khoảng $\left(-\frac{2}{3};0\right)$. Hàm số $y=f\left(3x-1\right)=f\left(3\left(x-\frac{1}{3}\right)\right)$ đồng biến trong khoảng $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Suy ra hàm số $y=2f\left(3x-1\right)$ cũng đồng biến trong khoảng $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

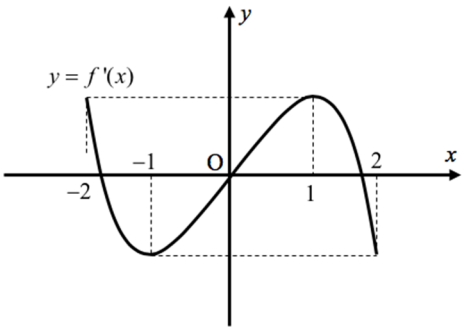
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Để hàm số $y=2g\left(ax+b\right)$ có cũng đồng biến trong khoảng $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ thì $y=g\left(ax+b\right)$ đồng biến trong khoảng $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Mà hàm số $g\left(x\right)$ nghịch biến trong khoảng $\left(-1;1\right)$ nên $a=-\frac{1-\left(-1\right)}{\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)}=-3;b=0\Rightarrow 2a+b=-6$

Câu 77. (ĐH Vinh Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y=f(\cos x)+x^2-x$ đồng biến trên khoảng

A. $(1;2)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;-1)$.



Lời giải

Chọn A

Phân tích:

Bản chất dạng toán này thường là đặc điểm: Tổng hai hàm dương (hàm đồng biến), tổng hai hàm âm (hàm nghịch biến)

Tính chất:

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ tăng trên khoảng D_1, hàm số $y=f\left(x\right)$ tăng trên khoảng D_2. Khi đó ta có hàm số $y=f\left(x\right)+g\left(x\right)$ tăng trên khoảng $D=D_1\cap D_2$

*+ Quan sát bài toán: $y=x^2-x\Rightarrow y'=2x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq\frac{1}{2}$, nếu trắc nghiệm thấy ngay đáp án **A***

Lời giải

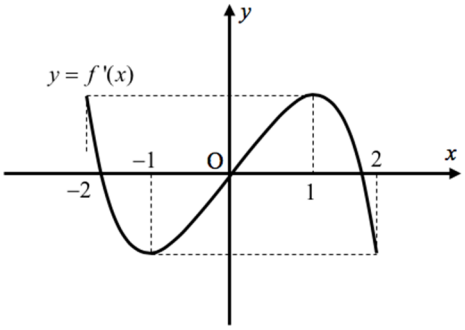
Ta có: $y'=-\sin x.f'\left(\cos x\right)+2x-1$

+ Vì $\cos x\in\left[-1;1\right]\Rightarrow -\sin x.f'\left(\cos x\right)\in\left[-1;1\right]$ mà $2x-1\geq 1\Leftrightarrow x\geq 1$

+ Suy ra $y'=-\sin x.f'\left(\cos x\right)+2x-1\geq 0,\forall x\geq 1$ hay hàm số tăng trên $[1;+\infty)$

Câu 78. (ĐH Vinh Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y=f\left(\dfrac{3\cos x+4\sin x}{5}\right)+x^4-3x+2019$ đồng biến trên khoảng

A. $(1;2)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;-1)$.



ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

DẠNG 3: SỰ ĐƠN ĐIỆU CHỨA THAM SỐ

Câu 1. (Hàm Rồng) Tìm tập hợp S tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=\frac{x^3}{3}+mx^2+(2m+3)x+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $[-1;3]$. **B.** $(-1;3)$. **C.** $(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=x^2+2mx+2m+3$; Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2+2mx+2m+3\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}1>0\\ \Delta'\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow m^2-2m-3\leq 0\Leftrightarrow -1\leq m\leq 3.$

Vậy $S=[-1;3]$.

Câu 2. (THPT TX QUẢNG TRỊ LẦN 1 NĂM 2019) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=(m^2-9)x^3+(m-3)x^2-x+1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. 6. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=3(m^2-9)x^2+2(m-3)x-1$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\leq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Trường hợp 1: $3(m^2-9)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\ m=-3\end{array}\right.$.

+ Với $m=3\Rightarrow y'=-1<0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $m=3$ thỏa yêu cầu bài toán.

+ Với $m=-3\Rightarrow y'=-12x-1\leq 0\Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{12}$ nên $m=-3$ không thỏa yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $3(m^2-9)\neq 0\Leftrightarrow m\neq\pm 3$.

Ta có $y'\leq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta'\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3(m^2-9)<0\\ (m-3)^2+3(m^2-9)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3<m<3\\ 4m^2-6m-18\leq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-3<m<3\\ -\frac{3}{2}\leq m\leq 3\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{3}{2}\leq m<3.$

Kết hợp điều kiện $m\in\mathbb{Z}$ suy ra $m\in\{-1;0;1;2\}$.

Từ hai trường hợp ta có $m\in\{-1;0;1;2;3\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3. (Chuyên Sơn La Lần 3 năm 2018-2019) Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc đoạn $[-2018\ ;\ 2019]$ để hàm số $y=x^3-2x^2-(2m-5)x+5$ đồng biến trên khoảng $(0\ ;+\infty)$?

A. 2020. **B.** 2022. **C.** 2021. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=3x^2-4x-2m+5$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)\Leftrightarrow y'\geq 0,\ \forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2-4x-2m+5\geq 0\ ,\forall x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow 3x^2-4x\geq 2m-5\ ,\forall x\in(0;+\infty)$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Xét hàm số $f(x)=3x^2-4x$ trên $(0;+\infty)$, ta có $f'(x)=6x-4=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$

Ta có bảng biến thiên

x	0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-4}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng trên suy ra $3x^2-4x\ge 2m-5\ ,\forall x\in\ (0;+\infty)\Leftrightarrow 2m-5\le -\frac{4}{3}\Leftrightarrow m\le\frac{11}{6}$.

Do m nguyên và $m\in[-2018\ ;\ 2019]\ \Rightarrow m\in\{-2018;-2017;-2016,....,0,1\}$.

Vậy có 2020 giá trị m thỏa mãn đề bài.

Câu 4. (TTHT Lần 4) Cho hàm số $f(x)=x^3-3mx^2+3(2m-1)x+1$. Với giá trị nào của m thì $f'(x)-6x>0$ với mọi $x\ge 2$?

A. $m>\frac{1}{2}$. **B.** $m<-\frac{1}{2}$. **C.** $m>1$. **D.** $m\le 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x)=3x^2-6mx+3(2m-1),\forall x\in\mathbb{R}$

Cách 1:

$f'(x)-6x>0,\forall x\ge 2\Leftrightarrow 3x^2-6mx+3(2m-1)-6x>0,\forall x\ge 2$

$\Leftrightarrow x^2-2(m+1)x+(2m+1)>0,\forall x\ge 2$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\Delta'<0\\\begin{cases}\Delta\ge 0\\(x_1-2)(x_2-2)>0\\x_1+x_2<4\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2+2<0\\\begin{cases}m^2+2\ge 0\\-2m-1>0\\2(m+1)<4\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow m<-\frac{1}{2}.$$

Với $x_1;x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2-2(m+1)x+(2m+1)=0$

Lưu ý:

Đặt $g(x)=x^2-2(m+1)x+(2m+1)$. Ta có $g(x)$ là một tam thức bậc hai có hệ số $a>0$

Nếu $\Delta<0$ thì $g(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow g(x)>0,\forall x\ge 2$

Nếu $\Delta\ge 0$ và $g(x)=0$ có hai nghiệm $x_1;x_2$ sao cho $x_1\le x_2<2$ thì theo định lí dấu tam thức bậc hai ta có $g(x)>0,\forall x\ge 2$.

Cách 2.

$f'(x)-6x>0,\forall x\ge 2\Leftrightarrow 3x^2-6mx+3(2m-1)-6x>0,\forall x\ge 2$

$\Leftrightarrow x^2-2m(x-1)-2x-1>0,\forall x\ge 2$

$\Leftrightarrow m<\frac{x^2-2x-1}{2(x-1)},\forall x\ge 2\ \Leftrightarrow m<\min\limits_{[2;+\infty)}g(x)$ với $g(x)=\frac{x^2-2x-1}{2(x-1)}$

Vì $g'(x)=\frac{x^2-2x+3}{2(x-1)^2}>0,\forall x\ge 2$ nên $\min\limits_{[2;+\infty)}g(x)=g(2)=-\frac{1}{2}$.

Vậy $m<-\frac{1}{2}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 5. (Kim Liên) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số thực m nhỏ hơn 2020 để hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3+(m-1)x^2+(m+3)x-10$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$.

A. 2020 **B.** 2018 **C.** 2019 **D.** Vô số

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y=-\frac{1}{3}x^3+(m-1)x^2+(m+3)x-10 \Rightarrow y'=-x^2+2(m-1)x+(m+3)$

Nhận thấy: y' là tam thức bậc hai có hệ số bậc hai a=-1 nên y' có tối đa 2 nghiệm.

Do đó hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;3)$ khi và chỉ khi $y'\geq 0,\ \forall x\in(0;3)$

$-x^2+2(m-1)x+(m+3)\geq 0,\ \forall x\in(0;3) \Leftrightarrow m\geq \frac{x^2+2x-3}{2x+1},\ \forall x\in(0;3)$.

Xét hàm số: $g(x)=\frac{x^2+2x-3}{2x+1}$ trên khoảng $(0;3)$. Có $g'(x)=\frac{2x^2+2x+8}{(2x+1)^2}>0,\ \forall x\in(0;3)$

Do đó hàm số $g(x)$ luôn đồng biến trên khoảng $(0;3) \Rightarrow g(x)<g(3)=\frac{12}{7},\ \forall x\in(0;3)$

Suy ra: $m\geq g(x),\ \forall x\in(0;3) \Leftrightarrow m\geq \frac{12}{7}$. Vì $0<m<2020$ và $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{2;3;...;2019\}$.

Vậy có 2018 giá trị m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6. (Sở Ninh Bình 2019 lần 2) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y=x^3-3x^2+3mx+2019$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$?

A. 10. **B.** 20. **C.** 11. **D.** 21.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2+3mx+2019$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=3(x^2-2x+m)$.

Xét phương trình $x^2-2x+m=0$ có $\Delta'=1-m$.

*Với $m\geq 1$ ta có $\Delta'\leq 0$ nên $f'(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ do đó hàm số luôn đồng biến (không thỏa mãn)

*Với $m<1$ ta có $\Delta'>0$ nên $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2\ (x_1<x_2)$.Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến $(1;2)$ khi và chỉ khi $x_1\leq 1<2\leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases}3.f'(1)\leq 0\\3.f'(2)\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m-1\leq 0\\m\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow m\leq 0$

Kết hợp yêu cầu bài toán ta có $m\in\{-10;-9;...;-1;0\}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 7. (Sở Thanh Hóa 2019) Cho X là tập hợp tất cả các giá trị nguyên thuộc đoạn $[-5;5]$ của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx-2$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$. Số phần tử của X là

A. 3. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=3x^2-6x+m$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi

$y'\geq 0,\forall x>2 \Leftrightarrow 3x^2-6x+m\geq 0,\forall x>2 \Leftrightarrow g(x)=-3x^2+6x\leq m,\forall x>2$ (*).

Xét hàm số $g(x)=-3x^2+6x$ trên $[2;+\infty)$ có $\max\limits_{x\geq 2} g(x)=g(2)=0$.

Do đó (*) $\Leftrightarrow m\geq \max\limits_{x\geq 2} g(x) \Leftrightarrow m\geq 0$.

Vậy tập hợp tất cả các giá trị nguyên thuộc đoạn $[-5;5]$ của tham số m là $X=\{0,1,2,3,4,5\}$. Số phần tử của X là 6.

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số:

$y=\frac{1}{3}mx^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+\frac{1}{3}$ đồng biến trên $[2;+\infty)$

A. $m\geq\frac{2}{3}$ **B.** $m\leq 1$ **C.** $m\geq -1$ **D.** $m\leq -1$

Giải:

Ta có: $y'=mx^2-2(m-1)x+3(m-2)$

Hàm số đồng biến trên $[2;+\infty)$ thì

$y'\geq 0 \Leftrightarrow mx^2-2(m-1)x+3(m-2)\geq 0,\forall\in[2;+\infty)$

$\Leftrightarrow m(x^2-2x+3)+2x-6\geq 0 \Leftrightarrow m\geq\frac{6-2x}{x^2-2x+3},\forall\in[2;+\infty)$

Đặt $f(x)=\frac{6-2x}{x^2-2x+3},\forall x\in[2;+\infty)$ ta tìm GTLN của hàm: $f(x),\forall x\in[2;+\infty)$

Ta có:

$f'(x)=\frac{2x^2-12x+6}{(x^2-2x+3)^2},\forall x\in[2;+\infty)$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2x^2-12x+6}{(x^2-2x+3)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3+\sqrt{6}\\x=3-\sqrt{6}\,(loai)\end{array}\right.$

Ta có: $f(2)=\frac{2}{3}, f(3+\sqrt{6})=\frac{2-\sqrt{6}}{2}, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\leq m\Leftrightarrow\frac{2}{3}\leq m.$

Chọn A

Câu 9. (TTHT Lần 4) Cho hàm số $f(x)=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$. Với giá trị nào của tham số m thì $f'(x)>0$ với mọi $x\geq -1$?

A. $m\in\left(-\frac{7}{3};+\infty\right)$ **B.** $m\in\left(-\infty;\frac{5}{4}\right)$ **C.** $m\in\left(-\frac{7}{3};\frac{5}{4}\right)$ **D.** $m\in\left(-\frac{7}{3};-1\right)\cup\left(-1;\frac{5}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x)=3x^2-2(2m-1)x+2-m, \forall x\in\mathbb{R}$

$f'(x)$ là một tam thức bậc hai có hệ số $a>0$

Nếu $\Delta<0$ thì $f'(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(x)>0, \forall x\geq -1.$

Nếu $\Delta\geq 0$ và $f'(x)=0$ có hai nghiệm $x_1;x_2$ sao cho $x_1<x_2<-1$ thì theo định lí dấu tam thức bậc hai ta có $f'(x)>0, \forall x\geq -1.$

$$f'(x)>0, \forall x\geq -1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\Delta'<0\\ \begin{cases}\Delta'\geq 0\\ (x_1+1)(x_2+1)>0\\ x_1+x_2<-2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4m^2-m-5<0\\ \begin{cases}4m^2-m-5\geq 0\\ 3m+7>0\\ 2m-1<-3\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1<m<\dfrac{5}{4}\\ \begin{cases}m\leq -1\vee m\geq \dfrac{5}{4}\\ m>-\dfrac{7}{3}\\ m<-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1<m<\dfrac{5}{4}\\ -\dfrac{7}{3}<m<-1\end{array}\right..$$

Vậy $m\in\left(-\dfrac{7}{3};-1\right)\cup\left(-1;\dfrac{5}{4}\right).$

Sai lầm của học sinh dùng cách hàm số:

$f'(x)>0, \forall x\geq -1\Leftrightarrow 3x^2+2x+2-m(4x+1)>0, \forall x\geq -1$

$\Leftrightarrow m<\dfrac{3x^2+2x+2}{4x+1}, \forall x\geq -1$

$\Leftrightarrow m<\min\limits_{[-1;+\infty)} g(x)$ với $g(x)=\dfrac{3x^2+2x+2}{4x+1}.$

Câu 10. (Quỳnh Lưu Lần 1) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;3]$ để hàm số $y=-x^3-6x^2+(m-9)x+2019$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 9. **B.** 13. **C.** 8. **D.** 14.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=-3x^2-12x+m-9$, để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ khi và chỉ khi

$y'\leq 0\ \forall x\in(-\infty;-1)\Leftrightarrow -3x^2-12x+m-9\leq 0\ \forall x\in(-\infty;-1)\Leftrightarrow m\leq 3x^2+12x+9\ \forall x\in(-\infty;-1)$

Xét hàm số $f(x)=3x^2+12x+9$ có bảng biến thiên.

x	$-\infty$		-2		-1
	$+\infty$				0
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	
			-3		

Từ bảng biến thiên ta suy ra $m\leq -3$

Mặt khác $m\in[-10;3]\Rightarrow m\in[-10;-3]$, do m là số nguyên nên có 8 giá trị.

Câu 11. Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x+2017$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ sao cho $b-a>3$ là

A. $m>6$. **B.** $m=9$. **C.** $m<0$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>6 \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=6x^2+6(m-1)x+6(m-2)$

Hàm số nghịch biến trên $(a;b) \Leftrightarrow x^2+(m-1)x+(m-2)\le 0 \forall x\in(a;b)$

$\Delta=m^2-6m+9$

TH1: $\Delta\le 0 \Rightarrow x^2+(m-1)x+(m-2)\ge 0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$ Vô lí

TH2: $\Delta>0 \Leftrightarrow m\ne 3 \Rightarrow y'$ có hai nghiệm $x_1,x_2\ (x_2>x_1)$

$\Rightarrow$ Hàm số luôn nghịch biến trên $(x_1;x_2)$.

Yêu cầu đề bài:

$\Leftrightarrow x_2-x_1>3 \Leftrightarrow (x_2-x_1)^2>9 \Leftrightarrow S^2-4P>9$

$\Leftrightarrow (m-1)^2-4(m-2)>9 \Leftrightarrow m^2-6m>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>6 \\ m<0 \end{array}\right.$

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2+2mx-3m+4$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài là 3?

A. $m=-1;m=9$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=9$. **D.** $m=1;m=-9$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=x^2-mx+2m$

Ta không xét trường hợp $y'\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$ vì $a=1>0$

Hàm số nghịch biến trên một đoạn có độ dài là 3 $\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm x_1,x_2 thỏa

$$|x_1-x_2|=3 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \Leftrightarrow m^2-8m>0 \\ (x_1-x_2)^2=9 \Leftrightarrow S^2-4P=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>8 \text{ hay } m<0 \\ m^2-8m=9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=9 \end{array}\right.$$

Câu 13. **(THPT-Ngô-Quyền-Hải-Phòng-Lần-2-2018-2019-Thi-24-3-2019)** Biết hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+3(m-1)x^2+9x+1$ nghịch biến trên khoảng $(x_1;x_2)$ và đồng biến trên các khoảng còn lại của tập xác định. Nếu $|x_1-x_2|=6\sqrt{3}$ thì có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m thỏa mãn đề bài?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R}$

Cho $y'=0 \Leftrightarrow x^2-6(m-1)x+9=0 \quad (*)$

Theo đề: hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+3(m-1)x^2+9x+1$ nghịch biến trên khoảng $(x_1;x_2)$ và đồng biến trên các khoảng còn lại của tập xác định. Suy ra hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+3(m-1)x^2+9x+1$ có 2 điểm cực trị x_1,x_2 hay x_1,x_2 là nghiệm của phương trình $(*)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Điều kiện: $\Delta_{y'} > 0 \Leftrightarrow 36\left(m^2-2m\right) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>2 \end{array}\right.$

Mà $\left|x_1-x_2\right| = 6\sqrt{3} \Leftrightarrow \left(x_1-x_2\right)^2 = 108 \Leftrightarrow \left(x_1+x_2\right)^2 - 4x_1x_2 = 108 \Leftrightarrow 36\left(m-1\right)^2 - 36 = 108$

$\Leftrightarrow m^2-2m-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=3 \end{array}\right.$

So với điều kiện ta nhận $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=3 \end{array}\right.$

Vậy có 1 giá trị nguyên âm của tham số m thỏa yêu cầu.

Câu 14. (Chuyên Hùng Vương Gia Lai) Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số thực m để hàm số $y=-x^3+3x^2+\left(m-1\right)x+2m-3$ đồng biến trên đoạn có độ dài lớn hơn 1?

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y=-x^3+3x^2+\left(m-1\right)x+2m-3 \Rightarrow y'=-3x^2+6x+m-1$.

Nếu $\Delta_{y'} \le 0$ thì hàm số luôn nghịch biến.

Nếu $\Delta_{y'} > 0$ thì hàm số đồng biến trên $\left[x_1;x_2\right]$ với $x_1, x_2 \left(x_1<x_2\right)$ là hai nghiệm của phương trình $y'=0$.

Do vậy, hàm số đồng biến trên đoạn có độ dài lớn hơn 1 khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $\left|x_1-x_2\right|>1$.

+) $\Delta_{y'} > 0 \Leftrightarrow 9+3\left(m-1\right) > 0 \Leftrightarrow m > -2$ (1)

+) Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1x_2=\dfrac{m-1}{-3} \end{cases}$

+) $\left|x_1-x_2\right|>1 \Leftrightarrow \left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2>1 \Leftrightarrow 4+\dfrac{4\left(m-1\right)}{3}>1 \Leftrightarrow m>-\dfrac{5}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $m>-\dfrac{5}{4}$ mà m nguyên âm do đó $m=-1$.

Câu 15. Tìm tham số m để hàm số $y=x^3+3mx^2+3\left(m+1\right)x+2$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài lớn hơn 4.

A. $m<\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}$ **B.** $m<\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}$ hoặc $m>\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$

C. $m>\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$ **D.** $\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}<m<\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$

Lời giải

Ta có $D=\mathbb{R}$, $y'=3x^2+6mx+3\left(m+1\right)=3\left(x^2+2mx+m+1\right)$

$y'=0 \Leftrightarrow x^2+2mx+m+1=0$ (1). Điều kiện cần và đủ để hàm số nghịch biến trên một đoạn có độ dài lớn hơn 4 $\Leftrightarrow y' \le 0$ trên đoạn có độ dài lớn hơn 4 $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm $x_1;x_2 \left(x_1 \ne x_2\right)$ thoả mãn $\left|x_1-x_2\right|>4$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ \left|x_1-x_2\right|>4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ \left|2\sqrt{\Delta'}\right|>4 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta'>4 \Leftrightarrow m^2-m-1>4$

$\Leftrightarrow m^2-m-5>0 \Leftrightarrow m<\dfrac{1-\sqrt{21}}{2} \vee m>\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vậy hàm số (1) nghịch biến trên một đoạn có độ dài lớn hơn 4

$\Leftrightarrow m<\frac{1-\sqrt{21}}{2} \vee m>\frac{1+\sqrt{21}}{2}$

Chọn B

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^4-2(m-1)x^2+m-2$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$?

A. $m\in[-5;2)$. **B.** $m\in(-\infty;2]$. **C.** $m\in(2,+\infty)$. **D.** $m\in(-\infty;-5)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=4x^3-4(m-1)x$.

Hàm số đồng biến trên $(1;3) \Leftrightarrow y'\geq 0,\forall x\in(1;3) \Leftrightarrow g(x)=x^2+1\geq m,\forall x\in(1;3)$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(1;3)$.

x	1		3
g'		+	0
g	2	↗	10

Dựa vào bảng biến thiên, kết luận: $m\leq \min g(x) \Leftrightarrow m\leq 2$.

Câu 17. (SỞ GDĐT KIÊN GIANG 2019) Cho hàm số $y=\frac{x^4}{4}-\frac{mx^3}{3}+\frac{x^2}{2}-mx+2019$ (m là tham số). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(6;+\infty)$. Tính số phần tử của S biết rằng $|m|\leq 2020$.

A. 4041. **B.** 2027. **C.** 2026. **D.** 2015.

Lời giải

Chọn B

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(6;+\infty)$ khi và chỉ khi $y'\geq 0,\forall x\in(6;+\infty)$.

$y'=x^3-mx^2+x-m=x^3-m(x^2+1)+x\geq 0,\forall x\in(6;+\infty)$.

$\Leftrightarrow m\leq \frac{x^3+x}{x^2+1}=x,\forall x\in(6;+\infty)$.

Đặt $f(x)=x$ thì $m\leq f(x),\forall x\in(6;+\infty) \Leftrightarrow m\leq \min f(x),\forall x\in(6;+\infty)$.

$\Leftrightarrow m\leq 6$.

Mà $|m|\leq 2020$ nên $m\in\{-2020;-2019;...,6\}$, có 2027 phần tử.

Câu 18. (Đặng Thành Nam Đề 2) Có bao nhiêu số thực m để hàm số $y=(m^3-3m)x^4+m^2x^3-mx^2+x+1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. 3. **B.** 1. **C.** Vô số. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

• TH1: $m^3-3m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$.

+) Với $m=0$ thì hàm số đã cho trở thành $y=x+1$, hàm số này đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $m=0$ thỏa mãn.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

+) Với $m=\sqrt{3}$ thì hàm số đã cho trở thành $y=3x^3-\sqrt{3}x^2+x+1$ có $y'=9x^2-2\sqrt{3}x+1>0$, với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vậy $m=\sqrt{3}$ thỏa mãn.

+) Với $m=-\sqrt{3}$ thì hàm số đã cho trở thành $y=3x^3+\sqrt{3}x^2+x+1$ có $y'=9x^2+2\sqrt{3}x+1>0$, với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vậy $m=-\sqrt{3}$ thỏa mãn.

• TH2: $m^3-3m\neq 0$. Ta có: $y'=4\left(m^3-3m\right)x^3+3m^2x^2-2mx+1$.

Nhận thấy, với $m^3-3m\neq 0$ thì y' là hàm số bậc ba nên phương trình $y'=0$ có ít nhất 1 nghiệm và y' đổi dấu khi qua nghiệm đó.

Suy ra hàm số đã cho không đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn là 0; $\sqrt{3}$ và $-\sqrt{3}$.

Câu 19. (PHÂN-TÍCH-BL-VÀ-PT-ĐẠI-HỌC-SP-HÀ-NỘI) Gọi S là tập hợp các số thực m thỏa mãn hàm số $y=mx^4+x^3-(m+1)x^2+9x+5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Số phần tử của S là

A. 3 **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=\mathbb{R}$

$y'=4mx^3+3x^2-2(m+1)x+9$

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $y'=0$ tại hữu hạn điểm trên $\mathbb{R}$.

TH1: $m=0$, $y'=3x^2-2x+9>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, Suy ra $m=0$ thỏa mãn.

TH2: $m>0$, ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}y'=-\infty$. Suy ra hàm số $y=mx^4+x^3-(m+1)x^2+9x+5$ không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

TH3: $m<0$, ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}y'=-\infty$. Suy ra hàm số $y=mx^4+x^3-(m+1)x^2+9x+5$ không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy $S=\{0\}$, số phần tử của S là 1.

Câu 20. (Triệu Thái Vĩnh Phúc Lần 3) Số giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2018;2018]$ để hàm số $y=x^4+mx^2-m-2$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ là

A. 2019. **B.** 2018. **C.** 2021. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn C

$y=x^4+mx^2-m-2\Rightarrow y'=4x^3+2mx^2=2x^2(2x^2+m)$

Cho m thuộc $y'=0(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=\dfrac{-m^2}{2}\end{array}\right.$

Để hàm số $y=x^4+mx^2-m-2$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ thì

TH1: $m\geq 0$ phương trình (1) có một nghiệm duy nhất $x=0$.

Suy ra hàm số đã cho luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Vậy hàm số $y=x^4+mx^2-m-2$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ với mọi $m\geq 0$.

Trường hợp này có 2019 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

TH2: $m<0$ phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $x=0;x=\sqrt{\dfrac{-m}{2}};x=-\sqrt{\dfrac{-m}{2}}$.

Suy ra hàm số $y=x^4+mx^2-m-2$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ thì

$\sqrt{\frac{-m}{2}} \le 1 \Leftrightarrow m \ge -2$. Trường hợp này có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Vậy có 2021 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 21. (THPT-Nguyễn-Công-Trứ-Hà-Tĩnh-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$?

A. $m \in [-5;2)$. **B.** $m \in (-\infty;2]$. **C.** $m \in (2;+\infty)$. **D.** $m \in (-\infty;-5)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$ đồng biến trên khoảng $(1;3) \Leftrightarrow y' = 4x^3 - 4(m-1)x \ge 0 \quad \forall x \in (1;3)$

Thay $m = 2$ vào y' ta có $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$

$y' \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \le x \le 0 \\ x \ge 1 \end{array}\right.$, do đó $y' \ge 0 \ \forall x \in (1;3)$.

Ta thấy $m=2$ đúng nên chọn đáp án

B.

Câu 22. (THPT-Ngô-Quyền-Hải-Phòng-Lần-2-2018-2019-Thi-24-3-2019) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 + (2+m)x^2 + 4 + 2m$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

A. $m \le -4$. **B.** $m < -4$. **C.** $m \ge -2$. **D.** $m > -2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 4x^3 + 2(2+m)x = 4x\left(x^2 + \frac{2+m}{2}\right)$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -\frac{m+2}{2} \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $-\frac{m+2}{2} \le 0 \Leftrightarrow m \ge -2$. Ta có bảng xét dấu y' sau:

x	$-\infty$		0		$-\infty$
y'		$-$	0	$+$	

Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty;0)$ nên nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$. Suy ra $m \ge -2$ thỏa yêu cầu.

Trường hợp 2: $-\frac{m+2}{2} > 0 \Leftrightarrow m < -2$. Ta có bảng xét dấu y' sau:

x	$-\infty$		$-\sqrt{-\frac{m+2}{2}}$		0		$\sqrt{-\frac{m+2}{2}}$		$-\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu trên, ta nhận thấy hàm số không thể nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

Suy ra trường hợp này không thỏa.

Kết luận: $m \ge -2$

Câu 23. (Trần Đại Nghĩa) Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = -x^4 + (2m-3)x^2 + m$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ là $\left(-\infty;\frac{p}{q}\right]$, trong đó phân số $\frac{p}{q}$ tối giản và $q > 0$. Hỏi tổng $p+q$ là?

A. 7. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=-4x^3+2(2m-3)x$.

Hàm số nghịch biến trên $(1;2)$ khi và chỉ khi

$$y'\le 0,\forall x\in(1;2)\Leftrightarrow -4x^3+2(2m-3)x\le 0,\forall x\in(1;2)$$

$$\Leftrightarrow m\le\frac{4x^3+6x}{4x},\forall x\in(1;2)\Leftrightarrow m\le x^2+\frac{3}{2},\forall x\in(1;2)$$

Xét hàm số $g(x)=x^2+\frac{3}{2}$ trên $(1;2)$ ta có bảng biến thiên

x	1		2
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$	$\frac{7}{2}$

Vậy, $m\le\frac{5}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Suy ra $p=5,q=2$, tức $p+q=7$.

Câu 24. (Đặng Thành Nam Đề 12) Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=m^2x^4-2(4m-1)x^2+1$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

A. 7. **B.** 16. **C.** 15. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y=m^2x^4-2(4m-1)x^2+1\Rightarrow y'=4m^2x^3-4(4m-1)x$.

+ TH1: Nếu $m=0$ thì $y'=4x$.

BBT:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$y(0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$. Nhận $m=0$.

+ TH2: Nếu $m\ne 0$ thì $y'=0\Leftrightarrow\left[m^2x^2-(4m-1)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2=\frac{4m-1}{m^2}\ (1)\end{array}\right.$.

* Nếu $4m-1\le 0\Leftrightarrow m\le\frac{1}{4}$ thì phương trình (1) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x=0$.

Ta có $a=m^2>0,\forall m\ne 0$ khi đó hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$. Nhận các giá trị $m \le \frac{1}{4}$.

Mà ta có $m \in (-10;10)$, $m \in \mathbb{Z}$ khi đó $\begin{cases} -10 < m \le \frac{1}{4} \\ m \ne 0,\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$ nên có 9 giá trị của m thỏa mãn.

* Nếu $4m-1>0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$ thì $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt là $x=0$ và $x = \pm\frac{\sqrt{4m-1}}{m}$.

BBT:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{4m-1}}{m}$		0		$\frac{\sqrt{4m-1}}{m}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$y\left(-\frac{\sqrt{4m-1}}{m}\right)$	↗	1	↘	$y\left(\frac{\sqrt{4m-1}}{m}\right)$	↗	$+\infty$

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì $\frac{\sqrt{4m-1}}{m} \le 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le 2-\sqrt{3} \\ m \ge 2+\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Kết hợp với $m \in (-10;10)$, $m \in \mathbb{Z}$, ta có: $\left[\begin{array}{l} -10 < m \le 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} \le m < 10 \end{array}\right. \Rightarrow$ do m nguyên nên có 16 giá trị của m thỏa mãn.

Vậy có 16 giá trị m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Bổ sung cách 2 như sau:

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty) \Leftrightarrow y' = 4m^2x^3 - 4(4m-1)x \ge 0, \forall x>1$ và $y'=0$ có nghiệm hữu hạn trên $(1;+\infty)$.

$\Leftrightarrow m^2x^2 - (4m-1) \ge 0, \forall x>1$ (*)

+ Với $m=0$: $(*) \Leftrightarrow -(-1) \ge 0, \forall x>1$ luôn đúng nên ta nhận $m=0$.

+ Với $m \ne 0$: $(*) \Leftrightarrow x^2 \ge \frac{4m-1}{m^2}, \forall x>1 \Leftrightarrow 1 \ge \frac{4m-1}{m^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le 2-\sqrt{3} \\ m \ge 2+\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Tổng hợp các điều kiện và trường hợp ta có: $m \in \{-9,-8,...,0,4,5,...,9\}$. Vậy có 16 giá trị m.

Câu 25. (THPT ISCHOOL NHA TRANG) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \frac{1}{5}m^2x^5 - \frac{1}{3}mx^3 + 10x^2 - (m^2-m-20)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** -2. **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = m^2x^4 - mx^2 + 20x - (m^2-m-20)$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x) = m^2x^4 - mx^2 + 20x - (m^2-m-20) \ge 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ (*).

Ta có $f'(-1)=0$ nên $f'(x) = (x+1)\left[m^2x^3 - m^2x^2 + (m^2-m)x - m^2 + m + 20\right] = (x+1)g(x)$. Nếu $x=-1$ không phải là nghiệm của $g(x)$ thì $f'(x)$ đổi dấu khi x đi qua -1, suy ra $f(x)$ không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó điều kiện cần để $f'(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ là $g(-1)=0$ $g(-1)=0\Leftrightarrow -4m^2+2m+20=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\\m=\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$.

Với $m=-2\Rightarrow f'(x)=(x+1)\left(4x^3-4x^2+6x+14\right)=(x+1)^2\left(4x^2-8x+14\right)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ .và $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$, do đó $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra $m=-2$ thoả mãn.

Với $m=\dfrac{5}{2}\Rightarrow f'(x)=(x+1)\left(\dfrac{25x^3}{4}-\dfrac{25x^2}{4}+\dfrac{15x}{4}+\dfrac{65}{4}\right)$

$=\dfrac{(x+1)^2\left(25x^2-50x+65\right)}{4}\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$ và $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$, do đó $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra $m=\dfrac{5}{2}$ thoả mãn.

Từ đó $S=\left\{-2;\dfrac{5}{2}\right\}$, suy ra tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng $-2+\dfrac{5}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số: $y=\dfrac{mx+1}{x+m}$ luôn đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

A. $m\le 1$ hoặc $m\ge -1$.
B. $m<-1$ hoặc $m>1$.
C. $m\le 2$ hoặc $m\ge -1$.
D. $m\le 2$ hoặc $m\ge 1$.

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{m^2-1}{(x+m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi $y'>0,\forall x\ne -m\Leftrightarrow m^2-1>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>1\end{array}\right.$

Chọn B

Câu 27. (SỞ GD & ĐT CÀ MAU) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx+1}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-3)$.

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Ta có $y'=\dfrac{m^2-1}{(x+m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-3)\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-1>0\\-m\notin(-\infty;-3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>1\\m<-1\end{array}\right.\Leftrightarrow m\in(-\infty;-1)\cup(1;3]\\m\le 3\end{cases}$. Vì m nguyên dương nên $m\in\{2;3\}$.

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 28. (Nam Tiền Hải Thái Bình Lần1) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+m^2}{x+4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-4\}$

Ta có $y'=\frac{4-m^2}{(x+4)^2}$. Để hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-4)$ và $(-4;+\infty)$ thì

$y'>0\forall x\neq -4 \Leftrightarrow 4-m^2>0, \forall x\in(-\infty;-4)\cup(-4;+\infty) \Leftrightarrow m\in(-2;2)$

Mà m nguyên nên $m\in\{-1;0;1\}$

Vậy có 3 giá trị nguyên của m. Chọn đáp án C.

Câu 29. (Chuyên Phan Bội Châu Lần2) Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{(m+1)x+2m+2}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$ là

A. $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $[1;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Chọn C

$y'=\frac{m^2-m-2}{(x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên $(-1;+\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases}m^2-m-2<0\\-m\le -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<m<2\\m\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow 1\le m<2$.

Câu 30. (THPT SỐ 1 TƯ NGHĨA LẦN 2 NĂM 2019) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)=\frac{(m-2)x+9}{x+m-2}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$. Số phần tử của tập S là:

A. 4. **B.** 2. **C.** Vô số. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Có: $f(x)=\frac{(m-2)x+9}{x+m-2}\Rightarrow f'(x)=\frac{(m-2)^2-9}{(x+m-2)^2}$

+) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$

$\Leftrightarrow f'(x)<0,\forall x\in(-\infty;1)\Leftrightarrow\frac{(m-2)^2-9}{(x+m-2)^2}<0,\forall x\in(-\infty;1)\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 2-m,\forall x\in(-\infty;1)\\(m-2)^2-9<0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2-m\ge 1\\m^2-4m-5<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le 1\\-1<m<5\end{cases}\Leftrightarrow -1<m\le 1$

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{0;1\}$.

Câu 31. Hàm số $y=\frac{x^2-4x}{x+m}$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ thì giá trị của m là:

A. $m\in\left(-\frac{1}{2};2\right]\setminus\{-1\}$. **B.** $m\in(-1;2]\setminus\{-1\}$. **C.** $m\in\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $m\in\left(-1;\frac{1}{2}\right]$.

Lời giải

Chọn D

$y=\frac{x^2-4x}{x+m}$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$ và $y'=\frac{x^2+2mx-4m}{(x+m)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $[1;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -m<1 \\ x^2+2mx-4m \ge 0, \forall x \in [1;+\infty) \end{cases}$

$x^2+2mx-4m \ge 0, \forall x \in [1;+\infty) \Leftrightarrow 2m(x-2) \ge -x^2, \forall x \in [1;+\infty)$ (1)

Do $x=2$ thỏa bất phương trình $2m(x-2) \ge -x^2$ với mọi m nên ta chỉ cần xét $x \ne 2$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m \le \dfrac{-x^2}{x-2}, \forall x \in [1;2) \\ 2m \ge \dfrac{-x^2}{x-2}, \forall x \in (2;+\infty) \end{cases}$ (2)

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{-x^2}{x-2}$ trên $[1;+\infty)\setminus\{2\}$ có $f'(x)=\dfrac{-x^2+4x}{(x-2)^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	1		2		4		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$-$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	8	$\searrow$	$+\infty$

$YCBT \Leftrightarrow \begin{cases} m>-1 \\ 2m \le 1 \\ 2m \ge -8 \end{cases} \Leftrightarrow -1<m \le \dfrac{1}{2}.$

Cách khác

$y=\dfrac{x^2-4x}{x+m}$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$ và $y'=\dfrac{x^2+2mx-4m}{(x+m)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $[1;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -m<1 \\ x^2+2mx-4m \ge 0, \forall x \in [1;+\infty) \end{cases}$

$x^2+2mx-4m \ge 0, \forall x \in [1;+\infty) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta \le 0 \\ \begin{cases} \Delta>0 \\ x_1<x_2 \le 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2+4m \le 0 \\ \begin{cases} m^2+4m>0 \\ -m+\sqrt{m^2+4m} \le 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4 \le m \le 0 \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>0 \\ m<-4 \end{array}\right. \\ m \ge -1 \end{cases} \\ m \le \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Kết hợp với đk $m>-1$ ta được $-1<m \le \dfrac{1}{2}$.

Câu 32. (Thanh Chương Nghệ An Lần 2) Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ là

A. $\left(-\infty;-\dfrac{8}{5}\right)$. **B.** $\left[-3;-\dfrac{8}{5}\right]$. **C.** $\left(-\dfrac{8}{5};+\infty\right)$. **D.** $\left[-\dfrac{8}{5};+\infty\right)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 2mx - m - 1}{(x-m)^2}$.

Hàm số xác định trên khoảng $(-\infty;-3) \Leftrightarrow m \notin (-\infty;-3) \Leftrightarrow m \geq -3$

Khi đó để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ thì $y' \geq 0 \ \ \forall x \in (-\infty;-3)$.

$\Leftrightarrow x^2 - 2mx - m - 1 \geq 0 \ \ \forall x \in (-\infty;-3) \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq m(2x+1)$ với $\forall x \in (-\infty;-3)$.

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{2x+1} \leq m$ với $\forall x \in (-\infty;-3)$.

Đặt $g(x) = \dfrac{x^2-1}{2x+1}$ ta có $g'(x) = \dfrac{2x^2+2x+2}{(2x+1)^2} > 0$ với $\forall x \in (-\infty;-3)$.

BBT

x	$-\infty$		-3
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$-\dfrac{8}{5}$

Vậy $m \geq -\dfrac{8}{5}$ (Thỏa mãn điều kiện $m \geq -3$).

Câu 33. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{2x^2 + (1-m)x + 1 + m}{x - m}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$. Ta có $y' = \dfrac{2x^2 - 4mx + m^2 - 2m - 1}{(x-m)^2} = \dfrac{g(x)}{(x-m)^2}$

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $g(x) \geq 0, \forall x > 1$ và $m \leq 1$ (1)

Vì $\Delta_g{}' = 2(m+1)^2 \geq 0, \forall m$ nên $(1) \Leftrightarrow g(x) = 0$ có hai nghiệm thỏa $x_1 \leq x_2 \leq 1$

Điều kiện tương đương là $\begin{cases} 2g(1) = 2(m^2 - 6m + 1) \geq 0 \\ \dfrac{S}{2} = m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 3 - 2\sqrt{2} \approx 0,2$.

Do đó không có giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 34. (Chuyên Thái Nguyên) Số các giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019;2019]$ để hàm số $y = \dfrac{(m+1)x^2 - 2mx + 6m}{x-1}$ đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$?

A. 2034. **B.** 2018. **C.** 2025. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta có $y'=\dfrac{\left[2(m+1)x-2m\right](x-1)-\left[(m+1)x^2-2mx+6m\right]}{(x-1)^2}=\dfrac{(m+1)x^2-2(m+1)x-4m}{(x-1)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)\Leftrightarrow y'=\dfrac{(m+1)x^2-2(m+1)x-4m}{(x-1)^2}\geq 0,\ \forall x\geq 4$.

$\Leftrightarrow (m+1)x^2-2(m+1)x-4m\geq 0,\ \forall x\geq 4\Leftrightarrow (x^2-2x-4)m+x^2-2x\geq 0,\ \forall x\geq 4$.

$\Leftrightarrow m\geq \dfrac{-x^2+2x}{x^2-2x-4},\ \forall x\geq 4$ (Do $x^2-2x+4>0$ với mọi $x\geq 4$) $(*)$

Đặt $g(x)=\dfrac{-x^2+2x}{x^2-2x-4}$ có $g'(x)=\dfrac{8x-8}{(x^2-2x-4)^2}>0,\ \forall x\geq 4$.

Bảng biến thiên:

x	4		$+\infty$
y'		$+$	
y		↗	-1
	-2		

Từ bảng biến thiên suy ra $(*)\Leftrightarrow m\geq -1$.

Mà $m\in\mathbb{Z};\ m\in[-2019;2019]\Rightarrow m\in\{-1;0;...;2019\}$

$\Rightarrow$Có 2021 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 35. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2+x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-3;-2]$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $(-\infty;-2]$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=\dfrac{m-(x+1)^2}{(x^2+x+m)^2}$.

ycbt $\Leftrightarrow \begin{cases} y'\leq 0 \\ x^2+x+m\neq 0 \end{cases},\ \forall x\in(-1;1)\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m-(x+1)^2}{(x^2+x+m)^2}\leq 0 \\ x^2+x+m\neq 0 \end{cases},\ \forall x\in(-1;1)$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\leq (x+1)^2 \\ m\neq -x^2-x \end{cases},\ \forall x\in(-1;1)$.

$m\leq (x+1)^2,\forall x\in(-1;1)\Leftrightarrow m\leq 0$ (*).

Đặt $f(x)=-x^2-x,\ x\in(-1;1)$.

$\Rightarrow f'(x)=-2x-1\Leftrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$f'(x)$			$+$	0	$-$		
$f(x)$		0		$\frac{1}{4}$		-2	

Vậy $m\in(-\infty;-2]\cup\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$ (**).

Từ $(*)$, $(**)$ $\Rightarrow$ $m\in(-\infty;-2]$.

Câu 36. (HSG Bắc Ninh) Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y=x^3+mx-\frac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 12. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=3x^2+m+\frac{1}{x^6},\forall x\in(0;+\infty)$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ $\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow -m\le 3x^2+\frac{1}{x^6},\forall x\in(0;+\infty)$

Xét hàm số $g(x)=3x^2+\frac{1}{x^6}$ với $x\in(0;+\infty)$. Ta có $3x^2+\frac{1}{x^6}=x^2+x^2+x^2+\frac{1}{x^6}\ge 4\sqrt[4]{x^2.x^2.x^2.\frac{1}{x^6}}=4$, dấu bằng xảy ra khi $x=1$ nên $\underset{(0;+\infty)}{Min}\,g(x)=4$.

Mặt khác, ta có $-m\le 3x^2+\frac{1}{x^6},\forall x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow -m\le \underset{(0;+\infty)}{Min}\,g(x)\Leftrightarrow -m\le 4\Leftrightarrow m\ge -4$.

Vậy có 4 giá trị nguyên âm của m là $-1;-2;-3;-4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 37. Tìm m để hàm số sau đồng biến trên $\mathbb{R}$: $y=\frac{2}{3}e^{3x}-me^x+4x-2018$.

A. $m\ge -6$ **B.** $m\le 6$ **C.** $m\le -5$ **D.** $m\ge 6$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $t=e^x, t>0\Rightarrow y=\frac{2}{3}t^3-mt+4\ln t-2018,\ t>0\Rightarrow y'=2t^2-m+\frac{4}{t},\ t>0$.

YCBT $\Leftrightarrow y'\ge 0,\ \forall t>0\Leftrightarrow 2t^2+\frac{4}{t}\ge m,\ \forall t>0$.

Xét hàm số $f(t)=2t^2+\frac{4}{t},\ \forall t>0\Rightarrow f'(t)=4t-\frac{4}{t^2}$.

$f'(t)=0\Leftrightarrow 4t-\frac{4}{t^2}=0\Leftrightarrow t=1$.

Bảng biến thiên:

t	0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Theo BBT có $m\le 6$ thoả yêu cầu.

Câu 38. (Chuyên Vinh Lần 3) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-2019;2019)$ để hàm số $y=\sin^3 x-3\cos^2 x-m\sin x-1$ đồng biến trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

A. 2028. **B.** 2018 **C.** 2020. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn D

$y=\sin^3 x-3\cos^2 x-m\sin x-1 \Leftrightarrow y=\sin^3 x+3\sin^2 x-m\sin x-4$.

$y'=\left(3\sin^2 x+6\sin x-m\right)\cos x$.

Hàm số đồng biến trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ khi và chỉ khi hàm số liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ và hàm số đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow y'\ge 0\ \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 3\sin^2 x+6\sin x-m\ge 0\ \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 3\sin^2 x+6\sin x\ge m\ \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\ (1)$.

Đặt $t=\sin x, x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in(0;1)$.

Xét hàm số $f(t)=3t^2+6t$ trên $(0;1)$ ta có bảng biến thiên sau

t	0		1
$f'(t)$		+	
$f(t)$	0	↗	6

Dựa vào bảng biến thiên ta có (1) xảy ra khi và chỉ khi $m\le 0$.

Suy ra có 2019 giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019;2019)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 39. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\sin x+\cos x+mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-\sqrt{2}\le m\le\sqrt{2}$. **B.** $m\le-\sqrt{2}$. **C.** $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$. **D.** $m\ge\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y=\sin x+\cos x+mx$

$y'=\cos x-\sin x+m$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}.\Leftrightarrow m\ge\sin x-\cos x,\forall x\in\mathbb{R}.$

$\Leftrightarrow m\ge\max_{\mathbb{R}}\varphi(x)$, với $\varphi(x)=\sin x-\cos x$.

Ta có: $\varphi(x)=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}$.

Do đó: $\max_{\mathbb{R}}\varphi(x)=\sqrt{2}$. Từ đó suy ra $m\ge\sqrt{2}$.

Câu 40. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=(m-3)x-(2m+1)\cos x$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $-4\le m\le\frac{2}{3}$. **B.** $m\ge 2$. **C.** $\begin{cases}m>3\\m\ne 1\end{cases}$. **D.** $m\le 2$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=m-3+(2m+1)\sin x$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y'\le 0,\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow (2m+1)\sin x\le 3-m,\forall x\in\mathbb{R}$

Trường hợp 1: $m=-\frac{1}{2}$ ta có $0\le\frac{7}{2},\forall x\in\mathbb{R}$. Vậy hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Trường hợp 2: $m<-\frac{1}{2}$ ta có $\sin x\ge\frac{3-m}{2m+1},\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{3-m}{2m+1}\le -1$

$\Leftrightarrow 3-m\ge -2m-1\Leftrightarrow m\ge -4$

Trường hợp 3: $m>-\frac{1}{2}$ ta có:

$\sin x\le\frac{3-m}{2m+1},\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{3-m}{2m+1}\ge 1\Leftrightarrow 3-m\ge 2m+1\Leftrightarrow m\le\frac{2}{3}$. Vậy $m\in\left[-4;\frac{2}{3}\right]$

Câu 41. Cho hàm số $y=(2m-1)x-(3m+2)\cos x$. Gọi X là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Tổng giá trị hai phần tử nhỏ nhất và lớn nhất của X bằng

A. -4. **B.** -5. **C.** -3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}$

$y'=2m-1+(3m+2)\sin x$. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y'\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 2m-1+(3m+2)\sin x\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ (*)

Nếu $m=-\frac{2}{3}$ thì (*) không thỏa.

Nếu $m>-\frac{2}{3}$ thì (*) $\Leftrightarrow\sin x\le\frac{1-2m}{3m+2},\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{1-2m}{3m+2}\ge 1\Leftrightarrow -\frac{2}{3}<m\le -\frac{1}{5}$.

Nếu $m<-\frac{2}{3}$ thì (*) $\Leftrightarrow\sin x\ge\frac{1-2m}{3m+2},\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{1-2m}{3m+2}\le -1\Leftrightarrow -3\le m<-\frac{2}{3}$.

Ta có $X=\{-3;-2;-1\}$.

Vậy $-3-1=-4$.

Câu 42. (THANH CHƯƠNG 1 NGHỆ AN 2019 LẦN 3) Cho hàm số $y=-2\sin^3 x+3\sin^2 x+6(2m-1)\sin x+2019$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m thuộc khoảng $(-2016;2019)$ để hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$?

A. 2019. **B.** 2017. **C.** 2021. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn B

$y'=\left[-6\sin^2 x+6\sin x+6(2m-1)\right]\cos x$

Ta có $\forall x\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right):\cos x<0$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)\Leftrightarrow y'\le 0\ \forall x\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow -6\sin^2 x+6\sin x+6(2m-1)\ge 0\ \forall x\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ (1)

Đặt $t=\sin x,\ \forall x\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in(-1;1)$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Điều kiện (1) trở thành tìm m thỏa mãn

$-6t^2+6t+6(2m-1)\ge 0 \quad \forall t\in(-1;1)$

$\Leftrightarrow 2m-1\ge t^2-t \quad \forall t\in(-1;1)$

Xét hàm số nghịch biến trên khoảng $f(t)=t^2-t, t\in(-1;1)$.

Ta có bảng biến thiên

t	-1		$\frac{1}{2}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	2	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0

Ycbt $\Leftrightarrow 2m-1\ge 2\Leftrightarrow m\ge\frac{3}{2}$ mà m thuộc khoảng $(-2016;2019)$ nên có 2017 giá trị thỏa mãn.

Câu 43. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{m\cos x-4}{\cos x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right)$

A. $1\le m<2$. **B.** $\left[\begin{array}{l}-2<m\le 0\\ \frac{1}{2}\le m<2\end{array}\right.$. **C.** $m\ge 2$. **D.** $-2<m\le 0$.

Lời giải

$y=\frac{m\cos x-4}{\cos x-m}\Rightarrow y'=\frac{(m^2-4)\sin x}{(\cos x-m)^2}; y'<0,\forall x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m^2-4<0\\ m\notin\left(0;\frac{1}{2}\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<m\le 0\\ \frac{1}{2}\le m<2\end{array}\right.$.

Chọn B

Câu 44. (KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG) Tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\frac{2\cos x-1}{\cos x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ là

A. $m>1$. **B.** $m>\frac{1}{2}$. **C.** $m\ge\frac{1}{2}$. **D.** $m\ge 1$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\cos x=t$. Ta có $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in(0;1)$. Vì hàm số $y=\cos x$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên yêu cầu bài toán tương đương với tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f(t)=\frac{2t-1}{t-m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)\Leftrightarrow y'=\frac{-2m+1}{(t-m)^2}<0,\ \forall t\in(0;1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m+1<0 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 1.$

Câu 45. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số: $y=\dfrac{\tan x-2}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$

A. $m \le 0$ hoặc $1 \le m < 2$. **B.** $m \le 0$.

C. $1 \le m < 2$. **D.** $m \ge 2$.

Lời giải

Đặt $t=\tan x$, với $x \in \left(0;\dfrac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in (0;1)$

Hàm số đã cho trở thành tìm tham số m để hàm số $y=\dfrac{t-2}{t-m}$ đồng biến trên khoảng (0;1)

Ta có: $y'(t)=\dfrac{-m+2}{(t-m)^2}$

Để hàm số đồng biến trong khoảng (0;1) thì:

$\begin{cases} y'(t)>0 \\ t \ne m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m+2>0 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<2 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \le m < 2 \\ m \le 0 \end{array}\right.$

Chọn A

Câu 46. (Lý Nhân Tông) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-19;19)$ để hàm số $y=\dfrac{\tan x-3m+3}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

A. 17. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\tan x$, khi x trong $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ thì t tăng trong $(0;1)$.

Do đó hàm số ban đầu đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ khi hàm số $y=\dfrac{t-3m+3}{t-m}$

đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Xét hàm số $y=\dfrac{t-3m+3}{t-m}$ có:

$y'=\dfrac{2m-3}{(t-m)^2}$

Hàm số $y=\dfrac{t-3m+3}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$ khi $\begin{cases} 2m-3>0 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow m>\dfrac{3}{2}$

Trong khoảng $(-19;19)$ có 17 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán!

Câu 47. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{\cot x-1}{m\cot x-1}$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $m \in (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$. **B.** $m \in (-\infty;0)$.

C. $m\in(1;+\infty)$. **D.** $m\in(-\infty;1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=\dfrac{-\left(1+\cot^2 x\right)\left(m\cot x-1\right)+m\left(1+\cot^2 x\right)\left(\cot x-1\right)}{\left(m\cot x-1\right)^2}=\dfrac{\left(1+\cot^2 x\right)\left(1-m\right)}{\left(m\cot x-1\right)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m\cot x-1\neq 0,\forall x\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right) \\ y'=\dfrac{\left(1+\cot^2 x\right)\left(1-m\right)}{\left(m\cot x-1\right)^2}>0,\forall x\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\le 0\vee m\ge 1 \\ 1-m>0 \end{cases}\Leftrightarrow m\le 0.$$

Câu 48. (Hoàng Hoa Thám Hưng Yên) Cho hàm số $y=\dfrac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong khoảng $(-10;10)$ sao cho hàm số đồng biến trên khoảng $(-8;5)$?

A. 14. **B.** 13. **C.** 12. **D.** 15.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sqrt{6-x}$, $(t\ge 0)$ khi đó ta có hàm số $y=f(t)=\dfrac{(4-m)t+3}{t+m}$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{-m^2+4m-3}{(t+m)^2}$.

Hàm số $y=\sqrt{6-x}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;6)$ nên với $-8<x<5$ thì $1<t<\sqrt{14}$.

Hàm số $y=\dfrac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$ đồng biến trên khoảng $(-8;5)$ khi và chỉ khi hàm số $f(t)=\dfrac{(4-m)t+3}{t+m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;\sqrt{14}\right)\Leftrightarrow f'(t)<0,\forall t\in\left(1;\sqrt{14}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2+4m-3<0\\ -m\notin\left(1;\sqrt{14}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<1\\ m>3\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}m\ge -1\\ m\le -\sqrt{14}\end{array}\right.\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m>3 \\ -1\le m<1. \\ m\le -\sqrt{14} \end{array}\right.$$

Mà m nguyên thuộc khoảng $(-10;10)$ nên $m\in\{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-1;0;4;5;6;7;8;9\}$.

Vậy có 14 giá trị nguyên của m thoả mãn bài toán.

Câu 49. (KHTN Hà Nội Lần 3) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x+m\sqrt{x^2+2}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

$$y'=1+m\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}=\frac{\sqrt{x^2+2}+mx}{\sqrt{x^2+2}}.$$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2} + mx \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} \ge 0 & , x = 0 \\ m \ge \dfrac{-\sqrt{x^2+2}}{x}, \forall x > 0 \ (*) \\ m \le \dfrac{-\sqrt{x^2+2}}{x}, \forall x < 0 \end{cases}$$

Xét $g(x) = \dfrac{-\sqrt{x^2+2}}{x}$ có $g'(x) = \dfrac{2}{x^2\sqrt{x^2+2}} > 0, \forall x \ne 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	1	↗	$+\infty$	↗	-1
			$-\infty$		

Do đó, từ $(*)$ suy ra $\begin{cases} m \ge -1 \\ m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le m \le 1.$

Có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn là $-1; 0; 1$.

Câu 50. (Đặng Thành Nam Đề 9) Hàm số $y = \dfrac{2x+m}{\sqrt{x^2+1}}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi?

A. $m \le 0$. **B.** $m < 0$. **C.** $m \le 2$. **D.** $m < 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' \ge 0, \forall x > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2 - mx}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \ge 0, \forall x > 0$

$\Leftrightarrow 2 - mx \ge 0, \forall x > 0$

$\Leftrightarrow m \le \dfrac{2}{x}, \forall x > 0 \Leftrightarrow m \le 0.$

Ta chọn đáp án A.

Câu 51. (CHUYÊN THÁI BÌNH – L4) Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = (m - x^3)\sqrt{1-x^3}$ đồng biến trên $(0; 1)$.

A. $m \ge -2$. **B.** $m \le -2$. **C.** $m > 1$. **D.** $m < 1$.

Hướng dẫn giải.

Chọn B

+ Tập xác định: $D = (-\infty; 1]$.

+ $y' = -3x^2\sqrt{1-x^3} - \dfrac{3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}.(m - x^3) = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}(3x^3 - m - 2)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{\dfrac{m+2}{3}} \end{cases}.$$

* Trường hợp 1: $m = -2$, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		1
y'		$-$	0	$+$	

Dựa vào BXD, ta có $y'<0,\ \forall x\in(0;\ 1)\Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $(0;\ 1)$.

* Trường hợp 2: $m\neq -2$.

Để hàm số nghịch biến trên $(0;\ 1)$ thì $\sqrt[3]{\dfrac{m+2}{3}}<0\Leftrightarrow m<-2$.

Vậy $m\le -2$ thì hàm số nghịch biến trên $(0;\ 1)$.

Câu 52. Tập tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $m\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+3\right)+2\sqrt{1-x^2}-5=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt là một nửa khoảng $(a;b]$. Tính $b-\dfrac{5}{7}a$.

A. $\dfrac{6-5\sqrt{2}}{35}$ **B.** $\dfrac{6-5\sqrt{2}}{7}$. **C.** $\dfrac{12-5\sqrt{2}}{35}$ **D.** $\dfrac{12-5\sqrt{2}}{7}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ với $-1\le x\le 1$.Khi đó: $t^2=2+2\sqrt{1-x^2}\Leftrightarrow 2\sqrt{1-x^2}=t^2-2$.

$\Rightarrow t'=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}=0\Leftrightarrow\sqrt{1-x}=\sqrt{1+x}\Leftrightarrow x=0$.

x	-1		0		1
t'		$+$	0	$-$	
t		↗	2	↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\sqrt{2}\le t\le 2$.

Ta có phương trình: $m(t+3)+t^2-7=0\ \Leftrightarrow m=\dfrac{-t^2+7}{t+3}$.

Xét hàm số: $f(t)=\dfrac{-t^2+7}{t+3},t\in\left[\sqrt{2};2\right]\Rightarrow f'(t)=\dfrac{-t^2-6t-7}{(t+3)^2}$.

$f'(t)=0\Leftrightarrow t=-3\pm\sqrt{2}\notin\left[\sqrt{2};2\right]$.

Ta có bảng biến thiên:

t	$\sqrt{2}$		2
$f'(t)$	0	$-$	
$f(t)$	$\dfrac{5(3-\sqrt{2})}{7}$	↘	$\dfrac{3}{5}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt thì $\sqrt{2} \le t \le 2$. Khi đó

$\frac{3}{5} < f(t) \le \frac{5\left(3-\sqrt{2}\right)}{7}$ hay $\frac{3}{5} < m \le \frac{5\left(3-\sqrt{2}\right)}{7}$

$\Rightarrow a = \frac{3}{5},\ b = \frac{5\left(3-\sqrt{2}\right)}{7} \Rightarrow b - \frac{5}{7}a = \frac{12-5\sqrt{2}}{7}.$

Câu 53. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2\left(x^2+mx+9\right)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $g(x) = f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết suy ra $f'(3-x) = (3-x)(2-x)^2\left[(3-x)^2+m(3-x)+9\right]$. Ta có $g'(x) = -f'(3-x)$.

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x) \ge 0,\ \forall x \in (3;+\infty)$

$\Leftrightarrow f'(3-x) \le 0,\ \forall x \in (3;+\infty) \Leftrightarrow (3-x)(2-x)^2\left[(3-x)^2+m(3-x)+9\right] \le 0,\ \forall x \in (3;+\infty)$

$\Leftrightarrow m \le \frac{(x-3)^2+9}{x-3},\ \forall x \in (3;+\infty) \Leftrightarrow m \le \min\limits_{(3;+\infty)} h(x)$ với $h(x) = \frac{(x-3)^2+9}{x-3}$.

Ta có $h(x) = \frac{(x-3)^2+9}{x-3} = (x-3) + \frac{9}{x-3} \ge 2\sqrt{(x-3).\frac{9}{x-3}} = 6$. Vậy suy ra $m \le 6 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}^+} m \in \{1;2;3;4;5;6\}$.

Câu 54. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)\left(x^2+mx+5\right)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x) = f\left(x^2\right)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết suy ra $f'\left(x^2\right) = x^4\left(x^2-1\right)\left(x^4+mx^2+5\right)$. Ta có $g'(x) = 2xf'\left(x^2\right)$.

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x) \ge 0,\ \forall x \in (1;+\infty)$

$\Leftrightarrow 2xf'\left(x^2\right) \ge 0,\ \forall x > 1 \Leftrightarrow 2x.x^4\left(x^2-1\right)\left(x^4+mx^2+5\right) \ge 0,\ \forall x > 1 \Leftrightarrow x^4+mx^2+5 \ge 0,\ \forall x > 1$

$\Leftrightarrow m \ge -\frac{x^4+5}{x^2},\ \forall x > 1 \Leftrightarrow m \ge \max\limits_{(1;+\infty)} h(x)$ với $h(x) = -\frac{x^4+5}{x^2}$.

Khảo sát hàm $h(x) = -\frac{x^4+5}{x^2}$ trên $(1;+\infty)$ ta được $\max\limits_{(1;+\infty)} h(x) = -2\sqrt{5}$.

Suy ra $m \ge -2\sqrt{5} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}^-} m \in \{-4;-3;-2;-1\}$. Chọn B

Câu 55. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2\left(3x^4+mx^3+1\right)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x) = f\left(x^2\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết suy ra $f'\left(x^2\right) = x^2\left(x^2-1\right)^2\left(3x^8+mx^6+1\right)$.

Ta có $g'(x) = 2xf'\left(x^2\right)$. Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x) \ge 0,\ \forall x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow 2xf'\left(x^2\right) \ge 0,\ \forall x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow 2x.x^2\left(x^2-1\right)^2\left(3x^8+mx^6+1\right) \ge 0,\ \forall x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow 3x^8+mx^6+1 \ge 0,\ \forall x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow m \ge -\frac{3x^8+1}{x^6},\ \forall x \in (0;+\infty)$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Leftrightarrow m \ge \max\limits_{(0;+\infty)} h(x)$ với $h(x) = -\dfrac{3x^8+1}{x^6}$.

Khảo sát hàm $h(x) = -\dfrac{3x^8+1}{x^6}$ trên $(0;+\infty)$ ta được $\max\limits_{(0;+\infty)} h(x) = -4$.

Suy ra $m \ge -4 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}^-} m \in \{-4;-3;-2;-1\}$. Chọn B

Câu 56. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m < 100$ để hàm số $g(x) = f(x^2-8x+m)$ đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$?

A. 18. **B.** 82. **C.** 83. **D.** 84.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>2 \end{array}\right.$.

Xét $g'(x) = (2x-8).f'(x^2-8x+m)$. Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x) \ge 0, \forall x > 4$

$\Leftrightarrow (2x-8).f'(x^2-8x+m) \ge 0, \forall x > 4 \Leftrightarrow f'(x^2-8x+m) \ge 0, \forall x > 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-8x+m \le 0, \forall x \in (4;+\infty) \\ x^2-8x+m \ge 2, \forall x \in (4;+\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow m \ge 18.$

Vậy $18 \le m < 100$. Chọn B

Câu 57. (Nguyễn Khuyến) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-2)(x^2-6x+m)$ với mọi $x \in R$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $g(x) = f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$?

A. 2012. **B.** 2011. **C.** 2009. **D.** 2010.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x) = f'(1-x).(1-x)' = -(1-x)^2(-x-1)(x^2+4x-5+m) = (1-x)^2(x+1)(x^2+4x-5+m)$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ thì $g'(x) \le 0$, bằng không tại một số điểm hữu hạn với mọi $x \in (-\infty;-1)$.

Do $(1-x)^2(x+1) < 0$ với mọi $x \in (-\infty;-1)$, nên

$g'(x) \le 0$ với mọi $x \in (-\infty;-1) \Leftrightarrow x^2+4x-5+m \ge 0$ với mọi $x \in (-\infty;-1) \Leftrightarrow m \ge -x^2-4x+5$ với mọi $x \in (-\infty;-1)$.

Xét hàm số $h(x) = -x^2-4x+5$ trên $(-\infty;-1)$. Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		-1
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	9	↘	8

Từ bảng biến thiên suy ra $m \ge 9$, kết hợp với điều kiện m nguyên và thuộc đoạn $[-2019;2019]$ suy ra có 2011 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 58. (Sở Đà Nẵng 2019) Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{6}x^3 + ax^2 + bx + c$ $(a,b,c \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $f(0) = f(1) = f(2)$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của c để hàm số $g(x) = f\left(f\left(x^2+2\right)\right)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ là

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. 1. **B.** $1-\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $1+\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có : $\begin{cases} f(0)=c \\ f(1)=a+b+c+\dfrac{1}{6} \\ f(2)=4a+2b+c+\dfrac{4}{3} \end{cases}$.

Theo giả thiết $f(0)=f(1)=f(2) \Rightarrow \begin{cases} a+b=\dfrac{-1}{6} \\ 4a+2b=\dfrac{-4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

Suy ra : $f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x+c$.

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0;1)$ khi $g'(x)=2xf'\left(x^2+2\right)f'\left[f\left(x^2+2\right)\right]\le 0, \forall x\in(0;1)$.

Ta có: $f'(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{3} \Rightarrow f'(x)\le 0 \Leftrightarrow 1-\frac{\sqrt{3}}{3}\le x\le 1+\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ta thấy $\forall x\in(0;1)$ thì $\begin{cases} 2x>0 \\ f'\left(x^2+2\right)>0 \end{cases}$.

Suy ra $\forall x\in(0;1), g'(x)\le 0 \Leftrightarrow f'\left[f\left(x^2+2\right)\right]\le 0$

Xét $0<x<1 \Rightarrow 2<x^2+2<3$, vì $f'(x)>0$, $\forall x\in(2;3)$ nên $f(x)$ đồng biến trên $(2;3)$.

Do đó : $f(2)<f\left(x^2+2\right)<f(3)$.

Suy ra $1-\frac{\sqrt{3}}{3}\le f(2)<f(3)\le 1+\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(2)\ge 1-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ f(3)\le 1+\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow 1-\frac{\sqrt{3}}{3}\le c\le \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $\min c+\max c=1$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

I – LÝ THUYẾT CHUNG

1 - Khái niệm cực trị của hàm số

Giả sử hàm số f xác định trên tập $D(D\subset\mathbb{R})$ và $x_0\in D$.

a) x_0 là điểm cực đại của f nếu tồn tại khoảng $(a;b)\subset D$ và $x_0\in(a;b)$ sao cho $f(x)<f(x_0),\in(a;b)\setminus\{x_0\}$

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại (cực đại) của f.

b) x_0 là điểm cực tiểu của f nếu tồn tại khoảng $(a;b)\subset D$ và $x_0\in(a;b)$ sao cho $f(x)>f(x_0),\in(a;b)\setminus\{x_0\}$

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu (cực tiểu) của f.

c) Nếu $f(x_0)$ được gọi là cực trị của f thì điểm $(x_0;f(x_0))$ được gọi là điểm cực trị của đồ thị hàm số f.

2 - Điều kiện cần để hàm số có cực trị

Nếu hàm số f có đạo hàm tại x_0 và đạt cực trị tại điểm đó thì $f'(x_0)=0$.

Chú ý: Hàm số f chỉ có thể đạt cực trị tại những điểm mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm.

3 - Điều kiện đủ để hàm số có cực trị.

Định lí 1: giả sử hàm số f liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên $(a;b)\setminus\{x_0\}$

a) Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua x_0 thì f đạt cực tiểu tại x_0

b) Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua x_0 thì f đạt cực đại tại x_0.

Định lí 2: Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0, $f'(x_0)=0$ và có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0.

*) Nếu $f''(x_0)<0$ thì f đạt cực đại tại x_0.

*) Nếu $f''(x_0)>0$ thì f đạt cực tiểu tại x_0.

4 - Kiến thức cần nhớ:

a) Khoảng cách giữa hai điểm A, B $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

b) Khoảng cách từ điểm $M(x_0;y_0)$ đến đường thẳng $\Delta:ax+by+c=0$:

$$d(M,\Delta)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

c) Diện tích tam giác ABC:

$$S=\frac{1}{2}AB.AC.\sin A=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2-\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$$

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ với $\vec{a}=(a_1;a_2);\vec{b}=(b_1;b_2)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Chú ý: $\vec{a}.\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

II - HÀM BẬC BA

1 - Cực trị của hàm số

Xét hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$.

□ $b^2-3ac \le 0$ hàm số **không** có điểm cực trị.

□ $\begin{cases} b^2-3ac>0 \\ a=0 \end{cases}$ hàm số có duy nhất một điểm cực trị.

□ $\begin{cases} b^2-3ac>0 \\ a\neq 0 \end{cases}$ hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 là nghiệm của phương trình:

Với $y'=0 \Leftrightarrow 3ax^2+2bx+c=0$, có $x_1+x_2=\dfrac{-2b}{3a}$, $x_1.x_2=\dfrac{c}{3a} \Rightarrow |x_1-x_2|=\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{b^2-3ac}{a^2}}$.

Khi đó:

□ Đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $d: y=\dfrac{2}{3}\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)x+d-\dfrac{bc}{9a}$.

□ Hệ số góc của đường thẳng qua hai điểm cực trị là $k=\dfrac{2}{3}\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)$.

□ Tọa độ 2 điểm cực trị là $A\left(x_1;\dfrac{2}{3}\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)x_1+d-\dfrac{bc}{9a}\right)$, $B\left(x_2;\dfrac{2}{3}\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)x_2+d-\dfrac{bc}{9a}\right)$.

□ Độ dài đoạn thẳng AB là $\sqrt{1+\dfrac{4}{9}\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)^2}\,|x_1-x_2|$.

□ Diện tích tam giác OAB là $S=\dfrac{1}{2}\left|\left(d-\dfrac{bc}{9a}\right)(x_1-x_2)\right|$.

□ Trung điểm I của AB cũng chính là điểm uốn của đồ thị hàm số, tức hoành độ của I là nghiệm của phương trình $y''=0$, vì vậy $I\left(-\dfrac{b}{3a};d-\dfrac{bc}{3a}+\dfrac{2b^3}{27a^2}\right)$.

2 - Các dạng toán hay gặp:

□ $AB \perp \Delta \Leftrightarrow k.k_\Delta=-1$

□ $AB//\Delta \Rightarrow k=k_\Delta$

□ $(AB,\Delta)=\alpha \Leftrightarrow \tan\alpha=\left|\dfrac{k-k_\Delta}{1+k.k_\Delta}\right|$

□ A,B cách đều $\Delta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AB//\Delta \\ I\in\Delta \end{array}\right.$

□ >> **Cụ thể:** $AB//\Delta$ (A,B nằm cùng phía Δ); $I\in\Delta$ (A,B nằm về hai phía với Δ).

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

□ A,B đối xứng $\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} I \in \Delta \\ k.k_{\Delta} = -1 \end{cases}$.

□ A,B nằm về hai phía trục hoành $\Leftrightarrow y = 0$ có ba nghiệm phân biệt

□ ΔABC cân tại $C \Leftrightarrow \overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AB} = 0$

□ ΔABC đều $\Leftrightarrow \overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AB} = 0, CI = \dfrac{\sqrt{3}}{2} AB$

□ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và trục hoành chia thành hai phần, phần phía trên trục hoành và phần phía dưới trục hoành và chúng có diện tích bằng nhau khi và chỉ khi tâm đối xứng thuộc trục hoành, tức $y\left(-\dfrac{b}{3a}\right) = 0 \Leftrightarrow d - \dfrac{bc}{3a} + \dfrac{2b^3}{27a^2} = 0$.

3 - Thủ thuật casio (tham khảo) viết phương trình đường thẳng qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số

*** Chú ý:** có $y'' = 6ax + 2b \Rightarrow y = \dfrac{y'.y''}{18a} + \dfrac{2}{3}\left(c - \dfrac{b^2}{3a}\right)x + d - \dfrac{bc}{9a}$

Suy ra $\dfrac{2}{3}\left(c - \dfrac{b^2}{3a}\right)x + d - \dfrac{bc}{9a} = y - \dfrac{y'.y''}{18a}$

Do đó bằng máy tính ta có thể tìm nhanh được đường thẳng đi qua hai điểm cực trị hàm số bằng cách

MODE 2 (Vào môi trường số phức)

Nhập biểu thức $y - \dfrac{y'.y''}{18a}$

Calc với $x = i$, **(CALC ENG)**

Ta được kết quả là $mi + n$, khi đó đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y = mx + n$.

III - HÀM TRÙNG PHƯƠNG

1 - Cực trị của hàm số

Xét hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$

□ Với điều kiện $ab < 0$ hàm số có 3 cực trị.

□ Khi hàm số có 3 điểm cực trị thì 3 điểm cực trị là $0; -\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}; \sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$.

□ Tọa độ 3 điểm cực trị tương ứng của đồ thị hàm sô là: $\begin{cases} A(0;c) \\ B\left(-\sqrt{\dfrac{-b}{2a}}; c - \dfrac{b^2}{4a}\right); C\left(\sqrt{\dfrac{-b}{2a}}; c - \dfrac{b^2}{4a}\right) \end{cases}$

Nhận xét: tam giác ABC cân tại A, có $A \in Oy$; $AB = AC = \sqrt{\dfrac{b^4 - 8ab}{16a^2}}$; $BC = \sqrt{\dfrac{-b}{2a}}$

□ Các điểm cực trị đồ thị hàm số thuộc các trục tọa độ $\Leftrightarrow b^2 = 4ac$

□ Điểm $(0; y_0)$ là trọng tâm tam giác $ABC \Leftrightarrow 3y_0 = 3c - \dfrac{b^2}{2a}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

□ Điểm $(0;y_0)$ là trực tâm tam giác $ABC \Leftrightarrow y_0 - c = -\dfrac{8a+b^3}{4ab}$.

□ Điểm $(0;y_0)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Leftrightarrow y_0 - c = \dfrac{8a-b^3}{4ab}$.

Do đó $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{b^3+8a}{b^3-8a}(*)$ và $S_{\Delta ABC} = \sqrt{\dfrac{-b^5}{32a^3}}$

CÔNG THỨC TÍNH NHANH

Ba điểm cực trị tạo thành tam giác ABC thỏa mãn dữ kiện

STT	Dữ kiện	Công thức thỏa $ab<0$
1	Tam giác ABC vuông cân tại A	$8a+b^3=0$
2	Tam giác ABC đều	$24a+b^3=0$
3	Tam giác ABC có góc $\widehat{BAC}=\alpha$	$\tan\dfrac{\alpha}{2} = -\dfrac{8a}{b^3}$
4	Tam giác ABC có diện tích $S_{\Delta ABC}=S_0$	$32a^3(S_0)^2+b^5=0$
5	Tam giác ABC có diện tích $max(S_0)$	$S_0 = \sqrt{-\dfrac{b^5}{32a^3}}$
6	Tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp $r_{\Delta ABC}=r_0$	$r_0 = \dfrac{b^2}{\lvert a\rvert\left(1+\sqrt{1-\dfrac{b^3}{a}}\right)}$
7	Tam giác ABC có độ dài cạnh $BC=m_0$	$a.m_0^2+2b=0$
8	Tam giác ABC có độ dài $AB=AC=n_0$	$16a^2n_0^2-b^4+8ab=0$
9	Tam giác ABC có cực trị $B,C\in Ox$	$b^2-4ac=0$
10	Tam giác ABC có 3 góc nhọn	$b(8a+b^3)>0$
11	Tam giác ABC có trọng tâm O	$b^2-6ac=0$
12	Tam giác ABC có trực tâm O	$b^3+8a-4ac=0$
13	Tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R_{\Delta ABC}=R_0$	$R = \left\lvert\dfrac{b^3-8a}{8ab}\right\rvert$
14	Tam giác ABC cùng điểm O tạo hình thoi	$b^2-2ac=0$
15	Tam giác ABC có O là tâm đường tròn nội tiếp	$b^3-8a-4abc=0$
16	Tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp	$b^3-8a-8abc=0$
17	Tam giác ABC có cạnh $BC=k.AB=k.AC$	$b^3.k^2-8a(k^2-4)=0$
18	Trục hoành chia ΔABC thành hai phần có diện tích bằng nhau	$b^2=4\sqrt{2}\lvert ac\rvert$
19	Tam giác ABC có điểm cực trị cách đều trục hoành	$b^2-8ac=0$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

20	Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC là: $x^2+y^2-\left(\frac{2}{b}-\frac{\Delta}{4a}+c\right)y+c\left(\frac{2}{b}-\frac{\Delta}{4a}\right)=0$

2 - Giao điểm với trục hoành

Với $ab<0;ac>0;b^2-4ac>0$ đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt, khi đó:

- Hoành độ 4 giao điểm lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow 9b^2=100ac$.
- Cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt, tạo thành 3 đoạn thẳng có độ dài bằng nhau $\Leftrightarrow 9b^2=100ac$
- Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và trục hoành có phần phía trên Ox và phần phía dưới Ox bằng nhau $5b^2=36ac$.

IV – CÁC DẠNG TOÁN

DANG 1. TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ CHO BỞI CÔNG THỨC

Câu 1.(THPT Nghèn Lần 1) Trên khoảng $(0;\pi)$, hàm số $f(x)=x+2\cos x$ đạt cực tiểu tại

A. $x=\frac{\pi}{6}$. **B.** $x=\frac{\pi}{3}$. **C.** $x=\frac{5\pi}{6}$. **D.** $x=\frac{2\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x)=1-2\sin x$; $f''(x)=-2\cos x$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 1-2\sin x=0\Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

Vì $x\in(0;\pi)\Rightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right\}$ mà $f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}<0$; $f''\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\sqrt{3}>0$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x=\frac{5\pi}{6}$.

Câu 2. (Hội các trường chuyên 2019 lần 3) Hỏi hàm số $y=|\sin 2x+x|$ có bao nhiêu điểm cực trị trên $(-\pi;\pi)$?

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x)=\sin 2x+x$ có $f'(x)=2\cos 2x+1$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\cos 2x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$$

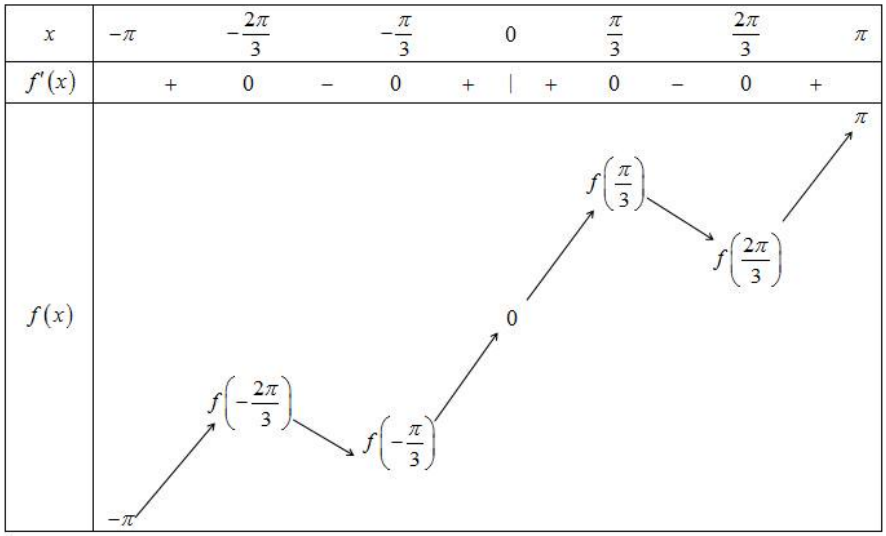
Vì $x\in(-\pi;\pi)\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x=\pm\frac{\pi}{3} \\ x=\pm\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2\pi}{3}<0; f\left(\frac{-\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}<0.$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}>0; f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2\pi}{3}>0.$

Ta có bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta thấy: trên $(-\pi;\pi)$ đồ thị hàm số $f(x)=\sin 2x+x$ có 4 điểm cực trị và cắt trục hoành tại duy nhất một điểm có hoành độ $x=0$. Do đó hàm số $y=|\sin 2x+x|$ có 5 điểm cực trị trên $(-\pi;\pi)$.

Câu 3.(Nguyễn Trãi Hải Dương Lần1) Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|\sin x-\frac{x}{4}\right|$, $x\in(-\pi;\pi)$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

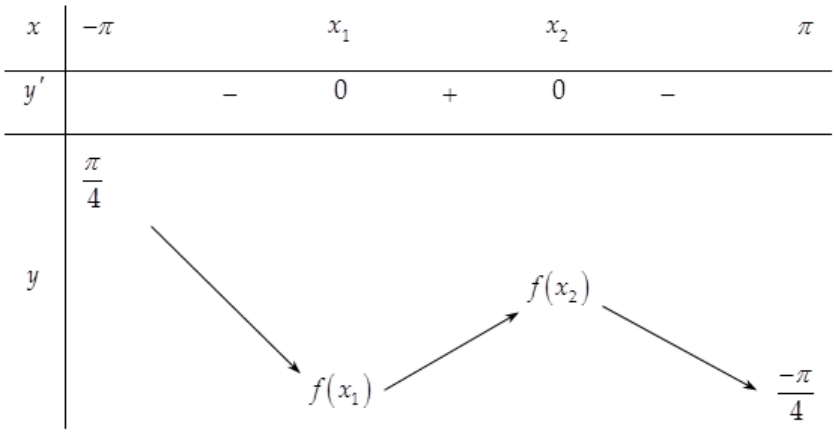
Xét hàm số $y=f(x)=\sin x-\frac{x}{4}$ với $x\in(-\pi;\pi)$.

Ta có $f'(x)=\cos x-\frac{1}{4}$. $f'(x)=0\Leftrightarrow\cos x=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right)\\x=x_2\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\end{array}\right.$.

$f(x_1)=\sin x_1-\frac{x_1}{4}=-\frac{\sqrt{15}}{4}-\frac{x_1}{4}<-\frac{\sqrt{15}}{4}+\frac{\pi}{8}<0.$

$f(x_2)=\sin x_2-\frac{x_2}{4}=\frac{\sqrt{15}}{4}-\frac{x_2}{4}>\frac{\sqrt{15}}{4}-\frac{\pi}{8}>0.$

BBT



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số có hai điểm cực trị và đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt khác x_1, x_2. Suy ra hàm số $y=\left|\sin x-\frac{x}{4}\right|$, với $x\in(-\pi;\pi)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 4. Gọi A,B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+5$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB.

A. $R=5$. **B.** $R=\sqrt{5}$. **C.** $R=10$. **D.** $R=2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

$y'=3x^2-3$

Ta có $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=3\\x=-1\Rightarrow y=7\end{array}\right.$

Vậy $A(1;3),B(-1;7)$

Lúc đó $S_{OAB}=\frac{1}{2}.\left|1.7-3.(-1)\right|=5\Rightarrow R_{OAB}=\frac{OA.OB.AB}{4S_{OAB}}=5$

Câu 5. [THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - PHÚ THỌ 2018 - LẦN 1] Đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị $A(1;-7),B(2;-8)$. Tính $y(-1)$?

A. $y(-1)=7$. **B.** $y(-1)=11$. **C.** $y(-1)=-11$. **D.** $y(-1)=-35$

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$

Theo bài cho ta có: $\left\{\begin{array}{l}3a+2b+c=0\\12a+4b+c=0\\a+b+c+d=-7\\8a+4b+2c+d=-8\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}3a+2b+c=0\\12a+4b+c=0\\7a+3b+c=-1\\d=-7-a-b-c\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=2\\b=-9\\c=12\\d=-12\end{array}\right.$

Suy ra $y=2x^3-9x^2+12x-12$. Do đó $y(-1)=-35$.

Câu 6. (Nam Tiền Hải Thái Bình Lần1) Cho hàm số $y=x^4-2x^2+1$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác, gọi là ΔABC. Tính diện tích ΔABC.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $S=2$. **B.** $S=1$. **C.** $S=\frac{1}{2}$. **D.** $S=4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=4x^3-4x; y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\end{array}\right.$

Tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0;1)$, $B(-1;0)$, $C(1;0)$

$\overrightarrow{AB}=(-1;-1);\overrightarrow{AC}=(1;-1)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\\AB=AC=\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Suy ra ΔABC vuông cân tại A do đó $S=\frac{1}{2}AB.AC=1$.

Câu 7. (Nguyễn Du Dak-Lak 2019) Gọi A, B, C là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng

A. $\sqrt{2}+1$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{2}-1$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Ta có $y'=4x^3-4x$. Khi đó $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\end{array}\right.$.

Suy ra đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+4$ có ba điểm cực trị là $A(0;4)$, $B(1;3)$ và $C(-1;3)$.

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, ta có $BC.\overrightarrow{IA}+AC.\overrightarrow{IB}+AB.\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Mà $AB=AC=\sqrt{2}$ và $BC=2$ nên suy ra $I\left(0;\frac{4+3\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)$.

Phương trình đường thẳng BC là $y=3$.

Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là $r=d(I,BC)=\sqrt{2}-1$.

Cách 2:

Áp dụng công thức tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC ta có:

$r=\frac{S_{ABC}}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}=\sqrt{2}-1$

trong đó $a=BC=2$; $b=c=AB=AC=\sqrt{2}$; $p=\frac{a+b+c}{2}$

Cách 3:

Áp dụng công thức tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC ta có:

$r=(p-a)\tan\frac{A}{2}=\sqrt{2}-1$ với $\cos A=\frac{(-2)^3+8.1}{(-2)^3-8-1}=0\Rightarrow\hat{A}=90^0$.

Câu 8. Cho hàm số $y=3x^4-6x^2+2$ có đồ thị (C). Gọi A là điểm cực đại của (C); B, C la hai điểm cực tiểu của (C). Gọi d là đưởng thẳng qua A; S la tổng khoảng cách từ B, C đến d. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của S.

A. $4+\frac{4\sqrt{5}}{5}$. **B.** $6+\frac{3\sqrt{10}}{5}$. **C.** $4+4\sqrt{5}$. **D.** $2+\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $A(0;2)$, $B(-1;-1)$, $C(1;-1)$. Khi đó $d: y=kx+2$ và $S=\dfrac{|k+3|+|3-k|}{\sqrt{k^2+1}}$.

Dễ có $\max S=6$, $\min S=\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$.

Câu 9. (THPT Nghèn Lần1) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(3-x)(x^2-1)+2x, \forall x\in\mathbb{R}$. Hỏi hàm số $y=f'(x)-x^2-1$ có bao nhiêu điểm cực tiểu.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=-x^3+3x^2+3x-3 \Rightarrow y'=f''(x)-2x=-3x^2+4x+3$.

$y'=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{13}}{3}$;

$y''=-6x+4$; $y''\left(\dfrac{2+\sqrt{13}}{3}\right)=-2\sqrt{13}<0$; $y''\left(\dfrac{2-\sqrt{13}}{3}\right)=2\sqrt{13}>0$

Suy ra hàm số có 1 điểm cực tiểu.

Câu 10. (ĐỀ THI CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH KSCL HK1 2018) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-1)(x-4)^2$. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y=f(x^2)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g(x)=f(x^2) \Rightarrow g'(x)=(x^2)'.f'(x^2)=2x.f'(x^2)$ (1)

Mà $f'(x)=x^2(x-1)(x-4)^2 \Rightarrow f'(x^2)=x^4(x^2-1)(x^2-4)^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $g'(x)=2x^5(x^2-1)(x^2-4)^2 \rightarrow$ Bảng biến thiên (tự vẽ)

Dựa vào BBT, suy ra hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực trị $x=0, x=\pm 1$.

Câu 11. (Ba Đình Lần2) Cho hàm số $y=f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2;-1;0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y=f(x^2-2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Do hàm số $y=f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2;-1;0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f'(x)=0$ có ba nghiệm (đơn hoặc bội lẻ) là $x=-2; x=-1; x=0$.

Đặt $g(x)=f(x^2-2x) \Rightarrow g'(x)=(2x-2).f'(x^2-2x)$. Vì $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $g'(x)$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó những điểm $g'(x)$ có thể đổi dấu thuộc tập các điểm thỏa mãn

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\x^2-2x=-2\\x^2-2x=-1\\x^2-2x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=0\\x=2\end{array}\right.$. Ba nghiệm trên đều là nghiệm đơn hoặc bội lẻ nên hàm số $g(x)$ có ba điểm cực trị.

Câu 12. (Nam Tiền Hải Thái Bình Lần1) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^2-1)(x-4)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(3-x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết, ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

Ta có $g(x)=f(3-x)\Rightarrow g'(x)=-f'(3-x)$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có

$$g'(x)\geq 0\Leftrightarrow f'(3-x)\leq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3-x\leq -1\\1\leq 3-x\leq 4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq 4\\-1\leq x\leq 2\end{array}\right.$$

Như thế ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy hàm số $g(x)$ có một điểm cực đại.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-2x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(x^2-8x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=2(x-4)f'(x^2-8x)=2(x-4)\left[(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)\right]$;

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 2(x-4)\left[(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-4=0\\x^2-2x=0\\x^2-2x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=0\\x=2\\x=1\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Ta thấy $x=1\pm\sqrt{3}$, $x=0$, $x=2$ và $x=4$ đều là các nghiệm đơn $\longrightarrow$ hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-1)^2(x-2)+1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(x)-x$ đạt cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=f'(x)-1=(x+1)(x-1)^2(x-2)$;

$g'(x)=0\Leftrightarrow(x+1)(x-1)^2(x-2)=0\Leftrightarrow\begin{[}x=-1\\x=1\\x=2\end{]}$. Ta thấy $x=-1$ và $x=2$ là các nghiệm đơn còn $x=1$ là nghiệm kép $\longrightarrow$ hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 3, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x).f'''(x)=x(x-1)^2(x+4)^3$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=\left[f'(x)\right]^2-2f(x).f''(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=2f''(x)f'(x)-2f'(x).f''(x)-2f(x).f'''(x)=-2f(x).f'''(x)$;

$g'(x)=0\Leftrightarrow f(x).f'''(x)=0\Leftrightarrow x(x-1)^2(x+4)^3=0\Leftrightarrow\begin{[}x=0\\(x-1)^2=0\\x=-4\end{]}\Leftrightarrow\begin{[}x=0\\x=1\\x=-4\end{]}$.

Ta thấy $x=0$ và $x=-4$ là các nghiệm đơn $\longrightarrow$ hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2+f(x)f''(x)=15x^4+12x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(x).f'(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x.$; $g'(x)=0\Leftrightarrow15x^4+12x=0\Leftrightarrow\begin{[}x=0\\x=\sqrt[3]{-\frac{4}{5}}\end{]}$.

Nhận thấy $x=0$ và $x=\sqrt[3]{-\frac{4}{5}}$ là các nghiệm bội lẻ $\longrightarrow$ hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị.

Câu 17. (KIM LIÊN HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 03) Cho hàm số $f(x)=x^2(x-1)e^{3x}$ có một nguyên hàm là hàm số $F(x)$. Số điểm cực trị của hàm số $F(x)$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Hàm số $f(x)$ có TXĐ là $\mathbb{R}$, có một nguyên hàm là hàm số $F(x) \Rightarrow F'(x)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên

$F'(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow x^2(x-1)e^{3x}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu $F'(x)$ như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$F'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng trên, ta thấy hàm số $F(x)$ có một điểm cực trị.

Câu 18. (Nguyễn Trãi Hải Dương Lần1) Số điểm cực trị của hàm số $f(x)=\int\limits_{2x}^{x^2}\frac{2tdt}{1+t^2}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Gọi $F(t)$ là nguyên hàm của hàm số $y=\frac{2t}{1+t^2}$.

Khi đó: $f(x)=F(t)\Big|_{2x}^{x^2}=F(x^2)-F(2x) \Rightarrow f'(x)=2x.F'(x^2)-2F'(2x)$

$=2x.\frac{2x^2}{1+x^4}-2.\frac{4x}{1+4x^2} \Leftrightarrow f'(x)=\frac{8x^5+4x^3-8x}{(1+x^4)(1+4x^2)}$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 8x^5+4x^3-8x=0 \Leftrightarrow 4x(2x^4+x^2-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=\frac{-1+\sqrt{17}}{4} \\ x^2=\frac{-1-\sqrt{17}}{4}<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=x_1=\frac{\sqrt{-1+\sqrt{17}}}{2} \\ x=x_2=-\frac{\sqrt{-1+\sqrt{17}}}{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_2		0		x_1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra: Hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 19. (Đặng Thành Nam Đề 15) Biết rằng đồ thị hàm số $y=\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{1}{x}$ có ba điểm cực trị thuộc một đường tròn (C). Bán kính của (C) gần đúng với giá trị nào dưới đây?

A. $12,4$. **B.** $6,4$. **C.** $4,4$. **D.** 27.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

$y' = x - 3 + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \approx 2,8794 \\ x_2 \approx 0,6527 \\ x_3 \approx -0,5321 \end{cases}$.

$\Rightarrow$ Tọa độ các điểm cực trị: $A \approx (2,879; -4,84), B \approx (0,653; -3,277), C \approx (-0,532; 3,617)$.

Gọi $(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ (1) là đường tròn đi qua ba điểm cực trị.

Thay tọa độ ba điểm A, B, C vào (1) ta được hệ phương trình 3 ẩn sau:

$$\begin{cases} 5,758a - 9,68b - c \approx 31,71 \\ 1,306a - 6,554b - c \approx 11,17 \\ -1,064a + 7,234b - c \approx 13,37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \approx 5,374 \\ b \approx 1,0833 \\ c \approx -11,25 \end{cases}$$

$\Rightarrow R \approx \sqrt{a^2 + b^2 - c} \approx \sqrt{41,3} \approx 6,4$

Câu 20. Cho hàm số $y = |x|^3 - mx + 5$, m là tham số. Hỏi hàm số đã cho có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y = \sqrt{x^6} - mx + 5$

Suy ra: $y' = \dfrac{3x^5}{|x|^3} - m = \dfrac{3x^5 - m|x|^3}{|x|^3}$ và hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$.

TH1: $m = 0$. Ta có: $y' = \dfrac{5x^5}{|x|^3} = 0$ vô nghiệm và hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	
y	$\searrow$		‖		$\nearrow$

Do đó hàm số có đúng một cực trị.

TH2: $m > 0$. Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^5 = m|x|^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 3x^5 = mx^3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{m}{3}}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\sqrt{\frac{m}{3}}$		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$\searrow$		‖	$\searrow$		$\nearrow$	

Do đó hàm số có đúng một cực trị.

TH3: $m<0$. Ta có: $y'=0 \Leftrightarrow 3x^5=m|x|^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ 3x^5=-mx^3 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\sqrt{-\frac{m}{3}}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{-\frac{m}{3}}$	0	$+\infty$
y'		$-\ 0$	$+$	$+$
y		$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Do đó hàm số có đúng một cực trị.

Vậy trong mọi trường hợp hàm số có đúng một cực trị với mọi tham số m

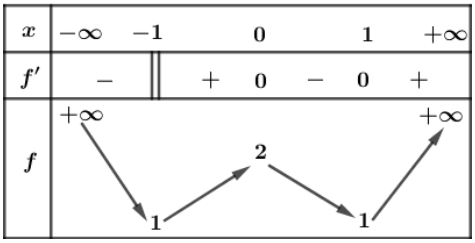
Chú ý: Thay vì trường hợp 2 ta xét $m>0$, ta có thể chọn m là một số dương (như $m=3$) để làm. Tương tự ở trường hợp 3, ta chọn $m=-3$ để làm sẽ cho lời giải nhanh hơn.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

DANG 2: TÌM CỰC TRỊ DỰA VÀO BBT, ĐỒ THỊ

DỰA VÀO BBT

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau ?



Hàm số $g(x)=3f(x)+1$ đạt **cực tiểu** tại điểm nào sau đây ?

A. $x=-1$. **B.** $x=1$. **C.** $x=\pm 1$. **D.** $x=0$.

Lời giải

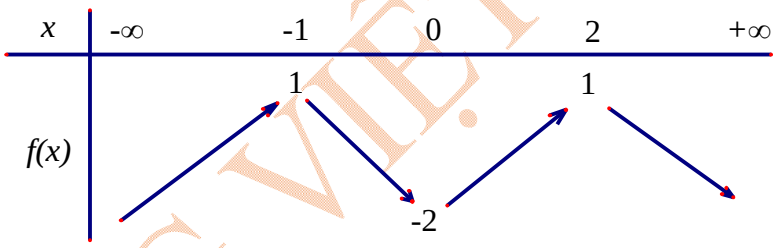
Chọn C

Ta có $g'(x)=3f'(x)$

Do đó điểm cực tiểu của hàm số $g(x)$ trùng với điểm cực tiểu của hàm số $y=f(x)$.

Vậy điểm cực tiểu của hàm số là $x=\pm 1$.

Câu 2. (ĐH Vinh Lần 1) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(-x+3)$ đạt cực đại tại



A. $x=-1$ **B.** $x=2$. **C.** $x=0$. **D.** $x=3$.

Lời giải

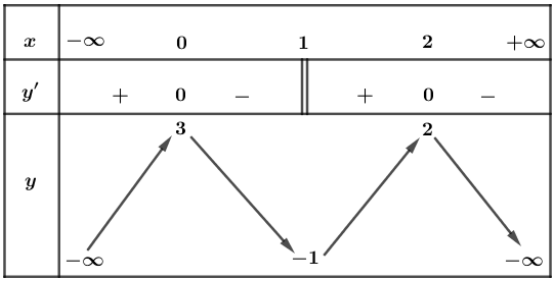
Chọn D

Đặt $-x+3=t$.

Ta thấy $\left[f(-x+3)\right]'=-f'(-x+3)=-f'(t)$ nên để hàm số $y=f(-x+3)$ đạt cực đại thì hàm số $y=f(t)$ phải đạt cực tiểu

Theo bảng biến thiên thì hàm số $y=f(t)$ đạt cực tiểu tại $t=0$

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau ?



ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Hàm số $g(x)=f(3-x)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=-f'(3-x)$.

- $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(3-x)=0 \xleftrightarrow{\text{theo BBT}} \left[\begin{array}{l}3-x=0\\3-x=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\x=1\end{array}\right.$.
- $g'(x)$ không xác định $\Leftrightarrow 3-x=1 \Leftrightarrow x=2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	↗	2	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Vậy hàm số $g(x)=f(3-x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 4. Suy ra hàm số $y=f(-x+3)$ đạt cực đại tại $-x+3=0$ hay Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu mệnh đề **đúng** trong số các mệnh đề sau đối với hàm số $g(x)=f(2-x)-2$?

(I) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-4;-2)$. (II) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

(III) Hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại điểm -2.(IV) Hàm số $g(x)$ có giá trị cực đại bằng -3.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Ta có $g'(x)=-f'(2-x)$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(2-x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2-x=0\\2-x=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\x=0\end{array}\right.$.

Từ đó suy ra bảng biến thiên của hàm số $g(x)$.

Cách 2: Thực hiện các phép biến đổi đồ thị.

Từ đồ thị của $f(x)$ để thu được đồ thị của hàm số $g(x)=f(2-x)-2$, ta thực hiện phép biến đổi đồ thị như sau:

- Lấy đối xứng đồ thị $f(x)$ qua trục Oy ta thu được đồ thị hàm số $f(-x)$.

- Tịnh tiến đồ thị $f(-x)$ theo vec tơ $\vec{k}=2\vec{i}$ (với $\vec{i}(1;0)$ là vectơ đơn vị) thu được đồ thị hàm số $f(2-x)$.

- Cuối cùng thực hiện phép tịnh tiến đồ thị $f(2-x)$ theo vec tơ $\vec{m}=-2\vec{j}$ (với $\vec{j}(0;1)$ là vectơ đơn vị) ta thu đươc đồ thị hàm số $g(x)=f(2-x)-2$

Thay vì thực hiện trên đồ thị ta có thể biến đổi dựa trên bảng biến thiên, ta thu được bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	
g	$+\infty$	↘	-4	↗	-3	↘	$-\infty$

Do đó chỉ có phát biểu IV là đúng.
$x=3$

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau ?

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↗	$+\infty$

Hàm số $g(x)=f(x^2+1)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=2x.f'(x^2+1)$;

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=0\\f'(x^2+1)\end{bmatrix}\xleftrightarrow{\text{theo BBT}}\begin{bmatrix}x=0\\x^2+1=-2\\x^2+1=1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x=0\ (\text{nghiem don})\\x=0\ (\text{nghiem kep})\end{bmatrix}\Leftrightarrow x=0(\text{nghiem boi 3}).$$

Vậy $g'(x)=0$ có duy nhất nghiệm bội lẻ $x=0$ nên hàm số $g(x)$ có 1 điểm cực trị.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Hàm số $y=f(x^2-2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;0)$ **B.** $(2;+\infty)$ **C.** $(0;2)$ **D.** $(-\infty;-2)$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=2xf'\left(x^2-2\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\f'\left(x^2-2\right)>0\end{cases}\\\begin{cases}x<0\\f'\left(x^2-2\right)<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>0;\left[\begin{array}{l}x^2-2<-2\\0<x^2-2<2\end{array}\right.\\x<0;\left[\begin{array}{l}x^2-2>2\\-2<x^2-2<0\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2}<x<2\\x<-4\\-\sqrt{2}<x<0\end{array}\right.$.

Do vậy hàm số $y=f\left(x^2-2\right)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-4),\left(-\sqrt{2};0\right),\left(\sqrt{2};2\right)$ và nghịch biến trên các khoảng $\left(-4;-\sqrt{2}\right),\left(0;\sqrt{2}\right),(2;+\infty)$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $y=f'(x)$ như sau.

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ có bao nhiêu điểm **cực tiểu**.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=(2x-2)\,f'\left(x^2-2x\right)$.

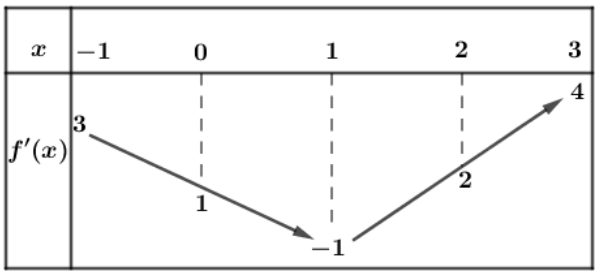
$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\f'\left(x^2-2x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x=-2\\x^2-2x=1\\x^2-2x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=1\pm\sqrt{2}\\x=-1;x=3\end{array}\right.$ và $f'\left(x^2-2x\right)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x<-2\\x^2-2x>3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\x>3\end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		3		$+\infty$
$2x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'\left(x^2-2x\right)$		$-$	0	$+$	0	$+$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$(2x-2)f'\left(x^2-2x\right)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ có một cực tiểu.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $g(x)=f\left(1-\frac{x}{2}\right)+x$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-4;-2)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;4)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=-\frac{1}{2}f'\left(1-\frac{x}{2}\right)+1$. Xét $g'(x)<0\Leftrightarrow f'\left(1-\frac{x}{2}\right)>2$

- TH1: $f'\left(1-\frac{x}{2}\right)>2\Leftrightarrow 2<1-\frac{x}{2}<3\Leftrightarrow -4<x<-2$. Do đó hàm số nghịch biến trên $(-4;-2)$.
- TH2: $f'\left(1-\frac{x}{2}\right)>2\Leftrightarrow -1<1-\frac{x}{2}<a<0\Leftrightarrow 2<2-2a<x<4$ nên hàm số chỉ nghịch biến trên khoảng $(2-2a;4)$ chứ không nghịch biến trên toàn khoảng $(2;4)$.

Vậy hàm số $g(x)=f\left(1-\frac{x}{2}\right)+x$ nghịch biến trên $(-4;-2)$.

Câu 9. (Thuận Thành 2 Bắc Ninh) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$

x	$-\infty$	-2		2		5	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hỏi hàm số $g(x)=f(1-x)+\frac{x^3}{3}-x^2-3x$ đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây?

A. $x=-1$. **B.** $x=3$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-2, x=5$ và đạt cực đại tại $x=2$, nên: $\begin{cases} f''(-2)>0 \\ f''(2)<0 \\ f''(5)>0 \end{cases}$.

+ $g'(x)=-f'(1-x)+x^2-2x-3\Rightarrow\begin{cases} g'(-1)=-f'(2)+0=0 \\ g'(3)=0 \\ g'(2)=-f'(-1)-3<0 \\ g'(-3)=-f'(4)+12>0 \end{cases}$.

Mặt khác: $g''(x)=f''(1-x)+2x-2\Rightarrow\begin{cases} g''(-1)=f''(2)-4<0 \\ g''(3)=f''(-2)+4>0 \end{cases}$.

Vậy hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=3$.

Câu 10. (Sở Phú Thọ) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$		-2		-1		-2		$+\infty$

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=2f^3(x)+4f^2(x)+1$ là

A. 4. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

$g'(x)=6f'(x)f^2(x)+8f'(x)f(x)=2f'(x)f(x)\left(3f(x)+4\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f(x)=0\\f(x)=-\dfrac{4}{3}\end{array}\right.$$

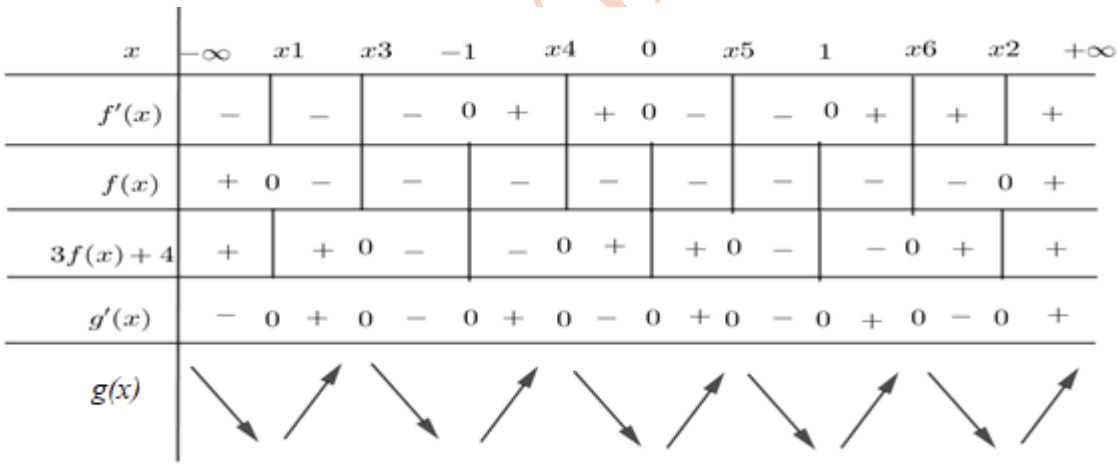
Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ ta có:

$$+\ f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=0\end{array}\right.$$

+ Phương trình $f(x)=0$ có 2 nghiệm x_1 và x_2 (giả sử $x_1<x_2$). Suy ra $x_1<-1$ và $1<x_2$.

+ Phương trình $f(x)=-\dfrac{4}{3}$ có 4 nghiệm x_3, x_4, x_5 x_6 (giả sử $x_3<x_4<x_5<x_6$). Và 4 giá trị thỏa mãn yêu cầu sau: $x_1<x_3<-1;-1<x_4<0;0<x_5<1;1<x_6<x_2$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$



Suy ra hàm số $y=g(x)$ có 5 điểm cực tiểu.

Câu 11. (Cổ Loa Hà Nội) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=3f(-x^4+4x^2-6)+2x^6-3x^4-12x^2$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Có $y'=-(12x^3-24x).f'(-x^4+4x^2-6)+12x^5-12x^3-24x$

$=-12x(x^2-2).f'(-x^4+4x^2-6)+12x\left(x^4-x^2-2\right)$

$=-12x(x^2-2).\left(f'(-x^4+4x^2-6)-\left(x^2+1\right)\right).$

Khi đó $y'=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\f'(-x^4+4x^2-6)-(x^2+1)=0\\x^2-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\x=\pm\sqrt{2}\\f'(-x^4+4x^2-6)=x^2+1\end{cases}$.

Ta có $-x^4+4x^2-6=-(x^2-2)^2-2\le -2,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó $f'(-x^4+4x^2-6)\le f'(-2)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Mà $x^2+1\ge 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó phương trình $f'(-x^4+4x^2-6)=x^2+1$ vô nghiệm.

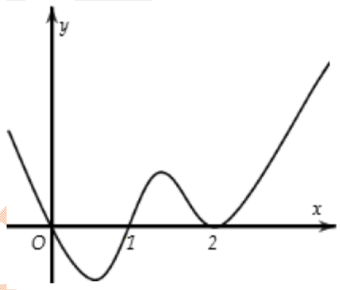
Hàm số $y=3f(-x^4+4x^2-6)+2x^6-3x^4-12x^2$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $y=3f(-x^4+4x^2-6)+2x^6-3x^4-12x^2$ có 2 điểm cực tiểu.

DỰA VÀO ĐỒ THỊ

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị của $y=f'(x)$ như hình vẽ sau. Xác định số điểm cực trị của hàm $y=f(x)$.



A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

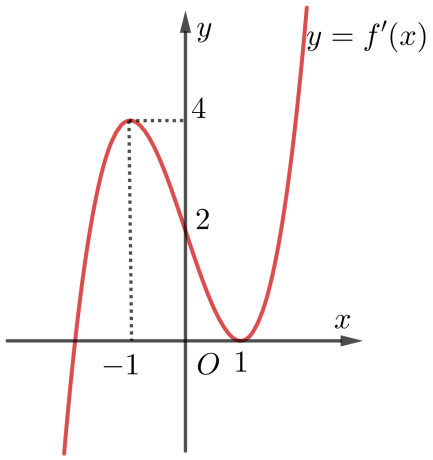
Từ đồ thị của hàm $y=f'(x)$, ta đi phục dựng lại bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ với chú ý rằng nếu $x<0;1<x<2;x>2$ thì $f'(x)$ luôn dương nên hàm số $y=f(x)$ đồng biến. Còn nếu $0<x<1$ thì $f'(x)$ luôn âm nên hàm số $y=f(x)$ nghịch biến.

Còn tại các giá trị $x\in\{0;1;2\}$ thì đạo hàm $f'(x)=0$.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu của $f'(x)$ ta nhận thấy hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị là $x=0;x=1$.

Câu 13. (Ngô Quyền Hà Nội) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)-5x$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

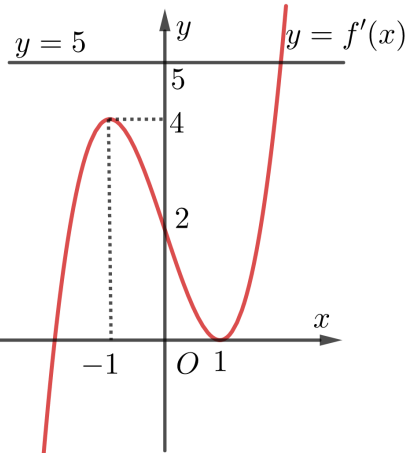
Lời giải

Chọn C

Ta có $y=f(x)-5x$. Suy ra $y'=f'(x)-5$.

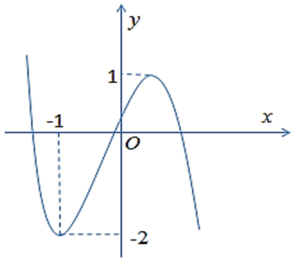
Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)-5x$ là số nghiệm bội lẻ của phương trình $y'=0$.

Ta có $y'=f'(x)-5=0\Leftrightarrow f'(x)=5$.



Dựa vào đồ thị ta có $y=f'(x)$ cắt đường thẳng $y=5$ tại duy nhất một điểm. Suy ra số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)-5x$ là 1.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)+2x$ là



A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x)=f(x)+2x$. Ta có $g'(x)=f'(x)+2$. Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta thấy:

+ $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\alpha\ (\alpha>0) \end{array}\right.$.

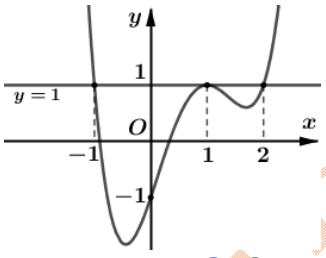
+ $g'(x)>0 \Leftrightarrow f'(x)>-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x<\alpha \\ x\neq -1 \end{cases}$.

+ $g'(x)<0 \Leftrightarrow f'(x)<-2 \Leftrightarrow x>\alpha$.

Từ đó suy ra hàm số $y=f(x)+2x$ liên tục và có đạo hàm chỉ đổi dấu khi qua giá trị $x=\alpha$.

Vậy hàm số đã cho có đúng một cực trị.

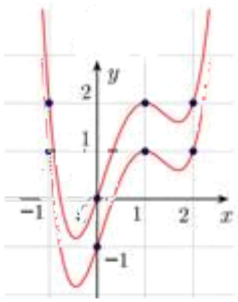
Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau. Đặt $g(x)=f(x)+x$. Tìm số cực trị của hàm số $g(x)$?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

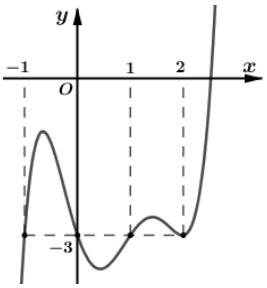
Lời giải

Chọn B



Ta có $g'(x)=f'(x)+1$. Đồ thị của hàm số $g'(x)$ là phép tịnh tiến đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ theo phương Oy lên trên 1 đơn vị, khi đó đồ thị hàm số $g'(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi hàm số $g(x)=f(x)+3x$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



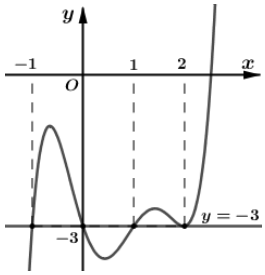
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

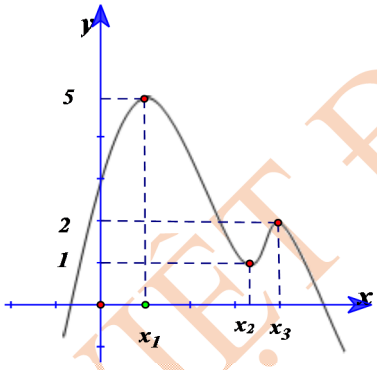
Ta có $g'(x)=f'(x)+3;\ g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-3$. Suy ra số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ chính là số giao điểm giữa đồ thị của hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $y=-3$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Dựa vào đồ thị ta suy ra $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$. Ta thấy $x=-1, x=0, x=1$ là các nghiệm đơn và $x=2$ là nghiệm kép nên đồ thị hàm số $g(x)=f(x)+3x$ có 3 điểm cực trị.

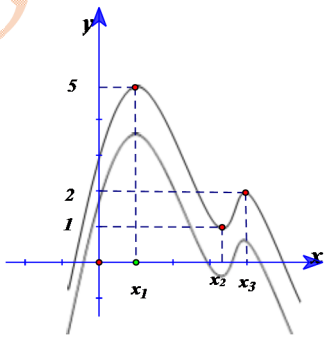
Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=g(x)=f(x)+\dfrac{2017-2018x}{2017}$ có bao nhiêu cực trị?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

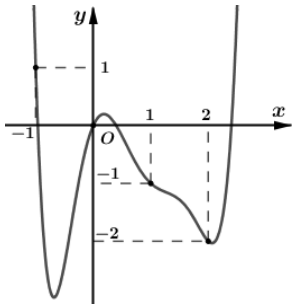


Ta có $y'=g'(x)=f'(x)-\dfrac{2018}{2017}$. Suy ra đồ thị của hàm số $g'(x)$ là phép tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f'(x)$ theo phương Oy xuống dưới $\dfrac{2018}{2017}$ đơn vị.

Ta có $1<\dfrac{2018}{2017}<2$ và dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$, ta suy ra đồ thị của hàm số $g'(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm.

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số

$g(x)=2f(x)+x^2$ đạt cực tiểu tại điểm



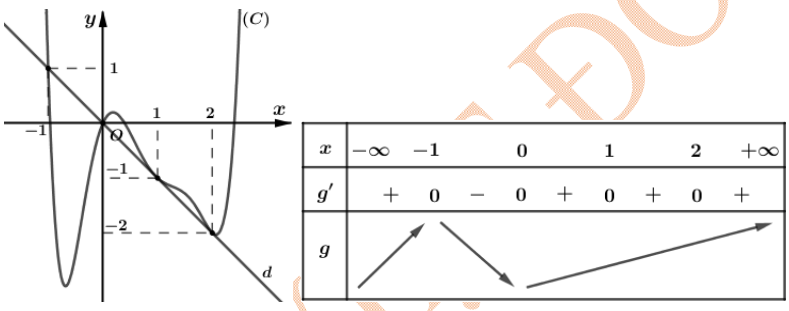
A. $x=-1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=2f'(x)+2x;\ \ g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=-x$.

Suy ra số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ chính là số giao điểm giữa đồ thị của hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $y=-x$.

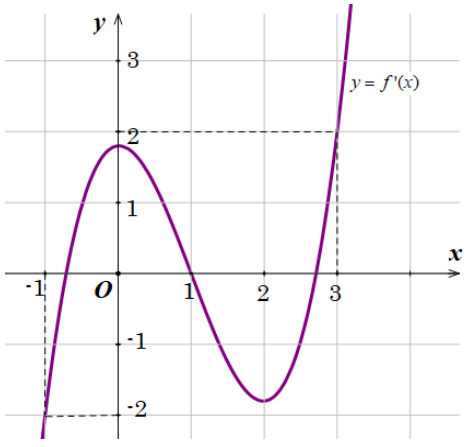


Dựa vào đồ thị ta suy ra $g'(x)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=-1\\x=0\\x=1\\x=2\end{bmatrix}$. Bảng biến thiên

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

Chú ý. Cách xét dấu bảng biến thiên như sau: Ví dụ trên khoảng $(-\infty;-1)$ ta thấy đồ thị hàm $f'(x)$ nằm phía trên đường $y=-x$ nên $g'(x)$ mang dấu $+$.

Câu 19. (CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 3) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2+x+1$. Biết đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Khẳng định nào sau đây **đúng ?**

A. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.

B. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 2 điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.

C. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại.

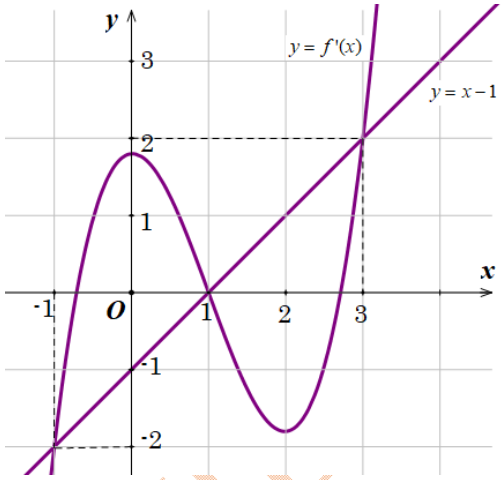
D. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=f'(x)-(x-1)$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=x-1$ đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=x-1$.



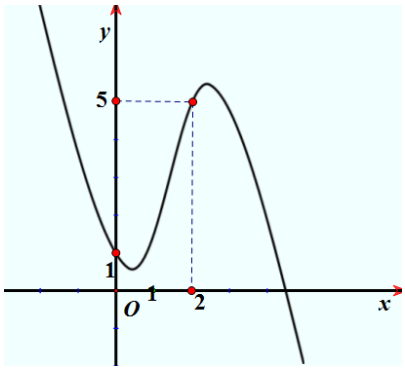
Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=x-1$ ta có $g'(x)=0\Leftrightarrow x=-1,\ x=1,\ x=3$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	$g(-1)$	↗	$g(1)$	↘	$g(3)$	↗	

Từ bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.

Câu 20. (SGD-Nam-Định-2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên.



Khẳng định nào dưới đây đúng ?

A. Hàm số $y=f(x)-x^2-x+2019$ đạt cực đại tại $x=0$.

B. Hàm số $y=f(x)-x^2-x+2019$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

C. Hàm số $y=f(x)-x^2-x+2019$ không có cực trị.

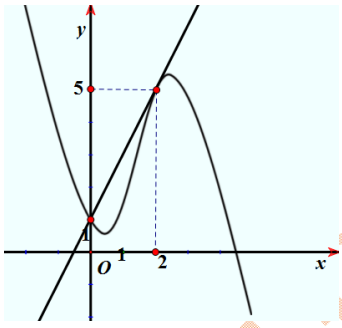
D. Hàm số $y=f(x)-x^2-x+2019$ không có cực trị tại $x=0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=f'(x)-2x-1$.

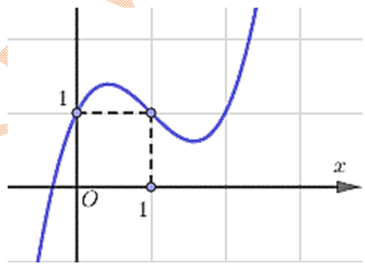
Cho $y'=0\Leftrightarrow f'(x)=2x+1\ (1)$.



Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=2x+1$ ta có thể nhận thấy phương trình (1) có ít nhất 2 nghiệm là $x=0$ và $x=2$.

Xét dấu $x=1\in(0;2)$, ta có $y'(1)=f'(1)-5<0$ từ đó ta nhận định hàm số $y=f(x)-x^2-x+2019$ đạt cực đại tại $x=0$. Ta chọn

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ.



Số điểm **cực tiểu** của hàm số $g(x)=f(x)-\frac{1}{9}x^3$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

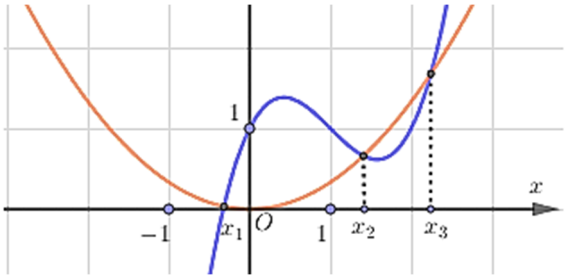
Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x)=f'(x)-\frac{1}{3}x^2$. Khi đó $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^2$.

Vẽ đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^2$ trên mặt phẳng toạ độ đã có đồ thị $f'(x)$.

Dựa vào hình vẽ trên ta thấy phương trình $f'(x)=\frac{1}{3}x^2$ có ba nghiệm đơn $x_1<x_2<x_3$

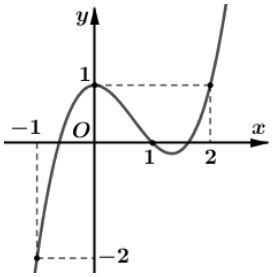


x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta lập được bảng xét dấu của g' như sau

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy dấu của g' thay đổi từ $(-)$ sang $(+)$ hai lần. Vậy có hai điểm cực tiểu.

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $g(x)=f(x)-\frac{x^3}{3}+x^2-x+2$ đạt cực đại tại

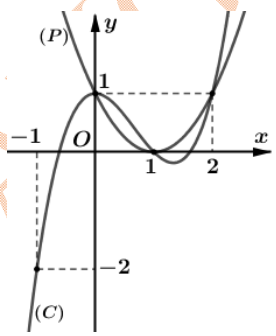
A. $x=-1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=f'(x)-x^2+2x-1;\ \ g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=(x-1)^2$.

Suy ra số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ chính là số giao điểm giữa đồ thị của hàm số $f'(x)$ và parapol $(P):y=(x-1)^2$.



x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào đồ thị ta suy ra $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$. Bảng biến thiên

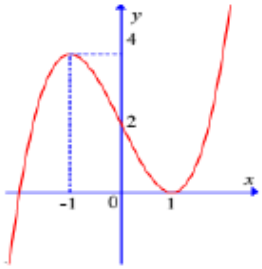
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $g(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.

Chú ý. Cách xét dấu bảng biến thiên như sau: Ví dụ trên khoảng $(-\infty;0)$ ta thấy đồ thị hàm $f'(x)$ nằm phía trên đường $y=(x-1)^2$ nên $g'(x)$ mang dấu $-$.

Nhận thấy các nghiệm $x=0;\ x=1;\ x=2$ là các nghiệm đơn nên qua nghiệm $g'(x)$ đổi dấu.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 23. (Văn Giang Hưng Yên) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x-2018)-2019x+1$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

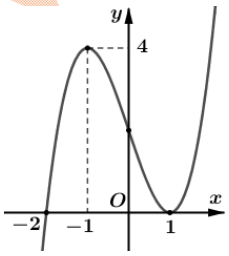
$y=f(x-2018)-2019x+1 \Rightarrow y'=f'(x-2018)-2019.$

Do đó $y'=0 \Leftrightarrow f'(x-2018)=2019$ (1).

Số nghiệm của phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ với đường thẳng $y=2019$.

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta thấy (1) chỉ có 1 nghiệm đơn. Vậy hàm số $y=f(x-2018)-2019x+1$ chỉ có 1 điểm cực trị.

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ và đồ thị hình bên là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^2-3)$.



A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=2xf'(x^2-3)$;

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0 \\ f'(x^2-3)=0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} \begin{bmatrix} x=0 \\ x^2-3=-2 \\ x^2-3=1 \ (\text{nghiem kep}) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=\pm 2 \ (\text{nghiem kep}) \end{bmatrix}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2		-1		0		1		2	$+\infty$
g'		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
g		↘		↗		↘		↗			

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án

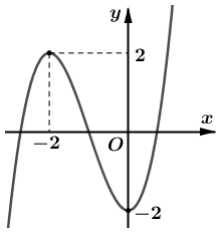
Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ xét trên khoảng $(2;+\infty)$

- $x\in(2;+\infty)\to x>0.\ (1)$
- $x\in(2;+\infty)\to x^2>4\longrightarrow x^2-3>1\xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} f'(x^2-3)>0.\ (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $g'(x)=2xf'(x^2-3)>0$ trên khoảng $(2;+\infty)$ nên $g'(x)$ mang dấu $+$.

Nhận thấy các nghiệm $x=\pm1$ và $x=0$ là các nghiệm bội lẻ nên $g'(x)$ qua nghiệm đổi dấu; các nghiệm $x=\pm2$ là nghiệm bội chẵn (lí do dựa vào đồ thị ta thấy $f'(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1) nên qua nghiệm không đổi dấu.

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Hàm số $g(x)=f\left(-x^2+3x\right)$ có bao nhiêu điểm **cực đại** ?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=(-2x+3).f'\left(-x^2+3x\right);$

$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2x+3=0\\ f'\left(-x^2+3x\right)=0\end{array}\right.\xleftarrow{\text{theo đồ thị } f(x)}\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\ -x^2+3x=-2\\ -x^2+3x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}\\ x=0\\ x=3\end{array}\right.$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\frac{3-\sqrt{17}}{2}$	0	$1,5$	3	$\frac{3+\sqrt{17}}{2}$	$+\infty$
g'		$+\ 0\ -$	0	$+\ 0\ -$	0	$+\ 0\ -$	
g		↗	↘	↗	↘	↗	↘

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ chọn $x=4\in\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{2};+\infty\right)$

- $-2x+3=-5<0.\ (1)$
- $-x^2+3x=-4\xrightarrow{\text{theo đồ thị } f(x)} f'(-4)>0$ (vì f đang tăng).(2)

Từ (1) và (2), suy ra $g'(x)=(-2x+3)f'\left(-x^2+3x\right)<0$ trên khoảng $\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{2};+\infty\right)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Nhận thấy các nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ là các nghiệm bội lẻ nên $g'(x)$ qua nghiệm đổi dấu.

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ có **đúng** ba điểm cực trị là $-2;-1;0$. Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết suy ra $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=-1.\\x=0\end{array}\right.$

Đặt $g(x)=f(u),u=x^2-2x$ thì $g'(x)=2(x-1).f'(u)$ nên

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\f'(u)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x=-2\,(\text{VN})\\x^2-2x=-1(1)\\x^2-2x=0(2)\end{array}\right.$$

Phương trình (1) có nghiệm kép là $x=1$; phương trình (2) có hai nghiệm đơn là $x=0;x=2$ nên phương trình $g'(x)=0$ có hai nghiệm đơn là $x=0;x=2$ và một nghiệm bội ba là $x=1$ nên hàm số đã cho có ba cực trị.

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm $f'(x)$ như sau :

x	$-\infty$	-2		1		3	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Hỏi hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x\right)$ có bao nhiêu điểm **cực tiểu** ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=(2x-2)f'\left(x^2-2x\right);$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\f'\left(x^2-2x\right)=0\end{array}\right.\xleftrightarrow{\text{theo BBT } f'(x)}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x=-2\\x^2-2x=1(\text{nghiem kep})\\x^2-2x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=1\pm\sqrt{2}\,(\text{nghiem kep})\\x=-1\\x=3\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		3	$+\infty$
g'	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
g											

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ xét trên khoảng $(3;+\infty)$

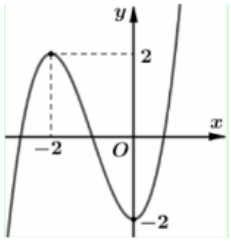
- $x\in(3;+\infty)\rightarrow 2x-2>0.\ (1)$

- $x \in (3;+\infty) \to x^2-2x>3 \xrightarrow{\text{theo BBT } f'(x)} f'(x^2-2x)<0.\ (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $g'(x)=(2x-2)f'(x^2-2x)<0$ trên khoảng $(3;+\infty)$ nên $g'(x)$ mang dấu $-$.

Nhận thấy các nghiệm $x=\pm 1$ và $x=3$ là các nghiệm bội lẻ nên $g'(x)$ qua nghiệm đổi dấu.

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm $f'(x)$ như đồ thị hình bên dưới. Hỏi hàm số $g(x)=f(-x^2+3x)$ có bao nhiêu điểm **cực đại** ?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=(-2x+3).f'(-x^2+3x)$;

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}-2x+3=0\\ f'(-x^2+3x)=0\end{bmatrix} \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f(x)} \begin{bmatrix}x=\dfrac{3}{2}\\ -x^2+3x=-2\\ -x^2+3x=0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}x=\dfrac{3}{2}\\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}\\ x=0\\ x=3\end{bmatrix}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\frac{3-\sqrt{17}}{2}$		0		$1,5$		3		$\frac{3+\sqrt{17}}{2}$		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
g		↗		↘		↗		↘		↗		↘

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án

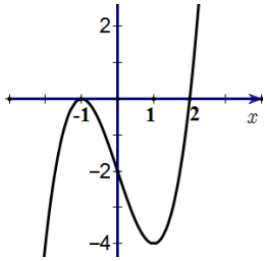
Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ chọn $x=4 \in \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2};+\infty\right)$

- $-2x+3=-5<0.\ (1)$
- $-x^2+3x=-4 \xrightarrow{\text{theo do thi } f(x)} f'(-4)>0$ (vì f đang tăng).(2)

Từ (1) và (2), suy ra $g'(x)=(-2x+3)f'(-x^2+3x)<0$ trên khoảng $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2};+\infty\right)$.

Nhận thấy các nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ là các nghiệm bội lẻ nên $g'(x)$ qua nghiệm đổi dấu.

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x)=f(x^2-2x-1)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số có sáu cực trị. **B.** Hàm số có năm cực trị.

C. Hàm số có bốn cực trị. **D.** Hàm số có ba cực trị.

Lời giải

Chọn D

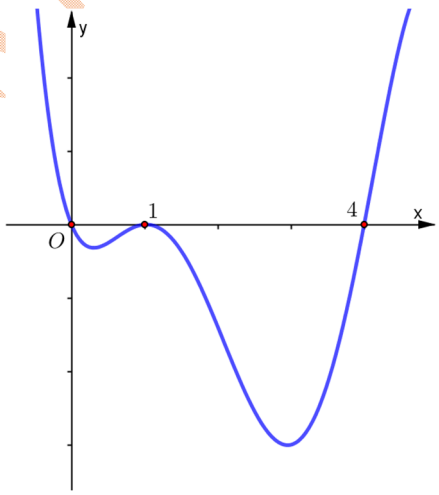
Ta có: $g'(x)=(2x-2)f'(x^2-2x-1)$. Nhận xét: $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x-1=-1\\x^2-2x-1=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=2;x=3\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

x		-1		0		1		2		3	
g'(x)	-	0	+	0	+	0	-	0	-	0	+
g(x)	↘		↗		↗		↘		↘		↗

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số có đúng ba cực trị.

Câu 30. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đồ thị đạo hàm như hình vẽ. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x^3)$ là:



A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

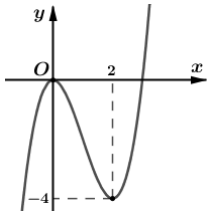
Chọn C

Ta có: $y' = 3x^2 f'\left(x^3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = \sqrt[3]{4} \end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị đạo hàm ta thấy $f'\left(x^3\right) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 > 4 \\ x^3 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \sqrt[3]{4} \\ x < 0 \end{array}\right.$.

Do đó khi vẽ bảng biến thiên của $y = f\left(x^3\right)$ chỉ có 2 điểm $\left(x = 0, x = \sqrt[3]{4}\right)$ làm đạo hàm của nó đổi dấu nên có 2 điểm cực trị.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Hàm số $g(x) = f\left(f(x)\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

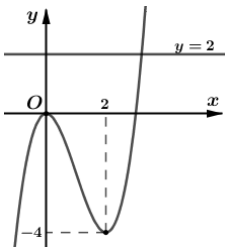
Lời giải

Chọn B

Cách 1: Dựa vào đồ thị ta thấy $f(x)$ đạt cực trị tại $x = 0,\ x = 2$.

Suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \ (\text{nghiem don}) \\ x = 2 \ (\text{nghiem don}) \end{array}\right.$.. Ta có $g'(x) = f'(x).f'\left[f(x)\right];\ g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f'\left[f(x)\right] = 0 \end{array}\right.$.

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \ (\text{nghiem don}) \\ x = 2 \ (\text{nghiem don}) \end{array}\right.$.
- $f'\left[f(x)\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \ (1) \\ f(x) = 2 \ (2) \end{array}\right.$.



Dựa vào đồ thị suy ra:

- Phương trình (1) có hai nghiệm $x = 0$ (nghiệm kép) và $x = a\ (a > 2)$.
- Phương trình (2) có một nghiệm $x = b\ (b > a)$.

Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 4 nghiệm bội lẻ là $x = 0,\ x = 2,\ x = a$ và $x = b$. Suy ra hàm số $g(x) = f\left[f(x)\right]$ có 4 điểm cực trị.

Cách 2:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

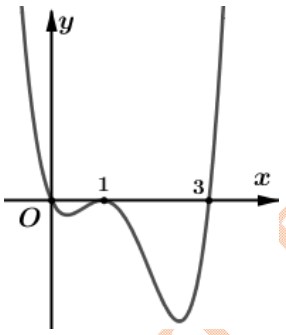
+) Ta có với $u=f(x)$ thì $f'\left(f(x)\right)_x=f_u'.u_x=f_u'.f_x'\Rightarrow f'\left(f(x)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f_u'=0\\f_x'=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=f(x)=0\\u=f(x)=2\\x=0\\x=2\end{array}\right.$

+) Ta thấy $f(x)=0$ có hai nghiệm $x_{1,2}=0\vee x_3>2$.

+) Ta thấy $f(x)=2$ có hai nghiệm $x_4>x_3$

$\Rightarrow f'\left(f(x)\right)=0$ có nghiệm $x=0$ bậc 3, $x=2,x_3,x_4$ bậc 1 $\Rightarrow$ hàm số có 4 cực trị.

Câu 32. (Chuyên Thái Nguyên) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Khi đó đồ thị hàm số $y=[f(x)]^2$ có

A. 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu

B. 3 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.

C. 1 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

D. 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y=[f(x)]^2\Rightarrow y'=2.f(x).f'(x)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\f'(x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=3\\x=a\in(0;1)\\x=b\in(2;3)\end{array}\right.$$

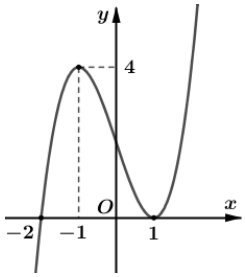
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		a		1		b		3		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-		-	0	-		-	0	+	
$f'(x)$		-		-	0	+	0	-	0	+		+	
y'		-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	
$y=[f(x)]^2$			CT		CĐ		CT		CĐ		CT		

Từ bảng biến thiên suy ra đồ thị có 2 điểm CĐ và 3 điểm CT

Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0)<0$, đồng thời đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f^2(x)$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị, ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=-2\\x=1\quad(\text{nghiem kep})\end{bmatrix}$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$		$+$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$f(-2)$	↗	$f(0)$	↗	$y=0$		

Xét $g'(x)=2f'(x)f(x);\ \ g'(x)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}f'(x)=0\\f(x)=0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{theo BBT } f(x)}\begin{bmatrix}x=-2\\x=1\quad(\text{nghiem kep})\\x=a\,(a<-2)\\x=b\,(b>0)\end{bmatrix}$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		a		-2		b		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	↘	$g(a)$	↗	$g(-2)$	↘	$g(b)$	↗	$+\infty$

Vậy hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ chọn $x=0\in(-1;b)$

- $x=0\xrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)}f'(0)>0.\ \ (1)$
- Theo giả thiết $f(0)<0.\ \ (2)$

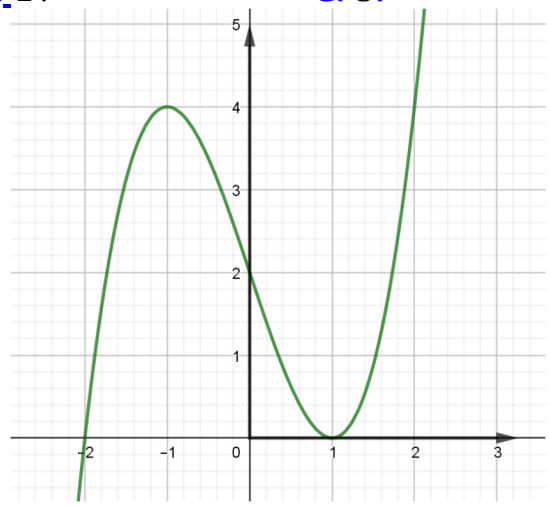
Từ (1) và (2), suy ra $g'(0)<0$ trên khoảng $(-1;b)$.

Nhận thấy $x=-2;x=a;x=b$ là các nghiệm đơn nên $g'(x)$ đổi dấu khi qua các nghiệm này. Nghiệm $x=1$ là nghiệm kép nên $g'(x)$ không đổi dấu khi qua nghiệm này, trong bảng biến thiên ta bỏ qua nghiệm $x=1$ vẫn không ảnh hưởng đến quá trình xét dấu của $g'(x)$.

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Đồ thị của hàm số $y=\left(f(x)\right)^3$ có bao nhiêu điểm cực trị?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 8.



Lời giải

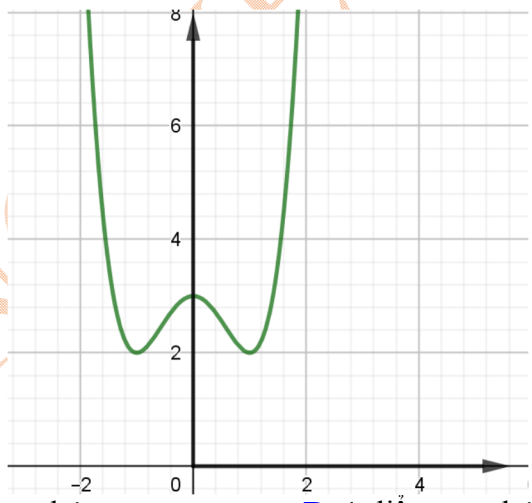
Chọn B

Ta có $y=\left(f(x)\right)^3 \Rightarrow y'=3f'(x).f^2(x)$.

Từ đồ thị ta có: $f'(x)=0$ tại $x=-1, x=1$. Bởi $f^2(x)$ không đổi dấu trên $\mathbb{R}$.

Từ đó suy ra $y=\left(f(x)\right)^3$ có hai điểm cực trị là $x=-1, x=1$.

Câu 35. Cho hàm số $y=f(x)$ luôn dương và có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Đồ thị hàm số $y=\sqrt{f(x)}$ có bao nhiêu điểm cực đại, bao nhiêu điểm cực tiểu?



A. 1 điểm cực tiểu, 2 điểm cực đại.
B. 1 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.
C. 1 điểm cực tiểu, 1 điểm cực đại.
D. 1 điểm cực tiểu, 0 điểm cực đại.

Lời giải

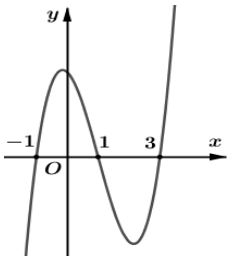
Chọn B

Ta có $y=\sqrt{f(x)}$ xác định trên $\mathbb{R}$ và $y'=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$. Bởi $\sqrt{f(x)}>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, nên ta suy ra được số điểm cực trị của $y=\sqrt{f(x)}$ bằng số điểm cực trị của $y=f(x)$.

Từ đồ thị trên ta thu được $y=\sqrt{f(x)}$ có 1 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.

Câu 36. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hàm số

$g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$.

Suy ra $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=0\\ f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)=0\end{array}\right.\xleftrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)}\left[\begin{array}{l}x+1=0\\ \sqrt{x^2+2x+2}=-1\\ \sqrt{x^2+2x+2}=1\\ \sqrt{x^2+2x+2}=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=-1+\sqrt{2}\\ x=-1-\sqrt{2}\end{array}\right.$.

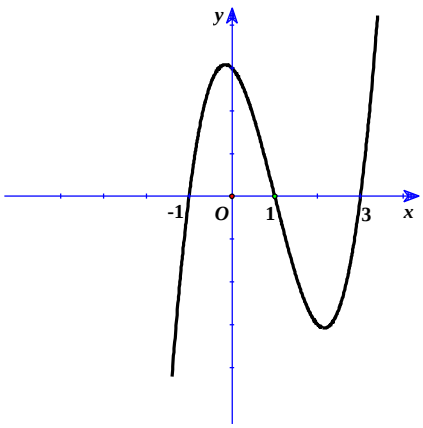
Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ đó suy ra hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ có 1 điểm cực đại.

Chú ý: Cách xét dấu $-$ hay $+$ của $g'(x)$ để cho nhanh nhất ta lấy một giá trị x_0 thuộc khoảng đang xét rồi thay vào $g'(x)$. Chẳng hạn với khoảng $\left(-1;-1+\sqrt{2}\right)$ ta chọn $x_0=0\longrightarrow g'(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}f'\left(\sqrt{2}\right)<0$ vì dựa vào đồ thị ta thấy $f'\left(\sqrt{2}\right)<0$.

Câu 37. (Nguyễn Du Dak-Lak 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc bốn. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $f\left(\sqrt{x^2+2x+2019}\right)$ là



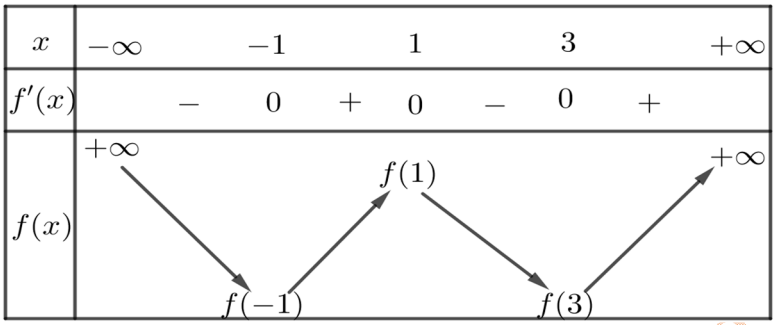
A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta thấy $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=3\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Xét hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+2019}\right)$.

$g'(x)=f'\left(\sqrt{x^2+2x+2019}\right).\dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2019}}=f'\left(\sqrt{x^2+2x+2019}\right).\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2019}}$.

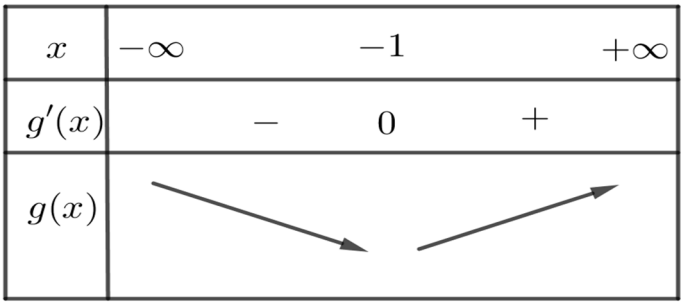
$g'(x)=0\Leftrightarrow f'\left(\sqrt{x^2+2x+2019}\right).\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2019}}=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(\sqrt{x^2+2x+2019}\right)=0\\\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2019}}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+2x+2019}=-1\\\sqrt{x^2+2x+2019}=1\\\sqrt{x^2+2x+2019}=3\\x=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+2x+2019}=-1(vn)\\x^2+2x+2018=0(vn)\\x^2+2x+2010=0(vn)\\x=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow x=-1.$

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có: $x>3$ thì $f'(x)>0$.

Mà $\sqrt{x^2+2x+2019}\geq\sqrt{2018}>3$ nên $f'\left(\sqrt{x^2+2x+2019}\right)>0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$.

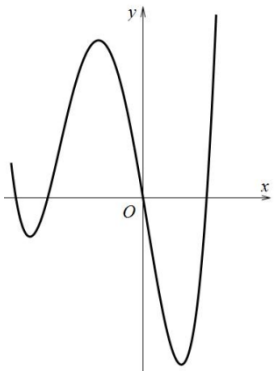
Bảng biến thiên



Vậy $g'(x)$ chỉ đổi dấu qua nghiệm $x=-1$. Số điểm cực trị của hàm số là 1.

Câu 38. (CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG QUẢNG NAM LẦN 2 NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Tìm số điểm cực đại của hàm số $y=\left(\frac{1}{2018}\right)^{f(x)}-2019^{f(x)}$

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y=g(x)=\left(\frac{1}{2018}\right)^{f(x)}-2019^{f(x)}$.

Ta có: $g'(x)=f'(x)\left(\frac{1}{2018}\right)^{f(x)}\ln\left(\frac{1}{2018}\right)-f'(x)2019^{f(x)}\ln 2019$

$=f'(x)\left[\left(\frac{1}{2018}\right)^{f(x)}\ln\left(\frac{1}{2018}\right)-2019^{f(x)}\ln 2019\right]\ (1)$

Ta có: $\left[\left(\frac{1}{2018}\right)^{f(x)}\ln\left(\frac{1}{2018}\right)-2019^{f(x)}\ln 2019\right]<0;\forall x\ (2)$.

Xét phương trình:

$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)\left[\left(\frac{1}{2018}\right)^{f(x)}\ln\left(\frac{1}{2018}\right)-2019^{f(x)}\ln 2019\right]=0\Leftrightarrow f'(x)=0$.

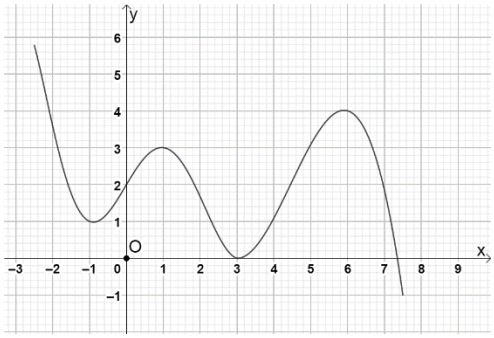
Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta thấy hàm số có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu.

Mà từ (1) và (2) ta thấy $g'(x)$ trái dấu với $f'(x)$.

Vậy hàm số $y=g(x)$ có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

Câu 39. (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – NAM ĐỊNH 2019 – LẦN 1) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=2019^{f(f(x)-1)}$.

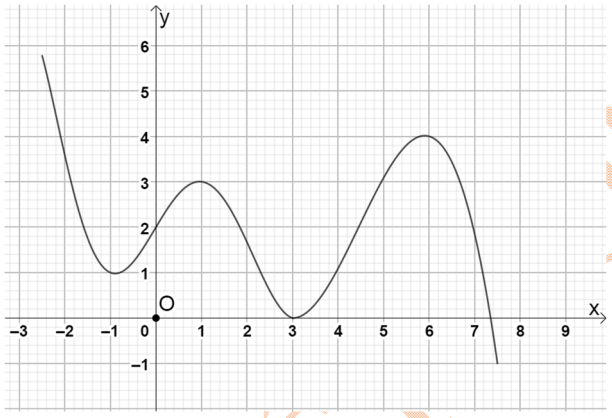
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



A. 13. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 12.

Lời giải

Chọn D



Ta có $y' = f'(x)\,f'\big(f(x)-1\big)2019^{f(f(x)-1)}\ln 2019$

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f'(x)=0 & (1)\\ f'\big(f(x)-1\big)=0 & (2)\end{array}\right.$$

Giải (1) : $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-1\\ x_2=1\\ x_3=3\\ x_4=6\end{array}\right.$

Giải (2) : $f'\big(f(x)-1\big)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)-1=-1\\ f(x)-1=1\\ f(x)-1=3\\ f(x)-1=6\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0\\ f(x)=2\\ f(x)=4\\ f(x)=7\end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị ta có

+) $f(x)=0$ có 1 nghiệm $x_5>6$ là nghiệm bội l,

+) $f(x)=2$ có 5 nghiệm $x_6<-1;-1<x_7<1;1<x_8<3;3<x_9<6;6<x_{10}<x_5$ là các nghiệm bội 1,

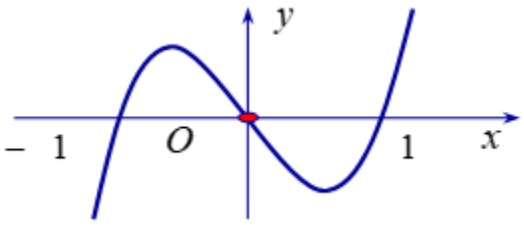
+) $f(x)=4$ có 1 nghiệm $x_{11}<x_6$ là nghiệm bội 1,

+) $f(x)=7$ có 1 nghiệm $x_{12}<x_{11}$ là nghiệm bội 1,

Suy ra $y'=0$ có 12 nghiệm phân biệt mà qua đó y' đổi dấu.

Vậy hàm số $y=2019^{f(f(x)-1)}$ có 12 điểm cực trị.

Câu 40. (HSG Bắc Ninh) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại $\forall x\in\mathbb{R}$, hàm số $f'(x)=x^3+ax^2+bx+c$ Có đồ thị (như hình vẽ)



Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left[f'(x)\right]$ là

A. 7. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Quan sát đồ thị, nhận thấy đồ thị hàm số $f'(x)=x^3+ax^2+bx+c$ đi qua các điểm $O(0;0);A(-1;0);B(1;0)$. Khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}c=0\\a+b=-1\\a-b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=-1\\c=0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=x^3-x\Rightarrow f''(x)=3x^2-1.$$

Đặt: $g(x)=f\left(f'(x)\right)$

Ta có: $g'(x)=\left(f\left[f'(x)\right]\right)'=f'\left[f'(x)\right].f''(x)=\left[\left(x^3-x\right)^3-\left(x^3-x\right)\right]\left(3x^2-1\right)$

$=x(x-1)(x+1)\left(x^3-x-1\right)\left(x^3-x+1\right)\left(3x^2-1\right)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-1\\x^3-x-1=0\\x^3-x+1=0\\3x^2-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-1\\x=a(\approx 0,76)\\x=b(b\approx -1,32)\\x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		b		-1		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		a		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		↘		↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

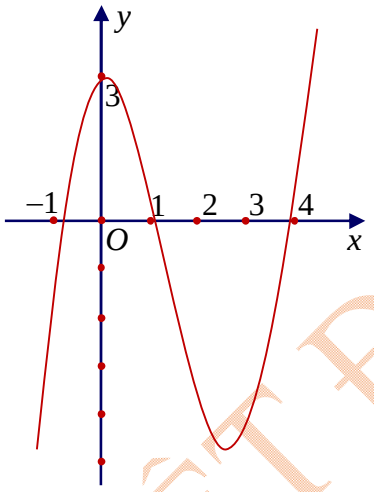
*** Cách xét dấu:** $g'(x)$: chọn $x=2\in(1;+\infty)$ ta có: $g'(2)>0\Rightarrow g'(x)>0\forall x\in(1;+\infty)$, từ đó suy ra dấu của $g'(x)$ trên các khoảng còn lại.

Dựa vào BBT suy ra hàm số có 7 điểm cực trị.

*** Trắc nghiệm:** Số điểm cực trị bằng số nghiệm đơn (nghiệm bội lẻ) của phương trình đa thức $g'(x)=0$.

PT $g'(x)=0$ có 7 nghiệm phân biệt nên hàm số đã cho có 7 điểm cực trị.

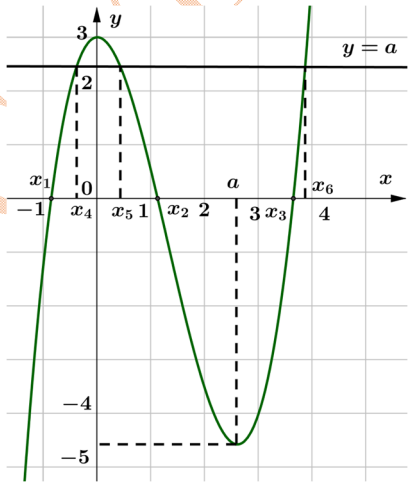
Câu 41. (Hoàng Hoa Thám Hưng Yên) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Đặt $g(x)=3f(f(x))+4$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)$?



A. 2. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B



$g'(x)=3f'(f(x)).f'(x).$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 3f'(f(x)).f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(f(x))=0\\f'(x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\f(x)=a\\x=0\\x=a\end{array}\right.,(2<a<3).$$

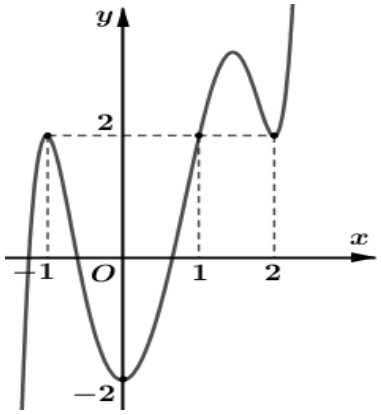
$f(x)=0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_1, x_2, x_3 khác 0 và a.

Vì $2<a<3$ nên $f(x)=a$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_4, x_5, x_6 khác x_1, x_2, x_3, 0, a.

Suy ra $g'(x)=0$ có 8 nghiệm đơn phân biệt. Do đó hàm số $g(x)=3f(f(x))+4$ có 8 điểm cực trị.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 42. (Hoàng Hoa Thám Hưng Yên) Cho hàm số $y=f'(x-1)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y=\pi^{2f(x)-4x}$ đạt cực tiểu tại điểm nào?

A. $x=1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-1$.

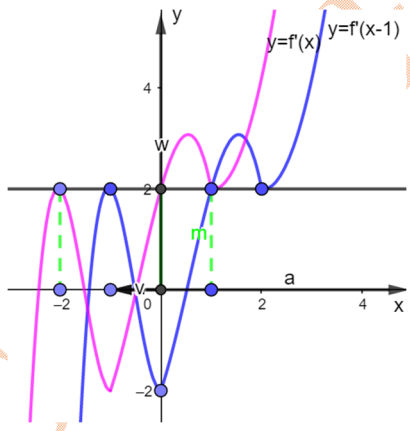
Lời giải:

Chọn B

Ta có: $y'=\left[2f'(x)-4\right]\pi^{2f(x)-4x}\ln\pi$.

$y'=0\Leftrightarrow 2f'(x)-4=0\Leftrightarrow f'(x)=2$.

Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nhận được từ việc tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f'(x-1)$ sang trái 1 đơn vị



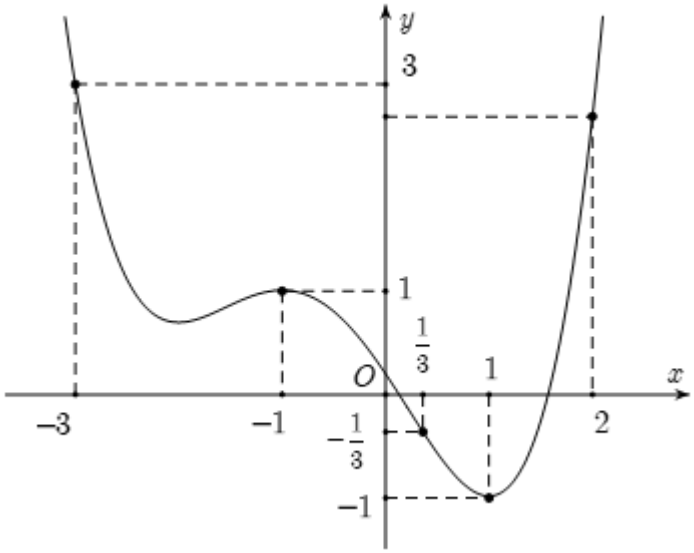
nên $f'(x)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Do $x=-2$ và $x=1$ là nghiệm bội chẵn nên ta có bảng biến thiên sau:

	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y'	$-$		0	$-$		0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	↘		↘		↗		↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hà
m số đạt cực tiểu tại $x=0$.

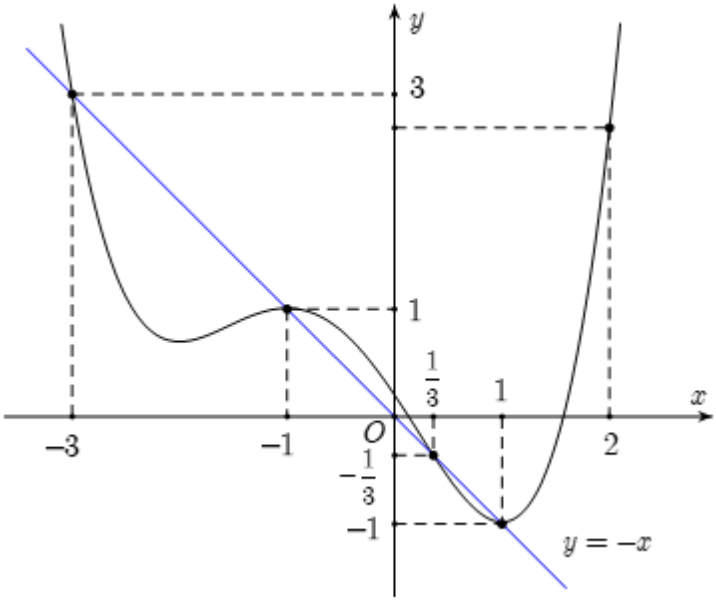
Câu 43. (THĂNG LONG HN LẦN 2 NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=2f\left(\dfrac{5\sin x-1}{2}\right)+\dfrac{(5\sin x-1)^2}{4}+3$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0;2\pi)$?



A. 9. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B



Ta có $g(x)=2f\left(\frac{5\sin x-1}{2}\right)+\left(\frac{5\sin x-1}{2}\right)^2+3$

$$g'(x)=\frac{5\cos x}{2}\left[2f'\left(\frac{5\sin x-1}{2}\right)+2.\left(\frac{5\sin x-1}{2}\right)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\2f'\left(\frac{5\sin x-1}{2}\right)+2.\left(\frac{5\sin x-1}{2}\right)=0\end{array}\right.$$

Đặt $t=\frac{5\sin x-1}{2}$ vì $x\in(0;2\pi)\Rightarrow t\in[-3;2]$

Khi đó: $2f'\left(\frac{5\sin x-1}{2}\right)+2.\left(\frac{5\sin x-1}{2}\right)=0$ thành $f'(t)=-t\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=\frac{1}{3}\\t=-1\\t=-3\end{array}\right.$

□Với $t=1\Rightarrow\frac{5\sin x-1}{2}=1\Leftrightarrow\sin x=\frac{3}{5}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\alpha_1\in(0;2\pi)\\x=\alpha_2\in(0;2\pi)\end{array}\right.$.

□Với $t=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{5\sin x-1}{2}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\sin x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\alpha_3\in(0;2\pi)\\x=\alpha_4\in(0;2\pi)\end{array}\right.$.

□Với $t=-1\Rightarrow\frac{5\sin x-1}{2}=-1\Leftrightarrow\sin x=-\frac{1}{5}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\alpha_5\in(0;2\pi)\\x=\alpha_6\in(0;2\pi)\end{array}\right.$.

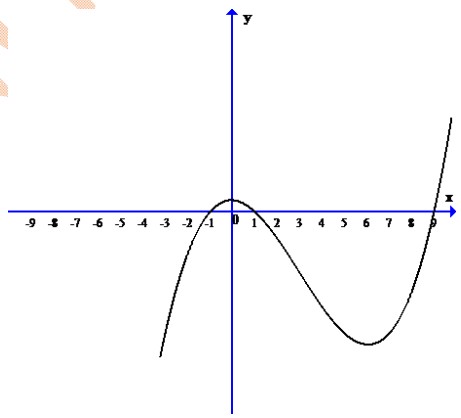
□Với $t=-3\Rightarrow\frac{5\sin x-1}{2}=-3\Leftrightarrow\sin x=-1\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{2}\in(0;2\pi)$.

□ $\cos x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}\in(0;2\pi)\\x=\frac{3\pi}{2}\in(0;2\pi)\end{array}\right.$.

Vì $x=\frac{3\pi}{2}$ là nghiệm kép nên không là điểm cực trị của hàm số $y=g(x)$.

Vậy hàm số $y=g(x)$ có 7 điểm cực trị trên khoảng $(0;2\pi)$.

Câu 44. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới.

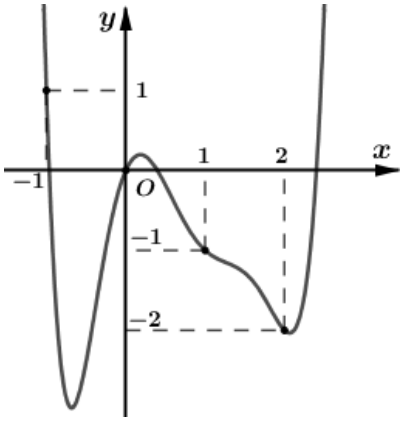


Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f(x^3+1)$ là :

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 45. (Liên Trường Nghệ An) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số như hình vẽ bên dưới.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=2f(x+2)+(x+1)(x+3)$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

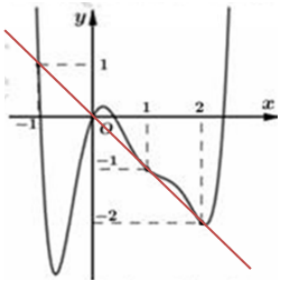
Chọn A

Ta có $g'(x)=2f'(x+2)+2x+4$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x+2)=-(x+2)$.

Đặt $t=x+2$ ta được $f'(t)=-t$. (1)

(1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f'(t)$ và đường thẳng $d: y=-t$ (hình vẽ)



Dựa vào đồ thị của $f'(t)$ và đường thẳng $y=-t$ ta có

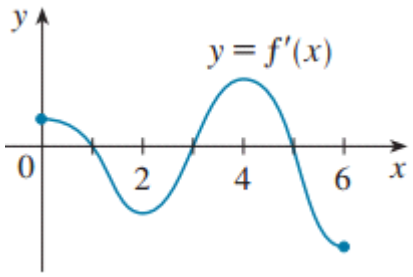
ta có $f'(t)=-t\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=0 \\ t=1 \\ t=2 \end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-2 \\ x=-1 \\ x=0 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$.

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	
$g(x)$		↗		↘		↗		↗			

Vậy đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu.

Câu 46. (THPT NÔNG CỐNG 2 LẦN 4 NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0;6]$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[0;6]$ được cho bởi hình bên dưới. Hỏi hàm số $y=[f(x)]^2+2019$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị trên đoạn $[0;6]$.



A. 7. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

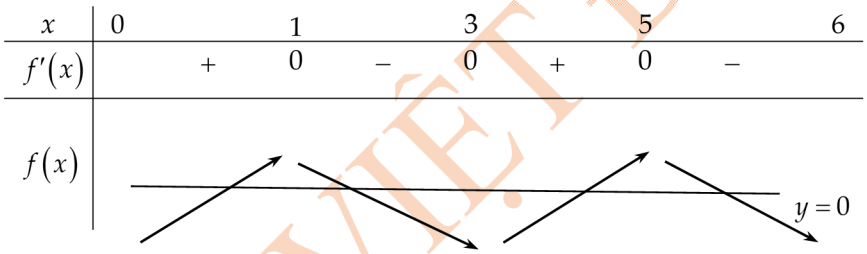
Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 2f(x)f'(x); y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right.$.

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[0;6]$ suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \\ x = 5 \end{array}\right.$.

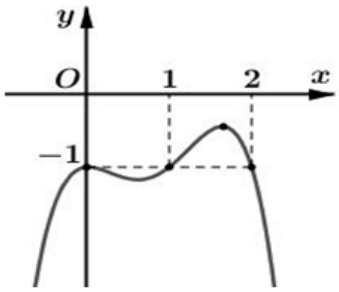
Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0;6]$:



Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $f(x) = 0$ có tối đa 4 nghiệm phân biệt trong $[0;6]$ là $x_1 \in (0;1)$, $x_2 \in (1;3)$, $x_3 \in (3;5)$, $x_4 \in (5;6)$.

Vậy hàm số $y = [f(x)]^2 + 2019$ có tối đa 7 điểm cực trị trên đoạn $[0;6]$.

Câu 47. (Kim Liên) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(x) + x$ đạt cực tiểu tại điểm.



A. $x = 1$. **B.** $x = 2$.
C. không có điểm cực tiểu. **D.** $x = 0$.

Lời giải

Chọn A

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta có $g'(x)=f'(x)+1$. Khi đó $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=-1$ (1).

Nghiệm của (1) là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=-1$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$, ta thấy đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=-1$ có ba điểm chung có hoành độ là $0;1;2$. Do đó $f'(x)=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Suy ra $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Trên $(-\infty;1)$ đường thẳng $y=-1$ tiếp xúc hoặc nằm trên đồ thị hàm số $y=f'(x)$.

Trên $(1;2)$ đường thẳng $y=-1$ nằm dưới đồ thị hàm số $y=f'(x)$.

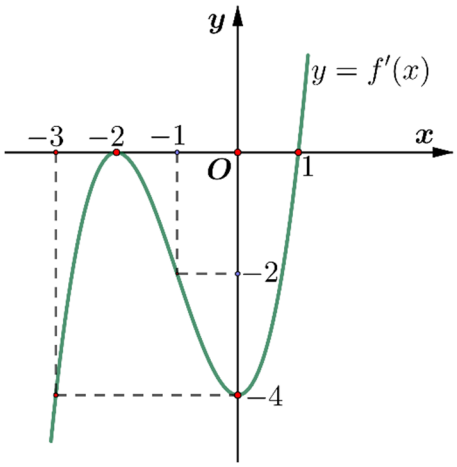
Trên $(2;+\infty)$ đường thẳng $y=-1$ nằm trên đồ thị hàm số $y=f'(x)$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\searrow$		$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	$g(2)$	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=1$.

Câu 48. (THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Số điểm cực đại của hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x\right)$ là

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x)=\left(3x^2-3\right)f'\left(x^3-3x\right)$, $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^3-3=0 \quad (1)\\ f'\left(x^3-3x\right)=0 \quad (2)\end{array}\right.$

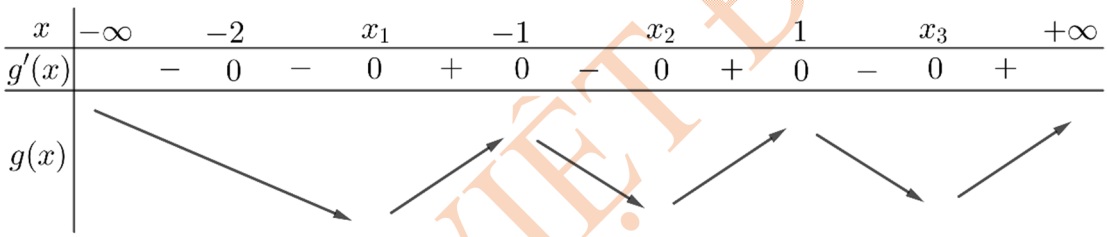
$(1)\Leftrightarrow x=\pm1$.

Dựa vào đồ thị đã cho thì $(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-3x=-2\\ x^3-3x=1\end{array}\right.$

Trong đó phương trình $x^3-3x=-2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-2\end{array}\right.$.

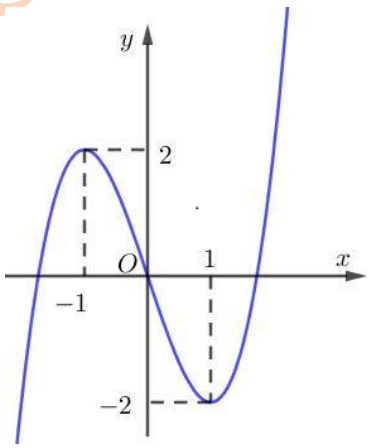
Còn phương trình: $x^3-3x=1$ có 3 nghiệm phân biệt: $-2<x_1<-1$, $-1<x_2<0$ và $1<x_3<2$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$



Vậy hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực đại

Câu 49. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên Lần2) Biết đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=f(x)-2x$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

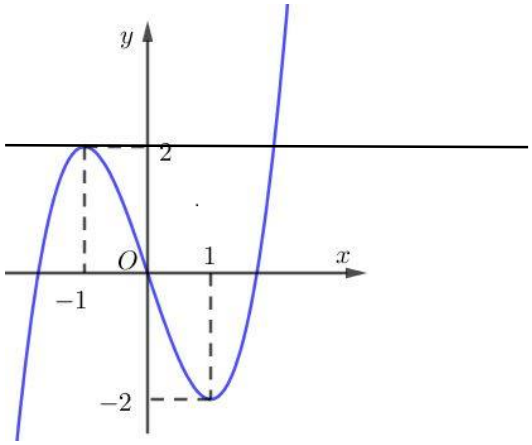
Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y=g(x)=f(x)-2x$

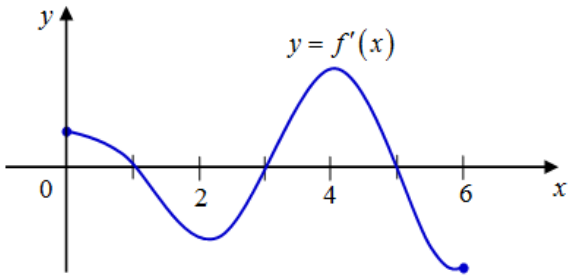
$g'(x)=f'(x)-2=0\Leftrightarrow f'(x)=2$.

Dựa vào đồ thị $f'(x)$ thì phương trình $g'(x)=0$ có hai nghiệm ($x_1<x_2$).



Ta thấy $g'(x)$ đổi dấu một lần từ âm sang dương tại điểm x_2 nên hàm số có 1 điểm cực trị.

Câu 50. (Lê Xoay lần1) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0;6]$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[0;6]$ được cho bởi hình bên dưới. Hỏi hàm số $y=[f(x)]^2$ có tối đa bao nhiêu cực trị?



A. 7. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=[f(x)]^2 \Rightarrow y'=2f(x).f'(x)$.

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f'(x)=0 \end{array}\right.$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x\in\{1;3;5\}$.

Dựa vào đồ thị hàm số của $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[0;6]$ là

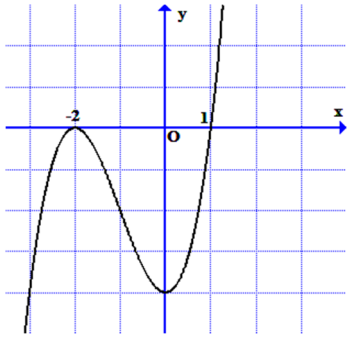
Từ bảng biến thiên, ta thấy phương trình $f(x)=0$ có tối đa bốn nghiệm phân biệt với

$0<x_1<1<x_2<3<x_3<5<x_4<6$.

Do đó, phương trình $y'=0$ có tối đa 7 nghiệm phân biệt và đều là nghiệm đơn.

Vậy hàm số $y=[f(x)]^2$ có tối đa 7 cực trị.

Câu 51. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên.



Xét hàm số $g(x)=f\left(x^2-3\right)$ và các mệnh đề sau:

I. Hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

II. Hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

III. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x=2$.

IV. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

V. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Có bao nhiêu mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề trên?

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=2x.f'\left(x^2-3\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'\left(x^2-3\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-3=-2\\x^2-3=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=\pm2\end{array}\right.$$

và từ đồ thị của $y=f'(x)$ ta có $f'\left(x^2-3\right)>0\Leftrightarrow x^2-3>1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>2\\x<-2\end{array}\right.$

Ta có bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
x		-		-		-	0	+		+		+	
$f'\left(x^2-3\right)$		+	0	-	0	-	0	-	0	-	0	+	
$g'(x)$		-	0	+	0	+	0	-	0	-	0	+	

Suy ra các mệnh đề I và IV đúng, còn lại sai.

ĐỀ XUẤT LỜI GIẢI

Dựa vào đồ thị, ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ (đơn), $x=-2$ (kép)

Ta có $g'(x)=2x.f'\left(x^2-3\right)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'(x^2-3)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=0,\ x^2-3=1$, hoặc $x^2-3=-2$ (kép)

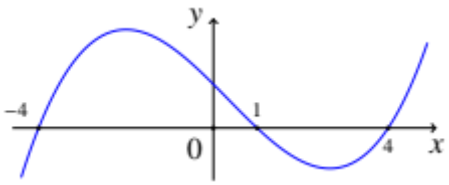
$\Leftrightarrow x=0$ (đơn), $x=\pm 2$ (đơn), $x=\pm 1$ (kép)

Ta có BBT thu gọn như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

Do đó, (I) đúng, (II) sai, (III) sai, (IV) đúng, (V) sai.

Câu 52. **(ĐỀ-THI-THU-ĐH-THPT-CHUYÊN-QUANG-TRUNG-L5-2019)** Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y=f(2x-x^2)$ có bao nhiêu điểm cực đại?



A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

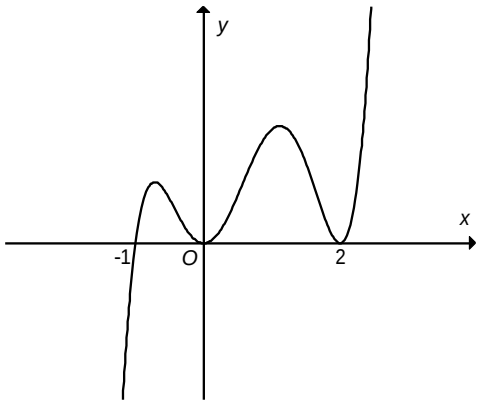
Ta có: $y'=(2-2x).f'(2x-x^2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\2x-x^2=-4\\2x-x^2=1\\2x-x^2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=1\pm\sqrt{5}\end{array}\right.$.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{5}$		1		$1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$2-2x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f'(2x-x^2)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra hàm số có 1 cực đại.

Lưu ý: Ở bài toán này, vấn đề mấu chốt là chúng ta phải xét dấu được lượng $f'(2x-x^2)$.

Câu 53. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng K. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên khoảng K.



Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ trên là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

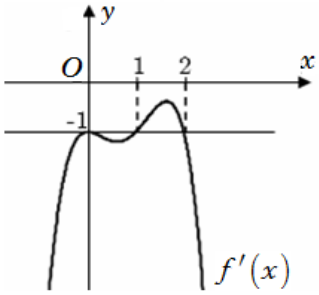
Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $f'(x)=0$ chỉ có một nghiệm đơn (và hai nghiệm kép) nên $f'(x)$ chỉ đổi dấu khi qua nghiệm đơn này. Do đó suy ra hàm số $f(x)$ có đúng một cực trị.

Chọn B

Nhận xét. Đây là một dạng toán suy ngược đồ thị. Dạng này sẽ xuất hiện nhiều hơn trong các đề thi lần sau.

Câu 54. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Xác định điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f(x)+x$.



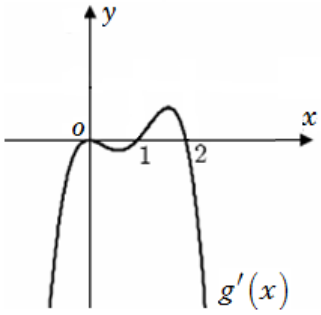
A. Không có điểm cực tiểu. **B.** $x=0$.

C. $x=1$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Xét hàm số $g(x)=f(x)+x$ trên $\mathbb{R}$, ta có $g'(x)=f'(x)+1;\ \forall x\in\mathbb{R}$.

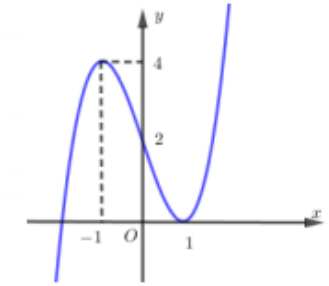
Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$, ta thấy đồ thị hàm số $g'(x)$ là đồ thị hàm số $f'(x)$ tịnh tiến lên trên trục Oy một đơn vị (hình bên), khi đó



- $g'(x)$ không đổi dấu khi đi qua điểm $x=0$ suy ra $x=0$ không là điểm trị của hàm số.
- $g'(x)$ đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi đi qua điểm $x=1$ suy ra $x=1$ là điểm cực tiểu của hàm số.
- $g'(x)$ đổi dấu từ $+$ sang $-$ khi đi qua điểm $x=2$ suy ra $x=2$ là điểm cực đại của hàm số.

Chọn C

Câu 55. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:



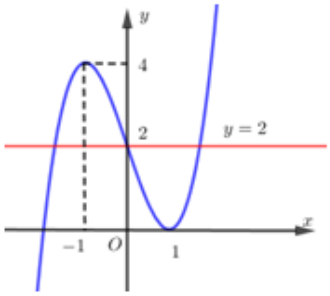
Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)-2x$ là

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

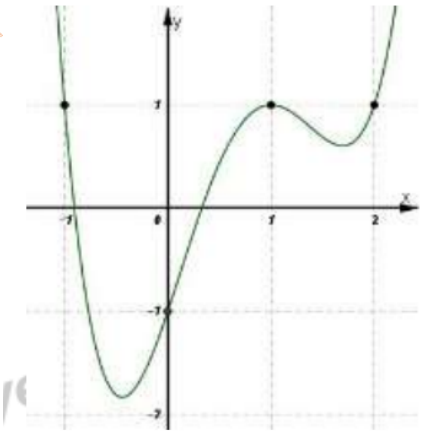
Chọn C

Dựa vào đồ thị hàm số suy ra $f'(x)=x^3-3x+2$



Hàm số $y=f(x)-2x \Rightarrow y'=f'(x)-2=x^3-3x$ có ba nghiệm bội lẻ nên hàm số có 3 điểm cực trị

Câu 56. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên R và có đồ thị $f(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x)=f(x)-x$. Hàm số $g(x)$ đặt cực đại tại điểm nào sau đây?



A. $x=1$ **B.** $x=2$ **C.** $x=0$ **D.** $x=-1$

Lời giải

Chọn D

Phương pháp: Hàm số $y=g(x)$ đạt cực đại tại điểm $x_0 \Leftrightarrow g'(x)=0$ bà qua điểm x_0 thì $g'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm.

Cách giải: Ta có: $g'(x)=f'(x)-1\Rightarrow f'(x_0)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\\x_0=2\\x_0=-1\end{array}\right.$

$g'(x)>0\Leftrightarrow f'(x)>1\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$

$g'(x)<0\Leftrightarrow f'(x)<1\Leftrightarrow x\in(-1;1)\cup(1;2)$

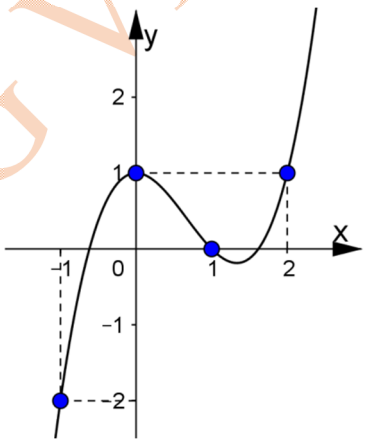
Ta có BBT:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↗		↘		↘		↗	

Ta thấy qua $x_0=-1$ thì $g'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm, qua $x_0=1$ thì $g'(x)$ không đổi dấu (luôn mang dấu âm) và qua $x_0=2$, $g'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương.

Vậy $x_0=-1$ là điểm cực đại của hàm số $y=g(x)$.

Câu 57. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x)-\frac{x^3}{3}+x^2-x+2$ đạt cực đại tại điểm nào?

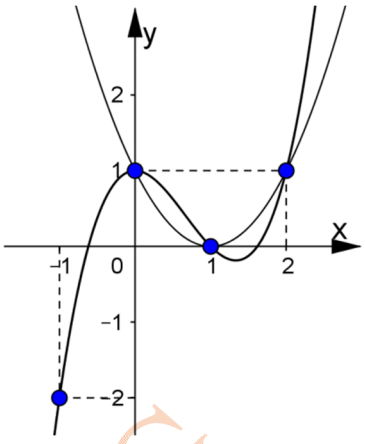


A. $x=1$ **B.** $x=-1$ **C.** $x=0$ **D.** $x=2$

Lời giải

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta có $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và $g'(x)=f'(x)-(x-1)^2$ do đó số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ bằng số giao điểm của hai đồ thị $y=f'(x)$ và $y=(x-1)^2$; $g'(x)>0$ khi đồ thị $y=f'(x)$ nằm trên $y=(x-1)^2$ và ngược lại.



Từ đồ thị suy ra $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x=1\end{array}\right.$ nhưng $g'(x)$ chỉ đổi dấu từ dương sang âm khi qua $x=1$. Do đó hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

DẠNG 3: CỰC TRỊ VỚI HÀM BẬC BA CHỨA THAM SỐ

Câu 1. (THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+3(7m-3)x$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số không có cực trị. Số phần tử của S là

A. 2. **B.** 4. **C.** 0. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+3(7m-3)x$ (1)

$\Rightarrow y'=3x^2-6(m+1)x+3(7m-3)$.

Ta có: $y'=0 \Leftrightarrow x^2-2(m+1)x+7m-3=0$ (2)

Hàm số đã cho không có cực trị

$\Leftrightarrow$ Phương trình $y'=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta'_{(2)} \le 0 \Leftrightarrow (m+1)^2-1.(7m-3) \le 0 \Leftrightarrow m^2-5m+4 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le m \le 4$.

Do m là số nguyên nên $m \in \{1;2;3;4\}$. Vậy tập S có 4 phần tử.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-2mx^2+m^2x+2$ đạt cực tiểu tại $x=1$

A. $m=3$ **B.** $m=1 \vee m=3$ **C.** $m=-1$ **D.** $m=1$

Lời giải

Chọn D

Phương pháp:

Điểm $x=x_0$ là điểm cựa tiểu của hàm số bậc ba $y=f(x)$ nếu $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)>0 \end{cases}$

Cách giải:

TXĐ: $D=R$

Ta có: $y'=3x^2-4mx+m^2 \rightarrow y''=6x-4m$

Để $x=1$ là điểm cực tiểu của hàm số bậc ba với hệ số x^3 dương thì:

$$\begin{cases} y'(1)=0 \\ y''(1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4m+3=0 \\ 6-4m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1; m=3 \\ m<\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m=1$$

Chú ý khi giải:

Nhiều HS sẽ nhầm lẫn điều kiện để điểm x_0 là điểm cực tiểu là $f''(x_0)>0$ dẫn đến chọn đáp án $m=3$ là sai.

Câu 3. (THPT-Toàn-Thắng-Hải-Phòng) Tìm m để hàm số $y=mx^3-(m^2+1)x^2+2x-3$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $-\dfrac{3}{2}$. **C.** 0. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A

Hàm số đã cho xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y'=3mx^2-2(m^2+1)x+2$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1 \Rightarrow y'(1)=0 \Leftrightarrow -2m^2+3m=0 \Leftrightarrow m \in \left\{0;\dfrac{3}{2}\right\}$.

Thử lại:

+)Với $m=0$ thì $y=-2x^2+2x-3$ và $y'=-2x+2 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ (KTM)

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

+)Với $m=\frac{3}{2}$ thì $y'=\frac{9}{2}x^2-\frac{13}{2}x+2$; $y'=0\Leftrightarrow x\in\left\{1;\frac{4}{9}\right\}$. Hàm số y là hàm số bậc ba có $a=\frac{3}{2}>0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=\frac{4}{9}$ và đạt cực tiểu tại $x=1$ (Thỏa mãn).

Vậy $m=\frac{3}{2}$.

Câu 4. Cho hàm số $y=x^3-(2m+1)x^2+(m+1)x+m-1$. Có bao nhiêu giá trị của số tự nhiên $m<20$ để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành?

A. 18. **B.** 19. **C.** 21. **D.** 20.

Lời giải

Chọn B

+ Ta có: $y=(x-1)\left(x^2-2mx+1-m\right)$.

+ Hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành khi và chỉ khi đồ thị y cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt. $\Leftrightarrow y=(x-1)\left(x^2-2mx+1-m\right)=0$ có ba nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow x^2-2mx+1-m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+m-1>0\\2-3m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\\m>\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\\m\neq\frac{2}{3}\end{cases}.$$

+ Do $m\in N, m<20$ nên $1\le m<20$. Vậy có 19 số tự nhiên thỏa mãn bài toán.

Câu 5. (Đoàn Thượng) Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ có cực trị và giá trị của hàm số tại các điểm cực đại, điểm cực tiểu nhận giá trị dương.

A. $m>2$. **B.** $m\in\left(2;\frac{2+2\sqrt{7}}{3}\right)$. **C.** $\frac{2-2\sqrt{7}}{3}<m<-1$. **D.** $m<-1$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Ta có: $y'=x^2-2mx+m+2$.

$y'=0\Leftrightarrow x^2-2mx+m+2=0\ (1)$.

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

$$\Delta'>0\Leftrightarrow m^2-m-2>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>2\end{array}\right.(*)$$

Phương trình đường thẳng đi qua điểm CĐ, CT của hàm số là: $y=\left(-\frac{2}{3}m^2+\frac{2}{3}m+\frac{4}{3}\right)x+\frac{1}{3}m(m+2)$.

Gọi $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ là hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số, khi đó để hàm số có giá trị cực đại, và giá trị cực tiểu dương thì $y_1+y_2>0$ và đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất.

Theo định lý vi-et ta có $x_1+x_2=2m$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Nên $y_1+y_2>0\Leftrightarrow\left(-\frac{2}{3}m^2+\frac{2}{3}m+\frac{4}{3}\right)(x_1+x_2)+\frac{2}{3}m(m+2)>0$

$\Leftrightarrow\left(-\frac{2}{3}m^2+\frac{2}{3}m+\frac{4}{3}\right)(2m)+\frac{2}{3}m(m+2)>0$

$\Leftrightarrow 2m\left(-2m^2+3m+6\right)>0$

$\Leftrightarrow m\in\left(-\infty;\frac{3-\sqrt{57}}{4}\right)\cup\left(0;\frac{3+\sqrt{57}}{4}\right)(**)$.

Để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất thì phương trình $y=0$ có 1 nghiệm đơn duy nhất, khi đó $\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x=0(2)$ có 1 nghiệm đơn duy nhất.

Ta có: $\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x=0\Leftrightarrow x\left(x^2-3mx+3m+6\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-3mx+3m+6=0\ (3)\end{array}\right.$.

Để phương trình (1) có 1 nghiệm đơn duy nhất thì phương trình (3) vô nghiệm, khi đó điều kiện là

$\Delta=9m^2-12m-24<0\Leftrightarrow\frac{2-2\sqrt{7}}{3}<m<\frac{2+2\sqrt{7}}{3}(***)$.

Kết hợp $(*),(**),(***)$ ta được tập các giá trị của m thỏa mãn là $2<m<\frac{2+2\sqrt{7}}{3}$.

Cách 2: Ta có: $y'=x^2-2mx+m+2$.

$y'=0\Leftrightarrow x^2-2mx+m+2=0\ (1)$.

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, khi đó

$\Delta'>0\Leftrightarrow m^2-m-2>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>2\end{array}\right.(*)$

Để hàm số có giá trị cực đại, cực tiểu dương thì đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất và giá trị của hàm số tại điểm uốn luôn dương.

Để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất thì phương trình $y=0$ có nghiệm duy nhất, khi đó $\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x=0(2)$ có 1 nghiệm đơn duy nhất.

Ta có: $\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x=0\Leftrightarrow x\left(x^2-3mx+3m+6\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-3mx+3m+6=0\ (3)\end{array}\right.$.

Để phương trình (1) có nghiệm đơn duy nhất thì phương trình (3) vô nghiệm, khi đó điều kiện:

$\Delta=9m^2-12m-24<0\Leftrightarrow\frac{2-2\sqrt{7}}{3}<m<\frac{2+2\sqrt{7}}{3}(**)$.

Để giá trị của hàm số tại điểm uốn luôn dương:

$y'=x^2-2mx+m+2, y''=2x-2m$

$y''=0\Leftrightarrow 2x-2m=0\Leftrightarrow x=m$

Ta có: $y(m)>0\Rightarrow\frac{m^3}{3}-m^3+m(m+2)>0$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Leftrightarrow m\left(-2m^2+3m+6\right)>0$

$\Leftrightarrow m\in\left(-\infty;\frac{3-\sqrt{57}}{4}\right)\cup\left(0;\frac{3+\sqrt{57}}{4}\right)(***)$

Kết hợp $(*),(**),(***)$ ta được tập các giá trị của m thỏa mãn là $2<m<\frac{2+2\sqrt{7}}{3}$

Bình luận: đáp án của đề gốc bị sai chúng tôi đã thảo luận và sửa lại đáp án như trên.

Câu 6. (THPT Nghèn Lần1) Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+12mx+2019$ có 2 điểm cực trị x_1,x_2 thỏa mãn $x_1+x_2+2x_1x_2=-8$.

A. $m=-1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-2$.

Lời giải

Chọn A

$y'=3x^2-6(m+1)x+12m$; $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6(m+1)x+12m=0\Leftrightarrow x^2-2(m+1)x+4m=0$ (1).

Để hàm số có 2 cực trị x_1,x_2 $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow\Delta'>0\Leftrightarrow(m-1)^2>0\Leftrightarrow m\neq 1$.

Với điều kiện $m\neq 1$ ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2(m+1)\\x_1x_2=4m\end{cases}$.

Do đó $x_1+x_2+2x_1x_2=-8\Leftrightarrow 2m+2+8m=-8\Leftrightarrow m=-1$.

Vậy $m=-1$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Câu 7. (Chuyên Thái Bình Lần 3) Gọi x_1,x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2-4x-10$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=\left(x_1^2-1\right)\left(x_2^2-1\right)$.

A. 9. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2-4x-10\Rightarrow y'=x^2-mx-4$.

$y'=0\Leftrightarrow x^2-mx-4=0$.

$\Delta=m^2+16>0,\forall m$ nên phương trình $y'=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2.

Áp dụng định lí viet: $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{-b}{a}=m\\x_1.x_2=\frac{c}{a}=-4\end{cases}$.

$S=(x_1^2-1)(x_2^2-1)=(x_1x_2)^2-[(x_1+x_2)^2-2x_1.x_2]+1=16-(m^2+8)+1=9-m^2\le 9$.

Câu 8. Biết rằng hàm số $y=\frac{2}{3}x^3+(m+1)x^2+(m^2+4m+3)x+\frac{1}{2}$ đạt cực trị tại x_1,x_2. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x_1x_2-2(x_1+x_2)$

A. $\min P=-9$. **B.** $\min P=-1$. **C.** $\min P=-\frac{1}{2}$. **D.** $\min P=-\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=2x^2+2(m+1)x+m^2+4m+3$

Vì hàm số đã cho đạt cực trị tại x_1,x_2 theo Viet ta có

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\begin{cases} x_1.x_2 = \dfrac{m^2+4m+3}{2} \\ x_1+x_2 = -(m+1) \end{cases}$ thay vào biểu thức $P = x_1x_2 - 2(x_1+x_2)$ ta được

$P = \dfrac{m^2+4m+3}{2} + 2(m+1) = \dfrac{m^2+8m+7}{2} = \dfrac{(m+4)^2-9}{2}$

Vậy để $p_{\min} \Leftrightarrow (m+4)^2 = 0$ hay $P_{\min} = -\dfrac{9}{2}$.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + mx - 1$ đạt cực trị tại hai điểm $x_1; x_2$ sao cho: $|x_1 - x_2| \ge 8$.

A. $\left[\begin{array}{l} m \ge \dfrac{1+\sqrt{64}}{2} \\ m \le \dfrac{1-\sqrt{64}}{2} \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m \ge \dfrac{1+\sqrt{63}}{2} \\ m \le \dfrac{1-\sqrt{63}}{2} \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m \ge \dfrac{1+\sqrt{61}}{2} \\ m \le \dfrac{1-\sqrt{61}}{2} \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m \ge \dfrac{1+\sqrt{65}}{2} \\ m \le \dfrac{1-\sqrt{65}}{2} \end{array}\right.$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$y' = x^2 - 2mx + m$

Hàm số có cực đại và cực tiểu thì $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ khi và chỉ khi:

$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - m > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < 0 \end{array}\right., \quad (2)$

Ta có: $|x_1 - x_2| \ge 8 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \ge 64 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \ge 64, (1)$

Theo Đl vi-et Ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1.x_2 = m \end{cases}$.

Thay vào (1) ta được:

$(2m^2) - 4m \ge 64 \Leftrightarrow 4m^2 - 4m - 64 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge \dfrac{1+\sqrt{65}}{2} \\ m \le \dfrac{1-\sqrt{65}}{2} \end{array}\right., (3)$

Kết hợp (2) và (3) ta được: $\left[\begin{array}{l} m \ge \dfrac{1+\sqrt{65}}{2} \\ m \le \dfrac{1-\sqrt{65}}{2} \end{array}\right.$ thỏa mãn bài toán.

Chọn D

Câu 10. Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$. Xác định m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2;3)$.

A. $m \in (-1;3) \cup (3;4)$. **B.** $m \in (1;3)$. **C.** $m \in (3;4)$. **D.** $m \in (-1;4)$.

Lời giải

Ta có $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 - m \end{array}\right.$.

Để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2 - m \ne -1 \Leftrightarrow m \ne 3$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

● Nếu $-1<2-m\Leftrightarrow m<3$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -2<-1<2-m<3\Leftrightarrow \begin{cases} m>-1 \\ m<3 \end{cases}\Leftrightarrow -1<m<3$.

● Nếu $2-m<-1\Leftrightarrow m>3$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -2<2-m<-1<3\Leftrightarrow \begin{cases} m>3 \\ m<4 \end{cases}\Leftrightarrow 3<m<4$.

Vậy $m\in(-1;3)\cup(3;4)$.

Chọn A

Câu 11. Tập hợp tất cả các giá trị tham số m sao cho hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x-18$ có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-5;5)$ là

A. $(-\infty;-3)\cup(7;+\infty)$ **B.** $(-3;+\infty)\setminus\{3\}$ **C.** $(-\infty;7)\setminus\{3\}$ **D.** $(-3;7)\setminus\{3\}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=6x^2+6(m-1)x+6(m-2),\forall x\in\mathbb{R}$

Phương trình $y'=0\Leftrightarrow x^2+(m-1)x+m-2=0\Leftrightarrow x^2-x-2+m(x+1)=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)+m(x+1)=0\Leftrightarrow (x+1)(x-2+m)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2-m \end{array}\right.$

Để hàm số có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-5;5)\Leftrightarrow \begin{cases} 2-m\neq -1 \\ -5<2-m<5 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 3 \\ 7>m>-3 \end{cases}$

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-\frac{3m}{2}x^2+m$ nằm khác phía với đường thẳng $y=x$.

A. $m>0$. **B.** $m<0$. **C.** $m\neq 0$. **D.** $0<m\neq 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=3x^2-3mx;\ y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=m \end{array}\right.$.

Điều kiện để có hai cực trị là $m\neq 0$, khi đó hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0;m)$, $B\left(m;m-\frac{1}{2}m^3\right)$. Hai điểm $A(0;m)$, $B\left(m;m-\frac{1}{2}m^3\right)$ nằm khác phía với đường thẳng $x-y=0$

$(0-m)\left(m-m+\frac{1}{2}m^3\right)<0\Leftrightarrow \frac{1}{2}m^4>0\Leftrightarrow m\neq 0$.

Câu 13. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-1)x$ có hai điểm cực trị A,B sao cho A,B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $y=5x-9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 0. **B.** 6. **C.** –6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta thấy với mọi m hàm số luôn có hai cực trị.

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $y=-\frac{2x}{3}+\frac{m(m^2-1)}{3}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vì A,B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $y=5x-9$ nên trung điểm AB thuộc đường thẳng $y=5x-9$. Do đó :

$$5\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-9=-\frac{2}{3}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\frac{m\left(m^2-1\right)}{3}\Leftrightarrow 5\left(\frac{2m}{2}\right)-9=-\frac{2}{3}\left(\frac{2m}{2}\right)+\frac{m\left(m^2-1\right)}{3}$$

$$\Leftrightarrow m^3-18m+27=0$$

Vậy tổng tất cả các phần tử của S bằng 0.

Câu 14. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^3$ có hai điểm cực trị A,B nằm cùng một phía và cách đều đường thẳng $x+2y-1=0$. Tính tổng các phần tử S.

A. 0. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=3x^2-6mx; y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2m\end{array}\right.\Rightarrow A\left(0;4m^3\right),B\left(2m;0\right),\left(m\neq 0\right)$

Khi đó hệ số góc của đường thẳng $AB: k_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-4m^3}{2m}=-2m^2$. Hệ số góc của $x+2y-1=0$ là $k_d=-\frac{1}{2}$. Theo giả thiết $k_{AB}=k_d\Leftrightarrow -2m^2=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow m=\pm\frac{1}{2}$.

Thử lại $m=\frac{1}{2}\Rightarrow AB: y=-\frac{1}{2}(x-1)\equiv d$ (loại) ; $m=-\frac{1}{2}\Rightarrow AB: y=-\frac{1}{2}(x+1)//d$.

Vậy $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$, tổng các phần tử S bằng $-\frac{1}{2}$.

Theo giả thiết, ta có: $S_{OAB}=2\left|m^2-1\right|=6\Leftrightarrow m=\pm 2$.

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=x^3-3mx^2+3m^3$ có hai điểm cực trị tạo thành 1 tam giác OAB có diện tích bằng 48

A. $m=2$. **B.** $m=\pm 2$ **C.** $m=-2$ **D.** $m=\pm 3$

Lời giải

Ta có:

$$y'=3x^2-6mx=3x\left(x-2m\right), y'=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=0\\x=2m\end{array}\right.$$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $2m\neq 0\Leftrightarrow m\neq 0.(1)$

Khi đó, các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A\left(0;3m^3\right);B\left(2m;-m^3\right)$

Ta có:

$\overrightarrow{OA}\left(0;3m^3\right)\Rightarrow OA=3\left|m^3\right|.\qquad(2)$

Ta thấy $A\in Oy\Leftrightarrow OA\equiv Oy\Rightarrow d\left(B,OA\right)=d\left(B,Oy\right)=2\left|m\right|.\quad(3)$

Từ (2) và (3) suy ra $S_{OAB}=\frac{1}{2}.OA.d\left(B,OA\right)=3m^4$

Do đó: $S_{OAB}=48\Leftrightarrow 3m^4\Leftrightarrow 48\Leftrightarrow m=\pm 2$ thỏa mãn (1)

Vậy $m=\pm 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn B

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-2mx^2+m^3$ có hai cực trị A và B sao cho góc $\widehat{AOB}=120^o$?

A. $m=\pm 2\sqrt[4]{\frac{27}{25}}$. **B.** $m=\pm 6\sqrt{\frac{3}{5}}$. **C.** $m=\pm 2\sqrt{\frac{3}{5}}$. **D.** $m=\pm\frac{12}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=3x^2-4mx, y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\frac{4m}{3}\end{array}\right.$.

Điều kiện để hàm số có hai cực trị là $m\neq 0$, khi đó tọa độ hai điểm cực trị là $A\left(0;m^3\right), B\left(\frac{4m}{3};-\frac{5m^3}{27}\right)$ và

$$\cos\widehat{AOB}=\frac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}}{OA.OA}=\frac{-\frac{5m^6}{27}}{\left|m^3\right|\sqrt{\left(\frac{4m}{3}\right)^2+\left(-\frac{5m^3}{27}\right)^2}}=-\frac{5m^2}{\sqrt{25m^4+1296}}$$

Có $\widehat{AOB}=120^o\Leftrightarrow -\frac{5m^2}{\sqrt{25m^4+1296}}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow m=\pm 2\sqrt[4]{\frac{27}{25}}$.

Câu 17. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=mx^3-3x$ có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC đều với $C(2;1)$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 0. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=3mx^2-3$; $y'=0\Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{m}}(m>0)$, khi đó $A\left(-\frac{1}{\sqrt{m}};\frac{2}{\sqrt{m}}\right)$, $B\left(\frac{1}{\sqrt{m}};-\frac{2}{\sqrt{m}}\right)$.

Khi đó gốc tọa độ là trung điểm AB, nên tam giác ABC đều trước tiên cần có $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{AB}=0$.

Ta có $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{AB}=2.\frac{2}{\sqrt{m}}+1.\frac{-4}{\sqrt{m}}=0$ (luôn đúng).

Mặt khác $OC=\frac{\sqrt{3}}{2}AB\Leftrightarrow\sqrt{5}=\frac{\sqrt{3}}{2}.\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{m}}\right)^2+\left(\frac{4}{\sqrt{m}}\right)^2}\Leftrightarrow m=3$.

Vậy, tổng tất cả giá trị các phần tử của S bằng 3.

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+m^3$ có hai điểm cực trị cùng với điểm $C\left(1;\frac{7}{8}\right)$ tạo thành một tam giác cân tại C.

A. $m=1$. **B.** $m=\frac{1}{2}$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=3x^2-6mx$.

$y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6mx=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2m\end{array}\right.$.

Hàm số có hai điểm cực trị khi $m\neq 0$, khi đó giả sử tọa độ hai điểm cực trị là

$$A\left(0;m^3\right),\ B\left(2m;-3m^3\right).$$

Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là $I\left(m;-m^3\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{AI}=\left(m;-2m^3\right),\ \overrightarrow{CI}=\left(m-1;-m^3-\frac{7}{8}\right)$.

Tam giác ABC cân tại $C \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CI}=0 \Leftrightarrow m-1+2m^5+\frac{7}{4}m^2=0$.

$$\Leftrightarrow (2m-1)\left(x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2+x+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\frac{1}{2} \\ x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2+x+1=0\ (2) \end{array}\right.$$

$(2) \Leftrightarrow x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{15}{16}x^2+\frac{1}{16}x^2+x+1=0$.

$$\Leftrightarrow x^2\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{15}{16}x^2+2.\frac{\sqrt{15}}{4}x.\frac{2}{\sqrt{15}}+\frac{4}{15}+\frac{11}{15}\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{4}x+\frac{2}{\sqrt{15}}\right)^2+\frac{11}{15}=0\ (\text{VN}).$$

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=x^3-mx^2+\frac{4}{27}m^3$ có hai điểm cực trị A,B cùng với gốc tọa độ tạo thành một tam giác có tâm đường tròn ngoại tiếp $I(1;2)$.

A. $0<m<12$. **B.** $m=6$. **C.** $m=3$. **D.** $m=12$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=3x^2-2mx;\ y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{2m}{3} \end{array}\right.$

Điều kiện để có hai cực trị là $m\neq 0$. Khi đó tọa độ hai điểm cực trị là $A\left(0;\frac{4}{27}m^3\right), B\left(\frac{2m}{3};0\right)$

Thấy tam giác OAB là tam giác vuông tại O, do đó tâm đường tròn ngoại tiếp I là trung điểm cạnh AB.

Vì vậy ta có $\left\{\begin{array}{l} \frac{m}{3}=1 \\ \frac{2m^3}{27}=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow m=3$.

Câu 20. Cho hàm số $y=(x-m)^3-3x+m^2\ (1)$. Gọi M là điểm cực đại của đồ thị hàm số (1) ứng với một giá trị m thích hợp đồng thời là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số (1) ứng với một giá trị khác của m. Số điểm M thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 0

Lời giải

Ta có $y'=3(x-m)^2-3,\ y''=6(x-m)$

Suy ra $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m-1 \\ x=m+1 \end{array}\right.$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vì $x = x_1 = m-1, y''(m-1) < 0$ nên hàm số đạt cực đại $x = x_1 = m-1$ tại và giá trị cực đại là $y_1 = m^2 - 3m + 2$.

Tương tự, ta có hàm số đạt cực tiểu tại $x = x_2 = m+1$ và giá trị cực tiểu là $y_2 = m^2 - 3m - 2$.

Ta giả sử điểm M là điểm cực đạ của đồ thị hàm số ứng với giá trị m_1 và là điểm cực tiểu ứng của đồ thị hàm số ứng với với giá trị m_2.

Từ YCBT suy ra hệ phương trình $\begin{cases} m_1 - 1 = m_2 + 1 \\ m_1^2 - 3m_1 + 2 = m_2^2 - 3m_2 - 2 \end{cases}$

Giải hệ ta tìm được nghiệm $m_1 = \frac{3}{2}, m_2 = -\frac{1}{2}$ và suy ra tồn tại duy nhất một điêm $M\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ thỏa bài toán.

Chọn A

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 + 3m - 3$ có hai điểm cực trị A, B sao cho $2AB^2 - (OA^2 + OB^2) = 20$ (Trong đó O là gốc tọa độ).

A. $m = -1$. **B.** $m = 1$.

C. $m = -1$ hoặc $m = -\frac{17}{11}$. **D.** $m = 1$ hoặc $m = -\frac{17}{11}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = m(3x^2 - 6x)$

Với mọi $m \neq 0$, ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 3m - 3 \\ x = 2 \Rightarrow y = -m - 3 \end{array}\right.$. Vậy hàm số luôn có hai điểm cực trị.

Giả sử $A(0; 3m-3); B(2; -m-3)$.

Ta có: $2AB^2 - (OA^2 + OB^2) = 20 \Leftrightarrow 11m^2 + 6m - 17 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\frac{17}{11} \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy giá trị m cần tìm là: $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\frac{17}{11} \end{array}\right.$.

Câu 22. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với đường tròn (C_m): $x^2 + y^2 - 2mx - 4my + 5m^2 - 1 = 0$.

A. $1 < m < \frac{5}{3}$. **B.** $-1 < m < \frac{5}{3}$. **C.** $\frac{3}{5} < m < 1$. **D.** $-\frac{3}{5} < m < 1$.

Lời giải

Chọn C

Dễ có $A(0;2)$, $B(2;-2)$ và (C_m) có tâm $I(m; 2m)$, $R = 1$.

Cách 1: Thay tọa độ vào phương trình (C_m) lấy tích âm.

$(4 - 8m + 5m^2 - 1)(8 - 4m + 8m + 5m^2 - 1) < 0 \Leftrightarrow 5m^2 - 8m + 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{5} < m < 1$.

Cách 2: Ta có $IB = \sqrt{5m^2 + 4m + 7} > R = 1$. Vậy để thỏa yêu cầu bài toán thì $IA < R \Leftrightarrow \sqrt{5m^2 - 8m + 4} < 1 \Leftrightarrow \frac{3}{5} < m < 1$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 23. Cho (C_m) là đồ thị hàm số $y=x^3+3mx+1$ (với $m<0$ là tham số thực). Gọi d là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C_m). Đường thẳng d cắt đường tròn tâm $I(-1;0)$ bán kính $R=3$ tại hai điểm phân biệt A,B. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất. Hỏi S có tất cả bao nhiêu phần tử.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=3x^2+3m$

Để hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow m<0$.

Ta có $d: y=2mx+1$.

Do đó $x=d(I,d)=\dfrac{|-2m+1|}{\sqrt{4m^2+1}}\le\dfrac{\sqrt{\left(1^2+1^2\right)\left((-2m)^2+1^2\right)}}{\sqrt{4m^2+1}}=\sqrt{2}, AB=2\sqrt{R^2-x^2}=2\sqrt{9-x^2}$.

Vậy $S_{IAB}=\dfrac{1}{2}AB.x=x\sqrt{9-x^2}\le\max\limits_{(0;\sqrt{2}]}x\sqrt{9-x^2}=y\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{14}$.

Dấu bằng đạt tại $\dfrac{-2m}{1}=\dfrac{1}{1}\Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{2}$.

Chọn A

Câu 24. Với $m\in[-1;1]$, đồ thị của hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^3+m$ có hai điểm cực trị A, B và tam giác OAB có bán kính đường tròn nội tiếp có giá trị lớn nhất là M_0, đạt tại $m=m_0$. Tính $P=M_0+m_0$.

A. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=3x^2-6mx+3\left(m^2-1\right)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m-1\\x=m+1\end{array}\right.$. Suy ra $\left[\begin{array}{l}A\left(m-1;-2(m-1)\right)\\B\left(m+1;-2(m+1)\right)\end{array}\right.$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

Do đó theo yêu cầu bài toán, ta có: $r_{OAB}=\dfrac{S}{p}=\dfrac{4\left|m^2-1\right|}{\sqrt{5(m-1)^2}+\sqrt{5(m+1)^2}+2\sqrt{5}}\le\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\forall m\in[-1;1]$.(AM-MG)

Dấu bằng xảy ra tại $m=m_0=0$, $M_0=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow P=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=2x^3-3(m+1)x^2+6mx$ có hai điểm cực trị A,B sao cho đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng: $y=x+2$.

A. $\left[\begin{array}{l}m=-3\\m=2\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=-2\\m=3\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m=0\\m=2\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-3\end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn C

[Phương pháp tự luận]

Ta có: $y=6x^2-6(m+1)x+6m$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=m\end{array}\right.$

Điều kiện để hàm số có 2 điểm cực trị là: $m\neq 1$

Ta có: $A(1;3m-1)$ $B\left(m;-m^3+3m^2\right)$

Hệ số góc đt AB là: $k=-(m-1)^2$

Đt AB vuông góc với đường thẳng $y=x+2$ khi và chỉ khi $k=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=2\end{array}\right.$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Bước 1: Bấm Mode 2 (CMPLX)

Bước 2: $y-\dfrac{y'.y''}{18a}=2x^3-3(y+1)x^2+6yx-\dfrac{\left(6x^2-6(y+1)x+6y\right)\left(12x-6(y+1)\right)}{36}$

Bước 3: Cacl $x=i$, $y=1000$

Kết quả: $1001000-9980001.i$. Hay: $y=1001000-9980001.x$

Vậy phương trình đt qua 2 điểm cực trị AB là: $y=m^2-m-(m-1)^2x$

Có đt AB vuông góc với đường thẳng $y=x+2$ khi và chỉ khi $\Leftrightarrow(m-1)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=2\end{array}\right.$

Câu 26. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^3-3x^2-mx+2$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu cách đều đường thẳng có phương trình: $y=x-1\,(d)$.

A. $m=0$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-\dfrac{9}{2}\end{array}\right.$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-\dfrac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn A

[Phương pháp trắc nghiệm]

$y'=3x^2-6x-m$

Hàm số có 2 cực trị $m>-3$, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y'=0$, ta có: $x_1+x_2=2$

Bấm máy tính:

$x^3-3x^2-mx+2-\left(3x^2-6x-m\right)\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{3}\right)\xrightarrow{x=i,m=A=1000}$

$-\dfrac{994}{3}-\dfrac{2006}{3}i=-\dfrac{1000-6}{3}-\dfrac{2000+6}{3}i=-\dfrac{2m+6}{3}x-\dfrac{m-6}{3}$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A\left(x_1;-\dfrac{2m+6}{3}x_1-\dfrac{m-6}{3}\right)$; $B\left(x_2;-\dfrac{2m+6}{3}x_2-\dfrac{m-6}{3}\right)$

Gọi I là trung điểm của $AB\Rightarrow I(1;-m)$

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là: $y=-\dfrac{2m+6}{3}x-\dfrac{m-6}{3}\ (\Delta)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\Delta\,//\,d\ or\ \Delta\equiv d\\I\in d\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\dfrac{2m+6}{3}=1\\-m=1-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-\dfrac{9}{2}\\m=0\end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện thì $m=0$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 27. Cho hai hàm số $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+ax+1$ và $g(x)=\frac{x^3}{3}+x^2+3ax-a$; với a là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của a sao cho mỗi hàm số có hai cực trị đồng thời giữa hai hoành độ cực trị của hàm số này có một hoành độ cực trị của hàm số kia.

A. $-\frac{15}{4}<a<\frac{1}{5}$. **B.** $-4<a<15$. **C.** $-\frac{15}{4}<a<0$. **D.** $-4<a<0$.

Lời giải

Ta có $f'(x)=x^2-x+a$ và $g'(x)=x^2+2x+3a$.

Ta cần tìm a sao cho $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;\ x_2\ (x_1<x_2)$ và $g'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_3;\ x_4\ (x_3<x_4)$ thỏa mãn $\left[\begin{array}{l}x_3<x_1<x_4<x_2\\x_1<x_3<x_2<x_4\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta_f=1-4a>0\\\Delta_g'=1-3a>0\\f'(x_3).f'(x_4)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a<\frac{1}{4}\\(x_3^2-x_3+a)(x_4^2-x_4+a)<0\end{cases}.\ (*)$$

Lại có $(x_3^2-x_3+a)(x_4^2-x_4+a)=[g'(x_3)-(3x_3+2a)][g'(x_4)-(3x_4+2a)]$

$=(3x_3+2a)(3x_4+2a)=9x_3.x_4+6a(x_3+x_4)+4a^2.$

Theo định lý Viet, ta có $\begin{cases}x_3+x_4=-2\\x_3x_4=3a\end{cases}$.

Suy ra $(x_3^2-x_3+a)(x_4^2-x_4+a)=9.3a+6.(-2)a+4a^2=4a^2+15a.$

Do đó $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}a<\frac{1}{4}\\4a^2+15a<0\end{cases}\Leftrightarrow-\frac{15}{4}<a<0.$

Chọn C

Cách trắc nghiệm. Ta thấy đáp án A & B chứa giá trị $a=0$, đáp án C & D không chứa $a=0$.

Ta thử $a=0$, khi đó $f(x)$ có hai điểm cực trị $x=0,\ x=1$;

$g(x)$ có hai điểm cực trị $x=0,\ x=-2$.

Do đó $a=0$ không thỏa mãn nên loại A & B

Bây giờ ta chọn $a=-\frac{15}{4}$ thuộc đáp án D nhưng không thuộc đáp án C để thử.

Với $a=-\frac{15}{4}$ thì $f(x)$ có hai điểm cực trị $x=-\frac{3}{2},\ x=\frac{5}{2}$;

$g(x)$ có hai điểm cực trị $x=-\frac{9}{2},\ x=\frac{5}{2}$.

Do đó $a=-\frac{15}{4}$ không thỏa mãn nên loại D

Câu 28. Kí hiệu $d_{\min}$ là khoảng cách nhỏ nhất giữa hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+1$. Tìm $d_{\min}$.

A. $d_{\min}=\frac{2}{3}$. **B.** $d_{\min}=\frac{4\sqrt{13}}{3}$. **C.** $d_{\min}=\frac{4}{3}$. **D.** $d_{\min}=\frac{2\sqrt{13}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Điều kiện $b^2-3ac>0\Leftrightarrow m^2+1>0$. Khi đó độ dài đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $d=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{b^2-3ac}{a^2}}.\sqrt{1+\frac{4}{9}\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)^2}=\frac{2}{3}\sqrt{\left(m^2+1\right)\left(4\left(m^2+1\right)^2+9\right)}\ge\frac{2\sqrt{13}}{3}$.

Dấu bằng xảy ra khi $m=0$.

Câu 29. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-1\right)x-1$ có đồ thị $\left(C_m\right)$. Biết rằng tồn tại duy nhất điểm $A(a;b)$ sao cho A là điểm cực đại $\left(C_m\right)$ tương ứng với $m=m_1$ và A là điểm cực tiểu $\left(C_m\right)$ tương ứng với $m=m_2$. Tính $S=a+b$.

A. $S=1$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=-2$. **D.** $S=-3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$y'=x^2-2mx+m^2-1; y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m-1\\x=m+1\end{array}\right.\Rightarrow M\left(m-1;\frac{m^3-3m-1}{3}\right), N\left(m+1;\frac{m^3-3m-5}{3}\right)$ là các điểm cực trị của $\left(C_m\right)$.

Ta có $M\in\left(H_1\right): y=\frac{x^3+3x^2-3}{3}, N\in\left(H_2\right): y=\frac{x^3-3x^2-3}{3}$.

Khi đó $A(0;-1)=\left(H_1\right)\cap\left(H_2\right)\Rightarrow S=0-1=-1$.

Câu 30. (Thuận Thành 2 Bắc Ninh) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+m$ nhỏ hơn hoặc bằng $\sqrt{5}$.

A. 5. **B.** 2. **C.** 11. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=3x^2-3$

$y'=0\Leftrightarrow 3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(1;m-2)$, $B(-1;m+2)$

Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y=-2x+m$

hay $2x+y-m=0$

Theo giả thiết $d(O;AB)\le\sqrt{5}\Leftrightarrow\frac{|-m|}{\sqrt{5}}\le\sqrt{5}\Leftrightarrow|-m|\le 5\Leftrightarrow -5\le m\le 5$.

Mà m nguyên dương nên có 5 giá trị.

Câu 31. (Sở Quảng Ninh Lần1) Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3$ với m là tham số, gọi (C) là đồ thị của hàm số đã cho. Biết rằng, khi m thay đổi, điểm cực đại của đồ thị (C) luôn nằm trên một đường thẳng d cố định. Xác định hệ số góc k của đường thẳng d.

A. $k=-3$. **B.** $k=\frac{1}{3}$. **C.** $k=3$. **D.** $k=-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

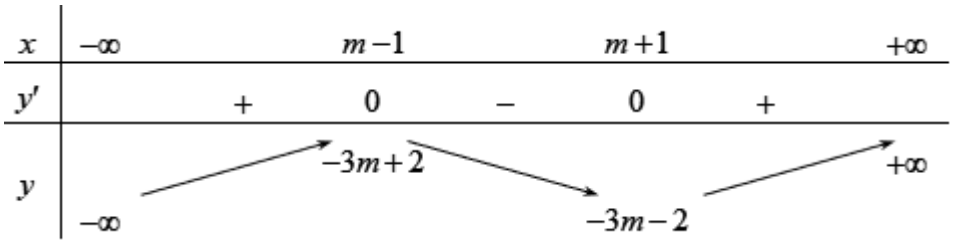
Ta có:

$y'=3x^2-6mx+3(m^2-1)=3(x^2-2mx+m^2-1)$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m-1 \\ x = m+1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy điểm cực đại của đồ thị (C) là điểm $M(m-1;-3m+2)$.

Nhận xét: $y_M = -3m+2 = -3(m-1)-1 = -3x_M - 1 \Rightarrow M \in (d): y = -3x-1, \forall m.$

Vậy: khi m thay đổi, điểm cực đại của đồ thị (C) luôn nằm trên một đường thẳng d cố định có phương trình: $y = -3x-1$.

Vậy đường thẳng d có hệ số góc $k = -3$.

Câu 32. (KÊNH TRUYỀN HÌNH GIÁO DỤC QUỐC GIA VTV7 –2019) Tìm tất các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^2$ có hai điểm cực trị là A, B mà $\triangle OAB$ có diện tích bằng 24 (O là gốc tọa độ).

A. $m = 2$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = \pm 2$. **D.** $m = \pm 1$.

Lời giải

Chọn C

Xét $y' = 3x^2 - 6mx = 3x(x-2m)$.

$y' = 0 \Rightarrow 3x(x-2m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $\Rightarrow m \neq 0$.

Tọa độ hai điểm cực trị là $A(0;3m^2), B(2m;3m^2-4m^3)$.

Phương trình đường thẳng OA: $x = 0$.

Ta có: $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OA.d(B;OA) = \frac{1}{2} 3m^2 . |2m| = 24 \Rightarrow m^2 |m| = 8 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Câu 33. (Đặng Thành Nam Đề 2) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + (m^2-2)x - m^2 + 3$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị đó nằm về cùng một phía đối với trục hoành?

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2$ có $\Delta' = -2m^2 + 2m + 7$.

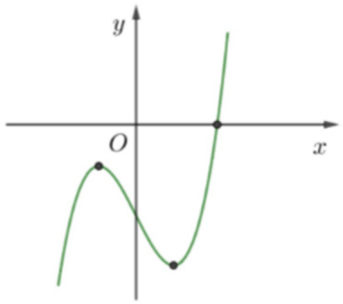
Để đồ thị hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + (m^2-2)x - m^2 + 3$ có hai điểm cực trị thì y' đổi dấu hai lần, tức là y' có hai nghiệm phân biệt, tương đương

$\Delta' > 0 \Leftrightarrow -2m^2 + 2m + 7 > 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{15}}{2} < m < \frac{1+\sqrt{15}}{2}$,

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên được $m \in \{-1; 0; 1; 2\}$.

Lúc này, hai nghiệm x_1, x_2 của y' lần lượt là hoành độ các điểm cực trị của hàm số.

Hai điểm cực trị đó nằm về cùng một phía đối với trục hoành khi và chỉ khi $f(x_1).f(x_2)>0$, tương đương đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại đúng một điểm (hình vẽ minh họa bên dưới), tức là, phương trình $x^3-(m+1)x^2+(m^2-2)x-m^2+3=0$ (*) có duy nhất một nghiệm thực.



Xét $m=-1$ thì phương trình (*) là $x^3-x+2=0$: phương trình này có đúng một nghiệm thực (dùng MTCT) nên chọn $m=-1$.

Xét $m=0$ thì phương trình (*) là $x^3-x^2-2x+3=0$: phương trình này có đúng một nghiệm thực (dùng MTCT) nên chọn $m=0$.

Xét $m=1$ thì phương trình (*) là $x^3-2x^2-x+2=0$: phương trình này có ba nghiệm thực phân biệt (dùng MTCT) nên không chọn $m=1$.

Xét $m=2$ thì phương trình (*) là $x^3-3x^2+2x-1=0$: phương trình này có đúng một nghiệm thực (dùng MTCT) nên chọn $m=2$.

Đáp số: $m\in\{-1;0;2\}$.

Câu 34. (THPT NINH BÌNH – BẠC LIÊU LẦN 4 NĂM 2019) Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=x^3-3x^2-mx+4$ có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-3;3)$?

A. 12. **B.** 11. **C.** 13. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=3x^2-6x-m$

Để hàm số $y=x^3-3x^2-mx+4$ có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-3;3)$ thì phương trình $y'=0$ hay $3x^2-6x-m=0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-3;3)$.

Cách 1:

Khi đó, đặt $f(x)=3x^2-6x-m$ thì

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ a.f(3)>0\\ a.f(-3)>0\\ -3<\dfrac{S}{2}<3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9+3m>0\\ 45-m>0\\ 9-m>0\\ -3<1<3\end{cases}\Leftrightarrow -3<m<9$$

Do đó có 11 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2:

Khi đó, đặt $f(x)=3x^2-6x-m$ thì

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ -3<x_1<x_2<3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9+3m>0\\ -3<\dfrac{3-\sqrt{9+3m}}{3}<\dfrac{3+\sqrt{9+3m}}{3}<3\end{cases}\Leftrightarrow -3<m<9$$

Do đó có 11 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 3:

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - m$

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 4$ có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-3;3)$ $\Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ hay $3x^2 - 6x = m$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-3;3)$.

Đặt $f(x) = 3x^2 - 6x,\ x \in (-3;3)$. Ta có:

$f'(x) = 6x - 6;\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	-3		1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	45	↘	-3	↗	9

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -3 < m < 9$.

Vậy có 11 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 35. (Chuyên Quốc Học Huế Lần1) Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + (m-1)x + 2m^2 + 1$ (m là tham số). Xác định khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ $O(0;0)$ đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số trên.

A. $\frac{2}{9}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = x^2 - 4mx + m - 1$. Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 4m^2 - m + 1 > 0 \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}$.

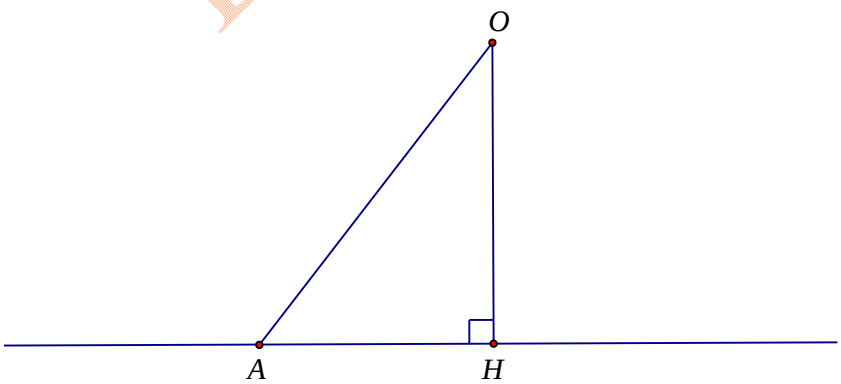
Mà $y(x) = y'(x).\left(\frac{1}{3}x - \frac{2m}{3}\right) - \left(\frac{8}{3}m^2 - \frac{2}{3}m + \frac{2}{3}\right)x + \frac{8}{3}m^2 - \frac{2}{3}m + 1$.

Suy ra đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là đường thẳng Δ:

$y = -\left(\frac{8}{3}m^2 - \frac{2}{3}m + \frac{2}{3}\right)x + \frac{8}{3}m^2 - \frac{2}{3}m + 1$.

Ta thấy đường thẳng Δ luôn qua điểm cố định $A\left(1;\frac{1}{3}\right)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên Δ. Khi đó ta có $d(O;\Delta) = OH \le OA$ (Hình vẽ)



Do đó khoảng cách lớn nhất khi $H \equiv A$ hay $\Delta \perp OA$.

Câu 36. (Sở Ninh Bình Lần1) Cho hàm số $y=x^3+2(m-2)x^2-5x+1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ thỏa mãn $|x_1|-|x_2|=-2$.

A. $\frac{7}{2}$. **B.** -1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Tính được: $y'=3x^2+4(m-2)x-5$.

Khi đó $\Delta'=4(m-2)^2+15>0$ nên hàm số luôn có hai điểm cực trị x_1, x_2 $(x_1<x_2)$.

Nhận xét $a.c<0$ nên $x_1<0<x_2$

Suy ra:

$$|x_1|-|x_2|=-2\Leftrightarrow -x_1-x_2=-2\Leftrightarrow \frac{b}{a}=-2\Leftrightarrow \frac{4(m-2)}{3}=-2\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}.$$

Câu 37. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên Lần2) Cho hàm số $y=-x^3+3mx^2-3m-1$ với m là tham số thực. Giá trị của m thuộc tập hợp nào để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x+8y-74=0$.

A. $m\in(-1;1]$. **B.** $m\in(-3;-1]$. **C.** $m\in(3;5]$. **D.** $m\in(1;3]$.

Lời giải

Chọn D

$y'=-3x^2+6mx$; $y'=0\Leftrightarrow x=0\vee x=2m$.

Hàm số có CĐ, CT khi và chỉ khi PT $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m\neq 0$.

Khi đó 2 điểm cực trị là: $A(0;-3m-1)$; $B(2m;4m^3-3m-1)\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(2m;4m^3)$.

Trung điểm I của AB có toạ độ: $I(m;2m^3-3m-1)$.

Đường thẳng d: $x+8y-74=0$ có một VTCP $\vec{u}=(8;-1)$.

và B đối xứng với nhau qua d $\Leftrightarrow\begin{cases}I\in d\\ AB\perp d\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m+8(2m^3-3m-1)-74=0\\ \overrightarrow{AB}.\vec{u}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}16m^3-23m-82=0\\ 16m-4m^3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}16m^3-23m-82=0\\ \left[\begin{array}{l}m=0\\ m=\pm 2\end{array}\right.\end{cases}$$

$\Leftrightarrow m=2$ (thỏa mãn điều kiện $m\neq 0$). Suy ra $m\in(1;3]$.

Câu 38. (Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019) Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+m$ có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn $OA=OB$ (O là gốc tọa độ)?

A. $m=\frac{3}{2}$. **B.** $m=3$. **C.** $m=\frac{1}{2}$. **D.** $m=\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-6x$, $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\end{array}\right.$.

Do đó đồ thị hàm số đã cho luôn có hai điểm cực trị lần lượt có tọa độ là $A(0;m)$ và $B(2;-4+m)$ Ta có

$$OA=OB\Leftrightarrow\sqrt{0^2+m^2}=\sqrt{2^2+(4-m)^2}\Leftrightarrow m^2=4+(4-m)^2\Leftrightarrow 20-8m=0\Leftrightarrow m=\frac{5}{2}.$$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 39. (Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019) Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+m$ có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn $OA=OB$ (O là gốc tọa độ)?

A. $m=\frac{3}{2}$. **B.** $m=3$. **C.** $m=\frac{1}{2}$. **D.** $m=\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-6x$, $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Do đó đồ thị hàm số đã cho luôn có hai điểm cực trị lần lượt có tọa độ là $A(0;m)$ và $B(2;-4+m)$ Ta có

$OA=OB\Leftrightarrow\sqrt{0^2+m^2}=\sqrt{2^2+(4-m)^2}\Leftrightarrow m^2=4+(4-m)^2\Leftrightarrow 20-8m=0\Leftrightarrow m=\frac{5}{2}$.

Câu 40. (THPT ISCHOOL NHA TRANG) Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=-(x-1)^3+3m^2(x-1)-2$ có hai điểm cực trị cách đều gốc tọa độ.

A. $m=\pm\frac{1}{3}$. **B.** $m=\pm\frac{1}{2}$. **C.** $m=-5$. **D.** $m=5$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=-3(x-1)^2+3m^2$.

$y'=0\Leftrightarrow -3(x-1)^2+3m^2=0\Leftrightarrow(x-1)^2=m^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=m\\x-1=-m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1+m\\x=1-m\end{array}\right.$.

Để hàm số có 2 cực trị thì $m\neq 0$.

Gọi A,B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có hoành độ lần lượt là $x_A=1+m;x_B=1-m$. Khi đó $A(1+m;2m^3-2)$; $B(1-m;-2m^3-2)$.

Hai điểm cực trị cách đều gốc tọa độ nên $OA=OB\Leftrightarrow OA^2=OB^2$

$\Leftrightarrow(1+m)^2+(2m^3-2)^2=(1-m)^2+(-2m^3-2)^2\Leftrightarrow 4m^3-m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0(ktm)\\m=\pm\frac{1}{2}(tm)\end{array}\right.$.

Vậy $m=\pm\frac{1}{2}$.

Câu 41. Với giá trị thực dương của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+3x+1$ có các điểm cực trị A và B sao cho tam giác ΔOAB có diện tích bằng $8\sqrt{2}$ thì mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $1<m<2$ **B.** $2<m<\frac{7}{2}$ **C.** $3<m<4$ **D.** $m<1$

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng qua hai điểm cực trị $y=(2-2m^2)x+m+1=px+q$

Điều kiện có hai điểm cực trị là $m^2>1$. Gọi hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(x_1;px_1+q)$ và

$B(x_2;px_2+q)\Rightarrow S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}.\left|x_1(px_2+q)-x_2(px_1+q)\right|\Rightarrow S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}.|q|.|x_1-x_2|$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Rightarrow S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}.|m+1|.\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2} \Rightarrow S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}.|m+1|.\sqrt{4m^2-4}$

$\Rightarrow S_{\Delta OAB}=|m+1|.\sqrt{m^2-1}=8\sqrt{2} \Rightarrow (m^2+2m+1)(m^2-1)=128$

$\Rightarrow (m-3)(m^3+5m^2+15m+43)=0 \Rightarrow m=3.$

Câu 42. Cho hàm số $y=\frac{x^3}{3}-ax^2-3ax+4$. Để hàm số đạt cực trị tại $x_1;x_2$ thỏa mãn $\frac{x_1^2+2ax_2+9a}{a^2}+\frac{x_2^2+2ax_1+9a}{a^2}=2$ thì a thuộc khoảng nào?

A. $a\in\left(-3;\frac{-5}{2}\right)$. **B.** $a\in\left(-5;\frac{-7}{2}\right)$. **C.** $a\in(-2;-1)$. **D.** $a\in\left(-\frac{7}{2};-3\right)$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=x^2-2ax-3a$. Để phương trình đã cho có hai điểm cực trị x_1,x_2 thì ta cần phương trình $y'=0\Leftrightarrow x^2-2ax-3a=0(1)$ có hai nghiệm phân biệt. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta'=a^2-(-3a)=a^2+3a>0\Leftrightarrow a(a+3)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a>0\\a<-3\end{array}\right.$

Khi đó áp dụng định lý Vi-et ta nhận được $x_1+x_2=2a(2)$. Chú ý x_1 là nghiệm của (1) và sử dụng (2) nên

$x_1^2-2ax_1-3a=0\Rightarrow x_1^2+2ax_2+9a=(x_1^2-2ax_1-3a)+2a(x_1+x_2)+12a=2a(x_1+x_2)+12a=4a^2+12a$

Tương tự ta có $x_2^2+2ax_1+9a=4a^2+12a$

Từ đó

$\frac{x_1^2+2ax_2+9a}{a^2}+\frac{a^2}{x_2^2+2ax_1+9a}=2\Leftrightarrow\frac{4a^2+12a}{a^2}+\frac{a^2}{4a^2+12a}=2\Leftrightarrow\frac{4a+12}{a}+\frac{a}{4a+12}=2$

$\Leftrightarrow(4a+12)^2+a^2-2a(4a+12)=0\Leftrightarrow[(4a+12)-a]^2=0\Leftrightarrow a=-4\in\left(-5;\frac{-7}{2}\right)$

Câu 43. (KIM LIÊN HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 03) Cho hàm số $y=x^3-6mx+4$ có đồ thị (C_m). Gọi m_0 là giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, điểm cực tiểu của (C_m) cắt đường tròn tâm $I(1;0)$, bán kính $\sqrt{2}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất. Chọn khẳng định đúng

A. $m_0\in(3;4)$. **B.** $m_0\in(1;2)$. **C.** $m_0\in(0;1)$. **D.** $m_0\in(2;3)$.

Lời giải.

Chọn C

Xét hàm số $y=x^3-6mx+4$ có tập xác định $\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-6m; y'=0\Leftrightarrow x^2=2m$.

Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow y'$ đổi dấu 2 lần

$\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>0$.

Ta có $y=\frac{1}{3}y'.x-4mx+4$.

Gọi $M(x_1;y_1),N(x_2;y_2)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta có $\begin{cases} y'(x_1)=y'(x_2)=0 \\ y_1=y(x_1)=\frac{1}{3}y'(x_1).x_1-4mx_1+4 \\ y_2=y(x_2)=\frac{1}{3}y'(x_2).x_2-4mx_2+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=-4mx_1+4 \\ y_2=-4mx_2+4 \end{cases}$.

Suy ra M,N thuộc đường thẳng d có phương trình $y=-4mx+4$.

Vậy phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của (C_m) là: $y=-4mx+4$.

Gọi (T) là đường tròn có tâm $I(1;0)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$.

Đường thẳng d cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt A,B và tạo thành tam giác IAB

$\Leftrightarrow 0<d(I,d)<R \Leftrightarrow 0<d(I,d)<\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ \frac{|-4m+4|}{\sqrt{16m^2+1}}<\sqrt{2} \end{cases}$ (*).

Cách 1:

Do đường thẳng d luôn đi qua điểm $K(0;4)$, $IK=\sqrt{17}>R \Rightarrow K$ nằm ngoài đường tròn nên tồn tại hai điểm A,B là giao điểm của d với đường tròn để tam giác IAB vuông tại I.

Do đó: $S_{IAB}=\frac{1}{2}IA.IB.\sin\widehat{AIB}\le\frac{1}{2}IA.IB$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow IA\perp IB \Leftrightarrow d(I,d)=\frac{R}{\sqrt{2}}=1$ (thỏa mãn (*)).

$\Leftrightarrow \frac{|-4m+4|}{\sqrt{16m^2+1}}=1 \Leftrightarrow m=\frac{15}{32}$.

Bình luận: Nếu đường thẳng d luôn đi qua điểm K cố định mà $IK<\frac{R}{\sqrt{2}}$ thì sẽ không có vị trí của đường thẳng d để tam giác IAB vuông tại I. Khi đó, nếu làm như trên sẽ bị sai. Trong trường hợp đó thì ta phải đặt $d(I,d)=t\ (0<t\le l)$, với l là độ dài đoạn thẳng IK, rồi tính $S_{\Delta IAB}=f(t)$ và tìm giá trị lớn nhất của $f(t)$ trên nửa khoảng $(0;l]$.

Cách 2: Phương trình đường tròn là: $(x-1)^2+y^2=2\ (C)$

Xét hệ $\begin{cases} (x-1)^2+y^2=2 \\ y=-4mx+4 \end{cases} \Rightarrow (16m^2+1)x^2-2(16m+1)x+15=0\ (1)$.

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A,B \Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt $a,b \Leftrightarrow (16m+1)^2-15(16m+1)>0$

.

Khi đó $A(a;-4ma+4), B(b;-4mb+4) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \overrightarrow{IA}=(a-1;-4ma+4) \\ \overrightarrow{IB}=(b-1;-4mb+4) \end{array}\right.$

$\Rightarrow \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=ab-(a+b)+16\left[m^2ab-m(a+b)+1\right]+1=0$

$\Leftrightarrow ab-(a+b)+16m^2ab-16m(a+b)+17=0 \Leftrightarrow (16m^2+1)ab-(16m+1)(a+b)+17=0$

$\Leftrightarrow 15-\frac{2(16m+1)^2}{16m^2+1}+17=0 \Leftrightarrow \frac{(16m+1)^2}{16m^2+1}=16 \Leftrightarrow m=\frac{15}{32}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 44. (Quỳnh Lưu Lần 1) Biết hai hàm số $f(x)=x^3+ax^2+2x-1$ và $g(x)=-x^3+bx^2-3x+1$ có chung ít nhất một điểm cực trị. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|a|+|b|$

A. $\sqrt{30}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $3+\sqrt{6}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=3x^2+2ax+2$. Hàm số $y=f(x)$ có cực trị khi: $a^2-6>0\Leftrightarrow a<-\sqrt{6}\vee a>\sqrt{6}\ (1)$.

$g'(x)=-3x^2+2bx-3$. Hàm số $y=g(x)$ có cực trị khi $b^2-9>0\Leftrightarrow b<-3\vee b>3\ (2)$.

Giả sử x_0 là điểm cực trị của cả hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$

$$\Rightarrow\begin{cases}3x_0^2+2ax_0+2=0\\-3x_0^2+2bx_0-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=\dfrac{1}{2x_0}\\b=\dfrac{3}{2}\left(x_0+\dfrac{1}{x_0}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{3}{2}x_0\\b=\dfrac{3}{2}\left(x_0+\dfrac{1}{x_0}\right)\end{cases}$$

$$P=|a|+|b|=\left|\frac{1}{x_0}+\frac{3}{2}x_0\right|+\left|\frac{3}{2}\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)\right|\ge\left|\frac{5}{2x_0}+3x_0\right|$$

$$\Rightarrow P^2=\frac{25}{4x_0^2}+9x_0^2+15\ge 2\sqrt{\frac{25}{4x_0^2}.9x_0^2}+15=30\Rightarrow P\ge\sqrt{30}$$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{x_0}+\dfrac{3}{2}x_0\right)\left(x_0+\dfrac{1}{x_0}\right)>0\\\dfrac{25}{4x_0^2}=9x_0^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{1}{x_0}+\dfrac{3}{2}x_0\right)\left(x_0+\dfrac{1}{x_0}\right)>0\\x_0=\pm\sqrt{\dfrac{5}{6}}\end{cases}\Rightarrow x_0=\pm\sqrt{\frac{5}{6}}.$$

Với hai giá trị x_0, ta tìm được hai cặp giá trị a,b thoả (1) và (2). Vậy $\min P=\sqrt{30}$.

Câu 45. (Sở Vĩnh Phúc) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R=1$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất?

A. $m=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$. **B.** $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$. **C.** $m=\dfrac{2\pm\sqrt{5}}{2}$. **D.** $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y=x^3-3mx+2\Rightarrow y'=3x^2-3m$

Hàm số $y=x^3-3mx+2$ có 2 điểm cực trị

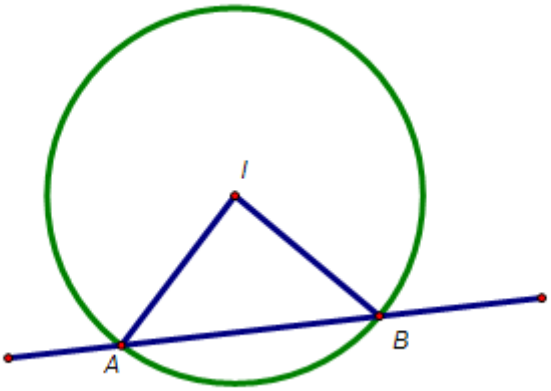
$\Leftrightarrow$ phương trình $y'=3x^2-3m=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>0\ (1)$

Ta có $y=\dfrac{1}{3}x.y'-2mx+2$.

Suy ra phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm cực đại và cực tiểu là

$y=-2mx+2\Leftrightarrow 2mx+y-2=0$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Đường thẳng Δ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R=1$ tại hai điểm phân biệt A,B

$\Leftrightarrow d(I;\Delta)<R \Leftrightarrow \dfrac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}}<1 \Leftrightarrow |2m-1|<\sqrt{4m^2+1} \Leftrightarrow -4m<0$ luôn đúng do $m>0$

Ta có $S_{IAB}=\dfrac{1}{2}.IA.\text{IB}.\sin\widehat{AIB}=\dfrac{1}{2}.\sin\widehat{AIB}\le\dfrac{1}{2}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \sin\widehat{AIB}=1\Leftrightarrow\widehat{AIB}=90°$.

Khi đó tam giác IAB vuông cân tại I có $IA=1$ nên

$d(I;\Delta)=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow 4m^2-8m+1=0\Leftrightarrow m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$ thỏa mãn đk (1)

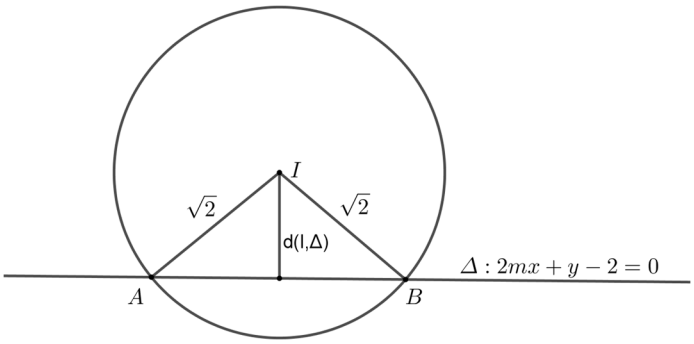
Vậy diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất khi $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$.

Câu 46. (Phan Đình Tùng Hà Tĩnh) Tìm các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ cắt đường tròn $(C):(x-1)^2+y^2=2$ có tâm I tại hai điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất.

A. $m=\dfrac{3}{8}$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \\ m=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$. **C.** $m=\dfrac{8}{3}$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{3}{2} \\ m=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $y'=3x^2-3m=3\left(x^2-m\right)$, $y'=0\Rightarrow x^2=m$.

Suy ra hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $m>0$.

Ta có $y = y'.\left(\frac{1}{3}x\right) - 2mx + 2$ nên đường thẳng đi qua hai điểm cựa trị của đồ thị hàm số là $\Delta : y = -2mx + 2$ hay $\Delta : 2mx + y - 2 = 0.$

Đường tròn (C) có tâm $I(1;0)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

Đường thẳng d cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B khi

$$\mathrm{d}(I,\Delta) = \frac{|2m-2|}{\sqrt{4m^2+1}} < \sqrt{2} \Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 4 < 8m^2 + 2 \Leftrightarrow 4m^2 + 8m - 2 > 0.$$

Khi đó, diện tích tam giác IAB là $S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IA.IB.\sin\widehat{AIB}$.

Mà $\frac{1}{2} IA.IB.\sin\widehat{AIB} \le \frac{1}{2} IA.IB = \frac{1}{2} R^2 = 1.$

Như thế diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất khi $\sin\widehat{AIB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{AIB} = 90^\circ$.

Từ đó $\mathrm{d}(I,\Delta) = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2}.R\sqrt{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{|2m-2|}{\sqrt{4m^2+1}} = 1 \Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 4 = 4m^2 + 1 \Leftrightarrow m = \frac{3}{8}.$

Vậy giá trị m cần tìm là $m = \frac{3}{8}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

DẠNG 4: CỰC TRỊ VỚI HÀM BẬC BỐN TRÙNG PHƯƠNG CHỨA THAM SỐ

Câu 1. (THPT-Gia-Lộc-Hải-Dương-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3) Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + 3m - 2$ có ba điểm cực trị.

A. $m \in (2;+\infty)$. **B.** $m \in (-2;2)$. **C.** $m \in (-\infty;2)$. **D.** $m \in (0;2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + 3m - 2$

$y' = 4x^3 + 4(m-2)x = 4x\left(x^2 + m - 2\right)$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2 - m \quad (1) \end{array}\right.$

y có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác $0 \Leftrightarrow 2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 2$.

Câu 2. Cho hàm số $y = (m+1)x^4 - (m-1)x^2 + 1$. Số các giá trị nguyên của m để hàm số có một điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu là:

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 4(m+1)x^3 - 2(m-1)x = 2x\left[(m+1)x^2 - (m-1)\right]$

Để hàm số có một điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu thì $\left\{\begin{array}{l} m+1 < 0 \\ \dfrac{m-1}{m+1} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \in \varnothing$

Câu 3. (Hoàng Hoa Thám Hưng Yên) Tìm tất cả tham số thực m để hàm số $y = (m-1)x^4 - (m^2-2)x^2 + 2019$ đạt cực tiểu tại $x = -1$

A. $m = 0$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 2$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4(m-1)x^3 - 2(m^2-2)x$

** Điều kiện cần:*

Điều kiện cần để hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ là $f'(-1) = 0 \Leftrightarrow -4(m-1) + 2(m^2-2) = 0$

$\Leftrightarrow 2m^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2 \end{array}\right.$.

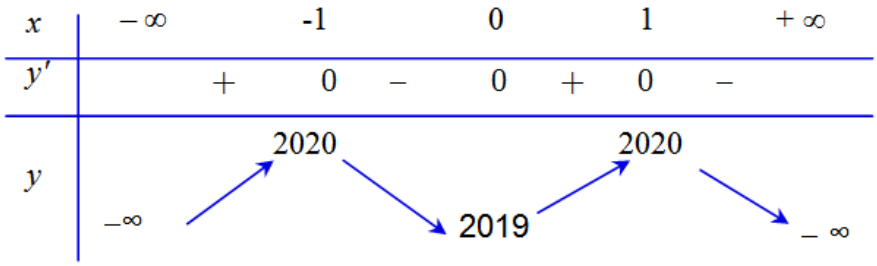
** Điều kiện đủ:*

Trường hợp 1: $m = 0$ hàm số trở thành $y = -x^4 + 2x^2 + 2019$

Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

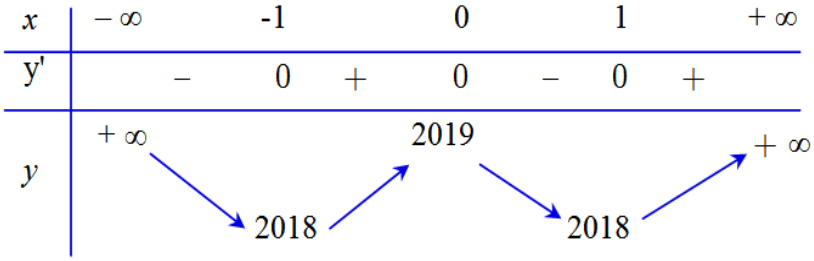


Từ bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ nên loại $m=0$.

Trường hợp 2: $m=2$ hàm số trở thành $y=x^4-2x^2+2019$.

Ta có: $y'=0\Leftrightarrow 4x^3-4x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\\ x=0\\ x=1\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$. Chọn $m=2$.

Vậy với $m=2$ thì hàm số $y=(m-1)x^4-(m^2-2)x^2+2019$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

Cách 2: Kiểm tra điều kiện đủ

- Với $m=0$, hàm số trở thành $y=-x^4+2x^2+2019$.

$y'=-4x^3+4x$, $y''=-12x^2+4$.

Ta có: $\begin{cases} y'(-1)=0\\ y''(-1)=-8<0\end{cases}$, suy ra hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ nên loại $m=0$.

- Với $m=2$, hàm số trở thành $y=x^4-2x^2+2019$.

$y'=4x^3-4x$, $y''=12x^2-4$.

Ta có: $\begin{cases} y'(-1)=0\\ y''(-1)=8>0\end{cases}$, suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ nên chọn $m=2$.

Kết luận: $m=2$.

Câu 4. (THPT LƯƠNG THẾ VINH 2019LẦN 3) Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+3m-2$ (với m là tham số). Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị đều nằm trên các trục tọa độ?

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=x^4-2mx^2+3m-2\Rightarrow y'=4x^3-4mx$.

Khi $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=\pm\sqrt{m}\end{array}\right.$.

Với $m>0$ thì đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị và các điểm cực trị là $A(0;3m-2)$, $B\left(\sqrt{m};-m^2+3m-2\right)$ và $C\left(-\sqrt{m};-m^2+3m-2\right)$.

Điểm A đã nằm trên trục tung, vậy để các điểm cực trị đều nằm trên các trục tọa độ thì hai điểm B và C phải nằm trên trục hoành, suy ra $-m^2+3m-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=1\end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5. (Lương Thế Vinh Lần 3) Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+3m-2$ (với m là tham số). Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị đều nằm trên các trục tọa độ?

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=x^4-2mx^2+3m-2\Rightarrow y'=4x^3-4mx$.

Khi $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{m}\end{array}\right.$.

Với $m>0$ thì đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị và các điểm cực trị là $A(0;3m-2)$, $B\left(\sqrt{m};-m^2+3m-2\right)$ và $C\left(-\sqrt{m};-m^2+3m-2\right)$.

Điểm A đã nằm trên trục tung, vậy để các điểm cực trị đều nằm trên các trục tọa độ thì hai điểm B và C phải nằm trên trục hoành, suy ra $-m^2+3m-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=1\end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6. (CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 3) Biết $m=m_0$; $m_0\in\mathbb{R}$ là giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4+2mx^2+1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m_0\in(0;3)$. **B.** $m_0\in[-5;-3)$. **C.** $m_0\in(-3;0]$. **D.** $m_0\in(3;7)$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1.

Ta có $y'=4x^3+4mx$.

Xét phương trình $y'=0\Leftrightarrow 4x^3+4mx=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=-m\end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi $m<0$. Khi đó 3 điểm cực trị là $A(0;1)$, $B\left(\sqrt{-m};1-m^2\right)$, $C\left(-\sqrt{-m};1-m^2\right)$.

Ta thấy ΔABC cân tại A. Nên ΔABC vuông khi và chỉ khi ΔABC vuông cân tại A.

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow m+m^4=0\Leftrightarrow m\left(1+m^3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-1\end{array}\right.$. Kết hợp $m<0$ ta có $m=-1$.

Cách 2. (Dùng công thức tính nhanh).

Gọi A,B,C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

ΔABC vuông cân $\Rightarrow b^3=-8a\Rightarrow(2m)^3=-8\Rightarrow m^3=-1\Rightarrow m=-1$.

Câu 7. Biết rằng đồ thị hàm số: $y=x^4-2mx^2+2$ có 3 điểm cực trị là 3 đỉnh của một tam giác vuông cân. Tính giá trị của biểu thức: $P=m^2+2m+1$.

A. $P=1$ **B.** $P=4$ **C.** $P=0$ **D.** $P=2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=4x^3-4mx$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\sqrt{m}\\x=-\sqrt{m}\end{array}\right. \text{ với } m>0$$

Các điểm cực trị là $A(0;2)$; $B(\sqrt{m};2-m^2)$; C(- $\sqrt{m}$; 2 - m^2)

Tam giác ABC luôn cân tại A, tam giác ABC vuông khi và chỉ khi $BC^2=2AB^2$

$$\Rightarrow 2(m+m^4)=4m\Leftrightarrow m^4=m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=1\end{array}\right.$$

Vì $m>0\Rightarrow m=1$

Vậy $P=4$

Câu 8. (Lê Xoay lần1) Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m^4+2m.$ Tìm tất cả các giá trị của m để các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành một tam giác đều.

A. $m=2\sqrt{2}.$ **B.** $m=1.$ **C.** $m=\sqrt[3]{3}.$ **D.** $m=\sqrt[3]{4}.$

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m.\end{array}\right.$

Hàm số trùng phương có 3 cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>0$ (1).

Gọi ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A,\ B,\ C$ với A là điểm thuộc trục tung.

Khi đó, $A(0;m^4+2m)$, $B(\sqrt{m};m^4-m^2+2m)$, $C(-\sqrt{m};m^4-m^2+2m)$.

Vì đồ thị hàm số trùng phương nhận trục tung làm trục đối xứng. Ở bài này, hai điểm cực tiểu đối xứng nhau qua trục tung và điểm cực đại nằm trên trục tung nên ΔABC cân tại A. Do đó, các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành một tam giác đều $\Leftrightarrow \Delta ABC$ có $AB=BC$

$$\Leftrightarrow\sqrt{m+m^4}=\sqrt{4m}\Leftrightarrow m+m^4=4m\Leftrightarrow m^4-3m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=\sqrt[3]{3}\end{array}\right..$$

Từ điều kiện (1) kết luận $m=\sqrt[3]{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9. (Trần Đại Nghĩa) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-4(m-1)x^2+2m-1$ có 3 điểm cực trị thao thành 3 đỉnh của một tam giác đều.

A. $m=1+\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}.$ **B.** $m=1-\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}.$ **C.** $m=1$ **D.** $m=0.$

Lời giải

Chọn A

Ta có

$y'=4x^3-8(\mathrm{m}-1)\mathrm{x}.\quad\forall \mathrm{x}\in R.$

$$y'=0\Leftrightarrow 4x^3-8(\mathrm{m}-1)\mathrm{x}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=2(\mathrm{m}-1)\ (*)\end{array}\right..$$

Để hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 vậy $m>1$.

Khi đó, gọi A $(0;2m-1)$. B $(\sqrt{2}\sqrt{m-1};-4m^2+10m-5)$ và C $(-\sqrt{2}\sqrt{m-1};-4m^2+10m-5)$ là tọa độ 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Tam giác ABC cân tại A vậy đề tam giác ABC đều khi và chỉ khi $AB^2=BC^2$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{2}\sqrt{m-1})^2+(-4m^2+8\mathrm{m}-4)^2=(-2\sqrt{2}\sqrt{m-1})^2+0^2$$

$\Leftrightarrow 2(m-1)+(-4(m-1)^2)^2=8(m-1)$

$\Leftrightarrow 2(m-1)+16(m-1)^4=8(m-1)$

$\Leftrightarrow 2(m-1)\left(8(m-1)^3-3\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2(m-1)=0\\8(m-1)^3-3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=1 \quad (l)\\(m-1)^3=\dfrac{3}{8}\end{array}\right.$.

Với $(m-1)^3=\dfrac{3}{8}\Leftrightarrow m=1+\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$.

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị m sao cho đồ thị hàm số $y=x^4+(m+1)x^2-2m-1$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác có một góc bằng $120°$.

A. $m<-1$.

B. $m=-1-\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$, $m=-1$.

C. $m=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

D. $m=-1-\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=4x^3+2(m+1)x=2x\left(2x^2+m+1\right)$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\2x^2=-m-1\end{array}\right.$

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow m+1<0\Leftrightarrow m<-1$.

Khi đó

$A(0;-2m-1)$, $B\left(-\sqrt{\dfrac{-m-1}{2}};-\dfrac{(m+1)^2}{4}-2m-1\right)$, $C\left(\sqrt{\dfrac{-m-1}{2}};-\dfrac{(m+1)^2}{4}-2m-1\right)$, là các điểm cực trị của đồ thị.

Ta thấy $AB=AC=\sqrt{-\dfrac{m+1}{2}+\dfrac{(m+1)^4}{16}}$ nên tam giác ABC cân tại A.

Từ giả thiết suy ra $A=120°$.

Gọi H là trung điểm BC, ta có $H\left(0;-\dfrac{(m+1)^2}{4}-2m-1\right)$

$BH=AH\tan 60°\Leftrightarrow\dfrac{(m+1)^2}{4}.\sqrt{3}=\sqrt{-\dfrac{m+1}{2}}$

$\Leftrightarrow\dfrac{3(m+1)^4}{16}=-\dfrac{m+1}{2}\Leftrightarrow 3(m+1)^3=-8\Leftrightarrow m=-1-\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$.

Câu 11. (Sở Lạng Sơn 2019) Để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+m-1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2, giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(2;3)$.

B. $(-1;0)$.

C. $(0;1)$.

D. $(1;2)$.

Lời giải

Chọn D

$y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)$

Xét $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{m},(m>0)\end{array}\right.$

Tọa độ ba điểm cực trị là: $A(0;m-1),B\left(-\sqrt{m};-m^2+m-1\right),C\left(\sqrt{m};-m^2+m-1\right)$

Gọi H là trung điểm của cạnh BC, ta có $\begin{cases}AH=m^2\\BC=2\sqrt{m}\end{cases}$ $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AH\cdot BC=m^2\sqrt{m}=2\Leftrightarrow m=\sqrt[5]{4}.$

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4+(3m+1)x^2-3$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác cân có độ dài cạnh đáy bằng $\frac{2}{3}$ độ dài cạnh bên.

A. $m=-\frac{5}{3}$. **B.** $-\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Lời giải:

Chọn A

Ta có $y'=4x^3+2(3m+1)x$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=-\frac{3m+1}{2}\end{array}\right.$. Để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow-\frac{3m+1}{2}>0\Leftrightarrow m<-\frac{1}{3}$. Khi đó $A(0;-3)$, $B\left(\sqrt{-\frac{3m+1}{2}};\frac{-9m^2-6m-13}{4}\right)$, $C\left(-\sqrt{-\frac{3m+1}{2}};\frac{-9m^2-6m-13}{4}\right)$. Tam giác ABC luôn cân tại A nên cạnh đáy $BC=2\sqrt{-\frac{3m+1}{2}}$, cạnh bên $AB=\sqrt{\frac{-3m-1}{2}+\left(\frac{-9m^2-6m-1}{4}\right)^2}$.

Theo yêu cầu bài toán, ta có : $BC=\frac{2}{3}AB\Leftrightarrow 2\sqrt{-\frac{3m+1}{2}}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{-3m-1}{2}+\left(\frac{-9m^2-6m-1}{4}\right)^2}\Rightarrow$

Câu 13. Cho hàm số $y=x^4-2(1-m^2)x^2+m+1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành tam giác có diện tích lớn nhất.

A. $m=1$. **B.** $m=-\frac{1}{2}$. **C.** $m=\frac{1}{2}$. **D.** $m=0$.

Lời giải

Chọn D

[Phương pháp tự luận]

$y'=4x^3-4(1-m^2)x$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=1-m^2\end{array}\right.$

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi: $|m|<1$

Tọa độ điểm cực trị $A(0;m+1)$

$B\left(\sqrt{1-m^2};-m^4+2m^2+m\right)$

$C\left(-\sqrt{1-m^2};-m^4+2m^2+m\right)$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\overrightarrow{BC}=\left(-2\sqrt{1-m^2};0\right)$

Phương trình đường thẳng BC: $y+m^4-2m^2-m=0$

$d\left(A,\mathrm{BC}\right)=m^4-2m^2+1$, $BC=2\sqrt{1-m^2}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BC.d[A,BC]=\sqrt{1-m^2}\left(m^4-2m^2+1\right)=\sqrt{\left(1-m^2\right)^5}\le 1$

Vậy S đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow m=0$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

$\overrightarrow{AB}=\left(\sqrt{1-m^2};-m^4+2m^2-1\right)$

$\overrightarrow{AC}=\left(-\sqrt{1-m^2};-m^4+2m^2-1\right)$

Khi đó S $=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{1-m^2}\left(m^4-2m^2+1\right)=\sqrt{\left(1-m^2\right)^5}\le 1$

Vậy S đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow m=0$.

Câu 14. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+1-m$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác nhận gốc toạ độ O làm trực tâm.

A. $m=-1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện để hàm số có ba điểm cực trị là $m>0$.

Toạ độ các điểm cực trị là $A(0;1-m)$, $B\left(\sqrt{m};-m^2-m+1\right)$, $C\left(-\sqrt{m};-m^2-m+1\right)$.

Vì ba điểm cực trị của đồ thị hàm số trùng phương luôn tạo thành tam giác cân tại đỉnh $A(0;1-m)$ và nhận trục tung làm trục đối xứng nên $AO\perp BC$, ta chỉ cần tìm m để $BO\perp AC$ là xong.

Ta có $\overrightarrow{AC}=\left(-\sqrt{m};-m^2\right)$, $\overrightarrow{OB}=\left(\sqrt{m};-m^2-m+1\right)$.

$$AC\perp OB\Leftrightarrow -m+m^2\left(m^2+m-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m^3+m^2-m-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=1\\m=-1\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện hàm số có ba cực trị thì chỉ có giá trị $m=1$ thoả.

Phân tích và phát triển bài toán.

Xét hàm số trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$ với $a\ne 0$.

Điều kiện để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $ab<0$. Khi đó các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0,c)$, $B\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right)$; $C\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right)$, ở đây $\Delta=b^2-4ac$.

NHẬN XÉT.

Ba điểm A, B, C tạo thành tam giác cân tại đỉnh A, nhận trục Oy làm trục đối xứng. Theo đó có những kết quả phổ biến như sau:

□ $S_{ABC}=|a|\sqrt{\left(-\frac{b}{2a}\right)^5}$.

□ Tam giác ABC vuông cân khi $b^3+8a=0$; Tam giác ABC đều khi $b^3+24a=0$; Tam giác ABC có góc tại đỉnh cân là α khi $8a+b^3\tan^2\frac{\alpha}{2}=0$.

□ Trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn nội tiếp tam giác luôn nằm trên trục Oy.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Gọi $G(0;g)$, $H(0;h)$, $I(0;m)$ và $J(0;n)$ lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Sau đây ta sẽ xây dựng các công thức liên hệ giữa g,h,m,n với a,b,c.

□ $G(0;g)$ là trọng tâm tam giác ABC nên $3g = y_A + y_B + y_C$, có nghĩa là

$$c - \frac{2\Delta}{4a} = 3g \Leftrightarrow b^2 = 6a(c-g)$$

□ $H(0;h)$ là trực tâm tam giác ABC nên $BH \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BH} = 0$

$$\overrightarrow{AC} = \left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a} - c\right)., \overrightarrow{BH} = \left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; h + \frac{\Delta}{4a}\right)$$

Suy ra $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BH} = 0 \Leftrightarrow -\frac{b}{2a} - \left(\frac{\Delta}{4a} + c\right)\left(h + \frac{\Delta}{4a}\right) = 0 \Leftrightarrow 8ab + b^2\left(b^2 + 4ah - 4ac\right) = 0$

$$\Leftrightarrow h = c - \frac{b^3 + 8a}{4ab}$$

Áp dụng kết quả này vào bài tập trên ta có:

$$1 - m - \frac{-8m^3 + 8}{-8m} = 0 \Leftrightarrow \frac{m^3 - 1}{m} + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -1 \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện có ba điểm cực trị ta thấy $m = 1$ thoả.

□ Do tam giác ABC cân tại A và $I(0;m)$ nên $IB = IC$. Để I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì cần thêm điều kiện

$$IA = IB \Leftrightarrow IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow (c-m)^2 = -\frac{b}{2a} + \left(\frac{\Delta}{4a} + m\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(b^2 + 4am - 4ac\right)^2 - 16a^2(m-c)^2 = 8ab \Leftrightarrow c - m = \frac{8a - b^3}{8ab}$$

Từ đây ta cũng rút ra biểu thức tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

$$R_{ABC} = IA = |c-m| = \left|\frac{b^3 - 8a}{8ab}\right|$$

□ $J(0;n)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên ta có đẳng thức

$$BC.\overrightarrow{JA} + CA.\overrightarrow{JB} + AB.\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OJ} = \frac{BC.\overrightarrow{OA} + CA.\overrightarrow{OB} + AB.\overrightarrow{OC}}{BC + CA + AB}$$

Ta dễ dàng tính được $AB = AC = \sqrt{-\frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2}}$, $BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$. Từ đó suy ra được đẳng thức

$$c - n = \frac{\frac{b^2}{4a}.\sqrt{1 - \frac{b^3}{8a}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{b^3}{8a}}}$$

Đẳng thức này thực sự khó nhớ, nên để làm nhanh ta nên nhớ đẳng thức tìm toạ độ tâm ở trên.

Câu 15. Để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị nhận gốc tọa độ O làm trực tâm thì giá trị của tham số m bằng

A. 1 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** 2

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x\left(x^2 - m\right)$.

Khi $m > 0$ đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $A(0; m-1)$, $B\left(-m; -m^2 + m - 1\right)$, $C\left(m; -m^2 + m - 1\right)$.

$\overrightarrow{AB} = \left(-m; -m^2\right)$, $\overrightarrow{OC} = \left(m; -m^2 + m - 1\right)$.

Vì hàm số đã cho là hàm trùng phương nên hiển nhiên $AO \perp BC$. Để O là trực tâm ΔABC thì $CO \perp AB \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC} = 0 \Leftrightarrow -m^2 - m^2\left(-m^2 + m - 1\right) = 0 \Leftrightarrow -m^2\left(-m^2 + m\right) = 0 \Leftrightarrow m = 0$ (loại) hoặc $m = 1$ (nhận).

Câu 16. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 2m^2 + m^4$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, Cho hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$. Giá trị m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có trọng tâm là gốc toạ độ O thoả mãn.

A. $m \in [-4; -3]$. **B.** $m \in [-2; -1]$. **C.** $m \in [-1; 0]$. **D.** $m \in [0; 1]$.

Chọn A

Áp dụng công thức ở trên ta có $b^2 = 6a(c - g) \Leftrightarrow 4m^2 = 6(m^2 + m) \Leftrightarrow m = -3$ hoặc $m = 0$.

Kiểm tra lại ta thấy $m = -3$ thoả yêu cầu bài toán.

Câu 17. (Nguyễn Khuyến) Tìm số thực k để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2kx^2 + k$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận điểm $G\left(0; \frac{1}{3}\right)$ làm trọng tâm.

A. $k = -1; k = \frac{1}{2}$. **B.** $k = 1; k = \frac{1}{3}$. **C.** $k = 1; k = \frac{1}{2}$. **D.** $k = \frac{1}{3}; k = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 4x^3 - 4kx = 4x\left(x^2 - k\right)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = k \quad (1) \end{array}\right.$$

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi x đi qua 3 nghiệm đó $\Leftrightarrow PT(1)$ có hai nghiệm phân biệt khác không $\Leftrightarrow k > 0$. Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0; k), B\left(-\sqrt{k}; k - k^2\right), C\left(\sqrt{k}; k - k^2\right)$.

Từ yêu cầu bài toán ta có: $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{k + \left(k - k^2\right) + \left(k - k^2\right)}{3}$

$$\Leftrightarrow -2k^2 + 3k - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Câu 18. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 1$ có ba điểm cực trị. Đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc O tạo thành 1 tứ giác nội tiếp.

A. $m = -1$. **B.** $m = \pm 1$. **C.** $m = 1$. **D.** Không tồn tại m.

Lời giải

Chọn B

$y' = y = 4x^3 - 4m^2x$

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m \neq 0$

Khi đó 3 điểm cực trị là: $A\left(0; m^4 + 1\right), B(-m; 1), C(m; 1)$

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp(nếu có) của tứ giác $ABOC$. Do tính chất đối xứng, ta có:
A, O, I thẳng hàng $\Rightarrow AO$ là đường kính của đường tròn ngoại tiếp(nếu có) của tứ giác $ABOC$.

Vậy $AB \perp OB \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow m^2 - m^4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \pm 1 \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện $m = \pm 1$ (thỏa mãn).

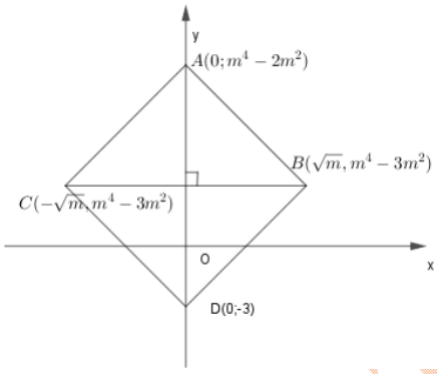
Câu 19. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 2m^2 + m^4$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, C và ABDC là hình thoi, trong đó $D(0;-3), A$ thuộc trục tung. Khi đó m thuộc khoảng nào?

A. $m \in \left(\frac{9}{5};2\right)$. **B.** $m \in \left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $m \in (2;3)$. **D.** $m \in \left(\frac{1}{2};\frac{9}{5}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx$ Để đồ thị có ba điểm cực trị thì phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4mx = 0$ phải có 3 nghiệm phân biệt.



$4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$

Khi đó điều kiện cần là $m > 0$. Ta có ba nghiệm là $x = 0, x = \sqrt{m}, x = -\sqrt{m}$

Với $x = 0$ thì $y = m^4 - 2m^2$

Với $x = \pm\sqrt{m}$ thì $y = m^4 - 3m^2$

Do A thuộc trục tung nên $A\left(0; m^4 - 2m^2\right)$ Giả sử điểm B nằm bên phải của hệ trục tọa độ, khi đó

$B\left(\sqrt{m}; m^4 - 3m^2\right), C\left(-\sqrt{m}; m^4 - 3m^2\right)$

Ta kiểm tra được $AD \perp BC$. Do đó để ABDC là hình thoi thì trước hết ta cần $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Ta có

$\overrightarrow{AB} = \left(\sqrt{m}; \left(m^4 - 3m^2\right) - \left(m^4 - 2m^2\right)\right) = \left(\sqrt{m}; -m^2\right)$

$\overrightarrow{CD} = \left(\sqrt{m}; -3 - \left(m^4 - 3m^2\right)\right) = \left(\sqrt{m}; -m^4 + 3m^2 - 3\right)$

Do đó

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \left(\sqrt{m}; -m^2\right) = \left(\sqrt{m}; -m^4 + 3m^2 - 3\right) \Leftrightarrow -m^2 = -m^4 + 3m^2 - 3$

$\Leftrightarrow -m^4 + 4m^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 = 1 \\ m^2 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \pm 1 \\ m = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$

Do điều kiện để có ba điểm cực trị là $m > 0$ nên ta chỉ có $m = 1$ hoặc $m = \sqrt{3}$

Với $m = 1$ thì $A(0;-1), B(1;-2), C(-1;-2)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;-1) \Rightarrow AB = \sqrt{2}$. Tương tự ta có

$BD = CD = CA = \sqrt{2}$. Như vậy ABDC là hình thoi. Vậy $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do $m = 1 \notin \left(\frac{9}{5};2\right), \left(-1;\frac{1}{2}\right), (2;3)$ nên các Chọn A, B, C đều sai.

Với $m = \sqrt{3}$ Trong trường hợp này $B\left(\sqrt[4]{3};0\right), C\left(-\sqrt[4]{3};0\right), A(0;3)$. Ta kiểm tra được

$AB = BD = DC = CA = \sqrt{9 + \sqrt{3}}$. Do đó ABDC cũng là hình thoi và $m = \sqrt{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Nhận xét. Đối với bài toán thi trắc nghiệm đòi hỏi cần tiết kiệm thời gian thì chỉ cần xét trường hợp $m=1$ thì chúng ta đã có thể kết luận được chọn là D mà không cần xét thêm trường hợp $m=\sqrt{3}$.

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{8}x^4-(2m-1)x^2+m+3$ có ba điểm cực trị cùng với gốc tọa độ là bốn đỉnh của một hình chữ nhật.

A. $m>\frac{1}{2}$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=4$.

Lời giải:

Chọn B

Ta có $y'=\frac{1}{2}x^3-2(2m-1)x$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=4(2m-1)\end{array}\right.$.

Hàm số có ba điểm cực trị khi $2m-1>0\Leftrightarrow m>\frac{1}{2}$.

Giả sử ba điểm cực trị là

$A(0;m+3)$, $B\left(2\sqrt{2m-1};-2(2m-1)^2+m+3\right)$, $C\left(-2\sqrt{2m-1};-2(2m-1)^2+m+3\right)$.

$\overrightarrow{AB}=\left(2\sqrt{2m-1};-2(2m-1)^2\right)$, $\overrightarrow{AC}=\left(-2\sqrt{2m-1};-2(2m-1)^2\right)$.

Điều kiện để ba cực trị tạo thành một tam giác vuông là:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow-4(2m-1)+4(2m-1)^4=0\Leftrightarrow4(2m-1)\left[(2m-1)^3-1\right]=0$.

$\Leftrightarrow(2m-1)^3=1\Leftrightarrow m=1$ (do $m>\frac{1}{2}$).

Khi đó $A(0;4)$, $B(2;2)$, $C(-2;2)$ (thỏa mãn yêu cầu đề bài).

Vậy $m=1$.

Câu 21. (THPT-Chuyên-Sơn-La-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có 3 điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm cực trị này có bán kính bằng 1. Tổng giá trị của các phần tử của S bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$y'=4x^3-4mx=4x(x^2-m)$

Hàm số có 3 cực trị khi $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>0$

Xét $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{m}\end{array}\right.(m>0)$

Tọa độ ba điểm cực trị: $A(0;m)$, $B\left(-\sqrt{m};-m^2+m\right)$, $C\left(\sqrt{m};-m^2+m\right)$.

Gọi H là trung điểm của cạnh BC. Ta có $H\left(0;-m^2+m\right)$

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AH.BC=\frac{AB.AC.BC}{4R}$ (do ΔABC cân tại A)

$\Leftrightarrow AB^2=2AH.R$ trong đó $\left\{\begin{array}{l}AH=m^2\\AB=\sqrt{m+m^4}\end{array}\right.$

Suy ra $m+m^4=2m^2 \Leftrightarrow m\left(m^3-2m+1\right)=0 \Leftrightarrow m\left(m-1\right)\left(m^2+m-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \\ m=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ m=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$. Đối chiếu điều kiện ta được $S=\left\{1;\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Do đó tổng giá trị các phần tử thuộc S bằng $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Câu 22. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^4-2mx^2+m$ có ba điểm cực trị. Đồng thời ba điểm cực trị đó là ba đỉnh của một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn hơn 1.

A. $m<-1$. **B.** $m>2$.

C. $m\in\left(-\infty;-1\right)\cup\left(2;+\infty\right)$. **D.** Không tồn tại m.

Lời giải

Chọn B

[Phương pháp tự luận]

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m>0$

Ba điểm cực trị là $A\left(0;m\right), B\left(-\sqrt{m};m-m^2\right), C\left(\sqrt{m};m-m^2\right)$

Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow I\left(0;m-m^2\right)$

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AI.BC=m^2\sqrt{m}$

Chu vi của ΔABC là: $2p=AB+BC+AC=2\left(\sqrt{m+m^4}+\sqrt{m}\right)$

Bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC là: $r=\dfrac{S_{\Delta ABC}}{p}=\dfrac{m^2\sqrt{m}}{\sqrt{m+m^4}+\sqrt{m}}$

Theo bài ra: $r>1 \Leftrightarrow \dfrac{m^2\sqrt{m}}{\sqrt{m+m^4}+\sqrt{m}}>1 \Leftrightarrow \dfrac{m^2\sqrt{m}\left(\sqrt{m+m^4}-\sqrt{m}\right)}{m^4}>1$ (vì $m>0$)

$\Leftrightarrow \sqrt{m}\left(\sqrt{m+m^4}-\sqrt{m}\right)>m^2 \Leftrightarrow \sqrt{m^2+m^5}>m^2+m \Leftrightarrow m^2-m-2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>2 \end{array}\right.$

So sánh điều kiện suy ra $m>2$ thỏa mãn.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Sử dụng công thức $r=\dfrac{b^2}{4|a|+\sqrt{16a^2-2ab^3}} \Rightarrow r=\dfrac{4m^2}{4+\sqrt{16+16m^3}}=\dfrac{m^2}{1+\sqrt{1+m^3}}$

Theo bài ra: $r>1 \Leftrightarrow \dfrac{m^2}{1+\sqrt{1+m^3}}>1 \Leftrightarrow \dfrac{m^2\left(\sqrt{1+m^3}-1\right)}{m^3}>1 \Leftrightarrow \sqrt{1+m^3}-1>m$

$\sqrt{1+m^3}>m+1 \Leftrightarrow\Leftrightarrow \sqrt{1+m^3}>m+1 \Leftrightarrow m^2-m-2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>2 \end{array}\right.$

So sánh điều kiện suy ra $m>2$ thỏa mãn.

Câu 23. (Đoàn Thượng) Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+1\ (1)$. Tổng lập phương các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm này có bán kính $R=1$ bằng

A. $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **C.** $2+\sqrt{5}$. **D.** $-1+\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D

$y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)$; $y'=0\Leftrightarrow x=0;x=\pm\sqrt{m}$ với $m>0$

Gọi $A(0;1),B\left(\sqrt{m};-m^2+1\right),C\left(-\sqrt{m};-m^2+1\right)$ là 3 điểm cực trị của hàm số (1); khi đó tam giác ΔABC cân tại A,I là tâm đường tròn đi qua A,B,C nên $I\in Oy$, gọi $I(0;b)$

Ta có: $IA=R=1\Leftrightarrow 1-b=1\Leftrightarrow b=0$

$IB=R=1\Leftrightarrow m+m^4-2m^2+1=1\Leftrightarrow m^4-2m^2+m=0$

$\Leftrightarrow m(m-1)\left(m^2+m-1\right)=0\Leftrightarrow m_1=0;m_2=1;m_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

Kết hợp điều kiện $m>0$ nên loại m_4 và m_1

Ta có $m_2^3+m_3^3=-1+\sqrt{5}$. Vậy chọn đáp án **D**

Câu 24. Cho hàm số $y=x^4-2(m^8+16)x^2+m^2+2018$. Biết rằng $I\left(0;m^2\right)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác tạo bởi ba điểm cực trị của đồ thị hàm số. Bán kính đường tròn đó có giá trị là

A. $R=4$. **B.** $R=2$. **C.** $R=\sqrt{2018}$. **D.** $R=2018$.

ChọnD

Áp dụng công thức trên ta có $R_{ABC}=|c-m|=\left|m^2+2018-m^2\right|=2018$

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+2m+m^4$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 2 lần bán kính đường tròn nội tiếp?

A. $m=1$ **B.** $m=\sqrt[3]{3}$ **C.** $m=\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ **D.** $m=\frac{\sqrt[3]{6}}{2}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)$ để tồn tại ba điểm cực trị thì $m>0$ khi đó tọa độ ba điểm cực trị là

$A\left(0;m^4+2m\right),B\left(\sqrt{m};m^4-m^2+2m\right),C\left(-\sqrt{m};m^4-m^2+2m\right)$

$\Rightarrow AB=AC=\sqrt{m^4+m}$, $BC=2\sqrt{m}$ gọi M là trung điểm

$BC\Rightarrow MB=\sqrt{m}\Rightarrow AM=\sqrt{AB^2-MB^2}=\sqrt{m^4+m-m}=m^2\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}AM.BC=\frac{1}{2}m^2.2\sqrt{m}=m^2\sqrt{m}$

Mặt khác $\begin{cases} r=\frac{S}{P}=\frac{m^2\sqrt{m}}{\sqrt{m^4+m}+\sqrt{m}}=\frac{m^2}{\sqrt{m^3+1}+1}=\frac{\sqrt{m^3+1}-1}{m} \\ R=\frac{AB.AC.BC}{4S}=\frac{\left(m^4+m\right)2\sqrt{m}}{4m^2\sqrt{m}}=\frac{1}{2}\frac{m^3+1}{m} \end{cases}$ theo giả thiết $R=2r$

$\Rightarrow\frac{1}{2}\frac{\left(m^3+1\right)}{m}=2\frac{\left(\sqrt{m^3+1}-1\right)}{m}\Leftrightarrow\left(m^3+1\right)=4\sqrt{m^3+1}-4\Leftrightarrow\left(\sqrt{m^3+1}-2\right)^2=0\Leftrightarrow\sqrt{m^3+1}=2$

$\Leftrightarrow m^3=3\Leftrightarrow m=\sqrt[3]{3}$

Câu 26. (CHUYÊN HUỲNH MẪN ĐẠT 2019 lần 1) Cho hàm số $y=x^4-2\left(m^2-m+1\right)x^2+m-1$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu là nhỏ nhất.

A. $m\geq 1$. **B.** $m\leq 1$. **C.** $m=1$. **D.** $m=\frac{1}{2}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Lời giải

Chọn D

$y' = 4x^3 - 4\left(m^2 - m + 1\right)x = 4x\left(x^2 - m^2 + m - 1\right).$

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x\left(x^2 - m^2 + m - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m^2 - m + 1 \end{array}\right.$

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt hay phương trình $x^2 - m^2 + m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác không $\Leftrightarrow m^2 - m + 1 > 0 \Leftrightarrow \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ luôn đúng $\forall m \in \mathbb{R}$.

Khi đó phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $x_1 = -\sqrt{m^2 - m + 1}, x_2 = \sqrt{m^2 - m + 1}, x_3 = 0.$

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	y_1	$\nearrow$	y_2	$\searrow$	y_1	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó đồ thị hàm số có hai điểm cực tiểu là $B\left(-\sqrt{m^2 - m + 1}; y_1\right)$ và $C\left(\sqrt{m^2 - m + 1}; y_1\right)$.

Khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu là $BC = 2\sqrt{m^2 - m + 1} = 2\sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \geq \sqrt{3}.$

Dấu "=" xảy ra khi $m = \frac{1}{2}.$

Câu 27. (Phan Đình Tùng Hà Tĩnh) Cho hàm số $y = x^4 - 2(m^2 + m + 1)x^2 + m$ có đồ thị (C). Tìm m để đồ thị hàm số (C) có 3 điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu nhỏ nhất.

A. $m = \frac{1}{2}.$ **B.** $m = -\frac{1}{2}.$ **C.** $m = \sqrt{3}.$ **D.** $m = 0.$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 4x^3 - 4\left(m^2 + m + 1\right)x = 4x\left[x^2 - \left(m^2 + m + 1\right)\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -\sqrt{m^2 + m + 1} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \sqrt{m^2 + m + 1} \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	y_{CT}	$\nearrow$	y_{CD}	$\searrow$	y_{CT}	$\nearrow$	$+\infty$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Khoảng cách giữa 2 điểm cực tiểu: $d=\left|x_3-x_1\right|=2\sqrt{m^2+m+1}=2\sqrt{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\geq\sqrt{3}$.

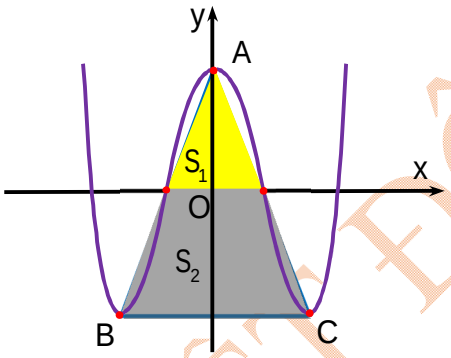
Dấu bằng xảy ra khi $m=-\frac{1}{2}$.

Câu 28. Cho hàm số $y=x^4-2\left(m^2+1\right)x^2+m^4$ có đồ thị (C). Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của (C), S_1 và S_2 lần lượt là phần diện tích của tam giác ABC phía trên và phía dưới trục hoành. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m sao cho $\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{3}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B



$D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=4x^3-4\left(m^2+1\right)x$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow 4x^3-4\left(m^2+1\right)x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m^2+1\quad(1)\end{array}\right.$.

Do $m^2+1>0,\forall m\in\mathbb{R}$ nên (1) luôn có hai nghiệm phân biệt khác 0 với mọi $m\in\mathbb{R}$. Suy ra hàm số đã cho luôn có ba điểm cực trị.

Giả sử ba điểm cực trị của (C) là $A\left(0;m^4\right)$, $B\left(-\sqrt{m^2+1};-2m^2-1\right)$, $C\left(\sqrt{m^2+1};-2m^2-1\right)$. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của AB, AC với trục hoành.

Ta có $\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{S_{AMN}}{S_{MNCB}}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{AM}{AB}.\frac{AN}{AC}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\left(\frac{AM}{AB}\right)^2=\frac{1}{4}$ (do $MN\ //\ BC$) $\Leftrightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow M$ là trung điểm đoạn $AB\Leftrightarrow y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$ (do M, A, B thẳng hàng) $\Leftrightarrow m^4-2m^2-1=0$

$\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

Vậy có hai giá trị thực của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

DẠNG 5: CỰC TRỊ VỚI CÁC HÀM SỐ KHÁC CHỨA THAM SỐ

Câu 1. Biết hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+mx+n}{x^2+1}$ có hai cực trị x_1,x_2.Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

A. $y=mx+n$. **B.** $y=\dfrac{m}{2}x+n$. **C.** $y=-mx+n$. **D.** $y=\dfrac{-m}{2}x+n$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình đường cong đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+n}{x^2+1}$ có dạng:

$$y=\frac{\left(x^2+mx+n\right)'}{\left(x^2+1\right)'}=\frac{2x+m}{2x}.$$

Gọi tọa độ của hai điểm cực trị là $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$.Khi đó x_1,x_2 là nghiệm của pt:

$2x\left(x^2+mx+n\right)=\left(x^2+1\right)(2x+m)\Leftrightarrow mx^2+(2n-2)x-m=0$.

Ta tìm k thỏa $2x+m+k\left[mx^2+(2n-2)x-m\right]=0$ có nghiệm $x=0$.Khi đó $k=1$.

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+n}{x^2+1}$ có dạng:

$$y=\frac{2x+m+1\left[mx^2+(2n-2)x-m\right]}{2x}=\frac{2x+mx^2+2(n-1)x}{2x}=\frac{m}{2}x+n.$$

Câu 2. Biết rằng hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-2x+m}{x^2+2}$ có hai cực trị x_1,x_2.Tính $k=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$.

A. $k=\dfrac{-2}{m}$. **B.** $k=1$. **C.** $k=\dfrac{2}{m}$. **D.** $k=\dfrac{-1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình đường cong đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+m}{x^2+2}$ có dạng:

$$y=\frac{\left(x^2-2x+m\right)'}{\left(x^2+2\right)'}=\frac{2x-2}{2x}.$$

Gọi tọa độ của hai điểm cực trị là $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$.Khi đó x_1,x_2 là nghiệm của pt:

$2x\left(x^2-2x+m\right)=\left(x^2+2\right)(2x-2)\Leftrightarrow 2x^2+(4-2m)x-4=0$.

Ta tìm k thỏa $2x-2+k\left[2x^2+(4-2m)x-4\right]=0$ có nghiệm $x=0$.Khi đó $k=\dfrac{-1}{2}$.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx^2-2x+m-1}{2x+1}$ vuông góc với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

A. $m=1$. **B.** $m=\dfrac{1}{2}$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $y=\frac{\left(mx^2-2x+m-1\right)'}{\left(2x+1\right)'}=\frac{2mx-2}{2}=mx-1$ có hệ số góc bằng m.

Đường phân giác của góc phần tư thứ nhất có hệ số góc $k=1$;
Hai đường thẳng vuông góc với nhau nên $m.1=-1\Leftrightarrow m=-1$.

Chọn C

Câu 4. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $y'=x^2-\sqrt{12}x+\frac{1}{4}(b+3a)\ \forall x\in R$,biết hàm số luôn có hai cực trị với a,b là các số thực không âm thỏa mãn $3b-a\le 6$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2a+b$?

A. 1 **B.** 9 **C.** 8 **D.** 6

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=x^2-\sqrt{b}x-\frac{3}{4}a+3,\ \forall x\in R$

Hàm số luôn có hai cực trị khi và chỉ khi: $\Delta>0\Leftrightarrow 12-b-3a>0$

Từ giả thiết ta có $\begin{cases}a\ge 0\\ b\ge 0\\ 3b-a\le 6\\ b+3a<12\end{cases}$ nếu biểu diễ lên hệ trục tọa độ ta sẽ được miền tứ giác OABC với $O(0;0),\ A(0;2),\ B(3;3),\ C(4;0)$ trong các điểm có tọa độ nguyên thuộc miền OABC có điểm $M(3;2)$ làm biểu thức P có giá trị lớn nhất là $P_{max}=2.3+2=8$

Câu 5. Cho hàm số $y=x^4-mx^3+4x+m+2$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số ban đầu có 3 cực trị và trọng tâm của tam giác với 3 đỉnh là toạ độ các điểm cực trị trùng với tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y=\frac{4x}{4x-m}$.

A. $m=2$ **B.** $m=1$ **C.** $m=4$ **D.** $m=3$

Lời giải

Hàm số đã cho có 3 cực trị khi phương trình y'(x) = 0 có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 4x^3-3mx^2+4=0$ có 3nghiệm phân biệt

Xét g(x) = $4x^3-3mx^2+4$ có g'(x) = $12x^2-6mx\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow x=0,x=\frac{m}{2}$

Do $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ và $g(0)=4>0$, $g(\frac{m}{2})=\frac{16-m^3}{4}$ nên g(x) = 0

có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{m}{2}>0\\ \frac{16-m^3}{4}<0\end{cases}\Leftrightarrow m>2\sqrt[3]{2}$ (học sinh có thể lập bảng biến thiên

của hàm $\mu(x)=\frac{x^3+1}{x^2}$ trên $R\setminus\{0\}$ để tìm ra kết quả trên)

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Khi đó tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y=\frac{4x}{4x-m}$ là $I(\frac{m}{4};1)$

Gọi $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2),C(x_3;y_3)$ là 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho thì

x_1, x_2, x_3 là nghiệm phương trình: $4x^3-3mx^2+4=0$ nên theo định lý Viet ta có

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=\frac{3m}{4}\\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=\frac{m}{4}\\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=\frac{9m^2}{16}\end{cases}$$

Viết hàm số ban đầu dới dạng: $y(x)=y'(x)(\frac{x}{4}-\frac{m}{16})+(-\frac{3m^2x^2}{16}+3x+\frac{5m}{4}+2)$, vì thế

$$y_i=y(x_i)=y'(x_i)(\frac{x_i}{4}-\frac{m}{16})+(-\frac{3m^2x_i^2}{16}+3x_i+\frac{5m}{4}+2)=-\frac{3m^2x_i^2}{16}+3x_i+\frac{5m}{4}+2$$
$$do\ y'(x_i)=0\quad (i=1,2,3)$$

Từ đó: $\frac{y_1+y_2+y_3}{3}=-\frac{m^2}{16}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+(x_1+x_2+x_3)+\frac{5m}{4}+2=-\frac{9m^4}{16^2}+\frac{5m}{4}+2$

Trọng tâm của tam giác ABC là $G(\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\frac{y_1+y_2+y_3}{3})\equiv I(\frac{m}{4};1)$ khi và chỉ

khi: $\frac{y_1+y_2+y_3}{3}=1\Leftrightarrow -\frac{9m^4}{16^2}+\frac{5m}{4}+2=1\Leftrightarrow (m-4)(9m^3+36m^2+144m+64)=0$

Vì $m>2\sqrt[3]{2}$ nên $m=4$ là giá trị duy nhất cần tìm.

Chọn C

Câu 6. (CHUYÊN HUỲNH MẪN ĐẠT 2019 lần 1) Cho hàm số $y=\frac{x^5}{5}-(2m-1)x^4-\frac{m}{3}x^3+2019$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$?

A. Vô số. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=x^4-4(2m-1)x^3-mx^2=x^2\left[x^2-4(2m-1)x-m\right]$.

Dễ thấy $x=0$ là một nghiệm của đạo hàm y'. Do đó hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ khi và chỉ khi y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua nghiệm $x=0$. Ta thấy dấu của y' là dấu của hàm số $g(x)=x^2-4(2m-1)x-m$. Hàm số $g(x)$ đổi dấu khi đi qua giá trị $x=0$ khi $x=0$ là nghiệm của $g(x)$. Khi đó $g(0)=0\Leftrightarrow m=0$.

Thử lại, với $m=0$ thì $g(x)=x^2+4x$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua giá trị $x=0$.

Vậy có 1 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 7. (CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ HÒA BÌNH LẦN 4 NĂM 2019) Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019;2019)$ để hàm số $y=\frac{m-1}{5}x^5+\frac{m+2}{4}x^4+m+5$ đạt cực đại tại $x=0$?

A. 110. **B.** 2016. **C.** 100. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = (m-1)x^4 + (m+2)x^3$.

+ **TH1:** $m = 1$.Khi đó $y = \frac{3}{4}x^4 + 6 \Rightarrow y' = 3x^3$.Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ (loại).

+ **TH2:** $m \neq 1$.Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{m+2}{m-1} \end{array}\right.$.

Nhận thấy nếu $x_2 = x_1 = 0 \Rightarrow m = -2 \Rightarrow y' = -3x^4 \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên hàm số không có cực trị (loại)

Vì vậy yêu cầu bài toán tương đương với $\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} m-1>0 \\ x_1 < x_2 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} m-1<0 \\ x_1 > x_2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} m>1 \\ -2<m<1 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} m<1 \\ \left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>1 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow m < -2$.

Suy ra số giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-2019;2019)$ là 2016.

Câu 8. (Lý Nhân Tông)Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^9 + (m-2)x^7 - (m^2-4)x^6 + 7$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. 3. **B.** 4. **C.** Vô số. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

$y' = 9x^8 + 7(m-2)x^6 - 6(m^2-4)x^5 \Rightarrow y'(0) = 0, \ \forall m \in \mathbb{R}$.

$y'' = 9.8x^7 + 7.6(m-2)x^5 - 6.5(m^2-4)x^4 \Rightarrow y''(0) = 0, \ \forall m \in \mathbb{R}$.

Ta nhận thấy $y'''(0) = y^{(4)}(0) = y^{(5)}(0) = 0, \ \forall m \in \mathbb{R}$

Ta có $y^{(6)} = 9.8.7.6.5.4x^3 + 7.6.5.4.3.2(m-2)x - 6.5.4.3.2.1(m^2-4) \Rightarrow y^{(6)}(0) = -6.5.4.3.2.1(m^2-4)$.

*TH1: $y^{(6)}(0) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -2 \end{array}\right.$ thì:

$+ m = 2 \Rightarrow y' = 9x^8 \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên không đạt cực trị tại $x = 0$.

$+ m = -2 \Rightarrow y' = x^6(9x^2 - 28)$ không đổi dấu khi qua $x = 0$ nên không đạt cực trị tại $x = 0$.

*TH2: $y^{(6)}(0) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$

Khi đó để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ thì cần thêm

$y^{(6)}(0) > 0 \Leftrightarrow -6.5.4.3.2.1(m^2-4) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2 \Rightarrow m \in \{-1;0;1\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m.

Câu 9. (Chuyên Phan Bội Châu Lần2) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $|f(x+h) - f(x-h)| \leq h^2, \forall x \in \mathbb{R}, \forall h > 0$.Đặt

$g(x) = [x + f'(x)]^{2019} + [x + f'(x)]^{29-m} - (m^4 - 29m^2 + 100)\sin^2 x - 1, m$ là tham số nguyên và $m < 27$

.Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m sao cho hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$.Tính tổng bình phương các phần tử của S.

A. 100. **B.** 50. **C.** 108. **D.** 58.

Lời giải.

Chọn A

Từ giả thiết ta có

$$|f(x+2h)-f(x)|\le h^2,\ \forall h>0 \Rightarrow \frac{|f(x+2h)-f(x)|}{(x+2h)-x}\le \frac{h}{2},\ \forall h>0.$$

$$\Rightarrow 0\le \lim_{h\to 0}\frac{|f(x+2h)-f(x)|}{(x+2h)-x}\le \lim_{h\to 0}\frac{h}{2}=0 \Rightarrow f'(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(x)=C$$,với C là hằng số.Ta có

$$g'(x)=2019\left[x+f'(x)\right]^{2018}\left(1+f''(x)\right)+(29-m)\left[x+f'(x)\right]^{28-m}\left(1+f''(x)\right)$$
$$-\left(m^4-29m^2+100\right)\sin 2x$$
$$=2019x^{2018}+(29-m)x^{28-m}-\left(m^4-29m^2+100\right)\sin 2x.$$

$$g''(x)=2019.2018x^{2017}+(29-m)(28-m)x^{27-m}-2\left(m^4-29m^2+100\right)\cos 2x.$$

Khi đó $g'(0)=0$; $g''(0)=-2\left(m^4-29m^2+100\right)$.

$g''(0)>0 \Leftrightarrow m^4-29m^2+100<0 \Leftrightarrow 4<m^2<25 \Leftrightarrow m\in(-5;-2)\cup(2;5)$.

Trường hợp $m=2$,ta có $g'(x)=2019x^{2018}+27x^{26}=x^{26}\left(2019x^{1992}+27\right)$.

Vì $x=0$ là nghiệm bội chẵn của phương trình $g'(x)=0$ nên trường hợp này loại.

Trường hợp $m=5$,ta có $g'(x)=2019x^{2018}+24x^{23}=x^{23}\left(2019x^{1995}+24\right)$.

Trường hợp $m=-2$,ta có $g'(x)=2019x^{2018}+31x^{30}=x^{30}\left(2019x^{1988}+31\right)$.

Vì $x=0$ là nghiệm bội chẵn của phương trình $g'(x)=0$ nên trường hợp này loại.

Trường hợp $m=5$,ta có $g'(x)=2019x^{2018}+24x^{23}=x^{23}\left(2019x^{1995}+24\right)$.

Dễ thấy $g'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x=0$ nên hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

Trường hợp $m=-5$,ta có $g'(x)=2019x^{2018}+34x^{33}=x^{33}\left(2019x^{1985}+34\right)$.

Dễ thấy $g'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x=0$ nên hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

Vậy $m\in S=\{-5;-4;-3;3;4;5\}$ nên tổng các bình phương của các phần tử của S là 100.

Câu 10. (THPT ĐÔ LƯƠNG 3 LẦN 2) Cho hàm số $f(x)=(x-1)^2\left(mx^2+4mx-m+n-2\right)$ với $m,\ n\in\mathbb{R}$. Biết trên khoảng $\left(-\frac{7}{6};0\right)$ hàm số đạt cực đại tại $x=-1$. Trên đoạn $\left[-\frac{7}{2};-\frac{5}{4}\right]$ hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

A. $x=-\frac{7}{2}$. **B.** $x=-\frac{3}{2}$. **C.** $x=-\frac{5}{2}$. **D.** $x=-\frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=(x-1)\left(4mx^2+10mx-6m+2n-4\right)$.

Cho $f'(x)=0\Leftrightarrow(x-1)\left(4mx^2+10mx-6m+2n-4\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\4mx^2+10mx-6m+2n-4=0\ (1)\end{array}\right.$.

Trên khoảng $\left(-\frac{7}{6};0\right)$ hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x_1=-1$.

$\Rightarrow m\neq 0$ và $x_2=-\frac{3}{2}$(vì theo Vi – ét $x_1+x_2=-\frac{5}{2}$ và $x_1=-1$).

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	CT	↗	CĐ	↘	CT	↗	$+\infty$

Vậy trên đoạn $\left[-\frac{7}{2};-\frac{5}{4}\right]$ hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=-\frac{3}{2}$.

Câu 11. (HSG Bắc Ninh) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$.Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị?

A. 0. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị thì $f'(x)$ đổi dấu đúng một lần.

Ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\x=-1\\x^2+2mx+5=0\end{array}\right.$

Đặt $g(x)=x^2+2mx+5$.Để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị xảy ra các khả năng sau:

+)TH1: $g(x)=0$ có nghiệm kép,điều kiện là $\Delta'=m^2-5=0\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{5}$ không thỏa mãn m nguyên.

+)TH2: $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt,trong đó có một nghiệm bằng -1.TH này xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\g(-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow m=3.$

+)TH3: $g(x)=0$ vô nghiệm tức $\Delta'<0\Leftrightarrow m^2-5<0\Leftrightarrow-\sqrt{5}<m<\sqrt{5}$,do m nguyên nên $m\in\{-2;-1;0;1;2\}$:có 5 giá trị của m.Vậy có 6 giá trị m nguyên thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 12. (THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho hàm số $y=f(x)$ biết $f'(x)=x^2(x-1)^3(x^2-2mx+m+6)$.Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị là

A. 7. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Cho $f'(x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\g(x)=x^2-2mx+m+6=0\end{array}\right.$.

Trong đó $x=0$ là nghiệm bội chẵn và $x=1$ là nghiệm bội lẻ.

Hàm số đã có một cực trị khi và chỉ khi $f'(x)$ đổi dấu một lần khi và chỉ khi $f'(x)=0$ có một nghiệm bội lẻ.

+ Trường hợp 1:Phương trình $g(x)=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép:

Khi đó: $\Delta'\le 0\Leftrightarrow m^2-m-6\le 0\Leftrightarrow -2\le m\le 3$.

+ Trường hợp 2: $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt,trong đó có 1 nghiệm $x_1=1$

Với $x_1=1$,ta có: $g(1)=1-2m+m+6=0\Leftrightarrow m=7$.

Với $m=7\Rightarrow g(x)=x^2-14x+13=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=13\end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy $m\in[-2;3]\cup\{7\}$,mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-2;-1;0;1;2;3;7\}$.

Câu 18. (GIA LỘC TỈNH HẢI DƯƠNG 2019 lần 2) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$.Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị,tìm số tập con khác rỗng của S?

A. 127. **B.** 15. **C.** 63. **D.** 31.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị khi và chỉ khi:

Trường hợp 1: Phương trình $x^2+2mx+5=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.

Điều đó xảy ra khi và chỉ khi $\Delta'=m^2-5\le 0\Leftrightarrow -\sqrt{5}\le m\le\sqrt{5}\ \ (*)$.

Trường hợp 2: Phương trình $x^2+2mx+5=0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm là -1.Điều đó xảy ra khi và chỉ khi:

$$\left\{\begin{array}{l}\Delta'=m^2-5>0\\(-1)^2-2m+5=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}m>\sqrt{5}\\m<-\sqrt{5}\end{array}\right.\\m=3\end{array}\right.\Leftrightarrow m=3\ \ (**).$$

Từ $(*),(**)$ suy ra $m\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]\cup\{3\}$.

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-2;-1;0;1;2;3\}$ hay $S=\{-2;-1;0;1;2;3\}$.

Suy ra số tập con khác rỗng của S bằng $C_6^1+C_6^2+C_6^3+C_6^4+C_6^5+C_6^6=63$.

Câu 13. (Quỳnh Lưu Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+2)^4(x+4)^3\left[x^2+2(m+3)x+6m+18\right]$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có **đúng** một điểm cực trị?

A. 7. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\(x+2)^4=0\\(x+4)^3=0\\x^2+2(m+3)x+6m+18=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\\x=-4\\x^2+2(m+3)x+6m+18=0\ (*)\end{array}\right.$

Để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ vô nghiệm, có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có nghiệm là -4.

Trường hợp 1. Phương trình $(*)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow\Delta=4m^2+24m+36-24m-72=4m^2-36<0$

$\Leftrightarrow -3<m<3$

$\Rightarrow m\in\{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2\}$

Trường hợp 2. Phương trình $(*)$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow\Delta=4m^2-36=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\m=-3\end{array}\right.$.

Trường hợp 3. Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Trong đó $x_1=-4$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, $x_2\Leftrightarrow\Delta=4m^2-36>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-3\\m>3\end{array}\right.$.

Theo định lí Viète ta có $\begin{cases}S=x_1+x_2=-4+x_2=-2m-6\\P=x_1.x_2=-4.x_2=6m+18\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=-2m-2\\x_2=-\dfrac{3}{2}m-\dfrac{9}{2}\end{cases}\Leftrightarrow -2m-2=-\dfrac{3}{2}m-\dfrac{9}{2}\Leftrightarrow m=5$.

Vậy $m\in\{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5\}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 14. (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐĂK LĂK LẦN X NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=(x-2)^2\left(x^2+3x-4\right)$. Gọi S là tập các số nguyên $m\in[-10;10]$ để hàm số $y=f\left(x^2-4x+m\right)$ có đúng 3 điểm cực trị. Số phần tử của S bằng:

A. 10. **B.** 5. **C.** 14. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(x-2)^2=0\\x^2+3x-4=0\end{array}\right.$

Đặt $y=g(x)=f\left(x^2-4x+m\right)$

$g'(x)=(2x-4)\,f'(x^2-4x+m)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-4=0\\ f'(x^2-4x+m)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ \left(x^2-4x+m-2\right)^2=0\\ h_1(x)=x^2-4x+m-1=0(1)\\ h_2(x)=x^2-4x+m+4=0(2)\end{array}\right.$$

Hàm số có 3 cực trị khi một trong 2 phương trình (1)và (2)có 2 nghiệm phân biệt khác 2 và phương trình có lại có 1 nghiệm hoặc vô nghiệm.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}h_1(2)\neq 0\\ \Delta_1>0\\ \Delta_2\le 0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}h_2(2)\neq 0\\ \Delta_1\le 0\\ \Delta_2>0\end{array}\right.\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}0\le m<5\\ \left\{\begin{array}{l}m\ge 3\\ m<0\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow 0\le m<5$$

mà $m\in[-10;10]$ do đó $m\in\{0;1;2;3;4\}$ có 5 phần tử.

Câu 15. (Sở Hà Nam) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2\left(x^2-4x\right)$.Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(2x^2-12x+m\right)$ có đúng 5 điểm cực trị ?

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 19.

Lời giải.

Chọn B

Ta có:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow(x+1)^2\left(x^2-4x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=0\\ x=4\end{array}\right.$$, trong đó $x=-1$ là nghiệm kép.

$g(x)=f\left(2x^2-12x+m\right)\Rightarrow g'(x)=(4x-12)\,f'\left(2x^2-12x+m\right)$

Xét $g'(x)=0\Leftrightarrow(4x-12)\,f'\left(2x^2-12x+m\right)=0$ (*)

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ 2x^2-12x+m=-1\\ 2x^2-12x+m=0\\ 2x^2-12x+m=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ 2x^2-12x+m=-1\,(l)\\ 2x^2-12x=-m\quad(1)\\ 2x^2-12x=4-m\quad(2)\end{array}\right.$$

(Điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là nghiệm bội lẻ của phương trình (*) nên ta loại phương trình $2x^2-12x+m=-1$)

Xét hàm số $y=2x^2-12x$ có đồ thị (C).

$y'=4x-12$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-18	$\nearrow$	$+\infty$

Để $g(x)$ có đúng 5 điểm cực trị thì mỗi phương trình $(1);(2)$ đều có hai nghiệm phân biệt khác 3.

Do đó, mỗi đường thẳng $y=4-m$ và $y=-m$ phải cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ khác 3. Nhận xét: đường thẳng $y=4-m$ luôn nằm trên đường thẳng $y=-m$.

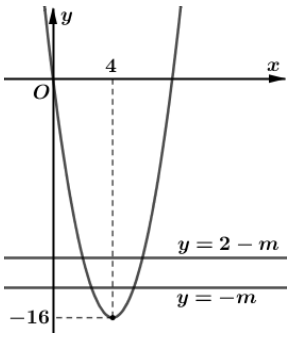
Ta có: $-18<-m \Leftrightarrow m<18$. Vậy có 17 giá trị m nguyên dương.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x^2-2x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(x^2-8x+m\right)$ có 5 điểm cực trị?

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn A



Cách 1: Xét $f'(x)=0\Leftrightarrow(x-1)^2(x^2-2x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\ (\text{nghiem boi 2})\\x=0\\x=2\end{cases}$.

Ta có $g'(x)=2(x-4)f'\left(x^2-8x+m\right)$;

$g'(x)=0\Leftrightarrow 2(x-4)f'\left(x^2-8x+m\right)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\x^2-8x+m=1\ (\text{nghiem boi 2})\\x^2-8x+m=0\quad(1)\\x^2-8x+m=2\quad(2)\end{cases}$. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow g'(x)=0$ có 5 nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow$ mỗi phương trình (1), (2) đều có hai nghiệm phân biệt khác 4. $(*)$

Xét đồ thị (C) của hàm số $y=x^2-8x$ và hai đường thẳng $d_1: y=-m$, $d_2: y=-m+2$ (như hình vẽ).

Khi đó $(*)\Leftrightarrow d_1, d_2$ cắt (C) tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow -m>-16\Leftrightarrow m<16$.

Vậy có 15 giá trị m nguyên dương thỏa.

Cách 2: Đặt $g(x)=f\left(x^2-8x+m\right)$.Ta có $f'(x)=(x-1)^2(x^2-2x)$

$\Rightarrow g'(x)=(2x-8)\left(x^2-8x+m-1\right)^2\left(x^2-8x+m\right)\left(x^2-8x+m-2\right)$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=4 & \\ x^2-8x+m-1 & (1) \\ x^2-8x+m=0 & (2) \\ x^2-8x+m-2=0 & (3) \end{array}\right.$ .Các phương trình $(1),(2),(3)$ không có nghiệm chung từng đôi một và $\left(x^2-8x+m-2\right)^2 \geq 0$ vi $\forall m \in \mathbb{R}$ nên $g(x)$ có 5 cực trị khi và chỉ khi (1) và (2) có hai nghiệm phân biệt và khác $4 \Leftrightarrow \begin{cases} 16-m>0 \\ 16-m-2>0 \\ 16-32+m \neq 0 \\ 16-32+m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<16 \\ m<18 \\ m \neq 16 \\ m \neq 18 \end{cases} \Leftrightarrow m<16.$ Vậy m nguyên dương và $m<16$ nên có 15 giá trị m cần tìm.

Câu 17. (Hàm Rồng) Cho hàm số $f'(x)=(x-2)^2\left(x^2-4x+3\right)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=f\left(x^2-10x+m+9\right)$ có 5 điểm cực trị?

A. 18. **B.** 17 . **C.** 16 . **D.** 15.

Lời giải

Chọn C

Dấu của:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	-	0	+	

Vì $y'=(2x-10).f'\left(x^2-10x+m+9\right)$.

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x^2-10x+m+9=1 \\ x^2-10x+m+9=2(L) \\ x^2-10x+m+9=3 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số đã cho có 5 cực trị $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x^2-10x+m+9=1 \ (1) \\ x^2-10x+m+9=3 \ (2) \end{array}\right.$ có 5 nghiệm phân biệt khác 5.

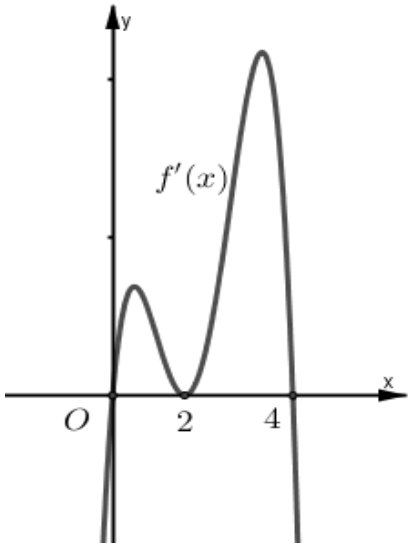
$\Leftrightarrow$ Mỗi pt (1)và (2)có 2 nghiệm phân biệt khác 5.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 25-(m+8)>0 \\ 25-(m+6)>0 \\ m \neq 17 \\ m \neq 19 \end{array}\right. \Leftrightarrow m<17$.

Vậy các giá trị m nguyên dương thõa mãn: $m \in \{1;2;3....;16\}$.

Câu 18. (THPT TX QUẢNG TRỊ LẦN 1 NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(x^2-m\right)$ có ba điểm cực trị?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



A. 4 . **B.** 2 . **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Ta có $y' = 2x.f'\left(x^2 - m\right)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'\left(x^2 - m\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - m = 0 \\ x^2 - m = 2 \\ x^2 - m = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \\ x^2 = m + 2 \\ x^2 = m + 4 \end{array}\right..$$

Từ đồ thị ta thấy

$f'\left(x^2 - m\right) > 0 \Leftrightarrow 0 < x^2 - m < 4 \Leftrightarrow m < x^2 < m + 4$.

$$f'\left(x^2 - m\right) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - m < 0 \\ x^2 - m > 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 < m \\ x^2 > m + 4 \end{array}\right..$$

TH1: Với $m \le -4$.

$y' = 2x.f'\left(x^2 - m\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Suy ra hàm số $y = f\left(x^2 - m\right)$ không thể có ba cực trị.

TH2: Với $-4 < m \le -2$.

$$y' = 2x.f'\left(x^2 - m\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m + 4} \end{array}\right..$$

Bảng xét dấu của $y' = 2x.f'\left(x^2 - m\right)$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

x		$-\sqrt{m+4}$		0		$\sqrt{m+4}$	
$y'=2x.f'\left(x^2-m\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Từ bảng trên suy ra hàm số có 3 cực trị.

TH3: Với $-2<m\le 0$.

$$y'=2x.f'\left(x^2-m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{m+2}\\x=\pm\sqrt{m+4}\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu của $y'=2x.f'\left(x^2-m\right)$

x		$-\sqrt{m+4}$		$-\sqrt{m+2}$		0		$\sqrt{m+2}$		$\sqrt{m+4}$	
$y'=2x.f'\left(x^2-m\right)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Từ bảng trên suy ra hàm số có 3 cực trị.

TH4: Với $m>0$.

$$y'=2x.f'\left(x^2-m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{m}\\x=\pm\sqrt{m+2}\\x=\pm\sqrt{m+4}\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu của $y'=2x.f'\left(x^2-m\right)$.

x		$-\sqrt{m+4}$		$-\sqrt{m+2}$		$-\sqrt{m}$		0		$\sqrt{m}$		$\sqrt{m+2}$		$\sqrt{m+4}$	
y'	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Từ bảng trên suy ra hàm số có 5 cực trị.

Từ các trường hợp trên, hàm số $y=f\left(x^2-m\right)$ có ba cực trị khi $m\in(-4;0]$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-3;-2;-1;0\}$.

Cách 2:

Ta có $y'=2x.f'\left(x^2-m\right)$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'\left(x^2-m\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-m=0\\x^2-m=2\\x^2-m=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m\\x^2=m+2\\x^2=m+4\end{array}\right.$$

Dễ thấy

$x=0$ là nghiệm bội lẻ của phương trình $y'=0 \Rightarrow x=0$ là 1 điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-m\right)$.

$x^2=m+2$ là nghiệm bội chẵn của phương trình $y'=0$.

Mặt khác $m<m+4\ \forall m$ nên hai phương trình $x^2=m$ (1) và $x^2=m+4$ (2) không có nghiệm trùng nhau.

Vậy để hàm số $y=f\left(x^2-m\right)$ có 3 điểm cực trị thì (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 0 đồng thời (1) vô nghiệm hoặc (1) có 1 nghiệm kép bằng 0 $\Rightarrow -4<m\le 0 \Rightarrow m\in\{-3;-2;-1;0\}$.

Câu 19. (THTT lần5) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m không vượt quá 2019 để hàm số $y=\frac{x^2}{8}+\sqrt{x+m+2}$ không có điểm cực trị?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2018. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D=\left[-m-2;+\infty\right)$

Ta có $y'=\frac{x}{4}+\frac{1}{2\sqrt{x+m+2}} \Leftrightarrow y'=\frac{x\sqrt{x+m+2}+2}{4\sqrt{x+m+2}}$

$y'=0 \Leftrightarrow x\sqrt{x+m+2}+2=0 \Leftrightarrow x\sqrt{x+m+2}=-2\ (1)$

Hàm số $y=\frac{x^2}{8}+\sqrt{x+m+2}$ không có điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow (1)$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

Vì m nguyên dương nên $-m-2<0$

Ta có: $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}-m-2<x<0\\ x^2\left(x+m+2\right)=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-m-2<x<0\\ x^3+\left(m+2\right)x^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-m-2<x<0\\ -m-2=x-\frac{4}{x^2}=g\left(x\right)\end{cases}$

$g'\left(x\right)=1+\frac{8}{x^3}=\frac{x^3+8}{x^3}=0\Leftrightarrow x=-2$

x	$-m-2$		-2		0
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$g(-m-2)$	↗	-3	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên của $g\left(x\right)$ suy ra

(1) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow -m-2\ge -3 \Leftrightarrow m\le 1$

Kết hợp với điều kiện m nguyên dương nên suy ra $m=1$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

DANG 6: TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ CHỨA GTTĐ

Trước khi đi vào các bài toán ta cần nhớ những kiến thức sau.

□ Số điểm cực trị của hàm số $|f(x)|$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ và số lần đổi dấu của hàm số $f(x)$.

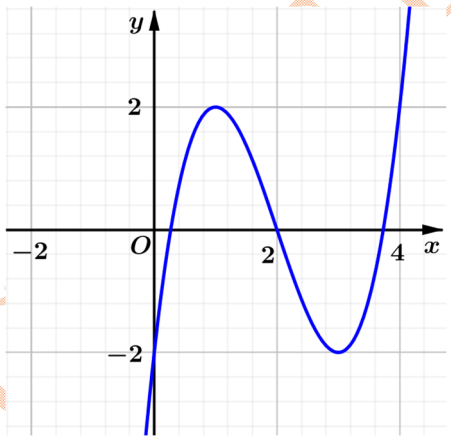
□ Số điểm cực trị của hàm số $f(|mx+n|)$ bằng $2a+1$, trong đó a là số điểm cực trị lớn hơn $-\frac{n}{m}$ của hàm số $f(x)$

□ Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ bằng $2a+1$, trong đó a là số điểm cực trị dương của hàm số.

□ Cho hàm số có dạng $y=|ax^2+bx+c|+mx$, tìm điều kiện của tham số m để giá trị cực tiểu của hàm số đạt giá trị lớn nhất, khi đó ta có $\begin{cases}\max(y_{ct})=c\\ m=-b\end{cases}$

CỰC TRỊ HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI KHÔNG CHỨA THAM SỐ

Câu 1. (Trung-Tâm-Thanh-Tường-Nghệ-An-Lần-2) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y=|f(x)|$ là

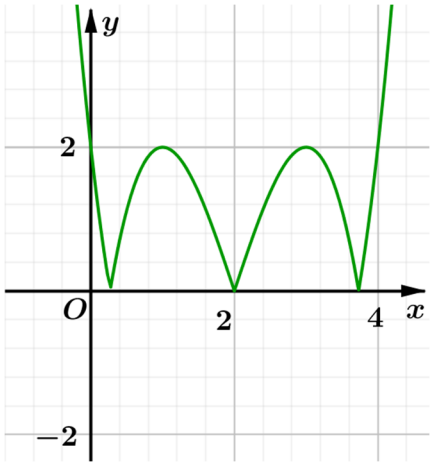


A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ có được bằng cách giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y=f(x)$ nằm phía trên trục Ox hợp với phần đồ thị hàm số $y=f(x)$ nằm phía dưới Ox lấy đối xứng qua Ox. Ta được đồ thị như sau:



Từ đồ thị suy ra hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 2. (Thuận Thành 2 Bắc Ninh) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-1 || -1	↗	3	↘	2

Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f(x)\right|$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Gọi đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ là $\left(C\right)$.

Đặt $g\left(x\right)=\left|f\left(x\right)\right|$ và gọi $\left(C'\right)$ là đồ thị của hàm số $y=g\left(x\right)$. Đồ thị $\left(C'\right)$ được suy ra từ đồ thị $\left(C\right)$ như sau:

+) Giữ nguyên phần đồ thị của $\left(C\right)$ phía trên Ox ta được phần I.

+) Với phần đồ thị của $\left(C\right)$ phía dưới Ox ta lấy đối xứng qua Ox, ta được phần II.

Hợp của phần I và phần II ta được $\left(C'\right)$.

Từ cách suy ra đồ thị của $\left(C'\right)$ từ $\left(C\right)$, kết hợp với bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y=g\left(x\right)=\left|f\left(x\right)\right|$ như sau:

x	$-\infty$		a		-1		b		0		c		1		$+\infty$
$y=\left\|f(x)\right\|$	$+\infty$	↘	0	↗	2	↘	0	↗	1 || 1	↘	0	↗	3	↘	$+\infty$ || 2

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau ?

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$f(-1)$	↘	$f(3)$	↗	$+\infty$

Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\left|f\left(|x|\right)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 5. **B.** 7. **C.** 11. **D.** 13.

Lời giải

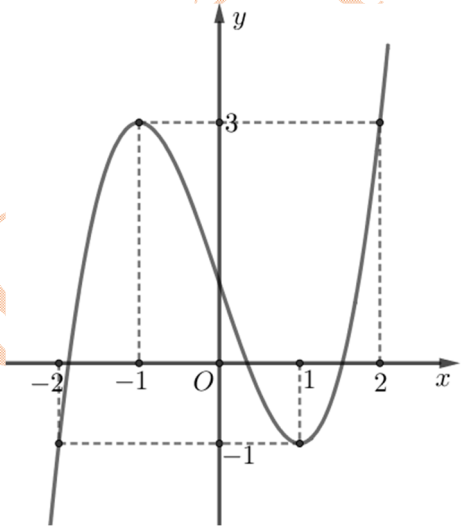
Chọn B

Ta có đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực tiểu nằm bên phải trục tung nên đồ thị hàm số cắt trục hoành tại tối đa 2 điểm có hoành độ dương. Khi đó

- Đồ thị hàm số $f\left(|x|\right)$ cắt trục hoành tối đa 4 điểm.
- Hàm số $f\left(|x|\right)$ có 3 điểm cực trị.

Suy ra hàm số $g(x)=\left|f\left(|x|\right)\right|$ sẽ có tối đa 7 điểm cực trị.

Câu 4. (Chuyên Vinh Lần 3) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y=\left|f\left(|x|\right)\right|$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



A. 6 . **B.** 8 . **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Gọi các nghiệm của phương trình $f(x)=0$ lần lượt là $x_1;x_2;x_3$ trong đó $x_1<0<x_2<1<x_3$.

$$y=\begin{cases} f\left(|x|\right) \text{ khi } f\left(|x|\right)\ge 0 \\ -f\left(|x|\right) \text{ khi } f\left(|x|\right)<0 \end{cases} =\begin{cases} f(x),\forall x\in(0;x_2)\cup(x_3;+\infty) \\ -f(x),\forall x\in(x_2;x_3) \\ f(-x),\forall x\in(-\infty;-x_3)\cup(-x_2;0) \\ -f(-x),\forall x\in(-x_3;-x_2) \end{cases}.$$

$$y'=\begin{cases} f'(x),\forall x\in(0;x_2)\cup(x_3;+\infty) \\ -f'(x),\forall x\in(x_2;x_3) \\ -f'(-x),\forall x\in(-\infty;-x_3)\cup(-x_2;0) \\ f'(-x),\forall x\in(-x_3;-x_2) \end{cases}$$

$y'=0\Leftrightarrow x=\pm 1$

y' không xác định tại $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm x_2 \\ x=\pm x_3 \end{array}\right.$

Khi đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=\left|f\left(|x|\right)\right|$ như sau:

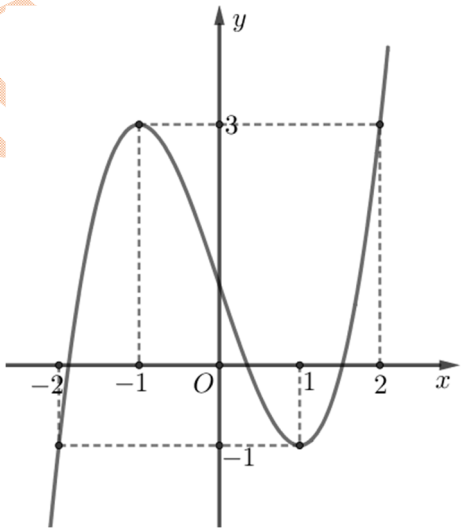
x	$-\infty$		$-x_3$		-1		$-x_2$		0		x_2		1		x_3		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
y		↘		↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Nên hàm số có 7 cực trị.

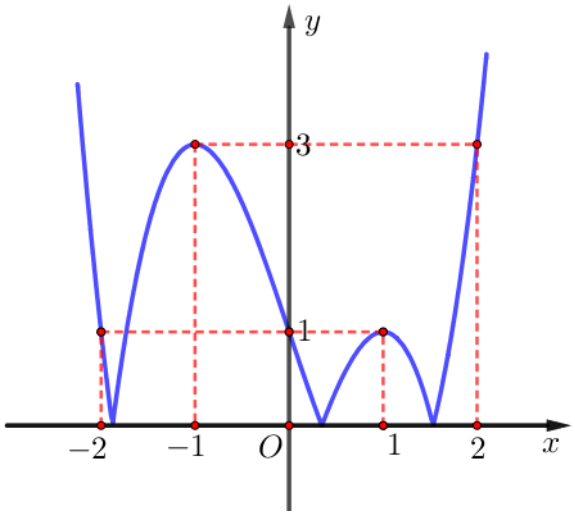
Cách 2:

Hàm số $y=f(x)$ có một cực trị dương là $x=1$ và phương trình $f(x)=0$ có 2 nghiệm dương nên hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có 3 cực trị và phương trình $f\left(|x|\right)=0$ có 4 nghiệm nên hàm số $y=\left|f\left(|x|\right)\right|$ có 7 cực trị.

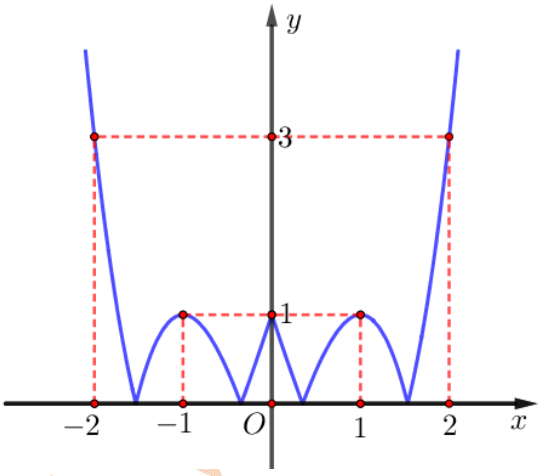
Cách khác: Từ đồ thị của hàm số $y=f(x)$



Ta có đồ thị hàm số $y=\left|f(x)\right|$ là:

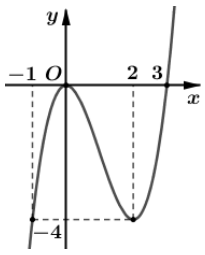


Và đồ thị hàm số $y=\left|f\left(\left|x\right|\right)\right|$ là:



Từ đồ thị suy ra hàm số $y=\left|f\left(\left|x\right|\right)\right|$ có 7 điểm cực trị.

Câu 5. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x\right)+4\right|$ có tổng tung độ của các điểm cực trị bằng ?



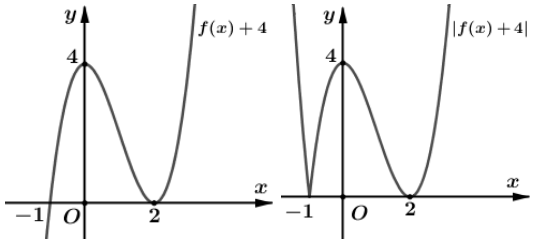
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số $g(x)=\left|f(x)+4\right|$ có được bằng cách

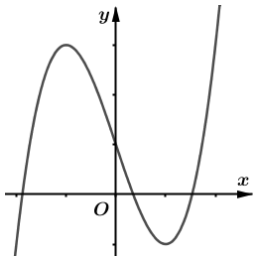
- Tịnh tiến đề thị hàm số $f(x)$ lên trên 4 đơn vị ta được $f(x)+4$.
- Lấy đối xứng phần phía dưới Ox của đồ thị hàm số $f(x)+4$ qua Ox, ta được $\left|f(x)+4\right|$.



Dựa vào đồ thị hàm số $g(x)=\left|f(x)+4\right|$, suy ra tọa độ các điểm cực trị là $(-1;0),\ (0;4),\ (2;0)$

$\longrightarrow$ tổng tung độ các điểm cực trị bằng $0+4+0=4$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $g(x)=f(|x|)+2018$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

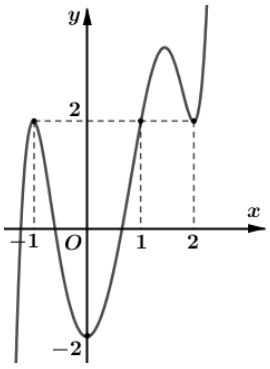
Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta thấy $f'(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm có hoành độ dương (và 1 điểm có hoành độ âm)

$\longrightarrow f(x)$ có 2 điểm cực trị dương

$\longrightarrow f(|x|)$ có 5 điểm cực trị

$\longrightarrow f(|x|)+2018$ có 5 điểm cực trị với mọi m (vì tịnh tiến lên trên hay xuống dưới không ảnh hưởng đến số điểm cực trị của hàm số).

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đồ thị hàm số $g(x)=\left|2f(x)-3\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 4. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Xét $g(x)=2f(x)-3\longrightarrow g'(x)=2f'(x)$;

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=0 \xleftrightarrow{\text{theo đồ thị } f(x)} \begin{bmatrix} x=-1 \\ x=0 \\ x=a \ (1<a<2) \\ x=2 \end{bmatrix}$. Ta tính được $\begin{cases} g(-1)=1 \\ g(0)=-7 \\ g(a)>1 \\ g(2)=1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

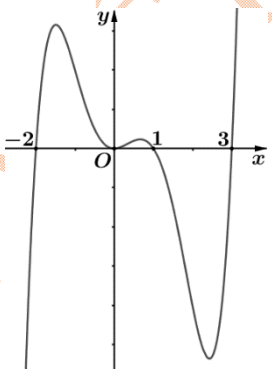
x	$-\infty$	-1		0		a		2	$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
g	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-7	$\nearrow$	$g(a)$	$\searrow$	1	$\nearrow$ $+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra

- Đồ thị hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực trị.
- Đồ thị hàm số $g(x)$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt.

Suy ra đồ thị hàm số $h(x)=|2f(x)-3|$ có 7 điểm cực trị.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đồ thị hàm số $h(x)=f(|x|)+2018$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

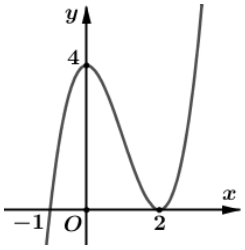
Từ đồ thị ta thấy hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị dương

$\longrightarrow$ hàm số $f(|x|)$ có 5 điểm cực trị

$\longrightarrow$ hàm số $f(|x|)+2018$ có 5 điểm cực trị (vì phép tịnh tiến không làm thay đổi cực trị).

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đồ thị hàm số $g(x)=f(|x|-2)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

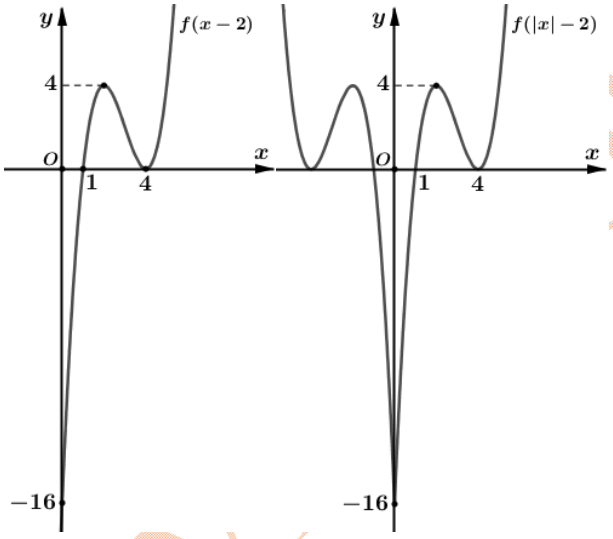


A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Trước tiên ta phải biết rằng, đồ thị hàm số $f(|x|-2)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $f(x)$ bằng cách tịnh tiến sang phải 2 đơn vị rồi mới lấy đối xứng.



Dựa vào đồ thị hàm số $f(|x|-2)$, suy ra hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^4(x-2)^5(x+3)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ là

A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x+1)^4(x-2)^5(x+3)^3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \\ x=-3 \end{array}\right.$.

Do $f'(x)$ chỉ đổi dấu khi x đi qua $x=-3$ và $x=2$ nên hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị $x=-3$ và $x=2$ trong đó chỉ có 1 điểm cực trị dương.

Do $f(|x|)=f(x)$ nếu $x\geq 0$ và $f(|x|)$ là hàm số chẵn nên hàm số $f(|x|)$ có 3 điểm cực trị $x=2,\ x=-2,\ x=0$.

Cách 2: Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ là $2a+1$, trong đó a là số điểm cực trị dương của hàm số $f(x)$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x-2)^4(x^2-4)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(|x|)$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow(x-1)(x-2)^4(x^2-4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\pm2\end{array}\right.$.

Do $f'(x)$ đổi dấu khi x đi qua 3 điểm $x=1$ và $x=\pm2$ nên hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị nhưng có 2 điểm cực trị dương $x=1$ và $x=2$.

Do $f(|x|)=f(x)$ nếu $x\geq0$ và $f(|x|)$ là hàm số chẵn nên hàm số $f(|x|)$ có 5 điểm cực trị đó là $x=\pm1$, $x=\pm2$ và $x=0$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+2)^4(x^2+4)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(|x|)$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow x(x+2)^4(x^2+4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$.

Do $f'(x)$ chỉ đổi dấu khi x đi qua điểm $x=0$ nên hàm số $f(x)$ có 1 điểm cực trị $x=0$.

Do $f(|x|)=f(x)$ nếu $x\geq0$ và $f(|x|)$ là hàm số chẵn nên hàm số $f(|x|)$ có 1 điểm cực trị $x=0$.

Câu 13. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^3(x-2)^5(x+3)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

+ Hàm số $y=f(|x|)$ là hàm chẵn nên đồ thị của hàm số nhận trục tung làm trục đối xứng.

+ Gọi n là số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ trên miền $x>0$. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y=f(|x|)$ là $2n+1$.

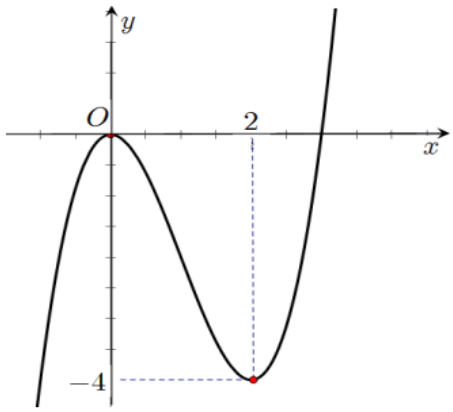
+ Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow(x+1)^3(x-2)^5(x+3)^3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\\x=-3\end{array}\right.$ (nghiệm bội lẻ)

$\Rightarrow$ Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ trên miền $x>0$ là 1.

$\Rightarrow$ Số điểm cực trị của hàm số $y=f(|x|)$ là $2.1+1=3$.

Câu 14. (Thị Xã Quảng Trị) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y=|2f(x)+5|+3$ là

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=\left|2f\left(x\right)+5\right|+3=\sqrt{\left(2f\left(x\right)+5\right)^2}+3$. Khi đó $y'=\dfrac{2\left(2f\left(x\right)+5\right)f'\left(x\right)}{\sqrt{\left(2f\left(x\right)+5\right)^2}}$.

Xét $f'\left(x\right)=0$ dựa vào đồ thị có hai nghiệm $x=0;\ x=2$.

Xét $2f\left(x\right)+5=0\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{-5}{2}$ dựa vào đồ thị có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1<0<x_2<2<x_3$.

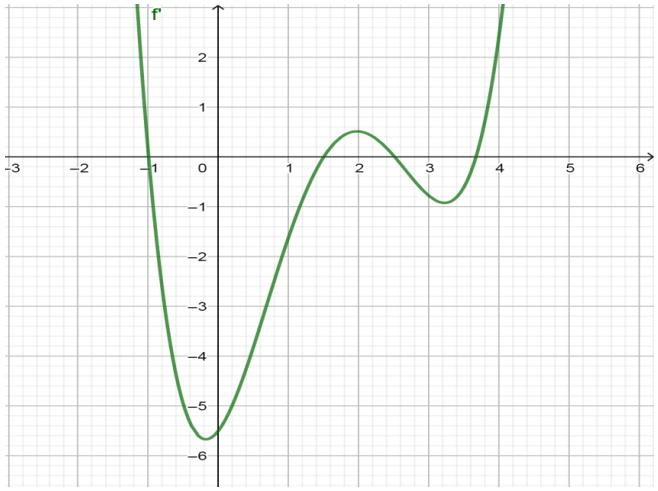
Khi đó hàm số $y=\left|2f\left(x\right)+5\right|+3$ có bảng biến thiên:

	$-\infty$ x_1	0 x_2	2 x_3	$+\infty$
y'	- +	0 - +	0 - +	
y	↘	↗ ↘	↗ ↘	↗

Do đó hàm số $y=\left|2f\left(x\right)+5\right|+3$ có 5 điểm cực trị.

Câu 15. (THPT PHỤ DỰC – THÁI BÌNH) Cho hàm số đa thức $f\left(x\right)=mx^5+nx^4+px^3+qx^2+hx+r$, $\left(m,n,p,q,h,r\in\mathbb{R}\right)$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ (như hình vẽ bên dưới) cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ lần lượt là $-1;\ \dfrac{3}{2};\ \dfrac{5}{2};\ \dfrac{11}{3}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f(x)-(m+n+p+q+h+r)\right|$ là

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Vì $1,\frac{3}{2},\frac{5}{2},\frac{11}{3}$ là nghiệm của phương trình $f'(x)=0$ nên:

$f'(x)=5mx^4+4nx^4+3px^2+2qx+h=5m(x+1)\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{11}{3}\right).$

Suy ra $5mx^4+4nx^4+3px^2+2qx+h=5m\left(x^4-\frac{20}{3}x^3+\frac{43}{4}x^2+\frac{14}{3}x-\frac{55}{4}\right).$

Đồng nhất hệ số, ta được $n=\frac{-25}{3}m;p=\frac{215}{12}m;q=\frac{35}{3}m;h=\frac{-275}{4}m.$

Suy ra $g(x)=\left|f(x)+\frac{93}{2}m-r\right|$

□Xét $h(x)=f(x)+\frac{93}{2}m-r$.

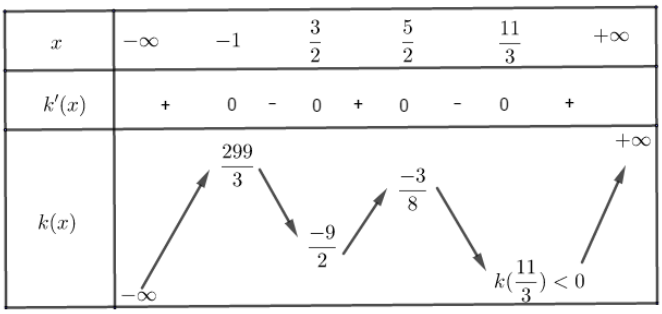
$\Rightarrow h'(x)=f'(x)=0$ có bốn nghiệm phân biệt, nên $h(x)$ có bốn cực trị.

□Xét $h(x)=0\Leftrightarrow mx^5-\frac{25}{4}mx^4+\frac{215}{12}mx^3+\frac{35}{3}mx^2-\frac{274}{4}mx+r=\frac{-93}{2}m+r$

$\Leftrightarrow x^5-\frac{25}{4}x^4+\frac{215}{12}x^3+\frac{35}{3}x^2-\frac{274}{4}x+\frac{93}{2}=0.$

Đặt $k(x)=x^5-\frac{25}{4}x^4+\frac{215}{12}x^3+\frac{35}{3}x^2-\frac{274}{4}x+\frac{93}{2}.$

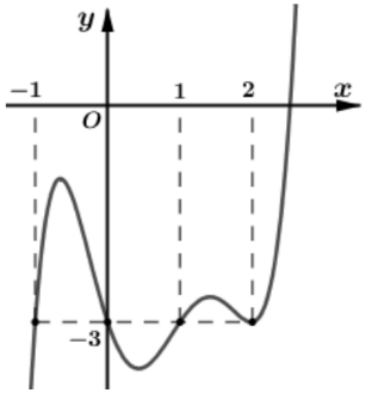
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Từ bảng biến thiên, suy ra phương trình $h(x)=0 \Leftrightarrow k(x)=0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy hàm số $g(x)$ có 7 cực trị.

Câu 16. (KINH MÔN II LẦN 3 NĂM 2019) Cho hàm số đa thức $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(0)<0$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi hàm số $g(x)=|f(x)+3x|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $h(x)=f(x)+3x,\ x\in\mathbb{R}$.

$h'(x)=f'(x)+3,\ x\in\mathbb{R}$.

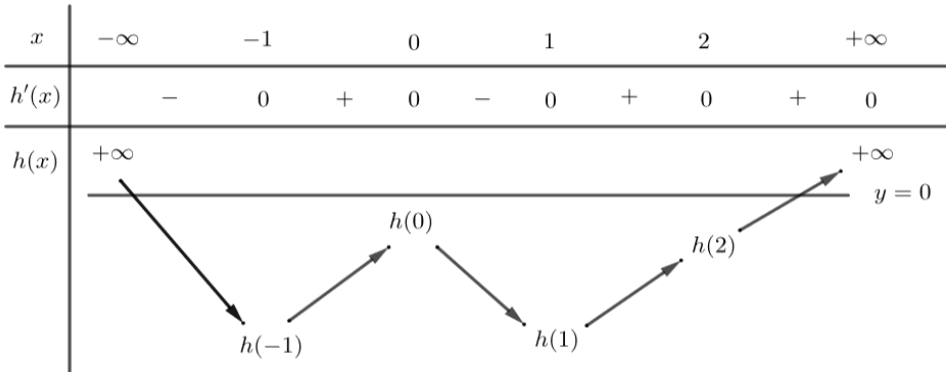
$$h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right. .$$

Với $x=2$ là nghiệm kép vì qua nghiệm $x=2$ thì $h'(x)$ không đổi dấu.

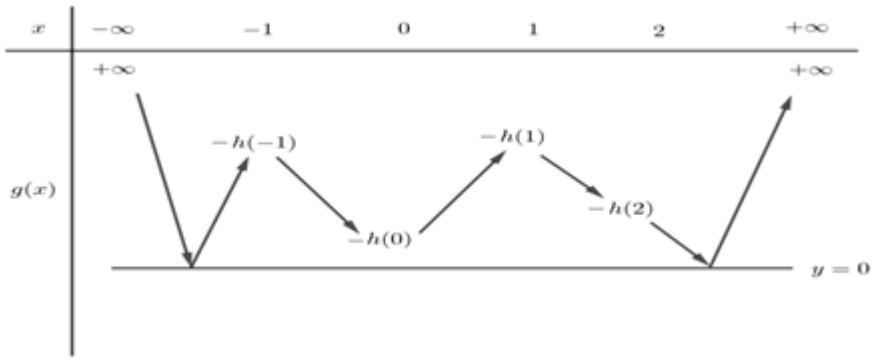
Dựa vào đồ thị hàm số của $f'(x)$, ta có: $\begin{cases} f'(x)<-3 & \forall x\in(-\infty;-1)\cup(0;1) \\ f'(x)>-3 & \forall x\in(-1;0)\cup(1;2)\cup(2;+\infty) \end{cases}$.

Mặt khác $h(0)=f(0)+3.0<0$.

Bảng biến thiên của hàm $h(x)=f(x)+3x$:

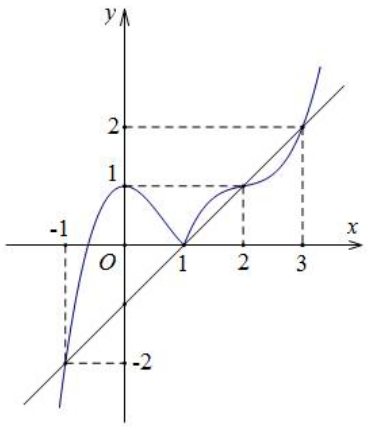


Từ đó ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $g(x)=\left|f(x)+3x\right|=\left|h(x)\right|$:



$\Rightarrow$ Hàm số $g(x)=\left|f(x)+3x\right|=\left|h(x)\right|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 17. (THPT Sơn Tây Hà Nội 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có $f(-3)>8$; $f(4)>\dfrac{9}{2}$; $f(2)<\dfrac{1}{2}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $y=\left|2f(x)-(x-1)^2\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Nhận xét: Số cực trị của hàm số $y=\left|f(x)\right|$ bằng số cực trị của hàm số $y=f(x)$ cộng với số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với trục hoành.

Đặt $g(x)=\left|2f(x)-(x-1)^2\right|, \forall x\in\mathbb{R}$ và $h(x)=2f(x)-(x-1)^2, \forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $h'(x)=2f'(x)-2(x-1)\Rightarrow h'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=x-1$ (*)

Dự vào đồ thị, nghiệm của phương trình (*) là hoành độ giao điểm của đồ thị $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=x-1$, ta có: $(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=2\\x=3\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		2		3		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	$h(-1)$	↗		↗	$h(2)$	↘	$h(3)$	↗	

Ta có:

$h(2)=2f(2)-(2-1)^2<0$ vì $f(2)<\dfrac{1}{2}$

$h(-3)=2f(-3)-(-3-1)^2>0$ vì $f(-3)>8$

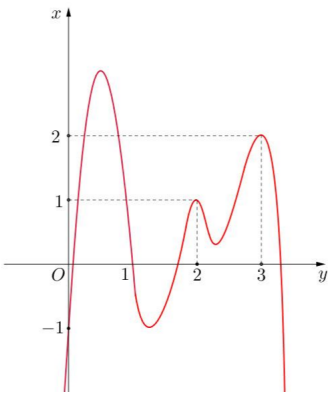
$h(4)=2f(4)-(4-1)^2>0$ vì $f(4)>\dfrac{9}{2}$

Suy ra $h(x)=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt $x_1\in(-3;-1)$ và $x_2\in(3;4)$.

Suy ra $g(x)=\left|h(x)\right|$ có đúng 5 điểm cực trị.

.

Câu 18. (Đặng Thành Nam Đề 9) Cho $f(x)$ là một hàm đa thức và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=\left|2f(x)-(x-1)^2\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 9. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x)=2f(x)-(x-1)^2$.

♦ Tìm số điểm cực trị của $g(x)$

Ta có: $g'(x)=0\Leftrightarrow 2f'(x)-2(x-1)=0\Leftrightarrow f'(x)=x-1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\\x=3\end{array}\right.$.

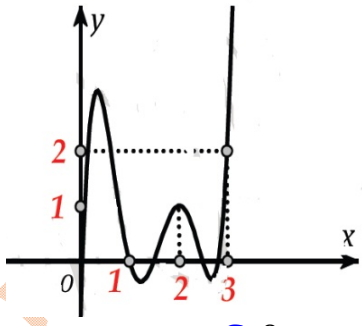
Kẻ đường thẳng $y=x-1$cắt đồ thị $f'(x)$ tại bốn điểm phân biệt có hoành độ $x=0;\ x=1;\ x=2;\ x=3$ trong đó tại các điểm có hoành độ $x=2;\ x=3$ là các điểm tiếp xúc, do đó $g'(x)$ chỉ đổi dấu khi qua các điểm $x=0;\ x=1$. Vì vậy hàm số $g(x)$có hai điểm cực trị $x=0;\ x=1$

♦ Ta tìm số nghiệm của phương trình $g(x)=0$.

Từ bảng biến thiên:
Suy ra phương trình có tối đa ba nghiệm phân biệt.

♦ Vậy hàm số $y=|g(x)|$ có tối đa 2 + 3 = 5 điểm cực trị.

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ và đồ thị hình bên là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi đồ thị của hàm số $g(x)=\left|2f(x)-(x-1)^2\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị ?

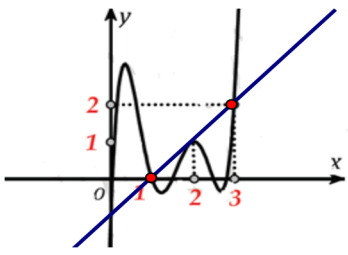


A. 9. **B.** 11. **C.** 8. **D**

Lời giải

Chọn B

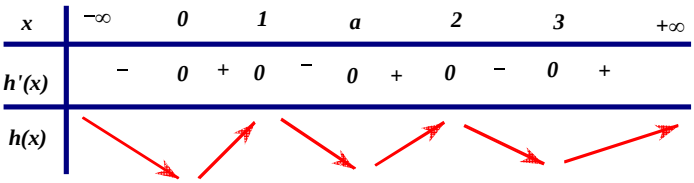
Đặt $h(x)=2f(x)-(x-1)^2\Rightarrow h'(x)=2f'(x)-2(x-1)$. Ta vẽ thêm đường thẳng $y=x-1$.



Ta có $h'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=x-1\Leftrightarrow x=0;x=1;x=2;x=3;x=a\left(a\in(1;2)\right)$

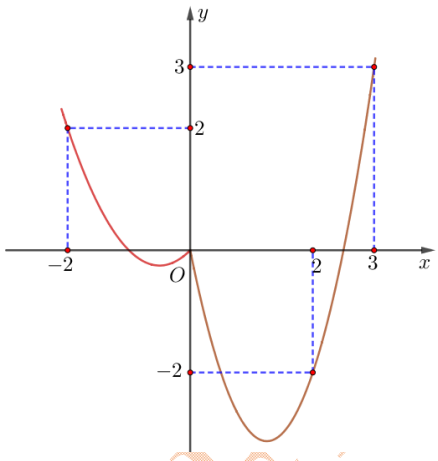
Theo đồ thị $h'(x)>0\Leftrightarrow f'(x)>x-1\Leftrightarrow x\in(0;1)\cup(a;2)\cup(3;+\infty)$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $h(x)$.



Đồ thị hàm số $g(x)$ có nhiều điểm cực trị nhất khi $h(x)$ có nhiều giao điểm với trục hoành nhất, vậy đồ thị hàm số $h(x)$ cắt trục hoành tại nhiều nhất 6 điểm, suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có tối đa 11 điểm cực trị.

Câu 20. (Chuyên Vinh Lần 3) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Hàm số $y=\left|f(x)+\frac{1}{2}x^2-f(0)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị trong khoảng $(-2;3)$?

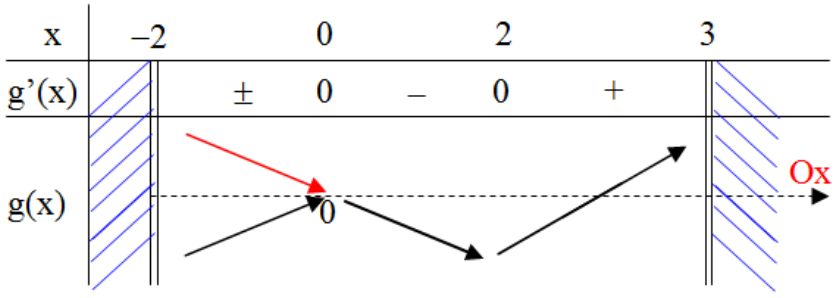


Lời giải

Đặt $g(x)=f(x)+\frac{x^2}{2}-f(0)$

Ta có: $g'(x)=f'(x)+x$, $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2(L)\\x=0\\x=2\end{array}\right.$

(Nhận xét: $x=2$ là nghiệm bội lẻ, $x=0$ có thể nghiệm bội lẻ hoặc nghiệm bội chẵn tuy nhiên không ảnh hưởng đáp số bài toán)



Suy ra hàm số $y=|g(x)|$ có nhiều nhất 3 điểm cực trị trong khoảng $(-2;3)$

Câu 21. (CHUYÊN THÁI BÌNH LẦN V NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ là một hàm đa thức có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^2-|x|\right)$ là

A. 5. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x)=x\left(2-\frac{1}{|x|}\right)f'\left(x^2-|x|\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-|x|=-1 \\ x^2-|x|=1 \\ x=0\ (l) \\ 2-\frac{1}{|x|}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\pm\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

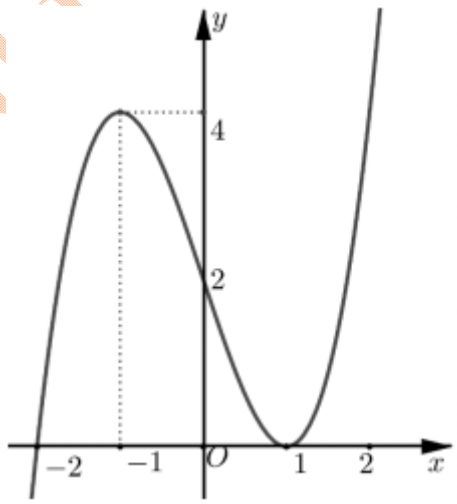
$g'(x)$ không xác định tại $x=0$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 22. (Đặng Thành Nam Đề 17) Cho hàm số $y=f(x)$ là một hàm đa thức có đồ thị như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-2|x|\right)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f\left(x^2-2x\right)$ có $\left[f\left(x^2-2x\right)\right]'=2(x-1)f'\left(x^2-2x\right)$

Cho $\left[f\left(x^2-2x\right)\right]'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ f'\left(x^2-2x\right)=0 \end{array}\right.$

Dựa theo đồ thị hàm số $f(x)$, ta thấy $f(x)$ có 2 cực trị tại $x=-1; x=1$. Do đó

$$f'\left(x^2-2x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x=-1 \\ x^2-2x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-\sqrt{2} \\ x=1+\sqrt{2} \\ x=1 \end{array}\right.$$

+ Với $1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$ thì $0<(x-1)^2<2 \Leftrightarrow -1<x^2-2x<1$. Khi đó, $f'\left(x^2-2x\right)<0$ (theo đồ thị hàm số $f(x)$)

+ Với $x<1-\sqrt{2}$ hay $x>1+\sqrt{2}$ thì $(x-1)^2>2 \Leftrightarrow x^2-2x>1$. Khi đó, $f'\left(x^2-2x\right)>0$ (theo đồ thị hàm số $f(x)$)

Từ đó, ta có bảng xét dấu của $\left[f\left(x^2-2x\right)\right]'$

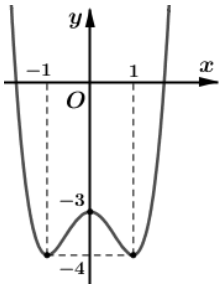
x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$\left[f\left(x^2-2x\right)\right]'$		-	0	+	0	-	0	+	
$f\left(x^2-2x\right)$		↘		↗		↘		↗	

Bảng biến thiên của $y=f\left(x^2-2|x|\right)$ như sau

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-1		0		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$y=f\left(x^2-2\|x\|\right)$		↗		↘		↗		↘		↗		↘	

Vậy hàm số $y=f\left(x^2-2|x|\right)$ có 5 cực trị.

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đồ thị hàm số $g(x)=f(|x-2|)+1$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $g(x)=f(|x-2|)+1$ được suy ra từ đồ thị hàm số $f(x)$ như sau:

Bước 1: Lấy đối xứng qua Oy nhưng vì đồ thị đã đối xứng sẵn nên bước này bỏ qua.

Bước 2: Tịnh tiến đồ thị ở Bước 1 sang phải 2 đơn vị.

Bước 3: Tịnh tiến đồ thị ở Bước 2 lên trên 1 đơn vị.

Vì phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị nên ta không quan tâm đến Bước 2 và Bước 3. Từ nhận xét Bước 1 ta thấy số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x)$ bằng số điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)$ là 3 điểm cực trị.

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\left(x^3-2x^2\right)\left(x^3-2x\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=\left|f(1-2018x)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 9. **B.** 2018. **C.** 2022. **D.** 11.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=x^3(x-2)\left(x^2-2\right)=0$ có 4 nghiệm và đổi dấu 4 lần nên hàm số $y=f(x)$ có 4 cực trị. Suy ra $f(x)=0$ có tối đa 5 điểm phân biệt. Do đó $g(x)=\left|f(1-2018x)\right|$ có tối đa 9 cực trị.

Câu 25. (Chuyên KHTN lần2) Xét các hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\left(x^2-x\right)\left(x^3-3x\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=\left|f(1-2019x)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 9 . **B.** 7 . **C.** 8 . **D.** 6 .

Lời giải

Chọn B

● Nhận xét: Số cực trị của hàm số $y=\left|f(1-2019x)\right|$ bằng tổng số nghiệm của phương trình $f(1-2019x)=0$ và số cực trị (không phải là nghiệm phương trình $f(1-2019x)=0$) của hàm số $y=f(1-2019x)$.

Ta có $f'(x)=x^2(x-1)\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$.

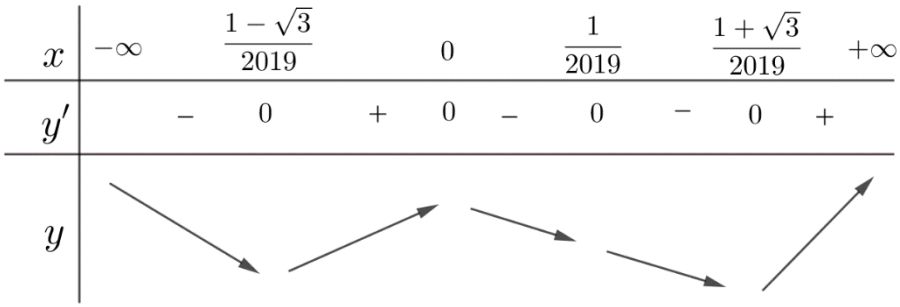
$\left[f(1-2019x)\right]'=-2019f'(1-2019x)$.

Do đó

$\left[f(1-2019x)\right]'=0\Leftrightarrow(1-2019x)^2(1-2019x-1)\left(1-2019x-\sqrt{3}\right)\left(1-2019x+\sqrt{3}\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2019}\\x=0\\x=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2019}\\x=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2019}\end{array}\right.\cdot$$

Bảng biến thiên của $y=f(1-2019x)$



Do đó phương trình $f\left(1-2019x\right)=0$ có tối đa 4 nghiệm và hàm số $y=f\left(1-2019x\right)$ có ba điểm cực trị.

Vậy hàm số $y=\left|f\left(1-2019x\right)\right|$ có tối đa 7 điểm cực trị.

Câu 26. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau.

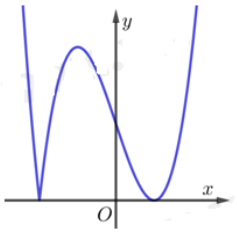
	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	2018	↘	-2018	↗ $+\infty$

Đồ thị h

àm số $y=\left|f\left(x-2017\right)+2018\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 4

Lời giải



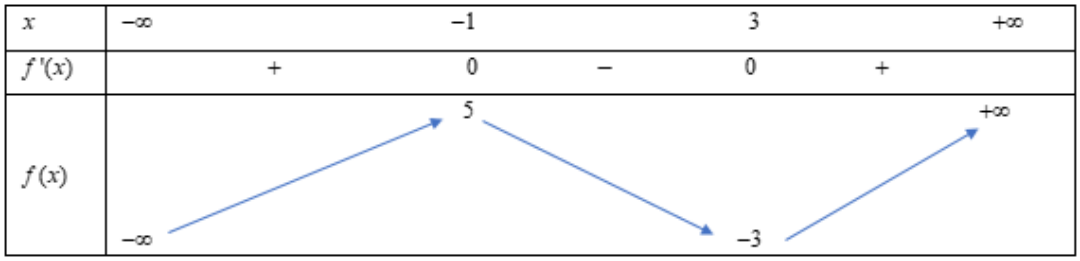
Chọn B

Ta có đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x-2017\right)+2018\right|$ có dạng như bên:

Dễ thấy đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 27. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Phương trình $\left|f(1-3x)+1\right|=3$ có bao nhiêu nghiệm.

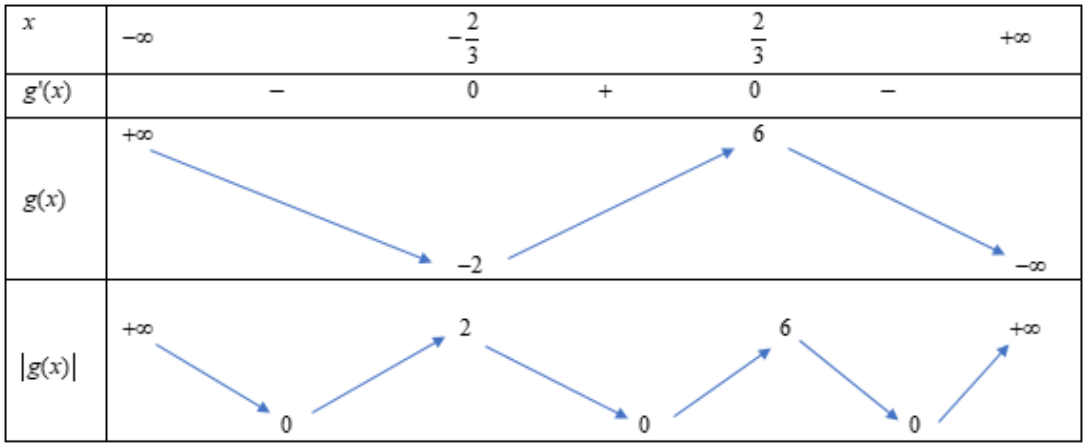
A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

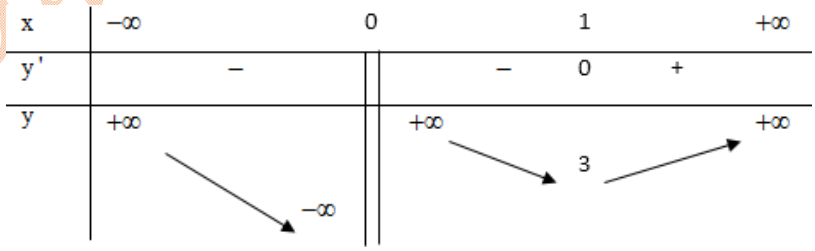
Đặt $g(x)=f(1-3x)+1\Rightarrow g'(x)=-3.f(1-3x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-3x=-1\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3}\\1-3x=3\Leftrightarrow x=-\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$

Bảng biến thiên



Vậy $\left|g(x)\right|=3$ có bốn nghiệm.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathrm{R}\setminus\{0\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $3\left|f(2x-1)\right|-10=0$ là

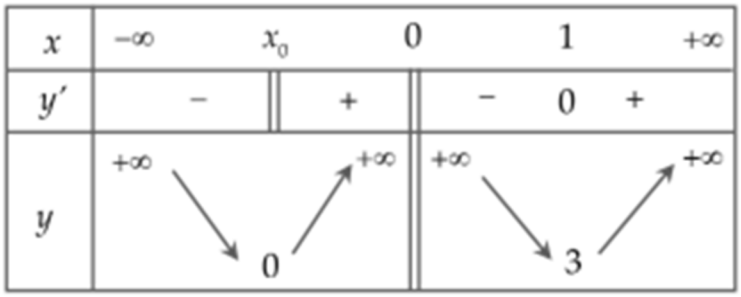


A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

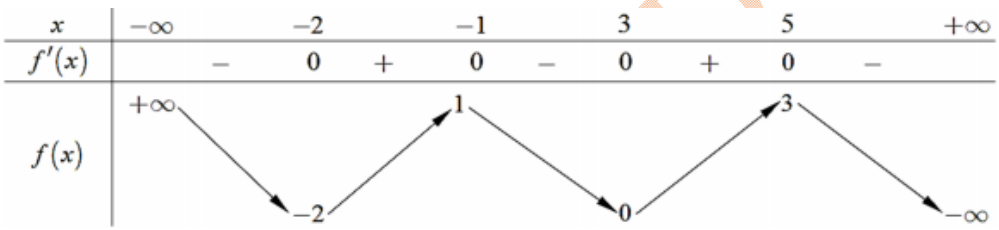
Chọn C

Đặt $t=2x-1$, ta có phương trình trở thành $\left|f\left(t\right)\right|=\frac{10}{3}$. Với mỗi nghiệm của t thì có một nghiệm $x=\frac{t+1}{2}$ nên số nghiệm t của phương trình $\left|f\left(t\right)\right|=\frac{10}{3}$ bằng số nghiệm của $3\left|f\left(2x-1\right)\right|-10=0$. Bảng biến thiên của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ là



Suy ra phương trình $\left|f\left(t\right)\right|=\frac{10}{3}$ có 4 nghiệm phân biệt nên phương trình $3\left|f\left(2x-1\right)\right|-10=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 29. (SỞ PHÚ THỌ LẦN 2 NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ



Xét hàm số $y=g(x)=f\left(\left|x-4\right|\right)+2018^{2019}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng

A. 5. **B.** 1. **C.** 9. **D.** 2.

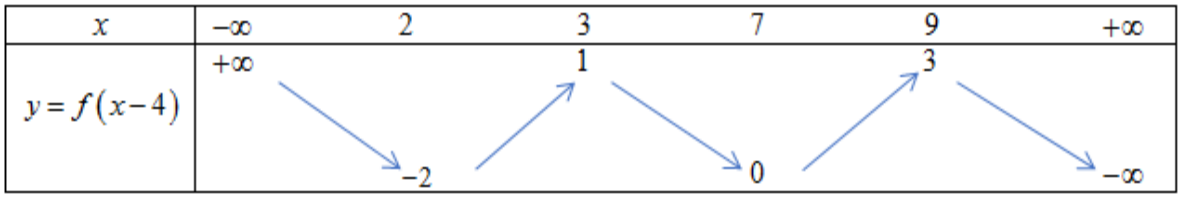
Lời giải

Chọn A

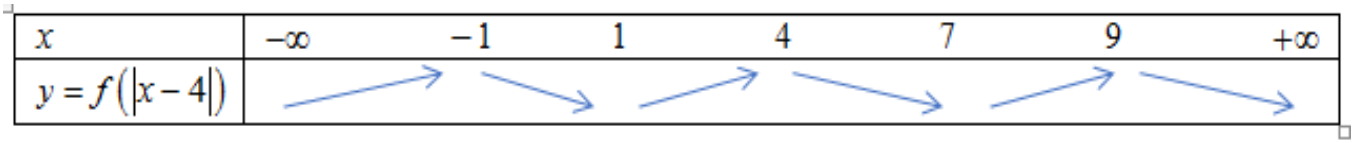
Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=f(x)$.

Khi đó hàm số $y=f\left(x-4\right)$ có đồ thị (C') với (C') là ảnh của (C) qua phép tịnh tiến sang phải 4 đơn vị.

Từ bảng biến thiên của hàm $y=f(x)$ suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x-4\right)$ là :



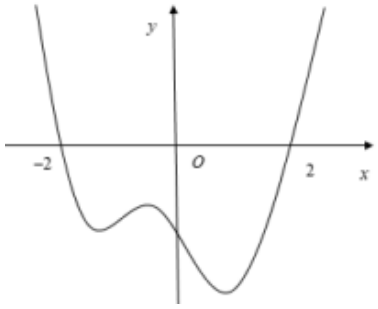
Từ đó suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(\left|x-4\right|\right)$ là



Vậy hàm số $y=f\left(\left|x-4\right|\right)$ cho có 5 cực trị.

Do đó hàm số $y=g(x)=f\left(\left|x-4\right|\right)+2018^{2019}$ có 5 cực trị.

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f(-2)<0$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai** ?



A. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$ có hai cực tiểu.

C. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$ có hai cực đại và một cực tiểu.

D. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

ừ đồ thị của $f'(x)$ ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$			0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(-2)$	↘			$f(2)$	↗	$+\infty$

Từ giả thiết $f(-2)<0$ và $1-x^{2018}\le 1\Rightarrow f\left(1-x^{2018}\right)<0$ với mọi x.

Đặt $t=1-x^{2018}$, ta có $\begin{cases} f_t'(t)<0 \text{ khi } t\in(-2;1)\Leftrightarrow x\in\left(-\sqrt[2018]{3};\ \sqrt[2018]{3}\right) \\ f'(t)>0 \text{ khi } t\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt[2018]{3}\right)\cup\left(\sqrt[2018]{3};+\infty\right) \end{cases}$

Đặt $g(x)=\left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$, ta có $g'(x)=-\dfrac{2018.x^{2017}.f_t'(t).f(t)}{2\sqrt{f^2(t)}}$

Do đó, ta có bảng biến thiên của $y=g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$-\sqrt[2018]{3}$		0		$-\sqrt[2018]{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘		↗		↘		↗	$+\infty$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

DẠNG 6: CỰC TRỊ HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI

CỰC TRỊ HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI CÓ CHỨA THAM SỐ

Câu 31. (Chuyên Hưng Yên Lần 3) Biết phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0\ (a\neq 0)$ có đúng hai nghiệm thực. Hỏi đồ thị hàm số $y=\left|ax^3+bx^2+cx+d\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

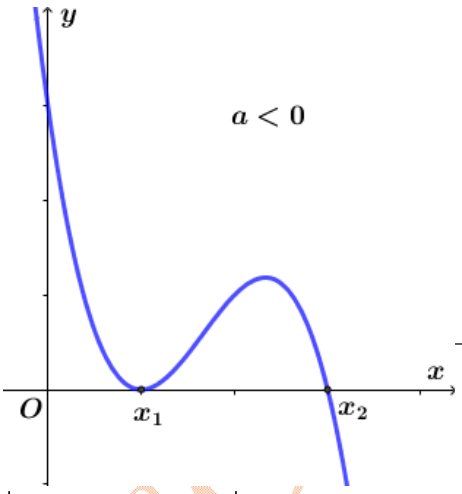
Lời giải

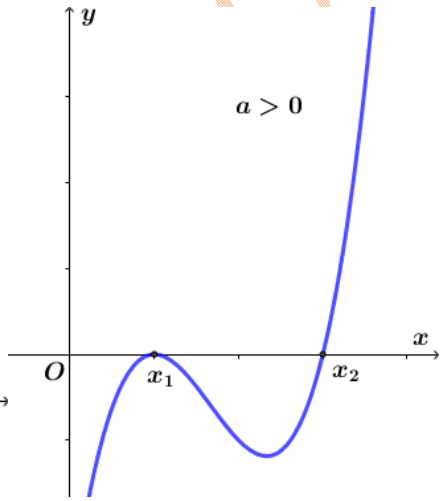
Chọn D

Phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $a\neq 0$ là sự tương giao của đồ thị hàm số $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $a\neq 0$ và trục hoành.

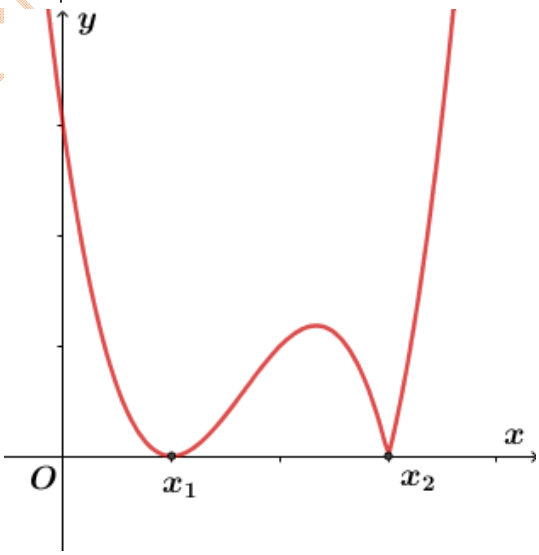
Do phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $a\neq 0$ có đúng hai nghiệm thực nên phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ có thể viết dưới dạng $a(x-x_1)^2(x-x_2)=0$ với x_1, x_2 là hai nghiệm thực của phương trình (giả sử $x_1<x_2$). Khi đó đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ tiếp xúc trục hoành tại điểm có hoành độ x_1 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ x_2.

Đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ ứng với từng trường hợp $a>0$ và $a<0$:





Đồ thị hàm số $y=\left|ax^3+bx^2+cx+d\right|\ (a\neq 0)$ tương ứng là



Vậy đồ thị hàm số $y=\left|ax^3+bx^2+cx+d\right|\ (a\neq 0)$ có tất cả 3 điểm cực trị.

Câu 32. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số

$y=\left|x^3+(2m-1)x^2+\left(2m^2-2m-9\right)x-2m^2+9\right|$ có 5 điểm cực trị.

A. 7. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

$ycbt \Leftrightarrow x^3(2m-1)x^2+\left(2m^2-2m-9\right)x-2m^2+9$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+2mx+2m^2-9\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2+2mx+2m^2-9=0 \end{array}\right.$

Có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \Delta'=m^2-\left(2m^2-9\right)>0 \\ 1+2m+2m^2-9\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -3<m<3 \\ m\neq \dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow m\in\{-2,-1,0,1,2\}$

Câu 33. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=|x|^3-3mx^2+3\left(m^2-4\right)|x|+1$ có đúng 3 điểm cực trị.

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $ycbt \Leftrightarrow y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-4\right)x+1$ có đúng một điểm cực trị dương

$\Leftrightarrow y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6mx+3\left(m^2-4\right)=0 \Leftrightarrow x=m-2; x=m+2$ có đúng một nghiệm dương

$\Leftrightarrow m-2\le 0<m+2 \Leftrightarrow -2<m\le 2 \Rightarrow m\in\{-1,0,1,2\}$.

Chọn D

Câu 34. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=|x|^3-3mx^2+3\left(m^2-4\right)|x|+1$ có đúng 5 điểm cực trị.

A. 3. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 7.

Lời giải

Ta có $ycbt \Leftrightarrow y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-4\right)x+1$ có hai điểm cực trị dương

$\Leftrightarrow y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6mx+3\left(m^2-4\right)=0 \Leftrightarrow x=m-2; x=m+2$ có hai nghiệm dương

$\Leftrightarrow m-2>0 \Rightarrow m\in\{3,...,9\}$.

Chọn D

Câu 35. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\left|3x^5-15x^3-60x+m\right|$ có 5 điểm cực trị.

A. 289. **B.** 287. **C.** 286. **D.** 288.

Lời giải

Xét $y=3x^5-15x^3-60x$ có $y'=0 \Leftrightarrow 15x^4-45x^2-60=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$

Vậy hàm số $y=3x^5-15x^3-60x$ có đúng 2 điểm cực trị $x=2; x=-2$

Bảng biến thiên

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vậy để hàm số có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow 3x^5-15x^3-60x+m=0\Leftrightarrow -m=3x^5-15x^3-60x$ có tổng số nghiệm đơn và bội lẻ bằng 3, tức $-144<-m<144\Leftrightarrow -144<m<144\Rightarrow m\in\{-143,..,143\}$. Có 287 số nguyên thỏa mãn.

Chọn B

Câu 36.Có tất cả bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2017;2017]$ để hàm số $y=|x^3-3x^2+m|$ có 3 điểm cực trị?

A. 4032. **B.** 4034. **C.** 4030. **D.** 4028.

Lời giải

Ta có $y=x^3-3x^2+m$ có $y'=3x^2-6x;y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.\Rightarrow y(0)=m,y(2)=m-4$

Yêu cầu đề bài tương đương với $y(0).y(2)\ge 0\Leftrightarrow m(m-4)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 4\\m\le 0\end{array}\right.$

Do đó $m\in\{-2017,...,2017\}$ có $2018+2014=4032$ số nguyên thỏa mãn.

Chọn A

Câu 37.Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=|x^3-3x^2+m|$ có 5 điểm cực trị.

A. $-4<m<0$. **B.** $-4\le m\le 0$. **C.** $0<m<4$. **D.** $m\ge 4$ hoặc $m\le 0$.

Lời giải

Ta có $y=x^3-3x^2+m$ có $y'=3x^2-6x;y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.\Rightarrow y(0)=m,y(2)=m-4$

Yêu cầu đề bài tương đương với $y(0).y(2)\ge 0\Leftrightarrow m(m-4)<0\Leftrightarrow 0<m<4$

Chọn C

Câu 38. Cho hàm số $y=|x|^3-mx+5$. Gọi a là số điểm cực trị của hàm số đã cho. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a=0$. **B.** $a\le 1$. **C.** $1<a\le 3$. **D.** $a>3$.

Lời giải

Ta có $y=\left[\begin{array}{l}x^3-mx+5(x\ge 0)\\-x^3-mx+5(x<0)\end{array}\right.\Leftrightarrow y'=\left[\begin{array}{l}3x^2-m(x>0)\\-3x^2-m(x<0)\end{array}\right.$ và hàm số không có đạo hàm tại điểm $x=0$

Nếu $m=0\Rightarrow y'=\left\{\begin{array}{l}3x^2>0(x>0)\\-3x^2<0(x<0)\end{array}\right.$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua điểm $x=0$ nê hàm số có duy nhất 1 điểm cực trị là $x=0$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Nếu $m>0\Rightarrow y'=\begin{cases}3x^2-m(x>0)\\-3x^2-m<0(x<0)\end{cases}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{m}{3}}$ chỉ đổi dấu khi đi qua $x=\sqrt{\frac{m}{3}}$ nên có duy nhất 1 điểm cực trị là $x=\sqrt{\frac{m}{3}}$

Nếu $m<0\Rightarrow y'=\begin{cases}3x^2-m>0(x>0)\\-3x^2-m(x<0)\end{cases}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{m}{3}}$

Chỉ đổi dấu khi đi qua $x=-\sqrt{\frac{-m}{3}}$ nên có duy nhất 1 điểm cực trị là $x=-\sqrt{\frac{-m}{3}}$

Vậy với mọi m hàm số có duy nhất 1 điểm cực trị

Chọn B

Câu 39. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=|x|^3-(2m+1)x^2+3m|x|-5$ có 5 điểm cực trị.

A. $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$. **B.** $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$.

Lời giải

yêu cầu bài toán tương đương hàm số $y=x^3-(2m+1)x^2+3mx-5$ có 2 điểm cực trị dương, tức $3x^2-2(2m+1)x+3m=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt, tức

$$\begin{cases}\Delta'=(2m+1)^2-9m>0.\\S=\frac{2(2m+1)}{3}>0\\P=\frac{3m}{3}>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>1\\0<m<\frac{1}{4}\end{array}\right.$$

Chọn D

Câu 40. Cho hàm số $f(x)=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$. Tìm tập hợp giá trị thực của tham số m để hàm số $y=f(|x|)$ có năm điểm cực trị.

A. $-\frac{5}{4}<m<2$. **B.** $\frac{5}{4}<m<2$. **C.** $\frac{1}{2}<m<2$. **D.** $-2<m<\frac{5}{4}$.

Lời giải

Ta có $5=2a+1\Leftrightarrow a=2$ là số điểm cực trị dương của hàm số $y=f(x)$

Ta có $f'(x)=3x^2-2(2m-1)x+2-m \Rightarrow \begin{cases} \Delta'=(2m-1)^2-3(2-m)>0 \\ S=\dfrac{2(2m-1)}{3}>0 \\ P=\dfrac{2-m}{3}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{5}{4}<m<2.$

Chọn B

Câu 41.Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=|x|^3-(2m+1)x^2+3m|x|-5$ có 3 điểm cực trị.

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $\left[0;\dfrac{1}{4}\right)$.

Lời giải

xét $f(x)=x^3-(2m+1)x^2+3mx-5$ và $f|(x)|=|x|^3-(2m+1)x^2+3m|x|-5$

ta có $3=2a+1 \Leftrightarrow a=1$ là số điểm cực trị dương của hàm số $y=f(x)$

vậy yêu cầu tương đương với: $f(x)$ có đúng 1 điểm cực trị dương $\Leftrightarrow f'(x)=0$ có 2 nghiệm thỏa mãn $x_1 \le 0<x_2 \Leftrightarrow m \le 0$

Câu 42. Cho hàm số $f(x)=x^3-(2m+1)x^2+(m+2)x+1$. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-5;5]$ để hàm số $y=f(|x|)$ có đúng ba điểm cực trị.

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Hàm số $y=f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y=f(x)$ có đúng một điểm cực trị dương. Điều này tương đương với $f'(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=3x^2-2(2m+1)x+m+2=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1<x_2$ thỏa mãn $x_1 \le 0<x_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3.g(0)<0 \\ \begin{cases} g(0)=0 \\ S>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3(m+2)<0 \\ \begin{cases} m+2=0 \\ \dfrac{2(2m+1)}{3}>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m<-2$

Vậy $m \in \{-5,-4,-3\}$ có 3 số nguyên thỏa mãn.

Chọn D

Câu 43. Cho hàm số $f(x)=x^3-(2m+1)x^2+(m+2)x+1$. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-5;5]$ để hàm số $y=f(|x|)$ có năm điểm cực trị.

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có đúng 5 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y=f\left(x\right)$ có hai điểm cực trị dương. Điều này tương đương với $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow g\left(x\right)=3x^2-2\left(2m+1\right)x+m+2=0$ có hai nghiệm phân biệt

$$x_1<x_2 \text{ thỏa mãn } 0<x_1<x_2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3.g(0)>0\\ \Delta'>0\\ S>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3(m+2)>0\\ (2m+1)^2-3(m+2)>0\Leftrightarrow m>1\\ \dfrac{2(2m+1)}{3}>0\end{array}\right.$$

Vậy $m\in\{2,3,4,5\}$ có 4 số nguyên thỏa mãn.

Chọn A

Câu 44. Có bao nhiêu số nguyên $m<10$ để hàm số $y=\left|x^3-mx+1\right|$ có 5 điểm cực trị.

A. 9. **B.** 7. **C.** 11. **D.** 8.

Lời giải

yêu cầu bài tóan tương đương hàm số $f\left(x\right)=x^3-mx+1$ có hai điểm cực trị và phương trình $f\left(x\right)=0$ có ba nghiệm thực phân biệt ta có

$$f'\left(x\right)=3x^2-m;\ f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{m}{3}}\left(m>0\right).\text{ và }f\left(\sqrt{\frac{m}{3}}\right)=\frac{9-2\sqrt{3m^3}}{9};f\left(-\sqrt{\frac{m}{3}}\right)=\frac{9+2\sqrt{3m^3}}{9}$$

khi đó điều kiện để có 3 nghiệm phân biệt là $f\left(\sqrt{\frac{m}{3}}\right).f\left(-\sqrt{\frac{m}{3}}\right)<0\Leftrightarrow 81-12m^3<0\Leftrightarrow m>\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$

Chọn D

chú ý các em có thể đưa về xét hàm số $m=x^2+\frac{1}{x}$. cho kết quả tương tự

Câu 45. Có bao nhiêu số nguyên $m\in\left[-10;10\right]$ để hàm số

$y=\left|mx^3-3mx^2+\left(3m-2\right)x+2-m\right|$ có 5 điểm cực trị.

A. 7. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 11.

Lời giải

Yêu cầu đề bài tương đương phương trình

$mx^3-3mx^2+\left(3m-2\right)x+2-m=0\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(mx^2-2mx+m-2\right)=0$ có ba nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\neq 0\\ \Delta'=m^2-m(m-2)>0\Leftrightarrow m>0\Rightarrow m\in\{1,2,...,10\}\text{ có tất cả 10 giá trị}\\ m-2m+m-2\neq 0\end{array}\right.$$

Chọn B

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 46. (Lê Xoay lần1) Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=|x|^3-(2m+1)x^2+3m|x|-5$ có 3 điểm cực trị.

A. $(1;+\infty)$. **B.** $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x)=x^3-(2m+1)x^2+3mx-5$, có $f'(x)=3x^2-2(2m+1)x+3m$.

Hàm số $y=f(|x|)=|x|^3-(2m+1)x^2+3m|x|-5$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1\le 0<x_2 \Leftrightarrow$ phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1\le 0<x_2$.

Ta có phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1\le 0<x_2$ thì

$$\begin{cases}\Delta>0\\ P\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4m^2-5m+1>0\\ m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>1\vee m<\frac{1}{4}\\ m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow m\le 0.$$

Thử lại: +) với $m<0$ thì phương trình $f'(x)=3x^2-2(2m+1)x+3m$ có hai nghiệm $x_1<0<x_2$ (thỏa mãn).

+) với $m=0$ thì $f'(x)=3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Vậy $m\in(-\infty;0]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 47. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-9$. Tìm m để đồ thị hàm số $y=|f(x)+m|$ có ba điểm **cực tiểu**.

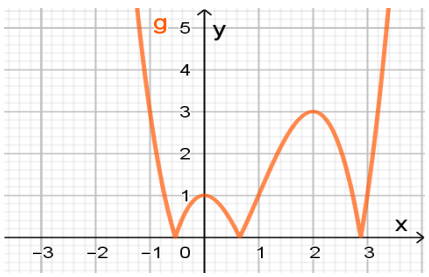
A. $m<5$. **B.** $5<m<9$. **C.** $5\le m<9$. **D.** $5<m\le 9$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $F(x)=f(x)+m$. Đặt $\begin{cases}y_{ct}=-5+m\\ y_{cd}=-9+m\end{cases}$. Xét hàm số $y=|F(x)|=\begin{cases}F(x) & khi\ F(x)\ge 0\\ -F(x) & khi\ F(x)<0\end{cases}$

Để hàm số có 3 điểm cực tiểu $\begin{cases}y_{cd}>0\\ y_{ct}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-5+m>0\\ -9+m<0\end{cases}\Leftrightarrow 5<m<9$ (Minh họa đồ thị bên dưới)



Vậy khoản

g cách lớn nhất là $OA=\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x)=\left|x^3+3x^2-3+m\right|$ có ba điểm cực trị.

A. $m=3$ hoặc $m=-1$.

B. $m\ge 1$ hoặc $m\le -3$.

C. $1\le m\le 3$.

D. $m\ge 3$ hoặc $m\le -1$.

Lời giải

Chọn D

Nhận xét: Dùng phép biến đổi đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối và nhận xét hình dạng đồ thị thông qua bảng biến thiên để kết luận về cực trị hàm số.

Phân tích: Xét hàm số $y=g(x)=x^3+3x^2-3+m$ trên $\mathbb{R}$. Hệ số $a=1>0$.

Hàm số có $y'=g'(x)=3x^2+6x$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$. Hàm số $y=g(x)$ luôn có hai cực trị.

Nếu $g(x)=0$ có 3 nghiệm hay trục hoành giao với đồ thị hàm số tại ba điểm phân biệt thì hàm số $y=\left|g(x)\right|$ có năm cực trị.

Nếu $g(x)=0$ có một hoặc hai nghiệm thì hàm số $y=\left|g(x)\right|$ sẽ có ba cực trị.

Điều kiện: $g(x_{cd}).g(x_{ct})\ge 0\Leftrightarrow g(0).g(-2)\ge 0$ hay $(-3+m)(1+m)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 3\\m\le -1\end{array}\right.$.

Câu 49. (Nguyễn Đình Chiểu Tiền Giang) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|x^3-3x^2-m\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 3.

B. 6.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Đặt $f(x)=x^3-3x^2-m$. Ta có $f'(x)=3x^2-6x$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-m$	↘	$-m-4$	↗	$+\infty$

Suy ra hàm số $y=f(x)$ có 2 điểm cực trị. Do đó hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Từ bảng biến thiên ta có điều kiện cần tìm là $-m-4<0<-m\Leftrightarrow -4<m<0$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 50. Cho hàm số $f(x)=mx^3-3mx^2+(3m-2)x+2-m$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để hàm số $g(x)=|f(x)|$ có **đúng** 5 điểm cực trị ?

A. 7. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Để $g(x)=|f(x)|$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt. $(*)$

Xét $f(x)=0\Leftrightarrow(x-1)(mx^2-2mx+m-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ mx^2-2mx+m-2=0\quad(1)\end{array}\right.$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác $1\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ \Delta'=m^2-m(m-2)>0\\ f(1)=-2\neq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow m>0\xrightarrow[m\in[-10;10]]{m\in\mathbb{Z}}m\in\{1;\ 2;\ 3;\ ...;\ 10\}$.

Cách 2: Hàm số $y=|mx^3-3mx^2+(3m-2)x+2-m|$ có 5 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y=mx^3-3mx^2+(3m-2)x+2-m$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $mx^3-3mx^2+(3m-2)x+2-m=0$ (1) có 3 nghiệm phân biệt.

Ta có $(1)\Leftrightarrow(x-1)(mx^2-2mx+m-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ f(x)=mx^2-2mx+m-2=0\,(2)\end{array}\right.$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ \Delta'=m^2-m(m-2)>0\\ f(1)=-2\neq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow m>0$. Vì m nguyên và $m\in[-10;10]$, nên $m\in\{1,2,3,...,10\}$. Vậy có 10 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 51. (CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU ĐỒNG THÁP 2019 LẦN 2) Các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}|x|^3-mx^2+(m+6)|x|+2019$ có 5 điểm cực trị là

A. $m<-2$. **B.** $-2<m<0$. **C.** $0<m<3$. **D.** $m>3$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số: $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+6)x+2019$.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=x^2-2mx+(m+6)$.

Để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}|x|^3-mx^2+(m+6)|x|+2019$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+6)x+2019$ có 2 điểm cực trị nằm bên phải trục tung

$\Rightarrow$ phương trình $y'=x^2-2mx+(m+6)=0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-m-6>0\\ 2m>0\\ m+6>0\end{cases}\Leftrightarrow m>3$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 52. (Chuyên Bắc Giang) Cho hàm số $f(x)=(m-1)x^3-5x^2+(m+3)x+3$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị ?

A. 1. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$f'(x)=3(m-1)x^2-10x+(m+3)$.

* Trường hợp 1: $m=1$.

Lúc đó $f'(x)=-10x+4$. Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{5}$. Suy ra hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực trị dương.

Suy ra hàm số $y=f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị.

* Trường hợp 2: $m\neq 1$.

Lúc này hàm số $y=f(x)$ là hàm bậc ba. Hàm số $y=f(|x|)$ có đúng ba điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thoả mãn $x_1<0<x_2$ hoặc $x_1=0<x_2$.

□Phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow (m-1).(m+3)<0\Leftrightarrow -3<m<1$.

□Phương trình $f'(x)=0$ có nghiệm $x_1=0<x_2$

$\Leftrightarrow\begin{cases}P=0\\S>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m+3=0\\\frac{10}{3(m-1)}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-3\\m>1\end{cases}$. Hệ phương trình này vô nghiệm.

Kết hợp các trường hợp, ta có $-3<m\leq 1$. Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m để hàm số $y=f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị.

Câu 53. (Hải Hậu Lần1) Gọi S là tập giá trị nguyên $m\in[0;100]$ để hàm số $y=|x^3-3mx^2+4m^3-12m-8|$ có 5 cực trị. Tính tổng các phần tử của S.

A. 10096. **B.** 10094. **C.** 4048. **D.** 5047.

Lời giải

Chọn D

Để hàm số $y=|x^3-3mx^2+4m^3-12m-8|$ có 5 cực trị khi và chỉ khi hàm số

$y=x^3-3mx^2+4m^3-12m-8$ có 2 cực trị nằm về hai phía đối với trục Ox

Xét hàm số: $y=f(x)=x^3-3mx^2+4m^3-12m-8$

Có: $y'=3x^2-6mx=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=4m^3-12m-8\\x=2m\Rightarrow y=-12m-8\end{array}\right.$

Hai cực trị của hàm số $y=f(x)$ là: $A(0;4m^3-12m-8),B(2m;-12m-8)$

Để hai cực trị nằm về hai phía đối với trục Ox khi và chỉ

khi $(4m^3-12m-8)(-12m-8)<0\Leftrightarrow m\in(-\infty;-1)\cup\left(-1;-\frac{2}{3}\right)\cup(2;+\infty)$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Mà: $m \in [0;100] \Rightarrow m \in \{3;4;5;6;...;100\}$

Vậy tổng các giá trị của m là: $\frac{(3+100)98}{2} = 5047$.

Câu 54. [THPT Hoàng Hoa Thám, Hưng Yên, lần 1, năm 2018]

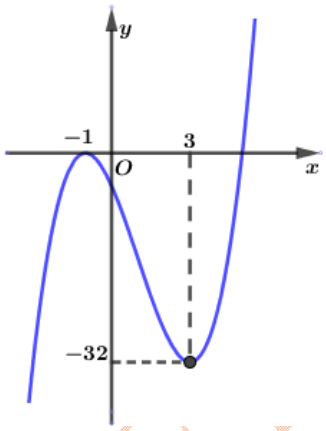
Tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left|x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2}\right|$ có 5 điểm cực trị là

A. 2016. **B.** 1952. **C.** –2016. **D.** –496.

Lời giải

Chọn A

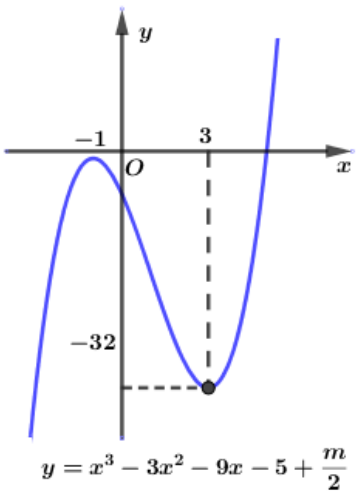
Xét đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$.

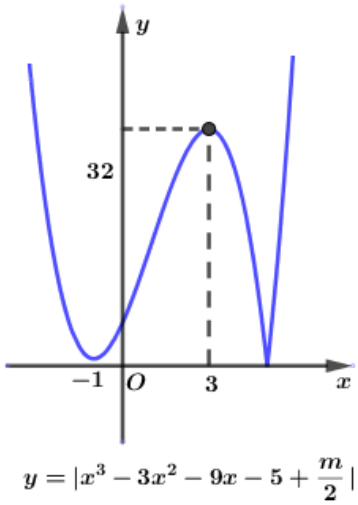


Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2}$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$ lên trên $\frac{m}{2}$ đơn vị nếu $m > 0$ hoặc tịnh tiến xuống dưới $-\frac{m}{2}$ đơn vị nếu $m < 0$.

Có 3 trường hợp:

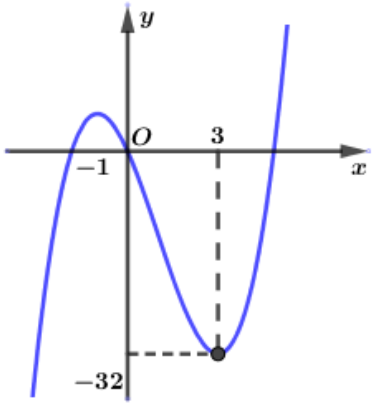
TH1. $m \le 0$, ta có đồ thị như sau



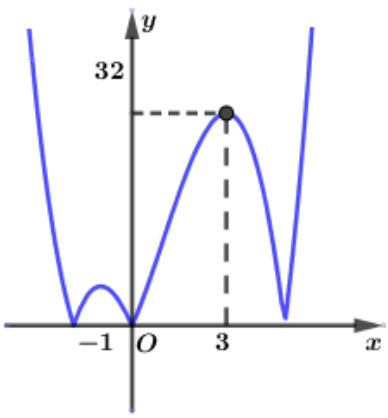


Hàm số $y = \left|x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2}\right|$ có ba cực trị. Không thỏa yêu cầu bài toán.

TH2. $0 < \frac{m}{2} < 32$, ta có đồ thị như sau



$y = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2}$



$y = |x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2}|$

Hàm số $y = \left|x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2}\right|$ có năm cực trị. Thỏa yêu cầu bài toán.

TH3. $\frac{m}{2} \geq 32$, ta có đồ thị như sau

Hàm số $y = \left|x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2}\right|$ có ba cực trị. Không thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy tất cả các giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ 0 < \frac{m}{2} < 32 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \{1, 2, ...63\}$.

Vậy tổng các giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là 2016.

Câu 55. (Đặng Thành Nam Đề 3) Xét các số thực $c > b > a > 0$. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ. Đặt $g(x) = f\left(\left|x^3\right|\right)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = g(x)$ là

x	$-\infty$		0		a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

A. 3. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số: $h(x) = f\left(x^3\right)$.

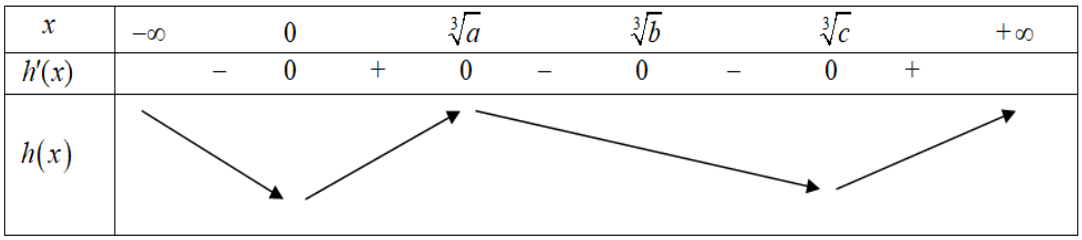
Ta có $h'(x) = 3x^2 . f'\left(x^3\right)$.

Dựa vào bảng xét dấu của đạo hàm ta có: $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^3 = a \\ x^3 = b \\ x^3 = c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{a} \\ x = \sqrt[3]{b} \\ x = \sqrt[3]{c} \end{array}\right.$.

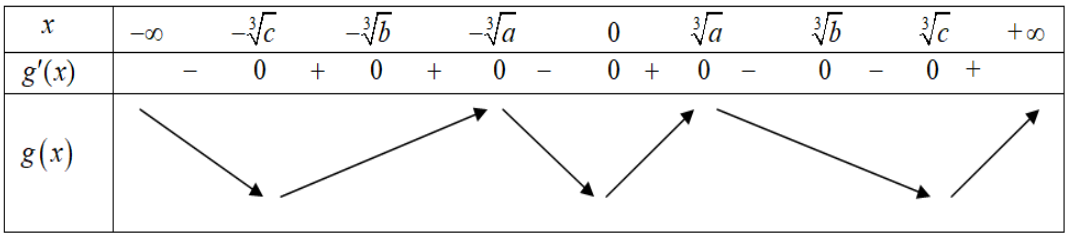
Ta thấy, dấu của hàm số $h'(x)$ chính là dấu của hàm số $f'\left(x^3\right)$ (vì $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$).

Mặt khác hàm số $y=x^3$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên dấu của hàm số $f'\left(x^3\right)$ trên mỗi khoảng $(m;n)$ chính là dấu của hàm số $f'(x)$ trên mỗi khoảng $\left(m^3;n^3\right)$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$:



Chú ý rằng $g(x)=\begin{cases}h(x) & \text{khi } x\geq 0\\ h(-x) & \text{khi } x<0\end{cases}$. Do đó từ bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ ta suy ra được bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau:



Vậy số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)$ là 5.

Câu 56. Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3+ax^2+bx+c$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $\begin{cases}-8+4a-2b+c>0\\ 8+4a+2b+c<0\end{cases}$. Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ bằng

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 5

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=f\left(x\right)$ (là hàm số bậc ba) liên tục trên $\mathbb{R}$

Ta có $f\left(-2\right)=-8+4a-2b+c>0$; $f\left(2\right)=8+4a+2b+c<0$

và $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty$ nên phương trình $f\left(x\right)=0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt. Do đó, đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt nên hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có đúng 5 điểm cực trị.

Câu 57. (NGÔ SĨ LIÊN BẮC GIANG LẦN IV NĂM 2019) Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3+ax^2+bx+c$ thỏa mãn $c>2019$, $a+b+c-2018<0$. Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f(x)-2019\right|$ là

A. $S=3$. **B.** $S=5$. **C.** $S=2$. **D.** $S=1$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x)=f(x)-2019=x^3+ax^2+bx+c-2019$.

Hàm số $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Vì $\begin{cases} c > 2019 \\ a+b+c-2018 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(0) > 0 \\ g(1) < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ phương trình $g(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(0;1)$.

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có ít nhất một giao điểm với trục hoành có hoành độ nằm trong khoảng $(0;1)$. (1)

Vì $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \\ g(0) > 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ phương trình $g(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(-\infty;0)$.

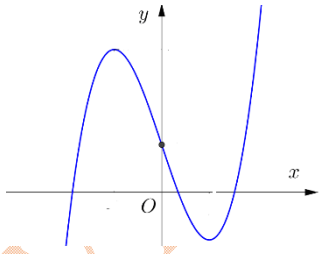
$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có ít nhất một giao điểm với trục hoành có hoành độ nằm trong khoảng $(-\infty;0)$. (2)

Vì $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \\ g(1) < 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ phương trình $g(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(1;+\infty)$.

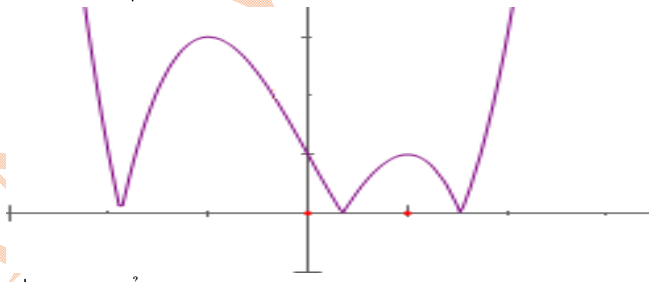
$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có ít nhất một giao điểm với trục hoành có hoành độ nằm trong khoảng $(1;+\infty)$. (3)

Và hàm số $g(x)$ là hàm số bậc 3

Nên từ (1), (2), (3) đồ thị hàm số $g(x)$ có dạng



Do đó đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2019|$ có dạng



Vậy hàm số $y = |f(x) - 2019|$ có 5 điểm cực trị

Câu 58. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $a > 0$, $d > 2018$, $a+b+c+d-2018 < 0$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x) - 2018|$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

- Xét hàm số $g(x) = f(x) - 2018 = ax^3 + bx^2 + cx + d - 2018$.

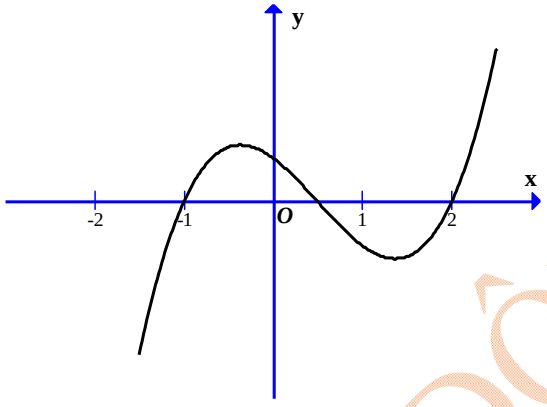
Ta có: $\begin{cases} g(0) = d - 2018 \\ g(1) = a+b+c+d-2018 \end{cases}$.

Theo giả thiết, ta được $\begin{cases} g(0) > 0 \\ g(1) < 0 \end{cases}$.

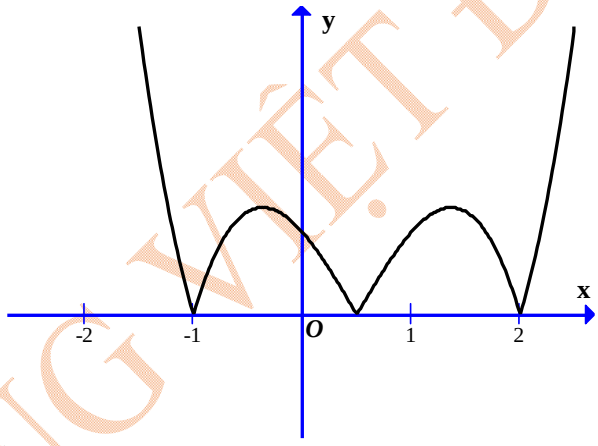
- Lại do: $a>0$ nên $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty\end{cases} \Rightarrow \exists \beta>1: g(\beta)>0$ và $\Rightarrow \exists \alpha<0: g(\alpha)<0$.

Do đó: $\begin{cases} g(\alpha).g(0)<0\\ g(0).g(1)<0\\ g(1).g(\beta)<0\end{cases} \Rightarrow g(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(\alpha;\beta)$.

Hay hàm số $y=g(x)$ có đồ thị dạng



Khi đó đồ thị hàm số $y=|g(x)|$ có dạng



Vậy hàm số $y=|f(x)-2018|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 59. Biết rằng phương trình $2x^3+bx^2=-cx+1$ có đúng hai nghiệm thực dương phân biệt. Hỏi đồ thị hàm số $y=\left|2|x|^3+bx^2+c|x|-1\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

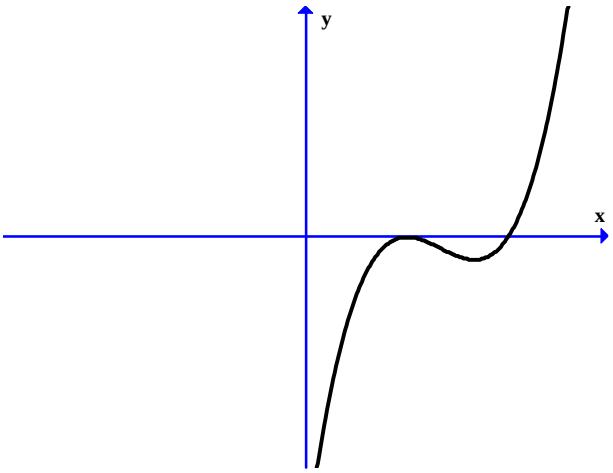
A. 3. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

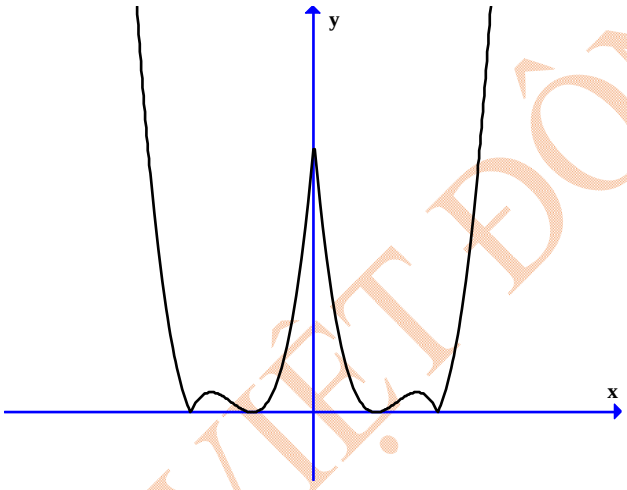
Chọn B

Vì phương trình $2x^3+bx^2=-cx+1$ có đúng hai nghiệm thực dương phân biệt nên đồ thị hàm số $y=2x^3+bx^2+cx-1(C)$ phải cắt Ox tại đúng hai điểm có hoành độ dương trong đó điểm cực đại của đồ thị hàm số là một trong hai điểm đó. Vậy đồ thị (C) có dạng:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Bằng phép suy đồ thị ta có đồ thị hàm số $y=\left|2|x|^3+bx^2+c|x|-1\right|$ có dạng



Dựa vào đồ thị ta có đồ thị hàm số có 7 điểm cực trị.

Câu 60. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx-2$ thỏa mãn $\begin{cases}a+b>1\\3+2a+b<0\end{cases}$. Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f\left(|x|\right)\right|$ bằng

A. 11 **B.** 9 **C.** 2 **D.** 5

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=f(x)$ (là hàm số bậc ba) liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(0)=-2<0$, $f(1)=a+b-1>0$, $f(2)=4a+2b+6<0$.

và $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ nên $\exists x_0>2; f(x_0)>0$.

Do đó, phương trình $f(x)=0$ có đúng 3 nghiệm dương phân biệt trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y=f\left(|x|\right)$ là hàm số chẵn. Do đó, hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có 5 điểm cực trị.

Vậy hàm số $y=\left|f\left(|x|\right)\right|$ có 11 điểm cực trị.

Câu 61. Cho hàm số bậc ba $f(x)=x^3+mx^2+nx-1$ với $m, n\in\mathbb{R}$, biết $m+n>0$ và $7+2(2m+n)<0$.

Khi đó số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x)=\left|f\left(|x|\right)\right|$ là

A. 2. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 11.

Lời giải

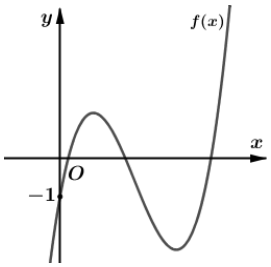
Chọn D

Cách 1: Ta có $\begin{cases} f(0)=-1 \\ f(1)=m+n>0 \\ f(2)=7+4m+2n<0 \end{cases}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow \exists p>2$ sao cho $f(p)>0$.

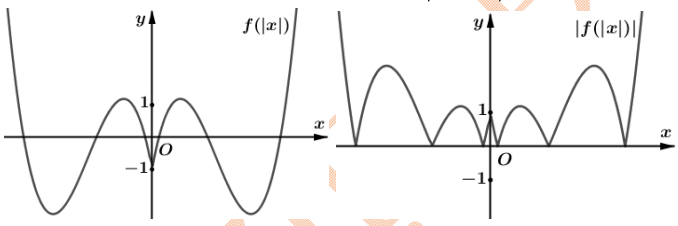
Suy ra $f(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt $c_1\in(0;1)$, $c_2\in(1;2)$ và $c_3\in(2;p)$. (1)

Suy ra đồ thị hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị $x_1\in(c_1;c_2)$ và $x_2\in(c_2;c_3)$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra đồ thị hàm số $f(x)$ có dạng như hình bên dưới



Từ đó suy ra hàm số $f\left(|x|\right)$ có 5 điểm cực trị $\longrightarrow$ hàm số $\left|f\left(|x|\right)\right|$ có 11 điểm cực trị.

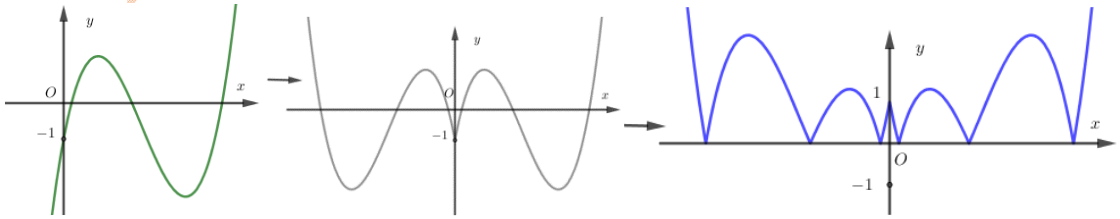


Cách 2: ta có $\begin{cases} m+n>0 \\ 7+2(2m+n)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1)>0 \\ f(2)<0 \end{cases}$

Vì $f(1)>0>f(2)$ nên hàm số $f(x)$ không thể đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vậy hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.

Ta có $f(0)=-1$, $f(1)=m+n>0$, $f(2)=7+4m+2n<0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow \exists p>2$ sao cho $f(p)>0$. Suy ra phương trình $f(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt $c_1\in(0;1)$, $c_2\in(1;2)$ và $c_3\in(2;p)$. Do đó đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $x_1\in(c_1;c_2)$ và $x_2\in(c_2;c_3)$, dễ thấy x_1,x_2 là các số dương, hơn nữa hai giá trị cực trị này trái dấu $f(x_1)>0>f(x_2)$ (vì hệ số cao nhất là 1).

Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 là các số dương nên đồ thị hàm số $f\left(|x|\right)$ sẽ có 5 điểm cực trị.



Do $f(x)$ có hai giá trị cực trị trái dấu và $f(0)=-1$ nên phương trình $f\left(|x|\right)=0$ có 6 nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số $\left|f\left(|x|\right)\right|$ có $5+6=11$ điểm cực trị.

Bình luận: Đây là dạng bài tập về đếm số điểm cực trị của hàm số dạng $\left|f\left(|x|\right)\right|$ trong đó số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ và những điều kiện liên quan bị ẩn đi.

Để giải quyết bài toán này bạn đọc cần dựa vào giả thiết bài toán để tìm:

□Số điểm cực trị n của hàm số $f(x)$

□Số điểm cực trị dương m (với $m<n$) của hàm số

□Số giao điểm p của đồ thị hàm số với trục hoành trong đó có q điểm có hoành độ dương

Bây giờ giả sử ta tìm được các dữ kiện trên khi đó ta suy ra

□Đồ thị hàm số $f(|x|)$ có $2m+1$ điểm cực trị

□Đồ thị hàm số $|f(x)|$ có $n+p$ điểm cực trị

□Đồ thị hàm số $|f(|x|)|$ có $2m+2q+1$ điểm cực trị.

Ngoài vấn đề tìm số điểm cực trị, bài toán còn có nhiều hướng để ra đề khác ví dụ như hỏi số giao điểm với trục hoành, tính đồng biến nghịch biến của hàm số.

Câu 62. Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ có đồ thị nhận hai điểm $A(0;3)$ và $B(2;-1)$ làm hai điểm cực trị. Khi đó số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x)=|ax^2|x|+bx^2+c|x|+d|$ là

A. 5. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 11.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g(x)=|ax^2|x|+bx^2+c|x|+d|=|f(|x|)|$. Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị trong đó có một điểm cực trị bằng 0 và một điểm cực trị dương $\longrightarrow$ hàm số $f(|x|)$ có 3 điểm cực trị. (1)

Đồ thị hàm số $f(x)$ có điểm cực trị $A(0;3)\in Oy$ và điểm cực trị $B(2;-1)$ thuộc góc phần tư thứ IV nên đồ thị $f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm (1 điểm có hoành độ âm, 2 điểm có hoành độ dương) $\longrightarrow$ đồ thị hàm số $f(|x|)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt. (2)

Từ (1) và (2) suy ra đồ thị hàm số $g(x)=|f(|x|)|$ có 7 điểm cực trị.

Cách 2. Vẽ phát họa đồ thị $f(x)$ rồi suy ra đồ thị $f(|x|)$, tiếp tục suy ra đồ thị $|f(|x|)|$.

Câu 63. Cho các số thực a,b,c thoả mãn $\begin{cases} a+b+c<-1 \\ 4a-2b+c>8 \\ bc<0 \end{cases}$. Đặt $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Số điểm cực trị của hàm số $|f(|x|)|$ lớn nhất có thể có là

A. 2. **B.** 9. **C.** 11 **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết bài toán ta có $f(1)<0$, $f(-2)>0$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ta suy ra phương trình $f(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt, suy ra hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 ($x_1<x_2$) và hai giá cực trị trái dấu nhau.

Khi $\begin{cases} b<0 \\ c>0 \end{cases}$ thì ta có $x_1x_2=\dfrac{b}{3}<0$ nên $x_1<0<x_2$ và $f(0)=c>0$ nên $f(x)=0$ có hai nghiệm dương.

Do đó đồ thị hàm số $|f(|x|)|$ có 7 điểm cực trị.

Khi $\begin{cases} b>0 \\ c<0 \end{cases}$ thì ta có $x_1.x_2>0$ và $f(0)=c<0$ nên hàm số có hai điểm cực trị dương và ba giao điểm với trục hoành có hoành độ dương. Khi đó đồ thị hàm số $|f(|x|)|$ có 11 điểm cực trị

Câu 64. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx-2$ thỏa mãn $\begin{cases}a+b>1\\3+2a+b<0\end{cases}$. Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f\left(|x|\right)\right|$ bằng

A. 11 **B.** 9 **C.** 2 **D.** 5

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=f(x)$ (là hàm số bậc ba) liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(0)=-2<0$, $f(1)=-a+b-1>0$, $f(2)=2a+b+3<0$.

và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ nên $\exists x_0>2; f(x_0)>0$.

Do đó, phương trình $f(x)=0$ có đúng 3 nghiệm dương phân biệt trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y=f\left(|x|\right)$ là hàm số chẵn. Do đó, hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có 5 điểm cực trị.

Vậy hàm số $y=\left|f\left(|x|\right)\right|$ có 11 điểm cực trị.

Câu 65. Biết phương trình $ax^4+bx^2+c=0\ (a\neq 0)$ bốn nghiệm thực. Hàm số $y=\left|ax^4+bx^2+c\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị.

A. 7. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Vì phương trình $ax^4+bx^2+c=0\ (a\neq 0)$ bốn nghiệm thực nên hàm số

$$\begin{cases}\Delta=b^2-4ac>0\\ S=\dfrac{-b}{a}>0\\ P=\dfrac{c}{a}>0\end{cases}\Rightarrow ab<0$$ do đó hàm số $ax^4+bx^2+c=0$ có 3 điểm cực trị

Mặt khác $ax^4+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$ nên phương trình $ax^4+bx^2+c=0$ có 4nghiệm đơn. Vậy hàm số $y=\left|ax^4+bx^2+c\right|$ có $4+3=7$ cực trị.

Câu 66. Cho hàm số $y=\left|x^4-2(m-1)x^2+2m-3\right|$. Có bao nhiêu số nguyên không âm m để hàm số đã cho có ba điểm cực trị.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x^4-2(m-1)x^2+2m-3$

$m-1=0\Leftrightarrow m=1\Rightarrow f(x)=x^4-1$ có 1 điểm cực trị $x=0$ và phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt. do đó hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có 3 điểm cực trị (thỏa mãn)

$m-1<0\Rightarrow m=0\Rightarrow f(x)=x^4+2x^2-3$ có 1 điểm cực trị $x=0$ và phương trình $f(x)=0$ có 2 nghiệm đơn phân biệt. do đó hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có 3 điểm cực trị (thỏa mãn)

Ta có $m-1>0\Rightarrow m>1$ khi đó $f(x)$ có ba điểm cực trị. Vậy yêu cầu bài tóan lúc này tương đương với $f(x)=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép, tức

$$\Delta'=(m-1)^2-(2m-3)\le 0\Leftrightarrow (m-2)^2\le 0\Leftrightarrow m=2.$$ Vậy $m\in\{0,1,2\}$.

Chọn A

Câu 67. Cho hàm số $y=\left|x^4-2(m-1)x^2+2m-3\right|$. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho có đúng 5 điểm cực trị là

A. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)\setminus\{2\}$. **C.** $(1;+\infty)\setminus\{2\}$. **D.** $\left(1;\frac{3}{2}\right]$.

Lời giải

Xét $f(x)=x^4-2(m-1)x^2+2m-3\Rightarrow f(x)=0\Rightarrow (x^2-1)(x^2-2m+3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=1\\x^2=2m-3\end{array}\right.$

TH1: Nếu $2m-3\le 0\Rightarrow$ Do vậy $f(x)$ có 2 điểm đổi dấu $x=-1;x=1$. Hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có 5 điểm cực trị $y=f(x)$ có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow ab<0\Leftrightarrow -2(m-1)<0\Leftrightarrow m>1$

Vậy trường hợp này có $1<m\le\frac{3}{2}$

TH2: Nếu $0<2m-3\ne 1\Leftrightarrow\frac{3}{2}<m\ne 2$. Khi đó $f(x)$ có bốn điểm đổi dấu $x=\pm 1;x=\pm\sqrt{2m-3}$ do đó số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ bằng 3 và hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có 7 cực trị(loại).

TH3: nếu $2m-3=1\Leftrightarrow m=2\Rightarrow f(x)=(x^2-1)^2$ khi đó $y=\left|f(x)\right|=(x^2-1)^2$ có 3 điểm cực trị (loại).

Chọn D

Câu 68. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để hàm số $y=\left|x^4-(m+1)x^2+m\right|$ có 7 điểm cực trị.

A. 18. **B.** 20. **C.** 19. **D.** 21.

Lời giải

Xét $x^4-(m+1)x^2+m\Leftrightarrow x^2=1;x^2=m(1)$ vậy để hàm số $y=\left|x^4-(m+1)x^2+m\right|$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m>0\\m\ne 1\end{array}\right.\Rightarrow m\in\{2,...,19\}$. có 18 số nguyên thỏa mãn.

Chọn A

Câu 69. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để hàm số $y=(x^2+2)\left|x^2-m\right|$ có đúng 5 điểm cực trị.

A. 1. **B.** 17. **C.** 2. **D.** 16.

Lời giải

Có $y=\left(x^2+2\right)\left|x^2-m\right|=\left|\left(x^2+2\right)\left(x^2-m\right)\right|=\left|x^4-(m-2)x^2-2m\right|$.

Nếu $m\le 0\Rightarrow x^4-(m-2)x^2-2m\ge 0,\forall x$ nên hàm số đã cho có tối đa ba điểm cực trị (loại).

Nếu $m>0\Rightarrow x^4-(m-2)x^2-2m=0\Leftrightarrow x^2=m\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{m}$. Vậy điều kiện là hàm số $y=x^4-(m-2)x^2-2m$ có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow -(m-2)<0\Leftrightarrow m>2\Rightarrow m\in\{3,...,19\}$. Có 17 số nguyên thoả mãn.

Chọn B

Câu 70.Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\left|x^4-mx^2+m\right|$ có 7 điểm cực trị.

A. $(4;+\infty)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Xét hàm số $y=x^4-mx^2+m$ có tối đa 3 điểm cực trị và phương trình $f(x)=0$ có tối đa 4 nghiệm. Vì vậy hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi $f(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt và $f'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\Delta=m^2-4>0\\ S=m>0,P=m>0\Leftrightarrow m>4\\ ab=-m<0\end{array}\right.$

Chọn A

Câu 71.Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\left|x^4-4x^2+m\right|$ có 7 điểm cực trị.

A. 5. **B.** 15. **C.** 3. **D.** 13.

Lời giải

Hàm số $f(x)=x^4-4x^2+m$ có 3 điểm cực trị. Vậy hàm số $\left|f(x)\right|$ có 7 cực trị khi và chỉ khi phương trình $f(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt, tức

$\left\{\begin{array}{l}\Delta'=4-m>0\\ S=4>0,P=m>0\end{array}\right.\Leftrightarrow 0<m<4\Rightarrow m\in\{1;2;3\}$ có 3 số nguyên thỏa mãn.

Chọn D

Câu 72. (Chuyên Lam Sơn Lần 2) Cho hàm số $f(x)=x^4-2mx^2+4-2m^2$. Có tất cả bao nhiêu số nguyên $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Để hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có đúng ba điểm cực trị thì: $\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}m\le 0\\ 4-2m^2<0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}m>0\\ 4-3m^2\ge 0\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-\sqrt{2}\\ 0<m\le\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.$.

Vậy các số nguyên m thỏa mãn bài toán là $\{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;1\}$.

Câu 73. (Đặng Thành Nam Đề 14) Cho hàm số $y=\left|x^4-2(m-1)x^2+2m-3\right|$. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho có đúng 5 điểm cực trị là

A. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)\setminus\{2\}$. **C.** $(1;+\infty)\setminus\{2\}$. **D.** $\left(1;\frac{3}{2}\right]$.

Lời giải

Chọn D

Đặt: $f(x)=x^4-2(m-1)x^2+2m-3$

$f'(x)=4x^3-4(m-1)x$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=0\\x^2=m-1\end{bmatrix}$

Vì hàm số $f(x)$ có $a=1>0$ nên hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có đúng 5 cực trị $\Leftrightarrow$ Hàm số $f(x)$ phải có 3 cực trị thỏa $y_{cd}\le 0\Leftrightarrow\begin{cases}m-1>0\\f(0)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>1\\2m-3\le 0\end{cases}\Leftrightarrow m\in\left(1;\frac{3}{2}\right]$

Câu 74. (Cầu Giấy Hà Nội 2019 Lần 1) Gọi S là tập hợp tất cả các số thực m thỏa mãn đồ thị hàm số $y=\left|x^4-10x^2+m\right|$ có đúng 7 điểm cực trị. Số phần tử của tập hợp $S\cap\mathbb{Z}$ là

A. 24. **B.** 23. **C.** 26. **D.** 25.

Lời giải

Chọn A

Gọi $f(x)=x^4-10x^2+m$. Ta có $f'(x)=4x^3-20x=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=0\\x=\pm\sqrt{5}\end{bmatrix}$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)=x^4-10x^2+m$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		0		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m-25$	$\nearrow$	m	$\searrow$	$m-25$	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f(x)\right|$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ và số nghiệm của phương trình $f(x)=0$ (không trùng với các điểm cực trị của hàm số). Do đó để hàm số $y=\left|x^4-10x^2+m\right|$ có đúng 7 điểm cực trị thì $f(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 0<m<25$. Vậy $S\cap\mathbb{Z}=\{1;2;...;24\}$.

Câu 75. (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – NAM ĐỊNH 2019 – LẦN 1) Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-7;7)$ để đồ thị hàm số $y=\left|x^4-3mx^2-4\right|$ có đúng ba điểm cực trị A,B,C và diện tích tam giác ABC lớn hơn 4.

A. 4. **B. 2.** **C. 1.** **D. 3**

Lời giải

Chọn D

Xét $y = x^4 - 3mx^2 - 4$.

$y' = 4x^3 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = \dfrac{3m}{2} \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $\dfrac{3m}{2} > 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Hàm số $y = x^4 - 3mx^2 - 4$ có 3 cực trị: $A(0;-4), B\left(\sqrt{\dfrac{3m}{2}}; -\dfrac{9m^2}{4} - 4\right), C\left(-\sqrt{\dfrac{3m}{2}}; -\dfrac{9m^2}{4} - 4\right)$

Suy ra $y = \left|x^4 - 3mx^2 - 4\right|$ có 5 cực trị.

Trường hợp 2: $\dfrac{3m}{2} \le 0 \Leftrightarrow m \le 0$ (1) suy ra hàm số $y = x^4 - 3mx^2 - 4$ có 1 cực tiểu là: $A'(0;-4)$

Suy ra hàm số $y = \left|x^4 - 3mx^2 - 4\right|$ có 3 điểm cực trị là: $A(0;4), B(x_1;0), C(-x_1;0)$, trong đó x_1 là nghiệm của phương trình $x^4 - 3mx^2 - 4 = 0$. $(x_1 \neq 0)$ (do $ac = -4$ nên phương trình $x^4 - 3mx^2 - 4 = 0$ luôn có nghiệm) (2)

Diện tích tam giác ABC bằng: $S = \dfrac{1}{2}.d(A;BC).BC = \dfrac{1}{2}.4.2\left|x_1\right| = 4\left|x_1\right|$.

Do $S > 4 \Leftrightarrow \left|x_1\right| > 1$. Từ phương trình (2) suy ra $m = \dfrac{x_1^4 - 4}{3x_1^2} = \dfrac{x_1^2}{3} - \dfrac{4}{3x_1^2}$ với $\left|x_1\right| > 1$.

Do $\left|x_1\right| > 1 \Leftrightarrow x_1^2 > 1 \Leftrightarrow m = \dfrac{x_1^2}{3} - \dfrac{4}{3x_1^2} > -1$ kết hợp với (1) suy ra $-1 < m \le 0$ suy ra chỉ có $m = 0$ thỏa mãn đề bài.

Câu 76. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ $(a,b,c,d,e \in \mathbb{R})$ và $a > 0$.

Biết $f(-1) < 0, f(0) > 0, f(1) < 0$. Số điểm cực trị của hàm số $y = \left|f(x)\right|$ bằng

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 9.

Lời giải

Theo giả thiết ta có: $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \\ f(-1) < 0 \\ f(0) > 0 \\ f(1) < 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x).f(1) < 0 \\ f(0).f(-1) < 0 \\ f(0).f(1) < 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x).f(1) < 0 \end{array}\right. \Rightarrow \exists x_1 < -1 < x_2 < 0 < x_3 < 1 < x_4$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Sao cho $f(x_1)=0; f(x_2)=0; f(x_3)=0; f(x_4)=0$. Điều đó chứng tỏ rằng phương trình $f(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt, do đó hàm số $f(x)$ phải có 3 điểm cực trị. Vì vậy hàm số $y=|f(x)|$ có $4+3=7$ điểm cực trị.

Chọn A

Câu 77. (THPT NINH BÌNH – BẠC LIÊU LẦN 4 NĂM 2019) Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ với $a>0$, $c>2018$ và $a+b+c<2018$. Số điểm cực trị của hàm số $y=|f(x)-2018|$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

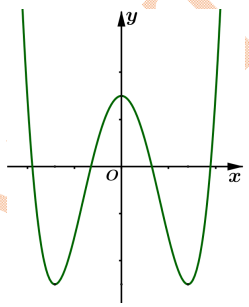
Chọn D

Xét hàm số $g(x)=f(x)-2018=ax^4+bx^2+c-2018$.

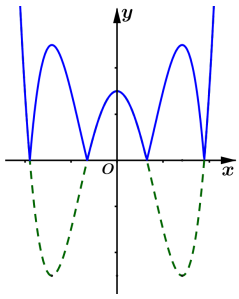
Ta có $\begin{cases} a>0 \\ c>2018 \\ a+b+c<2018 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>0 \\ b<0 \\ c>2018 \end{cases} \Rightarrow a.b<0 \Rightarrow$ hàm số $y=g(x)$ là hàm trùng phương có 3 điểm cực trị.

Mà $g(0)=c-2018 \Rightarrow g(0)>0$, $g(1)=a+b+c-2018<0 \Rightarrow g(x_{CT})\le g(1)<0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=g(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có dáng điệu như sau



Từ đồ thị $y=g(x)$, ta giữ nguyên phần phía trên trục Ox, phần dưới trục Ox ta lấy đối xứng qua trục Ox, ta được đồ thị hàm số $y=|g(x)|$.



Từ đó ta nhận thấy đồ thị $y=|g(x)|$ có 7 điểm cực trị.

Câu 78. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ với $a>0$, $c>2017$ và $a+b+c<2017$. Số cực trị của hàm số $y=|f(x)-2017|$ là:

A. 1 **B.** 5 **C.** 3 **D.** 7

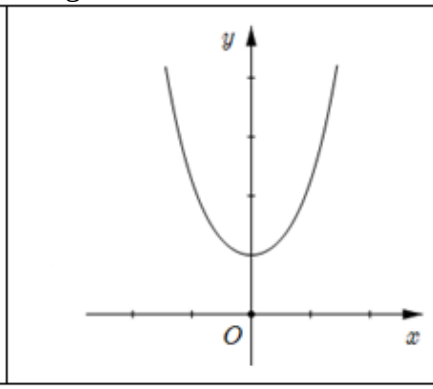
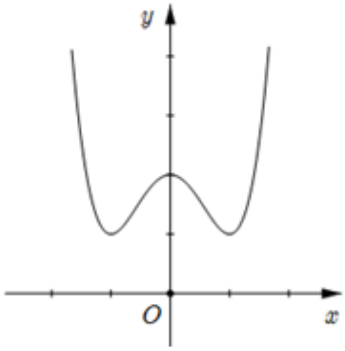
Lời giải

Chọn D

Ta có: $y=\left|f\left(x\right)-2017\right|=\sqrt{\left(f\left(x\right)-2017\right)^2}\Rightarrow y'=\dfrac{2\left(f\left(x\right)-2017\right).f'\left(x\right)}{2\sqrt{\left(f\left(x\right)-2017\right)^2}}$

Xét $f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c\left(a>0\right)$ ta có: $\begin{cases}f\left(1\right)=a+b+c<2017\\f\left(0\right)=c>2017\end{cases}\Rightarrow f\left(1\right)<f\left(0\right)$

Dựa vào 2 dạng của đồ thị hàm số bậc 4 trùng phương khi $a>0$

$a>0$		

Suy ra hàm số $y=f\left(x\right)$ có 3 điểm cực trị và PT: $f\left(x\right)-2017$ có 4 nghiệm phân biệt

Như vậy PT $y'=\dfrac{2\left(f\left(x\right)-2017\right).f'\left(x\right)}{2\sqrt{\left(f\left(x\right)-2017\right)^2}}=0$ có 7 nghiệm phân biệt do đó hàm số có 7 cực trị.

Câu 79. Cho hàm số $f\left(x\right)=\left(m^4+1\right)x^4+\left(-2^{m+1}.m^{2.-4}\right)x^2+4^m+16$ với m là tham số thực. Số cực trị của đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x\right)-1\right|$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Ta có: $y=\left|f\left(x\right)-1\right|=\sqrt{\left(f\left(x\right)-1\right)^2}$

Suy ra $y'=\dfrac{f'\left(x\right).\left[f\left(x\right)-1\right]}{\sqrt{\left(f\left(x\right)-1\right)^2}};\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(x\right)=0\\f\left(x\right)-1=0\end{array}\right.$

$f'\left(x\right)=0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt vì $-\left(m^4+1\right)\left(2^{m+1}.m^2+4\right)<0$ với mọi m.

$f\left(x\right)-1=0$ vô nghiệm do $\Delta'=\left(2^m.m^2+2\right)^2-\left(m^4+1\right).\left(4^m+15\right)=4.2^m.m^2+4-15m^4-4^m-15$

$=-\left(2^m-m^2\right)^2-11m^4-11<0$.

Vậy hàm số đã cho có 3 cực trị.

Cách 2. Hàm số $f\left(x\right)$ có 3 điểm cực trị (do hệ số a và b trái dấu) $\longrightarrow f\left(x\right)-1$ cũng có 3 điểm cực trị.

Phương trình $f\left(x\right)-1=0$ vô nghiệm (đã giải thích ở trên).

Vậy hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x\right)-1\right|$ có 3 cực trị.

Cách 3: Đặc biệt hóa ta cho $m=0$, khi đó ta được hàm $f\left(x\right)-1=x^4-4x^2+16$.

Đặt $g\left(x\right)=f\left(x\right)-1=x^4-4x^2+16\Rightarrow g'\left(x\right)=4x^3-8x;\ g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 4x^3-8x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\sqrt{2}\\x=-\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Ta có BBT

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	12	↗	16	↘	12	↗	$+\infty$

Do đồ thị hàm số $y=g(x)$ nằm hoàn toàn bên trên trục hoành nên đồ thị hàm số $y=|g(x)|$ cũng chính là đồ thị của hàm số $y=g(x)$. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)=|f(x)-1|$ là 3.

Câu 80. Cho hàm số $f(x)=(m^{2018}+1)x^4-(2m^{2018}+2m^2+3)x^2+m^{2018}+2020$. Hàm số $y=|f(x)-2019|$ có bao nhiêu điểm cực trị.

A. 7. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Vì $f(x)$ là hàm số trùng phương có $ab=-(m^8+1)(2m^{2018}+2m^2+3)<0,\forall m$ nên hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị và hàm số $f(x)-2019$ cũng có 3 điểm cực trị.

$$f(x)-2019=0\Leftrightarrow(m^{2018}+1)x^4-(2m^{2018}+2m^2+3)x^2+m^{2018}+2020=2019$$
$$\Leftrightarrow(m^{2018}+1)x^4-(2m^{2018}+2m^2+3)x^2+m^{2018}+1=0$$

Phương trình này luôn có 4 nghiệm thực phân biệt vì $\begin{cases}\Delta=(2m^{2018}+2m^2+3)^2-4(m^{2018}+1)^2>0\\ S=\dfrac{2m^{2018}+2m^2+3}{m^{2018}+1}>0\\ P=1>0\end{cases}$

Do đó $f(x)$ có 4 nghiệm đổi dấu. vậy số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=|f(x)-2019|$ bằng $3+4=7$

Chọn A

Câu 81. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để hàm số $y=|x^2-2x+m|+2x+1$ có ba điểm cực trị.

A. 17. **B.** 16. **C.** 19. **D.** 18.

Lời giải

Nếu $x^2-2x+m\ge 0,\forall x$ thì $y=x^2-2x+m+2x+1=x^2+m+1$ có đúng một điểm cực trị $x=0$ (loại).

Nếu $x^2-2x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1<x_2\Leftrightarrow\Delta'=1-m>0\Leftrightarrow m<1$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$$y'=\frac{(2x-2)(x^2-2x+m)}{|x^2-2x+m|}+2;y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-2+2=0\\x^2-2x+m>0\end{cases}\\\begin{cases}-(2x-2)+2=0\\x^2-2x+m<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\x^2-2x+m>0\end{cases}\\\begin{cases}x=2\\x^2-2x+m<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\m>0\end{cases}\\\begin{cases}x=2\\m<0\end{cases}\end{array}\right.$$

+) Với $0<m<1$ rõ ràng không có số nguyên nào

+) Với $m<0$ ta có bảng xét dấu của y' như hình vẽ dưới đây

Lúc này hàm số có 3 điểm cực trị. Vậy $m\in\{-19,...,1\}$.

Chọn C

Câu 82.Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-2019;2019)$ để hàm số $y=|x^2-4x+m|+6x+1$ có ba điểm cực trị.

A. 2014. **B.** 2016. **C.** 2013. **D.** 2015.

Lời giải

Nếu $x^2-4x+m\ge 0,\forall x\Rightarrow y=x^2-4x+m+6x+1=x^2+2x+m+1$ có đúng 1 điểm cực trị $x=-1$(loại).

Nếu $x^2-4x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1<x_2\Leftrightarrow\Delta'=4-m>0\Leftrightarrow m<4$

Khi đó $y'=\frac{(2x-4)(x^2-4x+m)}{|x^2-4x+m|}+6;y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-4+6=0\\x^2-4x+m>0\end{cases}\\\begin{cases}-(2x-4)+6=0\\x^2-4x+m<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-1\\m>-5\end{cases}\\\begin{cases}x=5\\m<-5\end{cases}\end{array}\right.$

Với $-5<m<4$ ta có bằng xét dấu của y' như sau

Hàm số có đúng 1 cực trị $x=-1$(loại).

Với $m<-5$ ta có bằng xét dấu của y' như sau

Hàm số có 3 điểm cực trị $x=x_1;x=5;x=x_2$

Vậy $m\in\{-2018,...,-6\}$. Có 2013 số nguyên thỏa mãn.

Chọn C

Câu 83.Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để hàm số $y=x^2-2m|x-m+1|+1$ có ba điểm cực trị.

A. 17. **B.** 19. **C.** 18. **D.** 20.

Lời giải

Ta có $y=\begin{cases}x^2-2m(x-m+1)(x-m+1\ge 0)\\x^2+2m(x-m+1)(x-m+1\le 0)\end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases}2x-2m(x-m+1>0)\\2x+2m(x-m+1<0)\end{cases}$

Vậy hàm số không có đạo hàm tại điểm $x=m-1$ và

$$y'=\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-2m=0\\x-m+1>0\end{cases}\\\begin{cases}2x+2m=0\\x-m+1<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=m\\1<0\end{cases}\\\begin{cases}x=-m\\-2m+1<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\x=-m\left(m>\frac{1}{2}\right)\end{array}\right.$$

Vậy để hàm số có 3 điểm cực trị trước tiên phải có $m>\frac{1}{2}$ và lúc này bảng xét dấu của y' như sau

Điều này chứng tỏ với $m>\frac{1}{2}$ là các giá trị cần tìm, các số nguyên là $m\in\{1,...,19\}$. Có tất cả 19 số nguyên thỏa mãn.

Câu 84. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để hàm số $y=x^2-2m|x-m+6|+1$ có ba điểm cực trị.

A. 17. **B.** 16. **C.** 18. **D.** 15.

Lời giải

Ta có $y=\begin{cases}x^2-2m(x-m+6)(x-m+6\ge 0)\\x^2+2m(x-m+6)(x-m+6\le 0)\end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases}2x-2m(x-m+6>0)\\2x+2m(x-m+6<0)\end{cases}$

Vậy hàm số không có đạo hàm tại điểm $x=m-6$ và

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-2m=0\\x-m+6>0\end{cases}\\\begin{cases}2x+2m=0\\x-m+6<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\\begin{cases}x=-m\\-2m+6<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\x=-m(m>3)\end{array}\right.$$

Vậy để hàm số có 3 điểm cực trị trước tiên ta phải có $m>3$ và lúc này bảng xét dấu của y' như sau: Điều này chứng tỏ với $m>3$ là giá trị cần tìm, các số nguyên là $m\in\{4,...,19\}$ có tất cả 16 số nguyên thỏa mãn.

Câu 85. (Nguyễn Du số 1 lần3) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ có 7 điểm cực trị ?

A. 6. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+m$ với $x\in\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=12x\left(x^2-x-2\right)$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=2\end{array}\right.$

Ta thấy hàm $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua 3 nghiệm của nó nên hàm số $f(x)$ có ba cực trị.

Để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ có 7 điểm cực trị thì phương trình

$3x^4-4x^3-12x^2+m=0\Leftrightarrow 3x^4-4x^3-12x^2=-m$ có bốn nghiệm phân biệt khác $0;-1;2$.

Xét hàm số $g(x)=3x^4-4x^3-12x^2$ với $x\in\mathbb{R}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Có $g'(x)=12x(x^2-x-2)$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=2\end{array}\right.$

Ta có BBT:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	0	$\searrow$	-32	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT ta thấy phương trình có bốn nghiệm phân biệt khác $0;-1;2$ khi $-5<-m<0\Leftrightarrow 0<m<5$

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{1;2;3;4\}$. Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 86.Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-5;5]$ để hàm số $y=\left|x^4+x^3-\frac{1}{2}x^2+m\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y=x^4+x^3-\frac{1}{2}x^2+m$.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=4x^3+3x^2-x$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1.\\x=\frac{1}{4}\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$m-2$	$\nearrow$	m	$\searrow$	$m-\frac{27}{256}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, để hàm số đã cho có 5 cực trị thì đồ thị cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<0\\m-2<0<m-\frac{27}{256}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<0\\\frac{27}{256}<m<2\end{array}\right..$$

Vì m nguyên và $m\in[-5;5]\Rightarrow m\in\{-5;-4;-3;-2;-1;1\}$.

Vậy có 6 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 87. Cho hàm số $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$. Có bao nhiêu số nguyên $m>-10$ để hàm số $y=f(|x|+m)$ có 7 điểm cực trị.

A. 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải

có $f'(x)=12x^3-12x^2-24x; f'(x)=0\Leftrightarrow 12x\left(x^2-x-2\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=-1\\ x=2\end{array}\right.$

do đó hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị $x=0;x=-1;x=2$

hàm số $f\left(|x|+m\right)$ luôn có 1 điểm cực trị $x=0$

phá trị tuyệt đối có $y=f\left(|x|+m\right)=\left\{\begin{array}{l} f(x+m)(x\ge 0)\\ f(-x+m)(x\le 0)\end{array}\right.$.

Hàm số $f(x+m)$ có 3 điểm cực trị là

$x+m=-1;x+m=0;x+m=2\Leftrightarrow x=-m-1;x=-m;x=2-m.$

Hàm số $f(-x+m)$ có 3 điểm cực trị là

$-x+m=-1;-x+m=0;-x+m=2\Leftrightarrow x=m+1;x=m;x=m-2.$

Do đó hàm số $f\left(|x|+m\right)$ có tối đa 7 điểm cực trị là

$x=0;x=m+1;x=m;x=m-2;x=-m-1;x=-m;x=2-m.$

Điều kiện bài toán tương đương với $\left\{\begin{array}{l} -m-1>0\\ -m>0\\ -m+2>0\\ m+1<0\\ m<0\\ m-2<0\end{array}\right.\Leftrightarrow m<-1\Rightarrow m\in\{-9,-8,...,-2\}$

Có tất cả 8 số nguyên thỏa mãn.

Chọn D

Câu 88. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\left|3x^5-25x^3+60x+m\right|$ có 7 điểm cực trị.

A. 42. **B.** 21. **C.** 44. **D.** 22.

Lời giải

Hàm số $f(x)=3x^5-25x^3+60x+m$ có 4 điểm cực trị là nghiệm của phương trình

$f'(x)=0\Leftrightarrow 15x^4-75x^2+60=0\Leftrightarrow x=\pm 2;x=\pm 1.$

Do đó hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $f(x)=0$ có tổng số nghiệm đơn và bội lẻ bằng 3. Khảo sát hàm số dễ có $\left[\begin{array}{l} -38<-m<-16\\ 16<-m<38\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 16<m<38\\ -38<m<-16\end{array}\right.$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

do đó có $21+21=42$ số nguyên thỏa mãn.

Chọn A

Câu 89. Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ có ba điểm cực trị $x=1;x=2;x=3$. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=f(|x+m|)$ có 7 điểm cực trị.

A. 8. **B.** 10. **C.** 2. **D.** 19.

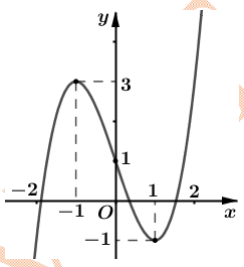
Lời giải

Hàm số $y=f(|x+m|)$ có 7 cực trị $\Leftrightarrow f(x+m)$ có 3 điểm cực trị lớn hơn $-m$

Các điểm cực trị của hàm số $\Leftrightarrow y=f(x+m)$ là $\left[\begin{array}{l}x+m=1\\x+m=2\\x+m=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1-m\\x=2-m\\x=3-m\end{array}\right.$

Vậy ta có điều kiện là $\left[\begin{array}{l}1-m>-m\\2-m>-m\\3-m>-m\end{array}\right.\Leftrightarrow\forall m\Rightarrow m\in\{-9,...,9\}$.

Câu 90. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



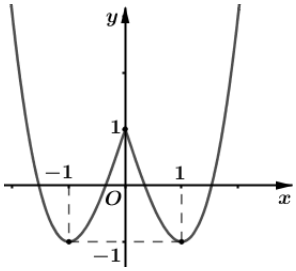
Với $m<-1$ thì hàm số $g(x)=f(|x+m|)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

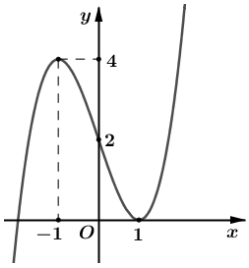
Chọn C

Đồ thị hàm số $f(|x+m|)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $f(x)$ bằng cách lấy đối xứng trước rồi mới tịnh tiến. Lấy đối xứng trước ta được đồ thị hàm số $f(|x|)$ như hình bên dưới



Dựa vào đồ thị hàm số $f(|x|)$ ta thấy có 3 điểm cực trị $\longrightarrow f(|x+m|)$ cũng luôn có 3 điểm cực trị (vì phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị).

Câu 91. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(|x|+m\right)$ có 5 điểm cực trị.

A. $m<-1$. **B.** $m>-1$. **C.** $m>1$. **D.** $m<1$.

Lời giải

Chọn A

Nhận xét: Hàm $g(x)=f\left(|x|+m\right)$ là hàm số chẵn nên đồ thị đối xứng qua trục $Oy \longrightarrow x=0$ là một điểm cực trị của hàm số.

Ta có $g'(x)=\frac{x}{|x|}.f'\left(|x|+m\right)$ với $x=0$.

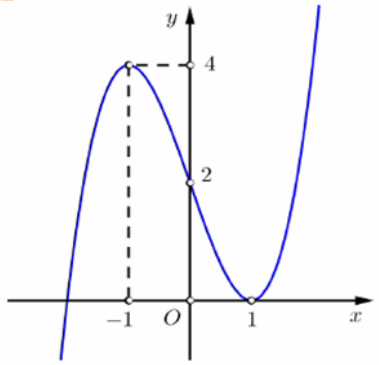
$$\longrightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow f'\left(|x|+m\right)=0 \xleftarrow{\text{theo đồ thị } f(x)} \begin{bmatrix}|x|+m=1\\|x|+m=-1\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}|x|=1-m\\|x|=-1-m\end{bmatrix}. (*)$$

Để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ $(*)$ có 4 nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases}1-m>0\\-1-m>0\\1-m\neq -1-m\end{cases} \Leftrightarrow m<-1.$

Cách 2. Đồ thị hàm số $f\left(|x|+m\right)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $f(x)$ bằng cách tịnh tiến trước rồi mới lấy đối xứng.

Để hàm số $f\left(|x|+m\right)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ hàm số $f(x+m)$ có 2 điểm cực trị dương. Do đó ta phải tịnh tiến điểm cực đại của đồ thị hàm số $f(x)$ qua phía bên phải trục tung nghĩa là tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x)$ sang phải lớn hơn 1 đơn vị $\longrightarrow m<-1$.

Câu 92. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm tập hợp tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số $y=f\left(|x|+m\right)$ có 5 điểm cực trị.

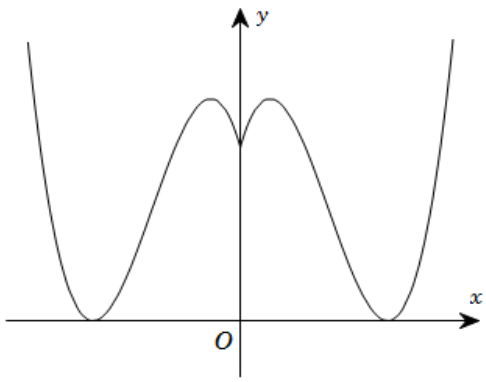


A. $m>1$. **B.** $m<-1$. **C.** $m>-1$. **D.** $m<1$.

Lời giải

Chọn B

Trước tiên ta có nhận xét rằng: đồ thị hàm số $y=f\left(|x|+m\right)$ được suy từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ bằng cách nào?



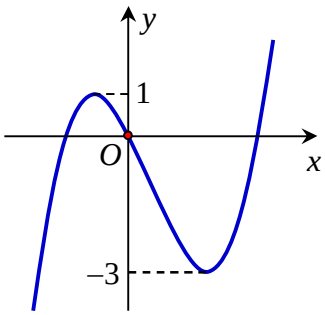
- Bước 1. Tịnh tiến đồ thị $y=f(x)$ sang phải (nếu $m<0$), sang trái (nếu $m>0$) $|m|$ đơn vị.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

● Bước 2. Giữ nguyên phần đồ thị vừa nhận được phía bên phải trục tung, xóa bỏ phần đồ thị vừa nhận được phía bên trái trục tung.
● Bước 3. Lấy đối xứng phần đồ thị giữ ở bước 2 qua trục tung ta được đồ thị hoàn chỉnh của hàm số $y=f\left(|x|+m\right)$.

Do đó bằng tư duy + hình vẽ thì yêu cầu bài toán cần tịnh tiến đồ thị sao cho điểm cực đại sang phải và nằm trong góc phần tư thứ nhất. Suy ra $m<-1$.
Khi đó ta được đồ thị của hàm số $y=f\left(|x|+m\right)$ như hình bên.

Câu 93. Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên.



Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\left|f\left(x\right)+m\right|$ có ba điểm cực trị là

A. $m\le -1$ hoặc $m\ge 3$.
B. $m\le -3$ hoặc $m\ge 1$.
C. $m=-1$ hoặc $m=3$.
D. $1\le m\le 3$.

Lời giải

Chọn A

Nhận xét: Đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)+m\right|$ gồm hai phần:

□ Phần 1 là phần đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)+m$ nằm phía trên trục hoành;

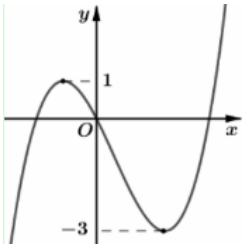
□ Phần 2 là phần đối xứng của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)+m$ nằm phía dưới trục hoành qua trục hoành.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ đã cho hình bên ta suy ra dạng đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)+m$.

Khi đó hàm số $y=\left|f\left(x\right)+m\right|$ có ba điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)+m$ và trục hoành tại nhiều nhất hai điểm chung

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1+m\le 0\\-3+m\ge 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le -1\\m\ge 3\end{array}\right..$$

Câu 94. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x\right)+m\right|$ có 5 điểm cực trị là



A. $m\le -1$ hoặc $m\ge 3$.
B. $-1<m<3$.
C. $m=-1$ hoặc $m=3$.
D. $1<m<3$.

Lời giải

Chọn B

Vì hàm $f\left(x\right)$ đã cho có 2 điểm cực trị nên $f\left(x\right)+m$ cũng luôn có 2 điểm cực trị.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Do đó yêu câu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đò thị $f(x)+m$ với trục hoành là 3 giao điểm.

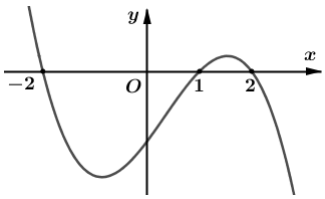
Để số giao điểm của đồ thị $f(x)+m$ với trục hoành là 3, ta cần đồng thời

Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới nhỏ hơn 1 đơn vị => $m>-1$.

Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên trên nhỏ hơn 3 đơn vị => $m<3$.

Vậy $-1<m<3$

Câu 95. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên R và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đặt $g(x)=f(|x+m|)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta thấy $f'(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm có hoành độ dương (và 1 điểm có hoành độ âm)

$\longrightarrow f(x)$ có 2 điểm cực trị dương

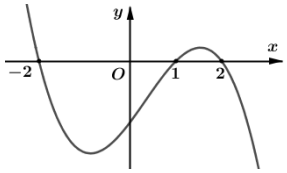
$\longrightarrow f(|x|)$ có 5 điểm cực trị

$\longrightarrow f(|x+m|)$ có 5 điểm cực trị với mọi m (vì tịnh tiến sang trái hay sang phải không ảnh hưởng đến số điểm cực trị của hàm số).

Chú ý: Đồ thị hàm số $f(|x+m|)$ có được bằng cách lấy đối xứng trước rồi mới tịnh tiến.

Đồ thị hàm số $f(|x|+m)$ có được bằng cách tịnh tiến trước rồi mới lấy đối xứng.

Câu 96. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên R và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đặt $g(x)=f(|x|+m)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)$ có **đúng** 5 điểm cực trị?



A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị $f'(x)$ ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=-2\\x=1\\x=2\end{bmatrix}$. Suy ra bảng biến thiên của $f(x)$

x	$-\infty$	-2		1		2	$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
f		↗		↘		↗		↘

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ hàm số $f(x+m)$ có 2 điểm cực trị dương (vì khi đó lấy đối xứng qua Oy ta được đồ thị hàm số $f(|x|+m)$ có đúng 5 điểm cực trị).

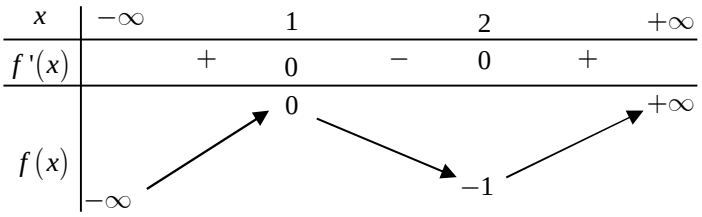
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Từ bảng biến thiên của $f(x)$, suy ra $f(x+m)$ luôn có 2 điểm cực trị dương $\Leftrightarrow$ tịnh tiến $f(x)$ (sang trái hoặc sang phải) phải thỏa mãn

- Tịnh tiến sang trái nhỏ hơn 1 đơn vị $\longrightarrow m<1$.
- Tịnh tiến sang phải không vượt quá 2 đơn vị $\longrightarrow m\geq -2$.

Suy ra $-2\leq m<1 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-2;-1;0\}$.

Câu 97. (Nguyễn Du Dak-Lak 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ:



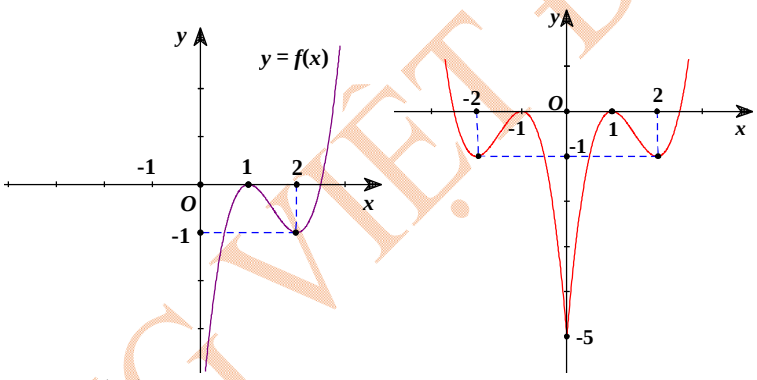
Hỏi có bao nhiêu giá trị của tham số m (với $m\in\mathbb{Z};|m|\leq 2019$) để đồ thị hàm số $y=|m+f(|x|)|$ có đúng 7 điểm cực trị?

A. 2024 . **B.** 3. **C.** 4 . **D.** 2020 .

Lời giải

Chọn A

+ Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ ta có đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=f(|x|)$ như hình vẽ sau:



Đồ thị $y=f(x)$ Đồ thị $y=f(|x|)$

+ Từ đồ thị ta có $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

(Chú ý: Hàm số $y=f(x)$ có $a=2$ điểm cực trị dương nên hàm số $y=f(|x|)$ có số điểm cực trị là $2a+1=5$ → Nên không cần vẽ đồ thị)

+ Vì hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị nên hàm số $y=m+f(|x|)$ cũng có 5 điểm cực trị (Vì đồ thị hàm số $y=m+f(|x|)$ được suy ra từ đồ thị $y=f(|x|)$ bằng cách tịnh tiến theo phương trục Oy)

+ Số điểm cực trị của hàm số $y=|m+f(|x|)|$ bằng số cực trị của hàm số $y=m+f(|x|)$ và số nghiệm đơn hoặc bội lẻ của phương trình $f(|x|)+m=0$.

Vậy để $y=|m+f(|x|)|$ có 7 điểm cực trị thì phương trình $f(|x|)+m=0$ có hai nghiệm đơn hoặc bội lẻ.

+ Ta có $f(|x|)+m=0\Leftrightarrow f(|x|)=-m$.

Từ đồ thị hàm số $y=f(|x|)$ ta có: $\left[\begin{array}{l}-5<-m\leq -1\\ 0\leq -m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1\leq m<5\\ m\leq 0\end{array}\right.(1)$

+ Từ giả thiết $|m|\leq 2019\Leftrightarrow -2019\leq m\leq 2019\ (2)$

Vậy từ (1), (2) và kết hợp điều kiện $m\in\mathbb{Z}$ ta có 2024 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 98. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	11	↘	4	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $g(x)=\left|f(x)-2m\right|$ có 5 điểm cực trị khi

A. $m\in(4;11)$. **B.** $m\in\left[2;\dfrac{11}{2}\right]$. **C.** $m\in\left(2;\dfrac{11}{2}\right)$. **D.** $m=3$.

Lời giải

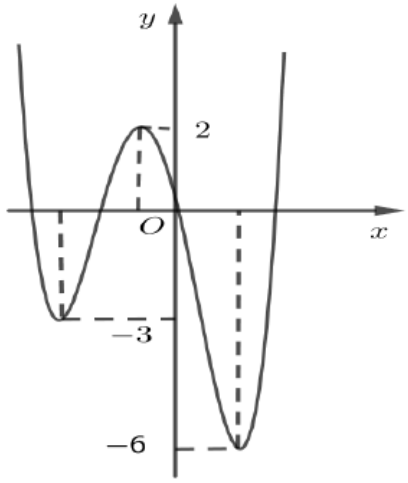
Chọn C

Vì hàm $f(x)$ đã cho có 2 điểm cực trị nên $f(x)-2m$ cũng luôn có 2 điểm cực trị.

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x)-2m$ với trục hoành là 3.

Để số giao điểm của đồ thị $f(x)-2m$ với trục hoành là 3, ta cần tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới lớn hơn 4 đơn vị nhưng phải nhỏ hơn 11 đơn vị $\longrightarrow\begin{cases}-2m<-4\\-2m>-11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>2\\m<\dfrac{11}{2}\end{cases}$.

Câu 99. (KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG)Hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số $y=f(x)$.



Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|f(x+1)+m\right|$ có 5 điểm cực trị ?

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 0

Lời giải

Chọn C

+ Đồ thị của hàm số $y=\left|f(x+1)+m\right|$ được suy ra từ đồ thị (C) ban đầu như sau:

-Tịnh tiến (C) sang phải một đơn vị, sau đó tịnh tiến lên trên (hay xuống dưới) m đơn vị. Ta được đồ thị $(C'):y=f(x+1)+m$.

-Phần đồ thị (C') nằm dưới trục hoành, lấy đối xứng qua trục Ox ta được đồ thị của hàm số $y=\left|f(x+1)+m\right|$.

Ta được bảng biến thiên của của hàm số $y=\left|f(x+1)+m\right|$ như sau

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$-3+m$	↗	$2+m$	↘	$-6+m$	↗	$+\infty$

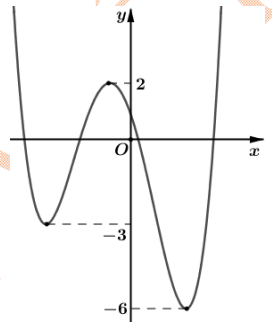
Để hàm số $y=\left|f(x+1)+m\right|$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị của hàm số $(C'):y=f(x+1)+m$ phải cắt trục Ox tại 2 hoặc 3 giao điểm.

+ TH1: Tịnh tiến đồ thị $(C'):y=f(x+1)+m$ lên trên. Khi đó $\begin{cases}m>0\\-3+m\ge 0\\-6+m<0\end{cases}\Leftrightarrow 3\le m<6$.

+ TH2: Tịnh tiến đồ thị $(C'):y=f(x+1)+m$ xuống dưới. Khi đó $\begin{cases}m<0\\2+m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow m\le -2$.

Vậy có 3 giá trị m nguyên dương.

Câu 100. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-4;4]$ để hàm số $g(x)=\left|f(x-1)+m\right|$ có 5 điểm cực trị ?

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Vì hàm $f(x)$ đã cho có 3 điểm cực trị nên $f(x-1)+m$ cũng luôn có 3 điểm cực trị (do phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị).

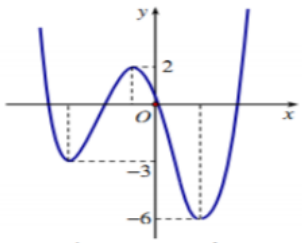
Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x-1)+m$ với trục hoành là 2.

Để số giao điểm của đồ thị $f(x-1)+m$ với trục hoành là 2, ta cần

- Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới tối thiểu 2 đơn vị $\longrightarrow m\le -2$.
- Hoặc tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên trên tối thiểu 3 đơn vị nhưng phải nhỏ hơn 6 đơn vị $\longrightarrow 3\le m<6$.

Vậy $\left[\begin{array}{l}m\le -2\\3\le m<6\end{array}\right.\xrightarrow[m\in[-4;4]]{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-4;-3;-2;3;4\}$.

Câu 101. (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐĂK LĂK LẦN X NĂM 2019) Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|f(x+1)+m\right|$ có 7 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng



A. 6. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

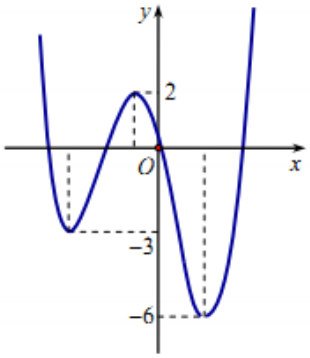
Xét hàm số $g(x)=f(x+1)+m$. Ta có $g'(x)=f'(x+1)$.

Vì hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị do đó hàm số $g(x)=f(x+1)+m$ có 3 điểm cực trị.

Để hàm số $y=\left|f(x+1)+m\right|$ có 7 điểm cực trị thì phương trình $f(x+1)=-m$ phải có có 4 nghiệm đơn phân biệt hay $-3<-m<2\Leftrightarrow -2<m<3$.

Vì m nguyên dương nên $m\in\{1,2\}$

Câu 102. Cho đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ dưới đây:



Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|f(x-2017)+m\right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng tất cả các giá trị của các phần tử của tập S bằng

A. 12 **B.** 15 **C.** 18 **D.** 9

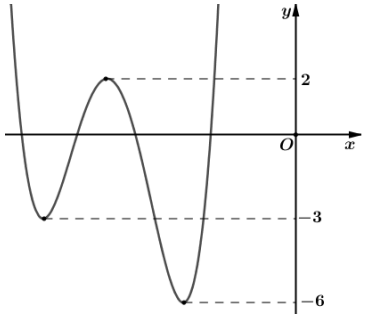
Lời giải

Đáp án A

Nhận xét: Số giao điểm của $(C):y=f(x)$ với Ox abnwgf số gaio điểm của $(C'):y=f(x-2017)$ với Ox

Vì $m>0$ nên $(C''):y=f(x-2017)+m$ có được bằng cách tịnh tiến $(C'):y=f(x-2017)$ lên trên m đơn vị

Câu 103. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đồ thị hàm số $g(x)=\left|f(x+2018)+m\right|$ có 7 điểm cực trị khi

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Vì hàm $f(x)$ đã cho có 3 điểm cực trị nên $f(x+2018)+m$ cũng luôn có 3 điểm cực trị (do phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị).

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x+2018)+m$ với trục hoành là 4.

Để số giao điểm của đồ thị $f(x+2018)+m$ với trục hoành là 4, ta cần đồng thời

- Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới nhỏ hơn 2 đơn vị $\longrightarrow m>-2$
- Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên trên nhỏ hơn 3 đơn vị $\longrightarrow m<3$.

Vậy $-2<m<3\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}^+}m\in\{1;\ 2\}$.

Câu 104. (Chuyên Vinh Lần 3) Hàm số $f(x)=\left|\dfrac{x}{x^2+1}-m\right|$ (với m là tham số thực) có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{x}{x^2+1}-m$, TXĐ: $\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

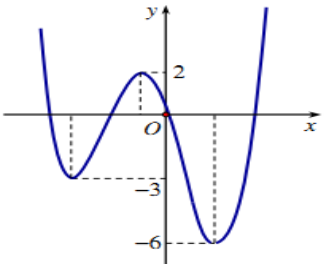
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↘		↗		↘	

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $y=g(x)$ luôn có hai điểm cực trị.

Xét phương trình $g(x)=0\ \Leftrightarrow\dfrac{x}{x^2+1}-m=0\Leftrightarrow mx^2-x+m=0$, phương trình này có nhiều nhất hai nghiệm.

Vậy hàm số $f(x)$ có nhiều nhất bốn điểm cực trị.

Câu 105.Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|f(x-1)+m\right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng



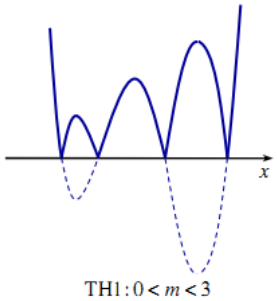
A. 12 **B.** 15 **C.** 18 **D.** 9

Lời giải

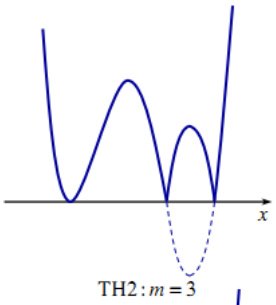
Chọn A

Nhận xét: Số giao điểm của $(C):y=f(x)$ với Ox bằng số giao điểm của $(C'):y=f(x-1)$ với Ox

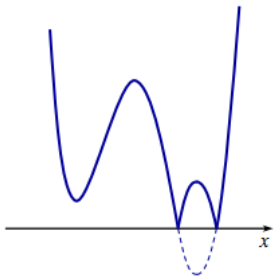
Vì $m>0$ nên $(C''):y=f(x-1)+m$ có được bằng cách tịnh tiến $(C'):y=f(x-1)$ lên trên m đơn vị.



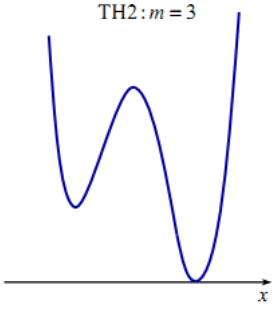
TH1: $0<m<3$



TH2: $m=3$



TH3: $3<m<6$



TH4: $m\geq 6$

TH1: $0<m<3$. Đồ thị hàm số có 7 điểm cực trị. Loại.

TH2: $m=3$. Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Nhận.

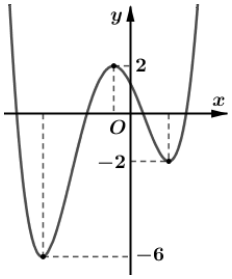
TH3: $3<m<6$. Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Nhận.

TH4: $m\geq 6$. Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị. Loại.

Vậy $3\leq m<6$. Do $m\in\mathbb{Z}^*$ nên $m\in\{3;4;5\}$

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng 12

Câu 106. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đồ thị hàm số $g(x)=\left|f(x+2018)+m^2\right|$ có 5 điểm cực trị khi

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Vì hàm $f(x)$ đã cho có 3 điểm cực trị nên $f(x+2018)+m^2$ cũng luôn có 3 điểm cực trị (do phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị).

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x+2018)+m^2$ với trục hoành là 2.

Để số giao điểm của đồ thị $f(x+2018)+m^2$ với trục hoành là 2, ta cần

- Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới tối thiểu 2 đơn vị $\longrightarrow m^2 \le -2$: vô lý
- Hoặc tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên trên tối thiểu 2 đơn vị nhưng phải nhỏ hơn 6 đơn vị

$\longrightarrow 2 \le m^2 < 6 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} \le m < \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} < m \le -\sqrt{2} \end{cases} \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m \in \{-2;2\}.$

Câu 107. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m>-10$ để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Do tính chất đối xứng qua trục Oy của đồ thị hàm thị hàm số $f(|x|)$ nên yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(x)$ có 2 điểm cực trị dương. $(*)$

Xét $f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=0 \\ x+1=0 \\ x^2+2mx+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \\ x^2+2mx+5=0 \ (1) \end{cases}$. Do đó $(*) \Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2-5>0 \\ S=-2m>0 \\ P=5>0 \end{cases} \Leftrightarrow m<-\sqrt{5}. \xrightarrow[m\in\mathbb{Z}]{m>-10} m\in\{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3\}.$

Câu 108. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có **đúng** 1 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Xét $f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=0 \\ x+1=0 \\ x^2+2mx+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \\ x^2+2mx+5=0 \ (1) \end{cases}$. Theo yêu cầu bài toán ta suy ra

Trường hợp 1. Phương trình (1) có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2-5>0 \\ S=-2m<0 \\ P=5>0 \end{cases} \Leftrightarrow m>\sqrt{5}.$

Trường hợp này không có giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2. Phương trình (1) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = m^2-5 \le 0$

$\Leftrightarrow -\sqrt{5} \le m \le \sqrt{5} \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}^-} m\in\{-2;-1\}.$

Câu 109. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m>-10$ để hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

A. 7. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Yêu cầu bài tóan tương đương với $f(x)$ có đúng 2 điểm cực trị dương, tức $x^2+2mx+5=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt, tức $\begin{cases}\Delta'=m^2-5>0\\ S=-2m>0, P=5>0\end{cases}\Leftrightarrow m<-\sqrt{5}\Rightarrow m\in\{-9,-8,...,-3\}$ có tất cả 7 số nguyên thỏa mãn.

Chọn A

Câu 110. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2\left(x+m^2-3m-4\right)^3(x+3)^5, \forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có 3 điểm cực trị.

A. 3. **B.** 6. **C.** 4 **D.** 5.

Lời giải

Yêu cầu bài toán tương đương $f(x)$ có một điểm cực trị dương, tức $x^2+m^2-3m-4=0$ có nghiệm dương, tức $-m^2+3m+4>0\Leftrightarrow -1<m<4\Rightarrow m\in\{0,1,2,3\}$. Chọn đáp án

C.

Câu 111. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\left(x^3-2x^2\right)\left(x^3-2x\right)$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=\left|f\left(1-2018x\right)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị.

A. 9. **B.** 2022. **C.** 11. **D.** 2018.

Lời giải

Có $f'(x)=x^3(x-2)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$. Do đó hàm số $f(x)$ có 4 điểm cực trị là $x=0; x=2; x=\pm\sqrt{2}$. Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ suy ra $f(x)=0$ có tối đa 5 nghiệm phân biệt. Do đó hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có tối đa $4+5=9$ điểm cực trị.

Mặt khác số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f\left(1-2018x\right)\right|$ bằng số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f(x)\right|$. Do đó hàm số $y=\left|f\left(1-2018x\right)\right|$ có tối đa 9 điểm cực trị.

Chọn A

Câu 112. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2\left(x^2+m^2-3m-4\right)^3(x+3)^5$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(|x|\right)$ có 3 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Xét $f'(x)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x+1=0\\ x^2+m^2-3m-4=0\\ x+3=0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=-1\\ x=-3\\ x^2+m^2-3m-4=0\ (1)\end{bmatrix}$. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow(1)$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow m^2-3m-4<0\Leftrightarrow -1<m<4\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m\in\{0;1;2;3\}$.

Câu 113. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^4(x-m)^5(x+3)^3$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-5;5]$ để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 3 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Xét $f'(x)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x+1=0\\x-m=0\\x+3=0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=-1\ (\text{nghiem boi 4})\\x=m\ (\text{nghiem boi 5})\\x=-3\ (\text{nghiem boi 3})\end{bmatrix}$.

- Nếu $m=-1$ thì hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị âm ($x=-3; x=-1$). Khi đó, hàm số $f(|x|)$ chỉ có 1 cực trị là $x=0$. Do đó, $m=-1$ không thỏa yêu cầu đề bài.
- Nếu $m=-3$ thì hàm số $f(x)$ không có cực trị. Khi đó, hàm số $f(|x|)$ chỉ có 1 cực trị là $x=0$. Do đó, $m=-3$ không thỏa yêu cầu đề bài.
- Khi $\begin{cases}m\neq-1\\m\neq-3\end{cases}$ thì hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị là $x=m$ và $x=-3<0$.

Để hàm số $f(|x|)$ có 3 điểm cực trị thì hàm số $f(x)$ phải có hai điểm cực trị trái dấu $\Leftrightarrow m>0\xrightarrow[m\in[-5;5]]{m\in\mathbb{Z}}m\in\{1;2;3;4;5\}$.

Câu 114. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=e^{|x^3-3x^2+m|}$ có 5 điểm cực trị.

A. $(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$. **D.** $(0;4)$.

Lời giải

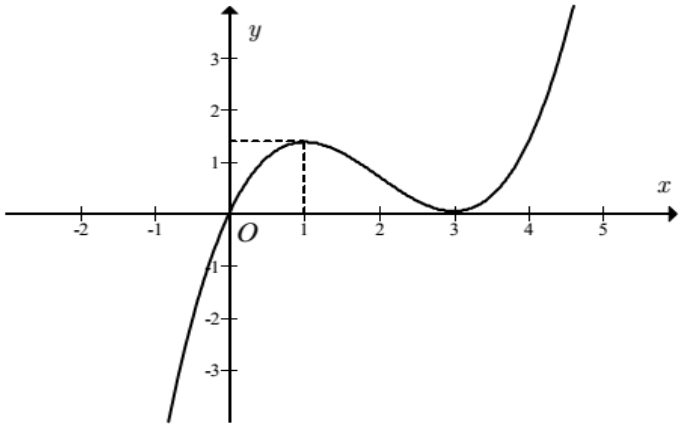
Số điểm cực trị của hàm số $e^{|f(x)|}$ bằng số điểm cực trị của hàm số $|f(x)|$.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với $f(x)=0\Leftrightarrow x^3-3x^2+m=0$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow m(m-4)<0\Leftrightarrow 0<m<4$.

Chọn D

Câu 115. (Cụm THPT Vũng Tàu) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-100;100]$ để hàm số $h(x)=|f^2(x+2)+4f(x+2)+3m|$ có đúng 3 điểm cực trị. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. 5047. **B.** 5049. **C.** 5050. **D.** 5043.

Lời giải

Chọn B

Đặt $g(x)=f^2(x+2)+4f(x+2)+3m \Rightarrow g'(x)=2f(x+2).f'(x+2)+4f'(x+2)$

$$g'(x)=2f'(x+2).\left[f(x+2)+2\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x+2)=0 \\ f(x+2)=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2=1 \\ x+2=3 \\ x+2=a\in(-1;0) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=a-2\in(-3;-2) \end{array}\right.$$ là 3 nghiệm đơn của $g'(x)=0$.

Suy ra hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Đặt $t=f(x+2)\Rightarrow t\in R$ và mỗi giá trị $t\in R$ thì phương trình $t=f(x+2)$ luôn có nghiệm.

$g(x)=f^2(x+2)+4f(x+2)+3m \Rightarrow h(t)=t^2+4t+3m$

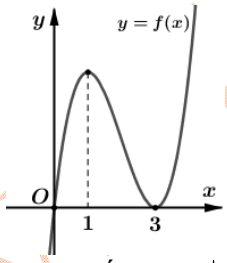
Vì hàm số $g(x)$ có 3 cực trị nên để hàm số $y=|g(x)|$ có 3 điểm cực trị thì.

$t^2+4t+3m\ge 0, \forall t\in R \Leftrightarrow 4-3m\le 0 \Leftrightarrow m\ge \frac{4}{3}$.(Vì hàm $y=h(t)$ là hàm bậc hai có hệ số $a>0$)

Do $m\in[-100;100]; m\in Z \Rightarrow m\in\{2,3,4,...,100\}$.

Vậy tổng các giá trị của m là $2+3+4+...+100=5049$.

Câu 116. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h(x)=|f^2(x)+f(x)+m|$ có đúng 3 điểm cực trị.

A. $m>\frac{1}{4}$. **B.** $m\ge\frac{1}{4}$. **C.** $m<1$. **D.** $m\le 1$.

Lời giải

Chọn B

Xét $g(x)=f^2(x)+f(x)+m \longrightarrow g'(x)=f'(x)\left[2f(x)+1\right]$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ 2f(x)=-1 \end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{theo đồ thị } f(x)} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \\ x=a\ (a<0) \end{array}\right.$$. Ta tính được $\left\{\begin{array}{l} g(1)=f^2(1)+f(1)+m>m \\ g(3)=m \\ g(a)=m-\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

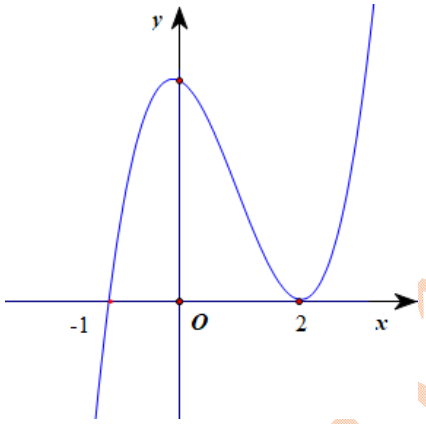
x	$-\infty$		a		1		3		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		↘	$g(a)$	↗	$g(1)$	↘	m	↗	

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Suy ra đồ thị hàm số $h(x)=\left|f^2(x)+f(x)+m\right|=\left|\left[f(x)+\frac{1}{2}\right]^2+m-\frac{1}{4}\right|$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $g(x)$ nằm hoàn toàn phía trên trục Ox (kể cả tiếp xúc)

$\longrightarrow m\geq\frac{1}{4}$.

Câu 117. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x)=|f^2(x)+2f(x)+m|$ có đúng 3 điểm cực trị.



A. $m\geq 1$. **B.** $m>1$ **C.** $m\leq -1$ **D.** $m<-1$

Lời giải

Chọn B

Ta có nhận xét sau: "Số điểm cực trị của hàm số $y=|h(x)|$ là tổng số điểm cực của hàm số $y=h(x)$ và số nghiệm đơn của phương trình $h(x)=0$".

Xét hàm số $y=h(x)=f^2(x)+2f(x)+m$

Ta có $h'(x)=2f(x).f'(x)+2f'(x)\Rightarrow h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0 \quad (1)\\ f(x)=-1 \quad (2)\end{array}\right.$

Từ hàm số đã có ta có (1) có 2 nghiệm phân biệt và (2) có một nghiệm đơn.

Do đó $h'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Để hàm số $y=|h(x)|$ có đúng 3 điểm cực trị thì phương trình $h(x)=0$ phải vô nghiệm, hay phương trình $f^2(x)+2f(x)+m=0$ vô nghiệm (tập giá trị của $f(x)$ là $\mathbb{R}$)

Điều này tương đương với điều kiện $\Delta'=1-m<0\Leftrightarrow m>1$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

GTLN, GTNN CỦA HÀM SỐ

A – LÝ THUYẾT CHUNG

1. Định nghĩa GTLN, GTNN

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trong khoảng K (đoạn, khoảng, nửa khoảng)

+ Nếu có $x_0 \in K$ sao cho $f(x) \le f(x_0), \forall x \in K$ thì $f(x_0)$ được gọi là giá trị lớn hất của hàm số trên khoảng K. Kí hiệu: $\max\limits_K y = f(x_0)$

+ Nếu có $x_0 \in K$ sao cho $f(x) \ge f(x_0), \forall x \in K$ thì $f(x_0)$ được gọi là giá trị nhỏ hất của hàm số trên khoảng K. Kí hiệu: $\min\limits_K y = f(x_0)$.

2. Phương pháp tìm GTLN, GTNN.

Bài toán 1: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng K:

Phương pháp: Lập bảng biến thiên trên khoảng K, rồi nhìn trên đó để kết luận max, min.

Bài toán 2: Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[a;b]$:

Phương pháp 1: Lập bảng biến thiên trên khoảng đó và kết luận.

Phương pháp 2: Nếu hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a;b] thì ta có các bước làm sau:

1. Tính đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ đã cho.

2. Tìm các điểm $x_1;x_2;...;x_n$ trên đoạn $[a;b]$, tại đó $f'(x)=0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

3. Tính: $f(a); f(x_1); f(x_2);...; f(x_n); f(b)$.

4. Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên (ở mục 3)

Khi đó: $M = \max\limits_{[a;b]} f(x); \text{m} = \min\limits_{[a;b]} f(x)$

Chú ý:

1. Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì hàm số f(x) luôn tồn tại giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất và tất cả các giá trị trung gian nằm giữa giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số f(x) trên đoạn đó.
2. Nếu đề bài không cho rõ tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng, đoạn nào cón nghĩa là ta tìm GTLN, GTNN của hàm số trên tập xác định của hàm số đó.
3. Tính đạo hàm y'. Nếu $y' \ge 0, \forall x \in [a;b] \Rightarrow \begin{cases} \min f(x) = f(a) \\ \max f(x) = f(b) \end{cases}$
4. Tính đạo hàm y'. Nếu $y' \le 0, \forall x \in [a;b] \Rightarrow \begin{cases} \min f(x) = f(b) \\ \max f(x) = f(a) \end{cases}$

B – CÁC DẠNG BÀI TẬP

DẠNG 1. GTLN, GTNN TRÊN ĐOẠN, KHOẢNG

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

TÌM GTLN, GTNN CỦA HÀM SỐ CHO BỞI CÔNG THỨC

Câu 1: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{2\sin^2 x}{\sin^4\dfrac{x}{2}+\cos^4\dfrac{x}{2}}$ là

A. 0 **B.** 4 **C.** 8 **D.** 2

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$, ta có $f(x)=\dfrac{2\sin^2 x}{\sin^4\dfrac{x}{2}+\cos^4\dfrac{x}{2}}=\dfrac{2\sin^2 x}{1-\dfrac{1}{2}\sin^2 x}=\dfrac{4\sin^2 x}{2-\sin^2 x}$.

Đặt $\sin^2 x=t\ (t\in[0;1])$, hàm số trở thành $g(t)=\dfrac{4t}{-t+2}$ với $t\in[0;1]$, ta có

$g'(t)=\dfrac{8}{(-t+2)^2}>0\forall t\in[0;1]$, suy ra hàm số đồng biến trên $[0;1]$, vậy

$\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=\max\limits_{t\in[0;1]} g(t)=g(1)=4$, xảy ra khi $t=1\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$

Chọn B

Câu 2: Cho hàm số $y=\dfrac{2\cos^2 x+|\cos x|+1}{|\cos x|+1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Khi đó $M+m$ bằng

A. -4. **B.** -5. **C.** -6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Đặt $t=|\cos x|, 0\le t\le 1\Rightarrow y=f(t)=\dfrac{2t^2+t+1}{t+1}, 0\le t\le 1$

$f'(t)=\dfrac{2t^2+4t}{(t+1)^2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=-2\notin[0;1]\end{array}\right.\Rightarrow f(0)=1, f(1)=2$

Vậy $\min\limits_{\mathbb{R}} y=1, \max\limits_{\mathbb{R}} y=2$

Câu 3: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $(C): y=\left(x^7+7x^4-4\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)^3$

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Tập xác định: $D=[1;+\infty)$

$y=\left(x^7+7x^4-4\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)^3$

$\Rightarrow y'=\underbrace{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)^3\left[7x^6+28x^3+\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\right)\left(x^7+7x^4-4\right)\right]}_{\ge 0,\forall x\ge 1}$.

Câu 4: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x\left(2017+\sqrt{2019-x^2}\right)$ trên tập xác định của nó. Tính $M-m$.

A. $2019\sqrt{2019}+2017\sqrt{2017}$. **B.** 4036.

C. $4036\sqrt{2018}$. **D.** $\sqrt{2019}+\sqrt{2017}$.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D=\left[-\sqrt{2019};\sqrt{2019}\right]$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta có $y' = 2017 + \sqrt{2019 - x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{2019 - x^2}}$

$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 2017 + \sqrt{2019 - x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{2019 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2017\sqrt{2019 - x^2} + 2019 - 2x^2}{\sqrt{2019 - x^2}} = 0$

Trên D, đặt $t = \sqrt{2019 - x^2}$, $t \ge 0$. Ta được:

$2t^2 + 2017t - 2019 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\dfrac{2019}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \sqrt{2019 - x^2} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{2018} \\ x = \sqrt{2018} \end{array}\right.$

Khi đó $f\left(-\sqrt{2018}\right) = -2018\sqrt{2018}$; $f\left(\sqrt{2018}\right) = 2018\sqrt{2018}$

$f\left(-\sqrt{2019}\right) = -2017\sqrt{2019}$; $f\left(\sqrt{2019}\right) = 2017\sqrt{2019}$

Suy ra $m = \min\limits_D y = -2018\sqrt{2018}$, $M = \max\limits_D y = 2018\sqrt{2018}$

Vậy $M - m = 4036\sqrt{2018}$.

Câu 5: Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = 5\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}\right) + \sqrt{(x-1)(3-x)}$ lần lượt là m và M, tính $S = m^2 + M^2$.

A. $S = 170$. **B.** $S = 169$. **C.** $S = 172$. **D.** $S = 171$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = [1;3]$.

Đặt $t = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$ ta có $\sqrt{2} \le t \le 2$ (dùng máy tính hoặc tìm GTLN, GTNN của t).

$\Rightarrow \sqrt{(x-1)(3-x)} = \dfrac{t^2 - 2}{2}$ vậy ta có hàm số $g(t) = \dfrac{t^2}{2} + 5t - 1$ với $\sqrt{2} \le t \le 2$.

Hàm số $g'(t) = t + 5 = 0 \Leftrightarrow t = -5 \notin \left[\sqrt{2};2\right]$.

$g\left(\sqrt{2}\right) = 5\sqrt{2}$, $g(2) = 11$ nên $m = 5\sqrt{2}, M = 11$.

Vậy $S = m^2 + M^2 = 171$.

Câu 6: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{1-x^2} + 3\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^2}$. Hỏi điểm $A(M;m)$ thuộc đường tròn nào sau đây?

A. $x^2 + (y-1)^2 = 1$. **B.** $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 20$

C. $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 2$. **D.** $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D = [-1;1]$.

Đặt $t = \sqrt[6]{1-x^2}$. Vì $x \in [-1;1] \Rightarrow t \in [0;1]$.

Vậy $y = f(t) = t^3 + 3t^4, t \in [0;1]$.

$f' = 3t^2 + 12t^3$, $f' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\dfrac{1}{4} \\ t = 0 \end{array}\right.$.

$f(1) = 4, f(0) = 0$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\max\limits_{[-1;1]} y = \max\limits_{[-1;1]} f(x) = 4$; $\min\limits_{[-1;1]} y = \min\limits_{[-1;1]} f(x) = 0$.

Vậy điểm $A(4;0)$.

Ta có: $(4-3)^2+(0-1)^2 = 2 \Rightarrow A \in (C): (x-3)^2+(y-1)^2 = 2$.

Câu 7: Giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \sqrt{x^3+2\left(1+\sqrt{x^3+1}\right)} + \sqrt{x^3+2\left(1-\sqrt{x^3+1}\right)}$ là:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

$y = \sqrt{x^3+2\left(1+\sqrt{x^3+1}\right)} + \sqrt{x^3+2\left(1-\sqrt{x^3+1}\right)}$

$\Leftrightarrow y = \sqrt{\left(\sqrt{x^3+1}+1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x^3+1}-1\right)^2}$

$\Leftrightarrow y = \left|\sqrt{x^3+1}+1\right| + \left|\sqrt{x^3+1}-1\right|$

Điều kiện để hàm số xác định $x \ge -1$

Ta có $y = \sqrt{x^3+1}+1+\left|\sqrt{x^3+1}-1\right|$

- Nếu $-1 \le x < 0$ thì $\sqrt{x^3+1}-1 < 0 \Rightarrow \left|\sqrt{x^3+1}-1\right| = 1-\sqrt{x^3+1} \Rightarrow y = 2$

- Nếu $x \ge 0$ thì $\sqrt{x^3+1}-1 \ge 0 \Rightarrow y = 2\sqrt{x^2+1} \ge 2$

Vậy: $y \ge 2, \forall x \ge -1, y = 2 \Leftrightarrow x = 0$

Chọn C

Câu 8: **(HSG Bắc Ninh)** Cho hàm số $y = ax^3+cx+d$, $a \ne 0$ có $\min\limits_{x\in(-\infty;0)} f(x) = f(-2)$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ bằng

A. $d-11a$. **B.** $d-16a$. **C.** $d+2a$. **D.** $d+8a$.

Lời giải

Chọn B

Vì $y = ax^3+cx+d$, $a \ne 0$ là hàm số bậc ba và có $\min\limits_{x\in(-\infty;0)} f(x) = f(-2)$ nên $a < 0$ và $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Ta có $y' = 3ax^2+c = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow ac < 0$.

Vậy với $a < 0, c > 0$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm đối nhau $x = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{3a}}$

Từ đó suy ra $\min\limits_{x\in(-\infty;0)} f(x) = f\left(-\sqrt{-\dfrac{c}{3a}}\right) \Leftrightarrow -\sqrt{-\dfrac{c}{3a}} = -2 \Leftrightarrow \sqrt{-\dfrac{c}{3a}} = 2 \Leftrightarrow c = -12a$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		1	2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$		0	$-$			
y	$+\infty$	↘	$f(-2)$	↗		↗		$f(2)$	↘		↘	$-\infty$

Ta suy ra $\max\limits_{x\in[1;3]} f(x) = f(2) = 8a+2c+d = -16a+d$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 9: **(PHÂN-TÍCH-BL-VÀ-PT-ĐẠI-HỌC-SP-HÀ-NỘI)** Cho hàm số $y=\left(x^3-3x+m\right)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng 1 là

A. 1. **B.** -4. **C.** 0. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x+m$.

Để GTNN của hàm số $y=\left(x^3-3x+m\right)^2$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 1 thì $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=1$ hoặc $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=-1$.

Ta có $f'(x)=3x^2-3$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\end{array}\right.\Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $[-1;1]$.

Suy ra $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=f(-1)=2+m$ và $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=f(1)=-2+m$.

Trường hợp 1: $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=1\Leftrightarrow -2+m=1\Leftrightarrow m=3$.

Trường hợp 2: $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=-1\Leftrightarrow 2+m=-1\Leftrightarrow m=-3$.

Vậy tổng các giá trị của tham số m là 0.

Câu 10: **(Đặng Thành Nam Đề 5)** Cho hàm số $y=\left(x^2+x+m\right)^2$. Tổng tất cả các giá trị thực tham số m sao cho $\min\limits_{[-2;2]} y=4$ bằng

A. $-\dfrac{31}{4}$. **B.** -8. **C.** $-\dfrac{23}{4}$. **D.** $\dfrac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Xét $u=x^2+x+m$ trên đoạn [-2;2] ta có $u'=0\Leftrightarrow 2x+1=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

Ta tính được $u(-2)=m+2$; $u\left(\dfrac{1}{2}\right)=m-\dfrac{1}{4}$; $u(2)=m+6$.

Nhận xét $m-\dfrac{1}{4}<m+2<m+6,\forall m\in\mathbb{R}$ nên $A=\max\limits_{[-2;2]} u=m+6$; $a=\min\limits_{[-2;2]} u=m-\dfrac{1}{4}$

Nếu $a\ge 0\Leftrightarrow m\ge\dfrac{1}{4}\Rightarrow\min\limits_{[-2;2]} y=\left(m-\dfrac{1}{4}\right)^2=4\leftrightarrow m=\dfrac{9}{4}(t/m);m=-\dfrac{7}{4}(l)$.

Nếu $A\le 0\Leftrightarrow m\le -6\Rightarrow\min\limits_{[-2;2]} y=(m+6)^2=4\leftrightarrow m=-8(t/m);m=-4(l)$.

Nếu $A.a<0\Leftrightarrow -6<m<\dfrac{1}{4}\Rightarrow\min\limits_{[-2;2]} y=0(l)$.

Vậy tổng các giá trị thực của tham số là $\dfrac{9}{4}-8=-\dfrac{23}{4}$.

Câu 11: **(CHUYÊN SƯ PHẠM HÀ NỘI LẦN 4 NĂM 2019)** Hàm số $y=x^4+ax^3+bx^2+1$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=a+b$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** -2. **D.** -1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x)\ge f(0),\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x^4+ax^3+bx^2\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow x^2\left(x^2+ax+b\right)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x^2+ax+b\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \Delta \le 0 \Leftrightarrow a^2-4b\le 0 \Leftrightarrow b\ge \frac{a^2}{4}$.

Khi đó: $S=a+b\ge a+\frac{a^2}{4}=\left(1+\frac{a}{2}\right)^2-1\ge -1, \forall a$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} b=\frac{a^2}{4} \\ 1+\frac{a}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=-2 \end{cases}$.

Vậy $\min S=-1$, khi $a=-2$, $b=1$.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c(a\ne 0)$ có điều kiện $\min\limits_{(-\infty;0)} f(x)=f(-1)$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};2\right]$ bằng:

A. $c+8a$ **B.** $c-\frac{7a}{16}$ **C.** $c+\frac{9a}{16}$ **D.** $c-a$

Lời giải:

Ta chú ý rằng điểm cực trị của hàm số có $x=0$ cho nên nếu như $\min\limits_{(-\infty;0)} f(x)=f(-1)$ chứng tỏ rằng $x=\pm 1$ là các điểm cực tiểu của hàm số cho nên $f(x)=a\left(x^4-2x^2\right)+c$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};2\right]$ bằng $\boxed{f(1)=c-a}$.

Chọn D

Câu 13: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x+m+2$. Có bao nhiêu số nguyên dương $m<2018$ sao cho với mọi bộ ba số thực $a,b,c\in[-1;3]$ thì $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài ba cạnh một tam giác nhọn.

A. 1989 **B.** 1969 **C.** 1997 **D.** 2008

Lời giải:

Ta đặt $g(x)=x^3-3x+2\Rightarrow \boxed{\max\limits_{[-1;3]} g(x)=20; \min\limits_{[-1;3]} g(x)=0}$ khi đó $f(x)=m+g(x)$.

Ta có: $f(a)+f(b)>f(c)\ \forall a,b,c\in[-1;3]\Rightarrow m>g(c)-\left(g(a)+g(b)\right)\ \forall a,b,c\in[-1;3]$

$\Rightarrow m>\max\limits_{[-1;3]} g(x)-2\min\limits_{[-1;3]} g(x)\Rightarrow \boxed{m>20}$.

Và $f^2(a)+f^2(b)>f^2(c)\ \forall a,b,c\in[-1;3]\Rightarrow \left(m+g(a)\right)^2+\left(m+g(b)\right)^2>\left(m+g(c)\right)^2\ \forall a,b,c\in[-1;3]$

$\Rightarrow m^2+2\left(g(a)+g(b)-g(c)\right)m+g^2(a)+g^2(b)-g^2(c)>0\ \forall a,b,c\in[-1;3]$

$\Rightarrow \left(m+g(a)+g(b)-g(c)\right)^2-2g(a)g(b)+2g(a)g(c)+2g(b)g(c)-2g^2(c)>0\ \forall a,b,c\in[-1;3]$

$\Rightarrow \left(m+g(a)+g(b)-g(c)\right)^2>2\left(g(a)-g(c)\right)\left(g(b)-g(c)\right)\ \forall a,b,c\in[-1;3]$

$\Rightarrow \left(m+g(a)+g(b)-g(c)\right)^2>2\left(\max\limits_{[-1;3]} g(x)-\min\limits_{[-1;3]} g(x)\right)^2\ \forall a,b,c\in[-1;3]$

$m>\max\limits_{[-1;3]} g(x)+20\sqrt{2}-2\min\limits_{[-1;3]} g(x)\Rightarrow \boxed{m\ge 49}$.

Chọn B

Câu 14: Cho hàm số $y=\left|x^2+2x+a-4\right|$. Tìm a để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2;1]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $a=3$ **B.** $a=2$ **C.** $a=1$ **D.** $a=4$

Lời giải

Ta có $y=\left|x^2+2x+a-4\right|=\left|(x+1)^2+a-5\right|$. Đặt $u=(x+1)^2$ khi đó $\forall x\in[-2;1]$ thì $u\in[0;4]$ Ta được hàm số $f(u)=|u+a-5|$. Khi đó

$\underset{x\in[-2;1]}{Max}\, y=\underset{u\in[0;4]}{Max}\, f(u)=Max\{f(0),f(4)\}=Max\{|a-5|;|a-1|\}$

Trường hợp 1: $|a-5|\geq|a-1|\Leftrightarrow a\leq 3\Rightarrow \underset{u\in[0;4]}{Max}\, f(u)=5-a\geq 2\Leftrightarrow a=3$

Trường hợp 2: $|a-5|\leq|a-1|\Leftrightarrow a\geq 3\Rightarrow \underset{u\in[0;4]}{Max}\, f(u)=a-1\geq 2\Leftrightarrow a=3$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\underset{x\in[-2;1]}{Max}\, y=2\Leftrightarrow a=3$

Chọn A

Câu 15: Với m để hàm số $y=\left|x^2+mx+1\right|$ trên $[-1;2]$ đạt giá trị nhỏ nhất là 1 thì mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. $2<|m|<4$ **B.** $1<|m|<2$ **C.** $0<|m|<1$ **D.** $|m|>4$

Lời giải:

Ta có $\min\limits_{[-1;2]} y=\min\left\{f(-1),f(2),f\left(-\frac{m}{2}\right)\right\}=\min\left\{|2-m|;|5+2m|;\left|\frac{m^2}{4}-1\right|\right\}$

Trường hợp 1: $|2-m|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=3\end{array}\right.$. Tuy nhiên khi thay vào kiểm tra ta thấy chỉ có $m=3$ thỏa mãn.

Trường hợp 2: $|5+2m|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\\m=-3\end{array}\right.$. Khi thay vào kiểm tra ta thấy chỉ có $m=-3$ thỏa mãn.

Trường hợp 3: $\left|\frac{m^2}{4}-1\right|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\pm 2\sqrt{2}\\m=0\end{array}\right.$. Tuy nhiên khi thay vào kiểm tra ta thấy không có giá trị nào thỏa mãn.

Chọn A

Câu 16: **(CỤM-CHUYÊN-MÔN-HẢI-PHÒNG)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $\max\limits_{[1;3]}\left|x^3-3x^2+m\right|\leq 4$?

A. Vô số. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(x)=x^3-3x^2+m\Rightarrow f'(x)=3x^2-6x.$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	1		2		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$m-2$		$m-4$		m

Ta thấy $\max\limits_{[1;3]} f(x)=f(3)=m$ và $\min\limits_{[1;3]} f(x)=f(2)=m-4.$

Ta có $\max\limits_{[1;3]}\left|x^3-3x^2+m\right|=\max\{|m|;|m-4|\}$.

Trường hợp 1:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$$\begin{cases} |m| \le |m-4| \\ \max\{|m|;|m-4|\} = |m-4| \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 \le m^2 - 8m + 16 \\ -4 \le m-4 \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 2 \\ 0 \le m \le 8 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m \le 2,$$

mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0;1;2\}$.

Trường hợp 2:

$$\begin{cases} |m| > |m-4| \\ \max\{|m|;|m-4|\} = |m| \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > m^2 - 8m + 16 \\ -4 \le m \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ -4 \le m \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \le 4,$$

mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{3;4\}$.

Vậy, có 5 giá trị nguyên của tham số m.

Câu 17: **(HSG Bắc Ninh)** Xét hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$, với a, b là tham số. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a + 2b$.

A. 2. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$. Theo đề bài, M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;3]$.

Suy ra $\begin{cases} M \ge f(-1) \\ M \ge f(3) \\ M \ge f(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \ge |1 - a + b| \\ M \ge |9 + 3a + b| \\ M \ge |1 + a + b| \end{cases} \Rightarrow 4M \ge |1 - a + b| + |9 + 3a + b| + 2|-1 - a - b|$

$\ge |1 - a + b + 9 + 3a + b + 2(-1 - a - b)| \Rightarrow 4M \ge 8 \Rightarrow M \ge 2$.

Nếu $M = 2$ thì điều kiện cần là $|1 - a + b| = |9 + 3a + b| = |-1 - a - b| = 2$ và $1 - a + b$, $9 + 3a + b$, $-1 - a - b$ cùng dấu $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - a + b = 9 + 3a + b = -1 - a - b = 2 \\ 1 - a + b = 9 + 3a + b = -1 - a - b = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$.

Ngược lại, khi $\begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$ ta có, hàm số $f(x) = |x^2 - 2x - 1|$ trên $[-1;3]$.

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 2x - 1$ xác định và liên tục trên $[-1;3]$.

$g'(x) = 2x - 2$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [-1;3]$

M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $[-1;3] \Rightarrow M = \max\{|g(-1)|;|g(3)|;|g(1)|\} = 2$.

Vậy $\begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$. Ta có: $a + 2b = -4$.

Câu 18: **(THTT lần 5)** Gọi A, a lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0;2]$. Gọi S là tập các giá trị thực của tham số m để $Aa = 12$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 1

Lời giải

Chọn A

Kiến thức bổ sung: Dạng toán tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = |u(x)|$ trên đoạn $[a;b]$

Gọi M, m lần lượt là GTLN, GTNN của hàm số $u(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

+ $\underset{[a;b]}{Max}\, y = Max\{|M|;|m|\}$

+ $\underset{[a;b]}{Min}\, y$

TH1: $M.m<0\Rightarrow \underset{[a;b]}{Min}\ y=0$.

TH2: $m\ge 0\Rightarrow \underset{[a;b]}{Min}\ y=m$.

TH3: $M\le 0\Rightarrow \underset{[a;b]}{Min}\ y=-M$.

Đặt: $u(x)=x^3-3x+m\Rightarrow u'(x)=3x^2-3$

$u'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in[0;2] \\ x=-1\notin[0;2] \end{array}\right.$

Ta có: $u(0)=m;u(1)=m-2;u(2)=m+2$

Suy ra: $\underset{[0;2]}{Max}\ u(x)=m+2;\ \underset{[0;2]}{Min}\ u(x)=m-2\Rightarrow \underset{[0;2]}{Max}\ y=Max\{|m+2|;|m-2|\}$.

TH1: $(m-2).(m+2)<0\Rightarrow -2<m<2\Rightarrow a=\underset{[0;2]}{Min}\ y=0$ (loại)

(vì ko thỏa mãn giả thiết $Aa=12$)

TH2: $m-2\ge 0\Leftrightarrow m\ge 2\Rightarrow \underset{[0;2]}{Min}\ y=m-2;A=\underset{[0;2]}{Max}\ y=m+2$.

Từ giả thiết: $Aa=12\Rightarrow (m+2)(m-2)=12\Leftrightarrow m^2=16\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4(TM) \\ m=-4(koTM) \end{array}\right.$

TH3: $m+2\le 0\Leftrightarrow m\le -2\Rightarrow \underset{[0;2]}{Min}\ y=-(m+2);\ \underset{[0;2]}{Max}\ y=-(m-2)$.

Từ giả thiết: $Aa=12\Rightarrow (m+2)(m-2)=12\Leftrightarrow m^2=16\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4(koTM) \\ m=-4(TM) \end{array}\right.$

Kết hợp các trường hợp suy ra: $S=\{-4;4\}$

Vậy tổng các phần tử của S bằng: $(-4)+4=0$.

Câu 19: **(THPT PHỤ DỰC – THÁI BÌNH)** Gọi S là tập hợp các giá trị của m để hàm số $y=|x^3-3x^2+m|$ đạt giá trị lớn nhất bằng 50 trên $[-2;4]$. Tổng các phần tử thuộc S là

A. 4. **B.** 36. **C.** 140. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x)=x^3-3x^2+m$ có $g'(x)=3x^2-6x$. Xét $g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số $y=|x^3-3x^2+m|$ trên $[-2;4]$ là:

$\max\limits_{x\in[-2;4]} y=\max\{y(0);y(-2);y(2);y(4)\}=\max\{|m|;|m-4|;|m-20|;|m+16|\}$.

Trường hợp 1: Giả sử $\max y=|m|=50\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=50 \\ m=-50 \end{array}\right.$.

Với $m=50$ thì $|m+16|=66>50$ (loại).

Với $m=-50$ thì $|m-20|=70>50$ (loại).

Trường hợp 2: Giả sử $\max y=|m-4|=50\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=54 \\ m=-46 \end{array}\right.$.

Với $m=54\Rightarrow |m|=54>50$ (loại).

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Với $m=-46$ thì $|m-20|=66>50$ (loại).

Trường hợp 3: Giả sử $\max y=|m-20|=50 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=70 \\ m=-30 \end{array}\right.$

Với $m=70$ thì $|m+16|=86>50$ (loại).

Với $m=-30$ thì $|m+16|=14<50$, $|m|=30<50$; $|m-4|=34<50$ (thỏa mãn).

Trường hợp 4: Giả sử $\max y=|m+16|=50 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=34 \\ m=-66 \end{array}\right.$.

Với $m=34$ thì $|m|=34<50, |m-4|=30<50, |m-20|=14<50$ (thỏa mãn).

Với $m=-66$ thì $|m|=66>50$ (loại).

Vậy $S\in\{-30;34\}$. Do đó tổng các phần tử của S là: $-30+34=4$.

Câu 20: **(Nguyễn Khuyến)** Gọi S là tập hợp giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=|x^3-3x+m|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Số phần tử của S là:

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x)=x^3-3x+m$ trên $\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-3$; $y'=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|		
$g(x)$	$-\infty$	↗	$m+2$	↘	m	↘	$m-2$	↗	$m+2$	↗	$+\infty$

Đồ thị của hàm số $y=|g(x)|$ thu được bằng cách giữ nguyên phần đồ thị phía trên trục hoành của $(C): y=g(x)$, còn phần đồ thị phía dưới trục hoành của $(C): y=g(x)$ thì lấy đối xứng qua trục hoành lên trên. Do đó, ta có biện luận sau đây:

Ta xét các trường hợp sau:

+) $m+2\le 0 \Leftrightarrow m\le -2$. Khi đó $m-2<m<m+2\le 0$, nên

$\underset{[0;2]}{Max}\, y=\underset{[0;2]}{Max}\{|m-2|,|m|,|m+2|\}=|m-2|=2-m$. Như vậy $\underset{[0;2]}{Max}\, y=3 \Leftrightarrow 2-m=3 \Leftrightarrow m=-1$ (loại).

+) $m<0<m+2 \Leftrightarrow -2<m<0$. Khi đó $m-2<m<0<m+2$, nên

$\underset{[0;2]}{Max}\, y=\underset{[0;2]}{Max}\{|m-2|,|m|,m+2\}=\underset{[0;2]}{Max}\{2-m,-m,m+2\}=2-m$. Như vậy

$\underset{[0;2]}{Max}\, y=3 \Leftrightarrow 2-m=3 \Leftrightarrow m=-1$ (thỏa mãn).

+) $m=0$: $\underset{[0;2]}{Max}\, y=2\ne 3$ (loại).

+) $m-2<0<m<m+2$ Ta có $\underset{[0;2]}{Max}\, y=\underset{[0;2]}{Max}\{|m-2|,|m|,m+2\}=\underset{[0;2]}{Max}\{2-m,m,m+2\}=m+2$, do đó

$\underset{[0;2]}{Max}\, y=3 \Leftrightarrow m+2=3 \Leftrightarrow m=1$. (thỏa mãn).

+) $0\le m-2<m<m+2$. Ta có

$\underset{[0;2]}{Max}\, y=\underset{[0;2]}{Max}\{|m-2|,|m|,m+2\}=\underset{[0;2]}{Max}\{2-m,m,m+2\}=m+2$, do đó $\underset{[0;2]}{Max}\, y=3 \Leftrightarrow m+2=3 \Leftrightarrow m=1$.

(thỏa mãn).

Suy ra $S=\{-1;1\}$. Vậy chọn

B.

Câu 21: Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x+m-20\right|$ trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng

A. 210. **B.** -195. **C.** 105. **D.** 300.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x$, ta xét hàm $g(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x$ với $x\in[0;2]$.

Có $g'(x)=x^3-19x+30=(x-2)(x+5)(x-3)\geq 0;\forall x\in[0;2]$ do đó $g(x)$ là hàm số đồng biến trên $[0;2]$; suy ra $t\in[0;26]$.

Đặt $f(t)=|t+m-20|$, khi $t\in[0;26]$ thì $f(t)$ liên tục trên $[0;26]$ nên

$$\max_{t\in[0;26]} f(t)=\max\{|m-20|;|m+6|\}.$$

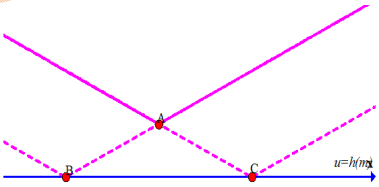
Nếu $m\geq 7$ thì $\max_{t\in[0;26]} f(t)=\max\{|m-20|;|m+6|\}=|m+6|$, do đó ta có $|m+6|\leq 20\Leftrightarrow -26\leq m\leq 14$ nên $m\in\{7;8;...;14\}$.

Nếu $m<7$ thì $\max_{t\in[0;26]} f(t)=\max\{|m-20|;|m+6|\}=|m-20|$, do đó ta có $|m-20|\leq 20\Leftrightarrow 0\leq m\leq 40$ nên $m\in\{0;1;2;3;4;5;6\}$.

Vậy tổng các giá trị nguyên thỏa mãn là $1+2+...+14=\frac{14.15}{2}=105$.

Tìm công thức cho bài toán tổng quát: *Cho hàm số* $y=|f(x)+h(m)|$ *với* $x\in[a;b]$ *; hãy tìm gtln của hàm số theo* m.

Giả sử khi $x\in[a;b]$ thì $f(x)\in[\alpha;\beta]$, và $y=|f(x)+h(m)|$ liên tục trên $[\alpha;\beta]$ nên ta có $\max_{x\in[a;b]} y=\max\{|\alpha+h(m)|;|\beta+h(m)|\}$. Đặt $u=h(m)$, đồ thị của hàm $g(u)=\max\{|\alpha+u|;|\beta+u|\}$ được mô phỏng như hình vẽ:



Trong đó đồ thị của $g(u)$ được mô phỏng là đường liền nét; $B(-\beta;0);C(-\alpha;0);A\left(-\frac{\alpha+\beta}{2};\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$, dễ thấy hàm số $g(u)$ đạt gtnn bằng $\frac{\beta-\alpha}{2}$ tại $u=-\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Cũng từ mô phỏng trên ta suy ra $g(u)=\begin{cases}|u+\alpha|;u\leq -\frac{\alpha+\beta}{2}\\ |u+\beta|;u\geq -\frac{\alpha+\beta}{2}\end{cases}$

Vận dụng vào bài toán trên: $\alpha=0;\beta=26;u=m-20$ ta có kết quả.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 22: **(GIA LỘC TỈNH HẢI DƯƠNG 2019 lần 2)** Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x+m-20\right|$ trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng

A. 210. **B.** -195. **C.** 105. **D.** 300.

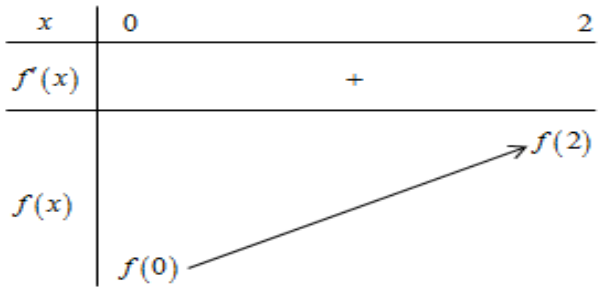
Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x+m-20$ trên đoạn $[0;2]$.

$$f'(x)=x^3-19x+30=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-5\notin[0;2]\\x=2\in[0;2]\\x=3\notin[0;2]\end{array}\right.$$

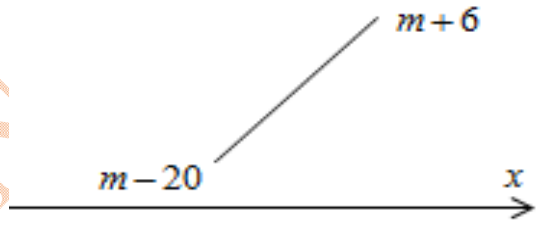
Bảng biến thiên:



với $f(0)=m-20$; $f(2)=m+6$.

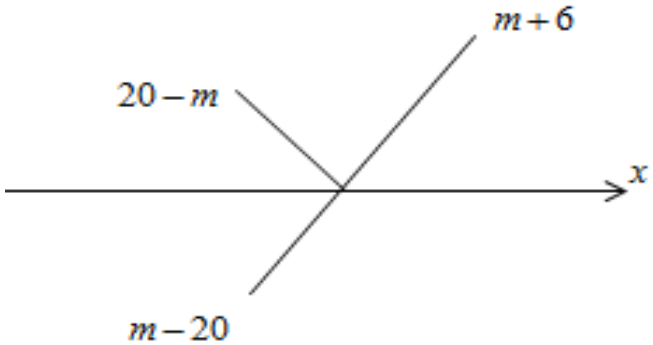
Xét hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x+m-20\right|$ trên đoạn $[0;2]$.

+ Trường hợp 1: $m-20\ge 0\Leftrightarrow m\ge 20$. Ta có



$\underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y=m+6\le 20\Leftrightarrow m\le 14$. Kết hợp $m\ge 20$ suy ra không có giá trị m.

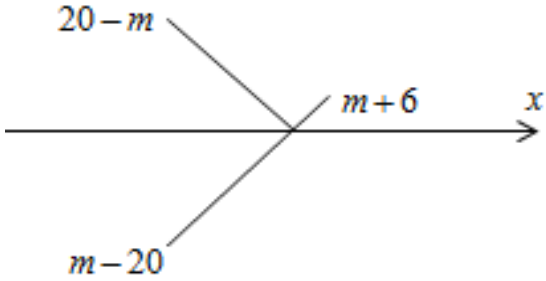
+ Trường hợp 2: $m+6\ge 20-m\Leftrightarrow m\ge 7$. Ta có:



$\underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y=m+6\le 20\Leftrightarrow m\le 14$. Kết hợp $m\ge 7$ suy ra $7\le m\le 14$.

Vì m nguyên nên $m\in\{7;8;9;10;11;12;13;14\}$.

+ Trường hợp 3: $20-m\ge m+6\Leftrightarrow m\le 7$. Ta có:



$\underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y = 20-m\le 20\Leftrightarrow m\ge 0$. Kết hợp $m\le 7$ suy ra $0\le m\le 7$.

Vì m nguyên nên $m\in\{0;1;2;3;4;5;6;7\}$.

Vậy $S=\{0;1;2;...;14\}$. Tổng các phần tử của S bằng $\dfrac{(14+0).15}{2}=105$.

Câu 23: **(CỤM TRƯỜNG SÓC SƠN MÊ LINH HÀ NỘI)** Cho hàm số $y=f(x)=\left|x^4-4x^3+4x^2+a\right|$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;2]$. Số giá trị nguyên a thuộc đoạn $[-3;3]$ sao cho $M\le 2m$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Xét $g(x)=x^4-4x^3+4x^2+a$ với $x\in[0;2]$.

$g'(x)=4x^3-12x^2+8x=4x(x^2-3x+2)$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$.

$g(0)=a$; $g(1)=1+a$; $g(2)=a$.

Bảng biến thiên $g(x)$

x	0		1		2
$g'(x)$	0	+	0	−	0
$g(x)$	a	↗	$a+1$	↘	a

Trường hợp 1: $a\ge 0$. Khi đó $M=a+1$; $m=a$.

Ta có $M\le 2m\Leftrightarrow 1+a\le 2a\Leftrightarrow a\ge 1$. Với $\begin{cases}a\in[-3;3]\\a\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow a\in\{1;2;3\}$.

Trường hợp 2: $a+1\le 0\Leftrightarrow a\le -1$. Khi đó $M=-a$; $m=-(a+1)$.

Ta có $M\le 2m\Leftrightarrow -a\le -2(a+1)\Leftrightarrow a\le -2$. Với $\begin{cases}a\in[-3;3]\\a\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow a\in\{-3;-2\}$.

Trường hợp 3: $-1<a<0$. Với $\begin{cases}a\in[-3;3]\\a\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow a\in\varnothing$.

Vậy có 5 giá trị a cần tìm.

Câu 24: **(Đặng Thành Nam Đề 15)** Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^4-38x^2+120x+4m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 26. **B.** 13. **C.** 14. **D.** 27.

Lời giải

Chọn D

Xét $u(x)=x^4-38x^2+120x+4m$ trên đoạn $[0;2]$ ta có

$$u'=0\Leftrightarrow 4x^3-76x+120=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5\notin[0;2] \\ x=2\in[0;2] \\ x=3\notin[0;2] \end{array}\right. .$$

Vậy $\left\{\begin{array}{l} \max\limits_{[0;2]}u(x)=\max\{u(0),u(2)\}=\max\{4m,4m+104\}=4m+104 \\ \min\limits_{[0;2]}u(x)=\min\{u(0),u(2)\}=\min\{4m,4m+104\}=4m \end{array}\right.$.

Cách 1:

Nếu $4m>0$ thì $\min\limits_{[0;2]}f(x)=4m>0$

Nếu $4m+104<0\Leftrightarrow m<-26$ thì $\min\limits_{[0;2]}f(x)=-4m-104>0$

Nếu $4m\le 0\le 4m+104\Leftrightarrow -26\le m\le 0$ thì $\min\limits_{[0;2]}f(x)=0$. Vậy có 27 số nguyên thỏa mãn.

Cách 2:

Khi đó $\min\left\{\min\limits_{[0;2]}y\right\}=0\Leftrightarrow 4m(4m+104)\le 0\Leftrightarrow -26\le m\le 0$. Có 27 số nguyên thoả mãn.

Câu 25: **(Liên Trường Nghệ An)** Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^4-38x^2+120x+4m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của tham số m bằng

A. -12. **B.** -13. **C.** -14. **D.** -11.

Lời giải

Chọn B

Xét $f(x)=x^4-38x^2+120x+4m$ trên đoạn $[0;2]$ ta có :

$$f'(x)=4x^3-76x+120=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=2 \\ x=-5 \end{array}\right. .$$

$$\Rightarrow \max_{x\in[0;2]}\left|f(x)\right|=Max\left\{\left|f(0)\right|,\left|f(2)\right|\right\}=Max\left\{\left|4m+104\right|,\left|4m\right|\right\}\ge\frac{\left|4m+104\right|+\left|4m\right|}{2}$$

$$\ge\frac{\left|4m+104-4m\right|}{2}=52.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\left|4m+104\right|=\left|4m\right|=52\Leftrightarrow m=-13$.

Câu 26: Cho hàm số $f(x)=\left|8x^4+ax^2+b\right|$, trong đó a, b là tham số thực. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 1. Hãy chọn khẳng định đúng?

A. $a>0$, $b<0$ **B.** $a<0$, $b<0$ **C.** $a>0$, $b>0$ **D.** $a<0$, $b>0$

Lời giải

Chọn D

Cách 1.

Xét $g(x)=8x^4+ax^2+b$, $g'(x)=32x^3+2ax=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=-\dfrac{a}{16} \end{array}\right.$.

Ta có $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=1 \Rightarrow g(0)=b\in[-1;1]$.

TH1. $a>0$. Ta có $g(1)=g(-1)=8+a+b>1$. Suy ra $\max\limits_{[-1;1]} f(x)>1$ không thỏa YCBT.

TH2. $a<0$.

Nếu $-\dfrac{a}{16}>1 \Leftrightarrow a<-16$. Ta có $g(1)=g(-1)=8+a+b<-1$. Suy ra $\max\limits_{[-1;1]} f(x)>1$ không thỏa YCBT.

Nếu $-\dfrac{a}{16}<1 \Leftrightarrow a>-16$.

Ta có BBT

x	-1		$-\dfrac{\sqrt{-a}}{4}$		0		$\dfrac{\sqrt{-a}}{4}$		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$8+a+b$	↘	$b-\dfrac{a^2}{32}$	↗	b	↘	$b-\dfrac{a^2}{32}$	↗	$8+a+b$

- $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=b=1$. Khi đó YCBT $\Leftrightarrow \begin{cases} 1-\dfrac{a^2}{32}\ge -1 \\ 8+a+b\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2\le 64 \\ a\le -8 \end{cases} \Leftrightarrow a=-8$ (thỏa $a>-16$)
- $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=8+a+b=1$. Khi đó, YCBT $\Leftrightarrow \begin{cases} b\le 1 \\ b-\dfrac{a^2}{32}\ge -1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a\ge -8 \\ \dfrac{a^2}{32}+a+6\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge -8 \\ -24\le a\le -8 \end{cases} \Leftrightarrow a=-8 \Rightarrow b=1$.

- $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=\left|b-\dfrac{a^2}{32}\right|=1$. Khi đó, YCBT $\Leftrightarrow \begin{cases} b-\dfrac{a^2}{32}=-1 \\ 8+a+b\le 1 \\ b\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{a^2}{32}-1 \\ 6+a+\dfrac{a^2}{32}\le 0 \\ a\ge -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-8 \\ b=1 \end{cases}$.

Vậy $a=-8$, $b=1$ thỏa YCBT.

Cách 2.

Đặt $t=x^2$ khi đó ta có $g(t)=8t^2+at+b$.

Vì $x\in[-1;1]$ nên $t\in[0;1]$.

Theo yêu cầu bài toán thì ta có: $0\le g(t)\le 1$ với mọi $t\in[0;1]$ và có dấu bằng xảy ra.

Đồ thị hàm số $g(t)$ là một parabol có bề lõm quay lên trên do đó điều kiện trên dẫn đến hệ điều kiện sau xảy ra :

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$$\begin{cases} -1\le g(0)\le 1 \\ -1\le g(1)\le 1 \\ -1\le \dfrac{-\Delta}{32}\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le b\le 1 \\ -1\le 8+a+b\le 1 \\ -32\le 32b-a^2\le 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le b\le 1 & (1) \\ -1\le 8+a+b\le 1 & (2) \\ -32\le a^2-32b\le 32 & (3) \end{cases}$$

Lấy $(1)+32(3)$ ta có : $-64\le a^2\le 64$ do đó $-8\le a\le 8$.

Lấy $(3)+32(2)$ ta có : $-64\le a^2+32a+256\le 64$

Suy ra : $a^2+32a+192\le 0 \Leftrightarrow -24\le a\le -8$.

Khi đó ta có $a=-8$ và $b=1$.

Kiểm tra : $g(t)=8t^2-8t+1=2(2t-1)^2-1$

Vì $0\le t\le 1$ nên $-1\le 2t-1\le 1\Rightarrow 0\le (2t-1)^2\le 1\Rightarrow -1\le g(t)=2(2t-1)^2-1\le 1$.

Vậy $\max|g(t)|=1$ khi $t=1\Rightarrow x=\pm 1$ (t/m).

Câu 27: **(Chuyên Hưng Yên Lần 3)** Gọi T là tập hợp tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx+1}{x+m^2}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[2;3]$ bằng $\dfrac{5}{6}$. Tính tổng của các phần tử trong T.

A. $\dfrac{17}{5}$. **B.** $\dfrac{16}{5}$. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=\dfrac{mx+1}{x+m^2}$.

Điều kiện $x\ne -m^2$.

$y=\dfrac{mx+1}{x+m^2}\Rightarrow y'=\dfrac{m^3-1}{(x+m^2)^2}$.

- Nếu $m=1$ thì $y=\dfrac{x+1}{x+1}$. Khi đó $\max\limits_{[2;3]} y=1$, suy ra $m=1$ không thỏa mãn.

- Nếu $m^3-1>0\Leftrightarrow m>1$ thì $y'>0$. Suy ra hàm số $y=\dfrac{mx+1}{x+m^2}$ đồng biến trên đoạn $[2;3]$.

Khi đó $\max\limits_{[2;3]} y=y(3)=\dfrac{3m+1}{3+m^2}=\dfrac{5}{6}\Leftrightarrow 5m^2-18m+9=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=\dfrac{3}{5}. \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện $m>1$, ta có $m=3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Nếu $m^3-1<0\Leftrightarrow m<1$ thì $y'<0$. Suy ra hàm số $y=\dfrac{mx+1}{x+m^2}$ nghịch biến trên đoạn $[2;3]$.

Khi đó $\max\limits_{[2;3]} y=y(2)=\dfrac{2m+1}{2+m^2}=\dfrac{5}{6}\Leftrightarrow 5m^2-12m+4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=\dfrac{2}{5}. \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện $m<1$, ta có $m=\dfrac{2}{5}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $T=\left\{3;\dfrac{2}{5}\right\}$. Do đó tổng các phần tử của T là $3+\dfrac{2}{5}=\dfrac{17}{5}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 28: **(Lương Thế Vinh Lần 3)** Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{2x+m}{x-1}$.

Tính tổng các giá trị của tham số m để $\max\limits_{[2;3]} f(x)-\min\limits_{[2;3]} f(x)=2$.

A. -4. **B.** -2. **C.** -1. **D.** -3.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=f(x)=\dfrac{2x+m}{x-1}$ xác định và liên tục trên $[2;3]$.

Với $m=-2$, hàm số trở thành $y=2\Rightarrow \max\limits_{[2;3]} f(x)=\min\limits_{[2;3]} f(x)=2$ (không thỏa).

Với $m\neq -2$, ta có $y'=\dfrac{-2-m}{(x-1)^2}$.

Khi đó hàm số luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên $[2;3]$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l}\max\limits_{[2;3]} f(x)=f(2);\ \min\limits_{[2;3]} f(x)=f(3)\\ \max\limits_{[2;3]} f(x)=f(3);\ \min\limits_{[2;3]} f(x)=f(2)\end{array}\right.$.

Do đó: $\max\limits_{[2;3]} f(x)-\min\limits_{[2;3]} f(x)=f(3)-f(2)=\dfrac{2+m}{2}$

Theo giả thiết $\max\limits_{[2;3]} f(x)-\min\limits_{[2;3]} f(x)=2\Leftrightarrow \dfrac{2+m}{2}=2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=2\\ m=-6\end{array}\right.$.

Vậy tổng các giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán là: -4.

Câu 29: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x+m^2}{x-1}$ trên đoạn $[2;3]$ bằng 14.

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có $y'=\dfrac{-1-m^2}{(x-1)^2}<0,\ \forall x\in D$.

Do đó hàm số nghịch biến trên đoạn $[2;3]$.

Suy ra $\min\limits_{[2;3]} y=y(3)=\dfrac{3+m^2}{3-1}=14\Leftrightarrow m=\pm 5$. Vậy có 1 giá trị nguyên dương của m.

Câu 30: **(Sở Bắc Ninh)** Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x-m^2-2}{x-m}$ trên đoạn $[0;4]$ bằng -1.

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x\neq m$.

Hàm số đã cho xác định trên $[0;4]$ khi $m\notin[0;4]$ (*).

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta có $y'=\dfrac{m^2-m+2}{(x-m)^2}=\dfrac{\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}}{(x-m)^2}>0$ với $\forall x\in[0;4]$.

Hàm số đồng biến trên đoạn $[0;4]$ nên $\max\limits_{[0;4]} y=y(4)=\dfrac{2-m^2}{4-m}$.

$\max\limits_{[0;4]} y=-1\Leftrightarrow\dfrac{2-m^2}{4-m}=-1\Leftrightarrow m^2+m-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-3\end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện (*) ta được $m=-3$. Do đó có một giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 31: Trên đoạn $[-2;2]$, hàm số $y=\dfrac{mx}{x^2+1}$ đạt giá trị lớn nhất tại $x=1$ khi và chỉ khi

A. $m=2$. **B.** $m\geq 0$. **C.** $m=-2$. **D.** $m<0$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Với $m=0$ thì $y=0$ nên $\max\limits_{[-2;2]} y=0$ khi $x=1$.

Với $m\neq 0$.

Đặt $x=\tan t$, ta được $y=\dfrac{m}{2}.\sin 2t$. Với $x\in[-2;2]$ thì $t\in[-\arctan 2;\arctan 2]$.

Hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất tại $x=1$ tương ứng với $t=\dfrac{\pi}{4}$.

Khi $m>0$ thì $\max\limits_{[-\arctan 2;\arctan 2]} y=\dfrac{m}{2}$ khi và chỉ khi $t=\dfrac{\pi}{4}$.

Khi $m<0$ thì $\max\limits_{[-\arctan 2;\arctan 2]} y=\dfrac{m}{2}$ khi và chỉ khi $t=-\dfrac{\pi}{4}$.

Vậy $m\geq 0$ thỏa mãn bài toán.

Cách 2: Ta có $y'=\dfrac{m\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$,

TH1: $m=0\Rightarrow y=0$ là hàm hằng nên cũng coi GTLN của nó bằng 0 khi $x=1$

TH2: $m\neq 0$. Khi đó: $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\ \ (n)\\x=1\ \ \ (n)\end{array}\right.$

Vì hàm số đã cho liên tục và xác định nên ta có hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất tại $x=1$ trên đoạn $[-2;2]$ khi và chỉ khi $\begin{cases}y(1)\geq y(-2)\\y(1)\geq y(2)\\y(1)\geq y(-1)\end{cases}\Leftrightarrow m\geq 0\Rightarrow m>0$ (do $m\neq 0$)

Vậy $m\geq 0$

Chú ý: Ngoài cách trên trong TH2 $m\neq 0$, ta có thể xét $m>0$, $m<0$ rồi lập BBT cũng tìm được kết quả như trên.

Câu 32: **(Nguyễn Trãi Hải Dương Lần1)** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x^3+x^2-m}{x+1}$ trên $[0;\ 2]$ bằng 5. Tham số m nhận giá trị là

A. -5. **B.** 1. **C.** -3. **D.** -8.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-m}{x+1}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Giá trị lớn nhất của $y=f(x)$ trên $[0;\ 2]$ bằng $5 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\le 5,\ \forall x\in[0;\ 2] \\ \exists x_0\in[0;2] \mid f(x_0)=5 \end{cases}$.

* $f(x)\le 5,\ \forall x\in[0;\ 2] \Leftrightarrow \dfrac{x^3+x^2-m}{x+1}\le 5,\ \forall x\in[0;\ 2]$

$\Leftrightarrow m\ge x^3+x^2-5x-5,\ \forall x\in[0;\ 2]$

$\Leftrightarrow m\ge \max\limits_{[0;2]} h(x)$, với $h(x)=x^3+x^2-5x-5$.

+ Ta có: $h'(x)=3x^2+2x-5$, $h'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2+2x-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{5}{3}\ (\text{L}) \end{array}\right.$.

Ta có: $h(0)=-5$, $h(2)=-3$, $h(1)=-8$.

Suy ra $\max\limits_{[0;2]} h(x)=-3$, $\min\limits_{[0;2]} h(x)=-8$.

Vậy $m\ge -3$. (1)

* $\exists x_0\in[0;2] \mid f(x_0)=5 \Leftrightarrow \dfrac{x^3+x^2-m}{x+1}=5$ có nghiệm trên $[0;2]$.

$\Leftrightarrow m=x^3+x^2-5x-5$ có nghiệm trên $[0;2]$.

Theo phần trên, ta suy ra $-8\le m\le -3$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $m=-3$.

Cách dùng casio

Kiểm tra từng giá tri của m từ các đáp án A, B, C, D như sau

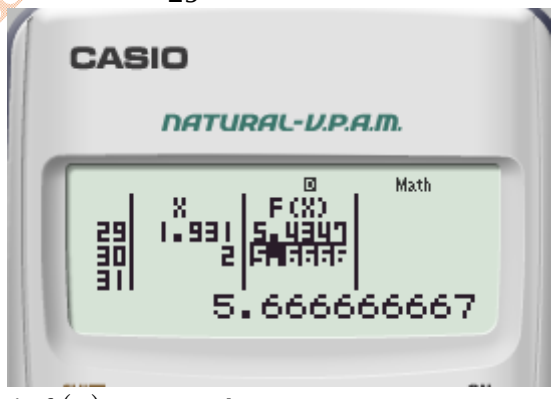
Trường hợp 1: $m=-5$ thì $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+5}{x+1}$.

Trước khi làm thì tắt hàm $g(x)$ bằng lệnh " SHIFT + MODE + ↓ + 5 + 1".

Bước 1: Vào môi trường TABLE bằng lệnh "Mode + 7".

Bước 2: Nhập hàm $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+5}{x+1}$.

Bước 3: Nhập $Start=0$; $End=2$; $Step=\dfrac{2-0}{29}$.



Quan sát bên cột $f(x)$ có giá trị $f(x)\approx 5,67$ nên loại $m=-5$.

Ba trường hợp còn lại làm tương tự như trên chỉ có $m=-3$ thỏa mãn giá trị lớn nhất của $f(x)$ là 5.

Câu 33: **(Chuyên Thái Bình Lần 3)** Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{x^2-mx+2m}{x-2}\right|$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 3. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $-\frac{8}{3}$. **B.** 5. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y=f(x)=\frac{x^2-mx+2m}{x-2}$ trên $[-1;1]$ có $f'(x)=1-\frac{4}{(x-2)^2}$;

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\notin[-1;1]\end{array}\right.$; $f(-1)=\frac{3m+1}{-3}$; $f(0)=-m$; $f(1)=\frac{m+1}{-1}$.

Bảng biến thiên

	-1		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(-1)$	↗	$f(0)$	↘	$f(1)$

Trường hợp 1. $f(0)\le 0\Leftrightarrow m\ge 0$. Khi đó

$3=\max\limits_{[-1;1]}|f(x)|=\max\{|f(-1)|;|f(1)|\}\Leftrightarrow 3=\max\left\{\frac{3m+1}{3};m+1\right\}\Leftrightarrow m+1=3\Leftrightarrow m=2$.

Trường hợp 2. $f(0)>0\Leftrightarrow m<0$.

Khả năng 1. $\left\{\begin{array}{l}f(-1)\ge 0\\f(1)\ge 0\end{array}\right.\Leftrightarrow m\le -1$. Khi đó $3=\max\limits_{[-1;1]}|f(x)|=f(0)\Leftrightarrow m=-3$.

Khả năng 2. $-1<m\le -\frac{1}{3}$. Khi đó $\left\{\begin{array}{l}f(-1)\ge 0\\f(1)<0\end{array}\right.$. $3=\max\limits_{[-1;1]}|f(x)|=\max\{f(0);|f(1)|\}$

$\Leftrightarrow 3=\max\{-m;m+1\}$: Trường hợp này vô nghiệm.

Khả năng 3. $-\frac{1}{3}<m<0$. Khi đó $3=\max\limits_{[-1;1]}|f(x)|=\max\{f(0);|f(1)|;|f(-1)|\}$: Vô nghiệm.

Vậy có hai giá trị thỏa mãn là $m_1=-3$, $m_2=2$. Do đó tổng tất cả các phần tử của S là -1.

Câu 34: **(Chuyên Hạ Long lần 2-2019)** Có bao nhiêu số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=|x^2-4x+m+3|-4x$ bằng -5.

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Xét $f(x)=x^2-4x+m+3$ có $\Delta'=1-m$.

TH1. $m\ge 1$: $f(x)\ge 0\ \forall x\Leftrightarrow y=x^2-8x+m+3$.

x	$-\infty$		4		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$m-13$	↗	$+\infty$

$\min y=-5\Leftrightarrow m=8$ (TM).

TH2. $m<1$: $f(x)=0$ có hai nghiệm $x_1=2-\sqrt{1-m}$; $x_2=2+\sqrt{1-m}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

□ Nếu $x \in (x_1;x_2)$: $y = -x^2 - 3 - m$.

$y(x_1) = -8 + 4\sqrt{1-m}$.

$y(x_2) = -8 - 4\sqrt{1-m}$.

$\Rightarrow y(x_1) < y(x_2)$

$\Rightarrow \min\limits_{(x_1;x_2)} y = -8 - 4\sqrt{1-m} < -8$ (Không TM).

□ Nếu $x \notin (x_1;x_2)$: $y = x^2 - 8x + 3 + m$.

+) $x_2 < 4 \Leftrightarrow 1 > m > -3$:

x	$-\infty$	x_1	x_2	4	$+\infty$
y	$+\infty$			$m-13$	$+\infty$

$\min y = m - 13 = -5 \Leftrightarrow m = 8$ (Loại).

+) $x_2 \geq 4 \Leftrightarrow m \leq -3$:

x	$-\infty$	x_1	4	x_2	$+\infty$
y	$+\infty$	$-8+4\sqrt{1-m}$		$-8-4\sqrt{1-m}$	$+\infty$

$\Rightarrow \min y = -8 - 4\sqrt{1-m} < -8$ (Không TM). Vậy có 1 giá trị của m.

Câu 35: **(CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 3)** Cho hàm số $f(x) = (x-1)^2(ax^2 + 4ax - a + b - 2)$, với a, $b \in \mathbb{R}$. Biết trên khoảng $\left(-\frac{4}{3};0\right)$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = -1$. Hỏi trên đoạn $\left[-2;-\frac{5}{4}\right]$ hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại giá trị nào của x?

A. $x = -\frac{5}{4}$. **B.** $x = -\frac{4}{3}$. **C.** $x = -\frac{3}{2}$. **D.** $x = -2$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = 2(x-1)(2ax^2 + 5ax - 3a + b - 2)$.

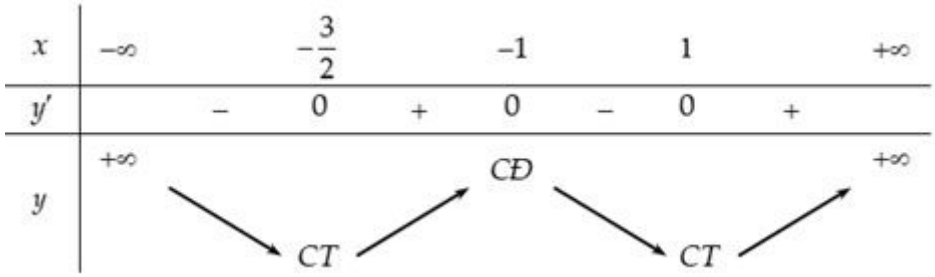
Vì trên khoảng $\left(-\frac{4}{3};0\right)$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = -1$ nên hàm số đạt cực trị tại $x = -1$ (cũng là điểm cực đại của hàm số) và $a > 0$.

$\Rightarrow f'(-1) = 0 \Leftrightarrow -4(-6a + b - 2) = 0 \Leftrightarrow b = 6a + 2$.

$\Rightarrow f'(x) = 2a(x-1)(2x^2 + 5x + 3)$.

Khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{3}{2} \\ x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$ **. (đều là các nghiệm đơn)**

Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ nên có bảng biến thiên:



$\Rightarrow x=-\dfrac{3}{2}$ là điểm cực tiểu duy nhất thuộc $\left[-2;-\dfrac{5}{4}\right]$.

Vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=-\dfrac{3}{2}$ trên đoạn $\left[-2;-\dfrac{5}{4}\right]$.

Câu 36: **(Lương Thế Vinh Lần 3)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max\limits_{x\in[0;10]} f(x)=f(2)=4$. Xét hàm số $g(x)=f\left(x^3+x\right)-x^2+2x+m$. Giá trị của tham số m để $\max\limits_{x\in[0;2]} g(x)=8$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** -1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $h(x)=f\left(x^3+x\right)$ trên $[0;2]$. Đặt $t=x^3+x, x\in[0;2]$.

Ta có $t'=3x^2+1>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên $t\in[0;10]$.

Vì vậy $\max\limits_{x\in[0;2]} f\left(x^3+x\right)=\max\limits_{t\in[0;10]} f(t)=4$ khi $t=2\Leftrightarrow x=1$.

Mặt khác $p(x)=-x^2+2x+m=-(x-1)^2+m+1\le m+1$. Suy ra $\max\limits_{x\in[0;2]} p(x)=m+1$ khi $x=1$.

Vậy $\max\limits_{x\in[0;2]} g(x)=4+m+1=m+5=8\Leftrightarrow m=3$.

Cách 2:

Phương pháp trắc nghiệm

Chọn hàm $y=f(x)=4$ thỏa mãn giả thiết: hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $\max\limits_{x\in[0;10]} f(x)=f(2)=4$.

Ta có $g(x)=f\left(x^3+x\right)-x^2+2x+m=4-x^2+2x+m$.

$g'(x)=-2x+2$; $g'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Xét hàm số $g(x)$ liên tục trên đoạn $[0;2]$, $g'(x)=0\Leftrightarrow x=1$. Ta có $g(0)=4+m$, $g(1)=5+m$, $g(2)=4+m$.

Rõ ràng $g(0)=g(2)<g(1)$ nên $\max\limits_{x\in[0;2]} g(x)=g(1)$. Vậy $5+m=8\Leftrightarrow m=3$.

Câu 37: **(Cụm 8 trường Chuyên Lần 1)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=3$. Xét $g(x)=f(3x-1)+m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $\max\limits_{[0;1]} g(x)=-10$.

A. 13. **B.** -7. **C.** -13. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\max\limits_{[0;1]} g(x)=\max\limits_{[0;1]}\left[f(3x-1)+m\right]=m+\max\limits_{[0;1]} f(3x-1)$.

Đặt $t=3x-1$. Ta có hàm số $t(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà $x\in[0;1]\Rightarrow t\in[-1;2]$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Suy ra: $\max\limits_{[0;1]} f(3x-1)=\max\limits_{[-1;2]} f(t)=3$. Suy ra $\max\limits_{[0;1]} g(x)=m+3$.

Do đó $\max\limits_{[0;1]} g(x)=-10 \Leftrightarrow m+3=-10 \Leftrightarrow m=-13$.

Câu 38: **(Sở Cần Thơ 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $[f(x)-x]f(x)=x^6+3x^4+2x^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;2]$. Giá trị của $3M-m$ bằng

A. 4. **B.** -28. **C.** -3. **D.** 33.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $[f(x)-x]f(x)=x^6+3x^4+2x^2 \Leftrightarrow f^2(x)-xf(x)=x^6+3x^4+2x^2$

$\Leftrightarrow 4f^2(x)-4xf(x)=4x^6+12x^4+8x^2 \Leftrightarrow 4f^2(x)-4xf(x)+x^2=4x^6+12x^4+9x^2$

$\Leftrightarrow [2f(x)-x]^2=(2x^3+3x)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2f(x)-x=2x^3+3x \\ 2f(x)-x=-2x^3-3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=x^3+2x \\ f(x)=-x^3-x \end{array}\right.$

Với $f(x)=x^3+2x \Rightarrow f'(x)=3x^2+2>0, \forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Với $f(x)=-x^3-x \Rightarrow f'(x)=-3x^2-1<0, \forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(x)=-x^3-x$. Vì $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên $M=\max\limits_{[1;2]} f(x)=f(1)=-2$

và $m=\min\limits_{[1;2]} f(x)=f(2)=-10$.

Từ đây,ta suy ra: $3M-m=3.(-2)+10=4 \Rightarrow$ chọn đáp án A

Câu 39: Cho hàm số $y=|x-1|+|x-2|+...+|x-2019|$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là

A. 2020^2. **B.** 2.1010^2. **C.** 1010^2. **D.** 1009.1010.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$y=(|x-1|+|2019-x|)+(|x-2|+|2018-x|)+...+(|x-1009|+|1011-x|)+|x-1010|$

$y\ge|x-1+2019-x|+|x-2+2018-x|+...+|x-1009+1011-x|+|x-1010|$

$=2018+2016+..+2+0=1009.1010$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=1010$

Câu 40: Cho hàm số $y=|x-1|+|x-2|+|x-3|+...+|x-2019|+|x-2020|$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là:

A. 2.1011^2. **B.** 1010^2. **C.** 1011^2. **D.** 1010.2021.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y=|x-1|+|x-2|+|x-3|+...+|x-2019|+|x-2020|$

$=(|x-1|+|2020-x|)+(|x-2|+|2019-x|)+...+|x-1015|+|1016-x|$

$\ge|x-1+2020-x|+|x-2+2019-x|+...+|x-1015+1016-x|$

$\ge 2019+2017+2015+...+3+1$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

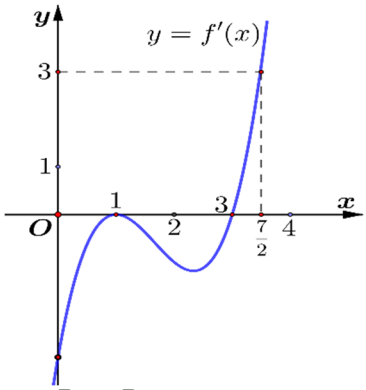
$\geq \frac{(1+2019)1010}{2}$

$\Rightarrow y \geq 1010^2$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

TÌM GTLN, GTNN CỦA HÀM SỐ CHO BỞI BBT, ĐỒ THỊ

Câu 41: **(THPT-Yên-Mô-A-Ninh-Bình-2018-2019-Thi-tháng-4)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\left[0;\frac{7}{2}\right]$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:



Hàm số $y=f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $\left[0;\frac{7}{2}\right]$ tại điểm x_0 nào dưới đây ?

A. $x_0=0$. **B.** $x_0=\frac{7}{2}$. **C.** $x_0=3$. **D.** $x_0=1$.

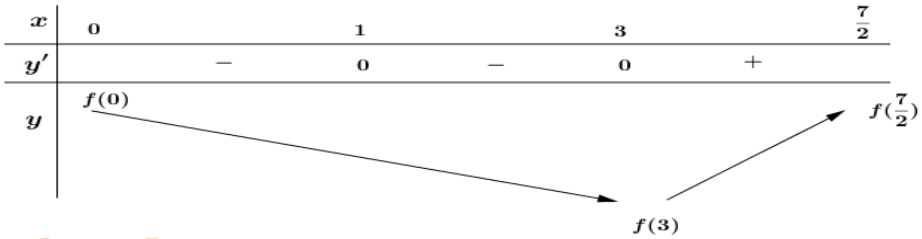
Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $\left[0;\frac{7}{2}\right]$.

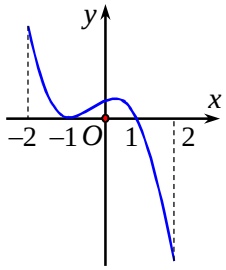
Dựa vào đồ thị ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:



Nhìn bảng biến thiên ta thấy hàm số $y=f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $\left[0;\frac{7}{2}\right]$ tại điểm $x_0=3$.

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $[-2;2]$, có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Tìm giá trị x_0 để hàm số $y=f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $[-2;2]$.



A. $x_0=2$. **B.** $x_0=-1$. **C.** $x_0=-2$. **D.** $x_0=1$.

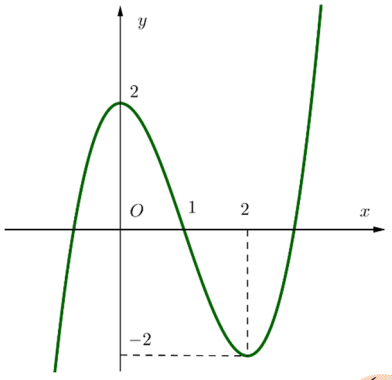
Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\text{ (nghiem kep)}\\x=1\end{array}\right.$. Bảng biến thiên:

x	-2		-1		1		2
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	
y		↗		↗	$f(1)$	↘	

Câu 43: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



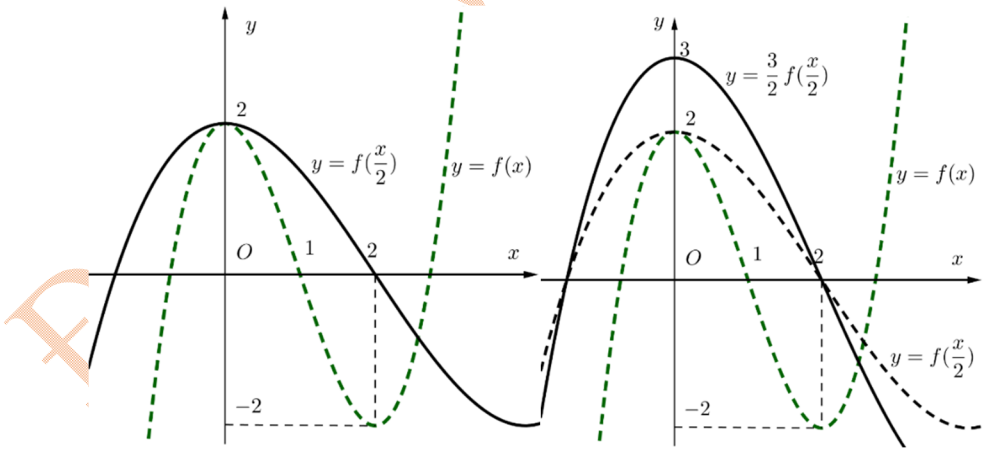
Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{3}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)$ trên đoạn $[0;2]$. Khi đó $M+m$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A **Cách 1:** Thực hiện các phép biến đổi đồ thị:

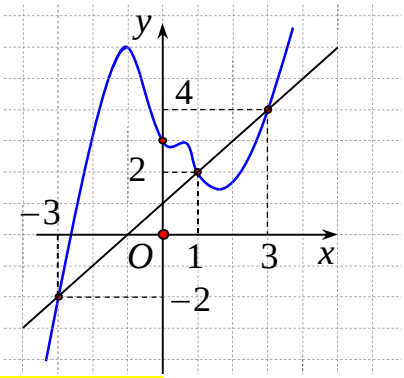
Ta suy ra đồ thị hàm số $y=3f\left(\frac{x}{2}\right)$ từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ bằng cách thực hiện phép dãn theo trục hoành với hệ số dãn 2. Sau đó thực hiện phép dãn theo trục tung với hệ số dãn $\frac{3}{2}$



Vậy $M=3,m=0\Rightarrow M+m=3$.

Cách khác: Ta có $g'(x)=\frac{3}{4}f'\left(\frac{x}{2}\right)$, $g'(x)=0\Leftrightarrow f'\left(\frac{x}{2}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\end{array}\right.$. Từ đó lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)$.

Câu 44: **[Chuyên Thái Bình, lần 3, năm 2017-2018-]** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x)=2f(x)-(x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**.



A. $\underset{[-3;3]}{Min}\, g(x) = g(1)$. **B.** $\underset{[-3;3]}{Max}\, g(x) = g(1)$. **C.** $\underset{[-3;3]}{Max}\, g(x) = g(3)$. **D.** Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của $g(x)$ trên $[-3;3]$.

Lời giải

Chọn B

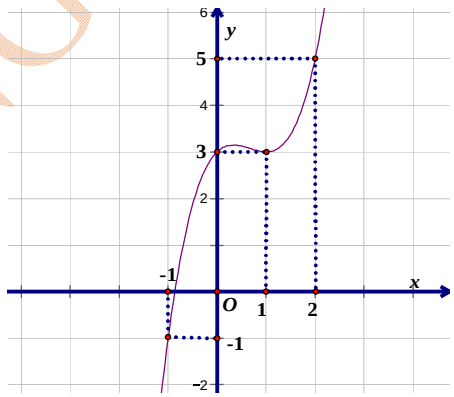
Ta có $y = g(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $g'(x) = 2\left(f'(x) - (x+1)\right)$. Để xét dấu $g'(x)$ ta xét vị trí tương đối giữa $y = f'(x)$ và $y = x+1$.

Từ đồ thị ta thấy $y = f'(x)$ và $y = x+1$ có ba điểm chung là $A(-3;-2), B(1;2), C(3;4)$; đồng thời $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3;1) \cup (3;+\infty)$ và $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-3) \cup (1;3)$. Trên đoạn $[-3;3]$ ta có BBT:

x	-3		1		3
$g'(x)$	0	+	0	−	0
$g(x)$	$g(-3)$	↗	$g(1)$	↘	$g(3)$

Từ BBT suy ra B đúng.

Câu 45: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như dưới đây.



Lập hàm số $g(x) = f(x) - x^2 - x$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $g(-1) > g(1)$. **B.** $g(-1) = g(1)$. **C.** $g(1) = g(2)$. **D.** $g(1) > g(2)$.

Lời giải

Chọn D Ta có $g'(x) = f'(x) - 2x - 1$.

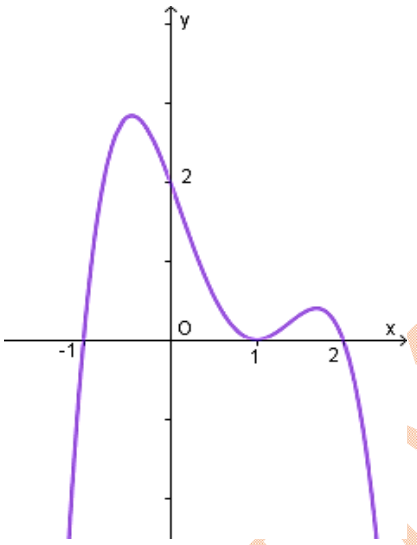
Ta thấy đường thẳng $y = 2x+1$ là đường thẳng đi qua các điểm $A(-1;-1), B(1;3), C(2;5)$.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = 2x+1$ ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$g'(x)=f'(x)-2x-1$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

Suy ra đáp án đúng là D

Câu 46: **(Thuận Thành 2 Bắc Ninh)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



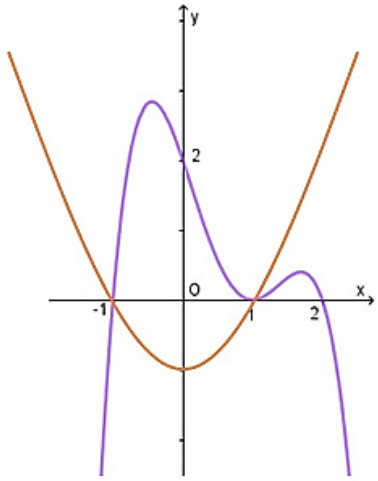
Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3+x-1$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A. $f(-1)-\frac{5}{3}$. **B.** $f(1)-\frac{1}{3}$. **C.** $f(2)-\frac{5}{3}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x)=f'(x)-x^2+1=f'(x)-(x^2-1)=0\Leftrightarrow f'(x)=x^2-1$ (*)

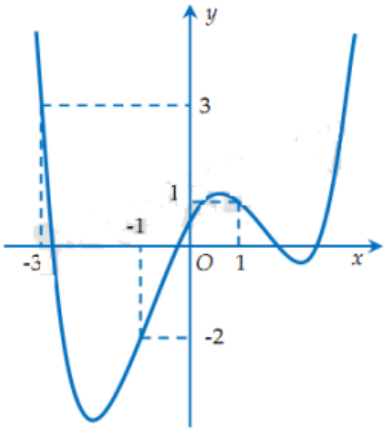


Từ đồ thị ta cáo bảng xét dấu

x	-1		1		2
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	$g(1)$	↘	

Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3+x-1$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng $f(1)-\frac{1}{3}$

Câu 47: Hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x+2017$

Trong các mệnh đề dưới đây:

I) $g(0)<g(1)$

II) $\min\limits_{x\in[-3;1]} g(x)=g(-1)$

III) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-3;-1)$

IV) $\max\limits_{x\in[-3;1]} g(x)=\max\{g(-3);g(1)\}$

Số mệnh đề đúng là

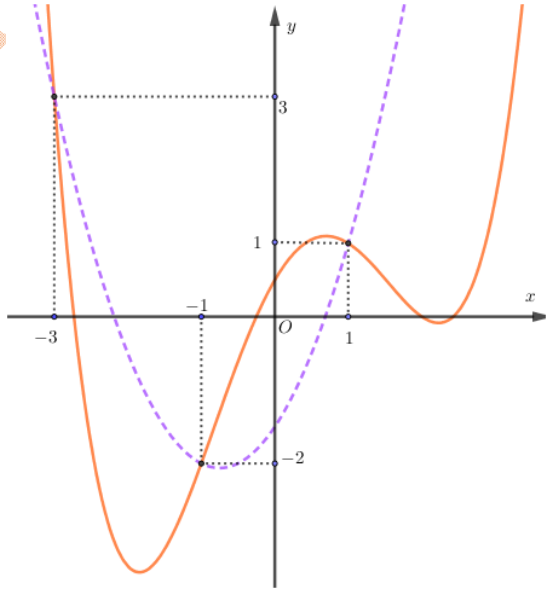
A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

$g'(x)=f'(x)-\left(x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\right)$

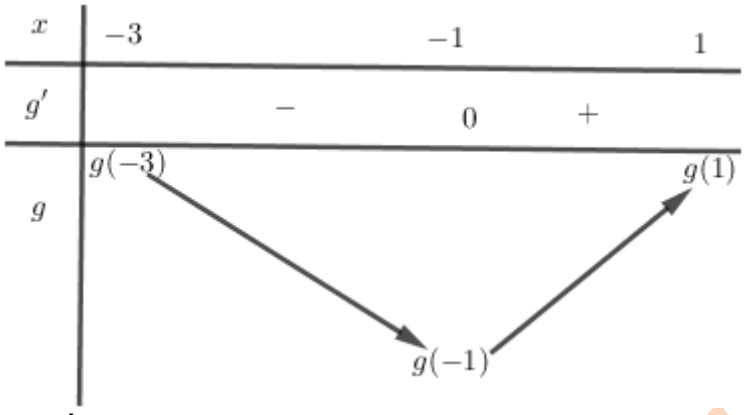
Trên mặt phẳng toạ độ đã có đồ thị hàm số $f'(x)$ ta vẽ thêm đồ thị hàm số $y=x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$.



Dựa vào đồ thị hàm số ta có

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Khi $x\in(-3;-1)$ thì $f'(x)<x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$, khi $x\in(-1;1)$ thì $f'(x)>x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$. Do đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$ trên đoạn $[-3;1]$ như sau



Dựa vào bảng biến thiên ta có:

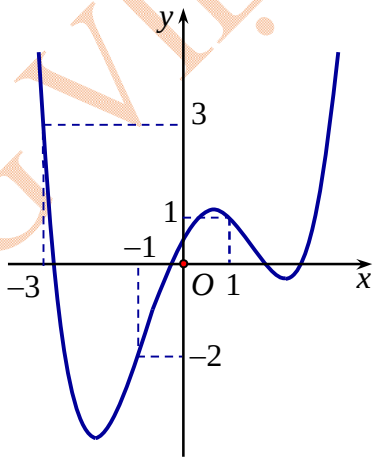
Vì trên $[0;1]$ hàm số $g(x)$ đồng biến nên $g(0)<g(1)$, do đó (I) đúng.

Dựa vào bảng biến thiên dễ thấy $(-3;-1)$ hàm $g(x)$ nghịch biến nên $\min\limits_{[-3;-1]}g(x)=g(-1)$, do đó (II), (III) đúng.

Và dễ thấy rằng $\max\limits_{[-3;1]}g(x)=\max\{g(-3);g(1)\}$.

Vậy cả bốn mệnh đề trên đều đúng.

Câu 48: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x+2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $\min\limits_{[-3;1]}g(x)=g(-1)$.

B. $\min\limits_{[-3;1]}g(x)=g(1)$.

C. $\min\limits_{[-3;1]}g(x)=g(-3)$.

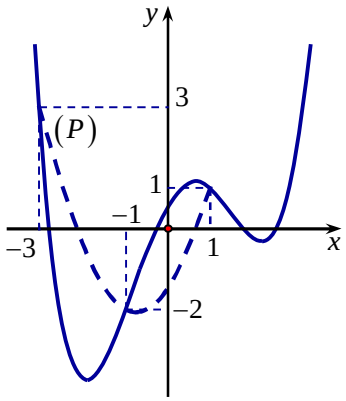
D. $\min\limits_{[-3;1]}g(x)=\frac{g(-3)+g(1)}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x+2018 \Rightarrow g'(x)=f'(x)-x^2-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$

Căn cứ vào đồ thị $y=f'(x)$, ta có: $\begin{cases}f'(-1)=-2\\f'(1)=1\\f'(-3)=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}g'(-1)=0\\g'(1)=0\\g'(-3)=0\end{cases}$



Ngoài ra, vẽ đồ thị (P) của hàm số $y=x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$ trên cùng hệ trục tọa độ như hình vẽ bên (đường nét đứt), ta thấy (P) đi qua các điểm $(-3;3)$, $(-1;-2)$, $(1;1)$ với đỉnh $I\left(-\frac{3}{4};-\frac{33}{16}\right)$. Rõ ràng

o Trên khoảng $(-1;1)$ thì $f'(x)>x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$, nên $g'(x)>0\ \forall x\in(-1;1)$

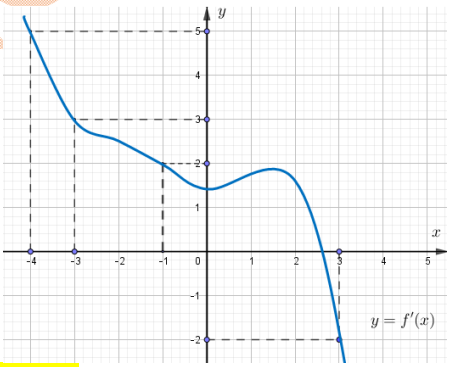
o Trên khoảng $(-3;-1)$ thì $f'(x)<x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$, nên $g'(x)<0\ \forall x\in(-3;-1)$

Từ những nhận định trên, ta có bảng biến thiên của hàm $y=g'(x)$ trên $[-3;1]$ như sau:

x	-3		-1		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗	

Vậy $\min\limits_{[-3;1]} g(x)=g(-1)$

Câu 49: **(HKII-CHUYÊN-NGUYỄN-HUỆ-HÀ-NỘI)** Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Trên đoạn $[-4;3]$, hàm số $g(x)=2f(x)+(1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm



A. $x_0=-4$. **B.** $x_0=-1$. **C.** $x_0=3$. **D.** $x_0=-3$.

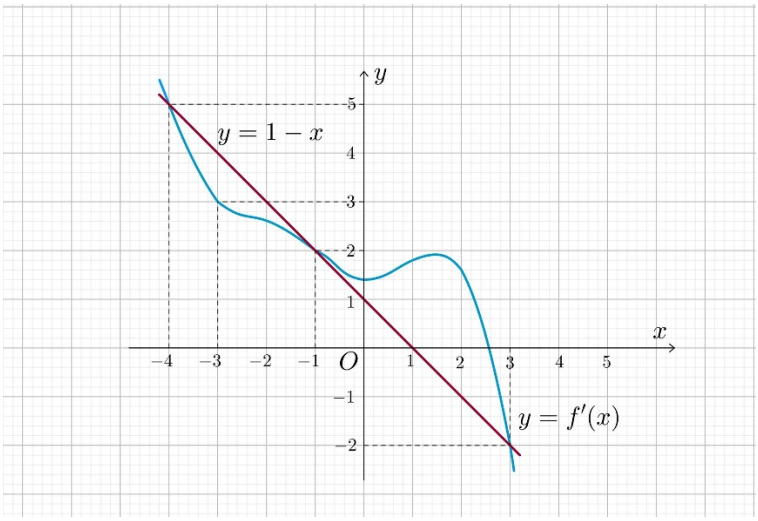
Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=2f'(x)-2(1-x)=2\left[f'(x)-(1-x)\right]$

Vẽ đường thẳng $y=1-x$ trên cùng hệ trục chứa đồ thị $y=f'(x)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Dựa vào hình vẽ ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=1-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	-4		-1		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$g(-4)$	↘	$g(-1)$	↗	$g(3)$

Vậy hàm số $g(x)=2f(x)+(1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=-1$

Câu 50: **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định Lần 1)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f\left(4x-x^2\right)+\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x+\frac{1}{3}$ trên đoạn $[1;3]$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	5	↘	$-\infty$

A. 15. **B.** $\frac{25}{3}$. **C.** $\frac{19}{3}$. **D.** 12.

Lời giải

Chọn D

$g'(x)=(4-2x)f'\left(4x-x^2\right)+x^2-6x+8=(2-x)\left[2f'\left(4x-x^2\right)+4-x\right]$.

Với $x\in[1;3]$ thì $4-x>0$; $3\le 4x-x^2\le 4$ nên $f'\left(4x-x^2\right)>0$.

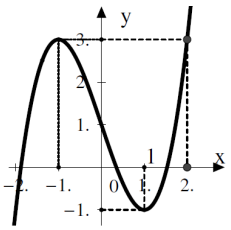
Suy ra $2f'\left(4x-x^2\right)+4-x>0$, $\forall x\in[1;3]$.

Bảng biến thiên

x	1		2		3
g'		+	0	–	
g	$g(1)$	↗	$g(2)$	↘	$g(3)$

Suy ra $\max\limits_{[1;3]} g(x) = g(2) = f(4)+7 = 12$.

Câu 51: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đặt hàm số $y = g(x) = f\left(2x^3 + x - 1\right) + m$. Tìm m để $\max\limits_{[0;1]} g(x) = -10$.



A. $m = -13$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = -12$. **D.** $m = -1$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Hàm số $y = f(x)$ có dạng: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Ta có: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Theo đồ thị, hai điểm $A(-1;3)$ và $B(1;-1)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Ta có hệ: $\begin{cases} 3a - 2b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ -a + b - c + d = 3 \\ a + b + c + d = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \\ d = 1 \end{cases}$.

Do đó: $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 3$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$

Lại có: $g'(x) = \left(6x^2 + 1\right) f'\left(2x^3 + x - 1\right)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'\left(2x^3 + x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^3 + x - 1 = -1 \\ 2x^3 + x - 1 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = x_0 \end{array}\right.$

với $x_0 \in (0;1)$ và thỏa $2x_0^{\,3} + x_0 - 1 = 1$.

Ta có: $g(0) = f(-1) + m = 3 + m$; $g(1) = f(2) + m = 3 + m$; $g(x_0) = f(1) + m = -1 + m$.

Theo đề bài, ta có: $3 + m = -10 \Leftrightarrow m = -13$.

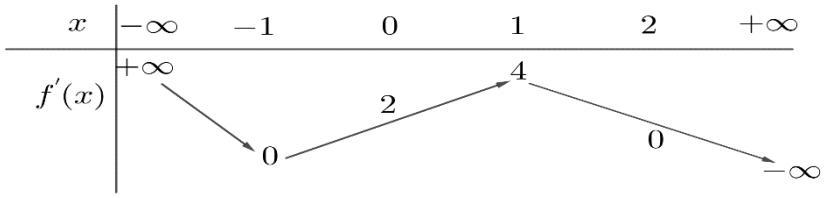
Cách 2: Đặt $t = 2x^3 + x - 1, x \in [0;1] \Rightarrow t'(x) = 6x^2 + 1 > 0, \forall x \in [0;1]$, hàm số $t(x)$ đồng biến.

Dó đó $x \in [0;1] \Leftrightarrow t \in [-1;2]$. Từ đồ thị hàm số ta có $\max\limits_{[-1;2]} f(t) = f(2) = 3 \Rightarrow \max\limits_{[-1;2]} \left[f(t) + m \right] = 3 + m$

Suy ra $\max\limits_{[0;1]} g(x) = \max\limits_{[-1;2]} \left[f(t) + m \right] = 3 + m \Rightarrow 3 + m = -10 \Rightarrow m = -13$.

Câu 52: **(KINH MÔN HẢI DƯƠNG 2019)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên tập số thực và có bảng biến thiên như sau:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Biết rằng $f(-1)=\dfrac{10}{3}$, $f(2)=6$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f^3(x)-3f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A. $\dfrac{10}{3}$. **B.** $\dfrac{820}{27}$. **C.** $\dfrac{730}{27}$. **D.** 198.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x)=f^3(x)-3f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$

$g'(x)=3\left[f^2(x)-1\right]\cdot f'(x)$, $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \quad (1)\\ f^2(x)=1 \quad (2)\end{array}\right.$.

Từ bảng biến thiên, ta có: $(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-1\in[-1;2]\\ x=2 \in[-1;2]\end{array}\right.$

Và $f'(x)\ge 0$, $\forall x\in[-1;2]$ nên $f(x)$ đồng biến trên $[-1;2]\Rightarrow f(x)\ge f(-1)=\dfrac{10}{3}$

$\Rightarrow f(x)>1\Rightarrow f^2(x)>1$, $\forall x\in[-1;2]$ nên (2) vô nghiệm.

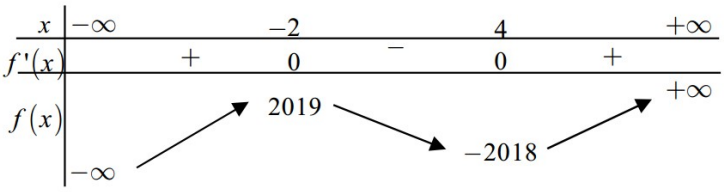
Do đó, $g'(x)=0$ chỉ có 2 nghiệm là $x=-1$ và $x=2$.

Ta có $g(-1)=f^3(-1)-3f(-1)=\left(\dfrac{10}{3}\right)^3-3\left(\dfrac{10}{3}\right)=\dfrac{730}{27}$.

$g(2)=f^3(2)-3f(2)=(6)^3-3(6)=198$.

Vậy $\min\limits_{[-1;2]}g(x)=g(-1)=\dfrac{730}{27}$.

Câu 53: **(Nam Tiền Hải Thái Bình Lần 1)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x\right)-\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{2}{3}x^3+3x-\dfrac{2}{15}$ trên đoạn $[-1;2]$?

A. 2022. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn D

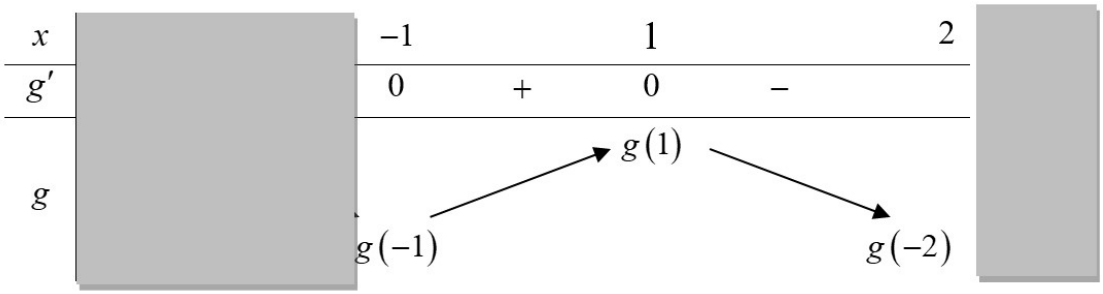
$g'(x)=\left(3x^2-3\right)f'\left(x^3-3x\right)-x^4-2x^2+3=\left(x^2-1\right)\left[3f'\left(x^3-3x\right)-x^2-3\right]$

$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 3f'\left(x^3-3x\right)-x^2-3=0\\ x^2-1=0\end{array}\right.$

Mà $x\in[-1;2]\Rightarrow x^3-3x\in[-2;2]\Rightarrow f'\left(x^3-3x\right)<0\Rightarrow 3f'\left(x^3-3x\right)-x^2-3<0$, do đó

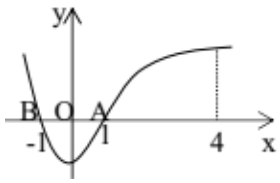
$g'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1.$

Ta có



Vậy $\max\limits_{[-1;2]} y=g(1)=f(-2)+2=2021.$

Câu 54: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên R và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



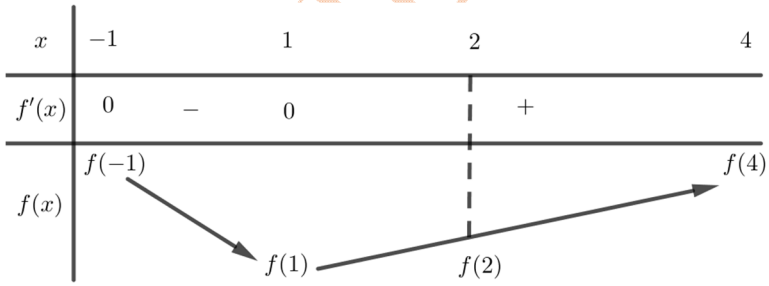
Biết rằng $f(-1)+f(2)=f(1)+f(4)$, các điểm $A(1;0), B(-1;0)$ thuộc đồ thị. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;4]$ lần lượt là

A. $f(1); f(-1).$ **B.** $f(0); f(2).$ **C.** $f(-1); f(4).$ **D.** $f(1); f(4).$

Lời giải

Chọn D

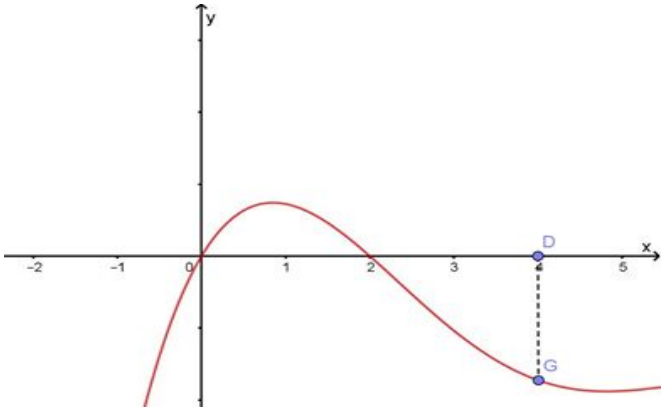
Bảng biến thiên:



Ta có: $f(1)<f(-1), f(1)<f(2), f(1)<f(4)$ mà

$f(-1)+f(2)=f(1)+f(4) \Rightarrow f(2)-f(1)=f(4)-f(-1)>0 \Rightarrow f(4)>f(-1)$

Câu 55: **(KÊNH TRUYỀN HÌNH GIÁO DỤC QUỐC GIA VTV7 –2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ cho như hình vẽ.



Biết rằng $f(2)+f(4)=f(3)+f(0)$. Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0;4]$ lần lượt là

A. $f(2), f(0)$. **B.** $f(4), f(2)$. **C.** $f(0), f(2)$. **D.** $f(2), f(4)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;4]$.

x	0		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(0)$	↗	$f(2)$	↘	$f(4)$

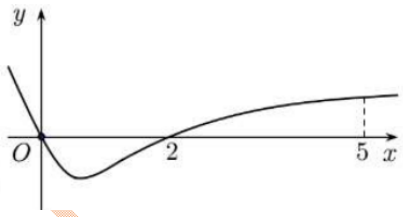
Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $\max\limits_{[0;4]} f(x)=f(2)$.

Ta có $f(2)+f(4)=f(3)+f(0) \Leftrightarrow f(0)-f(4)=f(2)-f(3)>0$.

Suy ra: $f(4)<f(0)$. Do đó $\min\limits_{[0;4]} f(x)=f(4)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0;4]$ lần lượt là: $f(4), f(2)$.

Câu 56: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên R và có đồ thị hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $f(0)+f(3)=f(2)+f(5)$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn của $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$ làn lượt là:



A. $f(2); f(0)$ **B.** $f(0); f(5)$ **C.** $f(2); f(5)$ **D.** $f(1); f(3)$

Lời giải

Chọn C

Phương pháp: Dựa vào tính đơn điệu của hàm số, vẽ bảng biến thiên để xác định Min, Max của hàm số $f(x)$.

Cách giải: Từ đồ thị $y=f'(x)$ trên đoạn $[0;5]$, ta có $f'(0)=0; f'(2)=0$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên:

x	$-\infty$		0		2		5		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
y		↗	$f(0)$	↘	$f(2)$	↗	$f(5)$		

Suy ra $\min\limits_{[0;5]} f(x)=f(2)$. Từ giả thiết, ta có:

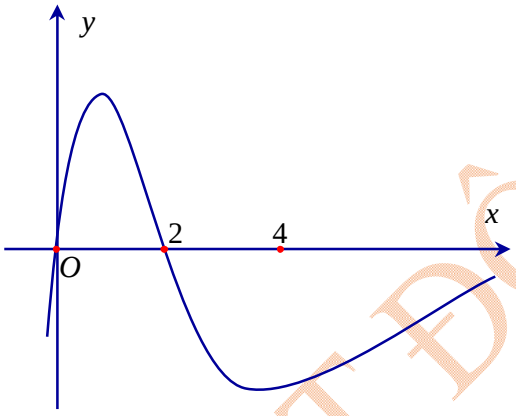
$f(0)+f(3)=f(2)+f(5)\Leftrightarrow f(5)-f(3)=f(0)-f(2)$

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $[2;5];3\in[2;5]\Rightarrow f(3)>f(2)$

$\Rightarrow f(5)-f(2)>f(5)-f(3)=f(0)-f(2)\Rightarrow f(5)>f(0)$

Suy ra $\max\limits_{[0;5]} f(x)=\{f(0),f(5)\}=f(5)$.

Câu 57: **(Lý Nhân Tông)** Cho hàm số có $f(x)$ có đạo hàm là hàm $f'(x)$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0)+f(1)-2f(2)=f(4)-f(3)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0;4]$.



A. $m=f(4),M=f(2)$.

B. $m=f(1),M=f(2)$

C. $m=f(4),M=f(1)$.

D. $m=f(0),M=f(2)$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị của hàm $f'(x)$ ta có bảng biến thiên.

x	0		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(0)$	↗	$f(2)$	↘	$f(4)$

Vậy giá trị lớn nhất $M=f(2)$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$ nên $f(2)>f(1)\Rightarrow f(2)-f(1)>0$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;4)$ nên $f(2)>f(3)\Rightarrow f(2)-f(3)>0$.

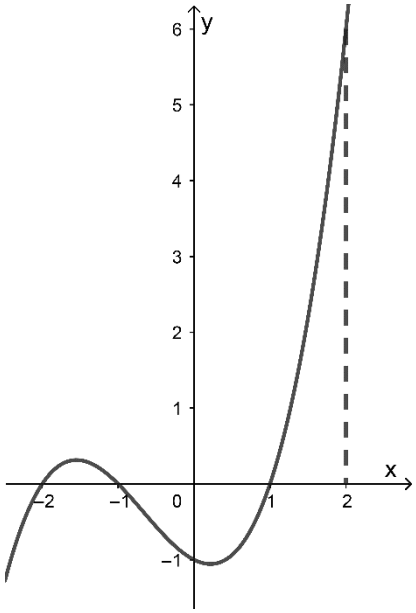
Theo giả thuyết: $f(0)+f(1)-2f(2)=f(4)-f(3)$

$\Leftrightarrow f(0)-f(4)=f(2)-f(1)+f(2)-f(3)>0\Rightarrow f(0)>f(4)$

Vậy giá trị nhỏ nhất $m=f(4)$.

Câu 58: **(HSG 12 Bắc Giang)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



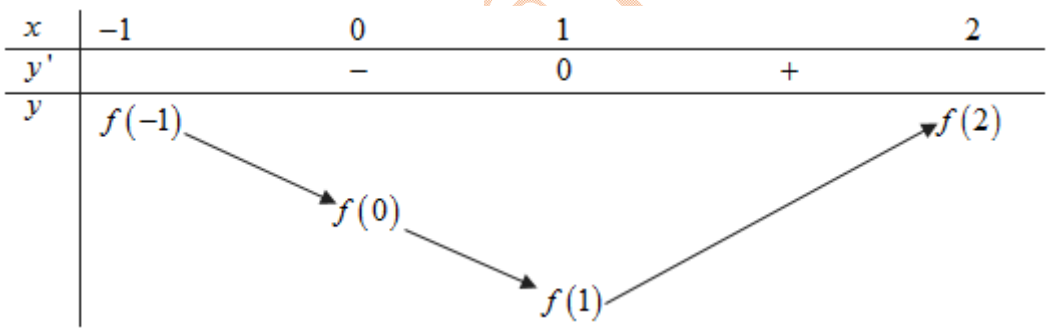
Biết rằng $f(-1)+f(0)<f(1)+f(2)$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ lần lượt là:

A. $f(1);\ f(2)$. **B.** $f(2);\ f(0)$. **C.** $f(0);\ f(2)$. **D.** $f(1);\ f(-1)$.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ như sau



Nhận thấy

$\min\limits_{[-1;2]} f(x)=f(1)$.

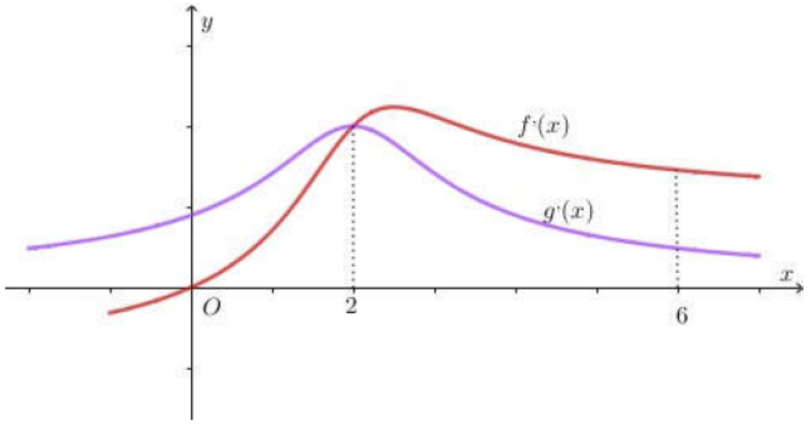
Để tìm $\max\limits_{[-1;2]} f(x)$ ta so sánh $f(-1)$ và $f(2)$.

Theo giả thiết, $f(-1)+f(0)<f(1)+f(2)\Leftrightarrow f(2)-f(-1)>f(0)-f(1)$.

Từ bảng biến thiên, ta có $f(0)-f(1)>0$. Do đó $f(2)-f(-1)>0\Leftrightarrow f(2)>f(-1)$.

Hay $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=f(2)$.

Câu 59: Cho hai hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$, $g'(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và $g'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới.



Biết rằng $f(0)-f(6)<g(0)-g(6)$. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x)=f(x)-g(x)$ trên đoạn $[0;6]$ lần lượt là:

A. $h(2),h(0)$. **B.** $h(2),h(6)$. **C.** $h(0),h(2)$. **D.** $h(6),h(2)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $h'(x)=f'(x)-g'(x)$.

$h'(x)=0\Leftrightarrow x=2$

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên:

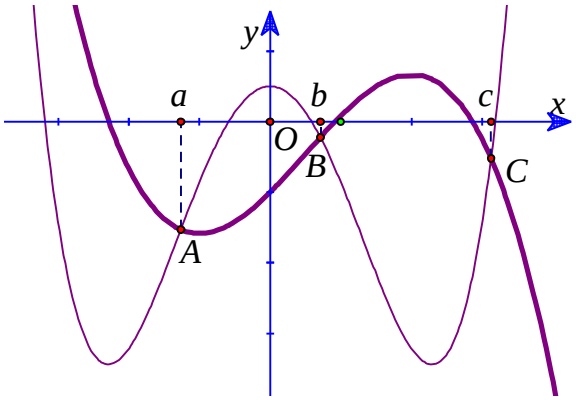
x	0		2		6
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$h(0)$	↘	$h(2)$	↗	$h(6)$

Và $f(0)-f(6)<g(0)-g(6)\Leftrightarrow f(0)-g(0)<f(6)-g(6)$.

Hay $h(0)<h(6)$.

Vậy $\max\limits_{[0;6]}h(x)=h(6)$; $\min\limits_{[0;6]}h(x)=h(2)$.

Câu 60: đường cong nét đậm và $y=g'(x)$ là đường cong nét mảnh như hình vẽ. Gọi ba giao điểm A,B,C của $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ trên hình vẽ lần lượt có hoành độ a,b,c. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x)=f(x)-g(x)$ trên đoạn $[a;c]$?



A. $\min\limits_{[a;c]}h(x)=h(a)$. **B.** $\min\limits_{[a;c]}h(x)=h(b)$. **C.** $\min\limits_{[a;c]}h(x)=h(c)$. **D.** $\min\limits_{[a;c]}h(x)=h(0)$.

Lời giải

Chọn B

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta có $h'(x)=f'(x)-g'(x)$, $h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\\x=b\\x=c\end{array}\right.$.

Trên miền $b<x<c$ thì đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nằm phía trên đồ thị hàm số $y=g'(x)$ nên $f'(x)-g'(x)>0\Leftrightarrow h'(x)>0,\forall x\in(b;c)$.

Trên miền $a<x<b$ thì đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nằm phía dưới đồ thị hàm số $y=g'(x)$ nên $f'(x)-g'(x)<0\Leftrightarrow h'(x)<0,\forall x\in(a;b)$.

Bảng biến thiên

x	a		b		c
h'		−	0	+	
h	h(a)	↘	h(b)	↗	h(c)

Từ bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{[a;c]}h(x)=h(b)$.

Câu 61: **(Chuyên Vinh Lần 3)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0)=3$, $f'(2)=-2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	−	0	+	

Hàm số $y=f(x+2017)+2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-2017)$. **B.** $(2017;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-2017;0)$.

Lời giải.

Chọn A

Dựa vào bảng xét dấu của $f''(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	−	0	−	
$f'(x)$		↗	3	↘	−2018	↗	

Đặt $t=x+2017$.

Ta có $y=f(x+2017)+2018x=f(t)+2018t-2017.2018=g(t)$.

$g'(t)=f'(t)+2018$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ suy ra phương trình $g'(t)$ có một nghiệm đơn $\alpha\in(-\infty;0)$ và một nghiệm kép $t=2$.

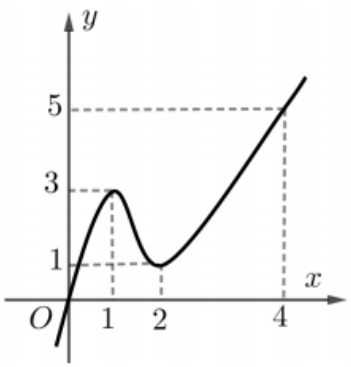
Ta có bảng biến thiên $g(t)$

Hàm số $g(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $t_0=\alpha\in(-\infty;0)$.

Suy ra hàm số $y=f(x+2017)+2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 mà

$x_0+2017\in(-\infty;0)\Leftrightarrow x_0\in(-\infty;-2017)$.

Câu 62: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Đặt $M=\max\limits_{\mathbb{R}} f\left(2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\right)$, $m=\min\limits_{\mathbb{R}} f\left(2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\right)$. Tổng $M+m$ bằng

A. 6 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)=2-\sin^2 2x$

Đặt $t=2-\sin^2 2x$, $t\in[1;2]$.

Khi đó: $f\left(2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\right)=f(t)$.

Xét hàm số $f(t)$ trên đoạn $[1;2]$. Từ đồ thị ta có: $\max\limits_{[1;2]} f(t)=3$, $\min\limits_{[1;2]} f(t)=1$.

Suy ra $M=3$, $m=1$. Vậy $M+m=4$.

Câu 63: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$ thỏa mãn $(f(0)-f(2)).(f(3)-f(2))>0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số $f(x)$ có hai cực trị.

B. Phương trình $f(x)=0$ luôn có 3 nghiệm phân biệt.

C. Hàm số $f(x)$ không có cực trị.

D. Phương trình $f(x)=0$ luôn có nghiệm duy nhất.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết ta có $(f(0)-f(2)).(f(3)-f(2))>0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(0)-f(2)>0 \\ f(3)-f(2)>0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} f(0)-f(2)<0 \\ f(3)-f(2)<0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(0)>f(2) \\ f(3)>f(2) \end{cases} \\ \begin{cases} f(0)<f(2) \\ f(3)<f(2) \end{cases} \end{array}\right. (1)$$

Xét $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)\Rightarrow y'=3ax^2+2bx+c$ có $\Delta'=b^2-3ac$.

Nếu $\Delta'\leq 0$ thì hàm số đã cho có hai khả năng: Luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

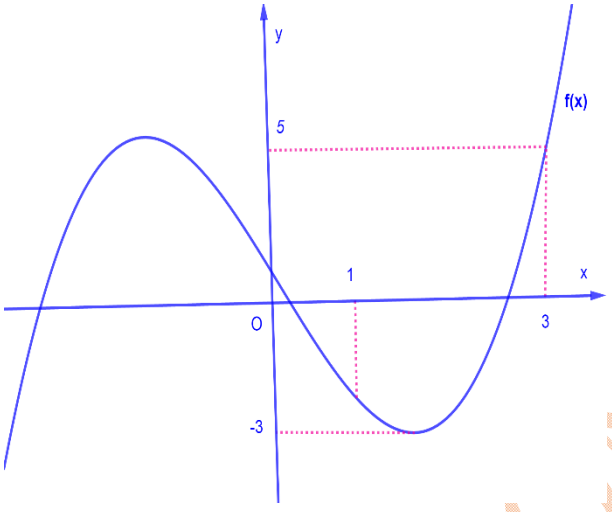
+ Nếu hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $f(0)<f(2)<f(3)$ (vô lý với (1)).

+ Nếu hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $f(0)>f(2)>f(3)$ (vô lý với (1)).

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Do đó $\Delta' > 0$ suy ra hàm số đã cho có hai cực trị.

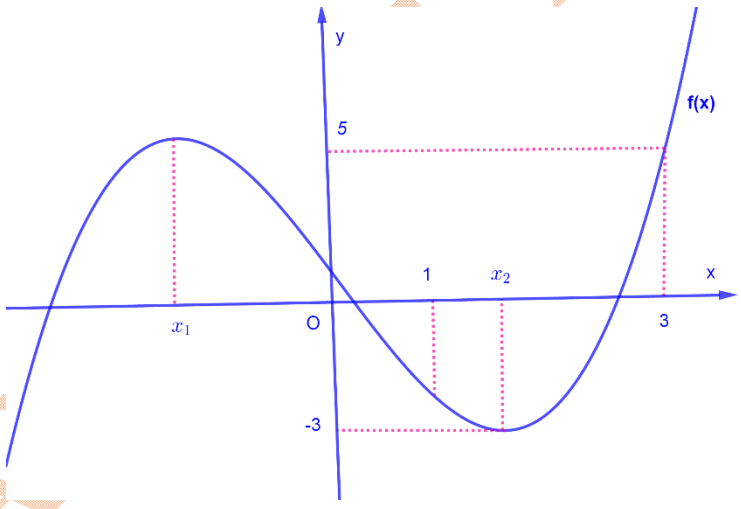
Câu 64: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Xét hàm số $y = g(x) = |2f(x) + 3m - 1|$. Khi $m = m_0$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $y = g(x)$ trên đoạn $[1;3]$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng:



A. 6. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D.



Đặt $h(x) = 2f(x) + 3m - 1$

$h'(x) = 2f'(x)$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \notin [1;3] \\ x = x_2 \in [1;3] \end{array}\right.$.

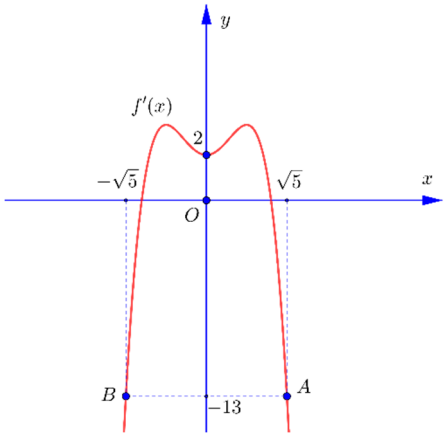
Tính $h(3) = 3m + 9$; $h(x_2) = 3m - 7$; $h(1) = 2f(1) + 3m - 1$.

Ta có $-3 < f(1) < 0 \Rightarrow 3m - 7 < h(1) < 3m - 1$.

Suy ra $\max\limits_{[1;3]} g(x) = \max\limits_{[1;3]} |h(x)| = \max\{|3m+9|; |3m-7|\}$

$\geq \dfrac{|3m+9| + |3m-7|}{2} = \dfrac{|3m+9| + |7-3m|}{2} \geq \dfrac{|3m+9+7-3m|}{2} = 8$.

Câu 65: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ:



Xét hàm số $g(x)=2f(x)+2x^3-4x-3m-6\sqrt{5}$, $(m\in\mathbb{R})$. Để $g(x)\le 0$ với $\forall x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$ thì điều kiện của m là:

A. $m\ge\frac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$.

B. $m\le\frac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$.

C. $m\le\frac{2}{3}f(0)-2\sqrt{5}$.

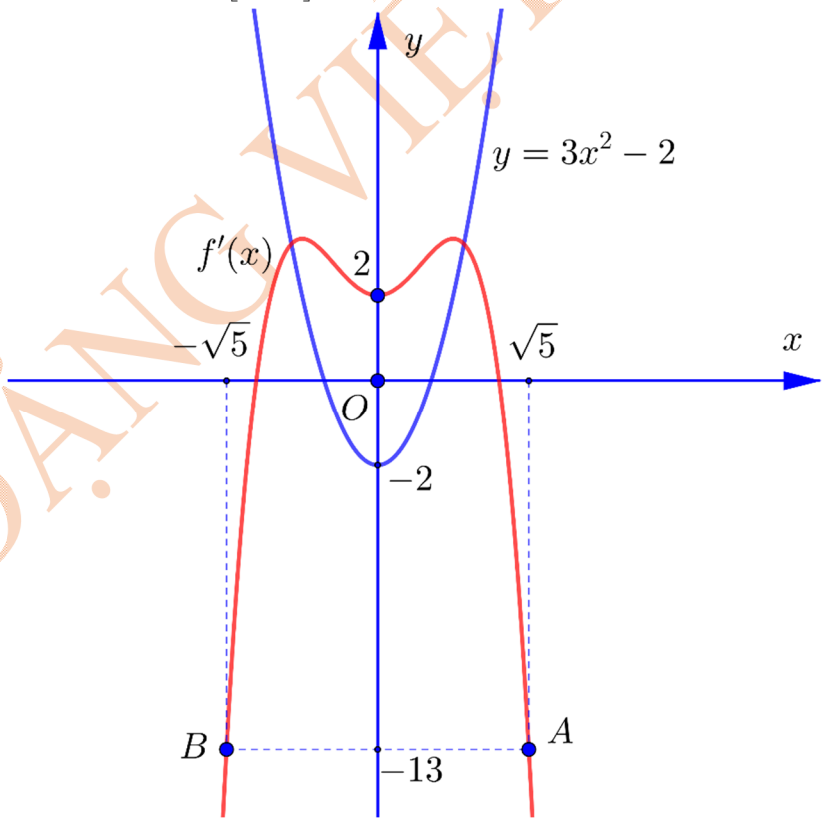
D. $m\ge\frac{2}{3}f\left(-\sqrt{5}\right)-4\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=2f'(x)+6x^2-4$; $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)+3x^2-2=0$.

Để $g(x)\le 0$ với $\forall x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$ thì $\max\limits_{\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]}g(x)\le 0$.



Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và $y=3x^2-2$ ta thấy $f'(x)+3x^2-2\ge 0,\ \forall x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$

$\Rightarrow g'(x)\ge 0,\ \forall x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$ nên hàm số $g(x)$ luôn đồng biến trên $\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$.

Suy ra $\max\limits_{\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]}g(x)=g\left(\sqrt{5}\right)=2f\left(\sqrt{5}\right)-3m\ \Rightarrow 2f\left(\sqrt{5}\right)-3m\le 0\Leftrightarrow m\ge\frac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 66: **(CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG QUẢNG NAM LẦN 2 NĂM 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $3x.f(x)-x^2f'(x)=2f^2(x)$, với $f(x)\neq 0$, $\forall x\in(0;+\infty)$ và $f(1)=\frac{1}{3}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;2]$. Tính $M+m$.

A. $\frac{9}{10}$. **B.** $\frac{21}{10}$. **C.** $\frac{7}{3}$. **D.** $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $3x.f(x)-x^2f'(x)=2f^2(x) \Rightarrow 3x^2f(x)-x^3f'(x)=2xf^2(x)$

$\Rightarrow \frac{3x^2f(x)-x^3f'(x)}{f^2(x)}=2x \Rightarrow \left(\frac{x^3}{f(x)}\right)'=2x \Rightarrow \frac{x^3}{f(x)}=x^2+C$.

Thay $x=1$ vào ta được $\frac{1}{f(1)}=1+C$, vì $f(1)=\frac{1}{3}$ nên suy ra $C=2$.

Nên $f(x)=\frac{x^3}{x^2+2}$. Ta có $f'(x)=\frac{x^4+6x^2}{(x^2+2)^2}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$.

x	1		2
y'		$+$	
y	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$

Khi đó, $f(x)$ đồng biến trên $[1;2]$.

Suy ra $m=f(1)=\frac{1}{3}$; $M=f(2)=\frac{4}{3}$.

Suy ra $M+m=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$.

DẠNG 2. GTLN, GTNN HÀM NHIỀU BIẾN ÁP DỤNG CÁC BĐT CỔ ĐIỂN

Câu 1: **(Thuận Thành 2 Bắc Ninh)** Biết hai hàm số $f(x)=x^3+ax^2+4x-2$ và $g(x)=-x^3+bx^2-2x+3$ có chung ít nhất một điểm cực trị. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|a|+|b|$.

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $6\sqrt{2}$. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=3x^2+2ax+4$ và $g'(x)=-3x^2+2bx-2$.

Vì $f(x)$ và $g(x)$ có chung ít nhất một điểm cực trị nên $f'(x)=0$ và $g'(x)=0$ có chung nghiệm là t.

Suy ra $\begin{cases}3t^2+2at+4=0\\-3t^2+2bt-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{-3t^2-4}{2t}\\b=\dfrac{3t^2+2}{2t}\end{cases}$.

Ta có $P=|a|+|b|=\left|\dfrac{-3t^2-4}{2t}\right|+\left|\dfrac{3t^2+2}{2t}\right|=\dfrac{3t^2+3}{|t|}=3\left(|t|+\dfrac{1}{|t|}\right)\ge 6$. (bất đẳng thức Cauchy)

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $|t|=\dfrac{1}{|t|}\Leftrightarrow t=\pm 1$.

Vậy $\min P=6$.

Câu 2: Xét phương trình $ax^3-x^2+bx-1=0$ với a, b là các số thực, $a\neq 0$, $a\neq b$ sao cho các nghiệm đều là số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{5a^2-3ab+2}{a^2(b-a)}$.

A. $8\sqrt{2}$. **B.** $11\sqrt{6}$. **C.** $12\sqrt{3}$. **D.** $15\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $ax^3-x^2+bx-1=0\Leftrightarrow x^3-\dfrac{1}{a}x^2+\dfrac{b}{a}x-\dfrac{1}{a}=0$.

Theo định lý Vi-et cho phương trình bậc 3: $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=\dfrac{1}{a}\\x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\dfrac{b}{a}\\x_1x_2x_3=\dfrac{1}{a}\end{cases}$

Đặt $c=\dfrac{1}{a}$, ta có: $x_1x_2x_3=x_1+x_2+x_3\ge 3\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$ hay $(x_1x_2x_3)^3\ge 27x_1x_2x_3$.

Suy ra $c^3\ge 27c\Rightarrow c\ge 3\sqrt{3}$.

Ta lại có: $P=\dfrac{5a^2-3ab+2}{a^2(b-a)}=\dfrac{a^2\left(5-3\dfrac{b}{a}+\dfrac{2}{a^2}\right)}{a^3\left(\dfrac{b}{a}-1\right)}=\dfrac{1}{a}\dfrac{\left(5-3\dfrac{b}{a}+\dfrac{2}{a^2}\right)}{\dfrac{b}{a}-1}=\dfrac{c(5-3bc+2c^2)}{bc-1}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Mà: $\left(x_1+x_2+x_3\right)^2 \ge 3\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right)$ nên $c^2 \ge 3bc$.

Vậy $P=\dfrac{c\left(5-3bc+2c^2\right)}{bc-1} \ge \dfrac{c\left(5-c^2+2c^2\right)}{\dfrac{c^2}{3}-1}=\dfrac{3c\left(c^2+5\right)}{c^2-3}$.

Xét $f\left(c\right)=\dfrac{3c\left(c^2+5\right)}{c^2-3}$, $c \ge 3\sqrt{3}$, ta có: $f'\left(c\right)=\dfrac{3c^4-42c^2-45}{\left(c^2-3\right)^2}>0, \ \forall c \ge 3\sqrt{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $f\left(3\sqrt{3}\right)=12\sqrt{3}$.

Câu 3: Giả sử phương trình $x^3-\left(a+b\right)x^2+\dfrac{\left(a+b\right)^2-1}{2}x+1=0$ có ba nghiệm.

Gọi M, m là GTLN và GTNN của $P=\dfrac{a^2+b^2-1}{2}+ab$. Khi đó $M+m$ bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** -1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Tinh thần của bài toán là ứng dụng Định lý Viet vào bài toán Bất đẳng thức

Gọi m,n,p là ba nghiệm của phương trình

Ta có $\begin{cases} m+n+p=a+b \\ mn+np+pm=\dfrac{\left(a+b\right)^2-1}{2} \\ mnp=-1 \end{cases}$

Mặt khác: $m^2+n^2+p^2=\left(m+n+p\right)^2-2\left(mn+np+pm\right)=1$

Và $P=\dfrac{a^2+b^2-1}{2}+ab=\dfrac{\left(a+b\right)^2-1}{2}=mn+np+pm$

Do $\left(m+n+p\right)^2 \ge 0 \Leftrightarrow m^2+n^2+p^2+2\left(mn+np+pm\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow \left(mn+np+pm\right) \le -\dfrac{1}{2}\left(m^2+n^2+p^2\right)=-\dfrac{1}{2}$

Vậy *GTNN* P=-$\dfrac{1}{2}$

Mặt khác theo BĐT Bu-nhi-a-cop-xki

$\Leftrightarrow \left(mn+np+pm\right)^2 \le \left(m^2+n^2+p^2\right)\left(m^2+n^2+p^2\right)=1$

Vậy *GTLN* P=1

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 4: Cho các số thực x, y thỏa mãn $x+y=2\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}\right)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(x^2+y^2\right)+15xy$ là

A. $\min P=-83$. **B.** $\min P=-63$. **C.** $\min P=-80$. **D.** $\min P=-91$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $x+y=2(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3})\Leftrightarrow (x+y)^2=4(x+y)+8\sqrt{x-3}.\sqrt{y+3}\ge 4(x+y)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y\ge 4 \\ x+y\le 0 \end{array}\right.$

Mặt khác $x+y=2(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3})\le 2\sqrt{2(x+y)}\Leftrightarrow x+y\le 8\Rightarrow x+y\in[4;8]$

Xét biểu thức $P=4(x^2+y^2)+15xy=4(x+y)^2+7xy\ge 16(x+y)+7xy=7x(y+3)+16y-5x$.

Mà $\begin{cases} y+3\ge 0 \\ y\ge 4-x \end{cases}\Rightarrow P\ge 16(4-x)-5x=64-21x$.

Kết hợp với $x+y\ge 4\Rightarrow x\in[3;7]\Rightarrow 64-21x\ge -83$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là -83

Câu 5: Cho x, y là hai số thực thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+xy+4=4y+3x$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=3\left(x^3-y^3\right)+20x^2+2xy+5y^2+39x$.

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 100. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$x^2+y^2+xy+4=4y+3x\Leftrightarrow y^2+y(x-4)+x^2-3x+4=0$

$\Delta=(x-4)^2-4\left(x^2-3x+4\right)=-3x^2+4x\ge 0\Leftrightarrow 0\le x\le\frac{4}{3}$.

$x^2+y^2+xy+4=4y+3x\Leftrightarrow x^2+y^2+xy=4y+3x-4$

$P=3\left(x^3-y^3\right)+20x^2+2xy+5y^2+39x=3(x-y)\left(x^2+y^2+xy\right)+20x^2+2xy+5y^2+39x$

$=29x^2-7y^2+5xy+27x+12y\le -7y^2+5.\frac{4}{3}y+27.\frac{4}{3}+12y+29.\left(\frac{4}{3}\right)^2=-7\left(y-\frac{4}{3}\right)^2+100$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 100 khi $x=y=\frac{4}{3}$.

ÁP DỤNG HÀM SỐ

Câu 6: Cho biểu thức $P=3x\sqrt{a-y^2}-3y\sqrt{a-x^2}+4xy+4\sqrt{a^2-ax^2-ay^2+x^2y^2}$ trong đó a là số thực dương cho trước. Biết rằng giá trị lớn nhất của P bằng 2018. Khi đó, mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $a\in(500;525]$. **B.** $a\in(400;500]$. **C.** $a\in(340;400]$. **D.** $a=\sqrt{2018}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $P=3x\sqrt{a-y^2}-3y\sqrt{a-x^2}+4xy+4\sqrt{a^2-ax^2-ay^2+x^2y^2}$.

$=3x\sqrt{a-y^2}-3y\sqrt{a-x^2}+4xy+4\sqrt{\left(a-x^2\right)\left(a-y^2\right)}$.

Đặt $x=\sqrt{a}\sin m,\ m\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\sqrt{a-x^2}=\sqrt{a}\cos m$.

$y=\sqrt{a}\sin n,\ n\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\sqrt{a-y^2}=\sqrt{a}\cos n$.

Thay vào biểu thức P ta được:

$P=3a.\sin m\cos n-3a.\sin n\cos m+4a\sin m\sin n+4a\cos m\cos n$

$=3a\sin\left(m-n\right)+4a\cos\left(m-n\right)\le 5a$

Vậy $\max P=5a=2018\Rightarrow a=\frac{2018}{5}$.

Câu 7: **(CHUYÊN NGUYỄN DU ĐĂK LĂK LẦN X NĂM 2019)** Cho phương trình $x^4+ax^3+bx^2+cx+1=0$ có nghiệm. Giá trị nhỏ nhất $P=a^2+b^2+c^2$ bằng

A. 2. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Gọi x_0 là một nghiệm của phương trình $x^4+ax^3+bx^2+cx+1=0$ (*).

$\Rightarrow x_0^4+ax_0^3+bx_0^2+cx_0+1=0\Rightarrow ax_0^3+bx_0^2+cx_0=-x_0^4-1.$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$\left(x_0^4+1\right)^2=\left(ax_0^3+bx_0^2+cx_0\right)^2\le\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x_0^6+x_0^4+x_0^2\right)$

$\Rightarrow\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge\frac{\left(x_0^4+1\right)^2}{\left(x_0^6+x_0^4+x_0^2\right)}$ ($x_0=0$ không là nghiệm của phương trình (*)).

Đặt $t=x_0^2\,(t>0)$ ta có $a^2+b^2+c^2\ge\frac{\left(t^2+1\right)^2}{t^3+t^2+t}$.

Đặt $f\left(t\right)=\frac{\left(t^2+1\right)^2}{t^3+t^2+t}\,(t>0)$

$\Rightarrow f'\left(t\right)=\frac{\left(4t^3+4t\right)\left(t^3+t^2+t\right)-\left(t^4+2t^2+1\right)\left(3t^2+2t+1\right)}{\left(t^3+t^2+t\right)^2}=\frac{\left(t+1\right)^2\left(t^4-1\right)}{\left(t^3+t^2+t\right)^2}=\frac{\left(t+1\right)^3\left(t-1\right)\left(t^2+1\right)}{\left(t^3+t^2+t\right)^2}$

Bảng biến thiên:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

t	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-	- 0	+
$f(t)$			$+\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $\min\limits_{(0;+\infty)} f(t)=\frac{4}{3}$ khi $t=1 \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq \frac{4}{3}$.

Khi $a=b=c=\frac{2}{3}$ thì $a^2+b^2+c^2=\frac{4}{3}$ và phương trình $x^4+ax^3+bx^2+cx+1=0$ có nghiệm $x_0=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất $P=a^2+b^2+c^2$ bằng $\frac{4}{3}$.

Câu 8: Với $a,b>0$ thỏa mãn điều kiện $a+b+ab=1$, giá trị nhỏ nhất của $P=a^4+b^4$ bằng.

A. $\left(\sqrt{2}-1\right)^4$. **B.** $\left(\sqrt{2}+1\right)^4$. **C.** $2\left(\sqrt{2}+1\right)^4$. **D.** $2\left(\sqrt{2}-1\right)^4$.

Lời giải

Chọn D

$P=a^4+b^4=\left(a^2+b^2\right)^2-2(a.b)^2=\left[(a+b)^2-2ab\right]^2-2(ab)^2$.

$\Rightarrow P=\left[(1-ab)^2-2ab\right]-2(ab)^2=\left(1-4x+x^2\right)^2-2x^2$ với $ab=x \Rightarrow x>0$.

$\Rightarrow P=x^4+16x^2+1+2x^2-8x^3-8x-2x^2=x^4-8x^3+16x^2-8x+1$.

Ta có $a+b=1-ab \geq 2\sqrt{ab}$.

$\Rightarrow x+2\sqrt{x}-1 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{2}-1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 3-2\sqrt{2}$.

$P'=4x^3-24x^2+32x-1$.

Bảng biến thiên.

x	0		$3-2\sqrt{3}$
P'		$-$	
P	$P(0)$	↘	$P\left(3-2\sqrt{2}\right)$

$\min P=P\left(3-2\sqrt{2}\right)=2\left(\sqrt{2}-1\right)^4$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 9: Cho x, y, z là ba số thực dương và $P=\dfrac{3}{2x+y+\sqrt{8yz}}-\dfrac{8}{\sqrt{2\left(x^2+y^2+z^2\right)+4xz}+3}-\dfrac{1}{x+y+z}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $x+y+z$.

A. 1. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** 3. **D.** $3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

$2x+y+\sqrt{8yz}=2x+y+2\sqrt{y.2z}\le 2x+y+y+2z=2\left(x+y+z\right)$

$2\left(x^2+y^2+z^2\right)+4xz=2\left(x+z\right)^2+2y^2=2\left[\left(x+z\right)^2+y^2\right]\ge\left(x+y+z\right)^2$

$\Rightarrow P\ge\dfrac{3}{2\left(x+y+z\right)}-\dfrac{8}{x+y+z+3}-\dfrac{1}{x+y+z}=\dfrac{1}{2\left(x+y+z\right)}-\dfrac{8}{x+y+z+3}$

Đặt $t=x+y+z\Rightarrow t>0$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=\dfrac{1}{2t}-\dfrac{8}{t+3}$ trên $\left(0;+\infty\right)$

Ta có $f'\left(t\right)=-\dfrac{1}{2t^2}+\dfrac{8}{\left(t+3\right)^2}=\dfrac{\left(3t-3\right)\left(3+5t\right)}{2t^2\left(t+3\right)^2}$; $f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=1$

Bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	$-\dfrac{3}{2}$	↗	

Vậy $\min P=-\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow x+y+z=1$. Khi đó, $x=z=\dfrac{1}{4}$ và $y=\dfrac{1}{2}$.

Câu 10: Cho hai số thực $x\ne 0$, $y\ne 0$ thay đổi và thỏa mãn điều kiện $(x+y)xy=x^2+y^2-xy$. Giá trị lớn nhất M của biểu thức $A=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}$ là:

A. $M=0$. **B.** $M=0$. **C.** $M=1$. **D.** $M=16$.

Lời giải

Chọn D

$A=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}=\dfrac{x^3+y^3}{x^3y^3}=\dfrac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x^3y^3}=\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)^2=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)^2$.

Đặt $x=ty$. Từ giả thiết ta có: $(x+y)xy=x^2+y^2-xy\Rightarrow(t+1)ty^3=(t^2-t+1)y^2$

Do đó $y=\dfrac{t^2-t+1}{t^2+t}; x=ty=\dfrac{t^2-t+1}{t+1}$. Từ đó $A=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)^2=\left(\dfrac{t^2+2t+1}{t^2-t+1}\right)^2$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+2t+1}{t^2-t+1}\Rightarrow f'(t)=\dfrac{-3t^2+3}{\left(t^2-t+1\right)^2}$.

Lập bảng biến thiên ta tìm giá trị lớn nhất của A là: 16 đạt được khi $x=y=\dfrac{1}{2}$.

Câu 11: Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x+y=\sqrt{x-1}+\sqrt{2y+2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=x^2+y^2+2\left(x+1\right)\left(y+1\right)+8\sqrt{4-x-y}$. Khi đó, giá trị của $M+m$ bằng.

A. 41. **B.** 42. **C.** 43. **D.** 44.

Lời giải

Chọn C

$P=x^2+y^2+2\left(x+1\right)\left(y+1\right)+8\sqrt{4-x-y}=\left(x+y\right)^2+2\left(x+y\right)+2+8\sqrt{4-x-y}$.

Đặt $t=x+y\Rightarrow P=t^2+2t+2+8\sqrt{4-t}$.

Theo giả thiết $x+y=\sqrt{x-1}+\sqrt{2y+2}$.

$\Leftrightarrow\left(x+y\right)^2=x+2y+1+2\sqrt{2\left(x-1\right)\left(y+1\right)}\le x+2y+1+2\left(x-1\right)+y+1=3\left(x+y\right)$.

$\Rightarrow t\le 3t\Leftrightarrow t^2-3t\le 0\Leftrightarrow 0\le t\le 3$.

Xét $f\left(t\right)=t^2+2t+2+8\sqrt{4-t}$ trên $\left[0;3\right]$.

$f'\left(t\right)=2t+2-\dfrac{4}{\sqrt{4-t}}$; $f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow\left(2t+2\right)\sqrt{4-t}=4\Leftrightarrow\left(t+1\right)\sqrt{4-t}=2$.

$\Leftrightarrow\left(t^2+2t+1\right)\left(4-t\right)=4\Leftrightarrow -t^3+2t^2+7t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=1+2\sqrt{2}\notin\left[0;3\right]\\t=1-2\sqrt{2}\notin\left[0;3\right]\end{array}\right.$.

Ta có $f\left(0\right)=18$; $f\left(3\right)=25\Rightarrow \min P=18$, $\max\left(P\right)=25$.

Vậy $M+m=25+18=43$.

Câu 12: Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2+2xy+3y^2=4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left(x-y\right)^2$ là:

A. $\max P=16$. **B.** $\max P=12$. **C.** $\max P=4$. **D.** $\max P=8$.

Lời giải

Chọn B

Xét $y=0$ thì $x^2+2xy+3y^2=4\Leftrightarrow x^2=4\Rightarrow P=4$.

Xét $y\ne 0$ thì $\dfrac{P}{4}=\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^2+2xy+3y^2}=\dfrac{t^2-2t+1}{t^2+2t+3}=u$ với $t=\dfrac{x}{y}$.

Do đó $t^2-2t+1=u\left(t^2+2t+3\right)\Leftrightarrow\left(u-1\right)t^2+2\left(u+1\right)t+3u-1=0$. (1)

Nếu $u=1$ thì $(1)\Rightarrow t=-\dfrac{1}{2}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Nếu $u \neq 1$ thì (1) có nghiệm khi $(u+1)^2-(u-1)(3u-1)\geq 0 \Leftrightarrow -2u^2+6u\geq 0 \Leftrightarrow 0\leq u\leq 3$.

Vậy $0\leq \frac{P}{4}\leq 3 \Leftrightarrow 0\leq P\leq 12$ hay $\max P=12$.

Câu 13: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} x^2-xy+3=0 \\ 2x+3y-14\leq 0 \end{cases}$. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3x^2y-xy^2-2x^3+2x$

A. 0. **B.** 12. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết ta có $x^2-xy+3=0 \Rightarrow y=\frac{x^2+3}{x}$

Từ bất phương trình $2x+3y-14\leq 0 \Leftrightarrow \frac{5x^2-4x+9}{x}\leq 0 \Leftrightarrow 1\leq x\leq \frac{9}{5}$.

Mặt khác ta có $\begin{cases} x^2=xy-3 \\ xy=x^2+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3=x^2y-3x \\ xy^2=x^2y+3y \end{cases}$

Thay vào ta được $P=-3y+8x=-3\left(\frac{x^2+3}{x}\right)+8x=5x-\frac{9}{x}$.

Xét hàm số $f(x)=5x-\frac{9}{x}$ trên đoạn $\left[1;\frac{9}{5}\right]$.

Ta có $f'(x)=5+\frac{9}{x^2}\geq 0, \forall x\in\left[1;\frac{9}{5}\right]$ do đó $\min\limits_{\left[1;\frac{9}{5}\right]}=f(1)=-4$ và $\max\limits_{\left[1;\frac{9}{5}\right]}=f\left(\frac{9}{5}\right)=4$.

Suy ra tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng 0.

Câu 14: Cho các số thực x, y thay đổi thỏa điều kiện $y\leq 0$, $x^2+x=y+12$. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $M=xy+x+2y+17$ lần lượt bằng

A. $10;-6$. **B.** $5;-3$. **C.** $20;-12$. **D.** $8;-5$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y=x^2+x-12$. Do đó: $y\leq 0 \Leftrightarrow x^2+x-12\leq 0 \Leftrightarrow -4\leq x\leq 3$.

Mặt khác, $M=xy+x+2y+17=x\left(x^2+x-12\right)+x+2\left(x^2+x-12\right)+17=x^3+3x^2-9x-7$.

Xét hàm số $f(x)=x^3+3x^2-9x-7$ với $-4\leq x\leq 3$.

Ta có: $f'(x)=3x^2+6x-9$. Do đó: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-3$.

Khi đó: $f(-3)=20, f(1)=-12, f(-4)=13, f(3)=20$.

Vậy $\max M=20, \min m=-12$.

Câu 15: Cho các số thực x, y thỏa mãn $x+y=2\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(x^2+y^2\right)+15xy$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $\min P=-91$. **B.** $\min P=-83$. **C.** $\min P=-63$. **D.** $\min P=-80$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x\ge 3 \\ y\ge -3 \end{cases}$.

Ta có $x+y=2\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}\right)\Leftrightarrow (x+y)^2=4(x+y)+8\sqrt{x-3}.\sqrt{y+3}\ge 4(x+y)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y\ge 4 \\ x+y\le 0 \end{array}\right. (1)$.

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta được:

$x+y=2\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}\right)\le 2\sqrt{2(x+y)}\Leftrightarrow x+y\le 8\ (2)$.

Từ (1) và (2) ta có $x+y\in[4;8]$

Ta lại có $(x+3)(y+3)\ge 0\Leftrightarrow xy\ge -3(x+y)-9$.

Đặt $t=x+y$ suy ra $P=\!=4\left(x^2+y^2\right)+15xy=4(x+y)^2+7xy\ge 4t^2-21t-63$.

Xét hàm số $f(t)=4t^2-21t-63$, với $t\in[4;8]$

Ta có $f'(t)=8t-21=0\Leftrightarrow t=\dfrac{21}{8}\notin[4;8]$. Do đó $\min\limits_{[4;8]} f(t)=f(4)=-83$.

Do đó $P\ge -83$ suy ra $\min P=-83$ khi $\begin{cases} x+y=4 \\ x+y=2\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}\right) \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=-3 \end{cases}$.

Câu 16: Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}+2-y$.

A. $P_{\min}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$. **B.** $P_{\min}=2+\sqrt{3}$. **C.** $P_{\min}=2\sqrt{2}$. **D.** $P_{\min}=\dfrac{191}{50}$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng bất đẳng thức MinCopxki ta có.

$P\ge\sqrt{(1-x+1-x)^2+(2y)^2}+2-y=2\sqrt{1+y^2}+2-y$.

Xét hàm số $f(y)=2\sqrt{1+y^2}+2-y$. Ta có $f'(y)=\dfrac{2y}{\sqrt{1+y^2}}-1$. $f'(y)=0\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

y	$-\infty$		$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(y)$		$-$		$+$	
$f(y)$	$+\infty$	$\searrow$	$2+\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Ta thấy $\min f(y)=2+\sqrt{3}$. Do đó $P_{\min}=2+\sqrt{3}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 17: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x\ge 0$, $y\ge 1$, $x+y=3$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^3+2y^2+3x^2+4xy-5x$ lần lượt bằng:

A. $P_{\max}=18$ và $P_{\min}=15$. **B.** $P_{\max}=15$ và $P_{\min}=13$.

C. $P_{\max}=20$ và $P_{\min}=18$. **D.** $P_{\max}=20$ và $P_{\min}=15$.

Lời giải

Chọn D

Từ $x+y=3\Leftrightarrow y=3-x$, do $y\ge 1$ nên $3-x\ge 1\Leftrightarrow x\le 2$. Vậy $x\in[0;2]$.

Ta có $P=x^3+2(3-x)^2+3x^2+4x(3-x)-5x=x^3+x^2-5x+18=f(x)$.

$f'(x)=3x^2+2x-5$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\frac{5}{3}(L)\end{array}\right.$.

$f(0)=18$; $f(1)=15$; $f(2)=20$.

Vậy $P_{\max}=20$ và $P_{\min}=15$.

Câu 18: Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $2y^3+7y+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x}+3(2y^2+1)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x+2y$.

A. $P=8$. **B.** $P=10$ **C.** $P=4$. **D.** $P=6$.

Lời giải

Chọn C

$2y^3+7y+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x}+3(2y^2+1)$.

$\Leftrightarrow 2(y^3-3y^2+3y-1)+(y-1)=2(1-x)\sqrt{1-x}+3\sqrt{1-x}-2\sqrt{1-x}$.

$\Leftrightarrow 2(y-1)^3+(y-1)=2\left(\sqrt{1-x}\right)^3+\sqrt{1-x}\ (1)$.

Xét hàm số $f(t)=2t^3+t$ trên $[0;+\infty)$.

Ta có: $f'(t)=6t^2+1>0$ với $\forall t\ge 0\Rightarrow f(t)$ luôn đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Vậy $(1)\Leftrightarrow y-1=\sqrt{1-x}\Leftrightarrow y=1+\sqrt{1-x}$.

$\Rightarrow P=x+2y=x+2+2\sqrt{1-x}$ với $(x\le 1)$.

Xét hàm số $g(x)=2+x+2\sqrt{1-x}$ trên $(-\infty;1]$.

Ta có: $g'(x)=1-\frac{1}{\sqrt{1-x}}=\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}}$. $g'(x)=0\Rightarrow x=0$.

Bảng biến thiên $g(x)$:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

x	$-\infty$		0		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	4	↘	

Từ bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ suy ra giá trị lớn nhất của P là: $\max\limits_{(-\infty;1]} g(x)=4$.

Câu 19: Cho x, y là hai số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $(xy+1)\left(\sqrt{xy+1}-\sqrt{y}\right)\le 1-x-\dfrac{1}{y}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+3y^2}}-\dfrac{x-2y}{6(x+y)}$?

A. $\dfrac{\sqrt{5}+7}{30}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{3}-\dfrac{7}{30}$. **C.** $\dfrac{7}{30}-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{3}+\dfrac{7}{30}$.

Lời giải

Chọn D

$(xy+1)\left(\sqrt{xy+1}-\sqrt{y}\right)\le 1-x-\dfrac{1}{y}$

$\Leftrightarrow y(xy+1)\left(\sqrt{xy+1}-\sqrt{y}\right)+\left(\sqrt{xy+1}^2-\sqrt{y}^2\right)\le 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{xy+1}-\sqrt{y}\right)\left[y(xy+1)+\left(\sqrt{xy+1}+\sqrt{y}\right)\right]\le 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{xy+1}-\sqrt{y}\le 0 \Leftrightarrow xy+1\le y$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{y}\le -\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}-\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{2}\right)^2$

$\Rightarrow 0<\dfrac{x}{y}\le\dfrac{1}{4}$. Dấu bằng đạt được khi $y=2$, $x=\dfrac{1}{2}$.

$P=\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+3y^2}}-\dfrac{x-2y}{6(x+y)}=\dfrac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}}-\dfrac{t-2}{6(t+1)}$ với $t=\dfrac{x}{y}$ và $t\in\left(0;\dfrac{1}{4}\right]$.

Ta có $\dfrac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}}\le\dfrac{\sqrt{5}}{27}(8t+7)$ với mọi $t\in\left(0;\dfrac{1}{4}\right]$

Thật vậy $\dfrac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}}\le\dfrac{\sqrt{5}}{27}(8t+7)\Leftrightarrow -\dfrac{1}{729}\dfrac{(4t-1)^2(20t^2+25t+6)}{t^2-t+3}\le 0$ với mọi $t\in\left(0;\dfrac{1}{4}\right]$.

$P\le\dfrac{\sqrt{5}}{27}(8t+7)-\dfrac{t-2}{6t+6}=f(t)$.

Khi đó $f'(t)=\dfrac{1}{54}.\dfrac{16\sqrt{5}t^2+32\sqrt{5}t+16\sqrt{5}-27}{(t+1)^2}>0$ với mọi $t\in\left(0;\dfrac{1}{4}\right]$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vậy $P \le \frac{\sqrt{5}}{27}(8t+7) - \frac{t-2}{6t+6} = f(t) \le f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{7+10\sqrt{5}}{30}$, dấu bằng đạt được khi $x = \frac{1}{2}$, $y = 2$.

Câu 20: Cho $a, b \in \mathbb{R}$; $a, b > 0$ thỏa mãn $2\left(a^2+b^2\right) + ab = (a+b)(ab+2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) - 9\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$ bằng

A. $\frac{23}{4}$. **B.** -10. **C.** $\frac{-21}{4}$. **D.** $\frac{-23}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ $(t \ge 2)$. Ta có:

$$P = 4\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) - 9\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) = 4\left[\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^3 - 3.\frac{a}{b}.\frac{b}{a}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\right] - 9\left[\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - 2.\frac{a}{b}.\frac{b}{a}\right]$$

$= 4t^3 - 9t^2 - 12t + 18$.

Ta có

$$2\left(a^2+b^2\right) + ab = (a+b)(ab+2) \Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 1 = (a+b)\left(1 + \frac{2}{ab}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 1 = (a+b) + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

Theo bất đẳng thức Cô-si ta có

$$(a+b) + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \ge 2\sqrt{(a+b).2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} = 2\sqrt{2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right)}$$

Suy ra $\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 1 \ge 2\sqrt{2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right)} \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge \frac{5}{2}$.

Hay $t = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \ge \frac{5}{2}$.

Xét hàm số $f(t) = 4t^3 - 9t^2 - 12t + 18$ với $t \ge \frac{5}{2}$.

Ta có $f'(t) = 12t^2 - 18t - 12$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 < \frac{5}{2} \\ t = -\frac{1}{2} < \frac{5}{2} \end{array}\right.$.

Ta có $f'(t) > 0, \forall t \ge \frac{5}{2}$, nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

Bởi vậy: $\min\limits_{\left[4\sqrt{2}-1; +\infty\right)} f(t) = f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{23}{4}$.

Hay $\min P = \frac{-23}{4}$ khi $a = 2; b = 1$ hoặc $a = 1; b = 2$.

Câu 21: Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $9x^3 + \left(2 - y\sqrt{3xy-5}\right)x + \sqrt{3xy-5} = 0$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x^3 + y^3 + 6xy + 3\left(3x^2+1\right)(x+y-2)$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $\frac{296\sqrt{15}-18}{9}$. **B.** $\frac{36+296\sqrt{15}}{9}$. **C.** $\frac{36-4\sqrt{6}}{9}$. **D.** $\frac{-4\sqrt{6}+18}{9}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $9x^3+\left(2-y\sqrt{3xy-5}\right)x+\sqrt{3xy-5}=0$

$\Leftrightarrow 27x^3+6x=(3xy-5)\sqrt{3xy-5}+2\sqrt{3xy-5}$.

Xét hàm $f(t)=t^3+2t$ với $t\in(0;+\infty)$

có $f'(t)=3t^2+2>0\forall t\in(0;+\infty)$ nên hàm số liên tục và đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó ta có $3x=\sqrt{3xy-5}\Rightarrow x\geq 0$ và $9x^2=3xy-5$.

Với $x=0$ thì $0=-5(l)$.

với $x>0$ thì $P=x^3+y^3+6xy+3\left(3x^2+1\right)(x+y-2)$

$=x^3+y^3+6xy+\left(9x^2+3\right)(x+y-2)$

$=x^3+y^3+6xy+(3xy-2)(x+y-2)$

$=x^3+y^3+3x^2y+3xy^2-2(x+y)+4$

$=(x+y)^3-2(x+y)+4$

Mà $x+y=x+\frac{9x^2+5}{3x}=4x+\frac{5}{3x}\geq 2\sqrt{4x.\frac{5}{3x}}=\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$. Đặt $t=x+y$ thì $t\geq\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.

Xét $f(t)=t^3-2t+4$ với $t\geq\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$. Khi đó $f'(t)=3t^2-2>0$ với $\forall t\geq\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.

Do đó $f(t)\geq f\left(\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)=\frac{36+296\sqrt{15}}{9}$

Suy ra $P\geq\frac{36+296\sqrt{15}}{9}$. Vậy GTNN của P là $\frac{36+296\sqrt{15}}{9}$.

Câu 22: Cho x, y là hai số thực không âm thỏa mãn $x^2+y^2+2x-3=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2x-y-2$ (làm tròn đến hai chữ số thập phân).

A. $-3,70$. **B.** $-3,73$. **C.** $-3,72$. **D.** $-3,71$.

Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết ta có $\begin{cases}x^2+y^2+2x-3=0\\x\geq 0\\y\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\leq x\leq 1\\y\geq 0\\y=\sqrt{3-x^2-2x}\end{cases}$.

Suy ra $P=2x-\sqrt{3-2x-x^2}-2$.

Xét hàm số $f(x)=2x-\sqrt{3-2x-x^2}-2,\ x\in[0;1]$.

$f'(x)=2-\dfrac{-1-x}{\sqrt{3-2x-x^2}}>0\ \forall x\in[0;1]$. Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $[0;1]$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $f(0)=-\sqrt{3}-2\approx -3,73$.

Câu 23: Cho hai số thực x,y thỏa mãn: $9x^3+\left(2-y\sqrt{3xy-5}\right)x+\sqrt{3xy-5}=0$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=x^3+y^3+6xy+3\left(3x^2+1\right)(x+y-2)$

A. $\dfrac{296\sqrt{15}-18}{9}$. **B.** $\dfrac{36+296\sqrt{15}}{9}$. **C.** $\dfrac{36+296\sqrt{15}}{9}$. **D.** $\dfrac{-4\sqrt{6}+18}{9}$.

Lời giải

Chọn B

$9x^3+\left(2-y\sqrt{3xy-5}\right)x+\sqrt{3xy-5}=0\Leftrightarrow 27x^3+6x-3xy\sqrt{3xy-5}+3\sqrt{3xy-5}=0$

$\Leftrightarrow (3x)^3+2(3x)=\left(\sqrt{3xy-5}\right)^3+2\sqrt{3xy-5}\ \ (*)$.

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t$ có $f'(t)=3t^2+2>0$ nên hàm $f(t)$ đồng biến. Do đó $(*)\Leftrightarrow f(3x)=f\left(\sqrt{3xy-5}\right)\Leftrightarrow 3x=\sqrt{3xy-5}\ \Rightarrow x\ge 0$ và $9x^2=3xy-5$.

Với $x=0$ không thỏa mãn.

Với $x>0$ thì $P=x^3+y^3+6xy+3\left(3x^2+1\right)(x+y-2)=x^3+y^3+6xy+\left(9x^2+3\right)(x+y-2)$

$=x^3+y^3+6xy+(3xy-2)(x+y-2)=x^3+y^3+3x^2y+3xy^2-2(x+y)+4=(x+y)^3-2(x+y)+4$.

Mà $x+y=x+\dfrac{9x^2+5}{3x}=4x+\dfrac{5}{3x}\ge\dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$. Đặt $t=x+y$ thì $t\ge\dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.

Xét hàm số $g(t)=t^3-2t+4$ với $t\ge\dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$. Khi đó $g'(t)=3t^2-2>0,\forall t\ge\dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.

Do đó $g(t)\ge g\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{36+296\sqrt{15}}{9}$. Vậy $\min P=\dfrac{36+296\sqrt{15}}{9}$.

Câu 24: **(Hải Hậu Lần1)** Cho hai số thực dương x,y thỏa mãn $\dfrac{9x^3+x}{y+1}=\sqrt{3y+2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $S=6x-y$ là:

A. $\dfrac{89}{12}$. **B.** $\dfrac{11}{3}$. **C.** $\dfrac{17}{12}$. **D.** $\dfrac{82}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết $y>0$ nên ta có:

$\dfrac{9x^3+x}{y+1}=\sqrt{3y+2}\Leftrightarrow 9x^3+x=\sqrt{3y+2}(y+1)\Leftrightarrow\left[(3x)^3+3x\right]=\left[\sqrt{(3y+2)^3}+\sqrt{3y+2}\right]$

$\Leftrightarrow f(3x)=f\left(\sqrt{3y+2}\right)$ với $f(t)=t^3+t$.

Ta có $f'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, suy ra $3x=\sqrt{3y+2}$

hay $y=3x^2-\frac{2}{3}$. Do $y>0$ và $3x=\sqrt{3y+2}$ nên $x>\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Khi đó $S=6x-y=6x-3x^2+\frac{2}{3}=-3x^2+6x+\frac{2}{3}=-3(x-1)^2+\frac{11}{3}\le\frac{11}{3}$.

Do đó $\max S=\frac{11}{3}$ khi $x=1$.

Câu 25: **(SỞ NAM ĐỊNH 2018-2019)** Cho $x,y\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $x+y\neq -1$ và $x^2+y^2+xy=x+y+1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{xy}{x+y+1}$. Tính $M+m$.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Với điều kiện $x+y\neq -1; x^2+y^2+xy=x+y+1$ ta có $P=\frac{xy}{x^2+y^2+xy}$.

Nếu $y=0$ thì $\begin{cases}x\neq -1\\ x^2-x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Khi đó $P=0$.

Nếu $y\neq 0$ thì $P=\frac{\frac{x}{y}}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}+1}$. Đặt $t=\frac{x}{y}$. Ta có $P=\frac{t}{t^2+t+1}$, $t\in\mathbb{R}$.

Xét $f(t)=\frac{t}{t^2+t+1}$, $t\in\mathbb{R}$. $f'(t)=\frac{-t^2+1}{\left(t^2+t+1\right)^2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\pm 1$

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	↘	-1	↗	$\frac{1}{3}$	↘	0

Từ bảng biến thiên:

$M=\frac{1}{3}$ tại $\begin{cases}\frac{x}{y}=1\\ x^2+y^2+xy=x+y+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ 3x^2-2x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-\frac{1}{3}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=1\\ x=y=-\frac{1}{3}\end{array}\right.$.

$m=-1$ tại $\begin{cases}\frac{x}{y}=-1\\ x^2+y^2+xy=x+y+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-y\\ x^2-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-y\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\ y=-1\end{cases}\\ \begin{cases}x=-1\\ y=1\end{cases}\end{array}\right.$

Vậy $M+m=-\frac{2}{3}$.

Cách 2:

Với điều kiện $x+y\neq -1; x^2+y^2+xy=x+y+1$ ta có $P=\frac{xy}{x^2+y^2+xy}$.

$\Rightarrow Px^2+xy(P-1)+Py^2=0$ (*)

+) Nếu $P=0$ thì $x=0$ hoặc $y=0$.

+) Nếu $P\neq 0$ thì $\begin{cases}x\neq 0\\ y\neq 0\end{cases}$.

Để phương trình (*) có nghiệm x thì $\Delta_x=-y^2(P+1)(3P-1)\geq 0\Rightarrow -1\leq P\leq\frac{1}{3}$.

Ta có:

$M=\frac{1}{3}$ tại $\begin{cases}x=\frac{-y(P-1)}{2P}=y\\ x^2+y^2+xy=x+y+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ 3x^2-2x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-\frac{1}{3}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=1\\ x=y=-\frac{1}{3}\end{array}\right.$.

$m=-1$ tại $\begin{cases}x=\frac{-y(P-1)}{2P}=-y\\ x^2+y^2+xy=x+y+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-y\\ x^2-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-y\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\ y=-1\end{cases}\\ \begin{cases}x=-1\\ y=1\end{cases}\end{array}\right.$

Do đó $M=\frac{1}{3}$; m $=-1$. Vậy $M+m=-\frac{2}{3}$.

Câu 26: Cho hai số thực $x\neq 0,\ y\neq 0$ thay đổi và thỏa mãn điều kiện $(x+y)xy=x^2+y^2-xy$. Giá trị lớn nhất M của biểu thức $A=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}$ là:

A. $M=0$. **B.** $M=0$. **C.** $M=1$. **D.** $M=16$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Hướng dẫn giải:

Chọn D

$A=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}=\frac{x^3+y^3}{x^3y^3}=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x^3y^3}=\left(\frac{x+y}{xy}\right)^2=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2$.

Đặt $x=ty$. Từ giả thiết ta có: $(x+y)xy=x^2+y^2-xy\Rightarrow(t+1)ty^3=(t^2-t+1)y^2$

Do đó $y=\frac{t^2-t+1}{t^2+t}; x=ty=\frac{t^2-t+1}{t+1}$. Từ đó $A=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2=\left(\frac{t^2+2t+1}{t^2-t+1}\right)^2$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2+2t+1}{t^2-t+1}\Rightarrow f'(t)=\frac{-3t^2+3}{\left(t^2-t+1\right)^2}$.

Lập bảng biến thiên ta tìm giá trị lớn nhất của A là: 16 đạt được khi $x=y=\frac{1}{2}$.

Câu 27: Cho x,y là hai số không âm thỏa mãn $x+y=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{3}x^3+x^2+y^2-x+1$

A. $\min P=5$. **B.** $\min P=\frac{7}{3}$. **C.** $\min P=\frac{17}{3}$. **D.** $\min P=\frac{115}{3}$.

Lời giải:

Chọn B

Ta có $x+y=2\Rightarrow y=2-x$

$P=\frac{1}{3}x^3+x^2+y^2-x+1\Rightarrow P=\frac{1}{3}x^3+x^2+\left(2-x\right)^2-x+1\Rightarrow P=\frac{1}{3}x^3+2x^2-5x+5$

Xét hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+2x^2-5x+5$ trên $\left[0;+\infty\right)$

$y'=x^2+4x-5$. Cho $y'=0\Leftrightarrow x^2+4x-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-5\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$\frac{115}{3}$	↘	$\frac{7}{3}$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $\min P=\frac{7}{3}$.

Câu 28: **(TTHT Lần 4)** Cho x,y là các số thực thỏa mãn $x^2-xy+y^2=1$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{x^4+y^4+1}{x^2+y^2+1}$. Giá trị của $A=M+15m$ là:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $17-2\sqrt{6}$. **B.** $17+\sqrt{6}$ **C.** $17+2\sqrt{6}$ **D.**

Lời giải

Chọn A

Ta có $x^2-xy+y^2=1\leftrightarrow(x+y)^2=1+3xy\leq 1+\frac{3}{4}(x+y)^2\Rightarrow -2\leq x+y\leq 2$

Mặt khác: $\frac{2}{3}\leq x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=\frac{1}{3}\left[(x+y)^2\_2\right]\leq 2$

Đặt $t=x^2+y^2\left(\frac{2}{3}\leq t\leq 2\right)$

Vậy $P=\frac{-t^2+4t-1}{t+1}=g(t)$

Xét hàm số $g(t)=\frac{-t^2+4t-1}{t+1}\left(t\in\left[\frac{2}{3};2\right]\right)$

$g'(t)=\frac{-t^2-2t+5}{t+1}\left(t\in\left[\frac{2}{3};2\right]\right)$

$g'(t)=0\Rightarrow t=-1+\sqrt{6}\in\left[\frac{2}{3};2\right]$.

Vậy $\min\limits_{t\in\left[\frac{2}{3};2\right]}g(t)=\frac{11}{15}$; $\max\limits_{t\in\left[\frac{2}{3};2\right]}g(t)=6-2\sqrt{6}$

Vậy $A=M+15m=17-2\sqrt{6}$

Nhận xét: đây là bài toán thường gặp trong các đề thi TSĐH những năm trước đây. Tư tưởng của các bài toán này là sử dụng ứng dụng đạo hàm tìm GTNN, GTLN của hàm số sau khi áp dụng phương pháp dồn biến.

Câu 29: **(Sở Bắc Ninh)** Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2+y^2-4x+6y+4+\sqrt{y^2+6y+10}=\sqrt{6+4x-x^2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\left|\sqrt{x^2+y^2}-a\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-10;10]$ của tham số a để $M\geq 2m$?

A. 17. **B.** 15. **C.** 18. **D.** 16.

Lời giải

Chọn D

Ta có $x^2+y^2-4x+6y+4+\sqrt{y^2+6y+10}=\sqrt{6+4x-x^2}$

$\Leftrightarrow y^2+6y+10+\sqrt{y^2+6y+10}=6+4x-x^2+\sqrt{6+4x-x^2}$. $(*)$

Xét hàm $f(t)=t^2+t$, có $f'(t)=2t+1>0$, $\forall t>0$.

Ta có hàm $y=f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$, $\sqrt{y^2+6y+10}\in[0;+\infty)$, $\sqrt{6+4x-x^2}\in[0;+\infty)$.

Nên $(*)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{y^2+6y+10}\right)=f\left(\sqrt{6+4x-x^2}\right)\Leftrightarrow\sqrt{y^2+6y+10}=\sqrt{6+4x-x^2}$

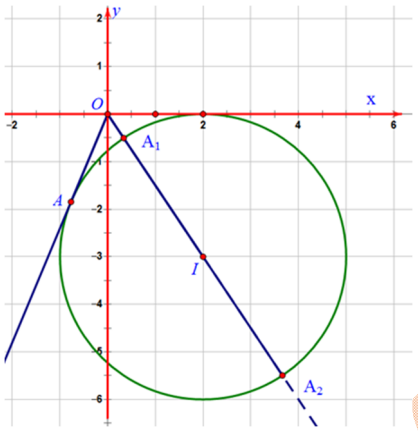
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Leftrightarrow y^2+6y+10=6+4x-x^2 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=9$.

Xét điểm $A(x;y)$ thuộc đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2+(y+3)^2=9$.

Ta có $OA=\sqrt{x^2+y^2}$.

Đường tròn (C) có tâm $I(2;-3)$, bán kính $R=3$ nên điểm $O(0;0)$ nằm ngoài (C).



Gọi A_1, A_2 là giao điểm của đường thẳng OI với đường tròn (C).

$\forall A(x;y)\in(C): OA_1\le OA\le OA_2$, với $OA_1=OI-R=\sqrt{13}-3$ và $OA_2=OI+R=\sqrt{13}+3$.

Tức là ta có $\sqrt{13}-3\le\sqrt{x^2+y^2}\le\sqrt{13}+3\Leftrightarrow\sqrt{13}-3-a\le\sqrt{x^2+y^2}-a\le\sqrt{13}+3-a$.

Th1: $\sqrt{13}-3-a\ge 0\Leftrightarrow a\le\sqrt{13}-3,\ (1)$

Khi đó $M=\sqrt{13}+3-a$ và $m=\sqrt{13}-3-a$.

$M\ge 2m\Leftrightarrow\sqrt{13}+3-a\ge 2\left(\sqrt{13}-3-a\right)\Leftrightarrow a\ge\sqrt{13}-9$.

Kết hợp với điều kiện (1) và a nguyên thuộc đoạn $[-10;10]$ ta có $a\in\{-5;-4;-3;-2;-1;0\}$.

Th2: $\sqrt{13}+3-a\le 0\Leftrightarrow a\ge\sqrt{13}+3,\ (**)$

Khi đó $M=a-\sqrt{13}+3$ và $m=a-\sqrt{13}-3$.

$M\ge 2m\Leftrightarrow a-\sqrt{13}+3\ge 2\left(a-\sqrt{13}-3\right)\Leftrightarrow a\le\sqrt{13}+9$.

Kết hợp với điều kiện $(**)$ và a nguyên thuộc đoạn $[-10;10]$ ta có $a\in\{7;8;9;10\}$.

Th3: $\begin{cases}\sqrt{13}-3-a<0\\ \sqrt{13}+3-a>0\end{cases}\Leftrightarrow\sqrt{13}-3<a<\sqrt{13}+3,(***)$

Khi đó $M>0$ và $m=0$ nên ta luôn có $M\ge 2m$

Kết hợp điều kiện $(***)$ và a nguyên thuộc đoạn $[-10;10]$ ta có $a\in\{1;2;3;4;5;6\}$.

Vậy $a\in\{-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$.

Câu 30: **(Chuyên Thái Bình Lần3)** Cho x, y là các số thực thỏa mãn $(x-3)^2+(y-1)^2=5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{3y^2+4xy+7x+4y-1}{x+2y+1}$.

A. 3. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{114}{11}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$(x-3)^2+(y-1)^2=5\Rightarrow x^2+y^2-6x-2y+5=0$.

$$P=\frac{(3y^2+4xy+7x+4y-1)+(x^2+y^2-6x-2y+5)}{x+2y+1}$$

$$=\frac{4y^2+4xy+x^2+x+2y+4}{x+2y+1}=\frac{(2y+x)^2+(x+2y)+4}{x+2y+1}.$$

Đặt $t=x+2y$.

$(1^2+2^2)\left[(x-3)^2+(y-1)^2\right]\geq\left[(x-3)+(2y-2)\right]^2\Rightarrow(x+2y-5)^2\leq 25\Leftrightarrow 0\leq x+2y\leq 10$.

$P=\frac{t^2+t+4}{t+1}=t+\frac{4}{t+1}$, $0\leq t\leq 10$.

Sử dụng MTCT $\Rightarrow \min P=3$ khi $t=1$.

Câu 31: **(SGD Phú Thọ – lần 1 - năm 2017 – 2018)** Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=4$ và $xy+yz+zx=5$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ bằng

A. 20. **B.** 25. **C.** 15. **D.** 35.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\begin{cases}x+y+z=4\\xy+yz+zx=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=4-z\\xy=5-z(x+y)=5-4z+z^2\end{cases}$.

Lại có: $(x+y)^2\geq 4xy\Rightarrow(4-z)^2\geq 4\left(5-4z+z^2\right)\Rightarrow\frac{2}{3}\leq z\leq 2$. Dấu "=" xảy ra khi $x=y$.

Và $(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(x+y+z)(x+y)z+3xy(x+y)$

$\Rightarrow x^3+y^3+z^3=4^3-12(x+y)z-3xy(x+y)=64-3(4-z)(5+z^2)$.

Ta có: $P=\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\left(3z^3-12z^2+15z+4\right)\left(\frac{5}{z^3-4z^2+5z}\right)$.

Đặt $t=z^3-4z^2+5z$, với $\frac{2}{3}\leq z\leq 2\Rightarrow\frac{50}{27}\leq t\leq 2$.

Do đó xét hàm số $f(t)=5\left(\frac{4}{t}+3\right)$, với $\frac{50}{27}\leq t\leq 2$.

Ta có $f'(t)=\frac{-20}{t^2}<0,\ \forall t\in\left[\frac{50}{27};2\right]$ nên hàm số $f(t)$ liên tục và nghịch biến.

Do đó $P_{\min}=f(2)=25$ đạt tại $x=y=1$, $z=2$.

Câu 32: **(Kim Liên)** Cho các số thực dương a,b thỏa mãn $2\left(a^2+b^2\right)+ab=(a+b)(ab+2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}\right)-9\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)$ thuộc khoảng nào?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. (-6 ;-5). **B.** (-10 ;-9). **C.** (-11 ;-9). **D.** (-5 ;-4).

Lời giải

Chọn A

Vì a,b dương nên từ giả thiết $2\left(a^2+b^2\right)+ab=(a+b)(ab+2)$, ta chia hai vế cho ab

$$2\left(a^2+b^2\right)+ab=(a+b)(ab+2)\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1=(a+b)+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – Si cho hai số dương $(a+b)$ và $2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$:

$$(a+b)+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge 2\sqrt{(a+b).2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}=2\sqrt{2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $(a+b)=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

Suy ra $2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1\ge 2\sqrt{2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)}$. Đặt $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{a},(t>0)$.

Khi đó: $2t+1\ge 2\sqrt{2(t+2)}\Leftrightarrow 4t^2-4t-15\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\ge\frac{5}{2}\\ t\le-\frac{3}{2}\end{array}\right.$. Do đó, ta có điều kiện $t\ge\frac{5}{2}$.

Mặt khác: $P=4\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}\right)-9\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)=4\left[\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^3-3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\right]-9\left[\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-2\right]$

$=4\left(t^3-3t\right)-9\left(t^2-2\right)=4t^3-9t^2-12t+18.$

Đặt $f(t)=4t^3-9t^2-12t+18\Rightarrow f'(t)=12t^2-18t-12>0,\forall t\ge\frac{5}{2}$.

Bảng biến thiên

t	$\frac{5}{2}$ $\quad\quad$ $+\infty$
$f'(t)$	$+$
$f(t)$	$-\frac{23}{4}$ $\nearrow$ $+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có, $\underset{t\in\left[\frac{5}{2};+\infty\right)}{Min}f(t)=f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{23}{4}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $-\frac{23}{4}$ khi $\begin{cases}\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{5}{2}\\(a+b)=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}\right.$.
$\left.\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}\right.$

Câu 33: **(Chuyên Lam Sơn Lần 2)** Cho các số thực x, y thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $3x^2-2xy-y^2=5$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+xy+2y^2$ thuộc khoảng nào sau đây.

A. $(4;7)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(1;4)$. **D.** $(7;10)$.

Lời giải

Chọn C

Xét $y=0\Rightarrow P=\frac{5}{3}$ loại phương án A và D.

Xét $y\neq 0\Rightarrow P=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{7y^2}{4}>0$ khi đó ta có biểu thức $\frac{5}{P}=\frac{3x^2-2xy-y^2}{x^2+xy+2y^2}$

Chia cả tử và mẫu của vế phải cho y^2 tâ được $\frac{5}{P}=\frac{3\left(\frac{x}{y}\right)^2-2\frac{x}{y}-1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}+2}$.

Đặt $\frac{x}{y}=t\,(t\in R)\Rightarrow\frac{5}{P}=\frac{3t^2-2t-1}{t^2+t+2}=f(t)\Rightarrow f'(t)=\frac{5t^2+14t-3}{(t^2+t+2)^2}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-3\\t=\frac{1}{5}\end{array}\right.$

Bảng Biến thiên hàm số $f(t)$.

t	$-\infty$		-3		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	3	↗	4	↘	$-\frac{4}{7}$	↗	3

Từ bảng biến thiên ta có $f(t)\le 4\Leftrightarrow\frac{5}{P}\le 4\Leftrightarrow P\ge\frac{5}{4}$.

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{5}{4}$, dấu bằng xảy ra khi $t=-3\Leftrightarrow x=-3y$.

Câu 34: **(Chuyên Lam Sơn Lần 2)** Cho x, y thỏa mãn $\log_3\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-9)+y(y-9)+xy$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{3x+2y-9}{x+y+10}$ khi x, y thay đổi.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định; $\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}>0 \Leftrightarrow (x+y)>0$.

Vì $x^2+y^2+xy+2=(x+\frac{y}{2})^2+\frac{3}{4}y^2+2>0$ với $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có $\log_3\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-9)+y(y-9)+xy$.

$\Leftrightarrow \log_3(x+y)-\log_3(x^2+y^2+xy+2)=x^2+y^2+xy-9(x+y)$.

$\Leftrightarrow 2+\log_3(x+y)+9(x+y)=\log_3(x^2+y^2+xy+2)+x^2+y^2+xy+2$.

$\Leftrightarrow \log_3 9(x+y)+9(x+y)=\log_3(x^2+y^2+xy+2)+x^2+y^2+xy+2$ (1).

Đặt $f(t)=\log_3 t+t$ $(\forall t>0)$.

Có $f'(t)=\frac{1}{t.\ln 3}+1>0$ với $(\forall t>0)\Rightarrow$ f là hàm đồng biến với $(\forall t>0)$. Khi đó:

$f(9(x+y))=f(x^2+y^2+xy+2)\Leftrightarrow 9(x+y)=x^2+y^2+xy+2$.

$\Leftrightarrow x^2+y^2+xy+2-9x-9y=0$.

$\Leftrightarrow 4x^2+4y^2+4xy+8-36x-36y=0$.

$\Leftrightarrow (2x+y)^2-18(2x+y)+3(y-3)^2-19=0$.

Mà $\Leftrightarrow 3(y-3)^2\ge 0\Rightarrow (2x+y)^2-18(2x+y)-19\le 0\Rightarrow -1\le 2x+y\le 19$.

Mặt khác $P-1=\frac{2x+y-19}{x+y+10}\le 0\Rightarrow P\le 1$ Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}2x+y=19\\ y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=8\\ y=3\end{cases}$.

Câu 35: **(PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH)** Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x^2+y^2-xy=1$ và hàm số $f(t)=2t^3-3t^2+1$.

Gọi M, m tương ứng là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $Q=f\left(\frac{5x-y+2}{x+y+4}\right)$. Tổng $M+m$ bằng

A. $-4-3\sqrt{2}$. **B.** $-4-5\sqrt{2}$. **C.** $-4-4\sqrt{2}$. **D.** $-4-2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $x^2+y^2-xy=1\Leftrightarrow\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}=1$. Ta đặt: $t=\frac{5x-y+2}{x+y+4}$

$\Rightarrow t(x+y+4)=5x-y+2\Leftrightarrow (t-5)x+(t+1)y+4t-2=0$.

$\Leftrightarrow (t-5)\left(x-\frac{y}{2}\right)+\left(\sqrt{3}t-\sqrt{3}\right)\frac{\sqrt{3}y}{2}=2-4t$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$$(2-4t)^2=\left[(t-5)\left(x-\frac{y}{2}\right)+\left(\sqrt{3}t-\sqrt{3}\right)\frac{\sqrt{3}y}{2}\right]^2\le\left[(t-5)^2+\left(\sqrt{3}t-\sqrt{3}\right)^2\right]\left[\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}\right]$$

$$\Rightarrow(2-4t)^2\le\left[(t-5)^2+\left(\sqrt{3}t-\sqrt{3}\right)^2\right].1$$

$\Leftrightarrow 12t^2-24t\le 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$.

Xét hàm số $f(t)=2t^3-3t^2+1$ với $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$.

Có: $f'(t)=6t^2-6$ nên $f'(t)=0\Leftrightarrow 6t^2-6t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=1\end{array}\right.$.

Ta có: $f\left(-\sqrt{2}\right)=-5-4\sqrt{2}$, $f(0)=1$, $f(1)=0$, $f\left(\sqrt{2}\right)=-5+4\sqrt{2}$

Do đó $M=f(0)=1$, $m=f\left(-\sqrt{2}\right)=-5-4\sqrt{2}$.

Vậy $M+m=-4-4\sqrt{2}$.

Bài toán gốc: Cho $ax^2+by^2+cxy=d$. Tìm MGT $t=\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$

Phương pháp giải:

Cách 1. Lượng giác hóa

Ta có: $ax^2+by^2+cxy=d\Leftrightarrow\left(a'x+b'y\right)^2+\left(c'x+d'y\right)^2=1$

Đặt $\left\{\begin{array}{l}a'x+b'y=\sin\alpha\\c'x+d'y=\cos\alpha\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=m\sin\alpha\\y=n\cos\alpha\end{array}\right.$

Suy ra: $t=\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\Leftrightarrow A\sin\alpha+B\cos\alpha=C$

Ta có: $A^2+B^2\ge C^2$ suy ra MGT của t.

Cách 2. (Một cách nhìn khác đồng nhất hệ số

$t=\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\Leftrightarrow A(mx+ny)+B(kx+qy)=C$

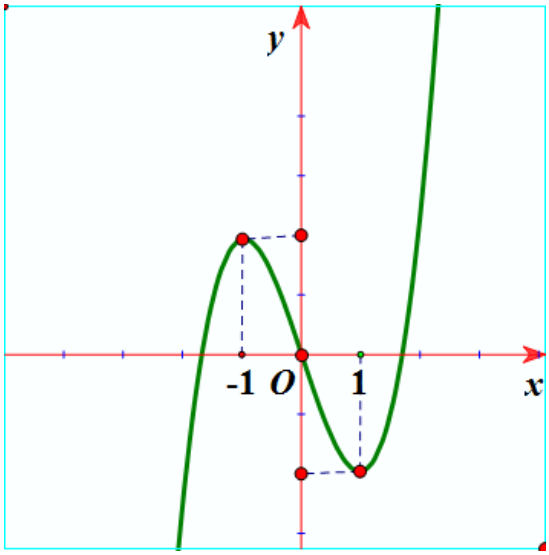
Chọn m,n,k,q sao cho $(mx+ny)^2+(kx+qy)^2\equiv ax^2+by^2+cxy$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m^2+k^2=a\\n^2+q^2=b\\2mn+2kq=c\end{array}\right.$$

Áp dụng BĐT Bunhiacoxki ta có: $C^2\le\left(A^2+B^2\right)d$ suy ra MGT của t.

Câu 36: **(PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH)** Cho 2 số x,y thỏa mãn $x^2+5y^2=1+4xy$ và hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M,m tương ứng là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P=f\left(\dfrac{2x-3y-3}{-x+4y+4}\right)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Tích $M.m$ bằng

A. $\frac{-1436}{1331}$ **B.** $\frac{3380}{1331}$ **C.** $\frac{1436}{1331}$ **D.** $\frac{1944}{1331}$

Lời giải

Chọn C

Dễ thấy $f(x)=x^3-3x$

Từ $x^2+5y^2=1+4xy \Leftrightarrow (x-2y)^2+y^2=1$

Đặt $\begin{cases} x-2y=\sin\alpha \\ y=\cos\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sin\alpha+2\cos\alpha \\ y=\cos\alpha \end{cases}$. Khi đó

Xét $t=\frac{2x-3y-3}{-x+4y+4}=\frac{2(\sin\alpha+2\cos\alpha)-3\cos\alpha-3}{-(\sin\alpha+2\cos\alpha)+4\cos\alpha+4}=\frac{2\sin\alpha+\cos\alpha-3}{-\sin\alpha+2\cos\alpha+4}$

Ta có: $t(-\sin\alpha+2\cos\alpha+4)=2\sin\alpha+\cos\alpha-3 \Leftrightarrow (t+2)\sin\alpha+(1-2t)\cos\alpha=4t+3 \quad (*)$

Phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow (t+2)^2+(2t-1)^2 \ge (4t+3)^2 \Leftrightarrow -2 \le t \le \frac{-2}{11}$

Khi đó $P=f(t)=t^3-3t$ với $-2 \le t \le \frac{-2}{11}$

Dễ dàng tìm được $M=2$, $m=\frac{718}{1331}$. Vậy $M.m=\frac{1436}{1331}$

Câu 37: **(PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH)** Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x^2+5y^2+2xy=1$ và hàm số

$f(t)=t^4-2t^2+2$ Gọi M, m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $Q=f\left(\frac{x+y-1}{x+3y-2}\right)$.

Tổng $M+m$

A. $4\sqrt{3}+2$. **B.** $8\sqrt{3}-2$. **C.** 66. **D.** $9\sqrt{3}+17$

Lời giải

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Chọn C

Ta có: $x^2+5y^2+2xy=1\Leftrightarrow (x+y)^2+4y^2=1$

Đặt $t=\dfrac{x+y+1}{x+3y-2}\Rightarrow t(x+3y-2)=x+y+1\Leftrightarrow (2t+1)=(t-1)(x+y)+2ty$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có:

$(2t+1)^2=\left[(t-1)(x+y)+2ty\right]^2\le \left((t-1)^2+t^2\right)\left((x+y)^2+4y^2\right)\Rightarrow (2t+1)^2\le (t-1)^2+t^2$

$\Leftrightarrow 2t^2+6t\le 0\Leftrightarrow -3\le t\le 0$

Xét hàm số $f(t)=t^4-2t^2+2$ với $-3\le t\le 0$

Có: $f'(t)=4t^3-4t$, nên $f'(t)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\\ t=-1\\ t=1\end{array}\right.$

$f(0)=2, f(-1)=1, f(-3)=65$

Do đó $M=f(-3)=65; m=f(-1)=1$

Vậy: $M+m=66$

Câu 38: **(2D1-4) (THPT Chuyên Trần Phú-Hải Phòng-lần 2 năm 2017-2018)** Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} x^2-xy+3=0\\ 2x+3y-14\le 0\end{cases}$. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3x^2y-xy^2-2x^3+2x$.

A. 8. **B.** 0. **C.** 12. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Theo giả thiết ta có $x^2-xy+3=0\Rightarrow y=\dfrac{x^2+3}{x}$

Từ bất phương trình $2x+3y-14\le 0\Leftrightarrow \dfrac{5x^2-4x+9}{x}\le 0\Leftrightarrow 1\le x\le \dfrac{9}{5}$.

Mặt khác ta có $\begin{cases} x^2=xy-3\\ xy=x^2+3\end{cases}\Rightarrow \begin{cases} x^3=x^2y-3x\\ xy^2=x^2y+3y\end{cases}$

Thay vào ta được $P=-3y+8x=-3\left(\dfrac{x^2+3}{x}\right)+8x=5x-\dfrac{9}{x}$.

Xét hàm số $f(x)=5x-\dfrac{9}{x}$ trên đoạn $\left[1;\dfrac{9}{5}\right]$.

Ta có $f'(x)=5+\dfrac{9}{x^2}\ge 0,\ \forall x\in\left[1;\dfrac{9}{5}\right]$ do đó $\min\limits_{\left[1;\frac{9}{5}\right]}=f(1)=-4$ và $\max\limits_{\left[1;\frac{9}{5}\right]}f(x)=f\left(\dfrac{9}{5}\right)=4$.

Suy ra tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng 0.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Cách 2: Từ giả thiết có: $x+\frac{3}{x}=y$ và $2x+3\left(x+\frac{3}{x}\right)\le 14\Rightarrow x\in\left[1;\frac{9}{5}\right]$.

Khi đó: $P=3x^2\left(x+\frac{3}{x}\right)-x\left(x+\frac{3}{x}\right)-2x^3+2x$.

$P=f(x)=5x-\frac{9}{x}, x\in\left[1;\frac{9}{5}\right]$.

Khảo sát hàm số nhận được ta có $\min\limits_{\left[1;\frac{9}{5}\right]} f(x)=f(1)=-4$ và $\max\limits_{\left[1;\frac{9}{5}\right]} f(x)=f\left(\frac{9}{5}\right)=4$.

Suy ra tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng 0.

Câu 39: **(PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH)** Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $\begin{cases} xy+yz+zx=8 \\ x+y+z=5 \end{cases}$ và hàm số $f(x)=x^2-4x+5$

Gọi M, m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x)$. Tổng $M+m$

A. 3. **B.** $\frac{28}{9}$

C. $\frac{19}{9}$. **D.** 2

Lời giải

Chọn A

Viết lại điều kiện: $\begin{cases} xy+yz+zx=8 \\ x+y+z=5 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} zy=8-x(y+z) \\ y+z=5-x \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} yz=8-x(5-x) \\ y+z=5-x \end{cases}$ $(*)$

Vì x, y, z thỏa mãn $(*)$ nên y, z là hai nghiệm của phương trình

$T^2-(5-x)T+8-5x+x^2=0$ $(**)$

Điều kiện có nghiệm của phương trình $(**)$ là: $\Delta=(5-x)^2-4(8-5x+x^2)\ge 0\Leftrightarrow 3x^2-10x+7\le 0$

$\Leftrightarrow 1\le x\le\frac{7}{3}$

Xét hàm số $f(x)=x^2-4x+5$ với $1\le x\le\frac{7}{3}$

Có $f'(x)=2x-4$ nên $f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$

$f(1)=2; f(2)=1; f\left(\frac{7}{3}\right)=\frac{10}{9}$

Do đó $M=f(1)=2, m=f(2)=1$.

Vậy $M+m=3$.

Câu 40: Cho $x, y\in[0;+\infty)$, $x+y=1$. Biết $m\in[a;b]$ thì phương trình $(5x^2+4y)(5y^2+4x)+40xy=m$ có nghiệm thực. Tính $T=25a+16b$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $T=829$. **B.** $T=825$. **C.** $T=816$. **D.** $T=820$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $m=25(xy)^2+20(x^3+y^3)+56xy=25(xy)^2+20\left[(x+y)^3-3xy(x+y)\right]+56xy$

$=25(xy)^2-4xy+20=25t^2-4t+20$, với $t=xy\le\dfrac{(x+y)^2}{4}=\dfrac{1}{4}$.

Xét hàm số $f(t)=25t^2-4t+20$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{1}{4}\right]$.

Ta có: $f'(t)=50t-4$. Xét $f'(t)=0\Rightarrow t=\dfrac{2}{25}$.

Ta có: $f(0)=20$, $f\left(\dfrac{2}{25}\right)=\dfrac{496}{25}$ và $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{329}{16}$.

Do đó để phương trình có nghiệm thực thì $m\in\left[\dfrac{496}{25};\dfrac{329}{16}\right]\Rightarrow a=\dfrac{496}{25},b=\dfrac{329}{16}$ suy ra $T=825$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A – KIẾN THỨC CHUNG

1 - Định nghĩa:

+) Đường thẳng $x=a$ là TCĐ của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu có một trong các điều kiện sau:

$\lim\limits_{x\to a^+} y=+\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to a^+} y=-\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to a^-} y=+\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to a^-} y=-\infty$

+) Đường thẳng $y=b$ là TCN của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu có một trong các điều kiện sau:

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=b$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty} y=b$

2 - Cho $y=f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

Đkiện cần: giải $Q(x)=0\Leftrightarrow x=x_0$ **là TCĐ khi thỏa mãn đk đủ.**

Điều Kiện đủ:

Đkiện 1: x_0 làm cho $P(x)$ và $Q(x)$ xác định

Đkiện 2: ① x_0 không phải nghiệm $P(x)\Rightarrow x=x_0$ là TCĐ

② x_0 là nghiệm $P(x)\Rightarrow x=x_0$ là TCĐ nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$

Cần nhớ: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$ *luôn có đường tiệm cận đứng là:* $x=-\dfrac{d}{c}$

3 - Hàm số *y = f(x)* có TXD: D

Đkiện cần: D phải chứa $+\infty$ hoặc $-\infty$

Đkiện đủ:

Dạng 1: $y=f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

+ Bậc của $P(x)$ nhỏ hơn bậc của $Q(x)\Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} y=0\Rightarrow$ Tiệm cận ngang $Ox: y=0$.

+ Bậc của $P(x)$ bằng bậc của $Q(x)\Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\dfrac{\text{Hệ số bậc cao của P(x)}}{\text{Hệ số bậc cao của Q(x)}}=\alpha$.

Suy ra tiệm cận ngang $y=\alpha$.

+ Bậc của $P(x)$ lớn hơn bậc của $Q(x)\Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\pm\infty\Rightarrow$ Không có tiệm cận ngang.

Dạng 2: $y=f(x)=u-\sqrt{v}$ (hoặc $\sqrt{u}-\sqrt{v}$): **Nhân liên hợp** $\Rightarrow y=f(x)=\dfrac{u^2-v}{u+\sqrt{v}}$ (hoặc $\dfrac{u-v}{\sqrt{u}+\sqrt{v}}$)

3 - Kĩ thuật "*ước lượng bậc nhỏ hơn*"

Ví dụ câu **13**

$y=\dfrac{\sqrt{x^2+x+4}}{x-3}\approx\dfrac{|x|}{x}=\pm 1$ khi $x\to\pm\infty\Rightarrow y=\pm 1$ là hai đường **TCN**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

4 - Kỹ năng sử dụng máy tính (tham khảo):

+ Tính $\lim\limits_{x\to x_{\circ}^{+}} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x = x_{\circ} + 10^{-9}$.

+ Tính $\lim\limits_{x\to x_{\circ}^{-}} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x = x_{\circ} - 10^{-9}$.

B – BÀI TẬP

DẠNG 1. TIỆM CẬN KHÔNG CHỨA THAM SỐ

Câu 1: **(THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4)** Đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{2x-1}+1}{x^2-2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của hàm số là $D = \left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)\setminus\{2\}$.

Ta thấy $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^{+}} \dfrac{\sqrt{2x-1}+1}{x^2-2x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^{-}} \dfrac{\sqrt{2x-1}+1}{x^2-2x} = -\infty \end{cases}$ nên $x=2$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là $x=2$.

Câu 2: **(Thị Xã Quảng Trị)** Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x\sqrt{x^2-4}}{(x-1)(x+5)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = (-\infty;-2]\cup[2;+\infty)\setminus\{-5\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sqrt{x^2-4}}{(x-1)(x+5)} = 1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x\sqrt{x^2-4}}{(x-1)(x+5)} = -1$.

Suy ra đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang: $y=1$ và $y=-1$.

Lại có: $\lim\limits_{x\to(-5)^{-}} y = \lim\limits_{x\to(-5)^{-}} \dfrac{x\sqrt{x^2-4}}{(x-1)(x+5)} = -\infty$. Suy ra đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=-5$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận.

Câu 3: **(KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG)** Đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{1-x^2}+x}{x^2-2x-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Chọn D

Tập xác định: $D=(-1;1]$

Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

$$x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\in[-1;1] \\ x=3\notin[-1;1] \end{array}\right.$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{\sqrt{1-x^2}+x}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to -1^+}\frac{\sqrt{1-x^2}+x}{(x+1)(x-3)}=+\infty$$

Vậy đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng.

Câu 4: **(Phan Đình Tùng Hà Tĩnh)** Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2019}-x}$ là

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $\sqrt{x^2+2019}-x=0$ vô nghiệm, nên đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2019}-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(\sqrt{x^2+2019}+x\right)}{2019}=+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+2019}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\dfrac{2019}{x^2}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1+\dfrac{2019}{x^2}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1+\dfrac{2019}{x^2}}-1}=\frac{-1}{2}.$$

Suy ra đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là $y=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 5: **(Ngô Quyền Hà Nội)** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x}$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=[-16;+\infty)\setminus\{-1;0\}$.

Xét $\lim\limits_{x\to 0}y=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\left(x^2+x\right)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}=\dfrac{1}{8}$.

Suy ra đường thẳng $x=0$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Xét $\lim\limits_{x\to -1^+}y=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to -1^-}y=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x}=-\infty$.

Suy ra đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho chỉ có một đường tiệm cận đứng là $x=-1$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 6: **(CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU)** Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị $y=\dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x}$ là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2};1\right)\cup(1;+\infty)$

Tiệm cận đứng:

$\lim\limits_{x\to1^+}y=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x(x-1)}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to1^-}y=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x(x-1)}=-\infty$

Suy ra $x=1$ là tiệm cận đứng.

Tiệm cận ngang:

$\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}}+3+\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}}=3\Rightarrow y=3$ là tiệm cận ngang

$\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}}+3+\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}}=3\Rightarrow y=3$ là tiệm cận ngang

Vậy đồ thị hàm số có hai tiệm cận.

Câu 7: Đồ thị hàm số $y=\sqrt{4x^2+4x+3}-\sqrt{4x^2+1}$ có bao nhiêu tiệm cận ngang?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}-\sqrt{4x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x+2}{\sqrt{4x^2+4x+3}+\sqrt{4x^2+1}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{4+\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}+\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}=1$ suy ra đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}-\sqrt{4x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x+2}{\sqrt{4x^2+4x+3}+\sqrt{4x^2+1}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4+\dfrac{2}{x}}{-\sqrt{4+\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}-\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}=-1$ suy ra đường thẳng $y=-1$ là tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang.

Câu 8: Số tiệm cận của đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x}}$ là:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. 2. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-2x>0 \\ x^2-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<0 \end{array}\right.$..

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-2x}}-\frac{1}{\sqrt{x^2-x}}=\frac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x^2-x}.\sqrt{x^2-2x}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-x}.\sqrt{x^2-2x}\left(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2-2x}\right)}.$$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0\Rightarrow y=0$.

Ta có: +) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang,.

+) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-x}.\sqrt{x^2-2x}\left(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2-2x}\right)}$.

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{\sqrt{1-x}.\sqrt{2-x}\left(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2-2x}\right)}=-\infty.$$

$\Rightarrow x=0$ là tiệm cận đứng.

+) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-x}.\sqrt{x^2-2x}\left(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2-2x}\right)}=+\infty\Rightarrow x=2$ là tiệm cận đứng.

Câu 9: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2-x}}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x^2-2x\ge 0 \\ x^2-x\ge 0 \\ \sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2-x}\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;0]\cup[2;+\infty) \\ x\in(-\infty;0]\cup[1;+\infty) \\ x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\infty;0)\cup[2;+\infty)$

Khi đó: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2-x}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{\sqrt{-x(2-x)}-\sqrt{-x(1-x)}}$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{-x}}.\frac{1}{\sqrt{2-x}-\sqrt{1-x}}=+\infty.$$

$\Rightarrow x=0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Có $\lim\limits_{x\to 2^+} y=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2-x}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow x=2$ không là đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2-x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x^2-x}}{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}}{-1} = -2$

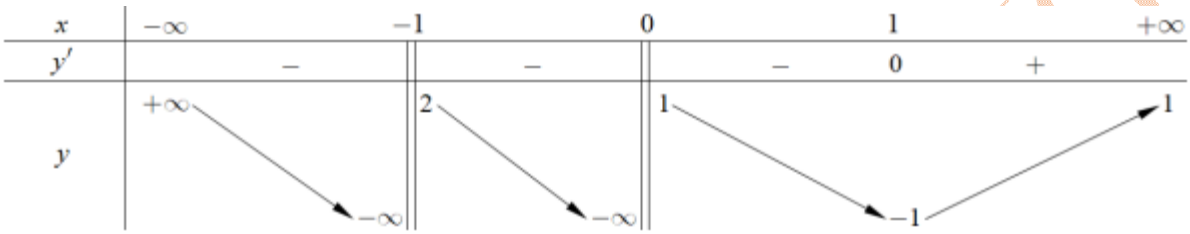
$\Rightarrow y=-2$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Có $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x^2-x}}{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}}{-1} = 2$

$\Rightarrow y=2$ là một đường tiệm cận ngag của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận.

Câu 10: **(SỞ PHÚ THỌ LẦN 2 NĂM 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2}{3f(x)-2}$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $3f(x)-2=0$ (hay $f(x)=\dfrac{2}{3}$) có 4 nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa $x_1\in(-\infty;-1)$, $x_2\in(-1;0)$, $x_3\in(0;1)$, $x_4\in(1;+\infty)$. Suy ra đồ thị hàm số $y=\dfrac{2}{3f(x)-2}$ có 4 tiệm cận đứng là $x=x_1$, $x=x_2$, $x=x_3$, $x=x_4$.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{3f(x)-2} = 0$ nên $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2}{3f(x)-2}$.

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{3f(x)-2} = 2$ nên $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2}{3f(x)-2}$.

Do đó đồ thị hàm số $y=\dfrac{2}{3f(x)-2}$ có 2 tiệm cận ngang là $y=0$, $y=2$.

Vậy tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2}{3f(x)-2}$ là 6.

Câu 11: **(Đặng Thành Nam Đề 9)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ và $f(x)=1\Leftrightarrow x=0$. Tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-1}$ là:

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)-1}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-1}=\dfrac{1}{-1-1}=-\dfrac{1}{2}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)-1}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-1}=\infty$ (vì $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$)

nên $y=-\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang duy nhất.

Ta có $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{f(x)-1}=\infty$ (vì $f(x)=1\Leftrightarrow x=0$) nên $x=0$ là tiệm cận đứng duy nhất.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 12: **(CổLoa Hà Nội)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f(x)$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)+2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận (tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

A. 5. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)+2}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)+2}$ có tiệm ngang là $y=\dfrac{1}{4}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)+2}=0\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)+2}$ có tiệm ngang là $y=0$.

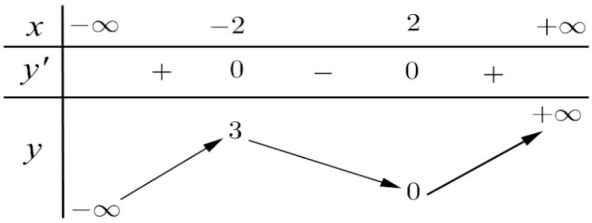
Xét phương trình $f(x)+2=0\Leftrightarrow f(x)=-2\ (1)$.

Dựa vào bảng biến thiên, (1) có 3 nghiệm $x_1=-1$, $x_2\in(0;2)$, $x_3\in(2;+\infty)$.

Suy ra đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)+2}$ có 3 tiệm cận đứng là $x=-1$, $x=x_2$, $x=x_3$.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 5 tiệm cận.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f\left(3-x\right)-2}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng

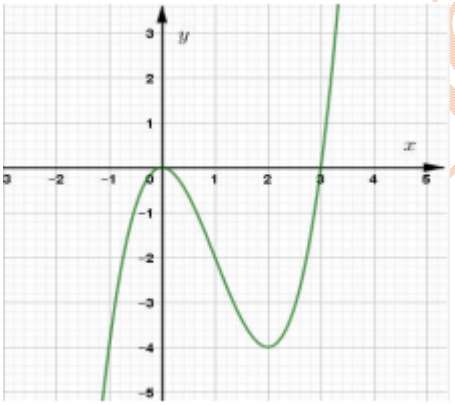
A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Ta thấy $f\left(x\right)=2$ có 3 nghiệm $\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f\left(3-x\right)-2}$ có 3 tiệm cận đứng.

Câu 14: **(KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ sau



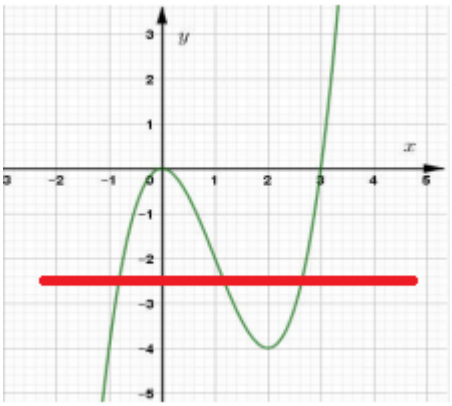
Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f\left(x^2-2x+2\right)+5}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 2. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Số tiệm cận đứng là số nghiệm của phương trình $f\left(x^2-2x+2\right)=-\dfrac{5}{2}$.

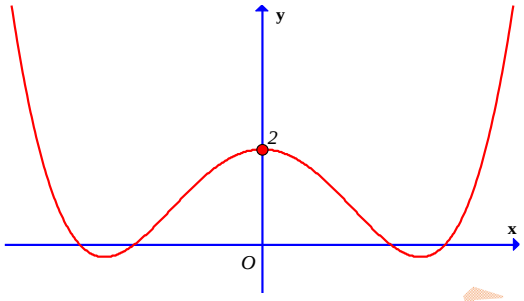


Theo bảng ta có $2f\left(x\right)+5=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)\left(x_1<0;x_2,x_3>1\right),a\neq 0$.

Do $x^2-2x+2=(x-1)^2+1\ge 1$ nên $f\left(x^2-2x+2\right)=-\frac{5}{2}\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{x_2-1};\ x=1\pm\sqrt{x_3-1}$.

Vì phương trình $f\left(x^2-2x+2\right)=-\frac{5}{2}$ có 4 nghiệm nên đồ thị hàm số có 4 tiệm cận đứng.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\frac{2018x}{f(x)\left(f(x)-1\right)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?



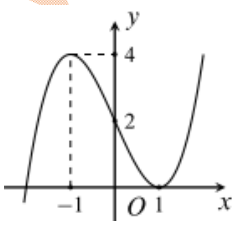
A. 2. **B.** 9. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B Ta có $g(x)$ là hàm phân thức hữu tỷ với bậc của tử nhỏ hơn bậc cảu mẫu nên $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=0$, do đó đồ thị hàm số $g(x)$ có đúng một tiệm cận ngang.

Mỗi phương trình $f(x)=0\ \&\ f(x)=1$ đều có 4 nghiệm phân biệt khác 0 nên đồ thị hàm số $g(x)$ có đúng 8 tiệm cận đứng.

Câu 16: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm $f\left(x\right)$ như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\frac{x^2-1}{f^2\left(x\right)-4f\left(x\right)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận **đứng**?



A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A Xét $f^2\left(x\right)-4f\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=0\\f\left(x\right)=4\end{array}\right.$.

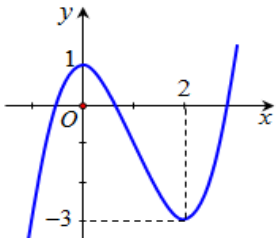
Xét $f\left(x\right)=0$ có 2 nghiệm $x_1\ne\pm1$ và $x_2=1$ là nghiệm bội (do đồ thị tiếp xúc với trục hoành tại $x=1$. Trường hợp này có 2 tiệm cận đứng.

Xét $f\left(x\right)=4$ có 2 nghiệm $x_3\ne\pm1$ và $x_4=-1$ là nghiệm bội (do đồ thị tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ tại $x=-1$. Trường hợp này có 2 tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị có 4 tiệm cận đứng.

Câu 17: Cho hàm số bậc ba $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\frac{\left(x^2-2x\right).\sqrt{1-x}}{\left(x-3\right).\left[f^2\left(x\right)+3f\left(x\right)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

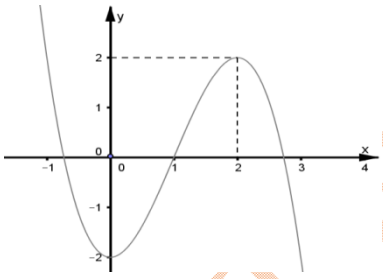


A. 5. **B.** 4 . **C.** 6 . **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

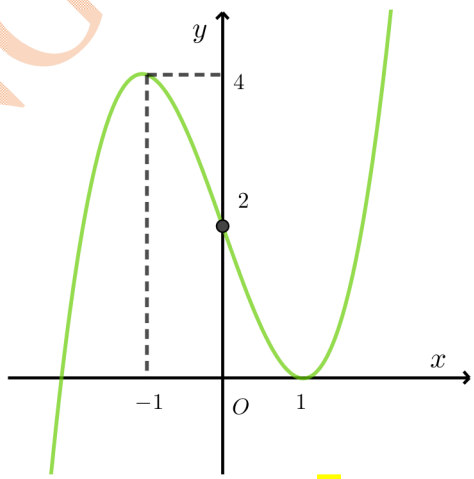
Câu 18: Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\left(x-2\sqrt{x}\right).\sqrt{2-x}}{(x-4).\left[f^2(x)+2f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 5. **B.** 4 . **C.** 2 . **D.** 3.

Chọn C

Câu 19: **(Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019)** Cho $f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị hàm như hình vẽ dưới đây. Đặt $g(x)=\dfrac{x^2-x}{f^2(x)-2f(x)}$, hỏi đồ thị hàm số $y=g(x)$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?

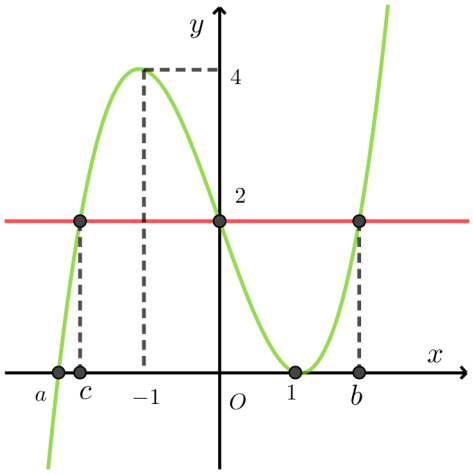


A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Xét $h(x)=x^2-x=x(x-1)$ có hai nghiệm đơn là $x=0$ và $x=1$.

Xét $k(x)=f^2(x)-2f(x)$, ta có $k(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(x)=2 \end{array}\right.$.

Ta có $f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị hàm như hình vẽ nên:

□ $f(x)=0$ có hai nghiệm $x=a<-1$ (nghiệm đơn) và $x=1$ (nghiệm kép).

□ $f(x)=2$ có ba nghiệm đơn $x=c\in(a;-1)$, $x=0$ và $x=b>1$.

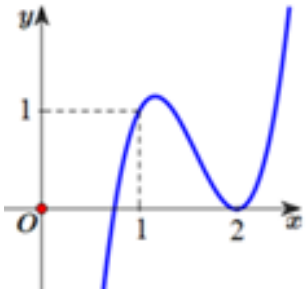
Như vậy, ta thấy:

□Hàm số $y=g(x)$ có nghiệm đơn $x=0$ ở mẫu sẽ triệt tiêu với ở trên tử nên mất.

□Nghiệm kép $x=1$ ở mẫu và trong khi ở tử thì có $x=1$ là nghiệm đơn, do đó không triệt tiêu hết, $x=1$ vẫn là một tiệm cận đứng của hàm số $y=g(x)$.

Vậy đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 4 đường tiệm cận đứng là $x=a$, $x=b$, $x=c$ và $x=1$.

Câu 20: **(Lý Nhân Tông)** Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x^2-3x+2)\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?



A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

(1) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=x_1\in(0;1) \\ x=2 \end{array}\right.$ trong đó nghiệm $x=2$ là nghiệm kép và $x=x_1$ là nghiệm đơn.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

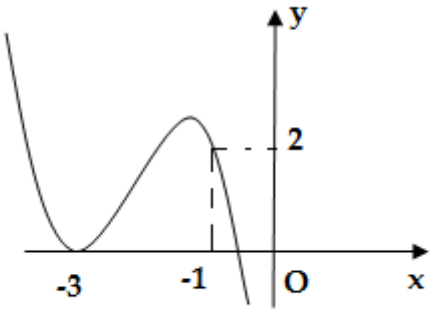
$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=x_2 \in (1;2) \\ x=x_3>2 \end{array}\right.$ trong đó các nghiệm trên đều là nghiệm đơn.

Vậy $g(x)=\dfrac{(x-1)(x-2).\sqrt{x-1}}{x.f(x).\left[f(x)-1\right]}=\dfrac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{a^2x.(x-x_1)(x-2)^2(x-1)(x-x_2)(x-x_3)}$

$=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x(x-x_1)(x-2)(x-x_2)(x-x_3)}$

Dựa trên điều kiện $x\ge 1$ nên đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận đứng là các đường thẳng $x=2$, $x=x_2$ và $x=x_3$.

Câu 21: **(Chuyên Thái Nguyên)** Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in R)$ có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x\left[(f(x))^2-2f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 3. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Điều kiện $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x\le -1 \\ x>0 \end{array}\right. \\ f(x)\ne 0 \\ f(x)\ne 2 \end{array}\right.$

Ta có $g(x)=\dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x\left[(f(x))^2-2f(x)\right]}=\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x\left[(f(x))^2-2f(x)\right]}$,

rõ ràng $x=0$ là một tiệm cận đứng của đồ thị $g(x)$.

Xét phương trình $(f(x))^2-2f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(x)=2 \end{array}\right.$.

Với $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=x_1\in(-1;0) \end{array}\right.$ trong đó $x=-3$ là nghiệm nghiệm kép, nên mẫu sẽ có nhân tử $(x+3)^2$ do đó $x=-3$ là một tiệm cận đứng.

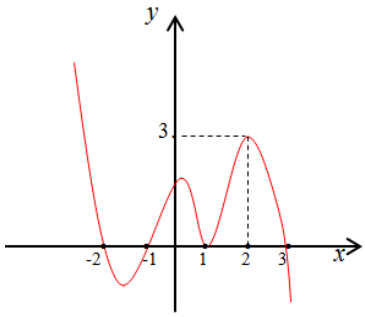
Với $f(x)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=x_2\in(-3;-1)\\x=x_3\in(-\infty;-1)\end{array}\right.$, ba nghiệm này là nghiệm đơn, nên

$f(x)-2=k(x+1)(x-x_2)(x-x_3)$, ta thấy trong $g(x)$ thì $(x+1)$ sẽ bị rút gọn nên có thêm $x=x_2\in(-3;-1)$ và $x=x_3\in(-\infty;-1)$ là tiệm cận đứng.

Vậy tóm lại đồ thị có 4 tiệm cận đứng là $x=0;x=-3;x=x_2;x=x_3$

Chọn D

Câu 22: **(THPT SỐ 1 TƯ NGHĨA LẦN 2 NĂM 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x-2)^2\sqrt{x}}{(x+3)\left(f^2(x)-3f(x)\right)}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?



A. 6. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình: $(x+3)\left(f^2(x)-3f(x)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+3=0\\f(x)=0\\f(x)=3\end{array}\right.$

★ $x+3=0\Leftrightarrow x=-3$ mặt khác $x=-3$ hàm số $y=g(x)$ không xác định nên đường thẳng $x=-3$ không là một đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

★ $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=-1\\x=1\\x=3\end{array}\right.$,

Với $x=-1,x=-2$ hàm số $y=g(x)$ không xác định nên đường thẳng $x=-1,x=-2$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

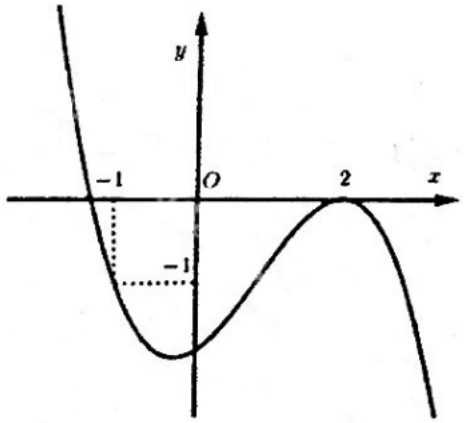
Với $x=1,x=3$: Hàm số xác định tại $x=1,x=3$và $x=1,x=3$ không là nghiệm của tử số nên hai đường thẳng $x=1,x=3$ là 2 tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

★ $f(x)=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=x_0\end{array}\right.$ ta thấy $x=2$ là nghiệm của tử số và $x=x_0<0$ nên hàm số $y=g(x)$ không xác định do đó hai đường thẳng $x=2;x=x_0$ không là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 2 tiệm cận đứng.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 23: **(THCS-THPT-NGUYỄN-KHUYẾN-TP-HCM-24THÁNG3)** Đồ thị hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ như hình vẽ.



Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{(x^2-2x-3)\sqrt{x+2}}{(x^2-x)\left[(f(x))^2+f(x)\right]}$ là

A. 8. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x\geq -2 \\ x\neq 0 \\ x\neq 1 \\ (f(x))^2+f(x)\neq 0 \end{cases}$.

Khi đó ta có $y=g(x)=\dfrac{(x+1)(x-3)\sqrt{x+2}}{(x^2-x)\left[(f(x))^2+f(x)\right]}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ (do bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu) $\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Khi $x=0$; $x=1$ ta có tử số khác 0 và mẫu số bằng 0 nên $x=0$; $x=1$ là hai đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=g(x)$.

Xét $(f(x))^2+f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(x)=-1 \end{array}\right.$.

+) $f(x)=0$ từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta suy ra $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\alpha\in(-2;-1) \\ x=2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ $x=\alpha$; $x=2$ là hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (vì tử khác 0) $y=g(x)$.

+) $f(x)=-1$ từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta suy ra $f(x)=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\beta\in(0;2) \\ x=\gamma\in(2;+\infty) \end{array}\right.$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Do đó $f(x)+1=a(x+1)(x-\beta)(x-\gamma)$.

Vậy $y=g(x)=\dfrac{(x-3)\sqrt{x+2}}{(x^2-x)f(x)a(x-\beta)(x-\gamma)}\Rightarrow x=\beta$; $x=\gamma$ là hai tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=g(x)$.

Vậy đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 7 đường tiệm cận.

Câu 24: Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị hàm số (C) tạo với hai đường tiệm cận một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất. Khi đó, khoảng cách từ tâm đối xứng của đồ thị (C) đến Δ bằng?

A. $\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn D

Phương pháp tự luận

□ Gọi $M\left(x_0;\dfrac{x_0-2}{x_0+1}\right)\in(C)$, $(x_0\neq -1)$, $I(-1;1)$. Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng

$$\Delta: y=\frac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\frac{x_0-2}{x_0+1}.$$

□ Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng là $A\left(-1;\dfrac{x_0-5}{x_0+1}\right)$.

□ Giao điểm của Δ với tiệm cận ngang là $B(2x_0+1;1)$.

□ Ta có $IA=\dfrac{6}{|x_0+1|}$, $IB=2|x_0+1|\Rightarrow IA.IB=12$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔIAB là $S_{IAB}=pr$, suy ra

$$r=\frac{S_{IAB}}{p}=\frac{IA.IB}{IA+IB+AB}=\frac{IA.IB}{IA+IB+\sqrt{IA^2+IB^2}}\le\frac{IA.IB}{2\sqrt{IA.IB}+\sqrt{2.IA.IB}}=2\sqrt{3}-\sqrt{6}.$$

□ Suy ra $r_{\max}=2\sqrt{3}-\sqrt{6}\Leftrightarrow IA=IB\Leftrightarrow|x_0-1|^2=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_M=-1+\sqrt{3}\Rightarrow y_0=1-\sqrt{3}\\x_M=-1-\sqrt{3}\Rightarrow y_0=1+\sqrt{3}\end{array}\right.$.

□ $\overrightarrow{IM}(\sqrt{3};-\sqrt{3})\Rightarrow|\overrightarrow{IM}|=\sqrt{6}$.

Phương pháp trắc nghiệm

□ $IA=IB\Rightarrow\Delta IAB$ vuông cân tại $I\Rightarrow IM\perp\Delta$.

□ $cx_M+d=\pm\sqrt{|ad-bc|}\Rightarrow x_M+1=\pm\sqrt{|1+2|}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_M=-1+\sqrt{3}\Rightarrow y_M=1-\sqrt{3}\\x_M=-1-\sqrt{3}\Rightarrow y_M=1+\sqrt{3}\end{array}\right.$

$\Rightarrow|\overrightarrow{IM}|=\sqrt{6}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 25: Cho hàm số $y=\frac{2x-3}{x-2}(C)$. Gọi M là điểm bất kỳ trên (C), d là tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của đồ thị (C). Giá trị nhỏ nhất của d là

A. 5. **B.** 10. **C.** 6. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Tọa độ điểm M có dạng $M\left(x_0;\frac{2x_0-3}{x_0-2}\right)$ với $x_0\neq 2$

Phương trình tiệm cận đứng, ngang lần lượt là $x-2=0\ (d_1)$, $y-2=0\ (d_2)$.

Ta có $d=d(M,d_1)+d(M,d_2)=|x_0-2|+\frac{1}{|x_0-2|}\geq 2$

Câu 26: Số điểm thuộc đồ thị (H) của hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}$ có tổng các khoảng cách đến hai tiệm cận của (H) nhỏ nhất là

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 0

Lời giải

Chọn B

TCĐ: $x=-1$; TCN: $y=2$. Gọi $M\left(x;\frac{2x-1}{x+1}\right)\in(H)$

Tổng khoảng cạc từ M đến hai tiệm cận là: $d=|x+1|+\left|\frac{2x-1}{x+1}-2\right|=|x+1|+\frac{3}{|x+1|}\geq 2\sqrt{|x+1|.\frac{3}{|x+1|}}=2\sqrt{3}$

$\Rightarrow d_{\min}=2\sqrt{3}\Leftrightarrow|x+1|=\frac{3}{|x+1|}\Leftrightarrow(x+1)^2=3\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}-1\Rightarrow$ có tất cả 2 điểm thuộcd dồ thị (H) thỏa mãn đề bài.

Câu 27: **(Sở Vĩnh Phúc)** Cho M là điểm có hoành độ dương thuộc đồ thị hàm số $y=\frac{x+2}{x-2}$, sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số là nhỏ nhất. Tọa độ điểm M là:

A. $(4;3)$. **B.** $(0;-1)$. **C.** $(1;-3)$. **D.** $(3;5)$.

Lời giải

Chọn A

Vì M là điểm có hoành độ dương thuộc đồ thị hàm số $y=\frac{x+2}{x-2}$ nên $M\left(a;\frac{a+2}{a-2}\right)$ (với $a>0$).

Hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số là : $\Delta_1: x=2$ và $\Delta_2: y=1$

Suy ra : $d_1=d_{(M;\Delta_1)}=|a-2|$ và $d_2=d_{(M;\Delta_2)}=\left|\frac{a+2}{a-2}-1\right|=\left|\frac{4}{a-2}\right|=\frac{4}{|a-2|}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vây tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận là:

$d = d_1 + d_2 = |a-2| + \dfrac{4}{|a-2|} \ge 2\sqrt{|a-2|\dfrac{4}{|a-2|}} = 4.$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $|a-2| + \dfrac{4}{|a-2|} \ge 2\sqrt{|a-2|\dfrac{4}{|a-2|}} = 4.$

Dấu bằng xảy ra khi : $|a-2| = \dfrac{4}{|a-2|} \Leftrightarrow (a-2)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-2=2 \\ a-2=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=4 \\ a=0 \end{array}\right.$.

Mà $a > 0 \Rightarrow a = 4$. Vậy $M(4;3)$.

Câu 28: Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-2}$, có đồ thị (C). Gọi P, Q là 2 điểm phân biệt nằm trên (C) sao cho tổng khoảng cách từ P hoặc Q tới 2 đường tiệm cận là nhỏ nhất. Độ dài đoạn thẳng PQ là:

A. $4\sqrt{2}$ **B.** $5\sqrt{2}$ **C.** 4 **D.** $2\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-2}$ có tiệm cận ngang y = 1 và tiệm cận đứng x = 2. Suy ra tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận là I (2;1)

Gọi $P\left(x_0; \dfrac{x_0+2}{x_0-2}\right) \in (C)$. Khi đó tổng khoảng cách từ P đến hai đường tiệm cận

$S = d(A,d_1) + d(A,d_2) = |x_0 - 2| + \left|\dfrac{x_0+3}{x_0-3} - 1\right| = |x_0-2| + \left|\dfrac{4}{x_0-3}\right| \ge 2\sqrt{|x_0-2|.\left|\dfrac{4}{x_0-2}\right|} = 4$

$\Rightarrow S_{\min} = 4 \Leftrightarrow |x_0-2| = \left|\dfrac{4}{x_0-2}\right| \Leftrightarrow (x_0-2)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0-2=2 \\ x_0-2=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=4; y=-3 \\ x_0=0; y=-1 \end{array}\right. \Rightarrow PQ = 4\sqrt{2}.$

$\Rightarrow P(4;-3), Q(0;-1)$

Câu 29: Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi d là khoảng cách từ giao điểm hai tiệm cận của đồ thị (C) đến một tiếp tuyến của (C). Giá trị lớn nhất của d có thể đạt được là:

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$. Giao điểm hai tiệm cận của đồ thị hàm số là $I(-1;1)$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A\left(a; \dfrac{a+2}{a+1}\right) \in (C)$ là:

$y = \dfrac{-1}{(a+1)^2}(x-a) + \dfrac{a+2}{a+1} \Leftrightarrow x + (a+1)^2 y - a^2 - 4a - 2 = 0.$

Khoảng cách từ $I(-1;1)$ đến tiếp tuyến là: $d=\dfrac{\left|-1+(a+1)^2.1-a^2-4a-2\right|}{\sqrt{1+(a+1)^4}}=\dfrac{\left|-2a-2\right|}{\sqrt{1+(a+1)^4}}$

Vì $\sqrt{1+(a+1)^4}\geq\sqrt{2.(a+1)^2}=\sqrt{2}\left|a+1\right|$ nên $d\leq\dfrac{2\left|a+1\right|}{\sqrt{2}\left|a+1\right|}=\sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $a=0$ hoặc $a=-2$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

DẠNG 2. TIỆM CẬN CHỨA THAM SỐ

Câu 30: **(ĐH Vinh Lần 1)** Có bao nhiêu giá trị m nguyên để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-mx+m}$ có đúng một tiệm cận đứng.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Dễ thấy tử số có một nghiệm $x=2$. Do đó để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-mx+m}$ có đúng một tiệm cận đứng thì cần xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $x^2-mx+m=0$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta=m^2-4m=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=4 \end{array}\right.$.

Trường hợp 2: $x^2-mx+m=0$ có 2 nghiệm phân biệt, trong đó có 1 nghiệm bằng 2.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=m^2-4m>0 \\ 4-2m+m=0 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing$.

Câu 31: **(Chuyên-Thái-Nguyên-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3)** Cho hàm số $y=\dfrac{1-x}{x^2-2mx+4}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

A. $\begin{cases} m\neq\dfrac{5}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right. \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} m>2 \\ m\neq\dfrac{5}{2} \end{cases}$. **C.** $-2<m<2$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn A

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=0$ nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y=0$.

Để đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận thì đồ thị có hai đường tiệm cận đứng.

$\Leftrightarrow x^2-2mx+4=0$ có hai nghiệm phân biệt $x\neq 1$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4>0 \\ 1-2m+4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right. \\ m\neq\dfrac{5}{2} \end{cases}$.

Câu 32: **(LÝ TỰ TRỌNG – TPHCM)** Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+x-1}{4x^2+bx+9}$ có đồ thị (C) (a,b là các hằng số dương, $ab=4$). Biết rằng (C) có tiệm cận ngang $y=c$ và có đúng 1 tiệm cận đứng. Tính tổng $T=3a+b-24c$

A. $T=1$. **B.** $T=4$. **C.** $T=7$. **D.** $T=11$.

Lời giải

Chọn D

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\dfrac{a}{4}$. Tiệm cận ngang $y=c\Rightarrow\dfrac{a}{4}=c$.

(C) có một tiệm cận đứng nên phương trình $4x^2+bx+9=0$ có nghiệm kép.

$\Delta=0\Leftrightarrow b^2-144=0\Leftrightarrow b=\pm12$. Vì $b>0\Rightarrow b=12\Rightarrow a=\dfrac{1}{3}\Rightarrow c=\dfrac{1}{12}$.

Vậy $T=11$.

Câu 33: **(Cụm THPT Vũng Tàu)** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-mx-m+5}$ **không** có đường tiệm cận đứng?

A. 10. **B.** 1. **C.** 12. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

Ta có $x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$ nên đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-mx-m+5}$ không có đường tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $x^2-mx-m+5=0$ vô nghiệm hoặc có 2 nghiệm là 1 và 2.

+) Xét phương trình $x^2-mx-m+5=0$ (1), ta có $\Delta=m^2+4m-20$ nên (1) vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta<0$ hay $-2-2\sqrt{6}<m<-2+2\sqrt{6}$.

+) Phương trình (1) có hai nghiệm là 1 và 2 khi và chỉ khi $m=3$.

Trên khoảng $\left(-2-2\sqrt{6};-2+2\sqrt{6}\right)$ có 9 số nguyên là $-6;-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2$ nên có 10 giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-mx-m+5}$ không có đường tiệm cận

Câu 34: **(Sở Bắc Ninh)** Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)\text{x}-\text{m}}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-6;6]$ của tham số m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận?

A. 8. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 11.

Lời giải

Chọn B

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)\text{x}-\text{m}}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-3}{x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)\text{x}-\text{m}}=0$ nên đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang là $y=0$.

Do đó (C) có 4 đường tiệm cận khi và chỉ khi (C) có 3 đường tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)\text{x}-\text{m}=0(1)$ có 3 nghiệm phân biệt khác 3.

Ta có $(1)\Leftrightarrow(x-m)\left(x^2-2mx+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\x^2-2mx+1=0\end{array}\right.$.

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khác 3 $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m^2-1>0 \\ m^2-2m^2+1 \neq 0 \\ 3^2-6m+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>1 \end{array}\right. \\ m \neq \dfrac{5}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow m \in (-\infty;-1) \cup \left(1;\dfrac{5}{3}\right) \cup \left(\dfrac{5}{3};3\right) \cup (3;+\infty)$.

Do $m \in [-6;6]$, m nguyên nên $m \in \{-6;-5;-4;-3;-2;2;4;5;6\}$.

Vậy có 9 giá trị m thỏa mãn.

Câu 35: **(CHUYÊN ĐHSP HN)** Tập hợp các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{\left(mx^2-2x+1\right)\left(4x^2+4mx+1\right)}$ có đúng 1 đường tiệm cận là

A. $\{0\}$. **B.** $(-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$.

C. $\varnothing$ **D.** $(-\infty;-1) \cup \{0\} \cup (1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y=0$. Nên hàm số luôn có 1 đường tiệm cận ngang $y=0$. Vậy ta tìm điều kiện để hàm số không có tiệm cận đứng.

Xét phương trình: $\left(mx^2-2x+1\right)\left(4x^2+4mx+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} mx^2-2x+1=0 \quad (1) \\ 4x^2+4mx+1=0 \quad (2) \end{array}\right.$

TH1: Xét $m=0$, ta được $y=\dfrac{2x-1}{\left(-2x+1\right)\left(4x^2+1\right)}=-\dfrac{1}{4x^2+1}$ (thỏa ycbt)

TH2: Xét $m \neq 0$. Có: $\Delta_1=1-m$ và $\Delta_2=4m^2-4$

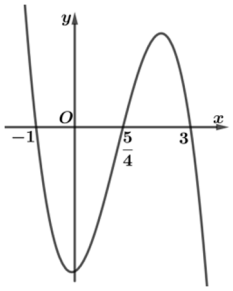
Th2a. Cả 2 phương trình (1) và (2) đều vô nghiệm: $\Leftrightarrow \begin{cases} 1-m<0 \\ 4m^2-4<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ -1<m<1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing$

Th2b: (1) vô nghiệm, (2) có nghiệm kép $x=\dfrac{1}{2}$: ta thấy trường hợp này vô lí (vì $m>1$)

Th2c: (2) vô nghiệm, (1) có nghiệm kép $x=\dfrac{1}{2}$: ta thấy trường hợp này vô lí (vì $-1<m<1$)

Câu 36: **(CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 3)** Cho hàm số $g(x)=\dfrac{2018}{h(x)-m^2-m}$ với $h(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx$ $(m,n,p,q \in \mathbb{R})$. Hàm số $y=h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Tìm các giá trị m nguyên để số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$ là 2

A. 11. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 20.

Lời giải

Chọn B

Ta có $h'(x)=4mx^3+3nx^2+2px+q$. Từ đồ thị ta có $h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=\dfrac{5}{4}\\x=3\end{array}\right.$ và $(m<0)$.

Suy ra $h'(x)=4m(x+1)\left(x-\dfrac{5}{4}\right)(x-3)=4mx^3-13mx^2-2mx+15m$.

Suy ra $h(x)=mx^4-\dfrac{13}{3}mx^3-mx^2+15mx+C$. Từ đề bài ta có $C=0$.

Vậy $h(x)=mx^4-\dfrac{13}{3}mx^3-mx^2+15mx$.

Xét $h(x)-m^2-m=0\Leftrightarrow m=x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x-1$.

Xét hàm số $f(x)=x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x-1\Rightarrow f'(x)=4x^3-13x^2-2x+15=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=\dfrac{5}{4}\\x=3\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$\dfrac{5}{4}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\dfrac{35}{3}$	↗	$\dfrac{7807}{768}$	↘	-1	↗	$+\infty$

Để đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình $h(x)-m^2-m=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $m=x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x-1$ có 2 nghiệm phân biệt.

Từ bảng biến thiên kết hợp thêm điều kiện $m<0$ ta có $-\dfrac{35}{3}<m<-1$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Do m nguyên nên $m \in \{-11;-10;...;-2\}$. Vậy có 10 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 37: **(Chuyên Quốc Học Huế Lần1)** Tìm số giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019;2019]$ của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. 2007. **B.** 2010. **C.** 2009. **D.** 2008.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m}$.

+) TXĐ: $D=[3;+\infty)$

+) $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{3}{x^4}}}{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{m}{x^2}}=0$. Do đó ĐTHS có 1 tiệm cận ngang $y=0$.

+) Để ĐTHS có 2 đường tiệm cận thì phải có thêm 1 tiệm cận đứng. Vậy yêu cầu bài toán trở thành: Tìm điều kiện để phương trình $x^2+x-m=0$ phải có 1 nghiệm lớn hơn hoặc bằng 3.

Trường hợp 1: Phương trình $x^2+x-m=0$ phải có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1<3<x_2$.

$\Leftrightarrow a.f(3)<0 \Leftrightarrow 12-m<0 \Leftrightarrow m>12.$

Trường hợp 2: Phương trình $x^2+x-m=0$ có nghiệm $x=3$ thì $m=12$.

Với $m=12$ phương trình trở thành: $x^2+x-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-4 \end{array}\right.$ (tmđk)

Trường hợp 3: Phương trình $x^2+x-m=0$ có nghiệm kép $x>3$.

Khi $m=\dfrac{-1}{4}$ thì phương trình có nghiệm $x=\dfrac{-1}{2}$. (không thỏa mãn)

Theo đề bài $m\in[-2019;2019]$, m nguyên do đó $m\in[12;2019]$.

Vậy có $(2019-12)+1=2008$ giá trị của m.

Ý kiến

Có thể nhận xét phương trình $x^2+x-m=0\,(1)$ nếu có nghiệm thì $x_1+x_2=-1$ do đó (1) luôn có ít nhất một nghiệm âm. Vậy đk bài toán chỉ thỏa mãn khi và chỉ khi (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1<0<3\le x_2 \Leftrightarrow af(3)\le 0 \Leftrightarrow m\ge 12.$

Câu 38: **(THPT-Phúc-Trạch-Hà-Tĩnh-lần-2-2018-2019-thi-tháng-4)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-2019;2019)$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{4036x+2}{\sqrt{mx^2+3}}$ có hai đường tiệm cận ngang.

A. 0. **B.** 2018. **C.** 4036. **D.** 25.

Lời giải

Chọn B

□Với $m<0$ ta có tập xác định của hàm số: $D=\left(-\sqrt{-\frac{3}{m}};\sqrt{-\frac{3}{m}}\right)$ nên không tồn tại tiệm cận ngang.

□Với $m=0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}y=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}y=-\infty$ nên đồ thị hàm số cũng không có tiệm cận ngang.

□Với $m>0$ ta có tập xác định của hàm số: $D=\mathbb{R}$.

Khi đó:

$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(4036+\frac{2}{x}\right)}{x\sqrt{m+\frac{3}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4036+\frac{2}{x}}{\sqrt{m+\frac{3}{x^2}}}=\frac{4036}{\sqrt{m}}.$$

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(4036+\frac{2}{x}\right)}{-x\sqrt{m+\frac{3}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4036+\frac{2}{x}}{-\sqrt{m+\frac{3}{x^2}}}=-\frac{4036}{\sqrt{m}}$$

nên đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang là $y=\pm\frac{4036}{\sqrt{m}}$.

Suy ra $\begin{cases}m>0\\m\in(-2019;2019)\\m\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow m\in\{1;2;3;...;2018\}$.

Vậy có 2018 giá trị nguyên của m.

Câu 39: **(Đặng Thành Nam Đề 14)** Cho hàm số $y=\frac{x+1}{\sqrt{ax^2+1}}$ có đồ thị (C). Biết rằng (C) có tiệm cận ngang và tồn tại tiếp tuyến của (C) song song và cách tiệm cận ngang của (C) một khoảng bằng 3. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $a\in\left(\frac{1}{2};1\right)$. **B.** $a\in\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **C.** $a\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $a\in\left(\frac{3}{2};2\right)$.

Lời giải

Chọn A

Để đường cong (C) có tiệm cận ngang khi và chỉ khi: $a>0$

Suy ra ta có hai đường tiệm cận ngang là: $y_1=\frac{1}{\sqrt{a}};y_2=-\frac{1}{\sqrt{a}}$

Ta có: $y'=\frac{\sqrt{ax^2+1}-(x+1).\frac{ax}{\sqrt{ax^2+1}}}{ax^2+1}=\frac{1-ax}{\sqrt{(ax^2+1)^3}}$

Gọi tiếp tuyến của đường cong (C) tại điểm $M(x_M;y_M)$ là đường thẳng Δ

Ta có Δ song song tiệm ngang của (C) suy ra:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

+) $y'(x_M)=0\Rightarrow 1-ax_M=0\Leftrightarrow x_M=\frac{1}{a}\Rightarrow M\left(\frac{1}{a};\sqrt{1+\frac{1}{a}}\right)$

Ta có khoảng cách từ Δ đến tiệm cận ngang của (C) bằng 3

+) Khoảng cách từ Δ đến tiệm cận ngang cũng chính là khoảng cách từ điểm M đến tiệm cận ngang.

Ta có: $\left[\begin{array}{l} d(M;y_1)=3 \\ d(M;y_2)=3 \end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} \left|\sqrt{1+\frac{1}{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right|=3 \\ \left|\sqrt{1+\frac{1}{a}}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right|=3 \end{array}\right.\Leftrightarrow a=\frac{9}{16}$. Vậy $a\in\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Câu 40: **(-Mai-Anh-Tuấn-Thanh-Hóa-lần-1-2018-2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1}$ có đúng một đường tiệm cận.

A. $-1\le m<0$. **B.** $-1\le m\le 0$. **C.** $m<-1$. **D.** $m>0$.

Lời giải

Chọn A

+) Nếu $m\ge 0$ ta thấy $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1}\right)=\pm\sqrt{m}\Rightarrow y=\pm\sqrt{m}$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to-1^{\pm}}\left(\frac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1}\right)=\pm\infty\Rightarrow x=-1$ là tiệm cận đứng.

Vậy $m\ge 0$ không thỏa mãn đề bài.

+) Nếu $m<0$ ta có hàm số xác định trên $D=\left[\frac{-1}{\sqrt{-m}};\frac{1}{\sqrt{-m}}\right]$ không phải là một khoảng vô cùng nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng $x=-1$ khi $\lim\limits_{x\to-1^{\pm}}\left(\frac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1}\right)=\pm\infty$.

Khi đó m phải thỏa mãn hệ $\left\{\begin{array}{l} \frac{-1}{\sqrt{-m}}\le -1\le\frac{1}{\sqrt{-m}} \\ m<0 \end{array}\right.\Leftrightarrow -1\le m<0$.

Câu 41: Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y=\frac{x^2+2}{\sqrt{mx^4+3}}$ có hai đường tiệm cận ngang.

A. $m=0$ **B.** $m<0$ **C.** $m>0$ **D.** $m>3$

Lời giải:

Đồ thị hàm số $y=\frac{x^2+2}{\sqrt{mx^4+3}}$ có hai đường tiệm cận ngang khi và chỉ khi các giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}y=a(a\in\mathbb{R}),\lim\limits_{x\to-\infty}y=b(b\in\mathbb{R})$ tồn tại. Ta có:

+ với $m=0$ ta nhận thấy $\lim\limits_{x\to+\infty}y=+\infty,\lim\limits_{x\to-\infty}y=+\infty$ suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

+ Với $m<0$, khi đó hàm số có TXĐ $D=\left(-\sqrt[4]{-\frac{3}{m}};\sqrt[4]{-\frac{3}{m}}\right)$, khi đó $\lim\limits_{x\to+\infty} y, \lim\limits_{x\to-\infty} y$ không tồn tại suy ra đồ thị hàm số không có đường tiệm cận ngang.

+ Với $m>0$, khi đó hàm số có TXĐ $D=\mathbb{R}$ suy ra $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\sqrt{m+\frac{3}{x^2}}}, \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}}{x^2\sqrt{m+\frac{3}{x^4}}}=\frac{1}{\sqrt{m}}$ suy ra đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang.

Vậy $m>0$ thỏa YCBT.

Chọn C

Câu 42: **(Hai Bà Trưng Huế Lần1)** Cho hàm số $y=\frac{1}{\left[x^2-(2m+1)x+2m\right]\sqrt{x-m}}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

A. $\begin{cases}0<m<1\\ m\neq\frac{1}{2}\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}m<1\\ m\neq\frac{1}{2}\end{cases}$. **C.** $m>1$. **D.** $\begin{cases}0\le m\le 1\\ m\neq\frac{1}{2}\end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định khi $\begin{cases}x>m\\ x^2-(2m+1)x+2m\neq 0\end{cases}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\left[x^2-(2m+1)x+2m\right]\sqrt{x-m}}=0$ nên đồ thị hàm số luôn có một đường tiệm cận ngang $y=0$.

Do đó để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận thì đồ thị hàm số phải có 3 đường tiệm cận đứng. Ta có $\lim\limits_{x\to m^+} y=\pm\infty$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=m$ làm đường tiệm cận đứng. Như vậy ta cần có phương trình $x^2-(2m+1)x+2m=0$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn $m \Leftrightarrow \begin{cases}1\neq 2m\\ 1>m\\ 2m>m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq\frac{1}{2}\\ 0<m<1\end{cases}$.

Câu 43: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\frac{2x-\sqrt{(m-1)x^2+1}}{x-1}$ có đúng hai tiệm cận ngang?

A. $m=1$ **B.** $m\in(1;4)\cup(4;+\infty)$ **C.** $m<1$ **D.** $m>1$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-\sqrt{(m-1)x^2+1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{\sqrt{(m-1)x^2+1}}{x}}{1-\frac{1}{x}}=2-\sqrt{(m-1)}$ (với $m\ge 1$)

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-\sqrt{(m-1)x^2+1}}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2-\frac{\sqrt{(m-1)x^2+1}}{x}}{1-\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\sqrt{\frac{(m-1)x^2+1}{x}}}{1-\frac{1}{x}} = 2+\sqrt{(m-1)}$$

Để đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang thì $m>1$

Câu 44: **(TTHT Lần 4)** Cho hàm số $y=\dfrac{12+\sqrt{4x-x^2}}{\sqrt{x^2-6x+2m}}$ có đồ thị (C_m). Tìm tập S tất cả các giá trị của tham số thực m để (C_m) có đúng hai tiệm cận đứng.

A. $S=[8;9)$. **B.** $S=\left[4;\dfrac{9}{2}\right)$. **C.** $S=\left(4;\dfrac{9}{2}\right)$. **D.** $S=(0;9]$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $4x-x^2\ge 0 \Leftrightarrow x\in[0;4]$.

Dễ thấy $12+\sqrt{4x-x^2}>0, \forall x\in[0;4]$.

Nhận xét: Nếu phương trình $x^2-6x+2m=0$ *có hai nghiệm* $a,b, a<b$ *thì* $x^2-6x+2m<0, \forall x\in(a;b)$

Do đó để đồ thị hàm số có đúng hai tiệm cận đứng thì phương trình $x^2-6x+2m=0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $(0;4)$.

Xét $g(x)=x^2-6x=-2m$ có $g'(x)=2x-6=0\Leftrightarrow x=3\in(0;4)$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên đoạn $(0;4)$:

x	0	3	4
g'		- 0 +	
g	0	-9	-8

Từ đó ta thấy phương trình $x^2-6x+2m=0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $(0;4)$ khi $-9<-2m<-8\Leftrightarrow 4<m<\dfrac{9}{2}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 45: **(Thuận Thành 2 Bắc Ninh)** Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+3}+ax+b}{(x-1)^2}$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị hàm số (C) không có tiệm cận đứng. Tính giá trị $T=2a-3b$.

A. $-\dfrac{11}{4}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{19}{4}$. **D.** $\dfrac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x)=\sqrt{x+3}+ax+b \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}+a$.

Để đồ thị hàm số (C) không có tiệm cận đứng thì $f(x)=\sqrt{x+3}+ax+b=(x-1)^2.g(x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(1)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+a+b=0 \\ \dfrac{1}{4}+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{4} \\ b=-\dfrac{7}{4} \end{cases}.$$

Vậy $T=2a-3b=\dfrac{19}{4}$.

Câu 46: **(TTHT Lần 4)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{1+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-mx-3m}}$ có đúng hai tiệm cận đứng là

A. $(0;+\infty)$. **B.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $\left[\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right]$. **D.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right]$.

Lời giải

Chọn D

Ta thấy $1+\sqrt{x+1}>0, \forall x \geq -1$.

Hàm số có đúng hai tiệm cận đứng khi $x^2-mx-3m=0$ có hai nghiệm phân biệt $x>-1$.

Với $x \geq -1$, phương trình $x^2-mx-3m=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x+3}=m$.

Đặt $f(x)=\dfrac{x^2}{x+3} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2x(x+3)-x^2}{(x+3)^2}=\dfrac{x^2+6x}{(x+3)^2}=0 \Rightarrow x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-6 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ trên khoảng $[-1;+\infty)$:

x	-1		0		$+\infty$
y'		-	0	+	
y	$\frac{1}{2}$	↘	0	↗	$+\infty$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Từ bảng biến thiên trên ta thấy để phương trình $x^2-mx-3m=0$ có hai nghiệm phân biệt $x>-1$ thì $m\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Câu 47: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{x-1}+2017}{\sqrt{x^2-2mx+m+2}}$ có đúng ba đường tiệm cận?

A. $m>2$ hoặc $m<-1$. **B.** $2<m<3$.

C. $2\le m\le 3$. **D.** $m<2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=0$, đồ thị hàm số luôn có 1 đường tiệm cận ngang $y=0$.

Để ĐTHS có ba đường tiệm cận $\Leftrightarrow$ ĐTHS có đúng 2 đường tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow$ phương trình $x^2-2mx+m+2=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 lớn hơn 1

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\(x_1-1)(x_2-1)>0\\(x_1-1)+(x_2-1)>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-m-2>0\\x_1x_2-(x_1+x_2)+1>0\\x_1+x_2-2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\in(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)\\m+2-2m+1>0\\2m-2>0\end{cases}\Leftrightarrow 2<m<3$$

Câu 48: Số các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\sqrt{mx^2-4x}-mx+1$ có tiệm cận ngang là:

A. 3 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2

Lời giải

Chọn C

$y=x\sqrt{m-\frac{4}{x}}-mx+1$. Để hàm số có giới hạn hữu hạn tại vô cực thì hệ số của x phải triệt tiêu

+) $x\to-\infty\Rightarrow y=-x\sqrt{m-\frac{4}{x}}-mx+1$ suy ra hệ số của x là $-\sqrt{m}-m\neq 0$ nên giới hạn này không hữu hạn.

+) $x\to+\infty\Rightarrow y=x\sqrt{m-\frac{4}{x}}-mx+1$ suy ra hệ số của x là $\sqrt{m}-m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=1\end{array}\right.$

Với $m=0$ thay trở lại hàm số không xác định khi $x\to+\infty$

Với $m=1$

$$\Rightarrow y=\sqrt{x^2-4x}-x+1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4x-(x-1)^2}{\sqrt{x^2-4x}+x+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x-1}{\sqrt{x^2-4x}+x+1}=\frac{-2}{2}=-1$$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vậy có một giá trị thực của m để đồ thị hàm số có tiệm cận ngang

Câu 49: **(PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH)** Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\sqrt[3]{x^3+3x^2+2}-\sqrt{4x^2+3x+2}+mx$ có tiệm cận ngang. Tổng các phần tử của S là

A. -2. **B.** 2. **C.** -3. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+2}-\sqrt{4x^2+3x+2}+mx\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+2}-x+2x-\sqrt{4x^2+3x+2}+(m-1)x\right)$

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+2}-x\right)=1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+3x+2}\right)=-\dfrac{3}{4}$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+2}-\sqrt{4x^2+3x+2}+mx\right)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+2}-x-2x-\sqrt{4x^2+3x+2}+(m+3)x\right)$

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+2}-x\right)=1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+3x+2}\right)=\dfrac{3}{4}$

* Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} y$ hoặc $\lim\limits_{x\to+\infty} y$ hữu hạn $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-1=0 \\ m+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-3 \end{array}\right.$

Câu 50: **(PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH)** Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\sqrt[3]{8x^3-5x^2-2}-\sqrt{25x^2-7x+2}-\dfrac{m}{2}x$ có tiệm cận ngang. Tích các phần tử của S là

A. 8. **B.** -84. **C.** 21. **D.** -21.

Lời giải

Chọn B

* $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3-5x^2-2}-\sqrt{25x^2-7x+2}-\dfrac{m}{2}x\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3-5x^2-2}-2x+5x-\sqrt{25x^2-7x+2}-\left(\dfrac{m}{2}+3\right)x\right)$

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3-5x^2-2}-2x\right)=-\dfrac{5}{12}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5x-\sqrt{25x^2-7x+2}\right)=\dfrac{7}{10}$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3-5x^2-2}-\sqrt{25x^2-7x+2}-\dfrac{m}{2}x\right)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3-5x^2-2}-2x-5x-\sqrt{25x^2-7x+2}+\left(7-\dfrac{m}{2}\right)x\right)$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3-5x^2-2}-2x\right)=-\dfrac{5}{12}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5x-\sqrt{25x^2-7x+2}\right)=-\dfrac{7}{10}$

* Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} y$ hoặc $\lim\limits_{x\to+\infty} y$ hữu hạn $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{m}{2}+3=0\\ 7-\dfrac{m}{2}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-6\\ m=14\end{array}\right.$

Câu 51: **(PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH)** Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\sqrt{9x^2-5x+3}-\sqrt[3]{64x^3+3x^2-5x+2}+mx$ có tiệm cận ngang. Tổng bình phương tất cả các phần tử của S là

A. 10. **B.** 15. **C.** 50. **D.** 51.

Lời giải

Chọn C

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2-5x+3}-\sqrt[3]{64x^3+3x^2-5x+2}+mx\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2-5x+3}-3x+4x-\sqrt[3]{64x^3+3x^2-5x+2}+(m-1)x\right)$

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2-5x+3}-3x\right)=\dfrac{-5}{6}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4x-\sqrt[3]{64x^3+3x^2-5x+2}\right)=-\dfrac{1}{16}$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2-5x+3}-\sqrt[3]{64x^3+3x^2-5x+2}+mx\right)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2-5x+3}+3x+4x-\sqrt[3]{64x^3+3x^2-5x+2}+(m-7)x\right)$

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2-5x+3}-3x\right)=\dfrac{5}{6}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4x-\sqrt[3]{64x^3+3x^2-5x+2}\right)=-\dfrac{1}{16}$

* Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} y$ hoặc $\lim\limits_{x\to+\infty} y$ hữu hạn $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m-1=0\\ m-7=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=1\\ m=7\end{array}\right.$

Câu 52: **(Thuận Thành 2 Bắc Ninh)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+m}-3}{x+5}$ có đúng một đường tiệm cận?

A. 5. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=\dfrac{\sqrt{x+m}-3}{x+5}=\dfrac{x+m-9}{(x+5)\left(\sqrt{x+m}+3\right)}$.

Dễ thấy $\lim\limits_{x\to+\infty} y=0, \forall m$. Do đó đồ thị hàm số có một đường TCN là $y=0$.

Để đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng ta xét thường hợp sau: -5 là nghiệm của tử hoặc -5 làm $\sqrt{x+m}$ không xác định.

TH1: -5 là nghiệm của tử thì $-5+m-9=0\Leftrightarrow m=14$.

Thử lại:

$\lim\limits_{x\to -5} y = \lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x+14-9}{(x+5)\left(\sqrt{x+14}+3\right)} = \lim\limits_{x\to -5} \dfrac{1}{\sqrt{x+14}+3} = \dfrac{1}{6}$. Không có TCĐ.

TH2: -5 làm $\sqrt{x+m}$ không xác định thì $-5 \notin [-m;+\infty) \Leftrightarrow -5 < -m \Leftrightarrow m < 5$.

Khi đó không tồn tại $\lim\limits_{x\to -5} y$ nên không đường tiệm cận đứng.

Mặt khác đề bài yêu cầu tìm giá trị nguyên dương của m nên $m \in \{1;2;3;4\}$.

Vậy $m \in \{1;2;3;4;14\}$.

Câu 53: **(Kim Liên)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(\tan x) = \cos^4 x$. Tìm tất cả các số thực m để đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{2019}{f(x)-m}$ có hai đường tiệm cận đứng.

A. $m < 0$. **B.** $0 < m < 1$ **C.** $m > 0$. **D.** $m < 1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos^4 x = \left(\cos^2 x\right)^2 = \dfrac{1}{\left(1+\tan^2 x\right)^2}$, suy ra $f(\tan x) = \dfrac{1}{\left(1+\tan^2 x\right)^2}$ hay $f(x) = \dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^2}$.

Yêu cầu bài toán tương đương tìm m để đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{2019}{\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)^2} - m}$ có hai đường tiệm cận đứng

tương đương phương trình $\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)^2} - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $h(x) = \dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^2}$

$h'(x) = -\dfrac{4x}{\left(1+x^2\right)^3} \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	↗	1	↘	0

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)^2} - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 1$

.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 54: Cho hàm số $y=\dfrac{2mx+m}{x-1}$. Với giá trị nào của tham số m thì đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang cùng hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 8.

A. $m=2$. **B.** $m=\pm\dfrac{1}{2}$. **C.** $m=\pm4$. **D.** $m\neq\pm2$.

Lời giải

Chọn C

Để đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận thì $m\neq0$.

Khi đó đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận là $x=1, y=2m$. Hình chữ nhật tạo bởi 2 tiệm cận và 2 trục tọa độ có diện tích là $|2m|.1=8\Leftrightarrow m=\pm4$

Câu 55: Cho đồ thị hai hàm số $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$ và $g(x)=\dfrac{ax+1}{x+2}$ với $a\neq\dfrac{1}{2}$. Tìm tất cả các giá trị thực dương của a để các tiệm cận của hai đồ thị hàm số tạo thành một hình chữ nhật có diện tích là 4.

A. $a=3$. **B.** $a=6$. **C.** $a=1$. **D.** $a=4$.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$ có hai đường tiệm cận là $x=-1$ và $y=2$.

Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{ax+1}{x+2}$ có hai đường tiệm cận là $x=-2$ và $y=a$.

Hình chữ nhật được tạo thành từ bốn đường tiệm cận của hai đồ thị trên có hai kích thước là 1 và $|a-2|$.

Theo giả thiết, ta có $|a-2|.1=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=6\\a=-2\end{array}\right.$. Vì $a>0$ nên chọn $a=6$.

Câu 56: **(Phan Đình Tùng Hà Tĩnh) (Phan Đình Tùng Hà Tĩnh)** Cho hàm số $y=\dfrac{x+a}{x-a}$ có đồ thị (C) (với a là số thực dương). Gọi P, Q là 2 điểm phân biệt nằm trên (C) sao cho tổng khoảng cách từ P tới hai đường tiệm cận của (C) là nhỏ nhất và tổng khoảng cách từ Q tới hai đường tiệm cận của (C) là nhỏ nhất. Độ dài đoạn thẳng PQ là

A. $2\sqrt{2a+1}$. **B.** $2\sqrt{a}$. **C.** $\sqrt{2a+1}$. **D.** $4\sqrt{a}$.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số (C) có 2 đường tiệm cận là: TCN $\Delta_1: y=1$ và TCĐ $\Delta_2: x=a$.

Gọi $P\left(m;\dfrac{m+a}{m-a}\right), Q\left(n;\dfrac{n+a}{n-a}\right)\in(C), m\neq n, m\neq a, n\neq a.$

Ta có

*) $d(P,\Delta_1)+d(P,\Delta_2)=|m-a|+\left|\dfrac{m+a}{m-a}-1\right|=|m-a|+\left|\dfrac{2a}{m-a}\right|\geq2\sqrt{|m-a|.\left|\dfrac{2a}{m-a}\right|}=2\sqrt{2a}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow |m-a|=\left|\frac{2a}{m-a}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=a+\sqrt{2a} \Rightarrow P\left(a+\sqrt{2a};\sqrt{2a}+1\right) \\ m=a-\sqrt{2a} \Rightarrow P\left(a-\sqrt{2a};1-\sqrt{2a}\right) \end{array}\right.$.

*) $d\left(Q,\Delta_1\right)+d\left(Q,\Delta_2\right)=|n-a|+\left|\frac{n+a}{n-a}-1\right|=|n-a|+\left|\frac{2a}{n-a}\right| \geq 2\sqrt{|n-a|.\left|\frac{2a}{n-a}\right|}=2\sqrt{2a}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow |n-a|=\left|\frac{2a}{n-a}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=a+\sqrt{2a} \Rightarrow Q\left(a+\sqrt{2a};\sqrt{2a}+1\right) \\ n=a-\sqrt{2a} \Rightarrow Q\left(a-\sqrt{2a};1-\sqrt{2a}\right) \end{array}\right.$.

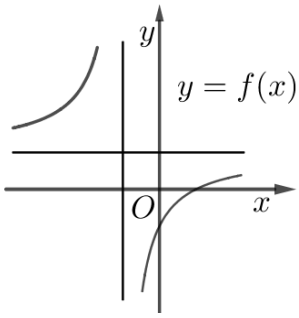
Vì P,Q là 2 điểm phân biệt nên ta chọn $P\left(a+\sqrt{2a};\sqrt{2a}+1\right);Q\left(a-\sqrt{2a};1-\sqrt{2a}\right)$.

Do vậy $PQ=\sqrt{16a}=4\sqrt{a}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

DẠNG 1. ĐỒ THỊ HÀM SỐ, ĐỒ THỊ ĐẠO HÀM

Câu 1. (Chuyên Hùng Vương Gia Lai) Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ($c\neq 0$ và $ad-bc\neq 0$) có đồ thị như hình vẽ.

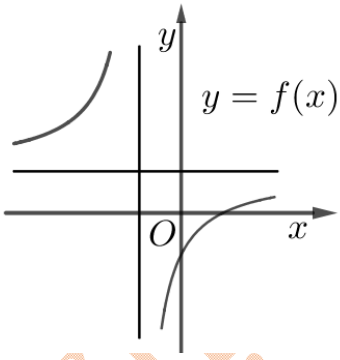


Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $ad<0, ab>0$. **B.** $bd>0, ad<0$. **C.** $ad>0, ab<0$. **D.** $ab<0, ad<0$.

Lời giải

Chọn C



Nhìn vào đồ thị, ta thấy:.

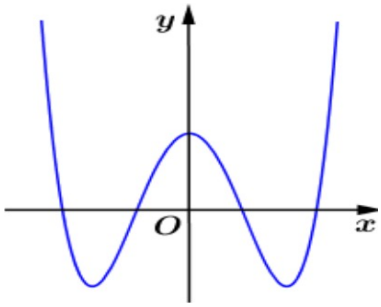
Đồ thị cắt trục hoành tại điểm có hoành độ dương $\Rightarrow a\neq 0$ và $-\dfrac{b}{a}>0$. Suy ra $ab<0$.

Đồ thị có tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}<0\Rightarrow cd>0$ (1)

Đồ thị có tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}>0\Rightarrow ac>0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $ac^2d>0\Rightarrow ad>0$ do $c\neq 0$.

Câu 2. (Phan Đình Tùng Hà Tĩnh) Cho hàm số $y=(a-1)x^4+(b+2)x^2+c-1$ có đồ thị như hình vẽ bên



Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $a>1,\ b>-2,\ c>1$. **B.** $a>1,\ b<-2,\ c>1$. **C.** $a<1,\ b>-2,\ c>1$. **D.** $a>1,\ b<2,\ c>1$.

Lời giải

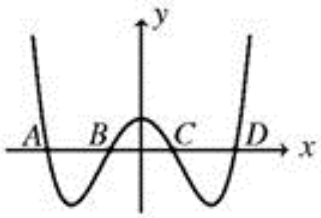
Chọn B

Đồ thị đi lên khi $x\to+\infty$ nên $a-1>0\Leftrightarrow a>1$.

Đồ thị đi qua điểm $(0;c-1)$ có tung độ nằm phía trên trục hoành nên $c-1>0\Leftrightarrow c>1$.

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị nên $(a-1).(b+2)<0$ mà $a>1$ nên $b+2<0\Leftrightarrow b<-2$.

Câu 3. Cho đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ hình vẽ bên. Biết rằng $AB=BC=CD$, mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $a>0,b<0,c>0,100b^2=9ac$.

B. $a>0,b>0,c>0,9b^2=100ac$.

C. $a>0,b<0,c>0,9b^2=100ac$.

D. $a>0,b>0,c>0,100b^2=9ac$.

Lời giải

Chọn C

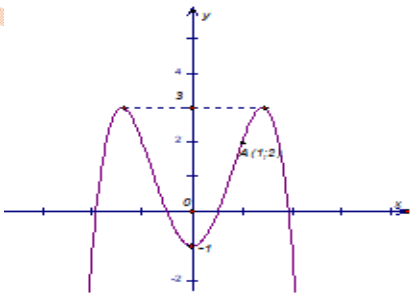
Đồ thị hàm số có hệ số $a>0$ và hàm số có 3 cực trị nên $b<0$. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $A(0;c)$ nên $c>0$

Đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt A, B, C, D như hình vẽ bên. Biết rằng $AB=BC=CD$ tức là phương trình $ax^4+bx^2+c=0$ có 4 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow at^2+bt+c=0$ có 2 nghiệm phân biệt thỏa $t_2=9t_1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t_1+t_2=10t_1\\ t_1.t_2=9t_1^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10t_1=-\dfrac{b}{a}\\ 9t_1^2=\dfrac{c}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1=-\dfrac{b}{10a}\\ 9\left(-\dfrac{b}{10a}\right)^2=\dfrac{c}{a}\end{cases}\Rightarrow 9b^2=100ac$$

Vậy $a>0,b<0,c>0,9b^2=100ac$

Câu 4. (Chuyên Hùng Vương Gia Lai) Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=ax^4+bx^2+c$. Giá trị của biểu thức $M=a^2+b^2+c^2$ có thể nhận giá trị nào trong các giá trị sau



A. $M=18$.

B. $M=6$.

C. $M=20$.

D. $M=24$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ ta có $a<0;b>0;c<0$, đồ thị đi qua các điểm $A=(1;2)$; $B=(0;-1)$ và $y_{cd}=3$.

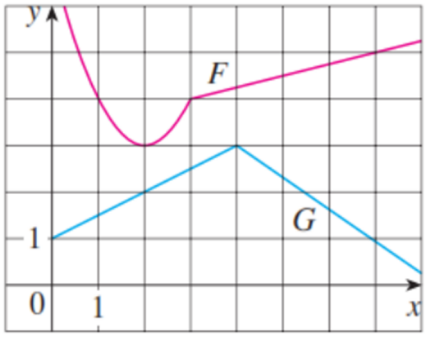
Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a.1+b.1+c=2 \\ a.0+b.0+c=-1 \\ y\left(\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}\right)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-1 \\ a+b=3 \\ a.\left(-\dfrac{b}{2a}\right)^2+b.\left(-\dfrac{b}{2a}\right)+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-1 \\ a+b=3 \\ b^2+16a=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=-1 \\ a+b=3 \\ b^2-16b+48=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-1 \\ a+b=3 \\ \left[\begin{array}{l} b=4 \\ b=12 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=4 \\ c=-1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a=-9 \\ b=12 \\ c=-1 \end{cases}$$

Suy ra $M=a^2+b^2+c^2=18$ hoặc $M=a^2+b^2+c^2=226$. Từ đó M có thể nhận giá trị là 18.

Câu 5. **(Chuyên Hưng Yên Lần 3)** Cho $y=F(x)$ và $y=G(x)$ là những hàm số có đồ thị cho trong hình bên dưới, đặt $P(x)=F(x)G(x)$. Tính $P'(2)$.



A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** 4. **C.** 6. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn A

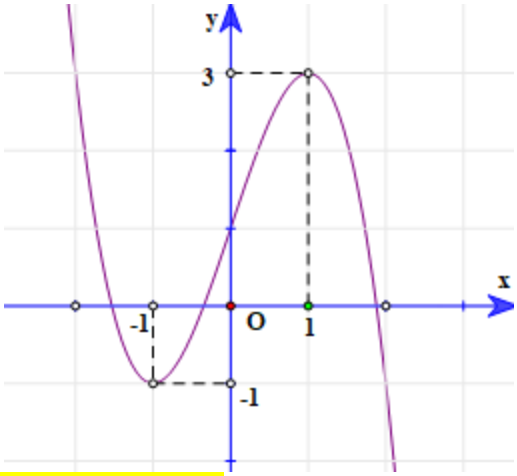
Dựa vào đồ thị, ta có $F(x)=\begin{cases} x^2-4x+7, \text{ khi } x\le 3 \\ \dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{4}, \text{ khi } x>3 \end{cases}$ và $G(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}x+1, \text{ khi } x\le 4 \\ -\dfrac{2}{3}x+\dfrac{17}{3}, \text{ khi } x>4 \end{cases}$.

Khi đó $F'(x)=\begin{cases} 2x-4, \text{ khi } x<3 \\ \dfrac{1}{4}, \text{ khi } x>3 \end{cases}$ và $G'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}, \text{ khi } x<4 \\ -\dfrac{2}{3}, \text{ khi } x>4 \end{cases}$.

Ta có $P(x)=F(x)G(x)\Rightarrow P'(x)=F'(x)G(x)+F(x)G'(x)$.

Do đó $P'(2)=F'(2)G(2)+F(2)G'(2)=0.2+3.\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.

Câu 6. **(PHÂN TÍCH BL_PT ĐỀ ĐH VINHL3 -2019.)** Cho $f(x)=(x-1)^3-3x+3$. Đồ thị hình bên dưới là của hàm số có công thức



A. $y=-f\left(x+1\right)-1$. **B.** $y=-f\left(x+1\right)+1$. **C.** $y=-f\left(x-1\right)-1$. **D.** $y=-f\left(x-1\right)+1$.

Lời giải

Chọn B

Ta thử với từng đáp án:

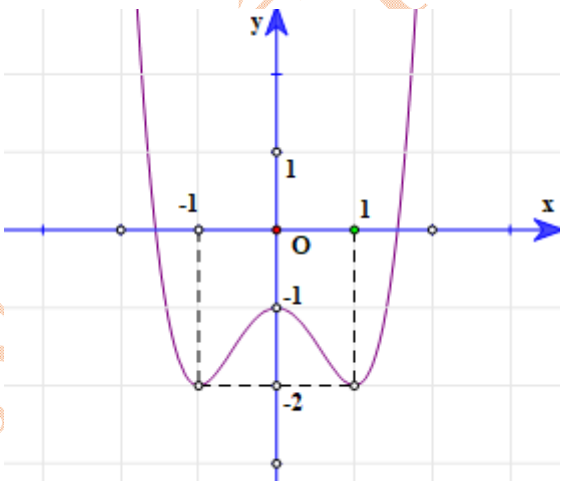
+) Đáp án A: $y\left(-1\right)=-f\left(0\right)-1=-2-1=-3\Rightarrow$ loại.

+) Đáp án B: $y\left(-1\right)=-f\left(0\right)+1=-2+1=-1\Rightarrow$ thỏa mãn.

+) Đáp án C: $y\left(-1\right)=-f\left(-2\right)-1=18-1=17\Rightarrow$ loại.

+) Đáp án D: $y\left(-1\right)=-f\left(-2\right)+1=18+1=19\Rightarrow$ loại.

Câu 7. Cho $f\left(x\right)=\left(x-1\right)^2-2x$. Đồ thị hình bên dưới là của hàm số có công thức



A. $y=-f\left(x^2+1\right)-1$. **B.** $y=-f\left(x^2+1\right)+1$. **C.** $y=f\left(x^2+1\right)-1$. **D.** $y=f\left(x^2+1\right)+1$.

Lời giải

Chọn D

Ta thử với từng đáp án:

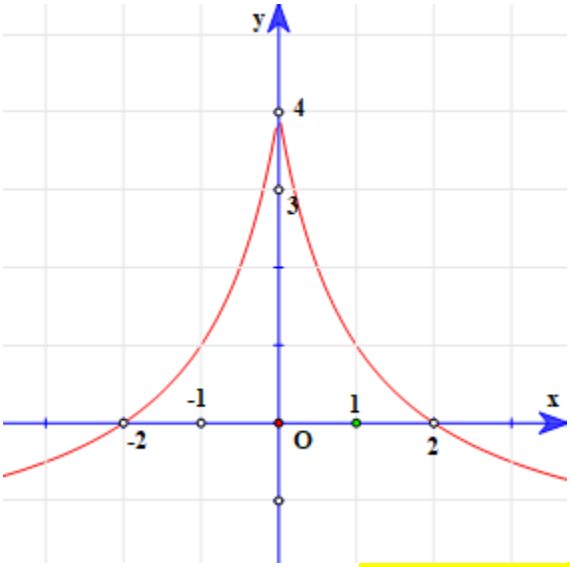
+) Đáp án A: $y\left(0\right)=-f\left(1\right)-1=2-1=1\Rightarrow$ loại.

+) Đáp án B: $y\left(0\right)=-f\left(1\right)+1=2+1=3\Rightarrow$ loại.

+) Đáp án C: $y\left(0\right)=f\left(1\right)-1=-2-1=-3\Rightarrow$ loại.

+) Đáp án D: $y\left(0\right)=f\left(1\right)+1=-2+1=-1\Rightarrow$ thỏa mãn.

Câu 8. Cho $f\left(x\right)=\dfrac{-\sqrt{\left(x-2\right)^2+2x-3}+5}{\sqrt{\left(x-2\right)^2+2x-3}+1}$. Đồ thị hình bên dưới là của hàm số có công thức



A. $y=-f\left(x+1\right)-1$. **B.** $y=f\left(x+1\right)+1$. **C.** $y=f\left(x+1\right)-1$. **D.** $y=-f\left(x-1\right)+1$.

Lời giải

Chọn C

Ta thử với từng đáp án:

+) Đáp án A: $y\left(-2\right)=-f\left(-1\right)-1=-1-1=-2\Rightarrow$ loại.

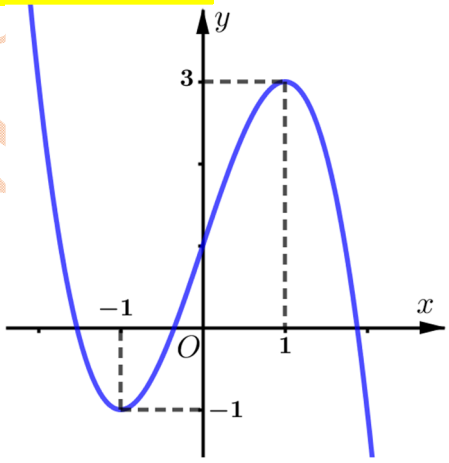
+) Đáp án B: $y\left(-2\right)=f\left(-1\right)+1=1+1=2\Rightarrow$ loại.

+) Đáp án C: $y\left(-2\right)=f\left(-1\right)-1=1-1=0\Rightarrow$ thỏa mãn.

+) Đáp án D: $y\left(-2\right)=-f\left(-3\right)+1=-\frac{1}{5}+1=\frac{4}{5}\Rightarrow$ loại.

Câu 9. (Chuyên Vinh Lần 3) Cho $f\left(x\right)=\left(x-1\right)^3-3x+3$. Đồ thị hình bên là của hàm số có công thức

A. $y=-f\left(x+1\right)-1$. **B.** $y=-f\left(x+1\right)+1$. **C.** $y=-f\left(x-1\right)-1$. **D.** $y=-f\left(x-1\right)+1$.



Lời giải

Chọn B

Cách 1: Ta có $f\left(x\right)=\left(x-1\right)^3-3\left(x-1\right)$

Thử điểm đối với từng đáp án

Đáp án A: $y=-f\left(x+1\right)-1\Rightarrow y\left(1\right)=-f\left(2\right)-1=1\Rightarrow$ Loại

Đáp án B: $y=-f\left(x+1\right)+1\Rightarrow y\left(1\right)=-f\left(2\right)+1=3\Rightarrow$ thoả mãn.

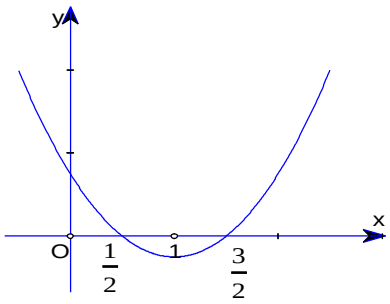
Đáp án C: $y=-f\left(x-1\right)-1\Rightarrow y\left(1\right)=-f\left(0\right)-1=-3\Rightarrow$ Loại

Đáp án D: $y=-f\left(x-1\right)+1\Rightarrow y\left(1\right)=-f\left(0\right)+1=-1\Rightarrow$ Loại

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Cách 2: Từ đồ thị suy ra hàm số ứng với đồ thị trên là $y=-x^3+3x+1$.
Ta làm tường minh các hàm số cho trong các đáp án và so sánh
Đáp án A: $y=-f(x+1)-1=-x^3+3x-1 \Rightarrow$ Loại
Đáp án B: $y=-f(x+1)+1=-x^3+3x+1 \Rightarrow$ Nhận.

Câu 10. (Thuan-Thanh-Bac-Ninh) Cho hàm số bậc ba $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$. Biết đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Giá trị của $\frac{c}{b}$ là



A. $-\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{3}{4}$.

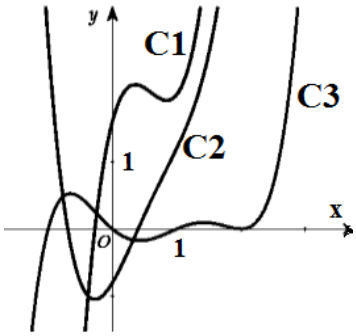
Lời giải

Chọn D
Tập xác định $D=\mathbb{R}$.
Đạo hàm cấp 1 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$
Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Ta có $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3a}{4}+b+c$ và $f'\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{27a}{4}+3b+c$
Dựa vào bảng biến thiên ta có $\begin{cases}3a+4b+4c=0\\27a+12b+4c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}27a+36b+36c=0\\27a+12b+4c=0\end{cases}$
$\Rightarrow 24b+32c=0\Rightarrow\frac{c}{b}=-\frac{3}{4}$.
Vậy $\frac{c}{b}=-\frac{3}{4}$.

Câu 11. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?



A. $(C_3);(C_2);(C_1)$. **B.** $(C_2);(C_1);(C_3)$. **C.** $(C_2);(C_3);(C_1)$. **D.** $(C_1);(C_2);(C_3)$.

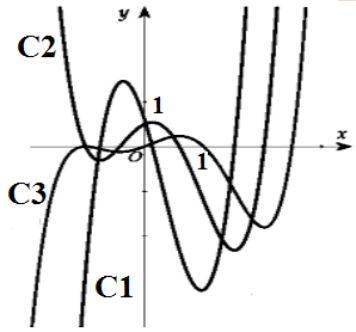
Lời giải

Chọn A

Từ hình vẽ ta thấy: đồ thị (C_2) cắt trục Ox tại 2 điểm là 2 điểm cực trị của của đồ thị hàm số (C_3)

Đồ thị (C_1) cắt trục Ox tại 1 điểm là điểm cực trị của của đồ thị hàm số (C_2).

Câu 12. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

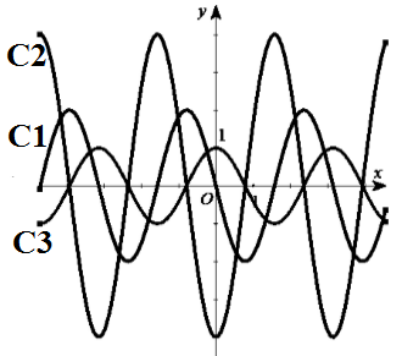


A. $(C_3);(C_2);(C_1)$. **B.** $(C_2);(C_1);(C_3)$. **C.** $(C_2);(C_3);(C_1)$. **D.** $(C_1);(C_2);(C_3)$.

Lời giải

Chọn A

Câu 13. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?



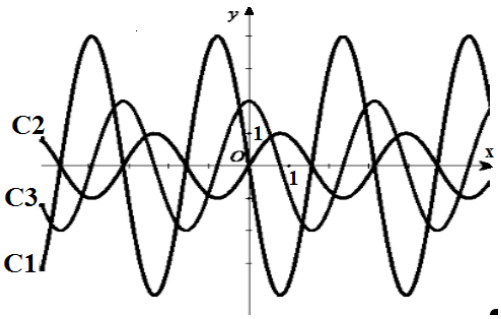
A. $(C_1);(C_2);(C_3)$. **B.** $(C_2);(C_1);(C_3)$. **C.** $(C_3);(C_2);(C_1)$. **D.** $(C_3);(C_1);(C_2)$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào phương pháp 1 có hai khả năng : $(C_3);(C_1);(C_2)$ hoặc $(C_2);(C_1);(C_3)$. Quan sát đồ thị ta thấy ứng với các khoảng mà đồ thị (C_1) nằm trên trục hoành thì đồ thị (C_3) "đi lên" và ngược lại; còn ứng với các khoảng mà đồ thị (C_2) nằm trên trục hoành thì đồ thị (C_1) "đi lên" và ngược lại.

Câu 14. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

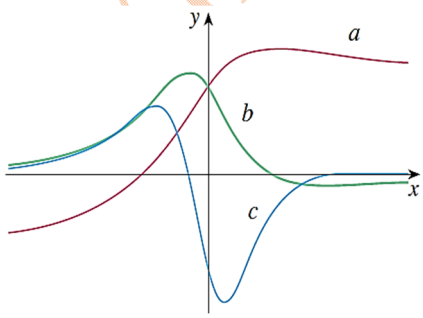


A. $(C_1);(C_2);(C_3)$. **B.** $(C_1);(C_3);(C_2)$. **C.** $(C_3);(C_2);(C_1)$. **D.** $(C_2);(C_3);(C_1)$.

Lời giải

Chọn A Dựa vào phương pháp 1 có hai khả năng : $(C_1);(C_3);(C_2)$ hoặc $(C_2);(C_3);(C_1)$. Quan sát đồ thị ta thấy ứng với các khoảng mà đồ thị (C_3) nằm trên trục hoành thì đồ thị (C_2) "đi lên" và ngược lại; còn ứng với các khoảng mà đồ thị (C_1) nằm trên trục hoành thì đồ thị (C_3) "đi lên" và ngược lại.

Câu 15. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

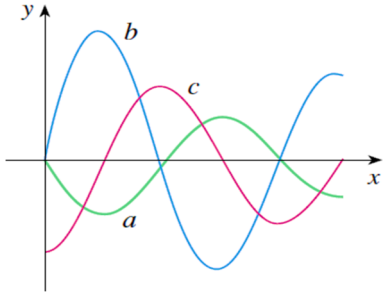


A. $a,b,c.$ **B.** $b,a,c.$ **C.** $a,c,b.$ **D.** $b,c,a.$

Lời giải

Chọn A

Câu 16. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

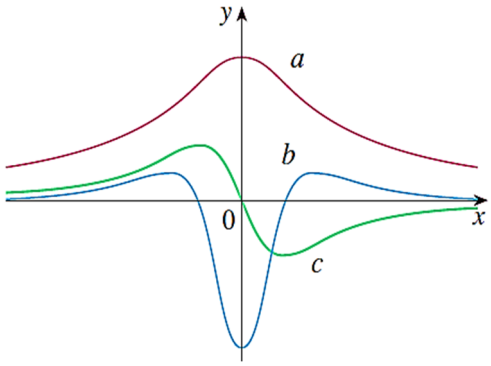


A. $a,b,c.$ **B.** $b,a,c.$ **C.** $a,c,b.$ **D.** $b,c,a.$

Lời giải

Chọn C

Câu 17. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

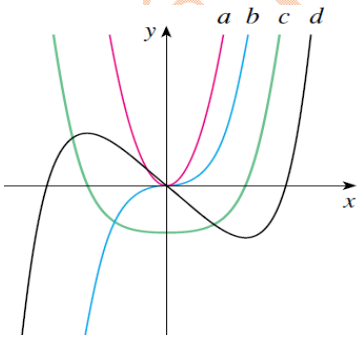


A. $a,b,c.$ **B.** $b,a,c.$ **C.** $a,c,b.$ **D.** $b,c,a.$

Lời giải

Chọn C

Câu 18. Cho đồ thị của bốn hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$, $y=f'''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ và $y=f'''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

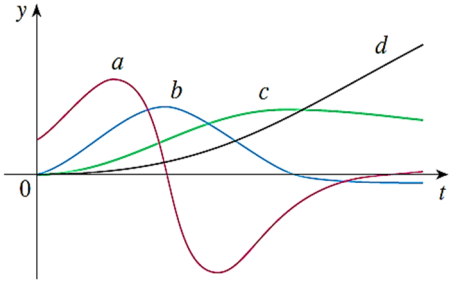


A. $c,d,b,a.$ **B.** $d,c,b,a.$ **C.** $d,c,a,b.$ **D.** $d,b,c,a.$

Lời giải

Chọn B

Câu 19. Cho đồ thị của bốn hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$, $y=f'''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$, $y=f'''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?



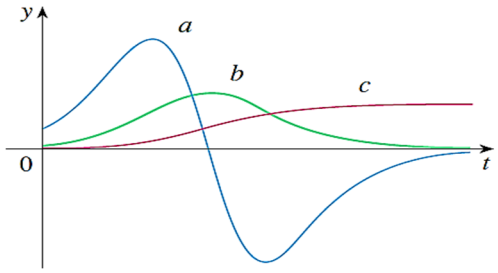
A. $c,d,b,a.$ **B.** $d,c,a,b.$ **C.** $d,c,b,a.$ **D.** $d,b,c,a.$

Lời giải

Chọn C

Câu 20. Một vật chuyển động có đồ thị của hàm quãng đường, hàm vật tốc và hàm gia tốc theo thời gian

t được mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số trên theo thứ tự là các đường cong nào?

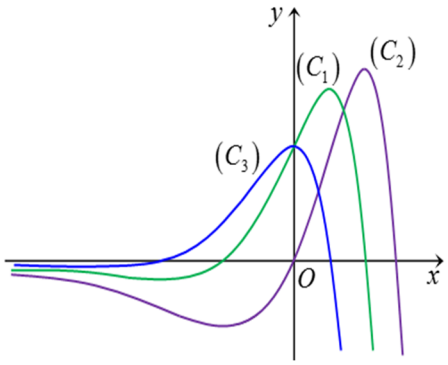


A. $b,c,a.$ **B.** $c,a,b.$ **C.** $a,c,b.$ **D.** $c,b,a.$

Lời giải

Chọn D

Câu 21. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

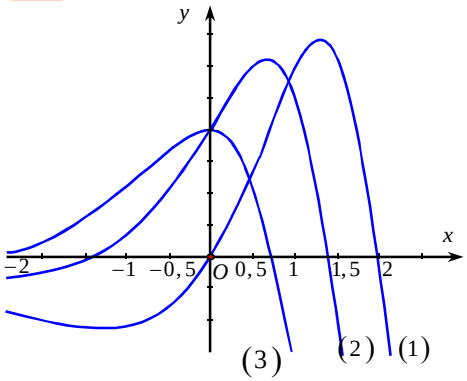


A. $(C_3);(C_2);(C_1)$. **B.** $(C_2);(C_1);(C_3)$. **C.** $(C_2);(C_3);(C_1)$. **D.** $(C_1);(C_3);(C_2)$.

Lời giải

Chọn B Từ hình vẽ ta thấy: đồ thị (C_1) cắt trục Ox tại 2 điểm là 2 điểm cực trị của của đồ thị hàm số (C_2); đồ thị (C_3) cắt trục Ox tại 2 điểm là 2 điểm cực trị của của đồ thị hàm số (C_1).

Câu 22. Cho 3 hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)=f'(x)$, $y=h(x)=g'(x)$ có đồ thị là 3 đường cong trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?



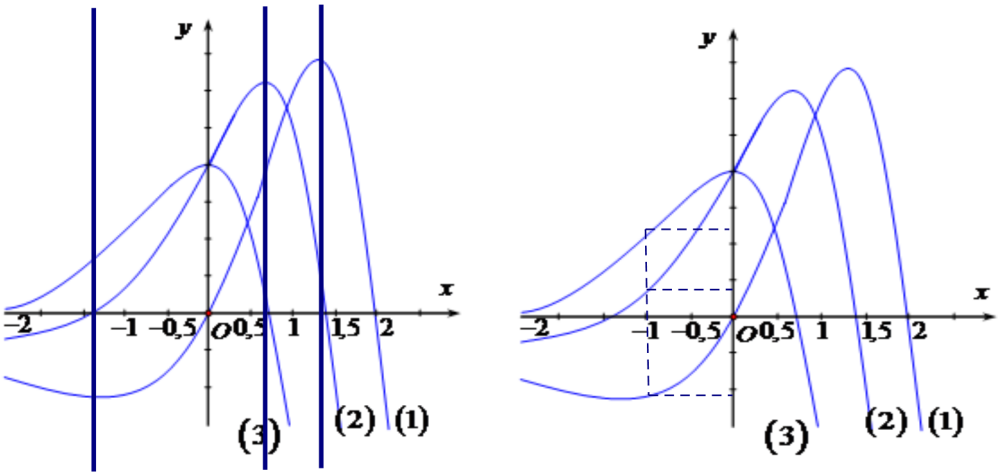
A. $g(-1)>h(-1)>f(-1)$. **B.** $h(-1)>g(-1)>f(-1)$.

C. $h(-1)>f(-1)>g(-1)$. **D.** $f(-1)>g(-1)>h(-1)$.

Lời giải

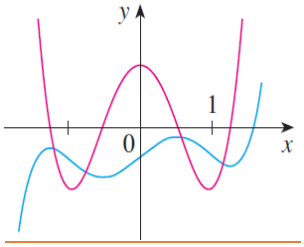
Chọn B Kết hợp 2 phương pháp ta tìm được.

Hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)=f'(x)$, $y=h(x)=g'(x)$ có đồ thị là 3 đường theo thứ tự là $(1);(2);(3)$.



Từ đồ thị ta thấy: $h(-1)>g(-1)>f(-1)$.

Câu 23. Cho đồ thị của hàm số f và f' như hình bên dưới. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

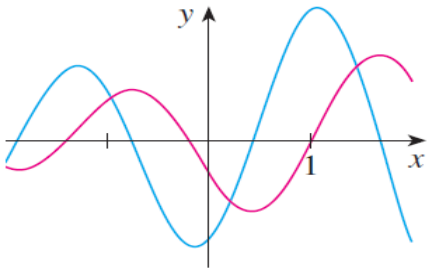


A. $f'(-1)<f''(1)$. **B.** $f'(-1)>f''(1)$. **C.** $f'(-1)=f''(1)$. **D.** $f''(0)\neq f''(1)$.

Lời giải

Chọn A

Câu 24. Cho đồ thị của hàm số f và f' như hình bên dưới. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

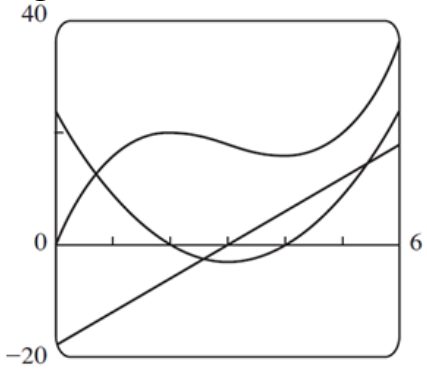


A. $f'(-1)<f''(1)$. **B.** $f'(-1)>f''(1)$. **C.** $f'(-1)=f''(1)$. **D.** $f'(-1)=2f''(1)$.

Lời giải

Chọn B

Câu 25. Cho 3 hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)=f'(x)$, $y=h(x)=g'(x)$ có đồ thị là 3 đường cong trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

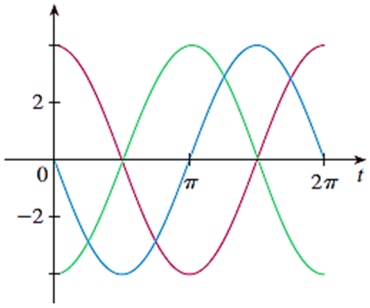


A. $g(1)>h(1)>f(1)$. **B.** $h(1)>g(1)>f(1)$. **C.** $h(1)>f(1)>g(1)$. **D.** $f(1)>g(1)>h(1)$.

Lời giải

Chọn D

Câu 26. Một vật chuyển động có đồ thị của hàm quãng đường $s(t)$, hàm vật tốc $v(t)$ và hàm gia tốc $a(t)$ theo thời gian t được mô tả ở hình dưới đây. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?



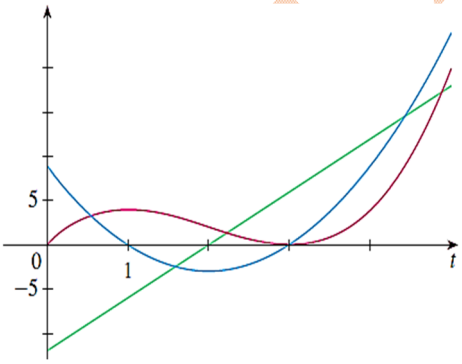
A. $s(\pi)<v(\pi)<a(\pi)$. **B.** $a(\pi)<v(\pi)<s(\pi)$.

C. $s(\pi)<a(\pi)<v(\pi)$. **D.** $v(\pi)<a(\pi)<s(\pi)$.

Lời giải

Chọn A

Câu 27. Một vật chuyển động có đồ thị của hàm quãng đường $s(t)$, hàm vật tốc $v(t)$ và hàm gia tốc $a(t)$ theo thời gian t được mô tả ở hình dưới đây. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?



A. $s(4)<v(4)<a(4)$. **B.** $a(4)<v(4)<s(4)$. **C.** $s(4)<a(4)<v(4)$. **D.** $v(4)<a(4)<s(4)$.

Lời giải

Chọn A

DANG 2. BIỆN LUẬN SỐ GIAO ĐIỂM DỰA VÀO ĐỒ THỊ, BẢNG BIẾN THIÊN BẰNG BẢNG BIẾN THIÊN

Câu 1. (Phan Đình Tùng Hà Tĩnh) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

Khi đó phương trình $f(x)+1=m$ có ba nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi

A. $1<m<2$. **B.** $1\le m\le 2$. **C.** $0\le m\le 1$. **D.** $0<m<1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x)+1=m\Leftrightarrow f(x)=m-1\,(*)$.

Số nghiệm của phương trình $(*)$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=m-1$.

Dựa vào bảng biến thiên, đường thẳng $y=m-1$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 3 điểm phân biệt khi $0<m-1<1\Leftrightarrow 1<m<2$.

Câu 2. (Chuyên Sơn La Lần 3 năm 2018-2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây:

x	$-\infty$		-1		x_1		x_2		x_3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	1	↘	-1	↗	2	↘	0	↘	$-\infty$

Để phương trình $3f(2x-1)=m-2$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $[0;1]$ thì giá trị của tham số m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-3)$ **B.** $(1;6)$ **C.** $(6;+\infty)$ **D.** $(-3;1)$

Lời giải

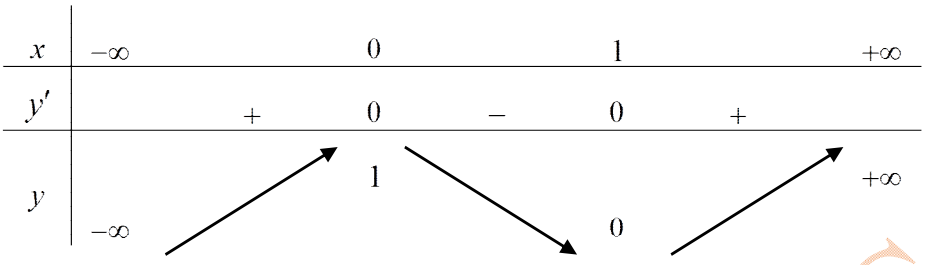
Chọn B

Đặt $t=2x-1$. Ta thấy t là hàm đồng biến theo x và $x\in[0;1]\Leftrightarrow t\in[-1;1]$.

Do đó phương trình $3f(2x-1)=m-2$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $[0;1]\Leftrightarrow f(t)=\dfrac{m-2}{3}$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $[-1;1]$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $\frac{m-2}{3}=1\Leftrightarrow m=5.$

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như sau:



Khi đó $|f(x)|=m$ có bốn nghiệm phân biệt $x_1<x_2<x_3<\frac{1}{2}<x_4$ khi và chỉ khi

A. $\frac{1}{2}<m<1.$ **B.** $\frac{1}{2}\le m<1.$ **C.** $0<m<1.$ **D.** $0<m\le 1.$

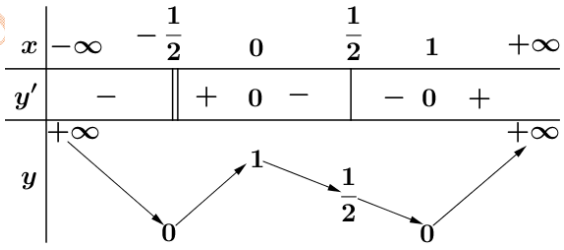
Lời giải

Chọn A

Ta có $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=0 \\ f'(0)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=2 \\ b=-3 \\ c=0 \\ d=1 \end{cases}$, suy ra $y=f(x)=2x^3-3x^2+1.$

NX: $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

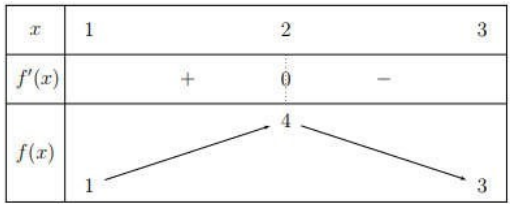
Bảng biến thiên của hàm số $y=|f(x)|$ như sau:



Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $|f(x)|=m$ có bốn nghiệm phân biệt $x_1<x_2<x_3<\frac{1}{2}<x_4$ khi và chỉ khi $\frac{1}{2}<m<1.$

Câu 4. (KINH MÔN HẢI DƯƠNG 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[1;3]$ và có bảng biến thiên như sau

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(x+1\right)=\dfrac{m}{x^2-4x+5}$ có nghiệm trên khoảng $\left(1;2\right)$.

A. 10. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Vì $x^2-4x+5=\left(x-2\right)^2+1>0\ \ \forall x$ nên $f\left(x+1\right)=\dfrac{m}{x^2-4x+5}\Leftrightarrow\left(x^2-4x+5\right)f\left(x+1\right)=m$.

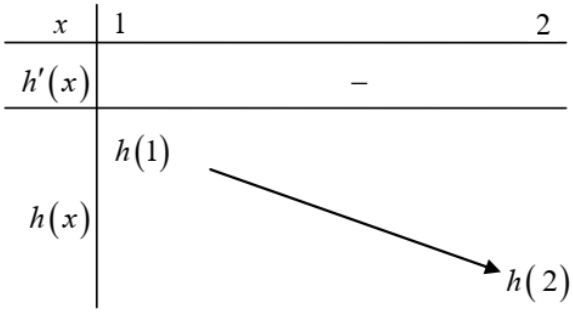
Đặt $h\left(x\right)=\left(x^2-4x+5\right)f\left(x+1\right)$, với $x\in\left(1;2\right)$.

Ta có $h'\left(x\right)=\left(x^2-4x+5\right)f'\left(x+1\right)+\left(2x-4\right)f\left(x+1\right)$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$ ta có $\forall x\in\left(1;2\right)\Rightarrow x+1\in\left(2;3\right)\Rightarrow f'\left(x+1\right)\le 0$

và $2x-4<0,\forall x\in\left(1;2\right)$; $f\left(x+1\right)\ge 3>0, x+1\in\left(2;3\right)$. Do đó $h'\left(x\right)<0,\forall x\in\left(1;2\right)$.

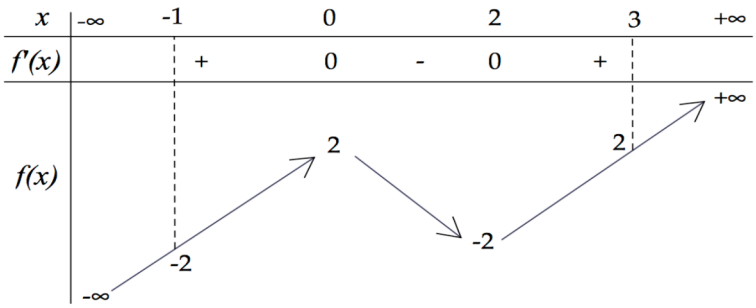
Bảng biến thiên của hàm số $y=h\left(x\right)$ trên khoảng $\left(1;2\right)$.



Khi đó phương trình $h\left(x\right)=m$ có nghiệm $x\in\left(1;2\right)$ khi và chỉ khi $h\left(2\right)<m<h\left(1\right)$

$\Leftrightarrow 1.f\left(3\right)<m<2f\left(2\right)\Leftrightarrow 3<m<8$. Do đó có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5. (Thuận Thành 2 Bắc Ninh) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên:



Có bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình $f\left(2\sin x+1\right)=f\left(m\right)$ có nghiệm thực?

A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\forall x \in \mathbb{R}: -1 \le 2\sin x + 1 \le 3$.

Căn cứ vào đồ thị ta có $-2 \le f(x) \le 2\ \forall x \in [-1;3] \Rightarrow -2 \le f(2\sin x + 1) \le 2\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Từ đó suy ra phương trình $f(2\sin x + 1) = f(m)$ có nghiệm thực khi và chỉ khi

$-2 \le f(m) \le 2 \Leftrightarrow -1 \le m \le 3$, mà m nguyên dương nên $m \in \{1;2;3\}$.

Vậy có 3 số nguyên dương m thỏa mãn đề bài.

Câu 6. (ĐH Vinh Lần 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như hình dưới

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	2	↗	3	↘	2

Tìm m để bất phương trình $m + 2\sin x \le f(x)$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0;+\infty)$.

A. $m \ge f(0)$. **B.** $m \le f(1) - 2\sin 1$. **C.** $m \le f(0)$. **D.** $m \ge f(1) - 2\sin 1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $m + 2\sin x \le f(x) \Leftrightarrow m \le f(x) - 2\sin x$.

Đặt $g(x) = f(x) - 2\sin x$.

Ta có $g'(x) = f'(x) - 2\cos x$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2\cos x$.

Mà $f'(x) \ge 2, \forall x \in (0;+\infty)$ và $2\cos x \le 2, \forall x \in (0;+\infty)$ nên $g'(x) \ge 0, \forall x \in (0;+\infty)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 2 \\ 2\cos x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Từ đó ta có bảng biến thiên của $g(x)$:

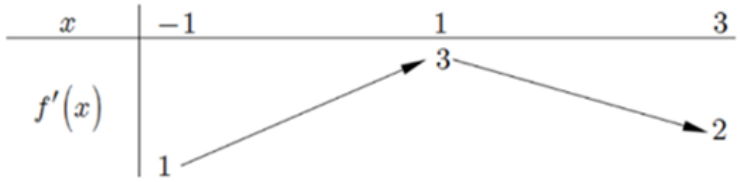
x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	
$g(x)$		↗	

Bất phương trình $m \le 2f(x+2) + (x+1)(x+3)$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-3;+\infty)$

$\Leftrightarrow m \le g(0) \Leftrightarrow m \le f(0)$.

Câu 7. (ĐH Vinh Lần 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như hình dưới

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Tìm m để bất phương trình $m+x^2 \le f(x)+\frac{1}{3}x^3$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0;3)$.

A. $m < f(0)$. **B.** $m \le f(0)$. **C.** $m \le f(3)$. **D.** $m < f(1)-\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $m+x^2 \le f(x)+\frac{1}{3}x^3 \Leftrightarrow m \le f(x)+\frac{1}{3}x^3-x^2$.

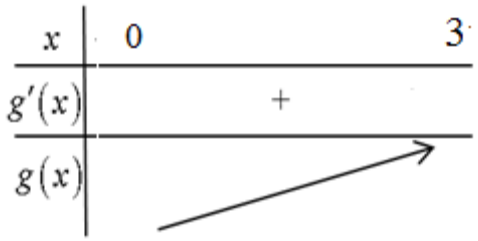
Đặt $g(x)=f(x)+\frac{1}{3}x^3-x^2$.

Ta có $g'(x)=f'(x)+x^2-2x=f'(x)-(-x^2+2x)$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-x^2+2x$.

Mà $f'(x)>1, \forall x \in (0;3)$ và $-x^2+2x=1-(x-1)^2 \le 1, \forall x \in (0;3)$ nên $g'(x)>0, \forall x \in (0;3)$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của $g(x)$:

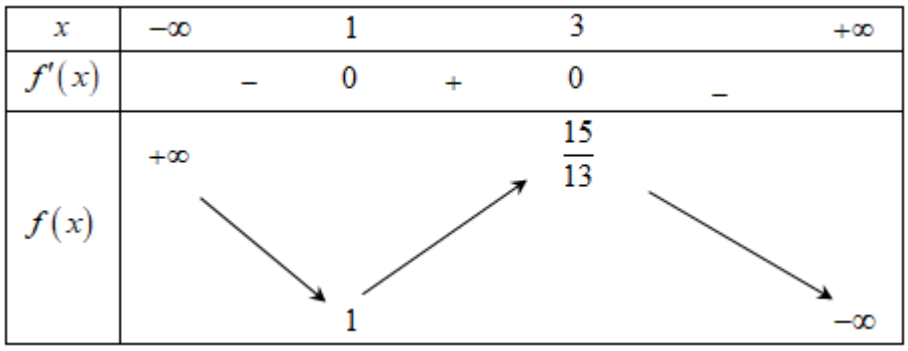


Bất phương trình $m \le f(x)+\frac{1}{3}x^3-x^2$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0;3)$

$\Leftrightarrow m \le g(0) \Leftrightarrow m \le f(0)$.

NHẬN XÉT: Bài toán xây dựng dựa trên ý tưởng mối quan hệ giữa bảng biến thiên của $f'(x)$ hoặc đồ thị của $f'(x)$ so sánh với $h'(x)$ để suy ra sự biến thiên của hàm số có dạng $g(x)=f(x)-h(x)$.

Câu 8. (SỞ PHÚ THỌ LẦN 2 NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(0)<\frac{7}{6}$ và có bảng biến thiên như sau:



Giá trị lớn nhất của tham số m để phương trình $e^{2f^3(x)-\frac{13}{2}f^2(x)+7f(x)-\frac{1}{2}}=m$ có nghiệm trên đoạn $[0;2]$ là

A. e^2. **B.** $e^{\frac{15}{13}}$. **C.** e^4. **D.** e^3.

Lời giải

Chọn A

Phương trình

$e^{2f^3(x)-\frac{13}{2}f^2(x)+7f(x)-\frac{1}{2}}=m \Leftrightarrow 2f^3(x)-\frac{13}{2}f^2(x)+7f(x)-\frac{1}{2}=\ln m,\ m>0.$

Đặt $t=f(x)$

Với $x\in[0;2]$ và từ bảng biến thiên $\Rightarrow t\in\left[1;\max\left\{f(0),f(2)\right\}\right]$.

Vì $f(0)<\frac{7}{6},\ f(2)<f(3)=\frac{15}{13}<\frac{7}{6}$ nên $\max\left\{f(0),f(2)\right\}=M<\frac{7}{6}$.

Do đó $t\in[1;M]\subset\left[1;\frac{7}{6}\right)$.

Bài toán trở thành: Tìm giá trị lớn nhất của m để phương trình $\ln m=2t^3-\frac{13}{2}t^2+7t-\frac{1}{2}$ $(*)$ có nghiệm $t\in[1;M]$.

Xét hàm số $g(t)=2t^3-\frac{13}{2}t^2+7t-\frac{1}{2},\ t\in[1;M]$.

$g'(t)=6t^2-13t+7$

$g'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=\frac{7}{6}\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

t	1		M	$\frac{7}{6}$	$+\infty$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$		$g(1)$	$g(M)$	$g\left(\frac{7}{6}\right)$	

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $(*)$ có nghiệm $t\in[1;M]\Leftrightarrow g(M)\le\ln m\le g(1)$

$\Rightarrow \max \ln m = \max\limits_{[1;M]} g(t) = g(1) = 2 \Rightarrow \max m = e^2$.

Vậy giá trị lớn nhất của m để phương trình cho có nghiệm $x \in [0;2]$ là e^2.

Câu 9. (Đặng Thành Nam Đề 17) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	0		1		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
y'		$-$		$+$	0	$-$		$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $f\left(2^{\sin x}\right) = 3$ có bao nhiêu nghiệm trên đoạn $\left[0;\dfrac{5\pi}{6}\right]$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Với $x \in \left[0;\dfrac{5\pi}{6}\right] \Rightarrow \sin x \in [0;1] \Rightarrow t = 2^{\sin x} \in [1;2]$.

Phương trình trở thành $f(t) = 3$. Kẻ đường thẳng $y = 3$ cắt đồ thị hàm số $f(x)$ tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x = a < 1; x = b \in \left(1;\sqrt{2}\right); x = c \in \left(\sqrt{2};2\right); x = d \in (2;+\infty)$.

Vậy phương trình $f(t) = 3$ có bốn nghiệm là:

$t = a < 1; t = b \in \left(1;\sqrt{2}\right); t = c \in \left(\sqrt{2};2\right); t = d \in (2;+\infty)$.

Đối chiếu điều kiện $t \in [1;2]$ nhận $t = b$; $t = c$.

$2^{\sin x} = b \in \left(1;\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow \sin x = \log_2 b \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Phương trình này có một nghiệm trên đoạn $\left[0;\dfrac{5\pi}{6}\right]$.

$2^{\sin x} = c \in \left(\sqrt{2};2\right) \Leftrightarrow \sin x = \log_2 c \in \left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Phương trình này có hai nghiệm trên đoạn $\left[0;\dfrac{5\pi}{6}\right]$.

Vậy phương trình đã cho có tất cả 3 nghiệm trên đoạn $\left[0;\dfrac{5\pi}{6}\right]$.

BẰNG ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Bản chất bài toán: Bài toán đã cho là giải phương trình hay bất phương trình bằng phương pháp tương giao giữa hai đồ thị $y = g(x)$ và $y = h(m)$

- Đồ thị hàm số $y=h(m)$ bản chất là một đường thẳng song song hoặc trùng với trục Ox và đi qua điểm có tung độ có giá trị là $h(m)$.

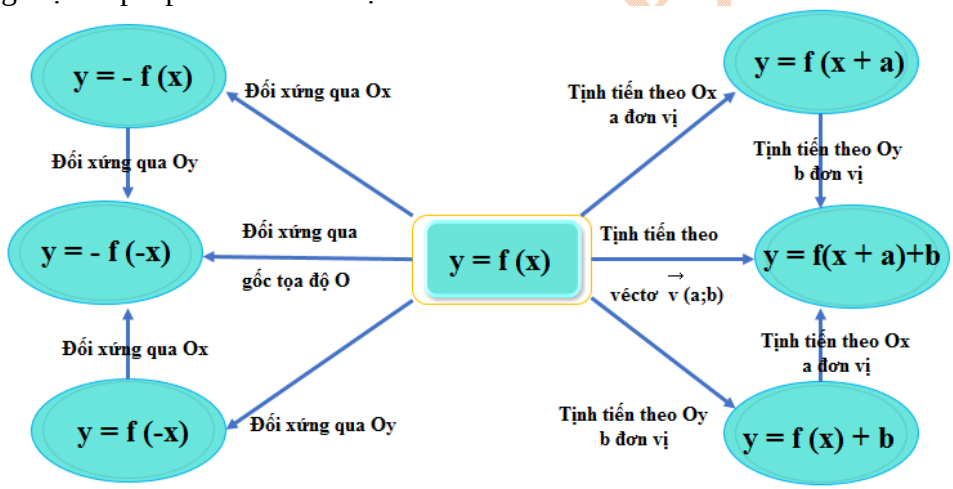
- Đồ thị hàm số $y=g(x)$ xác định được tính chất dựa vào các dữ kiện đã cho hàm số $y=f(x)$ ban đầu; hàm số $y=f(x)$ có thể cho bằng công thức, bằng đồ thị, bằng hàm đạo hàm của nó, đồ thị của đạo hàm.

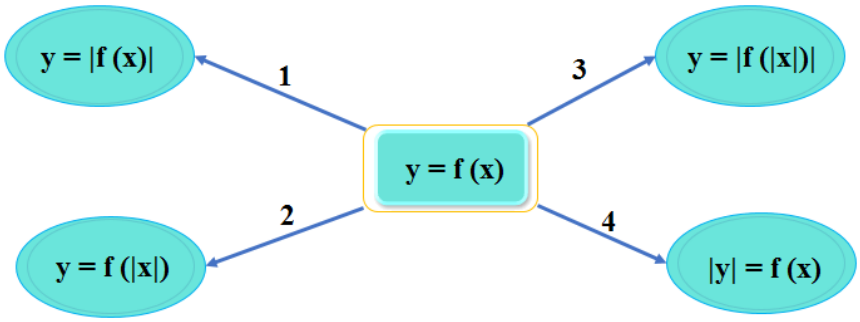
Vì đây là phần kiến thức tương đối rộng nên tôi xin chỉ khai thác ở một góc độ nào đó của bài toán.

Khó khăn đối với học sinh:

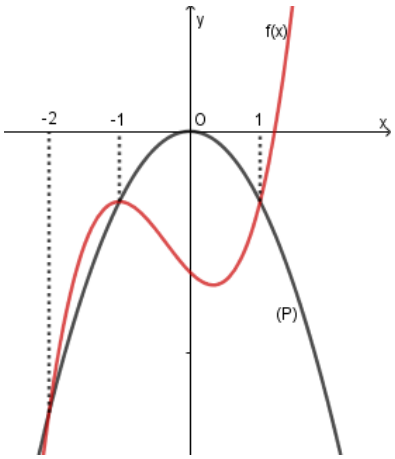
-Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $y=g(x)$.
-Trong trường hợp không thể dùng đồ thị hàm số thì học sinh khó khăn trong việc kiểm soát đặc điểm của hàm số $y=g(x)$ do hàm số $y=g(x)$ có chứa biểu thức hàm hợp phức tạp của hàm $y=f(x)$.
-Phần lớn học sinh chưa phân biệt được kiến thức: "Số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của đồ thị hai hàm số" và "Nghiệm của phương trình chính là hoành độ của giao điểm".
Giải pháp:

-Sử dụng một số phép biến đổi đồ thị cơ bản
-Sử dụng cách đặt ẩn phụ đưa về hàm số theo ẩn mới có chứa $y=f(t)$.
Kiểu 1: Sử dụng một số phép biến đổi đồ thị cơ bản.





Kiểu 2: Sử dụng cách đặt ẩn phụ đưa về hàm số theo ẩn mới có chứa $y=f(t)$.
Sau đây tôi xin đưa ra lớp bài toán sưu tầm theo mức độ để giúp học sinh có cách nhìn dễ dàng trong các bài thi trắc nghiệm:
Câu 10. (Thuận Thành 2 Bắc Ninh) Cho $(P): y=-x^2$ và đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx-2$ như hình vẽ.



Tính giá trị biểu thức $P=a-3b-5c$.

A. 3. **B.** -7. **C.** 9. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $ax^3+bx^2+cx-2=-x^2 \Leftrightarrow ax^3+(b+1)x^2+cx-2=0$

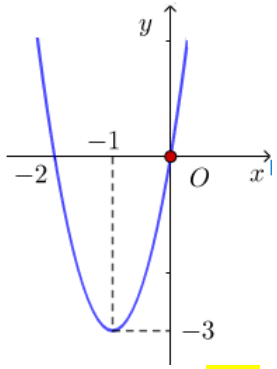
Vì hai đồ thị của hai hàm số cắt nhau tại các điểm có hoành độ $-2;-1;1$ nên ta có

$ax^3+(b+1)x^2+cx-2=a(x+2)(x+1)(x-1)$

$\Leftrightarrow ax^3+(b+1)x^2+cx-2=a(x^3+2x^2-x-2)$

Đồng nhất hệ số hai vế của phương trình, ta có $\begin{cases} b+1=2a \\ c=-a \\ 2=2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-1 \end{cases} \Rightarrow P=a-3b-5c=1-3+5=3$.

Câu 11. (Hàm Rồng) Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đạo hàm là hàm số $y=f'(x)$ với đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ âm. Khi đó đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là bao nhiêu?



A. 4. **B.** 1. **C.** -4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Nhìn đồ thị ta thấy $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$. Do đó, hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại $x=0$ và $x=-2$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ âm nên suy ra hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị bằng 0 tại điểm có hoành độ âm $\Rightarrow f(-2)=0$. (1)

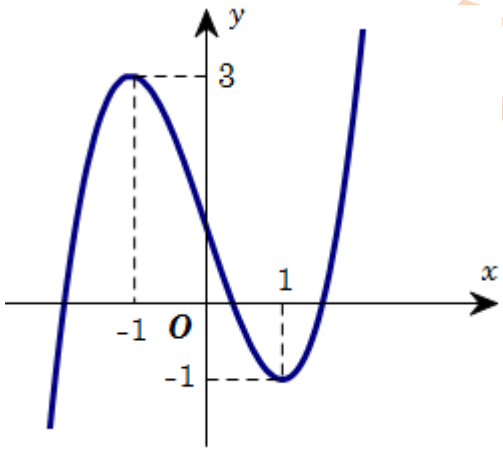
Mặt khác $f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ đi qua các điểm có tọa độ $(0;0)$, $(-2;0)$, $(-1;-3)$. (2)

Từ (1), (2) lập được hệ phương trình $\begin{cases} c=0 \\ 12a-4b+c=0 \\ 3a-2b+c=-3 \\ -8a+4b-2c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=0 \\ d=-4 \end{cases} \Rightarrow f(x)=x^3+3x^2-4$.

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ $y=f(0)=-4$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Khi đó, phương trình $f(|x-2|)=-\frac{1}{2}$ có bao nhiêu nghiệm?

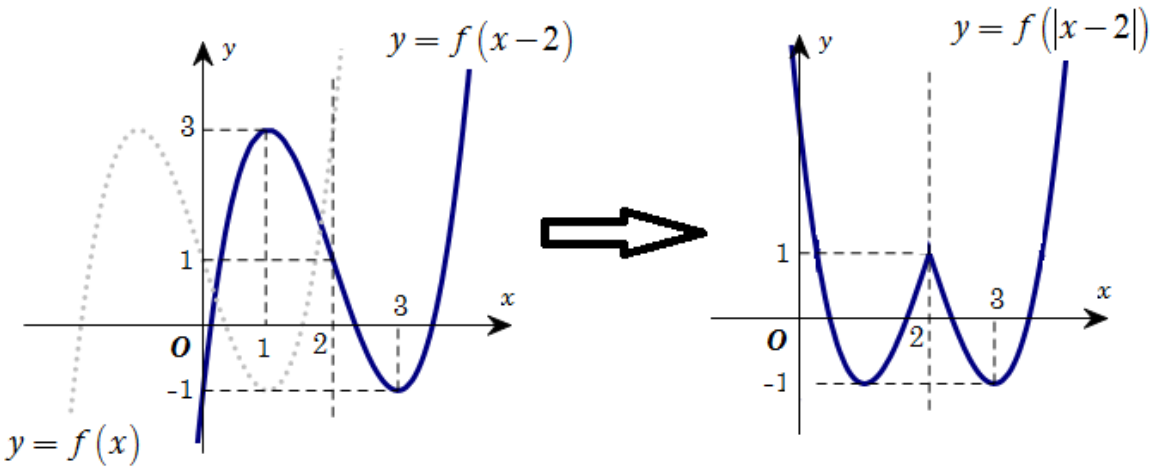
A. 2. **B.** 0. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Trước tiên tịnh tiến đồ thị sang phải 2 đơn vị để được đồ thị hàm số $y=f(x-2)$.

Tiếp theo giữ phần đồ thị phía bên phải đường thẳng $x=2$, xóa bỏ phần đồ thị phía bên trái đường thẳng $x=2$.

Cuối cùng lấy đối xứng phần đồ thị vừa giữ lại ở trên qua đường thẳng $x=2$. Ta được toàn bộ phần đồ thị của hàm số $y=f(|x-2|)$. (hình vẽ bên dưới)



Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy phương trình $f\left(\left|x-2\right|\right)=-\frac{1}{2}$ có 4 nghiệm phân biệt.

Chọn D

Câu 13. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c$ thoả điều kiện $\begin{cases} ab<0 \\ ac\left(b^2-4ac\right)>0 \end{cases}$. Số nghiệm lớn nhất có thể có của phương trình $\left|f\left(x\right)\right|=m,\ m\in\mathbb{R}$ là

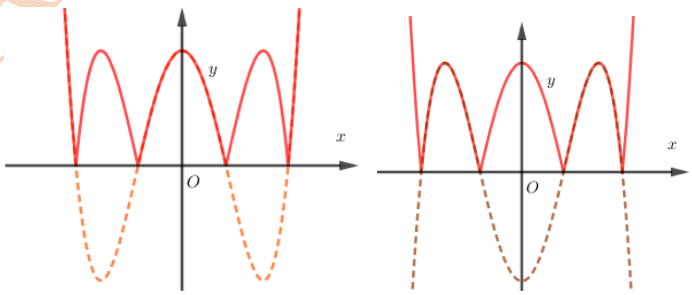
A. 4 **B.** 6. **C.** 8. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C

Do $ab<0$ nên hàm số đã cho có ba điểm cực trị và tính toán được ba điểm cực trị đó lần lượt là $A\left(0;c\right)$, $B\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right)$, $B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right)$ với $\Delta=b^2-4ac$.

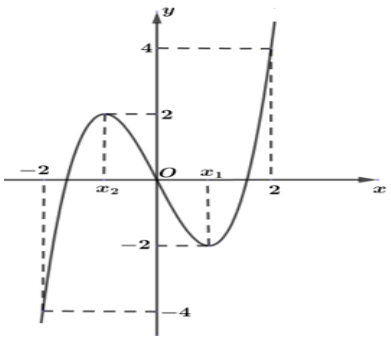
Lại có $ac\left(b^2-4ac\right)>0\Leftrightarrow c.\frac{b^2-4ac}{a}.a^2>0\Leftrightarrow -c.\frac{\Delta}{4a}<0$. Do đó đồ thị hàm số có hai điểm cực trị B,C nằm khác phía với A so với trục hoành. Suy ra dạng đồ thị của hàm số $\left|f\left(x\right)\right|$ lúc này là



Dựa vào các đồ thị trên ta thấy số nghiệm lớn nhất của phương trình $\left|f\left(x\right)\right|=m$ có thể có là 8

Câu 14. **(THPT-Yên-Mô-A-Ninh-Bình-2018-2019-Thi-tháng-4)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[-2;2\right]$ và có đồ thị là đường cong như trong hình vẽ.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Hỏi phương trình $\left|f\left(x\right)-1\right|=1$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên đoạn $\left[-2;2\right]$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\left|f\left(x\right)-1\right|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)-1=1\\f\left(x\right)-1=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=2\ (1)\\f\left(x\right)=0\ (2)\end{array}\right.$.

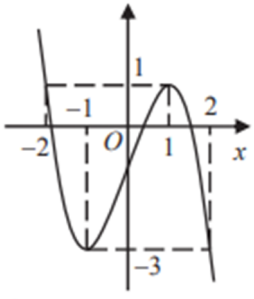
Dựa vào đồ thị hàm số đã cho ta thấy:

Phương trình $f\left(x\right)=2\left(1\right)$ có 2 nghiệm thuộc đoạn $\left[-2;2\right]$.

Phương trình $f\left(x\right)=0\left(2\right)$ có 3 nghiệm thuộc đoạn $\left[-2;2\right]$ không có nghiệm nào trùng với hai nghiệm của phương trình $\left(1\right)$.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm phân biệt thuộc $\left[-2;2\right]$.

Câu 15. (CổLoa Hà Nội) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hỏi phương trình $f\left(2-f\left(x\right)\right)=1$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta có: $f\left(2-f\left(x\right)\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-f\left(x\right)=-2\\2-f\left(x\right)=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=4\\f\left(x\right)=1\end{array}\right.$.

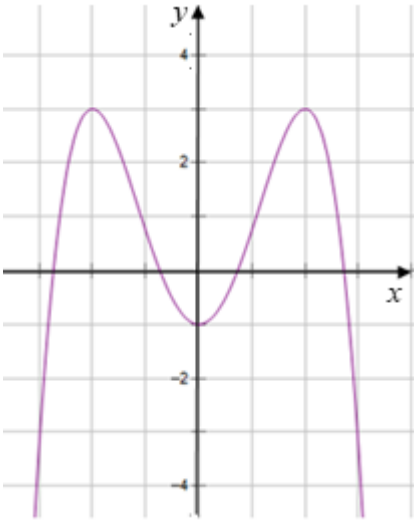
Mà $f\left(x\right)=4$ có nghiệm duy nhất nhỏ hơn -2.

Và $f\left(x\right)=1$ có 2 nghiệm phân biệt $x=-2;x=1$.

Vậy phương trình có 3 nghiệm thực phân biệt.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình sau:



Số nghiệm của phương trình $\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}=2$ là:

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

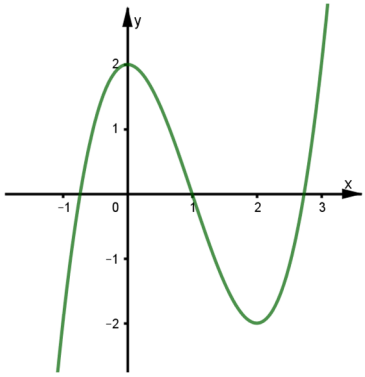
Chọn B

Ta có $\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}=2\Rightarrow 1-f(x)=2+2f(x)\Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{1}{3}$

Dựa vào đồ thị ta có đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt đường thẳng $y=-\dfrac{1}{3}$ tại bốn điểm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình v



Gọi m là số nghiệm của phương trình $f\left(f(x)\right)=1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

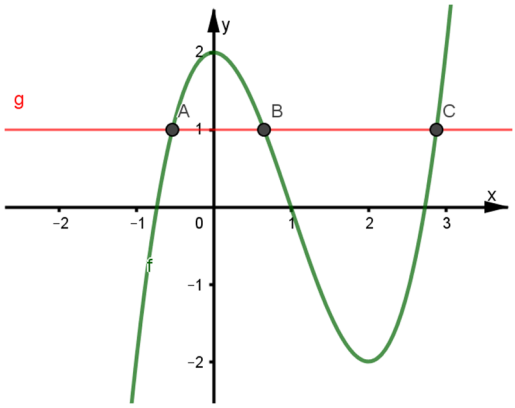
A. $m=7$. **B.** $m=5$. **C.** $m=9$. **D.** $m=6$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

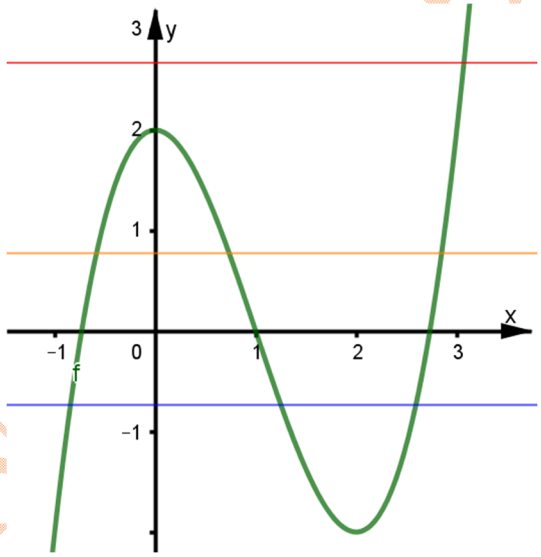
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Đặt $f(x)=u$ khi đó nghiệm của phương trình $f(f(x))=1$ chính là hoành độ giao điểm của đồ thị $f(u)$ với đường thẳng $y=1$.



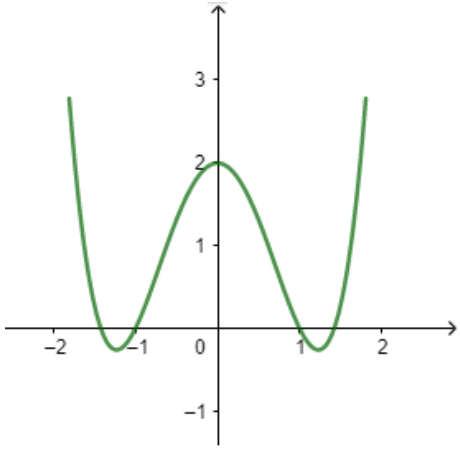
Dựa vào đồ thị ta có ba nghiệm $\left[\begin{array}{l} f(x)=u_1 \\ f(x)=u_2 \\ f(x)=u_3 \end{array}\right.$ với $u_1\in(-1;0)$, $u_2\in(0;1)$, $u_3\in\left(\frac{5}{2};3\right)$.

Tiếp tục xét số giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)$ với từng đường thẳng $y=u_1$, $y=u_2$, $y=u_3$.



Dựa vào đồ thị ta có được 7 giao điểm. Suy ra phương trình ban đầu $f(f(x))=1$ có 7 nghiệm.

Câu 18. (Trung-Tâm-Thanh-Tường-Nghệ-An-Lần-2) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như sau.



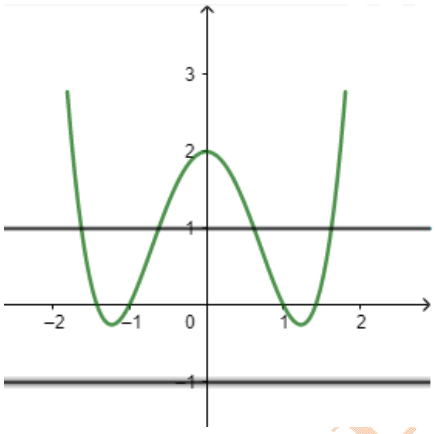
Số nghiệm thực của phương trình $f^2(x)-1=0$ là

A. 7. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

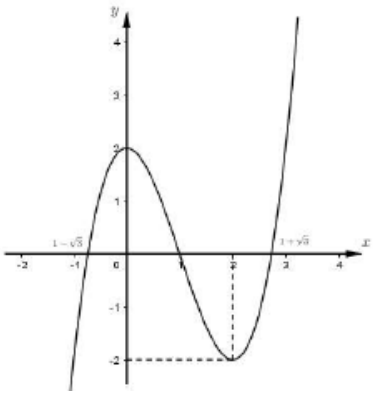
Ta có: $f^2(x)-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=1 \\ f(x)=-1 \end{array}\right.$



Dựa vào đồ thị, ta thấy phương trình $f(x)=1$ có 4 nghiệm thực và phương trình $f(x)=-1$ vô nghiệm.

Vậy phương trình $f^2(x)-1=0$ có 4 nghiệm thực.

Câu 43. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+2$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hỏi phương trình $\left(x^3-3x^2+2\right)^3-3\left(x^3-3x^2+2\right)^2+2=0$ có bao nhiêu nghiệm thực dương phân biệt?



A. 3 **B.** 5 **C.** 7 **D.** 1

Lời giải

Chọn C

Phương pháp:

Đặt $t=x^3-3x^2+2=f(x)$, dựa vào đồ thị hàm số đã cho tìm ra các nghiệm t_i.

Xét các phương trình $f(x)=t_i$, số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=t_i$ song song với trục hoành.

Cách giải:

Đặt $t=x^3-3x^2+2=f(x)$ khi đó phương trình trở thành $t^3-3t^2+2=0$ và hàm số $f(t)=t^3-3t^2+2$ có hình dáng y như trên. Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $f(t)=\left[\begin{array}{l} t=1-\sqrt{3} \\ t=1 \\ t=1+\sqrt{3} \end{array}\right.$

Với $t=1+\sqrt{3}\Rightarrow f(x)=1+\sqrt{3}\ (1)$. Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị hàm $y=f(x)$ và đường thẳng $y=1+\sqrt{3}$ song song với trục hoành.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy đường thẳng $y=1+\sqrt{3}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 1 điểm duy nhất nên phương trình (1) có 1 nghiệm duy nhất.

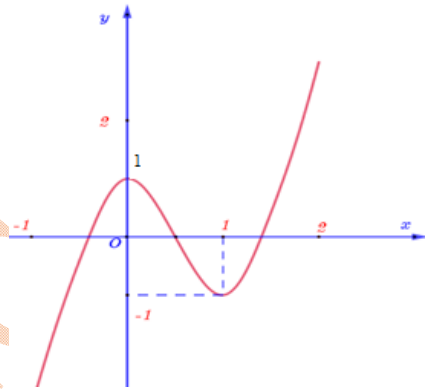
Với $t=1\Rightarrow f(t)=1\ (2)$. Lập luận tương tự như trên ta thấy phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt.

Với $t=1-\sqrt{3}\Rightarrow f(t)=1-\sqrt{3}\ (3)$. Phương trình 3 có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình ban đầu có 7 nghiệm phân biệt.

Chú ý và sai lầm: Sau khi đặt ẩn phụ và tìm ra được 3 nghiệm t, nhiều học sinh kết luận sai lầm phương trình có 3 nghiệm phân biệt và chọn đáp án **A.** Số nghiệm của phương trình là số nghiệm x chứ không phải số nghiệm t.

Câu 19. (Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019) Cho hàm số $y=4x^3-6x^2+1$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới đây.

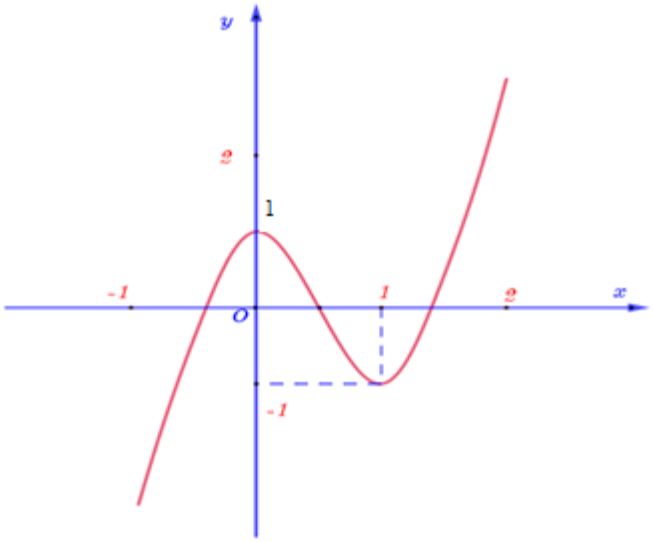


Khi đó phương trình $4\left(4x^3-6x^2+1\right)^3-6\left(4x^3-6x^2+1\right)^2+1=0$ có bao nhiêu nghiệm thực.

A. 9. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C



Từ đồ thị ta có

$4\left(4x^3-6x^2+1\right)^3-6\left(4x^3-6x^2+1\right)^2+1=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x^3-6x^2+1=a\in(-1;0)(1)\\4x^3-6x^2+1=b\in(0;1)(2)\\4x^3-6x^2+1=c\in(1;2)(3)\end{array}\right.$

Ta thấy số nghiệm của phương trình $4x^3-6x^2+1=m$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=4x^3-6x^2+1$ và đường thẳng $y=m$.

Từ đó ta có: (1) có 3 nghiệm phân biệt

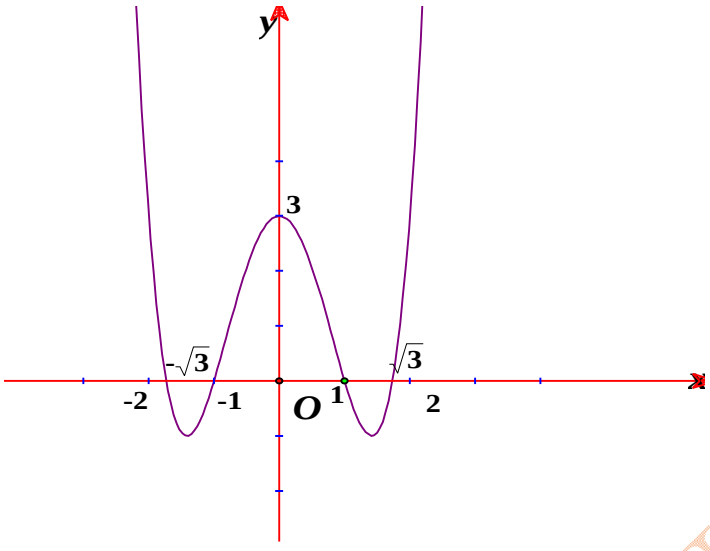
(2) có 3 nghiệm phân biệt

(3) có 1 nghiệm

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm thực.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)=x^4-4x^2+3$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hỏi phương trình $\left(x^4-4x^2+3\right)^4-4\left(x^4-4x^2+3\right)^2+3=0$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt ?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



A. 0. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=x^4-2x^2+3$. Khi đó ta có phương trình $t^4-4t^2+3=0$ (2).

Nghiệm của phương trình (2) là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành

Dựa vào đồ thị ta thấy: phương trình có 4 nghiệm

$$\begin{bmatrix} t=-\sqrt{3} \\ t=-1 \\ t=1 \\ t=\sqrt{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x^4-2x^2+3=-\sqrt{3} \\ x^4-2x^2+3=-1 \\ x^4-2x^2+3=1 \\ x^4-2x^2+3=\sqrt{3} \end{bmatrix}$$ (vô nghiệm).

Câu 21. (-Mai-Anh-Tuấn-Thanh-Hóa-lần-1-2018-2019) Cho hàm số $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x+1$. Khi đó phương trình $f(f(x))=0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 9. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x+1$ có

+) $y'=-x^2+4x-3$. Có $y'=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix} x=1 \\ x=3 \end{bmatrix}$.

+) Xét $y=1\Leftrightarrow\frac{-1}{3}x^3+2x^2-3x+1=1\Leftrightarrow-x^3+6x-9x=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix} x=0 \\ x=3 \end{bmatrix}$.

+) Xét $y=\frac{-1}{3}\Leftrightarrow\frac{-1}{3}x^3+2x^2-3x+1=\frac{-1}{3}\Leftrightarrow-x^3+6x-9x+4=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix} x=1 \\ x=4 \end{bmatrix}$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x+1$ như sau:

x	$-\infty$		0		1		3		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$			
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{-1}{3}$	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\in(0;1) \\ x=b\in(1;3) \\ x=c\in(3;4) \end{array}\right.$.

Khi đó $f\left(f(x)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=a\in(0;1) \\ f(x)=b\in(1;3) \\ f(x)=c\in(3;4) \end{array}\right.$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy

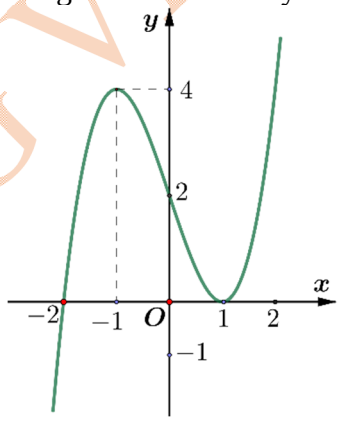
+) Phương trình $f(x)=a$ (1) có 3 nghiệm phân biệt.

+) Phương trình $f(x)=b$ (2) có 1 nghiệm khác nghiệm của phương trình (1).

+) Phương trình $f(x)=c$ có 1 nghiệm khác nghiệm của phương trình (1) và (2).

Vậy phương trình $f\left(f(x)\right)=0$ có 5 nghiệm phân biệt.

Câu 22. (THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây:



Đặt $g(x)=f\left(f(x)\right)$. Số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ là

A. 6. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=f'\left(f(x)\right).f'(x)$.

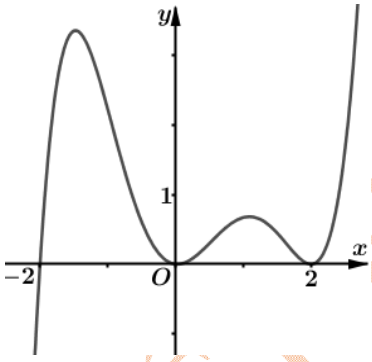
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(f(x))=0 \\ f'(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=-1 \\ f(x)=1 \\ x=-1 \\ x=1 \end{array}\right. .$$

Từ đồ thị ta có phương trình $f(x)=-1$ có 1 nghiệm; phương trình $f(x)=1$ có 3 nghiệm.

Vậy tổng số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ là $1+3+1+1=6$ nghiệm.

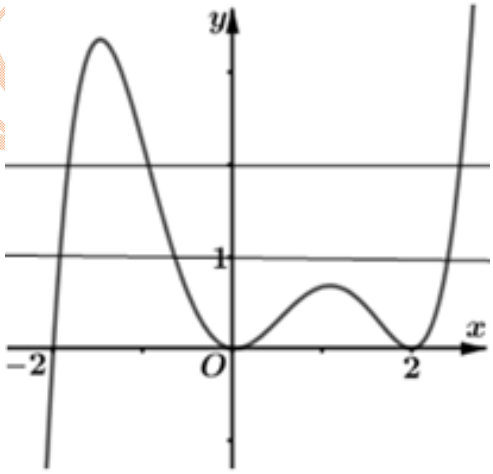
Câu 23. (Nguyễn Tất Thành Yên Bái) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trơn (không bị gãy khúc), hình vẽ bên. Gọi hàm $g(x)=f\left[f(x)\right]$. Hỏi phương trình $g'(x)=0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?



A. 10. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 14.

Lời giải

Chọn B



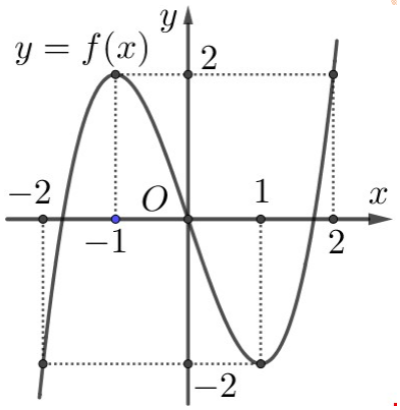
$$g(x)=f\left[f(x)\right] \Rightarrow g'(x)=f'(x).f'\left[f(x)\right].$$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x).f'\left[f(x)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'\left[f(x)\right]=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1\in(-2;-1) \\ x=0 \\ x=x_2\in(1;2) \\ x=2 \\ f(x)=x_1\in(-2;-1)\Leftrightarrow x=x_3<-2 \\ f(x)=0\Leftrightarrow x\in\{-2;0;2\} \\ f(x)=x_2\in(1;2)\Leftrightarrow x\in\{x_4;x_5;x_6\}, x_3<x_4<x_5<0<2<x_6 \\ f(x)=2\Leftrightarrow x\in\{x_7;x_8;x_9\}, x_4<x_7<x_8<x_5<x_6<x_9 \end{array}\right.$$

Kết luận phương trình $g'(x)=0$ có 12 nghiệm phân biệt.

Câu 24. (Đặng Thành Nam Đề 9) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(f(x)\right)=f(x)$ bằng



A. 7. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

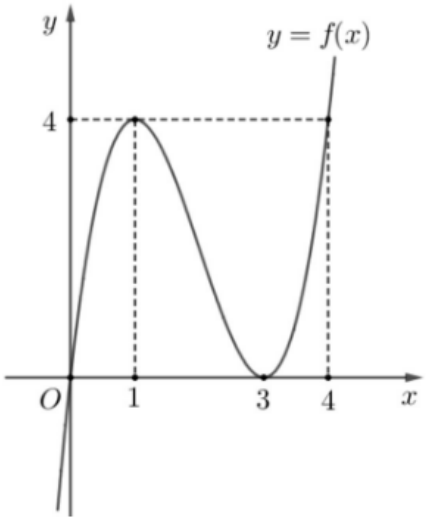
Đặt $t=f(x)$ phương trình trở thành: $f(t)=t\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=0 \\ t=2 \end{array}\right.$

Vì đồ thị $f(t)$ cắt đường thẳng $y=t$ tại ba điểm có hoành độ $t=-2;t=0;t=2$.

Vậy $\left[\begin{array}{l} f(x)=-2 \\ f(x)=0 \\ f(x)=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=1;x=-2 \\ x=0;x=a\in(-2;-1);x=b\in(1;2). \\ x=-1;x=2 \end{array}\right.$

Ta chọn đáp án **A.**

Câu 25. (Đặng Thành Nam Đề 5) Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\left(a,b,c,d\in\mathbb{R}\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

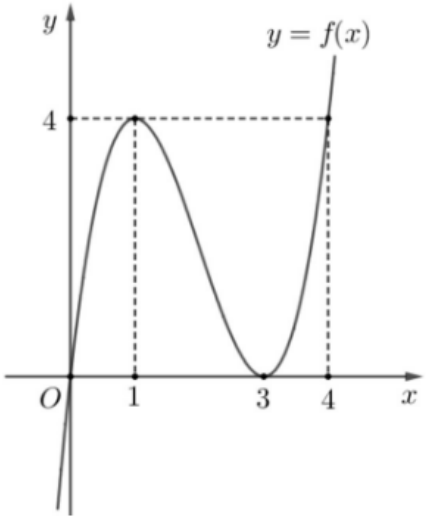


Phương trình $f\left(f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right)\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 12. **B.** 40. **C.** 41. **D.** 16.

Lời giải

Chọn C



Đặt $f_k(x)=f(...(f(x)));(k$ hàm $f;k=\overline{1;4})$

Ta có $f_4(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f_3(x)=0 \quad (1)\\ f_3(x)=3 \quad (2)\end{array}\right.$

Xét $(1): f_3(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f_2(x)=0 \quad (3)\\ f_2(x)=3 \quad (4)\end{array}\right.$

Xét $(3): f_2(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0 \quad (5)\\ f(x)=3 \quad (6)\end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị thấy ngay (5) có 2 nghiệm, (6) có 3 nghiệm.

Xét $(4): f_2(x)=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=a_1\in(0;1) \quad (7)\\ f(x)=a_2\in(1;3) \quad (8)\\ f(x)=a_3\in(3;4) \quad (9)\end{array}\right.$

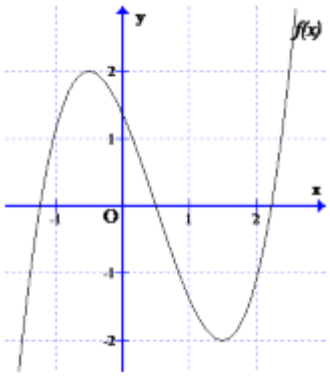
Theo đồ thị, mỗi phương trình (7),(8),(9) đều có 3 nghiệm phân biệt và (7),(8),(9) không có 2 phương trình nào có chung nghiệm.

Xét $(2): f_3(x)=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f_2(x)=a_1 \in (0;1) \quad (10) \\ f_2(x)=a_2 \in (1;3) \quad (11) \\ f_2(x)=a_3 \in (3;4) \quad (12) \end{array}\right.$

Lập luận tương tự như trên, mỗi phương trình (10),(11),(12) đều có 9 nghiệm phân biệt và (10),(11),(12) không có 2 phương trình nào có nghiệm chung.

Vậy có tất cả $9+9+9+3+3+3+2+3=41$ nghiệm phân biệt.

Câu 26. (THANH CHƯƠNG 1 NGHỆ AN 2019 LẦN 3) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(\left|f(x)\right|\right)\right|-\left|f(x)\right|=0$ là

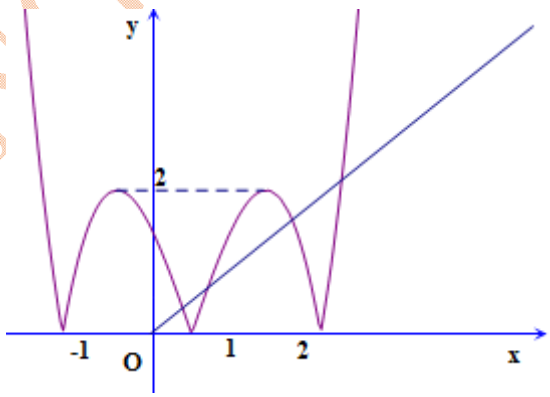
A. 20. **B.** 24. **C.** 10. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\left|f(x)\right|=t\geq 0$. Khi đó phương trình trở thành

$\left|f(t)\right|=t,(1)$.



Từ đồ thị hàm số ta có

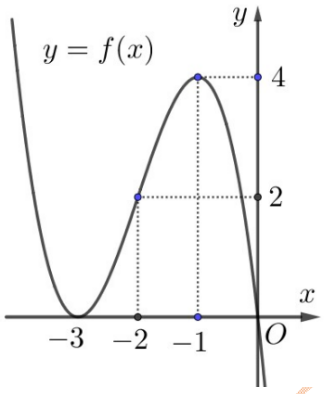
Phương trình (1) có 4 nghiệm $\left[\begin{array}{l} t=a,(0<a<1) \\ t=b,(a<b<1) \\ t=c,(1<c<2) \\ t=d,(2<d) \end{array}\right.$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Khi đó các phương trình $|f(x)|=a, |f(x)|=b, |f(x)|=c$ mỗi phương trình có 6 nghiệm phân biệt không trùng nhau. Phương trình $|f(x)|=d$ có 2 nghiệm phân biệt không trùng với nghiệm của 3 phương trình trên.

Vậy phương trình đã cho có 20 nghiệm phân biệt.

Câu 27. (Đặng Thành Nam Đề 5) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $2f\left(x^2-1\right)-5=0$ là



A. 3. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

$2f\left(x^2-1\right)-5=0(1)$

Đặt $t=x^2-1\ (t\geq -1)$

Phương trình (1) trở thành $2f(t)-5=0\Leftrightarrow f(t)=\dfrac{5}{2}$

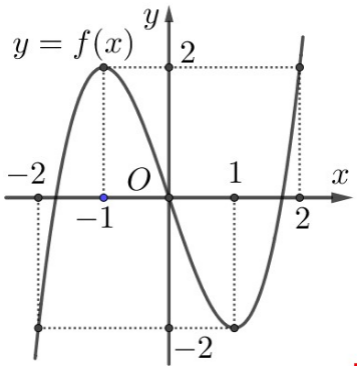
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} t=a & (a<-3)\ \ (l) \\ t=b & (b\in(-2;-1))\ \ (l) \\ t=c & (c\in(-1;0))\ \ (tm) \end{array}\right.$$

$\Rightarrow c=x^2-1\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{c+1}$

Vậy số nghiệm thực của phương trình (1) là 2.

Câu 28. (Đặng Thành Nam Đề 3) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x))=0$ bằng

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



A. 7. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

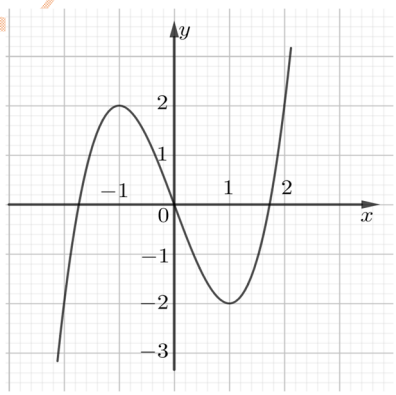
Đặt $t = f(x)\,(t \in \mathbb{R})$, phương trình $f(f(x)) = 0$ trở thành $f(t) = 0$.

Qua đồ thị hàm số $y = f(x)$ đã cho ta thấy: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là a, 0, b với $a \in (-2;-1)$, $b \in (1;2)$.

Khi đó: $f(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = a \\ t = 0 \\ t = b \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = a \\ f(x) = 0 \\ f(x) = b \end{array}\right.$. Nhận thấy mỗi đường thẳng trong 3 đường thẳng $y = a$ với $a \in (-2;-1)$; $y = 0$; $y = b$ với $b \in (1;2)$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ lần lượt tại 3 điểm phân biệt và 9 điểm này có hoành độ khác nhau.

Vậy phương trình $f(f(x)) = 0$ có 9 nghiệm thực phân biệt.

Câu 29. (Cầu Giấy Hà Nội 2019 Lần 1) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình dưới đây.



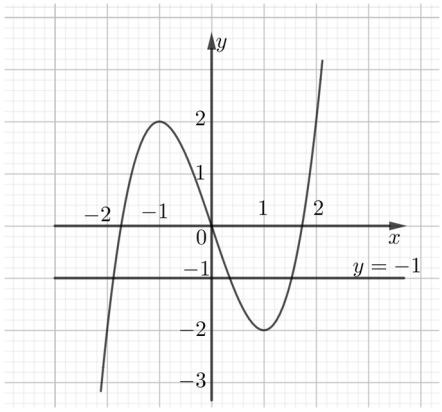
Số nghiệm phân biệt của phương trình $f(f(x)) + 1 = 0$ là

A. 9. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 7.

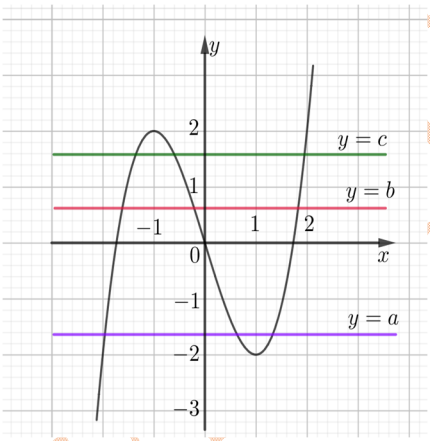
Lời giải

Chọn A

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Xét $f\left(f\left(x\right)\right)+1=0\Leftrightarrow f\left(f\left(x\right)\right)=-1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=a\ \ \left(-2<a<-1\right) \\ f\left(x\right)=b\ \ \left(0<b<1\right) \\ f\left(x\right)=c\ \ \left(1<c<2\right) \end{array}\right.$.



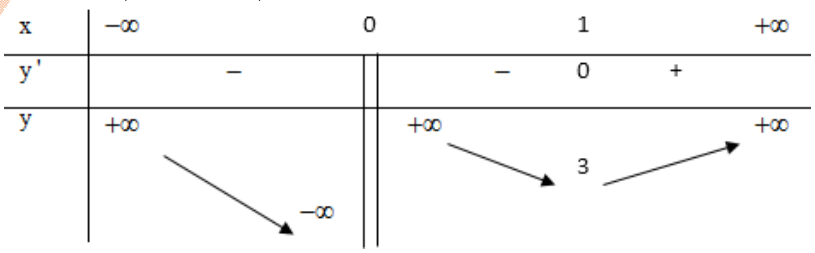
Xét $f\left(x\right)=a\ \left(-2<a<-1\right)$: Dựa vào đồ thị ta thấy $y=a$ cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt $\left(1\right)$.

Xét $f\left(x\right)=b\ \left(0<b<1\right)$: Dựa vào đồ thị ta thấy $y=b$ cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt $\left(2\right)$.

Xét $f\left(x\right)=c\ \left(1<c<2\right)$: Dựa vào đồ thị ta thấy $y=c$ cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt $\left(3\right)$.

Các nghiệm ở trên không có nghiệm nào trùng nhau nên $\left(*\right)$ có 9 nghiệm phân biệt

Câu 30. (Hải Hậu Lần1) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $3\left|f\left(3-2x\right)\right|-10=0$ là



A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

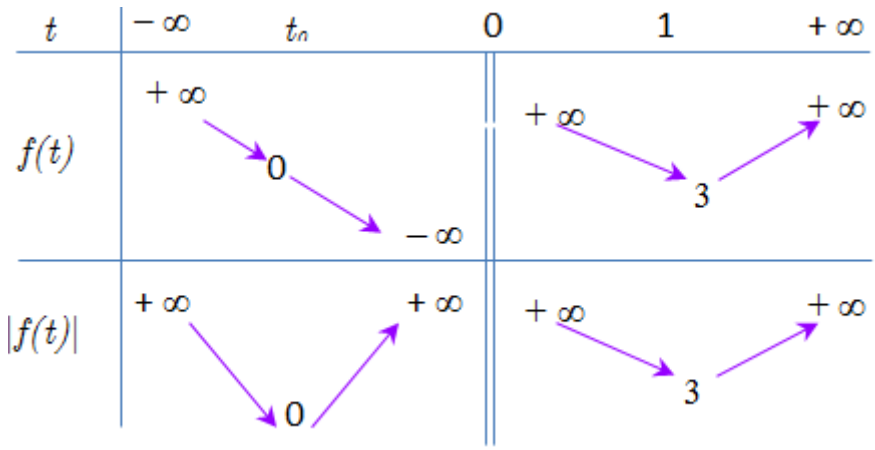
Lời giải

Chọn C

Đặt $3-2x=t$ phương trình đã cho trở thành $3\left|f\left(t\right)\right|-10=0\Leftrightarrow\left|f\left(t\right)\right|=\frac{10}{3}$. (*)

Số nghiệm của phương trình (*) bằng số giao điểu của đồ thị hàm số $y=\left|f\left(t\right)\right|$ và đường thẳng $y=\frac{10}{3}$ song song hoặc trùng với trục hoành.

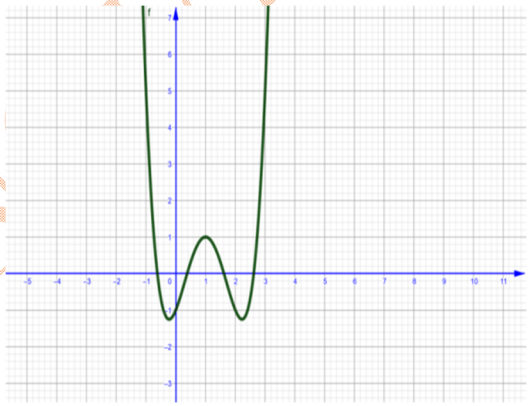
Từ bảng biến thiên đã cho ta vẽ được bảng biến thiên của hàm số $y=\left|f\left(t\right)\right|$.



Dựa vào BBT ta thấy phương trình (*) có 4 nghiệm.

Do hàm số $t=3-2x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên số nghiệm t của phương trình (*) bằng số nghiệm x của phương trình đã cho. Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 31. (Thuan-Thanh-Bac-Ninh) Biết rằng đồ thị hàm số bậc 4: $y=f\left(x\right)$ được cho như hình vẽ sau:



Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)=\left[f'\left(x\right)\right]^2-f\left(x\right).f''\left(x\right)$ và trục Ox.

A. 6. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Vì đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt nên phương trình $f\left(x\right)=0$ có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4.

Giả sử $f\left(x\right)=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)\left(x-x_4\right)$. Ta có:

$$f'(x)=a(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)+a(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)$$
$$+a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)+a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

□ Nếu $x=x_i$, $\forall i: i=\overline{1,4}$ thì $f'(x_i)\neq 0$. Khi đó, ta có:

$$g(x_i)=\left[f'(x_i)\right]^2-f(x_i).f''(x_i)=\left[f'(x)\right]^2>0.$$

Do đó, $x=x_i$, $\forall i=\overline{1,4}$ đều không là nghiệm phương trình $g(x)=0$.

□ Nếu $x\neq x_i$, $\forall i=\overline{1,4}$ thì

$$f'(x)=f(x)\left[\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}+\frac{1}{x-x_4}\right].$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}+\frac{1}{x-x_4}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]'=-\left(\frac{1}{(x-x_1)^2}+\frac{1}{(x-x_2)^2}+\frac{1}{(x-x_3)^2}+\frac{1}{(x-x_4)^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f''(x)f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^2}=-\left(\frac{1}{(x-x_1)^2}+\frac{1}{(x-x_2)^2}+\frac{1}{(x-x_3)^2}+\frac{1}{(x-x_4)^2}\right)<0.$$

$$\Rightarrow f''(x)f(x)-\left[f'(x)\right]^2<0 \Rightarrow g(x)>0.$$

Vậy phương trình $g(x)=0$ vô nghiệm.

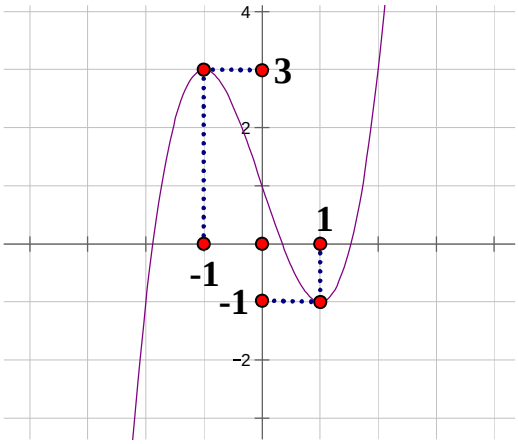
Câu 32. (Chuyên Lý Tự Trọng Cần Thơ) Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đường thẳng $y=2m-1$ cắt đồ thị hàm số $y=|x|^3-3|x|+1$ tại 4 điểm phân biệt

A. $0\le m\le 1$. **B.** $m\ge 1$. **C.** $0<m<1$. **D.** $m<0$.

Lời giải

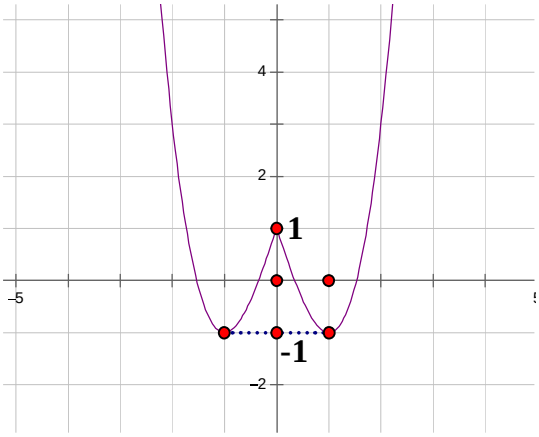
Chọn C

Đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ là đồ thị bên dưới



Từ đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ suy ra đồ thị hàm số $y=|x|^3-3|x|+1$ là đồ thị bên dưới

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



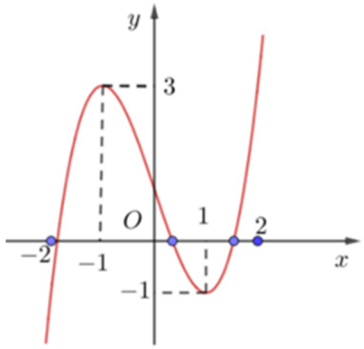
Dựa vào đồ thị hàm số $y=|x|^3-3|x|+1$ và đồ thị hàm số $y=2m-1$

Ta có: đường thẳng $y=2m-1$ cắt đồ thị hàm số $y=|x|^3-3|x|+1$ tại 4 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow -1<2m-1<1\Leftrightarrow 0<m<1$

Câu 33. (Đặng Thành Nam Đề 14) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R, $f(2)=3$ và có đồ thị như hình vẽ bên

A. 2. **B.** 18. **C.** 4. **D.** 19.



Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để phương trình $f\left(|x|+m\right)=3$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f\left(|x|+m\right)=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|x|+m=-1\\|x|+m=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|x|=-1-m\\|x|=2-m\end{array}\right.$.

Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì

$\Leftrightarrow\begin{cases}-1-m>0\\2-m>0\end{cases}\Rightarrow m<-1\Rightarrow m\in\{-19,...,-2\}$.

Vậy có tất cả 18 số nguyên thoả mãn.

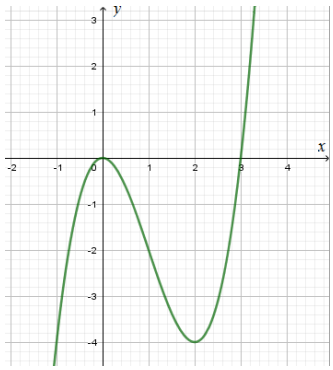
Câu 34. (SỞ NAM ĐỊNH 2018-2019) Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x^2$. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $g\left(x\right)=f\left(|x|\right)+m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

A. 3. **B.** 10. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2$. Ta có đồ thị hàm số $y=f(x)$ như sau:



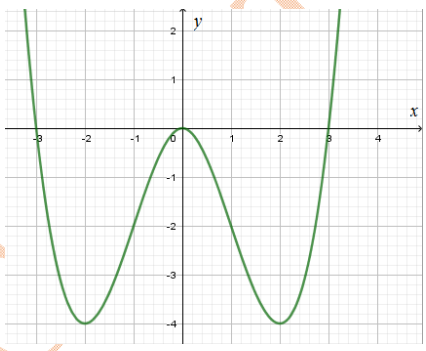
Như ta đã biết: để vẽ đồ thị hàm số $y=f(|x|)$ từ đồ thị $y=f(x)$ ta thực hiện:

Bước 1: Giữ nguyên phần đồ thị $y=f(x)$ gồm các điểm bên phải và các điểm nằm trên trục Oy; bỏ phần đồ thị bên trái trục Oy.Ta được phần đồ thị P_1

Bước 2: Lấy đối xứng phần đồ thị P_1 qua trục Oy ta được phần đồ thị P_2

Khi đó: Đồ thị $y=f(|x|)$ bao gồm đồ thị P_1 và P_2.

Từ đó ta có đồ thị hàm số $y=f(|x|)=|x|^3-3|x|^2$ như sau:



Để đồ thị hàm số $g(x)=f(|x|)+m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt thì phương trình $g(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt. Do đó phương trình $f(|x|)=-m$ có 4 nghiệm phân biệt hay đường thẳng $y=-m$ cắt đồ thị hàm số $y=f(|x|)=|x|^3-3|x|^2$ tại 4 điểm phân biệt.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(|x|)$ suy ra bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi $-4<-m<0\Leftrightarrow 0<m<4$.

Kết hợp yêu cầu đề bài $m\in\mathbb{Z}$, do đó $m\in\{1;2;3\}$.

Vậy tổng các giá trị nguyên của m thỏa mãn là: $1+2+3=6$.

Câu 35. (Chuyên Hùng Vương Gia Lai) Cho hàm số $(C):y=|x^3-6x^2+9x|$ và đường thẳng $d:y=2m-m^2$. Tìm số giá trị của tham số thực m để đường thẳng d và đồ thị (C) có hai điểm chung.

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** Vô số.

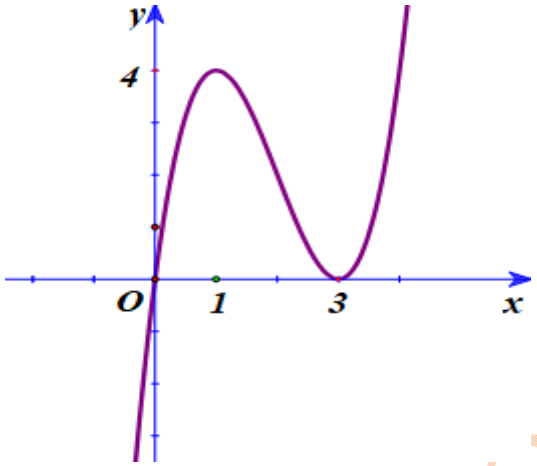
Lời giải

Chọn C

Xét $f(x)=x^3-6x^2+9x$

$f'(x)=3x^2-12x+9;\ f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$.

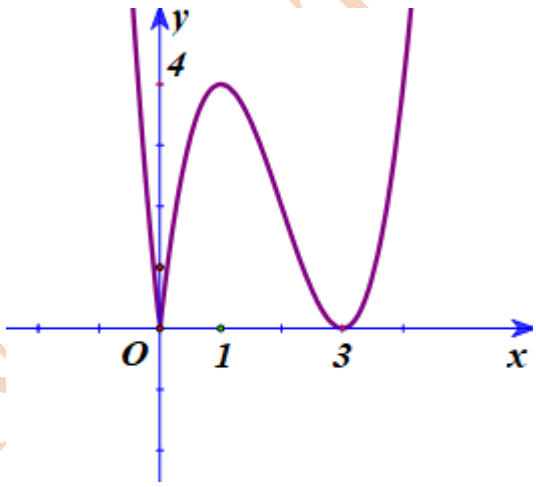
Đồ thị hàm số $y=f(x)$



Đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ gồm hai phần:

Phần 1. Giữ nguyên phần đồ thị nằm phía trên trục hoành.

Phần 2. Lấy đối xứng phần nằm dưới trục hoành qua trục hoành.



Dựa vào đồ thị, ta thấy đường thẳng d và đồ thị (C) có hai điểm chung khi

$2m-m^2=0$ hoặc $2m-m^2>4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=2\end{array}\right.$ hoặc $m^2-2m+4<0$ (vô nghiệm vì $m^2-2m+4=(m-1)^2+3>0,\forall m\in\mathbb{R}$)

Vậy có hai giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 36. (HKII-CHUYÊN-NGUYỄN-HUỆ-HÀ-NỘI) Tìm m để phương trình $|x^4-5x^2+4|=\log_2 m$ có 8 nghiệm phân biệt:

A. $0<m<\sqrt[4]{2^9}$.

B. $-\sqrt[4]{2^9}<m<\sqrt[4]{2^9}$.

C. Không có giá trị của m.

D. $1<m<\sqrt[4]{2^9}$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 4$ có

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

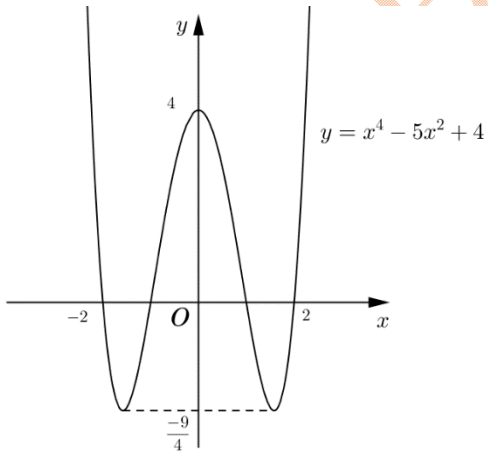
$$y' = 4x^3 - 10x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\dfrac{\sqrt{10}}{2} \end{array}\right.$$

Với $x = 0 \Rightarrow y = 4$ và $x = \pm\dfrac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow y = \dfrac{-9}{4}$

BBT

x	$-\infty$		$\frac{-\sqrt{10}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{10}}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$\frac{-9}{4}$	↗	4	↘	$\frac{-9}{4}$	↗	$+\infty$

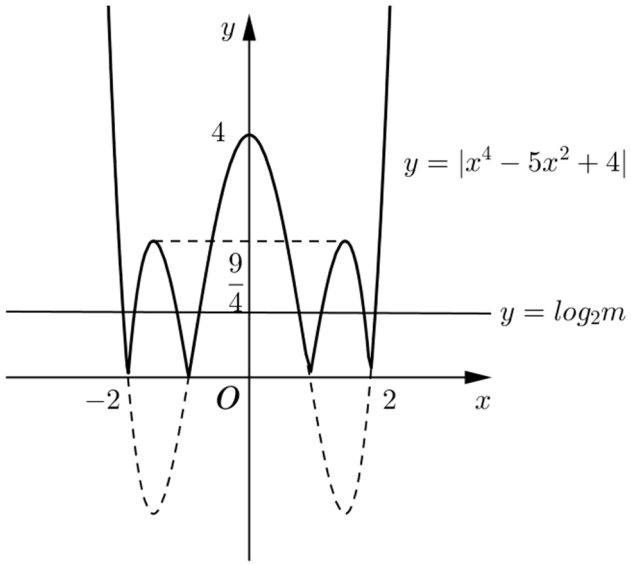
Đồ thị



Từ đồ thị hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 4$

Bước 1: Ta giữ nguyên phần đồ thị phía trên trục hoành.

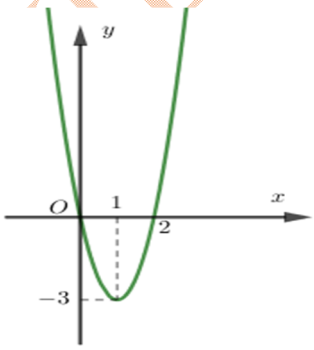
Bước 2: Lấy đối xứng phần phía dưới trục hoành của đồ thị lên phía trên trục hoành và xóa bỏ đi phần đồ thị nằm phía dưới trục hoành ta được đồ thị hàm số $y = \left|x^4 - 5x^2 + 4\right|$.



Khi đó số nghiệm của phương trình $\left|x^4-5x^2+4\right|=\log_2 m$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left|x^4-5x^2+4\right|$ và đường thẳng $y=\log_2 m$ với $m>0$. Dựa vào đồ thị hàm số $y=\left|x^4-5x^2+4\right|$ ta thấy để phương trình $\left|x^4-5x^2+4\right|=\log_2 m$ có 8 nghiệm thì:

$0<\log_2 m<\frac{9}{4}\Leftrightarrow 1<m<\sqrt[4]{2^9}$.

Câu 37. (THĂNG LONG HN LẦN 2 NĂM 2019) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left[f\left(x\right)+m\right]=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

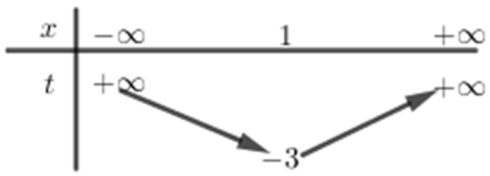


A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Đặt $f\left(x\right)=t$ $\left(*\right)$. Khi đó:



Nhận xét: +) Với $t=-3\Rightarrow$ phương trình $\left(*\right)$ có một nghiệm $x=1$.

+) Với $t>-3\Rightarrow$ phương trình $\left(*\right)$ có hai nghiệm $x=x_1$ và $x=x_2$ với $x_1<1;x_2>1$.

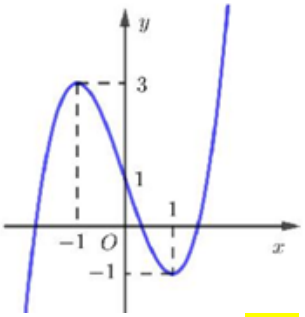
Ta có: $f\left[f\left(x\right)+m\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t+m=0 \\ t+m=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-m \\ t=2-m \end{array}\right.$.

Vì $2-m>-m, \forall m$ nên $f\left[f\left(x\right)+m\right]=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:

$$\left\{\begin{array}{l} -m=-3 \\ 2-m>-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m=3 \\ m<5 \end{array}\right. \Leftrightarrow m=3.$$

Vậy có 1 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 38. (Lý Nhân Tông) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(\sin x\right)=2\sin x+m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\pi\right)$. Tổng các phần tử của S bằng:



A. -10 **B.** -8. **C.** -6. **D.** -5.

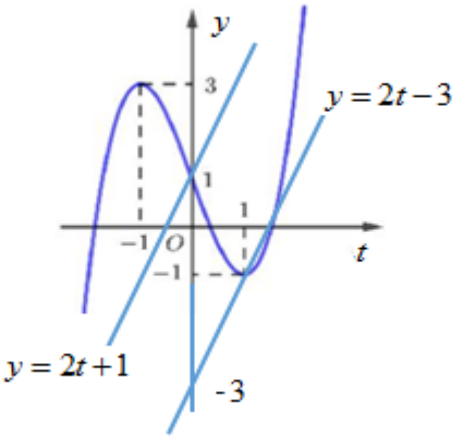
Lời giải.

Chọn C

Đặt $t=\sin x$ với $x\in\left(0;\pi\right)\Rightarrow t\in\left(0;1\right]$.

Xét phương trình $f\left(t\right)=2t+m$.

Để phương trình có nghiệm thì đồ thị hàm $y=f\left(t\right)$ cắt đồ thị hàm số $y=2t+m$ tại ít nhất một điểm có hoành độ t thuộc $\left(0;1\right]$.



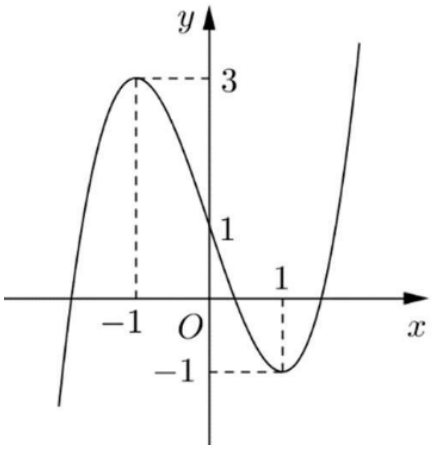
Từ đồ thị ta suy ra đồ thị hàm số $y=2t+m$ nằm ở phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị 2 hàm số $y=2t+1$ và $y=2t-3$.

Từ đó suy ra $-3\le m<1\Rightarrow m=-3;-2;-1;0$.

Vậy tổng các phần tử bằng -6.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 39. (Đặng Thành Nam Đề 2) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(\sin x)=m$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $[0;\pi]$.



A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

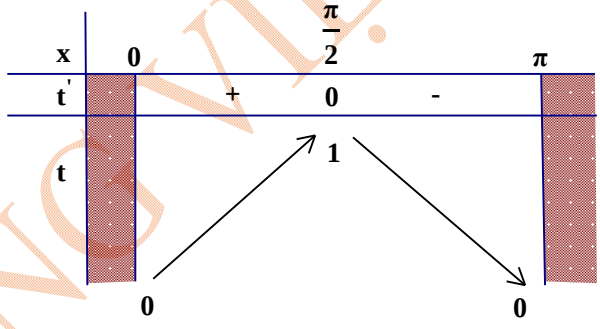
Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\sin x$, với $x\in[0;\pi]$

Ta có $t'=cosx$, $t'=0\Leftrightarrow cosx=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}\in[0;\pi]$

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta có:

Với mỗi $t\in[0;1)$ cho ta tương ứng $2x\in[0;\pi]$

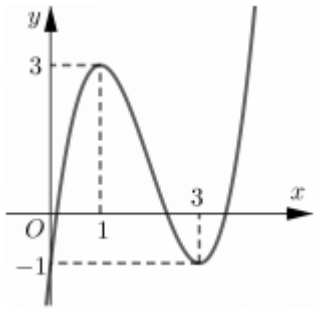
Với $t=1$ cho ta tương ứng $x=\frac{\pi}{2}\in[0;\pi]$

Khi đó ta có phương trình $f(t)=m$ (*)

Phương trình đã cho có đúng hai nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $[0;\pi]\Leftrightarrow$ pt(*) có đúng một nghiệm $t\in[0;1)\Leftrightarrow -1<m\le 1$, vì $m\in Z\Rightarrow m\in\{0;1\}$ nên có hai số nguyên m thỏa mãn bài toán.

Câu 40. (Đặng Thành Nam Đề 6) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|x+m\right|\right)=m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

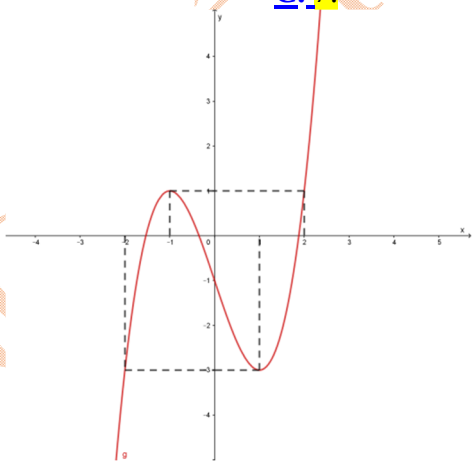
Đặt $t=\left|x+m\right|\ \left(t\ge 0\right)\Rightarrow f\left(t\right)=m\ \ (*)$.

Với $t=0\Leftrightarrow x=-m;$ với $t>0\Leftrightarrow x=-m\pm t.$

Vậy phương trình có đúng 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có đúng 3 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow -1<m<3$, $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\left\{1;0;2\right\}$.

Câu 41. (Chuyên Lam Sơn Lần 2) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên R có đồ thị như hình bên. Phương trình $f\left(f\left(x\right)-1\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4.



Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ta có: $f\left(x\right)=0\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\in\left(-2;-1\right)\\x=b\in\left(-1;0\right)\\x=c\in\left(0;2\right)\end{array}\right.$

Do đó $f\left(f\left(x\right)-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)-1=a\left(1\right)\\f\left(x\right)-1=b\left(2\right)\\f\left(x\right)-1=c\left(3\right)\end{array}\right.$

$\left(1\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)=a+1\in\left(-1;0\right)$

$\Rightarrow$ pt $f(x)=a+1$ có 3 nghiệm x_1,x_2,x_3 thỏa mãn $x_1<a<-1<b<x_2<0<x_3<c$

$(2)\Leftrightarrow f(x)=b+1\in(0;1)\Rightarrow$ pt $f(x)=b+1$ có 3 nghiệm x_4,x_5,x_6 thỏa mãn

$x_1<a<x_4<-1<x_5<b<x_2<0<x_3<c<x_6$

$(3)\Leftrightarrow f(x)=c+1\in(1;3)\Rightarrow$ pt $f(x)=c+1$ có nghiệm duy nhất $x_7>x_6$

Vậy phương trình $f\left(f(x)-1\right)=0$ có 7 nghiệm phân biệt.

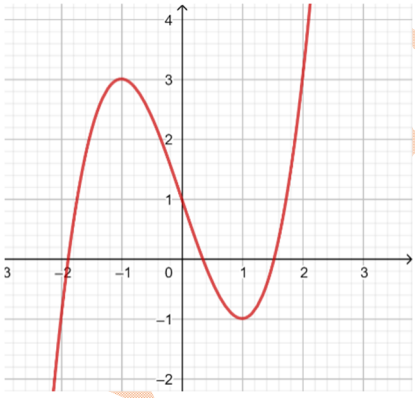
Câu 42. (Triệu Thái Vĩnh Phúc Lần 3) Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x+1$. Số nghiệm của phương trình $\left[f(x)\right]^3-3f(x)+1=0$ là:

A. 1. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số $y=f(x)=x^3-3x+1$ có dạng:



Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $f(x)=0$ có 3 nghiệm $x_1\in(-2;-1),x_2\in(0;1),x_3\in(1;2)$

Nếu phương trình $\left[f(x)\right]^3-3f(x)+1=0$ có nghiệm x_0 thì $f(x_0)\in\{x_1,x_2,x_3\}$.

Dựa vào đồ thị ta có:

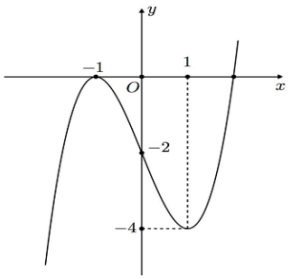
+ $f(x)=x_1,x_1\in(-2;-1)$ có 1 nghiệm duy nhất.

+ $f(x)=x_2,x_2\in(0;1)$ có 3 nghiệm phân biệt.

+ $f(x)=x_3,x_3\in(1;2)$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $\left[f(x)\right]^3-3f(x)+1=0$ có 7 nghiệm phân biệt.

Câu 43. (Đặng Thành Nam Đề 15) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(1-2\cos x)+m=0$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ là



A. $[-4;0]$. **B.** $[-4;0)$. **C.** $[0;4)$. **D.** $(0;4)$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=1-2\cos x$, khi $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ thì $t\in[-1;1)$.

Khi đó phương trình $f(1-2\cos x)+m=0$ trở thành phương trình $f(t)=-m$.

Như vậy để thỏa yêu cầu bài toán thì phương trình $f(t)=-m$ phải có nghiệm $t\in[-1;1)$.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $-4<-m\le 0\Leftrightarrow 0\le m<4$.

Câu 44. (Cầu Giấy Hà Nội 2019 Lần 1) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây

Số các số nguyên m thỏa mãn phương trình $f(3\sin x+4\cos x+5)=m$ có nghiệm là

x	$-\infty$		-10		0		10		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$				10000				$+\infty$
			0				0		

A. 10001. **B.** 20000. **C.** 20001. **D.** 10000.

Lời giải

Chọn A

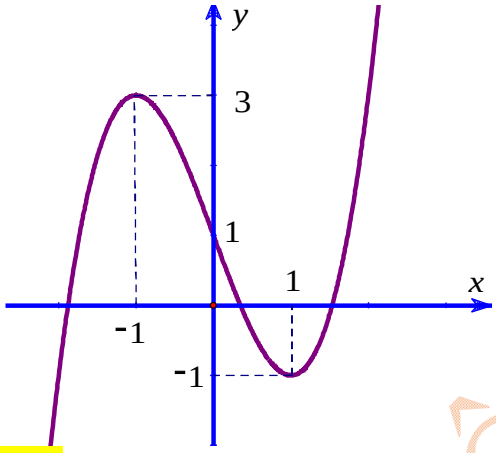
Đặt $t=3\sin x+4\cos x+5=5\left(\frac{3}{5}\sin x+\frac{4}{5}\cos x\right)+5=5\sin(x+\alpha)+5$ với $\begin{cases}\sin\alpha=\frac{4}{5}\\ \cos\alpha=\frac{3}{5}\end{cases}$

Ta có: $-1\le\sin(x+\alpha)\le 1,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $-5\le 5\sin(x+\alpha)\le 5,\forall x\in\mathbb{R}$ suy ra: $0\le t\le 10,\forall x\in\mathbb{R}$

Phương trình đã cho trở thành: $f(t)=m$ với $t\in[0;10]$

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 0\le m\le 10000$ mà $m\in\mathbb{Z}$ nên có 10001 giá trị nguyên m.

Câu 45. (THẠCH THÀNH I - THANH HÓA 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(\cos x)=-2m+1$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ là



A. $(-1;1]$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(0;1]$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\cos x$. Khi đó: $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ thì $t\in(0;1)$.

Bài toán trở thành: Tìm m để phương trình $f(t)=-2m+1$ có nghiệm $t\in(0;1)$ hay phương trình $f(x)=-2m+1$ có nghiệm $x\in(0;1)$.

Từ đồ thị ta thấy điều kiện bài toán tương đương $-1<-2m+1<1\Leftrightarrow 0<m<1$.

Câu 46. (SỞ QUẢNG BÌNH NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(2\sin x+1)=m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $\left[0;\frac{\pi}{6}\right)$ là:

A. $(-2;0]$. **B.** $(0;2]$. **C.** $[-2;2)$. **D.** $(-2;0)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=2\sin x+1$

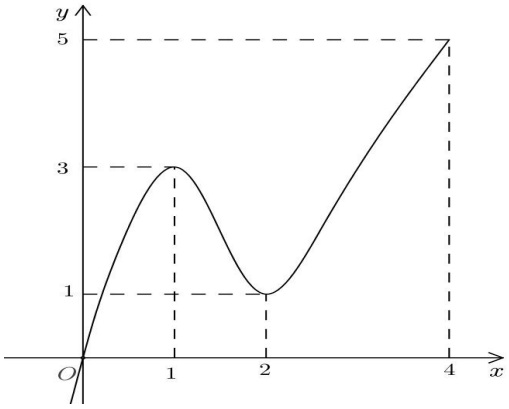
Ta có: $x\in\left[0;\frac{\pi}{6}\right)\Rightarrow 0\le x<\frac{\pi}{6}\Rightarrow 0\le\sin x<\frac{1}{2}$

$\Rightarrow 0\le 2\sin x<1\Rightarrow 1\le 2\sin x+1<2\Rightarrow 1\le t<2$

$\Rightarrow -2<f(t)\le 0$. Vậy **chọn A.**

Câu 47. (THPT ISCHOOL NHA TRANG) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f\left[4\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\right]=m$ có nghiệm?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

$f\left[4\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\right]=m\ (1)$

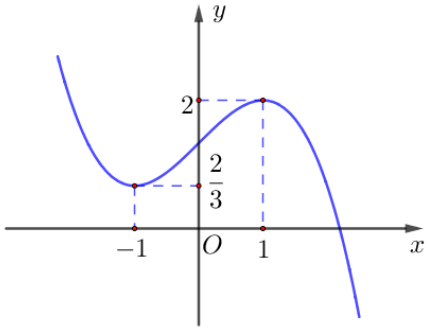
Đặt $t=4\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)=4\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)=3+\cos 4x$. Do đó $t\in[2;4]$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $\forall t\in[2;4]$ thì $1\le f(t)\le 5$.

Suy ra phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow 1\le m\le 5 \overset{m\in\mathbb{Z}}{\Rightarrow} m\in\{1;2;3;4;5\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của m.

Câu 48. (Cụm 8 trường chuyên lần1) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số giá trị nguyên dương của m để phương trình $f\left(x^2-4x+5\right)+1=m$ có nghiệm là

A. 3. **B.** 4. **C.** 0. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

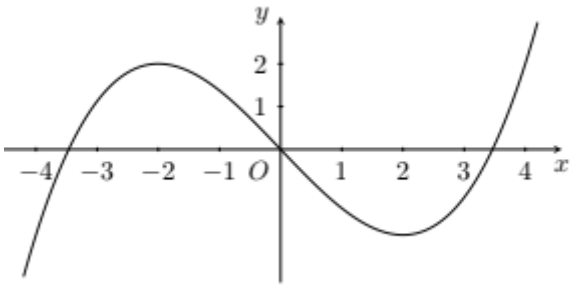
Để phương trình $x^2-4x+5=k\Leftrightarrow(x-2)^2=k-1$ có nghiệm thì $k\ge 1$.

Do đó để $f\left(x^2-4x+5\right)+1=m\Leftrightarrow f\left(x^2-4x+5\right)=m-1$ có nghiệm thì đường thẳng $y=m-1$ phải cắt đồ thị $y=f(x)$ tại những điểm có hoành độ lớn hơn hoặc bằng 1.

Dựa vào đồ thị ta thấy $m-1\le 2\Leftrightarrow m\le 3$. Mà m nguyên dương.

Vậy $m\in\{1;2;3\}$. Có tất cả 3 giá trị.

Câu 49. (THPT NINH BÌNH – BẠC LIÊU LẦN 4 NĂM 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$ của phương trình $f(2\sin x+2)=1$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

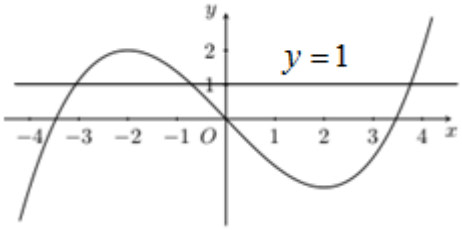
Đặt $t=2\sin x+2$.

Khi $x\in\left[-\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$ thì $t\in[1;4]$.

Với mỗi giá trị $t\in[1;3)\cup\{4\}$ thì tương ứng với một giá trị $x\in\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)\cup\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

Với mỗi giá trị $t\in[3;4)$ thì tương ứng với hai giá trị $x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

Xét phương trình $f(t)=1$.

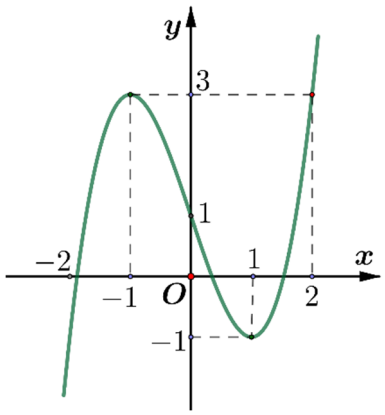


Từ đồ thị ta thấy phương trình $f(t)=1$ có một nghiệm t thỏa mãn $t\in[3;4)$.

Suy ra phương trình $f(2\sin x+2)=1$ có 2 nghiệm.

Câu 50. (THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f\left(\sqrt{4-x^2}\right)=m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $\left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$ là

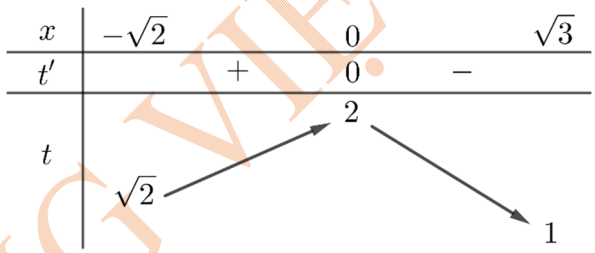
A. $(-1;3]$. **B.** $\left(-1;f\left(\sqrt{2}\right)\right]$. **C.** $[-1;3]$. **D.** $\left[-1;f\left(\sqrt{2}\right)\right]$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sqrt{4-x^2}\Rightarrow t'=\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$; $t'=0\Leftrightarrow x=0$

Với $x\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $t=\sqrt{4-x^2}$.

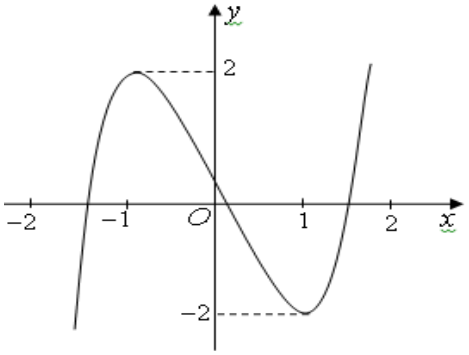


Với $x\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right)\Rightarrow t\in(1;2]$

Từ đồ thị ta có: $t\in(1;2]\Rightarrow f(t)\in(-1;3]$

Vậy để phương trình $f\left(\sqrt{4-x^2}\right)=m$ có nghiệm thì $m\in(-1;3]$.

Câu 51. **(THPT-Nguyễn-Công-Trứ-Hà-Tĩnh-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3)** Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ:



Phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 3. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 5.

Lời giải

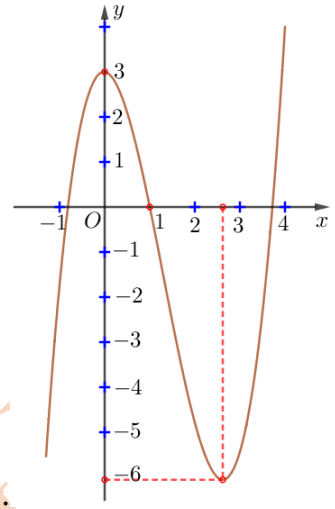
Chọn C

$$f\left(f\left(x\right)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} f\left(x\right)=a\in\left(-2;-1\right) & \left(1\right)\\ f\left(x\right)=b\in\left(0;1\right) & \left(2\right)\\ f\left(x\right)=c\in\left(1;2\right) & \left(3\right)\end{array}\right.$$

Dựa vào đồ thị ta thấy: Mỗi phương trình $\left(1\right)$, $\left(2\right)$, $\left(3\right)$ đều có 3 nghiệm phân biệt và các nghiệm này không trùng nhau.

Vậy phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=0$ có 9 nghiệm thực.

trong hình vẽ dưới. Đặt $g\left(x\right)=f\left[f\left(x\right)\right]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'\left(x\right)=0$.



A. 2. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải.

Chọn B

Ta có: $g'\left(x\right)=f'\left(x\right)f'\left[f\left(x\right)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f'\left(x\right)=0\\ f'\left[f\left(x\right)\right]=0\end{array}\right.\left(*\right)$.

Theo đồ thị hàm số suy ra.

$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0\\ x=a_1\end{array}\right.$, với $2<a_1<3$.

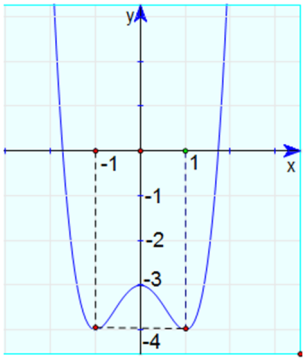
$f'\left[f\left(x\right)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=0\ ,\left(1\right)\\ f\left(x\right)=a_1\ ,\left(2\right)\end{array}\right.$.

Phương trình $\left(1\right)$: $f\left(x\right)=0$ có 3 nghiệm phân biệt khác nghiệm phương trình $\left(*\right)$.

Phương trình $\left(2\right)$: $f\left(x\right)=a_1$ có 3 nghiệm phân biệt khác nghiệm phương trình $\left(1\right)$ và phương trình $\left(*\right)$.

Vậy phương trình ban đầu có 8 nghiệm phân biệt.

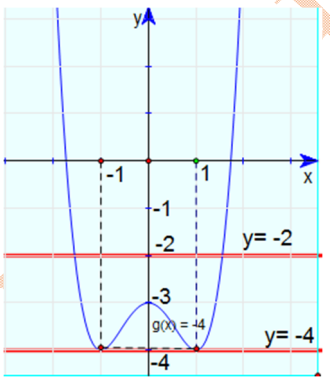
Câu 52. (Nam Tiền Hải Thái Bình Lần1) Cho hàm số $y=x^4-2x^2-3$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $x^4-2x^2-3=2m-4$ có hai nghiệm phân biệt?



A. $m\le\frac{1}{2}$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m=\frac{1}{2} \end{array}\right.$. **C.** $0<m<\frac{1}{2}$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m>\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Lời giải

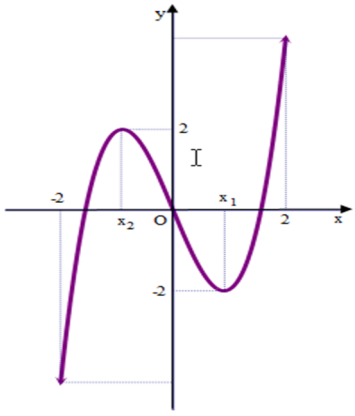
Chọn D



Phương trình $x^4-2x^2-3=2m-4$ có hai nghiệm phân biệt khi chỉ khi đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2-3$ và đường thẳng $y=2m-4$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

Dựa vào đồ thị hàm số trên, yêu cầu bài toán thỏa mãn khi $\left[\begin{array}{l} 2m-4=-4 \\ 2m-4>-3 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m>\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Câu 53. (TTHT Lần 4) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$, và có đồ thị là đường cong như trong hình vẽ bên. Hỏi phương trình $|f(x)-1|=2$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên đoạn $[-2;2]$.



A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

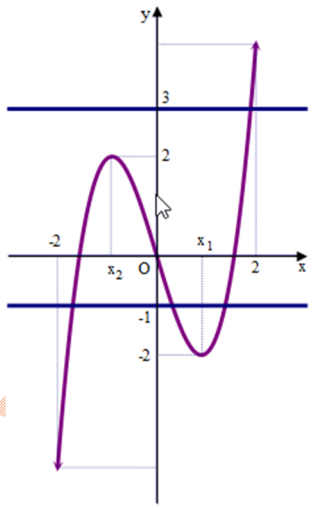
Cách 1:

Ta có: $\left|f\left(x\right)-1\right|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)-1=2\\f\left(x\right)-1=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=3\quad(1)\\f\left(x\right)=-1\quad(2)\end{array}\right.$.

Phương trình (1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ với đường thẳng $y=3$.

Phương trình (2) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ với đường thẳng $y=-1$.

Quan sát hình vẽ:



Qua đồ thị ta thấy:

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất;

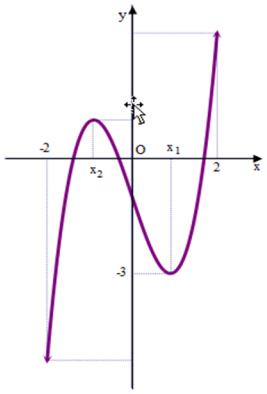
Phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt không trùng nghiệm phương trình (1).

Vậy phương trình $\left|f\left(x\right)-1\right|=2$ có 4 nghiệm phân biệt.

Cách 2: Xây dựng đồ thị của hàm số chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối.

Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, ta dễ dàng suy ra đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)-1$ như hình vẽ:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Tiếp theo ta vẽ đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)-1\right|$:



Khi đó phương trình $\left|f\left(x\right)-1\right|=2$ chính là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)-1\right|$ và đường thẳng $y=2$.

Qua đồ thị ta thấy đường thẳng $y=2$ cắt đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)-1\right|$ tại 4 điểm phân biệt.

Vậy phương trình $\left|f\left(x\right)-1\right|=2$ có 4 nghiệm phân biệt.

Phân tích bài toán:

- Đây là một câu ở mức độ vận dụng thấp. Là bài toán tương giao khá cơ bản trong lớp các bài toán tương giao đồ thị.

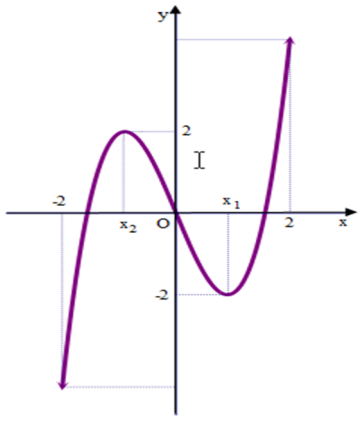
- Vấn đề làm khó học sinh ở đây chỉ là phương án xử lý phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối.

- Đối với bài toán cụ thể trên, xử dụng **Cách 1** để giải là phương án hợp lý và tiết kiệm thời gian và xử dụng ít kỷ thuật.

- Vậy tại sao tôi đưa ra **Cách 2**? Vừa dùng nhiều kỹ năng vừa mất thời gian. Giả sử giả thiết bài toán không đổi nhưng yêu cầu bài toán tìm số nghiệm của một trong các phương trình sau thì học sinh chắc chắn sẽ gặp không ít khó khăn: $f\left(\left|x\right|\right)=-1$, $\left|f\left(\left|x\right|\right)-1\right|=2$, $\left|f\left(x\right)-1\right|=2-x$;.

Câu 54. (TTHT Lần 4) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[-2;2\right]$, và có đồ thị là đường cong như trong hình vẽ bên. Hỏi phương trình $f\left(\left|x\right|\right)=-1$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên đoạn $\left[-2;2\right]$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

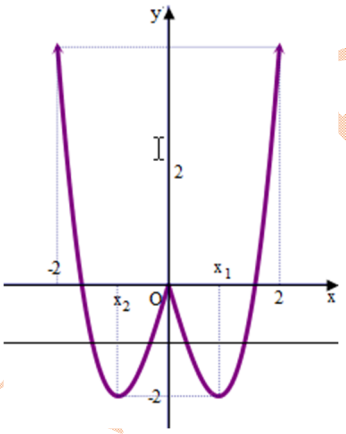


A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

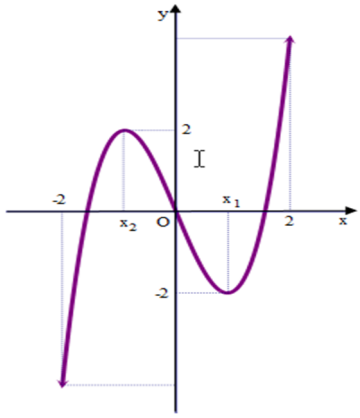
Chọn C

Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, ta suy ra đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ như sau:



Qua đồ thị ta thấy phương trình $f\left(\left|x\right|\right)=-1$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 55. (TTHT Lần 4) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[-2;2\right]$, và có đồ thị là đường cong như trong hình vẽ bên. Hỏi phương trình $\left|f\left(\left|x\right|\right)-1\right|=2$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên đoạn $\left[-2;2\right]$.

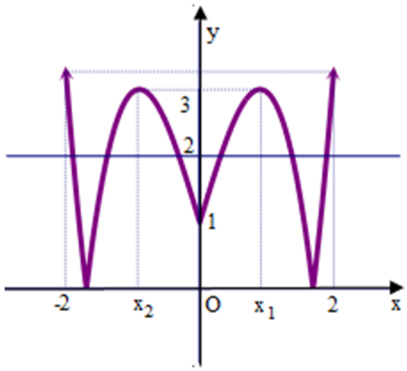


A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, ta suy ra đồ thị hàm số $y=\left|f\left(\left|x\right|\right)-1\right|$ như sau:



Qua đồ thị ta thấy phương trình $\left|f\left(\left|x\right|\right)-1\right|=2$ có 6 nghiệm phân biệt.

Câu 56. (TTHT Lần 4) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[-2;2\right]$, và có đồ thị là đường cong như trong hình vẽ bên. Hỏi phương trình $\left|f\left(x\right)-1\right|=2-x$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên đoạn $\left[-2;2\right]$.

A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

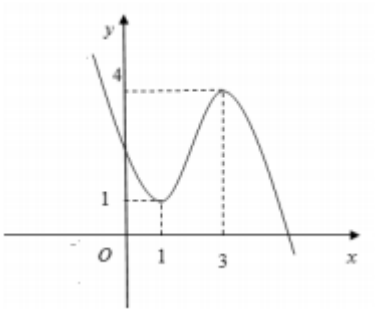
Phương trình $\left|f\left(x\right)-1\right|=2-x$ chính là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)-1\right|$ và đường thẳng $y=2-x$.

Ta có đồ thị như sau:



Qua đồ thị ta thấy phương trình $\left|f\left(x\right)-1\right|=2-x$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 57. (Đặng Thành Nam Đề 17) Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ với a,b,c,d là các số thực, có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|x-m\right|+1\right)=m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.



A. 3. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=|x-m|+1(t\ge 1)$, phương trình trở thành: $f(t)=m\ (*)$

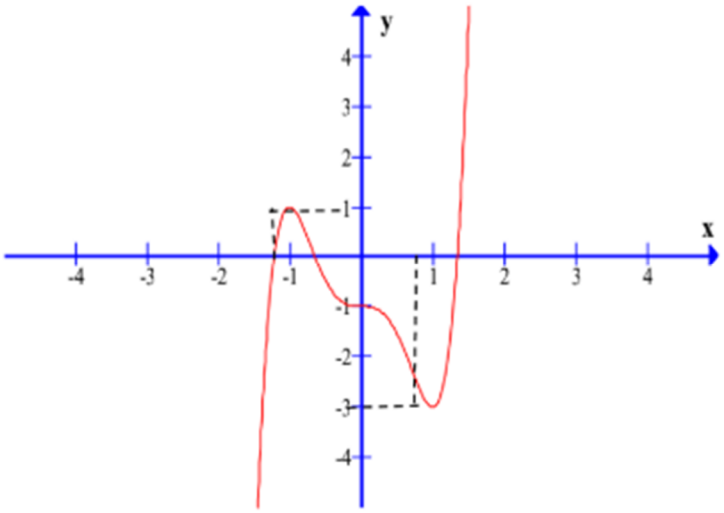
+ Với $t=1\Leftrightarrow x=m$.

+ Với $t>1\Leftrightarrow |x-m|=t-1\Leftrightarrow x=m\pm(t-1)$. Khi đó với mỗi $t>1$ cho ta hai giá trị x.

Vậy phương trình có đúng 4 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $(*)$ có đúng 2 nghiệm lớn hơn 1

$\Leftrightarrow 1<m<4\Rightarrow m\in\{2;3\}$.

Câu 58. (-Mai-Anh-Tuấn-Thanh-Hóa-lần-1-2018-2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(|x|-1)=m$ có 4 nghiệm phân biệt ?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

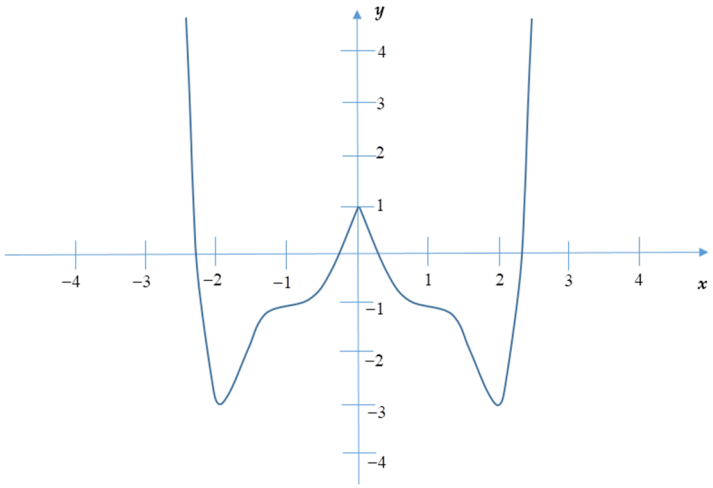
Lời giải

Chọn C

Đồ thị của hàm số được vẽ theo 2 bước:

+ Tịnh tiến đồ thị của hàm số $y=f(x)$ qua bên phải 1 đơn vị.

+ Giữ nguyên phần bên phải, lấy đối xứng phần bên phải qua trục Oy.



Từ đồ thị ta thấy: phương trình $f(|x|-1)=m$ có 4 nghiệm phân biệt khi $-3<m<1$.

Vậy có 3 giá trị nguyên $m \in \{-2;-1;0\}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 59. Tìm tất cả các giá trị thực k để phương trình $\left|-2x^3-\frac{3}{2}x^2+3x+\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{k}{2}-1\right|$ có đúng 4 nghiệm phân biệt

A. $k\in\left(\frac{19}{4};5\right)$.

B. $k\in\varnothing$.

C. $k\in(-2;-1)\cup\left(1;\frac{19}{4}\right)$.

D. $k\in\left(-2;-\frac{3}{4}\right)\cup\left(\frac{19}{4};6\right)$.

Lời giải

Chọn D

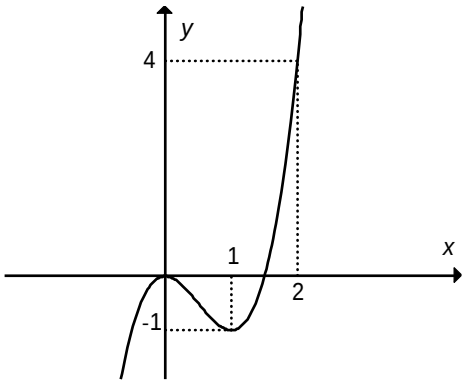
Xét hàm số $y=-2x^3-\frac{3}{2}x^2+3x+\frac{1}{2}$. Ta có: $y'=-6x^2-3x+3$. $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên đồ thị hàm số $y=-2x^3-\frac{3}{2}x^2+3x+\frac{1}{2}$. Với: $-2x^3-\frac{3}{2}x^2+3x+\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\frac{-7\pm\sqrt{33}}{8}\end{array}\right.$

x	$-\infty$		$\frac{-7-\sqrt{33}}{8}$		-1		$\frac{-7+\sqrt{33}}{8}$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{11}{8}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, nhận thấy: ycbt $\Leftrightarrow\frac{11}{8}<\left|\frac{k}{2}-1\right|<2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{19}{4}<k<6\\-2<k<-\frac{3}{4}\end{array}\right.$.

Câu 60. Hình bên là đồ thị của hàm số $y=2x^3-3x^2$. Sử dụng đồ thị đã cho tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $16|x|^3-12x^2\left(x^2+1\right)=m\left(x^2+1\right)^3$ có nghiệm.



A. Với mọi m. **B.** $-1\le m\le 4$. **C.** $-1\le m\le 0$. **D.** $1\le m\le 4$.

Lời giải

Phương trình $16\left|\frac{x}{x^2+1}\right|^3-12\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2=m\longleftrightarrow 2\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|^3-3\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2=m$.

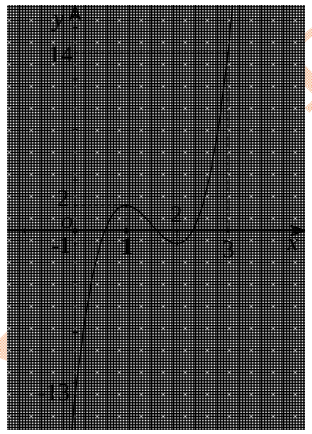
Đặt $t=\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|\ge 0$. Ta có $x^2+1\ge 2x\longrightarrow t=\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|\le 1$. Do đó $0\le t\le 1$.

Phương trình trở thành $2t^3-3t^2=m\ \ (*)$. Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=2x^3-3x^2$ (chỉ xét trong phần $x\in[0;1]$) và đường thẳng $y=m$ (cùng phương với trục hoành).

Dựa vào đồ thị, ta thấy để phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;1]\longleftrightarrow -1\le m\le 0$.

Chọn C

Câu 61. (Thanh Chương Nghệ An Lần 2) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tổng các giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(f(x)+1\right)=m$ có 3 nghiệm phân biệt bằng

A. 15. **B.** 1. **C.** 13. **D.** 11.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $f(x)=k$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-1<f(x)=k<2$ hay $0<f(x)+1=k+1<3$. Với mọi $x\in(0;3)$ ta có $f(x)\in(-13;14)$.

Đặt $u=f(x)+1$, ta có phương trình $f(u)=m$.

- Nếu $-1<m<2$ thì phương trình $f(u)=m$ có đúng ba nghiệm phân biệt u_1,u_2,u_3 thỏa mãn điều kiện $0<u_1<1<u_2<2<u_3<3$, và khi đó mỗi phương trình $f(x)+1=u_1$, $f(x)+1=u_2$, $f(x)+1=u_3$ đều có ba nghiệm phân biệt. Do đó phương trình $f\left(f(x)+1\right)=m$ có 9 nghiệm phân biệt.

- Nếu $m=2$ thì phương trình $f(u)=m$ có đúng hai nghiệm phân biệt $u_1=1,u_2\in(2;3)$ và khi đó mỗi phương trình $f(x)+1=u_1$, $f(x)+1=u_2$ đều có ba nghiệm phân biệt. Do đó phương trình $f\left(f(x)+1\right)=m$ có 6 nghiệm phân biệt.

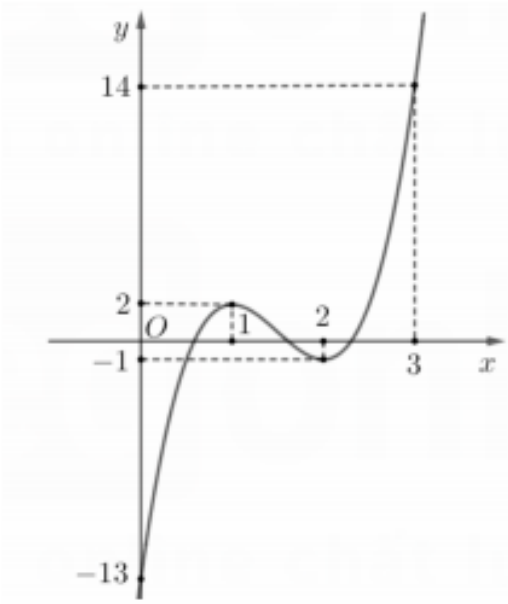
- Tương tự khi $m=-1$, phương trình $f\left(f(x)+1\right)=m$ có 6 nghiệm phân biệt.

- Nếu $m>2$ hoặc $m<-1$ thì phương trình $f(u)=m$ có một nghiệm duy nhất u_0. Khi đó phương trình $f(x)+1=u_0 \Leftrightarrow f(x)=u_0-1$ có ba nghiệm phân biệt khi

$$-1<u_0-1<2 \Leftrightarrow 0<u_0<3 \Leftrightarrow -13<f(u_0)<14 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -13<m<-1 \\ 2<m<14 \end{array}\right.$$

Vậy $m\in\{-12;-11;...;-2;3;4;...;13\}$. Tổng cần tìm là $S=-2+13=11$.

Câu 62. (Đặng Thành Nam Đề 17) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(f(x+1))=m$ có ít nhất 6 nghiệm thực phân biệt?



A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Nhận xét: Số nghiệm của phương trình $f(x+b)=a$ cũng chính là số nghiệm của phương trình $f(x)=a$.

Xét phương trình $f(f(x+1))=m$ (1).

Đặt $t=f(x+1)$ Khi đó ta có phương trình $f(t)=m$ $(*)$.

+ Trường hợp 1: Với $m\in(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$.

Khi đó phương trình $(*)$ có đúng 1 nghiệm. Suy ra phương trình (1) có tối đa 3 nghiệm (*không thỏa mãn*).

+ Trường hợp 2: Với $m=-1$. Khi đó $(*)$ trở thành

$$f(t)=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=t_1\in(0;1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x+1)=2 \\ f(x+1)=t_1,\ t_1\in(0;1) \end{array}\right.$$

Phương trình $f(x+1)=2$ có 2 nghiệm, phương trình $f(x+1)=t_1, t_1\in(0;1)$ có 3 nghiệm. Suy ra phương trình (1) có 5 nghiệm (*không thỏa mãn*).

+ Trường hợp 3: Với $m=2$. Khi đó $(*)$ trở thành

$$f(t)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=t_2\in(2;3)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x+1)=1\\f(x+1)=t_2,\ t_2\in(2;3)\end{array}\right.\cdot$$

Phương trình $f(x+1)=1$ có 3 nghiệm, phương trình $f(x+1)=t_2,\ t_2\in(2;3)$ có 1 nghiệm. Suy ra phương trình (1) có 4 nghiệm (*không thỏa mãn*).

+ Trường hợp 4: Với $m\in(-1;2)$. Khi đó

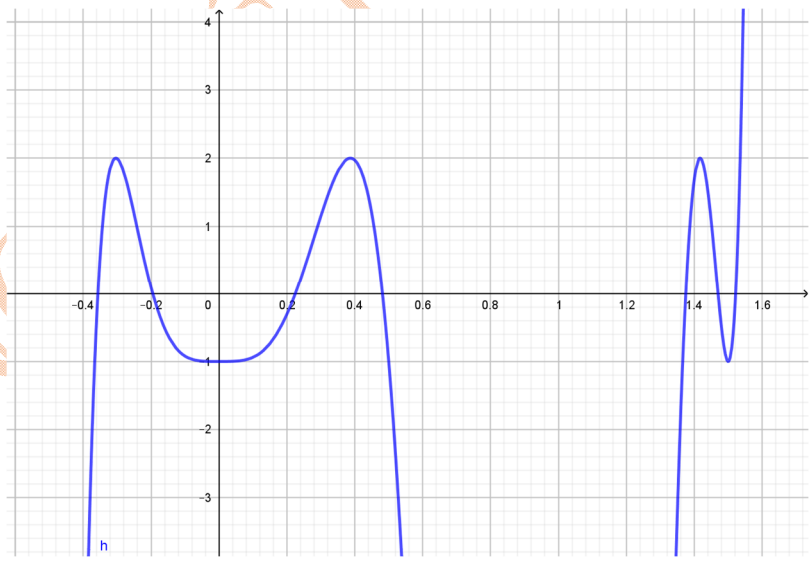
$$(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=t_3\in(0;1)\\t=t_4\in(1;2)\\t=t_5\in(2;3)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x+1)=t_3,\ t_3\in(0;1)\\f(x+1)=t_4,\ t_4\in(1;2)\\f(x+1)=t_5,\ t_5\in(2;3)\end{array}\right.\cdot$$

Phương trình $f(x+1)=t_3,\ t_3\in(0;1)$ có 3 nghiệm, phương trình $f(x+1)=t_4,\ t_4\in(1;2)$ có 3 nghiệm, phương trình $f(x+1)=t_5,\ t_5\in(2;3)$ có 1 nghiệm. Dựa vào đồ thị ta thấy các nghiệm trên là các nghiệm phân biệt. Suy ra phương trình (1) có 7 nghiệm phân biệt (*thỏa mãn*).

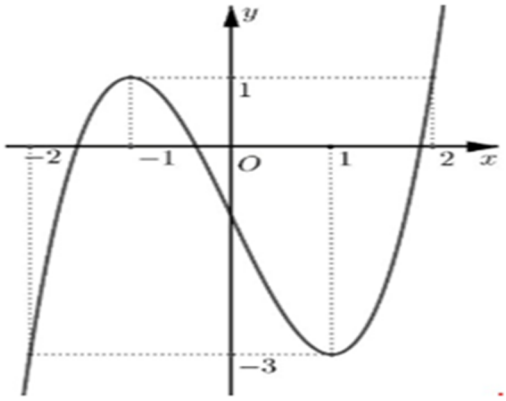
Vậy, phương trình $f(f(x+1))=m$ có ít nhất 6 nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow -1<m<2$.

Vì m nguyên nên $m\in\{0;1\}$.

Minh họa bằng đồ thị:



Câu 63. (Đặng Thành Nam Đề 10) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(f\left(x\right)-m\right)=0$ có tất cả 9 nghiệm thực phân biệt?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

* Ta có đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là a, b, c với $-2<a<-1$, $-1<b<0$, $1<c<2$.

Ta có $f\left(f\left(x\right)-m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)-m=a\\f\left(x\right)-m=b\\f\left(x\right)-m=c\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f\left(x\right)=m+a & (1)\\f\left(x\right)=m+b & (2).\\f\left(x\right)=m+c & (3)\end{array}\right.$

Nhận thấy phương trình $f\left(x\right)=k$ có nhiều nhất 3 nghiệm thực phân biệt với $-3<k<1$.

* Để phương trình $f\left(f\left(x\right)-m\right)=0$ có 9 nghiệm thực phân biệt thì các phương trình (1), (2) và (3) đều có 3 nghiệm thực phân biệt.

Khi đó $\left\{\begin{array}{l}-3<m+a<1\\-3<m+b<1\\-3<m+c<1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ll}-3-a<m<1-a & (4)\\-3-b<m<1-b & (5).\\-3-c<m<1-c & (6)\end{array}\right.$

Với $-2<a<-1$ nên $-3-a>-2$ suy ra $m>-2$.

Với $1<c<2$ nên $1-c<0$ suy ra $m<0$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=-1$.

* Với $m=-1$

+ Ta có $-3-b<-2<-1=m$ và $1-b>1>-1=m$ nên $m=-1$ thỏa mãn điều kiện (5).

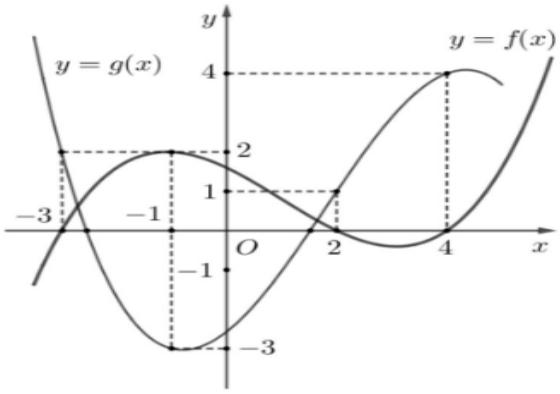
+ Có $-2<a<-1\Rightarrow1<-a<2\Rightarrow-3-a<-1=m<2<1-a$ nên điều kiện (4) thỏa mãn.

+ Có $1<c<2\Rightarrow-2<-c<-1\Rightarrow-3-c<-4<m=-1<1-c$ nên điều kiện (6) thỏa mãn.

Vậy có 1 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 64. (Đặng Thành Nam Đề 3) Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là các hàm xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên (trong đó đường cong đậm hơn là của đồ thị hàm số $y=f(x)$). Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(1-g(2x-1)\right)=m$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[-1;\dfrac{5}{2}\right]$.



A. 8. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=1-g(2x-1)$.

Với $x\in\left[-1;\dfrac{5}{2}\right]$ thì $2x-1\in[-3;4]$. Mà từ đồ thị hàm số $y=g(x)$ ta có $\min\limits_{[-3;4]} g(x)=-3$ và $\max\limits_{[-3;4]} g(x)=4$ nên $g(2x-1)\in[-3;4]$, suy ra $1-g(2x-1)\in[-3;4]$.

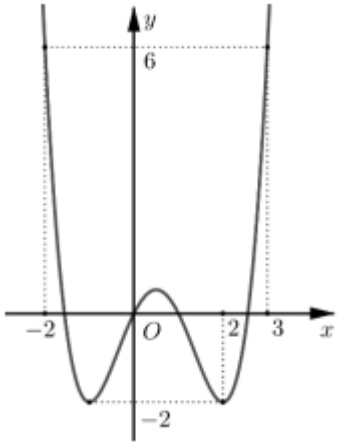
Bài toán trở thành: Tìm m để phương trình $f(t)=m$ có nghiệm t thuộc đoạn $[-3;4]$. (*)

Vì hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ nên (*) $\Leftrightarrow \min\limits_{[-3;4]} f(t)\le m\le \max\limits_{[-3;4]} f(t)$.

Kết hợp với đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta được $a\le m\le 2$, với $a=\min\limits_{[-3;4]} f(t)\in(-1;0)$.

Mà m nguyên nên $m\in\{0;1;2\}$. Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 65. (ĐH Vinh Lần 1) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(x^3-3x\right)=m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$?



A. 3. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Chọn B

Đặt $t = x^3 - 3x$, xét hàm số $t = x^3 - 3x$ trên đoạn $[-1;2]$.

Ta có $t' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 2 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $t = x^3 - 3x$ trên đoạn $[-1;2]$.

x	-1		1		2
t'		-	0	+	
t	2	↘	-2	↗	2

Từ đó bảng biến thiên trên ta thấy:

+) Nếu $t = -2$ thì $x = 1 \in [-1;2]$.

+) Nếu $t \in (-2;2]$ thì có hai nghiệm phân biệt $x \in [-1;2]$.

Do đó phương trình $f(x^3 - 3x) = m$ có 6 nghiệm x phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$ khi phương trình $f(t) = m$ có 3 nghiệm t phân biệt thuộc khoảng $(-2;2]$ $(*)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ đã cho và m là số nguyên ta thấy $m = 0$ hoặc $m = -1$ thỏa mãn $(*)$.

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán tổng quát:

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị cho trước là (C) (hoặc cho trước bảng biến thiên). Biện luận theo tham số m số nghiệm của phương trình $f[n.g(x) + p] = h(m)$ trên tập D cho trước ($D \subseteq \mathbb{R}$); trong đó n, p là các số thực; $h(m)$ là biểu thức với tham số m.

Cách giải:

Bước 1: Đặt $t = n.g(x) + p$. Khi đó $f[n.g(x) + p] = h(m) \Rightarrow f(t) = h(m)$.

Bước 2:

+) Tìm miền giá trị D' của t ứng với $x \in D$.

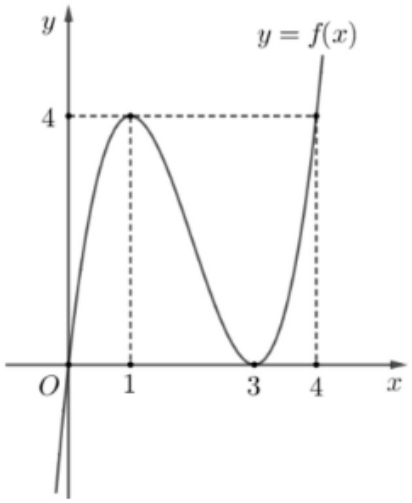
+) Chỉ ra mối quan hệ giá trị tương ứng giữa $t \in D'$ và $x \in D$.

Bước 3: Dựa vào đồ thị (C) (hoặc bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$), biện luận theo m số nghiệm $t \in D'$ của phương trình $f(t) = h(m)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Bước 4: Dựa vào mối quan hệ giữa x và t ở Bước 2 ta có biện luận số nghiệm $x\in D$ của phương trình $f\left[n.g\left(x\right)+p\right]=h\left(m\right)$.

Câu 66. (Đặng Thành Nam Đề 10) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên dưới



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(x\left(x-3\right)^2\right)=m$ có 9 nghiệm thực thuộc đoạn $\left[0;4\right]$?

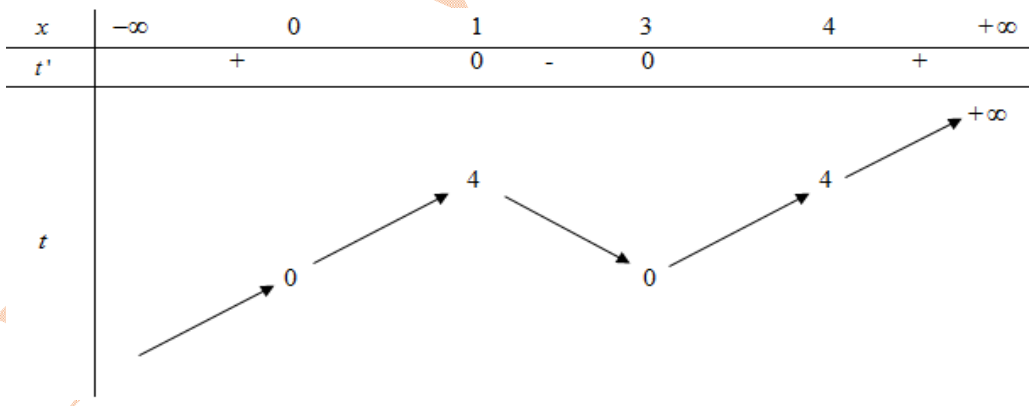
A. 3. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=x\left(x-3\right)^2$ khi đó $t'=0\Leftrightarrow\left(x-3\right)^2+2x\left(x-3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của t như sau



+ Nếu $\left[\begin{array}{l}t<0\\t>4\end{array}\right.$ phương trình $t=x\left(x-3\right)^2$ không có nghiệm thuộc đoạn $\left[0;4\right]$.

+ Nếu $\left[\begin{array}{l}t=0\\t=4\end{array}\right.$ phương trình $t=x\left(x-3\right)^2$ có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $\left[0;4\right]$.

+ Nếu $0<t<4$ phương trình $t=x\left(x-3\right)^2$ có ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[0;4\right]$.

Vậy phương trình $f\left(x\left(x-3\right)^2\right)=m$ có 9 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[0;4\right]\Leftrightarrow f\left(t\right)=m$ có ba nghiệm thực phân biệt $t\in\left(0;4\right)\Leftrightarrow 0<m<4\Rightarrow m\in\left\{1,2,3\right\}$.

Câu 67. (KSCL-Lần-2-2019-THPT-Nguyễn-Đức-Cảnh-Thái-Bình) Cho $f(x)=x^3-3x^2+1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2019.f\left(f(x)\right)=m$ có 7 nghiệm phân biệt?

A. 4037. **B.** 8076. **C.** 8078. **D.** 0.

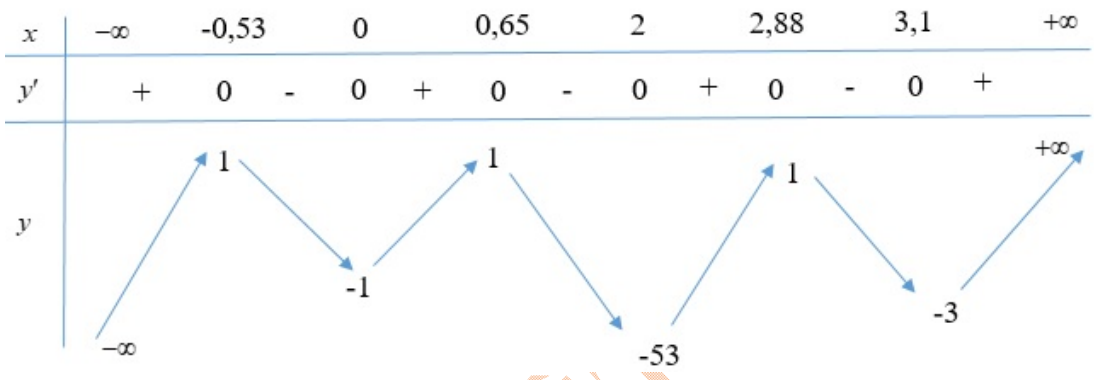
Lời giải

Chọn A

Đặt $y=f\left(f(x)\right)=\left(x^3-3x^2+1\right)^3-3\left(x^3-3x^2+1\right)^2+1$.

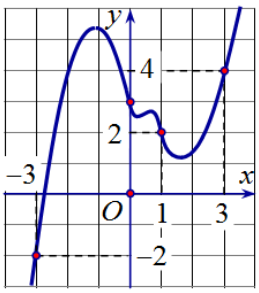
Ta có: $y'=9x(x-2).\left(x^3-3x^2+1\right).\left(x^3-3x^2-1\right)$.

Bảng biến thiên:



Từ bảng biên thiên ta thấy phương trình $f\left(f(x)\right)=\dfrac{m}{2019}$ có 7 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-1<\dfrac{m}{2019}<1\Leftrightarrow -2019<m<2019$. Do m nguyên, suy ra có 4037 giá trị của m.

Câu 68. (ĐH Vinh Lần 1) ***(Phát triển từ đề thi đại học 2018)*** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình dưới



Tìm m để bất phương trình $m+x^2+4\ge 2\left(f(x+1)-2x\right)$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-4;2]$.

A. $m\ge 2f(0)-1$. **B.** $m\ge 2f(-3)-4$. **C.** $m\ge 2f(3)-16$. **D.** $m\ge 2f(1)-4$.

Lời giải

Chọn D

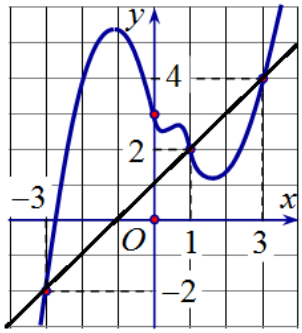
$m+x^2+4\ge 2\left(f(x+1)-2x\right)\Leftrightarrow m\ge 2f(x+1)-(x+2)^2$

Đặt $g(x)=2f(x+1)-(x+2)^2$

Ta có $g'(x)=2f'(x+1)-2(x+2)=2\left(f'(x+1)-(x+2)\right)$. $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x+1)=x+2$

Đặt $t=x+1$ ta được $f'(t)=t+1$ (1)

(1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f'(t)$ và đường thẳng d : $y=t+1$ (hình vẽ)



Dựa vào đồ thị của $f'(t)$ và đường thẳng $y=t+1$ ta có

ta có $(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-3\\t=1\\t=3\end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l}x=-4\\x=0\\x=2\end{array}\right.$.

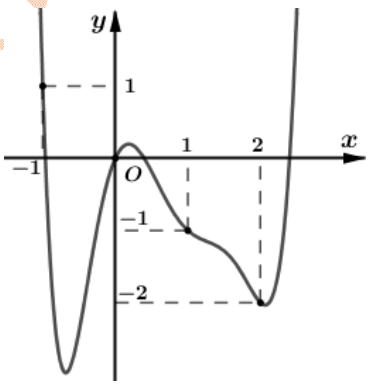
Xét hàm $t=t(x)=x+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ suy ra bảng biến thiên của hàm số $g(x)$:

x	-4		0		2
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$g(x)$		↗		↘	

Bất phương trình $m+x^2+4\ge 2\left(f\left(x+1\right)-2x\right)$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-4;2]$.

$\Leftrightarrow m\ge g(0)\Leftrightarrow m\ge 2f(1)-4$.

Câu 69. (ĐH Vinh Lần 1) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Tìm m để bất phương trình $m-x^2\le 2f\left(x+2\right)+4x+3$ nghiệm đúng với mọi $x\in(-3;+\infty)$.

A. $m\ge 2f(0)-1$. **B.** $m\le 2f(0)-1$. **C.** $m\le 2f(-1)$. **D.** $m\ge 2f(-1)$.

Lời giải

Chọn B

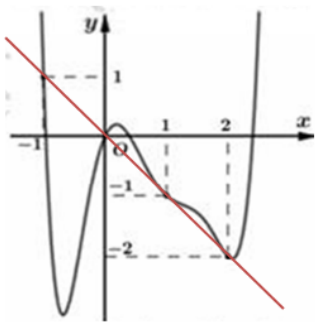
Ta có $m-x^2\le 2f\left(x+2\right)+4x+3\Leftrightarrow m\le 2f\left(x+2\right)+x^2+4x+3$.

Đặt $g\left(x\right)=2f\left(x+2\right)+x^2+4x+3$. Ta có $g'\left(x\right)=2f'\left(x+2\right)+2x+4$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x+2)=-(x+2)$.

Đặt $t=x+2$ ta được $f'(t)=-t$. (1)

(1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f'(t)$ và đường thẳng $d: y=-t$ (hình vẽ)



Dựa vào đồ thị của $f'(t)$ và đường thẳng $y=-t$ ta có

ta có $f'(t)=-t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=0 \\ t=1 \\ t=2 \end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-2 \\ x=-1 \\ x=0 \end{array}\right.$.

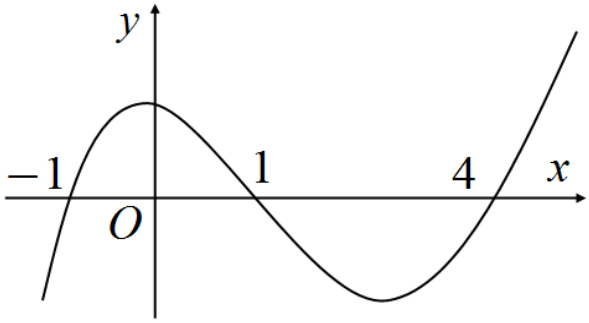
Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$.

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	
$g(x)$		↗		↘		↗		↗		↗	

Bất phương trình $m \le 2f(x+2)+(x+1)(x+3)$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-3;+\infty)$

$\Leftrightarrow m \le g(-2) \Leftrightarrow m \le 2f(0)-1$.

Câu 70. (Sở Cần Thơ 2019) Cho hàm số $y=f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$, trong đó $m, n, p, q, r \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Số nghiệm của phương trình $f(x)=16m+8n+4p+2q+r$ là



A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

* Dựa vào đồ thị ta có $m>0$ và

$f'(x)=4m(x+1)(x-1)(x-4).$

$=4mx^3-16mx^2-4mx+16m.$

* Mà $f'(x)=4mx^3+3nx^2+2px+q$. Suy ra $\begin{cases} n=-\dfrac{16}{3}m \\ p=-2m \\ q=16m \end{cases}$

* Phương trình $f(x)=16m+8n+4p+2q+r$

$\Leftrightarrow mx^4-\dfrac{16}{3}mx^3-2mx^2+16mx+r=16m-\dfrac{128}{3}m-8m+32m+r$

$\Leftrightarrow m\left(x^4-\dfrac{16}{3}x^3-2x^2+16x+\dfrac{8}{3}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^3-\dfrac{10}{3}x^2-\dfrac{26}{3}x-\dfrac{4}{3}=0 \end{array}\right.$.

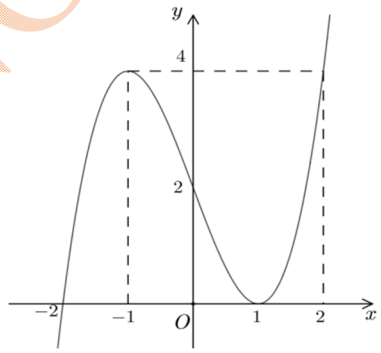
Phương trình $x^3-\dfrac{10}{3}x^2-\dfrac{26}{3}x-\dfrac{4}{3}=0$ có 3 nghiệm phân biệt khác 2.

Vậy phương trình $f(x)=16m+8n+4p+2q+r$ có 4 nghiệm.

Vậy với $x\in(-\infty;-2)$ thì ta có: $\begin{cases} 3x^2-1>0 \\ f'(x^3-x)<0 \end{cases} \Rightarrow g'(x)<0$.

$\Rightarrow$ với $x\in(-\infty;-2)$ thì hàm số $g(x)$ nghịch biến.

Câu 71. (CHUYÊN HUỲNH MẪN ĐẠT 2019 lần 1) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương m để phương trình $3f(x)=m\sqrt{9-x^2}$ có 3 nghiệm

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

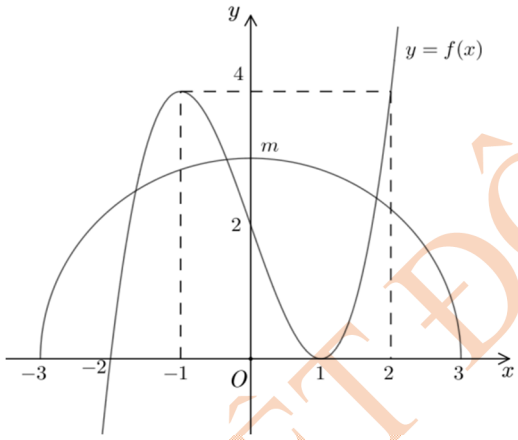
Điều kiện: $9-x^2\ge 0\Leftrightarrow -3\le x\le 3$.

Từ giả thiết $3f(x)=m\sqrt{9-x^2}\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{m}{3}\sqrt{9-x^2}$ và m nguyên dương.

Đặt $y=\frac{m}{3}\sqrt{9-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y\ge 0 \\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{m^2}=1 \end{cases}$

Đồ thị $y=\frac{m}{3}\sqrt{9-x^2}$ là một nửa của (E) phần đồ thị nằm phía trên Ox cắt trục Ox tại hai điểm $A'(-3;0)$, $A(3;0)$ và cắt tia Oy tại $B(0;m)$.

Số nghiệm phương trình $3f(x)=m\sqrt{9-x^2}$ là số giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=\frac{m}{3}\sqrt{9-x^2}$.



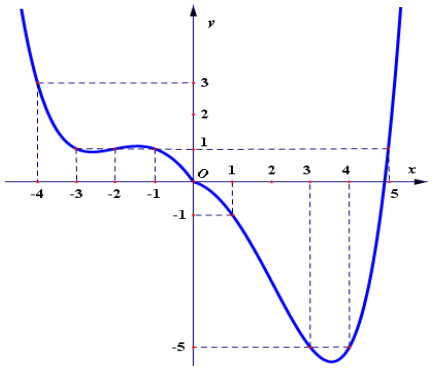
Dựa vào hình vẽ, ta thấy đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=\frac{m}{3}\sqrt{9-x^2}$ cắt nhau tại 3 điểm khi và chỉ khi điểm $M(-1;4)$ nằm ngoài (E)

$\Leftrightarrow \frac{(-1)^2}{9}+\frac{4^2}{m^2}>1 \Leftrightarrow -3\sqrt{2}<m<3\sqrt{2}$.

Kết hợp với điều kiện m nguyên dương nên $m\in\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$

Vậy có 4 giá trị m nguyên dương thỏa mãn đề bài.

Câu 72. (Hoàng Hoa Thám Hưng Yên) Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2.f\left(3-3\sqrt{-9x^2+30x-21}\right)=m-2019$ có nghiệm.



A. 15. **B.** 14. **C.** 10. **D.** 13.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x \in \left[1;\frac{7}{3}\right]$.

Xét phương trình: $2.f\left(3-3\sqrt{-9x^2+30x-21}\right)=m-2019\ (1)$.

Ta có: $-9x^2+30x-21=4-(3x-5)^2 \Rightarrow 0 \le \sqrt{4-(3x-5)^2} \le 2 \Rightarrow -3 \le 3-3\sqrt{4-(3x-5)^2} \le 3$.

Đặt $t=3-3\sqrt{-9x^2+30x-21}$, $t \in [-3;3]$.

Khi đó, phương trình (1) trở thành: $2.f(t)=m-2019 \Leftrightarrow f(t)=\frac{m-2019}{2}\ (2)$.

Phương trình (1) có nghiệm $x \in \left[1;\frac{7}{3}\right] \Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $t \in [-3;3]$.

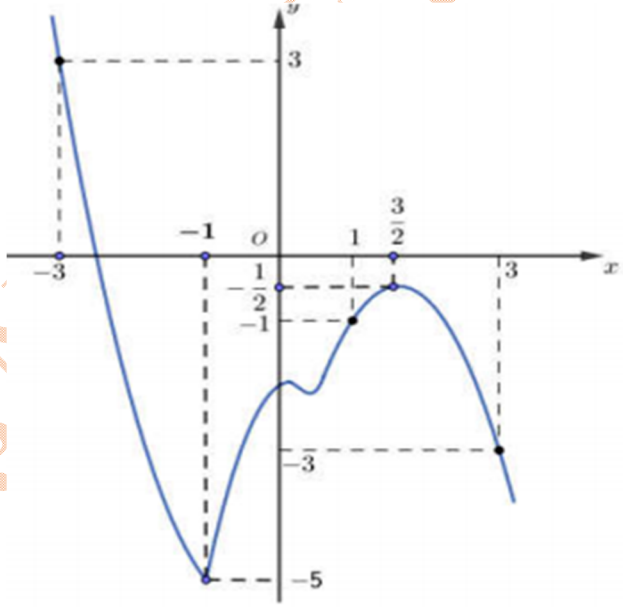
Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f(x)$, phương trình (2) có nghiệm $t \in [-3;3]$ khi và chỉ khi

$-5 \le \frac{m-2019}{2} \le 1 \Leftrightarrow 2009 \le m \le 2021$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{2009, 2010, ..., 2021\}$.

Vậy số giá trị nguyên của m là: $2021-2009+1=13$.

Câu 73. (CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ HÒA BÌNH LẦN 4 NĂM 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)+1+m^2=0$ có nghiệm là



A. 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=3-4\sqrt{6x-9x^2}=3-4\sqrt{1-(3x-1)^2} \Rightarrow t \in [-1;3]$.

Dựa vào đồ thị ta có khi $t \in [-1;3]$ thì $f(t) \in \left[-5;-\frac{1}{2}\right]$.

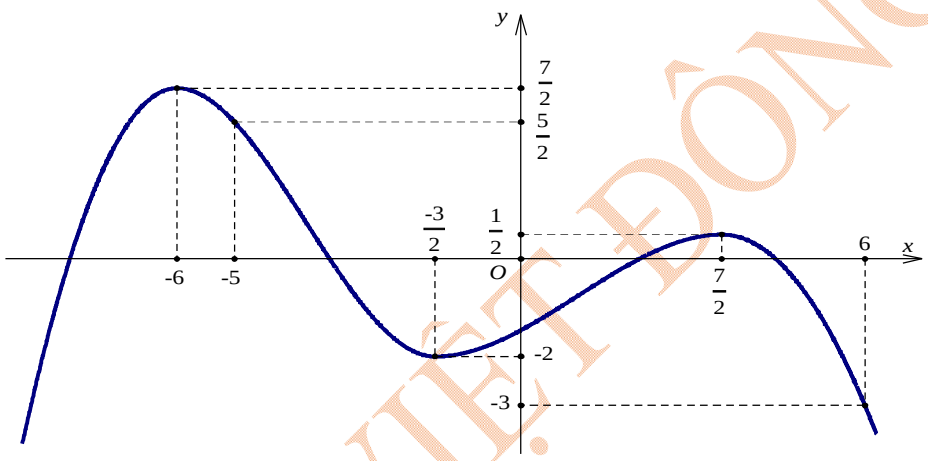
Khi đó phương trình $f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)+1+m^2=0$ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $f(t)=-1-m^2$ có nghiệm thuộc $[-1;3]$.

$\Leftrightarrow -5\le -1-m^2\le -\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le m^2\le 4\Leftrightarrow -2\le m\le 2$.

Kết hợp điều kiện $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-2;-1;0;1;2\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 74. (CổLoa Hà Nội) Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{408-x}+\sqrt{392+x}-34\right)=m$ có đúng 6 nghiệm phân biệt?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

ĐK: $-392\le x\le 408$.

Đặt $t=\sqrt{408-x}+\sqrt{392+x}-34$.

$\Rightarrow t'=\frac{-1}{2\sqrt{408-x}}+\frac{1}{2\sqrt{392+x}}=\frac{\sqrt{408-x}-\sqrt{392+x}}{2\sqrt{(408-x)(392+x)}}$.

$t=0\Leftrightarrow \sqrt{408-x}-\sqrt{392+x}=0\Leftrightarrow x=8$.

$t(-392)=t(408)=20\sqrt{2}-34\simeq -5,71$;

$t(8)=6$.

$\Rightarrow -5,71\le t\le 6$.

Phương trình đã cho trở thành $f(t)=m\ (*)$ với $t\in[-5,71;6]$.

Với mỗi $t\in[-5,71;6)$ cho 2 giá trị x.

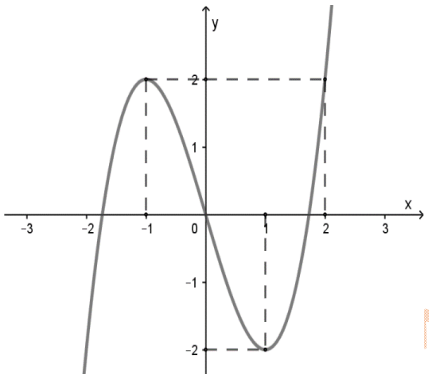
Với $t=6$ cho 1 giá trị x.

Do đó phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có 3 nghiệm phân biệt $t \in [-5,71;6)$

$\Leftrightarrow -2 < m < \frac{1}{2}$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = -1 \vee m = 0$.

Câu 75. (Sở Thanh Hóa 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{2f(\cos x)}\right) = m$ có nghiệm $x \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

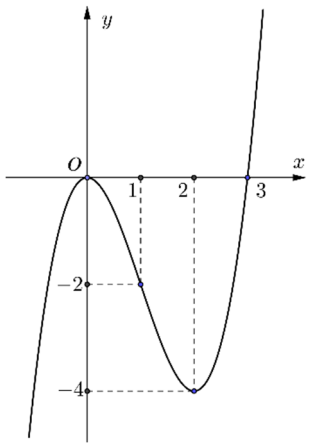
Ta có $x \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right) \Rightarrow \cos x \in (-1;0]$

Từ đồ thị suy ra $f(\cos x) \in [0;2) \Rightarrow \sqrt{2f(\cos x)} \in [0;2) \Rightarrow f\left(\sqrt{2f(\cos x)}\right) \in [-2;2)$

Do đó phương trình $f\left(\sqrt{2f(\cos x)}\right) = m$ có nghiệm $x \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right)$ thì $m \in [-2;2)$

Do m nguyên nên $m \in \{-2;-1;0;1\}$.

Câu 76. (NGÔ SĨ LIÊN BẮC GIANG LẦN IV NĂM 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên trên R có đồ thị như hình vẽ.



ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $7f\left(5-2\sqrt{1+3cosx}\right)=3m-7$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$?

A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=5-2\sqrt{1+3\cos x}$ (1). Vì $x\in\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow 0\le\cos x\le 1\Rightarrow t\in[1;3]$

Phương trình đã cho trở thành $f(t)=\frac{3m-7}{7}$ (2)

Nhận xét:

+) Với $\cos x=1\Rightarrow t=1$ nên khi $t=1$ thì (1) có một nghiệm x thuộc $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

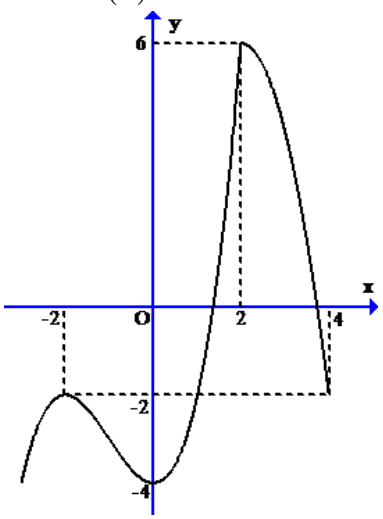
+) Với mỗi $t\in(1;3]$ thì (1) có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thuộc $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Như vậy dựa vào đồ thị hàm số ta thấy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ khi phương trình (2) có một nghiệm $t\in(1;3]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{3m-7}{7}=-4\\-2<\frac{3m-7}{7}\le 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-7\\\frac{-7}{3}<m\le\frac{7}{3}\end{array}\right.$.

Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-7;-2;-1;0;1;2\}$ nên đáp án là

C.

Câu 77. (ĐH Vinh Lần 1) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2}+1\right)+x=m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-2;2]$?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. 11. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2}+1\right)+x=m \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{2}+1\right)+6\left(\frac{x}{2}+1\right)=3m+6 \Leftrightarrow f\left(t\right)+6t=3m+6$

Với $t=\frac{x}{2}+1$ và $x\in[-2;2]$ nên ta có $t\in[0;2]$.

Xét hàm số $y=f\left(t\right)+6t$ trên $[0;2]$.

Ta có $y'=f'\left(t\right)+6>0,\ \forall t\in[0;2]$.

Phương trình có nghiệm

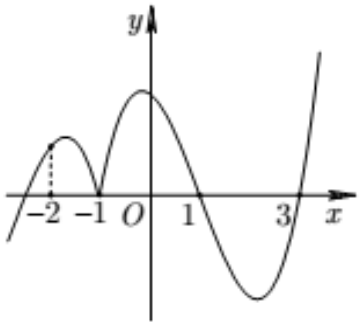
$\Leftrightarrow \min\limits_{[0;2]}\left(f'\left(t\right)+6t\right)\le 3m+6\le \max\limits_{[0;2]}\left(f'\left(t\right)+6t\right) \Leftrightarrow f\left(0\right)\le 3m+6\le f\left(2\right)+12$

$\Leftrightarrow -4\le 3m+6\le 6+12$

$\Leftrightarrow -\frac{10}{3}\le m\le 4$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$.

Câu 78. (Chuyên Vinh Lần 2) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên m để bất phương trình $\left(mx+m^2\sqrt{5-x^2}+2m+1\right)f(x)\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-2;2]$?



A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x)=mx+m^2\sqrt{5-x^2}+2m+1$.

Phương trình $f(x)=0$ có nghiệm $x=1$ là nghiệm bội lẻ.

Vì $g(x).f(x)\ge 0,\forall x\in[-2;2]$

Suy ra $g(1)=0\Leftrightarrow 2m^2+3m+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-\frac{1}{2}(L) \end{array}\right.$.

Với $m=-1,\ g(x)=-x+\sqrt{5-x^2}-1.$

Ta có: $\begin{cases} f(x)\ge 0 \\ g(x)\ge 0 \end{cases}, \forall x\in[-2;1]$; $\begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)=\dfrac{4-2x^2-2x}{\sqrt{5-x^2}+x+1}<0 \end{cases}, \forall x\in(1;2].$

Vậy với $m=-1$, ta có $g(x).f(x)\ge 0, \forall x\in[-2;2]$.

NHẬN XÉT:

Bài toán tổng quát: *Tìm tham số* m *sao cho* $f(x,m)g(x)\ge 0$, $\forall x\in(a;b)$

Với $y=f(x,m), y=g(x)$ *hàm số liên tục trên* $(a;b)$.

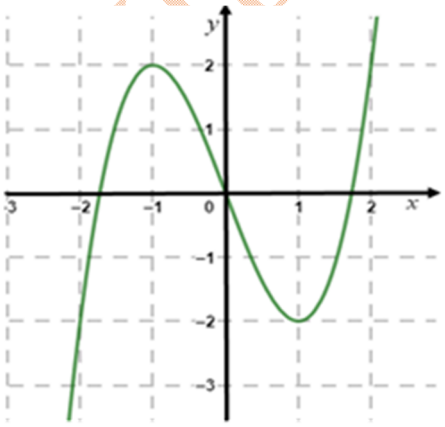
Phân tích:

+ Mấu chốt bài toán kiểm soát nghiệm bội chẵn, lẻ của $f(x,m)g(x)=0$ *trên* $(a;b)$

Tìm tập nghiệm $g(x)=0$ $S=S_1\cup S_2$ *với* S_1 *là tập nghiệm bội lẻ và với* S_2 *là tập nghiệm bội chẵn.*

Yêu cầu bài toán suy ra $f(\alpha,m)=0, \forall \alpha\in S_1$. *Đây cũng chính là chìa khóa xây dựng lớp bài toán.*

Câu 79. (Trung-Tâm-Thanh-Tường-Nghệ-An-Lần-2) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình $f\left(f\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)\right)=m$ có nghiệm là



A. $[-1;2]$. **B.** $[0;2]$. **C.** $[-1;1]$. **D.** $[-2;2]$.

Lời giải

Chọn D

Vì: $x^2+1\ge 2|x| \Rightarrow \dfrac{2|x|}{x^2+1}\le 1 \Rightarrow -1\le \dfrac{2x}{x^2+1}\le 1$

Từ đồ thị thấy

$x\in[-1;1]\Rightarrow f(x)\in[-2;2]$

$x\in[-2;2]\Rightarrow f(x)\in[-2;2]$

Xét phương trình

$f\left(f\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)\right)=m$. Đặt $t=\frac{2x}{x^2+1}$; $u=f\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$.

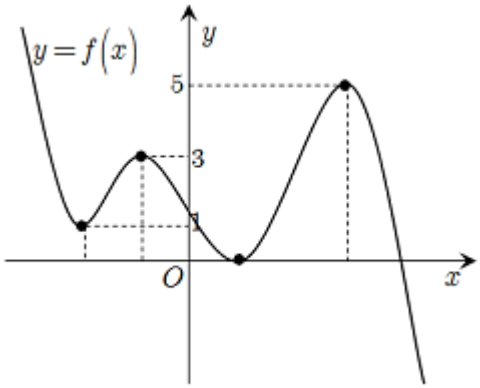
Vì $t\in[-1;1]\Rightarrow u\in[-2;2]\Rightarrow f(u)\in[-2;2]$

Vậy để phương trình ban đầu có nghiệm thì $f(u)=m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-2;2]$

nên $m\in[-2;2]$.

Câu 80. (Thị Xã Quảng Trị) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị của tham số m để phương trình $\frac{m^3+m}{\sqrt{f^2(x)+1}}=f^2(x)+2$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt.

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=\sqrt{26}$. **C.** $m=\sqrt{10}$. **D.** $m=1$.



Lời giải

Chọn B

Phương trình tương đương $m^3+m=\left(\sqrt{f^2(x)+1}\right)^3+\sqrt{f^2(x)+1}$ (*)

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=3t^2+1>0\ \forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

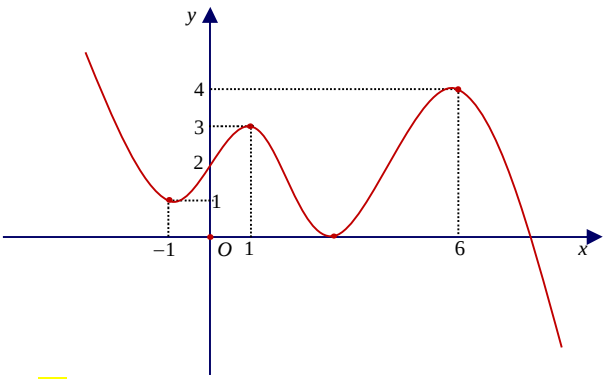
Từ phương trình (*) $\Rightarrow m=\sqrt{f^2(x)+1}$ (Đk $m\ge 1$). Khi đó phương trình

$$m=\sqrt{f^2(x)+1}\Leftrightarrow f^2(x)=m^2-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=\sqrt{m^2-1}\ (1)\\ f(x)=-\sqrt{m^2-1}\ (2)\end{array}\right.$$

Nếu $m=1$ ta có $f(x)=0$ phương trình có 2 nghiệm nên $m=1$ loại.

Nếu $m>1$ phương trình (2) có đúng một nghiệm, như vậy để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt thì phương trình (1) có đúng hai nghiệm phân biệt suy ra $\sqrt{m^2-1}=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\sqrt{26}\\ m=-\sqrt{26}\end{array}\right.$, do $m>1$ nên ta chọn $m=\sqrt{26}$.

Câu 81. (Yên Phong 1) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt $\frac{4m^3+m}{\sqrt{2f^2(x)+5}}=f^2(x)+3$.



A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Phương trình đã cho tương đương $4m^3+m=\left[f^2(x)+3\right]\sqrt{2f^2(x)+5}$

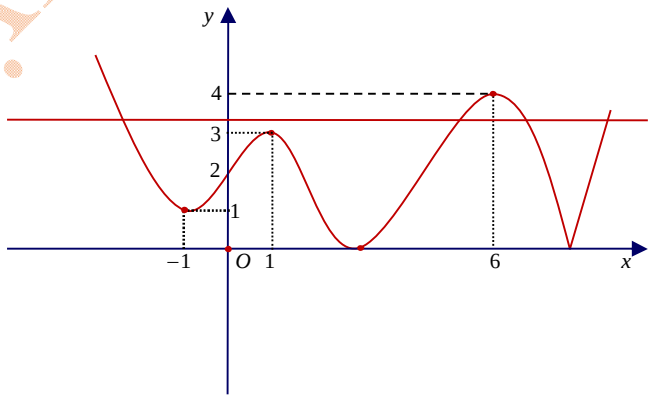
$\Leftrightarrow 8m^3+2m=\left[2f^2(x)+5+1\right]\sqrt{2f^2(x)+5} \Leftrightarrow (2m)^3+2m=\left(\sqrt{2f^2(x)+5}\right)^3+\sqrt{2f^2(x)+5}$.

Xét hàm số $g(a)=a^3+a$, $a\in\mathbb{R}$. Ta có $g'(a)=3a^2+1>0$, $\forall a\in\mathbb{R}$.

Do đó, $g(a)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mặt khác, $g(2m)=g\left(\sqrt{2f^2(x)+5}\right)\Leftrightarrow 2m=\sqrt{2f^2(x)+5}$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge 0\\ 2f^2(x)=4m^2-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge 0\\ 4m^2-5\ge 0\\ |f(x)|=\sqrt{\dfrac{4m^2-5}{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge\dfrac{\sqrt{5}}{2}\\ |f(x)|=\sqrt{\dfrac{4m^2-5}{2}}\end{cases}.$$

Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y=\sqrt{\dfrac{4m^2-5}{2}}$ cắt đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ tại ba điểm phân biệt.



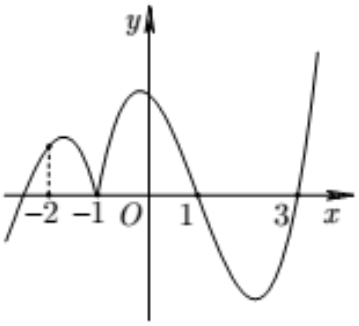
Từ đó, $\sqrt{\dfrac{4m^2-5}{2}}=4 \Leftrightarrow 4m^2-5=32 \Leftrightarrow m=\pm\dfrac{\sqrt{37}}{2}$.

Đối chiếu với điều kiện, ta thu được $m=\dfrac{\sqrt{37}}{2}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

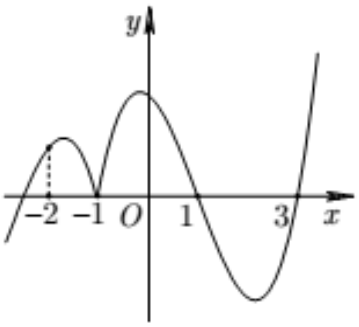
Vậy có đúng 1 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 82. (Chuyên Vinh Lần 2) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\sqrt{\left(mx+m^2\dfrac{4-x^2}{1+\sqrt{5-x^2}}+m^2+2m+1\right)f(x)}$ có tập xác định $[-2;2]$



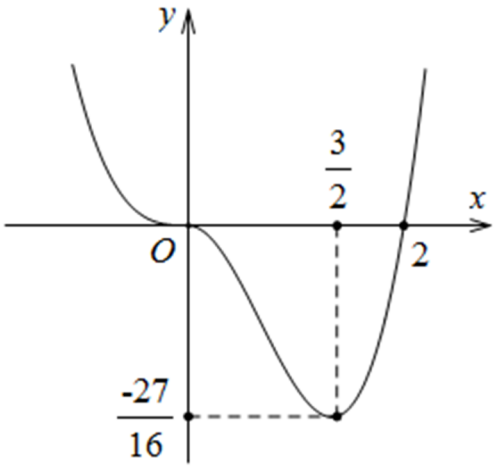
A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3

Câu 83. (Chuyên Vinh Lần 2) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. S là tập các số nguyên m để bất phương trình $\left(m^3.\sqrt{2x^2-2x+4}-mx+2m+3\right)\left(f(x)+2019f^{2019}(x)\right)\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-2;2019)$. Tổng các phần tử của S là



A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2

Câu 84. (THPT Sơn Tây Hà Nội 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi A là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|2\sin x\right|\right)=f\left(\frac{m}{2}\right)$ có 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\pi;2\pi\right]$. Tính tổng tất cả các phần tử của A.

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=2\sin x$ với $x\in\left[-\pi;2\pi\right]$.

$t'=2\cos x$.

$t'=0\Leftrightarrow 2\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

$x\in\left[-\pi;2\pi\right]\Rightarrow x\in\left\{-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right\}$.

Bảng biến thiên

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
t'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
t	0		-2		2		-2		0

Từ đó, ta suy ra được bảng biến thiên của $u=\left|2\sin x\right|$ là

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
u'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
u	0		2		0		2		0		2		0

Với $u=2$ ta có 3 nghiệm phân biệt $x\in\left[-\pi;2\pi\right]$.

Với $u=0$ ta có 4 nghiệm phân biệt $x\in\left[-\pi;2\pi\right]$.

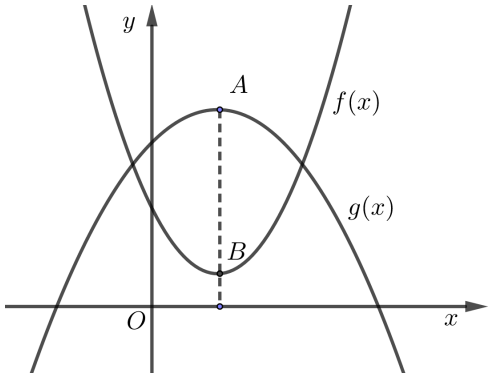
Với $0<u<2$ ta có 6 nghiệm phân biệt $x\in\left[-\pi;2\pi\right]$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ $f(u)=f\left(\frac{m}{2}\right)$ có 2 nghiệm phân biệt trong khoảng $(0;2)$

$$\Leftrightarrow -\frac{27}{16}<f\left(\frac{m}{2}\right)<0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0<\frac{m}{2}<2 \\ \frac{m}{2}\neq\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<m<4 \\ m\neq 3 \end{cases}.$$

Vậy $A=\{1;2\}$. Tổng tất cả các phần tử của A bằng 3.

Câu 85. (Sở Quảng NamT) Cho hai hàm đa thức $y=f(x), y=g(x)$ có đồ thị là hai đường cong ở hình vẽ bên. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đúng một điểm cực trị là B, đồ thị hàm số $y=g(x)$ có đúng một điểm cực trị là A và $AB=\frac{7}{4}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-5;5)$ để hàm số $y=\left|\left|f(x)-g(x)\right|+m\right|$ có đúng 5 điểm cực trị ?



A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Gọi x_0 là điểm cực trị của $f(x)$ và $g(x)$. Dựa vào đồ thị ta có bảng dấu của $f'(x)$ và $g'(x)$.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-

Đặt $h(x)=f(x)-g(x)$; $x\in\mathbb{R}$. Lúc đó, $h'(x)=f'(x)-g'(x)=0\Leftrightarrow x=x_0$.

Ta có BBT của $h(x)$ là:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{7}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT của $h(x)$, phương trình $h(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt a và b $(a<b)$.

Lúc đó, ta có BBT của hàm số $y=|h(x)|$ như sau:

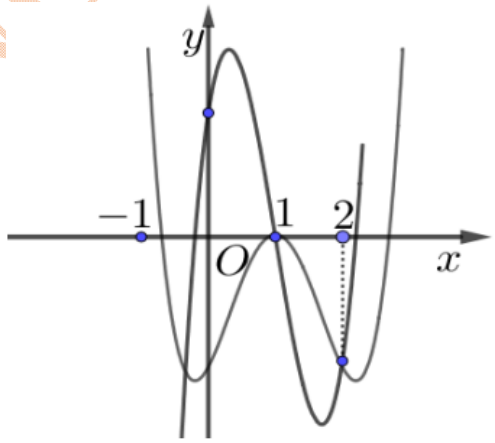
x	$-\infty$		a		x_0		b		$+\infty$
y'		$-$		$+$	0	$-$		$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{7}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT hàm số $y=|h(x)|$ thì hàm số $y=\left|\left|f(x)-g(x)\right|+m\right|$ có 5 cực trị khi và chỉ khi $m\geq\frac{7}{4}$.

Vì $m\in(-5;5)$ và $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=2;3;4$.

Vậy có 3 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 86. (Trung-Tâm-Thanh-Tường-Nghệ-An-Lần-2) Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức với hệ số thực. Hình vẽ bên dưới là một phần đồ thị của hai hàm số: $y=f(x)$ và $y=f'(x)$.

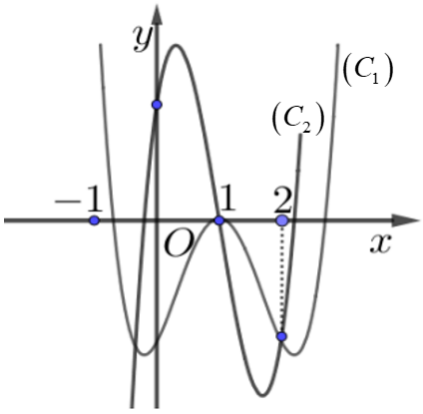


Tập các giá trị của tham số m để phương trình $f(x)=me^x$ có hai nghiệm phân biệt trên $[0;2]$ là nửa khoảng $[a;b)$. Tổng $a+b$ gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. -0.81. **B.** -0.54. **C.** -0.27. **D.** 0.27.

Lời giải

Chọn C



Nhận xét: Đồ thị hàm $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại điểm x_0 thì x_0 là điểm cực trị của hàm $y=f(x)$.

Dựa vào hai đồ thị đề bài cho, thì (C_1) là đồ thị hàm $y=f(x)$ và (C_2) là đồ thị hàm $y=f'(x)$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=me^x$ ta có:

$$f(x)=me^x \Leftrightarrow m=\frac{f(x)}{e^x}.$$

Đặt $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$ ta có:

$$g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}.$$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=f(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=x_0\in(-1;0) \end{array}\right.$$

Dựa vào đồ thị của hai hàm số: $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ ta được:

x	0		1		2
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$	$f(0)$	↗	0	↘	$\frac{f(2)}{e^2}$

Yêu cầu bài toán ta suy ra: $\frac{f(2)}{e^2}\le m<0$ (dựa vào đồ thị ta nhận thấy $f(0)=f(2)\approx -2$)

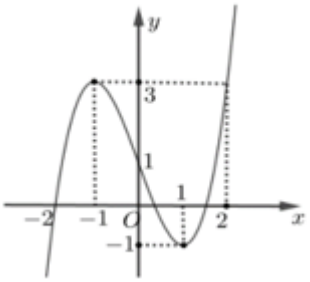
$\Leftrightarrow -0,27\le m<0$.

Suy ra: $a=-0,27, b=0$.

Vậy $a+b=-0,27$.

Câu 87. (KIM LIÊN HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 03) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f\left(3-\sqrt{4-x^2}\right)=m$ có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right]$. Tìm tập S.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



A. $S=\left(-1;f\left(3-\sqrt{2}\right)\right]$.
B. $S=\left(f\left(3-\sqrt{2}\right);3\right]$.
C. $S=\varnothing$.
D. $S=[-1;3]$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $f\left(3-\sqrt{4-x^2}\right)=m$. Điều kiện $4-x^2\ge 0\Leftrightarrow -2\le x\le 2$.

Đặt $t=3-\sqrt{4-x^2}$ với $x\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right]$. Ta có $t'=\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ và $t'=0\Leftrightarrow x=0$.

Bảng biến thiên của hàm số $t=3-\sqrt{4-x^2}$ trên đoạn $\left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right]$

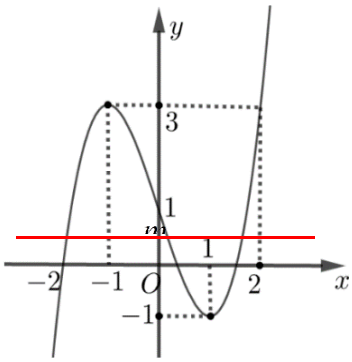
x	$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{3}$
t'		$-$	0	$+$	
t	$3-\sqrt{2}$	↘	1	↗	2

Nhận xét:

+) Mỗi $t\in\left(1;3-\sqrt{2}\right]$ cho ta 2 giá trị $x\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right]$

+) Mỗi $t\in\left(3-\sqrt{2};2\right]$ cho ta một giá trị $x\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right]$

+) $t=1$ cho ta 1 nghiệm duy nhất $x=0$.

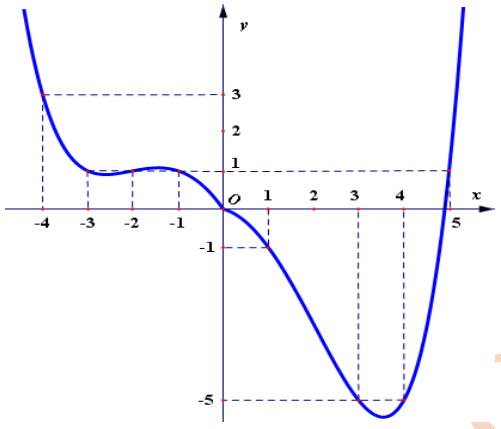


Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta suy ra đường thẳng $y=m$ chỉ cắt đồ thị hàm số $y=f(t)$ nhiều nhất tại một điểm trên $[1;2]$.

Do đó, để phương trình $f\left(3-\sqrt{4-x^2}\right)=m$ có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right]$ thì $m\in\left(-1;f\left(3-\sqrt{2}\right)\right]$

Vậy, các giá trị của m cần tìm là $m\in\left(-1;f\left(3-\sqrt{2}\right)\right]$.

Câu 88. (GIỮA-HKII-2019-NGHĨA-HƯNG-NAM-ĐỊNH) Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2.f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)=m-3$ có nghiệm.



A. 13. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Điều kiện: $6x-9x^2\ge 0\Leftrightarrow 0\le x\le\frac{2}{3}$.

Với $x\in\left[0;\frac{2}{3}\right]$, ta có $0\le\sqrt{6x-9x^2}=\sqrt{1-(1-3x)^2}\le 1\Leftrightarrow 0\ge -4\sqrt{6x-9x^2}\ge -4$

$\Leftrightarrow 3\ge 3-4\sqrt{6x-9x^2}\ge -1$.

Dựa vào đồ thị ta có: $-5\le f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)\le 1\Rightarrow -10\le 2.f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)\le 2$.

Khi đó phương trình $2.f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)=m-3$ có nghiệm

$\Leftrightarrow -10\le m-3\le 2\Leftrightarrow -7\le m\le 5$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;5\}$, có 13 giá trị của m.

Cách 2:

Điều kiện: $6x-9x^2\ge 0\Leftrightarrow 0\le x\le\frac{2}{3}$.

Đặt $t=3-4\sqrt{6x-9x^2}=g(x),\ x\in\left[0;\frac{2}{3}\right]$ suy ra $g'(x)=\frac{12(3x-1)}{\sqrt{6x-9x^2}}\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$

$\underset{x\in\left[0;\frac{2}{3}\right]}{Max}\ g(x)=g(0)=g\left(\frac{2}{3}\right)=3;\ \underset{x\in\left[0;\frac{2}{3}\right]}{Min}\ g(x)=g\left(\frac{1}{3}\right)=-1$ suy ra $t\in[-1;3]$.

Phương trình $2.f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)=m-3$ có nghiệm $\Leftrightarrow 2.f(t)=m-3\Leftrightarrow f(t)=\frac{m-3}{2}, t\in[-1;3]$ có nghiệm.

$\Leftrightarrow -5\le\frac{m-3}{2}\le 1\Leftrightarrow -7\le m\le 5$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;5\}$, có 13 giá trị của m.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 89. (Nguyễn Du Dak-Lak 2019) Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (với $a,b,c,d\in\mathbb{R},a>0$). Biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ này có điểm cực đại $A(0;1)$ và điểm cực tiểu $B(2;-3)$. Hỏi tập nghiệm của phương trình $f^3(x)+f(x)-2\sqrt[3]{f(x)}=0$ có bao nhiêu phần tử?

A. 2019. **B.** 2018. **C.** 9. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

$+A(0;1)$ là điểm cực đại $\Rightarrow \begin{cases} f'(0)=0 \\ f(0)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=0 \\ d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x)=ax^3+bx^2+1 \\ f'(x)=3ax^2+2bx \end{cases}$.

$+B(2;-3)$ là điểm cực tiểu $\Rightarrow \begin{cases} f'(2)=0 \\ f(2)=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12a+4b=0 \\ 8a+4b+1=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \end{cases}$.

Suy ra $f(x)=x^3-3x^2+1$.

Thử lại: $f'(x)=3x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-3 \end{array}\right.$, ta có bảng biến thiên của $y=f(x)$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, chứng tỏ $f(x)=x^3-3x^2+1$ là một hàm số cần tìm (1)

+ Xét phương trình:

$$f^3(x)+f(x)-2\sqrt[3]{f(x)}=0 \Leftrightarrow f^3(x)+2.f(x)=\left(\sqrt[3]{f(x)}\right)^3+2.\sqrt[3]{f(x)} \ (*)$$

Xét hàm số đặc trưng $h(t)=t^3+2t \Rightarrow h'(t)=3t^2+2>0, \ \forall t\in\mathbb{R}$.

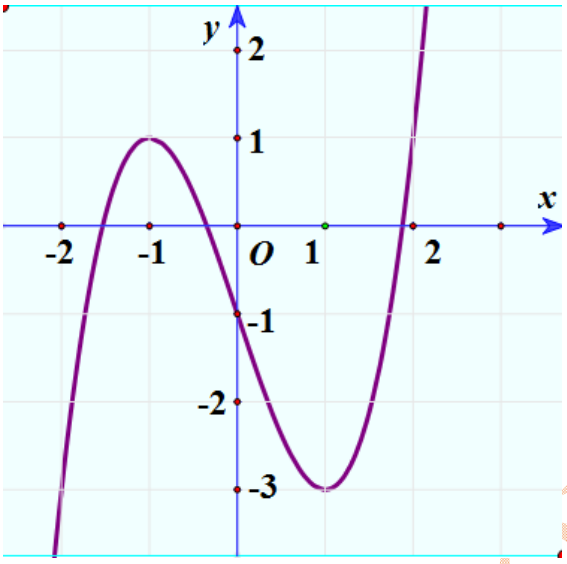
Phương trình $(*)$ trở thành: $f(x)=\sqrt[3]{f(x)} \Leftrightarrow f^3(x)=f(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(x)=1 \quad (2) \\ f(x)=-1 \end{array}\right.$

Từ (1) và (2) ta có: $\left[\begin{array}{ll} x^3-3x^2+1=0 & (1') \\ x^3-3x^2=0 & (2'). \\ x^3-3x^2+2=0 & (3') \end{array}\right.$

Phương trình $(1')$ có 3 nghiệm phân biệt, phương trình $(2')$ có 2 nghiệm phân biệt, phương trình $(3')$ có 3 nghiệm phân biệt ***(Không có nghiệm trùng nhau)*** nên tổng số nghiệm là 8.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 90. (Chuyên Hà Nội Lần1) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Phương trình $f(2\sin x)=m$ có đúng ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi;\pi]$ khi và chỉ khi



A. $m\in\{-3;1\}$. **B.** $m\in(-3;1)$. **C.** $m\in[-3;1)$. **D.** $m\in(-3;1]$.

Lời giải

Chọn A

Ta có bảng biến thiên hàm số $y=g(x)=2\sin x$ trên $[-\pi;\pi]$.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$g(x)=2\sin x$	0	↘	-2	↗	0	↗	2	↘	0

Phương trình $f(2\sin x)=m$ có đúng ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi;\pi]$ khi và chỉ khi phương trình $f(t)=m$ có:

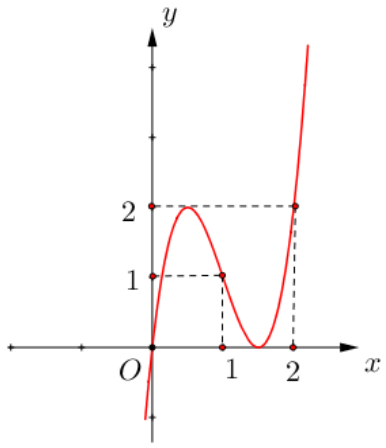
Một nghiệm duy nhất $t=0$, nghiệm còn lại không thuộc $[-2;2]$, khi đó $m\in\varnothing$

hoặc một nghiệm $t=2$ nghiệm còn lại thuộc $(-2;2)\setminus\{0\}$, khi đó $m=1$

hoặc một nghiệm $t=-2$, nghiệm còn lại thuộc $(-2;2)\setminus\{0\}$, khi đó $m=-3$.

Vậy $m\in\{-3;1\}$.

Câu 91. (ĐỀ-THI-THỬ-ĐH-THPT-CHUYÊN-QUANG-TRUNG-L5-2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ

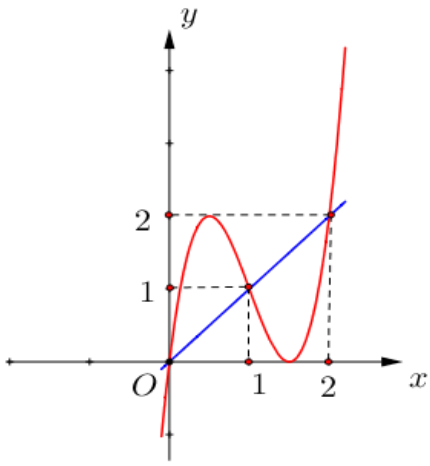


Bất phương trình $f\left(2\sin x\right)-2\sin^2 x<m$ đúng với mọi $x\in\left(0;\pi\right)$ khi và chỉ khi

A. $m>f\left(1\right)-\frac{1}{2}$. **B.** $m\geq f\left(1\right)-\frac{1}{2}$. **C.** $m\geq f\left(0\right)-\frac{1}{2}$. **D.** $m>f\left(0\right)-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A



$f\left(2\sin x\right)-2\sin^2 x<m\quad(1)$

Ta có: $x\in\left(0;\pi\right)\Rightarrow\sin x\in\left(0;1\right]$. Đặt $2\sin x=t\left(t\in\left(0;2\right]\right)$ ta được bất phương trình:

$f\left(t\right)-\frac{1}{2}t^2<m\quad(2)$.

(1) đúng với mọi $x\in\left(0;\pi\right)$ khi và chỉ khi (2) đúng với mọi $t\in\left(0;2\right]$.

Xét $g\left(t\right)=f\left(t\right)-\frac{1}{2}t^2$ với $t\in\left(0;2\right]$.

$g'\left(t\right)=f'\left(t\right)-t$.

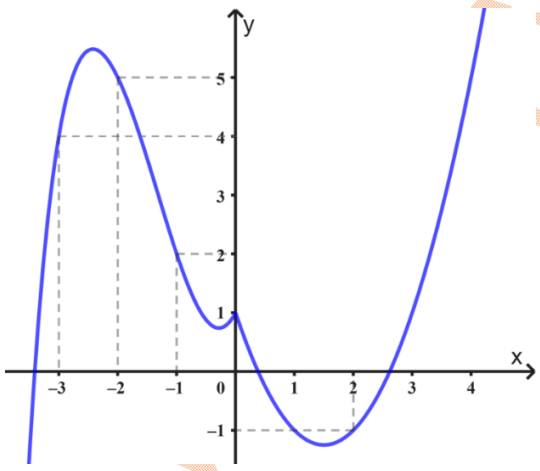
Từ đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ và $y=x$ (hình vẽ) ta có BBT của $g\left(t\right)$ như sau:

t	0		1		2
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$		↗		↘	

Vậy yêu cầu bài toán tương đương với $m > g(1) = f(1) - \frac{1}{2}$.

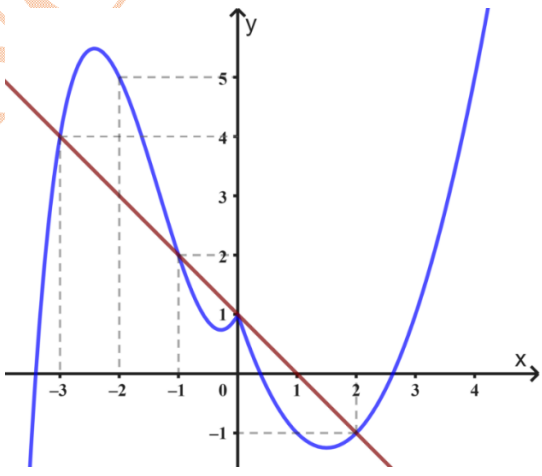
Câu 92. (THPT LƯƠNG THẾ VINH 2019LẦN 3) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (-\infty;-3) \cup (2;+\infty)$. Số nghiệm nguyên thuộc khoảng $(-10;10)$ của bất phương trình $\left[f(x) + x - 1 \right](x^2 - x - 6) > 0$ là

A. 9. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 7.



Lời giải

Chọn D



Đặt $h(x) = \left[f(x) + x - 1 \right](x^2 - x - 6)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác, $h(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 6 = 0 \\ f(x) + x - 1 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 - x - 6 = 0 & (1) \\ f(x) = -x + 1 & (2) \end{array} \right.$.

+ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là $x = -2$ và $x = 3$.

+ Phương trình (2) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=-x+1$. Dựa vào đồ thị hàm số đã vẽ ở hình bên, ta thấy rằng phương trình (2) có 4 nghiệm phân biệt là $x=-3$, $x=-1$, $x=0$ và $x=2$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		2		3		$+\infty$
x^2-x-6		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)+x-1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $h(x)$, ta có

$$\left[f(x)+x-1\right]\left(x^2-x-6\right)>0 \Leftrightarrow h(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-3;-2)\cup(-1;0)\cup(0;2)\cup(3;+\infty).$$

Kết hợp điều kiện x nguyên và $x\in(-10;10)$ ta có $x\in\{1;4;5;6;7;8;9\}$.

Vậy có tất cả 7 giá trị x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 93. (THPT Nghèn Lần1) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^2+4x+y=m \\ \left(2x^2+xy\right)(x+2)=9 \end{cases}$$

A. $m\ge 6$. **B.** $-10\le m\le 6$. **C.** $m\le -10$. **D.** $m\le -10$ hoặc $m\ge 6$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{cases} x^2+4x+y=m \\ \left(2x^2+xy\right)(x+2)=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=m-x^2-4x(1) \\ \left(-x^3-2x^2+mx\right)(x+2)=9(2) \end{cases}.$$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm.

$$(2)\Leftrightarrow\left(-x^3-2x^2\right)(x+2)+mx(x+2)=9\Leftrightarrow -x^2(x+2)^2+mx(x+2)=9.$$

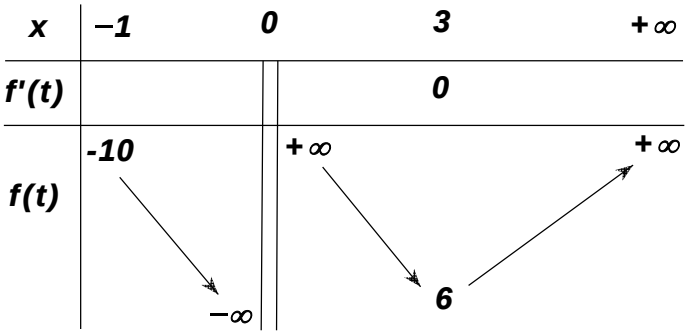
Đặt $x(x+2)=t\Leftrightarrow x^2+2x-t=0$ (phương trình này có nghiệm khi $\Delta'=1+t\ge 0\Leftrightarrow t\ge -1$).

Khi đó phương trình (2) trở thành $-t^2+mt-9=0$ (*). Phương trình (2) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm $t\ge -1$.

$$-t^2+mt-9=0\Leftrightarrow m=\frac{t^2+9}{t}$$ (do $t=0$ không phải nghiệm).

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2+9}{t},(t\ge -1)$. Ta có $f'(t)=\frac{t^2-9}{t^2}=0\Leftrightarrow t=3$.

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m\le -10$ hoặc $m\ge 6$.

Câu 94. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y=8x-x^2$ và trục hoành. Các đường thẳng $y=a, y=b, y=c$ với $0<a<b<c<16$ chia (H) thành bốn phần có diện tích bằng nhau. Giá trị của biểu thức $(16-a)^3+(16-b)^3+(16-c)^3$ bằng:

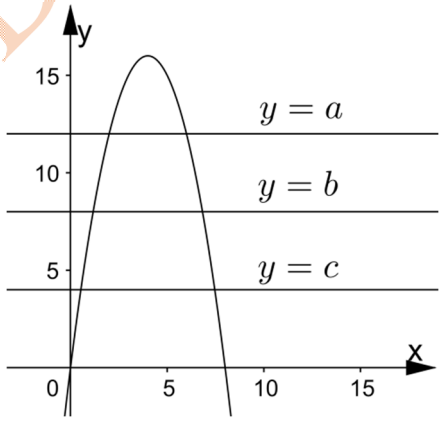
A. 2048 **B.** 3584 **C.** 2816 **D.** 3480

Lời giải

Chọn B

Ta có

công thức tính nhanh: "Nếu hai đồ thị cắt nhau có phương trình hoành độ giao điểm $ax^2+bx+c=0$ khi đó diện tích hình phẳng giữa hai đồ thị đó là $\boxed{S=\dfrac{\left(\sqrt{\Delta}\right)^3}{6a^2}}$ với $\Delta=b^2-4ac$".



Do đó xét $8x-x^2=a\Leftrightarrow x^2-8x+a=0$ nên $S_a=\dfrac{4\left(\sqrt{16-a}\right)^3}{3}$.

Tương tự ta có: $S_b=\dfrac{4\left(\sqrt{16-b}\right)^3}{3}$; $S_c=\dfrac{4\left(\sqrt{16-c}\right)^3}{3}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y=8x-x^2$ và trục hoành là $S_0=\dfrac{4}{3}(64)$.

Mặt khác vì $S_0=\dfrac{4}{3}(64)=4S_a\Rightarrow S_a=\dfrac{64}{3}=\dfrac{4\left(\sqrt{16-a}\right)^3}{3}\Rightarrow \boxed{(16-a)^3=256}$.

Có: $S_b=2S_a=\dfrac{128}{3}=\dfrac{4\left(\sqrt{16-b}\right)^3}{3}\Rightarrow (16-b)^3=1024$ và $S_c=3S_a=64=\dfrac{4\left(\sqrt{16-c}\right)^3}{3}\Rightarrow (16-c)^3=2304$

Như vậy: $(16-a)^3+(16-b)^3+(16-c)^3=3584$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

DẠNG 3. SỰ TƯƠNG GIAO BẰNG SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH HÀM BẬC BA

Câu 1: **(THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4)** Biết hai đồ thị hàm số $y=x^3+x^2-2$ và $y=-x^2+x$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt A, B, C. Khi đó, diện tích tam giác ABC bằng

A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$x^3+x^2-2=-x^2+x$

$\Leftrightarrow x^3+2x^2-x-2=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x+2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \\ x=-2 \end{array}\right. \Rightarrow A(1;0); B(-1;-2); C(-2;-6)$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng AB là: $x-y-1=0$

Khoảng cách từ C tới đường thẳng AB là: $d(C;AB)=\dfrac{|-2+6-1|}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

$\overrightarrow{AB}=(-2;-2)\Rightarrow AB=2\sqrt{2}\Rightarrow S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{\sqrt{2}}.2\sqrt{2}=3.$

Vậy diện tích tam giác ABC bằng 3.

Câu 2: Biết rằng đồ thị của hàm số $y=P(x)=x^3-2x^2-5x+2$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt lần lượt có hoành độ là x_1, x_2, x_3. Khi đó giá trị của biểu thức $T=\dfrac{1}{x_1^2-4x_1+3}+\dfrac{1}{x_2^2-4x^2+3}+\dfrac{1}{x_3^2-4x_3+3}$ bằng

A. $T=\dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{P'(1)}{P(1)}+\dfrac{P'(3)}{P(3)}\right]$ **B.** $T=\dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{P'(1)}{P(1)}-\dfrac{P'(3)}{P(3)}\right]$

C. $T=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{P'(1)}{P(1)}-\dfrac{P'(3)}{P(3)}\right]$ **D.** $T=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{P'(1)}{P(1)}+\dfrac{P'(3)}{P(3)}\right]$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $T=\dfrac{1}{(x_1-1)(x_1-3)}+\dfrac{1}{(x_2-1)(x_2-3)}+\dfrac{1}{(x_3-1)(x_3-3)}$

$\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{1}{x_1-3}+\dfrac{1}{x_2-3}+\dfrac{1}{x_3-3}\right)-\left(\dfrac{1}{x_1-1}+\dfrac{1}{x_2-1}+\dfrac{1}{x_3-1}\right)\right]$ vì $\dfrac{1}{(x-1)(x-3)}=\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-1}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vì x_1, x_2, x_3 là 3 nghiệm của phương trình $P(x)=0 \Rightarrow P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

Suy ra $P'(x)=(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_2)(x-x_3)+(x-x_3)(x-x_1)$

$$\Rightarrow \frac{P'(x)}{P(x)}=\frac{(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_3)+(x-x_3)(x-x_1)}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}=\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}\ (*).$$

Thay $x=1, x=3$ vào biểu thức (*), ta được $T=\frac{1}{2}\left[\frac{P'(x)}{P(1)}-\frac{P'(3)}{P(3)}\right]$.

Câu 3: Biết đồ thị hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2, x_3. Tính giá trị của biểu thức $T=\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}+\frac{1}{f'(x_3)}$.

A. $T=\frac{1}{3}$ **B.** $T=3$ **C.** $T=1$ **D.** $T=0$

Lời giải

Chọn D

Vì x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình $f(x)=0 \Rightarrow f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

Ta có $f'(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)+a(x-x_2)(x-x_3)+a(x-x_3)(x-x_1)$.

Khi đó

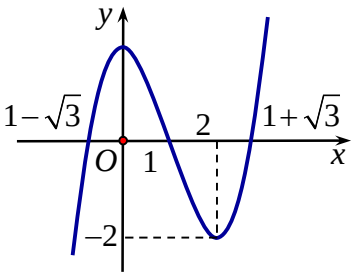
$$\begin{cases} f'(x_1)=a(x_1-x_2)(x_1-x_3) \\ f'(x_2)=a(x_2-x_3)(x_2-x_1) \\ f'(x_3)=a(x_3-x_1)(x_3-x_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow T=\frac{1}{a(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{1}{a(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+\frac{1}{a(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$=\frac{1}{a(x_1-x_2)(x_1-x_3)}-\frac{1}{a(x_1-x_2)(x_2-x_3)}+\frac{1}{a(x_1-x_3)(x_2-x_3)}$$

$$=\frac{x_2-x_3-x_1+x_3+x_1-x_2}{a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}=0.$$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+2$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Hỏi phương trình $\left(x^3-3x^2+2\right)^3-3\left(x^3-3x^2+2\right)^2+2=0$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Chọn C

Xét phương trình $\left(x^3-3x^2+2\right)^3-3\left(x^3-3x^2+2\right)^2+2=0\ (1)$

Đặt $t=x^3-3x^2+2$ (*) thì (1) trở thành $t^3-3t^2+2=0\ (2)$

Theo đồ thị ta có (2) có ba nghiệm phân biệt $\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=1-\sqrt{3} \\ t=1+\sqrt{3} \end{array}\right.$

Từ đồ thị hàm số ta có

+ $t=1\in(-2;2)$ (*) có ba nghiệm phân biệt

+ $t=1-\sqrt{3}\in(-2;2)$ nên (*) có ba nghiệm phân biệt (khác ba nghiệm khi $t=1$)

+ $t=1+\sqrt{3}>2$ nên (*) có đúng một nghiệm

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm phân biệt

Nhận xét: Với mỗi giá trị t, học sinh có thể sử dụng máy tính bỏ túi để thử nghiệm

Câu 5: Cho hàm số $y=x^3-2009x$ có đồ thị là (C). M_1 là điểm trên (C) có hoành độ $x_1=1$. Tiếp tuyến của (C) tại M_1 cắt (C) tại điểm M_2 khác M_1, tiếp tuyến của (C) tại M_2 cắt (C) tại điểm M_3 khác M_2, …, tiếp tuyến của (C) tại M_{n-1} cắt (C) tại M_n khác M_{n-1} $(n=4;5;...)$, gọi $(x_n;y_n)$ là tọa độ điểm M_n. Tìm n để: $2009x_n+y_n+2^{2013}=0$.

A. $n=685$. **B.** $n=679$. **C.** $n=672$. **D.** $n=675$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và tiếp tuyến là

$x^3-2009x=\left(3x_1^{\,2}-2009\right)(x-x_1)+x_1^{\,3}-2009x_1\ (1)$.

Phương trình (1) có một nghiệm kép $x_1=1$ và một nghiệm x_2.

Ta có: $(1)\Leftrightarrow\ x^3-3x+2=0$.

Áp dụng định lí Viét cho phương trình bậc ba, ta có:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2=0 \\ x_1^{\,2}+2x_1x_2=-3 \Leftrightarrow x_2=-2x_1. \\ x_1^{\,2}.x_2=-2 \end{cases}$$

Vậy hoành độ giao điểm còn lại có đặc điểm: bằng hoành độ tiếp tiếp trước nhân với (-2), thoả điều kiện cấp số nhân với công bội $q=-2$.

Suy ra: $x_1=1$, $x_2=-2$, $x_3=4$, …, $x_n=(-2)^{n-1}$.

Ta có: $2009x_n+y_n+2^{2013}=0\Leftrightarrow 2009x_n+x_n^{\,3}-2009x_n+2^{2013}=0\Leftrightarrow(-2)^{3n-3}=-2^{2013}$

$\Leftrightarrow 3n-3=2013\Leftrightarrow n=672$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=x^3-6x^2+9x$. Đặt $f^k(x)=f\left(f^{k-1}(x)\right)$ với k là số nguyên lớn hơn 1. Hỏi phương trình $f^5(x)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm phân biệt ?

A. 363. **B.** 122. **C.** 120. **D.** 365.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

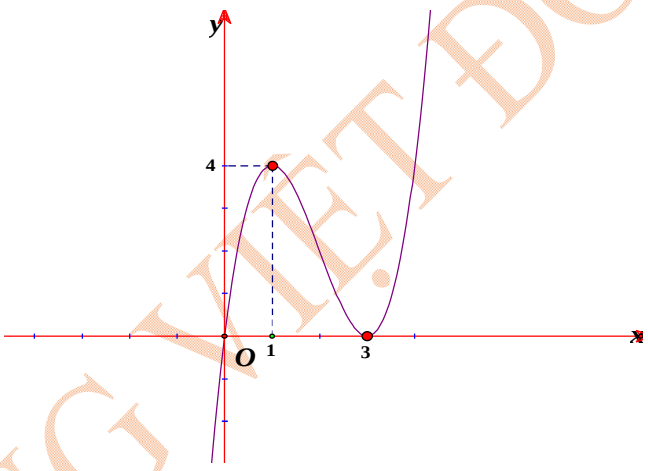
Nhận xét:

+ Đồ thị hàm số $f(x)=x^3-6x^2+9x$ như sau:

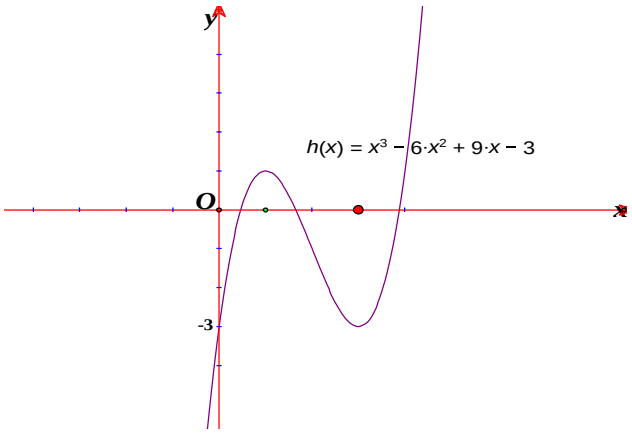
$f'(x)=3x^2-12x+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow f(1)=4 \\ x=3\Rightarrow f(3)=0 \end{array}\right.$. Lại có $\left\{\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f(4)=4 \end{array}\right.$.

- Đồ thị hàm số $f(x)=x^3-6x^2+9x$ luôn đi qua gốc tọa độ.

- Đồ thị hàm số $f(x)=x^3-6x^2+9x$ luôn tiếp xúc với trục Ox tại điểm $(3;0)$.



+ Xét hàm số $g(x)=f(x)-3$ có $g'(x)=f'(x)$ nên $g(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ và $g(0)=-3$ nên bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x)=x^3-6x^2+9x$ xuống dưới 3 đơn vị ta được đồ thị hàm số $y=g(x)$. Suy ra phương trình $g(x)=0$ có 3 nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng $(0;4)$.



+ Tổng quát: xét hàm số $h(x)=f(x)-a$, với $0<a<4$.

Lập luận tương tự như trên:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

- $h(0)=-a<0$ và $h(1)>0;\ h(4)<4$.

- Tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x)=x^3-6x^2+9x$ xuống dưới a đơn vị ta được đồ thị hàm số $y=h(x)$. Suy ra phương trình $h(x)=0$ luôn có ba nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng $(0;4)$.

Khi đó,

+ Ta có $f(x)=x^3-6x^2+9x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$.

+ $f^2(x)=f\left(f(x)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\f(x)=3\end{array}\right.$. Theo trên, phương trình $f(x)=3$ có có ba nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng $(0;4)$. Nên phương trình $f^2(x)=0$ có $3+2$ nghiệm phân biệt.

+ $f^3(x)=0\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f^2(x)=0\\f^2(x)=3\end{array}\right.$.

$f^2(x)=0$ có $3+2$ nghiệm.

$f^2(x)=f\left(f(x)\right)=3$ có ba nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng $(0;4)$. Mỗi phương trình $f(x)=a$, với $a\in(0;4)$ lại có ba nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng $(0;4)$. Do đó phương trình $f^2(x)=3$ có tất cả 9 nghiệm phân biệt.

Suy ra phương trình $f^3(x)=0$ có 3^2+3+2 nghiệm phân biệt.

+ $f^4(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f^3(x)=0\\f^3(x)=3\end{array}\right.$.

$f^3(x)=0$ có $9+3+2$ nghiệm.

$f^3(x)=f\left(f^2(x)\right)=3$ có ba nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng $(0;4)$. Mỗi phương trình $f^2(x)=b$, với $b\in(0;4)$ lại có 9 nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng $(0;4)$. Do đó phương trình $f^3(x)=3$ có tất cả 9.3 nghiệm phân biệt.

+ $f^5(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f^4(x)=0\\f^4(x)=3\end{array}\right.$.

$f^4(x)=0$ có $3^3+9+3+2$ nghiệm.

$f^4(x)=f\left(f^3(x)\right)=3$ có ba nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng $(0;4)$. Mỗi phương trình $f^3(x)=c$, với $c\in(0;4)$ lại có 27 nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng $(0;4)$. Do đó phương trình $f^4(x)=3$ có tất cả 27.3 nghiệm phân biệt.

Vậy $f^5(x)$ có $3^4+3^3+3^2+3+2=122$ nghiệm.

Cách 2:

*) Gọi a_k là số nghiệm của phương trình $f^k(x)=0$;

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Gọi b_k là số nghiệm của phương trình $f^k(x)=3$;

*) $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right. \Rightarrow a_1=2$.

$f(x)=3$ có ba nghiệm phân biệt là $x_1, x_2, x_3 \in (0;4)\setminus\{1;3\} \Rightarrow b_1=3$.

*) Với $k>1$, ta có: $f^k(x)=f\left(f^{k-1}(x)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f^{k-1}(x)=0 \\ f^{k-1}(x)=3 \end{array}\right.$.

Suy ra: $a_k=a_{k-1}+b_k$

$f^k(x)=f\left(f^{k-1}(x)\right)=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f^{k-1}(x)=m_1 \\ f^{k-1}(x)=m_2 \\ f^{k-1}(x)=m_3 \end{array}\right.$ với $m_1, m_2, m_3 \in (0;4)\setminus\{1;3\}$.

Mỗi phương trình trên có ba nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;4)\setminus\{1;3\}$.

Do đó: $b_k=3b_{k-1} \Rightarrow (b_k)$ là cấp số nhân có công bội là $q=3$, số hạng đầu $b_1=3$

$\Rightarrow b_k=3.3^{k-1}=3^k$.

Suy ra: $a_k=a_{k-1}+b_{k-1}$

$=a_{k-2}+b_{k-2}+b_{k-1}$

$=...$

$=a_1+b_1+b_2+...+b_{k-1}$

$=2+3+3^2+...+3^{k-1}$

$=2+3.\dfrac{3^{k-1}-1}{3-1}=\dfrac{3^k+1}{2}$.

Vậy $a_5=122$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=x^3-6x^2+9x$. Đặt $f^k(x)=f\left(f^{k-1}(x)\right)$ với k là số nguyên lớn hơn 1. Hỏi phương trình $f^6(x)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm phân biệt.

A. 1092. **B.** 363. **C.** 365. **D.** 1094.

Lời giải

Chọn C

Cách 1.

Giả sử: a_k là số nghiệm của phương trình $f^k(x)=0$

b_k là số nghiệm của phương trình $f^k(x)=3$

Với mọi $c \in (0;4)$, ta có: $f(x)=c$ có đúng 3 nghiệm thuộc $(0;4) \Rightarrow b_k=3b_{k-1} \Rightarrow b_n=3^n$ $(b_1=3)$

Ta có: $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.\Rightarrow f^k(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f^{k-1}(x)=0\\f^{k-1}(x)=3\end{array}\right.$

$\Rightarrow a_k=a_{k-1}+b_{k-1}=a_1+b_1+b_2+...+b_{k-1}=\dfrac{3^k+1}{2}$

Khi đó: phương trình $f^6(x)=0$ có số nghiệm là $a_6=\dfrac{3^6+1}{2}=365$

Cách 2.

$$f^6(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f^5(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f^4(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f^3(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f^2(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\f(x)=3\end{array}\right.\\f^2(x)=3\end{array}\right.\\f^3(x)=3\end{array}\right.\\f^4(x)=3\end{array}\right.\\f^5(x)=3\end{array}\right.$$

Số nghiệm của phương trình $f^6(x)=0$ bằng tổng số nghiệm của các phương trình $f(x)=0, f(x)=3, f^2(x)=3,..., f^6(x)=3$

Mặt khác số nghiệm của phương trình $f^k(x)=3$ gấp 3 lần số nghiệm của $f^{k-1}(x)=3$

Vậy số nghiệm của phương trình $f^6(x)=0$ là $2+3+3^2+3^3+3^4+3^5=365$

Câu 8: Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x+m$ có đồ thị (C), với m là tham số. Giả sử đồ thị (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ thỏa mãn $x_1<x_2<x_3$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $1<x_1<x_2<3<x_3<4$ **B.** $0<x_1<1<x_2<3<x_3<4$

C. $x_1<0<1<x_2<3<x_3<4$ **D.** $1<x_1<3<x_2<4<x_3$

Lời giải

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y=-x^3+6x^2-9x$. Dựa vào đồ thị ta tìm được $-4<m<0$ thì đồ thị hàm số $y=x^3-6x^2+9x+m$ cắt Ox tại 3 điểm phân biệt.

Ta có $y(0).y(1)<0;\ y(1).y(3)<0;\ y(3).y(4)<0$ do đó $0<x_1<1<x_2<3<x_3<4$

Chọn B

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+m\ (C_m)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt với các hoành độ lập thành cấp số cộng.

A. $m=11.$ **B.** $m=10.$ **C.** $m=9.$ **D.** $m=8.$

Lời giải

Chọn A

Pt hoành độ giao điểm: $x^3-3x^2-9x+m=0(*)$

Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ $x_1, x_2, x_3 (x_1 < x_2 < x_3)$ thì x_1, x_2, x_3 là nghiệm của pt(*)

Khi đó: $x^3 - 3x^2 - 9x + m = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3$

$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 3 \ (1)$

Ta có:

x_1, x_2, x_3 lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi $x_1 + x_3 = 2x_2 \ (2)$

Thế (2) vào (1) ta được $x_2 = 1$, thay vào pt (*) ta được: $m = 11$.

Với $m = 11: (*) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 9x + 11 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 11) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 - 2\sqrt{3} \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 + 2\sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow x_1 + x_3 = 2x_2$$

Vậy m=11 thỏa ycbt.

Câu 10: **(THPT-Nguyễn-Công-Trứ-Hà-Tĩnh-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3)** Cho đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3mx^2 - m - 6$ (m là tham số) cắt trục hoành tại đúng một điểm khi giá trị của m là

A. $m = 0$. **B.** $-6 < m < 2$. **C.** $0 \le m < 2$. **D.** $-6 < m \le 0$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm giữa đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3mx^2 - m - 6$ với trục hoành:

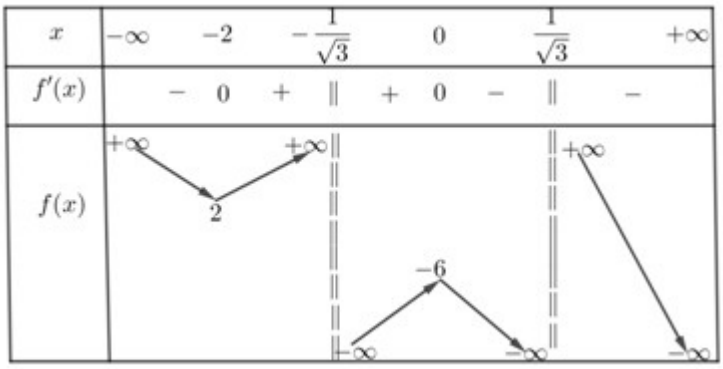
$2x^3 + 3mx^2 - m - 6 = 0 \Leftrightarrow m(1 - 3x^2) = 2x^3 - 6$. Nhận thấy $x^2 = \frac{1}{3}$ không phải là nghiệm của phương trình với mọi m nên $m(1 - 3x^2) = 2x^3 - 6 \Leftrightarrow m = \frac{2x^3 - 6}{1 - 3x^2}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{2x^3 - 6}{-3x^2 + 1}$.

Ta có: $f'(x) = \frac{-6x^4 + 6x^2 - 36x}{(1 - 3x^2)^2} = \frac{-6x(x+2)(x^2 - 2x + 3)}{(1 - 3x^2)^2}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x) = \frac{2x^3 - 6}{-3x^2 + 1}$:



Dựa vào bảng biến thiên của hàm số suy ra: $-6 < m < 2$.

Câu 11: Đường thẳng $d: y = x + 4$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ tại 3 điểm phân biệt $A(0;4), B$ và C sao cho diện tích tam giác MBC bằng 4, với $M(1;3)$. Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

A. $m = 2$ hoặc $m = 3$.

B. $m = -2$ hoặc $m = 3$.

C. $m = 3$.

D. $m = -2$ hoặc $m = -3$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của d và đồ thị $(C): x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4 = 4$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2mx^2 + (m+2)x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ \varphi(x) = x^2 + 2mx + m + 2 = 0 \quad (1) \end{bmatrix}$$

Với $x = 0$, ta có giao điểm là $A(0;4)$.

d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(0) = m + 2 \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - m - 2 > 0 \end{cases} \quad (*)$$

Ta gọi các giao điểm của d và (C) lần lượt là $A, B(x_B; x_B + 2), C(x_C; x_C + 2)$ với x_B, x_C là nghiệm của phương trình (1).

Theo định lí Viet, ta có: $\begin{cases} x_B + x_C = -2m \\ x_B . x_C = m + 2 \end{cases}$

Ta có diện tích của tam giác MBC là $S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot d(M, BC) = 4$.

Phương trình d được viết lại là: $d: y = x + 4 \Leftrightarrow x - y + 4 = 0$.

Mà $d(M, BC) = d(M, d) = \frac{|1 - 3 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$.

Do đó: $BC = \frac{8}{d(M, BC)} = \frac{8}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow BC^2 = 32$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta lại có: $BC^2=\left(x_C-x_B\right)^2+\left(y_C-y_B\right)^2=2\left(x_C-x_B\right)^2=32$

$\Leftrightarrow\left(x_B+x_C\right)^2-4x_B.x_C=16\Leftrightarrow\left(-2m\right)^2-4\left(m+2\right)=16$

$\Leftrightarrow 4m^2-4m-24=0\Leftrightarrow m=3;m=-2.$

Đối chiếu với điều kiện, loại đi giá trị $m=-2$.

Câu 12: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+x-1$ có đồ thị là (C). Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đường thẳng $y=(m-2)x+3$ tạo với đồ thị (C) có hai phần diện tích khép kín bằng nhau?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm bậc ba $y=x^3-3x^2+x-1$ có tâm đối xứng $I(1;-2)$ (trong đó hoành độ điểm I là nghiệm của phương trình $y''=0$).

Để bài toán được thỏa mãn thì trước hết đường thẳng $d:y=(m-2)x+3$ phải đi qua $I(1;-2)$ nên $-2=(m-2).1+3\longleftrightarrow m=-3$.

Thử lại. Với $m=-3$ thì $d:y=-5x+3$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $x^3-3x^2+x-1=-5x+3$

$$\longleftrightarrow(x-1)\left(x^2-2x+4\right)=0\longleftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x+4=0.\quad(*)\end{array}\right.$$

Phương trình $(*)$ vô nghiệm nên d chỉ cắt (C) tại duy nhất một điểm nên không thể tạo với đồ thị (C) hai phần diện tích khép kín.

Câu 13: Cho hàm số $y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m), đường thẳng d có phương trình $y=x+4$ và điểm $K(1;3)$. Tìm các giá trị của tham số m để d cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B, C sao cho tam giác KBC có diện tích bằng $8\sqrt{2}$.

A. $m=\dfrac{1\pm\sqrt{37}}{2}$ **B.** $m=\dfrac{1\pm\sqrt{137}}{2}$ **C.** $m=\dfrac{1\pm\sqrt{7}}{2}$ **D.** $m=\dfrac{1\pm\sqrt{142}}{2}$

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d:

$$x^3+2mx^2+(m+3)x+4=x+4\Leftrightarrow x(x^2+2mx+m+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2+2mx+m+2=0\ (*)\end{array}\right.$$

d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ PT $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=m^2-m-2>0\\m+2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-\infty;-2)\cup(-2;-1)\cup(2;+\infty)$$

Khi đó $B=(x_1;x_1+4)$, $C=(x_2;x_2+4)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của $(*)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Theo Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1+x_2=-2m \\ x_1x_2=m+2 \end{cases}$

$\Rightarrow BC=\sqrt{2\left(x_1-x_2\right)^2}=\sqrt{2\left(x_1+x_2\right)^2-8x_1x_2}=2\sqrt{2\left(m^2-m-2\right)}$

Ta có khoảng cách từ K đến d là $h=\sqrt{2}$. Do đó diện tích ΔKBC là:

$S=\frac{1}{2}.h.BC=\frac{1}{2}\sqrt{2}.2\sqrt{2\left(m^2-m-2\right)}=2\sqrt{m^2-m-2}$

$S=8\sqrt{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{m^2-m-2}=8\sqrt{2}\Leftrightarrow m=\frac{1\pm\sqrt{137}}{2}\ (TM)$.

Câu 14: Đường thẳng $d: y=x+4$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2mx^2+\left(m+3\right)x+4$ tại 3 điểm phân biệt $A\left(0;4\right), B$ và C sao cho diện tích tam giác MBC bằng 4, với $M\left(1;3\right)$. Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

A. $m=2$ hoặc $m=3$.

B. $m=-2$ hoặc $m=3$.

C. $m=3$.

D. $m=-2$ hoặc $m=-3$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của d và đồ thị $\left(C\right)$: $x^3+2mx^2+\left(m+3\right)x+4=4$

$\Leftrightarrow x^3+2mx^2+\left(m+2\right)x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ \varphi\left(x\right)=x^2+2mx+m+2=0 \quad (1) \end{array}\right.$

Với $x=0$, ta có giao điểm là $A\left(0;4\right)$.

d cắt $\left(C\right)$ tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

$\Leftrightarrow\begin{cases} \varphi\left(0\right)=m+2\neq 0 \\ \Delta'=m^2-m-2>0 \end{cases}$ (*)

Ta gọi các giao điểm của d và $\left(C\right)$ lần lượt là $A, B\left(x_B;x_B+2\right), C\left(x_C;x_C+2\right)$ với x_B, x_C là nghiệm của phương trình (1).

Theo định lí Viet, ta có: $\begin{cases} x_B+x_C=-2m \\ x_B.x_C=m+2 \end{cases}$

Ta có diện tích của tam giác MBC là $S=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot d\left(M,BC\right)=4$.

Phương trình d được viết lại là: $d: y=x+4\Leftrightarrow x-y+4=0$.

Mà $d\left(M,BC\right)=d\left(M,d\right)=\frac{\left|1-3+4\right|}{\sqrt{1^2+\left(-1\right)^2}}=\sqrt{2}$.

Do đó: $BC=\frac{8}{d\left(M,BC\right)}=\frac{8}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow BC^2=32$

Ta lại có: $BC^2=\left(x_C-x_B\right)^2+\left(y_C-y_B\right)^2=2\left(x_C-x_B\right)^2=32$

$\Leftrightarrow\left(x_B+x_C\right)^2-4x_B.x_C=16\Leftrightarrow\left(-2m\right)^2-4\left(m+2\right)=16$

$\Leftrightarrow 4m^2-4m-24=0\Leftrightarrow m=3\vee m=-2.$

Đối chiếu với điều kiện, loại đi giá trị $m=-2$.

Câu 15: Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+\frac{2}{3}$ $\left(C_m\right)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $x_1;x_2;x_3$ thỏa mãn điều kiện $x_1^2+x_2^2+x_3^2>15$.

A. $\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>4\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>1\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>2\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m<0\\m>1\end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn B

Pt hoành độ giao điểm:

$\frac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+\frac{2}{3}=0\Leftrightarrow x^3-3mx^2-3x+3m+2=0$

$\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left[x^2+\left(1-3m\right)x-3m-2\right]=0\quad(1)$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2+\left(1-3m\right)x-3m-2=0\left(2\right)\end{array}\right.$

$\left(C_m\right)$ cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt thì pt (1) có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$\left\{\begin{array}{l}\Delta=\left(1-3m\right)^2+4\left(3m+2\right)>0\\g\left(1\right)=-6m\neq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}3m^2+2m+3>0,\forall m\\m\neq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow m\neq 0\ (3)$

Giả sử $x_3=1,x_1,x_2$ là nghiệm của (2).

Ta có: $x_1+x_2=3m-1;x_1x_2=-3m-2$. Khi đó:

$x_1^2+x_2^2+x_3^2>15\Leftrightarrow\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2+1>15$

$\Leftrightarrow\left(3m-1\right)^2+2\left(3m+2\right)-14>0\Leftrightarrow m^2-1>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>1\end{array}\right.(4)$

Từ (3) và (4) ta có giá trị cần tìm là: $\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>1\end{array}\right.$.

Câu 16: **(Ba Đình Lần2)** Cho hàm số $y=x^3+3mx^2-m^3$ có đồ thị $\left(C_m\right)$ và đường thẳng $d:y=m^2x+2m^3$. Biết rằng $m_1,m_2\left(m_1>m_2\right)$ là hai giá trị thực của m để đường thẳng d cắt đồ thị $\left(C_m\right)$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^4+x_2^4+x_3^4=83$. Phát biểu nào sau đây là ***đúng*** về quan hệ giữa hai giá trị m_1, m_2 ?

A. $m_1+m_2=0$. **B.** $m_1^2+2m_2>4$. **C.** $m_2^2+2m_1>4$. **D.** $m_1-m_2=0$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (C_m)

$x^3+3mx^2-m^3=m^2x+2m^3$

$\Leftrightarrow x^3+3mx^2-m^2x-3m^3=0 \Leftrightarrow (x^3-m^2x)+(3mx^2-3m^3)=0$

$\Leftrightarrow x(x^2-m^2)+3m(x^2-m^2)=0 \Leftrightarrow (x+3m)(x^2-m^2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3m \\ x=m \\ x=-m \end{array}\right.$

Để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x_1,x_2,x_3 \Leftrightarrow m\neq 0$.

Khi đó, $x_1^4+x_2^4+x_3^4=83 \Leftrightarrow m^4+(-m)^4+(-3m)^4=83$

$\Leftrightarrow 83m^4=83 \Leftrightarrow m=\pm 1$

Vậy $m_1=1, m_2=-1$ hay $m_1+m_2=0$.

Câu 17: Cho hàm số $y=x^3-2x^2+(1-m)x+m$ có đồ thị (C). Giá trị của m thì (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt x_1,x_2,x_3 sao cho $x_1^2+x_2^2+x_3^2<4$ là

A. $m<1$ **B.** $\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{4}<m<1 \\ m\neq 0 \end{array}\right.$ **C.** $-\frac{1}{4}<m<1$ **D.** $\frac{1}{4}<m<1$

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành là

$x^3-2x^2+(1-m)x+m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-x-m=0 \end{array}\right.$

(C) và trục hoành cắt nhau tại 3 điểm phân biệt: $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m\neq 0 \\ m>-\frac{1}{4} \end{array}\right.$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2<4 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2+1<4 \Leftrightarrow 1+2m+1<4 \Leftrightarrow m<1$

Câu 18: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+(3m-1)x+6m$ có đồ thị là (C). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2x_3=20$.

A. $m=\frac{5\pm\sqrt{5}}{3}$. **B.** $m=\frac{2\pm\sqrt{22}}{3}$. **C.** $m=\frac{2\pm\sqrt{3}}{3}$. **D.** $m=\frac{3\pm\sqrt{33}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

PT hoành độ: $x^3-3mx^2+(3m-1)x+6m=0 \Leftrightarrow (x+1)[x^2-(3m+1)x+6m]=0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1=x_3 \\ x^2-(3m+1)x+6m=0\ (*) \end{array}\right.$

(*) có 2 nghiệm phân biệt khác $-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2-18m+1>0 \\ 9m+2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3}; m>\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3} \\ m\neq -\dfrac{2}{9} \end{cases}$.

Gt $\Rightarrow x_1^2+x_2^2-x_1x_2=19 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-3x_1x_2=19 \Rightarrow (3m+1)^2-18m=19$.

$\Leftrightarrow 9m^2-12m-18=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{2\pm\sqrt{22}}{3}$.

Câu 19: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} -8+4a-2b+c>0 \\ 8+4a+2b+c<0 \end{cases}$. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ và trục Ox là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Mà $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$ nên tồn tại số $M>2$ sao cho $y(M)>0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$ nên tồn tại số $m<-2$ sao cho $y(m)<0$; $y(-2)=-8+4a-2b+c>0$ và $y(2)=8+4a+2b+c<0$.

Do $y(m).y(-2)<0$ suy ra phương trình $y=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(m;-2)$.

$y(-2).y(2)<0$ suy ra phương trình $y=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-2;2)$.

$y(2).y(M)<0$ suy ra phương trình $y=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(2;M)$.

Vậy đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ và trục Ox có 3 điểm chung.

Câu 20: **(THPT-Phúc-Trạch-Hà-Tĩnh-lần-2-2018-2019-thi-tháng-4)**Tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $(C): y=-2x^3+3x^2+2m-1$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt là

A. $0\le m\le\dfrac{1}{2}$. **B.** $0<m<\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{4}\le m<\dfrac{1}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành là:

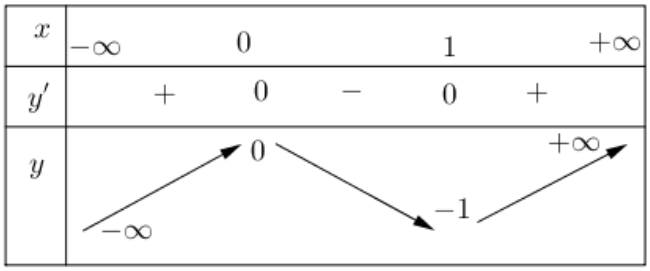
$-2x^3+3x^2+2m-1=0 \Leftrightarrow 2x^3-3x^2=2m-1.$ (1)

Số giao điểm của (C) và trục hoành chính là số nghiệm của phương trình (1).

Mặt khác số nghiệm của (1) chính là số giao điểm của đồ thị (C') của hàm số $y=2x^3-3x^2$ với đường thẳng $d_m: y=2m-1$.

Xét hàm số $y=2x^3-3x^2$. Ta có $y'=6x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Khi đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (C')$ cắt d_m tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow -1<2m-1<0\Leftrightarrow 0<m<\frac{1}{2}$.

Câu 21: Biết đường thẳng $y=(3m-1)x+6m+3$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ tại ba điểm phân biệt sao cho một giao điểm cách đều hai giao điểm còn lại. Khi đó m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;\frac{3}{2})$. **D.** $(\frac{3}{2};2)$.

Lời giải

Chọn A

Yêu cầu bài toán tương đương phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng

$x^3-3x^2+1=(3m-1)x+6m+3\Leftrightarrow x^3-3x^2-(3m-1)x-6m-2=0$.

Giả sử phương trình $x^3-3x^2-(3m-1)x-6m-2=0$ có ba nghiệm x_1,x_2,x_3 thỏa mãn $x_2=\frac{x_1+x_3}{2}$ (1).

Mặt khác theo viet ta có $x_1+x_2+x_3=3$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $x_2=1$. Tức $x=1$ là một nghiệm của phương trình trên. Thay $x=1$ vào phương trình ta được $m=-\frac{1}{3}$.

Thử lại $m=-\frac{1}{3}$ thỏa mãn đề bài.

Câu 22: **(Chuyên Thái Bình Lần3)** Cho hàm số $f(x)=x^3+3x^2+mx+1$. Gọi S là tổng tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt đường thẳng $y=1$ tại ba điểm phân biệt $A(0;1)$, B, C sao cho các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại B, C vuông góc với nhau. Gía trị của S bằng

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{9}{5}$. **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** $\frac{11}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoàn độ giao điểm của $y=x^3+3x^2+mx+1$ và $y=1$ là:

$$x^3+3x^2+mx+1=1\Leftrightarrow x(x^2+6x+m)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2+6x+m=0\ (*)\end{array}\right.$$

Để đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt đồ thị hàm số $y=1$ tại ba điểm phân biệt $A(0;1)$, $B(x_1;y_1)$, $C(x_2;y_2)$ thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$\Rightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = 9 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < \dfrac{9}{4} \end{cases}.$

Theo hệ thức Viète ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_1.x_2 = m \end{cases}.$

Để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại B, C vuông góc với nhau thì

$f'(x_1).f'(x_2) = -1 \Leftrightarrow (3x_1^2 + 6x_1 + m).(3x_2^2 + 6x_2 + m) = -1$

$\Leftrightarrow 9x_1^2x_2^2 + 18x_1x_2(x_1 + x_2) + 3m(x_1^2 + x_2^2) + 6m(x_1 + x_2) + 36x_1x_2 + m^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 9m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{9 + \sqrt{65}}{8} \\ m = \dfrac{9 - \sqrt{65}}{8} \end{array} \right. \Rightarrow S = \dfrac{9 + \sqrt{65}}{8} + \dfrac{9 - \sqrt{65}}{8} = \dfrac{9}{4}.$

Câu 23: **(Đặng Thành Nam Đề 9)** Có bao nhiêu số thực m để đường thẳng $y = -x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 + (2-m)x^2 + 3(2m-3)x + m$ tại ba điểm phân biệt $A(0;m)$, B, C sao cho đường thẳng OA là phân giác của góc $\widehat{BOC}$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = -x + m$ và đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 + (2-m)x^2 + 3(2m-3)x + m$ là:

$-x + m = \dfrac{1}{3}x^3 + (2-m)x^2 + 3(2m-3)x + m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \dfrac{1}{3}x^2 + (2-m)x + 6m - 8 = 0 (*) \end{array} \right.$

Để đường thẳng cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt thì phương trình (*) phải có hai nghiệm phân biệt khác 0, hay

$\begin{cases} (2-m)^2 - \dfrac{4}{3}(6m-8) > 0 \\ 6m - 8 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 12m + \dfrac{44}{3} > 0 \\ m \neq \dfrac{4}{3} \end{cases}$ (1).

Gọi tọa độ các giao điểm còn lại là: $B(x_1, -x_1 + m), C(x_2, -x_2 + m)$.

Theo định lí Vi-ét, ta có:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3(m-2) \\ x_1x_2 = 3(6m-8) \end{cases}.$

Vì $OA \equiv Oy$ nên có một véctơ chỉ phương là $\vec{j}(0;1)$.

Vậy để đường thẳng OA là phân giác của góc $\widehat{BOC}$ thì:

$$\left|\cos\left(\vec{j},\overrightarrow{OB}\right)\right|=\left|\cos\left(\vec{j},\overrightarrow{OC}\right)\right|\Leftrightarrow\frac{|m-x_1|}{\sqrt{x_1^2+(m-x_1)^2}}=\frac{|m-x_2|}{\sqrt{x_2^2+(m-x_2)^2}}$$

$$\Leftrightarrow x_2^2(m-x_1)^2=x_1^2\left(m-x_2^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}mx_1=mx_2\\m(x_1+x_2)=2x_1x_2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\3m(m-2)=6(6m-8)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=7+\sqrt{33}.\\m=7-\sqrt{33}\end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện (1) và $A\neq O$ nên nhận $m=7\pm\sqrt{33}.$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 24: **(Sở Ninh Bình 2019 lần 2)** Cho hàm số $f(x)=x^3-3x+1.$ Tìm số nghiệm của phương trình $f\left(f(x)\right)=0.$

A. 5. **B.** 9. **C.** 4. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $f(x)=0\Leftrightarrow x^3-3x+1=0$ dùng máy tính cầm tay ta ước lượng được phương trình có ba nghiệm và $\left[\begin{array}{l}x_1\approx-1,879\\x_2\approx1,532\\x_3\approx0,347\end{array}\right.$.

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x+1,$ ta có bảng biến thiên của $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Xét phương trình $f\left(f(x)\right)=0\,(1)$ ta ước lượng được $\left[\begin{array}{l}f(x)\approx-1,879\\f(x)\approx1,532\\f(x)\approx0,347\end{array}\right.$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có:

+ Với $f(x)\approx-1,879$ phương trình (1) có 1 nghiệm.

+ Với $f(x)\approx1,532$ phương trình (1) có 3 nghiệm.

+ Với $f(x)\approx 0,347$ phương trình (1) có 3 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm.

Câu 25: (Sở Thanh Hóa 2019) Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2-6x+1$. Phương trình $\sqrt{f(f(x)+1)+1}=f(x)+2$ có số nghiệm thực là

A. 7. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=f(x)+1\Rightarrow\sqrt{f(t)+1}=t+1$, đk $t\ge -1$

$\Rightarrow f(t)+1=t^2+2t+1\Leftrightarrow t^3-3t^2-6t+2=t^2+2t+1$

$\Leftrightarrow t^3-4t^2-8t+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\approx 5.4\\ t\approx 0.12\\ t\approx -1.56(KTM)\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=4,4\\ f(x)=-0.12\end{array}\right.$.

$f'(x)=3x^2-6x-6;\ f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1-\sqrt{3}\\ x=1+\sqrt{3}\end{array}\right.$.

BBT

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	$6\sqrt{3}-7$	↘	$-6\sqrt{3}-7$	↗	$+\infty$

Dựa vào BBT $\Rightarrow f(x)=4,4$ có 1 nghiệm $\Rightarrow f(x)=-0.12$ có 3 nghiệm.

Vậy có tất cả 4 nghiệm.

Câu 26: (HKII-CHUYÊN-NGUYỄN-HUỆ-HÀ-NỘI) Cho hàm số $y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4\ (C_m)$. Giá trị của tham số m để đường thẳng $(d):y=x+4$ cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B, C sao cho tam giác KBC có diện tích bằng $8\sqrt{2}$ với điểm $K(1;3)$ là:

A. $m=\dfrac{1+\sqrt{137}}{2}$. **B.** $m=\dfrac{\pm 1+\sqrt{137}}{2}$. **C.** $m=\dfrac{1\pm\sqrt{137}}{2}$. **D.** $m=\dfrac{1-\sqrt{137}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và (d) là: $x^3+2mx^2+(m+3)x+4=x+4\ (1)$

Ta có $(1)\Leftrightarrow x^3+2mx^2+(m+2)x=0\Leftrightarrow x\left[x^2+2mx+m+2\right]=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ g(x)=x^2+2mx+m+2=0\ (2)\end{array}\right.$

Để (d) cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B, C thì (1) phải có ba nghiệm phân biệt $x_A=0$, x_B, x_C $\Leftrightarrow$ (2) phải có hai nghiệm phân biệt x_B, x_C khác 0.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_g > 0 \\ g(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -1 \end{array}\right. \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ \begin{cases} m < -1 \ (*) \\ m \neq -2 \end{cases} \end{array}\right.$

Khi đó $B(x_B; x_B + 4), C(x_C; x_C + 4)$.

Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} x_B + x_C = -2m \\ x_B x_C = m + 2 \end{cases}$

Suy ra $(x_B - x_C)^2 = (x_B + x_C)^2 - 4x_B x_C = (-2m)^2 - 4(m+2) = 4(m^2 - m - 2)$

Do đó $BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + \left[(x_B + 4) - (x_C + 4)\right]^2} = \sqrt{2(x_B - x_C)^2} = 2\sqrt{2(m^2 - m - 2)}$

Ta lại có $(d): x - y + 4 = 0$ nên khoảng cách từ $K(1;3)$ đến đường thẳng (d) là:

$d(K, d) = \dfrac{|1 - 3 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$.

Diện tích tam giác KBC là: $S_{KBC} = \dfrac{1}{2} BC.d(K,d) = \dfrac{1}{2} 2\sqrt{2(m^2 - m - 2)}.\sqrt{2} = 2\sqrt{m^2 - m - 2}$

Để $S_{KBC} = 8\sqrt{2}$ thì $2\sqrt{m^2 - m - 2} = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow m^2 - m - 34 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1 \pm \sqrt{137}}{2}$.

Kết hợp điều kiện (*) ta được $m = \dfrac{1 \pm \sqrt{137}}{2}$.

Câu 27: **(Cụm 8 trường chuyên lần1)** Tính tổng S tất cả các giá trị tham số m để đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3mx + m^2 - 2m^3$ tiếp xúc với trục hoành.

A. $S = 0$. **B.** $S = 1$. **C.** $S = \dfrac{2}{3}$. **D.** $S = \dfrac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx + 3m$; $y'' = 6x - 6m$

Cách 1:

TH1: y' có nghiệm kép và tâm đối xứng của đồ thị hàm số thuộc trục hoành

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m = 0 \\ y(m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right. \\ -4m^3 + 4m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right.$.

TH2: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 2 cực trị và $y_{CĐ}.y_{CT} = 0$ (với phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là $y = 2(m - m^2)(x + m)$) $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m > 0 \\ 2(m - m^2)\left(2m - \sqrt{m^2 - m}\right) 2(m - m^2)\left(2m + \sqrt{m^2 - m}\right) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m > 0 \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{m^2 - m} = 2m \\ \sqrt{m^2 - m} = -2m \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{3}$.

Vậy $m\in\left\{0;1;-\frac{1}{3}\right\}$, nên $S=0+1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

Cách 2.

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ tiếp xúc trục hoành $\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-3mx^2+3mx+m^2-2m^3=0\ (1)\\3x^2-6mx+3m=0\ (2)\end{cases}$ có nghiệm.

$(2)\Leftrightarrow m=\frac{x^2}{2x-1}$.

Thế vào (1): $x^3-\frac{3x^4}{2x-1}+\frac{3x^3}{2x-1}+\frac{x^4}{(2x-1)^2}-\frac{2x^6}{(2x-1)^3}=0$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\frac{1}{2}\\x^3\left(-6x^3+14x^2-10x+2\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=\frac{1}{3}\end{array}\right.$.

Thay vào (1), ta được $m\in\left\{0;1;-\frac{1}{3}\right\}$.

Câu 28: **(Đặng Thành Nam Đề 15)** Có bao nhiêu số thực m để đường thẳng $y=(m-6)x-4$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+x^2-3x-1$ tại ba điểm phân biệt có tung độ y_1, y_2, y_3 thỏa mãn $\frac{1}{y_1+4}+\frac{1}{y_2+4}+\frac{1}{y_3+4}=\frac{2}{3}$.

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng và đồ thị hàm bậc ba đã cho là
$x^3+x^2-3x-1=(m-6)x-4\Leftrightarrow x^3+x^2+(3-m)x+3=0\ (1)$.

Giả sử x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm phân biệt của phương trình (1).

Theo hệ thức viet đối với phương trình bậc ba ta có: $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=-1\\x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=3-m\\x_1x_2x_3=-3\end{cases}$.

Nhận thấy tung độ của ba giao điểm thỏa mãn phương trình $y=(m-6)x-4$ nên ta có được $y_1+4=(m-6)x_1$, $y_2+4=(m-6)x_2$ và $y_3+4=(m-6)x_3$.

Khi đó $\frac{1}{y_1+4}+\frac{1}{y_2+4}+\frac{1}{y_3+4}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{(m-6)x_1}+\frac{1}{(m-6)x_2}+\frac{1}{(m-6)x_3}=\frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{m-6}.\frac{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}{x_1x_2x_3}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{m-6}.\frac{3-m}{-3}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow m=9$.

Thử lại với $m=9$ suy ra phương trình hoành độ giao điểm $x^3+x^2-6x+3=0$ có ba nghiệm phân biệt thỏa mãn giả thiết cho (Dùng casio để kiểm tra).
Vậy có một số thực m thỏa mãn.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 29: **(Chuyên Sơn La Lần 3 năm 2018-2019)** Cho hai hàm số $y=x^2+x-1$ và $y=x^3+2x^2+mx-3$. Giá trị của tham số m để đồ thị của hai hàm số có 3 giao điểm phân biệt và 3 giao điểm đó nằm trên đường tròn bán kính bằng 3 thuộc vào khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-4)$. **B.** $(-4;-2)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-2;0)$.

Lời giải

Chọn B

Giả sử m là số thực thỏa mãn bài toán.

Phương trình hoành độ giao điểm giữa hai đồ thị là

$$x^2+x-1=x^3+2x^2+mx-3\Leftrightarrow x^3+x^2+(m-1)x-2=0\quad(1).$$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là một trong 3 giao điểm. Ta có

$$\begin{cases}y_0=x_0^2+x_0-1\\ x_0^3+x_0^2+(m-1)x_0-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_0^2=x_0^4+2x_0^3-x_0^2-2x_0+1\quad(2)\\ x_0^3+x_0^2+(m-1)x_0-2=0\quad(3)\end{cases}.$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$y_0^2=(x_0+1)\left[x_0^3+x_0^2+(m-1)x_0-2\right]+(-m-1)x_0^2-(m-1)x_0+3=(-m-1)x_0^2-(m-1)x_0+3.$$

Hay $y_0^2+x_0^2=-mx_0^2-(m-1)x_0+3=-m(y_0-x_0+1)-(m-1)x_0+3$.

Rút gọn ta được $x_0^2+y_0^2-x_0+my_0+m-3=0\quad(4)$. Đây là phương trình đường tròn khi

$\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{2}\right)^2-m+3>0\quad(*)$.

Với điều kiện $(*)$ thì $M(x_0;y_0)$ thuộc đường tròn có bán kính $R=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{2}\right)^2-m+3}$.

Theo đề bài $R=3\Leftrightarrow\frac{m^2+1}{4}-m+3=9\Leftrightarrow m^2-4m-23=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2+3\sqrt{3}\\ m=2-3\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Thử lại.

Với $m=2+3\sqrt{3}$ thì phương trình (1) có 1 nghiệm. Do đó, $m=2+3\sqrt{3}$ không thỏa mãn.

Với $m=2-3\sqrt{3}$ thì phương trình (1) có 3 nghiệm và cũng thỏa mãn $(*)$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m=2-3\sqrt{3}\in(-4;-2)$.

Câu 30: **(CỤM TRƯỜNG SÓC SƠN MÊ LINH HÀ NỘI)** Cho đồ thị (C) của hàm số $y=x^3-2mx^2+(m^2+m-2)x+m$ và parabol $(P):y=x^2-x-1$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt D,E,F. Tổng các giá trị của m để đường tròn đi qua ba điểm D,E,F cũng đi qua điểm $G\left(0;-\frac{2}{3}\right)$ là

A. $\frac{4}{3}$. **B.** -1. **C.** $-\frac{4}{3}$. **D.** 1.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (P) là

$$x^3-(2m+1)x^2+(m^2+m-1)x+m+1=0 \quad (1).$$

Vì ba điểm D,E,F thuộc $(P): y=x^2-x-1$ nên hoành độ ba điểm D,E,F thỏa mãn (1) và thỏa mãn

$$y^2=(x^2-x-1)^2=x^4-2x^3-x^2+2x+1=\left[x^3-(2m+1)x^2+(m^2+m-1)+m+1\right](x+2m-1)$$

$$+(3m^2-m-1)x^2-(2m^3+m^2-2m)x-(2m^2+m-2)$$

$$=(3m^2-m)(x+y+1)-x^2-(2m^3+m^2-2m)x-(2m^2+m-2)$$

Suy ra phương trình đường tròn đi qua ba điểm D,E,F (nếu có) là:

$$(C_1): x^2+y^2-(2m^3-2m^2-m)x-(3m^2-m)y-m^2+2m-2=0 \quad (2).$$

Vậy $G\in(C_1)\Leftrightarrow 9m^2+12m-14=0\Leftrightarrow m=\dfrac{-2\pm 3\sqrt{2}}{3}$.

Thử lại: Khi thay $m=\dfrac{-2\pm 3\sqrt{2}}{3}$ vào phương trình (1) ta thấy phương trình có ba nghiệm thực phân biệt, đồng thời các giá trị $m=\dfrac{-2\pm 3\sqrt{2}}{3}$ khi thay vào (2) thì ta nhận được phương trình của một đường tròn.

Vậy tổng các giá trị m thỏa mãn là $-\dfrac{4}{3}$.

Câu 31: **(THANH CHƯƠNG 1 NGHỆ AN 2019 LẦN 3)** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-3\pi;3\pi)$ để đồ thị của hàm số $y=2|x|^3-3(m+1)x^2+6m|x|+m^2-3$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

A. 8. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

+ Xét hàm số $f(x)=2x^3-3(m+1)x^2+6mx+m^2-3, a=2>0$

Vì $y=2|x|^3-3(m+1)x^2+6m|x|+m^2-3$ là hàm chẵn nên để đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt trong đó 2 nghiệm dương, 1 nghiệm âm hoặc có 2 nghiệm phân biệt và hai nghiệm đều dương.

+ Ta có $f'(x)=6x^2-6(m+1)x+6m$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=m\end{array}\right.$$

Ta có $f(1)=m^2+3m-4;\ f(m)=-m^3+4m^2-3;\ f(0)=m^2-3$

+ Nếu $m=1$ thì $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất nên loại.

+ Nếu $m \neq 1$ thì $f(x)$ có 2 điểm cực trị trong đó có 1 điểm cực trị luôn dương

* $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt trong đó 2 nghiệm dương, 1 nghiệm âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(m).f(1)<0 \\ f(0)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(m^2+3m-4\right)\left(-m^3+4m^2-3\right)<0 \\ m^2-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>\dfrac{3+\sqrt{21}}{2} \\ -4<m<-\sqrt{3} \end{array}\right.$$

* $f(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt và hai nghiệm đều dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ f(m).f(1)=0 \\ f(0)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ \left(m^2+3m-4\right)\left(-m^3+4m^2-3\right)=0 \\ m^2-3<0 \end{cases} \Leftrightarrow m=1(l)$$

Vậy có 8 giá trị thỏa mãn.

Câu 32: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

Khi đó $|f(x)|=m$ có bốn nghiệm phân biệt $x_1<x_2<x_3<\dfrac{1}{2}<x_4$ khi và chỉ khi.

A. $0<m\leq 1$. **B.** $\dfrac{1}{2}\leq m<1$. **C.** $\dfrac{1}{2}<m<1$. **D.** $0<m<1$.

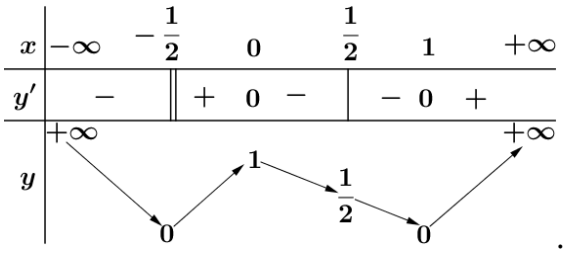
Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=0 \\ f'(0)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \\ c=0 \\ d=1 \end{cases}$, suy ra $y=f(x)=2x^3-3x^2+1$.

NX: $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=|f(x)|$ như sau:



Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $|f(x)|=m$ có bốn nghiệm phân biệt $x_1<x_2<x_3<\frac{1}{2}<x_4$ khi và chỉ khi $\frac{1}{2}<m<1$.

HÀM BẬC BỐN

Câu 33: Gọi (C_m) là độ thì hàm số $y=x^4-2x^2-m+2017$. Tìm m để (C_m) có đúng 3 điểm chung phân biệt với trục hoành, ta có kết quả:

A. $m=2017$ **B.** $2016<m<2017$ **C.** $m\geq 2017$ **D.** $m\leq 2017$

Lời giải

Chọn A

- Phương pháp: Tìm m để phương trình ẩn x tham số m có n nghiệm phân biệt thuộc khoảng K

+ Cô lập m, đưa phương trình về dạng m = f(x)

+ Vẽ đồ thị (hoặc bảng biến thiên) của y=f(x) trên K

+ Biện luận để đường thẳng y = m cắt đồ thị hàm số y =f(x) tại n điểm phân biệt trên K

- Cách giải: (C_m) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình

$x^4-2x^2-m+2017=0\Leftrightarrow m=x^4-2x^2+2017$ có 3 nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $y=x^4-2x^2+2017$ trên R

Có $y'=4x^3-4x=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=\pm 1$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy đường thẳng y = m cắt đồ thị hàm số y =f(x) tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi m =2017

Câu 34: **(Chuyên Hưng Yên Lần 3)** Một đường thẳng cắt đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2$ tại bốn điểm phân biệt có hoành độ là 0, 1, m và n. Tính $S=m^2+n^2$.

A. $S=0$. **B.** $S=1$. **C.** $S=2$. **D.** $S=3$.

Lời giải

Chọn D

Do đường thẳng cắt đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2$ tại điểm có hoành độ là 0 nên phương trình đường thẳng có dạng $y=ax$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y=ax$ với đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2$ là:

$x^4-2x^2=ax\Leftrightarrow x^4-2x^2-ax=0\Leftrightarrow x\left(x^3-2x-a\right)=0$.

Do phương trình có bốn nghiệm là 0, 1, m, n nên ta có:

$x\left(x^3-2x-a\right)=x(x-1)(x-m)(x-n) \Rightarrow x^3-2x-a=\left(x^2-mx-x+m\right)(x-n)$

$\Leftrightarrow x^3-2x-a=x^3-nx^2-mx^2+mnx-x^2+nx+mx-mn$

$\Leftrightarrow x^3-2x-a=x^3+(-n-m-1)x^2+(m+n+mn)x-mn$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -m-n-1=0 \\ m+n+mn=-2 \\ -mn=-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+n=-1 \\ mn=-1 \end{cases} \Rightarrow S=m^2+n^2=(m+n)^2-2mn=3.$

Câu 35: **(Chuyên Hạ Long lần 2-2019)** Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+m^2-1$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

A. $m>1$. **B.** $-1\le m\le 1$. **C.** $m\le -1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m\le -1 \\ m\ge 1 \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $y=x^4-2mx^2+m^2-1$ và Ox:

$x^4-2mx^2+m^2-1=0 \ (*)$

Đặt $x^2=t \ (t\ge 0)$. Khi đó phương trình (*) trở thành $t^2-2mt+m^2-1=0 \ (**)$

Để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+m^2-1$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (*) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (**) có hai nghiệm phân biệt dương $\Leftrightarrow$

$\begin{cases} \Delta'>0 \\ S>0 \\ P>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1>0 \\ 2m>0 \\ m^2-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m>1.$

Câu 36: Cho hàm số $y=x^4-mx^2+m$ (m là tham số) có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3,x_4 thỏa mãn $x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=30$ khi $m=m_0$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $4<m_0\le 7$. **B.** $0<m_0<4$. **C.** $m_0>7$. **D.** $m_0\le -2$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox là $x^4-mx^2+m=0 \ (*)$.

Đặt $t=x^2\ge 0$ khi đó $(*)\Leftrightarrow f(t)=t^2-mt+m=0$.

Để (*) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow f(t)=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow m>4$

Khi đó, gọi $t_1,t_2 \ (t_1<t_2)$ là hai nghiệm phân biệt của $f(t)=0$

Suy ra $x_1=-\sqrt{t_2}$; $x_2=-\sqrt{t_1}$; $x_3=\sqrt{t_1}$; $x_4=\sqrt{t_2} \Rightarrow x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=2\left(t_1^2+t_2^2\right)=30$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Mà $\begin{cases} t_1+t_2=m \\ t_1t_2=m \end{cases} \Rightarrow t_1^2+t_2^2=(t_1+t_2)^2-2t_1t_2=m^2-2m$ suy ra $\begin{cases} m>4 \\ m^2-2m=15 \end{cases} \Leftrightarrow m=5$.

Câu 37: Cho hàm số $y=x^4-mx^2+m$ (m là tham số) có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3,x_4 thỏa mãn $x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=30$ khi $m=m_0$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $4<m_0\le 7$. **B.** $0<m_0<4$. **C.** $m_0>7$. **D.** $m_0\le -2$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox là $x^4-mx^2+m=0$ $(*)$.

Đặt $t=x^2\ge 0$ khi đó $(*)\Leftrightarrow f(t)=t^2-mt+m=0$.

Để (*) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow f(t)=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow m>4$

Khi đó, gọi t_1,t_2 $(t_1<t_2)$ là hai nghiệm phân biệt của $f(t)=0$

Suy ra $x_1=-\sqrt{t_2}$; $x_2=-\sqrt{t_1}$; $x_3=\sqrt{t_1}$; $x_4=\sqrt{t_2} \Rightarrow x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=2(t_1^2+t_2^2)=30$.

Mà $\begin{cases} t_1+t_2=m \\ t_1t_2=m \end{cases} \Rightarrow t_1^2+t_2^2=(t_1+t_2)^2-2t_1t_2=m^2-2m$ suy ra $\begin{cases} m>4 \\ m^2-2m=15 \end{cases} \Leftrightarrow m=5$.

Câu 38: Gọi m là số thực dương sao cho đường thẳng $y=m+1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2-2$ tại hai điểm A,B thỏa mãn tam giác OAB vuông tại O (O là gốc tọa độ). Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $m\in\left(\frac{7}{9};\frac{9}{4}\right)$. **B.** $m\in\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$. **C.** $m\in\left(\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right)$. **D.** $m\in\left(\frac{5}{4};\frac{7}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn C

PT hoành độ giao điểm là $m+1=x^4-3x^2-2 \xrightarrow{t=x^2} t^2-3t-m-3=0$ (1).

Hai đồ thị có 2 giao điểm $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow t_1t_2<0\Leftrightarrow -m-3<0\Leftrightarrow m>-3$ (2)

Khi đó $\begin{cases} t_1=\dfrac{3+\sqrt{21+4m}}{2} \\ t_2=\dfrac{3-\sqrt{21+4m}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A=\sqrt{t_1} \\ x_B=-\sqrt{t_1} \end{cases}$

Suy ra tọa độ hai điểm A,B là $A\left(\sqrt{t_1};m+1\right),B\left(-\sqrt{t_1};m+1\right)\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OA}=\left(\sqrt{t_1};m+1\right) \\ \overrightarrow{OB}=\left(-\sqrt{t_1};m+1\right) \end{cases}$

Tam giác OAB vuông tại O $\Rightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0\Leftrightarrow -t_1+(m+1)^2=0\Leftrightarrow -\dfrac{3+\sqrt{21+4m}}{2}+(m+1)^2=0$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Giải PT kết hợp với điều kiện $(2) \Rightarrow m=1 \Rightarrow m \in \left(\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right)$.

Câu 39: **(THTT lần5)** Cho hàm số $y=x^4-2x^2$ có đồ thị (C), có bao nhiêu đường thẳng d có đúng 3 điểm chung với đồ thị (C) và các điểm chung có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-1$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Vì đường thẳng d cắt đồ thị hàm số (C) tại 3 điểm phân biệt nên đường thẳng d là đường thẳng có hệ số góc dạng $y=ax+b$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $x^4-2x^2=ax+b$.

Mà phương trình là phương trình bậc 4 nên phương trình muốn có 3 nghiệm phân biệt thì trong đó sẽ có 1 nghiệm kép gọi là x_1, hai nghiệm còn lại là x_2, x_3.

Suy ra đường thẳng d là tiếp tuyến của đồ thị (C), không mất tính tổng quát giả sử đường thẳng d tiếp xúc với đồ thị hàm số (C) tại x_1.

Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ x_1, d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ $x_2, x_3 (\neq x_1)$ thỏa mãn $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-1$.

Ta có: $d: y=(4x_1^3-4x_1)(x-x_1)+x_1^4-2x_1^2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là:

$$x^4-2x^2=(4x_1^3-4x_1)(x-x_1)+x_1^4-2x_1^2 (1)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (1)$ có 3 nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-1$.

$$(1) \Leftrightarrow (x-x_1)^2(x^2+2x_1x+3x_1^2-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=x_1 \\ f(x)=x^2+2x_1x+3x_1^2-2=0 \end{cases}$$

Để phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-1$ thì phương trình $f(x)=0$ phải có 2 nghiệm phân biệt x_2, x_3 khác x_1 và thỏa mãn định lí Vi – ét: $\begin{cases} x_2+x_3=-2x_1 \\ x_2.x_3=3x_1^2-2 \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} \Delta'=x_1^2-3x_1^2+2>0 \\ x_1^2+2x_1^2+3x_1^2-2\neq 0 \\ x_1^3+(x_2+x_3)^3-3x_2x_3(x_2+x_3)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x_1<1 \\ 3x_1^2-1\neq 0 \\ x_1^3+(-2x_1)^3-3(3x_1^2-2).(-2x_1)=-1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x_1=\frac{-11+\sqrt{165}}{22}$. Vậy có đúng 1 đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 40: Gọi (C_m) là độ thì hàm số $y=x^4-2x^2-m+2017$. Tìm m để (C_m) có đúng 3 điểm chung phân biệt với trục hoành, ta có kết quả:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $m=2017$ **B.** $2016<m<2017$ **C.** $m\ge 2017$ **D.** $m\le 2017$

Lời giải

Chọn A

- Phương pháp: Tìm m để phương trình ẩn x tham số m có n nghiệm phân biệt thuộc khoảng K

+ Cô lập m, đưa phương trình về dạng m = f(x)

+ Vẽ đồ thị (hoặc bảng biến thiên) của y=f(x) trên K

+ Biện luận để đường thẳng y = m cắt đồ thị hàm số y =f(x) tại n điểm phân biệt trên K

- Cách giải: (C_m) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình

$x^4-2x^2-m+2017=0\Leftrightarrow m=x^4-2x^2+2017$ có 3 nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $y=x^4-2x^2+2017$ trên R

Có $y'=4x^3-4x=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=\pm 1$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy đường thẳng y = m cắt đồ thị hàm số y =f(x) tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi m =2017

Câu 41: Gọi m là số thực dương sao cho đường thẳng $y=m+1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2-2$ tại hai điểm A,B thỏa mãn tam giác OAB vuông tại O (O là gốc tọa độ). Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $m\in\left(\frac{7}{9};\frac{9}{4}\right)$. **B.** $m\in\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$. **C.** $m\in\left(\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right)$. **D.** $m\in\left(\frac{5}{4};\frac{7}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn C

PT hoành độ giao điểm là $m+1=x^4-3x^2-2\xrightarrow{t=x^2}t^2-3t-m-3=0\ (1)$.

Hai đồ thị có 2 giao điểm $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow t_1t_2<0\Leftrightarrow -m-3<0\Leftrightarrow m>-3\ (2)$

Khi đó $\begin{cases}t_1=\dfrac{3+\sqrt{21+4m}}{2}\\ t_2=\dfrac{3-\sqrt{21+4m}}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_A=\sqrt{t_1}\\ x_B=-\sqrt{t_1}\end{cases}$

Suy ra tọa độ hai điểm A,B là $A\left(\sqrt{t_1};m+1\right),B\left(-\sqrt{t_1};m+1\right)\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{OA}=\left(\sqrt{t_1};m+1\right)\\ \overrightarrow{OB}=\left(-\sqrt{t_1};m+1\right)\end{cases}$

Tam giác OAB vuông tại $O\Rightarrow\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0\Leftrightarrow -t_1+(m+1)^2=0\Leftrightarrow -\dfrac{3+\sqrt{21+4m}}{2}+(m+1)^2=0$

Giải PT kết hợp với điều kiện $(2)\Rightarrow m=1\Rightarrow m\in\left(\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right)$.

Câu 42: **(ĐOÀN THƯỢNG-HẢI DƯƠNG LẦN 2 NĂM 2019)** Gọi m là số thực dương sao cho đường thẳng $y=m+1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2-2$ tại hai điểm phân biệt M,N thỏa mãn tam giác OMN vuông tại O (O là gốc tọa độ). Kết luận nào sau đây là đúng?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $m\in\left(\frac{11}{4};\frac{15}{4}\right)$. **B.** $m\in\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$. **C.** $m\in\left(\frac{7}{4};\frac{9}{4}\right)$. **D.** $m\in\left(\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y=m+1\ (d)$ và $y=x^4-3x^2-2\ (C)$.

Xét phương trình tương giao: $x^4-3x^2-2=m+1\Leftrightarrow x^4-3x^2-(m+3)=0$. (1)

Đặt $t=x^2\ge 0$, phương trình (1) trở thành: $t^2-3t-(m+3)=0$. (2)

Phương trình (2) có tích $a.c=-m-3<0$ khi m là số thực dương.

Suy ra phương trình (2) luôn có hai nghiệm trái dấu $t_1<0<t_2$.

Từ đó suy ra phương trình (1) có hai nghiệm đối nhau $x_1=-\sqrt{t_2}, x_2=\sqrt{t_2}$ đồng thời (d) và (C) cắt nhau tại hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua Oy là $M\left(-\sqrt{t_2};m+1\right)$, $N\left(\sqrt{t_2},m+1\right)$.

Mặt khác tam giác OMN vuông tại O thì $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=0\Leftrightarrow t_2=(m+1)^2$.

Thay $t_2=(m+1)^2$ vào phương trình (2) ta được:

$(m+1)^4-3(m+1)^2-(m+3)=0\Leftrightarrow(m+1)^4-3(m+1)^2-(m+1)-2=0$.

Đặt $a=m+1>1$ ta được phương trình

$a^4-3a^2-a-2=0\Leftrightarrow(a-2)\left(a^3+2a^2+a+1\right)=0\Leftrightarrow a=2$ (do $a>1$ nên $a^3+2a^2+a+1>0$).

Từ đó ta được $m+1=2\Leftrightarrow m=1$ (thỏa mãn $m>0$).

Vậy $m=1$.

Câu 43: **(Sở Ninh Bình 2019 lần 2)** Cho phương trình $\left(x^2-3x+m\right)^2+x^2-8x+2m=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-20;20]$ để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt?

A. 19. **B.** 18. **C.** 17. **D.** 20.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\left(x^2-3x+m\right)^2+x^2-8x+2m=0$

$\Leftrightarrow\left[\left(x^2-3x+m\right)^2-x^2\right]+\left(2x^2-8x+2m\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x^2-4x+m\right)\left(x^2-2x+m\right)+2\left(x^2-4x+m\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x^2-4x+m\right)\left(x^2-2x+m+2\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x^2-4x+m=0 & (1)\\ x^2-2x+m+2=0 & (2)\end{array}\right.$.

YCBT $\Leftrightarrow$ mỗi phương trình (1) và (2) có 2 nghiệm phân biệt không trùng nhau.

Phương trình (1) và (2) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta_1'>0\\ \Delta_2'>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4-m>0\\ 1-m-2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<4\\ m<-1\end{cases}\Leftrightarrow m<-1$.

Giả sử phương trình (1) và (2) có nghiệm x_0 trùng nhau

$\Rightarrow$ Hệ sau có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+m=0 & (1) \\ x^2-2x+m+2=0 & (2) \end{cases}$

$\Rightarrow {x_0}^2-4x_0+m-\left({x_0}^2-2x_0+m+2\right)=0$

$\Leftrightarrow x_0=-1.$

Với $x_0=-1$ thay vào (1) ta được $m=-5.$

$\Rightarrow$ Với $m\neq -5$ phương trình (1) và (2) không có nghiệm trùng nhau.

Kết hợp m là số nguyên thuộc đoạn $[-20;20]$ $\Rightarrow$ $m\in[-20;-1)\setminus\{-5\}$.

Vậy có 18 số nguyên m thoả mãn yêu cầu bài toán.

HÀM PHÂN THỨC

Câu 44: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}(H)$ và đường thẳng $d: y=x+m2x+m$ giao nhau tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB=\sqrt{5}.$

A. $m=4.$ **B.** $m=3.$ **C.** $m=0.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m=10 \\ m=-2 \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm:

$2x^2+mx+m+2=0,(x\neq -1),\ (1)$

(d) cắt (H) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác -1 $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-8m-16>0 (2) \\ x\neq -1 \end{cases}$

Gọi $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$ là giao điểm giữa d và (H). Ta có x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (1).

$AB=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left(1+2^2\right)\Delta}=\dfrac{1}{2}\sqrt{5\Delta}=\dfrac{1}{2}\sqrt{5\left(m^2-8m-16\right)}=\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow m^2-8m-20=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=10 \\ m=-2 \end{array}\right.$

Thỏa mãn (2).

Câu 45: Tìm tất cả các giá trị thực của m để đường thẳng $y=x+m-1$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB=2\sqrt{3}$.

A. $m=4\pm\sqrt{10}$. **B.** $m=4\pm\sqrt{3}$. **C.** $m=2\pm\sqrt{3}$. **D.** $m=2\pm\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn A

Hoành độ giao điểm là nghiệm PT: $\frac{2x+1}{x+1}=x+m-1\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=x^2+(m-2)x+m-2=0\\x\neq -1\end{cases}$.

Đường thẳng $y=x+m-1$ cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1, hay

$$\begin{cases}\Delta>0\\f(-1)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-8m+12>0\\1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}m<2\\m>6\end{bmatrix}\ (*).$$

Khi đó, gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $f(x)=0$, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2-m\\x_1x_2=m-2\end{cases}$ (Viète).

Giả sử $A(x_1;x_1+m-1),B(x_2;x_2+m-1)\Rightarrow AB=\sqrt{2}|x_2-x_1|$.

Theo giả thiết $AB=2\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{2}|x_2-x_1|=2\sqrt{3}\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=6\Leftrightarrow m^2-8m+6=0$

$\Leftrightarrow m=4\pm\sqrt{10}$

Kết hợp với điều kiện $(*)$ ta được $m=4\pm\sqrt{10}$.

Câu 46: (GIỮA-HKII-2019-NGHĨA-HƯNG-NAM-ĐỊNH) Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d:y=x+m-1$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB=2\sqrt{3}$. Tính tổng bình phương các phần tử của S.

A. 38. **B.** 52. **C.** 28. **D.** 14.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$$\frac{2x+1}{x+1}=x+m-1\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -1\\x^2+(m-2)x+m-2=0\end{cases}(*).$$

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta_{(*)}>0\\(-1)^2-(m-2)+m-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m-2)^2-4(m-2)>0\\1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m^2-8m+12>0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}m<2\\m>6\end{bmatrix}\ (**).$$

Khi đó, $A(x_1;x_1+m-1)$ và $B(x_2;x_2+m-1)$, với x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình (*).

Hơn nữa, $AB=2\sqrt{3}\Leftrightarrow AB^2=12\Leftrightarrow 2(x_2-x_1)^2=12\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=6$, với $x_1+x_2=2-m$ và $x_1x_2=m-2$ (Viète). Từ đó, ta có $m^2-8m+6=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}m=4+\sqrt{10}\\m=4-\sqrt{10}\end{bmatrix}$.

So điều kiện (**), ta nhận hai giá trị m trên. Do đó, $S=\{4-\sqrt{10};4+\sqrt{10}\}$.

Vậy, tổng bình phương các phần tử của S là $(4-\sqrt{10})^2+(4+\sqrt{10})^2=52$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 47: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}(H)$ và đường thẳng $d: y=x+m2x+m$ giao nhau tại hai điểm phân biệt *A, B* thuộc 2 nhánh khác nhau. Xác định *m* để đoạn *AB* có độ dài ngắn nhất.

A. $m=5.$ **B.** $m=-3.$ **C.** $m=0.$ **D.** $m=-1.$

Lời giải

Chọn D

Để đường thẳng d luôn cắt (H) tại hai điểm phân biệt thì phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x+1}{x-1}=2x+m$ có hai nghiệm phân biệt với mọi m và $x_1<1<x_2$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=(x-1)(2x+m)\\x\neq 1\end{cases}$ có hai nghiệm phân biệt $x_1<1<x_2$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+(m-3)x-m-1=0(*)\\x\neq 1\end{cases}$ có hai nghiệm phân biệt $x_1<1<x_2$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\f(1)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m+1)^2+16>0,\forall m\\f(1)=2+(m-3)-m-1=-2<0\end{cases}$

Vậy với mọi giá trị m thì đường thẳng d luôn cắt (H) tại hai điểm phân biệt A, B thuộc hai nhánh khác nhau.

Gọi $A(x_1;2x_1+m),B(x_2;2x_2+m)$ là giao điểm giữa d và (H).

(x_1,x_2 là 2 nghiệm phương trình (*))

Ta có:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(2(x_2-x_1))^2}=\sqrt{5(x_2-x_1)^2}=\sqrt{5\left((x_2+x_1)^2-4x_1x_2\right)}$$

Theo viet ta có: $AB=\frac{1}{2}\sqrt{5\left[(m+1)^2+16\right]}\geq 2\sqrt{5}$

$AB_{\min}=2\sqrt{5}\Leftrightarrow m=-1$

Vậy $m=-1$ là giá trị cần tìm.

Nhận xét: Vậy ta có thể tính theo công thức tính nhanh ở trên:

$$AB=\frac{1}{2}\sqrt{(1+2^2)\Delta}=\frac{1}{2}\sqrt{5\Delta}=\frac{1}{2}\sqrt{5\left((m+1)^2+16\right)}\to\min$$

Khi $\Delta\to\min$. vậy $m=-1$.

Câu 48: **(Chuyên Bắc Giang)** Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=x-m+2$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{2x}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho độ dài AB ngắn nhất.

A. $m=-3.$ **B.** $m=3.$ **C.** $m=-1.$ **D.** $m=1.$

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm của phương trình $\frac{2x}{x-1}=x-m+2$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x-1\neq 0\\2x=(x-1)(x-m+2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\2x=x^2-mx+2x-x+m-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\x^2-(m+1)x+m-2=0\ (1)\end{cases}$.

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow\begin{cases}(m+1)^2-4(m-2)>0\\1^2-(m+1).1+m-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-2m+9>0\\-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow (m-1)^2+8>0$, đúng với $\forall m\in\mathbb{R}$.

Nghiệm x_1, x_2 của (1) lần lượt là hoành độ điểm A, B.

Gọi $A(x_1;x_1-m+2)$ và $B(x_2;x_2-m+2)$. Theo hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=m+1\\x_1x_2=m-2\end{cases}$.

$AB^2=(x_2-x_1)^2+(x_2-m+2-x_1+m-2)^2=2(x_2-x_1)^2=2(x_2+x_1)^2-8x_2x_1=2(m+1)^2-8(m-2)$

$=2m^2-4m+18=2(m-1)^2+16\geq 16,\forall m$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m=1$.

Vậy AB ngắn nhất khi $m=1$.

Câu 49: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\frac{m-x}{x+2}(H_m)$ và đường thẳng $d:2x+2y-1=0$ giao nhau tại hai điểm cùng với gốc tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích là $S=\frac{3}{8}$.

A. $m=3$. **B.** $m=\frac{1}{2}$. **C.** $m=2$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Chọn A

Hoành độ giao điểm A, B của d và (H_m) là các nghiệm của phương trình: $\frac{-x+m}{x+2}=-x+\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x^2+x+2(m-1)=0, x\neq -2,\quad (1)$

Phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 phân biệt khác -2:

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=17-16m>0\\2.(-2)^2-2+2(m-1)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\frac{17}{16}\\m\neq -2\end{cases}$

Ta có:

$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{2}.\sqrt{(x_2-x_1)^2}$

$=\sqrt{2}.\sqrt{(x_2+x_1)^2-4x_1x_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{17-16m}$

Khoảng cách từ gốc tọa độ đến d là $h=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Suy ra $S_{OAB}=\frac{1}{2}.h.AB=\frac{1}{2}.\frac{1}{2\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{17-16m}=\frac{3}{8}\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$ (thỏa mãn)

Câu 50: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\frac{2x}{x-2}(H)$ và đường thẳng $d:y=x+m$ giao nhau tại hai điểm phân biệt thuộc 2 nhánh khác nhau của đồ thị sao cho khoảng cách giữa hai điểm đó là nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

A. $m=4$ và $\sqrt{30}$. **B.** $m=\frac{1}{2}$ và $\sqrt{31}$. **C.** $m=0$ và $\sqrt{32}$. **D.** $m=-1$ và $\sqrt{33}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm:

$\frac{2x}{x-2}=x+m\Leftrightarrow x^2+(m-4)x-2m=0,\ (1)$

Để d cắt (H) tại 2 điểm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 2.

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=m^2+16\\-4\neq 0\end{cases},\forall m\ \ (2)$

Giả sử $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)$ là hai giao điểm khi đó x_1,x_2 là 2 nghiệm của phương trình (1)

Thei viet ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=4-m\\x_1.x_2=-2m\end{cases}\ (3)$

$y_1=x_1+m,\ y_2=x_2+m$

Để A, B thuộc 2 nhánh khác nhau của đồ thị thì A và B nằm khác phía đối với đường thẳng $x-2=0$.

A và B nằm khác phía đối với đường thẳng $x-2=0$ khi và chỉ khi $(x_1-2)(x_2-2)<0$ hay

$x_1.x_2-2(x_1+x_2)+4<0,\ \ (4)$

Tahy (3) vào (4) ta được $-4<0$ luôn đúng (5). Mặt khác ta lại có

$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{2(x_1+x_2)^2-8x_1x_2}\ \ (6)$

Tahy (3) vào (6) ta được: $AB=\sqrt{2m^2+32}\geq\sqrt{32}$ vậy $AB=\sqrt{32}$ nhỏ nhất khi $m=0\ \ (7)$

Từ (1), (5), (7) ta có $m=0$ và $AB=\sqrt{32}$ thỏa mãn.

Nhận xét: Đối với các bài khoảng cách như và 2, thì có cách nào tính khoảng cách AB nhanh nhất không? Chúng ta khẳng định là có.

Thật vậy, ta có bài tổng quát: Cho hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ và đường thẳng $y=mx+n,(m\neq 0)$

Gọi A, B là hai điểm mà đường thẳng cắt hàm số. Giả sử $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)$ là 2 giao điểm, khi đó x_1,x_2 là 2 nghiệm phương trình: $f(x)=mx+n,(1)$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$AB=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2}=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(m\left(x_1-x_2\right)\right)^2}=\sqrt{\left(1+m^2\right)\left(x_1-x_2\right)^2}$

$=\sqrt{\left(1+m\right)^2\left(\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2\right)}=\frac{1}{m}\sqrt{\left(1+m^2\right)\Delta}$

Với Δ được tính từ phương trình (1).

+Nếu AB nhỏ nhất thì Δ nhỏ nhất.

Ta có thể xét bài tập sau đây:

Câu 51: Tìm tất cả các giá trị thực của a và b sao cho đồ thị của hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}(C)$ và đường thẳng $d:y=ax+b$ giao nhau tại hai điểm phân biệt, đối xứng nhau qua đường thẳng $\Delta:x-2y+3=0$.

A. $\begin{cases}a=-2\\b=-1\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}a=-2\\b=-2\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}a=-2\\b=-3\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}a=-2\\b=-4\end{cases}$

Lời giải

Chọn A

Phương trình của Δ được viết lại dưới dạng $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

Để giao điểm đối xứng qua Δ thì $\Delta\perp d\Leftrightarrow a.\frac{1}{2}=-1\Leftrightarrow a=-2$.

Suy ra đường thẳng $d:y=-2x+b$

Phương trình hoành độ giao điểm giữa d và (C):

$\frac{x-1}{x+1}=-2x+b\Leftrightarrow 2x^2-\left(b-3\right)x-\left(b+1\right)=0.\quad(1)$

Để d và (C) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow\Delta>0\Leftrightarrow b^2+2b+17>0\Rightarrow\forall b\in\mathbb{R}$

Goi I là trung điểm của AB, ta có: $\begin{cases}x_I=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{b-3}{4}\\y_I=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{b+3}{2}\end{cases}$

Vì A, B đối xứng nhau qua Δ nên trung điểm I thuộc vào đường thẳng Δ, ta có:

$x_I-2y_I+3=0\Leftrightarrow\frac{b-3}{4}-\left(b+3\right)+3=0\Leftrightarrow b=-1.$

Vậy $\begin{cases}a=-2\\b=-1\end{cases}$ thỏa ycbt.

Câu 52: Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị của hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}(C)$ và đường thẳng $d:y=mx+3$ giao nhau tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O. (O là gốc tọa độ)

A. $m=3\pm\sqrt{5}.$ **B.** $m=3-\sqrt{5}.$ **C.** $m=3+\sqrt{5}$. **D.** $m=2\pm\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Pt hoành độ gia điểm: $\frac{2x+1}{x-1}=mx+3,(x\neq 1)\Leftrightarrow mx^2-(m-1)x-4=0,(1)$

(d) cắt đồ thị hàm số (C) tại A, B khi và chỉ khi pt (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 1, nên:

$$\begin{cases}\frac{2x+1}{x-1}=mx+3,(x\neq 1)\Leftrightarrow mx^2-(m-1)x-4=0,(1)\\ m.1^2-(m-1).1-4\neq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}m\neq 0\\ \Delta>0\\ g(1)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ \left[\begin{array}{l}m<-7-4\sqrt{3}\\ m>-7+4\sqrt{3}\end{array}\right.\end{cases}$$

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0\Leftrightarrow x_A.x_B+(mx_A+3)(mx_B+3)=0$

$\Leftrightarrow(m^2+1)(x_A.x_B)+3m(x_A+x_B)+9=0,(2)$

Theo Viet ta có: $\begin{cases}x_A+x_B=\frac{m-1}{m}\\ x_A.x_B=-\frac{4}{m}\end{cases},(3)$

Thay (3) vào (2) ta được: $m^2-6m+4=0\Leftrightarrow m=3\pm\sqrt{5}$

Vậy với $m=3\pm\sqrt{5}.$ thỏa mãn ycbt.

Câu 53: Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và điểm $P(2;5)$. Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y=-x+m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho tam giác PAB đều.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng d và đồ thị (C) là:

A. $m=1,\ m=-5$ **B.** $m=1,\ m=4$ **C.** $m=6,\ m=-5$ **D.** $m=1,\ m=-8$

Lời giải

Chọn C

$\frac{2x-1}{x+1}=-x+m\Leftrightarrow x^2-(m-3)x-m-1=0\ \ (1)$, với $x\neq -1$

Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-2m+13>0\\ 0.m-3\neq 0\end{cases}$ (đúng $\forall m$)

Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (1), ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=m-3\\ x_1x_2=-m-1\end{cases}$

Giả sử $A(x_1;-x_1+m),\ B(x_2;-x_2+m)$

Khi đó ta có: $AB=\sqrt{2\left(x_1-x_2\right)^2}$

$PA=\sqrt{\left(x_1-2\right)^2+\left(-x_1+m-5\right)^2}=\sqrt{\left(x_1-2\right)^2+\left(x_2-2\right)^2}$,

$PB=\sqrt{\left(x_2-2\right)^2+\left(-x_2+m-5\right)^2}=\sqrt{\left(x_2-2\right)^2+\left(x_1-2\right)^2}$

Suy ra ΔPAB cân tại P

Do đó ΔPAB đều $\Leftrightarrow PA^2=AB^2$

$\Leftrightarrow\left(x_1-2\right)^2+\left(x_2-2\right)^2=2\left(x_1-x_2\right)^2\Leftrightarrow\left(x_1+x_2\right)^2+4\left(x_1+x_2\right)-6x_1x_2-8=0$

$\Leftrightarrow m^2+4m-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-5\end{array}\right.$. Vậy giá trị cần tìm là $m=1,\ m=-5$.

Câu 54: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-4}{x+1}$ có đồ thi $\left(C\right)$ điểm $A(-5;5)$. Tìm m để đường thẳng $y=-x+m$ cắt đồ thị $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt M và N sao cho tứ giác $OAMN$ là hình bình hành (O là gốc toạ độ).

A. $m=0$ **B.** $m=0;m=2$ **C.** $m=2$ **D.** $m=-2$

Lời giải

Chọn C

Do các điểm O và A thuộc đường thẳng $\Delta:y=-x$ nên để $OAMN$ là hình bình hành thì $MN=OA=5\sqrt{2}$

Hoành độ của M và N là nghiệm của pt: $\dfrac{2x-4}{x+1}=-x+m\Leftrightarrow x^2+(3-m)x-(m+4)=0\ (x\neq-1)\ (1)$

Vì $\Delta=m^2-2m+25>0,\forall m$,nên $\left(1\right)$ luôn có hai nghiệm phân biệt, $\left(d\right)$ luôn cắt $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt

Giả sử x_1,x_2 là nghiệm của $\left(1\right)$ ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=m-3\\x_1x_2=-(m+4)\end{cases}$

Gọi $M(x_1;-x_1+m),N(x_2;-x_2+m)\Rightarrow MN^2=2(x_1-x_2)^2=2\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]=2m^2-4m+50$

$MN=5\sqrt{2}\Rightarrow2m^2-4m+50=50\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=0\end{array}\right.$

+ $m=0$ thì O,A,M,N thẳng hàng nên không thoả mãn.

+ $m=2$ thoả mãn.

Câu 55: Cho hàm số $y=\dfrac{3x-2m}{mx+1}$ với m là tham số. Xác định m để đường thẳng d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại C, D sao cho diện tích ΔOAB bằng 2 lần diện tích ΔOCD.

A. $m=\pm\dfrac{5}{3}$ **B.** $m=\pm3$ **C.** $m=\pm\dfrac{2}{3}$ **D.** $m=\pm\dfrac{1}{3}$

Lời giải

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của d và đồ thị: $3mx^2-3m^2x-m=0, x\neq\frac{-1}{m}$

Vì $m\neq 0$ nên phương trình $\Leftrightarrow 3x^2-3mx-1=0$ (*). Ta có $\Delta=9m^2+12>0,\forall m\neq 0$ và $f\left(\frac{-1}{m}\right)=\frac{3}{m^2}+2\neq 0,\forall m\neq 0$ (ở đây $f(x)$ là vế trái của (*)) nên d luôn cắt đồ thị tại 2 điểm A,B phân biệt $\forall m\neq 0$

Ta có $A(x_1;3x_1-3m), B(x_2;3x_2-3m)$ với x_1,x_2 là 2 nghiệm của (*). Kẻ đường cao OH của ΔOAB ta có $OH=d(0;d)=\frac{|-3m|}{\sqrt{10}}$ và $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(3x_2-3x_1)^2}=\sqrt{10(x_2-x_1)^2}$ $=\sqrt{10(x_1+x_2)^2-40x_1x_2}=\sqrt{10m^2+\frac{40}{3}}$

(Định lý Viet đối với (*)).

Mặt khác ta có $C(m;0), D(0;-3m)$ (để ý $m\neq 0$ thì C,D,O phân biệt). Ta tìm m để $S_{\Delta OAB}=2S_{\Delta OCD}$ hay $\sqrt{10m^2+\frac{40}{3}}.\frac{|-3m|}{\sqrt{10}}=2|m||3m|\Leftrightarrow m=\pm\frac{2}{3}$

Câu 56: Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x+1}(C)$. Tìm k để đường thẳng $d: y=kx+2k+1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho khoảng cách từ A và B đến trục hoành bằng nhau.

A. 12 **B.** –4 **C.** –3 **D.** 1

Lời giải

Phương triình hoành độ giao điểm của (C) và d:

$\frac{2x+1}{x+1}=kx+2k+1\Leftrightarrow 2x+1=(x+1)(kx+2k+1);\ (x\neq -1)$

$\Leftrightarrow kx^2+(3k-1)x+2k=0\ (1);\quad (x\neq -1)$

d cắt (C) tại hai điểm A, B phân biệt khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt khác –1.

$\Leftrightarrow\begin{cases}k\neq 1\\ \Delta=k^2-6k+1>0\\ k(-1)^2+(3k-1)(-1)+2k\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k\neq 0\\ k<3-2\sqrt{2}\vee k>3+2\sqrt{2}\end{cases}.$

Khi đó: $A(x_1;kx_1+2k+1), B(x_2;kx_2+2k+1)$ với x_1,x_2 là nghiệm của (1).

Theo định lý Viet tao có $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{-3k+1}{k}\\ x_1x_2=2\end{cases}$.

Ta có $d(A;Ox)=d(B;Ox)\Leftrightarrow|kx_1+2k+1|=|kx_2+2k+1|$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}kx_1+2k+1=kx_2+2k+1\\ kx_1+2k+1=-kx_2-2k-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=x_2\\ k(x_1+x_2)+4k+2=0\end{array}\right.$.

Do hai điểm A, B phân biệt nên ta loại nghiệm $x_1 = x_2$. Do đó $k(x_1+x_2)+4k+2=0 \Leftrightarrow k=-3$

Chọn C

Câu 57: Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^3+2mx^2+3(m-1)x+2(C)$ và đường thẳng $\Delta: y=-x+2$ tại 3 điểm phân biệt $A(0;2)$; B; C sao cho tam giác MBC có diện tích $2\sqrt{2}$, với $M(3;1)$

A. $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=3 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=3 \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=3 \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn A

Pt hoành độ giao điểm của đồ thị với Δ là

$x^3+2mx^2+3(m-1)+2=-x+2$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=2 \\ x^2+2mx+3m-2=0 \quad (1) \end{array}\right.$

Đường thẳng Δ cắt đồ thị hàm số (C) tại ba điểm phân biệt $A(0;2)$, B, C thì pt (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0, khi và chỉ khi:

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta' > 0 \\ g(0) \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m^2-3m+2>0 \\ 3m-2 \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<1 \end{array}\right. \\ m \neq \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Gọi $B(x_1;y_1)$ và $C(x_2;y_2)$, trong đó x_1, x_2 là nghiệm của (1);

$y_1=-x_1+2$ và $y_2=-x_2+2$

Ta có: $h=d(M;(\Delta))=\dfrac{|3+1-2|}{\sqrt{2}} \Rightarrow BC=\dfrac{2S_{MBC}}{h}=\dfrac{2.2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=4$

Mà $BC^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=2\left[(x_2+x_1)^2-4x_1x_2\right]$

$=8(m^2-3m+2)$

Suy ra $8(m^2-3m+2)=16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=3 \end{array}\right.$

Vậy $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=3 \end{array}\right.$ thỏa ycbt.

Câu 58: **(CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU ĐỒNG THÁP 2019 LẦN 2)** Giá trị k thỏa mãn đường thẳng $d: y=kx+k$ cắt đồ thị $(H): y=\dfrac{x-4}{2x-2}$ tại hai điểm phân biệt A, B cùng cách đều đường thẳng $y=0$. Khi đó k thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;1)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ các giao điểm: $kx+k=\dfrac{x-4}{2x-2}$ (điều kiện: $x\neq 1$).

$\Rightarrow 2kx^2-x-2k+4=0\ (1)$.

Đường thẳng d cắt đồ thị (H) tại hai điểm phân biệt A,B khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} k\neq 0 \\ 2k-1-2k+4\neq 0 \\ 1-4.2k.(4-2k)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k\neq 0 \\ 16k^2-32k+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k\neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} k>\dfrac{4+\sqrt{15}}{4} \\ k<\dfrac{4-\sqrt{5}}{4} \end{array}\right. \end{cases}$.

Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (1), ta có: $A(x_1;kx_1+k), B(x_2;kx_2+k)$. Do A,B cách đều đường thẳng $y=0$ nên $|kx_1+k|=|kx_2+k| \Leftrightarrow kx_1+k=-kx_2-k$ (vì A,B là hai điểm phân biệt)

$\Leftrightarrow x_1+x_2=-2 \Rightarrow \dfrac{1}{2k}=-2$ (áp dụng Viet) $\Leftrightarrow k=-\dfrac{1}{4}$ (thỏa mãn điều kiện).

Câu 59: (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên Lần2) Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x+3}$ (1). Đường thẳng $d: y=ax+b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1). Biết d cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB cân tại O. Khi đó $a+b$ bằng

A. -1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -3.

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$

$y'=\dfrac{-1}{(2x+3)^2}$

Do tiếp tuyến tạo với các trục tọa độ tam giác vuông cân tại O nên tiếp tuyến vuông góc với các đường phân giác của các góc phần tư suy ra $a=\pm 1$.

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình $y'=a$ (*) nên:

TH1: Nếu $a=1$, phương trình (*) là $\dfrac{-1}{(2x+3)^2}=1$ vô nghiệm.

TH2: Nếu $a=-1$, phương trình (*) là $\dfrac{-1}{(2x+3)^2}=-1\Rightarrow (2x+3)^2=1\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Khi $x=-1$, $y=1$, phương trình tiếp tuyến là $y=-1(x+1)+1\Leftrightarrow y=x$ (loại) do tiếp tuyến này đi qua gốc tọa độ nên không tạo được tam giác vuông cân.

Khi $x=-2$, $y=0$, phương trình tiếp tuyến là $y=-1(x+2)+0\Leftrightarrow y=-x-2$ (thỏa mãn).

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Từ đó suy ra $a=-1$ và $b=-2$. Vậy $a+b=-3$.

Câu 60: **(THPT Nghèn Lần1)** Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x}{x-2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=-2x$. Biết d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Tích các hệ số góc của các tiếp tuyến của (C) tại A và B bằng

A. 0. **B.** 4. **C.** $-\dfrac{1}{6}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

+ Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là:

$$\frac{x^2+x}{x-2}=-2x,\ (x\neq 2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$$

+ Khi đó, không giảm tổng quát, giả sử hoành độ của A và B lần lượt là 0 và 1.

Tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0,(x_0\neq 2)$ bất kì có hệ số góc là: $y'(x_0)=\dfrac{x_0{}^2-4x_0-2}{(x_0-2)^2}$.

Do đó, tích các hệ số góc của các tiếp tuyến của (C) tại A và B bằng:

$$y'(0).y'(1)=-\frac{1}{2}.(-5)=\frac{5}{2}.$$

Câu 61: **(SGD-Nam-Định-2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{x}{1-x}$ (C) và điểm $A(-1;1)$. Tìm m để đường thẳng $d: y=mx-m-1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M,N sao cho AM^2+AN^2 đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m=-1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=-\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là: $\dfrac{x}{1-x}=mx-m-1$ (đk: $x\neq 1$)

$\Rightarrow x=(1-x)(mx-m-1)$

$\Leftrightarrow x=mx-m-1-mx^2+mx+x$

$\Leftrightarrow mx^2-2mx+m+1=0$ (*)

Để (C) và d cắt nhau tại hai điểm phân biệt M,N thì (*) phải có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\neq 0\\\Delta'=m^2-m(m+1)=-m>0\\m-2m+m+1\neq 0\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow m<0$

Giả sử $M(x_1;y_1), N(x_2;y_2)$. Theo hệ thức viét: $x_1+x_2=2;\ x_1x_2=\dfrac{m+1}{m}$

$\Rightarrow y_1+y_2=m\left(x_1+x_2\right)-2m-2=2m-2m-2=-2$

và $y_1.y_2=\left(mx_1-m-1\right)\left(mx_2-m-1\right)=m^2x_1x_2-m\left(m+1\right)\left(x_1+x_2\right)+\left(m+1\right)^2$

$=m(m+1)-2m\left(m+1\right)+\left(m+1\right)^2=m+1$

Ta có: $AM^2+AN^2=\left(x_1+1\right)^2+\left(y_1-1\right)^2+\left(x_2+1\right)^2+\left(y_2-1\right)^2$

$=\left(x_1+x_2+2\right)^2-2\left(x_1+1\right)\left(x_2+1\right)+\left(y_1+y_2-2\right)^2-2\left(y_1-1\right)\left(y_2-1\right)$

$=\left(x_1+x_2+2\right)^2-2\left(x_1x_2+x_1+x_2+1\right)+\left(y_1+y_2-2\right)^2-2\left(y_1y_2-\left(y_1+y_2\right)+1\right)$

$=\left(2+2\right)^2-2\left(\frac{m+1}{m}+2+1\right)+\left(-2-2\right)^2-2\left(m+1-\left(-2\right)+1\right)$

$=18-2\left(\frac{m+1}{m}\right)-2m=18-2-2.\frac{1}{m}-2m=16+2.\left[\frac{1}{-m}+(-m)\right]\geq 16+2.2=20$ (Áp dụng BĐT Côsi)

Suy ra: AM^2+AN^2 đạt giá trị nhỏ nhất là 20 khi $\frac{1}{-m}=-m\Leftrightarrow m^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-1 \end{array}\right.$

Vậy $m=-1$ (vì $m<0$)

Câu 62: **(Quỳnh Lưu Lần 1)** Cho hàm số $y=\frac{-x+1}{2x-1}$ (C), $y=x+m$ (d). Với mọi m đường thẳng (d) luôn cắt đồ thị (C) tại hai hai điểm phân biệt A và

B. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và

B. Giá trị nhỏ nhất của $T=k_1^{2020}+k_2^{2020}$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B

+ Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{-x+1}{2x-1}=x+m\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x^2+2mx-m-1=0 \\ x\neq\frac{1}{2} \end{array}\right.$ (*)

+ Phương trình (*) có: $\Delta'=m^2+2(m+1)>0,\ \forall m$ nên (d) luôn cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A,

B. Gọi a, b là các hoành độ giao điểm $\left(a\neq b\neq\frac{1}{2}\right)$. Khi đó ta có: $\left\{\begin{array}{l} a+b=-m \\ ab=-\frac{m+1}{2} \end{array}\right.$.

+ Khi đó:

$T=k_1^{2020}+k_2^{2020}=\frac{1}{(2a-1)^{4040}}+\frac{1}{(2b-1)^{4040}}\geq\frac{2}{[(2a-1)(2b-1)]^{2020}}$

$=\frac{2}{\left[4ab-2(a+b)+1\right]^{2020}}=\frac{2}{\left[-2(m+1)+2m+1\right]^{2020}}=2$

+ Nhận xét: Giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi: $\left\{\begin{array}{l} (2a-1)^{2020}=(2b-1)^{2020} \\ a\neq b\neq\frac{1}{2} \end{array}\right.\Leftrightarrow a+b=1=-m\Leftrightarrow m=-1.$

Câu 63: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐĂK LĂK LẦN X NĂM 2019) Cho hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}$ (C) và đường thẳng $d: y=-x+m$. Gọi S là tập hợp các số thực m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho tam giác OAB (O là gốc tọa độ) có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $2\sqrt{2}$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 8. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng d và đồ thị (C) là

$$\frac{x}{x-1}=-x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-mx+m=0 \quad (*) \\ x\neq 1 \end{cases}.$$

Để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A,B thì phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1 nên ta có

$$\begin{cases} \Delta=m^2-4m>0 \\ 1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>4 \\ m<0. \end{array}\right.$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $(*)$, ta có $x_1+x_2=m$.

Do đó $A(x_1;-x_1+m) \Leftrightarrow A(x_1;x_2)$, $B(x_2;-x_2+m) \Leftrightarrow B(x_2;x_1)$

$+ OA=OB=\sqrt{x_1^2+x_2^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}=\sqrt{m^2-2m}$

$+ \ h_O=d(O,d)=\dfrac{|m|}{\sqrt{2}}$

Ta có $S_{OAB}=\dfrac{1}{2}AB.h_O=\dfrac{OA.OB.AB}{4R} \Leftrightarrow 2R.h_O=OA.OB$

$\Leftrightarrow m^2-2m=4|m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=6 \\ m=-2. \end{array}\right.$

Vậy tổng các phần tử của tập S bằng 4

HÀM SỐ KHÁC

Câu 64: Cho hàm số $y=f(x)=2^{2018}x^3+3.2^{2018}x^2-2018$ có đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3. Tính giá trị biểu thức: $P=\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}+\dfrac{1}{f'(x_3)}$

A. $P=2^{2018}$. **B.** $P=0$. **C.** $P=-2018$. **D.** $P=3.2^{2018}-1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=3.2^{2018}(x^2+2x)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Do đồ thị hàm số $y=f(x)=2^{2018}x^3+3.2^{2018}x^2-2018$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x_1,\ x_2,\ x_3$ nên theo định lý vi-et ta có: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-3 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=0 \\ x_1x_1x_3=\dfrac{2018}{2^{2018}} \end{cases}$ (1).

Ta có $f'(x_1)f'(x_2)=\left(3.2^{2018}\right)^2\left[(x_1x_2)^2+2x_1x_2(x_1+x_2)+4x_1x_2\right]$.

$f'(x_2)f'(x_3)=\left(3.2^{2018}\right)^2\left[(x_2x_3)^2+2x_2x_3(x_2+x_3)+4x_2x_3\right]$

$f'(x_1)f'(x_3)=\left(3.2^{2018}\right)^2\left[(x_1x_3)^2+2x_1x_3(x_1+x_3)+4x_1x_3\right]$

$\Rightarrow f'(x_1)f'(x_2)+f'(x_2)f'(x_3)+f'(x_3)f'(x_1)$

$=\left(3.2^{2018}\right)^2\left[(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_2)^2+4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)\right]$ (2).

Thay (1) vào (2) ta có $f'(x_1)f'(x_2)+f'(x_2)f'(x_3)+f'(x_3)f'(x_1)=0$ (3).

Mặt khác $P=\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}+\dfrac{1}{f'(x_3)}=\dfrac{f'(x_1)f'(x_2)+f'(x_2)f'(x_3)+f'(x_3)f'(x_1)}{f'(x_1)f'(x_2)f'(x_2)}$ (4).

Thay (3) vào (4) ta có $P=0$.

Câu 65: **(Chuyên Thái Nguyên)** Tính tổng các giá trị nguyên của tham số $m\in[-50;50]$ sao cho bất phương trình $mx^4-4x+m\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

A. 1272. **B.** 1275. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $mx^4-4x+m\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow m\left(x^4+1\right)\ge 4x,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow m\ge\dfrac{4x}{x^4+1},\ \forall x\in\mathbb{R}$ (1)

Đặt $f(x)=\dfrac{4x}{x^4+1}$.Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$f'(x)=\dfrac{-12x^4+4}{\left(x^4+1\right)^2}$. Khi đó, $f'(x)=0\Leftrightarrow -12x^4+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}} \\ x=-\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$		$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\sqrt[4]{27}$	↗	$\sqrt[4]{27}$	↘	0

Theo bảng biến thiên, ta có: $\max\limits_{\mathbb{R}} f(x)=f\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)=\sqrt[4]{27}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

(1) $\Leftrightarrow m \ge \max\limits_{\mathbb{R}} f(x) \Leftrightarrow m \ge \sqrt[4]{27} \simeq 2,28$.

Kết hợp với điều kiện $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-50;50] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ 3 \le m \le 50 \end{cases} \Rightarrow m \in \{3;4;5;...;50\}$

Khi đó, tổng $3+4+5+...+50 = \frac{48}{2}(3+50) = 1272$.

Câu 66: **(Sở Ninh Bình 2019 lần 2)** Cho 2 số thực a và b. Tìm giá trị nhỏ nhất của a^2+b^2 để đồ thị hàm số $y = f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 3$ có điểm chung với trục Ox.

A. $\frac{9}{5}$. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** $\frac{36}{5}$. **D.** $\frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi (C) là đồ thị của hàm đã cho. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục Ox:

$3x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 3(x^4+1) + a(x^3+x) + bx^2 = 0$

$\Leftrightarrow 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0$ (vì $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình).

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$, $|t| \ge 2$.

Phương trình trên trở thành $3(t^2-2) + at + b = 0$

$\Leftrightarrow 3(t^2-2) = -at - b \Rightarrow 9(t^2-2)^2 = (at+b)^2$.

Theo BĐT Cauchy- Schwarz $(at+b)^2 \le (a^2+b^2)(t^2+1)$.

Nên $9(t^2-2)^2 \le (a^2+b^2)(t^2+1) \Leftrightarrow a^2+b^2 \ge \frac{9(t^2-2)^2}{t^2+1}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{9(t^2-2)^2}{t^2+1}$ với $|t| \ge 2$.

Đặt $u = t^2$ với $u \ge 4$ hàm số trên trở thành $f(u) = \frac{9(u-2)^2}{u+1}$ với $u \ge 4$

Ta có $f'(u) = \frac{9(u^2+2u-8)}{(u+1)^2}$

$f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = -4 \vee u = 2$

BBT

	4 $+\infty$
$f'(u)$	$+$
$f(u)$	$+\infty$ $\frac{36}{5}$ 

Vậy GTNN của a^2+b^2 là $\frac{36}{5}$.

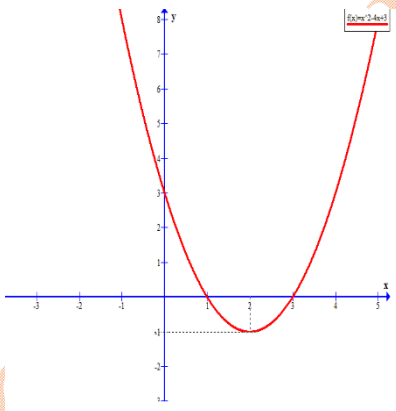
Câu 67: **(Sở Hà Nam)** Cho hàm số $y=f(x)=x^2-4x+3$ có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $f^2(|x|)-(m-6)f(|x|)-m+5=0$ có 6 nghiệm thực phân biệt.

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

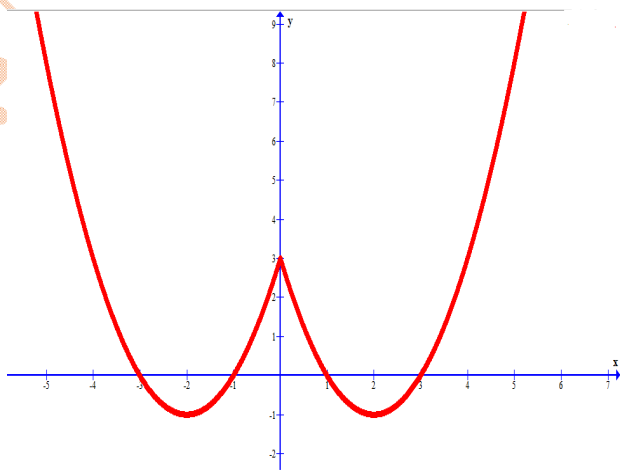
Lời giải

Chọn D

+) Ta có đồ thị hàm số: $y=f(x)=x^2-4x+3$ như hình vẽ:



+) Đồ thị hàm số $y=f(|x|)=|x|^2-4|x|+3$ như sau:



+) Ta có:

$f^2(|x|)-(m-6)f(|x|)-m+5=0$. (1).

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(|x|\right)=-1 \\ f\left(|x|\right)=m-5 \quad (2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \\ f\left(|x|\right)=m-5 \quad (2) \end{array}\right.$.

Phương trình (1) có 6 nghiệm thực phân biệt thì phương trình (2) có 4 nghiệm thực phân biệt $x \neq \pm 2$.

Dựa vào đồ thị hàm số ta có: $-1<m-5<3 \Leftrightarrow 4<m<8$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m.

Câu 68: **(THPT Chuyên Hùng Vương-Gia Lai-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hàm số đa thức bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị đi qua các điểm $A(2;4)$, $B(3;9)$, $C(4;16)$. Các đường thẳng AB, AC, BC lại cắt đồ thị tại lần lượt tại các điểm D, E, F (D khác A và B, E khác A và C, F khác B và C). Biết rằng tổng các hoành độ của D, E, F bằng 24. Tính $f(0)$.

A. -2. **B.** 0. **C.** $\frac{24}{5}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Giả sử $f(x)=a(x-2)(x-3)(x-4)+x^2 \ (a\neq 0)$.

Ta có AB qua $A(2;4)$ và nhận $\overrightarrow{AB}=(1;5)$ là một VTCP

$\Rightarrow AB: 5(x-2)-(y-4)=0 \Leftrightarrow y=5x-6$.

Tương tự $AC: y=6x-8$ và $BC: y=7x-12$.

Hoành độ của điểm D là nghiệm của phương trình

$a(x-2)(x-3)(x-4)+x^2=5x-6 \Leftrightarrow a(x-2)(x-3)(x-4)=-(x-2)(x-3)$

$\Rightarrow a(x-4)=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{a}+4$.

Tương tự, hoành độ của điểm E và F lần lượt là $x=-\frac{1}{a}+3$ và $x=-\frac{1}{a}+2$.

Bài ra ta có $\left(-\frac{1}{a}+2\right)+\left(-\frac{1}{a}+3\right)+\left(-\frac{1}{a}+4\right)=24 \Leftrightarrow a=-\frac{1}{5}$.

Do đó $f(0)=a.(-2).(-3).(-4)+0^2=\frac{24}{5}$.

Câu 69: **(Quỳnh Lưu Nghệ An)** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m\in\mathbb{R}$ sao cho phương trình $\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1$ có hai nghiệm thực.

A. $m>\frac{7}{12}$. **B.** $m\geq -\frac{7}{2}$. **C.** $m\geq \frac{3}{2}$. **D.** $m\geq \frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1

Ta có: $\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1$. (1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1\ge 0 \\ x^2+mx+2=(2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{2} \\ 3x^2-(m-4)x-1=0\ (2) \end{cases}.$$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $-\dfrac{1}{2}\le x_1<x_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ \left(x_1+\dfrac{1}{2}\right)\left(x_2+\dfrac{1}{2}\right)\ge 0 \\ \dfrac{x_1+x_2}{2}>-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-4)^2+12>0 \\ 2m-9\ge 0 \\ m-4>-3 \end{cases} \Leftrightarrow m\ge \frac{9}{2}.$$

Vậy $m\ge\dfrac{9}{2}$.

Cách 2

$$\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1\ (1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1\ge 0 \\ x^2+mx+2=(2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{2} \\ 3x^2+4x-1=mx\ (2) \end{cases}$$

Vì $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình nên phương trình đã cho tương đương với phương trình sau:

$\begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{2}, x\ne 0 \\ \dfrac{3x^2+4x-1}{x}=m \end{cases}$. Xét hàm số $f(x)=\dfrac{3x^2+4x-1}{x}$ với $x\ge -\dfrac{1}{2}, x\ne 0$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{3x^2+1}{x^2}>0, \forall x\ne 0$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $f\left(\dfrac{-1}{2}\right)=\dfrac{9}{2}$

Bảng biến thiên

x	$\frac{-1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$\frac{9}{2}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình có hai nghiệm thực khi $m\ge\dfrac{9}{2}$.

Câu 70: **(SGD Bà Rịa Vũng Tàu-đề 2 năm 2017-2018)** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^2+m\sqrt{4-x^2}+m-7$ có điểm chung với trục hoành là $[a;b]$ (với $a;b\in\mathbb{R}$). Tính giá trị của $S=2a+b$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $S=\frac{19}{3}$. **B.** $S=7$. **C.** $S=5$. **D.** $S=\frac{23}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định của hàm số: $D=[-2;2]$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^2+m\sqrt{4-x^2}+m-7$ và trục hoành là

$x^2+m\sqrt{4-x^2}+m-7=0\Leftrightarrow m\left(\sqrt{4-x^2}+1\right)=7-x^2\Leftrightarrow m=\frac{7-x^2}{\sqrt{4-x^2}+1}$ (1).

Đặt $t=\sqrt{4-x^2}$, $t\in[0;2]$, phương trình (1) trở thành $m=\frac{t^2+3}{t+1}$ (2).

Đồ thị hàm số đã cho có điểm chung với trục hoành khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $t\in[0;2]$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2+3}{t+1}$ trên $[0;2]$.

Hàm số $f(t)$ liên tục trên $[0;2]$.

Ta có $f'(t)=\frac{t^2+2t-3}{(t+1)^2}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\in(0;2)\\t=-3\notin(0;2)\end{array}\right.$.

$f(0)=3$, $f(1)=2$, $f(2)=\frac{7}{3}$.

Do đó $\min\limits_{[0;2]}f(t)=2$ và $\max\limits_{[0;2]}f(t)=3$.

Bởi vậy, phương trình (2) có nghiệm $t\in[0;2]$ khi và chỉ khi $\min\limits_{[0;2]}f(t)\le m\le\max\limits_{[0;2]}f(t)\Leftrightarrow 2\le m\le 3$.

Từ đó suy ra $a=2$, $b=3$, nên $S=2a+b=2.2+3=7$.

Câu 71: Cho hàm số $y=x^2+m\left(\sqrt{2018-x^2}+1\right)-2021$ với m là tham số thực. Gọi S là tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị của hàm số đã cho cắt trục hoành tại đúng hai điểm phân biệt. Tính S.

A. 960. **B.** 986.
C. 984. **D.** 990.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\sqrt{2018-x^2}=t;0\le t\le\sqrt{2018}$

Khi đó $y=x^2+m\left(\sqrt{2018-x^2}+1\right)-2021=-t^2+m(t+1)-3=-t^2+mt+m-3(*)$;

Theo đề bài, để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt thì phương trình $(*)$ cần có 1 nghiệm dương thỏa mãn $0\le t<\sqrt{2018}$

TH1: $(*)$ có 1 nghiệm kép. $\Delta=m^2-4m+12=0$ (loại)

TH2: $(*)$ có 2 nghiệm trái dấu. $-(m-3)<0\Leftrightarrow m>3$ (1)

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$(*)$ có 1 nghiệm dương trên khoảng $0 \le t < \sqrt{2018}$ nên ta xét GTLN của m với $0 \le t < \sqrt{2018}$

$y = 0 \Leftrightarrow -t^2 + mt + m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{t^2+3}{t+1} \forall t \in \left[0; \sqrt{2018}\right)$

Xét hàm $y = \dfrac{x^2+3}{x+1}$, $\forall x \in \left[0; \sqrt{2018}\right)$, ta có $y' = \dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \end{array}\right.$

Lập BBT ta có

x	$-\infty$		-1		0		1		$\sqrt{2018}$
y'		$-$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
y		↘	‖	↘	3	↘	2	↗	$\dfrac{2021}{\sqrt{2018}+1}$

$\Rightarrow 3 < m < \dfrac{2021}{\sqrt{2018}+1} \approx 44,009 \Rightarrow S = \sum_{i=4}^{44} i = 984$

Câu 72: **(Sở Quảng NamT)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-1;7)$ để phương trình: $(m-1)x + (m+2)\sqrt{x\left(x^2+1\right)} = x^2+1$ có nghiệm?

A. 6 **B.** 7 **C.** 1 **D.** 5

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình: $(m-1)x + (m+2)\sqrt{x\left(x^2+1\right)} = x^2+1$ (1). Điều kiện cua phương trình là: $x \ge 0$

Nếu $x = 0$ phương trình trở thành: $0 = 1$ (Vô lý)

Vậy $x \ne 0$ không phải là nghiệm của phương trình, đồng thời ta thấy nên với $x > 0$ phương trình đã cho tương đương với: $\dfrac{x^2+1}{x} - (m+2)\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}} - m + 1 = 0$.

Đặt $u = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}$ thì phương trình trở thành: $u^2 - (m+2)u - m + 1 = 0$ (2)

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}$ trên khoảng $(0;+\infty)$

Ta có $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{2x\sqrt{x}\sqrt{x^2+1}} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1\ (L) \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

x	0		1		$+\infty$
y		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

Vậy $u \ge \sqrt{2}$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm trên $\left[\sqrt{2};+\infty\right)$.

Trên $\left[\sqrt{2};+\infty\right)$ thì $(2)\Leftrightarrow m=\dfrac{u^2-2u+1}{u+1}$

Xét hàm số $f(y)=\dfrac{u^2-2u+1}{u+1}$ trên $\left[\sqrt{2};+\infty\right)$

Ta có $f'(u)=\dfrac{u^2+2u-3}{(u+1)^2}>0,\forall y\in\left[\sqrt{2};+\infty\right)\Rightarrow f(u)\ge f(\sqrt{2})=\left(\sqrt{2}-1\right)^3\Rightarrow$ YCBT $\Leftrightarrow m\ge\left(\sqrt{2}-1\right)^3$

Mà $m\in\mathbb{Z},-1<m<7\Rightarrow m\in\{1;2;3;4;5;6\}$.

Câu 73: **(Sở Hưng Yên Lần1)** Có bao nhiêu giá trị âm của tham số m để phương trình $\sqrt{2019m+\sqrt{2019m+x^2}}=x^2$ có hai nghiệm thực phân biệt

A. 1. **B.** 0. **C.** Vô số. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Đặt $\begin{cases}t=\sqrt{2019m+x^2}\ (t\ge 0)\\ a=x^2\qquad\quad (a\ge 0)\end{cases}$.

Ta được hệ $\begin{cases}\sqrt{2019m+t}=a\\ \sqrt{2019m+a}=t\end{cases}\Rightarrow\sqrt{2019m+t}-\sqrt{2019m+a}=a-t\ (*)$

Trường hợp 1: $a\ne t$.

Khi đó $(*)\Leftrightarrow\dfrac{t-a}{\sqrt{2019m+t}+\sqrt{2019m+a}}=a-t$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{2019m+t}+\sqrt{2019m+a}}=-1$ phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2: $a=t$

Thay vào (*) thỏa mãn. Vậy (*) có nghiệm $a=t$.

Với $a=t$ ta có $a=\sqrt{2019m+a}\Leftrightarrow a^2=2019m+a\Leftrightarrow a^2-a-2019m=0$.

Phương trình $\sqrt{2019m+\sqrt{2019m+x^2}}=x^2$ có hai nghiệm thực phân biệt

$\Leftrightarrow a^2-a-2019m=0$ có 2 nghiệm a_1,a_2 thỏa mãn $\left[\begin{array}{l}a_1=a_2>0\\ a_1<0<a_2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\Delta=0\\ S>0\end{cases}\\ 1.(-2019m)<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-\dfrac{1}{4.2019}\\ m>0\end{array}\right.$.

Do m âm nên có một giá trị $m=-\dfrac{1}{4.2019}$ thỏa mãn.

Cách 2:

Ta có $\sqrt{2019m+\sqrt{2019m+x^2}}=x^2\Leftrightarrow 2019m+\sqrt{2019m+x^2}=x^4$

$\Leftrightarrow\left(2019m+x^2\right)+\sqrt{2019m+x^2}=x^4+x^2,\ (1)$.

Xét hàm số $f(t)=t^2+t;\ f'(t)=2t+1>0,\forall t>-\dfrac{1}{2}$.

Ta có hàm số $f(t)=t^2+t$ đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

và $\sqrt{2019m+x^2}\in\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$, $x^2\in\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Do đó $(1)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{2019m+x^2}\right)=f\left(x^2\right)\Leftrightarrow\sqrt{2019m+x^2}=x^2$

$\Leftrightarrow 2019m+x^2=x^4\Leftrightarrow 2019m=x^4-x^2$.

Ta có BBT hàm số $g(x)=x^4-x^2$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$+\infty$

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2019m=-\frac{1}{4}\\ m>0\end{array}\right.$

Do m âm nên có một giá trị $m=-\frac{1}{4.2019}$ thỏa mãn.

Câu 74: (THPT LƯƠNG THẾ VINH 2019LẦN 3) Cho hàm số $f(x)=x^5+3x^3-4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x)+m}\right)=x^3-m$ có nghiệm thuộc đoạn $[1;2]$?

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt[3]{f(x)+m}\Leftrightarrow t^3=f(x)+m\Leftrightarrow f(x)=t^3-m\ (1)$.

Ta có $f\left(\sqrt[3]{f(x)+m}\right)=x^3-m$, suy ra $f(t)=x^3-m\ (2)$.

Từ (1) và (2) ta có $f(x)-f(t)=t^3-x^3\Leftrightarrow f(x)+x^3=f(t)+t^3\Leftrightarrow x^5+4x^3=t^5+4t^3\ (3)$.

Xét hàm số $g(u)=u^5+4u^3\Rightarrow g'(u)=5u^4+12u^2\ge 0\,\forall u\in\mathbb{R}\Rightarrow g(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(3)\Leftrightarrow g(x)=g(t)\Leftrightarrow x=t$. Thay vào (1) ta được $f(x)=x^3-m\Rightarrow x^5+2x^3=3m\ (4)$.

Xét hàm số $h(x)=x^5+2x^3$ trên đoạn $[1;2]$.

Ta có $h'(x)=5x^4+6x^2\ge 0\,\forall x\in[1;2]\Rightarrow h(x)$ đồng biến trên đoạn $[1;2]$.

Vậy ta có $\min\limits_{[1;2]}h(x)=h(1)=3$ và $\max\limits_{[1;2]}h(x)=h(2)=48$.

Phương trình đã cho có nghiệm thuộc $[1;2]\Leftrightarrow$ Phương trình (4) có nghiệm trên $[1;2]$.

$\Leftrightarrow\min\limits_{[1;2]}h(x)\le 3m\le\max\limits_{[1;2]}h(x)\Leftrightarrow 3\le 3m\le 48\Leftrightarrow 1\le m\le 16$. Vậy có 16 giá trị nguyên của m.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 75: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+x+\frac{3}{2}$. Phương trình $\frac{f(f(x))}{2f(x)-1}=1$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt ?

A. 4 nghiệm. **B.** 9 nghiệm. **C.** 6 nghiệm. **D.** 5 nghiệm.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2+x+\frac{3}{2}$.

Ta có $f'(x)=3x^2-6x+1$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-6x+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\frac{3-\sqrt{6}}{3}\Rightarrow f(x_1)=\frac{9+8\sqrt{6}}{18} \\ x_2=\frac{3+\sqrt{6}}{3}\Rightarrow f(x_2)=\frac{9-8\sqrt{6}}{18} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$f(x_1)$	↘	$f(x_2)$	↗	$+\infty$

Xét phương trình $\frac{f(f(x))}{2f(x)-1}=1$.

Đặt $t=f(x)$. Khi đó phương trình trở thành

$$\frac{f(t)}{2t-1}=1\Leftrightarrow f(t)=2t-1\Leftrightarrow t^3-3t^2+t+\frac{3}{2}=2t-1\Leftrightarrow t^3-3t^2-t+\frac{5}{2}=0\,(*).$$

Nhận xét: phương trình (*) có tối đa 3 nghiệm.

Xét hàm số $g(t)=t^3-3t^2-t+\frac{5}{2}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

+ Ta có $g(3).g(4)=\left(-\frac{1}{2}\right).\frac{29}{2}<0$ nên phương trình $(*)$ có một nghiệm $t=t_1\in(3;4)$.

Khi đó dựa vào bảng biến thiên ở trên thì phương trình $f(x)=t_1$ với $t_1>3>f(x_1)=\frac{9+8\sqrt{6}}{18}$ có một nghiệm.

+ Ta có $g(1).g\left(\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right).\frac{11}{8}<0$ nên phương trình $(*)$ có một nghiệm $t=t_2\in\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Khi đó dựa vào bảng biến thiên ở trên thì phương trình $f\left(x\right)=t_2$ với $f\left(x_2\right)=\dfrac{9-8\sqrt{6}}{18}<\dfrac{1}{2}<t_2<1<f\left(x_1\right)=\dfrac{9+8\sqrt{6}}{18}$ có ba nghiệm phân biệt.

+ Ta có $g\left(-\dfrac{4}{5}\right).g\left(-1\right)=\dfrac{217}{250}.\left(-\dfrac{1}{2}\right)<0$ nên phương trình $\left(*\right)$ có một nghiệm $t=t_3\in\left(-1;-\dfrac{4}{5}\right)$.

Khi đó dựa vào bảng biến thiên ở trên thì phương trình $f\left(x\right)=t_3$ với $t_3<-\dfrac{4}{5}<f\left(x_2\right)=\dfrac{9-8\sqrt{6}}{18}$ có một nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm thực.

Cách 2:

Đặt $t=f\left(x\right)$. Khi đó phương trình trở thành

$$\frac{f\left(t\right)}{2t-1}=1\Leftrightarrow f\left(t\right)=2t-1\Leftrightarrow t^3-3t^2+t+\frac{3}{2}=2t-1\Leftrightarrow t^3-3t^2-t+\frac{5}{2}=0\left(*\right).$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t_1\approx 3,05979197\\ t_2\approx 0,8745059057\\ t_3\approx -0,9342978758\end{array}\right.\ .$$

+ Xét phương trình $x^3-3x^2+x+\dfrac{3}{2}=t_1\approx 3.05979197$. Bấm máy tính ta được 1 nghiệm.

+ Xét phương trình $x^3-3x^2+x+\dfrac{3}{2}=t_2\approx 0,8745059057$. Bấm máy tính ta được 3 nghiệm.

+ Xét phương trình $x^3-3x^2+x+\dfrac{3}{2}=t_3\approx -0,9342978758$. Bấm máy tính ta được 1 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm thực.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

TIẾP TUYẾN

A – LÝ THUYẾT CHUNG

Bài toán 1: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của $(C): y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; y_0)$

Nếu cho x_0 thì tìm $y_0 = f(x_0)$

Nếu cho y_0 thì tìm x_0 là nghiệm của phương trình $f(x) = y_0$

Tính $y' = f'(x)$. Suy ra $y'(x_0) = f'(x_0)$.

Phương trình tiếp tuyến Δ là: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Bài toán 2: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của $(C): y = f(x)$ biết Δ có hệ số góc k cho trước

Cách 1: Tìm tọa độ tiếp điểm.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Tính $f'(x_0)$

Δ có hệ số góc $k \Rightarrow f'(x_0) = k \quad (1)$

Giải phương trình (1), tìm được x_0 và tính $y_0 = f(x_0)$. Từ đó viết phương trình của Δ.

Cách 2: Dùng điều kiện tiếp xúc.

Phương trình đường thẳng Δ có dạng $y = kx + m$.

Δ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} f(x) = kx + m \\ f'(x) = k \end{cases} (*)$

Giải hệ (*), tìm được m. Từ đó viết phương trình của Δ.

Chú ý: Hệ số góc k của tiếp tuyến Δ có thể được cho gián tiếp như sau:

+ Δ tạo với chiều dương trục hoành góc α thì $k = \tan\alpha$
+ Δ song song với đường thẳng $d: y = ax + b$ thì $k = a$
+ Δ vuông góc với đường thẳng $d: y = ax + b (a \neq 0)$ thì $k = -\dfrac{1}{a}$
+ Δ tạo với đường thẳng $d: y = ax + b$ một góc α thì $\left|\dfrac{k - a}{1 + ka}\right| = \tan\alpha$.

Bài toán 3: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của $(C): y = f(x)$, biết Δ đi qua điểm $A(x_A; y_A)$

Cách 1: Tìm tọa độ tiếp điểm.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Khi đó: $y_0 = f(x_0), y_0' = f'(x_0)$

Phương trình tiếp tuyến Δ tại $M: y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0)$

Δ đi qua $A(x_A; y_A)$ nên: $y_A - y_0 = f'(x_0).(x_A - x_0) \quad (2)$

Giải phương trình (2), tìm được x_0. từ đó viết phương trình của Δ.

Cách 2: Dùng điều kiện tiếp xúc.

Phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(x_A; y_A)$ và có hệ số góc $k: y - y_A = k(x - x_A)$

Δ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$\begin{cases} f(x) = k(x - x_A) + y_A \\ f'(x) = k \end{cases} (*)$

Giải hệ (*), tìm được x (suy ra k). Từ đó viết phương trình tiếp tuyến Δ.

Bài toán 4: Tìm những điểm trên đường thẳng d mà từ đó có thể vẽ được 1,2,3,… tiếp tuyến với đồ thị $(C): y = f(x)$.

Giả sử $d: ax + by + c = 0. M(x_M; y_M) \in d$

Phương trình đường thẳng Δ qua M có hệ số góc $k: y = k(x - x_M) + y_M$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Δ tiếp xúc với (C) khi hệ pt sau có nghiệm: $\begin{cases} f(x)=k(x-x_M)+y_M & (1) \\ f'(x)=k & (2) \end{cases}$

+ Thế k từ (2) vào (1) ta được $f(x)=(x-x_M).f'(x)+y_M \quad (C)$

+ Số tiếp tuyến của (C) vẽ từ M = số nghiệm của x của (C).

Bài toán 5:

Tìm những điểm mà từ đó có thể vẽ được 2 tiếp tuyến với đồ thị $(C): f = f(x)$ và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

Gọi $M(x_M;y_M)$

Phương trình đường thẳng Δ qua M có hệ số góc $k: y=k(x-x_M)+y_M$

Δ tiếp xúc với (C) khi hệ pt sau có nghiệm: $\begin{cases} f(x)=k(x-x_M)+y_M & (1) \\ f'(x)=k & (2) \end{cases}$

+ Thế k từ (2) vào (1) ta được $f(x)=(x-x_M).f'(x)+y_M \quad (C)$

+ Qua M vẽ được 2 tiếp tuyến với (C) $\Leftrightarrow$ (C) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau $\Leftrightarrow f'(x_1).f'(x_2)=-1$.

Từ đó ta tìm được M .

Chú ý: Qua M vẽ được 2 tiếp tuyến với (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía với trục hoành thì

$$\begin{cases} (C) \text{ có 2 nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \\ f(x_1).f(x_2)<0 \end{cases}$$

Bài toán 6: Tìm giá trị tham số mà tiếp tuyến của hàm số thỏa mãn các tính chất hình học Oxy ta sử dụng cách viết phương trình tiếp tuyến của các dạng trên

Δ tiếp xúc với (C) khi hệ pt sau có nghiệm: $\begin{cases} f(x)=k(x-x_M)+y_M & (1) \\ f'(x)=k & (2) \end{cases}$

Sử dụng công thức cơ bản của hình học Oxy về công thức khoảng cách, độ dài, vectơ,…

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^3+(1-2m)x^2+(2-m)x+m^2+2m-5 (C)$ có tiếp tuyến tạo với đường thẳng $d: x+y+7=0$ góc α, biết $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{26}}$

A. $m\le-\frac{1}{4}$ hoặc $m\ge\frac{1}{2}$. **B.** $m\le-1$ hoặc $m\ge\frac{1}{3}$.

C. $m\le-\frac{1}{3}$ hoặc $m\ge\frac{1}{4}$. **D.** $m\le-\frac{1}{5}$ hoặc $m\ge\frac{1}{3}$.

Câu 2: **(CHUYÊN HUỲNH MẪN ĐẠT 2019 lần 1)** Tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hai đường cong $(C_1): y=x^3$ và $(C_2): y=x^2+x+m$ có 4 tiếp tuyến chung là

A. $\frac{4}{27}<m<\frac{3}{8}$. **B.** $\frac{1}{27}<m<\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{5}{27}<m<\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{8}<m<\frac{3}{8}$.

Câu 3: **(SGD Bắc Giang – năm 2017 – 2018)** Cho hàm số $y=x(x^2-3)$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị (C) thỏa mãn tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) tại điểm A (khác M) và cắt Ox tại điểm B sao cho M là trung điểm của đoạn AB ?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 4: Cho hàm số $y=-x^3+4x^2+1$ có đồ thị là (C) và điểm $M(m;1)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m để qua M kẻ được đúng 2 tiếp tuyến đến đồ thị (C). Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 5. **B.** $\frac{40}{9}$. **C.** $\frac{16}{9}$. **D.** $\frac{20}{3}$.

Câu 5: **(THPT Chuyên ĐH Vinh – lần 1 - năm 2017 – 2018)** Cho đồ thị $(C): y=x^3-3x^2$. Có bao nhiêu số nguyên $b\in(-10;10)$ để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $B(0;b)$?

A. 2. **B.** 9. **C.** 17. **D.** 16.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị thực của thàm số m sao cho hàm số $y=x^3-3x+1(C)$, đường thẳng $d: y=mx+m+3$ giao nhau tại $A(-1;3), B, C$ và tiếp tuyến của (C) tại B và C vuông góc nhau.

A. $\left[\begin{array}{l} m=\frac{-3+2\sqrt{2}}{3} \\ m=\frac{-3-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m=\frac{-2+2\sqrt{2}}{3} \\ m=\frac{-2-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} m=\frac{-4+2\sqrt{2}}{3} \\ m=\frac{-4-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m=\frac{-5+2\sqrt{2}}{3} \\ m=\frac{-5-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$

Câu 7: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}mx^3+(m-1)x^2+(4-3m)x+1$ có đồ thị là (C_m), m là tham số. Tìm các giá trị của m để trên (C_m) có duy nhất một điểm có hoành độ âm mà tiếp tuyến của (C_m) tại điểm đó vuông góc với đường thẳng $d: x+2y=0$.

A. $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>\frac{2}{3} \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>1 \end{array}\right.$ **C.** $0<m<\frac{1}{3}$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>\frac{5}{3} \end{array}\right.$

Câu 8: Cho hàm số $y=x^3-12x+12$ có đồ thị (C) và điểm $A(m;-4)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m nguyên thuộc khoảng $(2;5)$ để từ A kẻ được ba tiếp tuyến với đồ thị (C). Tổng tất cả các phần tử nguyên của S bằng

A. 7. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 9: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2x-1$ có đồ thị (C). Hai điểm A, B phân biệt trên (C) có hoành độ lần lượt là a và b$(a>b)$ và tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau. $AB=2$. Tính $S=2a+3b$.

A. $S=4$. **B.** $S=6$. **C.** $S=7$. **D.** $S=8$.

Câu 10: Cho hàm số $y=2x^3-3x^2+1$ có đồ thị (C). Xét điểm A thuộc (C). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của a sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại điểm thứ hai B$(B\neq A)$ thỏa mãn $ab=-\frac{1}{2}$ trong đó a, b lần lượt là hoành độ của A và **B.** Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. $S=4$. **B.** $S=6$. **C.** $S=7$. **D.** $S=8$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 11: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để trên đồ thị hàm số $y=-\frac{2}{3}x^3+(m-1)x^2+(3m-2)x-\frac{5}{3}$ tồn tại hai điểm $M_1(x_1;y_1),M_2(x_2;y_2)$ có toạ độ thoả mãn $x_1.x_2>0$ sao cho tiếp tuyến với đồ thị hàm số đồ thị hàm số tại hai điểm đó cùng vuông góc với đường thẳng $x-2y+1=0$. Tìm số nguyên âm lớn nhất thuộc tập S.

A. -1. **B.** -3. **C.** -2. **D.** -4.

Câu 12: **(Chuyên KHTN)** Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+9x$ có đồ thị (C). Gọi A,B,C,D là bốn điểm trên đồ thị (C) với hoành độ lần lượt là a,b,c,d sao cho tứ giác $ABCD$ là một hình thoi đồng thời hai tiếp tuyến tại A và C song song với nhau và đường thẳng AC tạo với hai trục tọa độ tam giác cân. Tính tích $abcd$.

A. 60. **B.** 120. **C.** 144. **D.** 180.

Câu 13: **(THPT-Chuyên-Sơn-La-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-4)** Cho hàm số $y=(m+1)x^3-(2m+1)x-m+1$ có đồ thị (C_m), biết rằng đồ thị (C_m) luôn đi qua ba điểm cố định A, B, C thẳng hàng. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-10;10]$ để (C_m) có tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng chứa ba điểm A, B, C?

A. 19. **B.** 1. **C.** 20. **D.** 10.

Câu 14: **(THPT NINH BÌNH – BẠC LIÊU LẦN 4 NĂM 2019)** Cho đồ thị $(C):y=x^3-3x^2$. Có bao nhiêu số nguyên $b\in(-10;10)$ để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $B(0;b)$?

A. 2. **B.** 9. **C.** 17. **D.** 16.

Câu 15: Cho hàm số $y=2x^3-3x^2+1$ có đồ thị (C). Xét điểm A_1 có hoành độ $x_1=1$ thuộc (C). Tiếp tuyến của (C) tại A_1 cắt (C) tại điểm thứ hai $A_2\neq A_1$ có hoành độ x_2. Tiếp tuyến của (C) tại A_2 cắt (C) tại điểm thứ hai $A_3\neq A_2$ có hoành độ x_3. Cứ tiếp tục như thế, tiếp tuyến của (C) tại A_{n-1} cắt (C) tại điểm thứ hai $A_n\neq A_{n-1}$ có hoành độ x_n. Tìm giá trị nhỏ nhất của n để $x_n>5^{100}$.

A. 235 **B.** 234 **C.** 118 **D.** 117

Câu 16: Cho hàm số $y=2x^3-3x^2+1$ có đồ thị (C). Xét điểm A_1 có hoành độ $x_1=\frac{5}{2}$ thuộc (C). Tiếp tuyến của (C) tại A_1 cắt (C) tại điểm thứ hai $A_2\neq A_1$ có hoành độ x_2. Tiếp tuyến của (C) tại A_2 cắt (C) tại điểm thứ hai $A_3\neq A_2$ có hoành độ x_3. Cứ tiếp tục như thế tiếp tuyến của (C) tại A_{n-1} cắt (C) tại điểm thứ hai $A_n\neq A_{n-1}$ có hoành độ x_n. Tìm x_{2018}.

A. $x_{2018}=-2^{2018}+\frac{1}{2}$. **B.** $x_{2018}=-2^{2018}-\frac{1}{2}$.

C. $x_{2018}=-3.2^{2017}-\frac{1}{2}$. **D.** $x_{2018}=3.2^{2017}-\frac{1}{2}$.

Câu 17: Cho hàm số: $y=x^3-2009x$ có đồ thị là (C). M_1 là điểm trên (C) có hoành độ $x_1=1$. Tiếp tuyến của (C) tại M_1 cắt (C) tại điểm M_2 khác M_1, tiếp tuyến của (C) tại M_2 cắt (C) tại điểm M_3 khác M_2, tiếp tuyến của (C) tại điểm M_{n-1} cắt (C) tại điểm M_n khác M_{n-1} (n = 4; 5;…), gọi $(x_n;y_n)$ là tọa độ điểm M_n. Tìm n để: $2009x_n+y_n+2^{2013}=0$

A. $n=685$ **B.** $n=627$ **C.** $n=675$ **D.** $n=672$

Câu 18: Gọi A là điểm thuộc đồ thị hàm số $y=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{5}{2}$ (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt B, C khác A sao cho $AC=3AB$ (với B nằm giữa A và C). Tính độ dài đoạn thẳng O**A.**

A. $OA=\sqrt{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{14}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

Câu 19: Cho hàm số: $y=\frac{x^4}{2}-3x^2+\frac{5}{2}(C)$ và điểm M $\in (C)$ có hoành độ x_M = a. Với giá trị nào của a thì tiếp tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) 2 điểm phân biệt khác M.

A. $\begin{cases}|a|<\sqrt{3}\\ a\neq\pm1\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}|a|<\sqrt{3}\\ a\neq1\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}a<\sqrt{3}\\ a\neq\pm1\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}|a|<\sqrt{7}\\ a\neq\pm2\end{cases}$

Câu 20: Cho đồ thị $(C):y=\frac{x}{2}+\sqrt{x^2+x+1}$. Gọi $M(0;m)$ là điểm nằm trên trục tung mà từ đó kẻ được ít nhất một tiếp tuyến đến đồ thị (C). Biết tập hợp các giá trị của m là nửa khoảng $(a;b]$. Giá trị của $a+b$ bằng

A. 1. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** -1.

Câu 21: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}(C)$ và đường thẳng $d:y=2x+m$ giao nhau tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau.

A. $m=-1$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=-3$ **D.** $m=-4$

Câu 22: Cho điểm $A(0;m)$, tìm tất cả các giá trị thực của m để từ điểm A kẻ được hai tiếp tuyến tới hàm số $y=\frac{x+2}{x-1}(C)$ sao cho hai tiếp điểm tương ứng nằm về hai phía trục Ox.

A. $\begin{cases}-2<m\\ m\neq1\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}\frac{-2}{3}<m\\ m\neq1\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}\frac{-2}{5}<m\\ m\neq1\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}\frac{-2}{7}<m\\ m\neq1\end{cases}$

Câu 23: Tìm tất cả các điểm M thuộc đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{2x+2}(C)$ sao cho tiếp tuyến tại M của (C) tạo với trục tọa độ một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng $d:y=-4x$.

A. $M\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right), M\left(-\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$ **B.** $M\left(2;\frac{1}{5}\right), M\left(-\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$

C. $M\left(3;\frac{1}{4}\right), M\left(-\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$ **D.** $M\left(5;\frac{1}{3}\right), M\left(-\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$

Câu 24: Tìm tất cả các điểm M thuộc đồ thị hàm số $y=\frac{2x-3}{x-2}(C)$ sao cho tiếp tuyến tại M với (C) cắt các đường tiệm cận của (C) tại A và B để đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất, với I là giao điểm của 2 tiệm cận.

A. $M\left(4;\frac{5}{2}\right)$ *và* $M(3;3)$ **B.** $M\left(0;\frac{3}{2}\right)$ *và* $M(3;3)$

C. $M(1;1)$ *và* $M(3;3)$ **D.** $M\left(5;\frac{7}{3}\right)$ *và* $M(3;3)$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 25: Tìm tất cả các điểm M thuộc đồ thị hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}(C)$ sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất.

A. $M\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right), M\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$

B. $M(0;-1), M\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$

C. $M(2;1), M\left(1;\frac{1}{2}\right)$

D. $M(0;-1), M(2;1)$

Câu 26: Tìm tất cả các điểm M thuộc đồ thị hàm số $y=\frac{2x-3}{x-2}(C)$ sao cho tiếp tuyến tại M của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại A, B và có độ dài AB ngắn nhất.

A. $M(3;3), M\left(0;\frac{3}{2}\right)$ **B.** $M(3;3), M\left(4;\frac{5}{2}\right)$

C. $M\left(6;\frac{9}{4}\right), M(1;1)$ **D.** $M(3;3), M(1;1)$.

Câu 27: Cho hàm số $y=\frac{x-1}{2(x+1)}$ có đồ thị là (C). Gọi điểm $M(x_0;y_0)$ với $x_0>-1$ là điểm thuộc (C), biết tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A,B và tam giác OAB có trọng tâm G nằm trên đường thẳng $d:4x+y=0$. Hỏi giá trị của x_0+2y_0 bằng bao nhiêu?

A. $-\frac{7}{2}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $-\frac{5}{2}$.

Câu 28: Cho hàm số $y=\frac{-x+1}{2x-1}$ có đồ thị là (C), đường thẳng $d:y=x+m$. Với mọi m ta luôn có d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A,B. Gọi k_1,k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A,B. Tìm m để tổng k_1+k_2 đạt giá trị lớn nhất.

A. $m=-1$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=-5$.

Câu 29: Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Biết khoảng cách từ $I(-1;2)$ đến tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhấtthì tung độ của điểm M nằm ở góc phần tư thứ hai, gần giá trị nào nhất?

A. $3e$. **B.** $2e$. **C.** e. **D.** $4e$.

Câu 30: **(KINH MÔN II LẦN 3 NĂM 2019)** Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}(C)$. Điểm M thuộc (C) có hoành độ lớn hơn1 , tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai tiệm cận của (C) lần lượt tại A, B. Diện tích nhỏ nhất của tam giác OAB bằng

A. $4+2\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $4+\sqrt{2}$.

Câu 31: Cho hàm số $y=\frac{x^2+x-2}{x-2}$. Điểm trên đồ thị mà tiếp tuyến tại đó lập với đường tiệm cận đứng và đường thẳng $d:y=x+3$ một tam giác có chu vi nhỏ nhất thì hoành độ bằng

A. $2\pm\sqrt[4]{10}$. **B.** $2\pm\sqrt[4]{6}$. **C.** $2\pm\sqrt[4]{12}$. **D.** $2\pm\sqrt[4]{8}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 32: Cho hàm số: $y=x+1+\frac{1}{x-1}$ (C) Tìm những điểm trên đồ thị (C) có hoành độ lớn hơn 1 sao cho tiếp tuyến tại diểm đó tạo với 2 đường tiệm cận một tam giác có chu vi nhỏ nhất.

A. $M=\left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}};2-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$ **B.** $M=\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}};2+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$

C. $M=\left(1;2+\sqrt{2}\right)$ **D.** $M=\left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}};2+\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$

Câu 33: Cho các hàm số $y=f(x),y=f(x^2),y=\frac{f(x)}{f(x^2)}$ có đồ thị lần lượt là $(C_1),(C_2),(C_3)$. Hệ số góc các tiếp tuyến của $(C_1),(C_2),(C_3)$ tại điểm có hoành độ $x_0=1$ lần lượt là k_1,k_2,k_3 thỏa mãn $k_1+2k_2=3k_3\neq 0$. Tính $f(1)$.

A. $f(1)=-\frac{1}{5}$. **B.** $f(1)=-\frac{2}{5}$. **C.** $V=-\frac{3}{5}$ **D.** $f(1)=-\frac{4}{5}$.

Câu 34: Cho các hàm số $y=f\left(x\right),y=g\left(x\right),y=\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$. Nếu các hệ số góc của các tiếp tuyến của các đồ thị các hàm số đã cho tại điểm có hoành độ $x=0$ bằng nhau và khác 0 thì:

A. $f\left(0\right)<\frac{1}{4}$. **B.** $f\left(0\right)\le\frac{1}{4}$. **C.** $f\left(0\right)>\frac{1}{4}$. **D.** $f\left(0\right)\ge\frac{1}{4}$.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x);y=g(x)$ dương có đạo hàm $f'(x);g'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_o=0$ của đồ thị hàm số $y=f(x);y=g(x)$ và $y=\frac{f(x)+1}{g(x)+1}$ có cùng hệ số góc và khác 0. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $f(0)\le-\frac{3}{4}$. **B.** $f(0)\ge-\frac{3}{4}$. **C.** $f(0)\le\frac{3}{4}$. **D.** $f(0)\ge\frac{3}{4}$.

Câu 36: Cho hàm số $y=\frac{x+1}{2x-1}$ có đồ thị (H). Gọi hai điểm $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2)$ là hai điểm phân biệt thuộc (H) sao cho tiếp tuyến của (H) tại A,B có cùng hệ số góc k. Biết diện tích tam giác OAB bằng. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $k<-9$. **B.** $-9\le k\le-6$. **C.** $-6\le k\le-3$. **D.** $-3\le k<0$.

Câu 37: Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $I(1;2)$ Tiếp tuyến của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại A và B sao cho tam giác IAB có chu vi nhỏ nhất là $4\sqrt{a}+2\sqrt{b}$ với a,b là các số nguyên dương. Tính $S=a+b$.

A. $S=8$. **B.** $S=5$. **C.** $S=6$. **D.** $S=7$.

Câu 38: **(Ngô Quyền Hà Nội)** Cho hàm số $y=\frac{x+3}{x-1}$ có đồ thị là (C), điểm M thay đổi thuộc đường thẳng $d:y=1-2x$ sao cho qua M có hai tiếp tuyến của (C) với hai tiếp điểm tương ứng là A, B. Biết rằng đường thẳng AB luôn đi qua điểm cố định là H. Độ dài đoạn OH là

A. $\sqrt{34}$. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{58}$.

Câu 39: Cho hàm số $y=\frac{x+3}{x-1}$ có đồ thị là (C), điểm M thay đổi thuộc đường thẳng $d:y=1-2x$ sao cho qua M có hai tiếp tuyến của (C) với hai tiếp điểm tương ứng là A, B. Khoảng cách từ O đến đường thẳng AB lớn nhất bằng

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $\sqrt{34}$. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{58}$. **D.** $\sqrt{29}$.

Câu 40: Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-1}$ có đồ thị là (C), điểm M thay đổi thuộc đường thẳng $d: y=1-2x$ sao cho qua M có hai tiếp tuyến của (C) với hai tiếp điểm tương ứng là A, B. Gọi K là hình chiếu vuông góc của O trên AB. Khi M di chuyển trên d thì K di chuyển trên đường tròn cố định có bán kính bằng

A. $\sqrt{58}$. **B.** $\sqrt{29}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{58}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{29}}{2}$.

Câu 41: Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-1}$ có đồ thị là (C), điểm M thay đổi thuộc đường thẳng $d: y=1-2x$ sao cho qua M có hai tiếp tuyến của (C) với hai tiếp điểm tương ứng là A, B. Chọn khẳng định đúng dưới đây.

A. Đường thẳng AB luôn cắt hai trục tọa độ.

B. Tồn tại điểm M sao cho AB song song với trục Ox

C. Tồn tại điểm M sao cho AB song song với trục Oy.

D. Không tồn tại điểm M sao cho AB đi qua gốc tọa độ O.

Câu 42: **(Trần Đại Nghĩa)** Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{2(x+1)}$ có đồ thị là (C). Gọi điểm $M(x_0;y_0)$ với $x_0>-1$ là điểm thuộc (C), biết tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB có trọng tâm G nằm trên đường thẳng $d: 4x+y=0$. Giá trị của x_0+2y_0 bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{7}{2}$. **C.** $-\dfrac{5}{2}$. **D.** $-\dfrac{7}{2}$.

Câu 43: **(Chuyên KHTN)** Gọi (C) là đồ thị hàm số $y=x^2+2x+2$ và điểm M di chuyển trên (C). Gọi d_1, d_2 là các đường thẳng đi qua M sao cho d_1 song song với trục tung và d_1, d_2 đối xừng nhau qua tiếp tuyến của (C) tại M. Biết rằng khi M di chuyển trên (C) thì d_2 luôn đi qua một điểm $I(a;b)$ cố định. Đẳng thức nào sau đây là đúng ?

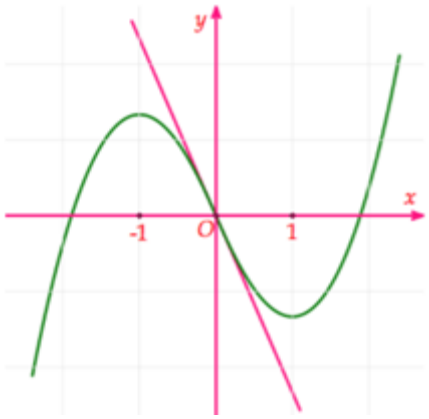
A. $3a+2b=0$. **B.** $a+b=0$. **C.** $ab=-1$. **D.** $5a+4b=0$.

Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn điều kiện $f^2(1+2x)=x-f^3(1-x)$. Lập phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$?

A. $y=-\dfrac{1}{7}x-\dfrac{6}{7}$ **B.** $y=-\dfrac{1}{7}x+\dfrac{6}{7}$ **C.** $y=\dfrac{1}{7}x-\dfrac{6}{7}$ **D.** $y=\dfrac{1}{7}x+\dfrac{6}{7}$

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đường thẳng trong hình vẽ bên là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại gốc tọa độ. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f'(x)$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



A. $m<-2$ **B.** $-2<m<0$ **C.** $0<m<2$ **D.** $m>2$

Câu 46: Biết rằng tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=(x+a)^3+(x+b)^3+(x+c)^3$ có hệ số góc nhỏ nhất tại tiếp điểm có hoành độ $x=-1$ đồng thời a,b,c là các số thực không âm. Tìm GTLN tung độ của giao điểm đồ thị hàm số với trục tung?

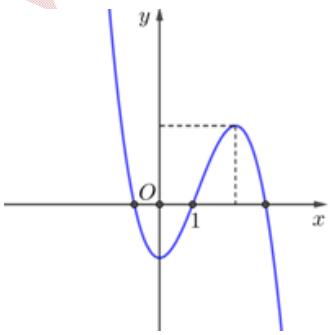
A. 27 **B.** 3 **C.** 9 **D.** 18

Câu 47: **(Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x)+\dfrac{f(x)}{x}=4x^2+3x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là

A. $y=-16x-20$. **B.** $y=16x-20$.

C. $y=16x+20$. **D.** $y=-16x+20$.

Câu 48: **(Ngô Quyền Hà Nội)** Cho hàm đa thức bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị (C). Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Gọi đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 1. Hỏi Δ và (C) có bao nhiêu điểm chung?



A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

C – HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^3+(1-2m)x^2+(2-m)x+m^2+2m-5(C)$ có tiếp tuyến tạo với đường thẳng $d: x+y+7=0$ góc α, biết $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{26}}$

A. $m\le-\frac{1}{4}$ hoặc $m\ge\frac{1}{2}$. **B.** $m\le-1$ hoặc $m\ge\frac{1}{3}$.

C. $m\le-\frac{1}{3}$ hoặc $m\ge\frac{1}{4}$. **D.** $m\le-\frac{1}{5}$ hoặc $m\ge\frac{1}{3}$.

Lời giải

$y'=3x^2+2(1-2m)x+(2-m)$

Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến, phương trình tiếp tuyến $y=kx+b$. Suy ra tiếp tuyến có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}=(k;-1)$, đường thẳng d có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2}=(1;1)$

Ta có:

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{26}}=\frac{|k-1|}{\sqrt{2}.\sqrt{k^2+1}}\Leftrightarrow12k^2-26k+12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k_1=\frac{3}{2}\\k_2=\frac{2}{3}\end{array}\right.$$

Để hàm số (C) có tiếp tuyến thỏa mãn ycbt thì ít nhất một trong hai phương trình: $y'=k_1\ (1)$ hoặc $y'=k_2\ (2)$ có nghiệm thực x.

Nghĩa là: $\left[\begin{array}{l}3x^2+2(1-2m)x+2-m=\frac{3}{2}\\3x^2+2(1-2m)x+2-m=\frac{2}{3}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\Delta_1'\ge0\\\Delta_2'\ge0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}8m^2-2m-1\ge0\\4m^2-m-3\ge0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le-\frac{1}{4};m\ge\frac{1}{2}\\m\le-\frac{3}{4};m\ge1\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow m\le-\frac{1}{4}$ hoặc $m\ge\frac{1}{2}$

Vậy với $m\le-\frac{1}{4}$ hoặc $m\ge\frac{1}{2}$. thỏa ycbt.

Chọn A

Câu 2: **(CHUYÊN HUỲNH MẪN ĐẠT 2019 lần 1)** Tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hai đường cong $(C_1): y=x^3$ và $(C_2): y=x^2+x+m$ có 4 tiếp tuyến chung là

A. $\frac{4}{27}<m<\frac{3}{8}$. **B.** $\frac{1}{27}<m<\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{5}{27}<m<\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{8}<m<\frac{3}{8}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $(d): y=ax+b$ là tiếp tuyến chung của hai đồ thị.

Vì (d) tiếp xúc với (C_1) và (C_2) nên

$$\begin{cases} ax_1+b=x_1^3 \\ ax_2+b=x_2^2+x_2+m \\ a=3x_1^2 \\ a=2x_2+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(x_2-x_1)=x_2^2+x_2+m-x_1^3 \\ x_2=\dfrac{3x_1^2-1}{2} \\ a=3x_1^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3x_1^2\left(\frac{3x_1^2-1}{2}-x_1\right)=\left(\frac{3x_1^2-1}{2}\right)^2+\frac{3x_1^2-1}{2}+m-x_1^3$$

$$\Leftrightarrow m=\frac{1}{4}\left(9x_1^4-8x_1^3-6x_1^2+1\right)\ (*)$$

Theo yêu cầu bài toán thì phương trình $(*)$ phải có 4 nghiệm.

Đặt $f(x)=\frac{1}{4}\left(9x^4-8x^3-6x^2+1\right)$

$$f'(x)=9x^3-6x^2-3x \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \vee x=1 \\ x=\dfrac{-1}{3} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{5}{27}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT ta thấy phương trình $f(x)=m$ có 4 nghiệm khi và chỉ khi $\frac{5}{27}<m<\frac{1}{4}$.

Câu 3: **(SGD Bắc Giang – năm 2017 – 2018)** Cho hàm số $y=x\left(x^2-3\right)$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị (C) thỏa mãn tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) tại điểm A (khác M) và cắt Ox tại điểm B sao cho M là trung điểm của đoạn AB?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $M\left(x_0;y_0\right)\in(C)$. Ta có: $y'=3x^2-3$.

Tiếp tuyến Δ của (C) tại M: $y=\left(3x_0^2-3\right)\left(x-x_0\right)+x_0\left(x_0^2-3\right)\Leftrightarrow y=\left(3x_0^2-3\right)x-2x_0^3$.

Phương trình hoành độ của Δ và (C): $\left(3x_0^2-3\right)x-2x_0^3=x\left(x^2-3\right)$

$\Leftrightarrow x^3-3x_0^2x+2x_0^3=0\Leftrightarrow x=-2x_0\Rightarrow y=-8x_0^3+6x_0\Rightarrow A\left(-2x_0;-8x_0^3+6x_0\right)$.

Phương trình hoành độ của Δ và Ox: $\left(3x_0^2-3\right)x-2x_0^3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{2x_0^3}{3x_0^2-3} \Rightarrow B\left(\dfrac{2x_0^3}{3x_0^2-3};0\right)$.

M là trung điểm của đoạn AB nên $y_A+y_B=2y_0 \Leftrightarrow -8x_0^3+6x_0=2x_0\left(x_0^2-3\right)$

$\Leftrightarrow 10x_0^3-12x_0=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=\pm\sqrt{\dfrac{6}{5}} \end{array}\right.$

Với $x_0=0$ Ta có $A(0;0)\equiv B(0;0)\equiv M(0;0)$ loại.

Với $x_0=\sqrt{\dfrac{6}{5}} \Rightarrow y_0=-\dfrac{9}{5}\sqrt{\dfrac{6}{5}}$ thỏa mãn.

Với $x_0=-\sqrt{\dfrac{6}{5}} \Rightarrow y_0=\dfrac{9}{5}\sqrt{\dfrac{6}{5}}$ thỏa mãn.

Câu 4: Cho hàm số $y=-x^3+4x^2+1$ có đồ thị là (C) và điểm $M(m;1)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m để qua M kẻ được đúng 2 tiếp tuyến đến đồ thị (C). Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 5. **B.** $\dfrac{40}{9}$. **C.** $\dfrac{16}{9}$. **D.** $\dfrac{20}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) đi qua $M(m;1)$ và có hệ số góc k là: $y=k(x-m)+1$.

Để qua M kẻ được đúng 2 tiếp tuyến đến đồ thị (C) điều kiện là hệ phương trình sau có đúng hai nghiệm x phân biệt

$$(I)\begin{cases} -x^3+4x^2+1=k(x-m)+1 \\ \left(-x^3+4x^2+1\right)'=k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^3+4x^2+1=k(x-m)+1 & (1) \\ -3x^2+8x=k & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được

$-x^3+4x^2+1=\left(-3x^2+8x\right)(x-m)+1$

$\Leftrightarrow x\left[2x^2-(3m+4)x+8m\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2x^2-(3m+4)x+8m=0 \ (3) \end{array}\right.$

Như vậy, hệ (I) có đúng hai nghiêm khi và chỉ khi phương trình (3) có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm khác 0; hoặc phương trình (3) có nghiệm duy nhất khác 0.

Phương trình (3) có nghiệm $x=0$ khi và chỉ khi $m=0$. Khi đó, phương trình (3) trở thành

$2x^2-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$;

Do đó $m=0$ thỏa mãn.

Phương trình (3) có nghiệm duy nhất khác 0 điều kiện là

$$\begin{cases}\Delta=(3m+4)^2-4.2.8m=0\\ \dfrac{3m+4}{4}\neq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=(3m+4)^2-4.2.8m=0\\ \dfrac{3m+4}{4}\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=4\\ m=\dfrac{4}{9}\end{cases}.$$

Như vậy $S=\left\{0;\dfrac{4}{9};4\right\}$.

Tổng giá trị tất cả các phần tử của S là $0+\dfrac{4}{9}+4=\dfrac{40}{9}$.

Câu 5: **(THPT Chuyên ĐH Vinh – lần 1 - năm 2017 – 2018)** Cho đồ thị $(C):y=x^3-3x^2$. Có bao nhiêu số nguyên $b\in(-10;10)$ để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $B(0;b)$?

A. 2. **B.** 9. **C.** 17. **D.** 16.

Lời giải

Chọn C

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm, phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) có dạng:

$y=(3x_0^2-6x_0)(x-x_0)+x_0^3-3x_0^2$.

Tiếp tuyến đi qua điểm $B(0;b)$ khi và chỉ khi:

$b=(3x_0^2-6x_0)(0-x_0)+x_0^3-3x_0^2\Leftrightarrow -2x_0^3+3x_0^2=b\ (*)$

Xét hàm số $f(x_0)=-2x_0^3+3x_0^2$.

Ta có $f'(x_0)=-6x_0^2+6x_0$; $f'(x_0)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=0\\ x_0=1\end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên:

x_0	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x_0)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
	$+\infty$	↘		↗	1	↘	

Để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $B(0;b)$ điều kiện là phương trình $(*)$ có đúng một nghiệm x_0. Từ bảng biến thiên, ta có điều kiện của b là $b\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$.

Do đó, các số nguyên $b\in(-10;10)$ để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $B(0;b)$ là $\{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Hay có 17 giá trị nguyên của $b\in(-10;10)$.

□ **Chú ý:** Ta có thể sử dụng điều kiện tiếp xúc để giải bài này như sau:

Gọi tiếp tuyến có hệ số góc k. Phương trình tiếp tuyến là $y=kx+b$

Điều kiện tiếp xúc: $\begin{cases}x^3-3x^2=kx+b\\ 3x^2-3x=k\end{cases}\Rightarrow b=-2x^3+3x$. Từ đây lập luận như trên ta cũng được kết

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị thực của thàm số m sao cho hàm số $y=x^3-3x+1(C)$, đường thẳng $d: y=mx+m+3$ giao nhau tại $A(-1;3), B, C$ và tiếp tuyến của (C) tại B và C vuông góc nhau.

A. $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{-3+2\sqrt{2}}{3} \\ m=\dfrac{-3-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{-2+2\sqrt{2}}{3} \\ m=\dfrac{-2-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{-4+2\sqrt{2}}{3} \\ m=\dfrac{-4-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{-5+2\sqrt{2}}{3} \\ m=\dfrac{-5-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$

Lời giải

Ta có: $y'=3x^2-3$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):

$x^3-(m+3)x-m-2=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x-m-2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, y=3 \\ x^2-x-m-2=0 (*) \end{array}\right.$

Để hàm số (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt thì (*) có 2 nghiệm phân biệt khác -1, nên:

$\left\{\begin{array}{l} \Delta>0 \\ f(-1)\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m>-\dfrac{9}{4} \\ m\neq 0 \end{array}\right.$

Giả sử $x_B; x_C$ là nghiệm của (*), hệ số góc của tiếp tuyến:

$k_B=3x_B^2-3; k_C=3x_C^2-3$

Theo giả thiết:

$k_B.k_C=-1 \Leftrightarrow (3x_B^2-3)(3x_C^2-3)=-1 \Leftrightarrow 9m^2+18m+1=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{-3+2\sqrt{2}}{3} \\ m=\dfrac{-3-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$

Vậy với $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{-3+2\sqrt{2}}{3} \\ m=\dfrac{-3-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$ thỏa ycbt.

Chọn A

Câu 7: Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}mx^3+(m-1)x^2+(4-3m)x+1$ có đồ thị là (C_m), m là tham số. Tìm các giá trị của m để trên (C_m) có duy nhất một điểm có hoành độ âm mà tiếp tuyến của (C_m) tại điểm đó vuông góc với đường thẳng $d: x+2y=0$.

A. $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>1 \end{array}\right.$ **C.** $0<m<\dfrac{1}{3}$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>\dfrac{5}{3} \end{array}\right.$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Lời giải

$y' = mx^2 + 2(m-1)x + 4 - 3m$. Tiếp tuyến có hệ số góc bằng 2

Ta tìm $m : mx^2 + 2(m-1)x + 4 - 3m = 2$ $(*)$ có đúng một nghiệm âm

$(*) \Leftrightarrow (x-1)(mx+3m-2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $mx = 2 - 3m$

$m = 0$: không thỏa yêu cầu

$m \neq 0$, yêu cầu bài toán xảy ra khi $\frac{2-3m}{m} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > \frac{2}{3} \end{array}\right.$

Chọn C

Câu 8: Cho hàm số $y = x^3 - 12x + 12$ có đồ thị (C) và điểm $A(m;-4)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m nguyên thuộc khoảng $(2;5)$ để từ A kẻ được ba tiếp tuyến với đồ thị (C). Tổng tất cả các phần tử nguyên của S bằng

A. 7. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng đi qua $A(m;-4)$ với hệ số góc k có phương trình $y = k(x-m) - 4$ tiếp xúc với đồ thị (C) khi và chỉ khi hệ phương trình $\left\{\begin{array}{ll} x^3 - 12x + 12 = k(x-m) - 4 & (1) \\ 3x^2 - 12 = k & (2) \end{array}\right.$ có nghiệm.

Thế (2) vào (1) ta được: $x^3 - 12x + 12 = (3x^2 - 12)(x-m) - 4$.

$\Leftrightarrow x^3 - 12x + 12 = 3x^3 - 3mx^2 - 12x + 12m - 4$.

$\Leftrightarrow 2x^3 - 3mx^2 + 12m - 16 = 0$.

$\Leftrightarrow (x-2)\left[2x^2 - (3m-4)x - (6m-8)\right] = 0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ 2x^2 - (3m-4)x - (6m-8) = 0 (*) \end{array}\right.$.

Để từ A kẻ được ba tiếp tuyến tới đồ thị (C) thì $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 2.

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \Delta = (3m-4)(3m+12) > 0 \\ 8 - 6m + 8 - 6m + 8 \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m < -4 \\ m > \frac{4}{3} \end{array}\right. \\ m \neq 2 \end{array}\right.$ hay $m \in (-\infty;-4) \cup \left(\frac{4}{3};2\right) \cup (2;+\infty)$.

Do đó $S = \{3;4\}$.

Tổng tất cả các giá trị nguyên của S là $3 + 4 = 7$.

Câu 9: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ có đồ thị (C). Hai điểm A, B phân biệt trên (C) có hoành độ lần lượt là a và b$(a > b)$ và tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau. $AB = 2$. Tính $S = 2a + 3b$.

A. $S = 4$. **B.** $S = 6$. **C.** $S = 7$. **D.** $S = 8$.

Lời giải

Chọn A

Điểm uốn của (C) là điểm $I(1;-1)$.

Vậy $A(a; a^3 - 3a^2 + 2a - 1), B(2-a; (2-a)^3 - 3(2-a)^2 + 2(2-a) - 1)$.

Do $AB = \sqrt{4(a-1)^2 + 4(a^3 - 3a^2 + 2a)^2} = 2|a-1|\sqrt{1 + a^2(a-2)^2} = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 2 \end{array}\right.$

Do đó $a=2, b=0 \Rightarrow S=4$.

Chọn A

Câu 10: Cho hàm số $y=2x^3-3x^2+1$ có đồ thị (C). Xét điểm A thuộc (C). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của a sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại điểm thứ hai B $(B \neq A)$ thỏa mãn $ab=-\frac{1}{2}$ trong đó a, b lần lượt là hoành độ của A và **B.** Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. $S=4$. **B.** $S=6$. **C.** $S=7$. **D.** $S=8$.

Lời giải

Chọn A

Điểm uốn của (C) là điểm $I(1;-1)$.

Vậy $A(a;a^3-3a^2+2a-1), B(2-a;(2-a)^3-3(2-a)^2+2(2-a)-1)$.

Do $AB=\sqrt{4(a-1)^2+4(a^3-3a^2+2a)^2}=2|a-1|\sqrt{1+a^2(a-2)^2}=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=2 \end{array}\right.$

Do đó $a=2, b=0 \Rightarrow S=4$.

Chọn A

Câu 11: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để trên đồ thị hàm số $y=-\frac{2}{3}x^3+(m-1)x^2+(3m-2)x-\frac{5}{3}$ tồn tại hai điểm $M_1(x_1;y_1), M_2(x_2;y_2)$ có toạ độ thoả mãn $x_1.x_2>0$ sao cho tiếp tuyến với đồ thị hàm số đồ thị hàm số tại hai điểm đó cùng vuông góc với đường thẳng $x-2y+1=0$. Tìm số nguyên âm lớn nhất thuộc tập S.

A. -1. **B.** -3. **C.** -2. **D.** -4.

Lời giải

Chọn D

Do cả hai tiếp tuyến cùng vuông góc với đường thẳng $x-2y+1=0$ nên x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $y'=k=-2 \Leftrightarrow -2x^2+2(m-1)x+3m=0(1)$.

Yêu cầu bài toán tương đương với (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1x_2>0$, tức là

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta'=(m-1)^2+2.3m>0 \\ P=\frac{3m}{-2}>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m<0 \\ m^2+4m+1>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-2-\sqrt{3} \\ -2+\sqrt{3}<m<0 \end{array}\right.$$

Vậy $m \in \left(-\infty;-2-\sqrt{3}\right) \cup \left(-2+\sqrt{3};0\right)$.

Chọn D

Câu 12: **(Chuyên KHTN)** Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+9x$ có đồ thị (C). Gọi A, B, C, D là bốn điểm trên đồ thị (C) với hoành độ lần lượt là a, b, c, d sao cho tứ giác $ABCD$ là một hình thoi đồng thời hai tiếp tuyến tại A và C song song với nhau và đường thẳng AC tạo với hai trục tọa độ tam giác cân. Tính tích $abcd$.

A. 60. **B.** 120. **C.** 144. **D.** 180.

Lời giải

Chọn B

Đặt $A\left(a;y(a)\right), B\left(b;y(b)\right), C\left(c;y(c)\right), D\left(d;y(d)\right)$.

Theo giả thiết $y'(a)=y'(c) \Leftrightarrow -3a^2+6a+9=-3c^2+6c+9 \Leftrightarrow a+c=2$ (vì $a \neq c$).

Do đường thẳng AC cắt hai trục tọa độ tạo thành tam giác cân nên hệ số góc của đường thẳng AC: $k=\pm 1$.

TH1: $k=1 \Rightarrow \frac{y(c)-y(a)}{c-a}=1 \Leftrightarrow \frac{-c^3+3c^2+9c+a^3-3a^2-9a}{c-a}=1 \Leftrightarrow ac=-10$.

Do $ABCD$ là hình thoi nên ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\\ AC\perp BD\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b-a=c-d\\ y'_{BD}=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b+d=a+c=2\\ \dfrac{y(d)-y(b)}{d-b}=-1\end{cases}\Rightarrow bd=-12.$

Do đó $abcd=120$.

TH2: $k=-1$. Lập luận tương tự ta thu được $abcd=120$.

Câu 13: **(THPT-Chuyên-Sơn-La-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-4)** Cho hàm số $y=(m+1)x^3-(2m+1)x-m+1$ có đồ thị (C_m), biết rằng đồ thị (C_m) luôn đi qua ba điểm cố định A, B, C thẳng hàng. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-10;10]$ để (C_m) có tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng chứa ba điểm A, B, C?

A. 19. **B.** 1. **C.** 20. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

Gọi $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$, $C(x_C;y_C)$

Ta có: A là điểm cố định mà đồ thị (C_m) luôn đi qua nên $A\in(C_m)$, $\forall m$

$\Leftrightarrow y_A=(m+1)x_A^3-(2m+1)x_A-m+1,\ \forall m$

$\Leftrightarrow m(x_A^3-2x_A-1)+x_A^3-x_A+1-y_A=0,\ \forall m$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x_A^3-2x_A-1=0\\ x_A^3-x_A+1-y_A=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_A^3-2x_A-1=0\\ y_A=x_A^3-2x_A-1+x_A+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_A^3-2x_A-1=0\\ y_A=x_A+2\end{cases}$

Tương tự ta cũng chứng minh được: $y_B=x_B+2$ và $y_C=x_C+2$.

Hay ba điểm A, B, C thuộc đường thẳng $\Delta: y=x+2$.

Ta lại có: $y'=3(m+1)x^2-(2m+1)$ và gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm

Khi đó để (C_m) có tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng Δ thì phương trình $y'(x_o)=\dfrac{-1}{k_\Delta}=-1$

phải có nghiệm $\Leftrightarrow 3(m+1)x_0^2-2m=0$ $(*)$ phải có nghiệm

+) Xét $m=-1:(*)\Leftrightarrow 2=0$ (vô lí) nên loại $m=-1$

+) Xét $m\neq-1:(*)\Leftrightarrow x_0^2=\dfrac{2m}{3(m+1)}$

Để $(*)$ có nghiệm thì $\dfrac{2m}{3(m+1)}\geq 0\Leftrightarrow m\in(-\infty;-1)\cup[0;+\infty)$

So với điều kiện $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in[-10;10]$ ta được $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in[-10;-1)\cup[0;10]$

Hay $m\in\{-10;-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$

Vậy có 20 số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 14: **(THPT NINH BÌNH – BẠC LIÊU LẦN 4 NĂM 2019)** Cho đồ thị $(C): y=x^3-3x^2$. Có bao nhiêu số nguyên $b\in(-10;10)$ để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $B(0;b)$?

A. 2. **B.** 9. **C.** 17. **D.** 16.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M_0(x_0;x_0^3-3x_0^2)$ là tiếp điểm.

Tiếp tuyến Δ của (C) tại M_0 có dạng $y=(3x_0^2-6x_0)(x-x_0)+x_0^3-3x_0^2$

Δ qua $B(0;b) \Leftrightarrow b = \left(3x_0^2 - 6x_0\right)\left(0 - x_0\right) + x_0^3 - 3x_0^2 \Leftrightarrow -b = 2x_0^3 - 3x_0^2$ (*).

Có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $B(0;b) \Leftrightarrow$ (*) có đúng 1 nghiệm x_0.

Đặt $g(x) = 2x^3 - 3x^2$; $g'(x) = 6x^2 - 6x$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên của hàm $g(x)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $(*)$ có đúng 1 nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -b > 0 \\ -b < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b < 0 \\ b > 1 \end{array}\right.$.

Vì b nguyên và $b \in (-10;10)$, suy ra $b \in \{-9;-8;...;-1;2;3;....;9\}$, có 17 giá trị của b.

Câu 15: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C). Xét điểm A_1 có hoành độ $x_1 = 1$ thuộc (C). Tiếp tuyến của (C) tại A_1 cắt (C) tại điểm thứ hai $A_2 \neq A_1$ có hoành độ x_2. Tiếp tuyến của (C) tại A_2 cắt (C) tại điểm thứ hai $A_3 \neq A_2$ có hoành độ x_3. Cứ tiếp tục như thế, tiếp tuyến của (C) tại A_{n-1} cắt (C) tại điểm thứ hai $A_n \neq A_{n-1}$ có hoành độ x_n. Tìm giá trị nhỏ nhất của n để $x_n > 5^{100}$.

A. 235 **B.** 234 **C.** 118 **D.** 117

Lời giải

Ta có: $x_k = a \Rightarrow$ Tiếp tuyến tại A_k có phương trình hoành độ giao điểm:

$2x^3 - 3x^2 + 1 = 2a^3 - 3a^2 + 1 + \left(6a^2 - 6a\right)(x - a) \Leftrightarrow (x - a)^2 (2x + 4a - 3) = 0 \Leftrightarrow x_{k+1} = -2x_k + \dfrac{3}{2}$

Vậy $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = -2x_n + \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow x_n = \alpha.(-2)^n + \beta$. Xét $\begin{cases} x_1 = -2\alpha + \beta = 1 \\ x_2 = 4\alpha + \beta = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\dfrac{1}{4} \\ \beta = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Do đó $x_n = -\dfrac{1}{4}.(-2)^n + \dfrac{1}{2} > 5^{100}$. Chọn $n = 2k + 1 \Rightarrow -\dfrac{1}{4}.4^k.(-2) + \dfrac{1}{2} > 5^{100} \Leftrightarrow 4^k + 1 > 2.5^{100}$

$\Leftrightarrow 4^k > 2.5^{100} - 1 \Leftrightarrow k > \log_4\left(2.5^{100} - 1\right) \Rightarrow$ Chọn $k = 117 \Rightarrow \boxed{n = 235}$.

Câu 16: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C). Xét điểm A_1 có hoành độ $x_1 = \dfrac{5}{2}$ thuộc (C). Tiếp tuyến của (C) tại A_1 cắt (C) tại điểm thứ hai $A_2 \neq A_1$ có hoành độ x_2. Tiếp tuyến của (C) tại A_2 cắt (C) tại điểm thứ hai $A_3 \neq A_2$ có hoành độ x_3. Cứ tiếp tục như thế tiếp tuyến của (C) tại A_{n-1} cắt (C) tại điểm thứ hai $A_n \neq A_{n-1}$ có hoành độ x_n. Tìm x_{2018}.

A. $x_{2018} = -2^{2018} + \dfrac{1}{2}$. **B.** $x_{2018} = -2^{2018} - \dfrac{1}{2}$.

C. $x_{2018} = -3.2^{2017} - \dfrac{1}{2}$. **D.** $x_{2018} = 3.2^{2017} - \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Tiếp tuyến (C) tại điểm $A_1\left(\frac{5}{2};\frac{27}{2}\right)$ là $y=\frac{45}{2}x-\frac{174}{4}$.

Vậy giao điểm thứ hai của tiếp tuyến và (C) là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm

$2x^3-3x^2-\frac{45}{2}x+\frac{175}{4}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{5}{2}\\x=-\frac{7}{2}\end{array}\right.$.

Tiếp tuyến (C) tại điểm $A_1\left(\frac{-7}{2};\frac{-243}{2}\right)$ là $y=\frac{189}{2}x-\frac{837}{4}$.

Vậy giao điểm thứ hai của tiếp tuyến và (C) là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm

$2x^3-3x^2-\frac{189}{2}x-\frac{833}{4}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{-7}{2}\\x=\frac{17}{2}\end{array}\right.$.

Và làm tiếp tục sau đó nhận xét:

$x_1=\frac{5}{2}=(-1)^{1+1}(2)^1+\frac{1}{2}$

$x_2=\frac{-7}{2}=(-1)^{2+1}2^2+\frac{1}{2}$

$x_3=\frac{17}{2}=(-1)^{3+1}2^3+\frac{1}{2}$

....

$x_n=(-1)^{n+1}2^n+\frac{1}{2}$

Do đó $x_{2018}=(-1)^{2018+1}.2^{2018}+\frac{1}{2}=-2^{2018}+\frac{1}{2}$.

Chọn A

Câu 17: Cho hàm số: $y=x^3-2009x$ có đồ thị là (C). M_1 là điểm trên (C) có hoành độ $x_1=1$. Tiếp tuyến của (C) tại M_1 cắt (C) tại điểm M_2 khác M_1, tiếp tuyến của (C) tại M_2 cắt (C) tại điểm M_3 khác M_2, tiếp tuyến của (C) tại điểm M_{n-1} cắt (C) tại điểm M_n khác M_{n-1} (n = 4; 5;…), gọi $(x_n;y_n)$ là tọa độ điểm M_n. Tìm n để: $2009x_n+y_n+2^{2013}=0$

A. $n=685$ **B.** $n=627$ **C.** $n=675$ **D.** $n=672$

Lời giải

Gọi $M_k(x_k;y_k)$ suy ra tiếp tuyến tại $M_k: y-y_k=y'(x_k)(x-x_k)$

$\Leftrightarrow y=(3x_k^2-2009)(x-x_k)+x_k^3-2009x_k$

Tọa độ điểm M_{k+1} được xác định:

$x^3-2009x=(3x_k^2-2009)(x-x_k)+x_k^3-2009x_k\Leftrightarrow(x-x_k)(x^2+x.x_k-2x_k^2)=0$

$\Leftrightarrow x=x_k\vee x=-2x_k\Rightarrow x_{k+1}=-2x_k$

Ta có: $x_1=1;x_2=-2;x_3=4;...;x_n=(-2)^{n-1}$

$2009x_n+y_n+2^{2010}=0\Leftrightarrow 2009x_n+x_n^3-2009x_n+2^{2010}=0$

$\Leftrightarrow(-2)^{3n-3}=-2^{2013}=(-2)^{2013}\Leftrightarrow 3n-3=2013\Leftrightarrow n=672$

Chọn D

Câu 18: Gọi A là điểm thuộc đồ thị hàm số $y=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{5}{2}$ (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt B, C khác A sao cho $AC=3AB$ (với B nằm giữa A và C). Tính độ dài đoạn thẳng O**A.**

A. $OA=\sqrt{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{14}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm A có $x_A=a$ có dạng $y=(2a^3-6a)(x-a)+\frac{a^4}{2}-3a^2+\frac{5}{2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của tiếp tuyến và (C): $\frac{x^4}{2}-3x^2+\frac{5}{2}=(2a^3-6a)(x-a)+\frac{a^4}{2}-3a^2+\frac{5}{2}\Leftrightarrow x^2+2ax+3a^2-6=0$.

Để tiếp tuyến có 3 giao điểm với (C) thì (1) có 2 nghiệm phân biệt khác a

$\Leftrightarrow\begin{cases}-\sqrt{3}<a<\sqrt{3}\\ a\neq\pm1\end{cases}$

Khi đó x_B,x_C là nghiệm của phương trình (1) $\begin{cases}x_B+x_C=-2a\\ x_B.x_C=3a^2-6\end{cases}$ (2)

Mặt khác: $AC=3AB\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow x_C-3x_B=-2a$ (3)

Ta tìm được: $a=\pm\sqrt{2}\Rightarrow A\left(\pm\sqrt{2};\frac{-3}{2}\right)\Rightarrow OA=\frac{\sqrt{17}}{2}$.

Chọn D

Câu 19: Cho hàm số: $y=\frac{x^4}{2}-3x^2+\frac{5}{2}(C)$ và điểm M $\in(C)$ có hoành độ x_M = a. Với giá trị nào của a thì tiếp tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) 2 điểm phân biệt khác M.

A. $\begin{cases}|a|<\sqrt{3}\\ a\neq\pm1\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}|a|<\sqrt{3}\\ a\neq1\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}a<\sqrt{3}\\ a\neq\pm1\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}|a|<\sqrt{7}\\ a\neq\pm2\end{cases}$

Lời giải

Điểm M$\in(C)$, x_M = a => $y_M=\frac{a^4}{2}-3a^2+\frac{5}{2}$ ta có Pt tiếp tuyến với (C) có dạng

$(\Delta):\ y=y'_{x_M}(x-x_M)+y_M$ với $y'_M=2a^3-6a$

=> $(\Delta)\ \ y=(2a^3-6a)(x-a)+\frac{a^4}{2}-3a^2+\frac{5}{2}$

Hoành độ giao điểm của (Δ) và (C) là nghiệm của phương trình

$\frac{x^4}{2}-3x^2+\frac{5}{2}=(2a^3-6a)(x-a)+\frac{a^4}{2}-3a^2+\frac{5}{2}\Leftrightarrow(x-a)^2(x^2+2ax+3a^3-6)=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=a\\ g(x)=x^2+2ax+3a^2-6=0\end{cases}$

Bài toán trở thành tìm a để g(x)=0 có 2 nghiệm phân biệt khác a

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'_{g(x)}=a^2-(3a^2-6)>0\\ g(a)=6a^2-6\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-3<0\\ a^2\neq1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|a|<\sqrt{3}\\ a\neq\pm1\end{cases}$

Chọn A

Câu 20: Cho đồ thị $(C): y=\frac{x}{2}+\sqrt{x^2+x+1}$. Gọi $M(0;m)$ là điểm nằm trên trục tung mà từ đó kẻ được ít nhất một tiếp tuyến đến đồ thị (C). Biết tập hợp các giá trị của m là nửa khoảng $(a;b]$. Giá trị của $a+b$ bằng

A. 1. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

- Ta có: $y'=\frac{1}{2}+\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

- Gọi Δ là đường thẳng đi qua $M(0;m)$ và có hệ số góc là $k \Rightarrow \Delta: y=kx+m$

- Đường thẳng Δ là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases}\frac{x}{2}+\sqrt{x^2+x+1}=kx+m\\ k=\frac{1}{2}+\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2}+\sqrt{x^2+x+1}=\frac{x}{2}+\frac{2x^2+x}{2\sqrt{x^2+x+1}}+m \Leftrightarrow \frac{x+2}{2\sqrt{x^2+x+1}}=m \quad (1).$$

Hệ phương trình trên có nghiệm khi và chỉ khi (1) có nghiệm.

- Xét hàm số: $f(x)=\frac{x+2}{2\sqrt{x^2+x+1}}$ trên $\mathbb{R}$,

có $f'(x)=\frac{-3x}{4(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}} \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

BBT:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

Dựa vào BBT ta thấy: phương trình (1) có nghiệm $-\frac{1}{2}<m\le 1$ hay $m\in\left(-\frac{1}{2};1\right]$

$\Rightarrow \begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\ b=1\end{cases}$. Vậy $a+b=\frac{1}{2}$.

Câu 21: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}(C)$ và đường thẳng $d: y=2x+m$ giao nhau tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau.

A. $m=-1$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=-3$ **D.** $m=-4$

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm:

$\frac{x+1}{x-1}=2x+m \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+(m-3)x-m-1=0 \ (1) \\ x\neq 1 \end{cases}$

Đề hàm số (C) và d giao nhau tại hai điểm phân biệt A, B thì phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt khác 1 khi và chỉ khi:

$\begin{cases} \Delta=(m-3)^2+8(m+1)=(m+1)^1+16>0, \forall m\in\mathbb{R} \\ g(1)=-2\neq 0 \end{cases}$

Vậy hàm số (C) và d luôn luôn giao nhau tại hai điểm phân biệt A, B.

Gọi $x_1, x_2 \ (x_1\neq x_2)$ lần lượt là hoành độ của A và B thì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1).

Theo Vi-et: $x_1+x_2=\frac{1}{2}(3-m)(*)$, tiếp tuyến Δ_1, Δ_2 tại A, B của hàm số (C) có hệ số góc lần lượt là:

$k_1=y'(x_1)=\frac{-2}{(x_1-1)^2}$ và $k_2=y'(x_2)=\frac{-2}{(x_2-1)^2}$

Theo đề bài: $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow k_1=k_2 \Leftrightarrow -\frac{2}{(x_1-1)^2}=-\frac{2}{(x_2-1)^2}$

$\Leftrightarrow (x_1-1)^2=(x_2-1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1-1=x_2-1 \\ x_1-1=-x_2+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=x_2 \ (loai) \\ x_1+x_2=2, \ (2) \end{array}\right.$

Thay (*) vào (2) ta được: $\frac{1}{2}(3-m)=2 \Leftrightarrow m=-1$

Vậy $m=-1$ thỏa ycbt.

Chọn A

Câu 22: Cho điểm $A(0;m)$, tìm tất cả các giá trị thực của m để từ điểm A kẻ được hai tiếp tuyến tới hàm số $y=\frac{x+2}{x-1}(C)$ sao cho hai tiếp điểm tương ứng nằm về hai phía trục Ox.

A. $\begin{cases} -2<m \\ m\neq 1 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} \frac{-2}{3}<m \\ m\neq 1 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} \frac{-2}{5}<m \\ m\neq 1 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} \frac{-2}{7}<m \\ m\neq 1 \end{cases}$

Lời giải

Phương trình tiếp tuyến qua $A(0;m)$, có dạng: $y=kx+m,(1)$

ĐK có 2 tiếp tuyến đi qua A:

$\begin{cases} \frac{x+2}{x-1}=kx+m \ (2) \\ \frac{-3}{(x-1)^2}=k \ (3) \end{cases}$ có hai nghiệm $x\neq 1$.

Thay (3) vào (2) và rút gọn ta được:

$(m-1)x^2-2(m+2)x+m+2=0 \ (4)$

Để (4) có 2 nghiệm $x\neq 1$ là: $\begin{cases} m\neq 1 \\ f(1)=-3\neq 0 \\ \Delta'=3m+6>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ m>-2 \end{cases}(*)$

Gọi hoành độ tiếp điểm $x_1; x_2$ là nghiệm của (4), tung độ tiếp điểm là $y_1=\frac{x_1+2}{x_1-1}, y_2=\frac{x_2+2}{x_2-1}$

Để hai tiếp điểm nằm khác phía trục Õ là:

$$y_1.y_2 < 0 \Leftrightarrow \frac{(x_1+2)(x_2+2)}{(x_1-1)(x_2-1)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{9m+6}{-3} < 0 \Leftrightarrow m > -\frac{2}{3}.$$

So với điều kiện (*), vậy $\begin{cases} -\frac{2}{3} < m \\ m \neq 1 \end{cases}$ thỏa ycbt.

Chọn B

Câu 23: Tìm tất cả các điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{2x+2}(C)$ sao cho tiếp tuyến tại M của (C) tạo với trục tọa độ một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng $d: y = -4x$.

A. $M\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right), M\left(-\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$ **B.** $M\left(2;\frac{1}{5}\right), M\left(-\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$

C. $M\left(3;\frac{1}{4}\right), M\left(-\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$ **D.** $M\left(5;\frac{1}{3}\right), M\left(-\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$

Lời giải

Ta có: $y' = \frac{1}{(x+1)^2}$

Gọi $M\left(a;\frac{a-1}{2a+2}\right) \in (C), (a \neq -1)$ là điểm cần tìm. Gọi Δ tiếp tuyến với (C) tại M, ta có phương trình Δ:

$$\Delta: y = f'(a)(x-a) + \frac{a-1}{2a+2} \Rightarrow y = \frac{1}{(a+1)^2}(x-a) + \frac{a-1}{2(a+1)}$$

Gọi $A = Ox \cap \Delta \Rightarrow A\left(-\frac{a^2-2a-1}{2};0\right)$

$B = Oy \cap \Delta \Rightarrow B\left(0;\frac{a^2-2a-1}{2(a+1)^2}\right)$. Khi đó Δ tạo với hai trục tọa độ ΔOAB có trọng tâm là:

$$G\left(-\frac{a^2-2a-1}{6};\frac{a^2-2a-1}{6(a+1)^2}\right)$$

Do $G \in d$ nên: $-4.\frac{a^2-2a-1}{6} + \frac{a^2-2a-1}{6(a+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 4 = \frac{1}{(a+1)^2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+1 = \frac{1}{2} \\ a+1 = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -\frac{1}{2} \\ a = -\frac{3}{2} \end{array}\right.$$

(Vì A, B $\neq 0$ nên $a^2-2a-1 \neq 0$).

Với $a = -\frac{1}{2} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$; với $a = -\frac{3}{2} \Rightarrow M\left(-\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$

Chọn A

Câu 24: Tìm tất cả các điểm M thuộc đồ thị hàm số $y=\frac{2x-3}{x-2}(C)$ sao cho tiếp tuyến tại M với (C) cắt các đường tiệm cận của (C) tại A và B để đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất, với I là giao điểm của 2 tiệm cận.

A. $M\left(4;\frac{5}{2}\right)$ *và* $M(3;3)$ **B.** $M\left(0;\frac{3}{2}\right)$ *và* $M(3;3)$

C. $M(1;1)$ *và* $M(3;3)$ **D.** $M\left(5;\frac{7}{3}\right)$ *và* $M(3;3)$

Lời giải

Ta có: $y'=-\frac{1}{(x-2)^2}$

Giả sử $M\left(a;\frac{2a-3}{a-2}\right)\in(C), a\neq 2, y'(a)=\frac{-1}{(a-2)^2}$

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M có dạng:

$\Delta: y=\frac{-1}{(a-2)^2}(x-a)+\frac{2a-3}{a-2}$

Tọa độ giao điểm A, B của (Δ) và hai tiệm cận là:

$A\left(2;\frac{2a-2}{a-2}\right);\ B(2a-2;2)$

Ta thấy $\begin{cases}\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2+2a-2}{2}=a=x_M\\ \frac{y_A+y_B}{2}=\frac{2a-3}{a-2}=y_M\end{cases}$, Suy ra M là trung điểm của AB.

Mặt khác $I(2;2)$ và tam giác IAB vuông tại I nên đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích

$S=\pi IM^2=\pi\left[(a-2)^2+\left(\frac{2a-3}{a-2}-2\right)^2\right]=\pi\left[(a-2)^2+\frac{1}{(a-2)^2}\right]\geq 2\pi$

Theo Bđt Cô si

Dấu "=" xảy ra khi $(a-2)^2=\frac{1}{(a-2)^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\ a=3\end{array}\right.$

Do đó hai điểm M cần tìm là: $M(1;1)$ *và* $M(3;3)$.

Chọn C

Câu 25: Tìm tất cả các điểm M thuộc đồ thị hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}(C)$ sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất.

A. $M\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right), M\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$

B. $M(0;-1), M\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$

C. $M(2;1), M\left(1;\frac{1}{2}\right)$

D. $M(0;-1), M(2;1)$

Lời giải

Ta có: $y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}$

Giả sử $M\left(a;\dfrac{2a-1}{a+1}\right)\in(C), a\neq -1$, thì tiếp tuyến tại M với (C) có phương trình:

$y=\dfrac{3}{(a+1)^2}(x-a)+\dfrac{2a-1}{a+1}$

$\Leftrightarrow 3(x-a)-(a+1)^2(y-2)-3(a+1)=0$

Khoảng cách từ $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến là:

$$d=\frac{|3(-1-a)-3(a+1)|}{\sqrt{9+(a+1)^4}}=\frac{6|a+1|}{\sqrt{9+(a+1)^4}}=\frac{6}{\sqrt{\dfrac{9}{(a+1)^2}+(a+1)^2}}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy $\dfrac{9}{(a+1)^2}+(a+1)^2\geq 2\sqrt{9}=6$, Vậy $d\leq\sqrt{6}$

Khoảng cách lớn nhất bằng $\sqrt{6}$ khi:

$\dfrac{9}{(a+1)^2}+(a+1)^2\Leftrightarrow(a+1)^2=3\Leftrightarrow a=-1\pm\sqrt{3}$

Vậy có hai điểm M: $M\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right), M\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$.

Chọn A

Câu 26: Tìm tất cả các điểm M thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}(C)$ sao cho tiếp tuyến tại M của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại A, B và có độ dài AB ngắn nhất.

A. $M(3;3), M\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$ **B.** $M(3;3), M\left(4;\dfrac{5}{2}\right)$

C. $M\left(6;\dfrac{9}{4}\right), M(1;1)$ **D.** $M(3;3), M(1;1)$.

Lời giải

Ta có: $y'=-\dfrac{1}{(x-2)^2}$

Giả sử $M\left(a;\dfrac{2a-3}{a-2}\right)\in(C), a\neq 2$. Ta có: $y'(a)=-\dfrac{1}{(a-2)^2}$.

Tiếp tuyến tại M có phương trình $\Delta: y=-\dfrac{1}{(x-2)^2}(x-a)+\dfrac{2a-3}{a-2}$

Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng là: $A\left(2;2+\dfrac{2}{a-2}\right)$

Giao điểm của Δ với tiệm cận ngang là: $B(2a-2;2)$

Ta có: $AB^2=4\left[(a-2)^2+\dfrac{1}{(a-2)^2}\right]\geq 8$.

Dấu "=" xảy ra khi $(a-2)^4=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a-2=1\\a-2=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=3\\a=1\end{array}\right.$

Vậy điểm M cần tìm có tọa độ là: $M(3;3), M(1;1)$.

Chọn D

Câu 27: Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{2(x+1)}$ có đồ thị là (C). Gọi điểm $M(x_0;y_0)$ với $x_0>-1$ là điểm thuộc (C), biết tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A,B và tam giác OAB có trọng tâm G nằm trên đường thẳng $d:4x+y=0$. Hỏi giá trị của x_0+2y_0 bằng bao nhiêu?

A. $-\dfrac{7}{2}$. **B.** $\dfrac{7}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $-\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn A

□ Gọi $M\left(x_0;\dfrac{x_0-1}{2(x_0+1)}\right)\in(C)$ với $x_0\neq-1$ là điểm cần tìm.

□ Gọi Δ tiếp tuyến của (C) tại M ta có phương trình.

$$\Delta: y=f'(x_0)(x-x_0)+\frac{x_0-1}{2(x_0+1)}=\frac{1}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\frac{x_0-1}{2(x_0+1)}.$$

□ Gọi $A=\Delta\cap Ox\Rightarrow A\left(-\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{2};0\right)$ và $B=\Delta\cap Oy\Rightarrow B\left(0;\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{2(x_0+1)^2}\right)$.

□ Khi đó Δ tạo với hai trục tọa độ ΔOAB có trọng tâm là

$$G\left(-\frac{x_0^2-2x_0-1}{6};\frac{x_0^2-2x_0-1}{6(x_0+1)^2}\right).$$

□ Do G thuộc đường thẳng $4x+y=0\Rightarrow -4.\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{6}+\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{6(x_0+1)^2}=0$

$\Leftrightarrow 4=\dfrac{1}{(x_0+1)^2}$ (vì A,B không trùng O nên $x_0^2-2x_0-1\neq 0$)

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0+1=\dfrac{1}{2}\\ x_0+1=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-\dfrac{1}{2}\\ x_0=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$.

□ Vì $x_0>-1$ nên chỉ chọn $x_0=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow M\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right)\Rightarrow x_0+2y_0=-\dfrac{7}{2}$.

Câu 28: Cho hàm số $y=\dfrac{-x+1}{2x-1}$ có đồ thị là (C), đường thẳng $d:y=x+m$. Với mọi m ta luôn có d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A,B. Gọi k_1,k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A,B. Tìm m để tổng k_1+k_2 đạt giá trị lớn nhất.

A. $m=-1$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=-5$.

Lời giải

Chọn A

□ Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là

$$\frac{-x+1}{2x-1}=x+m\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\frac{1}{2}\\ g(x)=2x^2+2mx-m-1=0\ (*)\end{cases}.$$

□ Theo định lí Viet ta có $x_1+x_2=-m;\ x_1x_2=\frac{-m-1}{2}$. Giả sử $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)$.

□ Ta có $y'=\frac{-1}{(2x-1)^2}$, nên tiếp tuyến của (C) tại A và B có hệ số góc lần lượt là $k_1=-\frac{1}{(2x_1-1)^2}$ và $k_2=-\frac{1}{(2x_2-1)^2}$. Vậy

$$k_1+k_2=-\frac{1}{(2x_1-1)^2}-\frac{1}{(2x_2-1)^2}=-\frac{4(x_1^2+x_2^2)-4(x_1+x_2)+2}{\left[4x_1x_2-2(x_1+x_2)+1\right]^2}$$

$$=-\left(4m^2+8m+6\right)=-4(m+1)^2-2\le-2$$

□ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m=-1$.

Vậy k_1+k_2 đạt giá trị lớn nhất bằng -2 khi $m=-1$.

Câu 29: Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Biết khoảng cách từ $I(-1;2)$ đến tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhấtthì tung độ của điểm M nằm ở góc phần tư thứ hai, gần giá trị nào nhất?

A. $3e$. **B.** $2e$. **C.** e. **D.** $4e$.

Lời giải

Chọn C

Phương pháp tự luận

□ Ta có $y'=\frac{3}{(x+1)^2}$.

□ Gọi $M\left(x_0;\frac{2x_0-1}{x_0+1}\right)\in(C),(x_0\neq-1)$. Phương trình tiếp tuyến tại M là

$$y=\frac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0-1}{x_0+1}\Leftrightarrow3x-(x_0+1)^2y+2x_0^2-2x_0-1=0.$$

□ $d(I,\Delta)=\frac{6|x_0+1|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\frac{6}{\sqrt{\frac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2}}\le\frac{6}{\sqrt{2\sqrt{9}}}=\sqrt{6}$.

□ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{9}{(x_0+1)^2}=(x_0+1)^2\Leftrightarrow(x_0+1)^2=3\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x_0=-1+\sqrt{3}\Rightarrow y_0=2-\sqrt{3}\ (L)\\ x_0=-1-\sqrt{3}\Rightarrow y_0=2+\sqrt{3}\ (N)\end{bmatrix}.$$

Tung độ này gần với giá trị e nhất trong các đáp án.

Phương pháp trắc nghiệm

Ta có $IM\perp\Delta\Rightarrow cx_0+d=\pm\sqrt{|ad-bc|}\Rightarrow x_0+1=\pm\sqrt{|2+1|}$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x_0=-1+\sqrt{3}\Rightarrow y=2-\sqrt{3}\ (L)\\ x_0=-1-\sqrt{3}\Rightarrow y=2+\sqrt{3}\ (N)\end{bmatrix}.$$

, nghĩa là $m=3$ hoặc $m=-1$.

Câu 30: **(KINH MÔN II LẦN 3 NĂM 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ (C). Điểm M thuộc (C) có hoành độ lớn hơn1 , tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai tiệm cận của (C) lần lượt tại A, B. Diện tích nhỏ nhất của tam giác OAB bằng

A. $4+2\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $4+\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có: $y'=-\dfrac{2}{(x-1)^2}$, $\forall x\neq 1$.

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=1$ và đường tiệm cận đứng $x=1$.

Giả sử $M(m;y_M)\in(C)$ $(m>1)$ $\Rightarrow y_M=\dfrac{m+1}{m-1}=1+\dfrac{2}{m-1}$; $y'(m)=-\dfrac{2}{(m-1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến Δ là: $y=-\dfrac{2}{(m-1)^2}(x-m)+1+\dfrac{2}{m-1}$

$\Leftrightarrow 2x+(m-1)^2y-m^2-2m+1=0$.

Gọi A là giao điểm của Δ và đường tiệm cận ngang. Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}y=1\\ y=-\dfrac{2}{(m-1)^2}(x-m)+1+\dfrac{2}{m-1}\end{cases}\Rightarrow x=2m-1\Rightarrow A(2m-1;1)$.

Gọi B là giao điểm của Δ và đường tiệm cận đứng. Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}x=1\\ y=-\dfrac{2}{(m-1)^2}(x-m)+1+\dfrac{2}{m-1}\end{cases}\Rightarrow y=\dfrac{m+3}{m-1}=1+\dfrac{4}{m-1}\Rightarrow B\left(1;1+\dfrac{4}{m-1}\right)$.

Suy ra: $AB=\sqrt{(2-2m)^2+\left(\dfrac{4}{m-1}\right)^2}=\sqrt{4(m-1)^2+\dfrac{16}{(m-1)^2}}=\dfrac{2}{|m-1|}\sqrt{(m-1)^4+4}$.

$d(O;\Delta)=\dfrac{|-m^2-2m+1|}{\sqrt{4+(m-1)^4}}$.

$\Rightarrow S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}d(O;\Delta).AB=\dfrac{1}{2}.\dfrac{|-m^2-2m+1|}{\sqrt{4+(m-1)^4}}.\dfrac{2}{|m-1|}\sqrt{(m-1)^4+4}$

$=\dfrac{|-m^2-2m+1|}{|m-1|}=\dfrac{m^2+2m-1}{m-1}$ (vì $m>1$)

$=m+3+\dfrac{2}{m-1}=4+m-1+\dfrac{2}{m-1}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số $m-1$ và $\dfrac{2}{m-1}$: $(m-1)+\dfrac{2}{m-1}\geq 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 4+(m-1)+\dfrac{2}{m-1}\geq 4+2\sqrt{2}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vậy diện tích nhỏ nhất của tam giác OAB bằng $4+2\sqrt{2}$ khi $\begin{cases} m-1=\dfrac{2}{m-1} \\ m>1 \end{cases} \Leftrightarrow m=1+\sqrt{2}$.

Câu 31: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{x-2}$. Điểm trên đồ thị mà tiếp tuyến tại đó lập với đường tiệm cận đứng và đường thẳng $d: y=x+3$ một tam giác có chu vi nhỏ nhất thì hoành độ bằng

A. $2\pm\sqrt[4]{10}$. **B.** $2\pm\sqrt[4]{6}$. **C.** $2\pm\sqrt[4]{12}$. **D.** $2\pm\sqrt[4]{8}$.

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $\Delta: x=2$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $M(x_0;y_0)$ là

$$d_1: y=\frac{x_0^2-4x_0}{(x_0-2)^2}(x-x_0)+\frac{x_0^2+x_0-2}{x_0-2}$$

$d_1\cap\Delta=\{A\}\Rightarrow A\left(2;\dfrac{5x_0-2}{x_0-2}\right)$

$d_1\cap d=\{B\}\Rightarrow B(2x_0-2;2x_0+1)$

$\Delta\cap d=\{I\}\Rightarrow I(2;5)$

$$\Rightarrow IA=\frac{8}{|x_0-2|};\ IB=2\sqrt{2}|x_0-2|;\ AB=\sqrt{2(2x_0-4)^2+\frac{64}{(x_0-2)^2}-32}$$

Chu vi

$$P=IA+AB+IB=\frac{8}{|x_0-2|}+2\sqrt{2}|x_0-2|+\sqrt{2(2x_0-4)^2+\frac{64}{(x_0-2)^2}-32}\geq 8\sqrt{2}+2\sqrt{32\sqrt{2}-32}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} \dfrac{8}{|x_0-2|}=2\sqrt{2}|x_0-2| \\ 2(2x_0-4)^2=\dfrac{64}{(x_0-2)^2} \end{cases} \Leftrightarrow x=2\pm\sqrt[4]{8}$.

Câu 32: Cho hàm số: $y=x+1+\dfrac{1}{x-1}$ (C) Tìm những điểm trên đồ thị (C) có hoành độ lớn hơn 1 sao cho tiếp tuyến tại diểm đó tạo với 2 đường tiệm cận một tam giác có chu vi nhỏ nhất.

A. $M=\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}};2-\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$ **B.** $M=\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}};2+\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$

C. $M=\left(1;2+\sqrt{2}\right)$ **D.** $M=\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}};2+\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$

Lời giải

Gọi $M=(a;y(a))\in(C);a>0$ thì $y(a)=a+1+\dfrac{1}{a-1}=\dfrac{a^2}{a-1}$

PTTT của (C) tại M là: $y-y(a)=y'(a)(x-a)\Leftrightarrow y=\dfrac{a^2-2a}{(a-1)^2}(x-a)+\dfrac{a^2}{a-1}$ (d)

Tiệm cận đứng x = 1; Tiệm cận xiên y = x + 1

Giao điểm của 2 tiệm cận là I=(1; 2)

Giao điểm của d với tiệm cận đứng x = 1 là $A=\left(1;\frac{2a}{a-1}\right)$

Với tiệm cận xiên là: $B=(2a-1;2a)$

Ta có $AI=\frac{2}{|a-1|};BI=2\sqrt{2}|a-1|$, nên $AI.BI=4\sqrt{2}$ vì a > 1

Lại có $\angle AIB=\frac{\pi}{4}$ suy ra $AB^2=AI^2+BI^2-2AI.BICos\frac{\pi}{4}=AI^2+BI^2-\sqrt{2}AI.BI$

Theo bất đẳng thức Cô si: $AB^2\geq 2AI.BI-\sqrt{2}AI.BI=\left(2-\sqrt{2}\right)AI.BI$

$\Leftrightarrow AB\geq 2\sqrt{2\left(\sqrt{2}-1\right)}$ (1)

Đặt p là chu vi tam giác ABI thì: $p=AB+AI+BI\geq AB+2\sqrt{AI.BI}\geq 2\sqrt{2\left(\sqrt{2}-1\right)}+4\sqrt[4]{2}$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow AI=BI\Leftrightarrow a=1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

Vậy $Minp=2\sqrt{2\left(\sqrt{2}-1\right)}+4\sqrt[4]{2}\Leftrightarrow a=1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

Hay điểm cần tìm là $M=\left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}};2+\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$

Chọn D

Câu 33: Cho các hàm số $y=f(x),y=f(x^2),y=\frac{f(x)}{f(x^2)}$ có đồ thị lần lượt là $(C_1),(C_2),(C_3)$. Hệ số góc các tiếp tuyến của $(C_1),(C_2),(C_3)$ tại điểm có hoành độ $x_0=1$ lần lượt là k_1,k_2,k_3 thỏa mãn $k_1+2k_2=3k_3\neq 0$. Tính $f(1)$.

A. $f(1)=-\frac{1}{5}$. **B.** $f(1)=-\frac{2}{5}$. **C.** $V=-\frac{3}{5}$ **D.** $f(1)=-\frac{4}{5}$.

Lời giải

$k_1=f'(x_0)=f'(1)$

$k_2=2x_0f'(x_0^2)=2f'(1)$

$k_3=\left(\frac{f(x_0)}{f(x_0^2)}\right)'=\frac{f'(x_0).f(x_0^2)-f(x_0).2x_0.f'(x_0^2)}{\left(f(x_0^2)\right)^2}=\frac{-f(1).f'(1)}{(f(1))^2}=\frac{-f'(1)}{f(1)}$

Vì vậy: $k_1+2k_2=3k_3\Leftrightarrow f'(1)+4f'(1)=-\frac{3f'(1)}{f(1)}\Leftrightarrow f(1)=-\frac{3}{5}$.

Chọn C

Câu 34: Cho các hàm số $y=f(x),y=g(x),y=\frac{f(x)}{g(x)}$. Nếu các hệ số góc của các tiếp tuyến của các đồ thị các hàm số đã cho tại điểm có hoành độ $x=0$ bằng nhau và khác 0 thì:

A. $f(0)<\frac{1}{4}$. **B.** $f(0)\leq\frac{1}{4}$. **C.** $f(0)>\frac{1}{4}$. **D.** $f(0)\geq\frac{1}{4}$.

Lời giải:

Theo giả thiết ta có:

$$f'(0)=g'(0)=\frac{f'(0)g(0)-g'(0)f(0)}{g^2(0)}\Rightarrow f(0)=-g^2(0)+g(0)=-\left[g(0)-\frac{1}{2}\right]^2+\frac{1}{4}\leq\frac{1}{4}$$

Chọn B

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x);y=g(x)$ dương có đạo hàm $f'(x);g'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_o=0$ của đồ thị hàm số $y=f(x);y=g(x)$ và $y=\dfrac{f(x)+1}{g(x)+1}$ có cùng hệ số góc và khác 0. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $f(0)\le -\dfrac{3}{4}$. **B.** $f(0)\ge -\dfrac{3}{4}$. **C.** $f(0)\le \dfrac{3}{4}$. **D.** $f(0)\ge \dfrac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết ta có:

$$k=f'(0)=g'(0)=\frac{f'(0).[g(0)+1]-g'(0)[f(0)+1]}{[g(0)+1]^2}\neq 0$$

Do đó

$$k=\frac{k.[g(0)+1]-k[f(0)+1]}{[g(0)+1]^2}\Leftrightarrow [g(0)+1]^2=g(0)-f(0)$$

$$\Leftrightarrow f(0)=-[g(0)]^2-g(0)-1=-(g(0)+\frac{1}{2})^2-\frac{3}{4}\le -\frac{3}{4}.$$

Câu 36: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$ có đồ thị (H). Gọi hai điểm $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2)$ là hai điểm phân biệt thuộc (H) sao cho tiếp tuyến của (H) tại A,B có cùng hệ số góc k. Biết diện tích tam giác OAB bằng. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $k<-9$. **B.** $-9\le k\le -6$. **C.** $-6\le k\le -3$. **D.** $-3\le k<0$.

Lời giải

Chọn D

Theo giả thiết ta có:

$y'(x_1)=y'(x_2)=k\Leftrightarrow x_1;x_2$ là hai nghiệm phân biệt của phương trình $y'=k$.

Do đó

$$-\frac{3}{(2x-1)^2}=k\Leftrightarrow 4x^2-4x+1+\frac{3}{k}=0.$$

Theo định lý Vi-et ta có $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=1;x_1.x_2=\dfrac{k+3}{4k}$.

Khi đó $A(x_1;\dfrac{x_1+1}{2x_1-1});B(x_2;\dfrac{x_2+1}{2x_2-1})$.

Suy ra:

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}\left|x_1.\frac{x_2+1}{2x_2-1}-x_2.\frac{x_1+1}{2x_1-1}\right|=\frac{1}{2}\left|x_1.\frac{x_2+1}{x_2-x_1}-x_2.\frac{x_1+1}{x_1-x_2}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{2x_1x_2+x_1+x_2}{x_2-x_1}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{\frac{k+3}{2k}+1}{\sqrt{1-\frac{k+3}{k}}}\right|=\frac{3k+3}{4k\sqrt{\frac{-3}{k}}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k=-3.$$

Câu 37: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $I(1;2)$ Tiếp tuyến của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại A và B sao cho tam giác IAB có chu vi nhỏ nhất là $4\sqrt{a}+2\sqrt{b}$ với a,b là các số nguyên dương. Tính $S=a+b$.

A. $S=8$. **B.** $S=5$. **C.** $S=6$. **D.** $S=7$.

Lời giải

Chọn A

$A\left(a;\dfrac{2a-1}{a-1}\right)\in(C)$

Phương trình tiếp tuyến tại A là $y=-\dfrac{1}{(a-1)^2}x+\dfrac{a}{(a-1)^2}+\dfrac{2a-1}{a-1}$

Gọi giao điểm tiếp tuyến và tiệm cận đứng là $A\left(1;2+\dfrac{2}{a-1}\right)$

Gọi giao điểm tiếp tuyến và tiệm cận ngang là $B(2a-1;2)$

$\overrightarrow{IA}=\left(0;\dfrac{2}{a-1}\right)\Rightarrow IA=\dfrac{2}{|a-1|}$

$\overrightarrow{IB}=(2a-2;0)\Rightarrow IB=2|a-1|$

Chu vi tam giác IAB: $CV_{IAB}=IA+IB+AB=IA+IB+\sqrt{IA^2+IB^2}\ge IA+IB+\sqrt{2}IA.IB$

$\overset{cauchy}{\ge}4+4\sqrt{2}=2\sqrt{4}+4\sqrt{2}$

Vậy $S=6$

Câu 38: **(Ngô Quyền Hà Nội)** Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-1}$ có đồ thị là (C), điểm M thay đổi thuộc đường thẳng $d:y=1-2x$ sao cho qua M có hai tiếp tuyến của (C) với hai tiếp điểm tương ứng là A, B. Biết rằng đường thẳng AB luôn đi qua điểm cố định là H. Độ dài đoạn OH là

A. $\sqrt{34}$. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{58}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(m;1-2m)\in d$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua M có hệ số góc là k, khi đó phương trình đường thẳng $\Delta:y=k(x-m)+1-2m$.

Để Δ là tiếp tuyến của đồ thị (C) thì hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{x+3}{x-1}=k(x-m)+1-2m\\-\dfrac{4}{(x-1)^2}=k\end{cases}$ có nghiệm.

Thay $k=-\dfrac{4}{(x-1)^2}$ vào phương trình $\dfrac{x+3}{x-1}=k(x-m)+1-2m$ ta được $mx^2+2(2-m)x-m-2=0\ (*)$.

Qua M kẻ được hai tiếp tuyến với (C) khi và chỉ khi phương trình $g(x)=mx^2+2(2-m)x-m-2=0$ có hai nghiệm phân biệt $x\ne1$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=m\ne0\\\Delta'=(2-m)^2+m(m+2)>0\\g(1)=m+4-2m-m-2\ne0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ne0\\m\ne1\end{cases}$.

Gọi $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ là hai tiếp điểm, với x_A, x_B là hai nghiệm của phương trình $(*)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Theo định lý Vi-et ta có $\begin{cases} x_A + x_B = \dfrac{2(m-2)}{m} \\ x_A x_B = -\dfrac{m+2}{m} \end{cases}$.

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $I\left(\dfrac{m-2}{m};\dfrac{m+3}{m-1}\right)$.

Mặt khác $\overrightarrow{AB} = \left(x_B - x_A; \dfrac{2m(x_B - x_A)}{m-1}\right) \Rightarrow$ một vectơ pháp tuyến của đường thẳng AB là $\vec{n} = (2m; 1-m)$.

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm AB có một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2m; 1-m)$ và đi qua điểm $I\left(\dfrac{m-2}{m};\dfrac{m+3}{m-1}\right)$ là $2mx + (1-m)y + 7 - m = 0$.

Gọi $H(x_H; y_H)$ là điểm cố định mà đường thẳng AB đi qua.

Khi đó, $2mx_H + (1-m)y_H - m + 7 = 0 \Leftrightarrow m(2x_H - y_H - 1) + y_H + 7 = 0$ với mọi $m \neq 0$ và $m \neq 1$.

Suy ra $\begin{cases} 2x_H - y_H - 1 = 0 \\ y_H + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -3 \\ y_H = -7 \end{cases} \Rightarrow H(-3;-7)$.

Vậy $OH = \sqrt{(-3)^2 + (-7)^2} = \sqrt{58}$.

Phát triển

Câu 39: Cho hàm số $y = \dfrac{x+3}{x-1}$ có đồ thị là (C), điểm M thay đổi thuộc đường thẳng $d: y = 1 - 2x$ sao cho qua M có hai tiếp tuyến của (C) với hai tiếp điểm tương ứng là A, B. Khoảng cách từ O đến đường thẳng AB lớn nhất bằng

A. $\sqrt{34}$. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{58}$. **D.** $\sqrt{29}$.

Lời giải

Chọn C

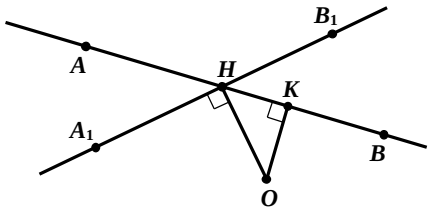
Kế thừa Lời giải trên, ta có đường thẳng $AB: 2mx + (1-m)y - m + 7 = 0$ luôn đi qua điểm cố định $H(-3;-7)$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của O trên AB. Ta có $OK \le OH = \sqrt{58}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $K \equiv H$, tức là $OH \perp AB$ hay $7.2m - 3(1-m) = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{17}$ (thỏa điều kiện $m \neq 0$ và $m \neq 1$).

Vậy khoảng cách từ O đến đường thẳng AB lớn nhất bằng $\sqrt{58}$.

Nhận xét.

+) Bài toán này dựa trên đặc điểm đường thẳng AB quay quanh điểm cố định H nên khoảng cách từ O đến AB lớn nhất khi $AB \perp OH$. Từ đó ta có cách hỏi như trên.



+) Nếu không phát hiện ra đường thẳng AB đi qua điểm cố định H thì học sinh có thể giải theo công thức tính khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng AB. Tuy nhiên, làm theo cách này học sinh sẽ phải khảo sát hàm số và thực hiện các bước tính toán phức tạp.

Câu 40: Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-1}$ có đồ thị là (C), điểm M thay đổi thuộc đường thẳng $d: y=1-2x$ sao cho qua M có hai tiếp tuyến của (C) với hai tiếp điểm tương ứng là A, B. Gọi K là hình chiếu vuông góc của O trên AB. Khi M di chuyển trên d thì K di chuyển trên đường tròn cố định có bán kính bằng

A. $\sqrt{58}$. **B.** $\sqrt{29}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{58}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{29}}{2}$.

Lời giải

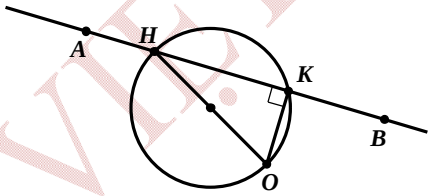
Chọn C

Kế thừa **Lời giải** bài toán đầu tiên, ta có đường thẳng AB luôn đi qua điểm cố định $H(-3;-7)$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của O trên AB.
Khi đó K nhìn đoạn OH (cố định) dưới một góc vuông nên khi M di chuyển trên d thì K di chuyển trên đường tròn đường kính OH.

Vậy bán kính đường tròn là $R=\dfrac{OH}{2}=\dfrac{\sqrt{58}}{2}$.

Nhận xét. Bài toán này kết hợp ý tưởng đường thẳng AB đi qua điểm cố định H và bài toán quen thuộc ở lớp 9 là điểm K nhìn đoạn OH dưới một góc vuông thì K thuộc đường tròn đường kính OH.



Câu 41: Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-1}$ có đồ thị là (C), điểm M thay đổi thuộc đường thẳng $d: y=1-2x$ sao cho qua M có hai tiếp tuyến của (C) với hai tiếp điểm tương ứng là A, B. Chọn khẳng định đúng dưới đây.

A. Đường thẳng AB luôn cắt hai trục tọa độ.
B. Tồn tại điểm M sao cho AB song song với trục Ox
C. Tồn tại điểm M sao cho AB song song với trục Oy.
D. Không tồn tại điểm M sao cho AB đi qua gốc tọa độ O.

Lời giải

Chọn A

Theo kết quả của bài toán ban đầu thì đường thẳng AB có phương trình là

$$2mx+(1-m)y-m+7=0 \text{ với } m\neq 0 \text{ và } m\neq 1.$$

Do đó, AB không thể song song với trục Ox, Oy.
Tiếp đến, đường thẳng AB đi qua O khi và chỉ khi $-m+7=0\Leftrightarrow m=7$ (thỏa điều kiện $m\neq 0$ và $m\neq 1$). Do đó, tồn tại điểm M sao cho AB đi qua gốc tọa độ O.
Đường thẳng AB có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(m-1;2m)$ không cùng phương với các véc-tơ đơn vị $\vec{i}=(1;0)$ và $\vec{j}=(0;1)$ của các trục Ox, Oy nên AB luôn cắt các trục tọa độ.
Vậy khẳng định đúng là "Đường thẳng AB luôn cắt hai trục tọa độ".
Nhận xét. Bài toán này đặt ra dựa trên điều kiện tồn tại của đường thẳng AB

Câu 42: **(Trần Đại Nghĩa)** Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{2(x+1)}$ có đồ thị là (C). Gọi điểm $M(x_0;y_0)$ với $x_0>-1$ là điểm thuộc (C), biết tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB có trọng tâm G nằm trên đường thẳng $d:4x+y=0$. Giá trị của x_0+2y_0 bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{7}{2}$. **C.** $-\dfrac{5}{2}$. **D.** $-\dfrac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Có $y=\dfrac{x-1}{2(x+1)}\Rightarrow y'=\dfrac{1}{(x+1)^2}>0,\forall x\neq -1$.

Tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0;y_0)$ có phương trình: $y=\dfrac{1}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\dfrac{x_0-1}{2(x_0+1)}$ (d).

Theo đề: $A\left(-\dfrac{x_0^2}{2}+x_0+\dfrac{1}{2};0\right)$, $B\left(0;\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{2(x_0+1)^2}\right)$ suy ra $G\left(-\dfrac{x_0^2}{6}+\dfrac{x_0}{3}+\dfrac{1}{6};\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{6(x_0+1)^2}\right)$.

Vì $G\in d:4x+y=0$ ta có: $4.\left(-\dfrac{x_0^2}{6}+\dfrac{x_0}{3}+\dfrac{1}{6}\right)+\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{6(x_0+1)^2}=0$

$\Leftrightarrow (x_0^2-2x_0-1)\left(-2+\dfrac{1}{2(x_0+1)^2}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x_0^2-2x_0-1=0 & (1)\\ \dfrac{1}{2(x_0+1)^2}=2 & (2)\end{array}\right.$.

$(1):x_0^2-2x_0-1=0$ không xảy ra vì lúc này $A\equiv B\equiv O$.

$(2):\dfrac{1}{2(x_0+1)^2}=2\Leftrightarrow (x_0+1)^2=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-\dfrac{1}{2}>-1\ (\text{N})\\ x_0=-\dfrac{3}{2}<-1\ (\text{L})\end{array}\right.$.

Với $x_0=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow y_0=-\dfrac{3}{2}\Rightarrow x_0+2y_0=-\dfrac{7}{2}$.

Câu 43: **(Chuyên KHTN)** Gọi (C) là đồ thị hàm số $y=x^2+2x+2$ và điểm M di chuyển trên (C). Gọi d_1,d_2 là các đường thẳng đi qua M sao cho d_1 song song với trục tung và d_1,d_2 đối xừng nhau qua tiếp tuyến của (C) tại M. Biết rằng khi M di chuyển trên (C) thì d_2 luôn đi qua một điểm $I(a;b)$ cố định. Đẳng thức nào sau đây là đúng ?

A. $3a+2b=0$. **B.** $a+b=0$. **C.** $ab=-1$. **D.** $5a+4b=0$.

Lời giải

Chọn D

+) Gọi $M(x_0;y_0)$

Do $M\in(C)\Rightarrow y_0=x_0^2+2x_0+2$

Hệ số góc của tiếp tuyến d của (C) tại M là $f'(x_0)=2(x_0+1)$

+) TH1: $x_0>-1$

Hệ số góc của d_2 là $k=\tan\alpha$

Ta có $\left.\begin{array}{l}\widehat{\alpha}+2\widehat{\gamma}=90^0\Rightarrow\tan\alpha=\cot 2\gamma=\dfrac{\cot^2\gamma-1}{2\cot\gamma}\\ \widehat{\beta}+\widehat{\gamma}=90^0\Rightarrow\tan\beta=\cot\gamma\end{array}\right\}\Rightarrow\tan\alpha=\dfrac{\tan^2\beta-1}{2\tan\beta}$

Mà hệ số góc của tiếp tuyến d của (C) tại M là $\tan\beta\Rightarrow\tan\beta=2(x_0+1)$

Khi đó $k=\tan\alpha=\dfrac{[2(x_0+1)]^2-1}{4(x_0+1)}=\dfrac{4(x_0+1)^2-1}{4(x_0+1)}$

Phương trình đường thẳng d_2 là: $y=\dfrac{4(x_0+1)^2-1}{4(x_0+1)}(x-x_0)+x_0^2+2x_0+2$

Thay x = - 1 vào d_2 ta được

$y=\dfrac{4(x_0+1)^2-1}{4(x_0+1)}(-1-x_0)+x_0^2+2x_0+2=\dfrac{-4(x_0+1)^2+1}{4}+x_0^2+2x_0+2=\dfrac{5}{4}$ với $\forall x_0>-1$

Vậy d_2 luôn đi qua điểm $I(-1;\dfrac{5}{4})$ cố định

+) TH2: $x_0<-1$

Hệ số góc của d_2 là $k=\tan\alpha$

Ta có:

$\left.\begin{array}{l}\widehat{\alpha}+\widehat{\gamma}=90^0\Rightarrow\widehat{\alpha}+(180^0-2\widehat{\phi})=90^0\Rightarrow 2\widehat{\phi}-\widehat{\alpha}=90^0\Rightarrow\tan\alpha=-\cot 2\phi=-\dfrac{\cot^2\phi-1}{2\cot\phi}\\ \widehat{\beta}+\widehat{\phi}=90^0\Rightarrow\tan\beta=\cot\phi\end{array}\right.$

$\Rightarrow\tan\alpha=-\dfrac{\tan^2\beta-1}{2\tan\beta}$

Mà hệ số góc của tiếp tuyến d của (C) tại M là $-\tan\beta\Rightarrow\tan\beta=-2(x_0+1)$

Khi đó $k=\tan\alpha=-\dfrac{[-2(x_0+1)]^2-1}{-4(x_0+1)}=\dfrac{4(x_0+1)^2-1}{4(x_0+1)}$

Phương trình đường thẳng d_2 là: $y=\dfrac{4(x_0+1)^2-1}{4(x_0+1)}(x-x_0)+x_0^2+2x_0+2$

Thay x = - 1 vào d_2 ta được

$y=\dfrac{4(x_0+1)^2-1}{4(x_0+1)}(-1-x_0)+x_0^2+2x_0+2=\dfrac{-4(x_0+1)^2+1}{4}+x_0^2+2x_0+2=\dfrac{5}{4}$ với $\forall x_0>-1$

Vậy d_2 luôn đi qua điểm $I(-1;\dfrac{5}{4})$ cố định

+) TH3: $x_0=-1$

Khi đó $M(-1;1)$; d_1 qua M và song song với trục tung nên có phương trình là: $x=-1$

Tiếp tuyến d của (C) tại M có phương trình: $y=1$

Mà d_1,d_2 đối xứng nhau qua tiếp tuyến d của (C) tại M và d_2 qua M nên d_2 trùng d_1

Vậy d_2 luôn đi qua điểm $I(-1;\dfrac{5}{4})$ cố định

Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn điều kiện $f^2(1+2x)=x-f^3(1-x)$. Lập phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $y=-\frac{1}{7}x-\frac{6}{7}$ **B.** $y=-\frac{1}{7}x+\frac{6}{7}$ **C.** $y=\frac{1}{7}x-\frac{6}{7}$ **D.** $y=\frac{1}{7}x+\frac{6}{7}$

Lời giải

Ta xét $x=0$ ta được $f^2(1)=-f^3(1)\Rightarrow f^2(1)\left(f(1)+1\right)=0\Rightarrow f(1)=0\vee f(1)=-1$.

Lại có $4f(1+2x)f'(1+2x)=1+3f^2(1-x)f'(1-x)$ thay $x=0$ ta có

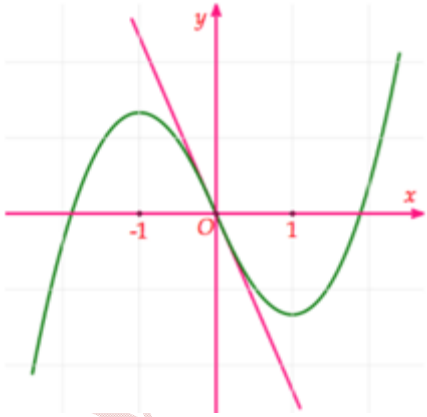
$4f(1)f'(1)=1+3f^2(1)f'(1)$.

Trường hợp 1: Nếu $f(1)=0$ thay vào ta thấy $0=1$ vô lý.

Trường hợp 2: Nếu $f(1)=-1$ thì thay vào $-4f'(1)=1+3f'(1)\Rightarrow f'(1)=-\frac{1}{7}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=-\frac{1}{7}(x-1)-1=-\frac{1}{7}x-\frac{6}{7}$.

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đường thẳng trong hình vẽ bên là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại gốc tọa độ. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f'(x)$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?



A. $m<-2$ **B.** $-2<m<0$ **C.** $0<m<2$ **D.** $m>2$

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số trên ta thấy rằng $x=0$ chính là nghiệm của phương trình $f''(x)=0$ và là điểm cực trị của hàm số $y=f'(x)$. Mặt khác hàm số $y=f'(x)$ có dạng hàm số bậc 2 với hệ số bậc cao nhất dương. Khi đó giá trị nhỏ nhất này chính là $f'(0)$ đồng thời là hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=0$.

Dựa vào đồ thị ta thấy tiếp tuyến có dạng $y=ax$ và đi qua điểm có tọa độ xấp xỉ $(1;-2,2)$ cho nên ta suy ra $\boxed{-2,2=a=f'(0)=m}$.

Chọn A

Câu 46: Biết rằng tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=(x+a)^3+(x+b)^3+(x+c)^3$ có hệ số góc nhỏ nhất tại tiếp điểm có hoành độ $x=-1$ đồng thời a,b,c là các số thực không âm. Tìm GTLN tung độ của giao điểm đồ thị hàm số với trục tung?

A. 27 **B.** 3 **C.** 9 **D.** 18

Lời giải

Tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất tại điểm uốn.

Mặt khác $y'=3\left(\left(x+a\right)^2+\left(x+b\right)^2+\left(x+c\right)^2\right)\Rightarrow y"=6\left(3x+a+b+c\right)$

Do đó $y"=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{a+b+c}{3}=-1\Leftrightarrow a+b+c=3.$

Giao điểm với trục tung có tung độ $y=a^3+b^3+c^3$

Vì $a\left(a^2-9\right)+b\left(b^2-9\right)+c\left(c^2-9\right)\le 0\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3\le 9\left(a+b+c\right)$

Vậy tung độ giao điểm của đồ thị hàm số và Oy là $a=3;b=c=0$ và các hoán vị.

Chọn A

Câu 47: **(Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left(0;+\infty\right)$ thỏa mãn $f'\left(x\right)+\dfrac{f\left(x\right)}{x}=4x^2+3x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(1\right)=2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là

A. $y=-16x-20.$ **B.** $y=16x-20.$

C. $y=16x+20.$ **D.** $y=-16x+20.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'\left(x\right)+\dfrac{f\left(x\right)}{x}=4x^2+3x\Leftrightarrow x.f'\left(x\right)+f\left(x\right)=4x^3+3x^2.$

$\Leftrightarrow\left(x.f\left(x\right)\right)'=4x^3+3x^2\Leftrightarrow x.f\left(x\right)=\int\left(4x^3+3x^2\right)\mathrm{d}x\Leftrightarrow x.f\left(x\right)=x^4+x^3+C.$

Vì $f\left(1\right)=2\Rightarrow 1.f\left(1\right)=2+C\Leftrightarrow 2=2+C\Leftrightarrow C=0.$

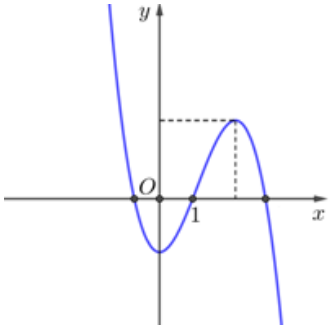
Suy ra $x.f\left(x\right)=x^4+x^3\Rightarrow f\left(x\right)=x^3+x^2.$

Khi đó: $f'\left(x\right)=3x^2+2x;\ f'\left(2\right)=16;\ f\left(2\right)=12.$

Do đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là

$y=16\left(x-2\right)+12\Leftrightarrow y=16x-20.$

Câu 48: **(Ngô Quyền Hà Nội)** Cho hàm đa thức bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị $\left(C\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Gọi đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đồ thị $\left(C\right)$ tại điểm có hoành độ bằng 1. Hỏi Δ và $\left(C\right)$ có bao nhiêu điểm chung?

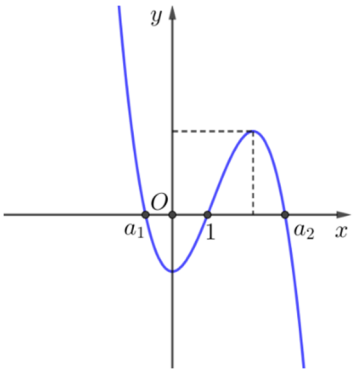


A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Ta có tiếp tuyến Δ của (C) tại $x=1$ là $y=f'(1)(x-1)+f(1)$.

Dựa vào đồ thị của hàm số $f'(x)$, ta có $f'(1)=0$.

Vậy $\Delta: y=f(1)$.

Gọi a_1, a_2 là hai nghiệm còn lại của $f'(x)$. Dựa vào đồ thị hàm số ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		a_1		1		a_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(a_1)$	↘	$f(1)$	↗	$f(a_2)$	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\Delta: y=f(1)$ và (C) có ba điểm chung.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

KHOẢNG CÁCH VÀ ĐIỂM ĐẶC BIỆT

A – BÀI TẬP

Câu 1: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$ có đồ thị (C). Tổng khoảng cách từ một điểm M thuộc (C) đến hai hai trục tọa độ đạt giá trị nhỏ nhất bằng?

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 2: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) và A là điểm thuộc (C). Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách từ A đến các tiệm cận của (C).

A. $2\sqrt{2}$ **B.** 2 **C.** 3 **D.** $2\sqrt{3}$

Câu 3: **(THPT-Gia-Lộc-Hải-Dương-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3)**Gọi (H) là đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$. Điểm $M(x_0;y_0)$ thuộc (H) có tổng khoảng cách đến hai đường tiệm cận là nhỏ nhất, với $x_0<0$ khi đó x_0+y_0 bằng

A. -1. **B.** -2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 4: Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ có đồ thị là (C). Gọi I là giao điểm của 2 đường tiệm cận của (C). Tìm tọa độ điểm M trên (C) sao cho độ dài IM là ngắn nhất?

A. $M_1(0;-3)$ và $M_2(-2;5)$ **B.** $M_1(1;-1)$ và $M_2(-3;3)$

C. $M_1\left(2;-\dfrac{1}{3}\right)$ và $M_2\left(-4;\dfrac{7}{3}\right)$ **D.** $M_1\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{5}{3}\right)$ và $M_2\left(-\dfrac{5}{2};\dfrac{11}{3}\right)$

Câu 5: Hai điểm M, N thuộc hai nhánh của đồ thị $y=\dfrac{3x-1}{x-3}$. Khi đó độ dài đoạn thẳng MN ngắn nhất bằng?

A. 8 **B.** 4 **C.** $x_M<3$ **D.** $8\sqrt{2}$.

Câu 6: Gọi $M(a;b)$ là điểm trên đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+2}$ mà có khoảng cách đến đường thẳng $d:y=3x+6$ nhỏ nhất. Khi đó

A. $a+2b=1$ **B.** $a+b=2$ **C.** $a+b=-2$ **D.** $a+2b=3$

Câu 7: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x+1-m^2$. Tìm m để trên đồ thị hàm số có hai điểm đối xứng qua gốc tọa độ

A. $-1\le m\le 0$ hoặc $m\ge 1$ **B.** $-1<m<0$ hoặc $m>1$

C. $1>m>0$ hoặc $m<-1$ **D.** $1\ge m\ge 0$ hoặc $m\le -1$

Câu 8: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x+1-m^2$. Tìm m để trên đồ thị hàm số có hai điểm đối xứng qua gốc tọa độ

A. $-1\le m\le 0$ hoặc $m\ge 1$ **B.** $-1<m<0$ hoặc $m>1$

C. $1>m>0$ hoặc $m<-1$ **D.** $1\ge m\ge 0$ hoặc $m\le -1$

Câu 9: Tọa độ cặp điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+4}{x-2}$ đối xứng nhau qua đường thẳng $d:x-2y-6=0$ là

A. $(4;4)$ và $(-1;-1)$. **B.** $(1;-5)$ và $(-1;-1)$.

C. $(0;-2)$ và $(3;7)$. **D.** $(1;-5)$ và $(5;3)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 10: **(THTT số 3)** Tìm quỹ tích điểm uốn của đồ thị hàm số $y=x^3-mx^2+x-1$ (với m là tham số).

A. $y=x^3-x+1$. **B.** $y=x^3-x^2+x-1$.

C. $y=2x^3+x^2-1$. **D.** $y=-2x^3+x-1$.

Câu 11: **(Nguyễn Khuyến)**Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Hai điểm M, N thuộc hai nhánh của đồ thị (C) sao cho MN nhỏ nhất. Khi đó độ dài MN bằng

A. 2. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 4.

Câu 12: **(Chuyên Lam Sơn Lần 2)** Cho đồ thị hàm số $f(x)=2x^3+mx+3$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt hoành độ a,b,c. Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{1}{f'(a)}+\dfrac{1}{f'(b)}+\dfrac{1}{f'(c)}$.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** 0. **C.** $1-3m$. **D.** $3-m$.

Câu 13: **(SỞ GDĐT KIÊN GIANG 2019)** Gọi m là số thực âm để đồ thị hàm số $y=x^3-6mx^2+32m^3$ có hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ Oxy. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $m\in\left(-\dfrac{3}{2};-1\right)$. **B.** $m\in\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $m\in\left(-2;-\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $m\in\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$.

Câu 14: **(Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội)** Gọi (C) là đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-7}{x+1}$, A; B là các điểm thuộc (C) có hoành độ lần lượt là 0 và 3, M là điểm thay đổi trên (C) sao cho $0<x_M<3$. Giá trị lớn nhất của diện tích tam giác ABM là

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** $3\sqrt{5}$.

Câu 15: **(Đặng Thành Nam Đề 5)** Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x}$ có đồ thị (C). Hai điểm A, B trên (C) sao cho tam giác OAB nhận điểm $H(8;-4)$ làm trực tâm. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{6}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 16: **(Trần Đại Nghĩa)** Đồ thị hàm số $y=2x^3+3mx^2-3m+2$ có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ O khi $m\in(-\infty;a)\cup(b;+\infty)$. Tính $a+b$.

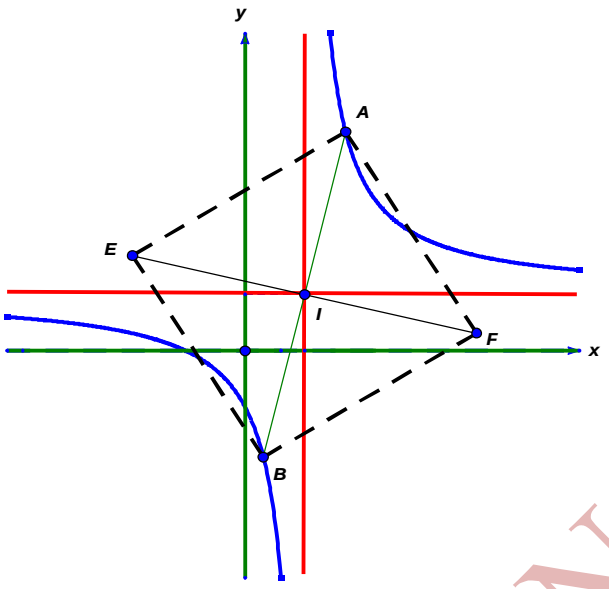
A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Câu 17: **(Quỳnh Lưu Nghệ An)** Cho $f(x)$ là một đa thức có hệ số thực và thỏa mãn $f(x^2)=x^2(x^2+1)f(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(2)=12$. Giá trị $f(3)$ bằng:

A. 72. **B.** 56. **C.** 96. **D.** 48.

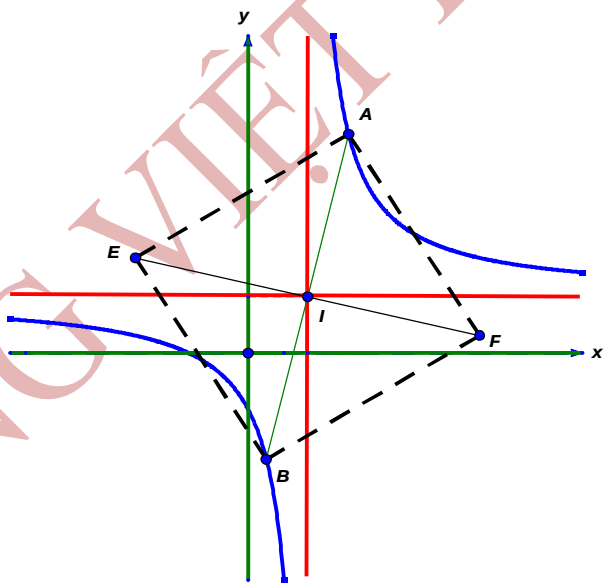
Câu 18: **(TTHT Lần 4)** Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Giả sử A,B là hai điểm thuộc (C) và đối xứng với nhau qua giao điểm của hai đường tiệm cận. Dựng hình vuông $AEBF$. Diện tích nhỏ nhất của hình vuông $AEBF$ là:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



A. $8\sqrt{2}$. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** 8. **D.** 16.

Câu 19: **(TTHT Lần 4)** Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Giả sử A,B là hai điểm thuộc (C) và đối xứng với nhau qua giao điểm của hai đường tiệm cận. Dựng hình vuông $AEBF$. Diện tích nhỏ nhất của hình vuông $AEBF$ là:



A. $8\sqrt{2}$. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** 8. **D.** 16.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

B - HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$ có đồ thị (C). Tổng khoảng cách từ một điểm M thuộc (C) đến hai hai trục tọa độ đạt giá trị nhỏ nhất bằng?

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Điểm $M\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ nằm trên trục Oy. Khoảng cách từ M đến hai trục là $d=\dfrac{3}{2}$.

Xét những điểm M có hoành độ lớn hơn $\dfrac{3}{2}\Rightarrow d=|x|+|y|>\dfrac{3}{2}$.

Xét những điểm M có hoành độ nhỏ hơn $\dfrac{3}{2}$:

□ Với $0<x<\dfrac{3}{2}\Rightarrow y>\dfrac{3}{2}\Rightarrow d=|x|+|y|>\dfrac{3}{2}$

□ Với $-\dfrac{3}{2}<x<0; y>0\Rightarrow d=-x+x+1+\dfrac{1}{x+2}=1+\dfrac{1}{x+2}; d'=-\dfrac{1}{(x+2)^2}<0$.

Chứng tỏ hàm số nghịch biến. Suy ra $\min d=y(0)=\dfrac{3}{2}$.

Câu 2: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) và A là điểm thuộc (C). Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách từ A đến các tiệm cận của (C).

A. $2\sqrt{2}$ **B.** 2 **C.** 3 **D.** $2\sqrt{3}$

Lời giải

Gọi $M\left(m;\dfrac{m+1}{m-1}\right)\in(C)(m\neq 1)$. Tổng khoảng cách từ M đến 2 đường tiệm cận $x=1$ và $y=1$ là

$$S=|m-1|+\left|\frac{m+1}{m-1}-1\right|=|m-1|+\frac{2}{|m-1|}\geq 2\sqrt{|m-1|.\frac{2}{|m-1|}}=2\sqrt{2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow |m-1|=\dfrac{2}{|m-1|}\Leftrightarrow |m-1|=\sqrt{2}\Leftrightarrow m=1\pm\sqrt{2}$

Chọn A

Câu 3: **(THPT-Gia-Lộc-Hải-Dương-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3)**Gọi (H) là đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$. Điểm $M(x_0;y_0)$ thuộc (H) có tổng khoảng cách đến hai đường tiệm cận là nhỏ nhất, với $x_0<0$ khi đó x_0+y_0 bằng

A. -1. **B.** -2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Dễ thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $d_1: x=-1$ và tiệm cận ngang $d_2: y=2$.

Do $M\in(H)\Rightarrow M\left(x_0;\dfrac{2x_0+3}{x_0+1}\right)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Xét $d(M,d_1)+d(M,d_2)=|x_0+1|+\left|\frac{2x_0+3}{x_0+1}-2\right|=|x_0+1|+\left|\frac{1}{x_0+1}\right|\geq 2$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $|x_0+1|=\left|\frac{1}{x_0+1}\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=-2\end{array}\right.$.

Theo đề bài, ta có $x_0<0$ nên nhận $x_0=-2\Rightarrow y_0=1$.

Vậy $x_0+y_0=-1$.

Câu 4: Cho hàm số $y=\frac{x-3}{x+1}$ có đồ thị là (C). Gọi I là giao điểm của 2 đường tiệm cận của (C). Tìm tọa độ điểm M trên (C) sao cho độ dài IM là ngắn nhất?

A. $M_1(0;-3)$ và $M_2(-2;5)$ **B.** $M_1(1;-1)$ và $M_2(-3;3)$

C. $M_1\left(2;-\frac{1}{3}\right)$ và $M_2\left(-4;\frac{7}{3}\right)$ **D.** $M_1\left(\frac{1}{2};-\frac{5}{3}\right)$ và $M_2\left(-\frac{5}{2};\frac{11}{3}\right)$

Lời giải

Gọi $M\left(m;\frac{m-3}{m+1}\right)$ thuộc đồ thị, có I(–1; 1)

$IM=\sqrt{(m+1)^2+\frac{16}{(m+1)^2}}$, $IM=\sqrt{(m+1)^2+\frac{16}{(m+1)^2}}\geq\sqrt{2\sqrt{16}}\geq 2\sqrt{2}$

IM nhỏ nhất khi $IM=2\sqrt{2}$. Khi đó $(m+1)^2=4$. Tìm được hai điểm $M_1(1;-1)$ và $M_2(-3;3)$.

Chọn B

Câu 5: Hai điểm M, N thuộc hai nhánh của đồ thị $y=\frac{3x-1}{x-3}$. Khi đó độ dài đoạn thẳng MN ngắn nhất bằng?

A. 8 **B.** 4 **C.** $x_M<3$ **D.** $8\sqrt{2}$.

Lời giải

Giả sử $x_M<3$, $x_N>3$, khi đó $M\left(3-m;3-\frac{8}{m}\right)$, $N\left(3+n;3+\frac{8}{n}\right)$ với $m,n>0$

$MN^2=(m+n)^2+\left(\frac{8}{m}+\frac{8}{n}\right)^2\geq(2\sqrt{mn})^2+64\left(2\sqrt{\frac{1}{m}.\frac{1}{n}}\right)^2=4\left(mn+\frac{64}{mn}\right)\geq 64$

$\Rightarrow MN\geq 8$. Kết luận MN ngắn nhất bằng 8

Chọn A

Câu 6: Gọi $M(a;b)$ là điểm trên đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x+2}$ mà có khoảng cách đến đường thẳng $d:y=3x+6$ nhỏ nhất. Khi đó

A. $a+2b=1$ **B.** $a+b=2$ **C.** $a+b=-2$ **D.** $a+2b=3$

Lời giải

Chọn C

Phương pháp giải:

Sử dụng công thức tính khoảng cách từ điểm đến đường thẳng, đưa về khảo sát hàm số để tìm giá trị nhỏ nhất – giá trị lớn nhất.

Lời giải

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Điểm $M(a;b)\in(H)\Rightarrow M\left(a;\dfrac{2a+1}{a+2}\right)\Rightarrow d(M;(d))=\dfrac{\left|3a-\dfrac{2a+1}{a+2}+6\right|}{\sqrt{10}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}.\left|\dfrac{3a^2+10a+11}{a+2}\right|$

Xét hàm số $f(a)=\dfrac{3a^2+10a+11}{a+2}$ với $a\neq -2$, có $f'(a)=\dfrac{3(a^2+4a+3)}{(a+2)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1\\a=-3\end{array}\right.$

Tính các giá trị $f(-1)=4;f(-3)=-8$ và $\lim\limits_{x\to -2}f(a)=\infty;\lim\limits_{x\to\infty}f(a)=\infty$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số $|f(a)|$ bằng $4\Leftrightarrow a=-1$

Vậy $\left\{\begin{array}{l}a=-1\\b=-1\end{array}\right.\Rightarrow a+b=-2$

Câu 7: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x+1-m^2$. Tìm m để trên đồ thị hàm số có hai điểm đối xứng qua gốc tọa độ

A. $-1\le m\le 0$ hoặc $m\ge 1$ **B.** $-1<m<0$ hoặc $m>1$

C. $1>m>0$ hoặc $m<-1$ **D.** $1\ge m\ge 0$ hoặc $m\le -1$

Lời giải

Gọi hai điểm đối xứng nhau qua O là $A(x_0,y_0),B(-x_0,-y_0)$

Khi đó ta có $y_0={x_0}^3-3m{x_0}^2+3(m^2-1)x_0+1-m^2$ và

$-y_0=-{x_0}^3-3m{x_0}^2-3(m^2-1)x_0+1-m^2$

Từ đó suy ra: $-6m{x_0}^2+2-2m^2=0(*)$

Nếu $x_0=0$ thì $2-2m^2=0$ suy ra $y_0=1-m^2=0$. Vậy $A\equiv B\equiv O$

Do đó: đồ thị hàm số có hai điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ O

$\Leftrightarrow$ phương trình (*) có nghiệm khác 0 $\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\neq 0\\2-2m^2\neq 0\\\Delta'=6m(2-2m^2)\ge 0\end{array}\right.\Leftrightarrow -1<m<0$ hay $m>1$

Chọn B

Câu 8: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x+1-m^2$. Tìm m để trên đồ thị hàm số có hai điểm đối xứng qua gốc tọa độ

A. $-1\le m\le 0$ hoặc $m\ge 1$ **B.** $-1<m<0$ hoặc $m>1$

C. $1>m>0$ hoặc $m<-1$ **D.** $1\ge m\ge 0$ hoặc $m\le -1$

Lời giải

Chọn B

Giải: gọi hai điểm đối xứng nhau qua O là $A(x_0,y_0),B(-x_0,-y_0)$

Khi đó ta có $y_0={x_0}^3-3m{x_0}^2+3(m^2-1)x_0+1-m^2$ và

$-y_0=-{x_0}^3-3m{x_0}^2-3(m^2-1)x_0+1-m^2$

Từ đó suy ra: $-6m{x_0}^2+2-2m^2=0(*)$

Nếu $x_0=0$ thì $2-2m^2=0$ suy ra $y_0=1-m^2=0$. Vậy $A\equiv B\equiv O$

Do đó: đồ thị hàm số có hai điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ O

$\Leftrightarrow$ phương trình (*) có nghiệm khác 0 $\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\neq 0\\2-2m^2\neq 0\\\Delta'=6m(2-2m^2)\ge 0\end{array}\right.\Leftrightarrow -1<m<0$ hay $m>1$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 9: Tọa độ cặp điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+4}{x-2}$ đối xứng nhau qua đường thẳng $d: x-2y-6=0$ là

A. $(4;4)$ và $(-1;-1)$. **B.** $(1;-5)$ và $(-1;-1)$.

C. $(0;-2)$ và $(3;7)$. **D.** $(1;-5)$ và $(5;3)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $d: y=\dfrac{1}{2}x-3$ suy ra $\Delta: y=-2x+m$.

Giả sử Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Khi đó hoành độ của A, B là nghiệm của phương trình

$$\frac{x+4}{x-2}=-2x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ \underbrace{2x^2-(m+3)x+2m+4}_{h(x)}=0 \end{cases}.$$

Điều kiện cần:

Để Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt thì phương trình $h(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 2, tức là $\begin{cases}\Delta>0\\ h(2)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-10m-23>0 \\ -6\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<5-4\sqrt{3} \\ m>5+4\sqrt{3}\end{array}\right.$ (*).

Điều kiện đủ:

Gọi I là trung điểm của AB, ta có:

$$\begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_I=2x_I+m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I=\dfrac{m+3}{4} \\ y_I=\dfrac{m+3}{2}+m\end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{m+3}{4};\frac{3m+3}{2}\right).$$

Để hai điểm A, B đối xứng nhau qua $d: x-2y-6=0$ khi $I\in d$

$\Leftrightarrow \dfrac{m+3}{4}-2.\dfrac{3m+3}{2}-6=0 \Leftrightarrow m=-3$ (thỏa điều kiện (*)).

Với $m=-3$ phương trình $h(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\Rightarrow y=-1 \\ x=1\Rightarrow y=-5\end{array}\right.$

Vậy tọa hai điểm cần tìm là $(1;-5)$ và $(-1;-1)$.

Câu 10: **(THTT số 3)** Tìm quỹ tích điểm uốn của đồ thị hàm số $y=x^3-mx^2+x-1$ (với m là tham số).

A. $y=x^3-x+1$. **B.** $y=x^3-x^2+x-1$.

C. $y=2x^3+x^2-1$. **D.** $y=-2x^3+x-1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=3x^2-2mx+1$, $y''=6x-2m$.

$y''=0 \Leftrightarrow 6x-2m=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{m}{3} \Leftrightarrow m=3x$

Với $m=3x$, ta có $y=x^3-3x^3+x-1=-2x^3+x-1$.

Vậy quỹ tích điểm uốn của đồ thị hàm số ban đầu là đường cong $y=-2x^3+x-1$.

Câu 11: **(Nguyễn Khuyến)** Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Hai điểm M, N thuộc hai nhánh của đồ thị (C) sao cho MN nhỏ nhất. Khi đó độ dài MN bằng

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. 2. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y=\dfrac{x+1}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-1}$, đồ thị hàm số (C) có tiệm cận đứng $x=1$.

Gọi $M(x_1;y_1), N(x_2;y_2)$ lần lượt là 2 điểm thuộc hai nhánh của đồ thị thỏa mãn $x_1<1<x_2$.

Đặt : $\begin{cases} a=1-x_1 \\ b=x_2-1 \end{cases} (x_1<1<x_2 \Rightarrow a,b>0) \Rightarrow \begin{cases} x_1=1-a \Rightarrow y_1=1-\dfrac{2}{a} \\ x_2=b+1 \Rightarrow y_2=1+\dfrac{2}{b} \end{cases}$.

Ta có: $MN^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=(a+b)^2+\left(\dfrac{2}{b}+\dfrac{2}{a}\right)^2=(a+b)^2+\dfrac{4(a+b)^2}{(ab)^2}$.

$\Rightarrow MN^2=(a+b)^2\left(1+\dfrac{4}{(ab)^2}\right)\geq 4ab.\dfrac{4}{ab}=16\Rightarrow MN\geq 4$. Dấu "=" xảy ra khi $a=b=\sqrt{2}$.

Câu 12: **(Chuyên Lam Sơn Lần 2)** Cho đồ thị hàm số $f(x)=2x^3+mx+3$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt hoành độ a,b,c. Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{1}{f'(a)}+\dfrac{1}{f'(b)}+\dfrac{1}{f'(c)}$.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** 0. **C.** $1-3m$. **D.** $3-m$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)=2(x-a)(x-b)(x-c)$.

Do đó $f'(x)=2(x-b)(x-c)+2(x-a)(x-c)+2(x-a)(x-b)$. Suy ra

$$P=\frac{1}{f'(a)}+\frac{1}{f'(b)}+\frac{1}{f'(c)}=\frac{1}{2(a-b)(a-c)}+\frac{1}{2(b-a)(b-c)}+\frac{1}{2(c-a)(c-b)}$$

$$=\frac{c-b+a-c+b-a}{2(a-b)(b-c)(c-a)}=0.$$

Câu 13: **(SỞ GDĐT KIÊN GIANG 2019)** Gọi m là số thực âm để đồ thị hàm số $y=x^3-6mx^2+32m^3$ có hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ Oxy. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $m\in\left(-\dfrac{3}{2};-1\right)$. **B.** $m\in\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $m\in\left(-2;-\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $m\in\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=3x^2-12mx$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4m \end{array}\right.$.

Hàm số có hai cực trị khi $m\neq 0$. Khi đó, gọi $A(0;32m^3); B(4m;0)$ là tọa độ 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số. Hai điểm này đối xứng với nhau qua đường thẳng $\Delta: y=x$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} d(A;\Delta)=d(B;\Delta) \\ AB\perp\Delta \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} |32m^3|=|4m| \\ 4m-32m^3=0 \end{cases}\Leftrightarrow m=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ (vì } m\neq 0\text{).}$$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vì $m<0$ nên ta chọn $m=\dfrac{-1}{2\sqrt{2}}$.

Cách 2.

Chú ý: Hai điểm $A(x;y)$, $B(x';y')$ đối xứng nhau qua đường phân giác góc phần tư thứ nhất khi và chỉ khi $\begin{cases}x'=y\\y'=x\end{cases}$.

$A(0;32m^3);B(4m;0)$ đối xứng nhau qua đường phân giác góc phần tư thứ nhất khi và chỉ khi $32m^3=4m$ (với $m<0$) $\Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Đối chiếu các phương án, ta chọn phương án D.

Câu 14: **(Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội)** Gọi (C) là đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-7}{x+1}$, A; B là các điểm thuộc (C) có hoành độ lần lượt là 0 và 3, M là điểm thay đổi trên (C) sao cho $0<x_M<3$. Giá trị lớn nhất của diện tích tam giác ABM là

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** $3\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $A(0;-7),B(3;-1)$

Vì điểm $M\in(C)$ nên $M\left(m;\dfrac{m-7}{m+1}\right)$ với $0<m<3$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;6)$; $\overrightarrow{AM}=\left(m;\dfrac{8m}{m+1}\right)$.

Đường thẳng AB có phương trình $2x-y-7=0$ và $AB=3\sqrt{5}$.

Khoảng cách từ M đến đường thẳng AB là:

$$d(M,AB)=\frac{\left|2m-\dfrac{m-7}{m+1}-7\right|}{\sqrt{5}}=\frac{\left|\dfrac{2m^2-6m}{m+1}\right|}{\sqrt{5}}=\frac{|2m^2-6m|}{(m+1)\sqrt{5}}=\frac{-2m^2+6m}{(m+1)\sqrt{5}}\ (\text{vì } 0<m<3)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{5}}\left[\frac{-(m+1)^2+5(m+1)-4}{m+1}\right]=\frac{2}{\sqrt{5}}\left[5-\left[(m+1)+\frac{4}{m+1}\right]\right]\le\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Do đó $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.d(M,AB)\le\dfrac{1}{2}.3\sqrt{5}.2\sqrt{5}=3$

dấu "bằng" xảy ra khi $m+1=\dfrac{4}{m+1}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-3(L)\end{array}\right.$

Vậy diện tích tam giác ABM lớn nhất bằng 3.

Câu 15: **(Đặng Thành Nam Đề 5)** Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x}$ có đồ thị (C). Hai điểm A, B trên (C) sao cho tam giác OAB nhận điểm $H(8;-4)$ làm trực tâm. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{6}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $A\left(a;1+\dfrac{2}{a}\right)$, $B\left(b;1+\dfrac{2}{b}\right)$ $(ab\ne0,\ a\ne b)$ là hai điểm phân biệt thuộc (C).

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Khi đó, $\overrightarrow{HA}=\left(a-8;5+\frac{2}{a}\right)$, $\overrightarrow{HB}=\left(b-8;5+\frac{2}{b}\right)$, $\overrightarrow{OA}=\left(a;1+\frac{2}{a}\right)$, $\overrightarrow{OB}=\left(b;1+\frac{2}{b}\right)$.

Điểm H là trực tâm của tam giác OAB khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\overrightarrow{HA}\perp\overrightarrow{OB}\\ \overrightarrow{HB}\perp\overrightarrow{OA}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-8)b+\left(5+\frac{2}{a}\right)\left(1+\frac{2}{b}\right)=0\\ (b-8)a+\left(5+\frac{2}{b}\right)\left(1+\frac{2}{a}\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ab-8b+5+\frac{10}{b}+\frac{2}{a}+\frac{4}{ab}=0\ (1)\\ ab-8a+5+\frac{10}{a}+\frac{2}{b}+\frac{4}{ab}=0\ (2)\end{cases}.$$

Lấy (1) trừ (2) vế theo vế ta được $8(a-b)+\frac{8(a-b)}{ab}=0\Leftrightarrow 8(a-b)(ab+1)=0\overset{a\neq b}{\Leftrightarrow}ab=-1$.

Thay $ab=-1$ vào (1) ta có

$$-1+\frac{8}{a}+5-10a+\frac{2}{a}-4=0\Leftrightarrow\frac{10}{a}-10a=0\Leftrightarrow 10\left(1-a^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\Rightarrow b=-1\\ a=-1\Rightarrow b=1\end{array}\right.$$

Do đó, $A(1;3)$ và $B(-1;-1)$ hoặc $A(-1;-1)$ và $B(1;3)$.

Vậy $AB=2\sqrt{5}$.

Câu 16: **(Trần Đại Nghĩa)** Đồ thị hàm số $y=2x^3+3mx^2-3m+2$ có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ O khi $m\in(-\infty;a)\cup(b;+\infty)$. Tính $a+b$.

A. $\frac{2}{3}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $A\left(x_0;2x_0^3+3mx_0^2-3m+2\right)$ là một điểm thuộc đồ thị hàm số đã cho.

Suy ra điểm $B\left(-x_0;-2x_0^3-3mx_0^2+3m-2\right)$ là điểm đối xứng với A qua gốc tọa độ O.

Để B cũng là một điểm thuộc đồ thị hàm số đã cho thì

$-2x_0^3-3mx_0^2+3m-2=-2x_0^3+3mx_0^2-3m+2\Leftrightarrow 6mx_0^2=6m-4$.

Nếu $m=0$ thì không tồn tại x_0 thỏa mãn.

Nếu $m\neq 0$ thì $x_0^2=\frac{6m-4}{6m}$. Để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ O thì phương trình $x_0^2=\frac{6m-4}{6m}$ phải có nghiệm x_0 khác 0.

Suy ra $\frac{6m-4}{6m}>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>\frac{2}{3}\\ m<0\end{array}\right.$.

Vậy $a=\frac{2}{3};b=0$ nên $a+b=\frac{2}{3}$.

Câu 17: **(Quỳnh Lưu Nghệ An)** Cho $f(x)$ là một đa thức có hệ số thực và thỏa mãn $f\left(x^2\right)=x^2\left(x^2+1\right)f(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(2)=12$. Giá trị $f(3)$ bằng:

A. 72. **B.** 56. **C.** 96. **D.** 48.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết $f\left(x^2\right)=x^2\left(x^2+1\right)f(x)\Leftrightarrow f\left(x^2\right)=\left(x^4+x^2\right)f(x)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Gọi $f(x)$ là đa thức bậc n suy ra $f(x^2)$ là đa thức bậc $2n$ ta được phương trình: $2n=4+n \Leftrightarrow n=4$. Suy ra $f(x)$ là đa thức bậc 4. Vậy $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$.

Từ giả thiết $f(x^2)=x^2(x^2+1)f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ ta có một số nhận xét sau:

+) Với $x=0$ ta có $f(0)=0$ suy ra $e=0$.(1)

+) Với $x \neq 0$ ta có $f(x)=\dfrac{f(x^2)}{x^2(x^2+1)}=f(-x)\ (\forall x \neq 0)$

Suy ra $f(x)$ là hàm số chẵn nên $b=d=0$. (2)

+) Với $x=1$ ta có $f(1)=2f(1) \Rightarrow f(1)=0$ suy ra $a+b+c+d+e=0$. (3)

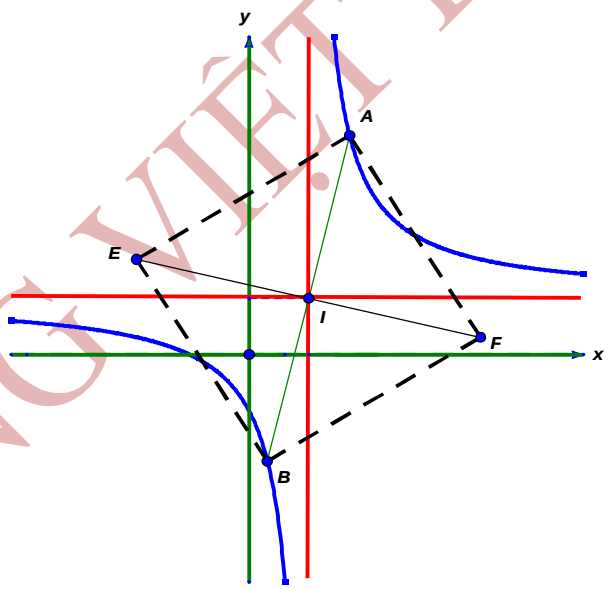
+) Với $x=2$ giả thiết $f(2)=12$ suy ra $16a+8b+4c+2d+e=12$. (4)

Từ (1), (2), (3) và (4) suy ra $a=1;\ c=-1;\ b=d=e=0$.

Vậy $f(x)=x^4-x^2 \Rightarrow f(3)=72$.

Nhận xét. *Nếu $f(x)$ là đa thức bậc $n\ (n \geq 1)$ thì $f(x^2)$ là đa thức bậc $2n$.*

Câu 18: **(TTHT Lần 4)** Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Giả sử A,B là hai điểm thuộc (C) và đối xứng với nhau qua giao điểm của hai đường tiệm cận. Dựng hình vuông $AEBF$. Diện tích nhỏ nhất của hình vuông $AEBF$ là:



A. $8\sqrt{2}$. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** 8. **D.** 16.

Lời giải

Chọn C

Dễ thấy tâm đối xứng là $I(1;1)$

Do $A \in (C)$ nên tọa độ của A có dạng: $A\left(a;\dfrac{a+1}{a-1}\right), a \neq 1$

Do I là trung điểm của AB nên tọa độ của B có dạng $B\left(2-a;\dfrac{a-3}{a-1}\right)$

Khi đó $AB=\sqrt{(2-2a)^2+\left(\dfrac{a+1}{a-1}-\dfrac{a-3}{a-1}\right)^2}=2\sqrt{(a-1)^2+\dfrac{4}{(a-1)^2}} \geq 2\sqrt{2\sqrt{(a-1)^2.\dfrac{4}{(a-1)^2}}}=4$

.

Do $AEBF$ là hình vuông nên $S_{ABEF}=\frac{1}{2}AB^2\geq 8$

Phân tích: Đây là một bài toán tương đối dễ, khai thác đặc điểm về tính đối xứng qua giao điểm của 2 tiệm cận của đồ thị hàm số có dạng $y=\frac{ax+b}{cx+d}$

Các dạng toán sau đây đều có thể giải quyết bằng một cách làm chung:

Cho hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị (C), tâm đối xứng I

Bài toán 1: Hãy tìm trên (C) điểm A sao cho độ dài IA ngắn nhất

Bài toán 2: Tìm trên (C) điểm A sao cho tiếp tuyến của (C) tại A tạo với 2 đường tiệm cận một tam giác cân

Bài toán 3: Tìm trên (C) điểm A sao cho tiếp tuyến của (C) tại A tạo với 2 đường tiệm cận một tam giác có chu vi nhỏ nhất

Bài toán 4: Tìm trên (C) điểm A sao cho tiếp tuyến của (C) tại A tạo với 2 đường tiệm cận một tam giác có diện tích lớn nhất

Bài toán 5: Tìm trên (C) điểm A sao cho tiếp tuyến của (C) tại A tạo với 2 trục tọa độ một tam giác cân

Bài toán 6: Tìm trên (C) điểm A sao cho tiếp tuyến của (C) tại A tạo với 2 trục tọa độ một tam giác có chu vi nhỏ nhất

Bài toán 7: Tìm trên (C) điểm A sao cho tiếp tuyến của (C) tại A tạo với 2 trục tọa độ một tam giác có diện tích lớn nhất

Bài toán 8: Tìm trên (C) điểm A sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cách tâm I một khoảng lớn nhất

Bài toán 9: Tìm trên (C) 2 điểm A,B đối xứng nhau qua tâm I sao cho 2 tiếp tuyến của (C) tại A,B cách nhau một khoảng xa nhất.

Bài toán 10: Tìm trên (C) 2 điểm A,B đối xứng nhau qua tâm I sao cho hình vuông nhận đoạn AB làm đường chéo có chu vi nhỏ nhất .

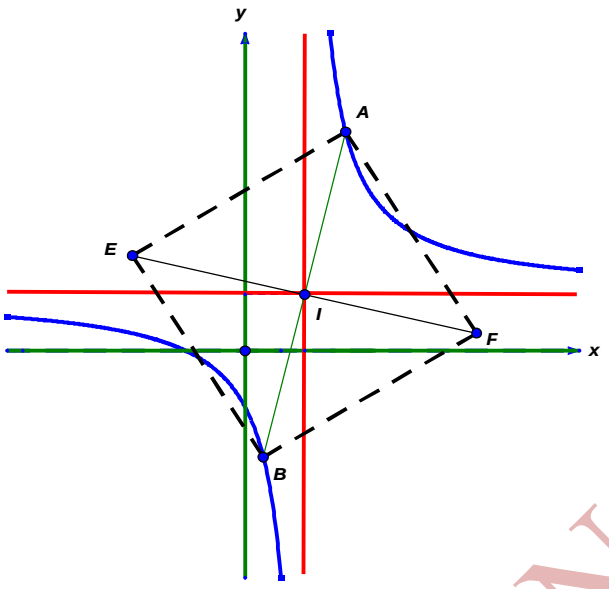
Bài toán 11: Tìm trên (C) 2 điểm A,B đối xứng nhau qua tâm I sao cho hình vuông nhận đoạn AB làm đường chéo có diện tích nhỏ nhất .

Tất cả các bài toán trên đều có thể giải quyết bởi nhận xét: "Hoành độ của các điểm A,B thỏa mãn bài toán luôn là nghiệm của phương trình $\left[f'(x)\right]^2=1$".

Nhận xét này tiện cho học sinh làm thi trắc nghiệm

Câu 19: **(TTHT Lần 4)** Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Giả sử A,B là hai điểm thuộc (C) và đối xứng với nhau qua giao điểm của hai đường tiệm cận. Dựng hình vuông $AEBF$. Diện tích nhỏ nhất của hình vuông $AEBF$ là:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



A. $8\sqrt{2}$. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** 8. **D.** 16.

Lời giải

Chọn C

Ngoài cách làm phía trên, ta có thể giải như sau:

Hoành độ của các điểm A,B là nghiệm của phương trình $\left[f'(x)\right]^2=1\Leftrightarrow\dfrac{4}{(x-1)^4}=1$

$\Leftrightarrow(x-1)^2=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1+\sqrt{2}\\x=1-\sqrt{2}\end{array}\right.$ Vậy $A\left(1+\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right)$, $B\left(1-\sqrt{2};1-\sqrt{2}\right)$

$\Rightarrow AB=4$ nên $S_{ABEF}=\dfrac{1}{2}AB^2=8$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

DẠNG 1: ỨNG DỤNG TÍNH ĐƠN VÀO PT, BPT, HPT

Câu 1: (SGD Hà Nội-lần 11 năm 2017-2018) Phương trình $\sqrt{x-512}+\sqrt{1024-x}=16+4\sqrt[8]{(x-512)(1024-x)}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 4 nghiệm. **B.** 3 nghiệm. **C.** 8 nghiệm. **D.** 2 nghiệm.

Lời giải.

Chọn B

Cách 1: Phương trình $\sqrt{x-512}+\sqrt{1024-x}=16+4\sqrt[8]{(x-512)(1024-x)}\ (1)$.

Điều kiện: $x\in[512;1024]$.

Bình phương hai vế của phương trình (1) ta có:

$512+2\sqrt{(x-512)(1024-x)}=256+128\sqrt[8]{(x-512)(1024-x)}+16\sqrt[4]{(x-512)(1024-x)}\ (2)$.

Đặt $t=\sqrt[8]{(x-512)(1024-x)}$ điều kiện $0\le t\le 4$.

(2) trở thành $t^4-8t^2-64t+128=0\Leftrightarrow(t-4)\left(t^3+4t^2+8t-32\right)=0$.

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4\\t^3+4t^2+8t-32=0\end{array}\right.$.

□Với $t=4$, mà theo trên ta có $t\le 4$. Do đó đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x-512=1024-x\Leftrightarrow x=768$.

□Với $t^3+4t^2+8t-32=0$.

Xét hàm số $f(t)=t^3+4t^2+8t-32$ với $0\le t\le 4$.

Ta có $f'(t)=3t^2+8t+8>0\ \forall t\in[0;4]$.

Mà $f(0).f(4)=-32.128<0$.

Suy ra $t^3+4t^2+8t-32=0$ có một nghiệm duy nhất t_0 trong khoảng $(0;4)$.

Do đó phương trình $\sqrt[8]{(x-512)(1024-x)}=t_0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 768.

Vậy phương trình (1) có 3 nghiệm.

Cách 2: Đặt $\begin{cases}a=\sqrt[8]{x-512}\\b=\sqrt[8]{1024-x}\end{cases}\ (a,b\ge 0)$, khi đó $a^8+b^8=x-512+1024-x=512\qquad(1)$.

Và phương trình trở thành: $a^4+b^4=4ab+16$ mà $a^8+b^8=\left(a^4+b^4\right)^2-2a^4b^4\ (2)$.

Nên từ $(1),(2)$ suy ra $512=(4ab+16)^2-2a^4b^4\xrightarrow{t=ab}16(t+4)^2-2t^4=512\qquad(*)$.

Phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt $t=4;\ t=t_0\approx 1,7625$.

Mà $a^4+b^4=\left(a^2+b^2\right)^2-2a^2b^2=4ab+16\Rightarrow a^2+b^2=\sqrt{2t^2+4t+16}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Khi đó $\begin{cases} a^2+b^2=8 \\ ab=4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a^2+b^2=\sqrt{2t_0^2+4t_0+16} \\ ab=t_0 \end{cases}$ suy ra có 3 nghiệm a dương.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 2: Bất phương trình $\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}-\sqrt{4-x}\ge 2\sqrt{3}$ có tập nghiệm là $[a;b]$. Hỏi tổng $a+b$ có giá trị là bao nhiêu?

A. -2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $-2\le x\le 4$. Xét $f(x)=\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}-\sqrt{4-x}$ trên đoạn $[-2;4]$.

Có $f'(x)=\dfrac{3\left(x^2+x+1\right)}{\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}}+\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}>0,\forall x\in(-2;4)$.

Do đó hàm số đồng biến trên $[-2;4]$, bpt $\Leftrightarrow f(x)\ge f(1)=2\sqrt{3}\Leftrightarrow x\ge 1$.

So với điều kiện, tập nghiệm của bpt là $S=[1;4]\Rightarrow a+b=5$.

Câu 3: Bất phương trình $\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2-6x+11}>\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}$ có tập nghiệm $(a;b]$. Hỏi hiệu $b-a$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $1\le x\le 3$; bpt $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+2}+\sqrt{x-1}>\sqrt{(3-x)^2+2}+\sqrt{3-x}$

Xét $f(t)=\sqrt{t^2+2}+\sqrt{t}$ với $t\ge 0$. Có $f'(t)=\dfrac{t}{2\sqrt{t^2+2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{t}}>0,\forall t>0$.

Do đó hàm số đồng biến trên $[0;+\infty)$. (1) $\Leftrightarrow f(x-1)>f(3-x)\Leftrightarrow x-1>3\Leftrightarrow x>2$

So với điều kiện, bpt có tập nghiệm là $S=(2;3]$

DẠNG 2: ỨNG DỤNG GTNN, GTLN VÀO PT, BPT, HPT

Câu 4: **(CHUYÊN THÁI BÌNH – L4)** Phương trình $2017^{\sin x}=\sin x+\sqrt{2-\cos^2 x}$ có bao nhiêu nghiệm thực trong $[-5\pi;2017\pi]$?

A. vô nghiệm. **B.** 2017. **C.** 2022. **D.** 2023.

Lời giải

Chọn D

Ta có hàm số $y=2017^{\sin x}-\sin x-\sqrt{2-\cos^2 x}$ tuần hoàn với chu kỳ $T=2\pi$.

Xét hàm số $y=2017^{\sin x}-\sin x-\sqrt{2-\cos^2 x}$ trên $[0;2\pi]$.

Ta có

$y' = \cos x.2017^{\sin x}.\ln 2017 - \cos x - \dfrac{2\sin x.\cos x}{2\sqrt{2-\cos^2 x}} = \cos x.\left(2017^{\sin x}.\ln 2017 - 1 - \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} \right)$

Do vậy trên $[0;2\pi]$, $y' = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} \vee x = \dfrac{3\pi}{2}$.

$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2017 - 1 - \sqrt{2} > 0$; $y\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2017} - 1 - \sqrt{2} < 0$

Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{\pi}{2}$		$\dfrac{3\pi}{2}$		2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	↗	$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$	↘	$y\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$	↗	0

Vậy trên $[0;2\pi]$ phương trình $2017^{\sin x} = \sin x + \sqrt{2-\cos^2 x}$ có đúng ba nghiệm phân biệt.

Ta có $y(\pi) = 0$, nên trên $[0;2\pi]$ phương trình $2017^{\sin x} = \sin x + \sqrt{2-\cos^2 x}$ có ba nghiệm phân biệt là $0,\ \pi,\ 2\pi$.

Suy ra trên $[-5\pi;2017\pi]$ phương trình có đúng $2017-(-5)+1 = 2023$ nghiệm.

Câu 5: **(ĐHQG TPHCM – Cơ Sở 2 – năm 2017 – 2018)** Cho $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 1$. Phương trình $\sqrt{f(f(x)+1)+1} = f(x)+2$ có số nghiệm thực là

A. 4. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = f(x)+1 \Rightarrow t = x^3 - 3x^2 - 6x + 1$.

Khi đó $\sqrt{f(f(x)+1)+1} = f(x)+2$ trở thành:

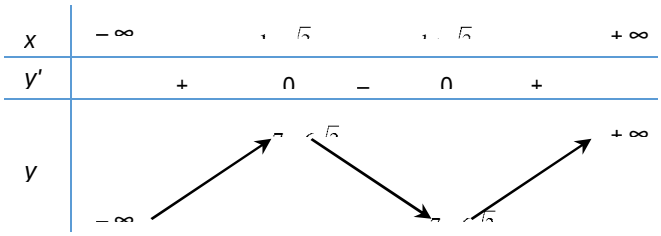
$$\sqrt{f(t)+1} = t+1 \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge -1 \\ f(t)+1 = t^2 + 2t + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge -1 \\ t^3 - 4t^2 - 8t + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \ge -1 \\ \left[\begin{array}{l} t = t_1 \in (-2;-1) \\ t = t_2 \in (-1;1) \\ t = t_3 \in (1;6) \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = t_2 \in (-1;1) \\ t = t_3 \in (5;6) \end{array} \right. .$$

Vì $g(t) = t^3 - 4t^2 - 8t + 1$; $g(-2) = -7$; $g(-1) = 4$; $g(1) = -10$; $g(5) = -14$; $g(6) = 25$.

Xét phương trình $t = x^3 - 3x^2 - 6x + 1$ là pt hoành độ giao điểm của..

Ta có



Dựa vào bảng biến thiên, ta có

+ Với $t=t_2\in(-1;1)$, ta có d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt, nên phương trình có 3 nghiệm.

+ Với $t=t_3\in(5;6)$, ta có d cắt (C) tại 1 điểm, nên phương trình có 1 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Câu 6: Tìm m để bất phương trình $\dfrac{3\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x+4\cos^2 x+1}\le m+1$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

A. $m\ge\dfrac{3\sqrt{5}}{4}$. **B.** $m\ge\dfrac{3\sqrt{5}+9}{4}$. **C.** $m\ge\dfrac{\sqrt{65}-9}{4}$. **D.** $m\ge\dfrac{3\sqrt{5}-9}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $y=\dfrac{3\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x+4\cos^2 x+1}=\dfrac{3\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x+2\cos 2x+3}$

(Do $\sin 2x+2\cos 2x+3>0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ hàm số xác định trên $\mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow(3-y)\sin 2x+(1-2y)\cos 2x=3y$

(Phương trình $a\sin x+b\cos x=c$ có nghiệm $\Leftrightarrow a^2+b^2\ge c^2$)

Suy ra $(3-y)^2+(1-2y)^2\ge 9y^2\Leftrightarrow 2y^2+5y-5\le 0\Leftrightarrow\dfrac{-5-\sqrt{65}}{4}\le y\le\dfrac{-5+\sqrt{65}}{4}$.

$\Rightarrow\max y=\dfrac{-5+\sqrt{65}}{4}$. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\dfrac{-5+\sqrt{65}}{4}\le m+1\Leftrightarrow m\ge\dfrac{\sqrt{65}-9}{4}$.

Câu 7: Tập tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $m\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+3\right)+2\sqrt{1-x^2}-5=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt là một nửa khoảng $(a;b]$. Tính $b-\dfrac{5}{7}a$.

A. $\dfrac{6-5\sqrt{2}}{35}$ **B.** $\dfrac{6-5\sqrt{2}}{7}$. **C.** $\dfrac{12-5\sqrt{2}}{35}$ **D.** $\dfrac{12-5\sqrt{2}}{7}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ với $-1\le x\le 1$. Khi đó: $t^2=2+2\sqrt{1-x^2}\Leftrightarrow 2\sqrt{1-x^2}=t^2-2$.

$\Rightarrow t'=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}=0\Leftrightarrow\sqrt{1-x}=\sqrt{1+x}\Leftrightarrow x=0$.

x	-1		0		1
t'		$+$	0	$-$	
t	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\sqrt{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\sqrt{2} \le t \le 2$.

Ta có phương trình: $m(t+3)+t^2-7=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{-t^2+7}{t+3}$.

Xét hàm số: $f(t)=\dfrac{-t^2+7}{t+3}, t\in\left[\sqrt{2};2\right] \Rightarrow f'(t)=\dfrac{-t^2-6t-7}{(t+3)^2}$.

$f'(t)=0 \Leftrightarrow t=-3\pm\sqrt{2} \notin \left[\sqrt{2};2\right]$.

Ta có bảng biến thiên:

t	$\sqrt{2}$		2
$f'(t)$	0	$-$	
$f(t)$	$\dfrac{5(3-\sqrt{2})}{7}$	$\searrow$	$\dfrac{3}{5}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt thì $\sqrt{2} \le t \le 2$. Khi đó $\dfrac{3}{5} < f(t) \le \dfrac{5(3-\sqrt{2})}{7}$ hay $\dfrac{3}{5} < m \le \dfrac{5(3-\sqrt{2})}{7}$

$\Rightarrow a=\dfrac{3}{5},\ b=\dfrac{5(3-\sqrt{2})}{7} \Rightarrow b-\dfrac{5}{7}a=\dfrac{12-5\sqrt{2}}{7}$.

Câu 8: (SGD Hưng Yên - 2019) Có bao nhiêu giá trị âm của tham số m để phương trình $\sqrt{2019m+\sqrt{2019m+x^2}}=x^2$ có hai nghiệm thực phân biệt ?

A. 1. **B.** 0. **C.** Vô số. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $2019m+x^2 \ge 0$.

Phương trình $\sqrt{2019m+\sqrt{2019m+x^2}}=x^2 \Leftrightarrow 2019m+\sqrt{2019m+x^2}=x^4$

$\Leftrightarrow 2019m+x^2+\sqrt{2019m+x^2}=x^4+x^2$ (1).

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Xét hàm số $f(t)=t^2+t$ trên $[0;+\infty)$, ta có $f'(t)=2t+1>0,\forall t\ge 0\Rightarrow f(t)$ luôn đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow f\left(\sqrt{2019m+x^2}\right)=f\left(x^2\right)\Leftrightarrow\sqrt{2019m+x^2}=x^2\Leftrightarrow 2019m=x^4-x^2$.

Xét hàm số $g(x)=x^4-x^2$ có $g'(x)=4x^3-2x$; $g'(x)=0\Leftrightarrow 4x^3-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có 2 nghiệm $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2019m=-\dfrac{1}{4}\\2019m>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-\dfrac{1}{8076}\\m>0\end{array}\right.$.

Vì m âm nên $m=-\dfrac{1}{8076}$. Vậy có 1 giá trị cần tìm.

Câu 9: (2D1-4) Cho phương trình $\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\left(m\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+16\sqrt[4]{x^2-x}\right)=1$, với m là tham số thực.

Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt.

A. 11. **B.** 9. **C.** 20. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x>1$.

Ta có $\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\left(m\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+16\sqrt[4]{x^2-x}\right)=1$

$\Leftrightarrow m\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+16\sqrt[4]{x^2-x}=\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow m+\dfrac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}+16\dfrac{\sqrt[4]{x^2-x}}{\sqrt{x}}=1-\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow m=-16\dfrac{\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[4]{x}}-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}+1$ (1).

Đặt $t=\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x}}$, khi $x>1$ ta có $0<t<1$.

Xét hàm số $f(t)=-16t-\dfrac{1}{t^2}+1$ trên khoảng $(0;1)$ ta có $f'(t)=-16+\dfrac{2}{t^3}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

t	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\infty$	↗	-11	↘	-16

Từ đó ta thấy, phương trình (1) có hai nghiệm thực phân biệt khi $-16 < m < -11$.

Do đó có 4 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 10: **(Cụm THPT Vũng Tàu)** Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên âm của tham số m để phương trình $x+\sqrt{4-x^2}=\frac{m}{2}$ có nghiệm. Tập S có bao nhiêu phần tử?

A. 10. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $x+\sqrt{4-x^2}=\frac{m}{2}$ (*) điều kiện xác định: $-2\le x\le 2$.

Xét hàm số $f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$, $x\in[-2;2]$.

Có $f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 1-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}=0\Leftrightarrow \sqrt{4-x^2}=x\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{2}\in[-2;2]$$

Hàm số $f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$ liên tục trên $[-2;2]$; có đạo hàm trên $(-2;2)$.

$f(-2)=-2; f(2)=2; f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}$ .Suy ra $\min\limits_{[-2;2]} f(x)=-2; \max\limits_{[-2;2]} f(x)=2\sqrt{2}$.

Vậy phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow -2\le\frac{m}{2}\le 2\sqrt{2}\Leftrightarrow -4\le m\le 4\sqrt{2}$.

Mặt khác m nguyên âm nên $S=\{-4;-3;-2;-1\}$.

Câu 11: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2-4x+m=2\sqrt{5+4x-x^2}+5$ có nghiệm.

A. $0\le m\le 15$. **B.** $m\ge -1$. **C.** $m\ge 0$. **D.** $-1\le m\le 2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $5+4x-x^2\ge 0\Leftrightarrow x\in[-1;5]$, đặt $t=\sqrt{5+4x-x^2}=\sqrt{9-(x-2)^2}\Rightarrow t\in[0;3]$.

Khi đó phương trình trở thành $m=2t+t^2$. Tìm GTLN – GTNN của hàm $g(t)=t^2+2t, t\in[0;3]\Rightarrow 0\le g(t)\le 15$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 12: Tìm m để phương trình $x^6+6x^4-m^3x^3+\left(15-3m^2\right)x^2-6mx+10=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

A. $\frac{11}{5}<m<4$. **B.** $2<m\le\frac{5}{2}$. **C.** $0<m<\frac{9}{4}$. **D.** $\frac{7}{5}\le m<3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $x^6+6x^4-m^3x^3+\left(15-3m^2\right)x^2-6mx+10=0\Leftrightarrow\left(x^2+2\right)^3+3\left(x^2+2\right)=\left(mx+1\right)^3+3\left(mx+1\right)$

$\Leftrightarrow f\left(x^2+2\right)=f\left(mx+1\right)(*)$

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^3+3t$.

Với $f'\left(t\right)=3t^2+3>0,\forall t\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Nên $(*)\Leftrightarrow x^2+2=mx+1\Leftrightarrow x^2-mx+1=0\Rightarrow m=\frac{x^2+1}{x}$ (vì $x=0$ không là nghiệm của phương trình(*))

Xét hàm số $g\left(x\right)=\frac{x^2+1}{x}$ trên $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

Ta có $g'\left(x\right)=1-\frac{1}{x^2}\Rightarrow g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=\pm1$

Bảng biến thiên

x	$\frac{1}{2}$		1		2
g'		$-$	0	$+$	
g	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc $\left[\frac{1}{2};2\right]$ khi và chỉ khi $2<m\le\frac{5}{2}$.

Câu 13: **(SỞ QUẢNG BÌNH NĂM 2019)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình sau $x^6+3x^4-m^3x^3+4x^2-mx+2\ge0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left[1;3\right]$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng:

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $x^6+3x^4-m^3x^3+4x^2-mx+2\ge0\Leftrightarrow x^6+3x^4+4x^2+2\ge m^3x^3+mx$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Leftrightarrow \left(x^2+1\right)^3+\left(x^2+1\right)\geq (mx)^3+mx\ (1)$

Xét hàm đặc trưng $f(t)=t^3+t \Rightarrow f'(t)=3t^2+1>0$

$(1)\Leftrightarrow f\left(x^2+1\right)\geq f(mx)\Leftrightarrow x^2+1\geq mx$

Bài toán trở thành tìm m để bất phương trình $x^2+1\geq mx$ nghiệm đúng với mọi $x\in[1;3]$

$x^2+1\geq mx\Leftrightarrow m\leq \dfrac{x^2+1}{x}=g(x),\forall x\in[1;3]$

$g'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}\geq 0\forall x\in[1;3]\Rightarrow \underset{x\in[1;3]}{Min}\, g(x)=g(1)=2$

Vậy để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in[1;3]$ thì $m\leq 2$

Vì m nguyên dương nên $S=\{1;2\}$ có 2 phần tử. Tổng các phần tử bằng 3.

Câu 14: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho mọi nghiệm của bất phương trình: $x^2-3x+2\leq 0$ cũng là nghiệm của bất phương trình $mx^2+(m+1)x+m+1\geq 0$?

A. $m\leq -1$. **B.** $m\leq -\dfrac{4}{7}$. **C.** $m\geq -\dfrac{4}{7}$. **D.** $m\geq -1$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình $x^2-3x+2\leq 0\Leftrightarrow 1\leq x\leq 2$.

Bất phương trình $mx^2+(m+1)x+m+1\geq 0\Leftrightarrow m(x^2+x+1)\geq -x-2\Leftrightarrow m\geq \dfrac{-x-2}{x^2+x+1}$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{-x-2}{x^2+x+1}$ với $1\leq x\leq 2$. Có $f'(x)=\dfrac{x^2+4x+1}{(x^2+x+1)^2}>0,\forall x\in[1;2]$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m\geq \max\limits_{[1;2]} f(x)\Leftrightarrow m\geq -\dfrac{4}{7}$

Câu 15: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $2\sqrt{x+1}=x+m$ có nghiệm thực?

A. $m\geq 2$. **B.** $m\leq 2$. **C.** $m\geq 3$. **D.** $m\leq 3$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt{x+1}, t\geq 0$. Phương trình thành: $2t=t^2-1+m\Leftrightarrow m=-t^2+2t+1$

Xét hàm số $f(t)=-t^2+2t+1, t\geq 0; f'(t)=-2t+2$

Bảng biến thiên của $f(t)$:

Từ đó suy ra phương trình có nghiệm khi $m\leq 2$.

Câu 16: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình: $-x^3+3mx-2<-\dfrac{1}{x^3}$ nghiệm đúng $\forall x\geq 1$?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $m<\frac{2}{3}$. **B.** $m\ge\frac{2}{3}$. **C.** $m\ge\frac{3}{2}$. **D.** $-\frac{1}{3}\le m\le\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Bpt $\Leftrightarrow 3mx<x^3-\frac{1}{x^3}+2,\forall x\ge 1\Leftrightarrow 3m<x^2-\frac{1}{x^4}+\frac{2}{x}=f(x),\forall x\ge 1.$

Ta có $f'(x)=2x+\frac{4}{x^5}-\frac{2}{x^2}\ge 2\sqrt{2x\left(\frac{4}{x^5}\right)}-\frac{2}{x^2}=\frac{4\sqrt{2}-2}{x^2}>0$ suy ra $f(x)$ tăng.

Ycbt $\Leftrightarrow f(x)>3m,\forall x\ge 1\Leftrightarrow \min\limits_{x\ge 1} f(x)=f(1)=2>3m\Leftrightarrow \frac{2}{3}>m$

Câu 17: **(Gang Thép Thái Nguyên)** Cho phương trình $\sqrt{2x^2-2mx-4}=x-1$ (m là tham số). Gọi p, q lần lượt là các giá trị m nguyên nhỏ nhất và giá trị lớn nhất thuộc $[-10;\ 10]$ để phương trình có nghiệm. Khi đó giá trị $T=p+2q$ là

A. 10. **B.** 19. **C.** 20. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\sqrt{2x^2-2mx-4}=x-1\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ x^2-(2m-2)x-5=0\end{cases}\quad(1).$

$x^2-(2m-2)x-5=0\Rightarrow m=\frac{x^2+2x-5}{2x}$

Xét hàm số $y=\frac{x^2+2x-5}{2x}$ trên $[1;+\infty)$. Ta có $y'=\frac{2x^2+10}{4x^2}$.

Bảng biến thiên sau

x	1		$+\infty$
y'		$+$	
y	-1	↗	$+\infty$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm lớn hơn bằng $1\Leftrightarrow m\ge -1$. Kết hợp điều kiện $m\in[-10;\ 10]\Rightarrow m\in[-1;\ 10]$.

Do đó $p=-1,\ q=10\Rightarrow p+2q=19$.

Câu 18: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1$ có hai nghiệm thực?

A. $m\ge-\frac{7}{2}$. **B.** $m\ge\frac{3}{2}$. **C.** $m\ge\frac{9}{2}$. **D.** $\forall m\in\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x \ge -\frac{1}{2}$

Phương trình $\sqrt{x^2+mx+2} = 2x+1 \Leftrightarrow 3x^2+4x-1 = mx$ (*)

Vì $x=0$ không là nghiệm nên (*) $\Leftrightarrow m = \frac{3x^2+4x-1}{x}$

Xét $f(x) = \frac{3x^2+4x-1}{x}$. Ta có $f'(x) = \frac{3x^2+1}{x^2} > 0 \ \forall x \ge -\frac{1}{2}; x \ne 0$

Bảng biến thiên

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$		
$f(x)$	$\frac{9}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có để phương trình có hai nghiệm thì $m \ge \frac{9}{2}$.

Câu 19: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\sqrt{x^2-4x+5} = m+4x-x^2$ có đúng 2 nghiệm dương?

A. $1 \le m \le 3$. **B.** $-3 < m < \sqrt{5}$. **C.** $-\sqrt{5} < m < 3$. **D.** $-3 \le m < 3$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = f(x) = \sqrt{x^2-4x+5}$. Ta có $f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Xét $x > 0$ ta có bảng biến thiên

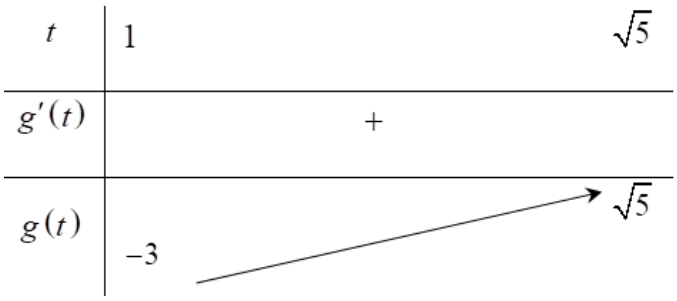
x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\sqrt{5}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó phương trình đã cho trở thành $m = t^2+t-5 \Leftrightarrow t^2+t-5-m = 0$ (*1*).

Nếu phương trình (*1*) có nghiệm t_1, t_2 thì $t_1+t_2 = -1$. (1) có nhiều nhất 1 nghiệm $t \ge 1$.

Vậy phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm dương khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 1 nghiệm $t \in (1;\sqrt{5})$. Đặt $g(t) = t^2+t-5$. Ta đi tìm m để phương trình $g(t) = m$ có đúng 1 nghiệm $t \in (1;\sqrt{5})$. Ta có $g'(t) = 2t+1 > 0, \forall t \in (1;\sqrt{5})$.

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên suy ra $-3<m<\sqrt{5}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 20: **(Phân tích đề báo THTT 2018-2019)** Có bao nhiêu giá trị m nguyên để phương trình $\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}+2\sqrt{-x^2+4}-2m+3=0$ có nghiệm.

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta sẽ dùng phương pháp hàm số để giải bài toán này.

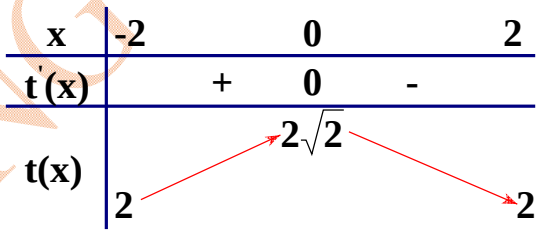
Điều kiện: $x\in[-2;2]$.

Đặt $t=\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}$.

Xét hàm số $t(x)=\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}$ với $x\in[-2;2]$.

$t'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{2-x}}$; $t'(x)=0\Leftrightarrow x=0$

Bảng biến thiên của $t(x)$:



Từ BBT ta suy ra, khi $x\in[-2;2]$ thì $t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$

Phương trình đã cho trở thành: $t^2+t-1=2m$ (1)

Phương trình trên là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $y=f(t)=t^2+t-1$ với đường thẳng $y=2m$.

Lại xét hàm số $f(t)=t^2+t-1$ với $t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$

Ta có $f'(t)=2t+1>0,\forall t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$

Bảng biến thiên của $f(t)$:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

t	2		$2\sqrt{2}$
f'(t)		+	
f(t)	5	↗	$7+2\sqrt{2}$

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm $t \in \left[2;2\sqrt{2}\right]$

$\Leftrightarrow 5 \le 2m \le 7+2\sqrt{2} \Leftrightarrow m \in \left[\frac{5}{2};\frac{7+2\sqrt{2}}{2}\right]$.

Mà m là số nguyên nên $m \in \{3;4\}$.

Câu 21: **(SỞ GD BẮC NINH)** Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sqrt{2-x}+\sqrt{1-x}=\sqrt{m+x-x^2}$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $m \in \left[5;\frac{23}{4}\right)$. **B.** $m \in [5;6]$. **C.** $m \in \left(5;\frac{23}{4}\right) \cup \{6\}$. **D.** $m \in \left[5;\frac{23}{4}\right) \cup \{6\}$.

Lời giải

Chọn B

+) $\sqrt{2-x}+\sqrt{1-x}=\sqrt{m+x-x^2}$ (1)

Điều kiện: $-1 \le x \le 2$

+) $(1) \Leftrightarrow 3+2\sqrt{-x^2+x+2}=-x^2+x+m$

Đặt: $-x^2+x=t$; $f(x)=-x^2+x$; $f'(x)=-2x+1$

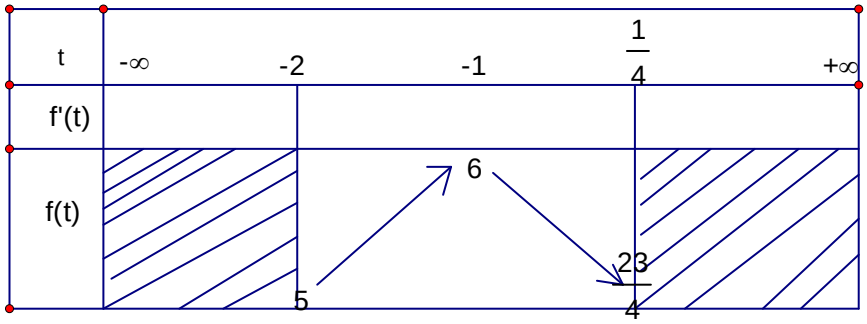
$f(-1)=2, f(2)=-2, f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4} \Rightarrow t \in \left[-2;\frac{1}{4}\right]$

$(1) \Leftrightarrow 3+2\sqrt{t+2}=t+m \Leftrightarrow 2\sqrt{t+2}=t+m-3 \Leftrightarrow m=2\sqrt{t+2}+3-t$

Đặt $f(t)=2\sqrt{t+2}+3-t$

$f'(t)=\frac{1}{\sqrt{t+2}}-1=\frac{1-\sqrt{t-2}}{\sqrt{t-2}}$. $f'(t)=0 \Rightarrow 1-\sqrt{t-2}=0 \Leftrightarrow t=-1$

Bảng biến thiên



+) $-x^2+x=t \Leftrightarrow -x^2+x-t=0$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta=1-4t>0 \Leftrightarrow t\le\frac{1}{4}$

Do đó để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì phương trình $(*)$ có nghiệm $t\in\left[-2;\frac{1}{4}\right]$

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow m\in[5;6]$.

Câu 22: **(Sở Hà Nam)** Cho phương trình $(m-2)\sqrt{x+3}+(2m-1)\sqrt{1-x}+m=1$. Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình có nghiệm là đoạn $[a;b]$. Giá trị của biểu thức $5a+3b$ bằng

A. 13. **B.** 7. **C.** 19. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Tập xác định : $D=[-3;1]$.

Từ phương trình suy ra : $m=\frac{2\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{x+3}+2\sqrt{1-x}+1}$.

Xét hàm số $g(x)=\frac{2\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{x+3}+2\sqrt{1-x}+1}$ trên đoạn $[-3;1]$.

Ta có : $g'(x)=\frac{\frac{3}{2}\left(\sqrt{\frac{1-x}{x+3}}+\sqrt{\frac{x+3}{1-x}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+3}}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)}{\left(\sqrt{x+3}+2\sqrt{1-x}+1\right)^2}>0, \forall x\in[-3;1]$.

Suy ra hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên $[-3;1]$.

Do đó, $\min\limits_{[-3;1]} g(x)=\frac{3}{5}; \max\limits_{[-3;1]} g(x)=\frac{5}{3}$.

Suy ra phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m\in\left[\frac{3}{5};\frac{5}{3}\right]$.

Vậy $5a+3b=8$. Đáp án

D.

Cách 2:

Tập xác định : $D=[-3;1]$.

Từ phương trình suy ra : $m=\frac{2\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{x+3}+2\sqrt{1-x}+1}$.

Xét hàm số $g(x)=\frac{2\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{x+3}+2\sqrt{1-x}+1}$ trên đoạn $[-3;1]$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Dùng máy tính ta dự đoán $\frac{3}{5} \le g(x) \le \frac{5}{3}$.

Ta chứng minh: $\frac{2\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{x+3}+2\sqrt{1-x}+1} \ge \frac{3}{5}$. (1)

Ta có: (1) $\Leftrightarrow 10\sqrt{x+3}+5\sqrt{1-x}+5 \ge 3\sqrt{x+3}+6\sqrt{1-x}+3$

$\Leftrightarrow 7\sqrt{x+3}+2-\sqrt{1-x} \ge 0.$

Xét trên đoạn $[-3;1]$ thì $7\sqrt{x+3} \ge 0; 2-\sqrt{1-x} \ge 0.$ Suy ra (1) luôn đúng. Dấu "=" xảy ra khi $x=-3$.

Ta lại chứng minh: $\frac{2\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{x+3}+2\sqrt{1-x}+1} \le \frac{5}{3}$. (2)

Ta có: (2) $\Leftrightarrow 6\sqrt{x+3}+3\sqrt{1-x}+3 \le 5\sqrt{x+3}+10\sqrt{1-x}+5$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+3} \le 7\sqrt{1-x}+2.$

Xét trên đoạn $[-3;1]$ thì $\sqrt{x+3} \le 2; 7\sqrt{1-x}+2 \ge 2.$ Suy ra (2) luôn đúng. Dấu "=" xảy ra khi $x=1$.

Do đó, $\frac{3}{5} \le m \le \frac{5}{3}$.

Suy ra phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m \in \left[\frac{3}{5};\frac{5}{3}\right]$.

Vậy $5a+3b=8$. Đáp án

D.

Câu 23: Tập tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $m\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+3\right)+2\sqrt{1-x^2}-5=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt là một nửa khoảng $(a;b]$. Tính $b-\frac{5}{7}a$.

A. $\frac{12-5\sqrt{2}}{7}$. **B.** $\frac{6-5\sqrt{2}}{7}$. **C.** $\frac{12-5\sqrt{2}}{35}$. **D.** $\frac{6-5\sqrt{2}}{35}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ với $-1 \le x \le 1$.Khi đó: $t^2=2+2\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow 2\sqrt{1-x^2}=t^2-2$.

$\Rightarrow t'=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}=0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x}=\sqrt{1+x} \Leftrightarrow x=0$.

x	-1		0		1
t'		$+$	0	$-$	
t		↗	2	↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\sqrt{2} \le t \le 2$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta có phương trình: $m(t+3)+t^2-7=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{-t^2+7}{t+3}$.

Xét hàm số: $f(t)=\dfrac{-t^2+7}{t+3}, t\in\left[\sqrt{2};2\right] \Rightarrow f'(t)=\dfrac{-t^2-6t-7}{(t+3)^2}$.

$f'(t)=0 \Leftrightarrow t=-3\pm\sqrt{2}\notin\left[\sqrt{2};2\right]$.

Ta có bảng biến thiên:

t	$\sqrt{2}$		2
$f'(t)$	0	$-$	
$f(t)$	$\dfrac{5(3-\sqrt{2})}{7}$	$\searrow$	$\dfrac{3}{5}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt thì $\sqrt{2}\le t\le 2$. Khi đó

$\dfrac{3}{5}< f(t)\le\dfrac{5(3-\sqrt{2})}{7}$ hay $\dfrac{3}{5}<m\le\dfrac{5(3-\sqrt{2})}{7}$

$\Rightarrow a=\dfrac{3}{5}$, $b=\dfrac{5(3-\sqrt{2})}{7} \Rightarrow b-\dfrac{5}{7}a=\dfrac{12-5\sqrt{2}}{7}$.

Câu 24: **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-9;9]$ để phương trình:
$\sqrt{1-x^2}-m\left(2\sqrt{1+x}+2\sqrt{1-x}-3\right)+1=0$ có nghiệm?

A. 14. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 12.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $-1\le x\le 1$

Đặt: $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ (1)

Xét hàm số $t(x)=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ trên $[-1;1]$

$t'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}=\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{2\sqrt{(1-x)(1+x)}}$

$t'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

Ta có bảng biến thiên

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$t'(x)$				$-$	0	$+$			
$t(x)$		$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	

Suy ra $t \in \left[\sqrt{2};2\right]$

Từ (1) suy ra $t^2 = 2+2\sqrt{1-x^2} \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \dfrac{t^2-2}{2}$. Khi đó PT trở thành:

$$\frac{t^2-2}{2} - m(2t-3)+1=0 \Leftrightarrow t^2-4mt+6m=0 \ (2)$$

Bài toán trở thành: Tìm giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $t^2-4mt+6m=0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc đoạn $\left[\sqrt{2};2\right]$.

Ta có: $t^2-4mt+6m=0 \Leftrightarrow t^2-2m(2t-3)=0$

TH1: Nếu $2t-3=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{3}{2}$ thay vào (2) ta được: $\dfrac{9}{4}=0$ (vô lý)

TH2: Nếu $t \neq \dfrac{3}{2}$ $PT(2) \Leftrightarrow 2m = \dfrac{t^2}{2t-3}$ $(*)$

Xét hàm số: $g(t)=\dfrac{t^2}{2t-3}$ trên $\left[\sqrt{2};2\right] \Rightarrow g'(t)=\dfrac{2t(t-3)}{(2t-3)^2}$

$$g'(t)=0 \Leftrightarrow \frac{2t(t-3)}{(2t-3)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \notin \left[\sqrt{2};2\right] \\ t=3 \notin \left[\sqrt{2};2\right] \end{array}\right.$$

BBT

t	$-\infty$		$\sqrt{2}$		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$g'(t)$				$-$		$-$			
$g(t)$		$\searrow$	$-4\sqrt{2}-6$	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	
			$-\infty$						

Dựa vào BBT suy ra: để PT có nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m \geq 4 \\ 2m \leq -2\left(2\sqrt{2}+3\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 2 \\ m \leq -\left(2\sqrt{2}+3\right) \end{array}\right.$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Với $m\ge 2$, $m\in[-9;9]\Rightarrow m\in\{2;3;4;5;6;7;8;9\}$ (8 giá trị thỏa mãn).

Với $m\le -\left(2\sqrt{2}+3\right)$, $m\in[-9;9]\Rightarrow m\in\{-6;-7;-8;-9\}$ (4 giá trị thỏa mãn).

Vậy có tất cả 12 giá trị nguyên của tham số $m\in[-9;9]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 25: (SỞ NAM ĐỊNH 2018-2019) Số các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để phương trình $x^2+(m+2)x+4=(m-1)\sqrt{x^3+4x}$ có nghiệm là

A. 2011. **B.** 2012. **C.** 2013. **D.** 2014.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện : $x^3+4x\ge 0\Leftrightarrow x\ge 0$.

*) Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình.

*) Với $x>0$ chia cả hai vế của phương trình cho $\sqrt{x^3+4x}$ ta được:

$$\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}+(m+2)\sqrt{\frac{x}{x^2+4}}=m-1.\quad(1)$$

Đặt $t=\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}=\sqrt{x+\frac{4}{x}}\ge\sqrt{2.\sqrt{x.\frac{4}{x}}}=2$. Vậy $t\ge 2$ với $\forall x>0$.

Phương trình (1) trở thành: $t^2-(m-1)t+m+2=0\Leftrightarrow m=\frac{t^2+t+2}{t-1}\Leftrightarrow m=t+2+\frac{4}{t-1}\ (t\ge 2)\quad(2)$.

Xét hàm số $f(t)=t+2+\frac{4}{t-1}$ trên $[2;+\infty)$.

$$f'(t)=1-\frac{4}{(t-1)^2}=\frac{t^2-2t-3}{(t-1)^2};\ f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\in[2;+\infty)\\ t=-1\notin[2;+\infty)\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$:

t	2		3		$+\infty$
f'(t)		-	0	+	
f(t)	8	↘	7	↗	$+\infty$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $t\in[2;+\infty)$.

Từ bảng biến thiên ta thấy $m\ge 7$. Kết hợp m là số nguyên và $m\in[-2019;2019]$ suy ra có 2013 giá trị m.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 26: **(Đặng Thành Nam Đề 17)** Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2-3x+4$. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $\sqrt{f\left(f(x)-2\right)-2}=3-f(x)$ là

A. 7. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x)-2=t\Rightarrow f(x)=t+2$ phương trình trở thành:

$\sqrt{f(t)-2}=3-(t+2)\Leftrightarrow\sqrt{f(t)-2}=1-t\Leftrightarrow\sqrt{t^3-3t^2-3t+2}=1-t$

$\Leftrightarrow\begin{cases}1-t\ge 0\\ t^3-3t^2-3t+2=(1-t)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-t\ge 0\\ t^3-4t^2-t+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\approx -0,58836\\ t\approx 0,40642\end{array}\right.$.

Với $t=-0,58836$, ta có: $x^3-3x^2-3x+2\approx -0,58836\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\approx -1,21627\\ x\approx 0,586256\\ x\approx 3,63001\end{array}\right.$.

Với $t\approx -0,40642$, ta có: $x^3-3x^2-3x+2\approx -0,40642\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\approx -1,1951\\ x\approx 0,552834\\ x\approx 3,64227\end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm thực phân biệt.

Câu 27: **(Gang Thép Thái Nguyên)** Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $m+\sqrt{m+1+\sqrt{1+\sin x}}=\sin x$ có nghiệm là $[a,b]$. Giá trị $a+b$ bằng

A. $-\frac{1}{4}-\sqrt{2}$. **B.** $-\frac{1}{4}+\sqrt{2}$. **C.** $-\frac{1}{2}-\sqrt{2}$. **D.** $-\frac{1}{2}+\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

$m+\sqrt{m+1+\sqrt{1+\sin x}}=\sin x\Leftrightarrow(m+1)+\sqrt{m+1+\sqrt{1+\sin x}}=(\sin x+1)$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}(m+1)+c=d^2\\ (m+1)+d=c^2\end{cases}\left(c=\sqrt{m+1+\sqrt{1+\sin x}},d=\sqrt{1+\sin x}\right)$.

$\Rightarrow(c-d)(1+c+d)=0\Leftrightarrow c=d\Rightarrow\sqrt{m+1+\sqrt{1+\sin x}}=\sqrt{1+\sin x}$.

$\Leftrightarrow m+1+\sqrt{1+\sin x}=1+\sin x$.

$\Leftrightarrow m+1=t^2-t=f(t),t=\sqrt{1+\sin x}\in\left[0,\sqrt{2}\right]$.

Ta có $\max\limits_{[0,\sqrt{2}]}f(t)=2-\sqrt{2},\min\limits_{[0,\sqrt{2}]}f(t)=-\frac{1}{4}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow-\frac{1}{4}\le m+1\le 2-\sqrt{2}\Leftrightarrow-\frac{5}{4}\le m\le 1-\sqrt{2}$. $\Rightarrow a+b=-\frac{1}{4}-\sqrt{2}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 28: **(GIA LỘC TỈNH HẢI DƯƠNG 2019 lần 2)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos 2x = m\sqrt{1+\tan x}.\cos^2 x$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos 2x = m\sqrt{1+\tan x}.\cos^2 x \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 = m\sqrt{1+\tan x}.\cos^2 x \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{\cos^2 x} = m\sqrt{1+\tan x}$ vì $x \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow \cos x > 0$

$\Leftrightarrow 1 - \tan^2 x = m\sqrt{1+\tan x}$.

Vì $x \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow \tan x \in \left[0;\sqrt{3}\right] \Rightarrow \sqrt{1+\tan x} \neq 0 \Rightarrow m = \frac{1-\tan^2 x}{\sqrt{1+\tan x}}$.

Đặt $t = \sqrt{1+\tan x} \Rightarrow t \in \left[1;\sqrt{1+\sqrt{3}}\right] \Rightarrow m = \frac{-t^4+2t^2}{t} = -t^3+2t \ (1)$.

Phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn $x \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ khi và chỉ phương trình (1) có nghiệm $t \in \left[1;\sqrt{1+\sqrt{3}}\right]$.

Xét hàm số $f(t) = -t^3+2t$ với $t \in \left[1;\sqrt{1+\sqrt{3}}\right]$.

Có $f'(t) = -3t^2+2$. Suy ra $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \notin \left[1;\sqrt{1+\sqrt{3}}\right]$.

$f(1) = 1,\ -2 < f\left(\sqrt{1+\sqrt{3}}\right) = -\sqrt{1+\sqrt{3}}^3 + 2\sqrt{1+\sqrt{3}} < -1$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên phương trình (1) có nghiệm khi $m \in \{-1;0;1\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 29: **(THPT Chuyên Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018)** Cho phương trình:

$$\sin x(2-\cos 2x) - 2\left(2\cos^3 x + m + 1\right)\sqrt{2\cos^3 x + m + 2} = 3\sqrt{2\cos^3 x + m + 2}.$$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình trên có đúng 1 nghiệm $x \in \left[0;\frac{2\pi}{3}\right)$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$\sin x(2-\cos 2x) - 2\left(2\cos^3 x + m + 1\right)\sqrt{2\cos^3 x + m + 2} = 3\sqrt{2\cos^3 x + m + 2}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Leftrightarrow \sin x\left(1+2\sin^2 x\right)=2\left(2\cos^3 x+m+2\right)\sqrt{2\cos^3 x+m+2}+\sqrt{2\cos^3 x+m+2}$

$\Leftrightarrow 2\sin^3 x+\sin x=2\left(\sqrt{2\cos^3 x+m+2}\right)^3+\sqrt{2\cos^3 x+m+2}\ \ (1)$

Xét hàm số $f(t)=2t^3+t$ có $f'(t)=6t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$, nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bởi vậy:

$(1)\Leftrightarrow f(\sin x)=f\left(\sqrt{2\cos^3 x+m+2}\right)\Leftrightarrow \sin x=\sqrt{2\cos^3 x+m+2}\qquad (2)$

Với $x\in\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right)$ thì

$(2)\Leftrightarrow \sin^2 x=2\cos^3 x+m+2$

$\Leftrightarrow -2\cos^3 x-\cos^2 x-1=m\qquad (3)$

Đặt $t=\cos x$, phương trình (3) trở thành $-2t^3-t^2-1=m\qquad (4)$

Ta thấy, với mỗi $t\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right]$ thì phương trình $\cos x=t$ cho ta một nghiệm $x\in\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right)$. Do đó, để phương trình đã cho có đúng 1 nghiệm $x\in\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right)$ điều kiện cần và đủ là phương trình (4) có đúng một nghiệm $t\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right]$.

Xét hàm số $g(t)=-2t^3-t^2-1$ với $t\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right]$.

Ta có $g'(t)=-6t^2-2t$, $g'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=-\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

t	$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		0		1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	-1	↘	$-\frac{28}{27}$	↗	-1	↘	-4

Từ bảng biến thiên suy ra, phương trình (4) có đúng một nghiệm $t\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right]$ khi và chỉ khi $-4\le m<-\dfrac{28}{27}$

.

Hay, các giá trị nguyên của m để phương trình trên có đúng 1 nghiệm $x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right)$ là $\{-4;-3;-2\}$

Câu 30: **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên Lần2)** Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số $m\in[0;2019]$ để bất phương trình: $x^2-m+\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}\le 0$ đúng với mọi $x\in[-1;1]$. Số phần tử của tập S bằng:

A. 1. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\sqrt{1-x^2}$. Khi đó, $0\le t\le 1,\ \forall x\in[-1;1]$.

Ta có, bất phương trình: $1-t^2-m+t^3\le 0,\forall t\in[0;1]$

$\Leftrightarrow m\ge t^3-t^2+1,\ \forall t\in[0;1]$

$\Leftrightarrow m\ge f(t),\forall t\in[0;1]$, với $f(t)=t^3-t^2+1\Leftrightarrow m\ge\max\limits_{[0;1]}f(t)$

Ta có, $f'(t)=3t^2-2t$, $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=\frac{2}{3}\end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên ta được: $\max\limits_{[0;1]}f(t)=1$.

Do đó, $m\ge 1$

Mà $m\in[0;2019]\Rightarrow m\in[1;2019]$

$\Rightarrow$ có 2019 giá trị nguyên của m.

Câu 31: **(Quỳnh Lưu Lần 1)** Cho phương trình $16m^2x^3+16x+\sqrt{8x^3+2x+2}=2m^2+10$ (m là tham số). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Phương trình đã cho vô nghiệm.

B. Phương trình đã cho có đúng một nghiệm thực.

C. Phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt.

D. Số nghiệm của phương trình phụ thuộc vào giá trị của tham số m.

Lời giải

Chọn B

Ta có $16m^2x^3+16x+\sqrt{8x^3+2x+2}=2m^2+10$

$\Leftrightarrow 16m^2x^3+16x+\sqrt{8x^3+2x+2}-2m^2-10=0$.

Điều kiện: $8x^3+2x+2\ge 0\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(8x^2-4x+4\right)\ge 0\Leftrightarrow x+\frac{1}{2}\ge 0\Leftrightarrow x\ge-\frac{1}{2}$.

Đặt: $f\left(x\right)=16m^2x^3+16x+\sqrt{8x^3+2x+2}-2m^2-10$ với $x\ge-\frac{1}{2}$.

Khi đó: $f'\left(x\right)=48m^2x^2+16+\frac{12x^2+1}{\sqrt{8x^3+2x+2}}>0,\ \forall x>-\frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

	$-\frac{1}{2}$	$-\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-18	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình $f(x)=0$ có duy nhất một nghiệm với mọi x.

Câu 32: **(CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ HÒA BÌNH LẦN 4 NĂM 2019)** Tổng các giá trị nguyên dương của m để tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{\frac{m}{72}x^2+1}<\sqrt{x}$ có chứa đúng hai số nguyên là

A. 27. **B.** 29. **C.** 28. **D.** 30.

Lời giải

Chọn B

ĐK: $x\ge 0$.

Do m dương nên $\frac{m}{72}x^2+1>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có, $\sqrt{\frac{m}{72}x^2+1}<\sqrt{x}\Leftrightarrow\frac{m}{72}x^2+1<x\Leftrightarrow mx^2<72(x-1)\ (1)$

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của (1) nên $(1)\Leftrightarrow m<\frac{72(x-1)}{x^2}$

Xét hàm số $y=f(x)=\frac{72(x-1)}{x^2}$ với $x>0$.

$y'=f'(x)=\frac{72(-x+2)}{x^3}=0\Leftrightarrow x=2$.

Bảng biến thiên của $f(x)$ với $x>0$:

x	0	1	2	3	4	$+\infty$
y'		+	0	−		
y	$-\infty$	0	18	−16	$\frac{27}{2}$	0

Từ bảng biến thiên ta có $f(2)>f(3)>f(4)=\frac{27}{2}>f(x),\forall x\in\mathbb{N}\setminus\{2,3,4\}$, nên để tập nghiệm của bất phương trình $m<\frac{72(x-1)}{x^2}$ có chứa đúng hai số nguyên thì $f(4)=\frac{27}{2}<m<f(3)=16$. (tập nghiệm chứa $x=2,\ x=3$)

Với $m\in\mathbb{N}^*$ thì $m\in\{14,15\}$

Do vậy, tổng các giá trị nguyên dương của m là $14+15=29$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 33: **(Hàm Rồng)** Cho hàm số $f(x)=(1-m^3)x^3+3x^2+(4-m)x+2$ với m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-2018;2018]$ sao cho $f(x)\ge 0$ với mọi giá trị $x\in[2;4]$.

A. 2021. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 4037.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

> ✍ Bất phương trình $m\le h(x)$ thỏa với mọi $x\in D$ khi và chỉ khi $m\le \min\limits_D h(x)$.
>
> ✍ Bất phương trình $m\le h(x)$ có nghiệm $x\in D$ khi và chỉ khi $m\le \max\limits_D h(x)$.

$f(x)=(1-m^3)x^3+3x^2+(4-m)x+2=x^3+3x^2+4x+2-m^3x^3-mx$

$f(x)\ge 0\Leftrightarrow x^3+3x^2+4x+2\ge m^3x^3+mx\Leftrightarrow (x+1)^3+x+1\ge m^3x^3+mx$ (1).

Xét hàm số $g(t)=t^3+t;\ t\in\mathbb{R}$, $g'(t)=3t^2+1>0\ \forall\ t\in\mathbb{R}$.

Vậy hàm $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow g(x+1)\ge g(mx)\Leftrightarrow x+1\ge mx$

Xét $x\in[2;4]$ bất phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x}\ge m$ (2)

Đặt $h(x)=\dfrac{x+1}{x}$.

Bất phương trình (2) luôn đúng với mọi $x\in[2;4]$ suy ra: $m\le \min\limits_{[2;4]} h(x)$.

Ta có: $h'(x)=\dfrac{-1}{x^2}<0\ \forall x\in[2;4]\Rightarrow \min\limits_{[2;4]} h(x)=h(4)=\dfrac{5}{4}$.

Do đó: $m\le\dfrac{5}{4}$.

Mà $m\in[-2018;2018]$ và m nguyên nên có 2020 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 34: **(Hậu Lộc Thanh Hóa)** Tìm số thực m lớn nhất để bất phương trình sau có nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ $m(|\sin x|+|\cos x|+1)\le|\sin 2x|+|\sin x|+|\cos x|-2018$.

A. $-\dfrac{1}{3}$. **B.** -2018. **C.** $-\dfrac{2017}{2}$. **D.** -2017.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=|\sin x|+|\cos x|\Rightarrow t^2=1+|\sin 2x|\le 2\Rightarrow 1\le t\le\sqrt{2}$

Khi đó bất phương trình đã cho trở thành:

$m(t+1)\le t^2+t-2019 \Leftrightarrow m\le \dfrac{t^2+t-2019}{t+1}=f(t)$ với mọi $t\in[1;\sqrt{2}]$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{t^2+2t+2020}{(t+1)^2}>0,\forall t\in[1;\sqrt{2}]$.

Vậy $m\le \dfrac{t^2+t-2019}{t+1}=f(t)$ với mọi $t\in[1;\sqrt{2}] \Leftrightarrow m\le \min\limits_{t\in[1;\sqrt{2}]} f(t)=-\dfrac{2017}{2}=f(1)$.

Câu 35: **(Chuyên-Thái-Nguyên-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3)** Số giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để bất phương $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}-\sqrt{18+3x-x^2}\le m^2-m+1$ nghiệm đúng $\forall x\in[-3;6]$.

A. 28. **B.** 20. **C.** 4. **D.** 19.

Lời giải

Chọn D

$\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}-\sqrt{18+3x-x^2}\le m^2-m+1$ (1) nghiệm đúng $\forall x\in[-3;6]$.

Đặt $t=\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}$, $x\in[-3;6]$.

$\Rightarrow t'=\dfrac{1}{2\sqrt{3+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{6-x}}=\dfrac{\sqrt{6-x}-\sqrt{3+x}}{2\sqrt{3+x}.\sqrt{6-x}}$.

$t'=0 \Leftrightarrow 6-x=3+x \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$.

Bảng biến thiên:

x	-3		$\frac{3}{2}$		6
t'		$+$	0	$-$	
t	3	↗	$3\sqrt{2}$	↘	3

$\Rightarrow t\in[3;3\sqrt{2}]$.

Ta có $t^2=3+x+6-x+2\sqrt{18+3x-x^2}=9+2\sqrt{18+3x-x^2} \Rightarrow \sqrt{18+3x-x^2}=\dfrac{t^2-9}{2}$.

Bất phương trình (1) nghiệm đúng $\forall x\in[-3;6]$

$\Leftrightarrow f(t)=t-\dfrac{t^2-9}{2}\le m^2-m+1$ nghiệm đúng $\forall t\in[3;3\sqrt{2}]$

$\Leftrightarrow m^2-m+1\ge \max\limits_{[3;3\sqrt{2}]} f(t)$. (2)

Xét hàm số $f(t)=t-\dfrac{t^2-9}{2}$, $t\in[3;3\sqrt{2}]$

$\Rightarrow f'(t)=1-\frac{1}{2}\cdot 2t=1-t<0 \quad \forall t\in\left[3;3\sqrt{2}\right]$

$\Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $\left[3;3\sqrt{2}\right]$.

$\Rightarrow \max\limits_{\left[3;3\sqrt{2}\right]} f(t)=f(3)=3-\frac{3^2-9}{2}=3.$

Khi đó (2) $\Leftrightarrow m^2-m+1\ge 3\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge 2 \\ m\le -1 \end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện bài toán: m nguyên và $m\in[-10;10] \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m\in\mathbb{Z} \\ m\in[-10;-1]\cup[2;10] \end{array}\right.$.

Vậy có 19 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét: Trên tinh thần thi trắc nghiệm, học sinh hoàn toàn có thể sử dụng tính năng TABLE của máy tính cầm tay để tìm $\max\limits_{[-3;6]} f(x)=3$ với $f(x)=\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}-\sqrt{18+3x-x^2}$. Từ đó đưa bài toán về dạng giải bất phương trình bậc hai cơ bản: $m^2-m+1\ge 3$ một cách dễ dàng.

Câu 36: (Thanh Chương Nghệ An Lần 2) Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{3}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2019f\left(\sqrt{15x^2-30x+16}\right)-m\sqrt{15x^2-30x+16}-m=0$ có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0;2]$.

A. 1513. **B.** 1512. **C.** 1515. **D.** 1514.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\sqrt{15x^2-30x+16} \Leftrightarrow t=\sqrt{15(x-1)^2+1}$ do $x\in[0;2]$ nên $t\in[1;4]$.

Nhận xét: Ứng với mỗi $t\in(1;4]$ thì có 2 nghiệm phân biệt $x\in[0;2]$.

Phương trình: $2019f\left(\sqrt{15x^2-30x+16}\right)-m\sqrt{15x^2-30x+16}-m=0\,(1)$

trở thành: $2019f(t)-mt-m=0 \Leftrightarrow m=\frac{2019f(t)}{t+1}$ với $t\in[1;4]$.

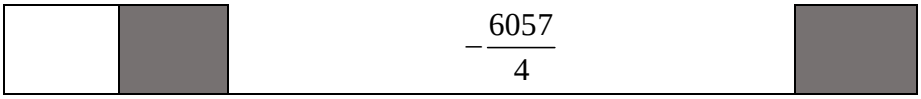
$\Leftrightarrow m=2019\left(\frac{1}{3}t^2-\frac{5}{3}t+\frac{4}{3}\right) \Leftrightarrow m=673\left(t^2-5t+4\right)$ với $t\in[1;4]$.(2)

Phương trình (1) có 4 nghiệm x phân biệt thuộc đoạn $[0;2]$ tương đương phương trình (2) có 2 nghiệm t phân biệt thuộc nửa khoảng $(1;4]$.

Xét $h(t)=673\left(t^2-5t+4\right)$ với $t\in(1;4]$.

Bảng biến thiên $h(t)$

	$-\infty$		1		$\frac{5}{2}$		4	$+\infty$
$h'(t)$			$-$		0	$+$		
$h(t)$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	



Dựa vào bảng biến thiên suy ra: $-\frac{6057}{4} < m < 0$ và m nguyên suy ra $-1514 \le m \le -1$.

Vậy có 1514 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Câu 37: (Sở Ninh Bình Lần1) Số giá trị nguyên của tham số m nằm trong khoảng $(0;2020)$ để phương trình $\big||x-1|-|2019-x|\big| = 2020-m$ có nghiệm là

A. 2020. **B.** 2021. **C.** 2019. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x) = \big||x-1|-|2019-x|\big| = \begin{cases} 2018, x \notin [1;2019] \\ |2x-2020|, x \in [1;2019] \end{cases}$.

Vì hàm số $h(x) = 2x-2020$ là hàm số đồng biến trên đoạn $[1;2019]$ nên ta có

$$\max_{[1;2019]} h(x) = \max\{h(1), h(2019)\} = 2018, \min_{[1;2019]} h(x) = \min\{h(1), h(2019)\} = -2018$$

Suy ra

$$\min_{[1;2019]} f(x) = 0 \text{ và } \max_{[1;2019]} f(x) = 2018.$$

Do đó, ta có

$$\min_{\mathbb{R}} f(x) = 0 \text{ và } \max_{\mathbb{R}} f(x) = 2018.$$

Vì vậy, phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi

$$0 \le 2020-m \le 2018 \Leftrightarrow 2 \le m \le 2020.$$

Suy ra có 2018 giá trị nguyên của m nằm trong khoảng $(0;2020)$.

Câu 38: (Lương Thế Vinh Lần 3) Cho hàm số $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x)+m}\right) = x^3 - m$ có nghiệm thuộc đoạn $[1;2]$?

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \sqrt[3]{f(x)+m} \Leftrightarrow t^3 = f(x)+m \Leftrightarrow f(x) = t^3 - m \ (1)$.

Ta có $f\left(\sqrt[3]{f(x)+m}\right) = x^3 - m$, suy ra $f(t) = x^3 - m \ (2)$.

Từ (1) và (2) ta có $f(x) - f(t) = t^3 - x^3 \Leftrightarrow f(x) + x^3 = f(t) + t^3 \Leftrightarrow x^5 + 4x^3 = t^5 + 4t^3 \ (3)$.

Xét hàm số $g(u) = u^5 + 4u^3 \Rightarrow g'(u) = 5u^4 + 12u^2 \ge 0 \forall u \in \mathbb{R} \Rightarrow g(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(3) \Leftrightarrow g(x) = g(t) \Leftrightarrow x = t$. Thay vào (1) ta được $f(x) = x^3 - m \Rightarrow x^5 + 2x^3 = 3m \ (4)$.

Xét hàm số $h(x) = x^5 + 2x^3$ trên đoạn $[1;2]$.

Ta có $h'(x) = 5x^4 + 6x^2 \ge 0 \forall x \in [1;2] \Rightarrow h(x)$ đồng biến trên đoạn $[1;2]$.

Vậy ta có $\min_{[1;2]} h(x) = h(1) = 3$ và $\max_{[1;2]} h(x) = h(2) = 48$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Phương trình đã cho có nghiệm thuộc $[1;2] \Leftrightarrow$ Phương trình (4) có nghiệm trên $[1;2]$.

$\Leftrightarrow \min\limits_{[1;2]} h(x) \le 3m \le \max\limits_{[1;2]} h(x) \Leftrightarrow 3 \le 3m \le 48 \Leftrightarrow 1 \le m \le 16$. Vậy có 16 giá trị nguyên của m.

.

Câu 39: (Chuyên Phan Bội Châu Lần2) Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} 1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+...+\dfrac{x^{2019}}{2019!}-e^x & \text{khi } x \ge 0 \\ -x^2-10x & \text{khi } x<0 \end{cases}$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương và chia hết cho 5 của tham số m để bất phương trình $m-f(x) \le 0$ có nghiệm?

A. 25. **B.** 0. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải.

Chọn D

+) Với $x \ge 0$: $f'(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+...+\dfrac{x^{2018}}{2018!}-e^x$; $f''(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+...+\dfrac{x^{2017}}{2017!}-e^x;...$

$f^{(2019)}(x)=1-e^x \le 0,\ \forall x \ge 0 \Rightarrow f^{(2018)}(x) \le f^{(2018)}(0)=0,\ \forall x \ge 0;...$

$\Rightarrow f'(x) \le 0,\ \forall x \ge 0 \Rightarrow f(x) \le f(0)=0,\ \forall x \ge 0$.

Nên $\forall m \in \mathbb{Z}_+^*$ thì $m-f(x)>0, \forall x \ge 0$.

Do đó bất phương trình $m-f(x) \le 0$ vô nghiệm trên $[0;+\infty)$, $\forall m \in \mathbb{Z}_+^*$.

+) Với $x<0$: Bpt: $m+x^2+10x \le 0 \Leftrightarrow x^2+10x \le -m$.

Ta có bảng biến thiên

Bất phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -m \ge -25 \Leftrightarrow m \le 25 \Rightarrow m \in \{5;10;15;20;25\}$.

Câu 40: (SỞ GD & ĐT CÀ MAU) Gọi là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số để bất phương trình đúng

với mọi . Số phần tử của tập là

A. 4038. **B.** 2021. **C.** 2022. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn B

$(1-m^3)x^3+3(2-m^3)x^2+(13-m-3m^3)x+10-m-m^3 \ge 0, \forall x \in [1;3]$.

$\Leftrightarrow (x+2)^3+x+2 \ge [m(x+1)]^3+m(x+1), \forall x \in [1;3]$. (*)

Xét: $f(t)=t^3+t, \forall t \in \mathbb{R}$, ta có $f'(t)=3t^2+1>0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Đặt $\begin{cases} u = x+2 \\ v = m(x+1) \end{cases}$.

$(*) \Leftrightarrow f(u) \geq f(v) \Leftrightarrow u \geq v \Leftrightarrow x+2 \geq m(x+1)$.

$ycbt \Leftrightarrow m \leq \dfrac{x+2}{x+1}, \forall x \in [1;3] \Leftrightarrow m \leq \underset{x\in[1;3]}{Min}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right) \Leftrightarrow m \leq \dfrac{5}{4}$.

Mà $\begin{cases} m \in [-2019;2019] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$ nên $\begin{cases} m \in \left[-2019;\dfrac{5}{4}\right] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \{-2019;-2018;...,-1;0;1\}$.

Vậy có 2021 giá trị cần tìm.

Câu 41: **(Chuyên Phan Bội Châu Lần2)** Cho hàm số $f(x) = \cos 2x$. Bất phương trình $f^{(2019)}(x) > m$ đúng với mọi $x \in \left(\dfrac{\pi}{12};\dfrac{3\pi}{8}\right)$ khi và chỉ khi

A. $m < 2^{2019}$. **B.** $m \leq 2^{2018}$. **C.** $m < 2^{2018}$. **D.** $m \leq 2^{2019}$.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $f'(x) = -2\sin 2x = 2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$; $f''(x) = -4\cos 2x = 2\cos\left(2x+2\dfrac{\pi}{2}\right)$;..

$f^{(n)}(x) = 2^n \cos\left(2x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$. Do đó $f^{(2019)}(x) = 2^{2019}\cos\left(2x+2019\dfrac{\pi}{2}\right) = 2^{2019}\sin 2x$.

$x \in \left(\dfrac{\pi}{12};\dfrac{3\pi}{8}\right) \Rightarrow 2x \in \left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow \sin 2x > \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}, \forall x \in \left(\dfrac{\pi}{12};\dfrac{3\pi}{8}\right)$

$\Rightarrow f^{(2019)}(x) > 2^{2018}, \forall x \in \left(\dfrac{\pi}{12};\dfrac{3\pi}{8}\right)$.

Do đó bất phương trình $f^{(2019)}(x) > m$ đúng với mọi $x \in \left(\dfrac{\pi}{12};\dfrac{3\pi}{8}\right)$ khi và chỉ khi $m \leq 2^{2018}$.

Câu 42: **(KIM LIÊN HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 03)** Cho bất phương trình . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số để bất phương trình nghiệm đúng với mọi .

A. . **B.** . **C.** . **D.** .

Lời giải

Chọn D

Ta có:

(1)

Xét hàm số , .

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Có nên hàm số đồng biến trên .

Bất phương trình (1) có dạng

.

Xét hàm số với .

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi ,.

.

Bảng biến thiên:

Tập giá trị của hàm số trên là .

Vậy ,.

Câu 43: (Chuyên Hà Nội Lần1) Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=-x^2-2 \quad \forall x\in\mathbb{R}$. Bất phương trình $f(x)<m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$ khi và chỉ khi

A. $m\geq f(1)$. **B.** $m\geq f(0)$. **C.** $m>f(0)$. **D.** $m>f(1)$.

Lời giải

Chọn D

$f'(x)=-x^2-2<0 \ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên $f(0)>f(1)$

Bảng biến thiên

Từ bảng biến thiên ta có bất phương trình $f(x)<m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1) \Leftrightarrow m>f(1)$.

Câu 44: (THPT-Ngô-Quyền-Hải-Phòng-Lần-2-2018-2019-Thi-24-3-2019) Cho bất phương trình $m\sqrt{1-x}+12\sqrt{1-x^2}\geq 16x+3m\sqrt{1+x}+2m+15$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-9;9]$ để bất phương trình có nghiệm đúng với mọi $x\in[-1;1]$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

• Bpt: $m\sqrt{1-x}+12\sqrt{1-x^2}\geq 16x+3m\sqrt{1+x}+2m+15$

$\Leftrightarrow m\left(\sqrt{1-x}-3\sqrt{1+x}-2\right)\geq 2\left(8x-6\sqrt{1-x^2}\right)+15$ (1).

• Đặt $t=\sqrt{1-x}-3\sqrt{1+x}$ với $x\in[-1;1]$.

$t'=-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}-\dfrac{3}{2\sqrt{1+x}}<0 \ \forall x\in(-1;1)$.

Suy ra t nghịch biến trên $[-1;1]$.

Nên $t(1) \le t \le t(-1) \Leftrightarrow -3\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$.

• Ta có $t^2 = 8x + 10 - 6\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow 2t^2 - 5 = 2\left(8x - 6\sqrt{1-x^2}\right) + 15$.

Khi đó (1) trở thành: $m(t-2) \ge 2t^2 - 5$ với $t \in \left[-3\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$.

$\Leftrightarrow m \le \dfrac{2t^2-5}{t-2}$ (2) với $t \in \left[-3\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$ (vì $t \in \left[-3\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$ nên $(t-2) < 0$).

• Xét hàm số $f(t) = \dfrac{2t^2-5}{t-2}$ trên đoạn $\left[-3\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$.

$$f'(t) = \frac{4t(t-2) - (2t^2-5)}{(t-2)^2} = \frac{2t^2 - 8t + 5}{(t-2)^2}.$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{4+\sqrt{6}}{2} \\ t = \dfrac{4-\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$$

$$f(-3\sqrt{2}) = \frac{62-93\sqrt{2}}{14} \approx -4,97;\ f(\sqrt{2}) = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \approx 1,7;\ f\left(\frac{4-\sqrt{6}}{2}\right) = 8 - 2\sqrt{6} \approx 3,1$$

(1) nghiệm đúng với mọi $x \in [-1;1] \Leftrightarrow$ (2) nghiệm đúng với mọi $t \in \left[-3\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$

$$\Leftrightarrow m \le \min_{\left[-3\sqrt{2};\sqrt{2}\right]} f(t) = f\left(-3\sqrt{2}\right) = \frac{62-93\sqrt{2}}{14} \approx -4,97.$$

Kết hợp với điều kiện bài toán ta có: $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-9;9] \\ m \le \dfrac{62-93\sqrt{2}}{14} \approx -4,97 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \{-9;-8;-7;-6;-5\}$.

Vậy có 5 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 45: **(Ngô Quyền Hà Nội)** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $m + \sqrt{m+1+\sqrt{1+\sin x}} = \sin x$ có nghiệm là đoạn $[a;b]$. Khi đó giá trị của biểu thức $T = 4a - \dfrac{1}{b} - \sqrt{2}$ bằng

A. -4. **B.** -5. **C.** -3. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $-1 \le \sin x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le 1 + \sin x \le 2 \Leftrightarrow 0 \le \sqrt{1+\sin x} \le \sqrt{2}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt $t = \sqrt{1+\sin x}$. Ta có $0 \le t \le \sqrt{2}$ và $\sin x = t^2 - 1$.

Khi đó phương trình có dạng: $m+\sqrt{m+1+t}=t^2-1\Leftrightarrow m+1+t+\sqrt{m+1+t}=t^2+t\ (*)$.

Xét hàm số $f(t)=t^2+t,\ t>0$.

Ta có $f'(t)=2t+1>0,\ \forall t>0$.

Do đó hàm số $f(t)=t^2+t$ luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Vì thế $(*)\Leftrightarrow t=\sqrt{m+1+t}\Leftrightarrow m=t^2-t-1\ (**)$

Xét hàm số $g(t)=t^2-t-1,\ t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$.

$g'(t)=2t-1$.

$g'(t)=0\Leftrightarrow 2t-1=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(t)=t^2-t-1,\ t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$

Phương trình đề bài có nghiệm $\Leftrightarrow(**)$ có nghiệm $t\in\left[0;\sqrt{2}\right]\Leftrightarrow-\dfrac{5}{4}\le m\le 1-\sqrt{2}$.

Vậy $m\in\left[-\dfrac{5}{4};1-\sqrt{2}\right]$ nên $a=-\dfrac{5}{4};b=1-\sqrt{2}\Rightarrow T=-4$.

Phát triển câu 40:

Câu 46: **(Chuyên Thái Bình Lần3)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x)+m}\right)=x^3-m$ có nghiệm $x\in[1;2]$ biết $f(x)=x^5+3x^3-4m$.

A. 16. **B.** 15. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sqrt[3]{f(x)+m}\to t^3=f(x)+m$. Ta được hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} f(t)=x^3-m \\ t=f(x)+m \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} f(t)=x^3-m \\ f(x)=t^3-m \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} f(t)+t^3=f(x)+x^3(*) \\ f(x)=t^3-m \end{cases}.$$

Vì $f(x)=x^5+3x^3-4m,\ f'(x)=5x^4+9x^2\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $h(x)=f(x)+x^3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó: $(*)\Leftrightarrow x=t$.

Khi đó ta được: $f(x)=x^3-m=x^5+3x^3-4m\Leftrightarrow x^5+2x^3=3m\Leftrightarrow g(x)=\dfrac{1}{3}x^5+\dfrac{2}{3}x^3=m(**)$.

Dễ thấy $g(x)=\dfrac{1}{3}x^5+\dfrac{2}{3}x^3$ đồng biến trên $[1;2]$ nên phương trình (**) có nghiệm trên đoạn $[1;2]$ khi và chỉ khi: $g(1)\le m\le g(2)\Leftrightarrow 1\le m\le 16$.

Vì m thuộc số nguyên nên có 16 số thỏa mãn bài toán.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 47: (Chuyên Bắc Giang) Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $x^4+1-x^2+x\sqrt{2mx^4+2m}\ge 0$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ là $S=[a;b]$. Tính $a\sqrt{2}+8b$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Xét bất phương trình: $x^4+1-x^2+x\sqrt{2mx^4+2m}\ge 0\ (*)$

$(*)$ xác định khi $2mx^4+2m\ge 0\Leftrightarrow 2m\left(x^4+1\right)\ge 0\Leftrightarrow 2m\ge 0\Leftrightarrow m\ge 0$.

Xét $x\ge 0$: $\begin{cases} x^4+1-x^2=\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0 \\ x\sqrt{2mx^4+2m}\ge 0 \end{cases}\Rightarrow (*)$ luôn đúng.

Xét $x<0$:

$(*)$ trở thành: $\sqrt{2m}\le \dfrac{x}{\sqrt{x^4+1}}-\dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x}$.

Đặt $t=\dfrac{x}{\sqrt{x^4+1}}$, $t'=\dfrac{1-x^4}{\sqrt{\left(x^4+1\right)^3}}$; $t'=0\Leftrightarrow x=-1$

BBT

$\Rightarrow t\in\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2};0\right)$.

$(*)$ trở thành: $\sqrt{2m}\le f(t)$ với $f(t)=t-\dfrac{1}{t}$

$f'(t)=1+\dfrac{1}{t^2}>0$, $t\in\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2};0\right)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \sqrt{2m}\le \underset{\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)}{\text{Min}}\ f(t)\Leftrightarrow \sqrt{2m}\le f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\Leftrightarrow \sqrt{2m}\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow m\le\dfrac{1}{4}$.

Do đó $m\in\left[0;\dfrac{1}{4}\right]\Rightarrow a=0,b=\dfrac{1}{4}$.

Vậy $a\sqrt{2}+8b=2$.

Câu 48: (Chuyên Thái Bình Lần3) Biết rằng phương trình $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R},a\ne 0,b\ne 0)$ có 4 nghiệm thực phân biệt. Hỏi phương trình sau có bao nhiêu nghiệm thực?

$$\left(4ax^3+3bx^2+2cx+d\right)^2-2\left(6ax^2+3bx+c\right).\left(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\right)=0$$

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Lời giải

Chọn A

Gọi các hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành là x_1, x_2, x_3, x_4.

Suy ra: $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$.

$$\Rightarrow f'(x)=a(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)+a(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)$$
$$+a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)+a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

Ta có: $g(x_i)=\left[f'(x_i)\right]^2-f''(x_i).f(x_i)=\left[f'(x_i)\right]^2>0, \forall x_i$.

$\Rightarrow g(x)=0$ không có nghiệm x_i.

Xét $x\neq x_i$, ta có $f'(x)=f(x)\left(\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}+\frac{1}{x-x_4}\right)=f(x).\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{x-x_i}$.

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{x-x_i}\Rightarrow\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{x-x_i}\right)'.$$

$$\Rightarrow \frac{f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^2}=-\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{(x-x_i)^2}<0, \forall x \text{ hay } \left[f'(x)\right]^2-f''(x).f(x)>0, \forall x\neq x_i.$$

Vậy trong mọi trường hợp phương trình $g(x)=0$ đều vô nghiệm.

Câu 49: **(Đặng Thành Nam Đề 5)** Có bao nhiêu số nguyên $x\in(-100;100)$ thỏa mãn bất phương trình

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^{2019}}{2019!}\right)\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+...-\frac{x^{2019}}{2019!}\right)<1.$$

A. 199 **B.** 0 **C.** 99 **D.** 198

Lời giải

Chọn D

Đặt

$$\begin{cases}u(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^{2019}}{2019!}\\ v(x)=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+...-\frac{x^{2019}}{2019!}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u'(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^{2018}}{2018!}=u(x)-\frac{x^{2019}}{2019!}\\ v'(x)=-1+x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...-\frac{x^{2018}}{2018!}=-v(x)-\frac{x^{2019}}{2019!}\end{cases}$$

Và đặt $f(x)=u(x).v(x)$. Ta có

$$f'(x)=u'(x)v(x)+v'(x)u(x)=\left(u(x)-\frac{x^{2019}}{2019!}\right)v(x)+\left(-v(x)-\frac{x^{2019}}{2019!}\right)u(x)=-\frac{x^{2019}}{2019!}\left(u(x)+v(x)\right)$$

Nhận xét: $u(x)+v(x)=2\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2018}}{2018!}\right)>0, \forall x\in\mathbb{R}$ nên suy ra

Suy ra $f'(x)=0\Leftrightarrow -\frac{x^{2019}}{2019!}(u(x)+v(x))=0\Leftrightarrow x^{2019}=0\Leftrightarrow x=0$. Do đó, ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ là

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x)<1\Leftrightarrow x\neq 0\Rightarrow x\in\{-99,...,-1,1,...,99\}$. Có tất cả 198 số nguyên thoả mãn.

Câu 50: **(Trung-Tâm-Thanh-Tường-Nghệ-An-Lần-2)** Cho hàm số $f(x)=\sqrt[3]{7+3x}-\sqrt[3]{7-3x}+2019x$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện $f\left(\left|x^3-2x^2+3x-m\right|\right)+f\left(2x-2x^2-5\right)<0,\forall x\in(0;1)$. Số phần tử của S là?

A. 7. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Vì $f(x)=\sqrt[3]{7+3x}-\sqrt[3]{7-3x}+2019x$ là hàm số lẻ và đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên ta có

$f\left(\left|x^3-2x^2+3x-m\right|\right)<-f\left(2x-2x^2-5\right)$

$\Leftrightarrow f\left(\left|x^3-2x^2+3x-m\right|\right)<f\left(2x^2-2x+5\right)$

$\Leftrightarrow \left|x^3-2x^2+3x-m\right|<2x^2-2x+5$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-2x^2+3x-m<2x^2-2x+5 \\ x^3-2x^2+3x-m>-2x^2+2x-5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-4x^2+5x-5<m \\ x^3+x+5>m \end{cases}$

Xét $g(x)=x^3-4x^2+5x-5$ và $h(x)=x^3+x+5$ trên $(0;1)$ có bảng biến thiên là

Từ bảng biến thiên suy ra $f\left(\left|x^3-2x^2+3x-m\right|\right)+f\left(2x-2x^2-5\right)<0,\forall x\in(0;1)$ khi và chỉ khi

$\begin{cases} m\geq -3 \\ m\leq 5 \end{cases}\Rightarrow -3\leq m\leq 5$

Câu 51: Cho hàm số . Đặt với là số nguyên lớn hơn . Hỏi phương trình có tất cả bao nhiêu nghiệm phân biệt ?

A. . **B.** . **C.** . **D.** .

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Ta có . Bảng biến thiên:

Từ bảng biến thiên ta có:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Bài toán sẽ được giải quyết nếu tìm được số nghiệm của phương trình .

+ Phương trình có ba nghiệm thuộc .

+ Phương trình .

Từ bảng biến thiên ta có với mỗi giá trị phương trình có ba nghiệm thuộc .

Như vậy phương trình có 9 nghiệm thuộc .

+ Bằng quy nạp ta chứng minh được phương trình có nghiệm thuộc .

Từ đó, số nghiệm của phương trình là .

Vậy số nghiệm của phương trình là .

Bài toán tổng quát: Cho hàm số . Đặt với là số tự nhiên lớn hơn . Hỏi phương trình có bao nhiêu nghiệm?

Lời giải: (Cách 2)

Ta có . Bảng biến thiên:

		1

Gọi lần lượt là số nghiệm của phương trình

Từ bảng biến thiên ta có

Do đó (Vì)

Vậy phương trình có nghiệm.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Cách 3:

Nhận xét:

+ Đồ thị hàm số như sau:

. Lại có .

- Đồ thị hàm số luôn đi qua gốc tọa độ.

- Đồ thị hàm số luôn tiếp xúc với trục tại điểm .

+ Xét hàm số có nên đồng biến trên và nên bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số xuống dưới đơn vị ta được đồ thị hàm số . Suy ra phương trình có nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng .

+ Tổng quát: xét hàm số , với .

Lập luận tương tự như trên:

- và ; .

- Tịnh tiến đồ thị hàm số xuống dưới đơn vị ta được đồ thị hàm số . Suy ra phương trình luôn có ba nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng .

Khi đó,

+ Ta có .

+ . Theo trên, phương trình có có ba nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng . Nên phương trình có nghiệm phân biệt.

+ .

có nghiệm.

có ba nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng . Mỗi phương trình , với lại có ba nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng . Do đó phương trình có tất cả nghiệm phân biệt.

Suy ra phương trình có nghiệm phân biệt.

+ .

có nghiệm.

có ba nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng . Mỗi phương trình , với lại có nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng . Do đó phương trình có tất cả nghiệm phân biệt.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

+ .

có nghiệm.

có ba nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng . Mỗi phương trình , với lại có nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng . Do đó phương trình có tất cả nghiệm phân biệt. Vậy có nghiệm.

+ .

có nghiệm.

có ba nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng . Mỗi phương trình , với lại có nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng . Do đó phương trình có tất cả nghiệm phân biệt.

Vậy có nghiệm.

Câu 52: (HSG Bắc Ninh) Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ xy+yz+xz=-3 \\ x^6+y^6+z^6=m \end{cases}$ với x, y, z là ẩn số thực, m là tham số.

Số giá trị nguyên của m để hệ phương trình có nghiệm là

A. 25 . **B.** 24 . **C.** 12 . **D.** 13.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz)=6+2.(-3)=0$.

Vậy $x+y+z=0$. Suy ra: $z=-(x+y)\Rightarrow z^2=x^2+2xy+y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=2(x^2+y^2+xy)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)=x^2+y^2+xy$ (1). Thay $x^2+y^2+z^2=6$ vào (1) ta được $x^2+y^2+xy=3$.

$\Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2=3+xy\geq 0 \\ (x-y)^2=3-3xy\geq 0 \end{cases}$. Vậy $-3\leq xy\leq 1$.

Ta có: $m=x^6+y^6+z^6=x^6+y^6+(x+y)^6$ (thay $z=-(x+y)$)

$=(x^3+y^3)^2-2x^3y^3+(x+y)^6=\left[(x+y).(x^2-xy+y^2)\right]^2-2x^3y^3+(x+y)^6$

$=(x+y)^2.\left[(x^2+y^2+xy)-2xy\right]^2-2(xy)^3+(x+y)^6$ (2)

Thay $\begin{cases} (x+y)^2=3+xy \\ x^2+y^2+xy=3 \end{cases}$ vào (2) ta được: $x^6+y^6+z^6=(3+xy).(3-2xy)^2-2(xy)^3+(3+xy)^3$

Đặt $t=xy\ (-3\leq t\leq 1)$. Khi đó $x^6+y^6+z^6=(3+t).(3-2t)^2-2t^3+(3+t)^3=3t^3+9t^2+54$

Xét hàm số $f(t)=3t^3+9t^2+54$ trên $[-3;1]$. Ta có: $f'(t)=9t^2+18t$.

$$f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\in[-3;1] \\ t=-2\in[-3;1] \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

Từ bảng biến thiên ta thấy: $54\le f(t)\le 66$ với $\forall t\in[-3;1]$.

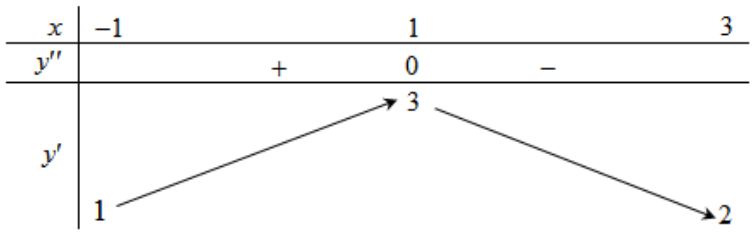
Hệ phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $f(t)=m$ có nghiệm $t\in[-3;1]$

$\Leftrightarrow 54\le m\le 66$. Vậy có 13 giá trị nguyên của m để hệ phương trình có nghiệm.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

DẠNG 3: GIẢI PT, BPT KHI CHO BBT VÀ ĐỒ THỊ

Câu 1: (Đặng Thành Nam Đề 6) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Bất phương trình $m+x^2\le f(x)+\frac{1}{3}x^3$ nghiệm đúng với mọi $x\in(0;3)$ khi và chỉ khi



A. $m<f(0)$. **B.** $m\le f(3)$. **C.** $m\le f(0)$. **D.** $m<f(1)-\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$m+x^2\le f(x)+\frac{1}{3}x^3 \Leftrightarrow f(x)+\frac{1}{3}x^3-x^2\ge m$.

Đặt $g(x)=f(x)+\frac{1}{3}x^3-x^2$. Theo bài ra, ta có: $g(x)\ge m,\forall x\in(0;3)$(*).

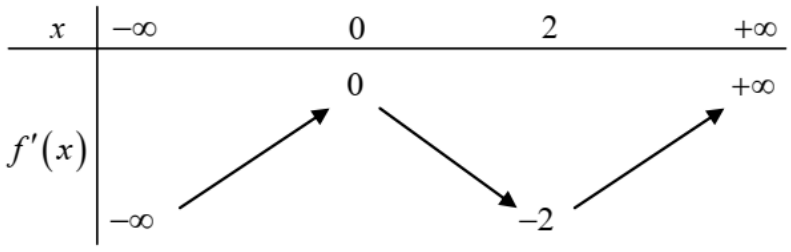
Ta có $g'(x)=f'(x)+x^2-2x>1+x^2-2x=(x-1)^2\ge 0,\forall x\in(0;3)$.

Do đó $g(0)<g(x)<g(3),\forall x\in(0;3)$. Mà: $g(0)=f(0);g(3)=f(3)$.

$\Rightarrow f(0)<g(x)<f(3),\forall x\in(0;3)$

Vì vậy (*) $\Leftrightarrow m\le f(0)$.

Câu 2: (Thanh Chương Nghệ An Lần 2) Cho hàm số $y=f(x)$ có $f(-2)=m+1$, $f(1)=m-2$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên.



Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\frac{1}{2}f(x)-\frac{2x+1}{x+3}=m$ có nghiệm $x\in(-2;1)$ là

A. $\left(-5;-\frac{7}{2}\right)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(-2;7)$. **D.** $\left(-\frac{7}{2};7\right)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $h(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{2x+1}{x+3}$, với $x\in(-2;1)$.

Ta có $h'(x)=\frac{1}{2}f'(x)-\frac{5}{(x+3)^2}$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ ta có $f'(x)\le 0,\forall x\in(-2;1)$

và $-\dfrac{5}{(x+3)^2}<0,\forall x\in(-2;1)$. Do đó $h'(x)<0,\forall x\in(-2;1)$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=h(x)$ trên khoảng $(-2;1)$.

x	-2		1
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	$h(-2)$	↘	$h(1)$

Khi đó, phương trình $h(x)=m$ có nghiệm $x\in(-2;1)$ khi và chỉ khi $h(1)<m<h(-2)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}f(1)-\dfrac{3}{4}<m<\dfrac{1}{2}f(-2)+3 \Leftrightarrow \dfrac{m-2}{2}-\dfrac{3}{4}<m<\dfrac{m+1}{2}+3 \Leftrightarrow \dfrac{2m-7}{4}<m<\dfrac{m+7}{2}$

$\Leftrightarrow -\dfrac{7}{2}<m<7$.

Câu 3: (Đặng Thành Nam Đề 9) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$ và có bảng biến thiên như sau:

x	0		1		3
y'		$+$	0	$-$	
y	8	↗	9	↘	5

Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x)=m\left(x^4-2x^2+2\right)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$.

A. 9. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Theo đề ta có $f(x)=m\left(x^4-2x^2+2\right)\Leftrightarrow m=\dfrac{f(x)}{x^4-2x^2+2}$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$ (*).

Đặt $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, trong đó $g(x)=x^4-2x^2+2$.

$g'(x)=4x^3-4x$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in[0;3]\\x=1\in[0;3]\end{array}\right.$, $g(0)=2$; $g(1)=1$; $g(3)=65$

Nên $\min\limits_{[0;3]}g(x)=g(1)=1;\max\limits_{[0;3]}g(x)=g(3)=65$

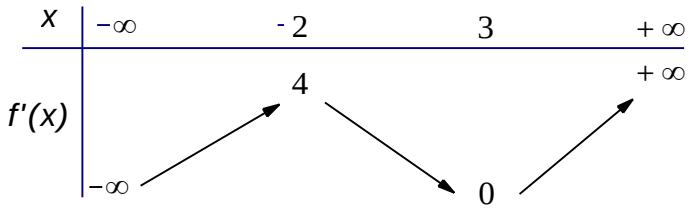
Từ bảng biến thiên ta có: $\max\limits_{[0;3]}f(x)=f(1)=9;\min\limits_{[0;3]}f(x)=f(3)=5$.

Do đó $\min\limits_{[0;3]}h(x)=\dfrac{f(3)}{g(3)}=\dfrac{1}{13};\max\limits_{[0;3]}h(x)=\dfrac{f(1)}{g(1)}=9.$

Vậy $(*)\Leftrightarrow\dfrac{1}{13}\le m\le 9\Rightarrow m\in\{1,....,9\}$.

Câu 4: (Sở Đà Nẵng 2019) Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới.

Bất phương trình $x.f(x)>mx+1$ nghiệm đúng với mọi $x\in(1;2019)$ khi



A. $m\ge f(1)-1$.

B. $m\le f(1)-1$.

C. $m\ge f(2019)-\dfrac{1}{2019}$.

D. $m\le f(2019)-\dfrac{1}{2019}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $x.f(x)>mx+1$ nghiệm đúng với mọi $x\in(1;2019)$

$\Leftrightarrow f(x)-\dfrac{1}{x}>m$ với mọi $x\in(1;2019)$.

Xét hàm số $h(x)=f(x)-\dfrac{1}{x}$ với mọi $x\in(1;2019)$.

Ta có $h'(x)=f'(x)+\dfrac{1}{x^2}$.

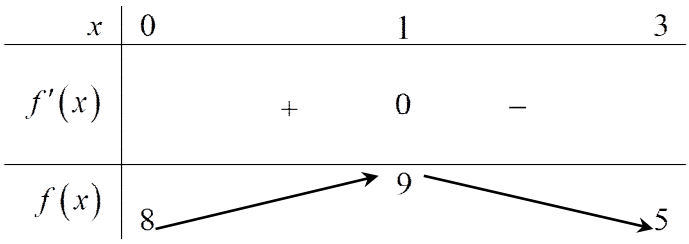
Vì $f'(x)\ge 0$ với mọi $x\in(1;2019)$ (dựa vào BBT) và $\dfrac{1}{x^2}>0$ với mọi $x\in(1;2019)$ nên $h'(x)>0$ với mọi $x\in(1;2019)$

$\Rightarrow h(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2019)$

$\Rightarrow h(x)>h(1)$ với mọi $x\in(1;2019)$.

Mà $h(x)>m$ với mọi $x\in(1;2019)$ nên $m\le h(1)\Leftrightarrow m\le f(1)-1$.

Câu 5: (Ngô Quyền Hà Nội) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Gọi S là tập hợp các số nguyên dương m để bất phương trình $f(x)\ge mx^2(x^2-2)+2m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$. Số phần tử của tập S là

A. Vô số. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 0.

Lời giải

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Chọn C

Cách 1.

Ta có $f(x) \ge mx^2(x^2-2)+2m \Leftrightarrow f(x) \ge m(x^4-2x^2+2)$

$\Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x^4-2x^2+2} \ge m$ vì $x^4-2x^2+2=(x^2-1)^2+1>0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^4-2x^2+2}$. Ta có $g'(x)=\dfrac{f'(x).(x^4-2x^2+2)-f(x).(4x^3-4x)}{(x^4-2x^2+2)^2}$.

Nhận xét: Với $x=1$ thì $g'(x)=0$.

Với $x \in (0;1)$ thì $f'(x)>0$ và $4x^3-4x<0$ nên $g'(x)>0$.

Với $x \in (1;3)$ thì $f'(x)<0$ và $4x^3-4x>0$ nên $g'(x)<0$.

Bảng biến thiên

x	0		1		3
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	4	↗	9	↘	$\dfrac{1}{13}$

Từ bảng biến thiên suy ra bất phương trình $g(x) \ge m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$ khi $m \le 9$.

Vì m nguyên dương nên tập $S=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.

Cách 2.

Ta có $x^4-2x^2+2=(x^2-1)+1 \ge 1, \forall x \in \mathbb{R}$ nên

$$f(x) \ge mx^2(x^2-2)+2m \Leftrightarrow f(x) \ge m(x^4-2x^2+2) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^4-2x^2+2} \ge m.$$

Bất phương trình đã cho có nghiệm thuộc $[0;3]$ khi và chỉ khi $m \le \max\limits_{x\in[0;3]} \dfrac{f(x)}{x^4-2x^2+2}$.

Từ bảng biến thiên ta có $5 \le f(x) \le 9,\ \forall x \in [0;3]$ và $f(x)=9 \Leftrightarrow x=1$.

Ta có $x^4-2x^2+2=(x^2-1)^2+1 \ge 1 \Leftrightarrow 0<\dfrac{1}{x^4-2x^2+2} \le 1$. Dấu "=" xảy ra khi $x=1$.

Suy ra, với mọi $x \in [0;3]$ thì $\dfrac{f(x)}{x^4-2x^2+2} \le \dfrac{9}{x^4-2x^2+2} \le 9$. Dấu "=" xảy ra khi $x=1$.

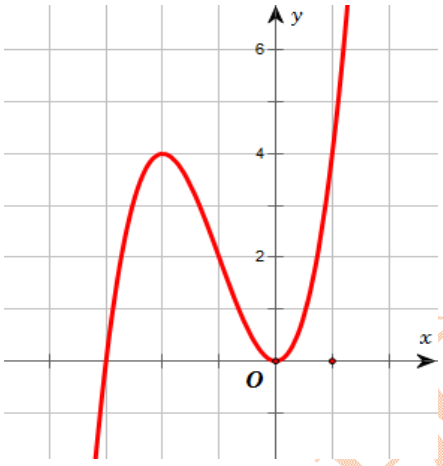
Do đó, $\max\limits_{x\in[0;3]} \dfrac{f(x)}{x^4-2x^2+2}=9$ khi $x=1$.

Vậy tập hợp các số nguyên dương m cần tìm là $S=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.

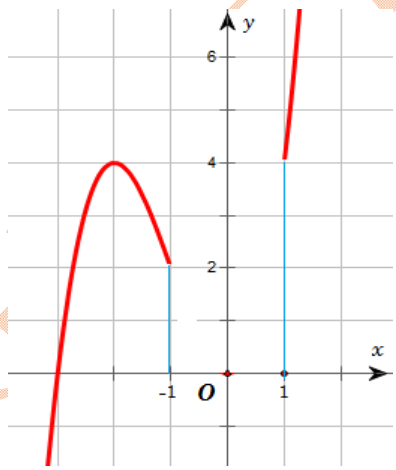
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 6: Hình vẽ bên là đường biểu diễn của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sqrt{3x^2-3}=\sqrt{-x^3+m}$ có hai nghiệm thực âm phân biệt.

A. $-1\le m\le 1$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-3 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-1 \end{array}\right.$. **D.** $m=-4$.



Lời giải



Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ x\le -1 \end{array}\right.$ (1) và $x\le \sqrt[3]{m}$ (2).

Phương trình $\sqrt{3x^2-3}=\sqrt{-x^3+m}$

$$\longleftrightarrow 3x^2-3=-x^3+m\longleftrightarrow x^3+3x^2=m+3.$$

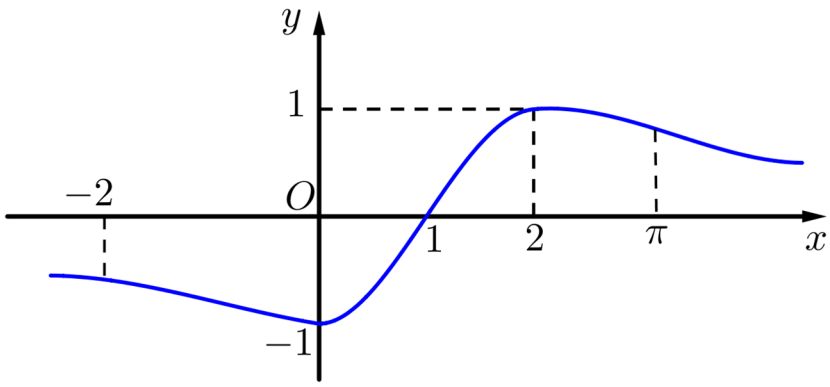
Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2$ (chỉ xét trong phần x thỏa điều kiện (1) & (2)) và đường thẳng $y=m+3$ (cùng phương với trục hoành).

Xét với $\left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ x\le -1 \end{array}\right.$, đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2$ có dạng như hình vẽ. Dựa vào đồ thị, ta thấy để phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt khi $2\le m+3\le 4\longleftrightarrow -1\le m\le 1$.

Với $-1\le m\le 1$ thì (1) thỏa mãn (2).

Chọn A

Câu 7: (Chuyên Vinh Lần 3) Cho $f(x)$ mà đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên



Bất phương trình $f(x)>\sin\frac{\pi x}{2}+m$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-1;3]$ khi và chỉ khi

A. $m<f(0)$. **B.** $m<f(1)-1$. **C.** $m<f(-1)+1$. **D.** $m<f(2)$.

Lời giải

Chọn B

- Xét bất phương trình $f(x)>\sin\frac{\pi x}{2}+m$ (1) với $x\in[-1;3]$, ta có:

$f(x)>\sin\frac{\pi x}{2}+m\Leftrightarrow f(x)-\sin\frac{\pi x}{2}>m$ (2)

- Đánh giá $f(x)-\sin\frac{\pi x}{2}$ với $x\in[-1;3]$

+ Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ đã cho ta suy ra BBT của $f(x)$ như sau:

x		-1		1		3	
$f'(x)$			$-$	0	$+$		
$f(x)$		$f(-1)$	↘	$f(1)$	↗	$f(3)$	

Từ BBT ta suy ra: $f(x)\ge f(1),\forall x\in[-1;3]$ (*)

+ Do $x\in[-1;3]$ nên: $-1\le x\le 3\Leftrightarrow-\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi x}{2}\le\frac{3\pi}{2}$

Suy ra: $-1\le\sin\frac{\pi x}{2}\le 1\Leftrightarrow -1\le-\sin\frac{\pi x}{2}\le 1$ (**)

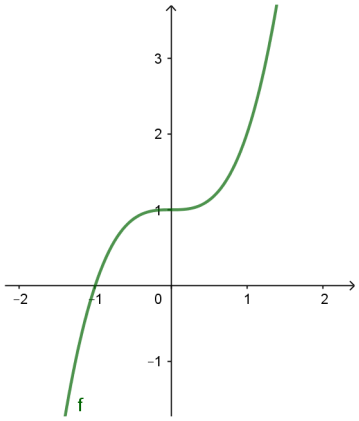
+ Từ (*) và (**) cho ta: $f(x)-\sin\frac{\pi x}{2}\ge f(1)-1,\forall x\in[-1;3]$. Dấu "=" xảy ra khi $x=1$

- Do đó: Bất phương trình $f(x)>\sin\frac{\pi x}{2}+m$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-1;3]$

$\Leftrightarrow m<f(1)-1$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 8: (Nguyễn Du số 1 lần3) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của n để phương trình sau có nghiệm $x\in\mathbb{R}$. $f\left(-16\sin^2 x+6\sin 2x+8\right)=f\left(n(n+1)\right)$



A. 10. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Nhìn vào đồ thị ta thấy hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó

$f\left(-16\sin^2 x+6\sin 2x+8\right)=f\left(n(n+1)\right)\Leftrightarrow -16\sin^2 x+6\sin 2x+8=n(n+1)$

Ta xét

$-16\sin^2 x+6\sin 2x+8=n(n+1)$

$\Leftrightarrow -8(1-\cos 2x)+6\sin 2x+8-n(n+1)=0$

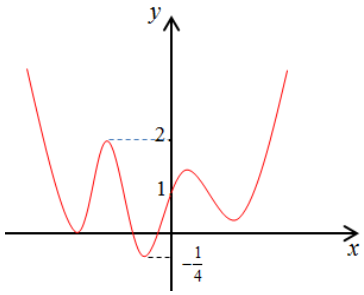
$\Leftrightarrow 8\cos 2x+6\sin 2x-n(n+1)=0$

Để phương trình có nghiệm $x\in\mathbb{R}$ thì $8^2+6^2\ge\left(n^2+n\right)^2\Leftrightarrow\left(n^2+n\right)^2\le 100\Leftrightarrow -10\le n^2+n\le 10$

$\Leftrightarrow n^2+n\le 10\Leftrightarrow\dfrac{-1-\sqrt{41}}{2}\le n\le\dfrac{-1+\sqrt{41}}{2}$ (do $n^2+n\ge -10,\forall n$).

Vì n nguyên nên $n\in\{-3;-2;-1;0;1;2\}$.

Câu 9: (THPT SỐ 1 TƯ NGHĨA LẦN 2 NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số nghiệm của phương trình $\dfrac{f^3(x)+3f^2(x)+4f(x)+2}{\sqrt{3f(x)+1}}=3f(x)+2$ là:

A. 6. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Đặt $t = f(x)$ đưa phương trình về hàm đặc trưng $(t+1)^3 + (t+1) = \left(\sqrt{3t+1}\right)^3 + \sqrt{3t+1}$.

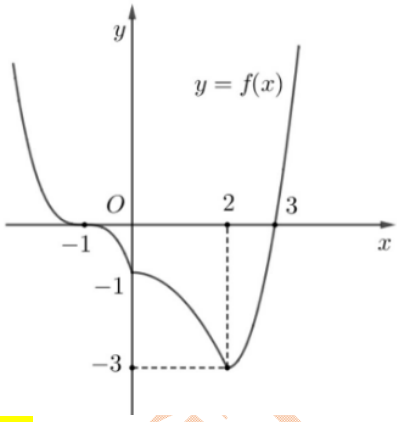
Xét hàm đặc trưng $f(x) = x^3 + x$ đồng biến R nên ta được $t+1 = \sqrt{3t+1} \Leftrightarrow t = 0; t = 1$.

Với $t = 0$ ta có $f(x) = 0$ từ đồ thị ta được số nghiệm là 3.

Với $t = 1$ ta có $f(x) = 1$ từ đồ thị ta được số nghiệm là 6.

Vậy phương trình có 9 nghiệm phân biệt.

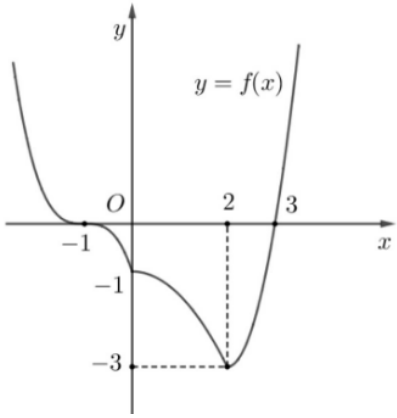
Câu 10: **(Đặng Thành Nam Đề 2)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $2f(x) + x^3 > 2m + 3x^2$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1;3)$ khi và chỉ khi



A. $m < -10$. **B.** $m < -5$. **C.** $m < -3$. **D.** $m < -2$.

Lời giải

Chọn B



$2f(x) + x^3 > 2m + 3x^2$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1;3)$

$\Leftrightarrow f(x) + \frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{2} > m,\ \forall x \in (-1;3) \Leftrightarrow m < \min\limits_{(-1;3)} g(x)$ (với $g(x) = f(x) + \frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{2}$)

Quan sát đồ thị, ta thấy $\min\limits_{(-1;3)} f(x) = f(2) = -3$ (1)

Xét hàm $h(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{2},\ \forall x \in (-1;3)$.

Ta có: $h'(x) = \frac{3x^2}{2} - 3x$

$h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

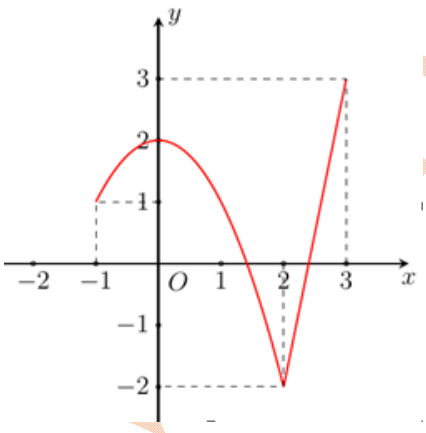
Bảng biến thiên:

x	-1		0		2		3
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	-2	↗	0	↘	-2	↗	0

Theo bảng biến thiên trên, ta suy ra $\min\limits_{(-1;3)}h(x)=h(2)=-2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\min\limits_{(-1;3)}g(x)=g(2)=-5$. Vậy $m<-5$ là giá trị thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 11: **(THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ sau:



Bất phương trình $f(x)+\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}\ge m$ có nghiệm thuộc $[-1;3]$ khi và chỉ khi

A. $m\le 7$. **B.** $m\ge 7$. **C.** $m\le 2\sqrt{2}-2$. **D.** $m\ge 2\sqrt{2}-2$.

Chọn A

Xét hàm số $g(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}$ liên tục trên $[-1;3]$ ta có:

$g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{7-x}},x\in(-1;3]$

$g'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{x+1}=\sqrt{7-x}\Leftrightarrow x+1=7-x\Leftrightarrow x=3$ (nhận)

$g(-1)=2,\ g(3)=4\Rightarrow\max\limits_{[-1;3]}g(x)=\max\{g(-1),g(3)\}=g(3)=4.\ (1)$

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta có: $\max\limits_{[-1;3]}f(x)=f(3)=3.\ (2)$

Đặt $h(x)=f(x)+g(x)$ trên $[-1;3]$, kết hợp với (1) và (2) ta suy ra:

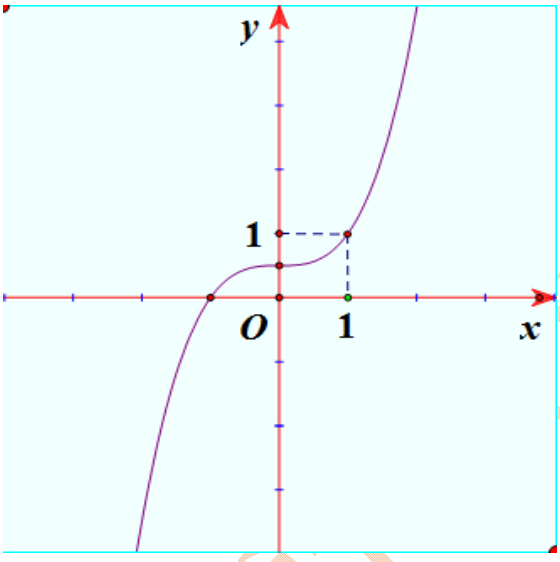
$h(x)\le\max\limits_{[-1;3]}f(x)+\max\limits_{[-1;3]}g(x)=f(3)+g(3)=7$, đẳng thức xảy ra khi $x=3$.

Vậy bất phương trình $m\le h(x)$ có nghiệm thuộc $[-1;3]$ khi và chỉ khi $m\le\max\limits_{[-1;3]}h(x)=7$.

Chú ý: cần phân biệt điều kiện để bất phương trình *"có nghiệm x"* với điều kiện bất phương trình *"thỏa với mọi x"* là khác nhau. Giả sử rằng tồn tại các giá trị $\max\limits_D h(x)$, $\min\limits_D h(x)$. Khi đó:

Câu 12: **(ĐỀ-THI-THU-ĐH-THPT-CHUYÊN-QUANG-TRUNG-L5-2019)** Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. gọi S là tập hợp các giá trị của $m\,(m\in\mathbb{R})$ sao cho $(x-1)\left[m^3 f(2x-1)-mf(x)+f(x)-1\right]\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}$. Số phần tử của tập S là?

A. 2. **B.** 0. **C.** 3 **D.** 1.



Lời giải

Chọn A

Cách 1

Xét $g(x)=(x-1)h(x)\ge 0$ với $\forall x$, với $h(x)=m^3 f(2x-1)-m.f(x)+f(x)-1$.

Do $\begin{cases} x-1>0\ \forall x>1\Rightarrow h(x)\ge 0\ \forall x>1 \\ x-1<0\ \forall x<1\Rightarrow h(x)\le 0\ \forall x<1 \end{cases}(*)\Rightarrow h(x)=0$ tại $x=1$

$\Rightarrow m^3 f(1)-mf(1)+f(1)-1=0\Rightarrow m^3-m=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\pm 1 \end{array}\right.$

+ Với $m=0\Rightarrow h(x)=f(1)-1$ thỏa mãn $(*)$ do hàm $f(x)$ đồng biến và $f(1)=1$.

+ Với $m=1\Rightarrow h(x)=f(2x-1)-1$ thỏa mãn $(*)$

Do $x>1$ thì $2x-1>1\Rightarrow f(2x-1)-1>0$ và $x<1$ thì $2x-1<1\Rightarrow f(2x-1)-1<0$.

+ Với $m=-1\Rightarrow h(x)=-f(2x-1)+2f(x)-1$.

Khi đó $h(x)$ là hàm số bậc ba có hệ số $a<0$ nên $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)<0$ không thỏa mãn $(*)$.

Vậy $m=0$ và $m=1$.

Cách 2

Từ đồ thị hàm số ta suy ra $\begin{cases} f(1)=1 \\ f(-1)=0 \\ f'(0)=0 \\ f(0)=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=0 \\ c=0 \\ d=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}$

Theo đề bài $f(1)=1 \Rightarrow m^3-m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \\ m=-1 \end{array}\right.$

Với $m=0$, ta có: $(x-1)(f(x)-1)=(x-1)\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}-1\right)$

$=\frac{1}{2}(x-1)(x^3-1)=\frac{1}{2}(x-1)^2(x^2-x+1)\geq 0 \ \forall x\in\mathbb{R}$ **(Nhận)**

Với $m=1$, ta có: $(x-1)\left[f(2x-1)-f(x)+f(x)-1\right]=(x-1)\left[\frac{1}{2}(2x-1)^3+\frac{1}{2}-1\right]$

$=\frac{1}{2}(x-1)(8x^3-12x^2+6x-1-1)=(x-1)(4x^3-6x^2+3x-1)$

$=(x-1)^2(4x^2-2x+1)\geq 0 \ \forall x\in\mathbb{R}$ **(Nhận)**

Với $m=-1$, ta có: $(x-1)\left[-f(2x-1)+f(x)+f(x)-1\right]=(x-1)\left[-\frac{1}{2}(2x-1)^3-\frac{1}{2}+x^3\right]$

$(x-1)(-x^3+6x^2-3x)\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 1 \\ x\leq 0 \end{array}\right.$ **(Loại)**

Vậy $m=0$ và $m=1$.

Cách 3

Để $(x-1)\left[m^3f(2x-1)-mf(x)+f(x)-1\right]\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ thì $\left[m^3f(2x-1)-mf(x)+f(x)-1\right]$ nhận $x=1$ là nghiệm bội lẻ duy nhất và khi qua $x=1$ ($\left[m^3f(2x-1)-mf(x)+f(x)-1\right]$ đổi dấu từ $-$ sang $+$). Khi đó: $m^3-m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\pm 1 \end{array}\right.$.

+ Thử lại, ta thấy với $m=0$ thỏa.

+ Với $m=1$, ta có: $\left[m^3f(2x-1)-mf(x)+f(x)-1\right]=f(2x-1)-1$ là một hàm số bậc ba có hệ số bậc cao nhất dương.

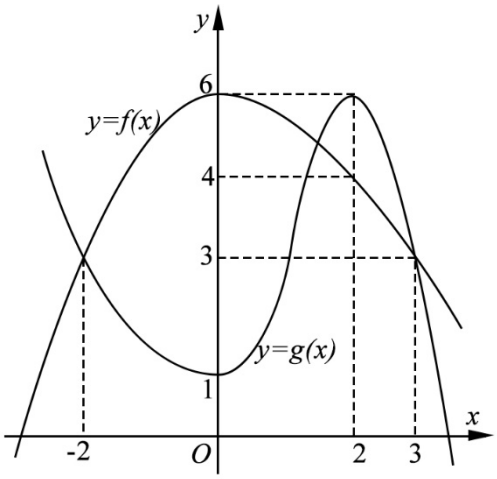
Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(2x-1)-1\right]=+\infty, \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(2x-1)-1\right]=-\infty$ nên khi qua $x=1$ hàm số sẽ đổi dấu từ $-$ sang $+$ thỏa mãn.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

+ Với $m=-1$, ta có: $\left[m^3 f\left(2x-1\right)-mf\left(x\right)+f\left(x\right)-1\right]=-f\left(2x-1\right)+2f\left(x\right)-1$ là một hàm số bậc ba có hệ số bậc cao nhất âm.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f\left(2x-1\right)-1\right]=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f\left(2x-1\right)-1\right]=+\infty$ nên khi qua $x=1$ hàm số sẽ đổi dấu từ $+$ sang $-$ không thỏa mãn.

Câu 13: (NGÔ SĨ LIÊN BẮC GIANG LẦN IV NĂM 2019) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ và hàm số $y=g\left(x\right)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=m$ có nghiệm thuộc $\left[-2;3\right]$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $h\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$. Dựa vào đồ thị, ta thấy các hàm số $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $\left[-2;3\right]$, do đó $h\left(x\right)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $\left[-2;3\right]$.

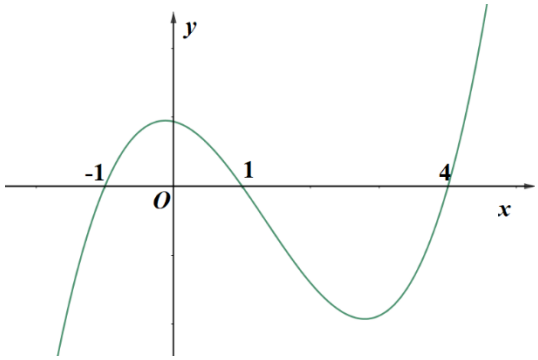
Ngoài ra với $x\in\left[-2;3\right]$, dễ thấy $f\left(x\right)\le 6$, $g\left(x\right)\ge 1$ nên $h\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\le 6$, mà $h\left(0\right)=\dfrac{f\left(0\right)}{g\left(0\right)}=\dfrac{6}{1}=6$ nên $\max\limits_{\left[-2;3\right]}h\left(x\right)=6$ (1).

Lại có $h\left(x\right)>0$ với mọi $x\in\left[-2;3\right]$ và $h\left(-2\right)=1$ nên $0<\min\limits_{\left[-2;3\right]}h\left(x\right)\le 1$ (2).

Phương trình $\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=m$ có nghiệm trên $\left[-2;3\right]$ khi và chỉ khi $\min\limits_{\left[-2;3\right]}h\left(x\right)\le m\le\max\limits_{\left[-2;3\right]}h\left(x\right)$ (3).

Từ $\left(1\right)$, $\left(2\right)$ và $\left(3\right)$, kết hợp với $m\in\mathbb{Z}$, ta có $m\in\left\{1;2;3;4;5;6\right\}$.

Câu 14: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐĂK LĂK LẦN X NĂM 2019) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Bất phương trình $f\left(1-x\right)<e^{x^2}+m$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left(-1;1\right)$ khi và chỉ khi



A. $m \ge f(1)-1$. **B.** $m \ge f(1)-e^2$. **C.** $m > f(-1)-e^2$. **D.** $m > f(1)-1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(1-x) < e^{x^2}+m$ đúng với mọi $x \in (-1;1)$ tương đương với $m > f(1-x)-e^{x^2}$ đúng với mọi $x \in (-1;1)$. Xét $g(x) = f(1-x)-e^{x^2}$ với $x \in (-1;1)$.

Ta có $g'(x) = -f'(1-x)-2x.e^{x^2} = -\left(f'(1-x)+2xe^{x}\right)$.

Nhận xét:

+) Với $-1 < x < 0$ thì $1 < 1-x < 2$ nên $f'(1-x) < 0$ và $xe^{x^2} < 0$ suy ra $g'(x) > 0$.

+) Với $0 < x < 1$ thì $0 < 1-x < 1$ nên $f'(1-x) > 0$ và $xe^{x^2} > 0$ suy ra $g'(x) < 0$.

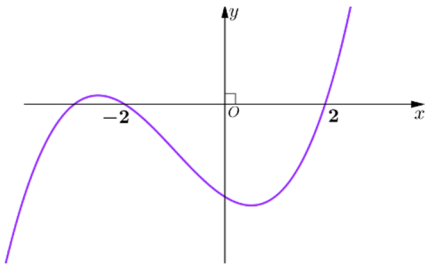
+) Với $x = 0$ thì $1-x = 1$ nên $f'(1-x) = 0$ và $xe^{x^2} = 0$ suy ra $g'(x) = 0$.

Bảng biến thiên

x	-1		0		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$f(2)-e$	↗	$f(1)-1$	↘	$f(0)-e$

Để $m > f(1-x)-e^{x^2}$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1;1)$ suy ra $m > f(1)-1$.

Câu 15: **(Chuyên Sơn La Lần 3 năm 2018-2019)** Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như sau:



Bất phương trình $f(x)>x^2-2x+m$ đúng với mọi $x\in(1;2)$ khi và chỉ khi

A. $m\le f(2)$. **B.** $m<f(1)-1$. **C.** $m\ge f(2)-1$. **D.** $m\ge f(1)+1$.

Lời giải

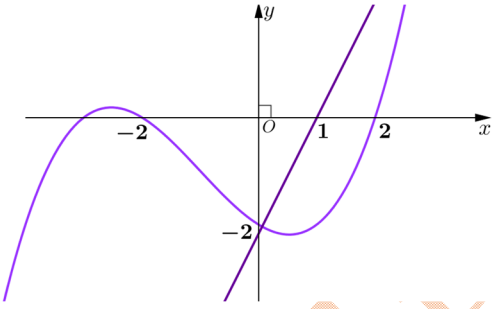
Chọn A

Ta có $f(x)>x^2-2x+m,\ \forall x\in(1;2)\Leftrightarrow f(x)-x^2+2x>m,\ \forall x\in(1;2)$.

Xét hàm số $g(x)=f(x)-x^2+2x,\ x\in[1;2]$

Ta có $g'(x)=f'(x)-2x+2=f'(x)-(2x-2)$

Vẽ đường thẳng $y=2x-2$



Ta thấy $f'(x)<2x-2,\ \forall x\in(1;2)$ do đó $g'(x)<0,\forall x\in(1;2)$ suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

Vậy $m<g(x),\ \forall x\in(1;2)\Leftrightarrow m\le g(2)=f(2)-2^2+2.2=f(2)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

DẠNG 4: GẢI VÀ BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ.

A – LÝ THUYẾT CHUNG

1 - Đối với phương trình chứa tham số

Xét phương trình $f(x,m) = g(m)$, (1)

B1: Lập luận số nghiệm phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị (C): $y = f(x,m)$ và đường thẳng d: $y = g(m)$.

B2: Lập bảng biến thiên cho hàm số $y = f(x,m)$

B3: Kết luận: * phương trình có nghiệm: $\min\limits_{x\in D} f(x,m) \le g(m) \le \max\limits_{x\in D} f(x,m)$.

* phương trình có k nghiệm: d cắt (C) tại k điểm.

* phương trình vô nghiệm khi: d không cắt (C).

2 - Đối với bất phương trình chứa tham số

$f(x) \le g(m)$ với mọi $x \in D \Leftrightarrow g(m) \ge \max\limits_{x\in D} f(x)$

$f(x) \le g(m)$ có nghiệm khi và chỉ khi $g(m) \ge \min\limits_{x\in D} f(x)$

$f(x) \ge g(m)$ với mọi $x \in D \Leftrightarrow g(m) \le \min\limits_{x\in D} f(x)$

$f(x) \ge g(m)$ có nghiệm khi và chỉ khi $g(m) \le \max\limits_{x\in D} f(x)$

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tập tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $m\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+3\right)+2\sqrt{1-x^2}-5=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt là một nửa khoảng $(a;b]$. Tính $b-\frac{5}{7}a$.

A. $\frac{6-5\sqrt{2}}{35}$. **B.** $\frac{6-5\sqrt{2}}{7}$. **C.** $\frac{12-5\sqrt{2}}{35}$. **D.** $\frac{12-5\sqrt{2}}{7}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ với $-1\le x\le 1$. Khi đó: $t^2=2+2\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow 2\sqrt{1-x^2}=t^2-2$.

$\Rightarrow t'=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}=0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x}=\sqrt{1+x} \Leftrightarrow x=0$.

x	-1		0		1
t'		$+$	0	$-$	
t	$\sqrt{2}$	↗	2	↘	$\sqrt{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\sqrt{2} \le t \le 2$.

Ta có phương trình: $m(t+3)+t^2-7=0 \Leftrightarrow m=\frac{-t^2+7}{t+3}$.

Xét hàm số: $f(t)=\frac{-t^2+7}{t+3}, t\in\left[\sqrt{2};2\right] \Rightarrow f'(t)=\frac{-t^2-6t-7}{(t+3)^2}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$f'(t)=0 \Leftrightarrow t=-3\pm\sqrt{2} \notin \left[\sqrt{2};2\right]$.

Ta có bảng biến thiên:

t	$\sqrt{2}$		2
$f'(t)$	0	$-$	
$f(t)$	$\frac{5\left(3-\sqrt{2}\right)}{7}$	$\searrow$	$\frac{3}{5}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt thì $\sqrt{2}\le t\le 2$.

Khi đó $\frac{3}{5}< f(t)\le\frac{5\left(3-\sqrt{2}\right)}{7}$ hay $\frac{3}{5}< m\le\frac{5\left(3-\sqrt{2}\right)}{7}$

$\Rightarrow a=\frac{3}{5},\ b=\frac{5\left(3-\sqrt{2}\right)}{7}\Rightarrow b-\frac{5}{7}a=\frac{12-5\sqrt{2}}{7}$.

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $m\sqrt{2+\tan^2 x}=m+\tan x$ có ít nhất một nghiệm thực.

A. $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$. **B.** $-1<m<1$. **C.** $-\sqrt{2}\le m\le\sqrt{2}$. **D.** $-1<m<1$.

Lời giải

Chọn C

$pt\Leftrightarrow m=\frac{\tan x}{\sqrt{2+\tan^2 x}-1}$

Đặt $\tan x=t\Rightarrow m=\frac{t}{\sqrt{2+t^2}-1}$

Xét hàm số $f(t)=\frac{t}{\sqrt{2+t^2}-1}\Rightarrow f'(t)=\frac{2-\sqrt{2+t^2}}{\sqrt{2+t^2}.\left(\sqrt{2+t^2}-1\right)^2}=0\Leftrightarrow t=\pm\sqrt{2}$

Lập BBT với $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=1,\lim\limits_{t\to-\infty}f(t)=-1,f\left(-\sqrt{2}\right)=\sqrt{2},f\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}\Rightarrow m\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Câu 3: Phương trình $x^3+x(x+1)=m\left(x^2+1\right)^2$ có nghiệm thực khi và chỉ khi:

A. $-6\le m\le-\frac{3}{2}$. **B.** $-1\le m\le 3$. **C.** $m\ge 3$. **D.** $-\frac{1}{4}\le m\le\frac{3}{4}$.

Lời giải

Sử dụng máy tính bỏ túi.

$x^3+x(x+1)=m\left(x^2+1\right)^2\Leftrightarrow mx^4-x^3+(2m-1)x^2-x+m=0$

Chọn $m=3$ phương trình trở thành $3x^4-x^3+5x^2-x+3=0$ (không có nghiệm thực) nên loại đáp án B, **C.**

Chọn $m=-6$ phương trình trở thành $-6x^4-x^3-13x^2-x-6=0$ (không có nghiệm thực) nên loại đáp án **A.**

Kiểm tra với $m=0$ phương trình trở thành $-x^3-x^2-x=0\Leftrightarrow x=0$ nên chọn đáp án **D.**

Tự luận

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta có $x^3+x(x+1)=m(x^2+1)^2 \Leftrightarrow m=\dfrac{x^3+x^2+x}{x^4+2x^2+1}$ (1)

Xét hàm số $y=\dfrac{x^3+x^2+x}{x^4+2x^2+1}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

$$y'=\frac{(x^3+x^2+x)'(x^4+2x^2+1)-(x^3+x^2+x)(x^4+2x^2+1)'}{(x^4+2x^2+1)^2}$$

$$=\frac{(3x^2+2x+1)(x^4+2x^2+1)-(x^3+x^2+x)(4x^3+4x)}{(x^4+2x^2+1)^2}$$

$$=\frac{-x^6-2x^5-x^4+x^2+2x+1}{(x^4+2x^2+1)^2}$$

$$=\frac{(-x^4+1)(x^2+2x+1)}{(x^4+2x^2+1)^2}$$

$$y'=0\Leftrightarrow(-x^4+1)(x^2+2x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$-\frac{3}{4}$	↘	0

Phương trình (1) có nghiệm thực khi đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3+x^2+x}{x^4+2x^2+1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{-1}{4}\le m\le\dfrac{3}{4}$.

Chọn D

Câu 4: Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sqrt{2-x}+\sqrt{1-x}=\sqrt{m+x-x^2}$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $m\in\left[5;\dfrac{23}{4}\right]$. **B.** $m\in[5;6]$. **C.** $m\in\left(5;\dfrac{23}{4}\right)\cup\{6\}$. **D.** $m\in\left[5;\dfrac{23}{4}\right)\cup\{6\}$.

Lời giải

+) $\sqrt{2-x}+\sqrt{1-x}=\sqrt{m+x-x^2}$ (1)

Điều kiện: $-1\le x\le 2$

+) $(1)\Leftrightarrow 3+2\sqrt{-x^2+x+2}=-x^2+x+m$

Đặt: $-x^2+x=t$; $f(x)=-x^2+x$; $f'(x)=-2x+1$

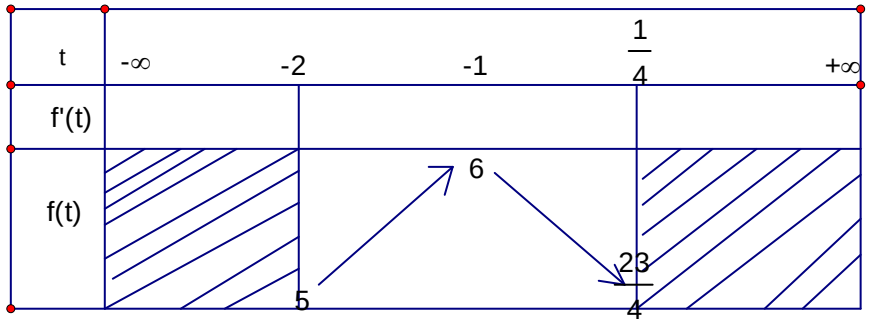
$f(-1)=2, f(2)=-2, f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}\Rightarrow t\in\left[-2;\dfrac{1}{4}\right]$

$(1)\Leftrightarrow 3+2\sqrt{t+2}=t+m\Leftrightarrow 2\sqrt{t+2}=t+m-3\Leftrightarrow m=2\sqrt{t+2}+3-t$

Đặt $f(t)=2\sqrt{t+2}+3-t$

$f'(t)=\frac{1}{\sqrt{t+2}}-1=\frac{1-\sqrt{t-2}}{\sqrt{t-2}}.\ f'(t)=0\Rightarrow 1-\sqrt{t-2}=0\Leftrightarrow t=-1$

Bảng biến thiên



+) $-x^2+x=t\Leftrightarrow -x^2+x-t=0$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta=1-4t>0\Leftrightarrow t\le\frac{1}{4}$

Do đó để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì phương trình $(*)$ có nghiệm $t\in\left[-2;\frac{1}{4}\right]$

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow m\in[5;6]$.

Chọn B

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình: $m\sqrt{x^2-2x+2}+m+2x-x^2\le 0$ có nghiệm $x\in\left[0;1+\sqrt{3}\right]$.

A. $m\le\frac{2}{3}$. **B.** $m\le -1$. **C.** $m\ge\frac{2}{3}$. **D.** $m\le 0$.

Lời giải

Bpt $\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2-2x+2}+1\right)+x(2-x)\le 0\Leftrightarrow m\le\frac{x^2-2x}{\sqrt{x^2-2x+2}+1},(1)$

Đặt $t=\sqrt{x^2-2x+2}\Rightarrow x^2-2x=t^2-2$.

Ta xác đinhk ĐK của t:

Xét hàm số $t=\sqrt{x^2-2x+2}$ với $x\in\left[0;1+\sqrt{3}\right]$, ta đi tìm ĐK ràng buộc của t.

Ta có: $t'=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}},t'=0\Leftrightarrow x=1$.

Vậy với $x\in\left[0;1+\sqrt{3}\right]$ thì $1\le t\le 2$.

Khi đó: $(1)\Leftrightarrow m\le\frac{t^2-2}{t+1}$ với $t\in[1;2]$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2-2}{t+1}$ với $t\in[1;2]$. Ta có: $f'(t)=\frac{t^2+2t+2}{(t+2)^2}>0,\forall x\in[1;2]$. Vậy hàm số f tăng trên [1;2].

Do đó, yêu cầu của bài toán trở thành tìm m để (1) có nghiệm $t\in[1;2]$

$\Leftrightarrow m\le\max\limits_{t\in[1;2]}f(t)=f(2)=\frac{2}{3}$.

Vậy $m\le\frac{2}{3}$ thì pt có nghiệm.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Chọn A

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\sqrt{x^2-4x+5}=m+4x-x^2$ có đúng 2 nghiệm dương?

A. $1\le m\le 3$. **B.** $-3<m<\sqrt{5}$. **C.** $-\sqrt{5}<m<3$. **D.** $-3\le m<3$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}$. Ta có $f'(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$. $f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$

Xét $x>0$ ta có bảng biến thiên

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\sqrt{5}$	↘	1	↗	$+\infty$

Khi đó phương trình đã cho trở thành $m=t^2+t-5\Leftrightarrow t^2+t-5-m=0$ (1).

Nếu phương trình (1) có nghiệm t_1,t_2 thì $t_1+t_2=-1$. (1) có nhiều nhất 1 nghiệm $t\ge 1$.

Vậy phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm dương khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 1 nghiệm $t\in\left(1;\sqrt{5}\right)$. Đặt $g(t)=t^2+t-5$. Ta đi tìm m để phương trình $g(t)=m$ có đúng 1 nghiệm $t\in\left(1;\sqrt{5}\right)$. Ta có $g'(t)=2t+1>0,\forall t\in\left(1;\sqrt{5}\right)$.

Bảng biến thiên:

t	1		$\sqrt{5}$
$g'(t)$		$+$	
$g(t)$	-3	↗	$\sqrt{5}$

Từ bảng biến thiên suy ra $-3<m<\sqrt{5}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình:

$m\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}+2\right)=2\sqrt{1-x^4}+\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$ có nghiệm.

A. $m\le\sqrt{2}-1$. **B.** $\sqrt{2}-1\le m\le 1$. **C.** $m\ge 1$. **D.** $m\le 1$.

Lời giải

ĐK: $x\in[-1;1]$.

Đặt $t=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$. Với $x\in[-1;1]$, ta xác định ĐK của t như sau:

Xét hàm số $t=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$ với $x\in[-1;1]$.

Ta có:

$$t'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{x\left(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1-x^4}},\text{ cho } t'=0\Leftrightarrow x=0$$

Ta có $t(-1)=\sqrt{2},t(0)=0,t(1)=\sqrt{2}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vậy với $x\in[-1;1]$ thì $t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$

Từ $t=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\Rightarrow 2\sqrt{1-x^4}=2-t^2$.

Khi đó pt đã cho tương đương với: $m(t+2)=-t^2+t+2\Leftrightarrow\dfrac{-t^2+t+2}{t+2}$

Bài toán trở thành tìm m để phương trình $\dfrac{-t^2+t+2}{t+2}=m$ có nghiệm $t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{-t^2+t+2}{t+2}$ với $t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{-t^2-4t}{(t+2)^2}<0,\forall t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$

Suy ra: $\max\limits_{t\in\left[0;\sqrt{2}\right]}f(t)=f(0)=1,\ \min\limits_{t\in\left[0;\sqrt{2}\right]}f(t)=f\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}-1$.

Bây giờ yêu cầu bài toán xảy ra khi: $\min\limits_{t\in\left[0;\sqrt{2}\right]}f(t)\le m\le\max\limits_{t\in\left[0;\sqrt{2}\right]}f(t)\Leftrightarrow\sqrt{2}-1\le m\le 1$

Vậy với $\sqrt{2}-1\le m\le 1$ thảo yêu cầu bài toán.

Chọn B

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình:

$3\sqrt{x-1}+m\sqrt{x+1}=2\sqrt[4]{x^2-1}\ (1)$ có nghiệm.

A. $m\le\sqrt{2}-1$. **B.** $\sqrt{2}-1\le m\le 1$. **C.** $-1<m\le\dfrac{1}{3}$. **D.** $m\le -1$.

Lời giải

ĐK xác định của phương trình: $x\ge 1$.

Khi đó:

$$(1)\Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+m=2\sqrt[4]{\frac{x^2-1}{(x+1)^2}}\Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+m=2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}\ \ (2)$$

Đặt $t=2\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}\ ,(t\ge 0)$. Vì $\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}=\sqrt[4]{1-\dfrac{2}{x+1}}<1$ nên t<1.

Vậy với $x\ge 1$ thì $0\le t<1$

Khi đó, $(2)\Leftrightarrow 3t^2+m=2t\Leftrightarrow -3t^2+2t=m,(3)$.

Bây giờ bài toán trở thành tìm m để (3) có nghiệm $t\in[0;1)$.

Xét hàm số $f(t)=-3t^2+2t$ trên khoảng $[0;1)$. Ta có:

$f'(t)=-6t+2,\ f'(t)=0\Leftrightarrow -6t+2=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}$.

BBT

t	0		$\frac{1}{3}$		1
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$	0	↗	$\frac{1}{3}$	↘	−1

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vậy với $-1<m\le\frac{1}{3}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn C

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số *m* sao cho bất phương trình: $\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

A. $m\le 9$. **B.** $m\ge\frac{9}{2}$. **C.** $-1<m$. **D.** $m\le 7$.

Lời giải

Ta có: $\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1\ (1)\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-\frac{1}{2}\\3x^2+4x-1=mx\ (2)\end{cases}(*)$

Nhận xét:

$x=0$ không phải là nghiệm của (2). Do vậy, ta tiếp tục biến đổi: $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-\frac{1}{2}\\\frac{3x^2+4x-1}{x}=m\ (3)\end{cases}$

Bài toán trở thành tìm m để (3) có 2 nghiệm thực phân biệt:

$x\in\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)\setminus\{0\}$.

Xét hàm số $f(x)=\frac{3x^2+4x-1}{x}$ với $x\in\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)\setminus\{0\}$. Ta có:

$f'(x)=\frac{3x^2+1}{x^2}>0,\forall x\in\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)\setminus\{0\}$

BBT

X	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$	+			+	
$f(x)$	$\frac{9}{2}$ ↗ $+\infty$			$-\infty$ ↗ $+\infty$	

Vậy với $m\ge\frac{9}{2}$ thì phương trình đã cho có 2 nghiệm thực phân biệt.

Chọn B

Câu 10: Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có đúng hai nghiệm thực phân biệt $\sqrt[4]{2x}+\sqrt{2x}+2\sqrt[4]{6-x}+2\sqrt{6-x}=m,(m\in\mathbb{R})$

A. $2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}\le m\le 3\sqrt{2}+6$ **B.** $2\sqrt{6}+3\sqrt[4]{6}\le m\le 3\sqrt{2}+8$

C. $\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}\le m\le 3\sqrt{2}+6$ **D.** $\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}\le m\le 3\sqrt{2}+6$

Chọn A

ĐK: $0\le x\le 6$

Đặt vế trái của phương trình là $f(x),x\in[0;6]$.

Ta có:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt[4]{(2x)^3}}+\frac{1}{\sqrt{2x}}-\frac{1}{2\sqrt[4]{(6-x)^3}}-\frac{1}{\sqrt{6-x}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{(2x)^3}}-\frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}--\frac{1}{\sqrt{6-x}}\right),x\in(0;6)$$

Đặt:

$$u(x)=\left(\frac{1}{\sqrt[4]{(2x)^3}}-\frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}}\right),v(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}--\frac{1}{\sqrt{6-x}}\right),x\in(0;6)$$

Ta thấy $u(2)=v(2)=0,x\in(0;6)\Rightarrow f'(2)=0$. Hơn nữa $u(x),v(x)$ cùng dương trên khoảng (0;2) và cùng âm trên khoảng (2;6).

BBT

X	0		2		6
$f'(x)$	‖	+	0	−	‖
$f(x)$	$2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}$	↗	$3\sqrt{2}+6$	↘	$\sqrt[4]{12}+2\sqrt{3}$

Vậy với $2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}\le m\le 3\sqrt{2}+6$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn A

Câu 11: Tìm m để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$

$$\sin^4x+\cos^4x+\cos^2 4x=m.$$

A. $m\le\frac{47}{64};\frac{3}{2}\le m$ **B.** $\frac{49}{64}<m\le\frac{3}{2}$ **C.** $\frac{47}{64}<m\le\frac{3}{2}$ **D.** $\frac{47}{64}\le m\le\frac{3}{2}$

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương

$$\frac{3+\cos 4x}{4}+\cos^2 4x=m$$

$\Leftrightarrow 4\cos^2 4x+\cos 4x=4m-3$ (1)

Đặt $t=\cos 4x$. Phương trình trở thành: $4t^2+t=4m-3$, (2)

Với $x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ thì $t\in[-1;1]$.

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ khi và chỉ khi phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt $t\in[-1;1)$, (3)

Xét hàm số $g(t)=4t^2+t$ với $t\in[-1;1)$, $g'(t)=8t+1$.

$g'(t)=0\Leftrightarrow t=-\frac{1}{8}$

Lập bảng biến thiên

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

t	-1		$-\frac{1}{8}$		1
g'(t)		$-$	0	$+$	
g(t)	3	↘	$-\frac{1}{16}$	↗	5

Dựa vào bảng biến thiên suy ra (3) xảy ra $\Leftrightarrow -\frac{1}{16} < 4m-3 \le 3 \Leftrightarrow \frac{47}{64} < m \le \frac{3}{2}$

Vậy giá trị của m phải tìm là: $\frac{47}{64} < m \le \frac{3}{2}$.

Câu 12: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m thuộc $[10;10]$ để phương trình $\sqrt{1-x^2} - m\left(2\sqrt{1+x}+2\sqrt{1-x}-3\right)+1=0$ có nghiệm?

A. 12 **B.** 13 **C.** 8 **D.** 9

Lời giải

ĐK: $-1 \le x \le 1$. Đặt $u = \sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}$

$\Rightarrow u' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}; u' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	-1		0		1
u'		$+$	0	$-$	
u	$\sqrt{2}$	↗	2	↘	$\sqrt{2}$

Từ BBT $\Rightarrow \sqrt{2} \le t \le 2$

PT có dạng: $\frac{t^2}{2} - m(2t-3) = 0 \Leftrightarrow t^2 = 2m(2t-3)(*)$

Do $t = \frac{2}{3}$ không là nghiệm nên $(*) \Leftrightarrow 2m = \frac{t^2}{2t-3} = f(t)$

PT đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ Đồ thị h/s $y = f(t)$ và đt $y = 2m$ có điểm chung có hoành độ $\sqrt{2} \le t \le 2$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2}{2t-3}$ trên $\left[\sqrt{2};2\right]$: $f'(t) = \frac{2t(t-3)}{(2t-3)^2} < 0 \; \forall t \in \left[\sqrt{2};2\right]$

BBT:

t	$\sqrt{2}$		$\frac{3}{2}$		2
f'(t)		$-$	‖	$-$	
f(t)	$-2\left(2\sqrt{2}+3\right)$	↘	$+\infty$ / $-\infty$	↘	4

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m \le -2\left(2\sqrt{2}+3\right) \\ 2m \ge 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -\left(2\sqrt{2}+3\right) \\ m \ge 2 \end{array}\right.$. Đáp án **A.**

Câu 13: Tìm m để phương trình $x^4 - (2m+3)x^2 + m + 5 = 0$ có 4 nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 thoả mãn:

$-2 < x_1 < -1 < x_2 < 0 < x_3 < 1 < x_4 < 3$

A. Không có m **B.** $m = 1$ **C.** $m = 4$ **D.** $m = 3$

Lời giải

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Đặt $x^2 = X$, ta có phương trình: $f(X) = X^2 - (2m+3).X + m + 5 = 0^{(*)}$

để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ thì phương trình (*) có hai nghiệm thoả mãn: $0 < X_1 < X_2$. Khi đó $x_1 = -\sqrt{X_2}; x_2 = -\sqrt{X_1}; x_3 = \sqrt{X_1}; x_4 = \sqrt{X_2}$

Do đó: $-2 < -\sqrt{X_2} < -1 < -\sqrt{X_1} < 0 < \sqrt{X_1} < 1 < \sqrt{X_2} < 3$

$\Leftrightarrow 2 > \sqrt{X_2} > 1 > \sqrt{X_1} > 0 \Leftrightarrow 4 > X_2 > 1 > X_1 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} af(1) < 0 \\ af(0) > 0 \\ af(4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m+3 < 0 \\ m+5 > 0 \\ -7m+9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m > -5 \\ m < \dfrac{9}{7} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ không tồn tại m thoả mãn bài toán.

Chọn A

Câu 14: Cho phương trình $2m^2x^3 + 8x + \sqrt{x^3 + x + 2} = 2m^2 + 10$ (m là tham số). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Phương trình đã cho vô nghiệm.

B. Phương trình đã cho có đúng một nghiệm thực.

C. Phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt.

D. Số nghiệm của phương trình phụ thuộc vào giá trị của tham số m.

Lời giải

Điều kiện: $x^3 + x + 2 \ge 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 2) \ge 0 \Leftrightarrow x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -1$.

Xét hàm số $f(x) = 2m^2x^3 + 8x + \sqrt{x^3 + x + 2}$ liên tục trên $[-1; +\infty)$.

Ta có $f'(x) = 6m^2x^2 + 8 + \dfrac{3x^2 + 1}{2\sqrt{x^3 + x + 2}} > 0$ với $\forall x \in (-1; +\infty)$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[-1; +\infty)$.

Do đó, phương trình $f(x) = 2m^2x^3 + 8x + \sqrt{x^3 + x + 2} = 2m^2 + 10$ có tối đa một nghiệm.

Mà $f(1) = 2m^2.1^3 + 8.1 + \sqrt{1^3 + 1 + 2} = 2m^2 + 10 \longrightarrow x = 1$ là nghiệm duy nhất.

Chọn B

Câu 15: Tìm tham số thực m để bất phương trình: $\sqrt{x^2 - 4x + 5} \ge x^2 - 4x + m \ (1)$ có nghiệm thực trong đoạn $[2; 3]$.

A. $m < -1$ **B.** $m \le -1$ **C.** $m \le -\dfrac{1}{2}$ **D.** $m < -\dfrac{1}{2}$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 4x + 5} \ge 1 \Rightarrow x^2 - 4x = t^2 - 5$.

Khi đó: $(1) \Leftrightarrow t \ge t^2 - 5 + m \Leftrightarrow m \le -t^2 + t + 5 = g(t), \ t \in [1; +\infty)$.

Ta có: $g'(t) = -2t + 1$. *Cho* $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$g'(t)$	$+$ 0 $-$	$-$	$-$
$g(t)$		3 $\searrow$ -1	

Dựa vào bảng biến thiên, $m \le -1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 16: Tìm m để bpt sau có tập nghiệm là $(-\infty;+\infty)$: $(x+1)(x+3)+m>5\sqrt{x^2+4x+29}$

A. $m<26$. **B.** $m\ge 26$. **C.** $m\ge -\dfrac{129}{4}$. **D.** $m\le -\dfrac{129}{4}$.

Lời giải

$(x+1)(x+3)+m>5\sqrt{x^2+4x+29} \Leftrightarrow m>-x^2-4x-3+5\sqrt{x^2+4x+29} \Leftrightarrow m>-t^2+5t+26$

Với $t=\sqrt{x^2+4x+29}, t=\sqrt{(x+2)^2+25}\ge 5$

BPT $(x+1)(x+3)+m>5\sqrt{x^2+4x+29}$ có nghiệm là $(-\infty;+\infty) \Leftrightarrow m\ge \max\limits_{[5;+\infty)} f(t)$ với $f(t)=-t^2+5t+26$

Do $f(t)=-t^2+5t+26=t(5-t)+26\le 26$ với $t\ge 5$ nên $\max\limits_{[5;+\infty)} f(t)=26$

Chọn B

Câu 17: **(SGD Hưng Yên - 2019)** Có bao nhiêu giá trị âm của tham số m để phương trình $\sqrt{2019m+\sqrt{2019m+x^2}}=x^2$ có hai nghiệm thực phân biệt ?

A. 1. **B.** 0. **C.** Vô số. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $2019m+x^2\ge 0$.

Phương trình $\sqrt{2019m+\sqrt{2019m+x^2}}=x^2 \Leftrightarrow 2019m+\sqrt{2019m+x^2}=x^4$

$\Leftrightarrow 2019m+x^2+\sqrt{2019m+x^2}=x^4+x^2$ (1).

Xét hàm số $f(t)=t^2+t$ trên $[0;+\infty)$, ta có $f'(t)=2t+1>0, \forall t\ge 0 \Rightarrow f(t)$ luôn đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow f\left(\sqrt{2019m+x^2}\right)=f\left(x^2\right) \Leftrightarrow \sqrt{2019m+x^2}=x^2 \Leftrightarrow 2019m=x^4-x^2$.

Xét hàm số $g(x)=x^4-x^2$ có $g'(x)=4x^3-2x$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có 2 nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2019m=-\dfrac{1}{4} \\ 2019m>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-\dfrac{1}{8076} \\ m>0 \end{array}\right.$.

Vì m âm nên $m=-\dfrac{1}{8076}$. Vậy có 1 giá trị cần tìm.

Câu 18: **(2D1-4)** Cho phương trình $\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\left(m\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+16\sqrt[4]{x^2-x}\right)=1$, với m là tham số thực. Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt.

A. 11. **B.** 9. **C.** 20. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x>1$.

Ta có $\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\left(m\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+16\sqrt[4]{x^2-x}\right)=1$

$\Leftrightarrow m\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+16\sqrt[4]{x^2-x}=\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow m+\dfrac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}+16\dfrac{\sqrt[4]{x^2-x}}{\sqrt{x}}=1-\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow m=-16\dfrac{\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[4]{x}}-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}+1 \quad (1)$.

Đặt $t=\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x}}$, khi $x>1$ ta có $0<t<1$.

Xét hàm số $f(t)=-16t-\dfrac{1}{t^2}+1$ trên khoảng $(0;1)$ ta có $f'(t)=-16+\dfrac{2}{t^3}$; $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

t	0		$\dfrac{1}{2}$		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\infty$	↗	-11	↘	-16

Từ đó ta thấy, phương trình (1) có hai nghiệm thực phân biệt khi $-16<m<-11$.

Do đó có 4 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 19: **(THPT Chuyên Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018)** Cho phương trình:

$$\sin x\left(2-\cos 2x\right)-2\left(2\cos^3 x+m+1\right)\sqrt{2\cos^3 x+m+2}=3\sqrt{2\cos^3 x+m+2}.$$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình trên có đúng 1 nghiệm $x\in\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right)$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\sin x\left(2-\cos 2x\right)-2\left(2\cos^3 x+m+1\right)\sqrt{2\cos^3 x+m+2}=3\sqrt{2\cos^3 x+m+2}$

$\Leftrightarrow \sin x\left(1+2\sin^2 x\right)=2\left(2\cos^3 x+m+2\right)\sqrt{2\cos^3 x+m+2}+\sqrt{2\cos^3 x+m+2}$

$\Leftrightarrow 2\sin^3 x+\sin x=2\left(\sqrt{2\cos^3 x+m+2}\right)^3+\sqrt{2\cos^3 x+m+2}\ \ (1)$

Xét hàm số $f(t)=2t^3+t$ có $f'(t)=6t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$, nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bởi vậy:

$(1)\Leftrightarrow f(\sin x)=f\left(\sqrt{2\cos^3 x+m+2}\right)\Leftrightarrow \sin x=\sqrt{2\cos^3 x+m+2}\qquad (2)$

Với $x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right)$ thì

$(2)\Leftrightarrow \sin^2 x=2\cos^3 x+m+2$

$\Leftrightarrow -2\cos^3 x-\cos^2 x-1=m\qquad (3)$

Đặt $t=\cos x$, phương trình (3) trở thành $-2t^3-t^2-1=m\qquad (4)$

Ta thấy, với mỗi $t\in\left(-\frac{1}{2};1\right]$ thì phương trình $\cos x=t$ cho ta một nghiệm $x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right)$. Do đó, để phương trình đã cho có đúng 1 nghiệm $x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right)$ điều kiện cần và đủ là phương trình (4) có đúng một nghiệm $t\in\left(-\frac{1}{2};1\right]$.

Xét hàm số $g(t)=-2t^3-t^2-1$ với $t\in\left(-\frac{1}{2};1\right]$.

Ta có $g'(t)=-6t^2-2t$, $g'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=-\frac{1}{3}\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

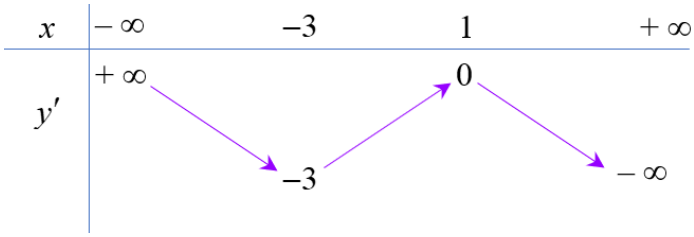
t	$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		0		1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	-1	↘	$-\frac{28}{27}$	↗	-1	↘	-4

Từ bảng biến thiên suy ra, phương trình (4) có đúng một nghiệm $t\in\left(-\frac{1}{2};1\right]$ khi và chỉ khi $-4\le m<-\frac{28}{27}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Hay, các giá trị nguyên của m để phương trình trên có đúng 1 nghiệm $x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right)$ là $\{-4;-3;-2\}$.

Câu 20: **(Chuyên Lý Tự Trọng Cần Thơ)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Bất phương trình $f(x)<e^x+m$ đúng với mọi $x\in(-1;1)$ khi và chỉ khi:

A. $m>f(-1)-\frac{1}{e}$. **B.** $m\ge f(1)-e$. **C.** $m>f(1)-e$. **D.** $m\ge f(-1)-\frac{1}{e}$.

Lời giải

Chọn D

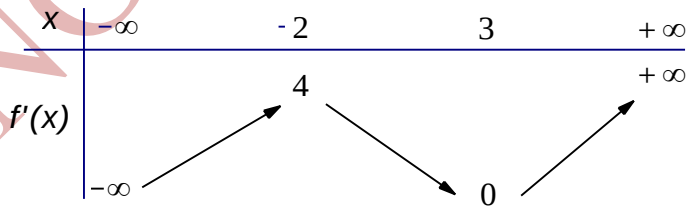
Theo giả thiết ta có: $m>f(x)-e^x=g(x),\forall x\in(-1;1)\ (*)$.

Xét hàm số $g(x)$ trên $(-1;1)$ ta có: $g'(x)=f'(x)-e^x$. Ta có hàm số $y=e^x$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ nên: $e^x>e^{-1}=\frac{1}{e}>0,\forall x\in(-1;1)$. Mà $f'(x)<0,\forall x\in(-1;1)$.

Từ đó suy ra $g'(x)=f'(x)-e^x<0,\forall x\in(-1;1)$. Nghĩa là hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ $(**)$.

Từ $(*)$ và $(**)$ ta có: $m\ge g(-1)\Leftrightarrow m\ge f(-1)-\frac{1}{e}$.

Câu 21: **(Sở Đà Nẵng 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới. Bất phương trình $x.f(x)>mx+1$ nghiệm đúng với mọi $x\in(1;2019)$ khi



A. $m\ge f(1)-1$. **B.** $m\le f(1)-1$.

C. $m\ge f(2019)-\frac{1}{2019}$. **D.** $m\le f(2019)-\frac{1}{2019}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $x.f(x)>mx+1$ nghiệm đúng với mọi $x\in(1;2019)$

$\Leftrightarrow f(x)-\frac{1}{x}>m$ với mọi $x\in(1;2019)$.

Xét hàm số $h(x)=f(x)-\frac{1}{x}$ với mọi $x\in(1;2019)$.

Ta có $h'(x)=f'(x)+\frac{1}{x^2}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

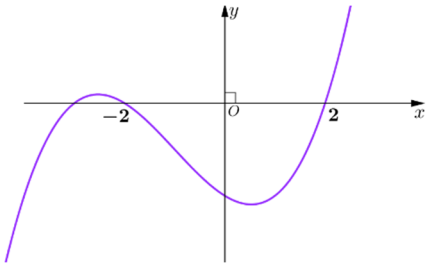
Vì $f'(x)\ge 0$ với mọi $x\in(1;2019)$ (dựa vào BBT) và $\frac{1}{x^2}>0$ với mọi $x\in(1;2019)$ nên $h'(x)>0$ với mọi $x\in(1;2019)$

$\Rightarrow h(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2019)$

$\Rightarrow h(x)>h(1)$ với mọi $x\in(1;2019)$.

Mà $h(x)>m$ với mọi $x\in(1;2019)$ nên $m\le h(1)\Leftrightarrow m\le f(1)-1$.

Câu 22: **(Chuyên Sơn La Lần 3 năm 2018-2019)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như sau:



Bất phương trình $f(x)>x^2-2x+m$ đúng với mọi $x\in(1;2)$ khi và chỉ khi

A. $m\le f(2)$. **B.** $m<f(1)-1$. **C.** $m\ge f(2)-1$. **D.** $m\ge f(1)+1$.

Lời giải

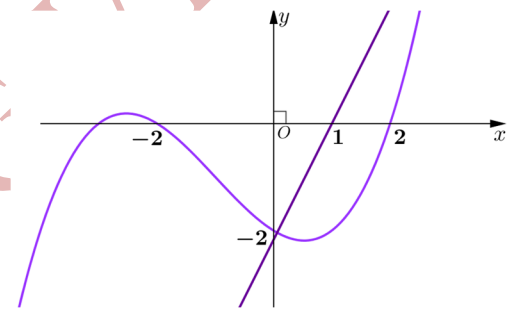
Chọn A

Ta có $f(x)>x^2-2x+m,\ \forall x\in(1;2)\Leftrightarrow f(x)-x^2+2x>m,\ \forall x\in(1;2)$.

Xét hàm số $g(x)=f(x)-x^2+2x,\ x\in[1;2]$

Ta có $g'(x)=f'(x)-2x+2=f'(x)-(2x-2)$

Vẽ đường thẳng $y=2x-2$

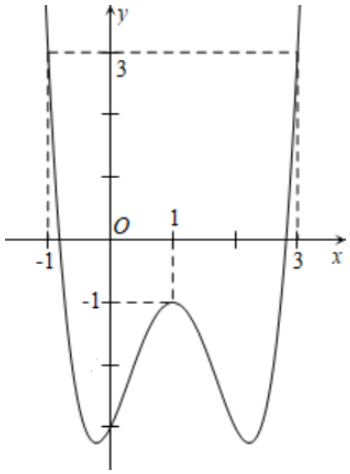


Ta thấy $f'(x)<2x-2,\ \forall x\in(1;2)$ do đó $g'(x)<0,\forall x\in(1;2)$ suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

Vậy $m<g(x),\ \forall x\in(1;2)\Leftrightarrow m\le g(2)=f(2)-2^2+2.2=f(2)$.

Câu 23: **(Sở Ninh Bình 2019 lần 2)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Bất phương trình $3f\left(x\right)\le x^3-3x^2+m$ đúng với mọi $x\in\left(-1;3\right)$ khi và chỉ khi

A. $m>3f\left(3\right)$. **B.** $m\ge 3f\left(3\right)$. **C.** $m>3f\left(-1\right)+4$. **D.** $m\ge 3f\left(-1\right)+4$.

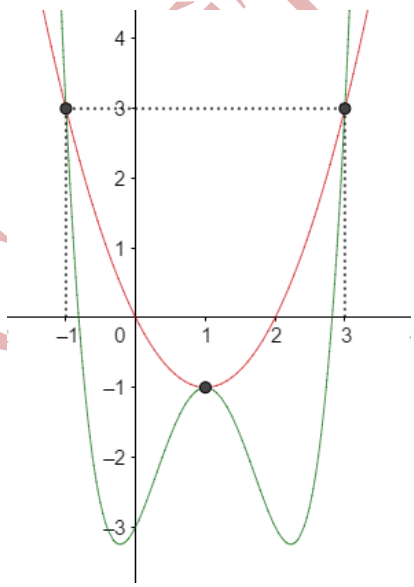
Chọn D

Ta có: $3f\left(x\right)\le x^3-3x^2+m\Leftrightarrow 3f(x)-x^3+3x^2\le m$ với mọi $x\in\left(-1;3\right)$.

Xét $g(x)=3f(x)-x^3+3x^2$ với $x\in\left(-1;3\right)$.

Khi đó: $g'(x)=3f'(x)-3x^2+6x=3\left[f'(x)-x^2+2x\right]$.

Nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ là hoành độ giao điểm của đồ thị $y=f'(x)$ và parabol $y=x^2-2x$.



Phương trình $g'(x)=0$ có ba nghiệm $x=-1;x=3;x=1$ trên đoạn $\left[-1;3\right]$.

$\lim\limits_{x\to -1^+} g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left[3f\left(x\right)-x^3+3x^2\right]=3f\left(-1\right)+4$;

$\lim\limits_{x\to 3^-} g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left[3f\left(x\right)-x^3+3x^2\right]=3f\left(3\right)$.

Ta có bảng biến thiên sau:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

x	-1		1		3
$g'(x)$	0	-	0	-	0
$g(x)$	$3f(-1)+4$	↘		↘	$3f(3)$

Bất phương trình $3f(x)\le x^3-3x^2+m$ đúng với mọi $x\in(-1;3)$ khi và chỉ khi $m\ge g(x),\forall x\in(-1;3)\Leftrightarrow m\ge 3f(-1)+4$.

Câu 24: **(Đặng Thành Nam Đề 2)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
y	4	↘	1	↗	3	↘	1	↗	3

Bất phương trình $f(x)<3e^{x+2}+m$ có nghiệm $x\in(-2;2)$ khi và chỉ khi:

A. $m\ge f(-2)-3$. **B.** $m>f(2)-3e^4$. **C.** $m\ge f(2)-3e^4$. **D.** $m>f(-2)-3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f(x)<3e^{x+2}+m\Leftrightarrow f(x)-3e^{x+2}<m$.

Đặt $h(x)=f(x)-3e^{x+2}\Rightarrow h'(x)=f'(x)-3e^{x+2}$.

Vì $\forall x\in(-2;2), f'(x)\le 3$ và $x\in(-2;2)\Rightarrow x+2\in(0;4)\Rightarrow 3e^{x+2}\in(3;3e^4)$

Nên $h'(x)=f'(x)-3e^{x+2}<0,\forall x\in(-2;2)\Rightarrow f(2)-3e^4<h(x)<f(-2)-3$.

Vậy bất phương trình $f(x)<3e^{x+2}+m$ có nghiệm $x\in(-2;2)$ khi và chỉ khi $m>f(2)-3e^4$.

Câu 25: **(Đặng Thành Nam Đề 5)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Bất phương trình $f(x)<e^{x^2}+m$ đúng với mọi $x\in(-1;1)$ khi và chỉ khi

A. $m\ge f(0)-1$. **B.** $m>f(-1)-e$. **C.** $m>f(0)-1$. **D.** $m\ge f(-1)-e$.

Lời giải

Chọn C

Có $f(x)<e^{x^2}+m,\forall x\in(-1;1)$

$\Leftrightarrow m>g(x)=f(x)-e^{x^2},\forall x\in(-1;1)$ (*)

Ta có $g'(x)=f'(x)-2x.e^{x^2}$ có nghiệm $x=0\in(-1;1)$ và

$g'(x)>0,\forall x\in(-1;0)$; $g'(x)<0,\forall x\in(0;1)$.

Bảng biến thiên:

x	-1		0		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	$f(0)-1$	↘	

Do đó $\max\limits_{(-1;1)} g(x) = g(0) = f(0)-1$.

Ta được $(*) \Leftrightarrow m > f(0)-1$.

Câu 26: (Chuyên Phan Bội Châu Lần2) Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+...+\dfrac{x^{2019}}{2019!}-e^x & \text{khi } x\ge 0\\ -x^2-10x & \text{khi } x<0\end{cases}$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương và chia hết cho 5 của tham số m để bất phương trình $m-f(x)\le 0$ có nghiệm?

A. 25. **B.** 0. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải.

Chọn D

+) Với $x\ge 0$: $f'(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+...+\dfrac{x^{2018}}{2018!}-e^x$; $f''(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+...+\dfrac{x^{2017}}{2017!}-e^x;...$

$f^{(2019)}(x)=1-e^x\le 0,\ \forall x\ge 0 \Rightarrow f^{(2018)}(x)\le f^{(2018)}(0)=0,\ \forall x\ge 0;...$

$\Rightarrow f'(x)\le 0,\ \forall x\ge 0 \Rightarrow f(x)\le f(0)=0,\ \forall x\ge 0$.

Nên $\forall m\in\mathbb{Z}_+^*$ thì $m-f(x)>0, \forall x\ge 0$.

Do đó bất phương trình $m-f(x)\le 0$ vô nghiệm trên $[0;+\infty)$, $\forall m\in\mathbb{Z}_+^*$.

+) Với $x<0$: Bpt: $m+x^2+10x\le 0 \Leftrightarrow x^2+10x\le -m$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-5		0
x^2+10x	$+\infty$	↘	-25	↗	0

Bất phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -m\ge -25 \Leftrightarrow m\le 25 \Rightarrow m\in\{5;10;15;20;25\}$.

Câu 27: (SỞ GD & ĐT CÀ MAU) Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-2019;2019]$ để bất phương trình $(1-m^3)x^3+3(2-m^3)x^2+(13-m-3m^3)x+10-m-m^3\ge 0$ đúng với mọi $x\in[1;3]$. Số phần tử của tập S là

A. 4038. **B.** 2021. **C.** 2022. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn B

$(1-m^3)x^3+3(2-m^3)x^2+(13-m-3m^3)x+10-m-m^3\ge 0,\forall x\in[1;3]$.

$\Leftrightarrow (x+2)^3+x+2\ge\left[m(x+1)\right]^3+m(x+1),\forall x\in[1;3]$. $(*)$

Xét: $f(t)=t^3+t,\forall t\in\mathbb{R}$, ta có $f'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$.

Hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Đặt $\begin{cases} u = x+2 \\ v = m(x+1) \end{cases}$.

$(*) \Leftrightarrow f(u) \ge f(v) \Leftrightarrow u \ge v \Leftrightarrow x+2 \ge m(x+1)$.

$ycbt \Leftrightarrow m \le \dfrac{x+2}{x+1}, \forall x \in [1;3] \Leftrightarrow m \le \underset{x\in[1;3]}{Min}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right) \Leftrightarrow m \le \dfrac{5}{4}$.

Mà $\begin{cases} m \in [-2019;2019] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$ nên $\begin{cases} m \in \left[-2019;\dfrac{5}{4}\right] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \{-2019;-2018;...,-1;0;1\}$.

Vậy có 2021 giá trị cần tìm.

Câu 28: **(CHUYÊN THÁI BÌNH – L4)** Phương trình $2017^{\sin x} = \sin x + \sqrt{2-\cos^2 x}$ có bao nhiêu nghiệm thực trong $[-5\pi;2017\pi]$?

A. vô nghiệm. **B.** 2017. **C.** 2022. **D.** 2023.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có hàm số $y = 2017^{\sin x} - \sin x - \sqrt{2-\cos^2 x}$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$.

Xét hàm số $y = 2017^{\sin x} - \sin x - \sqrt{2-\cos^2 x}$ trên $[0;2\pi]$.

Ta có

$$y' = \cos x.2017^{\sin x}.\ln 2017 - \cos x - \frac{2\sin x.\cos x}{2\sqrt{2-\cos^2 x}} = \cos x.\left(2017^{\sin x}.\ln 2017 - 1 - \frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\right)$$

Do vậy trên $[0;2\pi]$, $y' = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} \vee x = \dfrac{3\pi}{2}$.

$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2017 - 1 - \sqrt{2} > 0$; $y\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2017} - 1 - \sqrt{2} < 0$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	↗	$y\left(\frac{\pi}{2}\right)$	↘	$y\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	↗	0

Vậy trên $[0;2\pi]$ phương trình $2017^{\sin x} = \sin x + \sqrt{2-\cos^2 x}$ có đúng ba nghiệm phân biệt.

Ta có $y(\pi) = 0$, nên trên $[0;2\pi]$ phương trình $2017^{\sin x} = \sin x + \sqrt{2-\cos^2 x}$ có ba nghiệm phân biệt là 0, π, 2π.

Suy ra trên $[-5\pi;2017\pi]$ phương trình có đúng $2017-(-5)+1 = 2023$ nghiệm.

Câu 29: **(Chuyên Phan Bội Châu Lần2)** Cho hàm số $f(x) = \cos 2x$. Bất phương trình $f^{(2019)}(x) > m$ đúng với mọi $x \in \left(\dfrac{\pi}{12};\dfrac{3\pi}{8}\right)$ khi và chỉ khi

A. $m < 2^{2019}$. **B.** $m \le 2^{2018}$. **C.** $m < 2^{2018}$. **D.** $m \le 2^{2019}$.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $f'(x)=-2\sin 2x=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$; $f''(x)=-4\cos 2x=2\cos\left(2x+2\frac{\pi}{2}\right)$;...

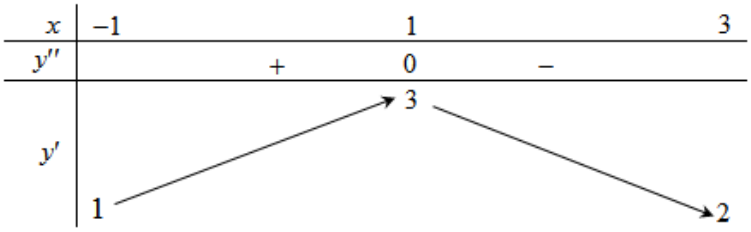
$f^{(n)}(x)=2^n\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)$. Do đó $f^{(2019)}(x)=2^{2019}\cos\left(2x+2019\frac{\pi}{2}\right)=2^{2019}\sin 2x$.

$x\in\left(\frac{\pi}{12};\frac{3\pi}{8}\right)\Rightarrow 2x\in\left(\frac{\pi}{6};\frac{3\pi}{4}\right)\Rightarrow \sin 2x>\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\ \forall x\in\left(\frac{\pi}{12};\frac{3\pi}{8}\right)$

$\Rightarrow f^{(2019)}(x)>2^{2018},\forall x\in\left(\frac{\pi}{12};\frac{3\pi}{8}\right)$.

Do đó bất phương trình $f^{(2019)}(x)>m$ đúng với mọi $x\in\left(\frac{\pi}{12};\frac{3\pi}{8}\right)$ khi và chỉ khi $m\le 2^{2018}$.

Câu 30: **(Đặng Thành Nam Đề 6)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Bất phương trình $m+x^2\le f(x)+\frac{1}{3}x^3$ nghiệm đúng với mọi $x\in(0;3)$ khi và chỉ khi



A. $m<f(0)$. **B.** $m\le f(3)$. **C.** $m\le f(0)$. **D.** $m<f(1)-\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$m+x^2\le f(x)+\frac{1}{3}x^3\Leftrightarrow f(x)+\frac{1}{3}x^3-x^2\ge m$.

Đặt $g(x)=f(x)+\frac{1}{3}x^3-x^2$. Theo bài ra, ta có: $g(x)\ge m,\forall x\in(0;3)$(*).

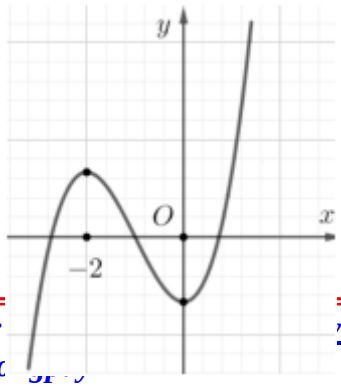
Ta có $g'(x)=f'(x)+x^2-2x>1+x^2-2x=(x-1)^2\ge 0,\forall x\in(0;3)$.

Do đó $g(0)<g(x)<g(3),\forall x\in(0;3)$. Mà: $g(0)=f(0);g(3)=f(3)$.

$\Rightarrow f(0)<g(x)<f(3),\forall x\in(0;3)$

Vì vậy (*) $\Leftrightarrow m\le f(0)$.

Câu 31: **(CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 3)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $5x^2+12x+16=m(x+2)\sqrt{x^2+2}$ có hai nghiệm thực phân biệt thoả mãn $2018^{2x+\sqrt{x+1}}-2018^{2+\sqrt{x+1}}+2019x\le 2019$.



A. $m\in\left(2\sqrt{6};\frac{11\sqrt{3}}{3}\right)$.

B. $m\in\left(2\sqrt{6};3\sqrt{3}\right]$.

C. $m\in\left[2\sqrt{6};3\sqrt{3}\right]$.

D. $m\in\left(3\sqrt{3};\frac{11\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left\{2\sqrt{6}\right\}$.

Lời giải

Chọn B

Xét bất phương trình $2018^{2x+\sqrt{x+1}}-2018^{2+\sqrt{x+1}}+2019x\le 2019$ (1). Điều kiện: $x\ge -1$.

Đặt $\begin{cases}a=2x+\sqrt{x+1}\\ b=2+\sqrt{x+1}\end{cases}\Rightarrow a-b=2(x-1)\Rightarrow x-1=\frac{a-b}{2}$.

Bất phương trình (1) thành:

$2018^a-2018^b+2019\frac{a-b}{2}\le 0\Leftrightarrow 2(2018)^a+2019a\le 2(2018)^b+2019b$ (2).

Xét hàm số $f(t)=2(2018)^t+2019t$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$f'(t)=2.2018^t\ln 2018+2019>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bất phương trình (2) $\Leftrightarrow f(a)\le f(b)\Leftrightarrow a\le b\Leftrightarrow 2x+\sqrt{x+1}\le 2+\sqrt{x+1}\Leftrightarrow -1\le x\le 1$.

Với $-1\le x\le 1$, ta có:

$5x^2+12x+16=m\left(x+2\right)\sqrt{x^2+2}$

$\Leftrightarrow 3\left(x+2\right)^2+2\left(x^2+2\right)=m\left(x+2\right)\sqrt{x^2+2}\Leftrightarrow 3\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}+2\frac{\sqrt{x^2+2}}{x+2}=m$ (3).

Đặt $t=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$ với $x\in\left[-1;1\right]$.

$t'=\frac{2-2x}{\left(\sqrt{x^2+2}\right)^3}\ge 0,\forall x\in\left[-1;1\right]$ nên hàm t đồng biến trên $\left[-1;1\right]$, suy ra $\frac{1}{\sqrt{3}}\le t\le\sqrt{3}$.

Do hàm t đơn điệu trên $\left[-1;1\right]$ nên ứng với mỗi giá trị của $t\in\left[\frac{1}{\sqrt{3}};\sqrt{3}\right]$ ta tìm được đúng một giá trị của $x\in\left[-1;1\right]$ và ngược lại.

Viết lại phương trình (3) theo ẩn t:

$3t+\frac{2}{t}=m$ (4) với $\frac{1}{\sqrt{3}}\le t\le\sqrt{3}$.

(3) có 2 nghiệm thực phân biệt $x\in\left[-1;1\right]\Leftrightarrow$ (4) có 2 nghiệm thực phân biệt $t\in\left[\frac{1}{\sqrt{3}};\sqrt{3}\right)$ (*).

Xét hàm số $g(t)=3t+\frac{2}{t}$ liên tục trên $\left[\frac{1}{\sqrt{3}};\sqrt{3}\right]$.

$g'(t)=3-\frac{2}{t^2}$. Cho $g'(t)=0\Leftrightarrow t^2=\frac{2}{3}\Leftrightarrow t=\sqrt{\frac{2}{3}}\in\left[\frac{1}{\sqrt{3}};\sqrt{3}\right]$.

Bảng biến thiên:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

t	$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		$\sqrt{3}$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	$3\sqrt{3}$	↘	$2\sqrt{6}$	↗	$\frac{11\sqrt{3}}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có (*) $\Leftrightarrow m \in \left(2\sqrt{6};3\sqrt{3}\right]$

Vậy $m \in \left(2\sqrt{6};3\sqrt{3}\right]$ thoả yêu cầu bài toán.

Câu 32: **(Đặng Thành Nam Đề 12)** Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\left|2^{x+1}-8\right| = \frac{1}{2}x^2 + m$ có 3 nghiệm thực phân biệt?

A. 8. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Phương trình đã cho tương đương với: $m = \left|2^{x+1}-8\right| - \frac{1}{2}x^2 (*)$.

Xét hàm số:

$$f(x) = \left|2^{x+1}-8\right| - \frac{1}{2}x^2 = \begin{cases} 2^{x+1}-8-\frac{1}{2}x^2 & (x \ge 2) \\ 8-2^{x+1}-\frac{1}{2}x^2 & (x<2) \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} g(x) = 2^{x+1}\ln 2 - x & (x>2) \\ h(x) = -2^{x+1}\ln 2 - x & (x<2) \end{cases}.$$

(Hàm số không có đạo hàm tại điểm x = 2).

Ta có:

- $g'(x) = 2^{x+1}\ln^2 2 - 1 > 2^{2+1}\ln^2 2 - 1 > 0, \forall x > 2 \Rightarrow g(x) > g(2) = 2^3 \ln 2 > 0, \forall x > 2$ (1).
- $h'(x) = -2^{x+1}\ln^2 2 - 1 < 0, \forall x < 2$ và $\begin{cases} h(-1) = -\ln 2 + 1 > 0 \\ h(0) = -2\ln 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow h(0).h(-1) < 0$ do đó $h(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x_0 \in (-1;0)$. Dùng máy tính tìm được $x_0 \approx -0,797563$ lưu nghiệm này vào biến nhớ A, ta có $f(x_0) = f(A) \approx 6,53131$.

Vậy ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 \in (-1;0)$. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(x_0)$	↘	-2	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình có 3 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi:
$-2 < m < f(x_0) \approx 6,53131$.

Do m là số nguyên nên $m \in \{-1,0,1,2,3,4,5,6\}$.

Có tất cả 8 số nguyên thoả mãn yêu cầu.

Câu 33: (KIM LIÊN HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 03) Cho bất phương trình $\sqrt[3]{x^4+x^2+m}-\sqrt[3]{2x^2+1}+x^2\left(x^2-1\right)>1-m$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x>1$.

A. $m\ge\frac{1}{2}$. **B.** $m>1$. **C.** $m>\frac{1}{2}$. **D.** $m\ge1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\sqrt[3]{x^4+x^2+m}-\sqrt[3]{2x^2+1}+x^2\left(x^2-1\right)>1-m$

$\Leftrightarrow\left(x^4+x^2+m\right)+\sqrt[3]{x^4+x^2+m}-\sqrt[3]{2x^2+1}-\left(2x^2+1\right)>0$

$\Leftrightarrow\left(x^4+x^2+m\right)+\sqrt[3]{x^4+x^2+m}>\sqrt[3]{2x^2+1}+\left(2x^2+1\right)$ (1)

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^3+t$, $t\in\mathbb{R}$.

Có $f'\left(t\right)=3t^2+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bất phương trình (1) có dạng $f\left(\sqrt[3]{x^4+x^2+m}\right)>f\left(\sqrt[3]{2x^2+1}\right)\Leftrightarrow\sqrt[3]{x^4+x^2+m}>\sqrt[3]{2x^2+1}$

$\Leftrightarrow x^4+x^2+m>2x^2+1\Leftrightarrow m>-x^4+x^2+1$.

Xét hàm số $g\left(x\right)=-x^4+x^2+1$ với $x\in\left(1;+\infty\right)$.

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x>1\ \Leftrightarrow m>g\left(x\right),\forall x>1$.

$g'\left(x\right)=-4x^3+2x=-2x\left(2x^2-1\right)<0,\ \forall x>1$.

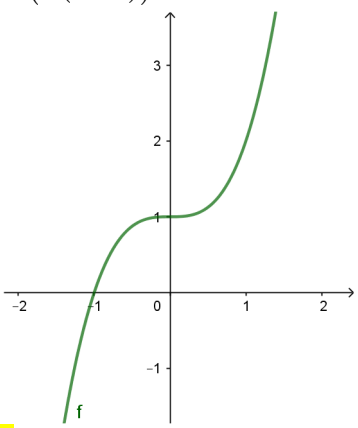
Bảng biến thiên:

x	1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	1	↘	$-\infty$

Tập giá trị của hàm số $g\left(x\right)$ trên $\left(1;+\infty\right)$ là $\left(-\infty;1\right)$.

Vậy $m>g\left(x\right),\forall x>1\Leftrightarrow m\ge1$.

Câu 34: (Nguyễn Du số 1 lần3) Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của n để phương trình sau có nghiệm $x\in\mathbb{R}$. $f\left(-16\sin^2x+6\sin2x+8\right)=f\left(n\left(n+1\right)\right)$



A. 10. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 8.

ĐANG VIỆT ĐÔNG

Lời giải

Chọn B

Nhìn vào đồ thị ta thấy hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó

$f(-16\sin^2 x+6\sin 2x+8)=f(n(n+1)) \Leftrightarrow -16\sin^2 x+6\sin 2x+8=n(n+1)$

Ta xét

$-16\sin^2 x+6\sin 2x+8=n(n+1)$

$\Leftrightarrow -8(1-\cos 2x)+6\sin 2x+8-n(n+1)=0$

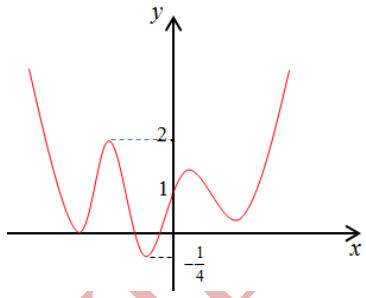
$\Leftrightarrow 8\cos 2x+6\sin 2x-n(n+1)=0$

Để phương trình có nghiệm $x\in\mathbb{R}$ thì $8^2+6^2\ge(n^2+n)^2 \Leftrightarrow (n^2+n)^2\le 100 \Leftrightarrow -10\le n^2+n\le 10$

$\Leftrightarrow n^2+n\le 10 \Leftrightarrow \dfrac{-1-\sqrt{41}}{2}\le n\le \dfrac{-1+\sqrt{41}}{2}$ (do $n^2+n\ge -10,\forall n$).

Vì n nguyên nên $n\in\{-3;-2;-1;0;1;2\}$.

Câu 35: **(THPT SỐ 1 TƯ NGHĨA LẦN 2 NĂM 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây .



Số nghiệm của phương trình $\dfrac{f^3(x)+3f^2(x)+4f(x)+2}{\sqrt{3f(x)+1}}=3f(x)+2$ là:

A. 6 . **B.** 9 . **C.** 7 . **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=f(x)$ đưa phương trình về hàm đặc trưng $(t+1)^3+(t+1)=\left(\sqrt{3t+1}\right)^3+\sqrt{3t+1}$.

Xét hàm đặc trưng $f(x)=x^3+x$ đồng biến R nên ta được $t+1=\sqrt{3t+1} \Leftrightarrow t=0;t=1$.

Với $t=0$ ta có $f(x)=0$ từ đồ thị ta được số nghiệm là 3.

Với $t=1$ ta có $f(x)=1$ từ đồ thị ta được số nghiệm là 6.

Vậy phương trình có 9 nghiệm phân biệt.

Câu 36: **(ĐHQG TPHCM – Cơ Sở 2 – năm 2017 – 2018)** Cho $f(x)=x^3-3x^2-6x+1$. Phương trình $\sqrt{f(f(x)+1)+1}=f(x)+2$ có số nghiệm thực là

A. 4. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=f(x)+1 \Rightarrow t=x^3-3x^2-6x+1$.

Khi đó $\sqrt{f(f(x)+1)+1}=f(x)+2$ trở thành:

$$\sqrt{f(t)+1}=t+1\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge -1\\ f(t)+1=t^2+2t+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge -1\\ t^3-4t^2-8t+1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge -1\\ \left[\begin{array}{l}t=t_1\in(-2;-1)\\ t=t_2\in(-1;1)\\ t=t_3\in(1;6)\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=t_2\in(-1;1)\\ t=t_3\in(5;6)\end{array}\right.$$

Vì $g(t)=t^3-4t^2-8t+1$; $g(-2)=-7$; $g(-1)=4$; $g(1)=-10$; $g(5)=-14$; $g(6)=25$.

Xét phương trình $t=x^3-3x^2-6x+1$ là pt hoành độ giao điểm của ...

Ta có

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$-7+6\sqrt{3}$	↘	$7-6\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có

+ Với $t=t_2\in(-1;1)$, ta có d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt, nên phương trình có 3 nghiệm.

+ Với $t=t_3\in(5;6)$, ta có d cắt (C) tại 1 điểm, nên phương trình có 1 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Câu 37: **(Chuyên Hà Nội Lần1)** Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=-x^2-2\ \ \forall x\in\mathbb{R}$. Bất phương trình $f(x)<m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$ khi và chỉ khi

A. $m\ge f(1)$. **B.** $m\ge f(0)$. **C.** $m>f(0)$. **D.** $m>f(1)$.

Lời giải

Chọn D

$f'(x)=-x^2-2<0\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên $f(0)>f(1)$

Bảng biến thiên

x	0		1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$f(0)$	↘	$f(1)$

Từ bảng biến thiên ta có bất phương trình $f(x)<m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)\Leftrightarrow m>f(1)$.

Câu 38: **(PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH)** Cho cấp số cộng (a_n), cấp số nhân (b_n) thoả mãn $a_2>a_1\ge 0$, $b_2>b_1\ge 1$ và hàm số $f(x)=x^3-3x$ sao cho $f(a_2)+2=f(a_1)$ và $f(\log_2 b_2)+2=f(\log_2 b_1)$. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $b_n>2019a_n$

A. 17. **B.** 14. **C.** 15. **D.** 16.

Lời giải

Chọn D

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x$ với $x\in[0,+\infty)$. Ta có $f'(x)=3x^2-3=0\Leftrightarrow x=\pm1$ từ đó ta suy ra bảng biến thiên của $f(x)$ trên $[0,+\infty)$ như sau:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	0	$+\infty$			
			-2		

Vì $a_2>0$ nên $f(a_2)\ge-2\Rightarrow f(a_1)=f(a_2)+2\ge0$ (1)

Giả sử $a_1\ge1$, vì $f(x)$ đồng biến trên $[1,+\infty)$ nên $f(a_2)>f(a_1)$ suy ra $f(a_1)+2>f(a_1)$ vô lý. Vậy $a_1\in[0,1)$ do đó $f(a_1)\le0$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases}f(a_1)=0\\f(a_2)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_0=0\\a_1=1\end{cases}$

Vậy số hạng tổng quát của dãy cấp số cộng (a_n) là $a_n=(n-1)$.

Một cách tương tự, đặt $t_1=\log_2 b_1$ và $t_2=\log_2 b_2$ suy ra $f(t_2)+2=f(t_1)$, vì $1\le b_1<b_2$ nên $0\le t_1<t_2$,

theo lập luận trên ta có:

$$\begin{cases}t_1=0\\t_2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_2 b_1=0\\\log_2 b_2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b_1=1\\b_2=2\end{cases}$$

Vậy số hạng tổng quát của dãy cấp số nhân (b_n) là $b_n=2^{n-1}$.

Do đó $b_n>2019a_n\Leftrightarrow2^{n-1}>2019(n-1)$ (*). Trong 4 đáp án $n=16$ là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa (*).

Câu 39: Tìm m để bất phương trình $x+2\sqrt{(2-x)(2x+2)}>m+4\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2x+2}\right)$ có nghiệm?

A. $m<-7$. **B.** $-8<m<-7$. **C.** $m<-8$. **D.** $m<-1-4\sqrt{3}$

.

Hướng dẫn giải.

Chọn A

•Điều kiện: $x\in[-1;2]$.

Xét hàm số $g(x)=\sqrt{2-x}+\sqrt{2x+2}$ trên đoạn $[-1;2]$.

Có $g'(x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{2-x}}+\dfrac{1}{\sqrt{2x+2}}$, $g'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

$g(-1)=\sqrt{3}$, $g(1)=3$, $g(2)=\sqrt{6}$.

Suy ra $\max\limits_{[-1;2]}g(x)=3$, $\min\limits_{[-1;2]}g(x)=\sqrt{3}$.

•Đặt $t=\sqrt{2-x}+\sqrt{2x+2}$, $t\in\left[\sqrt{3};3\right]\Rightarrow t^2=x+4+2\sqrt{(2-x)(2x+2)}$.

Bất phương trình đã cho trở thành: $t^2-4>m+4t\Leftrightarrow t^2-4t-4>m$.

Xét hàm số $f(t)=t^2-4t-4$ trên đoạn $\left[\sqrt{3};3\right]$.

Có $f'(t)=2t-4$, $f'(t)=0\Leftrightarrow t=2$.

$f\left(\sqrt{3}\right)=-4\sqrt{3}-1$, $f(2)=-8$, $f(3)=-7$.

Suy ra $\max\limits_{\left[\sqrt{3};3\right]}f(t)=-7$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Để bất phương trình đã cho có nghiệm thì $m < \max\limits_{[\sqrt{3};3]} f(t)$ hay $m < -7$.

Vậy $m < -7$.

Câu 40: Giá trị của m để phương trình:

$$\sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x} + \sqrt{6-x} + 2\sqrt[4]{6-x} = m.$$

có hai nghiệm phân biệt là.

A. $\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6} \le m < 2\sqrt{3} + 4\sqrt[4]{3}$.

B. $\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6} < m < 2\sqrt{3} + 4\sqrt[4]{3}$.

C. $\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6} < m \le 2\sqrt{3} + 4\sqrt[4]{3}$.

D. $\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6} \le m \le 2\sqrt{3} + 4\sqrt[4]{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Xét $f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x} + \sqrt{6-x} + 2\sqrt[4]{6-x}$ $x \in [0;6]$.

Có $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2\sqrt[4]{x^3}} - \dfrac{1}{2\sqrt{6-x}} - \dfrac{1}{2\sqrt[4]{(6-x)^3}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{6-x}}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}}\right)$.

Có $u(x) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{6-x}}\right)$; $v(x) = \left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}}\right)$ thỏa $u(2) = 0$; $v(2) = 0 \Rightarrow f'(2) = 0$.

Và $u(x) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{6-x}}\right)$; $v(x) = \left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}}\right)$ cùng âm trên $(3;6)$.

$u(x) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{6-x}}\right)$; $v(x) = \left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}}\right)$ cùng dương trên $(0;3)$.

Lập bảng biến thiên.

Yêu cầu đề bài $\Leftrightarrow \sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6} \le m < 2\sqrt{3} + 4\sqrt[4]{3}$.

Câu 41: Biết rằng phương trình $\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} - \sqrt{4-x^2} = m$ có nghiệm khi m thuộc $[a;b]$ với a, $b \in \mathbb{R}$. Khi đó giá trị của $T = (a+2)\sqrt{2} + b$ là?

A. $T = 8$.

B. $T = 0$.

C. $T = 3\sqrt{2} + 2$.

D. $T = 6$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Điều kiện: $-2 \le x \le 2$.

Đặt $t = \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} \ge 0 \Rightarrow t^2 = 4 + 2\sqrt{4-x^2} \Rightarrow \sqrt{4-x^2} = \dfrac{t^2-4}{2}$.

Phương trình đã cho thành $t - \dfrac{t^2-4}{2} = m$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}$, với $x \in [-2;2]$ ta có

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2-x}} + \frac{1}{2\sqrt{2+x}};\ \begin{cases} x \in (-2;2) \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-2;2) \\ 2-x = 2+x \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

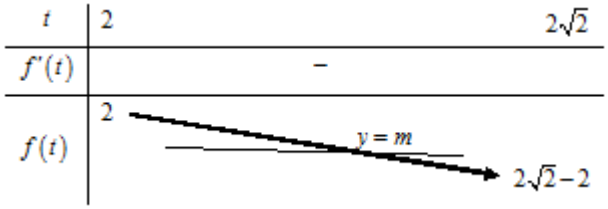
Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-2;2]$ và $f(-2) = 2$; $f(2) = 2$; $f(0) = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \min\limits_{[-2;2]} f(x) = 2$ và $\max\limits_{[-2;2]} f(x) = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2 \le f(x) \le 2\sqrt{2} \Rightarrow t \in \left[2; 2\sqrt{2}\right]$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Xét hàm số $f(t)=t-\dfrac{t^2-4}{2}$, với $t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$ ta có $f'(t)=1-t<0$, $\forall t\in\left(2;2\sqrt{2}\right)$.

Bảng biến thiên:



YCBT $\Leftrightarrow$ trên $[-2;2]$ đồ thị hàm số $y=f(t)$ cắt đường thẳng $y=m \Leftrightarrow 2\sqrt{2}-2\le m\le 2$.

Khi đó $\begin{cases}a=2\sqrt{2}-2\\ b=2\end{cases}\Rightarrow T=(a+2)\sqrt{2}+b=6$.

Câu 42: **(THPT-Ngô-Quyền-Hải-Phòng-Lần-2-2018-2019-Thi-24-3-2019)** Cho bất phương trình $m\sqrt{1-x}+12\sqrt{1-x^2}\ge 16x+3m\sqrt{1+x}+2m+15$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-9;9]$ để bất phương trình có nghiệm đúng với mọi $x\in[-1;1]$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

• Bpt: $m\sqrt{1-x}+12\sqrt{1-x^2}\ge 16x+3m\sqrt{1+x}+2m+15$

$\Leftrightarrow m\left(\sqrt{1-x}-3\sqrt{1+x}-2\right)\ge 2\left(8x-6\sqrt{1-x^2}\right)+15$ (1).

• Đặt $t=\sqrt{1-x}-3\sqrt{1+x}$ với $x\in[-1;1]$.

$t'=-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}-\dfrac{3}{2\sqrt{1+x}}<0\ \ \forall x\in(-1;1)$.

Suy ra t nghịch biến trên $[-1;1]$.

Nên $t(1)\le t\le t(-1)\Leftrightarrow -3\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$.

• Ta có $t^2=8x+10-6\sqrt{1-x^2}\Leftrightarrow 2t^2-5=2\left(8x-6\sqrt{1-x^2}\right)+15$.

Khi đó (1) trở thành: $m(t-2)\ge 2t^2-5$ với $t\in\left[-3\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

$\Leftrightarrow m\le\dfrac{2t^2-5}{t-2}$ (2) với $t\in\left[-3\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ (vì $t\in\left[-3\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ nên $(t-2)<0$).

• Xét hàm số $f(t)=\dfrac{2t^2-5}{t-2}$ trên đoạn $\left[-3\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

$f'(t)=\dfrac{4t(t-2)-\left(2t^2-5\right)}{(t-2)^2}=\dfrac{2t^2-8t+5}{(t-2)^2}$.

$f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{4+\sqrt{6}}{2}\ \text{(loại)}\\ t=\dfrac{4-\sqrt{6}}{2}\ \text{(thỏa mãn)}\end{array}\right.$

$f(-3\sqrt{2})=\dfrac{62-93\sqrt{2}}{14}\approx -4{,}97$; $f(\sqrt{2})=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\approx 1{,}7$; $f\left(\dfrac{4-\sqrt{6}}{2}\right)=8-2\sqrt{6}\approx 3{,}1$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

(1) nghiệm đúng với mọi $x\in[-1;1]\Leftrightarrow$ (2) nghiệm đúng với mọi $t\in\left[-3\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

$\Leftrightarrow m\le \min\limits_{\left[-3\sqrt{2};\sqrt{2}\right]} f(t)=f\left(-3\sqrt{2}\right)=\dfrac{62-93\sqrt{2}}{14}\approx -4,97$.

Kết hợp với điều kiện bài toán ta có: $\begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m\in[-9;9] \\ m\le\dfrac{62-93\sqrt{2}}{14}\approx -4,97 \end{cases}\Leftrightarrow m\in\{-9;-8;-7;-6;-5\}$.

Vậy có 5 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 43: **(Ngô Quyền Hà Nội)** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $m+\sqrt{m+1+\sqrt{1+\sin x}}=\sin x$ có nghiệm là đoạn $[a;b]$. Khi đó giá trị của biểu thức $T=4a-\dfrac{1}{b}-\sqrt{2}$ bằng

A. -4. **B.** -5. **C.** -3. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $-1\le\sin x\le 1\Leftrightarrow 0\le 1+\sin x\le 2\Leftrightarrow 0\le\sqrt{1+\sin x}\le\sqrt{2},\forall x\in\mathbb{R}$.

Đặt $t=\sqrt{1+\sin x}$. Ta có $0\le t\le\sqrt{2}$ và $\sin x=t^2-1$.

Khi đó phương trình có dạng: $m+\sqrt{m+1+t}=t^2-1\Leftrightarrow m+1+t+\sqrt{m+1+t}=t^2+t\ (*)$.

Xét hàm số $f(t)=t^2+t,\ t>0$.

Ta có $f'(t)=2t+1>0,\ \forall t>0$.

Do đó hàm số $f(t)=t^2+t$ luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Vì thế $(*)\Leftrightarrow t=\sqrt{m+1+t}\Leftrightarrow m=t^2-t-1\ (**)$

Xét hàm số $g(t)=t^2-t-1,\ t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$.

$g'(t)=2t-1$.

$g'(t)=0\Leftrightarrow 2t-1=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(t)=t^2-t-1,\ t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$

t	0		$\frac{1}{2}$		$\sqrt{2}$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	-1	↘	$\frac{-5}{4}$	↗	$1-\sqrt{2}$

Phương trình đề bài có nghiệm $\Leftrightarrow(**)$ có nghiệm $t\in\left[0;\sqrt{2}\right]\Leftrightarrow -\dfrac{5}{4}\le m\le 1-\sqrt{2}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vậy $m\in\left[-\frac{5}{4};1-\sqrt{2}\right]$ nên $a=-\frac{5}{4};b=1-\sqrt{2}\Rightarrow T=-4$.

Phát triển câu 40:

Câu 44: **(Chuyên Thái Bình Lần3)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x)+m}\right)=x^3-m$ có nghiệm $x\in[1;2]$ biết $f(x)=x^5+3x^3-4m$.

A. 16. **B.** 15. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sqrt[3]{f(x)+m}\to t^3=f(x)+m$. Ta được hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} f(t)=x^3-m \\ t=f(x)+m \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} f(t)=x^3-m \\ f(x)=t^3-m \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} f(t)+t^3=f(x)+x^3(*) \\ f(x)=t^3-m \end{cases}.$$

Vì $f(x)=x^5+3x^3-4m, f'(x)=5x^4+9x^2\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $h(x)=f(x)+x^3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó: $(*)\Leftrightarrow x=t$.

Khi đó ta được: $f(x)=x^3-m=x^5+3x^3-4m\Leftrightarrow x^5+2x^3=3m\Leftrightarrow g(x)=\frac{1}{3}x^5+\frac{2}{3}x^3=m(**)$.

Dễ thấy $g(x)=\frac{1}{3}x^5+\frac{2}{3}x^3$ đồng biến trên $[1;2]$ nên phương trình (**) có nghiệm trên đoạn $[1;2]$ khi và chỉ khi: $g(1)\leq m\leq g(2)\Leftrightarrow 1\leq m\leq 16$.

Vì m thuộc số nguyên nên có 16 số thỏa mãn bài toán.

Câu 45: **(Chuyên Bắc Giang)** Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $x^4+1-x^2+x\sqrt{2mx^4+2m}\geq 0$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ là $S=[a;b]$. Tính $a\sqrt{2}+8b$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Xét bất phương trình: $x^4+1-x^2+x\sqrt{2mx^4+2m}\geq 0\ (*)$

$(*)$ xác định khi $2mx^4+2m\geq 0\Leftrightarrow 2m\left(x^4+1\right)\geq 0\Leftrightarrow 2m\geq 0\Leftrightarrow m\geq 0$.

Xét $x\geq 0$: $\begin{cases} x^4+1-x^2=\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0 \\ x\sqrt{2mx^4+2m}\geq 0 \end{cases}\Rightarrow(*)$ luôn đúng.

Xét $x<0$:

$(*)$ trở thành: $\sqrt{2m}\leq\frac{x}{\sqrt{x^4+1}}-\frac{\sqrt{x^4+1}}{x}$.

Đặt $t=\frac{x}{\sqrt{x^4+1}}$, $t'=\frac{1-x^4}{\sqrt{\left(x^4+1\right)^3}}$; $t'=0\Leftrightarrow x=-1$

BBT

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

x	$-\infty$		-1		0
t'		$-$	0	$+$	
t	0	↘	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	0

$\Rightarrow t \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$.

$(*)$ trở thành: $\sqrt{2m} \le f(t)$ với $f(t)=t-\frac{1}{t}$

$f'(t)=1+\frac{1}{t^2}>0,\ t\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \sqrt{2m} \le \underset{\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)}{\text{Min}} f(t) \Leftrightarrow \sqrt{2m} \le f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow \sqrt{2m} \le \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow m \le \frac{1}{4}$.

Do đó $m \in \left[0;\frac{1}{4}\right] \Rightarrow a=0, b=\frac{1}{4}$.

Vậy $a\sqrt{2}+8b=2$.

Câu 46: **(Chuyên Thái Bình Lần3)** Biết rằng phương trình $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R}, a\neq 0, b\neq 0)$ có 4 nghiệm thực phân biệt. Hỏi phương trình sau có bao nhiêu nghiệm thực?

$$\left(4ax^3+3bx^2+2cx+d\right)^2-2\left(6ax^2+3bx+c\right).\left(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\right)=0$$

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Gọi các hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành là x_1, x_2, x_3, x_4.

Suy ra: $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$.

$\Rightarrow f'(x)=a(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)+a(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)$
$+a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)+a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

Ta có: $g(x_i)=\left[f'(x_i)\right]^2-f''(x_i).f(x_i)=\left[f'(x_i)\right]^2>0, \forall x_i$.

$\Rightarrow g(x)=0$ không có nghiệm x_i.

Xét $x\neq x_i$, ta có $f'(x)=f(x)\left(\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}+\frac{1}{x-x_4}\right)=f(x).\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{x-x_i}$.

$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{x-x_i} \Rightarrow \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{x-x_i}\right)'$.

$\Rightarrow \frac{f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^2}=-\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{(x-x_i)^2}<0, \forall x$ hay $\left[f'(x)\right]^2-f''(x).f(x)>0, \forall x\neq x_i$.

Vậy trong mọi trường hợp phương trình $g(x)=0$ đều vô nghiệm.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 47: (Ngô Quyền Hà Nội) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	0		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	9	↘	

Gọi S là tập hợp các số nguyên dương m để bất phương trình $f(x)\ge mx^2(x^2-2)+2m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$. Số phần tử của tập S là

A. Vô số. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Cách 1.

Ta có $f(x)\ge mx^2(x^2-2)+2m \Leftrightarrow f(x)\ge m(x^4-2x^2+2)$

$\Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x^4-2x^2+2}\ge m$ vì $x^4-2x^2+2=(x^2-1)^2+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Đặt $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^4-2x^2+2}$. Ta có $g'(x)=\dfrac{f'(x).(x^4-2x^2+2)-f(x).(4x^3-4x)}{(x^4-2x^2+2)^2}$.

Nhận xét: Với $x=1$ thì $g'(x)=0$.

Với $x\in(0;1)$ thì $f'(x)>0$ và $4x^3-4x<0$ nên $g'(x)>0$.

Với $x\in(1;3)$ thì $f'(x)<0$ và $4x^3-4x>0$ nên $g'(x)<0$.

Bảng biến thiên

x	0		1		3
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	4	↗	9	↘	$\dfrac{1}{13}$

Từ bảng biến thiên suy ra bất phương trình $g(x)\ge m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$ khi $m\le 9$.

Vì m nguyên dương nên tập $S=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.

Cách 2.

Ta có $x^4-2x^2+2=(x^2-1)+1\ge 1,\forall x\in\mathbb{R}$ nên

$$f(x)\ge mx^2(x^2-2)+2m\Leftrightarrow f(x)\ge m(x^4-2x^2+2)\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^4-2x^2+2}\ge m.$$

Bất phương trình đã cho có nghiệm thuộc $[0;3]$ khi và chỉ khi $m\le \max\limits_{x\in[0;3]}\dfrac{f(x)}{x^4-2x^2+2}$.

Từ bảng biến thiên ta có $5\le f(x)\le 9,\ \forall x\in[0;3]$ và $f(x)=9\Leftrightarrow x=1$.

Ta có $x^4-2x^2+2=(x^2-1)^2+1\ge 1\Leftrightarrow 0<\dfrac{1}{x^4-2x^2+2}\le 1$. Dấu "=" xảy ra khi $x=1$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Suy ra, với mọi $x\in[0;3]$ thì $\dfrac{f(x)}{x^4-2x^2+2}\le\dfrac{9}{x^4-2x^2+2}\le 9$. Dấu "=" xảy ra khi $x=1$.

Do đó, $\max\limits_{x\in[0;3]}\dfrac{f(x)}{x^4-2x^2+2}=9$ khi $x=1$.

Vậy tập hợp các số nguyên dương m cần tìm là $S=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.

Câu 48: **(Đặng Thành Nam Đề 5)** Có bao nhiêu số nguyên $x\in(-100;100)$ thỏa mãn bất phương trình

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^{2019}}{2019!}\right)\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+...-\frac{x^{2019}}{2019!}\right)<1.$$

A. 199 **B.** 0 **C.** 99 **D.** 198

Lời giải

Chọn D

Đặt

$$\begin{cases}u(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+...+\dfrac{x^{2019}}{2019!}\\ v(x)=1-x+\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}+...-\dfrac{x^{2019}}{2019!}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u'(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+...+\dfrac{x^{2018}}{2018!}=u(x)-\dfrac{x^{2019}}{2019!}\\ v'(x)=-1+x-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+...-\dfrac{x^{2018}}{2018!}=-v(x)-\dfrac{x^{2019}}{2019!}\end{cases}$$

Và đặt $f(x)=u(x).v(x)$. Ta có

$$f'(x)=u'(x)v(x)+v'(x)u(x)=\left(u(x)-\frac{x^{2019}}{2019!}\right)v(x)+\left(-v(x)-\frac{x^{2019}}{2019!}\right)u(x)$$

$$=-\frac{x^{2019}}{2019!}\left(u(x)+v(x)\right)$$

Nhận xét: $u(x)+v(x)=2\left(1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots+\dfrac{x^{2018}}{2018!}\right)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên suy ra

Suy ra $f'(x)=0\Leftrightarrow-\dfrac{x^{2019}}{2019!}(u(x)+v(x))=0\Leftrightarrow x^{2019}=0\Leftrightarrow x=0$. Do đó, ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ là

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y		↗	1	↘	

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x)<1\Leftrightarrow x\ne 0\Rightarrow x\in\{-99,...,-1,1,...,99\}$. Có tất cả 198 số nguyên thoả mãn.

Câu 49: **(Trung-Tâm-Thanh-Tường-Nghệ-An-Lần-2)** Cho hàm số $f(x)=\sqrt[3]{7+3x}-\sqrt[3]{7-3x}+2019x$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện $f\left(\left|x^3-2x^2+3x-m\right|\right)+f\left(2x-2x^2-5\right)<0,\forall x\in(0;1)$. Số phần tử của S là?

A. 7. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Vì $f(x)=\sqrt[3]{7+3x}-\sqrt[3]{7-3x}+2019x$ là hàm số lẻ và đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên ta có

$$f\left(\left|x^3-2x^2+3x-m\right|\right)<-f\left(2x-2x^2-5\right)$$

$\Leftrightarrow f\left(\left|x^3-2x^2+3x-m\right|\right)<f\left(2x^2-2x+5\right)$

$\Leftrightarrow \left|x^3-2x^2+3x-m\right|<2x^2-2x+5$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-2x^2+3x-m<2x^2-2x+5 \\ x^3-2x^2+3x-m>-2x^2+2x-5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-4x^2+5x-5<m \\ x^3+x+5>m \end{cases}$

Xét $g(x)=x^3-4x^2+5x-5$ và $h(x)=x^3+x+5$ trên $(0;1)$ có bảng biến thiên là

x	0		1
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	-5		-3

x	0		1
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	5		7

Từ bảng biến thiên suy ra $f\left(\left|x^3-2x^2+3x-m\right|\right)+f\left(2x-2x^2-5\right)<0, \forall x\in(0;1)$ khi và chỉ khi

$\begin{cases} m\ge -3 \\ m\le 5 \end{cases} \Rightarrow -3\le m\le 5$

Câu 50: **(Nguyễn Du Dak-Lak 2019)** Phương trình $\sqrt{2-f(x)}=f(x)$ có tập nghiệm $T_1=\{20;18;3\}$. Phương trình $\sqrt{2g(x)-1}+\sqrt[3]{3g(x)-2}=2g(x)$ có tập nghiệm $T_2=\{0;3;15;19\}$. Hỏi tập nghiệm của phương trình $\sqrt{f(x)g(x)}+1=\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}$ có bao nhiêu phần tử?

A. 4. **B.** 3. **C.** 11. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

+ Xét phương trình: $\sqrt{f(x)g(x)}+1=\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}$, $\left(f(x)\ge 0, g(x)\ge 0\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{f(x)}\left(\sqrt{g(x)}-1\right)-\left(\sqrt{g(x)}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{f(x)}-1\right)\left(\sqrt{g(x)}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x)=1 & (1) \\ g(x)=1 & (2) \end{array}\right.$.

+ Xét phương trình: $\sqrt{2-f(x)}=f(x)$.

Với $f(x)=0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Với $0<f(x)\le 2$, phương trình tương đương với $f^2(x)+f(x)-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=1 \\ f(x)=-2 \ (l) \end{array}\right.$.

Vậy phương trình $f(x)=1$ có tập nghiệm $T_1=\{20;18;3\}$.

+ Xét phương trình: $\sqrt{2g(x)-1}+\sqrt[3]{3g(x)-2}=2g(x)$, $\left(g(x)\ge \frac{1}{2}\right)$.

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{2g(x)-1} \\ v=\sqrt[3]{3g(x)-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2=2g(x)-1 \\ v^3=3g(x)-2 \end{cases}$ và $\begin{cases} u\ge 0 \\ v\ge -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \end{cases}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 3u^2-2v^3=1 \\ u+v=\dfrac{2}{3}v^3+\dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\left(\dfrac{2}{3}v^3+\dfrac{4}{3}-v\right)^2-2v^3=1 \quad (*) \\ u=\dfrac{2}{3}v^3+\dfrac{4}{3}-v \end{cases}$.

Khi đó, phương trình $(*)$ trở thành: $4v^6-12v^4+10v^3+9v^2-24v+13=0$

$\Leftrightarrow (v-1)^2\left(4v^4+8v^3+2v+13\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=1 \\ 4v^4+8v^3+2v+13=0 \end{array}\right.$.

Vì $h(v)=8v^3+2v+13 \Rightarrow h'(v)=24v^2+2>0,\ \forall v\ge -\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}} \Rightarrow h(v)\ge h\left(-\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}\right)\approx 7.4$

nên phương trình $4v^4+8v^3+2v+13=0$ vô nghiệm.

Vậy $v=1\Rightarrow g(x)=1$ có tập nghiệm $T_2=\{0;\ 3;\ 15;\ 19\}$.

Vậy tập nghiệm cần tìm là $T=T_1\cup T_2=\{0;\ 3;\ 15;\ 18;\ 19;\ 20\}$.

Câu 51: Cho hàm số $f(x)=x^3-6x^2+9x$. Đặt $f^k(x)=f\left(f^{k-1}(x)\right)$ với k là số nguyên lớn hơn 1. Hỏi phương trình $f^6(x)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm phân biệt ?

A. 365. **B.** 1092. **C.** 1094. **D.** 363.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Ta có $f'(x)=3x^2-12x+9$. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$			
$f(x)$		↗	0	↘		↘	0	↗	4	↗	

Từ bảng biến thiên ta có:

$$f^k(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f^{k-1}(x)=0 \\ f^{k-1}(x)=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f^{k-2}(x)=0 \\ f^{k-2}(x)=3 \\ f^{k-1}(x)=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f'(x)=3 \\ f^2(x)=3 \\ f^3(x)=3 \\ \vdots \\ f^{k-1}(x)=3 \end{array}\right.$$

Bài toán sẽ được giải quyết nếu tìm được số nghiệm của phương trình $f^k(x)=3$.

+ Phương trình $f(x)=3$ có ba nghiệm thuộc $(0;4)$.

+ Phương trình $f^2(x)=f\left(f(x)\right)=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=x_1\in(0;1)\subset(0;4)\\f(x)=x_2\in(1;3)\subset(0;4)\\f(x)=x_3\in(3;4)\subset(0;4)\end{array}\right.$.

Từ bảng biến thiên ta có với mỗi giá trị $x_1,x_2,x_3\in(0;4)$ phương trình $f(x)=x_i, i=\overline{1,3}$ có ba nghiệm thuộc $(0;4)$.

Như vậy phương trình $f^2(x)=3$ có 9 nghiệm thuộc $(0;4)$.

+ Bằng quy nạp ta chứng minh được phương trình $f^k(x)=3$ có 3^k nghiệm thuộc $(0;4)$.

Từ đó, số nghiệm của phương trình $f^k(x)=0$ là $2+3+3^2+...+3^{k-1}=2+3\dfrac{3^{k-1}-1}{2}$.

Vậy số nghiệm của phương trình $f^6(x)=0$ là $2+3\dfrac{3^{6-1}-1}{2}=365$.

Bài toán tổng quát: Cho hàm số $f(x)=x^3-6x^2+9x$. Đặt $f^k(x)=f\left(f^{k-1}(x)\right)$ với k là số tự nhiên lớn hơn 1. Hỏi phương trình $f^n(x)=0$ có bao nhiêu nghiệm?

Lời giải: (Cách 2)

Ta có $f'(x)=3x^2-12x+9$. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	3	4	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$ 0	$+$	
$f(x)$		0 ↗	4 ↘	0	↗ 4	

Gọi $a_k;b_k$ lần lượt là số nghiệm của phương trình $f^k(x)=0; f^k(x)=3$

Từ bảng biến thiên ta có $\begin{cases}a_k=a_{k-1}+b_{k-1}\\b_k=3^k\end{cases}\Rightarrow a_k=a_{k-1}+3^{k-1}$

Do đó $a_n=a_1+3^{n-1}+3^{n-2}+...+3=2+\dfrac{3^n-3}{2}=\dfrac{3^n+1}{2}$ (Vì $a_1=2$)

Vậy phương trình $f^n(x)=0$ có $\dfrac{3^n+1}{2}$ nghiệm.

Cách 3:

Nhận xét:

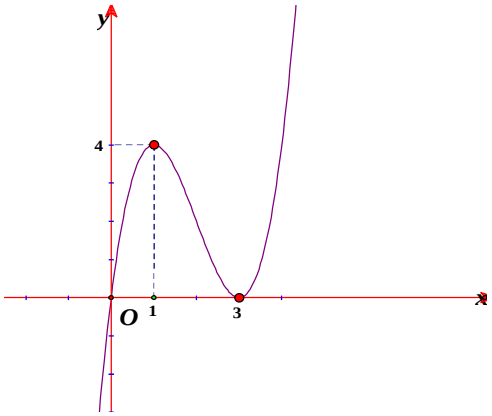
+ Đồ thị hàm số $f(x)=x^3-6x^2+9x$ như sau:

$f'(x)=3x^2-12x+9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow f(1)=4\\x=3\Rightarrow f(3)=0\end{array}\right.$. Lại có $\begin{cases}f(0)=0\\f(4)=4\end{cases}$.

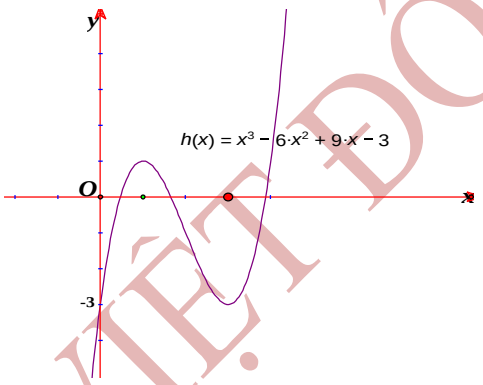
- Đồ thị hàm số $f(x)=x^3-6x^2+9x$ luôn đi qua gốc tọa độ.

- Đồ thị hàm số $f(x)=x^3-6x^2+9x$ luôn tiếp xúc với trục Ox tại điểm $(3;0)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



+ Xét hàm số $g(x)=f(x)-3$ có $g'(x)=f'(x)$ nên $g(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ và $g(0)=-3$ nên bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x)=x^3-6x^2+9x$ xuống dưới 3 đơn vị ta được đồ thị hàm số $y=g(x)$. Suy ra phương trình $g(x)=0$ có 3 nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng $(0;4)$.



+ Tổng quát: xét hàm số $h(x)=f(x)-a$, với $0<a<4$.

Lập luận tương tự như trên:

- $h(0)=-a<0$ và $h(1)>0;\ h(4)<4$.

- Tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x)=x^3-6x^2+9x$ xuống dưới a đơn vị ta được đồ thị hàm số $y=h(x)$. Suy ra phương trình $h(x)=0$ luôn có ba nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng $(0;4)$.

Khi đó,

+ Ta có $f(x)=x^3-6x^2+9x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$.

+ $f^2(x)=f\left(f(x)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\f(x)=3\end{array}\right.$. Theo trên, phương trình $f(x)=3$ có có ba nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng $(0;4)$. Nên phương trình $f^2(x)=0$ có $3+2$ nghiệm phân biệt.

+ $f^3(x)=0\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f^2(x)=0\\f^2(x)=3\end{array}\right.$.

$f^2(x)=0$ có $3+2$ nghiệm.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$f^2(x)=f\left(f(x)\right)=3$ có ba nghiệm dương $f(x)$ phân biệt thuộc khoảng $(0;4)$. Mỗi phương trình $f(x)=a$, với $a\in(0;4)$ lại có ba nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng $(0;4)$. Do đó phương trình $f^2(x)=3$ có tất cả 9 nghiệm phân biệt.

Suy ra phương trình $f^3(x)=0$ có 3^2+3+2 nghiệm phân biệt.

+ $f^4(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f^3(x)=0\\f^3(x)=3\end{array}\right.$.

$f^3(x)=0$ có $9+3+2$ nghiệm.

$f^3(x)=f\left(f^2(x)\right)=3$ có ba nghiệm dương $f^2(x)$ phân biệt thuộc khoảng $(0;4)$. Mỗi phương trình $f^2(x)=b$, với $b\in(0;4)$ lại có 9 nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng $(0;4)$. Do đó phương trình $f^3(x)=3$ có tất cả 9.3 nghiệm phân biệt.

+ $f^5(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f^4(x)=0\\f^4(x)=3\end{array}\right.$.

$f^4(x)=0$ có $3^3+9+3+2$ nghiệm.

$f^4(x)=f\left(f^3(x)\right)=3$ có ba nghiệm dương $f^3(x)$ phân biệt thuộc khoảng $(0;4)$. Mỗi phương trình $f^3(x)=c$, với $c\in(0;4)$ lại có 27 nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng $(0;4)$. Do đó phương trình $f^4(x)=3$ có tất cả 27.3 nghiệm phân biệt. Vậy $f^5(x)=0$ có $3^4+3^3+3^2+3+2=122$ nghiệm.

+ $f^6(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f^5(x)=0\\f^5(x)=3\end{array}\right.$.

$f^5(x)=0$ có $3^4+3^3+3^2+3+2=122$ nghiệm.

$f^5(x)=f\left(f^4(x)\right)=3$ có ba nghiệm dương $f^4(x)$ phân biệt thuộc khoảng $(0;4)$. Mỗi phương trình $f^4(x)=c$, với $c\in(0;4)$ lại có 81 nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng $(0;4)$. Do đó phương trình $f^5(x)=3$ có tất cả 81.3 nghiệm phân biệt.

Vậy $f^6(x)$ có $3^5+3^4+3^3+3^2+3+2=365$ nghiệm.

Câu 52: **(HSG Lớp 12 - Bắc Ninh 2019)** Cho hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\xy+yz+xz=-3\\x^6+y^6+z^6=m\end{cases}$ với x, y, z là ẩn số thực, m là tham số.

Số giá trị nguyên của m để hệ phương trình có nghiệm là

A. 25. **B.** 24. **C.** 12. **D.** 13.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz)=6+2.(-3)=0$.

Vậy $x+y+z=0$. Suy ra: $z=-(x+y)\Rightarrow z^2=x^2+2xy+y^2\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=2(x^2+y^2+xy)$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)=x^2+y^2+xy$ (1). Thay $x^2+y^2+z^2=6$ vào (1) ta được $x^2+y^2+xy=3$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 3+xy \geq 0 \\ (x-y)^2 = 3-3xy \geq 0 \end{cases}$. Vậy $-3 \leq xy \leq 1$.

Ta có: $m = x^6 + y^6 + z^6 = x^6 + y^6 + (x+y)^6$ (thay $z = -(x+y)$)

$= (x^3+y^3)^2 - 2x^3y^3 + (x+y)^6 = \left[(x+y).(x^2-xy+y^2)\right]^2 - 2x^3y^3 + (x+y)^6$

$= (x+y)^2.\left[(x^2+y^2+xy)-2xy\right]^2 - 2(xy)^3 + (x+y)^6$ (2)

Thay $\begin{cases} (x+y)^2 = 3+xy \\ x^2+y^2+xy = 3 \end{cases}$ vào (2) ta được: $x^6 + y^6 + z^6 = (3+xy).(3-2xy)^2 - 2(xy)^3 + (3+xy)^3$

Đặt $t = xy$ $(-3 \leq t \leq 1)$. Khi đó $x^6 + y^6 + z^6 = (3+t).(3-2t)^2 - 2t^3 + (3+t)^3 = 3t^3 + 9t^2 + 54$

Xét hàm số $f(t) = 3t^3 + 9t^2 + 54$ trên $[-3;1]$. Ta có: $f'(t) = 9t^2 + 18t$.

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \in [-3;1] \\ t = -2 \in [-3;1] \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

t	-3		-2		0		1
f'(t)		+	0	-	0	+	
f(t)	54	↗	66	↘	54	↗	66

Từ bảng biến thiên ta thấy: $54 \leq f(t) \leq 66$ với $\forall t \in [-3;1]$.

Hệ phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có nghiệm $t \in [-3;1]$

$\Leftrightarrow 54 \leq m \leq 66$. Vậy có 13 giá trị nguyên của m để hệ phương trình có nghiệm.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

ỨNG DỤNG THỰC TẾ

A – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: **(Hậu Lộc Thanh Hóa)** Một chất điểm chuyển động thẳng với quãng đường biến thiên theo thời gian bởi quy luật $s(t)=t^3-4t^2+12$ (m), trong đó t (s) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Vận tốc của chất điểm đó đạt giá trị bé nhất khi t bằng bao nhiêu?

A. 2 (s). **B.** $\frac{8}{3}$ (s). **C.** 0 (s). **D.** $\frac{4}{3}$ (s).

Câu 2: **(Triệu Thái Vĩnh Phúc Lần 3)** Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{3}t^3+6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 243. **B.** 144. **C.** 27. **D.** 36.

Câu 3: Một vật chuyển động có phương trình là $S(t)=40\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right),(t(s))$, quãng đường tính theo đơn vị mét.

a. Tính vận tốc của vặt chuyển động tại thời điểm t=4(s)

b. Tính gia tốc của vật chuyển động tại thời điểm t=6(s).

Câu 4: Một vật rơi tự do có phương trình chuyển động là $S(t)=50t^2,(t(s))$, độ cao tính theo đơn vị là mét.

a. Tính vận tốc của vật rơi tự do tại thời điểm t=6(s).

b. Sau thời gian bao lâu thì vật rơi tự do đạt vận tốc $50(m/s)$.

Câu 5: Một vật chuyển động có vận tốc được biểu thị bởi công thức là $v(t)=5t^2+7t,(t(s))$, trong đó $v(t)$ tính theo đơn vị là (m/s)

a. Tính gia tốc của vật tại thời điểm t=2(s).

b. Tính gia tốc của vật tại thời điểm vận tốc chuyển động của vật bằng 12 m/s.

Câu 6: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t)=1+3t^2-t^3,t(s)$. Vận tốc $v(m/s)$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất khi t bằng bao nhiêu.

A. $t=4$ **B.** $t=3$ **C.** $t=2$ **D.** $t=1$

Câu 7: Hằng ngày mực nước của hồ thủy điện ở miền Trung lên và xuống theo lượng nước mưa, và các suối nước đổ về hồ. Từ lúc 8h sáng, độ sâu của mực nước trong hồ tính theo mét và lên xuống theo thời gian t (giờ) trong ngày cho bởi công thức $h(t)=24t+5t^2-\frac{t^3}{3}$. Biết rằng phải thông báo cho các hộ dân phải di dời trước khi xả nước theo quy đinh trước 5 giờ. Hỏi cần thông báo cho hộ dân di dời trước khi xả nước mấy giờ. Biết rằng mực nước trong hồ phải lên cao nhất mới xả nước.

A. 15h **B.** 16h **C.** 17h **D.** 18h

Câu 8: Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+10,(t(s))$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

A. 0,2m **B.** 2m **C.** 10m **D.** 20m.

Câu 9: Một con cá hồi bơi ngược dòng (từ nơi sinh sống) để vượt khoảng cách 300km (tới nơi sinh sản). Vận tốc dòng nước 6km/h. Giả sử vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v km/h thì năng lượng tiêu hao của cá trong thời gian t giờ cho bởi công thức $E(v)=cv^3t$, trong đó c là hằng

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

số; E tính bằng jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất là bao nhiêu?

A. 9km/h **B.** 6km/h **C.** 10km/h **D.** 12km/h

Câu 10: Chi phí về nhiên liệu của một tàu được chia làm hai phần. Trong đó phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 ngàn đồng/giờ. Phần thứ hai tỉ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi $v=10km/h$ thì phần thứ hai bằng 30 ngàn đồng/giờ. Hãy xác định vận tốc của tàu để tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường là nhỏ nhất?

A. 10km/h **B.** 15km/h **C.** 20km/h **D.** 25km/h

Câu 11: Một vật rơi tự do với phương trình chuyển động $S=\frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g=9,8m/s^2$ và t tính bằng giây (s). Vận tốc của vật tại thời điểm t = 5s bằng:

A. 49m/s **B.** 25m/s **C.** 10m/s **D.** 18m/s

Câu 12: Một chất điểm chuyển động thẳng theo phương trình $S=t^3-3t^2+4t$, trong đó t tính bằng giấy (s) và S tính bằng mét (m). Gia tốc của chất điểm lúc t=2s là:

A. $4m/s^2$ **B.** $6m/s^2$ **C.** $8m/s^2$ **D.** $12m/s^2$

Câu 13: Cho chuyển động thẳng theo phương trình $S=t^3+3t^2-9t+27$, trong đó t tính bằng giấy (s) và S tính bằng mét (m).Gia tốc chuyển động tại thời điểm vận tốc triệt tiêu là:

A. $0m/s^2$ **B.** $6m/s^2$ **C.** $24m/s^2$ **D.** $12m/s^2$

Câu 14: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S=\frac{1}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2+2t-100$, trong đó t tính bằng giấy (s). Chất điểm đạt giá trị nhỏ nhất tại thời điểm:

A. $t=1$ **B.** $t=16$ **C.** $t=5$ **D.** $t=3$

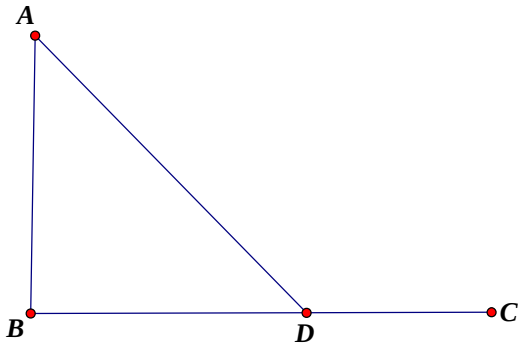
Câu 15: Một vật đang chuyển động với vận tốc 10m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=3t+t^2\left(m/s^2\right)$. Hỏi quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc?

A. $11100m$ **B.** $\frac{6800}{3}m$ **C.** $\frac{4300}{3}m$ **D.** $\frac{5800}{3}m$

Câu 16: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)(m/s)$, có gia tốc $v'(t)=\frac{3}{t+1}\left(m/s^2\right)$. vận tốc ban đầu của vật là $6m/s$. Vận tốc của vật sau 10 giây là (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị):

A. 14m/s **B.** 13m/s **C.** 11m/s. **D.** 12m/s.

Câu 17: Một đoàn cứu trợ lũ lụt đang ở vị trí A của tỉnh Quảng Ninh muốn tiếp cận vị trí C để tiếp tế lương thực phải đi theo con đường từ A đến B và từ B đến C (như hình vẽ). Tuy nhiên do nước ngập con đường từ A đến B nên đoàn cứu trợ không thể đi đến C bằng xe, nhưng đoàn cứu trợ có thể chèo thuyền từ A đến D với vận tốc 6km/h rồi đi bộ từ D đến C với vận tốc 4km/h. Biết A cách B 5km, B cách C 7km. Xác định vị trí điểm D cách B bao nhiêu km để đoàn cứu trợ đến C nhanh nhất.



A. $BD=5km$. **B.** $BD=2\sqrt{2}km$. **C.** $BD=4km$. **D.** Không tồn tại.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

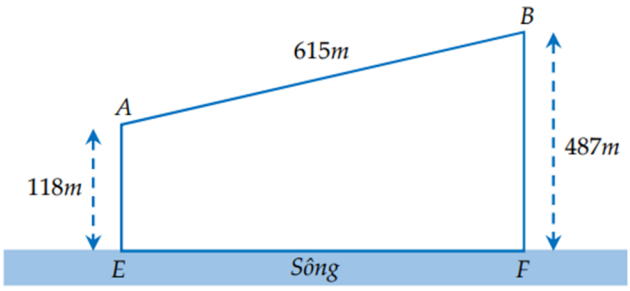
Câu 18: Có hai chiếc cọc cao $10m$ và $30m$ lần lượt đặt hai vị trí A,B. Biết khoảng cách giữa hai cọc bằng $24m$. Người ta chọn một cái chốt ở vị trí M trên mặt đất nằm giữa hai chân cột để giăng dây nối đến hai đỉnh C và D của cọc như hình vẽ. Hỏi ta phải đặt chốt ở vị trí nào để tổng độ dài của hai sợi dây đó là ngắn nhất?

A. $AM=6m,\ BM=18m$.
B. $AM=7m,\ BM=17m$.
C. $AM=4m,\ BM=20m$.
D. $AM=12m,\ BM=12m$.

Câu 19: Một người lính đặc công thực hiện bơi luyện tập từ vị trí A trên bờ biển đến một chiếc thuyền đang neo đậu tại vị trí C trên biển. Sau khi bơi được $1,25\text{km}$ do khát nước người này đã bơi vào vị trí E trên bờ biển để uống nước rồi mới từ E bơi đến C. Hãy tính xem người lính này phải bơi ít nhất bao nhiêu kilomet. Biết rằng khoảng cách từ A đến C là $6,25\text{km}$ và khoảng cách ngắn nhất từ C vào bờ là 5km.

A. $3\sqrt{5}$ km.
B. $\frac{5}{2}$ km.
C. $\sqrt{26}+\sqrt{5}$ km.
D. $\frac{15}{2}$ km

Câu 20: Hai vị trí A,B cách nhau 615m và cùng nằm về một phía bờ sông. Khoảng cách từ A và từ B đến bờ dông lần lượt là 118m và 478m. Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B. Đoạn đường ngắn nhất mà người đó có thể đi là bao nhiêu (làm trong đến chữ số thập phân thứ nhất).

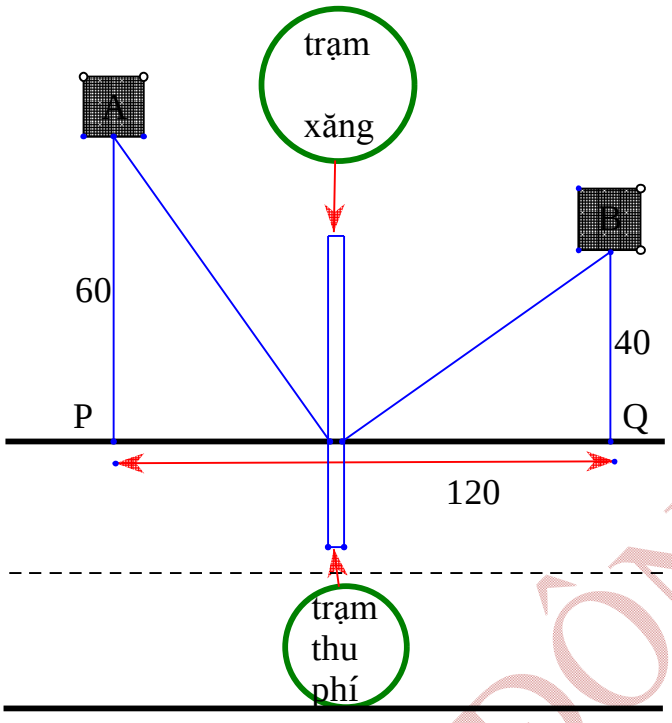


A. $569,5\text{m}$.
B. $671,4\text{m}$.
C. $779,8\text{m}$.
D. $741,2\text{m}$.

Câu 21: **(KINH MÔN II LẦN 3 NĂM 2019)** Một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB=25\text{m}$, chiều rộng $AD=20\text{m}$ được chia thành hai phần bằng nhau bởi vạch chắn MN (M,N lần lượt là trung điểm BC và AD). Một đội xây dựng làm một con đường đi từ A đến C qua vạch chắn MN, biết khi làm đường trên miền $ABMN$ mỗi giờ làm được 15m và khi làm trong miền $CDNM$ mỗi giờ làm được 30m. Tính thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C.

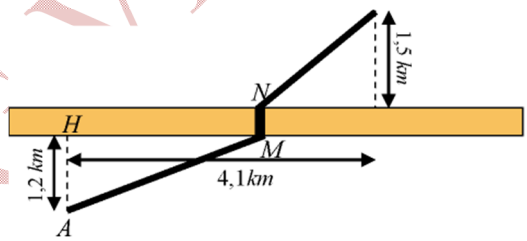
A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.
B. $\frac{10+2\sqrt{725}}{30}$.
C. $\frac{20+\sqrt{725}}{30}$.
D. 5.

Câu 22: Đường cao tốc mới xây nối hai thành phố A và B. Hai thành phố này muốn xây một trạm thu phí và trạm xăng ở trên đường cao tốc như hình vẽ. Để tiết kiệm chi phí đi lại, hai thành phố này quyết định tính toán xem dựng trạm thu phí ở vị trí nào để tổng khoảng cách từ hai trung tâm thành phố đến trạm là ngắn nhất, biết khoảng cách từ trung tâm thành phố A, B đến đường cao tốc lần lượt là 60km và 40km; khoảng cách giữa hai trung tâm thành phố là 120km (được tính theo khoảng cách của hình chiếu vuông góc của hai trung tâm thành phố lên đường cao tốc, tức là PQ kí hiệu như hình vẽ). Tìm vị trí của trạm thu phí và trạm xăng? (Giả sử chiều rộng của trạm thu phí không đáng kể)



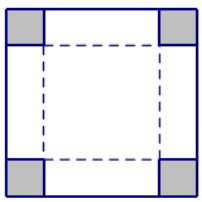
A. 72km kể từ P. **B.** 42 km kể từ Q. **C.** 48km kể từ P. **D.** Tại P.

Câu 23: Người ta muốn làm một con đường từ địa điểm A đến địa điểm B ở hai bên bờ một con sông, các số liệu được thể hiện trên hình vẽ, con đường được làm theo đường gấp khúc $AMNB$. Biết rằng chi phí xây dựng $1km$ đường bên bờ sông có điểm B gấp 1,3 lần chi phí xây dựng 1km đường bên bờ sông có điểm A, còn chi phí làm cầu MN tại điểm nào cũng như nhau. Hỏi phải xây dựng cầu tại điểm M cách điểm H bao nhiêu (làm tròn đến $0,001km$) để chi phí làm đường là nhỏ nhất.



A. 1,758 *km*. **B.** 2,630 *km*. **C.** 2,360 *km*. **D.** Kết quả khác.

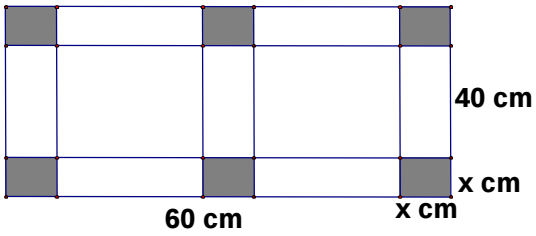
Câu 24: Từ một tấm bìa cứng hình vuông cạnh a, người ta cắt bốn góc với bốn hình vuông bằng nhau *(như hình* vẽ) rồi gấp lại tạo thành một hình hộp không nắp. Tìm cạnh của hình vuông bị cắt để thể tích khối hộp lớn nhất.



A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a}{8}$. **C.** $\frac{a}{3}$. **D.** $\frac{a}{6}$.

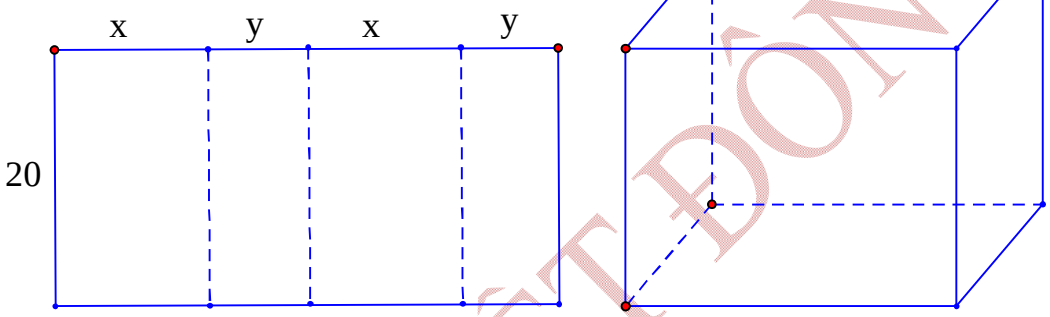
Câu 25: Cho một tấm bìa hình chữ nhật chiều dài $AB=60$cm chiều rộng $BC=40$cm. Người ta cắt 6 hình vuông bằng nhau như hình vẽ, mỗi hình vuông cạnh bằng $x$cm, rồi gập tấm bìa lại như hình vẽ dưới đây để được một hộp quà có nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



A. $\frac{20}{3}$cm.. **B.** 4cm. **C.** 5cm. **D.** $\frac{10}{3}$cm.

Câu 26: Người ta gập một miếng bìa hình chữ nhật có kích thước $60\text{cm}\times 20\text{cm}$ như hình vẽ để ghép thành một chiếc hộp hình hộp đứng (hai đáy trên và dưới được cắt từ miếng tôn khác để ghép vào). Tính diện tích toàn phần của hộp khi thể tích của hộp lớn nhất.

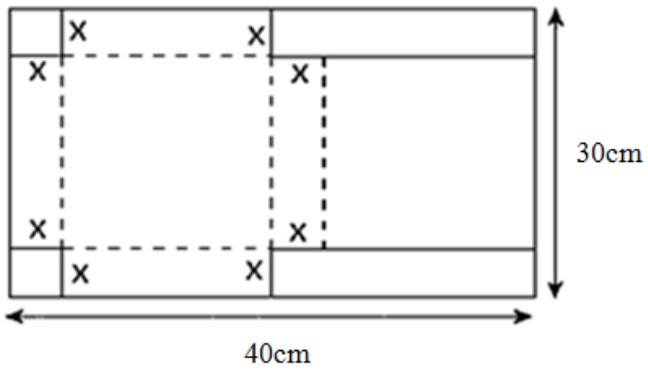


A. $1425\left(\text{cm}^3\right)$. **B.** $1200\left(\text{cm}^3\right)$. **C.** $2150\left(\text{cm}^3\right)$. **D.** $1650\left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 27: **(GIỮA-HKII-2019-NGHĨA-HƯNG-NAM-ĐỊNH)** Một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 48 và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chất liệu làm đáy và 4 mặt bên của hộp có giá thành gấp ba lần giá thành của chất liệu làm nắp hộp. Gọi h là chiều cao của hộp để giá thành của hộp là thấp nhất. Biết $h=\frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tổng $m+n$ là

A. 12. **B.** 13. **C.** 11. **D.** 10.

Câu 28: **(Trần Đại Nghĩa)** Với tấm nhôm hình chữ nhật có kích thước $30cm;\ 40cm$. Người ta phân chia tấm nhôm như hình vẽ và cắt bỏ một phần để được gấp lên một cái hộp có nắp. Tìm x để thể tích hộp lớn nhất.



A. $\frac{35+5\sqrt{13}}{3}cm$. **B.** $\frac{35-4\sqrt{13}}{3}cm$. **C.** $\frac{35-5\sqrt{13}}{3}cm$. **D.** $\frac{35+4\sqrt{13}}{3}cm$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 29: **(SỞ GD & ĐT CÀ MAU)** Người ta muốn xây một cái bể hình hộp đứng có thể tích $V=18\left(m^3\right)$, biết đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng và bể không có nắp. Hỏi cần xây bể có chiều cao h bằng bao nhiêu mét để nguyên vật liệu xây dựng là ít nhất (biết nguyên vật liệu xây dựng các mặt là như nhau)?

A. $2\left(m\right)$. **B.** $\frac{5}{2}\left(m\right)$. **C.** $1\left(m\right)$. **D.** $\frac{3}{2}\left(m\right)$.

Câu 30: **(Sở Ninh Bình Lần1)** Một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 48 và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chất liệu làm đáy và 4 mặt bên của hộp có giá thành gấp ba lần giá thành của chất liệu làm nắp hộp. Gọi h là chiều cao của hộp để giá thành của hộp là thấp nhất. Biết $h=\frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tổng $m+n$ là

A. 12. **B.** 13. **C.** 11. **D.** 10.

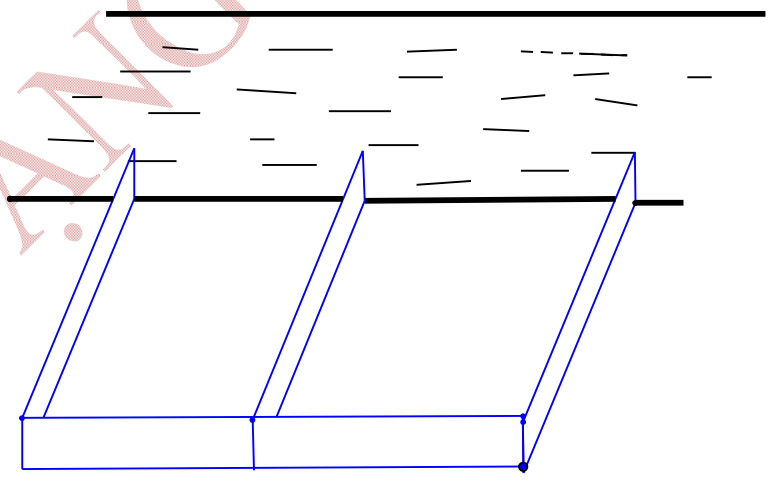
Câu 31: **(Thuận Thành 2 Bắc Ninh)** Để thiết kế một chiếc bể cá không có nắp đậy hình hộp chữ nhật có chiều cao $60\,\text{cm}$, thể tích là $96.000\,\text{cm}^3$, người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành là 70.000 đồng/m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là 100.000 đồng/m^2. Chi phí thấp nhất để làm bể cá là

A. 283.000 đồng. **B.** 382.000 đồng. **C.** 83.200 đồng. **D.** 832.000 đồng.

Câu 32: **(Nguyễn Khuyến)** Ông A dự định sử dụng hết $6,5\text{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng khối hình hộp chữ nhật chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng(các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. $2,26\text{m}^3$. **B.** $1,01\text{m}^3$. **C.** $1,33\text{m}^3$. **D.** $1,50\text{m}^3$.

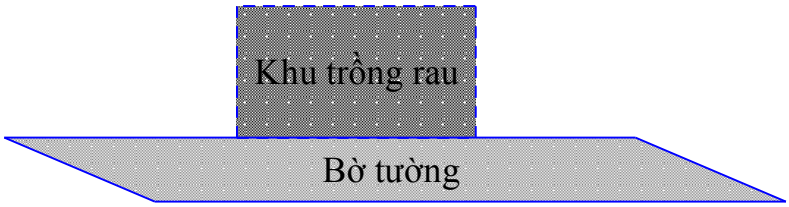
Câu 33: Một người nông dân có $15.000.000$ đồng để làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để ngăn khu đất thành hai hình chữ nhật bằng nhau với mục đích trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông, chi phí nguyên vật liệu 60.000 đồng/mét. Còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50.000 đồng/mét. Tìm diện tích lớn nhất của đất rào thu được?



A. $6250\,\text{m}^2$. **B.** $1250\,\text{m}^2$. **C.** $3125\,\text{m}^2$. **D.** $50\,\text{m}^2$.

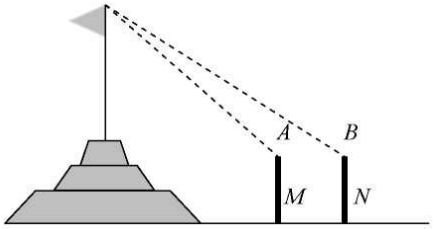
Câu 34: Bác nông dân làm một hàng rào trồng rau hình chữ nhật có chiều dài song song với bờ tường. Bác chỉ làm ba mặt, mặt thứ tư bác tận dụng luôn bờ tường. Bác dự tính sẽ dùng $200\,\text{m}$ lưới sắt để làm nên toàn bộ hàng rào đó. Hỏi diện tích lớn nhất bác có thể rào là bao nhiêu.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



A. $1500\,\text{m}^2$. **B.** $10000\,\text{m}^2$. **C.** $2500\,\text{m}^2$. **D.** $5000\,\text{m}^2$.

Câu 35: Để đo chiều cao từ mặt đất đến đỉnh cột cờ của một Kỳ đài trước Ngọ Môn (Đại Nội - Huế), người ta cắm hai cọc bằng nhau MA và NB cao $1,5m$ so với mặt đất. Hai cọc này song song, cách nhau $10m$ và thẳng hàng so với tim cột cờ (như hình vẽ). Đặt giác kế đứng tại A và B để nhắm đến đỉnh cột cờ, người ta đo được các góc lần lượt là $51^0 40'12''$ và $45^0 39'$ so với đường song song mặt đất. Hãy tính chiều cao của cột cờ (Làm tròn đến $0,01m$).

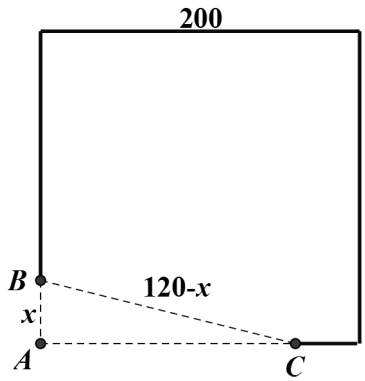


A. $63,48m$. **B.** $52,29m$. **C.** $62,29m$. **D.** $53,48m$.

Câu 36: Cho một tờ giấy hình chữ nhật có chiều dài $12cm$, chiều rộng $8cm$. Gấp góc bên phải tờ giấy sao cho khi gấp, đỉnh của nó có chạm với đáy dưới (như hình vẽ). Gọi độ dài nếp gấp là y thì giá trị nhỏ nhất của y là bao nhiêu.

A. $3\sqrt{7}$. **B.** $3\sqrt{5}$. **C.** $6\sqrt{3}$. **D.** $6\sqrt{2}$.

Câu 38: Cho một tấm gỗ hình vuông cạnh $200cm$. Người ta cắt một tấm gỗ có hình một tam giác vuông ABC từ tấm gỗ hình vuông đã cho như hình vẽ sau. Biết $AB = x\left(0 < x < 60cm\right)$ là một cạnh góc vuông của tam giác ABC và tổng độ dài cạnh góc vuông AB với cạnh huyền BC bằng $120cm$. Tìm x để tam giác ABC có diện tích lớn nhất.



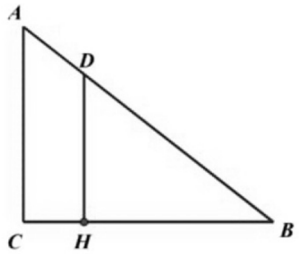
A. $x = 40cm$. **B.** $x = 50cm$. **C.** $x = 30cm$. **D.** $x = 20cm$.

Câu 39: Cho một tấm bìa hình vuông cạnh 5 dm. Để làm một mô hình kim tự tháp Ai Cập, người ta cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy chính là cạnh của hình vuông rồi gấp lên, ghép lại thành một hình chóp tứ giác đều. Để mô hình có thể tích lớn nhất thì cạnh đáy của mô hình là:

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 40: Chiều dài bé nhất của cái thang AB để nó có thể tựa vào tường AC và mặt đất BC, ngang qua cột đỡ DH cao 4m, song song và cách tường CH=0,5m là:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

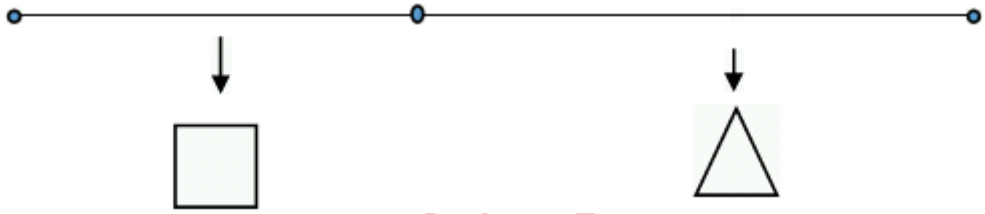


A. Xấp xỉ 5,602 **B.** Xấp xỉ 6,5902 **C.** Xấp xỉ 5,4902 **D.** Xấp xỉ 5,5902

Câu 41: Trong bài thực hành của môn huấn luyện quân sự có tình huống chiến sĩ phải bơi qua một con sông để tấn công một mục tiêu ở phía bờ bên kia sông. Biết rằng lòng sông rộng 100m và vận tốc bơi của chiến sĩ bằng một nửa vận tốc chạy trên bộ. Bạn hãy cho biết chiến sĩ phải bơi bao nhiêu mét để đến được mục tiêu nhanh nhất, nếu như dòng sông là thẳng, mục tiêu ở cách chiến sĩ 1km theo đường chim bay.

A. $\frac{400}{3}$ **B.** $\frac{40}{33}$ **C.** $\frac{100}{3}$ **D.** $\frac{200}{3}$

Câu 42: Một sợi dây có chiều dài là 6 m, được chia thành 2 phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phầm thứ hai uốn thành hình vuông. Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để diện tích 2 hình thu được là nhỏ nhất?



A. $\frac{18}{9+4\sqrt{3}}$ (m) **B.** $\frac{36\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$ (m) **C.** $\frac{12}{4+\sqrt{3}}$ (m) **D.** $\frac{18\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$ (m)

Câu 43: **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai)** Để chuẩn bị cho đợt phát hành sách giáo khoa mới, một nhà xuất bản yêu cầu xưởng in phải đảm bảo các yêu cầu sau: Mỗi cuốn sách giáo khoa cần một trang chữ có diện tích là $384cm^2$, lề trên và lề dưới là $3\,cm$, lề trái và lề phải là $2\,cm$. Muốn chi phí sản xuất là thấp nhất thì xưởng in phải in trang sách có kích thước tối ưu nhất, với yêu cầu chất lượng giấy và mực in vẫn đảm bảo. Tìm chu vi của trang sách.

A. $82\,cm$. **B.** $100\,cm$. **C.** $90\,cm$. **D.** $84\,cm$.

Câu 44: Một khách sạn có 50 phòng. Hiện tại mỗi phòng cho thuê với giá 400 ngàn đồng một ngày thì toàn bộ phòng được thuê hết. Biết rằng cứ mỗi lần tăng giá thêm 20 ngàn đồng thì có thêm 2 phòng trống. Giám đốc phải chọn giá phòng mới là bao nhiêu để thu nhập của khách sạn trong ngày là lớn nhất.

A. 480 ngàn. **B.** 50 ngàn. **C.** 450 ngàn. **D.** 80 ngàn.

Câu 45: Hai con chuồn chuồn bay trên hai quỹ đạo khác nhau tại cùng một thời điểm. Một con bay trên quỹ đạo đường thẳng từ điểm $A(0;0)$ đến điểm $B(0;100)$ với vận tốc $5m/s$. Con còn lại bay trên quỹ đạo đường thẳng từ $C(60;80)$ về A với vận tốc $10m/s$. Hỏi trong quá trình bay, thì khoảng cách ngắn nhất mà hai con đạt được là bao nhiêu?

A. $20(m)$ **B.** $50(m)$ **C.** $20\sqrt{10}(m)$ **D.** $20\sqrt{5}(m)$

Câu 46: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu?

A. 2.250.000 **B.** 2.350.000 **C.** 2.450.000 **D.** 2.550.000

Câu 47: Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 40 quả bưởi. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 5000 đồng thì số bưởi bán được tăng thêm là 50 quả. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi quả là 30.000 đồng.

A. 44.000đ **B.** 43.000đ **C.** 42.000đ **D.** 41.000đ

Câu 48: Một xe khách đi từ Việt Trì về Hà Nội chở tối đa được là 60 hành khách một chuyến. Nếu một chuyến chở được m hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách được tính là $\left(30-\frac{5m}{2}\right)^2$ đồng. Tính số hành khách trên mỗi chuyến xe để nhà xe thu được lợi nhuận mỗi chuyến xe là lớn nhất.?

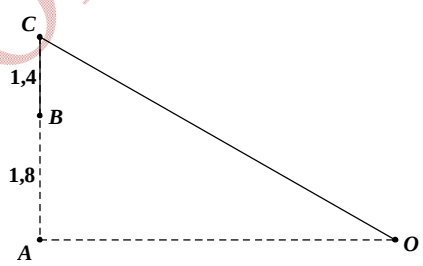
A. 30 **B.** 40 **C.** 50 **D.** 60

Câu 49: Cuốn sách giáo khoa cần một trang chữ có diện tích là $384cm^2$. Lề trên và dưới là $3cm$, lề trái và lề phải là $2cm$. Kích thước tối ưu của trang giấy?

A. Dài $24cm$, rộng $17cm$ **B.** Dài $30cm$, rộng $20cm$

C. Dài $24cm$, rộng $18cm$ **D.** Dài $24cm$, rộng $19cm$

Câu 50: Một màn ảnh hình chữ nhật cao 1,4 mét và đặt ở độ cao 1,8 mét so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đó? Biết rằng góc $\widehat{BOC}$ là góc nhọn.



A. $AO=2,4m$ **B.** $AO=2m$

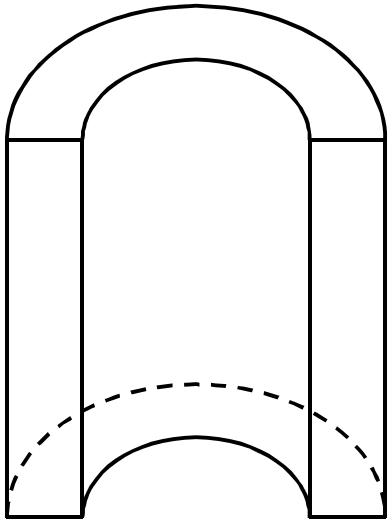
C. $AO=2,6m$ **D.** $AO=3m$

Câu 51: Một công trình nghệ thuật kiến trúc trong công viên thành phố Việt Trì có dạng là một tòa nhà hình chóp tứ giác đều nội tiếp một mặt cầu có bán kính 5(m). Toàn bộ tòa nhà đó được trang trí các hình ảnh lịch sử và tượng anh hùng, do vậy để có không gian rộng bên trong tòa nhà người ta đã xây dựng tòa nhà sao cho thể tích lớn nhất. Tính chiều cao của tòa nhà đó.

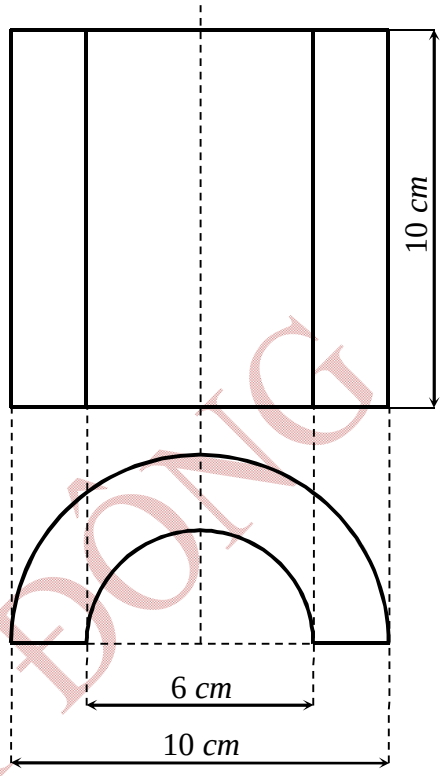
A. $h=\frac{20}{3}(m)$ **B.** $h=\frac{22}{3}(m)$ **C.** $h=\frac{23}{3}(m)$ **D.** $h=\frac{25}{3}(m)$

Câu 52: Một chi tiết máy có hình dạng như hình vẽ 1, các kích thước được thể hiện trên hình vẽ 2 (hình chiếu bằng và hình chiếu đứng).

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Hình vẽ 1



Hình vẽ 2

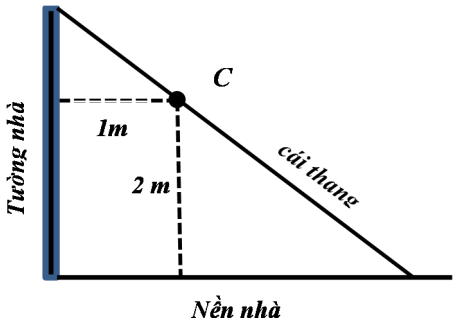
Người ta mạ toàn phần chi tiết này bằng một loại hợp kim chống gỉ. Để mạ $1m^2$ bề mặt cần số tiền 150000 đồng. Số tiền nhỏ nhất có thể dùng để mạ 10000 chi tiết máy là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng đơn vị nghìn đồng).

A. 48238 (nghìn đồng). **B.** 51238 (nghìn đồng).

C. 51239 (nghìn đồng). **D.** 37102 (nghìn đồng).

Câu 53: Ông An cần sản xuất một cái thang để trèo qua một bức tường nhà. Ông muốn cái thang phải luôn được đặt qua vị trí C, biết rằng điểm C cao $2m$ so với nền nhà và điểm C cách tường nhà $1m$ (như hình vẽ bên).

Giả sử kinh phí để sản xuất thang là 300.000 đồng/1 mét dài. Hỏi ông An cần ít nhất bao nhiêu tiền để sản xuất thang? (Kết quả làm tròn đến hàng nghìn đồng).



A. 2.350.000 đồng. **B.** 3.125.000 đồng.

C. 1.249.000 đồng. **D.** 600.000 đồng.

Câu 54: Một xe buýt của hãng xe A có sức chứa tối đa là 50 hành khách. Nếu một chuyến xe buýt chở x hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách là $20\left(3-\frac{x}{40}\right)^2$ (nghìn đồng). Khẳng định đúng là:

A. Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất bằng 3.200.000 (đồng).

B. Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất khi có 45 hành khách.

C. Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất bằng 2.700.000 (đồng).

D. Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất khi có 50 hành khách.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 55: Một công ti dự kiến chi 1 tỉ đồng để sản xuất các thùng đựng sơn hình trụ có dung tích 5 lít. Biết rằng chi phí đề làm mặt xung quanh của thùng đó là 100,000 $đ/m^2$, chi phí để làm mặt đáy là 120 000 $đ/m^2$. Hãy tính số thùng sơn tối đa mà công ty đó sản xuất (giả sử chi phí cho các mối nối không đáng kể).

A. 57582 thùng. **B.** 58135 thùng. **C.** 18209 thùng. **D.** 12525 thùng.

Câu 56: Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30.000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiế**c.** Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18.000. Hỏi cơ sở sản xuất phải bán với giá mới là bao nhiêu để đạt lợi nhuận lớn nhất.

A. 42.000 đồng. **B.** 40.000 đồng. **C.** 43.000 đồng. **D.** 39.000 đồng.

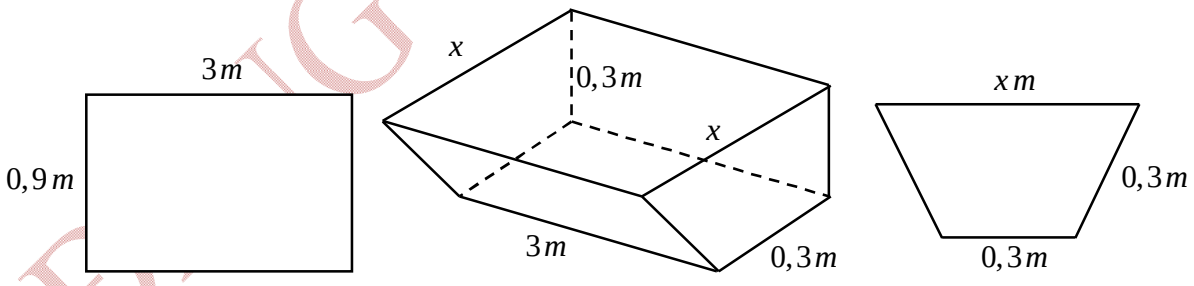
Câu 57: **(THPT-Phúc-Trạch-Hà-Tĩnh-lần-2-2018-2019-thi-tháng-4)** Một trang trại rau sạch mỗi ngày thu hoạch được một tấn rau. Mỗi ngày, nếu bán rau với giá 30000 đồng/kg thì hết rau sạch, nếu giá bán rau tăng 1000 đồng/kg thì số rau thừa tăng thêm 20 kg. Số rau thừa này được thu mua làm thức ăn chăn nuôi với giá 2000 đồng/kg. Hỏi tiền bán rau nhiều nhất trang trại có thể thu được mỗi ngày là bao nhiêu ?

A. 32400000 đồng. **B.** 34400000 đồng. **C.** 32420000 đồng. **D.** 34240000 đồng.

Câu 58: Người ta xây một bể chứa nước với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3} m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây bể là 600.000 *đồng*/m^2. Hãy xác định kích thước của bể sao cho chi phí thuê nhân công thấp nhất. Chi phí đó là

A. 85 triệu đồng. **B.** 90 triệu đồng. **C.** 75 triệu đồng. **D.** 86 triệu đồng.

Câu 59: Để làm một máng xối nước, từ một tấm tôn kích thước $0,9m \times 3m$ người ta gấp tấm tôn đó như hình vẽ dưới. Biết mặt cắt của máng xối (bị cắt bởi mặt phẳng song song với hai mặt đáy) là một hình thang cân và máng xối là một hình lăng trụ có chiều cao bằng chiều dài của tấm tôn. Hỏi $x(m)$ bằng bao nhiêu thì thể tích máng xối lớn nhất?



(a) Tấm tôn (b) Máng xối (c) Mặt cắt

A. $x = 0,5m$. **B.** $x = 0,65m$. **C.** $x = 0,4m$. **D.** $x = 0,6m$.

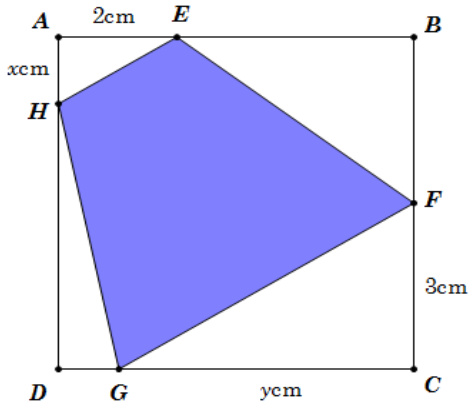
Câu 60: Một sợi dây kim loại dài $0,9m$ được cắt thành hai đoạn. Đoạn thứ nhất được uốn thành tam giác đều, đoạn thứ hai được uốn thành hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Tìm độ dài cạnh của tam giác đều (tính theo đơn vị cm) sao cho tổng diện tích của tam giác và hình chữ nhật là nhỏ nhất.

A. $\frac{60}{2-\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{60}{\sqrt{3}+2}$. **C.** $\frac{30}{1+\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{240}{\sqrt{3}+8}$.

Câu 61: Bạn A có một đoạn dây dài $20m$. Bạn chia đoạn dây thành hai phần. Phần đầu uốn thành một tam giác đều. Phần còn lại uốn thành một hình vuông. Hỏi độ dài phần đầu bằng bao nhiêu để tổng diện tích hai hình trên là nhỏ nhất?

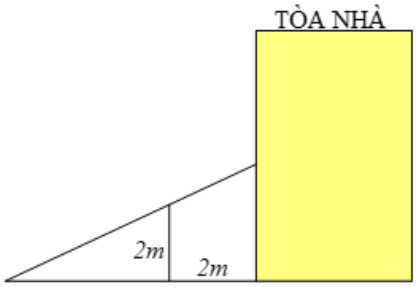
A. $\frac{40}{9+4\sqrt{3}}m.$ **B.** $\frac{180}{9+4\sqrt{3}}m.$ **C.** $\frac{120}{9+4\sqrt{3}}m.$ **D.** $\frac{60}{9+4\sqrt{3}}m.$

Câu 62: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ. Tìm tổng $x+y$ để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất.



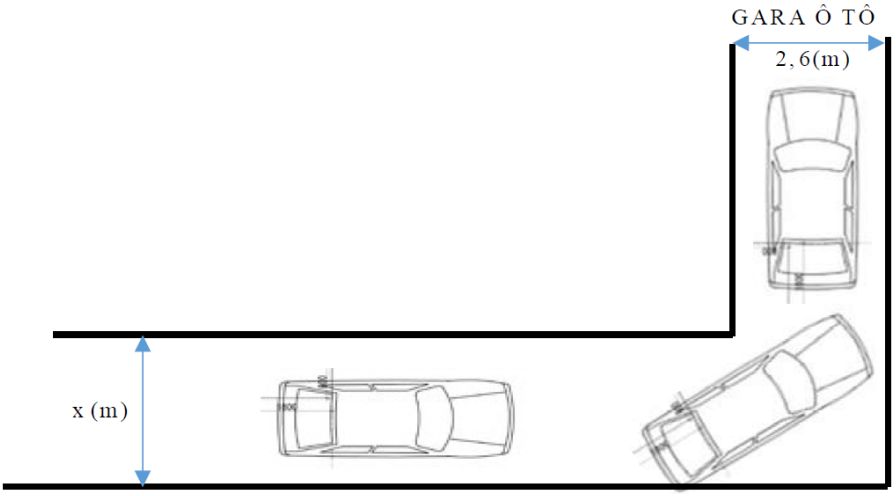
A. 7. **B.** 5. **C.** $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. **D.** $4\sqrt{2}$.

Câu 63: Cho bức tường cao 2m, nằm song song vuới tòa nhà và cách tòa nhà 2m. Người ta muốn chế tạo một chiếc thang bắc từ mặt đất bên ngoài bức tường, gác qua bức tường và chạm vào tòa nhà (xem hình vẽ). Hỏi chiều dài tối đa của thang bằng bao nhiêu mét



A. $\frac{5\sqrt{13}}{3}m$ **B.** $4\sqrt{2}m$ **C.** 6m **D.** $3\sqrt{5}m$

Câu 64: **(Cụm 8 trường chuyên lần1)** Hình vẽ bên dưới mô tả đoạn đường đi vào GARA Ô TÔ nhà cô Hiền. Đoạn đường đầu tiên có chiều rộng bằng $x\,(\text{m})$, đoạn đường thẳng vào cổng GARA có chiều rộng $2,6\,(\text{m})$. Biết kích thước xe ô tô là $5\text{m}\times 1,9\text{m}$ (chiều dài $\times$ chiều rộng). Để tính toán và thiết kế đường đi cho ô tô người ta coi ô tô như một khối hộp chữ nhật có kích thước chiều dài $5\,(\text{m})$, chiều rộng $1,9\,(\text{m})$. Hỏi chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị bên dưới để ô tô có thể đi vào GARA được ? (giả thiết ô tô không đi ra ngoài đường, không đi nghiêng và ô tô không bị biến dạng)



A. $x=3,7\,(\text{m})$. **B.** $x=2,6\,(\text{m})$. **C.** $x=3,55\,(\text{m})$. **D.** $x=4,27\,(\text{m})$.

Câu 65: **(Chuyên-Thái-Nguyên-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3)** Tính diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp trong nửa đường tròn có bán kính $10cm$ (hình vẽ).

A. $160cm^2$. **B.** $100cm^2$. **C.** $80cm^2$. **D.** $200cm^2$.

Câu 66: **(PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH)** Ông An có một khu đất hình elip với độ dài trục lớn 10 m và độ dài trục bé 8 m. Ông An muốn chia khu đất thành hai phần, phần thứ nhất là một hình chữ nhật nội tiếp elip dùng để xây bể cá cảnh và phần còn lại dùng để trồng hoa. Biết chi phí xây bể cá là 1000000 đồng trên $1m^2$ và chi phí trồng hoa là 1200000 đồng trên $1m^2$. Hỏi ông An có thể thiết kế xây dựng như trên với tổng chi phí thấp nhất gần nhất với số nào sau đây?

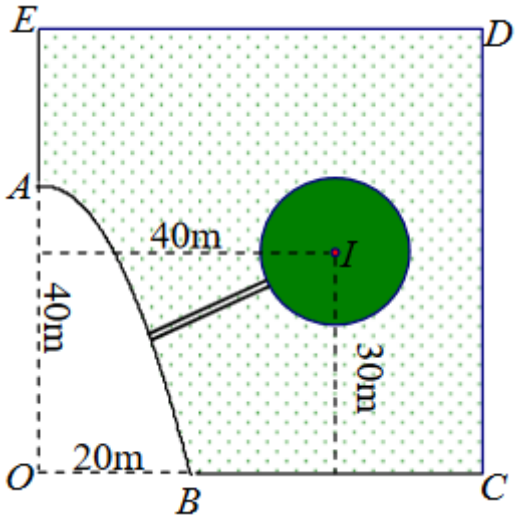
A. 67398224 đồng. **B.** 67593346 đồng. **C.** 63389223 đồng. **D.** 67398228 đồng.

Câu 67: **(PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH)** Một cái hồ rộng có hình chữ nhật. Tại một góc nhỏ của hồ người ta đóng một cái cọc ở vị trí K cách bờ AB là 1 m và cách bờ AC là 8 m, rồi dùng một cây sào ngăn một góc nhỏ của hồ để thả bèo (như hình vẽ). Tính chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB, AC và cây cọc K (bỏ qua đường kính của sào).

A. $\dfrac{5\sqrt{65}}{4}$. **B.** $5\sqrt{5}$. **C.** $9\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{5\sqrt{71}}{4}$.

Câu 68: **(SGD Thanh Hóa – năm 2017 – 2018)** Một cái ao hình $ABCDE$ (như hình vẽ), ở giữa ao có một mảnh vườn hình tròn có bán kính 10 m. Người ta muốn bắc một câu cầu từ bờ AB của ao đến vườn. Tính gần đúng độ dài tối thiểu l của cây cầu biết :

- Hai bờ AE và BC nằm trên hai đường thẳng vuông góc với nhau, hai đường thẳng này cắt nhau tại điểm O ;
- Bờ AB là một phần của một parabol có đỉnh là điểm A và có trục đối xứng là đường thẳng OA ;
- Độ dài đoạn OA và OB lần lượt là 40 m và 20 m;
- Tâm I của mảnh vườn lần lượt cách đường thẳng AE và BC lần lượt 40 m và 30m.



A. $l \approx 17,7$ m. **B.** $l \approx 25,7$ m. **C.** $l \approx 27,7$ m. **D.** $l \approx 15,7$ m.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

B – HƯỚNG DẪN GIẢI

I - CÁC BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

Câu 1: **(Hậu Lộc Thanh Hóa)** Một chất điểm chuyển động thẳng với quãng đường biến thiên theo thời gian bởi quy luật $s(t)=t^3-4t^2+12$ (m), trong đó t (s) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Vận tốc của chất điểm đó đạt giá trị bé nhất khi t bằng bao nhiêu?

A. 2 (s). **B.** $\frac{8}{3}$ (s). **C.** 0 (s). **D.** $\frac{4}{3}$ (s).

Lời giải

Chọn D

$v(t)=s'(t)=3t^2-8t$.

$v'(t)=6t-8$. Có $v'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{4}{3}$.

t	0		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
v'		$-$	0	$+$	
v	0	$\searrow$	$-\frac{16}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{[0;+\infty)} v=v\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{16}{3}$.

Vậy vận tốc của chất điểm đó đạt giá trị bé nhất khi $t=\frac{4}{3}$.

Câu 2: **(Triệu Thái Vĩnh Phúc Lần 3)** Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{3}t^3+6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 243. **B.** 144. **C.** 27. **D.** 36.

Lời giải

Chọn D

Ta có $v(t)=s'(t)=\left(-\frac{1}{3}t^3+6t^2\right)'=-t^2+12t$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Vì $-t^2+12t=-(t-6)^2+36\le 36$ với mọi $t>0$.

Suy ra $\max\limits_{t>0} v(t)=36$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(t-6)^2=0\Leftrightarrow t=6$.

Vậy trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng 36.

Câu 3: Một vật chuyển động có phương trình là $S(t)=40\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right),(t(s))$, quãng đường tính theo đơn vị mét.

a. Tính vận tốc của vặt chuyển động tại thời điểm t=4(s)

b. Tính gia tốc của vật chuyển động tại thời điểm t=6(s).

Lời giải

a) Ta có: $v(t)=S'(t)=40\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)'.cos\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)=40\pi cos\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$

vậy: $v(4)=S'(4)=40\pi cos\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)=40\pi\frac{1}{2}=20\pi\left(m/s\right)$

b) Ta có:

$a(t)=v'(t)=-40\pi\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)'\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)=-40\pi^2\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$

Vậy: $a(6)=v'(6)=-40\pi^2\sin\left(6\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-40\pi^2\frac{\sqrt{3}}{2}=-20\sqrt{3}\pi^2\left(m/s^2\right)$

Câu 4: Một vật rơi tự do có phương trình chuyển động là $S(t)=50t^2,(t(s))$, độ cao tính theo đơn vị là mét.

a. Tính vận tốc của vật rơi tự do tại thời điểm t=6(s).

b. Sau thời gian bao lâu thì vật rơi tự do đạt vận tốc $50(m/s)$.

Lời giải.

a. Ta có $v(t)=S'(t)=10t$.

Vậy vận tốc thời điểm $t=6(s)$ là: $v(6)=S'(6)=10.6=60(m/s)$

b. Vậy để vận tốc của vật rơi do đạt $50(m/s)$ thì: $50=10t\Leftrightarrow t=5(s)$

Câu 5: Một vật chuyển động có vận tốc được biểu thị bởi công thức là $v(t)=5t^2+7t,(t(s))$, trong đó $v(t)$ tính theo đơn vị là (m/s)

a. Tính gia tốc của vật tại thời điểm t=2(s).

b. Tính gia tốc của vật tại thời điểm vận tốc chuyển động của vật bằng 12 m/s.

Lời giải

a) Ta có: $a(t)=v'(t)=10t+7$. Vậy gia tốc của vật tại thời điểm $t=2(s)$

$a(2)=v'(2)=10.2+2=27\left(m/s^2\right)$

b) Vật tại thời điểm vận tốc chuyển động của vật bằng 12 m/s:

$v(t)=12\Leftrightarrow 5t^2+7t=12\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\ \ (t/\,m)\\t=-2,4(loai)\end{array}\right.$

Với $t=1(s):a(1)=v'(1)=10+7=17\left(m/s^2\right)$

Câu 6: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t)=1+3t^2-t^3,t(s)$. Vận tốc $v(m/s)$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất khi t bằng bao nhiêu.

A. $t=4$ **B.** $t=3$ **C.** $t=2$ **D.** $t=1$

Lời giải

Ta có: $v(t)=S'(t)=6t-3t^2$

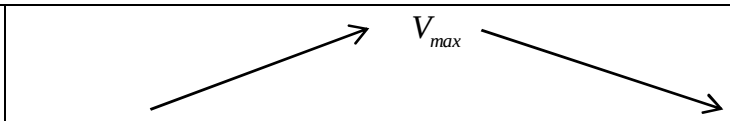
$v'(t)=6-6t.$

$v'(t)=0\Leftrightarrow 6-6t=0\Leftrightarrow t=1$

BBT

t	0		1		$+\infty$
$V'(t)$		+	0	−	

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

V(t)	

Vậy vận tốc của chuyển động đạt GTLN khi t=1.

Chọn D

Câu 7: Hằng ngày mực nước của hồ thủy điện ở miền Trung lên và xuống theo lượng nước mưa, và các suối nước đổ về hồ. Từ lúc 8h sáng, độ sâu của mực nước trong hồ tính theo mét và lên xuống theo thời gian t (giờ) trong ngày cho bởi công thức $h(t)=24t+5t^2-\frac{t^3}{3}$. Biết rằng phải thông báo cho các hộ dân phải di dời trước khi xả nước theo quy đinh trước 5 giờ. Hỏi cần thông báo cho hộ dân di dời trước khi xả nước mấy giờ. Biết rằng mực nước trong hồ phải lên cao nhất mới xả nước.

A. 15*h* **B.** 16*h* **C.** 17*h* **D.** 18*h*

Lời giải

Ta có:

$h'(t)=24+10t-t^2$

$h'(t)=0\Leftrightarrow 24+10t-t^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2(\text{loai}) \\ t=12 \quad (\text{t/ m}) \end{array}\right.$

BBT

t	0		12		$+\infty$
$h'(t)$		+	0	−	
$h(t)$		↗	h_{max}	↘	

Vậy để mực nước lên cao nhất thì phải mất 12 giờ. Vậy phải thông báo cho dân di dời vào 15 giờ chiều cùng ngày.

Chọn A

Câu 8: Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+10,(t(s))$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

A. 0,2m **B.** 2m **C.** 10m **D.** 20m.

Lời giải

Ta có: $v_0=10(m/s)$

Gia tốc của ô tô chuyển động chậm dần đều: $a=v'(t)=-5$.

Tại thời điểm ô tô dừng lại thì vận tốc bằng 0.

Ta có: $v_{(t)}^2-v_0^2=2aS\Leftrightarrow 0-10^2=2(-5)S\Leftrightarrow S=10(m)$

Vậy ô tô còn có thể đi được quãng đường là $10m$.

Chọn C

Lưu ý:

Bài này còn có thể áp dụng tích phân để tìm quãng đường di chuyển của ô tô khi dừng lại.

Câu 9: Một con cá hồi bơi ngược dòng (từ nơi sinh sống) để vượt khoảng cách 300km (tới nơi sinh sản). Vận tốc dòng nước 6km/h. Giả sử vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v km/h thì năng lượng tiêu hao của cá trong thời gian t giờ cho bởi công thức $E(v)=cv^3t$, trong đó c là hằng số; E tính bằng jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất là bao nhiêu?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. 9km/h **B.** 6km/h **C.** 10km/h **D.** 12km/h

Lời giải

Vận tốc của con cá khi bơi ngược dòng: $v-6(km/h),(v\ge 6)$

Thời gian con cá bơi từ nơi sinh sống đến nơi sinh sản: $t=\frac{300}{v-6}(h)$

Năng lượng tiêu thụ của con cá khi bơi từ nơi sinh sống đến nơi sinh sản:

$$E(v)=cv^2\frac{900}{v-6}-cv^3\frac{300}{(v-6)^2}=\frac{300cv^2}{v-6}\left(3-\frac{v}{v-6}\right).$$

$$E'(v)=0\Leftrightarrow\frac{300cv^2}{v-6}\left(3-\frac{v}{v-6}\right)=0\Leftrightarrow 3-\frac{v}{v-6}=0\Leftrightarrow v=9.$$

BBT

X	6		9		$+\infty$
$E'(x)$		$-$	0	$+$	
E(x)		↘	E_{min}	↗	

Vậy vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất bằng $v=9(km/h)$. Chọn. A

Nhận xét:

Đối với bài này có rất nhiều em tìm nhầm hàm $E(v)=c(v-6)^3\frac{300}{v-6}(J)$. Và sẽ tìm được chọn $v=6km/h$ đó là Chọn sai hoàn toàn vì vận tốc v trong biểu thức $E(v)=cv^3t$, v là vận tốc thực của con cá khi di chuyển, còn t là thời gian con cá bơi từ nơi sinh sống đến nơi sinh sản ứng với vận tốc của con cá đã trừ đi vận tốc dòng nước.

Câu 10: Chi phí về nhiên liệu của một tàu được chia làm hai phần. Trong đó phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 ngàn đồng/giờ. Phần thứ hai tỉ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi $v=10km/h$ thì phần thứ hai bằng 30 ngàn đồng/giờ. Hãy xác định vận tốc của tàu để tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường là nhỏ nhất?

A. 10km/h **B.** 15km/h **C.** 20km/h **D.** 25km/h

Lời giải

Gọi $x(km/h)$ là vận tốc của tàu. Thời gian tàu chạy quãng đường 1 km là $\frac{1}{x}$ (giờ).

Chi phí tiền nhiên liệu cho phần thứ nhất là: $\frac{1}{x}.480$ (ngàn đồng).

Khi vận tốc $v=10km/h$ thì chi phí cho quãng đường 1 km ở phần thứ hai là:

$\frac{1}{10}.30=3$ (ngàn đồng).

Xét tại vận tốc $x(km/h)$, gọi y (ngàn đồng) chi phí cho quãng đường 1 km tại vận tốc x thì chi phí cho quãng đường 1 km tại vận tốc x, ta có: $y=kx^3$

Ta có: $3=k10^3\Leftrightarrow k=\frac{3}{10^3}$. Suy ra $y=\frac{3x^3}{1000}$.

Vậy tổng chi phí tiền nhiên liệu cho 1 km đường là: $P(x)=\frac{480}{x}+\frac{3x^3}{1000}$.

Bài toán trở thành tìm x để $P(x)$ nhỏ nhất.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$P'(x) = -\frac{480}{x^2} + \frac{9x^2}{1000}$

$P'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{480}{x^2} + \frac{9x^2}{1000} = 0 \Leftrightarrow x = 20$

$P''(x) = \frac{960}{x^3} + \frac{18x}{1000}$

$P''(20) = \frac{960}{20^3} + \frac{18.20}{1000} > 0$

Suy ra $P(x)$ đạt GTNN tại $x = 20$

Vậy vận tốc của tàu $x = 20(km/h)$.

Chọn C

Câu 11: Một vật rơi tự do với phương trình chuyển động $S = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g = 9{,}8m/s^2$ và t tính bằng giây (s). Vận tốc của vật tại thời điểm t = 5s bằng:

A. 49m/s **B.** 25m/s **C.** 10m/s **D.** 18m/s

Lời giải

$v = S' = gt$ nên tại thời điểm $t = 5s$. Vận tốc của vật là:

$v = 9{,}8.5 = 49(m/s)$.

Chọn A

Câu 12: Một chất điểm chuyển động thẳng theo phương trình $S = t^3 - 3t^2 + 4t$, trong đó t tính bằng giấy (s) và S tính bằng mét (m). Gia tốc của chất điểm lúc t=2s là:

A. $4m/s^2$ **B.** $6m/s^2$ **C.** $8m/s^2$ **D.** $12m/s^2$

Lời giải

$a = S'' = 6t - 6$ nên tại thời điểm t=2s thì gia tốc của chất điểm là: $a = 6.2 - 6(m/s^2)$.

Chọn B

Câu 13: Cho chuyển động thẳng theo phương trình $S = t^3 + 3t^2 - 9t + 27$, trong đó t tính bằng giấy (s) và S tính bằng mét (m).Gia tốc chuyển động tại thời điểm vận tốc triệt tiêu là:

A. $0m/s^2$ **B.** $6m/s^2$ **C.** $24m/s^2$ **D.** $12m/s^2$

Lời giải

$v = S' = 3t^2 + 6t - 9; a = S'' = 6t + 6$

Tại thời điểm vận tốc bị triệt tiêu: $3t^2 + 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3(loai) \end{array}\right.$

Với $t = 1$ thì gia tốc của chuyển động là: $a = 6.1 + 6 = 12(m/s^2)$.

Chọn D

Câu 14: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S = \frac{1}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2 + 2t - 100$, trong đó t tính bằng giấy (s). Chất điểm đạt giá trị nhỏ nhất tại thời điểm:

A. $t = 1$ **B.** $t = 16$ **C.** $t = 5$ **D.** $t = 3$

Lời giải

$S' = t^3 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2(l) \\ t = 1 \end{array}\right.$

Vậy chất điểm đạt GTNN tại t= 1s.

Chọn A

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 15: Một vật đang chuyển động với vận tốc 10m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=3t+t^2\left(m/s^2\right)$. Hỏi quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc?

A. $11100m$ **B.** $\frac{6800}{3}m$ **C.** $\frac{4300}{3}m$ **D.** $\frac{5800}{3}m$

Lời giải

$a(t)=3t+t^2$

$v'(t)=a(t);\quad S'(t)=v(t)$

Theo đề ta có: vận tốc ban đầu là $10(m/s)$

$\Rightarrow v(t)=\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3+10(m/s)$

$S(t)=\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{12}t^4+10t(m)$

Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là: $S(10)=\frac{4300}{3}(m)$.

Chọn C

Câu 16: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)(m/s)$, có gia tốc $v'(t)=\frac{3}{t+1}\left(m/s^2\right)$. vận tốc ban đầu của vật là $6m/s$. Vận tốc của vật sau 10 giây là (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị):

A. 14m/s **B.** 13m/s **C.** 11m/s. **D.** 12m/s.

Lời giải

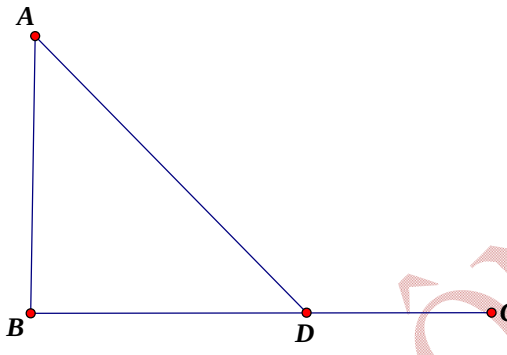
Vận tốc của vật sau 10 giây là $v=6+7=13(m/s)$.

Chọn B

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

II - CÁC BÀI TOÁN TỐI ƯU

Câu 17: Một đoàn cứu trợ lũ lụt đang ở vị trí A của tỉnh Quảng Ninh muốn tiếp cận vị trí C để tiếp tế lượng thực phải đi theo con đường từ A đến B và từ B đến C (như hình vẽ). Tuy nhiên do nước ngập con đường từ A đến B nên đoàn cứu trợ không thể đi đến C bằng xe, nhưng đoàn cứu trợ có thể chèo thuyền từ A đến D với vận tốc 6km/h rồi đi bộ từ D đến C với vận tốc 4km/h. Biết A cách B 5km, B cách C 7km. Xác định vị trí điểm D cách B bao nhiêu km để đoàn cứu trợ đến C nhanh nhất.



A. $BD = 5km$. **B.** $BD = 2\sqrt{2}km$. **C.** $BD = 4km$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Gọi $BD = x(km)$, $0 \le x \le 7$.

$AD = \sqrt{25 + x^2}$, $CD = 7 - x$.

Thời gian đi từ A đến C là: $T(x) = \dfrac{\sqrt{25+x^2}}{6} + \dfrac{7-x}{4}$.

Ta có $T'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{3\sqrt{25+x^2}} - \dfrac{1}{2}\right) < \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}\right) < 0$

$T(x)$ nghịch biến với x thỏa mãn $0 \le x \le 7$ do đó $T(x)$ nhỏ nhất khi $x = 7$.

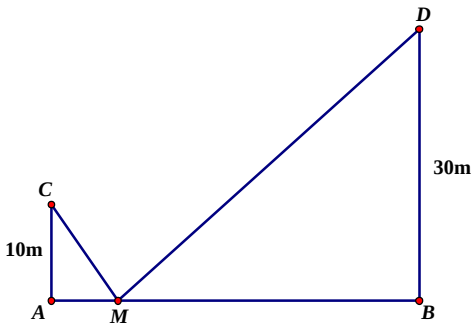
Câu 18: Có hai chiếc cọc cao $10m$ và $30m$ lần lượt đặt hai vị trí A, B. Biết khoảng cách giữa hai cọc bằng $24m$. Người ta chọn một cái chốt ở vị trí M trên mặt đất nằm giữa hai chân cột để giăng dây nối đến hai đỉnh C và D của cọc như hình vẽ. Hỏi ta phải đặt chốt ở vị trí nào để tổng độ dài của hai sợi dây đó là ngắn nhất?

A. $AM = 6m, BM = 18m$. **B.** $AM = 7m, BM = 17m$.

C. $AM = 4m, BM = 20m$. **D.** $AM = 12m, BM = 12m$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi độ dài $AM = x$, $0 < x < 24$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta có $CM=\sqrt{CM^2+AM^2}=\sqrt{100+x^2}$,

$DM=\sqrt{BM^2+BD^2}=\sqrt{900+(24-x)^2}=\sqrt{1476-48x+x^2}$

Tổng độ dài đường dây là $S=\sqrt{100+x^2}+\sqrt{1476-48x+x^2}$

Đặt $f(x)=\sqrt{100+x^2}+\sqrt{1476-48x+x^2}$, $0<x<24$ với

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{100+x^2}}-\frac{24-x}{\sqrt{(24-x)^2+30^2}}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{100+x^2}}-\frac{24-x}{\sqrt{(24-x)^2+30^2}}=0\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{100+x^2}}=\frac{24-x}{\sqrt{(24-x)^2+30^2}}$$

Bình phương 2 vế không âm ta được $x^2+6x-72=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=6\\x=-12\ (l)\end{array}\right.\Rightarrow AM=6\,\text{m},\ BM=18\,\text{m}$

.

Cách 2: (Casio hoặc công thức giải nhanh).

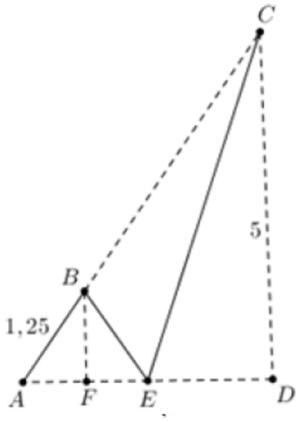
Câu 19: Một người lính đặc công thực hiện bơi luyện tập từ vị trí A trên bờ biển đến một chiếc thuyền đang neo đậu tại vị trí C trên biển. Sau khi bơi được $1,25\text{km}$ do khát nước người này đã bơi vào vị trí E trên bờ biển để uống nước rồi mới từ E bơi đến C. Hãy tính xem người lính này phải bơi ít nhất bao nhiêu kilomet. Biết rằng khoảng cách từ A đến C là $6,25\text{km}$ và khoảng cách ngắn nhất từ C vào bờ là 5km.

A. $3\sqrt{5}$ km. **B.** $\frac{5}{2}$ km.

C. $\sqrt{26}+\sqrt{5}$ km. **D.** $\frac{15}{2}$ km

Lời giải

Chọn D



Ta có $AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=3,75$, $AB=BE=1,25$.

Gọi độ dài đoạn $AF=x$ với $0<x<3,75$, theo hình vẽ $AF=EF=x$ do đó

$EC=\sqrt{CD^2+ED^2}=\sqrt{25+(3,75^2-2x)^2}$.

Quãng đường người lính bơi phải bơi là $1,25+1,25+\sqrt{25+(3,75-2x)^2}$.

Xét hàm số $f(x)=1,25+1,25+\sqrt{25+(3,75-2x)^2}$ với $f'(x)=\frac{-15+8x}{2\sqrt{39,0625-15x+4x^2}}$

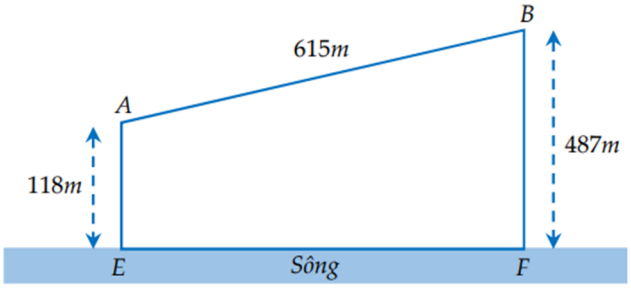
Bảng biến thiên

x	0 $\frac{15}{8}$ $3,75$
$f'(x)$	$-$ 0 $+$
$f(x)$	$\searrow$ $7,5$ $\nearrow$

Dựa vào bảng biến thiên, quãng đường ngắn nhất người đó bơi là $7,5$ km.

Cách 2: (Casio hoặc công thức giải nhanh)

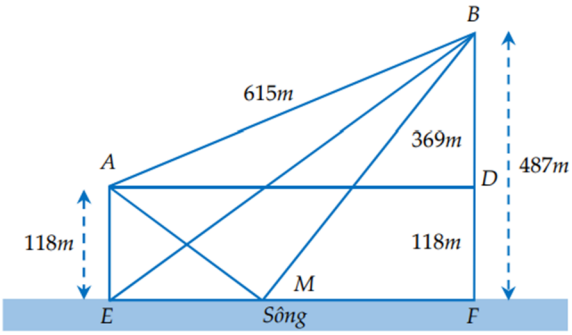
Câu 20: Hai vị trí A,B cách nhau 615m và cùng nằm về một phía bờ sông. Khoảng cách từ A và từ B đến bờ dông lần lượt là 118m và 478m. Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B. Đoạn đường ngắn nhất mà người đó có thể đi là bao nhiêu (làm trong đến chữ số thập phân thứ nhất).



A. $569,5$m. **B.** $671,4$m. **C.** $779,8$m. **D.** $741,2$m.

Lời giải

Chọn C.



Giả sử người đó đi từ A đến M để lấy nước rồi đi từ M về B.

Ta có $BD = BF - AE = 369(\text{m})$, $EF = A\sqrt{AB^2 - BD^2} = 492(\text{m})$.

Đặt $EM = x$ với $0 < x < 492$, ta được $MF = 492 - x$, $AM = \sqrt{x^2 + 118^2}$,

$BM = \sqrt{(492-x)^2 + 487^2}$.

Tổng quãng đường AM và MB là $\sqrt{x^2 + 118^2} + \sqrt{(492-x)^2 + 487^2}$ với $0 < x < 492$.

Đặt $f(x) = \sqrt{x^2 + 118^2} + \sqrt{(492-x)^2 + 487^2}$ với $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} - \dfrac{492-x}{\sqrt{(492-x)^2 + 487^2}}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} = \frac{492-x}{\sqrt{(492-x)^2 + 487^2}}$$

Bình phương hai vế không âm ta được

$$x^2\left[(492-x)^2 + 487^2\right] = (492-x)^2\left(x^2 + 118^2\right)$$

$\Leftrightarrow (492-x)^2 x^2 + 487^2.x^2 = (492-x)^2 x^2 + (492-x)^2 118^2$

$\Leftrightarrow (487x)^2 = (58056-118x)^2$

$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{58056}{605} \quad (n) \\ x = -\dfrac{58056}{605} \quad (l) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	0 $\quad \dfrac{58056}{605} \quad 492$
$f'(x)$	$-\ 0\ +$
$f(x)$	$\searrow \quad 779{,}8 \quad \nearrow$

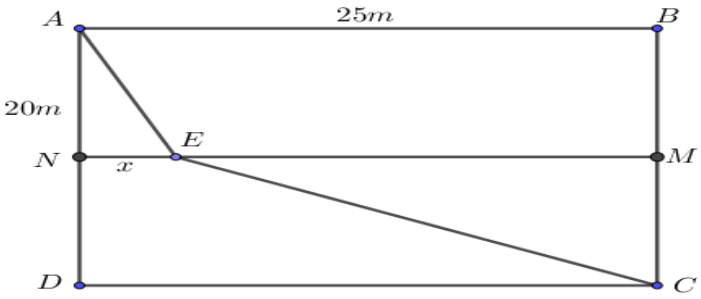
Cách 2: (Casio hoặc công thức giải nhanh).

Câu 21: **(KINH MÔN II LẦN 3 NĂM 2019)** Một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 25\text{m}$, chiều rộng $AD = 20\text{m}$ được chia thành hai phần bằng nhau bởi vạch chắn MN (M, N lần lượt là trung điểm BC và AD). Một đội xây dựng làm một con đường đi từ A đến C qua vạch chắn MN, biết khi làm đường trên miền $ABMN$ mỗi giờ làm được 15m và khi làm trong miền $CDNM$ mỗi giờ làm được 30m. Tính thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C.

A. $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\dfrac{10+2\sqrt{725}}{30}$. **C.** $\dfrac{20+\sqrt{725}}{30}$. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A



Do cần thời gian xây là ngắn nhất nên con đường làm trên mỗi miền phải là những đường thẳng.

Gọi AE và EC lần lượt là đoạn đường cần làm. Với $NE = x(\text{m})$ (với $0 \le x \le 25$).

$\Rightarrow EM = 25 - x(\text{m})$.

Ta được $\begin{cases} AE = \sqrt{AN^2 + EN^2} = \sqrt{100 + x^2} \\ EC = \sqrt{MC^2 + EM^2} = \sqrt{100 + (25-x)^2} \end{cases}$.

$\Rightarrow$ Thời gian để làm đoạn đường từ A đến C là:

$t(x) = \dfrac{AE}{15} + \dfrac{EC}{30} = \dfrac{\sqrt{100+x^2}}{15} + \dfrac{\sqrt{(25-x)^2+100}}{30}$ (h) (Với $0 \le x \le 25$)

$\Rightarrow t'(x)=\dfrac{x}{15\sqrt{100+x^2}}-\dfrac{25-x}{30.\sqrt{(25-x)^2+100}}$.

Xét $t'(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{x}{15\sqrt{100+x^2}}-\dfrac{25-x}{30.\sqrt{(25-x)^2+100}}=0$

$\Leftrightarrow 2x\sqrt{(25-x)^2+100}=(25-x)\sqrt{100+x^2}$

$\Leftrightarrow 4x^2\left((25-x)^2+100\right)=(25-x)^2\left(100+x^2\right)$

$\Leftrightarrow 4x^2(25-x)^2+400x^2-100(25-x)^2-(25-x)^2x^2=0$

$\Leftrightarrow 4(25-x)^2\left(x^2-25\right)+x^2\left(20^2-(25-x)^2\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-5)\left(4(25-x)^2(x+5)+x^2(45-x)\right)=0$

$\Leftrightarrow x=5$

Ta được $\begin{cases} t(0)=\dfrac{4+\sqrt{29}}{6} \\ t(5)=\dfrac{2\sqrt{5}}{3} \\ t(25)=\dfrac{1+\sqrt{29}}{3} \end{cases}$.

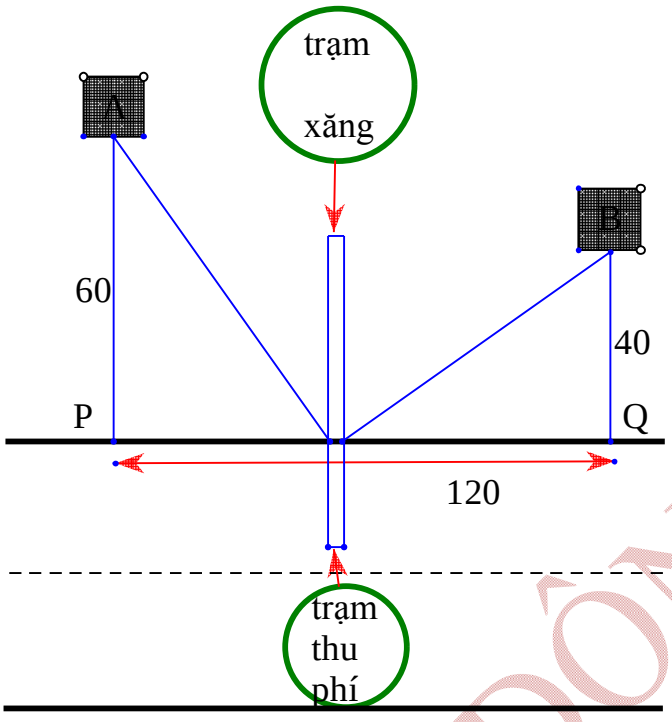
Vậy thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C là $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}(\text{h})$.

* Cách 2:

Xét $t(x)=\dfrac{\sqrt{10^2+x^2}}{15}+\dfrac{\sqrt{(25-x)^2+10^2}}{30}=\dfrac{\sqrt{20^2+(2x)^2}+\sqrt{(25-x)^2+10^2}}{30}$ (Với $0\le x\le 25$).

Câu 22: Đường cao tốc mới xây nối hai thành phố A và B. Hai thành phố này muốn xây một trạm thu phí và trạm xăng ở trên đường cao tốc như hình vẽ. Để tiết kiệm chi phí đi lại, hai thành phố này quyết định tính toán xem dựng trạm thu phí ở vị trí nào để tổng khoảng cách từ hai trung tâm thành phố đến trạm là ngắn nhất, biết khoảng cách từ trung tâm thành phố A, B đến đường cao tốc lần lượt là $60\,\text{km}$ và $40\,\text{km}$; khoảng cách giữa hai trung tâm thành phố là $120\,\text{km}$ (được tính theo khoảng cách của hình chiếu vuông góc của hai trung tâm thành phố lên đường cao tốc, tức là PQ kí hiệu như hình vẽ). Tìm vị trí của trạm thu phí và trạm xăng? (Giả sử chiều rộng của trạm thu phí không đáng kể)

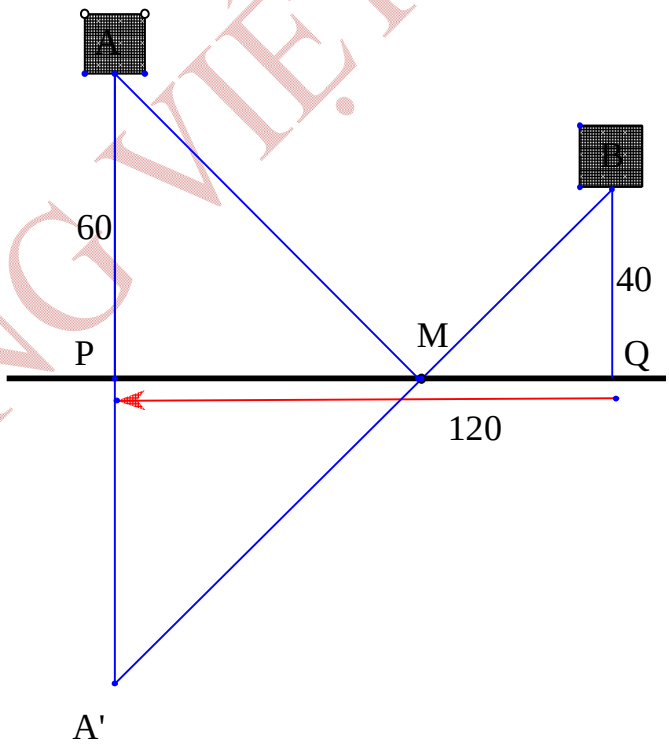
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



A. 72km kể từ P. **B.** 42 km kể từ Q. **C.** 48 km kể từ P. **D.** Tại P.

Lời giải

Chọn A



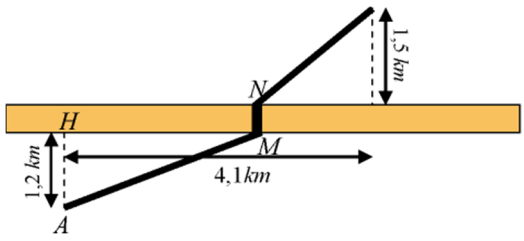
Gọi A' đối xứng với A qua PQ. Gọi M là vị trí xây trạm thu phí và trạm xăng PQ. Ta có $MA+MB=MA'+MB\geq AB$. Dấu bằng xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ và PQ.

Vì $\dfrac{MP}{MQ}=\dfrac{PA'}{QB}=\dfrac{PA}{QB}\Leftrightarrow\dfrac{MP}{PA}=\dfrac{MQ}{QB}=\dfrac{MP+MQ}{PA+QB}=\dfrac{6}{5}\Rightarrow MP=72$.

Câu 23: Người ta muốn làm một con đường từ địa điểm A đến địa điểm B ở hai bên bờ một con sông, các số liệu được thể hiện trên hình vẽ, con đường được làm theo đường gấp khúc $AMNB$. Biết

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

rằng chi phí xây dựng $1km$ đường bên bờ sông có điểm B gấp $1,3$ lần chi phí xây dựng 1km đường bên bờ sông có điểm A, còn chi phí làm cầu MN tại điểm nào cũng như nhau. Hỏi phải xây dựng cầu tại điểm M cách điểm H bao nhiêu (làm tròn đến $0,001km$) để chi phí làm đường là nhỏ nhất.



A. 1,758 *km*. **B.** 2,630 *km*. **C.** 2,360 *km*. **D.** Kết quả khác.

Lời giải

Chọn A.

Gọi t là chi phí xây dựng 1 km đường bên bờ sông có điểm A. Đặt $0 \le x = HM \le 4,1km$.

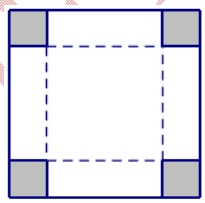
Tổng chi phí xây dựng là (chưa tính cầu) là:

$T = tAM + 1,3t.BN = t.\sqrt{AH^2 + HM^2} + 1,3t\sqrt{BK^2 + NK^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{T}{t} = \sqrt{1,2^2 + x^2} + 1,3\sqrt{1,5^2 + (4,1-x)^2} = f(x)$

Xét hàm số $f(x)$ với $0 \le x \le 4,1 \Rightarrow \underset{x\in[0;4,1]}{Min} f(x) \approx f(2,6303)$.

Câu 24: Từ một tấm bìa cứng hình vuông cạnh a, người ta cắt bốn góc với bốn hình vuông bằng nhau *(như hình* vẽ) rồi gấp lại tạo thành một hình hộp không nắp. Tìm cạnh của hình vuông bị cắt để thể tích khối hộp lớn nhất.



A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a}{8}$. **C.** $\dfrac{a}{3}$. **D.** $\dfrac{a}{6}$.

Lời giải

Chọn D

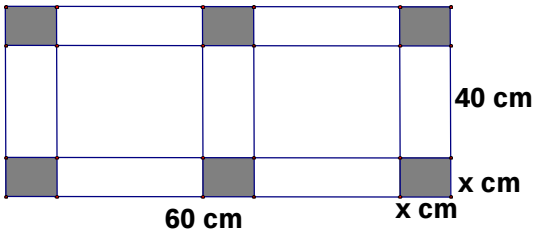
HD: Gọi x là độ dài cạnh mỗi hình vuông bị cắt ở 4 góc. Hình hộp được tạo ra có đáy là hình vuông cạnh $a-2x$ và chiều cao là x, thể tích của nó là:

$V = (a-2x)^2 x \Leftrightarrow 4V = (a-2x)(a-2x)4x \le \left(\dfrac{a-2x+a-2x+4x}{3}\right)^3 = \dfrac{8a^3}{27}$

Dấu bằng khi $(a-2x) = (a-2x) = 4x \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{6}$.

Câu 25: Cho một tấm bìa hình chữ nhật chiều dài $AB = 60\text{cm}$ chiều rộng $BC = 40\text{cm}$. Người ta cắt 6 hình vuông bằng nhau như hình vẽ, mỗi hình vuông cạnh bằng $x\text{cm}$, rồi gập tấm bìa lại như hình vẽ dưới đây để được một hộp quà có nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



A. $\frac{20}{3}$cm.. **B.** 4cm. **C.** 5cm. **D.** $\frac{10}{3}$cm.

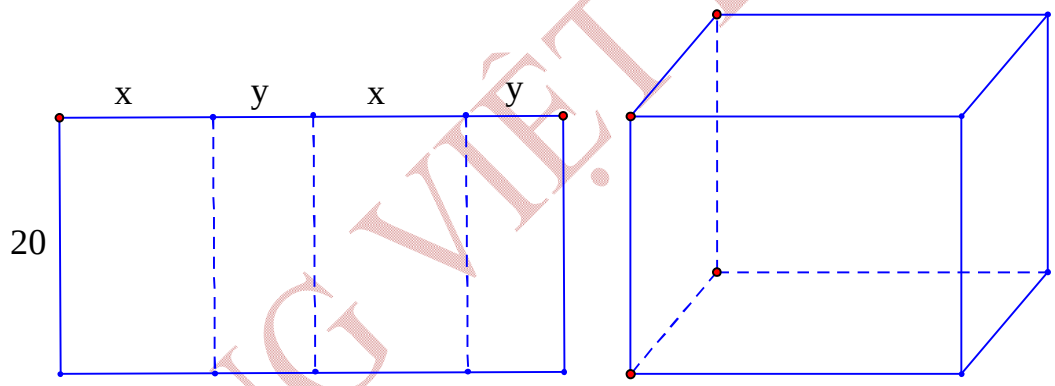
Lời giải. Các kích thước khối hộp lần lượt là: $\frac{60-3x}{2}$; $40-2x$; x.

Khi đó $V_{\text{hop}}=\left(\frac{60-3x}{2}\right)(40-2x)x=3x^3-120x^2+1200x.$

Khảo sát hàm $f(x)=3x^3-120x^2+1200x$ với $0<x<20$, ta được $\max\limits_{(0;20)} f(x)=f\left(\frac{20}{3}\right)$.

Chọn A

Câu 26: Người ta gập một miếng bìa hình chữ nhật có kích thước $60\text{cm}\times 20\text{cm}$ như hình vẽ để ghép thành một chiếc hộp hình hộp đứng (hai đáy trên và dưới được cắt từ miếng tôn khác để ghép vào). Tính diện tích toàn phần của hộp khi thể tích của hộp lớn nhất.



A. $1425\left(\text{cm}^3\right)$. **B.** $1200\left(\text{cm}^3\right)$. **C.** $2150\left(\text{cm}^3\right)$. **D.** $1650\left(\text{cm}^3\right)$.

Lời giải

Chọn D

Theo bài ta có $2x+2y=60\Leftrightarrow y=30-x$.

Thể tích của khối hộp chữ nhật là $V=20xy=20x(30-x)\le 20.\frac{(x+30-x)^2}{4}$

$=5.30^2=4500cm^3$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=30-x\Leftrightarrow x=15\Rightarrow y=15$.

Vậy diện tích toàn phần của khối hộp chữ nhật là $S_{tp}=2.20x+2.20y+2xy=1650\ \text{cm}^2$.

Câu 27: **(GIỮA-HKII-2019-NGHĨA-HƯNG-NAM-ĐỊNH)** Một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 48 và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chất liệu làm đáy và 4 mặt bên của hộp có giá thành gấp ba lần giá thành của chất liệu làm nắp hộp. Gọi h là chiều cao của hộp để giá thành của hộp là thấp nhất. Biết $h=\frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tổng $m+n$ là

A. 12. **B.** 13. **C.** 11. **D.** 10.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Lời giải

Chọn C

Gọi chiều rộng của hộp là x $(x>0)$ $\Rightarrow$ Chiều dài của hình hộp là $2x$.

Thể tích của hộp là $V=x.2x.h=48\Leftrightarrow h=\dfrac{24}{x^2}$.

Tổng diện tích mặt đáy và 4 mặt bên của hộp là $2x^2+6xh=2x^2+6x.\dfrac{24}{x^2}=2x^2+\dfrac{144}{x}$.

Diện tích nắp hộp là $2x^2$.

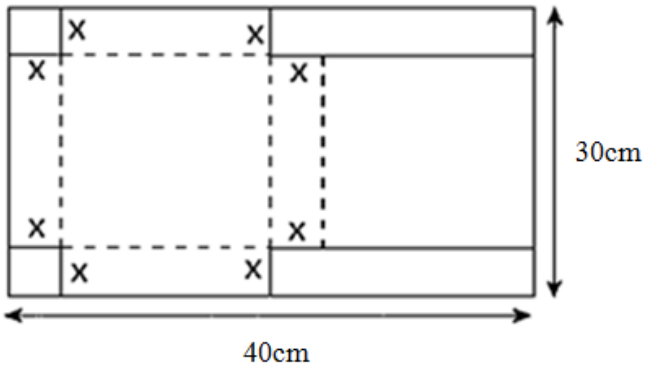
Giá thành hộp thấp nhất $\Leftrightarrow f(x)=3\left(2x^2+\dfrac{144}{x}\right)+2x^2$ đạt giá trị nhỏ nhất với $x>0$.

Ta có $f(x)=8x^2+\dfrac{432}{x}=8x^2+\dfrac{216}{x}+\dfrac{216}{x}\ge 3.\sqrt[3]{8x^2.\dfrac{216}{x}.\dfrac{216}{x}}=216$.

Vậy $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x)=216$ xảy ra khi và chỉ khi $8x^2=\dfrac{216}{x}\Leftrightarrow x^3=27\Leftrightarrow x=3\Rightarrow h=\dfrac{24}{9}=\dfrac{8}{3}$.

Vậy $m=8$; $n=3\Rightarrow m+n=8+3=11$.

Câu 28: **(Trần Đại Nghĩa)** Với tấm nhôm hình chữ nhật có kích thước $30cm;\ 40cm$. Người ta phân chia tấm nhôm như hình vẽ và cắt bỏ một phần để được gấp lên một cái hộp có nắp. Tìm x để thể tích hộp lớn nhất.



A. $\dfrac{35+5\sqrt{13}}{3}cm$. **B.** $\dfrac{35-4\sqrt{13}}{3}cm$. **C.** $\dfrac{35-5\sqrt{13}}{3}cm$. **D.** $\dfrac{35+4\sqrt{13}}{3}cm$.

Lời giải

Chọn C

Khối hộp chữ nhật thu được có kích thước là $30-2x;20-x;x$ với $x\in[0;15]$.

Khi đó $V=x(30-2x)(20-x)=f(x)\le \max_{[0;15]} f(x)=f\left(\dfrac{35-5\sqrt{13}}{3}\right)$.

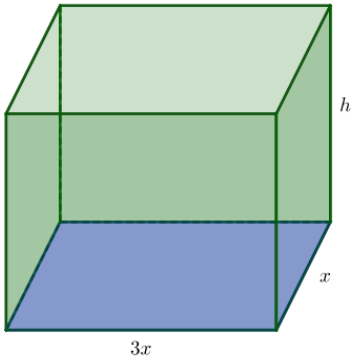
Dấu "=" đạt tại $x=\dfrac{35-5\sqrt{13}}{3}$.

Câu 29: **(SỞ GD & ĐT CÀ MAU)** Người ta muốn xây một cái bể hình hộp đứng có thể tích $V=18(m^3)$, biết đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng và bể không có nắp. Hỏi cần xây bể có chiều cao h bằng bao nhiêu mét để nguyên vật liệu xây dựng là ít nhất (biết nguyên vật liệu xây dựng các mặt là như nhau)?

A. $2(m)$. **B.** $\dfrac{5}{2}(m)$. **C.** $1(m)$. **D.** $\dfrac{3}{2}(m)$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $x\ (x>0)$ là chiều rộng hình chữ nhật đáy bể, suy ra chiều dài hình chữ nhật đáy bể là $3x$.

$V=h.x.3x=h.3x^2=18\ \ (x>0)$.

$\Rightarrow h=\dfrac{18}{3x^2}=\dfrac{6}{x^2}$,

Gọi P là diện tích xung quanh cộng với diện tích một đáy bể của hình hộp chữ nhật.

Nguyên vật liệu ít nhất khi P nhỏ nhất.

$P=2hx+2.h.3x+3x^2=2.\dfrac{6}{x^2}.x+2.\dfrac{6}{x^2}.3x+3x^2=\dfrac{48}{x}+3x^2.$

Đặt $f(x)=\dfrac{48}{x}+3x^2,\ (x>0)$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{-48}{x^2}+6x$, $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{-48}{x^2}+6x=0\Leftrightarrow x^3=8\Leftrightarrow x=2$.

Bảng biến thiên:

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	36	↗	

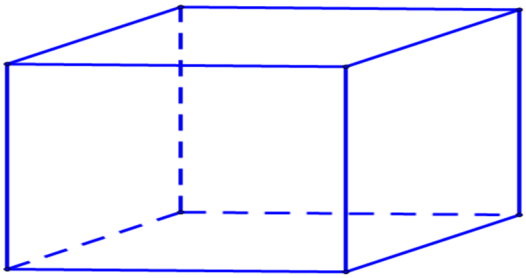
Suy ra vật liệu ít nhất khi $h=\dfrac{6}{x^2}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}(m)$.

Câu 30: **(Sở Ninh Bình Lần1)** Một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 48 và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chất liệu làm đáy và 4 mặt bên của hộp có giá thành gấp ba lần giá thành của chất liệu làm nắp hộp. Gọi h là chiều cao của hộp để giá thành của hộp là thấp nhất. Biết $h=\dfrac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tổng $m+n$ là

A. 12. **B.** 13. **C.** 11. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C



Gọi chiều dài, chiều rộng của hộp là $2x$ và x $(x>0)$. Khi đó, ta có thể tích của cái hộp là

$$V=2x^2.h \Rightarrow 2x^2.h=48 \Leftrightarrow x^2.h=24$$

Do giá thành làm đáy và mặt bên hộp là 3, giá thành làm nắp hộp là 1 nên giá thành làm hộp là

$$L=3\left(2x^2+2xh+4xh\right)+2x^2$$

Áp dụng bất đẳng thức côsi cho ba số không âm, ta được

$$L=8x^2+9xh+9xh \geq 3\sqrt[3]{8x^2.9xh.9xh}=3\sqrt[3]{648\left(x^2h\right)^2}=216$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}8x^2=9xh\\x^2h=24\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\dfrac{9h}{8}\\\dfrac{9^2}{8^2}.h^3=24\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=3\\h=\dfrac{8}{3}\end{cases}$

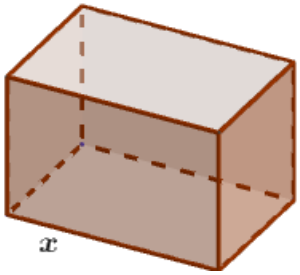
Vậy $m=8$, $n=3$ và $m+n=11$.

Câu 31: **(Thuận Thành 2 Bắc Ninh)** Để thiết kế một chiếc bể cá không có nắp đậy hình hộp chữ nhật có chiều cao $60\,\text{cm}$, thể tích là $96.000\,\text{cm}^3$, người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành là 70.000 đồng/m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là 100.000 đồng/m^2. Chi phí thấp nhất để làm bể cá là

A. 283.000 đồng. **B.** 382.000 đồng. **C.** 83.200 đồng. **D.** 832.000 đồng.

Lời giải

Chọn C



Gọi $x(\text{m})$ là chiều dài của hình chữ nhật đáy $(x>0)$.

Khi đó chiều rộng là: $\dfrac{0,096}{0,6x}=\dfrac{4}{25x}$.

Khi đó diện tích mặt xung quanh là: $1,2\left(x+\dfrac{4}{25x}\right)$.

Chi phí để làm mặt xung quanh là: $70.1,2\left(x+\dfrac{4}{25x}\right)=84\left(x+\dfrac{4}{25x}\right)$ (nghìn đồng).

Diện tích mặt đáy là: $x.\dfrac{4}{25x}=\dfrac{4}{25}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Cho phí để làm mặt đáy là: $100.\frac{4}{25}=16$ (nghìn đồng).

Chi phí để làm bể cá thấp nhất khi và chỉ khi chi phí làm mặt bên thấp nhất

Xét hàm số $f(x)=x+\frac{4}{25x}, x>0; f'(x)=1-\frac{4}{25x^2}=\frac{25x^2-4}{25x^2}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow 25x^2-4=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{5}$.

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{2}{5}$		$-\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{4}{5}$	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó chi phí thấp nhất là: $84.\frac{4}{5}+16=83.200$ đồng.

Bổ sung cách 2

Xét hàm số $f(x)=x+\frac{4}{25x}$ với $x>0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-Si ta có $f(x)=x+\frac{4}{25x}\geq 2\sqrt{x.\frac{4}{25x}}=\frac{4}{5}$.

Dấu "=" xẩy ra khi $x=\frac{4}{25x}\Leftrightarrow x=\frac{2}{5}$.

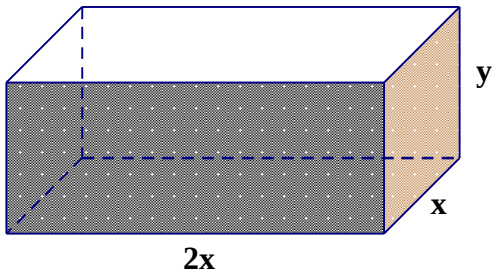
Vậy chi phí thấp nhất là: $84.\frac{4}{5}+16=83.200$ đồng.

Câu 32: **(Nguyễn Khuyến)** Ông A dự định sử dụng hết $6,5\text{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng khối hình hộp chữ nhật chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng(các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. $2,26\text{m}^3$. **B.** $1,01\text{m}^3$. **C.** $1,33\text{m}^3$. **D.** $1,50\text{m}^3$.

Lời giải

Chọn D



Gọi chiều rông của bể cá là $x(\text{m})$, chiều cao là $y(\text{m})(x,y>0)$, khi đó chiều dài bể cá là $2x(\text{m})$. Diên tích kính sử dụng là $S=2x^2+2xy+4xy(\text{m}^2)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Theo bài ra ta có: $2x^2+2xy+4xy=6,5\Rightarrow y=\dfrac{6.5-2x^2}{6x}=\dfrac{13-4x^2}{12x}$.

Thể tích bể cá là $V(x)=2x^2.\dfrac{13-4x^2}{12x}=\dfrac{x(13-4x^2)}{6}(\text{m}^3)$.

Ta xét hàm số $V(x)=\dfrac{x(13-4x^2)}{6}$ với $x\in\left(0;\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)$.

Suy ra $V'(x)=\dfrac{13-12x^2}{6}\Rightarrow V'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{39}}{6}$.

Ta có $V'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x=\dfrac{\sqrt{39}}{6}$ nên hàm số đạt cực đại tại điểm $x=\dfrac{\sqrt{39}}{6}$.

Trên khoảng $\left(0;\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)$ hàm số $V(x)$ chỉ có một điểm cực đại nên hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=\dfrac{\sqrt{39}}{6}$.

Thể tích của bể cá có giá trị lớn nhất là $\max\limits_{\left(0;\frac{\sqrt{13}}{2}\right)}V(x)=V\left(\dfrac{\sqrt{39}}{6}\right)=\dfrac{13\sqrt{39}}{54}\approx 1,50(\text{m}^3)$.

Vậy bể cá có dung tích lớn nhất bằng $1,50\ \text{m}^3$.

Cách 2: Xử lý tìm giá trị lớn nhất của $V(x)$ bằng bất đẳng thức Cauchy.

Theo cách 1, ta tính được $V(x)=\dfrac{x(13-4x^2)}{6}$ với $x\in\left(0;\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)$.

Ta có $V(x)=\dfrac{x(13-4x^2)}{6}=\dfrac{1}{6}\sqrt{\dfrac{8x^2(13-4x^2)(13-4x^2)}{8}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $8x^2(13-4x^2)(13-4x^2)\le\left(\dfrac{8x^2+13-4x^2+13-4x^2}{3}\right)^3=\dfrac{26^3}{27}$.

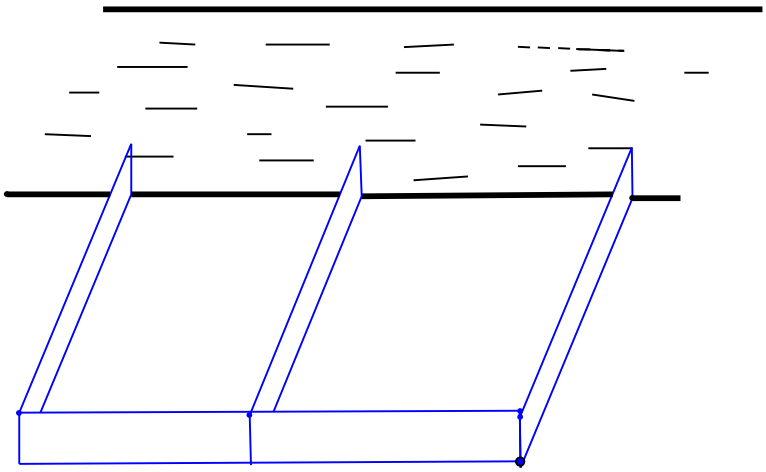
Suy ra $V(x)\le\dfrac{1}{6}\sqrt{\dfrac{26^3}{8.27}}=\dfrac{13\sqrt{39}}{54}\approx 1,50$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $8x^2=13-4x^2\Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{13}{12}}=\dfrac{\sqrt{39}}{6}$.

Vậy bể cá có dung tích lớn nhất bằng $1,50\ m^3$.

Câu 33: Một người nông dân có 15.000.000 đồng để làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để ngăn khu đất thành hai hình chữ nhật bằng nhau với mục đích trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông, chi phí nguyên vật liệu 60.000 đồng/mét. Còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50.000 đồng/mét. Tìm diện tích lớn nhất của đất rào thu được?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



A. $6250\,\text{m}^2$. **B.** $1250\,\text{m}^2$. **C.** $3125\,\text{m}^2$. **D.** $50\,\text{m}^2$.

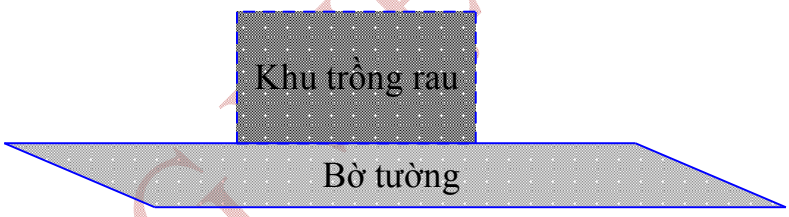
Lời giải

Chọn A

Gọi a (m) là chiều dài hàng rào song song bờ sông, b (m) là chiều dài mặt hàng rào vuông góc với bờ sông. Chi phí xây dựng vật liệu được tính là: $60.000\times a+50.000\times 3b=15.000.000$ $\Leftrightarrow 2a+5b=500$.

Mà $2a+5b\ge 2\sqrt{10ab}$, suy ra $ab\le 6250$. Diện tích đất rào là $S=ab=6250\left(\text{m}^2\right)$.

Câu 34: Bác nông dân làm một hàng rào trồng rau hình chữ nhật có chiều dài song song với bờ tường. Bác chỉ làm ba mặt, mặt thứ tư bác tận dụng luôn bờ tường. Bác dự tính sẽ dùng $200\,\text{m}$ lưới sắt để làm nên toàn bộ hàng rào đó. Hỏi diện tích lớn nhất bác có thể rào là bao nhiêu.



A. $1500\,\text{m}^2$. **B.** $10000\,\text{m}^2$. **C.** $2500\,\text{m}^2$. **D.** $5000\,\text{m}^2$.

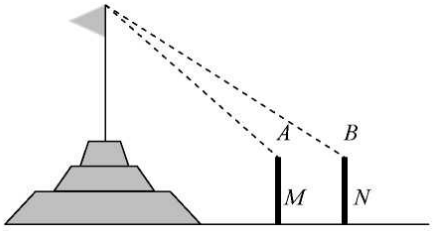
Lời giải

Chọn D

Gọi kích thước hàng rào trồng rau hình chữ nhật là $a\times b$ trong đó a là cạnh song song bờ tường. Theo đề, ta có $a+2b=200\Rightarrow 200\ge 2\sqrt{2ab}\Leftrightarrow ab\le 5000\left(\text{m}^2\right)$.

Diện tích lớn nhất của đám rau đó là $S=ab=5000\left(\text{m}^2\right)$.

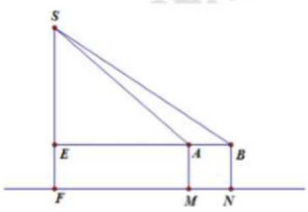
Câu 35: Để đo chiều cao từ mặt đất đến đỉnh cột cờ của một Kỳ đài trước Ngọ Môn (Đại Nội - Huế), người ta cắm hai cọc bằng nhau MA và NB cao $1,5m$ so với mặt đất. Hai cọc này song song, cách nhau $10m$ và thẳng hàng so với tim cột cờ (như hình vẽ). Đặt giác kế đứng tại A và B để nhắm đến đỉnh cột cờ, người ta đo được các góc lần lượt là $51^0 40'12"$ và $45^0 39'$ so với đường song song mặt đất. Hãy tính chiều cao của cột cờ (Làm tròn đến $0,01m$).



A. $63,48m$. **B.** $52,29m$. **C.** $62,29m$. **D.** $53,48m$.

Lời giải

Chọn A.



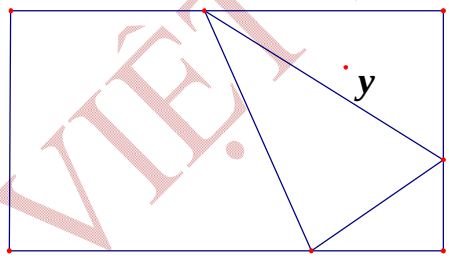
$$\begin{cases} \cot\widehat{SAE} = \dfrac{EA}{SE} \\ \cot\widehat{SBE} = \dfrac{EB}{SE} = \dfrac{EA+AB}{SE} \end{cases} \Rightarrow \cot\widehat{SBE} = \cot\widehat{SAE} + \dfrac{AB}{SE}$$

$$\Leftrightarrow SE = \dfrac{AB}{\cot\widehat{SBE} - \cot\widehat{SAE}} \approx 53,48m$$

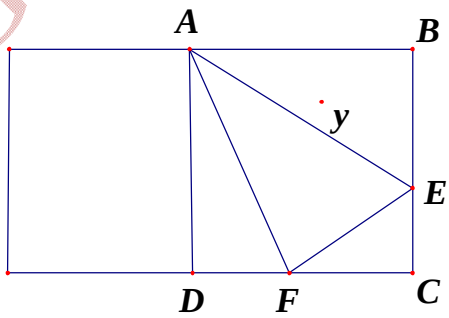
Suy ra, chiều cao của cột cờ là $SE + 10 \approx 63,48m$

Câu 36: Cho một tờ giấy hình chữ nhật có chiều dài $12cm$, chiều rộng $8cm$. Gấp góc bên phải tờ giấy sao cho khi gấp, đỉnh của nó có chạm với đáy dưới (như hình vẽ). Gọi độ dài nếp gấp là y thì giá trị nhỏ nhất của y là bao nhiêu.

A. $3\sqrt{7}$. **B.** $3\sqrt{5}$. **C.** $6\sqrt{3}$. **D.** $6\sqrt{2}$.



Lời giải



Đặt $EF = x, EC = 8 - x \Rightarrow FC = \sqrt{x^2 - (8-x)^2} = \sqrt{16x - 64}$.

Ta có $\Delta ADF \sim \Delta FCE\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{EF}{AF} = \dfrac{CF}{AD}$.

$$AF = \dfrac{EF.AD}{FC} = \dfrac{8x}{\sqrt{16x-64}}.$$

$$y = AE = \sqrt{AF^2 + EF^2} = \sqrt{\dfrac{64x^2}{16x-64} + x^2} = \sqrt{\dfrac{16x^3}{16x-64}} = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-4}}.$$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$f(x)=\dfrac{x^3}{x-4}, x\in(4;8)$.

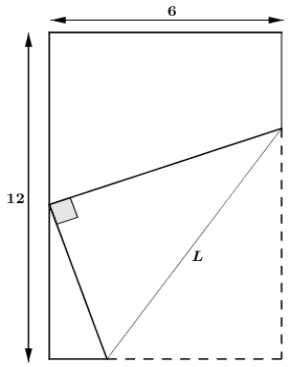
$f'(x)=\dfrac{48x^2(16x-64)-16.16x^3}{(16x-64)^2}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow 768x^3-3072x^2-256x^3=0\Leftrightarrow 512x^3-3072x^2=0\Leftrightarrow x=6$.

$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=+\infty; f(6)=108; f(8)=256$

Vậy $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=6$, suy ra y đạt giá trị nhỏ nhất là $\sqrt{108}=6\sqrt{3}$.

Câu 37: Một mảnh giấy hình chữ nhật có chiều dài 12cm và chiều rộng 6cm. Thực hiện thao tác gấp góc dưới bên phải sao cho đỉnh được gấp nằm trên cạnh chiều dài còn lại (như hình vẽ). Hỏi chiều dài L tối thiểu của nếp gấp là bao nhiêu?



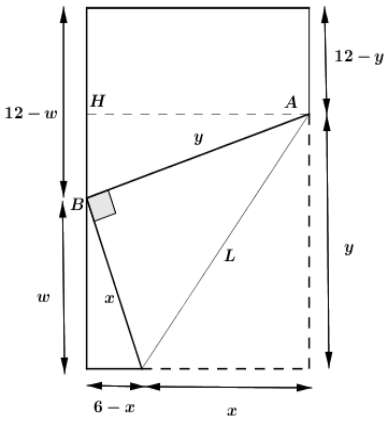
A. $\min L=6\sqrt{2}$ cm. **B.** $\min L=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ cm.

C. $\min L=\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$ cm. **D.** $\min L=9\sqrt{2}$ cm.

Lời giải

Đặt x, y, w được biểu diễn như hình vẽ

$(0<x\le 6,\ 0<y\le 12,\ w\ge 0)$.



Ta có $x^2=w^2+(6-x)^2\longrightarrow w^2=12x-36\longrightarrow w=\sqrt{12x-36}$.

Do $w\ge 0\longrightarrow\sqrt{12x-36}\ge 0\leftrightarrow x\ge 3$ nên cần có $3\le x\le 6$. (1)

Lại có $HB=\sqrt{y^2-36}\longrightarrow 6\le y\le 12$.

Vì $y=HB+w=\sqrt{y^2-36}+\sqrt{12x-36}$

$\longrightarrow y-\sqrt{12x-36}=\sqrt{y^2-36}$

$\longrightarrow y^2-2y\sqrt{12x-36}+12x-36=y^2-36$

$\longrightarrow y=\dfrac{6x}{\sqrt{12x-36}}=\dfrac{\sqrt{3}x}{\sqrt{x-3}}$.

Từ đó, suy ra $6\le\dfrac{\sqrt{3}x}{\sqrt{x-3}}\le 12\Leftrightarrow\begin{cases}x>3\\x^2\ge 12(x-3)\\x^2\le 48(x-3)\end{cases}\Leftrightarrow 24-12\sqrt{3}\le x\le 24+12\sqrt{3}$. (2)

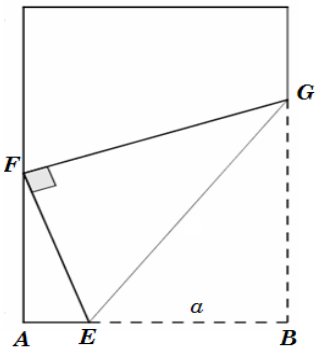
Từ (1) và (2), ta được $24-12\sqrt{2}\le x\le 6$.

Chiều dài nếp gấp $L=\sqrt{x^2+y^2}\longrightarrow L^2=x^2+\dfrac{3x^2}{x-3}$.

Khảo sát $f(x)=x^2+\dfrac{3x^2}{x-3}$ với $x\in\left[24-12\sqrt{2};6\right]$, ta được $\min\limits_{[24-12\sqrt{3};6]} f(x)=f\left(\dfrac{9}{2}\right)=\dfrac{243}{4}$.

Suy ra $L\ge\sqrt{\dfrac{243}{4}}=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

Chọn B



ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Cách 2. Đặt $EB=a$ như hình vẽ $\longrightarrow \begin{cases} EF=a \\ AE=6-a \end{cases}$.

Trong tam giác vuông AEF có

$$\cos\widehat{AEF}=\frac{6-a}{a}\longrightarrow \cos\widehat{FEB}=\frac{a-6}{a}$$ (hai góc bù nhau).

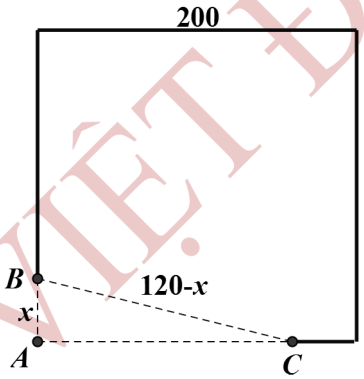
Ta có $\Delta BEG=\Delta FEG$

$$\longrightarrow \widehat{FEG}=\widehat{BEG}=\frac{1}{2}\widehat{FEB}\longrightarrow \cos\widehat{FEG}=\sqrt{\frac{a-3}{a}}.$$

Trong tam giác vuông AEF có $EG=\dfrac{EF}{\cos\widehat{FEG}}=\sqrt{\dfrac{a^3}{a-3}}$.

Xét hàm $f(a)=\dfrac{a^3}{a-3}$ với $a>3$, ta được $\min f(a)$ đạt tại $a=\dfrac{9}{2}\longrightarrow EG=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

Câu 38: Cho một tấm gỗ hình vuông cạnh $200cm$. Người ta cắt một tấm gỗ có hình một tam giác vuông ABC từ tấm gỗ hình vuông đã cho như hình vẽ sau. Biết $AB=x\left(0<x<60cm\right)$ là một cạnh góc vuông của tam giác ABC và tổng độ dài cạnh góc vuông AB với cạnh huyền BC bằng $120cm$. Tìm x để tam giác ABC có diện tích lớn nhất.



A. $x=40cm$. **B.** $x=50cm$. **C.** $x=30cm$. **D.** $x=20cm$.

Lời giải

Chọn A

Ta có độ dài cạnh $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=\sqrt{\left(120-x\right)^2-x^2}=\sqrt{14400-240x}$.

Diện tích tam giác ABC là: $S=\dfrac{1}{2}AB.AC=\dfrac{1}{2}x\sqrt{14400-240x}$.

Xét hàm số $f(x)=x\sqrt{14400-240x}$ với $0<x<60$.

Ta có: $f'(x)=\sqrt{14400-240x}-\dfrac{120x}{\sqrt{14400-240x}}=\dfrac{14400-360x}{\sqrt{14400-240x}}$;.

$\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=40\in(0;60)$.

Bảng biến thiên:

x	0		40		60
$f'(x)$		$+$	0	$-\infty$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

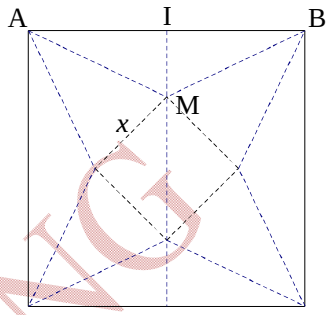
Vậy $S_{\max} \Leftrightarrow f(x)_{\max} \Leftrightarrow x = 40$.

Câu 39: Cho một tấm bìa hình vuông cạnh 5 dm. Để làm một mô hình kim tự tháp Ai Cập, người ta cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy chính là cạnh của hình vuông rồi gấp lên, ghép lại thành một hình chóp tứ giác đều. Để mô hình có thể tích lớn nhất thì cạnh đáy của mô hình là:

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi x là chiều dài cạnh đáy ($0 < x < 5\sqrt{2}$), ta có

$MI = \frac{5 - x\sqrt{2}}{2}, AM^2 = \frac{25}{4} + \frac{25 - 10\sqrt{2}x + 2x^2}{4} = \frac{25 - 5\sqrt{2}x + x^2}{2}$

Đường cao hình chóp là $h = \sqrt{\frac{25 - 5\sqrt{2}x + x^2}{2} - \frac{x^2}{2}} = \sqrt{\frac{25 - 5\sqrt{2}x}{2}}$

Thể tích của khối chóp là $V = \frac{1}{3}x^2\sqrt{\frac{25 - 5\sqrt{2}x}{2}} \Rightarrow V^2 = \frac{1}{18}\left(25x^4 - 5\sqrt{2}x^5\right)$

Xét hàm số $y = 25x^4 - 5\sqrt{2}x^5$ trên khoảng $\left(0; 5\sqrt{2}\right)$

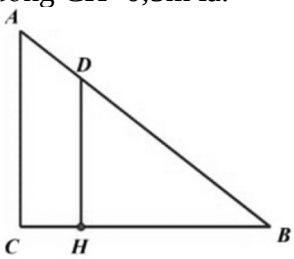
$y = 25.4x^3 - 25\sqrt{2}x^4 = 25x^3\left(4 - \sqrt{2}x\right)$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2\sqrt{2} \end{array}\right.$

x	0		$2\sqrt{2}$		$5\sqrt{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y		↗	320	↘	

Suy ra $\max\limits_{(0;5\sqrt{2})} y = 320$ tại $x = 2\sqrt{2}$. Suy ra $V_{\max} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}$.

Câu 40: Chiều dài bé nhất của cái thang AB để nó có thể tựa vào tường AC và mặt đất BC, ngang qua cột đỡ DH cao 4m, song song và cách tường CH=0,5m là:



A. Xấp xỉ 5,602 **B.** Xấp xỉ 6,5902 **C.** Xấp xỉ 5,4902 **D.** Xấp xỉ 5,5902

Lời giải

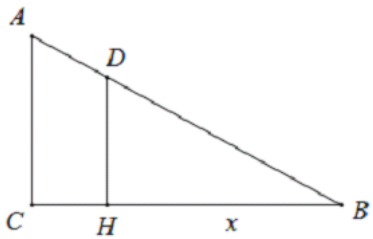
Chọn D

Đặt $BH = x(x > 0)$. Ta có

$BD = \sqrt{DH^2 + BH^2} = \sqrt{x^2 + 16}$

Vì $DH // AC$ nên

$\frac{DA}{DB} = \frac{HC}{HB} \Rightarrow DA = \frac{DB.HC}{HB} = \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{2x}$



ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Rightarrow AB=\sqrt{x^2+16}+\dfrac{\sqrt{x^2+16}}{2x}$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x^2+16}+\dfrac{\sqrt{x^2+16}}{2x}$ trên $(0;+\infty)$. Ta có f(x) liên tục trên $(0;+\infty)$ và

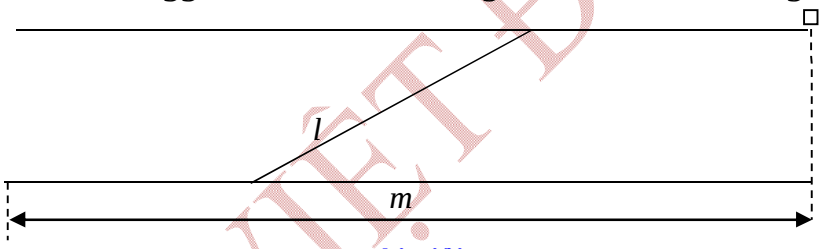
$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}+\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}.2x-2\sqrt{x^2+16}}{4x^2}=\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}-\frac{8}{x^2\sqrt{x^2+16}}=\frac{x^3-8}{x^2\sqrt{x^2+16}}$$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=2; f'(x)>0\Leftrightarrow x>2; f'(x)<0\Leftrightarrow 0<x<2$

Suy ra $\min AB=\min\limits_{x\in(0;+\infty)} f(x)=f(2)=\dfrac{5\sqrt{5}}{2}\approx 5,5902(m)$

Câu 41: Trong bài thực hành của môn huấn luyện quân sự có tình huống chiến sĩ phải bơi qua một con sông để tấn công một mục tiêu ở phía bờ bên kia sông. Biết rằng lòng sông rộng 100m và vận tốc bơi của chiến sĩ bằng một nửa vận tốc chạy trên bộ. Bạn hãy cho biết chiến sĩ phải bơi bao nhiêu mét để đến được mục tiêu nhanh nhất, nếu như dòng sông là thẳng, mục tiêu ở cách chiến sĩ 1km theo đường chim bay.

A. $\dfrac{400}{3}$ **B.** $\dfrac{40}{33}$ **C.** $\dfrac{100}{3}$ **D.** $\dfrac{200}{3}$



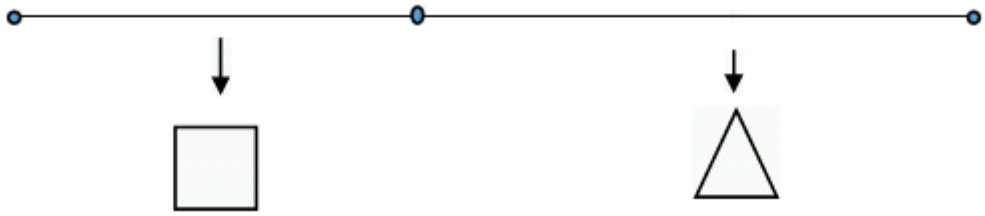
Lời giải

Chọn A

Vấn đề là chọn thời gian bơi và thời gian đi bộ sao cho "tối ưu". Giả sử độ dài đoạn bơi là l và tốc độ bơi của chiến sĩ là v. Ký hiệu m là độ dài đoạn sông kể từ người chiến sĩ đến đồn địch, khi ấy tổng thời gian bơi và chạy bộ của người chiến sĩ là $t=\dfrac{l}{v}+\dfrac{m-\sqrt{l^2-100^2}}{2v}$.

Do m,v là cố định nên thời gian đạt cực tiểu khi hàm số $f(l)=\dfrac{l}{v}-\dfrac{\sqrt{l^2-100^2}}{2v}=\dfrac{2l-\sqrt{l^2-100^2}}{2v}$ đạt cực tiểu, và cũng tức là khi hàm $g(l)=2l-\sqrt{l^2-100^2}$ đạt cực tiểu. Điều này xảy ra khi $2-\dfrac{l}{\sqrt{l^2-100^2}}=0$, hay $l=2\sqrt{l^2-100}$, tức là $l=400/3=133,333333$ (met).

Câu 42: Một sợi dây có chiều dài là 6 m, được chia thành 2 phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phần thứ hai uốn thành hình vuông. Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để diện tích 2 hình thu được là nhỏ nhất?



ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $\frac{18}{9+4\sqrt{3}}$ (m) **B.** $\frac{36\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$ (m) **C.** $\frac{12}{4+\sqrt{3}}$ (m) **D.** $\frac{18\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$ (m)

Lời giải

Chọn A

Gọi độ dài cạnh hình tam giác đều là x (m) khi đó độ dài cạnh hình vuông là $\frac{6-3x}{4}$

Tổng diện tích khi đó là:

$S=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+\left(\frac{6-3x}{4}\right)^2=\frac{1}{16}\left(\left(9+4\sqrt{3}\right)x^2-36x+36\right)$

Diện tích nhỏ nhất khi

$x=-\frac{b}{2a}=\frac{18}{9+4\sqrt{3}}$

Vậy diện tích Min khi $x=\frac{18}{9+4\sqrt{3}}$

Hoặc đến đây ta có thể bấm máy tính giải phương trình $\left(9+4\sqrt{3}\right)x^2-36x+36$ ấn bằng và hiện giá trị.



Câu 43: **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai)** Để chuẩn bị cho đợt phát hành sách giáo khoa mới, một nhà xuất bản yêu cầu xưởng in phải đảm bảo các yêu cầu sau: Mỗi cuốn sách giáo khoa cần một trang chữ có diện tích là $384cm^2$, lề trên và lề dưới là $3\,cm$, lề trái và lề phải là $2\,cm$. Muốn chi phí sản xuất là thấp nhất thì xưởng in phải in trang sách có kích thước tối ưu nhất, với yêu cầu chất lượng giấy và mực in vẫn đảm bảo. Tìm chu vi của trang sách.

A. $82\,cm$. **B.** $100\,cm$. **C.** $90\,cm$. **D.** $84\,cm$.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy muốn chi phí sản xuất nhỏ nhất thì kích thước tối ưu là khi diện tích mỗi trang sách phải nhỏ nhất đồng thời vẫn bảo đảm yêu cầu đề ra.

Gọi x, y thứ tự là chiều dài và chiều rộng của trang sách, đơn vị cm, điều kiện: $x>6; y>4$.

Diện tích phần chữ trên mỗi trang là:

$(x-6)(y-4)=384\Leftrightarrow xy=4x+6y+360\geq 2\sqrt{4x.6y}+360$.

Khi đó $xy-4\sqrt{6xy}-360\geq 0\Rightarrow\sqrt{xy}\geq 10\sqrt{6}\Rightarrow xy\geq 600$, dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}xy=600\\4x=6y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=30\\y=20\end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy chu vi trang sách khi sản xuất theo kích thước tối ưu là $2(x+y)=100\,(cm)$.

Câu 44: Một khách sạn có 50 phòng. Hiện tại mỗi phòng cho thuê với giá 400 ngàn đồng một ngày thì toàn bộ phòng được thuê hết. Biết rằng cứ mỗi lần tăng giá thêm 20 ngàn đồng thì có thêm 2 phòng trống. Giám đốc phải chọn giá phòng mới là bao nhiêu để thu nhập của khách sạn trong ngày là lớn nhất.

A. 480 ngàn. **B.** 50 ngàn. **C.** 450 ngàn. **D.** 80 ngàn.

Lời giải

Chọn C

Gọi x (ngàn đồng) là giá phòng khách sạn cần đặt ra, $x > 400$ (đơn vị: ngàn đồng).
Giá chênh lệch sau khi tăng $x - 400$.

Số phòng cho thuê giảm nếu giá là x: $\dfrac{(x-400)+2}{20} = \dfrac{x-400}{10}$.

Số phòng cho thuê với giá x là $50 - \dfrac{x-400}{10} = 90 - \dfrac{x}{10}$.

Tổng doanh thu trong ngày là: $f(x) = x\left(90 - \dfrac{x}{10}\right) = -\dfrac{x^2}{10} + 90x$.

$f'(x) = -\dfrac{x}{5} + 90$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 450$.

Bảng biến thiên:

x	400		450		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	20250	↘	

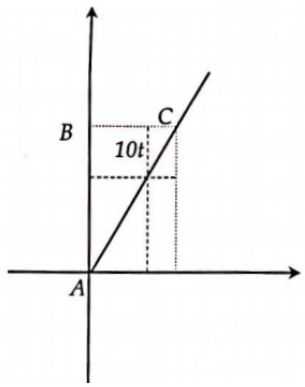
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 450$.
Vậy nếu cho thuê với giá 450 ngàn đồng thì sẽ có doanh thu cao nhất trong ngày là 2.025.000 đồng.

Câu 45: Hai con chuồn chuồn bay trên hai quỹ đạo khác nhau tại cùng một thời điểm. Một con bay trên quỹ đạo đường thẳng từ điểm $A(0;0)$ đến điểm $B(0;100)$ với vận tốc $5m/s$. Con còn lại bay trên quỹ đạo đường thẳng từ $C(60;80)$ về A với vận tốc $10m/s$. Hỏi trong quá trình bay, thì khoảng cách ngắn nhất mà hai con đạt được là bao nhiêu?

A. $20(m)$ **B.** $50(m)$ **C.** $20\sqrt{10}(m)$ **D.** $20\sqrt{5}(m)$

Lời giải

Chọn D



Xét ở thời điểm t
Tọa độ của con chuồn chuồn bay từ B về A là $(0;100-5t)$.

Do con chuồn chuồn bay từ C về A trên đường thẳng AC có hệ số góc $k = \tan\alpha = \dfrac{4}{3}$ nên tọa độ của con chuồn chuồn này là:

$$\begin{cases} x = 60 - 10t.\cos\alpha = 60 - 10t.\dfrac{3}{5} = 60 - 6t \\ y = 80 - 10\sin\alpha = 80 - 8t \end{cases}$$

Như vậy ở thời điểm t khoảng cách giữa 2 con chuồn chuồn sẽ là: $d = \sqrt{(60-6t)^2 + (20+3t)^2}$

Khoảng cách giữa 2 con chuồn chuồn nhỏ nhất khi và chỉ khi $(60-6t)^2 + (20+3t)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất với $t \in [0;10]$

Xét $f(t) = (60-6t)^2 + (20+3t)^2$ trên $[0;10]$

Ta có: $f'(t) = 90t - 600 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{20}{3}$

$\Rightarrow \min f(t) = f\left(\dfrac{20}{3}\right) = 2000$

$\Rightarrow$ khoảng cách ngắn nhất giữa 2 con chuồn chuồn trong quá trình bay là $\sqrt{2000} = 20\sqrt{5}(m)$

Nhận xét: Đây là một bài toán cần khả năng tư duy thật nhanh khi làm bài thi trắc nghiệm. Và bài toán này cũng cần khả năng tính toán rất cẩn thận vì số liệu khá lớn. Ở bước xử lí đạo hàm của hàm số $f(t)$ nếu tính toán sai rất có thể các bạn sẽ chọn min ở 2 đầu của đoạn $[0;10]$

Câu 46: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu?

A. 2.250.000 **B.** 2.350.000 **C.** 2.450.000 **D.** 2.550.000

Lời giải

Gọi x là giá thuê thực tế của mỗi căn hộ, (x : đồng; $x \ge 2000.000$ đồng)

Ta có thể lập luận như sau:

Tăng giá 100.000 đồng thì có 2 căn hộ bị bỏ trống.

Tăng giá $x - 2.000.000$ đồng thì có bao nhiêu căn hộ bị bỏ trống.

Theo quy tắc tam xuất ta có số căn hộ bị bỏ trống là:

$$\frac{2(x-2.000.000)}{100.000} = \frac{x-2.000.000}{50.000}$$

Do đó khi cho thuê với giá x đồng thì số căn hộ cho thuê là:

$$50 - \frac{x-2.000.000}{50.000} = -\frac{x}{50.000} + 90$$

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được khi cho thuê các căn hộ, (F(x): đồng).

Ta có: $F(x) = \left(-\dfrac{x}{50.000} + 90\right)x = -\dfrac{1}{50.000}x^2 + 90x$ (bằng số căn hộ cho thuê nhân với giá cho thuê mỗi căn hộ).

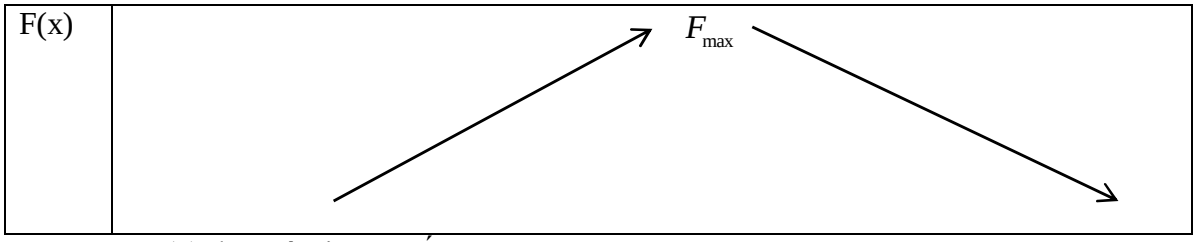
Bài toán trở thành tìm GTLN của $F(x) = -\dfrac{1}{50.000}x^2 + 90x$, ĐK: $x \ge 2.000.000$

$$F'(x) = -\frac{1}{25.000}x + 90$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{25.000}x + 90 = 0 \Leftrightarrow x = 2.250.000$$

Bảng biến thiên:

X	2.000.000	2.250.000	$+\infty$
F'(x)	+	0	−



Suy ra F(x) đạt giá trị lớn nhất khi $x = 2.250.000$

Vậy công ty phải cho thuê với giá 2.250.000 đồng mỗi căn hộ thì được lãi lớn nhất.

Chọn A

Nhận xét:

Sau khi tìm được hàm $F(x) = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90x$. Ta không cần phải đi khảo sát và vẽ bảng biến thiên như trên. Đề đã cho bốn đáp án x, ta dùng phím CALC của MTCT để thay lần lượt các giá trị vào, cái nào làm cho F(x) lớn nhất chính là giá trị cần tìm.

Câu 47: Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 40 quả bưởi. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 5000 đồng thì số bưởi bán được tăng thêm là 50 quả. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi quả là 30.000 đồng.

A. 44.000đ **B.** 43.000đ **C.** 42.000đ **D.** 41.000đ

Lời giải

Gọi x là giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoan Hùng, (x: đồng; $30.000 \le x \le 50.000$ đồng).

Ta có thể lập luận như sau:

Giá 50.000 đồng thì bán được 40 quả bưởi

Giảm giá 5.000 đồng thì bán được thêm 50 quả.

Giảm giá 50.000 – x thì bán được thêm bao nhiêu quả?

Theo quy tắc tam xuất số quả bán thêm được là:

$(50000 - x).\frac{50}{5000} = \frac{1}{100}(50000 - x).$

Do đó Số quả bưởi bán được tương ứng với giá bán x:

$40 + \frac{1}{100}(50000 - x) = -\frac{1}{100}x + 540$

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được ($F(x)$: đồng).

Ta có: $F(x) = \left(-\frac{1}{100}x + 540\right).(x - 30.000) = -\frac{1}{100}x^2 + 840x - 16.200.000$

Bài toán trở thành tìm GTLN của

$F(x) = -\frac{1}{100}x^2 + 840x - 16.200.000$, Đk: $30.000 \le x \le 50.000$.

$F'(x) = -\frac{1}{50}x + 840$

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{50}x + 840 = 0 \Leftrightarrow x = 42.000$

Vì hàm F(x) liên tục trên $30.000 \le x \le 50.000$ nên ta có:

$F(30.000) = 0$

$F(42.000) = 1.440.000$

$F(50.000) = 800.000$

Vậy với $x = 42.000$ thì $F(x)$ đạt GTLN.

Vậy để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất thì giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoan Hùng là 42.000 đồng.

Chọn C

Câu 48: Một xe khách đi từ Việt Trì về Hà Nội chở tối đa được là 60 hành khách một chuyến. Nếu một chuyến chở được m hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách được tính là $\left(30-\frac{5m}{2}\right)^2$ đồng. Tính số hành khách trên mỗi chuyến xe để nhà xe thu được lợi nhuận mỗi chuyến xe là lớn nhất.?

A. 30 **B.** 40 **C.** 50 **D.** 60

Lời giải

Gọi x là số hành khách trên mỗi chuyến xe để số tiền thu được là lớn nhất, $(0 < x \le 60)$

Gọi F(x) là hàm lợi nhuận thu được (F(x): đồng)

Số tiền thu được:

$$F(x)=\left(300-\frac{5x}{2}\right)^2.x=90.000x-1500x^2+\frac{25}{4}x^3$$

Bài toán trở thành tìm x để F(x) đạt giá trị lớn nhất.

$$F'(x)=90000-3000x+\frac{75}{4}x^2$$

$$F'(x)=0\Leftrightarrow 90000-3000x+\frac{75}{4}x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=120(loai)\\x=40(\text{t/ m})\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

X	0		40		60
F'(x)		+	0	−	
F(x)		↗	F_{max}	↘	

Vậy để thu được số tiền lớn nhất thì trên mỗi chuyến xe khách đó phải chở 40 người.

Chọn B

Câu 49: Cuốn sách giáo khoa cần một trang chữ có diện tích là $384cm^2$. Lề trên và dưới là $3cm$, lề trái và lề phải là $2cm$. Kích thước tối ưu của trang giấy?

A. Dài $24cm$, rộng $17cm$ **B.** Dài $30cm$, rộng $20cm$

C. Dài $24cm$, rộng $18cm$ **D.** Dài $24cm$, rộng $19cm$

Giải:

Gọi chiều dài của trang chữ nhật là $x(cm),(x>0)$

Chiều rộng của trang chữ nhật là: $\frac{384}{x}cm$

Chiều dài của trang giấy là $x+6(cm)$

Chiều rộng của trang giấy là: $\frac{384}{x}+4(cm)$

Diện tích trang giấy: $S=(x+6)\left(\frac{384}{x}+4\right)=408+4x+\frac{2304}{x}$

Bài toán trở thành tìm x để S đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có: $S'(x)=4-\frac{2304}{x^2}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

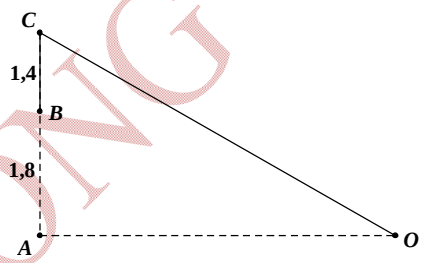
$$S'=0\Leftrightarrow 4-\frac{2304}{x^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=24(\text{t/ m})\\ \text{x}=-24(\text{loai})\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	0		24		$+\infty$
S'(x)		$-$	0	$+$	
S(x)		↘	$S_{\min}$	↗	

Vậy kích thước tối ưu của trang giấy có chiều dài là 30 cm, chiều rộng là 20 cm.

Câu 50: Một màn ảnh hình chữ nhật cao 1,4 mét và đặt ở độ cao 1,8 mét so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đó? Biết rằng góc $\widehat{BOC}$ là góc nhọn.



A. $AO=2,4m$ **B.** $AO=2m$

C. $AO=2,6m$ **D.** $AO=3m$

Giải:

Đặt độ dài cạnh $AO=x(cm),(x>0)$

Suy ra:

$BO=\sqrt{3,24+x^2},CO=\sqrt{10,24+x^2}$

Ta sử dụng định lí cosin trong tam giác OBC ta có:

$$\cos\widehat{BOC}=\frac{OB^2+OC^2-BC^2}{2.OB.OC}=\frac{\left(3,24+x^2\right)+\left(10,24+x^2\right)-1,96}{2\sqrt{\left(3,24+x^2\right)\left(10,24+x^2\right)}}$$

$$=\frac{5,76+x^2}{\sqrt{\left(3,24+x^2\right)\left(10,24+x^2\right)}}$$

Vì góc $\widehat{BOC}$ là góc nhọn nên bài toán trở thành bài toán tìm x để $F(x)=\dfrac{5,76+x^2}{\sqrt{\left(3,24+x^2\right)\left(10,24+x^2\right)}}$

Đạt GTNN.

Đặt $\left(3,24+x^2\right)=t,(t>3,24)$.

Suy ra $F(t)=\dfrac{t+\frac{63}{25}}{\sqrt{t(t+7)}}=\dfrac{25t+63}{25\sqrt{t(t+7)}}$

Ta tìm t để $F(t)$ nhận giá trị nhỏ nhất.

$$F'(t)=\left(\frac{25t+63}{25\sqrt{t(t+7)}}\right)'=\frac{1}{25}\left(\frac{25\sqrt{t(t+7)}-(25t+63)\left(\frac{2t+7}{2\sqrt{t(t+7)}}\right)}{t(t+7)}\right)$$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$$=\frac{1}{25}\left(\frac{50\left(t^2+7t\right)-\left(25t+63\right)\left(2t+7\right)}{2t\left(t+7\right)\sqrt{t\left(t+7\right)}}\right)=\frac{1}{25}\left(\frac{49t-441}{2t\left(t+7\right)\sqrt{t\left(t+7\right)}}\right)$$

$F'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=9$

BBT

t	3,24	9	$+\infty$
F'(t)	−	0	+
F(t)	↘	$F_{\min}$	↗

Thay vào đặt ta có: $\left(3,24+x^2\right)=9\Leftrightarrow x^2=\frac{144}{25}\Leftrightarrow x=2,4m$

Vậy để nhìn rõ nhất thì AO =2,4 m.

Chọn A

Câu 51: Một công trình nghệ thuật kiến trúc trong công viên thành phố Việt Trì có dạng là một tòa nhà hình chóp tứ giác đều nội tiếp một mặt cầu có bán kính 5(m). Toàn bộ tòa nhà đó được trang trí các hình ảnh lịch sử và tượng anh hùng, do vậy để có không gian rộng bên trong tòa nhà người ta đã xây dựng tòa nhà sao cho thể tích lớn nhất. Tính chiều cao của tòa nhà đó.

A. $h=\frac{20}{3}\left(m\right)$ **B.** $h=\frac{22}{3}\left(m\right)$ **C.** $h=\frac{23}{3}\left(m\right)$ **D.** $h=\frac{25}{3}\left(m\right)$

Giải:

Gọi độ dài cạnh đáy, chiều cao của hình chóp tứ giác đều lần lượt là x và h, (x>0, h>0, m)

Dựng mặt phẳng trung trực của 1 cạnh bên cắt trục đáy ở O, vậy O là tâm mặt câu. Ta có: $OS=5m,$ nên $OI=h-5,$ với I là giao của 2 đường chéo đáy. Vì tam giác OIC vuông nên ta có:

$$IC=\sqrt{OC^2-OI^2}=\sqrt{5^2-\left(h-5\right)^2}\Leftrightarrow\frac{x\sqrt{2}}{2}=\sqrt{10h-h^2}$$

$$\Leftrightarrow x=\sqrt{20h-2h^2},\left(5<h<10\right)$$

Ta có thể tích khối chóp tứ giác đều:

$$V\left(h\right)=Bh=\frac{1}{3}\left(\sqrt{20h-2h^2}\right)^2h=\frac{1}{3}\left(20h^2-2h^3\right)$$

Bài toán trở thành tìm h để V(h) đạt GTNN.

$$V'\left(h\right)=\frac{1}{3}\left(40h-6h^2\right)$$

$$V'\left(h\right)=0\Leftrightarrow\frac{1}{3}\left(40h-6h^2\right)=0\Leftrightarrow h=\frac{20}{3}$$

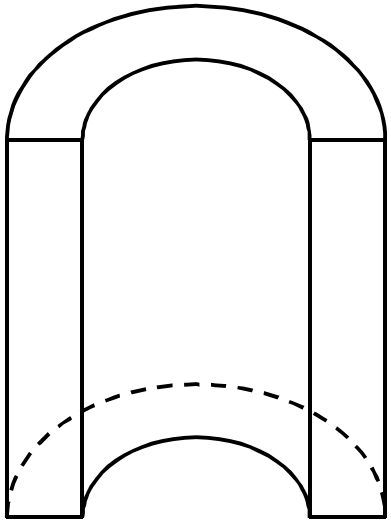
BBT

h	5	$\frac{20}{3}$	10
$V'\left(h\right)$	+	0	−
$V\left(h\right)$	↗	$V_{\max}$	↘

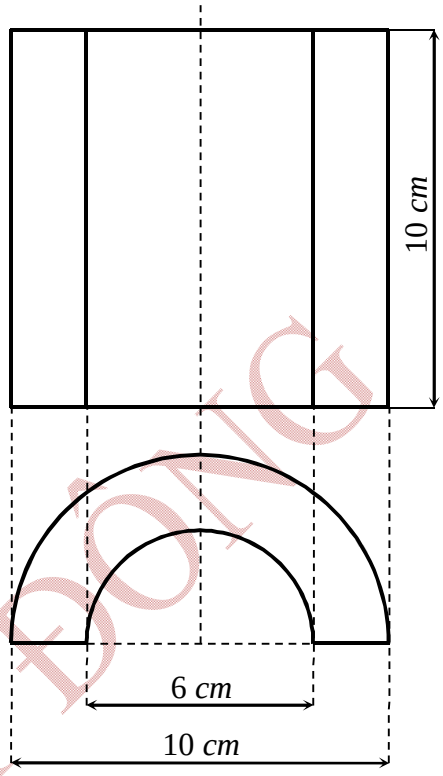
Vậy chiều cao đó là $h=\frac{20}{3}\left(m\right)$

Chọn A

Câu 52: Một chi tiết máy có hình dạng như hình vẽ 1, các kích thước được thể hiện trên hình vẽ 2 (hình chiếu bằng và hình chiếu đứng).



Hình vẽ 1



Hình vẽ 2

Người ta mạ toàn phần chi tiết này bằng một loại hợp kim chống gỉ. Để mạ $1m^2$ bề mặt cần số tiền 150000 đồng. Số tiền nhỏ nhất có thể dùng để mạ 10000 chi tiết máy là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng đơn vị nghìn đồng).

A. 48238 (nghìn đồng). **B.** 51238 (nghìn đồng).

C. 51239 (nghìn đồng). **D.** 37102 (nghìn đồng).

Lời giải

Chọn C

Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích nửa hình trụ trong và ngoài của chi tiết. S_3, S_4 là diện tích hình vành khăn và diện tích bề mặt trước của chi tiết. Ta có:

$S_1 = \pi R_1 l = \pi.3.10 = 30\pi, S_2 = \pi R_2 l = \pi.5.10 = 50\pi$, $S_3 = \pi R_2^2 - \pi R_1^2 = 16\pi$, $S_4 = 2.10.2 = 40$.

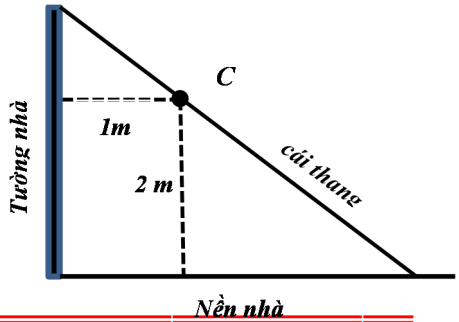
Khi đó, diện tích bề mặt của một chi tiết máy là $S = 96\pi + 40\left(cm^2\right)$

Số tiền nhỏ nhất cần dùng để mạ 10000 chi tiết máy là: $\frac{96\pi + 40}{10000} \cdot 150000 \cdot 10000 \approx 51238934$ (đồng).

Câu 53: Ông An cần sản xuất một cái thang để trèo qua một bức tường nhà. Ông muốn cái thang phải luôn được đặt qua vị trí C, biết rằng điểm C cao $2m$ so với nền nhà và điểm C cách tường nhà $1m$ (như hình vẽ bên).

Giả sử kinh phí để sản xuất thang là 300.000 đồng/1 mét dài. Hỏi ông An cần ít nhất bao nhiêu tiền để sản xuất thang? (Kết quả làm tròn đến hàng nghìn đồng).

A. 2.350.000 đồng. **B.** 3.125.000 đồng.



C. 1.249.000 đồng. **D.** 600.000 đồng.

Lời giải

Chọn C

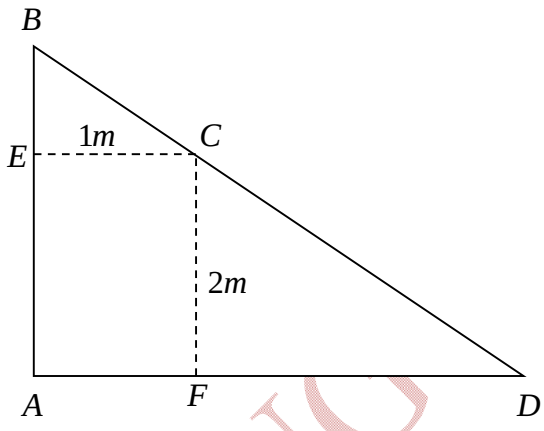
Đặt $BC = x$.

Ta có: $\Delta BCE \sim \Delta CDF$.

$\Leftrightarrow \frac{BC}{CD} = \frac{CE}{DF} \Leftrightarrow \frac{x}{CD} = \frac{1}{\sqrt{CD^2 - 4}}$.

$\Leftrightarrow x^2\left(CD^2 - 4\right) = CD^2$.

$\Leftrightarrow CD^2 = \frac{4x^2}{x^2 - 1} \Leftrightarrow CD = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.



Vậy chi phí sản xuất thang là:

$f(x) = \left(x + \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}\right).3.10^5$ với $x > 1$.

$f'(x) = 3.10^5\left(1 + \frac{2\sqrt{x^2 - 1} - \frac{2x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x^2 - 1}\right) = 3.10^5\left(1 + \frac{-2}{\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)^3}\right)$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\left(x^2 - 1\right)^3} = 2 \Leftrightarrow \left(x^2 - 1\right)^3 = 4 \Leftrightarrow x^2 = \sqrt[3]{4} + 1$.

Hay $x = \sqrt{\sqrt[3]{4} + 1}$.

Khi đó chi phí sản xuất thang là 1.249.000 đồng.

Câu 54: Một xe buýt của hãng xe A có sức chứa tối đa là 50 hành khách. Nếu một chuyến xe buýt chở x hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách là $20\left(3 - \frac{x}{40}\right)^2$ (nghìn đồng). Khẳng định đúng là:

A. Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất bằng 3.200.000 (đồng).
B. Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất khi có 45 hành khách.
C. Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất bằng 2.700.000 (đồng).
D. Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất khi có 50 hành khách.

Lời giải

Chọn A

Số tiền của chuyến xe buýt chở x hành khách là

$f(x) = 20x.\left(3 - \frac{x}{40}\right)^2 = 20\left(9x - \frac{3x^2}{20} + \frac{x^3}{1600}\right)$ $(0 < x \le 50)$

$f'(x) = 20\left(9 - \frac{3x}{10} + \frac{3x^2}{1600}\right) \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 40 \\ x = 120 \end{array}\right.$

x	0		40		50
y'		+	0	-	
y		↗	3200000	↘	

Vậy: một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất bằng: 3.200.000 (đồng)

Câu 55: Một công ti dự kiến chi 1 tỉ đồng để sản xuất các thùng đựng sơn hình trụ có dung tích 5 lít. Biết rằng chi phí để làm mặt xung quanh của thùng đó là 100,000 $đ/m^2$, chi phí để làm mặt đáy là 120 000 $đ/m^2$. Hãy tính số thùng sơn tối đa mà công ty đó sản xuất (giả sử chi phí cho các mối nối không đáng kể).

A. 57582 thùng. **B.** 58135 thùng. **C.** 18209 thùng. **D.** 12525 thùng.

Lời giải

Chọn B

Gọi chiều cao hình trụ là $h\ (h>0)$ (m).

Bán kính đáy hình trụ là $x\ (x>0)$ (m).

Thể tích khối trụ là: $V=\pi x^2h=\dfrac{5}{1000}\Rightarrow h=\dfrac{5}{1000\pi x^2}$ (m).

Diện tích mặt xung quanh là: $S_{xq}=2\pi xh=\dfrac{1}{100x}$.

Diện tích hai đáy là: $S_đ=2\pi x^2$

Số tiền cần thiết để sản xuất một thùng sơn là: $f(x)=\dfrac{1000}{x}+240000\pi x^2\ \ (x>0)$

Ta có: $f'(x)=\dfrac{-1000}{x^2}+480000\pi x\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{480\pi}}$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\dfrac{1}{\sqrt[3]{480\pi}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	2	↘	≈ 17201.05	↗	5

Vậy với số tiền 1 tỉ đồng thì công ty có thể sản xuất tối đa là: $\dfrac{10^9}{17201.05}\approx 58135$ thùng.

Câu 56: Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30.000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18.000. Hỏi cơ sở sản xuất phải bán với giá mới là bao nhiêu để đạt lợi nhuận lớn nhất.

A. 42.000 đồng. **B.** 40.000 đồng. **C.** 43.000 đồng. **D.** 39.000 đồng.

Lời giải

Chọn D

Gọi số tiền cần tăng giá mỗi chiếc khăn là x (nghìn đồng).

Vì cứ tăng giá thêm 1 (nghìn đồng) thì số khăn bán ra giảm 100 chiếc nên tăng x (nghìn đồng) thì số xe khăn bán ra giảm $100x$ chiếc. Do đó tổng số khăn bán ra mỗi tháng là: $3000-100x$ chiếc.

Lúc đầu bán với giá 30 (nghìn đồng), mỗi chiếc khăn có lãi 12 (nghìn đồng). Sau khi tăng giá, mỗi chiếc khăn thu được số lãi là: $12+x$ (nghìn đồng). Do đó tổng số lợi nhuận một tháng thu được sau khi tăng giá là: $f(x)=(3000-100x)(12+x)$ (nghìn đồng).

Xét hàm số $f(x)=(3000-100x)(12+x)$ trên $(0;+\infty)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta có: $f(x)=-100x^2+1800x+36000=-100(x-9)^2+44100\le 44100$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=9$.

Như vậy, để thu được lợi nhuận cao nhất thì cơ sở sản xuất cần tăng giá bán mỗi chiếc khăn là 9.000 đồng, tức là mỗi chiếc khăn bán với giá mới là 39.000 đồng.

Câu 57: **(THPT-Phúc-Trạch-Hà-Tĩnh-lần-2-2018-2019-thi-tháng-4)** Một trang trại rau sạch mỗi ngày thu hoạch được một tấn rau. Mỗi ngày, nếu bán rau với giá 30000 đồng/kg thì hết rau sạch, nếu giá bán rau tăng 1000 đồng/kg thì số rau thừa tăng thêm 20 kg. Số rau thừa này được thu mua làm thức ăn chăn nuôi với giá 2000 đồng/kg. Hỏi tiền bán rau nhiều nhất trang trại có thể thu được mỗi ngày là bao nhiêu ?

A. 32400000 đồng. **B.** 34400000 đồng. **C.** 32420000 đồng. **D.** 34240000 đồng.

Lời giải

Chọn C

Gọi số lần tăng giá là $y(y\ge 0)$

Giá bán rau sau mỗi lần tăng giá là $30000+1000y$ đồng/kg.

Số rau thừa được thu mua cho chăn nuôi là $20y(y\le 50)$ kg.

Số rau bán được trước khi thu mua cho chăn nuôi là $1000-20y$ kg.

Tổng số tiền bán rau thu được mỗi ngày là:

$P=(1000-20y).(30000+1000y)+20y.2000.$

$P=-20000y^2+440000y+30000000.$

$P=32420000-20000(y-11)^2.$

Ta có:

$32420000-20000(y-11)^2\le 32420000.$

$\Rightarrow P\le 32420000.$

$\Rightarrow P_{\max}=324200000$ khi $y=11(N)$.

Câu 58: Người ta xây một bể chứa nước với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3}m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây bể là 600.000 *đồng/m*^{2}. Hãy xác định kích thước của bể sao cho chi phí thuê nhân công thấp nhất. Chi phí đó là

A. 85 triệu đồng. **B.** 90 triệu đồng. **C.** 75 triệu đồng. **D.** 86 triệu đồng.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: dùng phương pháp hàm số.

Gọi $x(m)$ là chiều rộng của đáy bể, khi đó chiều dài của đáy bể là $2x(m)$ và $h(m)$ là chiều cao bể. Bể có thể tích bằng $\frac{500}{3}m^3\Leftrightarrow 2x^2h=\frac{500}{3}\Leftrightarrow h=\frac{250}{3x^2}$.

Diện tích cần xây là: $S=2(xh+2xh)+2x^2=6x\frac{250}{3x^2}+2x^2=\frac{500}{x}+2x^2$.

Xét hàm $S(x)=\frac{500}{x}+2x^2,(x>0)\Rightarrow S'(x)=\frac{-500}{x^2}+4x=0\Leftrightarrow x=5$

Lập bảng biến thiên suy ra $S_{\min}=S(5)=150$.

Chi phí thuê nhân công thấp nhất khi diện tích xây dựng là nhỏ nhất và bằng $S_{\min}=150$.

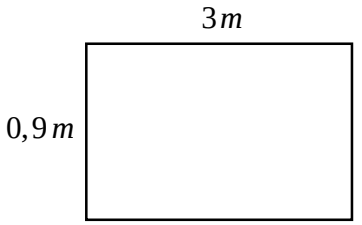
Vậy giá thuê nhân công thấp nhất là: $150.600000=90000000$ đồng.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

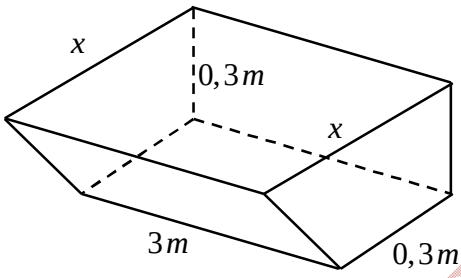
Cách 2: Dùng bất đẳng thức Cauchy.

$$S=\frac{500}{x}+2x^2=\frac{250}{x}+\frac{250}{x}+2x^2\ge 3\sqrt[3]{\frac{250}{x}.\frac{250}{x}.2x^2}=150.$$

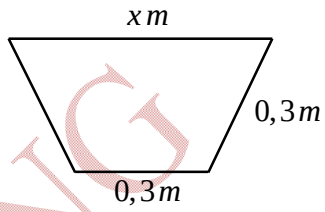
Câu 59: Để làm một máng xối nước, từ một tấm tôn kích thước $0,9m\times 3m$ người ta gấp tấm tôn đó như hình vẽ dưới. Biết mặt cắt của máng xối (bị cắt bởi mặt phẳng song song với hai mặt đáy) là một hình thang cân và máng xối là một hình lăng trụ có chiều cao bằng chiều dài của tấm tôn. Hỏi $x(m)$ bằng bao nhiêu thì thể tích máng xối lớn nhất?



(a) Tấm tôn



(b) Máng xối



(c) Mặt cắt

A. $x=0,5m$. **B.** $x=0,65m$. **C.** $x=0,4m$. **D.** $x=0,6m$.

Lời giải

Chọn D

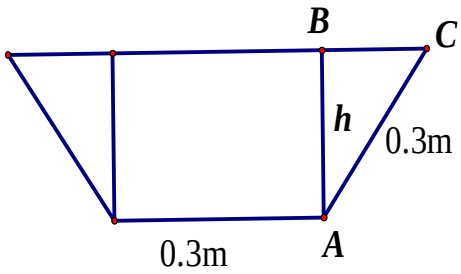
Gọi h là chiều cao của lăng trụ

Vì chiều cao lăng trụ bằng chiều dài tấm tôn nên thể tích máng xối lớn nhất khi diện tích hình thang cân (mặt cắt) lớn nhất

Ta có $S=\frac{h}{2}(x+0,3)$

$BC=\frac{x-0,3}{2}(x>0,3)$

$\Rightarrow h=\sqrt{(0,3)^2-\frac{(x-0,3)^2}{4}}$



ĐK: $(0,3)^2-\frac{(x-0,3)^2}{4}>0;(0,3<x<0,9)$

Khi đó:

$S=\frac{1}{4}(x+0,3)\sqrt{4.(0,3)^2-(x-0,3)^2}$

Xét hàm số

$f(x)=(x+0,3)\sqrt{4.(0,3)^2-(x-0,3)^2};(0,3<x<0,9)$

$\Rightarrow f'(x)=\sqrt{4.(0,3)^2-(x-0,3)^2}+(x+0,3)\frac{-2(x-0,3)}{\sqrt{4.(0,3)^2-(x-0,3)^2}}$

$=\frac{4.(0,3)^2-(x-0,3)^2-(x+0,3)(x-0,3)}{\sqrt{4.(0,3)^2-(x-0,3)^2}}=\frac{0,36-2x(x-0,3)}{\sqrt{4.(0,3)^2-(x-0,3)^2}}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow -x^2+0,3x+0,18=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-0,3\\x=0,6\end{array}\right.$

x	$0,3$		$0,6$		$0,9$
$f'(x)$	|	$+$	0	$-$	|

$f(x)$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ lớn nhất khi $x=0,6$

Vậy thể tích máng xối lớn nhất khi $x=0,6m$.

Câu 60: Một sợi dây kim loại dài $0,9m$ được cắt thành hai đoạn. Đoạn thứ nhất được uốn thành tam giác đều, đoạn thứ hai được uốn thành hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Tìm độ dài cạnh của tam giác đều (tính theo đơn vị cm) sao cho tổng diện tích của tam giác và hình chữ nhật là nhỏ nhất.

A. $\frac{60}{2-\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{60}{\sqrt{3}+2}$. **C.** $\frac{30}{1+\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{240}{\sqrt{3}+8}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi a,b lần lượt là độ dài cạnh tam giác đều và chiều rộng hình chữ nhật.

Khi đó $3a+6b=90(cm)\Rightarrow b=\frac{30-a}{2}(cm)$.

$S=S_{\Delta}+S_{\square}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+2b^2=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+2\left(\frac{30-a}{2}\right)^2=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)a^2-120a+1800}{4}$.

Để S nhỏ nhất thì $f(a)=\left(2+\sqrt{3}\right)a^2-120a+1800$ nhỏ nhất với $a\in(0;30)$.

$f'(a)=2\left(2+\sqrt{3}\right)a-120$, $f'(a)=0\Leftrightarrow a=\frac{60}{2+\sqrt{3}}\in(0;30)$.

Ta có $f(0)=1800$, $f(30)=900\sqrt{3}$, $f\left(\frac{60}{2+\sqrt{3}}\right)=3600\sqrt{3}-5400$.

Nên $\min\limits_{a\in(0;30)} f(a)=f\left(\frac{60}{2+\sqrt{3}}\right)=3600\sqrt{3}-5400$.

Vậy $a=\frac{60}{2+\sqrt{3}}$ thì S nhỏ nhất.

Câu 61: Bạn A có một đoạn dây dài $20m$. Bạn chia đoạn dây thành hai phần. Phần đầu uốn thành một tam giác đều. Phần còn lại uốn thành một hình vuông. Hỏi độ dài phần đầu bằng bao nhiêu để tổng diện tích hai hình trên là nhỏ nhất?

A. $\frac{40}{9+4\sqrt{3}}m$. **B.** $\frac{180}{9+4\sqrt{3}}m$. **C.** $\frac{120}{9+4\sqrt{3}}m$. **D.** $\frac{60}{9+4\sqrt{3}}m$.

Lời giải

Chọn B



Bạn A chia sợi dây thành hai phần có độ dài $x(m)$ và $20-x(m)$, $0<x<20$ (như hình vẽ).

Phần đầu uốn thành tam giác đều có cạnh $\frac{x}{3}(m)$, diện tích $S_1=\left(\frac{x}{3}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{x^2\sqrt{3}}{36}(m^2)$

Phần còn lại uốn thành hình vuông có cạnh $\frac{20-x}{4}(m)$, diện tích $S_2=\left(\frac{20-x}{4}\right)^2(m^2)$

Tổng diện tích hai hình nhỏ nhất khi $f(x)=\frac{x^2\sqrt{3}}{36}+\left(\frac{20-x}{4}\right)^2$ nhỏ nhất trên khoảng $(0;20)$.

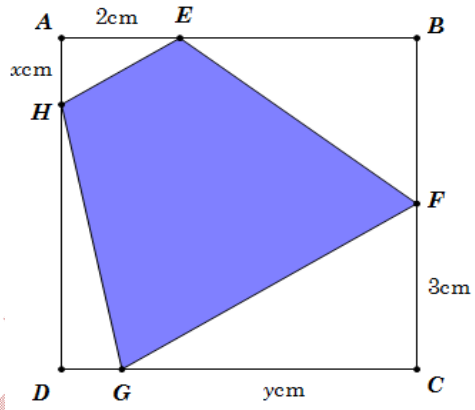
Ta có: $f'(x)=\frac{x\sqrt{3}}{18}-\frac{20-x}{8}=0\Leftrightarrow x=\frac{180}{4\sqrt{3}+9}$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{180}{4\sqrt{3}+9}$		20
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta được $x=\frac{180}{4\sqrt{3}+9}$.

Câu 62: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ. Tìm tổng $x+y$ để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất.



A. 7. **B.** 5. **C.** $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. **D.** $4\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có S_{EFGH} nhỏ nhất $\Leftrightarrow S=S_{\Delta AEH}+S_{\Delta CGF}+S_{\Delta DGH}$ lớn nhất (do $S_{\Delta BEF}$ không đổi).

Tính được $2S=2x+3y+(6-x)(6-y)=xy-4x-3y+36.\ (1)$

Ta có $EFGH$ là hình thang $\rightarrow \widehat{AEH}=\widehat{CGF}$

$\longrightarrow \Delta AEH\sim\Delta CGF\longrightarrow\frac{AE}{CG}=\frac{AH}{CF}\leftrightarrow\frac{2}{y}=\frac{x}{3}\longrightarrow xy=6.\ (2)$

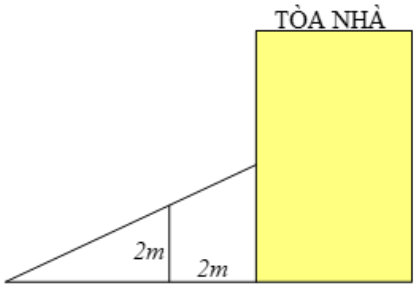
Từ (1) và (2), suy ra $2S=42-\left(4x+\frac{18}{x}\right)$.

Để $2S$ lớn nhất khi và chỉ khi $4x+\frac{18}{x}$ nhỏ nhất.

Mà $4x+\frac{18}{x}\geq 2\sqrt{4x.\frac{18}{x}}=12\sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 4x=\frac{18}{x}\Leftrightarrow x=\frac{3\sqrt{2}}{2}\rightarrow y=2\sqrt{2}$.

Chọn C

Câu 63: Cho bức tường cao 2m, nằm song song vuới tòa nhà và cách tòa nhà 2m. Người ta muốn chế tạo một chiếc thang bắc từ mặt đất bên ngoài bức tường, gác qua bức tường và chạm vào tòa nhà (xem hình vẽ). Hỏi chiều dài tối đa của thang bằng bao nhiêu mét

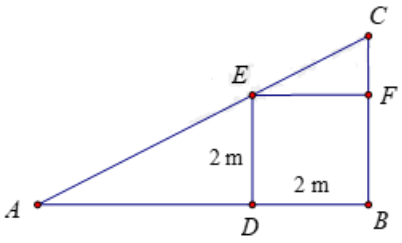


A. $\frac{5\sqrt{13}}{3}m$ **B.** $4\sqrt{2}m$ **C.** 6m **D.** $3\sqrt{5}m$

Lời giải

Chọn B

Đặt $\widehat{CEF}=\varphi \Rightarrow \widehat{AED}=90^\circ-\varphi$

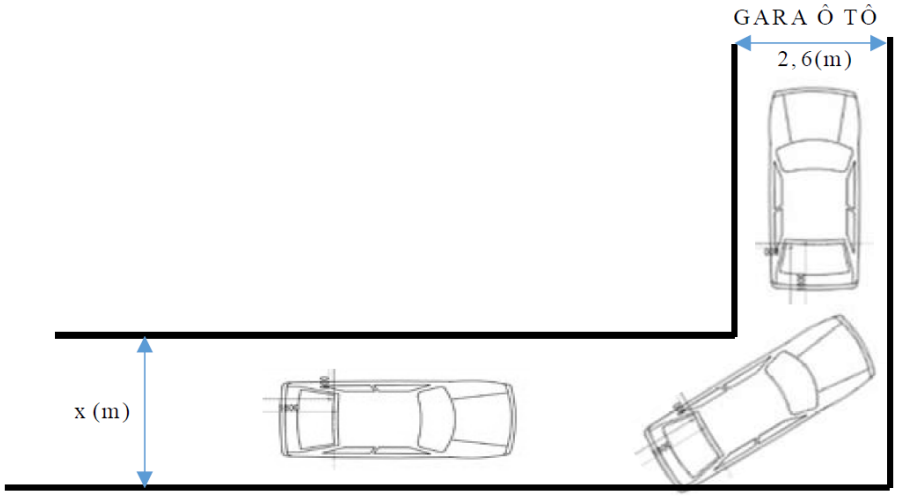


KHI ĐO $AE=\frac{DE}{\cos\left(90^\circ-\varphi\right)};EC=\frac{EF}{\cos\varphi}$

Do đó

$$AC=\frac{2}{\sin\varphi}+\frac{2}{\cos\varphi}\geq\frac{8}{\sin\varphi+\cos\varphi}\geq\frac{8}{\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}\geq$$

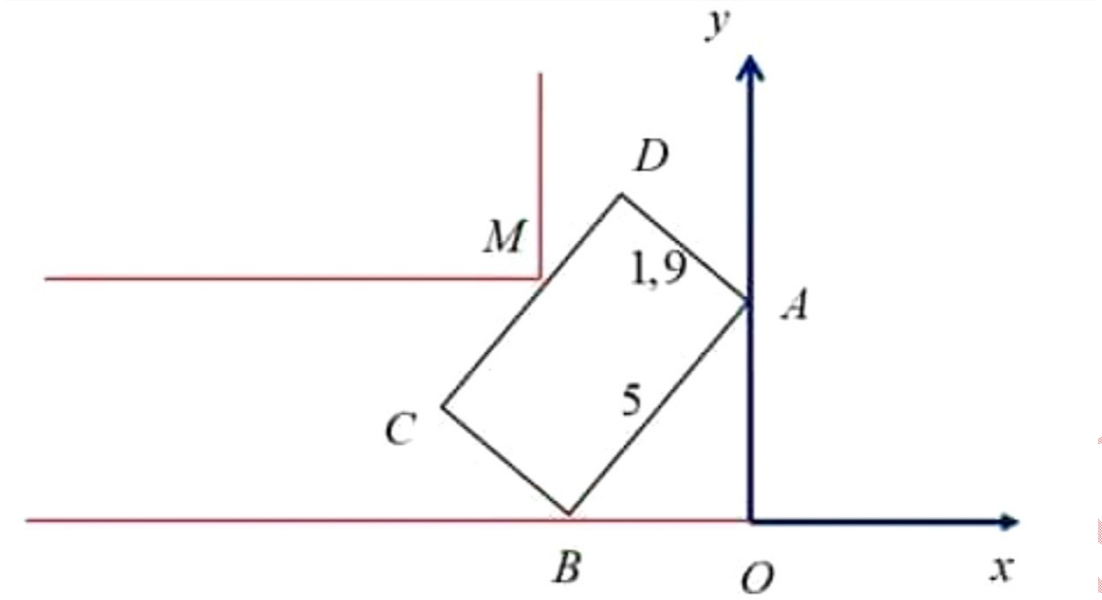
Câu 64: **(Cụm 8 trường chuyên lần1)** Hình vẽ bên dưới mô tả đoạn đường đi vào GARA Ô TÔ nhà cô Hiền. Đoạn đường đầu tiên có chiều rộng bằng $x\,(\text{m})$, đoạn đường thẳng vào cổng GARA có chiều rộng $2,6\,(\text{m})$. Biết kích thước xe ô tô là $5\text{m}\times1,9\text{m}$ (chiều dài $\times$ chiều rộng). Để tính toán và thiết kế đường đi cho ô tô người ta coi ô tô như một khối hộp chữ nhật có kích thước chiều dài $5\,(\text{m})$, chiều rộng $1,9\,(\text{m})$. Hỏi chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị bên dưới để ô tô có thể đi vào GARA được ? (giả thiết ô tô không đi ra ngoài đường, không đi nghiêng và ô tô không bị biến dạng)



A. $x=3,7\,(\text{m})$. **B.** $x=2,6\,(\text{m})$. **C.** $x=3,55\,(\text{m})$. **D.** $x=4,27\,(\text{m})$.

Lờigiải

Chọn A



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.

Khi đó $M(-2,6;x)$.

Gọi $B(-a;0)$ suy ra $A\left(0;\sqrt{25-a^2}\right)$. Phương trình $AB:\frac{x}{-a}+\frac{y}{\sqrt{25-a^2}}-1=0$.

Do $CD // AB$ nên phương trình $CD:\frac{x}{-a}+\frac{y}{\sqrt{25-a^2}}-T=0$.

Mà khoảng cách giữa AB và CD bằng $1,9(m)$ nên

$$\frac{|T-1|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{25-a^2}}\right)^2}}=1,9\Rightarrow T=1+\frac{9,5}{a\sqrt{25-a^2}}.$$

Điều kiện để ô tô đi qua được là M,O nằm khác phía đối với bờ là đường thẳng CD.

Suy ra:

$$\frac{-2,6}{-a}+\frac{x}{\sqrt{25-a^2}}-1+\frac{9,5}{a\sqrt{25-a^2}}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow x\geq\sqrt{25-a^2}+\frac{9,5}{a}-\frac{2,6\times\sqrt{25-a^2}}{a}$$ (đúng với mọi $a\in(0;5)$)

Để cho nhanh, chúng ta dùng chức năng **TABLE** trong máy tính **Casio570ES PLUS**.

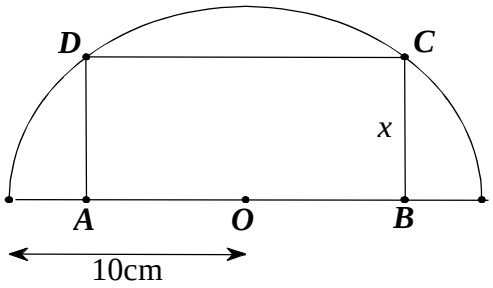
$f(X)=\sqrt{25-X^2}+\frac{9,5}{X}-\frac{2,6\times\sqrt{25-X^2}}{X}$ với STEP = $\frac{5}{29}$; START = 0; END = 5.

Thấy GTLN của $f(X)=\sqrt{25-X^2}+\frac{9,5}{X}-\frac{2,6\times\sqrt{25-X^2}}{X}$ xấp xỉ $3,698$.

Vậy chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên gần nhất với giá trị ở câu A.

Câu 65: **(Chuyên-Thái-Nguyên-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3)** Tính diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp trong nửa đường tròn có bán kính $10cm$ (hình vẽ).

A. $160cm^2$. **B.** $100cm^2$. **C.** $80cm^2$. **D.** $200cm^2$.



Lời giải

Chọn B

Đặt $OA = x\ (0 < x < 10)$. Suy ra: $AB = 2x;\ AD = \sqrt{OD^2 - OA^2} = \sqrt{100 - x^2}$.

Khi đó: $S_{ABCD} = S = AB.AD = 2x.\sqrt{100 - x^2} = 2\sqrt{100x^2 - x^4}$

Suy ra: $S' = \dfrac{200x - 4x^3}{\sqrt{100x^2 - x^4}}$

$$\Rightarrow S' = 0 \Leftrightarrow 200x - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 5\sqrt{2} \\ x = -5\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 5\sqrt{2} \ (\text{do } 0 < x < 10)$$

x	0		$5\sqrt{2}$		10
$S(x)$		+	0	−	
$S'(x)$		↗	100	↘	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $ABCD$ bằng $100\,\text{cm}^2$ khi $x = 5\sqrt{2}$ cm.

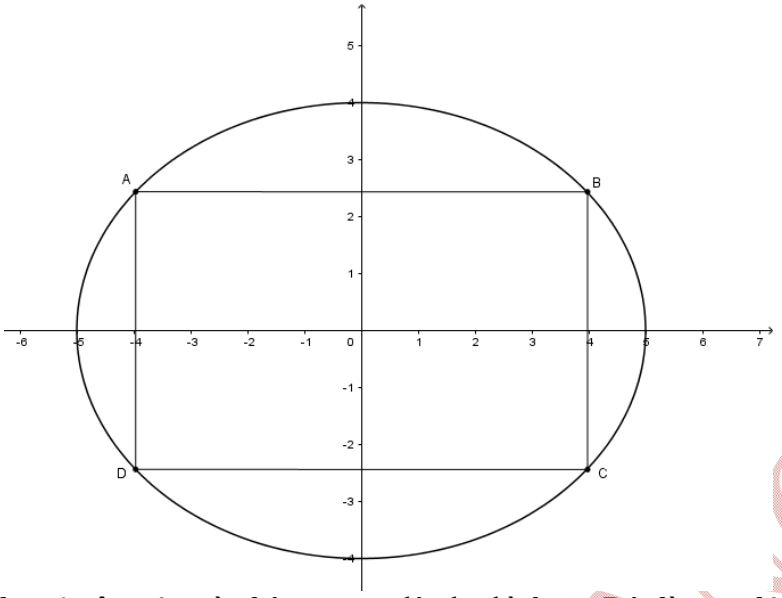
Câu 66: **(PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH)** Ông An có một khu đất hình elip với độ dài trục lớn 10 m và độ dài trục bé 8 m. Ông An muốn chia khu đất thành hai phần, phần thứ nhất là một hình chữ nhật nội tiếp elip dùng để xây bể cá cảnh và phần còn lại dùng để trồng hoa. Biết chi phí xây bể cá là 1000000 đồng trên $1m^2$ và chi phí trồng hoa là 1200000 đồng trên $1m^2$. Hỏi ông An có thể thiết kế xây dựng như trên với tổng chi phí thấp nhất gần nhất với số nào sau đây?

A. 67398224 đồng. **B.** 67593346 đồng. **C.** 63389223 đồng. **D.** 67398228 đồng.

Lời giải

Chọn A

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Gắn mảnh vườn hình elip của ông An vào hệ trục tọa độ như hình vẽ. Độ dài trục lớn 10m và độ dài trục bé bằng 8m nên ta có $a=5$ và $b=4$.

Phương trình của elip là: $(E):\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

Diện tích của elip là: $S_{(E)}=\pi ab=20\pi$.

Hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp elip. Đặt $AB=2x\ (0<x<5)\Rightarrow AD=8\sqrt{1-\dfrac{x^2}{25}}$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là: $S_{ABCD}=16x\sqrt{1-\dfrac{x^2}{25}}$.

Diện tích phần còn lại trồng hoa là: $S_{hoa}=20\pi-16x\sqrt{1-\dfrac{x^2}{25}}$.

Tổng chi phí xây dựng là:

$$T=16000000.x\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}+1200000.\left(20\pi-16x\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}\right)$$

$$=24000000\pi-3200000x\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}.$$

Mặt khác ta có: $16000000.\dfrac{x}{5}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{25}}\le 16000000.\dfrac{\dfrac{x^2}{25}+1-\dfrac{x^2}{25}}{2}=8000000$.

$$\Rightarrow T=24000000\pi-3200000x\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}\ge 24000000\pi-8000000=67398223.69.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{x}{5}=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{25}}\Leftrightarrow x=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ (thỏa mãn).

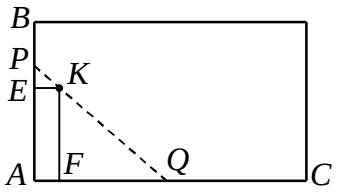
Vậy tổng chi phí thiết kế xây dựng thấp nhất gần với số 67398224.

Câu 67: **(PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH)** Một cái hồ rộng có hình chữ nhật. Tại một góc nhỏ của hồ người ta đóng một cái cọc ở vị trí K cách bờ AB là 1 m và cách bờ AC là 8 m, rồi dùng một cây sào ngăn một góc nhỏ của hồ để thả bèo (như hình vẽ). Tính chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB, AC và cây cọc K (bỏ qua đường kính của sào).

A. $\frac{5\sqrt{65}}{4}$. **B.** $5\sqrt{5}$. **C.** $9\sqrt{2}$. **D.** $\frac{5\sqrt{71}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Đặt $AP=a$, $AQ=b$ $(a,b>0)$. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của K xuống AB và AC. Suy ra $KE=1$, $KF=8$.

Ta có: $\frac{KE}{AQ}=\frac{PK}{PQ};\frac{KF}{AP}=\frac{QK}{PQ}\Rightarrow\frac{KF}{AP}+\frac{KE}{AQ}=1$ hay $\frac{8}{a}+\frac{1}{b}=1$.

(Hoặc có thể dùng phép tọa độ hóa: Gán $A=(0;0)$, $P=(0;a)$, $Q=(b;0)$. Khi đó $K=(1;8)$.

Phương trình đường thẳng $PQ:\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$. Vì PQ đi qua K nên $\frac{1}{b}+\frac{8}{a}=1$.)

Cách 1:

Ta có: $PQ^2=a^2+b^2$. Vì $\frac{8}{a}+\frac{1}{b}=1\Rightarrow\frac{8k}{a}+\frac{k}{b}=k\ \forall k>0$.

$$a^2+b^2+k=\left(a^2+\frac{8k}{a}\right)+\left(b^2+\frac{k}{b}\right)=\left(a^2+\frac{4k}{a}+\frac{4k}{a}\right)+\left(b^2+\frac{k}{2b}+\frac{k}{2b}\right)\ge 3\sqrt[3]{16k^2}+3\sqrt[3]{\frac{k^2}{4}}.$$

Suy ra PQ nhỏ nhất $\Leftrightarrow a^2+b^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=\frac{4k}{a}\\ b^2=\frac{k}{2b}\\ \frac{8}{a}+\frac{1}{b}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=250\\ a=10\\ b=5\end{cases}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của PQ là $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$. Từ đó suy ra chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB, AC và cây cọc K là $5\sqrt{5}$.

Cách 2:

Vì $\frac{8}{a}+\frac{1}{b}=1\Rightarrow b=\frac{a}{a-8}$ với $a>8$. Khi đó $PQ^2=a^2+b^2=a^2+\left(\frac{a}{a-8}\right)^2$ với $a>8$.

Xét hàm số $f(a)=a^2+\left(\frac{a}{a-8}\right)^2$ với $a>8$.

Ta có $f'(a)=2a+\frac{2a}{a-8}.\frac{-8}{(a-8)^2}=\frac{2a\left[(a-8)^3-8\right]}{(a-8)^3}$; $f'(a)=0\Rightarrow a=10$.

BBT của $f(a)$:

a	8		10		$+\infty$
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	$+\infty$	$\searrow$	125	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy GTNN của $f(a)$ là 125 khi $a=10$.

Từ đó suy ra chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB, AC và cây cọc K là $\sqrt{125}=5\sqrt{5}$.

Lại có $\sqrt{20^2+(2x)^2}+\sqrt{(25-x)^2+10^2}\ge\sqrt{(45-x)^2+(2x+10)^2}$ $\left(\text{do } |\vec{u}|+|\vec{v}|\ge|\vec{u}+\vec{v}|\right)$.

$\Leftrightarrow\sqrt{20^2+(2x)^2}+\sqrt{(25-x)^2+10^2}\ge\sqrt{5(x-5)^2+2000}$.

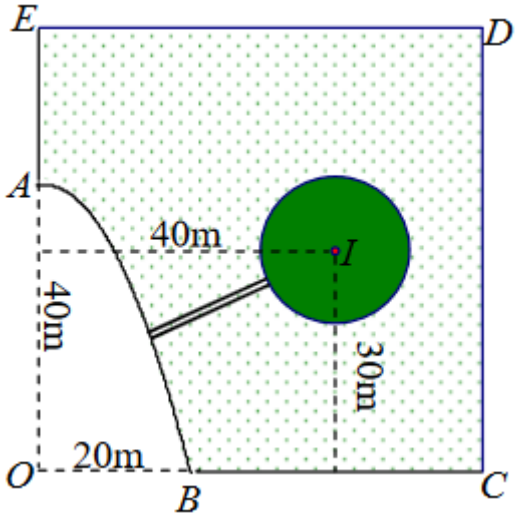
Do đó $t(x)\ge\dfrac{\sqrt{5(x-5)^2+2000}}{30}\ge\dfrac{\sqrt{2000}}{30}=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$.

Vậy $t(x)_{\min}=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ (h) khi và chỉ khi $x=5$ (m).

Vậy thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C là $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$(h).

Câu 68: **(SGD Thanh Hóa – năm 2017 – 2018)** Một cái ao hình $ABCDE$ (như hình vẽ), ở giữa ao có một mảnh vườn hình tròn có bán kính 10 m. Người ta muốn bắc một câu cầu từ bờ AB của ao đến vườn. Tính gần đúng độ dài tối thiểu l của cây cầu biết :

- Hai bờ AE và BC nằm trên hai đường thẳng vuông góc với nhau, hai đường thẳng này cắt nhau tại điểm O ;
- Bờ AB là một phần của một parabol có đỉnh là điểm A và có trục đối xứng là đường thẳng OA ;
- Độ dài đoạn OA và OB lần lượt là 40 m và 20 m;
- Tâm I của mảnh vườn lần lượt cách đường thẳng AE và BC lần lượt 40 m và 30m.

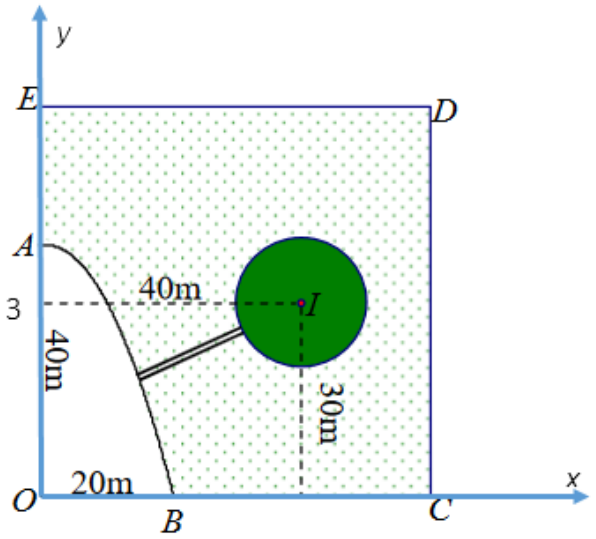


A. $l\approx17,7$ m. **B.** $l\approx25,7$ m. **C.** $l\approx27,7$ m. **D.** $l\approx15,7$ m.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Lời giải :

Chọn A



Gán trục tọa độ Oxy sao cho $\begin{cases} A \in Oy \\ B \in Ox \end{cases}$ cho đơn vị là 10 m.

Khi đó mảnh vườn hình tròn có phương trình $(C):(x-4)^2+(y-3)^2=1$ có tâm $I(4;3)$

Bờ AB là một phần của Parabol $(P):y=4-x^2$ ứng với $x \in [0;2]$

Vậy bài toán trở thành tìm MN nhỏ nhất với $\begin{cases} M \in (P) \\ N \in (C) \end{cases}$.

Đặt trường hợp khi đã xác định được điểm N thì $MN+MI \geq IM$, vậy MN nhỏ nhất khi $MN+MI=IM \Leftrightarrow N$; M ; I thẳng hàng.

Bây giờ, ta sẽ xác định điểm N để IN nhỏ nhất

$N \in (P) \Leftrightarrow N\left(x;4-x^2\right)$ $IN=\sqrt{(4-x)^2+\left(1-x^2\right)^2} \Leftrightarrow IN^2=(4-x)^2+\left(1-x^2\right)^2$

$\Leftrightarrow IN^2=x^4-x^2-8x+17$

Xét $f(x)=x^4-x^2-8x+17$ trên $[0;2] \Leftrightarrow f'(x)=4x^3-2x-8$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x \approx 1,3917$ là nghiệm duy nhất và $1,3917 \in [0;2]$

Ta có $f(1,3917)=7,68$; $f(0)=17$; $f(2)=13$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên $[0;2]$ gần bằng $7,68$ khi $x \approx 1,3917$

Vậy $\min IN \approx \sqrt{7,68} \approx 2,77 \Leftrightarrow IN=27,7$ m $\Leftrightarrow MN=IN-IM=27,7-10=17,7$ m.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG