CHƯƠNG 4
NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

BÀI 11
NGUYÊN HÀM

1. Nguyên hàm của một hàm số

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên một khoảng K (hoặc một đoạn, hoặc một nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là **nguyên hàm** của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x)=f(x)$, với mọi $x\in K$.

Chú ý: Trường hợp $K=[a;b]$ thì các đẳng thức $F'(a)=f(a)$ và $F'(b)=f(b)$ ta được hiểu là đạo hàm bên phải tại điểm $x=a$ và đạo hàm bên trái tại điểm $x=b$ của hàm số $F(x)$, tức là:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=f(a) \text{ và } \lim_{x\to b^-}\frac{F(x)-F(b)}{x-b}=f(b)$$

Giả sử hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K. Khi đó:

- Với mỗi hằng số C, hàm số $F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K.
- Nếu hàm số $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì tồn tại hằng số C sao cho $G(x)=F(x)+C$ với mọi $x\in K$

Như vậy, nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x)+C$, với C là hằng số. Ta gọi $F(x)+C$ $(C\in\mathbb{R})$ là **họ các nguyên hàm** của $f(x)$ trên K, kí hiệu $\int f(x)dx$.

Chú ý:

- Để tìm học các nguyên hàm (gọi tắt là tìm nguyên hàm) của hàm số $f(x)$ trên K, ta chỉ cần tìm một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ trên K và khi đó $\int f(x)dx=F(x)+C$, với C là hằng số.
- Người ta chứng minh được rằng, nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng K thì $f(x)$ có nguyên hàm trên khoảng đó.
- Biểu thức $f(x)dx$ được gọi là vi phân của nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$, kí hiệu là $dF(x)$. Vậy, $dF(x)=F'dx=f(x)dx$
- Khi tìm nguyên hàm của một hàm số mà không chỉ rõ tập K thì ta hiểu là tìm nguyên hàm của hàm số đó trên tập xác định của nó.

2. Tính chất cơ bản của nguyên hàm

- $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, với k là hằng số khác 0
- $\int\left[f(x)+g(x)\right]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- $\int\left[f(x)-g(x)\right]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

3. Nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

Nguyên hàm của một số hàm số thường gặp	
Nguyên hàm của hàm số lũy thừa	$\int 0dx = C$ $\int 1dx = x + C$ $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ \ (\alpha \neq -1)$ $\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C \ \ (x \neq 0)$ $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C$ $\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C$
Nguyên hàm của hàm số lượng giác	$\int \cos x dx = \sin x + C$ $\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$ $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$
Nguyên hàm của hàm số mũ	$\int e^x dx = e^x + C$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ \ (0 < a \neq 1)$

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

CHỦ ĐỀ 1
NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ

DẠNG 1
NGUYÊN HÀM HÀM LŨY THỪA

1. Bảng nguyên hàm hàm số lũy thừa

Nguyên hàm hàm số lũy thừa	
$\int 0dx = C$	
$\int dx = x + C$	
$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ \ (\alpha \neq -1)$	$\int (ax+b)^{\alpha}\,dx = \int (ax+b)^{\alpha}.\frac{(ax+b)'}{a}dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ \ (\alpha \neq 1)$
$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C \ \ (x \neq 0)$	$\int \frac{1}{ax+b}dx = \int \frac{1}{ax+b}.\frac{(ax+b)'}{a}dx = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C$
$\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C$	$\int \frac{1}{(ax+b)^2}dx = \int \frac{1}{(ax+b)^2}.\frac{(ax+b)'}{a}dx = -\frac{1}{a}.\frac{1}{ax+b} + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{ax+b}}.\frac{(ax+b)'}{a}dx = \frac{1}{a}.2\sqrt{ax+b} + C$

Chú ý: $\int f\left(u(x)\right).u'(x)dx = F\left(u(x)\right) + C$

2. Công thức lũy thừa:

- $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$
- $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$
- $x^m.x^n = x^{m+n}$
- $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

Bài 1. Tìm:

a) $\int\left(x^2-2026\right)\mathrm{d}x$ b) $\int\left(x^4+\frac{2}{x^3}-2027\right)\mathrm{d}x$ c) $\int\left(x^2+\frac{3}{x}-1\right)\mathrm{d}x$

d) $\int\left(\frac{2026}{x}-\frac{2027}{x^2}+2028\right)\mathrm{d}x$ e) $\int\left(3x^2-\frac{3}{x}-2\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$ f) $\int\left(3\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+2026\right)\mathrm{d}x$

Bài 2. Tìm:

a) $\int 2x\left(1+3x^3\right)\mathrm{d}x$ b) $\int\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^2\mathrm{d}x$ c) $\int\left(x-3\right)^3\mathrm{d}x$

d) $\int x^2\left(x-2\right)^2\mathrm{d}x$ e) $\int x\left(1-x\right)^3\mathrm{d}x$ f) $\int\left(x+1\right)\left(3-x\right)^2\mathrm{d}x$

Bài 3. Tìm:

a) $\int\frac{2x^4-3}{x^2}\mathrm{d}x$ b) $\int\frac{x^2-3x+2}{x}\mathrm{d}x$ c) $\int\frac{x^2+3x-1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

d) $\int\frac{\left(3x-2\right)^2}{x}\mathrm{d}x$ e) $\int\left(\frac{3x+1}{x}\right)^2\mathrm{d}x$ f) $\int\frac{\left(x-1\right)^2}{\sqrt[3]{x^2}}\mathrm{d}x$

Bài 4. Tìm:

a) $\int\left(x\sqrt{x^3}-4x\right)\mathrm{d}x$ b) $\int\left(3x^2\sqrt[3]{x^4}-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$ c) $\int\left(2x^5\sqrt[4]{x^3}-2x\right)\mathrm{d}x$

d) $\int\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}+2026\right)\mathrm{d}x$ e) $\int\left(3x^2-\frac{2027}{x\sqrt[4]{x^3}}\right)\mathrm{d}x$ f) $\int\left(\frac{2\sqrt{x}}{x^2}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

Bài 5. Tìm:

a) $\int\left(x-2026\right)^{2027}\mathrm{d}x$ b) $\int\frac{2026}{\left(5x-2\right)^2}\mathrm{d}x$ c) $\int\frac{2}{\sqrt{3x+2027}}\mathrm{d}x$

d) $\int\frac{1}{2x-1}\mathrm{d}x$ e) $\int\frac{2x-3}{2x+1}\mathrm{d}x$ f) $\int\frac{x+1}{\left(x-2\right)^2}\mathrm{d}x$

Bài 6. Cho $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của:

a) $f\left(x\right)=x^3-4x+2024$. Biết $F(1)=0$, tính $F\left(0\right)$.

b) $f\left(x\right)=\frac{x^3-1}{x^2}$. Biết $F(-2)=0$, tính $F\left(2\right)$.

c) $f\left(x\right)=\frac{3-5x^2}{x}$. Biết $F(e)=1$, tính $F\left(2\right)$.

d) $f\left(x\right)=\frac{1+2x^2}{x}$. Biết $F\left(-1\right)=3$, tính $F\left(1\right)$.

e) $f\left(x\right)=\frac{3x}{\sqrt[3]{x^2}}$. Biết $F\left(1\right)=0$, tính $F\left(0\right)$.

f) $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^4}}$. Biết $F(0)=2$, tính $F(1)$.

g) $f(x)=3x^3-2\sqrt{x^5}$. Biết $F(1)=0$, tính $F(0)$.

h) $f(x)=\dfrac{2026}{x^5}+2\sqrt[4]{x}$. Biết $F(-2)=0$, tính $F(2)$.

Bài 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=6x^2-2, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=1$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(2)=0$. Tính $F(4)$.

Bài 8. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\dfrac{3x^3+1}{x}$. Khi đó hãy tính giá trị biểu thức $f(-3)+f(3)$ biết $f(1)=2, f(-1)=3$.

Bài 9. Tìm hàm số $y=f(x)$ biết $f'(x)=3x^2+2x-m+1$, $f(2)=1$ và đồ thị của hàm số $y=f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -5.

Bài 10. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{khi } x\ge 1\\ 3x^2-2 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0)=2$. Tính $F(-1)+2F(2)$.

Bài 11. Tìm giá trị của tham số m biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}+m-1$ thỏa mãn $F(0)=0$ và $F(3)=7$.

DẠNG 2
NGUYÊN HÀM HÀM LƯỢNG GIÁC

1. Bảng nguyên hàm hàm số lượng giác

Nguyên hàm hàm số lượng giác	
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos(ax+b)dx = \int \cos(ax+b).\frac{(ax+b)'}{a}dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin(ax+b)dx = \int \sin(ax+b).\frac{(ax+b)'}{a}dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}.\frac{(ax+b)'}{a}dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = \int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}.\frac{(ax+b)'}{a}dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b)+C$

Chú ý: Cần thuộc các công thức lượng giác sau:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$
- $\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$
- $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$
- $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$
- $\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sin x \Rightarrow \sin^2\frac{x}{2}.\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{4}\sin^2 x$
- $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$
- $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$
- $\sin a\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a-b)+\sin(a+b)\right]$
- $\sin a\sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$
- $\cos a\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)+\cos(a+b)\right]$

Bài 1. Tìm:

a) $\int(\sin x+3\cos x)dx$ b) $\int\cos^2\frac{x}{2}dx$ c) $\int(\sin x+\cos x)^2dx$

d) $\int 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$ e) $\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$ f) $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$

Bài 2. Tìm:

a) $\int(4x+3\cos x)dx$ b) $\int\left(2x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$ c) $\int\left(2026x-2\sin^2\frac{x}{2}\right)dx$

d) $\int\left(\frac{1}{3}x^2-2x+\frac{1}{2}\tan^2 x\right)dx$ e) $\int x\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x}\right)dx$ f) $\int x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{\tan^2 x}{x^2}\right)dx$

Bài 3. Tìm:

a) $\int\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}.\cos^2\frac{x}{2}}dx$ b) $\int x\left(2027-\frac{1}{x^3}+\frac{\sin x}{x}\right)dx$

c) $\int x^3\left[\frac{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}{x^3}-2x+\frac{1}{x^{2026}}\right]dx$ d) $\int x^2\left(\frac{1}{x^2\sin^2\frac{x}{2}.\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{3}{x^3}-\frac{4}{x^4}\right)dx$

Bài 4. Tìm:

a) $\int\cos^2 xdx$ b) $\int(\cos^2 2x-\sin^2 2x)dx$ c) $\int\left(2-\frac{1}{\sin^2 2x}\right)dx$

d) $\int(\sin^2 4x-3x)dx$ e) $\int(\sin^2 3x-\cos^2 4x)dx$ f) $\int(1-2x+\tan^2 3x)dx$

g) $\int\sin x.\cos 2xdx$ h) $\int\sin 2x.\sin 4xdx$ i) $\int(x-\cos 3x.\cos 5x)dx$

Bài 5. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của:

a) $f(x)=3-5\cos x$. Biết $F(\pi)=2$, tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

b) $f(x)=\sin x+1$. Biết $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$, tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

c) $f(x)=2024-\sin^2\frac{x}{2}$. Biết $F(2\pi)=0$, tính $F(0)$.

d) $f(x)=\sin^2\frac{x}{4}.\cos^2\frac{x}{4}$. Biết $F(\pi)=1$, tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Bài 6. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn:

a) $f'(x)=2-5\sin x$ và $f(0)=10$. Tìm hàm $f(x)$.

b) $f'(x)=3x^2-2\sin^2 x$ và $f(0)=\dfrac{\pi}{2}$. Tìm hàm $f(x)$.

Bài 7. Cho $F(x)=\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\tan x$. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $g(x)=\dfrac{\tan x}{f'(x)}$.

DẠNG 3
NGUYÊN HÀM HÀM MŨ

Nguyên hàm hàm số mũ	
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{ax+b} dx = \int e^{ax+b}.\frac{(ax+b)'}{a} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ \ (0 < a \neq 1)$	$\int a^{\alpha x+\beta} dx = \int a^{\alpha x+\beta}.\frac{(\alpha x+\beta)'}{a} dx = \frac{1}{\alpha}.\frac{a^{\alpha x+\beta}}{\ln a} + C \ \ (0 < a \neq 1)$

Bài 1. Tìm:

a) $\int \left(2027^x + 1\right) dx$ b) $\int \left(2e^x - 3^x\right) dx$ c) $\int \left(2.5^x - \frac{1}{3}.7^x\right) dx$

d) $\int \left(e^{2x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$ e) $\int 8^x.2^{1-2x} dx$ f) $\int \left(9^x - 2 + 9^{-x}\right) dx$

Bài 2. Tìm:

a) $\int 2^{3x}.3^{2x} dx$ b) $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx$ c) $\int \frac{e^{2x} - e^x + 2026}{e^x} dx$

d) $\int \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x}\right)^2 dx$ e) $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx$ f) $\int e^x \left(2026 - \frac{2027e^{-x}}{x^5}\right) dx$

Bài 3. Tìm:

a) $\int \left(2^x + 3^x\right) dx$ b) $\int e^{3x+2026} dx$ c) $\int 3^{x+2}.2^{2x+1} dx$

d) $\int \left(3^x + 5^x\right)^2 dx$ e) $\int \left(e^x + e^{-x}\right)^2 dx$ f) $\int \frac{e^{2x} - 1}{1 - e^{-x}} dx$

Bài 8. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết:

a) $f(x) = 2^x$ và $F(e) = 1$. Tìm hàm $F(x)$.

b) $f(x) = e^{2x}$ và $F(0) = 2025$. Tính $F(1)$

c) $f(x) = e^x(e^x - 1)$ và $F(\ln 2) = 2026$. Tính $F(0)$.

d) $f(x) = e^{3x}.3^x$ và $F(1) = 0$. Tìm hàm $F(x)$.

Bài 9. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn:

a) $f'(x) = 2026^x + e^{-x}$ và $f(0) = 2$. Tìm hàm $f(x)$.

b) $f'(x) = 2e^{2x} + 1$ và $f(0) = \frac{1}{\ln 2026}$. Tìm hàm $f(x)$.

c) $f'(x)=\frac{1}{3^x}-\frac{1}{e^x}$ và $f(1)=-\frac{1}{3\ln 3}$. Tính $f(0)$.

d) $f'(x)=\frac{1}{e^{3x}}+\frac{1}{5^{2x+1}}$ và $f(0)=-\frac{1}{10\ln 5}$. Tìm hàm $f(x)$.

DẠNG 4
NGUYÊN HÀM CỦA HÀM ẨN

- $\int f'(x)dx = f(x)+C$
- $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \left[\ln\left(f(x)\right)\right]'$
- $-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)} = \left[\dfrac{1}{f(x)}\right]'$
- $-\dfrac{f'(x)}{f^n(x)} = \left[\dfrac{1}{(n-1)\left[f(x)\right]^{n-1}}\right]'$
- $n.f'(x).f(x) = \left[f(x)^n\right]'$
- $\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \left[2\sqrt{f(x)}\right]'$
- $f'(x).g(x)+f(x).g'(x) = \left[f(x).g(x)\right]'$
- $\dfrac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{g^2(x)} = \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'$
- $f'(x)+f(x)=h(x)$

Nhân hai vế với e^x ta được $e^x\cdot f'(x)+e^x\cdot f(x)=e^x\cdot h(x)\Leftrightarrow\left[e^x\cdot f(x)\right]'=e^x\cdot h(x)$

- $f'(x)-f(x)=h(x)$

Nhân hai vế với e^{-x} ta được $e^{-x}\cdot f'(x)-e^{-x}\cdot f(x)=e^{-x}\cdot h(x)\Leftrightarrow\left[e^{-x}\cdot f(x)\right]'=e^{-x}\cdot h(x)$

Bài 1. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn: $f'(x).f(x)=x^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=\sqrt{2026}$. Tính $f^2(1)$.

Bài 2. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(\ln 2)=0$ và $f'(x)=\dfrac{e^x}{f(x)}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. $f(x)\neq 0$. Tính $f^2(0)$.

Bài 3. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(e)=1$ và $xf'(x)=\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f(x)\neq 0$. Tính $f\left(e^3\right)$.

Bài 4. Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$; $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(3)=\frac{4}{9}$ và $\left[f'(x)\right]^2=x.f(x)$. Tính $f(1)$.

Bài 5. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0)=1-\ln 2$ và $e^x f'(x)=2^x\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Biết $f(1)=\frac{e}{2}(a+b\ln 2)$ với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a-b$.

Bài 6. Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=1$, $f(x)=f'(x).\sqrt{3x}$, với mọi $x>0$. Tính $f(4)$.

Bài 7. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(x)>0,\forall x>0$ và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x)-\frac{\sqrt{f(x)}}{x^3}=0,\forall x>0$ và $f(1)=-\frac{1}{2}$. Biết $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a+b$.

Bài 8. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[xf'(x)\right]^2+1=x^2\left[1-f(x).f''(x)\right]$ với mọi x dương. Biết $f(1)=f'(1)=1$. Tính giá trị $f^2(4)$.

Bài 9. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(x+1)f'(x)+f(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2024$. Tính $f(2)$.

Bài 10. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)+2x.f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Tính $f(1)$.

Bài 11. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=x^3-2x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=1$. Biết $f^2(2)=\frac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a-b$.

CHỦ ĐỀ 2
ỨNG DỤNG THỰC TIỄN CỦA NGUYÊN HÀM

DẠNG 1
ỨNG DỤNG NGUYÊN HÀM TRONG BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

Giả sử $v(t)$ là vận tốc của vật M tại thời điểm t và $s(t)$ là quãng đường vật đi được sau khoảng thời gian t tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Ta có mối liên hệ giữa $s(t)$ và $v(t)$ như sau:

- Đạo hàm của quãng đường là vận tốc: $s'(t)=v(t)$
- Nguyên hàm của vận tốc là quãng đường: $s(t)=\int v(t)dt$

Nếu gọi $a(t)$ là gia tốc của vật M thì ta có mối liên hệ giữa $v(t)$ và $a(t)$ như sau:

- Đạo hàm của vận tốc là gia tốc: $v'(t)=a(t)$.
- Nguyên hàm của gia tốc là vận tốc: $v(t)=\int a(t)dt$

Bài 1. Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc $72\,km/h$ thì nhìn thấy chướng ngại vật trên đường cách đó $40m$, người lái xe hãm phanh khẩn cấp. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-10t+20(m/s)$, trong đó t (giây). Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh.



a) Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là bao nhiêu giây?

b) Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được bao nhiêu mét? Xe ô tô có gặp tai nạn do va chạm với chướng ngại vật không?

c) Nếu người lái xe nhìn thấy chướng ngại vật trên đường, sau đó 1 giây mới phản ứng đạp phanh khẩn cấp thì xe ô tô có gặp tai nạn do va chạm với chướng ngại vật không?

Bài 2. Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng từ mặt đất. Giả sử tại thời điểm t giây (coi là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t)=24,5-9,8t\,(m/s)$.



a) Tính quãng đường viên đạn đi sau 2 giây đầu.

b) Tính quãng đường viên đạn đi từ lúc bắn lên cho tới khi rơi xuống đất.

Bài 3. Một xe ôtô chuyển động với gia tốc phụ thuộc vào thời gian theo công thức $a(t)=\sin\left(t+\dfrac{3\pi}{2}\right)$, với $\left(m/s^2\right)$. Biết tại thời điểm $t=0$ thì vận tốc bằng $2(m/s)$ và quãng đường đi được của vật bằng 0.



a) Thiết lập công thức tính vận tốc của xe ôtô theo thời gian t.

b) Tính quãng đường đi được của xe ôtô trong thời gian $t=\pi$ giây đầu tiên.

Bài 4. Một vật chuyển động với vận tốc là $v(t)=\dfrac{1}{2\pi}+\dfrac{\sin(\pi t)}{\pi}(\text{m/s})$.

a) Thiết lập công thức tính quãng đường $s(t)$ của vật theo thời gian t.

b) Gọi s_1 là quãng đường vật đó đi trong 2 giây đầu và s_2 là quãng đường đi từ giây thứ 4 đến giây thứ 6. So sánh s_1 và s_2

DẠNG 2
MỘT SỐ BÀI TOÁN ỨNG DỤNG NGUYÊN HÀM TRONG THỰC TIỄN

Bài 1. Một vườn ươm cây cảnh bán một cây sau 8 năm trồng và uốn tạo dáng. Tốc độ tăng trưởng trong suốt 8 năm được tính xấp xỉ bởi công thức $h'(t)=2t+7$, trong đó $h(t)(cm)$ là chiều cao của cây khi kết thúc t (năm) . Cây con khi được trồng cao 25 cm.



a) Tìm công thức chỉ chiều cao của cây sau t năm.

b) Sau bao nhiêu năm trồng, cây cao được $1,03(m)$.

c) Khi được bán, cây cao bao nhiêu centimét?

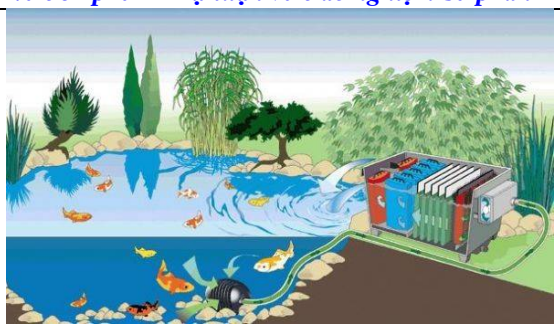
Bài 2. Ký hiệu $h(x)$ là chiều cao của một cây Xoài lai (tính theo mét) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau một năm đầu tiên cây Xoài lai cao $2,5$ mét. Trong 10 năm tiếp theo cây Xoài lai phát triển với tốc độ $h'(x)=\dfrac{3}{2x}$ (mét /năm).



a) Xác định chiều cao của cây Xoài lai sau x năm.

b) Sau bao nhiêu năm cây Xoài lai cao $4,5$ mét?

Bài 3. Một công nhân bơm nước vào bể chứa nước để sử dụng trong quá trình sản xuất. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t)=3at^2+bt$ $\left(m^3/s\right)$ và ban đầu bể không có nước. Sau 2 giây thì thể tích nước trong bể là $12m^3$. Sau 12 giây thì thể tích nước trong bể là $1872m^3$.

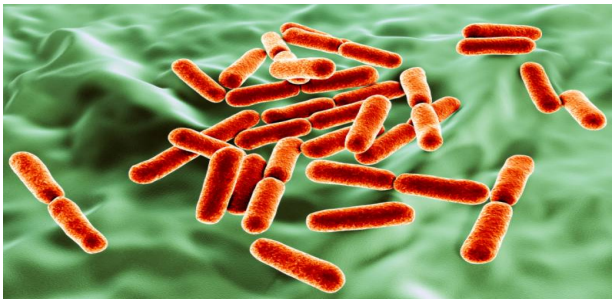


a) Xác định thể tích nước bơm được sau t giây.

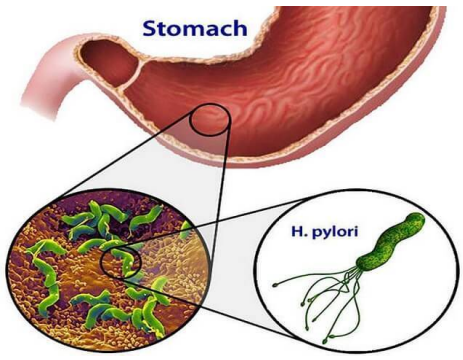
b) Hỏi bơm trong bao lâu thì thể tích nước trong bể bằng $27900\left(m^3\right)$?

c) Hỏi thể tích nước trong bể sau khi bơm được 1 phút?

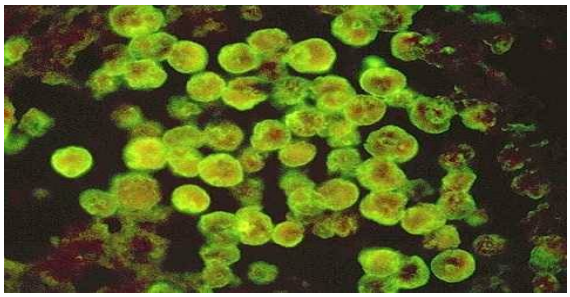
Bài 4. Một loài vi khuẩn đang phát triển với tốc độ $f\left(t\right)=\dfrac{300}{0,25t}$, trong đó, t là thời gian tính bằng ngày. Với $t=1$ thì số lượng vi khuẩn là 1000 con. Hỏi sau 3 ngày số lượng vi khuẩn là bao nhiêu?



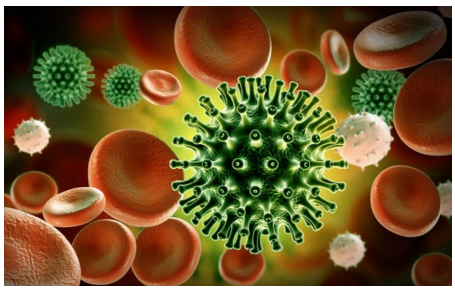
Bài 5. Vi khuẩn HP (Helicobacter pylori) gây đau dạ dày tại ngày thứ t với số lượng là $F\left(t\right)$, biết nếu phát hiện sớm khi số lượng không vượt quá 4000 con thì bệnh nhân sẽ được cứu chữa. Biết $F'\left(t\right)=\dfrac{600}{t}$ và ngày đầu tiên bệnh nhân có 2000 con vi khuẩn. Sau 15 ngày bệnh nhân phát hiện ra bị bệnh. Hỏi khi đó có bao nhiêu con vi khuẩn trong dạ dày (lấy xấp xỉ hàng thập phân thứ hai) và bệnh nhân có cứu chữa được không?



Bài 6. Một đám vi trùng tại ngày thứ t có số lượng là $N(t)$. Biết rằng $N'(t)=\dfrac{2000}{1+2t}$ và lúc đầu đám vi trùng có 300000 con. Tìm số số lượng vi trùng sau 10 ngày.



Bài 7. Một quần thể virut Corona P đang thay đổi với tốc độ $P'(t)=\dfrac{5000}{1+0,2t}$, trong đó t là thời gian tính bằng giờ. Quần thể virut Corona P ban đầu có số lượng là 1000 con. Tìm số lượng virut Corona sau 3 giờ.



Bài 8. Một chiếc cốc chứa nước ở $95°C$ được đặt trong phòng có nhiệt độ $20°C$. Theo định luật làm mát của Newton, nhiệt độ của nước trong cốc sau t phút (xem $t=0$ là thời điểm nước ở $95°C$) là một hàm số $T(t)$. Tốc độ giảm nhiệt độ của nước trong cốc tại thời điểm t phút được xác định bởi công thức $T'(t)=-\dfrac{3}{2}e^{-\frac{t}{50}}$ (°C/ phút). Tính nhiệt độ của nước tại thời điểm $t=30$ phút.

Bài 9. Cường độ dòng điện (đơn vị: A) trong một dây dẫn tại thời điểm t giây là:

$$I(t)=Q'(t)=3t^2-6t+5$$

Với $Q(t)$ là điện lượng (đơn vị: C) truyền trong dây dẫn tại thời điểm t. Biết khi $t=1$ giây thì điện lượng truyền trong dây dẫn là $Q(1)=4$. Tính điện lượng (đơn vị: C) truyền trong dây dẫn khi $t=3$.

PHẦN B
TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP GỒM BA PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai.**

A. $\int f'(x)dx = f(x)+C$, với $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

B. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, với k là hằng số bất kì và $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

C. $\int\left[f(x)+g(x)\right]dx = \int f(x)dx+\int g(x)dx$, với $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

D. $\int\left[f(x)-g(x)\right]dx = \int f(x)dx-\int g(x)dx$, với $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Câu 2. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai.**

A. $\int kf(t)dt = k\int f(t)dt$, với k là hằng số khác 0 và $f(t)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

B. $\int\left[f(u)+g(u)\right]du = \int f(u)du+\int g(u)du$, với $f(u)$ và $g(u)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

C. $\int\left[f(x+1)-g(x+1)\right]d(x+1) = \int f(x+1)d(x+1)-\int g(x+1)d(x+1)$, với $f(x+1)$ và $g(x+1)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

D. $\int f(x).g(x)dx = \int f(x)dx.\int g(x)dx$, với $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Câu 3. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ với $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai.**

A. $\int f(x)dx = F(x)+C$.

B. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

C. $\left(\int f(x)dx\right)' = f'(x)$.

D. $\left(\int f(x)dx\right)' = F'(x)$.

Câu 4. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+6$ là

A. x^2+C. **B.** x^2+6x+C. **C.** $2x^2+C$. **D.** $2x^2+6x+C$.

Câu 5. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+4$ là

A. $2x^2+4x+C$. **B.** x^2+4x+C. **C.** x^2+C. **D.** $2x^2+C$.

Câu 6. $\int x^2dx$ bằng

A. $2x+C$. **B.** $\frac{1}{3}x^3+C$. **C.** x^3+C. **D.** $3x^3+C$

Câu 7. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+1$ là

A. x^3+C **B.** $\frac{x^3}{3}+x+C$ **C.** $6x+C$ **D.** x^3+x+C

Câu 8. Cho hàm số $f(x)=x^2+4$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)dx=2x+C$.

B. $\int f(x)dx=x^2+4x+C$.

C. $\int f(x)dx=\frac{x^3}{3}+4x+C$.

D. $\int f(x)dx=x^3+4x+C$.

Câu 9. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2-2$ là

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=2x+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-2x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2-2x+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=x^3-2x+C$.

Câu 10. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3+x$ là

A. $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+C$ **B.** $3x^2+1+C$ **C.** x^3+x+C **D.** x^4+x^2+C

Câu 11. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=4x^3-2026$ là

A. $x^4-2026x+C$. **B.** $4x^3-2026x+C$. **C.** $12x^3+C$. **D.** x^4+C.

Câu 12. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^4+x^2$ là

A. $\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+C$ **B.** x^4+x^2+C **C.** x^5+x^3+C. **D.** $4x^3+2x+C$

Câu 13. Cho hàm số $f(x)=3x^2+2x$. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$?

A. $F_1(x)=x^3+x^2-4$. **B.** $F_2(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}$. **C.** $F_3(x)=x^3-x^2+1$. **D.** $F_4(x)=3x^3+x^2$.

Câu 14. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+x-2027$ là

A. $\frac{1}{12}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}+C$.

B. $\frac{1}{9}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}-2027x+C$.

C. $\frac{1}{12}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}-2027x+C$.

D. $\frac{1}{9}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}-2027x+C$.

Câu 15. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=5x^4-8x^3-6x$ là

A. $F(x)=x^5-2x^4-3x^2+C$.

B. $F(x)=x^5-x^4-x^2+C$.

C. $F(x)=x^5-4x^4-2x^2+C$.

D. $F(x)=x^5+2x^4-3x^2+C$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)=x-\frac{1}{\sqrt{x}}$. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(0;+\infty)$?

A. $F_1(x)=\frac{x^2}{2}+\sqrt{x}$.

B. $F_2(x)=\frac{x^2}{2}-\sqrt{x}$.

C. $F_3(x)=\frac{x^2}{2}+2\sqrt{x}$. **D.** $F_4(x)=\frac{x^2}{2}-2\sqrt{x}$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)=3+\frac{1}{x}$. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(0;+\infty)$?

A. $F_1(x)=3x-\frac{1}{x^2}$. **B.** $F_2(x)=3x+\ln x$. **C.** $F_3(x)=3x+\frac{1}{x^2}$. **D.** $F_4(x)=3x-\ln x$.

Câu 18. Tìm nguyên hàm của hàm số $\int\left(x^2+\frac{3}{x}-2\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{x^3}{3}+3\ln|x|+\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$. **B.** $\frac{x^3}{3}+3\ln|x|-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$.

C. $\frac{x^3}{3}+3\ln x-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}$. **D.** $\frac{x^3}{3}-3\ln|x|-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$.

Câu 19. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3\sqrt{x}+x^{2027}$ là

A. $3\sqrt{x}+\frac{x^{2028}}{2028}+C$. **B.** $2x\sqrt{x}+\frac{x^{2028}}{2028}+C$.

C. $2x\sqrt{x}+\frac{x^{2027}}{2027}+C$. **D.** $2x\sqrt{x}+\frac{x^{2028}}{2027}+C$.

Câu 20. Biết $F(x)=x^3+\frac{1}{x}+1$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên miền $(0;+\infty)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\ln x$. **B.** $f(x)=3x^2-\frac{1}{x^2}$.

C. $f(x)=3x^2+\frac{1}{x^2}$. **D.** $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\ln x+x+C$.

Câu 21. Biết $\int\left(\frac{1}{2x}+x^5\right)\mathrm{d}x=a\ln|x|+bx^6+C$ với $(a,b\in\mathbb{Q},C\in\mathbb{R})$. Tính a^2+b?

A. $\frac{5}{12}$. **B.** 9. **C.** $\frac{7}{13}$. **D.** $\frac{7}{6}$.

Câu 22. Hàm số nào trong các hàm số sau đây không là nguyên hàm của hàm số $y=x^{2026}$?

A. $\frac{x^{2027}}{2027}+2028$. **B.** $\frac{x^{2027}}{2027}$. **C.** $y=2027x^{2026}$. **D.** $\frac{x^{2027}}{2027}-2026$.

Câu 23. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x+1)(x+2)$ là

A. $2x+3+C$. **B.** $\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}x^2+2x+C$.

C. $\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}x^2+2x+C$. **D.** $\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+2x+C$.

Câu 24. Tìm nguyên $F(x)$ của hàm số $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)$?

A. $F(x)=\frac{x^4}{4}-6x^3+\frac{11}{2}x^2-6x+C$.

B. $F(x)=x^4+6x^3+11x^2+6x+C$.

C. $F(x)=\frac{x^4}{4}+2x^3+\frac{11}{2}x^2+6x+C$.

D. $F(x)=x^3+6x^2+11x^2+6x+C$.

Câu 25. Họ các nguyên hàm của hàm số $y=x(x+1)^5$ là

A. $\frac{(x+1)^7}{7}+\frac{(x+1)^6}{6}+C$.

B. $6(x+1)^5+5(x+1)^4+C$.

C. $6(x+1)^5-5(x+1)^4+C$.

D. $\frac{(x+1)^7}{7}-\frac{(x+1)^6}{6}+C$.

Câu 26. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=(5x+3)^5$.

A. $(5x+3)^6+C$.

B. $(5x+3)^4+C$.

C. $\frac{(5x+3)^6}{30}+C$.

D. $\frac{(5x+3)^4}{30}+C$.

Câu 27. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2+\frac{2}{x^2}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{x}+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{2}{x}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{2}{x}+C$.

Câu 28. Trên khoảng $(0;+\infty)$, cho hàm số $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)dx=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+C$.

B. $\int f(x)dx=\int\sqrt{x^3}dx$.

C. $\int f(x)dx=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$.

D. $\int f(x)dx=\frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}+C$.

Câu 29. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^{\sqrt{2026}}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2026}-1}x^{\sqrt{2026}-1}+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=x^{\sqrt{2026}+1}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\sqrt{2026}x^{\sqrt{2026}-1}+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2026}+1}x^{\sqrt{2026}+1}+C$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)=\frac{x^4+2}{x^2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{2}{x}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(x^2+\frac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{2}{x}+C$.

Câu 31. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{5+2x^4}{x^2}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{5}{x}+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{2x^3}{3}-\dfrac{5}{x}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{2x^3}{3}+5\ln x^2+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=2x^3-\dfrac{5}{x}+C$.

Câu 32. Tính $\int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$.

A. $\dfrac{4}{15}x\sqrt[8]{x^7}+C$.

B. $\dfrac{8}{15}x\sqrt[8]{x^7}+C$.

C. $\dfrac{8}{15}x\sqrt[8]{x}+C$.

D. $\dfrac{4}{15}x\sqrt[8]{x}+C$.

Câu 33. Tính $\int\dfrac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}dx$.

A. $x\sqrt[5]{x}-2x\sqrt[17]{x^5}+\sqrt[4]{x^3}+C$.

B. $\dfrac{4}{5}x\sqrt[5]{x}-\dfrac{24}{17}x\sqrt[17]{x^5}+\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$.

C. $x\sqrt[5]{x}-\dfrac{24}{17}x\sqrt[17]{x^5}+\sqrt[4]{x^3}+C$.

D. $\dfrac{4}{5}x\sqrt[5]{x}-2x\sqrt[17]{x^5}+\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$.

Câu 34. Khẳng định nào đây sai?

A. $\int\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$.

B. $\int\cos x\,\mathrm{d}x=-\sin x+C$.

C. $\int\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$.

D. $\int\dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\tan x+C$.

Câu 35. Cho $\int f(x)\mathrm{d}x=-\cos x+C$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f(x)=-\sin x$.

B. $f(x)=-\cos x$.

C. $f(x)=\sin x$.

D. $f(x)=\cos x$.

Câu 36. Hàm số $F(x)=\cot x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

A. $f_2(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

B. $f_1(x)=-\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

C. $f_4(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

D. $f_3(x)=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Câu 37. Cho hàm số $f(x)=1+\sin x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=x-\cos x+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=x+\sin x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=x+\cos x+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\cos x+C$.

Câu 38. Cho hàm số $f(x)=1-\dfrac{1}{\cos^2 x}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=x+\tan x+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=x+\cot x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=x-\tan x+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=x-\cot x+C$.

Câu 39. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=3\cos x-4\sin x$ là:

A. $3\sin x-4\cos x+C$.

B. $-3\sin x+4\cos x+C$.

C. $3\sin x+4\cos x+C$. **D.** $-3\sin x+4\cos x+C$.

Câu 40. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=2\sin x+\dfrac{3}{\sin^2 x}$ là:

A. $-2\cos x-3\cot x+C$. **B.** $2\cos x-3\tan x+C$.

C. $-2\cos x+3\cot x+C$. **D.** $2\cos x-3\cot x+C$.

Câu 41. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos x+6x$ là

A. $\sin x+3x^2+C$. **B.** $-\sin x+3x^2+C$. **C.** $\sin x+6x^2+C$. **D.** $-\sin x+C$.

Câu 42. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=2\sin x+3x$.

A. $\int(2\sin x+3x)\,dx=-2\cos x+\dfrac{3}{2}x^2+C$ **B.** $\int(2\sin x+3x)\,dx=2\cos x+3x^2+C$

C. $\int(2\sin x+3x)\,dx=\sin^2 x+\dfrac{3}{2}x+C$ **D.** $\int(2\sin x+3x)\,dx=\sin 2x+\dfrac{3}{2}x^2+C$

Câu 43. Tính $\int(x-\sin x)dx$.

A. $\dfrac{x^2}{2}+\sin x+C$. **B.** $\dfrac{x^2}{2}-\cos x+C$. **C.** $\dfrac{x^2}{2}-\sin x+C$. **D.** $\dfrac{x^2}{2}+\cos x+C$.

Câu 44. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+\sin x$ là

A. $x^3+\cos x+C$. **B.** $6x+\cos x+C$. **C.** $x^3-\cos x+C$. **D.** $6x-\cos x+C$.

Câu 45. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x}+\sin x$ là

A. $\ln x-\cos x+C$. **B.** $-\dfrac{1}{x^2}-\cos x+C$. **C.** $\ln|x|+\cos x+C$. **D.** $\ln|x|-\cos x+C$.

Câu 46. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\cos^2 x}$. Chọn khẳng định đúng:

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\ln|x|+\tan x+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\ln x+\tan x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\ln x+\tan|x|+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\ln|x|+\tan x$.

Câu 47. Cho hàm số $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{x}{2}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int\cos\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}\sin x+C$. **B.** $\int\cos\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}\cos x+C$

C. $\int\cos\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{x}{2}=-\dfrac{1}{2}\sin x+C$. **D.** $\int\cos\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{x}{2}=-\dfrac{1}{2}\cos x+C$

Câu 48. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\cos^2\dfrac{x}{2}$

A. $F(x)=2\cos\dfrac{x}{2}+C$ **B.** $F(x)=\dfrac{1}{2}(1+\sin x)+C$

C. $F(x)=2\sin\dfrac{x}{2}+C$ **D.** $F(x)=\dfrac{1}{2}(1-\sin x)+C$

Câu 49. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=2\cos^2\frac{x}{2}$ là:

A. $4\cos\frac{x}{2}+C$. **B.** $x+\sin x+C$. **C.** $2\sin^2\frac{x}{2}+C$. **D.** $\frac{2}{3}\cos^3\frac{x}{2}+C$.

Câu 50. Nguyên hàm của hàm số có $f(x)=\tan^2 x+\cot^2 x$ là:

A. $2\tan x+2\cot x+C$. **B.** $\frac{1}{3}\tan^3 x+\frac{1}{3}\cot^3 x+C$.

C. $\tan x+\cot x-2x+C$. **D.** $\tan x-\cot x-2x+C$.

Câu 51. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2$ là:

A. $\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}+C$. **B.** $x-\cos x+C$.

C. $\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2+C$. **D.** $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}+C$.

Câu 52. Tìm $\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x.\cos^2 x}\,dx$

A. $\cos x+\sin x+C$. **B.** $-\cos x-\sin x+C$.

C. $-\cot x-\tan x+C$. **D.** $\cot x-\tan x+C$.

Câu 53. Nguyên hàm của hàm số $y=\tan^2 x$ là

A. $\tan x-x+C$. **B.** $-\tan x-x+C$. **C.** $-\tan x+x+C$. **D.** $\tan x+x+C$.

Câu 54. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A $\int e^x dx=xe^x+C$. **B.** $\int e^x dx=e^{x+1}+C$. **C.** $\int e^x dx=-e^{x+1}+C$. **D.** $\int e^x dx=e^x+C$.

Câu 55. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{3x}$ là hàm số nào sau đây?

A. $3e^x+C$. **B.** $\frac{1}{3}e^{3x}+C$. **C.** $\frac{1}{3}e^x+C$. **D.** $3e^{3x}+C$.

Câu 56. Nguyên hàm của hàm số $y=e^{2x-1}$ là

A. $2e^{2x-1}+C$. **B.** $e^{2x-1}+C$. **C.** $\frac{1}{2}e^{2x-1}+C$. **D.** $\frac{1}{2}e^x+C$.

Câu 57. Cho hàm số $f(x)=1+e^x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx=x+xe^{x-1}+C$. **B.** $\int f(x)dx=1+e^x+C$.

C. $\int f(x)dx=x+e^x+C$. **D.** $\int f(x)dx=1+xe^{x-1}+C$.

Câu 58. Cho hàm số $f(x)=e^x+2$. Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

A. $\int f(x)dx=e^{x-2}+C$. **B.** $\int f(x)dx=e^x+2x+C$.

C. $\int f(x)dx=e^x+C$. **D.** $\int f(x)dx=e^x-2x+C$.

Câu 59. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x-2x$ là.

A. e^x+x^2+C. **B.** e^x-x^2+C. **C.** $\frac{1}{x+1}e^x-x^2+C$. **D.** e^x-2+C.

Câu 60. Cho hàm số $f(x)=e^x+2x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x+x^2+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x-x^2+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x+2x^2+C$.

Câu 61. Cho hàm số $f(x)=1+e^{2x}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx=x+\frac{1}{2}e^x+C$. **B.** $\int f(x)dx=x+2e^{2x}+C$.

C. $\int f(x)dx=x+\frac{1}{2}e^{2x}+C$. **D.** .

Câu 62. Hàm số $F(x)=x^2+e^{-2x}+2024$ là một nguyên hàm của hàm số

A. $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}e^{-2x}+2024x$. **B.** $f(x)=2x+2e^{-2x}+2024$.

C. $f(x)=2x-2e^{-2x}+2024x$. **D.** $f(x)=2x-2e^{-2x}$.

Câu 63. Hàm số $F(x)=\frac{x^3}{3}+e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nào sau đây?

A. $f(x)=x^2+e^x$. **B.** $f(x)=3x^2+e^x$. **C.** $f(x)=\frac{x^4}{12}+e^x$. **D.** $f(x)=\frac{x^4}{3}+e^x$.

Câu 64. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{3x+1}-2x^2$ là

A. $\frac{\mathrm{e}^{3x+1}}{3}-2x^3$. **B.** $\frac{\mathrm{e}^{3x+1}}{3}-x^3$. **C.** $\frac{\mathrm{e}^{3x+1}-2x^3}{3}$. **D.** $\frac{\mathrm{e}^{3x+1}-x^3}{3}$.

Câu 65. Kết quả $\int\left(x+e^{2027x}\right)dx$ bằng

A. $\frac{x^2}{2}+\frac{e^{2027x}}{2027}+C$. **B.** $x^3+\frac{e^{2027x}}{2027}+C$. **C.** $x^2+\frac{e^{2027x}}{2027}+C$. **D.** $x+\frac{e^{2027x}}{2027}+C$.

Câu 66. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x\left(2026-\frac{2027e^{-x}}{x^5}\right)$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=2026e^x-\frac{2027}{x^4}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=2026e^x+\frac{2027}{x^4}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=2026e^x+\frac{2027}{4x^4}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=2026e^x-\frac{2027}{4x^4}+C$.

Câu 67. Họ nguyên hàm của hàm số $y=e^x\left(2+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)$ là

A. $2e^x+\tan x+C$ **B.** $2e^x-\tan x+C$ **C.** $2e^x-\frac{1}{\cos x}+C$ **D.** $2e^x+\frac{1}{\cos x}+C$

Câu 68. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{-x}\left(2+\dfrac{e^x}{\cos^2 x}\right)$.

A. $F(x)=-\dfrac{2}{e^x}+\tan x+C$.

B. $F(x)=2e^x-\tan x+C$.

C. $F(x)=-\dfrac{2}{e^x}-\tan x+C$.

D. $F(x)=2e^{-x}+\tan x+C$.

Câu 69. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=7^x$.

A. $\int 7^x\,dx=\dfrac{7^x}{\ln 7}+C$ **B.** $\int 7^x\,dx=7^{x+1}+C$ **C.** $\int 7^x\,dx=\dfrac{7^{x+1}}{x+1}+C$ **D.** $\int 7^x\,dx=7^x\ln 7+C$

Câu 70. Nguyên hàm của hàm số $y=2^x$ là

A. $\int 2^x\,dx=\ln 2.2^x+C$. **B.** $\int 2^x\,dx=2^x+C$. **C.** $\int 2^x\,dx=\dfrac{2^x}{\ln 2}+C$. **D.** $\int 2^x\,dx=\dfrac{2^x}{x+1}+C$.

Câu 71. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2025^x$ là

A. $F(x)=x.2025^{x-1}$.

B. $F(x)=2025.2024^x$.

C. $F(x)=\dfrac{2025^x}{\ln 2025}$.

D. $F(x)=2025^x.\ln 2025$.

Câu 72. Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=3^{-x}$ là

A. $-\dfrac{3^{-x}}{\ln 3}+C$ **B.** $-3^{-x}+C$ **C.** $3^{-x}\ln 3+C$ **D.** $\dfrac{3^{-x}}{\ln 3}+C$

Câu 73. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=5^{2x-1}$ là

A. $\dfrac{1}{2\ln 5}.5^{2x-1}+C$. **B.** $2.5^{2x-1}.\ln 5+C$. **C.** $5^{2x-1}.\ln 5+C$. **D.** $\dfrac{1}{2}.5^{2x-1}.\ln 5+C$.

Câu 74. Cho hàm số $f(x)=2^x+3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)dx=2^{x-3}+C$.

B. $\int f(x)dx=\dfrac{2^x}{\ln 2}+3x+C$.

C. $\int f(x)dx=\dfrac{2^x}{\ln 2}+3+C$.

D. $\int f(x)dx=2^x\ln 2+3x+C$.

Câu 75. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=3^x+2x$.

A. $\int\left(3^x+2x\right)dx=\dfrac{3^x}{\ln 3}+x^2+C$

B. $\int\left(3^x+2x\right)dx=3^x.\ln 3+x^2+C$

C. $\int\left(3^x+2x\right)dx=\dfrac{3^x}{\ln 3}+x+C$

D. $\int\left(3^x+2x\right)dx=3^x.\ln 3+x+C$

Câu 76. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y=x^2-3^x+\dfrac{1}{x}$.

A. $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3^x}{\ln 3}-\dfrac{1}{x^2}+C,\ C\in\mathbb{R}$.

B. $\dfrac{x^3}{3}-3^x+\dfrac{1}{x^2}+C,\ C\in\mathbb{R}$.

C. $\frac{x^3}{3}-\frac{3^x}{\ln 3}+\ln|x|+C,\ C\in\mathbb{R}$.

D. $\frac{x^3}{3}-\frac{3^x}{\ln 3}-\ln|x|+C,\ C\in\mathbb{R}$.

Câu 77. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=4^x+\cos 2x$ là

A. $\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{\sin 2x}{2}+C$.

B. $4^x\ln 4+\frac{\sin 2x}{2}+C$.

C. $4^x\ln 4-\frac{\sin 2x}{2}+C$.

D. $\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{\sin 2x}{2}+C$.

Câu 78. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^x\left(1+2^{-x}\cdot\sin x\right)$ là

A. $\frac{2^{x+1}}{x+1}-\cos x+C$

B. $\frac{2^x}{\ln 2}+\sin x+C$.

C. $\frac{2^x}{\ln 2}-\cos x+C$.

D. $\frac{2^{x-1}}{x+1}+\cos x+C$.

Câu 79. Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai?

A. $\int\left(\sqrt[3]{x^2}+x-2\right)dx=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+\frac{1}{2}x^2-2x+C$

B. $\int\frac{1}{2023x^{2024}}dx=\frac{1}{2023^2x^{2023}}+C$

C. $\int(2x-2024)^2dx=x-1012+C$

D. $\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx=\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+C$

Câu 80. Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. $\int\left(2+\cot^2x\right)dx=x-\cot x+C$.

B. $\int\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{2}(x+\sin x)+C$

C. $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2dx=x+\cos x+C$.

D. $\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2dx=x-\cos x+C$

Câu 81. Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai?

A. $\int\frac{1}{x}dx=\ln x+C$.

B. $\int\frac{1}{\cos^2x}dx=\tan x+C$.

C. $\int\sin x\,dx=-\cos x+C$.

D. $\int e^x\,dx=e^x+C$.

Câu 82. Cho $\int\frac{1}{x\ln^2x}dx=F(x)+C$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $F'(x)=-\frac{1}{\ln x}$.

B. $F'(x)=-\frac{1}{\ln x}+C$.

C. $F'(x)=\frac{1}{x\ln^2x}$.

D. $F'(x)=-\frac{1}{\ln^2x}$.

Câu 83. Trên khoảng $(-\infty;+\infty)$, hàm số $F(x)=\sin x-x$ là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $f(x)=-\cos x-1$.

B. $h(x)=-\cos x-\frac{x^2}{2}+C$.

C. $k(x)=\cos x-\frac{x^2}{2}+C$.

D. $g(x)=\cos x-1$.

Câu 84. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\frac{1}{x}$ trên $(-\infty;0)$ thỏa mãn $F(-2)=0$. Tính $F(-2e)$.

A. $F(-2e)=-1$. **B.** $F(-2e)=1$. **C.** $F(-2e)=\frac{1}{2}$. **D.** $F(-2e)=-\frac{1}{2}$.

Câu 85. Cho hàm số $y=F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=x^2$. Tính $F'(25)$.

A. $F'(25)=\frac{15625}{3}$. **B.** $F'(25)=5$. **C.** $F'(25)=25$. **D.** $F'(25)=625$.

Câu 86. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+x-2024$ thỏa mãn $F(1)=-2024$. Tính $F(0)$.

A. $F(0)=12$. **B.** $F(0)=-12$. **C.** $F(0)=\frac{1}{12}$. **D.** $F(0)=-\frac{1}{12}$.

Câu 87. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(2x-3)^2$ thỏa $F(0)=\frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $T=\log_2\left[3F(1)-2F(2)\right]$.

A. $T=1$. **B.** $T=5$. **C.** $T=4$. **D.** $T=2$.

Câu 88. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+3\sqrt{x}$ thoả mãn $F(1)=0$. Tính $F(4)$.

A. $F(4)=25$. **B.** $F(4)=29$. **C.** $F(4)=-25$. **D.** $F(4)=20$.

Câu 89. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x+\cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$. Tính $F(\pi)$.

A. $F(\pi)=2$. **B.** $F(\pi)=3$. **C.** $F(\pi)=1$. **D.** $F(\pi)=-1$.

Câu 90. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x+1$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$. Biết $F\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{a.\pi+b.\sqrt{3}+c}{6}$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị biểu thức $a+b-c$.

A. $a+b-c=1$. **B.** $a+b-c=5$. **C.** $a+b-c=7$. **D.** $a+b-c=-1$.

Câu 91. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x+2\cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. Tính $F(-\pi)$.

A. $F(-\pi)=1$. **B.** $F(-\pi)=-1$. **C.** $F(-\pi)=0$. **D.** $F(-\pi)=2$.

Câu 92. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2\sin x-\cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Tính $F(-\pi)$.

A. $F(-\pi)=-1$. **B.** $F(-\pi)=0$. **C.** $F(-\pi)=3$. **D.** $F(-\pi)=1$.

Câu 93. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của của hàm số $f(x)=\sin x$ và đồ thị hàm số $y=F(x)$ đi qua điểm $M(0;1)$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. **B.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$. **C.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$. **D.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

Câu 94. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x+\frac{1}{\cos^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Tính $F(0)$.

A. $F(0)=\sqrt{2}-2$. **B.** $F(0)=\sqrt{2}$. **C.** $F(0)=\sqrt{2}-1$. **D.** $F(0)=\sqrt{2}+1$.

Câu 95. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{2x}$ và $F(0)=0$. Giá trị của $F(\ln 3)$ bằng bao nhiêu?

A. $F(\ln 3)=1$. **B.** $F(\ln 3)=2$. **C.** $F(\ln 3)=3$. **D.** $F(\ln 3)=4$.

Câu 96. Cho hàm số $f(x)=2x+e^x$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=2024$. Biết $F(2)=e^a+b$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Tính giá trị biểu thức $a+b$.

A. $a+b=0$. **B.** $a+b=2024$. **C.** $a+b=2025$. **D.** $a+b=2026$.

Câu 97. Cho hàm số $f(x)=e^x+2e^{-x}-2x$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=1$. Biết $F(1)=\frac{e^a+e^b+c}{e}$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị biểu thức $a+b+c$.

A. $a+b+c=1$. **B.** $a+b+c=5$. **C.** $a+b+c=3$. **D.** $a+b+c=2$.

Câu 98. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$, thỏa mãn $f'(x)=3\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ và $f(1)=1$. Biết $f(2)=a.\sqrt{2}+b.\sqrt[3]{4}+c$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị biểu thức $a+b+c$.

A. $a+b+c=11$. **B.** $a+b+c=3$. **C.** $a+b+c=10$. **D.** $a+b+c=0$.

Câu 99. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=3-5\sin x$ và $f(0)=10$. Biết $f(\pi)=a.\pi+b$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Tính giá trị biểu thức $a+b$.

A. $a+b=1$. **B.** $a+b=0$. **C.** $a+b=13$. **D.** $a+b=10$.

Câu 100. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=2^x+x$ và $f(0)=\frac{1}{\ln 2}$. Tính $f(1)$.

A. $f(1)=\frac{4+\ln 2}{\ln 2}$. **B.** $f(1)=\frac{1+\ln 2}{2\ln 2}$. **C.** $f(1)=\frac{2+\ln 2}{2\ln 2}$. **D.** $f(1)=\frac{4+\ln 2}{2\ln 2}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 101. Cho hàm số $f(x)=e^x-\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

a) $f(x)=e^x-\cos x$

b) $f'(x)=e^x-\sin x$

c) $F(x)=e^x+\sin x+C$, với C là hằng số.

d) Biết $F(0)=2027$, khi đó $\int F(x)dx=e^x+\sin x+2027+C$, với C là hằng số.

Câu 102. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=2026^x+2027$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=\frac{2026}{\ln 2026}$.

a) $f'(1)=4053$

b) $f(x)=\frac{2026^x}{\ln 2026}+2027+C$, với C là hằng số.

c) $f(0)=2027$.

d) $\int f(x)dx=\frac{2026^x}{\ln 2026}+\frac{2027}{2}x^2-2027x+C$, với C là hằng số.

Câu 103. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=8x^3+\sin x$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=3$.

a) Hàm số $y=f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f'(x)$.

b) Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thoả $F(0)=2$. Khi đó $F(1)=\frac{32}{5}-\sin 1$.

c) $f(x)=2x^4-\cos x+3$.

d) $\int f(x)dx=\frac{2}{5}x^5-\sin x+3x+C$, với C là hằng số.

Câu 104. Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{4}x^4+4x^3$.

a) $f'(x)=x^3+12x^2$.

b) Phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm $x=-12$ và $x=0$.

c) $\int\left(\frac{1}{4}x^4+4x^3\right)dx=\frac{1}{4}x^5+\frac{4}{3}x^4+C$, với C là hằng số.

d) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(0)=2026$ thì $F(x)=\frac{1}{20}x^5+\frac{4}{3}x^4-2026$.

Câu 105. Cho hàm số $f(x)=x+1$.

a) $\int f(x)dx=x^2+x+C$, với C là hằng số.

b) $\int\left[(x-1).f(x)\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+x+C$, với C là hằng số.

c) $\int\frac{f(x+1)}{x}\mathrm{d}x=x+\ln|x|+C$, với C là hằng số.

d) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(1)=2$ thì $F(x)=\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{2}$.

Câu 106. Cho hàm số $f(x)=4x^3-6x$.

a) $\int\left(4x^3-6x\right)\mathrm{d}x=x^4-6x+C$, với C là hằng số.

b) Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0)=2$. Khi đó $F(x)=x^4-3x^2+2$.

c) $\int f(x-1)\mathrm{d}x=x^4-4x^3+3x^3+2x+C$, với C là hằng số.

d) Biết $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x-1)$ và $G(1)=0$. Khi đó $G(0)=-2$.

Câu 107. Cho hàm số $f(x)=x^2$.

a) $\int f(x)\mathrm{d}x=x^3+C$, với C là hằng số.

b) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(3)=1$ thì $F(4)=\frac{40}{3}$.

c) $\int f(2x+1)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}x^3+2x^2+x+C$, với C là hằng số.

d) $\int\left[x.f(x-2)\right]\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}+2x^2+C$, với C là hằng số.

Câu 108. Cho hàm số $f(x)=3$.

a) $\int f(x)\mathrm{d}x=3x+C$, với C là hằng số.

b) $\int\frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{3}{x}+C$, với C là hằng số.

c) $\int\left[f(x)+x\right]^2\mathrm{d}x=x^3+3x^2+9x+C$, với C là hằng số.

d) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, biết $F(1)=1$ thì $F(1)+F(2)+...+F(2027)=304000$.

Câu 109. Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{2}x+1$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

a) $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2+x+C$, với C là hằng số.

b) $\int f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C$, với C là hằng số.

c) Nếu $F(0)=1$ thì $F(2)=6$.

d) Nếu $F(1)=2$ thì $\frac{1}{F(1)}+\frac{1}{F(2)}+...+\frac{1}{F(2026)}+\frac{1}{F(2027)}=\frac{a}{b}$ ($a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản).

Tính $a+b=4053$.

Câu 110. Cho hàm số $F(x)=x^2+x-6$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

a) $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-6x+C$, với C là hằng số.

b) Hàm số $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $G(1)=3$ thì giá trị $G(4)=21$.

c) Hàm số $H(x-1)$ là một nguyên hàm của $f(x-1)$ và $H(0)=3$ thì giá trị của biểu thức $H(2)-H(4)=-14$.

d) $f(1)+f(2)+...+f(2024)+f(2025)=4104675$

Câu 111. Cho hàm số $f(x)=x^3-4x+5$.

a) $\int\left(x^3-4x+5\right)\mathrm{d}x=x^4-2x^2+5x+C$, với C là hằng số.

b) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(1)=3$, khi đó $F(0)=-\frac{1}{4}$

c) $\int\left[f(x)+f'(x)\right]\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}+x^3-2x^2+9x+C$, với C là hằng số.

d) $\int f(x+1)\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}+x^3-\frac{1}{2}x^2+2x+C$, với C là hằng số.

Câu 112. Hàm hai số $f(x)$ và $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn: $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ và $\int g(x)\,\mathrm{d}x=x+\ln|x|+C$, với C là hằng số.

a) $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$.

b) $g(x)=1-\frac{1}{x}+C$, với C là hằng số.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)+g(x)$ và thỏa mãn $F(-1)=3$. Khi đó $F(x)=x^2+2\ln|x|-\frac{1}{2}$.

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)+g(x)$. Biết $G(2)=2\ln 2$ và $G(4)+G(-4)=2$. Khi đó $G(-6)=a\ln 2+b\ln 3+c$, với a,b,c là các số thực. Vậy $a+b+c=-2$.

Câu 113. Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f(x)=\frac{x^2+5x-7}{x}$.

a) $f'(x)=1+\frac{7}{x^2}$.

b) $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+5x+7\ln|x|+C$, với C là hằng số.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(1)=5$. Khi đó $F(x)=\frac{x^2}{2}+5x-7\ln|x|+\frac{1}{2}$.

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(1)=4$ và $G(3)+G(-9)=20$. Khi đó tìm được $G(-6)=a\ln 2+b\ln 3+c$, với a,b,c là các số hữu tỉ. Vậy $a+b+c=\frac{2}{3}$.

Câu 114. Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f(x)=\frac{3x^5-2x^3+x^2+5x+4}{x^3}$.

a) $f(x)=3x^2-2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}$.

b) $\int f(x)\mathrm{d}x=x^3-2x+\ln|x|-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+C$, với C là hằng số.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(-1)=0$. Khi đó tìm được $F(x)=x^3-2x+\ln|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{3}{2}$.

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(1)=0$ và $G(-3)-G(3)=2$. Khi đó $G(-2)=\frac{a}{b}+\frac{1}{\log_c e}$, với a,b,c là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Vậy $a+b+c=1090$.

Câu 115. Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f(x)=\frac{(x+1)(3x-2)}{x}$.

a) $f'(x)=3+\frac{2}{x^2}$

b) $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{3x^2}{2}+x-2\ln|x|+C$, với C là hằng số.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(3)=15$. Khi đó $F(x)=\frac{3x^2}{2}+x-2\ln|x|+15$.

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(2)=1$ và $G(5)+G(-5)=10$. Khi đó tìm được $G(-10)=a\ln 2+b\ln 5+c$, với a,b,c là các số hữu tỷ. Vậy $a+b+c=70$.

Câu 116. Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$.

a) $f'(x)=\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}$.

b) $\int f(x)\mathrm{d}x=x-2\ln x-\frac{1}{x}+C$, với C là hằng số.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(3)=5$. Khi đó ta tìm được $F(x)=x-2\ln|x|-\frac{1}{x}+2\ln 3+\frac{7}{3}$.

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(1)=5$ và $G(2)+G(-4)=2025$. Khi đó tìm được $F(-8)=\frac{a}{b}$, với a,b là các số nguyên và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Vậy $a+b=16000$.

Câu 117. Cho hàm số $F(x)=\int\left(\sqrt[5]{x^3}\right)\mathrm{d}x$ (với $x>0$).

a) $F(x)=\int x^{\frac{3}{5}}\mathrm{d}x$

b) $F(x)+C=\int\left(\sqrt[5]{x^3}\right)\mathrm{d}x$, với C là hằng số.

c) $F(x)=\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}+C$, với C là hằng số.

d) Biết $F(1)=-\frac{3}{8}$, khi đó $F(x)=\frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8}+\frac{3}{8}$

Câu 118. Cho hàm số $F(x)=\int\left(2x+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$ (với $x>0$).

a) $F(x)=2\int x\,\mathrm{d}x+\int\sqrt{x}\,\mathrm{d}x+C$ với $C\in\mathbb{R}$.

b) Nếu $G(x)=F(x)+1$ thì $G(x)=\int\left(2x+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$

c) $F(x)=x^2+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$.

d) Nếu $F(1)=\frac{2}{3}$ thì $F(4)=\frac{25}{3}$

Câu 119. Cho hàm số $f(x)=\sin x$.

a) $\int f(x)\mathrm{d}x=-\cos x+C$, với C là hằng số.

b) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(\pi)=1$. Khi đó $F(0)=-1$.

c) $\int F(x)\mathrm{d}x=\sin x+C_1$, với C_1 là hằng số.

d) Phương trình $F(x)=f(x)$ có đúng 4 nghiệm trên đoạn $[0;4\pi]$.

Câu 120. Cho hàm số $f(x)=\sin x+\cos x$. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

a) $F(x)=\sin x+\cos x+C$, với C là hằng số.

b) Biết $F(x)$ thỏa mãn $F(0)=-1$. Khi đó, $F(x)=\sin x-\cos x$.

c) Biết $F(x)$ thỏa mãn $F(0)=-1$. Khi đó, Hàm số $F(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

d) Biết $F(x)$ thỏa mãn $F(0)=-1$. Khi đó, Hàm số $F(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất là $-\sqrt{2}$.

Câu 121. Cho $F(x)=-\int \sin x\,\mathrm{d}x$ và thỏa mãn $F(0)=1$.

a) $F(x)=\cos x$.

b) Hàm số $F(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.

c) $F(\alpha)=\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$, $\forall \alpha \neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

d) $F\left(\dfrac{\pi}{2^{2025}}\right)\cdot F\left(\dfrac{\pi}{2^{2024}}\right)\cdot F\left(\dfrac{\pi}{2^{2023}}\right)\cdots F\left(\dfrac{\pi}{2^{3}}\right)\cdot F\left(\dfrac{\pi}{2^{2}}\right)=\dfrac{1}{2^{2024}\sin\dfrac{\pi}{2^{2025}}}$.

Câu 122. Cho hàm số $f(x)=\cos^2 x$ và $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x$.

a) $F'(x)=\sin 2x$

b) $F(x)=\int\dfrac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x$

c) $\dfrac{\sin x\cos x+x}{2}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$

d) Biết $F(0)=0$. Suy ra $F(\pi)=2\pi$.

Câu 123. Cho hàm số $f(x)=\tan^2 x$ và $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x$.

a) $F'(x)=\tan^2 x$.

b) $\tan x$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

c) $F(x)=\int\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x$.

d) Nếu $F(0)=0$ thì $F(\pi)=\pi$.

Câu 124. Cho $F(x)=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$.

a) $F(x)=-\cot x+C$, với C là hằng số.

b) Nếu $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ thì $F(x)=1-\cot x$.

c) Nếu $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ thì hàm số $F(x)$ là hàm số lẻ trên tập xác định của $F(x)$.

d) Phương trình $F(x)=0$ có các nghiệm là $x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}$, với $k\in\mathbb{Z}$.

Câu 125. Cho $F(x)=\int\tan^2 x\,\mathrm{d}x$ và thỏa mãn $F(0)=0$.

a) $F(x)=x+\tan x$.

b) Hàm số $F(x)$ là hàm số chẵn trên tập xác định của $F(x)$.

c) Hàm số $F(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

d) Phương trình $F(x)+x=0$ có các nghiệm là $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Câu 126. Cho hàm số $f(x)=e^x+x^e$.

a) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $F(x)+2024$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$.

b) $F(x)=e^x+x^e+C$ là họ nguyên hàm của $f(x)$.

c) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0)=1$ thì $F(1)=2e$.

d) Nếu $F(x),G(x)$ lần lượt là các nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0)=1,G(1)=e$ thì ta luôn có $G(x)=F(x)+2e$.

Câu 127. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)=e^x-2x$ trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $F(0)=1$.

a) $F'(0)=0$.

b) $F(1)=e-1$.

c) $\int F(x)\mathrm{d}x=e^x-\dfrac{x^3}{3}+C$.

d) $\int\dfrac{f(x)}{xe^x}\mathrm{d}x=\ln|x|-2e^x+C$

Câu 128. Cho hàm số $f(x)=2x+e^x$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=2025$.

a) $f(2)=4+e$

b) $\int f(x)dx=x^2+e^x+C$.

c) $F(x)=x^2+e^x+2024$.

d) $\int xf'\left(x^2\right)dx=x^2+xe^{x^2}+C$

Câu 129. Cho hàm số $f(x)=e^x(2+e^x)$ và $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

a) $\int f'(x)dx=2e^x+e^{2x}+C$.

b) $F(x)=2e^x+\dfrac{1}{2}e^{2x}+C$.

c) Nếu $F(0)=3$ thì $F(1)=\dfrac{e^2+1}{2}$.

d) Nếu $F(0)=\dfrac{5}{2}$ thì phương trình $F(x)=0$ có nghiệm.

Câu 130. Cho hàm số $F(x)=\int\left(4^x+2^x+1\right)\mathrm{d}x$.

a) $F(x)=\int 4^x\mathrm{d}x+\int 2^x\mathrm{d}x+\int\mathrm{d}x$.

b) $F(x)=\dfrac{2^{2x}+2^x}{\ln 2}+x+C$.

c) Nếu $F(1)=\dfrac{4}{\ln 2}$ thì $F(2)=\dfrac{12}{\ln 2}-1$.

d) Nếu $G(x)=\int\dfrac{8^x+1}{2^x+1}\mathrm{d}x$ thì $G(x)=F(x)+C$.

Câu 131. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{6^{x+1}+3^{2x}}{2^{2x+3}}$.

a) $F'(x)=\dfrac{6^{x+1}+3^{2x}}{2^{2x+3}}$.

b) $F(x)=\dfrac{\int\left(6^{x+1}+3^{2x}\right)\mathrm{d}x}{\int 2^{2x+3}\mathrm{d}x}$.

c) $F(x)=\int\left[\dfrac{3}{4}.\left(\dfrac{3}{2}\right)^x+\dfrac{1}{8}.\left(\dfrac{9}{4}\right)^x\right]\mathrm{d}x$.

d) Nếu $F(0)=0$ thì $F(1)=\dfrac{29}{\ln 3-\ln 2}$.

Câu 132. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2^{2x+1}-1+\cos 2x}{2^x+\sin x}$ trên $[0;+\infty)$ thoả mãn $F(0)=\dfrac{2}{\ln 2}+2$.

a) $f(\pi)=2^{\pi+1}-1$.

b) $F'(0)=2$

c) Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $F(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0=\dfrac{\pi}{2}$ là $k=2\sqrt{2^\pi}-2$

d) $F(-1)=\dfrac{1}{\ln 2}+2\cos 1$.

Câu 133. Cho hàm số $f(x)=2x+m$ và $G(x)=x^3+mx^2+3x+m$ với $m\in\mathbb{R}$.

a) Khi $m=3$ thì $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2+3x+C$.

b) Khi $m=2$ thì $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

c) Khi $m=-1$ thì $\int\left(G(x)-f(x)\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+C$

d) Gọi $F(x)$ làm một nguyên hàm của $f(x)$ sao cho $F(0)=1$. Khi đó, có 4 giá trị nguyên của tham số m thì $F(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 134. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)\ne 0$ và $f'(x)=4x^3\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

a) Khi $f(1)=2$ thì $f'(1)=16$

b) Hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

c) $\left[\frac{1}{f(x)}\right]'=4x^3$

d) Khi $f(2)=-\frac{1}{25}$ thì $f(1)=\frac{1}{10}$.

Câu 135. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn điều kiện: $f(1)=2$ và $x.(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+2x+1$.

a) Khi $f'(3)=1$ thì $f(3)=-3$.

b) $\left[\frac{x}{x+1}.f(x)\right]'=1$

c) $f(2)=3$.

d) $\int\frac{f(x+1)}{x}\mathrm{d}x=x+2\ln|x|+C$, với C là hằng số.

Câu 136. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x)+\frac{f(x)}{x}=4x^2+3x$ và $f(1)=2$.

a) Khi $f'(3)=1$ thì $f(1)=8$.

b) $\left[xf(x)\right]'=4x^3+3x^2$

c) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là $y=16x+20$.

d) $\int f(x-1)\mathrm{d}x=x^4-2x^3+x^2+C$, với C là hằng số.

Câu 137. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)=\mathrm{e}^{-x},\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$.

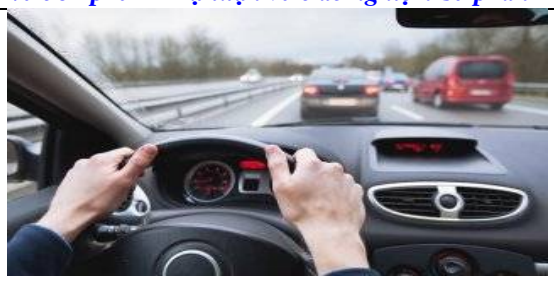
a) Khi $f(1)=e$ thì $f'(1)=\frac{1-e^2}{e}$.

b) $\left(f(x)\mathrm{e}^x\right)'=\mathrm{e}^{-x}$

c) $f(\ln 2)=\ln 2+1$

d) Nguyên hàm của $f(x)\mathrm{e}^x$ là $\frac{1}{2}x^2+2x+C$, với C là hằng số.

Câu 138. Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc $15m/s$ thì nhìn thấy chướng ngại vật trên đường cách đó $50m$, người lái xe hãm phanh khẩn cấp. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-3t+15(m/s)$, trong đó t (giây). Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh.



a) Quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh theo hàm $s(t)=-\dfrac{3t^2}{2}+15t$

b) Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là 5 giây.

c) Xe ô tô gặp tai nạn do va chạm với chướng ngại vật.

d) Nếu người lái xe nhìn thấy chướng ngại vật trên đường, sau đó 1 giây mới phản ứng đạp phanh khẩn cấp thì xe ô tô không va chạm với chướng ngại vật.

Câu 139. Một chiếc xe đang chuyển động đều với tốc độ $v_0=15m/s$ thì gặp chướng ngại vật rồi phanh gấp với gia tốc không đổi là $a=-3\ m/s^2$. Kí hiệu $v(t)$ là tốc độ của xe, $a(t)$ là gia tốc xe, $s(t)$ là quãng đường xe đi được cho đến thời điểm t giây kể từ lúc phanh xe.



a) $v(t)=a'(t)$.

b) $a(t)=s''(t)$.

c) Tính từ lúc phanh xe, sau 6 giây thì xe dừng hẳn.

d) Quãng đường xe đi được tính từ lúc phanh xe đến khi dừng hẳn là 39 mét.

Câu 140. Một xe đạp chuyển động với gia tốc $a(t)=4\cos t\left(\text{m/s}^2\right)$. Tại thời điểm bắt đầu chuyển động vật có vận tốc bằng 0.



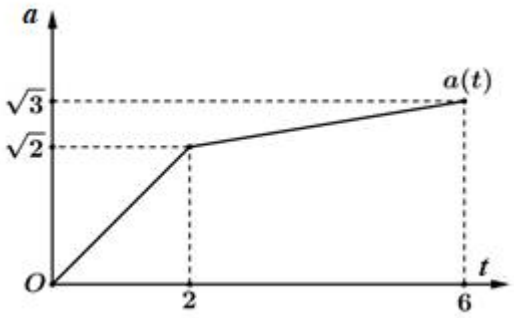
a) Vận tốc của xe đạp được biểu diễn bởi hàm số $v(t)=4\cos t\ (\text{m/s})$.

b) Vận tốc của xe đạp tại thời điểm $t=\dfrac{\pi}{6}$ là $2(\text{m/s})$

c) Tại thời điểm $t=\dfrac{\pi}{4}(s)$ sau khi xuất phát thì vận tốc của xe đạp là $\sqrt{2}(\text{m/s})$

d) Gia tốc của xe đạp tại thời điểm $t=\dfrac{\pi}{4}$ (s) là $2\sqrt{2}\left(\text{m/s}^2\right)$

Câu 141. Một vật chuyển động với hàm số gia tốc là $a(t)$ và hàm số vận tốc là $v(t)$. Biết rằng đồ thị hàm số $a(t)$ trên đoạn $[0;6]$ được cho như hình dưới đây và vận tốc tại thời điểm $t=0$ là $v(0)=1(m/s)$.



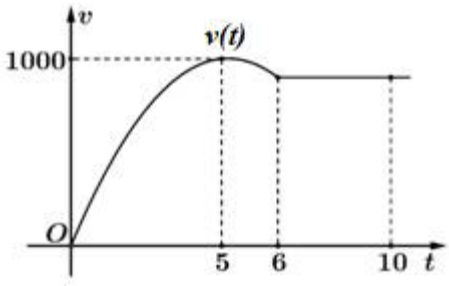
a) Tại thời điểm $t=2$ giây, gia tốc của vật là $1,4\left(m/s^2\right)$ (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

b) Gia tốc của vật bằng $\sqrt{3}\left(m/s^2\right)$ tại thời điểm $t=6$ giây.

c) Vận tốc của vật được biểu diễn theo hàm $v(t)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{4}t^2+1 & \text{khi } 0\le t\le 2\\ \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{8}t^2+\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}t+C & \text{khi } 2\le t\le 6\end{cases}$, với C là hằng số thực.

d) Tại thời điểm $t=6$ giây, vận tốc của vật là $1,73(m/s)$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Câu 142. Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu chuyển động với vận tốc được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol như hình bên dưới. Biết rằng sau 5 phút thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 1000 mét/phút và bắt đầu giảm vận tốc, đi được 6 phút thì xe chuyển động đều. Gọi $s(t)$ là hàm số quãng đường và $v(t)$ là hàm số vận tốc của chuyển động ô tô.



a) Trong 6 phút đầu tiên, vận tốc của xe ô tô được biểu diễn bởi hàm số $v(t)=-40t^2+100t$, với $t\in[0;6]$.

b) Trong 6 phút đầu tiên, quãng đường của xe ô tô được biểu diễn bởi hàm số $s(t)=-\dfrac{40}{3}t^3+50t^2$, với $t\in[0;6]$.

c) Trong khoảng 6 phút đầu, ô tô đi được quãng đường là $4320(m)$.

d) Quãng đường xe đã đi được trong khoảng 10 phút đầu tiên là $8160(m)$.

Câu 143. Một quả cầu lông được đánh lên từ độ cao $2,2m$ với vận tốc được tính bởi công thức sau đây $v(t)=-0,8t+4,16\ (m/s)$.



a) Công thức tính độ cao của quả cầu theo t là $h(t)=-0,4t^2+4,16t+2,2(m)$, với $t\geq 0$.

b) Quả cầu đạt độ cao cao nhất tại thời điểm $t=5,2(s)$.

c) Độ cao cao nhất của quả cầu bằng $13,016\ (m)$.

d) Thời điểm quả cầu chạm đất là $t=10,5\ (s)$.

Câu 144. Cây keo lai là một trong các loài cây không chỉ là nguyên liệu giấy quan trọng mà còn là loài cây cung cấp gỗ nguyên liệu cho các ngành khác như chế biến ván nhân tạo, chế biến đồ mộc xuất khẩu, gỗ bao bì, gỗ xây dựng. Cây phát triển với tốc độ nhanh, hiệu quả kinh tế. Kí hiệu $h(x)$ là chiều cao của một cây (tính theo mét) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau năm đầu tiên cây cao $8m$.Trong 10 năm tiếp theo cây phát triển với tốc độ $h'(x)=\dfrac{9}{x}$ (mét/năm).



a) Chiều cao của một cây sau khi trồng x năm $h(x)$ là: $h(x)=9\ln x+C\quad (m)$, với $x>0$.

b) Sau 4 năm cây cao $20,5(m)$ (kết quả làm tròn đến chữ số hàng thập phân thứ nhất).

c) Tốc độ phát triển của cây trong 10 năm đầu sẽ tăng dần.

d) Người ta thường thu hoạch cây keo lai khi nó có độ cao trong khoảng từ 26 đến 28 mét. Khi đó, cây keo được trồng từ 10 hoặc 11 năm.

Câu 145. Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5cm. Tốc độ tăng chiều cao của cây cà chua sau khi trồng được cho bởi hàm số $v(t)=-0,1t^3+t^2$, trong đó t tính theo tuần, $v(t)$ tính bằng cm/tuần. Gọi $h(t)$ (tính bằng cm) là độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t.



a) Độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t là $h(t)=\dfrac{-t^4}{40}+\dfrac{t^3}{3}$, với $t\ge 0$.

b) Chiều cao tối đa của cây cà chua đó là $\dfrac{265}{3}(cm)$.

c) Giai đoạn tăng trưởng của cây cà chua đó kéo dài trong 8 tuần đầu tiên.

d) Vào thời điểm cây cà chua phát triển nhanh nhất thì chiều cao cây cà chua đạt được $\dfrac{4405}{81}(cm)$.

Câu 146. Tại một lễ hội dân gian, tốc độ thay đổi lượng khách tham dự được biểu diễn bằng hàm số $B'(t)=20t^3-300t^2+1000t$. Trong đó t tính bằng giờ $(0\le t\le 15)$, $B'(t)$ được tính bằng khách/giờ. Sau một giờ, 500 người đã có mặt tại lễ hội.



a) Số lượng khách tham dự lễ hội được biểu diễn hàm $B(t)=5t^4-100t^3+500t^2+95$, với $0\le t\le 15$.

b) Số lượng khách tham dự lễ hội sau 3 giờ là 2300 khách.

c) Số lượng khách tham dự lễ hội lớn nhất là 28220 khách sau 10 giờ.

d) Tốc độ thay đổi lượng khách tham dự lễ hội là lớn nhất tại thời điểm 15 giờ.

Câu 147. Trong thí nghiệm nuôi cấy một loại vi sinh vật, kí hiệu $f(t)$ là tổng số lượng vi sinh vật sau t giờ. Biết rằng sau 3 giờ đầu tiên thì tổng số lượng vi sinh vật là 50 con. Trong 7 giờ tiếp theo, số lượng vi sinh vật thay đổi với tốc độ $f'(t)=t^2-8t$ (con/giờ).

a) $f(t)=\dfrac{t^3}{3}-8t^2+C\ \ (C\in\mathbb{R})$.

b) Số lượng vi sinh vật tăng trong khoảng từ 3 giờ đến 8 giờ, sau đó giảm dần trong khoảng 8 giờ đến 10 giờ.

c) Số lượng vi khuẩn là nhỏ nhất sau 8 giờ tính từ lúc bắt đầu làm thí nghiệm.

d) Sau 6 giờ thì số lượng vi khuẩn là 5 con.

Câu 148. Vào năm 2014, dân số Việt Nam khoảng $90,7$ triệu người. Giả sử dân số Việt Nam sau t năm được xác định bởi hàm số $S(t)$ (đơn vị: triệu người), trong đó tốc độ gia tăng dân số được cho bởi

$S'(t)=1,2698.e^{0,014t}$, với t là số năm kể từ năm 2014, $S'(t)$ tính bằng triệu người/ năm.

a) $S(t)$ là một nguyên hàm của $S'(t)$

b) $S(t)=90,7.e^{0,014t}+90,7$

c) Theo công thức trên, tốc độ tăng dân số Việt Nam năm 2034 (làm tròn đến hàng phần mười của triệu người/ năm) khoảng $1,7$ triệu người/ năm

d) Theo công thức trên, dân số Việt Nam năm 2034 (làm tròn đến hàng đơn vị của triệu người) là khoảng 100 triệu người/ năm

Câu 149. Một bể chứa dầu ban đầu có 50.000 lít dầu. Gọi $V(t)$ là thể tích dầu (lít) trong bể tại thời điểm t, trong đó t tính theo giờ $(0\le t\le 24)$. Trong quá trình bơm dầu vào bể, thể tích dầu tăng theo tốc độ được biểu diễn bởi hàm số $V'(t)=k.\sqrt{t}$, với k là hằng số dương. Sau 4 giờ bơm liên tục, thể tích dầu trong bể đạt 58.000 lít.

a) Hàm số $V(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(t)=k.\sqrt{t}$.

b) $V(t)=\frac{2k}{3}.t\sqrt{t}+C$ với $0\le t\le 24$ và k,C là các hằng số.

c) Sau 16 giờ bơm liên tục, thể tích dầu trong bể đạt được 148.000 lít.

d) Trong quá trình bơm dầu, nếu sau mỗi giờ lượng dầu bị rò rỉ đều đặn với tốc độ 500 lít/giờ, thì tại thời điểm t bằng 9 giờ, thể tích dầu trong bể là 72.500 lít.

Câu 150. Chủ một trung tâm thương mại muốn cho thuê một số gian hàng như nhau. Người đó muốn tăng giá cho thuê của mỗi gian hàng thêm x (triệu đồng). Tốc độ thay đổi doanh thu từ các gian hàng đó được biểu diễn bởi hàm số $T'(x)=-20x+300$, trong đó $T'(x)$ tính bằng triệu đồng. Biết rằng nếu người đó tăng giá thuê cho mỗi gian hàng thêm 10 triệu đồng thì doanh thu là 12 tỷ đồng.

a) Doanh thu của tất cả gian hàng được biểu diễn bởi hàm số $T(x)=-10x^2+300x-10000$.

b) Doanh thu của tất cả gian hàng khi người đó tăng giá thêm 12 triệu đồng là 12 tỷ 250 triệu đồng.

c) Doanh thu cao nhất của tất cả gian hàng mà người đó có thể thu về là 12 tỷ 250 triệu đồng.

d) Để doanh thu cao nhất của tất cả gian hàng thì mỗi gian hàng đã tăng giá cho thuê thêm 15 triệu đồng.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 151. Một chất điểm thực hiện chuyển động thẳng trên trục Ox, với vận tốc cho bởi công thức $v(t)=3t^2+4t(\text{m/s})$ với t là thời gian. Biết rằng tại thời điểm bắt đầu của chuyển động, chất điểm đang ở vị trí có tọa độ $x=0,5$. Tọa độ của chất điểm sau 2 giây chuyển động là bao nhiêu mét?

Trả lời: ……..

Câu 152. Một vật chuyển động với gia tốc phụ thuộc vào thời gian theo công thức $a(t)=\cos x\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\left(m/s^2\right)$. Biết tại thời điểm $t=0$ thì vận tốc và quãng đường đi được của vật đều bằng 0. Tính quãng đường (làm tròn kết quả đến phần chục của mét) đi được của vật đó trong $\frac{\pi}{2}$ giây đầu tiên.

Trả lời: ……..

Câu 153. Một vật chuyển động với vận tốc $10\left(m/s\right)$ thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian t là $a(t)=3t+t^2\left(m/s^2\right)$. Tính quãng đường (đơn vị: mét) vật đi được trong khoảng 12 giây đầu tiên kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

Trả lời: ……..

Câu 154. Một xe tải đang chuyển động đều với gia tốc $v_0=15m/s$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=t^2+4t\left(m/s^2\right)$. Tính quãng đường (làm tròn kết quả đến phần chục của mét) xe tải đi được trong khoảng thời gian 3 giây từ lúc bắt dầu tăng tốc.



Trả lời: ……..

Câu 155. Một xe môtô đang chuyển động với vận tốc $v_0=15(\text{m/s})$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=t^2+4t\left(\text{m/s}^2\right)$. Vận tốc xe môtô đó tại giây thứ 3 kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc bằng bao nhiêu mét/giây?



Trả lời: ……..

Câu 156. Một xe taxi chuyển động trên đường thẳng nằm ngang với gia tốc phụ thuộc thời gian t (giây) là $a(t)=2t-7\left(\mathrm{m}/\mathrm{s}^2\right)$. Biết vận tốc đầu bằng $10\left(\mathrm{m}/\mathrm{s}\right)$, hỏi sau bao nhiêu giây thì xe taxi đạt vận tốc $18\ \mathrm{m}/\mathrm{s}$?



Trả lời: ……..

Câu 157. Một vận động viên đạp chiếc xe đạp đang chạy với vận tốc $v_0=10(m/s)$ thì tăng tốc với gia tốc không đổi là $a=2\left(m/s^2\right)$. Tính quãng đường (đơn vị mét) vận động viên đạp chiếc xe đạp đó đi được trong 7 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc.



Trả lời: ……..

Câu 158. Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc 15m/s thì người lái xe hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-3t+15(\mathrm{m/s})$, trong đó t (giây). Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được bao nhiêu mét?



Trả lời: ……..

Câu 159. Một ô tô đang chạy với vận tốc $12(m/s)$ thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-6t+12(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét ?



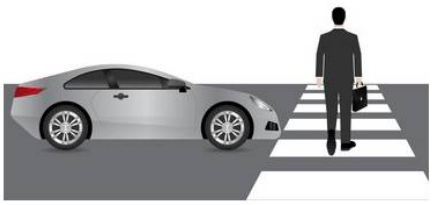
Trả lời: ……..

Câu 160. Bạn Trúc Linh lái ô tô đang chạy với vận tốc $70 km/h$ thì hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với tốc độ $v(t) = -10t + 30\ (m/s)$. Tính quãng đường (đơn vị mét) ô tô đi được sau 4 giây kể từ khi ô tô hãm phanh?



Trả lời: ……..

Câu 161. Bạn Minh Hiền lái ô tô đang chạy với vận tốc $20(m/s)$ thì thấy một người đi bộ qua đường cách ô tô một khoảng $30m$, sau đó 1 giây bạn Minh Hiền nhanh chóng đạp phanh. Sau khi đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -40t + 20(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bằng đầu đạp phanh. Khi ô tô dừng hẳn, ô tô cách người đi bộ qua đường bao nhiêu mét?



Trả lời: ……..

Câu 162. Anh Bảo Toàn lái ô tô đang chạy với vận tốc $36(km/h)$ thì tăng tốc chuyển động nhanh dần đều với gia tốc $a(t) = 1 + \frac{t}{3}(m/s^2)$. Sau bao nhiêu giây kể từ khi ô tô bắt đầu tăng tốc thì ô tô đi được quãng đường 90 mét?



Trả lời: ……..

Câu 163. Một ca nô đang chạy trên hồ với vận tốc $20(m/s)$ thì hết xăng; từ thời điểm đó, ca nô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc hết xăng. Hỏi từ lúc hết xăng đến lúc ca nô dừng hẳn đi được bao nhiêu mét?



Trả lời: ……..

Câu 164. Một máy bay cất cánh từ sân bay Cam Ranh với vận tốc chuyển động của máy báy là $v(t)=3t^2+5\ (m/s)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây. Quãng đường máy bay bay từ giây thứ 4 đến giây thứ 20 bằng bao nhiêu mét?



Trả lời: ……..

Câu 165. Tại một nơi không có gió, một chiếc khí cầu đang đứng yên ở độ cao 162 (mét) so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy luật $v(t)=10t-t^2$, trong đó t (phút) là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $v(t)$ được tính theo đơn vị mét/phút (m/p). Nếu như vậy thì khi bắt đầu tiếp đất vận tốc v của khí cầu bằng bao nhiêu mét/phút?



Trả lời: ……..

Câu 166. Một quả bóng được ném lên từ độ cao $20\,m$ so với mặt đất với vận tốc được tính bởi công thức sau đây $v(t)=-10t+16\ (m/s)$, trong đó t (giây) là thời gian tính từ lúc bắt đầu ném. Sau 2 giây đầu tiên kể từ lúc bắt đầu ném, quả bóng cao bao nhiêu mét so với mặt đất?



Trả lời: ……..

Câu 167. Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng từ mặt đất. Giả sử tại thời điểm t giây (coi là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t)=24,5-9,8t\,(m/s)$. Tính quãng đường (đơn vị: mét) viên đạn đi sau 2 giây đầu.



Trả lời: ……..

Câu 168. Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng từ mặt đất. Giả sử tại thời điểm t giây (coi là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t)=25-9,8t\,(m/s)$. Quãng đường viên đạn đi được từ lúc bắn cho đến khi chạm đất bằng bao nhiêu mét? (làm tròn kết quả đến phần chục của mét)



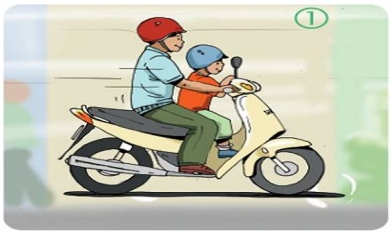
Trả lời: ……..

Câu 169. Một xe gắn máy đang chuyển động với vận tốc $6(m/s)$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=\dfrac{3}{t+1}\left(m/s^2\right)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc. Hỏi vận tốc của xe gắn máy sau 10 giây bằng bao nhiêu mét/giây (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



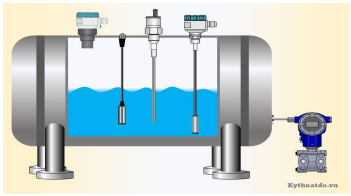
Trả lời: ……..

Câu 170. Một xe gắn máy chuyển động với vận tốc ban đầu là $5(m/s)$ và có gia tốc được xác định bởi công thức $a(t)=\dfrac{2}{t+1}\left(m/s^2\right)$. Tính vận tốc của xe gắn máy tại giây thứ 20 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét/giây).



Trả lời: ……..

Câu 171. Gọi $h(t)$ (đơn vị: mét) là mực nước ở bồn chứa sau khi bơm nước được t giây. Biết rằng $h'(t)=\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{t}\ \ (m/s)$ và lúc đầu bồn không có nước. Sau khi bơm 8 giây đầu tiên, mực nước trong bồn bằng bao nhiêu mét?



Trả lời: ……..

Câu 172. Bác Nam cần bơm nước vào bể chứa nước để tưới tiêu. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t)=3at^2+bt$ $\left(m^3/s\right)$ và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^3$. Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$. Hỏi thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là bao nhiêu m^3?



Trả lời: ……..

Câu 173. Anh Hùng bơm nước vào một bể chứa nước để sử dụng. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t)=6at^2+2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là $90\,m^3$ và sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là $504\,m^3$. Tính thể tích (m^3) nước bơm được từ giây thứ 9 đến giây thứ 18.

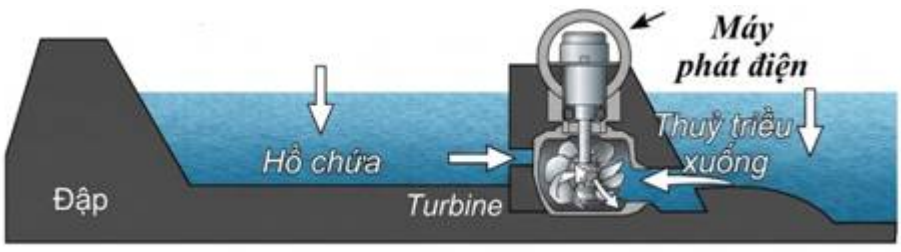
Trả lời: ……..

Câu 174. Trong đợt xả lũ tháng 11 năm 2025 của nhà máy thủy điện sông Ba Hạ (Phú Yên) đã xả lũ với tốc độ lưu lượng nước tại thời điểm t giây là $h'(t)=2t+10000$ $\left(m^3/s\right)$. Hỏi sau 1 giờ xả lũ thì hồ thoát nước của nhà máy đã thoát đi một lượng nước là bao nhiêu chục nghìn mét khối?



Trả lời: ……..

Câu 175. Mực nước trong hồ chứa của nhà máy điện thủy triều thay đổi trong suốt một ngày do nước chảy ra khi thủy triều xuống và nước chảy vào khi thủy triều lên (như hình vẽ). Tốc độ thay đổi của mực nước được xác định bởi hàm số $h'(t)=\frac{1}{90}\left(t^2-17t+60\right)$, trong đó t tính bằng giờ $\left(0\le t\le 24\right)$, $h'(t)$ tính bằng mét/giờ. Tại thời điểm $t=0$, mực nước trong hồ chứa cao $8m$. Gọi $h_1(m)$ là mực nước trong hồ cao nhất và $h_2(m)$ là mực nước thấp nhất , tính giá trị h_1+h_2.



Trả lời: ……..

Câu 176. Gọi $h(t)$ là chiều cao của cây keo (tính theo mét) sau khi trồng t năm. Biết rằng năm đầu tiên cây cao $\frac{4}{3}(m)$, trong những năm tiếp theo, cây phát triển với tốc độ $h'(t)=\frac{1}{\sqrt[4]{t}}$ (mét /năm). Sau bao nhiêu năm cây cao được $\frac{16}{3}$ mét (làm tròn kết quả đến phần trăm của năm)?



Trả lời: ……..

Câu 177. Kí hiệu $h(x)$ là chiều cao của một cây cao su (tính theo mét) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau năm đầu tiên cây cao su cao $3(m)$. Trong 15 năm tiếp theo cây cao su phát triển với tốc độ $h'(x)=\frac{2}{x}$ (mét/năm). Xác định chiều cao của cây cao su sau 12 năm trồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).



Trả lời: ……..

Câu 178. Một vườn ươm cây Bạch Đàn cung cấp trồng rừng để phủ đồi trọc. Biết tốc độ tăng trưởng trong suốt t năm được tính xấp xỉ bởi công thức $h'(t)=\frac{1}{2}t+4$, trong đó $h(t)(cm)$ là chiều cao của cây khi kết thúc t(năm) . Cây con khi được ươm có chiều cao 20 cm. Sau 4 năm, cây được ươm cao bao nhiêu centimét?



Trả lời: ……..

Câu 179. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1990 được ước tính theo một hàm số theo thời gian $f(t)$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người). Biết rằng $f'(t)=\frac{34}{t^2+4t+4}$ (nghìn người/năm) biểu thị

tốc độ tăng dân số của thị trấn. Số dân của thị trấn đó vào năm 2035 là bao nhiêu? (kết quả lấy chính xác đến hàng phần chục của nghìn người) biết dân số của thị trấn đó năm 1990 là 3 nghìn người.

Trả lời: ……..

Câu 180. Một quần thể vi khuẩn ban đầu gồm 500 vi khuẩn, sau đó bắt đầu tăng trưởng. Gọi $P(t)$ là số lượng vi khuẩn của quần thể đó tại thời điểm t, trong đó t tính theo ngày ($0 \le t \le 10$). Tốc độ tăng trưởng của quần thể vi khuẩn đó cho bởi hàm số $P'(t) = k\sqrt{t}$, trong đó k là hằng số. Sau 1 ngày, số lượng vi khuẩn của quần thể đó đã tăng lên thành 600 vi khuẩn. Tính số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 9 ngày.



Trả lời: ……..

Câu 181. Một đàn con trùng, ở ngày thứ t có số lượng là $K(t)$. Biết $K'(t) = \dfrac{800}{t}$ và ngày đầu tiên, đàn côn trùng có 500 con. Hỏi sau 10 ngày thì đàn có khoảng bao nhiêu con? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Trả lời: ……..

Câu 182. Sự sản sinh vi rút Zika ngày thứ t có số lượng là $N(t)$ con, biết $N'(t) = \dfrac{1000}{t}$ và ngày đầu tiên, đám vi rút có số lượng 6000 con. Tính số lượng vi rút sau 10 ngày (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Trả lời: ……..

Câu 183. Người ta truyền nhiệt cho một bình nuôi cấy vi sinh vật từ $1°C$. Tốc độ tăng nhiệt độ của bình tại thời điểm t phút $(0 \le t \le 5)$ được cho bởi hàm số $f(t) = 3t^2$ ($°C$/ phút). Biết rằng nhiệt độ của bình

đó tại thời điểm t là một nguyên hàm của hàm số $f(t)$. Nhiệt độ của bình tại thời điểm 3 phút kể từ khi truyền nhiệt bằng bao nhiêu °C?



Trả lời: ……..

Câu 184. Tốc độ tăng trưởng của một đàn gấu mèo tại thời điểm t tháng kể từ khi người ta thả 100 cá thể đầu tiên vào một khu rừng được ước lượng bởi công thức $P'(t)=8t+30$ (con/tháng), với $P(t)$ là số lượng cá thể trong đàn tại thời điểm t tháng tương ứng. Dựa vào tốc độ tăng trưởng đã cho, hãy tính số cá thể của đàn gấu mèo này tại thời điểm 3 tháng kể từ khi chúng được thả vào rừng.



Trả lời: ……..

Câu 185. Tốc độ phát triển của số lượng vi khuẩn trong hồ bơi được mô hình bởi hàm số $B'(t)=\dfrac{1000}{(1+0,3t)^2}$ với $t\geq 0$, trong đó $B(t)$ là số lượng vi khuẩn trên mỗi ml nước tại ngày thứ t. Số lượng vi khuẩn ban đầu là 500 con trên mỗi ml nước. Biết rằng mức độ an toàn cho người sử dụng hồ bơi là số vi khuẩn phải dưới 3000 con trên mỗi ml nước. Hỏi sau bao nhiêu ngày thì người ta phải xử lí và thay nước mới cho hồ bơi.



Trả lời: ……..

Câu 186. Đối với các dự án xây dựng, chi phí nhân công lao động được tính theo số ngày công. Gọi $m(t)$ là số lượng nhân công được sử dụng ở ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Gọi $M(t)$ là số ngày công nhân được tính đến hết ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Trong kinh tế xây dựng, người ta đã biết rằng $M'(t)=m(t)$. Một công trình xây dựng dự kiến hoàn thành trong 400 ngày. Số lượng công nhân được sử dụng cho bởi hàm số $m(t)=800-2t$. Trong đó t tính theo ngày $(0\leq t\leq 400)$, $m(t)$ tính

theo người. Đơn giá cho một ngày công lao động là $0,4$ triệu đồng. Chi phí nhân công lao động của công trình đó (cho đến lúc hoàn thành) bằng bao nhiêu tỉ đồng?

Trả lời: ……..

Câu 187. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3+2x$ có dạng $F(x)=ax^4+bx^2$. Tính $T=4a+b$.

Trả lời: ……..

Câu 188. Để hàm số $F(x)=mx^3+(3m+2)x^2-4x+3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+10x-4$ thì giá trị thực của tham số m bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 189. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{khi } x\geq 1\\ 3x^2-2 & \text{khi } x<1\end{cases}$, giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0)=2$.Giá trị của $F(-1)+2F(2)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 190. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{khi } x\geq 1\\ 3x^2+2 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của hàm số f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0)=2$. Giá trị của $F(-1)+2F(2)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 191. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+5 & \text{khi } x\geq 1\\ 3x^2+4 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0)=2$. Giá trị của $F(-1)+2F(2)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 192. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+2 & khi\ \ x\geq 1\\ 3x^2+1 & khi\ \ x<1\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0)=2$. Giá trị của $F(-1)+2F(2)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 193. *Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$. Biết $F\left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right)=k$ với mọi $k\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $T=F(0)+F(\pi)+F(2\pi)$.

Trả lời: ……..

Câu 194. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^x$, thỏa mãn $F(0)=\dfrac{1}{\ln 2}$. Biết $F(0)+F(1)+...+F(2024)+F(2025)=\dfrac{2^a+b}{\ln 2}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Tính giá trị biểu thức $a-b$.

Trả lời: ……..

Câu 195. Cho hàm số $f(x)=2^x+x+1$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=1$. Biết $F(-1)=\frac{a}{b}+\frac{c}{2\ln 2}$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Tính giá trị biểu thức $a+b+c$.

Trả lời: ……..

Câu 196. Cho $F(x)=me^{2x}+nx^2+p$ $(m,n,p\in\mathbb{R})$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{2x}+2x$ thỏa mãn $F(0)=\frac{3}{2}$. Tìm giá trị của biểu thức $A=-10m-20n+10p$.

Trả lời: ……..

Câu 197. Cho $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(2x^2+6x)e^{2x}$. Tính tổng $a+b+2c$.

Trả lời: ……..

Câu 198. Cho $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x^2.e^{2x}$. Tính tổng $a+b+2c$.

Trả lời: ……..

Câu 199. Biết $F(x)=e^{2x}+2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giả sử $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(2x)+\cos\pi x$. Khi đó $G(2)-G(0)=a.e^b+c$, $a,b,c\in\mathbb{Q}$. Tính $a.b.c$.

Trả lời: ……..

Câu 200. Cho hàm số $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{-2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=-(2x^2-8x+7)e^{-2x}$. Tính tổng $a+b+c$.

Trả lời: ……..

Câu 201. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=ax+\frac{b}{x^2}(x\neq 0)$, với $a,b\in\mathbb{Q}$. Biết rằng $F(-1)=1, F(1)=4, f(1)=0$, tính tổng $a+b$.

Trả lời: ……..

Câu 202. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=12x^2+2,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=2$, khi đó $F(1)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 203. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=ax^2+\frac{b}{x^3}$, $f'(1)=3$, $f(1)=2$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{12}$. Tính giá trị $2a+b$.

Trả lời: ……..

Câu 204. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{x+1}{x^2}$, $f(-2)=\dfrac{3}{2}$ và $f(2)=2\ln 2-\dfrac{3}{2}$. Biết $f(-1)+f(4)=\dfrac{a\ln 2+b}{c}$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{b}{c}$ là phân thức tối giản. Tính giá trị biểu thức $a+b+c$.

Trả lời: ……..

Câu 205. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ và $f'(x)\sin^2\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}=1$. Tính $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Trả lời: ……..

Câu 206. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn: $f'(x)=2024-2\sin^2\dfrac{x}{2}$ và $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2023\pi}{2}$. Tính $f(0)$.

Trả lời: ……..

Câu 207. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f'(x)=1+e^{2x}$ và $f(0)=2$. Biết $f(\ln 2)=a+\ln b$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Tính giá trị biểu thức $a+b$.

Trả lời: ……..

Câu 208. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f'(x)=2^x+3^x$ và $f(0)=\dfrac{1}{\ln 3}$. Biết $f(1)=\dfrac{a}{b\ln 2}+\dfrac{3}{c\ln 3}$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Tính giá trị biểu thức $a+b+c$.

Trả lời: ……..

Câu 209. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn: $f'(x)=e^{3x+2024}$ và $f(-675)=1$. Biết $f(0)=\dfrac{e^a+b.e+c}{3e}$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị biểu thức $a+b+c$.

Trả lời: ……..

Câu 210. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn: $f'(x)=3^{x+2}.2^{2x+1}$ và $f(1)=0$. Biết $f(0)=\dfrac{a}{\ln 12}$, với $a\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị a.

Trả lời: ……..

Câu 211. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=e^x+2x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=1$. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(1)=e$. Biết $F(0)=\dfrac{a}{b}$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Tính giá trị biểu thức $a+b$.

Trả lời: ……..

Câu 212. Cho $F(x)=\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x).\tan x$. Biết nguyên hàm của hàm số $\dfrac{\tan x}{f'(x)}$ có dạng $\dfrac{a}{b}\tan x+C$ với a, b là các số nguyên dương, $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản và $C\in\mathbb{R}$. Tính giá trị biểu thức $a-2b$.

Trả lời: ……..

Câu 213. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục $\forall x\in\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x).f(x)=5x^4+3x^2$. Biết $f(0)=2026$. Tính $f^2(1)$.

Trả lời: ……..

Câu 214. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục $\forall x\in\mathbb{R}$ và $\left(f(x)\right)^2.f'(x)=3x^2+4x+2$. Biết $f(0)=3$, tính giá trị của $f(-9)$.

Trả lời: ……..

Câu 215. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(\pi)=e^2$ và $f'(x)-f(x)\sin x=0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(2\pi)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 216. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\dfrac{1}{3}$ và $f'(x)=x\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $\dfrac{1}{f(1)}$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 217. Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$; $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(9)=2027$ và $\left[f'(x)\right]^2=x.f(x)$. Tính $f(36)$.

Trả lời: ……..

Câu 218. Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng trên $(0;+\infty)$, biết $f(0)=1$ và $f(x)=\sqrt{x}.f'(x)$ với mọi $x\in(0;+\infty)$. Tính $f\left(\ln^2 2\right)$.

Trả lời: ……..

Câu 219. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên đoạn $[0;2]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(0)=-1, f'(x)\neq 0,\left[f'(x)\right]^2=f''(x),\forall x\in[0;2]$. Tính giá trị của $f'(2)$.

Trả lời: ……..

Câu 220. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn $[0;4]$ và thỏa mãn $\left[f(x)\right]^2-f(x).f''(x)+\left[f'(x)\right]^2=0$. Biết $f(0)=1, f(2)=\mathrm{e}^6$. Khi đó $\ln f(4)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 221. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $f'(x)+f(x)=e^{-x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Biết $f(\ln 2)=\dfrac{a+\ln 2}{b}$, khi đó giá trị $T=2026a+b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 222. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(\ln 2)=1$ và $f'(x)-f(x)=e^{2x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(0)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 223. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $f'(x)f(x)-\sin x=0,\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f^2(\pi)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 224. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\dfrac{4}{19}$ và $f'(x)=x^3f^2(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 225. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\dfrac{1}{5}$ và $f'(x)=x^3\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 226. Cho hàm số $f(x)>0$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời thỏa mãn $f(0)=\dfrac{1}{2}$, $f'(x)=-e^xf^2(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(\ln 2)=\dfrac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản, tính giá trị của $a+b$.

Trả lời: ……..

Câu 227. Cho hàm số $f(x)\neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)=(2x+3)f^2(x)$ và $f(0)=-\dfrac{1}{2}$. Biết rằng tổng $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2024)+f(2025)=\dfrac{a}{b}$ với $\left(a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N}^*\right)$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $b-a$

Trả lời: ……..

Câu 228. Cho hàm số $f(x)\neq 0$, liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $f(1)=\dfrac{1}{3}$; $x^2.f'(x)=f^2(x)$ với $\forall x\in[1;2]$. Tính $f(2)$.

Trả lời: ……..

Câu 229. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(x)<0,\forall x>0$ và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x)=(2x+1)f^2(x),\forall x>0$ và $f(1)=-\frac{1}{2}$. Biết $f(1)+f(2)+...+f(2026)+f(2027)=\frac{a}{b}$ với $a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $T=b-a$.

Trả lời: ……..

Câu 230. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $e^{f(x)}-\frac{x}{f'(x)}=0$ với $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)\neq 0$ và $f(1)=1$. Biết $f(2)=e^{\frac{a}{b}}$ với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a+b$.

Trả lời: ……..

Câu 231. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và thỏa mãn $f(0)=1$, $\left(f'(x)\right)^3=e^x\left(f(x)\right)^2,\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $f(\ln 2027)$.

Trả lời: ……..

Câu 232. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $x^6\left[f'(x)\right]^3+27\left[f(x)-1\right]^4=0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=0$. Tính giá trị của $f(2)$.

Trả lời: ……..

Câu 233. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=2x^2-x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=3$. Giá trị của $\left[f(1)\right]^2$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 234. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[xf'(x)\right]^2+1=x^2\left[1-f(x).f''(x)\right]$ với mọi x dương. Biết $f(1)=f'(1)=1$. Biết $f^2(2)=2(a+b\ln 2)$ với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a+b$.

Trả lời: ……..

Câu 235. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)=2e^{-3x},\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2024$. Biết $f(\ln 2)=\frac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a+b$.

Trả lời: ……..

Câu 236. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=1$ và $f'(x)-f(x)=2024$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Biết $f\left(\ln\frac{1}{2}\right)=\frac{a+b.e}{c.e}$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a+b+c$.

Trả lời: ……..

Câu 237. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x)+f(x)=3x^2\sqrt{x}$. Biết $f(1)=\frac{1}{2}$. Tính $f(4)$.

Trả lời: ……..

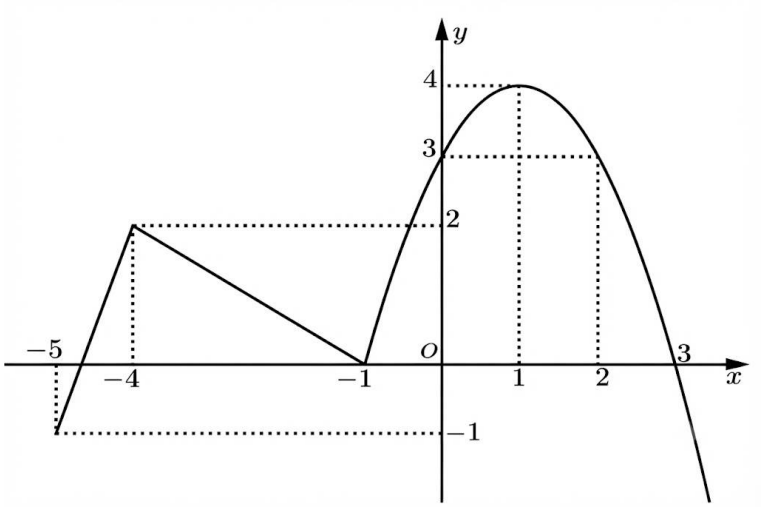
Câu 238. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=4$ và $f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2$ với mọi $x>0$. Giá trị của $f(2)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 239. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $3x.f(x)-x^2.f'(x)=2f^2(x)$, với $f(x)\neq 0,\forall x\in(0;+\infty)$ và $f(1)=\frac{1}{3}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;2]$. Tính $M-m$.

Trả lời: ……..

Câu 240. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên $[-5;3]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y=ax^2+bx+c$).



Biết $f(0)=0$, giá trị của $6f(-5)+3f(2)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

CHƯƠNG 4
NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

BÀI 11
NGUYÊN HÀM

1. Nguyên hàm của một hàm số

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên một khoảng K (hoặc một đoạn, hoặc một nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là **nguyên hàm** của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x)=f(x)$, với mọi $x\in K$.

Chú ý: Trường hợp $K=[a;b]$ thì các đẳng thức $F'(a)=f(a)$ và $F'(b)=f(b)$ ta được hiểu là đạo hàm bên phải tại điểm $x=a$ và đạo hàm bên trái tại điểm $x=b$ của hàm số $F(x)$, tức là:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=f(a) \text{ và } \lim_{x\to b^-}\frac{F(x)-F(b)}{x-b}=f(b)$$

Giả sử hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K. Khi đó:

- Với mỗi hằng số C, hàm số $F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K.
- Nếu hàm số $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì tồn tại hằng số C sao cho $G(x)=F(x)+C$ với mọi $x\in K$

Như vậy, nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x)+C$, với C là hằng số. Ta gọi $F(x)+C$ $(C\in\mathbb{R})$ là **họ các nguyên hàm** của $f(x)$ trên K, kí hiệu $\int f(x)dx$.

Chú ý:

- Để tìm học các nguyên hàm (gọi tắt là tìm nguyên hàm) của hàm số $f(x)$ trên K, ta chỉ cần tìm một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ trên K và khi đó $\int f(x)dx=F(x)+C$, với C là hằng số.
- Người ta chứng minh được rằng, nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng K thì $f(x)$ có nguyên hàm trên khoảng đó.
- Biểu thức $f(x)dx$ được gọi là vi phân của nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$, kí hiệu là $dF(x)$. Vậy, $dF(x)=F'dx=f(x)dx$
- Khi tìm nguyên hàm của một hàm số mà không chỉ rõ tập K thì ta hiểu là tìm nguyên hàm của hàm số đó trên tập xác định của nó.

2. Tính chất cơ bản của nguyên hàm

- $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, với k là hằng số khác 0
- $\int\left[f(x)+g(x)\right]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- $\int\left[f(x)-g(x)\right]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

3. Nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

Nguyên hàm của một số hàm số thường gặp	
Nguyên hàm của hàm số lũy thừa	$\int 0dx = C$ $\int 1dx = x + C$ $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ \ (\alpha \neq -1)$ $\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C \ \ (x \neq 0)$ $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C$ $\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C$
Nguyên hàm của hàm số lượng giác	$\int \cos x dx = \sin x + C$ $\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$ $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$
Nguyên hàm của hàm số mũ	$\int e^x dx = e^x + C$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ \ (0 < a \neq 1)$

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

CHỦ ĐỀ 1
NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ

DẠNG 1
NGUYÊN HÀM HÀM LŨY THỪA

1. Bảng nguyên hàm hàm số lũy thừa

Nguyên hàm hàm số lũy thừa	
$\int 0dx = C$	
$\int dx = x + C$	
$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ \ (\alpha \neq -1)$	$\int (ax+b)^{\alpha}\,dx = \int (ax+b)^{\alpha}.\frac{(ax+b)'}{a}dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ \ (\alpha \neq 1)$
$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C \ \ (x \neq 0)$	$\int \frac{1}{ax+b}dx = \int \frac{1}{ax+b}.\frac{(ax+b)'}{a}dx = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C$
$\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C$	$\int \frac{1}{(ax+b)^2}dx = \int \frac{1}{(ax+b)^2}.\frac{(ax+b)'}{a}dx = -\frac{1}{a}.\frac{1}{ax+b} + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{ax+b}}.\frac{(ax+b)'}{a}dx = \frac{1}{a}.2\sqrt{ax+b} + C$

Chú ý: $\int f\left(u(x)\right).u'(x)dx = F\left(u(x)\right) + C$

2. Công thức lũy thừa:

- $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$
- $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$
- $x^m.x^n = x^{m+n}$
- $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

Bài 1. Tìm:

a) $\int\left(x^2-2026\right)\mathrm{d}x$ b) $\int\left(x^4+\frac{2}{x^3}-2027\right)\mathrm{d}x$ c) $\int\left(x^2+\frac{3}{x}-1\right)\mathrm{d}x$

d) $\int\left(\frac{2026}{x}-\frac{2027}{x^2}+2028\right)\mathrm{d}x$ e) $\int\left(3x^2-\frac{3}{x}-2\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$ f) $\int\left(3\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+2026\right)\mathrm{d}x$

Lời giải

a) $\int\left(x^2-2026\right)\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}x-2026\int\mathrm{d}x==\frac{x^3}{3}-2026x+C$

b) $\int\left(x^4+\frac{2}{x^3}-2027\right)\mathrm{d}x=\int x^4\mathrm{d}x+2\int\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x-2027\int\mathrm{d}x=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{x^2}-2027x+C$

c) $\int\left(x^2+\frac{3}{x}-1\right)\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}x+3\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\int\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+3\ln|x|-x+C$

d) $\int\left(\frac{2026}{x}-\frac{2027}{x^2}+2028\right)\mathrm{d}x=2026\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x-2027\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x+\int\mathrm{d}x=2026\ln|x|+\frac{2027}{x}+2028x+C$

e) $\int\left(3x^2-\frac{3}{x}-2\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=3\int x^2\mathrm{d}x-3\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x-2\int\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-3\ln|x|-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+C$

f) $\int\left(3\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+2026\right)\mathrm{d}x=2\int\sqrt{x}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x+2026\int\mathrm{d}x=2\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x-\int x^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}x+2026\int\mathrm{d}x$

$=\frac{6}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+2026x+C=2x\sqrt{x}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2026x+C$

Bài 2. Tìm:

a) $\int 2x\left(1+3x^3\right)\mathrm{d}x$ b) $\int\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^2\mathrm{d}x$ c) $\int\left(x-3\right)^3\mathrm{d}x$

d) $\int x^2\left(x-2\right)^2\mathrm{d}x$ e) $\int x\left(1-x\right)^3\mathrm{d}x$ f) $\int\left(x+1\right)\left(3-x\right)^2\mathrm{d}x$

Lời giải

a) $\int 2x\left(1+3x^3\right)\mathrm{d}x=\int\left(2x+6x^4\right)\mathrm{d}x=x^2+\frac{6x^5}{5}+C$

b) $\int\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^2\mathrm{d}x=\int\left(x^2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^4}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-2\ln|x|-\frac{1}{3x^3}+C$

c) $\int\left(x-3\right)^3\mathrm{d}x=\int\left(x^3-9x^2+27x+27\right)\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}-3x^3+\frac{27}{2}x^2+27x+C$

d) $\int x^2\left(x-2\right)^2\mathrm{d}x=\int x^2\left(x^2-4x+4\right)\mathrm{d}x=\int\left(x^4-4x^3+4x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{4}{3}x^3+C$

e) $\int x\left(1-x\right)^3\mathrm{d}x=\int x\left(1-3x+3x^2-x^3\right)\mathrm{d}x=\int\left(x-3x^2+3x^3-x^4\right)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-x^3+\frac{3}{4}x^4-\frac{x^5}{5}+C$

f) $\int\left(x+1\right)\left(3-x\right)^2\mathrm{d}x=\int\left(x+1\right)\left(9-6x+x^2\right)\mathrm{d}x=\int\left(x^3-5x^2+3x+9\right)\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}-\frac{5}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+9x+C$

Bài 3. Tìm:

a) $\int \frac{2x^4-3}{x^2}dx$ b) $\int \frac{x^2-3x+2}{x}dx$ c) $\int \frac{x^2+3x-1}{\sqrt{x}}dx$

d) $\int \frac{(3x-2)^2}{x}dx$ e) $\int \left(\frac{3x+1}{x}\right)^2 dx$ f) $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

Lời giải

a) $\int \frac{2x^4-3}{x^2}dx=\int\left(2x^2-\frac{3}{x^2}\right)dx=\frac{2x^3}{3}+\frac{3}{x}+C$

b) $\int \frac{x^2-3x+2}{x}dx=\int\left(x-3+\frac{2}{x}\right)dx=\frac{1}{2}x^2-3x+2\ln|x|+C$

c) $\int \frac{x^2+3x-1}{\sqrt{x}}dx=\int\left(x\sqrt{x}+3\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\int\left(x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{x}+C$

$=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+2x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+C$

d) $\int \frac{(3x-2)^2}{x}dx=\int\left(9x-12+\frac{4}{x}\right)dx=\frac{9}{2}x^2-12x+4\ln|x|+C$

e) $\int \left(\frac{3x+1}{x}\right)^2 dx=\int\left(3+\frac{1}{x}\right)^2 dx=\int\left(9+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=9x+6\ln|x|-\frac{1}{x}+C$

f) $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\int \frac{x^2-2x+1}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\int\left(x^{\frac{4}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}\right)dx=\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{2}x^{\frac{4}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}+C$

$=\frac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x}-\frac{3}{2}x\sqrt[3]{x}+3\sqrt[3]{x}+C$

Bài 4. Tìm:

a) $\int\left(x\sqrt{x^3}-4x\right)dx$ b) $\int\left(3x^2\sqrt[3]{x^4}-\frac{1}{x^2}\right)dx$ c) $\int\left(2x^5\sqrt[4]{x^3}-2x\right)dx$

d) $\int\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}+2026\right)dx$ e) $\int\left(3x^2-\frac{2027}{x\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$ f) $\int\left(\frac{2\sqrt{x}}{x^2}-\frac{1}{x}\right)dx$

Lời giải

a) $\int\left(x\sqrt{x^3}-4x\right)dx=\int\left(x.x^{\frac{3}{2}}-4x\right)dx=\int\left(x^{\frac{5}{2}}-4x\right)dx=\frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1}-2x^2+C=\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}-2x^2+C$

b) $\int\left(3x^2\sqrt[3]{x^4}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\int\left(3x^2.x^{\frac{4}{3}}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\int\left(3x^{\frac{10}{3}}-\frac{1}{x^2}\right)dx=3.\frac{x^{\frac{10}{3}+1}}{\frac{10}{3}+1}+\frac{1}{x}+C=\frac{6}{13}x^4\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}+C$

c) $\int\left(2x^5\sqrt[4]{x^3}-2x\right)\mathrm{d}x=\int\left(x^5.x^{\frac{3}{4}}-2x\right)\mathrm{d}x=\int\left(2x^{\frac{23}{4}}-2x\right)\mathrm{d}x=2.\dfrac{x^{\frac{23}{4}+1}}{\frac{23}{4}+1}-x^2+C=\dfrac{8}{27}x^6\sqrt[4]{x^3}-x^2+C$

d) $\int\left(\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}}+2026\right)\mathrm{d}x=\int\left(2x^{-\frac{2}{3}}+2026\right)\mathrm{d}x=2.\dfrac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}+2026x+C=6\sqrt[3]{x}+2026x+C$

e) $\int\left(3x^2-\dfrac{2027}{x\sqrt[4]{x^3}}\right)\mathrm{d}x=\int\left(3x^2-\dfrac{2027}{x^{\frac{7}{4}}}\right)\mathrm{d}x=\int\left(3x^2-2027x^{-\frac{7}{4}}\right)\mathrm{d}x=x^3-2027.\dfrac{x^{-\frac{7}{4}+1}}{-\frac{7}{4}+1}+C=x^3-\dfrac{8108}{3\sqrt[4]{x^3}}+C$

f) $\int\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\int\left(2x^{-\frac{3}{2}}-\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=2\dfrac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}-\ln|x|+C=-\dfrac{4}{\sqrt{x}}-\ln|x|+C$

Bài 5. Tìm:

a) $\int(x-2026)^{2027}\,\mathrm{d}x$ b) $\int\dfrac{2026}{(5x-2)^2}\mathrm{d}x$ c) $\int\dfrac{2}{\sqrt{3x+2027}}\mathrm{d}x$

d) $\int\dfrac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x$ e) $\int\dfrac{2x-3}{2x+1}\mathrm{d}x$ f) $\int\dfrac{x+1}{(x-2)^2}\mathrm{d}x$

Lời giải

a) $\int(x-2026)^{2027}\,\mathrm{d}x=\int(x-2026)^{2027}.(x-2026)'\,\mathrm{d}x=\dfrac{(x-2026)^{2028}}{2028}+C$

b) $\int\dfrac{2026}{(5x-2)^2}\mathrm{d}x=2026\int\dfrac{1}{(5x-2)^2}.\dfrac{(5x-2)'}{5}\mathrm{d}x=-\dfrac{2026}{5}.\dfrac{1}{5x-2}+C=-\dfrac{2026}{5(5x-2)}+C$

c) $\int\dfrac{2}{\sqrt{3x+2027}}\mathrm{d}x=2\int\dfrac{1}{\sqrt{3x+2027}}.\dfrac{(3x+2027)'}{3}\mathrm{d}x=\dfrac{4}{3}\sqrt{3x+2027}+C$

d) $\int\dfrac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{2x-1}.\dfrac{(2x-1)'}{2}.\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln|2x-1|+C$

e) $\int\dfrac{2x-3}{2x+1}\mathrm{d}x=\int\dfrac{2x+1-4}{2x+1}\mathrm{d}x=\int\left(1-\dfrac{4}{2x+1}\right)\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x-4\int\dfrac{1}{2x+1}\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x-4\int\dfrac{1}{2x+1}.\dfrac{(2x+1)'}{2}\mathrm{d}x$

$=x-2\ln|2x+1|+C$

f) $\int\dfrac{x+1}{(x-2)^2}\mathrm{d}x=\int\dfrac{x-2+3}{(x-2)^2}\mathrm{d}x=\int\left[\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{3}{(x-2)^2}\right]\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{x-2}\mathrm{d}x+3\int\dfrac{1}{(x-2)^2}\mathrm{d}x$

$=\int\dfrac{1}{x-2}.(x-2)'\,\mathrm{d}x+3\int\dfrac{1}{(x-2)^2}.(x-2)'\,\mathrm{d}x=\ln|x-2|+\dfrac{3}{x-2}+C$

Bài 6. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của:

a) $f(x)=x^3-4x+2024$. Biết $F(1)=0$, tính $F(0)$.

b) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2}$. Biết $F(-2)=0$, tính $F(2)$.

c) $f(x)=\dfrac{3-5x^2}{x}$. Biết $F(e)=1$, tính $F(2)$.

d) $f(x)=\dfrac{1+2x^2}{x}$. Biết $F(-1)=3$, tính $F(1)$.

e) $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt[3]{x^2}}$. Biết $F(1)=0$, tính $F(0)$.

f) $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^4}}$. Biết $F(0)=2$, tính $F(1)$.

g) $f(x)=3x^3-2\sqrt{x^5}$. Biết $F(1)=0$, tính $F(0)$.

h) $f(x)=\dfrac{2026}{x^5}+2\sqrt[4]{x}$. Biết $F(-2)=0$, tính $F(2)$.

Lời giải

a) Ta có $F(x)=\int\left(x^3-4x+2024\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}x^4-2x^2+2024x+C$.

Mà $F(1)=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{4}-2+2024+C=0\Leftrightarrow C=-\dfrac{8089}{4}$ nên $F(x)=\dfrac{1}{4}x^4-2x^2+2024x-\dfrac{8089}{4}$.

Do đó: $F(0)=-\dfrac{8089}{4}$

b) Ta có $F(x)=\int\dfrac{x^3-1}{x^2}\mathrm{d}x=\int\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=x^2+\dfrac{1}{x}+C$.

Mà $F(-2)=0\Leftrightarrow x^2+\dfrac{1}{x}+C=0\Leftrightarrow C=-\dfrac{7}{2}$ nên $F(x)=x^2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{7}{2}$.

Do đó: $F(2)=2^2+\dfrac{1}{2}-\dfrac{7}{2}=1$

c) Ta có $F(x)=\int\dfrac{3-5x^2}{x}\mathrm{d}x=\int\left(\dfrac{3}{x}-5x\right)\mathrm{d}x=3\ln|x|-\dfrac{5}{2}x^2+C$.

Mà $F(e)=1\Leftrightarrow 3\ln|e|-\dfrac{5}{2}e^2+C=1\Leftrightarrow C=\dfrac{5}{2}e^2-2$ nên $F(x)=3\ln|x|-\dfrac{5}{2}x^2+\dfrac{5}{2}e^2-2$.

Do đó: $F(1)=\dfrac{5}{2}e^2-\dfrac{9}{2}$

d) Ta có $F(x)=\int\dfrac{1+2x^2}{x}\mathrm{d}x=\int\left(\dfrac{1}{x}+2x\right)\mathrm{d}x=\ln|x|+x^2+C$.

Mà $F(-1)=3\Leftrightarrow\ln|-1|+(-1)^2+C=3\Leftrightarrow C=2$ nên $F(x)=\ln|x|+x^2+2$.

Do đó: $F(1)=\ln|1|+1^2+2=3$

e) Ta có $F(x)=\int\frac{3x}{\sqrt[3]{x^2}}\mathrm{d}x=3\int x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x=3.\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+C=\frac{9}{4}x\sqrt[3]{x}+C$

Mà $F(1)=0\Rightarrow\frac{9}{4}1.\sqrt[3]{1}+C=0\Leftrightarrow C=-\frac{9}{4}$

Nên $F(x)=\frac{9}{4}x\sqrt[3]{x}-\frac{9}{4}$

Do đó: $F(0)=-\frac{9}{4}$

f) Ta có $F(x)=\int\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^4}}\mathrm{d}x=\int x^{\frac{1}{6}}\mathrm{d}x=\frac{x^{\frac{1}{6}+1}}{\frac{1}{6}+1}+C=\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}+C$

Mà $F(0)=2\Rightarrow C=2$

Nên $F(x)=\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}+2$

Do đó: $F(1)=\frac{6}{7}+2=\frac{20}{7}$

g) Ta có

$F(x)=\int\left(3x^3-2\sqrt{x^5}\right)\mathrm{d}x=\int 3x^3\mathrm{d}x-\int 2\sqrt{x^5}\mathrm{d}x=3\int x^3-2\int x^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x=3.\frac{x^{3+1}}{3+1}-2.\frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1}+C=\frac{3}{4}x^4-\frac{4}{7}x^3\sqrt{x}+C$

Mà $F(1)=0\Rightarrow\frac{3}{4}-\frac{4}{7}+C=0\Leftrightarrow C=-\frac{5}{28}$

Nên $F(x)=\frac{3}{4}x^4-\frac{4}{7}x^3\sqrt{x}-\frac{5}{28}$

Do đó: $F(0)=-\frac{5}{28}$

h) Ta có $F(x)=\int\left(\frac{2026}{x^5}+2\sqrt[4]{x}\right)\mathrm{d}x=2026\int\frac{1}{x^5}\mathrm{d}x+2\int\sqrt[4]{x}\mathrm{d}x=2026\int x^{-5}\mathrm{d}x+2\int x^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}x$

$=2026\frac{x^{-5+1}}{-5+1}+2\frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1}+C=-\frac{1013}{2x^4}+\frac{8}{5}x\sqrt[4]{x}+C$

Mà $F(0)=1\Rightarrow C=1$

Nên $F(x)=-\frac{1013}{2x^4}+\frac{8}{5}x\sqrt[4]{x}+1$

Do đó: $F(1)=-\frac{1013}{2}+\frac{8}{5}+1=-\frac{5039}{10}$

Bài 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=6x^2-2, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=1$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(2)=0$. Tính $F(4)$.

Lời giải

Ta có: $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int(6x^2-2)\mathrm{d}x=2x^3-2x+C$.

Suy ra $f(x)=2x^3-2x+C$.

Theo bài ra ta có $f(0)=1\Rightarrow C=1 \Rightarrow f(x)=2x^3-2x+1$.

Khi đó: $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int(2x^3-2x+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^4-x^2+x+C'$.

Mà $F(2)=0\Rightarrow 6+C'=0\Rightarrow C'=-6$ suy ra $F(x)=\frac{1}{2}x^4-x^2+x-6\Rightarrow F(4)=110$.

Vậy $F(4)=110$.

Bài 8. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\frac{3x^3+1}{x}$. Khi đó hãy tính giá trị biểu thức $f(-3)+f(3)$ biết $f(1)=2, f(-1)=3$.

Lời giải

$$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{3x^3+1}{x}\mathrm{d}x=\int\left(3x^2+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=x^3+\ln|x|+C=\begin{cases}x^3+\ln x+C_1 & \text{khi } x>0\\ x^3+\ln(-x)+C_2 & \text{khi } x<0\end{cases}.$$

$f(1)=1+C_1=2\Rightarrow C_1=1$; $f(-1)=-1+C_2=3\Rightarrow C_2=4$.

Suy ra $f(x)=\begin{cases}x^3+\ln x+1 & \text{khi } x>0\\ x^3+\ln(-x)+4 & \text{khi } x<0\end{cases}$ nên $f(-3)+f(3)=2\ln 3+5$.

Bài 9. Tìm hàm số $y=f(x)$ biết $f'(x)=3x^2+2x-m+1$, $f(2)=1$ và đồ thị của hàm số $y=f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -5.

Lời giải

Ta có $f(x)=\int(3x^2+2x-m+1)\mathrm{d}x=x^3+x^2+(1-m)x+C$

Theo đề bài, ta có $\begin{cases}f(2)=1\\ f(0)=-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2(1-m)+C+12=1\\ C=-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=4\\ C=-5\end{cases}$

Vậy $f(x)=x^3+x^2-3x-5$

Bài 10. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{khi } x\geq 1\\ 3x^2-2 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0)=2$. Tính $F(-1)+2F(2)$.

Lời giải

Ta có: $\int(2x-1)\mathrm{d}x=x^2-x+C_1$; $\int(3x^2-2)\mathrm{d}x=x^3-2x+C_2$

Suy ra $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}x^2-x+C_1 & \text{khi } x\ge 1\\ x^3-2x+C_2 & \text{khi } x<1\end{cases}$ mà ta có $F(0)=2\Rightarrow C_2=2$.

Mặt khác hàm số F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ nên $y=F(x)$ liên tục tại $x=1$

Suy ra: $\lim\limits_{x\to 1^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)\Rightarrow C_1=1$

Khi đó, ta có $F(x)=\begin{cases}x^2-x+1 & \text{khi } x\ge 1\\ x^3-2x+2 & \text{khi } x<1\end{cases}$ suy ra $\begin{cases}F(-1)=3\\ F(2)=3\end{cases}$.

Vậy $F(-1)+2F(2)=9$.

Bài 11. Tìm giá trị của tham số m biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}+m-1$ thỏa mãn $F(0)=0$ và $F(3)=7$.

Lời giải

Ta có:

$$F(x)=\int\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+m-1\right)\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)\mathrm{d}x+\int(m-1)\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)\mathrm{d}(x+1)+\int(m-1)\mathrm{d}x$$
$$=\sqrt{x+1}+(m-1)x+C.$$

Theo đề bài ta có: $\begin{cases}F(0)=0\\ F(3)=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C+1=0\\ C+3m=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C=-1\\ m=3\end{cases}$.

Vậy $m=3$ khi đó $F(x)=\sqrt{x+1}+2x-1$.

DẠNG 2
NGUYÊN HÀM HÀM LƯỢNG GIÁC

1. Bảng nguyên hàm hàm số lượng giác

Nguyên hàm hàm số lượng giác	
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos(ax+b)dx = \int \cos(ax+b).\frac{(ax+b)'}{a}dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin(ax+b)dx = \int \sin(ax+b).\frac{(ax+b)'}{a}dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}.\frac{(ax+b)'}{a}dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = \int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}.\frac{(ax+b)'}{a}dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b)+C$

Chú ý: Cần thuộc các công thức lượng giác sau:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$
- $\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$
- $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$
- $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$
- $\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sin x \Rightarrow \sin^2\frac{x}{2}.\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{4}\sin^2 x$
- $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$
- $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$
- $\sin a\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a-b)+\sin(a+b)\right]$
- $\sin a\sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$
- $\cos a\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)+\cos(a+b)\right]$

Bài 1. Tìm:

a) $\int(\sin x+3\cos x)dx$ b) $\int\cos^2\frac{x}{2}dx$ c) $\int(\sin x+\cos x)^2dx$

d) $\int 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$ e) $\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$ f) $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$

Lời giải

a) $\int(\sin x+3\cos x)dx=\int\sin xdx+3\int\cos xdx=-\cos x+3\sin x+C$.

b) $\int\cos^2\frac{x}{2}dx=\int\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos x)dx=\frac{1}{2}(x+\sin x)+C$.

c) $\int(\sin x+\cos x)^2dx=\int(\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x)dx=\int(1+\sin 2x)dx=x-\frac{1}{2}\cos 2x+C$.

d) $\int 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx=\int\sin xdx=-\cos x+C$

e) $\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=\tan x-\cot x+C$.

f) $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx=\int\left(\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx=\int(1+\sin x)\,dx=\int 1\,dx+\int\sin x\,dx$

$=x-\cos x+C$

Bài 2. Tìm:

a) $\int(4x+3\cos x)\,dx$ b) $\int\left(2x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$ c) $\int\left(2026x-2\sin^2\frac{x}{2}\right)dx$

d) $\int\left(\frac{1}{3}x^2-2x+\frac{1}{2}\tan^2 x\right)dx$ e) $\int x\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x}\right)dx$ f) $\int x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{\tan^2 x}{x^2}\right)dx$

Lời giải

a) $\int(4x+3\cos x)\,dx=\frac{4x^2}{2}+3\sin x+C=2x^2+3\sin x+C$.

b) $\int\left(2x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=x^2-\cot x+C$.

c) $\int\left(2026x+2\sin^2\frac{x}{2}\right)dx=\int(2025x+1-\cos x)dx=1013x^2+x-\sin x+C$

d) $\int\left(\frac{1}{3}x^2-2x+\frac{1}{2}\tan^2 x\right)dx=\int\left(\frac{1}{3}x^2-2x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=\frac{1}{9}x^3-x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}.\tan x+C$

e) $\int x\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x}\right)dx=\int\left(x-\sin^2\frac{x}{2}\right)dx=\int\left(x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x\right)dx=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin x+C$

f) $\int x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{\tan^2 x}{x^2}\right)dx=\int\left(x^2+x-\tan^2 x\right)dx=\int\left(x^2+x+1-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x-\tan x+C$

Bài 3. Tìm:

a) $\int\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}.\cos^2\frac{x}{2}}dx$

b) $\int x\left(2027-\frac{1}{x^3}+\frac{\sin x}{x}\right)dx$

c) $\int x^3\left[\frac{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}{x^3}-2x+\frac{1}{x^{2026}}\right]dx$

d) $\int x^2\left(\frac{1}{x^2\sin^2\frac{x}{2}.\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{3}{x^3}-\frac{4}{x^4}\right)dx$

Lời giải

a) $\int\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}.\cos^2\frac{x}{2}}dx=\int\frac{1}{\frac{1}{4}\sin^2 x}dx=4\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-4\cot x+C$

b) $\int x\left(2027-\frac{1}{x^3}+\frac{\sin x}{x}\right)dx=\int\left(2027x-\frac{1}{x^2}+\sin x\right)dx=\frac{2027}{2}x^2+\frac{1}{x}-\cos x+C$

c) $\int x^3\left[\frac{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}{x^3}-2x+\frac{1}{x^{2024}}\right]dx=\int x^3\left(\frac{1+\sin x}{x^3}-2x+\frac{1}{x^{2026}}\right)dx=\int\left(1+\sin x-2x^4+\frac{1}{x^{2023}}\right)dx$

$=x-\cos x-\frac{2}{5}x^5-\frac{1}{2022x^{2022}}+C$

d) $\int x^2\left(\frac{1}{x^2\sin^2\frac{x}{2}.\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{3}{x^3}-\frac{4}{x^4}\right)dx=\int x^2\left(\frac{1}{\frac{1}{4}x^2\sin^2 x}+\frac{3}{x^3}-\frac{4}{x^4}\right)dx=\int\left(\frac{1}{\frac{1}{4}\sin^2 x}+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}\right)dx$

$=4\tan x+3\ln|x|+\frac{4}{x}+C$

Bài 4. Tìm:

a) $\int\cos^2 x dx$

b) $\int\left(\cos^2 2x-\sin^2 2x\right)dx$

c) $\int\left(2-\frac{1}{\sin^2 2x}\right)dx$

d) $\int\left(\sin^2 4x-3x\right)dx$

e) $\int\left(\sin^2 3x-\cos^2 4x\right)dx$

f) $\int\left(1-2x+\tan^2 3x\right)dx$

g) $\int\sin x.\cos 2x dx$

h) $\int\sin 2x.\sin 4x dx$

i) $\int\left(x-\cos 3x.\cos 5x\right)dx$

Lời giải

a) $\int\cos^2 x dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2x dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\frac{(2x)'}{2}\cos 2x dx$

$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$

b) $\int\left(\cos^2 2x-\sin^2 2x\right)dx=\int\cos 4xdx=\int\frac{(4x)'}{4}.\cos 4xdx=\frac{1}{4}\sin 4x+C$

c) $\int\left(2-\frac{1}{\sin^2 2x}\right)\mathrm{d}x=2\int\mathrm{d}x-\int\frac{(2x)'}{2}\frac{1}{\sin^2 2x}\mathrm{d}x=2x+\frac{1}{2}\cot 2x+C$

d) $\int\left(\sin^2 4x-3x\right)dx=\int\sin^2 4xdx-\int 3xdx=\int\frac{1-\cos 8x}{2}dx-\int 3xdx$

$=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 8xdx-\int 3xdx=\frac{1}{2}\int dx-\int 3xdx-\frac{1}{2}\int\frac{(8x)'}{8}.\cos 8xdx=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{16}\sin 8x+C$

e) $\int\left(\sin^2 3x-\cos^2 4x\right)dx$

f) $\int\left(1-2x+\tan^2 3x\right)\mathrm{d}x$

g) $\int\sin x.\cos 2xdx=\int\frac{1}{2}\left[\sin\left(-x\right)+\sin 3x\right]dx=-\frac{1}{2}\int\sin xdx+\frac{1}{2}\int\sin 3xdx$

$=-\frac{1}{2}\int\sin xdx+\frac{1}{2}\int\frac{(3x)'}{3}\sin 3xdx=\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{6}\cos 3x+C$

h) $\int\sin 2x.\sin 4xdx=\int\frac{1}{2}\left[\cos\left(-2x\right)-\cos 4x\right]dx=\frac{1}{2}\int\cos 2xdx-\frac{1}{2}\int\cos 4xdx$

$=\frac{1}{2}\int\frac{(2x)'}{2}.\cos 2xdx-\frac{1}{2}\int\frac{(4x)'}{4}.\cos 4xdx=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x+C$

i) $\int\left(x-\cos 3x.\cos 5x\right)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}x-\int\cos 3x.\cos 5x\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}x-\int\frac{1}{2}\left[\cos\left(-2x\right)+\cos 8x\right]\mathrm{d}x$

$=\int x\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\cos 2x\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\cos 8x\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{(2x)'}{2}.\cos 2x\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{(8x)'}{8}.\cos 8x\mathrm{d}x$

$=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x+C$

Bài 5. Cho $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của:

a) $f\left(x\right)=3-5\cos x$. Biết $F\left(\pi\right)=2$, tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

b) $f\left(x\right)=\sin x+1$. Biết $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$, tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

c) $f\left(x\right)=2024-\sin^2\frac{x}{2}$. Biết $F\left(2\pi\right)=0$, tính $F\left(0\right)$.

d) $f\left(x\right)=\sin^2\frac{x}{4}.\cos^2\frac{x}{4}$. Biết $F\left(\pi\right)=1$, tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

a) Ta có $F\left(x\right)=\int\left(3-5\cos x\right)\mathrm{d}x=3x-5\sin x+C$.

Mà $F(\pi)=2\Leftrightarrow 3\pi-5\sin\pi+C=2\Leftrightarrow C=2-3\pi$ nên $F(x)=3x-5\sin x+2-3\pi$.

Do đó: $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{3\pi}{2}-3$

b) Ta có $F(x)=\int(\sin x+1)\,dx=-\cos x+x+C$.

Mà $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=0\Leftrightarrow-\cos\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+C=0\Leftrightarrow C=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$ nên $F(x)=-\cos x+x+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$.

Do đó: $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}$

c) Ta có

$$F(x)=\int\left(2024-\sin^2\frac{x}{2}\right)dx=\int\left(2024-\frac{1-\cos x}{2}\right)dx=\int\left(\frac{4047}{2}-\frac{1}{2}\cos x\right)dx=\frac{4047x}{2}-\frac{1}{2}\sin x+C.$$

Mà $F(2\pi)=0\Leftrightarrow\frac{4047.2\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin 2\pi+C=0\Leftrightarrow C=-4047\pi$ nên $F(x)=\frac{4047x}{2}-\frac{1}{2}\sin x-4047\pi$.

Do đó: $F(0)=-4047\pi$

d) Ta có $F(x)=\int\sin^2\frac{x}{4}.\cos^2\frac{x}{4}\,dx=\frac{1}{4}\int\sin^2\frac{x}{2}\,dx=\frac{1}{4}\int\frac{1-\cos x}{2}\,dx=\frac{1}{8}x-\frac{1}{8}\sin x+C$.

Mà $F(\pi)=1\Leftrightarrow\frac{1}{8}\pi-\frac{1}{8}\sin\pi+C=1\Leftrightarrow C=1-\frac{1}{8}\pi$ nên $F(x)=\frac{1}{8}x-\frac{1}{8}\sin x+1-\frac{1}{8}\pi$.

Do đó: $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{7}{8}-\frac{16}{8}\pi$

Bài 6. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn:

a) $f'(x)=2-5\sin x$ và $f(0)=10$. Tìm hàm $f(x)$.

b) $f'(x)=3x^2-2\sin^2 x$ và $f(0)=\frac{\pi}{2}$. Tìm hàm $f(x)$.

Lời giải

a) Ta có $f'(x)=2-5\sin x$

$$\Rightarrow f(x)=\int(2-5\sin x)\,dx$$
$$\Leftrightarrow f(x)=2x+5\cos x+C.$$

Mà $f(0)=10\Rightarrow C=5$ nên $f(x)=2x+5\cos x+5$.

b) Ta có $f'(x)=3x^2-2\sin^2 x$

$\Rightarrow f(x)=\int\left(3x^2-2\sin^2 x\right)dx$

$\Leftrightarrow f(x)=\int\left(3x^2-2.\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)dx$

$\Leftrightarrow f(x)=\int\left(3x^2-1+\cos 2x\right)dx$

$\Leftrightarrow f(x)=x^3-x+\dfrac{1}{2}\sin 2x+C$

Mà $f(0)=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow C=\dfrac{\pi}{2}$ nên $f(x)=x^3-x+\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{\pi}{2}$.

Bài 7. Cho $F(x)=\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\tan x$. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $g(x)=\dfrac{\tan x}{f'(x)}$.

Lời giải

Ta có: $F'(x)=-2\sin 2x=-4\sin x\cos x$

Vì $F(x)=\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\tan x$ nên:

$F'(x)=f(x).\tan x\Leftrightarrow -4\sin x\cos x=f(x).\tan x\Leftrightarrow f(x)=-4\cos^2 x$

Suy ra $f'(x)=8\sin x\cos x$

Vậy $\int g(x)dx=\int\dfrac{\tan x}{f'(x)}dx=\int\dfrac{\tan x}{8\sin x\cos x}dx=\int\dfrac{1}{8\cos^2 x}dx=\dfrac{1}{8}\tan x+C$

DẠNG 3
NGUYÊN HÀM HÀM MŨ

Nguyên hàm hàm số mũ	
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{ax+b} dx = \int e^{ax+b}.\frac{(ax+b)'}{a} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ \ (0 < a \neq 1)$	$\int a^{\alpha x+\beta} dx = \int a^{\alpha x+\beta}.\frac{(\alpha x+\beta)'}{a} dx = \frac{1}{\alpha}.\frac{a^{\alpha x+\beta}}{\ln a} + C \ \ (0 < a \neq 1)$

Bài 1. Tìm:

a) $\int \left(2027^x + 1\right) dx$ b) $\int \left(2e^x - 3^x\right) dx$ c) $\int \left(2.5^x - \frac{1}{3}.7^x\right) dx$

d) $\int \left(e^{2x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$ e) $\int 8^x.2^{1-2x} dx$ f) $\int \left(9^x - 2 + 9^{-x}\right) dx$

Lời giải

a) $\int \left(2027^x + 1\right) dx = \frac{2027^x}{\ln 2027} + x + C$

b) $\int \left(2e^x - 3^x\right) dx = 2e^x - \frac{3^x}{\ln 3} + C$.

c) $\int \left(2.5^x - \frac{1}{3}.7^x\right) dx = \int 2.5^x dx - \int \frac{1}{3}.7^x dx = 2.\frac{5^x}{\ln 5} - \frac{7^x}{3\ln 7} + C$.

d) $\int \left(e^{2x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{x} + C$

e) $\int 8^x.2^{1-2x} dx = \int 2^{3x}.2^{1-2x} dx = \int 2.2^x dx = 2.\frac{2^x}{\ln 2} + C = \frac{2^{x+1}}{\ln 2} + C$

f) $\int \left(9^x - 2 + 9^{-x}\right) dx = \frac{9^x}{\ln 9} - 2x - \frac{1}{9^x \ln 9} + C = \frac{9^x}{2\ln 3} - \frac{1}{2.9^x \ln 3} - 2x + C$

Bài 2. Tìm:

a) $\int 2^{3x}.3^{2x} dx$ b) $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx$ c) $\int \frac{e^{2x} - e^x + 2026}{e^x} dx$

d) $\int \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x}\right)^2 dx$ e) $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx$ f) $\int e^x \left(2026 - \frac{2027e^{-x}}{x^5}\right) dx$

Lời giải

a) $\int 2^{3x}.3^{2x} dx = \int 8^x.9^x dx = \int 72^x dx = \frac{72^x}{\ln 72} + C$.

b) $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx=\int 2.\left(\frac{1}{5}\right)^x dx-\int \frac{1}{5}.\left(\frac{1}{2}\right)^x dx=2.\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\ln\frac{1}{5}}-\frac{1}{5}.\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}}+C=\frac{-2}{5^x\ln 5}+\frac{1}{5.2^x\ln 2}+C.$

c) $\int \frac{e^{2x}-e^x+2026}{e^x}dx=\int\left(e^x-1+\frac{2026}{e^x}\right)dx=e^x-x-\frac{2026}{e^x}+C.$

d) $\int\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x}\right)^2 dx=\int\frac{e^{4x}-2e^{2x}+1}{e^{2x}}dx=\int\left(e^{2x}-2+\frac{1}{e^{2x}}\right)dx=\frac{1}{2}e^{2x}-2x-\frac{1}{2e^{2x}}+C.$

e) $\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx=\int\left(e^{2x}-e^x+1\right)dx=\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+C.$

e) $\int e^x\left(2026-\frac{2027e^{-x}}{x^5}\right)dx=\int\left(2026e^x-\frac{2027}{x^5}\right)dx=2026e^x+\frac{2027}{4x^4}+C.$

Bài 3. Tìm:

a) $\int\left(2^x+3^x\right)dx$ b) $\int e^{3x+2026}dx$ c) $\int 3^{x+2}.2^{2x+1}dx$

d) $\int\left(3^x+5^x\right)^2 dx$ e) $\int\left(e^x+e^{-x}\right)^2 dx$ f) $\int\frac{e^{2x}-1}{1-e^{-x}}dx$

Lời giải

a) $\int\left(2^x+3^x\right)dx=\int 2^x dx+\int 3^x dx=\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{3^x}{\ln 3}+C$

b) $\int e^{3x+2026}dx=\int e^{2026}.\left(e^3\right)^x dx=e^{2026}.\frac{\left(e^3\right)^x}{\ln e^3}+C=\frac{1}{3}e^{3x+2026}+C$

c) $\int 3^{x+2}.2^{2x+1}dx=\int 3^2.3^x.2.4^x dx=18\int 12^x dx=18\frac{12^x}{\ln 12}+C=18\frac{12^x}{2\ln 2+\ln 3}+C$

d) $\int\left(3^x+5^x\right)^2 dx=\int\left(9^x+2.15^x+25^x\right)dx=\frac{9^x}{\ln 9}+\frac{2.15^x}{\ln 15}+\frac{25^x}{\ln 25}+C=\frac{9^x}{2\ln 3}+\frac{2.15^x}{\ln 5+\ln 3}+\frac{25^x}{2\ln 5}+C$

e) $\int\left(e^x+e^{-x}\right)^2 dx=\int\left(e^{2x}+2+e^{-2x}\right)dx=\frac{1}{2}e^{2x}+2x-\frac{1}{2}e^{-2x}+C=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2e^{2x}}+2x+C$

f) $\int\frac{e^{2x}-1}{1-e^{-x}}dx=\int\frac{\left(e^x-1\right)\left(e^x+1\right)}{1-\frac{1}{e^x}}dx=\int\frac{e^x\left(e^x-1\right)\left(e^x+1\right)}{e^x-1}dx=\int e^x\left(e^x+1\right)dx=\int\left(e^{2x}+e^x\right)dx$

$=\frac{1}{2}e^{2x}+e^x+C$

Bài 8. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết:

a) $f(x)=2^x$ và $F(e)=1$. Tìm hàm $F(x)$.

b) $f(x)=e^{2x}$ và $F(0)=2025$. Tính $F(1)$

c) $f(x)=e^x\left(e^x-1\right)$ và $F(\ln 2)=2026$. Tính $F(0)$.

d) $f(x)=e^{3x}.3^x$ và $F(\mathrm{l})=0$. Tìm hàm $F(x)$.

Lời giải

a) Ta có: $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int 2^x\mathrm{d}x=\dfrac{2^x}{\ln 2}+C$.

Mà $F(e)=1\Leftrightarrow\dfrac{2}{\ln 2}+C=1\Leftrightarrow C=1-\dfrac{2}{\ln 2}$ nên $F(x)=\dfrac{2^x}{\ln 2}+1-\dfrac{2}{\ln 2}$.

b) Ta có: $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\ln \mathrm{e}^2}+C=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}+C$.

Mà $F(0)=2025\Leftrightarrow\dfrac{\mathrm{e}^{2.0}}{2}+C=2025\Leftrightarrow C=\dfrac{4049}{2}$ nên $F(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}+\dfrac{4049}{2}$.

Do đó $F(1)=\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}+\dfrac{4049}{2}=\dfrac{\mathrm{e}^2+4049}{2}$

c) Ta có: $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int e^x\left(e^x-1\right)\mathrm{d}x=\int\left(e^{2x}-e^x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}e^{2x}-e^x+C$.

Mà $F(\ln 2)=2026\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}e^{2\ln 2}-e^{\ln 2}+C=2026\Leftrightarrow C=2026$ nên $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}-e^x+2026$.

Do đó $F(0)=\dfrac{1}{2}-1+2026=\dfrac{4051}{2}$

d) Ta có: $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int e^{3x}.3^x\mathrm{d}x=\int\left(3e^3\right)^x\mathrm{d}x=\dfrac{\left(3e^3\right)^x}{\ln\left(3e^3\right)}+C=\dfrac{3^xe^{3x}}{3+\ln 3}+C$.

Mà $F(\mathrm{l})=0\Leftrightarrow\dfrac{3e^3}{3+\ln 3}+C=0\Leftrightarrow C=-\dfrac{3e^3}{3+\ln 3}$ nên $F(x)=\dfrac{3^xe^{3x}}{3+\ln 3}-\dfrac{3e^3}{3+\ln 3}=\dfrac{3^xe^{3x}-3e^3}{3+\ln 3}$.

Bài 9. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn:

a) $f'(x)=2026^x+\mathrm{e}^{-x}$ và $f(0)=2$. Tìm hàm $f(x)$.

b) $f'(x)=2\mathrm{e}^{2x}+1$ và $f(0)=\dfrac{1}{\ln 2026}$. Tìm hàm $f(x)$.

c) $f'(x)=\dfrac{1}{3^x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ và $f(1)=-\dfrac{1}{3\ln 3}$. Tính $f(0)$.

d) $f'(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{3x}}+\dfrac{1}{5^{2x+1}}$ và $f(0)=-\dfrac{1}{10\ln 5}$. Tìm hàm $f(x)$.

Lời giải

a) Ta có: $f'(x)=2026^x+\mathrm{e}^{-x}$

$\Rightarrow f(x)=\int\left(2026^x+\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{2026^x}{\ln 2026}-\mathrm{e}^{-x}+C$

Mà: $f(0)=\dfrac{1}{\ln 2026}\Rightarrow\dfrac{1}{\ln 2026}=\dfrac{1}{\ln 2026}-1+C\Rightarrow C=1$

Vậy: $f(x)=\dfrac{2026^x}{\ln 2026}-\mathrm{e}^{-x}+1$

b) Ta có: $f'(x)=2\mathrm{e}^{2x}+1$

$\Rightarrow f(x)=\int\left(2\mathrm{e}^{2x}+1\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow f(x)=\mathrm{e}^{2x}+x+C$.

Mà: $f(0)=2\Rightarrow 1+C=2\Leftrightarrow C=1.$

Vậy: $f(x)=\mathrm{e}^{2x}+x+1.$

c) Ta có: $f'(x)=\dfrac{1}{3^x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$

$\Rightarrow f(x)=\int\left(\dfrac{1}{3^x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow f(x)=\int\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^x-\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^x\right]\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln\frac{1}{3}}+\dfrac{\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^x}{\ln\frac{1}{\mathrm{e}}}+C$.

$\Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{1}{3^x\ln 3}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}+C$

Mà: $f(1)=-\dfrac{1}{3\ln 3}\Rightarrow C=\dfrac{1}{e}.$

Nên $f(x)=-\dfrac{1}{3^x\ln 3}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}+\dfrac{1}{e}.$

Vậy: $f(0)=-\dfrac{1}{3\ln 3}-1+\dfrac{1}{e}$

d) Ta có: $f'(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{3x}}+\dfrac{1}{5^{2x+1}}$

$\Rightarrow f(x)=\int\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{3x}}+\dfrac{1}{5^{2x+1}}\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow f(x)=\int\left(\mathrm{e}^{-3x}+5^{-2x-1}\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x}-\dfrac{1}{2}.\dfrac{5^{-2x-1}}{\ln 5}+C$.

$\Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{1}{3\mathrm{e}^{3x}}-\dfrac{1}{2.5^{2x+1}\ln 5}+C$

Mà: $f(0)=-\dfrac{1}{10\ln 5}\Rightarrow C=\dfrac{1}{3}.$

Vậy: $f(x)=-\dfrac{1}{3\mathrm{e}^{3x}}-\dfrac{1}{2.5^{2x+1}\ln 5}+\dfrac{1}{3}.$

DẠNG 4
NGUYÊN HÀM CỦA HÀM ẨN

- $\int f'(x)dx = f(x)+C$
- $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \left[\ln\left(f(x)\right)\right]'$
- $-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)} = \left[\dfrac{1}{f(x)}\right]'$
- $-\dfrac{f'(x)}{f^n(x)} = \left[\dfrac{1}{(n-1)\left[f(x)\right]^{n-1}}\right]'$
- $n.f'(x).f(x) = \left[f(x)^n\right]'$
- $\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \left[2\sqrt{f(x)}\right]'$
- $f'(x).g(x)+f(x).g'(x) = \left[f(x).g(x)\right]'$
- $\dfrac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{g^2(x)} = \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'$
- $f'(x)+f(x)=h(x)$

Nhân hai vế với e^x ta được $e^x\cdot f'(x)+e^x\cdot f(x)=e^x\cdot h(x)\Leftrightarrow\left[e^x\cdot f(x)\right]'=e^x\cdot h(x)$

- $f'(x)-f(x)=h(x)$

Nhân hai vế với e^{-x} ta được $e^{-x}\cdot f'(x)-e^{-x}\cdot f(x)=e^{-x}\cdot h(x)\Leftrightarrow\left[e^{-x}\cdot f(x)\right]'=e^{-x}\cdot h(x)$

Bài 1. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn: $f'(x).f(x)=x^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=\sqrt{2026}$. Tính $f^2(1)$.

Lời giải

Ta có:

$f'(x).f(x)=x^2$

$\Leftrightarrow\left[\dfrac{f^2(x)}{2}\right]'=x^2$

$\Rightarrow\dfrac{f^2(x)}{2}=\int x^2dx$

$\Rightarrow \frac{f^2(x)}{2}=\frac{x^3}{3}+C$.

Do $f(0)=\sqrt{2026}$ nên: $\frac{2026}{2}=C\Rightarrow C=1013$

$\Rightarrow \frac{f^2(x)}{2}=\frac{x^3}{3}+1013$

Vậy $\frac{f^2(1)}{2}=\frac{1}{3}+1013\Rightarrow f^2(1)=\frac{6080}{3}$.

Bài 2. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(\ln 2)=0$ và $f'(x)=\frac{e^x}{f(x)}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. $f(x)\neq 0$. Tính $f^2(0)$.

Lời giải

Ta có:

$f'(x)=\frac{e^x}{f(x)}$

$\Leftrightarrow f'(x)f(x)=e^x$

$\Leftrightarrow \left[\frac{f^2(x)}{2}\right]'=e^x$

$\Rightarrow \frac{f^2(x)}{2}=\int e^x dx$

$\Rightarrow \frac{f^2(x)}{2}=e^x+C$.

Do $f(\ln 2)=0$ nên: $0=e^{\ln 2}+C\Rightarrow C=-2$

$\Rightarrow \frac{f^2(x)}{2}=e^x-2$

Vậy $\frac{f^2(0)}{2}=1-2\Rightarrow f^2(0)=-2$.

Bài 3. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(e)=1$ và $xf'(x)=\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f(x)\neq 0$. Tính $f(e^3)$.

Lời giải

$xf'(x)=\left[f(x)\right]^2$

$\Rightarrow \frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=\frac{1}{x}$

$\Rightarrow \left(-\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{1}{x}$

$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -\int \frac{1}{x}dx$

$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -\ln|x| + C$

Mà $f(e) = 1 \Rightarrow 1 = -\ln|e| + C \Rightarrow C = 2$

$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -\ln|x| + 2$

Do đó: $\frac{1}{f(e^3)} = -\ln|e^3| + 2 \Rightarrow f(e^3) = -1$

Bài 4. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$; $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(3) = \frac{4}{9}$ và $[f'(x)]^2 = x.f(x)$. Tính $f(1)$.

Lời giải

Ta có với $\forall x \in (0;+\infty)$ thì $y = f(x) > 0$; $x + 1 > 0$.

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên $f'(x) \geq 0, \forall x \in (0;+\infty)$.

Do đó

$[f'(x)]^2 = xf(x)$

$\Rightarrow f'(x) = \sqrt{xf(x)}$

$\Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \sqrt{x}$

$\Rightarrow 2\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \sqrt{x}$

$\Rightarrow \left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{1}{2}\sqrt{x}$

$\Rightarrow \sqrt{f(x)} = \frac{1}{2}\int \sqrt{x}dx$

$\Rightarrow \sqrt{f(x)} = \frac{1}{3}\sqrt{x^3} + C$.

Vì $f(3) = \frac{4}{9}$ nên $C = \frac{2-3\sqrt{3}}{3}$.

$\Rightarrow \sqrt{f(x)}=\frac{1}{3}\sqrt{x^3}+\frac{2-3\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow f(x)=\left(\frac{1}{3}\sqrt{x^3}+\frac{2-3\sqrt{3}}{3}\right)^2$

suy ra $f(1)=4-2\sqrt{3}$.

Bài 5. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0)=1-\ln 2$ và $e^x f'(x)=2^x\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Biết $f(1)=\frac{e}{2}(a+b\ln 2)$ với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a-b$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có: $f'(x)=\frac{2^x}{e^x}\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in(1;2]$.

Do đó $f(x)\geq f(1)=1>0$ với mọi $x\in[1;2]$.

Xét với mọi $x\in[1;2]$ ta có:

$e^x f'(x)=2^x\left[f(x)\right]^2$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{2^x}{e^x}\left[f(x)\right]^2$

$\Rightarrow \frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=\left(\frac{2}{e}\right)^x$

$\Rightarrow -\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=\left(\frac{2}{e}\right)^x$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)'=-\left(\frac{2}{e}\right)^x$

$\Rightarrow \frac{1}{f(x)}=-\int\left(\frac{2}{e}\right)^x dx$

$\Rightarrow \frac{1}{f(x)}=-\frac{\left(\frac{2}{e}\right)^x}{\ln\frac{2}{e}}+C$

$\Rightarrow \frac{1}{f(x)}=\frac{\left(\frac{2}{e}\right)^x}{1-\ln 2}+C$

Mà $f(0)=1-\ln 2\Rightarrow C=0$.

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)}=\frac{\left(\frac{2}{e}\right)^x}{1-\ln 2}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1-\ln 2}{\left(\frac{2}{e}\right)^x}$$

Vậy $f(1)=\frac{e}{2}(1-\ln 2)$.

$\Rightarrow a=1; b=-1 \Rightarrow a-b=2$

Bài 6. Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=1$, $f(x)=f'(x).\sqrt{3x}$, với mọi $x>0$. Tính $f(4)$.

Lời giải

Ta có :

$$f(x)=f'(x).\sqrt{3x}$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{3x}}$$

$$\Rightarrow \ln f(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \ln f(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x}+C$$

$$\Rightarrow f(x)=e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x}+C}$$

Mà $f(1)=1$ nên $1=e^{\frac{2}{\sqrt{3}}+C} \Rightarrow C=-\frac{2}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow f(x)=e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

Suy ra $f(4)=e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{4}-\frac{2}{\sqrt{3}}}=e^{\frac{2}{\sqrt{3}}}$.

Bài 7. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(x)>0, \forall x>0$ và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x)-\frac{\sqrt{f(x)}}{x^3}=0, \forall x>0$ và $f(1)=-\frac{1}{2}$. Biết $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a+b$.

Lời giải

Ta có

$$f'(x)-\frac{\sqrt{f(x)}}{x^3}=0$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{\sqrt{f(x)}}{x^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=\frac{1}{2x^3}$$

$$\Leftrightarrow \left[\sqrt{f(x)}\right]'=\frac{1}{3x^3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{f(x)}=\int\frac{1}{3x^3}\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \sqrt{f(x)}=-\frac{1}{6x^2}+C$$

Theo giả thiết $f(1)=4$ nên $\sqrt{4}=-\frac{1}{6}+C\Rightarrow C=\frac{13}{6}$

$$\Rightarrow \sqrt{f\left(\frac{1}{2}\right)}=-\frac{4}{6}+\frac{13}{6}=\frac{9}{6}\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{81}{36}$$

$$\Rightarrow a=81;b=36\Rightarrow a+b=117$$

Bài 8. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[xf'(x)\right]^2+1=x^2\left[1-f(x).f''(x)\right]$ với mọi x dương. Biết $f(1)=f'(1)=1$. Tính giá trị $f^2(4)$.

Lời giải

Ta có: $\left[xf'(x)\right]^2+1=x^2\left[1-f(x).f''(x)\right];\ x>0$

$$\Leftrightarrow x^2.\left[f'(x)\right]^2+1=x^2\left[1-f(x).f''(x)\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[f'(x)\right]^2+\frac{1}{x^2}=1-f(x).f''(x)$$

$$\Leftrightarrow \left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=1-\frac{1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \left[f(x).f'(x)\right]'=1-\frac{1}{x^2}$$

Do đó: $\int\left[f(x).f'(x)\right]'.\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right).\mathrm{d}x\Rightarrow f(x).f'(x)=x+\frac{1}{x}+C.$

Vì $f(1)=f'(1)=1\Rightarrow 1=2+C\Leftrightarrow C=-1.$

Nên $\int f(x).f'(x).\mathrm{d}x=\int\left(x+\frac{1}{x}-1\right).\mathrm{d}x\ \Leftrightarrow \int f(x).\mathrm{d}\left(f(x)\right)=\int\left(x+\frac{1}{x}-1\right).\mathrm{d}x$

$$\Rightarrow \frac{f^2(x)}{2}=\frac{x^2}{2}+\ln x-x+C.$$

Vì $f(1)=1\Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2}-1+C\Leftrightarrow C=1.$

Vậy $\frac{f^2(x)}{2}=\frac{x^2}{2}+\ln x-x+1\Rightarrow f^2(4)=10+4\ln 2$.

Bài 9. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(x+1)f'(x)+f(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2024$. Tính $f(2)$.

Lời giải

Ta có

$(x+1)f'(x)+f(x)=x$

$\Leftrightarrow (x+1)f'(x)+(x+1)'f(x)=x$

$\Leftrightarrow \left[(x+1)f(x)\right]'=x$

$\Rightarrow (x+1)f(x)=\int x dx$

$\Leftrightarrow (x+1)f(x)=\frac{1}{2}x^2+C$

Vì $f(0)=2024$ Nên $(0+1)f(0)=\frac{1}{2}.0+C\Rightarrow C=2024$

$\Rightarrow (x+1)f(x)=\frac{1}{2}x^2+2024$

$\Rightarrow (2+1)f(2)=\frac{1}{2}.2^2+2024$

$\Rightarrow f(2)=\frac{2026}{3}$

Bài 10. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)+2x.f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Tính $f(1)$.

Lời giải

Ta có

$f'(x)+2x.f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x^2}f'(x)+2x.\mathrm{e}^{x^2}.f(x)=1$

$\Leftrightarrow \left(\mathrm{e}^{x^2}.f(x)\right)'=1$

Suy ra $\int\left(\mathrm{e}^{x^2}.f(x)\right)'\mathrm{d}x=\int \mathrm{d}x$

$\Rightarrow \mathrm{e}^{x^2}.f(x)=x+C$

$\Rightarrow f(x)=\frac{x+C}{\mathrm{e}^{x^2}}$

Vì $f(0)=0\Rightarrow C=0$.

Do đó $f(x)=\frac{x}{\mathrm{e}^{x^2}}$.

Vậy $f(1)=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

Bài 11. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=x^3-2x,\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=1$.

Biết $f^2(2)=\frac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a-b$.

Lời giải

Ta có

$\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=x^3-2x$

$\Leftrightarrow\left[f(x).f'(x)\right]'=x^3-2x$

$\Rightarrow f(x).f'(x)=\int(x^3-2x)dx$

$\Rightarrow f(x).f'(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2+C$

Từ $f(0)=f'(0)=1$. Suy ra $C=1$.

Vậy $f(x).f'(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2+1$

Tiếp đến có:

$2f(x).f'(x)=\frac{1}{2}x^4-2x^2+2$

$\Leftrightarrow(f^2(x))'=\frac{1}{2}x^4-2x^2+2$

$\Rightarrow f^2(x)=\int\left(\frac{1}{2}x^4-2x^2+2\right)dx$

$\Rightarrow f^2(x)=\frac{1}{10}x^5-\frac{2}{3}x^3+2x+C$

Từ $f(0)=1$. Suy ra $C=1$.

Vậy $f^2(x)=\frac{1}{10}x^5-\frac{2}{3}x^3+2x+1$.

Do đó $f^2(2)=\frac{43}{15}$

$\Rightarrow a=43;b=15\Rightarrow a-b=28$

CHỦ ĐỀ 2
ỨNG DỤNG THỰC TIỄN CỦA NGUYÊN HÀM

DẠNG 1
ỨNG DỤNG NGUYÊN HÀM TRONG BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

Giả sử $v(t)$ là vận tốc của vật M tại thời điểm t và $s(t)$ là quãng đường vật đi được sau khoảng thời gian t tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Ta có mối liên hệ giữa $s(t)$ và $v(t)$ như sau:

- Đạo hàm của quãng đường là vận tốc: $s'(t)=v(t)$
- Nguyên hàm của vận tốc là quãng đường: $s(t)=\int v(t)dt$

Nếu gọi $a(t)$ là gia tốc của vật M thì ta có mối liên hệ giữa $v(t)$ và $a(t)$ như sau:

- Đạo hàm của vận tốc là gia tốc: $v'(t)=a(t)$.
- Nguyên hàm của gia tốc là vận tốc: $v(t)=\int a(t)dt$

Bài 1. Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc $72\,km/h$ thì nhìn thấy chướng ngại vật trên đường cách đó $40m$, người lái xe hãm phanh khẩn cấp. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-10t+20(m/s)$, trong đó t (giây). Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh.



a) Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là bao nhiêu giây?

b) Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được bao nhiêu mét? Xe ô tô có gặp tai nạn do va chạm với chướng ngại vật không?

c) Nếu người lái xe nhìn thấy chướng ngại vật trên đường, sau đó 1 giây mới phản ứng đạp phanh khẩn cấp thì xe ô tô có gặp tai nạn do va chạm với chướng ngại vật không?

Lời giải

a) Quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) là một nguyên hàm của $v(t)$ nên:

$$s(t)=\int v(t)dx=\int(-10t+20)\,dx=-5t^2+20t+C$$

$$\Rightarrow s(t)=-5t^2+20t+C$$

Chọn $t=0\Rightarrow s(0)=0$

$\Rightarrow C=0$

$\Rightarrow s(t)=-5t^2+20t$

Khi xe dừng hẳn thì $v(t)=0\Leftrightarrow -10t+20=0\Rightarrow t=2$.

Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là 2 giây

b) Sau khi đạp phanh đến khi dừng hẳn, xe đi được quãng đường:

$$s(2)=-5.2^2+20.2=20(m)$$

Do $40>20$ nên xe ô tô dừng hẳn trước khi va chạm chướng ngại vật. Vì thế tai nạn không xảy ra.

c) $72\ km/h=20m/s$

Người lái xe nhìn thấy chướng ngại vật trên đường, sau đó 1 giây mới phản ứng đạp phanh nên xe đi được quãng đường $20m$ trong 1 giây

Tổng quãng đường xe đi được đến khi dừng hẳn là : $20+20=40(m)$

Do chướng ngại vật trên đường cách đó $40m$ xe khi bắt đầu đạp phanh nên xe ô tô va chạm chướng ngại vật. Vì thế tai nạn xảy ra.

Bài 2. Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng từ mặt đất. Giả sử tại thời điểm t giây (coi là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t)=24,5-9,8t(m/s)$.



a) Tính quãng đường viên đạn đi sau 2 giây đầu.

b) Tính quãng đường viên đạn đi từ lúc bắn lên cho tới khi rơi xuống đất.

Lời giải

a) Quãng đường viên đạn đi được là: $s(t)=\int(24,5-9,8t)dx=24,5t-4,9t^2+C$

$\Rightarrow s(t)=24,5t-4,9t^2+C$

Chọn $t=0\Rightarrow s(0)=0$

$\Rightarrow C=0$

$\Rightarrow s(t)=24,5t-4,9t^2$

sau 2 giây đầu quãng đường viên đạn đi là $s(2)=24,5.2-4,9.2^2=29,4m$

b) khi viên đạt đạt độ cao lớn nhất thì $v(t)=0\Leftrightarrow 24,5-9,8t=0\Leftrightarrow t=2,5(s)$

quãng đường viên đạn đi từ lúc bắn lên cho tới khi rơi xuống đất là:

$s(2,5)=2(24,5.2,5-4,9.2,5^2)=61,25m$

Bài 3. Một xe ôtô chuyển động với gia tốc phụ thuộc vào thời gian theo công thức $a(t)=\sin\left(t+\frac{3\pi}{2}\right)$, với $\left(m/s^2\right)$. Biết tại thời điểm $t=0$ thì vận tốc bằng $2(m/s)$ và quãng đường đi được của vật bằng 0.



a) Thiết lập công thức tính vận tốc của xe ôtô theo thời gian t.

b) Tính quãng đường đi được của xe ôtô trong thời gian $t=\pi$ giây đầu tiên.

Lời giải

a) $a(t)=\sin\left(t+\frac{3\pi}{2}\right)=-\cos t$

Vận tốc của xe ôtô tại thời điểm t là: $v(t)=\int a(t)\,dt=\int -\cos t dt=-\sin t+C$.

Ta có: $v(0)=2\Leftrightarrow 2=-\sin 0+C\Leftrightarrow C=2$

$\Rightarrow v(t)=-\sin t+2$.

b) Quãng đường của xe ôtô đi được tại thời điểm t là:

$s(t)=\int(-\sin t+2)dt=-\cos t+2t+C_1$.

Khi đó: $s(0)=0\Leftrightarrow 0=-\cos 0+2.0+C_1\Rightarrow C_1=1$ nên ta suy ra $s(t)=-\cos t+2t+1$

$\Rightarrow s(\pi)=-\cos\pi+2\pi+1\approx 6,28(m)$

Bài 4. Một vật chuyển động với vận tốc là $v(t)=\frac{1}{2\pi}+\frac{\sin(\pi t)}{\pi}(\text{m/s})$.

a) Thiết lập công thức tính quãng đường $s(t)$ của vật theo thời gian t.

b) Gọi s_1 là quãng đường vật đó đi trong 2 giây đầu và s_2 là quãng đường đi từ giây thứ 4 đến giây thứ 6.

So sánh s_1 và s_2

Lời giải

a) Gọi thời điểm ban đầu $t=0;s=0$

Khi đó: $s(t)=\int\left(\frac{1}{2\pi}+\frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right)dt=\frac{1}{2\pi}t-\frac{1}{\pi^2}\cos(\pi t)+C$

Ta có: $s(0)=0\Rightarrow C-\frac{1}{\pi^2}=0\Rightarrow C=\frac{1}{\pi^2}$

Suy ra $s(t)=\frac{1}{2\pi}t-\frac{1}{\pi^2}\cos(\pi t)+\frac{1}{\pi^2}$

b) Ta có: $s(t)=\frac{1}{2\pi}t-\frac{1}{\pi^2}\cos(\pi t)+\frac{1}{\pi^2}$

Quãng đường vật đó đi trong 2 giây đầu là $s_1 = s(2) = \frac{1}{2\pi}.2 - \frac{1}{\pi^2}\cos(2\pi) + \frac{1}{\pi^2} = \frac{1}{\pi}$

$$s_2 = s(6) - s(4) = \frac{1}{2\pi}.6 - \frac{1}{\pi^2}\cos(6\pi) + \frac{1}{\pi^2} - \left[\frac{1}{2\pi}.4 - \frac{1}{\pi^2}\cos(4\pi) + \frac{1}{\pi^2}\right] = \frac{1}{\pi}$$

Vậy $s_1 = s_2$

DẠNG 2
MỘT SỐ BÀI TOÁN ỨNG DỤNG NGUYÊN HÀM TRONG THỰC TIỄN

Bài 1. Một vườn ươm cây cảnh bán một cây sau 8 năm trồng và uốn tạo dáng. Tốc độ tăng trưởng trong suốt 8 năm được tính xấp xỉ bởi công thức $h'(t)=2t+7$, trong đó $h(t)(cm)$ là chiều cao của cây khi kết thúc t (năm) . Cây con khi được trồng cao 25 cm.



a) Tìm công thức chỉ chiều cao của cây sau t năm.

b) Sau bao nhiêu năm trồng, cây cao được $1,03(m)$.

c) Khi được bán, cây cao bao nhiêu centimét?

Lời giải

a) $h(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $h'(t)=2t+7$.

Ta có: $h(t)=\int h'(t)\mathrm{d}t=\int(2t+7)\mathrm{d}t=t^2+7t+C$.

Khi đó $h(t)=t^2+7t+C$.

Vì cây con khi được trồng cao 25 cm nên $h(0)=25$ suy ra $C=25$ nên $h(t)=t^2+7t+25$.

b) cây cao $1,03(m)=103(cm)$

Do đó: $t^2+7t+25=103\Leftrightarrow t^2+7t-78=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-13(L)\\t=6(N)\end{array}\right.$

Vậy sau 6 năm trồng, cây cao được $1,03(m)$.

c) Sau 8 năm trồng và uốn tạo dáng. Cây có chiều cao là: $h(8)=8^2+7.8+25=145(cm)$.

Vậy khi được bán, cây cao $145(cm)$

Bài 2. Ký hiệu $h(x)$ là chiều cao của một cây Xoài lai (tính theo mét) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau một năm đầu tiên cây Xoài lai cao $2,5$ mét. Trong 10 năm tiếp theo cây Xoài lai phát triển với tốc độ $h'(x)=\dfrac{3}{2x}$ (mét /năm).



a) Xác định chiều cao của cây Xoài lai sau x năm.

b) Sau bao nhiêu năm cây Xoài lai cao $4,5$ mét?

Lời giải

a) Chiều cao của cây Xoài lai sau x năm ($1\le x\le 11$).

Ta có $h(x)=\int h'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{3}{2x}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\ln|x|+C=\frac{3}{2}\ln x+C$ (vì $1\le x\le 11$)

Vì $h(1)=2,5$ nên $\ln 1+C=2,5\Rightarrow C=\frac{5}{2}$.

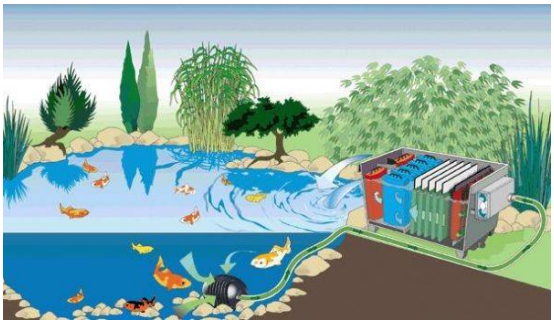
Chiều cao của cây Xoài lai sau x năm ($1\le x\le 11$) là $h(x)=\frac{3}{2}\ln x+\frac{5}{2}\ \ (m)$

b) Ta có $h(x)=\frac{3}{2}\ln x+\frac{5}{2}\ \ (m)$

Xoài lai cao $4,5$ mét nên $\frac{3}{2}\ln x+\frac{5}{2}=4,5\Leftrightarrow\ln x=\frac{4}{3}\Leftrightarrow x=e^{\frac{4}{3}}\approx 3,8$(năm).

Vậy sau $3,8$ năm thì cây cao $4,5$ mét.

Bài 3. Một công nhân bơm nước vào bể chứa nước để sử dụng trong quá trình sản xuất. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t)=3at^2+bt\ \ (m^3/s)$ và ban đầu bể không có nước. Sau 2 giây thì thể tích nước trong bể là $12m^3$. Sau 12 giây thì thể tích nước trong bể là $1872m^3$.



a) Xác định thể tích nước bơm được sau t giây.

b) Hỏi bơm trong bao lâu thì thể tích nước trong bể bằng $27900(m^3)$?

c) Hỏi thể tích nước trong bể sau khi bơm được 1 phút?

Lời giải

Ta có: $h'(t)=3at^2+bt$

Suy ra $h(t)=\int\left(3at^2+bt\right)dt=at^3+\frac{1}{2}bt^2+C\Rightarrow h(t)=at^3+\frac{1}{2}bt^2+C$

Chọn $t=0\Rightarrow h(0)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow h(t)=at^3+\frac{1}{2}bt^2$

Sau 2 giây thì thể tích nước trong bể là $12m^3$: $h(2)=12\Leftrightarrow 8a+2b=12$

Sau 12 giây thì thể tích nước trong bể là $1872m^3$: $h(12)=1872\Leftrightarrow 1728a+72b=1872$

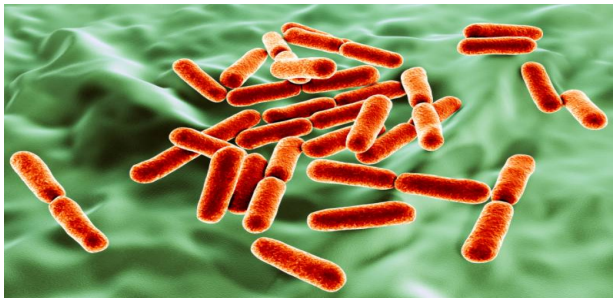
Ta có hệ : $\begin{cases}8a+2b=12\\1728a+72b=1872\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}\Rightarrow h(t)=t^3+t^2$

b) Ta có $h(t)=27900\Leftrightarrow t^3+t^2=27900\Leftrightarrow t=30$ giây

Vậy bơm trong 30 giây thì thể tích nước trong bể bằng $27900\left(m^3\right)$

c) Thể tích nước trong bể sau khi bơm được 1 phút = 60 giây là $h(60)=60^3+60^2=219600\left(m^3\right)$

Bài 4. Một loài vi khuẩn đang phát triển với tốc độ $f(t)=\frac{300}{0,25t}$, trong đó, t là thời gian tính bằng ngày. Với $t=1$ thì số lượng vi khuẩn là 1000 con. Hỏi sau 3 ngày số lượng vi khuẩn là bao nhiêu?



Lời giải

Do vi khuẩn đang phát triển với tốc độ $f(t)=\frac{300}{0,25t}$ nên hàm số lượng vi khuẩn $P(t)$ tại thời điểm t là một nguyên hàm của hàm số $f(t)=\frac{300}{0,25t}$.

Từ đó có $P(t)=\int\frac{300}{0,25t}\mathrm{d}t=\frac{300}{0,25}.\ln t+C=1200.\ln t+C$.

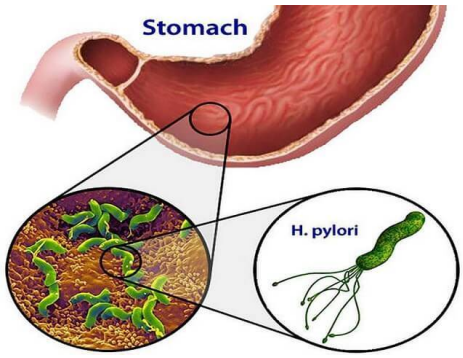
Ta có với $P(1)=1000\Leftrightarrow 1200.\ln 1+C=1000\Rightarrow C=1000$.

Hàm số biểu diễn số lượng vi khuẩn theo thời gian t là: $P(t)=1200.\ln t+1000$.

Sau 3 ngày số lượng vi khuẩn là $P(3)=1200.\ln 3+1000\approx 2318$ (con).

Bài 5. Vi khuẩn HP (Helicobacter pylori) gây đau dạ dày tại ngày thứ t với số lượng là $F(t)$, biết nếu phát hiện sớm khi số lượng không vượt quá 4000 con thì bệnh nhân sẽ được cứu chữa. Biết $F'(t)=\frac{600}{t}$ và ngày đầu tiên bệnh nhân có 2000 con vi khuẩn. Sau 15 ngày bệnh nhân phát hiện ra bị bệnh. Hỏi khi

đó có bao nhiêu con vi khuẩn trong dạ dày (lấy xấp xỉ hàng thập phân thứ hai) và bệnh nhân có cứu chữa được không?



Lời giải

Ta có $F(t)=\int F'(t)\mathrm{d}t=\int\frac{600}{t}\mathrm{d}t=600\ln|t|+C$.

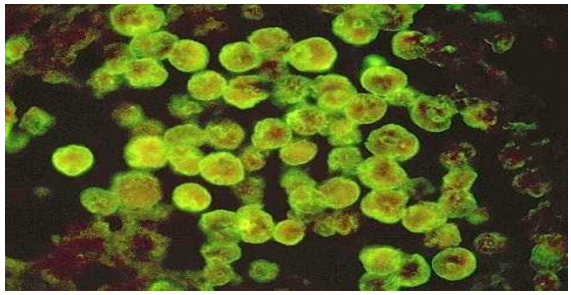
$F(1)=2000\Leftrightarrow 600\ln|1|+C=2000\Leftrightarrow C=2000$

$\Rightarrow F(t)=600\ln|t|+2000$

Sau 15 ngày, số vi khuẩn trong dạ dày bệnh nhân là: $F(15)=600\ln|15|+2000\approx 3625$ (con)

Vì $3625<4000$ nên bệnh nhân có cứu chữa được.

Bài 6. Một đám vi trùng tại ngày thứ t có số lượng là $N(t)$. Biết rằng $N'(t)=\frac{2000}{1+2t}$ và lúc đầu đám vi trùng có 300000 con. Tìm số số lượng vi trùng sau 10 ngày.



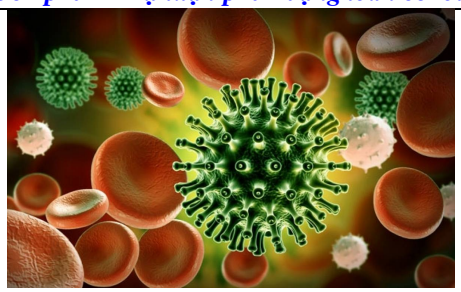
Lời giải

Ta có $N(t)=\int N'(t)\mathrm{d}t=\int\frac{2000}{1+2t}\mathrm{d}t=2000\int\frac{1}{1+2t}.\frac{1}{2}\mathrm{d}(1+2t)=1000\ln|1+2t|+C$.

$N(0)=300000\Leftrightarrow 1000\ln|1|+C=300000\Leftrightarrow C=300000$

$\Rightarrow N(t)=1000\ln|1+2t|+300000\Rightarrow N(10)=1000\ln|1+2.10|+300000\approx 303044$.

Bài 7. Một quần thể virut Corona P đang thay đổi với tốc độ $P'(t)=\frac{5000}{1+0,2t}$, trong đó t là thời gian tính bằng giờ. Quần thể virut Corona P ban đầu có số lượng là 1000 con. Tìm số lượng virut Corona sau 3 giờ.



Lời giải

Ta có $P(t)=\int P'(t)\mathrm{d}t=\int\frac{5000}{1+0,2t}\mathrm{d}t=5000.\frac{1}{0,2}\ln(1+0,2t)+C=25000.\ln(1+0,2t)+C$.

$P(0)=1000\Leftrightarrow C=1000$.

Vậy biểu thức tính số lượng virut Corona với thời gian t bất kỳ là

$P(t)=25000.\ln(1+0,2t)+1000$.

Với $t=3$ giờ ta có $P(3)=25000.\ln(1+0,2.3)+1000\approx 12750,09$.

Vậy số lượng virut khi $t=3$ giờ khoảng 12750 con.

Bài 8. Một chiếc cốc chứa nước ở $95°C$ được đặt trong phòng có nhiệt độ $20°C$. Theo định luật làm mát của Newton, nhiệt độ của nước trong cốc sau t phút (xem $t=0$ là thời điểm nước ở $95°C$) là một hàm số $T(t)$. Tốc độ giảm nhiệt độ của nước trong cốc tại thời điểm t phút được xác định bởi công thức $T'(t)=-\frac{3}{2}e^{-\frac{t}{50}}$ (°C/ phút). Tính nhiệt độ của nước tại thời điểm $t=30$ phút.

Lời giải

Ta có nhiệt độ của nước trong cốc sau t phút là:

$$T(t)=\int T'(t)\mathrm{d}t=\int\left(-\frac{3}{2}e^{-\frac{t}{50}}\right)\mathrm{d}t=-\frac{3}{2}.\frac{e^{-\frac{t}{50}}}{\ln e^{-\frac{1}{50}}}+C=75.e^{-\frac{t}{50}}+C$$

Vì $t=0$ là thời điểm nước ở $95°C$ nên ta có:

$T(0)=95$

$\Leftrightarrow 75+C=95$

$\Leftrightarrow C=15$

$\Rightarrow T(t)=75.e^{-\frac{t}{50}}+15$

Vậy nhiệt độ của nước tại thời điểm $t=30$ phút là: $T(30)=75.e^{-\frac{30}{50}}+15\approx 56,16°C$.

Bài 9. Cường độ dòng điện (đơn vị: A) trong một dây dẫn tại thời điểm t giây là:

$$I(t)=Q'(t)=3t^2-6t+5$$

Với $Q(t)$ là điện lượng (đơn vị: C) truyền trong dây dẫn tại thời điểm t. Biết khi $t=1$ giây thì điện lượng truyền trong dây dẫn là $Q(1)=4$. Tính điện lượng (đơn vị: C) truyền trong dây dẫn khi $t=3$.

Lời giải

Ta có: $Q(t)=\int Q'(t)\mathrm{d}t=\int\left(3t^2-6t+5\right)\mathrm{d}t=t^3-3t^2+5t+C$.

Vì $Q(1)=4\Rightarrow 1-3+5+C=4\Leftrightarrow C=1\Rightarrow Q(t)=t^3-3t^2+5t+1.$

Suy ra điện lượng truyền trong dây dẫn khi $t=3$ là $Q(3)=3^3-3.3^2+5.3+1=16(\mathrm{C})$.

PHẦN B
TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP GỒM BA PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai.**

A. $\int f'(x)dx = f(x)+C$, với $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

B. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, với k là hằng số bất kì và $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

C. $\int\left[f(x)+g(x)\right]dx = \int f(x)dx+\int g(x)dx$, với $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

D. $\int\left[f(x)-g(x)\right]dx = \int f(x)dx-\int g(x)dx$, với $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn B

Trường hợp $k=0$ đáp án B sai.

Câu 2. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai.**

A. $\int kf(t)dt = k\int f(t)dt$, với k là hằng số khác 0 và $f(t)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

B. $\int\left[f(u)+g(u)\right]du = \int f(u)du+\int g(u)du$, với $f(u)$ và $g(u)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

C. $\int\left[f(x+1)-g(x+1)\right]d(x+1) = \int f(x+1)d(x+1)-\int g(x+1)d(x+1)$, với $f(x+1)$ và $g(x+1)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

D. $\int f(x).g(x)dx = \int f(x)dx.\int g(x)dx$, với $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 3. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ với $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai.**

A. $\int f(x)dx = F(x)+C$.

B. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

C. $\left(\int f(x)dx\right)' = f'(x)$.

D. $\left(\int f(x)dx\right)' = F'(x)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int f(x)dx = F(x)+C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$ nên phương án A, B, D đúng.

Câu 4. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+6$ là

A. x^2+C.

B. x^2+6x+C.

C. $2x^2+C$.

D. $2x^2+6x+C$.

Lời giải

Chọn B.

$\int (2x+6)dx = x^2+6x+C$

Câu 5. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+4$ là

A. $2x^2+4x+C$. **B.** x^2+4x+C. **C.** x^2+C. **D.** $2x^2+C$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int (2x+4)\mathrm{d}x = 2\int x\mathrm{d}x + 4\int \mathrm{d}x = x^2+4x+C$.

Câu 6. $\int x^2dx$ bằng

A. $2x+C$. **B.** $\frac{1}{3}x^3+C$. **C.** x^3+C. **D.** $3x^3+C$

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\int x^2dx = \frac{1}{3}x^3+C$.

Câu 7. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+1$ là

A. x^3+C **B.** $\frac{x^3}{3}+x+C$ **C.** $6x+C$ **D.** x^3+x+C

Lời giải

Chọn D.

$\int (3x^2+1)dx = x^3+x+C.$

Câu 8. Cho hàm số $f(x)=x^2+4$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)dx = 2x+C$. **B.** $\int f(x)dx = x^2+4x+C$.

C. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3}+4x+C$. **D.** $\int f(x)dx = x^3+4x+C$.

Lời giải

Ta có: $f(x)=x^2+4 \Rightarrow \int f(x)dx = \frac{x^3}{3}+4x+C$

Câu 9. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2-2$ là

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = 2x+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}-2x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = x^2-2x+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x = x^3-2x+C$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(x^2-2\right)\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}x-2\int\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-2x+C$.

Câu 10. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3+x$ là

A. $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+C$ **B.** $3x^2+1+C$ **C.** x^3+x+C **D.** x^4+x^2+C

Lời giải

Chọn A.

$\int\left(x^3+x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+C$.

Câu 11. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=4x^3-2026$ là

A. $x^4-2026x+C$. **B.** $4x^3-2026x+C$. **C.** $12x^3+C$. **D.** x^4+C.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\int\left(4x^3-2026\right)\mathrm{d}x=x^4-2026x+C$.

Câu 12. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^4+x^2$ là

A. $\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+C$ **B.** x^4+x^2+C **C.** x^5+x^3+C. **D.** $4x^3+2x+C$

Lời giải

Chọn A.

$\int f(x)dx=\int\left(x^4+x^2\right)dx=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+C$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)=3x^2+2x$. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$?

A. $F_1(x)=x^3+x^2-4$. **B.** $F_2(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}$. **C.** $F_3(x)=x^3-x^2+1$. **D.** $F_4(x)=3x^3+x^2$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $F_1'(x)=3x^2+2x$; $F_2'(x)=x^2+x$; $F_3'(x)=3x^2-2x$; $F_4'(x)=9x^2+2x$.

Suy ra: $F_1'(x)=3x^2+2x=f(x)$.

Vậy $F_1(x)=x^3+x^2-4$ là một nguyên hàm của $f(x)=3x^2+2x$ trên $\mathbb{R}$.

Câu 14. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+x-2027$ là

A. $\frac{1}{12}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}+C$. **B.** $\frac{1}{9}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}-2027x+C$.

C. $\frac{1}{12}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}-2027x+C$. **D.** $\frac{1}{9}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}-2027x+C$.

Lời giải

Chọn C.

$\int\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+x-2027\right)dx=\frac{1}{3}.\frac{x^4}{4}-2.\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2027x+C=\frac{1}{12}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2027x+C.$

Câu 15. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=5x^4-8x^3-6x$ là

A. $F(x)=x^5-2x^4-3x^2+C.$ **B.** $F(x)=x^5-x^4-x^2+C.$

C. $F(x)=x^5-4x^4-2x^2+C.$ **D.** $F(x)=x^5+2x^4-3x^2+C.$

Lời giải

Chọn A.

Ta có $F(x)=\int\left(5x^4-8x^3-6x\right)dx=x^5-2x^4-3x^2+C..$

Vậy một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $F(x)=x^5-2x^4-3x^2+C..$

Câu 16. Cho hàm số $f(x)=x-\frac{1}{\sqrt{x}}$. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(0;+\infty)$?

A. $F_1(x)=\frac{x^2}{2}+\sqrt{x}$. **B.** $F_2(x)=\frac{x^2}{2}-\sqrt{x}$.

C. $F_3(x)=\frac{x^2}{2}+2\sqrt{x}$. **D.** $F_4(x)=\frac{x^2}{2}-2\sqrt{x}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $F_1'(x)=x+\frac{1}{2\sqrt{x}}$; $F_2'(x)=x-\frac{1}{2\sqrt{x}}$; $F_3'(x)=x+\frac{1}{\sqrt{x}}$; $F_4'(x)=x-\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Suy ra: $F_4'(x)=x-\frac{1}{\sqrt{x}}=f(x)$.

Vậy $F_4(x)=\frac{x^2}{2}-2\sqrt{x}$ là một nguyên hàm của $f(x)=x-\frac{1}{\sqrt{x}}$ trên $(0;+\infty)$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)=3+\frac{1}{x}$. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(0;+\infty)$?

A. $F_1(x)=3x-\frac{1}{x^2}$. **B.** $F_2(x)=3x+\ln x$. **C.** $F_3(x)=3x+\frac{1}{x^2}$. **D.** $F_4(x)=3x-\ln x$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $F_1'(x)=3+\frac{2}{x^3}$; $F_2'(x)=3+\frac{1}{x}$; $F_3'(x)=3-\frac{2}{x^3}$; $F_4'(x)=3-\frac{1}{x}$.

Suy ra: $F_2'(x)=3+\frac{1}{x}=f(x)$.

Vậy $F_2(x)=3x+\ln x$ là một nguyên hàm của $f(x)=3+\frac{1}{x}$ trên $(0;+\infty)$.

Câu 18. Tìm nguyên hàm của hàm số $\int\left(x^2+\frac{3}{x}-2\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{x^3}{3}+3\ln|x|+\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$.

B. $\frac{x^3}{3}+3\ln|x|-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$.

C. $\frac{x^3}{3}+3\ln x-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}$.

D. $\frac{x^3}{3}-3\ln|x|-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\int\left(x^2+\frac{3}{x}-2\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+3\ln|x|-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$.

Câu 19. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3\sqrt{x}+x^{2027}$ là

A. $3\sqrt{x}+\frac{x^{2028}}{2028}+C$.

B. $2x\sqrt{x}+\frac{x^{2028}}{2028}+C$.

C. $2x\sqrt{x}+\frac{x^{2027}}{2027}+C$.

D. $2x\sqrt{x}+\frac{x^{2028}}{2027}+C$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\int\left(3\sqrt{x}+x^{2027}\right)\mathrm{d}x=\int\left(3x^{\frac{1}{2}}+x^{2027}\right)\mathrm{d}x=3.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{2028}}{2028}+C=2x\sqrt{x}+\frac{x^{2028}}{2028}+C$.

Câu 20. Biết $F(x)=x^3+\frac{1}{x}+1$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên miền $(0;+\infty)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\ln x$.

B. $f(x)=3x^2-\frac{1}{x^2}$.

C. $f(x)=3x^2+\frac{1}{x^2}$.

D. $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\ln x+x+C$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $F(x)=x^3+\frac{1}{x}+1$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên miền $(0;+\infty)$ nên $F'(x)=f(x)$ với mọi $x\in(0;+\infty)$ mà $F'(x)=\left(x^3+\frac{1}{x}+1\right)'=3x^2-\frac{1}{x^2}$.

Câu 21. Biết $\int\left(\frac{1}{2x}+x^5\right)\mathrm{d}x=a\ln|x|+bx^6+C$ với $(a,b\in\mathbb{Q},C\in\mathbb{R})$. Tính a^2+b?

A. $\frac{5}{12}$. **B.** 9. **C.** $\frac{7}{13}$. **D.** $\frac{7}{6}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\int\left(\frac{1}{2x}+x^5\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{1}{6}x^6+C$ nên $a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{6}\Rightarrow a^2+b=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$.

Câu 22. Hàm số nào trong các hàm số sau đây không là nguyên hàm của hàm số $y=x^{2026}$?

A. $\frac{x^{2027}}{2027}+2028$. **B.** $\frac{x^{2027}}{2027}$. **C.** $y=2027x^{2026}$. **D.** $\frac{x^{2027}}{2027}-2026$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\int x^{2026}\mathrm{d}x=\frac{x^{2027}}{2027}+C$, C là hằng số.

Nên các phương án A, B, D đều là nguyên hàm của hàm số $y=x^{2026}$.

Câu 23. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x+1)(x+2)$ là

A. $2x+3+C$. **B.** $\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}x^2+2x+C$.

C. $\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}x^2+2x+C$. **D.** $\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+2x+C$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(x+1)(x+2)\mathrm{d}x=\int\left(x^2+3x+2\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+2x+C$.

Câu 24. Tìm nguyên $F(x)$ của hàm số $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)$?

A. $F(x)=\frac{x^4}{4}-6x^3+\frac{11}{2}x^2-6x+C$. **B.** $F(x)=x^4+6x^3+11x^2+6x+C$.

C. $F(x)=\frac{x^4}{4}+2x^3+\frac{11}{2}x^2+6x+C$. **D.** $F(x)=x^3+6x^2+11x^2+6x+C$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)=x^3+6x^2+11x+6$

$\Rightarrow F(x)=\int\left(x^3+6x^2+11x+6\right)dx=\frac{x^4}{4}+2x^3+\frac{11}{2}x^2+6x+C$.

Câu 25. Họ các nguyên hàm của hàm số $y=x(x+1)^5$ là

A. $\frac{(x+1)^7}{7}+\frac{(x+1)^6}{6}+C$. **B.** $6(x+1)^5+5(x+1)^4+C$.

C. $6(x+1)^5-5(x+1)^4+C$. **D.** $\frac{(x+1)^7}{7}-\frac{(x+1)^6}{6}+C$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $y=x(x+1)^5=(x+1-1)(x+1)^5=(x+1)^6-(x+1)^5$

Kiểm tra $F(x)=\frac{(x+1)^7}{7}-\frac{(x+1)^6}{6}+C$ ta có $F'(x)=\frac{7(x+1)^6}{7}-\frac{6(x+1)^5}{6}=(x+1)^6-(x+1)^5$

Câu 26. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=(5x+3)^5$.

A. $(5x+3)^6+C$. **B.** $(5x+3)^4+C$. **C.** $\frac{(5x+3)^6}{30}+C$. **D.** $\frac{(5x+3)^4}{30}+C$.

Lời giải

Chọn C.

$f(x)=(5x+3)^5\Rightarrow\int f(x)dx=\int(5x+3)^5dx=\frac{1}{5}.\frac{(5x+3)^6}{6}+C=\frac{(5x+3)^6}{30}+C$

Câu 27. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2+\frac{2}{x^2}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{x}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{2}{x}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{2}{x}+C$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\int\left(x^2+\frac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{2}{x}+C$.

Câu 28. Trên khoảng $(0;+\infty)$, cho hàm số $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)dx=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+C$. **B.** $\int f(x)dx=\int\sqrt{x^3}dx$.

C. $\int f(x)dx=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$. **D.** $\int f(x)dx=\frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}+C$.

Lời giải

Ta có: $\int f(x)dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$.

Câu 29. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^{\sqrt{2026}}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2026}-1}x^{\sqrt{2026}-1}+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=x^{\sqrt{2026}+1}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\sqrt{2026}x^{\sqrt{2026}-1}+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2026}+1}x^{\sqrt{2026}+1}+C$.

Lời giải

Chọn D.

$\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2026}+1}x^{\sqrt{2026}+1}+C$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)=\frac{x^4+2}{x^2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{2}{x}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(x^2+\frac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{2}{x}+C$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{x^4+2}{x^2}\mathrm{d}x=\int\left(x^2+\frac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{2}{x}+C$.

Câu 31. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{5+2x^4}{x^2}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{2x^3}{3}+\frac{5}{x}+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{2x^3}{3}-\frac{5}{x}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{2x^3}{3}+5\ln x^2+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=2x^3-\frac{5}{x}+C$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(2x^2+\frac{5}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{2x^3}{3}-\frac{5}{x}+C$.

Câu 32. Tính $\int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}dx$.

A. $\frac{4}{15}x\sqrt[8]{x^7}+C$.

B. $\frac{8}{15}x\sqrt[8]{x^7}+C$.

C. $\frac{8}{15}x\sqrt[8]{x}+C$.

D. $\frac{4}{15}x\sqrt[8]{x}+C$.

Lời giải

Chọn B.

$$\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx=\int \sqrt{x\sqrt{x.x^{\frac{1}{2}}}}\,dx=\int \sqrt{x.x^{\frac{3}{4}}}\,dx=\int x^{\frac{7}{8}}dx=\frac{x^{\frac{7}{8}+1}}{\frac{7}{8}+1}+C=\frac{8}{15}x\sqrt[8]{x^7}+C$$

Câu 33. Tính $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}dx$.

A. $x\sqrt[5]{x}-2x\sqrt[17]{x^5}+\sqrt[4]{x^3}+C$.

B. $\frac{4}{5}x\sqrt[5]{x}-\frac{24}{17}x\sqrt[17]{x^5}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$.

C. $x\sqrt[5]{x}-\frac{24}{17}x\sqrt[17]{x^5}+\sqrt[4]{x^3}+C$.

D. $\frac{4}{5}x\sqrt[5]{x}-2x\sqrt[17]{x^5}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$.

Lời giải

Chọn B.

$$\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}dx=\int \frac{x^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{2}{3}}+1}{x^{\frac{1}{4}}}dx=\int\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}}-2\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{4}}}+\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}\right)dx$$

$$=\int\left(x^{\frac{1}{4}}-2x^{\frac{5}{12}}+x^{-\frac{1}{4}}\right)dx=\frac{4}{5}x\sqrt[5]{x}-\frac{24}{17}x\sqrt[17]{x^5}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$$

Câu 34. Khẳng định nào đây sai?

A. $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$.

B. $\int \cos x\,dx=-\sin x+C$.

C. $\int \cos x\,dx=\sin x+C$.

D. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx=\tan x+C$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\int \cos x\,dx=\sin x+C$

Câu 35. Cho $\int f(x)dx=-\cos x+C$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f(x)=-\sin x$.

B. $f(x)=-\cos x$.

C. $f(x)=\sin x$.

D. $f(x)=\cos x$.

Lời giải

Áp dụng công thức $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$. Suy ra $f(x)=\sin x$.

Câu 36. Hàm số $F(x)=\cot x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

A. $f_2(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$.

B. $f_1(x)=-\frac{1}{\cos^2 x}$.

C. $f_4(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$.

D. $f_3(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}$.

Lời giải

Chọn D.

Có $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$ suy ra $F(x) = \cot x$ trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f_3(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Câu 37. Cho hàm số $f(x) = 1 + \sin x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = x - \cos x + C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x = x + \sin x + C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = x + \cos x + C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x = \cos x + C$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int (1+\sin x)\mathrm{d}x = \int 1\mathrm{d}x + \int \sin x\mathrm{d}x = x - \cos x + C$.

Câu 38. Cho hàm số $f(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = x + \tan x + C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x = x + \cot x + C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = x - \tan x + C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x = x - \cot x + C$.

Lời giải

Chọn C.

$\int f(x)\mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x = x - \tan x + C$.

Câu 39. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3\cos x - 4\sin x$ là:

A. $3\sin x - 4\cos x + C$.

B. $-3\sin x + 4\cos x + C$.

C. $3\sin x + 4\cos x + C$.

D. $-3\sin x + 4\cos x + C$.

Lời giải

Chọn C.

$\int f(x)\mathrm{d}x = \int (3\cos x - 4\sin x)\mathrm{d}x = 3\int \cos x\mathrm{d}x - 4\int \sin x\mathrm{d}x = 3\sin x - 4\cos x + C$.

Câu 40. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\sin x + \frac{3}{\sin^2 x}$ là:

A. $-2\cos x - 3\cot x + C$.

B. $2\cos x - 3\tan x + C$.

C. $-2\cos x + 3\cot x + C$.

D. $2\cos x - 3\cot x + C$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int \left(2\sin x + \frac{3}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x = 2\int \sin x\mathrm{d}x + 3\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -2\cos x - 3\cot x + C$.

Câu 41. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x + 6x$ là

A. $\sin x + 3x^2 + C$.

B. $-\sin x + 3x^2 + C$.

C. $\sin x + 6x^2 + C$.

D. $-\sin x + C$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(\cos x+6x)\mathrm{d}x=\sin x+3x^2+C$.

Câu 42. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=2\sin x+3x$.

A. $\int(2\sin x+3x)dx=-2\cos x+\frac{3}{2}x^2+C$ **B.** $\int(2\sin x+3x)dx=2\cos x+3x^2+C$

C. $\int(2\sin x+3x)dx=\sin^2 x+\frac{3}{2}x+C$ **D.** $\int(2\sin x+3x)dx=\sin 2x+\frac{3}{2}x^2+C$

Lời giải

Chọn A.

$\int(2\sin x+3x)dx=-2\cos x+\frac{3}{2}x^2+C$

Câu 43. Tính $\int(x-\sin x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{x^2}{2}+\sin x+C$. **B.** $\frac{x^2}{2}-\cos x+C$. **C.** $\frac{x^2}{2}-\sin x+C$. **D.** $\frac{x^2}{2}+\cos x+C$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\int(x-\sin x)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+\cos x+C$.

Câu 44. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+\sin x$ là

A. $x^3+\cos x+C$. **B.** $6x+\cos x+C$. **C.** $x^3-\cos x+C$. **D.** $6x-\cos x+C$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\int(3x^2+\sin x)\mathrm{d}x=x^3-\cos x+C$.

Câu 45. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x}+\sin x$ là

A. $\ln x-\cos x+C$. **B.** $-\frac{1}{x^2}-\cos x+C$. **C.** $\ln|x|+\cos x+C$. **D.** $\ln|x|-\cos x+C$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x}+\sin x\right)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int\sin x\mathrm{d}x=\ln|x|-\cos x+C$.

Câu 46. Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{\cos^2 x}$. Chọn khẳng định đúng:

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\ln|x|+\tan x+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\ln x+\tan x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\ln x+\tan|x|+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\ln|x|+\tan x$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x=\ln|x|+\tan x+C$

Câu 47. Cho hàm số $f(x)=\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\sin x+C$.

B. $\int\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\cos x+C$

C. $\int\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}\sin x+C$.

D. $\int\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}\cos x+C$

Lời giải

Chọn D.

$\int\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\int\sin x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\cos x+C$

Câu 48. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\cos^2\frac{x}{2}$

A. $F(x)=2\cos\frac{x}{2}+C$

B. $F(x)=\frac{1}{2}(1+\sin x)+C$

C. $F(x)=2\sin\frac{x}{2}+C$

D. $F(x)=\frac{1}{2}(1-\sin x)+C$

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $f(x)=\cos^2\frac{x}{2}\Rightarrow F(x)=\int\cos^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1+\cos x}{2}dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos x)dx=\frac{1}{2}(1+\sin x)+C$

Câu 49. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=2\cos^2\frac{x}{2}$ là:

A. $4\cos\frac{x}{2}+C$.

B. $x+\sin x+C$.

C. $2\sin^2\frac{x}{2}+C$.

D. $\frac{2}{3}\cos^3\frac{x}{2}+C$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int 2\cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\int(1+\cos x)\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x+\int\cos x\mathrm{d}x=x+\sin x+C$.

Câu 50. Nguyên hàm của hàm số có $f(x)=\tan^2 x+\cot^2 x$ là:

A. $2\tan x+2\cot x+C$.

B. $\frac{1}{3}\tan^3 x+\frac{1}{3}\cot^3 x+C$.

C. $\tan x+\cot x-2x+C$.

D. $\tan x-\cot x-2x+C$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\tan^2 x\mathrm{d}x+\int\cot^2 x\mathrm{d}x=\int\left(1+\tan^2 x-1\right)\mathrm{d}x+\int\left(1+\cot^2 x-1\right)\mathrm{d}x$

$=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x+\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x-2\int\mathrm{d}x$

$=\tan x-\cot x-2x+C$.

Câu 51. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2$ là:

A. $\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}+C$. **B.** $x-\cos x+C$.

C. $\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2+C$. **D.** $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}+C$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\int\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}.\sin\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$

$=\int(1+\sin x)\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x+\int\sin x\mathrm{d}x=x-\cos x+C$.

Câu 52. Tìm $\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x.\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

A. $\cos x+\sin x+C$. **B.** $-\cos x-\sin x+C$.

C. $-\cot x-\tan x+C$. **D.** $\cot x-\tan x+C$.

Lời giải

Chọn C.

$\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x.\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x.\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x=-\cot x-\tan x+C$.

Câu 53. Nguyên hàm của hàm số $y=\tan^2 x$ là

A. $\tan x-x+C$. **B.** $-\tan x-x+C$. **C.** $-\tan x+x+C$. **D.** $\tan x+x+C$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\int\tan^2 x\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x=\tan x-x+C$.

Câu 54. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A $\int e^x\mathrm{d}x=xe^x+C$. **B.** $\int e^x\mathrm{d}x=e^{x+1}+C$. **C.** $\int e^x\mathrm{d}x=-e^{x+1}+C$. **D.** $\int e^x\mathrm{d}x=e^x+C$.

Lời giải

Ta có $\int e^x\mathrm{d}x=e^x+C$.

Câu 55. Họ nguyên hàm của hàm số $f(\mathrm{x})=e^{3x}$ là hàm số nào sau đây?

A. $3e^x+C$. **B.** $\frac{1}{3}e^{3x}+C$. **C.** $\frac{1}{3}e^x+C$. **D.** $3e^{3x}+C$.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1: $\int e^{3x}dx=\int\left(e^3\right)^x dx=\frac{\left(e^3\right)^x}{\ln e^3}+C=\frac{e^{3x}}{3}+C$

Cách 2: Trắc nghiệm $\int e^{3x}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}e^{3x}+C$, với C là hằng số bất kì.

Câu 56. Nguyên hàm của hàm số $y=\mathrm{e}^{2x-1}$ là

A. $2\mathrm{e}^{2x-1}+C$. **B.** $\mathrm{e}^{2x-1}+C$. **C.** $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x-1}+C$. **D.** $\frac{1}{2}\mathrm{e}^x+C$.

Lời giải

Chọn C.

Cách 1: $\int e^{2x-1}dx=\int e^{-1}.\left(e^2\right)^x dx=e^{-1}.\frac{\left(e^2\right)^x}{\ln e^2}+C=\frac{e^{2x-1}}{2}+C$

Cách 2: $\int\mathrm{e}^{2x-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^{2x-1}\mathrm{d}(2x-1)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x-1}+C$.

Câu 57. Cho hàm số $f(x)=1+e^x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=x+xe^{x-1}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=1+e^x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=x+e^x+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=1+xe^{x-1}+C$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(1+e^x\right)dx=x+e^x+C$.

Câu 58. Cho hàm số $f(x)=e^x+2$. Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

A. $\int f(x)dx=e^{x-2}+C$. **B.** $\int f(x)dx=e^x+2x+C$.

C. $\int f(x)dx=e^x+C$. **D.** $\int f(x)dx=e^x-2x+C$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\int f(x)dx=\int\left(e^x+2\right)dx=e^x+2x+C$

Câu 59. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x-2x$ là.

A. e^x+x^2+C. **B.** e^x-x^2+C. **C.** $\frac{1}{x+1}e^x-x^2+C$. **D.** e^x-2+C.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\int\left(e^x-2x\right)dx=e^x-x^2+C$

Câu 60. Cho hàm số $f\left(x\right)=e^x+2x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=e^x+x^2+C$. **B.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=e^x+C$.

C. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=e^x-x^2+C$. **D.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=e^x+2x^2+C$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(e^x+2x\right)\mathrm{d}x=e^x+x^2+C$.

Câu 61. Cho hàm số $f(x)=1+e^{2x}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx=x+\frac{1}{2}e^x+C.$ **B.** $\int f(x)dx=x+2e^{2x}+C.$

C. $\int f(x)dx=x+\frac{1}{2}e^{2x}+C.$ **D.** .

Lời giải

ChọnC.

Ta có $\int(1+e^{2x})dx=x+\frac{1}{2}e^{2x}+C.$

Câu 62. Hàm số $F\left(x\right)=x^2+e^{-2x}+2024$ là một nguyên hàm của hàm số

A. $f\left(x\right)=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}e^{-2x}+2024x$. **B.** $f\left(x\right)=2x+2e^{-2x}+2024$.

C. $f\left(x\right)=2x-2e^{-2x}+2024x$. **D.** $f\left(x\right)=2x-2e^{-2x}$.

Lời giải

Chọn D.

Hàm số $F\left(x\right)=x^2+e^{-2x}+2024$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\left(x^2+e^{-2x}+2024\right)'=2x-2e^{-2x}$.

Câu 63. Hàm số $F\left(x\right)=\frac{x^3}{3}+e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$ nào sau đây?

A. $f\left(x\right)=x^2+e^x$. **B.** $f\left(x\right)=3x^2+e^x$. **C.** $f\left(x\right)=\frac{x^4}{12}+e^x$. **D.** $f\left(x\right)=\frac{x^4}{3}+e^x$.

Lời giải

Chọn A.

Hàm số $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)\Leftrightarrow F'\left(x\right)=f\left(x\right)$.

Suy ra hàm số cần tìm là $f\left(x\right)=\left(\frac{x^3}{3}+e^x\right)'=x^2+e^x$.

Câu 64. Một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{3x+1}-2x^2$ là

A. $\frac{e^{3x+1}}{3}-2x^3$. **B.** $\frac{e^{3x+1}}{3}-x^3$. **C.** $\frac{e^{3x+1}-2x^3}{3}$. **D.** $\frac{e^{3x+1}-x^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C.

$\int f(x)dx=\int\left(e^{3x+1}-2x^2\right)dx=\frac{1}{3}\int e^{3x+1}\mathrm{d}(3x+1)-\frac{2}{3}x^3=\frac{e^{3x+1}-2x^3}{3}$.

Câu 65. Kết quả $\int\left(x+e^{2027x}\right)dx$ bằng

A. $\frac{x^2}{2}+\frac{e^{2027x}}{2027}+C$. **B.** $x^3+\frac{e^{2027x}}{2027}+C$. **C.** $x^2+\frac{e^{2027x}}{2027}+C$. **D.** $x+\frac{e^{2027x}}{2027}+C$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\int\left(x+e^{2027x}\right)dx=\frac{x^2}{2}+\frac{e^{2027x}}{2027}+C$.

Câu 66. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x\left(2026-\frac{2027e^{-x}}{x^5}\right)$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=2026e^x-\frac{2027}{x^4}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=2026e^x+\frac{2027}{x^4}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=2026e^x+\frac{2027}{4x^4}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=2026e^x-\frac{2027}{4x^4}+C$.

Lời giải

Chọn C.

$\int f(x)dx=\int e^x\left(2026-\frac{2027e^{-x}}{x^5}\right)\mathrm{d}x=\int\left(2026e^x-\frac{2027}{x^5}\right)dx=2026e^x+\frac{2027}{4x^4}+C$

Câu 67. Họ nguyên hàm của hàm số $y=e^x\left(2+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)$ là

A. $2e^x+\tan x+C$ **B.** $2e^x-\tan x+C$ **C.** $2e^x-\frac{1}{\cos x}+C$ **D.** $2e^x+\frac{1}{\cos x}+C$

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $y=e^x\left(2+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)=2e^x+\frac{1}{\cos^2 x}$

$\int ydx=\int\left(2e^x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=2e^x+\tan x+C$.

Câu 68. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{-x}\left(2+\frac{e^x}{\cos^2 x}\right)$.

A. $F(x)=-\frac{2}{e^x}+\tan x+C$. **B.** $F(x)=2e^x-\tan x+C$.

C. $F(x)=-\dfrac{2}{e^x}-\tan x+C$. **D.** $F(x)=2e^{-x}+\tan x+C$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $F(x)=\int e^{-x}\left(2+\dfrac{e^x}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x=\int\left(2e^{-x}+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x=-2e^{-x}+\tan x+C=-\dfrac{2}{e^x}+\tan x+C$.

Câu 69. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=7^x$.

A. $\int 7^x\mathrm{d}x=\dfrac{7^x}{\ln 7}+C$ **B.** $\int 7^x\mathrm{d}x=7^{x+1}+C$ **C.** $\int 7^x\mathrm{d}x=\dfrac{7^{x+1}}{x+1}+C$ **D.** $\int 7^x\mathrm{d}x=7^x\ln 7+C$

Lời giải

Chọn A.

Áp dụng công thức $\int a^x\,\mathrm{d}x=\dfrac{a^x}{\ln a}+C\ ,(0<a\neq 1)$

Câu 70. Nguyên hàm của hàm số $y=2^x$ là

A. $\int 2^x\mathrm{d}x=\ln 2.2^x+C$. **B.** $\int 2^x\mathrm{d}x=2^x+C$. **C.** $\int 2^x\mathrm{d}x=\dfrac{2^x}{\ln 2}+C$. **D.** $\int 2^x\mathrm{d}x=\dfrac{2^x}{x+1}+C$.

Lời giải

Chọn C.

Do theo bảng nguyên hàm: $\int a^x\mathrm{d}x=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$.

Câu 71. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2025^x$ là

A. $F(x)=x.2025^{x-1}$. **B.** $F(x)=2025.2024^x$.

C. $F(x)=\dfrac{2025^x}{\ln 2025}$. **D.** $F(x)=2025^x.\ln 2025$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int 2025^x\mathrm{d}x=\dfrac{2025^x}{\ln 2025}+C$.

Câu 72. Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=3^{-x}$ là

A. $-\dfrac{3^{-x}}{\ln 3}+C$ **B.** $-3^{-x}+C$ **C.** $3^{-x}\ln 3+C$ **D.** $\dfrac{3^{-x}}{\ln 3}+C$

Lời giải

Chọn A

Cách 1: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int 3^{-x}\mathrm{d}x=\int\left(3^{-1}\right)^x\mathrm{d}(x)=\dfrac{3^{-x}}{\ln 3^{-1}}+C=-\dfrac{3^{-x}}{\ln 3}+C$

Cách 2: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int 3^{-x}\mathrm{d}x=-\dfrac{3^{-x}}{\ln 3}+C$.

Câu 73. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=5^{2x-1}$ là

A. $\dfrac{1}{2\ln 5}.5^{2x-1}+C$. **B.** $2.5^{2x-1}.\ln 5+C$. **C.** $5^{2x-1}.\ln 5+C$. **D.** $\dfrac{1}{2}.5^{2x-1}.\ln 5+C$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int 5^{2x-1}dx=\dfrac{1}{5}\int 25^{x}dx=\dfrac{1}{5}.\dfrac{25^{x}}{\ln 25}+C=\dfrac{1}{2\ln 5}.5^{2x-1}+C$.

Câu 74. Cho hàm số $f\left(x\right)=2^{x}+3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=2^{x-3}+C$. **B.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{2^{x}}{\ln 2}+3x+C$.

C. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{2^{x}}{\ln 2}+3+C$. **D.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=2^{x}\ln 2+3x+C$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(2^{x}+3\right)\mathrm{d}x=\dfrac{2^{x}}{\ln 2}+3x+C$.

Câu 75. Tìm nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=3^{x}+2x$.

A. $\int\left(3^{x}+2x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{3^{x}}{\ln 3}+x^{2}+C$ **B.** $\int\left(3^{x}+2x\right)\mathrm{d}x=3^{x}.\ln 3+x^{2}+C$

C. $\int\left(3^{x}+2x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{3^{x}}{\ln 3}+x+C$ **D.** $\int\left(3^{x}+2x\right)\mathrm{d}x=3^{x}.\ln 3+x+C$

Lời giải

Chọn A.

$\int\left(3^{x}+2x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{3^{x}}{\ln 3}+x^{2}+C$

Câu 76. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y=x^{2}-3^{x}+\dfrac{1}{x}$.

A. $\dfrac{x^{3}}{3}-\dfrac{3^{x}}{\ln 3}-\dfrac{1}{x^{2}}+C,\ C\in\mathbb{R}$. **B.** $\dfrac{x^{3}}{3}-3^{x}+\dfrac{1}{x^{2}}+C,\ C\in\mathbb{R}$.

C. $\dfrac{x^{3}}{3}-\dfrac{3^{x}}{\ln 3}+\ln\left|x\right|+C,\ C\in\mathbb{R}$. **D.** $\dfrac{x^{3}}{3}-\dfrac{3^{x}}{\ln 3}-\ln\left|x\right|+C,\ C\in\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\int\left(x^{2}-3^{x}+\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^{3}}{3}-\dfrac{3^{x}}{\ln 3}+\ln\left|x\right|+C,C\in\mathbb{R}$.

Câu 77. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=4^x+\cos 2x$ là

A. $\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{\sin 2x}{2}+C$.

B. $4^x\ln 4+\frac{\sin 2x}{2}+C$.

C. $4^x\ln 4-\frac{\sin 2x}{2}+C$.

D. $\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{\sin 2x}{2}+C$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\int\left(4^x+\cos 2x\right)dx=\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{\sin 2x}{2}+C$.

Câu 78. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^x\left(1+2^{-x}\cdot\sin x\right)$ là

A. $\frac{2^{x+1}}{x+1}-\cos x+C$

B. $\frac{2^x}{\ln 2}+\sin x+C$.

C. $\frac{2^x}{\ln 2}-\cos x+C$.

D. $\frac{2^{x-1}}{x+1}+\cos x+C$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int 2^x\left(1+2^{-x}\cdot\sin x\right)\mathrm{d}x=\int\left(2^x+\sin x\right)\mathrm{d}x=\frac{2^x}{\ln 2}-\cos x+C$

Câu 79. Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai?

A. $\int\left(\sqrt[3]{x^2}+x-2\right)dx=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+\frac{1}{2}x^2-2x+C$

B. $\int\frac{1}{2023x^{2024}}dx=\frac{1}{2023^2x^{2023}}+C$

C. $\int(2x-2024)^2dx=x-1012+C$

D. $\int\frac{\mathrm{e}^{3x}+1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+x+C$

Lời giải

Chọn C.

$\int\left(\sqrt[3]{x^2}+x-2\right)dx=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+\frac{1}{2}x^2-2x+C$

$\int\frac{1}{2023x^{2024}}dx=\frac{1}{2023}\int x^{-2024}dx=\frac{1}{2023^2x^{2023}}+C$

$\int(2x-2024)^2dx=\frac{(2x-2024)^3}{3}+C$

$\int\frac{\mathrm{e}^{3x}+1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x=\int\left(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+1\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+x+C$

Câu 80. Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. $\int\left(2+\cot^2x\right)dx=x-\cot x+C$.

B. $\int\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{2}(x+\sin x)+C$

C. $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2dx=x+\cos x+C$.

D. $\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2dx=x-\cos x+C$

Lời giải

Chọn A.

$\int\left(2+\cot^2 x\right)dx=\int\left(1+1+\cot^2 x\right)dx=\int\left(1+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=x-\cot x+C$

$\int\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)dx=\int\sin^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1-\cos x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(x-\sin x\right)+C$

$\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx=\int\left(1+\sin x\right)dx=x-\cos x+C$

$\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx=\int\left(1-\sin x\right)dx=x+\cos x+C$

Câu 81. Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai?

A. $\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x+C$.

B. $\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\tan x+C$.

C. $\int\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$.

D. $\int\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$.

Lời giải

Chọn A.

$\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$.

$\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\tan x+C$.

$\int\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$.

$\int\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$.

Câu 82. Cho $\int\frac{1}{x\ln^2 x}dx=F(x)+C$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $F'(x)=-\frac{1}{\ln x}$.

B. $F'(x)=-\frac{1}{\ln x}+C$.

C. $F'(x)=\frac{1}{x\ln^2 x}$.

D. $F'(x)=-\frac{1}{\ln^2 x}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\left[F(x)\right]'=\left(\int\frac{1}{x\ln^2 x}dx\right)'=\frac{1}{x\ln^2 x}$

Câu 83. Trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$, hàm số $F\left(x\right)=\sin x-x$ là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $f\left(x\right)=-\cos x-1$.

B. $h\left(x\right)=-\cos x-\frac{x^2}{2}+C$.

C. $k\left(x\right)=\cos x-\frac{x^2}{2}+C$.

D. $g\left(x\right)=\cos x-1$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $f(x)=\left(F(x)\right)'=\left(\sin x-x\right)'=\cos x-1$.

Câu 84. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\dfrac{1}{x}$ trên $(-\infty;0)$ thỏa mãn $F(-2)=0$. Tính $F(-2e)$.

A. $F(-2e)=-1$. **B.** $F(-2e)=1$. **C.** $F(-2e)=\dfrac{1}{2}$. **D.** $F(-2e)=-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $F(x)=\int\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C=\ln(-x)+C$ với $\forall x\in(-\infty;0)$.

Lại có $F(-2)=0\Leftrightarrow\ln 2+C=0\Leftrightarrow C=-\ln 2$.

Do đó $F(x)=\ln(-x)-\ln 2=\ln\left(\dfrac{-x}{2}\right)$.

Vậy $F(x)=\ln\left(\dfrac{-x}{2}\right)$ $\forall x\in(-\infty;0)$.

$\Rightarrow F(-2e)=\ln\left(\dfrac{2e}{2}\right)=1$

Câu 85. Cho hàm số $y=F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=x^2$. Tính $F'(25)$.

A. $F'(25)=\dfrac{15625}{3}$. **B.** $F'(25)=5$. **C.** $F'(25)=25$. **D.** $F'(25)=625$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=x^2$ nên ta có $F'(x)=x^2,\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó $F'(25)=25^2=625$.

Câu 86. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+x-2024$ thỏa mãn $F(1)=-2024$. Tính $F(0)$.

A. $F(0)=12$. **B.** $F(0)=-12$. **C.** $F(0)=\dfrac{1}{12}$. **D.** $F(0)=-\dfrac{1}{12}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\int\left(\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+x-2024\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\int x^3\mathrm{d}x-2\int x^2\mathrm{d}x+\int x\mathrm{d}x-2024\int\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{3}.\frac{x^4}{4}-2.\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2024x+C=\frac{1}{12}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2024x+C$.

$F(1)=-2024\Leftrightarrow\frac{1}{12}.1^4-\frac{2}{3}.1^3+\frac{1}{2}.1^2-2024.1+C=-2024\Leftrightarrow C=\frac{1}{12}$.

$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{12}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2024x+\frac{1}{12}$.

$\Rightarrow F(0)=\frac{1}{12}$

Câu 87. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(2x-3)^2$ thỏa $F(0)=\frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $T=\log_2\left[3F(1)-2F(2)\right]$.

A. $T=1$. **B.** $T=5$. **C.** $T=4$. **D.** $T=2$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $F(x)=\int(2x-3)^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(2x-3)^2\,\mathrm{d}(2x-3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-3)^3}{3}+C$.

Ta có $F(0)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{2}.\frac{(0-3)^3}{3}+C=\frac{1}{3}\Leftrightarrow C=\frac{29}{6}$.

Do đó $F(x)=\frac{1}{2}.\frac{(2x-3)^3}{3}+\frac{29}{6}$ nên $F(1)=\frac{1}{2}.-\frac{1}{3}+\frac{29}{6}=\frac{14}{3};F(2)=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}+\frac{29}{6}=5$.

$\Rightarrow T=\log_2\left[3F(1)-2F(2)\right]=\log_2\left(3.\frac{14}{3}-2.5\right)=\log_2 4=2$.

Câu 88. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+3\sqrt{x}$ thoả mãn $F(1)=0$. Tính $F(4)$.

A. $F(4)=25$. **B.** $F(4)=29$. **C.** $F(4)=-25$. **D.** $F(4)=20$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\int\left(2x+3\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=x^2+2x\sqrt{x}+C$ mà $F(1)=0\Rightarrow C=-3$.

Vậy $F(x)=x^2+2x\sqrt{x}-3$.

$\Rightarrow F(4)=29$

Câu 89. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x+\cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$. Tính $F(\pi)$.

A. $F(\pi)=2$. **B.** $F(\pi)=3$. **C.** $F(\pi)=1$. **D.** $F(\pi)=-1$.

Lời giải

Chọn A.

Có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int(\sin x+\cos x)\mathrm{d}x=-\cos x+\sin x+C$

Do $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}+C=2\Leftrightarrow 1+C=2\Leftrightarrow C=1\Rightarrow F(x)=-\cos x+\sin x+1.$

$\Rightarrow F(\pi)=2$

Câu 90. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x+1$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$. Biết $F\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{a.\pi+b.\sqrt{3}+c}{6}$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị biểu thức $a+b-c$.

A. $a+b-c=1.$ **B.** $a+b-c=5.$ **C.** $a+b-c=7.$ **D.** $a+b-c=-1.$

Lời giải

Chọn C.

$F(x)=\int(\sin x+1)dx=x-\cos x+C$

Do $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=0\Rightarrow\frac{\pi}{6}-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+C=0\Leftrightarrow C=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$

$F(x)=x-\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow F\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi+3\sqrt{3}-3}{6}$

$\Rightarrow a=1;b=3;c=-3\Rightarrow a+b-c=7$

Câu 91. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x+2\cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. Tính $F(-\pi)$.

A. $F(-\pi)=1.$ **B.** $F(-\pi)=-1.$ **C.** $F(-\pi)=0.$ **D.** $F(-\pi)=2.$

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\int(\sin x+2\cos x)\mathrm{d}x=-\cos x+2\sin x+C.$

Do $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ nên $C=-2$ nên $F(x)=2\sin x-\cos x-2.$

$\Rightarrow F(-\pi)=-1$

Câu 92. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2\sin x-\cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Tính $F(-\pi)$.

A. $F(-\pi)=-1.$ **B.** $F(-\pi)=0.$ **C.** $F(-\pi)=3.$ **D.** $F(-\pi)=1.$

Lời giải

Chọn C.

$F(x)=\int(2\sin x-\cos x)\,\mathrm{d}x=-2\cos x-\sin x+C$.

$F\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}+C=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow C=1$.

Vậy $F(x)=-2\cos x-\sin x+1$.

$\Rightarrow F(-\pi)=3$

Câu 93. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của của hàm số $f(x)=\sin x$ và đồ thị hàm số $y=F(x)$ đi qua điểm $M(0;1)$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. **B.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$. **C.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$. **D.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

Lời giải

Chọn B.

Theo bài ra $f(x)=\sin x$ nên $F(x)=-\cos x+C$, với C là hằng số tùy ý.

Đồ thị hàm số $y=F(x)$ đi qua điểm $M(0;1)$ nên $1=-\cos 0+C\Leftrightarrow C=2\Rightarrow F(x)=-\cos x+2$.

Do đó $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$.

Câu 94. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x+\frac{1}{\cos^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Tính $F(0)$.

A. $F(0)=\sqrt{2}-2$. **B.** $F(0)=\sqrt{2}$. **C.** $F(0)=\sqrt{2}-1$. **D.** $F(0)=\sqrt{2}+1$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $F(x)=\int\left(\sin x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x=-\cos x+\tan x+C$.

Vì $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ nên $C=\sqrt{2}-1$ nên $F(x)=-\cos x+\tan x+\sqrt{2}-1$.

$F(0)=-1+\sqrt{2}-1=\sqrt{2}-2$

Câu 95. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{2x}$ và $F(0)=0$. Giá trị của $F(\ln 3)$ bằng bao nhiêu?

A. $F(\ln 3)=1$. **B.** $F(\ln 3)=2$. **C.** $F(\ln 3)=3$. **D.** $F(\ln 3)=4$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $F(x)=\int e^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^{2x}+C$.

mà $F(0)=0\Rightarrow C=-\frac{1}{2}\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}$

Khi đó $F(\ln 3)=\frac{1}{2}e^{2\ln 3}-\frac{1}{2}=4$.

Câu 96. Cho hàm số $f(x)=2x+e^x$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=2024$. Biết $F(2)=e^a+b$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Tính giá trị biểu thức $a+b$.

A. $a+b=0$. **B.** $a+b=2024$. **C.** $a+b=2025$. **D.** $a+b=2026$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\int f(x)dx=\int\left(2x+e^x\right)dx=x^2+e^x+C$.

Có $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0)=2019$.

Suy ra $\begin{cases}F(x)=x^2+e^x+C\\F(0)=2024\end{cases}\Rightarrow 1+C=2024\Leftrightarrow C=2023$.

Vậy $F(x)=x^2+e^x+2023$.

$\Rightarrow F(2)=e^2+2027$

$\Rightarrow a=2;b=2023\Rightarrow a+b=2025$

Câu 97. Cho hàm số $f(x)=e^x+2e^{-x}-2x$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=1$. Biết $F(1)=\frac{e^a+e^b+c}{e}$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị biểu thức $a+b+c$.

A. $a+b+c=1$. **B.** $a+b+c=5$. **C.** $a+b+c=3$. **D.** $a+b+c=2$.

Lời giải

Chọn A.

$F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=e^x+2e^{-x}-2x$.

$\Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int\left(e^x+2e^{-x}-2x\right)dx=e^x-2e^{-x}-x^2+C$.

Vì $F(0)=1$ nên suy ra $e^0-2e^0-2.0+C=1\Rightarrow C=2$ nên $F(x)=e^x-2e^{-x}-x^2+2$.

$\Rightarrow F(1)=e-\frac{2}{e}+1=\frac{e^2+e-2}{e}$

$\Rightarrow a=2;b=1;c=-2\Rightarrow a+b+c=1$

Câu 98. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$, thỏa mãn $f'(x)=3\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ và $f(1)=1$. Biết $f(2)=a.\sqrt{2}+b.\sqrt[3]{4}+c$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị biểu thức $a+b+c$.

A. $a+b+c=11$. **B.** $a+b+c=3$. **C.** $a+b+c=10$. **D.** $a+b+c=0$.

Lời giải

Chọn B.

$$f(x)=\int\left(3\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)\mathrm{d}x=\int\left(3\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)\mathrm{d}x=2x\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x^2}+C$$

Mà $f(1)=1\Leftrightarrow 2+3+C=1\Leftrightarrow C=-4\Rightarrow f(x)=2x\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x^2}-4$

$\Rightarrow f(2)=4\sqrt{2}+3\sqrt[3]{4}-4$

$\Rightarrow a=4;b=3;c=-4\Rightarrow a+b+c=3$

Câu 99. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=3-5\sin x$ và $f(0)=10$. Biết $f(\pi)=a.\pi+b$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Tính giá trị biểu thức $a+b$.

A. $a+b=1$. **B.** $a+b=0$. **C.** $a+b=13$. **D.** $a+b=10$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có

$f'(x)=3-5\sin x$

$\Rightarrow f(x)=\int(3-5\sin x)dx=3x+5\cos x+C$

Theo giả thiết $f(0)=10$ nên $5+C=10\Rightarrow C=5$.

Vậy $f(x)=3x+5\cos x+5.$

$\Rightarrow f(\pi)=3\pi+10$

$\Rightarrow a=3;b=10\Rightarrow a+b=13$

Câu 100. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=2^x+x$ và $f(0)=\frac{1}{\ln 2}$. Tính $f(1)$.

A. $f(1)=\frac{4+\ln 2}{\ln 2}$. **B.** $f(1)=\frac{1+\ln 2}{2\ln 2}$. **C.** $f(1)=\frac{2+\ln 2}{2\ln 2}$. **D.** $f(1)=\frac{4+\ln 2}{2\ln 2}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $f'(x)=2^x+x$

$\Rightarrow f(x)=\int(2^x+x)dx=\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{x^2}{2}+C$

Theo giả thiết $f(0)=\frac{1}{\ln 2}$ nên $C=0$.

Vậy $f(x)=\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{x^2}{2}$

$\Rightarrow f(1)=\frac{2}{\ln 2}+\frac{1}{2}=\frac{4+\ln 2}{2\ln 2}$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 101. Cho hàm số $f(x)=e^x-\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

a) $f(x)=e^x-\cos x$

b) $f'(x)=e^x-\sin x$

c) $F(x)=e^x+\sin x+C$, với C là hằng số.

d) Biết $F(0)=2027$, khi đó $\int F(x)dx=e^x+\sin x+2027+C$, với C là hằng số.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

a) Ta có: $f(x)=e^x-\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=e^x-\cos x$

b) $f'(x)=\left(e^x-\cos x\right)'=e^x+\sin x$

c) $F(x)=\int\left(e^x-\cos x\right)dx=e^x-\sin x+C$

d) Ta có: $F(0)=2027$ nên $C=2026$

Do đó $F(x)=e^x-\sin x+2026$

$\Rightarrow\int F(x)dx=\int\left(e^x-\sin x+2026\right)dx=e^x+\cos x+2026x+C$

Câu 102. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=2026^x+2027$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=\frac{2026}{\ln 2026}$.

a) $f'(1)=4053$

b) $f(x)=\frac{2026^x}{\ln 2026}+2027+C$, với C là hằng số.

c) $f(0)=2027$.

d) $\int f(x)dx=\frac{2026^x}{\ln 2026}+\frac{2027}{2}x^2-2027x+C$, với C là hằng số.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

a) $f'(1)=2026+2027=4053$

b) c) Ta có: $f'(x)=2026^x+2027$

$\Rightarrow f(x)=\int\left(2026^x+2027\right)dx=\dfrac{2026^x}{\ln 2026}+2027x+C$

Lại có: $f(1)=\dfrac{2026}{\ln 2026}$ nên $C=-2027$

Do đó $f(x)=\dfrac{2026^x}{\ln 2026}+2027x-2027$

$\Rightarrow f(0)=\dfrac{1}{\ln 2026}-2027$

d) $\int f(x)dx=\int\left(\dfrac{2026^x}{\ln 2026}+2027x-2027\right)dx=\dfrac{2026^x}{\ln^2 2026}+\dfrac{2027}{2}x^2-2027x+C$

Câu 103. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=8x^3+\sin x$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=3$.

a) Hàm số $y=f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f'(x)$.

b) Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thoả $F(0)=2$. Khi đó $F(1)=\dfrac{32}{5}-\sin 1$.

c) $f(x)=2x^4-\cos x+3$.

d) $\int f(x)dx=\dfrac{2}{5}x^5-\sin x+3x+C$, với C là hằng số.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Đúng

b) Ta có: $f(x)=\int\left(8x^3+\sin x\right)dx=8\int x^3dx+\int\sin xdx=2x^4-\cos x+C$

Lại có: $f(0)=3\Rightarrow -1+C=3\Rightarrow C=4\Rightarrow f(x)=2x^4-\cos x+4$

Khi đó: $F(x)=\int f(x)dx=\int\left(2x^4-\cos x+4\right)dx=\dfrac{2}{5}x^5-\sin x+4x+C$

Mà $F(0)=2\Rightarrow C=2\Rightarrow F(x)=\dfrac{2}{5}x^5-\sin x+4x+2\Rightarrow F(1)=\dfrac{32}{5}-\sin 1$.

c) Ta có: $f(x)=\int\left(8x^3+\sin x\right)dx=8\int x^3dx+\int\sin xdx=2x^4-\cos x+C$

Lại có: $f(0)=3\Rightarrow -1+C=3\Rightarrow C=4\Rightarrow f(x)=2x^4-\cos x+4$

d) $\int f(x)dx=\int\left(2x^4-\cos x+4\right)dx=\dfrac{2}{5}x^5-\sin x+4x+C$

Câu 104. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4+4x^3$.

a) $f'(x)=x^3+12x^2$.

b) Phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm $x=-12$ và $x=0$.

c) $\int\left(\frac{1}{4}x^4+4x^3\right)dx=\frac{1}{4}x^5+\frac{4}{3}x^4+C$, với C là hằng số.

d) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(0)=2026$ thì $F(x)=\frac{1}{20}x^5+\frac{4}{3}x^4-2026$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	SAI	ĐÚNG	ĐÚNG

a) $f'(x)=x^3+12x^2$.

b) $f'(x)=0\Leftrightarrow x^3+12x^2=0\Leftrightarrow x^2(x+12)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-12\end{array}\right.$.

c) $\int\left(\frac{1}{4}x^4+4x^3\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{20}x^5+\frac{4}{3}x^4+C$

d) Ta có $F(x)=\frac{1}{20}x^5+\frac{4}{3}x^4+C$

$F(0)=2026\Leftrightarrow C=2026\Rightarrow F(x)=\frac{1}{20}x^5+\frac{4}{3}x^4+2026$

Câu 105. Cho hàm số $f(x)=x+1$.

a) $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2+x+C$, với C là hằng số.

b) $\int\left[(x-1).f(x)\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+x+C$, với C là hằng số.

c) $\int\frac{f(x+1)}{x}\mathrm{d}x=x+\ln|x|+C$, với C là hằng số.

d) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(1)=2$ thì $F(x)=\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{2}$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	SAI	ĐÚNG	ĐÚNG

a) $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(x+1)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+x+C$

b) $\int\left[(x-1).f(x)\right]\mathrm{d}x=\int(x-1).(x+1)\mathrm{d}x=\int\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3-x+C$.

c) $\int\frac{f(x+1)}{x}\mathrm{d}x=\int\frac{x+2}{x}\mathrm{d}x=\int\left(1+\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x=x+\ln|x|+C$.

d) Ta có $F(x)=\frac{x^2}{2}+x+C$

$F(1)=2\Leftrightarrow\frac{1}{2}+1+C=2\Leftrightarrow C=-\frac{1}{2}$ vậy $F(x)=\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{2}$.

Câu 106. Cho hàm số $f(x)=4x^3-6x$.

a) $\int(4x^3-6x)dx=x^4-6x+C$, với C là hằng số.

b) Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0)=2$. Khi đó $F(x)=x^4-3x^2+2$.

c) $\int f(x-1)dx=x^4-4x^3+3x^3+2x+C$, với C là hằng số.

d) Biết $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x-1)$ và $G(1)=0$. Khi đó $G(0)=-2$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

a) $\int(4x^3-6x)dx=\int 4x^3dx-\int 6xdx=x^4-3x^2+C$.

b) $F(x)=x^4-3x^2+C$

Theo giả thiết $F(0)=2$ suy ra $C=2\Rightarrow F(x)=x^4-3x^2+2$

c) $\int f(x-1)dx=\int\left[4(x-1)^3-6(x-1)\right]dx=\int(4x^3-12x^2+6x+2)dx=x^4-4x^3+3x^3+2x+C$

d) $G(x)=x^4-4x^3+3x^3+2x+C$

Theo giả thiết $G(1)=0$ suy ra $C=-2\Rightarrow G(x)=x^4-4x^3+3x^3+2x-2\Rightarrow G(0)=-2$

Câu 107. Cho hàm số $f(x)=x^2$.

a) $\int f(x)dx=x^3+C$, với C là hằng số.

b) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(3)=1$ thì $F(4)=\frac{40}{3}$.

c) $\int f(2x+1)dx=\frac{4}{3}x^3+2x^2+x+C$, với C là hằng số.

d) $\int\left[x.f(x-2)\right]dx=\frac{x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}+2x^2+C$, với C là hằng số.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG

a) $\int f(x)dx=\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C$

b) Ta có $F(3)=1\Leftrightarrow\frac{3^3}{3}+C=1\Leftrightarrow C=-8$ vậy $F(x)=\frac{x^3}{3}-8$ nên $F(4)=\frac{40}{3}$.

c) $\int f(2x+1)dx = \int (2x+1)^2 dx = \int (4x^2+4x+1)dx = \frac{4}{3}x^3+2x^2+x+C$.

d) $\int [x.f(x-2)]\,dx = \int x.(x-2)^2 dx = \int x.(x^2-4x+4)dx$

$= \int (x^3-4x^2+4x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + C$

Câu 108. Cho hàm số $f(x)=3$.

a) $\int f(x)dx = 3x+C$, với C là hằng số.

b) $\int \frac{f(x)}{x^2}dx = \frac{3}{x}+C$, với C là hằng số.

c) $\int [f(x)+x]^2 dx = x^3+3x^2+9x+C$, với C là hằng số.

d) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, biết $F(1)=1$ thì $F(1)+F(2)+...+F(2027)=304000$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) $\int f(x)dx = 3x+C$

b) $\int \frac{f(x)}{x^2}dx = \int \frac{3}{x^2}dx = -\frac{3}{x}+C$

c) $\int [f(x)+x]^2 dx = \int (3+x)^2 dx = \int (x^2+6x+9)dx = \frac{x^3}{3}+3x^2+9x+C$

d) Ta có: $F(x)=3x+C$

$F(1)=1 \Leftrightarrow 3+C=1 \Leftrightarrow C=-2$ vậy $F(x)=3x-2$.

Ta có: $F(x)=3x-2$ nên $F(1)=1; F(2)=4; F(3)=7; ....; F(2027)=6079$ là cấp số cộng với $u_1=1; d=3$.

Khi đó: $F(1)+F(2)+...+F(2027) = \frac{(1+6079).100}{2} = 304000$.

Câu 109. Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{2}x+1$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

a) $\int f(x)dx = x^2+x+C$, với C là hằng số.

b) $\int f^2(x)dx = \frac{1}{12}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C$, với C là hằng số.

c) Nếu $F(0)=1$ thì $F(2)=6$.

d) Nếu $F(1)=2$ thì $\frac{1}{F(1)}+\frac{1}{F(2)}+...+\frac{1}{F(2026)}+\frac{1}{F(2027)}=\frac{a}{b}$ ($a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản).

Tính $a+b=4053$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	SAI

a) $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{2}x+1\right)\mathrm{d}x=x^2+x+C$.

b) $\int f^2(x)\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{4}x^2+x+1\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C$

c) Ta có $F(x)=x^2+x+C$

$F(0)=1\Leftrightarrow 0+0+C=1\Leftrightarrow C=1$ vậy $F(x)=x^2+x+1\Rightarrow F(2)=7$.

d) Ta có $F(x)=x^2+x+C$

$F(1)=2\Leftrightarrow 1+1+C=2\Leftrightarrow C=0$ vậy $F(x)=x^2+x$.

Ta có: $F(x)=x^2+x=x(x+1)\Rightarrow\frac{1}{F(x)}=\frac{1}{x(x+1)}$ nên ta có:

$$\frac{1}{F(1)}+\frac{1}{F(2)}+...+\frac{1}{F(2026)}+\frac{1}{F(2027)}$$
$$=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{2026.2027}+\frac{1}{2027.2028}$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+....+\frac{1}{2026}-\frac{1}{2027}+\frac{1}{2027}-\frac{1}{2028}=1-\frac{1}{2028}=\frac{2027}{2028}$$

Vậy $a=2027;b=2028$ nên $a+b=4055$.

Câu 110. Cho hàm số $F(x)=x^2+x-6$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

a) $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-6x+C$, với C là hằng số.

b) Hàm số $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $G(1)=3$ thì giá trị $G(4)=21$.

c) Hàm số $H(x-1)$ là một nguyên hàm của $f(x-1)$ và $H(0)=3$ thì giá trị của biểu thức $H(2)-H(4)=-14$.

d) $f(1)+f(2)+...+f(2024)+f(2025)=4104675$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG

a) Ta có $f(x)=F'(x)=2x+1$

b) Ta có $G(x)=x^2+x+C$ với $G(1)=3\Leftrightarrow 1^2+1+C=3\Leftrightarrow C=1$

Khi đó $G(x)=x^2+x+1\Rightarrow G(4)=21.$

c) $H(x-1)=(x-1)^2+(x-1)+C=x^2-2x+1+x-1+C=x^2-x+C$

với $x=1$ ta có: $H(0)=3\Leftrightarrow C=3$ nên $H(x-1)=x^2-x+3$

$H(2)=H(3-1)=9$

$H(4)=H(5-1)=23$

Khi đó: $H(2)-H(4)=9-23=-14.$

d) Ta có $f(x)=2x+1$

$f(x)=2x+1$ là cấp số cộng với $u_1=f(1)=3; d=2; u_{2025}=f(2025)=4051$ nên

$$f(1)+f(2)+...+f(2024)+f(2025)=\frac{(3+4051).2025}{2}=4104675$$

Câu 111. Cho hàm số $f(x)=x^3-4x+5$.

a) $\int(x^3-4x+5)\,dx=x^4-2x^2+5x+C$, với C là hằng số.

b) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(1)=3$, khi đó $F(0)=-\frac{1}{4}$

c) $\int[f(x)+f'(x)]\,dx=\frac{x^4}{4}+x^3-2x^2+9x+C$, với C là hằng số.

d) $\int f(x+1)dx=\frac{x^4}{4}+x^3-\frac{1}{2}x^2+2x+C$, với C là hằng số.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

a) $\int(x^3-4x+5)\,dx=\frac{x^4}{4}-2x^2+5x+C.$

b) Ta có $F(x)=\frac{x^4}{4}-2x^2+5x+C$

$F(1)=3\Leftrightarrow\frac{13}{4}+C=3\Leftrightarrow C=-\frac{1}{4}$ vậy $F(0)=-\frac{1}{4}.$

c) $\int[f(x)+f'(x)]\,dx=\frac{x^4}{4}-2x^2+5x+x^3-4x+C=\frac{x^4}{4}+x^3-2x^2+x+C.$

d) $\int f(x+1)dx=\frac{(x+1)^4}{4}-2(x+1)^2+5(x+1)+C=\frac{x^4}{4}+x^3-\frac{1}{2}x^2+2x+C.$

Câu 112. Hàm hai số $f(x)$ và $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn: $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ và $\int g(x)\,\mathrm{d}x = x+\ln|x|+C$, với C là hằng số.

a) $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$.

b) $g(x)=1-\dfrac{1}{x}+C$, với C là hằng số.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)+g(x)$ và thỏa mãn $F(-1)=3$. Khi đó $F(x)=x^2+2\ln|x|-\dfrac{1}{2}$.

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)+g(x)$. Biết $G(2)=2\ln 2$ và $G(4)+G(-4)=2$. Khi đó $G(-6)=a\ln 2+b\ln 3+c$, với a,b,c là các số thực. Vậy $a+b+c=-2$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}=x+\dfrac{1}{x}$.

$\Rightarrow f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$

b) $\int g(x)\mathrm{d}x = x+\ln|x|+C \Rightarrow g(x)=1+\dfrac{1}{x}$.

c) Ta có $f(x)+g(x)=x+1+\dfrac{2}{x}$.

Nên $\int\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=\int\left(x+1+\dfrac{2}{x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}+x+2\ln|x|+C$.

Do $F(-1)=3\Leftrightarrow C=\dfrac{7}{2}$ nên $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+x+2\ln|x|+\dfrac{7}{2}$.

d) Ta có $\int\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}+x+2\ln|x|+C=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+x+2\ln x+C_1 & khi\ x>0\\ \dfrac{x^2}{2}+x+2\ln(-x)+C_2 & khi\ x<0\end{cases}$.

Do $\begin{cases}G(2)=2\ln 2\\ G(4)+G(-4)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=-4\\ 8+4+4\ln 2-4+8-4+4\ln 2+C_2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=5\\ C_2=-8\ln 2-10\end{cases}$

Nên $G(-6)=18-6+2\ln 6-8\ln 2-10=2-6\ln 2+2\ln 3=a\ln 2+b\ln 3+c$.

Vậy $a+b+c=-6+2+2=-2$.

Câu 113. Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f(x)=\dfrac{x^2+5x-7}{x}$.

a) $f'(x)=1+\dfrac{7}{x^2}$.

b) $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}+5x+7\ln|x|+C$, với C là hằng số.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(1)=5$. Khi đó $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+5x-7\ln|x|+\dfrac{1}{2}$.

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(1)=4$ và $G(3)+G(-9)=20$. Khi đó tìm được $G(-6)=a\ln 2+b\ln 3+c$, với a,b,c là các số hữu tỉ. Vậy $a+b+c=\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

a) $f(x)=\dfrac{x^2+5x-7}{x}=x+5-\dfrac{7}{x}$.

$\Rightarrow f'(x)=1+\dfrac{7}{x^2}$

b) $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(x+5-\dfrac{7}{x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}+5x-7\ln|x|+C$.

c) Ta có $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+5x-7\ln|x|+C$.

Do $F(1)=5\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}+5+C=5\Leftrightarrow C=-\dfrac{1}{2}$ nên $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+5x-7\ln|x|-\dfrac{1}{2}$.

d) $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}+5x-7\ln|x|+C=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+5x-7\ln x+C_1 & khi\ x>0\\ \dfrac{x^2}{2}+5x-7\ln(-x)+C_2 & khi\ x<0\end{cases}$.

Do $\begin{cases}G(1)=4\\ G(3)+G(-9)=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=-\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{9}{2}+15-7\ln 3-\dfrac{3}{2}+\dfrac{81}{2}-45-14\ln 3+C_2=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=-\dfrac{3}{2}\\ C_2=21\ln 3+\dfrac{13}{2}\end{cases}$

Khi đó: $G(-6)=\dfrac{36}{2}-30-7\ln 6+21\ln 3+\dfrac{13}{2}=-7\ln 2+14\ln 3-\dfrac{11}{2}$.

Vậy $a+b+c=-7+14-\dfrac{11}{2}=\dfrac{3}{2}$.

Câu 114. Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f(x)=\dfrac{3x^5-2x^3+x^2+5x+4}{x^3}$.

a) $f(x)=3x^2-2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}$.

b) $\int f(x)\mathrm{d}x=x^3-2x+\ln|x|-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x^2}+C$, với C là hằng số.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(-1)=0$. Khi đó tìm được $F(x)=x^3-2x+\ln|x|-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{3}{2}$.

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(1)=0$ và $G(-3)-G(3)=2$. Khi đó $G(-2)=\dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{\log_c e}$, với a,b,c là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Vậy $a+b+c=1090$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	SAI

a) $f(x)=\dfrac{3x^5-2x^3+x^2+5x+4}{x^3}=3x^2-2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}$.

b) $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(3x^2-2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}\right)\mathrm{d}x=x^3-2x+\ln|x|-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}+C$.

c) Ta có $F(x)=x^3-2x+\ln|x|-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}+C$

Do $F(-1)=0\Leftrightarrow C=-\dfrac{3}{2}$ nên $F(x)=x^3-2x+\ln|x|-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{3}{2}$.

d) $\int f(x)\mathrm{d}x=x^3-2x+\ln|x|-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}+C=\begin{cases}x^3-2x+\ln x-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}+C_1 & khi\ x>0\\ x^3-2x+\ln(-x)-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}+C_2 & khi\ x<0\end{cases}$.

$$\begin{cases}G(1)=0\\ G(-3)-G(3)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=\dfrac{5}{2}\\ -27+6+\ln 3+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{18}+C_2-27+6-\ln 3+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{18}-\dfrac{5}{2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=\dfrac{5}{2}\\ C_2=\dfrac{275}{6}\end{cases}$$

Nên $G(-2)=-8+4+\ln 2+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{8}+\dfrac{275}{6}=\dfrac{1013}{24}+\dfrac{1}{\log_2 e}=\dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{\log_c e}$.

Vậy $a+b+c=1013+24+2=1039$.

Câu 115. Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f(x)=\dfrac{(x+1)(3x-2)}{x}$.

a) $f'(x)=3+\dfrac{2}{x^2}$

b) $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{3x^2}{2}+x-2\ln|x|+C$, với C là hằng số.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(3)=15$. Khi đó $F(x)=\frac{3x^2}{2}+x-2\ln|x|+15$.

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(2)=1$ và $G(5)+G(-5)=10$. Khi đó tìm được $G(-10)=a\ln 2+b\ln 5+c$, với a,b,c là các số hữu tỷ. Vậy $a+b+c=70$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	SAI

a) $f(x)=\frac{(x+1)(3x-2)}{x}=\frac{3x^2+x-2}{x}=3x+1-\frac{2}{x}$.

$\Rightarrow f'(x)=3+\frac{2}{x^2}$

b) $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(3x+1-\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{3x^2}{2}+x-2\ln|x|+C$.

c) Ta có $F(x)=\frac{3x^2}{2}+x-2\ln|x|+C$.

Do $F(3)=15\Leftrightarrow\frac{27}{2}+3-2\ln 3+C=15\Leftrightarrow C=2\ln 3-\frac{3}{2}$.

Suy ra $F(x)=\frac{3x^2}{2}+x-2\ln|x|+2\ln 3-\frac{3}{2}$.

d) Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{3x^2}{2}+x-2\ln|x|+C=\begin{cases}\frac{3x^2}{2}+x-2\ln x+C_1 & khi\ x>0\\ \frac{3x^2}{2}+x-2\ln(-x)+C_2 & khi\ x<0\end{cases}$

Do $\begin{cases}G(2)=1\\ G(5)+G(-5)=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6+2+C_1=1\\ \frac{75}{2}+5-2\ln 5+C_1+\frac{75}{2}-5-2\ln 5+C_2=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=-7\\ C_2=4\ln 5-65\end{cases}$.

Nên $G(-10)=150-10-2\ln 10+4\ln 5-65=75-2\ln 2+2\ln 5=a\ln 2+b\ln 5+c$.

Vậy $a+b+c=-2+2+75=75$.

Câu 116. Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$.

a) $f'(x)=\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}$.

b) $\int f(x)\mathrm{d}x = x - 2\ln x - \frac{1}{x} + C$, với C là hằng số.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(3) = 5$. Khi đó ta tìm được $F(x) = x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + 2\ln 3 + \frac{7}{3}$.

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(1) = 5$ và $G(2) + G(-4) = 2025$. Khi đó tìm được $F(-8) = \frac{a}{b}$, với a, b là các số nguyên và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Vậy $a + b = 16000$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	SAI	ĐÚNG	SAI

a) $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$.

$\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3}$

b) $\int f(x)\mathrm{d}x = \int\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + C$.

c) Ta có: $F(x) = x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + C$.

Do $F(3) = 5 \Leftrightarrow 3 - 2\ln 3 - \frac{1}{3} + C = 5 \Leftrightarrow C = 2\ln 3 + \frac{7}{3}$.

Vậy $F(x) = x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + 2\ln 3 + \frac{7}{3}$.

d) Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x = x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + C = \begin{cases} x - 2\ln x - \frac{1}{x} + C_1 & khi\ \ x > 0. \\ x - 2\ln(-x) - \frac{1}{x} + C_2 & khi\ \ x < 0. \end{cases}$

$\begin{cases} G(1) = 5 \\ G(2) + G(-4) = 2025 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 5 \\ 2 - 2\ln 2 - \frac{1}{2} + 5 - 4 - 4\ln 2 + \frac{1}{4} + C_2 = 2025 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 5 \\ C_2 = 6\ln 2 + \frac{8089}{4} \end{cases}$

Nên $G(-8) = -8 - 6\ln 2 + \frac{1}{8} + 6\ln 2 + \frac{8089}{4} = \frac{16115}{8} \Rightarrow a = 16115; b = 8$.

Vậy $a + b = 16115 + 8 = 16123$.

Câu 117. Cho hàm số $F(x) = \int\left(\sqrt[5]{x^3}\right)\mathrm{d}x$ (với $x > 0$).

a) $F(x) = \int x^{\frac{3}{5}}\mathrm{d}x$

b) $F(x)+C=\int\left(\sqrt[5]{x^3}\right)\mathrm{d}x$, với C là hằng số.

c) $F(x)=\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}+C$, với C là hằng số.

d) Biết $F(1)=-\frac{3}{8}$, khi đó $F(x)=\frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8}+\frac{3}{8}$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	SAI

a) $F(x)=\int\left(\sqrt[5]{x^3}\right)\mathrm{d}x=\int x^{\frac{3}{5}}\mathrm{d}x$

b) Nếu $F(x),G(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x)=G(x)+C$

c) $F(x)=\int\left(\sqrt[5]{x^3}\right)\mathrm{d}x=\int x^{\frac{3}{5}}\mathrm{d}x=\frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}}+C$

d) $F(x)=\frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}}+C, F(1)=\frac{5}{8}+C=-\frac{3}{8}\Rightarrow C=-1\Rightarrow F(x)=\frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8}-1$.

Câu 118. Cho hàm số $F(x)=\int\left(2x+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$ (với $x>0$).

a) $F(x)=2\int x\,\mathrm{d}x+\int\sqrt{x}\,\mathrm{d}x+C$ với $C\in\mathbb{R}$.

b) Nếu $G(x)=F(x)+1$ thì $G(x)=\int\left(2x+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$

c) $F(x)=x^2+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$.

d) Nếu $F(1)=\frac{2}{3}$ thì $F(4)=\frac{25}{3}$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG

a) $F(x)=2\int x\,\mathrm{d}x+\int\sqrt{x}\,\mathrm{d}x+C$ với $C\in\mathbb{R}$.

b) $F(x),G(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x)=G(x)+C$

nên $G(x)=F(x)+1$ thì $G(x)=\int\left(2x+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$

c) $F(x)=\int\left(2x+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\int\left(2x+x^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x=x^2+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$

d) Ta có $F(x)=x^2+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$

Mà $F(1)=1+\frac{2}{3}+C=\frac{2}{3}\Rightarrow C=-1\Rightarrow F(x)=x^2+\frac{2}{3}x\sqrt{x}-1\Rightarrow F(4)=\frac{25}{3}$

Câu 119. Cho hàm số $f(x)=\sin x$.

a) $\int f(x)\mathrm{d}x=-\cos x+C$, với C là hằng số.

b) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(\pi)=1$. Khi đó $F(0)=-1$.

c) $\int F(x)\mathrm{d}x=\sin x+C_1$, với C_1 là hằng số.

d) Phương trình $F(x)=f(x)$ có đúng 4 nghiệm trên đoạn $[0;4\pi]$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

a) $\int f(x)\mathrm{d}x=\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$.

b) Từ giả thiết, ta được $-\cos\pi+C=1\Leftrightarrow 1+C=1\Leftrightarrow C=0$

Suy ra $F(x)=-\cos x\Rightarrow F(0)=-1$.

c) $\int F(x)\mathrm{d}x=-\int \cos x\mathrm{d}x=-\sin x+C_1$.

d) Ta có $F(x)=f(x)\Leftrightarrow -\cos x=\sin x\Leftrightarrow \tan x=-1\Leftrightarrow x=\frac{-\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Ta xét $0\le\frac{-\pi}{4}+k\pi\le 4\pi\Leftrightarrow\frac{1}{4}\le k\le\frac{17}{4}$. Vì $k\in\mathbb{Z}$ nên $k\in\{1;2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$.

Phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm thuộc đoạn $[0;4\pi]$.

Câu 120. Cho hàm số $f(x)=\sin x+\cos x$. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

a) $F(x)=\sin x+\cos x+C$, với C là hằng số.

b) Biết $F(x)$ thỏa mãn $F(0)=-1$. Khi đó, $F(x)=\sin x-\cos x$.

c) Biết $F(x)$ thỏa mãn $F(0)=-1$. Khi đó, Hàm số $F(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

d) Biết $F(x)$ thỏa mãn $F(0)=-1$. Khi đó, Hàm số $F(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất là $-\sqrt{2}$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

a) Ta có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int(\sin x+\cos x)\mathrm{d}x=-\cos x+\sin x+C$.

b) Từ giả thiết, ta được $\sin 0-\cos 0+C=-1\Leftrightarrow C=0$ nên $F(x)=\sin x-\cos x$.

c) Ta có $F'(x)=\sin x+\cos x>0,\ \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên $F(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

d) $F(x)=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

mà $-\sqrt{2}\le\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}$

$\Rightarrow MinF(x)=-\sqrt{2}$

Câu 121. Cho $F(x)=-\int\sin x\,\mathrm{d}x$ và thỏa mãn $F(0)=1$.

a) $F(x)=\cos x$.

b) Hàm số $F(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.

c) $F(\alpha)=\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha},\ \forall\alpha\ne k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

d) $F\left(\frac{\pi}{2^{2025}}\right)\cdot F\left(\frac{\pi}{2^{2024}}\right)\cdot F\left(\frac{\pi}{2^{2023}}\right)\cdots F\left(\frac{\pi}{2^{3}}\right)\cdot F\left(\frac{\pi}{2^{2}}\right)=\frac{1}{2^{2024}\sin\frac{\pi}{2^{2025}}}$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	SAI	ĐÚNG

a) Ta có $F(x)=-\int\sin x\,\mathrm{d}x=\cos x+C$. Mà $F(0)=1$ nên ta có $C=0\Rightarrow F(x)=\cos x$.

b) Ta có $F(-x)=\cos(-x)=\cos x=F(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên $F(x)$ là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$.

c) Ta có $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$ hay $F(\alpha)=\cos\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$.

d) Ta có $F\left(\frac{\pi}{2^{2025}}\right)\cdot F\left(\frac{\pi}{2^{2024}}\right)\cdot F\left(\frac{\pi}{2^{2023}}\right)\cdots F\left(\frac{\pi}{2^{3}}\right)\cdot F\left(\frac{\pi}{2^{2}}\right)$

$=\frac{\sin\frac{\pi}{2^{2024}}}{2\sin\frac{\pi}{2^{2025}}}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2^{2023}}}{2\sin\frac{\pi}{2^{2024}}}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2^{2022}}}{2\sin\frac{\pi}{2^{2023}}}\cdots\frac{\sin\frac{\pi}{2^{2}}}{2\sin\frac{\pi}{2^{3}}}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2\sin\frac{\pi}{2^{2}}}=\frac{1}{2^{2024}\sin\frac{\pi}{2^{2025}}}$.

Câu 122. Cho hàm số $f(x)=\cos^2 x$ và $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x$.

a) $F'(x)=\sin 2x$

b) $F(x)=\int\frac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x$

c) $\frac{\sin x\cos x+x}{2}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$

d) Biết $F(0)=0$. Suy ra $F(\pi)=2\pi$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	SAI

a) $F'(x)=f(x)=\cos^2 x$.

b) Do $f(x)=\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$

c) $\left(\dfrac{\sin x\cos x+x}{2}\right)'=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x+1}{2}=\dfrac{2\cos^2 x}{2}=\cos^2 x$.

d) Do $\dfrac{\sin x\cos x+x}{2}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên $F(x)=\dfrac{\sin x\cos x+x}{2}+C$

Ta lại có $F(0)=C=0\Rightarrow F(x)=\dfrac{\sin x\cos x+x}{2}\Rightarrow F(\pi)=\dfrac{\pi}{2}$.

Câu 123. Cho hàm số $f(x)=\tan^2 x$ và $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x$.

a) $F'(x)=\tan^2 x$.

b) $\tan x$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

c) $F(x)=\int\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x$.

d) Nếu $F(0)=0$ thì $F(\pi)=\pi$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	SAI

a) Vì $F'(x)=f(x)=\tan^2 x$

b) Ta có $(\tan x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\tan^2 x+1$

c) Do $\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1$ nên $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\tan^2 x\mathrm{d}x=\int\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x$.

d) Ta có $F(x)=\tan x-x+C$.

Khi đó $F(0)=C=0\Rightarrow F(x)=\tan x-x\Rightarrow F(\pi)=-\pi$.

Câu 124. Cho $F(x)=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$.

a) $F(x)=-\cot x+C$, với C là hằng số.

b) Nếu $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ thì $F(x)=1-\cot x$.

c) Nếu $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ thì hàm số $F(x)$ là hàm số lẻ trên tập xác định của $F(x)$.

d) Phương trình $F(x)=0$ có các nghiệm là $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$, với $k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Ta có $F(x)=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}=-\cot x+C$.

b) Từ giả thiết, ta được $C-\cot\frac{\pi}{4}=0\Leftrightarrow C=1$ nên $F(x)=1-\cot x$.

c) Ta có $F(x)=1-\cot x$.

Ta thấy $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$, $F\left(\frac{-\pi}{4}\right)=2$ nên $F\left(\frac{-\pi}{4}\right)\neq\pm F\left(\frac{\pi}{4}\right)$ nên hàm số đã cho không là hàm chẵn mà cũng không là hàm lẻ trên tập xác định của $F(x)$.

d) Ta có $F(x)=-\cot x+C$

$F(x)=0\Leftrightarrow 1-\cot x=0\Leftrightarrow\cot x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Câu 125. Cho $F(x)=\int\tan^2 x\,\mathrm{d}x$ và thỏa mãn $F(0)=0$.

a) $F(x)=x+\tan x$.

b) Hàm số $F(x)$ là hàm số chẵn trên tập xác định của $F(x)$.

c) Hàm số $F(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

d) Phương trình $F(x)+x=0$ có các nghiệm là $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Ta có $F(x)=\int\tan^2 x\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x=\tan x-x+C$.

Mặt khác $F(0)=0$ nên ta có $C=0$ nên $F(x)=-x+\tan x$.

b) $F(x)=-x+\tan x$

Ta thấy rằng $F(-x)=x-\tan x=-F(x)$ nên hàm số đã cho là hàm lẻ trên mỗi khoảng xác định của $F(x)$.

c) $F(x)=-x+\tan x \Rightarrow F'(x)=-1+\dfrac{1}{\cos^2 x}=\tan^2 x$

Ta có $F'(x)=\tan^2 x\geq 0$ với mọi x thuộc tập xác định của $F(x)$ nên hàm số $F(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

d) Ta có $F(x)+x=0\Leftrightarrow -x+\tan x+x=0\Leftrightarrow \tan x=0\Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Câu 126. Cho hàm số $f(x)=e^x+x^e$.

a) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $F(x)+2024$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$.

b) $F(x)=e^x+x^e+C$ là họ nguyên hàm của $f(x)$.

c) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0)=1$ thì $F(1)=2e$.

d) Nếu $F(x),G(x)$ lần lượt là các nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0)=1,G(1)=e$ thì ta luôn có $G(x)=F(x)+2e$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	SAI

a) Đúng: Do $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ nên ta có:

$$\left(F(x)+2024\right)'=\left(F(x)\right)'+\left(2024\right)'=F'(x)=f(x).$$

Do đó $F(x)+2024$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$.

b) Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(e^x+x^e\right)\mathrm{d}x=e^x+ex^{e-1}+C$.

Suy ra $F(x)=e^x+ex^{e-1}+C$ là họ nguyên hàm của $f(x)$.

c) Ta có: $F(x)=\int\left(e^x+x^e\right)\mathrm{d}x=e^x+ex^{e-1}+C$ và $F(0)=1\Rightarrow 1+C=1\Leftrightarrow C=0$.

Suy ra $F(x)=e^x+ex^{e-1}\Rightarrow F(1)=e+e=2e$.

d) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0)=1$ thì $F(x)=e^x+ex^{e-1}$ (1)

Nếu $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $G(1)=e$ thì

$$\begin{cases}G(x)=e^x+ex^{e-1}+C\\ G(1)=e\end{cases}\Rightarrow 2e+C=e\Leftrightarrow C=-e\Rightarrow G(x)=e^x+ex^{e-1}-e\ (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $G(x)=F(x)-e$.

Câu 127. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)=e^x-2x$ trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $F(0)=1$.

a) $F'(0)=0$.

b) $F(1)=e-1$.

c) $\int F(x)\mathrm{d}x = e^x - \frac{x^3}{3} + C$.

d) $\int \frac{f(x)}{xe^x}\mathrm{d}x = \ln|x| - 2e^x + C$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	SAI

a) Ta có $F'(x) = f(x) = e^x - 2x \Rightarrow F'(0) = e^0 - 2.0 = 1$

b) $\int f(x)\mathrm{d}x = \int\left(e^x - 2x\right)\mathrm{d}x = e^x - x^2 + C \Rightarrow F(x) = e^x - x^2 + C$.

$F(0) = 1 \Leftrightarrow e^0 - 0^2 + C = 1 \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = e^x - x^2 \Rightarrow F(1) = e - 1$

c) $\int F(x)\mathrm{d}x = \int\left(e^x - x^2\right)\mathrm{d}x = e^x - \frac{x^3}{3} + C$

d) $\int \frac{f(x)}{x.e^x}\mathrm{d}x = \int \frac{e^x - 2x}{x.e^x}\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{x} - 2.e^{-x}\right)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x - 2\int\left(e^{-1}\right)^x \mathrm{d}x$

$= \ln|x| - 2\left(e^{-1}\right)^x \ln e^{-1} + C = \ln|x| + 2e^{-x} + C$

Câu 128. Cho hàm số $f(x) = 2x + e^x$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2025$.

a) $f(2) = 4 + e$

b) $\int f(x)dx = x^2 + e^x + C$.

c) $F(x) = x^2 + e^x + 2024$.

d) $\int xf'\left(x^2\right)dx = x^2 + xe^{x^2} + C$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	SAI

a) $f(2) = 4 + e^2$.

b) $\int f(x)dx = \int\left(2x + e^x\right)dx = x^2 + e^x + C$.

c) Ta có $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0) = 2025$.

Suy ra $\begin{cases} F(x) = x^2 + e^x + C \\ F(0) = 2025 \end{cases} \Rightarrow 1 + C = 2025 \Leftrightarrow C = 2024$.

Vậy $F(x) = x^2 + e^x + 2024$.

d) Ta có $\int xf'\left(x^2\right)dx=\int x\left(2+e^{x^2}\right)dx=x^2+\frac{1}{2}e^{x^2}+C$

Câu 129. Cho hàm số $f(x)=e^x(2+e^x)$ và $F\left(x\right)$ là nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$.

a) $\int f'\left(x\right)dx=2e^x+e^{2x}+C$.

b) $F\left(x\right)=2e^x+\frac{1}{2}e^{2x}+C$.

c) Nếu $F\left(0\right)=3$ thì $F\left(1\right)=\frac{e^2+1}{2}$.

d) Nếu $F\left(0\right)=\frac{5}{2}$ thì phương trình $F\left(x\right)=0$ có nghiệm.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	SAI

a) $\int f'\left(x\right)\mathrm{d}x=f\left(x\right)+C=2e^x+e^{2x}+C$.

b) $F\left(x\right)=\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int e^x(2+e^x)\,\mathrm{d}x=\int\left(2e^x+e^{2x}\right)\mathrm{d}x=2e^x+\frac{1}{2}e^{2x}+C$.

c) $F\left(x\right)=2e^x+\frac{1}{2}e^{2x}+C$

Mà $F\left(0\right)=3\Rightarrow C=\frac{1}{2}\Rightarrow F\left(x\right)=2e^x+\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}\Rightarrow F\left(1\right)=2e+\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}=\frac{e^2+4e+1}{2}$.

d) Với $F\left(0\right)=\frac{5}{2}\Rightarrow C=0\Rightarrow F\left(x\right)=2e^x+\frac{1}{2}e^{2x}$

Ta có: $F\left(x\right)=0\Leftrightarrow 2e^x+\frac{1}{2}e^{2x}=0$ nên phương trình vô nghiệm.

Câu 130. Cho hàm số $F\left(x\right)=\int\left(4^x+2^x+1\right)\mathrm{d}x$.

a) $F\left(x\right)=\int 4^x\mathrm{d}x+\int 2^x\mathrm{d}x+\int\mathrm{d}x$.

b) $F\left(x\right)=\frac{2^{2x}+2^x}{\ln 2}+x+C$.

c) Nếu $F\left(1\right)=\frac{4}{\ln 2}$ thì $F\left(2\right)=\frac{12}{\ln 2}-1$.

d) Nếu $G\left(x\right)=\int\frac{8^x+1}{2^x+1}\mathrm{d}x$ thì $G\left(x\right)=F\left(x\right)+C$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	SAI	SAI

a) $F(x)=\int\left(4^x+2^x+1\right)dx=\int 4^x dx+\int 2^x dx+\int dx$

b) $F(x)=\int\left(4^x+2^x+1\right)dx=\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{2^x}{\ln 2}+x+C=\frac{2^{2x}}{2\ln 2}+\frac{2^x}{\ln 2}+x+C=\frac{2^{2x-1}+2^x}{\ln 2}+x+C$.

c) Do $F(x)=\frac{2^{2x-1}+2^x}{\ln 2}+x+C$ và $F(1)=\frac{4}{\ln 2}$ nên $\frac{4}{\ln 2}+1+C=\frac{4}{\ln 2}\Leftrightarrow C=-1$

$\Rightarrow F(x)=\frac{2^{2x-1}+2^x}{\ln 2}+x-1\Rightarrow F(2)=\frac{12}{\ln 2}+1$.

d) Ta có: $G(x)=\int\frac{8^x+1}{2^x+1}dx=\int\frac{2^{3x}+1}{2^x+1}dx=\int\frac{\left(2^x+1\right)\left(4^x-2^x+1\right)}{2^x+1}dx=\int\left(4^x-2^x+1\right)dx\neq F(x)+C$.

Câu 131. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{6^{x+1}+3^{2x}}{2^{2x+3}}$.

a) $F'(x)=\frac{6^{x+1}+3^{2x}}{2^{2x+3}}$.

b) $F(x)=\frac{\int\left(6^{x+1}+3^{2x}\right)dx}{\int 2^{2x+3}dx}$.

c) $F(x)=\int\left[\frac{3}{4}.\left(\frac{3}{2}\right)^x+\frac{1}{8}.\left(\frac{9}{4}\right)^x\right]dx$.

d) Nếu $F(0)=0$ thì $F(1)=\frac{29}{\ln 3-\ln 2}$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	SAI

a) Theo định nghĩa nguyên hàm suy ra $F'(x)=f(x)=\frac{6^{x+1}+3^{2x}}{2^{2x+3}}$.

b) Theo tính chất nguyên hàm suy ra $F(x)=\int\frac{6^{x+1}+3^{2x}}{2^{2x+3}}dx\neq\frac{\int\left(6^{x+1}+3^{2x}\right)dx}{\int 2^{2x+3}dx}$.

c) Ta có $F(x)=\int\frac{6^{x+1}+3^{2x}}{2^{2x+3}}dx=\int\frac{6.6^x+9^x}{8.4^x}dx=\int\left[\frac{3}{4}.\left(\frac{3}{2}\right)^x+\frac{1}{8}.\left(\frac{9}{4}\right)^x\right]dx$.

d) $F(x)=\int\left[\frac{3}{4}.\left(\frac{3}{2}\right)^x+\frac{1}{8}.\left(\frac{9}{4}\right)^x\right]dx=\frac{\frac{3}{4}.\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\ln\frac{3}{2}}+\frac{\frac{1}{8}.\left(\frac{9}{4}\right)^x}{\ln\frac{9}{4}}+C=\frac{\frac{3}{4}.\left(\frac{3}{2}\right)^x+\frac{1}{16}.\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}}{\ln 3-\ln 2}+C$

Do $F(0)=0$ nên $\frac{13}{16(\ln 3-\ln 2)}+C=0\Leftrightarrow C=-\frac{13}{16(\ln 3-\ln 2)}$.

Suy ra $F(x)=\dfrac{\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x+\frac{1}{16}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}}{\ln 3-\ln 2}-\dfrac{13}{16(\ln 3-\ln 2)}$

Khi đó $F(1)=\dfrac{81}{64(\ln 3-\ln 2)}-\dfrac{13}{16(\ln 3-\ln 2)}=\dfrac{29}{64(\ln 3-\ln 2)}$.

Câu 132. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2^{2x+1}-1+\cos 2x}{2^x+\sin x}$ trên $[0;+\infty)$ thoả mãn $F(0)=\dfrac{2}{\ln 2}+2$.

a) $f(\pi)=2^{\pi+1}-1$.

b) $F'(0)=2$

c) Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $F(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0=\dfrac{\pi}{2}$ là $k=2\sqrt{2^\pi}-2$

d) $F(-1)=\dfrac{1}{\ln 2}+2\cos 1$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG

Ta có $f(x)=\dfrac{2^{2x+1}-2\sin^2 x}{2^x+\sin x}=\dfrac{2\left(2^x-\sin x\right)\left(2^x+\sin x\right)}{2^x+\sin x}=2.2^x-2\sin x$

a) $f(\pi)=2.2^\pi-2\sin\pi=2^{\pi+1}$.

b) $F'(x)=f(x)=2.2^x-2\sin x\Rightarrow F'(0)=2.2^0-2\sin 0=2$.

c) Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $F(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0=\dfrac{\pi}{2}$ là

$$k=F'\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2.2^{\frac{\pi}{2}}-2\sin\frac{\pi}{2}=2.\sqrt{2^\pi}-2.$$

d) $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left[2.2^x-2\sin x\right]\mathrm{d}x=2.\dfrac{2^x}{\ln 2}+2\cos x+C\Rightarrow F(x)=\dfrac{2^{x+1}}{\ln 2}+2\cos x+C$.

Giả thiết $F(0)=\dfrac{2}{\ln 2}+2\Leftrightarrow\dfrac{2^{0+1}}{\ln 2}+2\cos 0+C=\dfrac{2}{\ln 2}+2\Leftrightarrow C=0\Rightarrow F(x)=\dfrac{2^{x+1}}{\ln 2}+2\cos x$

$\Rightarrow F(-1)=\dfrac{2^0}{\ln 2}+2\cos(-1)=\dfrac{1}{\ln 2}+2\cos 1$.

Câu 133. Cho hàm số $f(x)=2x+m$ và $G(x)=x^3+mx^2+3x+m$ với $m\in\mathbb{R}$.

a) Khi $m=3$ thì $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2+3x+C$.

b) Khi $m=2$ thì $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

c) Khi $m=-1$ thì $\int\left(G(x)-f(x)\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+C$

d) Gọi $F(x)$ làm một nguyên hàm của $f(x)$ sao cho $F(0)=1$. Khi đó, có 4 giá trị nguyên của tham số m thì $F(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

a) Khi $m=3$ thì $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(2x+3)dx=\int 2x\mathrm{d}x+\int 3\mathrm{d}x=x^2+3x+C$

b) Khi $m=2$, ta có: $f(x)=2x+2;G(x)=x^3+2x^2+3x+2$

Ta có $G'(x)=3x^2+4x+3\Rightarrow G'(1)=10\neq f(1)$ nên khi $m=2$, $G(x)$ là không phải là một nguyên hàm của $f(x)$

c) Khi $m=-1$, ta có: $f(x)=2x-1;G(x)=x^3-x^2+3x-1$

$\int\left(G(x)-f(x)\right)dx=\int\left(x^3-x^2+x\right)\mathrm{d}x=\int x^3\mathrm{d}x-\int x^2\mathrm{d}x+\int x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+C$

d) Ta có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int 2x\mathrm{d}x+\int m\mathrm{d}x=x^2+mx+C$ mà $F(0)=1$ suy ra $C=1$

$\Rightarrow F(x)=x^2+mx+1$.

$F(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\Delta=m^2-4\leq 0\Leftrightarrow -2\leq m\leq 2$.

Vì m nguyên dương nên $m\in\{-2;-1;0;1;2\}$

Vậy có 5 giá trị nguyên của tham số m thì $F(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 134. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)\neq 0$ và $f'(x)=4x^3\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

a) Khi $f(1)=2$ thì $f'(1)=16$

b) Hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

c) $\left[\frac{1}{f(x)}\right]'=4x^3$

d) Khi $f(2)=-\frac{1}{25}$ thì $f(1)=\frac{1}{10}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Khi $f(1)=2$ thì $f'(1)=4\left[f(1)\right]^2=4.2^2=16$

b) Từ hệ thức đề cho: $f'(x)=4x^3\left[f(x)\right]^2$, suy ra $f'(x)\ge 0$ với mọi $x\in(0;+\infty)$.

Do đó hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

c) Ta có $f'(x)=4x^3\left[f(x)\right]^2\Rightarrow -\dfrac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=-4x^3\Rightarrow\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]'=-4x^3$

d) Ta có: $\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]'=-4x^3\Rightarrow\dfrac{1}{f(x)}=\int\left(-4x^3\right)dx\Rightarrow\dfrac{1}{f(x)}=-x^4+C$

Do $f(2)=-\dfrac{1}{25}$, nên ta có $C=-9$.

Do đó $f(x)=-\dfrac{1}{x^4+9}\Rightarrow f(1)=-\dfrac{1}{10}$.

Câu 135. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn điều kiện: $f(1)=2$ và $x.(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+2x+1$.

a) Khi $f'(3)=1$ thì $f(3)=-3$.

b) $\left[\dfrac{x}{x+1}.f(x)\right]'=1$

c) $f(2)=3$.

d) $\int\dfrac{f(x+1)}{x}dx=x+2\ln|x|+C$, với C là hằng số.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Khi $f'(3)=1$ thì $3.(3+1).f'(3)+f(3)=3^2+2.3+1\Rightarrow f(3)=3$

b) Chia cả hai vế của biểu thức $x.(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+2x+1$ cho $(x+1)^2$ ta có

$\dfrac{x}{x+1}.f'(x)+\dfrac{1}{(x+1)^2}f(x)=1$

$\Leftrightarrow\left[\dfrac{x}{x+1}.f(x)\right]'=1$

b) Ta có: $\left[\dfrac{x}{x+1}.f(x)\right]'=1$

$\Rightarrow\dfrac{x}{x+1}.f(x)=\int dx$

$\Rightarrow\dfrac{x}{x+1}.f(x)=x+C$

Do $f(1)=2$ nên ta có $\frac{1}{1+1}.2=1+C\Rightarrow C=0$.

Khi đó $\frac{x}{x+1}.f(x)=x\Rightarrow f(x)=x+1$.

Vậy ta có $f(2)=3$.

d) ta có $f(x)=x+1\Rightarrow f(x+1)=x+2$

Khi đó $\int\frac{f(x+1)}{x}\mathrm{d}x=\int\frac{x+2}{x}\mathrm{d}x=\int\left(1+\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x=x+2\ln|x|+C$

Câu 136. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x)+\frac{f(x)}{x}=4x^2+3x$ và $f(1)=2$.

a) Khi $f'(3)=1$ thì $f(1)=8$.

b) $\left[xf(x)\right]'=4x^3+3x^2$

c) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là $y=16x+20$.

d) $\int f(x-1)\mathrm{d}x=x^4-2x^3+x^2+C$, với C là hằng số.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Khi $f'(1)=1$ thì $1+f(1)=7\Rightarrow f(1)=6$.

b) Ta có:

$f'(x)+\frac{f(x)}{x}=4x^2+3x$

$\Leftrightarrow xf'(x)+f(x)=4x^3+3x^2$.

$\Leftrightarrow\left[xf(x)\right]'=4x^3+3x^2$

c) Ta có: $\left[xf(x)\right]'=4x^3+3x^2$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được: $xf(x)=\int\left(4x^3+3x^2\right)\mathrm{d}x=x^4+x^3+C$.

Với $x=1$ ta có: $f(1)=2+C$.

Theo bài ra $f(1)=2\Leftrightarrow 2+C=2\Leftrightarrow C=0$.

Vậy $xf(x)=x^4+x^3\Leftrightarrow f(x)=x^3+x^2$.

Ta có: $f'(x)=3x^2+2x$; $f'(2)=16$; $f(2)=12$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là:

$y=16(x-2)+12 \Leftrightarrow y=16x-20$.

d) Ta có: $f(x)=x^3+x^2 \Rightarrow f(x-1)=(x-1)^3+(x-1)^2=x^3-2x^2+x$

nên: $\int f(x-1)\mathrm{d}x=\int\left(x^3-2x^2+x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+C$, với C là hằng số.

Câu 137. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)=\mathrm{e}^{-x}, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$.

a) Khi $f(1)=e$ thì $f'(1)=\frac{1-e^2}{e}$.

b) $\left(f(x)\mathrm{e}^x\right)'=\mathrm{e}^{-x}$

c) $f(\ln 2)=\ln 2+1$

d) Nguyên hàm của $f(x)\mathrm{e}^x$ là $\frac{1}{2}x^2+2x+C$, với C là hằng số.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Khi $f(1)=e$ thì $e+f'(1)=\mathrm{e}^{-1} \Rightarrow f'(1)=\frac{1-e^2}{e}$.

b)

$f(x)+f'(x)=\mathrm{e}^{-x}$

$\Leftrightarrow f(x)\mathrm{e}^x+f'(x)\mathrm{e}^x=1$.

$\Leftrightarrow\left(f(x)\mathrm{e}^x\right)'=1$

c) Ta có: $\left(f(x)\mathrm{e}^x\right)'=1$

$\Rightarrow f(x)\mathrm{e}^x=\int x\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow f(x)\mathrm{e}^x=x+C$

Vì $f(0)=2$ nên $C=2$.

$\Rightarrow f(x)\mathrm{e}^x=x+2$

Do đó: $\Rightarrow f(\ln 2)e^{\ln 2}=\ln 2+2 \Rightarrow f(\ln 2)=\frac{1}{2}\ln 2+1$

d) Ta có: $f(x)\mathrm{e}^x=x+2$

$\Rightarrow\int f(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int(x+2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2+2x+C$

Câu 138. Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc $15m/s$ thì nhìn thấy chướng ngại vật trên đường cách đó $50m$, người lái xe hãm phanh khẩn cấp. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc

$v(t)=-3t+15(m/s)$, trong đó t (giây). Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh.



a) Quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh theo hàm $s(t)=-\frac{3t^2}{2}+15t$

b) Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là 5 giây.

c) Xe ô tô gặp tai nạn do va chạm với chướng ngại vật.

d) Nếu người lái xe nhìn thấy chướng ngại vật trên đường, sau đó 1 giây mới phản ứng đạp phanh khẩn cấp thì xe ô tô không va chạm với chướng ngại vật.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) là một nguyên hàm của $v(t)$ nên:

$$s(t)=\int v(t)dx=\int(-3t+15)dx=-\frac{3t^2}{2}+15t+C$$

$$\Rightarrow s(t)=-\frac{3t^2}{2}+15t+C$$

Chọn $t=0\Rightarrow s(0)=0$

$$\Rightarrow C=0$$

$$\Rightarrow s(t)=-\frac{3t^2}{2}+15t$$

b) Ta có: $s(t)=-\frac{3t^2}{2}+15t$

Khi xe dừng hẳn thì $v(t)=0\Leftrightarrow -3t+15=0\Rightarrow t=5$.

Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là 5 giây

c) Sau khi đạp phanh đến khi dừng hẳn, xe đi được quãng đường: $s(5)=-\frac{3.5^2}{2}+15.5=37,5(m)$

Do $50>37,5$ nên xe ô tô dừng hẳn trước khi va chạm chướng ngại vật. Vì thế tai nạn không xảy ra.

d) Người lái xe nhìn thấy chướng ngại vật trên đường, sau đó 1 giây mới phản ứng đạp phanh nên xe đi được quãng đường $15m$ trong 1 giây

Tổng quãng đường xe đi được đến khi dừng hẳn là : $15+37,5=52,5(m)$

Do $50 < 52,5$ nên xe ô tô va chạm chướng ngại vật.

Câu 139. Một chiếc xe đang chuyển động đều với tốc độ $v_0 = 15 m/s$ thì gặp chướng ngại vật rồi phanh gấp với gia tốc không đổi là $a = -3\ m/s^2$. Kí hiệu $v(t)$ là tốc độ của xe, $a(t)$ là gia tốc xe, $s(t)$ là quãng đường xe đi được cho đến thời điểm t giây kể từ lúc phanh xe.



a) $v(t) = a'(t)$.

b) $a(t) = s''(t)$.

c) Tính từ lúc phanh xe, sau 6 giây thì xe dừng hẳn.

d) Quãng đường xe đi được tính từ lúc phanh xe đến khi dừng hẳn là 39 mét.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) $v(t) = \int a(t)\mathrm{d}t$

b) $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

c) $v(t) = \int a(t)\mathrm{d}t = \int -3\mathrm{d}t = -3t + C$.

$v(0) = -3.0 + C = 15 \Rightarrow C = 15$. Suy ra $v(t) = -3t + 15$.

Xe dừng hẳn khi $v(t) = 0 \Rightarrow -3t + 15 = 0 \Rightarrow t = 5$ giây.

d) $s(t) = \int v(t)\mathrm{d}t = \int -3t + 15\mathrm{d}t = \dfrac{-3}{2}t^2 + 15t + C$.

$s(0) = \dfrac{-3}{2}0^2 + 15.0 + C = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow s(5) = 37,5$ mét.

Câu 140. Một xe đạp chuyển động với gia tốc $a(t) = 4\cos t\left(\mathrm{m/s^2}\right)$. Tại thời điểm bắt đầu chuyển động vật có vận tốc bằng 0.



a) Vận tốc của xe đạp được biểu diễn bởi hàm số $v(t)=4\cos t\ (\text{m/s})$.

b) Vận tốc của xe đạp tại thời điểm $t=\dfrac{\pi}{6}$ là $2(\text{m/s})$

c) Tại thời điểm $t=\dfrac{\pi}{4}(s)$ sau khi xuất phát thì vận tốc của xe đạp là $\sqrt{2}(\text{m/s})$

d) Gia tốc của xe đạp tại thời điểm $t=\dfrac{\pi}{4}$ (s) là $2\sqrt{2}\ (\text{m/s}^2)$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Ta có $v(t)=\int a(t)\text{d}t=\int 4\cos\text{d}t=4\sin t+C.$ Mà tại thời điểm bắt đầu chuyển động, xe đạp có vận tốc bằng 0 nên ta có $v(0)=0$ hay $C=0.$

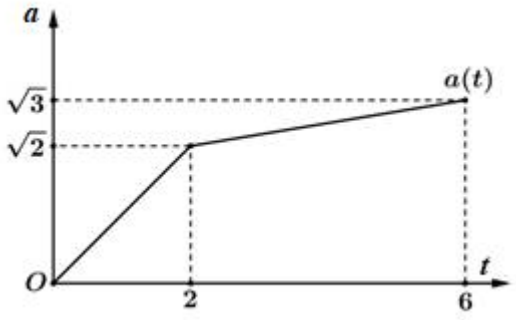
Vậy $v(t)=4\sin t.$

b) Vận tốc của xe đạp tại thời điểm $t=\dfrac{\pi}{6}$ là $v\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=4\sin\dfrac{\pi}{6}=2$ (m/s).

c) Vận tốc của xe đạp tại thời điểm $t=\dfrac{\pi}{4}$ là $v\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=4\sin\dfrac{\pi}{4}=2\sqrt{2}(\text{m/s})$

d) Gia tốc của xe đạp tại thời điểm $t=\dfrac{\pi}{4}$ (s) là: $a\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=4\cos\dfrac{\pi}{4}=2\sqrt{2}\left(\text{m/s}^2\right)$

Câu 141. Một vật chuyển động với hàm số gia tốc là $a(t)$ và hàm số vận tốc là $v(t)$. Biết rằng đồ thị hàm số $a(t)$ trên đoạn $[0;6]$ được cho như hình dưới đây và vận tốc tại thời điểm $t=0$ là $v(0)=1(m/s)$.



a) Tại thời điểm $t=2$ giây, gia tốc của vật là $1,4\left(m/s^2\right)$ (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

b) Gia tốc của vật bằng $\sqrt{3}\left(m/s^2\right)$ tại thời điểm $t=6$ giây.

c) Vận tốc của vật được biểu diễn theo hàm $v(t)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{4}t^2+1 & \text{khi } 0\le t\le 2\\ \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{8}t^2+\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}t+C & \text{khi } 2\le t\le 6\end{cases}$, với C là hằng số thực.

d) Tại thời điểm $t=6$ giây, vận tốc của vật là $1,73\left(m/s\right)$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Từ đồ thị, ta có: Tại thời điểm $t=2$ giây, gia tốc của vật là $\sqrt{2}\approx 1,4\left(m/s^2\right)$

b) Từ đồ thị, ta có: Gia tốc của vật bằng $\sqrt{3}\left(m/s^2\right)$ tại thời điểm $t=6$ giây.

c) Từ đồ thị, ta có : $a(t)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}t & \text{khi } 0\le t\le 2\\ \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}t+\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2} & \text{khi } 2\le t\le 6\end{cases}$.

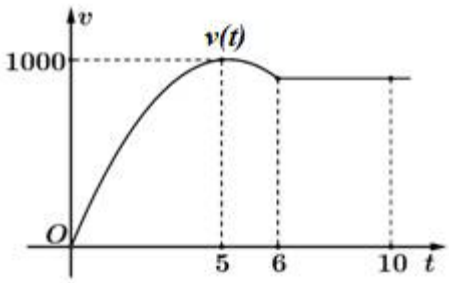
Mà $v(0)=1\left(m/s\right)$ nên $v(t)=\int a(t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{4}t^2+1 & \text{khi } 0\le t\le 2\\ \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{8}t^2+\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}t+C & \text{khi } 2\le t\le 6\end{cases}$, với C là hằng số thực.

d) Vì vận tốc là hàm số liên tục nên :

$$\lim_{t\to 2^-}v(t)=\lim_{x\to 2^+}v(t)\Leftrightarrow\sqrt{2}+1=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}+3\sqrt{2}-\sqrt{3}+C\Leftrightarrow C=\frac{\sqrt{3}-3\sqrt{2}+2}{2}.$$

Do đó $v(6)=1+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\approx 8,71\ \left(m/s\right)$.

Câu 142. Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu chuyển động với vận tốc được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol như hình bên dưới. Biết rằng sau 5 phút thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 1000 mét/phút và bắt đầu giảm vận tốc, đi được 6 phút thì xe chuyển động đều. Gọi $s(t)$ là hàm số quãng đường và $v(t)$ là hàm số vận tốc của chuyển động ô tô.



a) Trong 6 phút đầu tiên, vận tốc của xe ô tô được biểu diễn bởi hàm số $v(t)=-40t^2+100t$, với $t\in[0;6]$.

b) Trong 6 phút đầu tiên, quãng đường của xe ô tô được biểu diễn bởi hàm số $s(t)=-\frac{40}{3}t^3+50t^2$, với $t\in[0;6]$.

c) Trong khoảng 6 phút đầu, ô tô đi được quãng đường là $4320(m)$.

d) Quãng đường xe đã đi được trong khoảng 10 phút đầu tiên là $8160(m)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Trong 6 phút đầu tiên, vận tốc của xe ô tô được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol: $v(t)=at^2+bt$, với $t\in[0;6]$.

Dựa vào đồ thị ta tính được: $a=-40;b=400$

Do đó hàm số vận tốc của ô tô là: $v(t)=-40t^2+400t$ với $t\in[0;6]$

b)Trong khoảng 6 phút đầu, hàm số quãng đường là : $s(t)=\int(-40t^2+400t)dt=-\frac{40}{3}t^3+200t^2+C$.

Tại thời điểm xe ô tô xuất phát ta có $t=0$ và $s(0)=0$ suy ra $C=0$ nên $s(t)=-\frac{40}{3}t^3+200t^2$.

c) Ta có: $s(t)=-\frac{40}{3}t^3+200t^2$

Do đó, trong khoảng 6 phút đầu, ô tô đi được quãng đường là: $s(6)=-\frac{40}{3}.6^3+200.6^2=4320m$

d) Trong 4 phút, tiếp theo xe chuyển động thẳng đều với vận tốc: $v(6)=-40.6^2+400.6=960(m/s)$

Do đó, 4 phút tiếp theo ô tô đi được quãng đường là $960.4=3840(m)$

Vậy quãng đường ô tô đi được trong 10 phút đầu là $4320+3840=8160(m)$ m.

Câu 143. Một quả cầu lông được đánh lên từ độ cao $2,2m$ với vận tốc được tính bởi công thức sau đây $v(t)=-0,8t+4,16\ (m/s)$.



a) Công thức tính độ cao của quả cầu theo t là $h(t)=-0,4t^2+4,16t+2,2(m)$, với $t\geq 0$.

b) Quả cầu đạt độ cao cao nhất tại thời điểm $t=5,2(s)$.

c) Độ cao cao nhất của quả cầu bằng $13,016\ (m)$.

d) Thời điểm quả cầu chạm đất là $t=10,5\,(s)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) $h(t)=\int v(t)\mathrm{d}t=\int(-0,8t+4,16)\mathrm{d}t=-0,4t^2+4,16t+C$.

Mà $h(0)=2,2$ nên $C=2,2$ nên $h(t)=-0,4t^2+4,16t+2,2\,(m)$.

b) Xét $h(t)=-0,4t^2+4,16t+2,2$, với $t\geq 0$.

$Max\left[h(t)\right]=-0,4\left(t^2-10,4t+27,04\right)+13,016=-0,4(t-5,2)^2+13,016\leq 13,016$

Quả cầu đạt độ cao cao nhất tại thời điểm $t=5,2\,(s)$.

c) Độ cao cao nhất của quả cầu bằng $h(5,2)=13,016\,(m)$.

d) Quả cầu chạm đất khi $h(t)=0\Leftrightarrow -0,4t^2+4,16t+2,2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\approx 10,9\\t\approx -0,5\end{array}\right.$.

Vì $t>0$ nên chọn $t\approx 10,9\,(s)$.

Câu 144. Cây keo lai là một trong các loài cây không chỉ là nguyên liệu giấy quan trọng mà còn là loài cây cung cấp gỗ nguyên liệu cho các ngành khác như chế biến ván nhân tạo, chế biến đồ mộc xuất khẩu, gỗ bao bì, gỗ xây dựng. Cây phát triển với tốc độ nhanh, hiệu quả kinh tế. Kí hiệu $h(x)$ là chiều cao của một cây (tính theo mét) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau năm đầu tiên cây cao $8m$ .Trong 10 năm tiếp theo cây phát triển với tốc độ $h'(x)=\dfrac{9}{x}$ (mét/năm).



a) Chiều cao của một cây sau khi trồng x năm $h(x)$ là: $h(x)=9\ln x+C\quad(m)$, với $x>0$.

b) Sau 4 năm cây cao $20,5\,(m)$ (kết quả làm tròn đến chữ số hàng thập phân thứ nhất).

c) Tốc độ phát triển của cây trong 10 năm đầu sẽ tăng dần.

d) Người ta thường thu hoạch cây keo lai khi nó có độ cao trong khoảng từ 26 đến 28 mét. Khi đó, cây keo được trồng từ 10 hoặc 11 năm.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Ta có: $h'(x)=\dfrac{9}{x}\Rightarrow h(x)=\int\dfrac{9}{x}\mathrm{d}x=9\ln|x|+C=9\ln(x)+C$ (vì $x>0$)

b) Ta có: $h(x)=9\ln x+C\quad(m)$

Vì sau năm đầu tiên cây cao $8m$ nên $h(1)=8\Rightarrow 9\ln(1)+C=8\Rightarrow C=8$

$\Rightarrow h(x)=9\ln x+8\Rightarrow h(4)=9\ln 4+8\approx 20,5(m)$.

Vậy sau 4 năm cây cao khoảng $20,5(m)$.

c) Ta có tốc độ phát triển của cây là hàm số $h'(x)=\dfrac{9}{x}\Rightarrow h"(x)=\dfrac{-9}{x^2}<0$ nên $h'(x)$ là hàm nghịch biến.

Do đó tốc độ phát triển của cây sẽ giảm dần trong 10 năm đầu.

d) Ta có $26\le h(x)\le 28\Rightarrow 26\le 9\ln(x)+8\le 28\Rightarrow 7,39\le x\le 9,23$

Vậy sau 8 hoặc 9 năm sau khi trồng.

Câu 145. Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5cm. Tốc độ tăng chiều cao của cây cà chua sau khi trồng được cho bởi hàm số $v(t)=-0,1t^3+t^2$, trong đó t tính theo tuần, $v(t)$ tính bằng cm/tuần. Gọi $h(t)$ (tính bằng cm) là độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t.



a) Độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t là $h(t)=\dfrac{-t^4}{40}+\dfrac{t^3}{3}$, với $t\ge 0$.

b) Chiều cao tối đa của cây cà chua đó là $\dfrac{265}{3}(cm)$.

c) Giai đoạn tăng trưởng của cây cà chua đó kéo dài trong 8 tuần đầu tiên.

d) Vào thời điểm cây cà chua phát triển nhanh nhất thì chiều cao cây cà chua đạt được $\dfrac{4405}{81}(cm)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Do $h(t)$ là một nguyên hàm của $v(t)$ nên

$h(t)=\int v(t)\mathrm{d}t=\int\left(-0,1t^3+t^2\right)\mathrm{d}t=\int\left(-0,1t^3+t^2\right)\mathrm{d}t=\dfrac{-t^4}{40}+\dfrac{t^3}{3}+C$.

Nên $h(t)=\dfrac{-t^4}{40}+\dfrac{t^3}{3}+C$

Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5 cm nên $h(0)=5$ suy ra $C=5$.

Vậy $h(t)=\frac{-t^4}{40}+\frac{t^3}{3}+5, t\ge 0$.

b) Ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất của $h(t)=\frac{-t^4}{40}+\frac{t^3}{3}+5$ với $t\ge 0$.

Ta có: $h'(t)=\frac{-t^3}{10}+t^2=\frac{t^2}{10}(-t+10)$ suy ra $h'(t)=0$ khi $t=0$ hoặc $t=10$.

Bảng biến thiên:

t	0		10		$+\infty$
$h'(t)$	0	$+$	0	$-$	
$h(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{265}{3}$	$\searrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $h(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{265}{3}$ tại $t=10$.

Vậy chiều cao tối đa của cây cà chua đó là $\frac{265}{3}(\text{ cm})$.

c) Cây tăng trưởng khi $v(t)>0\Leftrightarrow -0,1t^3+t^2>0\Rightarrow t<10$.

Vậy giai đoạn tăng trưởng của cây kéo dài 10 tuần.

d) Ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất của hàm số $v(t)=-0,1t^3+t^2$ với $t\ge 0$.

Ta có: $v'(t)=-0,3t^2+2t=-0,3t\left(t-\frac{20}{3}\right)$, suy ra $v'(t)=0$ khi $t=0$ hoặc $t=\frac{20}{3}$.

Bảng biến thiên:

t	0		$\frac{20}{3}$		$+\infty$
$v'(t)$	0	$+$	0	$-$	
$v(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{400}{27}$	$\searrow$	$+\infty$

Lập bảng biến thiên ta thấy $v(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{400}{27}$ tại $t=\frac{20}{3}$.

Khi đó: $h\left(\frac{20}{3}\right)=\frac{-\left(\frac{20}{3}\right)^4}{40}+\frac{\left(\frac{20}{3}\right)^3}{3}+5=\frac{4405}{81}$.

Câu 146. Tại một lễ hội dân gian, tốc độ thay đổi lượng khách tham dự được biểu diễn bằng hàm số $B'(t)=20t^3-300t^2+1000t$. Trong đó t tính bằng giờ $(0\le t\le 15)$, $B'(t)$ được tính bằng khách/giờ. Sau một giờ, 500 người đã có mặt tại lễ hội.



a) Số lượng khách tham dự lễ hội được biểu diễn hàm $B(t)=5t^4-100t^3+500t^2+95$, với $0\le t\le 15$.

b) Số lượng khách tham dự lễ hội sau 3 giờ là 2300 khách.

c) Số lượng khách tham dự lễ hội lớn nhất là 28220 khách sau 10 giờ.

d) Tốc độ thay đổi lượng khách tham dự lễ hội là lớn nhất tại thời điểm 15 giờ.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Ta có $B(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $B'(t)=20t^3-300t^2+1000t$.

Do đó $B(t)=\int\left(20t^3-300t^2+1000t\right)dt=5t^4-100t^3+500t^2+C$.

Nên $B(t)=5t^4-100t^3+500t^2+C$.

Vì sau một giờ, 500 người đã có mặt tại lễ hội nên $B(1)=405+C=500\Rightarrow C=95$.

Vậy $B(t)=5t^4-100t^3+500t^2+95,\ \ 0\le t\le 15$.

b) Số lượng khách tham dự lễ hội sau 3 giờ là: $B(3)=5.3^4-100.3^3+500.3^2+95=2300$ (khách).

c) Giá trị lớn nhất của hàm số $B(t)$ trên đoạn $[0;15]$.

Ta có: $B'(t)=20t^3-300t^2+1000t=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=5\\t=10\end{array}\right.$.

Ta có: $B(0)=95; B(5)=3220; B(10)=95, B(15)=28220$.

Vậy Số lượng khách tham dự lễ hội lớn nhất là 28220 khách sau 15 giờ,

d) Ta tìm t để hàm số $B'(t)=20t^3-300t^2+1000t$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;15]$.

Ta có: $B''(t)=60t^2-600t+1000=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{15-5\sqrt{3}}{3}\\t=\dfrac{15+5\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.$.

Ta có: $B'(0)=0; B'\left(\dfrac{15-5\sqrt{3}}{3}\right)\approx 962,25; B'\left(\dfrac{15+5\sqrt{3}}{3}\right)\approx -962,25; B'(15)=15000$.

Khi đó, giá trị lớn nhất của hàm số $B'(t)=20t^3-300t^2+1000t$ trên đoạn $[0;15]$ bằng 15000 tại $t=15$.

Vậy tốc độ thay đổi lượng khách tham dự lễ hội là lớn nhất tại thời điểm 15 giờ.

Câu 147. Trong thí nghiệm nuôi cấy một loại vi sinh vật, kí hiệu $f(t)$ là tổng số lượng vi sinh vật sau t giờ. Biết rằng sau 3 giờ đầu tiên thì tổng số lượng vi sinh vật là 50 con. Trong 7 giờ tiếp theo, số lượng vi sinh vật thay đổi với tốc độ $f'(t)=t^2-8t$ (con/giờ).

a) $f(t)=\dfrac{t^3}{3}-8t^2+C\ (C\in\mathbb{R})$.

b) Số lượng vi sinh vật tăng trong khoảng từ 3 giờ đến 8 giờ, sau đó giảm dần trong khoảng 8 giờ đến 10 giờ.

c) Số lượng vi khuẩn là nhỏ nhất sau 8 giờ tính từ lúc bắt đầu làm thí nghiệm.

d) Sau 6 giờ thì số lượng vi khuẩn là 5 con.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Ta có: $\int\left(t^2-8t\right)\mathrm{d}t=\dfrac{t^3}{3}-4t^2+C$.

b) Ta có: $f'(t)>0$ khi $8<t<10$ và $f'(t)<0$ khi $3<t<8$.

Nên số lượng vi sinh vật giảm trong khoảng từ 3 giờ đến 8 giờ, sau đó tăng dần trong khoảng 8 giờ đến 10 giờ.

c) Ta có: $f'(t)>0$ khi $8<t<10$ và $f'(t)<0$ khi $3<t<8$.

Bảng biến thiên của $f(t)$:

t	3		8		10
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	$f(8)$	↗	

d) Ta có: $f(t)=\dfrac{t^3}{3}-4t^2+C$.

Do $f(3)=50 \Rightarrow \frac{3^3}{3}-4.3^2+C=50 \Rightarrow C=77$.

Suy ra $f(t)=\frac{1}{3}t^3-4t^2+77 \Rightarrow f(6)=5$.

Câu 148. Vào năm 2014, dân số Việt Nam khoảng $90,7$ triệu người. Giả sử dân số Việt Nam sau t năm được xác định bởi hàm số $S(t)$ (đơn vị: triệu người), trong đó tốc độ gia tăng dân số được cho bởi $S'(t)=1,2698.\mathrm{e}^{0,014t}$, với t là số năm kể từ năm 2014, $S'(t)$ tính bằng triệu người/ năm.

a) $S(t)$ là một nguyên hàm của $S'(t)$

b) $S(t)=90,7.\mathrm{e}^{0,014t}+90,7$

c) Theo công thức trên, tốc độ tăng dân số Việt Nam năm 2034 (làm tròn đến hàng phần mười của triệu người/ năm) khoảng $1,7$ triệu người/ năm

d) Theo công thức trên, dân số Việt Nam năm 2034 (làm tròn đến hàng đơn vị của triệu người) là khoảng 100 triệu người/ năm

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Ta có $S(t)$ là một nguyên hàm của $S'(t)$.

b) Ta có $\int S'(t)\mathrm{d}t=\int 1,2698.\mathrm{e}^{0,014t}\mathrm{d}t=1,2698\int\left(\mathrm{e}^{0,014}\right)^t\mathrm{d}t=\frac{1,2698.\mathrm{e}^{0,014t}}{0,014}+C=90,7.\mathrm{e}^{0,014t}+C$

Vì $S(0)=90,7$ nên $C=0$.

Suy ra $S(t)=90,7.\mathrm{e}^{0,014t}$.

c) Tốc độ tăng dân số Việt Nam năm 2034 là $S'(20)=1,2698.\mathrm{e}^{0,014.20}\approx 1,7$ (tr người/ năm).

d) Dân số Việt Nam năm 2034 là $S(20)=90,7.\mathrm{e}^{0,014.20}\approx 120$ (triệu người).

Câu 149. Một bể chứa dầu ban đầu có 50.000 lít dầu. Gọi $V(t)$ là thể tích dầu (lít) trong bể tại thời điểm t, trong đó t tính theo giờ $(0\le t\le 24)$. Trong quá trình bơm dầu vào bể, thể tích dầu tăng theo tốc độ được biểu diễn bởi hàm số $V'(t)=k.\sqrt{t}$, với k là hằng số dương. Sau 4 giờ bơm liên tục, thể tích dầu trong bể đạt 58.000 lít.

a) Hàm số $V(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(t)=k.\sqrt{t}$.

b) $V(t)=\frac{2k}{3}.t\sqrt{t}+C$ với $0\le t\le 24$ và k,C là các hằng số.

c) Sau 16 giờ bơm liên tục, thể tích dầu trong bể đạt được 148.000 lít.

d) Trong quá trình bơm dầu, nếu sau mỗi giờ lượng dầu bị rò rỉ đều đặn với tốc độ 500 lít/giờ, thì tại thời điểm t bằng 9 giờ, thể tích dầu trong bể là 72.500 lít.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Đúng

b) $V(t)=\int k.\sqrt{t}dt=\frac{2k}{3}.t\sqrt{t}+C$

$V(0)=50.000\Rightarrow V(t)=\frac{2k}{3}.t\sqrt{t}+50.000$

c)

$V(4)=\frac{2k}{3}.4\sqrt{4}+50.000=58.000\Rightarrow k=1500\Rightarrow V(t)=1000t\sqrt{t}+50.000$

$V(16)=114.000$

d) Tại thời điểm 9 giờ lượng dầu còn lại là $V(9)-9.500=72500$

Câu 150. Chủ một trung tâm thương mại muốn cho thuê một số gian hàng như nhau. Người đó muốn tăng giá cho thuê của mỗi gian hàng thêm x (triệu đồng). Tốc độ thay đổi doanh thu từ các gian hàng đó được biểu diễn bởi hàm số $T'(x)=-20x+300$, trong đó $T'(x)$ tính bằng triệu đồng. Biết rằng nếu người đó tăng giá thuê cho mỗi gian hàng thêm 10 triệu đồng thì doanh thu là 12 tỷ đồng.

a) Doanh thu của tất cả gian hàng được biểu diễn bởi hàm số $T(x)=-10x^2+300x-10000.$

b) Doanh thu của tất cả gian hàng khi người đó tăng giá thêm 12 triệu đồng là 12 tỷ 250 triệu đồng.

c) Doanh thu cao nhất của tất cả gian hàng mà người đó có thể thu về là 12 tỷ 250 triệu đồng.

d) Để doanh thu cao nhất của tất cả gian hàng thì mỗi gian hàng đã tăng giá cho thuê thêm 15 triệu đồng.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

Ta có: $T(x)=\int T'(x)\mathrm{d}x=\int(-20x+300)\mathrm{d}x=-10x^2+300x+C, C\in\mathbb{R}$.

Khi người đó tăng giá cho thuê mỗi gian hàng thêm 10 triệu đồng thì doanh thu là 12 tỷ đồng. Nên ứng với $x=10$ ta có $T(10)=12000$

suy ra $12000=-10.10^2+300.10+C\Rightarrow C=10000$.

Vậy $T(x)=-10x^2+300x+10000$

$T(12)=-10.12^2+300.12+10000=12160$ (triệu đồng).

Ta có

x	0		15		$+\infty$
T'(x)		+	0	-	
T(x)		↗	12250	↘	

Vậy doanh thu cao nhất mà người đó có thể thu về là 12 tỷ 250 triệu đồng và khi đó mỗi gian hàng đã tăng giá cho thuê thêm 15 triệu đồng.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 151. Một chất điểm thực hiện chuyển động thẳng trên trục Ox, với vận tốc cho bởi công thức $v(t)=3t^2+4t(\text{m/s})$ với t là thời gian. Biết rằng tại thời điểm bắt đầu của chuyển động, chất điểm đang ở vị trí có tọa độ $x=0,5$. Tọa độ của chất điểm sau 2 giây chuyển động là bao nhiêu mét?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $16,5$

Phương trình tọa độ của chất điểm là nguyên hàm của phương trình vận tốc nên ta có:

$x(t)=\int v(t)\mathrm{d}t=\int\left(3t^2+4t\right)\mathrm{d}t=t^3+2t^2+C$

Tại thời điểm bắt đầu của chuyển động, chất điểm đang ở vị trí có tọa độ $x=0,5$ nên khi $t=0$ có $C=\frac{1}{2}\Rightarrow x(t)=t^3+2t^2+\frac{1}{2}$.

Tọa độ của chất điểm sau 2 giây chuyển động là $x(2)=2^3+2.2^2+\frac{1}{2}=16,5(m)$.

Câu 152. Một vật chuyển động với gia tốc phụ thuộc vào thời gian theo công thức $a(t)=\cos x\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\ \left(m/s^2\right)$. Biết tại thời điểm $t=0$ thì vận tốc và quãng đường đi được của vật đều bằng 0. Tính quãng đường (làm tròn kết quả đến phần chục của mét) đi được của vật đó trong $\frac{\pi}{2}$ giây đầu tiên.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $0,57$

$a(t)=\cos x\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\sin t$

Ta có vận tốc của vật tại thời điểm t là: $v(t)=\int a(t)\,dt=\int\sin t dt=-\cos t+C$

$\Rightarrow v(t)=-\cos t+C$

Ta có $v(0)=0\Leftrightarrow C=1\Rightarrow v(t)=-\cos t+1$.

$\Rightarrow s(t)=\int(-\cos t+1)dt=-\sin t+t+C_1$ và $s(0)=0\Leftrightarrow C_1=0$.

$\Rightarrow s(t)=-\sin t+t$.

$\Rightarrow s\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\approx 0,57(m)$

Câu 153. Một vật chuyển động với vận tốc $10\left(m/s\right)$ thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian t là $a\left(t\right)=3t+t^2\left(m/s^2\right)$. Tính quãng đường (đơn vị: mét) vật đi được trong khoảng 12 giây đầu tiên kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2712

Gọi $s\left(t\right)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong t giây kể từ khi vật bắt đầu tăng tốc.

Ta có: $v\left(t\right)=\int a\left(t\right)dt=\int\left(3t+t^2\right)dt=\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3+C$

Chọn $t=0$ lúc ô tô bắt đầu tăng tốc, khi đó $v\left(0\right)=10\left(m/s\right)$

Do đó: $v\left(0\right)=\frac{3}{2}.0^2+\frac{1}{3}.0^3+C\Rightarrow C=10$

$\Rightarrow v\left(t\right)=\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2+10$

Ta lại có: $s\left(t\right)=\int v\left(t\right)dt=\int\left(\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2+10\right)dt=\frac{1}{12}t^4+\frac{1}{2}t^3+10t+C_1$.

Do $s\left(0\right)=0\Rightarrow C_1=0$.

Khi đó: $s\left(t\right)=\frac{1}{12}t^4+\frac{1}{2}t^3+10t\Rightarrow s\left(12\right)=2712\left(m\right)$

Câu 154. Một xe tải đang chuyển động đều với gia tốc $v_0=15m/s$ thì tăng tốc với gia tốc $a\left(t\right)=t^2+4t\left(m/s^2\right)$. Tính quãng đường (làm tròn kết quả đến phần chục của mét) xe tải đi được trong khoảng thời gian 3 giây từ lúc bắt dầu tăng tốc.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 69,8

Ta có $v\left(t\right)=\int a\left(t\right)\mathrm{d}t=\int\left(t^2+4t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}t^3+2t^2+C$.

Mà $v\left(0\right)=15\Rightarrow C=15$ nên $v\left(t\right)=\frac{1}{3}t^3+2t^2+15$.

$S\left(t\right)=\int\left(\frac{1}{3}t^3+2t^2+15\right)\mathrm{d}t=\frac{t^4}{12}+\frac{2t^3}{3}+15t+C_1$

$S(0)=\frac{0^4}{12}+\frac{2.0^3}{3}+15.0+C_1=0\Leftrightarrow C_1=0$

$\Rightarrow S(t)=\frac{t^4}{12}+\frac{2t^3}{3}+15t\Rightarrow S(3)=\frac{3^4}{12}+\frac{2.3^3}{3}+15.3=\frac{279}{4}\approx 69,8(m)$

Câu 155. Một xe môtô đang chuyển động với vận tốc $v_0=15(\text{m/s})$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=t^2+4t(\text{m/s}^2)$. Vận tốc xe môtô đó tại giây thứ 3 kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc bằng bao nhiêu mét/giây?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 41

Ta có $a(t)=t^2+4t\Rightarrow v(t)=\int a(t)\text{d}t=\frac{t^3}{3}+2t^2+C(C\in\mathbb{R})$.

Theo giả thiết $v(0)=15\Rightarrow C=15\Rightarrow v(t)=\frac{t^3}{3}+2t^2+15$ nên $v(3)=\frac{3^3}{3}+2.3^2+15=41(\text{m/s})$.

Câu 156. Một xe taxi chuyển động trên đường thẳng nằm ngang với gia tốc phụ thuộc thời gian t (giây) là $a(t)=2t-7\ (\text{m}/\text{s}^2)$. Biết vận tốc đầu bằng $10\,(\text{m}/\text{s})$, hỏi sau bao nhiêu giây thì xe taxi đạt vận tốc $18\ \text{m}/\text{s}$?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 8

Ta có $v(t)=\int(2t-7)\text{d}t=t^2-7t+C$.

Vận tốc ban đầu bằng $10(\text{m}/\text{s})$ nên $v(0)=10\Leftrightarrow C=10\Rightarrow v(t)=t^2-7t+10$.

Chất điểm đạt vận tốc $18(\text{m}/\text{s})$ khi và chỉ khi $t^2-7t+10=18\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\ (\text{loai})\\t=8.\end{array}\right.$

Vậy sau 8s thì chất điểm đạt vận tốc $18(\text{m}/\text{s})$.

Câu 157. Một vận động viên đạp chiếc xe đạp đang chạy với vận tốc $v_0 = 10(m/s)$ thì tăng tốc với gia tốc không đổi là $a = 2(m/s^2)$. Tính quãng đường (đơn vị mét) vận động viên đạp chiếc xe đạp đó đi được trong 7 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 119

Ta có $v(t) = \int a(t)\,dt = \int 2dt = 2t + C$.

Vì $v(0) = 10$ nên $C = 10 \Rightarrow v(t) = 2t + 10$.

Khi đó $s(t) = \int v(t)\,dt = \int (2t + 10)\,dt = t^2 + 10t + C_1$.

Vì $s(0) = 0$ nên $C_1 = 0 \Rightarrow s(t) = t^2 + 10t$ (m)

Quãng đường xe đó đi được trong 7 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc là $s(7) = 7^2 + 10.7 = 119$ (m).

Câu 158. Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc 15m/s thì người lái xe hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -3t + 15(\text{m/s})$, trong đó t (giây). Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được bao nhiêu mét?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 37,5

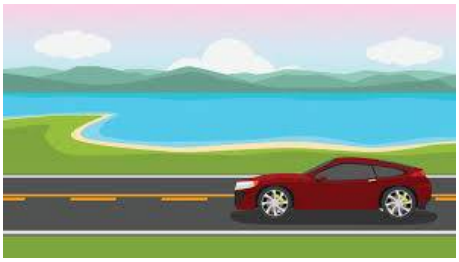
Ta có quãng đường xe đi được là $s(t) = \int v(t)\,dt = \int (-3t + 15)\,dt = -\frac{3}{2}t^2 + 15t + C$.

Do $s(0) = 0$ nên $C = 0$. Khi xe dừng hẳn thì $v(t) = 0 \Rightarrow t = 5$.

Suy ra quãng đường đi được là $s(5) = 37,5(m)$.

Câu 159. Một ô tô đang chạy với vận tốc $12(m/s)$ thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -6t + 12(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng

giây, kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét ?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 12

Ta có: $v(t)=12(m/s)\Leftrightarrow 12=-6t+12\Rightarrow t=0$

$v(t)=-6t+12(m/s)$

$\Rightarrow s(t)=\int v(t)dt=\int(-6t+12)dt=-3t^2+12t+C$

$\Rightarrow s(t)=-3t^2+12t+C$

Với $t=0\Rightarrow s(0)=0\ \Rightarrow C=0$

$\Rightarrow s(t)=-3t^2+12t$

Khi xe dừng hẳn thì $v(t)=0\Leftrightarrow 0=-6t+12\Leftrightarrow t=2$.

Từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được: $s(2)=-3.2^2+12.2=12(m)$

Câu 160. Bạn Trúc Linh lái ô tô đang chạy với vận tốc $70\,km/h$ thì hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với tốc độ $v(t)=-10t+30\ (m/s)$. Tính quãng đường (đơn vị mét) ô tô đi được sau 4 giây kể từ khi ô tô hãm phanh?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 40

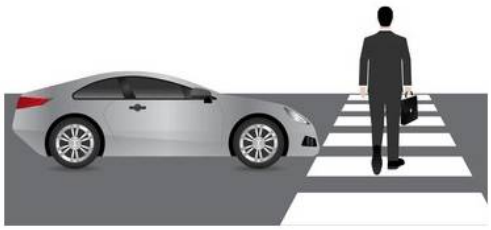
Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong t giây kể từ khi hãm phanh.

Ta có: $s(t)=\int(-10t+30)dt=-5t^2+30t+C$.

Do $s(0)=0\Rightarrow C=0$.

Khi đó: $s(t)=-5t^2+30t\Rightarrow s(4)=-5.16+30.4=40(m)$.

Câu 161. Bạn Minh Hiền lái ô tô đang chạy với vận tốc $20(m/s)$ thì thấy một người đi bộ qua đường cách ô tô một khoảng $30m$, sau đó 1 giây bạn Minh Hiền nhanh chóng đạp phanh. Sau khi đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-40t+20(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bằng đầu đạp phanh. Khi ô tô dừng hẳn, ô tô cách người đi bộ qua đường bao nhiêu mét?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 5

Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn

Ta có: $v(t)=20(m/s)\Rightarrow 20=-40t+20\Rightarrow t=0$

$v(t)=-40t+20$

$\Rightarrow s(t)=\int v(t)dt=\int(-40t+20)dt=-20t^2+20t+C$

$\Rightarrow s(t)=-20t^2+20t+C$

Với $t=0\Rightarrow s(0)=0\ \Rightarrow C=0$

$\Rightarrow s(t)=-20t^2+20t$

Khi xe dừng hẳn thì $v(t)=0\Leftrightarrow -40t+20=0\Rightarrow t=0,5$.

Từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được: $s(0,5)=-20(0,5)^2+20(0,5)=5(m)$

Sau 1 giây ô tô di chuyển được: $20.1=20m$

Do đó, quãng đường ô tô đi được từ khi thấy một người đi bộ qua đường đến lúc dừng hẳn là:

$5+20=25m$

Vậy khi ô tô dừng hẳn, ô tô cách người đi bộ qua đường là: $30-25=5m$

Câu 162. Anh Bảo Toàn lái ô tô đang chạy với vận tốc $36(km/h)$ thì tăng tốc chuyển động nhanh dần đều với gia tốc $a(t)=1+\frac{t}{3}(m/s^2)$. Sau bao nhiêu giây kể từ khi ô tô bắt đầu tăng tốc thì ô tô đi được quãng đường 90 mét?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 6

Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong t giây kể từ khi ô tô bắt đầu tăng tốc.

Ta có: $v(t)=\int a(t)dt=\int\left(1+\frac{t}{3}\right)dt=t+\frac{t^2}{6}+C$

$v=36(km/h)=10(m/s)$

Chọn $t=0$ lúc ô tô bắt đầu tăng tốc, khi đó $v(0)=10(m/s)$

Do đó: $v(0)=0+\frac{0^2}{6}+C\Rightarrow C=10$

$\Rightarrow v(t)=\frac{t^2}{6}+t+10$

Ta lại có: $s(t)=\int v(t)dt=\int\left(\frac{t^2}{6}+t+10\right)dt=\frac{t^3}{18}+\frac{t^2}{2}+10t+C_1$.

Do $s(0)=0\Rightarrow C_1=0$.

Khi đó: $s(t)=\frac{t^3}{18}+\frac{t^2}{2}+10t$

ô tô đi được quãng đường 90 mét nên: $\frac{t^3}{18}+\frac{t^2}{2}+10t=90\Rightarrow t=6(s)$

Câu 163. Một ca nô đang chạy trên hồ với vận tốc $20(m/s)$ thì hết xăng; từ thời điểm đó, ca nô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+20$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc hết xăng. Hỏi từ lúc hết xăng đến lúc ca nô dừng hẳn đi được bao nhiêu mét?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 40

Ta có: $v(t)=20(m/s)\Leftrightarrow 20=-5t+20\Rightarrow t=0$

$v(t)=-5t+20$

$\Rightarrow s(t)=\int v(t)dt=\int(-5t+20)dt=-\frac{5}{2}t^2+20t+C$

$\Rightarrow s(t)=-\frac{5}{2}t^2+20t+C$

Với $t=0\Rightarrow s(0)=0\ \Rightarrow C=0$

$\Rightarrow s(t)=-\frac{5}{2}t^2+20t$

Khi ca nô dừng hẳn thì $v(t)=0\Leftrightarrow 0=-5t+20\Leftrightarrow t=4$.

Từ lúc hết xăng đến lúc ca nô dừng hẳn đi được: $s(4)=-\frac{5}{2}.4^2+20.4=40(m)$

Câu 164. Một máy bay cất cánh từ sân bay Cam Ranh với vận tốc chuyển động của máy báy là $v(t)=3t^2+5\ \ (m/s)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây. Quãng đường máy bay bay từ giây thứ 4 đến giây thứ 20 bằng bao nhiêu mét?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 8016

Ta có:

$v(t)=3t^2+5$

$\Rightarrow s(t)=\int v(t)\,dt=\int(3t^2+5)dt=t^3+5t+C$

$\Rightarrow s(t)=t^3+5t+C$

Chọn $t=0\Rightarrow s(0)=0\ \Rightarrow C=0$

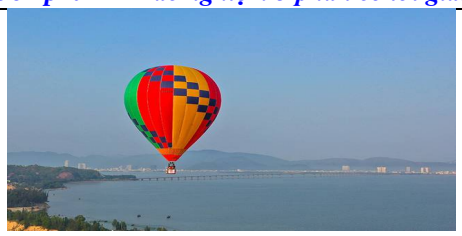
$\Rightarrow s(t)=t^3+5t$

Quãng đường máy bay bay trong 4 giây đầu là: $s(4)=4^3+5.4=84m$

Quãng đường máy bay bay trong 20 giây đầu là: $s(20)=20^3+5.20=8100m$

Quãng đường máy bay bay từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là: $s(20)-s(4)=8100-84=8016m$

Câu 165. Tại một nơi không có gió, một chiếc khí cầu đang đứng yên ở độ cao 162 (mét) so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy luật $v(t)=10t-t^2$, trong đó t (phút) là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $v(t)$ được tính theo đơn vị mét/phút (m/p). Nếu như vậy thì khi bắt đầu tiếp đất vận tốc v của khí cầu bằng bao nhiêu mét/phút?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 9

Ta có: $v(t)=10t-t^2\geq 0\Rightarrow 0\leq t\leq 10$

$v(t)=10t-t^2$

$\Rightarrow s(t)=\int v(t)\,dt=\int\left(10t-t^2\right)dt=5t^2-\frac{t^3}{3}+C$

$\Rightarrow s(t)=5t^2-\frac{t^3}{3}+C$

Chọn $t=0\Rightarrow s(0)=-162\Rightarrow -162=C$

$\Rightarrow s(t)=-\frac{t^3}{3}+5t^2-162$

Khi bắt đầu tiếp đất thì: $s(t)=0\Leftrightarrow -\frac{t^3}{3}+5t^2-162=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t\approx -4,93(L)\\ t\approx 10,93(L)\\ t=9(N)\end{array}\right.$

Khi bắt đầu tiếp đất vận tốc v của khí cầu là: $v(9)=10.9-9^2=9(m/p)$

Câu 166. Một quả bóng được ném lên từ độ cao $20\,m$ so với mặt đất với vận tốc được tính bởi công thức sau đây $v(t)=-10t+16\ (m/s)$, trong đó t (giây) là thời gian tính từ lúc bắt đầu ném. Sau 2 giây đầu tiên kể từ lúc bắt đầu ném, quả bóng cao bao nhiêu mét so với mặt đất?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 32

Gọi $h(t)$ là độ cao của quả bóng tại thời điểm t.

Suy ra: $h'(t)=v(t)$ do đó $h(t)$ là một nguyên hàm của $v(t)$

Ta có: $\int(-10t+16)\text{dt}=-5t^2+16t+C$.

Do quả bóng được ném lên từ độ cao $20\,m$ nên tại thời điểm $t=0$ thì $h=20$.

Hay $h(0)=20\Rightarrow C=20$ nên $h(t)=-5t^2+16t+20$

$\Rightarrow h(2)=-5.2^2+16.2+20=32m$

Câu 167. Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng từ mặt đất. Giả sử tại thời điểm t giây (coi là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t)=24,5-9,8t\,(m/s)$. Tính quãng đường (đơn vị: mét) viên đạn đi sau 2 giây đầu.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $29,4$

Quãng đường viên đạn đi được là: $s(t)=\int(24,5-9,8t)\,\mathrm{d}t=24,5t-4,9t^2+C\Rightarrow s(t)=24,5t-4,9t^2+C$.

Chọn $t=0\Rightarrow s(0)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow s(t)=24,5t-4,9t^2$

Vậy sau 2 giây đầu quãng đường viên đạn đi là $s(2)=24,5.2-4,9.2^2=29,4(m)$

Câu 168. Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng từ mặt đất. Giả sử tại thời điểm t giây (coi là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t)=25-9,8t\,(m/s)$. Quãng đường viên đạn đi được từ lúc bắn cho đến khi chạm đất bằng bao nhiêu mét? (làm tròn kết quả đến phần chục của mét)



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $64,8$

Quãng đường viên đạn đi được là: $s(t)=\int(25-9,8t)\,dx=25t-4,9t^2+C$

$\Rightarrow s(t)=25t-4,9t^2+C$

Chọn $t=0\Rightarrow s(0)=0$

$\Rightarrow C=0$

$\Rightarrow s(t)=25t-4,9t^2$

Khi viên đạt đạt độ cao lớn nhất thì $v(t)=0\Leftrightarrow 25-9,8t=0\Leftrightarrow t=\dfrac{125}{49}(s)$

Quãng đường viên đạn đi từ lúc bắn lên cho tới khi rơi xuống đất là:

$$s\left(\frac{125}{49}\right)=2\left[25.\frac{125}{49}-4,9.\left(\frac{125}{49}\right)^2\right]\approx 64,8(m)$$

Câu 169. Một xe gắn máy đang chuyển động với vận tốc $6(m/s)$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=\frac{3}{t+1}(m/s^2)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc. Hỏi vận tốc của xe gắn máy sau 10 giây bằng bao nhiêu mét/giây (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 13

Ta có $v(t)=\int\frac{3}{t+1}\,dt=3\ln|t+1|+C$.

Tại thời điểm lúc bắt đầu tăng tốc $t=0$ thì $v=6(m/s)$ nên ta có $3\ln 1+C=6\Leftrightarrow C=6$.

Suy ra $v(t)=3\ln|t+1|+6\ \ (m/s)$.

Tại thời điểm $t=10s\Rightarrow v(10)=3\ln 11+6\approx 13(m/s)$.

Câu 170. Một xe gắn máy chuyển động với vận tốc ban đầu là $5(m/s)$ và có gia tốc được xác định bởi công thức $a(t)=\frac{2}{t+1}(m/s^2)$. Tính vận tốc của xe gắn máy tại giây thứ 20 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét/giây).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án:

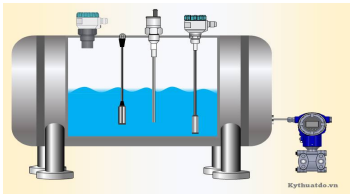
Vận tốc của xe gắn máy tại thời điểm t là $v(t)=\int a(t)\,dt=\int\frac{2}{t+1}dt=2\ln|t+1|+C$.

Vì vận tốc ban đầu là $5(m/s)$ nên $v(0)=5\Leftrightarrow 2\ln|0+1|+C=5\Leftrightarrow C=5$.

Nên $v(t)=2\ln|t+1|+5$.

Vậy vận tốc của xe gắn máy tại giây thứ 20 là $v(20)=2\ln|20+1|+5\approx 11(m/s)$.

Câu 171. Gọi $h(t)$ (đơn vị: mét) là mực nước ở bồn chứa sau khi bơm nước được t giây. Biết rằng $h'(t)=\frac{1}{5}\sqrt[3]{t}\ \ (m/s)$ và lúc đầu bồn không có nước. Sau khi bơm 8 giây đầu tiên, mực nước trong bồn bằng bao nhiêu mét?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2,4

Ta có : $h'(t)=\frac{1}{5}\sqrt[3]{t}$

$$\Rightarrow h(t)=\int\frac{1}{5}\sqrt[3]{t}dx=\frac{1}{5}\int t^{\frac{1}{3}}dx=\frac{1}{5}\frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+C=\frac{3}{20}t\sqrt[3]{t}+C$$

$$\Rightarrow h(t)=\frac{3}{20}t\sqrt[3]{t}+C$$

Chọn $t=0\Rightarrow h(0)=0\Rightarrow C=0$

$$\Rightarrow h(t)=\frac{3}{20}t\sqrt[3]{t}$$

Mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 8 giây: $h(8)=\frac{3}{20}.8\sqrt[3]{8}=2,4m$

Câu 172. Bác Nam cần bơm nước vào bể chứa nước để tưới tiêu. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t)=3at^2+bt\ \ (m^3/s)$ và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^3$. Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$. Hỏi thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là bao nhiêu m^3?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 8400

Ta có :

$h'(t)=3at^2+bt$

$\Rightarrow h(t)=\int\left(3at^2+bt\right)dt=at^3+\frac{1}{2}bt^2+C$

$\Rightarrow h(t)=at^3+\frac{1}{2}bt^2+C$

Chọn $t=0\Rightarrow h(0)=0\Rightarrow C=0$

$\Rightarrow h(t)=at^3+\frac{1}{2}bt^2$

Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^3$: $h(5)=150\Leftrightarrow 125a+\frac{25}{2}b=150$

Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$: $h(10)=1100\Leftrightarrow 1000a+50b=1100$

Ta có hệ : $\begin{cases}125a+\frac{25}{2}b=150\\1000a+50b=1100\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$

$\Rightarrow h(t)=t^3+t^2$

Thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là $h(20)=20^3+20^2=8400m^3$

Câu 173. Anh Hùng bơm nước vào một bể chứa nước để sử dụng. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t)=6at^2+2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là $90m^3$ và sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là $504m^3$. Tính thể tích (m^3) nước bơm được từ giây thứ 9 đến giây thứ 18.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4374

Từ giả thiết suy ra $h(t)=\int\left(6at^2+2bt\right)\mathrm{d}x=2at^3+bt^2+c$.

Lại có $h(0)=0;h(3)=90;h(6)=504$ nên suy ra $\begin{cases}c=0\\54a+9b=90\\432a+36b=504\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{2}{3}\\b=6\\c=0\end{cases}$.

Vậy $h(t)=\frac{4}{3}t^3+6t^2$.

Thể tích nước bơm trong 9 giây đầu là: $h(9)=1458m^3$

Thể tích nước bơm trong 18 giây đầu là: $h(18)=5832m^3$

Thể tích nước bơm từ giây thứ 9 đến giây thứ 18 là: $h(18)-h(9)=5832-1458=4374m^3$

Câu 174. Trong đợt xả lũ tháng 11 năm 2025 của nhà máy thủy điện sông Ba Hạ (Phú Yên) đã xả lũ với tốc độ lưu lượng nước tại thời điểm t giây là $h'(t)=2t+10000\ \left(m^3/s\right)$. Hỏi sau 1 giờ xả lũ thì hồ thoát nước của nhà máy đã thoát đi một lượng nước là bao nhiêu chục nghìn mét khối?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4896

Ta có :

$h'(t)=2t+10000$

$\Rightarrow h(t)=\int(2t+10000)dx=t^2+10000t+C$

$\Rightarrow h(t)=t^2+10000t+C$

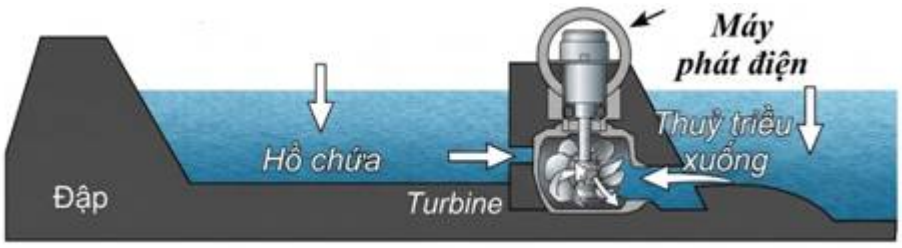
Chọn $t=0\Rightarrow h(0)=0\Rightarrow C=0$

$\Rightarrow h(t)=t^2+10000t+C$

thủy điện đã xả lũ trong 1 giờ = 3600 giây thì thoát đi một lượng nước là:

$h(3600)=3600^2+10000.3600=48960000\left(m^3\right)=4896$ chục nghìn mét khối

Câu 175. Mực nước trong hồ chứa của nhà máy điện thủy triều thay đổi trong suốt một ngày do nước chảy ra khi thủy triều xuống và nước chảy vào khi thủy triều lên (như hình vẽ). Tốc độ thay đổi của mực nước được xác định bởi hàm số $h'(t)=\frac{1}{90}\left(t^2-17t+60\right)$, trong đó t tính bằng giờ $(0\le t\le 24)$, $h'(t)$ tính bằng mét/giờ. Tại thời điểm $t=0$, mực nước trong hồ chứa cao $8m$. Gọi $h_1(m)$ là mực nước trong hồ cao nhất và $h_2(m)$ là mực nước thấp nhất , tính giá trị h_1+h_2.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 28,8

Ta có

$$h'(t)=\frac{1}{90}\left(t^2-17t+60\right)$$

$$\Rightarrow h(t)=\frac{1}{90}\int\left(t^2-17t+60\right)dt=\frac{1}{90}\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{17}{2}t^2+60t\right)+C$$

$$\Rightarrow h(t)=\frac{1}{90}\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{17}{2}t^2+60t\right)+C$$

Tại thời điểm $t=0$, mực nước trong hồ chứa cao $8m$ nên $h(0)=8\Rightarrow C=8$

$$\Rightarrow h(t)=\frac{1}{90}\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{17}{2}t^2+60t\right)+8\ \ (0\le t\le 24)$$

Ta có: $h'(t)=0\Leftrightarrow t^2-17t+60=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=5\\t=12\end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên:

t	0		5		12		24
$h'(t)$		+	0	−	0	+	
$h(t)$	8	↗	$\frac{1019}{108}$	↘	$\frac{44}{5}$	↗	$\frac{104}{5}$

Mực nước trong hồ cao nhất : $h_1=\frac{104}{5}=20,8m$ và mực nước trong hồ thấp nhất $h_2=8m$

$$\Rightarrow h_1+h_2=20,8+8=28,8(m)$$

Câu 176. Gọi $h(t)$ là chiều cao của cây keo (tính theo mét) sau khi trồng t năm. Biết rằng năm đầu tiên cây cao $\frac{4}{3}(m)$, trong những năm tiếp theo, cây phát triển với tốc độ $h'(t)=\frac{1}{\sqrt[4]{t}}$ (mét /năm). Sau bao nhiêu năm cây cao được $\frac{16}{3}$ mét (làm tròn kết quả đến phần trăm của năm)?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 6,35

Ta có $h'(t)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{t}}$

$\Rightarrow h(t)=\int\dfrac{1}{\sqrt[4]{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{4}}dt=\dfrac{t^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1}+C=\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{t^3}+C$

$\Rightarrow h(t)=\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{t^3}+C$

Năm đầu tiên cây cao $\dfrac{4}{3}(m)$ nên $h(1)=\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow\dfrac{4}{3}=\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{1}+C\Rightarrow C=0$

$\Rightarrow h(t)=\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{t^3}$

cây cao được $\dfrac{16}{3}(m)$ nên $h(t)=\dfrac{16}{3}\Leftrightarrow\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{t^3}=\dfrac{16}{3}\Leftrightarrow\sqrt[4]{t^3}=4\Rightarrow t\approx 6,35$ (năm)

Câu 177. Kí hiệu $h(x)$ là chiều cao của một cây cao su (tính theo mét) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau năm đầu tiên cây cao su cao $3(m)$. Trong 15 năm tiếp theo cây cao su phát triển với tốc độ $h'(x)=\dfrac{2}{x}$ (mét/năm). Xác định chiều cao của cây cao su sau 12 năm trồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 8

Chiều cao của cây sau x năm là $h(x)=\int\dfrac{2}{x}dx=2\ln|x|+C=2\ln x+C$, do $x>0$

Sau năm đầu tiên cây cao $3(m)$ do đó ta có $h(1)=3\Leftrightarrow 2\ln 1+C=3\Leftrightarrow C=3$.

Vậy $h(x)=2\ln|x|+3\Rightarrow h(12)=2\ln 12+3\approx 8(m)$

Câu 178. Một vườn ươm cây Bạch Đàn cung cấp trồng rừng để phủ đồi trọc. Biết tốc độ tăng trưởng trong suốt t năm được tính xấp xỉ bởi công thức $h'(t)=\dfrac{1}{2}t+4$, trong đó $h(t)(cm)$ là chiều cao của cây khi kết thúc t(năm) . Cây con khi được ươm có chiều cao 20 cm. Sau 4 năm, cây được ươm cao bao nhiêu centimét?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 40

$h(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $h'(t)=\frac{1}{2}t+4$.

$h(t)=\int h'(t)\,\mathrm{d}t=\int\left(\frac{1}{2}t+4\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}t^2+4t+C$.

Khi đó $h(t)=\frac{1}{4}t^2+4t+C$.

Vì cây con khi được trồng cao 20cm nên $h(0)=20$ suy ra $C=20$ nên $h(t)=\frac{1}{4}t^2+4t+20$.

Sau 4 năm, cây có chiều cao là: $h(4)=\frac{1}{4}.4^2+4.4+20=40(cm)$.

Câu 179. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1990 được ước tính theo một hàm số theo thời gian $f(t)$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người). Biết rằng $f'(t)=\frac{34}{t^2+4t+4}$ (nghìn người/năm) biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn. Số dân của thị trấn đó vào năm 2035 là bao nhiêu? (kết quả lấy chính xác đến hàng phần chục của nghìn người) biết dân số của thị trấn đó năm 1990 là 3 nghìn người.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 19,3

Ta có: $f'(t)=\frac{34}{t^2+4t+4}=\frac{34}{(t+2)^2}\Rightarrow f(t)=-\frac{34}{t+2}+C$

Chọn mốc thời gian là năm 1990. Dân số của thị trấn đó năm 1990 là 3 nghìn người nên ta có $f(0)=3$

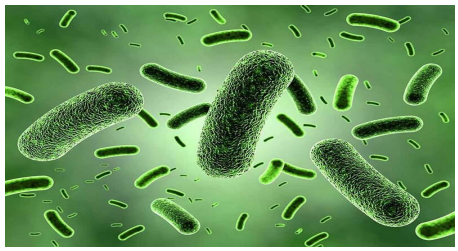
Khi đó $-\frac{34}{2}+C=3\Leftrightarrow C=20$ nên $f(t)=-\frac{34}{t+2}+20$

Từ năm 1990 đến năm 2035 là 45 năm nên dân số của thị trấn năm 2035 là

$f(45)=-\frac{34}{47}+20=\frac{906}{47}\approx 19,3$ (nghìn người).

Câu 180. Một quần thể vi khuẩn ban đầu gồm 500 vi khuẩn, sau đó bắt đầu tăng trưởng. Gọi $P(t)$ là số lượng vi khuẩn của quần thể đó tại thời điểm t, trong đó t tính theo ngày ($0\le t\le 10$). Tốc độ tăng trưởng của quần thể vi khuẩn đó cho bởi hàm số $P'(t)=k\sqrt{t}$, trong đó k là hằng số. Sau 1 ngày, số

lượng vi khuẩn của quần thể đó đã tăng lên thành 600 vi khuẩn. Tính số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 9 ngày.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3200

Ta có: $P(t)=\int P'(t)dt=\int k\sqrt{t}dt=\int kt^{\frac{1}{2}}dt=k.\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C$.

Từ giả thiết suy ra: $\begin{cases}P(0)=500\\P(1)=600\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k.\frac{2}{3}.0\sqrt{0}+C=500\\k.\frac{2}{3}.1\sqrt{1}+C=600\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=500\\\frac{2}{3}k=100\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=500\\k=150\end{cases}$

$\Rightarrow P(t)=100t\sqrt{t}+500$.

Do đó, số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 9 ngày là: $P(9)=100.9\sqrt{9}+500=3200$.

Câu 181. Một đàn con trùng, ở ngày thứ t có số lượng là $K(t)$. Biết $K'(t)=\frac{800}{t}$ và ngày đầu tiên, đàn côn trùng có 500 con. Hỏi sau 10 ngày thì đàn có khoảng bao nhiêu con? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2342

Số lượng côn trùng ngày thứ t là $K(t)=\int\frac{800}{t}\mathrm{d}t=800\ln|t|+C$.

Vì ngày đầu tiên, đàn côn trùng có 500 con nên $K(1)=500\Leftrightarrow 800\ln|1|+C=500\Leftrightarrow C=500$

$\Rightarrow K(t)=800\ln|t|+500$

Số lượng côn trùng ngày thứ 10 là $K(10)=800\ln|10|+500\approx 2342$ con.

Câu 182. Sự sản sinh vi rút Zika ngày thứ t có số lượng là $N(t)$ con, biết $N'(t)=\dfrac{1000}{t}$ và ngày đầu tiên, đám vi rút có số lượng 6000 con. Tính số lượng vi rút sau 10 ngày (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 8303

Ta có : $N'(t)=\dfrac{1000}{t}$

$\Rightarrow N(t)=\int\dfrac{1000}{t}dt=1000\ln|t|+C$

$\Rightarrow N(t)=1000\ln|t|+C$

Chọn $t=1\Rightarrow N(1)=6000\Rightarrow C=6000$

$\Rightarrow N(t)=1000\ln|t|+6000$

số lượng vi rút sau 10 ngày là: $N(10)=1000\ln 10+6000\approx 8303$

Câu 183. Người ta truyền nhiệt cho một bình nuôi cấy vi sinh vật từ $1°C$. Tốc độ tăng nhiệt độ của bình tại thời điểm t phút $(0\le t\le 5)$ được cho bởi hàm số $f(t)=3t^2$ ($°C$/ phút). Biết rằng nhiệt độ của bình đó tại thời điểm t là một nguyên hàm của hàm số $f(t)$. Nhiệt độ của bình tại thời điểm 3 phút kể từ khi truyền nhiệt bằng bao nhiêu $°C$?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 28

Ta có nhiệt độ của bình là $F(t)=\int f(t)\mathrm{d}t=\int 3t^2\ \mathrm{d}t=t^3+C$.

Vì người ta bắt đầu truyền nhiệt cho bình nuôi cấy từ $1°C$ nên ta có:

$F(0)=1\Leftrightarrow C=1\Rightarrow F(t)=t^3+1(°C)$

Vậy nhiệt độ của bình tại thời điểm 3 phút kể từ khi truyền nhiệt là $F(3)=3^3+1=28(^\circ\text{C})$.

Câu 184. Tốc độ tăng trưởng của một đàn gấu mèo tại thời điểm t tháng kể từ khi người ta thả 100 cá thể đầu tiên vào một khu rừng được ước lượng bởi công thức $P'(t)=8t+30$ (con/tháng), với $P(t)$ là số lượng cá thể trong đàn tại thời điểm t tháng tương ứng. Dựa vào tốc độ tăng trưởng đã cho, hãy tính số cá thể của đàn gấu mèo này tại thời điểm 3 tháng kể từ khi chúng được thả vào rừng.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 226

Số lượng cá thể trong đàn gấu mèo tại thời điểm t tháng là

$$P(t)=\int P'(t)\,\mathrm{d}t=\int(8t+30)\,\mathrm{d}t=4t^2+30t+C(\text{con})$$

Vì ban đầu thả 100 cá thể gấu mèo nên $P(0)=100\Leftrightarrow C=100\Rightarrow P(t)=4t^2+30t+100$ (con).

Suy ra số cá thể của đàn gấu mèo này tại thời điểm 3 tháng kể từ khi chúng được thả vào rừng là

$$P(3)=4.3^2+30.3+100=226(\text{ con})$$

Câu 185. Tốc độ phát triển của số lượng vi khuẩn trong hồ bơi được mô hình bởi hàm số $B'(t)=\dfrac{1000}{(1+0,3t)^2}$ với $t\geq 0$, trong đó $B(t)$ là số lượng vi khuẩn trên mỗi ml nước tại ngày thứ t. Số lượng vi khuẩn ban đầu là 500 con trên mỗi ml nước. Biết rằng mức độ an toàn cho người sử dụng hồ bơi là số vi khuẩn phải dưới 3000 con trên mỗi ml nước. Hỏi sau bao nhiêu ngày thì người ta phải xử lí và thay nước mới cho hồ bơi.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 10

Theo giả thiết thì số lượng vi khuẩn tăng với tốc độ là hàm số $B'(t)$ nên $B(t)$ chính là nguyên hàm của $B'(t)$:

Khi đó: $B(t)=\int B'(t)\,\mathrm{d}t=\int\frac{1000}{(1+0,3t)^2}\,\mathrm{d}t=1000\int(1+0,3t)^{-2}\,\mathrm{d}t=-\frac{1000}{0,3(1+0,3t)}+C$

Số lượng vi khuẩn lúc ban đầu là 500 con trên mỗi ml nước nên:

$$B(0)=500\Leftrightarrow-\frac{1000}{0,3(1+0,3.0)}+C=500\Leftrightarrow C=\frac{11500}{3}.$$

Suy ra hàm số biểu thị cho số lượng vi khuẩn tại ngày thứ t là: $B(t)=-\frac{1000}{0,3(1+0,3t)}+\frac{11500}{3}$.

Số lượng vi khuẩn dưới 3000 con trên mỗi ml nước thì người bơi vẫn an toàn, ta có:

$$B(t)<3000\Leftrightarrow-\frac{1000}{0,3(1+0,3t)}+\frac{11500}{3}<3000$$

$$\Leftrightarrow-\frac{1000}{0,3(1+0,3t)}<-\frac{2500}{3}\Leftrightarrow 1+0,3t<4\Leftrightarrow t<10.$$

Vậy vào ngày thứ 10 hồ bơi không còn an toàn, cần phải thay nước mới.

Câu 186. Đối với các dự án xây dựng, chi phí nhân công lao động được tính theo số ngày công. Gọi $m(t)$ là số lượng nhân công được sử dụng ở ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Gọi $M(t)$ là số ngày công nhân được tính đến hết ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Trong kinh tế xây dựng, người ta đã biết rằng $M'(t)=m(t)$. Một công trình xây dựng dự kiến hoàn thành trong 400 ngày. Số lượng công nhân được sử dụng cho bởi hàm số $m(t)=800-2t$. Trong đó t tính theo ngày $(0\le t\le 400)$, $m(t)$ tính theo người. Đơn giá cho một ngày công lao động là $0,4$ triệu đồng. Chi phí nhân công lao động của công trình đó (cho đến lúc hoàn thành) bằng bao nhiêu tỉ đồng?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 64

Ta có $M'(t)=m(t)$ nên $M(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $m(t)=800-2t$.

Do đó: $M(t)=\int(800-2t)\mathrm{d}t=800t-t^2+C$.

Suy ra: $M(t)=800t-t^2+C,\ 0\le t\le 400$. Vì $M(0)=0\Rightarrow C=0$.

Vậy $M(t)=800t-t^2$.

Số ngày công được tính đến hết ngày thứ 400 là: $M(400)=800.400-400^2=160000$.

Chi phí nhân công lao động của công trình đó là: $0,4.160000=640000$ (triệu đồng) hay 64 (tỉ đồng)

Câu 187. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3+2x$ có dạng $F(x)=ax^4+bx^2$. Tính $T=4a+b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Ta có: $F(x)=ax^4+bx^2$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3+2x$ nên

$F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 4ax^3+2bx=x^3+2x,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}4a=1\\2b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{4}\\b=1\end{cases}$

Do đó $T=4a+b=4.\dfrac{1}{4}+1=2$.

Câu 188. Để hàm số $F(x)=mx^3+(3m+2)x^2-4x+3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+10x-4$ thì giá trị thực của tham số m bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên ta có

$F'(x)=f(x)\Leftrightarrow 3mx^3+2(3m+2)x-4=3x^2+10x-4\Leftrightarrow\begin{cases}3m=3\\2(3m+2)=10\end{cases}\Leftrightarrow m=1$

Câu 189. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{khi } x\ge 1\\3x^2-2 & \text{khi } x<1\end{cases}$, giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0)=2$.Giá trị của $F(-1)+2F(2)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 9

Ta có:

$\int(2x-1)\mathrm{d}x=x^2-x+C_1$;

$\int(3x^2-2)\mathrm{d}x=x^3-2x+C_2$

Suy ra $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}x^2-x+C_1 & \text{khi } x\ge 1\\x^3-2x+C_2 & \text{khi } x<1\end{cases}$

Mà ta có $F(0)=2\Rightarrow C_2=2$

Mặt khác hàm số F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ nên $y=F(x)$ liên tục tại $x=1$

Suy ra $\lim\limits_{x\to 1^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)\Rightarrow C_1=1$.

Khi đó ta có: $F(x)=\begin{cases}x^2-x+1 & \text{khi } x\ge 1\\x^3-2x+2 & \text{khi } x<1\end{cases}$ suy ra $\begin{cases}F(-1)=3\\F(2)=3\end{cases}$.

Vậy $F(-1)+2F(2)=9$.

Câu 190. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{khi } x\ge 1\\3x^2+2 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của hàm số f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0)=2$. Giá trị của $F(-1)+2F(2)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 21

Khi $x \ge 1$ thì $F(x) = \int f(x)dx = \int (2x+3)dx = x^2 + 3x + C_1$

Khi $x < 1$ thì $F(x) = \int f(x)dx = \int \left(3x^2 + 2\right)dx = x^3 + 2x + C_2$

Theo giả thiết $F(0) = 2 \Rightarrow C_2 = 2$ Ta có $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = 5$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Suy ra hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó hàm số $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1^+} F(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} F(x) \Rightarrow C_1 + 4 = C_2 + 3 \Rightarrow C_1 = 1$

Vậy $F(-1) + 2F(2) = -3 + C_2 + 2\left(10 + C_1\right) = 21$

Câu 191. Cho hàm số $f\left(x\right) = \begin{cases} 2x+5 & \text{khi } x \ge 1 \\ 3x^2 + 4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F\left(0\right) = 2$. Giá trị của $F\left(-1\right) + 2F\left(2\right)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 27

Theo giả thiết F là một nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$ nên ta có

$$f\left(x\right) = \begin{cases} 2x+5 & \text{khi } x \ge 1 \\ 3x^2 + 4 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \Rightarrow F\left(x\right) = \begin{cases} x^2 + 5x + C_1 & \text{khi } x \ge 1 \\ x^3 + 4x + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

Vì $F\left(0\right) = 0 \Rightarrow C_2 = 2$.

Mặt khác, $F\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục tại $x = 1$ nên ta có:

$$\lim_{x \to 1^+} F\left(x\right) = \lim_{x \to 1^-} F\left(x\right) \Leftrightarrow 6 + C_1 = 5 + C_2 \Rightarrow C_1 = C_2 - 1 = 1$$

Vậy $F\left(x\right) = \begin{cases} x^2 + 5x + 1 & \text{khi } x \ge 1 \\ x^3 + 4x + 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \Rightarrow F\left(-1\right) + 2F\left(2\right) = -3 + 2.15 = 27$.

Câu 192. Cho hàm số $f\left(x\right) = \begin{cases} 2x+2 & khi \;\; x \ge 1 \\ 3x^2 + 1 & khi \;\; x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F\left(0\right) = 2$. Giá trị của $F\left(-1\right) + 2F\left(2\right)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 18

F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ nên $F\left(x\right) = \begin{cases} x^2 + 2x + C_1 & khi \;\; x \ge 1 \\ x^3 + x + C_2 & khi \;\; x < 1 \end{cases}$.

Ta có: $F(0)=2\Rightarrow C_2=2$. (1)

Do F liên tục tại $x=1$ nên $\lim\limits_{x\to 1^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)=F(1)$

$\Leftrightarrow C_1+3=C_2+2\overset{(1)}{\Leftrightarrow}C_1+3=4\Leftrightarrow C_1=1$.

Do đó $F(x)=\begin{cases}x^2+2x+1 & khi\ \ x\ge 1\\ x^3+x+2 & khi\ \ x<1\end{cases}$.

Suy ra $F(-1)+2F(2)=18$.

Câu 193. *Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$. Biết $F\left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right)=k$ với mọi $k\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $T=F(0)+F(\pi)+F(2\pi)$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Ta có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\tan x+C$.

Suy ra $F(x)=\begin{cases}\tan x+C_0,\ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)\\ \tan x+C_1,\ x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)\\ \tan x+C_2,\ x\in\left(\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{5\pi}{2}\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}F\left(\dfrac{\pi}{4}+0\pi\right)=1+C_0=0\Rightarrow C_0=-1\\ F\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi\right)=1+C_1=1\Rightarrow C_1=0\\ F\left(\dfrac{\pi}{4}+2\pi\right)=1+C_2=2\Rightarrow C_0=1\end{cases}$

Vậy $F(0)+F(\pi)+F(2\pi)=\tan 0-1+\tan\pi+\tan 2\pi+1=2.$

Câu 194. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^x$, thỏa mãn $F(0)=\dfrac{1}{\ln 2}$. Biết $F(0)+F(1)+...+F(2024)+F(2025)=\dfrac{2^a+b}{\ln 2}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Tính giá trị biểu thức $a-b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2027

Ta có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int 2^x\mathrm{d}x=\dfrac{2^x}{\ln 2}+C$

mà $F(0)=\dfrac{1}{\ln 2}\Rightarrow C=0\Rightarrow F(x)=\dfrac{2^x}{\ln 2}$.

$\Rightarrow F(0)+F(1)+...+F(2024)+F(2025)=\dfrac{1}{\ln 2}\left(1+2+2^2+...+2^{2024}+2^{2025}\right)=\dfrac{1}{\ln 2}.\dfrac{2^{2026}-1}{2-1}=\dfrac{2^{2026}-1}{\ln 2}$

$\Rightarrow a=2026; b=-1 \Rightarrow a-b=2027$

Câu 195. Cho hàm số $f(x)=2^x+x+1$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=1$. Biết $F(-1)=\frac{a}{b}+\frac{c}{2\ln 2}$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Tính giá trị biểu thức $a+b+c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

$F(x)=\int\left(2^x+x+1\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln 2}2^x+\frac{1}{2}x^2+x+C.$

$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{\ln 2}2^x+\frac{1}{2}x^2+x+C.$

$F(0)=1\Rightarrow 1=\frac{1}{\ln 2}2^0+\frac{1}{2}0^2+0+C\Rightarrow C=1-\frac{1}{\ln 2}$

$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{\ln 2}2^x+\frac{1}{2}x^2+x+1-\frac{1}{\ln 2}$

$\Rightarrow F(-1)=\frac{1}{\ln 2}2^{-1}+\frac{1}{2}-1+1-\frac{1}{\ln 2}\Rightarrow F(-1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\ln 2}$

$\Rightarrow a=1; b=2; c=-1\Rightarrow a+b+c=2$

Câu 196. Cho $F(x)=me^{2x}+nx^2+p$ $(m,n,p\in\mathbb{R})$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{2x}+2x$ thỏa mãn $F(0)=\frac{3}{2}$. Tìm giá trị của biểu thức $A=-10m-20n+10p$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -15

Ta có: $F(x)=\int\left(e^{2x}+2x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^{2x}+x^2+C$.

Theo bài ra ta có: $F(0)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}e^0+0^2+C=\frac{3}{2}\Leftrightarrow C=1$.

Suy ra: $m=\frac{1}{2}$, $n=1$, $p=1$ $\Rightarrow A=-15$.

Câu 197. Cho $F(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\left(2x^2+6x\right)e^{2x}$. Tính tổng $a+b+2c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

$f(x)=F'(x)=\left(2ax^2+(2a+2b)x+b+2c\right)e^{2x}$.

Suy ra $\begin{cases} 2a=2 \\ 2a+2b=6 \\ b+2c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=-1 \end{cases}$.

Vậy $a+b+2c=1+2+2(-1)=1$.

Câu 198. Cho $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x^2.e^{2x}$. Tính tổng $a+b+2c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Ta có $F'(x)=(2ax+b)e^{2x}+2(ax^2+bx+c)e^{2x}=\left[2ax^2+(2a+2b)x+b+2c\right]e^{2x}$.

Mà $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x^2.e^{2x}$

$$\Rightarrow F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=2 \\ 2a+2b=0 \\ b+2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy $a+b+2c=1$.

Câu 199. Biết $F(x)=e^{2x}+2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giả sử $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(2x)+\cos\pi x$. Khi đó $G(2)-G(0)=a.e^b+c$, $a,b,c\in\mathbb{Q}$. Tính $a.b.c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 62

Ta có $F(x)=\mathrm{e}^{2x}+2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $f(x)=F'(x)=2\mathrm{e}^{2x}+4x \Rightarrow f(2x)=2\mathrm{e}^{4x}+8x$

Khi đó $\int\left(f(2x)+\cos\pi x\right)\mathrm{d}x=\int\left(2\mathrm{e}^{4x}+8x+\cos\pi x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{4x}+4x^2+\dfrac{1}{\pi}\sin\pi x+C$.

Suy ra $G(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{4x}+4x^2+\dfrac{1}{\pi}\sin\pi x+C$.

Do đó $G(2)-G(0)=\left(\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^8+16+C\right)-\left(\dfrac{1}{2}+C\right)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^8+\dfrac{31}{2}$.

Vậy $a.b.c=62$.

Câu 200. Cho hàm số $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{-2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=-(2x^2-8x+7)e^{-2x}$. Tính tổng $a+b+c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên $F'(x)=f(x)$.

Ta có: $F'(x)=\left[(ax^2+bx+c)e^{-2x}\right]'=(2ax+b)e^{-2x}-2(ax^2+bx+c)e^{-2x}$

$=-\left[2ax^2-(2a-2b)x-b+2c\right]e^{-2x}$

Do $F'(x)=f(x)$ nên $\begin{cases}2a=2\\-2a+2b=-8\\-b+2c=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-3\\c=2\end{cases}\Rightarrow a+b+c=0$.

Câu 201. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=ax+\dfrac{b}{x^2}(x\neq 0)$, với $a,b\in\mathbb{Q}$. Biết rằng $F(-1)=1, F(1)=4, f(1)=0$, tính tổng $a+b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0

Ta có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(ax+\dfrac{b}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}ax^2-\dfrac{b}{x}+C$.

Theo bài ra $\begin{cases}F(-1)=1\\F(1)=4\\f(1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{2}a+b+C=1\\\dfrac{1}{2}a-b+C=4\\a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-\dfrac{3}{2}\\a=\dfrac{3}{2}\\C=\dfrac{7}{4}\end{cases}$.

$\Rightarrow a+b=0$

Câu 202. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=12x^2+2,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=2$, khi đó $F(1)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Ta có: $f'(x)=12x^2+2,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x)=4x^3+2x+C_1$.

Mà $f(1)=3\Rightarrow 3=6+C_1\Rightarrow C_1=-3\Rightarrow f(x)=4x^3+2x-3\Rightarrow F(x)=x^4+x^2-3x+C_2$.

Lại có: $F(0)=2\Rightarrow C_2=2\Rightarrow F(x)=x^4+x^2-3x+2$.

Khi đó: $F(1)=1$.

Cách khác: Ta có: $F(1)=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x+F(0)=\int\limits_0^1\left(4x^3+2x-3\right)\mathrm{d}x+2=-1+2=1$.

Câu 203. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=ax^2+\frac{b}{x^3}$, $f'(1)=3$, $f(1)=2$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{12}$. Tính giá trị $2a+b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 5

Ta có $f'(1)=3\Rightarrow a+b=3\,(1)$.

Hàm số có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$, các điểm $x=1$, $x=\frac{1}{2}$ đều thuộc $(0;+\infty)$ nên

$$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\left(ax^2+\frac{b}{x^3}\right)\mathrm{d}x=\frac{ax^3}{3}-\frac{b}{2x^2}+C.$$

+ $f(1)=2\Rightarrow\frac{a}{3}-\frac{b}{2}+C=2\,(2)$.

+ $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{12}\Rightarrow\frac{a}{24}-2b+C=-\frac{1}{12}\,(3)$.

Từ (1), (2) và (3) ta được hệ phương trình $\begin{cases}a+b=3\\ \frac{a}{3}-\frac{b}{2}+C=2\\ \frac{a}{24}-2b+C=-\frac{1}{12}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\\ C=\frac{11}{6}\end{cases}\Rightarrow 2a+b=2.2+1=5$.

Câu 204. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{x+1}{x^2}$, $f(-2)=\frac{3}{2}$ và $f(2)=2\ln 2-\frac{3}{2}$. Biết $f(-1)+f(4)=\frac{a\ln 2+b}{c}$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\frac{b}{c}$ là phân thức tối giản. Tính giá trị biểu thức $a+b+c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 15

Có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{x+1}{x^2}\mathrm{d}x=\ln x-\frac{1}{x}+C$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\ln|x|-\frac{1}{x}+C_1 & \text{khi } x<0\\ \ln|x|-\frac{1}{x}+C_2 & \text{khi } x>0\end{cases}$$

Do $f(-2)=\frac{3}{2}\Rightarrow\ln 2+\frac{1}{2}+C_1=\frac{3}{2}\Rightarrow C_1=1-\ln 2$

Do $f(2)=2\ln 2-\frac{3}{2}\Rightarrow\ln 2-\frac{1}{2}+C_2=2\ln 2-\frac{3}{2}\Rightarrow C_2=\ln 2-1$

Như vậy, $f(x)=\begin{cases}\ln|x|-\dfrac{1}{x}+1-\ln 2 & \text{khi } x<0\\ \ln|x|-\dfrac{1}{x}+\ln 2-1 & \text{khi } x>0\end{cases}$

Vậy $f(-1)+f(4)=(2-\ln 2)+\left(\ln 4-\dfrac{1}{4}+\ln 2-1\right)=\dfrac{8\ln 2+3}{4}$.

$\Rightarrow a=8;b=3;c=4\Rightarrow a+b+c=15$

Câu 205. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ và $f'(x)\sin^2\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}=1$. Tính $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0

Ta có:

$f'(x)\sin^2\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}=1$

$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}}$

$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{\dfrac{1}{4}\sin^2 x}$

$\Rightarrow f(x)=4\int\dfrac{1}{\sin^2 x}dx$

$\Rightarrow f(x)=4\cot x+C$

Do $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0\Rightarrow C=-4$

$\Rightarrow f(x)=4\cot x-4$

Mà $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=4\cot\dfrac{\pi}{2}-4=0$

Câu 206. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn: $f'(x)=2024-2\sin^2\dfrac{x}{2}$ và $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2023\pi}{2}$. Tính $f(0)$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

$f'(x)=2024-2\sin^2\dfrac{x}{2}$

$\Rightarrow f(x)=\int\left(2024-2\sin^2\dfrac{x}{2}\right)dx=\int(2023+\cos x)dx=2023x-\sin x+C$

$\Rightarrow f(x)=2023x-\sin x+C$

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2023\pi}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{2023\pi}{2}=2023.\dfrac{\pi}{2}-\sin\dfrac{\pi}{2}+C\Leftrightarrow C=1$

$\Rightarrow f(x)=2023x-\sin x+1$

$\Rightarrow f(0)=1$

Câu 207. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f'(x)=1+e^{2x}$ và $f(0)=2$. Biết $f(\ln 2)=a+\ln b$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Tính giá trị biểu thức $a+b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 5

$f'(x)=1+e^{2x}$

$\Rightarrow f(x)=\int(1+e^{2x})dx=x+\dfrac{1}{2}e^{2x}+C$

Mà $f(0)=1+C\Leftrightarrow 2=1+C\Rightarrow C=1$

$\Rightarrow f(x)=x+\dfrac{1}{2}e^{2x}+1$

$\Rightarrow f(\ln 2)=3+\ln 2$

$\Rightarrow a=3;b=3\Rightarrow a+b=5$

Câu 208. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f'(x)=2^x+3^x$ và $f(0)=\dfrac{1}{\ln 3}$. Biết $f(1)=\dfrac{a}{b\ln 2}+\dfrac{3}{c\ln 3}$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Tính giá trị biểu thức $a+b+c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 5

$f'(x)=2^x+3^x$

$\Rightarrow f(x)=\int(2^x+3^x)\,dx=\int 2^x dx+\int 3^x dx=\dfrac{2^x}{\ln 2}+\dfrac{3^x}{\ln 3}+C$

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{2^x}{\ln 2}+\dfrac{3^x}{\ln 3}+C$

$f(0)=\frac{1}{\ln 3}\Rightarrow\frac{1}{\ln 3}=\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+C\Leftrightarrow C=\frac{1}{\ln 2}$

$\Rightarrow f(x)=\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 2}$

$\Rightarrow f(1)=\frac{3}{\ln 2}+\frac{3}{\ln 3}$

$\Rightarrow a=3;b=1;c=1\Rightarrow a+b+c=5$

Câu 209. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn: $f'(x)=e^{3x+2024}$ và $f(-675)=1$. Biết $f(0)=\frac{e^a+b.e+c}{3e}$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị biểu thức $a+b+c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2027

$f'(x)=e^{3x+2024}$

$\Rightarrow f(x)=\int e^{3x+2024}dx=\frac{1}{3}e^{3x+2024}+C$

$f(-675)=1$

$\Rightarrow 1=\frac{1}{3}e^{3.(-675)+2024}+C\Rightarrow C=1-\frac{1}{3e}$

$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}e^{3x+2024}+1-\frac{1}{3e}$

$\Rightarrow f(0)=\frac{1}{3}e^{2024}+1-\frac{1}{3e}=\frac{e^{2025}+3e-1}{3e}$

$\Rightarrow a=2025;b=3;c=-1\Rightarrow a+b+c=2027$

Câu 210. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn: $f'(x)=3^{x+2}.2^{2x+1}$ và $f(1)=0$. Biết $f(0)=\frac{a}{\ln 12}$, với $a\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị a.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: −198

$f'(x)=3^{x+2}.2^{2x+1}$

$\Rightarrow f(x)=\int 3^{x+2}.2^{2x+1}dx=\int 3^2.3^x.2.4^x dx=18\int 12^x dx=18\frac{12^x}{\ln 12}+C$

$\Rightarrow f(x)=18\frac{12^x}{\ln 12}+C$

$f(1)=0\Rightarrow 0=18\frac{12}{\ln 12}+C\Rightarrow C=-\frac{216}{\ln 12}$

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{18.12^x}{\ln 12}-\dfrac{216}{\ln 12}=\dfrac{18.12^x-216}{\ln 12}$

$\Rightarrow f(0)=\dfrac{-198}{\ln 12}\Rightarrow a=-198$

Câu 211. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=e^x+2x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=1$. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(1)=e$. Biết $F(0)=\dfrac{a}{b}$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Tính giá trị biểu thức $a+b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 7

Ta có $f'(x)=e^x+2x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x)=\int\left(e^x+2x+1\right)dx=e^x+x^2+x+C$

Vì $f(0)=1\Leftrightarrow e^0+0+C=1\Leftrightarrow C=0$ nên $f(x)=e^x++x^2+x$

Vì $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ nên $F(x)=\int\left(e^x+x^2+x\right)dx=e^x+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+C$

Lại có $F(1)=e\Leftrightarrow C=-\dfrac{5}{6}$ suy ra $F(x)=e^x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{5}{6}$

Khi đó $F(0)=e^0-\dfrac{5}{6}=1-\dfrac{5}{6}=\dfrac{1}{6}$.

$\Rightarrow a=1;b=6\Rightarrow a+b=7$

Câu 212. Cho $F(x)=\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x).\tan x$. Biết nguyên hàm của hàm số $\dfrac{\tan x}{f'(x)}$ có dạng $\dfrac{a}{b}\tan x+C$ với a, b là các số nguyên dương, $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản và $C\in\mathbb{R}$. Tính giá trị biểu thức $a-2b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: −15

Ta có $F'(x)=-2\sin 2x=-4\sin x\cos x$.

Vì $F(x)=\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x).\tan x$ nên:

$F'(x)=f(x).\tan x\Leftrightarrow -4\sin x\cos x=f(x).\tan x\Leftrightarrow f(x)=-4\cos^2 x$.

Suy ra $f'(x)=8\sin x\cos x$.

Khi đó ta có: $\int\dfrac{\tan x}{f'(x)}\mathrm{d}x=\int\dfrac{\tan x}{8\sin x\cos x}\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{8\cos^2 x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{8}\tan x+C$ suy ra $a=1$, $b=8$.

Vậy $a-2b=-15$.

Câu 213. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục $\forall x\in\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x).f(x)=5x^4+3x^2$. Biết $f(0)=2026$. Tính $f^2(1)$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4056

Ta có:

$f'(x).f(x)=5x^4+3x^2$

$\Leftrightarrow\left[\frac{f^2(x)}{2}\right]'=x^4+x^2$

$\Rightarrow\frac{f^2(x)}{2}=\int\left(5x^4+3x^2\right)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow\frac{f^2(x)}{2}=x^5+x^3+C$.

Do $f(0)=2026$ nên suy ra $C=2026$.

$\Rightarrow\frac{f^2(x)}{2}=x^5+x^3+2026$

Vậy $\frac{f^2(1)}{2}=1^5+1^3+2026\Rightarrow f^2(1)=4056$.

Câu 214. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục $\forall x\in\mathbb{R}$ và $\left(f(x)\right)^2.f'(x)=3x^2+4x+2$. Biết $f(0)=3$, tính giá trị của $f(-9)$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: −12

Ta có:

$\left(f(x)\right)^2.f'(x)=3x^2+4x+2$

$\Leftrightarrow\left[\frac{\left(f(x)\right)^3}{3}\right]'=3x^2+4x+2$

$\Rightarrow\frac{\left(f(x)\right)^3}{3}=\int\left(3x^2+4x+2\right)dx$

$\Leftrightarrow\frac{\left(f(x)\right)^3}{3}=x^3+2x^2+2x+C$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left(f\left(x\right)\right)^3}{3} = x^3 + 2x^2 + 2x + C$

$\Leftrightarrow \left(f\left(x\right)\right)^3 = 3\left(x^3 + 2x^2 + 2x + C\right)\ (1)$

Theo đề bài $f\left(0\right) = 3$ nên từ (1) ta có $\left(f\left(0\right)\right)^3 = 3\left(0^3 + 2.0^2 + 2.0 + C\right) \Leftrightarrow 27 = 3C \Leftrightarrow C = 9$

$\Rightarrow \left(f\left(x\right)\right)^3 = 3\left(x^3 + 2x^2 + 2x + 9\right)$

$\Rightarrow f^3(-9) = -1728$

$\Rightarrow f(-9) = \sqrt[3]{-1728} = -12$

Câu 215. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ thỏa mãn $f\left(\pi\right) = e^2$ và $f'\left(x\right) - f\left(x\right)\sin x = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f\left(2\pi\right)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

$f'\left(x\right) - f\left(x\right)\sin x = 0$

$\Leftrightarrow f'\left(x\right) = f\left(x\right)\sin x$

$\Leftrightarrow \dfrac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)} = \sin x$

$\Rightarrow \ln\left|f\left(x\right)\right| = \int \sin x dx$

$\Leftrightarrow \ln f\left(x\right) = -\cos x + C$

Theo đề bài $f\left(\pi\right) = e^2$ nên $\ln e^2 = 1 + C \Rightarrow C = 1$

$\Rightarrow \ln f\left(x\right) = -\cos x + 1$

$\Rightarrow f\left(x\right) = e^{-\cos x + 1} \Rightarrow f\left(2\pi\right) = e^{-\cos 2\pi + 1} = 1$

Câu 216. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\dfrac{1}{3}$ và $f'\left(x\right) = x\left[f\left(x\right)\right]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $\dfrac{1}{f(1)}$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $-1,5$

$f'(x) = x\left[f(x)\right]^2$

$\Rightarrow \dfrac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2} = x$

$\Rightarrow \left(-\dfrac{1}{f(x)}\right)' = x$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -x$

$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = \int -x dx$

$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -\frac{x^2}{2} + C$

Mà $f(2) = -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{f(2)} = -2 + C \Leftrightarrow \frac{1}{-\frac{1}{3}} = -2 + C \Rightarrow C = -1$

$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -\frac{x^2}{2} - 1$

Do đó: $\frac{1}{f(1)} = -\frac{1}{2} - 1 = -1,5$

Câu 217. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$; $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(9) = 2027$ và $\left[f'(x)\right]^2 = x.f(x)$. Tính $f(36)$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2090

Ta có với $\forall x \in (0;+\infty)$ thì $y = f(x) > 0$; $x + 1 > 0$.

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên $f'(x) \geq 0, \forall x \in (0;+\infty)$.

Do đó

$\left[f'(x)\right]^2 = xf(x)$

$\Rightarrow f'(x) = \sqrt{xf(x)}$

$\Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \sqrt{x}$

$\Rightarrow 2\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \sqrt{x}$

$\Rightarrow \left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{1}{2}\sqrt{x}$

$\Rightarrow \sqrt{f(x)} = \frac{1}{2}\int \sqrt{x} dx$

$\Rightarrow \sqrt{f(x)} = \frac{1}{3}x\sqrt{x} + C$.

Vì $f(9) = 2027$ nên $C = 2018$.

$\Rightarrow \sqrt{f(x)} = \frac{1}{3}x\sqrt{x} + 2018$

$\Rightarrow \sqrt{f(36)} = \frac{1}{3}.36\sqrt{36} + 2018 = 2090$

Câu 218. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng trên $(0;+\infty)$, biết $f(0) = 1$ và $f(x) = \sqrt{x}.f'(x)$ với mọi $x \in (0;+\infty)$. Tính $f\left(\ln^2 2\right)$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

hàm số $f(x) > 0$

Ta có:

$f(x) = \sqrt{x}.f'(x)$

$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\Rightarrow \ln f(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

$\Leftrightarrow \ln f(x) = 2\sqrt{x} + C$

Mà $f(0) = 1$ nên $C = 0 \Rightarrow f(x) = e^{2\sqrt{x}} \Rightarrow f\left(\ln^2 2\right) = e^{2\sqrt{\ln^2 2}} = e^{2\ln 2} = 4$

Câu 219. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên đoạn $[0;2]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(0) = -1, f'(x) \neq 0, \left[f'(x)\right]^2 = f''(x), \forall x \in [0;2]$. Tính giá trị của $f'(2)$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -1

$\left[f'(x)\right]^2 = f''(x)$

$\Leftrightarrow \frac{f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2} = 1$

$\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{f'(x)}\right)' = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{f'(x)} = -\int dx$

$\Leftrightarrow \frac{1}{f'(x)} = -x + C$

Mà $f'(0) = -1 \Rightarrow C = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{f'(x)} = -x + 1$

$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{1-x}$

$\Rightarrow f'(2)=\dfrac{1}{1-2}=-1$

Câu 220. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn $[0;4]$ và thỏa mãn $[f(x)]^2-f(x).f''(x)+[f'(x)]^2=0$. Biết $f(0)=1, f(2)=e^6$. Khi đó $\ln f(4)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 16

Theo đề bài, ta có

$[f(x)]^2-f(x).f''(x)+[f'(x)]^2=0$

$\Rightarrow [f'(x)]^2-f(x).f''(x)=[f(x)]^2$

$\Rightarrow \dfrac{f(x).f''(x)-[f'(x)]^2}{[f(x)]^2}=1$

$\Rightarrow \left[\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right]'=1$

$\Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=x+C$

$\Rightarrow [\ln f(x)]'=x+C$

$\Rightarrow \ln f(x)=\int (x+C)dx$

$\Rightarrow \ln f(x)=\dfrac{x^2}{2}+C.x+D$

Mà $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(2)=e^6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=2 \\ D=0 \end{cases}$

Suy ra : $\ln f(x)=\dfrac{x^2}{2}+2x \Rightarrow \ln f(4)=16$

Câu 221. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $f'(x)+f(x)=e^{-x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Biết $f(\ln 2)=\dfrac{a+\ln 2}{b}$, khi đó giá trị $T=2026a+b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2028

ta có $f'(x)+f(x)=e^{-x}$

Nhân hai vế với e^x ta được: $e^x \cdot f'(x)+e^x \cdot f(x)=1 \Leftrightarrow \left[e^x \cdot f(x)\right]'=1$

$\Rightarrow e^x \cdot f(x)=\int \mathrm{d}x$

$\Rightarrow e^x \cdot f(x)=x+C$

Mà $f(0)=1$ nên $e^0 \cdot 1=0+C \Rightarrow C=1$

Do đó: $e^x \cdot f(x)=x+1 \Rightarrow e^{\ln 2} f(\ln 2)=1+\ln 2 \Rightarrow f(\ln 2)=\dfrac{1+\ln 2}{2}$

$\Rightarrow a=1, b=2 \Rightarrow T=2026a+b=2028$

Câu 222. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(\ln 2)=1$ và $f'(x)-f(x)=e^{2x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(0)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $-0,5$

ta có $f'(x)-f(x)=e^{2x}$

Nhân hai vế với e^{-x} ta được: $e^{-x} \cdot f'(x)-e^{-x} \cdot f(x)=e^x \Leftrightarrow \left[e^{-x} \cdot f(x)\right]'=e^x$

$\Rightarrow e^{-x} \cdot f(x)=\int e^x \mathrm{d}x$

$\Rightarrow e^{-x} \cdot f(x)=e^x+C$

Mà $f(\ln 2)=1$ nên $\Rightarrow e^{-\ln 2} \cdot 1=e^{\ln 2}+C \Rightarrow C=-\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow e^{-x} \cdot f(x)=e^x-\dfrac{3}{2}$

Do đó: $f(0)=1-\dfrac{3}{2}=-0,5$

Câu 223. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $f'(x) f(x)-\sin x=0, \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f^2(\pi)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Ta có

$f'(x)f(x)-\sin x=0$

$\Leftrightarrow 2f'(x)f(x)=2\sin x$

$\Leftrightarrow \left[f^2(x)\right]'=\sin x$

$\Rightarrow f^2(x)=\int \sin x dx$

$\Leftrightarrow f^2(x)=-\cos x+C$

Mà $f(0)=1$ nên $1=-1+C\Rightarrow C=2$

$\Rightarrow f^2(x)=-\cos x+2$

$\Rightarrow f^2(\pi)=3$

Câu 224. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{4}{19}$ và $f'(x)=x^3f^2(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -1

Ta có $f'(x)=x^3f^2(x)\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=x^3\Leftrightarrow\left[-\frac{1}{f(x)}\right]'=x^3\Rightarrow-\frac{1}{f(x)}=\int x^3dx\Leftrightarrow-\frac{1}{f(x)}=\frac{x^4}{4}+C$.

Mà $f(2)=-\frac{4}{19}\Rightarrow\frac{19}{4}=\frac{16}{4}+C\Rightarrow C=\frac{3}{4}$. Suy ra $f(x)=-\frac{4}{x^4+3}$.

Vậy $f(1)=-1$.

Câu 225. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{5}$ và $f'(x)=x^3\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $-0,8$

Ta có: $f'(x)=x^3\left[f(x)\right]^2\Rightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=x^3\Rightarrow\int_1^2\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int_1^2x^3\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\left(-\frac{1}{f(x)}\right)\Big|_1^2=\frac{15}{4}\Leftrightarrow-\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(1)}=\frac{15}{4}\Leftrightarrow f(1)=-\frac{4}{5}=-0,8$.

Câu 226. Cho hàm số $f(x)>0$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời thỏa mãn $f(0)=\frac{1}{2}$, $f'(x)=-e^xf^2(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(\ln 2)=\frac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, tính giá trị của $a+b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

Ta có $f'(x)=-e^x f^2(x) \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=-e^x$ (do $f(x)>0$)

$\Rightarrow \int \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int -e^x \mathrm{d}x \Rightarrow -\dfrac{1}{f(x)}=-e^x+C$.

Mà $f(0)=\dfrac{1}{2} \Rightarrow -\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=-1+C \Rightarrow C=-1$.

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{e^x+1} \Rightarrow f(\ln 2)=\dfrac{1}{e^{\ln 2}+1}=\dfrac{1}{3}$.

$\Rightarrow a=3; b=1 \Rightarrow a+b=4$

Câu 227. Cho hàm số $f(x)\neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)=(2x+3)f^2(x)$ và $f(0)=-\dfrac{1}{2}$. Biết rằng tổng $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2024)+f(2025)=\dfrac{a}{b}$ với $(a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}^*)$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $b-a$

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1519

Ta có $f'(x)=(2x+3)f^2(x) \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+3$

$\Leftrightarrow \int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int (2x+3)\mathrm{d}x \Leftrightarrow -\dfrac{1}{f(x)}=x^2+3x+C$.

Vì $f(0)=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow C=2$.

Vậy $f(x)=-\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+1}$.

Ta có: $\begin{cases} f(1)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2} \\ f(2)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3} \\ f(3)=\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{4} \\ \vdots \\ f(2025)=\dfrac{1}{2026}-\dfrac{1}{2025} \end{cases}$

Do đó $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2024)+f(2025)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2026}=-\dfrac{506}{1013}$.

Do $a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}^*\Rightarrow a=-506, b=1013\Rightarrow b-a=1519$

Câu 228. Cho hàm số $f(x)\neq 0$, liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $f(1)=\frac{1}{3}$; $x^2.f'(x)=f^2(x)$ với $\forall x\in[1;2]$. Tính $f(2)$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0,4

Ta có

$x^2.f'(x)=f^2(x)$

$\Rightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=\frac{1}{x^2}$

$\Rightarrow\left(-\frac{1}{f(x)}\right)'=\frac{1}{x^2}$

$\Rightarrow-\frac{1}{f(x)}=\int\frac{1}{x^2}dx$

$\Rightarrow\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{x}+C$

Mà: $f(1)=\frac{1}{3}$ nên $\Rightarrow 3=1+C\Rightarrow C=2$

$\Rightarrow\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{x}+2$

$\Rightarrow\frac{1}{f(2)}=\frac{1}{2}+2\Rightarrow f(2)=\frac{2}{5}=0,4$

Câu 229. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(x)<0,\forall x>0$ và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x)=(2x+1)f^2(x),\forall x>0$ và $f(1)=-\frac{1}{2}$. Biết $f(1)+f(2)+...+f(2026)+f(2027)=\frac{a}{b}$ với $a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $T=b-a$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4053

Ta có:

$f'(x)=(2x+1)f^2(x)$

$\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+1$

$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x = \int (2x+1)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + x + C$.

Mà $f(1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{x^2+x} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$.

Ta có: $\begin{cases} f(1) = \frac{1}{2} - 1 \\ f(2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\ f(3) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \\ \vdots \\ f(2026) = \frac{1}{2026} - \frac{1}{2027} \end{cases}$

$\Rightarrow T = f(1) + f(2) + ... + f(2026) = -1 + \frac{1}{2027} = -\frac{2026}{2027}$.

Do $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a = -2026, b = 2027 \Rightarrow T = b - a = 4053$

Câu 230. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\mathrm{e}^{f(x)} - \frac{x}{f'(x)} = 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \neq 0$ và $f(1) = 1$. Biết $f(2) = e^{\frac{a}{b}}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a + b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 7

$\mathrm{e}^{f(x)} - \frac{x}{f'(x)} = 0$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{f(x)} . f'(x) = x$

$\Leftrightarrow \left(\mathrm{e}^{f(x)}\right)' = x$

$\Rightarrow \mathrm{e}^{f(x)} = \int x dx$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{f(x)} = \frac{1}{2}x^2 + C$

Mà $f(1) = 1$ nên $\mathrm{e} = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = e - \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \mathrm{e}^{f(x)} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow f(x) = e^{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}} \Rightarrow f(2) = e^{\frac{5}{2}}$

$\Rightarrow a=5;b=2\Rightarrow a+b=7$

Câu 231. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và thỏa mãn $f(0)=1,\ \left(f'(x)\right)^3=e^x\left(f(x)\right)^2,\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $f(\ln 2027)$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2027

Ta có: $\left(f'(x)\right)^3=e^x\left(f(x)\right)^2,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow f'(x)=\sqrt[3]{e^x}.\sqrt[3]{\left(f(x)\right)^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{\sqrt[3]{\left(f(x)\right)^2}}=\sqrt[3]{e^x}$

$\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{\sqrt[3]{\left(f(x)\right)^2}}=\sqrt[3]{e^x}$

$\Leftrightarrow f'(x).\left(f(x)\right)^{-\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{e^x}$

$\Leftrightarrow 3\left[\left(f(x)\right)^{\frac{1}{3}}\right]'=\sqrt[3]{e^x}$

$\Leftrightarrow \left[\left(f(x)\right)^{\frac{1}{3}}\right]'=\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{e^x}$

$\Leftrightarrow \left(f(x)\right)^{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{3}\int\sqrt[3]{e^x}dx$

$\Leftrightarrow \left(f(x)\right)^{\frac{1}{3}}=e^{\frac{x}{3}}+C$

$f(0)=1\Rightarrow 1=1+C\Rightarrow C=0$

$\Rightarrow \left(f(x)\right)^{\frac{1}{3}}=e^{\frac{x}{3}}$

$\Rightarrow f(x)=e^x$

$\Rightarrow f(\ln 2027)=e^{\ln 2027}=2027$

Câu 232. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $x^6\left[f'(x)\right]^3+27\left[f(x)-1\right]^4=0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=0$. Tính giá trị của $f(2)$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -7

Ta có

$x^6\left[f'(x)\right]^3+27\left[f(x)-1\right]^4=0$

$\Leftrightarrow x^6\left[f'(x)\right]^3=-27\left[f(x)-1\right]^4$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left[f'(x)\right]^3}{\left[f(x)-1\right]^4}=-\dfrac{27}{x^6}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left[f'(x)\right]^3}{\left[f(x)-1\right]^3\left[f(x)-1\right]}=-\dfrac{27}{x^6}$

$\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{\left(f(x)-1\right)\sqrt[3]{f(x)-1}}=-\dfrac{3}{x^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{-3\left(f(x)-1\right)\sqrt[3]{f(x)-1}}=\dfrac{1}{x^2}$

$\Leftrightarrow \left[\dfrac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}}\right]'=\dfrac{1}{x^2}$

Do đó $\int\left[\dfrac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}}\right]'\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{x}+C.$

Suy ra $\dfrac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}}=-\dfrac{1}{x}+C$.

Có $f(1)=0\Rightarrow C=0$.

Do đó $f(x)=1-x^3$.

Khi đó $f(2)=-7.$

Câu 233. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=2x^2-x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=3$. Giá trị của $\left[f(1)\right]^2$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 28

Ta có $\left[f(x)f'(x)\right]'=\left[f'(x)\right]^2+f(x)f''(x)$.

Do đó theo giả thiết ta được $\left[f(x)f'(x)\right]'=2x^2-x+1.$

Suy ra $f(x)f'(x)=\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{x^2}{2}+x+C$. Hơn nữa $f(0)=f'(0)=3$ suy ra $C=9$.

Tương tự vì $\left[f^2(x)\right]'=2f(x)f'(x)$ nên $\left[f^2(x)\right]'=2\left(\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{x^2}{2}+x+9\right).$

Suy ra $f^2(x)=\int 2\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}+x+9\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^4-\frac{x^3}{3}+x^2+18x+C$,

cũng vì $f(0)=3$ suy ra $f^2(x)=\frac{1}{3}x^4-\frac{x^3}{3}+x^2+18x+9$.

Do đó $\left[f(1)\right]^2=28$.

Câu 234. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[xf'(x)\right]^2+1=x^2\left[1-f(x).f''(x)\right]$ với mọi x dương. Biết $f(1)=f'(1)=1$. Biết $f^2(2)=2(a+b\ln 2)$ với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a+b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Ta có: $\left[xf'(x)\right]^2+1=x^2\left[1-f(x).f''(x)\right];\ x>0$

$\Leftrightarrow x^2.\left[f'(x)\right]^2+1=x^2\left[1-f(x).f''(x)\right]$

$\Leftrightarrow\left[f'(x)\right]^2+\frac{1}{x^2}=1-f(x).f''(x)$

$\Leftrightarrow\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=1-\frac{1}{x^2}$

$\Leftrightarrow\left[f(x).f'(x)\right]'=1-\frac{1}{x^2}$

Do đó: $\int\left[f(x).f'(x)\right]'.\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right).\mathrm{d}x\Rightarrow f(x).f'(x)=x+\frac{1}{x}+C.$

Vì $f(1)=f'(1)=1\Rightarrow 1=2+C\Leftrightarrow C=-1.$

Nên $\int f(x).f'(x).\mathrm{d}x=\int\left(x+\frac{1}{x}-1\right).\mathrm{d}x\ \Leftrightarrow\int f(x).\mathrm{d}\left(f(x)\right)=\int\left(x+\frac{1}{x}-1\right).\mathrm{d}x$

$\Rightarrow\frac{f^2(x)}{2}=\frac{x^2}{2}+\ln x-x+C.$

Vì $f(1)=1\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-1+C\Leftrightarrow C=1.$

Vậy $\frac{f^2(x)}{2}=\frac{x^2}{2}+\ln x-x+1\Rightarrow f^2(2)=2(1+\ln 2)$.

$\Rightarrow a=1;b=1\Rightarrow a+b=2$

Câu 235. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)=2\mathrm{e}^{-3x},\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2024$. Biết $f(\ln 2)=\frac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a+b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 15

$f(x)+f'(x)=2\mathrm{e}^{-3x}$

$\Leftrightarrow f(x)\mathrm{e}^{x}+f'(x)\mathrm{e}^{x}=2\mathrm{e}^{-2x}$.

$\Leftrightarrow\left(f(x)\mathrm{e}^{x}\right)'=2\mathrm{e}^{-2x}$

$\Rightarrow f(x)\mathrm{e}^{x}=\int 2\mathrm{e}^{-2x}dx$

$\Leftrightarrow f(x)\mathrm{e}^{x}=-\mathrm{e}^{-2x}+C$

Vì $f(0)=2024$ nên $C=2025$.

$\Rightarrow f(x)\mathrm{e}^{x}=-\mathrm{e}^{-2x}+2025$

$\Rightarrow f(\ln 2)e^{\ln 2}=-\mathrm{e}^{-2\ln 2}+2\Rightarrow f(\ln 2)=\dfrac{7}{8}$

$\Rightarrow a=7;b=8\Rightarrow a+b=15$

Câu 236. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=1$ và $f'(x)-f(x)=2024$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Biết $f\left(\ln\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{a+b.e}{c.e}$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a+b+c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 6075

ta có

$f'(x)-f(x)=2024$

$\Leftrightarrow e^{-x}\cdot f'(x)-e^{-x}\cdot f(x)=2024e^{-x}$

$\Leftrightarrow\left[e^{-x}\cdot f(x)\right]'=2024e^{-x}$

$\Rightarrow e^{-x}\cdot f(x)=\int 2024e^{-x}\mathrm{d}x$

$\Rightarrow e^{-x}\cdot f(x)=-2024e^{-x}+C$

Mà $f(1)=1$ nên $e^{-1}\cdot 1=-2024e^{-1}+C\Rightarrow C=\dfrac{2025}{e}$

$\Rightarrow e^{-x}\cdot f(x)=-2024e^{-x}+\dfrac{2025}{e}$

$\Rightarrow e^{-\ln\frac{1}{2}}\cdot f\left(\ln\dfrac{1}{2}\right)=-2024e^{-\ln\frac{1}{2}}+\dfrac{2025}{e}\Rightarrow f\left(\ln\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2025-4048e}{2e}$

$\Rightarrow a=2025;b=-4048;c=2\Rightarrow a-b+c=6075$

Câu 237. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x)+f(x)=3x^2\sqrt{x}$. Biết $f(1)=\frac{1}{2}$.

Tính $f(4)$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 16

Trên khoảng $(0;+\infty)$ ta có:

$2xf'(x)+f(x)=3x^2\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}f'(x)+\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{3}{2}x^2$.

$\Rightarrow \left(\sqrt{x}.f(x)\right)'=\frac{3}{2}x^2$

$\Rightarrow \int\left(\sqrt{x}.f(x)\right)'dx=\int\frac{3}{2}x^2dx$.

$\Rightarrow \sqrt{x}.f(x)=\frac{1}{2}x^3+C$. $(*)$

Mà $f(1)=\frac{1}{2}$ nên từ $(*)$ có: $\sqrt{1}.f(1)=\frac{1}{2}.1^3+C\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+C\Leftrightarrow C=0\Rightarrow f(x)=\frac{x^2\sqrt{x}}{2}$.

Vậy $f(4)=\frac{4^2\sqrt{4}}{2}=16$.

Câu 238. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=4$ và $f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2$ với mọi $x>0$. Giá trị của $f(2)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 20

$f(x)-xf'(x)=-2x^3-3x^2$

$\Leftrightarrow\frac{1.f(x)-x.f'(x)}{x^2}=\frac{-2x^3-3x^2}{x^2}$

$\Leftrightarrow\left[\frac{f(x)}{x}\right]'=2x+3$

Suy ra, $\frac{f(x)}{x}$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)=2x+3$.

Ta có $\int(2x+3)dx=x^2+3x+C,\ C\in\mathbb{R}$.

Do đó, $\frac{f(x)}{x}=x^2+3x+C_1$, (1) với $C_1\in\mathbb{R}$ nào đó.

Vì $f(1)=4$ theo giả thiết, nên thay $x=1$ vào hai vế của (1) ta thu được $C_1=0$, từ đó $f(x)=x^3+3x^2$.

Vậy $f(2)=20$.

Câu 239. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $3x.f(x)-x^2.f'(x)=2f^2(x)$, với $f(x)\neq 0,\forall x\in(0;+\infty)$ và $f(1)=\frac{1}{3}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;2]$. Tính $M-m$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Ta có:

$3x.f(x)-x^2.f'(x)=2f^2(x)$

$\Rightarrow 3x^2.f(x)-x^3.f'(x)=2x.f^2(x)$

$\Rightarrow \frac{3x^2.f(x)-x^3.f'(x)}{f^2(x)}=2x$ vì $f(x)\neq 0,\forall x\in(0;+\infty)$.

$\Rightarrow\left(\frac{x^3}{f(x)}\right)'=2x\Rightarrow\frac{x^3}{f(x)}=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C$.

Mà $f(1)=\frac{1}{3}\Rightarrow C=2\Rightarrow f(x)=\frac{x^3}{x^2+2}$.

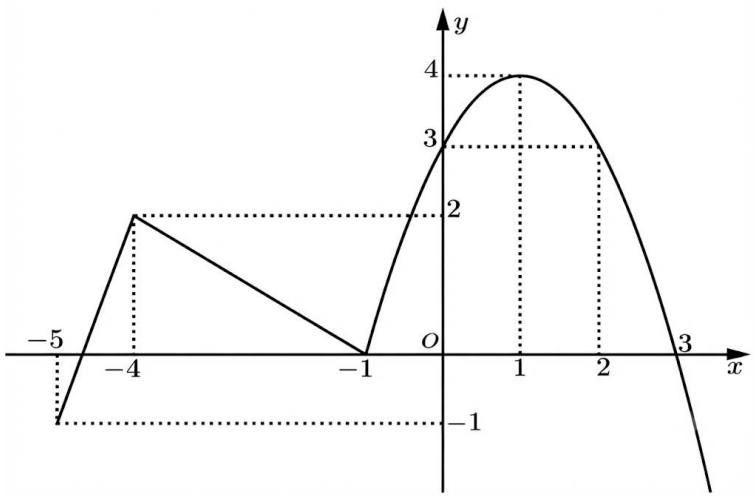
Ta có: $f(x)=\frac{x^3}{x^2+2}\Rightarrow f'(x)=\frac{x^4+6x^2}{(x^2+2)^2}>0,\forall x\in(0;+\infty)$.

Vậy, hàm số $f(x)=\frac{x^3}{x^2+2}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Mà $[1;2]\subset(0;+\infty)$ nên hàm số $f(x)=\frac{x^3}{x^2+2}$ đồng biến trên đoạn $[1;2]$.

Suy ra, $M=f(2)=\frac{4}{3};m=f(1)=\frac{1}{3}\Rightarrow M-m=1$.

Câu 240. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên $[-5;3]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y=ax^2+bx+c$).



Biết $f(0)=0$, giá trị của $6f(-5)+3f(2)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: –9

Parabol $y=ax^2+bx+c$ qua các điểm $(2;3),(1;4),(0;3),(-1;0),(3;0)$ nên xác định được

$y=-x^2+2x+3, \forall x\geq -1$ suy ra $f(x)=-\frac{x^3}{3}+x^2+3x+C_1$.

Mà $f(0)=0\Rightarrow C_1=0$, $f(x)=-\frac{x^3}{3}+x^2+3x$.

Có $f(-1)=-\frac{5}{3}$; $f(2)=\frac{22}{3}$ (1)

*Đồ thị $f'(x)$ trên đoạn $[-4;-1]$ qua các điểm $(-4;2),(-1;0)$ nên

$f'(x)=\frac{-2}{3}(x+1)\Rightarrow f(x)=\frac{-2}{3}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)+C_2$.

Mà $f(-1)=-\frac{5}{3}\Leftrightarrow C_2=-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\Rightarrow f(x)=\frac{-2}{3}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)-2$, hay $f(-4)=\frac{-14}{3}$.

* Đồ thị $f'(x)$ trên đoạn $[-5;-4]$ qua các điểm $(-4;2),(-5;-1)$ nên

$f'(x)=3x+14\Rightarrow f(x)=\frac{3x^2}{2}+14x+C_3$.

Mà $f(-4)=\frac{-14}{3}\Leftrightarrow \frac{3.(-4)^2}{2}+14.(-4)+C_3=\frac{-14}{3}$ suy ra $C_3=\frac{82}{3}$.

Ta có $f(x)=\frac{3x^2}{2}+14x+\frac{82}{3}\Rightarrow f(-5)=-\frac{31}{6}$ (2).

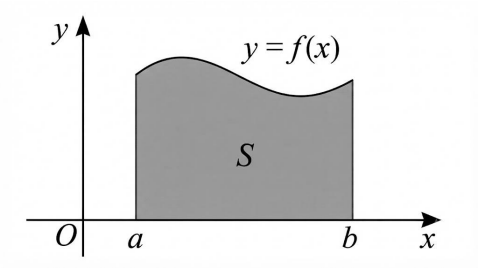
Từ (1) và (2) ta được $6f(-5)+3f(2)=-31+22=-9$.

BÀI 12
TÍCH PHÂN

1. Khái niệm tích phân

a. Diện tích hình thang cong

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$ là $S=F(b)-F(a)$, trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.



b. Định nghĩa tích phân

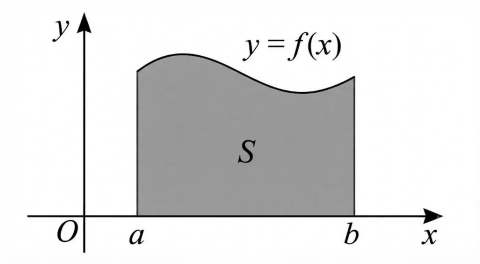
Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ thì hiệu số $F(b)-F(a)$ được gọi là **tích phân** từ a đến b của hàm số $f(x)$, kí hiệu $\int_a^b f(x)dx$

Chú ý:

- Hiệu số $F(b)-F(a)$ còn được kí hiệu là $F(x)\Big|_a^b$. Vậy $\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$
- Ta gọi $\int_a^b$ là dấu tích phân, a là **cận dưới**, b là **cận trên**, $f(x)dx$ là biểu thức dưới dấu tích phân và $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân.
- Trong trường hợp $a=b$, ta quy ước: $\int_a^a f(x)dx=0$
- Trong trường hợp $a>b$, ta quy ước: $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$
- Tích phân của hàm số f từ a đến b chỉ phụ thuộc vào f và các cận a,b mà không phụ thuộc vào biến x hay t, nghĩa là $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$.

c. Ý nghĩa hình học của tích phân

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$. Vậy $S=\int_a^b f(x)dx$



Nhận xét:

- Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)dx.$$

- Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

- Đạo hàm của quãng đường di chuyển của vật theo thời gian bằng tốc độ của chuyển động tại mọi thời điểm: $v(t)=s'(t)$. Do đó, nếu biết tốc độ $v(t)$ tại mọi thời điểm $t\in[a;b]$ thì tính được quãng đường di chuyển trong khoảng thời gian từ a đến b theo công thức: $s=s(b)-s(a)=\int_a^b v(t)dt$

2. Tính chất của tích phân

Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó:

- **Tính chất 1:** $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$, với k là hằng số.
- **Tính chất 2:** $\int_a^b[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- **Tính chất 3:** $\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- **Tính chất 4:** $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ với $(a<c<b)$.

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

CHỦ ĐỀ 1
TÍNH TÍCH PHÂN

DẠNG 1
TÍNH TÍCH PHÂN SỬ DỤNG BẢNG NGUYÊN HÀM

Nguyên hàm hàm số lũy thừa	$\int 0dx = C$	
	$\int dx = x + C$	
	$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ \ (\alpha \neq -1)$	$\int (ax+b)^{\alpha} dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ \ (\alpha \neq 1)$
	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C \ \ (x \neq 0)$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C$
	$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$	$\int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a}.\frac{1}{ax+b} + C$
	$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}} dx = \frac{1}{a}.2\sqrt{ax+b} + C$
Nguyên hàm hàm số lượng giác	$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$
	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$
	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$
Nguyên hàm hàm số mũ	$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$
	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ \ (0 < a \neq 1)$	$\int a^{\alpha x+\beta} dx = \frac{1}{\alpha}.\frac{a^{\alpha x+\beta}}{\ln a} + C \ \ (0 < a \neq 1)$

Bài 1. Tính các tích phân sau đây:

a) $\int_0^3 \left(3x^2+2027\right)\mathrm{d}x$ b) $\int_0^1 \left(4x^3+3x^2-2\right)\mathrm{d}x$ c) $\int_{-2}^4 (x+1)(x-1)\mathrm{d}x$

d) $\int_1^2 \frac{x-1}{x}\mathrm{d}x$ e) $\int_1^2 \frac{2x^3-x-2025}{x^2}\,\mathrm{d}x$ f) $\int_1^2 \frac{(x-1)^2}{x}\,\mathrm{d}x$

Bài 2. Tính các tích phân sau đây:

a) $\int_1^3 x^{\sqrt{2027}}\mathrm{d}x$ b) $\int_1^3 x^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x$ c) $\int_1^8 \sqrt[3]{x}\mathrm{d}x$

d) $\int_1^e \frac{7}{3x}\mathrm{d}x$ e) $\int_1^2 \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$ f) $\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

Bài 3. Tính các tích phân sau đây:

a) $\int_1^4 \left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)dx$ b) $\int_0^4 \left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt[3]{x}-1\right)dx$ c) $\int_1^2 \left(\frac{x-\sqrt[4]{x^3}}{x}\right)^2 dx$

d) $\int_{-3}^{-1} \frac{(x^2+1)^3}{x^2}dx$ e) $\int_1^4 \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}}dx$ f) $\int_1^8 \frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

Bài 4. Tính các tích phân sau đây:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\mathrm{d}x$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$ c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3\sin x+2024\right)\mathrm{d}x$

d) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x$ e) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x(1+\tan x)}\mathrm{d}x$ f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$

Bài 5. Tính các tích phân sau đây:

a) $\int_0^1 \left(2^{2x}.3^{x-1}\right)\mathrm{d}x$ b) $\int_0^1 \left(2.3^x-5e^x\right)\mathrm{d}x$ c) $\int_1^2 \left(4x^3-2.3^{x+1}+\frac{1}{x^2}\right)dx$

d) $\int_0^1 \frac{\left(e^{-x}+2\right)^2}{e^{x-1}}dx$ e) $\int_0^1 \frac{\left(2024^x+1\right)^2}{e^{-3x}}dx$ f) $\int_1^2 e^{2x}\left(2024+\frac{2025e^{-2x}}{x^3}\right)dx$

Bài 6. Tính các tích phân sau đây:

a) $\int_0^1 5^{x+1}.7^{2x-1}dx$ b) $\int_0^1 \left(x+e^{-x-2}\right)dx$ c) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$

d) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x^2\left(1-\frac{\sin x}{x^2}\right)dx$ e) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)dx$ f) $\int_1^2 2^{x+1}\left(1-\frac{2}{e^x}\right)dx$

DẠNG 2
TÍCH PHÂN HÀM ẨN BIẾN ĐỔI CƠ BẢN

- $\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b \left[f(x) \pm g(x) \right] dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (a < c < b)$

Bài 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn:

a) $\int_6^0 f(x)dx = 1$. Tính tích phân $\int_0^6 2027 f(x)dx$

b) $\int_0^2 f(x)dx = 4$. Tính tích phân $\int_0^2 \left[2f(x) - 1) \right] dx$

c) $\int_2^7 f(x)\mathrm{d}x = -3$ và $\int_1^7 f(x)\mathrm{d}x = 3$. Tính tích phân $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Bài 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn:

a) $\int_0^1 \left[f(x) + 2x \right] dx = 3$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

b) $\int_1^3 \left[f(x) + 2x + 3 \right] dx = 10$. Tính tích phân $\int_1^3 f(x)dx$.

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = 4$. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2f(x) + \sin x \right] \mathrm{d}x$.

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn:

a) $\int_{-6}^{11} f(x)\mathrm{d}x = 8$, $\int_2^6 f(x)\mathrm{d}x = 3$. Tính giá trị của biểu thức $P = \int_{-6}^{2} f(x)\mathrm{d}x + \int_6^{11} f(x)\mathrm{d}x$.

b) $\int_1^8 f(x)\mathrm{d}x = 9$, $\int_4^{12} f(x)\mathrm{d}x = 3$, $\int_4^8 f(x)\mathrm{d}x = 5$. Tính $I = \int_1^{12} f(x)\mathrm{d}x$.

Bài 4. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn:

a) $\int_2^5 f(x)dx = 3$ và $\int_2^5 g(x)dx = -2$. Tính $\int_2^5 \left[f(x) + g(x) \right] dx$

b) $\int_0^1 f(x)dx=3$ và $\int_0^1 g(x)dx=-4$. Tính $\int_1^0 \left[2f(x)-g(x)\right]dx$.

c) $\int_1^4 f(x)dx=6$ và $\int_1^4 g(x)dx=-5$. Tính $\int_1^4 \left[\frac{1}{3}f(x)-\frac{1}{5}g(x)\right]dx$

Bài 5. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn:

a) $\int_2^3 f(x)dx=3$ và $\int_3^2 g(x)dx=1$. Tính $\int_2^3 \left[f(x)+2g(x)\right]dx$

b) $\int_1^3 f(x)dx=2028$ và $\int_3^1 g(x)dx=1$. Tính $\int_1^3 \left[\frac{1}{2028}f(x)-3g(x)\right]dx$

c) $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=3$ và $\int_2^1 g(x)\mathrm{d}x=-2$. Tính $\int_1^2 \left[3f(x)-\frac{1}{2}g(x)\right]\mathrm{d}x$

Bài 6. Cho $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=2024$ và $\int_0^3 g(x)\mathrm{d}x=2025$. Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^3 \left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$

b) $\int_3^0 \frac{1}{5}g(x)\mathrm{d}x$

c) $\int_0^3 \left[\frac{1}{2}f(x)-3g(x)\right]\mathrm{d}x$

d) $\int_0^3 \left[\frac{1}{2024}f(x)-3x^2\right]\mathrm{d}x$

e) $\int_3^0 \left[g(x)-\sqrt[3]{x^2}\right]\mathrm{d}x$

f) $\int_0^3 \left[\frac{1}{4}f(x)+g(x)-e^{3x+1}\right]\mathrm{d}x$

Bài 7. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm liên tục trên đoạn $[1;3]$ thoả: $\int_1^3 \left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=10$, $\int_1^3 \left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\int_1^3 \left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$.

DẠNG 2
TÍCH PHÂN HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI

Tính tích phân: $I=\int_a^b \left|f\left(x\right)\right|dx$

Phương pháp

Bước 1. Xét dấu $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[a;b\right]$.

Bước 2. Dựa vào bảng xét dấu trên đoạn $\left[a;b\right]$ để khử $\left|f\left(x\right)\right|$. Sau đó sử dụng các phương pháp tính tích phân đã học để tính $I=\int_a^b \left|f\left(x\right)\right|.dx$

Bài 1. Tính các tích phân sau:

a) $I=\int_0^2 \left|3-2x\right|\mathrm{d}x$ b) $I=\int_{-3}^3 \left|x^2-1\right|dx$ c) $I=\int_0^6 \left|x^2-6x+5\right|\mathrm{d}x$

Bài 2. Tính các tích phân sau:

a) $I=\int_{-2}^1 \left|x^3+x^2-2x\right|\mathrm{d}x$. b) $I=\int_{-1}^2 \left|x^3-3x+2\right|\mathrm{d}x$ c) $I=\int_{-2}^2 \left|x^4-3x^2-4\right|\mathrm{d}x$

Bài 3. Tính các tích phân sau:

a) $I=\int_1^5 \frac{2\left|x-2\right|+1}{x}\mathrm{d}x$. b) $I=\int_{-3}^5 \left(\left|x+2\right|-\left|x-2\right|\right)\mathrm{d}x$ c) $I=\int_{-1}^2 \left(x+\left|1-x\right|-\left|x+2\right|\right)\mathrm{d}x$

Bài 4. Tính các tích phân sau:

a) $I=\int_2^6 \sqrt{x^2-8x+16}dx$ b) $I=\int_{-2}^1 \sqrt{4x^2+6x+9}dx$ c) $I=\int_0^3 \sqrt{x^3-2x^2+x}\mathrm{d}x$.

Bài 5. Tính các tích phân sau:

a) $I=\int_0^{\pi} \left|\cos x\right|dx$. b) $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}\right|dx$ c) $I=\int_1^3 \left|3^x-9\right|dx$

Bài 6. Tính các tích phân sau:

a) $I=\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos 2x}dx$. b) $I=\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos 2x}dx$ c) $I=\int_0^4 \sqrt{4^x-2^{x+1}+1}dx$

DẠNG 4
TÍCH PHÂN HÀM NHIỀU CÔNG THỨC

Dạng 1: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} g(x) & \text{khi } x\le c \\ h(x) & \text{khi } x>c \end{cases}$ liên tục trên D. Tính $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$, với $c\in[a;b]$.

Phương pháp giải:

Bước 1: Kiểm tra hàm số $f(x)$ có liên tục tại $x=c$ hay không *(kiến thức hàm số liên tục tại một điểm lớp 11)*

Tức là kiểm tra $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to b^-} g(x)=\lim\limits_{x\to b^+} h(x)=f(b)$

Bước 2: Tách cận: $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^c g(x)\mathrm{d}x+\int\limits_c^b h(x)\mathrm{d}x$.

Bước 3: Tính tích phân $\int\limits_a^c g(x)\mathrm{d}x$ và $\int\limits_c^b h(x)\mathrm{d}x$ bằng các phương pháp đã học.

Dạng 2: Cho hàm số $f(x;m)=\begin{cases} g(x;m) & \text{khi } x\le c \\ h(x;m) & \text{khi } x>c \end{cases}$ liên tục trên D và m là tham số. Tính $\int\limits_a^b f(x;m)\mathrm{d}x$, với $c\in[a;b]$.

Phương pháp giải:

Bước 1: Kiểm tra hàm số $f(x)$ có liên tục tại $x=c$ hay không.

Tức là kiểm tra: $\lim\limits_{x\to b^-}(x;m)=\lim\limits_{x\to b^+}(x;m)=f(b)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to b^-} g(x;m)=\lim\limits_{x\to b^+} h(x;m)=f(b)$

Chú ý: Bước này tìm tham số m.

Bước 2: Tách cận: $\int\limits_a^b f(x;m)\mathrm{d}x=\int\limits_a^c g(x;m)\mathrm{d}x+\int\limits_c^b h(x;m)\mathrm{d}x$.

Bước 3: Tính tích phân $\int\limits_a^c g(x;m)\mathrm{d}x$ và $\int\limits_c^b (x;m)\mathrm{d}x$ bằng các phương pháp đã học.

Bài 1. Cho $f(x)=\begin{cases}1 & \text{khi } x\ge 1\\ 2x-1 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Tính tích phân $I=\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$

Bài 2. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{khi } x\ge 0\\ e^{2x} & \text{khi } x<0\end{cases}$. Tính tích phân $I=\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$.

Bài 3. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x^2+2x+m & \text{khi } x\ge 1\\ 5-2x & \text{khi } x<1\end{cases}$ (m là tham số thực). Biết rằng $f(x)$ có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ là $F(x)$ thỏa mãn $F(-2)=-10$, khi đó tính $F(3)$.

Bài 4. Cho số thực a và $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)=\begin{cases}2x & khi\ x\le 0\\ a\left(x-x^2\right) & khi\ x>0\end{cases}$. Tính tích phân $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

Bài 5. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x+m & \text{khi } x\ge 0\\ x^2\left(x^3+1\right)^3 & \text{khi } x<0\end{cases}$ (với m tham số). Biết hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và tích phân $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=a.e-\frac{b}{c}$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}^*;\frac{a}{b}$ tối giản ($e=2,718281\ldots.$). Tính giá trị biểu thức $a+b+c+m$.

Bài 6. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{khi } x\le 0\\ x^2-2x+3 & \text{khi } x>0\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(3)=0$. Tính giá trị của $2F(-1)+3F(2)$.

Bài 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ là $F(x)=\begin{cases}x^2+5x+C_1 & \text{khi } x\ge 1\\ x^3+4x+C_2 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Tính tích phân $\int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Bài 8. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x^2-2x+1 & \text{khi } x\ge 0\\ 1-2x & \text{khi } x<0\end{cases}$. Giả sử F là 1 nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2020F(-1)+2021F(2)=-2022$. Tính giá trị của $F(1)$.

Bài 9. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3-2x & khi\ x\ge 1\\ 3x^2+2x-4 & khi\ x<1\end{cases}$. Giả sử $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(2)=4$. Giá trị của $F(-2)-4F(3)$ bằng bao nhiêu?

Bài 10. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}4x-\sqrt{4x+9} & \text{khi } x>0\\ 4a+\tan^2 x & \text{khi } x\le 0\end{cases}$, đồng thời $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{4} f(x)\mathrm{d}x=\frac{50}{3}$. Tính a.

Bài 11. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sin x+2 & \text{khi} \quad x\ge 0\\ 2\cos^2 x & \text{khi} \quad x<0\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\pi$. Tính giá trị của $F\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+2F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)-F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Bài 12. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x^2+a & \text{khi } x\ge 0\\ \sin 2x+\cos x-b & \text{khi } x<0\end{cases}$ liên tục và có nguyên hàm F liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(2)-F\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=10$ với a,b là tham số thực. Giá trị $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\frac{m}{4}$, với m là một số thực. Khi đó $2m$ bằng bao nhiêu?

DẠNG 5
TÍCH PHÂN HÀM ẨN BIẾN ĐỔI PHỨC TẠP

I. Cần nhớ các công thức đạo hàm của hàm hợp

- $\int f'(x)dx = f(x)+C$
- $\frac{f'(x)}{f(x)} = \left[\ln\left(f(x)\right)\right]'$
- $-\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \left[\frac{1}{f(x)}\right]'$
- $-\frac{f'(x)}{f^n(x)} = \left[\frac{1}{(n-1)\left[f(x)\right]^{n-1}}\right]'$
- $n.f'(x).f(x) = \left[f(x)^n\right]'$
- $\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \left[2\sqrt{f(x)}\right]'$
- $f'(x).g(x)+f(x).g'(x) = \left[f(x).g(x)\right]'$
- $\frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{g^2(x)} = \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'$

II. Các dạng hàm ẩn thường gặp

1. Hàm ẩn có dạng: $f'(x)\cdot f(x) = p(x)$

Phương pháp giải:

$$f'(x)\cdot f(x) = p(x) \Leftrightarrow \left[\frac{f^2(x)}{2}\right]' = p(x) \Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \int p(x)\mathrm{d}x$$

2. Hàm ẩn có dạng: $f'(x) = p(x)\cdot f(x)$

Phương pháp giải:

Chia hai vế với $f(x)$ ta được $\frac{f'(x)}{f(x)} = p(x)$

Suy ra $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \int p(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \ln|f(x)| = \int p(x)\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

3. Hàm ẩn có dạng: $f'(x)=p(x)\cdot\left[f(x)\right]^n$

Phương pháp giải:

$f'(x)=p(x)\cdot\left[f(x)\right]^n$

Chia hai vế với $\left[f(x)\right]^n$ ta được $\dfrac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^n}=p(x)$

Suy ra $\int\dfrac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^n}dx=\int p(x)\,dx\Leftrightarrow\dfrac{\left[f(x)\right]^{-n+1}}{-n+1}=\int p(x)\,dx$

4. Hàm ẩn có dạng: $u(x)\,f'(x)+u'(x)\,f(x)=h(x)$

Phương pháp giải:

Dễ dàng thấy rằng $u(x)\,f'(x)+u'(x)\,f(x)=\left[u(x)\,f(x)\right]'$

Do đó $u(x)\,f'(x)+u'(x)\,f(x)=h(x)\Leftrightarrow\left[u(x)\,f(x)\right]'=h(x)$

Suy ra $u(x)\,f(x)=\int h(x)\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

5. Hàm ẩn có dạng: $A(x)\,f(x)+B(x)\,f'(x)=h(x)\ \ (1)$

Ý tưởng giải:

- Ta cần nhân thêm một lượng $u(x)$ vào (1) để tạo thành $u'(x)\,f(x)+u(x)\,f'(x)=u(x).h(x)$ và lúc này:

$$u'(x)\,f(x)+u(x)\,f'(x)=u(x).h(x)$$
$$\Leftrightarrow\left[u(x)\,f(x)\right]'=u(x).h(x)$$
$$\Rightarrow\int\left[u(x)\,f(x)\right]'dx=\int u(x).h(x)dx$$
$$\Rightarrow u(x)\,f(x)=\int u(x).h(x)dx$$
$$\Rightarrow f(x)=\frac{\int u(x).h(x)dx}{u(x)}$$

- Cách tìm $u(x)$

$u(x)$ được chọn sao cho : $\begin{cases}u'(x)=A(x)\\u(x)=B(x)\end{cases}$

$$\Rightarrow\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{A(x)}{B(x)}\Rightarrow\int\frac{u'(x)}{u(x)}.dx=\int\frac{A(x)}{B(x)}.dx\Rightarrow\ln\left|u(x)\right|=\int\frac{A(x)}{B(x)}.dx\Rightarrow u(x)=e^{\int\frac{A(x)}{B(x)}.dx}$$

Tóm lại phương pháp giải: $A(x)\,f(x)+B(x)\,f'(x)=h(x)\ (1)$ như sau:

+ Bước 1: Tìm $u(x)$: $u(x)=e^{\int \frac{A(x)}{B(x)}.dx}$

+ Bước 2: Nhân $u(x)$ vào (1) $\Rightarrow f(x)=\dfrac{\int u(x).h(x)dx}{u(x)}$

Hai dạng đặc biệt của (1)

- $f'(x)+f(x)=h(x)$

  Phương pháp giải:

  Nhân hai vế với e^x ta được $e^x\cdot f'(x)+e^x\cdot f(x)=e^x\cdot h(x)\Leftrightarrow\left[e^x\cdot f(x)\right]'=e^x\cdot h(x)$

  Suy ra $e^x\cdot f(x)=\int e^x\cdot h(x)\,\mathrm{d}x$

  Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

- $f'(x)-f(x)=h(x)$

  Phương pháp giải:

  Nhân hai vế với e^{-x} ta được $e^{-x}\cdot f'(x)-e^{-x}\cdot f(x)=e^{-x}\cdot h(x)\Leftrightarrow\left[e^{-x}\cdot f(x)\right]'=e^{-x}\cdot h(x)$

  Suy ra $e^{-x}\cdot f(x)=\int e^{-x}\cdot h(x)\mathrm{d}x$

  Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Bài 1. Cho hàm số $f(x)\neq 0$, liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $f(1)=\dfrac{1}{3}$; $x^2.f'(x)=f^2(x)$ với $\forall x\in[1;2]$. Tính tích phân $I=\int_1^2(2x+1)^2\,f(x)dx$

Bài 2. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, có đạo hàm trên đoạn $[1;4]$ và thoả mãn $x+2x.f(x)=\left[f'(x)\right]^2$ với $\forall x\in[1;4]$. Biết $f(1)=\dfrac{3}{2}$, tính $I=\int_1^4 f(x)dx$

Bài 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $x^6\left[f'(x)\right]^3+27\left[f(x)-1\right]^4=0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=0$. Tính $I=\int_2^3 f(x)dx$

Bài 4. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)=\mathrm{e}^{-x},\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$. Tính $I=\int_1^2\dfrac{f(x)\mathrm{e}^x}{x}dx$.

Bài 5. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;4]$, thỏa mãn $\begin{cases}f(1)+g(1)=4\\ g(x)=-xf'(x)\\ f(x)=-xg'(x)\end{cases}$ với mọi $x\in[1;4]$. Tính tích phân $I=\int_1^4\left[f(x)+g(x)\right]dx$.

Bài 6. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $x^2 f^2(x)+(2x-1)f(x)=xf'(x)-1$, với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ đồng thời thỏa $f(1)=-2$. Tính $\int_1^2 f(x)dx$

Bài 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0)=0, f'(0)\neq 0$ và thỏa mãn hệ thức $f(x).f'(x)+18x^2=(3x^2+x)f'(x)+(6x+1)f(x);\forall\in\mathbb{R}$. Biết $\int_0^1 (x+1)e^{f(x)}dx=ae^2+b,(a,b\in\mathbb{Q})$. Giá trị của $a-b$ bằng bao nhiêu?

Bài 8. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[1;3]$; $f(x)\neq 0,\forall x\in[1;3]$; $f'(x)\left[1+f(x)\right]^2=(x-1)^2\left[f(x)\right]^4$ và $f(1)=-1$. Biết rằng $\int_e^3 f(x)\mathrm{d}x=a\ln 3+b(a,b\in\mathbb{Z})$, giá trị của $a+b^2$ bằng bao nhiêu?

Bài 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $3f(x)+xf'(x)\geq x^{2018}$, $\forall x\in[0;1]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

CHỦ ĐỀ 2
ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TRONG THỰC TIỄN

DẠNG 1
ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TRONG BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

• Giả sử $v(t)$ là vận tốc của vật M tại thời điểm t và $s(t)$ là quãng đường vật đi được sau khoảng thời gian t tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Ta có mối liên hệ giữa $s(t)$ và $v(t)$ như sau:

+ Đạo hàm của quãng đường là vận tốc: $s'(t)=v(t)$

+ Nguyên hàm của vận tốc là quãng đường: $s(t)=\int v(t)dt$

Nếu gọi $a(t)$ là gia tốc của vật M thì ta có mối liên hệ giữa $v(t)$ và $a(t)$ như sau:

+ Đạo hàm của vận tốc là gia tốc: $v'(t)=a(t)$.

+ Nguyên hàm của gia tốc là vận tốc: $v(t)=\int a(t)dt$

• Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

• Đạo hàm của quãng đường di chuyển của vật theo thời gian bằng tốc độ của chuyển động tại mọi thời điểm: $v(t)=s'(t)$. Do đó, nếu biết tốc độ $v(t)$ tại mọi thời điểm $t\in[a;b]$ thì tính được quãng đường di chuyển trong khoảng thời gian từ a đến b theo công thức: $s=s(b)-s(a)=\int_a^b v(t)dt$

Một vật chuyển động có phương trình gia tốc $a(t)$ thì vận tốc của vật đó sau khoảng thời gian $\Delta t=t_2-t_1$ là: $v=\int_{t_1}^{t_2} a(t)dx$.

Bài 1. Một ô tô chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t)=160-10t\ (m/s)$.



a) Ô tô chuyển động chậm dần cho đến khi dừng hẳn mất hết bao nhiêu giây?

b) Hỏi rằng trong 3s trước khi dừng hẳn vật di chuyển được bao nhiêu mét ?

Bài 2. Một xe mô tô phân khối lớn đang chạy với vận tốc 10m/s thì tăng tốc với gia tốc được biểu diễn bởi phương $a(t)=t^2+3t\left(m/s^2\right)$.



a) Vận tốc của xe mô tô ở giây thứ 3 bằng bao nhiêu kể từ khi tăng tốc?

b) Hỏi quãng đường của xe mô tô đi được trong quãng thời gian 10s đầu tiên sau khi tăng tốc ?

c) Tính vận tốc trung bình của xe mô tô đi trong quãng thời gian 10s đầu tiên sau khi tăng tốc.

Bài 3. Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t)=t^2-t-6$ (mét/giây). Quãng đường (mét) vật đi được trong khoảng thời gian $1\le t\le 4$ bằng bao nhiêu?

Bài 4. Một chiếc xe ô tô đang chạy trên đường cao tốc với vận tốc $72(km/h)$ thì tài xế bất ngờ đạp phanh làm cho chiếc ô tô chuyển động chậm với gia tốc $a(t)=-\frac{8}{5}t\ \left(m/s^2\right)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây.



a) Kể từ khi đạp phanh, sau 3 giây thì vận tốc của ô tô bằng bao nhiêu?

b) Hỏi kể từ khi đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn thì ô tô di chuyển bao nhiêu mét (m)?

Bài 5.

a) Cho một vật chuyển động với vận tốc $y=v(t)$ (m/s). Cho $0<a<b$ và hàm vận tốc $v(t)>0$ với mọi $t\in[a;b]$. Hãy giải thích vì sao $\int_a^b v(t)\,dt$ biểu thị quãng đường mà vật đi được trong khoảng thời gian từ a đến b (tính theo giây).

b) Một vật chuyển động với vận tốc được biểu thị bởi phương trình $v(t)=2-\sin t\,(\text{m/s})$. Tính quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=0(s)$ đến thời điểm $t=\dfrac{3\pi}{4}(s)$.

Bài 6. Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t)=t^2-t-6$ (m/s).

a) Tìm độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1\le t\le 4$, tức là tính $\int_1^4 v(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Tìm tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian này, tức là tính $\int_1^4 |v(t)|\,\mathrm{d}t$.

Bài 7. Một người đi xe môtô với độ tăng vận tốc tại một thời điểm t (tính theo giây, $t\ge 0$) được cho bởi hàm số $f(t)=\dfrac{1}{300}t^2+\dfrac{1}{1350}t\ \left(km/s^2\right)$. Nếu bắt đầu tăng tốc tính từ lúc khởi động máy (vận tốc bằng 0km/h), hỏi mất bao lâu thì người đó đạt đến tốc độ 120 km/h?

Bài 8. Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trong thành phố thì các xe khi dừng lại phải cách nhau một khoảng tối thiểu là 1m. Một xe máy di chuyển trên đường thì gặp đèn đỏ từ xa, người điều khiển xe máy đạp phanh và xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=10-5t$ (m/s). Hỏi để giữ khoảng cách an toàn, người điều khiển xe máy phải bắt đầu đạp phanh khi cách xe đang dừng phía trước tối thiểu một khoảng bao xa, biết rằng ngay lúc đạp phanh thì xe phía trước đang đứng yên?

Bài 9. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\dfrac{1}{150}t^2+\dfrac{59}{75}t\,(m/s)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc a bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a\left(m/s^2\right)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

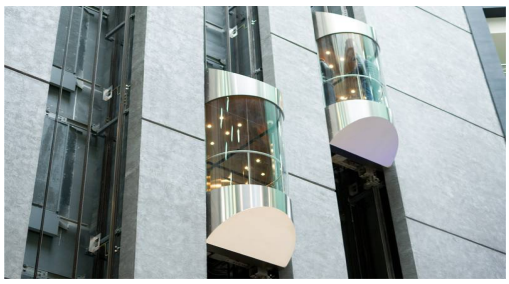
Bài 10. Biết rằng tốc độ v (km/phút) của một ca nô cao tốc thay đổi theo thời gian t (phút) như sau:

$$v(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}t & \text{khi } 0\le t<2\\ 1 & \text{khi } 2\le t<15\\ 4-\dfrac{1}{5}t & \text{khi } 15\le t\le 20\end{cases}$$

Tính quãng đường ca nô di chuyển được trong khoảng thời gian từ 0 tới 20 phút.

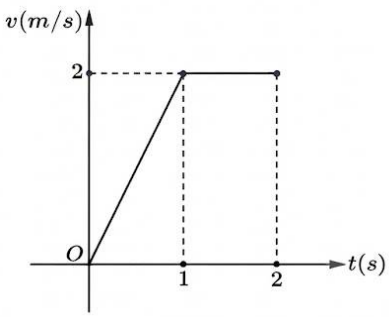


Bài 11. Giả sử tốc độ $v(m/s)$ của một thang máy di chuyển từ tầng 1 lên tầng cao nhất theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức: $v(t)=\begin{cases} t & \text{khi } 0\le t\le 2 \\ 2 & \text{khi } 2<t\le 20 \\ 12-\dfrac{1}{5}t & \text{khi } 20<t\le 24 \end{cases}$. Tính quãng đường chuyển động và tốc độ trung bình của thang máy.



Bài 12. Cho hình vẽ dưới đây là đồ thị vận tốc $v(t)\ (m/s)$ của một chiếc xuồng đi trên sông trong 2 giây đầu tiên ($t=0$ là thời điểm chiếc xuồng bắt đầu chuyển động).



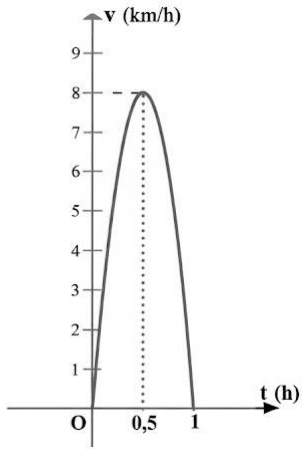


a) Tính quãng đường mà chiếc xuồng đi được trong 1 giây đầu tiên.

b) Tính vận tốc trung bình của chiếc xuồng đi trong 2 giây đầu tiên.

Bài 13. Bạn Trúc Linh chạy bộ trong thời gian 1 giờ, với vận tốc $v\ (km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị là một phần của parabol có đỉnh $I(0,5;8)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình vẽ.





a) Tính quãng đường bạn Trúc Linh chạy được trong thời gian 45 phút, kể từ khi bắt đầu chạy.

b) Tính gia tốc của bạn Trúc Linh tại thời điểm 1 giờ 30 phút, kể từ khi bắt đầu chạy.

DẠNG 2
ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TRONG BÀI TOÁN LIÊN QUAN VẬT LÍ VÀ THỰC TIỄN

- Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.
- Điện lượng chuyển qua tiết diện của dây dẫn của đoạn mạch trong thời gian từ t_1 đến t_2 là: $Q=\int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$
- Theo định luật Hooke thì lực cần dùng để giữ lò xo giãn thêm x mét từ độ dài tự nhiện là $f(x)=kx$, với $k\ (N/m)$ là độ cứng của lò xo.

Công cần để kéo dãn lò xo từ độ dài l_1 đến độ dài l_2 là: $A=\int_{l_1}^{l_2} f(x)dx$.

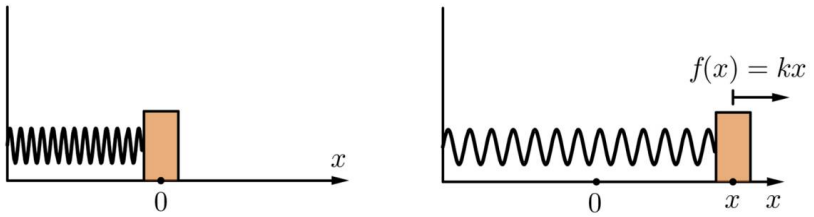
Bài 1.

a) Cường độ dòng điện chạy trong cuộn dây là $y=I(t)\,(\mathrm{A})$. Cho $0<a<b$ và $I(t)>0$ với mọi $t\in[a;b]$. Hãy giải thích vì sao $\int_a^b I(t)\mathrm{d}t$ biểu thị điện lượng (C) đã phóng qua cuộn dây trong khoảng thời gian từ a đến b (tính theo giây).

b) Cường độ dòng điện chạy trong cuộn dây là $I=2\sin t\ (A)$. Tính điện lượng (C) phóng ra trong cuộn dây khoảng thời gian từ thời điểm $t=0(s)$ đến thời điểm $t=\frac{\pi}{2}(s)$.

Bài 2. Một mạch kín gồm một nguồn điện có suất điện động biến thiên theo thời gian được biểu diễn bởi $e=10\cos(100\pi t)(V)$ và điện trở trong không đáng kể, nối với mạch ngoài có một điện trở $R=50\Omega$. Tính điện lượng chuyển qua điện trở trong thời gian từ $t=0$ đến $t=\frac{1}{600}s$?

Bài 3. Một lực có độ lớn 40 N cần thiết để kéo căng một chiếc lò xo có độ dài tự nhiên 10 cm lên 15 cm. Biết rằng theo định luật *Hooke* trong Vật lý, khi một chiếc lò xo bị kéo căng thêm x so với độ dài tự nhiên của lò xo thì lò xo trì lại với một lực cho bởi công thức $f(x)=kx\ (N)$, trong đó k là hệ số đàn hồi của lò xo. Hãy tìm công sinh ra khi kéo lò xo có độ dài từ 15 cm đến 20 cm?



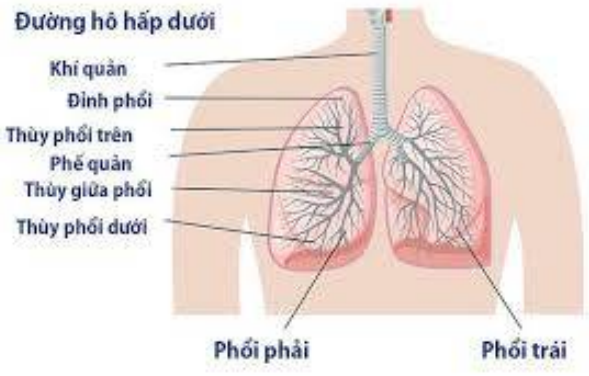
Bài 4. Ở nhiệt độ $37\,^{\circ}\mathrm{C}$, một phản ứng hóa học từ chất A, chuyển hóa thành sản phẩm chất B theo phương trình: $A \to B$. Giả sử $y(x)$ là nồng độ chất A (đơn vị mol L^{-1}) tại thời gian x (giây), $y(x) > 0$ với $x \ge 0$ thỏa mãn hệ thức $y'(x) = -7.10^{-4}\, y(x)$ với $x \ge 0$. Biết rằng $x = 0$ thì nồng độ (đầu) của chất A là $0,05$ mol L^{-1}

a) Xét hàm số $f(x) = \ln y(x)$ với $x \ge 0$. Hãy tính $f'(x)$ từ đó tìm hàm số $f(x)$.

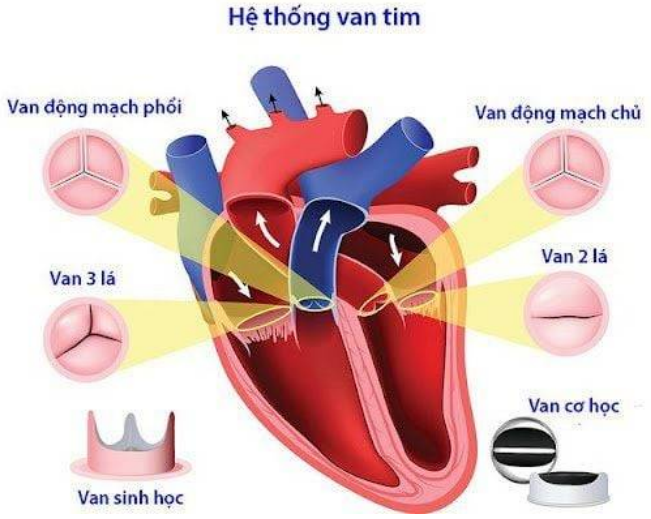
b) Giả sử ta tính nồng độ trung bình chất A (đơn vị mol L^{-1}) từ thời điểm a (giây) đến thời điểm b (giây) với $0 < a < b$ theo công thức $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b y(x)\,\mathrm{d}x$. Xác định nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây.

Bài 5. Giả sử rằng sau t năm, vốn đầu tư của một công ty bất động sản phát sinh lợi nhuận với tốc độ $P'(t) = 126 + t^2$ (triệu đồng/năm). Hỏi sau 10 năm đầu tiên thì công ty bất động thu được lợi nhuận là bao nhiêu (đơn vị triệu đồng)?

Bài 6. Việc thở là những vòng tuần hoàn, mỗi vòng tính từ lúc bắt đầu hít vào đến lúc kết thúc thở ra, thường kéo dài trong 5s. Vận tốc cực đại của khí là $V\ (l/s)$ nên vì thế nó được mô hình hoá bởi công thức $v(t) = V \sin\dfrac{3\pi t}{5}$. Tính thể tích khí hít vào phổi sau thời gian 2s.



Bài 7. Hiệu suất của tim là lưu lượng máu được bơm bởi tim trên một đơn vị thời gian (lưu lượng máu chảy vào động mạch chủ). Để đo hiệu suất của tim, người ta bơm $A(\mathrm{mg})$ chất chỉ thị màu vào tâm nhĩ phải, chảy qua tim rồi vào động mạch chủ và đo nồng độ chất chỉ thị màu còn lại ở tim đến thời điểm $T(\mathrm{s})$ khi chất chỉ thị màu tan sạch. Gọi $c(t)$ là nồng độ (mg/l) chất chỉ thị màu tại thời điểm $t(\mathrm{s})$ thì hiệu suất của tim được xác định bởi $F = \dfrac{A}{\int_0^T c(t)\,\mathrm{d}t}(\mathrm{l}/\mathrm{s})$. Tính hiệu suất của tim khi bơm 8 mg chất chỉ thị màu vào tâm nhĩ phải, biết $c(t) = \dfrac{1}{4}t(12-t)$ với $0 \le t \le 12$).



Bài 8. Giả sử vận tốc v của dòng máu ở khoảng cách r từ tâm của động mạch bán kính R không đổi, có thể được mô hình hóa bởi công thức

$$\frac{1}{R-0}\int_0^R k\left(R^2-r^2\right)\mathrm{d}r=\frac{1}{R}\left(kR^2r-k\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^R=\frac{1}{R}\left(kR^3-k\frac{R^3}{3}\right)=kR^2-\frac{kR^2}{3}=\frac{2}{3}kR^2.$$

Trong đó k là một hằng số. Tìm vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng $0\le r\le R$. Vận tốc lớn nhất của dòng máu lớn hơn vận tốc trung bình bao nhiêu lần?

Bài 9. Tại một nhà máy ta gọi $C(x)$ là tổng chi phí (tính theo triệu động) để sản xuất x tấn sản phẩm A trong một tháng. Khi đó đạo hàm $C'(x)$ gọi là chi phí cận biên, cho biết tốc độ tăng tổng chi phí theo lượng sản phẩm được sản xuất. Giả sử chi phí cận biên (tính theo triệu đồng trên tấn) của nhà máy được ước lượng bởi công thức: $C'(x)=5-0,06x+0,00072x^2$ với $0\le x\le 150$.

Biết rằng $C(0)=30$ triệu đồng, gọi là chi phí cố định. Tính tổng chi phí khi nhà máy sản xuất 100 tấn sản phẩm A trong tháng.

Bài 10. Một doanh nghiệp sản xuất mặt hàng với chi phí cận biên được mô tả bởi hàm số:

$$f(x)=\frac{1}{10}\left(x^2-16x+93\right),\ x \text{ là số sản phẩm sản xuất}$$

Giả sử rằng doanh nghiệp bán được hết số lượng sản phẩm sản xuất được. Biết rằng doanh thu cận biên được mô tả bởi hàm số $g(x)=\left(\frac{4}{5}\right)^{x-8}+5$, với x là số lượng sản phẩm được bán ra. Giả sử rằng tổng chi phí khi chưa sản xuất sản phẩm nào là 0 đồng và tổng doanh thu khi chưa bán được sản phẩm nào là 0 đồng. Hỏi khi sản xuất 8 sản phẩm và bán hết thì doanh nghiệp thu được lợi nhuận là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai sau dấu phẩy)

PHẦN B
TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP GỒM BA PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $\int\limits_a^a 2027f(x)\mathrm{d}x=0$

B. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$

C. $\int\limits_a^b \frac{1}{2026}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2026}\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}(x)$

D. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $a,b,c\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $a<b<c$. Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. $\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x.\int\limits_b^c f(x)\mathrm{d}x$

B. $\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_b^c f(x)\mathrm{d}x$

C. $\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_b^c f(x)\mathrm{d}x$

D. $\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x$

Câu 3. Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai?

A. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(y)\mathrm{d}y$

B. $\int\limits_a^b\big(f(x)+g(x)\big)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

C. $\int\limits_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t$

D. $\int\limits_a^b\big(f(x)g(x)\big)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

Câu 4. Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai?

A. $\int\limits_{-2027}^{2027}\mathrm{d}x=4054$.

B. $\int\limits_{2026}^{2026}\mathrm{d}x=4052$.

C. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

D. Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì $f(b)-f(a)=\int\limits_a^b f'(x)dx$.

Câu 5. Cho hàm $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ với $a<b$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên $[a;b]$.

Cho các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. $\int_a^b kf(x)dx = k[F(b)-F(a)]$

B. $\int_b^a f(x)dx = F(b)-F(a)$

C. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x=a;x=b$; đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và trục hoành được tính theo công thức $S=F(b)-F(a)$

D. $\int_a^b f(2x+3)dx = F(2x+3)\Big|_a^b$

Câu 6. Nếu $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 3$ thì $\int_0^3 4f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 12. **C.** 36. **D.** 4.

Câu 7. Cho $\int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{2025}$. Tính $I = \int_0^2 2025f(x)dx.$

A. $I=2$ **B.** $I=\frac{1}{2025}$ **C.** $I=1$ **D.** $I=2025$

Câu 8. Nếu $\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x = 5$ thì $\int_5^0 5f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** –1. **C.** 25. **D.** –25.

Câu 9. Nếu $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x = 5$ và $\int_1^4 g(x)\mathrm{d}x = -4$ thì $\int_1^4 [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$ bằng

A. –1. **B.** –9. **C.** 1. **D.** 9.

Câu 10. Nếu $\int_1^4 f(x)dx = 3$ và $\int_1^4 g(x)dx = -2$ thì $\int_1^4 (f(x)-g(x))dx$ bằng

A. –1. **B.** –5. **C.** 5. **D.** 1.

Câu 11. Cho $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 5$, khi $\int_0^1 [f(x)-2g(x)]\mathrm{d}x$ bằng

A. –8 **B.** 1 **C.** –3 **D.** 12

Câu 12. Giả sử $\int_0^9 f(x)\mathrm{d}x = 7$ và $\int_9^0 g(x)\mathrm{d}x = 1$. Khi đó $I = \int_0^9 [2f(x)+3g(x)]\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=11$. **B.** $I=17$. **C.** $I=23$. **D.** $I=8$.

Câu 13. Nếu $\int_{-1}^4 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_{-1}^4 g(x)\mathrm{d}x = 3$. Khi đó $\int_{-1}^4 [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** 6. **C.** 1. **D.** −1.

Câu 14. Nếu $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=6$ thì $\int_0^3\left[\frac{1}{3}f(x)+2\right]\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

A. 8. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 6.

Câu 15. Nếu $\int_0^2 f(x)dx=5$ thì $\int_0^2\left[2f(x)-1\right]dx$ bằng:

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 12.

Câu 16. Nếu $\int_0^2 f(x)dx=3$ thì $\int_0^2\left[2f(x)+2027\right]dx$ bằng:

A. 4054. **B.** 4042. **C.** 4044. **D.** 4060.

Câu 17. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=5$. Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)+2\sin x\right]\mathrm{d}x$.

A. $I=7$ **B.** $I=5+\frac{\pi}{2}$ **C.** $I=3$ **D.** $I=5+\pi$

Câu 18. Cho $\int_1^2\left[4f(x)-2x\right]dx=1$. Khi đó $\int_1^2 f(x)dx$ bằng:

A. −3. **B.** 1. **C.** 3. **D.** −1.

Câu 19. Cho $\int_0^1 f(x)dx=1$, tích phân $\int_0^1\left(2f(x)-3x^2\right)dx$ bằng

A. −1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 20. Cho $\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x=2$ và $\int_{-1}^2 g(x)\mathrm{d}x=-1$. Tính $I=\int_{-1}^2\left[x+2f(x)-3g(x)\right]\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{17}{2}$ **B.** $I=\frac{5}{2}$ **C.** $I=\frac{7}{2}$ **D.** $I=\frac{11}{2}$

Câu 21. Cho $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=3,\int_0^2 g(x)\mathrm{d}x=-1$ thì $\int_0^2\left[f(x)-5g(x)+x\right]\mathrm{d}x$ bằng:

A. 12. **B.** 0. **C.** 8. **D.** 10

Câu 22. Cho $\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x=-2$. Tích phân $\int_0^5\left[4f(x)-3x^2\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. −140. **B.** −130. **C.** −120. **D.** −133.

Câu 23. Cho $\int_1^2\left[4f(x)-2x\right]dx=1$. Khi đó $\int_1^2 f(x)dx$ bằng:

A. 1. **B.** −3. **C.** 3. **D.** −1.

Câu 24. Cho $\int_{-2}^2 f(x)\mathrm{d}x=1$, $\int_{-2}^4 f(t)\mathrm{d}t=-4$. Tính $\int_2^4 f(y)\mathrm{d}y$.

A. $I=5$. **B.** $I=-3$. **C.** $I=3$. **D.** $I=-5$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và có $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=9;\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=5$. **B.** $I=36$. **C.** $I=13$. **D.** $I=\frac{9}{4}$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=10$, $\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x=4$. Tích phân $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 7.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ và $\int_0^{10} f(x)dx=7$; $\int_2^6 f(x)dx=3$. Tính $P=\int_0^2 f(x)dx+\int_6^{10} f(x)dx$.

A. $P=4$ **B.** $P=10$ **C.** $P=7$ **D.** $P=-4$

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn [0; 6] thỏa mãn $\int_0^6 f(x)dx=10$ và $\int_2^4 f(x)dx=6$. Tính giá trị của biểu thức $P=\int_0^2 f(x)dx+\int_4^6 f(x)dx$.

A. $P=4$. **B.** $P=16$. **C.** $P=8$. **D.** $P=10$.

Câu 29. Tính tích phân $I=\int_0^2(2x+1)dx$

A. $I=5$. **B.** $I=6$. **C.** $I=2$. **D.** $I=4$.

Câu 30. Tích phân $\int_0^1(3x+1)(x+3)\mathrm{d}x$ bằng

A. 12. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 31. Tính tích phân $I=\int_1^e\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$

A. $I=1$ **B.** $I=\frac{1}{e}+1$ **C.** $I=\frac{1}{e}$ **D.** $I=e$

Câu 32. Biết $\int_1^3\frac{x+2}{x}dx=a+b\ln 3$, với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính tổng $S=a+b$

A. $S=4$. **B.** $S=5$. **C.** $S=8$. **D.** $S=6$.

Câu 33. Kết quả tích phân $I=\int_0^1 5^x\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=\frac{5}{\ln 5}$. **B.** $I=4\ln 5$. **C.** $I=5\ln 5$. **D.** $I=\frac{4}{\ln 5}$.

Câu 34. Tích phân $\int_0^1 \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$ bằng

A. $e^3+\frac{1}{2}$. **B.** $e-1$. **C.** $\frac{e^3-1}{3}$. **D.** e^3-1.

Câu 35. Tích phân $\int_0^1 e^{3x+1}dx$ bằng

A. $\frac{1}{3}(e^4+e)$ **B.** e^3-e **C.** $\frac{1}{3}(e^4-e)$ **D.** e^4-e

Câu 36. Giá trị của $\int_0^1 \frac{e^x}{2^x}dx$ bằng

A. $I=\frac{e-2}{1-\ln 2}$ **B.** $I=\frac{e-2}{2-2\ln 2}$ **C.** $I=\frac{e}{2-2\ln 2}$ **D.** $I=\frac{e}{1-\ln 2}$

Câu 37. Giá trị của $I=\int_0^1 \frac{e^{2x}-4}{e^x+2}dx$ bằng

A. $I=2(e+3)0$. **B.** $I=\frac{1}{2}(e+3)$. **C.** $I=e-3$. **D.** $I=2(e-3)$.

Câu 38. Biết $\int_1^2 e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x}\right)dx=e^2+a.e+b\ln 2$ $(a,b\in\mathbb{Z})$. Khi đó giá trị của $P=\frac{a+b}{a.b}$ là

A. $P=-3$ **B.** $P=1$ **C.** $P=-1$ **D.** $P=-2$

Câu 39. Giá trị của $I=\int_0^1 \frac{e^{2x-1}-e^{-3x}+1}{e^x}dx$ bằng

A. $I=\frac{1}{e^4}-\frac{2}{e}+\frac{7}{4}$ **B.** $I=\frac{1}{4e^4}+\frac{2}{e}+\frac{7}{4}$ **C.** $I=\frac{1}{e^4}+\frac{2}{e}+\frac{7}{4}$ **D.** $I=\frac{1}{4e^4}-\frac{2}{e}+\frac{7}{4}$

Câu 40. Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** -1. **D.** $\frac{\pi}{2}$.

Câu 41. Biết $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(2\sin x+3\cos x+x)dx=\frac{a+b\sqrt{3}}{2}+\frac{5\pi^2}{c}$ $(a,b,c\in\mathbb{Z})$. Khi đó giá trị của $P=a+2b+c$ là

A. $P=23$ **B.** $P=45$ **C.** $P=65$ **D.** $P=70$

Câu 42. Biết $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 3\tan^2 x dx=a\sqrt{3}+b+\frac{\pi}{c}$ $(a,b,c\in\mathbb{Z})$. Khi đó giá trị của $P=a+b+c$ là

A. $P=6$ **B.** $P=4$ **C.** $P=-4$ **D.** $P=-6$

Câu 43. Biết $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(2\cot^2 x+5)dx=\frac{\pi}{a}+b\sqrt{3}+c$ $(a,b,c\in\mathbb{Z})$. Khi đó giá trị của $P=a+b+c$ là

A. $P=6$ **B.** $P=-4$ **C.** $P=4$ **D.** $P=-6$

Câu 44. Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{4}dx = \frac{\pi}{c}+\frac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó giá trị của $P=a+b+c$ là

A. $P=17$ **B.** $P=16$ **C.** $P=32$ **D.** $P=49$

Câu 45. Giá trị của $I=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$ bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\frac{\pi}{2}$.

Câu 46. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2|x-2|dx$.

A. $I=-2$. **B.** $I=4$. **C.** $I=2$. **D.** $I=0$.

Câu 47. Tính $\int\limits_{-1}^{2}|2x+1|\mathrm{d}x$

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{13}{2}$.

Câu 48. Tính $I=\int\limits_0^2|2x-2|\mathrm{d}x$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 49. Tính $\int\limits_0^2\sqrt{x^2-2x+1}\mathrm{d}x$

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** 1.

Câu 50. Tính $I=\int\limits_0^3|x(2x-4)|\mathrm{d}x$.

A. $\frac{16}{3}$. **B.** 2. **C.** $-\frac{16}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 51. Tính tích phân $\int\limits_0^8|x^2-6x|\mathrm{d}x$.

A. $\frac{-64}{3}$. **B.** $\frac{64}{3}$. **C.** $\frac{152}{3}$. **D.** $\frac{-152}{3}$.

Câu 52. Biết $I=\int\limits_{-1}^3|x^2-3x+2|\mathrm{d}x=\frac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{N}^*,\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $T=a-b$

A. 12. **B.** 14. **C.** 11. **D.** 4.

Câu 53. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2|x^3-x|dx$.

A. $I=-\frac{1}{2}$. **B.** $I=5$. **C.** $I=\frac{1}{2}$. **D.** $I=\frac{5}{2}$.

Câu 54. Tính tích phân $I=\int_0^2 \left|x^2+2x-3\right|dx$.

A. $I=-2$. **B.** $I=4$. **C.** $I=5$. **D.** $I=-4$.

Câu 55. Cho tích phân $I=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\int_{-3}^{3}\left|x^2-1\right|dx=a\sqrt{3}+b\sqrt{2}$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính $P=a+b$.

A. $P=\frac{88}{3}$ **B.** $P=\frac{80}{3}$ **C.** $P=\frac{20}{3}$ **D.** $P=\frac{40}{3}$

Câu 56. Tính tích phân $I=\int_{-2}^{5}\left(\left|x+2\right|-\left|x-2\right|\right)dx$.

A. $I=38$. **B.** $I=12$. **C.** $I=44$. **D.** $I=40$.

Câu 57. Biết $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\left|\sin x\right|dx=a-\sqrt{b}\ \ (a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{Q})$. Khi đó $a+4b$ bằng

A. 5. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 7.

Câu 58. Cho tích phân $I=\int_0^3\left|2^x-4\right|dx=a+\frac{b}{c\ln 2}$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $P=a^2+b^2+c^2$.

A. $P=15$ **B.** $P=10$ **C.** $P=5$ **D.** $P=18$

Câu 59. Tính tích phân $I=\int_{-1}^{1}\left|2^x-2^{-x}\right|dx$.

A. $\frac{1}{\ln 2}$. **B.** $\ln 2$. **C.** $2\ln 2$. **D.** $\frac{2}{\ln 2}$.

Câu 60. Tính tích phân $I=\int_{-1}^{2}\left(\left|x\right|-\left|x-1\right|\right)dx$.

A. $I=0$. **B.** $I=2$. **C.** $I=-2$. **D.** $I=-3$.

Câu 61. Cho a là số thực dương, tính tích phân $I=\int_{-1}^{a}\left|x\right|\mathrm{d}x$ theo a.

A. $I=\frac{a^2+1}{2}$. **B.** $I=\frac{a^2+2}{2}$. **C.** $I=\frac{-2a^2+1}{2}$. **D.** $I=\frac{\left|3a^2-1\right|}{2}$.

Câu 62. Cho số thực $m>1$ thỏa mãn $\int_1^m\left|2mx-1\right|dx=1$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $m\in(4;6)$. **B.** $m\in(2;4)$. **C.** $m\in(3;5)$. **D.** $m\in(1;3)$.

Câu 63. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\int_{-1}^{1}\left|x\right|^3\mathrm{d}x=\left|\int_{-1}^{1}x^3\mathrm{d}x\right|$. **B.** $\int_{-1}^{2027}\left|x^4-x^2+1\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2027}\left(x^4-x^2+1\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int_{-2}^{3}\left|e^{x}\left(x+1\right)\mathrm{d}x\right|=\int_{-2}^{3}e^{x}\left(x+1\right)\mathrm{d}x$.

D. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos^{2}x}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x$.

Câu 64. Tính tích phân $I=\int_{1}^{4}\sqrt{x^{2}-6x+9}dx$.

A. $I=\frac{5}{2}$. **B.** $I=-\frac{1}{2}$. **C.** $I=-2$. **D.** $I=\frac{1}{2}$.

Câu 65. Nếu $F'\left(x\right)=\frac{1}{2x}$ và $F\left(1\right)=1$ thì giá trị của $F\left(4\right)$ bằng

A. $\ln 2$. **B.** $1+\ln 2$ **C.** $1+\frac{1}{2}\ln 2$ **D.** $\frac{1}{2}\ln 2$

Câu 66. Cho $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của $f\left(x\right)=\frac{2}{x}$. Biết $F\left(-1\right)=0$. Tính $F\left(2\right)$ kết quả là.

A. $2\ln 2+1$. **B.** $\ln 2$. **C.** $2\ln 3+2$. **D.** $2\ln 2$.

Câu 67. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục, có đạo hàm trên $\left[-1;2\right]$, $f\left(-1\right)=8;f\left(2\right)=-1$. Tích phân $\int_{-1}^{2}f'\left(x\right)d$ bằng

A. 1. **B.** 7. **C.** –9. **D.** 9.

Câu 68. Biết $F\left(x\right)=x^{2}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_{1}^{3}\left[1+f(x)\right]dx$ bằng

A. 10. **B.** 8. **C.** $\frac{26}{3}$. **D.** $\frac{32}{3}$.

Câu 69. Biết $F(x)=x^{3}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_{1}^{3}(1+f(x))\mathrm{d}x$ bằng

A. 20. **B.** 22. **C.** 26. **D.** 28.

Câu 70. Cho hàm số $f\left(x\right)$. Biết $f\left(0\right)=4$ và $f'\left(x\right)=2\sin^{2}\frac{x}{2}+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{\pi^{2}+16\pi+8\sqrt{2}-16}{16}$ **B.** $\frac{\pi^{2}+16\pi+2\sqrt{2}-4}{16}$ **C.** $\frac{\pi^{2}+16\pi+8\sqrt{2}}{16}$ **D.** $\frac{\pi^{2}+16\pi-16}{16}$.

Câu 71. Cho hàm số $f(x)$.Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\cos^{2}\frac{x}{2}+3,\ \forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx$ bằng?

A. $\frac{\pi^{2}+8\pi-8-\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\frac{\pi^{2}+8\pi-8-4\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\frac{\pi^{2}+6\pi+8}{8}$. **D.** $\frac{\pi^{2}+8\pi-4\sqrt{2}}{8}$.

Câu 72. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{2x} & khi\ x\geq 0\\ x^{2}+x+2 & khi\ x<0\end{cases}$. Biết tích phân $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\frac{a}{b}+\frac{\mathrm{e}^{2}}{c}$ $(a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị $a+b+c$ bằng

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 73. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x(1+x^2) & khi\ x\ge 3 \\ \dfrac{1}{x-4} & khi\ x<3 \end{cases}$. Tích phân $I=\int\limits_2^4 f(t)\mathrm{d}t$ bằng:

A. $\dfrac{40}{3}-\ln 2$. **B.** $\dfrac{95}{6}+\ln 2$. **C.** $\dfrac{189}{4}+\ln 2$. **D.** $\dfrac{189}{4}-\ln 2$.

Câu 74. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\begin{cases} 3x^2 & \text{khi } 0\le x\le 1 \\ 4-x & \text{khi } 1\le x\le 2 \end{cases}$. Tính tích phân $\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{7}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 75. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} 4-x & \text{khi } 0\le x\le 1 \\ 3x^2 & \text{khi } 1\le x\le 2 \end{cases}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{21}{2}$. **B.** $\dfrac{7}{2}$. **C.** 7. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Câu 76. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f\left(x\right)=\begin{cases} 2x & \text{khi } x\ge 0 \\ x^3+x+1 & \text{khi } x<0 \end{cases}$. Tính $\int\limits_0^2 f\left(x-1\right)\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{3}{4}$. **C.** $\dfrac{5}{4}$. **D.** $\dfrac{11}{4}$.

Câu 77. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2-x+1 & \text{khi } x\ge \dfrac{1}{2} \\ 2x+\dfrac{7}{4} & \text{khi } x<\dfrac{1}{2} \end{cases}$. Tính tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin^2 x\right)\sin 2x\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{17}{24}$. **B.** $-\dfrac{37}{24}$. **C.** $\dfrac{24}{37}$. **D.** $\dfrac{37}{24}$.

Câu 78. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} x+2 & \text{khi } -3\le x\le -1 \\ x^2 & \text{khi } x\ge -1 \end{cases}$ thì $\int\limits_{-3}^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{31}{3}$. **B.** $\dfrac{28}{3}$. **C.** $\dfrac{22}{3}$. **D.** $\dfrac{26}{3}$.

Câu 79. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} 2x^2-x & \text{khi } x<0 \\ \sin x & \text{khi } x\ge 0 \end{cases}$. Tính tích phân $\int\limits_{-1}^{\pi} f\left(x\right)\mathrm{d}x$

A. $\dfrac{13}{6}$. **B.** $\dfrac{5}{6}$. **C.** $-\dfrac{5}{6}$. **D.** $\dfrac{19}{6}$.

Câu 80. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} 4x^3+2x+1 & \text{khi } x\ge 0 \\ 4x+1 & \text{khi } x<0 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F\left(1\right)=2$. Giá trị của $2F\left(-1\right)+3F\left(2\right)$ bằng.

A. 76. **B.** 19. **C.** 63. **D.** 21.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 81. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $\int_1^3 f(x)dx=2$.

a) $\int_1^3 3f(x)dx=6$.

b) Nếu $\int_2^3 f(x)dx=-1$ thì $\int_1^2 f(x)dx=1$.

c) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ thoả mãn $F(1)=3$ thì $F(3)=1$.

d) $\int_1^3 \frac{xf(x)+x^2-1}{x}dx=a+b\ln 3\,(a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R})$. Ta có $a+b=5$.

Câu 82. Cho hàm số $f(x)=\frac{x}{2}+\cos x$.

a) Hàm số $f(x)$ có tập xác định là đoạn $[-1;1]$

b) $\int f(x)dx=x^2+\sin x$.

c) $\int_0^2 f(x)dx=1+\sin 2$.

d) Nếu hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thoả mãn $F(0)=1$ thì $F(1)=\frac{1}{4}$.

Câu 83. Cho hàm số $f(x)=\frac{x^2+5x-7}{x}$

a) $\int f(x)\cdot \mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+5x-7\ln x+C$.

b) Hàm số $f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)=\frac{x^2+7}{x^2}$

c) $\int_{-2}^{-1} f(x)\cdot \mathrm{d}x=\frac{m}{n}+m\ln n$, với $m,n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tổng $m+2025n=4057$.

d) Gọi $G(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $G(1)=4$ và $G(3)+G(-9)=20$. Khi đó $G(-6)=a\ln 2+b\ln 3+c$, với a,b,c là các số hữu tỉ. Tổng $a+b+c=\frac{2}{3}$

Câu 84. Xét hàm số $f(x)=\frac{x^2+2}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

a) $f(x)=x+\frac{2}{x}$.

b) $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+2\ln x+C$.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $F(1)=\dfrac{3}{2}$. Khi đó $F(4)=9+4\ln 2$.

d) Nếu $\int\limits_1^4 kf(x)\mathrm{d}x=5$ thì $k\in(1;2)$.

Câu 85. Cho hàm số $f(x)=2x^2-3$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$

a) Ta có $\int\limits_{-1}^{2} f(x)dx=F(2)-F(-1)$.

b) Nếu $F(0)=1$ thì $F(2)=12$.

c) Nếu $\int\limits_0^2 af(x)dx=32$ thì $a=6$.

d) Cho $g(x)=(ax^2+bx+c).e^{3x}$ là một nguyên hàm của hàm số $e^{3x}.f(x)$, nếu $\int\limits_0^2 e^{3x}f(x)dx=a+\dfrac{b.e^6}{27}$.

Khi đó: $27a-b=-2$.

Câu 86. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^3 f(x)dx=2025$

a) $\int\limits_0^3 2f(x)dx=4050$.

b) Biết $\int\limits_0^6 f(x)dx=2024$, khi đó $\int\limits_3^6 f(x)dx=1$

c) $\int\limits_0^3\left[f(x)-4x^3+2x\right]dx=1853$

d) $\int\limits_3^0\left[3^{2x+1}-\dfrac{1}{2025}f(x)\right]dx=1191$

Câu 87. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_1^4 f(x)dx=1$

a) $\int\limits_4^1\dfrac{1}{2}f(x)dx=\dfrac{1}{2}$.

b) $\int\limits_1^4\left[2f(x)-\dfrac{3}{x}\right]dx=2+3\ln 2$

c) Biết $\int\limits_4^1\left[f(x)-\dfrac{2}{x^3}+\sqrt[4]{x^3}\right]dx=\dfrac{a+b\sqrt{2}}{28}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a+b=119$.

d) Biết $\int\limits_{-2}^4\left[f(x)-e^x\right]dx=\dfrac{1}{e^2}$, khi đó $\int\limits_{-2}^1 f(x)dx=e^4-1$

Câu 88. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \frac{\pi}{4}$

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x)+1 \right] dx = \frac{3\pi}{4}$

b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2\sin x - \frac{1}{2} f(x) \right] dx = \frac{16-\pi}{8}$

c) Biết $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} 2\pi g(x)dx = 1$, khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x) - 3g(x) - \cos^2 \frac{x}{2} \right] dx = \frac{3}{2\pi} - \frac{1}{2}$

d) Biết $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2f(x)dx = \frac{\pi}{2}$, khi đó $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \left[\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2} - 2f(x) \right] dx = \frac{\sqrt{2}-2}{4}$.

Câu 89. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^1 f(x)dx = -1$, $\int\limits_0^3 f(x)dx = 2025$.

a) $\int\limits_1^0 f(x)dx = 1$

b) $\int\limits_1^3 f(x)dx = 2026$

c) $\int\limits_1^3 \left[f(x) - e^{-2x+1} \right] dx = \frac{1}{a.e^5} + \frac{1}{b.e} + c$, với $a,b,c \in \mathbb{Z}$. Khi đó $a+b+c = 2025$.

d) Biết $\int\limits_3^4 f(x)dx = 2$, khi đó $\int\limits_1^4 \left[f(x) - 2^{x+1} \right] dx = 2000$

Câu 90. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_2^1 f(x)\mathrm{d}x = 3$, $\int\limits_2^3 f(x)\mathrm{d}x = 4$.

a) $\int\limits_2^3 \frac{1}{2} f(x)\mathrm{d}x = 8$

b) $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 1$

c) $\int\limits_1^3 \left[f(x) + \frac{1}{2025x} \right] \mathrm{d}x = a + \frac{\ln 3}{b}$, với $a,b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $2024a - b = 1$.

d) Biết $\int\limits_{-3}^1 f(x)dx = 2$ và $\int\limits_{-3}^3 \left[f(x) - 2x + \frac{1}{e^{2x}} \right] dx = \frac{m.e^{12} + n.e^6 + p}{18e^6}$, với $m,n,p \in \mathbb{Z}$. Khi đó $m+n+p = -106$.

Câu 91. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_{-1}^{0} f(x)dx = 3$, $\int\limits_{0}^{3} 2f(x)dx = 6$.

a) $\int\limits_{0}^{3} f(x)dx = 3$

b) $\int\limits_{-1}^{3} f(x)dx = 6$

c) Biết $\int\limits_{-1}^{3} \left[2f(x) - e^{1-2x}\right]dx = \dfrac{a.e^8 + b.e^5 + c}{2}$, với $a,b,c \in \mathbb{Z}$. Khi đó $a+b+c = 26$.

d) Biết $\int\limits_{3}^{6} f(x)dx = 2025$ và $\int\limits_{-1}^{6} \left[\dfrac{1}{2}f(x) + 3x^2\right]dx = \dfrac{a}{b}$, với $a,b \in \mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân thức tối giản.. Khi đó $a+b = 2465$.

Câu 92. Cho hàm số $f(x) = mx + n$ với $m,n \in \mathbb{R}$. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 3$, $\int\limits_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 8$.

a) $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{1}{2}f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{3}{2}$

b) $\int\limits_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = -5$

c) $\int\limits_{1}^{2} \left[2f(x) - \dfrac{1}{e^{2x}}\right]\mathrm{d}x = \dfrac{a.e^4 + b.e^2 + c}{2e^4}$ với $a,b,c \in \mathbb{Z}$. Khi đó $a+b+c = 20$.

d) $3m + 2n = 10$

Câu 93. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a,b,c \in \mathbb{R}$. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = -\dfrac{7}{2}$, $\int\limits_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x = -2$ và $\int\limits_{0}^{3} f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{13}{2}$.

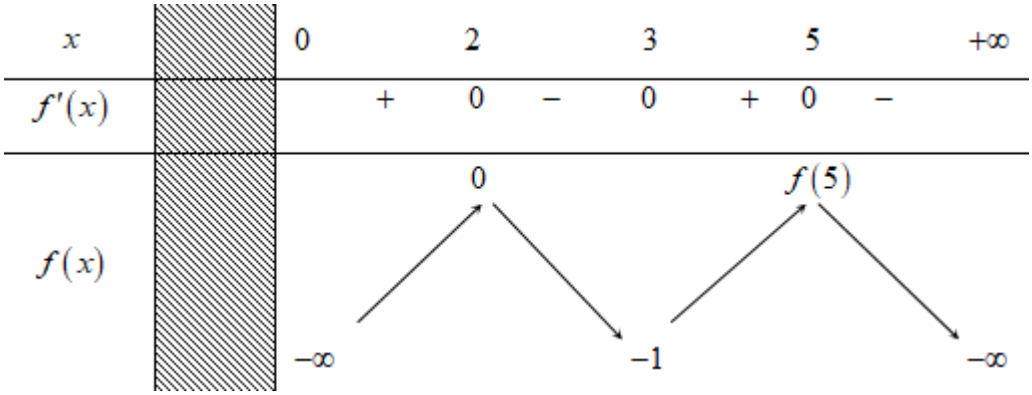
a) $\int\limits_{2}^{0} f(x)\mathrm{d}x = 2$

b) $\int\limits_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = 10$

c) $\dfrac{1}{3}a + \dfrac{1}{2}b + c = -\dfrac{7}{2}$

d) $a+b+c = \dfrac{4}{3}$

Câu 94. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ và có bảng biến thiên như sau



a) $f'(x)>0$ khi $x\in(3;5)$

b) $\int\limits_3^5\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x=f(5)+1$

c) $\int\limits_2^3\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x=-1$

d) Biết rằng $\int\limits_2^5\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x=5$. Khi đó $f(5)=3$.

Câu 95. Cho hàm số $f(x),g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_{-2}^5 f(x)\mathrm{d}x=8$, $\int\limits_5^{-2} g(x)\mathrm{d}x=3$.

a) $\int\limits_5^{-2} f(x)\mathrm{d}x=-8$

b) $\int\limits_5^{-2}\left[2g(x)-3\right]\mathrm{d}x=25$

c) $\int\limits_{-2}^5\left[f(x)-4g(x)-1\right]\mathrm{d}x=-13$

d) Biết $\int\limits_{-2}^0\left[\frac{1}{2}f(x)+2g(x)\right]\mathrm{d}x=2024$, khi đó $\int\limits_0^5\left[\frac{1}{2}f(x)+2g(x)\right]\mathrm{d}x=2026$

Câu 96. Cho hàm số $f(x),g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=2$, $\int\limits_1^2 g(x)\mathrm{d}x=6$.

a) $\int\limits_1^2 2025f(x)\mathrm{d}x=4050$

b) $\int\limits_2^1\left[2g(x)-x\right]\mathrm{d}x=-\frac{21}{2}$

c) $\int\limits_2^1\left[5f(x)-2g(x)+3e^{3x}\right]\mathrm{d}x=e^6-e^3-2$

d) Biết $\int_1^4 \left[2f(x)+g(x)\right]dx=5$ và $\int_2^4 \left[2f(x)+g(x)-\sqrt{x}\right]dx=\dfrac{20\sqrt{2}+a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a+b=83$.

Câu 97. Cho hàm số $f(x),g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_2^3 f(x)dx=4$, $\int_2^3 g(x)dx=1$.

a) $\int_3^2 \dfrac{1}{4}f(x)dx=1$

b) $\int_2^3 \left[2g(x)-\dfrac{1}{x}\right]dx=2+\ln 3-\ln 2$

c) Biết $\int_2^3 \left[\dfrac{1}{2}f(x)-2024g(x)+e^{2x+1}\right]dx=\dfrac{a.e^7+b.e^5+c}{2}$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Khi đó $a+b+c=-4044$.

d) Biết $\int_0^2 \left[f(x)-3g(x)\right]dx=2024$ và $\int_0^3 \left[f(x)-3g(x)+2^x\right]dx=\dfrac{a+b\ln 2}{\ln 2}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$. Khi đó $a+b=2030$.

Câu 98. Cho hàm số $f(x),g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-3}^0 f(x)dx=-4$; $\int_{-3}^0 g(x)dx=-3$.

a) $\int_0^{-3} f(x)dx=-4$.

b) $\int_{-3}^0 -3f(x)dx=12$.

c) $\int_{-3}^0 \left[f(x)+g(x)\right]dx=-7$.

d) Nếu $\int_{-3}^0 \left[2f(x)+3g(x)\right]dx=-51$ và $\int_{-3}^0 \left[nf(x)+mg(x)\right]dx=20$ thì $m+n=10$.

Câu 99. Cho $f(x),g(x)$ là hai hàm liên tục trên trên $\mathbb{R}$ và thoả: $\int_1^3 \left[f(x)+3g(x)\right]dx=10$, $\int_1^3 \left[2f(x)-g(x)\right]dx=6$.

a) $\int_3^1 \left[f(x)+3g(x)\right]dx=-10$.

b) $\int_1^3 \left[g(x)-2f(x)\right]dx=-6$.

c) $\int_1^3 \left[4g(x)-f(x)\right]dx=4$

d) $\int_1^3 \left[f(x)+g(x) \right] \mathrm{d}x = -6$

Câu 100. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm liên tục trên trên $\mathbb{R}$ và thoả: $\int_0^4 \left[2f(x)-g(x) \right] \mathrm{d}x = 7$, $\int_0^4 \left[f(x)+3g(x) \right] \mathrm{d}x = -7$.

a) $\int_0^4 \left[2f(x)-g(x) \right] \mathrm{d}x = \int_4^0 \left[f(x)+3g(x) \right] \mathrm{d}x$.

b) $\int_0^4 \left[3f(x)+2g(x) \right] \mathrm{d}x = 14$

c) $\int_0^4 f(x) \mathrm{d}x = 2$

d) Biết $\int_0^4 \left[g(x)+x\sqrt{x} \right] \mathrm{d}x = \frac{m}{n}$, với $m,n \in \mathbb{Z}$ và $\frac{m}{n}$ là phân thức tối giản. Khi đó $m+n=54$.

Câu 101. Cho hàm số $f(x)=e^x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

a) $\int_0^1 f(x) \mathrm{d}x = e$.

b) $\int_0^1 f(2x+1) \mathrm{d}x = e^3 - e$.

c) $\int_0^1 \left(f(x)-4x \right) \mathrm{d}x = e-3$.

d) Biết $\int_0^1 \frac{\left(e^{x+1}-1 \right)^2}{f(x)} dx = \frac{a.e^4+b.e^3+c.e+d}{e}$, với $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$. Khi đó $a+2b+3c+4d=0$.

Câu 102. Cho $f(x)=\sin x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \mathrm{d}x = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $\int_0^{\pi} f\left(x-\frac{\pi}{2} \right) dx = 1$.

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2x-f(x) \right) \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}-2$.

d) Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x+\pi)-e^x \right] \mathrm{d}x = -e^{\frac{a\pi}{b}}$, với $a,b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a+b=3$.

Câu 103. Cho $f(x)=2x-1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

a) $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=2$.

b) $\int\limits_{-1}^{1} \left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\dfrac{5}{2}$.

c) $\int\limits_{-1}^{1} x^2 f(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{2}{3}$.

d) Biết $\int\limits_{-1}^{1} x\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\dfrac{a}{b}$, với $a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a+b=1$.

Câu 104. Cho hàm số $f(x)=2x-4$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

a) $\int\limits_{2024}^{2024} f(x)\mathrm{d}x=4048$.

b) $\int\limits_{1}^{4} f^2(x)\mathrm{d}x=-12$.

c) $\int\limits_{-2}^{5} \left|f(x)\right|dx=3^m.5^n$ với $m^2+n^2=4$.

d) $F(a)=\int\limits_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $a=2$.

Câu 105. Cho hàm số $f(x)=4x^3+x$ và $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$, $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

a) $\int\limits_{3}^{5} f(x)\mathrm{d}x=552$.

b) Biết $F(1)=4$ thì $F(2)=\dfrac{41}{2}$.

c) $\int\limits_{0}^{2}\left[1+2x+f(x)\right]\mathrm{d}x=-24$.

d) $\int\limits_{-2}^{1} \left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\dfrac{39}{2}$.

Câu 106. Cho hàm số $f(x)=\left|x^2-9\right|$ với $0\le x\le 9$.

a) $f(x)=\left|x^2-9\right|=\begin{cases}-x^2+9 & \text{khi } 0\le x\le 3\\ x^2-9 & \text{khi } 3\le x\le 9\end{cases}$.

b) $\int\limits_{0}^{9} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{3} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{3}^{9} f(x)\mathrm{d}x$.

c) $\int\limits_{0}^{9} f(x)\mathrm{d}x=-198$.

d) $\int_0^9 \left[f(x) - \sqrt{x} \right] \mathrm{d}x = 214$.

Câu 107. Cho hàm số $f(x) = 2^x - 4$.

a) Hàm số $f(x)$ có tập xác định $D = (0; +\infty)$.

b) $\int_0^3 \left(2^x - 4\right) dx = \frac{7}{\ln 2} - 12$

c) $\int_0^3 f(x+1)\, dx = \frac{14}{\ln 2} + 12$

d) Biết $\int_0^3 \left| f(x) \right| dx = a + \frac{b}{c \ln 2}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản thì khi đó ta có giá trị của biểu thức $a^2 + b^2 + c^2 = 18$

Câu 108. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x \ge 2 \\ x + 1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$.

a) $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x+1)\, dx$

b) $\int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 \left(x^2 - 2x + 3\right) dx$

c) $\int_1^3 \frac{1}{2} f(x)\, dx = \frac{41}{12}$

d) Biết $\int_2^3 \frac{f(x)}{x} dx = \frac{a \ln 3 + b \ln 2 + c}{2}$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Khi đó $a + b + c = 3$.

Câu 109. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{khi } x \ge 2 \\ x - 2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$.

a) Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) $\int_1^2 f(x) \mathrm{d}x = \int_1^2 (x-2) \mathrm{d}x$

c) $\int_2^3 f(x) \mathrm{d}x = \int_2^3 \left(x^2 - 2x\right) \mathrm{d}x$

d) $\int_1^3 f(x) \mathrm{d}x = \frac{6}{5}$

Câu 110. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x + m & \text{khi } x \ge 1 \\ 5 - 2x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ (m là tham số thực) liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng $f(x)$ có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ là $F(x)$ thỏa mãn $F(-2) = -10$.

a) $m = -2$

b) $F(x)=\begin{cases}x^3+x^2-2x+8 & \text{khi } x\geq 1\\ -x^2+5x+4 & \text{khi } x<1\end{cases}$

c) $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{19}{2}$

d) $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a+b=200$.

Câu 111. Một chiếc mô tô đang chạy với vận tốc $18\,(\mathrm{m/s})$ thì người lái hãm phanh. Sau khi hãm phanh, mô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=18-36t\,(\mathrm{m/s})$, trong đó t là khoảng thời gian được tính bằng giây kể từ lúc mô tô bắt đầu hãm phanh.



a) Thời gian kể từ lúc hãm phanh đến lúc xe mô tô dừng hẳn là $0,5$ giây.

b) Quãng đường xe mô tô đi được sau $0,3$ giây kể từ lúc hãm phanh là $3,78$ mét.

c) Quãng đường kể từ lúc hãm phanh đến lúc xe mô tô dừng hẳn là $5,5$ mét.

d) Gia tốc tức thời của chuyển động xe mô tô là $-36\,(\mathrm{m/s^2})$.

Câu 112. Một ô tô đang di chuyển với tốc độ $20(m/s)$ thì hãm phanh nên tốc độ (m/s) theo thời gian t được tính theo công thức $v(t)=20-5t$, với $0\leq t\leq 4$.



a) Sau khi hãm phanh, tốc độ của xe tăng.

b) Tốc độ của xe tại thời điểm 3 (giây) sau hãm phanh là $5(m/s)$

c) Sau khi hãm phanh 4 (giây) thì xe dừng hẳn.

d) Kể từ khi hãm phanh đến khi dừng hẳn, xe đi được quãng đường $30(m)$.

Câu 113. Sau khi xuất phát, xe đạp di chuyển với tốc độ $v(t)=2,01t-0,025t^2$, với $0\le t\le 10$. Trong đó $v(t)$ tính theo (m/s), thời gian t tính theo s với $t=0$ là thời điểm xe đạp xuất phát.



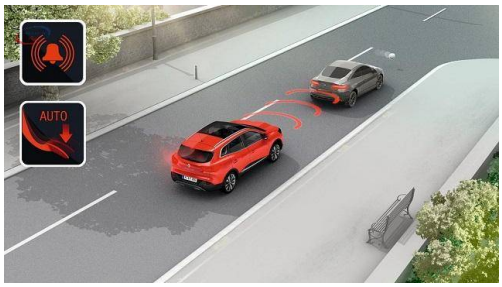
a) Quãng đường xe đạp di chuyển được tính theo công thức là $s(t)=2,01-0,05t(0\le t\le 10)$

b) Quãng đường xe đạp di chuyển được trong 3 giây là $8,82(m)$.

c) Quãng đường xe đạp di chuyển được trong giây thứ 9 xấp xỉ $15,28(m)$ (kết quả làm tròn đến phần trăm của mét).

d) Trong khoảng thời gian không quá 10s đầu, khi vận tốc đạt giá trị lớn nhất thì gia tốc của xe đạp là $2,51(m/s^2)$.

Câu 114. Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu $1(m)$. Một ô tô A đang chạy với vận tốc $15(m/s)$ bỗng gặp ô tô B đang đứng chờ đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều bởi vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t)=15-5t\ (m/s)$. Gọi $s(t)$ là quãng đường ô tô A di chuyển ở thời điểm t giây.



a) Quãng đường ô tô A di chuyển được tính theo công thức là $s(t)=15t-\frac{5}{2}t^2+15$.

b) Thời gian ô tô A từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn hết 3 giây.

c) Quãng đường ô tô A đi được từ lúc ô tô A đạp phanh đến khi dừng hẳn là $20,5(m)$.

d) Để hai ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là $23,5(m)$.

Câu 115. Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng nằm ngang (chiều dương hướng sang phải) với gia tốc phụ thuộc vào thời gian $t(\text{s})$ là $a(t)=2t-7\ (\text{m/s}^2)$. Biết vận tốc đầu bằng $6\ (\text{m/s})$.

a) Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t(\text{s})$ xác định bởi $v(t)=t^2-7t+6$.

b) Tại thời điểm $t=7$ (s), vận tốc của chất điểm là $5(m/s)$

c) Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1 \le t \le 7$ là $18(m)$.

d) Trong 8 giây đầu tiên, thời điểm chất điểm xa nhất về phía bên phải là $t = 6$ (s).

Câu 116. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{180}t^2 + \frac{11}{18}t(m/s)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng $a(m/s^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A.

a) Quãng đường chuyển động của chất điểm A tại thời điểm t theo hàm $s(t) = \frac{1}{540}t^3 + \frac{11}{36}t^2 + C \ (m)$, với C là hằng số.

b) Quãng đường chất điểm B đi được từ lúc xuất phát đến khi gặp chất điểm B là $70(m)$.

c) Vận tốc của chất điểm B là $v_B(t) = a.t \ (m/s)$.

d) Vận tốc của chất điểm B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $10(m/s)$.

Câu 117. Lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của sản phẩm **Iphone 16 Pro** được mô hình hóa bằng công thức $P'(x) = -0,0008x + 10,4$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x sản phẩm.



a) Lợi nhuận khi bán được x sản phẩm **Iphone 16 Pro** được tính bằng $P(x) = -0,0004x^2 + 10,4x$.

b) Lợi nhuận khi bán được 50 sản phẩm **Iphone 16 Pro** đầu tiên là 525 triệu đồng.

c) Sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 55 sản phẩm **Iphone 16 Pro** là $50,1$ triệu đồng.

d) Biết sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên a sản phẩm **Iphone 16 Pro** lớn hơn 517 triệu đồng, khi đó giá trị nhỏ nhất của a là 101.

Câu 118. Giả sử chi phí mua và bảo trì một thiết bị trong x năm có thể được mô hình hóa theo công thức $C = 5000\left(25 + 3\int_0^x t^{\frac{1}{4}}dt\right)$.

a) Chi phí mua 1 sản phẩm là 125000 đồng.

b) Chi phí bảo trì năm đầu tiên của 1 sản phẩm là 10000 đồng.

c) Sau 6 năm thì số tiền mua một sản phẩm bằng số tiền bảo trì sản phẩm đó.

d) Nếu một nhà đầu tư có 10 triệu, thì họ có thể mua và bảo trì tối đa 29 sản phẩm trong 10 năm.

Câu 119. Tại một nhà máy sản xuất một loại phân bón. Gọi $P(x)$ là lợi nhuận (tính theo triệu đồng) thu được từ việc bán x (tấn) sản phẩm trong một tuần. Khi đó đạo hàm $P'(x)$ gọi là lợi nhuận cận biên, cho biết tốc độ tăng lợi nhuận theo lượng sản phẩm bán được. Giả sử lợi nhuận cận biên (tính theo triệu đồng trên tấn) của nhà máy được ước lượng bởi công thức: $P'(x)=17-0,025x$ với $0\le x\le 1000$. Biết nhà máy lỗ 24 triệu đồng nếu không bán được lượng sản phẩm nào trong tuần.



a) Công thức lợi nhuận (tính theo triệu đồng) thu được từ việc bán x (tấn) sản phẩm trong một tuần là $P(x)=17x-0,025x^2$.

b) Lợi nhuận nhà máy thu được khi bán 80 tấn sản phẩm trong tuần là 1 tỉ 256 triệu đồng.

c) Nếu nhà máy bán được từ 1,2 tấn sản phẩm trên tuần trở lên thì nhà máy luôn có lãi.

d) Lợi nhuận nhà máy thu được lớn nhất khi bán 680 tấn sản phẩm trong tuần.

Câu 120. Ở nhiệt độ $36°C$, một phản ứng hóa học từ chất đầu A, chuyển hóa thành chất sản phẩm B theo phương trình: $A\to B$. Giả sử $y(x)$ là nồng độ chất A (đơn vị mol L^{-1}) tại thời điểm x (giây), $y(x)>0$ với $x\ge 0$, thỏa mãn hệ thức: $y'(x)=-7.10^{-4}y(x)$ với $x\ge 0$. Biết rằng tại $x=0$, nồng độ (đầu) của A là $0,05$ mol L^{-1}. Xét hàm số $f(x)=\ln y(x)$ với $x\ge 0$.

a) $f'(x)=-7.10^{-4}$

b) $f(x)=-7.10^{-4}x+\ln(0,05)$

c) $y(30)-y(15)=-6.10^{-4}$

d) Nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây gần bằng $0,08$ (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Câu 121. Giả sử tốc độ $v(m/s)$ của một thang máy di chuyển từ tầng 1 lên tầng cao nhất theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức: $v(t)=\begin{cases} t & \text{khi } 0\le t\le 2 \\ 2 & \text{khi } 2<t\le 20 \\ 12-0,5t & \text{khi } 20<t\le 24 \end{cases}$.



a) Tốc độ tại thời điểm giây thứ 2 của thang máy là $2(m/s)$.

b) Gia tốc chuyển động của thang máy tại thời điểm giây thứ 10 là $2(m/s^2)$.

c) Quãng đường chuyển động của thang máy từ tầng 1 lên tầng cao nhất là $40(m)$.

d) Tốc độ trung bình của thang máy từ tầng 1 lên tầng cao nhất là $1,5(m/s)$.

Câu 122. Khảo sát chuyển động của xe khách trong 30 phút trên một quãng đường ta thu được kết quả: vận tốc v (mét/phút) của xe khách theo thời gian t (phút) được biểu diễn bởi hàm số:

$$v(t)=\begin{cases}100t & \text{khi } 0\le t\le 10\\ 20t+800 & \text{khi } 10<t\le 20\\ -10t+1400 & \text{khi } 20<t\le 30\end{cases}$$



a) Vận tốc của xe khách ở phút thứ 8 là 800 (mét/phút)

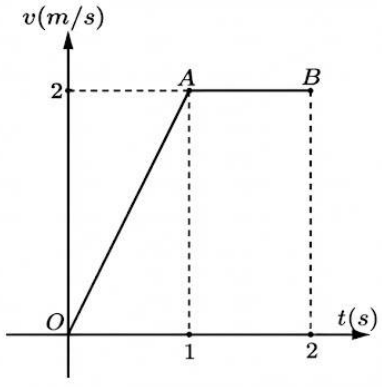
b) Vận tốc của xe khách ở phút thứ 20 là 1000 (mét/phút)

c) Quãng đường chuyển động của xe khách trong 30 phút khảo sát là $2750(m)$.

d) Vận tốc trung bình của xe khách trong 30 phút khảo sát là 910 (mét/phút) (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét/phút)

Câu 123. Một chiếc xe đạp chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)(m/s)$ có dạng đường thẳng tại thời điểm $0\le t\le 1(s)$ và $1<t\le 2(s)$ với vận tốc được cho bởi đồ thị trong hệ trục tOv như hình sau:





Gọi quãng đường của chiếc xe đạp tại thời điểm t là $s(t)$.

a) Vận tốc của chiếc xe đạp tại thời điểm t được xác định bởi $v(t)=\begin{cases}2t & \text{khi } 0\le t\le 1\\ 2 & \text{khi } 1<t\le 2\end{cases}$.

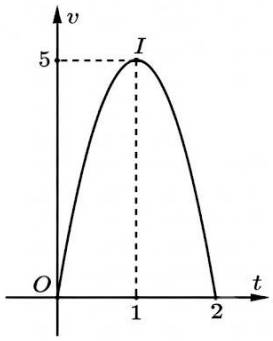
b) Quãng đường chiếc xe đạp đi được trong 1 giây đầu tiên được xác định bởi công thức $s(t)=\int_0^1 v(t)\,dt$

c) Quãng đường chiếc xe đạp đi được trong khoảng thời gian từ 1 giây đến 2 giây được xác định bởi công thức $s(t)=\int_0^2 v(t)\,dt$

d) Quãng đường mà chiếc xe đạp đi được trong 2 giây đầu tiên là $4(m)$.

Câu 124. Bạn Nam chạy bộ trong 2 giờ, vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị là một phần của đường Parabol với đỉnh $I(1;5)$ và trục đối xứng song song với trục tung Ov như hình vẽ.





a) Vận tốc chạy bộ của bạn Nam trong giờ thứ 2 tăng dần.

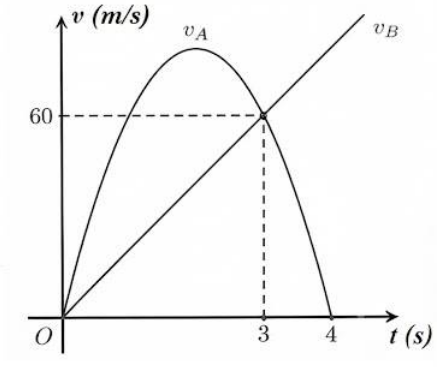
b) Vận tốc lớn nhất trong 2 giờ chạy của bạn Nam là $5(km/h)$.

c) Gia tốc chạy bộ của bạn Nam tại thời điểm 1,5 giờ là $5(km/h)$.

d) Quãng đường bạn Nam chạy được trong 1 giờ 30 phút kể từ lúc bắt đầu chạy là $6,63(km)$ (kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân).

Câu 125. Cho đồ thị biểu diễn vận tốc của hai xe A và B khởi hành cùng một lúc và cùng vạch xuất phát, đi cùng chiều trên một con đường. Biết đồ thị biểu diễn vận tốc $v_A(t)\ (m/s)$ của xe A là một đường Parabol và đồ thị biểu diễn vận tốc $v_B(t)\ (m/s)$ của xe B là một đường thẳng như hình vẽ bên. Biết rằng xe A sẽ dừng lại khi vận tốc bằng 0.





a) Vận tốc của xe B tại thời điểm t giây là $v_B(t)=20t\ (m/s)$.

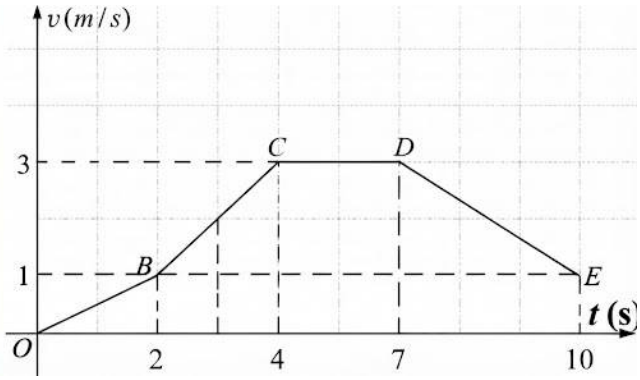
b) Vận tốc của xe A tại thời điểm t giây là $v_A(t)=20t^2-80t\ (m/s)$.

c) Quãng đường xe A đi được sau 4 giây là $213,3(m)$ (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của mét).

d) Sau 5 giây kể từ lúc xuất phát thì khoảng cách giữa hai xe là $38,7(m)$ (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của mét).

Câu 126. Cho hình vẽ dưới đây là đồ thị vận tốc $v(t)\ (m/s)$ của một ca nô chạy trên sông trong 10 giây đầu tiên ($t=0$ là thời điểm ca nô bắt đầu chuyển động).





a) Vận tốc chạy của ca nô chạy trong khoảng thời gian từ 4 giây đầu tiên tăng dần.

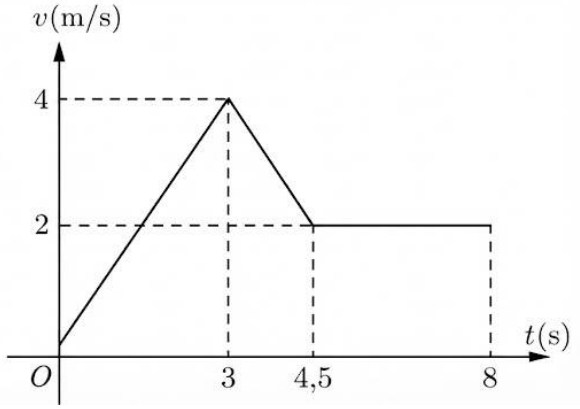
b) Trong 10 giây đầu tiên, vận tốc ca nô chạy lớn nhất trong 4 giây.

c) Trong 10 giây đầu tiên, ca nô chạy với vận tốc $v(t)$ theo hàm $v(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t & \text{khi } 0\le t\le 2\\ t-1 & \text{khi } 2<t\le 4\\ 3 & \text{khi } 4<t\le 7\\ -\frac{2}{3}t+\frac{23}{3} & \text{khi } 7<t\le 10\end{cases}$

d) Vận tốc chạy trung bình của ca nô 10 giây đầu tiên là $2,5(m/s)$.

Câu 127. Một chiếc máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t)\ (m/s)$ trong 8 giây đầu tiên ($t=0$ là thời điểm máy bay bắt đầu chuyển động) được cho bởi đồ thị ở hình vẽ dưới đây.





a) Trong 8 giây đầu tiên, vận tốc của máy bay lớn nhất là $4(m/s)$.

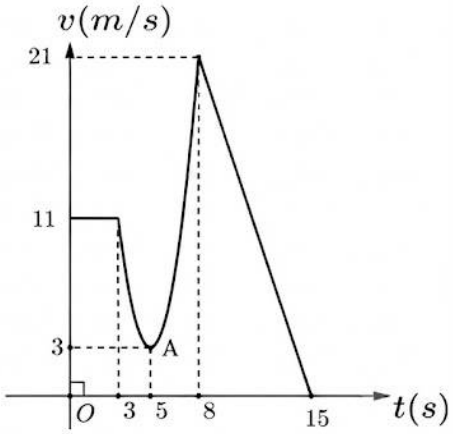
b) Trong 8 giây đầu tiên, vận tốc của máy bay không đổi trong thời gian 3 giây.

c) Quãng đường mà máy bay di chuyển được trong 3 giây đầu tiên là $11(m)$.

d) Vận tốc chạy trung bình của máy bay 8 giây đầu tiên là $4,521(m/s)$.

Câu 128. Chất chiếc ca nô chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)(m/s)$ có dạng đường thẳng tại thời điểm $0 \le t \le 3(s)$ và $8 \le t \le 15(s)$ và $v(t)$ có dạng đường Parabol khi $3 \le t \le 8(s)$ như đồ thị bên dưới.





a) Vận tốc của ca nô tại thời điểm $t = 5(s)$ là $3(m/s)$.

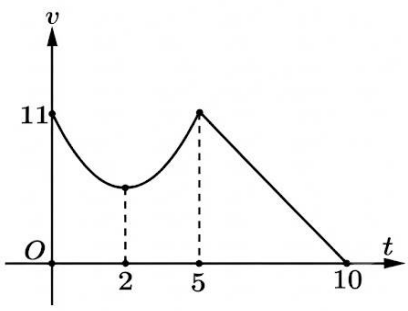
b) Quãng đường ca nô di chuyển được trong 3 giây đầu tiên là: $\int_0^3 11dt\ (m)$

c) Quãng đường ca nô đi được trong khoảng thời gian từ 8 giây đến 15 giây bằng $70,5(m)$

d) Vận tốc trung bình v_{tb} của ca nô trong khoảng thời gian từ 3 đến 8 giây bằng $7,67(m/s)$ (kết quả làm tròn đến phần trăm của mét/giây).

Câu 129. Một ô tô chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)(m/s)$ có dạng đường Parabol khi $0 \le t \le 5(s)$ và $v(t)$ có dạng đường thẳng khi $5 \le t \le 10(s)$. Biết đỉnh Parabol là $I(2,3)$ như đồ thị bên dưới.





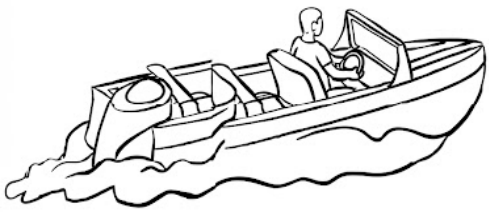
a) Vận tốc của ô tô tăng dần từ giây thứ 3 đến giây thứ 5.

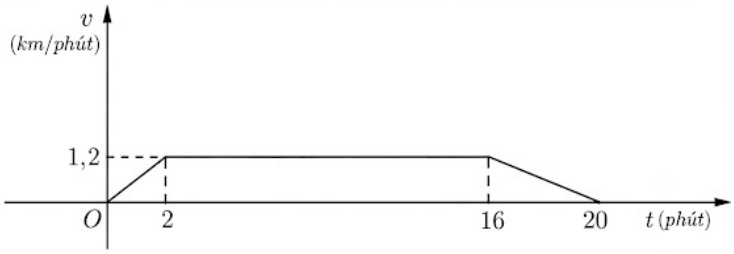
b) Vận tốc của ô tô tại thời điểm $t = 4$ giây là $11(m/s)$.

c) Gia tốc của ô tô tại thời điểm $t = 6$ giây là $-35,2(m/s^2)$.

d) Quãng đường ô tô đi được trong thời gian $0 \le t \le 10(s)$ là $60(m)$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của mét).

Câu 130. Tốc độ $v(km/phút)$ của một ca nô cao tốc thay đổi theo thời gian $t(phút)$ ($t = 0$ là thời điểm ca nô bắt đầu chuyển động) như đồ thị ở hình vẽ sau:





a) Tốc độ của ca nô tăng dần trong 16 phút đầu tiên kể từ khi nó bắt đầu chuyển động.

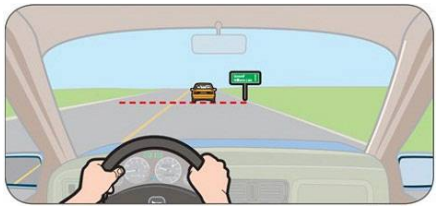
b) Tốc độ của ca nô ở phút thứ 17 là $0,9\left(km/phút \right)$.

c) Quãng đường ca nô di chuyển được trong 20 phút đầu tiên là $19,4\left(km \right)$.

d) Tốc độ trung bình của ca nô trong khoảng thời gian 20 phút đầu tiên là $1,02\left(km/phút \right)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 131. Một ô tô đang chạy với vận tốc là 12 (m/s) thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-6t+12$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến lúc ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?



Trả lời: ……..

Câu 132. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?



Trả lời: ……..

Câu 133. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{100}t^2+\frac{13}{30}t\,(\text{m/s})$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc bằng $a\,(\text{m/s}^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng bao nhiêu mét/giây?

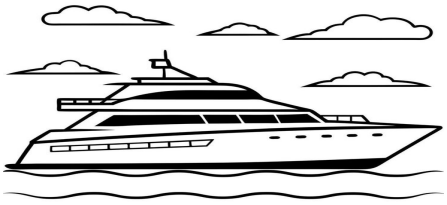
Trả lời: ……..

Câu 134. Một ô tô chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t)=7t$ (m/s). Đi được $5(s)$ người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-35(m/s^2)$. Tính quãng đường (đơn vị mét) của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn?



Trả lời: ……..

Câu 135. Một chiếc ca nô đang chuyển động trên sông với vận tốc $v(t)=4t+3\ (m/s)$, với t là thời gian tính bằng giây. Quãng đường chiếc ca nô đi được trong khoảng từ 3 đến 5 giây là bao nhiêu mét?



Trả lời: ……..

Câu 136. Một người đang lái xe chiếc ca nô với vận tốc $24(m/s)$ thì người lái phát hiện phía trước có chướng ngại vật nên cần giảm tốc độ của ca nô. Sau khi giảm tốc độ, ca nô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-8t+24(\text{ m/s})$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc giảm tốc độ. Hỏi từ lúc giảm tốc độ đến khi ca nô dừng hẳn, ca nô di chuyển quãng đường bao nhiêu mét?



Trả lời: ……..

Câu 137. Một chiếc mô tô đang chuyển động trên đường với vận tốc $v(t)=t^2-4t+1(\text{ m/s})$, với t là thời gian tính bằng giây. Quãng đường xe mô tô đi được trong khoảng từ 2 đến 8 giây là bao nhiêu?



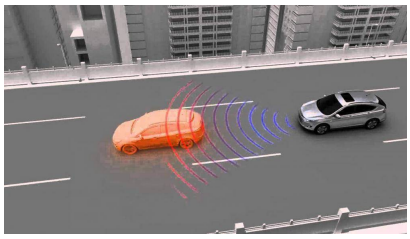
Trả lời: ……..

Câu 138. Bạn Minh Hiền đang lái xe với vận tốc $5(m/s)$ thì nhận thấy phía trước đèn giao thông đang chuẩn bị chuyển sang đèn đỏ nên cần giảm tốc độ của xe để đợi đèn đỏ. Sau khi đạp phanh, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-0,5t+5(\text{ m/s})$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi xe dừng hẳn, xe di chuyển quãng đường bao nhiêu mét?



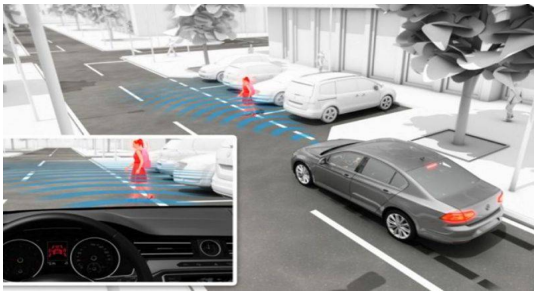
Trả lời: ……..

Câu 139. Một ô tô bắt đầu chuyển động thẳng đều với vận tốc $v_0\,(m/s)$, sau 6 giây chuyển động thì gặp chướng ngại vật nên bắt đầu giảm tốc độ với vận tốc chuyển động $v(t)=-\frac{5}{2}t+a\ (m/s),\ (t\geq 6)$ cho đến khi dừng hẳn. Biết rằng kể từ lúc chuyển động đến lúc dừng thì ô tô đi được quãng đường là 80m. Giá trị của v_0 bằng bao nhiêu?



Trả lời: ……..

Câu 140. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t)=2t\ (\text{m/s})$. Đi được 12 giây, người lái xe gặp chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-12\left(\text{m/s}^2\right)$. Tính quãng đường đi được của ôtô từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi dừng hẳn (đơn vị mét)?



Trả lời: ……..

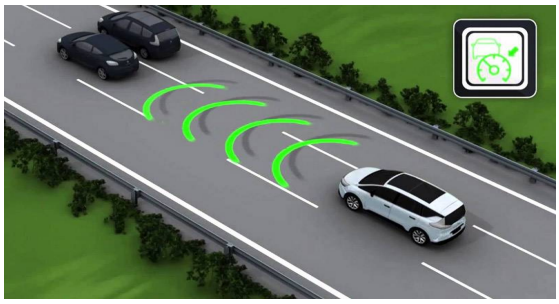
Câu 141. Một ô tô đang chạy với vận tốc $10m/s$ thì gặp chướng ngại vật, người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+10(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng bằng bao nhiêu mét?



Trả lời: ……..

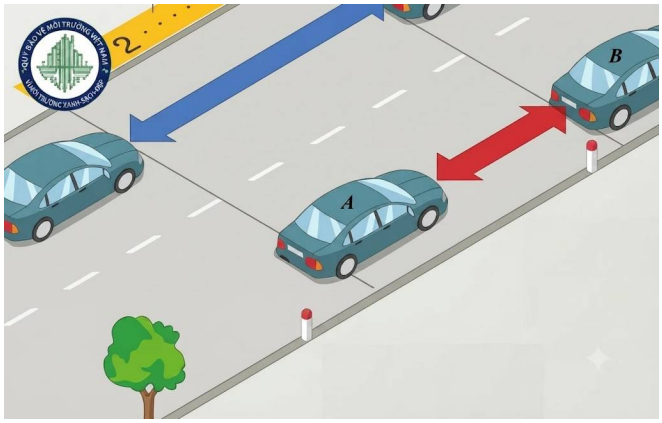
Câu 142. Một ô tô đang chạy với tốc độ $20(m/s)$ thì gặp chướng ngại vật, người lái đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+20(m/s)$, trong đó t là khoảng thời

gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?



Trả lời: ……..

Câu 143. Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu 1m. Một ô tô A đang chạy với vận tốc $16\,\text{m/s}$ bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t)=16-4t$ (đơn vị tính bằng m/s), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để có 2 ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu mét?



Trả lời: ……..

Câu 144. Một chiếc máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t)=t^2+10t\ \ (m/s)$ với t là thời gian được tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc $200(m/s)$ thì rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Trả lời: ……..

Câu 145. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t)=7t\ \ (\text{m/s})$. Đi được 5s, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc

$a=-70\ \left(\text{m/s}^2\right)$. Tính quãng đường (đơn vị mét) đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn (làm tròn kết quả đến phần chục của mét).



Trả lời: ……..

Câu 146. Một ôtô đang dừng và bắt đầu chuyển động theo một đường thẳng với gia tốc $a(t)=6-2t\ \left(m/s^2\right)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc ôtô bắt đầu chuyển động. Hỏi quảng đường ôtô đi được từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi vận tốc của ôtô đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu mét?



Trả lời: ……..

Câu 147. Một xe gắn máy đang chuyển động với vận tốc $10\,\text{m/s}$ thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian là $a(t)=t^2+3t$. Tính quãng đường (đơn vị mét) vật đi được trong khoảng thời gian 6 giây kể từ khi xe gắn máy bắt đầu tăng tốc.



Trả lời: ……..

Câu 148. Một xe môtô đang chuyển động với vận tốc $v_0=15\,\text{m/s}$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=t^2+4t\ \left(\text{m/s}^2\right)$. Tính quãng đường (đơn vị mét) xe môtô đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).



Trả lời: ……..

Câu 149. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{120}t^2+\frac{58}{45}t(m/s)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a(m/s^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng bao nhiêu mét/giây?

Trả lời: ……..

Câu 150. Một chiếc xuồng chuyển động với gia tốc $a(t)=\frac{1}{t^2+3t+2}(\text{m/s}^2)$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ thời điểm ban đầu. Vận tốc chuyển động của chiếc xuồng là $v(t)$. Vào thời điểm $t=11(\text{s})$ thì vận tốc của chiếc xuồng là $v(\text{m/s})$, biết vận tốc ban đầu của chiếc xuồng là $v_0=3\ln 2(\text{m/s})$. Tính v (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



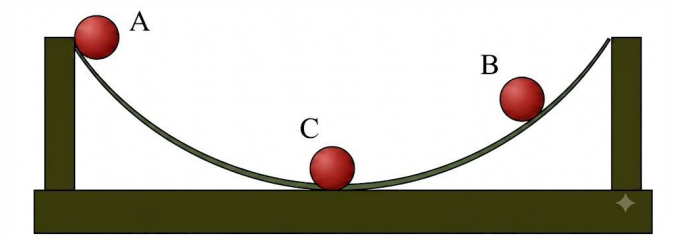
Trả lời: ……..

Câu 151. Một chiếc ca nô chạy trên sông có vận tốc theo hàm $v(t)=3t^2+5\ (\text{m/s})$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc ca nô bắt đầu chuyển động. Quãng đường ca nô đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 bằng bao nhiêu mét?



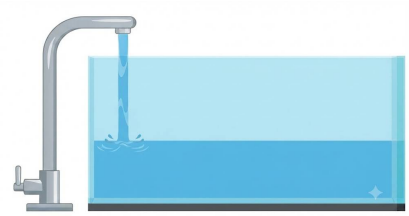
Trả lời: ……..

Câu 152. Một viên bi chuyển động từ vị trí A đến vị trí B với gia tốc là hàm $a(t)=2\cos t(\text{m/s}^2)$, biết rằng tại thời điểm $t=0(s)$ viên bi bắt đầu chuyển động (vị trí A) có vận tốc bằng 0 và đến vị trí B tại thời điểm $t=\pi(s)$. Tính quãng đường (đơn vị mét) viên bi đi được từ vị trí A đến vị trí B.



Trả lời: ……..

Câu 153. Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t)=6at^2+2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là $90\ \text{m}^3$ và sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là $504\ \text{m}^3$. Tính thể tích (đơn vị mét khối) của lượng nước trong bể sau khi bơm được 9 giây.



Trả lời: ……..

Câu 154. Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x)=-0,0004x+9,3$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm. Khi đó, sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 125 đơn vị sản phẩm bằng bao nhiêu triệu đồng? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Trả lời: ……..

Câu 155. Giá trị trung bình của hàm số liên tục $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ được định nghĩa là $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Giả sử lượng khách tham quan (đơn vị nghìn người) tháp Bà Ponaga Nha Trang trung bình tại thời điểm t ngày trong khoảng thời gian từ ngày 01/05/2026 đến ngày 31/05/2026 được mô hình hóa bởi hàm số: $Q(x)=100+10(t-6)$ với $1\le t\le 31$. Lượng khách tham quan trung bình tháng 05/2026 ở tháp Bà Ponaga Nha Trang là bao nhiêu nghìn người?

Trả lời: ……..

Câu 156. Giá trị trung bình của hàm số liên tục $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ được định nghĩa là $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Giả sử nhiệt độ (tính bằng $^\circ\text{C}$) tại thời điểm t giờ trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa ở Thành phố Nha Trang vào ngày 24/12/2026 được mô hình hóa bởi hàm số

$$T(t)=2t+11, \text{ với } 6\le t\le 12.$$

Nhiệt độ trung bình từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa ngày 24/12/2026 của Thành phố Nha Trang là bao nhiêu $^\circ\text{C}$?

Trả lời: ……..

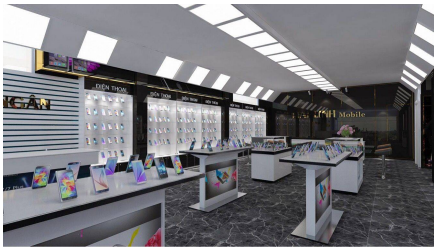
Câu 157. Giá trị trung bình của hàm số liên tục $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ được định nghĩa là $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Giả sử lượng mưa trung bình (tính bằng mm) tại thời điểm t ngày trong khoảng thời gian từ ngày 01/12/2024 đến ngày 31/12/2024 ở Thành phố Nha Trang được mô hình hóa bởi hàm số:

$M(x)=80+10(t-8)$ với $1\le t\le 31$.

Lượng mưa trung bình tháng 12/2024 của Thành phố Nha Trang là bao nhiêu mm?

Trả lời: ……..

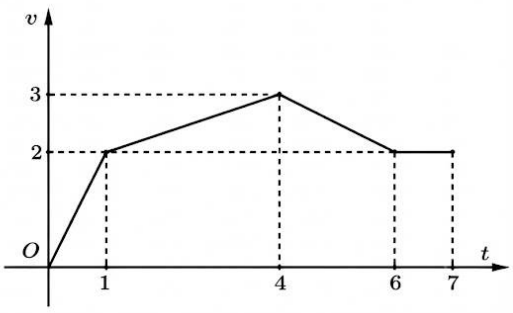
Câu 158. Cửa hàng điện thoại di động của chị Minh Nhàn có lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x)=-0,01x+2$. Lợi nhuận của sản phẩm trên khi doanh số là 200 với sản phẩm lớn hơn doanh số 150 sản phẩm là bao nhiêu triệu đồng, biết $P(x)$ là lợi nhuận tính bằng triệu đồng?



Trả lời: ……..

Câu 159. Một chiếc xe ô tô chuyển động với đồ thị vận tốc được biểu diễn theo đường gấp khúc được minh họa trên hệ trục Otv như hình vẽ (mỗi đơn vị trên Ot ứng với 1 phút và mỗi đơn vị trên Ov ứng với $0,4\left(km/phút\right)$).





Quãng đường mà xe di chuyển trong 7 phút là bao nhiêu km?

Trả lời: ……..

Câu 160. Biết rằng tốc độ v (km/phút) của một canô cao tốc thay đổi theo thời gian t (phút) được cho bởi công thức sau: $v(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{3} & \text{khi } 0\le t<3\\ 1 & \text{khi } 3\le t<10\\ 5-0,4t & \text{khi } 10\le t\le 18\end{cases}$.

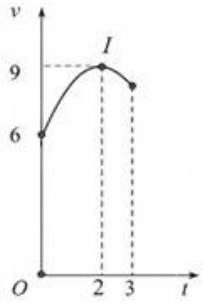


Quãng đường canô di chuyển được trong khoảng từ 0 đến 18 phút là bao nhiêu km?

Trả lời: ……..

Câu 161. Bạn Minh Hiền chạy bộ trong 3 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc thời gian $t(h)$ có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên dưới. Tính quãng đường mà bạn Minh Hiền chạy được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến phần chục của kilômét).

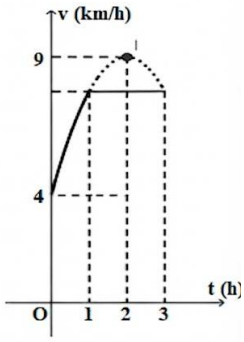




Trả lời: ……..

Câu 162. Một vận động viên chạy bộ trong 3 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị vận tốc như hình bên dưới. Trong thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường mà vật chuyển động được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến phần chục của kilômét).

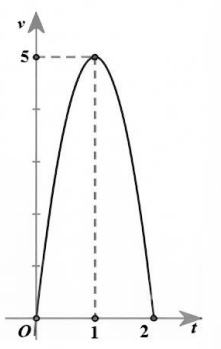




Trả lời: ……..

Câu 163. Một người chạy trong 2 giờ, vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị là 1 phần của đường Parabol với đỉnh $I(1;5)$ và trục đối xứng song song với trục tung Ov như hình vẽ bên dưới. Tính quãng đường người đó chạy được trong 1 giờ 30 phút kể từ lúc bắt đầu chạy (kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân của kilômét).

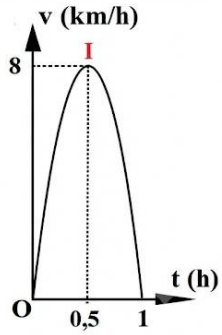




Trả lời: ……..

Câu 164. Một người chạy bộ trong thời gian 1 giờ, vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị là một phần parabol với đỉnh $I\left(\frac{1}{2};\ 8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên dưới. Tính quãng đường (đơn vị km) người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi chạy.

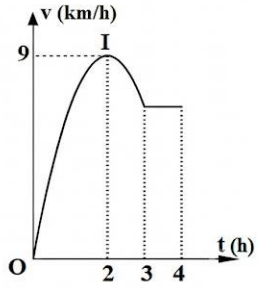




Trả lời: ……..

Câu 165. Một vận động viên leo núi đi bộ trong 4 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc thời gian $t(h)$ có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ, kể từ khi bắt đầu vận động viên đó đi, đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường (đơn vị km) mà vận động viên leo núi đi bộ được trong 4 giờ đó.

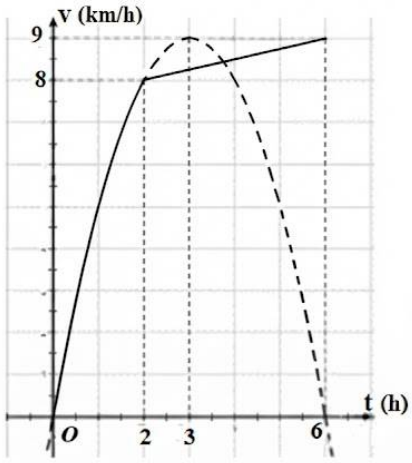




Trả lời: ……..

Câu 166. Một chiếc xuồng đi trên sông trong 6 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị như hình bên dưới. Trong khoảng thời gian 2 giờ từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị là một phần đường Parabol có đỉnh $I(3;9)$ và có trục đối xứng song song với trục tung. Khoảng thời gian còn lại, đồ thị vận tốc là một đường thẳng có hệ số góc bằng $\frac{1}{4}$. Tính quãng đường (đơn vị km) mà chiếc xuồng đi được trong 6 giờ (kết quả làm tròn đến 1 chữ số thập phân của kilômét).

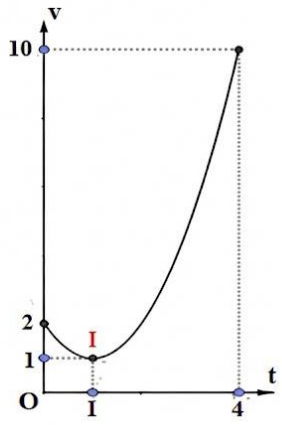




Trả lời: ……..

Câu 167. Một chiếc xuồng đi trên sông trong 4 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc thời gian $t(h)$ có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;1)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên dưới. Tính quãng đường (đơn vị km) mà chiếc xuồng đi được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát (kết quả làm tròn đến 1 chữ số thập phân của kilômét).





Trả lời: ……..

Câu 168. Biết $\int_0^2 \left(f(x)+3x^2 \right) dx = 10$. Tính $\int_0^2 f(x)\,dx$.

Trả lời: ……..

Câu 169. Cho $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$. Tính tích phân $I = \int_0^1 \left[2f(x) - 3x^2 \right] dx$

Trả lời: ……..

Câu 170. Biết $\int_1^{2025} f(x)\,dx = -3$ và $\int_{2025}^1 g(x)\,dx = 2$. Tính $I = \int_1^{2025} \left[2f(x) + \frac{1}{2} g(x) \right] dx$.

Trả lời: ……..

Câu 171. Cho $\int_{-1}^2 f(x)dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x)dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 \left[x + 2f(x) + 3g(x) \right] dx$.

Trả lời: ……..

Câu 172. Biết $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-2$ và $\int_1^0 g(x)\mathrm{d}x=-3$.. Tính $I=\int_0^1\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$.

Trả lời: ……..

Câu 173. Biết $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=3$ và $\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x=2$ và $\int_1^2 h(x)\mathrm{d}x=2025$. Tính $I=\int_1^2\left[f(x)-g(x)+h(x)\right]\mathrm{d}x$.

Trả lời: ……..

Câu 174. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;10]$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x)\,dx=7$, $\int_2^6 f(x)\,dx=3$. Tính $P=\int_0^2 f(x)\,dx+\int_6^{10} f(x)\,dx$.

Trả lời: ……..

Câu 175. Giả sử $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=3$ và $\int_0^5 f(z)\mathrm{d}z=9$. Tổng $I=\int_1^3 f(t)\mathrm{d}t+\int_3^5 f(t)\mathrm{d}t$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 176. Cho $\int_{-1}^2 f(t)\mathrm{d}t=2$ và $\int_{-1}^2 g(x)\mathrm{d}x=-1$. Tính $I=\int_{-1}^2\left[x+2f(x)-3g(x)\right]\mathrm{d}x$

Trả lời: ……..

Câu 177. Nếu $\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x=-2$ và $\int_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x=-6$ thì $\int_1^4\left[2f(x)-g(x)+1\right]\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 178. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x=10$, $\int_3^5 f(x)\mathrm{d}x=1$. Khi đó $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 179. Nếu $\int_0^1 2f(x)\mathrm{d}x=6$ thì $\int_0^1\left[\frac{1}{3}f(x)+2x\right]\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 180. Cho $\int_0^{\ln 2}\left(2f(x)+e^x\right)\mathrm{d}x=5$. Khi đó $\int_0^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 181. Nếu $\int_0^{\ln 3}\left[f(x)+e^x\right]\mathrm{d}x=6$ thì $\int_0^{\ln 3} f(x)\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 182. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\int_0^{\pi}\left[f(x)+\sin x\right]\mathrm{d}x=10$. Tính

$I=\int\limits_{0}^{\pi} f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Trả lời: ……..

Câu 183. Nếu $\int\limits_{0}^{\pi} f\left(x\right)\mathrm{d}x=3$ thì $\int\limits_{0}^{\pi}\left[f\left(x\right)+\sin\dfrac{x}{2}\right]\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 184. Tích phân $\int\limits_{-e}^{-1}\dfrac{2}{x}\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 185. Biết $\int\limits_{0}^{1}\dfrac{e^{2x}-4}{e^{x}+2}dx=a.e+b$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a+b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 186. Biết $\int\limits_{0}^{1}\dfrac{e^{x}}{2^{x}}dx=\dfrac{e+a}{b+c\ln 2}$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Khi đó $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 187. Biết $\int\limits_{1}^{2}e^{x}\left(1-\dfrac{e^{-x}}{x}\right)dx=e^{2}+a.e+b\ln 2$, với $a,b\in\mathbb{Z}$. Khi đó $2a+3b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 188. Biết $\int\limits_{0}^{1}\dfrac{e^{2x-1}-e^{-3x}+1}{e^{x}}dx=\dfrac{a.e^{4}+b}{e^{4}}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a-2027b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 189. Biết $\int\limits_{0}^{1}\dfrac{\left(e^{-x}+2\right)^{2}}{e^{x-1}}dx=\dfrac{ae^{3}+be^{2}+ce+d}{3e^{2}}$, với $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của $P=a+b+c+d$.

Trả lời: ……..

Câu 190. Biết $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}dx=a\sqrt{3}+\dfrac{\pi}{b}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a+b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 191. Cho $\int\limits_{0}^{m}\left(3x^{2}-2x+1\right)\mathrm{d}x=6$. Giá trị của tham số m bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 192. Biết $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int\limits_1^2\left[2+f(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 193. Biết $F(x)=x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int\limits_1^2\left(2+f(x)\right)\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 194. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3^x$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0)=0$. Biết $F(1)=\dfrac{a}{b\ln 3}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a+b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 195. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)=2^x$ và $F(0)=0$. Biết $F(1)=a.\log_b e$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $2024a+b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 196. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(2)-F(0)=5$. Khi đó $\int\limits_0^2 3f(x)\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 197. Biết $F(x)=x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int\limits_1^2\left(2+f(x)\right)\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 198. Có hai giá trị của số thực a là $a_1,a_2\,(0<a_1<a_2)$ thỏa mãn $\int\limits_1^a(2x-3)\mathrm{d}x=0$. Hãy tính $T=3^{a_1}+3^{a_2}+\log_2\left(\dfrac{a_2}{a_1}\right)$.

Trả lời: ……..

Câu 199. Cho $I=\int\limits_0^1\left(4x-2m^2\right)\mathrm{d}x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $I+6>0$?

Trả lời: ……..

Câu 200. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của a để $\int_0^a(2x-3)\mathrm{d}x\le 4$?

Trả lời: ……..

Câu 201. Có bao nhiêu số thực b thuộc khoảng $(\pi;3\pi)$ sao cho $\int_{\pi}^{b} 2\cos x dx = 1$?

Trả lời: ……..

Câu 202. Kết quả tích phân $\int_{0}^{2} |2x-3| dx$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 203. Cho $0 \le m \le 2$ và tích phân $\int_{0}^{m} |x-2| dx = 2$. Khi đó giá trị của tham số m bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 204. Kết quả tích phân $\int_{-2}^{2} |x^2-1| dx$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 205. Biết $I = \int_{1}^{5} \frac{2|x-2|+1}{x} dx = 4 + a\ln 2 + b\ln 5$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $S = a + b$.

Trả lời: ……..

Câu 206. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & khi\ x \ge 1 \\ x+1 & khi\ x < 1 \end{cases}$. Biết $\int_{2}^{0} -3t^2 f(t) dt = \frac{a}{b}$., với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a+b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 207. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2-1 & \text{khi } x < 0 \\ x-1 & \text{khi } 0 \le x \le 2 \\ 5-2x & \text{khi } x > 2 \end{cases}$. Biết $\int_{-5}^{9} \frac{1}{7} f(t) dt = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a-b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 208. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2-x & \text{khi } x \ge 0 \\ x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Biết $\int_{-1}^{1} f(x) dx + \int_{-1}^{3} f(x) dx = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a-2b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 209. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 4x & \text{khi } x > 2 \\ -2x+12 & \text{khi } x \le 2 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \int_{1}^{2} f(t) dt + \frac{1}{2}\int_{5}^{10} f(t) dt$.

Trả lời: ……..

Câu 210. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & \text{khi } x\ge 2\\ x^2-2x+3 & \text{khi } x<2\end{cases}$. Tích phân Biết $\int\limits_1^3 \frac{1}{2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a-3b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 211. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & \text{khi } x\ge 1\\ x+1 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Tích phân Biết $\int\limits_2^0 -3t^2 f(t)\mathrm{d}t=\frac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a-2b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 212. Cho số thực a và hàm số $f(x)=\begin{cases}2x & \text{khi } x\le 0\\ a\left(x-x^2\right) & \text{khi } x>0\end{cases}$. Biết tích phân $\int\limits_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=1$, tính giá trị của a.

Trả lời: ……..

Câu 213. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+a & \text{khi } x\ge 1\\ 3x^2+b & \text{khi } x<1\end{cases}$ thỏa mãn $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=13$. Tính $T=a+b-ab$.

Trả lời: ……..

Câu 214. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)=\begin{cases}x+m & ,x\ge 0\\ e^{2x} & ,x<0\end{cases}$ (m là hằng số). Biết $\int\limits_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x=a+\frac{b}{e^2}$ trong đó a,b là các số hữu tỉ. Tính $2a+4b^2$.

Trả lời: ……..

Câu 215. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, biết $f(x)=16x^3-15x^2+2x\int\limits_1^2 f(t)dt-21$. Giá trị của $f(2)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 216. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)=(2x+1)\left[f(x)\right]^2, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=-1$. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^1 \left(x^3-1\right)f(x)\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 217. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f'(x).e^{f^3(x)}-\frac{2x}{f^2(x)}=0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(1)=0$, tính tích phân $I=\int\limits_0^{2027}\frac{1}{\sqrt[3]{2\ln x}}.f(x)\mathrm{d}x$.

Trả lời: ……..

Câu 218. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và thỏa mãn $f(0)=1,\ \left(f'(x)\right)^3=e^x\left(f(x)\right)^2, \forall x\in\mathbb{R}$.

Biết $\int_1^2 f(x)dx=a.e^2+b.e$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b$.

Trả lời: ……..

Câu 219. Cho hàm số $f(x)>0$ và thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=e^x,\ \ \forall x\in R$ và $f(0)=f'(0)=1$.

Biết $\int_1^2 f(x)dx=a.e+b\sqrt{e}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $a-b$.

Trả lời: ……..

Câu 220. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=2x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=2$. Tính $I=\int_1^2 f^2(x)dx$.

Trả lời: ……..

Câu 221. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn: $\left(f'(x)\right)^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x,\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 222. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=x^3-2x, \forall x\in R$ và $f(0)=f'(0)=2$.

Biết $f^2(2)=\frac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a-b$.

Trả lời: ……..

Câu 223. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(x+2)f(x)+(x+1)f'(x)=\mathrm{e}^x$ và $f(0)=\frac{1}{2}$.

Biết $\int_1^2 (2x+2)f(x)dx=a.e^2+b.e$, với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $a-b$.

Trả lời: ……..

Câu 224. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên R thỏa mãn điều kiện $f(x)+x\left(f'(x)-2\sin x\right)=x^2\cos x, x\in R$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$. Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)}{x}dx$

Trả lời: ……..

Câu 225. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x)+f(x)=2x\ \ \forall x\in(0;+\infty)$,

$f(1)=1$. Biết $f(4)=\frac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b$.

Trả lời: ……..

Câu 226. Cho hàm số $f(x)$ không âm, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1)=1$, $\left[2f(x)+1-x^2\right]f'(x)=2x\left[1+f(x)\right]$, $\forall x\in[0;1]$. Biết $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b$.

Trả lời: ……..

Câu 227. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $\left(f'(x)\right)^2+4f(x)=8x^2+4, \forall x\in[0;1]$ và $f(1)=2$. Biết $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b$.

Trả lời: ……..

Câu 228. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\begin{cases} f(0)=f'(0)=1 \\ f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y)-1 \end{cases}$, với $x,y\in\mathbb{R}$. Tính $\int\limits_0^1 f(x-1)\mathrm{d}x$.

Trả lời: ……..

Câu 229. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x.f(x).f'(x)=f^2(x)-x, \forall x\in\mathbb{R}$ và có $f(2)=1$. Tích phân $I=\int\limits_0^2 f^2(x)dx$

Trả lời: ……..

Câu 230. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;2]$ thỏa mãn $f(1)=g(1)=0$ và $\begin{cases} \frac{x}{(x+1)^2}g(x)+2024x=(x+1)f'(x) \\ \frac{x^3}{x+1}g'(x)+f(x)=2025x^2 \end{cases}$, $\forall x\in[1;2]$. Tính tích phân $I=\int\limits_1^2\left[\frac{x}{x+1}g(x)-\frac{x+1}{x}f(x)\right]dx$.

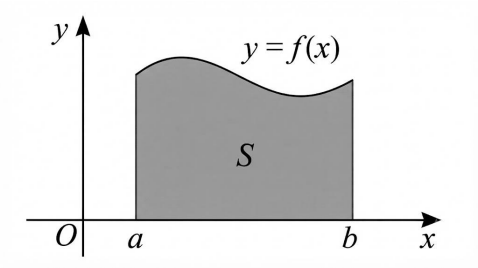
Trả lời: ……..

BÀI 12
TÍCH PHÂN

1. Khái niệm tích phân

a. Diện tích hình thang cong

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$ là $S=F(b)-F(a)$, trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.



b. Định nghĩa tích phân

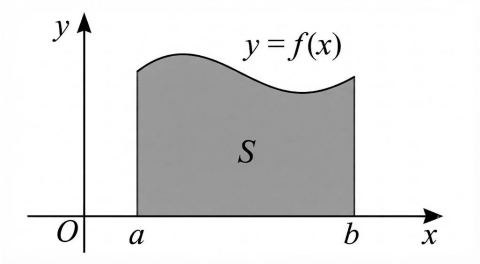
Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ thì hiệu số $F(b)-F(a)$ được gọi là **tích phân** từ a đến b của hàm số $f(x)$, kí hiệu $\int_a^b f(x)dx$

Chú ý:

- Hiệu số $F(b)-F(a)$ còn được kí hiệu là $F(x)\Big|_a^b$. Vậy $\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$
- Ta gọi $\int_a^b$ là dấu tích phân, a là **cận dưới**, b là **cận trên**, $f(x)dx$ là biểu thức dưới dấu tích phân và $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân.
- Trong trường hợp $a=b$, ta quy ước: $\int_a^a f(x)dx=0$
- Trong trường hợp $a>b$, ta quy ước: $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$
- Tích phân của hàm số f từ a đến b chỉ phụ thuộc vào f và các cận a,b mà không phụ thuộc vào biến x hay t, nghĩa là $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$.

c. Ý nghĩa hình học của tích phân

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$. Vậy $S=\int_a^b f(x)dx$



Nhận xét:

- Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)dx.$$

- Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

- Đạo hàm của quãng đường di chuyển của vật theo thời gian bằng tốc độ của chuyển động tại mọi thời điểm: $v(t)=s'(t)$. Do đó, nếu biết tốc độ $v(t)$ tại mọi thời điểm $t\in[a;b]$ thì tính được quãng đường di chuyển trong khoảng thời gian từ a đến b theo công thức: $s=s(b)-s(a)=\int_a^b v(t)dt$

2. Tính chất của tích phân

Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó:

- **Tính chất 1:** $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$, với k là hằng số.
- **Tính chất 2:** $\int_a^b[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- **Tính chất 3:** $\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- **Tính chất 4:** $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ với $(a<c<b)$.

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

CHỦ ĐỀ 1
TÍNH TÍCH PHÂN

DẠNG 1
TÍNH TÍCH PHÂN SỬ DỤNG BẢNG NGUYÊN HÀM

Nguyên hàm hàm số lũy thừa	$\int 0dx = C$	
	$\int dx = x + C$	
	$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ \ (\alpha \neq -1)$	$\int (ax+b)^{\alpha} dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ \ (\alpha \neq 1)$
	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C \ \ (x \neq 0)$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C$
	$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$	$\int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a}.\frac{1}{ax+b} + C$
	$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}} dx = \frac{1}{a}.2\sqrt{ax+b} + C$
Nguyên hàm hàm số lượng giác	$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$
	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$
	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$
Nguyên hàm hàm số mũ	$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$
	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ \ (0 < a \neq 1)$	$\int a^{\alpha x+\beta} dx = \frac{1}{\alpha}.\frac{a^{\alpha x+\beta}}{\ln a} + C \ \ (0 < a \neq 1)$

Bài 1. Tính các tích phân sau đây:

a) $\int_0^3 \left(3x^2+2027\right)\mathrm{d}x$ b) $\int_0^1 \left(4x^3+3x^2-2\right)\mathrm{d}x$ c) $\int_{-2}^4 (x+1)(x-1)\mathrm{d}x$

d) $\int_1^2 \frac{x-1}{x}\mathrm{d}x$ e) $\int_1^2 \frac{2x^3-x-2025}{x^2}\,\mathrm{d}x$ f) $\int_1^2 \frac{(x-1)^2}{x}\,\mathrm{d}x$

Lời giải

a) $\int_0^3 \left(3x^2+2027\right)\mathrm{d}x = \left(x^3+2027x\right)\Big|_0^3 = 3^3+2027.3-\left(0^3+2027.0\right)=6108$

b) $\int_0^1 \left(4x^3+3x^2-2\right)\mathrm{d}x = \left(x^4+x^3-2x\right)\Big|_0^1 = \left(1^4+1-2.1\right)-\left(0^4+0^3-2.0\right)=0$

c) $\int_{-2}^4 (x+1)(x-1)\mathrm{d}x = \int_{-2}^4 \left(x^2-1\right)dx = \left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_{-2}^4 = 18$

d) $\int_1^2 \frac{x-1}{x}\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(1-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \left(x-\ln|x|\right)\Big|_1^2 = (2-\ln 2)-(1-\ln 1) = 1-\ln 2.$

e) $\int_1^2 \frac{2x^3-x-2025}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(2x-\frac{1}{x}-\frac{2025}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \left(x^2-\ln|x|+\frac{2025}{x}\right)\Big|_1^2$

$=\left(2^2-\ln|2|+\frac{2025}{2}\right)-\left(1^2-\ln|1|+\frac{2025}{1}\right)=-\frac{2031}{2}-\ln 2$

f) $\int_1^2 \frac{(x-1)^2}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{x^2-2x+1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(x-2+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2}-2x+\ln|x|\right)\Big|_1^2 = -\frac{1}{2}+\ln 2$

Bài 2. Tính các tích phân sau đây:

a) $\int_1^3 x^{\sqrt{2027}}\mathrm{d}x$ b) $\int_1^3 x^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x$ c) $\int_1^8 \sqrt[3]{x}\mathrm{d}x$

d) $\int_1^e \frac{7}{3x}\mathrm{d}x$ e) $\int_1^2 \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$ f) $\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

Lời giải

a) $\int_1^3 x^{\sqrt{2027}}\mathrm{d}x = \frac{x^{\sqrt{2027}+1}}{\sqrt{2027}+1}\Big|_1^3 = \frac{3^{\sqrt{2027}+1}}{\sqrt{2027}+1}-\frac{1^{\sqrt{2027}+1}}{\sqrt{2027}+1}=\frac{3^{\sqrt{2027}+1}-1}{\sqrt{2027}+1}$

b) $\int_1^3 x^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\Big|_1^3 = \frac{3}{5}.\left(3^{\frac{5}{3}}-1\right)=\frac{3}{5}.\left(3\sqrt[3]{9}-1\right).$

c) $\int_1^8 \sqrt[3]{x}\mathrm{d}x = \int_1^8 x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = \frac{3}{4}.x^{\frac{4}{3}}\Big|_1^8 = \frac{3}{4}.\left(8^{\frac{4}{3}}-1\right)=\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{8^4}-1\right)=\frac{3}{4}.(16-1)=\frac{45}{4}.$

d) $\int_1^e \frac{7}{3x}\mathrm{d}x = \frac{7}{3}\ln|x|\Big|_1^e = \frac{7}{3}.\ln e-\frac{7}{3}.\ln 1=\frac{7}{3}.$

e) $\int_1^2 \frac{1}{x^3}dx = \int_1^2 x^{-3}dx = \left.\frac{x^{-2}}{-2}\right|_1^2 = \frac{2^{-2}}{-2} - \frac{1^{-2}}{-2} = \frac{3}{8}$.

f) $\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2}\int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}dx = \left.x^{\frac{1}{2}}\right|_1^4 = 4^{\frac{1}{2}} - 1^{\frac{1}{2}} = 1$.

Bài 3. Tính các tích phân sau đây:

a) $\int_1^4 \left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)dx$ b) $\int_0^4 \left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt[3]{x}-1\right)dx$ c) $\int_1^2 \left(\frac{x-\sqrt[4]{x^3}}{x}\right)^2 dx$

d) $\int_{-3}^{-1} \frac{(x^2+1)^3}{x^2}dx$ e) $\int_1^4 \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}}dx$ f) $\int_1^8 \frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

Lời giải

a) $\int_1^4 \left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)dx = \int_1^4 (x-4)dx = \left.\left(\frac{x^2}{2}-4x\right)\right|_1^4 = \frac{-9}{2}$

b) $\int_0^4 \left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt[3]{x}-1\right)dx = \int_0^4 \left(x^{\frac{5}{6}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} - 1\right)dx = \left.\left(\frac{6}{11}x\sqrt[6]{x^5} - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} - x\right)\right|_0^4$

$= \frac{48}{11}\sqrt[6]{16} + 3\sqrt[3]{4} - \frac{36}{5}$

c) $\int_1^2 \left(\frac{x-\sqrt[4]{x^3}}{x}\right)^2 dx = \int_1^2 \left(1-x^{-\frac{1}{4}}\right)^2 dx = \int_1^2 \left(1-2x^{-\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \left.\left(x-\frac{8}{3}\sqrt[4]{x^3}+2\sqrt{x}\right)\right|_1^2$

$= \left(2-\frac{8}{3}\sqrt[4]{8}+2\sqrt{2}\right) - \left(1-\frac{8}{3}+2\right) = \frac{5}{3}+2\sqrt{2}-\frac{8}{3}\sqrt[4]{8}$

d) $\int_{-3}^{-1} \frac{(x^2+1)^3}{x^2}dx = \int_{-3}^{-1} \frac{x^6+3x^4+3x^2+1}{x^2}dx = \int_{-3}^{-1} \left(x^4+3x^2+3+\frac{1}{x^2}\right)dx = \left.\left(\frac{1}{5}x^5+x^3+3x-\frac{1}{x}\right)\right|_{-3}^{-1}$

$= \left(-\frac{1}{5}-1-3+1\right) - \left(-\frac{243}{5}-27-9+\frac{1}{3}\right) = \frac{1226}{15}$

e) $\int_1^4 \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}}dx = \int_1^4 \left(x^{\frac{1}{6}} - x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \left.\left(\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} - 2\sqrt{x}\right)\right|_1^4 = \left(\frac{24\sqrt[6]{4}}{7}-4\right) - \left(\frac{6}{7}-2\right) = \frac{24\sqrt[6]{4}-20}{7}$

f) $\int_1^8 \frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int_1^8 \left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx = \int_1^8 \left(1-x^{-\frac{1}{3}}\right)^2 dx = \int_1^8 \left(1-2x^{-\frac{1}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}\right)dx = \left.\left(x-3\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}\right)\right|_1^8$

$= \left(8-3\sqrt[3]{8^2}+3\sqrt[3]{8}\right) - \left(1-3\sqrt[3]{1^2}+3\sqrt[3]{1}\right) = 1$

Bài 4. Tính các tích phân sau đây:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx$ c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\sin x + 2024)\,dx$

d) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$ e) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\cos x(1+\tan x)}dx$ f) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\,dx$

Lời giải

a) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin x dx=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=-\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos 0\right)=\frac{1}{2}$

b) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1$

c) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(3\sin x+2024)\,dx=(-3\cos x+2024x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1012\pi+3$

d) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=(\tan x+\cot x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=2-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

e) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\cos x(1+\tan x)}dx=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\cos x+\sin x}dx$

$=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx=(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}-1$

f) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\,dx=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}\,dx=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)\,dx=(x-\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$

Bài 5. Tính các tích phân sau đây:

a) $\int\limits_{0}^{1}\left(2^{2x}.3^{x-1}\right)dx$ b) $\int\limits_{0}^{1}\left(2.3^x-5e^x\right)dx$ c) $\int\limits_{1}^{2}\left(4x^3-2.3^{x+1}+\frac{1}{x^2}\right)dx$

d) $\int\limits_{0}^{1}\frac{\left(e^{-x}+2\right)^2}{e^{x-1}}dx$ e) $\int\limits_{0}^{1}\frac{\left(2024^x+1\right)^2}{e^{-3x}}dx$ f) $\int\limits_{1}^{2}e^{2x}\left(2024+\frac{2025e^{-2x}}{x^3}\right)dx$

Lời giải

a) $\int\limits_{0}^{1}\left(2^{2x}.3^{x-1}\right)dx=\frac{1}{3}\int\limits_{0}^{1}12^x\,dx=\frac{1}{3}.\frac{12^x}{\ln 12}\Big|_0^1=\frac{1}{3}\left(\frac{12}{\ln 12}-\frac{1}{\ln 12}\right)=\frac{11}{3(2\ln 2+\ln 3)}.$

b) $\int\limits_{0}^{1}\left(2.3^x-5e^x\right)dx=\left(\frac{2.3^x}{\ln 3}-5e^x\right)\Big|_0^1=\left(\frac{6}{\ln 3}-5e\right)-\left(\frac{2}{\ln 3}-5\right)=\frac{4}{\ln 3}-5e+5.$

c) $\int\limits_{1}^{2}\left(4x^3-2.3^{x+1}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\left(x^4-\frac{6.3^x}{\ln 3}-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2=\left(16-\frac{54}{\ln 3}-\frac{1}{2}\right)-\left(1-\frac{18}{\ln 3}-1\right)=\frac{31}{2}-\frac{36}{\ln 3}$

d) $\int\limits_0^1 \frac{\left(e^{-x}+2\right)^2}{e^{x-1}}dx = \int\limits_0^1 \frac{e^{-2x}+4e^{-x}+4}{e^{x-1}}dx = \int\limits_0^1 \left(e^{-3x+1}+4e^{-2x+1}+4e^{-x+1}\right)dx = \left(-\frac{1}{3}e^{-3x+1}-2e^{-2x+1}-4e^{-x+1}\right)\Big|_0^1$

$= \left(-\frac{1}{3e^2}-\frac{2}{e}-4\right)-\left(-\frac{1}{3}e-2e-4e\right) = \frac{19e}{3}-\frac{1}{3e^2}-\frac{2}{e}-4$

e) $\int\limits_0^1 \frac{\left(2024^x+1\right)^2}{e^{-3x}}dx = \int\limits_0^1 \frac{2024^{2x}+2.2024^x+1}{e^{-3x}}dx = \int\limits_0^1 \left[\left(2024^2.e^3\right)^x+2.\left(2024.e^3\right)^x+e^{3x}\right]dx$

$= \left[\frac{\left(2024^2.e^3\right)^x}{\ln\left(2024^2.e^3\right)}+2.\frac{\left(2024.e^3\right)^x}{\ln\left(2024.e^3\right)}+\frac{1}{3}e^{3x}\right]\Big|_0^1$

$= \frac{2024^2.e^3}{3+2\ln 2024}+2.\frac{2024.e^3}{3+\ln 2024}+\frac{1}{3}e^3-\left(\frac{1}{3+2\ln 2024}+2.\frac{1}{3+\ln 2024}+\frac{1}{3}\right)$

$= \frac{2024^2.e^3-1}{3+2\ln 2024}+\frac{4048.e^3-2}{3+\ln 2024}+\frac{e^3-1}{3}$

f) $\int\limits_1^2 e^{2x}\left(2024+\frac{2025e^{-2x}}{x^3}\right)dx = \int\limits_1^2 \left(2024.e^{2x}+\frac{2025}{x^3}\right)dx = \left(1012.e^{2x}-\frac{2025}{2x^2}\right)\Big|_1^2$

$= \left(1012.e^4-\frac{2025}{8}\right)-\left(1012.e^2-\frac{2025}{2}\right) = 1012.e^4-1012.e^2+\frac{6075}{8}$

Bài 6. Tính các tích phân sau đây:

a) $\int\limits_0^1 5^{x+1}.7^{2x-1}dx$

b) $\int\limits_0^1 \left(x+e^{-x-2}\right)dx$

c) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$

d) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x^2\left(1-\frac{\sin x}{x^2}\right)dx$

e) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)dx$

f) $\int\limits_1^2 2^{x+1}\left(1-\frac{2}{e^x}\right)dx$

Lời giải

DẠNG 2
TÍCH PHÂN HÀM ẨN BIẾN ĐỔI CƠ BẢN

- $\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (a<c<b)$

Bài 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn:

a) $\int_6^0 f(x)dx = 1$. Tính tích phân $\int_0^6 2027\,f(x)dx$

b) $\int_0^2 f(x)dx = 4$. Tính tích phân $\int_0^2 \left[2f(x)-1)\right]dx$

c) $\int_2^7 f(x)\mathrm{d}x = -3$ và $\int_1^7 f(x)\mathrm{d}x = 3$. Tính tích phân $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

a) Ta có: $\int_0^6 2027\,f(x)dx = 2027\int_0^6 f(x)dx = -2027\int_6^0 f(x)dx = -2027.1 = -2027$

b) Ta có: $\int_0^2 \left[2f(x)-1)\right]dx = \int_0^2 2f(x)dx - \int_0^2 dx = 2.4-2 = 6$.

c) Ta có ;

$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^7 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^7 f(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x + (-3) = 3$

$\Leftrightarrow \int_1^2 f(x)dx = 6$.

Bài 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn:

a) $\int_0^1 \left[f(x)+2x\right]dx = 3$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

b) $\int_1^3 \left[f(x)+2x+3\right]dx = 10$. Tính tích phân $\int_1^3 f(x)dx$.

c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = 4$. Tính tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2f(x)+\sin x\right]\mathrm{d}x$.

Lời giải

a) Ta có:

$$\int\limits_0^1 \left[f(x)+2x\right]dx = 3$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_0^1 f(x)dx + \int\limits_0^1 2xdx = 3$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_0^1 f(x)dx + x^2\Big|_0^1 = 3 \quad .$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_0^1 f(x)dx + 1 = 3$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_0^1 f(x)dx = 2$$

b) Ta có :

$$\int\limits_1^3 \left[f(x)+2x+3\right]dx = 10$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_1^3 f(x)\,dx + \int\limits_1^3 (2x+3)\,dx = 10$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_1^3 f(x)\,dx + 14 = 10$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_1^3 f(x)\,dx = -4$$

c)Ta có $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2f(x)+\sin x\right]\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x = 2\cdot 4 + 1 = 9.$

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn:

a) $\int\limits_{-6}^{11} f(x)\mathrm{d}x = 8$, $\int\limits_2^6 f(x)\mathrm{d}x = 3$. Tính giá trị của biểu thức $P = \int\limits_{-6}^{2} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_6^{11} f(x)\mathrm{d}x$.

b) $\int\limits_1^8 f(x)\mathrm{d}x = 9$, $\int\limits_4^{12} f(x)\mathrm{d}x = 3$, $\int\limits_4^8 f(x)\mathrm{d}x = 5$. Tính $I = \int\limits_1^{12} f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

a) Ta có:

$\int_{-6}^{11} f(x)\mathrm{d}x = 8$

$\Leftrightarrow \int_{-6}^{2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{2}^{6} f(x)\mathrm{d}x + \int_{6}^{11} f(x)\mathrm{d}x = 8$

$\Leftrightarrow \int_{-6}^{2} f(x)\mathrm{d}x + 3 + \int_{6}^{11} f(x)\mathrm{d}x = 8$

$\Leftrightarrow \int_{-6}^{2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{6}^{11} f(x)\mathrm{d}x = 5$.

$\Leftrightarrow P = 5$

b) $I = \int_{1}^{12} f(x)\mathrm{d}x = \int_{1}^{8} f(x)\mathrm{d}x + \int_{8}^{12} f(x)\mathrm{d}x = \int_{1}^{8} f(x)\mathrm{d}x + \int_{4}^{12} f(x)\mathrm{d}x - \int_{4}^{8} f(x)\mathrm{d}x = 9 + 3 - 5 = 7$.

Bài 4. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn:

a) $\int_{2}^{5} f(x)dx = 3$ và $\int_{2}^{5} g(x)dx = -2$. Tính $\int_{2}^{5} \left[f(x) + g(x) \right] dx$

b) $\int_{0}^{1} f(x)dx = 3$ và $\int_{0}^{1} g(x)dx = -4$. Tính $\int_{1}^{0} \left[2f(x) - g(x) \right] dx$.

c) $\int_{1}^{4} f(x)dx = 6$ và $\int_{1}^{4} g(x)dx = -5$. Tính $\int_{1}^{4} \left[\frac{1}{3} f(x) - \frac{1}{5} g(x) \right] dx$

Lời giải

a) $\int_{2}^{5} \left[f(x) + g(x) \right] dx = \int_{2}^{5} f(x)dx + \int_{2}^{5} g(x)dx = 3 + (-2) = 1$.

b) $\int_{1}^{0} \left[2f(x) - g(x) \right] dx = -\int_{0}^{1} \left[2f(x) - g(x) \right] dx = -2\int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{0}^{1} g(x)dx = -2.3 - 4 = -10$.

c) $\int_{1}^{4} \left[\frac{1}{3} f(x) - \frac{1}{5} g(x) \right] dx = \frac{1}{3}\int_{1}^{4} f(x)dx - \frac{1}{5}\int_{1}^{4} g(x)dx = \frac{1}{3}.6 - \frac{1}{5}(-5) = 3$.

Bài 5. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn:

a) $\int_{2}^{3} f(x)dx = 3$ và $\int_{3}^{2} g(x)dx = 1$. Tính $\int_{2}^{3} \left[f(x) + 2g(x) \right] dx$

b) $\int_{1}^{3} f(x)dx = 2028$ và $\int_{3}^{1} g(x)dx = 1$. Tính $\int_{1}^{3} \left[\frac{1}{2028} f(x) - 3g(x) \right] dx$

c) $\int_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 3$ và $\int_{2}^{1} g(x)\mathrm{d}x = -2$. Tính $\int_{1}^{2} \left[3f(x) - \frac{1}{2} g(x) \right] \mathrm{d}x$

Lời giải

a) Ta có: $\int_{3}^{2} g(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_{2}^{3} g(x)dx = -1$

$\Rightarrow \int_2^3 \left[f(x)+2g(x) \right]dx = \int_2^3 f(x)\,dx + 2\int_2^3 g(x)\,dx = 3+2.(-1) = 1$

b) Ta có: $\int_3^1 g(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_1^3 g(x)\,dx = -1$

$\Rightarrow \int_1^3 \left[\frac{1}{2028} f(x) - 3g(x) \right]dx = \frac{1}{2028}\int_1^3 f(x)\,dx - 3\int_1^3 f(x)\,dx = \frac{1}{2028}.2028 - 3(-1) = 4$

c) Ta có: $\int_2^1 g(x)\mathrm{d}x = -2 \Leftrightarrow \int_1^2 g(x)\mathrm{d}x = 2$

$\Rightarrow \int_1^2 \left[3f(x) - \frac{1}{2}g(x) \right]\mathrm{d}x = 3\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 3.3 - \frac{1}{2}.2 = 8.$

Bài 6. Cho $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 2024$ và $\int_0^3 g(x)\mathrm{d}x = 2025$. Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^3 \left[f(x)+g(x) \right]\mathrm{d}x$

b) $\int_3^0 \frac{1}{5} g(x)\,\mathrm{d}x$

c) $\int_0^3 \left[\frac{1}{2} f(x) - 3g(x) \right]\mathrm{d}x$

d) $\int_0^3 \left[\frac{1}{2024} f(x) - 3x^2 \right]\mathrm{d}x$

e) $\int_3^0 \left[g(x) - \sqrt[3]{x^2} \right]\mathrm{d}x$

f) $\int_0^3 \left[\frac{1}{4} f(x) + g(x) - e^{3x+1} \right]\mathrm{d}x$

Lời giải

a) $\int_0^3 \left[f(x)+g(x) \right]\mathrm{d}x = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 2024 + 2025 = 4049.$

b) $\int_3^0 \frac{1}{5} g(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}\int_0^3 g(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}.2025 = -405$

c) $\int_0^3 \left[\frac{1}{2} f(x) - 3g(x) \right]\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^3 g(x)\,\mathrm{d}x - 3\int_0^3 g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.2024 - 3.2025 = -5063$

d) $\int_0^3 \left[\frac{1}{2024} f(x) - 3x^2 \right]\mathrm{d}x = \frac{1}{2024}\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x - 3\int_0^3 x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2024}.2024 - x^3\Big|_0^3 = -26$

e) $\int_3^0 \left[g(x) - \sqrt[3]{x^2} \right]\mathrm{d}x = -\int_0^3 \left[g(x) - \sqrt[3]{x^2} \right]\mathrm{d}x = -\int_0^3 g(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^3 \sqrt[3]{x^2}\,\mathrm{d}x = -2025 + \frac{5}{3}x\sqrt[3]{x^2}\Big|_0^3 = 5\sqrt[3]{9} - 2025$

f) $\int_0^3 \left[\frac{1}{4} f(x) + g(x) - e^{3x+1} \right]\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^3 g(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^3 e^{3x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.2024 + 2025 - \frac{1}{3}e^{3x+1}\Big|_0^3$

$= 2531 - \frac{1}{3}e^{10} + \frac{1}{3}e$

Bài 7. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm liên tục trên đoạn $[1;3]$ thoả: $\int_1^3 [f(x)+3g(x)]dx=10$, $\int_1^3 [2f(x)-g(x)]dx=6$. Tính $I=\int_1^3 [f(x)+g(x)]dx$.

Lời giải

Đặt $a=\int_1^3 f(x)dx$ và $b=\int_1^3 g(x)dx$.

Khi đó, $\int_1^3 [f(x)+3g(x)]dx=a+3b$, $\int_1^3 [2f(x)-g(x)]dx=2a-b$.

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} a+3b=10 \\ 2a-b=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases}$.

Vậy $I=\int_1^3 [f(x)+g(x)]dx=a+b=6$.

DẠNG 2
TÍCH PHÂN HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI

Tính tích phân: $I=\int_a^b \left|f\left(x\right)\right|dx$

Phương pháp

Bước 1. Xét dấu $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[a;b\right]$.

Bước 2. Dựa vào bảng xét dấu trên đoạn $\left[a;b\right]$ để khử $\left|f\left(x\right)\right|$. Sau đó sử dụng các phương pháp tính tích phân đã học để tính $I=\int_a^b \left|f\left(x\right)\right|.dx$

Bài 1. Tính các tích phân sau:

a) $I=\int_0^2 \left|3-2x\right|\mathrm{d}x$ b) $I=\int_{-3}^3 \left|x^2-1\right|dx$ c) $I=\int_0^6 \left|x^2-6x+5\right|\mathrm{d}x$

Lời giải

a) $I=\int_0^2 \left|3-2x\right|\mathrm{d}x$

Xét $f\left(x\right)=3-2x$ trên $\left[0;2\right]$.

Cho $f(x)=0\Leftrightarrow 3-2x=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$f(x)$		‖		$+$	0	$-$		‖	

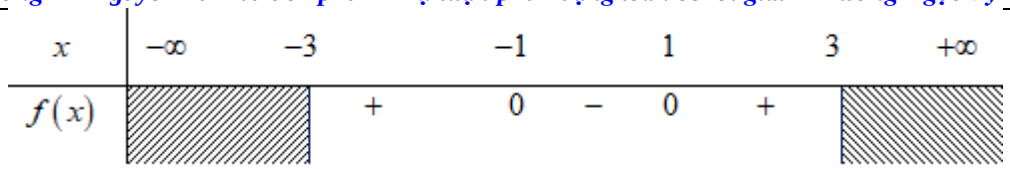
Do đó: $I=\int_0^2 \left|3-2x\right|\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{3}{2}} \left(3-2x\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{3}{2}}^2 \left(2x-3\right)\mathrm{d}x=\left(3x-x^2\right)\Big|_0^{\frac{3}{2}}+\left(x^2-3x\right)\Big|_{\frac{3}{2}}^2=\frac{5}{2}$

b) $I=\int_{-3}^3 \left|x^2-1\right|dx$

Xét $f\left(x\right)=x^2-1$ trên $\left[-3;3\right]$.

Cho $f(x)=0\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu:



Do đó:

$$I=\int_{-3}^{3}\left|x^2-1\right|dx=\int_{-3}^{-1}\left(x^2-1\right)dx+\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx+\int_{1}^{3}\left(x^2-1\right)dx=\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)\Big|_{-3}^{-1}+\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{1}+\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)\Big|_{1}^{3}$$

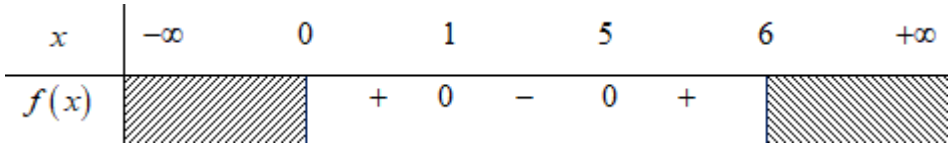
$$=\frac{20}{3}+\frac{4}{3}+\frac{16}{3}=\frac{40}{3}$$

c) $I=\int_{0}^{6}\left|x^2-6x+5\right|\mathrm{d}x$

Xét $f(x)=x^2-6x+5$ trên $[0;6]$.

Cho $f(x)=0\Leftrightarrow x^2-6x+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=5\end{array}\right.$

Bảng xét dấu:



Do đó:

$$I=\int_{0}^{6}\left|x^2-6x+5\right|\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\left(x^2-6x+5\right)\mathrm{d}x-\int_{1}^{5}\left(x^2-6x+5\right)\mathrm{d}x+\int_{5}^{6}\left(x^2-6x+5\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-3x^2+5x\right)\Big|_{0}^{1}-\left(\frac{x^3}{3}-3x^2+5x\right)\Big|_{1}^{5}+\left(\frac{x^3}{3}-3x^2+5x\right)\Big|_{5}^{6}=\frac{46}{3}$$

Bài 2. Tính các tích phân sau:

a) $I=\int_{-2}^{1}\left|x^3+x^2-2x\right|\mathrm{d}x$.

b) $I=\int_{-1}^{2}\left|x^3-3x+2\right|\mathrm{d}x$

c) $I=\int_{-2}^{2}\left|x^4-3x^2-4\right|\mathrm{d}x$

Lời giải

c) $I=\int_{-2}^{1}\left|x^3+x^2-2x\right|\mathrm{d}x$.

Xét $f(x)=x^3+x^2-2x$ trên $[-2;1]$.

Cho $f(x)=0\Leftrightarrow x^3+x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f(x)$			0	$+$	0	$-$	0		

Do đó: $I=\int\limits_{-2}^{1}\left|x^3+x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{0}\left(x^3+x^2-2x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{1}\left(x^3+x^2-2x\right)\mathrm{d}x$

$=\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Big|_{-2}^{0}-\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Big|_{0}^{1}=-\left(-\frac{8}{3}\right)-\left(-\frac{5}{12}\right)=\frac{37}{12}.$

b) $I=\int\limits_{-1}^{2}\left|x^3-3x+2\right|\mathrm{d}x$

Xét $f(x)=x^3-3x-2$ trên $[-1;2]$.

Cho $f(x)=0\Leftrightarrow x^3-3x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-1\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$				$-$			

Do đó: $I=-\int\limits_{-1}^{2}\left(x^3-3x-2\right)\mathrm{d}x=-\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2-2x\right)\Big|_{-1}^{2}=6-\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{27}{4}$.

c) $I=\int\limits_{-2}^{2}\left|x^4-3x^2-4\right|\mathrm{d}x$.

Xét $f(x)=x^4-3x^2-4$ trên $[-2;2]$.

Cho $f(x)=0\Leftrightarrow x^4-3x^2-4=0\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)\left(x^2-4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f(x)$				$-$			

Do đó: $I=-\int\limits_{-2}^{2}\left(x^4-3x^2-4\right)\mathrm{d}x=-\left(\frac{1}{5}x^5-x^3-4x\right)\Big|_{-2}^{2}=\frac{48}{5}-\left(-\frac{48}{5}\right)=\frac{96}{5}$.

Bài 3. Tính các tích phân sau:

a) $I=\int\limits_{1}^{5}\frac{2\left|x-2\right|+1}{x}\mathrm{d}x$.

b) $I=\int\limits_{-3}^{5}\left(\left|x+2\right|-\left|x-2\right|\right)\mathrm{d}x$

c) $I=\int\limits_{-1}^{2}\left(x+\left|1-x\right|-\left|x+2\right|\right)\mathrm{d}x$

Lời giải

a) $I=\int\limits_{1}^{5}\frac{2\left|x-2\right|+1}{x}\mathrm{d}x$.

Ta có: $|x-2|=\begin{cases}x-2 & khi\ x\ge 2\\ -x+2 & khi\ x<2\end{cases}$.

Khi đó:

$$I=\int_1^5\frac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{2(2-x)+1}{x}\mathrm{d}x+\int_2^5\frac{2(x-2)+1}{x}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{5-2x}{x}\mathrm{d}x+\int_2^5\frac{2x-3}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^2\left(\frac{5}{x}-x\right)\mathrm{d}x+\int_2^5\left(2-\frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x=\left(5\ln|x|-x\right)\Big|_1^2+\left(2x-3\ln|x|\right)\Big|_2^5=8\ln 2-3\ln 5+4.$$

b) $I=\int_{-3}^5\left(|x+2|-|x-2|\right)\mathrm{d}x=\int_{-3}^5|x+2|\mathrm{d}x-\int_{-3}^5|x-2|\mathrm{d}x$.

Ta có:

$$|x+2|=\begin{cases}x+2 & khi\ x\ge -2\\ -x-2 & khi\ x<-2\end{cases}$$

$$|x-2|=\begin{cases}x-2 & khi\ x\ge 2\\ -x+2 & khi\ x<2\end{cases}.$$

Khi đó: $I=-\int_{-3}^{-2}(x+2)\mathrm{d}x+\int_{-2}^5(x+2)\mathrm{d}x-\int_{-3}^2(x-2)\mathrm{d}x+\int_{-3}^2(x-2)\mathrm{d}x$

$$=-\left(\frac{1}{2}x^2+2x\right)\Big|_{-3}^{-2}+\left(\frac{1}{2}x^2+2x\right)\Big|_{-2}^5-\left(\frac{1}{2}x^2-2x\right)\Big|_{-3}^2+\left(\frac{1}{2}x^2-2x\right)\Big|_2^5=8$$

Cách 2:

Ta có bảng xét dấu để phá trị tuyệt đối:

x	-3		-2		2		5
$\|x+2\|$	$-x-2$	0	$x+2$		$x+2$		
$\|x-2\|$	$-x+2$		$-x+2$	0	$x-2$		
$\|x+2\|-\|x-2\|$	-4		$2x$		4		

Khi đó: $I=\int_{-3}^5\left(|x+2|-|x-2|\right)\mathrm{d}x=\int_{-3}^{-2}-4dx+\int_{-2}^2 2x\mathrm{d}x+\int_2^5 4\mathrm{d}x=-4x\Big|_{-3}^{-2}+x^2\Big|_{-2}^2+4x\Big|_2^5=8$.

c) $I=\int_{-1}^2\left(x+|1-x|-|x+2|\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^2 x\mathrm{d}x+\int_{-1}^2|1-x|\mathrm{d}x-\int_{-1}^2|x+2|\mathrm{d}x$

Ta có:

$$|1-x|=\begin{cases}1-x & khi\ x\le 1\\ -1+x & khi\ x>1\end{cases}$$

$$|x+2|=\begin{cases}x+2 & khi\ x\ge -2\\ -x-2 & khi\ x<-2\end{cases}$$

Khi đó: $I=\int_{-1}^2 x\mathrm{d}x+\int_{-1}^1(1-x)\mathrm{d}x-\int_1^2(1-x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^2(x+2)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{2}+\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^{1}-\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{1}^{2}+\left(\frac{1}{2}x^2+2x\right)\Big|_{-1}^{2}=-\frac{7}{2}$$

Cách 2:

Ta có bảng xét dấu để phá trị tuyệt đối:

x	-1		1		2
$\lvert 1-x\rvert$	$1-x$		0	$x-1$	
$\lvert x+2\rvert$	$x+2$		$x+2$		
$x+\lvert 1-x\rvert-\lvert x+2\rvert$	$-x-1$		$x-3$		

Khi đó:

$$I=\int_{-1}^{2}\left(x+|1-x|-|x+2|\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(-x-1)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}(x-3)\mathrm{d}x$$

$$=\left(-\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_{-1}^{1}+\left(\frac{x^2}{2}-3x\right)\Big|_{1}^{2}=\left(-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left[-4-\left(-\frac{5}{2}\right)\right]=-\frac{7}{2}$$

Bài 4. Tính các tích phân sau:

a) $I=\int_{2}^{6}\sqrt{x^2-8x+16}dx$ b) $I=\int_{-2}^{1}\sqrt{4x^2+6x+9}dx$ c) $I=\int_{0}^{3}\sqrt{x^3-2x^2+x}\mathrm{d}x$.

Lời giải

a) $I=\int_{2}^{6}\sqrt{x^2-8x+16}dx=\int_{2}^{6}\sqrt{(x-4)^2}dx=\int_{2}^{6}|x-4|dx$

Ta có: $|x-4|=\begin{cases}x-4 & khi\ x\geq 4\\ -x+4 & khi\ x<4\end{cases}$.

Khi đó: $I=\int_{2}^{6}|x-4|dx=\int_{2}^{4}(4-x)dx+\int_{4}^{6}(x-4)dx=\left(4x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{2}^{4}+\left(\frac{x^2}{2}-4x\right)\Big|_{4}^{6}=4$

b) $I=\int_{-2}^{1}\sqrt{4x^2+6x+9}dx=\int_{-2}^{1}\sqrt{(2x+3)^2}dx=\int_{-2}^{1}|2x+3|dx$

Ta có: $|2x+3|=\begin{cases}2x+3 & khi\ x\geq -\frac{3}{2}\\ -2x-3 & khi\ x<-\frac{3}{2}\end{cases}$.

Khi đó: $I=\int_{-2}^{1}|2x+3|dx=\int_{-2}^{-\frac{3}{2}}(-2x-3)dx+\int_{-\frac{3}{2}}^{1}(2x+3)dx=\left(-x^2-3x\right)\Big|_{-2}^{-\frac{3}{2}}+\left(x^2+3x\right)\Big|_{-\frac{3}{2}}^{1}=\frac{13}{2}$

c) $I=\int_{0}^{3}\sqrt{x^3-2x^2+x}\mathrm{d}x=\int_{0}^{3}\sqrt{x\left(x^2-2x+1\right)}\mathrm{d}x=\int_{0}^{3}|x-1|\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

Ta có: $|x-1|=\begin{cases}x-1 & khi\ x\ge 1\\ -x+1 & khi\ x<1\end{cases}$.

Khi đó: $I=\int\limits_0^3(1-x)\sqrt{x}dx+\int\limits_0^3(x-1)\sqrt{x}dx=\int\limits_0^3\left(x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}\right)dx+\int\limits_0^3\left(x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)dx$

$=\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}\right)\Big|_0^1+\left(\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)\Big|_1^3=\frac{4}{15}+\left[\frac{8\sqrt{3}}{5}-\left(-\frac{4}{15}\right)\right]=\frac{24\sqrt{3}+8}{15}.$

Bài 5. Tính các tích phân sau:

a) $I=\int\limits_0^{\pi}|\cos x|dx$.

b) $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}\right|dx$

c) $I=\int\limits_1^3\left|3^x-9\right|dx$

Lời giải

a) $I=\int\limits_0^{\pi}|\cos x|dx$.

Ta có: $|\cos x|=\begin{cases}\cos x & khi\quad 0\le x\le\frac{\pi}{2}\\ -\cos x & khi\quad \frac{\pi}{2}<x<\pi\end{cases}$

Khi đó: $I=\int\limits_0^{\pi}|\cos x|dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos xdx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=2$

b) $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}\right|dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|dx$

Ta có: $|\sin x|=\begin{cases}\sin x & khi\quad 0\le x\le\frac{\pi}{2}\\ -\sin x & khi\quad -\frac{\pi}{2}<x<0\end{cases}$

Khi đó: $I=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|dx=-\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin xdx+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=\frac{1}{2}\cos x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}-\frac{1}{2}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

c) $I=\int\limits_1^3\left|3^x-9\right|dx$

Ta có: $\left|3^x-9\right|=\begin{cases}3^x-9 & khi\quad x\ge 2\\ 9-3^x & khi\quad x<2\end{cases}$

Khi đó: $I=\int\limits_1^3\left|3^x-9\right|dx=\int\limits_1^2\left(9-3^x\right)dx+\int\limits_2^3\left(3^x-9\right)dx=\left(9x-\frac{3^x}{\ln 3}\right)\Big|_1^2+\left(\frac{3^x}{\ln 3}-9x\right)\Big|_2^3=\frac{12}{\ln 3}$

Bài 6. Tính các tích phân sau:

a) $I=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos 2x}dx$. b) $I=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$ c) $I=\int\limits_0^{4}\sqrt{4^x-2^{x+1}+1}dx$

Lời giải

a) $I=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos 2x}dx=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2\cos^2 x}dx=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}\left|\cos x\right|dx$

Ta có: $\left|\cos x\right|=\begin{cases}\cos x & khi \quad 0\le x\le\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\le x\le 2\pi\\ -\cos x & khi \quad \dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$

Khi đó: $I=\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx-\sqrt{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos xdx+\sqrt{2}\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\cos xdx$

$=\sqrt{2}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{2}\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}+\sqrt{2}\sin x\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}=4\sqrt{2}$

c) $I=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2 x}dx=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}\left|\sin x\right|dx$

Ta có: $\left|\sin x\right|=\begin{cases}\sin x & khi \quad 0\le x\le\pi\\ -\sin x & khi \quad \pi<x<2\pi\end{cases}$

Khi đó: $I=\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi}\sin xdx-\sqrt{2}\int\limits_{\pi}^{2\pi}\sin xdx=-\sqrt{2}\cos x\Big|_0^{\pi}+\sqrt{2}\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}=4\sqrt{2}$

c) $I=\int\limits_0^{4}\sqrt{4^x-2^{x+2}+4}dx=\int\limits_0^{4}\sqrt{\left(2^x-2\right)^2}dx=\int\limits_0^{4}\left|2^x-2\right|dx$

Ta có: $\left|2^x-2\right|=\begin{cases}2^x-2 & khi \quad x\ge 1\\ 2-2^x & khi \quad x<1\end{cases}$

Khi đó: $I=\int\limits_0^{4}\left|2^x-2\right|dx=\int\limits_0^{1}\left(2-2^x\right)dx+\int\limits_1^{4}\left(2^x-2\right)dx=\left(2x-\dfrac{2^x}{\ln 2}\right)\Big|_0^1+\left(\dfrac{2^x}{\ln 2}-2x\right)\Big|_1^4=\dfrac{13}{\ln 2}-4$

DẠNG 4
TÍCH PHÂN HÀM NHIỀU CÔNG THỨC

Dạng 1: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} g(x) & \text{khi } x\le c \\ h(x) & \text{khi } x>c \end{cases}$ liên tục trên D. Tính $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$, với $c\in[a;b]$.

Phương pháp giải:

Bước 1: Kiểm tra hàm số $f(x)$ có liên tục tại $x=c$ hay không *(kiến thức hàm số liên tục tại một điểm lớp 11)*

Tức là kiểm tra $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to b^-} g(x)=\lim\limits_{x\to b^+} h(x)=f(b)$

Bước 2: Tách cận: $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^c g(x)\mathrm{d}x+\int\limits_c^b h(x)\mathrm{d}x$.

Bước 3: Tính tích phân $\int\limits_a^c g(x)\mathrm{d}x$ và $\int\limits_c^b h(x)\mathrm{d}x$ bằng các phương pháp đã học.

Dạng 2: Cho hàm số $f(x;m)=\begin{cases} g(x;m) & \text{khi } x\le c \\ h(x;m) & \text{khi } x>c \end{cases}$ liên tục trên D và m là tham số. Tính $\int\limits_a^b f(x;m)\mathrm{d}x$, với $c\in[a;b]$.

Phương pháp giải:

Bước 1: Kiểm tra hàm số $f(x)$ có liên tục tại $x=c$ hay không.

Tức là kiểm tra: $\lim\limits_{x\to b^-}(x;m)=\lim\limits_{x\to b^+}(x;m)=f(b)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to b^-} g(x;m)=\lim\limits_{x\to b^+} h(x;m)=f(b)$

Chú ý: Bước này tìm tham số m.

Bước 2: Tách cận: $\int\limits_a^b f(x;m)\mathrm{d}x=\int\limits_a^c g(x;m)\mathrm{d}x+\int\limits_c^b h(x;m)\mathrm{d}x$.

Bước 3: Tính tích phân $\int\limits_a^c g(x;m)\mathrm{d}x$ và $\int\limits_c^b (x;m)\mathrm{d}x$ bằng các phương pháp đã học.

Bài 1. Cho $f(x)=\begin{cases}1 & \text{khi } x\ge 1\\ 2x-1 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$

Lời giải

Ta có: $I=\int\limits_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$

Tính $I_1=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}(2x-1)\mathrm{d}x=\left(x^2-x\right)\Big|_{-1}^{1}=0-2=-2$

Tính $I_2=\int\limits_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{2}1\mathrm{d}x=2-1=1.$

Vậy $I=1-2=-1.$

Bài 2. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{khi } x\ge 0\\ e^{2x} & \text{khi } x<0\end{cases}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x.$

Lời giải

Ta có: $I=\int\limits_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0} e^{2x}\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2}(x+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_{-1}^{0}+\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{0}^{2}$

$=\frac{1}{2}\left(1-e^{-2}\right)+\left(\frac{4}{2}+2\right)=\frac{9}{2}-\frac{1}{2e^2}=\frac{9e^2-1}{2e^2}.$

Bài 3. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x^2+2x+m & \text{khi } x\ge 1\\ 5-2x & \text{khi } x<1\end{cases}$ (m là tham số thực). Biết rằng $f(x)$ có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ là $F(x)$ thỏa mãn $F(-2)=-10$, khi đó tính $F(3)$.

Lời giải

Ta có $F(x)=\begin{cases}x^3+x^2+mx+C_1 & \text{khi } x\ge 1\\ 5x-x^2+C_2 & \text{khi } x<1\end{cases}$

Ta có $F(-2)=5(-2)-(-2)^2+C_2\Rightarrow C_2=-10+14=4$

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^3+x^2+mx+C_1\right)=m+2+C_1$

$\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(5x-x^2+C_2\right)=4+C_2$

$F(x)$ liên tục tại $x=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}F(x)=F(1)\Leftrightarrow m+2+C_1=4+C_2\Leftrightarrow C_1=6-m$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)\Leftrightarrow m+5=3\Leftrightarrow m=-2\Rightarrow C_1=8$

Vậy $F(x)=\begin{cases}x^3+x^2-2x+8 & \text{khi } x\ge 1\\ 5x-x^2+4 & \text{khi } x<1\end{cases}$

Do đó $F(3)=3^3+3^2-2.3+8=38$

Bài 4. Cho số thực a và $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)=\begin{cases}2x & khi\ x\le 0\\ a\left(x-x^2\right) & khi\ x>0\end{cases}$. Tính tích phân $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

Lời giải

Ta thấy, $\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0} 2xdx+\int_{0}^{1} a\left(x-x^2\right)dx$

$=\left(x^2\right)\Big|_{-1}^{0}+a\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{1}=-1+a\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{a}{6}-1$.

Bài 5. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}e^x+m & \text{khi } x\ge 0\\ x^2\left(x^3+1\right)^3 & \text{khi } x<0\end{cases}$ (với m tham số). Biết hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và tích phân $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=a.e-\frac{b}{c}$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}^*;\frac{a}{b}$ tối giản ($e=2,718281\ldots$.). Tính giá trị biểu thức $a+b+c+m$.

Lời giải

Vì hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục tại điểm $x=0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(x)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^x+m\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2\left(x^3+1\right)^3\right)=1+m\Leftrightarrow m=-1$.

Ta có: $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1} x^2\left(x^3+1\right)^3\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\left(e^x-1\right)\mathrm{d}x=e-\frac{23}{12}$.

Vậy $\begin{cases}a=1\\ b=23\end{cases}\Rightarrow\ a+b+c+m=35$.
$c=12$

Bài 6. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{khi } x\le 0\\ x^2-2x+3 & \text{khi } x>0\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(3)=0$. Tính giá trị của $2F(-1)+3F(2)$.

Lời giải

Ta có $\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}(2x+3)\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\left(x^2-2x+3\right)\mathrm{d}x=\left(x^2+3x\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\Big|_{0}^{2}=2+\frac{14}{3}=\frac{20}{3}$.

Mà $\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-1}^{2}=F(2)-F(-1)$ nên $F(2)-F(-1)=\frac{20}{3}$ (1)

Mặt khác $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}x^2+3x+C_1 & \text{khi } x\le 0\\ \frac{x^3}{3}-x^2+3x+C_2 & \text{khi } x>0\end{cases}$.

Vì $F(3)=0$ nên $9-9+9+C_2=0$ suy ra $C_2=-9$.

Vậy $F(2)=\frac{8}{3}-2^2+3.2-9=-\frac{13}{3}$. Thay $F(2)=-\frac{13}{3}$ vào (1) ta được $F(-1)=-11$.

Suy ra $2F(-1)+3F(2)=2.(-11)+3.\left(-\frac{13}{3}\right)=-35$.

Bài 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ là $F(x)=\begin{cases}x^2+5x+C_1 \text{ khi } x\geq 1\\ x^3+4x+C_2 \text{ khi } x<1\end{cases}$. Tính tích phân $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

Vì hàm số $F(x)$ liên tục tại $x=1\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)=F(1)\Rightarrow 1^2+5.1+C_1=1^3+4.1+C_2$

$\Rightarrow C_1-C_2=-1$

Ta có: $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{F}(2)-F(0)=2^2+5.2+C_1-\left(0^3+4.0+C_2\right)$

$\Rightarrow \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=14+\mathrm{C}_1-C_2=14-1=13$

Bài 8. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x^2-2x+1 & \text{khi } x\geq 0\\ 1-2x & \text{khi } x<0\end{cases}$. Giả sử F là 1 nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2020F(-1)+2021F(2)=-2022$. Tính giá trị của $F(1)$.

Lời giải

Ta có $I=2020\int\limits_1^{-1}f(x)\mathrm{d}x+2021\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=2020F(-1)+2021F(2)-4041F(1)$.

$\Rightarrow 4041F(1)=2020F(-1)+2021F(2)-I$.

Mà $\int\limits_1^{-1}f(x)\mathrm{d}x=-\left[\int\limits_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]=-\left[\int\limits_{-1}^0(1-2x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1\left(3x^2-2x+1\right)\mathrm{d}x\right]=-3$.

và $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left(3x^2-2x+1\right)\mathrm{d}x=5$.

Suy ra $I=2020.(-3)+2021.5=4045$.

Vậy $4041F(1)=2020F(-1)+2021F(2)-I=-6067\Rightarrow F(1)=-\frac{6067}{4041}$.

Bài 9. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3-2x & \text{khi } x\geq 1\\ 3x^2+2x-4 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Giả sử $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(2)=4$. Giá trị của $F(-2)-4F(3)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $f(x)=\begin{cases}3-2x & \text{khi } x\ge 1\\ 3x^2+2x-4 & \text{khi } x<1\end{cases}\Rightarrow F(x)=\begin{cases}3x-x^2+C_1 & \text{khi } x\ge 1\\ x^3+x^2-4x+C_2 & \text{khi } x<1\end{cases}$.

Vì $F(2)=4\Rightarrow C_1=2\Rightarrow F(x)=\begin{cases}3x-x^2+2 & \text{khi } x\ge 1\\ x^3+x^2-4x+C_2 & \text{khi } x<1\end{cases}$

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}\left(3x-x^2+2\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^3+x^2-4x+C_2\right)\Leftrightarrow 3-1+2=1+1-4+C_2\Leftrightarrow C_2=6$

$\Rightarrow F(x)=\begin{cases}3x-x^2+2 & \text{khi } x\ge 1\\ x^3+x^2-4x+6 & \text{khi } x<1\end{cases}$.

Vậy $F(-2)-4F(3)=10-4.2=2$.

Bài 10. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}4x-\sqrt{4x+9} & \text{khi } x>0\\ 4a+\tan^2 x & \text{khi } x\le 0\end{cases}$, đồng thời $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{4} f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{50}{3}$. Tính a.

Lời giải

Ta có: $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{4} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\left(4a+\tan^2 x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{4}\left(4x-\sqrt{4x+9}\right)\mathrm{d}x$

$=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0}(4a-1)\mathrm{d}x+\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\left(1+\tan^2 x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{4}\left(4x-\sqrt{4x+9}\right)\mathrm{d}x$

$=(4a-1)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{0}+\tan x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{0}+\left(2x^2-\dfrac{\sqrt{(4x+9)^3}}{6}\right)\Bigg|_{0}^{4}=(4a-1)\pi+1+\dfrac{47}{3}=\dfrac{50}{3}\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{4}$.

Bài 11. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sin x+2 & \text{khi} \quad x\ge 0\\ 2\cos^2 x & \text{khi} \quad x<0\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\pi$. Tính giá trị của $F\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+2F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)-F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Ta có: $F\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+2F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)-F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=F\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)-F(0)+F(0)-F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)+3F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)-3F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+2F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-2F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+2F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=-\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{0} f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} f(x)\mathrm{d}x-3\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x-2\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\mathrm{d}x+2F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=-\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{0}(\sin x+2)\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} 2\cos^2 x\mathrm{d}x-3\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 2\cos^2 x\mathrm{d}x-2\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2\cos^2 x\mathrm{d}x+2F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

$$=-\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{0}(\sin x+2)\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}(\cos 2x+1)\mathrm{d}x-3\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2x+1)\mathrm{d}x-2\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(\cos 2x+1)\mathrm{d}x+2F\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=-\left(-\cos x+2x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{0}-\left(\frac{1}{2}\sin 2x+x\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{6}}-3\left(\frac{1}{2}\sin 2x+x\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}-2\left(\frac{1}{2}\sin 2x+x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}+2F\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=1-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}\right)-3\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{12}\right)-2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{12}\right)+2\pi=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{13\pi}{12}$$

Bài 12. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}3x^2+a & \text{khi } x\geq 0\\ \sin 2x+\cos x-b & \text{khi } x<0\end{cases}$ liên tục và có nguyên hàm F liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F\left(2\right)-F\left(-\frac{\pi}{2}\right)=10$ với a,b là tham số thực. Giá trị $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{m}{4}$, với m là một số thực. Khi đó $2m$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $a=1-b$.

Mặt khác $F\left(2\right)-F\left(-\frac{\pi}{2}\right)=10\Leftrightarrow\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=10$

$$\Leftrightarrow\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\sin 2x+\cos x-b\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2}\left(3x^2+a\right)\mathrm{d}x=10\Leftrightarrow\left(-\frac{1}{2}\cos 2x+\sin x-bx\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}+\left(x^3+ax\right)\Big|_{0}^{2}=10$$

$$\Leftrightarrow 2a-\frac{b\pi}{2}=2\text{ suy ra }\begin{cases}a+b=1\\ 2a-\frac{b\pi}{2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=0\end{cases}\text{ hay }f\left(x\right)=\begin{cases}3x^2+1 & \text{khi } x\geq 0\\ \sin 2x+\cos x & \text{khi } x<0\end{cases}.$$

Ta được

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\left(\sin 2x+\cos x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}\left(3x^2+1\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{1}{2}\cos 2x+\sin x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{0}+\left(x^3+x\right)\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{4}+2=\frac{9}{4}$$

Suy ra $m=9$ vậy $2m=18$.

DẠNG 5
TÍCH PHÂN HÀM ẨN BIẾN ĐỔI PHỨC TẠP

I. Cần nhớ các công thức đạo hàm của hàm hợp

- $\int f'(x)dx = f(x) + C$
- $\frac{f'(x)}{f(x)} = \left[\ln\left(f(x)\right)\right]'$
- $-\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \left[\frac{1}{f(x)}\right]'$
- $-\frac{f'(x)}{f^n(x)} = \left[\frac{1}{(n-1)\left[f(x)\right]^{n-1}}\right]'$
- $n.f'(x).f(x) = \left[f(x)^n\right]'$
- $\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \left[2\sqrt{f(x)}\right]'$
- $f'(x).g(x) + f(x).g'(x) = \left[f(x).g(x)\right]'$
- $\frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)} = \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'$

II. Các dạng hàm ẩn thường gặp

1. Hàm ẩn có dạng: $f'(x)\cdot f(x) = p(x)$

Phương pháp giải:

$$f'(x)\cdot f(x) = p(x) \Leftrightarrow \left[\frac{f^2(x)}{2}\right]' = p(x) \Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \int p(x)\mathrm{d}x$$

2. Hàm ẩn có dạng: $f'(x) = p(x)\cdot f(x)$

Phương pháp giải:

Chia hai vế với $f(x)$ ta được $\frac{f'(x)}{f(x)} = p(x)$

Suy ra $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \int p(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \ln|f(x)| = \int p(x)\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

3. Hàm ẩn có dạng: $f'(x)=p(x)\cdot\left[f(x)\right]^n$

Phương pháp giải:

$f'(x)=p(x)\cdot\left[f(x)\right]^n$

Chia hai vế với $\left[f(x)\right]^n$ ta được $\dfrac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^n}=p(x)$

Suy ra $\int\dfrac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^n}dx=\int p(x)dx\Leftrightarrow\dfrac{\left[f(x)\right]^{-n+1}}{-n+1}=\int p(x)dx$

4. Hàm ẩn có dạng: $u(x)f'(x)+u'(x)f(x)=h(x)$

Phương pháp giải:

Dễ dàng thấy rằng $u(x)f'(x)+u'(x)f(x)=\left[u(x)f(x)\right]'$

Do đó $u(x)f'(x)+u'(x)f(x)=h(x)\Leftrightarrow\left[u(x)f(x)\right]'=h(x)$

Suy ra $u(x)f(x)=\int h(x)\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

5. Hàm ẩn có dạng: $A(x)f(x)+B(x)f'(x)=h(x)\ (1)$

Ý tưởng giải:

- Ta cần nhân thêm một lượng $u(x)$ vào (1) để tạo thành $u'(x)f(x)+u(x)f'(x)=u(x).h(x)$ và lúc này:

$$u'(x)f(x)+u(x)f'(x)=u(x).h(x)$$
$$\Leftrightarrow\left[u(x)f(x)\right]'=u(x).h(x)$$
$$\Rightarrow\int\left[u(x)f(x)\right]'dx=\int u(x).h(x)dx$$
$$\Rightarrow u(x)f(x)=\int u(x).h(x)dx$$
$$\Rightarrow f(x)=\frac{\int u(x).h(x)dx}{u(x)}$$

- Cách tìm $u(x)$

$u(x)$ được chọn sao cho : $\begin{cases}u'(x)=A(x)\\u(x)=B(x)\end{cases}$

$$\Rightarrow\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{A(x)}{B(x)}\Rightarrow\int\frac{u'(x)}{u(x)}.dx=\int\frac{A(x)}{B(x)}.dx\Rightarrow\ln\left|u(x)\right|=\int\frac{A(x)}{B(x)}.dx\Rightarrow u(x)=e^{\int\frac{A(x)}{B(x)}.dx}$$

Tóm lại phương pháp giải: $A(x)f(x)+B(x)f'(x)=h(x)\ (1)$ như sau:

+ Bước 1: Tìm $u(x)$: $u(x)=e^{\int \frac{A(x)}{B(x)}.dx}$

+ Bước 2: Nhân $u(x)$ vào (1) $\Rightarrow f(x)=\dfrac{\int u(x).h(x)dx}{u(x)}$

Hai dạng đặc biệt của (1)

- $f'(x)+f(x)=h(x)$

Phương pháp giải:

Nhân hai vế với e^x ta được $e^x\cdot f'(x)+e^x\cdot f(x)=e^x\cdot h(x)\Leftrightarrow\left[e^x\cdot f(x)\right]'=e^x\cdot h(x)$

Suy ra $e^x\cdot f(x)=\int e^x\cdot h(x)\,\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

- $f'(x)-f(x)=h(x)$

Phương pháp giải:

Nhân hai vế với e^{-x} ta được $e^{-x}\cdot f'(x)-e^{-x}\cdot f(x)=e^{-x}\cdot h(x)\Leftrightarrow\left[e^{-x}\cdot f(x)\right]'=e^{-x}\cdot h(x)$

Suy ra $e^{-x}\cdot f(x)=\int e^{-x}\cdot h(x)\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Bài 1. Cho hàm số $f(x)\neq 0$, liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $f(1)=\dfrac{1}{3}$; $x^2.f'(x)=f^2(x)$ với $\forall x\in[1;2]$. Tính tích phân $I=\int_1^2(2x+1)^2\,f(x)dx$

Lời giải

Ta có

$x^2.f'(x)=f^2(x)$

$\Rightarrow\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=\dfrac{1}{x^2}$

$\Rightarrow\left(-\dfrac{1}{f(x)}\right)'=\dfrac{1}{x^2}$

$\Rightarrow-\dfrac{1}{f(x)}=\int\dfrac{1}{x^2}dx$

$\Rightarrow\dfrac{1}{f(x)}=-\int\dfrac{1}{x^2}dx$

$\Rightarrow\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{x}+C$

Mà $f(1)=\frac{1}{3}\Rightarrow 3=1+C\Rightarrow C=2$

$\Rightarrow \frac{1}{f(x)}=\frac{1}{x}+2$

$\Rightarrow f(x)=\frac{x}{2x+1}$

Do đó: $I=\int\limits_1^2(2x+1)^2\ f(x)dx=\int\limits_1^2(2x+1)^2\frac{x}{2x+1}dx=\int\limits_1^2\left(2x^2+x\right)dx=\frac{37}{6}$

Bài 2. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, có đạo hàm trên đoạn $[1;4]$ và thoả mãn $x+2x.f(x)=\left[f'(x)\right]^2$ với $\forall x\in[1;4]$. Biết $f(1)=\frac{3}{2}$, tính $I=\int\limits_1^4 f(x)dx$

Lời giải

Do $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[1;4]\Rightarrow f'(x)\ge 0,\forall x\in[1;4]$

Ta có $x+2x.f(x)=\left[f'(x)\right]^2\Leftrightarrow x\left(1+2.f(x)\right)=\left[f'(x)\right]^2$, do $x\in[1;4]$ và $f'(x)\ge 0,\forall x\in[1;4]$

$\Rightarrow f(x)>\frac{-1}{2}$ và

$f'(x)=\sqrt{x}.\sqrt{1+2f(x)}$

$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}=\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1+2f(x)}\right)'=\sqrt{x}$

$\Rightarrow \sqrt{1+2f(x)}=\int\sqrt{x}dx$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+2f(x)}=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+c$.

Vì $f(1)=\frac{3}{2}\Rightarrow\sqrt{1+2.\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}+C\Leftrightarrow C=\frac{4}{3}$

$\Rightarrow \sqrt{1+2f(x)}=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow 1+2f(x)=\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{4}{3}\right)^2$

$\Leftrightarrow f(x)=\frac{2}{9}x^3+\frac{8}{9}x^{\frac{3}{2}}+\frac{7}{18}$

Khi đó $I=\int\limits_1^4 f(x)dx=\int\limits_1^4\left(\frac{2}{9}x^3+\frac{8}{9}x^{\frac{3}{2}}+\frac{7}{18}\right)dx=\left(\frac{1}{18}x^4+\frac{16}{45}x^{\frac{5}{2}}+\frac{7}{18}x\right)\Big|_1^4=\frac{1186}{45}$

Bài 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $x^6\left[f'(x)\right]^3+27\left[f(x)-1\right]^4=0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=0$. Tính $I=\int\limits_2^3 f(x)dx$

Lời giải

Ta có

$x^6\left[f'(x)\right]^3+27\left[f(x)-1\right]^4=0$

$\Leftrightarrow x^6\left[f'(x)\right]^3=-27\left[f(x)-1\right]^4$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left[f'(x)\right]^3}{\left[f(x)-1\right]^4}=-\dfrac{27}{x^6}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left[f'(x)\right]^3}{\left[f(x)-1\right]^3\left[f(x)-1\right]}=-\dfrac{27}{x^6}$

$\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{\left(f(x)-1\right)\sqrt[3]{f(x)-1}}=-\dfrac{3}{x^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{-3\left(f(x)-1\right)\sqrt[3]{f(x)-1}}=\dfrac{1}{x^2}$

$\Leftrightarrow \left[\dfrac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}}\right]'=\dfrac{1}{x^2}$

Do đó $\int\left[\dfrac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}}\right]'\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{x}+C.$

Suy ra $\dfrac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}}=-\dfrac{1}{x}+C$.

Có $f(1)=0\Rightarrow C=0$.

Do đó $f(x)=1-x^3$.

Khi đó $I=\int\limits_2^3 f(x)dx=\int\limits_2^3(1-x^3)dx=-\dfrac{61}{4}$

Bài 4. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)=\mathrm{e}^{-x},\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$. Tính $I=\int\limits_1^2\dfrac{f(x)\mathrm{e}^x}{x}dx$.

Lời giải

$f(x)+f'(x)=\mathrm{e}^{-x}$

$\Leftrightarrow f(x)\mathrm{e}^x+f'(x)\mathrm{e}^x=1.$

$\Leftrightarrow\left(f(x)\mathrm{e}^x\right)'=1$

$\Rightarrow f(x)\mathrm{e}^x=\int xdx$

$\Leftrightarrow f(x)\mathrm{e}^x=x+C$

Vì $f(0)=2$ nên $C=2$.

$\Rightarrow f(x)\mathrm{e}^{x}=x+2$

$$I=\int_{1}^{2}\frac{f(x)\mathrm{e}^{x}}{x}dx=\int_{1}^{2}\frac{x+2}{x}dx=\int_{1}^{2}\left(1+\frac{2}{x}\right)dx=\left(x+2\ln|x|\right)\Big|_{1}^{2}=1+2\ln 2$$

Bài 5. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;4]$, thỏa mãn $\begin{cases} f(1)+g(1)=4 \\ g(x)=-xf'(x) \\ f(x)=-xg'(x) \end{cases}$ với mọi $x\in[1;4]$. Tính tích phân $I=\int_{1}^{4}\left[f(x)+g(x)\right]dx$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $f(x)+g(x)=-x.f'(x)-x.g'(x)$

$$\Leftrightarrow\left[f(x)+x.f'(x)\right]+\left[g(x)+x.g'(x)\right]=0\Leftrightarrow\left[x.f(x)\right]'+\left[x.g(x)\right]'=0$$

$$\Rightarrow x.f(x)+x.g(x)=C$$

$$\Rightarrow f(x)+g(x)=\frac{C}{x}$$

Mà $f(1)+g(1)=4\Rightarrow C=4$

$$\Rightarrow f(x)+g(x)=\frac{4}{x}$$

$$\Rightarrow I=\int_{1}^{4}\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int_{1}^{4}\frac{4}{x}dx=8\ln 2$$

Bài 6. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $x^2f^2(x)+(2x-1)f(x)=xf'(x)-1$, với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ đồng thời thỏa $f(1)=-2$. Tính $\int_{1}^{2}f(x)dx$

Lời giải

Ta có

$$x^2f^2(x)+2xf(x)+1=xf'(x)+f(x)$$

$$\Leftrightarrow\left(xf(x)+1\right)^2=\left(xf(x)+1\right)'$$

Do đó

$$\frac{\left(xf(x)+1\right)'}{\left(xf(x)+1\right)^2}=1$$

$$\Rightarrow\int\frac{\left(xf(x)+1\right)'}{\left(xf(x)+1\right)^2}dx=\int 1dx$$

$$\Rightarrow-\frac{1}{xf(x)+1}=x+c$$

$\Rightarrow xf(x)+1=-\dfrac{1}{x+c}$

Mặt khác $f(1)=-2$ nên $-2+1=-\dfrac{1}{1+c}\Rightarrow c=0\Rightarrow xf(x)+1=-\dfrac{1}{x}\Rightarrow f(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}$

Vậy $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left(-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)dx=\left(-\ln x+\dfrac{1}{x}\right)|_1^2=-\ln 2-\dfrac{1}{2}$.

Bài 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0)=0, f'(0)\neq 0$ và thỏa mãn hệ thức $f(x).f'(x)+18x^2=\left(3x^2+x\right)f'(x)+(6x+1)f(x);\forall\in\mathbb{R}$. Biết $\int\limits_0^1(x+1)e^{f(x)}dx=ae^2+b,(a,b\in\mathbb{Q})$. Giá trị của $a-b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $f(x).f'(x)+18x^2=\left(3x^2+x\right)f'(x)+(6x+1)f(x)$

lấy nguyên hàm 2 vế ta được: $\dfrac{f^2(x)}{2}+6x^3=\left(3x^2+x\right)f(x)$

$\Rightarrow f^2(x)-2\left(3x^2+x\right)f(x)+12x^3=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=6x^2\\f(x)=2x\end{array}\right.$

TH1: $f(x)=6x^2$ không thoả mãn kết quả $\int\limits_0^1(x+1)e^{f(x)}dx=ae^2+b,(a,b\in\mathbb{Q})$

TH2: $f(x)=2x\Rightarrow\int\limits_0^1(x+1)e^{f(x)}dx=\int\limits_0^1(x+1)e^{2x}dx=\dfrac{3}{4}e^2-\dfrac{1}{4}$. Suy ra $a=\dfrac{3}{4};b=-\dfrac{1}{4}$

Vậy $a-b=1$

Bài 8. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[1;3]$; $f(x)\neq 0,\forall x\in[1;3]$; $f'(x)\left[1+f(x)\right]^2=(x-1)^2\left[f(x)\right]^4$ và $f(1)=-1$. Biết rằng $\int\limits_e^3 f(x)\mathrm{d}x=a\ln 3+b(a,b\in\mathbb{Z})$, giá trị của $a+b^2$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Từ $f'(x)[1+f(x)]^2=(x-1)^2[f(x)]^4$

$\Rightarrow\dfrac{f'(x)}{f^4(x)}+\dfrac{2f'(x)}{f^3(x)}+\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=(x-1)^2$.

Hay $\int\left(\dfrac{f'(x)}{f^4(x)}+\dfrac{2f'(x)}{f^3(x)}+\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\right)\mathrm{d}x=\int(x-1)^2\mathrm{d}x$

$\Rightarrow-\left(\dfrac{1}{3f^3(x)}+\dfrac{1}{f^2(x)}+\dfrac{1}{f(x)}\right)=\dfrac{1}{3}(x-1)^3+C$ (2).

Do $f(1)=-1$ nên $C=\dfrac{1}{3}$.

Thay vào (2) ta được $\left(\frac{1}{f(x)}+1\right)^3=-(x-1)^3\Rightarrow f(x)=\frac{-1}{x}$.

Khi đó: $\int_e^3\frac{-1}{x}\mathrm{d}x=-\ln|x|\Big|_e^3=-\ln 3+1\Rightarrow a=-1,b=1$, nên $a+b^2=0$.

Cách khác

Từ $f'(x)[1+f(x)]^2=(x-1)^2[f(x)]^4$

$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{f(x)}+1\right)^2.\frac{f'(x)}{f^2(x)}=(x-1)^2$

$\Leftrightarrow-\left(\frac{1}{f(x)}+1\right)^2.\left(\frac{1}{f(x)}+1\right)'=(x-1)^2$.

Nên $-\int\left(\frac{1}{f(x)}+1\right)^2.\left(\frac{1}{f(x)}+1\right)'\mathrm{d}x=\int(x-1)^2\,\mathrm{d}x$

$\Rightarrow-\int\left(\frac{1}{f(x)}+1\right)^2\mathrm{d}\left(\frac{1}{f(x)}+1\right)=\int(x-1)^2\,\mathrm{d}x$

Suy ra $-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{f(x)}+1\right)^3=\frac{1}{3}(x-1)^3+C(2).$

Do $f(1)=-1$ nên $C=0$.

Thay vào (2) ta được $\left(\frac{1}{f(x)}+1\right)^3=-(x-1)^3\Rightarrow f(x)=\frac{-1}{x}$.

Khi đó: $\int_e^3\frac{-1}{x}\mathrm{d}x=-\ln|x|\Big|_e^3=-\ln 3+1\Rightarrow a=-1,b=1$, nên $a+b^2=0$.

Bài 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $3f(x)+xf'(x)\ge x^{2018}$, $\forall x\in[0;1]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Ta có:

$3f(x)+xf'(x)\ge x^{2018}$, $\forall x\in[0;1]$

$\Leftrightarrow 3x^2f(x)+x^3.f'(x)\ge x^{2020}\ \forall x\in[0;1]$

$\Leftrightarrow\left(x^3f(x)\right)'\ge x^{2020}$, $\forall x\in[0;1]$

$\Rightarrow x^3f(x)\ge\int x^{2020}\mathrm{d}x$, $\forall x\in[0;1]\Rightarrow x^3f(x)\ge\frac{x^{2021}}{2021}+C$, $\forall x\in[0;1]$.

Cho $x=0\Rightarrow C=0\Rightarrow x^3f(x)\ge\frac{x^{2021}}{2021},\forall x\in[0;1]\Rightarrow f(x)\ge\frac{x^{2018}}{2021},\forall x\in[0;1]$.

$\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\ge\int_0^1\frac{x^{2018}}{2021}\mathrm{d}x=\left(\frac{x^{2019}}{2019.2021}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2019.2021}$.

CHỦ ĐỀ 2
ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TRONG THỰC TIỄN

DẠNG 1
ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TRONG BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

• Giả sử $v(t)$ là vận tốc của vật M tại thời điểm t và $s(t)$ là quãng đường vật đi được sau khoảng thời gian t tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Ta có mối liên hệ giữa $s(t)$ và $v(t)$ như sau:

+ Đạo hàm của quãng đường là vận tốc: $s'(t)=v(t)$

+ Nguyên hàm của vận tốc là quãng đường: $s(t)=\int v(t)dt$

Nếu gọi $a(t)$ là gia tốc của vật M thì ta có mối liên hệ giữa $v(t)$ và $a(t)$ như sau:

+ Đạo hàm của vận tốc là gia tốc: $v'(t)=a(t)$.

+ Nguyên hàm của gia tốc là vận tốc: $v(t)=\int a(t)dt$

• Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

• Đạo hàm của quãng đường di chuyển của vật theo thời gian bằng tốc độ của chuyển động tại mọi thời điểm: $v(t)=s'(t)$. Do đó, nếu biết tốc độ $v(t)$ tại mọi thời điểm $t\in[a;b]$ thì tính được quãng đường di chuyển trong khoảng thời gian từ a đến b theo công thức: $s=s(b)-s(a)=\int_a^b v(t)dt$

Một vật chuyển động có phương trình gia tốc $a(t)$ thì vận tốc của vật đó sau khoảng thời gian $\Delta t=t_2-t_1$ là: $v=\int_{t_1}^{t_2} a(t)dx$.

Bài 1. Một ô tô chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t)=160-10t\ (m/s)$.



a) Ô tô chuyển động chậm dần cho đến khi dừng hẳn mất hết bao nhiêu giây?

b) Hỏi rằng trong 3s trước khi dừng hẳn vật di chuyển được bao nhiêu mét ?

Lời giải

a) Ô tô chuyển động chậm dần cho đến khi dừng hẳn thì: $v(t)=0\Leftrightarrow 160-10t\ =0\Leftrightarrow t=16(s)$.

b) Do ô tô chuyển động chậm dần cho đến khi dừng hẳn mất hết 16 giây nên quãng đường ô tô đi trong 3s trước khi dừng hẳn là quãng đường đi được từ giây thứ 13 đến giây thứ 16 :

$$s=\int_{13}^{16}v(t)dt=\int_{13}^{16}(160-10t)dt=\left(160t-5t^2\right)\Big|_{13}^{16}=45(m)$$

Bài 2. Một xe mô tô phân khối lớn đang chạy với vận tốc 10m/s thì tăng tốc với gia tốc được biểu diễn bởi phương $a(t)=t^2+3t\left(m/s^2\right)$.



a) Vận tốc của xe mô tô ở giây thứ 3 bằng bao nhiêu kể từ khi tăng tốc?

b) Hỏi quãng đường của xe mô tô đi được trong quãng thời gian 10s đầu tiên sau khi tăng tốc ?

c) Tính vận tốc trung bình của xe mô tô đi trong quãng thời gian 10s đầu tiên sau khi tăng tốc.

Lời giải

a) Xe mô tô tăng tốc với gia tốc $a(t)=t^2+3t\left(m/s^2\right)$. Vận tốc $v(t)$ chính là nguyên hàm của hàm số $a(t)$.

$$v(t)=\int a(t)dt=\int\left(t^2+3t\right)dt=\frac{t^3}{3}+3\frac{t^2}{2}+C.$$

Vận tốc ban đầu của xe mô tô là $v_0=10m/s$ nên

$$v(0)=10\Leftrightarrow\frac{0^3}{3}+3\frac{0^2}{2}+C=10\Leftrightarrow C=10\Rightarrow v(t)=\frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}+10.$$

Vận tốc của xe mô tô ở giây thứ 3 bằng bao nhiêu kể từ khi tăng tốc là:

$$v(3)=\frac{3^3}{3}+\frac{3.3^2}{2}+10=32,5(m/s)$$

b) Mặt khác, đạo hàm của quãng đường *s* chính là vận tốc *v* của xe chuyển động tại thời điểm *t*.

Suy ra, quãng đường đi được của xe mô tô sau 10s đầu tiên bằng tích phân của hàm $v(t)$ khi biến t từ 0s đến 10s.

$$s=\int_0^{10} v(t)\,dt=\int_0^{10}\left(\frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}+10\right)dt=\left(\frac{t^4}{12}+\frac{t^3}{2}+10t\right)\Big|_0^{10}=\frac{4300}{3}(m).$$

c) Vận tốc trung bình của xe mô tô đi trong quãng thời gian 10s đầu tiên sau khi tăng tốc.

$$v_{tb}=\frac{s}{t}=\frac{4300}{3.10}=\frac{430}{3}\approx 143,3(m/s)$$

Bài 3. Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t)=t^2-t-6$ (mét/giây). Quãng đường (mét) vật đi được trong khoảng thời gian $1\le t\le 4$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Gọi s là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $1\le t\le 4$.

Ta có $s=\int_1^4 |v(t)|\,dt=\int_1^4 |t^2-t-6|\,dt=\int_1^3 |t^2-t-6|\,dt+\int_3^4 |t^2-t-6|\,dt=\left|-\frac{22}{3}\right|+\left|\frac{17}{6}\right|=\frac{61}{6}\approx 10,17(m)$

Bài 4. Một chiếc xe ô tô đang chạy trên đường cao tốc với vận tốc $72(km/h)$ thì tài xế bất ngờ đạp phanh làm cho chiếc ô tô chuyển động chậm với gia tốc $a(t)=-\frac{8}{5}t\ (m/s^2)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây.



a) Kể từ khi đạp phanh, sau 3 giây thì vận tốc của ô tô bằng bao nhiêu?

b) Hỏi kể từ khi đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn thì ô tô di chuyển bao nhiêu mét (m)?

Lời giải

a) Vận tốc của ô tô là $v(t)=\int a(t)\,dt=\int\left(-\frac{8}{5}t\right)dt=-\frac{4}{5}t^2+C$.

Ta có $72km/h=20m/s$. Vì $v(0)=20$ nên $C=20\Rightarrow v(t)=-\frac{4}{5}t^2+20$.

Kể từ khi đạp phanh, sau 3 giây thì vận tốc là: $v(3)=-\frac{4}{5}.3^2+20=12,8(m/s)$

b) Ta có: $v(t)=-\frac{4}{5}t^2+20$

Khi xe dừng hẳn thì vận tốc bằng 0 nên $-\frac{4}{5}t^2+20=0\Rightarrow t=5$.

Quãng đường cần tìm là $s=\int\limits_0^5\left(-\frac{4}{5}t^2+20\right)\mathrm{dt}=\left(-\frac{4}{15}t^3+20t\right)\Big|_0^5=\frac{200}{3}\ (m)$.

Bài 5.

a) Cho một vật chuyển động với vận tốc $y=v(t)\ (\mathrm{m/s})$. Cho $0<a<b$ và hàm vận tốc $v(t)>0$ với mọi $t\in[a;b]$. Hãy giải thích vì sao $\int\limits_a^b v(t)\mathrm{d}t$ biểu thị quãng đường mà vật đi được trong khoảng thời gian từ a đến b (tính theo giây).

b) Một vật chuyển động với vận tốc được biểu thị bởi phương trình $v(t)=2-\sin t(\mathrm{m/s})$. Tính quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=0(s)$ đến thời điểm $t=\frac{3\pi}{4}(s)$.

Lời giải

a) Ta đã biết $v(t)=s'(t)$ nên $s(t)=\int\limits_a^b v(t)\mathrm{d}t$ biểu thị quãng đường mà vật đi được trong khoảng thời gian từ a đến b.

b) Quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=0(s)$ đến thời điểm $t=\frac{3\pi}{4}(s)$ là:

$$s(t)=\int\limits_0^{\frac{3\pi}{4}}v(t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{3\pi}{4}}(2-\sin t)\mathrm{d}t=(2t+\cos t)\Big|_0^{\frac{3\pi}{4}}=6\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}-1\approx 3,005(m).$$

Bài 6. Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t)=t^2-t-6$ (m/s).

a) Tìm độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1\le t\le 4$, tức là tính $\int\limits_1^4 v(t)\mathrm{d}t$.

b) Tìm tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian này, tức là tính $\int\limits_1^4|v(t)|\mathrm{d}t$.

Lời giải

a) Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1\le t\le 4$ là:

$$\int\limits_1^4 v(t)\mathrm{d}t=\int\limits_1^4\left(t^2-t-6\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}-6t\right)\Big|_1^4=\left(\frac{4^3}{3}-\frac{4^2}{2}-6\cdot 4\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-6\right)=-\frac{9}{2}.$$

b) Tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $1\le t\le 4$ là:

$$\int\limits_1^4|v(t)|\mathrm{d}t=\int\limits_1^4\left|t^2-t-6\right|\mathrm{d}t=\int\limits_1^3\left(-t^2+t+6\right)\mathrm{d}t+\int\limits_3^4\left(t^2-t-6\right)\mathrm{d}t=\frac{22}{3}+\frac{17}{6}=\frac{61}{6}.$$

Bài 7. Một người đi xe môtô với độ tăng vận tốc tại một thời điểm t (tính theo giây, $t\ge 0$) được cho bởi hàm số $f(t)=\frac{1}{300}t^2+\frac{1}{1350}t\ \left(km/s^2\right)$. Nếu bắt đầu tăng tốc tính từ lúc khởi động máy (vận tốc bằng 0km/h), hỏi mất bao lâu thì người đó đạt đến tốc độ 120 km/h?

Lời giải

Gọi x là thời gian cần thiết để người đó đạt đến tốc độ 120 (km/h).

Ta nhận xét độ tăng vận tốc trong thời gian này cũng chính là tích phân của hàm $f(t)$ với $t=0$ đến $t=x$.

Như vậy ta xét phương trình sau :

$$\int_0^x \left(\frac{1}{300}t^2+\frac{1}{1350}t\right)dt=\frac{120}{3600}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{900}t^3+\frac{1}{2700}t^2\right)\Big|_0^x=\frac{1}{30}\Leftrightarrow\frac{1}{900}x^3+\frac{1}{2700}x^2=\frac{1}{30}\Leftrightarrow x=3(s)$$

Vậy sau 3s thì người đó đạt đến tốc độ 120 km/h.

Bài 8. Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trong thành phố thì các xe khi dừng lại phải cách nhau một khoảng tối thiểu là 1m. Một xe máy di chuyển trên đường thì gặp đèn đỏ từ xa, người điều khiển xe máy đạp phanh và xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=10-5t$ (m/s). Hỏi để giữ khoảng cách an toàn, người điều khiển xe máy phải bắt đầu đạp phanh khi cách xe đang dừng phía trước tối thiểu một khoảng bao xa, biết rằng ngay lúc đạp phanh thì xe phía trước đang đứng yên?

Lời giải

Kể từ lúc đạp phanh (t = 0) đến lúc xe dừng lại thì xe đi được một quãng đường là s. Vì khoảng cách an toàn giữa 2 xe khi dừng lại tối thiểu là 1m nên người điều khiển xe máy phải bắt đầu đạp phanh khi cách xe đang dừng phía trước tối thiểu một khoảng s + 1 (m).

Tại thời điểm $t=0$ thì xe bắt đầu phanh, và xe dừng lại khi vận tốc bằng 0, khi đó:

$v(t)=0\Leftrightarrow 10-5t=0\Leftrightarrow t=2$.

Trong khoảng thời gian từ $t=0\,\text{s}$ đến $t=2\,\text{s}$ thì xe chạy thêm được quãng đường

$$s=\int_0^2(10-5t)\,dt=10\,(\text{m})$$

Vậy xe nên bắt đầu đạp phanh khi cách xe đang dừng phía trước tối thiểu một khoảng 11m để giữ khoảng cách an toàn.

Bài 9. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{150}t^2+\frac{59}{75}t\,(m/s)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc a bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a\,(m/s^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

Lời giải

Quãng đường chất điểm A đi từ đầu đến khi B đuổi kịp là $S=\int_0^{15}\left(\frac{1}{150}t^2+\frac{59}{75}t\right)dt=96(m)$.

Vận tốc của chất điểm B là $v_B(t)=\int a\,dt=at+C$.

Tại thời điểm $t=3$ vật B bắt đầu từ trạng thái nghỉ nên $v_B(3)=0\Leftrightarrow C=-3a$.

Lại có quãng đường chất điểm B đi được đến khi gặp A là $S_2=\int\limits_3^{15}(at-3a)dt=\left(\frac{at^2}{2}-3at\right)\Big|_3^{15}=72a(m)$.

Vậy $72a=96\Leftrightarrow a=\frac{4}{3}\left(m/s^2\right)$.

Tại thời điểm đuổi kịp A thì vận tốc của B là $v_B(15)=16(m/s)$.

Bài 10. Biết rằng tốc độ v (km/phút) của một ca nô cao tốc thay đổi theo thời gian t (phút) như sau:

$$v(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t & \text{khi } 0\le t<2\\ 1 & \text{khi } 2\le t<15\\ 4-\frac{1}{5}t & \text{khi } 15\le t\le 20\end{cases}$$

Tính quãng đường ca nô di chuyển được trong khoảng thời gian từ 0 tới 20 phút.

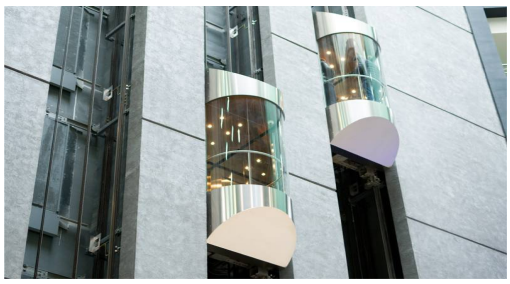


Lời giải

Quãng đường chuyển động của ca nô là: $S=\int\limits_0^{20}v(t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^{2}(0,5t)\mathrm{d}t+\int\limits_2^{15}1\mathrm{d}t+\int\limits_{15}^{20}(4-0,2t)\mathrm{d}t$

$=\frac{t^2}{4}\Big|_0^2+(t)\Big|_2^{15}+\left(4t-\frac{1}{10}t^2\right)\Big|_{15}^{20}=1+15-2+40-37,5=16,5(km)$

Bài 11. Giả sử tốc độ $v(m/s)$ của một thang máy di chuyển từ tầng 1 lên tầng cao nhất theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức: $v(t)=\begin{cases}t & \text{khi } 0\le t\le 2\\ 2 & \text{khi } 2<t\le 20\\ 12-\frac{1}{5}t & \text{khi } 20<t\le 24\end{cases}$. Tính quãng đường chuyển động và tốc độ trung bình của thang máy.



Lời giải

Gọi $s(t)$ là quãng đường thang máy di chuyển được đến thời gian t (giây). Quãng đường thang máy di chuyển từ tầng 1 lên tầng cao nhất là $s=s(20)-s(0)=\int_0^{20} v(t)\mathrm{d}t$

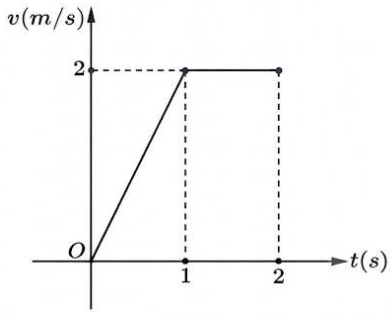
$$=\int_0^2 v(t)\mathrm{d}t+\int_2^{20} v(t)\mathrm{d}t+\int_{20}^{24} v(t)\mathrm{d}t=\int_0^2 t\mathrm{d}t+\int_2^{20} 2\mathrm{d}t+\int_{20}^{24}(12-0,5t)\mathrm{d}t$$

$$=\left(\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^2+2(t)\Big|_2^{20}+\left(12t-\frac{0,5t^2}{2}\right)\Big|_{20}^{24}=42(m)$$

Vận tốc trung bình của thang máy là $v_{tb}=\frac{s}{t}=\frac{42}{24}=1,75(m/s)$.

Bài 12. Cho hình vẽ dưới đây là đồ thị vận tốc $v(t)\ (m/s)$ của một chiếc xuồng đi trên sông trong 2 giây đầu tiên ($t=0$ là thời điểm chiếc xuồng bắt đầu chuyển động).





a) Tính quãng đường mà chiếc xuồng đi được trong 1 giây đầu tiên.

b) Tính vận tốc trung bình của chiếc xuồng đi trong 2 giây đầu tiên.

Lời giải

a) Dựa vào đồ thị trong khoảng thời gian 1 giây vận tốc của chiếc xuồng được xác định là $v(t)=2t(\mathrm{m/s})$

Ta có quãng đường mà chiếc xuồng di chuyển được trong 1 giây đầu tiên là $s=\int_0^1 2t\mathrm{d}t=t^2\Big|_0^1=1(m)$

b) Dựa vào đồ thị ta thấy: Trong khoảng thời gian 1 giây vận tốc của chiếc xuồng được xác định là $v(t)=2t(\mathrm{m/s})$, khoảng thời gian từ 1 giây đến 2 giây vận tốc của chiếc xuồng được xác định là $v(t)=2(\mathrm{m/s})$,

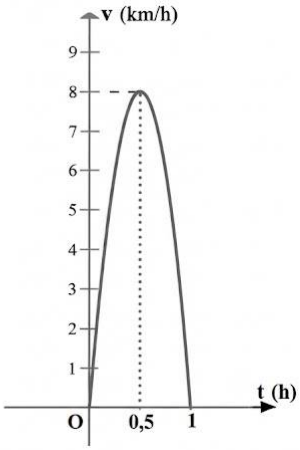
Ta có quãng đường mà chiếc xuồng di chuyển được trong 2 giây đầu tiên là:

$$s=\int_0^1 2t\mathrm{d}t+\int_1^2 2\mathrm{d}t=t^2\Big|_0^1+2t\Big|_1^2=3(m).$$

Vận tốc trung bình của chiếc xuồng là: $v_{tb}=\frac{s}{2}=\frac{3}{2}=1,5(m/s)$.

Bài 13. Bạn Trúc Linh chạy bộ trong thời gian 1 giờ, với vận tốc $v\ (km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị là một phần của parabol có đỉnh $I(0,5;8)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình vẽ.





a) Tính quãng đường bạn Trúc Linh chạy được trong thời gian 45 phút, kể từ khi bắt đầu chạy.

b) Tính gia tốc của bạn Trúc Linh tại thời điểm 1 giờ 30 phút, kể từ khi bắt đầu chạy.

Lời giải

a) Trước hết ta tìm công thức biểu thị vận tốc theo thời gian, giả sử $v(t)=at^2+bt+c$.

Khi đó dựa vào hình vẽ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} c=0 \\ a(0,5)^2+b(0,5)+c=8 \\ a+b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-32 \\ b=32 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow v(t)=-32t^2+32t.$$

45 phút $=\dfrac{45}{60}=\dfrac{3}{4}$ giờ

Do đó quãng đường người đó đi được sau 45 phút là: $s=\int\limits_0^{\frac{3}{4}}\left(32t-32t^2\right)dt=\left(16t^2-\dfrac{32}{3}t^3\right)\Big|_0^{\frac{3}{4}}=4,5(km)$

b) 1 giờ 30 phút $=\dfrac{3}{2}$ giờ

Hàm gia tốc: $a(t)=v'(t)=-64t+32$

Gia tốc của bạn Trúc Linh tại thời điểm 1 giờ 30 phút, kể từ khi bắt đầu chạy là:

$$a\left(\frac{3}{2}\right)=v'\left(\frac{3}{2}\right)=-64.\frac{3}{2}+32=-64\left(km/h^2\right)$$

DẠNG 2
ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TRONG BÀI TOÁN LIÊN QUAN VẬT LÍ VÀ THỰC TIỄN

- Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.
- Điện lượng chuyển qua tiết diện của dây dẫn của đoạn mạch trong thời gian từ t_1 đến t_2 là: $Q=\int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$
- Theo định luật Hooke thì lực cần dùng để giữ lò xo giãn thêm x mét từ độ dài tự nhiện là $f(x)=kx$, với $k\ (N/m)$ là độ cứng của lò xo.

Công cần để kéo dãn lò xo từ độ dài l_1 đến độ dài l_2 là: $A=\int_{l_1}^{l_2} f(x)dx$.

Bài 1.

a) Cường độ dòng điện chạy trong cuộn dây là $y=I(t)\,(\mathrm{A})$. Cho $0<a<b$ và $I(t)>0$ với mọi $t\in[a;b]$. Hãy giải thích vì sao $\int_a^b I(t)\mathrm{d}t$ biểu thị điện lượng (C) đã phóng qua cuộn dây trong khoảng thời gian từ a đến b (tính theo giây).

b) Cường độ dòng điện chạy trong cuộn dây là $I=2\sin t\ (A)$. Tính điện lượng (C) phóng ra trong cuộn dây khoảng thời gian từ thời điểm $t=0(s)$ đến thời điểm $t=\frac{\pi}{2}(s)$.

Lời giải

a) Ta đã biết $I(t)=Q'(t)$ nên $Q(t)=\int_a^b I(t)\mathrm{d}t$ biểu thị điện lượng đã phóng qua cuộn dây trong khoảng thời gian từ a đến b (a,b tính theo giây).

b) Quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=0(s)$ đến thời điểm:

$t=\frac{\pi}{2}(s)$ là $Q(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} I(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin(t)\mathrm{d}t=-\frac{2}{1}\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-2\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)=-2(0-1)=2(\mathrm{C})$.

Bài 2. Một mạch kín gồm một nguồn điện có suất điện động biến thiên theo thời gian được biểu diễn bởi $e=10\cos\left(100\pi t\right)\left(V\right)$ và điện trở trong không đáng kể, nối với mạch ngoài có một điện trở $R=50\Omega$.

Tính điện lượng chuyển qua điện trở trong thời gian từ $t=0$ đến $t=\dfrac{1}{600}s$?

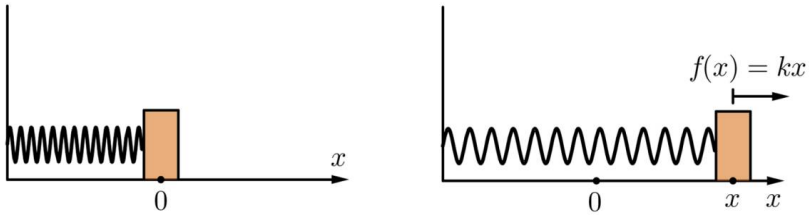
Lời giải

Ta có $i=\dfrac{u}{R}=0,02\cos\left(100\pi t\right)$ (Ampe) và $i\left(t\right)=q'\left(t\right)$

Do đó $q=\int\limits_{t_1}^{t_2}i\left(t\right)dt$ nên ta điện lượng từ $t=0$ đến $t=\dfrac{1}{600}s$

Khi đó $q=0,02\int\limits_{0}^{\frac{1}{600}}\cos\left(100\pi t\right)dt=3,18.10^{-5}C$.

Bài 3. Một lực có độ lớn 40 N cần thiết để kéo căng một chiếc lò xo có độ dài tự nhiên 10 cm lên 15 cm. Biết rằng theo định luật *Hooke* trong Vật lý, khi một chiếc lò xo bị kéo căng thêm x so với độ dài tự nhiên của lò xo thì lò xo trì lại với một lực cho bởi công thức $f\left(x\right)=kx\left(N\right)$, trong đó k là hệ số đàn hồi của lò xo. Hãy tìm công sinh ra khi kéo lò xo có độ dài từ 15 cm đến 20 cm?



Lời giải

Khi kéo lò xo từ 10 cm đến 15 cm nó bị kéo căng thêm 5 cm = 0,05 m.

$\Rightarrow f\left(0,05\right)=40\Leftrightarrow 0,05k=40\Rightarrow k=800$ do đó $f\left(x\right)=800x$

Công được sinh ra khi kéo căng lò xo từ 15 cm đến 20 cm là $W=\int\limits_{0,05}^{0,1}f\left(x\right)\mathrm{d}x$

$$\Rightarrow W=\int\limits_{0,05}^{0,1}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{0,05}^{0,1}\left(800x\right)\mathrm{d}x=800\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0,05}^{0,1}=3\left(J\right).$$

Bài 4. Ở nhiệt độ $37\,^{\circ}\mathrm{C}$, một phản ứng hóa học từ chất A, chuyển hóa thành sản phẩm chất B theo phương trình: $A\to B$. Giả sử $y\left(x\right)$ là nồng độ chất A (đơn vị mol L^{-1}) tại thời gian x (giây), $y\left(x\right)>0$ với $x\geq 0$ thỏa mãn hệ thức $y'\left(x\right)=-7.10^{-4}y\left(x\right)$ với $x\geq 0$. Biết rằng $x=0$ thì nồng độ (đầu) của chất A là $0,05$ mol L^{-1}

a) Xét hàm số $f\left(x\right)=\ln y\left(x\right)$ với $x\geq 0$. Hãy tính $f'\left(x\right)$ từ đó tìm hàm số $f\left(x\right)$.

b) Giả sử ta tính nồng độ trung bình chất A (đơn vị mol L^{-1}) từ thời điểm a (giây) đến thời điểm b (giây) với $0<a<b$ theo công thức $\frac{1}{b-a}\int_a^b y(x)\mathrm{d}x$. Xác định nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây.

Lời giải

a) Ta có $f(x)=\ln y(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{y'(x)}{y(x)}=-7.10^{-4}\Rightarrow f(x)=-7.10^{-4}x$.

b) $f(x)=-7.10^{-4}x \Rightarrow \ln y(x)=-7.10^{-4}x\Leftrightarrow y(x)=e^{-7.10^{-4}x}$

Nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây là:

$$\frac{1}{30-15}\int_{15}^{30} y(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{15}\int_{15}^{30} e^{-7.10^{-4}x}\mathrm{d}x=\frac{1}{15}\frac{e^{-7.10^{-4}x}}{-7.10^{-4}x}\Big|_{15}^{30}=0,98\left(L^{-1}\right).$$

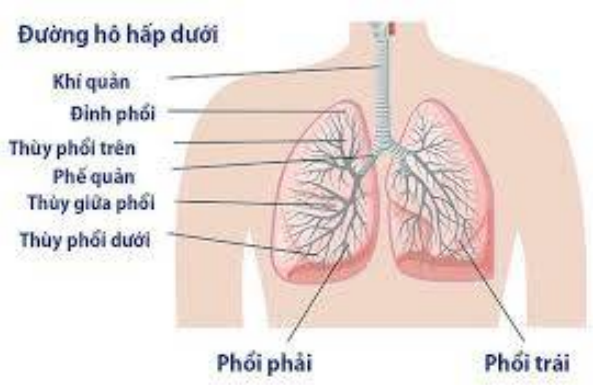
Bài 5. Giả sử rằng sau t năm, vốn đầu tư của một công ty bất động sản phát sinh lợi nhuận với tốc độ $P'(t)=126+t^2$ (triệu đồng/năm). Hỏi sau 10 năm đầu tiên thì công ty bất động thu được lợi nhuận là bao nhiêu (đơn vị triệu đồng)?

Lời giải

Gọi $P(t)$ là lợi nhuận phát sinh của vốn sau t năm đầu tư. Ta có $P(t)$ là nguyên hàm của hàm tốc độ $P'(t)$.

Lợi nhuận phát sinh sau 10 năm đầu tiên là: $\int_0^{10} P'(t)\,dt=\int_0^{10}\left(126+t^2\right)dt=\frac{4780}{3}$ (triệu đồng).

Bài 6. Việc thở là những vòng tuần hoàn, mỗi vòng tính từ lúc bắt đầu hít vào đến lúc kết thúc thở ra, thường kéo dài trong 5s. Vận tốc cực đại của khí là $V\ (l/s)$ nên vì thế nó được mô hình hoá bởi công thức $v(t)=V\sin\frac{3\pi t}{5}$. Tính thể tích khí hít vào phổi sau thời gian 2s.



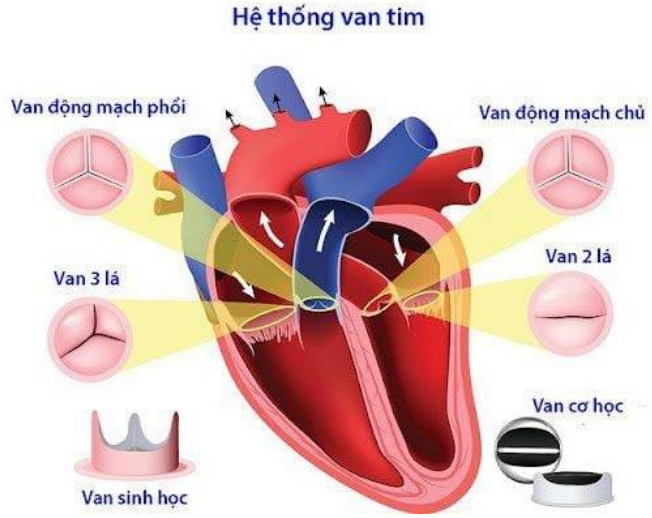
Lời giải

Vận tốc của khí hít vào được mô hình bởi công thức $v(t)=V\sin\frac{3\pi t}{5}$.

Suy ra lượng khí hít vào sau 2 giây là:

$$N(2)=\int_0^2 v(x)\,dx=\int_0^2 V\sin\frac{3\pi t}{5}dt=\frac{5V}{3\pi}\left(1-\cos\frac{3\pi.2}{5}\right)=1,06V \text{ (lít)}$$

Bài 7. Hiệu suất của tim là lưu lượng máu được bơm bởi tim trên một đơn vị thời gian (lưu lượng máu chảy vào động mạch chủ). Để đo hiệu suất của tim, người ta bơm $A(\text{mg})$ chất chỉ thị màu vào tâm nhĩ phải, chảy qua tim rồi vào động mạch chủ và đo nồng độ chất chỉ thị màu còn lại ở tim đến thời điểm $T(\text{s})$ khi chất chỉ thị màu tan sạch. Gọi $c(t)$ là nồng độ (mg/l) chất chỉ thị màu tại thời điểm $t(\text{s})$ thì hiệu suất của tim được xác định bởi $F=\dfrac{A}{\int_0^T c(t)\,\text{d}t}(\text{l}/\text{s})$. Tính hiệu suất của tim khi bơm 8 mg chất chỉ thị màu vào tâm nhĩ phải, biết $c(t)=\dfrac{1}{4}t(12-t)$ với $0\le t\le 12$).



Lời giải

Để tính hiệu suất của tim, chúng ta cần sử dụng công thức đã cho: $F=\dfrac{A}{\int_0^T c(t)\,\text{d}t}(\text{l}/\text{s})$

Trong đó: $A=8\,\text{mg}$ (lượng chất chỉ thị bơm vào) ; $c(t)=\dfrac{1}{4}t(12-t)$ nồng độ chất chỉ thị màu tại thời điểm t; $T=12$ giây là thời gian khi chất chỉ thị màu tan sạch.

Đầu tiên, ta thay thế $c(t)$ vào tích phân: $\int_0^{12} c(t)\,\text{d}t=\int_0^{12}\frac{1}{4}t(12-t)\,\text{d}t$

Ta có thể tính tích phân này bằng cách phân tích: $\int_0^{12}\frac{1}{4}t(12-t)\,\text{d}t=\frac{1}{4}\int_0^{12}(12t-t^2)\,\text{d}t$

Khi đó: $\int_0^{12}12t\text{d}t=12.\frac{t^2}{2}\Big|_0^{12}=12.\frac{12^2}{2}=12.72=864$ và $\int_0^{12}t^2\text{d}t=\frac{t^3}{2}\Big|_0^{12}=\frac{12^3}{3}=576$.

Kết hợp lại ta có: $\int_0^{12}(12t-t^2)\,\text{d}t=864-576=288$ nên $\int_0^{12}c(t)\,\text{d}t=\frac{1}{2}.288=72$

Khi đó hiệu suất của tim là: $F=\dfrac{A}{\int\limits_0^{12}c(t)\mathrm{d}t}=\dfrac{8}{72}=\dfrac{1}{9}\approx 0,11(\mathrm{l/s})$.

Bài 8. Giả sử vận tốc v của dòng máu ở khoảng cách r từ tâm của động mạch bán kính R không đổi, có thể được mô hình hóa bởi công thức

$$\frac{1}{R-0}\int\limits_0^R k\left(R^2-r^2\right)\mathrm{d}r=\frac{1}{R}\left(kR^2r-k\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^R=\frac{1}{R}\left(kR^3-k\frac{R^3}{3}\right)=kR^2-\frac{kR^2}{3}=\frac{2}{3}kR^2.$$

Trong đó k là một hằng số. Tìm vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng $0\le r\le R$. Vận tốc lớn nhất của dòng máu lớn hơn vận tốc trung bình bao nhiêu lần?

Lời giải

Vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng $0\le r\le R$ là

$$\frac{1}{R-0}\int\limits_0^R k\left(R^2-r^2\right)\mathrm{d}r=\frac{1}{R}\left(kR^2r-k\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^R=\frac{1}{R}\left(kR^3-k\frac{R^3}{3}\right)=kR^2-\frac{kR^2}{3}=\frac{2}{3}kR^2.$$

Xét hàm số $v(r)=k\left(R^2-r^2\right),\ 0\le r\le R$. Ta có $v'(r)=-2kr;\ v'(r)=0\Leftrightarrow r=0$.

Suy ra vận tốc lớn nhất của dòng máu là $v_{CĐ}=kR^2$.

Vậy vận tốc lớn nhất của dòng máu lớn hơn vận tốc trung bình là: $\dfrac{kR^2}{\frac{2}{3}kR^2}=1,5$ lần.

Bài 9. Tại một nhà máy ta gọi $C(x)$ là tổng chi phí (tính theo triệu động) để sản xuất x tấn sản phẩm A trong một tháng. Khi đó đạo hàm $C'(x)$ gọi là chi phí cận biên, cho biết tốc độ tăng tổng chi phí theo lượng sản phẩm được sản xuất. Giả sử chi phí cận biên (tính theo triệu đồng trên tấn) của nhà máy được ước lượng bởi công thức: $C'(x)=5-0,06x+0,00072x^2$ với $0\le x\le 150$.

Biết rằng $C(0)=30$ triệu đồng, gọi là chi phí cố định. Tính tổng chi phí khi nhà máy sản xuất 100 tấn sản phẩm A trong tháng.

Lời giải

Ta có: $C(100)-C(0)=\int\limits_0^{100}C'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{100}\left(5-0,06x+0,00072x^2\right)\mathrm{d}x$

$$=5\int\limits_0^{100}\mathrm{d}x-0.06\int\limits_0^{100}x\mathrm{d}x+0.00072\int\limits_0^{100}x^2\mathrm{d}x=5x\Big|_0^{100}-0,03x^2\Big|_0^{100}+0,00024x^3\Big|_0^{100}=440.$$

Suy ra $C(100)=C(0)+440=30+440=470$ (triệu đồng).

Vậy khi nhà máy sản xuất 100 tấn sản phẩm loại A trong tháng thì tổng chi phí là 470 triệu đồng.

Bài 10. Một doanh nghiệp sản xuất mặt hàng với chi phí cận biên được mô tả bởi hàm số:

$$f(x)=\frac{1}{10}\left(x^2-16x+93\right),\ x \text{ là số sản phẩm sản xuất}$$

Giả sử rằng doanh nghiệp bán được hết số lượng sản phẩm sản xuất được. Biết rằng doanh thu cận biên được mô tả bởi hàm số $g(x)=\left(\frac{4}{5}\right)^{x-8}+5$, với x là số lượng sản phẩm được bán ra. Giả sử rằng tổng chi phí khi chưa sản xuất sản phẩm nào là 0 đồng và tổng doanh thu khi chưa bán được sản phẩm nào là 0 đồng. Hỏi khi sản xuất 8 sản phẩm và bán hết thì doanh nghiệp thu được lợi nhuận là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai sau dấu phẩy)

Lời giải

Hàm tổng chi phí $F(x)$ là nguyên hàm của hàm chi phí cận biên $f(x)$.

Ta có: $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{10}\left(x^2-16x+93\right)\mathrm{d}x$ và $F(x)=\frac{1}{10}\left(\frac{x^3}{3}-8x^2+93x\right)+C$

Với điều kiện ban đầu $F(0)=0$ ta có: $\frac{1}{10}\left(\frac{0^3}{3}-8.0^2+93.0\right)+C=0\Rightarrow C=0$

Do đó: $F(x)=\frac{1}{10}\left(\frac{x^3}{3}-8x^2+93x\right)$

Hàm tổng doanh thu $G(x)$ là nguyên hàm của hàm doanh thu cận biên $g(x)$.

Ta có: $G(x)=\int g(x)\mathrm{d}x=\int\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{x-8}+5\right)\mathrm{d}x$ và $G(x)=\frac{1}{\ln\frac{4}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)^{x-8}+5x+C$

Với điều kiện ban đầu $G(0)=0$ ta có: $\frac{1}{\ln\frac{4}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)^{-8}+5.0+C=0\Rightarrow C=-\frac{1}{\ln\frac{4}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)^{-8}$

Do đó: $G(x)=\frac{1}{\ln\frac{4}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)^{x-8}+5x-\frac{1}{\ln\frac{4}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)^{-8}$

Khi đó $F(8)=\frac{1}{10}\left(\frac{8^3}{3}-8.8^2+93.8\right)$ và $G(8)=\frac{1}{\ln\frac{4}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)^{8-8}+5.8-\frac{1}{\ln\frac{4}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)^{-8}$

Lợi nhuận khi sản xuất và bán hết 8 sản phẩm là: $G(8)-F(8)\approx 21{,}96$ đồng

PHẦN B
TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP GỒM BA PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $\int\limits_a^a 2027f(x)\mathrm{d}x=0$ **B.** $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$

C. $\int\limits_a^b \frac{1}{2026}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2026}\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}(x)$ **D.** $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$

Lời giải

Chọn D.

Lý thuyết

$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $a,b,c\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $a<b<c$. Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. $\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x.\int\limits_b^c f(x)\mathrm{d}x$ **B.** $\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_b^c f(x)\mathrm{d}x$

C. $\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_b^c f(x)\mathrm{d}x$ **D.** $\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x$

Lời giải

Chọn B.

Lý thuyết: $\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_b^c f(x)\mathrm{d}x$

Câu 3. Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai?

A. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(y)\mathrm{d}y$ **B.** $\int\limits_a^b\big(f(x)+g(x)\big)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

C. $\int\limits_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t$ **D.** $\int\limits_a^b\big(f(x)g(x)\big)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

Lời giải

Chọn D.

Lý thuyết

$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(y)\mathrm{d}y$

$\int_a^b \left(f(x)+g(x) \right) \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$

Câu 4. Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai?

A. $\int_{-2027}^{2027} \mathrm{d}x = 4054$.

B. $\int_{2026}^{2026} \mathrm{d}x = 4052$.

C. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

D. Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì $f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)dx$.

Lời giải

Chọn B.

$\int_{2026}^{2026} \mathrm{d}x = 0$

Câu 5. Cho hàm $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ với $a<b$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên $[a;b]$.

Cho các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. $\int_a^b kf(x)dx = k\left[F(b)-F(a)\right]$

B. $\int_b^a f(x)dx = F(b)-F(a)$

C. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x=a;x=b$; đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và trục hoành được tính theo công thức $S=F(b)-F(a)$

D. $\int_a^b f(2x+3)dx = F(2x+3)\Big|_a^b$

Lời giải

Chọn A.

$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx = k\left[F(b)-F(a)\right]\Big|_a^b = k\left[F(b)-F(a)\right]$

Câu 6. Nếu $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 3$ thì $\int_0^3 4f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 12. **C.** 36. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\int_0^3 4f(x)\mathrm{d}x = 4\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 4.3 = 12.$

Câu 7. Cho $\int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{2025}$. Tính $I = \int_0^2 2025 f(x)dx.$

A. $I = 2$ **B.** $I = \frac{1}{2025}$ **C.** $I = 1$ **D.** $I = 2025$

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $I = \int_0^2 2025 f(x)dx = 2025\int_0^2 f(x)dx = 2025.\frac{1}{2025} = 1$

Câu 8. Nếu $\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x = 5$ thì $\int_5^0 5f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** –1. **C.** 25. **D.** –25.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\int_5^0 5f(x)\mathrm{d}x = -\int_0^5 5f(x)\mathrm{d}x = -5\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x = -5.5 = -25$

Câu 9. Nếu $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x = 5$ và $\int_1^4 g(x)\mathrm{d}x = -4$ thì $\int_1^4 [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$ bằng

A. –1. **B.** –9. **C.** 1. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\int_1^4 [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x = \int_1^4 f(x)\mathrm{d}x - \int_1^4 g(x)\mathrm{d}x = 5 - (-4) = 9.$

Câu 10. Nếu $\int_1^4 f(x)dx = 3$ và $\int_1^4 g(x)dx = -2$ thì $\int_1^4 (f(x) - g(x))dx$ bằng

A. –1. **B.** –5. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\int_1^4 [f(x) - g(x)]dx = \int_1^4 f(x)dx - \int_1^4 g(x)dx = 3 - (-2) = 5.$

Câu 11. Cho $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2$ và $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=5$, khi $\int_0^1\left[f(x)-2g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. -8 **B.** 1 **C.** -3 **D.** 12

Lời giải

Chọn A.

Có $\int_0^1\left[f(x)-2g(x)\right]\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-2\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=2-2.5=-8$.

Câu 12. Giả sử $\int_0^9 f(x)\mathrm{d}x=7$ và $\int_9^0 g(x)\mathrm{d}x=1$. Khi đó $I=\int_0^9\left[2f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=11$. **B.** $I=17$. **C.** $I=23$. **D.** $I=8$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $I=2\int_0^9 f(x)\mathrm{d}x+3\int_0^9 g(x)\mathrm{d}x=2.7+3.(-1)=11$.

Câu 13. Nếu $\int_{-1}^4 f(x)\mathrm{d}x=2$ và $\int_{-1}^4 g(x)\mathrm{d}x=3$. Khi đó $\int_{-1}^4\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** 6. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\int_{-1}^4\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^4 f(x)\mathrm{d}x-\int_{-1}^4 g(x)\mathrm{d}x=2-3=-1$.

Câu 14. Nếu $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=6$ thì $\int_0^3\left[\frac{1}{3}f(x)+2\right]\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

A. 8. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\int_0^3\left[\frac{1}{3}f(x)+2\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^3 f(x)\,dx+\int_0^3 2dx=\frac{1}{3}\cdot 6+6=8$.

Câu 15. Nếu $\int_0^2 f(x)\,dx=5$ thì $\int_0^2\left[2f(x)-1\right]dx$ bằng:

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 12.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\int_0^2\left[2f(x)-1\right]dx=2\int_0^2 f(x)\,dx-\int_0^2 dx=2.5-2=8$

Câu 16. Nếu $\int_0^2 f(x)dx=3$ thì $\int_0^2\left[2f(x)+2027\right]dx$ bằng:

A. 4054. **B.** 4042. **C.** 4044. **D.** 4060.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\int_0^2\left[2f(x)+2027\right]dx=2\int_0^2 f(x)dx+2027\int_0^2 dx=2.3+2027.2=4060$

Câu 17. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=5$. Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)+2\sin x\right]\mathrm{d}x$.

A. $I=7$ **B.** $I=5+\frac{\pi}{2}$ **C.** $I=3$ **D.** $I=5+\pi$

Lời giải

Chọn A.

Ta có

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)+2\sin x\right]\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x-2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=5-2(0-1)=7$.

Câu 18. Cho $\int_1^2\left[4f(x)-2x\right]dx=1$. Khi đó $\int_1^2 f(x)dx$ bằng:

A. 1. **B.** -3. **C.** 3. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A.

$\int_1^2\left[4f(x)-2x\right]dx=1\Leftrightarrow 4\int_1^2 f(x)dx-2\int_1^2 xdx=1\Leftrightarrow 4\int_1^2 f(x)dx-2.\frac{x^2}{2}\Big|_1^2=1$

$\Leftrightarrow 4\int_1^2 f(x)dx=4\Leftrightarrow\int_1^2 f(x)dx=1$

Câu 19. Cho $\int_0^1 f(x)dx=1$, tích phân $\int_0^1\left(2f(x)-3x^2\right)dx$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A.

$\int_0^1\left(2f(x)-3x^2\right)dx=2\int_0^1 f(x)dx-3\int_0^1 x^2dx=2-1=1$.

Câu 20. Cho $\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x=2$ và $\int_{-1}^2 g(x)\mathrm{d}x=-1$. Tính $I=\int_{-1}^2\left[x+2f(x)-3g(x)\right]\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{17}{2}$ **B.** $I=\frac{5}{2}$ **C.** $I=\frac{7}{2}$ **D.** $I=\frac{11}{2}$

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $I=\int\limits_{-1}^{2}\left[x+2f\left(x\right)-3g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{2}+2\int\limits_{-1}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x-3\int\limits_{-1}^{2}g\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}+2.2-3\left(-1\right)=\frac{17}{2}.$

Câu 21. Cho $\int\limits_{0}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=3,\int\limits_{0}^{2}g\left(x\right)\mathrm{d}x=-1$ thì $\int\limits_{0}^{2}\left[f\left(x\right)-5g\left(x\right)+x\right]\mathrm{d}x$ bằng:

A. 12. **B.** 0. **C.** 8. **D.** 10

Lời giải

Chọn D.

$\int\limits_{0}^{2}\left[f\left(x\right)-5g\left(x\right)+x\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{2}f\left(x\right)dx-5\int\limits_{0}^{2}\mathrm{g}\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2}x\mathrm{d}x=3+5+2=10$

Câu 22. Cho $\int\limits_{0}^{5}f\left(x\right)\mathrm{d}x=-2$. Tích phân $\int\limits_{0}^{5}\left[4f\left(x\right)-3x^2\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. -140. **B.** -130. **C.** -120. **D.** -133.

Lời giải

Chọn D.

$\int\limits_{0}^{5}\left[4f\left(x\right)-3x^2\right]\mathrm{d}x=4\int\limits_{0}^{5}f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{5}3x^2\mathrm{d}x=-8-\left.x^3\right|_{0}^{5}=-8-125=-133.$

Câu 23. Cho $\int\limits_{1}^{2}\left[4f\left(x\right)-2x\right]dx=1$. Khi đó $\int\limits_{1}^{2}f\left(x\right)dx$ bằng:

A. 1. **B.** -3. **C.** 3. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A.

$\int\limits_{1}^{2}\left[4f\left(x\right)-2x\right]dx=1\Leftrightarrow 4\int\limits_{1}^{2}f\left(x\right)dx-2\int\limits_{1}^{2}xdx=1\Leftrightarrow 4\int\limits_{1}^{2}f\left(x\right)dx-2.\left.\frac{x^2}{2}\right|_{1}^{2}=1$

$\Leftrightarrow 4\int\limits_{1}^{2}f\left(x\right)dx=4\Leftrightarrow\int\limits_{1}^{2}f\left(x\right)dx=1$

Câu 24. Cho $\int\limits_{-2}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=1$, $\int\limits_{-2}^{4}f\left(t\right)\mathrm{d}t=-4$. Tính $\int\limits_{2}^{4}f\left(y\right)\mathrm{d}y$.

A. $I=5$. **B.** $I=-3$. **C.** $I=3$. **D.** $I=-5$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\int\limits_{-2}^{4}f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int\limits_{-2}^{4}f\left(x\right)\mathrm{d}x$, $\int\limits_{2}^{4}f\left(y\right)\mathrm{d}y=\int\limits_{2}^{4}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Khi đó: $\int\limits_{-2}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{4}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{4}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow \int_{2}^{4} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-2}^{4} f(x)\mathrm{d}x - \int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x = -4-1 = -5$.

Vậy $\int_{2}^{4} f(y)\mathrm{d}y = -5$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và có $\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 9; \int_{2}^{4} f(x)\mathrm{d}x = 4$. Tính $I = \int_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = 5$. **B.** $I = 36$. **C.** $I = \frac{9}{4}$. **D.** $I = 13$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $I = \int_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{2}^{4} f(x)\mathrm{d}x = 9 + 4 = 13.$

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x = 10$, $\int_{3}^{4} f(x)\mathrm{d}x = 4$. Tích phân $\int_{0}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D.

Theo tính chất của tích phân, ta có: $\int_{0}^{3} f(x)\mathrm{d}x + \int_{3}^{4} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

Suy ra: $\int_{0}^{3} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x - \int_{3}^{4} f(x)\mathrm{d}x = 10 - 4 = 6$.

Vậy $\int_{0}^{3} f(x)\mathrm{d}x = 6$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ và $\int_{0}^{10} f(x)dx = 7$; $\int_{2}^{6} f(x)dx = 3$. Tính $P = \int_{0}^{2} f(x)dx + \int_{6}^{10} f(x)dx$.

A. $P = 4$ **B.** $P = 10$ **C.** $P = 7$ **D.** $P = -4$

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\int_{0}^{10} f(x)dx = \int_{0}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{6} f(x)dx + \int_{6}^{10} f(x)dx$.

$\Rightarrow 7 = P + 3 \Rightarrow P = 4$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn [0; 6] thỏa mãn $\int_0^6 f(x)dx = 10$ và $\int_2^4 f(x)dx = 6$. Tính giá trị của biểu thức $P = \int_0^2 f(x)dx + \int_4^6 f(x)dx$.

A. $P = 4$. **B.** $P = 16$. **C.** $P = 8$. **D.** $P = 10$.

Lời giải

Chọn A.

Câu 29. Tính tích phân $I = \int_0^2 (2x+1)dx$

A. $I = 5$. **B.** $I = 6$. **C.** $I = 2$. **D.** $I = 4$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $I = \int_0^2 (2x+1)dx = \left(x^2 + x\right)\Big|_0^2 = 4 + 2 = 6$.

Câu 30. Tích phân $\int_0^1 (3x+1)(x+3)\mathrm{d}x$ bằng

A. 12. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\int_0^1 (3x+1)(x+3)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(3x^2 + 10x + 3\right)\mathrm{d}x = \left(x^3 + 5x^2 + 3x\right)\Big|_0^1 = 9$.

Vậy : $\int_0^1 (3x+1)(x+3)\mathrm{d}x = 9$.

Câu 31. Tính tích phân $I = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx$

A. $I = \frac{1}{e}$ **B.** $I = \frac{1}{e} + 1$ **C.** $I = 1$ **D.** $I = e$

Lời giải

Chọn A.

$I = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx = \left(\ln|x| + \frac{1}{x}\right)\Big|_1^e = \frac{1}{e}$.

Câu 32. Biết $\int_1^3 \frac{x+2}{x}dx = a + b\ln 3$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính tổng $S = a + b$

A. $S = 4$. **B.** $S = 5$. **C.** $S = 8$. **D.** $S = 6$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\int_1^3 \frac{x+2}{x}dx = \int_1^3 \left(1+\frac{2}{x}\right)dx = \int_1^3 dx + \int_1^3 \frac{2}{x}dx = 2 + 2\ln|x|\Big|_1^3 = 2 + 2\ln 3.$

Do đó $a = 2, b = 2 \Rightarrow S = 4.$

Câu 33. Kết quả tích phân $I = \int_0^1 5^x dx$ bằng

A. $I = \frac{5}{\ln 5}$. **B.** $I = 4\ln 5$. **C.** $I = 5\ln 5$. **D.** $I = \frac{4}{\ln 5}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $I = \int_0^1 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5}\Big|_0^1 = \frac{5^1}{\ln 5} - \frac{5^0}{\ln 5} = \frac{4}{\ln 5}$.

Câu 34. Tích phân $\int_0^1 e^{3x}dx$ bằng

A. $e^3 + \frac{1}{2}$. **B.** $e - 1$. **C.** $\frac{e^3 - 1}{3}$. **D.** $e^3 - 1$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\int_0^1 e^{3x}dx = \frac{1}{3}\int_0^1 e^{3x}d(3x) = \frac{1}{3}e^{3x}\Big|_0^1 = \frac{e^3 - 1}{3}$.

Câu 35. Tích phân $\int_0^1 e^{3x+1}dx$ bằng

A. $\frac{1}{3}(e^4 + e)$ **B.** $e^3 - e$ **C.** $\frac{1}{3}(e^4 - e)$ **D.** $e^4 - e$

Lời giải

Chọn C.

$\int_0^1 e^{3x+1}dx = \frac{1}{3}\int_0^1 e^{3x+1}d(3x+1) = \frac{1}{3}e^{3x+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(e^4 - e)$.

Câu 36. Giá trị của $\int_0^1 \frac{e^x}{2^x}dx$ bằng

A. $I = \frac{e-2}{1-\ln 2}$ **B.** $I = \frac{e-2}{2-2\ln 2}$ **C.** $I = \frac{e}{2-2\ln 2}$ **D.** $I = \frac{e}{1-\ln 2}$

Lời giải

Chọn B.

$$I=\int_0^1\frac{e^x}{2^x}dx=\int_0^1\left(\frac{e}{2}\right)^x dx=\left[\frac{\left(\frac{e}{2}\right)^x}{\ln\frac{e}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{1-\ln 2}\left(\frac{e}{2}-1\right)=\frac{e-2}{2-2\ln 2}$$

Câu 37. Giá trị của $I=\int_0^1\frac{e^{2x}-4}{e^x+2}dx$ bằng

A. $I=2(e+3)0.$ **B.** $I=\frac{1}{2}(e+3).$ **C.** $I=e-3.$ **D.** $I=2(e-3).$

Lời giải

Chọn C.

$$I=\int_0^1\frac{e^{2x}-4}{e^x+2}dx=\int_0^1\frac{(e^x-2)(e^x+2)}{e^x+2}dx=\int_0^1(e^x-2)dx=(e^x-2x)_0^1=e-3$$

Câu 38. Biết $\int_1^2 e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x}\right)dx=e^2+a.e+b\ln 2\ (a,b\in\mathbb{Z})$. Khi đó giá trị của $P=\frac{a+b}{a.b}$ là

A. $P=-3$ **B.** $P=1$ **C.** $P=-1$ **D.** $P=-2$

Lời giải

Chọn D.

$$I=\int_1^2 e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x}\right)dx=\int_1^2\left(e^x-\frac{1}{x}\right)dx=\left(e^x-\ln|x|\right)_1^2=e^2-e-\ln 2$$

Câu 39. Giá trị của $I=\int_0^1\frac{e^{2x-1}-e^{-3x}+1}{e^x}dx$ bằng

A. $I=\frac{1}{e^4}-\frac{2}{e}+\frac{7}{4}$ **B.** $I=\frac{1}{4e^4}+\frac{2}{e}+\frac{7}{4}$ **C.** $I=\frac{1}{e^4}+\frac{2}{e}+\frac{7}{4}$ **D.** $I=\frac{1}{4e^4}-\frac{2}{e}+\frac{7}{4}$

Lời giải

Chọn D.

$$I=\int_0^1\frac{e^{2x-1}-e^{-3x}+1}{e^x}dx=\int_0^1\left(e^{x-1}-e^{-4x}+e^{-x}\right)dx=\left(e^{x-1}+\frac{1}{4e^{4x}}-\frac{1}{e^x}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{4e^4}-\frac{2}{e}+\frac{7}{4}$$

Câu 40. Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** -1. **D.** $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

+ Tính được $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

Câu 41. Biết $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2\sin x + 3\cos x + x\right) dx = \frac{a+b\sqrt{3}}{2} + \frac{5\pi^2}{c}$ $\left(a,b,c \in \mathbb{Z}\right)$. Khi đó giá trị của $P = a + 2b + c$ là

A. $P = 45$ **B.** $P = 23$ **C.** $P = 65$ **D.** $P = 70$

Lời giải

Chọn B.

$$\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2\sin x + 3\cos x + x\right) dx = \left(-2\cos x + 3\sin x + \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8-3\sqrt{3}}{2} + \frac{5\pi^2}{27}$$

$\Rightarrow P = a + 2b + c = 23$

Câu 42. Biết $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 3\tan^2 x dx = a\sqrt{3} + b + \frac{\pi}{c}$ $\left(a,b,c \in \mathbb{Z}\right)$. Khi đó giá trị của $P = a + b + c$ là

A. $P = 6$ **B.** $P = 4$ **C.** $P = -4$ **D.** $P = -6$

Lời giải

Chọn B.

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 3\tan^2 x dx = 3\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = 3\left(\tan x - x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = 3\sqrt{3} - 3 + \frac{\pi}{4}$$

$\Rightarrow P = a + b + c = 3 - 3 + 4 = 4$

Câu 43. Biết $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(2\cot^2 x + 5\right) dx = \frac{\pi}{a} + b\sqrt{3} + c$ $\left(a,b,c \in \mathbb{Z}\right)$. Khi đó giá trị của $P = a + b + c$ là

A. $P = 6$ **B.** $P = -4$ **C.** $P = 4$ **D.** $P = -6$

Lời giải

Chọn C.

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(2\cot^2 x + 5\right) dx = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left[2\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) + 5\right] dx = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(3 + \frac{2}{\sin^2 x}\right) dx = \left(3x - \cot x\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \sqrt{3} - 1$$

$\Rightarrow P = a + b + c = 4 + 1 - 1 = 4$

Câu 44. Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4} dx = \frac{\pi}{c} + \frac{a}{b}$ với $a,b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó giá trị của $P = a + b + c$ là

A. $P = 17$ **B.** $P = 16$ **C.** $P = 32$ **D.** $P = 49$

Lời giải

Chọn D.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{4}dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\frac{x}{2}dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos x}{2}\right)dx = \frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{4}\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}+\frac{1}{32}$$

$\Rightarrow P = a+b+c = 1+32+16 = 49$

Câu 45. Giá trị của $I = \int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$ bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

$$I = \int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx = \int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2 x}dx = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}|\sin x|dx$$

- Do : $x\in[0;\pi]\to \sin x>0. \Rightarrow |\sin x| = \sin x$; $x\in[\pi;2\pi]\to \sin x<0 \Rightarrow |\sin x| = -\sin x$

Vậy : $I = \sqrt{2}\left(\int_0^{\pi}\sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x dx\right) = \sqrt{2}\left(-\cos x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}\right) = \sqrt{2}(1+1+1+1) = 4\sqrt{2}$

Câu 46. Tính tích phân $I = \int_0^2 |x-2|dx$.

A. $I=-2$. **B.** $I=4$. **C.** $I=2$. **D.** $I=0$.

Lời giải

Chọn C.

$I = \int_0^2 |x-2|dx$.

+ Do : $x\in[0;2]\Rightarrow x-2<0, \Leftrightarrow |x-2| = 2-x$

+ Vậy : $I = \int_0^2 (2-x)dx = \left(2x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^2 = 4-2 = 2$

Câu 47. Tính $\int_{-1}^{2}|2x+1|dx$

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{13}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\int_{-1}^{2}|2x+1|dx$

$$=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}|2x+1|\mathrm{d}x+\int_{-\frac{1}{2}}^{2}|2x+1|\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}(2x+1)\mathrm{d}x+\int_{-\frac{1}{2}}^{2}(2x+1)\mathrm{d}x=\left(x^2+x\right)\Big|_{-1}^{-\frac{1}{2}}+\left(x^2+x\right)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{2}=\frac{13}{2}$$

Câu 48. Tính $I=\int_0^2|2x-2|\mathrm{d}x$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $I=\int_0^1(2-2x)\mathrm{d}x+\int_1^2(2x-2)\mathrm{d}x=\left(2x-x^2\right)\Big|_0^1+\left(x^2-2x\right)\Big|_1^2=1+1=2.$

Câu 49. Tính $\int_0^2\sqrt{x^2-2x+1}\mathrm{d}x$

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\int_0^2\sqrt{x^2-2x+1}\mathrm{d}x=\int_0^2|x-1|\mathrm{d}x=\int_0^1(1-x)\mathrm{d}x+\int_1^2(x-1)\mathrm{d}x=\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1+\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_1^2=1.$

Câu 50. Tính $I=\int_0^3|x(2x-4)|\mathrm{d}x$.

A. $\frac{16}{3}$. **B.** 2. **C.** $-\frac{16}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $I=\int_0^3|x(2x-4)|\mathrm{d}x=\int_0^2x(4-2x)\mathrm{d}x+\int_2^3x(2x-4)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^2\left(4x-2x^2\right)\mathrm{d}x+\int_2^3\left(2x^2-4x\right)\mathrm{d}x=\left(2x^2-\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^2+\left(\frac{2}{3}x^3-2x^2\right)\Big|_2^3=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}.$$

Câu 51. Tính tích phân $\int_0^8\left|x^2-6x\right|\mathrm{d}x$.

A. $\frac{-64}{3}$. **B.** $\frac{64}{3}$. **C.** $\frac{152}{3}$. **D.** $\frac{-152}{3}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\int_0^8\left|x^2-6x\right|\mathrm{d}x=\int_0^6\left|x^2-6x\right|\mathrm{d}x+\int_6^8\left|x^2-6x\right|\mathrm{d}x=\int_0^6\left(-x^2+6x\right)\mathrm{d}x+\int_6^8\left(x^2-6x\right)\mathrm{d}x$

$=\left(\frac{-x^3}{3}+\frac{6x^2}{2}\right)\Big|_0^6+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}\right)\Big|_6^8=\frac{152}{3}$

Câu 52. Biết $I=\int_{-1}^{3}\left|x^2-3x+2\right|\mathrm{d}x=\frac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{N}^*,\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $T=a-b$

A. 12. **B.** 14. **C.** 11. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $I=\int_{-1}^{3}\left|x^2-3x+2\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left(x^2-3x+2\right)\mathrm{d}x-\int_{1}^{2}\left(x^2-3x+2\right)\mathrm{d}x+\int_{2}^{3}\left(x^2-3x+2\right)\mathrm{d}x$

$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right)\Big|_{-1}^{1}-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right)\Big|_1^2+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right)\Big|_2^3$

$=\frac{14}{3}-\left(-\frac{1}{6}\right)+\frac{5}{6}=\frac{17}{3}.$

Ta có: $T=a-b=17-3=14$

Câu 53. Tính tích phân $I=\int_0^2\left|x^3-x\right|dx$.

A. $I=-\frac{1}{2}$. **B.** $I=5$. **C.** $I=\frac{1}{2}$. **D.** $I=\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

$I=\int_0^2\left|x^3-x\right|dx$.

+ Do : $f(x)=x^3-x=x\left(x^2-1\right)=0\leftrightarrow x=0,x=-1;x=1$

$\Rightarrow f(x)>0\forall x\in[1;2];\ f(x)<0\forall x\in[0;1]$

+ Vậy : $I=\int_0^1\left(x-x^3\right)dx+\int_1^2\left(x^3-x\right)dx=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1+\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}^2\right)\Big|_1^2=\frac{5}{2}$

Câu 54. Tính tích phân $I=\int_0^2\left|x^2+2x-3\right|dx$.

A. $I=-2$. **B.** $I=4$. **C.** $I=5$. **D.** $I=-4$.

Lời giải

Chọn B.

$I=\int_0^2\left|x^2+2x-3\right|dx$.

+ Vì : $f(x)=x^2+2x-3=0\rightarrow x=1,x=-3\Rightarrow f(x)>0\forall x\in[1;2];\ f(x)<0\forall x\in[0;1]$

$\Rightarrow I=\int\limits_{0}^{1}-f(x)dx+\int\limits_{1}^{2}f(x)dx=\int\limits_{0}^{1}\left(3-2x-x^2\right)dx+\int\limits_{1}^{2}\left(x^2+2x-3\right)dx$

$=\left(3x-x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1+\left(\frac{1}{3}x^3+x^2-3x\right)\Big|_1^2=\left(3-1-\frac{1}{3}\right)+\left[\left(\frac{8}{3}+4-6\right)-\left(\frac{1}{3}+1-3\right)\right]=5$

Câu 55. Cho tích phân $I=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\int\limits_{-3}^{3}\left|x^2-1\right|dx=a\sqrt{3}+b\sqrt{2}$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính $P=a+b$.

A. $P=\frac{88}{3}$ **B.** $P=\frac{80}{3}$ **C.** $P=\frac{20}{3}$ **D.** $P=\frac{40}{3}$

Lời giải

Chọn A.

$I=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\int\limits_{-3}^{3}\left|x^2-1\right|dx$.

Tính $I=\int\limits_{-3}^{3}\left|x^2-1\right|dx$

Vì : $f(x)=x^2-1=0\rightarrow x=-1;x=1\Rightarrow f(x)>0\forall x\in[-3;-1]\cup[1;3];f(x)<0\forall x\in[-1;1]$

Vậy : $I=\int\limits_{-3}^{-1}\left(x^2-1\right)dx+\int\limits_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx+\int\limits_{1}^{3}\left(x^2-1\right)dx=\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)\Big|_{-3}^{-1}+\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{1}+\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)\Big|_{1}^{3}=\frac{44}{3}$

$\Rightarrow I=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\int\limits_{-3}^{3}\left|x^2-1\right|dx=\frac{44}{3}\sqrt{3}+\frac{44}{3}\sqrt{2}$

$\Rightarrow a=\frac{44}{3};b=\frac{44}{3}\Rightarrow P=a+b=\frac{88}{3}$

Câu 56. Tính tích phân $I=\int\limits_{-2}^{5}\left(\left|x+2\right|-\left|x-2\right|\right)dx$.

A. $I=38$. **B.** $I=12$. **C.** $I=44$. **D.** $I=40$.

Lời giải

Chọn B.

$I=\int\limits_{-2}^{5}\left(\left|x+2\right|-\left|x-2\right|\right)dx=\int\limits_{-2}^{5}\left|x+2\right|dx-\int\limits_{-2}^{5}\left|x-2\right|dx=\int\limits_{-2}^{5}\left(x+2\right)dx-\left[-\int\limits_{-2}^{2}\left(x-2\right)dx+\int\limits_{2}^{5}\left(x-2\right)dx\right]$

$=\int\limits_{-2}^{5}\left(x+2\right)dx+\int\limits_{-2}^{2}\left(x-2\right)dx-\int\limits_{2}^{5}\left(x-2\right)dx=12$

Câu 57. Biết $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\left|\sin x\right|dx=a-\sqrt{b}\ \ (a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{Q})$. Khi đó $a+4b$ bằng

A. 5. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}|\sin x|dx=-\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin xdx+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}\sin xdx=(\cos x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}-(\cos x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{6}}=2-\frac{\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{\frac{3}{4}}$

Suy ra: $a=2,b=\frac{3}{4}$ nên $a+4b=5$

Câu 58. Cho tích phân $I=\int\limits_{0}^{3}|2^x-4|dx=a+\frac{b}{c\ln 2}$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $P=a^2+b^2+c^2$.

A. $P=15$ **B.** $P=10$ **C.** $P=5$ **D.** $P=18$

Lời giải

Chọn D.

$I=\int\limits_{0}^{3}|2^x-4|dx$

Nhận xét : $2^x-4>0\Leftrightarrow x>2\Rightarrow 2^x-4>0\forall x\in[2;3];2^x-4<0\forall x\in[0;2]$

Vậy : $I=\int\limits_{0}^{2}(4-2^x)dx+\int\limits_{2}^{3}(2^x-4)dx=\left(4x-\frac{1}{\ln 2}2^x\right)\Big|_{0}^{2}+\left(\frac{1}{\ln 2}2^x-4x\right)\Big|_{2}^{3}$

$=\left(8-\frac{3}{\ln 2}\right)+\left(\frac{4}{\ln 2}-4\right)=4+\frac{1}{\ln 2}$

$\Rightarrow P=a^2+b^2+c^2=4^2+1^2+1^2=18$

Câu 59. Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^{1}|2^x-2^{-x}|dx$.

A. $\frac{1}{\ln 2}$. **B.** $\ln 2$. **C.** $2\ln 2$. **D.** $\frac{2}{\ln 2}$.

Lời giải

Chọn A.

$I=\int\limits_{-1}^{1}|2^x-2^{-x}|dx$ ta có $2^x-2^{-x}=0\Rightarrow x=0$.

$\Rightarrow I=\int\limits_{-1}^{1}|2^x-2^{-x}|dx=\int\limits_{-1}^{0}|2^x-2^{-x}|dx+\int\limits_{0}^{1}|2^x-2^{-x}|dx=\left|\int\limits_{-1}^{0}(2^x-2^{-x})dx\right|+\left|\int\limits_{0}^{1}(2^x-2^{-x})dx\right|$

$=\left|\left(\frac{2^x+2^{-x}}{\ln 2}\right)\Big|_{-1}^{0}\right|+\left|\left(\frac{2^x+2^{-x}}{\ln 2}\right)\Big|_{0}^{1}\right|=\frac{1}{\ln 2}$.

Câu 60. Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^{2}(|x|-|x-1|)dx$.

A. $I=0$. **B.** $I=2$. **C.** $I=-2$. **D.** $I=-3$.

Lời giải

Chọn A.

$I=\int_{-1}^{2}\left(|x|-|x-1|\right)dx$

Cách 1.

$I=\int_{-1}^{2}\left(|x|-|x-1|\right)dx=\int_{-1}^{2}|x|dx-\int_{-1}^{2}|x-1|dx=-\int_{-1}^{0}xdx+\int_{0}^{2}xdx+\int_{-1}^{1}(x-1)dx-\int_{1}^{2}(x-1)dx$

$=-\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0}+\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{2}+\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_{-1}^{1}-\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_{1}^{2}=0.$

Cách 2.

Bảng xét dấu

x	-1		0		1		2
x		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	

$\Rightarrow I=\int_{-1}^{0}\left(-x+x-1\right)dx+\int_{0}^{1}\left(x+x-1\right)dx+\int_{1}^{2}\left(x-x+1\right)dx=-x\Big|_{-1}^{0}+\left(x^2-x\right)\Big|_{0}^{1}+x\Big|_{1}^{2}=0$

Câu 61. Cho a là số thực dương, tính tích phân $I=\int_{-1}^{a}|x|\mathrm{d}x$ theo a.

A. $I=\frac{a^2+1}{2}$. **B.** $I=\frac{a^2+2}{2}$. **C.** $I=\frac{-2a^2+1}{2}$. **D.** $I=\frac{\left|3a^2-1\right|}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

Vì $a>0$ nên $I=-\int_{-1}^{0}x\,dx+\int_{0}^{a}x\,dx=\frac{1}{2}+\frac{a^2}{2}=\frac{1+a^2}{2}$

Câu 62. Cho số thực $m>1$ thỏa mãn $\int_{1}^{m}\left|2mx-1\right|dx=1$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $m\in(4;6)$. **B.** $m\in(2;4)$. **C.** $m\in(3;5)$. **D.** $m\in(1;3)$.

Lời giải

Chọn D.

Do $m>1\Rightarrow 2m>2\Rightarrow\frac{1}{2m}<1$. Do đó với $m>1, x\in[1;m]\Rightarrow 2mx-1>0$.

Vậy $\int_{1}^{m}\left|2mx-1\right|dx=\int_{1}^{m}\left(2mx-1\right)dx=\left(mx^2-x\right)\Big|_{1}^{m}=m^3-m-m+1=m^3-2m+1$.

Từ đó theo bài ra ta có $m^3-2m+1=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$. Do $m>1$ vậy $m=\sqrt{2}$.

Câu 63. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\int\limits_{-1}^{1}|x|^3\,\mathrm{d}x=\left|\int\limits_{-1}^{1}x^3\mathrm{d}x\right|$.

B. $\int\limits_{-1}^{2027}\left|x^4-x^2+1\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2027}\left(x^4-x^2+1\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_{-2}^{3}\left|e^x\left(x+1\right)\mathrm{d}x\right|=\int\limits_{-2}^{3}e^x\left(x+1\right)\mathrm{d}x$.

D. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $x^4-x^2+1=x^4-2.x^2.\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó: $\int\limits_{-1}^{2027}\left|x^4-x^2+1\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2027}\left(x^4-x^2+1\right)\mathrm{d}x$.

Câu 64. Tính tích phân $I=\int\limits_{1}^{4}\sqrt{x^2-6x+9}dx$.

A. $I=\frac{5}{2}$.

B. $I=-\frac{1}{2}$.

C. $I=-2$.

D. $I=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

$I=\int\limits_{1}^{4}\sqrt{x^2-6x+9}dx=\int\limits_{1}^{4}\left|x-3\right|dx$

- Ta có : $x-3>0\forall x\in[3;4];x-3<0\forall x\in[1;3]$

-Vậy : $I=\int\limits_{1}^{3}\left(3-x\right)dx+\int\limits_{3}^{4}\left(x-3\right)sx=\left(3x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^3+\left(\frac{1}{2}x^2-3x\right)\Big|_3^4=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

Câu 65. Nếu $F'\left(x\right)=\frac{1}{2x}$ và $F\left(1\right)=1$ thì giá trị của $F\left(4\right)$ bằng

A. $\ln 2$.

B. $1+\ln 2$

C. $1+\frac{1}{2}\ln 2$

D. $\frac{1}{2}\ln 2$

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\int\limits_{1}^{4}F'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{4}\frac{1}{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln|x|\Big|_1^4=\ln 2$.

Lại có: $\int\limits_{1}^{4}F'\left(x\right)\mathrm{d}x=F\left(x\right)\Big|_1^4=F\left(4\right)-F\left(1\right)$.

Suy ra $F\left(4\right)-F\left(1\right)=\ln 2$.

Do đó $F\left(4\right)=F\left(1\right)+\ln 2=1+\ln 2$.

Câu 66. Cho $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của $f\left(x\right)=\frac{2}{x}$. Biết $F\left(-1\right)=0$. Tính $F\left(2\right)$ kết quả là.

A. $2\ln 2+1$. **B.** $\ln 2$. **C.** $2\ln 3+2$. **D.** $2\ln 2$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\int_{-1}^{2} f(x)dx = F(x)\Big|_{-1}^{2} = F(2)-F(-1)$

$\int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{2} \frac{2}{x} = 2\ln|x|\Big|_{-1}^{2} = 2\ln 2 - 2\ln 1 = 2\ln 2$

$\Rightarrow F(2)-F(-1)=2\ln 2$

$\Leftrightarrow F(2)=2\ln 2$ (do $F(-1)=0$).

Câu 67. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $[-1;2]$, $f(-1)=8; f(2)=-1$. Tích phân $\int_{-1}^{2} f'(x)d$ bằng

A. 1. **B.** 7. **C.** –9. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $x\int_{-1}^{2} f'(x)dx = f(x)\Big|_{-1}^{2} = f(2)-f(-1) = -1-8 = -9$

Câu 68. Biết $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_{1}^{3}[1+f(x)]dx$ bằng

A. 10. **B.** 8. **C.** $\frac{26}{3}$. **D.** $\frac{32}{3}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\int_{1}^{3}[1+f(x)]dx = \left(x+F(x)\right)\Big|_{1}^{3} = \left(x+x^2\right)\Big|_{1}^{3} = 12-2 = 10.$

Câu 69. Biết $F(x)=x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_{1}^{3}(1+f(x))dx$ bằng

A. 20. **B.** 22. **C.** 26. **D.** 28.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\int_{1}^{3}[1+f(x)]dx = [x+F(x)]\Big|_{1}^{3} = \left[x+x^3\right)]\Big|_{1}^{3} = 30-2 = 28$.

Câu 70. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\sin^2\frac{x}{2}+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ bằng

A. $\frac{\pi^2+16\pi+8\sqrt{2}-16}{16}$ **B.** $\frac{\pi^2+16\pi+2\sqrt{2}-4}{16}$

C. $\dfrac{\pi^2+16\pi+8\sqrt{2}}{16}$ **D.** $\dfrac{\pi^2+16\pi-16}{16}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $f(x)=\int\left(2\sin^2\dfrac{x}{2}+1\right)\mathrm{d}x=\int(2-\cos x)\,\mathrm{d}x=2x-\sin x+C.$

Vì $f(0)=4\Rightarrow C=4$

Hay $f(x)=2x-\sin x+4.$

Suy ra $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(2x-\sin x+4)\mathrm{d}x$

$=\left(x^2+\cos x+4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\pi^2}{16}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\pi-1=\dfrac{\pi^2+16\pi+8\sqrt{2}-16}{16}.$

Câu 71. Cho hàm số $f(x)$ .Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\cos^2\dfrac{x}{2}+3,\ \forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx$ bằng?

A. $\dfrac{\pi^2+8\pi-8-\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\dfrac{\pi^2+8\pi-8-4\sqrt{2}}{8}$.

C. $\dfrac{\pi^2+6\pi+8}{8}$. **D.** $\dfrac{\pi^2+8\pi-4\sqrt{2}}{8}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $f(x)=\int f'(x)dx=\int(2\cos^2\dfrac{x}{2}+3)dx=\int(2.\dfrac{1+\cos x}{2}+3)dx=\int(\cos x+4)dx=\sin x+4x+C$

$\Rightarrow f(x)=\sin x+4x+C$

do $f(0)=4\Rightarrow C=4$.

Vậy $f(x)=\sin x+4x+4$ nên $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin x+4x+4)dx$

$=(-\cos x+2x^2+4x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\pi^2+8\pi-8-4\sqrt{2}}{8}.$

Câu 72. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{2x} & khi\ x\ge 0\\ x^2+x+2 & khi\ x<0\end{cases}$. Biết tích phân $\int\limits_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{a}{b}+\dfrac{\mathrm{e}^2}{c}$ $(a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị $a+b+c$ bằng

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $I=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}\left(x^2+x+2\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1} e^{2x}\mathrm{d}x=\frac{4}{3}+\frac{e^2}{2}$.

Vậy $a+b+c=9$.

Câu 73. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x\left(1+x^2\right) & khi\ x\geq 3 \\ \dfrac{1}{x-4} & khi\ x<3 \end{cases}$. Tích phân $I=\int\limits_{2}^{4} f(t)\mathrm{d}t$ bằng:

A. $\frac{40}{3}-\ln 2$. **B.** $\frac{95}{6}+\ln 2$. **C.** $\frac{189}{4}+\ln 2$. **D.** $\frac{189}{4}-\ln 2$.

Lời giải

Chọn D.

$I=\int\limits_{2}^{4} f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_{2}^{4} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{2}^{3}\frac{1}{x-4}\mathrm{d}x+\int\limits_{3}^{4} x\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{189}{4}-\ln 2$.

Câu 74. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\begin{cases} 3x^2 & \text{khi } 0\leq x\leq 1 \\ 4-x & \text{khi } 1\leq x\leq 2 \end{cases}$. Tính tích phân $\int\limits_{0}^{2} f\left(x\right)\mathrm{d}x$

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\int\limits_{0}^{2} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1} 3x^2\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}\left(4-x\right)\mathrm{d}x=\frac{7}{2}$.

Câu 75. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} 4-x & \text{khi } 0\leq x\leq 1 \\ 3x^2 & \text{khi } 1\leq x\leq 2 \end{cases}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{2} f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{21}{2}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** 7. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $I=\int\limits_{0}^{2} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}\left(4-x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2} 3x^2\mathrm{d}x=\frac{21}{2}$

Câu 76. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f\left(x\right)=\begin{cases} 2x & \text{khi } x\geq 0 \\ x^3+x+1 & \text{khi } x<0 \end{cases}$. Tính $\int\limits_{0}^{2} f\left(x-1\right)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{5}{4}$. **D.** $\frac{11}{4}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \left(x^3+x+1\right)\mathrm{d}x + \int_0^1 2x\mathrm{d}x$

$= \left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-1}^0 + x^2\Big|_0^1 = -\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1+1 = \frac{5}{4}.$

Câu 77. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2-x+1 & \text{khi } x \ge \frac{1}{2} \\ 2x+\frac{7}{4} & \text{khi } x < \frac{1}{2} \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin^2 x\right)\sin 2x\mathrm{d}x$.

A. $\frac{17}{24}$. **B.** $-\frac{37}{24}$. **C.** $\frac{24}{37}$. **D.** $\frac{37}{24}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin^2 x\right)\sin 2x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin^2 x\right).2\sin x\cos x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x.f\left(\sin^2 x\right)\mathrm{d}(\sin x)$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin^2 x\right)\mathrm{d}\left(\sin^2 x\right) = \int_0^1 f(u)\mathrm{d}u = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}}\left(2x+\frac{7}{4}\right)\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 (x^2-x+1)\mathrm{d}x = \frac{37}{24}.$

Câu 78. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x+2 \text{ khi } -3 \le x \le -1 \\ x^2 \quad \text{khi } x \ge -1 \end{cases}$ thì $\int_{-3}^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{31}{3}$. **B.** $\frac{28}{3}$. **C.** $\frac{22}{3}$. **D.** $\frac{26}{3}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\int_{-3}^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{-1}(x+2)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^3 x^2\mathrm{d}x = 0+\frac{28}{3} = \frac{28}{3}.$

Vậy $\int_{-3}^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{28}{3}$.

Câu 79. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2-x & \text{khi } x < 0 \\ \sin x & \text{khi } x \ge 0 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_{-1}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$

A. $\frac{13}{6}$. **B.** $\frac{5}{6}$. **C.** $-\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{19}{6}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $I = \int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \left(2x^2-x\right)\mathrm{d}x + \int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x = \frac{7}{6}+2 = \frac{19}{6}$

Câu 80. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}4x^3+2x+1 & \text{khi } x\ge 0\\ 4x+1 & \text{khi } x<0\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(1)=2$. Giá trị của $2F(-1)+3F(2)$ bằng.

A. 76. **B.** 19. **C.** 63. **D.** 21.

Lời giải

Chọn C.

Vì F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ nên ta có:

$$\begin{cases}\int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}(4x+1)\mathrm{d}x=F(0)-F(-1)=-1\\ \int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}(4x^3+2x+1)\mathrm{d}x=F(1)-F(0)=3\\ \int\limits_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{2}(4x^3+2x+1)\mathrm{d}x=F(2)-F(1)=19\\ F(1)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}F(0)-F(-1)=-1\\ F(0)=-1\\ F(2)=21\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}F(-1)=0\\ F(2)=21\end{cases}.$$

Vậy $2F(-1)+3F(2)=63$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 81. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $\int_1^3 f(x)dx=2$.

a) $\int_1^3 3f(x)dx=6$.

b) Nếu $\int_2^3 f(x)dx=-1$ thì $\int_1^2 f(x)dx=1$.

c) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ thoả mãn $F(1)=3$ thì $F(3)=1$.

d) $\int_1^3 \frac{xf(x)+x^2-1}{x}dx=a+b\ln 3\,(a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R})$. Ta có $a+b=5$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) $\int_1^3 3f(x)dx=3.\int_1^3 (x)dx=3.2=6$.

b) Nếu $\int_2^3 f(x)dx=-1$ thì $\int_1^2 f(x)dx=\int_1^3 f(x)dx-\int_2^3 f(x)dx=2-(-1)=3$.

c) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ thoả mãn $F(1)=3$ thì $2=\int_1^3 f(x)dx=F(3)-F(1)\Rightarrow F(3)=2+F(1)=2+3=5$.

d)

$$\int_1^3 \frac{xf(x)+x^2-1}{x}dx=\int_1^3\left[f(x)+x-\frac{1}{x}\right]dx=\int_1^3 f(x)dx+\int_1^3 xdx-\int_1^3\frac{1}{x}dx=2+\frac{x^2}{2}\Big|_1^3-\ln|x|\Big|_1^3$$

$$=2+\frac{9}{2}-\frac{1}{2}-\ln 3+\ln 1=6-\ln 3=a+b\ln 3.$$

Suy ra $a=6;b=-1\Rightarrow a+b=5$.

Câu 82. Cho hàm số $f(x)=\frac{x}{2}+\cos x$.

a) Hàm số $f(x)$ có tập xác định là đoạn $[-1;1]$

b) $\int f(x)dx=x^2+\sin x$.

c) $\int_0^2 f(x)dx=1+\sin 2$.

d) Nếu hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thoả mãn $F(0)=1$ thì $F(1)=\frac{1}{4}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Tập xác định của hàm số $f(x)=\frac{x}{2}+\cos x$ là: $D=\mathbb{R}$.

b) $\int f(x)dx=\int\left(\frac{x}{2}+\cos x\right)dx=\frac{x^2}{4}+\sin x+C$.

c) $\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2\left(\frac{x}{2}+\cos x\right)dx=\left(\frac{x^2}{4}+\sin x\right)\Big|_0^2=1+\sin 2$.

d) Nếu hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thoả mãn $F(0)=1$ thì $F(1)=\frac{1}{4}$.

$F(1)-F(0)=\int_0^1\left(\frac{x}{2}+\cos x\right)dx=\left(\frac{x^2}{4}+\sin x\right)\Big|_0^1=\frac{1}{4}+\sin 1$

$\Rightarrow F(1)=\frac{5}{4}+\sin 1$.

Câu 83. Cho hàm số $f(x)=\frac{x^2+5x-7}{x}$

a) $\int f(x)\cdot dx=\frac{x^2}{2}+5x-7\ln x+C$.

b) Hàm số $f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)=\frac{x^2+7}{x^2}$

c) $\int_{-2}^{-1} f(x)\cdot dx=\frac{m}{n}+m\ln n$, với $m,n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tổng $m+2025n=4057$.

d) Gọi $G(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $G(1)=4$ và $G(3)+G(-9)=20$. Khi đó $G(-6)=a\ln 2+b\ln 3+c$, với a,b,c là các số hữu tỉ. Tổng $a+b+c=\frac{2}{3}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) $\int f(x)\cdot dx=\int\frac{x^2+5x-7}{x}\cdot dx=\int\left(x+5-\frac{7}{x}\right)\cdot dx=\int f(x)\cdot dx=\frac{x^2}{2}+5x-7\ln|x|+C$.

b) $f'(x)=1+\frac{7}{x^2}=\frac{x^2+7}{x^2}=g(x)$.

c) $\int_{-2}^{-1} f(x)\cdot dx=\left(\frac{x^2}{2}+5x-7\ln|x|\right)\Big|_{-2}^{-1}=\left(\frac{1}{2}-5\right)-(2-10-7\ln 2)=\frac{7}{2}+7\ln 2$,

khi đó $\begin{cases} m=7 \\ n=2 \end{cases}$ nên $m+2025n=4057$.

d) $G(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì

$$G(x)=\frac{x^2}{2}+5x-7\ln|x|+C=\begin{cases} \frac{x^2}{2}+5x-7\ln x+C_1, \forall x\in(0;+\infty) \\ \frac{x^2}{2}+5x-7\ln(-x)+C_2, \forall x\in(-\infty;0) \end{cases}$$

Ta có: $G(1)=4\Leftrightarrow \frac{1}{2}+5+C_1=4\Leftrightarrow C_1=-\frac{3}{2}$

$$G(3)+G(-9)=20\Leftrightarrow \frac{3^2}{2}+5.3-7\ln 3-\frac{3}{2}+\frac{(-9)^2}{2}+5.(-9)-7\ln 9+C_2=20\Leftrightarrow C_2=\frac{13}{2}+21\ln 3$$

Khi đó: $G(-6)=\frac{(-6)^2}{2}+5.(-6)-7\ln 6+\frac{13}{2}+21\ln 3=-7\ln 2+14\ln 3-\frac{11}{2}$.

Suy ra $\begin{cases} a=-7 \\ b=14 \\ c=\frac{-11}{2} \end{cases}$ nên $a+b+c=\frac{3}{2}$.

Câu 84. Xét hàm số $f(x)=\frac{x^2+2}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

a) $f(x)=x+\frac{2}{x}$.

b) $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+2\ln x+C$.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $F(1)=\frac{3}{2}$. Khi đó $F(4)=9+4\ln 2$.

d) Nếu $\int_1^4 kf(x)\mathrm{d}x=5$ thì $k\in(1;2)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) $f(x)=\frac{x^2+2}{x}\Leftrightarrow f(x)=x+\frac{2}{x}$.

b) Với $x\in(0;+\infty)$, ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(x+\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+2\ln x+C$.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng $(0;+\infty)$ thì $F(x)=\frac{x^2}{2}+2\ln x+C$.

Vì $F(1)=\frac{3}{2}$ nên $\frac{1^2}{2}+2\ln 1+C=\frac{3}{2}\Rightarrow C=1$. Suy ra $F(4)=\frac{4^2}{2}+2\ln 4+1=9+4\ln 2$.

d) $\int_1^4 kf(x)\mathrm{d}x=k\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x=k\left[F(4)-F(1)\right]=k\left(9+4\ln 2-\frac{3}{2}\right)=k\left(\frac{15}{2}+4\ln 2\right)$.

Suy ra: $\int_1^4 kf(x)\mathrm{d}x=5\Leftrightarrow k\left(\frac{15}{2}+4\ln 2\right)=5\Leftrightarrow k=\frac{5}{\frac{15}{2}+4\ln 2}\approx 0,487$.

Câu 85. Cho hàm số $f(x)=2x^2-3$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$

a) Ta có $\int_{-1}^{2} f(x)dx=F(2)-F(-1)$.

b) Nếu $F(0)=1$ thì $F(2)=12$.

c) Nếu $\int_0^2 af(x)dx=32$ thì $a=6$.

d) Cho $g(x)=(ax^2+bx+c).e^{3x}$ là một nguyên hàm của hàm số $e^{3x}.f(x)$, nếu $\int_0^2 e^{3x}f(x)dx=a+\frac{b.e^6}{27}$.

Khi đó: $27a-b=-2$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Đúng theo định nghĩa

b) $\int_0^2 f(x)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+4x\right)\Big|_{-1}^{2}=\frac{16}{3}$

$\int_0^2 f(x)dx=F(2)-F(0)$

$\Rightarrow F(2)=\int_0^2 f(x)dx+F(0)=\frac{16}{3}+1=\frac{19}{3}$

c) $\int_0^2 af(x)dx=32\Leftrightarrow a.\int_0^2 f(x)dx=32\Leftrightarrow a.\frac{16}{3}=32\Leftrightarrow a=6$

d) Đặt $g(x)=(ax^2+bx+c).e^{3x}$ là một nguyên hàm của hàm số $e^{3x}.f(x)$

Khi đó: $g'(x)=e^{3x}.f(x)\Rightarrow 3.e^{3x}(ax^2+bx+c)+e^{3x}.(2ax+b)=e^{3x}.f(x)$

$\Rightarrow 3(ax^2+bx+c)+2ax+b=f(x)$

$\Rightarrow 3ax^2+(3b+2a)x+3c+b=2x^2-3$

Đồng nhất hai vế, ta được: $\begin{cases} 3a=2 \\ 2a+3b=0 \\ b+3c=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2}{3} \\ b=-\dfrac{4}{9} \\ c=-\dfrac{23}{27} \end{cases}$

Vậy: $\int\limits_0^2 e^{3x} f\left(x\right)dx = e^{3x}\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{9}x-\frac{23}{27}\right)\Big|_0^2 = e^6.\frac{25}{27}+\frac{23}{27}$

Kết luận: $a=\frac{23}{27}; b=25$ và $27a-b=-2$.

Câu 86. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^3 f\left(x\right)dx = 2025$

a) $\int\limits_0^3 2f\left(x\right)dx = 4050$.

b) Biết $\int\limits_0^6 f\left(x\right)dx = 2024$, khi đó $\int\limits_3^6 f\left(x\right)dx = 1$

c) $\int\limits_0^3 \left[f\left(x\right)-4x^3+2x\right]dx = 1853$

d) $\int\limits_3^0 \left[3^{2x+1}-\frac{1}{2025}f\left(x\right)\right]dx = 1191$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

a) Ta có: $\int\limits_0^3 2f\left(x\right)dx = 2\int\limits_0^3 f\left(x\right)dx = 2.2025 = 4050$.

b) $\int\limits_0^6 f\left(x\right)dx = 2024 \Leftrightarrow \int\limits_0^3 f\left(x\right)dx+\int\limits_3^6 f\left(x\right)dx = 2024 \Leftrightarrow 2025+\int\limits_3^6 f\left(x\right)dx = 2024 \Leftrightarrow \int\limits_3^6 f\left(x\right)dx = -1$

c) $\int\limits_0^3 \left[f\left(x\right)-4x^3+2x\right]dx = \int\limits_0^3 f\left(x\right)dx-\int\limits_0^3 4x^3dx+\int\limits_0^3 2xdx = 2025-x^4\Big|_0^3+x^2\Big|_0^3 = 1953$

d) $\int\limits_3^0 \left[3^{2x+1}-\frac{1}{2025}f\left(x\right)\right]dx = \int\limits_3^0 3^{2x+1}dx-\frac{1}{2025}\int\limits_3^0 f\left(x\right)dx = \frac{1}{2}.3^{2x+1}\Big|_3^0-\frac{1}{2025}\left(-2025\right) = 1091$

Câu 87. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_1^4 f\left(x\right)dx = 1$

a) $\int\limits_4^1 \frac{1}{2}f\left(x\right)dx = \frac{1}{2}$.

b) $\int_1^4 \left[2f(x)-\frac{3}{x}\right]dx = 2+3\ln 2$

c) Biết $\int_4^1 \left[f(x)-\frac{2}{x^3}+\sqrt[4]{x^3}\right]dx = \frac{a+b\sqrt{2}}{28}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a+b=119$.

d) Biết $\int_{-2}^4 \left[f(x)-e^x\right]dx = \frac{1}{e^2}$, khi đó $\int_{-2}^1 f(x)dx = e^4-1$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) $\int_4^1 \frac{1}{2}f(x)dx = -\frac{1}{2}\int_1^4 f(x)dx = -\frac{1}{2}$.

b) $\int_1^4 \left[2f(x)-\frac{3}{x}\right]dx = 2\int_1^4 f(x)dx + 3\int_1^4 \frac{1}{x}dx = 2.1+3.\ln|x|\Big|_1^4 = 2+6\ln 2$

c) $\int_4^1 \left[f(x)-\frac{2}{x^3}+\sqrt[4]{x^3}\right]dx = \int_4^1 f(x)dx + 2\int_4^1 \frac{1}{x^3}dx + \int_4^1 \sqrt[4]{x^3}dx = -1+\frac{1}{x^2}\Big|_4^1 + \frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3}\Big|_4^1 = \frac{9-128\sqrt{2}}{28}$

$\Rightarrow a=9; b=-128 \Rightarrow a+b=-119$

d)

$\int_{-2}^4 \left[f(x)-e^x\right]dx = \frac{1}{e^2}$

$\Leftrightarrow \int_{-2}^4 f(x)dx - \int_{-2}^4 e^x dx = \frac{1}{e^2}$

$\Leftrightarrow \int_{-2}^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx - \int_{-2}^4 e^x dx = \frac{1}{e^2}$

$\Leftrightarrow \int_{-2}^1 f(x)dx + 1 - e^x\Big|_{-2}^4 = \frac{1}{e^2}$

$\Leftrightarrow \int_{-2}^1 f(x)dx + 1 - e^4 + \frac{1}{e^2} = \frac{1}{e^2}$

$\Leftrightarrow \int_{-2}^1 f(x)dx = e^4-1$

Câu 88. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \frac{\pi}{4}$

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x)+1\right]dx = \frac{3\pi}{4}$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[2\sin x-\frac{1}{2}f(x)\right]dx=\frac{16-\pi}{8}$

c) Biết $\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}2\pi g(x)dx=1$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)-3g(x)-\cos^2\frac{x}{2}\right]dx=\frac{3}{2\pi}-\frac{1}{2}$

d) Biết $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}2f(x)dx=\frac{\pi}{2}$, khi đó $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\left[\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}-2f(x)\right]dx=\frac{\sqrt{2}-2}{4}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)+1\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{4}+x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[2\sin x-\frac{1}{2}f(x)\right]dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=-2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}.\frac{\pi}{4}=\frac{16+\pi}{8}$

c) Ta có $\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}2\pi g(x)dx=1\Leftrightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(x)dx=-\frac{1}{2\pi}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)-3g(x)-\cos^2\frac{x}{2}\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx-3\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\frac{x}{2}dx=\frac{\pi}{4}-3\left(-\frac{1}{2\pi}\right)-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos x}{2}dx$

$=\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2\pi}-\frac{1}{2}(x+\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2\pi}-\frac{1}{2}$

d) Ta có: $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}2f(x)dx=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}2f(x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}2f(x)dx=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}f(x)dx+2.\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}f(x)dx=0$

Khi đó:

$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\left[\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}-2f(x)\right]dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}dx-2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\sin xdx=-\frac{1}{2}\cos x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{0}=\frac{-\sqrt{2}-2}{4}$

Câu 89. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(x)dx=-1$, $\int_0^3 f(x)dx=2025$.

a) $\int_1^0 f(x)dx=1$

b) $\int_1^3 f(x)dx = 2026$

c) $\int_1^3 \left[f(x) - e^{-2x+1} \right] dx = \frac{1}{a.e^5} + \frac{1}{b.e} + c$, với $a,b,c \in \mathbb{Z}$. Khi đó $a+b+c = 2025$.

d) Biết $\int_3^4 f(x)dx = 2$, khi đó $\int_1^4 \left[f(x) - 2^{x+1} \right] dx = 2000$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) $\int_1^0 f(x)dx = -\int_0^1 f(x)dx = 1$

b)

$\int_0^3 f(x)dx = 2025$

$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx = 2025$

$\Leftrightarrow -1 + \int_1^3 f(x)dx = 2025$

$\Leftrightarrow \int_1^3 f(x)dx = 2026$

c) Ta có: $\int_1^3 f(x)dx = 2026$

$\int_1^3 \left[f(x) - e^{-2x+1} \right] dx = \int_1^3 f(x)dx - \int_1^3 e^{-2x+1}dx = 2026 + \frac{1}{2}e^{-2x+1}\Big|_1^3 = \frac{1}{2e^5} - \frac{1}{2e} + 2026$

$\Rightarrow a = 2; b = -2; c = 2026 \Rightarrow a+b+c = 2026$

d) Ta có: $\int_1^3 f(x)dx = 2026$ và $\int_3^4 f(x)dx = 2$

nên $\int_1^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx = 2026 + 2 \Leftrightarrow \int_1^4 f(x)dx = 2028$,

khi đó $\int_1^4 \left[f(x) - 2^{x+1} \right] dx = \int_1^4 f(x)dx - \int_1^4 2^{x+1}dx = 2028 - \frac{2^{x+1}}{\ln 2}\Big|_1^4 = 2028 - \frac{28}{\ln 2}$

Câu 90. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_2^1 f(x)\mathrm{d}x = 3$, $\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x = 4$.

a) $\int_2^3 \frac{1}{2} f(x)\mathrm{d}x = 8$

b) $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 1$

c) $\int_1^3 \left[f(x) + \frac{1}{2025x} \right] \mathrm{d}x = a + \frac{\ln 3}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $2024a - b = 1$.

d) Biết $\int_{-3}^{1} f(x)dx = 2$ và $\int_{-3}^{3} \left[f(x) - 2x + \frac{1}{e^{2x}} \right] dx = \frac{m.e^{12} + n.e^{6} + p}{18e^{6}}$, với $m, n, p \in \mathbb{Z}$. Khi đó $m + n + p = -106$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) $\int_2^3 \frac{1}{2} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x = 2$

b) $\int_2^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = -3$

$\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^3 f(x)\mathrm{d}x = -3 + 4 = 1$

c) Ta có: $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 1$

khi đó: $\int_1^3 \left[f(x) + \frac{1}{2025x} \right] \mathrm{d}x = \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2025}\int_1^3 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = 1 + \frac{1}{2025}\ln|x|\Big|_1^3 = 1 + \frac{\ln 3}{2025}$

$\Rightarrow a = 1; b = 2025 \Rightarrow 2024a - b = -1$

d) Ta có: $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 1$ và $\int_{-3}^{1} f(x)dx = 2$

Do đó: $\int_{-3}^{3} f(x)dx = \int_{-3}^{1} f(x)dx + \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 2 + 1 = 3$

khi đó $\int_{-3}^{3} \left[f(x) - 2x + \frac{1}{e^{2x}} \right] dx = \int_{-3}^{3} f(x)dx - \int_{-3}^{3} 2xdx + \int_{-3}^{3} \frac{1}{e^{2x}}dx = 3 - x^2\Big|_{-3}^{3} - \frac{1}{2e^{2x}}\Big|_{-3}^{3} = \frac{9e^{12} - 106e^{6} - 9}{18e^{6}}$

$\Rightarrow m = 9; n = -106; p = -9 \Rightarrow m + n + p = -106$

Câu 91. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^{0} f(x)dx = 3$, $\int_0^3 2f(x)dx = 6$.

a) $\int_0^3 f(x)dx = 3$

b) $\int_{-1}^{3} f(x)dx = 6$

c) Biết $\int_{-1}^{3}\left[2f\left(x\right)-e^{1-2x}\right]dx=\dfrac{a.e^{8}+b.e^{5}+c}{2}$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Khi đó $a+b+c=26$.

d) Biết $\int_{3}^{6}f\left(x\right)dx=2025$ và $\int_{-1}^{6}\left[\dfrac{1}{2}f\left(x\right)+3x^{2}\right]dx=\dfrac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân thức tối giản.. Khi đó $a+b=2465$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) $\int_{0}^{3}2f\left(x\right)dx=6\Leftrightarrow 2\int_{0}^{3}f\left(x\right)dx=6\Leftrightarrow\int_{0}^{3}f\left(x\right)dx=3$

b) $\int_{-1}^{0}f\left(x\right)dx=3;\int_{0}^{3}f\left(x\right)dx=3$

$\Rightarrow\int_{-1}^{3}f\left(x\right)dx=\int_{-1}^{0}f\left(x\right)dx+\int_{0}^{3}f\left(x\right)dx=3+3=6$

c) Ta có: $\int_{-1}^{3}f\left(x\right)dx=6$

Do đó: $\int_{-1}^{3}\left[2f\left(x\right)-e^{1-2x}\right]dx=2\int_{-1}^{3}f\left(x\right)dx-\int_{-1}^{3}e^{1-2x}dx=2.6+\dfrac{1}{2}e^{1-2x}\Big|_{-1}^{3}=\dfrac{-e^{8}+24e^{5}+1}{2}$

$\Rightarrow a=-1;b=24;=1\Rightarrow a+b+c=24$.

d) Ta có: $\int_{-1}^{3}f\left(x\right)dx=6$ và $\int_{3}^{6}f\left(x\right)dx=2025$

nên: $\int_{-1}^{6}f\left(x\right)dx=\int_{-1}^{3}f\left(x\right)dx+\int_{3}^{6}f\left(x\right)dx=6+2025=2031$

khi đó $\int_{-1}^{6}\left[\dfrac{1}{2}f\left(x\right)+3x^{2}\right]dx=\dfrac{1}{2}\int_{-1}^{6}f\left(x\right)dx+\int_{-1}^{6}3x^{2}dx=\dfrac{2031}{2}+x^{3}\Big|_{-1}^{6}=\dfrac{2031}{2}+6^{3}-\left(-1\right)^{3}=\dfrac{2465}{2}$

$\Rightarrow a=2465;b=2\Rightarrow a+b=2467$

Câu 92. Cho hàm số $f\left(x\right)=mx+n$ với $m,n\in\mathbb{R}$. $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_{0}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x=3$, $\int_{0}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=8$.

a) $\int_{0}^{1}\dfrac{1}{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{3}{2}$

b) $\int_{1}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=-5$

c) $\int_1^2\left[2f(x)-\frac{1}{e^{2x}}\right]dx=\frac{a.e^4+b.e^2+c}{2e^4}$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Khi đó $a+b+c=20$.

d) $3m+2n=10$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) $\int_0^1\frac{1}{2}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}.3=\frac{3}{2}$

b) $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx\Leftrightarrow 8=3+\int_1^2 f(x)dx\Leftrightarrow\int_1^2 f(x)dx=5$

c) Ta có: $\int_1^2 f(x)dx=5$

Do đó: $\int_1^2\left[2f(x)-\frac{1}{e^{2x}}\right]dx=2\int_1^2 f(x)dx-\int_1^2\left(\frac{1}{e^2}\right)^x dx=2.5-\left.\frac{\left(\frac{1}{e^2}\right)^x}{\ln\frac{1}{e^2}}\right|_1^2=\frac{20e^4-e^2+1}{2e^4}$

$\Rightarrow a=20;b=-1;c=1\Rightarrow a+b+c=20$

d)

Ta có: $\int f(x)dx=\int(mx+n)dx=\frac{m}{2}x^2+nx+C$.

Lại có: $\int_0^1 f(x)dx=3\Rightarrow\left.\left(\frac{m}{2}x^2+nx\right)\right|_0^1=3\Leftrightarrow\frac{1}{2}m+n=3\ (1)$.

$\int_0^2 f(x)dx=8\Rightarrow\left.\left(\frac{m}{2}x^2+nx\right)\right|_0^2=8\Leftrightarrow 2m+2n=8\ (2)$.

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{1}{2}m+n=3\\2m+2n=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=2\\n=2\end{cases}$.

$\Rightarrow 3m+2n=10$.

Câu 93. Cho hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx=-\frac{7}{2}$, $\int_0^2 f(x)dx=-2$ và $\int_0^3 f(x)dx=\frac{13}{2}$.

a) $\int_2^0 f(x)dx=2$

b) $\int_1^3 f(x)dx=10$

c) $\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b+c=-\frac{7}{2}$

d) $a+b+c=\frac{4}{3}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) $\int_2^0 f(x)\mathrm{d}x=-\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2$

b) $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\frac{13}{2}=-\frac{7}{2}+\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=10$

c) Ta có: $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{7}{2}\Rightarrow\left(\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right)\Big|_0^1=-\frac{7}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b+c=-\frac{7}{2}\ (1).$

d) Ta lại có:

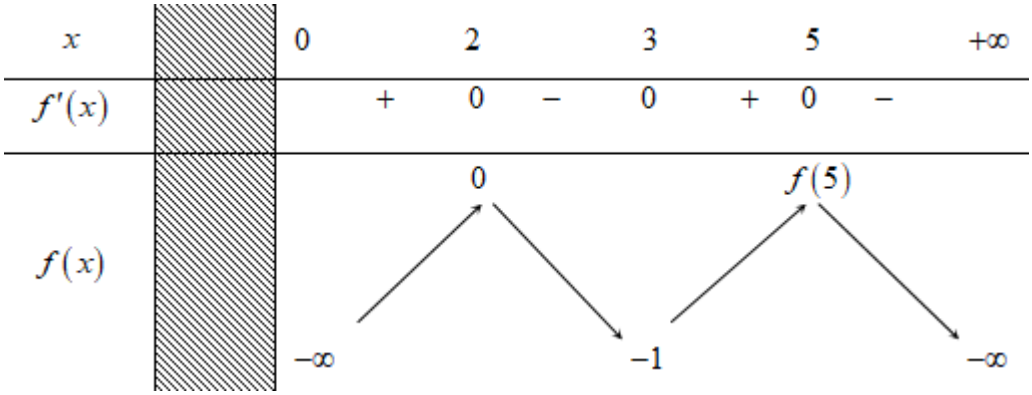
$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=-2\Rightarrow\left(\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right)\Big|_0^2=-2\Leftrightarrow\frac{8}{3}a+2b+2c=-2\ (2).$

$\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\frac{13}{2}\Rightarrow\left(\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right)\Big|_0^3=\frac{13}{2}\Leftrightarrow 9a+\frac{9}{2}b+3c=\frac{13}{2}\ (3).$

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b+c=-\frac{7}{2}\\ \frac{8}{3}a+2b+2c=-2\\ 9a+\frac{9}{2}b+3c=\frac{13}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=3\\ c=-\frac{16}{3}\end{cases}.$

$\Rightarrow a+b+c=1+3+\left(-\frac{16}{3}\right)=-\frac{4}{3}.$

Câu 94. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ và có bảng biến thiên như sau



a) $f'(x)>0$ khi $x\in(3;5)$

b) $\int_3^5\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x=f(5)+1$

c) $\int_{2}^{3}\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x=-1$

d) Biết rằng $\int_{2}^{5}\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x=5$. Khi đó $f(5)=3$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

Từ bảng biến thiên ta có $x\in(3;5)\Rightarrow f'(x)>0$ và $x\in(2;3)\Rightarrow f'(x)<0$, $f(2)=0, f(3)=-1$.

a) $f'(x)>0$ khi $x\in(3;5)$

b) $\int_{3}^{5}\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{3}^{5}f'(x)\mathrm{d}x=f(x)\Big|_{3}^{5}=f(5)-f(3)=f(5)+1$

c) $\int_{2}^{3}\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x=-\int_{2}^{3}f'(x)\mathrm{d}x=f(x)\Big|_{3}^{2}=f(2)-f(3)=0-(-1)=1$

d)

$\int_{2}^{5}\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x=5$

$\Leftrightarrow\int_{2}^{3}\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x+\int_{3}^{5}\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x=5$

$\Leftrightarrow 1+f(5)+1=5$

$\Leftrightarrow f(5)+2=5$.

$\Leftrightarrow f(5)=3$

Câu 95. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-2}^{5}f(x)\mathrm{d}x=8$, $\int_{5}^{-2}g(x)\mathrm{d}x=3$.

a) $\int_{5}^{-2}f(x)\mathrm{d}x=-8$

b) $\int_{5}^{-2}\left[2g(x)-3\right]\mathrm{d}x=25$

c) $\int_{-2}^{5}\left[f(x)-4g(x)-1\right]\mathrm{d}x=-13$

d) Biết $\int_{-2}^{0}\left[\frac{1}{2}f(x)+2g(x)\right]\mathrm{d}x=2024$, khi đó $\int_{0}^{5}\left[\frac{1}{2}f(x)+2g(x)\right]\mathrm{d}x=2026$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

a) $\int_{5}^{-2} f(x)\mathrm{d}x = -\int_{-2}^{5} f(x)\mathrm{d}x = -8$

b) $\int_{5}^{-2}\left[2g(x)-3\right]\mathrm{d}x = 2\int_{5}^{-2} g(x)\mathrm{d}x - 3\int_{5}^{-2} g(x)\mathrm{d}x = 2.3 - 3x\Big|_{5}^{-2} = 27$

c) $\int_{-2}^{5}\left[f(x)-4g(x)-1\right]\mathrm{d}x = \int_{-2}^{5} f(x)\mathrm{d}x - \int_{-2}^{5} 4g(x)\mathrm{d}x - \int_{-2}^{5}\mathrm{d}x = \int_{-2}^{5} f(x)\mathrm{d}x - 4\int_{-2}^{5} g(x)\mathrm{d}x - \int_{-2}^{5}\mathrm{d}x$

$= \int_{-2}^{5} f(x)\mathrm{d}x + 4\int_{5}^{-2} g(x)\mathrm{d}x - \int_{-2}^{5}\mathrm{d}x = 8 + 4.3 - x\Big|_{-2}^{5} = 8 + 4.3 - 7 = 13.$

d)

$$\begin{cases}\int_{-2}^{5} f(x)\mathrm{d}x = 8\\ \int_{5}^{-2} g(x)\mathrm{d}x = 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\int_{-2}^{5} \frac{1}{2} f(x)\mathrm{d}x = 4\\ \int_{-2}^{5} 2g(x)\mathrm{d}x = -6\end{cases} \Rightarrow \int_{-2}^{5} \frac{1}{2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-2}^{5} 2g(x)\mathrm{d}x = 4-6 \Leftrightarrow \int_{-2}^{5}\left[\frac{1}{2} f(x) + 2g(x)\right]\mathrm{d}x = -2$$

khi đó:

$$\int_{-2}^{5}\left[\frac{1}{2} f(x) + 2g(x)\right]\mathrm{d}x = -2$$

$$\Leftrightarrow \int_{-2}^{0}\left[\frac{1}{2} f(x) + 2g(x)\right]\mathrm{d}x + \int_{0}^{5}\left[\frac{1}{2} f(x) + 2g(x)\right]\mathrm{d}x = -2$$

$$\Leftrightarrow 2024 + \int_{0}^{5}\left[\frac{1}{2} f(x) + 2g(x)\right]\mathrm{d}x = -2$$

$$\Leftrightarrow \int_{0}^{5}\left[\frac{1}{2} f(x) + 2g(x)\right]\mathrm{d}x = -2026$$

Câu 96. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 2$, $\int_{1}^{2} g(x)\mathrm{d}x = 6$.

a) $\int_{1}^{2} 2025 f(x)\mathrm{d}x = 4050$

b) $\int_{2}^{1}\left[2g(x)-x\right]\mathrm{d}x = -\frac{21}{2}$

c) $\int_{2}^{1}\left[5f(x)-2g(x)+3e^{3x}\right]\mathrm{d}x = e^{6} - e^{3} - 2$

d) Biết $\int_{1}^{4}\left[2f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x = 5$ và $\int_{2}^{4}\left[2f(x)+g(x)-\sqrt{x}\right]\mathrm{d}x = \frac{20\sqrt{2}+a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a+b=83$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)

ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	SAI

a) Ta có: $\int_1^2 2025 f(x)\mathrm{d}x = 2025\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 2025.2 = 4050$

b) Ta có : $\int_2^1 \left[2g(x)-x\right]\mathrm{d}x = 2\int_2^1 g(x)\mathrm{d}x - \int_2^1 x\mathrm{d}x = -2\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}x^2\Big|_2^1 = -2.6 - \frac{1}{2}(1-4) = -\frac{21}{2}$

c) Ta có:

$$\int_2^1 \left[5f(x)-2g(x)+3e^{3x}\right]\mathrm{d}x = -\int_1^2 \left[5f(x)-2g(x)+3e^{3x}\right]\mathrm{d}x = -5\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x + 2\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x - \int_1^2 3e^{3x}\mathrm{d}x$$

$$= -5.2 + 2.6 - e^{3x}\Big|_1^2 = 2 + e^3 - e^6$$

d) Ta có: $\begin{cases}\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 2\\ \int_1^2 g(x)\mathrm{d}x = 6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\int_1^2 2f(x)\mathrm{d}x = 4\\ \int_1^2 g(x)\mathrm{d}x = 6\end{cases} \Rightarrow \int_1^2 \left[2f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x = 10$

Do đó:

$$\int_1^4 \left[2f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x = 5$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 \left[2f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x + \int_2^4 \left[2f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x = 5$$

$$\Leftrightarrow 10 + \int_2^4 \left[2f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x = 5$$

$$\Leftrightarrow \int_2^4 \left[2f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x = -5$$

Nên: $\int_2^4 \left[2f(x)+g(x)-\sqrt{x}\right]\mathrm{d}x = \int_2^4 \left[2f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x - \int_2^4 \sqrt{x}\mathrm{d}x = -5 - \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_2^4 = \frac{20\sqrt{2}-80}{3}$

$\Rightarrow a = -80; b = 3 \Rightarrow a+b = -77$

Câu 97. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x = 4$, $\int_2^3 g(x)\mathrm{d}x = 1$.

a) $\int_3^2 \frac{1}{4} f(x)\mathrm{d}x = 1$

b) $\int_2^3 \left[2g(x) - \frac{1}{x}\right]\mathrm{d}x = 2 + \ln 3 - \ln 2$

c) Biết $\int_2^3 \left[\frac{1}{2}f(x) - 2024g(x) + e^{2x+1}\right]dx = \frac{a.e^7 + b.e^5 + c}{2}$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Khi đó $a+b+c = -4044$.

d) Biết $\int_0^2 \left[f(x)-3g(x) \right] dx = 2024$ và $\int_0^3 \left[f(x)-3g(x)+2^x \right] dx = \frac{a+b\ln 2}{\ln 2}$, với $a,b \in \mathbb{Z}$. Khi đó $a+b=2030$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) $\int_3^2 \frac{1}{4} f(x) dx = -\frac{1}{4} \int_2^3 f(x) dx = -1$

b) $\int_2^3 \left[2g(x) - \frac{1}{x} \right] dx = 2\int_2^3 g(x) dx - \int_2^3 \frac{1}{x} dx = 2.1 - \ln|x| \Big|_2^3 = 2 + \ln 2 - \ln 3$

c) $\int_2^3 \left[\frac{1}{2} f(x) - 2024 g(x) + e^{2x+1} \right] dx = \frac{1}{2} \int_2^3 f(x) dx - 2024 \int_2^3 g(x) dx + \int_2^3 e^{2x+1} dx$

$= \frac{1}{2}.4 - 2024.1 + \frac{1}{2} e^{2x+1} \Big|_2^3 = -2022 + \frac{1}{2}\left(e^7 - e^5 \right) = \frac{e^7 - e^5 - 4044}{2}$

$\Rightarrow a=1; b=-1; c=-4044 \Rightarrow a+b+c=-4044$

d) Ta có: $\begin{cases} \int_2^3 f(x) dx = 4 \\ \int_2^3 g(x) dx = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_2^3 f(x) dx = 4 \\ \int_2^3 3g(x) dx = 3 \end{cases} \Rightarrow \int_2^3 \left[f(x)-3g(x) \right] dx = 1$

Với: $\int_0^2 \left[f(x)-3g(x) \right] dx = 2024$

Nên: $\int_0^3 \left[f(x)-3g(x)+2^x \right] dx = \int_0^3 \left[f(x)-3g(x) \right] dx + \int_0^3 2^x dx$

$= \int_0^2 \left[f(x)-3g(x) \right] dx + \int_2^3 \left[f(x)-3g(x) \right] dx + \int_0^3 2^x dx = 2024 + 1 + \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_0^3 = \frac{7 + 2025\ln 2}{\ln 2}$

$\Rightarrow a=7; b=2025 \Rightarrow a+b=2032$

Câu 98. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-3}^0 f(x) dx = -4$; $\int_{-3}^0 g(x) dx = -3$.

a) $\int_0^{-3} f(x) dx = -4$.

b) $\int_{-3}^0 -3f(x) dx = 12$.

c) $\int_{-3}^0 \left[f(x) + g(x) \right] dx = -7$.

d) Nếu $\int\limits_{-3}^{0}\left[2f\left(x\right)+3g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=-51$ và $\int\limits_{-3}^{0}\left[nf\left(x\right)+mg\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=20$ thì $m+n=10$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) $\int\limits_{0}^{-3}f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\int\limits_{-3}^{0}f\left(x\right)\mathrm{d}x\Rightarrow\int\limits_{0}^{-3}f\left(x\right)\mathrm{d}x=4$.

b) $\int\limits_{-3}^{0}\left(-3\right)f\left(x\right)\mathrm{d}x=\left(-3\right).\int\limits_{-3}^{0}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\left(-3\right).\left(-4\right)=12$.

c) $\int\limits_{-3}^{0}\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-3}^{0}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{-3}^{0}g\left(x\right)\mathrm{d}x=\left(-4\right)+\left(-3\right)=-7$.

d) Ta có $\int\limits_{-3}^{0}\left[mf\left(x\right)+ng\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=-51$ và $\int\limits_{-3}^{0}\left[nf\left(x\right)+mg\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=20$

Suy ra $\begin{cases}m\int\limits_{-3}^{0}f\left(x\right)\mathrm{d}x+n\int\limits_{-3}^{0}g\left(x\right)\mathrm{d}x=-51\\ n\int\limits_{-3}^{0}f\left(x\right)\mathrm{d}x+m\int\limits_{-3}^{0}g\left(x\right)\mathrm{d}x=20\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4m-3n=-51\\ -4n-3m=-19\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=21\\ n=-11\end{cases}\Rightarrow m+n=10$.

Câu 99. Cho $f\left(x\right),g\left(x\right)$ là hai hàm liên tục trên trên $\mathbb{R}$ và thoả: $\int\limits_{1}^{3}\left[f\left(x\right)+3g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=10$, $\int\limits_{1}^{3}\left[2f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=6$.

a) $\int\limits_{3}^{1}\left[f\left(x\right)+3g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=-10$.

b) $\int\limits_{1}^{3}\left[g\left(x\right)-2f\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=-6$.

c) $\int\limits_{1}^{3}\left[4g\left(x\right)-f\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=4$

d) $\int\limits_{1}^{3}\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=-6$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) $\int\limits_{1}^{3}\left[f\left(x\right)+3g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=10\Leftrightarrow-\int\limits_{3}^{1}\left[f\left(x\right)+3g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=10\Leftrightarrow\int\limits_{3}^{1}\left[f\left(x\right)+3g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=-10$.

b) $\int_1^3 \left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=6 \Leftrightarrow -\int_1^3 \left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=-6 \Leftrightarrow \int_1^3 \left[g(x)-2f(x)\right]\mathrm{d}x=-6$.

c) $\int_1^3 \left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x-\int_1^3 \left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=6-10$

$\Leftrightarrow \int_1^3 \left[4g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x=-4$

d) Đặt $a=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ và $b=\int_1^3 g(x)\mathrm{d}x$.

Khi đó, $\int_1^3 \left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=a+3b$, $\int_1^3 \left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=2a-b$.

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases}a+3b=10\\2a-b=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=2\end{cases}$.

Vậy $\int_1^3 \left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=a+b=6$.

Câu 100. Cho $f(x),g(x)$ là hai hàm liên tục trên trên $\mathbb{R}$ và thoả: $\int_0^4 \left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=7$, $\int_0^4 \left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=-7$.

a) $\int_0^4 \left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=\int_4^0 \left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x$.

b) $\int_0^4 \left[3f(x)+2g(x)\right]\mathrm{d}x=14$

c) $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=2$

d) Biết $\int_0^4 \left[g(x)+x\sqrt{x}\right]\mathrm{d}x=\frac{m}{n}$, với $m,n\in\mathbb{Z}$ và $\frac{m}{n}$ là phân thức tối giản. Khi đó $m+n=54$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Ta có: $\int_0^4 \left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=-7 \Leftrightarrow \int_4^0 \left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=7$

$\Rightarrow \int_0^4 \left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=\int_4^0 \left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=7$.

b) $\int_0^4 \left[2f(x)-g(x)\right]dx+\int_0^4 \left[f(x)+3g(x)\right]dx=7+(-7)$

$\Leftrightarrow \int_0^4 \left[2f(x)-g(x)+f(x)+3g(x)\right]dx=0$

$\Leftrightarrow \int_0^4 \left[3f(x)+2g(x)\right]dx=0$

c) Đặt $a=\int_0^4 f(x)dx$ và $b=\int_0^4 g(x)dx$.

Khi đó, $\begin{cases}\int_0^4 \left[2f(x)-g(x)\right]dx=7\\ \int_0^4 \left[f(x)+3g(x)\right]dx=-7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a-b=7\\ a+3b=-7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\ b=-3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\int_0^4 f(x)dx=2\\ \int_0^4 g(x)dx=-3\end{cases}$

Vậy $\int_0^4 f(x)dx=2$.

d) Ta có; $\int_0^4 g(x)dx=-3$

Do đó; $\int_0^4 \left[g(x)+x\sqrt{x}\right]dx=\int_0^4 g(x)dx+\int_0^4 x\sqrt{x}dx=-3+\int_0^4 x^{\frac{3}{2}}dx=-3+\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}\Big|_0^4=\frac{49}{5}$

$\Rightarrow m=49; n=5 \Rightarrow m+n=54$

Câu 101. Cho hàm số $f(x)=e^x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

a) $\int_0^1 f(x)dx=e$.

b) $\int_0^1 f(2x+1)dx=e^3-e$.

c) $\int_0^1 \left(f(x)-4x\right)dx=e-3$.

d) Biết $\int_0^1 \frac{\left(e^{x+1}-1\right)^2}{f(x)}dx=\frac{a.e^4+b.e^3+c.e+d}{e}$, với $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$. Khi đó $a+2b+3c+4d=0$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 e^x dx=e-1$

b) $\int_0^1 f(2x+1)\,dx = \int_0^1 e^{2x+1}dx = \frac{1}{2}e^{2x+1}\Big|_0^1 = \frac{e^3-e}{2}$

c) $\int_0^1 \left(f(x)-4x\right)dx = \int_0^1 \left(e^x-4x\right)dx = e^x-2x^2\Big|_0^1 = e-3$

d) $\int_0^1 \frac{\left(e^{x+1}-1\right)^2}{f(x)}dx = \int_0^1 \frac{e^{2x+2}-2e^{x+1}+1}{e^x}dx = \int_0^1 \left(e^{x+2}-2e+e^{-x}\right)dx = \left(e^{x+2}-2e+e^{-x}\right)\Big|_0^1 = \frac{e^4-e^3-e+1}{e}$

$\Rightarrow a=1; b=-1; c=-1; d=1 \Rightarrow a+2b+3c+4d=0$

Câu 102. Cho $f(x)=\sin x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $\int_0^{\pi} f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx = 1$.

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2x-f(x)\right)dx = \frac{\pi^2}{4}-2$.

d) Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x+\pi)-e^x\right]dx = -e^{\frac{a\pi}{b}}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a+b=3$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\int_0^{\pi} f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx = \int_0^{\pi} \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx = -\int_0^{\pi} \cos x dx = -\sin x\Big|_0^{\pi} = 0$.

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2x-f(x)\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx = \frac{\pi^2}{4}-1$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x+\pi)-e^x\right]dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin(x+\pi)-e^x\right]dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\sin x-e^x\right)dx = \left(-\sin x-e^x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -e^{\frac{\pi}{2}}$

$\Rightarrow a=1; b=2 \Rightarrow a+b=3$

Câu 103. Cho $f(x)=2x-1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

a) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2$.

b) $\int_{-1}^{1}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=\frac{5}{2}$.

c) $\int_{-1}^{1}x^2f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}$.

d) Biết $\int_{-1}^{1}x\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=\frac{a}{b}$, với $a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a+b=1$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Ta có $\int_{-1}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x=-2$

b) Ta có $2x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

suy ra $\int_{-1}^{1}\left|2x-1\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left|2x-1\right|\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|2x-1\right|\mathrm{d}x=\frac{9}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$.

c) $\int_{-1}^{1}x^2f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}x^2\left(2x-1\right)\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}$

d) Ta có: $\int_{-1}^{1}x\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}x\left|2x-1\right|\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}x\left|2x-1\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}x\left(1-2x\right)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{\frac{1}{2}}x\left(2x-1\right)\mathrm{d}x=-\frac{9}{8}+\frac{5}{24}=-\frac{11}{12}$

Vì $a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N}$ nên $a=-11;b=12\Rightarrow a+b=1$

Câu 104. Cho hàm số $f\left(x\right)=2x-4$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

a) $\int_{2024}^{2024}f\left(x\right)\mathrm{d}x=4048$.

b) $\int_{1}^{4}f^2\left(x\right)\mathrm{d}x=-12$.

c) $\int_{-2}^{5}\left|f\left(x\right)\right|dx=3^m.5^n$ với $m^2+n^2=4$.

d) $F\left(a\right)=\int_{0}^{a}f\left(x\right)\mathrm{d}x$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $a=2$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Ta có $\int\limits_{2024}^{2024} f(x)\mathrm{d}x = 0$

b) Ta có $\int\limits_1^4 f^2(x)\mathrm{d}x = \int\limits_1^4 (2x-4)^2\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^4 \left(4x^2-16x+16\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{4}{3}x^3-8x^2+16x\right)\Big|_1^4 = 12$.

c) Ta có:

$$\int\limits_{-2}^5 |f(x)|\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^5 |2x-4|\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^2 (4-2x)\mathrm{d}x + \int\limits_2^5 (2x-4)\mathrm{d}x = \left(4x-x^2\right)\Big|_{-2}^2 + \left(x^2-4x\right)\Big|_2^5 = 25 = 3^0.5^2$$

Suy ra $m=0, n=2 \Rightarrow m^2+n^2=4$.

d) $F(a) = \int\limits_0^a f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^a (2x-4)\mathrm{d}x = \left(x^2-4x\right)\Big|_0^a = a^2-4a = (a-2)^2-4 \ge -4$

Suy ra $F(a)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng -4 khi $a=2$.

Câu 105. Cho hàm số $f(x)=4x^3+x$ và $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$, $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

a) $\int\limits_3^5 f(x)\mathrm{d}x = 552$.

b) Biết $F(1)=4$ thì $F(2)=\frac{41}{2}$.

c) $\int\limits_0^2 \left[1+2x+f(x)\right]\mathrm{d}x = -24$.

d) $\int\limits_{-2}^1 |f(x)|\mathrm{d}x = \frac{39}{2}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Ta có $\int\limits_3^5 \left(4x^3+x\right)\mathrm{d}x = 552$.

b) Ta có $F(2)-F(1) = \int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \left(4x^3+x\right)\mathrm{d}x = \left(x^4+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 = \frac{33}{2}$

$\Rightarrow F(2)-4 = \frac{33}{2} \Rightarrow F(2) = \frac{41}{2}$

Cách 2:

$$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x = \int \left(4x^3+x\right)\mathrm{d}x = x^4+\frac{x^2}{2}+C$$

$$F(1)=4 \Rightarrow 1^4+\frac{1^2}{2}+C=4 \Rightarrow C=\frac{5}{2}$$

$\Rightarrow F(x)=x^4+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{2}\Rightarrow F(2)=2^4+\frac{2^2}{2}+\frac{5}{2}=\frac{41}{2}$

c) Ta có $\int_0^2\left(1+2x+f(x)\right)\mathrm{d}x=\int_0^2\left(1+2x+4x^3+x\right)\mathrm{d}x\int_0^2\left(4x^3+3x+1\right)\mathrm{d}x=\left(x^4+\frac{3}{2}x^2+x\right)\Big|_0^2$

$=\left(2^4+\frac{3}{2}.2^2+2\right)-0=24.$

d) Ta có $\int_{-2}^1\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{-2}^1\left|4x^3+x\right|\mathrm{d}x\int_{-2}^0\left(-4x^3-x\right)\mathrm{d}x+\int_0^1\left(4x^3+x\right)\mathrm{d}x=18+\frac{3}{2}=\frac{39}{2}.$

Câu 106. Cho hàm số $f(x)=\left|x^2-9\right|$ với $0\le x\le 9$.

a) $f(x)=\left|x^2-9\right|=\begin{cases}-x^2+9 & \text{khi } 0\le x\le 3\\ x^2-9 & \text{khi } 3\le x\le 9\end{cases}$.

b) $\int_0^9 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x+\int_3^9 f(x)\mathrm{d}x$.

c) $\int_0^9 f(x)\mathrm{d}x=-198$.

d) $\int_0^9\left[f(x)-\sqrt{x}\right]\mathrm{d}x=214$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Ta có: $x^2-9\le 0,\forall x\in[0,3]$ và $x^2-9\ge 0,\forall x\in[3,9]$

Do đó: $f(x)=\left|x^2-9\right|=\begin{cases}-x^2+9 & \text{khi } 0\le x\le 3\\ x^2-9 & \text{khi } 3\le x\le 9\end{cases}$

b) $\int_0^9 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x+\int_3^9 f(x)\mathrm{d}x$.

c) Ta có: $\int_0^9 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x+\int_3^9 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^3\left(9-x^2\right)\mathrm{d}x+\int_3^9\left(x^2-9\right)\mathrm{d}x$

$=\left(9-x^2\right)\Big|_0^3+\left(x^2-9\right)\Big|_3^9=198$

d) Ta có: $\int_0^9 f(x)\mathrm{d}x=198$

Nên $\int_0^9\left[f(x)-\sqrt{x}\right]\mathrm{d}x=\int_0^9 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^9\sqrt{x}\mathrm{d}x=198-\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^9=180$

Câu 107. Cho hàm số $f(x)=2^x-4$.

a) Hàm số $f(x)$ có tập xác định $D=(0;+\infty)$.

b) $\int_0^3 (2^x-4)dx=\frac{7}{\ln 2}-12$

c) $\int_0^3 f(x+1)dx=\frac{14}{\ln 2}+12$

d) Biết $\int_0^3 |f(x)|dx=a+\frac{b}{c\ln 2}$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản thì khi đó ta có giá trị của biểu thức $a^2+b^2+c^2=18$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Hàm số $f(x)$ có tập xác định trên $D=\mathbb{R}$.

b) $\int_0^3 (2^x-4)dx=\left(\frac{1}{\ln 2}2^x-4x\right)\Big|_0^3=\frac{7}{\ln 2}-12$

c) $\int_0^3 f(x+1)dx=\int_0^3 (2^{x+1}-4)dx=\int_0^3 (2.2^x-4)dx=\left(\frac{2.2^x}{\ln 2}-4x\right)\Big|_0^3=\frac{14}{\ln 2}-12$

d) $\int_0^3 |f(x)|dx=\int_0^3 |2^x-4|dx=\int_0^2 (4-2^x)dx+\int_2^3 (2^x-4)dx=\left(4x-\frac{1}{\ln 2}2^x\right)\Big|_0^2+\left(\frac{1}{\ln 2}2^x-4x\right)\Big|_2^3$

$=\left(8-\frac{3}{\ln 2}\right)+\left(\frac{4}{\ln 2}-4\right)=4+\frac{1}{\ln 2}=a+\frac{b}{c\ln 2}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\b=1\\c=1\end{cases}$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2=4^2+1^2+1^2=18$.

Câu 108. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+3 & \text{khi } x\ge 2\\ x+1 & \text{khi } x<2\end{cases}$.

a) $\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 (x+1)dx$

b) $\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3 (x^2-2x+3)dx$

c) $\int_1^3 \frac{1}{2}f(x)dx=\frac{41}{12}$

d) Biết $\int_2^3 \frac{f(x)}{x}dx=\frac{a\ln 3+b\ln 2+c}{2}$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Khi đó $a+b+c=3$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.

ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG	SAI

Do $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+3 & \text{khi } x\ge 2\\ x+1 & \text{khi } x<2\end{cases}$

a) $\int\limits_1^2 f(x)dx=\int\limits_1^2 (x+1)\,dx$

b) $\int\limits_2^3 f(x)dx=\int\limits_2^3 \left(x^2-2x+3\right)dx$

c) $\int\limits_1^3 \frac{1}{2}f(x)\,dx=\frac{1}{2}\left(\int\limits_1^2 (x+1)dx+\int\limits_2^3 \left(x^2-2x+3\right)dx\right)=\frac{41}{12}$

d) $\int\limits_2^3 \frac{f(x)}{x}dx=\int\limits_2^3 \frac{x^2-2x+3}{x}dx=\int\limits_2^3 \left(x-2+\frac{3}{x}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-2x+\ln|x|\right)\Big|_2^3=\frac{2\ln 3-2\ln 2+1}{2}$

$\Rightarrow a=2;b=-2;c=1\Rightarrow a+b+c=1$

Câu 109. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-2x & \text{khi } x\ge 2\\ x-2 & \text{khi } x<2\end{cases}$.

a) Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 (x-2)\mathrm{d}x$

c) $\int\limits_2^3 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_2^3 \left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x$

d) $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\frac{6}{5}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) $f(x)=\begin{cases}x^2-2x & \text{khi } x\ge 2\\ x-2 & \text{khi } x<2\end{cases}$

Khi $x>2$ thì $f(x)=x^2-2x$ nên hàm số liên tục trên khoảng $(2;+\infty)$

Khi $x<2$ thì $f(x)=x-2$ nên hàm số liên tục trên khoảng $(2;+\infty)$

Khi $x=2$, ta có:

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x^2-2x\right)=0$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x-2)=0$

Suy ra $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2)=0$ nên hàm số tại $x=2$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 (x-2)\mathrm{d}x$

c) $\int\limits_2^3 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_2^3 \left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x$

d) $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 (x-2)\mathrm{d}x+\int\limits_2^3 \left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_1^2+\left(\dfrac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_2^3=\left(-2-\dfrac{-3}{2}\right)+\left(0-\dfrac{-4}{3}\right)=\dfrac{5}{6}$

Câu 110. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x^2+2x+m & \text{khi } x\ge 1\\ 5-2x & \text{khi } x<1\end{cases}$ (m là tham số thực) liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng $f(x)$ có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ là $F(x)$ thỏa mãn $F(-2)=-10$.

a) $m=-2$

b) $F(x)=\begin{cases}x^3+x^2-2x+8 & \text{khi } x\ge 1\\ -x^2+5x+4 & \text{khi } x<1\end{cases}$

c) $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{19}{2}$

d) $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a+b=200$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Ta có $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ liên tục tại $x=1$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)\Leftrightarrow m+5=3\Leftrightarrow m=-2$.

b) $F(x)=\begin{cases}x^3+x^2-2x+8 & \text{khi } x\ge 1\\ 5x-x^2+4 & \text{khi } x<1\end{cases}$.

Ta có $F(x)=\begin{cases}x^3+x^2+mx+C_1 & \text{khi } x\ge 1\\ 5x-x^2+C_2 & \text{khi } x<1\end{cases}$

$F(-2)=5(-2)-(-2)^2+C_2\Rightarrow C_2=-10+14=4$.

$\lim\limits_{x\to 1^+} F(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^3+x^2+mx+C_1\right)=m+2+C_1$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} F(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(5x-x^2+C_2\right)=4+C_2$.

Ta lại có $F(x)$ liên tục tại $x=1$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 1^-} F(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} F(x)=F(1)\Leftrightarrow m+2+C_1=4+C_2\Leftrightarrow C_1=6-m$ mà $m=-2$ nên $C_1=8$

Vậy $F(x)=\begin{cases}x^3+x^2-2x+8 & \text{khi } x\ge 1\\ -x^2+5x+4 & \text{khi } x<1\end{cases}$.

c) $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(-x^2+5x+4\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+4x\right)\Big|_0^1=\frac{19}{3}$

d) Ta có: $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{19}{3}$

Nên $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{19}{3}+\int\limits_1^2\left(x^3+x^2-2x+8\right)\mathrm{d}x=\frac{19}{3}+\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2+8x\right)\Big|_1^2=\frac{197}{12}$

$\Rightarrow a=197; b=12\Rightarrow a+b=209$

Câu 111. Một chiếc mô tô đang chạy với vận tốc $18\ (\mathrm{m/s})$ thì người lái hãm phanh. Sau khi hãm phanh, mô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=18-36t\ (\mathrm{m/s})$, trong đó t là khoảng thời gian được tính bằng giây kể từ lúc mô tô bắt đầu hãm phanh.



a) Thời gian kể từ lúc hãm phanh đến lúc xe mô tô dừng hẳn là $0,5$ giây.

b) Quãng đường xe mô tô đi được sau $0,3$ giây kể từ lúc hãm phanh là $3,78$ mét.

c) Quãng đường kể từ lúc hãm phanh đến lúc xe mô tô dừng hẳn là $5,5$ mét.

d) Gia tốc tức thời của chuyển động xe mô tô là $-36\ (\mathrm{m/s^2})$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Lúc hãm phanh đến lúc xe dừng hẳn thì $v(t)=0\Rightarrow 18-36t=0\Rightarrow t=0,5$ giây.

b) Quãng đường xe đi được sau $0,3$ giây kể từ lúc hãm phanh là

$s=\int\limits_0^{0,3}(18-36t)\mathrm{d}t=\left(18t-18t^2\right)\Big|_0^{0,3}=3,78(m)$.

c) Với $t=0,5$ giây thì quãng đường kể từ lúc hãm phanh đến lúc xe dừng hẳn là

$s_1=\int\limits_0^{0,5}(18-36t)\mathrm{d}t=\left(18t-18t^2\right)\Big|_0^{0,5}=4,5(m)$

d) Gia tốc tức thời của chuyển động xe mô tô là $a = v'(t) = -36\left(\text{m/s}^2\right)$.

Câu 112. Một ô tô đang di chuyển với tốc độ $20(m/s)$ thì hãm phanh nên tốc độ (m/s) theo thời gian t được tính theo công thức $v(t) = 20 - 5t$, với $0 \le t \le 4$.



a) Sau khi hãm phanh, tốc độ của xe tăng.

b) Tốc độ của xe tại thời điểm 3 (giây) sau hãm phanh là $5(m/s)$

c) Sau khi hãm phanh 4 (giây) thì xe dừng hẳn.

d) Kể từ khi hãm phanh đến khi dừng hẳn, xe đi được quãng đường $30(m)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) $v(t) = 20 - 5t \Rightarrow v'(t) = -5 < 0$

Do $v'(t) = -5 < 0$ nên sau khi hãm phanh tốc độ của xe giảm.

b) Ta có : $v(3) = 20 - 5.3 = 5(m/s)$

c) Sau khi hãm phanh đến khi xe dừng hẳn nên $v(t) = 0 \Leftrightarrow 20 - 5t = 0 \Leftrightarrow t = 4$.

d) Kể từ khi hãm phanh đến dừng xe đi được quãng đường là :

$$s = \int_0^4 (20 - 5t)\,dt = \left(20t - \frac{5}{2}t^2\right)\Big|_0^4 = 40(m)$$

Câu 113. Sau khi xuất phát, xe đạp di chuyển với tốc độ $v(t) = 2,01t - 0,025t^2$, với $0 \le t \le 10$. Trong đó $v(t)$ tính theo (m/s), thời gian t tính theo s với $t = 0$ là thời điểm xe đạp xuất phát.



a) Quãng đường xe đạp di chuyển được tính theo công thức là $s(t) = 2,01 - 0,05t\,(0 \le t \le 10)$

b) Quãng đường xe đạp di chuyển được trong 3 giây là $8,82(m)$.

c) Quãng đường xe đạp di chuyển được trong giây thứ 9 xấp xỉ $15,28(m)$ (kết quả làm tròn đến phần trăm của mét).

d) Trong khoảng thời gian không quá 10s đầu, khi vận tốc đạt giá trị lớn nhất thì gia tốc của xe đạp là $2,51(m/s^2)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Quãng đường xe đạp di chuyển được phải là nguyên hàm của $v(t)$

Khi đó $v'(t)=2,01-0,05t(0\le t\le 10)$ là công thức tính gia tốc của vật.

b) Quãng đường xe đạp di chuyển được trong 3s là:

$$\int_0^3\left(2,01t-0,025t^2\right)dt=\left(\frac{2,01t^2}{2}-\frac{0,025t^3}{3}\right)\Bigg|_0^3=8,82(m).$$

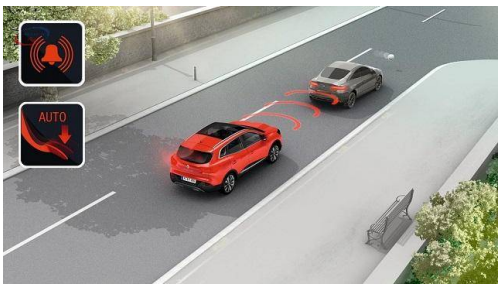
c) Quãng đường xe đạp di chuyển được trong giây thứ 9

$$s(9)-s(8)=\int_8^9\left(2,01t-0,025t^2\right)dt=\left(\frac{2,01t^2}{2}-\frac{0,025t^3}{3}\right)\Bigg|_8^9\approx 15,28(m)$$

d) Ta có: $v(t)=2,01t-0,025t^2\,(0\le t\le 10)\Rightarrow \max\limits_{[0;10]}v(t)=17,6m/s$ khi $t=10(s)$

Gia tốc xe đạp khi đó là $a(10)=v'(10)=2,01-0,05.10=1,51(m/s^2)$

Câu 114. Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu $1(m)$. Một ô tô A đang chạy với vận tốc $15(m/s)$ bỗng gặp ô tô B đang đứng chờ đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều bởi vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t)=15-5t\ (m/s)$. Gọi $s(t)$ là quãng đường ô tô A di chuyển ở thời điểm t giây.



a) Quãng đường ô tô A di chuyển được tính theo công thức là $s(t)=15t-\frac{5}{2}t^2+15$.

b) Thời gian ô tô A từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn hết 3 giây.

c) Quãng đường ô tô A đi được từ lúc ô tô A đạp phanh đến khi dừng hẳn là $20,5(m)$.

d) Để hai ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là $23,5(m)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Quãng đường ô tô A di chuyển được tính theo công thức là

$s(t)=\int v(t)\,dt=\int(15-5t)\,dt=15t-\frac{5}{2}t^2+C$

$15(m/s)\Rightarrow 15=15-5t\Leftrightarrow t=0$

Khi $t=0\Rightarrow s(0)=0\Leftrightarrow 15.0-\frac{5}{2}.0+C=0\Rightarrow C=0$

$\Rightarrow s(t)=15t-\frac{5}{2}t^2$

b) Khi ô tô dừng lại $v_A(t)=0\Leftrightarrow 15-5t=0\Leftrightarrow t=3$ giây.

c) Quãng đường ô tô A đi được từ lúc ô tô A đạp phanh đến khi dừng hẳn là:

$$\int_0^3(15-5t)\,dt=\left(15t-\frac{5t^2}{2}\right)\Big|_0^3=22,5(m).$$

d) Để đảm bảo an toàn thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là $1+22,5=23,5(m)$

Câu 115. Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng nằm ngang (chiều dương hướng sang phải) với gia tốc phụ thuộc vào thời gian $t(\text{s})$ là $a(t)=2t-7\ (\text{m/s}^2)$. Biết vận tốc đầu bằng $6\ (\text{m/s})$.

a) Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t(\text{s})$ xác định bởi $v(t)=t^2-7t+6$.

b) Tại thời điểm $t=7$ (s), vận tốc của chất điểm là $5(m/s)$

c) Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1\le t\le 7$ là $18(m)$.

d) Trong 8 giây đầu tiên, thời điểm chất điểm xa nhất về phía bên phải là $t=6$ (s).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Ta có $v(t)=\int a(t)\,\text{d}t=\int(2t-7)\,\text{d}t=t^2-7t+C$.

$v(0)=6\Rightarrow C=6$.

Vậy $v(t)=t^2-7t+6$ (m/s).

b) Tại thời điểm $t=5$ (s), vận tốc của chất điểm là: $v(7)=7^2-7.7+6=6(m/s)$

c) Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1\le t\le 7$ là

$$S=\int_1^7|v(t)|\mathrm{d}t=\int_1^7\left|\left(t^2-7t+6\right)\right|\mathrm{d}t=-\int_1^7\left(t^2-7t+6\right)\mathrm{d}t=-\left(\frac{t^3}{3}-\frac{7t^2}{2}+6t\right)\Bigg|_1^7=18(m).$$

d) Tọa độ của chất điểm tại thời điểm t là $x(t)=\int v(t)\mathrm{d}t=\int\left(t^2-7t+6\right)\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}-\frac{7t^2}{2}+6t+C$

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $x(t)$ với $t\in[0;8]$.

Ta có $x'(t)=v(t)=0$ khi $t=1$ hoặc $t=6$.

Lại có $x(0)=C$, $x(1)=\frac{17}{6}+C$, $x(6)=-18+C$, $x(8)=-\frac{16}{3}+C$.

Vậy giá trị lớn nhất của $x(t)$ với $t\in[0;8]$ đạt được khi $t=1$.

Câu 116. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{180}t^2+\frac{11}{18}t(m/s)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng $a\left(m/s^2\right)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A.

a) Quãng đường chuyển động của chất điểm A tại thời điểm t theo hàm $s(t)=\frac{1}{540}t^3+\frac{11}{36}t^2+C\ \ (m)$, với C là hằng số.

b) Quãng đường chất điểm B đi được từ lúc xuất phát đến khi gặp chất điểm B là $70(m)$.

c) Vận tốc của chất điểm B là $v_B(t)=a.t\ \ (m/s)$.

d) Vận tốc của chất điểm B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $10(m/s)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Ta có: $s(t)=\int v(t)dt=\int\left(\frac{1}{180}t^2+\frac{11}{18}t\right)dt=\frac{1}{540}t^3+\frac{11}{36}t^2+C$

Quãng đường chuyển động của chất điểm A tại thời điểm t theo hàm :

$s(t)=\frac{1}{540}t^3+\frac{11}{36}t^2+C\ \ (m)$, với C là hằng số.

b) Thời gian tính từ khi A xuất phát đến khi bị B đuổi kịp là 15 giây, suy ra quãng đường chất điểm B đi được từ lúc xuất phát đến khi gặp chất điểm B là:

$$s=\int_0^{15}v(t)\mathrm{d}t=\int_0^{15}\left(\frac{1}{180}t^2+\frac{11}{18}t\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{1}{540}t^3+\frac{11}{36}t^2\right)\Bigg|_0^{15}=75(m).$$

c) Vận tốc của chất điểm B là $v_B(t)=\int a.\mathrm{d}t=a.t+C_1$ (C_1 là hằng số); do B xuất phát từ trạng thái nghỉ nên có $v_B(0)=0\Leftrightarrow C=0$

Do đó: $v_B(t)=a.t\quad (m/s)$

d) Quãng đường của B từ khi xuất phát đến khi đuổi kịp A là

$$\int_0^{10} y(t)\mathrm{d}t=75\Leftrightarrow\int_0^{10} a.t\mathrm{d}t=75\Leftrightarrow\left.\frac{a.t^2}{2}\right|_0^{10}=75\Leftrightarrow 50a=75\Leftrightarrow a=\frac{3}{2}$$

Vậy có $v_B(t)=\frac{3}{2}t$

Suy ra vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(10)=15(m/s)$.

Câu 117. Lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của sản phẩm **Iphone 16 Pro** được mô hình hóa bằng công thức $P'(x)=-0,0008x+10,4$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x sản phẩm.



a) Lợi nhuận khi bán được x sản phẩm **Iphone 16 Pro** được tính bằng $P(x)=-0,0004x^2+10,4x$.

b) Lợi nhuận khi bán được 50 sản phẩm **Iphone 16 Pro** đầu tiên là 525 triệu đồng.

c) Sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 55 sản phẩm **Iphone 16 Pro** là $50,1$ triệu đồng.

d) Biết sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên a sản phẩm **Iphone 16 Pro** lớn hơn 517 triệu đồng, khi đó giá trị nhỏ nhất của a là 101.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Ta có: $P(x)=\int P'(x)\mathrm{d}x=\int(-0,0008x+10,4)\mathrm{d}x=-0,0004x^2+10,4x+C$, với C là hằng số.

Khi $x=0$ thì không có lợi nhuận nên $P(0)=0$:

$P(0)=-0,0004.0^2+10,4.0+C\Rightarrow C=0$

$\Rightarrow P(x)=-0,0004x^2+10,4x$

b) Lợi nhuận khi bán được 50 sản phẩm **Iphone 16 Pro** đầu tiên là:

$$P(50)=-0,0004.50^2+10,4.50=519\ \text{(triệu đồng)}.$$

c) Ta có sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 55 sản phẩm **Iphone 16 Pro** là:

$P(55)-P(50)=\int\limits_{50}^{55}P'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{50}^{55}(-0,0008x+10,4)\mathrm{d}x=-\int\limits_{50}^{55}0,0008x\mathrm{d}x+\int\limits_{50}^{55}10,4\mathrm{d}x$

$=-0,0004x^2\Big|_{50}^{55}+10,4x\Big|_{50}^{55}=-0,0004\left(55^2-50^2\right)+10,4(55-50)=51,79$ (triệu đồng).

d) Ta có sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên a sản phẩm **Iphone 16 Pro** là

$P(a)-P(50)=\int\limits_{50}^{a}P'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{50}^{a}(-0,0008x+10,4)\mathrm{d}x=-\int\limits_{50}^{a}0,0008x\mathrm{d}x+\int\limits_{50}^{a}10,4\mathrm{d}x$

$=-0,0004x^2\Big|_{50}^{a}+10,4x\Big|_{50}^{a}=-0,0004\left(a^2-50^2\right)+10,4(a-50)=-0,0004a^2+10,4a-519$.

Theo bài ra ta có:

$-0,0004a^2+10,4a-519>517\Leftrightarrow 0,0004a^2-10,4a+1036<0\Leftrightarrow 100<a<25900$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của a là 101.

Câu 118. Giả sử chi phí mua và bảo trì một thiết bị trong x năm có thể được mô hình hóa theo công thức $C=5000\left(25+3\int\limits_0^x t^{\frac{1}{4}}dt\right)$.

a) Chi phí mua 1 sản phẩm là 125000 đồng.

b) Chi phí bảo trì năm đầu tiên của 1 sản phẩm là 10000 đồng.

c) Sau 6 năm thì số tiền mua một sản phẩm bằng số tiền bảo trì sản phẩm đó.

d) Nếu một nhà đầu tư có 10 triệu, thì họ có thể mua và bảo trì tối đa 29 sản phẩm trong 10 năm.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Chi phí mua 1 sản phẩm ứng với $x=0$, sau ra $C=5000.25=125000$

b) Với $x=1$ ta có: $C=5000\left(25+3\int\limits_0^1 t^{\frac{1}{4}}dt\right)=137000$.

Suy ra chi phí bảo trì năm đầu tiên của sản phẩm là $137000-125000=12000$ đồng.

c) Gọi x là số năm mà số tiền bảo trì bằng số tiền mua sản phẩm. Khi đó tổng số tiền mua và số tiền bảo trì là $2.125000=250000$.

$5000\left(25+3\int\limits_0^x t^{\frac{1}{4}}dt\right)=250000$

$\Leftrightarrow 25+3\left(\frac{4}{5}t^{\frac{5}{4}}\Big|_0^x\right)=50$

$\Leftrightarrow \frac{12}{5}x^{\frac{5}{4}}=25$

$\Leftrightarrow x=\left(\frac{75}{2}\right)^{\frac{4}{5}}\approx 6,52$

d) Số tiền mua và bảo trì 1 sản phẩm trong 10 năm là:

$C = 5000\left(25 + 3\int\limits_0^{10} t^{\frac{1}{4}} dt \right) = 5000\left(25 + 24\sqrt[4]{10} \right).$

Ta có: $\frac{10000000}{5000\left(25 + 24\sqrt[4]{10} \right)} \approx 29,55$

Vậy với 10 triệu thì họ có thể mua và bảo trì tối đa 29 sản phẩm.

Câu 119. Tại một nhà máy sản xuất một loại phân bón. Gọi $P(x)$ là lợi nhuận (tính theo triệu đồng) thu được từ việc bán x (tấn) sản phẩm trong một tuần. Khi đó đạo hàm $P'(x)$ gọi là lợi nhuận cận biên, cho biết tốc độ tăng lợi nhuận theo lượng sản phẩm bán được. Giả sử lợi nhuận cận biên (tính theo triệu đồng trên tấn) của nhà máy được ước lượng bởi công thức: $P'(x) = 17 - 0,025x$ với $0 \le x \le 1000$. Biết nhà máy lỗ 24 triệu đồng nếu không bán được lượng sản phẩm nào trong tuần.



a) Công thức lợi nhuận (tính theo triệu đồng) thu được từ việc bán x (tấn) sản phẩm trong một tuần là $P(x) = 17x - 0,025x^2$.

b) Lợi nhuận nhà máy thu được khi bán 80 tấn sản phẩm trong tuần là 1 tỉ 256 triệu đồng.

c) Nếu nhà máy bán được từ 1,2 tấn sản phẩm trên tuần trở lên thì nhà máy luôn có lãi.

d) Lợi nhuận nhà máy thu được lớn nhất khi bán 680 tấn sản phẩm trong tuần.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Ta có:

$P(x) = \int P'(x)dx = \int (17 - 0,025x)dx = 17x - 0,0125x^2 + C$ với $0 \le x \le 1000$

Vì nhà máy lỗ 24 triệu đồng nếu không bán được lượng sản phẩm nào trong tuần nên

Với $x = 0$ thì $P(x) = -24$ suy ra $P(0) = -24 \Leftrightarrow C = -24 \Rightarrow P(x) = 17x - 0,0125x^2 - 24$

b) Khi bán 80 tấn sản phẩm trong tuần thì $x = 80$:

$P(80) = 17.80 - 0,0125.80^2 - 24 = 1256$ triệu đồng hay 1 tỉ 256 triệu đồng.

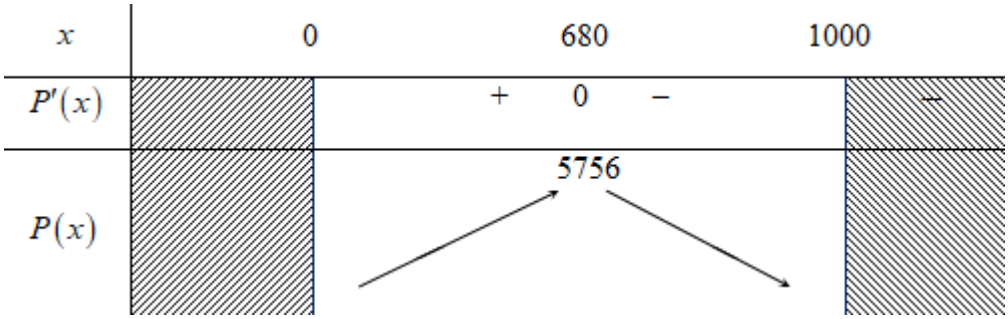
c) Nhà máy chỉ bắt đầu có lãi khi $P(x) > 0 \Rightarrow 17x - 0,0125x^2 - 24 > 0 \Rightarrow 1,41 < x < 1358,5$

Vậy nếu $1,2 \le x \le 1,41$ nhà máy vẫn có thể bị lỗ.

d) $P(x)=17x-0,0125x^2-24$

Ta có: $P'(x)=17-0,025x \Rightarrow P'(x)=0 \Leftrightarrow x=680$

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên, ta có: $\underset{(0;1000)}{Max}\, P(680)=5756$

Vậy lợi nhuận nhà máy thu được lớn nhất khi bán 680 tấn sản phẩm trong tuần là 5 tỉ 756 triệu đồng.

Câu 120. Ở nhiệt độ $36°C$, một phản ứng hóa học từ chất đầu A, chuyển hóa thành chất sản phẩm B theo phương trình: $A \to B$. Giả sử $y(x)$ là nồng độ chất A (đơn vị mol L^{-1}) tại thời điểm x (giây), $y(x)>0$ với $x \geq 0$, thỏa mãn hệ thức: $y'(x)=-7.10^{-4}y(x)$ với $x \geq 0$. Biết rằng tại $x=0$, nồng độ (đầu) của A là $0,05$ mol L^{-1}. Xét hàm số $f(x)=\ln y(x)$ với $x \geq 0$.

a) $f'(x)=-7.10^{-4}$

b) $f(x)=-7.10^{-4}x+\ln(0,05)$

c) $y(30)-y(15)=-6.10^{-4}$

d) Nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây gần bằng $0,08$ (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Ta có $f'(x)=\left(\ln y(x)\right)'=\dfrac{y'(x)}{y(x)}=-7.10^{-4}$.

b) $f(x)=-7.10^{-4}x+\ln(0,05)$.

Ta có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\left(-7.10^{-4}\right)\mathrm{d}x=-7.10^{-4}x+C$.

Theo giả thiết $y(0)=0,05$ nên $f(0)=\ln y(0)=\ln(0,05)$. Khi đó $C=\ln(0,05)$.

Vậy $f(x)=-7.10^{-4}x+\ln(0,05)$.

c) $y(30)-y(15)=-6.10^{-4}$.

Từ $f(x)=\ln y(x)\Rightarrow y(x)=e^{f(x)}=e^{-7.10^{-4}x+\ln(0,05)}=\dfrac{1}{20}e^{-7.10^{-4}x}$.

Do đó $y(30)-y(15)=\dfrac{1}{20}\left(e^{-7.10^{-4}.30}-e^{-7.10^{-4}.15}\right)\approx -5,2.10^{-4}$.

d) Nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây là:

$$\frac{1}{30-15}\int_{15}^{30}y(x)\,dx=\frac{1}{15}\int_{15}^{30}\left(-\frac{1}{7.10^{-4}}\right)y'(x)\,dx=-\frac{10^4}{105}y(x)\Big|_{15}^{30}=-\frac{10^4}{105}\left[y(30)-y(15)\right]\approx 0,05.$$

Câu 121. Giả sử tốc độ $v(m/s)$ của một thang máy di chuyển từ tầng 1 lên tầng cao nhất theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức: $v(t)=\begin{cases}t & \text{khi } 0\le t\le 2\\ 2 & \text{khi } 2<t\le 20\\ 12-0,5t & \text{khi } 20<t\le 24\end{cases}$.



a) Tốc độ tại thời điểm giây thứ 2 của thang máy là $2(m/s)$.

b) Gia tốc chuyển động của thang máy tại thời điểm giây thứ 10 là $2(m/s^2)$.

c) Quãng đường chuyển động của thang máy từ tầng 1 lên tầng cao nhất là $40(m)$.

d) Tốc độ trung bình của thang máy từ tầng 1 lên tầng cao nhất là $1,5(m/s)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

a) Ta có $v(2)=2(m/s)$.

b) Tại $t=10(s)$ thì $v(t)=2$ nên gia tốc $a(t)=v'(t)=0$.

Do đó, gia tốc của thang máy tại thời điểm $t=10(s)$ là $0(m/s^2)$.

c) Quãng đường chuyển động của thang máy từ tầng 1 lên tầng cao nhất là

$$S=\int_0^2 t\,dt+\int_2^{20}2\,dt+\int_{20}^{24}(12-0,5t)\,dt=\frac{t^2}{2}\Big|_0^2+2t\Big|_2^{20}+\left(12t-\frac{0,5t^2}{2}\right)\Big|_{20}^{24}=42(m).$$

d) Tốc độ trung bình của thang máy từ tầng 1 lên tầng cao nhất là

$$v_{tb}=\frac{s}{t}=\frac{42}{24}=1,75(m/s).$$

Câu 122. Khảo sát chuyển động của xe khách trong 30 phút trên một quãng đường ta thu được kết quả: vận tốc v (mét/phút) của xe khách theo thời gian t (phút) được biểu diễn bởi hàm số:

$$v(t)=\begin{cases}100t & \text{khi } 0\le t\le 10\\ 20t+800 & \text{khi } 10<t\le 20\\ -10\,t+1400 & \text{khi } 20<t\le 30\end{cases}$$



a) Vận tốc của xe khách ở phút thứ 8 là 800 (mét/phút)

b) Vận tốc của xe khách ở phút thứ 20 là 1000 (mét/phút)

c) Quãng đường chuyển động của xe khách trong 30 phút khảo sát là $2750(m)$.

d) Vận tốc trung bình của xe khách trong 30 phút khảo sát là 910 (mét/phút) (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét/phút)

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

a) Vận tốc của xe khách ở phút thứ 8 là: $v(8)=100.8=800$ (mét/phút)

b) Vận tốc của xe khách ở phút thứ 20 là $v(20)=20.20+800=1200$ (mét/phút)

c) Quãng đường chuyển động của xe khách trong 30 phút khảo sát là:

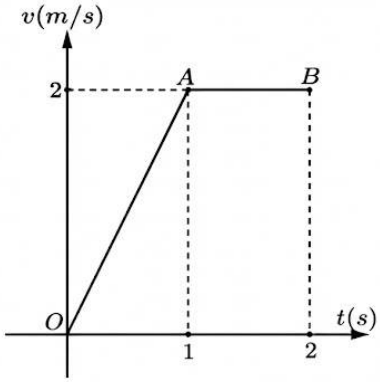
$$s=\int_0^{30}v(t)\,dt=\int_0^{10}v(t)\,dt+\int_{10}^{20}v(t)\,dt+\int_{20}^{30}v(t)\,dt=\int_0^{10}100t\,dt+\int_{10}^{20}(20t+800)\,dt+\int_{20}^{30}(-10t+1400)\,dt$$

$$=50t^2\Big|_0^{10}+\left(10t^2+800t\right)\Big|_{10}^{20}+\left(-5t^2+1400t\right)\Big|_{20}^{30}=27500(m)$$

d) Vận tốc trung bình của xe khách trong 30 phút khảo sát là: $v_{tb}=\dfrac{s}{30}=\dfrac{27500}{30}\approx 917$ (mét /phút).

Câu 123. Một chiếc xe đạp chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)(m/s)$ có dạng đường thẳng tại thời điểm $0\le t\le 1(s)$ và $1<t\le 2(s)$ với vận tốc được cho bởi đồ thị trong hệ trục tOv như hình sau:





Gọi quãng đường của chiếc xe đạp tại thời điểm t là $s(t)$.

a) Vận tốc của chiếc xe đạp tại thời điểm t được xác định bởi $v(t)=\begin{cases}2t & \text{khi } 0\le t\le 1\\ 2 & \text{khi } 1<t\le 2\end{cases}$.

b) Quãng đường chiếc xe đạp đi được trong 1 giây đầu tiên được xác định bởi công thức $s(t)=\int_0^1 v(t)\,\mathrm{d}t$

c) Quãng đường chiếc xe đạp đi được trong khoảng thời gian từ 1 giây đến 2 giây được xác định bởi công thức $s(t)=\int_0^2 v(t)\,\mathrm{d}t$

d) Quãng đường mà chiếc xe đạp đi được trong 2 giây đầu tiên là $4(m)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Theo đồ thị:

Trong 1 giây đầu đồ thị là một đường thẳng đi qua hai điểm O, A nên có dạng: $v(t)=2t$

Trong giây thứ 2 đồ thị là một đường thẳng đi qua hai điểm A, B nên có dạng: $v(t)=2$

Vậy, vận tốc của chiếc xe đạp tại thời điểm t được xác định bởi $v(t)=\begin{cases}2t & \text{khi } 0\le t\le 1\\ 2 & \text{khi } 1<t\le 2\end{cases}$.

b) Quãng đường chiếc xe đạp đi được trong khoảng thời gian từ a giây đến b giây được xác định bởi công thức $s(t)=\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t$.

Do đó quãng đường chiếc xe đạp đi được trong khoảng thời gian từ 0 giây đến 1 giây được xác định bởi công thức $s(t)=\int_0^1 v(t)\,\mathrm{d}t$.

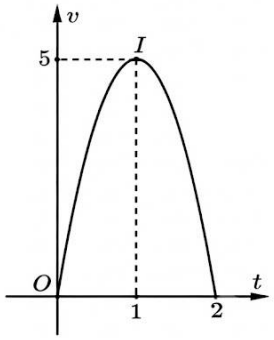
c) Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ 1 giây đến 2 giây được xác định bởi công thức $s(t)=\int_1^2 v(t)\,\mathrm{d}t$.

d) Quãng đường mà chiếc xe đạp đi được trong 2 giây đầu tiên là:

$s(t)=\int_0^2 v(t)\,dt=\int_0^1 2tdt+\int_1^2 2\,dt=t^2\Big|_0^1+2t\Big|_1^2=1+2=3(m).$

Câu 124. Bạn Nam chạy bộ trong 2 giờ, vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị là một phần của đường Parabol với đỉnh $I(1;5)$ và trục đối xứng song song với trục tung Ov như hình vẽ.





a) Vận tốc chạy bộ của bạn Nam trong giờ thứ 2 tăng dần.

b) Vận tốc lớn nhất trong 2 giờ chạy của bạn Nam là $5(km/h)$.

c) Gia tốc chạy bộ của bạn Nam tại thời điểm $1,5$ giờ là $5(km/h)$.

d) Quãng đường bạn Nam chạy được trong 1 giờ 30 phút kể từ lúc bắt đầu chạy là $6,63(km)$ (kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Từ đồ thị ta thấy: Vận tốc chạy bộ của bạn Nam trong khoảng 1 giờ đầu tăng dần và 1 giờ sau giảm dần.

Vậy vận tốc chạy bộ của bạn Nam trong trong giờ thứ 2 giảm dần.

c) Đồ thị $v=v(t)$ đi qua gốc tọa độ nên $v(t)$ có dạng $v(t)=at^2+bt$.

Đồ thị $v=v(t)$ có đỉnh là $I(1;5)$ nên $\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=1\\ a+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-2a\\ a+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-5\\ b=10\end{cases}\Rightarrow v(t)=-5t^2+10t$

Gia tốc chạy bộ của bạn Nam tại thời điểm t là : $a(t)=v'(t)=-10t+10$

$\Rightarrow a(1,5)=v'(1,5)=-10.1,5+10=-5(km/h)$

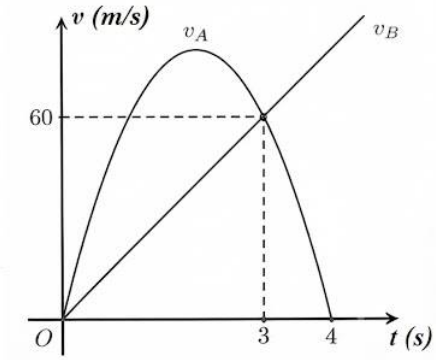
d) Ta có 1 giờ 30 phút = 1,5 giờ $\Rightarrow s=\int_0^{1,5} v(t)\,dt$.

Do đó, quãng đường bạn Nam chạy được trong 1 giờ 30 phút kể từ lúc bắt đầu chạy là

$s=\int_0^{1,5}\left(-5t^2+10t\right)dt=\dfrac{45}{8}\approx 5,63(km).$

Câu 125. Cho đồ thị biểu diễn vận tốc của hai xe A và B khởi hành cùng một lúc và cùng vạch xuất phát, đi cùng chiều trên một con đường. Biết đồ thị biểu diễn vận tốc $v_A(t)\ (m/s)$ của xe A là một đường Parabol và đồ thị biểu diễn vận tốc $v_B(t)\ (m/s)$ của xe B là một đường thẳng như hình vẽ bên. Biết rằng xe A sẽ dừng lại khi vận tốc bằng 0.





a) Vận tốc của xe B tại thời điểm t giây là $v_B(t)=20t\ (m/s)$.

b) Vận tốc của xe A tại thời điểm t giây là $v_A(t)=20t^2-80t\ (m/s)$.

c) Quãng đường xe A đi được sau 4 giây là $213,3(m)$ (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của mét).

d) Sau 5 giây kể từ lúc xuất phát thì khoảng cách giữa hai xe là $38,7(m)$ (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của mét).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Đồ thị biểu diễn vận tốc của xe B là đường thẳng có phương trình: $v_B=mt+n\ (m\neq 0)$ đi qua điểm $(0;0);(3;60)\Rightarrow v_B(t)=20t$.

b) Đồ thị biểu diễn vận tốc của xe A là Parabol có phương trình: $v_A=at^2+bt+c\ (a\neq 0)$ đi qua điểm $(0;0);(3;60);(4;0)\Rightarrow v_A(t)=-20t^2+80t$.

c) Ta có $v_A=-20t^2+80t=0\Rightarrow t=4$ nên xe A dừng lại sau giây thứ 4.

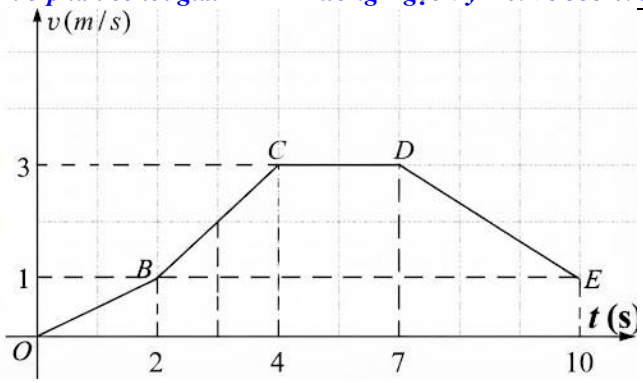
Do đó quãng đường xe A đi được sau 4 giây là $S_A=\int_0^4\left(-20t^2+80t\right)dt=\frac{640}{3}(m)\approx 213,3(m)$.

d) Quãng đường xe B đi được sau 5 giây đầu là $S_B=\int_0^5(20t)\,dt=250(m)$

Khoảng cách giữa hai xe sau 5 giây kể từ lúc xuất phát là $\Delta S=\left|S_A-S_B\right|=\frac{110}{3}\approx 36,7(m)$.

Câu 126. Cho hình vẽ dưới đây là đồ thị vận tốc $v(t)\ (m/s)$ của một ca nô chạy trên sông trong 10 giây đầu tiên ($t=0$ là thời điểm ca nô bắt đầu chuyển động).





a) Vận tốc chạy của ca nô chạy trong khoảng thời gian từ 4 giây đầu tiên tăng dần.

b) Trong 10 giây đầu tiên, vận tốc ca nô chạy lớn nhất trong 4 giây.

c) Trong 10 giây đầu tiên, ca nô chạy với vận tốc $v(t)$ theo hàm $v(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t & \text{khi } 0\le t\le 2\\ t-1 & \text{khi } 2<t\le 4\\ 3 & \text{khi } 4<t\le 7\\ -\frac{2}{3}t+\frac{23}{3} & \text{khi } 7<t\le 10\end{cases}$

d) Vận tốc chạy trung bình của ca nô 10 giây đầu tiên là $2,5(m/s)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Từ đồ thị, ta thấy: Vận tốc chạy của ca nô chạy trong khoảng thời gian từ 4 giây đầu tiên tăng dần.

b) Từ đồ thị, ta thấy: Trong 10 giây đầu tiên, vận tốc ca nô chạy lớn nhất trong giây thứ 5, thứ 6 và thứ 7 là $3(m/s)$.

Vậy trong 10 giây đầu tiên, vận tốc ca nô chạy lớn nhất trong 3 giây.

c) Phương trình đường thẳng $OB: v=\frac{1}{2}t$

Phương trình đường thẳng $BC: v=t-1$

Phương trình đường thẳng $CD: v=3$

Phương trình đường thẳng $DE: v=-\frac{2}{3}t+\frac{23}{3}$

Suy ra: Trong 10 giây đầu tiên, ca nô chạy với vận tốc $v(t)$ theo hàm $v(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t & \text{khi } 0\le t\le 2\\ t-1 & \text{khi } 2<t\le 4\\ 3 & \text{khi } 4<t\le 7\\ -\frac{2}{3}t+\frac{23}{3} & \text{khi } 7<t\le 10\end{cases}$.

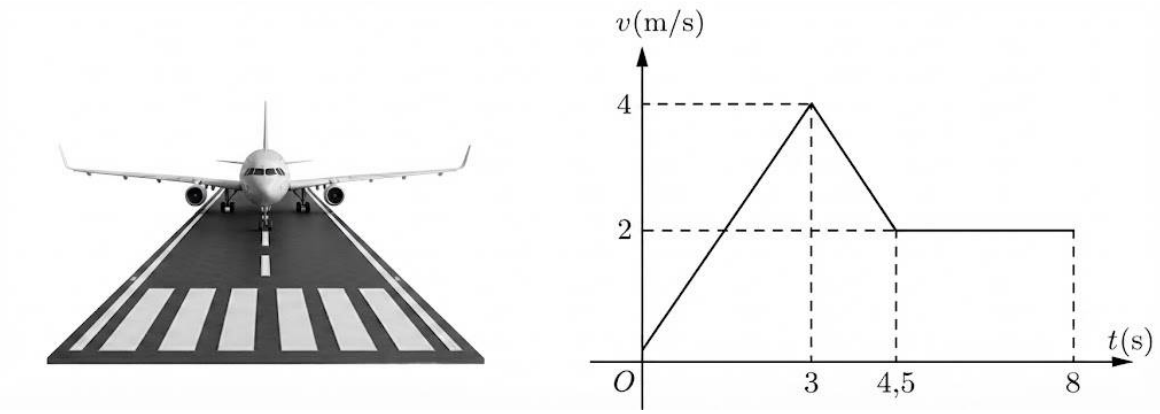
d) Quãng đường chuyển động của của ca nô trong 10 giây là:

$$s=\int_0^{10}v(t)\mathrm{d}t=\int_0^{2}v(t)\mathrm{d}t+\int_2^{4}v(t)\mathrm{d}t+\int_4^{7}v(t)\mathrm{d}t+\int_7^{10}v(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2}\frac{1}{2}t\mathrm{d}t+\int_2^{4}(t-1)\mathrm{d}t+\int_4^{7}3\mathrm{d}t+\int_7^{10}\left(-\frac{2}{3}t+\frac{23}{3}\right)\mathrm{d}t=20\ (m)$$

Vận tốc trung bình của ca nô là: $v_{tb}=\dfrac{s}{10}=2(m/s)$.

Câu 127. Một chiếc máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t)\ (m/s)$ trong 8 giây đầu tiên ($t=0$ là thời điểm máy bay bắt đầu chuyển động) được cho bởi đồ thị ở hình vẽ dưới đây.



a) Trong 8 giây đầu tiên, vận tốc của máy bay lớn nhất là $4(m/s)$.

b) Trong 8 giây đầu tiên, vận tốc của máy bay không đổi trong thời gian 3 giây.

c) Quãng đường mà máy bay di chuyển được trong 3 giây đầu tiên là $11(m)$.

d) Vận tốc chạy trung bình của máy bay 8 giây đầu tiên là $4,521(m/s)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

a) Dựa vào đồ thị ta thấy: Trong 8 giây đầu tiên, vận tốc của máy bay lớn nhất là $4(m/s)$ tại thời điểm $t=3(s)$

b) Dựa vào đồ thị ta thấy: vận tốc của máy bay không đổi $v=2(m/s)$ từ 4,5 giây đến 8 giây.

Vậy trong 8 giây đầu tiên, vận tốc của máy bay không đổi trong thời gian 3,5 giây.

c) Dựa vào đồ thị trong khoảng thời gian 3 giây vận tốc của chuyển động được xác định là $v(t)=\dfrac{4}{3}t(\mathrm{m/s})$

Ta có quãng đường mà vật di chuyển được trong 3 giây đầu tiên là $s=\int_0^{3}\frac{4}{3}t\mathrm{d}t=\frac{4}{3}t^2\Big|_0^3=12(m)$

d) Dựa vào đồ thị ta thấy:

Trong khoảng thời gian 1 giây vận tốc của chuyển động được xác định là $v(t)=\frac{4}{3}t(\text{m/s})$

Trong khoảng thời gian từ 3 giây đến 4,5 giây vận tốc của chuyển động được xác định là $v(t)=\frac{-4}{3}t+8(\text{m/s})$,

Trong khoảng thời gian từ 4,5 giây đến 8 giây vận tốc của chuyển động là $v(t)=8(\text{m/s})$

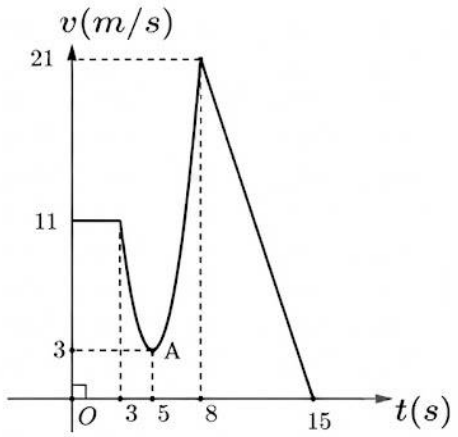
Ta có quãng đường mà vật di chuyển được trong 8 giây đầu tiên là:

$$s=\int_0^3 \frac{4}{3}t\text{d}t+\int_3^{4,5}\left(-\frac{4}{3}t+8\right)\text{d}t+\int_{4,5}^{8}8\text{d}t=38,5(m).$$

Vận tốc chạy trung bình của ca nô 8 giây đầu tiên là: $v_{tb}=\frac{s}{t}=\frac{38,5}{8}=4,8125(m/s)$.

Câu 128. Chất chiếc ca nô chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)(m/s)$ có dạng đường thẳng tại thời điểm $0\le t\le 3(s)$ và $8\le t\le 15(s)$ và $v(t)$ có dạng đường Parabol khi $3\le t\le 8(s)$ như đồ thị bên dưới.





a) Vận tốc của ca nô tại thời điểm $t=5(s)$ là $3(m/s)$.

b) Quãng đường ca nô di chuyển được trong 3 giây đầu tiên là: $\int_0^3 11\text{d}t\ (m)$

c) Quãng đường ca nô đi được trong khoảng thời gian từ 8 giây đến 15 giây bằng $70,5(m)$

d) Vận tốc trung bình v_{tb} của ca nô trong khoảng thời gian từ 3 đến 8 giây bằng $7,67(m/s)$ (kết quả làm tròn đến phần trăm của mét/giây).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Dựa vào đồ thị $v(t)$, ta có : $t=5(s)\Rightarrow v(5)=3(m/s)$.

b) Trong 3 giây đầu tiên, vận tốc của ca nô chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)(m/s)$ có dạng

đường thẳng và có $v(t)=11(m/s)$.

Do đó quãng đường ca nô chuyển động trong 3 giây đầu tiên là: $\int_0^3 11\mathrm{d}t\ (m)$

c) Trong khoảng thời gian từ 8 đến 15 giây, đồ thị $v(t)$ là một đường thẳng đi qua hai điểm $(8;21)$ và $(15;0)$. Ta có: $v(t)=at+b$.

Từ giả thiết ta có hệ: $\begin{cases}8a+b=21\\15a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\b=45\end{cases}$.

Do đó $v(t)=-3t+45\ (8\le t\le 15)$.

Quãng đường ca nô đi được trong khoảng thời gian này là:

$$S=\int_8^{15}(-3t+45)\mathrm{d}t=-\frac{3t^2}{2}\Big|_8^{15}+45t\Big|_8^{15}=\frac{147}{2}=73,5(m).$$

d) Trong khoảng thời gian từ 3 đến 8 giây đồ thị $v(t)$ là một Parabol đi qua các điểm có tọa độ lần lượt là $(3;11),(5;3),(8;21)$ có phương trình dạng: $v(t)=at^2+bt+c$.

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases}9a+3b+c=11\\25a+5b+c=3\\64a+8b+c=21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-20\\c=53\end{cases}$

Do đó: $v(t)=2t^2-20t+53\ (3\le t\le 8)$.

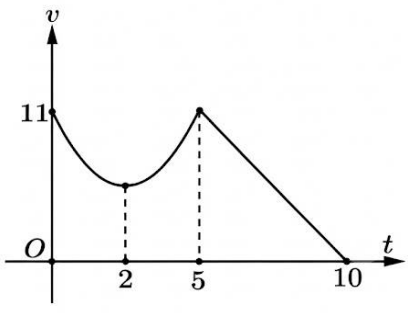
Quãng đường ca nô đi được trong khoảng thời gian này là:

$$S_3=\int_3^8 v(t)\mathrm{d}t=\int_3^8(2t^2-20t+53)\mathrm{d}t=\left(\frac{2t^3}{3}-10t^2+53t\right)\Big|_3^8=\frac{115}{3}\ (m)$$

Vận tốc trung bình của ca nô trong khoảng thời gian này là: $v_{tb}=\frac{S_3}{5}=\frac{23}{3}\approx 7,67(m/s)$.

Câu 129. Một ô tô chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)(m/s)$ có dạng đường Parabol khi $0\le t\le 5(s)$ và $v(t)$ có dạng đường thẳng khi $5\le t\le 10(s)$. Biết đỉnh Parabol là $I(2,3)$ như đồ thị bên dưới.





a) Vận tốc của ô tô tăng dần từ giây thứ 3 đến giây thứ 5.

b) Vận tốc của ô tô tại thời điểm $t=4$ giây là $11(m/s)$.

c) Gia tốc của ô tô tại thời điểm $t=6$ giây là $-35,2(m/s^2)$.

d) Quãng đường ô tô đi được trong thời gian $0 \le t \le 10(s)$ là $60(m)$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của mét).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Dựa vào đồ thị, ta có:

Vận tốc của ô tô giảm dần trong 2 giây đầu tiên và từ giây thứ 5 đến giây thứ 10.

Vận tốc của ô tô tăng dần từ giây thứ 3 đến giây thứ 4.

b) Gọi Parabol $(P): v(t) = at^2 + bt + c$ là phương trình thể hiện vận tốc của ô tô khi $0 \le t \le 5(s)$

Do (P) có đỉnh $I(2;3)$ và đi qua điểm $(0;11)$ nên:

$$\begin{cases} \dfrac{-b}{2a} = 2 \\ y(0) = 11 \\ y(2) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = 3 \\ c = 11 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -8 \\ c = 11 \end{cases} \Rightarrow v(t) = 2t^2 - 8t + 11$$

$\Rightarrow v(4) = 2.4^2 - 8.4 + 11 = 11(m/s)$

c) Với $t = 5 \Rightarrow v(5) = 2.5^2 - 8.5 + 11 = 21$

Gọi $d: v(t) = at + b$ là phương trình đường thẳng thể hiện vận tốc của ô tô khi $5 \le t \le 10(s)$ do d đi qua điểm $(5;21)$ và $(10;0)$ nên: $\begin{cases} 5a + b = 11 \\ 10a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{11}{5} \\ b = 22 \end{cases} \Rightarrow v(t) = \dfrac{-11}{5}t + 22$

Gia tốc của ô tô tại thời điểm t giây là : $a(t) = v'(t) = \dfrac{-11}{5} = 2,2(m/s^2)$, do đó gia tốc của ô tô tại thời điểm giây thứ 5 đến giây thứ 10 không đổi là $2,2(m/s^2)$

Vậy gia tốc của ô tô tại thời điểm $t = 6$ giây là $2,2(m/s^2)$.

d) Ta có: phương trình biểu thị vận tốc của ô tô là $v(t) = \begin{cases} 2t^2 - 8t + 11, & 0 \le t \le 5 \\ \dfrac{-11}{5}t + 22, & 5 < t \le 10 \end{cases}$

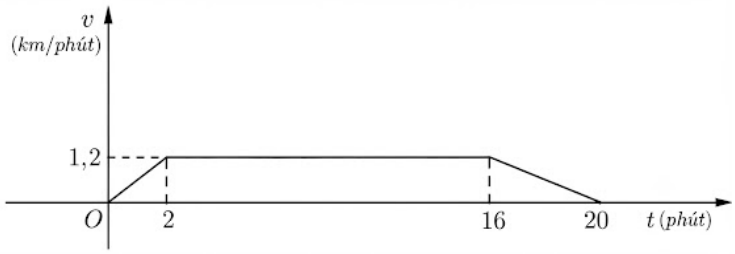
Khi đó quãng đường ô tô di chuyển trong khoảng thời gian từ $0 \le t \le 10(s)$ là

$$S = \int_0^{10} v(t)\,dt = \int_0^5 (2t^2 - 8t + 11)\,dt + \int_5^{10} \left(\frac{-11}{5}t + 22\right)dt$$

$$= \left(\frac{2t^3}{3} - 4t^2 + 11t\right)\Big|_0^5 + \left(\frac{-11t^2}{10} + 22t\right)\Big|_5^{10} = \frac{115}{3} + \frac{55}{2} = \frac{395}{6}(m) \approx 60(m)$$

Câu 130. Tốc độ $v\left(km/phút\right)$ của một ca nô cao tốc thay đổi theo thời gian $t\left(phút\right)$ ($t=0$ là thời điểm ca nô bắt đầu chuyển động) như đồ thị ở hình vẽ sau:





a) Tốc độ của ca nô tăng dần trong 16 phút đầu tiên kể từ khi nó bắt đầu chuyển động.

b) Tốc độ của ca nô ở phút thứ 17 là $0,9\left(km/phút\right)$.

c) Quãng đường ca nô di chuyển được trong 20 phút đầu tiên là $19,4\left(km\right)$.

d) Tốc độ trung bình của ca nô trong khoảng thời gian 20 phút đầu tiên là $1,02\left(km/phút\right)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Từ đồ thị, ta có: Tốc độ của ca nô tăng dần trong 2 giây đầu tiên kể từ khi nó bắt đầu chuyển động.

b) Từ đồ thị, ta có tốc độ của ca nô được tính theo công thức:

$$v\left(t\right)=\begin{cases}0,6t & \text{khi } 0\le t\le 2\\ 1,2 & \text{khi } 2<t\le 16\\ 6-0,3t & \text{khi } 16<t\le 20\end{cases}$$

Tốc độ của ca nô ở giây thứ 17 là : $v\left(17\right)=6-0,3.17=0,9\left(km/phút\right)$

c) Ta có tốc độ của ca nô được tính theo công thức: $v\left(t\right)=\begin{cases}0,6t & \text{khi } 0\le t\le 2\\ 1,2 & \text{khi } 2<t\le 16\\ 6-0,3t & \text{khi } 16<t\le 20\end{cases}$

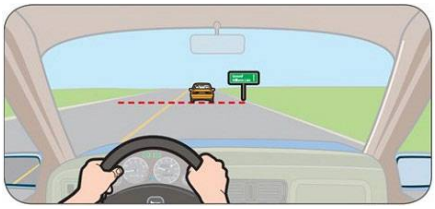
Do đó, quãng đường ca nô di chuyển được trong 20 phút đầu tiên là

$$s=\int_0^2 0,6t\mathrm{d}t+\int_2^{16}1,2\mathrm{d}t+\int_{16}^{20}\left(6-0,3t\right)\mathrm{d}t\ =\frac{6}{5}+\frac{84}{5}+\frac{12}{5}=20,4\left(km\right)\ \left(\text{km}\right)$$

d) Tốc độ trung bình của ca nô trong 20 phút đầu tiên là $v_{tb}=\frac{s}{20}=\frac{102}{100}=1,02\left(km/phút\right)$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 131. Một ô tô đang chạy với vận tốc là 12 (m/s) thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-6t+12$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến lúc ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 12

Lấy mốc thời gian $(t=0)$ là lúc đạp phanh.

Khi ô tô dừng hẳn thì vận tốc $v(t)=0$, tức là $v(t)=-6t+12=0 \Leftrightarrow t=2$.

Vậy từ lúc đạp phanh đến lúc ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được quãng đường là

$\int_0^2 (-6t+12)dt = \left(-3t^2+12t\right)\Big|_0^2 = 12\,(m)$.

Câu 132. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 10

Xét phương trình $-5t+10=0 \Leftrightarrow t=2$

Do vậy, kể từ lúc người lái đạp phanh thì sau 2s ô tô dừng hẳn.

Quãng đường ô tô đi được kể từ lúc người lái đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn là

$$s=\int_0^2 (-5t+10)\,dt=\left(-\frac{5}{2}t^2+10t\right)\Big|_0^2=10m.$$

Câu 133. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{100}t^2+\frac{13}{30}t\,(\text{m/s})$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển

động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc bằng $a\left(\text{m/s}^2\right)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng bao nhiêu mét/giây?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 25

Ta có $v_B(t)=\int a.\text{dt}=at+C$, $v_B(0)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow v_B(t)=at$.

Quãng đường chất điểm A đi được trong 25 giây là

$$S_A=\int_0^{25}\left(\frac{1}{100}t^2+\frac{13}{30}t\right)\text{dt}=\left(\frac{1}{300}t^3+\frac{13}{60}t^2\right)\Big|_0^{25}=\frac{375}{2}.$$

Quãng đường chất điểm B đi được trong 15 giây là

$$S_B=\int_0^{15}at.\text{dt}=\frac{at^2}{2}\Big|_0^{15}=\frac{225a}{2}.$$

Ta có $\frac{375}{2}=\frac{225a}{2}\Leftrightarrow a=\frac{5}{3}$.

Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A là $v_B(15)=\frac{5}{3}.15=25\left(\text{m/s}\right)$.

Câu 134. Một ô tô chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t)=7t\ \ (m/s)$. Đi được $5(s)$ người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-35\left(m/s^2\right)$. Tính quãng đường (đơn vị mét) của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 105.

Quãng đường ô tô đi được trong $5(s)$ đầu là $s_1=\int_0^5 7t\text{dt}=7\frac{t^2}{2}\Big|_0^5=87{,}5$ (mét).

Phương trình vận tốc của ô tô khi người lái xe phát hiện chướng ngại vật là $v_{(2)}(t)=35-35t$ (m/s).

Khi xe dừng lại hẳn thì $v_{(2)}(t)=0\Leftrightarrow 35-35t=0\Leftrightarrow t=1$.

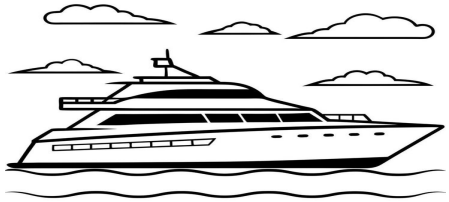
Quãng đường ô tô đi được từ khi phanh gấp đến khi dừng lại hẳn là

$$s_2=\int_0^1(35-35t)\,\mathrm{d}t=\left(35t-35\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1=17.5 \text{ (mét).}$$

Vậy quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn là

$s=s_1+s_2=87.5+17.5=105$ (mét).

Câu 135. Một chiếc ca nô đang chuyển động trên sông với vận tốc $v(t)=4t+3\ (m/s)$, với t là thời gian tính bằng giây. Quãng đường chiếc ca nô đi được trong khoảng từ 3 đến 5 giây là bao nhiêu mét?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 38

Quãng đường chiếc ca nô đi được trong khoảng từ 3 đến 5 giây là: $s=\int_3^5(4t+3)\,\mathrm{d}t=\left(2t^2+3t\right)\Big|_3^5=38(m)$.

Câu 136. Một người đang lái xe chiếc ca nô với vận tốc $24(m/s)$ thì người lái phát hiện phía trước có chướng ngại vật nên cần giảm tốc độ của ca nô. Sau khi giảm tốc độ, ca nô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-8t+24(\ \mathrm{m/s})$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc giảm tốc độ. Hỏi từ lúc giảm tốc độ đến khi ca nô dừng hẳn, ca nô di chuyển quãng đường bao nhiêu mét?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 36

Vật dừng lại tại thời điểm $v=0\Rightarrow -8t+24=0\Leftrightarrow t=3(\mathrm{s})$

Ô tô di chuyển quãng đường là: $s=\int_0^3 v(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^3(-8t+24)\,\mathrm{d}t=\left(-4t^2+24t\right)\Big|_0^3=36(m)$.

Câu 137. Một chiếc mô tô đang chuyển động trên đường với vận tốc $v(t)=t^2-4t+1(\ \mathrm{m/s})$, với t là thời gian tính bằng giây. Quãng đường xe mô tô đi được trong khoảng từ 2 đến 8 giây là bao nhiêu?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 54

Quãng đường xe mô tô đi được trong khoảng từ 2 đến 8 giây là:

$$s=\int_2^8 v(t)\,\mathrm{d}t=\int_2^8\left(t^2-4t+1\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{1}{3}t^3-2t^2+t\right)\Big|_2^8=54(m)$$

Câu 138. Bạn Minh Hiền đang lái xe với vận tốc $5(m/s)$ thì nhận thấy phía trước đèn giao thông đang chuẩn bị chuyển sang đèn đỏ nên cần giảm tốc độ của xe để đợi đèn đỏ. Sau khi đạp phanh, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-0,5t+5(\ \mathrm{m/s})$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi xe dừng hẳn, xe di chuyển quãng đường bao nhiêu mét?



Trả lời: ……..

Lời giải

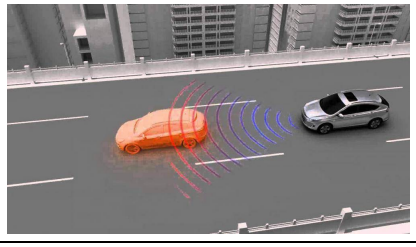
Đáp án: 25

Lúc đạp phanh tại thời điểm: $v=5\Rightarrow -0,5t_1+5=5\Leftrightarrow t_1=0$ giây

Xe dừng ở thời điểm $v=0\Leftrightarrow -0,5t_2+5=0\Leftrightarrow t_2=10$ giây

Khi đó quãng đường xe di chuyển là: $S=\int_0^{10}(-0,5t+5)\,\mathrm{d}t=\left(\frac{-0,5}{2}t^2+5t\right)\Big|_0^{10}=25$ mét.

Câu 139. Một ô tô bắt đầu chuyển động thẳng đều với vận tốc $v_0\ (m/s)$, sau 6 giây chuyển động thì gặp chướng ngại vật nên bắt đầu giảm tốc độ với vận tốc chuyển động $v(t)=-\frac{5}{2}t+a\ (m/s),\ (t\geq 6)$ cho đến khi dừng hẳn. Biết rằng kể từ lúc chuyển động đến lúc dừng thì ô tô đi được quãng đường là 80m. Giá trị của v_0 bằng bao nhiêu?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 10

- Tại thời điểm $t=6$ vật đang chuyển động với vận tốc v_0 nên có

$v(6)=v_0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2}.6+a=v_0 \Leftrightarrow a=v_0+15$, suy ra $v(t)=-\frac{5}{2}t+v_0+15$.

- Gọi k là thời điểm vật dừng hẳn, vậy ta có $v(k)=0 \Leftrightarrow k=\frac{2}{5}.(v_0+15) \Leftrightarrow k=\frac{2v_0}{5}+6$.

- Tổng quãng đường vật đi được là $80=6.v_0+\int_6^k\left(-\frac{5}{2}t+v_0+15\right)dt$

$\Leftrightarrow 80=6.v_0+\left(-\frac{5}{4}t^2+v_0.t+15t\right)\Big|_6^k$

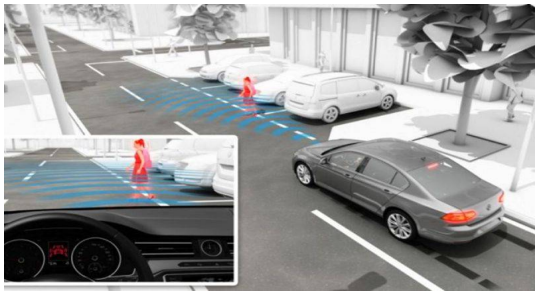
$\Leftrightarrow 80=6.v_0-\frac{5}{4}(k^2-6^2)+v_0.(k-6)+15(k-6)$

$\Leftrightarrow 80=6.v_0-\frac{5}{4}\left(\frac{4(v_0)^2}{25}+\frac{24v_0}{5}\right)+v_0.\frac{2v_0}{5}+15.\frac{2v_0}{5}$

$\Leftrightarrow (v_0)^2+36.v_0-400=0$

$\Leftrightarrow v_0=10$

Câu 140. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t)=2t\ (\text{m/s})$. Đi được 12 giây, người lái xe gặp chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-12\left(\text{m/s}^2\right)$. Tính quãng đường đi được của ôtô từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi dừng hẳn (đơn vị mét)?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 168

Giai đoạn 1: Xe bắt đầu chuyển động đến khi gặp chướng ngại vật.

Quãng đường xe đi được là: $S_1=\int_0^{12}v_1(t)\,dt=\int_0^{12}2t\,dt=t^2\Big|_0^{12}=144(\text{m})$.

Giai đoạn 2: Xe gặp chướng ngại vật đến khi dừng hẳn.

Ôtô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v_2(t)=\int a\,dt=-12t+c$.

Vận tốc của xe khi gặp chướng ngại vật là: $v_2(0)=v_1(12)=2.12=24(\text{m/s})$.

$\Rightarrow -12.0+c=24\Rightarrow c=24\Rightarrow v_2(t)=-12t+24$.

Thời gian khi xe gặp chướng ngại vật đến khi xe dừng hẳn là nghiệm phương trình:

$-12t+24=0\Leftrightarrow t=2$.

Khi đó, quãng đường xe đi được là:

$$S_2=\int_0^2 v_2(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^2(-12t+24)\,\mathrm{d}t=\left(-6t^2+24t\right)\Big|_0^2=24(\text{m}).$$

Vậy tổng quãng đường xe đi được là: $S=S_1+S_2=168(\text{m})$.

Câu 141. Một ô tô đang chạy với vận tốc $10m/s$ thì gặp chướng ngại vật, người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+10(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng bằng bao nhiêu mét?



Trả lời: ……..

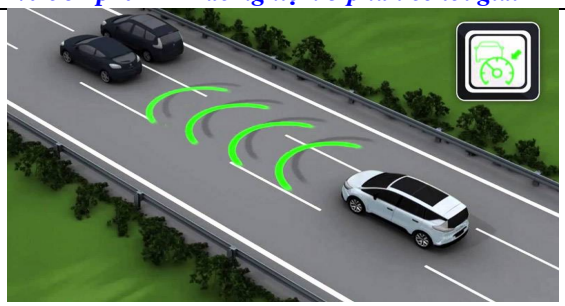
Lời giải

Đáp án: 55

Ta có $-2t+10=0\Leftrightarrow t=5\Rightarrow$ Thời gian tính từ lúc bắt đầu đạp phanh đến khi dừng hẳn là 5 giây. Vậy trong 8 giây cuối cùng thì có 3 giây ô tô chuyển động với vận tốc $10m/s$ và 5 giây chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+10(m/s)$.

Khi đó quãng đường ô tô di chuyển là $S=3.10+\int_0^5(-2t+10)dt=30+25=55m$.

Câu 142. Một ô tô đang chạy với tốc độ $20(m/s)$ thì gặp chướng ngại vật, người lái đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+20(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?



Trả lời: ……..

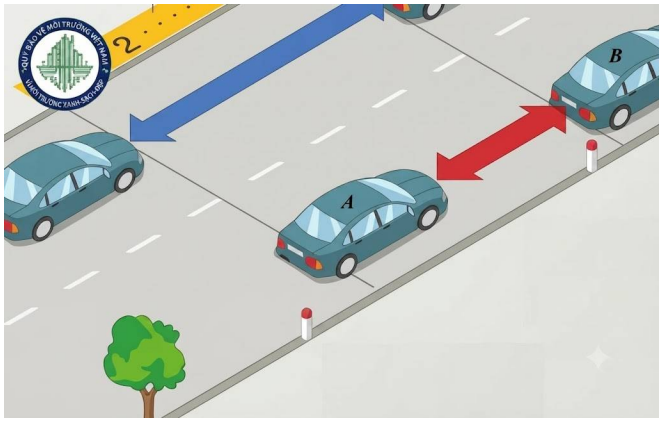
Lời giải

Đáp án: 40

Khi ô tô dừng hẳn thì: $v(t)=0 \Leftrightarrow -5t+20=0 \Leftrightarrow t=4(s)$.

Vậy từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được: $s=\int_0^4 (-5t+20)\,dt=40(m)$.

Câu 143. Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu 1m. Một ô tô A đang chạy với vận tốc $16\,\text{m/s}$ bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t)=16-4t$ (đơn vị tính bằng m/s), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để có 2 ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu mét?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 33

Ta có: $v_A(0)=16\,\text{m/s}$.

Khi xe A dừng hẳn: $v_A(t)=0 \Leftrightarrow t=4\,\text{s}$.

Quãng đường từ lúc xe A hãm phanh đến lúc dừng hẳn là $s=\int_0^4 (16-4t)\,\text{d}t=32\,\text{m}$

Do các xe phải cách nhau tối thiểu 1m để đảm bảo an toàn nên khi dừng lại ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là 33m.

Câu 144. Một chiếc máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t)=t^2+10t\ \ (m/s)$ với t là thời gian được tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc

$200\left(m/s\right)$ thì rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 833

Thời điểm máy bay đạt vận tốc $200\left(m/s\right)$ là $v\left(t\right)=200\Leftrightarrow t^2+10t=200\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=10\\t=-20\end{array}\right.\Leftrightarrow t=10$

Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

$$s=\int_0^{10}\left(t^2+10t\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{t^3}{3}+5t\right)\Big|_0^{10}=\frac{2500}{3}\approx 833\left(m\right).$$

Câu 145. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1\left(t\right)=7t\ \left(\mathrm{m/s}\right)$. Đi được $5\mathrm{s}$, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-70\ \left(\mathrm{m/s^2}\right)$. Tính quãng đường (đơn vị mét) đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn (làm tròn kết quả đến phần chục của mét).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 96,3

Chọn gốc thời gian là lúc ô tô bắt đầu đi. Sau $5\mathrm{s}$ ô tô đạt vận tốc là $v\left(5\right)=35\left(\mathrm{m/s}\right)$.

Sau khi phanh vận tốc ô tô là $v\left(t\right)=35-70\left(t-5\right)$.

Ô tô dừng tại thời điểm $t=5,5\mathrm{s}$.

Quãng đường ô tô đi được là $S=\int_0^5 7t\mathrm{d}t+\int_5^{5,5}\left[35-70\left(t-5\right)\right]\mathrm{d}t=96,25\approx 96,3\left(\mathrm{m}\right)$.

Câu 146. Một ôtô đang dừng và bắt đầu chuyển động theo một đường thẳng với gia tốc $a\left(t\right)=6-2t\ \left(m/s^2\right)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc ôtô bắt đầu chuyển động.

Hỏi quảng đường ôtô đi được từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi vận tốc của ôtô đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu mét?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 18

$a(t)=6-2t\ (m/s^2) \Rightarrow v(t)=\int(6-2t)dt=6t-t^2+C$

Xe dừng và bắt đầu chuyển động nên khi $t=0$ thì $v=0\Rightarrow C=0\Rightarrow v(t)=6t-t^2$.

$v(t)=6t-t^2$ là hàm số bậc 2 nên đạt GTLN khi $t=-\dfrac{b}{2a}=3\ (s)$

Quảng đường xe đi trong 3 giây đầu là: $S=\int\limits_0^3\left(6t-t^2\right)dt=18m$.

Câu 147. Một xe gắn máy đang chuyển động với vận tốc $10\,\text{m/s}$ thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian là $a(t)=t^2+3t$. Tính quãng đường (đơn vị mét) vật đi được trong khoảng thời gian 6 giây kể từ khi xe gắn máy bắt đầu tăng tốc.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 216

Ta có $v(0)=10\,\text{m/s}$ và $v(t)=\int\limits_0^t a(t)\,\text{d}t=\int\limits_0^t\left(t^2+3t\right)\text{d}t=\left(\dfrac{t^3}{3}+\dfrac{3t^2}{2}\right)\Big|_0^t=\dfrac{1}{3}t^3+\dfrac{3}{2}t^2$.

Quãng đường xe gắn máy đi được là $S=\int\limits_0^6 v(t)\,\text{d}t=\int\limits_0^6\left(\dfrac{1}{3}t^3+\dfrac{3}{2}t^2\right)\text{d}t=\left(\dfrac{1}{12}t^4+\dfrac{1}{2}t^3\right)\Big|_0^6=216\,\text{m}$

Câu 148. Một xe môtô đang chuyển động với vận tốc $v_0=15\,\text{m/s}$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=t^2+4t\ (\text{m/s}^2)$. Tính quãng đường (đơn vị mét) xe môtô đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 70

$a(t)=t^2+4t \Rightarrow v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}+2t^2+C \ (C\in\mathbb{R})$.

Mà $v(0)=C=15 \Rightarrow v(t)=\frac{t^3}{3}+2t^2+15$.

Vậy $S=\int_0^3\left(\frac{t^3}{3}+2t^2+15\right)\mathrm{d}t=69,75\approx 70$ m.

Câu 149. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{120}t^2+\frac{58}{45}t(m/s)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a(m/s^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng bao nhiêu mét/giây?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 30

Thời điểm chất điểm B đuổi kịp chất điểm A thì chất điểm B đi được 15 giây, chất điểm A đi được 18 giây.

Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng $v_B(t)=\int a\mathrm{d}t=at+C$ mà $v_B(0)=0$ nên $v_B(t)=at$.

Do từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi chất điểm B đuổi kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được bằng nhau. Do đó

$$\int_0^{18}\left(\frac{1}{120}t^2+\frac{58}{45}\right)\mathrm{d}t=\int_0^{15}at\mathrm{d}t \Leftrightarrow 225=a.\frac{225}{2} \Leftrightarrow a=2$$

Vậy, vận tốc của chất điểm B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(t)=2.15=30(m/s)$.

Câu 150. Một chiếc xuồng chuyển động với gia tốc $a(t)=\frac{1}{t^2+3t+2}(\mathrm{m/s^2})$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ thời điểm ban đầu. Vận tốc chuyển động của chiếc xuồng là $v(t)$. Vào thời điểm $t=11(\mathrm{s})$

thì vận tốc của chiếc xuồng là $v(\text{m/s})$, biết vận tốc ban đầu của chiếc xuồng là $v_0 = 3\ln 2(\text{m/s})$. Tính v (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2,69

Ta có: $v(t) = \int a(t)\,\text{dt} = \int \frac{1}{t^2+3t+2}\,\text{dt} = \int\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}\right)\text{dt} = \ln\left|\frac{t+1}{t+2}\right| + C$

$v(0) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + C = 3\ln 2 \Rightarrow C = 4\ln 2 \Rightarrow v(t) = \ln\left|\frac{t+1}{t+2}\right| + 4\ln 2$.

Tính $v(11) = \ln\left(\frac{12}{13}\right) + 4\ln 2 \approx 2,69$.

Vậy $v \approx 2,69$.

Câu 151. Một chiếc ca nô chạy trên sông có vận tốc theo hàm $v(t) = 3t^2 + 5\ (\text{m/s})$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc ca nô bắt đầu chuyển động. Quãng đường ca nô đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 bằng bao nhiêu mét?



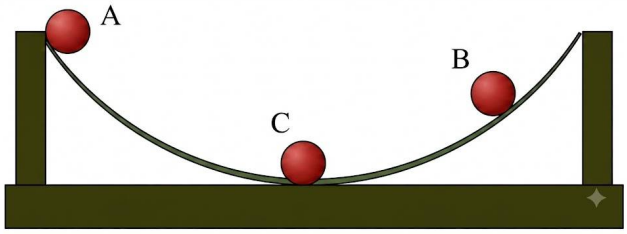
Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 966

Quãng đường vật đó đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là $S = \int_4^{10}\left(3t^2+5\right)\text{dt} = 966$ m.

Câu 152. Một viên bi chuyển động từ vị trí A đến vị trí B với gia tốc là hàm $a(t) = 2\cos t\left(\text{m}/\text{s}^2\right)$, biết rằng tại thời điểm $t = 0(s)$ viên bi bắt đầu chuyển động (vị trí A) có vận tốc bằng 0 và đến vị trí B tại thời điểm $t = \pi(s)$. Tính quãng đường (đơn vị mét) viên bi đi được từ vị trí A đến vị trí B.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

Ta có $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int 2\cos t\,\mathrm{d}t=2\sin t+C$.

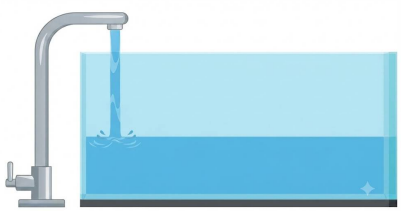
Mà tại thời điểm bắt đầu chuyển động thì viên bi có vận tốc bằng 0 nên ta có $v(0)=0$ hay $C=0$.

Vậy $v(t)=2\sin t$.

Quãng đường viên bi đi được từ thời điểm $t=0(s)$ đến thời điểm $t=\pi(s)$ là

$$\int_0^{\pi} v(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\pi} 2\sin t\,\mathrm{d}t=-2\cos t\Big|_0^{\pi}=-2\cos\pi-(-2\cos 0)=4\,(\mathrm{m}).$$

Câu 153. Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t)=6at^2+2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là $90\ \mathrm{m}^3$ và sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là $504\ \mathrm{m}^3$. Tính thể tích (đơn vị mét khối) của lượng nước trong bể sau khi bơm được 9 giây.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1458

Ta có: $\int_0^3 \left(6at^2+2bt\right)\mathrm{d}t=90\Leftrightarrow\left(2at^3+bt^2\right)\Big|_0^3=90\Leftrightarrow 54a+9b=90\quad(1)$

Mặt khác: $\int_0^6 \left(6at^2+2bt\right)\mathrm{d}t=504\Leftrightarrow\left(2at^3+bt^2\right)\Big|_0^6=504\Leftrightarrow 432a+36b=504\quad(2)$

Từ (1) và $(2)\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{2}{3}\\ b=6\end{cases}$ nên sau khi bơm 9 giây thì thể tích nước trong bể là:

$$V=\int_0^9 \left(4t^2+12t\right)dt=\left(\frac{4}{3}t^3+6t^2\right)\Big|_0^9=1458\left(m^3\right).$$

Câu 154. Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x)=-0,0004x+9,3$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm. Khi đó, sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 125 đơn vị sản phẩm bằng bao nhiêu triệu đồng? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 231

Ta có sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 125 đơn vị sản phẩm là

$$P(125)-P(100)=\int_{100}^{125}P'(x)\mathrm{d}x=\int_{100}^{125}(-0,0004x+9,3)\mathrm{d}x=-\int_{100}^{125}0,0004x\mathrm{d}x+\int_{100}^{125}9,3\mathrm{d}x$$

$$=-0,0002x^2\Big|_{100}^{125}+9,3x\Big|_{100}^{125}=-0,0002\left(125^2-100^2\right)+9,3(125-100)\approx 231 \text{ (triệu đồng).}$$

Câu 155. Giá trị trung bình của hàm số liên tục $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ được định nghĩa là $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Giả sử lượng khách tham quan (đơn vị nghìn người) tháp Bà Ponaga Nha Trang trung bình tại thời điểm t ngày trong khoảng thời gian từ ngày 01/05/2026 đến ngày 31/05/2026 được mô hình hóa bởi hàm số: $Q(x)=100+10(t-6)$ với $1\le t\le 31$. Lượng khách tham quan trung bình tháng 05/2026 ở tháp Bà Ponaga Nha Trang là bao nhiêu nghìn người?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 200

Lượng khách tham quan trung bình tháng 05/2026 ở tháp Bà Ponaga Nha Trang là

$$Q_0=\frac{1}{31-1}\int_1^{31}\left[100+10(t-6)\right]\mathrm{d}t=\frac{1}{30}\int_1^{31}(10t+40)\mathrm{d}t=\frac{1}{30}\left(5t^2+40t\right)\Big|_1^{31}=200 \text{ nghìn người.}$$

Câu 156. Giá trị trung bình của hàm số liên tục $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ được định nghĩa là $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Giả sử nhiệt độ (tính bằng °C) tại thời điểm t giờ trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa ở Thành phố Nha Trang vào ngày 24/12/2026 được mô hình hóa bởi hàm số

$$T(t)=2t+11, \text{ với } 6\le t\le 12.$$

Nhiệt độ trung bình từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa ngày 24/12/2026 của Thành phố Nha Trang là bao nhiêu °C?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 29

Nhiệt độ trung bình từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa ngày 24/12/2026 của Thành phố Nha Trang là:

$$t_0=\frac{1}{12-6}.\int_6^{12}(2t+11)\mathrm{d}t=\frac{1}{6}\left(t^2+11t\right)\Big|_6^{12}=29^\circ\mathrm{C}$$

Câu 157. Giá trị trung bình của hàm số liên tục $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ được định nghĩa là $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Giả sử lượng mưa trung bình (tính bằng mm) tại thời điểm t ngày trong khoảng thời gian từ ngày 01/12/2024 đến ngày 31/12/2024 ở Thành phố Nha Trang được mô hình hóa bởi hàm số:

$$M(x)=80+10(t-8) \text{ với } 1\le t\le 31.$$

Lượng mưa trung bình tháng 12/2024 của Thành phố Nha Trang là bao nhiêu mm?

Trả lời: ……..

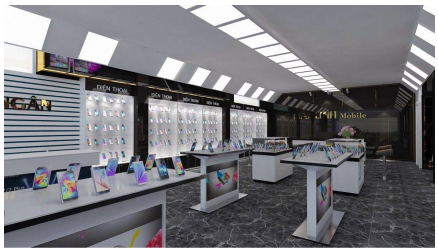
Lời giải

Đáp án: 160

Lượng mưa trung bình tháng 12/2024 của Thành phố Nha Trang là

$$M_0=\frac{1}{31-1}\int_1^{31}\left[80+10(t-8)\right]\mathrm{d}t=\frac{1}{30}\int_1^{31}10t\mathrm{d}t=\frac{1}{30}.5t^2\Big|_1^{31}=160\,\mathrm{mm}.$$

Câu 158. Cửa hàng điện thoại di động của chị Minh Nhàn có lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x)=-0,01x+2$. Lợi nhuận của sản phẩm trên khi doanh số là 200 với sản phẩm lớn hơn doanh số 150 sản phẩm là bao nhiêu triệu đồng, biết $P(x)$ là lợi nhuận tính bằng triệu đồng?



Trả lời: ……..

Lời giải

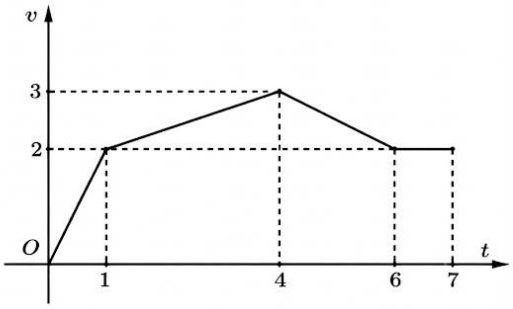
Đáp án: 12,5

Lợi nhuận của cửa hàng khi đó là: $P(200)-P(150)=\int_{150}^{200}P'(x)\mathrm{d}x=\int_{150}^{200}(-0,01x+1)\mathrm{d}x=12,5$

Vậy lợi nhuận của sản phẩm hơn nhau 12,5 triệu đồng.

Câu 159. Một chiếc xe ô tô chuyển động với đồ thị vận tốc được biểu diễn theo đường gấp khúc được minh họa trên hệ trục Otv như hình vẽ (mỗi đơn vị trên Ot ứng với 1 phút và mỗi đơn vị trên Ov ứng với $0,4(km/phút)$).





Quãng đường mà xe di chuyển trong 7 phút là bao nhiêu km?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $6,2$

Hàm vận tốc 1 giây đầu tiên: $v(t)=2t$

Hàm vận tốc giây thứ 2 đến giây thứ 4: $v(t)=\frac{1}{3}t+\frac{5}{3}$

Hàm vận tốc giây thứ 2 đến giây thứ 4: $v(t)=-\frac{1}{2}t+5$

Hàm vận tốc giây thứ 7 : $v(t)=2$

Quãng đường mà xe đã di chuyển trong 7 phút là:

$$s=\left[\int_0^1 2tdt+\int_1^4\left(\frac{1}{3}t+\frac{5}{3}\right)dt+\int_4^6\left(-\frac{1}{2}t+5\right)dt+\int_6^7 2dt\right].0,4=15,5.0,4=6,2(km)$$

Câu 160. Biết rằng tốc độ v (km/phút) của một canô cao tốc thay đổi theo thời gian t (phút) được cho bởi công thức sau: $v(t)=\begin{cases}\frac{t}{3} & \text{khi } 0\le t<3\\ 1 & \text{khi } 3\le t<10\\ 5-0,4t & \text{khi } 10\le t\le 18\end{cases}$.



Quãng đường canô di chuyển được trong khoảng từ 0 đến 18 phút là bao nhiêu km?

Trả lời: ……..

Lời giải

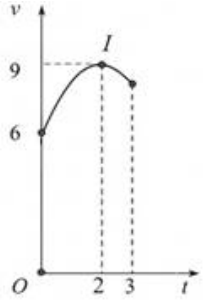
Đáp án: $3,7$

Quãng đường canô di chuyển được trong khoảng từ 0 đến 18 phút là:

$$s=\int_0^{18}v(t)dt=\int_0^3 v(t)dt+\int_3^{10}v(t)dt+\int_{10}^{18}v(t)dt=\int_0^{10}\frac{t}{3}dt+\int_3^{10}1dt+\int_{10}^{18}(5-0,4t)dt=3,7(km)$$

Câu 161. Bạn Minh Hiền chạy bộ trong 3 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc thời gian $t(h)$ có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên dưới. Tính quãng đường mà bạn Minh Hiền chạy được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến phần chục của kilômét).





Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 24,8

Gọi $v(t)=a.t^2+bt+c$.

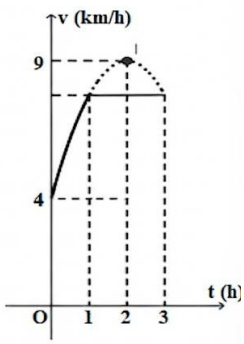
Đồ thị $v(t)$ là một phần parabol có đỉnh $I(2;9)$ và đi qua điểm $A(0;6)$ nên

$$\begin{cases}\dfrac{-b}{2a}=2\\ a.2^2+b.2+c=9\\ a.0^2+b.0+c=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{-3}{4}\\ b=3\\ c=6\end{cases}$$. Tìm được $v(t)=-\dfrac{3}{4}t^2+3t+6$

Vậy $s=\int_0^3\left(-\dfrac{3}{4}t^2+3t+6\right)dt=24,75(km)\approx 24,8(km)$

Câu 162. Một vận động viên chạy bộ trong 3 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị vận tốc như hình bên dưới. Trong thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường mà vật chuyển động được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến phần chục của kilômét).





Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 21,6

Gọi phương trình của parabol $v(t)=at^2+bt+c$

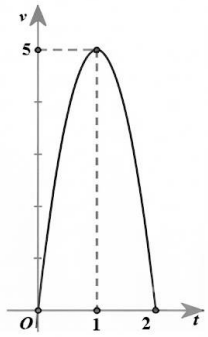
ta có hệ như sau: $\begin{cases} c=4 \\ 4a+2b+c=9 \\ -\dfrac{b}{2a}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=5 \\ c=4 \\ a=-\dfrac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow v(t)=-\dfrac{5}{4}t^2+5t+4$

Với $t=1$ ta có $v=\dfrac{31}{4} \Rightarrow v(t)=\dfrac{31}{4}$.

Vậy quãng đường vật chuyển động được là $s=\int_0^1\left(-\dfrac{5}{4}t^2+5t+4\right)dt+\int_1^3\dfrac{31}{4}dt=\dfrac{259}{12}\approx 21{,}6(km)$

Câu 163. Một người chạy trong 2 giờ, vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị là 1 phần của đường Parabol với đỉnh $I(1;5)$ và trục đối xứng song song với trục tung Ov như hình vẽ bên dưới. Tính quãng đường người đó chạy được trong 1 giờ 30 phút kể từ lúc bắt đầu chạy (kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân của kilômét).





Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 5,63

Ta có 1 giờ 30 phút = 1,5 giờ $\Rightarrow s=\int_0^{1,5}v(t)\mathrm{d}t$.

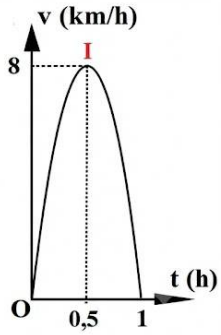
Đồ thị $v=v(t)$ đi qua gốc tọa độ nên $v(t)$ có dạng $v(t)=at^2+bt$.

Đồ thị $v=v(t)$ có đỉnh là $I(1;5)$ nên $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a}=1 \\ a+b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a \\ a+b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-5 \\ b=10 \end{cases} \Rightarrow v(t)=-5t^2+10t$

$\Rightarrow s=\int_0^{1,5}\left(-5t^2+10t\right)\mathrm{d}t=\dfrac{45}{8}\approx 5{,}63(km)$.

Câu 164. Một người chạy bộ trong thời gian 1 giờ, vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị là một phần parabol với đỉnh $I\left(\frac{1}{2};\ 8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên dưới. Tính quãng đường (đơn vị km) người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi chạy.





Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $4,5$

Gọi parabol là $(P):v(t)=at^2+bt+c$. Từ hình vẽ ta có (P) đi qua $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 0)$ và điểm $I\left(\frac{1}{2};\ 8\right)$.

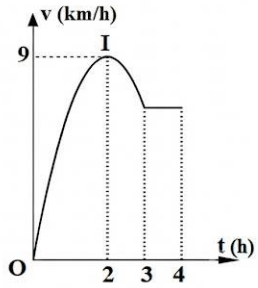
Ta có hệ: $\begin{cases} c=0 \\ a+b+c=0 \\ \frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-32 \\ b=32 \\ c=0 \end{cases}$.

Suy ra $(P):v(t)=-32t^2+32t$.

Vậy quãng đường người đó đi được là $s=\int_0^{\frac{3}{4}}\left(-32t^2+32t\right)\mathrm{d}t=4,5(km)$

Câu 165. Một vận động viên leo núi đi bộ trong 4 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc thời gian $t(h)$ có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ, kể từ khi bắt đầu vận động viên đó đi, đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường (đơn vị km) mà vận động viên leo núi đi bộ được trong 4 giờ đó.





Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 27

Gọi $(P):v(t)=at^2+bt+c$.

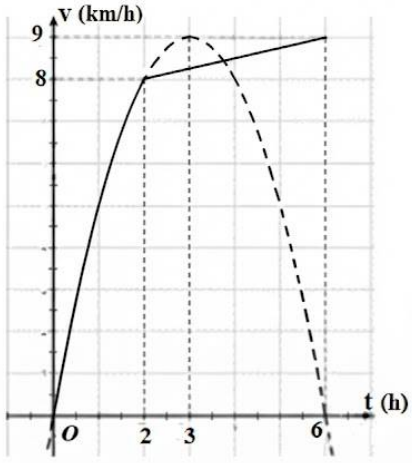
Vì (P) qua $O(0;0)$ và có đỉnh $I(2;9)$ nên dễ tìm được phương trình là $v(t)=\frac{-9}{4}t^2+9t$.

Ngoài ra tại $t=3$ ta có $v(3)=\frac{-9}{4}.3^2+9.3=\frac{27}{4}$

Vậy quãng đường cần tìm là: $s=\int_0^3\left(\frac{-9}{4}t^2+9t\right)dt+\int_3^4\frac{27}{4}dt=27\,(km)$.

Câu 166. Một chiếc xuồng đi trên sông trong 6 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị như hình bên dưới. Trong khoảng thời gian 2 giờ từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị là một phần đường Parabol có đỉnh $I(3;9)$ và có trục đối xứng song song với trục tung. Khoảng thời gian còn lại, đồ thị vận tốc là một đường thẳng có hệ số góc bằng $\frac{1}{4}$. Tính quãng đường (đơn vị km) mà chiếc xuồng đi được trong 6 giờ (kết quả làm tròn đến 1 chữ số thập phân của kilômét).





Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 43,3

+ Vì Parabol đi qua O(0; 0) và có tọa độ đỉnh $I(3;9)$ nên thiết lập được phương trình Parabol là

$(P): v(t) = -t^2 + 6t; \forall t \in [0;2]$

+ Sau 2 giờ đầu thì hàm vận tốc có dạng là hàm bậc nhất $y = \frac{1}{4}t + m$, dựa trên đồ thị ta thấy đi qua điểm có tọa độ $(6;9)$ nên thế vào hàm số và tìm được $m = \frac{15}{2}$.

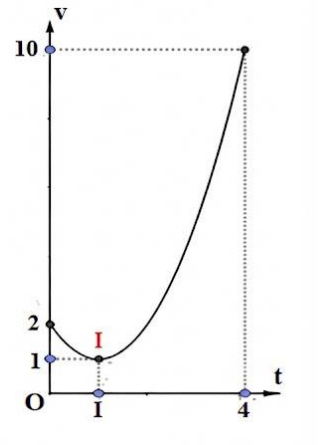
Nên hàm vận tốc từ giờ thứ 2 đến giờ thứ 6 là $v(t) = \frac{1}{4}t + \frac{15}{2}; \forall t \in [2;6]$

+ Quãng đường vật đi được bằng tổng đoạn đường 2 giờ đầu và đoạn đường 4 giờ sau.

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^2 \left(-t^2 + 6t\right) dt + \int_2^6 \left(\frac{1}{4}t + \frac{15}{2}\right) dt = \frac{130}{3}(km) \approx 43,3(km)$$

Câu 167. Một chiếc xuồng đi trên sông trong 4 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc thời gian $t(h)$ có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;1)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên dưới. Tính quãng đường (đơn vị km) mà chiếc xuồng đi được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát (kết quả làm tròn đến 1 chữ số thập phân của kilômét).





Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 13,3

Hàm biểu diễn vận tốc có dạng $v(t) = at^2 + bt + c$.

Dựa vào đồ thị ta có: $\begin{cases} c = 2 \\ \frac{-b}{2a} = 1 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow v(t) = t^2 - 2t + 2$.

Với $t = 4 \Rightarrow v(4) = 10$ (thỏa mãn).

Quãng đường mà chiếc xuồng đi được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát là:

$$s = \int_0^4 \left(t^2 - 2t + 2\right) dt = \frac{40}{3}(km) \approx 13,3(km).$$

Câu 168. Biết $\int_0^2 \left(f(x)+3x^2 \right)\mathrm{d}x = 10$. Tính $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Ta có: $\int_0^2 \left(f(x)+3x^2 \right)\mathrm{d}x = 10$

$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^2 3x^2\mathrm{d}x = 10$

$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 10 - \int_0^2 3x^2\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 10 - x^3\Big|_0^2$

$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 10 - 8 = 2$.

Câu 169. Cho $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$. Tính tích phân $I = \int_0^1 \left[2f(x) - 3x^2 \right] dx$

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

$I = \int_0^1 \left[2f(x) - 3x^2 \right] dx = 2\int_0^1 f(x)\,dx - 3\int_0^1 x^2 dx = 2.1 - x^3\Big|_0^1 = 2.1 - 1 = 1.$

Câu 170. Biết $\int_1^{2025} f(x)\mathrm{d}x = -3$ và $\int_{2025}^1 g(x)\mathrm{d}x = 2$. Tính $I = \int_1^{2025} \left[2f(x) + \frac{1}{2}g(x) \right]\mathrm{d}x$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -7

Ta có: $\int_{2025}^1 g(x)\mathrm{d}x = 2 \Leftrightarrow \int_1^{2025} g(x)\mathrm{d}x = -2$

$\Rightarrow I = \int_1^{2025} \left[2f(x) + \frac{1}{2}g(x) \right]\mathrm{d}x = 2\int_1^{2025} f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_1^{2025} g(x)\mathrm{d}x = 2(-3) + \frac{1}{2}(-2) = -7$

Câu 171. Cho $\int_{-1}^2 f(x)dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x)dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 \left[x + 2f(x) + 3g(x) \right] dx$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2,5

Ta có $I=\int_{-1}^{2}[x+2f(x)+3g(x)]dx=\int_{-1}^{2}xdx+2\int_{-1}^{2}f(x)dx+3\int_{-1}^{2}g(x)dx=\frac{3}{2}+4-3=\frac{5}{2}=2,5$

Câu 172. Biết $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-2$ và $\int_1^0 g(x)\mathrm{d}x=-3$. . Tính $I=\int_0^1[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: –5

$\int_0^1[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=-2-3=-5$.

Câu 173. Biết $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=3$ và $\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x=2$ và $\int_1^2 h(x)\mathrm{d}x=2025$. Tính $I=\int_1^2[f(x)-g(x)+h(x)]\mathrm{d}x$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2026

Ta có: $I=\int_1^2[f(x)-g(x)+h(x)]\mathrm{d}x=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x-\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 h(x)\mathrm{d}x=3-2+2025=2026$.

Câu 174. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;10]$ thỏa mãn $\int_0^{10}f(x)dx=7$, $\int_2^6 f(x)dx=3$. Tính $P=\int_0^2 f(x)dx+\int_6^{10}f(x)dx$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

Ta có $\int_0^{10}f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^6 f(x)dx+\int_6^{10}f(x)dx$

Suy ra $\int_0^2 f(x)dx+\int_6^{10}f(x)dx=\int_0^{10}f(x)dx-\int_2^6 f(x)dx=7-3=4$.

Câu 175. Giả sử $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=3$ và $\int_0^5 f(z)\mathrm{d}z=9$. Tổng $I=\int_1^3 f(t)\mathrm{d}t+\int_3^5 f(t)\mathrm{d}t$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 6

$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=3\Leftrightarrow\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=3\Leftrightarrow\int_1^0 f(t)\mathrm{d}t=-3$

$\int_0^5 f(z)\mathrm{d}z=9\Leftrightarrow\int_0^5 f(t)\mathrm{d}t=9$

$\Rightarrow \int_1^0 f(t)\,dt + \int_0^5 f(t)\,dt = 6 \Leftrightarrow \int_1^5 f(t)\,dt = 6$

$I = \int_1^3 f(t)\,dt + \int_3^5 f(t)\,dt = \int_1^5 f(t)\,dt = 6$

Câu 176. Cho $\int_{-1}^{2} f(t)dt = 2$ và $\int_{-1}^{2} g(x)dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^{2}\left[x + 2f(x) - 3g(x)\right]dx$

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 8,5

Ta có $I = \int_{-1}^{2}\left[x + 2f(x) - 3g(x)\right]dx = \int_{-1}^{2} x dx + 2\int_{-1}^{2} f(x)dx - 3\int_{-1}^{2} g(x)dx = \frac{3}{2} + 2.2 - 3(-1) = \frac{17}{2} = 8,5$

Câu 177. Nếu $\int_1^4 f(x)\,dx = -2$ và $\int_1^4 g(x)\,dx = -6$ thì $\int_1^4 \left[2f(x) - g(x) + 1\right]dx$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 5

$\int_1^4 \left[2f(x) - g(x) + 1\right]dx = 2\int_1^4 f(x)\,dx - \int_1^4 g(x)\,dx + \int_1^4 1\,dx = 2.(-2) + 6 + 3 = 5.$

Câu 178. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_1^5 f(x)dx = 10$, $\int_3^5 f(x)dx = 1$. Khi đó $\int_1^3 f(x)dx$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 9

Ta có $\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^5 f(x)\,dx - \int_3^5 f(x)\,dx = 10 - 1 = 9.$

Câu 179. Nếu $\int_0^1 2f(x)dx = 6$ thì $\int_0^1 \left[\frac{1}{3}f(x) + 2x\right]dx$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Ta có $\int_0^1 \left[\frac{1}{3}f(x) + 2x\right]dx = \frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\,dx + 2\int_0^1 x dx = \frac{1}{6}\int_0^1 2f(x)\,dx + x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.6 + 1 = 2.$

Câu 180. Cho $\int_0^{\ln 2}\left(2f(x) + e^x\right)dx = 5$. Khi đó $\int_0^{\ln 2} f(x)\,dx$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Ta có $\int\limits_0^{\ln 2}\left(2f\left(x\right)+e^x\right)\mathrm{d}x=2\int\limits_0^{\ln 2}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\ln 2}e^x\mathrm{d}x=2\int\limits_0^{\ln 2}f\left(x\right)\mathrm{d}x+e^x\Big|_0^{\ln 2}=2\int\limits_0^{\ln 2}f\left(x\right)\mathrm{d}x+1$

$\Rightarrow\int\limits_0^{\ln 2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=2$.

Câu 181. Nếu $\int\limits_0^{\ln 3}\left[f\left(x\right)+e^x\right]\mathrm{d}x=6$ thì $\int\limits_0^{\ln 3}f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

Ta có: $\int\limits_0^{\ln 3}\left[f\left(x\right)+e^x\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\ln 3}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\ln 3}e^x\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\ln 3}f\left(x\right)\mathrm{d}x+2$

Suy ra $\int\limits_0^{\ln 3}f\left(x\right)\mathrm{d}x=6-2=4$.

Câu 182. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\int\limits_0^{\pi}\left[f\left(x\right)+\sin x\right]\mathrm{d}x=10$. Tính $I=\int\limits_0^{\pi}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 8

Ta có $\int\limits_0^{\pi}\left[f\left(x\right)+\sin x\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\pi}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\pi}f\left(x\right)\mathrm{d}x-\cos x\Big|_0^{\pi}=10$

$\Rightarrow\int\limits_0^{\pi}f\left(x\right)\mathrm{d}x=10+\left(\cos\pi-\cos 0\right)=8$.

Câu 183. Nếu $\int\limits_0^{\pi}f\left(x\right)\mathrm{d}x=3$ thì $\int\limits_0^{\pi}\left[f\left(x\right)+\sin\frac{x}{2}\right]\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 5

Ta có $\int\limits_0^{\pi}\left[f\left(x\right)+\sin\frac{x}{2}\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\pi}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x=3-2\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi}=3-2\left(0-1\right)=5.$

Câu 184. Tích phân $\int\limits_{-e}^{-1}\frac{2}{x}\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: –2

$\int\limits_{-e}^{-1}\frac{2}{x}\mathrm{d}x=2\ln|x|\Big|_{-e}^{-1}=2\ln|-1|-2\ln|-e|=-2.$

Câu 185. Biết $\int\limits_0^1\frac{e^{2x}-4}{e^x+2}dx=a.e+b$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a+b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: –2

$\int\limits_0^1\frac{e^{2x}-4}{e^x+2}dx=\int\limits_0^1\frac{\left(e^x-2\right)\left(e^x+2\right)}{e^x+2}dx=\int\limits_0^1\left(e^x-2\right)dx=\left(e^x-2x\right)\Big|_0^1=e-3$

$\Rightarrow a=1;b=-3\Rightarrow a+b=-2$

Câu 186. Biết $\int\limits_0^1\frac{e^x}{2^x}dx=\frac{e+a}{b+c\ln 2}$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Khi đó $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: –2

$\int\limits_0^1\frac{e^x}{2^x}dx=\int\limits_0^1\left(\frac{e}{2}\right)^x dx=\frac{\left(\frac{e}{2}\right)^x}{\ln\frac{e}{2}}\Big|_0^1=\frac{e-2}{2-2\ln 2}$

$\Rightarrow a=-2;b=2;c=-2\Rightarrow a+b+c=-2$

Câu 187. Biết $\int\limits_1^2 e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x}\right)dx=e^2+a.e+b\ln 2$, với $a,b\in\mathbb{Z}$. Khi đó $2a+3b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: –8

$\int\limits_1^2 e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x}\right)dx=\int\limits_1^2\left(e^x-\frac{1}{x}\right)dx=\left(e^x-\ln|x|\right)\Big|_1^2=e^2-e-\ln 2$

$\Rightarrow a=-1;b=-2\Rightarrow 2a+3b=-8$

Câu 188. Biết $\int\limits_0^1\frac{e^{2x-1}-e^{-3x}+1}{e^x}dx=\frac{a.e^4+b}{e^4}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a-2027b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2028

$$\int_0^1 \frac{e^{2x-1}-e^{-3x}+1}{e^x}dx=\int_0^1\left(e^{x-1}-e^{-4x}+e^{-x}\right)dx=\left(e^{x-1}-e^{-4x}+e^{-x}\right)\Big|_0^1=\frac{e^4-1}{e^4}$$

$$\Rightarrow a=1;b=-1\Rightarrow a-2027b=2028$$

Câu 189. Biết $\int_0^1 \frac{\left(e^{-x}+2\right)^2}{e^{x-1}}dx=\frac{ae^3+be^2+ce+d}{3e^2}$, với $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của $P=a+b+c+d$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0

$$I=\int_0^1 \frac{\left(e^{-x}+2\right)^2}{e^{x-1}}dx=\int_0^1 \frac{e^{-2x}+4e^{-x}+4}{e^{x-1}}dx=\int_0^1\left(e^{-3x+1}+4e^{-2x+1}+4e^{-x+1}\right)dx$$

$$=\left(\frac{e^{-3x+1}}{-3}+\frac{4e^{-2x+1}}{-2}+\frac{4e^{-x+1}}{-1}\right)\Big|_0^1=\frac{19e}{3}-\frac{1}{3e^2}-\frac{2}{e}-4=\frac{19e^3-12e^2-6e-1}{3e^2}$$

$$\Rightarrow P=a+b+c=0$$

Câu 190. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}dx=a\sqrt{3}+\frac{\pi}{b}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a+b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: −2

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\left(\tan x-x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-3\end{cases}\Rightarrow a+b=-2$$

Câu 191. Cho $\int_0^m \left(3x^2-2x+1\right)dx=6$. Giá trị của tham số m bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Ta có: $\int_0^m \left(3x^2-2x+1\right)dx=6\Leftrightarrow\left(x^3-x^2+x\right)\Big|_0^m=6\Leftrightarrow m^3-m^2+m-6=0\Leftrightarrow m=2$.

Câu 192. Biết $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^2 \left[2+f(x)\right]dx$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 5

Ta có: $\int_1^2 \left[2+f\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=\left(2x+x^2\right)\Big|_1^2=8-3=5$

Câu 193. Biết $F\left(x\right)=x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^2 \left(2+f\left(x\right)\right)\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 9

Ta có $\int_1^2 \left(2+f\left(x\right)\right)\mathrm{d}x=\int_1^2 2\mathrm{d}x+\int_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=2x\Big|_1^2+F\left(x\right)\Big|_1^2=2x\Big|_1^2+x^3\Big|_1^2=9$

Câu 194. Cho $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=3^x$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F\left(0\right)=0$. Biết $F\left(1\right)=\dfrac{a}{b\ln 3}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a+b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Ta có: $F\left(1\right)-F\left(0\right)=\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 3^x\mathrm{d}x=\dfrac{3^x}{\ln 3}\Big|_0^1=\dfrac{3}{\ln 3}-\dfrac{1}{\ln 3}=\dfrac{2}{\ln 3}$

Suy ra $F\left(1\right)=\dfrac{2}{\ln 3}+F\left(0\right)=\dfrac{2}{\ln 3}+0=\dfrac{2}{\ln 3}$

$\Rightarrow a=2;b=1\Rightarrow a+b=3$

Câu 195. Cho $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm $f\left(x\right)=2^x$ và $F\left(0\right)=0$. Biết $F\left(1\right)=a.\log_b e$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $2024a+b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2026

Ta có $F\left(1\right)-F\left(0\right)=\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 2^x\ \mathrm{d}x=\dfrac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^1=\dfrac{2^1-2^0}{\ln 2}=\dfrac{1}{\ln 2}=\log_2 e$.

Vậy $F\left(1\right)=\log_2 e$.

$\Rightarrow a=1;b=2\Rightarrow 2024a+b=2026$

Câu 196. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(2)-F(0)=5$. Khi đó $\int_0^2 3f(x)\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 15

Ta có: $\int_0^2 3f(x)\mathrm{d}x=3\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=3\big(F(2)-F(0)\big)=3.5=15.$

Câu 197. Biết $F(x)=x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^2\big(2+f(x)\big)\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 9

Ta có $\int_1^2\big(2+f(x)\big)\mathrm{d}x=\int_1^2 2\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=2x\big|_1^2+x^3\big|_1^2=9.$

Câu 198. Có hai giá trị của số thực a là $a_1,a_2\,(0<a_1<a_2)$ thỏa mãn $\int_1^a(2x-3)\mathrm{d}x=0$. Hãy tính $T=3^{a_1}+3^{a_2}+\log_2\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 13

Ta có: $\int_1^a(2x-3)\mathrm{d}x=\left(x^2-3x\right)\big|_1^a=a^2-3a+2.$

Vì $\int_1^a(2x-3)\mathrm{d}x=0$ nên $a^2-3a+2=0$, suy ra $\left[\begin{array}{l}a=1\\a=2\end{array}\right.$.

Lại có $0<a_1<a_2$ nên $a_1=1;\ a_2=2$.

Như vậy $T=3^{a_1}+3^{a_2}+\log_2\left(\frac{a_2}{a_1}\right)=3^1+3^2+\log_2\left(\frac{2}{1}\right)=13.$

Câu 199. Cho $I=\int_0^1\left(4x-2m^2\right)\mathrm{d}x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $I+6>0$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Theo định nghĩa tích phân ta có $I=\int_0^1\left(4x-2m^2\right)\mathrm{d}x=\left(2x^2-2m^2x\right)\Big|_0^1=-2m^2+2$.

Khi đó $I+6>0\Leftrightarrow -2m^2+2+6>0\Leftrightarrow -m^2+4>0\Leftrightarrow -2<m<2$

Mà m là số nguyên nên $m\in\{-1;0;1\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 200. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của a để $\int_0^a(2x-3)\mathrm{d}x\le 4$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

Ta có: $\int_0^a(2x-3)\mathrm{d}x=\left(x^2-3x\right)\Big|_0^a=a^2-3a$.

Khi đó: $\int_0^a(2x-3)\mathrm{d}x\le 4\Leftrightarrow a^2-3a\le 4\Leftrightarrow -1\le a\le 4$

Mà $a\in\mathbb{N}^*$ nên $a\in\{1;2;3;4\}$.

Vậy có 4 giá trị của a thỏa đề bài.

Câu 201. Có bao nhiêu số thực b thuộc khoảng $(\pi;3\pi)$ sao cho $\int_\pi^b 2\cos x\mathrm{d}x=1$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Ta có: $\int_\pi^b 2\cos x\mathrm{d}x=1\Leftrightarrow 2\sin x\Big|_\pi^b=1\Leftrightarrow \sin b=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ b=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$.

Do $b\in(\pi;3\pi)$ nên có 2 số thực $b=\frac{\pi}{6};b=\frac{5\pi}{6}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 202. Kết quả tích phân $\int_0^2|2x-3|\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2,5

Ta có $\int_0^2|2x-3|\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{3}{2}}(3-2x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{3}{2}}^2(2x-3)\mathrm{d}x=\left(3x-x^2\right)\Big|_0^{\frac{3}{2}}+\left(x^2-3x\right)\Big|_{\frac{3}{2}}^2=\frac{9}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{2}=2,5$

Câu 203. Cho $0\le m\le 2$ và tích phân $\int_0^m|x-2|dx=2$. Khi đó giá trị của tham số m bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Do $x\in[0;m]\Rightarrow x-2\le x-m\le 0\Rightarrow |x-2|=2-x$

Vậy $I=\int\limits_0^m (2-x)\,dx=\left(2x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^m=2m-\frac{m^2}{2}=2\Rightarrow m=2$

Câu 204. Kết quả tích phân $\int\limits_{-2}^{2}|x^2-1|\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

$I=\int\limits_{-2}^{2}|x^2-1|\mathrm{d}x$.

Xét $f(x)=x^2-1$ trên đoạn $[-2;2]$.

Cho $f(x)=0\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\in[-2;2]\\x=1\in[-2;2]\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	-2		-1		1		2
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

Do đó: $I=\int\limits_{-2}^{2}|x^2-1|\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{-1}(x^2-1)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}(x^2-1)\mathrm{d}x$

$=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_{-2}^{-1}+\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}+\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_{1}^{2}=\left[\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right]+\left[\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right]+\left[\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right]=4.$

Câu 205. Biết $I=\int\limits_1^5\frac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x=4+a\ln 2+b\ln 5$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $S=a+b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 5

Ta có $|x-2|=\begin{cases}x-2 \text{ khi } x\ge 2\\2-x \text{ khi } x\le 2\end{cases}$ do đó $I=\int\limits_1^2\frac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x+\int\limits_2^5\frac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x$.

$=\int\limits_1^2\frac{2(2-x)+1}{x}\mathrm{d}x+\int\limits_2^5\frac{2(x-2)+1}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left(\frac{5}{x}-2\right)\mathrm{d}x+\int\limits_2^5\left(2-\frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x$

$=(5\ln|x|-2x)\Big|_1^2+(2x-3\ln|x|)\Big|_2^5=4+8\ln 2-3\ln 5\Rightarrow\begin{cases}a=8\\b=-3\end{cases}\Rightarrow S=a+b=5.$

Câu 206. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & khi\ x\ge 1\\ x+1 & khi\ x<1\end{cases}$. Biết $\int\limits_{2}^{0}-3t^2 f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{a}{b}.$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a+b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 37

$$\int\limits_{2}^{0}-3t^2 f(t)\mathrm{d}t=-3\int\limits_{2}^{0}t^2 f(t)\mathrm{d}t=3\int\limits_{0}^{2}x^2 f(x)\mathrm{d}x=3\left[\int\limits_{0}^{1}x^2(x+1)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}x\mathrm{d}x\right]=\frac{25}{12}.$$

$\Rightarrow a=25;b=12\Rightarrow a+b=37$

Câu 207. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x^2-1 & \text{khi } x<0\\ x-1 & \text{khi } 0\le x\le 2\\ 5-2x & \text{khi } x>2\end{cases}$. Biết $\int\limits_{-5}^{9}\frac{1}{7}f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a-b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 88

$$\int\limits_{-5}^{9}\frac{1}{7}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{7}\int\limits_{-5}^{9}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{7}\int\limits_{-5}^{9}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{7}\int\limits_{-5}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{7}\int\limits_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{7}\int\limits_{2}^{9}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{7}\int\limits_{-5}^{0}\left(2x^2-1\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{7}\int\limits_{0}^{2}(x-1)\mathrm{d}x+\frac{1}{7}\int\limits_{2}^{9}(5-2x)\mathrm{d}x=\frac{109}{21}.$$

$\Rightarrow a=109;b=21\Rightarrow a-b=88$

Câu 208. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-x & \text{khi } x\ge 0\\ x & \text{khi } x<0\end{cases}$. Biết $\int\limits_{-1}^{1}f(x)dx+\int\limits_{-1}^{3}f(x)dx=\dfrac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a-2b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

$I_1=\int\limits_{-1}^{1}f(x)dx$

Do $f(x)=\begin{cases}x^2-x & \text{khi } x\ge 0\\ x & \text{khi } x<0\end{cases}$

$$\Rightarrow I_1=\int\limits_{-1}^{0}xdx+\int\limits_{0}^{1}\left(x^2-x\right)dx=-\frac{2}{3}.$$

$\Rightarrow I_2 = \int_{-1}^{3} f(x)dx$

Do $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{khi } x \geq 0 \\ x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow I_2 = \int_{-1}^{0} xdx + \int_{0}^{3} (x^2 - x)dx = 4$.

Vậy $I_1 + I_2 = \dfrac{10}{3}$

$\Rightarrow a = 10; b = 3 \Rightarrow a - 2b = 4$

Câu 209. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 4x & \text{khi } x > 2 \\ -2x + 12 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \int_{1}^{2} f(t)dt + \frac{1}{2}\int_{5}^{10} f(t)dt$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 84

$I_1 = \int_{1}^{2} f(t)dt = \int_{1}^{2} f(t)dt = \int_{1}^{2} f(x)dx$

Do $f(x) = \begin{cases} 4x & \text{khi } x > 2 \\ -2x + 12 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$

$\Rightarrow I_1 = \int_{1}^{2} (-2x + 12)dx = 9$.

$I_2 = \dfrac{1}{2}\int_{5}^{10} f(t)dt = \dfrac{1}{2}\int_{5}^{10} f(x)dx$

Do $f(x) = \begin{cases} 4x & \text{khi } x > 2 \\ -2x + 12 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$

$\Rightarrow I_2 = \dfrac{1}{2}\int_{5}^{10} 4x = 75$.

Vậy $I = I_1 + I_2 = 84$

Câu 210. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \geq 2 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tích phân Biết $\int_{1}^{3} \frac{1}{2} f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a - 3b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 5

Ta có: $\int_{1}^{3} \frac{1}{2} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\int_{1}^{2} (x^2 - 2x + 3)\mathrm{d}x + \int_{2}^{3} (x^2 - 1)\mathrm{d}x\right] = \dfrac{23}{6}$.

$\Rightarrow a=23; b=6 \Rightarrow a-3b=5$

Câu 211. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{khi } x\geq 1\\ x+1 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Tích phân Biết $\int\limits_2^0 -3t^2 f(t)\,dt=\dfrac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a-2b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

$$\int\limits_2^0 -3t^2 f(t)\,dt=-3\int\limits_2^0 t^2 f(t)\,dt=3\int\limits_0^2 x^2 f(x)\,dx=3\left[\int\limits_0^1 x^2(x+1)\,dx+\int\limits_1^2 x\,dx\right]=\frac{25}{12}.$$

$\Rightarrow a=25; b=12 \Rightarrow a-2b=1$

Câu 212. Cho số thực a và hàm số $f(x)=\begin{cases}2x & \text{khi } x\leq 0\\ a\left(x-x^2\right) & \text{khi } x>0\end{cases}$. Biết tích phân $\int\limits_{-1}^1 f(x)\,dx=1$, tính giá trị của a.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 12

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(a\left(x-x^2\right)\right)=0\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2x)=0\end{cases}$, và $f(0)=0$ nên hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó $\int\limits_{-1}^1 f(x)\,dx=\int\limits_{-1}^0 f(x)\,dx+\int\limits_0^1 f(x)\,dx=\int\limits_{-1}^0 2x\,dx+\int\limits_0^1 a\left(x-x^2\right)dx$

$$=\left(x^2\right)\Big|_{-1}^0+a\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=-1+a\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{a}{6}-1.$$

Mà $\int\limits_{-1}^1 f(x)\,dx=1\Leftrightarrow\dfrac{a}{6}-1=1\Leftrightarrow a=12$

Câu 213. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+a & \text{khi } x\geq 1\\ 3x^2+b & \text{khi } x<1\end{cases}$ thỏa mãn $\int\limits_0^2 f(x)\,dx=13$. Tính $T=a+b-ab.$

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: −11

Để tồn tại $\int\limits_0^2 f(x)\,dx\Leftrightarrow f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;2]\Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=1$

(Vì $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(0;1)$ và $(1;2)$).

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)\Leftrightarrow a+2=b+3\Leftrightarrow a=b+1\ (1)$

Ta có

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(3x^2+b\right)\mathrm{d}x+\int_1^2\left(2x+a\right)\mathrm{d}x=\left(x^3+bx\right)\Big|_0^1+\left(x^2+ax\right)\Big|_1^2$$

$$=a+b+4$$

Mà $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=13\Rightarrow a+b=9$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a=5;b=4\Rightarrow T=a+b-ab=-11$.

Câu 214. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)=\begin{cases}x+m & ,x\geq 0\\ e^{2x} & ,x<0\end{cases}$ (m là hằng số). Biết $\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x=a+\dfrac{b}{e^2}$ trong đó a,b là các số hữu tỉ. Tính $2a+4b^2$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 10

Do hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục tại $x=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)\Leftrightarrow m=1$

Khi đó ta có $\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^0 e^{2x}\mathrm{d}x+\int_0^2(x+1)\mathrm{d}x$

$$=\frac{e^{2x}}{2}\Big|_{-1}^0+\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^2=\frac{1}{2}-\frac{e^{-2}}{2}+4=\frac{9}{2}-\frac{1}{2e^2}.$$

Do đó $a=\dfrac{9}{2};b=-\dfrac{1}{2}$. Vậy $2a+4b^2=10$.

Câu 215. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, biết $f(x)=16x^3-15x^2+2x\int_1^2 f(t)\,dt-21$. Giá trị của $f(2)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 39

Ta đặt $m=\int_1^2 f(t)\,dt=\int_1^2\left(16t^3-15t^2+2mt-21\right)dt$, khi đó ta có

$$m=\left(4t^4-5t^3+mt^2-21t\right)\Big|_1^2\Leftrightarrow m=-2$$

Thay $m=-2$ vào hàm số ta có $f(x)=16x^3-15x^2-4x-21$.

Suy ra: $f(2)=39$.

Câu 216. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)=(2x+1)\left[f(x)\right]^2, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=-1$. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^1 (x^3-1)f(x)\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0,5

$$f'(x)=(2x+1)\left[f(x)\right]^2, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \frac{-f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=-(2x+1), \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)'=-(2x+1), \forall x\in\mathbb{R}$$

Vậy $\frac{1}{f(x)}=-\int(2x+1)\mathrm{d}x=-x^2-x+C \Rightarrow f(x)=\frac{1}{-x^2-x+C}$.

Do $f(0)=-1\Rightarrow C=-1$.

Vậy $f(x)=-\frac{1}{x^2+x+1}$.

$$\int\limits_0^1 (x^3-1)f(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_0^1 (x^3-1)\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 (1-x)\mathrm{d}x=\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}=0,5$$

Câu 217. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f'(x).\mathrm{e}^{f^3(x)}-\frac{2x}{f^2(x)}=0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(1)=0$, tính tích phân $I=\int\limits_0^{2027}\frac{1}{\sqrt[3]{2\ln x}}.f(x)\mathrm{d}x$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2027

Ta có

$$3f'(x).\mathrm{e}^{f^3(x)}-\frac{2x}{f^2(x)}=0 \Leftrightarrow 3f^2(x).f'(x).\mathrm{e}^{f^3(x)}=2x \Rightarrow \left(\mathrm{e}^{f^3(x)}\right)'=2x \Rightarrow \mathrm{e}^{f^3(x)}=\int 2x\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \mathrm{e}^{f^3(x)}=x^2+C$$

Mặt khác $f(1)=0\Rightarrow \mathrm{e}^{f^3(1)}=1+C\Rightarrow C=0$

$$\Rightarrow \mathrm{e}^{f^3(x)}=x^2 \Rightarrow f^3(x)=\ln x^2 \Rightarrow f(x)=\sqrt[3]{2\ln x}$$

Vậy $I=\int\limits_0^{2027}\frac{1}{\sqrt[3]{2\ln x}}.f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{2027}\frac{1}{\sqrt[3]{2\ln x}}.\sqrt[3]{2\ln x}\mathrm{d}x=\int\limits_0^{2027}\mathrm{d}x=2027$

Câu 218. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và thỏa mãn $f(0)=1$, $\left(f'(x)\right)^3=e^x\left(f(x)\right)^2, \forall x\in\mathbb{R}$.

Biết $\int_1^2 f(x)dx = a.e^2 + b.e$, với $a,b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0

Ta có: $\left(f'(x)\right)^3 = e^x\left(f(x)\right)^2, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \sqrt[3]{e^x}.\sqrt[3]{\left(f(x)\right)^2} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{\left(f(x)\right)^2}} = \sqrt[3]{e^x} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{\left(f(x)\right)^2}} = \sqrt[3]{e^x} \Leftrightarrow f'(x).\left(f(x)\right)^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{e^x}$$

$$\Leftrightarrow 3\left[\left(f(x)\right)^{\frac{1}{3}}\right]' = \sqrt[3]{e^x} \Leftrightarrow \left[\left(f(x)\right)^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{1}{3}\sqrt[3]{e^x} \Leftrightarrow \left(f(x)\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\int \sqrt[3]{e^x}dx \Leftrightarrow \left(f(x)\right)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{x}{3}} + C$$

$$f(0) = 1 \Rightarrow 1 = 1 + C \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow \left(f(x)\right)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{x}{3}} \Rightarrow f(x) = e^x$$

Do đó: $\int_1^2 e^x dx = e^2 - e \Rightarrow a = 1; b = -1 \Rightarrow a + b = 0$

Câu 219. Cho hàm số $f(x) > 0$ và thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2 + f(x).f''(x) = e^x, \quad \forall x \in R$ và $f(0) = f'(0) = 1$.

Biết $\int_1^2 f(x)dx = a.e + b\sqrt{e}$, với $a,b \in \mathbb{Z}$. Tính $a-b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

Ta có

$$(f'(x))^2 + f(x).f''(x) = e^x \Leftrightarrow (f(x).f'(x))' = e^x$$

$$\Rightarrow f(x).f'(x) = \int e^x dx \Rightarrow f(x).f'(x) = e^x + C$$

Từ $f(0) = f'(0) = 1$. Suy ra $C = 0$.

Vậy $f(x).f'(x) = e^x$

Tiếp đến có:

$$2f(x).f'(x) = e^x \Leftrightarrow (f^2(x))' = e^x \Rightarrow f^2(x) = \int e^x dx \Rightarrow f^2(x) = e^x + C$$

Từ $f(0) = 1$. Suy ra $C = 0$.

Vậy $f^2(x) = e^x \Rightarrow f(x) = \sqrt{e^x}$ (do $f(x) > 0$)

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \sqrt{e^x}dx = \int_1^2 e^{\frac{x}{2}}dx = 2e^{\frac{x}{2}}\Big|_1^2 = 2e - 2\sqrt{e} \Rightarrow a = 2; b = -2 \Rightarrow a - b = 4$$

Câu 220. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2 + f(x).f''(x) = 2x,\ \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 2$. Tính $I = \int_1^2 f^2(x)dx$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 7,5

Ta có $\left[f(x)f'(x)\right]' = \left[f'(x)\right]^2 + f(x)f''(x)$.

Do đó theo giả thiết ta được $\left[f(x)f'(x)\right]' = 2x$.

Suy ra $f(x)f'(x) = x^2 + C$.

Hơn nữa $f(0) = f'(0) = 2$ suy ra $C = 1$.

$\Rightarrow f(x)f'(x) = x^2 + 1$

Tương tự vì $\left[f^2(x)\right]' = 2f(x)f'(x)$ nên $\left[f^2(x)\right]' = 2\left(x^2+1\right)$.

Suy ra $f^2(x) = \int 2\left(x^2+1\right)dx \Rightarrow f^2(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x + C$

cũng vì $f(0) = 2$ suy ra $C = 2 \Rightarrow f^2(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x + 2$.

$$I = \int_1^2 f^2(x)dx = \int_1^2 \left(\frac{2}{3}x^3 + 2x + 2\right)dx = \frac{15}{2} = 7,5$$

Câu 221. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn: $\left(f'(x)\right)^2 + f(x).f''(x) = 15x^4 + 12x,\ \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 8

Theo giả thiết, $\forall x \in \mathbb{R}$: $\left(f'(x)\right)^2 + f(x).f''(x) = 15x^4 + 12x$

$\Leftrightarrow f'(x).f'(x) + f(x).f''(x) = 15x^4 + 12x$

$\Leftrightarrow \left[f(x).f'(x)\right]' = 15x^4 + 12x$

$\Leftrightarrow f(x).f'(x) = \int \left(15x^4 + 12x\right)dx = 3x^5 + 6x^2 + C\ \ (1)$.

Thay $x = 0$ vào (1), ta được: $f(0).f'(0) = C \Leftrightarrow C = 1$.

Khi đó, (1) trở thành: $f(x).f'(x) = 3x^5 + 6x^2 + 1$

$\Rightarrow \int\limits_0^1 f(x).f'(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(3x^5+6x^2+1\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{2}f^2(x)\right]\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{2}x^6+2x^3+x\right)\Big|_0^1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[f^2(1)-f^2(0)\right]=\frac{7}{2} \Leftrightarrow f^2(1)-1=7 \Leftrightarrow f^2(1)=8.$

Vậy $f^2(1)=8.$

Câu 222. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=x^3-2x, \forall x\in R$ và $f(0)=f'(0)=2.$

Biết $f^2(2)=\frac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a-b.$

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 253

Ta có: $\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=x^3-2x, \forall x\in R$

$\Leftrightarrow \left(f'(x).f(x)\right)'=x^3-2x, \forall x\in R$

Lấy nguyên hàm hai vế ta có: $\int\left(f'(x).f(x)\right)'dx=\int\left(x^3-2x\right)dx \Leftrightarrow f'(x).f(x)=\frac{x^4}{4}-x^2+C$

Theo đề ra ta có: $f'(0).f(0)=C=4$

Suy ra: $\int\limits_0^2 f'(x).f(x).dx=\int\limits_0^2\left(\frac{x^4}{4}-x^2+4\right)dx \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2}\Big|_0^2=\frac{104}{15} \Leftrightarrow f^2(2)=\frac{268}{15}.$

$\Rightarrow a=268; b=15 \Rightarrow a-b=253$

Câu 223. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(x+2)f(x)+(x+1)f'(x)=\mathrm{e}^x$ và $f(0)=\frac{1}{2}.$

Biết $\int\limits_1^2(2x+2)f(x)dx=a.e^2+b.e$, với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $a-b.$

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Ta có

$(x+2)f(x)+(x+1)f'(x)=\mathrm{e}^x \Leftrightarrow (x+1)f(x)+f(x)+(x+1)f'(x)=\mathrm{e}^x$

$\Leftrightarrow \left[(x+1)f(x)\right]+\left[(x+1)f(x)\right]'=\mathrm{e}^x \Leftrightarrow \mathrm{e}^x\left[(x+1)f(x)\right]+\mathrm{e}^x\left[(x+1)f(x)\right]'=\mathrm{e}^{2x}$

$\Leftrightarrow \left[\mathrm{e}^x(x+1)f(x)\right]'=\mathrm{e}^{2x}$

$\Rightarrow \int\left[\mathrm{e}^x(x+1)f(x)\right]'\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow e^x(x+1)f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C$

Mà $f(0)=\frac{1}{2} \Rightarrow C=0$.

Vậy $f(x)=\frac{1}{2}.\frac{e^x}{x+1}$

$\Rightarrow \int_1^2 (2x+2)\frac{1}{2}.\frac{e^x}{x+1}dx=\int_1^2 e^x dx=e^2-e \Rightarrow a=1;b=-1\Rightarrow a-b=2$

Câu 224. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên R thỏa mãn điều kiện $f(x)+x\left(f'(x)-2\sin x\right)=x^2\cos x, x\in R$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$. Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)}{x}dx$

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Từ giả thiết $f(x)+x\left(f'(x)-2\sin x\right)=x^2\cos x$

$\Leftrightarrow f(x)+xf'(x)=x^2\cos x+2x\sin x$

$\Leftrightarrow \left(xf(x)\right)'=\left(x^2\sin x\right)'$

$\Leftrightarrow xf(x)=x^2\sin x+C$

Mặt khác: $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=x\sin x.$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)}{x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=1$

Câu 225. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x)+f(x)=2x \ \ \forall x\in(0;+\infty)$, $f(1)=1$. Biết $f(4)=\frac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 23

Xét phương trình $2xf'(x)+f(x)=2x \ \ (1)$ trên $(0;+\infty)$: $(1)\Leftrightarrow f'(x)+\frac{1}{2x}\cdot f(x)=1 \ \ (2)$.

Đặt $g(x)=\frac{1}{2x}$, ta tìm một nguyên hàm $G(x)$ của $g(x)$.

Ta có $\int g(x)dx=\int\frac{1}{2x}dx=\frac{1}{2}\ln x+C=\ln\sqrt{x}+C$. Ta chọn $G(x)=\ln\sqrt{x}$.

Nhân cả 2 vế của (2) cho $e^{G(x)}=\sqrt{x}$, ta được: $\sqrt{x}\cdot f'(x)+\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot f(x)=\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}.f\left(x\right)\right)' = \sqrt{x}\ \ (3).$

Lấy tích phân 2 vế của (3) từ 1 đến 4, ta được: $\int\limits_1^4 \left(\sqrt{x}.f\left(x\right)\right)' \mathrm{d}x = \int\limits_1^4 \sqrt{x}\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \left(\sqrt{x}.f\left(x\right)\right)\Big|_1^4 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)\Big|_1^4 \Rightarrow 2f\left(4\right) - f\left(1\right) = \frac{14}{3} \Rightarrow f\left(4\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{14}{3}+1\right) = \frac{17}{6}$ (vì $f\left(1\right)=1$).

Vậy $f\left(4\right) = \frac{17}{6}$.

$\Rightarrow a = 17; b = 6 \Rightarrow a+b = 23$

Câu 226. Cho hàm số $f\left(x\right)$ không âm, có đạo hàm trên đoạn $\left[0;1\right]$ và thỏa mãn $f\left(1\right)=1$, $\left[2f\left(x\right)+1-x^2\right]f'\left(x\right) = 2x\left[1+f\left(x\right)\right],\ \forall x\in\left[0;1\right]$. Biết $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x = \frac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

Xét trên đoạn $\left[0;1\right]$, theo đề bài: $\left[2f\left(x\right)+1-x^2\right]f'\left(x\right) = 2x\left[1+f\left(x\right)\right]$

$\Leftrightarrow 2f\left(x\right).f'\left(x\right) = 2x + \left(x^2-1\right).f'\left(x\right) + 2x.f\left(x\right)$

$\Leftrightarrow \left[f^2\left(x\right)\right]' = \left[x^2 + \left(x^2-1\right).f\left(x\right)\right]'$

$\Leftrightarrow f^2\left(x\right) = x^2 + \left(x^2-1\right).f\left(x\right) + C\ \ (1).$

Thay $x=1$ vào (1) ta được: $f^2\left(1\right) = 1 + C \Leftrightarrow C = 0$ (vì $f\left(1\right)=1$).

Do đó, (1) trở thành: $f^2\left(x\right) = x^2 + \left(x^2-1\right).f\left(x\right)$

$\Leftrightarrow f^2\left(x\right) - 1 = x^2 - 1 + \left(x^2-1\right).f\left(x\right)$

$\Leftrightarrow \left[f\left(x\right)-1\right].\left[f\left(x\right)+1\right] = \left(x^2-1\right).\left[f\left(x\right)+1\right]$

$\Leftrightarrow f\left(x\right) - 1 = x^2 - 1$ (vì $f\left(x\right)\ge 0 \Rightarrow f\left(x\right)+1>0\ \ \forall x\in\left[0;1\right]$)

$\Leftrightarrow f\left(x\right) = x^2.$

Vậy $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$

$\Rightarrow a = 1; b = 3 \Rightarrow a+b = 4$

Câu 227. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $(f'(x))^2+4f(x)=8x^2+4, \forall x\in[0;1]$ và $f(1)=2$. Biết $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 7

Có $(f'(x))^2+4f(x)=8x^2+4\Rightarrow\int_0^1(f'(x))^2\mathrm{d}x+4\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(8x^2+4)\mathrm{d}x=\frac{20}{3}$. (1)

Ta có $\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)\big|_0^1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\Rightarrow -4\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=-8+4\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. (2)

$\int_0^1(2x)^2\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$. (3)

Cộng vế với vế của (1), (2), (3) ta được $\int_0^1(f'(x)-2x)^2\mathrm{d}x=0\Rightarrow f'(x)=2x\Rightarrow f(x)=x^2+C$.

Có $f(1)=C+1=2\Rightarrow C=1\Rightarrow f(x)=x^2+1$.

Do đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(x^2+1)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\Rightarrow a=4;b=3\Rightarrow a+b=7$

Câu 228. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\begin{cases}f(0)=f'(0)=1\\ f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y)-1\end{cases}$, với $x,y\in\mathbb{R}$. Tính $\int_0^1 f(x-1)\mathrm{d}x$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0,25

Lấy đạo hàm theo hàm số y

$f'(x+y)=f'(y)+3x^2+6xy$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Cho $y=0\Rightarrow f'(x)=f'(0)+3x^2\Rightarrow f'(x)=1+3x^2$

$\Rightarrow f(x)=\int f'(x)dx=x^3+x+C$ mà $f(0)=1\Rightarrow C=1$.

Do đó $f(x)=x^3+x+1$.

$\Rightarrow f(x-1)=(x-1)^3+x-1+1=x^3-3x^2+4x-1$

Vậy $\int_0^1 f(x-1)\mathrm{d}x=\int_0^1(x^3-3x^2+4x-1)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^0(x^3+x+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}=0,25$.

Câu 229. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x.f(x).f'(x)=f^2(x)-x, \forall x\in\mathbb{R}$ và có $f(2)=1$. Tích phân $I=\int\limits_0^2 f^2(x)dx$

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Ta có:

$x.f(x).f'(x)=f^2(x)-x$

$\Leftrightarrow 2x.f(x).f'(x)=2f^2(x)-2x$

$\Leftrightarrow 2x.f(x).f'(x)+f^2(x)=3f^2(x)-2x$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^2\left(x.f^2(x)\right)'dx=3\int\limits_0^2 f^2(x)dx-\int\limits_0^2 2xdx$

$\Leftrightarrow \left(x.f^2(x)\right)\Big|_0^2=3I-4$

$\Leftrightarrow 2=3I-4$

$\Leftrightarrow I=2$

Câu 230. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;2]$ thỏa mãn $f(1)=g(1)=0$ và

$\begin{cases}\dfrac{x}{(x+1)^2}g(x)+2024x=(x+1)f'(x)\\ \dfrac{x^3}{x+1}g'(x)+f(x)=2025x^2\end{cases}$, $\forall x\in[1;2]$. Tính tích phân $I=\int\limits_1^2\left[\dfrac{x}{x+1}g(x)-\dfrac{x+1}{x}f(x)\right]dx$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0,5

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases}\dfrac{1}{(x+1)^2}g(x)-\dfrac{x+1}{x}f'(x)=-2024\\ \dfrac{x}{x+1}g'(x)+\dfrac{1}{x^2}f(x)=2025\end{cases}$, $\forall x\in[1;2]$.

Suy ra:

$\left[\dfrac{1}{(x+1)^2}g(x)+\dfrac{x}{x+1}g'(x)\right]-\left[\dfrac{x+1}{x}f'(x)-\dfrac{1}{x^2}f(x)\right]=1$

$\Leftrightarrow\left[\dfrac{x}{x+1}g(x)\right]'-\left[\dfrac{x+1}{x}f(x)\right]'=1$

$\Rightarrow\dfrac{x}{x+1}g(x)-\dfrac{x+1}{x}f(x)=x+C.$

Mà $f(1)=g(1)=0\Rightarrow C=-1$

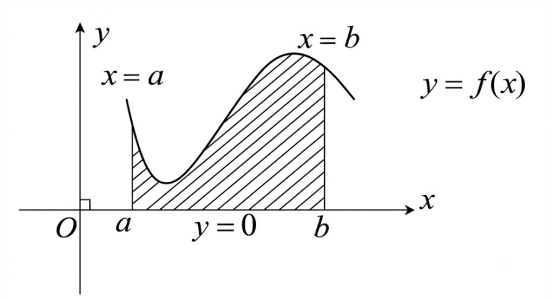
$$\Rightarrow \frac{x}{x+1}g(x)-\frac{x+1}{x}f(x)=x-1$$

$$I=\int_1^2\left[\frac{x}{x+1}g(x)-\frac{x+1}{x}f(x)\right]dx=\int_1^2(x-1)dx=\frac{1}{2}=0,5$$

BÀI 13
ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

1. Diện tích hình thang cong

a. Hình phẳng giới hạn bởi một đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$ và $x=b$

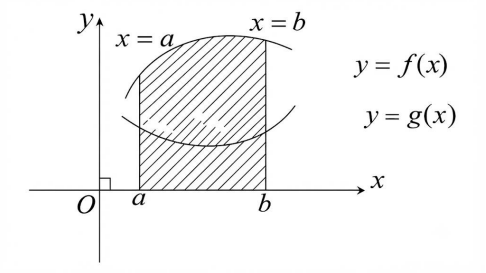


Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Khi đó, diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành Ox $(y=0)$ và hai đường thẳng $x=a, x=b$ $(a<b)$ được tính bởi công thức:

$$S=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

Chú ý: Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên $[a;b]$ thì: $\int_a^b |f(x)|\,dx=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$.

b. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a$ và $x=b$

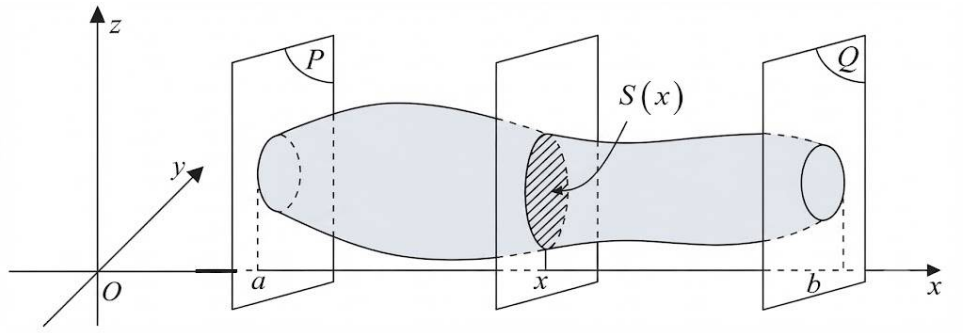


Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Khi đó, diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính bởi công thức: $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$

Chú ý: Nếu hiệu $f(x)-g(x)$ không đổi dấu trên $[a;b]$ thì: $\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx=\left|\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx\right|$.

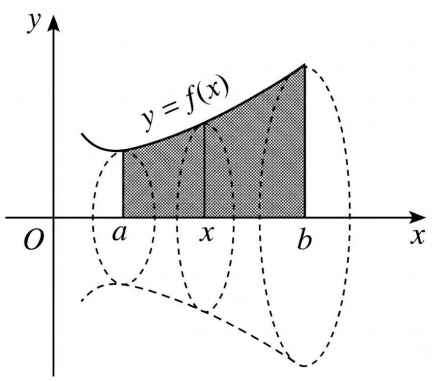
2. Thể tích hình khối

a. Thể tích của vật thể



Trong không gian, cho một vật thể nằm trong khoảng không gian giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b. Mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x $(a \le x \le b)$ cắt vật thể theo mặt cắt có diện tích $S(x)$. Khi đó, nếu $S(x)$ là hàm số liên tục trên $[a;b]$ thì thể tích của vật thể được tính bởi công thức: $V = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x$

b. Thể tích khối tròn xoay



Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên $[a;b]$.

Khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành Ox và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ quanh trục hoành (trục Ox) ta được một khối gọi là khối tròn xoay.

Khi cắt khối tròn xoay đó bởi một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm $x \in [a;b]$ ta được một hình tròn có bán kính $f(x)$.

Thể tích khối tròn xoay này là: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

CHỦ ĐỀ 1
DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG VÀ THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

DẠNG 1
DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

1. Dạng 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi một hàm số $y=f(x)$, trục hoành $(y=0)$ và hai đường thẳng $x=a, x=b$.

Phương pháp giải:

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $\begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \\ x=a \\ x=b \end{cases}$ là $S=\int_a^b |f(x)|\,dx$

Để bỏ dấu giá trị tuyệt đối của $|f(x)|$ ta làm như sau:

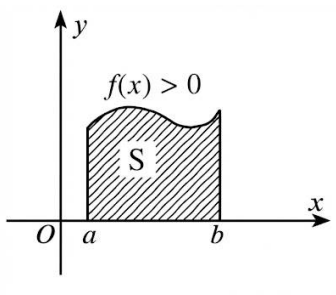
Bước 1: Giải $f(x)=0$ tìm nghiệm $x_1, x_2, ..., x_n \in (a;b)$ $(a<x_1<x_2<...<x_n<b)$.

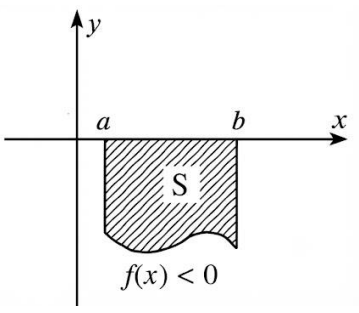
Bước 2: Tính $S=\int_a^{x_1}|f(x)|\,dx+\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|\,dx+...+\int_{x_n}^{b}|f(x)|\,dx=\left|\int_a^{x_1}f(x)\,dx\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2}f(x)\,dx\right|+...+\left|\int_{x_n}^{b}f(x)\,dx\right|$

Chú ý: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$

- Nếu $f(x)\ge 0$ trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành Ox $(y=0)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính bởi: $S=\int_a^b f(x)\,dx$

- Nếu $f(x)\le 0$ trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành Ox $(y=0)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính bởi: $S=-\int_a^b f(x)\,dx$





2. Dạng 2: Tính diện hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a, x=b.$

Phương pháp giải:

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \\ x=a \\ x=b \end{cases}$ là $S=\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x$

Để bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta làm như sau:

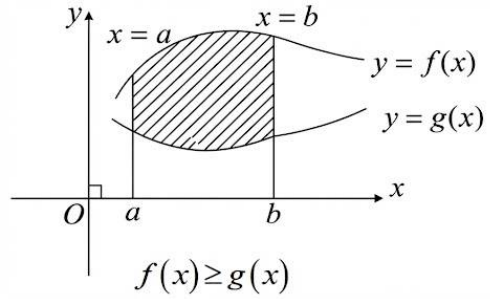
Bước 1: Giải phương trình $f(x)-g(x)=0$ tìm nghiệm $x_1, x_2, ..., x_n \in (a;b)$ $(a<x_1<x_2<...<x_n<b)$.

Bước 2: Tính $S=\int_a^{x_1}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_2}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x+...+\int_{x_n}^{b}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x$

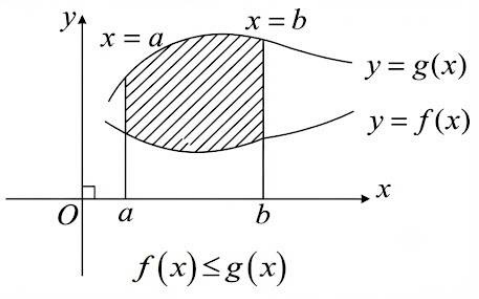
$=\left|\int_a^{x_1}\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x\right|+...+\left|\int_{x_n}^{b}\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x\right|$

Chú ý: Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên $[a;b]$.

- Nếu $f(x)\ge g(x)$ trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính bởi công thức: $S=\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$
- Nếu $f(x)\le g(x)$ trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính bởi công thức: $S=\int_a^b\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$

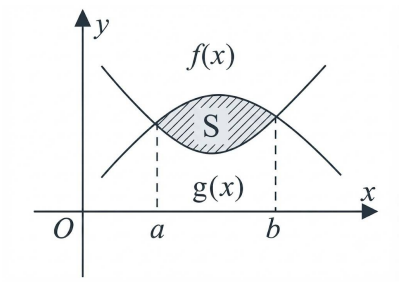


$f(x)\ge g(x)$



$f(x)\le g(x)$

3. Dạng 3: Tính diện hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$.



Phương pháp giải:

Bước 1: Giải phương trình $f(x)-g(x)=0$ tìm nghiệm $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$ $(x_1<x_2<...<x_{n-1}<x_n)$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$ là $S = \int_{x_1}^{x_n} \left| f(x) - g(x) \right| \mathrm{d}x$

Bước 2: Để bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta làm như sau:

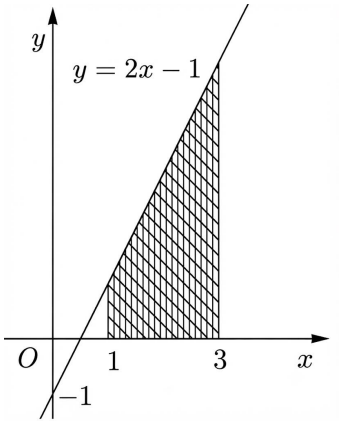
$$S = \int_{x_1}^{x_2} \left| f(x) - g(x) \right| \mathrm{d}x + \int_{x_2}^{x_3} \left| f(x) - g(x) \right| \mathrm{d}x + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} \left| f(x) - g(x) \right| \mathrm{d}x$$

$$= \left| \int_{x_1}^{x_2} \left(f(x) - g(x) \right) \mathrm{d}x \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} \left(f(x) - g(x) \right) \mathrm{d}x \right| + \ldots + \left| \int_{x_{n-1}}^{x_n} \left(f(x) - g(x) \right) \mathrm{d}x \right|$$

Chú ý: Khi tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường mà không thuộc ba dạng trên, ta thường vẽ đồ thị hàm số của các đường này trên cùng một hệ trục Oxy, rồi dựa vào đồ thị ta tính được diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường đó.

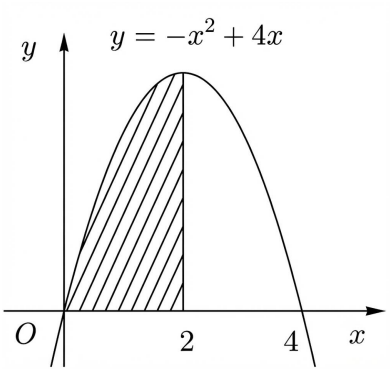
Bài 1. Tính diện tích hình phẳng phần gạch chéo trong các hình vẽ bên dưới đây.

a)



Hình 1

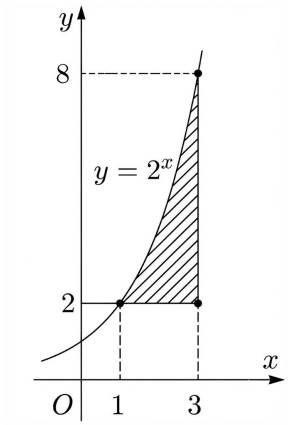
b)



Hình 2

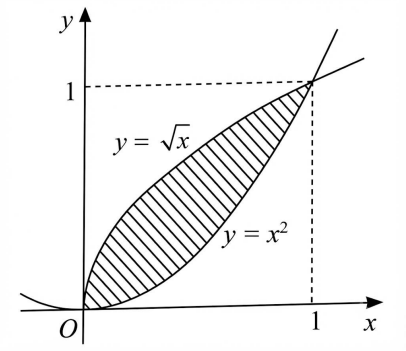
Bài 2. Tính diện tích hình phẳng phần gạch chéo trong các hình vẽ bên dưới đây.

a)



Hình 1

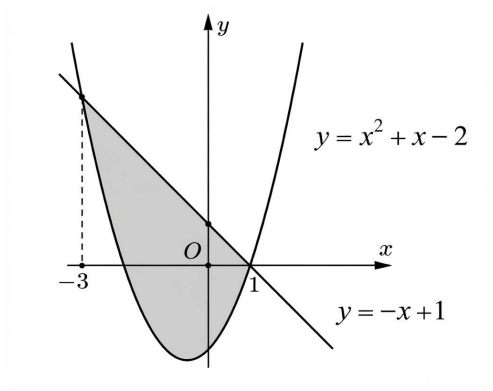
b)



Hình 2

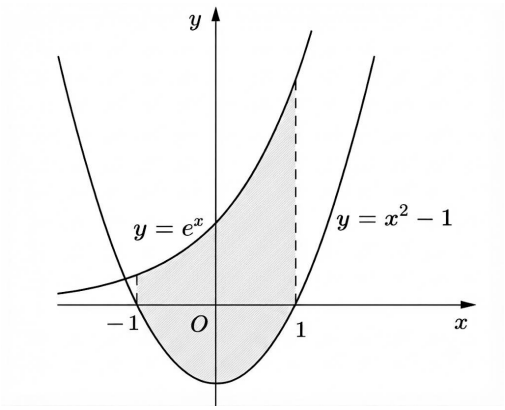
Bài 3. Tính diện tích hình phẳng phần tô đậm trong các hình vẽ bên dưới đây.

a)



Hình 1

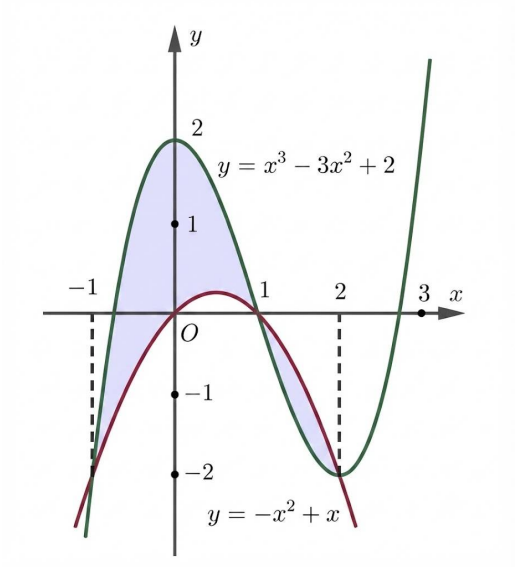
b)



Hình 2

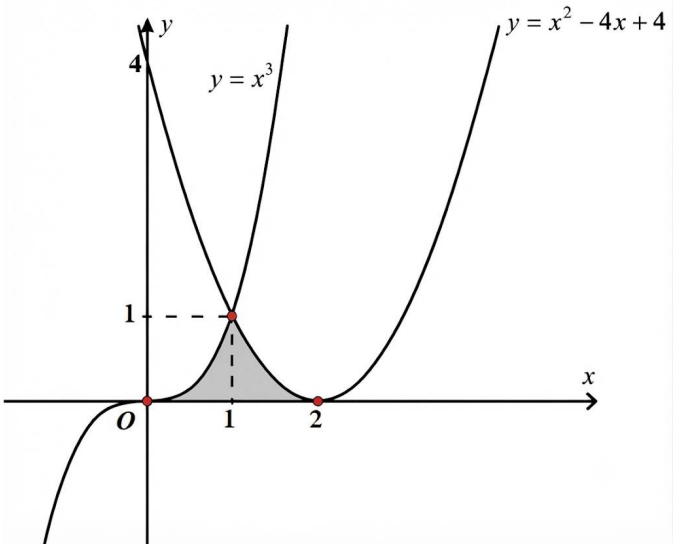
Bài 4. Tính diện tích hình phẳng phần tô đậm trong các hình vẽ bên dưới đây.

a)



Hình 1

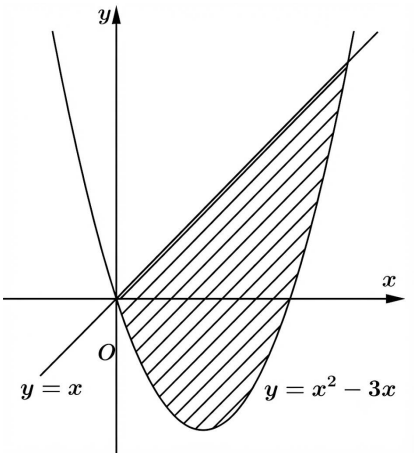
b)



Hình 2

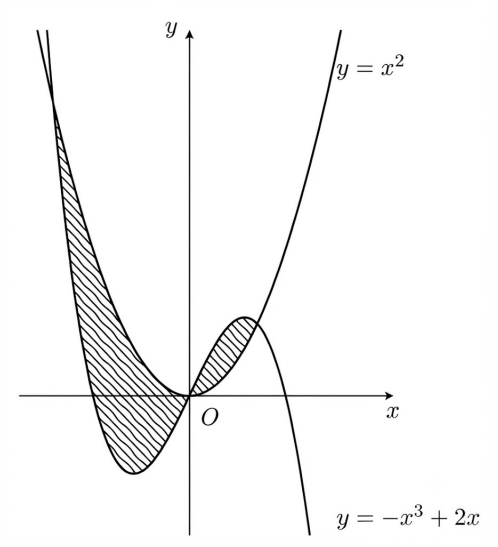
Bài 5. Tính diện tích hình phẳng phần gạch chéo trong các hình vẽ bên dưới đây.

a)



Hình 1

b)



Hình 2

Bài 6. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

a) Đồ thị hàm số $y=x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$.

b) Đồ thị hàm số $y=x^3+1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=1$.

c) Đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2-4$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=3$.

d) Đồ thị hàm số $y=(x+2)^2-1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=2$.

Bài 7. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

a) Đồ thị hàm số $y=\cos x-2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$ và $x=\pi$.

b) Đồ thị hàm số $y=\mathrm{e}^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$.

c) Đồ thị hàm số $y=3^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0, x=2$.

Bài 8. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

a) Đồ thị của hai hàm số $y=x^2$, $y=2x$ và hai đường thẳng $x=0, x=1$

b) Đồ thị của hai hàm số $y=x^2, y=2-x$ và hai đường thẳng $x=0, x=2$.

c) Đồ thị của hai hàm số $y=-x^2+2x+1$, $y=2x^2-4x+1$ và hai đường thẳng $x=0, x=2$

d) Đồ thị của các hàm số $y=x^3, y=2x-1$ và hai đường thẳng $x=1, x=2$.

Bài 9. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

a) Đồ thị hàm số $y=x^2+x-2$ và trục hoành.

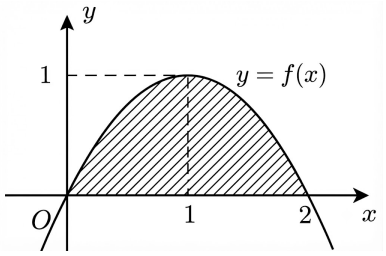
b) Đồ thị hàm số $y=x^2$ và $y=2-x^2$.

c) Đồ thị hàm số $y=-x^3+12x$ và $y=-x^2$.

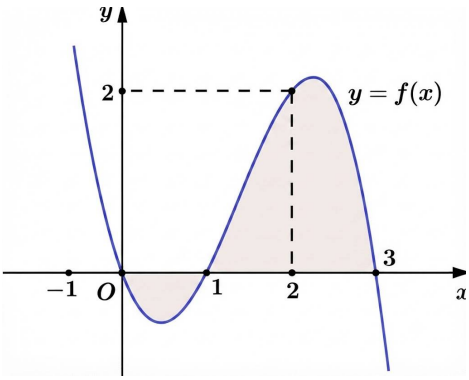
d) Đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và $y=x-x^2$.

e) Đồ thị hàm số $y=x^2-1$, trục hoành và đường thẳng $x=3$.

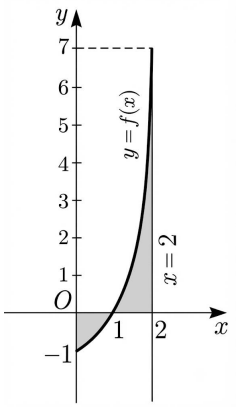
Bài 10. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc hai và có đồ thị như vẽ . Tính diện tích hình phẳng là phần gạch chéo trong hình vẽ bên dưới .



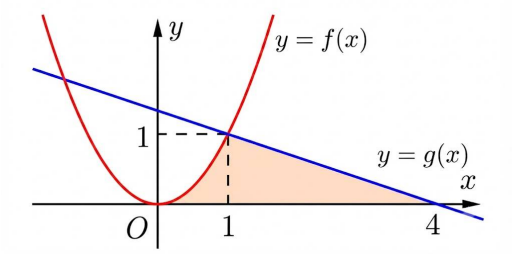
Bài 11. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc ba và có đồ thị như vẽ . Tính diện tích hình phẳng là phần tô đậm trong hình vẽ bên dưới .



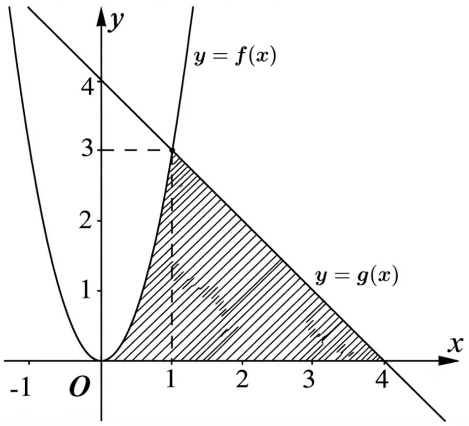
Bài 12. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx+c$ có đồ thị như vẽ . Tính diện tích hình phẳng (phần tô đậm) là giới hạn bởi các đồ thị hàm số là $y=f(x)$ và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$.



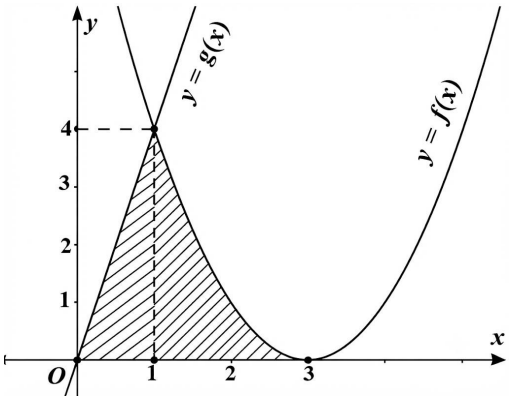
Bài 13. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc hai và $y=g(x)$ là hàm đa thức bậc nhất và có đồ thị như vẽ . Tính diện tích hình phẳng là phần tô đậm trong hình vẽ bên dưới .



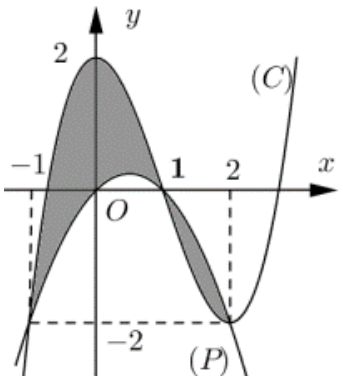
Bài 14. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc hai và $y=g(x)$ là hàm đa thức bậc nhất có đồ thị như hình vẽ . Tính diện tích hình phẳng là phần gạch chéo trong hình vẽ bên dưới .



Bài 15. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc hai và $y=g(x)$ là hàm đa thức bậc nhất có đồ thị như hình vẽ . Tính diện tích hình phẳng là phần gạch chéo trong hình vẽ bên dưới .

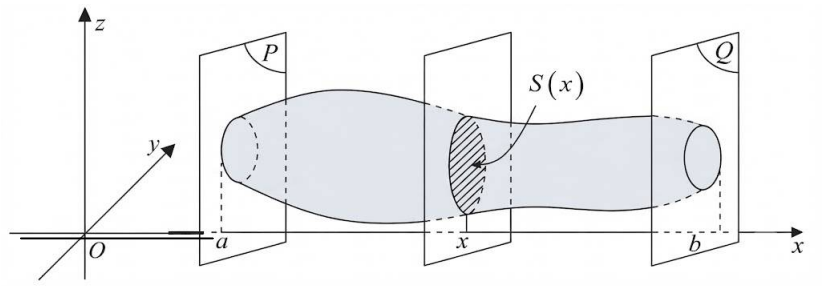


Bài 16. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm đa thức bậc ba và parabol (P) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần tô đậm của hình vẽ có diện tích bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ hai)



DẠNG 2
THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

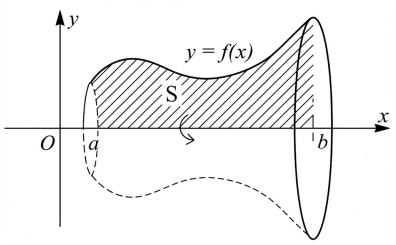
1. Thể tích của vật thể



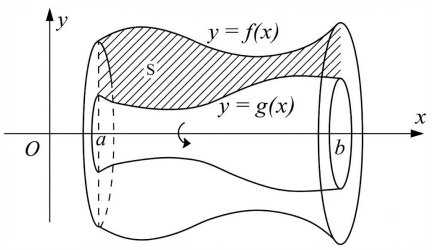
Trong không gian, cho một vật thể nằm trong khoảng không gian giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b. Mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x $(a \le x \le b)$ cắt vật thể theo mặt cắt có diện tích $S(x)$. Khi đó, nếu $S(x)$ là hàm số liên tục trên $[a;b]$ thì thể tích của vật thể được tính bởi công thức: $V = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x$

2. Thể tích khối tròn xoay

Dạng 1: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases}$ (Hình 1). Khi quay hình (H) quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$.



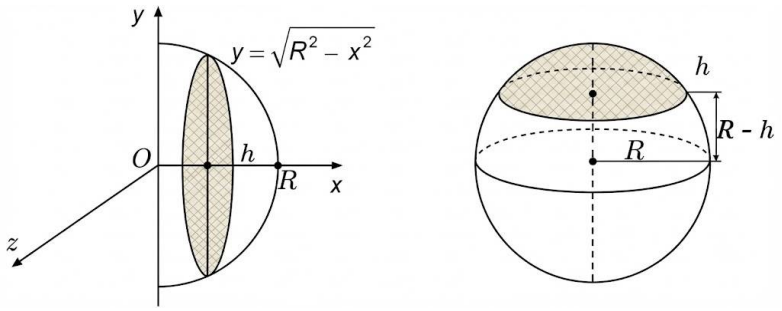
Hình 1



Hình 2

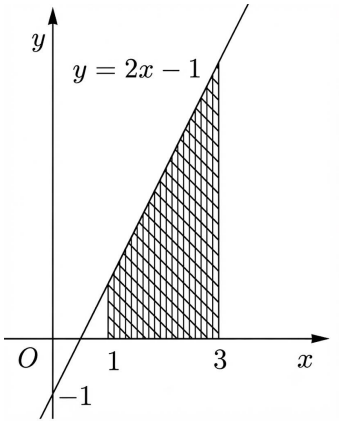
Dạng 2: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ f(x) \ge g(x) \ge 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases}$ (Hình 2). Khi quay hình (H) quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng: $V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]dx$

Bài 1. Khối chỏm cầu có bán kính R và chiều cao h $(0<h\le R)$ sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y=\sqrt{R^2-x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=R-h, x=R$ xung quanh trục Ox như hình vẽ. Tính thể tích của khối chỏm cầu này.



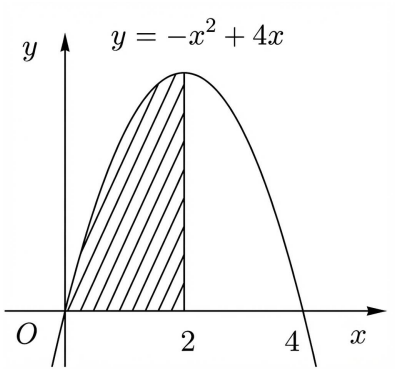
Bài 2. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo ra khi quay quanh hình phẳng (phần gạch chéo) trong các hình vẽ bên dưới đây quanh trục Ox.

a)



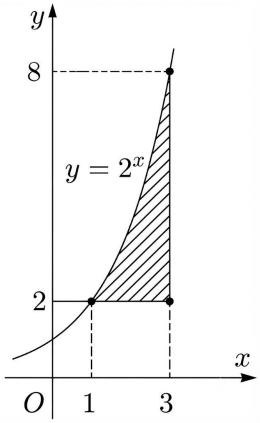
Hình 1

b)



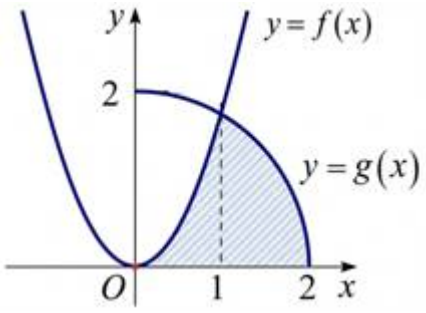
Hình 2

c)



Hình 3

Bài 3. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo ra khi quay quanh hình phẳng (phần gạch chéo) trong hình vẽ bên dưới đây quanh trục Ox. Biết $y=f(x)$ là hàm số đa thức bậc 2 và $y=g(x)$ là hàm số của một cung tròn của đường tròn có bán kính bằng 2.



Bài 4. Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1\le x\le 3)$ thì được thiết diện là một hình chữ nhật có hai cạnh là $3x$ và x^2.

Bài 5. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành:

a) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thì hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-x^2$, $y=0$, $x=0$ và $x=3$ quanh trục Ox.

b) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thì hàm số $y=\sqrt{x-1}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=2$ và $x=5$ quanh trục Ox.

c) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{5-x}, x\le 5$, trục tung, trục hoành quay quanh trục hoành.

Bài 6. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành:

a) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=e^x$, trục Ox và hai đường thẳng $x=0; x=1$ quanh trục Ox.

b) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=\sqrt{2+\cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0,\ x=\frac{\pi}{2}$ quanh trục hoành.

c) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=\sqrt{\tan x}, y=0, x=0, x=\frac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox.

Bài 7. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành:

a) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2-3x+2$ và trục hoành quay quanh trục hoành.

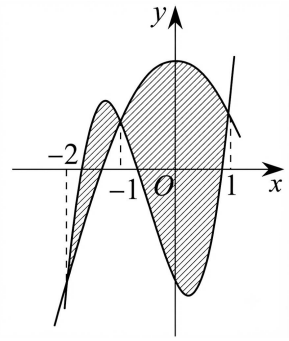
b) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2+x$ và $y=2x$ quay quanh trục hoành.

c) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=\sqrt{4x-x^2}$ và $y=0$ quay quanh trục hoành.

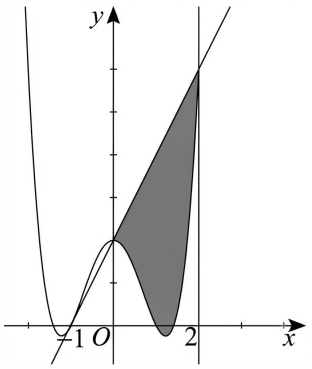
d) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị của hàm số parapol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $d: y=2x$ quay quanh trục hoành.

DẠNG 3
BÀI TOÁN DIỆN TÍCH , THỂ TÍCH LIÊN QUAN HÀM SỐ $f(x)$

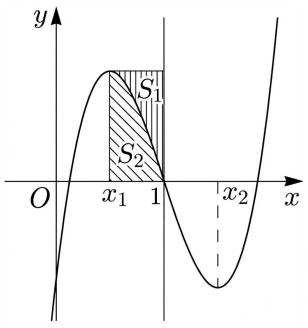
Bài 1. Cho hai hàm số $f(x)=ax^2+bx^2+cx-2$ và $g(x)=dx^2+ex+2$ (a, b, c, d, $e\in\mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2; -1; 1 (hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng bao nhiêu?



Bài 2. Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị (C), biết rằng (C) đi qua điểm $A(-1;0)$, tiếp tuyến d tại A của (C) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2 và diện tích hình phẳng giới hạn bởi d, đồ thị (C) và hai đường thẳng $x=0;x=2$; có diện tích bằng $\dfrac{28}{5}$ (phần tô màu trong hình vẽ). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và hai đường thẳng $x=-1;x=0$ có diện tích bằng bao nhiêu?



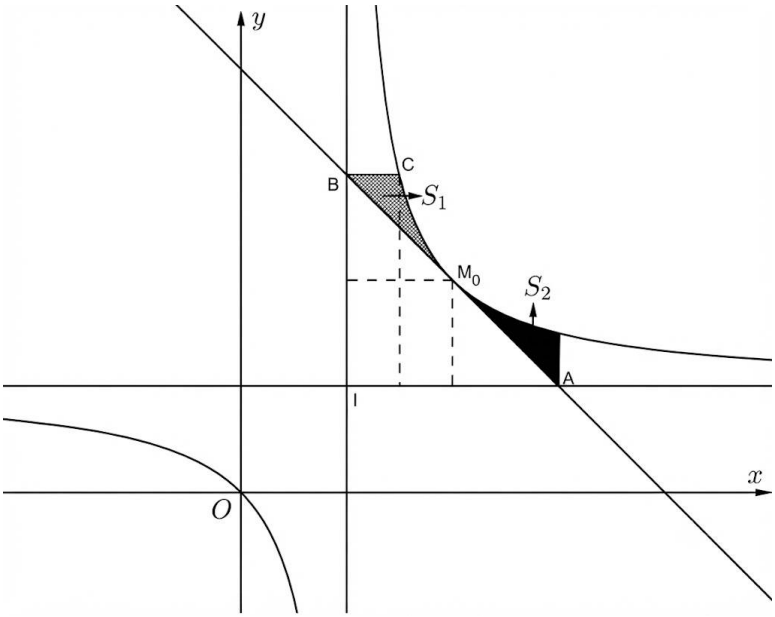
Bài 3. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_1,x_2 thỏa mãn $x_2=x_1+2$ và $f(x_1)+f(x_2)=0$. Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tính tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$.



Bài 4. Cho hàm số $f(x)=3x^4+ax^3+bx^2+cx+d\,(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có ba điểm cực trị là $-2,-1,1$. Gọi $y=g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f(x)$ và $y=g(x)$ bằng bao nhiêu?

Bài 5. Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^3 f(x)dx=F(3)-G(0)+a\quad(a>0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x), y=G(x), x=0$ và $x=3$. Khi $S=15$ thì a bằng bao nhiêu ?

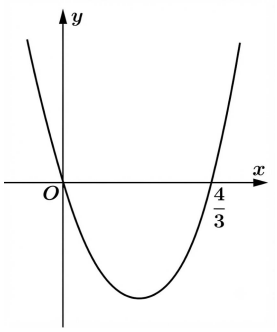
Bài 6. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị (C). Gọi giao điểm của hai đường tiệm cận là I. Điểm $M_0(x_0;y_0)$ di động trên (C), tiếp tuyến tại đó cắt hai tiệm cận lần lượt tại A,B và $S_{\Delta IAB}=2$. Tìm giá trị $IM_0^{\,2}$ sao cho $\dfrac{S_1+S_2}{S_{\Delta IAB}}=1$ (với S_1,S_2 là 2 hình phẳng minh họa bên dưới)



DẠNG 4

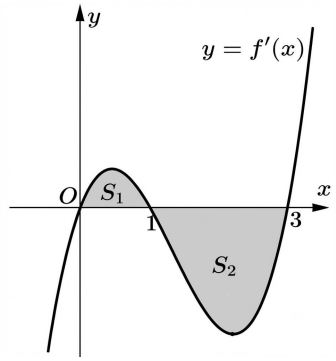
BÀI TOÁN DIỆN TÍCH , THỂ TÍCH LIÊN QUAN HÀM SỐ $f'(x)$

Bài 1. Cho hàm số $y=f(x)=2x^3+ax^2+bx(a,b\in\mathbb{R})$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

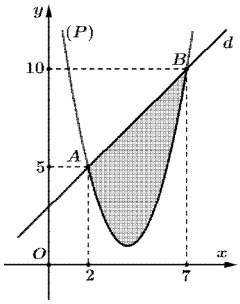


Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ bằng $\frac{m}{n}\left(m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}^*\right)$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $m+n$.

Bài 2. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình dưới. Biết rằng diện tích của các phần hình phẳng A và B lần lượt là $S_A=4$ và $S_B=10$. Tính giá trị của $f(3)$, biết giá trị của $f(0)=2$.

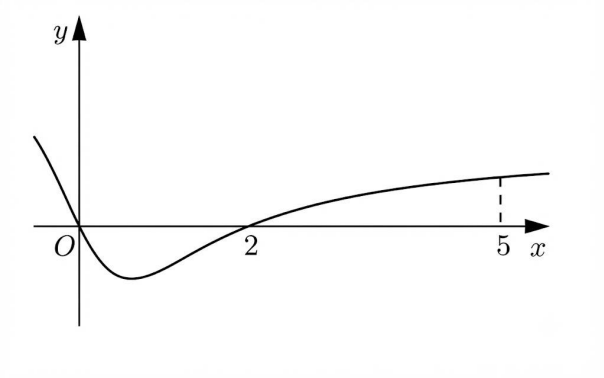


Bài 3. Cho hàm số bậc hai $y=f(x)$ có đồ thị (P) và đường thẳng d cắt tại hai điểm như trong hình vẽ bên dưới.



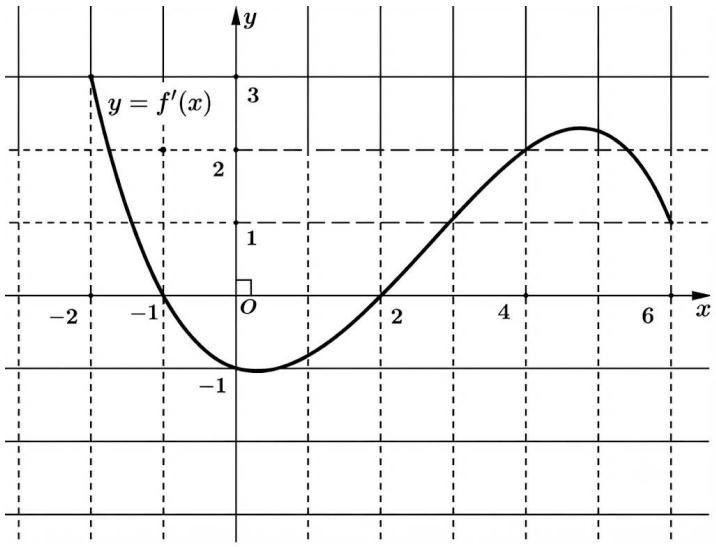
Biết rằng hình phẳng giới hạn bởi (P) và d có diện tích $S=\frac{125}{6}$. Khi đó hãy tính tích phân $\int_2^7(2x-3)f'(x)\mathrm{d}x$.

Bài 4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên.



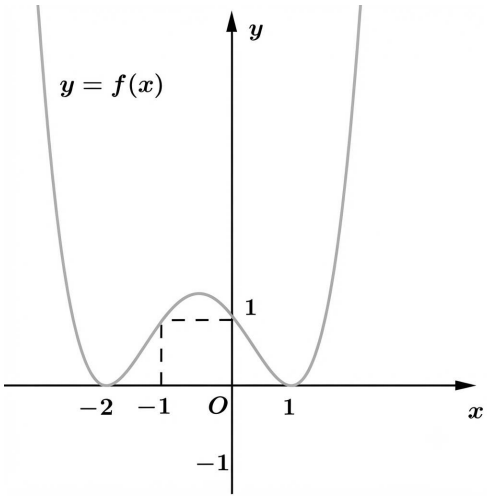
Biết rằng $f(0)+f(3)=f(2)+f(5)$. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$ lần lượt là $\min\limits_{[0;5]} f(x)=f(a), \max\limits_{[0;5]} f(x)=f(b)$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Khi đó $a+b$ bằng bao nhiêu ?

Bài 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như hình vẽ bên.



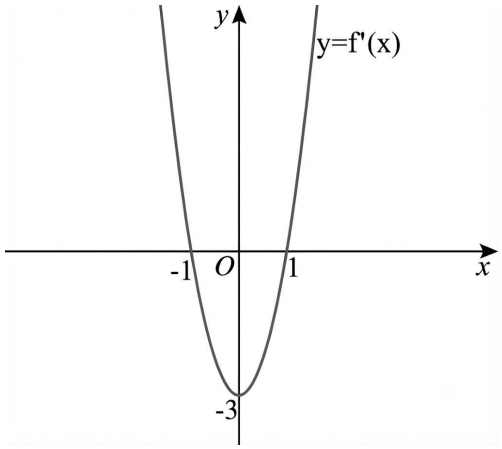
Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2;6]$ là $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x)=f(a)$ với $a\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của a.

Bài 6. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ.



Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ có diện tích bằng bao nhiêu?

Bài 7. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,(a,b,c,d\in\mathbb{R},a\neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây. Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành khi quay xung quanh trục Ox.



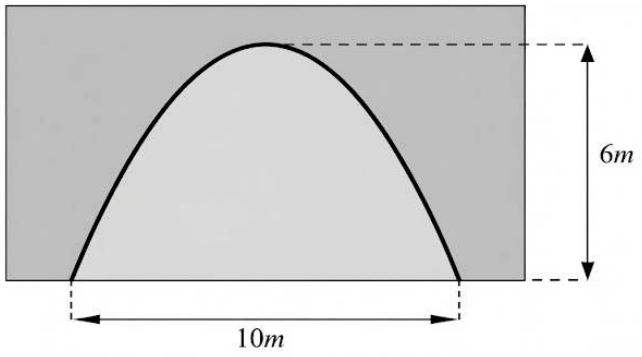
Bài 8. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a,b,c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -3 và 6. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$.

CHỦ ĐỀ 2
ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG VÀ THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY TRONG BÀI TOÁN THỰC TIỄN

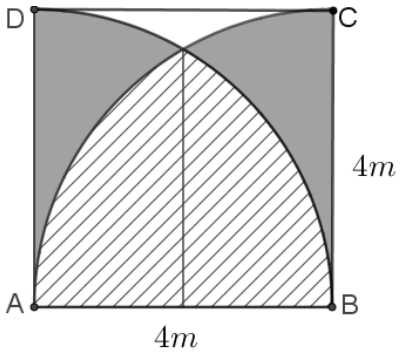
DẠNG 1
ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG TRONG BÀI TOÁN THỰC TIỄN

Bài 1. Mặt cắt của một cửa hầm có dạng là hình phẳng giới hạn bởi một parabol và đường thẳng nằm ngang và có kích thước như hình sau. Tính diện tích của cửa hầm.



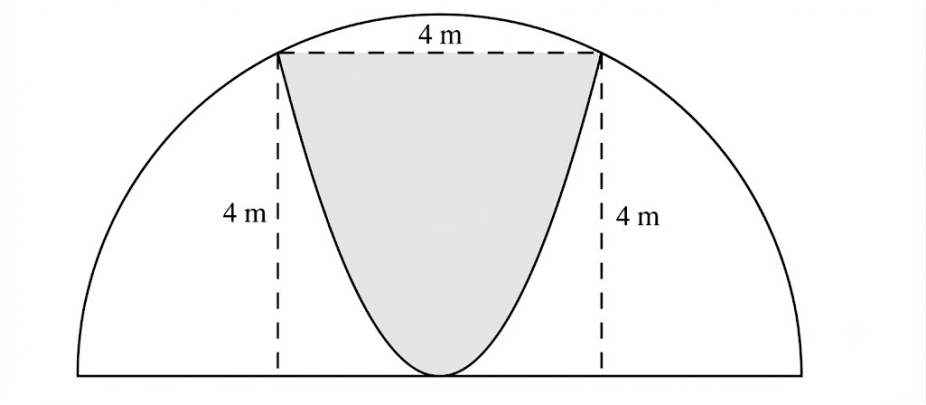


Bài 2. Một biển quảng cáo có dạng hình vuông $ABCD$ cạnh $AB = 4\text{m}$. Trên tấm biển đó có các đường tròn tâm A và đường tròn tâm B cùng bán kính $R = 4\text{m}$, hai đường tròn cắt nhau như hình vẽ.

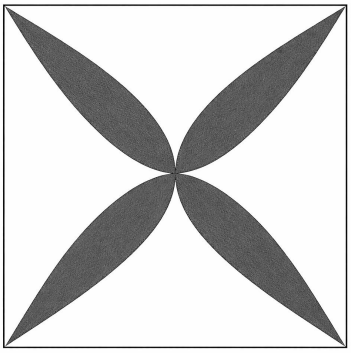


Chi phí để sơn phần gạch chéo là 150 000 đồng/m^2, chi phí sơn phần màu tô đen là 100 000 đồng/ m^2 và chi phí để sơn phần còn lại là 250 000 đồng/m^2. Hỏi số tiền để sơn biển quảng cáo theo cách trên bằng bao nhiêu triệu đồng?

Bài 3. Khuôn viên nhà bạn Khánh Linh có dạng nửa hình tròn, trên đó người thiết kế phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm và có trục đối xứng vuông góc với đường kính của nửa hình tròn, hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn và cách nhau một khoảng bằng 4 m. Phần còn lại của khuôn viên dành để trồng cỏ. Biết các kích thước cho như hình vẽ, chi phí trồng hoa và cỏ tương ứng là 250.000 đồng/m^2 và 150.000 đồng/m^2. Hỏi chi phí để trồng hoa và trồng cỏ trong khuôn viên đó hết bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)?



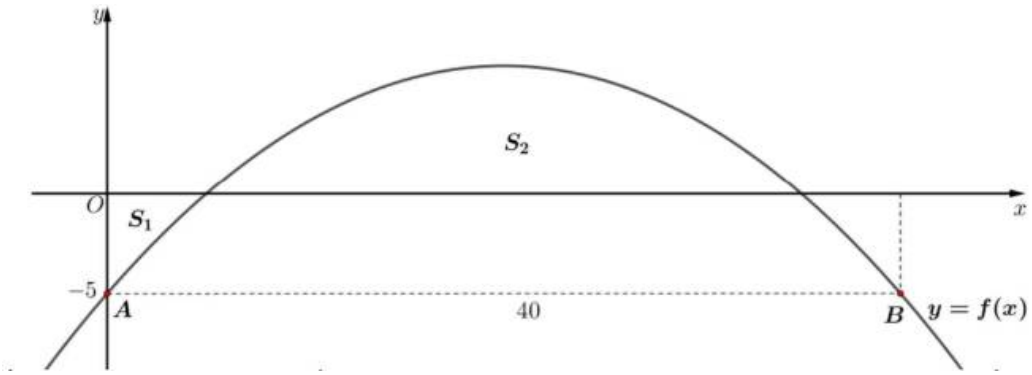
Bài 4. Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô đen như hình vẽ dưới). Diện tích bốn cánh hoa của viên gạch bằng bao nhiêu centimet vuông?



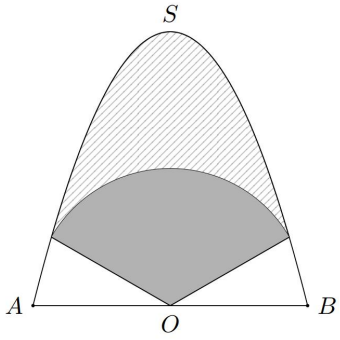
Bài 5. Một nhóm các kĩ sư muốn xây dựng một cây cầu vòm dàn thép với giá đỡ dưới bằng thép cao cấp có hình dáng là một đường cong Parabol nối từ 2 cột trụ A và B nằm bên dưới cây cầu, biết hai cột trụ cách nhau $400\,m$, khoảng cách từ trụ A đến cây cầu là $50\,m$ và AB song song với mặt đường.



Gắn hệ trục toạ độ Oxy vào cây cầu với đơn vị trục tọa độ là $10\,m$. Giá đỡ dưới bằng thép là dường cong Parabol tạo với hai trục toạ độ các hình phẳng có diện tích S_1, S_2 như hình vẽ bên, biết rằng $S_2 - 2S_1 = \dfrac{2200}{21}$. Điểm cao nhất của giá đỡ dưới bằng thép cao cấp cách mặt đường cây cầu bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

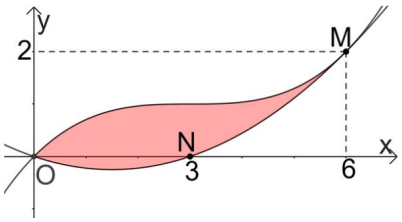


Bài 6. Để chuẩn bị quảng bá sản phẩm, người ta trang trí tấm pano dạng parabol như hình vẽ, biết $OS=8\ m$, $AB=6\ m$ với O là trung điểm của AB. Tấm pano được chia thành ba phần để trang trí với mức chi phí khác nhau: phần trên là phần kẻ sọc giá 100000 đồng/m², phần giữa là hình quạt tâm O bán kính $3\ m$ được tô đậm giá 200000 đồng/m², phần còn lại giá 150000 đồng/m². Tính tổng chi phí để trang trí tấm pano (đơn vị triệu đồng, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



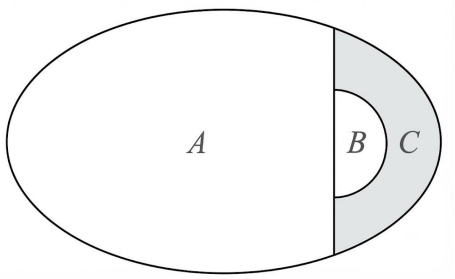
Bài 7. Một công ty thuê thợ vẽ logo công ty như hình vẽ lên một bức tường lớn. Logo có dạng là một bông hoa có 6 cách hoa giống nhau, sắp xếp cách đề như hình vẽ.



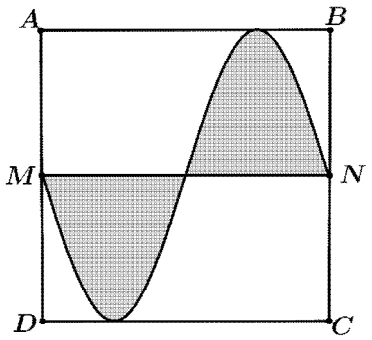


Để chính xác hóa kích thước và hình dạng như hình vẽ, mỗi cánh hoa được thiết kế như sau: Trong mặt phẳng Oxy (một đơn vị ứng với 1 mét trên thực tế), một cánh hoa được xem là một hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số bậc ba $y=\dfrac{(x-3)^3}{27}+1\ (C)$ và một đường parabol $(P): y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$. (C) và (P) cắt nhau tại hai điểm $O(0;0), M(6;2)$ và (P) đi qua điểm $N(3;0)$. Biết rằng chi phí vẽ logo nói trên được tính dựa trên mỗi mét vuông cánh hoa được vẽ, mỗi mét vuông được báo giá là 210 nghìn đồng. Hãy tính chi phí vẽ logo đó (đơn vị: nghìn đồng, làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

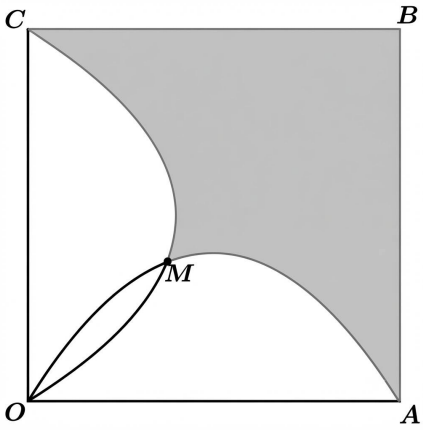
Bài 8. Một khu vườn hình elip (E) có độ dài trục lớn bằng $10m$ và trục nhỏ bằng $8m$ (như hình vẽ). Khu vực A để trồng hoa; khu vực B để trồng cỏ, là nửa hình tròn có tâm là một tiêu điểm của elip (E) bán kính bằng $1m$ còn lại là khu vực C (phần tô đậm) người ta lát gạch. Diện tích phần lát gạch bằng bao nhiêu m^2 (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



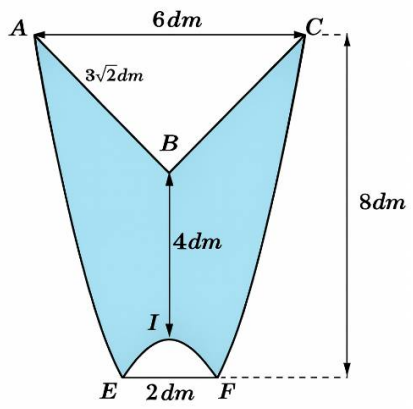
Bài 9. Cô Thúy có mảnh vườn hình chữ nhật $ABCD$, chiều dài $AB=2\pi(m)$, chiều rộng $BC=3(m)$. Cô Thúy muốn trồng hoa trên dải đất (phần tô đậm) được giới hạn bởi đường MN (với M,N lần lượt là trung điểm của AD,BC) và một đường hình sin (tham khảo hình vẽ). Tính diện tích đất trồng hoa.



Bài 10. Cho hình vuông $OABC$ cạnh bằng 8, điểm M nằm trong hình vuông sao cho khoảng cách từ M đến các cạnh OA,OC cùng bằng 3. Parabol (P_1) đi qua các điểm O,A,M và Parabol (P_2) đi qua các điểm O,C,M. Tính diện tích phần tô đậm (hình vẽ bên). (kết quả làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



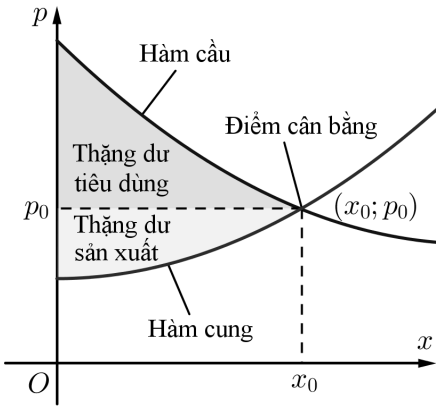
Bài 11. Một người thợ làm một logo bằng tấm nhựa phẳng, có hình dạng là một hình có trục đối xứng. Biết đường viền AE,CF ở hai bên là hai nhánh của một parabol và phần lõm EIF phía dưới đáy cũng là một parabol, hai nhánh phía trên là hai đoạn thẳng như hình bên dưới. Cho biết $AC=6dm, AB=3\sqrt{2}dm, EF=2dm$ và khoảng cách giữa AC và EF bằng 8 dm. Hỏi diện tích của logo đó bằng bao nhiêu dm^2 (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



Bài 12. Ta biết rằng hàm cầu liên quan đến giá p của một sản phẩm với nhu cầu của người tiêu dùng, hàm cung liên quan đến giá p của sản phẩm với mức độ sẵn sàng cung cấp sản phẩm của nhà sản xuất.

Điểm cắt nhau $(x_0; p_0)$ của đồ thị hàm cầu $p = D(x)$ và đồ thị hàm cung $p = S(x)$ được gọi là điểm cân bằng.

Các nhà kinh tế gọi diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị hàm cầu, đường ngang $p = p_0$ và đường thẳng đứng $x = 0$ là thặng dư tiêu dùng. Tương tự, diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị của hàm cung, đường nằm ngang $p = p_0$ và đường thẳng đứng $x = 0$ được gọi là thặng dư sản xuất, như trong hình bên dưới.



Giả sử hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm được mô hình hoá bởi:

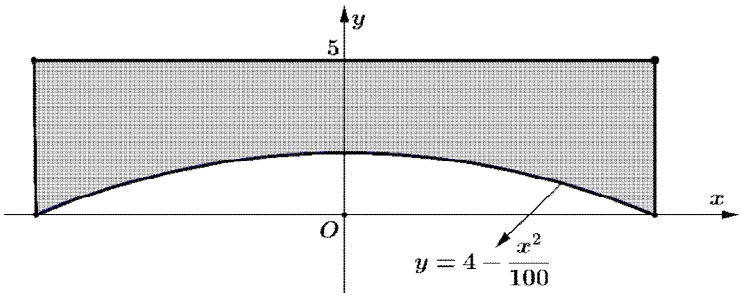
Hàm cầu: $p = 5 - 0,2x$ và hàm cung: $p = 1 + 0,02x^2$, trong đó x là số đơn vị sản phẩm. Tìm thặng dư tiêu dùng và thặng dư sản xuất cho sản phẩm này.

Bài 13. Đơn đặt hàng của nhà máy cho một loại máy điều hoà không khí là khoảng 6000 chiếc mỗi tuần khi giá là 331 USD/chiếc và khoảng 8000 chiếc mỗi tuần khi giá là 303 USD/chiếc. Hàm cung được cho bởi $p = 0,0275x$, trong đó x là số lượng máy điều hoà được bán với giá p USD một chiếc. Tìm thặng dư tiêu dùng và thặng dư sản xuất (giả sử hàm cầu là hàm bậc nhất).

Bài 14. Người ta sử dụng đường cong Lorenz để minh họa sự phân phối thu nhập trong một quốc gia. Gọi x là đại diện cho phần trăm số gia đình trong một quốc gia và y là phần trăm tổng thu nhập, mô hình $y = x$ sẽ đại diện cho một quốc gia mà các gia đình có thu nhập như nhau. Đường cong Lorenz $y = f(x)$, biểu thị sự phân phối thu nhập thực tế. Diện tích giữa hai mô hình này, với $0 \le x \le 100$, biểu thị "sự bất bình đẳng về thu nhập" của một quốc gia. Năm 2009, đường cong Lorenz của Hoa Kỳ có thể được mô hình hóa bởi hàm số: $y = (0,00061x^2 + 0,0224x + 1,666)^2, 0 \le x \le 100$, trong đó x được tính từ các gia đình nghèo nhất đến giàu có nhất. Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì vào năm 2009 là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

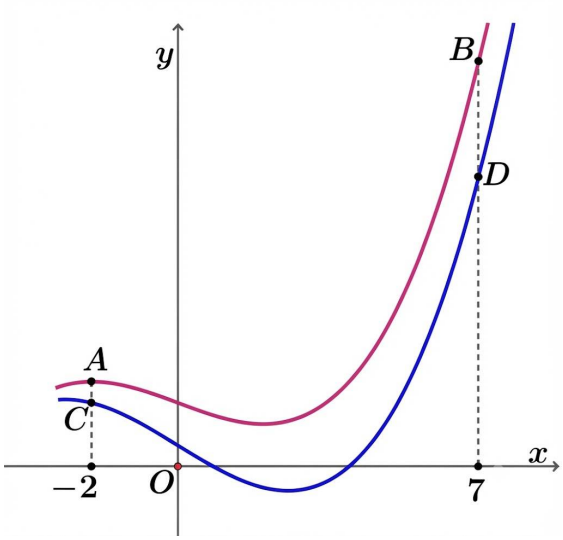
DẠNG 2
ỨNG DỤNG THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY TRONG BÀI TOÁN THỰC TIỄN

Bài 1. Hình bên dưới là mặt cắt dọc của một chiếc cầu bê tông (phần tô đậm, các đơn vị đều đo bằng mét)



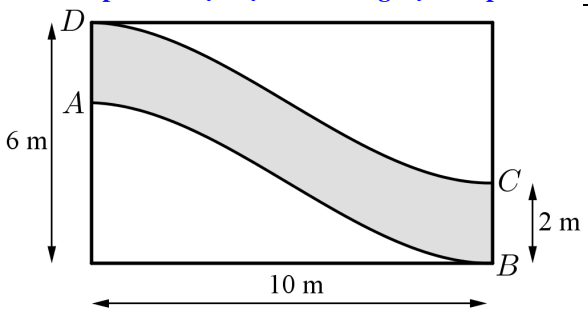
Biết chiều rộng của cầu bằng 9m. Thể tích bê tông ít nhất cần để đúc cầu bằng bao nhiêu?

Bài 2. Hưởng ứng chính sách hiện đại hóa nông thôn, người dân ở khu phố A đồng lòng cùng nhau góp tiền để bê tông một đường đi trong khu phố (phần được tô đậm trong hình vẽ).



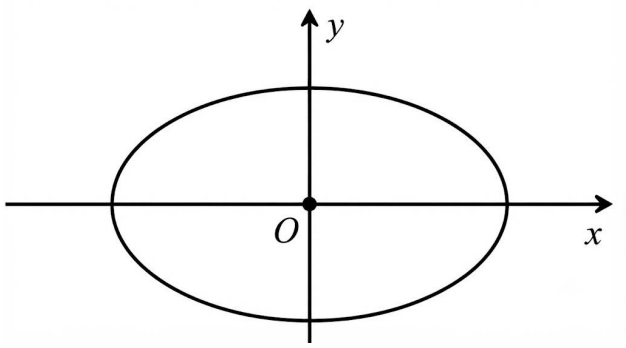
Biết rằng khi chọn hệ trục tọa độ Oxy với đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là $10\,\text{m}$, các đường cong AB, CD là mép đường được cho bởi đồ thị hàm số $f(x)=\frac{1}{32}x^3-\frac{3}{8}x+\frac{3}{2}$ và $g(x)=\frac{1}{32}x^3-\frac{5}{8}x+\frac{1}{2}$, đồng thời lớp bê tông được đổ dày $16\,\text{cm}$ và giá tiền 1m^3 bê tông là 1080000 đồng. Tính số tiền (đơn vị triệu đồng) cần dùng để đổ bê tông con đường đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bài 3. Bác Công đổ bê tông một đường đi trong vườn (phần được tô màu) với kích thước được cho trong hình sau. Biết rằng đường cong AB được cho bởi đồ thị của một hàm số liên tục và đường cong DC nhận được từ đường cong AB bằng cách tịnh tiến theo phương thẳng đứng lên phía trên 2 m. Ngoài ra, Bác Công quyết định đổ lớp bê tông dày 15 cm và giá tiền 1 m^3 bê tông là 1 080 000 đồng. Tính số tiền Bác Công cần dùng để đổ bê tông con đường đó.

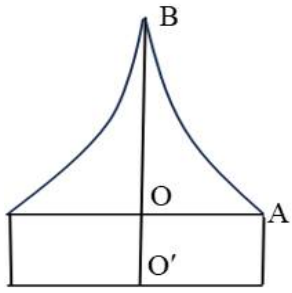


Bài 4. Bổ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn 28cm, trục nhỏ 25cm. Biết cứ 1000cm^3 dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20000 đồng. Hỏi từ quả dưa hấu trên có thể thu được bao nhiêu triệu đồng từ việc bán nước sinh tố? Biết rằng bề dày vỏ dưa không đáng kể và kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ hai của triệu đồng.

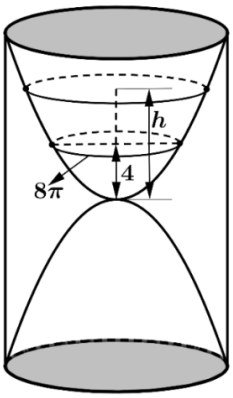




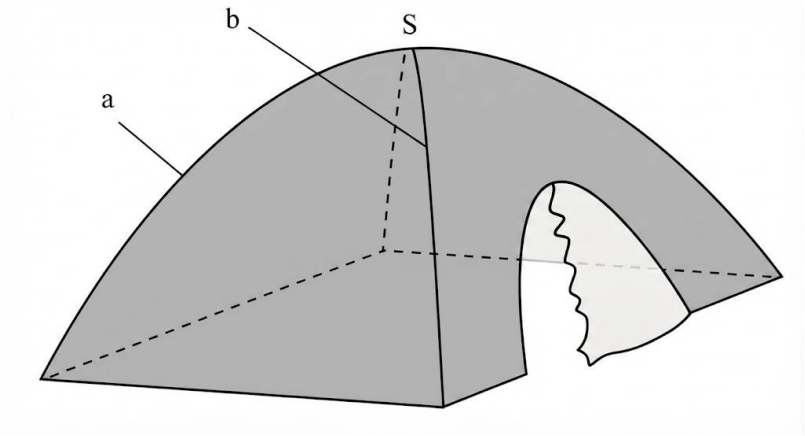
Bài 5. Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, nhóm bạn Lan đã làm một chiếc mũ "cách điệu" cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO'=6cm$, $OA=10cm$, $OB=20cm$, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm B. Tính thể tích của chiếc mũ (làm tròn đến hàng đơn vị của centimet khối).



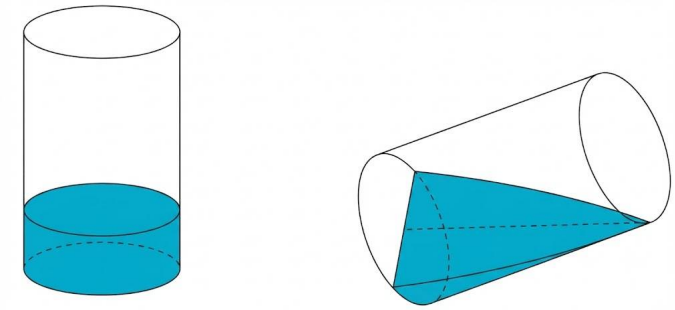
Bài 6. Một chiếc đồng hồ cát như hình vẽ gồm hai phần đối xứng nhau qua mặt phẳng nằm ngang và đặt trong một hình trụ. Thiết diện thẳng đứng qua trục của nó là hai parabol chung đỉnh và đối xứng nhau qua mặt phẳng nằm ngang. Ban đầu lượng cát dồn hết ở phần trên của đồng hồ thì chiều cao của mực cát bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của bên đó (xem hình vẽ). Cát chảy từ trên xuống dưới với tốc độ $v(t)=0,2t+13$ (cm^3/phút). Khi chiều cao của cát còn 4cm thì bề mặt trên cùng của cát tạo thành một đường tròn có chu vi bằng 8π cm. Biết sau 20 phút thì cát chảy hết xuống phần bên dưới của đồng hồ. Hỏi chiều cao của khối trụ bên ngoài bằng bao nhiêu centimet? (*Nếu kết quả là số thập phân thì làm tròn đến hàng đơn vị*).



Bài 7. Một chiếc lều vải du lịch dạng hình cong như hình vẽ. Khung chính bao gồm đáy là hình vuông cạnh 2 m và hai xương dây a,b nằm trên các đường parabol đỉnh S. Biết chiều cao của lều là $SO=1,35m$, và O là tâm của đáy. Tính thể tích chiếc lều theo đơn vị m^3.



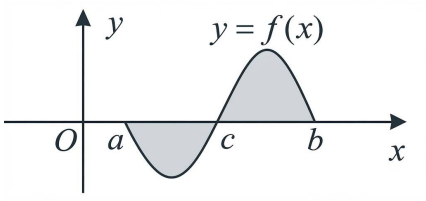
Bài 8. Một cốc thủy tinh có dạng hình trụ đang đựng một lượng nước, bán kính trong lòng đáy cốc là 8 cm, chiều cao trong lòng cốc là 10 cm. Tính thể tích lượng nước trong cốc (*đơn vị* cm^3), biết khi nghiêng cố nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì ở đáy cốc mực nước trùng với đường kính của đáy cốc (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



PHẦN B
TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP GỒM BA PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x=a, x=b$ (phần tô đậm hình vẽ bên dưới) được tính theo công thức nào dưới đây?



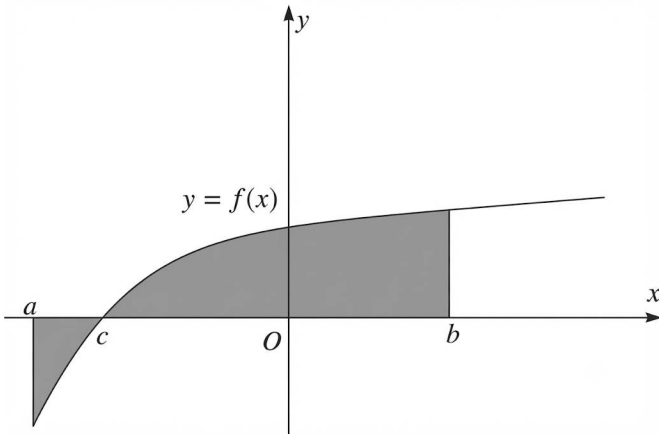
A. $S=\int_a^b f(x)dx$.

B. $S=\left|\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx\right|$.

C. $S=-\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

D. $S=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi S là diện tích phần hình phẳng được tô đậm như hình vẽ bên dưới.



Khi đó, biểu thức tính diện tích S là biểu thức nào dưới đây?

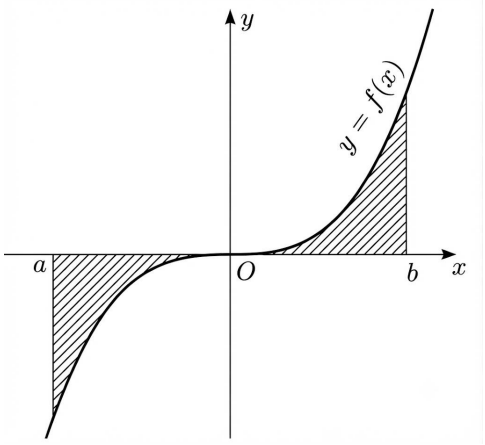
A. $S=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int_c^a f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S=\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi S là diện tích phần hình phẳng được gạch chéo như hình vẽ bên dưới.



Khi đó, biểu thức tính diện tích S là biểu thức nào dưới đây?

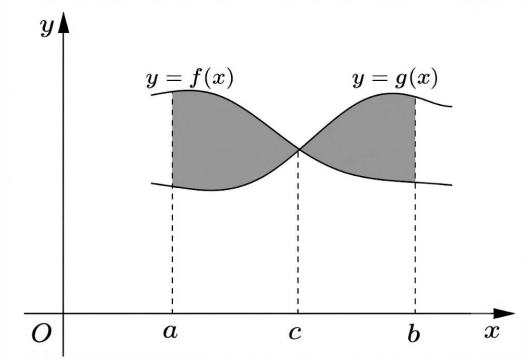
A. $S=\int\limits_{a}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{b} f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=-\int\limits_{a}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{b} f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int\limits_{a}^{0} f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{b} f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S=-\int\limits_{a}^{0} f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{b} f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 4. Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi S là diện tích phần hình phẳng được tô đậm như hình vẽ bên dưới.



Khi đó, biểu thức tính diện tích S là biểu thức nào dưới đây?

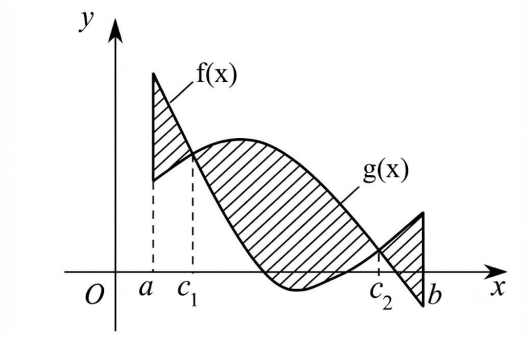
A. $S=\int\limits_{a}^{c}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{c}^{b}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$.

B. $S=\left|\int\limits_{a}^{b}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x\right|$.

C. $S=\int\limits_{a}^{c}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{c}^{b}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$.

D. $S=\int\limits_{a}^{c}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x-\int\limits_{c}^{b}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$.

Câu 5. Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi S là diện tích phần hình phẳng được gạch chéo như hình vẽ bên dưới.



Khi đó, biểu thức tính diện tích S là biểu thức nào dưới đây?

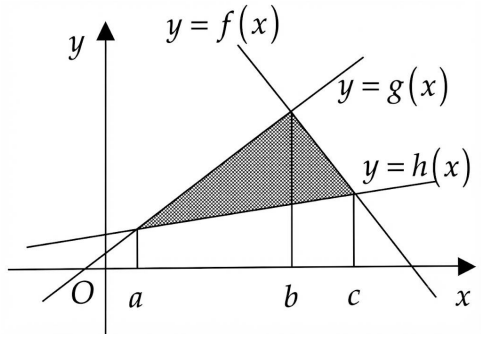
A. $S=\int\limits_{a}^{c_1}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x-\int\limits_{c_1}^{c_2}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{c_2}^{b}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$.

B. $S=\int\limits_{a}^{c_1}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{c_1}^{c_2}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{c_2}^{b}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$.

C. $S=\left|\int\limits_{a}^{b}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x\right|$.

D. $S=\int\limits_{a}^{c_1}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{c_1}^{c_2}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{c_2}^{b}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$.

Câu 6. Cho ba hàm số $y=f(x), y=g(x), y=h(x)$ liên tục trên đoạn $[a;c]$. Gọi S là diện tích phần hình phẳng được tô đậm như hình vẽ bên dưới.



Khi đó, biểu thức tính diện tích S là biểu thức nào dưới đây?

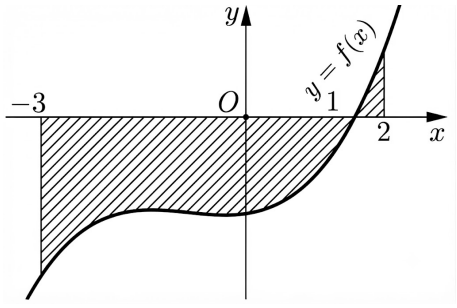
A. $S=\int\limits_{a}^{c}\left[f(x)+g(x)+h(x)\right]\mathrm{d}x$.

B. $S=\int\limits_{a}^{b}\left[g(x)-h(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{b}^{c}\left[f(x)-h(x)\right]\mathrm{d}x$.

C. $S=\int\limits_{a}^{b}\left[f(x)-h(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{b}^{c}\left[g(x)-h(x)\right]\mathrm{d}x$.

D. $S=\int\limits_{a}^{b}\left[g(x)+h(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{b}^{c}\left[f(x)+h(x)\right]\mathrm{d}x$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích phần hình phẳng được gạch chéo như hình vẽ bên dưới.



Mệnh đề nào sau đây sai?

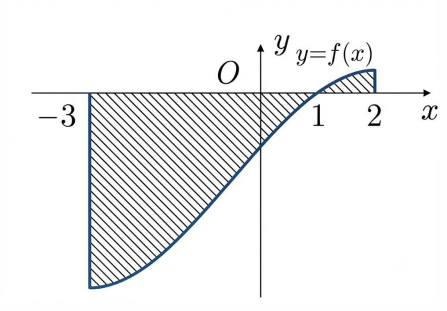
A. $S=-\int\limits_{-3}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int\limits_{1}^{-3}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int\limits_{1}^{-3}f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{2}^{1}f(x)\mathrm{d}x$.

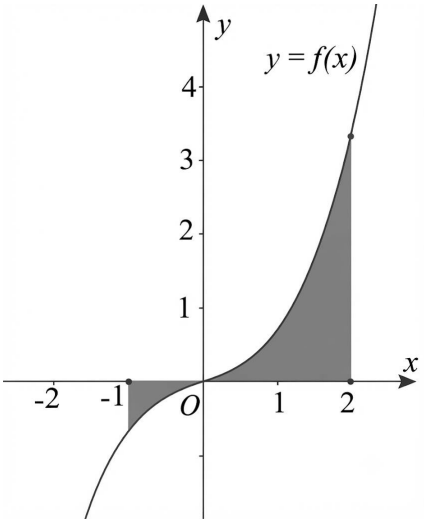
D. $S=\int\limits_{-3}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 8. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-3$, $x=2$ (như hình vẽ bên). Đặt $a=\int\limits_{-3}^{1} f(x)\mathrm{d}x$, $b=\int\limits_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng.



A. $S=a+b$. **B.** $S=a-b$. **C.** $S=-a-b$. **D.** $S=b-a$.

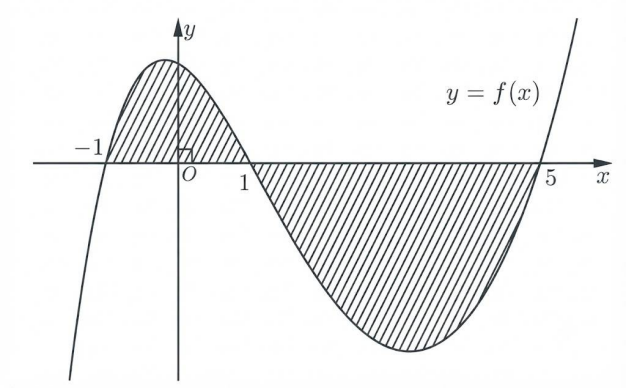
Câu 9. Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1$, $x=2$ (phần tô đậm như hình vẽ).



Đặt $a=\int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x, b=\int\limits_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x$, khi đó mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S=b-a$ **B.** $S=b+a$ **C.** $S=-b+a$ **D.** $S=-b-a$

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích phần hình phẳng được gạch chéo như hình vẽ bên dưới.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

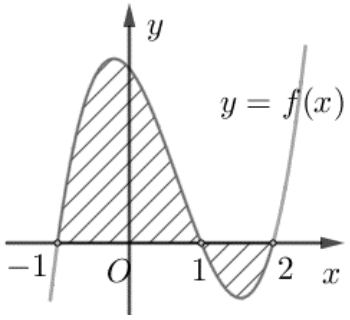
A. $S=-\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S=-\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích phần hình phẳng được gạch chéo như hình vẽ bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

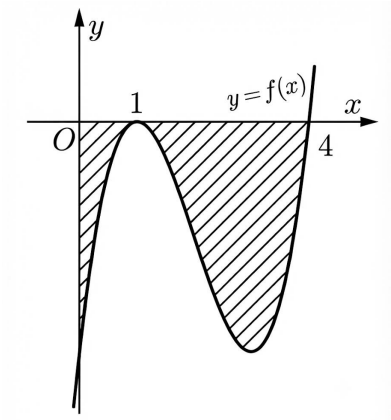
A. $S=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S=-\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S=-\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $S=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích phần hình phẳng được gạch chéo như hình vẽ bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

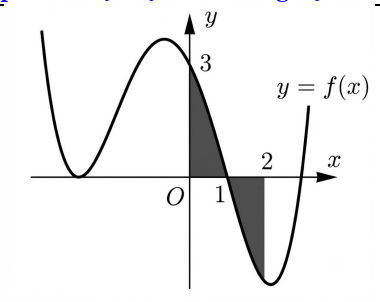
A. $S=\int\limits_{4}^{0} f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S=-\int\limits_{4}^{0} f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích phần hình phẳng được tô đậm như hình vẽ bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

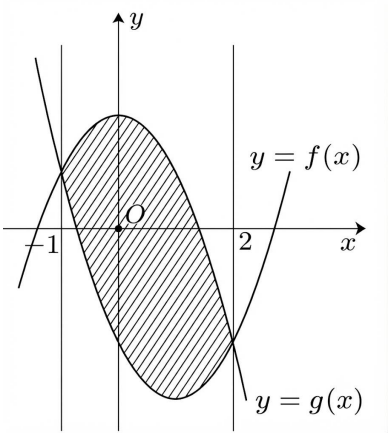
A. $S=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S=-\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S=-\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $S=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 14. Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích phần hình phẳng được gạch chéo như hình vẽ bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

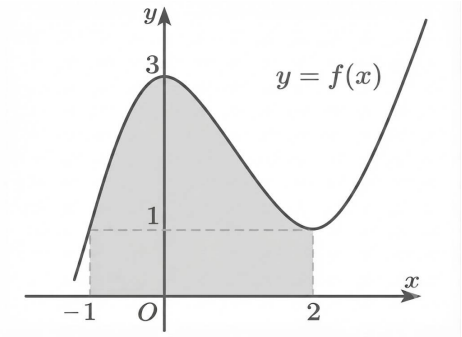
A. $S=\int\limits_{-1}^{2}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$.

B. $S=\int\limits_{-1}^{2}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$.

C. $S=\int\limits_{-1}^{2}\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$.

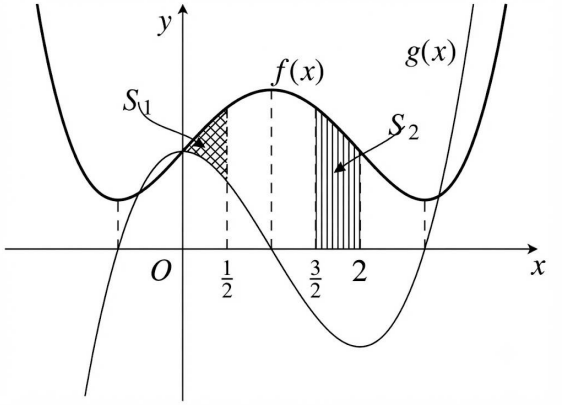
D. $S=\int\limits_{-1}^{2} f(x).g(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Diện tích phần hình phẳng tô đậm trong hình vẽ được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $S=3+\int\limits_{-1}^{2} f(x)dx$ **B.** $S=\int\limits_{-1}^{2} f(x)dx$ **C.** $S=2+\int\limits_{-1}^{2} f(x)dx$ **D.** $S=-\int\limits_{-1}^{2} f(x)dx$

Câu 16. Cho hai hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi S_1, S_2 là diện tích hai phần hình phẳng được gạch chéo như hình vẽ bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây sai?

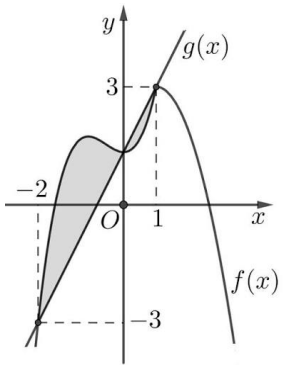
A. $S_1=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$.

B. $S_2=\int\limits_{\frac{3}{2}}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S_1=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$.

D. $S_2=\int\limits_{\frac{3}{2}}^{2}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x$.

Câu 17. Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích phần hình phẳng được tô đậm như hình vẽ bên dưới. Biết $y=g(x)$ là một hàm bậc nhất và $y=f(x)$ có đồ thị hình cong.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

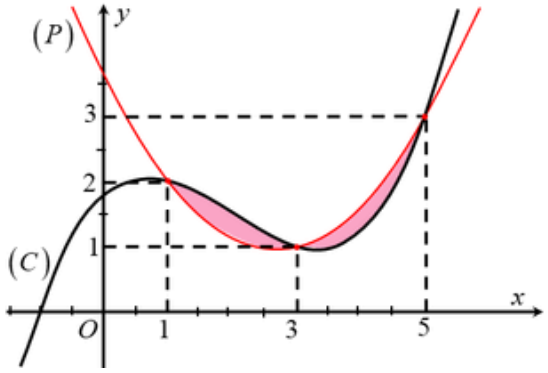
A. $S=\int\limits_{-2}^{0}\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$.

B. $S=\int\limits_{-2}^{0}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$.

C. $S=\int\limits_{-2}^{0}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}\left[g(x)+f(x)\right]\mathrm{d}x$.

D. $S=\int\limits_{-2}^{0}\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}\left[g(x)+f(x)\right]\mathrm{d}x$.

Câu 18. Cho hai hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị lần lượt là (C), (P) như hình vẽ.



Gọi S là diện tích phần hình phẳng được tô đậm. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

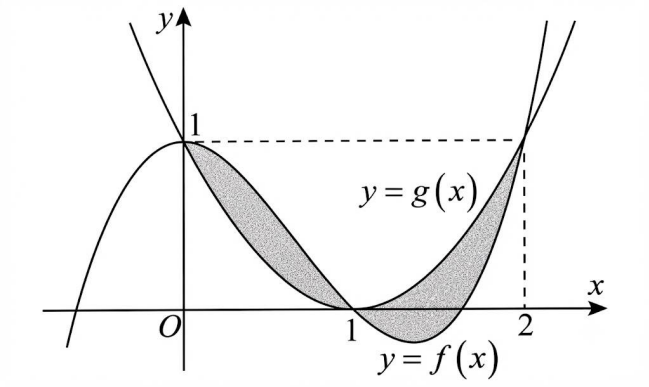
A. $S=\int_{1}^{3}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int_{3}^{5}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$.

B. $S=\int_{1}^{5}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$.

C. $S=\int_{1}^{3}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int_{5}^{3}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$.

D. $S=\int_{1}^{3}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int_{5}^{3}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$.

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc ba, $y=g(x)$ là hàm đa thức bậc hai và có đồ thị như vẽ bên dưới.



Gọi S là diện tích phần hình phẳng được tô đậm. Mệnh đề nào dưới đây sai?

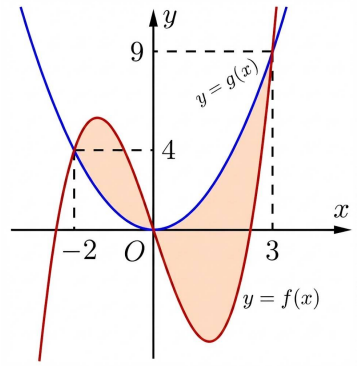
A. $S=\int_{0}^{2}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x$.

B. $S=\int_{0}^{1}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$.

C. $S=\int_{0}^{1}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$.

D. $S=\int_{0}^{1}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int_{2}^{1}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$.

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc ba, $y=g(x)$ là hàm đa thức bậc hai và có đồ thị như vẽ bên dưới.



Gọi S là diện tích phần hình phẳng được tô đậm. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

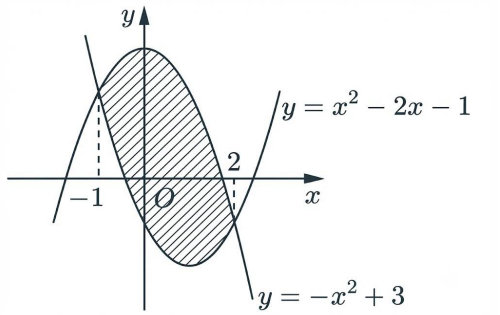
A. $\int_{-2}^{0}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int_{0}^{3}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$.

B. $\int_{-2}^{0}\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x+\int_{0}^{3}\left[g(x)+f(x)\right]\mathrm{d}x$.

C. $\int_{-2}^{0}\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x+\int_{0}^{3}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$.

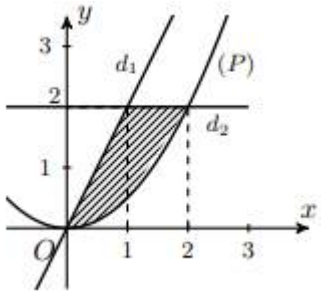
D. $\int_{-2}^{0}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int_{0}^{3}\left[g(x)+f(x)\right]\mathrm{d}x$.

Câu 21. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^{2}\left(-2x+2\right)dx$ **B.** $\int_{-1}^{2}\left(2x-2\right)dx$ **C.** $\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)dx$ **D.** $\int_{-1}^{2}\left(2x^2-2x-4\right)dx$

Câu 22. Diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $P:y=\frac{1}{2}x^2$, $d_1:y=2x$ và $d_2:y=2$ được gạch chéo như hình vẽ bên dưới. Diện tích S được tính theo công thức nào dưới đây?



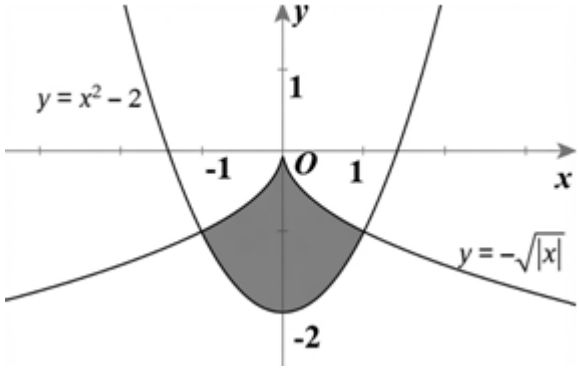
A. $S=\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{2}x^2-2x\right)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{2}x^2-2\right)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int_{0}^{2}\left(x+2-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int_0^1\left(2x-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x+\int_1^2\left(2-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x$.

D. $S=\int_0^2\left(\frac{1}{2}x^2-x-2\right)\mathrm{d}x$.

Câu 23. Diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-2$ và $y=\sqrt{|x|}$ được tô đậm như hình vẽ bên dưới. Diện tích S được tính theo công thức nào dưới đây?



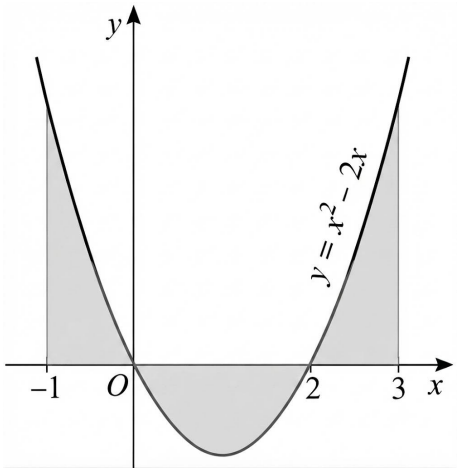
A. $S=\int_{-1}^1\left(x^2-2+\sqrt{|x|}\right)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int_{-1}^1\left(x^2-2-\sqrt{|x|}\right)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int_{-1}^1\left(-x^2+2+\sqrt{|x|}\right)\mathrm{d}x$.

D. $S=\int_{-1}^1\left(-x^2+2-\sqrt{|x|}\right)\mathrm{d}x$.

Câu 24. Tính diện tích S của hình phẳng được tô đậm như hình vẽ dưới đây.



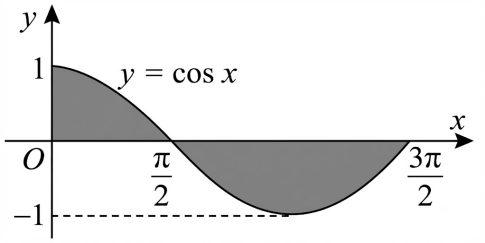
A. $S=\frac{7}{2}$.

B. $S=\frac{9}{2}$.

C. $S=5$.

D. $S=4$.

Câu 25. Tính diện tích S của hình phẳng được tô đậm như hình vẽ dưới đây.



A. $S=1$.

B. $S=2$.

C. $S=3$.

D. $S=4$.

Câu 26. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ và các đường thẳng $x=a, x=b$ bằng

A. $\left|\int_a^b [f(x)-g(x)]dx\right|$. **B.** $\int_a^b |f(x)+g(x)|dx$. **C.** $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$. **D.** $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$.

Câu 27. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=3^x$, $y=0, x=0, x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\int_0^2 3^x dx$. **B.** $S=\pi\int_0^2 3^{2x}dx$. **C.** $S=\pi\int_0^2 3^x dx$. **D.** $S=\int_0^2 3^{2x}dx$.

Câu 28. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(x-2)^2-1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=2$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Câu 29. Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+1, x=-1, x=2$ và trục hoành.

A. $S=6$. **B.** $S=16$. **C.** $S=\frac{13}{6}$. **D.** $S=13$.

Câu 30. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+5, y=6x, x=0, x=1$.

A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{7}{3}$ **C.** $\frac{8}{3}$ **D.** $\frac{5}{3}$

Câu 31. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=4x-x^2, y=2x$ và hai đường thẳng $x=1, x=e$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{20}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{16}{3}$

Câu 32. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-2x, y=0, x=-10, x=10$.

A. $S=\frac{2000}{3}$. **B.** $S=2008$. **C.** $S=2000$. **D.** $S=\frac{2008}{3}$.

Câu 33. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=\ln x, y=1$ và hai đường thẳng $x=1, x=e$ bằng

A. e^2. **B.** $e+2$. **C.** $2e$. **D.** $e-2$.

Câu 34. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=x^3+11x-6, y=6x^2$ và hai đường thẳng $x=0,\ x=2$ là

A. 2. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** 5. **D.** $\frac{5}{2}$.

Câu 35. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$ là

A. $\frac{1}{\ln 2}$ **B.** $\frac{3}{\ln 2}$ **C.** $\frac{\pi}{\ln 2}$ **D.** $\frac{3\pi}{\ln 2}$

Câu 36. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$ là:

A. e^2-1 **B.** e^2 **C.** e^2+1 **D.** $(e^2-1)\pi$

Câu 37. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sin x, Ox, x=0, x=\pi$. Diện tích của hình phẳng (H) bằng

A. 1. **B.** 2π. **C.** 2. **D.** π.

Câu 38. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2+2x$ và trục hoành bằng

A. $\frac{4\pi}{3}$. **B.** $\frac{3\pi}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 39. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=-x^2+x+6$ và $y=0$ bằng

A. $\frac{95\pi}{6}$. **B.** $\frac{95}{6}$. **C.** $\frac{125\pi}{6}$. **D.** $\frac{125}{6}$.

Câu 40. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2+2$ và đường thẳng $y=6$ bằng

A. $\frac{32}{3}$. **B.** $\frac{40}{3}$. **C.** $\frac{16}{3}$. **D.** $\frac{8}{3}$.

Câu 41. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2$ và $y=4x-3$ là

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** 2.

Câu 42. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=x^2$ và $y=8-x^2$ là

A. 14. **B.** 28. **C.** $\frac{64}{3}$. **D.** $\frac{64}{5}$.

Câu 43. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đường $y=x^2-1$ và $y=x-1$ bằng:

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{13}{6}$. **C.** $\frac{13\pi}{6}$. **D.** $\frac{\pi}{6}$.

Câu 44. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y=x^3-6x$ và $y=x^2$ bằng

A. $\frac{125}{12}$. **B.** $\frac{16}{3}$. **C.** $\frac{63}{4}$. **D.** $\frac{253}{12}$.

Câu 45. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-4x+3$, $y=0$ và $x=0$ bằng

A. $\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{16}{9}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{8}{3}$.

Câu 46. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=|\ln x|, y=1$ được tính bởi công thức:

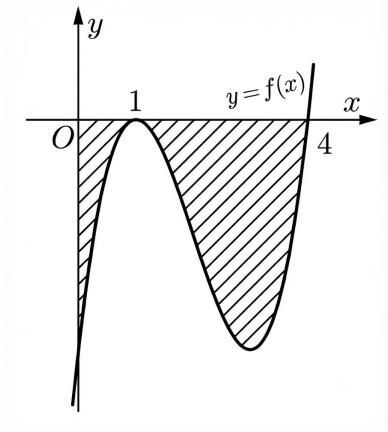
A. $S=\int_1^e \left|\left(|\ln x|-1\right)\right|\mathrm{d}x$ **B.** $S=\int_{\frac{1}{e}}^e \left(1-|\ln x|\right)\mathrm{d}x$

C. $S=\int_1^e \left|\left(1-|\ln x|\right)\right|\mathrm{d}x$ **D.** $S=\int_{\frac{1}{e}}^e \left(|\ln x|-1\right)\mathrm{d}x$

Câu 47. Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a, x=b(a<b)$, xung quanh trục Ox.

A. $V=\int\limits_a^b|f(x)|dx$ **B.** $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$ **C.** $V=\int\limits_a^b f^2(x)dx$ **D.** $V=\pi\int\limits_a^b f(x)dx$

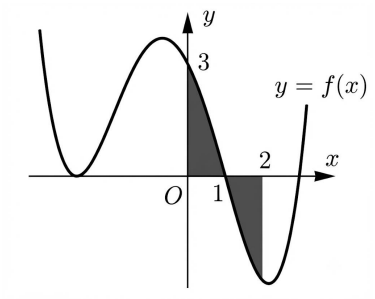
Câu 48. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hình (H) là hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ.



Thể tích khối tròn xoay tạo ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox được tính theo công thức nào sau đây?

A. $V=\pi\int\limits_0^4 f^2(x)\mathrm{d}x$. **B.** $V=\int\limits_0^4 f^2(x)\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $V=-\pi\int\limits_0^4 f^2(x)\mathrm{d}x$.

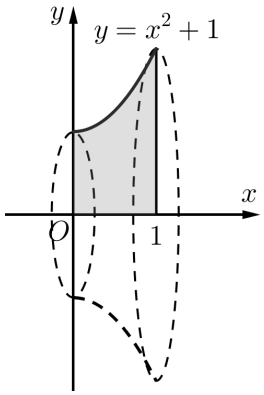
Câu 49. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hình (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ.



Thể tích khối tròn xoay tạo ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox được tính theo công thức nào sau đây?

A. $V=\pi\int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$. **B.** $V=\int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\int\limits_0^2 f^2(x)\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\int\limits_1^2 f^2(x)\mathrm{d}x$.

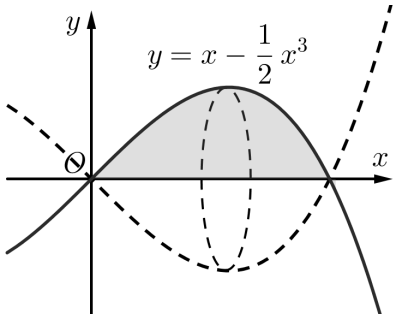
Câu 50. Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ.



Thể tích khối tròn xoay tạo ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox được tính theo công thức nào sau đây?

A. $V=\int\limits_0^1\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\int\limits_0^1\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x$. **C.** $V=\int\limits_0^1\left(x^2+1\right)^2\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\int\limits_0^1\left(x^2+1\right)^2\mathrm{d}x$.

Câu 51. Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ.

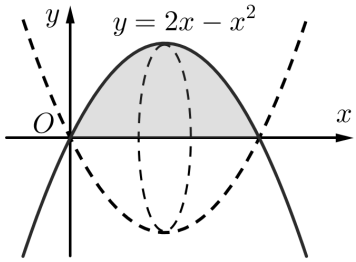


Thể tích khối tròn xoay tạo ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox được tính theo công thức nào sau đây?

A. $V=\int\limits_0^{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{2}x^3\right)^2\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{2}x^3\right)^2\mathrm{d}x$.

C. $V=\pi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{2}x^3\right)\mathrm{d}x$. **D.** $V=\int\limits_0^{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{2}x^3\right)\mathrm{d}x$.

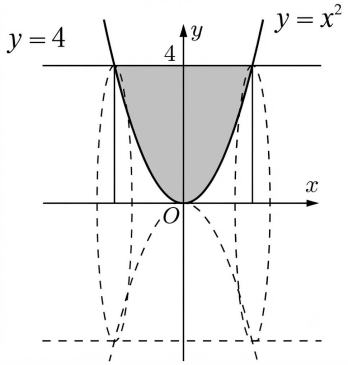
Câu 52. Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ.



Thể tích khối tròn xoay tạo ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng bao nhiêu?

A. $\frac{4\pi}{3}$. **B.** $\frac{13\pi}{15}$. **C.** $\frac{14\pi}{15}$. **D.** $\frac{16\pi}{15}$.

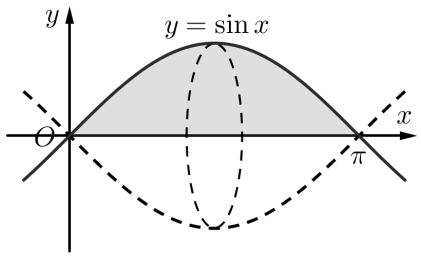
Câu 53. Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ.



Thể tích khối tròn xoay tạo ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng bao nhiêu?

A. $\frac{64\pi}{5}$. **B.** $\frac{128\pi}{5}$. **C.** $\frac{256\pi}{5}$. **D.** $\frac{152\pi}{5}$.

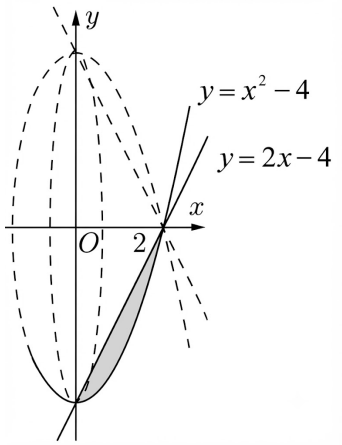
Câu 54. Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ.



Thể tích khối tròn xoay tạo ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng bao nhiêu?

A. $\frac{\pi^2}{4}$. **B.** $\frac{\pi^2}{2}$. **C.** $\frac{\pi}{2}$. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

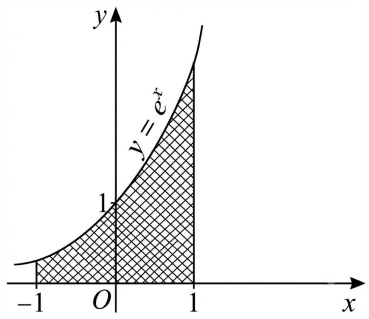
Câu 55. Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ.



Thể tích khối tròn xoay tạo ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng bao nhiêu?

A. $\frac{416\pi}{15}$. **B.** $\frac{752\pi}{5}$. **C.** $\frac{16\pi}{15}$. **D.** $\frac{32\pi}{5}$.

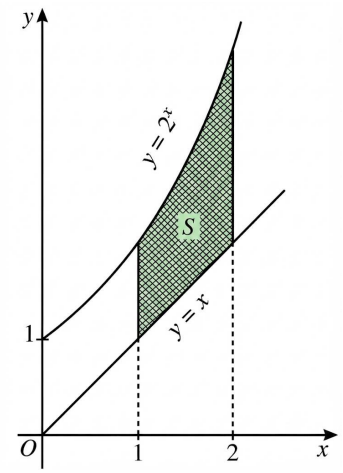
Câu 56. Cho (H) là hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ.



Thể tích khối tròn xoay tạo ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox được tính theo công thức nào sau đây?

A. $V = \pi \int_{-1}^{1} e^x \mathrm{d}x$. **B.** $V = \int_{-1}^{1} e^x \mathrm{d}x$. **C.** $V = \int_{-1}^{1} e^{2x} \mathrm{d}x$. **D.** $V = \pi \int_{-1}^{1} e^{2x} \mathrm{d}x$.

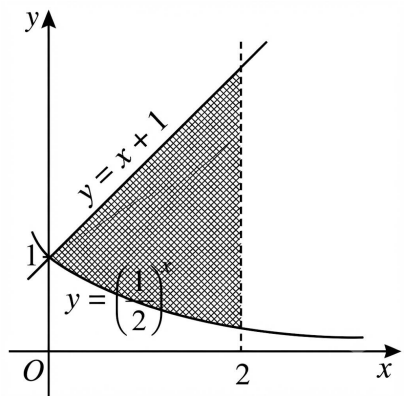
Câu 57. Cho (H) là hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ.



Thể tích khối tròn xoay tạo ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox được tính theo công thức nào sau đây?

A. $V=\pi\int\limits_{-1}^{1}\left(2^x-x\right)\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\int\limits_{-1}^{1}\left(2^x-x^2\right)\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\int\limits_{-1}^{1}\left(4^x-x^2\right)\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\int\limits_{-1}^{1}\left(4^x-x\right)\mathrm{d}x$.

Câu 58. Cho (H) là hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ.



Thể tích khối tròn xoay tạo ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox được tính theo công thức nào sau đây?

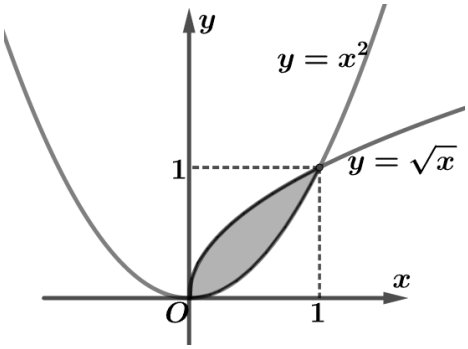
A. $V=\pi\int\limits_{-1}^{1}\left[x^2+2x-1-\left(\frac{1}{4}\right)^x\right]\mathrm{d}x$.

B. $V=\pi\int\limits_{-1}^{1}\left[x+1-\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]\mathrm{d}x$.

C. $V=\pi\int\limits_{-1}^{1}\left[x^2+2x-1-\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]\mathrm{d}x$.

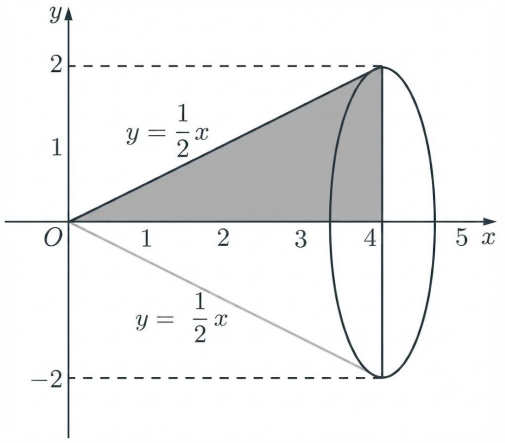
D. $V=\pi\int\limits_{-1}^{1}\left[x+1-\left(\frac{1}{4}\right)^x\right]\mathrm{d}x$.

Câu 59. Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2$ và đồ thị của hàm số $y=\sqrt{x}$ (tham khảo hình vẽ). Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục Ox bằng



A. $V=\dfrac{9\pi}{10}$. **B.** $V=\dfrac{3\pi}{10}$. **C.** $V=\dfrac{\pi}{10}$. **D.** $V=\dfrac{7\pi}{10}$.

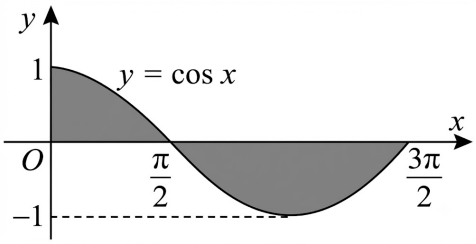
Câu 60. Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ.



Thể tích khối tròn xoay tạo ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng bao nhiêu?

A. $V=\dfrac{8\pi}{3}$. **B.** $V=\dfrac{16\pi}{3}$. **C.** $V=\dfrac{19\pi}{3}$. **D.** $V=\dfrac{64\pi}{3}$.

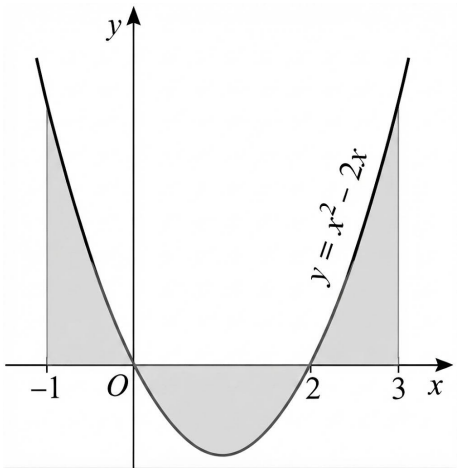
Câu 61. Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ.



Thể tích khối tròn xoay tạo ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng bao nhiêu?

A. $V=\dfrac{\pi-1}{2}$. **B.** $V=\dfrac{\pi^2}{2}$. **C.** $V=\dfrac{\pi}{2}$. **D.** $V=\dfrac{\pi^2-\pi}{2}$.

Câu 62. Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ.



Thể tích khối tròn xoay tạo ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng bao nhiêu?

A. $V=\dfrac{92}{15}$. **B.** $V=\dfrac{4}{3}$. **C.** $V=\dfrac{92\pi}{15}$. **D.** $V=\dfrac{4\pi}{3}$.

Câu 63. Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x=1$ và $x=2$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1\le x\le 2)$ cắt vật thể đó có diện tích $S(x)=2024x$. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên.

A. $V=3036$ **B.** $V=3036\pi$ **C.** $V=1518$ **D.** $V=1518\pi$

Câu 64. Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x=1$ và $x=3$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1\le x\le 3)$ cắt vật thể đó theo thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $3x^2-2$. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên.

A. $V=156$ **B.** $V=156\pi$ **C.** $V=312$ **D.** $V=312\pi$

Câu 65. Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0\le x\le 3)$ thì được thiết diện là một hình vuông có độ dài cạnh bằng $2\sqrt{9-x^2}$

A. 90 **B.** 72π **C.** 78π **D.** 72

Câu 66. Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0, x=1$, có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\left(0\le x\le 1\right)$ là một tam giác đều có cạnh bằng x.

A. $V=\dfrac{12\pi}{5}$. **B.** $V=\dfrac{12}{5}$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{12}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

Câu 67. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2+3$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\int_0^2\left(x^2+3\right)dx$ **B.** $V=\pi\int_0^2\left(x^2+3\right)dx$ **C.** $V=\int_0^2\left(x^2+3\right)^2dx$ **D.** $V=\pi\int_0^2\left(x^2+3\right)^2dx$

Câu 68. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=\dfrac{\pi\left(e^2+1\right)}{2}$ **B.** $V=\dfrac{e^2-1}{2}$ **C.** $V=\dfrac{\pi e^2}{3}$ **D.** $V=\dfrac{\pi\left(e^2-1\right)}{2}$

Câu 69. Cho hình phẳng D giới hạn với đường cong $y=\sqrt{x^2+1}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=2$ **B.** $V=\dfrac{4\pi}{3}$ **C.** $V=2\pi$ **D.** $V=\dfrac{4}{3}$

Câu 70. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=\dfrac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=(\pi+1)\pi$ **B.** $V=\pi-1$ **C.** $V=\pi+1$ **D.** $V=(\pi-1)\pi$

Câu 71. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=2\pi\left(\pi+1\right)$ **B.** $V=2\pi$ **C.** $V=2\left(\pi+1\right)$ **D.** $V=2\pi^2$

Câu 72. Tìm công thức tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y=x^2$, đường thẳng $d: y=2x$ và đường thẳng $x=0, x=2$ quay xung quanh trục Ox.

A. $\pi\int\limits_0^2\left(x^2-2x\right)^2dx$. **B.** $\pi\int\limits_0^2 4x^2dx-\pi\int\limits_0^2 x^4dx$. **C.** $\pi\int\limits_0^2 4x^2dx+\pi\int\limits_0^2 x^4dx$. **D.** $\pi\int\limits_0^2\left(2x-x^2\right)dx$

Câu 73. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2+3$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $V=\pi\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)^2\mathrm{d}x$. **B.** $V=\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)\mathrm{d}x$. **C.** $V=\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)^2\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)\mathrm{d}x$.

Câu 74. Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2-2x$, trục hoành, đường thẳng $x=0$ và $x=1$ quanh trục hoành bằng

A. $\dfrac{16\pi}{15}$. **B.** $\dfrac{2\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{4\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{8\pi}{15}$.

Câu 75. Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, trục Ox và hai đường thẳng $x=1; x=4$ khi quay quanh trục hoành được tính bởi công thức nào?

A. $V=\pi\int\limits_1^4 x\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi^2\int\limits_1^4 x\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\int\limits_1^4\sqrt{x}\mathrm{d}x$. **D.** $V=\int\limits_1^4\left|\sqrt{x}\right|\mathrm{d}x$.

Câu 76. Cho hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{x+2}$ và hai trục toạ độ. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng đó quanh trục Ox bằng

A. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **B.** 2. **C.** 2π. **D.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$.

Câu 77. Cho miền phẳng (D) giới hạn bởi $y=\sqrt{x}$, hai đường thẳng $x=1$, $x=2$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành.

A. 3π. **B.** $\frac{3\pi}{2}$. **C.** $\frac{2\pi}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 78. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}-2$, $y=0$ và $x=4, x=9$ quay xung quanh trục Ox. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành.

A. $V=\frac{7}{6}$. **B.** $V=\frac{5\pi}{6}$. **C.** $V=\frac{7\pi}{11}$. **D.** $V=\frac{11\pi}{6}$.

Câu 79. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y=x^2+2, y=0, x=1, x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\int_1^2\left(x^2+2\right)\mathrm{d}x$ **B.** $V=\pi\int_1^2\left(x^2+2\right)^2\mathrm{d}x$ **C.** $V=\int_1^2\left(x^2+2\right)^2\mathrm{d}x$ **D.** $V=\pi\int_1^2\left(x^2+2\right)\mathrm{d}x$

Câu 80. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^{3x}$, $y=0$, $x=0$ và $x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng:

A. $\pi\int_0^1\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$. **B.** $\int_0^1\mathrm{e}^{6x}\mathrm{d}x$. **C.** $\pi\int_0^1\mathrm{e}^{6x}\mathrm{d}x$. **D.** $\int_0^1\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$.

Câu 81. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^{4x}, y=0, x=0$ và $x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

A. $\int_0^1 e^{4x}\mathrm{d}x$. **B.** $\pi\int_0^1 e^{8x}\mathrm{d}x$. **C.** $\pi\int_0^1 e^{4x}\mathrm{d}x$. **D.** $\int_0^1 e^{8x}\mathrm{d}x$.

Câu 82. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=e^x$, các đường thẳng $x=0$, $x=\ln 3$ và trục hoành. Thể tích khối tròn xoay sinh bởi (H) khi quay quanh trục hoành là

A. 2π. **B.** 4π. **C.** 4. **D.** π.

Câu 83. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sin x$, trục Ox, trục Oy và đường thẳng $x=\frac{\pi}{2}$, xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\mathrm{d}x$ **B.** $V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x$ **C.** $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\mathrm{d}x$ **D.** $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x$

Câu 84. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=2x-x^2$, $y=0$. Quay (H) quanh trục hoành tạo thành khối tròn xoay có thể tích là

A. $\int_0^2 \left(2x-x^2\right)dx$ **B.** $\pi\int_0^2 \left(2x-x^2\right)^2 dx$ **C.** $\int_0^2 \left(2x-x^2\right)^2 dx$ **D.** $\pi\int_0^2 \left(2x-x^2\right)dx$

Câu 85. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-4x+3$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{16}{15}$. **B.** $\frac{16\pi}{15}$. **C.** $\frac{31\pi}{30}$. **D.** $\frac{31}{30}$.

Câu 86. Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x-1}$, trục hoành và $x=5$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi D quay quanh Ox bằng

A. $\frac{15\pi}{2}$. **B.** $\frac{15}{2}$. **C.** 8π. **D.** 8.

Câu 87. Thể tích vất thể tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-4x+3$ và trục hoành quay quanh Ox là

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{16}{15}$. **C.** $\frac{4\pi}{3}$. **D.** $\frac{16\pi}{15}$.

Câu 88. Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=-x^2+3x$ và $y=0$ xung quanh trục Ox.

A. $\frac{5\pi}{2}$. **B.** $\frac{27\pi}{10}$. **C.** $\frac{81\pi}{10}$. **D.** $\frac{9\pi}{2}$.

Câu 89. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị $(P): y=2x-x^2$ và trục Ox. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi cho (H) quay quanh trục Ox.

A. $V=\frac{19\pi}{15}$. **B.** $V=\frac{13\pi}{15}$. **C.** $V=\frac{17\pi}{15}$. **D.** $V=\frac{16\pi}{15}$.

Câu 90. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-4x+3$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{16}{15}$. **B.** $\frac{16\pi}{15}$. **C.** $\frac{31\pi}{30}$. **D.** $\frac{31}{30}$.

Câu 91. Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bở đồ thị hàm số $y=f(x)=\sqrt{x}.e^{x^2}$, trục hoành, đường thẳng $x=1$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục hoành.

A. $V=\frac{1}{4}\pi\left(e^2-1\right)$. **B.** $V=\pi\left(e^2-1\right)$. **C.** $V=\frac{1}{4}\pi e^2-1$. **D.** $V=e^2-1$.

Câu 92. Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=4-x^2$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $V=\frac{512\pi}{15}$. **B.** $V=\frac{32}{3}$. **C.** $V=\frac{32\pi}{3}$. **D.** $V=\frac{512}{15}$.

Câu 93. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-x-2$ và trục hoành. Quay hình phẳng (H) quay quanh trục hoành, ta được một khối nón tròn xoay có thể tích bằng

A. $\frac{81}{10}\pi$. **B.** $\frac{81}{10}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{9\pi}{2}$.

Câu 94. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=\left|x^2-3x+2\right|$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{\pi^2}{30}$. **B.** $\frac{\pi}{6}$. **C.** $\frac{\pi}{30}$. **D.** $\frac{\pi^2}{6}$.

Câu 95. Tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$, trục hoành và đường thẳng $x=2$, khi quay xung quanh trục Ox bằng

A. $\frac{32\pi}{5}$. **B.** $\frac{\pi}{6}$. **C.** $\frac{5\pi}{6}$. **D.** $\frac{4\pi}{5}$.

Câu 96. Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) xác định bởi các đường $y=\frac{1}{3}x^3-x^2$ và $y=0$ quanh trục Ox là

A. $\frac{71\pi}{35}$. **B.** $\frac{81}{35}$. **C.** $\frac{71}{35}$. **D.** $\frac{81\pi}{35}$.

Câu 97. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=4-x^2$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{32\pi}{3}$. **B.** $\frac{512\pi}{15}$. **C.** $\frac{16\pi}{3}$. **D.** $\frac{256\pi}{15}$.

Câu 98. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-x$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{\pi}{3}$. **B.** $\frac{\pi}{15}$. **C.** $\frac{\pi}{30}$. **D.** $\frac{\pi}{5}$.

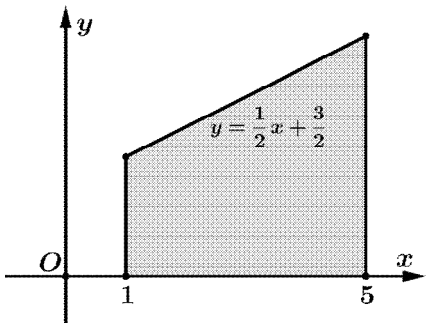
Câu 99. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-5x+4$ và trục Ox. Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình (H) quanh trục Ox.

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{81}{10}$. **C.** $\frac{81\pi}{10}$. **D.** $\frac{9\pi}{2}$.

Câu 100. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-2x$, $y=0$ và $x=3$ quay quanh trục Ox bằng

A. $\frac{18\pi}{5}$. **B.** $\frac{8\pi}{3}$. **C.** $\frac{18}{5}$. **D.** $\frac{8}{3}$.

Câu 101. Một khối gỗ khi cắt một bề mặt ta thu được thiết diện được cho bởi hình vẽ bên (đơn vị m^2). Diện tích của thiết diện đó bằng bao nhiêu m^2?



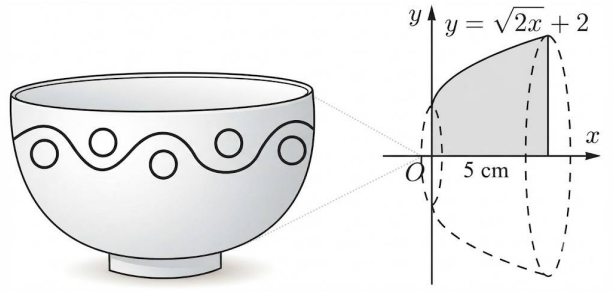
A. $6\left(m^2\right)$. **B.** $8\left(m^2\right)$. **C.** $10\left(m^2\right)$. **D.** $12\left(m^2\right)$.

Câu 102. Tính thể tích chứa được của một cái chậu inox to mà khách hàng đặt theo kích thước yêu cầu, biết phần trong của nó có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường $y=\sqrt{x}+1$, trục Ox và các đường thẳng $x=0, x=2$ quanh trục Ox, đơn vị trên trục là decimet (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của dm^3).



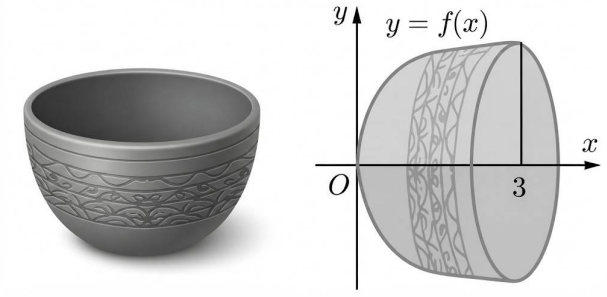
A. $30,2\left(dm^3\right)$. **B.** $14,8\left(dm^3\right)$. **C.** $24,4\left(dm^3\right)$. **D.** $28,6\left(dm^3\right)$.

Câu 103. Tính thể tích chứa được (dung tích) của một cái chén (bát), biết phần trong của nó có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đường $y=\sqrt{2x}+2$ và trục Ox (như hình vẽ), bát có độ sâu 5 cm, đơn vị trên trục là centimet (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của cm^3).



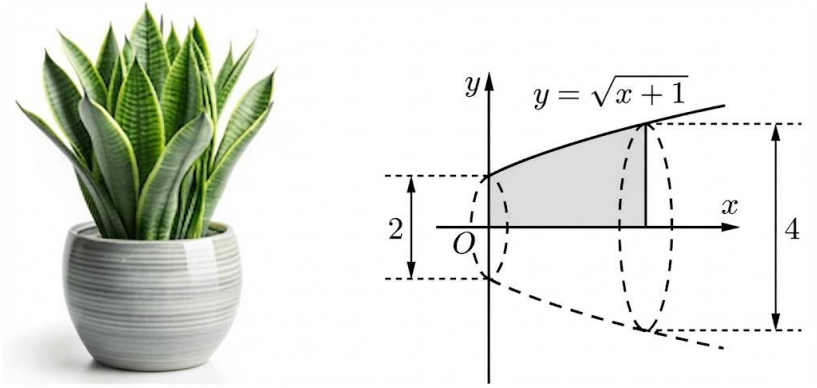
A. $90\left(cm^3\right)$. **B.** $274\left(cm^3\right)$. **C.** $180\left(cm^3\right)$. **D.** $324\left(cm^3\right)$.

Câu 104. Xét chiếc chén trong một bộ ấm chén uống trà, bạn Dương ước lượng được rằng chiếc chén được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)=0,14x^3-0,87x^2+1,92x+0,85$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0, x=3$ quay quanh trục Ox (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là centimét). Tính thể tích của chiếc chén (làm tròn đến phần chục của centimét khối).



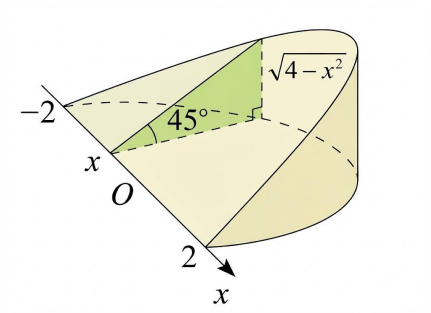
A. $1,39\left(cm^3\right)$. **B.** $13,4\left(cm^3\right)$. **C.** $41,9\left(cm^3\right)$. **D.** $45,8\left(cm^3\right)$.

Câu 105. Bác Hùng đặt người thợ gốm làm một cái chậu trồng cây, phần trong chậu cây có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng được tô đậm như hình sau quanh trục Ox (đơn vị trên trục là decimet), biết đường cong trong hình là đồ thị của hàm số $y=\sqrt{x+1}$, đáy chậu và miệng chậu có đường kính lần lượt là 2 dm và 4 dm. Dung tích của chậu là bao nhiêu dm^3 (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của dm^3)?



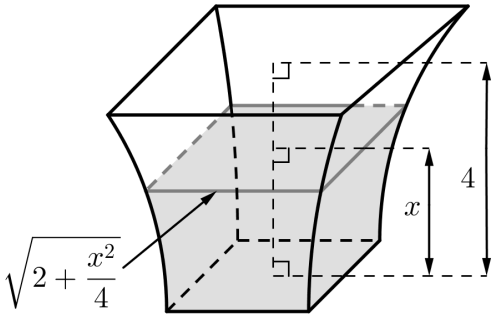
A. $7,5\left(\ dm^3\right)$. **B.** $14,1\left(\ dm^3\right)$. **C.** $23,6\left(\ dm^3\right)$. **D.** $25,2\left(\ dm^3\right)$.

Câu 106. Khi cắt một vật thể hình chiếc niêm bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(-2\le x\le 2)$, mặt cắt là tam giác vuông có một góc 45^0 và độ dài một cạnh góc vuông là $\sqrt{4-x^2}\ (dm)$ (như hình vẽ). Tính thể tích vật thể hình chiếc niêm trên.



A. $\frac{16\pi}{3}\left(dm^3\right)$. **B.** $\frac{16}{3}\left(dm^3\right)$. **C.** $\frac{8\pi}{3}\left(dm^3\right)$. **D.** $\frac{8}{3}\left(dm^3\right)$.

Câu 107. Một bình chứa nước có hình dạng như hình sau. Biết rằng khi nước trong bình có chiều cao x (dm) $(0\le x\le 4)$ thì mặt nước là hình vuông có cạnh $\sqrt{2+\frac{x^2}{4}}$ (dm). Tính dung tích của bình.



Lời giải

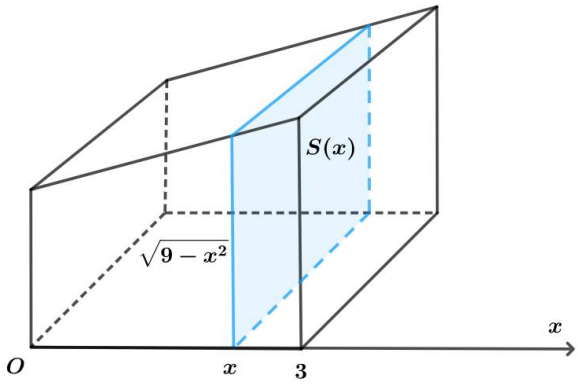
A. $\frac{20}{3}\left(dm^3\right)$. **B.** $\frac{20\pi}{3}\left(dm^3\right)$. **C.** $\frac{40}{3}\left(dm^3\right)$. **D.** $\frac{40\pi}{3}\left(dm^3\right)$.

Câu 108. Một chiếc đèn cói có hình như bên. Nếu cắt đèn bằng mặt phẳng song song với mặt đáy và cách mặt đáy một khoảng x $(0 \le x \le 4)$ thì được thiết diện là hình tròn có bán kính $\sqrt{4-x}$. Thể tích của chiếc đèn cói là bao nhiêu? .



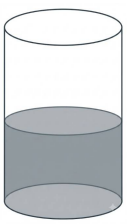
A. $25,1$. **B.** $78,8$. **C.** $39,4$. **D.** $30,2$.

Câu 109. Khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ là x $\left(0 \le x \le 3\right)$, ta được mặt cắt là một hình vuông có cạnh là $\sqrt{9-x^2}$. Tính thể tích của vật thể đã cho.



A. 9. **B.** 9π. **C.** 18. **D.** 18π.

Câu 110. Một cái lu đựng nước có dạng hình trụ như hình vẽ. Biết rằng khi lượng nước trong lu là x $\left(0 < x \le 9\right)$thì mặt nước là hình tròn có bán kính là $x\left(dm\right)$. Hãy tính dung tích của cái lu nước trên.



A. $243\pi^2\left(dm^3\right)$. **B.** $243\pi\left(dm^3\right)$. **C.** $243\left(dm^3\right)$. **D.** $262\pi^2\left(dm^3\right)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 111. Trong mặt phẳng Oxy, cho (H) là hình phẳng được giới hạn bởi các đồ thị hàm số sau: $y=e^{\frac{x}{2}}; y=0$ và $x=0; x=2$.

a) Đồ thị hàm số $y=e^{\frac{x}{2}}$ cắt trục hoành tại một điểm.

b) Đồ thị hàm số $y=e^{\frac{x}{2}}$ cắt trục tung tại một điểm.

c) Diện tích hình phẳng (H) bằng $a.e+b$, với $a,b\in\mathbb{Z}$. Khi đó $a-2b=2$.

d) Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng $\pi\left(e^m+n\right)$, với $m,n\in\mathbb{Z}$. Khi đó $m-2026n=2024$.

Câu 112. Trong mặt phẳng Oxy, cho (H) là hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)=x^2-2x$ và trục hoành

a) Đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm.

b) Đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục tung tại một điểm.

c) Diện tích hình phẳng (H) bằng $\frac{4}{5}$ (đơn vị diện tích).

d) Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng $\frac{16\pi}{5}$ (đơn vị thể tích).

Câu 113. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đồ thị hàm số $y=f(x)=x^2-4x+3$ và $y=g(x)=x-1$.

a) Đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại một điểm.

b) Hai đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cắt nhau tại hai điểm $(1;0);(4;3)$.

c) Diện tích hình phẳng giới hạn đồ thị hàm số $f(x)$ và trục Ox bằng $\frac{2}{3}$ (đơn vị diện tích).

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm $f(x)$ và $g(x)$ bằng $\frac{9}{2}$ (đơn vị diện tích).

Câu 114. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đồ thị hàm số $y=f(x)=x^3-3x$ và $y=g(x)=x$.

a) Đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm $\left(-\sqrt{3};0\right);\left(\sqrt{3};0\right)$.

b) Hai đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cắt nhau tại ba điểm $(0;0);(-2;2);(2;-2)$.

c) Diện tích hình phẳng giới hạn đồ thị hàm số $f(x)$ và trục Ox bằng $\frac{9}{2}$ (đơn vị diện tích).

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm $f(x)$ và $g(x)$ bằng $\frac{7}{2}$ (đơn vị diện tích).

Câu 115. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đồ thị hàm số $y=f(x)=x^3-x$ và $y=f(x)=2x^2-x$.

a) Đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm.

b) Hai đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cắt nhau tại ba điểm.

c) Diện tích hình phẳng giới hạn đồ thị hàm số $f(x)$ và đường thẳng $y=0$ bằng $\frac{3}{2}$ (đơn vị diện tích).

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm $f(x)$ và $g(x)$ bằng $\frac{4}{3}$ (đơn vị diện tích).

Câu 116. Trong mặt phẳng Oxy, cho hàm số $y=x+\sqrt{x}$ và $y=x+x^2$.

a) Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số trên là $x=0$ hoặc $x=-1$

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x=0$, $x=1$ được tính theo công thức $S=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)\mathrm{d}x$

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x=0$, $x=1$ được tính theo công thức $S=\int_0^1\left(x+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x-\int_0^1\left(x+x^2\right)\mathrm{d}x$

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x=0$, $x=1$ bằng $\frac{1}{3}$ (đơn vị diện tích)

Câu 117. Cho hàm số $y=x^3-3x+2$ có đồ thị là (C) và đường thẳng $y=-2x+8$ có đồ thị là (d) và các đường thẳng $x=1$, $x=3$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (d), trục hoành và đường thẳng $x=1$; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (d), trục hoành và đường thẳng $x=5$.

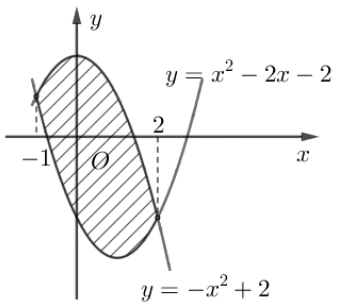
a) Số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng (d) là 1.

b) Hàm số $y=x^3-3x+2$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

c) $S_1=9S_2$.

d) Tính diện tích giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=x^3-3x+2$, $y=-2x+8$ và hai đường thẳng $x=1$, $x=3$ bằng $\frac{23}{3}$ (đơn vị diện tích).

Câu 118. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình phẳng (H) được gạch chéo trong hình bên dưới.



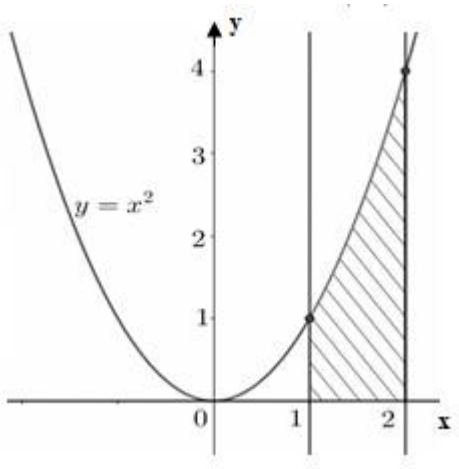
a) Hình phẳng (H) được giới hạn các đồ thị $y=x^2-2x-2$, $y=-x^2+2$, $x=-1, x=2$.

b) Diện tích hình phẳng (H) là $S=\int\limits_{-1}^{2}\left(2x^2-2x-4\right)dx$.

c) Diện tích hình phẳng (H) là $S=\int\limits_{-1}^{0}\left(-2x^2+2x+4\right)dx+\int\limits_{0}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)dx$.

d) Diện tích hình phẳng (H) bằng $\frac{9}{2}$ (đơn vị diện tích)

Câu 119. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình phẳng (H) được gạch chéo trong hình bên dưới.



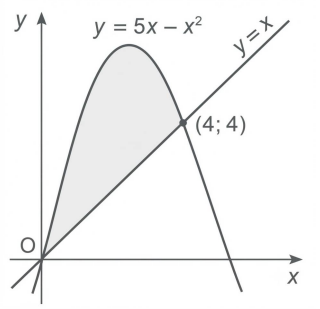
a) Đồ thị $y=x^2$ cắt đường thẳng $x=2$ tại điểm $(2;1)$.

b) Diện tích hình phẳng (H) được giới hạn các đồ thị $y=x^2; x=0; x=2$.

c) Diện tích hình phẳng (H) bằng $\frac{7}{3}$ (đơn vị diện tích).

d) Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng $\frac{31\pi}{5}$ (đơn vị thể tích).

Câu 120. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình phẳng (H) được tô đậm trong hình bên dưới.



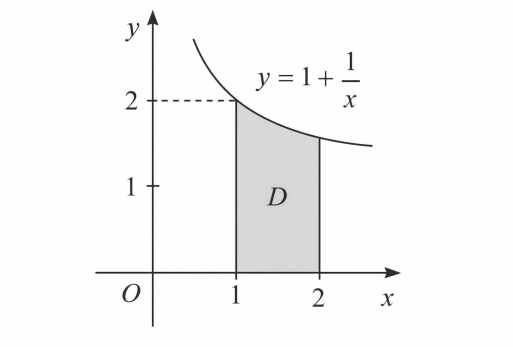
a) Đồ thị $y=5x-x^2$ cắt đường thẳng $y=x$ tại một điểm.

b) Hình phẳng (H) được giới hạn các đồ thị hàm số $y=5x-x^2; y=x; x=0; x=4$.

c) Diện tích hình phẳng (H) bằng $\frac{32}{3}$ (đơn vị diện tích).

d) Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng $\frac{512\pi}{15}$ (đơn vị thể tích).

Câu 121. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình phẳng (D) được tô đen trong hình bên dưới.



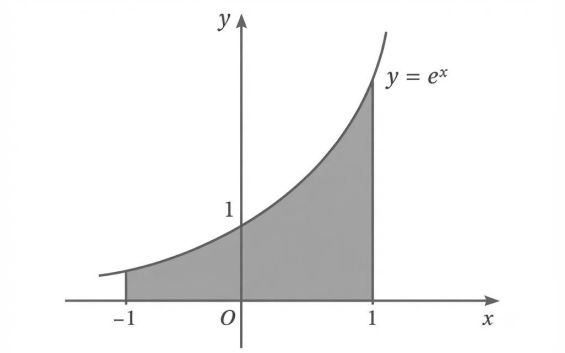
a) Đồ thị hàm số $y = 1 + \frac{1}{x}$ cắt trục tung tại điểm $(0;1)$.

b) Hình phẳng (D) được giới hạn các đồ thị hàm số $y = 1 + \frac{1}{x}; x = 0; x = 1; x = 2$.

c) Biết diện tích hình phẳng (D) bằng $m + n\ln 2$, với $m, n \in \mathbb{Z}$. Khi đó $2025m - 2024n = 1$.

d) Biết thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (D) quay quanh trục Ox bằng $\frac{a}{b}\pi + c\pi \ln 2$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Khi đó $a + 2b + 3c = 10$.

Câu 122. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình phẳng (H) được tô đậm trong hình bên dưới.



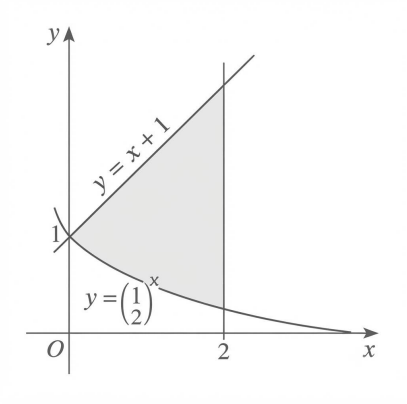
a) Đồ thị hàm số $y = e^x$ cắt đường thẳng $x = -1$ tại điểm $\left(-1; \frac{1}{e}\right)$.

b) Đồ thị hàm số $y = e^x$ cắt trục hoành tại điểm $(1;0)$.

c) Diện tích hình phẳng (H) là $\int_{-1}^{1} e^x dx$.

d) Biết thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng $\left(\frac{a.e^b - 1}{c.e^2}\right).\pi$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Khi đó $3a + 2b - c = 11$.

Câu 123. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình phẳng (H) được tô đậm trong hình bên dưới.



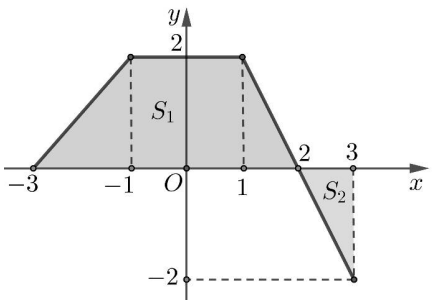
a) Hình phẳng (H) được giới hạn hai đồ thị $y=x+1; y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

b) Diện tích hình phẳng (H) là $S=\int_1^2\left(x+1-\frac{1}{2^x}\right)dx$.

c) Biết diện tích hình phẳng (H) bằng $a-\frac{b}{4\ln 2}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$. Khi đó $a+b=7$.

d) Biết thể tích khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng $\pi\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{2\ln 2}\right)$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Khi đó $a+b+c=44$.

Câu 124. Trong mặt phẳng Oxy, cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-3;3]$ có đồ thị như hình vẽ, Biết rằng $f(x)$ tạo với trục hoành và 2 đường thẳng $x=-3, x=3$ một hình phẳng (H) gồm 2 phần có diện tích lần lượt là S_1, S_2 (S_1 là phần tô đậm nằm trên trục hoành, S_2 là phần tô đậm nằm dưới trục hoành như hình vẽ)



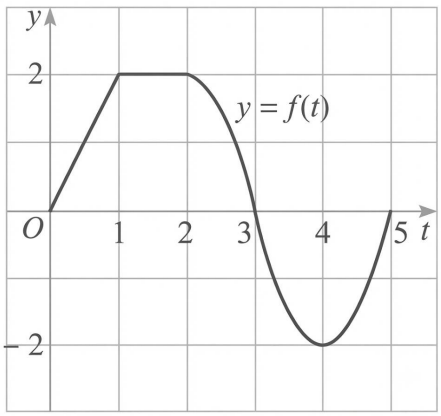
a) $S_2=\int_2^3(2x-4)\,dx$

b) $S_1=\int_{-3}^{-1}(x+3)\,dx+\int_{-1}^{1}2dx+\int_1^2(-2x+4)\,dx$

c) $S_{(H)}=S_1+\int_2^3(-2x+4)\,dx$

d) Giới hạn hình phẳng (H) có diện tích bằng 10 (đơn vị diện tích).

Câu 125. Trong mặt phẳng Oxy, cho đồ thị hàm số $y=f(t)$ như hình vẽ.



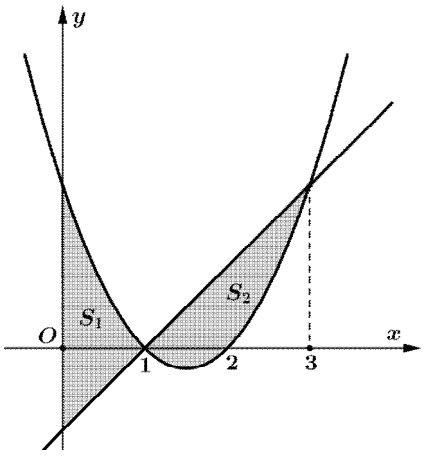
a) Diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số $y=f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t=0;t=1$ là $S=\frac{1}{2}\int_0^1 tdt$.

b) Diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số $y=f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t=1;t=2$ là $\int_1^2 2tdt$.

c) Tích phân $\int_2^3 f(x)dx$ biểu thị cho phần diện tích của hình phẳng giới hạn các đồ thị hàm số $y=f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng là: $t=2;t=3$.

d) Với $t\in[3;5]$ đồ thị hàm số $y=f(t)$ là một parabol có dạng: $y=f(t)=at^2+bt+c$. Khi đó, diện tích của hình phẳng giới hạn các đồ thị hàm số $y=f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t=3;t=5$ bằng $\frac{14}{9}$ (đơn vị diện tích).

Câu 126. Trong mặt phẳng Oxy, cho đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$ và $y=x-1$ và $S_1;S_2$ là phần diện tích được tô đậm như trong hình dưới.



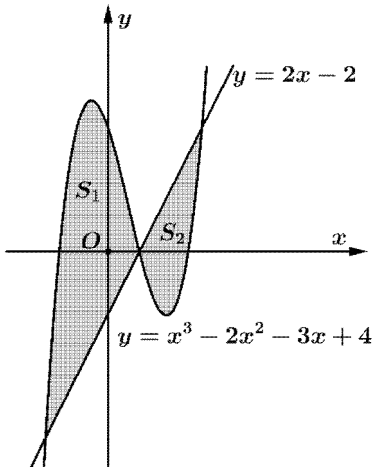
a) Đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$ cắt đường thẳng $y=x-1$ tại hai điểm $(1;0);(3;0)$.

b) $S_1 = \int_0^1 \left(-x^2 + 4x - 3\right)\mathrm{d}x$

c) $S_1 = S_2$

d) Diện tích hình phẳng được tô đậm của hình vẽ trên bằng $\frac{10}{3}$ (đơn vị diện tích).

Câu 127. Trong mặt phẳng Oxy, cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 3x + 4$ có đồ thị (C), đường thẳng $(d): y = 2x - 2$ và $S_1; S_2$ là phần diện tích phần được tô đậm như trong hình dưới.



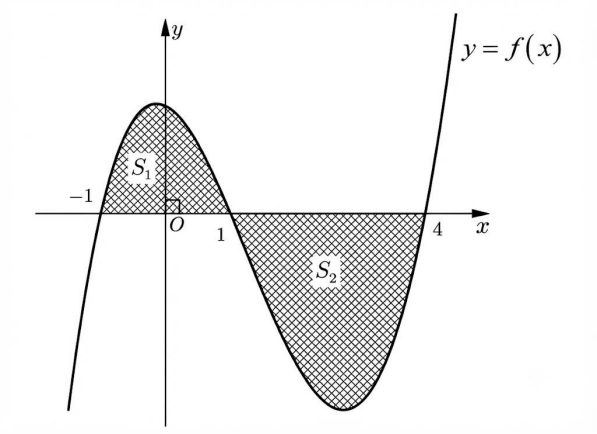
a) Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại ba điểm có toạ độ là $(-2;-6)$, $(1;0)$, $(3;4)$.

b) $S_1 = \int_{-2}^1 \left(-x^3 + 2x^2 + 5x - 6\right)dx$

c) $S_2 = \int_3^1 \left(x^3 - 2x^2 - 5x + 6\right)dx$

d) Diện tích hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ trên bằng $\frac{253}{12}$ (đơn vị diện tích).

Câu 128. Trong mặt phẳng Oxy, cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 2$ $(a,b,c \in \mathbb{R})$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S_1 là diện tích được tô đậm nằm trên trục hoành và S_2 là diện tích được tô đậm nằm phía dưới trục hoành như trong hình vẽ.



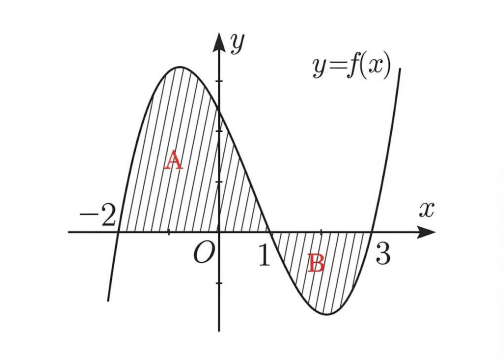
a) Đồ thị hàm số (C) cắt đường thẳng $y = 0$ tại ba điểm phân biệt.

b) $S_1 = -\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$

c) $S_2 = \int_{4}^{1} f(x)\mathrm{d}x$

d) Diện tích hình phẳng được tô đậm bằng $\frac{259}{24}$ (đơn vị diện tích).

Câu 129. Trong mặt phẳng Oxy, cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + \frac{5}{2}$ $(a,b,c \in \mathbb{R})$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi A là diện tích được gạch chéo nằm trên trục hoành và B là diện tích được gạch chéo nằm phía dưới trục hoành như trong hình vẽ.



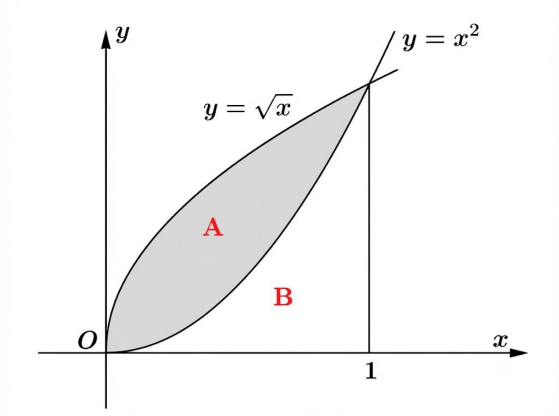
a) Đồ thị hàm số $f(x)$ cắt đường thẳng $y = 0$ tại một điểm phân biệt.

b) $A = \int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x$

c) $\int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x < \int_{3}^{1} f(x)\mathrm{d}x$

d) Diện tích hình phẳng được gạch chéo bằng $\frac{1265}{144}$ (đơn vị diện tích).

Câu 130. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai hàm số $y = f(x) = \sqrt{x}$, $y = g(x) = x^2$ và hai đường thẳng $x = 0, x = 1$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi A là phần diện tích được tô đậm và B là phần diện tích không tô đậm như trong hình dưới.



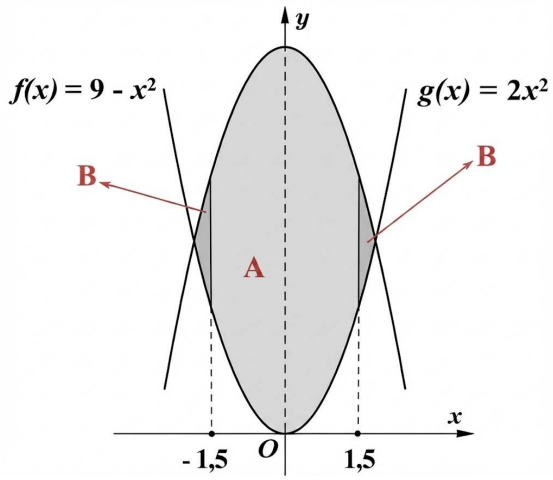
a) Hai đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cắt nhau tại một điểm.

b) $B=\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$

c) $A-B=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

d) $A=\dfrac{2}{3}$ (đơn vị diện tích).

Câu 131. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai hàm số $f(x)=9-x^2$, $g(x)=2x^2$ và hai đường thẳng $x=-1,5, x=1,5$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi A là phần diện tích được tô đậm và B là phần diện tích được tô đậm hơn như trong hình dưới.



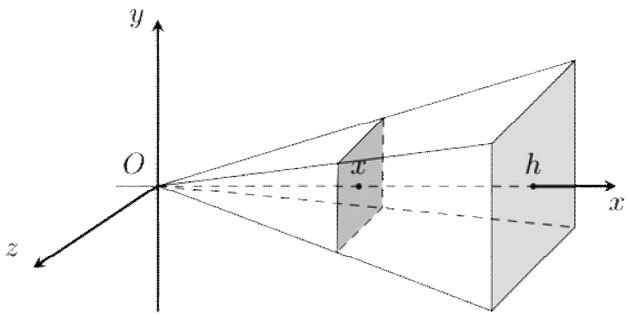
a) Hai đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cắt nhau tại hai điểm $(-3;9)$ và $(3;9)$.

b) $A=\int_{-1,5}^{1,5}\left(9-x^2\right)\mathrm{d}x$

c) $B=2\int_{1,5}^{\sqrt{3}}\left(9-x^2\right)\mathrm{d}x$

d) $A+B=12\sqrt{a}$ (đơn vị diện tích), với $a\in\mathbb{Z}$. Khi đó a là nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2-5\right)=2$

Câu 132. Cho khối chóp đều có đáy là hình vuông cạnh L và chiều cao là h. Chọn trục Ox sao cho gốc O trùng với đỉnh của khối chóp và trục đi qua tâm của đáy (như hình dưới).



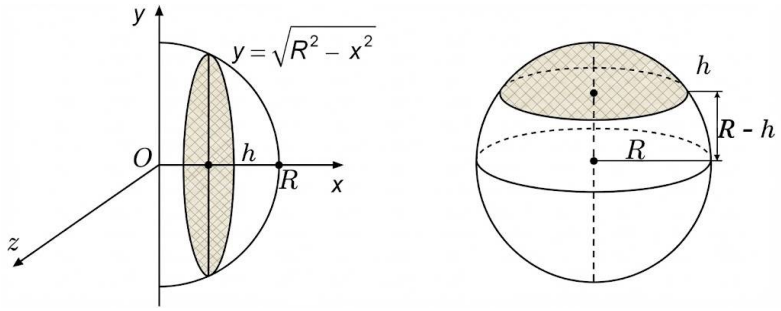
a) Đáy của khối chóp nằm trên mặt phẳng song song với Ox.

b) Mỗi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng $x\ (0\le x\le h)$, cắt khối chóp theo mặt cắt là hình vuông cạnh a.

c) Diện tích mặt cắt là $S(x)=\dfrac{L}{h}x^2$.

d) Thể tích của khối chóp là $V=\dfrac{1}{3}L^2h$.

Câu 133. Khối chỏm cầu với bán kính $R=5$ và chiều cao $h=1$ có thể tích V và được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y=\sqrt{25-x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=4$, $x=5$ xung quanh trục Ox.



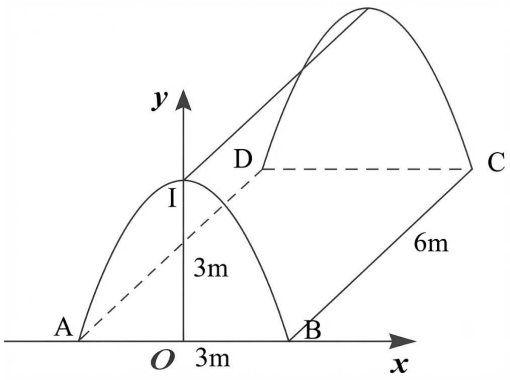
a) Khoảng cách từ tâm của khối cầu đến khối chỏm cầu bằng 3.

b) Thể tích của khối chỏm cầu V được tính theo công thức $V=\pi\int\limits_4^5\left(25-x^2\right)\mathrm{d}x$.

c) Thể tích của khối chỏm cầu $V=\dfrac{14\pi}{3}$.

d) Gọi V_1 là thể tích của nửa khối cầu có bán kính bằng 5. Tỉ số thể tích $\dfrac{V}{V_1}=\dfrac{7}{115}$.

Câu 134. Để kỷ niệm ngày $26-3-2024$, chi đoàn $12C_4$ Trường Nguyễn Văn Trỗi dự định dựng một lều trại dạng parabol, với kích thước: Nền trại là một hình chữ nhật $ABCD$ có chiều rộng AB là 3 mét, chiều sâu BC là 6 mét, mặt trước và sau có dạng parabol (P) đỉnh có đỉnh I cách mặt đất là 3 mét. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O là trung điểm của cạnh AB như hình vẽ



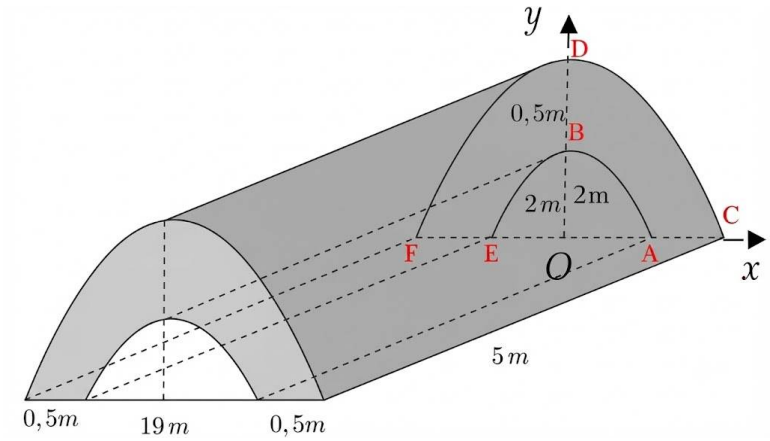
a) Đỉnh của parabol (P) là $I(0;3)$ và hai điểm A,B có tọa độ $A\left(-\dfrac{3}{2};0\right);B\left(\dfrac{3}{2};0\right)$.

b) Parabol (P) có phương trình là: $y=\dfrac{4}{3}x^2+3$

c) Diện tích mặt trước của lều trại bằng $3\left(m^2\right)$

d) Thể tích phần không gian phía bên trong trại của lớp $12C_4$ bằng $18\left(m^3\right)$.

Câu 135. Trong chương trình nông thôn mới của tỉnh Phú Yên, tại xã Hòa Mỹ có xây một cây cầu bằng bê tông có kích thước: $AC = EF = 0,5m; AE = 19m; OB = 2m, BD = 0,5m$, đường cong Parabol $\left(P_1\right)$ đi qua điểm A, B, E và đường cong Parabol $\left(P_2\right)$ đi qua điểm C, D, F như hình vẽ bên dưới. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O là trung điểm của cạnh AE như hình vẽ.



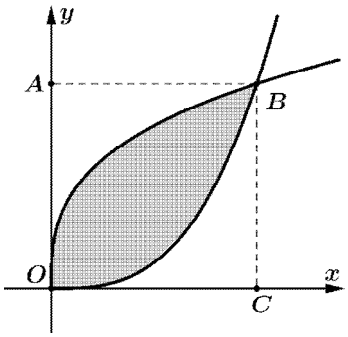
a) Parabol $\left(P_1\right)$ có phương trình là $y = -\frac{8}{361}x^2 + 2$.

b) Parabol $\left(P_2\right)$ có phương trình là $y = \frac{1}{40}x^2 - \frac{5}{2}$.

c) Diện tích được giới hạn bởi hai Parabol $\left(P_1\right)$ và $\left(P_2\right)$ là $8\left(\mathrm{m}^2\right)$

d) Biết $1\mathrm{m}^3$ khối bê tông để đổ cây cầu có giá 5 triệu đồng. Khi đó, Tỉnh Phú Yên cần bỏ 100 triệu đồng để xây cây cầu trên.

Câu 136. Cho một viên gạch men có dạng hình vuông $OABC$ như hình vẽ. Sau khi tọa độ hóa, ta có $O(0;0)$, $A(0;1)$, $B(1;1)$, $C(1;0)$ và hai đường cong lần lượt là đồ thị hàm số $y = x^3$ và $y = \sqrt[3]{x}$



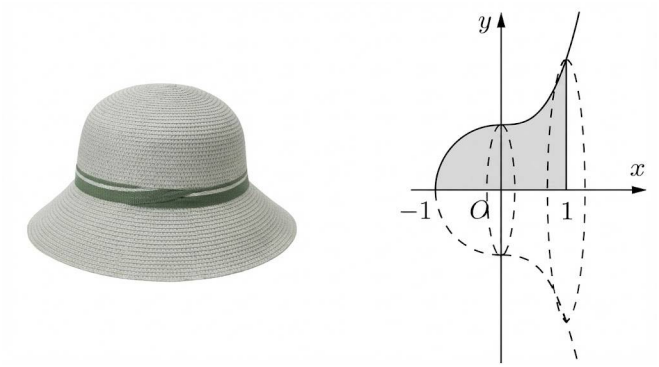
a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt[3]{x}$, trục Ox, đường thẳng $x = 0$ và đường thẳng $x = 1$ được tính bằng công thức $S = \int_0^1 |\sqrt[3]{x}|\mathrm{d}x$.

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$, trục Ox,đường thẳng $x = 0$ và đường thẳng $x = 1$ có giá trị bằng $\frac{1}{2}$ (đvdt).

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3$ và $y=\sqrt[3]{x}$, đường thẳng $x=0$ và đường thẳng $x=1$ được tính bằng công thức $S=\int_0^1\left(-x^3+\sqrt[3]{x}\right)\mathrm{d}x$.

d) Diện tích phần không được tô đậm trên viên gạch men có giá trị bằng $\frac{3}{4}$ (đvdt).

Câu 137. Giả sử chiếc nón rộng vành sau có thể mô hình hóa bằng cách cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\begin{cases}x^3+1 & \text{khi } 0<x\le 1\\ \sqrt{1-x^2} & \text{khi } -1\le x\le 0\end{cases}$, trục Ox và các đường thẳng $x=-1$ và $x=1$ quay quanh trục Ox (đơn vị trên trục là dm).



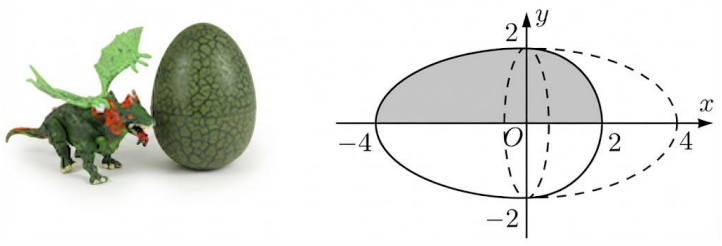
a) Diện tích hình phẳng (H) được tính theo công thức $S=\int_{-1}^{1}\left|\sqrt{1-x^2}+x^3+1\right|dx$.

b) Diện tích thiết diện qua trục đối xứng của khối tròn xoay trên là $\frac{\pi+5}{2}$ dm^2.

c) Công thức tính thể tích của chiếc nón trên là $V=\pi\int_0^{-1}\left(x^2-1\right)dx+\pi\int_0^1\left(x^6+2x^3+1\right)dx$.

d) Biết thể tích của chiếc nón bằng $\frac{a\pi}{b}$ với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó $a+b=139$.

Câu 138. Một cái trứng khủng long đồ chơi là một khối tròn xoay được tạo thành từ 2 mảnh ghép lại. Biết mảnh trên được tạo thành khi xoay một phần tư đường elip với trục lớn là 8 và trục nhỏ là 4 quanh trục Ox và mảnh dưới được tạo thành khi xoay một phần tư đường tròn bán kính 2 quanh trục Ox như hình sau (bỏ qua độ dày của vỏ trứng).



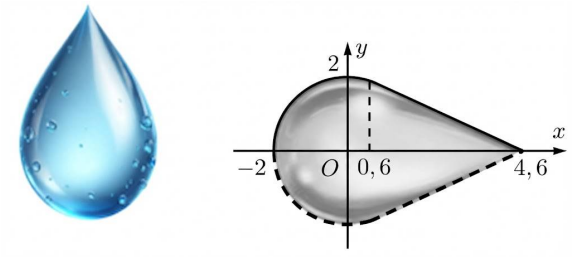
a) Thể tích phần trong của mảnh trên được tính bởi $V_1=\frac{1}{4}\int_{-4}^{0}\left(16-x^2\right)dx$.

b) Thể tích phần trong của mảnh trên gấp 2 lần thể tích phần trong của mảnh dưới.

c) Thể tích phần trong của quả trứng đồ chơi này là 16π.

d) Diện tích thiết diện khi cắt bởi mặt phẳng qua trục của quả trứng là 4π.

Câu 139. Người ta chế tác một giọt nước bằng thủy tinh. Biết giọt nước thủy tinh này là vật thể tròn xoay khi xoay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2} & (-2\le x\le 0,6)\\ -\dfrac{\sqrt{91}}{20}x+\dfrac{23\sqrt{91}}{100} & (0,6<x\le 4,6)\end{cases}$ và trục Ox quanh trục Ox (đơn vị trên trục là centimet).



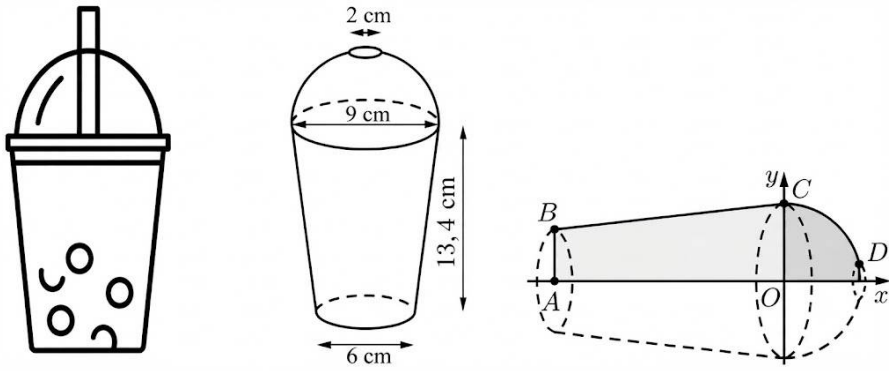
a) Hàm số $y=f(x)$ liên tục tại $x=0,6$.

b) Diện tích mặt cắt của giọt nước thủy tinh khi cắt bởi mặt phẳng qua trục được tính bởi công thức $S=\int_{-2}^{4,6} f(x)dx$ cm^2.

c) Thể tích của giọt nước thủy tinh này lớn hơn 41 cm^3.

d) Biết khối lượng riêng của thủy tinh là $\rho=2,6$ g/cm^3, khối lượng của giọt nước thủy tinh này là 102,22g (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của gam).

Câu 140. Một ly trà sữa dạng hình nón cụt, có đường kính đáy ly 6 cm, đường kính miệng ly 9 cm, chiều cao 13,4 cm, ở miệng ly có sử dụng một nắp đậy có hình dạng nửa mặt cầu và ở đỉnh của nửa mặt cầu này có một hình tròn có đường kính 2 cm để cắm ống hút, mặt phẳng chứa hình tròn này song song với mặt phẳng chứa miệng ly (tham khảo hình vẽ sau).



Chọn hệ trục Oxy (đơn vị trên trục là centimet) với trục Ox đi qua tâm của 2 đáy hình nón cụt và gốc tọa độ O trùng với tâm của đáy lớn như hình vẽ trên.

a) Phương trình đường thẳng BC là: $1,5x-13,4y+60,3=0$.

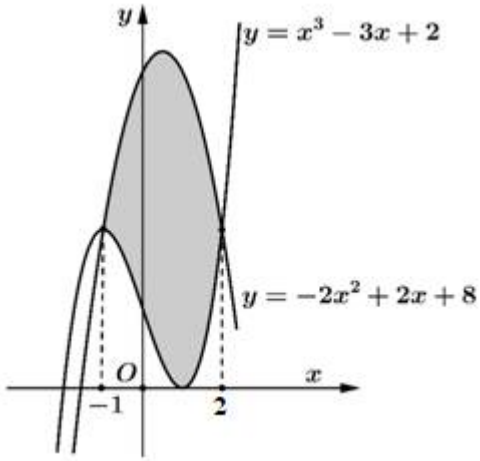
b) Tọa độ điểm D là $D\left(\dfrac{\sqrt{77}}{2};1\right)$.

c) Thể tích bên trong của ly không bao gồm nắp là 500 ml (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

d) Thể tích bên trong của ly bao gồm cả thể tích của nắp là 780 ml (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

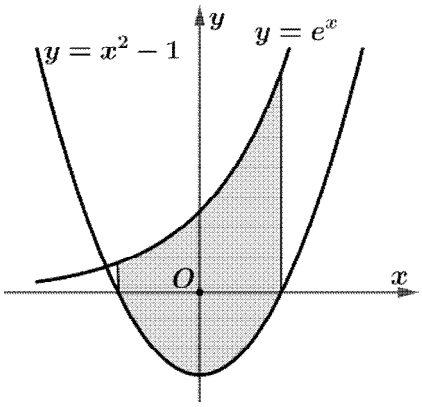
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 141. Diện tích hình phẳng phần tô đậm trong hình vẽ bên dưới bằng bao nhiêu ?(kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ nhất).



Trả lời: ……..

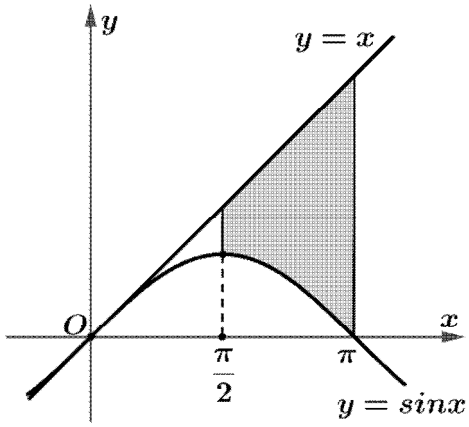
Câu 142. Hình phẳng (H) là phần tô đậm trong hình vẽ sau đây:



Biết diện tích hình phẳng (H) bằng $\dfrac{a.e^2+b.e+c}{3e}$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính $a+b+c$.

Trả lời: ……..

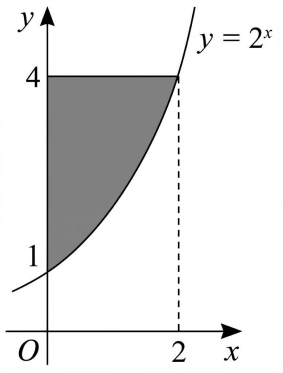
Câu 143. Hình phẳng (H) là phần tô đậm trong hình vẽ sau đây:



Biết diện tích hình phẳng (H) bằng $\dfrac{a.\pi^2}{b}+c$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$, và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b+c$.

Trả lời: ……..

Câu 144. Gọi S là diện tích của hình phẳng được tô đậm như hình vẽ dưới đây.

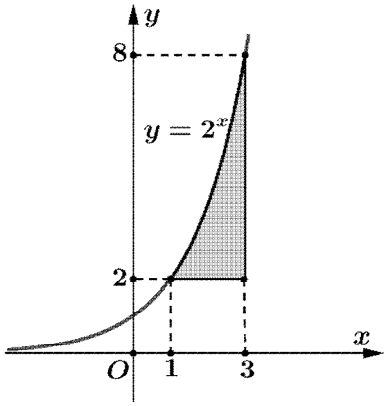


Biết $S=a-\dfrac{b}{c\ln 2}$, với $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản và $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính $a+b+c$.

A. $a+b+c=8$. **B.** $a+b+c=10$. **C.** $a+b+c=6$. **D.** $a+b+c=9$.

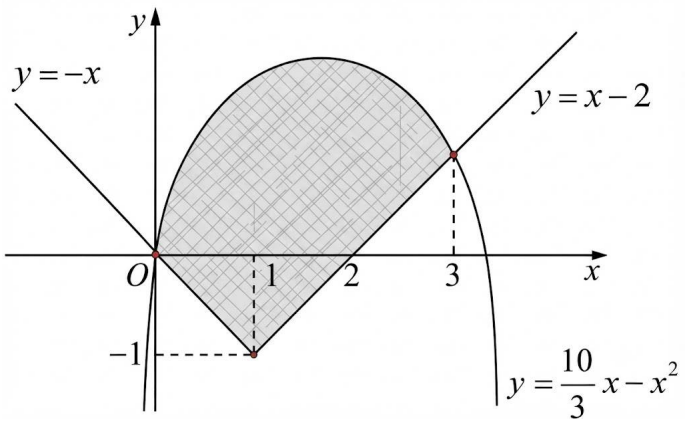
Câu 145. Biết diện tích phần hình phẳng tô đậm trong hình vẽ bên dưới bằng bằng $\dfrac{a}{\ln 2}+b$, với $a,b\in\mathbb{Z}$.

Tính $a+b$.



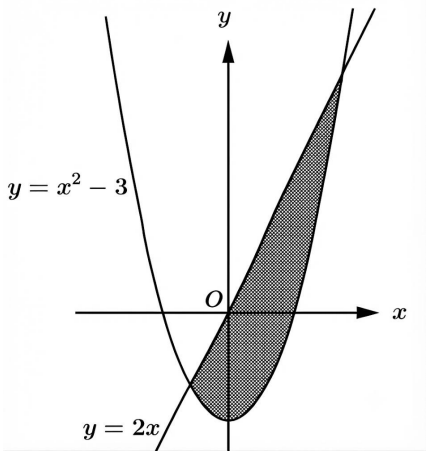
Trả lời: ……..

Câu 146. Diện tích hình phẳng phần tô đậm trong hình vẽ bên dưới bằng bao nhiêu?



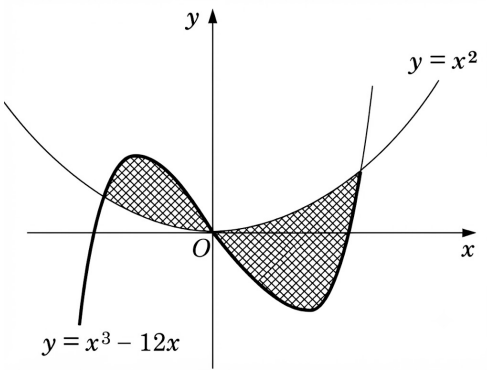
Trả lời: ……..

Câu 81. Biết diện tích hình phẳng là phần tô đậm trong hình vẽ bên dưới bằng $\dfrac{a}{b}$, với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+2b$.



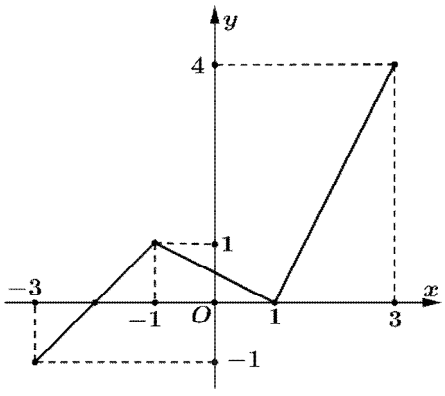
Trả lời: ……..

Câu 147. Biết diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên dới bằng $\frac{a}{b}$, với $a,b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a-b$.



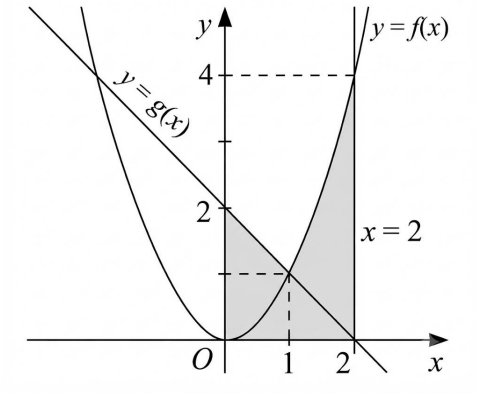
Trả lời: ……..

Câu 148. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-3;3]$ và có đồ thị như hình vẽ. Giá trị của $\int_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?



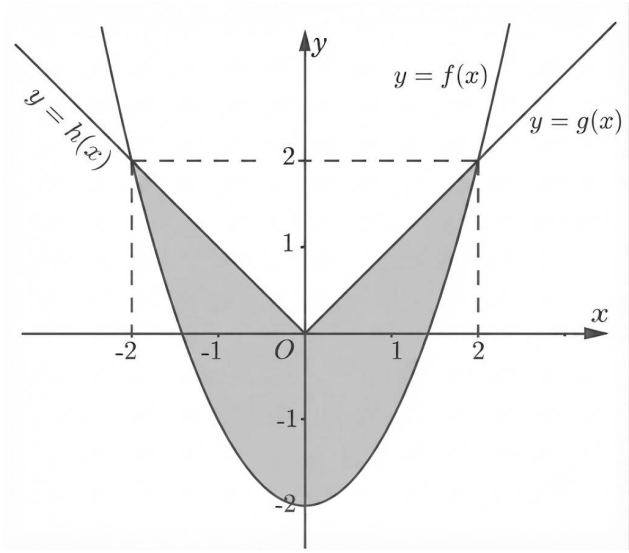
Trả lời: ……..

Câu 149. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc hai và $y = g(x)$ là hàm đa thức bậc nhất và có đồ thị như vẽ . Biết diện tích hình phẳng là phần tô đậm trong hình vẽ bên dưới bằng $\frac{a}{b}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+2b$.



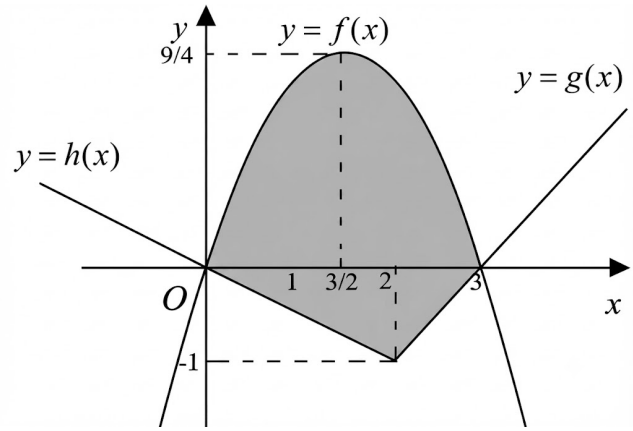
Trả lời: ……..

Câu 150. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm đa thức bậc hai, $y=g\left(x\right)$ với $x\ge 0$ và $y=h\left(x\right)$ với $x\le 0$ là hàm đa thức bậc nhất và có đồ thị như vẽ . Biết diện tích hình phẳng là phần tô đậm trong hình vẽ bên dưới bằng $\frac{a}{b}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a-4b$.



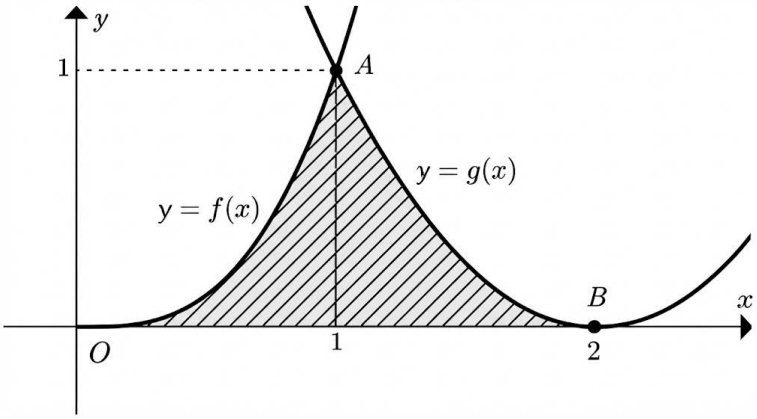
Trả lời: ……..

Câu 151. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm đa thức bậc hai, $y=g\left(x\right)$ với $x\ge 2$ và $y=h\left(x\right)$ với $x\le 2$ là hàm đa thức bậc nhất và có đồ thị như vẽ. Diện tích hình phẳng là phần tô đậm trong hình vẽ bên dưới bằng bao nhiêu ?



Trả lời: ……..

Câu 152. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)=ax^3+b$ và hàm bậc hai $y=g(x)=cx^2+dx+e$ có đồ thị như vẽ. Biết diện tích hình phẳng là phần gạch chéo trong hình vẽ bên dưới bằng $\frac{a}{b}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $2a+b$.



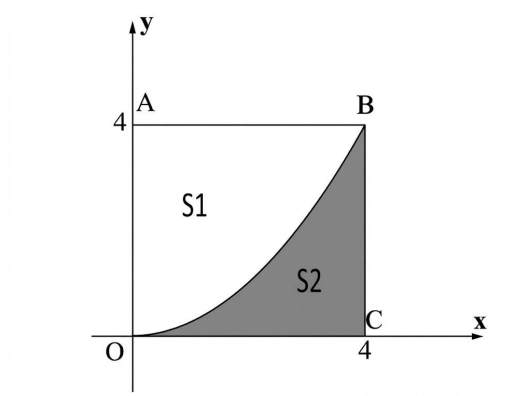
Trả lời: ……..

Câu 153. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}7-4x^3 & \text{khi } 0\le x\le 1\\ 4-x^2 & \text{khi } x>1\end{cases}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và các đường thẳng $x=0, x=3, y=0$.

Trả lời: ……..

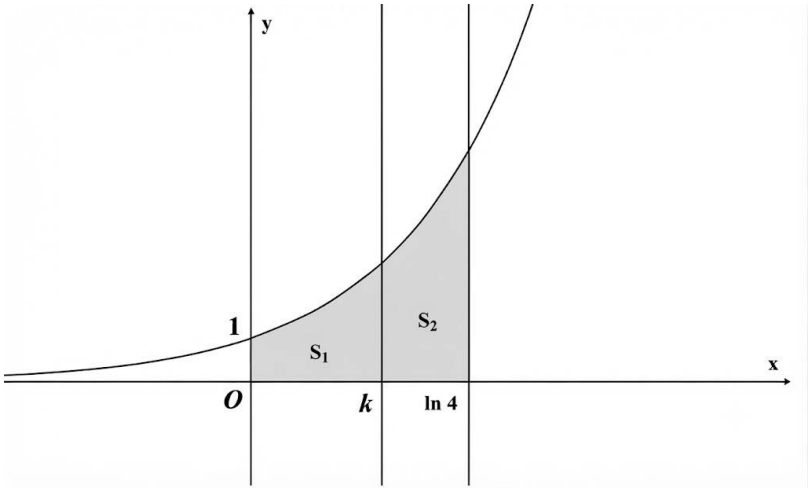
Câu 154. Cho hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ nhất, giới hạn bởi các đường thẳng $y=8x$, $y=x$ và đồ thị hàm số $y=x^3$ có diện tích là $S=\frac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $I=a-b$.

Câu 155. Hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (C) có phương trình $y=\frac{1}{4}x^2$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của phần không bị gạch và bị gạch như hình vẽ bên dưới. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng bao nhiêu?



Trả lời: ……..

Câu 156. Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=e^x, y=0, x=0, x=\ln 4$. Đường thẳng $x=k$ $(0<k<\ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Biết khi $S_1=2S_2$ thì $k=\ln a$, với $a\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị a.



Trả lời: ……..

Câu 157. Kí hiệu $S(t)$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2x+1$, $y=0$, $x=1$, $x=t$ $(t>1)$. Tìm t để $S(t)=10$.

Trả lời: ……..

Câu 158. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $my=x^2$, $mx=y^2$ $(m>0)$. Tìm giá trị của m để $S=3$.

Trả lời: ……..

Câu 159. Gọi là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $2my=x^2$, $mx=\frac{1}{2}y^2$, $(m>0)$. Tìm giá trị của m để $S=3$

Trả lời: ……..

Câu 160. Giá trị dương của tham số m sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=2x+3$ và các đường thẳng $y=0, x=0, x=m$ bằng 10 là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 161. Cắt một vật thể (T) bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x=0$ và $x=2$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x(0\le x\le 2)$ cắt vật thể đó có diện tích diện là một hình vuông có cạnh bằng $\sqrt{x^3}$. Biết thể tích vật thể (T) bằng $\frac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị của $a+b$.

Trả lời: ……..

Câu 162. Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x=1; x=3$. Khi cắt một vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1\le x\le 3)$, mặt cắt là tam giác vuông có

một góc 45^0 và độ dài một cạnh góc vuông là $\sqrt{4-\frac{1}{2}x^2}$. Biết thể tích vật thể trên bằng $\frac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị của $a+b$.

Trả lời: ……..

Câu 163. Biết thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) xác định bởi các đường $y=\frac{1}{3}x^3-x^2$, $y=0$, $x=0$ và $x=3$ quanh trục Ox bằng $\frac{a}{b}\pi$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị của $a+b$.

Trả lời: ……..

Câu 164. Biết thể tích của vật thể tạo nên khi quay quanh trục Ox hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị $(P): y=2x-x^2$, trục Ox và hai đường thẳng $x=0, x=2$ bằng $\frac{a}{b}\pi$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị của $a+b$.

Trả lời: ……..

Câu 165. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\tan x, y=0, x=0, x=\frac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox. Biết thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra bằng $a.\pi+\frac{b}{c}\pi^2$, với $a,b,c\in\mathbb{N}$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a.b.c$.

Trả lời: ……..

Câu 166. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi $y=2x-x^2, y=0$. Tính thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay (H) xung quanh trục Ox ta được $V=\pi\left(\frac{a}{b}+1\right)$ với a,b là các số tự nhiên, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó ab bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 167. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do quay xung quanh trục hoành một elip có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Biết $V=\frac{a}{b}\pi$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a+5b$.

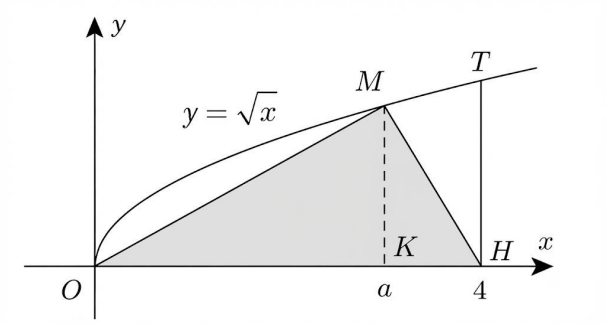
Trả lời: ……..

Câu 168. Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{m^2-x^2}$ (m là tham số khác 0) và trục hoành. Khi (H) quay xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích V. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $V<1000\pi$.

Trả lời: ……..

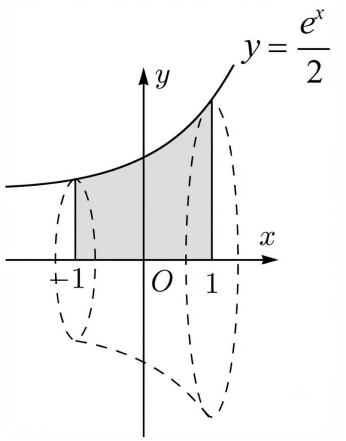
Câu 169. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, $y=0$ và $x=4$ quanh trục Ox. Đường thẳng $x=a\,(0<a<4)$ cắt đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ tại M

(hình vẽ). Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox. Biết rằng $V = 2V_1$. Khi đó giá trị a bằng bao nhiêu?



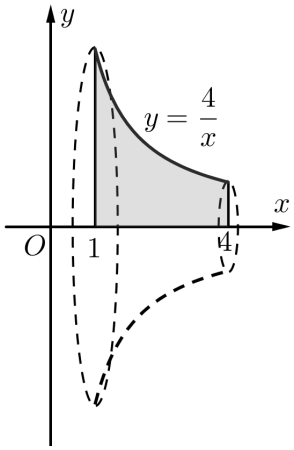
Trả lời: ……..

Câu 170. Biết thể tích của khối tròn xoay tạo ra khi quay quanh hình phẳng (phần tô đậm) trong hình vẽ bên dưới đây quanh trục Ox bằng $\left(\frac{a.e^4+b}{c.e^2}\right)\pi$, với $a,b,c \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a-b+c$.



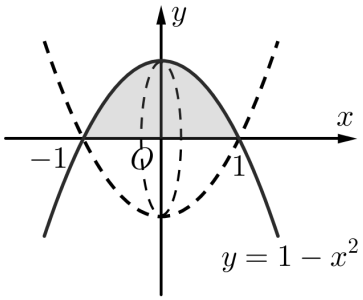
Trả lời: ……..

Câu 171. Thể tích của khối tròn xoay tạo ra khi quay quanh hình phẳng (phần tô đậm) trong hình vẽ bên dưới đây quanh trục Ox bằng là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ nhất)



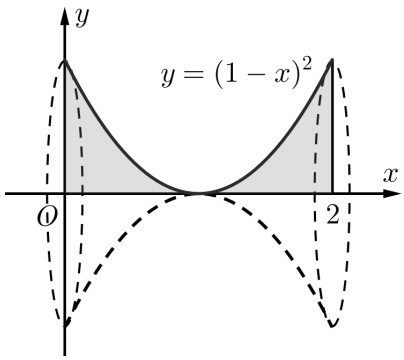
Trả lời: ……..

Câu 172. Biết thể tích của khối tròn xoay tạo ra khi quay quanh hình phẳng (phần tô đậm) trong hình vẽ bên dưới đây quanh trục Ox có kết quả dạng $\frac{a\pi}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó $S=a+b$ bằng bao nhiêu?



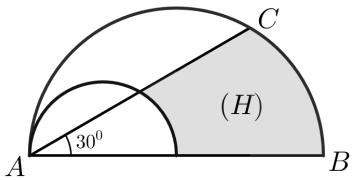
Trả lời: ……..

Câu 173. Biết thể tích của khối tròn xoay tạo ra khi quay quanh hình phẳng (phần tô đậm) trong hình vẽ bên dưới đây quanh trục Ox có kết quả dạng $\frac{a\pi}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị biểu thức $S=24a+12b$.



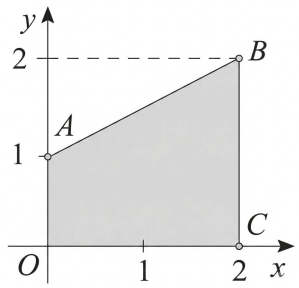
Trả lời: ……..

Câu 174. Cho các nửa đường tròn như hình vẽ sau, trong đó đường kính của nửa đường tròn lớn gấp đôi đường kính của nửa đường tròn nhỏ. Biết rằng nửa hình tròn đường kính AB có diện tích là 32π và góc $\widehat{BAC}=30°$. Biết thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng (H) (phần tô đậm) xung quanh đường thẳng AB bằng $\frac{a\pi}{b}$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a-50b$.



Trả lời: ……..

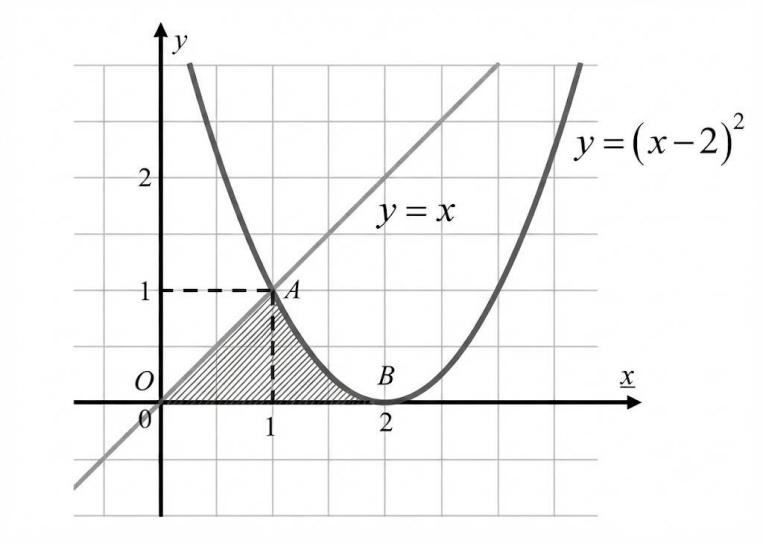
Câu 175. Cho diện tích hình phẳng (H) được tô đậm trong hình bên dưới.



Thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox bằng $\frac{a}{b}\pi$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a+b$.

Trả lời: ……..

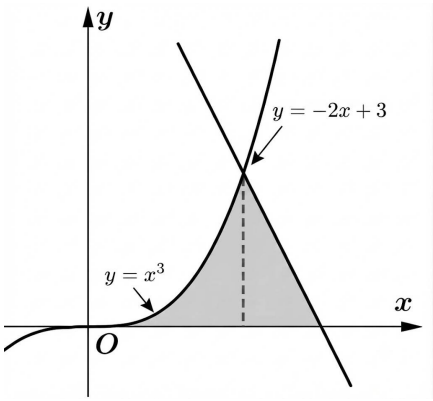
Câu 176. Diện tích phần hình phẳng (H) được gạch chéo (tam giác cong OAB) trong hình vẽ bên dưới.



Thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox bằng $\frac{a}{b}\pi$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a+b$.

Trả lời: ……..

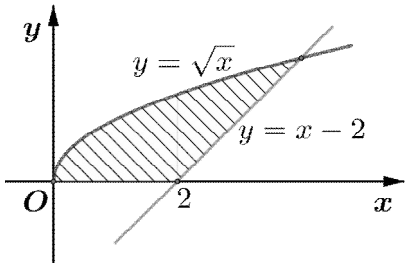
Câu 177. Cho diện tích hình phẳng (H) được tô đậm trong hình bên dưới.



Thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox bằng $\frac{a}{b}\pi$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $3a-b$.

Trả lời: ……..

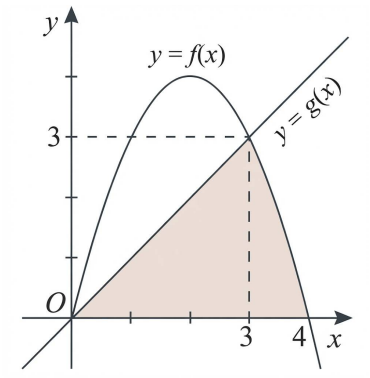
Câu 178. Cho diện tích hình phẳng (H) được gạch chéo trong hình bên dưới.



Thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox bằng $\frac{a}{b}\pi$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a+2b$.

Trả lời: ……..

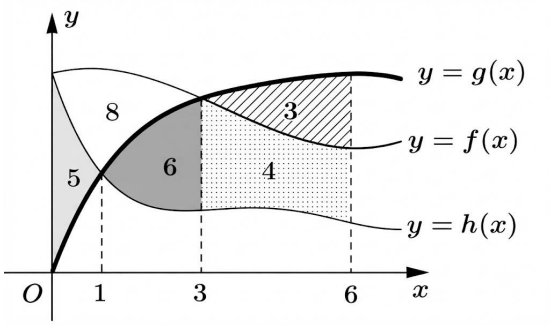
Câu 179. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc hai và $y=g(x)$ là hàm đa thức bậc nhất và có đồ thị như vẽ . Hình phẳng (H) là phần tô đậm trong hình vẽ bên dưới.



Thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox bằng $\frac{a}{b}\pi$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a-b$.

Trả lời: ……..

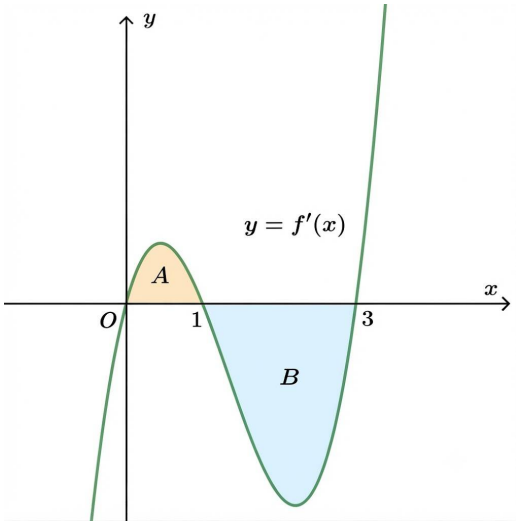
Câu 180. Cho ba hàm số $y=f(x), y=g(x)$ và $y=h(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Diện tích mỗi miền được ghi bằng số trong hình. Tính $S=\int\limits_{1}^{6}\left[h(x)-g(x)\right]dx+\int\limits_{0}^{6}\left[f(x)-g(x)\right]dx$

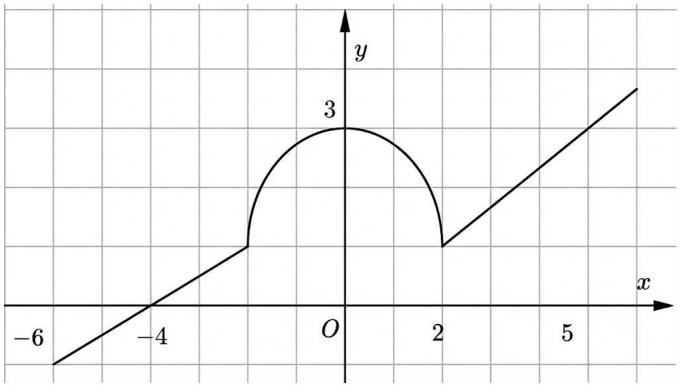
Trả lời: ……..

Câu 181. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ là đường cong trong hình dưới. Biết rằng diện tích của các phần hình phẳng A và B lần lượt là $S_A=4$ và $S_B=10$. Tính giá trị của $f\left(3\right)$, biết giá trị của $f\left(0\right)=2$.



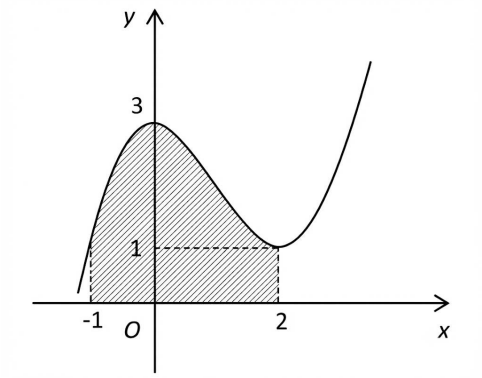
Trả lời: ……..

Câu 182. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[-6;5\right]$, có đồ thị gồm 2 đoạn thẳng và nửa đường tròn như hình vẽ. Tính giá trị $I=\int\limits_{-6}^{5}\left[f\left(x\right)+2\right]\mathrm{d}x$ (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ nhất).



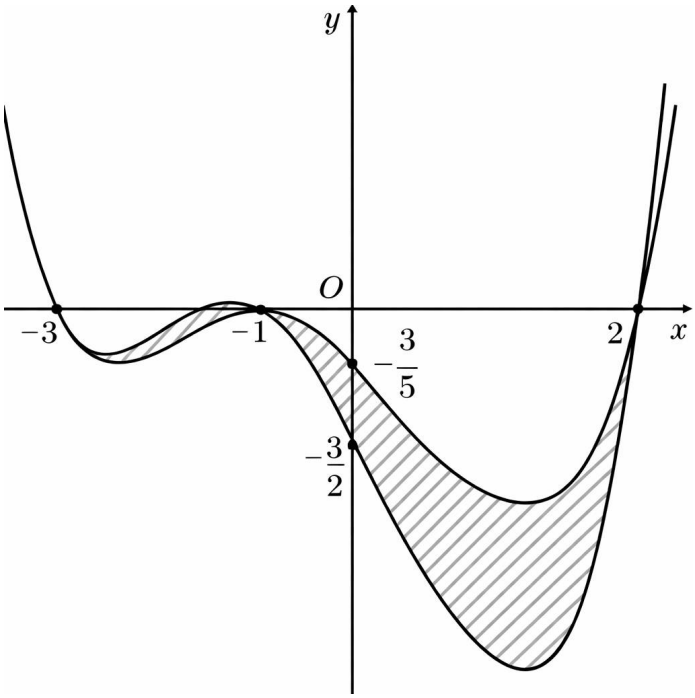
Trả lời: ……..

Câu 183. Diện tích S của miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+c$, các đường thẳng $x=1,x=2$ và trục hoành (miền tô đậm) cho trong hình dưới đây bằng $\frac{m}{n}$, với $m,n\in\mathbb{Z}$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $m+n$.



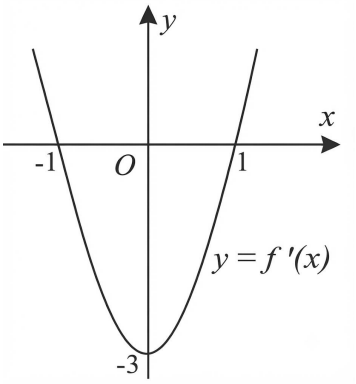
Trả lời: ……..

Câu 184. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ và $y=g(x)$. Biết rằng đồ thị cảu hai hàm số này cắt nhau tại đúng ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-3;-1;2$. Diện tích của hình phẳng (H) (phần gạch sọc trên hình vẽ bên) bằng $\frac{m}{n}$, với $m,n\in\mathbb{Z}$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $m-3n$.



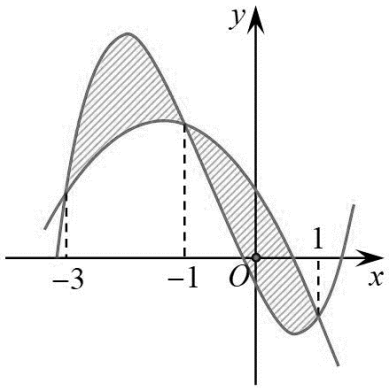
Trả lời: ……..

Câu 185. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,(a,b,c\in\mathbb{R},a\neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y=9x-18$ tại điểm có hoành độ dương và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị hình như vẽ bên dưới. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành.



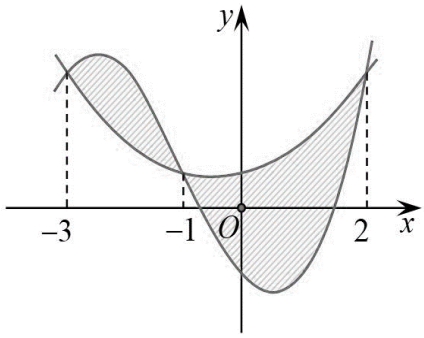
Trả lời: ……..

Câu 186. Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-\frac{1}{2}$ và $g(x)=dx^2+ex+1$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $-3;\ -1;\ 1$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng bao nhiêu?



Trả lời: ……..

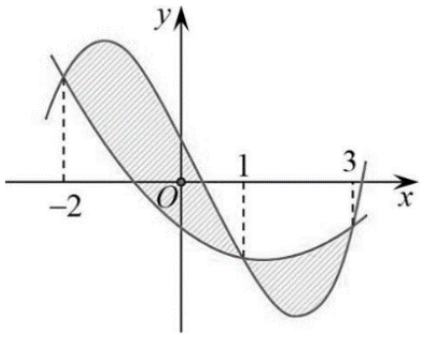
Câu 187. Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-1$ và $g(x)=dx^2+ex+\frac{1}{2}$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt $-3;-1;2$ (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho (phần tô đậm của hình vẽ) có diện tích bằng $\frac{m}{n}$, với $m,n\in\mathbb{Z}$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $m+2n$.

Trả lời: ……..

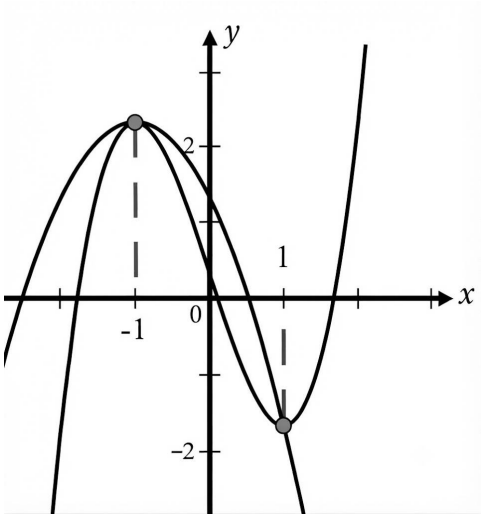
Câu 188. Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+\frac{3}{4}$ và $g(x)=dx^2+ex-\frac{3}{4}$, $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2; 1; 3 (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho (phần tô đậm của hình vẽ) có diện tích bằng $\frac{m}{n}$, với $m,n\in\mathbb{Z}$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $m-3n$.

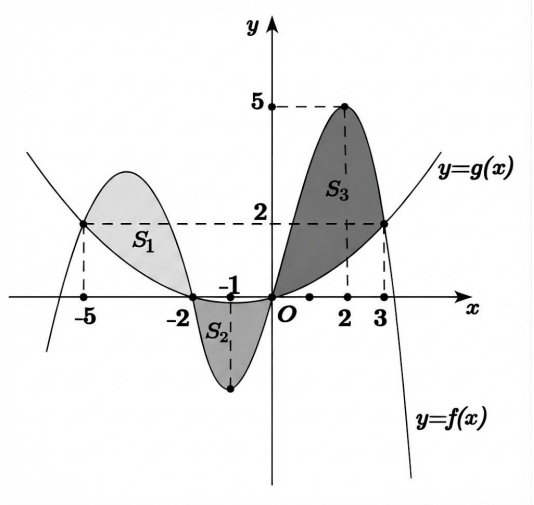
Trả lời: ……..

Câu 189. Cho hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c\ (a,b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị (C) và $y=mx^2+nx+p\ (m,n,p\in\mathbb{R})$ có đồ thị (P) như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ hai).



Trả lời: ……..

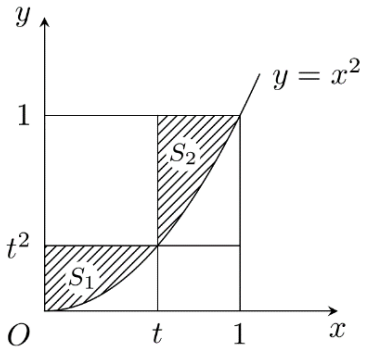
Câu 190. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5;3]$. Biết rằng diện tích hình phẳng S_1, S_2, S_3 giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và đường parabol $y=g(x)=ax^2+bx+c$ lần lượt là m,n,p.



Biết tích phân $\int_{-5}^{3} f(x)\mathrm{d}x = \frac{242}{45}$, tính giá trị của $m-n+p$.

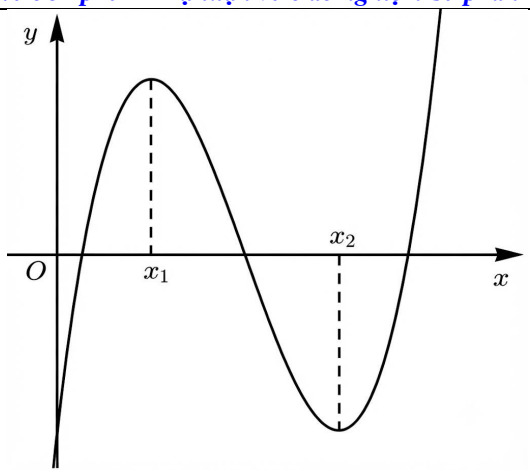
Trả lời: ……..

Câu 191. Cho hàm số $y=x^2$ xác định trên đoạn $[0;1]$. Giả sử t là một số bất kì thuộc đoạn $[0;1]$. Gọi S_1 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=0$, $y=t^2$ và $y=x^2$, còn S_2 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2$, $x=t$ và $y=1$. Biết giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của S_1+S_2 bằng $\frac{m}{n}$, với $m,n\in\mathbb{Z}$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $m+n$.



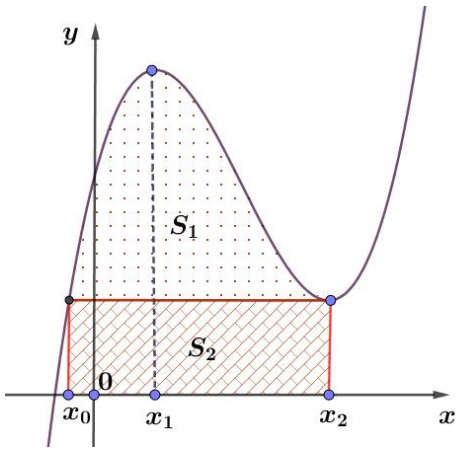
Trả lời: ……..

Câu 192. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2=x_1+2$; $f(x_1)+f(x_2)=0$ và $\int_{x_1}^{x_1+1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{5}{4}$. Tính $L=\lim\limits_{x\to x_1}\frac{f(x)-2}{(x-x_1)^2}$.



Trả lời: ……..

Câu 193. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên dưới. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hai điểm cực trị thỏa mãn $x_2=x_1+2$ và $f(x_1)-3f(x_2)=0$. Đường thẳng song song với trục Ox và qua điểm cực tiểu cắt đồ thị hàm số tại điểm thứ hai có hoành độ x_0 và $x_1=x_0+1$. Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch ở hình bên dưới. Biết tỉ số $\frac{S_1}{S_2}=\frac{m}{n}$, với $m,n\in\mathbb{Z}$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $m+n$.



Trả lời: ……..

Câu 194. Biết $F(x);G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^4 f(x)dx=F(4)-G(0)+a\ (a>0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x);y=G(x);x=0;x=4$. Khi $S=8$ thì a bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 195. Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x=F(5)-G(0)+a,\ (a>0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x)$, $y=G(x)$, $x=0$ và $x=5$. Khi $S=20$ thì a bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 196. Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = F(2) - G(0) + a\ (a>0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x)$, $y=G(x)$, $x=0$ và $x=2$, Khi $S=6$ thì a bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

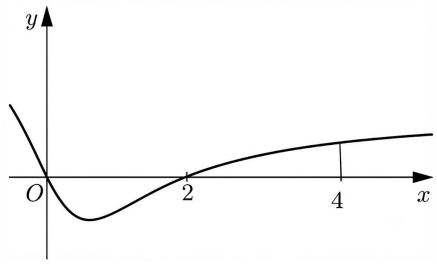
Câu 197. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ hai).

Trả lời: ……..

Câu 198. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -4 và 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ hai).

Trả lời: ……..

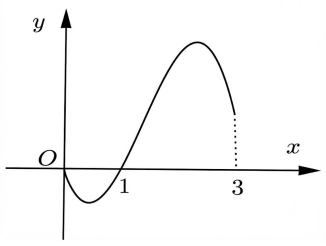
Câu 199. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên.



Biết rằng $f(0)+f(3)=f(2)+f(4)$. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0;4]$ lần lượt là $\min\limits_{[0;5]} f(x)=f(a), \max\limits_{[0;5]} f(x)=f(b)$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Khi đó $a+b$ bằng bao nhiêu ?

Trả lời: ……..

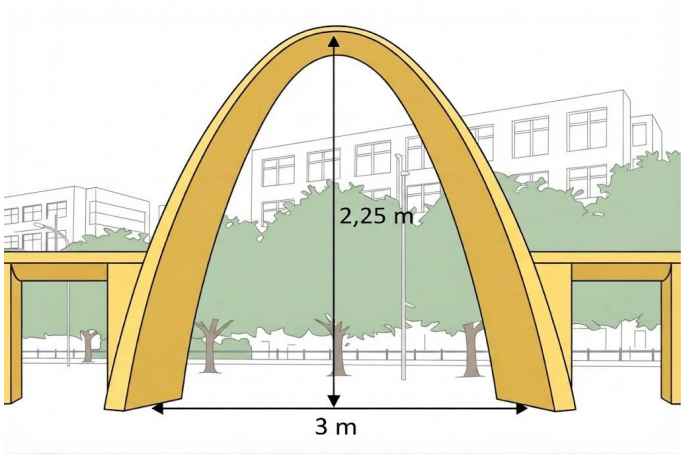
Câu 200. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên dưới.



Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0;3]$ lần lượt là $\min\limits_{[0;3]} f(x)=f(a)$; $\max\limits_{[0;3]} f(x)=f(b)$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Khi đó $2a+3b$ bằng bao nhiêu ?

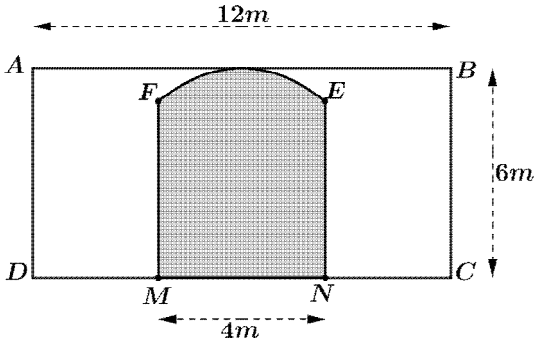
Trả lời: ……..

Câu 201. Trường Lê Hồng Phong – Tây Hòa muốn làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là $2,25$ mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê công nhân làm mỗi mét vuông là $1,5$ triệu đồng. Vậy số tiền nhà trường phải trả bao nhiêu triệu đồng ?



Trả lời: ……..

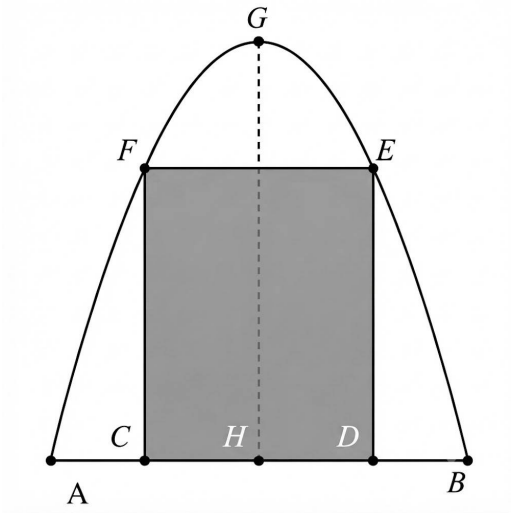
Câu 202. Anh Thanh Minh muốn làm một bức tranh trang trí như phần $MNEIF$ được tô đậm trong hình vẽ bên dưới ở chính giữa của một bức tường hình chữ nhật $ABCD$ có $BC = 6\text{m}, CD = 12\text{m}$



Biết $MN = 4\text{m}$; cung EIF có hình parabol với đỉnh I là trung điểm của cạnh AB và đi qua hai điểm C, D. Kinh phí làm bức tranh là 900000 đồng/m^2. Hỏi anh Thanh Minh cần bao nhiêu tiền để làm bức tranh?

Trả lời: ……..

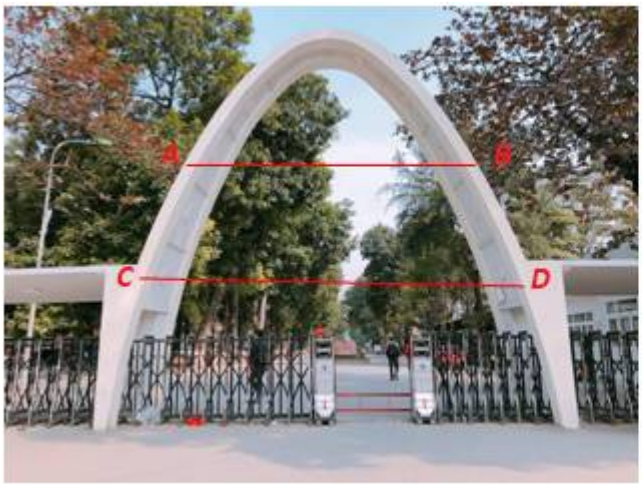
Câu 203. Chị Minh Hiền muốn làm một cái cổng hình Parabol cho ngôi nhà của mình như hình vẽ bên dưới.

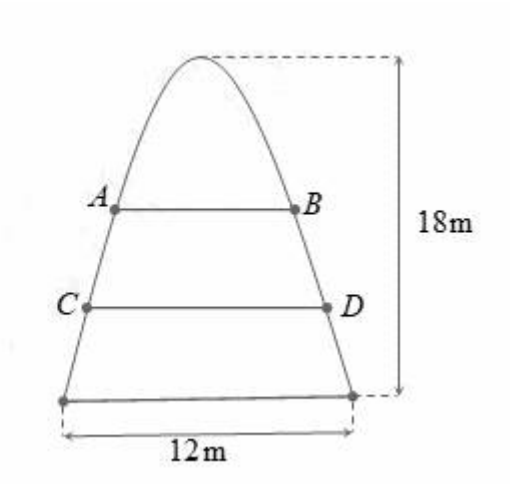


Chiều cao $GH = 4m$, chiều rộng $AB = 4m$, $AC = BD = 0,9m$. Chị Minh Hiền làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là $1,2$ triệu đồng$/m^2$, còn các phần để trắng làm xiên hoa có giá là $1,0$ triệu đồng$/m^2$. Hỏi tổng số tiền để làm cái cổng trên mà chị Minh Hiền phải trả là bao nhiêu triệu đồng? (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ nhất của triệu đồng)

Trả lời: ……..

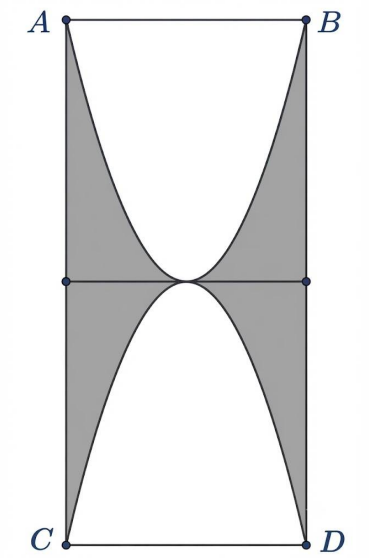
Câu 204. Một cổng chào có dạng hình Parabol chiều cao $18\,\text{m}$, chiều rộng chân đế $12\,\text{m}$. Người ta căng hai sợi dây trang trí AB, CD nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi Parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau (xem hình vẽ bên). Biết tỉ số $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}$, khi đó a bằng bao nhiêu?





Trả lời: ……..

Câu 205. Một hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 4dm; BC = 8dm$ và được trang trí họa tiết hình cánh bướm như hình vẽ bên.

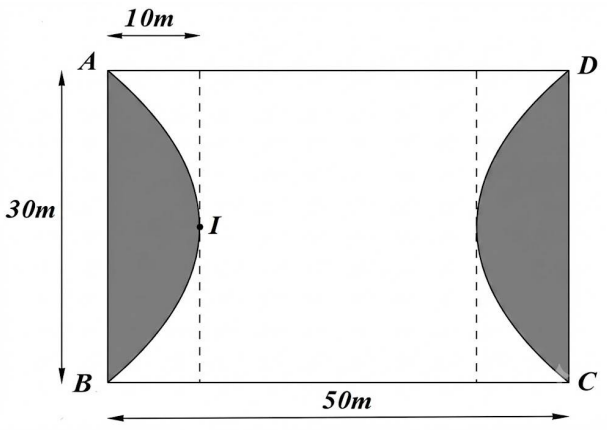


Phần tô đậm được trang trí với giá thành 60000 đồng/ m^2 và phần còn lại không tô màu được trang trí với giá thành 30000 đồng/ m^2. Hỏi để trang trí 100 họa tiết như vậy cần bao nhiêu triệu đồng?

Trả lời: ……..

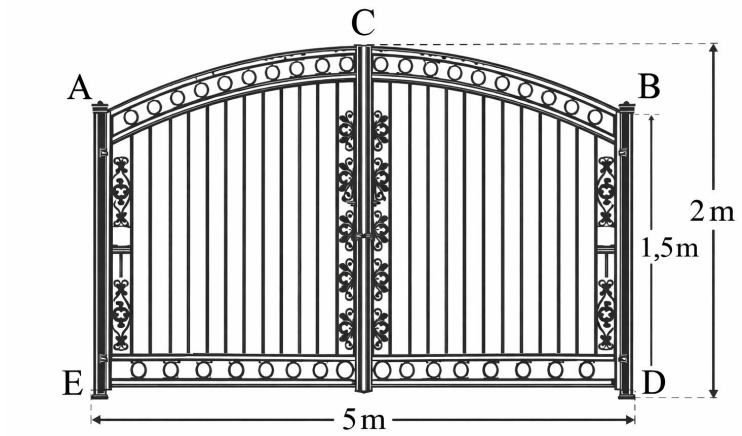
Câu 206. Kiến trúc sư thiết kế một khu vui chơi có dạng hình chữ nhật với chiều rộng $30m$ và chiều dài $50m$. Trong đó, phần tô màu đậm trồng cỏ nhung Nhật, phần còn lại trải thảm cỏ nhân tạo. Mỗi phần

trồng cỏ nhung Nhật có đường biên cong là một phần của parabol với đỉnh I thuộc trục đối xứng của hình chữ nhật và khoảng cách từ đỉnh I đến trung điểm của cạnh AB bằng $10m$ (xem hình minh họa). Biết giá cỏ nhung Nhật là 140000 đồng/m^2, giá cỏ nhân tạo là 100000 đồng/m^2. Tính tổng số tiền để trồng và trải thảm cỏ hết khu vui chơi theo đơn vị triệu đồng.



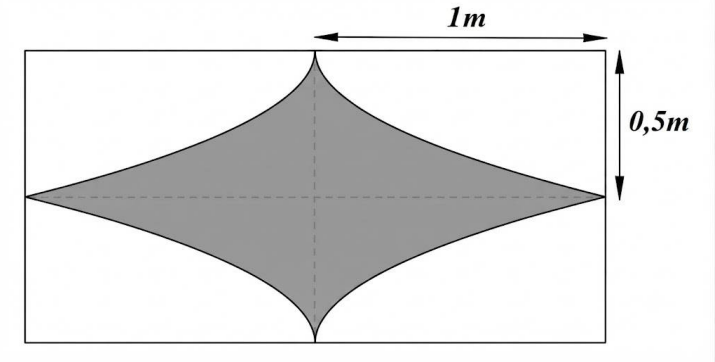
Trả lời: ……..

Câu 207. Một người thợ muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên dưới, biết đường cong phía trên là một parabol và tứ giác $ABDE$ là hình chữ nhật. Chi phí của cánh cửa sau khi hoàn thành là 700000 đồng/m². Hỏi cần bao nhiêu triệu đồng để làm một cửa sắt như vậy? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



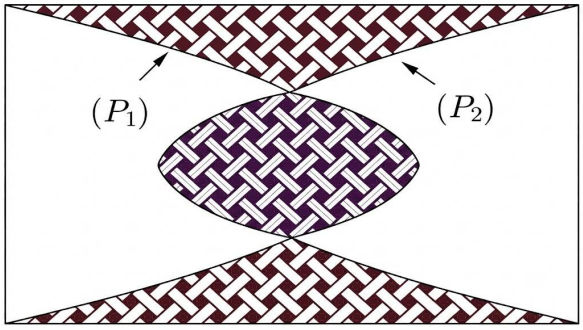
Trả lời: ……..

Câu 208. Nhà anh Bảo Toàn có tất cả 8 cánh cửa sắt hình chữ nhật với chiều dài $2m$ và chiều rộng $1m$. Hai mặt của mỗi cánh cửa được thiết kế như hình vẽ dưới đây. Trong đó, phần được tô đậm được sơn màu xanh (phần tô đen), phần còn lại được sơn màu trắng. Mỗi phần sơn màu trắng có đường biên cong là một phần của parabol có đỉnh nằm trên cạnh của hình chữ nhật. Biết rằng chi phí để sơn màu xanh là 120 nghìn đồng $/m^2$ và chi phí sơn màu trắng là 110 nghìn đồng $/m^2$. Hỏi, để sơn toàn bộ số cửa sắt trên, anh Bảo Toàn phải tốn bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị triệu đồng).



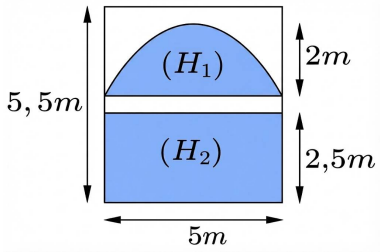
Trả lời: ……..

Câu 209. Trang trí một sân hình chữ nhật kích thước 28m x 16m, trong đó hai Parabol (P_1) đối xứng với (P_2) qua đường thẳng đi qua hai trung điểm của chiều dài sân (hình vẽ), khoảng cách giữa hai đỉnh Parabol bằng 4m. Chi phí trang trí cho phần hoa văn là 180 ngàn đồng trên một mét vuông, phần trắng là 160 ngàn đồng trên một mét vuông. Tổng chi phí trang trí cho sân là bao nhiêu triệu đồng? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



Trả lời: ……..

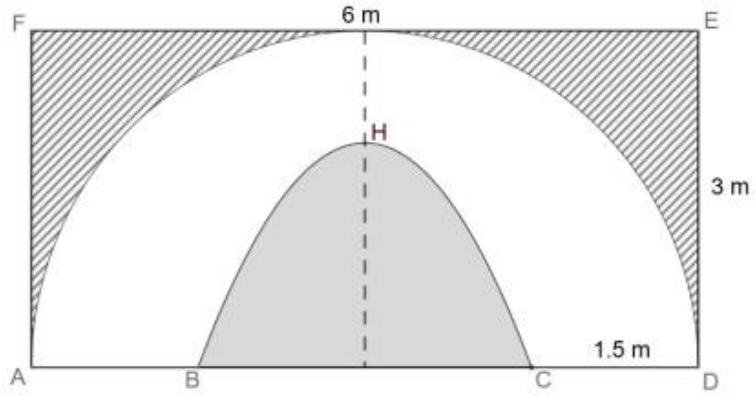
Câu 210. Hình vẽ bên dưới minh họa mặt cắt đứng của mặt trước một ngôi nhà có dạng hình chữ nhật $5\text{m}\times 5,5\text{m}$ với các kích thước được cho như trong hình bên dưới. Phần tô đậm trong hình vẽ ứng với phần kính được lắp đặt, phần còn lại lót gạch men. Phần lắp kính được chia làm 2 miền (H_1) và (H_2), trong đó miền (H_1) có đường biên cong là một phần của parabol. Chi phí lắp kính là 1,5 triệu đồng cho 1m^2 và chi phí lót gạch men là 0,28 triệu đồng cho 1m^2. Tổng chi phí cần hoàn thành mặt trước ngôi nhà là bao nhiêu triệu đồng? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Trả lời: ……..

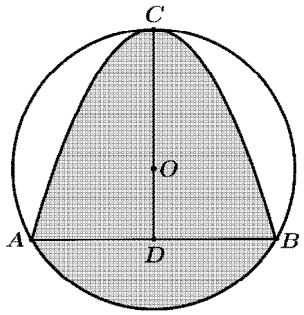
Câu 211. Cô Minh Nhàn muốn nhờ thợ trang trí một bức tường hình chữ nhật $ADEF$ với kích thước $EF=6m,\ DE=3m$ sao cho cân xứng hai nửa. Phần gạch chéo là hình giới hạn bởi đường gấp khúc $AFED$ và nửa đường tròn đường kính AD, được thuê sơn với đơn giá 250000 đồng mỗi mét vuông.

Phần màu trắng giới hạn bởi nửa đường tròn đường kính AD và một đường parabol (có đỉnh H cách đường thẳng AB một khoảng bằng $2m$ và đi qua hai điểm B,C nằm trên cạnh AD thỏa mãn $AB=CD=1,5m$) được thuê trang trí bằng bức phù điêu đắp bằng xi măng với đơn giá 1950000 đồng mỗi mét vuông (tham khảo hình vẽ). Hỏi cô Minh Nhàn phải trả bao nhiêu triệu đồng để trang trí bức tường như vậy (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

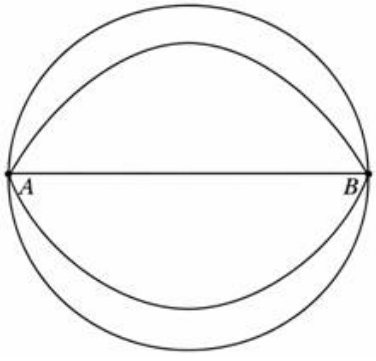


Trả lời: ……..

Câu 212. Một hoa văn hình tròn tâm O, ngoại tiếp tam giác đều ABC có cạnh $AB=4\sqrt{3}\,\text{cm}$. Đường cong qua ba điểm: A,B,C là một phần của parabol. Tính diện tích phần tô đậm trong hình vẽ (kết quả làm tròn đến hàng phần mười của centimét vuông).

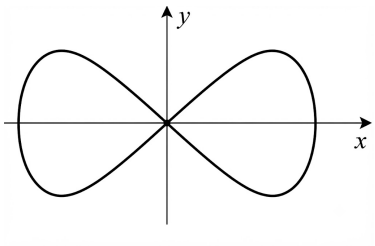


Câu 213. Một khu vực công viên có dạng hình tròn đường kính AB bằng 10m. Người ta trang trí khu vực này bằng hai đường Parabol đối xứng nhau qua AB, nằm trong hình tròn, đi qua các điểm A, B và có đỉnh cách mép hình tròn 1m. Phần giới hạn bởi 2 parabol được trồng hoa với chi phí 400000 đồng một mét vuông, phần còn lại được lát gốm sứ với chi phí 1200000 đồng một mét vuông. Tính tổng chi phí (triệu đồng) để hoàn thành khu vực này (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất của triệu đồng) ?



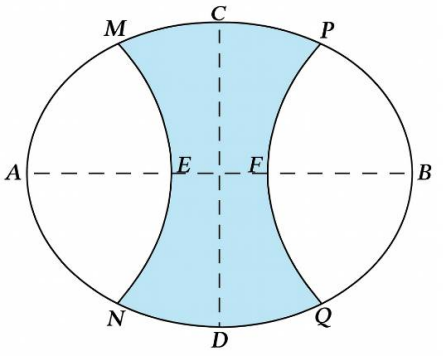
Trả lời: ……..

Câu 214. Trong Công viên Toán học có những mảnh đất mang hình dáng khác nhau. Mỗi mảnh được trồng một loài hoa và nó được tạo thành bởi một trong những đường cong đẹp trong toán học. Ở đó có một mảnh đất mang tên Bernoulli, nó được tạo thành từ đường Lemmiscate có phương trình trong hệ tọa độ Oxy là $16y^2 = x^2\left(25 - x^2\right)$ như hình vẽ bên dưới (đơn vị trên trục là mét). Biết chi phí để trồng hoa trên mảnh đất Bernoulli là 150 nghìn đồng/ m^2. Số tiền cần dùng để trồng hoa trên mảnh đất này bằng bao nhiêu triệu đồng?



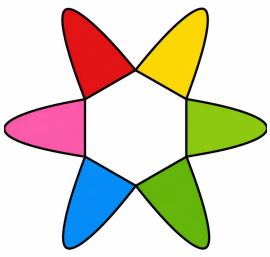
Trả lời: ……..

Câu 215. Vườn hoa của một trường học có hình dạng được giới hạn bởi một đường elip có bốn đỉnh A, B, C, D và hai đường parabol có các đỉnh lần lượt là E, F (phần tô đậm của hình vẽ). Hai đường parabol có cùng trục đối xứng AB, đối xứng nhau qua trục CD, hai parabol cắt elip tại các điểm M, N, P, Q. Biết $AB = 8\,m, CD = 6\,m, MN = PQ = 3\sqrt{3}\,m, EF = 2\,m$. Chi phí để trồng hoa trên vườn là $300.000 / m^2$. Hỏi số tiền trồng hoa cho cả vườn là bao nhiêu triệu đồng. Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm



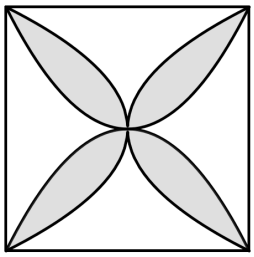
Trả lời: ……..

Câu 216. Anh Bảo Toàn muốn xây sân vườn có hình dạng ngôi sao 6 cánh như sau: trên mỗi cạnh của hình lục giác đều có cạnh bằng $2m$ có một cánh hoa hình parabol, đỉnh của parabol cách cạnh $3m$ và nằm phía ngoài hình lục giác, đường parabol đó đi qua hai đầu mút của mỗi cạnh (xem hình sau). Hãy tính diện tích của sân vườn trên của anh Bảo Toàn (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ nhất của mét vuông).



Trả lời: ……..

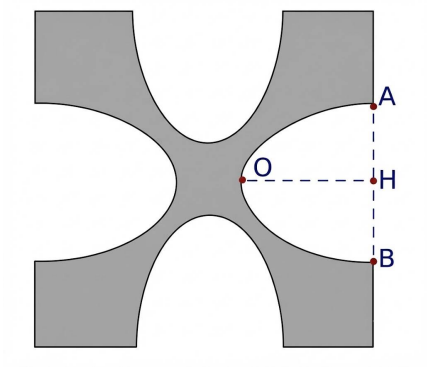
Câu 217. Một viên gạch hoa hình vuông cạnh $60\,\text{cm}$. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô mầu sẫm như hình vẽ bên).



Tính diện tích phần cánh hoa của viên gạch (đơn vị cm^2).

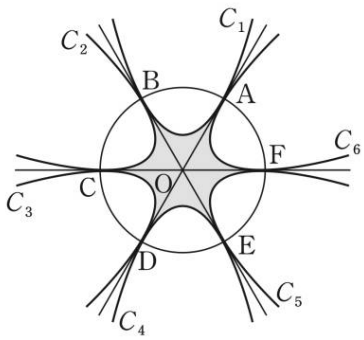
Trả lời: ……..

Câu 218. Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng $10\,\text{cm}$ bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB = 5\,\text{cm}$, $OH = 4\,\text{cm}$. Biết giá trang trí hoa văn 1cm^2 là 6000 đồng, hỏi số tiền cần bỏ ra để trang trí hoa văn bằng bao nhiêu nghìn đồng?



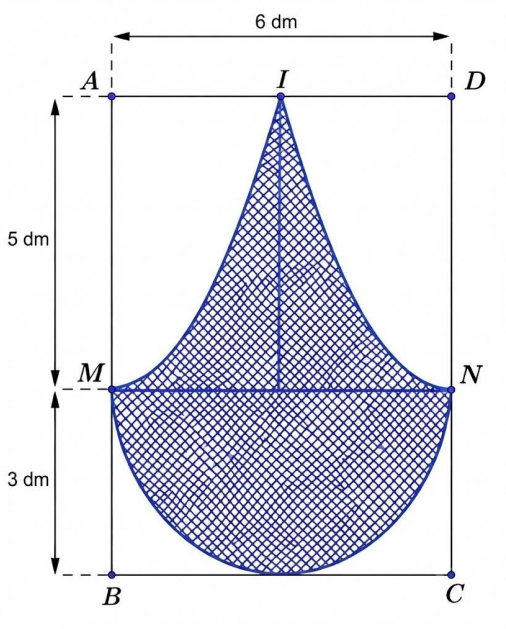
Trả lời: ……..

Câu 219. Cho đường tròn tâm O, bán kính bằng $2dm$. Trên đường tròn, lấy 6 điểm chia đều đường tròn, lần lượt là A, B, C, D, E, F. Vẽ cung tròn C_1 tiếp xúc với hai đoạn thẳng OA và OB, đi qua hai điểm A và B. Tương tự, vẽ cung tròn C_2 tiếp xúc với hai đoạn thẳng OB và OC, đi qua hai điểm B và C. Tiếp tục bằng cách tương tự, ta vẽ các cung tròn C_3, C_4, C_5, C_6 tiếp xúc với các cặp đoạn thẳng liên tiếp tạo bởi các điểm trên. Diện tích phần được bao bởi 6 cung tròn C_1 đến C_6 là bao nhiêu decimét khối (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Trả lời: ……..

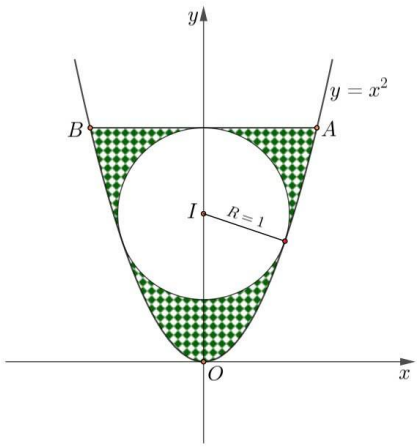
Câu 220. Để trang trí một bảng gỗ hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB=8\text{dm}$ và chiều rộng $AD=6\text{dm}$, người ta thiết kế một logo là hình phẳng giới hạn bởi nửa đường tròn đường kính $MN=6\text{dm}$, tiếp xúc với BC, hai đường cong IM, IN là một phần của các đường parabol có trục đối xứng lần lượt là AB, CD với I là trung điểm của AD (tham khảo hình vẽ).



Phần logo được sơn màu xanh với chi phí 50000 đồng/ 1dm^2 và phần còn lại của bảng gỗ được sơn màu trắng với chi phí 30000 đồng/ 1dm^2. Hỏi cần bỏ ra bao nhiêu nghìn đồng để trang trí bảng gỗ trên (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

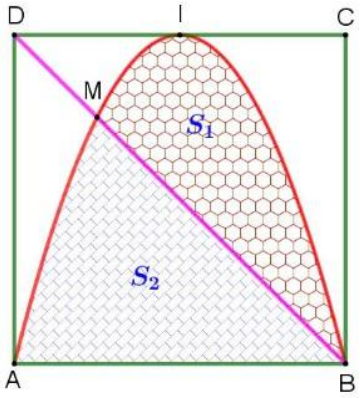
Trả lời: ……..

Câu 221. Một khoảng sân của một ngôi nhà có hình dạng là một phần của parabol, nếu chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ bên dưới thì parabol có phương trình là $y=x^2$. Chủ nhà muốn thiết kế một hồ nuôi cá cảnh có dạng hình tròn bán kính $1m$, hình tròn được thiết kế tiếp xúc với 2 nhánh của parabol, phía trên của hình tròn ngăn bởi một bức tường mỏng tiếp xúc với hình tròn. Phần đất còn lại của khoảng sân giới hạn bởi đường tròn, 2 nhánh của parabol và bức tường được thiết kế trồng hoa (phần gạch sọc trong hình). Tính diện tích mà chủ nhà thiết kế để trồng hoa (đơn vị mét vuông), biết rằng đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Trả lời: ……..

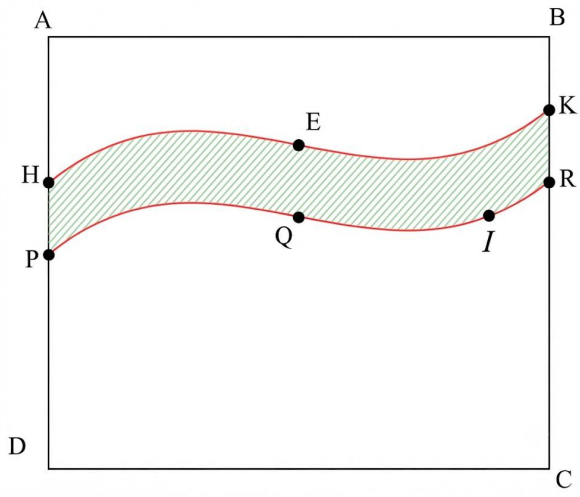
Câu 222. Một biển quảng cáo có dạng hình vuông $ABCD$ cạnh bằng $4\,\text{m}$ và I là trung điểm của đoạn thẳng CD. Trên tấm biển đó có đường parabol đỉnh I đi qua A, B và cắt đường chéo BD tại M (tham khảo hình vẽ).



Chi phí sơn phần tô hình tổ ong (có diện tích S_1) là 200000 đồng$/\text{m}^2$, chi phí sơn phần tô đậm (có diện tích S_2) là 150000 đồng$/\text{m}^2$ và phần còn lại là 120000 đồng$/\text{m}^2$. Số tiền cần chi trả để sơn tấm biển quảng cáo là bao nhiêu nghìn đồng?

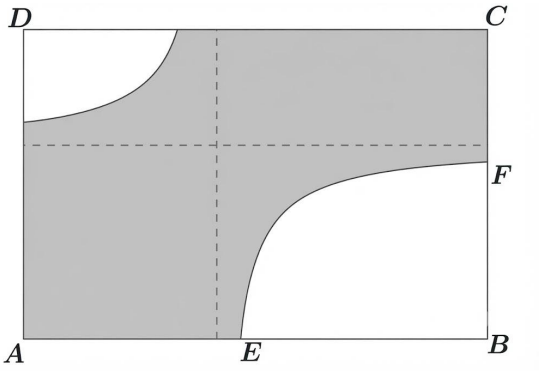
Trả lời: ……..

Câu 223. Kiến trúc sư thiết kế một con đường để chia khu đất hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 40\,\text{m}$, $AD = 60\,\text{m}$ thành hai phần (hai lề đường là các đường cong HEK và $PQIR$). Trong đó phần giới hạn bởi đường cong HEK và các đoạn AH, AB, BK là sân chơi, phần giới hạn bởi đường cong $PQIR$ và các đoạn PD, DC, CR để trồng hoa (tham khảo hình vẽ). Nếu gắn một hệ trục tọa độ vuông góc có trục hoành, trục tung lần lượt cùng phương với các đường thẳng AB, AD thì đường cong $PQIR$ là một phần của đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x)$. Đường cong HEK nhận được bằng cách tịnh tiến đường cong $PQIR$ theo phương thẳng đứng lên phía trên $10\,\text{m}$. Biết $AP = 30\,\text{m}$, $BR = 20\,\text{m}$, điểm Q cách các cạnh AB, AD lần lượt $25\,\text{m}$ và $20\,\text{m}$, điểm I cách các cạnh AB, AD lần lượt $25\,\text{m}$ và $35\,\text{m}$. Gọi S_1 là diện tích phần sân chơi và S_2 là diện tích phần trồng hoa. Biết $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{m}{n}$, với $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản và $m, n \in \mathbb{Z}$, tính $2m + 3n$.



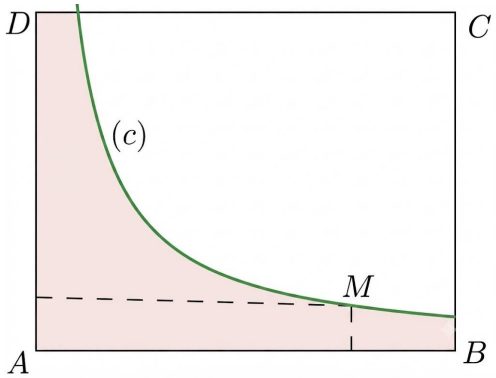
Trả lời: ……..

Câu 224. Một công tỉ đang thiết kế một bảng quảng cáo hình chữ nhật $ABCD$ có kích thước $AB=12\,m$ và $AD=8\,m$. Phần trung tâm của bảng sẽ được in nội dung quảng cáo, được mô tả là phần tô đậm (xem hình minh họa). Hai đường cong trong hình là một phần của đồ thị hàm số có dạng $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số này đều cách điểm A một khoảng bằng 5 m. Đồ thị giao với cạnh AB tại điểm E thỏa mãn $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{7}{15}$. Diện tích phần in nội dung quảng cáo là bao nhiêu mét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



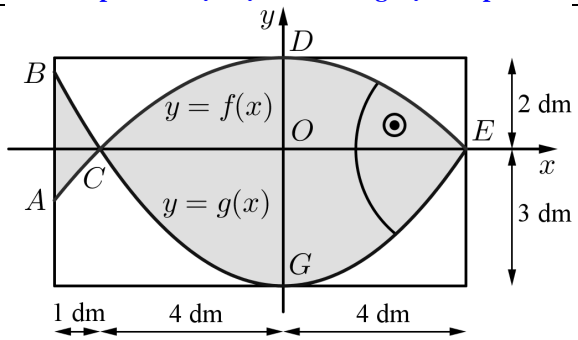
Trả lời: ……..

Câu 225. Một hộ gia đình thiết kế một khu vui chơi lớn cho gia đình có dạng hình chữ nhật với chiều rộng và chiều dài lần lượt là $AD=40\ m$ và $AB=50\ m$. Trong đó, phần được tô màu đậm làm nơi trồng hoa, phần còn lại để làm sân chơi. Mỗi phần trồng hoa có đường biên cong là đường cong (C) và các cạnh của hình chữ nhật. Biết mỗi điểm M trên đường cong (C) luôn có tích khoảng cách đến các cạnh AB, AD bằng $20\ m$. Số tiền chi phi để trồng hoa là 200.000 đ trên một mét vuông, số tiền làm sân chơi là 350.000 đ trên một mét vuông. Số tiền hộ gia đình cần dùng để làm sân chơi là bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của triệu đồng)?



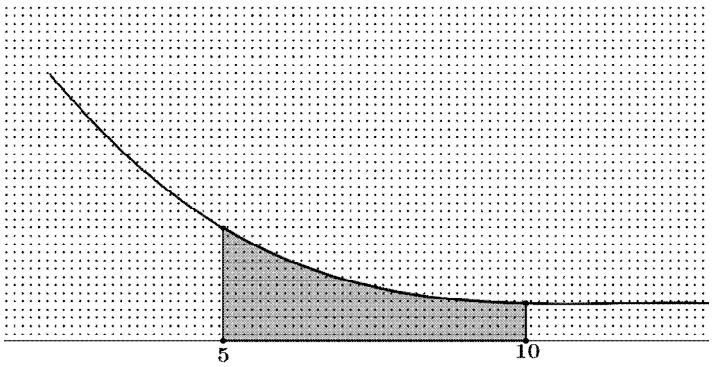
Trả lời: ……..

Câu 226. Trên cửa sổ có dạng hình chữ nhật, họa sĩ thiết kế logo hình con cá cho một doanh nghiệp kinh doanh hải sản. Logo là hình phẳng giới hạn bởi hai parabol với các kích thước được cho trong hình sau (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là decimét). Logo chỉ cho phép 50% lượng ánh sáng đi qua. Lượng ánh sáng đi qua toàn bộ cửa sổ sau khi làm logo sẽ giảm bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



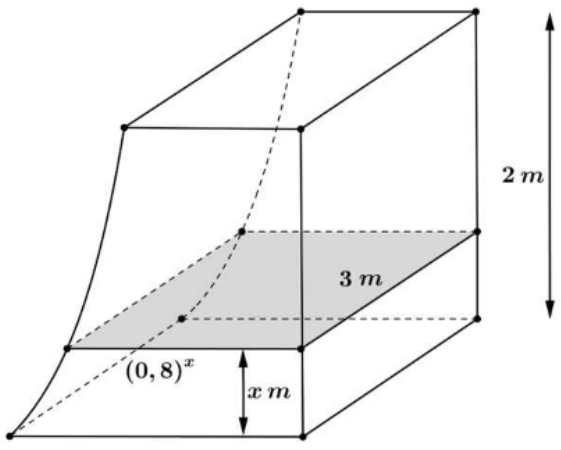
Trả lời: ……..

Câu 227. Trong xác suất thống kê thì một biến ngẫu nhiên X được gọi là có hàm mật độ $f(x)$ nếu xác suất để X nhận giá trị trong $[a,b]$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$, đường thẳng $y=a$ và $y=b$. Đặc biệt, khi $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x\geq 0\\ 0 \quad\quad , x<0\end{cases}$ trong đó λ là số thực cho trước thì X được gọi là biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với tham số λ. Chẳng hạn, tuổi thọ của một bóng đèn (đơn vị năm) là một biến ngẫu nhiên X tuân theo phân phối mũ với hệ số $\lambda=\frac{1}{5}$. Hãy tính xác suất để một bóng đèn có tuổi thọ lớn hơn 5 năm và nhỏ hơn 10 năm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Trả lời: ……..

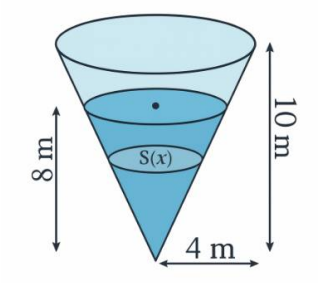
Câu 228. Một khối bê tông có chiều cao 2 mét được đặt trên mặt đất. Nếu cắt khối bê tông bởi một mặt phẳng nằm ngang và cách mặt đất x mét $(0\leq x\leq 2)$ thì được mặt cắt là một hình chữ nhật có chiều dài 3 m và chiều rộng bằng $(0,8)^x$ mét (tham khảo hình vẽ).



Tính thể tích (đơn vị m^3) của khối bê tông đó (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Trả lời: ……..

Câu 229. Một bể nước hình nón tròn xoay như hình vẽ có chiều cao 10 m và bán kính đáy 4 mét được đổ nước đến độ cao 8 mét. Công để bơm hết nước ra từ một vòi ở đỉnh bể được tính theo công thức $W = 9{,}8.\int_2^{10} x.S(x).dx$ (đơn vị kilôJun), trong đó $S(x)\left(m^2\right)$ là diện tích của lớp nước cách mặt bể $x(m)$. Tính $W(kJ)$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



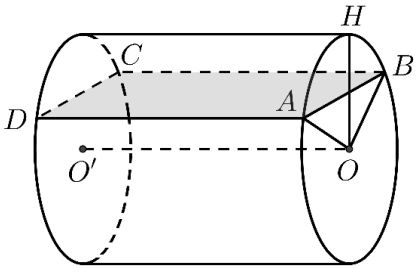
Trả lời: ……..

Câu 230. Xét phần bên trong của một thùng rượu: là một khối tròn xoay có 2 đáy là hình tròn bằng nhau và có chiều cao là 60 cm, đường cong (bên trong) của thùng là một cung tròn của đường tròn bán kính là 36 cm. Thùng rượu này chứa được tối đa bao nhiêu lít rượu? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của lít)



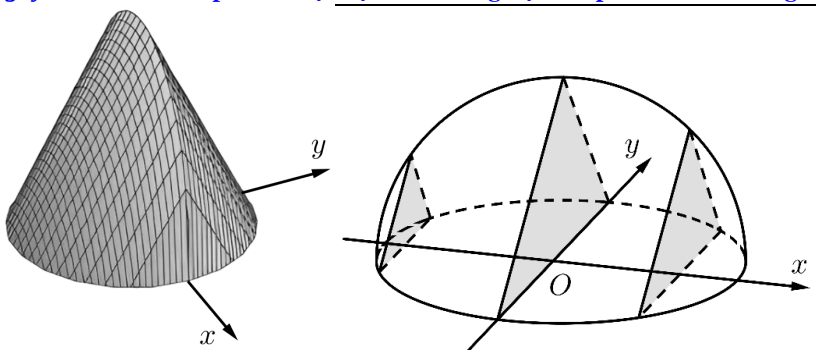
Trả lời: ……..

Câu 231. Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là 5m, có bán kính đáy 1m. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với 0,5m của đường kính đáy. Tính thể tích (theo đơn vị m^3) của lượng dầu còn lại trong bồn (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của m^3).



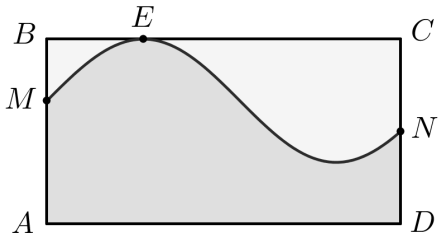
Trả lời: ……..

Câu 232. Một vật có kích thước và hình dáng như hình vẽ dưới đây. Đáy là hình tròn giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 16$, cắt vật bởi các mặt phẳng vuông góc với trục Ox ta được thiết diện là tam giác đều. Khi đó thể tích của vật thể có dạng $\frac{a\sqrt{3}}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S = a + b$.



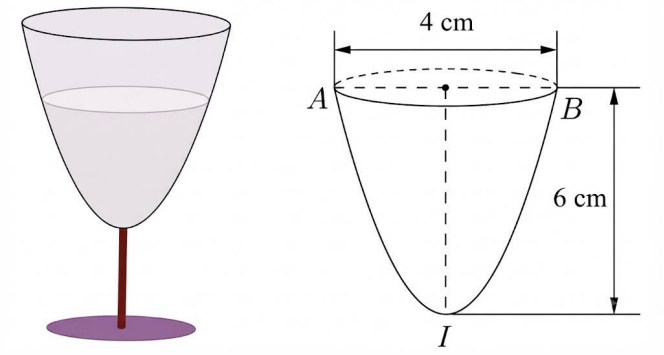
Trả lời: ……..

Câu 233. Từ một tấm tôn hình chữ nhật $ABCD$ với $AB=30$ cm, $AD=\dfrac{55\pi}{3}$ cm. Người ta cắt tấm tôn theo đường hình sin như hình vẽ bên để được hai miếng tôn. Biết $AM=20$ cm, $CN=15$ cm, $BE=5\pi$ cm. Tính thể tích (đơn vị: lít) của khối tròn xoay được tạo thành khi xoay miếng tôn lớn quanh trục AD (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của lít).



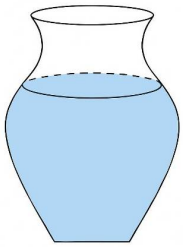
Trả lời: ……..

Câu 234. Một chiếc ly hình dạng tròn xoay, có đường kính của miệng ly là 4 cm và chiều cao là 6 cm. Biết rằng thiết diện của chiếc ly cắt bởi mặt phẳng đối xứng là một parabol. Tính thể tích của chiếc ly đó (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của cm^3).



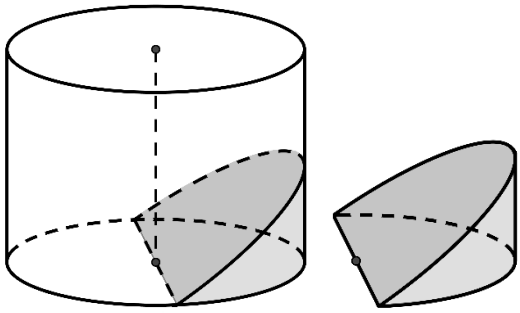
Trả lời: ……..

Câu 235. Một bình hoa có dạng khối tròn xoay với chiều cao là $25cm$ (tham khảo hình vẽ). Khi cắt bình hoa theo một mặt phẳng vuông góc với trục của nó thì ta luôn được thiết diện là một hình tròn có bán kính $R=\dfrac{4}{9}x^3-\dfrac{5}{3}x^2+\dfrac{4}{3}x+\dfrac{25}{36}(dm)$ với $x\in\left[0;\dfrac{5}{2}\right]$ là khoảng cách từ mặt cắt tới mặt đáy của bình hoa (tính theo đơn vị dm). Lượng nước cần đổ vào bình để mức nước trong bình cao bằng $\dfrac{2}{3}$ chiều cao của bình chiếm tỉ lệ bao nhiêu phần trăm so với thể tích của bình hoa? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



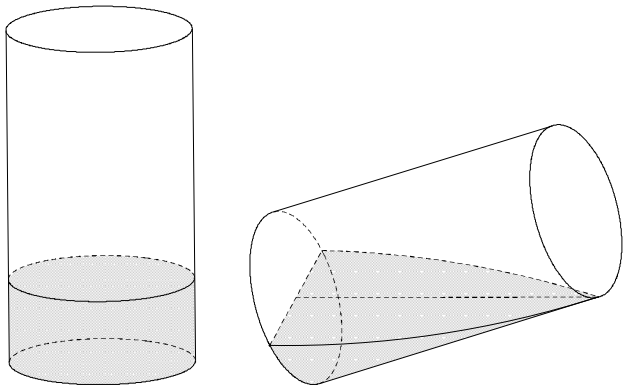
Trả lời: ……..

Câu 236. Từ một khúc gỗ hình trụ có đường kính 30 cm, người ta cắt khúc gỗ bởi một mặt phẳng đi qua đường kính đáy và nghiêng với đáy một góc $45°$ để lấy một hình nêm (xem hình minh họa dưới). Tính thể tích (cm^3) của hình nêm.



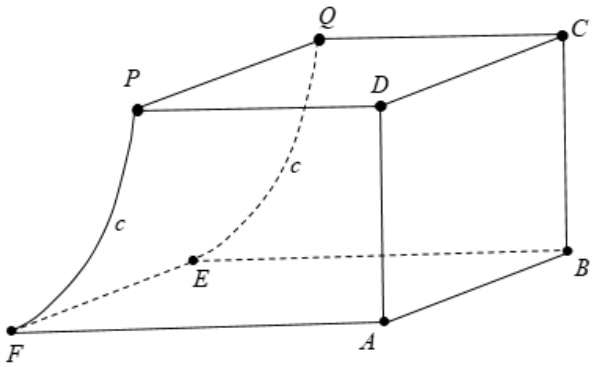
Trả lời: ……..

Câu 237. Có một cốc nước thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là $6\,\text{cm}$, chiều cao lòng cốc là $10\,\text{cm}$ đang đựng một lượng nước. Tính thể tích (đơn vị cm^3) lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì đáy mực nước trùng với đường kính đáy.



Trả lời: ……..

Câu 238. Một chi tiết máy được thiết kế như hình vẽ bên.



Các tứ giác $ABCD, CDPQ$ là các hình vuông cạnh $2,5cm$. Tứ giác $ABEF$ là hình chữ nhật có $BE = 3,5cm$. Mặt bên $PQEF$ được mài nhẵn theo đường parabol (P) có đỉnh parabol nằm trên cạnh EF. Thể tích của chi tiết máy bằng bao nhiêu centimét khối (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của centimét khối)?

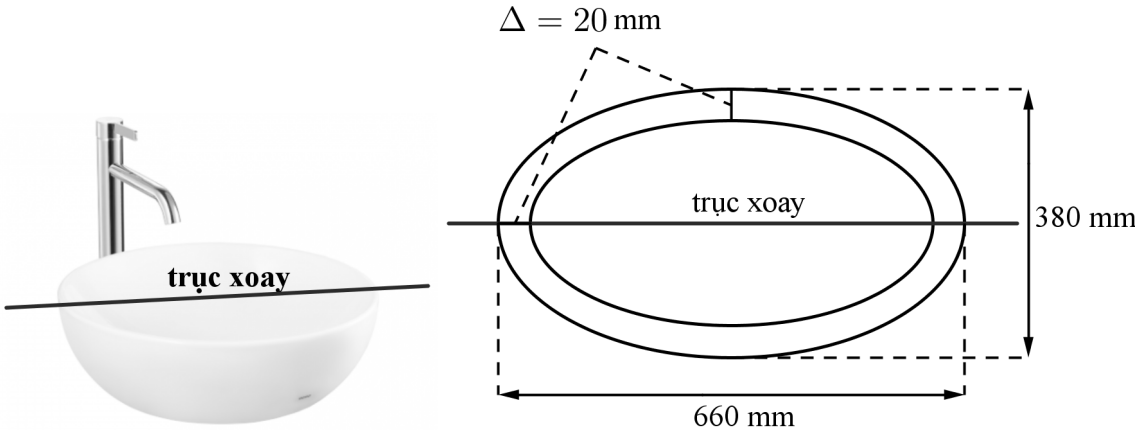
Trả lời: ……..

Câu 239. Hai ống nhựa PVC hình trụ có cùng bán kính $R = 5$ cm xuyên qua nhau sao cho trục của hai ống cắt và vuông góc với nhau (xem hình minh họa). Tính thể tích phần chung của hai ống nhựa đó. *(bề dày của ống nhựa là không đáng kể; đơn vị tính là* cm^3 *và đáp số được làm tròn đến hàng đơn vị)*



Trả lời: ……..

Câu 240. Hình elip được ứng dụng nhiều trong thực tiễn, đặc biệt là kiến trúc, xây dựng, thiết bị nội thất,. Mặt trong (lọt lòng) và ngoài (phủ bì) của một bồn rửa (lavabo) bằng sứ có hình dạng là một nửa khối tròn xoay khi quay quanh một trục của 2 elip có chung các trục đối xứng (hình minh họa). Thông số kĩ thuật mặt trên của bồn rửa: dài × rộng là 660×380 mm (phủ bì) và elip (lọt lòng) có trục lớn, trục nhỏ ít hơn elip phủ bì một khoảng 40 mm. Tính thể tích chứa nước của bồn rửa (đơn vị: lít) (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

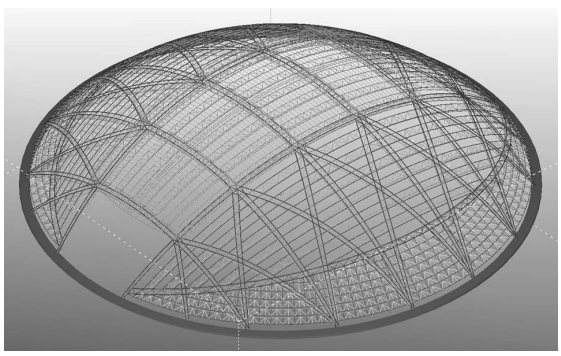


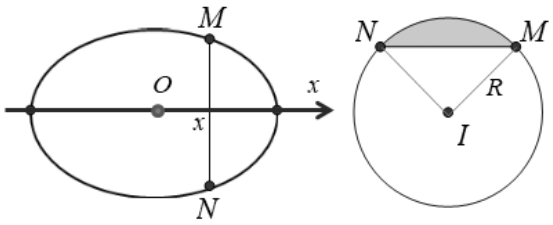
Trả lời: ……..

Câu 241. Sân vận động Sport Hub (Singapore) là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức tại Singapore năm 2015. Nền sân là một elip (E) có trục lớn dài $150m$, trục bé dài $90m$ (hình vẽ). Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của (E) và cắt elip ở M, N (hình vẽ) thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm I (phần tô đậm trong hình 4) với MN là một dây cung và góc $\widehat{MIN} = 90^0$. Để lắp máy điều

hòa không khí thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu là mái không đáng kể. Hỏi thể tích phần không gian bên trong sân vận động bằng nhiêu kilômét vuông? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của kilômét vuông).

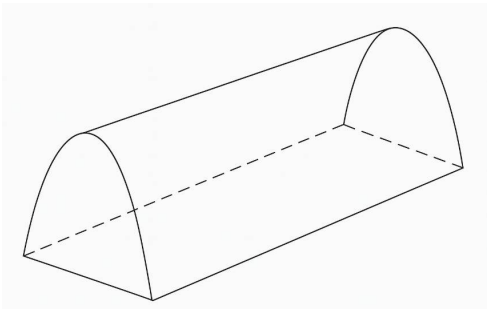






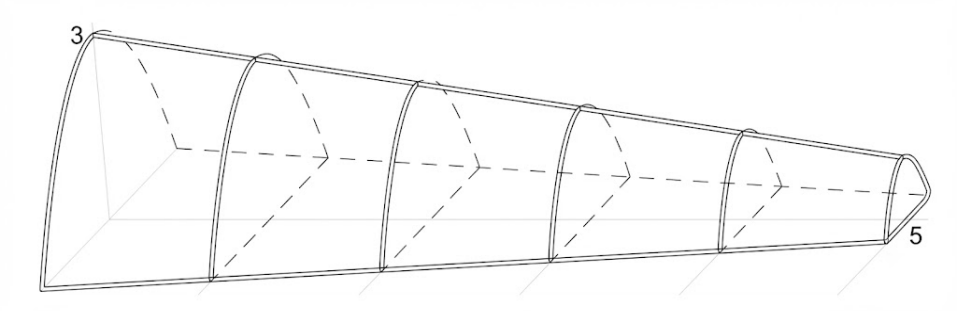
Trả lời: ……..

Câu 242. Nhân dịp đi dã ngoại, lớp 12A dự kiến dựng một cái trại các khung xương có dạng hình parabol như hình vẽ. Nền của lều trại là một hình chữ nhật có kích thước bề ngang 3 mét, chiều dài 5 mét, đỉnh trại cách nền 3 mét. Thể tích phần không gian bên trong lều trại bằng bao nhiêu mét khối?



Trả lời: ……..

Câu 243. Cho một mô hình $3D$ mô phỏng một đường hầm như hình vẽ bên dưới.



Biết rằng đường hầm mô hình có chiều dài $5(\text{cm})$; khi cắt hình này bởi mặt phẳng vuông góc với đáy của nó, ta được thiết diện là một hình parabol có độ dài đáy gấp đôi chiều cao parabol. Chiều cao của mỗi thiết diện parobol cho bởi công thức $y=3-\frac{2}{5}x\ (\text{cm})$, với $x\ (\text{cm})$ là khoảng cách tính từ lối vào lớn hơn

của đường hầm mô hình. Tính thể tích (theo đơn vị cm^3) không gian bên trong đường hầm mô hình (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Trả lời: ……..

Câu 244. Một quả bóng bầu dục theo quy định được sử dụng trong giải bóng bầu dục quốc gia có kích thước 28cm từ đầu này đến đầu kia và đường kính 17cm ở phần dày nhất (quy định cho phép thay đổi một chút về các kích thước này)



Hình dạng của một quả bóng bầu dục có kích thước nói trên có thể được tạo thành khi quay phần diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$, trục hoành và các đường thẳng $x=-4; x=24$, trong đó x tính bằng cm. Thể tích (đơn vị: cm^3, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị) của quả bóng bầu dục có kích thước nói trên bằng bao nhiêu.

Trả lời: ……..

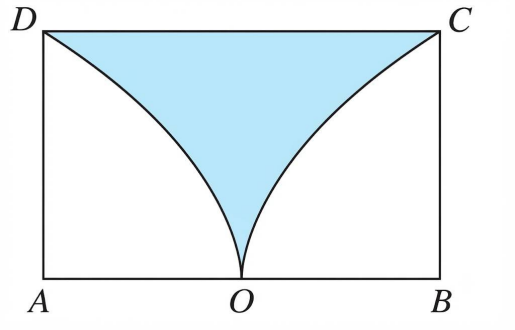
Câu 245. Một nhà máy nhiệt điện sử dụng 100 máng Parabol thu nhiệt năng lượng mặt trời có cùng kích thước, bề mặt cong đều nhau (tham khảo hình vẽ).



Mỗi máng có chiều rộng $2m$, bề dày của khối silic làm mặt máng là $2dm$, chiều dài $3m$. Đặt máng tiếp giáp mặt đất có điểm cao nhất của khối silic làm mặt máng so với mặt đất là $5dm$. Khi đó thể tích của khối silic làm 100 mặt máng bằng bao nhiêu m^3?

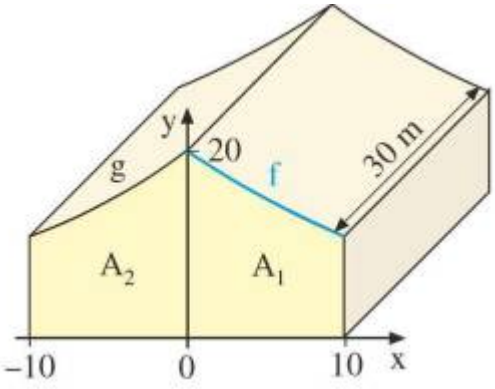
Trả lời: ……..

Câu 246. Từ hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB=8cm$ và chiều rộng $BC=4cm$, người ta cắt bỏ miền (R) được giới hạn bởi cạnh CD của hình chữ nhật và hai nửa đường thẳng parabol có chung đỉnh là trung điểm cạnh AB, chúng lần lượt đi qua hai đầu mút C, D của hình chữ nhất đó (phần tô đậm như hình vẽ). Phần còn lại cho quay quanh trục AB để tạo nên một đồ vật làm trang trí, thể tích của vật trang trí đó bằng bao nhiêu cm^3. Viết kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.



Trả lời: ……..

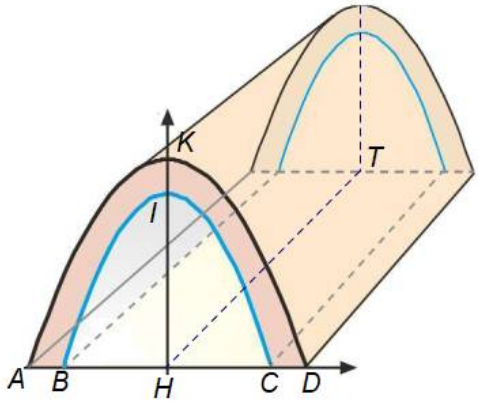
Câu 247. Thể tích không khí của chiếc lều hội chợ trong hình bên dưới là bao nhiêu ML (megalit) (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



Biết biên dạng mái lều được cho bởi hai hàm biên: $f(x)=20\cdot e^{-\frac{1}{40}x}$, $g(x)=20\cdot e^{\frac{1}{40}x}$

Trả lời: ……..

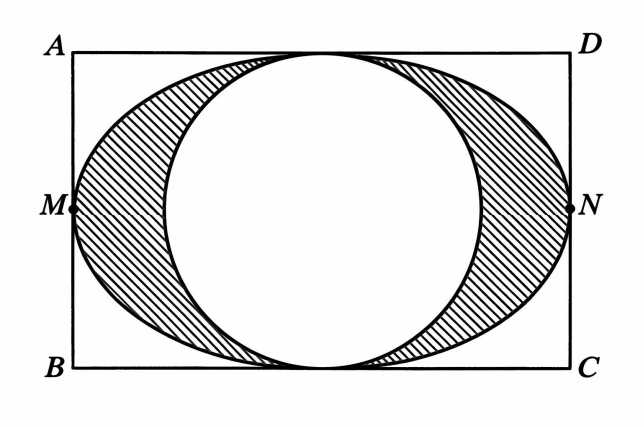
Câu 248. Trên một tuyến đường thẳng có một đoạn phải đi xuyên qua một quả núi nhỏ, do đó người ta đã tạo một hầm chui để thuận tiện cho các phương tiện giao thông di chuyển, vòm của hầm chui được đổ bê tông có dạng như hình vẽ dưới đây



Cho biết $BC=8(m); IH=5(m); IK=0,6(m); AB=CD=0,5(m); HT=10(m)$. Biết khi cắt vòm của hầm chui bằng mặt phẳng vuông góc với trục của tuyến đường ta luôn có thiết diện là một hình phẳng được giới hạn bởi hai parabol và giao tuyến của mặt cắt với mặt đường. Hỏi cần bao nhiêu mét khối bê tông để đổ vòm của hầm chui. (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

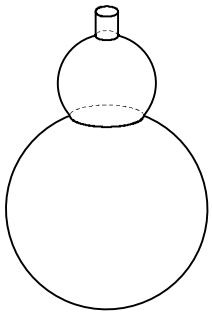
Trả lời: ……..

Câu 249. Một vật trang trí có dạng một khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (R) (phần gạch chéo trong hình vẽ) quanh trục MN. Biết rằng $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=6cm, AD=10cm$ và M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Hai đường cong là đường Elip có hình chữ nhật cơ sở là $ABCD$ và đường tròn tiếp xúc với hai cạnh AD và BC (tham khảo hình vẽ). Tính thể tích của vật trang trí đó (*kết quả làm tròn đến hàng phần chục theo đơn vị* cm^3).



Trả lời: ……..

Câu 250. Người ta cắt hai hình cầu có bán kính lần lượt là $R=13cm$ và $r=\sqrt{41}cm$ để làm hồ lô đựng rượu như hình vẽ bên. Biết đường tròn giao của hai hình cầu có bán kính $r'=5cm$ và nút đựng rượu là một hình trụ có bán kính đáy bằng $\sqrt{5}\ cm$, chiều cao bằng $4cm$. Giả sử độ dày vỏ hồ lô không đáng kể. Hỏi hồ lô đựng được bao nhiêu lít rượu? (kết quả làm tròn đến phần mười của decimét khối).

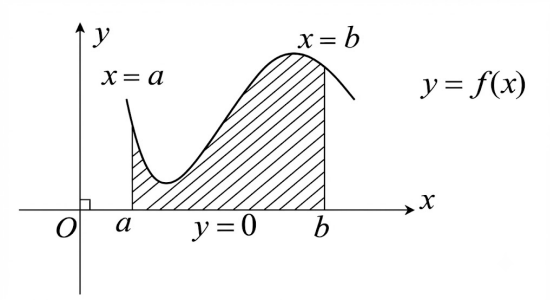


Trả lời: ……..

BÀI 13
ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

1. Diện tích hình thang cong

a. Hình phẳng giới hạn bởi một đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$ và $x=b$

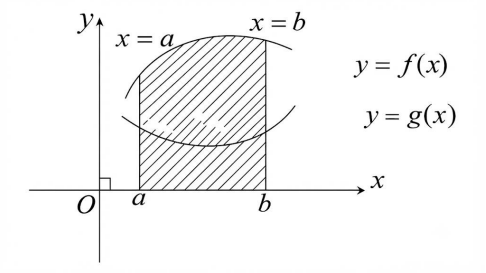


Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Khi đó, diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành Ox $(y=0)$ và hai đường thẳng $x=a, x=b$ $(a<b)$ được tính bởi công thức:

$$S=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

Chú ý: Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên $[a;b]$ thì: $\int_a^b |f(x)|\,dx=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$.

b. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a$ và $x=b$

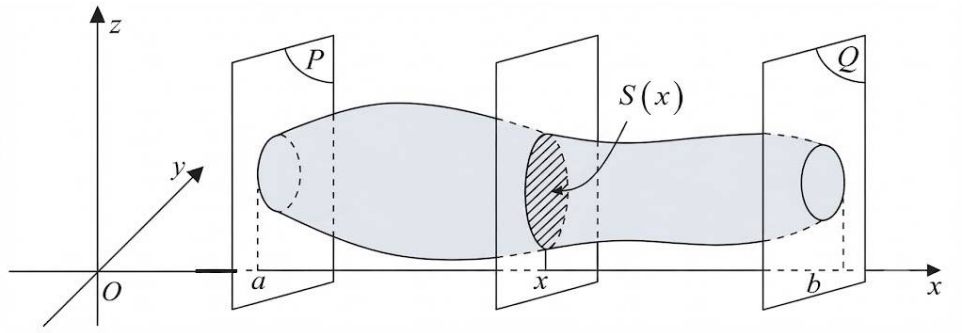


Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Khi đó, diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính bởi công thức: $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$

Chú ý: Nếu hiệu $f(x)-g(x)$ không đổi dấu trên $[a;b]$ thì: $\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx=\left|\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx\right|$.

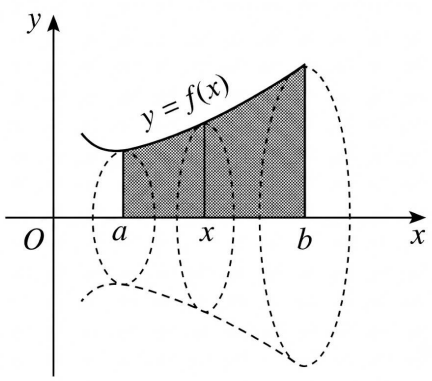
2. Thể tích hình khối

a. Thể tích của vật thể



Trong không gian, cho một vật thể nằm trong khoảng không gian giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b. Mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x $(a \le x \le b)$ cắt vật thể theo mặt cắt có diện tích $S(x)$. Khi đó, nếu $S(x)$ là hàm số liên tục trên $[a;b]$ thì thể tích của vật thể được tính bởi công thức: $V = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x$

b. Thể tích khối tròn xoay



Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên $[a;b]$.

Khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành Ox và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ quanh trục hoành (trục Ox) ta được một khối gọi là khối tròn xoay.

Khi cắt khối tròn xoay đó bởi một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm $x \in [a;b]$ ta được một hình tròn có bán kính $f(x)$.

Thể tích khối tròn xoay này là: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

CHỦ ĐỀ 1
DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG VÀ THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

DẠNG 1
DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

1. Dạng 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi một hàm số $y=f(x)$, trục hoành $(y=0)$ và hai đường thẳng $x=a, x=b$.

Phương pháp giải:

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $\begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \\ x=a \\ x=b \end{cases}$ là $S=\int_a^b |f(x)|\,dx$

Để bỏ dấu giá trị tuyệt đối của $|f(x)|$ ta làm như sau:

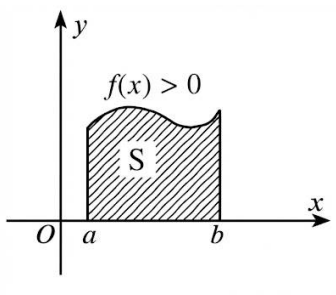
Bước 1: Giải $f(x)=0$ tìm nghiệm $x_1, x_2, ..., x_n \in (a;b)$ $(a<x_1<x_2<...<x_n<b)$.

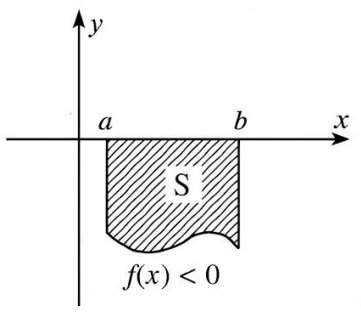
Bước 2: Tính $S=\int_a^{x_1}|f(x)|\,dx+\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|\,dx+...+\int_{x_n}^{b}|f(x)|\,dx=\left|\int_a^{x_1}f(x)\,dx\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2}f(x)\,dx\right|+...+\left|\int_{x_n}^{b}f(x)\,dx\right|$

Chú ý: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$

- Nếu $f(x)\geq 0$ trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành Ox $(y=0)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính bởi: $S=\int_a^b f(x)\,dx$

- Nếu $f(x)\leq 0$ trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành Ox $(y=0)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính bởi: $S=-\int_a^b f(x)\,dx$





2. Dạng 2: Tính diện hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a, x=b.$

Phương pháp giải:

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \\ x=a \\ x=b \end{cases}$ là $S=\int\limits_a^b \left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x$

Để bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta làm như sau:

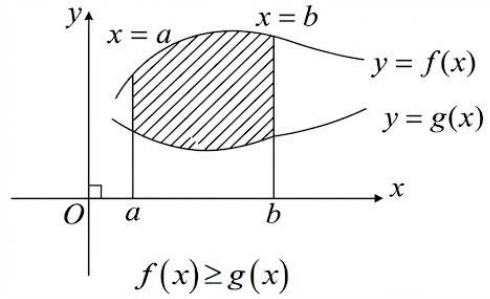
Bước 1: Giải phương trình $f(x)-g(x)=0$ tìm nghiệm $x_1, x_2, ..., x_n \in (a;b)$ $(a<x_1<x_2<...<x_n<b)$.

Bước 2: Tính $S=\int\limits_a^{x_1}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{x_1}^{x_2}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x+...+\int\limits_{x_n}^{b}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x$

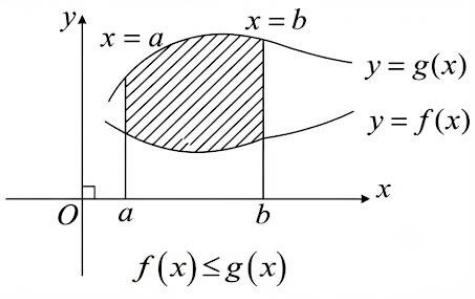
$=\left|\int\limits_a^{x_1}\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x\right|+...+\left|\int\limits_{x_n}^{b}\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x\right|$

Chú ý: Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên $[a;b]$.

- Nếu $f(x)\geq g(x)$ trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính bởi công thức: $S=\int\limits_a^b\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$
- Nếu $f(x)\leq g(x)$ trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính bởi công thức: $S=\int\limits_a^b\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$

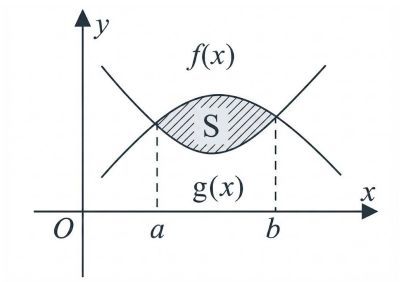


$f(x)\geq g(x)$



$f(x)\leq g(x)$

3. Dạng 3: Tính diện hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$.



Phương pháp giải:

Bước 1: Giải phương trình $f(x)-g(x)=0$ tìm nghiệm $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$ $(x_1<x_2<...<x_{n-1}<x_n)$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$ là $S = \int\limits_{x_1}^{x_n} \left| f(x) - g(x) \right| \mathrm{d}x$

Bước 2: Để bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta làm như sau:

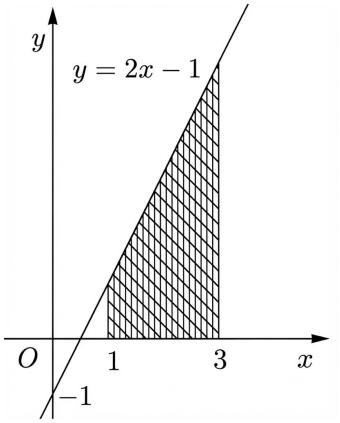
$$S = \int\limits_{x_1}^{x_2} \left| f(x) - g(x) \right| \mathrm{d}x + \int\limits_{x_2}^{x_3} \left| f(x) - g(x) \right| \mathrm{d}x + \ldots + \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} \left| f(x) - g(x) \right| \mathrm{d}x$$

$$= \left| \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(f(x) - g(x) \right) \mathrm{d}x \right| + \left| \int\limits_{x_2}^{x_3} \left(f(x) - g(x) \right) \mathrm{d}x \right| + \ldots + \left| \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} \left(f(x) - g(x) \right) \mathrm{d}x \right|$$

Chú ý: Khi tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường mà không thuộc ba dạng trên, ta thường vẽ đồ thị hàm số của các đường này trên cùng một hệ trục Oxy, rồi dựa vào đồ thị ta tính được diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường đó.

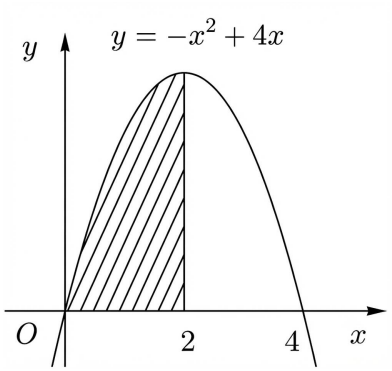
Bài 1. Tính diện tích hình phẳng phần gạch chéo trong các hình vẽ bên dưới đây.

a)



Hình 1

b)



Hình 2

Lời giải

a) Từ hình 1, ta có : Hình phẳng phần gạch chéo được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x - 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 3$. Do đó diện tích hình phẳng cần tìm là:

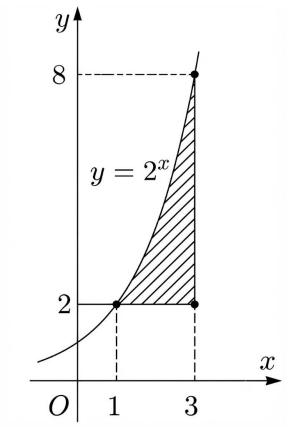
$$S = \int\limits_{1}^{3} (2x - 1)\,\mathrm{d}x = \left(x^2 - x \right) \Big|_1^3 = 6 \text{ (đơn vị diện tích)}$$

b) Từ hình 2, ta có : Hình phẳng phần gạch chéo được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 2$. Do đó diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int\limits_{0}^{2} \left(-x^2 + 4x \right) \mathrm{d}x = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_0^2 = \frac{16}{3} \text{ (đơn vị diện tích)}$$

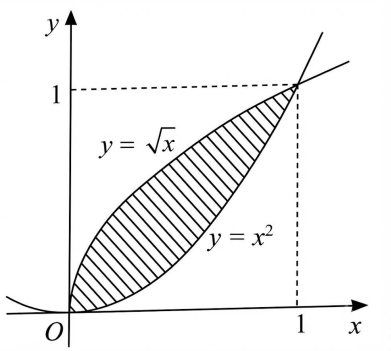
Bài 2. Tính diện tích hình phẳng phần gạch chéo trong các hình vẽ bên dưới đây.

a)



Hình 1

b)



Hình 2

Lời giải

a) Từ hình 1, ta có : Hình phẳng phần gạch chéo được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2^x$, $y=2$ và hai đường thẳng $x=1, x=3$. Do đó diện tích hình phẳng cần tìm là:

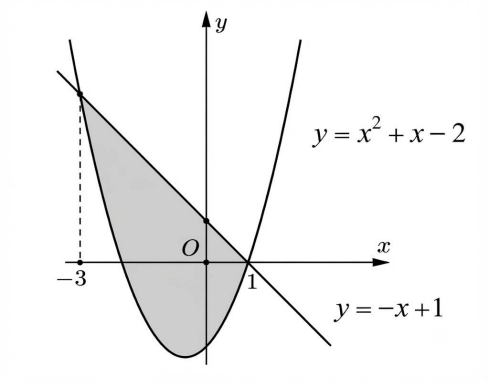
$$S=\int_1^3\left(2^x-2\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{2^x}{\ln 2}-2x\right)\Big|_1^3=\frac{6}{\ln 2}-4 \text{ (đơn vị diện tích)}$$

b) Từ hình 2, ta có : Hình phẳng phần gạch chéo được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$. Do đó diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3} \text{ (đơn vị diện tích)}$$

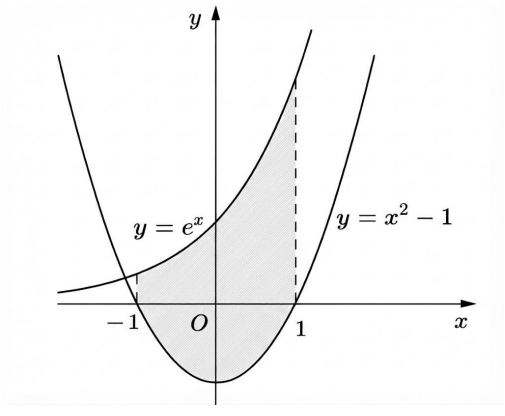
Bài 3. Tính diện tích hình phẳng phần tô đậm trong các hình vẽ bên dưới đây.

a)



Hình 1

b)



Hình 2

Lời giải

a) Từ hình 1, ta có : Hình phẳng phần tô đậm được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2+x-2$ và $y=-x+1$.Do đó diện tích hình phẳng cần tìm là:

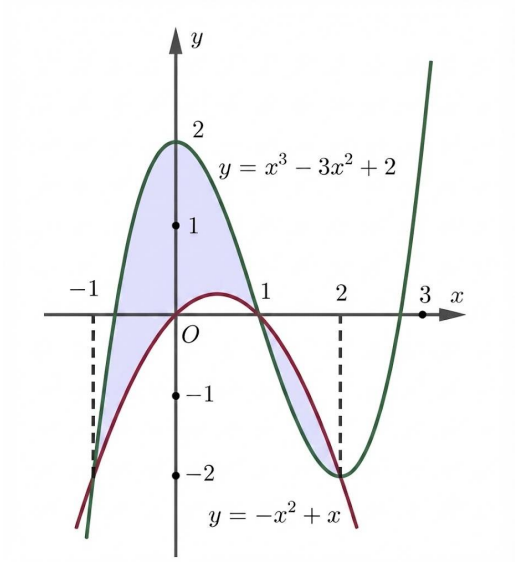
$$S=\int_{-3}^1\left[-x+1-\left(x^2+x-2\right)\right]\mathrm{d}x=\int_{-3}^1\left(-x^2-2x+3\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right)\Big|_{-3}^1=\frac{32}{3}\text{(đơn vị diện tích)}$$

b) Từ hình 2, ta có : Hình phẳng phần tô đậm được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=e^x$, $y=x^2-1$ và và hai đường thẳng $x=-1, x=1$. Do đó diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S=\int_{-1}^{1}\left[e^x-\left(x^2-1\right)\right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left(e^x-x^2+1\right)\mathrm{d}x=\left(e^x-\frac{1}{3}x^3+x\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{e^2+2e-1}{e}\text{ (đơn vị diện tích)}$$

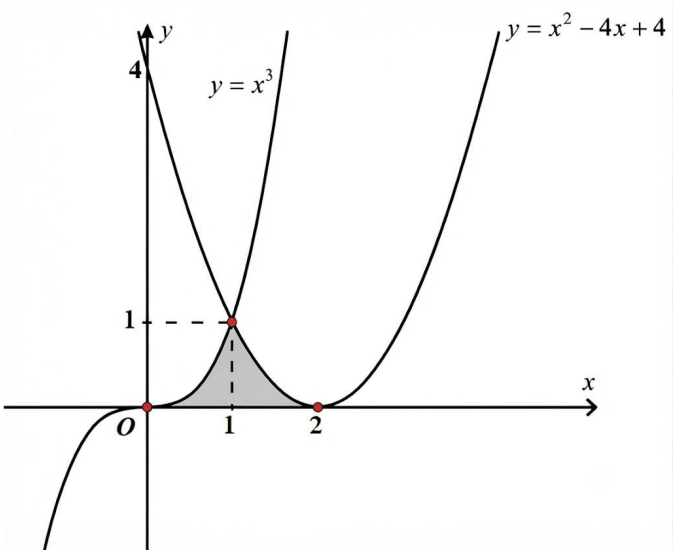
Bài 4. Tính diện tích hình phẳng phần tô đậm trong các hình vẽ bên dưới đây.

a)



Hình 1

b)



Hình 2

Lời giải

b) Từ hình 2, ta thấy hình phẳng cần tính diện tích gồm 2 phần:

Phần 1: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$, $y=-x^2+x$, $x=-1$, $x=1$.

Phần 2: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$, $y=-x^2+x$, $x=1$, $x=2$.

Do đó diện tích cần tính là:

$$S=\int_{-1}^{1}\left[x^3-3x^2+2-\left(-x^2+x\right)\right]\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\left[-x^2+x-\left(x^3-3x^2+2\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(x^3-2x^2-x+2\right)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\left(-x^3+2x^2+x-2\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_{-1}^{1}+\left(-\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_{1}^{2}=\frac{37}{12}\text{ (đơn vị diện tích).}$$

b) Từ hình 2, ta thấy hình phẳng cần tính diện tích gồm 2 phần:

Phần 1: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3$, trục Ox, $x=0$, $x=1$.

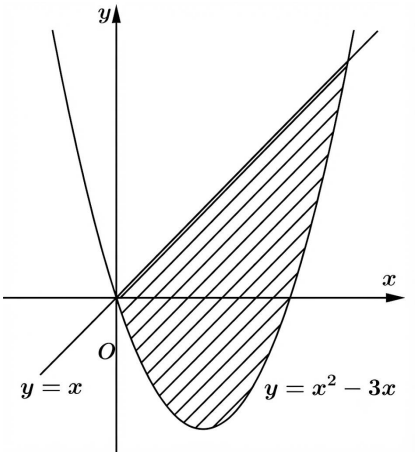
Phần 2: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-4x+4$, trục Ox, $x=1$, $x=2$.

Do đó diện tích cần tính là:

$$S=\int_{0}^{1}x^3\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\left(x^2-4x+4\right)\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{1}+\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right)\Big|_{1}^{2}=\frac{7}{12}\text{ (đơn vị diện tích).}$$

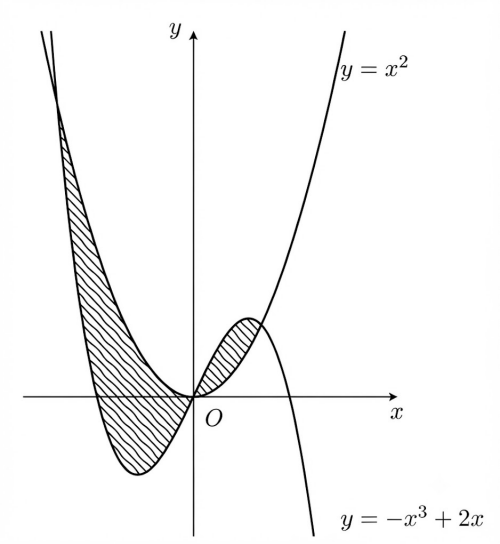
Bài 5. Tính diện tích hình phẳng phần gạch chéo trong các hình vẽ bên dưới đây.

a)



Hình 1

b)



Hình 2

Lời giải

a) Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x$ và $y = x$ là:

$$x^2 - 3x = x \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình 1 là :

$$S = \int_0^4 \left[x - \left(x^2 - 3x\right)\right] \mathrm{d}x = \int_0^4 \left(4x - x^2\right) \mathrm{d}x = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{32}{3} \text{ (đơn vị diện tích).}$$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x$ và $y = x^2$ là:

$$-x^3 + 2x = x^2 \Leftrightarrow x\left(x^2 + x - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình 2 là :

$$S = \int_{-2}^0 \left[x^2 - \left(-x^3 + 2x\right)\right] \mathrm{d}x + \int_0^1 \left(-x^3 + 2x - x^2\right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-2}^0 \left(x^3 - x^2 - 2x\right) \mathrm{d}x + \int_0^1 \left(-x^3 - x^2 + 2x\right) \mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_{-2}^0 + \left(-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2\right)\Bigg|_0^1 = \frac{17}{12} \text{ (đơn vị diện tích).}$$

Bài 6. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

a) Đồ thị hàm số $y = x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$.

b) Đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 1$.

c) Đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 4$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 3$.

d) Đồ thị hàm số $y=(x+2)^2-1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=2$.

Lời giải

a) Ta có: $x^2=0\Leftrightarrow x=0\in[0;2]$

Diện tích hình phẳng là $S=\int_0^2|x^2|\mathrm{d}x=\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2=\frac{8}{3}$.

b) Ta có: $x^3+1=0\Leftrightarrow x=-1\notin[0;1]$

Diện tích hình phẳng là: $S=\int_0^1|x^3+1|\mathrm{d}x=\int_0^1(x^3+1)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{x^4}{4}+x\right)\right|_0^1=\frac{5}{4}$.

c) Ta có: $x^4-3x^2-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=-1(L)\\x^2=4(N)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\notin[0;3]\\x=2\in[0;3]\end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng là: $S=\int_0^3|x^4-3x^2-4|\mathrm{d}x=\left|\left(\int_0^2(x^4-3x^2-4)\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_2^3(x^4-3x^2-4)\mathrm{d}x\right|$

$=\left|\left.\left(\frac{x^5}{5}-x^3-4x\right)\right|_0^2\right|+\left|\left.\left(\frac{x^5}{5}-x^3-4x\right)\right|_2^3\right|=\frac{48}{5}+\frac{96}{5}=\frac{144}{5}$.

d) $y=(x+2)^2-1=x^2+4x+3$ liên tục và không âm trên đoạn $[1;2]$

Diện tích hình phẳng là: $S=\int_0^2|x^2+4x+3|\mathrm{d}x=\int_0^2(x^2+4x+3)\mathrm{d}x=\left.\frac{x^3}{3}+2x^2+3x\right|_0^2=\frac{34}{3}$

Bài 7. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

a) Đồ thị hàm số $y=\cos x-2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$ và $x=\pi$.

b) Đồ thị hàm số $y=\mathrm{e}^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$.

c) Đồ thị hàm số $y=3^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0, x=2$.

Lời giải

a) Vì $\cos x-2<0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ nên diện tích hình phẳng cần tìm là:

$S=\int_0^\pi|\cos x-2|\mathrm{d}x=\int_0^\pi(2-\cos x)\mathrm{d}x=(2x+\sin x)\Big|_0^\pi=2\pi$.

b) Vì $\mathrm{e}^x>0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ nên diện tích hình phẳng cần tìm là:

$S=\int_0^2|e^x|\mathrm{d}x=\int_0^2 e^x\mathrm{d}x=\left.e^x\right|_0^2=e^2-1.$

d) Vì $3^x>0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ nên diện tích hình phẳng cần tìm là:

$S=\int_0^2|3^x|\mathrm{d}x=\int_0^2 3^x\mathrm{d}x=\left.\frac{3^x}{\ln 3}\right|_0^2=\left(\frac{3^2}{\ln 3}-\frac{3^0}{\ln 3}\right)=\frac{8}{\ln 3}$

Bài 8. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

a) Đồ thị của hai hàm số $y=x^2$, $y=2x$ và hai đường thẳng $x=0, x=1$

b) Đồ thị của hai hàm số $y=x^2, y=2-x$ và hai đường thẳng $x=0, x=2.$

c) Đồ thị của hai hàm số $y=-x^2+2x+1$, $y=2x^2-4x+1$ và hai đường thẳng $x=0, x=2$

d) Đồ thị của các hàm số $y=x^3, y=2x-1$ và hai đường thẳng $x=1, x=2$.

Lời giải

a) Ta có $x^2=2x\Leftrightarrow x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\notin[0;1]\\x=0\in[0;1]\end{array}\right.$

Diện tích cần tìm là $S=\int\limits_0^1\left|x^2-x\right|dx=\left|\int\limits_0^1\left(x^2-x\right)dx\right|=\dfrac{4}{3}$

b) Ta có $x^2=-x+2\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\notin[0;2]\\x=1\in[0;2]\end{array}\right.$

Khi đó, diện tích cần tìm là :

$$S=\int\limits_0^2\left|x^2+x-2\right|\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left|x^2+x-2\right|\mathrm{d}x+\int\limits_1^2\left|x^2+x-2\right|\mathrm{d}x=\left|\int\limits_0^1\left(x^2+x-2\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_1^2\left(x^2+x-2\right)\mathrm{d}x\right|$$

$$=\left|\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_0^1\right|+\left|\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_1^2\right|=\left|\frac{-7}{6}\right|+\left|\frac{11}{6}\right|=3.$$

c) Ta có $-x^2+2x+1=2x^2-4x+1\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in[0;2]\\x=2\in[0;2]\end{array}\right.$

Khi đó, diện tích cần tìm là :

$$S=\int\limits_0^2\left|2x^2-4x+1-\left(-x^2+2x+1\right)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\left|3x^2-6x\right|\mathrm{d}x=\left|\int\limits_0^2\left(3x^2-6x\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\left(3x^2-x^3\right)\Big|_0^2\right|=4$$

d) Ta có: $x^3=2x-1\Leftrightarrow x^3-2x+1=0\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(x^2+x-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$

$\Rightarrow x^3-2x+1\geq 0, \forall x\in[1;2]$

Khi đó, diện tích hình phẳng cần tính là: $S=\int\limits_1^2\left(x^3-2x+1\right)dx=\left(\frac{1}{4}x^4-x^2+x\right)\Big|_1^2=\frac{7}{4}$.

Bài 9. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

a) Đồ thị hàm số $y=x^2+x-2$ và trục hoành.

b) Đồ thị hàm số $y=x^2$ và $y=2-x^2$.

c) Đồ thị hàm số $y=-x^3+12x$ và $y=-x^2$.

d) Đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và $y=x-x^2$.

e) Đồ thị hàm số $y=x^2-1$, trục hoành và đường thẳng $x=3$.

Lời giải

a) Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là nghiệm của phương trình:

$$x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right..$$

Diện tích hình phẳng $S=\int\limits_{-2}^{1}\left|x^2+x-2\right|\mathrm{d}x =-\int\limits_{-2}^{1}\left(x^2+x-2\right)\mathrm{d}x=\dfrac{9}{2}$.

b) Xét phương trình $x^2=2-x^2 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Vậy diện tích hình phẳng đã cho bằng $\int\limits_{-1}^{1}\left|x^2-\left(2-x^2\right)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}\left|2x^2-2\right|\mathrm{d}x=\dfrac{8}{3}$.

c) Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+12x$ và $y=-x^2$ là:

$$-x^3+12x=-x^2 \Leftrightarrow x^3-x^2-12x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$$

$$S=\int\limits_{-3}^{4}\left|x^3-x^2-12x\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-3}^{0}\left|x^3-x^2-12x\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{4}\left|x^3-x^2-12x\right|\mathrm{d}x$$

$$=\left|\int\limits_{-3}^{0}\left(x^3-x^2-12x\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_{0}^{4}\left(x^3-x^2-12x\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-6x^2\right)\Big|_{-3}^{0}\right|+\left|\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-6x^2\right)\Big|_{0}^{4}\right|$$

$$=\left|\frac{-99}{4}\right|+\left|\frac{-160}{3}\right|=\frac{937}{12}.$$

d) Phương trình hoành độ giao điểm đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và $y=x-x^2$ là:

$$x^3-x=x-x^2 \Leftrightarrow x^3+x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

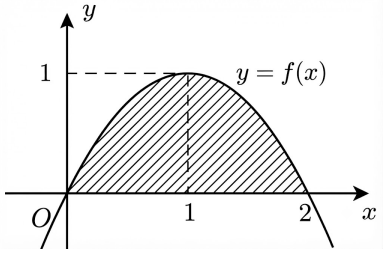
Suy ra $S=\int\limits_{-2}^{1}\left|x^3+x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{0}\left(x^3+x^2-2x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{1}\left(x^3+x^2-2x\right)\mathrm{d}x$

$$=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{-2}^{0}-\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{0}^{1}=\frac{8}{3}-\left(\frac{-5}{12}\right)=\frac{37}{12}.$$

e) Phương trình hoành độ giao điểm của các đường $y=x^2-1$ và Ox là: $x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Diện tích hình phẳng là: $S=\int\limits_{-1}^{3}\left|x^2-1\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}\left(-x^2+1\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{3}\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_{-1}^{1}+\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_{1}^{3}=8$

Bài 10. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm đa thức bậc hai và có đồ thị như vẽ . Tính diện tích hình phẳng là phần gạch chéo trong hình vẽ bên dưới .



Lời giải

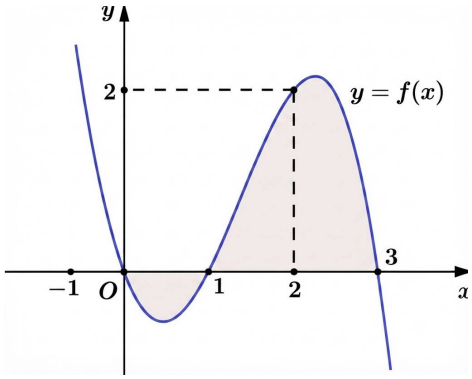
$y=f\left(x\right)$ là hàm đa thức bậc hai nên có dạng: $y=ax^2+bx+c$

Từ hình vẽ, ta có đồ thị có đỉnh $\left(1;1\right)$ và đi qua các điểm $\left(0;0\right)$, $\left(2;0\right)$ nên có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a}=1 \\ c=0 \\ 4a+2b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ c=0 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow y=-x^2+2x$$

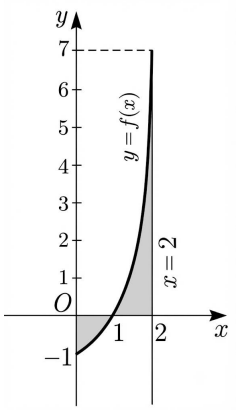
Diện tích hình phẳng (phần gạch chéo) là: $S=\int\limits_0^2\left(-x^2+2x\right)\mathrm{d}x=\left(-\dfrac{x^3}{3}+x^2\right)\Big|_0^2=\dfrac{4}{3}$ (đơn vị diện tích).

Bài 11. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm đa thức bậc ba và có đồ thị như vẽ . Tính diện tích hình phẳng là phần tô đậm trong hình vẽ bên dưới .



Lời giải

Bài 12. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx+c$ có đồ thị như vẽ . Tính diện tích hình phẳng (phần tô đậm) là giới hạn bởi các đồ thị hàm số là $y=f\left(x\right)$ và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$.



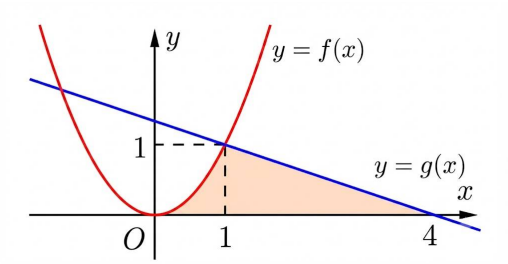
Lời giải

Đồ thị hàm số $y=f(x)=ax^3+bx+c$ đi qua các điểm $(0;-1)$, $(1;0)$ và $(2;7)$ nên có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a.0+b.0+c=-1 \\ -a-b+c=0 \\ 8a+2b+c=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-1 \\ a=1 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow y=x^3-1$$

Diện tích hình phẳng (phần tô đậm) là: $S=\int\limits_0^2 \left(x^3-1\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^4}{4}-x\right)\Big|_0^2=2$ (đơn vị diện tích).

Bài 13. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc hai và $y=g(x)$ là hàm đa thức bậc nhất và có đồ thị như vẽ . Tính diện tích hình phẳng là phần tô đậm trong hình vẽ bên dưới .



Lời giải

Từ hình vẽ, ta có:

+ $y=f(x)$ là Parapol đi qua gốc O nên có dạng $y=ax^2$. Mà Parapol đi qua điểm $(1;1)$ nên: $1=a.1\Rightarrow a=1\Rightarrow y=x^2$

+ $y=g(x)$ hàm bậc nhất nên có dạng $y=mx+n$. Mà $y=g(x)$ đi qua điểm $(1;1)$, $(4;0)$ nên:

$$\begin{cases} 1=m+n \\ 0=4m+n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-\frac{1}{3} \\ n=\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$$

Từ hình vẽ, ta thấy hình phẳng (phần tô màu) cần tính diện tích gồm 2 phần:

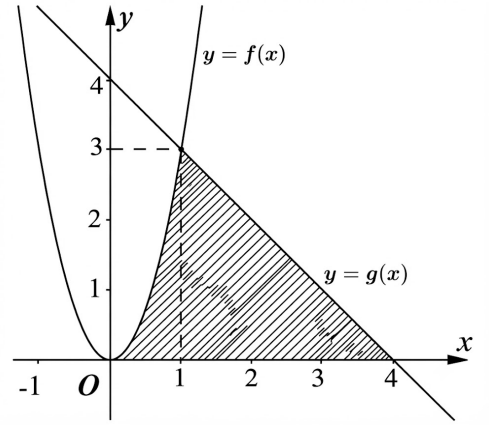
Phần 1: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$, $y=0$, $x=0$, $x=1$.

Phần 2: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$, $y=0$, $x=1$, $x=4$.

Do đó diện tích hình phẳng (phần tô màu) là:

$$S=\int\limits_0^1 x^2\mathrm{d}x+\int\limits_1^4\left(-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\Big|_0^2+\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{4}{3}x\right)\Big|_1^4=\frac{37}{12}$$ (đơn vị diện tích).

Bài 14. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc hai và $y=g(x)$ là hàm đa thức bậc nhất có đồ thị như hình vẽ . Tính diện tích hình phẳng là phần gạch chéo trong hình vẽ bên dưới .



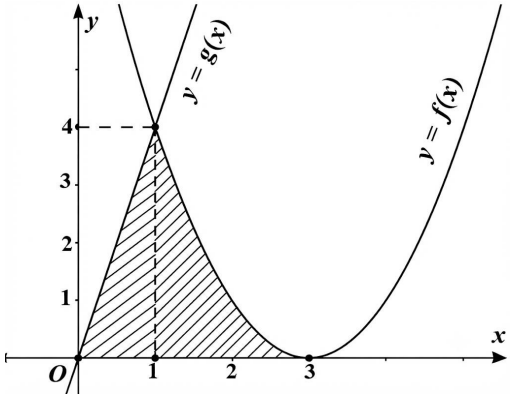
Lời giải

Từ hình vẽ, ta xác định được $y=f\left(x\right)=3x^2$ và $y=g\left(x\right)=4-x$

Do đó diện tích hình phẳng (phần tô màu) là:

$$S=\int_0^1 3x^2\mathrm{d}x+\int_1^4\left(4-x\right)\mathrm{d}x=x^3\Big|_0^1+\left(4x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^4=\frac{11}{2}$$ (đơn vị diện tích).

Bài 15. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm đa thức bậc hai và $y=g\left(x\right)$ là hàm đa thức bậc nhất có đồ thị như hình vẽ . Tính diện tích hình phẳng là phần gạch chéo trong hình vẽ bên dưới .



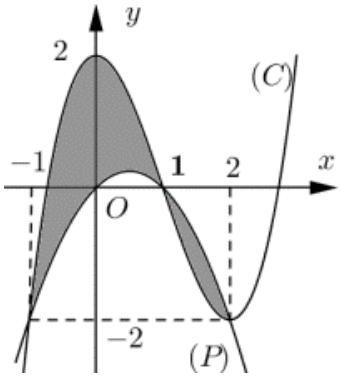
Lời giải

Từ hình vẽ, ta xác định được $y=f\left(x\right)=x^2-6x+9$ và $y=g\left(x\right)=4x$

Do đó diện tích hình phẳng (phần tô màu) là:

$$S=\int_0^1 4x\mathrm{d}x+\int_1^3\left(x^2-6x+9\right)\mathrm{d}x=2x^2\Big|_0^1+\left(\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right)\Big|_1^4=\frac{14}{3}$$ (đơn vị diện tích).

Bài 16. Hình phẳng $\left(H\right)$ được giới hạn bởi đồ thị $\left(C\right)$ của hàm đa thức bậc ba và parabol $\left(P\right)$ có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần tô đậm của hình vẽ có diện tích bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ hai)



Lời giải

Cách 1:

Gọi hàm số bậc ba là $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Đồ thị (C) đi qua các điểm $(1;0),(2;-2)$ và đạt cực trị tại $x = 0; x = 2$ nên ta có hệ sau :

$$\begin{cases} 0 = a + b + c + d \\ -2 = 8a + 4b + 2c + d \\ 0 = c \\ 0 = 12a + 4b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases}.$$

Suy ra hàm số bậc ba là $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Gọi hàm bậc hai là $y = mx^2 + nx + p$. Đồ thị (P) đi qua các điểm $(1;0)$, $(2;-2)$, $(-1;-2)$ nên ta có hệ sau :

$$\begin{cases} 0 = m + n + p \\ -2 = 4m + 2n + p \\ -2 = m - n + p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = 1 \\ p = 0 \end{cases}.$$

Suy ra hàm số bậc hai là $y = -x^2 + x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (P) là :

$$x^3 - 3x^2 + 2 = -x^2 + x \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Vậy diện tích phần tô đậm là :

$$S = \int_{-1}^{2} \left| \left(x^3 - 2x^2 - x + 2 \right) \right| dx \,.\, S = \left| \int_{-1}^{1} \left(x^3 - 2x^2 - x + 2 \right) dx \right| + \left| \int_{1}^{2} \left(x^3 - 2x^2 - x + 2 \right) dx \right| = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12} \approx 3,08.$$

Cách 2:

Vì đồ thị hàm bậc ba và đồ thị hàm bậc hai cắt trục tung tại các điểm có tung độ lần lượt là $y = 2, y = 0$ nên ta xét hai hàm số là $y = ax^3 + bx^2 + cx + 2$, $y = mx^2 + nx$.

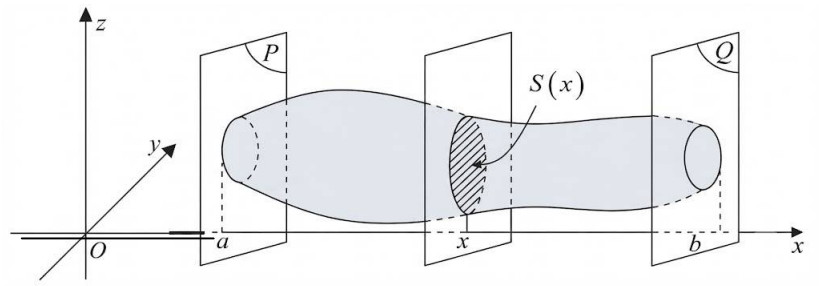
Vì đồ thị hai hàm số cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt là $x = -1; x = 1; x = 2$ nên ta có phương trình hoành độ giao điểm:

$ax^3+bx^2+cx+2=mx^2+nx \Leftrightarrow a(x+1)(x-1)(x-2)=0$. Với $x=0$ ta được $2a=2 \to a=1$.

Vậy diện tích phần tô đậm là: $S=\int_{-1}^{2}\left|(x+1)(x-1)(x-2)\right|dx=\frac{37}{12}$.

DẠNG 2
THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

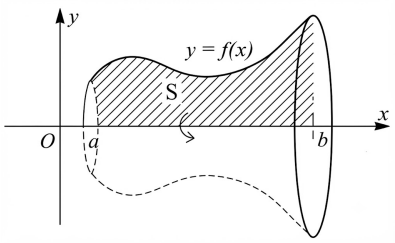
1. Thể tích của vật thể



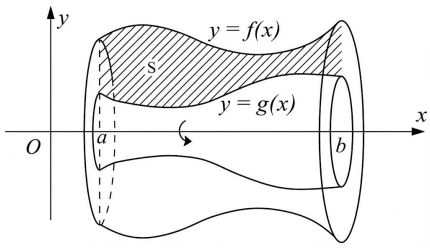
Trong không gian, cho một vật thể nằm trong khoảng không gian giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b. Mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x $(a \le x \le b)$ cắt vật thể theo mặt cắt có diện tích $S(x)$. Khi đó, nếu $S(x)$ là hàm số liên tục trên $[a;b]$ thì thể tích của vật thể được tính bởi công thức: $V = \int_a^b S(x)\,dx$

2. Thể tích khối tròn xoay

Dạng 1: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases}$ (Hình 1). Khi quay hình (H) quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx$.



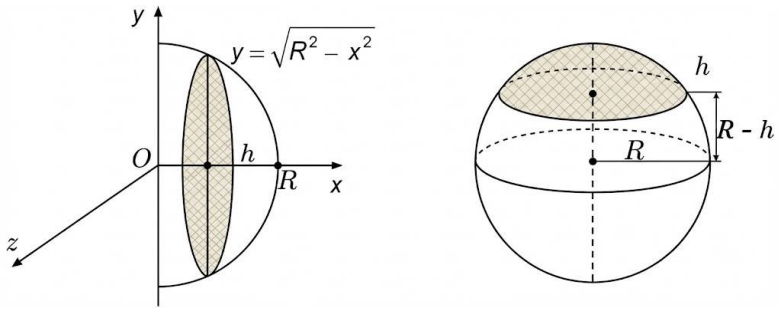
Hình 1



Hình 2

Dạng 2: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ f(x) \ge g(x) \ge 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases}$ (Hình 2). Khi quay hình (H) quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng: $V = \pi \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right] dx$

Bài 1. Khối chỏm cầu có bán kính R và chiều cao h $(0<h\le R)$ sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y=\sqrt{R^2-x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=R-h, x=R$ xung quanh trục Ox như hình vẽ. Tính thể tích của khối chỏm cầu này.



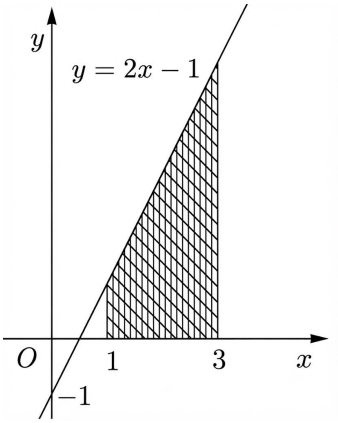
Lời giải

Thể tích khối chỏm cầu là:

$$V=\pi\int_{R-h}^{R}\left(R^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(R^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{R-h}^{R}=\pi\left[R^3-\frac{R^3}{3}-R^2\left(R-h\right)+\frac{\left(R-h\right)^3}{3}\right]=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)$$

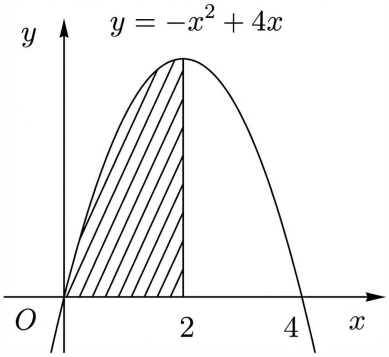
Bài 2. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo ra khi quay quanh hình phẳng (phần gạch chéo) trong các hình vẽ bên dưới đây quanh trục Ox.

a)



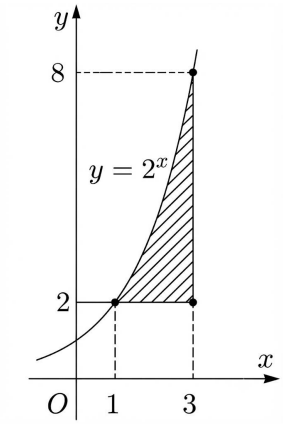
Hình 1

b)



Hình 2

c)



Hình 3

Lời giải

a) Từ hình 1, ta có : Hình phẳng phần gạch chéo được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2x-1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=3$. Do đó thể tích của khối tròn xoay tạo ra khi quay hình phẳng quanh trục Ox là :

$$V=\pi\int_{1}^{3}\left(2x-1\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_{1}^{3}\left(4x^2-4x+1\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{4x^3}{3}-2x^2+x\right)\Big|_{1}^{3}=\frac{62\pi}{3}\text{ (đơn vị thể tích)}$$

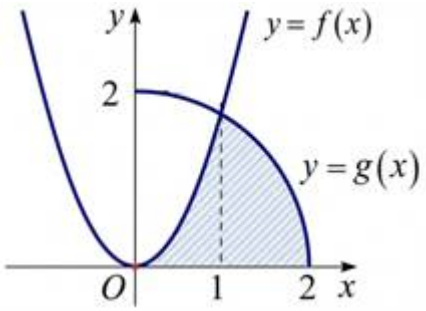
b) Từ hình 2, ta có : Hình phẳng phần gạch chéo được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+4x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=2$. Do đó thể tích của khối tròn xoay tạo ra khi quay hình phẳng quanh trục Ox là :

$$V=\pi\int_0^2\left(-x^2+4x\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^2\left(x^4-8x^2+16x^3\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^5}{5}-\frac{8x^3}{3}+4x^4\right)\Big|_0^2=\frac{203\pi}{15}$$ (đơn vị thể tích)

c) Từ hình 3, ta có : Hình phẳng phần gạch chéo được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2^x$, $y=2$ và hai đường thẳng $x=1, x=3$. Do đó thể tích của khối tròn xoay tạo ra khi quay hình phẳng quanh trục Ox là :

$$V=\pi\int_1^3\left[\left(2^x\right)^2-2^2\right]\mathrm{d}x=\pi\int_1^3\left(4^x-4\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{4^x}{\ln 4}-4x\right)\Big|_1^3=\frac{30\pi}{\ln 2}-8\pi$$ (đơn vị diện tích)

Bài 3. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo ra khi quay quanh hình phẳng (phần gạch chéo) trong hình vẽ bên dưới đây quanh trục Ox. Biết $y=f(x)$ là hàm số đa thức bậc 2 và $y=g(x)$ là hàm số của một cung tròn của đường tròn có bán kính bằng 2.



Lời giải

Từ hình vẽ, ta có :

+ $y=f(x)$ là hàm số đa thức bậc 2 đi qua gốc toạ độ nên có phương trình : $y=ax^2$

+ Đường tròn có bán kính bằng 2 có phương trình : $x^2+y^2=4\Rightarrow y=\sqrt{4-x^2}$ là hàm số $y=g(x)$.

+ Giao điểm của $y=f(x)$ và $y=\sqrt{4-x^2}$ có hoành độ $x=1$ nên $y=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$. Do đó điểm $\left(1;\sqrt{3}\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y=ax^2$, suy ra $a=\sqrt{3}\Rightarrow y=\sqrt{3}x^2$

Do đó thể tích của khối tròn xoay tạo ra khi quay hình phẳng quanh trục Ox là :

$$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{3}x^2\right)^2\mathrm{d}x+\pi\int_1^2\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2\mathrm{d}x$$

$$=3\pi\int_0^1x^4\mathrm{d}x+\pi\int_1^2\left(4-x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$=3\pi\frac{x^5}{5}\Big|_0^1+\pi\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2=\frac{34\pi}{15}$$

Bài 4. Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1\le x\le 3)$ thì được thiết diện là một hình chữ nhật có hai cạnh là $3x$ và x^2.

Lời giải

Ta có diện tích thiết diện: $S(x)=3x.x^2=3x^3$.

Khi đó $V=\int_1^3 3x^3\mathrm{d}x=\frac{3}{4}x^4\Big|_1^3=60$.

Bài 5. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành:

a) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thì hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-x^2$, $y=0$, $x=0$ và $x=3$ quanh trục Ox.

b) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thì hàm số $y=\sqrt{x-1}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=2$ và $x=5$ quanh trục Ox.

c) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{5-x}, x\le 5$, trục tung, trục hoành quay quanh trục hoành.

Lời giải

a) Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox là :

$$V=\pi\int_0^3\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^3\left(\frac{1}{9}x^6-\frac{2}{3}x^5+x^4\right)\mathrm{d}x=\frac{81\pi}{35}.$$

b) Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng D quanh trục Ox ta có: $V=\pi\int_2^5\left(\sqrt{x}-1\right)^2\mathrm{d}x$

c) Xét phương trình hoành độ giao điểm hai hàm số là: $\sqrt{5-x}=0\Leftrightarrow 5-x=0\Leftrightarrow x=5$

Khi đó D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $\begin{cases}y=f(x)=\sqrt{5-x}\\ y=0\\ x=0;x=5\end{cases}$

Thể tích khối tròn xoay khi quay D quanh Ox là:

$$V=\pi\int_0^5\left(\sqrt{5-x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^5(5-x)\mathrm{d}x=\pi\left(5x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^5=\frac{25\pi}{2}.$$

Bài 6. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành:

a) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=e^x$, trục Ox và hai đường thẳng $x=0;x=1$ quanh trục Ox.

b) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=\sqrt{2+\cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0,\ x=\frac{\pi}{2}$ quanh trục hoành.

c) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=\sqrt{\tan x}, y=0, x=0, x=\frac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox.

Lời giải

a) Ta có thể tích cần tìm là $V=\pi\int_0^1\left(e^x\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^1 e^{2x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}e^{2x}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\left(e^2-1\right)$.

b) Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức:

$$V=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{2+\cos x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2+\cos x\right)\mathrm{d}x=\pi\left(2x+\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi\left(\pi+1\right).$$

c) Thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra là:

$$V=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{\tan x}\right)^2.\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x.\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}.\mathrm{d}x=-\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}\left(\cos x\right)}{\cos x}$$

$$=-\pi\left(\ln\left|\cos x\right|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\pi\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi\ln 2}{2}.$$

Bài 7. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành:

a) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2-3x+2$ và trục hoành quay quanh trục hoành.

b) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2+x$ và $y=2x$ quay quanh trục hoành.

c) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=\sqrt{4x-x^2}$ và $y=0$ quay quanh trục hoành.

d) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị của hàm số parapol $(P):y=x^2$ và đường thẳng $d:y=2x$ quay quanh trục hoành.

Lời giải

a) Ta có $y=0\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Khi đó: $V=\pi\int\limits_1^2\left(x^2-3x+2\right)^2dx=\frac{\pi}{30}$.

b) Ta có phương trình: $x^2+x=2x\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$

Ta có thể tích cần tìm là: $V=\pi\int\limits_0^1\left|\left(x^2+x\right)^2-\left(2x\right)^2\right|\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{10}$

c) Ta có phương trình: $\sqrt{4x-x^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\end{array}\right.$.

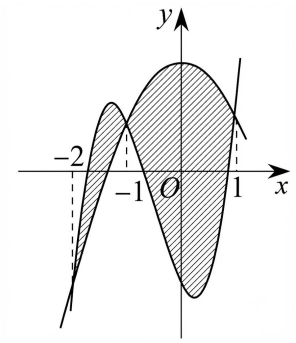
Do đó, thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{4x-x^2}$ và $y=0$ quay quanh trục Ox là $V=\pi\int\limits_0^4\left(\sqrt{4x-x^2}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^4\left(4x-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(2x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^4=\frac{32\pi}{3}$.

d) Ta có phương trình: $x^2=2x\Leftrightarrow x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

$$V=\pi\int\limits_0^2\left[\left(2x\right)^2-\left(x^2\right)^2\right]\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^2\left(4x^2-x^4\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{4}{3}x^3-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2=\frac{64\pi}{15}.$$

DẠNG 3
BÀI TOÁN DIỆN TÍCH , THỂ TÍCH LIÊN QUAN HÀM SỐ $f(x)$

Bài 1. Cho hai hàm số $f(x)=ax^2+bx^2+cx-2$ và $g(x)=dx^2+ex+2$ (a, b, c, d, $e\in\mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2; -1; 1 (hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng bao nhiêu?



Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f(x)$ và $g(x)$ là

$ax^3+bx^2+cx-2=dx^2+3x+2\Leftrightarrow a^3+(b-d)x^2+(c-e)x-4=0.\ (*)$

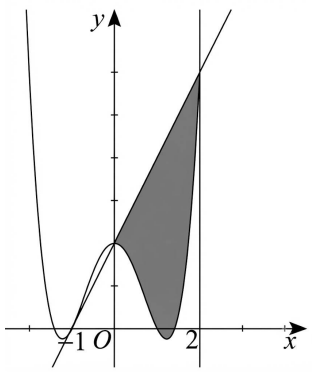
Do đồ thị của hai hàm số cắt nhau tại ba điểm suy ra phương trình $(*)$ có ba nghiệm $x=-2$; $x=-1$; $x=1$. Ta được

$ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-4=k(x+2)(x+1)(x-1)$.

Khi đó $-4=-2k\Rightarrow k=2$.

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $\int\limits_{-2}^{1}\left|2(x+2)(x+1)(x-1)\right|\mathrm{d}x=\dfrac{37}{6}$.

Bài 2. Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị (C), biết rằng (C) đi qua điểm $A(-1;0)$, tiếp tuyến d tại A của (C) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2 và diện tích hình phẳng giới hạn bởi d, đồ thị (C) và hai đường thẳng $x=0;x=2$; có diện tích bằng $\dfrac{28}{5}$ (phần tô màu trong hình vẽ). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và hai đường thẳng $x=-1;x=0$ có diện tích bằng bao nhiêu?



Lời giải

Ta có $y'=4ax^3+2bx \Rightarrow d: y=(-4a-2b)(x+1)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $(-4a-2b)(x+1)=ax^4+bx^2+c\,(1)$.

Phương trình (1) phải cho 2 nghiệm là $x=0$, $x=2$.

$$\Rightarrow \begin{cases} -4a-2b=c \\ -12a-6b=16a+4b+c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4a-2b-c=0\,(2) \\ 28a+10b+c=0\,(3) \end{cases}.$$

Mặt khác, diện tích phần tô màu là $\frac{28}{5}=\int_0^2\left[(-4a-2b)(x+1)-ax^4-bx^2-c\right]\mathrm{d}x$

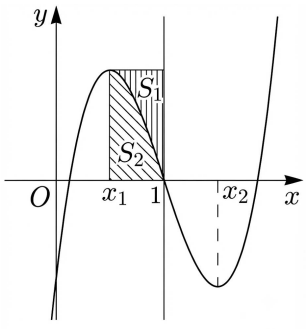
$$\Leftrightarrow \frac{28}{5}=4(-4a-2b)-\frac{32}{5}a-\frac{8}{3}b-2c \Leftrightarrow \frac{112}{5}a+\frac{32}{3}b+2c=-\frac{28}{5}\,(4).$$

Giải hệ 3 phương trình (2), (3) và (4) ta được $a=1$, $b=-3$, $c=2$.

Khi đó, $(C): y=x^4-3x^2+2$, $d: y=2(x+1)$.

Diện tích cần tìm là $S=\int_{-1}^{0}\left[x^4-3x^2+2-2(x+1)\right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\left(x^4-3x^2-2x\right)dx=\frac{1}{5}$.

Bài 3. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2=x_1+2$ và $f(x_1)+f(x_2)=0$. Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.



Lời giải

Cách 1

Gọi $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, với $a>0 \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Theo giả thiết ta có $f'(x_1)=f'(x_2)=0 \Rightarrow f'(x)=3a(x-x_1)(x-x_2)=3a(x-x_1)(x-x_1-2)$.

$\Rightarrow f'(x)=3a(x-x_1)^2-6a(x-x_1)$.

$\Rightarrow f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=a(x-x_1)^3-3a(x-x_1)^2+C$.

Ta có $f(x_1)+f(x_2)=0 \Rightarrow f(x_1)+f(x_1+2)=0 \Rightarrow C+8a-12a+C=0 \Rightarrow C=2a$.

Do đó $f(x)=a(x-x_1)^3-3a(x-x_1)^2+2a=a\left[(x-x_1)^3-3(x-x_1)^2+2\right]$.

$$f(x)=0\Rightarrow a\left[(x-x_1)^3-3(x-x_1)^2+2\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1+1-\sqrt{3}\\x=x_1+1\\x=x_1+1+\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Suy ra $S_2=\int\limits_{x_1}^{x_1+1}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{x_1}^{x_1+1}a\left[(x-x_1)^3-3(x-x_1)^2+2\right]\mathrm{d}x$

$$=\int\limits_{x_1}^{x_1+1}a\left[(x-x_1)^3-3(x-x_1)^2+2\right]\mathrm{d}(x-x_1)$$

$$=a\left[\frac{(x-x_1)^4}{4}-(x-x_1)^3+2(x-x_1)\right]\Bigg|_{x_1}^{x_1+1}=\frac{5a}{4}.$$

Mặt khác ta có $S_1+S_2=\int\limits_{x_1}^{x_1+1}f(x_1)\mathrm{d}x=f(x_1)\int\limits_{x_1}^{x_1+1}\mathrm{d}x=f(x_1)=2a\Rightarrow S_1=2a-S_2=\frac{3a}{4}$.

Vậy $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3}{5}$.

Cách 2

Rõ ràng kết quả bài toán không đổi nếu ta tịnh tiến đồ thị sang trái cho điểm uốn trùng gốc tọa độ O. Gọi $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ là hàm số khi đó thì dễ thấy $f(x)$ lẻ nên có ngay $b=d=0$ và $f(x)=ax^3+cx$ có hai điểm cực trị tương ứng là $-1,1$ cũng là nghiệm của $3ax^2+c=0$. Từ đó dễ dàng có $f(x)=k\left(x^3-3x\right),k>0$.

Xét diện tích hình chữ nhật $S_1+S_2=\left|(-1).f(-1)\right|=2k$.

Ngoài ra $S_2=k\int\limits_{-1}^{0}\left|x^3-3x\right|\mathrm{d}x=\frac{5}{4}k$.

Vì thế $S_1=2k-\frac{5k}{4}=\frac{3k}{4}$ và $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3}{5}$

Bài 4. Cho hàm số $f(x)=3x^4+ax^3+bx^2+cx+d\,(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có ba điểm cực trị là $-2,-1,1$. Gọi $y=g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f(x)$ và $y=g(x)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Do $f(x)$ có ba điểm cực trị là $-2,-1,1$ nên:

$$f'(x)=12(x+2)\left(x^2-1\right)=12x^3+24x^2-12x-24\Rightarrow f(x)=3x^4+8x^3-6x^2-24x+d.$$

Thực hiện phép chia $f(x)$ cho $f'(x)$ ta được: $f(x)=f'(x)\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{6}\right)+\left(-7x^2-16x+4+d\right)$

Mà $g(x)$ là parabol qua các điểm cực trị của $f(x)$ nên $g(x)=-7x^2-16x+4+d$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $f(x)=g(x)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{-2}{3} \\ x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi $f(x)$ và $g(x)$ là:

$$S=\int_{-2}^{1}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{-2}^{1}\left|3x^4+8x^3+x^2-8x-4\right|\mathrm{d}x=\frac{2948}{405}(dvdt).$$

Bài 5. Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^3 f(x)dx=F(3)-G(0)+a \quad (a>0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x), y=G(x), x=0$ và $x=3$. Khi $S=15$ thì a bằng bao nhiêu ?

Lời giải

Giả thiết $F(x), G(x)$ đều là nguyên hàm của $f(x)$ nên ta có: $F(x)=G(x)+C\Rightarrow F(0)=G(0)+C$ (1).

Ta có $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=F(x)\big|_0^3=F(3)-F(0)=F(3)-\left(G(0)+C\right)=F(3)-G(0)-C$.

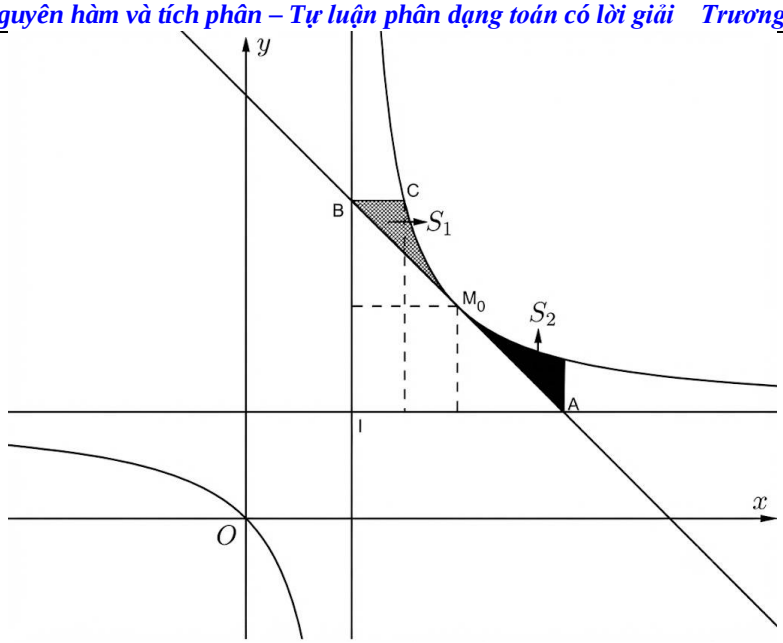
Mà theo giả thiết $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=F(3)-G(0)+a$ nên $C=-a$.

Suy ra $F(x)=G(x)-a\Leftrightarrow F(x)-G(x)=-a$.

Ta có $S=\int_0^3\left|F(x)-G(x)\right|\mathrm{d}x=\int_0^3\left|-a\right|\mathrm{d}x=ax\big|_0^3=3a$.

Mà $S=15$ nên ta có $a=5$.

Bài 6. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị (C). Gọi giao điểm của hai đường tiệm cận là I. Điểm $M_0(x_0;y_0)$ di động trên (C), tiếp tuyến tại đó cắt hai tiệm cận lần lượt tại A, B và $S_{\Delta IAB}=2$. Tìm giá trị $IM_0^{\,2}$ sao cho $\dfrac{S_1+S_2}{S_{\Delta IAB}}=1$ (với S_1, S_2 là 2 hình phẳng minh họa bên dưới)



Lời giải

Nhận thấy kết quả bài toán không thay đổi khi ta tịnh tiến đồ thị (C) theo $\overrightarrow{IO}$. Khi đó hai tiệm cận của (C) là hai trục tọa độ.

Và hàm số của đồ thị (C) trở thành: $y=\frac{\alpha}{x}\ (\alpha>0)\Rightarrow y'=-\frac{\alpha}{x^2}$.

Gọi d là tiếp tuyến tại $M_0(x_0;y_0)\Rightarrow d: y=-\frac{\alpha}{x_0^2}(x-x_0)+\frac{\alpha}{x_0}=-\frac{\alpha}{x_0^2}x+\frac{2\alpha}{x_0}$

Suy ra: $Ox\cap d=A(2x_0;0)$ và $Oy\cap d=B\left(0;\frac{2\alpha}{x_0}\right)$

$\Rightarrow S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OA.OB=2\alpha\Rightarrow 2a=2\Rightarrow\alpha=1$

$\Rightarrow (c)\ y=\frac{1}{x},\ d: y=-\frac{1}{x_0^2}x+\frac{2}{x_0},\ B\left(0;\frac{2}{x_0}\right),\ C\left(\frac{x_0}{2};\frac{2}{x_0}\right)$

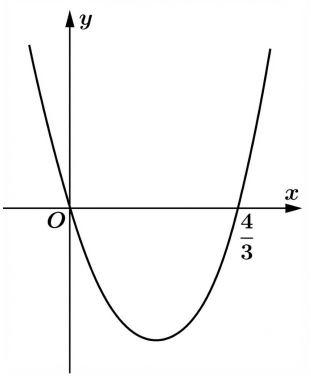
Và $S_2=\int\limits_{x_0}^{2x_0}\left(\frac{1}{x}\right)dx-\frac{1}{2}(2x_0-x_0)\frac{1}{x_0}=\frac{3}{4x_0^2}-\frac{1}{2}$

Theo giả thiết $\frac{S_1+S_2}{S_{\Delta IAB}}=1\Rightarrow S_1+S_2=S_{\Delta IAB}\Rightarrow\frac{3}{x_0^2}+\frac{3}{4x_0^2}-1=2\Rightarrow x_0^2=\frac{5}{4}\Rightarrow y_0^2=\frac{4}{5}$

Vậy $IM_0{}^2=x_0^2+y_0^2=\frac{41}{20}$.

DẠNG 4
BÀI TOÁN DIỆN TÍCH , THỂ TÍCH LIÊN QUAN HÀM SỐ $f'(x)$

Bài 1. Cho hàm số $y=f(x)=2x^3+ax^2+bx(a,b\in\mathbb{R})$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ bằng $\frac{m}{n}\left(m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}^*\right)$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $m+n$.

Lời giải

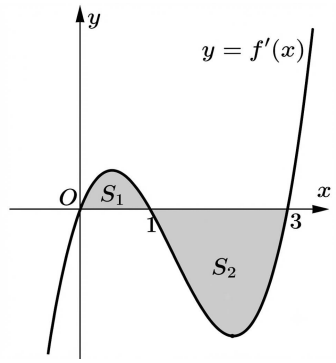
Ta có: $f'(x)=6x^2+2ax+b$.

Từ đồ thị suy ra: $\begin{cases}f'(0)=0\\ f'\left(\frac{4}{3}\right)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=0\\ a=-4\end{cases}$.

Ta có: $f(x)-f'(x)=2x^3-10x^2+8x$. Cho $f(x)-f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\\ x=4\end{array}\right.$.

Vậy diện tích hình phẳng là $S=\int_0^4\left|2x^3-10x^2+8x\right|\mathrm{d}x=\frac{71}{3}\Rightarrow m+n=74$.

Bài 2. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình dưới. Biết rằng diện tích của các phần hình phẳng A và B lần lượt là $S_A=4$ và $S_B=10$. Tính giá trị của $f(3)$, biết giá trị của $f(0)=2$.



Lời giải

Hình phẳng A được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$, trục hoành $y=0$, trục tung $x=0$ và đường thẳng $x=1$ nên diện tích hình phẳng A là:

$$S_A=\int_0^1\left|f'(x)\right|\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)\Big|_0^1=f(1)-f(0)\Rightarrow f(1)=S_A+f(0)=4+2=6.$$

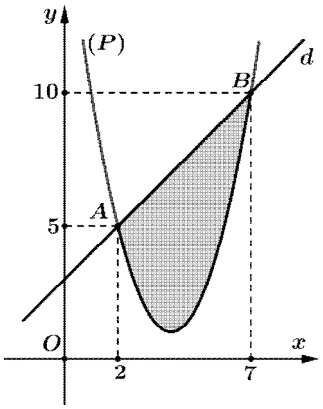
Hình phẳng B được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$, trục hoành $y=0$, đường thẳng $x=1$ và đường thẳng $x=3$ nên diện tích hình phẳng B là:

$$S_B=\int_1^3\left|f'(x)\right|\,\mathrm{d}x=-\int_1^3 f'(x)\,\mathrm{d}x=-f(x)\Big|_1^3=-\left[f(3)-f(1)\right]=-f(3)+f(1).$$

Suy ra $f(3)=f(1)-S_B=6-10=-4$.

Vậy $f(3)=-4$.

Bài 3. Cho hàm số bậc hai $y=f(x)$ có đồ thị (P) và đường thẳng d cắt tại hai điểm như trong hình vẽ bên dưới.



Biết rằng hình phẳng giới hạn bởi (P) và d có diện tích $S=\dfrac{125}{6}$. Khi đó hãy tính tích phân $\int_2^7(2x-3)\,f'(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có điểm $A(2;5)$ và $B(7;10)$ thuộc đường thẳng d và Parabol (P)

Suy ra đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(5;5)$

Phương trình đường thẳng $d: y=x+3$

Gọi (P) có phương trình: $y=ax^2+bx+c,(a>0)$

$A,B\in(P)\Rightarrow$ Hệ phương trình: $\begin{cases}4a+2b+c=5\\49a+7b+c=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-4a-2b+5\\49a+7b+5-4a-2b=10\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}c=-4a-2b+5\\b=1-9a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=3+14a\\b=1-9a\end{cases}$

Hình phẳng giới hạn bởi (P) và d có diện tích $S=\dfrac{125}{6}$

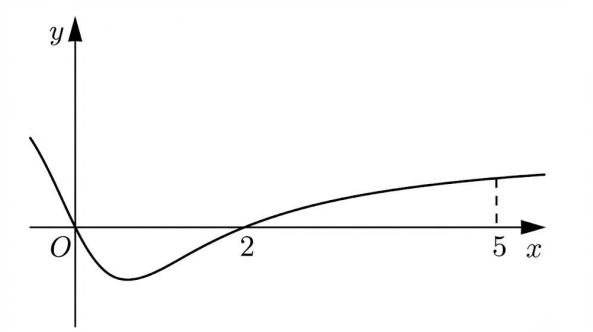
$$\Rightarrow \int_2^7 \left|x+3-\left(ax^2+bx+c\right)\right|\mathrm{d}x=\frac{125}{6} \Rightarrow \int_2^7 \left|x+3-\left[ax^2+(1-9a)x+(3+14a)\right]\right|\mathrm{d}x=\frac{125}{6}$$

$$\Leftrightarrow \int_2^7 \left[-ax^2+9ax-14a\right]\mathrm{d}x=\frac{125}{6} \Leftrightarrow \left(-\frac{ax^3}{3}+\frac{9ax^2}{2}-14ax\right)\Bigg|_2^7=\frac{125}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{125}{6}a=\frac{125}{6} \Leftrightarrow a=1 \Rightarrow b=-8; c=17$$

(P) có phương trình: $y=f(x)=x^2-8x+17 \Rightarrow f'(x)=2x-8 \Rightarrow \int_2^7 (2x-3)f'(x)\mathrm{d}x=\dfrac{215}{3}$

Bài 4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên.



Biết rằng $f(0)+f(3)=f(2)+f(5)$. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$ lần lượt là $\min\limits_{[0;5]} f(x)=f(a), \max\limits_{[0;5]} f(x)=f(b)$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Khi đó $a+b$ bằng bao nhiêu ?

Lời giải

Cách 1: Căn cứ đồ thị của $y=f'(x)$ và ứng dụng tích phân, ta có:

$$S_1=\int_0^2 \left|f'(x)\right|dx=\int_0^2 f'(x)dx=f(0)-f(2) \text{ và } S_2=\int_2^5 \left|f'(x)\right|dx=\int_2^5 f'(x)dx=f(2)-f(5)$$

Theo giả thiết, ta có:

$$f(0)+f(3)=f(2)+f(5) \Rightarrow f(5)-f(3)=f(0)-f(2)$$

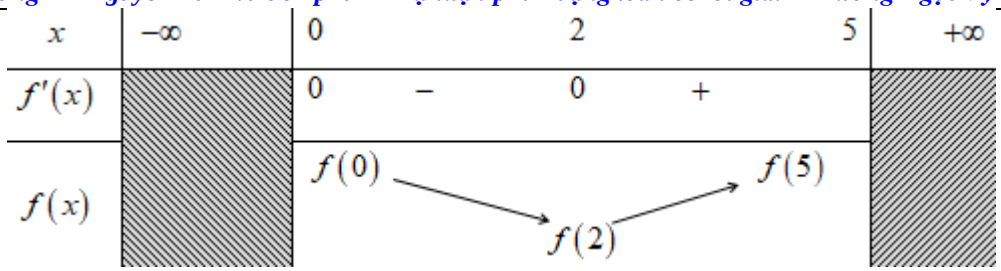
Suy ra $S_2=\int_2^5 \left|f'(x)\right|dx>\int_3^5 \left|f'(x)\right|dx=f(5)-f(3)=S_1$.

Suy ra $S_2>S_1>0 \Rightarrow f(5)>f(0)>f(2)$.

Vậy $\min\limits_{[0;5]} f(x)=f(2), \max\limits_{[0;5]} f(x)=f(5) \Rightarrow a+b=7$

Cách 2:

Bảng biến thiên:



Dựa vào đồ bảng biến thiên, ta có $\min\limits_{[2;5]} f(x) = f(2)$

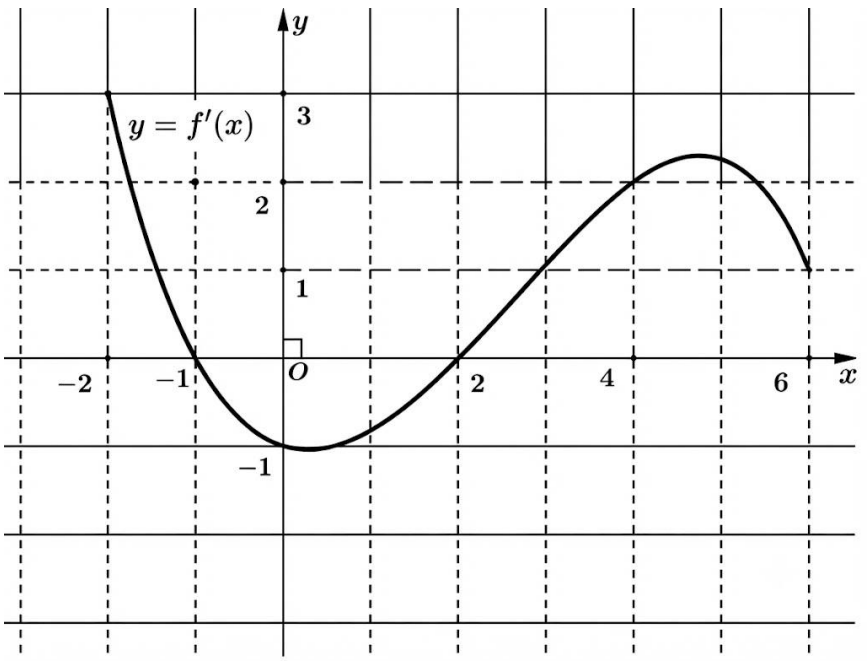
Và $\max\limits_{[0;5]} f(x) = \max\{f(0), f(5)\}$

Vì $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[2;5]$ nên

$f(3) > f(2) \Rightarrow f(5) - f(2) > f(5) - f(3) = f(0) - f(2)$

Do đó $f(5) > f(0)$, vậy $\max\limits_{[0;5]} f(x) = \max\{f(0), f(5)\} = f(5)$

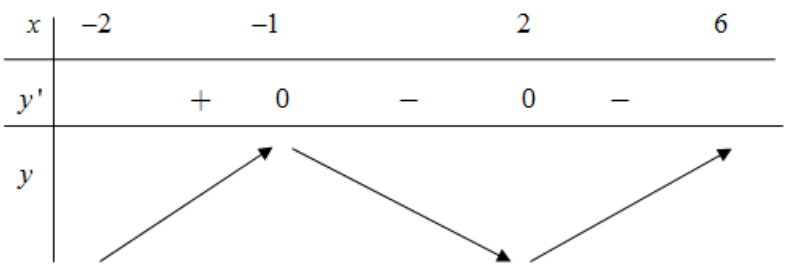
Bài 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như hình vẽ bên.



Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2;6]$ là $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x) = f(a)$ với $a \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của a.

Lời giải

Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$ ta có bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$ trên $[-2;6]$



Do đó hàm số $y=f(x)$ đạt giá trị lớn nhất chỉ có thể tại $x=-1$ hoặc $x=6$.

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và trục Ox.

$\Rightarrow S_1=\int\limits_{-1}^{2}\left[-f'(x)\right]dx=f(-1)-f(2)$.

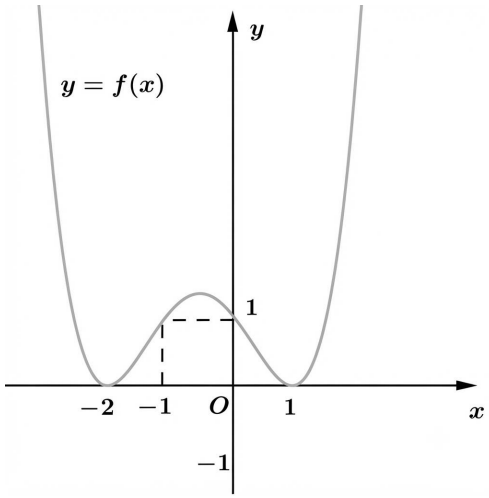
Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=2;x=6$.

$\Rightarrow S_2=\int\limits_{2}^{6}f'(x)dx=f(6)-f(2)$.

Ta có $S_2>S_1\Rightarrow f(6)-f(2)>f(-1)-f(2)\Leftrightarrow f(6)>f(-1)$.

$\Rightarrow \max\limits_{x\in[-2;6]}f(x)=f(6)\Rightarrow a=6$.

Bài 6. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ.



Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ có diện tích bằng bao nhiêu?

Lời giải

Hàm số đã cho có dạng $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\Rightarrow f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$.

Từ giả thiết đồ thị hàm số đã cho ta thấy đồ thị hàm số đi qua các điểm $(-2;0)$, $(-1;1)$, $(0;1)$, $(1;0)$ và có hai điểm cực tiểu là $(1;0),(-2;0)$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(-2)=0 \\ f(1)=0 \\ f'(-2)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} e=1 \\ a+b+c+d=-1 \\ 16a-8b+4c-2d=-1 \\ -32a+12b-4c+d=0 \\ 4a+3b+2c+d=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} e=1 \\ a=\dfrac{1}{4} \\ b=\dfrac{1}{2} \\ c=\dfrac{-3}{4} \\ d=-1 \end{cases}.$$

Do đó $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2-x+1\Rightarrow f'(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x-1$

Xét phương trình hoành độ giao điểm $f(x)=f'(x)$.

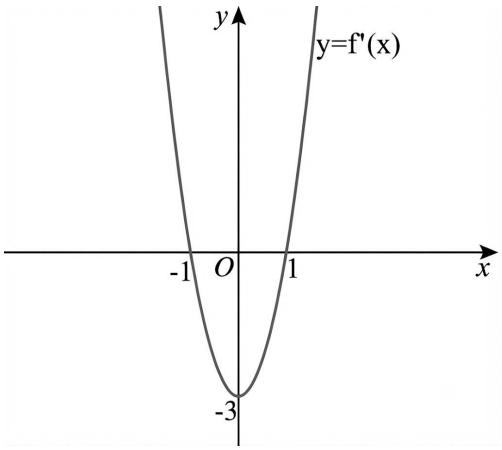
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{1}{2}x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-1 \\ x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x); y=f'(x)$ là $S=\int_{-2}^{4}\left|f(x)-f'(x)\right|dx$

Vì biểu thức $f(x)-f'(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{1}{2}x+2$ không đổi dấu trên các khoảng $(-2;-1),(-1;1)$, $(1;4)$ nên ta có

$$S=\left|\int_{-2}^{-1}\left[f(x)-f'(x)\right]dx\right|+\left|\int_{-1}^{1}\left[f(x)-f'(x)\right]dx\right|+\left|\int_{1}^{4}\left[f(x)-f'(x)\right]dx\right|=\frac{107}{5}(dvdt)$$

Bài 7. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,(a,b,c,d\in\mathbb{R},a\neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây. Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành khi quay xung quanh trục Ox.



Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)\Rightarrow f'(x)=3(x^2-1)$.

Khi đó $f(x)=\int f'(x)dx=x^3-3x+C$.

Điều kiện đồ thị hàm số $f(x)$ tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ là:

$$\begin{cases} f(x)=4 \\ f'(x)=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^3-3x+C=4 \\ 3(x^2-1)=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=-1 \\ C=2 \end{cases}$$ suy ra $f(x)=x^3-3x^2+2(C)$.

$(C)\cap Ox\Rightarrow$ hoành độ giao điểm là $x=-2; x=1$.

Khi đó $V=\pi\int_{-2}^{1}\left(x^3-3x^2+2\right)^2dx=\frac{729}{35}\pi$.

Bài 8. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a,b,c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -3 và 6. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$.

Lời giải

Ta có $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)=x^3+(3+a)x^2+(b+2a+6)x+2a+b+c$.

Suy ra: $g'(x)=3x^2+2(3+a)x+b+2a+6$.

Xét phương trình

$$\frac{f(x)}{g(x)+6}=1\Leftrightarrow g(x)=f(x)-6\Leftrightarrow 3x^2+2(a+3)x+2a+b+6=0\Leftrightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\\x=x_2\end{array}\right.$$

Ta có diện tích bằng

$$S=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{f(x)}{g(x)+6}-1\right)dx\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{f(x)-g(x)-6}{g(x)+6}\right)dx\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{g'(x)}{g(x)+6}\right)dx\right|=\left|\ln\left|g(x)+6\right|_{x_1}^{x_2}\right|$$

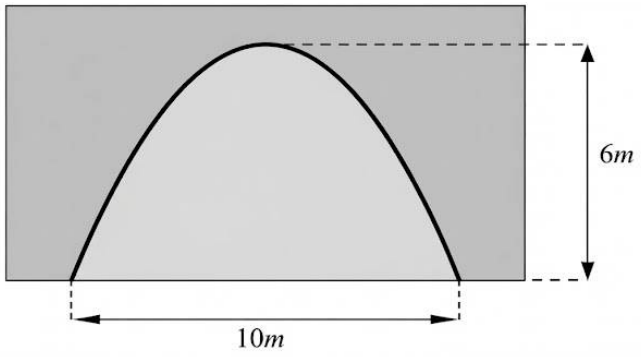
$$=\left|\ln\left|g\left(x_2\right)+6\right|-\ln\left|g\left(x_1\right)+6\right|\right|=\left|\ln 4\right|=2\ln 2$$

CHỦ ĐỀ 2
ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG VÀ THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY TRONG BÀI TOÁN THỰC TIỄN

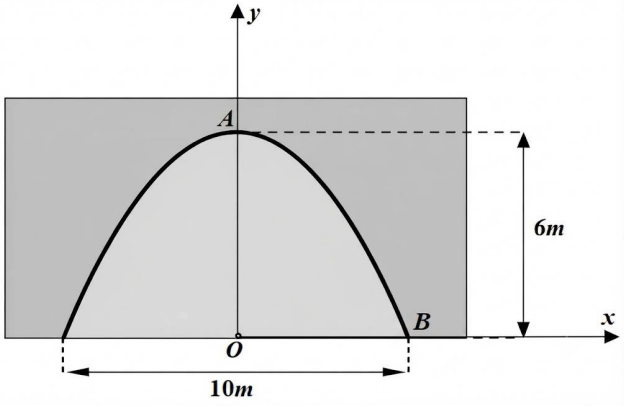
DẠNG 1
ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG TRONG BÀI TOÁN THỰC TIỄN

Bài 1. Mặt cắt của một cửa hầm có dạng là hình phẳng giới hạn bởi một parabol và đường thẳng nằm ngang và có kích thước như hình sau. Tính diện tích của cửa hầm.





Lời giải



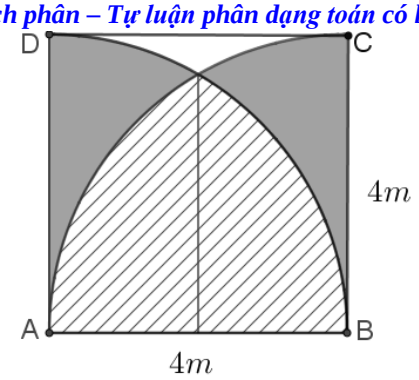
Gắn trục toạ độ Oxy như hình vẽ, ta có:

Cửa hầm là parabol nên có dạng: $y=ax^2+c$ và đi qua điểm $A(0;6)$ và $B(5;0)$, do đó ta có hệ:

$$\begin{cases}6=a.0+c\\0=25a+c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=6\\a=-\dfrac{6}{25}\end{cases}\Rightarrow y=-\frac{6}{25}x^2+3$$

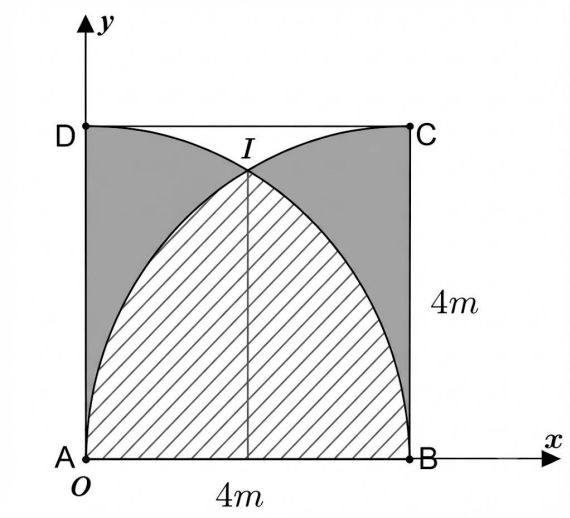
Diện tích của cửa hầm là: $S=\int\limits_{-5}^{5}\left(-\frac{6}{25}x^2+3\right)dx=\left(-\frac{2}{25}x^3+3x\right)\Big|_{-5}^{5}=10\ \left(\text{m}^2\right)$.

Bài 2. Một biển quảng cáo có dạng hình vuông $ABCD$ cạnh $AB=4\text{m}$. Trên tấm biển đó có các đường tròn tâm A và đường tròn tâm B cùng bán kính $R=4\text{m}$, hai đường tròn cắt nhau như hình vẽ.



Chi phí để sơn phần gạch chéo là 150 000 đồng/ m^2, chi phí sơn phần màu tô đen là 100 000 đồng/ m^2 và chi phí để sơn phần còn lại là 250 000 đồng/ m^2. Hỏi số tiền để sơn biển quảng cáo theo cách trên bằng bao nhiêu triệu đồng?

Lời giải



Gọi I là giao điểm của 2 cung tròn $\overset{\frown}{AC};\overset{\frown}{BD}$. Chọn gốc toạ độ $O \equiv A(0;0) \Rightarrow B(4,0)$

Đường tròn $(A,4)$ có phương trình là: $x^2+y^2=16$

Đường tròn $(B,4)$ có phương trình là: $(x-4)^2+y^2=16$

Xét cung tròn có phương trình $y=\sqrt{16-x^2}$

Phần diện tích gạch chéo $S=2.\int_2^4 \sqrt{16-x^2}\,dx=16\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{16\pi}{3}-4\sqrt{3}$

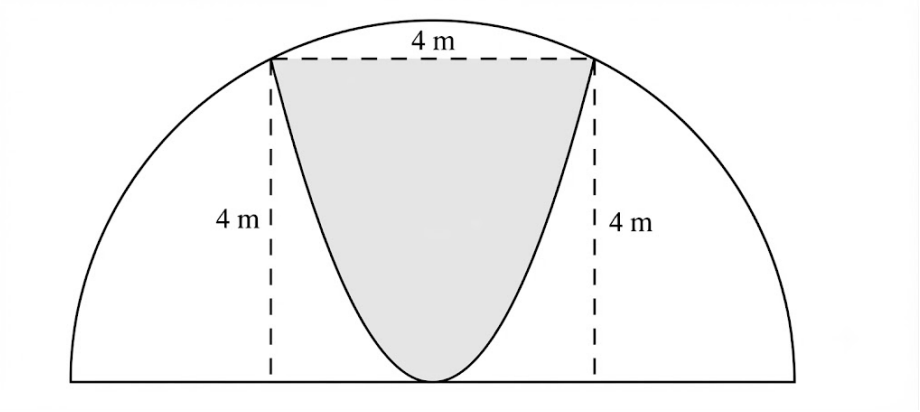
Phần diện tích màu đen: $2.\left(\frac{1}{4}\pi.4^2-\frac{16\pi}{3}+4\sqrt{3}\right)=\frac{-8\pi}{3}+8\sqrt{3}$

Phần diện tích còn lại: $16-\left(\frac{16\pi}{3}-4\sqrt{3}+\frac{-8\pi}{3}+8\sqrt{3}\right)=16-\frac{8\pi}{3}-4\sqrt{3}$

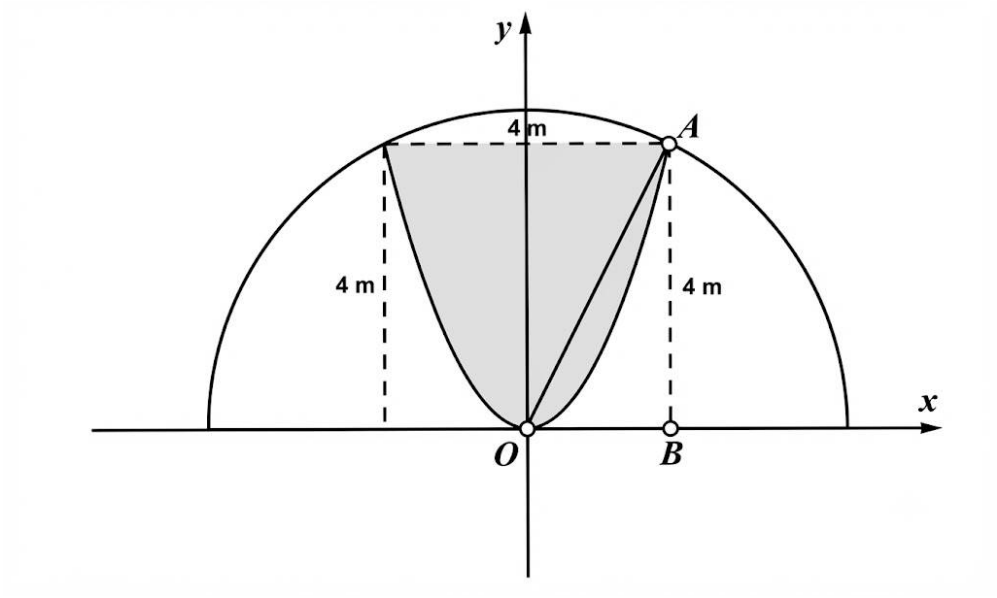
Số tiền để sơn biển quảng cáo:

$\left(\frac{16\pi}{3}-4\sqrt{3}\right).150\ 000+\left(\frac{-8\pi}{3}+8\sqrt{3}\right).100\ 000+\left(16-\frac{8\pi}{3}-4\sqrt{3}\right).250\ 000\approx 2,195$ triệu đồng.

Bài 3. Khuôn viên nhà bạn Khánh Linh có dạng nửa hình tròn, trên đó người thiết kế phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm và có trục đối xứng vuông góc với đường kính của nửa hình tròn, hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn và cách nhau một khoảng bằng 4 m. Phần còn lại của khuôn viên dành để trồng cỏ. Biết các kích thước cho như hình vẽ, chi phí trồng hoa và cỏ tương ứng là 250.000 đồng/m^2 và 150.000 đồng/m^2. Hỏi chi phí để trồng hoa và trồng cỏ trong khuôn viên đó hết bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)?



Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Xét parabol có đỉnh là gốc tọa độ và đi qua điểm $(2;4)$: Phương trình (P) có dạng: $y = ax^2$

Vì $A(2;4) \in (P)$ nên $4 = a.2^2 \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow (P): y = x^2$.

Xét ΔOAB vuông tại B, theo định lý Pythagore ta có:

$OA^2 = AB^2 + OB^2 = 4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20 \Rightarrow R = OA = 2\sqrt{5}$

Phương trình đường tròn (C) có tâm O, bán kính $R = 2\sqrt{5}$ là: $x^2 + y^2 = 20$.

$\Rightarrow |y| = \sqrt{20 - x^2}$

Diện tích phần trồng hoa là: $S_1 = \int_{-2}^{2} \left(\sqrt{20 - x^2} - x^2 \right) dx$.

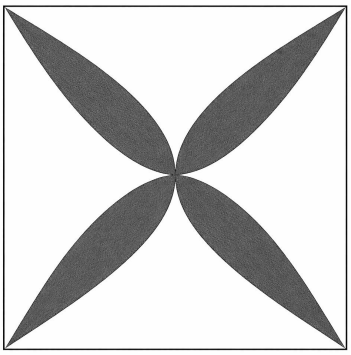
Diện tích trồng cỏ Nhung Nhật là: $S_2=\dfrac{\pi R^2}{2}-S_1=10\pi-S_1$.

Tổng chi phí để trồng hoa và trồng cỏ trong khuôn viên đó là:

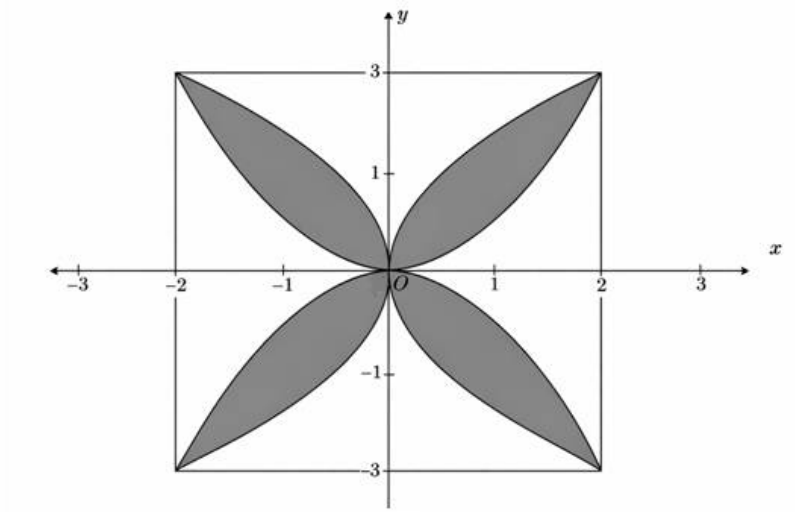
$250000.S_1+150000.S_2=250000.S_1+150000.\left(10\pi-S_1\right)\approx 5906351$ (đồng) $\approx 5,9$ (triệu đồng).

Vậy chi phí để trồng hoa và trồng cỏ trong khuôn viên nhà bạn Khánh Linh gần bằng 5,9 triệu đồng.

Bài 4. Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô đen như hình vẽ dưới). Diện tích bốn cánh hoa của viên gạch bằng bao nhiêu centimet vuông?



Lời giải



Chọn hệ tọa độ như hình vẽ (1 đơn vị trên trục bằng $10cm=1dm$), các cánh hoa tạo bởi các đường parabol có phương trình $y=\dfrac{x^2}{2}$, $y=-\dfrac{x^2}{2}$, $x=-\dfrac{y^2}{2}$, $x=\dfrac{y^2}{2}$.

Diện tích một cánh hoa (nằm trong góc phàn tư thứ nhất) bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2}{2}$, $y=\sqrt{2x}$ và hai đường thẳng $x=0;x=2$.

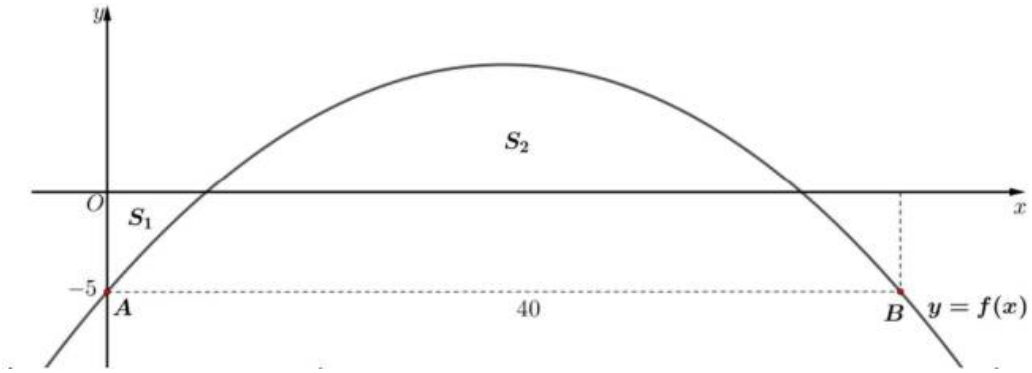
Do đó diện tích bốn cánh hoa bằng

$$4\int_0^2\left(\sqrt{2x}-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x=4\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{(2x)^3}-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^2=\frac{16}{3}\left(dm^2\right)=\frac{1600}{3}\left(cm^2\right)\approx 533\left(cm^2\right).$$

Bài 5. Một nhóm các kĩ sư muốn xây dựng một cây cầu vòm dàn thép với giá đỡ dưới bằng thép cao cấp có hình dáng là một đường cong Parabol nối từ 2 cột trụ A và B nằm bên dưới cây cầu, biết hai cột trụ cách nhau $400\,m$, khoảng cách từ trụ A đến cây cầu là $50\,m$ và AB song song với mặt đường.



Gắn hệ trục toạ độ Oxy vào cây cầu với đơn vị trục tọa độ là $10\,m$. Giá đỡ dưới bằng thép là dường cong Parabol tạo với hai trục toạ độ các hình phẳng có diện tích S_1, S_2 như hình vẽ bên, biết rằng $S_2 - 2S_1 = \dfrac{2200}{21}$. Điểm cao nhất của giá đỡ dưới bằng thép cao cấp cách mặt đường cây cầu bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Lời giải

+ Gọi Parabol có phương trình $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ với $(a < 0)$

Ta có $f(0) = -5 \Rightarrow c = -5$ nên $y = f(x) = ax^2 + bx - 5$

Mặt khác Parabol đi qua điểm $B(40;-5)$ nên $-5 = 1600a + 40b - 5 \Leftrightarrow b = -40a$

Suy ra $y = f(x) = ax^2 - 40ax - 5$

+ Lại có $S_2 - 2S_1 = \dfrac{2200}{21} \Leftrightarrow \int\limits_0^{40} f(x)\,dx = \dfrac{2200}{21} \Leftrightarrow \int\limits_0^{40} \left(ax^2 - 40ax - 5\right)dx = \dfrac{2200}{21}$

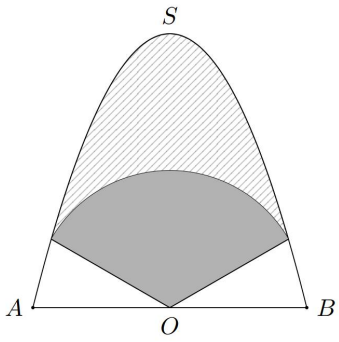
$\Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{3}x^3 - 20ax^2 - 5x\right)\Big|_0^{40} = \dfrac{2200}{21} \Leftrightarrow \dfrac{64000}{3}a - 32000a - 200 = \dfrac{2200}{21} \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{35}$ (thoả mãn).

Suy ra $y = f(x) = -\dfrac{1}{35}x^2 + \dfrac{8}{7}x - 5$.

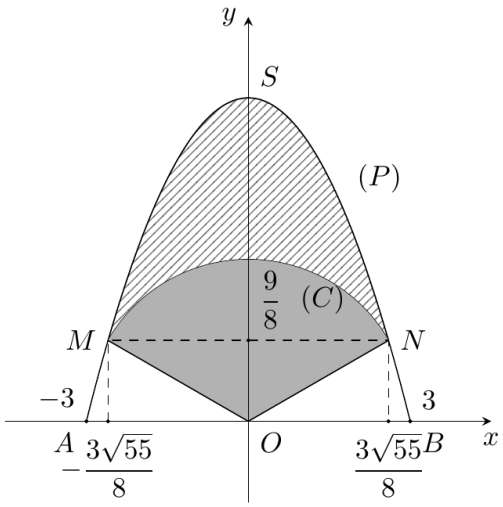
Ta có $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = f(20) = \dfrac{45}{7} \approx 6,43$.

Vậy khoảng cách từ điểm cao nhất của giá đỡ dưới bằng thép cao cấp cách mặt đường cây cầu là: $64,3$ mét.

Bài 6. Để chuẩn bị quảng bá sản phẩm, người ta trang trí tấm pano dạng parabol như hình vẽ, biết $OS=8\ m$, $AB=6\ m$ với O là trung điểm của AB. Tấm pano được chia thành ba phần để trang trí với mức chi phí khác nhau: phần trên là phần kẻ sọc giá 100000 đồng/m², phần giữa là hình quạt tâm O bán kính $3\ m$ được tô đậm giá 200000 đồng/m², phần còn lại giá 150000 đồng/m². Tính tổng chi phí để trang trí tấm pano (đơn vị triệu đồng, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải



Chọn hệ trục Oxy với tia Ox trùng với tia OB, tia Oy trùng với tia OS như hình vẽ.

Khi đó ta có: $A(-3;0)$, $B(3;0)$, $S(0;8)$.

Suy ra parabol có phương trình là: $y=-\dfrac{8}{9}x^2+8\ \ (P)$.

Rìa của hình quạt là cung tròn của đường tròn (C) có phương trình:

$x^2+y^2=9\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{9-x^2}$.

Hoành độ điểm N là nghiệm phương trình

$-\dfrac{8}{9}x^2+8=\sqrt{9-x^2},0<x<3$

$\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{3\sqrt{55}}{8}$.

Ta có $y_N=-\dfrac{8}{9}{x_N}^2+8=\dfrac{9}{8}$.

Suy ra $N\left(\frac{3\sqrt{55}}{8};\frac{9}{8}\right)$.

Phương trình $ON:\ y=\frac{3}{\sqrt{55}}x$.

Vì tấm pano đối xứng qua trục Oy nên ta có:

Diện tích phần kẻ sọc: $S_1=2.\int\limits_0^{\frac{3\sqrt{55}}{8}}\left(-\frac{8}{9}x^2+8-\sqrt{9-x^2}\right)dx\approx 17,94\ \text{m}^2$.

Diện tích phần tô đậm: $S_2=2.\int\limits_0^{\frac{3\sqrt{55}}{8}}\left(\sqrt{9-x^2}-\frac{3}{\sqrt{55}}.x\right)dx\approx 10,68\ \text{m}^2$.

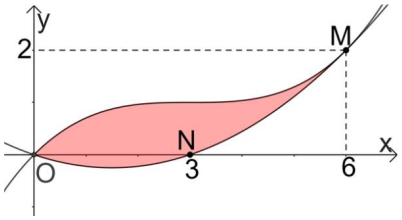
Diện tích phần còn lại: $S=\int\limits_{-3}^{3}\left(-\frac{8}{9}x^2+8\right)dx-\left(S_1+S_2\right)\approx 3,38\ \text{m}^2$.

Tổng chi phí để trang trí tấm pano là

$100S_1+200S_2+150S\approx 4\,440$ (nghìn đồng) $\approx 4,44$ (triệu đồng).

Bài 7. Một công ty thuê thợ vẽ logo công ty như hình vẽ lên một bức tường lớn. Logo có dạng là một bông hoa có 6 cách hoa giống nhau, sắp xếp cách đề như hình vẽ.





Để chính xác hóa kích thước và hình dạng như hình vẽ, mỗi cánh hoa được thiết kế như sau: Trong mặt phẳng Oxy (một đơn vị ứng với 1 mét trên thực tế), một cánh hoa được xem là một hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số bậc ba $y=\frac{(x-3)^3}{27}+1\ (C)$ và một đường parabol $(P):y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$. (C) và (P) cắt nhau tại hai điểm $O(0;0), M(6;2)$ và (P) đi qua điểm $N(3;0)$. Biết rằng chi phí vẽ logo nói trên được tính dựa trên mỗi mét vuông cánh hoa được vẽ, mỗi mét vuông được báo giá là 210 nghìn đồng. Hãy tính chi phí vẽ logo đó (đơn vị: nghìn đồng, làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

(P) đi qua điểm $O(0;0)$ nên (P) đi qua 2 điểm $M(6;2)$ và $N(3;0)$ nên ta có hệ phương trình

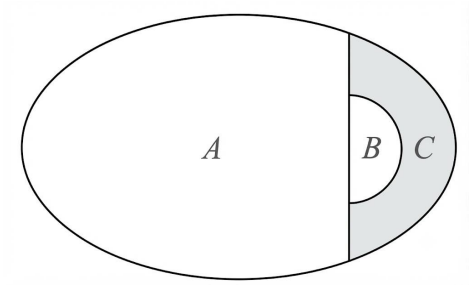
$$\begin{cases}36a+6b=2\\9a+3b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{9}\\b=\frac{-1}{3}\end{cases}$$

Suy ra: $(P):y=\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{3}x$

Khi đó, diện tích của logo là $S=6\int_0^6\left(\frac{(x-3)^3}{27}+1\right)-\left(\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{3}x\right)dx=24$

Chi phí vẽ logo là $24.210=5040$ (nghìn đồng)

Bài 8. Một khu vườn hình elip (E) có độ dài trục lớn bằng $10m$ và trục nhỏ bằng $8m$ (như hình vẽ). Khu vực A để trồng hoa; khu vực B để trồng cỏ, là nửa hình tròn có tâm là một tiêu điểm của elip (E) bán kính bằng $1m$ còn lại là khu vực C (phần tô đậm) người ta lát gạch. Diện tích phần lát gạch bằng bao nhiêu m^2 (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



Lời giải

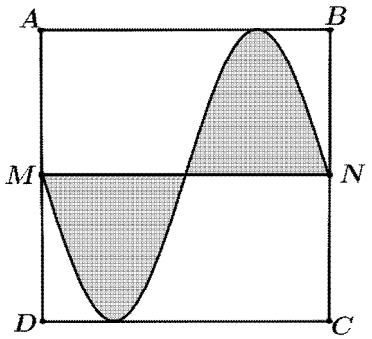
Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho (E) có trục lớn nằm trên trục hoành và trục nhỏ nằm trên trục tung.

Khi đó $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1\Rightarrow y^2=\frac{16}{25}\left(25-x^2\right)$

Diện tích của phần B là $S_1=\frac{\pi}{2}\left(m^2\right)$

Diện tích của phần C là $S=\frac{8}{5}\int_3^5\sqrt{25-x^2}dx-S_1\approx 7,38\left(m^2\right)$.

Bài 9. Cô Thúy có mảnh vườn hình chữ nhật $ABCD$, chiều dài $AB=2\pi\left(m\right)$, chiều rộng $BC=3\left(m\right)$. Cô Thúy muốn trồng hoa trên dải đất (phần tô đậm) được giới hạn bởi đường MN (với M,N lần lượt là trung điểm của AD,BC) và một đường hình sin (tham khảo hình vẽ). Tính diện tích đất trồng hoa.



Lời giải

Dựng hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

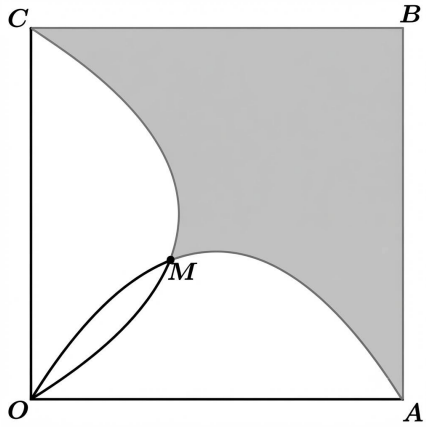
Vì phần đường cong là một đồ thị hình sin đi qua các điểm $(0;0),\left(-\frac{\pi}{2};1,5\right),(-\pi;0),\left(\frac{\pi}{2};1,5\right),(\pi;0)$

nên đường cong có phương trình $y=\frac{3}{2}\sin x$

Khi đó phần diện tích đất trồng hoa giới hạn bởi các đồ thị hàm số: $\begin{cases} y=\frac{3}{2}\sin x \\ y=0 \\ x=-\pi; x=\pi \end{cases}$

Do đó diện tích đất trồng hoa là $S=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{3}{2}\sin x\right|\mathrm{d}x=6\mathrm{m}^2$.

Bài 10. Cho hình vuông $OABC$ cạnh bằng 8, điểm M nằm trong hình vuông sao cho khoảng cách từ M đến các cạnh OA, OC cùng bằng 3. Parabol (P_1) đi qua các điểm O, A, M và Parabol (P_2) đi qua các điểm O, C, M. Tính diện tích phần tô đậm (hình vẽ bên). (kết quả làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Lời giải

Cho hệ trục tọa độ Oxy Oxy sao cho tia Ox trùng tia OA, tia Oy trùng tia OB.

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $(P_1), y=0$;

S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $(P_2), x=0$;

S_3 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường (P_1) và (P_2).

Từ hình vẽ ta thấy diện tích hình phẳng cần tìm là $S=S_{\text{OABC}}-\left[S_1+S_2-S_3\right]$ (*)

Gọi phương trình (P_1) là $y=ax^2+bx+c$.

Vì (P_1) đi qua $O(0;0), M(3;3), A(8;0)$ nên $\begin{cases} c=0 \\ 9a+3b+c=3 \\ 64a+8b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{5} \\ b=\frac{8}{5} \\ c=0. \end{cases}$

Suy ra $y=-\frac{1}{5}x^2+\frac{8}{5}x$.

Ta thấy (P_1) và (P_2) đối xứng qua OM nên

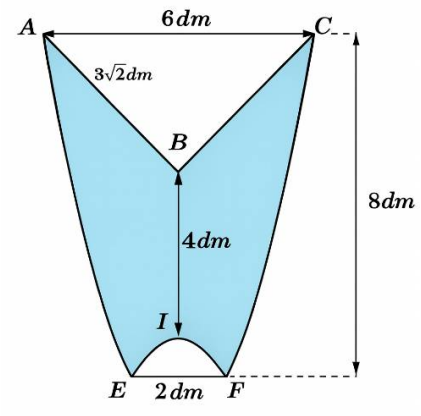
$$S_1 = S_2 = \int_0^8 \left(-\frac{1}{5}x^2 + \frac{8}{5}x \right) \mathrm{d}x = \frac{256}{15}$$

Gọi S_4 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $(P_1), OM : y = x$, do tính chất đối xứng nên

$$S_3 = 2S_4 = 2\int_0^3 \left[\left(-\frac{1}{5}x^2 + \frac{8}{5}x \right) - x \right] \mathrm{d}x = \frac{9}{5}$$

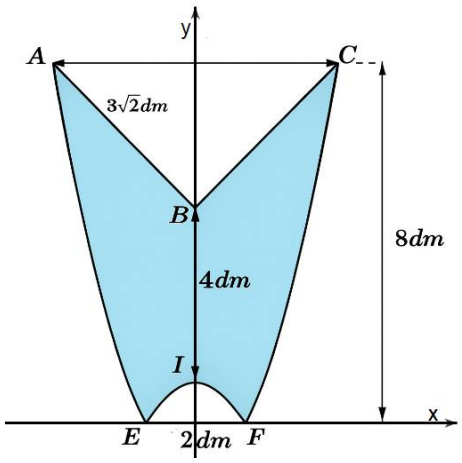
Thay và (*) ta được $S = 64 - \left(\frac{256}{15} + \frac{256}{15} - \frac{9}{5} \right) = \frac{95}{3} \approx 32$.

Bài 11. Một người thợ làm một logo bằng tấm nhựa phẳng, có hình dạng là một hình có trục đối xứng. Biết đường viền AE, CF ở hai bên là hai nhánh của một parabol và phần lõm EIF phía dưới đáy cũng là một parabol, hai nhánh phía trên là hai đoạn thẳng như hình bên dưới. Cho biết $AC = 6dm, AB = 3\sqrt{2}dm, EF = 2dm$ và khoảng cách giữa AC và EF bằng 8 dm. Hỏi diện tích của logo đó bằng bao nhiêu dm^2 (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



Lời giải

Xét hệ toạ độ Oxy như hình vẽ.

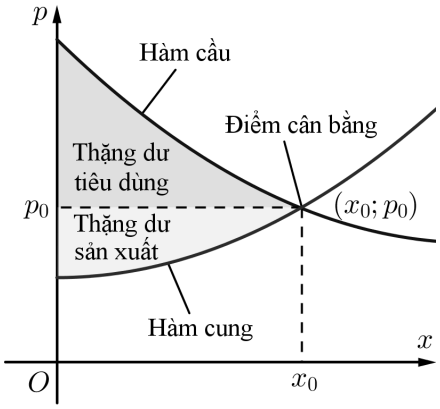


Khi đó nửa bên phải trục tung là hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường: $y = x^2 - 1, y = x + 5, y = -x^2 + 1, x = 0$

Ta có: $S = 2S_H = 2\left(\int_0^1 \left[x + 5 - \left(1 - x^2 \right) \right] dx + \int_1^3 \left[x + 5 - \left(x^2 - 1 \right) \right] dx \right) \approx 24,3dm^2$.

Bài 12. Ta biết rằng hàm cầu liên quan đến giá p của một sản phẩm với nhu cầu của người tiêu dùng, hàm cung liên quan đến giá p của sản phẩm với mức độ sẵn sàng cung cấp sản phẩm của nhà sản xuất. Điểm cắt nhau $(x_0; p_0)$ của đồ thị hàm cầu $p = D(x)$ và đồ thị hàm cung $p = S(x)$ được gọi là điểm cân bằng.

Các nhà kinh tế gọi diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị hàm cầu, đường ngang $p = p_0$ và đường thẳng đứng $x = 0$ là thặng dư tiêu dùng. Tương tự, diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị của hàm cung, đường nằm ngang $p = p_0$ và đường thẳng đứng $x = 0$ được gọi là thặng dư sản xuất, như trong hình bên dưới.



Giả sử hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm được mô hình hoá bởi:

Hàm cầu: $p = 5 - 0,2x$ và hàm cung: $p = 1 + 0,02x^2$, trong đó x là số đơn vị sản phẩm. Tìm thặng dư tiêu dùng và thặng dư sản xuất cho sản phẩm này.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai hàm là: $5 - 0,2x = 1 + 0,02x^2$

$$\Leftrightarrow 0,02x^2 + 0,2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10 \\ x = -20 \end{array}\right.$$

Với $x = 10$ thỏa mãn khi đó $x_0 = 10; p_0 = 5 - 0,2.10 = 3$

Thặng dư tiêu dùng là $\int_0^{10} (5 - 0,2x - 3)\,dx = \int_0^{10} (2 - 0,2x)\,dx = 10$.

Thặng dư sản suất là $\int_0^{10} \left(3 - 1 - 0,02x^2\right)dx = \int_0^{10} \left(2 - 0,02x^2\right)dx = \frac{40}{3}$.

Bài 13. Đơn đặt hàng của nhà máy cho một loại máy điều hoà không khí là khoảng 6000 chiếc mỗi tuần khi giá là 331 USD/chiếc và khoảng 8000 chiếc mỗi tuần khi giá là 303 USD/chiếc. Hàm cung được cho bởi $p = 0,0275x$, trong đó x là số lượng máy điều hoà được bán với giá p USD một chiếc. Tìm thặng dư tiêu dùng và thặng dư sản xuất (giả sử hàm cầu là hàm bậc nhất).

Lời giải

Hàm cầu có dạng $p = ax + b$. Do đơn đặt hàng của nhà máy cho một loại máy điều hoà không khí là 6000 chiếc mỗi tuần khi giá là 331 USD/chiếc và 8000 chiếc mỗi tuần khi giá là 303 USD/chiếc nên ta có:

$$\begin{cases} 331 = 6000a + b \\ 303 = 8000a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -0,014 \\ b = 415. \end{cases}$$

Vậy hàm cầu là $p = -0,014x + 415$.

Xét phương trình $-0,014x + 415 = 0,0275x \Leftrightarrow x = 10000$ khi đó $p = 275$.

Thặng dư tiêu dùng là: $\int_0^{10000} \left(-0,014x + 415 - 275\right) \mathrm{d}x = 700000$ (USD)

Thặng dư sản xuất là: $\int_0^{10000} \left(275 - 0,0275x\right) \mathrm{d}x = 1375000$ (USD).

Bài 14. Người ta sử dụng đường cong Lorenz để minh họa sự phân phối thu nhập trong một quốc gia. Gọi x là đại diện cho phần trăm số gia đình trong một quốc gia và y là phần trăm tổng thu nhập, mô hình $y = x$ sẽ đại diện cho một quốc gia mà các gia đình có thu nhập như nhau. Đường cong Lorenz $y = f(x)$, biểu thị sự phân phối thu nhập thực tế. Diện tích giữa hai mô hình này, với $0 \le x \le 100$, biểu thị "sự bất bình đẳng về thu nhập" của một quốc gia. Năm 2009, đường cong Lorenz của Hoa Kỳ có thể được mô hình hóa bởi hàm số: $y = \left(0,00061x^2 + 0,0224x + 1,666\right)^2, 0 \le x \le 100$, trong đó x được tính từ các gia đình nghèo nhất đến giàu có nhất. Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì vào năm 2009 là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

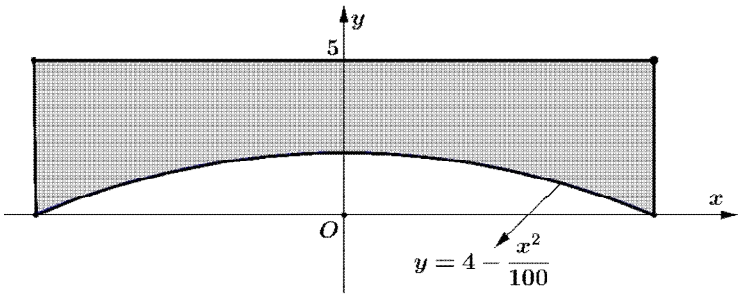
Lời giải

Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì vào năm 2009 là diện tích hình phẳng S giới hạn bởi hai đồ thị:

$$\begin{cases} y = x \\ y = \left(0,00061x^2 + 0,0224x + 1,666\right)^2 \\ x = 0; x = 100 \end{cases} \Rightarrow S = \int_0^{100} \left| \left(0,00061x^2 + 0,0224x + 1,666\right)^2 - x \right| \mathrm{d}x \approx 2086.$$

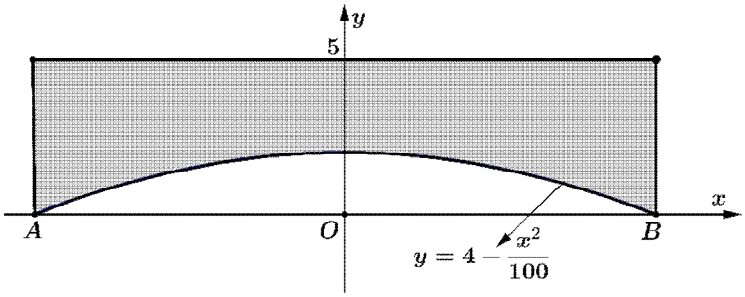
DẠNG 2
ỨNG DỤNG THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY TRONG BÀI TOÁN THỰC TIỄN

Bài 1. Hình bên dưới là mặt cắt dọc của một chiếc cầu bê tông (phần tô đậm, các đơn vị đều đo bằng mét)



Biết chiều rộng của cầu bằng 9m. Thể tích bê tông ít nhất cần để đúc cầu bằng bao nhiêu?

Lời giải



Parapol $y=4-\dfrac{x^2}{100}$ cắt trục hoành tại hai điểm A,B. Cho $y=0\Rightarrow 4-\dfrac{x^2}{100}=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=20 \\ x=-20 \end{array}\right.$

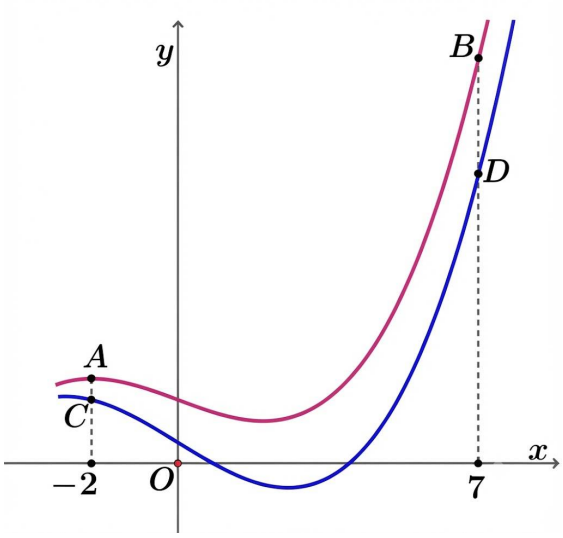
Do đó $A(-20;0)$ và $B(20;0)$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parapol và trục hoành là $S=\displaystyle\int_{-20}^{20}\left(4-\frac{x^2}{100}\right)\mathrm{d}x=\frac{320}{3}\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Diện tích phần tô đậm bằng $40.5-\dfrac{320}{3}=\dfrac{280}{3}\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Khi đó thể tích bê tông ít nhất cần để đúc cầu là $\dfrac{280}{3}.9=840\left(\mathrm{m}^3\right)$.

Bài 2. Hưởng ứng chính sách hiện đại hóa nông thôn, người dân ở khu phố A đồng lòng cùng nhau góp tiền để bê tông một đường đi trong khu phố (phần được tô đậm trong hình vẽ).



Biết rằng khi chọn hệ trục tọa độ Oxy với đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là $10\,\text{m}$, các đường cong AB, CD là mép đường được cho bởi đồ thị hàm số $f(x)=\frac{1}{32}x^3-\frac{3}{8}x+\frac{3}{2}$ và $g(x)=\frac{1}{32}x^3-\frac{5}{8}x+\frac{1}{2}$, đồng thời lớp bê tông được đổ dày $16\,\text{cm}$ và giá tiền $1\,\text{m}^3$ bê tông là 1080000 đồng. Tính số tiền (đơn vị triệu đồng) cần dùng để đổ bê tông con đường đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số đã cho là:

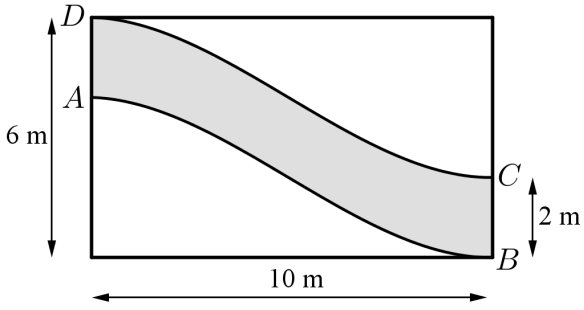
$$S=\int_{-2}^{7}\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{7}\left[\frac{1}{32}x^3-\frac{3}{8}x+\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{32}x^3-\frac{5}{8}x+\frac{1}{2}\right)\right]\mathrm{d}x=\frac{117}{8}\,(\text{đvdt}).$$

Do đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là $10\,\text{m}$ nên diện tích thực tế của con đường là $S_1=\frac{117}{8}.10^2=\frac{2925}{2}\left(\text{m}^2\right)$.

Thể tích khối bê tông cần đổ là: $V=S.h=\frac{2925}{2}.0{,}16=234\left(\text{m}^3\right)$.

Số tiền cần dùng để đổ bê tông con đường đó là: $234.1{,}08\approx 253$ triệu đồng.

Bài 3. Bác Công đổ bê tông một đường đi trong vườn (phần được tô màu) với kích thước được cho trong hình sau. Biết rằng đường cong AB được cho bởi đồ thị của một hàm số liên tục và đường cong DC nhận được từ đường cong AB bằng cách tịnh tiến theo phương thẳng đứng lên phía trên 2 m. Ngoài ra, Bác Công quyết định đổ lớp bê tông dày 15 cm và giá tiền 1 m^3 bê tông là 1 080 000 đồng. Tính số tiền Bác Công cần dùng để đổ bê tông con đường đó.



Lời giải

Để tính diện tích phần đổ bê tông, ta cần xác định diện tích giữa hai đường cong AB và DC

Đường cong DC là kết quả của việc tịnh tiến đường cong AB lên trên 2 m.

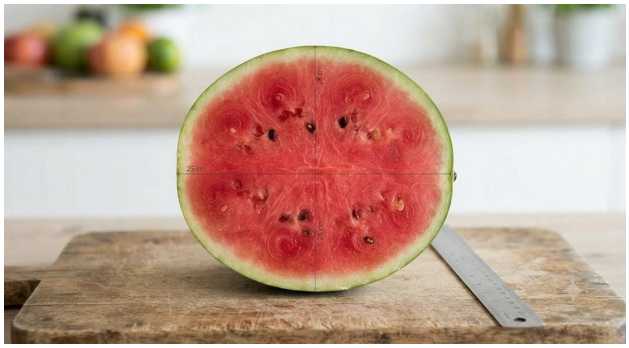
Giả sử hàm số của đường cong AB là $f(x)$ thì hàm số của đường cong DC là $f(x)+2$

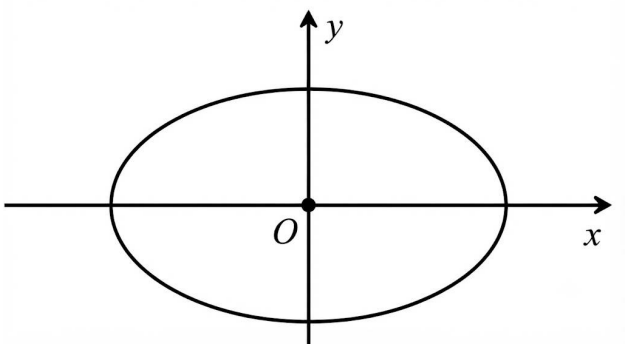
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong là: $S=\int_0^{10}\left[f(x)+2-f(x)\right]\mathrm{d}x=20\,\mathrm{m}^2$

Lớp bê tông có độ dày là $15\,\mathrm{cm}$ tức là $0{,}15\,\mathrm{m}$ thì có thể tích là: $20.0{,}15=3\mathrm{m}^3$

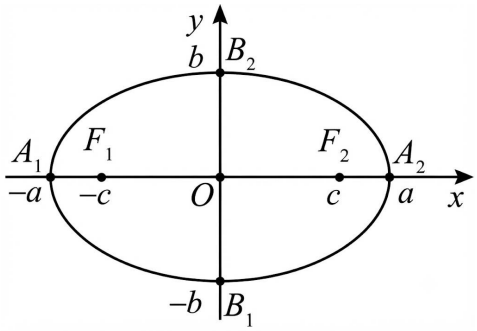
Chi phí tổng cộng để đổ bê tông con đường đó là: $3.1080000=3240000$ (đồng).

Bài 4. Bổ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn $28\,\mathrm{cm}$, trục nhỏ $25\,\mathrm{cm}$. Biết cứ $1000\,\mathrm{cm}^3$ dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20000 đồng. Hỏi từ quả dưa hấu trên có thể thu được bao nhiêu triệu đồng từ việc bán nước sinh tố? Biết rằng bề dày vỏ dưa không đáng kể và kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ hai của triệu đồng.





Lời giải



Đường elip có trục lớn $28\,\mathrm{cm}$, trục nhỏ $25\,\mathrm{cm}$ có phương trình

$$\frac{x^2}{14^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{25}{2}\right)^2}=1\Leftrightarrow y^2=\left(\frac{25}{2}\right)^2\left(1-\frac{x^2}{14^2}\right)\Leftrightarrow y=\pm\frac{25}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{14^2}}.$$

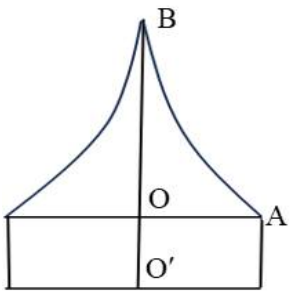
Do đó thể tích quả dưa là

$$V=\pi\int_{-14}^{14}\left(\frac{25}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{14^2}}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{25}{2}\right)^2\int_{-14}^{14}\left(1-\frac{x^2}{14^2}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{25}{2}\right)^2.\left(x-\frac{x^3}{3.14^2}\right)\Bigg|_{-14}^{14}=\pi\left(\frac{25}{2}\right)^2.\frac{56}{3}$$

$$=\frac{8750\pi}{3}\mathrm{cm}^3.$$

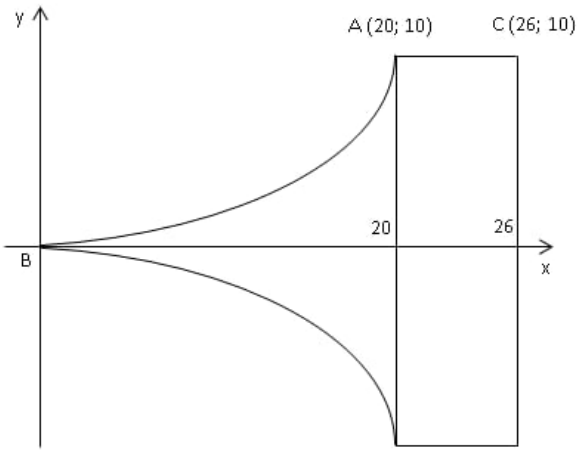
Do đó tiền bán nước thu được là $\frac{8750\pi.20000}{3.1000}\approx 0{,}18$ triệu đồng

Bài 5. Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, nhóm bạn Lan đã làm một chiếc mũ "cách điệu" cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO'=6cm$, $OA=10cm$, $OB=20cm$, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm B. Tính thể tích của chiếc mũ (làm tròn đến hàng đơn vị của centimet khối).



Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ:



Parabol (P) đi qua 2 điểm A,B và có B là đỉnh $\Rightarrow (P)$ đi qua $A(20;10)$ và $B(0;0)$

Ta có $(P): y=ax^2+bx+c$.

Vì (P) qua $B(0;0) \Rightarrow c=0.$

Vì (P) qua $A(20;10) \Rightarrow 10=20^2a+20b \ (1)$.

Mà B là đỉnh của parabol (P) nên $\dfrac{-b}{2a}=0\Rightarrow b=0.$

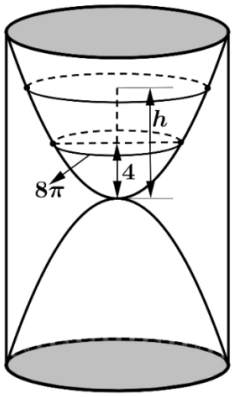
Thay $b=0$ vào $(1) \Rightarrow a=\dfrac{1}{40}$.

$\Rightarrow (P): y=\dfrac{x^2}{40}$.

$\Rightarrow V=\pi\displaystyle\int_0^{20}\left(\frac{x^2}{40}\right)^2 dx+\pi\int_{20}^{26}(10)^2\,dx=1000\pi\approx 3142\left(cm^3\right)$.

Vậy thể tích của chiếc mũ là: $3142\left(cm^3\right)$.

Bài 6. Một chiếc đồng hồ cát như hình vẽ gồm hai phần đối xứng nhau qua mặt phẳng nằm ngang và đặt trong một hình trụ. Thiết diện thẳng đứng qua trục của nó là hai parabol chung đỉnh và đối xứng nhau qua mặt phẳng nằm ngang. Ban đầu lượng cát dồn hết ở phần trên của đồng hồ thì chiều cao của mực cát bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của bên đó (xem hình vẽ). Cát chảy từ trên xuống dưới với tốc độ $v(t)=0,2t+13$ (cm^3/phút). Khi chiều cao của cát còn 4cm thì bề mặt trên cùng của cát tạo thành một đường tròn có chu vi bằng 8π cm. Biết sau 20 phút thì cát chảy hết xuống phần bên dưới của đồng hồ. Hỏi chiều cao của khối trụ bên ngoài bằng bao nhiêu centimet? (*Nếu kết quả là số thập phân thì làm tròn đến hàng đơn vị*).

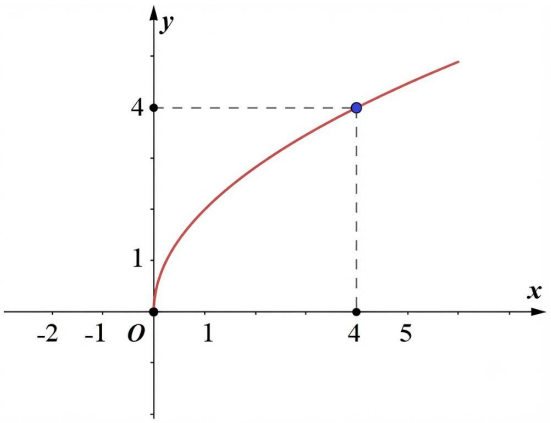


Lời giải

Thể tích cát ban đầu là: $\int_0^{20} v(t)\mathrm{d}t=\int_0^{20}0,2t+13\mathrm{d}t=300\,cm^3$.

Bán kính đường tròn đáy parabol tròn xoay khi chiều cao cát còn 4cm là: $\frac{8\pi}{2\pi}=4$.

Xét parabol $(P):y=a\sqrt{x}$ đi qua điểm $A(4;4)$ như hình vẽ



Ta có: $A(4;4)\in(P)\Rightarrow 4=a\sqrt{4}\Rightarrow a=2$. Suy ra $(P):y=2\sqrt{x}$.

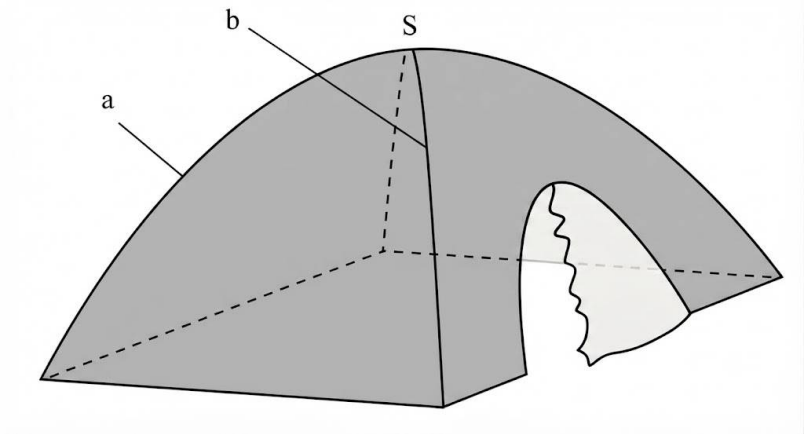
Khi đó thể tích parabol tròn xoay tạo ra bằng cách xoay hình phẳng giới hạn bởi parabol (P), trục Ox và hai đường thẳng $x=0$, $x=h$ quanh trục Ox là:

$$V=\pi\int_0^h\left(2\sqrt{x}\right)^2\mathrm{d}x=\left.\frac{4\pi x^2}{2}\right|_0^h=2\pi h^2 \text{ (đvtt).}$$

Suy ra: $2\pi h^2 = 300 \Rightarrow h = \sqrt{\dfrac{150}{\pi}}$

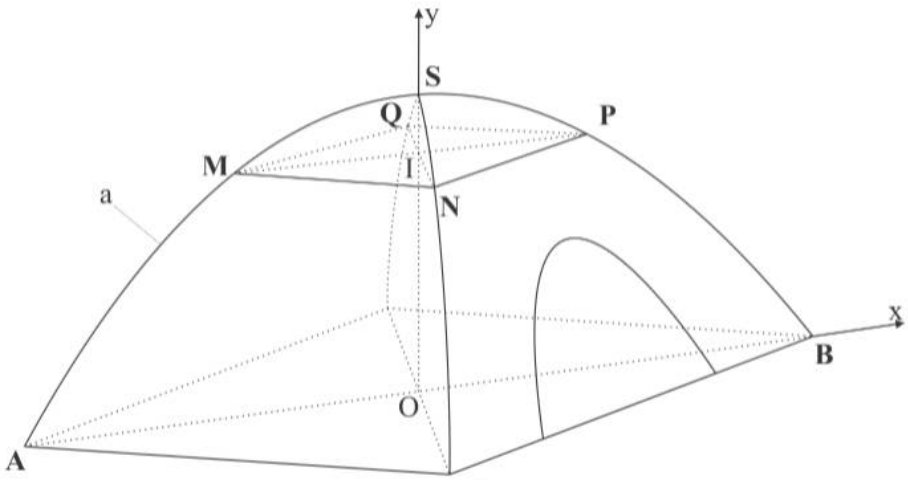
Vậy chiều cao khối trụ bên ngoài là: $2.\left(\dfrac{3}{2}.\sqrt{\dfrac{150}{\pi}}\right) \approx 21cm$.

Bài 7. Một chiếc lều vải du lịch dạng hình cong như hình vẽ. Khung chính bao gồm đáy là hình vuông cạnh 2 m và hai xương dây a,b nằm trên các đường parabol đỉnh S. Biết chiều cao của lều là $SO = 1,35m$, và O là tâm của đáy. Tính thể tích chiếc lều theo đơn vị m^3.



Lời giải

Gắn hệ trục như hình vẽ.



Ta tính được $OA = OB = \sqrt{2}$.

Gọi phương trình của đường thẳng a là $y = ax^2 + bx + c, \quad (a < 0)$.

Ta có a đi qua các điểm $A(-\sqrt{2};0), B(\sqrt{2};0), S\left(0;\dfrac{27}{20}\right)$.

Suy ra ta có hệ $\begin{cases} 2a - \sqrt{2}b + c = 0 \\ 2a + \sqrt{2}b + c = 0 \\ c = \dfrac{27}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{27}{40} \\ b = 0 \\ c = \dfrac{27}{20} \end{cases} \Rightarrow y = -\dfrac{27}{40}x^2 + \dfrac{27}{20}$.

Gọi $I(0;y), y \in \left[0;\frac{27}{20}\right)$.

Mặt phẳng vuông góc Oy tại I cắt hình đa cho theo 1 thiết diện là hình vuông $MNPQ$ có diện tích $S(y)$.

Theo giả thiết trên các điểm M,N,P,Q cùng có tung độ bằng y. Mà hai điểm M,P thuộc đường a có phương trình $y=-\frac{27}{40}x^2+\frac{27}{20}$.

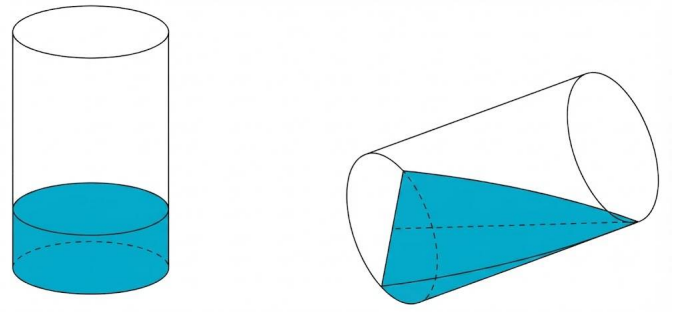
Suy ra

$$x^2=\frac{54-40y}{27}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{54-40y}}{3\sqrt{3}}\Rightarrow M\left(-\frac{\sqrt{54-40y}}{3\sqrt{3}};y\right),P\left(\frac{\sqrt{54-40y}}{3\sqrt{3}};y\right)\Rightarrow MP=\frac{2\sqrt{54-40y}}{3\sqrt{3}}$$

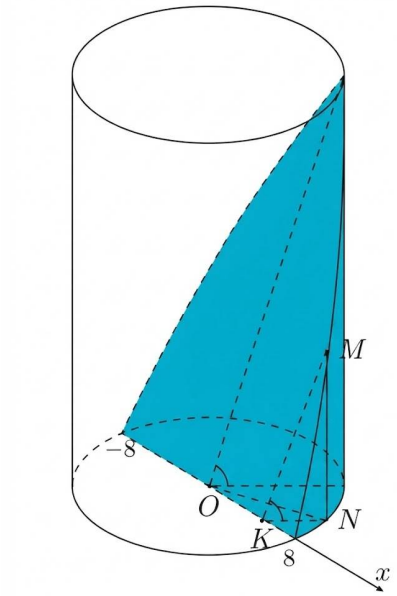
$$\Rightarrow MN=\frac{\sqrt{108-80y}}{3\sqrt{3}}\Rightarrow S(y)=MN^2=\frac{108-80y}{27}.$$

Suy ra thể tích chiếc lều là $V=\int_0^{\frac{27}{20}}S(y)dy=\int_0^{\frac{27}{20}}\frac{108-80y}{27}dy=2,7\left(m^3\right)$.

Bài 8. Một cốc thủy tinh có dạng hình trụ đang đựng một lượng nước, bán kính trong lòng đáy cốc là $8\,\text{cm}$, chiều cao trong lòng cốc là $10\,\text{cm}$. Tính thể tích lượng nước trong cốc (*đơn vị* cm^3), biết khi nghiêng cố nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì ở đáy cốc mực nước trùng với đường kính của đáy cốc (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Đặt $OK = x$ $(0 < x < 8)$

$KN = \sqrt{64 - x^2}$

Xét tam giác KMN, ta có $\tan \widehat{MKN} = \dfrac{10}{8} = \dfrac{MN}{\sqrt{64 - x^2}} \Rightarrow MN = \dfrac{5}{4}\sqrt{64 - x^2}$.

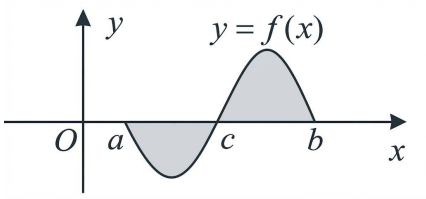
$\Rightarrow S_{\Delta KMN} = \dfrac{1}{2} KN \cdot MN = \dfrac{1}{2}\sqrt{64 - x^2} \cdot \dfrac{5}{4}\sqrt{64 - x^2} = \dfrac{5}{8}\left(64 - x^2\right).$

Vậy $V = \dfrac{5}{8}\int\limits_{-8}^{8}\left(64 - x^2\right)\mathrm{d}x \approx 427\,(\text{cm}$

PHẦN B
TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP GỒM BA PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x=a, x=b$ (phần tô đậm hình vẽ bên dưới) được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $S=\int_a^b f(x)dx$.

B. $S=\left|\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx\right|$.

C. $S=-\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

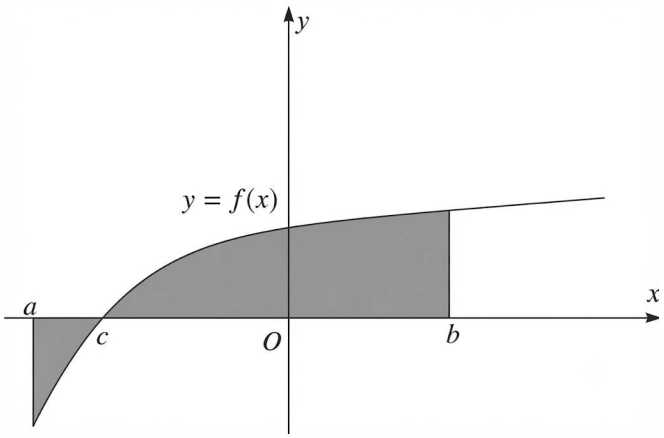
D. $S=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

Lời giải

Chọn B.

Từ hình vẽ, ta có: $S=-\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi S là diện tích phần hình phẳng được tô đậm như hình vẽ bên dưới.



Khi đó, biểu thức tính diện tích S là biểu thức nào dưới đây?

A. $S=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int_c^a f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S=\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$.

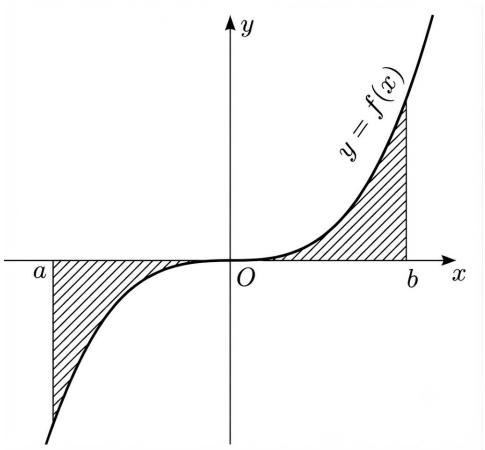
Lời giải

Chọn C.

Từ hình vẽ, ta có:

$$S=\int_a^b\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\int_a^c\left|f(x)\right|\mathrm{d}x+\int_c^b\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=-\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x=\int_c^a f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi S là diện tích phần hình phẳng được gạch chéo như hình vẽ bên dưới.



Khi đó, biểu thức tính diện tích S là biểu thức nào dưới đây?

A. $S=\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b f(x)\mathrm{d}x.$

B. $S=-\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b f(x)\mathrm{d}x.$

C. $S=\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^b f(x)\mathrm{d}x.$

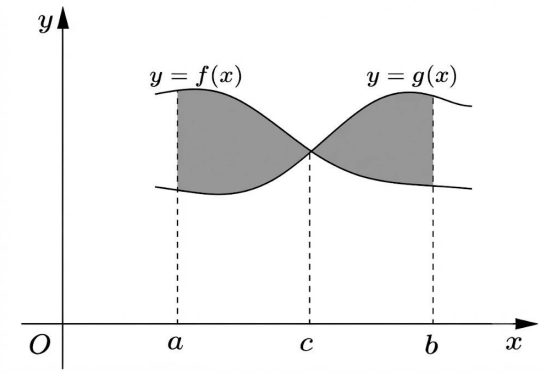
D. $S=-\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^b f(x)\mathrm{d}x.$

Lời giải

Chọn B.

Từ hình vẽ, ta có: $S=\int_a^0\left(-f(x)\right)\mathrm{d}x+\int_0^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b f(x)\mathrm{d}x.$

Câu 4. Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi S là diện tích phần hình phẳng được tô đậm như hình vẽ bên dưới.



Khi đó, biểu thức tính diện tích S là biểu thức nào dưới đây?

A. $S=\int\limits_{a}^{c}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{c}^{b}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$. **B.** $S=\left|\int\limits_{a}^{b}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x\right|$.

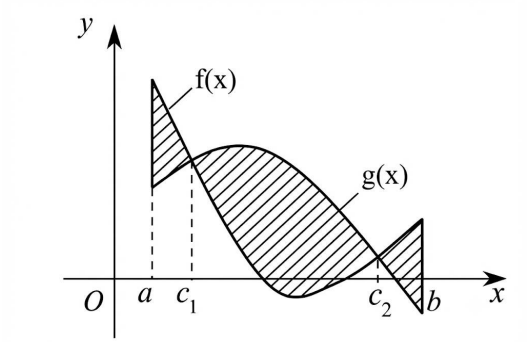
C. $S=\int\limits_{a}^{c}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{c}^{b}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int\limits_{a}^{c}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x-\int\limits_{c}^{b}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A.

Từ hình vẽ, ta có: $S=\int\limits_{a}^{c}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{c}^{b}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$

Câu 5. Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi S là diện tích phần hình phẳng được gạch chéo như hình vẽ bên dưới.



Khi đó, biểu thức tính diện tích S là biểu thức nào dưới đây?

A. $S=\int\limits_{a}^{c_1}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x-\int\limits_{c_1}^{c_2}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{c_2}^{b}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$.

B. $S=\int\limits_{a}^{c_1}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{c_1}^{c_2}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{c_2}^{b}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$.

C. $S=\left|\int\limits_{a}^{b}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x\right|$.

D. $S=\int\limits_{a}^{c_1}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{c_1}^{c_2}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{c_2}^{b}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$.

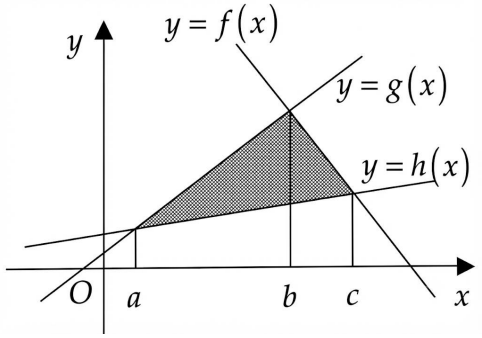
Lời giải

Chọn D.

Từ hình vẽ, ta có:

$$S=\int\limits_{a}^{c_1}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{c_1}^{c_2}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{c_2}^{b}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$$

Câu 6. Cho ba hàm số $y=f(x), y=g(x), y=h(x)$ liên tục trên đoạn $[a;c]$. Gọi S là diện tích phần hình phẳng được tô đậm như hình vẽ bên dưới.



Khi đó, biểu thức tính diện tích S là biểu thức nào dưới đây?

A. $S=\int\limits_a^c\left[f(x)+g(x)+h(x)\right]\mathrm{d}x$.

B. $S=\int\limits_a^b\left[g(x)-h(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_b^c\left[f(x)-h(x)\right]\mathrm{d}x$.

C. $S=\int\limits_a^b\left[f(x)-h(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_b^c\left[g(x)-h(x)\right]\mathrm{d}x$.

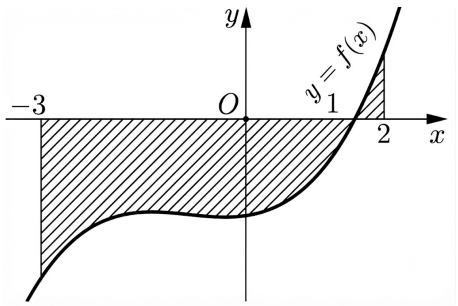
D. $S=\int\limits_a^b\left[g(x)+h(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_b^c\left[f(x)+h(x)\right]\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B.

Từ hình vẽ, ta có: $S=\int\limits_a^b\left[g(x)-h(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_b^c\left[f(x)-h(x)\right]\mathrm{d}x$

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích phần hình phẳng được gạch chéo như hình vẽ bên dưới.



Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $S=-\int\limits_{-3}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int\limits_{1}^{-3}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int\limits_{1}^{-3}f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{2}^{1}f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S=\int\limits_{-3}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

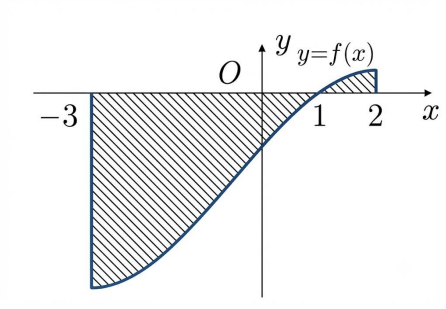
Chọn D.

Từ hình vẽ, ta có:

$$S=-\int\limits_{-3}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{-3}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{-3}f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{2}^{1}f(x)\mathrm{d}x$$

Do đó $S=\int\limits_{-3}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$ là mệnh đề sai.

Câu 8. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-3$, $x=2$ (như hình vẽ bên). Đặt $a=\int\limits_{-3}^{1} f(x)\mathrm{d}x$, $b=\int\limits_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng.



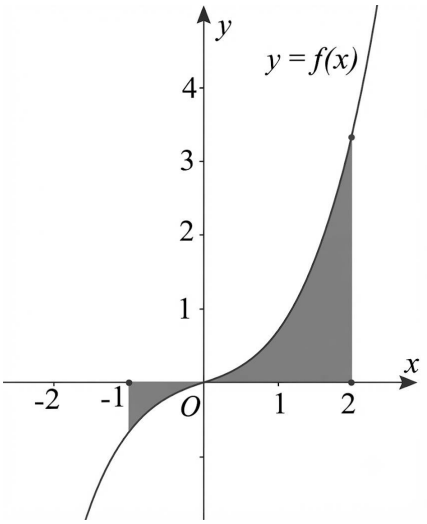
A. $S=a+b$. **B.** $S=a-b$. **C.** $S=-a-b$. **D.** $S=b-a$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $S=\int\limits_{-3}^{2}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-3}^{1}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=-\int\limits_{-3}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=-a+b$.

Câu 9. Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1$, $x=2$ (phần tô đậm như hình vẽ).



Đặt $a=\int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x$, $b=\int\limits_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x$, khi đó mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S=b-a$ **B.** $S=b+a$ **C.** $S=-b+a$ **D.** $S=-b-a$

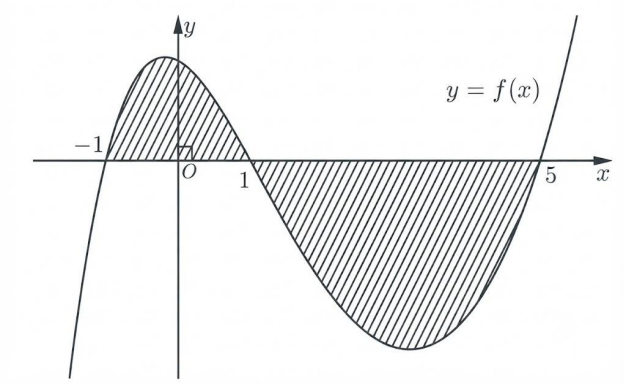
Lời giải

Chọn A.

Ta có:

$$S=\int\limits_{-1}^{2}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=-\int\limits_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x=-a+b.$$

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích phần hình phẳng được gạch chéo như hình vẽ bên dưới.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S=-\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

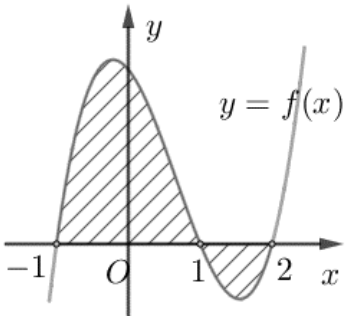
D. $S=-\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn C.

Từ hình vẽ, ta có: $S=\int_{-1}^{1}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{1}^{5}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích phần hình phẳng được gạch chéo như hình vẽ bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S=-\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S=-\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $S=\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn D.

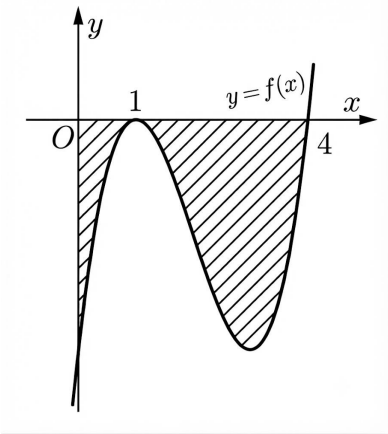
Nhìn hình ta thấy:

Hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn $[-1;1]$ nên $\int_{-1}^{1}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$

Hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị âm trên đoạn $[1;2]$ nên $\int_{1}^{2}|f(x)|\mathrm{d}x=-\int_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$

Vậy $S=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích phần hình phẳng được gạch chéo như hình vẽ bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\int\limits_{4}^{0} f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

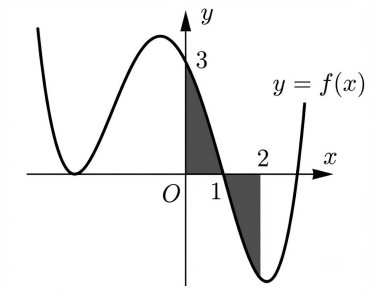
D. $S=-\int\limits_{4}^{0} f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A.

Từ hình vẽ, ta có: $S=-\int\limits_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{4}^{0} f(x)\mathrm{d}x$

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích phần hình phẳng được tô đậm như hình vẽ bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S=-\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S=-\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

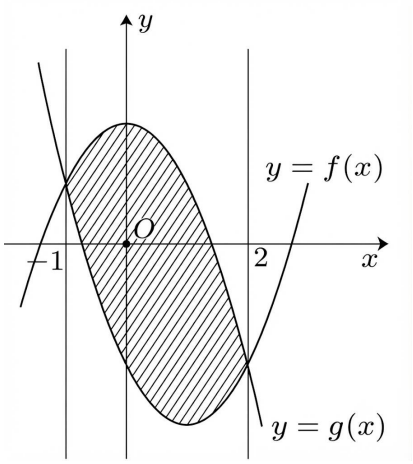
D. $S=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn D.

Từ hình vẽ, ta có: $S=-\int\limits_{0}^{5} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{5}^{0} f\left(x\right)\mathrm{d}x$

Câu 14. Cho hai hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích phần hình phẳng được gạch chéo như hình vẽ bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\int\limits_{-1}^{2}\left[f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x$.

B. $S=\int\limits_{-1}^{2}\left[g\left(x\right)-f\left(x\right)\right]\mathrm{d}x$.

C. $S=\int\limits_{-1}^{2}\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x$.

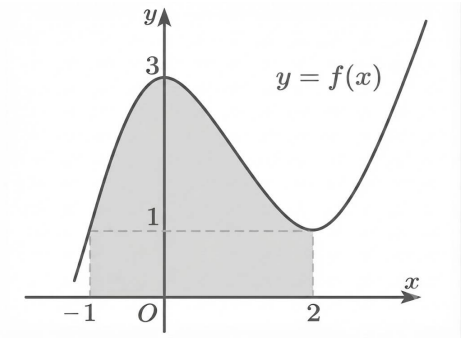
D. $S=\int\limits_{-1}^{2} f\left(x\right).g\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B.

Từ hình vẽ, ta có: $S=\int\limits_{-1}^{2}\left[g\left(x\right)-f\left(x\right)\right]\mathrm{d}x$

Câu 15. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Diện tích phần hình phẳng tô đậm trong hình vẽ được tính theo công thức nào dưới đây?



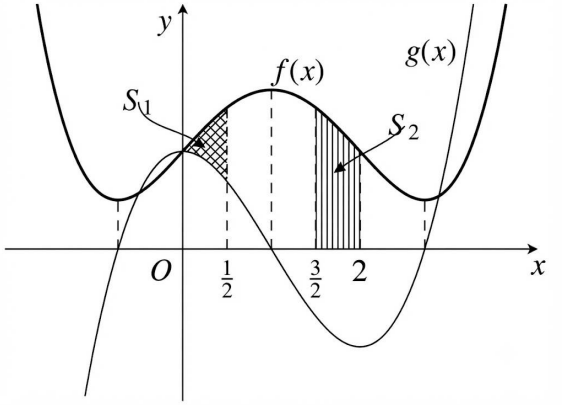
A. $S=3+\int\limits_{-1}^{2} f\left(x\right)dx$ **B.** $S=\int\limits_{-1}^{2} f\left(x\right)dx$ **C.** $S=2+\int\limits_{-1}^{2} f\left(x\right)dx$ **D.** $S=-\int\limits_{-1}^{2} f\left(x\right)dx$

Lời giải

Chọn A.

Diện tích hình phẳng tô đậm trong hình vẽ là: $S=1.3+\int\limits_{-1}^{2} f\left(x\right)dx=3+\int\limits_{-1}^{2} f\left(x\right)dx$

Câu 16. Cho hai hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi S_1, S_2 là diện tích hai phần hình phẳng được gạch chéo như hình vẽ bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $S_1=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$.

B. $S_2=\int\limits_{\frac{3}{2}}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S_1=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$.

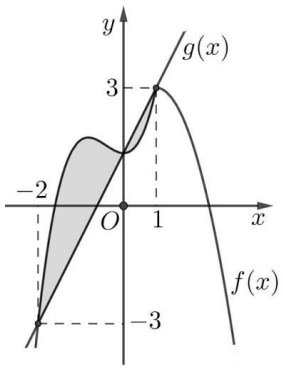
D. $S_2=\int\limits_{\frac{3}{2}}^{2}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn C.

Từ hình vẽ, ta có: $S_1=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$ và $S_2=\int\limits_{\frac{3}{2}}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x$

Câu 17. Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích phần hình phẳng được tô đậm như hình vẽ bên dưới. Biết $y=g(x)$ là một hàm bậc nhất và $y=f(x)$ có đồ thị hình cong.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\int\limits_{-2}^{0}\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$.

B. $S=\int\limits_{-2}^{0}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$.

C. $S=\int\limits_{-2}^{0}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}\left[g(x)+f(x)\right]\mathrm{d}x$.

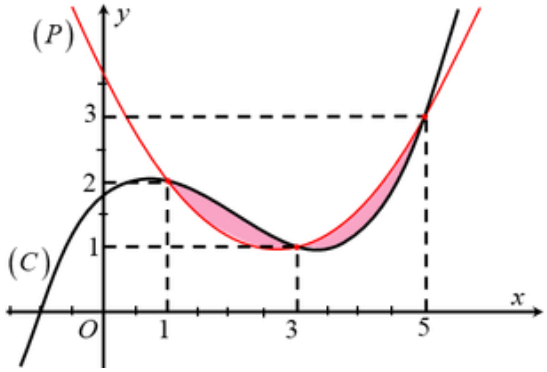
D. $S=\int\limits_{-2}^{0}\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}\left[g(x)+f(x)\right]\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn C.

Từ hình vẽ, ta có: $S=\int\limits_{-2}^{0}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$

Câu 18. Cho hai hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị lần lượt là (C), (P) như hình vẽ.



Gọi S là diện tích phần hình phẳng được tô đậm. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\int\limits_{1}^{3}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{3}^{5}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$.

B. $S=\int\limits_{1}^{5}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$.

C. $S=\int\limits_{1}^{3}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{5}^{3}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$.

D. $S=\int\limits_{1}^{3}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{5}^{3}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$.

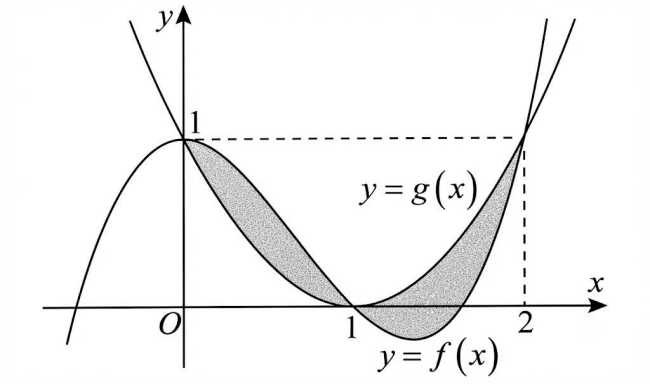
Lời giải

Chọn D.

Từ hình vẽ, ta có:

$$S=\int\limits_{1}^{3}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{3}^{5}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{3}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{5}^{3}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$$

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc ba, $y=g(x)$ là hàm đa thức bậc hai và có đồ thị như vẽ bên dưới.



Gọi S là diện tích phần hình phẳng được tô đậm. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $S=\int_0^2 \left|f(x)-g(x)\right| \mathrm{d}x$.

B. $S=\int_0^1 \left[f(x)-g(x)\right] \mathrm{d}x+\int_1^2 \left[g(x)-f(x)\right] \mathrm{d}x$.

C. $S=\int_0^1 \left[f(x)-g(x)\right] \mathrm{d}x+\int_1^2 \left[f(x)-g(x)\right] \mathrm{d}x$.

D. $S=\int_0^1 \left[f(x)-g(x)\right] \mathrm{d}x+\int_2^1 \left[f(x)-g(x)\right] \mathrm{d}x$.

Lời giải

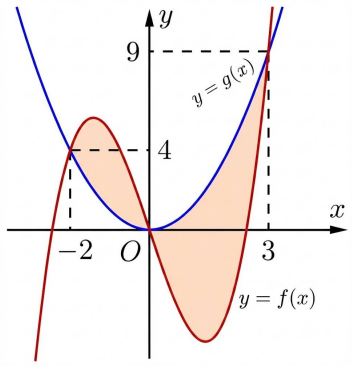
Chọn C.

Từ hình vẽ, ta có:

$$S=\int_0^2 \left|f(x)-g(x)\right| \mathrm{d}x=\int_0^1 \left[f(x)-g(x)\right] \mathrm{d}x+\int_1^2 \left[g(x)-f(x)\right] \mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 \left[f(x)-g(x)\right] \mathrm{d}x+\int_2^1 \left[f(x)-g(x)\right] \mathrm{d}x$$

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc ba, $y=g(x)$ là hàm đa thức bậc hai và có đồ thị như vẽ bên dưới.



Gọi S là diện tích phần hình phẳng được tô đậm. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int_{-2}^0 \left[f(x)-g(x)\right] \mathrm{d}x+\int_0^3 \left[g(x)-f(x)\right] \mathrm{d}x$.

B. $\int_{-2}^0 \left[f(x)+g(x)\right] \mathrm{d}x+\int_0^3 \left[g(x)+f(x)\right] \mathrm{d}x$.

C. $\int_{-2}^{0}\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x+\int_{0}^{3}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$. **D.** $\int_{-2}^{0}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int_{0}^{3}\left[g(x)+f(x)\right]\mathrm{d}x$.

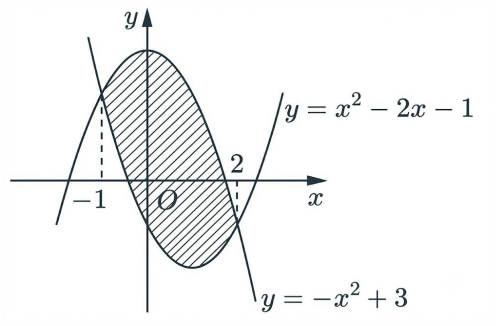
Lời giải

Chọn A.

Từ hình vẽ, ta có:

$$S=\int_{-2}^{3}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int_{0}^{3}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$$

Câu 21. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^{2}\left(-2x+2\right)dx$ **B.** $\int_{-1}^{2}\left(2x-2\right)dx$ **C.** $\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)dx$ **D.** $\int_{-1}^{2}\left(2x^2-2x-4\right)dx$

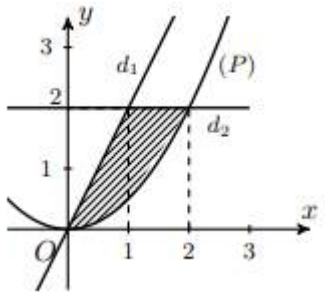
Lời giải

Chọn C.

Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là:

$$S=\int_{-1}^{2}\left|\left(-x^2+3\right)-\left(x^2-2x-1\right)\right|dx=\int_{-1}^{2}\left|-2x^2+2x+4\right|dx=\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)dx.$$

Câu 22. Diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $P: y=\frac{1}{2}x^2$, $d_1: y=2x$ và $d_2: y=2$ được gạch chéo như hình vẽ bên dưới. Diện tích S được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $S=\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{2}x^2-2x\right)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{2}x^2-2\right)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int_{0}^{2}\left(x+2-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x$.

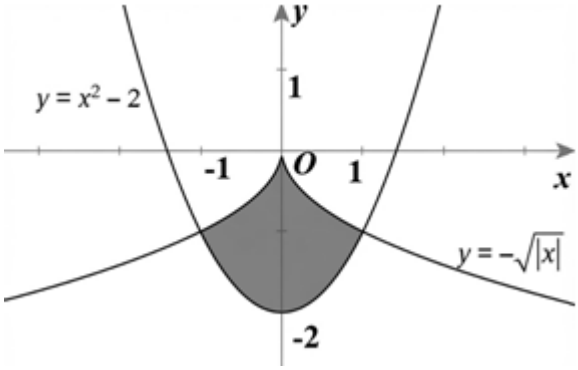
C. $S=\int_{0}^{1}\left(2x-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\left(2-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int_{0}^{2}\left(\frac{1}{2}x^2-x-2\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn C.

Từ hình vẽ ta có: $S=\int\limits_{0}^{1}\left(2x-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}\left(2-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x$

Câu 23. Diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-2$ và $y=\sqrt{|x|}$ được tô đậm như hình vẽ bên dưới. Diện tích S được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $S=\int\limits_{-1}^{1}\left(x^2-2+\sqrt{|x|}\right)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int\limits_{-1}^{1}\left(x^2-2-\sqrt{|x|}\right)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int\limits_{-1}^{1}\left(-x^2+2+\sqrt{|x|}\right)\mathrm{d}x$.

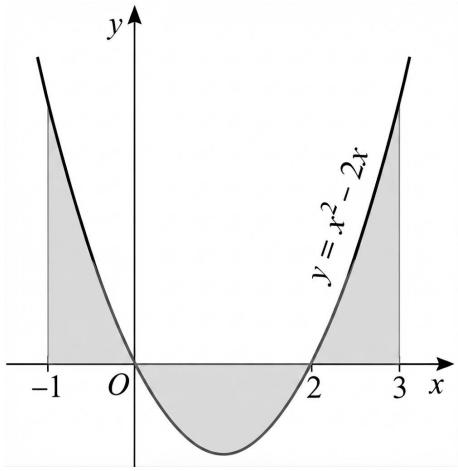
D. $S=\int\limits_{-1}^{1}\left(-x^2+2-\sqrt{|x|}\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn D.

Diện tích hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên là: $S=\int\limits_{-1}^{1}\left|x^2-2-\left(-\sqrt{|x|}\right)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}\left(-\sqrt{|x|}-x^2+2\right)\mathrm{d}x$

Câu 24. Tính diện tích S của hình phẳng được tô đậm như hình vẽ dưới đây.



A. $S=\frac{7}{2}$.

B. $S=\frac{9}{2}$.

C. $S=5$.

D. $S=4$.

Lời giải

Chọn D.

Từ hình vẽ, ta có: $S=\int\limits_{-1}^{3}\left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x$

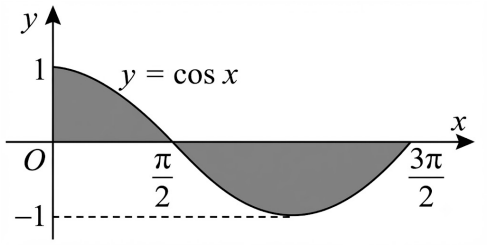
Cách 1: Casio ta được $S=\int\limits_{-1}^{3}\left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x=4$

Cách 2: Tự luận

$$S=\int_{-1}^{3}\left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\left(2x-x^2\right)\mathrm{d}x+\int_{2}^{3}\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{2}+\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{2}^{3}=4$$

Câu 25. Tính diện tích S của hình phẳng được tô đậm như hình vẽ dưới đây.



A. $S=1$. **B.** $S=2$. **C.** $S=3$. **D.** $S=4$.

Lời giải

Chọn C.

Từ hình vẽ, ta có: $S=\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\left|\cos x\right|dx$

Cách 1: Casio (nhớ chuyển sang đơn vị Radian) ta được $S=\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\left|\cos x\right|dx=3$

Cách 2: Tự luận

$$S=\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\left|\cos x\right|dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x dx=\sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=3$$

Câu 26. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ và các đường thẳng $x=a, x=b$ bằng

A. $\left|\int_{a}^{b}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x\right|$. **B.** $\int_{a}^{b}\left|f(x)+g(x)\right|\mathrm{d}x$. **C.** $\int_{a}^{b}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x$. **D.** $\int_{a}^{b}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn C.

Theo lý thuyết thì diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của các đường $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a, x=b$ được tính theo công thức $S=\int_{a}^{b}\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$.

Câu 27. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=3^x$, $y=0, x=0, x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\int_{0}^{2}3^x dx$. **B.** $S=\pi\int_{0}^{2}3^{2x}dx$. **C.** $S=\pi\int_{0}^{2}3^x dx$. **D.** $S=\int_{0}^{2}3^{2x}dx$.

Lời giải

Chọn A.

Diện tích hình phẳng đã cho được tính bởi công thức $S=\int_0^2 3^x dx$

Câu 28. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(x-2)^2-1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=2$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $S=\int_1^2 \left|(x-2)^2-1\right| dx=\int_1^2 \left|x^2-4x+3\right| dx=\left|\int_1^2 \left(x^2-4x+3\right) dx\right|=\frac{2}{3}$.

Câu 29. Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+1, x=-1, x=2$ và trục hoành.

A. $S=6$. **B.** $S=16$. **C.** $S=\frac{13}{6}$. **D.** $S=13$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $S=\int_{-1}^2 \left|x^2+1\right| dx=\int_{-1}^2 \left(x^2+1\right) dx=6$.

Câu 30. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+5, y=6x, x=0, x=1$.

A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{7}{3}$ **C.** $\frac{8}{3}$ **D.** $\frac{5}{3}$

Lời giải

Chọn B.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2+5=6x \Leftrightarrow x=5; x=1$.

Diện tích hình phẳng cần tìm: $S=\int_0^1 \left|x^2-6x+5\right| dx=\frac{7}{3}$.

Câu 31. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=4x-x^2, y=2x$ và hai đường thẳng $x=1, x=e$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{20}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{16}{3}$

Lời giải

Chọn C.

diện tích hình phẳng cần tìm là $S=\int_0^2 \left|x^2-2x\right| dx=\int_0^2 \left(2x-x^2\right) dx=\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2=\frac{4}{3}$.

Câu 32. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-2x, y=0, x=-10, x=10$.

A. $S=\dfrac{2000}{3}$. **B.** $S=2008$. **C.** $S=2000$. **D.** $S=\dfrac{2008}{3}$.

Lời giải

Chọn D.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $(C): y=x^2-2x$ và $(d): y=0$ là:

$$x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
VT		$+$	0	$-$	0	$+$	

Diện tích cần tìm:

$$S=\int_{-10}^{10}\left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\int_{-10}^{0}\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x-\int_{0}^{2}\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x+\int_{2}^{10}\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{-10}^{0}-\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{0}^{2}+\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{2}^{10}=\frac{1300}{3}+\frac{4}{3}+\frac{704}{3}=\frac{2008}{3}.$$

Câu 33. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=\ln x, y=1$ và hai đường thẳng $x=1, x=e$ bằng

A. e^2. **B.** $e+2$. **C.** $2e$. **D.** $e-2$.

Lời giải

Chọn D.

$$S=\int_{1}^{e}\left|\ln x-1\right|dx=\left|\int_{1}^{e}\left(\ln x-1\right)dx\right|=\left|x\left(\ln x-1\right)\Big|_{1}^{e}-\int_{1}^{e}dx\right|=\left|1-x\Big|_{1}^{e}\right|=\left|1-(e-1)\right|=\left|2-e\right|=e-2$$

Câu 34. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=x^3+11x-6, y=6x^2$ và hai đường thẳng $x=0,\ x=2$ là

A. 2. **B.** $\dfrac{2}{5}$. **C.** 5. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

Giải phương trình: $x^3+11x-6=6x^2 \Leftrightarrow x^3-6x^2+11x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Ta có $S=\int_{0}^{2}\left|x^3-6x^2+11x-6\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{0}^{1}\left(x^3-6x^2+11x-6\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{1}^{2}\left(x^3-6x^2+11x-6\right)\mathrm{d}x\right|=\dfrac{5}{2}$.

Câu 35. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$ là

A. $\frac{1}{\ln 2}$ **B.** $\frac{3}{\ln 2}$ **C.** $\frac{\pi}{\ln 2}$ **D.** $\frac{3\pi}{\ln 2}$

Lời giải

Chọn B.

$S=\int_0^2\left|2^x\right|\mathrm{d}x=\int_0^2 2^x\,\mathrm{d}x=\frac{3}{\ln 2}$ (do $2^x>0,\forall x\in[0;2]$).

Câu 36. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$ là:

A. e^2-1 **B.** e^2 **C.** e^2+1 **D.** $\left(e^2-1\right)\pi$

Lời giải

Chọn B.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$ là:

$S=\int_0^2 e^x\mathrm{d}x=e^x\Big|_0^2=e^2-1.$

Câu 37. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sin x, Ox, x=0, x=\pi$. Diện tích của hình phẳng (H) bằng

A. 1. **B.** 2π. **C.** 2. **D.** π.

Lời giải

Chọn C.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sin x, Ox, x=0, x=\pi$ là

$S=\int_0^\pi\left|\sin x\right|\mathrm{d}x=\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^\pi=-(\cos\pi-\cos 0)=2.$

Câu 38. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2+2x$ và trục hoành bằng

A. $\frac{4\pi}{3}$. **B.** $\frac{3\pi}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn D.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$.

Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị trên là: $S=\int_{-2}^0\left|x^2+2x\right|\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$.

Câu 39. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=-x^2+x+6$ và $y=0$ bằng

A. $\frac{95\pi}{6}$. **B.** $\frac{95}{6}$. **C.** $\frac{125\pi}{6}$. **D.** $\frac{125}{6}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta xét phương trình hoành độ giao điểm: $-x^2+x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=3\end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng cần tính là: $S=\int\limits_{-2}^{3}\left|-x^2+x+6\right|\mathrm{d}x=\dfrac{125}{6}$.

Câu 40. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2+2$ và đường thẳng $y=6$ bằng

A. $\dfrac{32}{3}$. **B.** $\dfrac{40}{3}$. **C.** $\dfrac{16}{3}$. **D.** $\dfrac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2+2=6\Leftrightarrow x=\pm 2$

Diện tích hình phẳng cần tính là: $S=\int\limits_{-2}^{2}\left|x^2-4\right|\mathrm{d}x=\dfrac{32}{3}$.

Câu 41. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2$ và $y=4x-3$ là

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2=4x-3\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$.

Khi đó $S=\int\limits_{1}^{3}\left|x^2-4x+3\right|\mathrm{d}x=\dfrac{4}{3}$.

Câu 42. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=x^2$ và $y=8-x^2$ là

A. 14. **B.** 28. **C.** $\dfrac{64}{3}$. **D.** $\dfrac{64}{5}$.

Lời giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm cần tìm là $x^2=8-x^2\Leftrightarrow 2x^2=8\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$S=\int\limits_{-2}^{2}\left|x^2-\left(8-x^2\right)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{2}\left|2x^2-8\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{2}\left(-2x^2+8\right)\mathrm{d}x$ vì $2x^2-8\le 0,\forall x\in[-2;2]$

$\Rightarrow S=\left(-\dfrac{2}{3}x^3+8x\right)\Big|_{-2}^{2}=-\dfrac{2}{3}.2^3+8.2-\left(-\dfrac{2}{3}.(-2)^3+8.(-2)\right)=\dfrac{64}{3}$.

Câu 43. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đường $y=x^2-1$ và $y=x-1$ bằng:

A. $\dfrac{1}{6}$. **B.** $\dfrac{13}{6}$. **C.** $\dfrac{13\pi}{6}$. **D.** $\dfrac{\pi}{6}$.

Lời giải

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm hai đồ thị hàm số là: $x^2-1=x-1\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng là: $S=\int\limits_0^1\left|x^2-x\right|\mathrm{d}x=\left|\int\limits_0^1\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^1\Bigg|=\frac{1}{6}$.

Câu 44. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y=x^3-6x$ và $y=x^2$ bằng

A. $\frac{125}{12}$. **B.** $\frac{16}{3}$. **C.** $\frac{63}{4}$. **D.** $\frac{253}{12}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $x^3-6x=x^2\Leftrightarrow x^3-x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=0\\x=-2\end{array}\right.$.

Ta có $S=\int\limits_{-2}^3\left|x^3-x^2-6x\right|\mathrm{d}x=\frac{253}{12}$.

Câu 45. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-4x+3$, $y=0$ và $x=0$ bằng

A. $\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{16}{9}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$

$S=\int\limits_1^3\left|x^2-4x+3\right|\mathrm{d}x=-\int\limits_1^3\left(x^2-4x+3\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\right)\Bigg|_1^3=\frac{4}{3}$.

Câu 46. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=\left|\ln x\right|, y=1$ được tính bởi công thức:

A. $S=\int\limits_1^e\left|\left(\left|\ln x\right|-1\right)\right|\mathrm{d}x$ **B.** $S=\int\limits_{\frac{1}{e}}^e\left(1-\left|\ln x\right|\right)\mathrm{d}x$

C. $S=\int\limits_1^e\left|\left(1-\left|\ln x\right|\right)\right|\mathrm{d}x$ **D.** $S=\int\limits_{\frac{1}{e}}^e\left(\left|\ln x\right|-1\right)\mathrm{d}x$

Lời giải

Chọn B.

Xét phương trình: $|\ln x|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\ln x=-1\\ \ln x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{e}\\ x=e\end{array}\right.$

Khi đó: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=|\ln x|, y=1$ được tính bởi công thức:

$S=\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e}\left|1-|\ln x|\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e}\left(1-|\ln x|\right)\mathrm{d}x.$

Câu 47. Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a, x=b(a<b)$, xung quanh trục Ox.

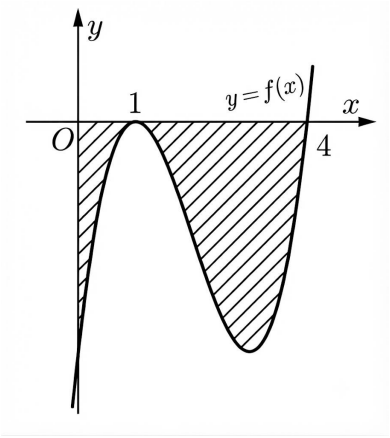
A. $V=\int\limits_{a}^{b}|f(x)|dx$ **B.** $V=\pi\int\limits_{a}^{b}f^2(x)dx$ **C.** $V=\int\limits_{a}^{b}f^2(x)dx$ **D.** $V=\pi\int\limits_{a}^{b}f(x)dx$

Lời giải

Chọn B.

Lý thuyết

Câu 48. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hình (H) là hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ.



Thể tích khối tròn xoay tạo ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox được tính theo công thức nào sau đây?

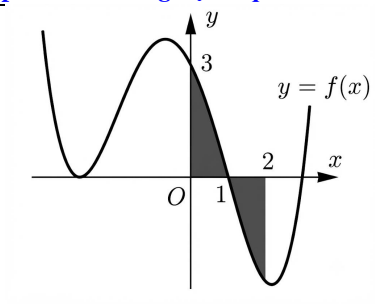
A. $V=\pi\int\limits_{0}^{4}f^2(x)\mathrm{d}x.$ **B.** $V=\int\limits_{0}^{4}f^2(x)\mathrm{d}x.$ **C.** $V=\pi\int\limits_{0}^{4}f(x)\mathrm{d}x.$ **D.** $V=-\pi\int\limits_{0}^{4}f^2(x)\mathrm{d}x.$

Lời giải

Chọn A.

Từ hình vẽ, ta có: $V=\pi\int\limits_{0}^{4}f^2(x)\mathrm{d}x$

Câu 49. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hình (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ.



Thể tích khối tròn xoay tạo ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox được tính theo công thức nào sau đây?

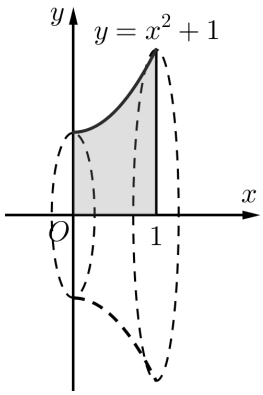
A. $V=\pi\int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$. **B.** $V=\int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\int\limits_0^2 f^2(x)\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\int\limits_1^2 f^2(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn C.

Từ hình vẽ, ta có: $V=\pi\int\limits_0^2 f^2(x)\mathrm{d}x$

Câu 50. Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ.



Thể tích khối tròn xoay tạo ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox được tính theo công thức nào sau đây?

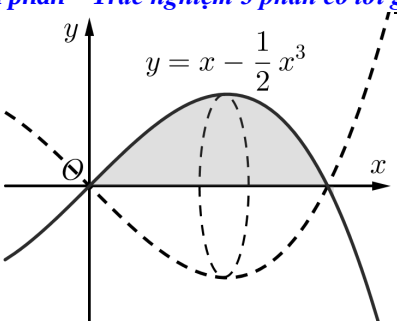
A. $V=\int\limits_0^1\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\int\limits_0^1\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x$. **C.** $V=\int\limits_0^1\left(x^2+1\right)^2\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\int\limits_0^1\left(x^2+1\right)^2\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn D.

Hình phẳng (H) được tô đậm trong hình vẽ được giới hạn bởi các đường $y=x^2+1,\ x=0,\ x=1,\ y=0$ nên thể tích khối tròn xoay là: $V=\pi\int\limits_0^1\left(x^2+1\right)^2\mathrm{d}x$

Câu 51. Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ.



Thể tích khối tròn xoay tạo ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox được tính theo công thức nào sau đây?

A. $V = \int_0^{\sqrt{2}} \left(x - \frac{1}{2}x^3 \right)^2 \mathrm{d}x$.

B. $V = \pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(x - \frac{1}{2}x^3 \right)^2 \mathrm{d}x$.

C. $V = \pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(x - \frac{1}{2}x^3 \right) \mathrm{d}x$.

D. $V = \int_0^{\sqrt{2}} \left(x - \frac{1}{2}x^3 \right) \mathrm{d}x$.

Lời giải

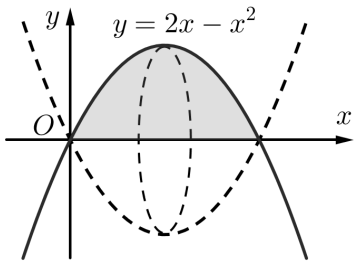
Chọn B.

Phương trình hoành đô giao điểm của $y = x - \frac{1}{2}x^3$ với trục hoành là:

$$x - \frac{1}{2}x^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{2}\,(L) \\ x = -\sqrt{2} \end{array} \right.$$

Hình phẳng (H) được tô đậm trong hình vẽ được giới hạn bởi các đường $y = x - \frac{1}{2}x^3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \sqrt{2}$ nên thể tích khối tròn xoay là: $V = \pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(x - \frac{1}{2}x^3 \right)^2 \mathrm{d}x$

Câu 52. Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ.



Thể tích khối tròn xoay tạo ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng bao nhiêu?

A. $\frac{4\pi}{3}$.

B. $\frac{13\pi}{15}$.

C. $\frac{14\pi}{15}$.

D. $\frac{16\pi}{15}$.

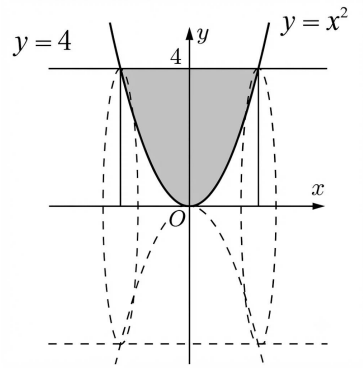
Lời giải

Chọn D.

Phương trình hoành độ giao điểm là: $-x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array} \right.$

Thể tích khối tròn xoay là: $V=\pi\int\limits_{0}^{2}\left(2x-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{16\pi}{15}$

Câu 53. Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ.



Thể tích khối tròn xoay tạo ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{64\pi}{5}$. **B.** $\dfrac{128\pi}{5}$. **C.** $\dfrac{256\pi}{5}$. **D.** $\dfrac{152\pi}{5}$.

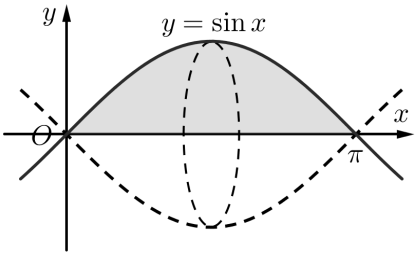
Lời giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm là: $x^2=4\Leftrightarrow x^2-4=0\Leftrightarrow x=\pm2$

Thể tích khối tròn xoay là: $V=\pi\int\limits_{-2}^{2}\left|\left(x^2\right)^2-4^2\right|\mathrm{d}x=\dfrac{256\pi}{5}$.

Câu 54. Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ.



Thể tích khối tròn xoay tạo ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng bao nhiêu?

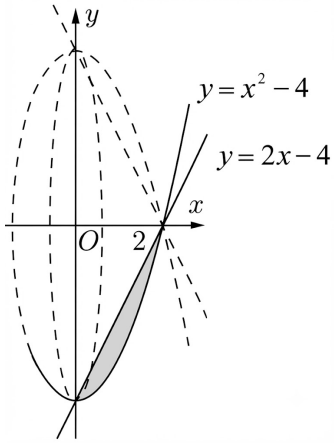
A. $\dfrac{\pi^2}{4}$. **B.** $\dfrac{\pi^2}{2}$. **C.** $\dfrac{\pi}{2}$. **D.** $\dfrac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn B.

Thể tích khối tròn xoay là: $V=\pi\int\limits_{0}^{\pi}\left(\sin x\right)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\int\limits_{0}^{\pi}\dfrac{1-\cos2x}{2}\mathrm{d}x\right)=\dfrac{\pi^2}{2}$

Câu 55. Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ.



Thể tích khối tròn xoay tạo ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng bao nhiêu?

A. $\frac{416\pi}{15}$. **B.** $\frac{752\pi}{5}$. **C.** $\frac{16\pi}{15}$. **D.** $\frac{32\pi}{5}$.

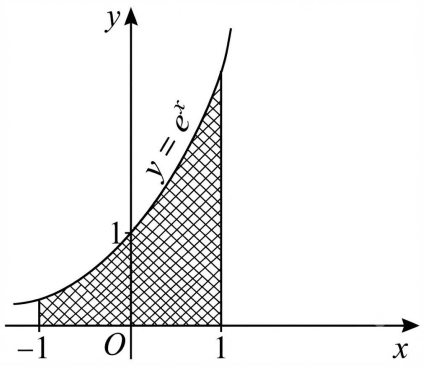
Lời giải

Chọn D.

Phương trình hoành độ giao điểm là: $x^2-4=2x-4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Thể tích của hình khối là: $V=\pi\int\limits_0^2\left[(2x-4)^2-\left(x^2-4\right)^2\right]\mathrm{d}x=\frac{32\pi}{5}$.

Câu 56. Cho (H) là hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ.



Thể tích khối tròn xoay tạo ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox được tính theo công thức nào sau đây?

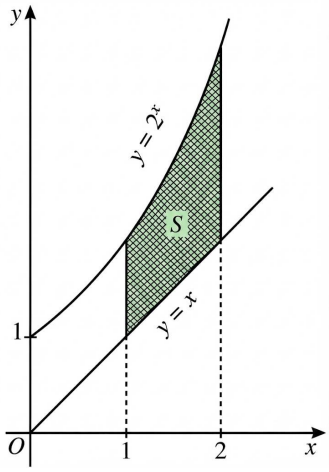
A. $V=\pi\int\limits_{-1}^{1}e^x\mathrm{d}x$. **B.** $V=\int\limits_{-1}^{1}e^x\mathrm{d}x$. **C.** $V=\int\limits_{-1}^{1}e^{2x}\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\int\limits_{-1}^{1}e^{2x}\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn D.

Thể tích của vật thể tròn xoay là: $V=\pi\int\limits_{-1}^{1}\left(e^x\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_{-1}^{1}e^{2x}\mathrm{d}x$.

Câu 57. Cho (H) là hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ.



Thể tích khối tròn xoay tạo ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox được tính theo công thức nào sau đây?

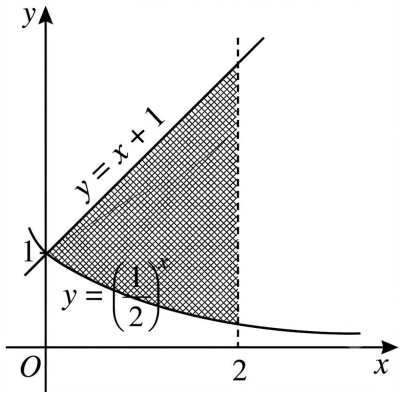
A. $V=\pi\int\limits_{-1}^{1}\left(2^x-x\right)\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\int\limits_{-1}^{1}\left(2^x-x^2\right)\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\int\limits_{-1}^{1}\left(4^x-x^2\right)\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\int\limits_{-1}^{1}\left(4^x-x\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn C.

Thể tích của vật thể tròn xoay là: $V=\pi\int\limits_{-1}^{1}\left(2^{2x}-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\int\limits_{-1}^{1}\left(4^x-x^2\right)\mathrm{d}x$.

Câu 58. Cho (H) là hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ.



Thể tích khối tròn xoay tạo ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox được tính theo công thức nào sau đây?

A. $V=\pi\int\limits_{-1}^{1}\left[x^2+2x-1-\left(\frac{1}{4}\right)^x\right]\mathrm{d}x$.

B. $V=\pi\int\limits_{-1}^{1}\left[x+1-\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]\mathrm{d}x$.

C. $V=\pi\int\limits_{-1}^{1}\left[x^2+2x-1-\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]\mathrm{d}x$.

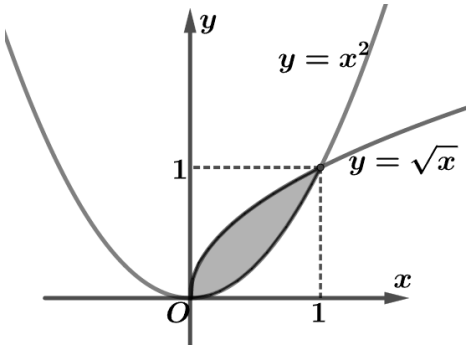
D. $V=\pi\int\limits_{-1}^{1}\left[x+1-\left(\frac{1}{4}\right)^x\right]\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A.

Thể tích của vật thể tròn xoay là: $V=\pi\int\limits_{-1}^{1}\left[(x+1)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}\right]\mathrm{d}x=\pi\int\limits_{-1}^{1}\left[x^2+2x-1-\left(\frac{1}{4}\right)^x\right]\mathrm{d}x$.

Câu 59. Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2$ và đồ thị của hàm số $y=\sqrt{x}$ (tham khảo hình vẽ). Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục Ox bằng



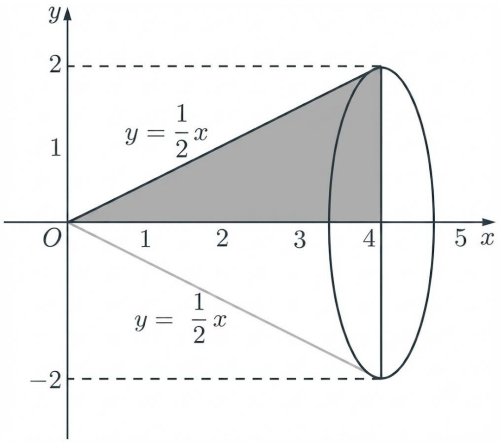
A. $V=\dfrac{9\pi}{10}$. **B.** $V=\dfrac{3\pi}{10}$. **C.** $V=\dfrac{\pi}{10}$. **D.** $V=\dfrac{7\pi}{10}$.

Lời giải

Chọn B.

Thể tích khối tròn xoay thu được là $V=\pi\int\limits_0^1\left[\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(x^2\right)^4\right]\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^1\left(x-x^4\right)\mathrm{d}x=\dfrac{3\pi}{10}$.

Câu 60. Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ.



Thể tích khối tròn xoay tạo ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng bao nhiêu?

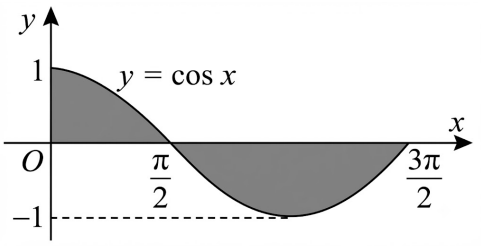
A. $V=\dfrac{8\pi}{3}$. **B.** $V=\dfrac{16\pi}{3}$. **C.** $V=\dfrac{19\pi}{3}$. **D.** $V=\dfrac{64\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn B.

Thể tích của vật thể tròn xoay là: $V=\pi\int\limits_0^4\left(\dfrac{1}{2}x\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\pi\int\limits_0^4x^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\pi\dfrac{x^3}{3}\Big|_0^4=\dfrac{16\pi}{3}$.

Câu 61. Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ.



Thể tích khối tròn xoay tạo ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng bao nhiêu?

A. $V=\dfrac{\pi-1}{2}$. **B.** $V=\dfrac{\pi^2}{2}$. **C.** $V=\dfrac{\pi}{2}$. **D.** $V=\dfrac{\pi^2-\pi}{2}$.

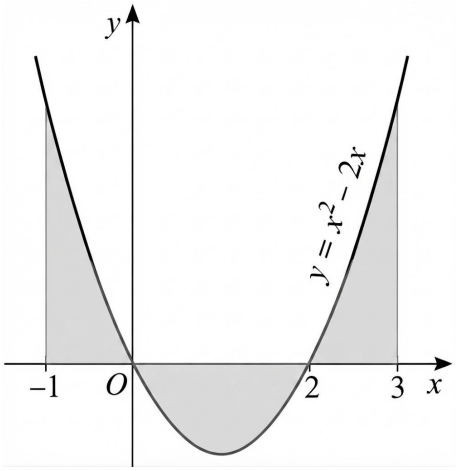
Lời giải

Chọn D.

Thể tích của vật thể tròn xoay là:

$$V=\pi\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=\pi\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}(1+\cos 2x)\,dx=\frac{\pi}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=\frac{\pi^2-\pi}{2}$$

Câu 62. Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ.



Thể tích khối tròn xoay tạo ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng bao nhiêu?

A. $V=\dfrac{92}{15}$. **B.** $V=\dfrac{4}{3}$. **C.** $V=\dfrac{92\pi}{15}$. **D.** $V=\dfrac{4\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn C.

Thể tích của vật thể tròn xoay là: $V=\pi\int_{-1}^{3}\left(x^2-2x\right)^2\,dx=\dfrac{92\pi}{15}$

Câu 63. Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x=1$ và $x=2$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1\le x\le 2)$ cắt vật thể đó có diện tích $S(x)=2024x$. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên.

A. $V=3036$ **B.** $V=3036\pi$ **C.** $V=1518$ **D.** $V=1518\pi$

Lời giải

Chọn A.

Thể tích vật thể là: $V=\int_1^2 2024xdx=3036$

Câu 64. Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x=1$ và $x=3$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1\le x\le 3)$ cắt vật thể đó theo thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $3x^2-2$. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên.

A. $V=156$ **B.** $V=156\pi$ **C.** $V=312$ **D.** $V=312\pi$

Lời giải

Chọn A.

Diện tích thiết diện là: $S(x)=3x.\left(3x^2-2\right)=9x^3-6x$

$\Rightarrow$ Thể tích vật thể là: $V=\int_1^3\left(9x^3-6x\right)dx=156$

Câu 65. Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0\le x\le 3)$ thì được thiết diện là một hình vuông có độ dài cạnh bằng $2\sqrt{9-x^2}$

A. 90 **B.** 72π **C.** 78π **D.** 72

Lời giải

Chọn D.

Diện tích hình vuông là $S=\left(2\sqrt{9-x^2}\right)^2=4\left(9-x^2\right)=36-4x^2$

Vậy thể tích vật thể là $V=\int_0^3 S(x)dx=\int_0^3\left(36-4x^2\right)dx=72$.

Câu 66. Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0, x=1$, có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\left(0\le x\le 1\right)$ là một tam giác đều có cạnh bằng x.

A. $V=\frac{12\pi}{5}$. **B.** $V=\frac{12}{5}$. **C.** $V=\frac{\sqrt{3}\pi}{12}$. **D.** $V=\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Chọn D.

Thể tích vật thể là: $V=\int_0^1 S(x)dx=\int_0^1 x^2.\frac{\sqrt{3}}{4}dx=\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Câu 67. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2+3$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\int_0^2\left(x^2+3\right)dx$ **B.** $V=\pi\int_0^2\left(x^2+3\right)dx$ **C.** $V=\int_0^2\left(x^2+3\right)^2dx$ **D.** $V=\pi\int_0^2\left(x^2+3\right)^2dx$

Lời giải

Chọn D.

Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox là: $V=\pi\int_0^2\left(x^2+3\right)^2dx$.

Câu 68. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=\dfrac{\pi\left(e^2+1\right)}{2}$ **B.** $V=\dfrac{e^2-1}{2}$ **C.** $V=\dfrac{\pi e^2}{3}$ **D.** $V=\dfrac{\pi\left(e^2-1\right)}{2}$

Lời giải

Chọn D.

$$V=\pi\int_0^1 e^{2x}dx=\pi\frac{e^{2x}}{2}\bigg|_0^1=\frac{\pi\left(e^2-1\right)}{2}$$

Câu 69. Cho hình phẳng D giới hạn với đường cong $y=\sqrt{x^2+1}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=2$ **B.** $V=\dfrac{4\pi}{3}$ **C.** $V=2\pi$ **D.** $V=\dfrac{4}{3}$

Lời giải

Chọn B.

Thể tích khối tròn xoay được tính theo công thức:

$$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2dx=\pi\int_0^1\left(x^2+1\right)dx=\pi\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\bigg|_0^1=\frac{4\pi}{3}.$$

Câu 70. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=\dfrac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=(\pi+1)\pi$ **B.** $V=\pi-1$ **C.** $V=\pi+1$ **D.** $V=(\pi-1)\pi$

Lời giải

Chọn A.

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{2+\cos x}\right)^2dx=\pi\left(2x+\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi(\pi+1).$$

Câu 71. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=2\pi\left(\pi+1\right)$ **B.** $V=2\pi$ **C.** $V=2\left(\pi+1\right)$ **D.** $V=2\pi^2$

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $V=\pi\int\limits_0^{\pi}\left(\sqrt{2+\sin x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^{\pi}\left(2+\sin x\right)\mathrm{d}x=\pi\left(2x-\cos x\right)\Big|_0^{\pi}=2\pi\left(\pi+1\right).$

Câu 72. Tìm công thức tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P):y=x^2$, đường thẳng $d:y=2x$ và đường thẳng $x=0,x=2$ quay xung quanh trục Ox.

A. $\pi\int\limits_0^2\left(x^2-2x\right)^2dx$. **B.** $\pi\int\limits_0^2 4x^2dx-\pi\int\limits_0^2 x^4dx$. **C.** $\pi\int\limits_0^2 4x^2dx+\pi\int\limits_0^2 x^4dx$. **D.** $\pi\int\limits_0^2\left(2x-x^2\right)dx$

Lời giải

Chọn A.

Vậy thể tích khối tròn xoay được tính $V=\pi\int\limits_0^2 4x^2dx-\pi\int\limits_0^2 x^4dx$.

Câu 73. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2+3,\ y=0,\ x=0,\ x=2$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $V=\pi\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)^2\mathrm{d}x$. **B.** $V=\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)\mathrm{d}x$. **C.** $V=\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)^2\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A.

Thể tích của vật thể được tạo nên là $V=\pi\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)^2\mathrm{d}x.$

Câu 74. Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2-2x$, trục hoành, đường thẳng $x=0$ và $x=1$ quanh trục hoành bằng

A. $\frac{16\pi}{15}$. **B.** $\frac{2\pi}{3}$. **C.** $\frac{4\pi}{3}$. **D.** $\frac{8\pi}{15}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có

$$V=\pi\int\limits_0^1\left(x^2-2x\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^1\left(x^4-4x^3+4x^2\right)\mathrm{d}x=\pi.\left(\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{4x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\pi.\left(\frac{1}{5}-1+\frac{4}{3}\right)=\frac{8\pi}{15}.$$

Câu 75. Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, trục Ox và hai đường thẳng $x=1;x=4$ khi quay quanh trục hoành được tính bởi công thức nào?

A. $V=\pi\int\limits_1^4 x\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi^2\int\limits_1^4 x\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\int\limits_1^4\sqrt{x}\mathrm{d}x$. **D.** $V=\int\limits_1^4\left|\sqrt{x}\right|\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $V=\pi\int\limits_1^4 x\mathrm{d}x$

Câu 76. Cho hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{x+2}$ và hai trục toạ độ. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng đó quanh trục Ox bằng

A. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **B.** 2. **C.** 2π. **D.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$.

Lời giải

Chọn C.

$V=\pi\int\limits_{-2}^{0}\left(\sqrt{x+2}\right)^2 dx=\pi\left(x^2+2x\right)\Big|_{-2}^{0}=2\pi.$

Câu 77. Cho miền phẳng (D) giới hạn bởi $y=\sqrt{x}$, hai đường thẳng $x=1$, $x=2$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành.

A. 3π. **B.** $\frac{3\pi}{2}$. **C.** $\frac{2\pi}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

$V=\pi\int\limits_{1}^{2}xdx=\frac{\pi x^2}{2}\Big|_{1}^{2}=\frac{3\pi}{2}.$

Câu 78. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}-2$, $y=0$ và $x=4, x=9$ quay xung quanh trục Ox. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành.

A. $V=\frac{7}{6}$. **B.** $V=\frac{5\pi}{6}$. **C.** $V=\frac{7\pi}{11}$. **D.** $V=\frac{11\pi}{6}$.

Lời giải

Chọn D.

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành là:

$V=\pi\int\limits_{4}^{9}\left(\sqrt{x}-2\right)^2 \mathrm{d}x=\pi\int\limits_{4}^{9}\left(x-4\sqrt{x}+4\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{8x\sqrt{x}}{3}+4x\right)\Big|_{4}^{9}$

$=\pi\left(\frac{81}{2}-72+36\right)-\pi\left(\frac{16}{2}-\frac{64}{3}+16\right)=\frac{11\pi}{6}.$

Câu 79. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y=x^2+2, y=0, x=1, x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\int\limits_{1}^{2}\left(x^2+2\right)\mathrm{d}x$ **B.** $V=\pi\int\limits_{1}^{2}\left(x^2+2\right)^2\mathrm{d}x$ **C.** $V=\int\limits_{1}^{2}\left(x^2+2\right)^2\mathrm{d}x$ **D.** $V=\pi\int\limits_{1}^{2}\left(x^2+2\right)\mathrm{d}x$

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $V=\pi\int\limits_{1}^{2}\left(x^2+2\right)^2\mathrm{d}x$.

Câu 80. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^{3x}$, $y=0$, $x=0$ và $x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng:

A. $\pi\int_0^1 \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$. **B.** $\int_0^1 \mathrm{e}^{6x}\mathrm{d}x$. **C.** $\pi\int_0^1 \mathrm{e}^{6x}\mathrm{d}x$. **D.** $\int_0^1 \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng:

$\pi\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2 \mathrm{d}x=\pi\int_0^1 \mathrm{e}^{6x}\mathrm{d}x$.

Câu 81. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^{4x}, y=0, x=0$ và $x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

A. $\int_0^1 e^{4x}\mathrm{d}x$. **B.** $\pi\int_0^1 e^{8x}\mathrm{d}x$. **C.** $\pi\int_0^1 e^{4x}\mathrm{d}x$. **D.** $\int_0^1 e^{8x}\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B.

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox là:

$V=\pi\int_0^1 \left(e^{4x}\right)^2 \mathrm{d}x=\pi\int_0^1 e^{8x}\mathrm{d}x.$

Câu 82. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=e^x$, các đường thẳng $x=0$, $x=\ln 3$ và trục hoành. Thể tích khối tròn xoay sinh bởi (H) khi quay quanh trục hoành là

A. 2π. **B.** 4π. **C.** 4. **D.** π.

Lời giải

Chọn B.

$V=\pi\int_0^{\ln 3} e^{2x}\,\mathrm{d}x=\pi\frac{1}{2}e^{2x}\,|_0^{\ln 3}=4\pi$.

Câu 83. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sin x$, trục Ox, trục Oy và đường thẳng $x=\frac{\pi}{2}$, xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\mathrm{d}x$ **B.** $V=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x$ **C.** $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\mathrm{d}x$ **D.** $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x$

Lời giải

Chọn C.

Công thức tính: $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx$

Câu 84. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=2x-x^2$, $y=0$. Quay (H) quanh trục hoành tạo thành khối tròn xoay có thể tích là

A. $\int\limits_0^2\left(2x-x^2\right)dx$ **B.** $\pi\int\limits_0^2\left(2x-x^2\right)^2dx$ **C.** $\int\limits_0^2\left(2x-x^2\right)^2dx$ **D.** $\pi\int\limits_0^2\left(2x-x^2\right)dx$

Lời giải

Chọn B.

Theo công thức ta chọn $V=\pi\int\limits_0^2\left(2x-x^2\right)^2dx$

Câu 85. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-4x+3$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{16}{15}$. **B.** $\frac{16\pi}{15}$. **C.** $\frac{31\pi}{30}$. **D.** $\frac{31}{30}$.

Lời giải

Chọn B.

Phương trình hoành độ giao điểm là $x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$.

Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-4x+3$ và $y=0$ quanh trục Ox là: $V=\pi\int\limits_1^3\left(x^2-4x+3\right)^2\mathrm{d}x=\frac{16\pi}{15}$.

Câu 86. Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x-1}$, trục hoành và $x=5$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi D quay quanh Ox bằng

A. $\frac{15\pi}{2}$. **B.** $\frac{15}{2}$. **C.** 8π. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm của hàm số $y=\sqrt{x-1}$ và trục hoành là $\sqrt{x-1}=0\Rightarrow x=1$.

Khi đó thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox là

$V=\pi\int\limits_1^5\left(\sqrt{x-1}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_1^5(x-1)\,\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_1^5=8\pi$.

Câu 87. Thể tích vất thể tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-4x+3$ và trục hoành quay quanh Ox là

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{16}{15}$. **C.** $\frac{4\pi}{3}$. **D.** $\frac{16\pi}{15}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$.

Vậy $V_{Ox}=\pi\int\limits_1^3\left(x^2-4x+3\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{16\pi}{15}$.

Câu 88. Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=-x^2+3x$ và $y=0$ xung quanh trục Ox.

A. $\dfrac{5\pi}{2}$. **B.** $\dfrac{27\pi}{10}$. **C.** $\dfrac{81\pi}{10}$. **D.** $\dfrac{9\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm giữa hai đường $y=-x^2+3x$ và $y=0$ là

$-x^2+3x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$. Do đó thể tích khối tròn xoay cần tính là $V=\pi\int\limits_0^3\left(-x^2+3x\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{81\pi}{10}$.

Câu 89. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị $(P)\colon y=2x-x^2$ và trục Ox. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi cho (H) quay quanh trục Ox.

A. $V=\dfrac{19\pi}{15}$. **B.** $V=\dfrac{13\pi}{15}$. **C.** $V=\dfrac{17\pi}{15}$. **D.** $V=\dfrac{16\pi}{15}$.

Lời giải

Chọn D.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (P) và trục Ox là: $2x-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là $V=\pi\int\limits_0^2\left(2x-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{16\pi}{5}$.

Câu 90. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-4x+3$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\dfrac{16}{15}$. **B.** $\dfrac{16\pi}{15}$. **C.** $\dfrac{31\pi}{30}$. **D.** $\dfrac{31}{30}$.

Lời giải

Chọn B.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường $y=x^2-4x+3$ và đường $y=0$ là

$x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$.

Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-4x+3$ và $y=0$ quanh trục Ox là $V=\pi\int\limits_1^3\left(x^2-4x+3\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{16\pi}{15}$.

Câu 91. Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bở đồ thị hàm số $y=f(x)=\sqrt{x}.e^{x^2}$, trục hoành, đường thẳng $x=1$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục hoành.

A. $V=\dfrac{1}{4}\pi\left(e^2-1\right)$. **B.** $V=\pi\left(e^2-1\right)$. **C.** $V=\dfrac{1}{4}\pi e^2-1$. **D.** $V=e^2-1$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\sqrt{x}.e^{x^2}=0\Leftrightarrow x=0$

Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục hoành là:

$$V=\pi\int\limits_0^1\left(\sqrt{x}.e^{x^2}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^1 xe^{2x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\int\limits_0^1 e^{2x^2}\mathrm{d}\left(2x^2\right)=\frac{\pi}{4}e^{2x^2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}\left(e^2-1\right).$$

Câu 92. Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=4-x^2$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $V=\dfrac{512\pi}{15}$. **B.** $V=\dfrac{32}{3}$. **C.** $V=\dfrac{32\pi}{3}$. **D.** $V=\dfrac{512}{15}$.

Lời giải

Chọn A.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $4-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.$.

Thể tích của khối tròn xoay thu được là: $V=\pi\int\limits_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)^2dx=\dfrac{512\pi}{15}$.

Câu 93. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-x-2$ và trục hoành. Quay hình phẳng (H) quay quanh trục hoành, ta được một khối nón tròn xoay có thể tích bằng

A. $\dfrac{81}{10}\pi$. **B.** $\dfrac{81}{10}$. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** $\dfrac{9\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành: $x^2-x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$

Thể tích khối nón là $V=\pi\int_{-1}^{2}\left(x^2-x-2\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{81\pi}{10}$.

Câu 94. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=\left|x^2-3x+2\right|$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{\pi^2}{30}$. **B.** $\frac{\pi}{6}$. **C.** $\frac{\pi}{30}$. **D.** $\frac{\pi^2}{6}$.

Lời giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm $\left|x^2-3x+2\right|=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$. Vậy $V=\pi\int\limits_1^2\left|x^2-3x+2\right|^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{30}$.

Câu 95. Tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$, trục hoành và đường thẳng $x=2$, khi quay xung quanh trục Ox bằng

A. $\frac{32\pi}{5}$. **B.** $\frac{\pi}{6}$. **C.** $\frac{5\pi}{6}$. **D.** $\frac{4\pi}{5}$.

Lời giải

Chọn A.

Thể tích khối tròn xoay là: $V=\pi\int\limits_0^2\left(x^2\right)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^2=\frac{32\pi}{5}$.

Câu 96. Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) xác định bởi các đường $y=\frac{1}{3}x^3-x^2$ và $y=0$ quanh trục Ox là

A. $\frac{71\pi}{35}$. **B.** $\frac{81}{35}$. **C.** $\frac{71}{35}$. **D.** $\frac{81\pi}{35}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\frac{1}{3}x^3-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$.

Vậy thể tích khối tròn xoay cần tìm là $V=\pi\int\limits_0^3\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\frac{81\pi}{35}$.

Câu 97. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=4-x^2$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{32\pi}{3}$. **B.** $\frac{512\pi}{15}$. **C.** $\frac{16\pi}{3}$. **D.** $\frac{256\pi}{15}$.

Lời giải

Chọn B.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $4-x^2=0\Leftrightarrow x=\pm2$.

Thể tích khối tròn xoay thu được là: $V=\pi\int\limits_{-2}^2\left(4-x^2\right)^2\mathbf{d}x=\frac{512\pi}{15}$.

Câu 98. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-x$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{\pi}{3}$. **B.** $\frac{\pi}{15}$. **C.** $\frac{\pi}{30}$. **D.** $\frac{\pi}{5}$.

Lời giải

Chọn C.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Thể tích khối tròn xoay là: $V=\pi\int_0^1\left(x^2-x\right)^2dx=\frac{\pi}{30}$.

Câu 99. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-5x+4$ và trục Ox. Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình (H) quanh trục Ox.

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{81}{10}$. **C.** $\frac{81\pi}{10}$. **D.** $\frac{9\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $x^2-5x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=4\end{array}\right.$

Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình (H) quanh trục Ox là: $V=\pi\int_1^4\left(x^2-5x+4\right)^2dx=\frac{81\pi}{10}$.

Câu 100. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-2x$, $y=0$ và $x=3$ quay quanh trục Ox bằng

A. $\frac{18\pi}{5}$. **B.** $\frac{8\pi}{3}$. **C.** $\frac{18}{5}$. **D.** $\frac{8}{3}$.

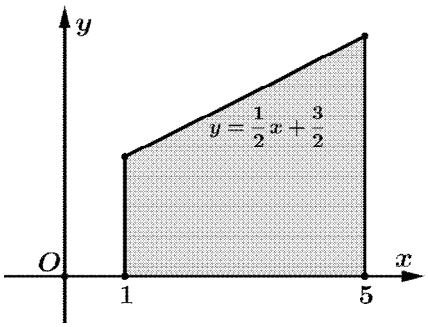
Lời giải

Chọn A.

Xét phương trình $x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Khi đó $V=\pi\int_0^3\left(x^2-2x\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^3\left(x^4-4x^3+4x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{4x^3}{3}\right)\Big|_0^3=\frac{18\pi}{5}$

Câu 101. Một khối gỗ khi cắt một bề mặt ta thu được thiết diện được cho bởi hình vẽ bên (đơn vị m^2). Diện tích của thiết diện đó bằng bao nhiêu m^2?



A. $6\left(m^2\right)$. **B.** $8\left(m^2\right)$. **C.** $10\left(m^2\right)$. **D.** $12\left(m^2\right)$.

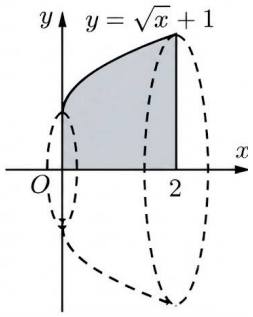
Lời giải

Chọn D.

Diện tích của thiết diện đó là: $S=\int_1^5\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\mathrm{d}x=12\left(m^2\right)$

Câu 102. Tính thể tích chứa được của một cái chậu inox to mà khách hàng đặt theo kích thước yêu cầu, biết phần trong của nó có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường $y=\sqrt{x}+1$, trục Ox và các đường thẳng $x=0, x=2$ quanh trục Ox, đơn vị trên trục là decimet (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của dm^3).





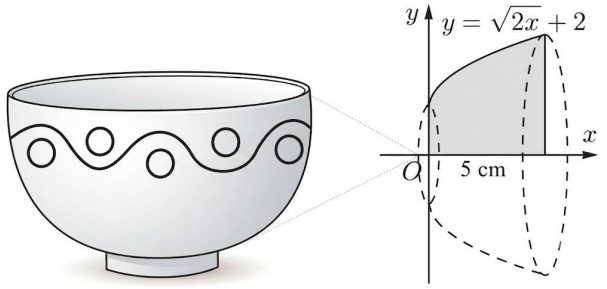
A. $30,2\left(dm^3\right)$. **B.** $14,8\left(dm^3\right)$. **C.** $24,4\left(dm^3\right)$. **D.** $28,6\left(dm^3\right)$.

Lời giải

Chọn C.

Thể tích của chậu inox là: $V=\pi\int_0^2\left(\sqrt{x}+1\right)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{8}{3}\sqrt{2}+4\right)\approx 24,4\left(dm^3\right)$

Câu 103. Tính thể tích chứa được (dung tích) của một cái chén (bát), biết phần trong của nó có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đường $y=\sqrt{2x}+2$ và trục Ox (như hình vẽ), bát có độ sâu 5 cm, đơn vị trên trục là centimet (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của cm^3).



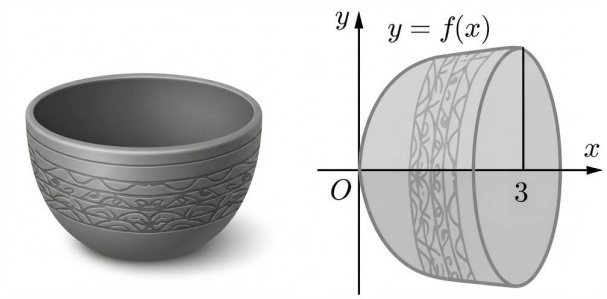
A. $90\left(cm^3\right)$. **B.** $274\left(cm^3\right)$. **C.** $180\left(cm^3\right)$. **D.** $324\left(cm^3\right)$.

Lời giải

Chọn B.

Thể tích của chén là: $V=\pi\int\limits_0^5\left(\sqrt{2x}+2\right)^2dx=\pi\left(\frac{40}{3}\sqrt{10}+45\right)\approx 274\left(cm^3\right)$

Câu 104. Xét chiếc chén trong một bộ ấm chén uống trà, bạn Dương ước lượng được rằng chiếc chén được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f\left(x\right)=0{,}14x^3-0{,}87x^2+1{,}92x+0{,}85$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=3$ quay quanh trục Ox (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là centimét). Tính thể tích của chiếc chén (làm tròn đến phần chục của centimét khối).



A. $1{,}39\left(cm^3\right)$. **B.** $13{,}4\left(cm^3\right)$. **C.** $41{,}9\left(cm^3\right)$. **D.** $45{,}8\left(cm^3\right)$.

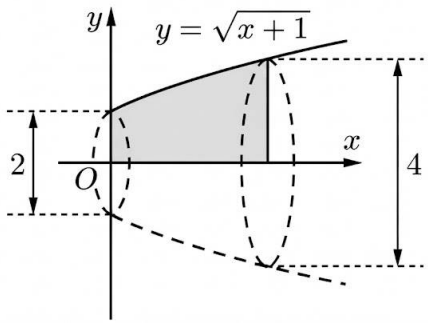
Lời giải

Chọn C.

Thể tích của chiếc chén là: $V=\pi\int\limits_0^3\left(0{,}14x^3-0{,}87x^2+1{,}92x+0{,}85\right)^2dx\approx 41{,}9\left(cm^3\right)$.

Câu 105. Bác Hùng đặt người thợ gốm làm một cái chậu trồng cây, phần trong chậu cây có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng được tô đậm như hình sau quanh trục Ox (đơn vị trên trục là decimet), biết đường cong trong hình là đồ thị của hàm số $y=\sqrt{x+1}$, đáy chậu và miệng chậu có đường kính lần lượt là 2 dm và 4 dm. Dung tích của chậu là bao nhiêu dm^3 (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của dm^3)?





A. $7,5\left(dm^3 \right)$. **B.** $14,1\left(dm^3 \right)$. **C.** $23,6\left(dm^3 \right)$. **D.** $25,2\left(dm^3 \right)$.

Lời giải

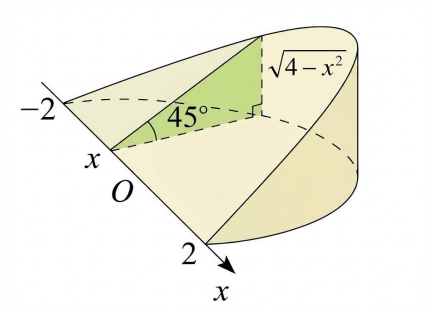
Chọn C.

Với bán kính đáy chậu là 1dm thì $y=1\Rightarrow \sqrt{x}+1=1\Rightarrow x=0$

Với bán kính đáy chậu là 2 dm thì $y=2\Rightarrow \sqrt{x}+1=2\Rightarrow x=3$

Thể tích của khối chậu là: $V=\pi \int\limits_0^2 \left(\sqrt{x}+1 \right)^2 dx=\frac{15\pi }{2}\approx 23,6\left(dm^3 \right)$.

Câu 106. Khi cắt một vật thể hình chiếc niêm bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(-2\le x\le 2)$, mặt cắt là tam giác vuông có một góc 45^0 và độ dài một cạnh góc vuông là $\sqrt{4-x^2}\left(dm \right)$ (như hình vẽ). Tính thể tích vật thể hình chiếc niêm trên.



A. $\frac{16\pi }{3}\left(dm^3 \right)$. **B.** $\frac{16}{3}\left(dm^3 \right)$. **C.** $\frac{8\pi }{3}\left(dm^3 \right)$. **D.** $\frac{8}{3}\left(dm^3 \right)$.

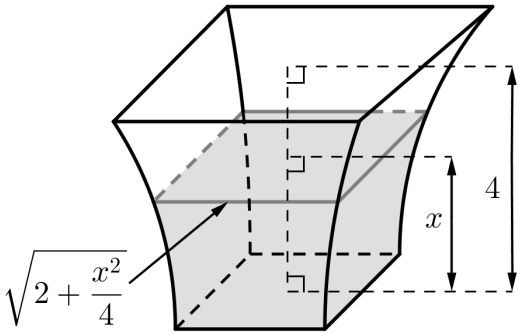
Lời giải

Chọn B.

Diện tích tam giác vuông cân là: $S(x)=\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}.\sqrt{4-x^2}=\frac{1}{2}\left(4-x^2 \right)\left(dm^2 \right)$

$\Rightarrow$ Thể tích vật thể là: $V=\int\limits_{-2}^2 \frac{1}{2}\left(4-x^2 \right)dx=\frac{16}{3}\left(dm^3 \right)$

Câu 107. Một bình chứa nước có hình dạng như hình sau. Biết rằng khi nước trong bình có chiều cao x (dm) $(0 \le x \le 4)$ thì mặt nước là hình vuông có cạnh $\sqrt{2+\frac{x^2}{4}}$ (dm). Tính dung tích của bình.



Lời giải

A. $\frac{20}{3}\left(dm^3\right)$. **B.** $\frac{20\pi}{3}\left(dm^3\right)$. **C.** $\frac{40}{3}\left(dm^3\right)$. **D.** $\frac{40\pi}{3}\left(dm^3\right)$.

Lời giải

Chọn C.

Mặt nước là hình vuông có cạnh $\sqrt{2+\frac{x^2}{4}}$ (dm) nên có diện tích là $\left(\sqrt{2+\frac{x^2}{4}}\right)^2 = 2+\frac{x^2}{4}\left(\text{dm}^2\right)$

Thể tích của bình chứa nước là: $V = \int_0^4 \left(2+\frac{x^2}{4}\right)dx = \frac{40}{3}\left(dm^3\right)$

Câu 108. Một chiếc đèn cói có hình như bên. Nếu cắt đèn bằng mặt phẳng song song với mặt đáy và cách mặt đáy một khoảng x $(0 \le x \le 4)$ thì được thiết diện là hình tròn có bán kính $\sqrt{4-x}$. Thể tích của chiếc đèn cói là bao nhiêu? .



A. 25,1. **B.** 78,8. **C.** 39,4. **D.** 30,2.

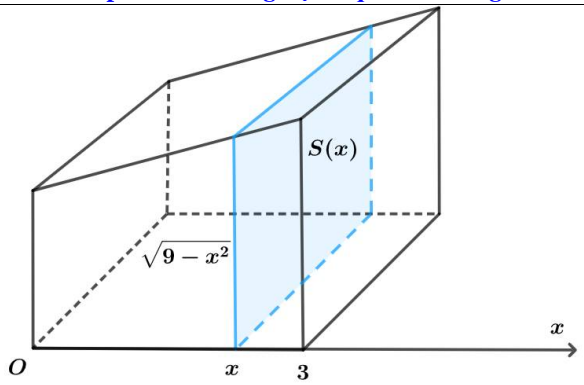
Lời giải

Chọn A.

Diện tích của mặt cắt là: $S(x) = \pi(\sqrt{4-x})^2$

Ta có: Thể tích của khối tròn xoay tạo thành là: $V = \pi\int_0^4 \left(\sqrt{4-x}\right)^2 dx \approx 25{,}1$

Câu 109. Khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ là x $(0 \le x \le 3)$, ta được mặt cắt là một hình vuông có cạnh là $\sqrt{9-x^2}$. Tính thể tích của vật thể đã cho.



A. 9. **B.** 9π. **C.** 18. **D.** 18π.

Lời giải

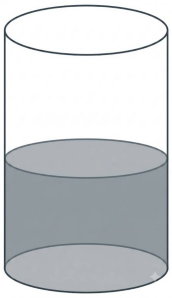
Chọn C.

Ta có: mặt cắt của vật thể là một hình vuông có cạnh là $\sqrt{9-x^2}$ nên diện tích mặt cắt là:

$S(x)=\left(\sqrt{9-x^2}\right)^2=9-x^2$, do $9-x^2\geq 0,\ \forall x\in[0;3]$.

Thể tích của vật thể đã cho là: $V=\int_0^3 S(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^3\left(9-x^2\right)\,\mathrm{d}x=\left(9x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3=18$.

Câu 110. Một cái lu đựng nước có dạng hình trụ như hình vẽ. Biết rằng khi lượng nước trong lu là x $(0<x\leq 9)$ thì mặt nước là hình tròn có bán kính là $x(dm)$. Hãy tính dung tích của cái lu nước trên.



A. $243\pi^2\left(dm^3\right)$. **B.** $243\pi\left(dm^3\right)$. **C.** $243\left(dm^3\right)$. **D.** $262\pi^2\left(dm^3\right)$.

Lời giải

Chọn A.

Diện tích đáy của hình trụ là: $S=\pi x^2$

Dung tích của lu nước là: $V=\pi\int_0^9\pi x^2dx=243\pi^2\left(dm^3\right)$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 111. Trong mặt phẳng Oxy, cho (H) là hình phẳng được giới hạn bởi các đồ thị hàm số sau: $y=e^{\frac{x}{2}}; y=0$ và $x=0; x=2$.

a) Đồ thị hàm số $y=e^{\frac{x}{2}}$ cắt trục hoành tại một điểm.

b) Đồ thị hàm số $y=e^{\frac{x}{2}}$ cắt trục tung tại một điểm.

c) Diện tích hình phẳng (H) bằng $a.e+b$, với $a,b\in\mathbb{Z}$. Khi đó $a-2b=2$.

d) Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng $\pi\left(e^m+n\right)$, với $m,n\in\mathbb{Z}$. Khi đó $m-2026n=2024$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	SAI	SAI

a) vì $e^{\frac{x}{2}}>0$ nên $e^{\frac{x}{2}}=0$ vô nghiệm

Do đó, đồ thị hàm số $y=e^{\frac{x}{2}}$ không cắt trục hoành.

b) $x=0\Rightarrow y=\sqrt{e}$

Do đó, đồ thị hàm số $y=e^{\frac{x}{2}}$ cắt trục tung tại một điểm $\left(0;\sqrt{e}\right)$.

c) Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y=e^{\frac{x}{2}}; y=0$ và $x=0; x=2$ là:

$$S=\int_0^2\left|e^{\frac{x}{2}}\right|\mathrm{d}x=\int_0^2 e^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=2e^{\frac{x}{2}}\Big|_0^2=2\left(e^{\frac{2}{2}}-e^{\frac{0}{2}}\right)=2(e-1)=2e-2$$

$\Rightarrow a=2; b=-2\Rightarrow a-2b=6$

d) Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox là

$$V=\pi\int_0^2\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^2 e^x\mathrm{d}x=\pi e^x\Big|_0^2=\pi\left(e^2-1\right)$$

$\Rightarrow m=2; n=-1\Rightarrow m-2026n=2028$

Câu 112. Trong mặt phẳng Oxy, cho (H) là hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)=x^2-2x$ và trục hoành

a) Đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm.

b) Đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục tung tại một điểm.

c) Diện tích hình phẳng (H) bằng $\frac{4}{5}$ (đơn vị diện tích).

d) Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng $\frac{16\pi}{5}$ (đơn vị thể tích).

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f(x)$ với trục hoành là:

$$x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Do đó, đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm $(0;0);(2;0)$

b) $x=0 \Rightarrow y=0$

Do đó, đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục tung tại một điểm $(0;0)$.

c) Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị: $x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)=x^2-2x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=x^2-2x$ và trục hoành là

$$S=\int_0^2 \left|x^2-2x\right| \mathrm{d}x=-\int_0^2 \left(x^2-2x\right) \mathrm{d}x=\int_2^0 \left(x^2-2x\right) \mathrm{d}x=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Big|_2^0=\frac{4}{3}$$ (đơn vị diện tích).

d) Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox là

$$V=\pi\int_0^2 \left(x^2-2x\right)^2 \mathrm{d}x=\pi\int_0^2 \left(x^4-4x^3+4x^2\right) \mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{4}{3}x^3\right)\Big|_0^2=\frac{16\pi}{15}$$

Câu 113. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đồ thị hàm số $y=f(x)=x^2-4x+3$ và $y=g(x)=x-1$.

a) Đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại một điểm.

b) Hai đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cắt nhau tại hai điểm $(1;0);(4;3)$.

c) Diện tích hình phẳng giới hạn đồ thị hàm số $f(x)$ và trục Ox bằng $\frac{2}{3}$ (đơn vị diện tích).

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm $f(x)$ và $g(x)$ bằng $\frac{9}{2}$ (đơn vị diện tích).

Lời giải

A.	B.	C.	D.

SAI	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

a) $f(x)=0\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Do đó, đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm $(1;0);(3;0)$.

b) Xét phương trình: $x^2-4x+3=x-1\Leftrightarrow x^2-5x+4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow y=0 \\ x=4\Rightarrow y=3 \end{array}\right.$.

Do đó, hai đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cắt nhau tại hai điểm $(1;0);(4;3)$.

c) Xét phương trình: $f(x)=0\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng giới hạn đồ thị hàm số $f(x)$ và trục Ox trên bằng

$$\int_1^3 \left|x^2-4x+3\right|dx=-\int_1^3 \left(x^2-4x+3\right)dx=-\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right)\Big|_1^3=\frac{4}{3}$$

d) Xét phương trình: $x^2-4x+3=x-1\Leftrightarrow x^2-5x+4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Suy ra, diện tích hình phẳng đã cho bằng:

$$S=\int_1^4 \left|\left(x^2-4x+3\right)-\left(x-1\right)\right|dx=\int_1^4 \left|x^2-5x+4\right|dx=\int_1^4 \left(-x^2+5x-4\right)dx=\frac{9}{2}.$$

Câu 114. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đồ thị hàm số $y=f(x)=x^3-3x$ và $y=g(x)=x$.

a) Đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm $\left(-\sqrt{3};0\right);\left(\sqrt{3};0\right)$.

b) Hai đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cắt nhau tại ba điểm $(0;0);(-2;2);(2;-2)$.

c) Diện tích hình phẳng giới hạn đồ thị hàm số $f(x)$ và trục Ox bằng $\frac{9}{2}$ (đơn vị diện tích).

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm $f(x)$ và $g(x)$ bằng $\frac{7}{2}$ (đơn vị diện tích).

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	SAI	ĐÚNG	SAI

a) $f(x)=0\Leftrightarrow x^3-3x=0\Leftrightarrow x\left(x^2-3\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\sqrt{3} \\ x=\sqrt{3} \end{array}\right.$

Do đó, đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm $(0;0);\left(-\sqrt{3};0\right);\left(\sqrt{3};0\right)$.

b) Xét phương trình: $x^3-3x=x\Leftrightarrow x^3-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=0\\x=-2\Rightarrow y=-2\\x=2\Rightarrow y=2\end{array}\right.$.

Do đó, hai đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cắt nhau tại ba điểm $(0;0);(-2;-2);(2;2)$.

c) Xét phương trình: $f(x)=0\Leftrightarrow x^3-3x=0\Leftrightarrow x\left(x^2-3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-\sqrt{3}\\x=\sqrt{3}\end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng giới hạn đồ thị hàm số $f(x)$ và trục Ox trên bằng

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left|x^3-3x\right|dx=\int_{-\sqrt{3}}^{0}\left|x^3-3x\right|dx+\int_{0}^{\sqrt{3}}\left|x^3-3x\right|dx=\left|\int_{-\sqrt{3}}^{0}\left(x^3-3x\right)dx\right|+\left|\int_{0}^{\sqrt{3}}\left(x^3-3x\right)dx\right|=\frac{9}{2}\text{(đơn vị diện tích).}$$

d) Xét phương trình $x^3-3x=x\Leftrightarrow x^3-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm2\end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=x^3-3x$ và $y=x$ là

$$S=\int_{-2}^{2}\left|x^3-4x\right|\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0}\left|x^3-4x\right|\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\left|x^3-4x\right|\mathrm{d}x=\left|\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)\right|_{-2}^{0}\Bigg|+\left|\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)\right|_{0}^{2}\Bigg|=8\text{ (đơn vị diện tích).}$$

Câu 115. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đồ thị hàm số $y=f(x)=x^3-x$ và $y=f(x)=2x^2-x$.

a) Đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm.

b) Hai đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cắt nhau tại ba điểm.

c) Diện tích hình phẳng giới hạn đồ thị hàm số $f(x)$ và đường thẳng $y=0$ bằng $\frac{3}{2}$ (đơn vị diện tích).

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm $f(x)$ và $g(x)$ bằng $\frac{4}{3}$ (đơn vị diện tích).

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) $f(x)=0\Leftrightarrow x^3-x=0\Leftrightarrow x\left(x^2-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=1\end{array}\right.$

Do đó, đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm $(0;0);(-1;0);(1;0)$.

b) Xét phương trình: $x^3-x=2x^2-x\Leftrightarrow x^3-2x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=0\\x=2\Rightarrow y=6\end{array}\right.$.

Do đó, hai đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cắt nhau tại hai điểm $(0;0);(2;6)$.

c) Xét phương trình: $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng giới hạn đồ thị hàm số $f(x)$ và $y=0$ trên bằng

$$\int_{-1}^{1}\left|x^3-x\right|dx=\int_{-1}^{0}\left|x^3-x\right|dx+\int_{0}^{1}\left|x^3-x\right|dx=\left|\int_{-1}^{0}\left(x^3-x\right)dx\right|+\left|\int_{0}^{1}\left(x^3-x\right)dx\right|=\frac{1}{2}$$ (đơn vị diện tích).

d) Xét phương trình $x^3-x=2x^2-x \Leftrightarrow x^3-2x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng là: $S=\int_{0}^{2}\left|\left(x^3-x\right)-\left(2x^2-x\right)\right|dx=\int_{0}^{2}\left|x^3-2x^2\right|dx=\frac{4}{3}$.

Câu 116. Trong mặt phẳng Oxy, cho hàm số $y=x+\sqrt{x}$ và $y=x+x^2$.

a) Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số trên là $x=0$ hoặc $x=-1$

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x=0$, $x=1$ được tính theo công thức

$$S=\int_{0}^{1}\left(\sqrt{x}-x^2\right)\mathrm{d}x$$

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x=0$, $x=1$ được tính theo công thức

$$S=\int_{0}^{1}\left(x+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x-\int_{0}^{1}\left(x+x^2\right)\mathrm{d}x$$

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x=0$, $x=1$ bằng $\frac{1}{3}$ (đơn vị diện tích)

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

a) Phương trình hoành giao độ giao điểm của hai đồ thị hàm số trên là

$$x+\sqrt{x}=x+x^2 \Leftrightarrow x=x^4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$$.

Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số trên là $x=0$ và $x=-1$

b) Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=x+\sqrt{x}$, $y=x+x^2$, $x=0$, $x=1$ là:

$$S=\int_{0}^{1}\left|\left(x+\sqrt{x}\right)-\left(x+x^2\right)\right|\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\left|\sqrt{x}-x^2\right|\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\left(\sqrt{x}-x^2\right)\mathrm{d}x.$$

c) Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=x+\sqrt{x}$, $y=x+x^2$, $x=0$, $x=1$ là:

$$S=\int_{0}^{1}\left|\left(x+\sqrt{x}\right)-\left(x+x^2\right)\right|\mathrm{d}x$$

$=\int_0^1\left[\left(x+\sqrt{x}\right)-\left(x+x^2\right)\right]\mathrm{d}x$ (vì $x+\sqrt{x}\ge x+x^2\ \forall x\in[0;1]$) $=\int_0^1\left(x+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x-\int_0^1\left(x+x^2\right)\mathrm{d}x$.

d) Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=x+\sqrt{x}$, $y=x+x^2$, $x=0$, $x=1$ là

$S=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ (đơn vị diện tích)

Câu 117. Cho hàm số $y=x^3-3x+2$ có đồ thị là (C) và đường thẳng $y=-2x+8$ có đồ thị là (d) và các đường thẳng $x=1$, $x=3$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (d), trục hoành và đường thẳng $x=1$; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (d), trục hoành và đường thẳng $x=5$.

a) Số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng (d) là 1.

b) Hàm số $y=x^3-3x+2$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

c) $S_1=9S_2$.

d) Tính diện tích giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=x^3-3x+2$, $y=-2x+8$ và hai đường thẳng $x=1$, $x=3$ bằng $\frac{23}{3}$(đơn vị diện tích).

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	SAI

a) Xét phương trình hoành độ: $x^3-3x+2=-2x+8\Leftrightarrow x^3-x-6=0\Leftrightarrow x=2$.

Suy ra (C) cắt (d) tại duy nhất một điểm.

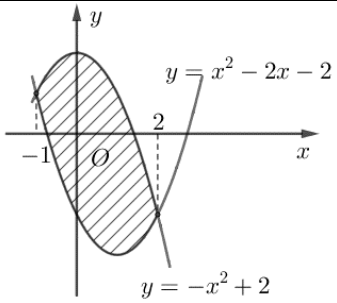
b) Ta có: $y'=3x^2-3=0\Rightarrow 3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\end{array}\right.$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$.

c) Ta có $S_1=\int_1^4(8-2x)\mathrm{d}x=9$ và $S_2=-\int_4^5(8-2x)\mathrm{d}x=1$ nên suy ra $S_1=9S_2$.

d) Diện tích giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=x^3-3x+2$, $y=-2x+8$ và hai đường thẳng $x=1$, $x=3$ bằng:

$\int_1^3\left|x^3-3x+2-(8-2x)\right|\mathrm{d}x=\int_1^2\left|x^3-x-6\right|\mathrm{d}x+\int_2^3\left|x^3-x-6\right|\mathrm{d}x=\frac{15}{4}+\frac{31}{4}=\frac{46}{4}=\frac{23}{2}$(đơn vị diện tích).

Câu 118. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình phẳng (H) được gạch chéo trong hình bên dưới.



a) Hình phẳng (H) được giới hạn các đồ thị $y=x^2-2x-2$, $y=-x^2+2$, $x=-1, x=2$.

b) Diện tích hình phẳng (H) là $S=\int_{-1}^{2}\left(2x^2-2x-4\right)dx$.

c) Diện tích hình phẳng (H) là $S=\int_{-1}^{0}\left(-2x^2+2x+4\right)dx+\int_{0}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)dx$.

d) Diện tích hình phẳng (H) bằng $\frac{9}{2}$ (đơn vị diện tích)

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Từ đồ thị ta có: Diện tích hình phẳng (H) được giới hạn các đồ thị $y=x^2-2x-2$, $y=-x^2+2$, $x=-1, x=2$.

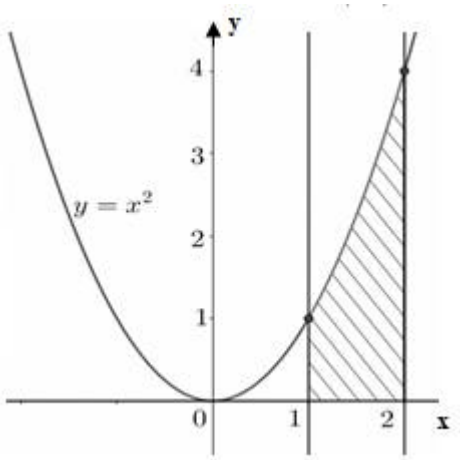
b) Diện tích hình phẳng (H) là:

$S=\int_{-1}^{2}\left[\left(-x^2+2\right)-\left(x^2-2x-2\right)\right]dx=\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)dx$.

c) Ta có: $S=\int_{-1}^{0}\left(-2x^2+2x+4\right)dx+\int_{0}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)dx=\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)dx$.

d) $S=\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)dx=\left(-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right)\Big|_{-1}^{2}=9$ (đơn vị diện tích)

Câu 119. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình phẳng (H) được gạch chéo trong hình bên dưới.



a) Đồ thị $y=x^2$ cắt đường thẳng $x=2$ tại điểm $(2;1)$.

b) Diện tích hình phẳng (H) được giới hạn các đồ thị $y=x^2; x=0; x=2$.

c) Diện tích hình phẳng (H) bằng $\frac{7}{3}$ (đơn vị diện tích).

d) Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng $\frac{31\pi}{5}$ (đơn vị thể tích).

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	SAI	ĐÚNG	ĐÚNG

a) $x=2 \Rightarrow y=4$

Đồ thị $y=x^2$ cắt đường thẳng tại điểm $(2;4)$.

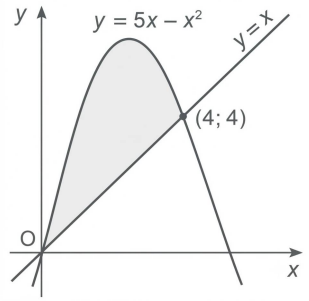
b) Diện tích hình phẳng (H) được giới hạn các đồ thị $y=x^2; y=0; x=1; x=2$.

c) Hình phẳng (H) được giới hạn các đồ thị $y=x^2; y=0; x=1; x=2$ nằm trên trục hoành nên diện tích hình phẳng (H) là $S=\int_1^2 x^2dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^2=\frac{7}{3}.$

d) Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox là

$$V=\pi\int_1^2\left(x^2\right)^2dx=\pi\int_1^2x^4dx=\pi\frac{1}{5}x^5\Big|_0^2=\frac{31\pi}{5}.$$

Câu 120. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình phẳng (H) được tô đậm trong hình bên dưới.



a) Đồ thị $y=5x-x^2$ cắt đường thẳng $y=x$ tại một điểm.

b) Hình phẳng (H) được giới hạn các đồ thị hàm số $y=5x-x^2; y=x; x=0; x=4$.

c) Diện tích hình phẳng (H) bằng $\frac{32}{3}$ (đơn vị diện tích).

d) Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng $\frac{512\pi}{15}$ (đơn vị thể tích).

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Đồ thị $y=5x-x^2$ cắt đường thẳng $y=x$ tại hai điểm $(0;0);(4;4)$.

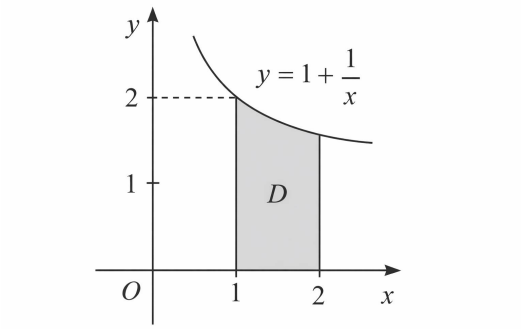
b) Đồ thị $y=5x-x^2$ cắt đường thẳng $y=x$ tại hai điểm $(0;0);(4;4)$ nên diện tích hình phẳng (H) được giới hạn các đồ thị $y=5x-x^2; y=x; x=0; x=4$.

c) Hình phẳng (H) được giới hạn đồ thị $y=5x-x^2$ nằm trên đồ thị $y=x$ nên diện tích hình phẳng (H) là $\int_0^4 \left(5x-x^2-x\right)dx=\int_0^4 \left(4x-x^2\right)dx=\left(2x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^4=\frac{32}{3}$ (đơn vị diện tích).

d) Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox là

$$V=\pi\int_0^4 \left(5x-x^2\right)^2 dx-\pi\int_0^4 x^2dx=\frac{384\pi}{5}$$

Câu 121. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình phẳng (D) được tô đen trong hình bên dưới.



a) Đồ thị hàm số $y=1+\frac{1}{x}$ cắt trục tung tại điểm $(0;1)$.

b) Hình phẳng (D) được giới hạn các đồ thị hàm số $y=1+\frac{1}{x}; x=0; x=1; x=2$.

c) Biết diện tích hình phẳng (D) bằng $m+n\ln 2$, với $m,n\in\mathbb{Z}$. Khi đó $2025m-2024n=1$.

d) Biết thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (D) quay quanh trục Ox bằng $\frac{a}{b}\pi+c\pi\ln 2$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Khi đó $a+2b+3c=10$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Do $x\neq 0$ nên đồ thị hàm số $y=1+\frac{1}{x}$ không cắt trục tung

b) Hình phẳng (D) được giới hạn các đồ thị hàm số $y=1+\frac{1}{x}; y=0; x=1; x=2$.

c) Hình phẳng (D) được giới hạn các đồ thị $y=1+\frac{1}{x};x=0;x=1;x=4$ nằm trên trục hoành nên diện tích hình phẳng (D) là: $S=\int_1^2\left(1+\frac{1}{x}\right)dx=\left(x+\ln|x|\right)\Big|_1^2=1+\ln 2$ (đơn vị diện tích).

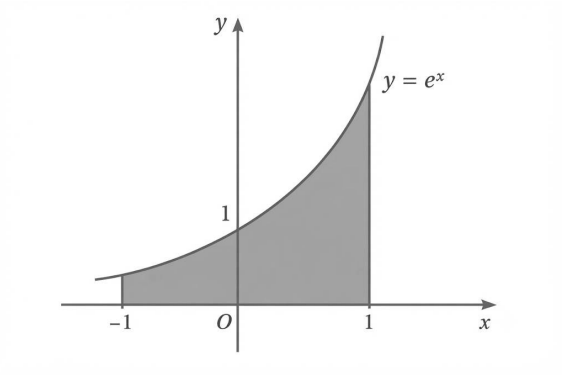
$\Rightarrow m=1;n=1\Rightarrow 2025m-2024n=1$

d) Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (D) quay quanh trục Ox là

$V=\pi\int_1^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2dx=\pi\int_1^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\pi\left(x+2\ln|x|-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2=\frac{3}{2}\pi+2\pi\ln 2$ (đơn vị thể tích).

$\Rightarrow a=3;b=2;c=2\Rightarrow a+2b+3c=13$

Câu 122. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình phẳng (H) được tô đậm trong hình bên dưới.



a) Đồ thị hàm số $y=e^x$ cắt đường thẳng $x=-1$ tại điểm $\left(-1;\frac{1}{e}\right)$.

b) Đồ thị hàm số $y=e^x$ cắt trục hoành tại điểm $(1;0)$.

c) Diện tích hình phẳng (H) là $\int_{-1}^{1}e^xdx$.

d) Biết thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng $\left(\frac{a.e^b-1}{c.e^2}\right).\pi$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Khi đó $3a+2b-c=11$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	SAI

a) $x=-1\Rightarrow y=e^{-1}=\frac{1}{e}$

Do đó, đồ thị hàm số $y=e^x$ cắt đường thẳng $x=-1$ tại điểm $\left(-1;\frac{1}{e}\right)$.

b) Ta có $e^x>0$ nên $e^x=0$ vô nghiệm, do đó đồ thị hàm số $y=e^x$ không cắt trục hoành

c) Hình phẳng (H) được giới hạn các đồ thị hàm số $y=e^x;y=0;x=-1;x=1$.

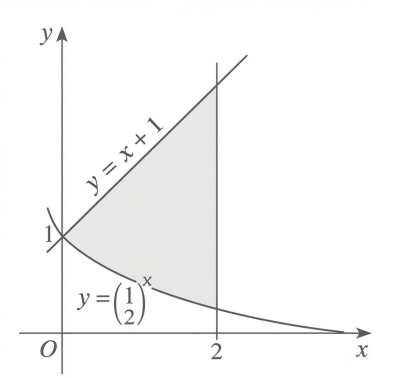
nên diện tích hình phẳng (H) là $\int_{-1}^{1} e^x dx$.

d) thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox là:

$$V = \pi \int_{-1}^{1} \left(e^x\right)^2 dx = \pi \int_{-1}^{1} e^{2x} dx = \frac{\pi}{2} e^{2x} \Big|_{-1}^{1} = \left(\frac{e^4 - 1}{2e^2}\right).\pi$$

$\Rightarrow a = 1; b = 4; c = 2 \Rightarrow 3a + 2b - c = 9$

Câu 123. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình phẳng (H) được tô đậm trong hình bên dưới.



a) Hình phẳng (H) được giới hạn hai đồ thị $y = x + 1; y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

b) Diện tích hình phẳng (H) là $S = \int_{1}^{2} \left(x + 1 - \frac{1}{2^x}\right) dx$.

c) Biết diện tích hình phẳng (H) bằng $a - \frac{b}{4\ln 2}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Khi đó $a + b = 7$.

d) Biết thể tích khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng $\pi\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{2\ln 2}\right)$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Khi đó $a + b + c = 44$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	SAI	ĐÚNG	ĐÚNG

a) Hình phẳng (H) được giới hạn bởi các đồ thị $y = x + 1; y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, x = 0, x = 2$.

b) c) Từ hình vẽ ta có:

Diện tích hình phẳng (H) là $S = \int_{0}^{2} \left(x + 1 - \frac{1}{2^x}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2^x \ln 2}\right)\Big|_{0}^{2} = 4 - \frac{3}{4\ln 2}$ (đơn vị diện tích).

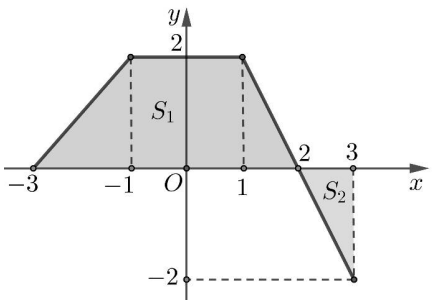
$\Rightarrow a = 4; b = 3 \Rightarrow a + b = 7$

d) Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox là:

$$V=\pi\int_0^2(x+1)^2\,dx-\pi\int_0^2\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}dx=\pi\left(\frac{26}{3}-\frac{15}{2\ln 2}\right)$$

$\Rightarrow a=26;b=3;c=15\Rightarrow a+b+c=44$

Câu 124. Trong mặt phẳng Oxy, cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-3;3]$ có đồ thị như hình vẽ, Biết rằng $f(x)$ tạo với trục hoành và 2 đường thẳng $x=-3,x=3$ một hình phẳng (H) gồm 2 phần có diện tích lần lượt là S_1,S_2 (S_1 là phần tô đậm nằm trên trục hoành, S_2 là phần tô đậm nằm dưới trục hoành như hình vẽ)



a) $S_2=\int_2^3(2x-4)\,dx$

b) $S_1=\int_{-3}^{-1}(x+3)\,dx+\int_{-1}^{1}2dx+\int_1^2(-2x+4)\,dx$

c) $S_{(H)}=S_1+\int_2^3(-2x+4)\,dx$

d) Giới hạn hình phẳng (H) có diện tích bằng 10 (đơn vị diện tích).

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

Xét hàm số $y=f(x)$, ta có: $f(x)=\begin{cases}x+3, & x\in[-3;-1]\\ 2, & x\in[-1;1]\\ -2x+4, & x\in[1;3]\end{cases}$

a) Dựa vào hình vẽ, ta có: $f(x)=-2x+4\le 0, x\in[2;3]$ nên

$$S_2=\int_2^3|-2x+4|\,dx=-\int_2^3(-2x+4)\,dx=\int_2^3(2x-4)\,dx.$$

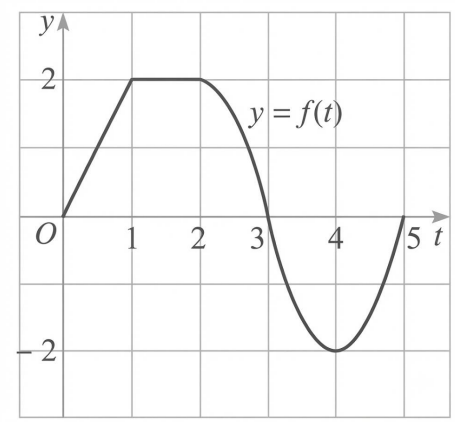
b) Dựa vào hình vẽ, ta có: $S_1=\int_{-3}^{2}|f(x)|\,dx=\int_{-3}^{-1}(x+3)\,dx+\int_{-1}^{1}2dx+\int_1^2(-2x+4)\,dx.$

c) Ta có: $S_{(H)}=\int\limits_{-3}^{3}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=S_1+S_2=S_1-\int\limits_{2}^{3}\left(-2x+4\right)\mathrm{d}x$.

c) $S_{(H)}=\int\limits_{-3}^{3}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=S_1+S_2=\int\limits_{-3}^{-1}\left(x+3\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{1}2\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}\left(-2x+4\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{3}\left(2x-4\right)\mathrm{d}x$

$=\left(\frac{1}{2}x^2+3x\right)\Big|_{-3}^{-1}+2x\Big|_{-1}^{1}+\left(-x^2+4x\right)\Big|_{1}^{2}+\left(x^2-4x\right)\Big|_{2}^{3}=8$ (đơn vị diện tích).

Câu 125. Trong mặt phẳng Oxy, cho đồ thị hàm số $y=f\left(t\right)$ như hình vẽ.



a) Diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số $y=f\left(t\right)$, trục Ot và hai đường thẳng $t=0;t=1$ là $S=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}t\mathrm{d}t$.

b) Diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số $y=f\left(t\right)$, trục Ot và hai đường thẳng $t=1;t=2$ là $\int\limits_{1}^{2}2t\mathrm{d}t$.

c) Tích phân $\int\limits_{2}^{3}f\left(x\right)dx$ biểu thị cho phần diện tích của hình phẳng giới hạn các đồ thị hàm số $y=f\left(t\right)$, trục Ot và hai đường thẳng là: $t=2;t=3$.

d) Với $t\in\left[3;5\right]$ đồ thị hàm số $y=f\left(t\right)$ là một parabol có dạng: $y=f\left(t\right)=at^2+bt+c$. Khi đó, diện tích của hình phẳng giới hạn các đồ thị hàm số $y=f\left(t\right)$, trục Ot và hai đường thẳng $t=3;t=5$ bằng $\frac{14}{9}$ (đơn vị diện tích).

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	SAI	ĐÚNG	SAI

a) đồ thị hàm số $y=f(t)$ trên đoạn $[0;1]$ là $y=2t$. Do đó diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số $y=f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t=0;t=1$ là $S=2\int_0^1 tdt$.

b) Diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số $y=f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t=1;t=2$ là $S=\int_1^2 2dt=2t\Big|_1^2=2$ (đơn vị diện tích).

c) Tích phân $\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3 f(t)dt$ nên $\int_2^3 f(t)dt$ là cho phần diện tích của hình phẳng giới hạn các đồ thị hàm số $y=f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng là: $t=2;t=3$.

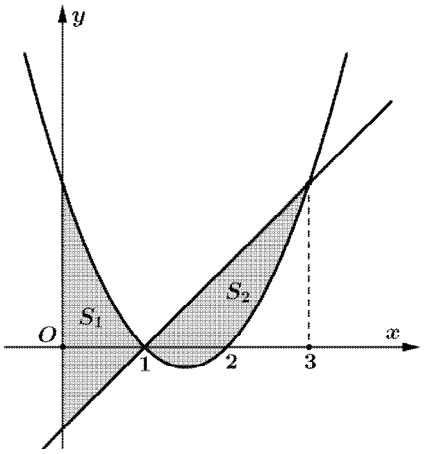
d) Với $t\in[3;5]$ đồ thị hàm số $y=f(t)$ là một parabol có dạng: $y=f(t)=at^2+bt+c$

vì các điểm $(3;0);(5;0);(2;-4)$ thuộc đồ thị hàm số $y=f(t)=at^2+bt+c$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases}9a+3b+c=0\\25a+5b+c=0\\4a+2b+c=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{4}{3}\\b=\dfrac{32}{3}\\c=-20\end{cases}\Rightarrow y=f(t)=-\frac{4}{3}t^2+\frac{32}{3}t-20$$

Diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số $y=f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng là: $t=3;t=5$ là $S=\int_3^5\left|f(t)\right|dt=\int_3^5\left(-\frac{4}{3}t^2+\frac{32}{3}t-20\right)dt=\frac{16}{9}$ (đơn vị diện tích).

Câu 126. Trong mặt phẳng Oxy, cho đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$ và $y=x-1$ và $S_1;S_2$ là phần diện tích được tô đậm như trong hình dưới.



a) Đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$ cắt đường thẳng $y=x-1$ tại hai điểm $(1;0);(3;0)$.

b) $S_1=\int_0^1\left(-x^2+4x-3\right)dx$

c) $S_1=S_2$

d) Diện tích hình phẳng được tô đậm của hình vẽ trên bằng $\frac{10}{3}$ (đơn vị diện tích).

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	SAI	ĐÚNG	SAI

a) Xét phương trình: $x^2-3x+2=x-1\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow y=0 \\ x=3\Rightarrow y=2 \end{array}\right.$.

Do đó, hai đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$ và $y=x-1$ cắt nhau tại hai điểm $(1;0);(3;2)$.

b) $S_1=\int\limits_0^1\left(x^2-3x+2-(x-1)\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(x^2-4x+3\right)\mathrm{d}x$.

c) $S_1=\int\limits_0^1\left(x^2-3x+2-(x-1)\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(x^2-4x+3\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}-2+3=\frac{4}{3}$ (đơn vị diện tích).

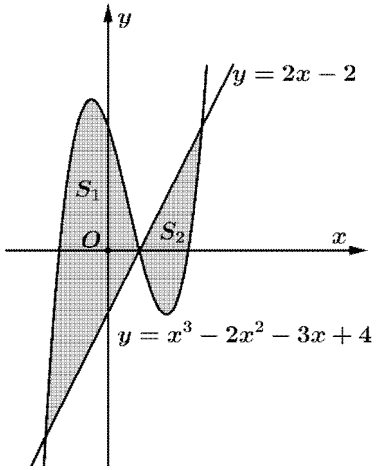
$S_2=\int\limits_1^3\left(x-1-\left(x^2-3x+2\right)\right)\mathrm{d}x=\int\limits_1^3\left(-x^2+4x-3\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\right)\Big|_1^3$

$=-9+18-9-\left(-\frac{1}{3}+2-3\right)=\frac{4}{3}$ (đơn vị diện tích).

Vậy $S_1=S_2$.

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$; $y=x-1$; $x=0$; $x=3$ là $\int\limits_0^3\left|-x^2+4x-3\right|dx=S_1+S_2=\frac{8}{3}$ (đơn vị diện tích).

Câu 127. Trong mặt phẳng Oxy, cho đồ thị hàm số $y=x^3-2x^2-3x+4$ có đồ thị (C), đường thẳng $(d):y=2x-2$ và $S_1;S_2$ là phần diện tích phần được tô đậm như trong hình dưới.



a) Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại ba điểm có toạ độ là $(-2;-6)$, $(1;0)$, $(3;4)$.

b) $S_1=\int\limits_{-2}^1\left(-x^3+2x^2+5x-6\right)dx$

c) $S_2=\int\limits_{3}^{1}\left(x^3-2x^2-5x+6\right)dx$

d) Diện tích hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ trên bằng $\frac{253}{12}$ (đơn vị diện tích).

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Ta có phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3-2x^2-3x+4=2x-2\Leftrightarrow x^3-2x^2-5x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\Rightarrow y=-6\\ x=1\Rightarrow y=0\\ x=3\Rightarrow y=4\end{array}\right..$$

Vậy đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại ba điểm $(-2;-6)$, $(1;0)$, $(3;4)$.

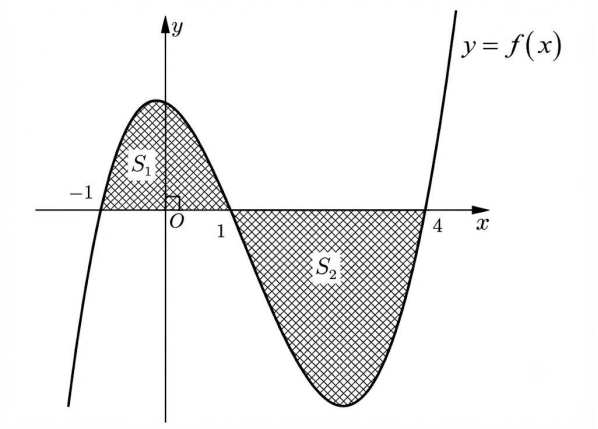
b) $S_1=\int\limits_{-2}^{1}\left[x^3-2x^2-3x+4-\left(2x-2\right)\right]dx=\int\limits_{-2}^{1}\left(x^3-2x^2-5x+6\right)dx$

c) $S_2=\int\limits_{1}^{3}\left[2x-2-\left(x^3-2x^2-3x+4\right)\right]dx=\int\limits_{1}^{3}\left(-x^3+2x^2+5x-6\right)dx=-\int\limits_{3}^{1}\left(x^3-2x^2-5x+6\right)dx$

$=\int\limits_{3}^{1}\left(x^3-2x^2-5x+6\right)dx$

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số (C), đường thẳng (d) và hai đường thẳng $x=-2$; $x=3$ là: $S=S_1+S_2=\int\limits_{-2}^{1}\left(x^3-2x^2-5x+6\right)dx+\int\limits_{3}^{1}\left(x^3-2x^2-5x+6\right)dx=\frac{63}{4}+\frac{16}{3}=\frac{253}{12}$.

Câu 128. Trong mặt phẳng Oxy, cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+2$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S_1 là diện tích được tô đậm nằm trên trục hoành và S_2 là diện tích được tô đậm nằm phía dưới trục hoành như trong hình vẽ.



a) Đồ thị hàm số (C) cắt đường thẳng $y=0$ tại ba điểm phân biệt.

b) $S_1 = -\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$

c) $S_2 = \int_{4}^{1} f(x)\mathrm{d}x$

d) Diện tích hình phẳng được tô đậm bằng $\frac{259}{24}$ (đơn vị diện tích).

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Dựa vào đồ thị, ta có: Đồ thị hàm số $f(x)$ cắt đường thẳng $y=0$ tại ba điểm phân biệt.

b) Ta có: hàm số $f(x)\ge 0\ \forall x\in[-1;1]$, nên: $S_1 = \int_{-1}^{1}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$

c) Ta có: hàm số $f(x)\le 0\ \forall x\in[1;4]$, nên: $S_2 = \int_{1}^{4}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x = -\int_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x = \int_{4}^{1} f(x)\mathrm{d}x$

d) vì các điểm $(-1;0);(1;0);(4;0)$ thuộc đồ thị hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+2$ nên ta có hệ:

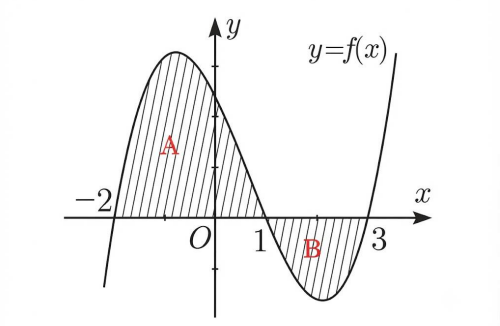
$$\begin{cases} -a+b-c+2=0 \\ a+b+c+2=0 \\ 64a+16b+4c+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-2 \\ c=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}x^3-2x^2-\frac{1}{2}x+2$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$; trục Ox; $x=-1$; $x=4$ là:

$$S = S_1+S_2 = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{4}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}x^3-2x^2-\frac{1}{2}x+2\right)\mathrm{d}x + \int_{4}^{1}\left(\frac{1}{2}x^3-2x^2-\frac{1}{2}x+2\right)\mathrm{d}x$$

$$\left(\frac{1}{8}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^2+2x\right)\Big|_{-1}^{1} + \left(\frac{1}{8}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^2+2x\right)\Big|_{4}^{1} = \frac{8}{3}+\frac{63}{8} = \frac{253}{24}$$ (đơn vị diện tích).

Câu 129. Trong mặt phẳng Oxy, cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+\frac{5}{2}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi A là diện tích được gạch chéo nằm trên trục hoành và B là diện tích được gạch chéo nằm phía dưới trục hoành như trong hình vẽ.



a) Đồ thị hàm số $f(x)$ cắt đường thẳng $y=0$ tại một điểm phân biệt.

b) $A=\int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x$

c) $\int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x<\int_{3}^{1} f(x)\mathrm{d}x$

d) Diện tích hình phẳng được gạch chéo bằng $\frac{1265}{144}$ (đơn vị diện tích).

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Dựa vào đồ thị, ta có: Đồ thị hàm số $f(x)$ cắt đường thẳng $y=0$ tại ba điểm phân biệt.

b) Ta có: hàm số $f(x)\ge 0\ \forall x\in[-2;1]$, nên: $A=\int_{-2}^{1}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x$

c) Ta có: hàm số $f(x)\le 0\ \forall x\in[1;3]$, nên: $B=\int_{1}^{3}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=-\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x=\int_{3}^{1} f(x)\mathrm{d}x$

Mà từ đồ thị : $A>B\Leftrightarrow\int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x>\int_{3}^{1} f(x)\mathrm{d}x$

d) Vì các điểm $(-2;0);(1;0);(3;0)$ thuộc đồ thị hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+\frac{5}{2}$ nên ta có hệ:

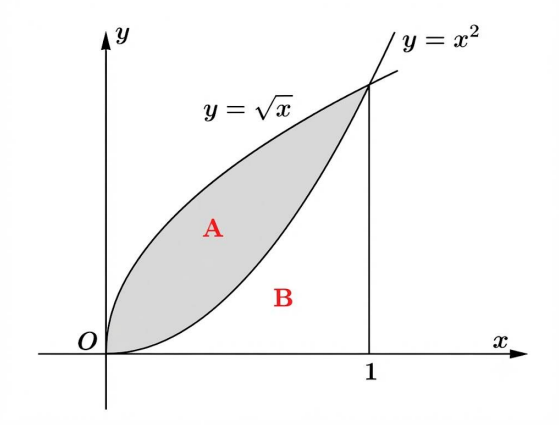
$$\begin{cases}-8a+4b-2c+\frac{5}{2}=0\\ a+b+c+\frac{5}{2}=0\\ 27a+9b+3c+\frac{5}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{5}{12}\\ b=-\frac{5}{6}\\ c=-\frac{25}{12}\end{cases}\Rightarrow f(x)=\frac{5}{12}x^3-\frac{5}{6}x^2-\frac{25}{12}x+\frac{5}{2}$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$; trục Ox; $x=-2$; $x=3$ là:

$$S=A+B=\int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{3}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{1}\left(\frac{5}{12}x^3-\frac{5}{6}x^2-\frac{25}{12}x+\frac{5}{2}\right)\mathrm{d}x+\int_{3}^{1}\left(\frac{5}{12}x^3-\frac{5}{6}x^2-\frac{25}{12}x+\frac{5}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$\left(\frac{5}{48}x^4-\frac{5}{18}x^3-\frac{25}{24}x^2+\frac{5}{2}x\right)\Big|_{-2}^{1}+\left(\frac{5}{48}x^4-\frac{5}{18}x^3-\frac{25}{24}x^2+\frac{5}{2}x\right)\Big|_{3}^{1}=\frac{105}{16}+\frac{20}{9}=\frac{1265}{144}$$ (đơn vị diện tích).

Câu 130. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai hàm số $y=f(x)=\sqrt{x}$, $y=g(x)=x^2$ và hai đường thẳng $x=0, x=1$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi A là phần diện tích được tô đậm và B là phần diện tích không tô đậm như trong hình dưới.



a) Hai đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cắt nhau tại một điểm.

b) $B=\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$

c) $A-B=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

d) $A=\dfrac{2}{3}$ (đơn vị diện tích).

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Từ đồ thị, ta có: Hai đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt $(0;0)$ và $(1;1)$.

b) B là phần diện tích giới hạn bởi các đường $g(x)=x^2, x=0, x=1$ nên $B=\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$

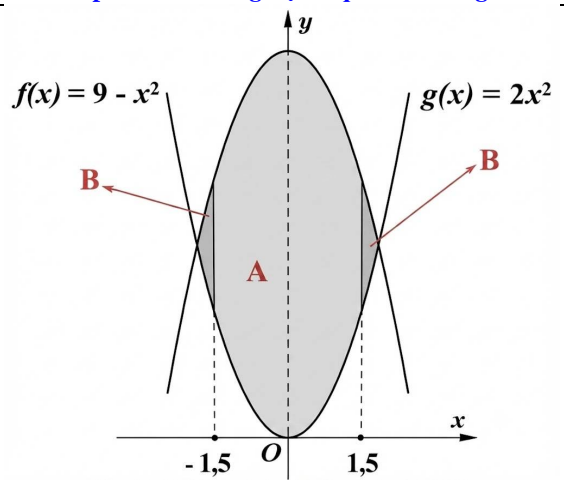
c) phần diện tích giới hạn bởi các đường $f(x)=\sqrt{x}, x=0, x=1$ nên $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

Do đó, từ đồ thị ta có: $A+B=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

d) Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$A=\int_0^1\left|\sqrt{x}-x^2\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x-\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\left.\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^1-\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\text{(đơn vị diện tích).}$$

Câu 131. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai hàm số $f(x)=9-x^2$, $g(x)=2x^2$ và hai đường thẳng $x=-1{,}5, x=1{,}5$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi A là phần diện tích được tô đậm và B là phần diện tích được tô đậm hơn như trong hình dưới.



a) Hai đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cắt nhau tại hai điểm $(-3;9)$ và $(3;9)$.

b) $A=\int\limits_{-1,5}^{1,5}\left(9-x^2\right)\mathrm{d}x$

c) $B=2\int\limits_{1,5}^{\sqrt{3}}\left(9-x^2\right)\mathrm{d}x$

d) $A+B=12\sqrt{a}$ (đơn vị diện tích), với $a\in\mathbb{Z}$. Khi đó a là nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2-5\right)=2$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Ta có phương trình hoành độ giao điểm:

$$9-x^2=2x^2\Leftrightarrow x^2=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\sqrt{3}\Rightarrow y=6\\x=\sqrt{3}\Rightarrow y=6\end{array}\right.$$

Hai đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cắt nhau tại hai điểm $\left(-\sqrt{3};6\right)$ và $\left(\sqrt{3};6\right)$.

b) Từ đồ thị, ta có: $A=\int\limits_{-1,5}^{1,5}\left(9-x^2-2x^2\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1,5}^{1,5}\left(9-x^2\right)\mathrm{d}x$

c) Do hai đồ thị $f(x)=9-x^2$, $g(x)=2x^2$ nhận trục Oy làm trục đối xứng nên:

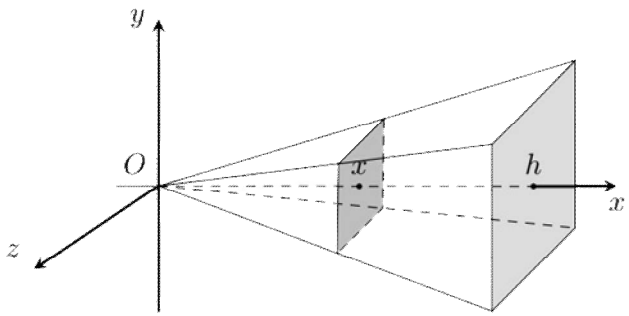
$$B=\int\limits_{-1,5}^{-\sqrt{3}}\left(9-x^2-2x^2\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{1,5}^{\sqrt{3}}\left(9-x^2-2x^2\right)\mathrm{d}x=2\int\limits_{1,5}^{\sqrt{3}}\left(9-3x^2\right)\mathrm{d}x$$

d) $A+B=\int\limits_{-1,5}^{1,5}\left(9-x^2\right)\mathrm{d}x+2\int\limits_{1,5}^{\sqrt{3}}\left(9-3x^2\right)\mathrm{d}x=12\sqrt{3}$ (đơn vị diện tích) $\Rightarrow a=3$

$$\log_2\left(x^2-5\right)=2\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-5>0\\x^2-5=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-5>0\\x^2=9\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-5>0\\\left[\begin{array}{l}x=-3(L)\\x=3(N)\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Vậy $a=3$ là nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2-5\right)=2$

Câu 132. Cho khối chóp đều có đáy là hình vuông cạnh L và chiều cao là h. Chọn trục Ox sao cho gốc O trùng với đỉnh của khối chóp và trục đi qua tâm của đáy (như hình dưới).



a) Đáy của khối chóp nằm trên mặt phẳng song song với Ox.

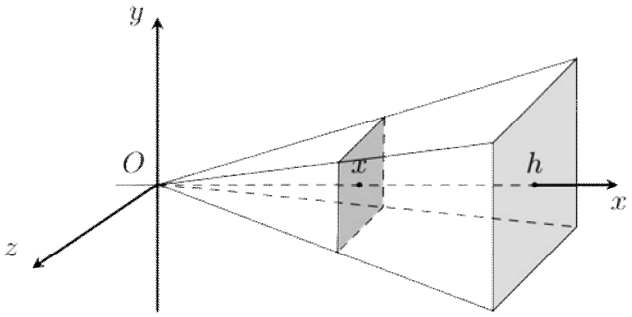
b) Mỗi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng $x\left(0\le x\le h\right)$, cắt khối chóp theo mặt cắt là hình vuông cạnh a.

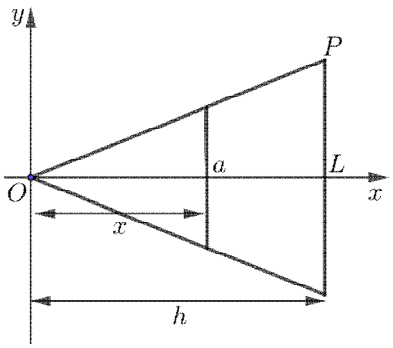
c) Diện tích mặt cắt là $S\left(x\right)=\dfrac{L}{h}x^2$.

d) Thể tích của khối chóp là $V=\dfrac{1}{3}L^2h$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG





a) Đáy của khối chóp nằm trên mặt phẳng vuông góc với Ox tại $x=h$.

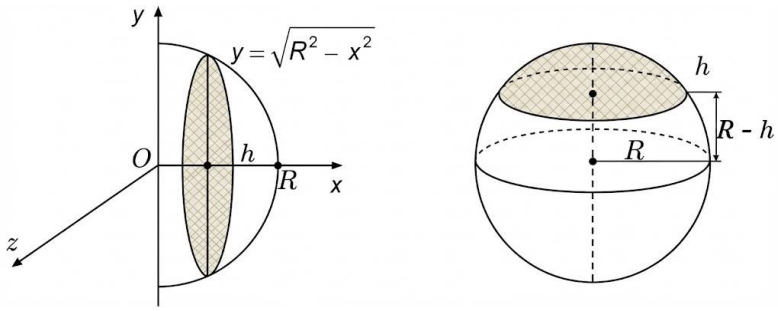
b) Mỗi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng $x\left(0\le x\le h\right)$, cắt khối chóp theo mặt cắt là hình vuông có cạnh là a.

c) Theo định lí Thales, ta có $\dfrac{x}{h}=\dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{L}{2}}$ suy ra $a=\dfrac{L}{h}x$.

Do đó, diện tích của mặt cắt này là $S\left(x\right)=\dfrac{L^2}{h^2}x^2$.

d) Thể tích của khối chóp này là $V=\int\limits_0^h S(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^h \frac{L^2}{h^2}.x^2\mathrm{d}x=\frac{L^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^h=\frac{1}{3}L^2h$.

Câu 133. Khối chỏm cầu với bán kính $R=5$ và chiều cao $h=1$ có thể tích V và được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y=\sqrt{25-x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=4$, $x=5$ xung quanh trục Ox.



a) Khoảng cách từ tâm của khối cầu đến khối chỏm cầu bằng 3.

b) Thể tích của khối chỏm cầu V được tính theo công thức $V=\pi\int\limits_4^5\left(25-x^2\right)\mathrm{d}x$.

c) Thể tích của khối chỏm cầu $V=\frac{14\pi}{3}$.

d) Gọi V_1 là thể tích của nửa khối cầu có bán kính bằng 5. Tỉ số thể tích $\frac{V}{V_1}=\frac{7}{115}$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	SAI

a) Khoảng cách từ tâm của khối cầu đến khối chỏm cầu bằng $5-1=4$.

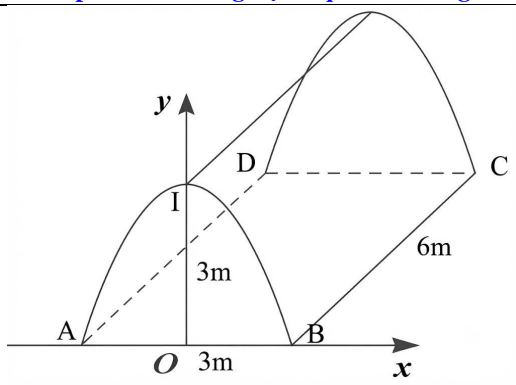
b) Thể tích của khối chỏm cầu được tính theo công thức : $V=\pi\int\limits_4^5\sqrt{25-x^2}^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_4^5\left(25-x^2\right)\mathrm{d}x$

c) Ta có thể tích khối chỏm cầu là $V=\pi\int\limits_4^5\left(25-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(25x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_4^5=\frac{14\pi}{3}$.

d) Gọi V_1 là thể tích của nửa khối cầu có bán kính bằng 5.

Ta có $V_1=\frac{1}{2}.\frac{4}{3}\pi.5^3=\frac{250}{3}\pi$ nên suy ra $\frac{V}{V_1}=\frac{\frac{14}{3}\pi}{\frac{250}{3}\pi}=\frac{7}{125}$.

Câu 134. Để kỷ niệm ngày $26-3-2024$, chi đoàn $12C_4$ Trường Nguyễn Văn Trỗi dự định dựng một lều trại dạng parabol, với kích thước: Nền trại là một hình chữ nhật $ABCD$ có chiều rộng AB là 3 mét, chiều sâu BC là 6 mét, mặt trước và sau có dạng parabol (P) đỉnh có đỉnh I cách mặt đất là 3 mét. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O là trung điểm của cạnh AB như hình vẽ



a) Đỉnh của parabol (P) là $I(0;3)$ và hai điểm A,B có tọa độ $A\left(-\frac{3}{2};0\right);B\left(\frac{3}{2};0\right)$.

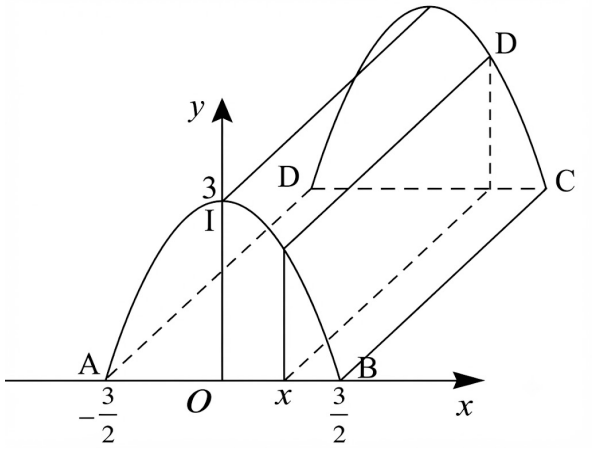
b) Parabol (P) có phương trình là: $y=\frac{4}{3}x^2+3$

c) Diện tích mặt trước của lều trại bằng $3\left(m^2\right)$

d) Thể tích phần không gian phía bên trong trại của lớp $12C_4$ bằng $18\left(m^3\right)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**



a) Theo đề bài ta có: $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB=3m;BC=6m$.

Đỉnh của parabol (P) là $I(0;3)$ và $A\left(-\frac{3}{2};0\right);B\left(\frac{3}{2};0\right)$

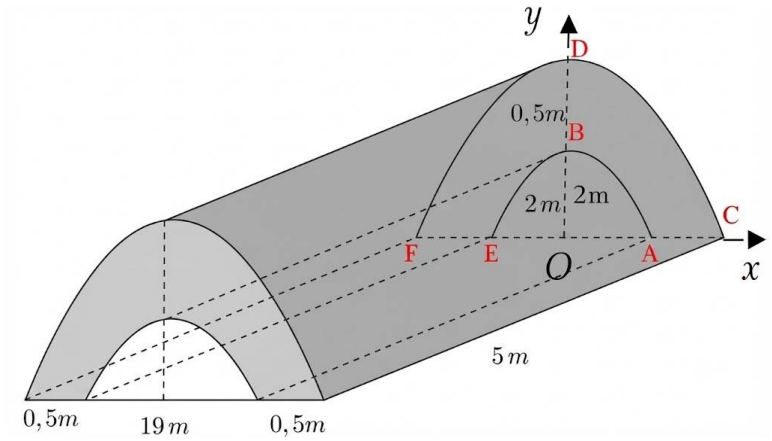
b) Phương trình của parabol (P) có dạng $y=ax^2+b,a\neq 0$.

Do I,A,B thuộc parabol (P) nên ta có: $\begin{cases}a.0^2+b=3\\ a.\left(\frac{3}{2}\right)^2+b=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{4}{3}\\ b=3\end{cases}\Rightarrow y=-\frac{4}{3}x^2+3$

c) Diện tích mặt trước của lều trại là: $S=2\int_0^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{4}{3}x^2+3\right)dx=2\left(-\frac{4}{3}x^3+3x\right)\Big|_0^{\frac{3}{2}}=6\left(m^2\right)$

d) Vậy thể tích phần không gian phía trong trại là: $V=6.2\int_0^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{4}{3}x^2+3\right)dx=12\left(-\frac{4}{3}x^3+3x\right)\Big|_0^{\frac{3}{2}}=36\left(m^3\right)$

Câu 135. Trong chương trình nông thôn mới của tỉnh Phú Yên, tại xã Hòa Mỹ có xây một cây cầu bằng bê tông có kích thước: $AC=EF=0,5m; AE=19m; OB=2m, BD=0,5m$, đường cong Parabol $\left(P_1\right)$ đi qua điểm A,B,E và đường cong Parabol $\left(P_2\right)$ đi qua điểm C,D,F như hình vẽ bên dưới. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O là trung điểm của cạnh AE như hình vẽ.



a) Parabol $\left(P_1\right)$ có phương trình là $y=-\frac{8}{361}x^2+2$.

b) Parabol $\left(P_2\right)$ có phương trình là $y=\frac{1}{40}x^2-\frac{5}{2}$.

c) Diện tích được giới hạn bởi hai Parabol $\left(P_1\right)$ và $\left(P_2\right)$ là $8\left(\text{m}^2\right)$

d) Biết 1m^3 khối bê tông để đổ cây cầu có giá 5 triệu đồng. Khi đó, Tỉnh Phú Yên cần bỏ 100 triệu đồng để xây cây cầu trên.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

Từ hình vẽ ta có: $A\left(\frac{19}{2};0\right), B\left(0;2\right), C\left(10;0\right), D\left(0;\frac{5}{2}\right)$

a) Phương trình của parabol $\left(P_1\right)$ có dạng $y=a_1x^2+b_1$

$\left(P_1\right)$ đi qua hai điểm $A\left(\frac{19}{2};0\right), B\left(0;2\right)$

Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases}0=a.\left(\frac{19}{2}\right)^2+2\\2=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=-\frac{8}{361}\\b_1=2\end{cases}\Rightarrow\left(P_1\right):y=-\frac{8}{361}x^2+2$.

b) Phương trình của parabol $\left(P_2\right)$ có dạng: $y=a_2x^2+b_2$

(P_2) đi qua hai điểm $C(10;0), D\left(0;\frac{5}{2}\right)$

Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0 = a_2.(10)^2 + \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} = b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = -\frac{1}{40} \\ b_2 = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow (P_2): y = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}.$

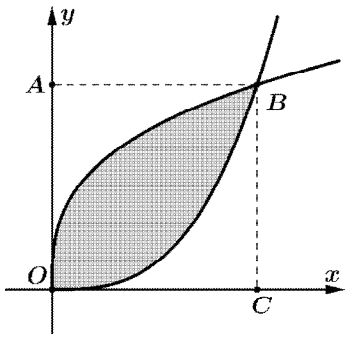
c) Diện tích được giới hạn bởi hai Parabol (P_1) và (P_2) là

$$S = 2\left[\int_0^{10}\left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}\right)dx - \int_0^{\frac{19}{2}}\left(-\frac{8}{361}x^2 + 2\right)dx\right] = 8\left(\text{m}^2\right)$$

d) Ta có thể tích của bê tông là: $V = 5.2\left[\int_0^{10}\left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}\right)dx - \int_0^{\frac{19}{2}}\left(-\frac{8}{361}x^2 + 2\right)dx\right] = 40\,\text{m}^3.$

Số tiền mà tỉnh Phú Yên cần bỏ ra để xây cây cầu là: $5.40 = 200$ triệu đồng

Câu 136. Cho một viên gạch men có dạng hình vuông $OABC$ như hình vẽ. Sau khi tọa độ hóa, ta có $O(0;0)$, $A(0;1)$, $B(1;1)$, $C(1;0)$ và hai đường cong lần lượt là đồ thị hàm số $y = x^3$ và $y = \sqrt[3]{x}$



a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt[3]{x}$, trục Ox, đường thẳng $x = 0$ và đường thẳng $x = 1$ được tính bằng công thức $S = \int_0^1 |\sqrt[3]{x}|dx$.

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$, trục Ox,đường thẳng $x = 0$ và đường thẳng $x = 1$ có giá trị bằng $\frac{1}{2}$ (đvdt).

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$ và $y = \sqrt[3]{x}$, đường thẳng $x = 0$ và đường thẳng $x = 1$ được tính bằng công thức $S = \int_0^1 \left(-x^3 + \sqrt[3]{x}\right)dx$.

d) Diện tích phần không được tô đậm trên viên gạch men có giá trị bằng $\frac{3}{4}$ (đvdt).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox, đường thẳng $x=a, x=b$ được tính bằng công thức $S=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3$, trục Ox ,đường thẳng $x=0$ và đường thẳng $x=1$.

Ta có $S=\int_0^1 |x^3|\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}\Big|_0^1=\frac{1}{4}$(đvdt).

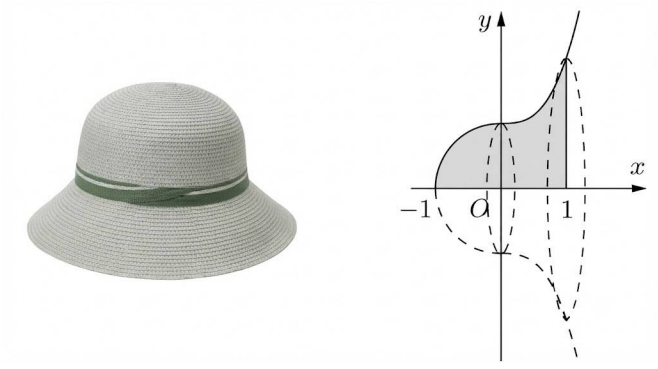
c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$, đường thẳng $x=a$ và đường thẳng $x=b$ được tính bằng công thức $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$, vì phần đồ thị của hàm số $y=x^3$ nằm dưới phần đồ thị của hàm số $y=\sqrt[3]{x}$, nên diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3$ và $y=\sqrt[3]{x}$, đường thẳng $x=0$ và đường thẳng $x=1$ được tính bằng công thức $S=\int_0^1 \left(-x^3+\sqrt[3]{x}\right)\mathrm{d}x$

d) Diện tích hình vuông có cạnh bằng 1 là $S=1^2=1$(đvdt)

Gọi S_1 là diện tích phần tô đậm: $S_1=\int_0^1 \left(\sqrt[3]{x}-x^3\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 \left(x^{\frac{1}{3}}-x^3\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}$(đvdt),

Vậy diện tích phần không được tô đậm trên viên gạch men bằng $S-S_1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$(đvdt).

Câu 137. Giả sử chiếc nón rộng vành sau có thể mô hình hóa bằng cách cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\begin{cases}x^3+1 & \text{khi } 0<x\le 1\\ \sqrt{1-x^2} & \text{khi } -1\le x\le 0\end{cases}$, trục Ox và các đường thẳng $x=-1$ và $x=1$ quay quanh trục Ox (đơn vị trên trục là dm).



a) Diện tích hình phẳng (H) được tính theo công thức $S=\int_{-1}^1 \left|\sqrt{1-x^2}+x^3+1\right|dx$.

b) Diện tích thiết diện qua trục đối xứng của khối tròn xoay trên là $\frac{\pi+5}{2}$ dm^2.

c) Công thức tính thể tích của chiếc nón trên là $V=\pi\int_0^{-1}\left(x^2-1\right)dx+\pi\int_0^1\left(x^6+2x^3+1\right)dx$.

d) Biết thể tích của chiếc nón bằng $\frac{a\pi}{b}$ với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó $a+b=139$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Diện tích hình phẳng (H) được tính bằng công thức: $S=\int\limits_{-1}^{0}\left(\sqrt{1-x^2}\right)dx+\int\limits_{0}^{1}\left(x^3+1\right)dx$

b) Diện tích thiết diện qua trục đối xứng của khối tròn xoay trên là $\frac{\pi+5}{2}$ dm^2.

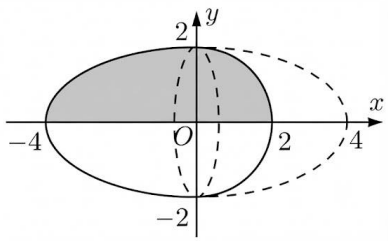
c) Công thức tính thể tích của chiếc nón trên là $V=\pi\int\limits_{0}^{-1}\left(x^2-1\right)dx+\pi\int\limits_{0}^{1}\left(x^6+2x^3+1\right)dx$.

d) Thể tích của chiếc nón:

$V=\pi\int\limits_{0}^{-1}\left(x^2-1\right)dx+\pi\int\limits_{0}^{1}\left(x^6+2x^3+1\right)dx=\frac{97\pi}{42}$ nên $a=97$ và $b=42\Rightarrow a+b=139$.

Câu 138. Một cái trứng khủng long đồ chơi là một khối tròn xoay được tạo thành từ 2 mảnh ghép lại. Biết mảnh trên được tạo thành khi xoay một phần tư đường elip với trục lớn là 8 và trục nhỏ là 4 quanh trục Ox và mảnh dưới được tạo thành khi xoay một phần tư đường tròn bán kính 2 quanh trục Ox như hình sau (bỏ qua độ dày của vỏ trứng).





a) Thể tích phần trong của mảnh trên được tính bởi $V_1=\frac{1}{4}\int\limits_{-4}^{0}\left(16-x^2\right)dx$.

b) Thể tích phần trong của mảnh trên gấp 2 lần thể tích phần trong của mảnh dưới.

c) Thể tích phần trong của quả trứng đồ chơi này là 16π.

d) Diện tích thiết diện khi cắt bởi mặt phẳng qua trục của quả trứng là 4π.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Mảnh trên được biểu diễn bởi elip: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1\Rightarrow y^2=4\left(1-\frac{x^2}{16}\right)$

Thể tích phần trong của mảnh trên được tính bởi $V_1=\pi\int\limits_{-4}^{0}\left[4\left(1-\frac{x^2}{16}\right)\right]dx=\frac{\pi}{4}\int\limits_{-4}^{0}\left(16-x^2\right)dx$.

b) Thể tích phần trong mảnh trên là: $V_1=\frac{\pi}{4}\int\limits_{-4}^{0}\left(16-x^2\right)dx=\frac{32\pi}{3}$

Mảnh dưới được biểu diễn bởi đường tròn: $x^2+y^2=4\Rightarrow y^2=4-x^2$

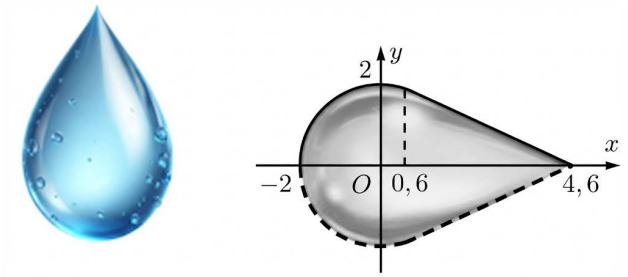
Thể tích phần trong dưới là: $V_2=\pi\int\limits_{0}^{2}\left(4-x^2\right)dx=\frac{16\pi}{3}$.

Vậy thể tích phần trong của mảnh trên gấp 2 lần thể tích phần trong của mảnh dưới.

c) Thể tích phần trong của quả trứng đồ chơi này là: $V=V_1+V_2=\frac{32\pi}{3}+\frac{16\pi}{3}=16\pi$

d) Diện tích thiết diện khi cắt bởi mặt phẳng qua trục của quả trứng là 4π.

Câu 139. Người ta chế tác một giọt nước bằng thủy tinh. Biết giọt nước thủy tinh này là vật thể tròn xoay khi xoay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2} & \left(-2\le x\le 0,6\right)\\ -\frac{\sqrt{91}}{20}x+\frac{23\sqrt{91}}{100} & \left(0,6<x\le 4,6\right)\end{cases}$ và trục Ox quanh trục Ox (đơn vị trên trục là centimet).



a) Hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục tại $x=0,6$.

b) Diện tích mặt cắt của giọt nước thủy tinh khi cắt bởi mặt phẳng qua trục được tính bởi công thức $S=\int\limits_{-2}^{4,6}f\left(x\right)dx$ cm^2.

c) Thể tích của giọt nước thủy tinh này lớn hơn 41 cm^3.

d) Biết khối lượng riêng của thủy tinh là $\rho=2,6$ g/cm^3, khối lượng của giọt nước thủy tinh này là 102,22g (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của gam).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) $\lim\limits_{x\to 0,6^-}f\left(x\right)=\sqrt{4-\left(0,6\right)^2}=\sqrt{4-0,36}=\sqrt{3,64}\approx 1,907$ $\lim\limits_{x\to 0,6^+}f\left(x\right)=-\frac{\sqrt{91}}{20}.0,6+\frac{23\sqrt{91}}{100}\approx 1,907$

Vậy hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục tại $x=0,6$

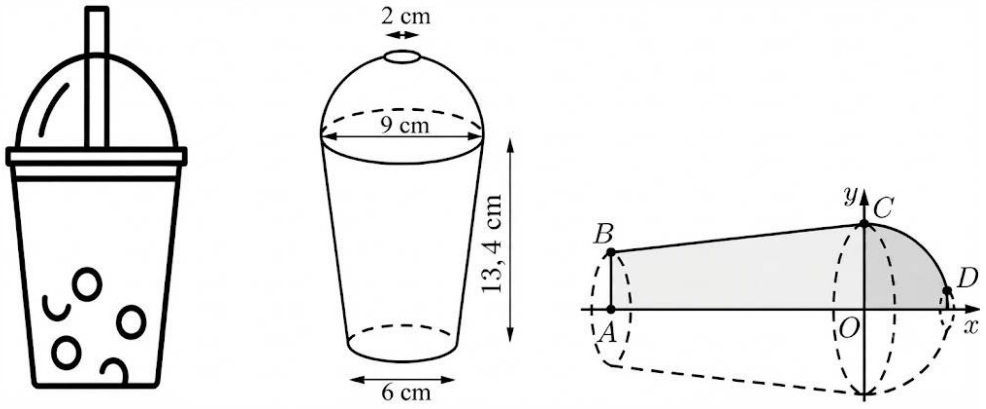
b) Diện tích mặt cắt của giọt nước thủy tinh khi cắt bởi mặt phẳng qua trục được tính bởi công thức $S=2\int\limits_{-2}^{4,6} f(x)dx$ cm^2.

c) Thể tích của giọt nước thủy tinh này là:

$$V=V_1+V_2=\pi\int\limits_{-2}^{0,6}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2dx+\pi\int\limits_{0,6}^{4,6}\left(-\frac{\sqrt{91}}{20}x+\frac{23\sqrt{91}}{100}\right)^2dx=\frac{4693\pi}{375}\approx 39,32 \text{ cm}^3$$

d) Khối lượng của giọt nước thủy tinh này là: $m=\rho.V=2,6.\frac{4693\pi}{375}\approx 102,22$ g.

Câu 140. Một ly trà sữa dạng hình nón cụt, có đường kính đáy ly 6 cm, đường kính miệng ly 9 cm, chiều cao 13,4 cm, ở miệng ly có sử dụng một nắp đậy có hình dạng nửa mặt cầu và ở đỉnh của nửa mặt cầu này có một hình tròn có đường kính 2 cm để cắm ống hút, mặt phẳng chứa hình tròn này song song với mặt phẳng chứa miệng ly (tham khảo hình vẽ sau).



Chọn hệ trục Oxy (đơn vị trên trục là centimet) với trục Ox đi qua tâm của 2 đáy hình nón cụt và gốc tọa độ O trùng với tâm của đáy lớn như hình vẽ trên.

a) Phương trình đường thẳng BC là: $1,5x-13,4y+60,3=0$.

b) Tọa độ điểm D là $D\left(\frac{\sqrt{77}}{2};1\right)$.

c) Thể tích bên trong của ly không bao gồm nắp là 500 ml (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

d) Thể tích bên trong của ly bao gồm cả thể tích của nắp là 780 ml (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) $B=(-13,4;3)$ và $C=(0;4,5)$ nên $\overrightarrow{BC}=(13,4;1,5)$ nên đường thẳng BC có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{BC}}=(-1,5;13,4)$

Phương trình đường thẳng BC là: $-1,5(x-13,4)+13,4(y-3)=0\Leftrightarrow 1,5x-13,4y+60,3=0$

b) Hoành độ của điểm D là: $x_D=\sqrt{(4,5)^2-1}=\dfrac{\sqrt{77}}{2}\Rightarrow D\left(\dfrac{\sqrt{77}}{2};1\right)$

c) Thể tích bên trong của ly không bao gồm nắp là: $V_1=\pi\int\limits_{-13,4}^{0}\left(\dfrac{1,5x+60,3}{13,4}\right)^2dx\approx 600\,\text{cm}^3$

d) Thể tích bên trong của ly bao gồm cả thể tích của nắp là: $V=V_1+(V_2-V_3)$ trong đó V_2 là nửa thể tích của khối cầu và V_3 là thể tích của chỏm cầu.

Nửa thể tích khối cầu là: $V_2=\dfrac{1}{2}.\dfrac{4}{3}.\pi.R^3=\dfrac{243\pi}{4}$

Thể tích chỏm cầu: $V_3=\pi\int\limits_{R-h}^{R}\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2dx\Leftrightarrow V_3=\pi\int\limits_{R-h}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx\Leftrightarrow V_3=\pi\left(R^2x-\dfrac{x^3}{3}\right)\Big|_{R-h}^{R}$

$\Leftrightarrow V_3=\pi\left[\left(R^3-\dfrac{R^3}{3}\right)-\left(R^2(R-h)-\dfrac{(R-h)^3}{3}\right)\right]\Leftrightarrow V_3=\pi h^2\left(R-\dfrac{h}{3}\right).$

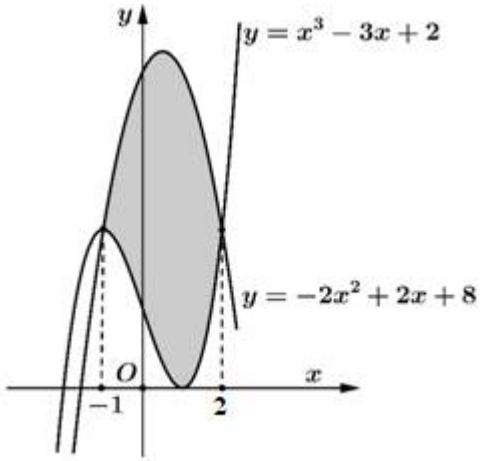
Thay số ta có: $h=4,5-\dfrac{\sqrt{77}}{2}$; $R=4,5\Rightarrow V_3=\dfrac{\left(729-83\sqrt{77}\right)\pi}{12}$

Thể tích bên trong của ly bao gồm cả thể tích của nắp là:

$$V=600+\left[\frac{243\pi}{4}-\frac{\left(729-83\sqrt{77}\right)\pi}{12}\right]\approx 790\text{ ml.}$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 141. Diện tích hình phẳng phần tô đậm trong hình vẽ bên dưới bằng bao nhiêu ?(kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ nhất).



Trả lời: ……..

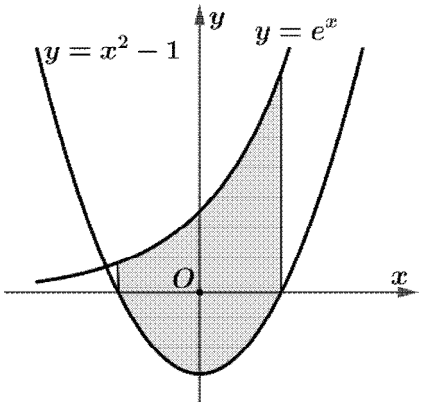
Lời giải

Đáp án: 15,8

Từ đồ thị, ta có diện tích hình phẳng phần tô đậm trong hình vẽ là:

$$S = \int_{-1}^{2}\left[\left(-2x^2+2x+8\right)-\left(x^3-3x+2\right)\right]\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2}\left(-x^3-2x^2+5x+6\right)\mathrm{d}x = \frac{63}{4} \approx 15,8.$$

Câu 142. Hình phẳng (H) là phần tô đậm trong hình vẽ sau đây:



Biết diện tích hình phẳng (H) bằng $\frac{a.e^2+b.e+c}{3e}$, với $a,b,c \in \mathbb{Z}$. Tính $a+b+c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

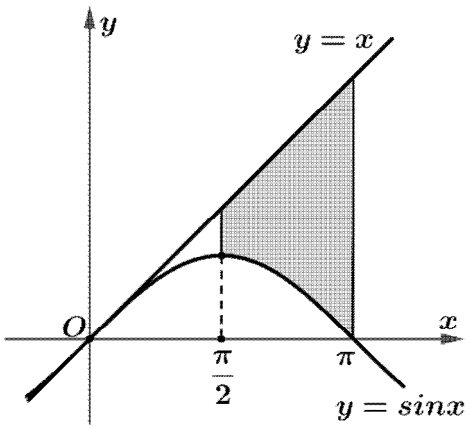
Đáp án: 4

Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$S = \int_{-1}^{1}\left[e^x-\left(x^2-1\right)\right]\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\left(e^x-x^2+1\right)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}e^x\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1}\left(-x^2+1\right)\mathrm{d}x = e-\frac{1}{e}+\frac{4}{3} = \frac{3e^2+4e-3}{3e}$$

$$\Rightarrow a=3; b=4; c=-3 \Rightarrow a+b+c=4$$

Câu 143. Hình phẳng (H) là phần tô đậm trong hình vẽ sau đây:



Biết diện tích hình phẳng (H) bằng $\frac{a.\pi^2}{b}+c$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$, và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b+c$.

Trả lời: ……..

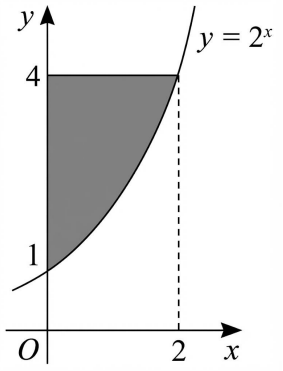
Lời giải

Đáp án: 10

$$S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x-\sin x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{3\pi^2}{8}-1$$

$\Rightarrow a=3;b=8;c=-1\Rightarrow a+b+c=10$

Câu 144. Gọi S là diện tích của hình phẳng được tô đậm như hình vẽ dưới đây.



Biết $S=a-\frac{b}{c\ln 2}$, với $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản và $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính $a+b+c$.

A. $a+b+c=8$. **B.** $a+b+c=10$. **C.** $a+b+c=6$. **D.** $a+b+c=9$.

Lời giải

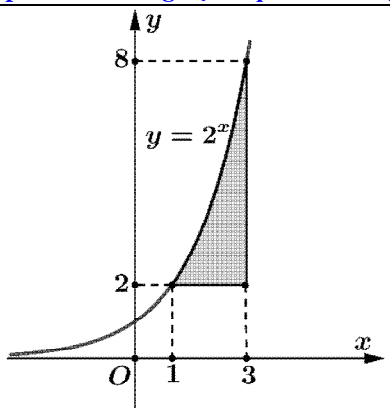
Chọn A.

Từ hình vẽ, ta có: $S=\int_0^2\left(4-2^x\right)\mathrm{d}x=\left(4x-\frac{2^x}{\ln 2}\right)\Big|_0^2=4-\frac{3}{\ln 2}$

$\Rightarrow a+b+c=4+3+1=8$

Câu 145. Biết diện tích phần hình phẳng tô đậm trong hình vẽ bên dưới bằng bằng $\frac{a}{\ln 2}+b$, với $a,b\in\mathbb{Z}$.

Tính $a+b$.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

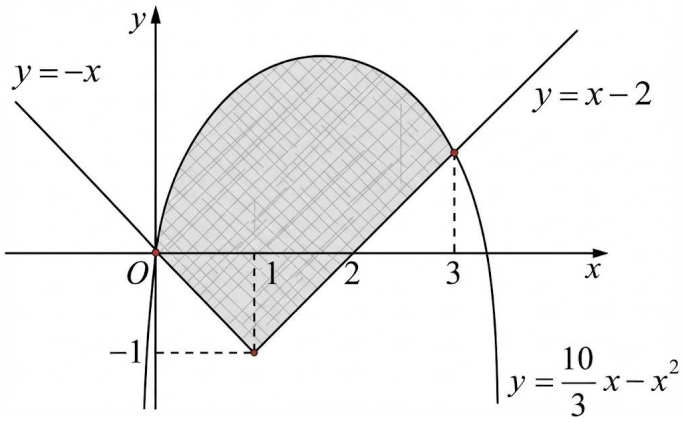
Hình phẳng tô đậm trong hình vẽ được giới hạn bởi các đường $y=2^x, y=2, x=1$ và $x=3$.

Do đó diện tích hình phẳng tô đậm trong hình vẽ bằng:

$$S=\int_1^3\left(2^x-2\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{2^x}{\ln 2}-2x\right)\Big|_1^3=\frac{6}{\ln 2}-4.$$

$\Rightarrow a=6; b=-4 \Rightarrow a+b=2$

Câu 146. Diện tích hình phẳng phần tô đậm trong hình vẽ bên dưới bằng bao nhiêu?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 6,5

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=-x$ và $y=x-2$ là: $-x=x-2\Leftrightarrow x=1$.

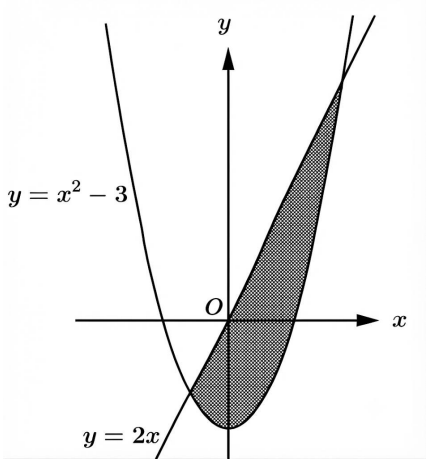
Diện tích hình phẳng cần tính là: $S=\int_0^1\left(\frac{10}{3}x-x^2+x\right)\mathrm{d}x+\int_1^3\left(\frac{10}{3}x-x^2-x+2\right)\mathrm{d}x$.

$$=\int_0^1\left(\frac{13}{3}x-x^2\right)\mathrm{d}x+\int_1^3\left(\frac{7}{3}x-x^2+2\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\left(\frac{13}{3}x-x^2\right)\mathrm{d}x+\int_1^3\left(\frac{7}{3}x-x^2+2\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{13}{6}x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1+\left(\frac{7}{6}x^2-\frac{x^3}{3}+2x\right)\Big|_1^3=\frac{13}{2}=6,5.$$

Câu 81. Biết diện tích hình phẳng là phần tô đậm trong hình vẽ bên dưới bằng $\frac{a}{b}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+2b$.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 38

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=x^2-3$ và $y=2x$ là:

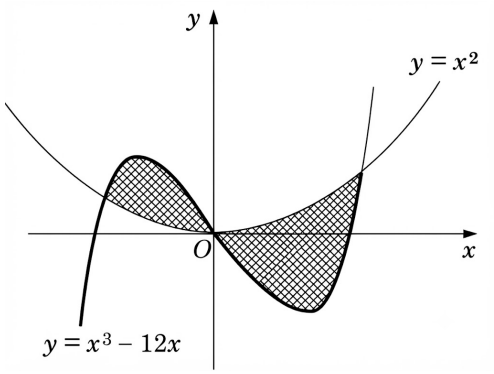
$$x^2-3=2x\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$$

Diện tích của hình phẳng cần tìm là

$$S=\int_{-1}^{3}\left(2x-x^2+3\right)\mathrm{d}x=\left(x^2-\frac{x^3}{3}+3x\right)\Big|_{-1}^{3}=\frac{32}{3}$$

$\Rightarrow a+2b=38$

Câu 147. Biết diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên dới bằng $\frac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a-b$.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 925

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=x^3-12x$ và $y=x^2$ là:

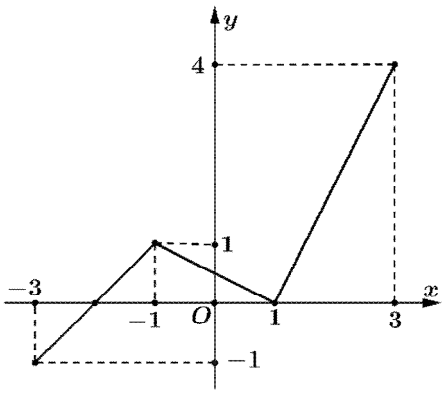
$x^3-12x=x^2\Leftrightarrow\left(x^2-x-12\right)x=0\Leftrightarrow x=0;x=-3;x=4$

Diện tích của hình phẳng cần tìm là

$$S=\int_{-3}^{0}\left(x^3-12x-x^2\right)\mathrm{d}x+\int_{0}^{4}\left(x^2-x^3+12x\right)\mathrm{d}x=\frac{937}{12}$$

$\Rightarrow a-b=925$

Câu 148. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-3;3\right]$ và có đồ thị như hình vẽ. Giá trị của $\int_{-3}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?



Trả lời: ……..

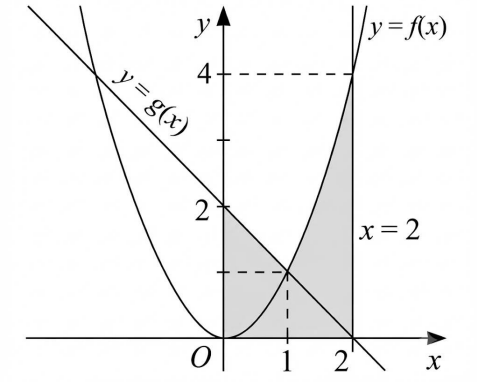
Lời giải

Đáp án: 5

Ta có:

$$\int_{-3}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_{-3}^{-2}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_{-2}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x=-S_{\Delta ABC}+S_{\Delta CDE}+S_{\Delta EFG}=-\frac{1}{2}.1.1+\frac{1}{2}.1.3+\frac{1}{2}.2.4=5$$

Câu 149. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm đa thức bậc hai và $y=g\left(x\right)$ là hàm đa thức bậc nhất và có đồ thị như vẽ . Biết diện tích hình phẳng là phần tô đậm trong hình vẽ bên dưới bằng $\frac{a}{b}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+2b$.



Trả lời: ……..

Lời giải

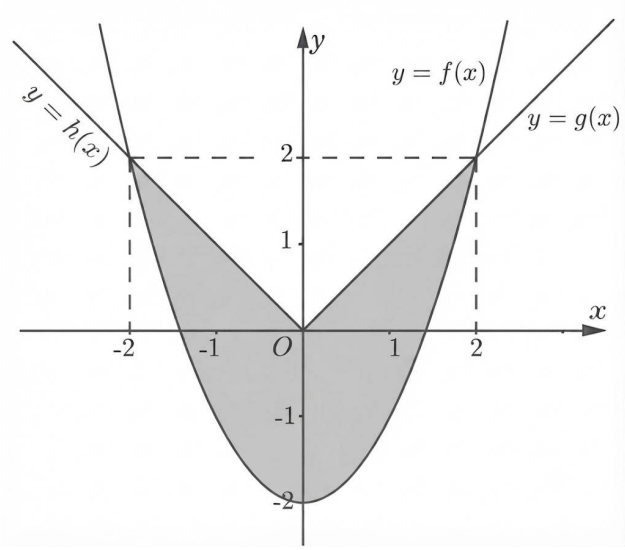
Đáp án: 35

Từ hình vẽ, ta có ta xác định được $y=f(x)=x^2$ và $y=g(x)=2-x$

Diện tích hình phẳng tô màu là: $S=\int_0^1(2-x)\mathrm{d}x+\int_1^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{23}{6}$

$\Rightarrow a+2b=35$

Câu 150. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc hai, $y=g(x)$ với $x\geq 0$ và $y=h(x)$ với $x\leq 0$ là hàm đa thức bậc nhất và có đồ thị như vẽ . Biết diện tích hình phẳng là phần tô đậm trong hình vẽ bên dưới bằng $\frac{a}{b}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a-4b$.



Trả lời: ……..

Lời giải

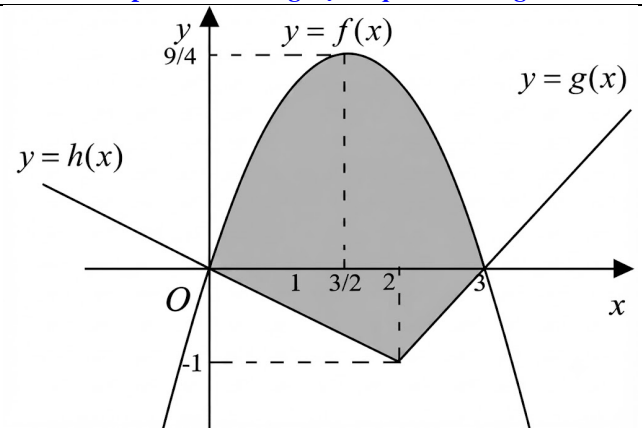
Đáp án: 8

Từ hình vẽ, ta có ta xác định được $y=f(x)=x^2-2$ và $y=g(x)=x$, với $x\geq 0$ và $y=h(x)=-x$, với $x\leq 0$

Diện tích hình phẳng tô màu là: $S=\int_{-2}^0(-x-x^2+2)\mathrm{d}x+\int_0^2(x-x^2+2)\mathrm{d}x=\frac{20}{3}$

$\Rightarrow a-4b=8$

Câu 151. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc hai, $y=g(x)$ với $x\geq 2$ và $y=h(x)$ với $x\leq 2$ là hàm đa thức bậc nhất và có đồ thị như vẽ. Diện tích hình phẳng là phần tô đậm trong hình vẽ bên dưới bằng bao nhiêu ?



Trả lời: ……..

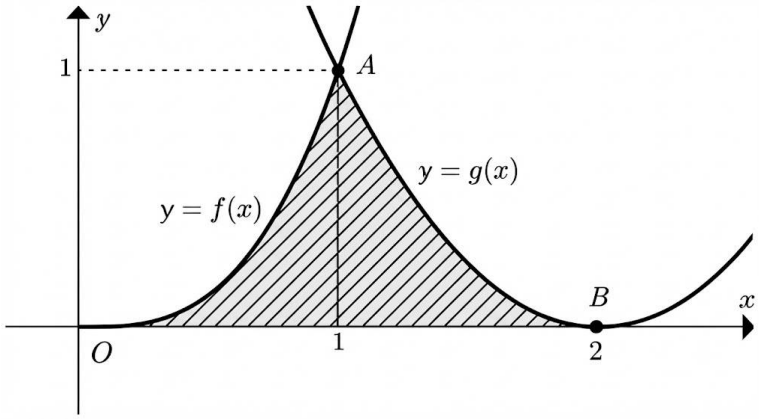
Lời giải

Đáp án: 7

Từ hình vẽ, ta có ta xác định được $y=f\left(x\right)=3x-x^2$ và $y=g\left(x\right)=x-3$, với $x\ge 2$ và $y=h\left(x\right)=-\frac{x}{2}$, với $x\le 2$

Diện tích hình phẳng tô màu là: $S=\int\limits_0^3\left(3x-x^2\right)\mathrm{d}x+\int\limits_0^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x-\int\limits_2^3\left(x-3\right)\mathrm{d}x=7$

Câu 152. Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)=ax^3+b$ và hàm bậc hai $y=g\left(x\right)=cx^2+dx+e$ có đồ thị như vẽ. Biết diện tích hình phẳng là phần gạch chéo trong hình vẽ bên dưới bằng $\frac{a}{b}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $2a+b$.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 26

Từ hình vẽ, ta có ta xác định được $y=f\left(x\right)=x^3$ và $y=g\left(x\right)=x^2-4x+4$

Diện tích hình phẳng tô màu là: $S=\int\limits_0^1x^3\mathrm{d}x+\int\limits_1^2\left(x^2-4x+4\right)\mathrm{d}x=\frac{7}{12}$

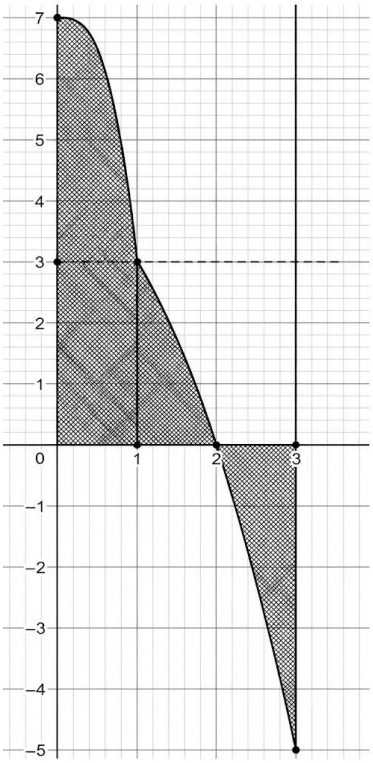
$\Rightarrow 2a+b=26$

Câu 153. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}7-4x^3 & \text{khi } 0\le x\le 1\\ 4-x^2 & \text{khi } x>1\end{cases}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và các đường thẳng $x=0, x=3, y=0$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 10



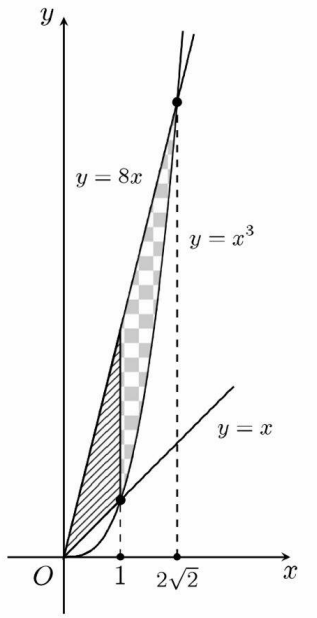
Ta có: $S=\int_0^1\left(7-4x^3\right)dx+\int_1^2\left(4-x^2\right)dx+\int_2^3\left(x^2-4\right)dx$

$=\left(7x-x^4\right)\Big|_0^1+\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2+\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)\Big|_2^3=6+4-\frac{7}{3}-3-\frac{8}{3}+8=10.$

Câu 154. Cho hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ nhất, giới hạn bởi các đường thẳng $y=8x$, $y=x$ và đồ thị hàm số $y=x^3$ có diện tích là $S=\frac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $I=a-b$.

Lời giải

Đồ thị của ba hàm số $y=x^3$, $y=8x$, $y=x$ được minh họa như hình vẽ.



Trong góc phần tư thứ nhất, xét các phương trình hoành độ giao điểm:

+ $x^3 = x \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$.

+ $x^3 = 8x \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2\sqrt{2}$

Hình phẳng cần tính diện tích là phần gạch sọc, được chia ra làm hai vùng. Theo hình vẽ ta có

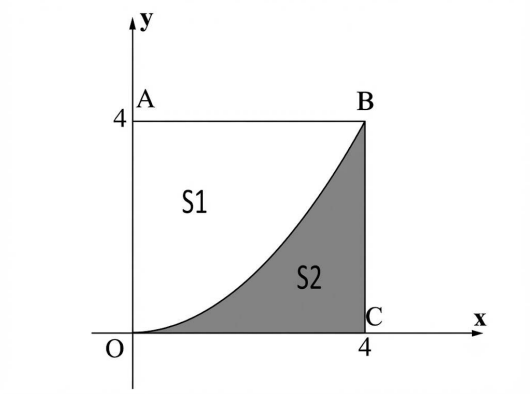
$$S = \int_0^1 (8x - x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{2\sqrt{2}} (8x - x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{63}{4}.$$

Suy ra $a = 63, b = 4$.

Vậy $I = a - b = 59$.

Câu 155. Hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (C) có phương trình $y = \frac{1}{4}x^2$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của phần không bị gạch và bị gạch như hình vẽ bên dưới.

Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng bao nhiêu?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

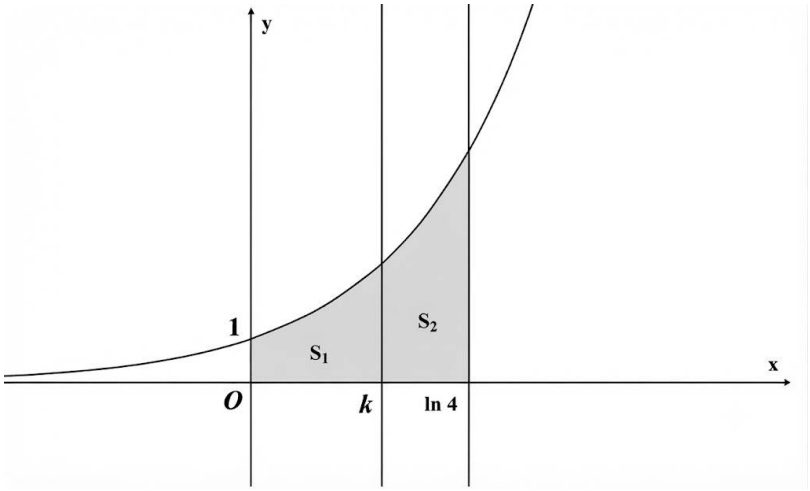
Ta có diện tích hình vuông $OABC$ là 16 và bằng $S_1 + S_2$.

$S_2 = \int_0^4 \frac{1}{4}x^2 dx = \left.\frac{x^3}{12}\right|_0^4 = \frac{16}{3}.$

$S_1 = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$

Do đó $\frac{S_1}{S_2} = \frac{32}{3} : \frac{16}{3} = 2$

Câu 156. Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x, y = 0, x = 0, x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$ $(0 < k < \ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Biết khi $S_1 = 2S_2$ thì $k = \ln a$, với $a \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị a.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Diện tích hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x, y = 0, x = 0, x = \ln 4$ là

$S = \int_0^{\ln 4} e^x dx = e^x\Big|_0^{\ln 4} = e^{\ln 4} - e^0 = 4 - 1 = 3$ (đvdt).

Ta có $S = S_1 + S_2 = S_1 + \frac{1}{2}S_1 = \frac{3}{2}S_1$.

Suy ra $S_1 = \frac{2S}{3} = \frac{2.3}{3} = 2$ (đvdt).

Vì S_1 là phần diện tích được giới hạn bởi các đường $y = e^x, y = 0, x = 0, x = k$ nên

$2 = S_1 = \int_0^k e^x dx = e^x\Big|_0^k = e^k - e^0 = e^k - 1.$

Do đó $e^k = 3 \Leftrightarrow k = \ln 3 \Rightarrow a = 3$.

Câu 157. Kí hiệu $S(t)$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = t$ $(t > 1)$. Tìm t để $S(t) = 10$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Ta có: $S(t)=\int_1^t |2x+1|\,\mathrm{d}x=\int_1^t (2x+1)\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $S(t)=\left(x^2+x\right)\Big|_1^t=t^2+t-2$.

Do đó $S(t)=10\Leftrightarrow t^2+t-2=10\Leftrightarrow t^2+t-12=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-4\ (L) \end{array}\right.$.

Vậy $t=3$.

Câu 158. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $my=x^2,\ mx=y^2\ (m>0)$. Tìm giá trị của m để $S=3$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là nghiệm của hệ phương trình: $\left\{\begin{array}{l} my=x^2 \quad (1) \\ mx=y^2 \quad (2) \end{array}\right.$

Thế (1) vào (2) ta được: $mx=\left(\frac{x^2}{m}\right)^2\Leftrightarrow m^3x-x^4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=m>0 \end{array}\right.$

Vì $y=\frac{x^2}{m}>0$ nên $mx=y^2\Rightarrow y=\sqrt{mx}$

Khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S=\int_0^m\left|\sqrt{mx}-\frac{x^2}{m}\right|dx=\left|\int_0^m\left(\sqrt{mx}-\frac{x^2}{m}\right)dx\right|=\left|\left(\frac{2\sqrt{m}}{3}.x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3m}\right)\Big|_0^m\right|=\left|\frac{1}{3}m^2\right|=\frac{1}{3}m^2$$

Yêu cầu bài toán $S=3\Leftrightarrow\frac{1}{3}m^2=3\Leftrightarrow m^2=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=-3(L) \\ m=3(N) \end{array}\right.$

Câu 159. Gọi là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $2my=x^2,\ mx=\frac{1}{2}y^2,\ (m>0)$. Tìm giá trị của m để $S=3$

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1,5

Do $m>0$ nên suy ra $x>0,\ y>0$.

Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ phương trình $\left\{\begin{array}{l} 2my=x^2 \\ mx=\frac{1}{2}y^2 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} 2my=x^2 \\ 2mx=y^2 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$

Ta có $S=\int_0^{2m}\left|\sqrt{2mx}-\frac{x^2}{2m}\right|dx=3$ hay $\frac{4m^2}{3}=3\Leftrightarrow m=\frac{3}{2}=1,5$.

Câu 160. Giá trị dương của tham số m sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=2x+3$ và các đường thẳng $y=0,x=0,x=m$ bằng 10 là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Vì $m>0$ nên $2x+3>0,\forall x\in[0;m]$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2x+3$ và các đường thẳng $y=0,x=0,x=m$ là:

$S=\int_0^m(2x+3).dx=\left(x^2+3x\right)\Big|_0^m=m^2+3m$.

Theo giả thiết ta có:

$S=10\Leftrightarrow m^2+3m=10\Leftrightarrow m^2+3m-10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-5\end{array}\right.\Leftrightarrow m=2\ (\text{do}\ m>0)$.

Câu 161. Cắt một vật thể (T) bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x=0$ và $x=2$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x(0\le x\le 2)$ cắt vật thể đó có diện tích diện là một hình vuông có cạnh bằng $\sqrt{x^3}$. Biết thể tích vật thể (T) bằng $\frac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị của $a+b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 135

Diện tích thiết diện là $S(x)=\sqrt{x^3}.\sqrt{x^3}=x^6$.

Thể tích của vật thể (T) là $V=\int_0^2 S(x)dx=\int_0^2 x^6dx=\frac{128}{7}$.

$\Rightarrow a+b=128+7=135$

Câu 162. Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x=1;x=3$. Khi cắt một vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1\le x\le 3)$, mặt cắt là tam giác vuông có một góc 45^0 và độ dài một cạnh góc vuông là $\sqrt{4-\frac{1}{2}x^2}$. Biết thể tích vật thể trên bằng $\frac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị của $a+b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 17

Diện tích tam giác vuông cân là: $S(x)=\frac{1}{2}\sqrt{4-\frac{1}{2}x^2}.\sqrt{4-\frac{1}{2}x^2}=\frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{2}x^2\right)$

$\Rightarrow$ Thể tích vật thể là: $V=\int_1^3\frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{2}x^2\right)dx=\frac{11}{6}$

$\Rightarrow a+b=17$

Câu 163. Biết thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) xác định bởi các đường $y=\frac{1}{3}x^3-x^2$, $y=0$, $x=0$ và $x=3$ quanh trục Ox bằng $\frac{a}{b}\pi$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị của $a+b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 116

Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox là :

$V=\pi\int_0^3\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^3\left(\frac{1}{9}x^6-\frac{2}{3}x^5+x^4\right)\mathrm{d}x=\frac{81}{35}\pi$.

$\Rightarrow a+b=116$

Câu 164. Biết thể tích của vật thể tạo nên khi quay quanh trục Ox hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị $(P):y=2x-x^2$, trục Ox và hai đường thẳng $x=0,x=2$ bằng $\frac{a}{b}\pi$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị của $a+b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 31

Khi đó:

$V=\pi\int_0^2\left(2x-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^2\left(4x^2-4x^3+x^4\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{4}{3}x^3-x^4+\frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^2=\frac{16}{15}\pi$.

$\Rightarrow a+b=31$

Câu 165. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\tan x,y=0,x=0,x=\frac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox. Biết thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra bằng $a.\pi+\frac{b}{c}\pi^2$, với $a,b,c\in\mathbb{N}$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a.b.c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: –4

Thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra là

$V=\pi\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x.\mathrm{d}x=\pi\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right).\mathrm{d}x=\pi\left(\tan x-x\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\pi-\frac{1}{4}\pi^2.$

$\Rightarrow a.b.c=-4$

Câu 166. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi $y=2x-x^2, y=0$. Tính thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay (H) xung quanh trục Ox ta được $V=\pi\left(\frac{a}{b}+1\right)$ với a,b là các số tự nhiên, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó ab bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 15

Xét phương trình $2x-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Tính thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay (H) xung quanh trục Ox là

$V=\pi\int\limits_{0}^{2}\left(2x-x^2\right)dx=\frac{16}{15}\pi=\left(1+\frac{1}{15}\right)\pi\Rightarrow a=1,b=15\Rightarrow ab=15.$

Câu 167. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do quay xung quanh trục hoành một elip có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Biết $V=\frac{a}{b}\pi$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a+5b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 305

Quay elip đã cho xung quanh trục hoành chính là quay hình phẳng:

$H=\left\{y=4\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}, y=0, x=-5, x=5\right\}.$

Vậy thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi H khi quay xung quanh trục hoành là:

$V=\pi\int_{-5}^{5}\left(16-\frac{16x^2}{25}\right)dx=\pi\left(16x-\frac{16x^3}{75}\right)\Big|_{-5}^{5}=\frac{320\pi}{3}$

$\Rightarrow a+5b=305$

Câu 168. Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{m^2-x^2}$ (m là tham số khác 0) và trục hoành. Khi (H) quay xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích V. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $V<1000\pi$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 18

Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong và trục hoành là: $\sqrt{m^2-x^2}=0 \Leftrightarrow x=\pm m$

Thể tích vật thể tròn xoay cần tính là: $V=\pi\int\limits_{-|m|}^{|m|}\left(m^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(m^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-|m|}^{|m|}=\frac{4\pi m^2|m|}{3}$

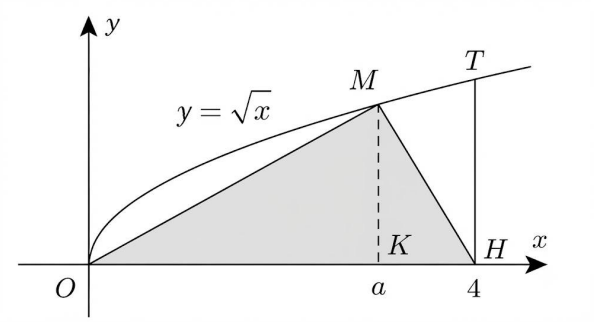
Ta có: $V<1000\pi \Leftrightarrow \frac{4\pi m^2|m|}{3}<1000\pi \Leftrightarrow |m|^3<750 \Leftrightarrow -\sqrt[3]{750}<m<\sqrt[3]{750}$.

Ta có $\sqrt[3]{750}\simeq 9{,}08$ và $m\neq 0$.

Suy ra, các giá trị m nguyên là $m\in\{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

Vậy có 18 giá trị nguyên của m.

Câu 169. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, $y=0$ và $x=4$ quanh trục Ox. Đường thẳng $x=a\,(0<a<4)$ cắt đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ tại M (hình vẽ). Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox. Biết rằng $V=2V_1$. Khi đó giá trị a bằng bao nhiêu?



Trả lời: ……..

Lời giải

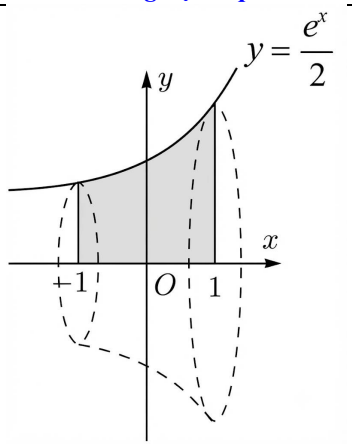
Đáp án: 3

Ta có: $V=\pi\int\limits_0^4 x\mathrm{d}x=\pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^4=8\pi$. Mà $V=2V_1\Rightarrow V_1=4\pi$.

Gọi K là hình chiếu của M trên $Ox \Rightarrow OK=a, KH=4-a, MK=\sqrt{a}$.

Khi xoay tam giác OMH quanh Ox ta được khối tròn xoay là sự lắp ghép của hai khối nón sinh bởi các tam giác OMK, MHK, hai khối nón đó có cùng mặt đáy và có tổng chiều cao là $OH=4$ nên thể tích của khối tròn xoay đó là $V_1=\frac{1}{3}.\pi.4.\left(\sqrt{a}\right)^2=\frac{4\pi a}{3}$, từ đó suy ra $a=3$.

Câu 170. Biết thể tích của khối tròn xoay tạo ra khi quay quanh hình phẳng (phần tô đậm) trong hình vẽ bên dưới đây quanh trục Ox bằng $\left(\frac{a.e^4+b}{c.e^2}\right)\pi$, với $a,b,c\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a-b+c$.



Trả lời: ……..

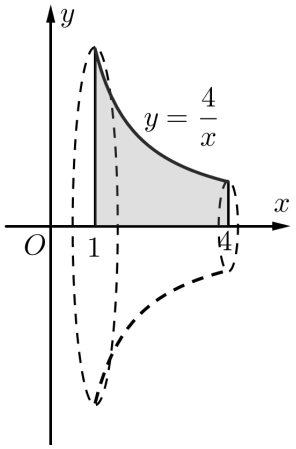
Lời giải

Đáp án: 10

Thể tích khối tròn xoay là: $V = \pi \int\limits_{-1}^{1} \frac{e^{2x}}{4} dx = \frac{\pi}{8} e^{2x} \Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{8}\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right) = \left(\frac{e^4 - 1}{8e^2}\right)\pi$.

$\Rightarrow a = 1; b = -1; c = 8 \Rightarrow a - b + c = 10$

Câu 171. Thể tích của khối tròn xoay tạo ra khi quay quanh hình phẳng (phần tô đậm) trong hình vẽ bên dưới đây quanh trục Ox bằng là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ nhất)



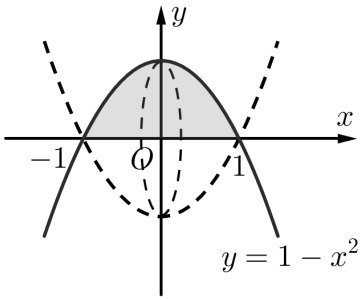
Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 37,7

Thể tích của khối tròn xoay là: $V = \pi \int\limits_{1}^{4} \left(\frac{4}{x}\right)^2 dx = 12\pi \approx 37,7$.

Câu 172. Biết thể tích của khối tròn xoay tạo ra khi quay quanh hình phẳng (phần tô đậm) trong hình vẽ bên dưới đây quanh trục Ox có kết quả dạng $\frac{a\pi}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó $S = a + b$ bằng bao nhiêu?



Trả lời: ……..

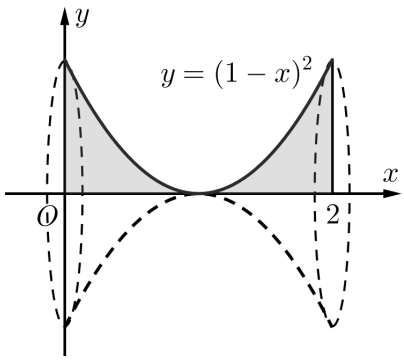
Lời giải

Đáp án: 31

Thể tích khối tròn xoay là: $V=\pi\int\limits_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^2dx=\dfrac{16\pi}{15}$

$\Rightarrow a=16,\ b=15\Rightarrow S=a+b=31$

Câu 173. Biết thể tích của khối tròn xoay tạo ra khi quay quanh hình phẳng (phần tô đậm) trong hình vẽ bên dưới đây quanh trục Ox có kết quả dạng $\dfrac{a\pi}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị biểu thức $S=24a+12b$.



Trả lời: ……..

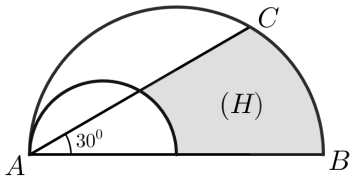
Lời giải

Đáp án: 108

Thể tích khối tròn xoay là: $V=\pi\int\limits_{0}^{2}\left(1-x\right)^4dx=\dfrac{2\pi}{5}$.

$\Rightarrow a=2,\ b=5\Rightarrow S=24a+12b=108$

Câu 174. Cho các nửa đường tròn như hình vẽ sau, trong đó đường kính của nửa đường tròn lớn gấp đôi đường kính của nửa đường tròn nhỏ. Biết rằng nửa hình tròn đường kính AB có diện tích là 32π và góc $\widehat{BAC}=30°$. Biết thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng (H) (phần tô đậm) xung quanh đường thẳng AB bằng $\dfrac{a\pi}{b}$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a-50b$.

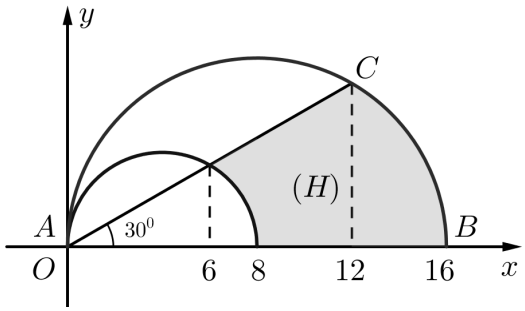


Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 634

Chọn hệ trục Oxy thích hợp như hình sau:



Phương trình nửa đường tròn lớn: $f(x)=\sqrt{16x-x^2}$.

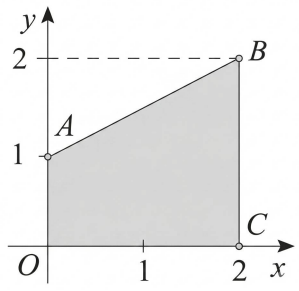
Phương trình nửa đường tròn nhỏ: $g(x)=\sqrt{8x-x^2}$.

Phương trình đường thẳng $AC: y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$.

Khi đó $V=\pi\left|\int_6^8\left[\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2-\left(8x-x^2\right)\right]dx+\pi\int_8^{12}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2dx+\pi\int_{12}^{16}\left(16x-x^2\right)dx\right|=\dfrac{784\pi}{3}$.

$\Rightarrow a=784; b=3\Rightarrow a-50b=634$

Câu 175. Cho diện tích hình phẳng (H) được tô đậm trong hình bên dưới.



Thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox bằng $\dfrac{a}{b}\pi$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a+b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

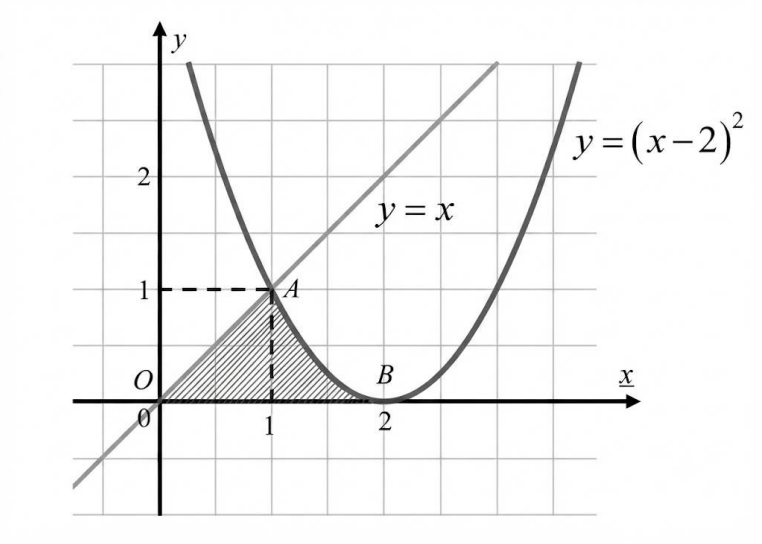
Đáp án: 17

Đường thẳng AB đi qua điểm $A(0;1)$ và $B(2;2)$ nên: $y=\dfrac{1}{2}x+1$

Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=\frac{1}{2}x+1, y=0, x=0, x=2$ nên thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox là: $V=\pi\int_0^2\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2 \mathrm{d}x=\frac{14}{3}\pi$

$\Rightarrow a+b=17$

Câu 176. Diện tích phần hình phẳng (H) được gạch chéo (tam giác cong OAB) trong hình vẽ bên dưới.



Thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox bằng $\frac{a}{b}\pi$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a+b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

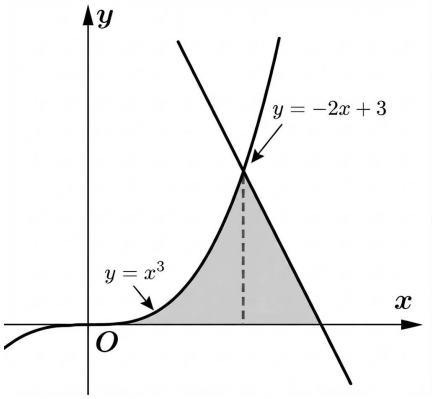
Đáp án: 23

Thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox là

$V=\pi\int_0^1 x^2dx+\pi\int_1^2(x-2)^4\,dx=\frac{8}{15}\pi$

$\Rightarrow a=8; b=15\Rightarrow a+b=23$

Câu 177. Cho diện tích hình phẳng (H) được tô đậm trong hình bên dưới.



Thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox bằng $\frac{a}{b}\pi$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $3a-b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -3

Ta có $x^3=-2x+3\Leftrightarrow x^3+2x-3=0\Leftrightarrow x=1$

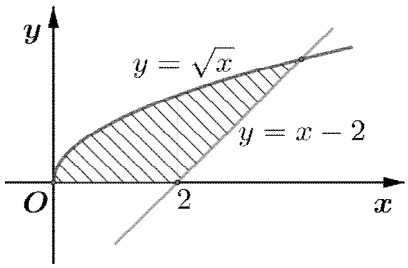
Đường cong $y=x^3$ đi qua $O(0;0)$ và $y=-2x+3$ cắt Ox tại điểm có hoành độ $x=\frac{3}{2}$.

Thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox là:

$$V=\pi\int_0^1 x^6\mathrm{d}x+\pi\int_1^{\frac{3}{2}}(-2x+3)^2\,\mathrm{d}x=\frac{13}{42}\pi$$

$\Rightarrow 3a-b=-3$

Câu 178. Cho diện tích hình phẳng (H) được gạch chéo trong hình bên dưới.



Thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox bằng $\frac{a}{b}\pi$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a+2b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 22

Phương trình hoành độ giao điểm của các đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$, $y=x-2$:

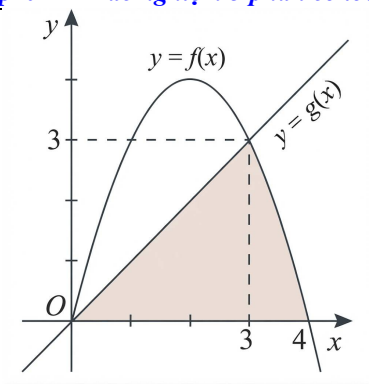
$$\sqrt{x}=x-2\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\ x=(x-2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\ x^2-5x+4=0\end{cases}\Leftrightarrow x=4.$$

Thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox là:

$$V=\pi\int_0^4 x\,\mathrm{d}x-\pi\int_2^4(x-2)^2\,\mathrm{d}x=\frac{16\pi}{3}$$

$\Rightarrow a+2b=22$

Câu 179. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc hai và $y=g(x)$ là hàm đa thức bậc nhất và có đồ thị như vẽ . Hình phẳng (H) là phần tô đậm trong hình vẽ bên dưới.



Thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox bằng $\frac{a}{b}\pi$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a-b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1223

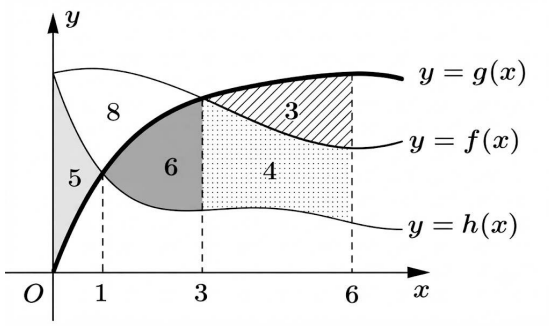
Từ hình vẽ, ta có ta xác định được $y=f(x)=-x^2+4x$ và $y=g(x)=x$

Thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox là:

$$V=\pi\int_0^3 x^2\mathrm{d}x+\pi\int_3^4\left(-x^2+4\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1238\pi}{15}$$

$\Rightarrow a-b=1223$

Câu 180. Cho ba hàm số $y=f(x), y=g(x)$ và $y=h(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Diện tích mỗi miền được ghi bằng số trong hình. Tính $S=\int_1^6[h(x)-g(x)]dx+\int_0^6[f(x)-g(x)]dx$

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: –3

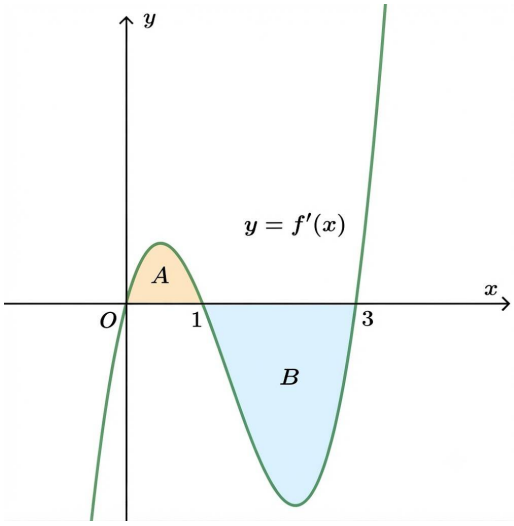
$$S=\int_1^6[h(x)-g(x)]dx+\int_0^6[f(x)-g(x)]dx$$

$$=\int_1^6[h(x)-g(x)]dx+\int_0^3[f(x)-g(x)]dx+\int_3^6[f(x)-g(x)]dx$$

$$=-(6+4+3)+(5+8)-3$$

$$=-3$$

Câu 181. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình dưới. Biết rằng diện tích của các phần hình phẳng A và B lần lượt là $S_A=4$ và $S_B=10$. Tính giá trị của $f(3)$, biết giá trị của $f(0)=2$.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -4

Ta có:Hình phẳng A được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$, trục hoành $y=0$, trục tung $x=0$ và đường thẳng $x=1$ nên diện tích hình phẳng A là:

$$S_A=\int_0^1|f'(x)|\,dx=\int_0^1 f'(x)\,dx=f(x)\Big|_0^1=f(1)-f(0)$$

$$\Rightarrow f(1)=S_A+f(0)=4+2=6.$$

Lại có:

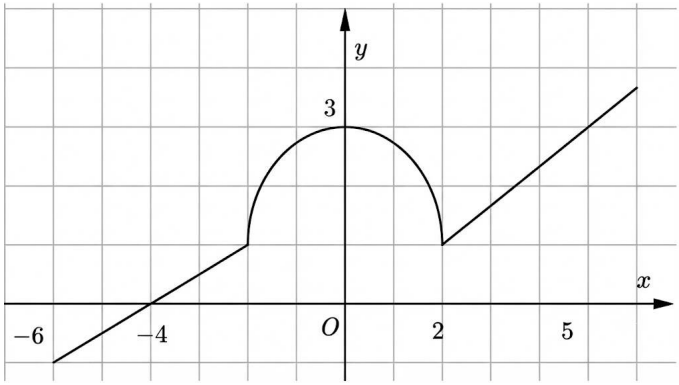
Hình phẳng B được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$, trục hoành $y=0$, đường thẳng $x=1$ và đường thẳng $x=3$ nên diện tích hình phẳng B là:

$$S_B=\int_1^3|f'(x)|\,dx=-\int_1^3 f'(x)\,dx=-f(x)\Big|_1^3=-[f(3)-f(1)]=-f(3)+f(1).$$

Suy ra $f(3)=f(1)-S_B=6-10=-4$.

Vậy $f(3)=-4$.

Câu 182. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-6;5]$, có đồ thị gồm 2 đoạn thẳng và nửa đường tròn như hình vẽ. Tính giá trị $I=\int\limits_{-6}^{5}[f(x)+2]\mathrm{d}x$ (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ nhất).

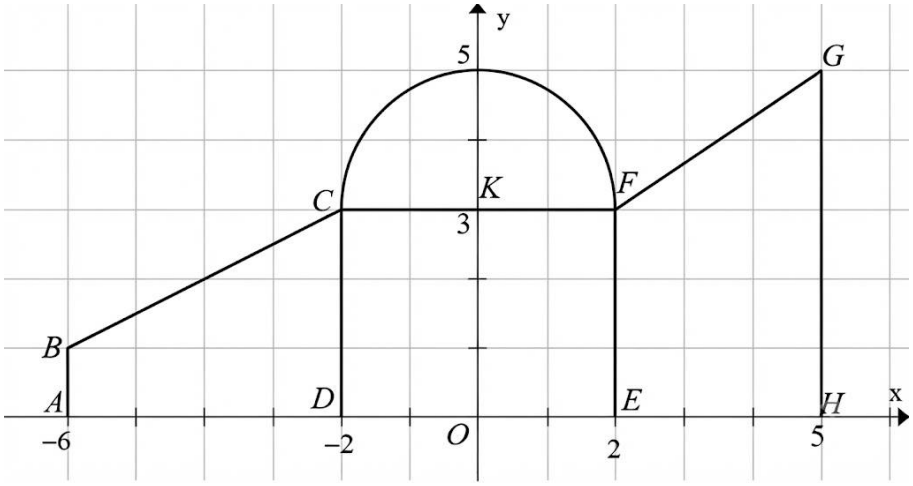


Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 28,3

Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên phía trên trục hoành 2 đơn vị ta được đồ thị $f(x)+2$ như hình vẽ: 28,3



$I=\int\limits_{-6}^{5}[f(x)+2]\mathrm{d}x=\int\limits_{-6}^{5}g(x)\mathrm{d}x$ với $g(x)=f(x)+2$ có đồ thị như hình vẽ.

Có $I=S_1+S_2+S_3+S_4$ trong đó:

S_1 là diện tích hình thang vuông $ABCD$ $\Rightarrow S_1=\dfrac{(AB+CD).AD}{2}=\dfrac{(1+3).4}{2}=8$,

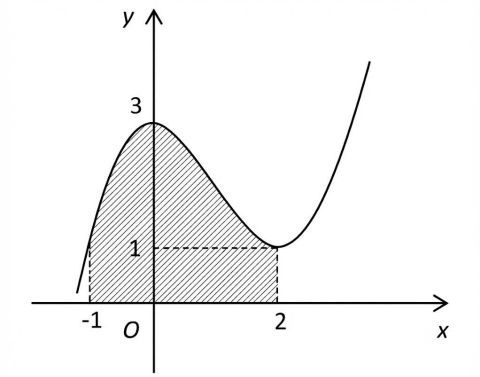
S_2 là diện tích hình chữ nhật $CDEF$ $\Rightarrow S_2=3.4=12$,

S_3 là diện tích hình tròn tâm I, bán kính $R=2$ $\Rightarrow S_3=\dfrac{\pi.2^2}{2}=2\pi$,

S_4 là diện tích hình thang vuông $EFGH$ $\Rightarrow S_4=\dfrac{(EF+GH).EH}{2}=\dfrac{(5+3).3}{2}=12$.

Suy ra $I=8+12+2\pi+12=2\pi+32\approx 28,3$.

Câu 183. Diện tích S của miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+c$, các đường thẳng $x=1, x=2$ và trục hoành (miền tô đậm) cho trong hình dưới đây bằng $\frac{m}{n}$, với $m,n\in\mathbb{Z}$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $m+n$.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 59

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+c$, các đường thẳng $x=-1$, $x=2$ và trục hoành được chia thành hai phần:

+ Miền D_1 là hình chữ nhật có hai kích thước lần lượt là 1 và $3\Rightarrow S_1=3$.

+ Miền D_2 gồm: $\begin{cases} f(x)=ax^3+bx^2+c \\ y=1 \\ x=-1; x=2 \end{cases}$.

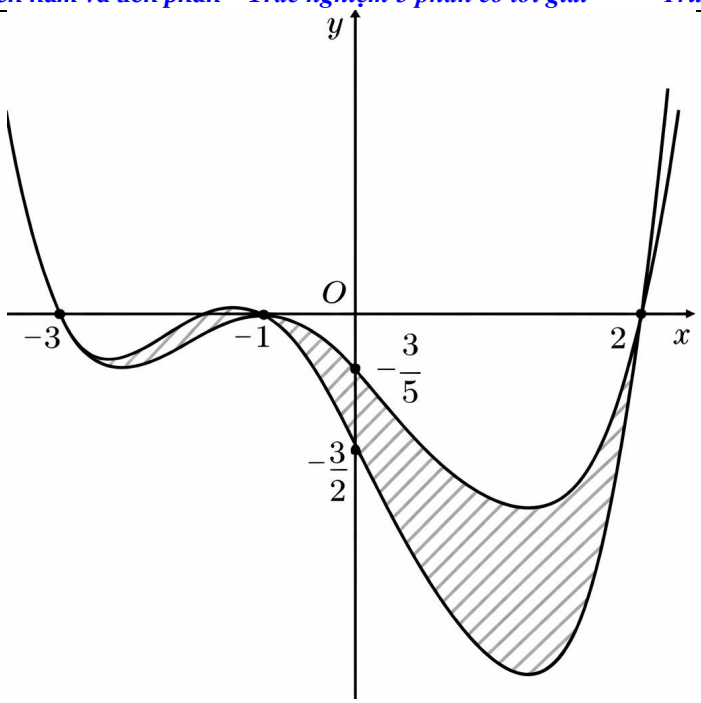
Dễ thấy (C) đi qua 3 điểm $A(-1;1)$, $B(0;3)$, $C(2;1)$ nên đồ thị (C) có phương trình $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+3$.

$\Rightarrow S_2=\int_{-1}^{2}\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+3-1\right)\mathrm{d}x=\frac{27}{8}$.

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $S=S_1+S_2=\frac{51}{8}$

$\Rightarrow m+n=59$

Câu 184. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ và $y=g(x)$. Biết rằng đồ thị cảu hai hàm số này cắt nhau tại đúng ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-3;-1;2$. Diện tích của hình phẳng (H) (phần gạch sọc trên hình vẽ bên) bằng $\frac{m}{n}$, với $m,n\in\mathbb{Z}$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $m-3n$.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 13

$f(x)-g(x)=a(x+3)(x+1)(x-2)=(ax+3a)(x^2-x-2)=ax^3-ax^2-2ax+3ax^2-3ax-6a$

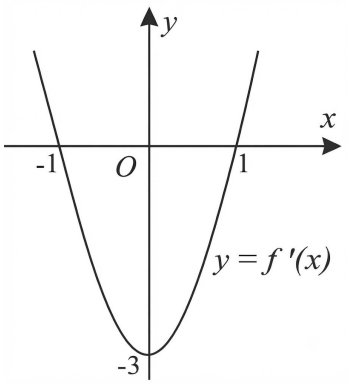
$=ax^3+2ax^2-5ax-6a$

$f(0)-g(0)=-6a$, quan sát hình vẽ ta có $f(0)-g(0)=-\frac{3}{5}+\frac{3}{2}=\frac{9}{10}$

Nên $-6a=\frac{9}{10}\Rightarrow a=\frac{-3}{20}$ $S=\int_{-3}^{2}\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_{-3}^{2}\left|\frac{-3}{20}(x+3)(x+1)(x-2)\right|dx=\frac{253}{80}$

$\Rightarrow m=253; n=80\Rightarrow m-3n=13$

Câu 185. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,(a,b,c\in\mathbb{R},a\neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y=9x-18$ tại điểm có hoành độ dương và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị hình như vẽ bên dưới. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $6,75$

Từ đồ thị suy ra $f'(x)=3x^2-3$.

$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\left(3x^2-3\right)\mathrm{d}x=x^3-3x+C$.

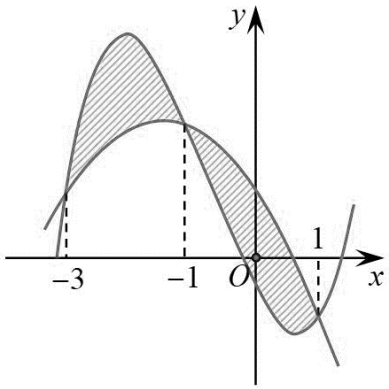
Do (C) tiếp xúc với đường thẳng $y=9x-18$ tại điểm có hoành độ x_0 dương nên $f'(x_0)=9\Leftrightarrow 3x_0^2-3=9\Leftrightarrow x_0=2$.

Suy ra $f(2)=0\Leftrightarrow C=-2\Rightarrow (C):y=x^3-3x-2$

Xét phương trình $x^3-3x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-1\end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là: $S=\int_{-1}^{2}\left|x^3-3x-2\right|\mathrm{d}x=\dfrac{27}{4}=6,75$.

Câu 186. Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-\dfrac{1}{2}$ và $g(x)=dx^2+ex+1$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $-3;\ -1;\ 1$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng bao nhiêu?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

Cách 1:

Xét phương trình $ax^3+bx^2+cx-\dfrac{1}{2}=dx^2+ex+1\Leftrightarrow ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-\dfrac{3}{2}=0$ có 3 nghiệm lần lượt là $-3;\ -1;\ 1$ nên suy ra $\left\{\begin{array}{l}-27a+9(b-d)-3(c-e)-\dfrac{3}{2}=0\\-a+(b-d)-(c-e)-\dfrac{3}{2}=0\\a+(b-d)+(c-e)-\dfrac{3}{2}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}b-d=\dfrac{3}{2}\\a=\dfrac{1}{2}\\c-e=\dfrac{-1}{2}\end{array}\right.$

Vậy $f(x)-g(x)=\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$.

Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng $S=\int\limits_{-3}^{-1}\left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)dx+\int\limits_{-1}^{1}\left(g\left(x\right)-f\left(x\right)\right)dx$

$\Leftrightarrow S=\int\limits_{-3}^{-1}\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)dx-\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)dx=2+2=4.$

Cách 2:

Ta có: $f\left(x\right)-g\left(x\right)=a\left(x+3\right)\left(x+1\right)\left(x-1\right).$

Suy ra $a\left(x+3\right)\left(x+1\right)\left(x-1\right)=ax^3+\left(b-d\right)x^2+\left(c-d\right)x-\frac{3}{2}$

Xét hệ số tự do suy ra: $-3a=-\frac{3}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}.$

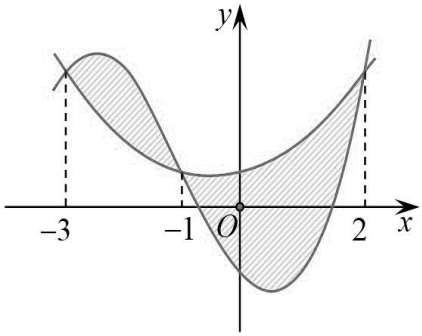
Do đó: $f\left(x\right)-g\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(x+3\right)\left(x+1\right)\left(x-1\right).$

Diện tích bằng:

$S=\int\limits_{-3}^{-1}\left[f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{1}\left[g\left(x\right)-f\left(x\right)\right]\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow S=\frac{1}{2}\int\limits_{-3}^{-1}\left(x+3\right)\left(x+1\right)\left(x-1\right)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\left(x+3\right)\left(x+1\right)\left(x-1\right)\mathrm{d}x=4.$

Câu 187. Cho hai hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx-1$ và $g\left(x\right)=dx^2+ex+\frac{1}{2}$ $\left(a,b,c,d,e\in\mathbb{R}\right)$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt $-3;-1;2$ (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho (phần tô đậm của hình vẽ) có diện tích bằng $\frac{m}{n}$, với $m,n\in\mathbb{Z}$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $m+2n$.

Trả lời: ……..

Lời giải

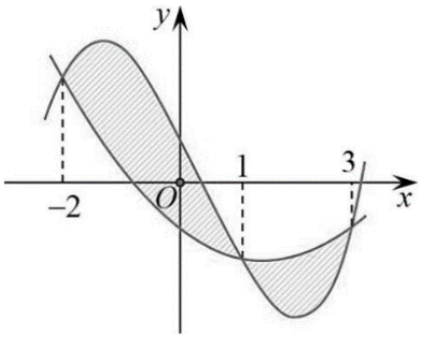
Đáp án: 349

Vì phương trình $f(x)-g(x)=0$ có 3 nghiệm $-3;-1;2$ nên $f\left(x\right)-g\left(x\right)=a\left(x+3\right)\left(x-2\right)\left(x+1\right).$

So sánh hệ số tự do ta được $-6a=-\frac{3}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{4}.$ Do đó $S=\int\limits_{-3}^{2}\left|\frac{1}{4}\left(x+3\right)\left(x+1\right)\left(x-2\right)\right|\mathrm{d}x=\frac{253}{48}.$

$\Rightarrow m=253; n=48 \Rightarrow m+2n=349$

Câu 188. Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+\frac{3}{4}$ và $g(x)=dx^2+ex-\frac{3}{4}$, $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2; 1; 3 (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho (phần tô đậm của hình vẽ) có diện tích bằng $\frac{m}{n}$, với $m,n\in\mathbb{Z}$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $m-3n$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 13

Ta có phương trình hoành độ giao điểm là:

$$ax^3+bx^2+cx+\frac{3}{4}=dx^2+ex-\frac{3}{4}\Leftrightarrow ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x+\frac{3}{2}=0.$$

Đặt $h(x)=ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x+\frac{3}{2}$

Dựa vào đồ thị ta có $h(x)=ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x+\frac{3}{2}$ có ba nghiệm là $x=-2; x=1; x=3$

Với $x=-2$ ta có $-8a+4(b-d)-2(c-e)=-\frac{3}{2}$, (1).

Với $x=1$ ta có $a+(b-d)+(c-e)=-\frac{3}{2}$, (2).

Với $x=3$ ta có $27a+9(b-d)+3(c-e)=-\frac{3}{2}$, (3).

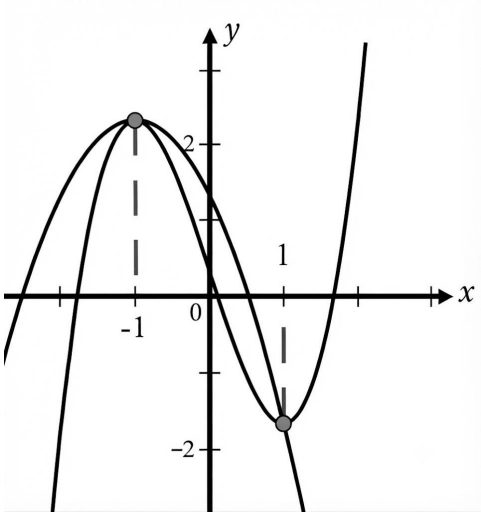
Từ $(1),(2)$ và (3) ta có $\begin{cases}-8a+4(b-d)-2(c-e)=-\frac{3}{2}\\ a+(b-d)+(c-e)=-\frac{3}{2}\\ 27a+9(b-d)+3(c-e)=-\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\ b-d=-\frac{1}{2}\\ c-e=-\frac{5}{4}\end{cases}.$

Hay ta có

$$S=\int_{-2}^{3}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{-2}^{1}\left|\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}\right|\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}\left|\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}\right|\mathrm{d}x=\frac{63}{16}+\frac{4}{3}=\frac{253}{48}.$$

$\Rightarrow m=253; n=48 \Rightarrow m-5n=13$

Câu 189. Cho hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c\ (a,b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị (C) và $y=mx^2+nx+p\ (m,n,p\in\mathbb{R})$ có đồ thị (P) như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ hai).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1,33

Căn cứ đồ thị ta thấy

+ Hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ đạt cực trị tại $x=\pm1$ nên ta có

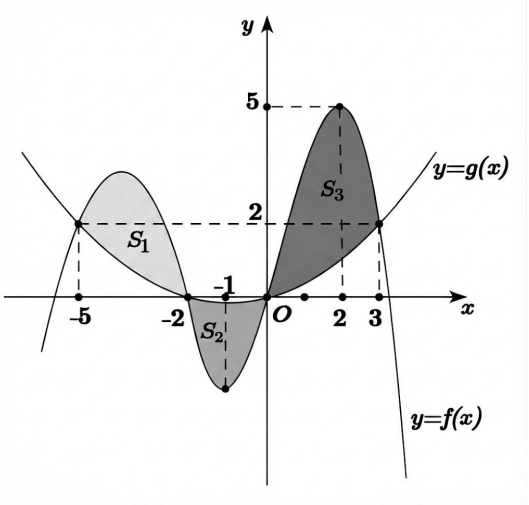
$$\begin{cases}y'(1)=0\\y'(-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+b+3=0\\-2a+b+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=-3\end{cases}.$$

+ Hàm số $y=mx^2+nx+p$ đạt cực đại tại $x=-1$ và (P) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ $x=\pm1$ nên ta có

$$\begin{cases}-2m+n=0\\1+a+b+c=m+n+p\\-1+a-b+c=m-n+p\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=-2\\m=-1\\p-c=1\end{cases}$$

Suy ra $S=\int_{-1}^{1}\left(mx^2+nx+p-x^3-ax^2-bx-x\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(-x^3-x^2+x+1\right)dx=\frac{4}{3}\approx1,33$

Câu 190. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5;3]$. Biết rằng diện tích hình phẳng S_1, S_2, S_3 giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và đường parabol $y=g(x)=ax^2+bx+c$ lần lượt là m,n,p.



Biết tích phân $\int_{-5}^{3} f(x)\mathrm{d}x = \frac{242}{45}$, tính giá trị của $m-n+p$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 10

$$S_1 = \int_{-5}^{-2}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x = \int_{-5}^{-2} f(x)\mathrm{d}x - \int_{-5}^{-2} g(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int_{-5}^{-2} f(x)\mathrm{d}x = S_1 + \int_{-5}^{-2} g(x)\mathrm{d}x .$$

$$S_2 = \int_{-2}^{0}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} g(x)\mathrm{d}x - \int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} g(x)\mathrm{d}x - S_2 .$$

$$S_3 = \int_{-5}^{-2}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x = \int_{0}^{3} f(x)\mathrm{d}x - \int_{0}^{3} g(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int_{0}^{3} f(x)\mathrm{d}x = S_1 + \int_{0}^{3} g(x)\mathrm{d}x .$$

Do vậy: $\int_{-5}^{3} f(x)dx = S_1 - S_2 + S_3 + \int_{-5}^{3} g(x)dx \Leftrightarrow \frac{242}{45} = m-n+p+\int_{-5}^{3} g(x)dx \Leftrightarrow m-n+p = \frac{242}{45} - \int_{-5}^{3} g(x)dx$

Tính $\int_{-5}^{3} g(x)dx$ như sau:

Từ đồ thị hàm số $y=g(x)$ ta thấy nó đi qua các điểm $(-5;2)$, $(-2;0)$, $(0;0)$ nên ta có:

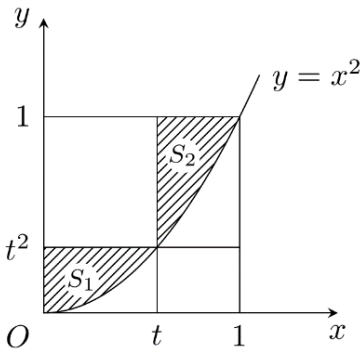
$$\begin{cases} 25a-5b+c=2 \\ 4a-2b+c=0 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{2}{15},\ b=\frac{4}{15},\ c=0.$$

Do đó: $\int_{-5}^{3} g(x)\mathrm{d}x = \int_{-5}^{3}\left(\frac{2}{15}x^2+\frac{4}{15}x\right)\mathrm{d}x = \frac{208}{45}.$

$$\Rightarrow m-n+p = \frac{242}{45}+\frac{208}{45} = 10$$

Câu 191. Cho hàm số $y=x^2$ xác định trên đoạn $[0;1]$. Giả sử t là một số bất kì thuộc đoạn $[0;1]$. Gọi S_1 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=0$, $y=t^2$ và $y=x^2$, còn S_2 là diện tích của hình

phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2$, $x=t$ và $y=1$. Biết giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của S_1+S_2 bằng $\frac{m}{n}$, với $m,n\in\mathbb{Z}$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $m+n$.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 23

Ta có

$$S_1=t^3-\int_0^t x^2\,\mathrm{d}x=\frac{2t^3}{3},$$

$$S_2=\int_t^1 x^2\,\mathrm{d}x-t^2(t-1)=\frac{2}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3}.$$

Suy ra $f(t)=S_1+S_2=\frac{2}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3}.$

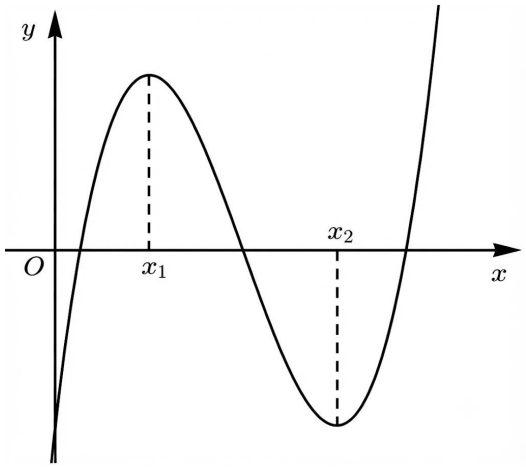
Ta có $f'(t)=4t^2-2t,\ f'(t)=0\Leftrightarrow t=0\vee t=\frac{1}{2}$, ta lập bảng biến thiên

t	0		$\frac{1}{2}$		1
f'		$-$	0	$+$	
f	$\frac{1}{3}$	↘	$\frac{1}{4}$	↗	$\frac{2}{3}$

Từ bảng biến thiên, ta tìm được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của S_1+S_2 lần lượt là $\frac{1}{4}$ và $\frac{2}{3}$, do đó tổng của chúng là $\frac{11}{12}$.

$\Rightarrow m+n=23$

Câu 192. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2=x_1+2$; $f(x_1)+f(x_2)=0$ và $\int\limits_{x_1}^{x_1+1} f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{5}{4}$. Tính $L=\lim\limits_{x\to x_1}\dfrac{f(x)-2}{(x-x_1)^2}$.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -3

Giả sử $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$.

Có $f'(x)=3ax^2+2bx+c=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\\x=x_2=x_1+2\end{array}\right.$.

Suy ra: $f'(x)=3a(x-x_1)(x-x_2)$

$\Rightarrow f'(x)=3a(x-x_1)(x-x_1-2)$

$\Rightarrow f'(x)=3a(x-x_1)^2-6a(x-x_1)$.

Lấy nguyên hàm hai vế ta có: $f(x)=a(x-x_1)^3-3a(x-x_1)^2+C$.

Khi đó $f(x_1)=C$ và $f(x_2)=a(x_2-x_1)^3-3a(x_2-x_1)^2+C=8a-12a+C=C-4a$.

Mà $f(x_1)+f(x_2)=0$, nên $C+C-4a=0\Leftrightarrow C=2a$.

Suy ra $f(x)=a(x-x_1)^3-3a(x-x_1)^2+2a$.

Mặt khác $\int\limits_{x_1}^{x_1+1} f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{5}{4}$

$\Leftrightarrow\int\limits_{x_1}^{x_1+1}\left[a(x-x_1)^3-3a(x-x_1)^2+2a\right]\mathrm{d}x=\dfrac{5}{4}$

$\Leftrightarrow\left[\dfrac{a}{4}(x-x_1)^4-a(x-x_1)^3+2ax\right]\Bigg|_{x_1}^{x_1+1}=\dfrac{5}{4}$

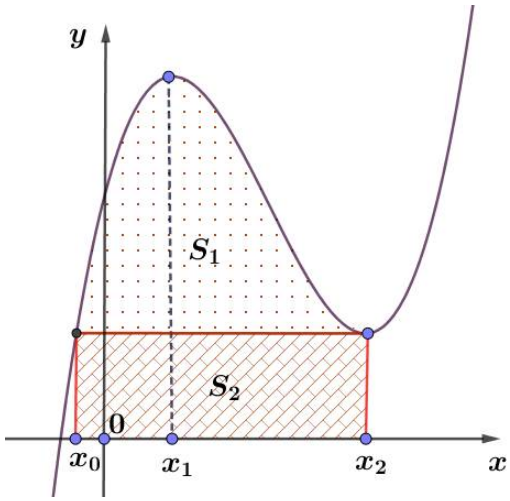
$\Leftrightarrow \left[\frac{a}{4}-a+2a\left(x_1+1\right)\right]-2ax_1=\frac{5}{4}$

$\Leftrightarrow a=1.$

Do đó: $f\left(x\right)=\left(x-x_1\right)^3-3\left(x-x_1\right)^2+2.$

Vậy $L=\lim\limits_{x\to x_1}\frac{f\left(x\right)-2}{\left(x-x_1\right)^2}=\lim\limits_{x\to x_1}\frac{\left(x-x_1\right)^3-3\left(x-x_1\right)^2}{\left(x-x_1\right)^2}=\lim\limits_{x\to x_1}\left[\left(x-x_1\right)-3\right]=-3.$

Câu 193. Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên dưới. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hai điểm cực trị thỏa mãn $x_2=x_1+2$ và $f\left(x_1\right)-3f\left(x_2\right)=0.$ Đường thẳng song song với trục Ox và qua điểm cực tiểu cắt đồ thị hàm số tại điểm thứ hai có hoành độ x_0 và $x_1=x_0+1.$ Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch ở hình bên dưới. Biết tỉ số $\frac{S_1}{S_2}=\frac{m}{n}$, với $m,n\in\mathbb{Z}$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $m+n.$



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 35

+) Gọi $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$, với $a>0 \Rightarrow f'\left(x\right)=3ax^2+2bx+c.$

+) Theo giả thiết ta có $f'\left(x_1\right)=f'\left(x_2\right)=0\Rightarrow f'\left(x\right)=3a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)=3a\left(x-x_1\right)\left(x-x_1-2\right)$

$\Rightarrow f'\left(x\right)=3a\left(x-x_1\right)^2-6a\left(x-x_1\right).$

$\Rightarrow f\left(x\right)=\int f'\left(x\right)\mathrm{d}x=a\left(x-x_1\right)^3-3a\left(x-x_1\right)^2+C.$

+) Ta có $f\left(x_1\right)-3f\left(x_2\right)=0\Rightarrow f\left(x_1\right)-3f\left(x_1+2\right)=0$

$\Leftrightarrow C-3\left(8a-12a+C\right)=0\Leftrightarrow -2C+12a=0\Leftrightarrow C=6a.$

Do đó $f\left(x\right)=a\left(x-x_1\right)^3-3a\left(x-x_1\right)^2+6a.$

+) S_2 là diện tích hình chữ nhật có cạnh bằng 3 và và $f\left(x_2\right)=8a-12a+6a=2a$

+) S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=x_0=x_1-1, x=x_2=x_1+2$, $y=f(x_2)=2a$ và $f(x)=a(x-x_1)^3-3a(x-x_1)^2+6a$ nên suy ra

$$S_1=\int_{x_1-1}^{x_1+2}\left[f(x)-2a\right]\mathrm{d}x=\int_{x_1-1}^{x_1+2}\left[a(x-x_1)^3-3a(x-x_1)^2+4a\right]\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{a(x-x_1)^4}{4}-3a\frac{(x-x_1)^3}{3}+4ax\right]\Bigg|_{x_1-1}^{x_1+2}=\frac{27a}{4}.$$

Vậy $\frac{S_1}{S_2}=\frac{27}{8}\Rightarrow m+n=35$

Câu 194. Biết $F(x);G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^4 f(x)dx=F(4)-G(0)+a\ (a>0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x);y=G(x);x=0;x=4$. Khi $S=8$ thì a bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Đặt $F(x)=G(x)+c$

$S=\int_0^4\left|F(x)-G(x)\right|dx\Rightarrow\left|F(x)-G(x)\right|=2$ *hay* $|c|=2$

$\int_0^4 f(x)dx=F(4)-G(0)+a$

$\Leftrightarrow F(4)-F(0)=F(4)-G(0)+a$

$\Leftrightarrow -G(0)-c=-G(0)+a$

$\Leftrightarrow a=-c$

$\Rightarrow a=\pm 2$

Mà $a>0\Rightarrow a=2$

Câu 195. Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x=F(5)-G(0)+a,\ (a>0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x)$, $y=G(x)$, $x=0$ và $x=5$. Khi $S=20$ thì a bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

Đặt $G(x)=F(x)+C$ (C là hằng số).

$\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x = F(5)-F(0) = F(5)-\left(G(0)-C\right) = F(5)-G(0)+C$

Suy ra $C=a$.

$S=\int_0^5 \left|F(x)-G(x)\right|\mathrm{d}x = \int_0^5 |a|\mathrm{d}x = \int_0^5 a\mathrm{d}x = 5a$.

Theo giả thiết $5a=20 \Leftrightarrow a=4$

Câu 196. Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = F(2)-G(0)+a\ (a>0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x)$, $y=G(x)$, $x=0$ và $x=2$, Khi $S=6$ thì a bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

$F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên ta có

$\forall x\in\mathbb{R}: F(x)=G(x)+C$ (với C là hằng số).

Do đó $F(0)=G(0)+C$ (1).

Lại có $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = F(2)-F(0)$

$\Leftrightarrow F(2)-G(0)+a=F(2)-F(0) \Leftrightarrow F(0)=G(0)-a$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $C=-a$.

Khi đó $F(x)=G(x)-a,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \left|F(x)-G(x)\right|=a,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x)$, $y=G(x)$, $x=0$ và $x=2$ là

$S=\int_0^2 \left|F(x)-G(x)\right|.\mathrm{d}x = \int_0^2 a.\mathrm{d}x = 2a = 6 \Rightarrow a=3$.

Câu 197. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ hai).

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2,08

Ta có

$g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)=x^3+(a+3)x^2+(2a+b+6)x+(2a+b+c)$

$g'(x)=f'(x)+f''(x)+f'''(x)=3x^2+2ax+b+6x+2a+6$

$=3x^2+(2a+6)x+(2a+b+6)$.

Vì $y=g(x)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 2 nên $g'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 với $g(x_1)=-5, g(x_2)=2$.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{f(x)}{g(x)+6}=1\Leftrightarrow\frac{f(x)-g(x)-6}{g(x)+6}=0\Leftrightarrow\frac{3x^2+(2a+6)x+(2a+b+6)}{g(x)+6}=0\Leftrightarrow\frac{g'(x)}{g(x)+6}=0.$$

Phương trình này cũng có hai nghệm phân biệt x_1,x_2

Như vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi các hàm số $y=\frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ là

$$S=\left|\int_{x_1}^{x_2}\frac{g'(x)}{g(x)+6}\right|=\left|\ln|g(x)+6|\Big|_{x_1}^{x_2}\right|=\left|\ln|2+6|-\ln|-5+6|\right|=3\ln 2\approx 2,08.$$

Câu 198. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -4 và 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các hàm số $y=\frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ hai).

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $0,69$

Ta có: $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)=x^3+(a+3)x^2+(2a+b+6)x+(2a+b+c)$

$g'(x)=f'(x)+f''(x)+f'''(x)=3x^2+2ax+b+6x+2a+6$

$=3x^2+(2a+6)x+(2a+b+6)$.

Do $g(x)$ có hai cực trị là -5 và 3 nên $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\\x=x_2\end{array}\right.$ với $g(x_1)=-4$, $g(x_2)=2$.

Phương trình hoành độ giao điểm

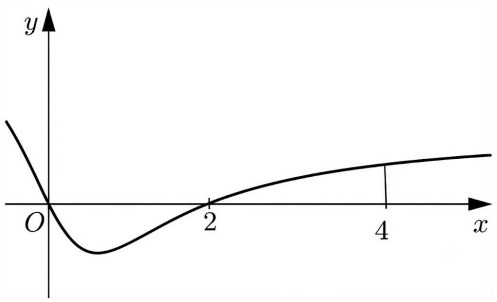
$$\frac{f(x)}{g(x)+6}=1\Leftrightarrow\frac{f(x)-g(x)-6}{g(x)+6}=0\Leftrightarrow\frac{3x^2+(2a+6)x+(2a+b+6)}{g(x)+6}=0\Leftrightarrow\frac{g'(x)}{g(x)+6}=0$$

Phương trình này cũng có hai nghệm phân biệt x_1,x_2

Như vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi các hàm số $y=\frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ là

$$S=\left|\int_{x_1}^{x_2}\frac{g'(x)}{g(x)+6}\right|=\left|\ln|g(x)+6|\Big|_{x_1}^{x_2}\right|=\left|\ln|2+6|-\ln|-4+6|\right|=\ln 2\approx 0,69.$$

Câu 199. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên.



Biết rằng $f(0)+f(3)=f(2)+f(4)$. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0;4]$ lần lượt là $\min\limits_{[0;5]} f(x)=f(a), \max\limits_{[0;5]} f(x)=f(b)$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Khi đó $a+b$ bằng bao nhiêu ?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 6

Cách 1:

Căn cứ đồ thị của $y=f'(x)$ và ứng dụng tích phân, ta có:

$S_1=\int\limits_0^2 \left|f'(x)\right|dx=\int\limits_0^2 f'(x)dx=f(0)-f(2)$ và $S_2=\int\limits_2^4 \left|f'(x)\right|dx=\int\limits_2^4 f'(x)dx=f(2)-f(4)$.

Theo giả thiết, ta có:

$f(0)+f(3)=f(2)+f(4)\Rightarrow f(4)-f(3)=f(0)-f(2)$.

Suy ra $S_2=\int\limits_2^4 \left|f'(x)\right|dx>\int\limits_3^4 \left|f'(x)\right|dx=f(4)-f(3)=S_1$.

Suy ra $S_2>S_1>0\Rightarrow f(4)>f(0)>f(2)$.

Vậy $\min\limits_{[0;5]} f(x)=f(2), \max\limits_{[0;5]} f(x)=f(4)$.

$\Rightarrow a+b=6$

Cách 2:

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ lập bảng biến thiên, ta có $\min\limits_{[2;4]} f(x)=f(2)$

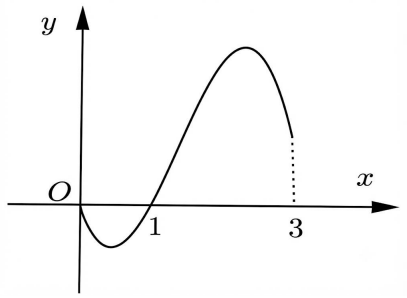
Và $\max\limits_{[0;4]} f(x)=\max\left\{f(0),f(4)\right\}$.

Vì $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[2;4]$ nên

$f(3)>f(2)\Rightarrow f(4)-f(2)>f(4)-f(3)=f(0)-f(2)$.

Do đó $f(4)>f(0)$, vậy $\max\limits_{[0;5]} f(x)=\max\left\{f(0),f(4)\right\}=f(4)$.

Câu 200. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên dưới.



Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0;3]$ lần lượt là $\min\limits_{[0;3]} f(x)=f(a)$; $\max\limits_{[0;3]} f(x)=f(b)$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Khi đó $2a+3b$ bằng bao nhiêu ?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 11

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$

x	0		1		3
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$f(3)$

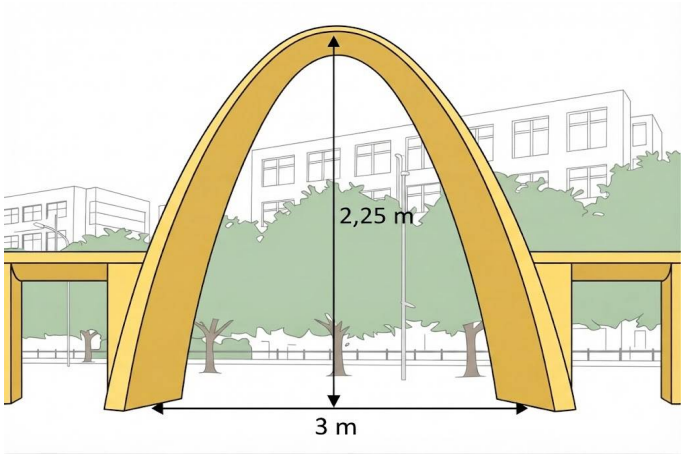
Khi đó: $\min\limits_{[0;3]} f(x)=f(1)$.

Dựa vào đồ thị $y=f'(x)$ ta có $-\int\limits_0^1 f'(x)dx<\int\limits_1^3 f'(x)dx \Leftrightarrow f(0)-f(1)<f(3)-f(1)\Leftrightarrow f(0)<f(3)$.

Vậy $\max\limits_{[0;3]} f(x)=f(3)$.

$\Rightarrow 2a+3b=2+3.3=11$

Câu 201. Trường Lê Hồng Phong – Tây Hòa muốn làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là $2,25$ mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê công nhân làm mỗi mét vuông là $1,5$ triệu đồng. Vậy số tiền nhà trường phải trả bao nhiêu triệu đồng ?

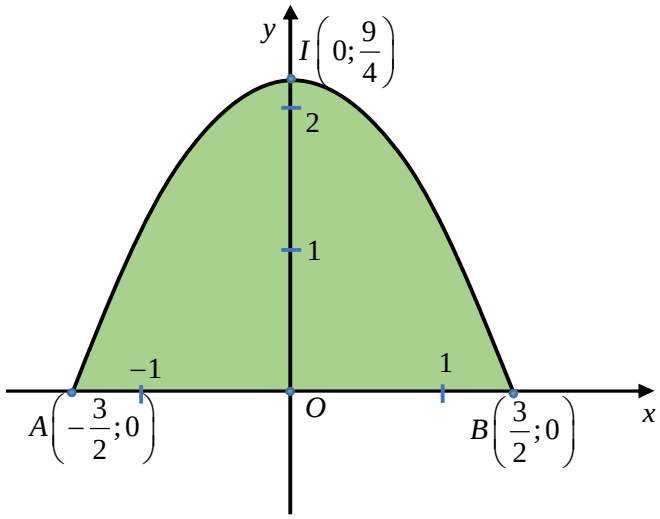


Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $6,75$

Gọi phương trình parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$. Do tính đối xứng của parabol nên ta có thể chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho (P) có đỉnh $I \in Oy$ (như hình vẽ).



Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{9}{4} = c, (I \in (P)) \\ \frac{9}{4}a - \frac{3}{2}b + c = 0 (A \in (P)) \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = 0 (B \in (P)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{9}{4} \\ a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$.

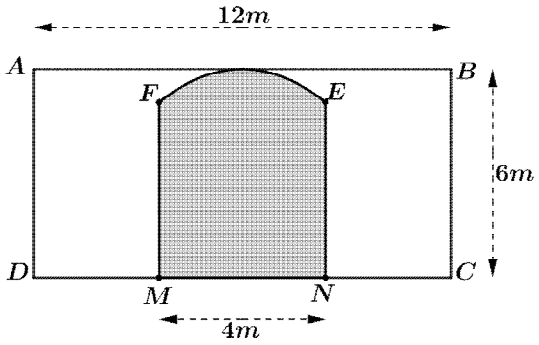
Vậy $(P): y = -x^2 + \frac{9}{4}$.

Dựa vào đồ thị, diện tích cửa parabol là:

$$S=\int_{\frac{-3}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(-x^2+\frac{9}{4}\right)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\frac{3}{2}}\left(-x^2+\frac{9}{4}\right)\mathrm{d}x=2\left(\frac{-x^3}{3}+\frac{9}{4}x\right)\Big|_0^{\frac{9}{4}}=\frac{9}{2}\mathrm{m}^2.$$

Số tiền phải trả là: $\frac{9}{2}.1,5=6,75$ đồng.

Câu 202. Anh Thanh Minh muốn làm một bức tranh trang trí như phần $MNEIF$ được tô đậm trong hình vẽ bên dưới ở chính giữa của một bức tường hình chữ nhật $ABCD$ có $BC=6\mathrm{m}$, $CD=12\mathrm{m}$

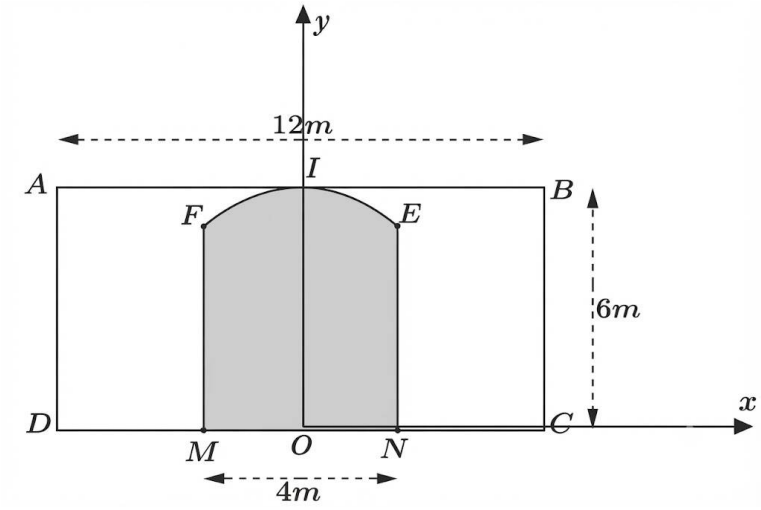


Biết $MN=4\mathrm{m}$; cung EIF có hình parabol với đỉnh I là trung điểm của cạnh AB và đi qua hai điểm C,D. Kinh phí làm bức tranh là 900000 đồng/m^2. Hỏi anh Thanh Minh cần bao nhiêu tiền để làm bức tranh?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 20,8



Gắn trục toạ độ Oxy như hình vẽ, ta có:

O là trung điểm cạnh MN và trùng với gốc toạ độ $\Rightarrow M(-2;0);N(2;0)$.

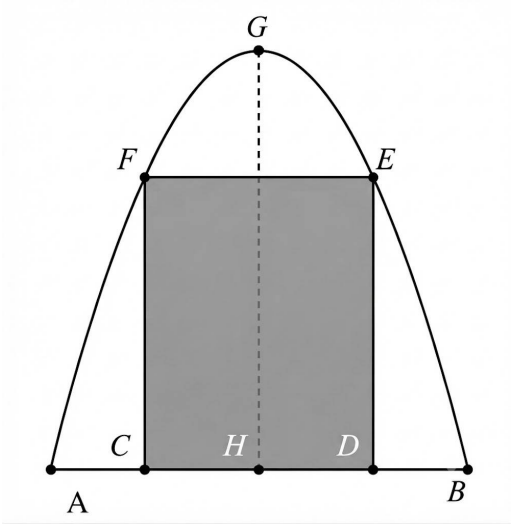
Phương trình parapol đỉnh $I(0;6)$ và đi qua hai điểm $D(-6;0);C(6;0)$ là $(P):y=-\frac{1}{2}x^2+6$.

Diện tích giới hạn bởi $(P):y=-\frac{1}{2}x^2+6$; $y=0;x=-2;x=2$.

Khi đó: $S=\int_{-2}^{2}\left|-\frac{1}{2}x^2+6\right|\mathrm{d}x=\frac{208}{9}\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Vậy anh Thanh Minh để làm bức tranh cần tiền $\frac{208}{9}.0,9=20,8$ triệu đồng.

Câu 203. Chị Minh Hiền muốn làm một cái cổng hình Parabol cho ngôi nhà của mình như hình vẽ bên dưới.



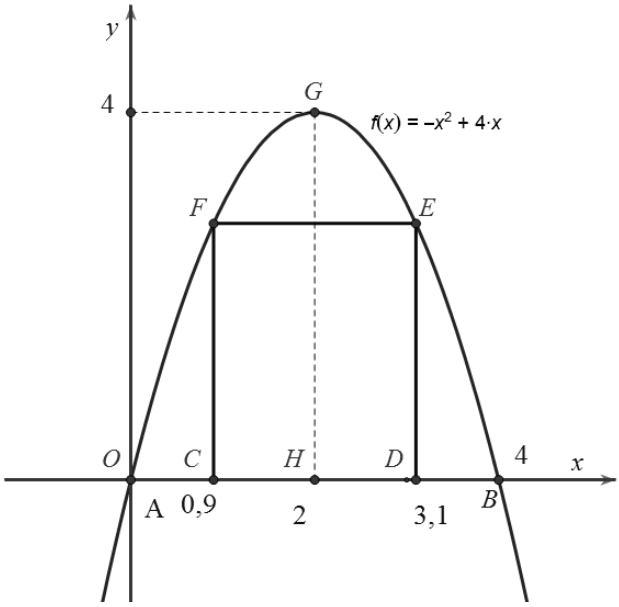
Chiều cao $GH=4m$, chiều rộng $AB=4m$, $AC=BD=0,9m$. Chị Minh Hiền làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là $1,2$ triệu đồng$/m^2$, còn các phần để trắng làm xiên hoa có giá là $1,0$ triệu đồng$/m^2$. Hỏi tổng số tiền để làm cái cổng trên mà chị Minh Hiền phải trả là bao nhiêu triệu đồng? (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ nhất của triệu đồng)

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $11,9$

Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho AB trùng Ox, A trùng O khi đó parabol có đỉnh $G(2;4)$ và đi qua gốc tọa độ.



Giả sử phương trình của parabol có dạng $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$.

Vì parabol có đỉnh là $G(2;4)$ và đi qua điểm $O(0;0)$ nên ta có $\begin{cases} c=0 \\ -\dfrac{b}{2a}=2 \\ a.2^2+b.2+c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=4 \\ c=0 \end{cases}$.

Suy ra phương trình parabol là $y=f(x)=-x^2+4x$.

Diện tích của cả cổng là $S=\int_0^4 \left(-x^2+4x\right)\mathrm{d}x=\left(-\dfrac{x^3}{3}+2x^2\right)\Big|_0^4=\dfrac{32}{3}\left(\mathrm{m}^2\right)$.

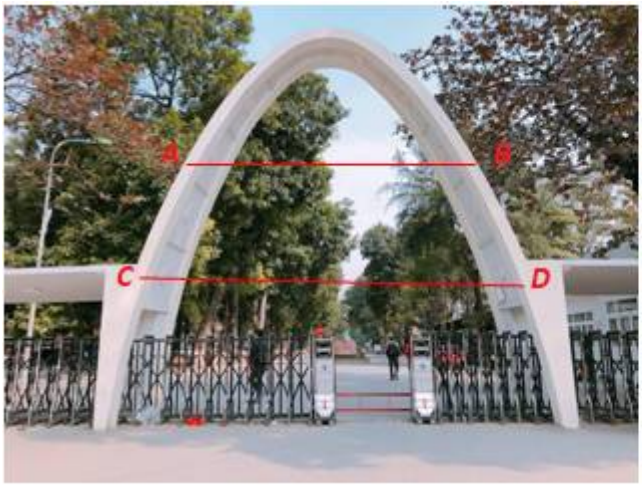
Mặt khác chiều cao $CF=DE=f\left(0,9\right)=2,79(\mathrm{m})$; $CD=4-2.0,9=2,2\left(\mathrm{m}\right)$.

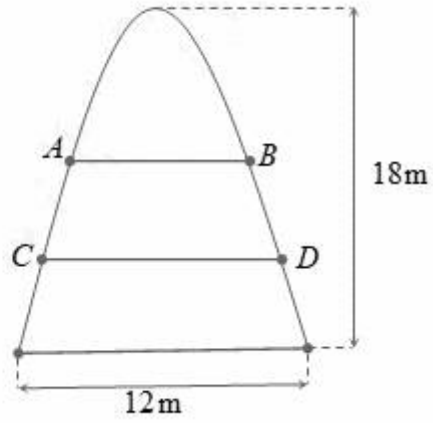
Diện tích hai cánh cổng là $S_{CDEF}=CD.CF=6,138\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Diện tích phần xiên hoa là $S_{xh}=S-S_{CDEF}=\dfrac{32}{3}-6,14=\dfrac{6793}{1500}\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Vậy tổng số tiền để làm cổng là $6,138.1,2+\dfrac{6793}{1500}.1\approx 11,9$ triệu đồng

Câu 204. Một cổng chào có dạng hình Parabol chiều cao $18\,\mathrm{m}$, chiều rộng chân đế $12\,\mathrm{m}$. Người ta căng hai sợi dây trang trí AB, CD nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi Parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau (xem hình vẽ bên). Biết tỉ số $\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}$, khi đó a bằng bao nhiêu?



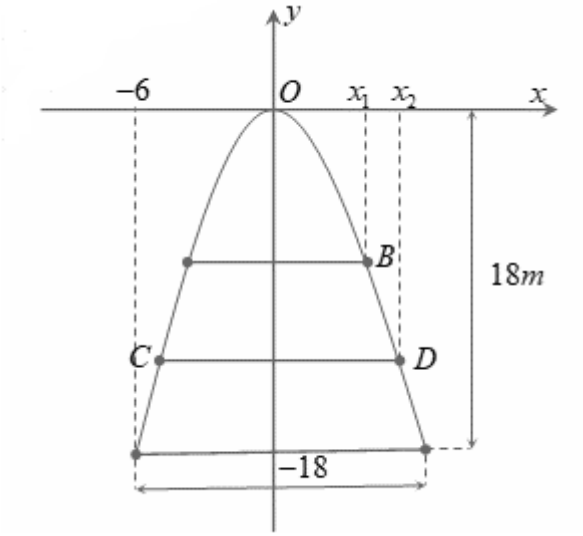


Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Phương trình Parabol có dạng $y = a.x^2$ (P).

(P) đi qua điểm có tọa độ $(-6;-18)$ suy ra: $-18 = a.(-6)^2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow (P): y = -\frac{1}{2}x^2$.

Từ hình vẽ ta có: $\frac{AB}{CD} = \frac{x_1}{x_2}$.

Diện tích hình phẳng giới bạn bởi Parabol và đường thẳng $AB: y = -\frac{1}{2}x_1^2$ là

$$S_1 = 2\int_0^{x_1}\left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_1^2\right)\right]\mathrm{d}x = 2\left(-\frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x_1^2 x\right)\Big|_0^{x_1} = \frac{2}{3}x_1^3.$$

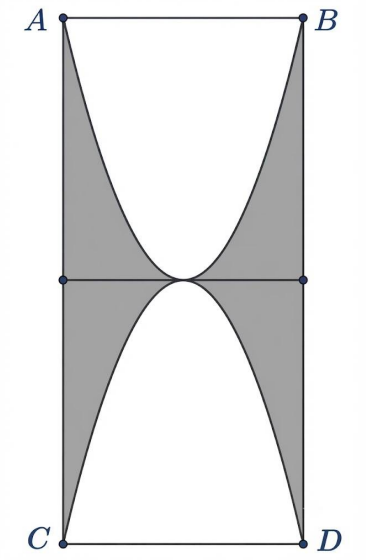
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và đường thẳng CD $y = -\frac{1}{2}x_2^2$ là

$$S_2 = 2\int_0^{x_2}\left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_2^2\right)\right]\mathrm{d}x = 2\left(-\frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x_2^2 x\right)\Big|_0^{x_2} = \frac{2}{3}x_2^3$$

Từ giả thiết suy ra $S_2 = 2S_1 \Leftrightarrow x_2^3 = 2x_1^3 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Vậy $\frac{AB}{CD} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow a = 2$.

Câu 205. Một hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 4dm; BC = 8dm$ và được trang trí họa tiết hình cánh bướm như hình vẽ bên.



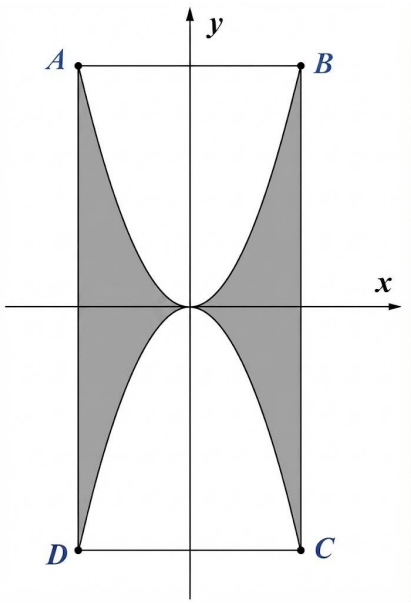
Phần tô đậm được trang trí với giá thành 60000 đồng/ m^2 và phần còn lại không tô màu được trang trí với giá thành 30000 đồng/ m^2. Hỏi để trang trí 100 họa tiết như vậy cần bao nhiêu triệu đồng?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 128

Đưa parabol vào hệ trục Oxy như hình vẽ



Vì $AB = 4dm; BC = 8dm. \Rightarrow A(-2;4),\ B(2;4), C(2;-4), D(-2;-4)$.

parabol là: $y = x^2$ hoặc $y = -x^2$

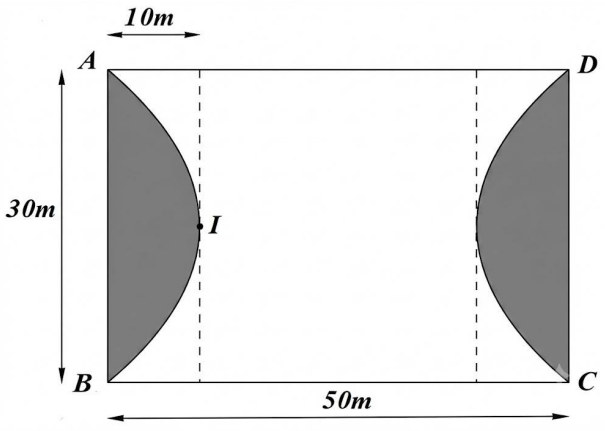
Diện tích phần tô đậm là $S_1 = 4\int_0^2 x^2 dx = \frac{32}{3}\ \ (dm^2)$

Diện tích hình chữ nhật là $S = 4.8 = 32\ \ (m^2)$

Diện tích phần trắng là $S_2 = S - S_1 = 32 - \frac{32}{3} = \frac{64}{3}\ \ (dm^2)$

Tổng chi phí trang chí là: $T = \left(\frac{32}{3}.60000 + \frac{64}{3}.30000\right).100 = 128000000$ đồng hay 128 triệu đồng

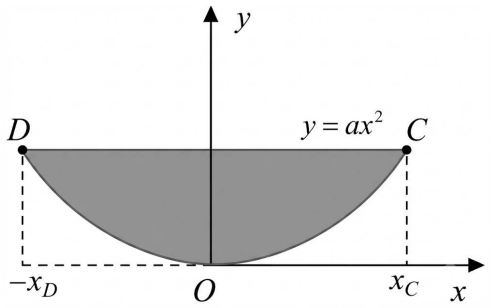
Câu 206. Kiến trúc sư thiết kế một khu vui chơi có dạng hình chữ nhật với chiều rộng $30m$ và chiều dài $50m$. Trong đó, phần tô màu đậm trồng cỏ nhung Nhật, phần còn lại trải thảm cỏ nhân tạo. Mỗi phần trồng cỏ nhung Nhật có đường biên cong là một phần của parabol với đỉnh I thuộc trục đối xứng của hình chữ nhật và khoảng cách từ đỉnh I đến trung điểm của cạnh AB bằng $10m$ (xem hình minh họa). Biết giá cỏ nhung Nhật là 140000 đồng/m^2, giá cỏ nhân tạo là 100000 đồng/m^2. Tính tổng số tiền để trồng và trải thảm cỏ hết khu vui chơi theo đơn vị triệu đồng.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 166



Xét hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Gọi phương trình parabol (P) có dạng: $y = ax^2 + bx + c$.

Khi đó (P) đi qua gốc O, điểm $C(15;10)$ và $D(-15;10)$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} c = 0 \\ 225a + 15b + c = 10 \\ 225a - 15b + c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2}{45} \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$.

Vậy (P): $y = \dfrac{2}{45}x^2$.

Khi đó:

Diện tích hình chữ nhật là: $S = 50.30 = 1500\left(m^2\right)$.

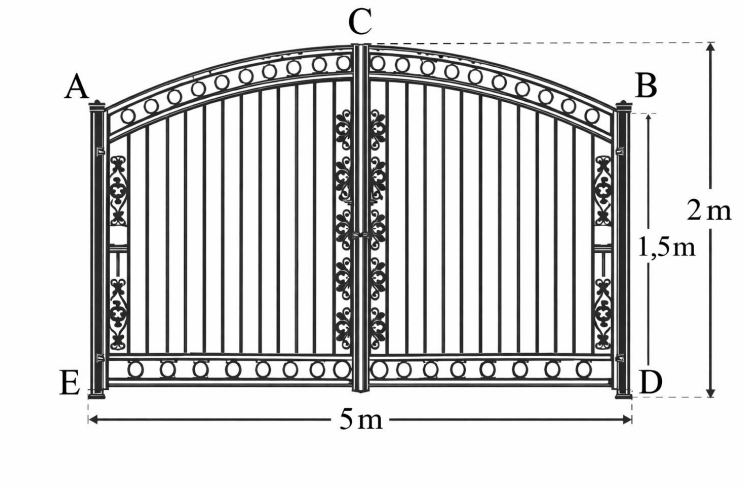
Diện tích trồng cỏ nhung Nhật là: $S_1 = 2.\int_{-15}^{15}\left(10-\frac{2}{45}x^2\right)dx = 400\ \left(m^2\right)$.

Diện tích trải thảm nhân tạo là: $S_2 = S - S_1 = 1500 - 400 = 1100\left(m^2\right)$.

Tổng số tiền để trồng và trải thảm cỏ hết khu vui chơi là:

$400.140000 + 1100.100000 = 166000000$ (đồng) $= 166$ (triệu đồng).

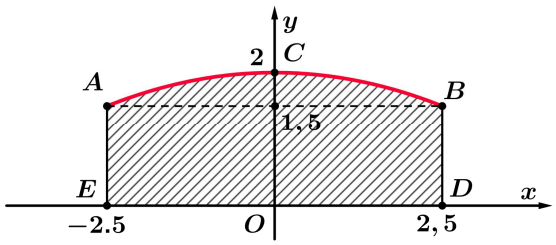
Câu 207. Một người thợ muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên dưới, biết đường cong phía trên là một parabol và tứ giác $ABDE$ là hình chữ nhật. Chi phí của cánh cửa sau khi hoàn thành là 700000 đồng/m². Hỏi cần bao nhiêu triệu đồng để làm một cửa sắt như vậy? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 6,42



- Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ

Với $A(-2,5;1,5), B(2,5;1,5), C(0;2), D(2,5;0), E(-2,5;0)$

Gọi đường cong parabol phía trên có phương trình: $y = ax^2 + bx + c\ (a < 0)$

Ta có các điểm thuộc parabol là: $A(-2,5;1,5), B(2,5;1,5), C(0;2)$. Do đó ta có hệ sau:

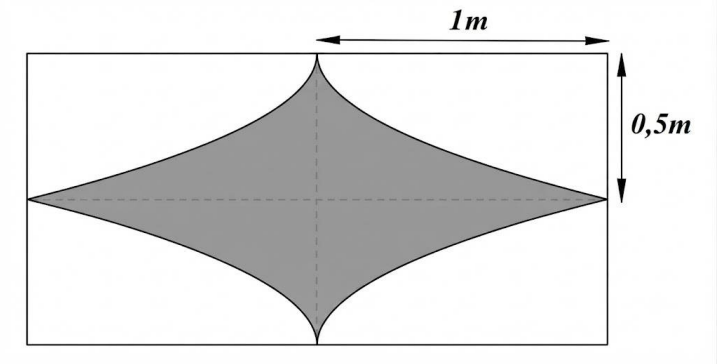
$$\begin{cases} 1,5 = 2,5^2 a + 2,5b + c \\ 1,5 = (-2,5)^2 a - 2,5b + c \\ 2 = 0^2 a + 0b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1,5 = 6,25a + 2,5b + c \\ 1,5 = 6,25a - 2,5b + c \\ 2 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-2}{25} \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{2}{25}x^2 + 2$$

Diện tích cửa rào sắt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-\frac{2}{25}x^2+2$, $y=0$ và hai đường thẳng $x=2,5$; $x=-2,5$ nên ta có

$$S=\int_{-2,5}^{2,5}\left(-\frac{2}{25}x^2+2\right)dx=\frac{55}{6}\left(m^2\right)$$

Số tiền để làm cửa sắt là: $\frac{55}{6}.0,7\approx 6,42$ (triệu đồng)

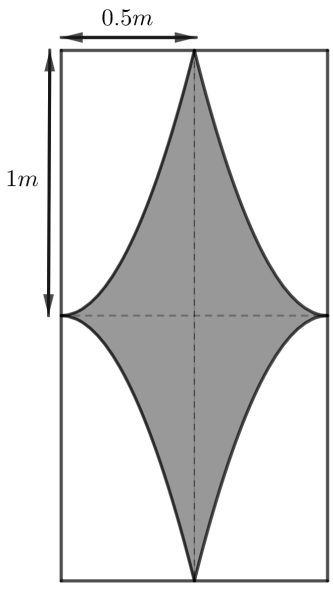
Câu 208. Nhà anh Bảo Toàn có tất cả 8 cánh cửa sắt hình chữ nhật với chiều dài $2m$ và chiều rộng $1m$. Hai mặt của mỗi cánh cửa được thiết kế như hình vẽ dưới đây. Trong đó, phần được tô đậm được sơn màu xanh (phần tô đen), phần còn lại được sơn màu trắng. Mỗi phần sơn màu trắng có đường biên cong là một phần của parabol có đỉnh nằm trên cạnh của hình chữ nhật. Biết rằng chi phí để sơn màu xanh là 120 nghìn đồng$/m^2$ và chi phí sơn màu trắng là 110 nghìn đồng$/m^2$. Hỏi, để sơn toàn bộ số cửa sắt trên, anh Bảo Toàn phải tốn bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị triệu đồng).



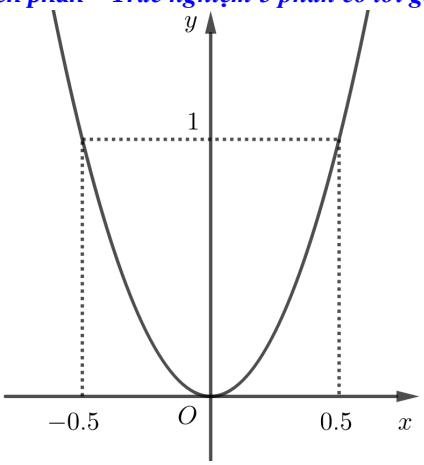
Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $3,63$



Xét đồ thị parabol trên hệ trục tọa độ Oxy như sau:

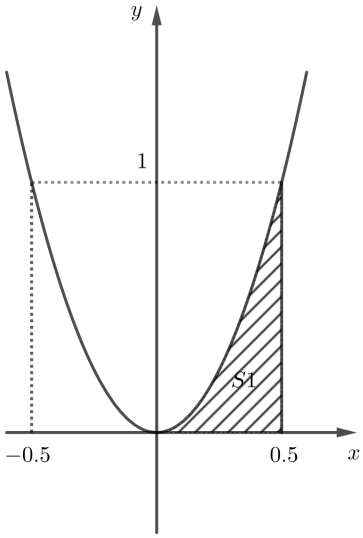


Gọi parabol có phương trình là: $y = ax^2 + bx + c$

Parabol đi qua các điểm có tọa độ $(-0.5;1),(0.5;1),(0;0)$, nên ta có hệ sau:

$$\begin{cases} c = 0 \\ a.0.5^2 + b.0.5 = 1 \\ a.(-0.5^2) + b.(-0.5) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = 4 \\ b = 0 \end{cases}.$$

Vậy ta có phương trình parabol $y = 4x^2$.



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = 4x^2, y = 0, x = 0, x = 0.5$ là: $S_1 = \int_0^{0.5} 4x^2 dx = \frac{1}{6}$

Diện tích của phần tô đậm được sơn màu xanh của mỗi mặt cánh cửa là $S_2 = 4.S_1 = 4.\frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

Diện tích của phần không tô đậm tô đậm được sơn màu trắng của mỗi mặt cánh cửa là $S_3 = 1.2 - S_2 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

Có tất cả 8 cánh cửa sắt hình chữ nhật, mỗi cánh có 2 mặt, vậy có tất cả 16 mặt như hình vẽ.

Vậy tổng diện tích phần tô đậm được sơn màu xanh là: $16S_2 = 16.\frac{2}{3} = \frac{32}{3}(m^2)$

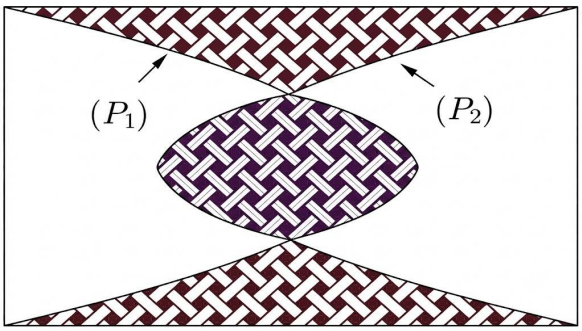
Tổng diện tích phần không tô đậm được sơn màu trắng là: $16S_3 = 16.\frac{4}{3} = \frac{64}{3}(m^2)$

Tổng chi phí để sơn màu xanh là: $\frac{32}{3}.120=1280$ (nghìn đồng) $=1,28$ (triệu đồng)

Tổng chi phí để sơn màu trắng là: $\frac{64}{3}.110\approx 2346$ (nghìn đồng) $\approx 2,35$ (triệu đồng)

Tổng chi phí sơn là: $1,28+2,35=3,63$ (triệu đồng).

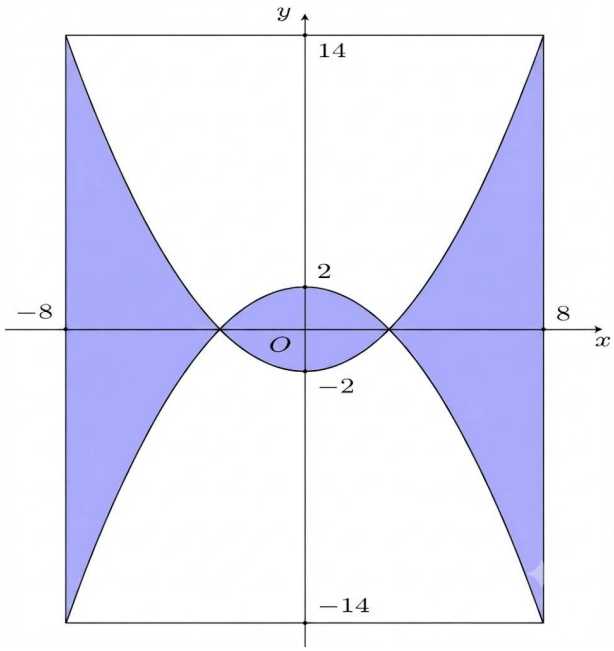
Câu 209. Trang trí một sân hình chữ nhật kích thước 28m x 16m, trong đó hai Parabol (P_1) đối xứng với (P_2) qua đường thẳng đi qua hai trung điểm của chiều dài sân (hình vẽ), khoảng cách giữa hai đỉnh Parabol bằng 4m. Chi phí trang trí cho phần hoa văn là 180 ngàn đồng trên một mét vuông, phần trắng là 160 ngàn đồng trên một mét vuông. Tổng chi phí trang trí cho sân là bao nhiêu triệu đồng? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 74,4



Đặt hình chữ nhật vào hệ tọa độ Oxy sao cho tâm hình chữ nhật trùng với góc tọa độ, chiều dài của hình chữ nhật vuông góc với trục Ox.

Theo đề bài ta có Parabol (P_1) đi qua các điểm $A(0;-2), B(-8;14), C(8;14)$

Từ đây ta có hệ phương trình $\begin{cases} c=-2 \\ 64a-8b=16 \\ 64a+8b=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-2 \\ b=0 \\ a=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

Suy ra $(P_1): y=\dfrac{1}{4}x^2-2$

Suy ra $(P_2): y=-\dfrac{1}{4}x^2+2$

Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích phần hoa văn và diện tích phần trắng

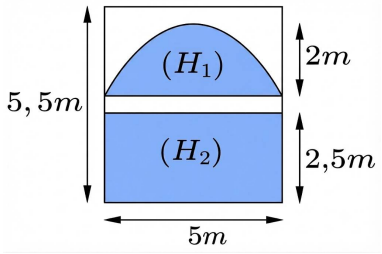
Ta có:

$S_1=2\int\limits_{-8}^{-2\sqrt{2}}\left|\dfrac{1}{2}x^2-4\right|dx+\int\limits_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\left|\dfrac{1}{2}x^2-4\right|dx$

$S_2=16.28-S_1$

Tổng chi phí trang trí là $180.000S_1+160.000S_2\approx 74,4$ (triệu đồng)

Câu 210. Hình vẽ bên dưới minh họa mặt cắt đứng của mặt trước một ngôi nhà có dạng hình chữ nhật $5\text{m}\times 5,5\text{m}$ với các kích thước được cho như trong hình bên dưới. Phần tô đậm trong hình vẽ ứng với phần kính được lắp đặt, phần còn lại lót gạch men. Phần lắp kính được chia làm 2 miền (H_1) và (H_2), trong đó miền (H_1) có đường biên cong là một phần của parabol. Chi phí lắp kính là 1,5 triệu đồng cho 1m^2 và chi phí lót gạch men là 0,28 triệu đồng cho 1m^2. Tổng chi phí cần hoàn thành mặt trước ngôi nhà là bao nhiêu triệu đồng? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 36,6

Diện tích miền (H_1) bằng $S_1=\dfrac{2}{3}.5.2=\dfrac{20}{3}$ (m^2)

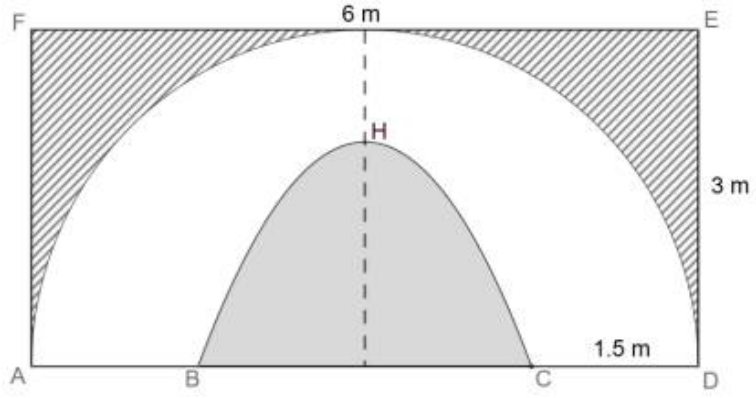
Diện tích miền (H_2) bằng $S_2=5.2,5=12,5$ (m^2)

Chi phí lắp kính bằng $1,8.\left(\dfrac{20}{3}+12,5\right)=\dfrac{69}{2}$ (triệu đồng)

Chi phí lát gạch men bằng $0,25.\left(5.5,5-12,5-\dfrac{20}{3}\right)=\dfrac{25}{12}$ (triệu đồng)

Tổng chi phí bằng $\frac{69}{2}+\frac{25}{12}=\frac{439}{12}\approx 36,6$ (triệu đồng)

Câu 211. Cô Minh Nhàn muốn nhờ thợ trang trí một bức tường hình chữ nhật $ADEF$ với kích thước $EF=6m,\ DE=3m$ sao cho cân xứng hai nửa. Phần gạch chéo là hình giới hạn bởi đường gấp khúc $AFED$ và nửa đường tròn đường kính AD, được thuê sơn với đơn giá 250000 đồng mỗi mét vuông. Phần màu trắng giới hạn bởi nửa đường tròn đường kính AD và một đường parabol (có đỉnh H cách đường thẳng AB một khoảng bằng $2m$ và đi qua hai điểm B,C nằm trên cạnh AD thỏa mãn $AB=CD=1,5m$) được thuê trang trí bằng bức phù điêu đắp bằng xi măng với đơn giá 1950000 đồng mỗi mét vuông (tham khảo hình vẽ). Hỏi cô Minh Nhàn phải trả bao nhiêu triệu đồng để trang trí bức tường như vậy (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 20,7

Ta có $S_{ADEF}=6.3=18\left(m^2\right)$

Diện tích nửa đường tròn đường kính AD là $S_1=\frac{1}{2}\pi 3^2=\frac{9\pi}{2}\left(m^2\right)$

Chi phí cho phần gạch chéo là $F_1=\left(18-\frac{9\pi}{2}\right).0,25$ (triệu đồng)

Xét hệ trục tọa độ Oxy sao cho $D\left(3;0\right),E\left(3;3\right)\Rightarrow H\left(0;2\right),C\left(1,5;0\right)$

Parabol nhận đỉnh là H và đi qua B,C có phương trình dạng $y=ax^2+2$ thỏa mãn $a\left(\frac{3}{2}\right)^2+2=0\Leftrightarrow a=-\frac{8}{9}$

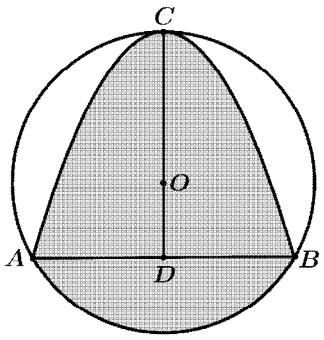
$\Rightarrow\left(P\right):y=-\frac{8}{9}x^2+2$

Diện tích phần giới hạn bởi parabol và AD là $S_2=\int\limits_{-1,5}^{1,5}\left(-\frac{8}{9}x^2+2\right)dx=4\left(m^2\right)$

Chi phí cho phần đắp phù điêu là $F_2=\left(S_1-S_2\right).1,95=\left(\frac{9\pi}{2}-4\right).1,95$ (triệu đồng)

Vậy tổng chi phí là $F_1+F_2=\left(18-\frac{9\pi}{2}\right).0,25+\left(\frac{9\pi}{2}-4\right).1,95\approx 20,7$ (triệu đồng).

Câu 212. Một hoa văn hình tròn tâm O, ngoại tiếp tam giác đều ABC có cạnh $AB=4\sqrt{3}\,\text{cm}$. Đường cong qua ba điểm: A,B,C là một phần của parabol. Tính diện tích phần tô đậm trong hình vẽ (kết quả làm tròn đến hàng phần mười của centimét vuông).

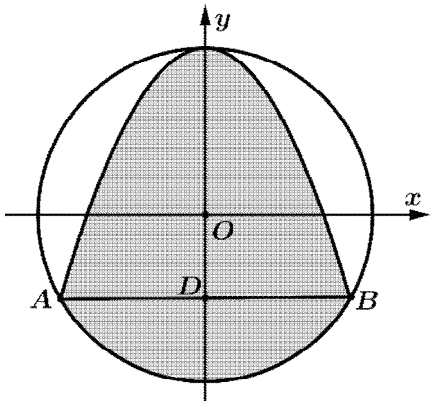


Lời giải

Do tam giác ABC là tam giác đều có cạnh $4\sqrt{3}\,\text{cm}$ nên ta có:

$CD=4\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}=6(\text{cm})\Rightarrow OC=\frac{2}{3}CD=4(\text{cm})$ và $OD=2(cm)$.

Gắn trục toạ độ Oxy như hình vẽ, ta có: $A\left(-2\sqrt{3};-2\right),B\left(2\sqrt{3};-2\right),C(0;4)$



Phương trình đường Parapol đi qua 3 điểm A,B,C có đỉnh C có dạng $y=ax^2+4\ (P)$.

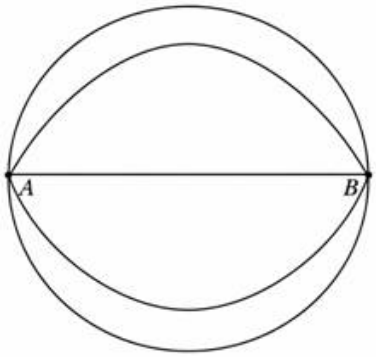
Thay toạ độ điểm $B\left(2\sqrt{3};-2\right)$ vào (P) suy ra $a=-\frac{1}{2}\Rightarrow(P):y=-\frac{1}{2}x^2+4$

Phương trình đường tròn tâm O bán kính $OA=4$ là $x^2+y^2=16\Rightarrow$ Phương trình một phần cung nhỏ AB có dạng $y=-\sqrt{16-x^2}$

Vậy diện tích phần tô đậm bằng $\int\limits_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\left[\left(-\frac{1}{2}x^2+4\right)-\left(-\sqrt{16-x^2}\right)\right]dx\approx 37,5\ (\text{cm}^2)$

Câu 213. Một khu vực công viên có dạng hình tròn đường kính AB bằng 10m. Người ta trang trí khu vực này bằng hai đường Parabol đối xứng nhau qua AB, nằm trong hình tròn, đi qua các điểm A, B và có đỉnh cách mép hình tròn 1m. Phần giới hạn bởi 2 parabol được trồng hoa với chi phí 400000 đồng một mét vuông, phần còn lại được lát gốm sứ với chi phí 1200000 đồng một mét vuông. Tính tổng chi

phí (triệu đồng) để hoàn thành khu vực này (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất của triệu đồng) ?

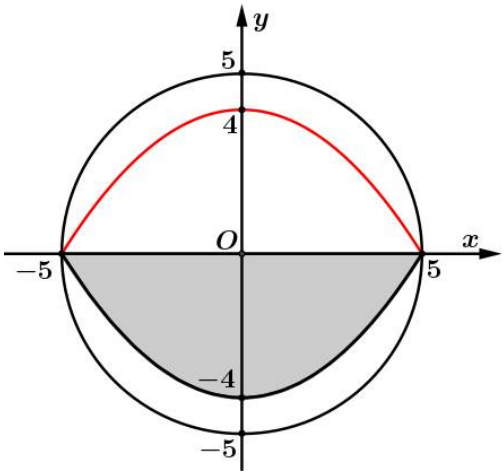


Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 51,6

Xét hệ trục độ như hình vẽ.



Phương trình đường tròn là: $x^2+y^2=25$

Phương trình của Parabol có bề lõm hướng lên là: $y=\frac{4}{25}x^2-4$

Diện tích phần trồng hoa giới hạn bởi 2 parabol là:

$$S_1=2\int_{-5}^{5}\left|\left(\frac{4}{25}x^2-4\right)\right|\mathrm{d}x=4\int_{0}^{5}\left|\left(\frac{4}{25}x^2-4\right)\right|\mathrm{d}x=\frac{160}{3}\left(m^2\right).$$

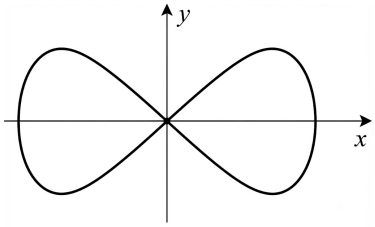
Diện tích toàn bộ phần hình tròn là: $S_2=25\pi\left(m^2\right)$

Diện tích phần còn lại để trang trí gốm sứ là: $S=S_2-S_1=25\pi-\frac{160}{3}\left(m^2\right).$

Vậy tổng chi phí để làm khu vực công viên là: $\frac{160}{3}.0,4+\left(25\pi-\frac{160}{3}\right).1,2\approx 51,6$ (triệu đồng).

Câu 214. Trong Công viên Toán học có những mảnh đất mang hình dáng khác nhau. Mỗi mảnh được trồng một loài hoa và nó được tạo thành bởi một trong những đường cong đẹp trong toán học. Ở đó có một mảnh đất mang tên Bernoulli, nó được tạo thành từ đường Lemmiscate có phương trình trong hệ tọa độ Oxy là $16y^2=x^2\left(25-x^2\right)$ như hình vẽ bên dưới (đơn vị trên trục là mét). Biết chi phí để trồng hoa

trên mảnh đất Bernoulli là 150 nghìn đồng/ m^2. Số tiền cần dùng để trồng hoa trên mảnh đất này bằng bao nhiêu triệu đồng?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 6,25

Ta có $y=0 \Leftrightarrow x^2\left(25-x^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 5 \end{array}\right.$.

Suy ra đường Lemmiscate cắt trục hoành tại ba điểm là $A(-5;0)$, $O(0;0)$ và $B(5;0)$.

Từ phương trình $16y^2=x^2\left(25-x^2\right) \Leftrightarrow y^2=\frac{1}{16}x^2\left(25-x^2\right)$

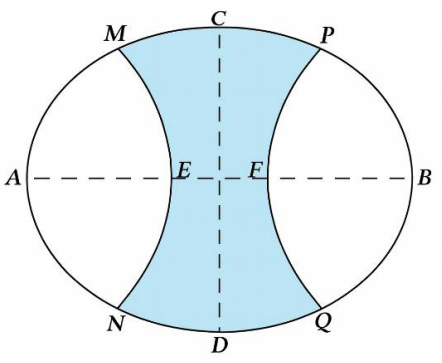
Suy ra $y=\pm\frac{1}{4}x\sqrt{25-x^2}$.

Xét góc phần tư thứ nhất, đường Lemmiscate có phương trình là $y=\frac{1}{4}x\sqrt{25-x^2}; x\in[0;5]$

Khi đó $S_{(I)}=\int_0^5 \frac{1}{4}x\sqrt{25-x^2}\mathrm{d}x=\frac{125}{12} \Rightarrow S=4S_{(I)}=\frac{125}{3}\left(m^2\right)$.

Số tiền cần dùng để trồng hoa trên mảnh đất này là: $\frac{125}{3}.0{,}15=6{,}25$ triệu đồng

Câu 215. Vườn hoa của một trường học có hình dạng được giới hạn bởi một đường elip có bốn đỉnh A,B,C,D và hai đường parabol có các đỉnh lần lượt là E,F (phần tô đậm của hình vẽ). Hai đường parabol có cùng trục đối xứng AB, đối xứng nhau qua trục CD, hai parabol cắt elip tại các điểm M,N,P,Q. Biết $AB=8m, CD=6m, MN=PQ=3\sqrt{3}m, EF=2m$. Chi phí để trồng hoa trên vườn là 300.000 / m^2. Hỏi số tiền trồng hoa cho cả vườn là bao nhiêu triệu đồng. Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm

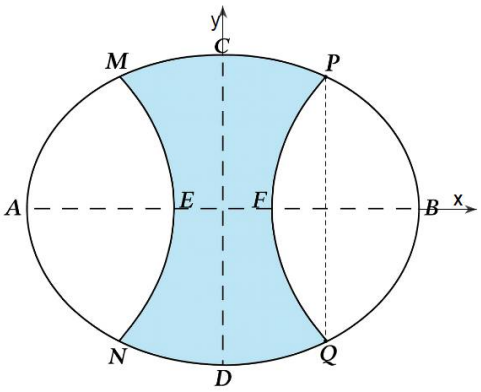


Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4,81

Chọn hệ trục tọa độ với gốc tọa độ là trung điểm của EF (xem hình vẽ)



Khi đó (E) có độ dài trục lớn $AB = 2a = 8 \Rightarrow a = 4$

Độ dài trục bé $CD = 2b = 6 \Rightarrow b = 3$.

Phương trình (E) là: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

Parabol có phương trình $x = my^2 + 1$ (vì điểm $F(1;0)$)

Do $PQ = 3\sqrt{3} \Rightarrow P\left(x_0; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\left(x_P > 0\right)$, mà $P \in (E)$ nên ta có: $\frac{x_0^2}{16} + \frac{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}{9} = 1 \Rightarrow x_0 = 2$

Mặt khác Parabol đi qua $P \Rightarrow 2 = a \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1 \Rightarrow a = \frac{4}{27}$.

Xét phần hình phẳng thuộc góc phần tư thứ nhất khi đó đường cong (E) có phương trình $x = 4\sqrt{1 - \frac{y^2}{9}}$

Parabol có phương trình $x = \frac{4}{27}y^2 + 1$

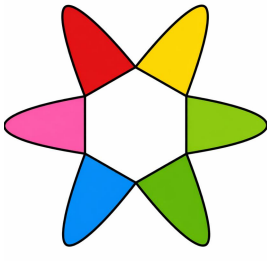
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 0, y = 3\sqrt{3}, x = 4\sqrt{1 - \frac{y^2}{9}}$ và $x = \frac{8}{27}y^2$ là:

$$S_1 = \int_0^{3\sqrt{3}} \left(4\sqrt{1 - \frac{y^2}{9}} - \frac{4y^2}{27} - 1\right) dy$$

Diện tích elip là: $S = \pi ab = 12\pi$.

Diện tích phần tô đậm là: $S_T = S - 4S_1 \approx 16,03\, m^2 \Rightarrow T = 300.000 S_{(T)} \approx 4,81$ triệu đồng.

Câu 216. Anh Bảo Toàn muốn xây sân vườn có hình dạng ngôi sao 6 cánh như sau: trên mỗi cạnh của hình lục giác đều có cạnh bằng $2m$ có một cánh hoa hình parabol, đỉnh của parabol cách cạnh $3m$ và nằm phía ngoài hình lục giác, đường parabol đó đi qua hai đầu mút của mỗi cạnh (xem hình sau). Hãy tính diện tích của sân vườn trên của anh Bảo Toàn (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ nhất của mét vuông).



Trả lời: ……..

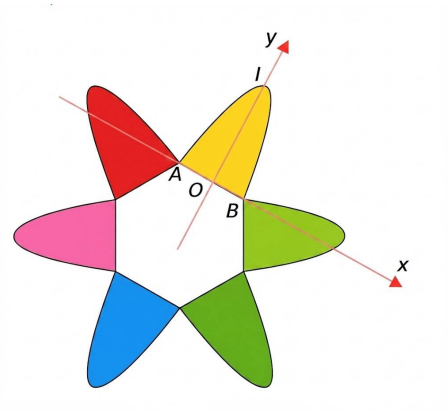
Lời giải

Đáp án: $34,4$

Hình lục giác đều có cạnh bằng $2m$

Diện tích của hình lục giác đều có thể được tính bằng công thức: $S_{\text{Luc giac}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.a^2$ với $a = 2m$

Thay vào công thức ta có: $S_{Luc\ giac} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.2^2 = 6\sqrt{3}\left(m^2\right)$



Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O là trung điểm của cạnh AB, với $A(1,0), B(-1,0)$ và đỉnh $I(0,3)$ của parabol.

Phương trình của parabol có dạng: $y = ax^2 + b$

Do parabol đi qua các điểm A và B nên ta có: $y = -3x^2 + 3$

Diện tích mỗi cánh hoa được tính bằng tích phân: $S_{\text{Cánh hoa}} = \int_{-1}^{1}\left(-3x^2+3\right)\mathrm{d}x$

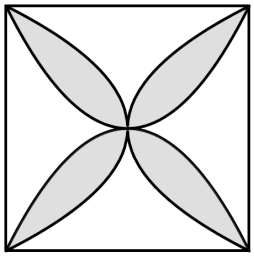
Tính tích phân: $S_{cánh\ hoa} = \left(-x^3+3x\right)\Big|_{-1}^{1} = (-1+3)-(1-3) = 4\left(m^2\right)$

Hình có 6 cánh hoa nên tổng diện tích của các cánh hoa là: $S_{Tong\ cánh\ hoa} = 6.4 = 24\ \left(m^2\right)$

Tổng diện tích của hình bao gồm cả hình lục giác và các cánh hoa là:

$$S_{Tong} = S_{Luc\ giác} + S_{Tong\ cánh\ hoa} = 6\sqrt{3} + 24 \approx 34,4\left(m^2\right)$$

Câu 217. Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 60 cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô mầu sẫm như hình vẽ bên).

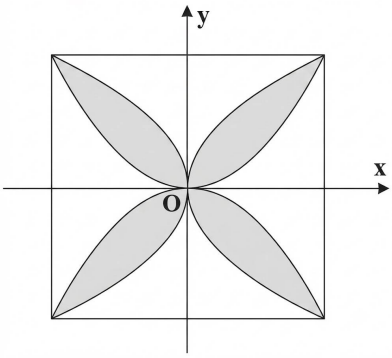


Tính diện tích phần cánh hoa của viên gạch (đơn vị cm^2).

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1200



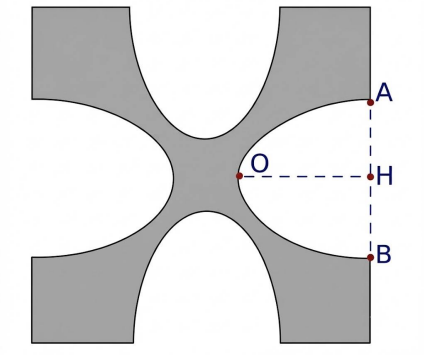
Chọn hệ tọa độ Oxy sao cho tâm viên gạch trùng O như hình vẽ (1 đơn vị trên trục bằng $10\,\text{cm} = 1\text{dm}$), các cánh hoa tạo bởi các đường parabol có phương trình $y = \frac{x^2}{3}$, $y = -\frac{x^2}{3}$, $x = -\frac{y^2}{3}$, $x = \frac{y^2}{3}$.

Diện tích một cánh hoa (nằm trong góc phàn tư thứ nhất) bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{3}$, $y = \sqrt{3x}$ và hai đường thẳng $x = 0; x = 3$.

Do đó diện tích một cánh hoa bằng: $\int_0^3 \left(\sqrt{3x} - \frac{x^2}{3} \right) \text{d}x = 3\left(dm^2\right) = 300\left(cm^2\right)$.

Vậy diện tích 4 cánh hoa trong viên gạch bằng: $4.300 = 1200\left(cm^2\right)$

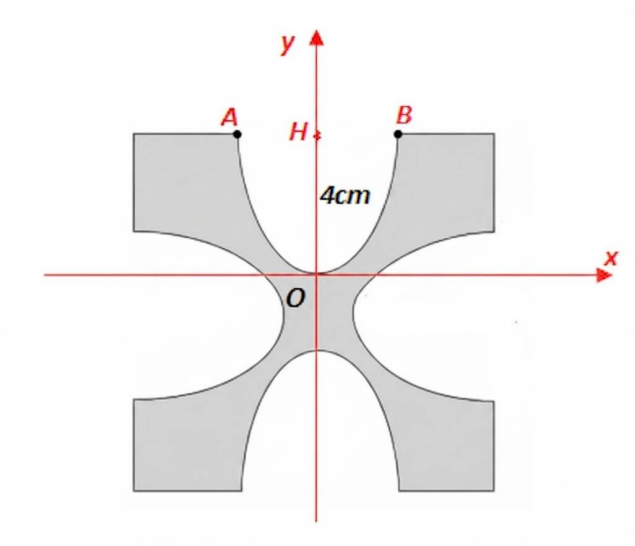
Câu 218. Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng $10\,\text{cm}$ bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB = 5\,\text{cm}$, $OH = 4\,\text{cm}$. Biết giá trang trí hoa văn 1cm^2 là 6000 đồng, hỏi số tiền cần bỏ ra để trang trí hoa văn bằng bao nhiêu nghìn đồng?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 280



Đưa parabol vào hệ trục Oxy sao cho đỉnh trùng O như hình vẽ

ta tìm được phương trình là: $(P): y=\frac{16}{25}x^2$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P): y=\frac{16}{25}x^2$, và $y=4$ các đường thẳng $x=-2,5, x=2,5$ là:

$$S=\int_{-2,5}^{2,5}\left(4-\frac{16}{25}x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{40}{3}.$$

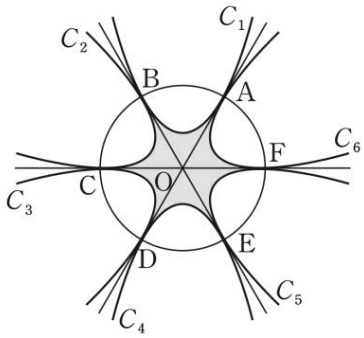
Tổng diện tích phần bị khoét đi: $S_1=4S=\frac{160}{3}\left(cm^2\right)$.

Diện tích của hình vuông là: $S_{hv}=100\ \left(cm^2\right)$.

diện tích bề mặt hoa văn là: $S_2=S_{hv}-S_1=100-\frac{160}{3}=\frac{140}{3}\left(cm^2\right)$.

Vậy số tiền cần bỏ ra để trang trí hoa văn đó là: $\frac{140}{3}.6000=280000$ đồng hay 280 nghìn đồng

Câu 219. Cho đường tròn tâm O, bán kính bằng $2dm$. Trên đường tròn, lấy 6 điểm chia đều đường tròn, lần lượt là A,B,C,D,E,F. Vẽ cung tròn C_1 tiếp xúc với hai đoạn thẳng OA và OB, đi qua hai điểm A và B. Tương tự, vẽ cung tròn C_2 tiếp xúc với hai đoạn thẳng OB và OC, đi qua hai điểm B và C. Tiếp tục bằng cách tương tự, ta vẽ các cung tròn C_3, C_4, C_5, C_6 tiếp xúc với các cặp đoạn thẳng liên tiếp tạo bởi các điểm trên. Diện tích phần được bao bởi 6 cung tròn C_1 đến C_6 là bao nhiêu decimét khối (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

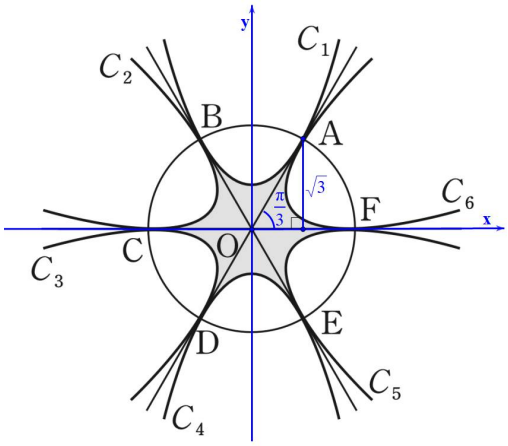


Trả lời: ……..

Lời giải

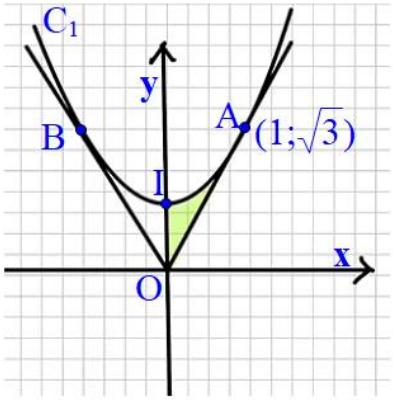
Đáp án: 3,46

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Ta dễ có được góc $\widehat{AOF}=\dfrac{\pi}{3}$ suy ra đường thẳng $OA: y=\sqrt{3}x$ do đó điểm $A\left(1;\sqrt{3}\right)$

Để tiện tính toán: Ta xét riêng diện tích tô đậm được tạo bởi cung tròn C_1 với hai đoạn thẳng $OA;OB$



Dễ thấy được đường cong C_1 là đồ thị hàm số parabol đối xứng qua trục Oy. Do đó hàm số parapol đó có dạng: $y=ax^2+b$ và đồ thị hàm số này đi qua điểm A,B.

Ta có: $\begin{cases}a+b=\sqrt{3}\\2a=\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$. Vậy $(C_1): y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

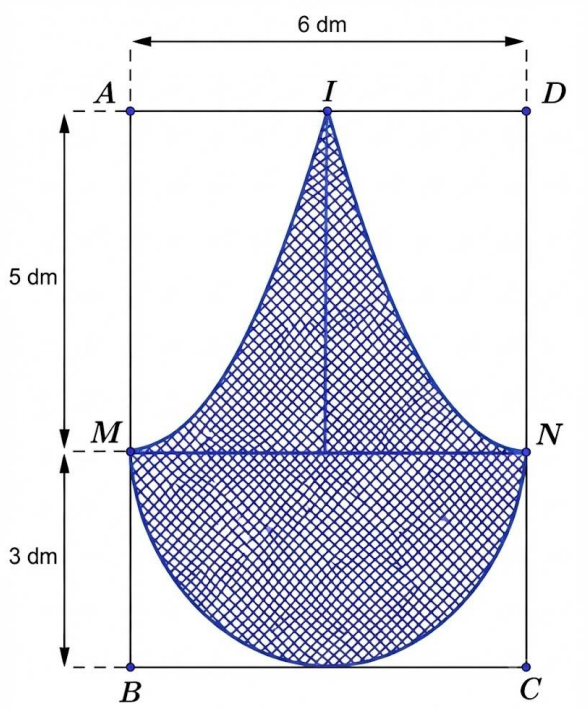
Khi đó diện tích tô đậm được tạo bởi cung tròn C_1 với hai đoạn thẳng $OA;OB$ là:

$$S_1 = 2\int_0^1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) dx$$

Suy ra diện tích phần được bao bởi 6 cung tròn C_1 đến C_6 là

$$S = 6S_1 = 12\int_0^1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) dx = 2\sqrt{3} \approx 3,46$$

Câu 220. Để trang trí một bảng gỗ hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 8\,\text{dm}$ và chiều rộng $AD = 6\,\text{dm}$, người ta thiết kế một logo là hình phẳng giới hạn bởi nửa đường tròn đường kính $MN = 6\,\text{dm}$, tiếp xúc với BC, hai đường cong IM, IN là một phần của các đường parabol có trục đối xứng lần lượt là AB, CD với I là trung điểm của AD (tham khảo hình vẽ).



Phần logo được sơn màu xanh với chi phí 50000 đồng/ $1\,\text{dm}^2$ và phần còn lại của bảng gỗ được sơn màu trắng với chi phí 30000 đồng/ $1\,\text{dm}^2$. Hỏi cần bỏ ra bao nhiêu nghìn đồng để trang trí bảng gỗ trên (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

Trả lời: ……..

Lời giải

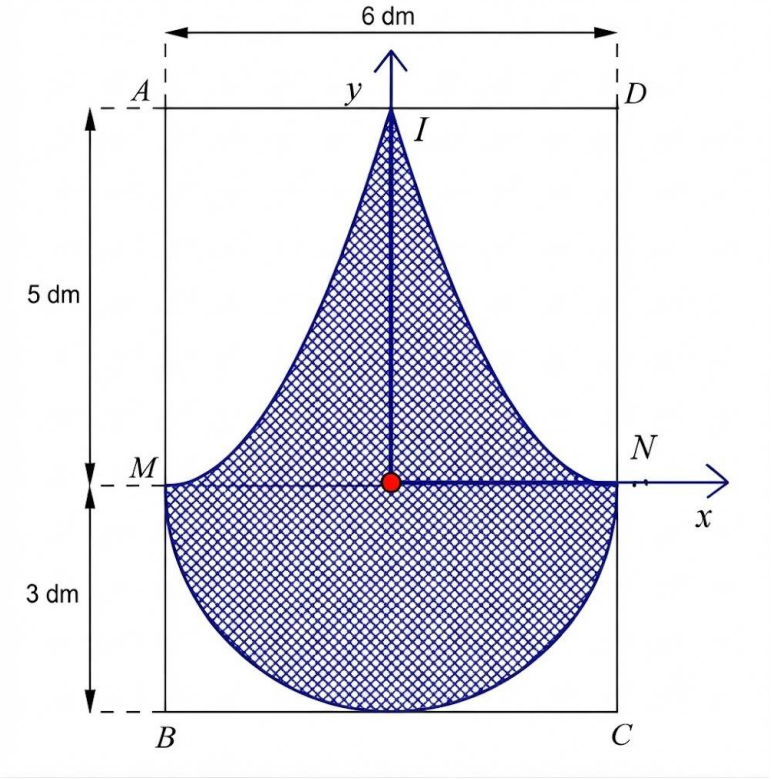
Đáp án: 1923

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ bằng $6.8 = 48\,\text{dm}^2$.

Diện tích của nửa đường tròn đường kính MN bằng $S = \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{1}{2}\pi.3^2 = \frac{9}{2}\pi\,\text{dm}^2$.

Ta xác định phương trình của parabol.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ:



Gọi phương trình parabol có đỉnh N là $y=ax^2+bx+c$, theo bài ra ta có:

$$\begin{cases} y(0)=5 \\ y(3)=0 \\ \dfrac{-b}{2a}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=5 \\ 9a+3b+c=0 \\ 6a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{5}{9} \\ b=\dfrac{-10}{3} \\ c=5 \end{cases}$$

Vậy $y=\dfrac{5}{9}x^2-\dfrac{10}{3}x+5$.

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi $y=\dfrac{5}{9}x^2-\dfrac{10}{3}x+5$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0;x=3$ bằng: $S_1=\int_0^3\left(\dfrac{5}{9}x^2-\dfrac{10}{3}x+5\right)\mathrm{d}x=5\left(\mathrm{dm}^2\right)$.

Do tính đối xứng nên hình phẳng giới hạn bởi parabol có đỉnh M, trục đối xứng AB, trục hoành và hai đường thẳng $x=0;x=3$ có diện tích bằng $5\left(\mathrm{dm}^2\right)$.

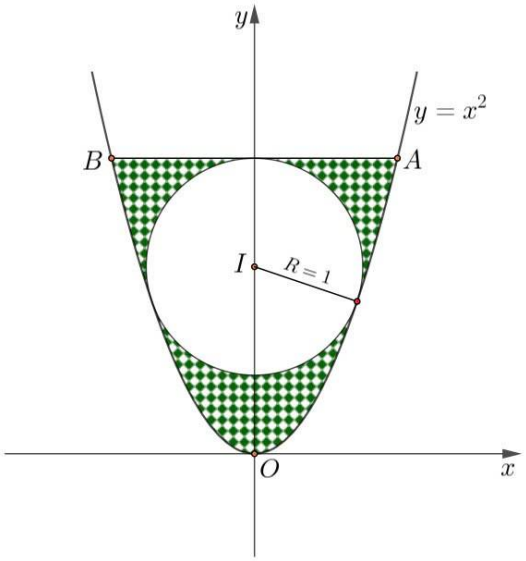
Tổng diện tích phần bảng gỗ sơn màu xanh là: $\left(\dfrac{9}{2}\pi+10\right)\mathrm{dm}^2$.

Diện tích của phần bảng gỗ sơn màu trắng là: $S'=48-\left(\dfrac{9}{2}\pi+10\right)=\left(38-\dfrac{9}{2}\pi\right)\mathrm{dm}^2$.

Chi phí cần bỏ ra là: $\left(\dfrac{9}{2}\pi+10\right).50000+\left(38-\dfrac{9}{2}\pi\right).30000\approx 1923$ (nghìn đồng).

Câu 221. Một khoảng sân của một ngôi nhà có hình dạng là một phần của parabol, nếu chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ bên dưới thì parabol có phương trình là $y=x^2$. Chủ nhà muốn thiết kế một hồ nuôi

cá cảnh có dạng hình tròn bán kính $1m$, hình tròn được thiết kế tiếp xúc với 2 nhánh của parabol, phía trên của hình tròn ngăn bởi một bức tường mỏng tiếp xúc với hình tròn. Phần đất còn lại của khoảng sân giới hạn bởi đường tròn, 2 nhánh của parabol và bức tường được thiết kế trồng hoa (phần gạch sọc trong hình). Tính diện tích mà chủ nhà thiết kế để trồng hoa (đơn vị mét vuông), biết rằng đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1,36

+ Gọi $I(0,y_0)$ suy ra: $(C):x^2+(y-y_0)^2=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=y_0+\sqrt{1-x^2}\\y=y_0-\sqrt{1-x^2}\end{array}\right.$

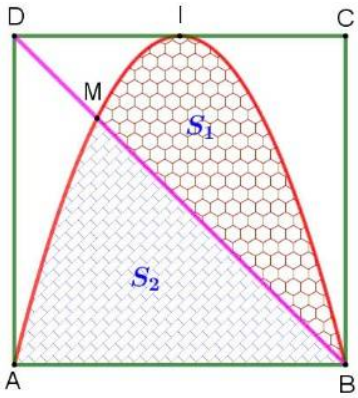
+ Do *Parabol* luôn tiếp xúc nửa dưới của đường tròn nên ta có

$$\begin{cases}y_0-\sqrt{1-x^2}=x^2\\\left(y_0-\sqrt{1-x^2}\right)'=\left(x^2\right)'\end{cases}\Rightarrow x^2=\frac{3}{4}\Rightarrow y_0=\frac{5}{4}$$

+ (AB) có phương trình: $y=\frac{9}{4}$ và $A\left(\frac{3}{2};\frac{9}{4}\right),B\left(\frac{-3}{2},\frac{9}{4}\right)$

Khi đó diện tích cần tìm là: $S=\int\limits_{\frac{-3}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(\frac{9}{4}-x^2\right)dx-1^2.\pi\approx 1,36\left(m^2\right)$

Câu 222. Một biển quảng cáo có dạng hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 4m và I là trung điểm của đoạn thẳng CD. Trên tấm biển đó có đường parabol đỉnh I đi qua A,B và cắt đường chéo BD tại M (tham khảo hình vẽ).



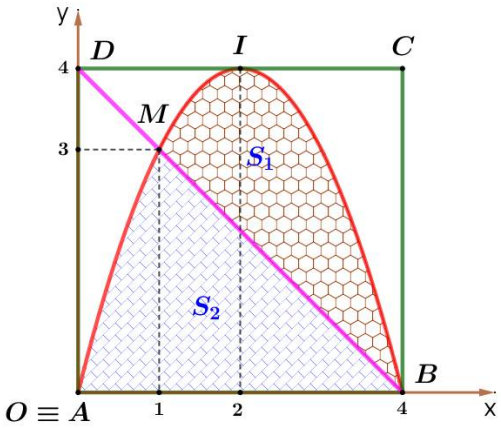
Chi phí sơn phần tô hình tổ ong (có diện tích S_1) là 200000 đồng/m^2, chi phí sơn phần tô đậm (có diện tích S_2) là 150000 đồng/m^2 và phần còn lại là 120000 đồng/m^2. Số tiền cần chi trả để sơn tấm biển quảng cáo là bao nhiêu nghìn đồng?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2465

Gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



• Khi đó $BD: y = -x + 4$ và Parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ qua ba điểm $A \equiv O(0;0), B(4;0), I(2;4)$ nên có dạng: $y = -x^2 + 4x$.

• $M(1;3)$ là giao điểm của BD và (P).

• Suy ra: $S_1 = \int_1^4 \left|\left(-x^2+4x\right)-\left(-x+4\right)\right|\text{d}x = \frac{9}{2}\left(\text{m}^2\right)$ và $S_2 = \int_0^4 \left|-x^2+4x\right|\text{d}x - \frac{9}{2} = \frac{37}{6}\left(\text{m}^2\right)$.

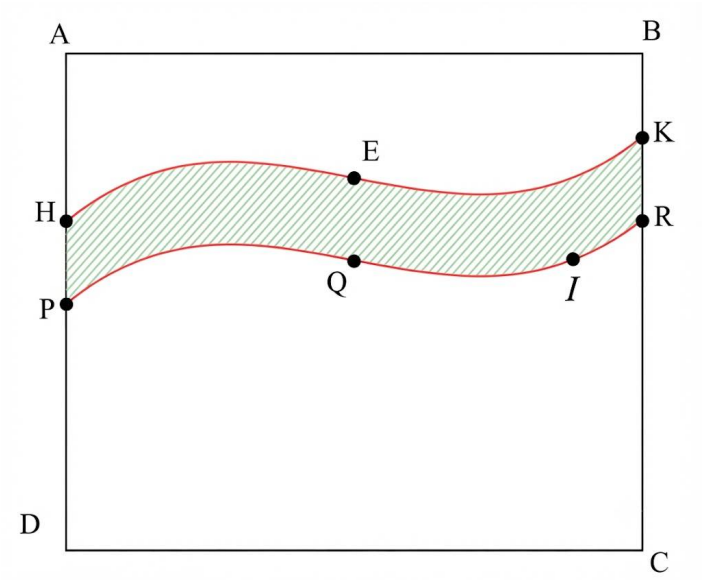
Diện tích còn phần còn lại là $S_3 = 4^2 - \int_0^4 \left|-x^2+4x\right|\text{d}x = \frac{16}{3}\left(\text{m}^2\right)$.

• Số tiền cần chi trả để sơn tấm biển quảng cáo là:

$200000 \cdot S_1 + 150000 \cdot S_2 + 120000 \cdot S_3 = 200000 \cdot \frac{9}{2} + 150000 \cdot \frac{37}{6} + 120000 \cdot \frac{16}{3} = 2465000$ đồng.

Câu 223. Kiến trúc sư thiết kế một con đường để chia khu đất hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 40\,\text{m}$, $AD = 60\,\text{m}$ thành hai phần (hai lề đường là các đường cong HEK và $PQIR$). Trong đó phần giới hạn bởi đường cong HEK và các đoạn AH, AB, BK là sân chơi, phần giới hạn bởi đường cong $PQIR$ và các

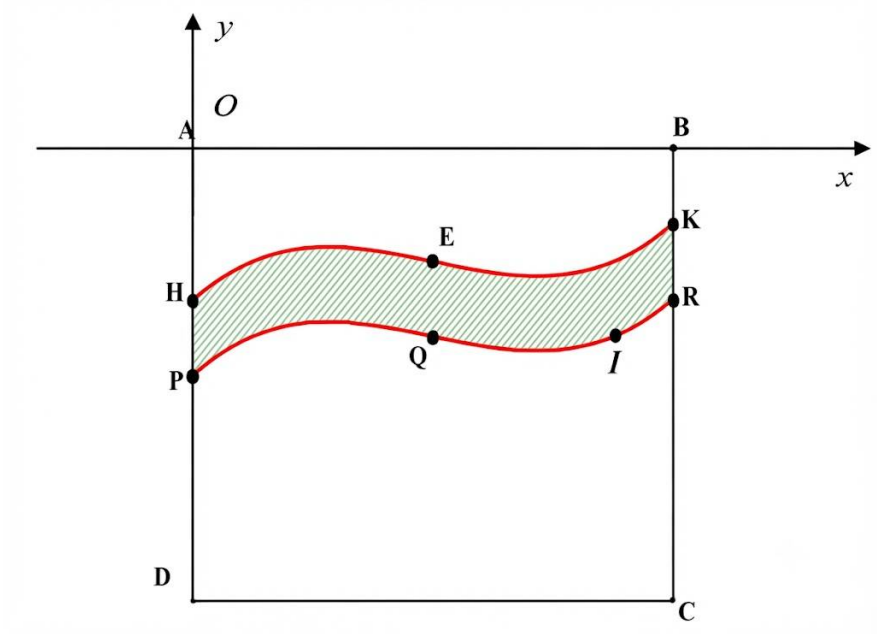
đoạn PD, DC, CR để trồng hoa (tham khảo hình vẽ). Nếu gắn một hệ trục tọa độ vuông góc có trục hoành, trục tung lần lượt cùng phương với các đường thẳng AB, AD thì đường cong $PQIR$ là một phần của đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x)$. Đường cong HEK nhận được bằng cách tịnh tiến đường cong $PQIR$ theo phương thẳng đứng lên phía trên $10\,\text{m}$. Biết $AP = 30\,\text{m}$, $BR = 20\,\text{m}$, điểm Q cách các cạnh AB, AD lần lượt $25\,\text{m}$ và $20\,\text{m}$, điểm I cách các cạnh AB, AD lần lượt $25\,\text{m}$ và $35\,\text{m}$. Gọi S_1 là diện tích phần sân chơi và S_2 là diện tích phần trồng hoa. Biết $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{m}{n}$, với $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản và $m, n \in \mathbb{Z}$, tính $2m + 3n$.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 27



Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho trục Ox trùng với cạnh AB, trục Oy trùng với cạnh AD. Khi đó ta có $A(0;0)$, $P(0;-30)$, $Q(20;-25)$, $I(35;-25)$, $R(40;-20)$

Gọi đường cong $PQIR$ có phương trình là $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, từ đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} d=-30 \\ 8000a+400b+20c+d=-25 \\ 42875a+1225b+35c+d=-25 \\ 64000a+1600b+40c+d=-20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{700} \\ b=-\dfrac{3}{35} \\ c=\dfrac{39}{28} \\ d=-30 \end{cases}$$

Ta suy ra đường cong $PQIR$ là đồ thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{1}{700}x^3-\dfrac{3}{35}x^2+\dfrac{39}{28}x-30$

Và đường cong HEK là đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{1}{700}x^3-\dfrac{3}{35}x^2+\dfrac{39}{28}x-20$

Diện tích phần sân chơi $S_1=\int\limits_0^{40}\left[-g(x)\right]dx=\int\limits_0^{40}\left[-\left(\dfrac{1}{700}x^3-\dfrac{3}{35}x^2+\dfrac{39}{28}x-20\right)\right]dx=600\,\text{m}^2$

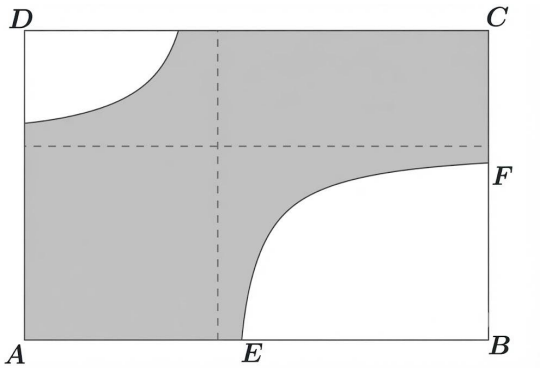
Diện tích phần trồng hoa là

$$S_2=\int\limits_0^{40}\left[f(x)+60\right]dx=\int\limits_0^{40}\left[\frac{1}{700}x^3-\frac{3}{35}x^2+\frac{39}{28}x-30+60\right]dx=1400\,\text{m}^2.$$

Vậy tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{600}{1400}=\dfrac{3}{7}$.

$\Rightarrow 2m+3n=2.3+3.7=27$

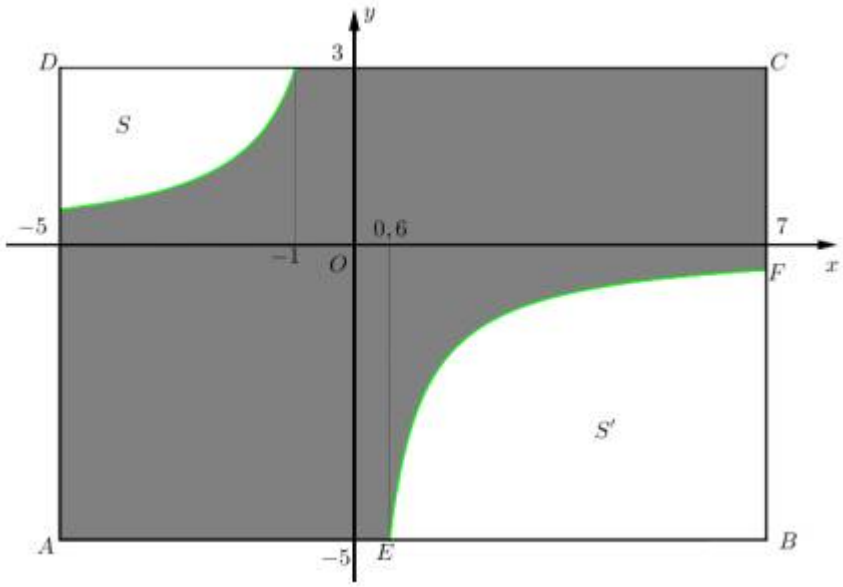
Câu 224. Một công tỉ đang thiết kế một bảng quảng cáo hình chữ nhật $ABCD$ có kích thước $AB=12\,m$ và $AD=8\,m$. Phần trung tâm của bảng sẽ được in nội dung quảng cáo, được mô tả là phần tô đậm (xem hình minh họa). Hai đường cong trong hình là một phần của đồ thị hàm số có dạng $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số này đều cách điểm A một khoảng bằng 5 m. Đồ thị giao với cạnh AB tại điểm E thỏa mãn $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{7}{15}$. Diện tích phần in nội dung quảng cáo là bao nhiêu mét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 73,5



Gán hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Đồ tị hàm số có TCD là: $x=0, TCN$ là: $y=0$ nên ta có:

$$\begin{cases} d=0 \\ a=0 \end{cases} \Rightarrow y=\frac{b}{cx}.$$

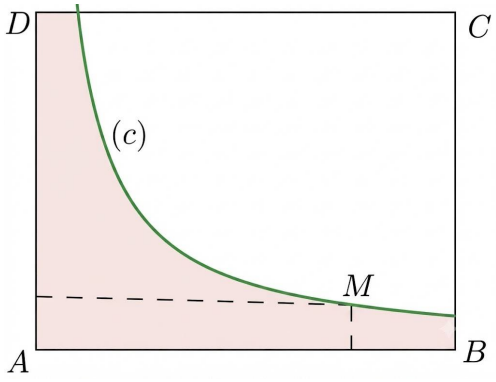
Ta có: $\frac{AE}{AB}=\frac{7}{15} \Leftrightarrow AE=\frac{7}{15}\cdot AB=\frac{7}{15}\cdot 12=5,6 \Rightarrow E(0,6;-5)$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $E(0,6;-5)$ nên $-5=\frac{b}{c\cdot 0,6} \Leftrightarrow \frac{b}{c}=-3 \Rightarrow y=-\frac{3}{x}$.

Ta có: $S=\int_{-5}^{-1}\left(5+\frac{3}{x}\right)dx=20-3\ln 5, S'=\int_{0,6}^{7}\frac{3}{x}dx=3\ln\frac{35}{3}$.

Diện tích phần in nội dung quảng cáo bằng: $S_{ABCD}-S-S'=12.8-(20-3\ln 5)-3\ln\frac{35}{3}\approx 73,5(dvdt)$..

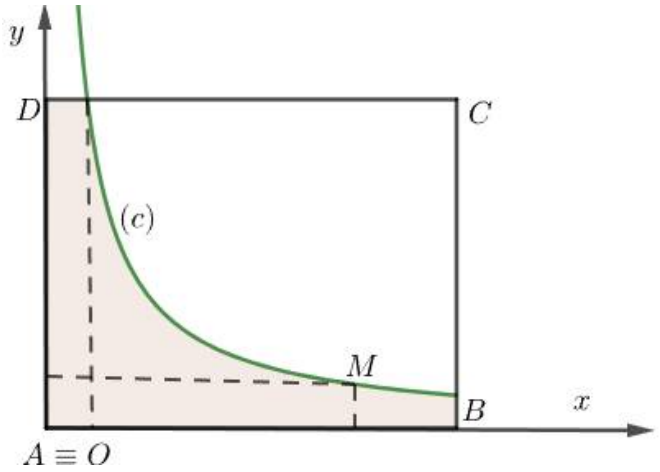
Câu 225. Một hộ gia đình thiết kế một khu vui chơi lớn cho gia đình có dạng hình chữ nhật với chiều rộng và chiều dài lần lượt là $AD=40\ m$ và $AB=50\ m$. Trong đó, phần được tô màu đậm làm nơi trồng hoa, phần còn lại để làm sân chơi. Mỗi phần trồng hoa có đường biên cong là đường cong (C) và các cạnh của hình chữ nhật. Biết mỗi điểm M trên đường cong (C) luôn có tích khoảng cách đến các cạnh AB, AD bằng $20\ m$. Số tiền chi phi để trồng hoa là 200.000 đ trên một mét vuông, số tiền làm sân chơi là 350.000 đ trên một mét vuông. Số tiền hộ gia đình cần dùng để làm sân chơi là bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của triệu đồng)?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 683



Gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, mỗi đơn vị tương ứng với $1m$. Gọi $M\left(x,y\right)$ theo bài ra ta có

$x.y=20\Rightarrow y=\dfrac{20}{x},\left(x>0\right)$

Phương trình đường $DC:y=40$

Phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{20}{x}=40\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

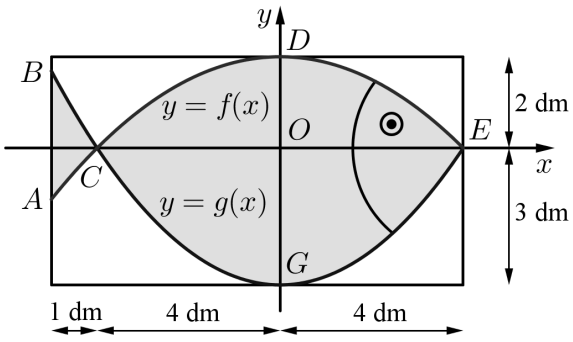
Diện tích của hình chữ nhật $ABCD$ là $S=40.50=2000\left(m^2\right)$.

Diện tích phần sân chơi là $S_1=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{50}\left|40-\dfrac{20}{x}\right|dx\approx 1888\left(m^2\right)$.

Diện tích phần trồng hoa là $S_2=S-S_1=112\left(m^2\right)$.

Chi phí cần để làm khu vui chơi lớn là $T=112.200000+1888.350000=683.200.000$ hay 683 triệu đồng

Câu 226. Trên cửa sổ có dạng hình chữ nhật, họa sĩ thiết kế logo hình con cá cho một doanh nghiệp kinh doanh hải sản. Logo là hình phẳng giới hạn bởi hai parabol với các kích thước được cho trong hình sau (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là decimét). Logo chỉ cho phép 50% lượng ánh sáng đi qua. Lượng ánh sáng đi qua toàn bộ cửa sổ sau khi làm logo sẽ giảm bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 41,7

Từ đồ thị ta thấy parabol $y=f(x)=ax^2+bx+c$ có đỉnh tại điểm $O(0;0)$ nên $c=0$ và đi qua điểm $A(2;4)$ nên $4=4a+2b$

Giả sử $b=0$ (do parabol đối xứng quá trục tung) nên $4a=4\Rightarrow a=1$ nên $y=f(x)=x^2$

Parabol $y=g(x)=mx^2+nx+p$ có đỉnh tại điểm $E(2;0)$ nên $y=-m(x-2)^2+0$ và đi qua điểm $C(3;1)$ nên $m=-1$ nên $y=g(x)=-(x-2)^2$

Phương trình hoành độ giao điểm của $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là $x^2=-(x-2)^2$

$$\Leftrightarrow 2x^2-4x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$$

Diện tích của logo là:

$$S=\int_1^2\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=\int_1^2\left(x^2+(x-2)^2\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{3}x^3-2x^2+4x\right)\Big|_1^2=\frac{20}{3}\left(\mathrm{dm}^3\right)$$

Logo chỉ cho phép 50% lượng ánh sáng đi qua. Diện tích cửa sổ là $2.4=8\left(\mathrm{dm}^3\right)$

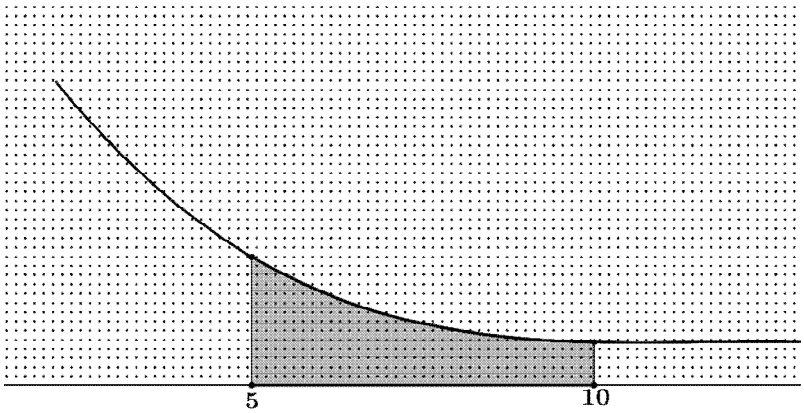
Lượng ánh sáng đi qua cửa sổ trước khi làm logo là: 100% ánh sáng $=8\left(\mathrm{dm}^3\right)$

Lượng ánh sáng đi qua cửa sổ sau khi làm logo là: $50\%.\frac{20}{3}=\frac{10}{3}\ \left(\mathrm{dm}^3\right)$

Tổng lượng ánh sáng đi qua sau khi làm là: $8-\frac{10}{3}=\frac{14}{3}\ \left(\mathrm{dm}^3\right)$

Lượng ánh sáng đi qua toàn bộ cửa sổ sau khi làm logo sẽ giảm $\frac{8-\frac{14}{3}}{8}.100\approx 41,7\ (\%)$.

Câu 227. Trong xác suất thống kê thì một biến ngẫu nhiên X được gọi là có hàm mật độ $f(x)$ nếu xác suất để X nhận giá trị trong $[a,b]$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$, đường thẳng $y=a$ và $y=b$. Đặc biệt, khi $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x\ge 0\\ 0\quad\quad, x<0\end{cases}$ trong đó λ là số thực cho trước thì X được gọi là biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với tham số λ. Chẳng hạn, tuổi thọ của một bóng đèn (đơn vị năm) là một biến ngẫu nhiên X tuân theo phân phối mũ với hệ số $\lambda=\frac{1}{5}$. Hãy tính xác suất để một bóng đèn có tuổi thọ lớn hơn 5 năm và nhỏ hơn 10 năm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



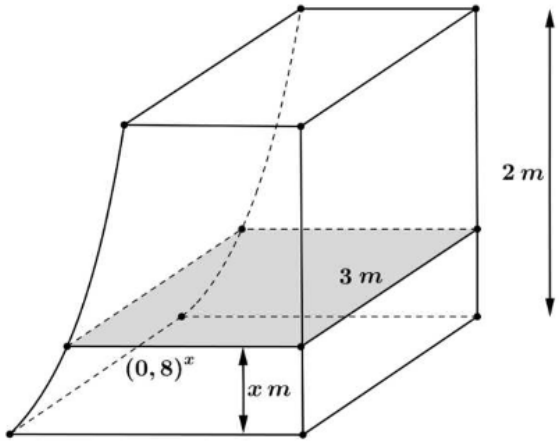
Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0,23

Hàm mật độ xác suất của X là: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x}, x\geq 0\\ 0 \quad\quad , x<0\end{cases}$. Xác suất để một bóng đèn có tuổi thọ lớn hơn 5 năm và nhỏ hơn 10 năm là: $P[5\leq X\leq 10]=\int_5^{10}\frac{1}{5}e^{\frac{-1}{5}x}\,\mathrm{d}x=-e^{-\frac{1}{5}x}\Big|_5^{10}=\frac{e-1}{e^2}\approx 0,23$

Câu 228. Một khối bê tông có chiều cao 2 mét được đặt trên mặt đất. Nếu cắt khối bê tông bởi một mặt phẳng nằm ngang và cách mặt đất x mét $(0\leq x\leq 2)$ thì được mặt cắt là một hình chữ nhật có chiều dài 3 m và chiều rộng bằng $(0,8)^x$ mét (tham khảo hình vẽ).



Tính thể tích (đơn vị m^3) của khối bê tông đó (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Trả lời: ……..

Lời giải

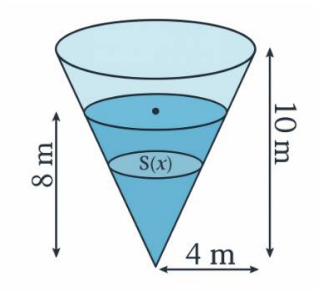
Đáp án: 4,84

Ta có diện tích của mặt cắt là $S(x)=3.0,8^x\left(m^2\right)$

Coi trục Ox là trục thẳng đứng vuông góc với mặt đất. Khi đó, ta thấy khối bê tông bị giới hạn bởi 2 mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm $x=0, x=2; S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm $x(0\leq x\leq 2)$. Và $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$.

Vậy $V=\int_0^2 S(x)dx=\int_0^2 3\cdot 0,8^x\,dx\approx 4,84$.

Câu 229. Một bể nước hình nón tròn xoay như hình vẽ có chiều cao 10 m và bán kính đáy 4 mét được đổ nước đến độ cao 8 mét. Công để bơm hết nước ra từ một vòi ở đỉnh bể được tính theo công thức $W=9,8.\int_2^{10} x.S(x).dx$ (đơn vị kilôJun), trong đó $S(x)\left(m^2\right)$ là diện tích của lớp nước cách mặt bể $x(m)$. Tính $W(kJ)$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



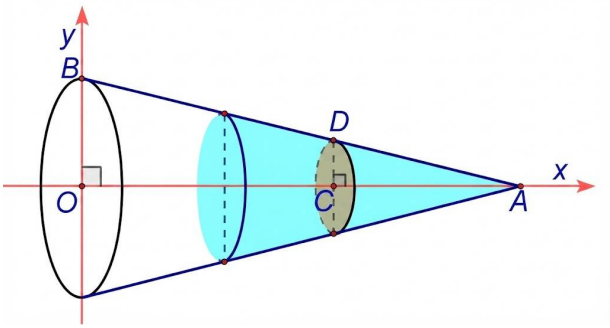
Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3363

Để tính được công để bơm hết nước ra thì ta cần đi tìm được hàm $S(x)$.

Lớp nước cách mặt bể là một hình tròn song song và cách mặt bể $x(m)$. Giả sử lớp nước hình tròn đó có bán kính là $r(m)$. Ta gắn trục tọa độ như hình sau.



Từ giả thiết, ta có $OC=x(m)\Rightarrow AC=10-x(m); OA=10(m); OB=4(m)$. Vì mặt nước cách bể song song với mặt bể nên $CD//OB$.

Khi đó, ta áp dụng hệ quả của định lý Talet trong tam giác OAB, ta có

$$\frac{AC}{OA}=\frac{CD}{OB}\Leftrightarrow\frac{10-x}{10}=\frac{r}{4}\Leftrightarrow r=\frac{4(10-x)}{10}=\frac{20-2x}{5}$$

Suy ra $S(x)=\pi r^2=\pi\left(\frac{20-2x}{5}\right)^2$

Vậy $W=9,8\cdot\int_2^{10} x\cdot\pi\left(\frac{20-2x}{5}\right)^2 dx\approx 3363(kJ)$.

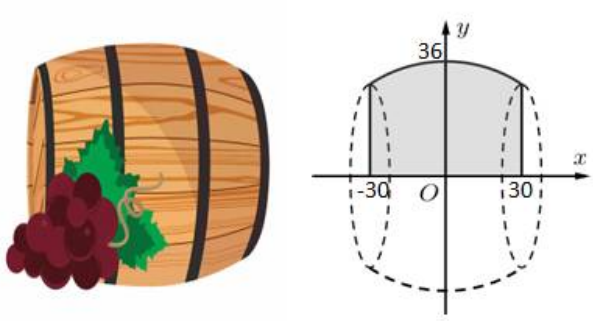
Câu 230. Xét phần bên trong của một thùng rượu: là một khối tròn xoay có 2 đáy là hình tròn bằng nhau và có chiều cao là 60 cm, đường cong (bên trong) của thùng là một cung tròn của đường tròn bán kính là 36 cm. Thùng rượu này chứa được tối đa bao nhiêu lít rượu? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của lít)



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 188

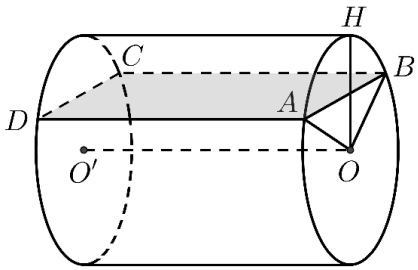


Phương trình đường tròn là: $x^2+y^2=36^2 \Rightarrow y^2=36^2-x^2$

Thể tích của thùng rượu là: $V=\pi\int\limits_{-30}^{30}\left(\sqrt{36^2-x^2}\right)^2 dx=\pi\int\limits_{-30}^{30}\left(1296-x^2\right)dx=59760\pi\left(cm^3\right)\approx 188$ lít

Vậy thùng rượu chứa được tối ta 188 lít rượu.

Câu 231. Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là 5m, có bán kính đáy 1m. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với 0,5m của đường kính đáy. Tính thể tích (theo đơn vị m^3) của lượng dầu còn lại trong bồn (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của m^3).



Trả lời: ……..

Lời giải

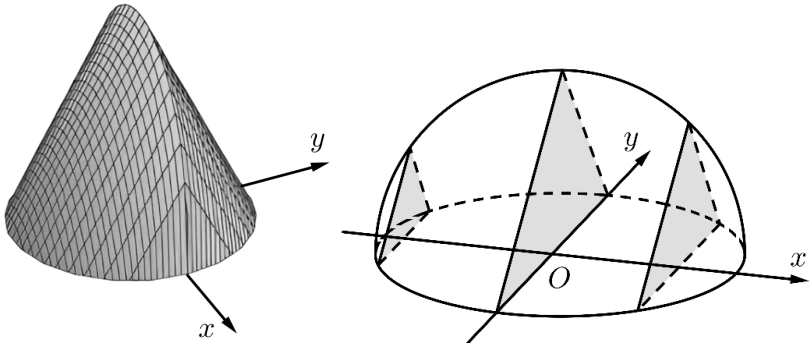
Đáp án: 12,6

Dung tích của bồn (hình trụ) đựng dầu là: $V=\pi r^2 h=\pi.1^2.5=5\pi$ m^3.

Thể tích phần đã rút dầu ra (phần trên mặt phẳng $(ABCD)$) là: $V_1=\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right).5$ m^3.

Vậy thể tích lượng dầu còn lại là: $V_2=V-V_1\approx 12,6$ m^3.

Câu 232. Một vật có kích thước và hình dáng như hình vẽ dưới đây. Đáy là hình tròn giới hạn bởi đường tròn $x^2+y^2=16$, cắt vật bởi các mặt phẳng vuông góc với trục Ox ta được thiết diện là tam giác đều. Khi đó thể tích của vật thể có dạng $\frac{a\sqrt{3}}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S=a+b$.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 259

Ta có $x^2+y^2=16\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{16-x^2}$.

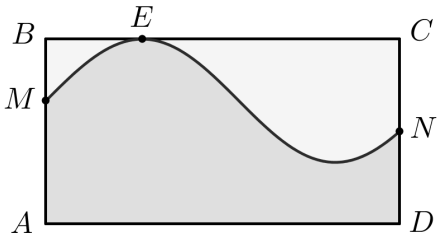
Suy ra thiết diện là tam giác đều có cạnh bằng $2\sqrt{16-x^2}$.

Do đó diện tích thiết diện là $S(x)=\left(2\sqrt{16-x^2}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}\left(16-x^2\right)$.

Thể tích cần tìm là $V=\int\limits_{-4}^{4}S(x)dx=\sqrt{3}\int\limits_{-4}^{4}\left(16-x^2\right)dx=\frac{256\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $\Rightarrow a=256,\ b=3\Rightarrow S=a+b=259$.

Câu 233. Từ một tấm tôn hình chữ nhật $ABCD$ với $AB=30$ cm, $AD=\frac{55\pi}{3}$ cm. Người ta cắt tấm tôn theo đường hình sin như hình vẽ bên để được hai miếng tôn. Biết $AM=20$ cm, $CN=15$ cm, $BE=5\pi$ cm. Tính thể tích (đơn vị: lít) của khối tròn xoay được tạo thành khi xoay miếng tôn lớn quanh trục AD (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của lít).

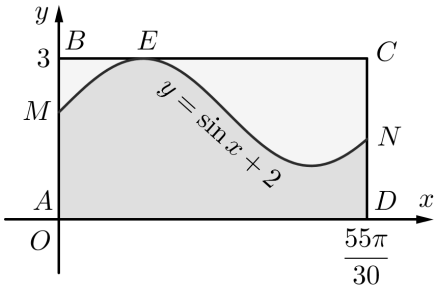


Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 83,8

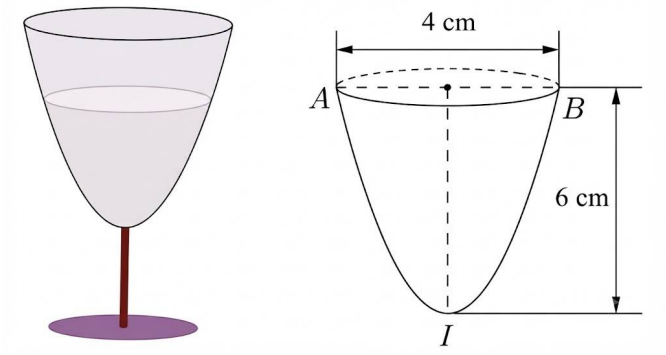
Chọn hệ trục Oxy với đơn vị trên trục là 10 cm như hình sau.



Khi đó đường cắt miếng tôn hình sin trên là đồ thị của hàm số $y=\sin x+2$, $0\le x\le \dfrac{55\pi}{30}$.

Thể tích cần tìm là $V=\pi\int\limits_0^{\frac{55\pi}{30}}\left(\sin x+2\right)^2 dx\approx 83,8$ lít.

Câu 234. Một chiếc ly hình dạng tròn xoay, có đường kính của miệng ly là 4 cm và chiều cao là 6 cm. Biết rằng thiết diện của chiếc ly cắt bởi mặt phẳng đối xứng là một parabol. Tính thể tích của chiếc ly đó (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của cm^3).

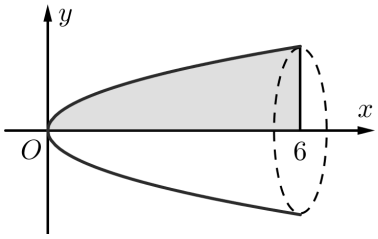


Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 37,7

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ

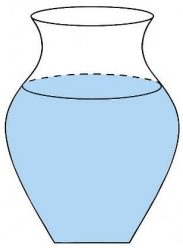


Ta được phương trình parabol là $(P): y^2=\dfrac{2}{3}x$ với $0\le x\le 6$

Thể tích vật thể đã cho là: $V=\pi\int\limits_0^6\dfrac{2}{3}x\,dx=12\pi\approx 37,7$ cm^3.

Câu 235. Một bình hoa có dạng khối tròn xoay với chiều cao là $25cm$ (tham khảo hình vẽ). Khi cắt bình hoa theo một mặt phẳng vuông góc với trục của nó thì ta luôn được thiết diện là một hình tròn có bán

kính $R=\frac{4}{9}x^3-\frac{5}{3}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{25}{36}(dm)$ với $x\in\left[0;\frac{5}{2}\right]$ là khoảng cách từ mặt cắt tới mặt đáy của bình hoa (tính theo đơn vị dm). Lượng nước cần đổ vào bình để mức nước trong bình cao bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của bình chiếm tỉ lệ bao nhiêu phần trăm so với thể tích của bình hoa? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 92

Diện tích của mặt cắt vuông góc với trục tại vị trí cách mặt đáy của bình hoa một khoảng $x(dm)$ là:

$$S(x)=\pi R^2=\pi\left(\frac{4}{9}x^3-\frac{5}{3}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{25}{36}\right)^2\left(dm^2\right)$$

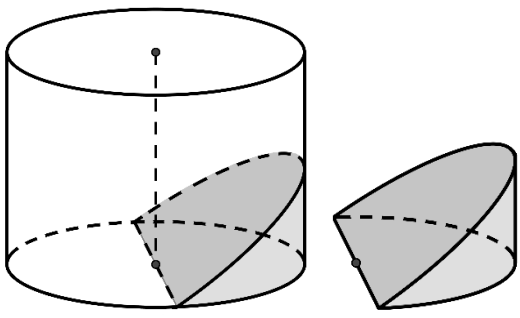
Lượng nước đổ đầy bình hoa là: $V=\int_0^{\frac{5}{2}}S(x)dx=\pi\int_0^{\frac{5}{2}}\left(\frac{4}{9}x^3-\frac{5}{3}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{25}{36}\right)^2dx\approx 3,66\left(dm^3\right)$

Lượng nước đổ vào bình cao bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của bình là:

$$V_1=\int_0^{\frac{5}{3}}S(x)dx=\pi\int_0^{\frac{5}{3}}\left(\frac{4}{9}x^3-\frac{5}{3}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{25}{36}\right)^2dx\approx 3,37\left(dm^3\right)$$

Vậy tỉ lệ phần trăm lượng nước cần đổ vào bình để mức nước trong bình cao bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của bình so với thể tích của bình hoa là $\frac{V_1}{V}\cdot 100\%=\frac{3,37}{3,66}\cdot 100\%\approx 92\%$.

Câu 236. Từ một khúc gỗ hình trụ có đường kính 30 cm, người ta cắt khúc gỗ bởi một mặt phẳng đi qua đường kính đáy và nghiêng với đáy một góc $45°$ để lấy một hình nêm (xem hình minh họa dưới). Tính thể tích (cm^3) của hình nêm.

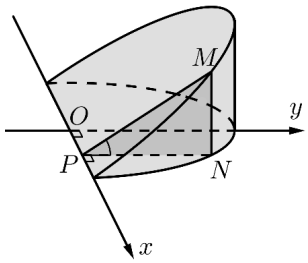


Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2250

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Khi đó hình nêm có đáy là nửa hình tròn có phương trình: $y=\sqrt{225-x^2}$, $x\in[-15;15]$.

Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x với $x\in[-15;15]$ cắt hình nêm theo thiết diện là ΔMNP có diện tích là $S(x)$ (xem hình).

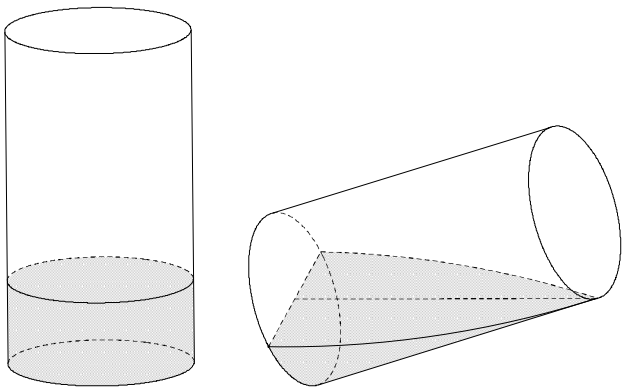
Ta có $NP=y$, $MN=NP.\tan 45^\circ=y=\sqrt{225-x^2}$.

Khi đó $S(x)=\frac{1}{2}MN.NP=\frac{1}{2}\left(225-x^2\right)$.

Suy ra thể tích hình nêm là: $V=\int\limits_{-15}^{15}S(x)dx=2250$ cm^3.

Chú ý: Có thể ghi nhớ công thức tính thể tích hình nêm: $V=\frac{2}{3}R^2h=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha$

Câu 237. Có một cốc nước thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là 6cm, chiều cao lòng cốc là 10cm đang đựng một lượng nước. Tính thể tích (đơn vị cm^3) lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì đáy mực nước trùng với đường kính đáy.



Trả lời: ……..

Lời giải

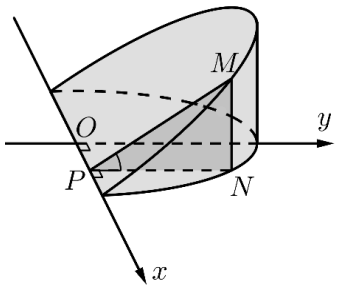
Đáp án: 240

Cách 1.

Áp dụng công thức tính thể tích hình nêm: $V=\frac{2}{3}R^2h=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha$

Thể tích khối nước tạo thành khi nguyên cốc có hình dạng cái nêm nên $V=\frac{2}{3}R^2h=\frac{2}{3}.6^2.10=240cm^3$.

Cách 2. Dựng hệ trục tọa độ $Oxyz$



Khi đó hình nêm có đáy là nửa hình tròn có phương trình: $y=\sqrt{36-x^2}$, $x\in[-6;6]$.

Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x với $x\in[-6;6]$ cắt hình nêm theo thiết diện là ΔMNP có diện tích là $S(x)$.

Ta có :

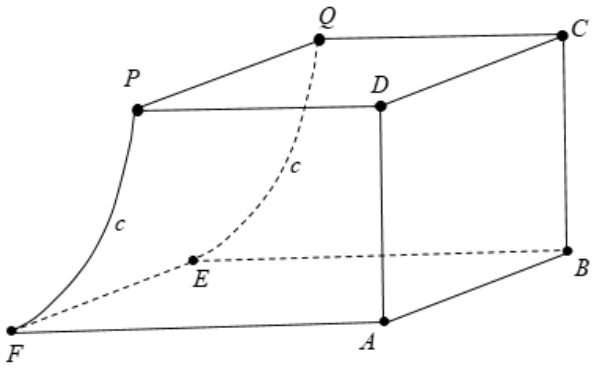
$NP=y=\sqrt{36-x^2}$

$MN=NP.\tan\widehat{MPN}=\sqrt{36-x^2}.\dfrac{10}{6}=\dfrac{5}{3}\sqrt{36-x^2}$.

Khi đó $S(x)=\dfrac{1}{2}MN.NP=\dfrac{5}{6}(36-x^2)$.

Suy ra thể tích hình nêm là: $V=\int\limits_{-6}^{6}S(x)dx=\int\limits_{-6}^{6}\dfrac{5}{6}(36-x^2)dx=240(cm^3)$

Câu 238. Một chi tiết máy được thiết kế như hình vẽ bên.

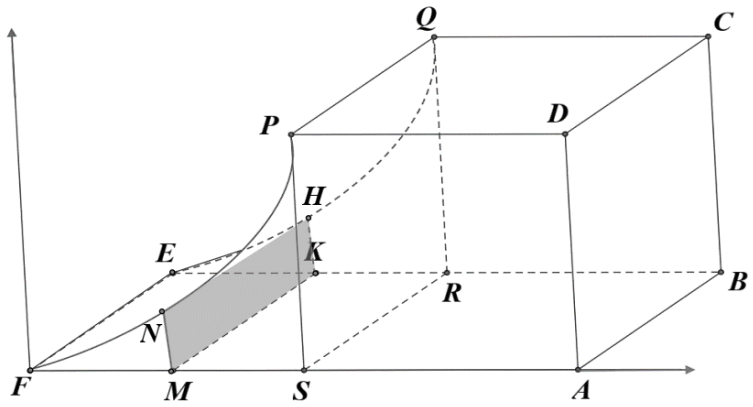


Các tứ giác $ABCD,CDPQ$ là các hình vuông cạnh $2,5cm$. Tứ giác $ABEF$ là hình chữ nhật có $BE=3,5cm$. Mặt bên $PQEF$ được mài nhẵn theo đường parabol (P) có đỉnh parabol nằm trên cạnh EF. Thể tích của chi tiết máy bằng bao nhiêu centimét khối (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của centimét khối)?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 17,7



Gọi hình chiếu của P,Q trên AF và BE là R và S.

Vật thể được chia thành hình lập phương $ABCD.PQRS$ có cạnh $2,5cm$, thể tích $V_1=\frac{125}{8}cm^3$ và phần còn lại có thể tích V_2. Khi đó thể tích vật thể $V=V_1+V_2=\frac{125}{8}+V_2$.

Đặt hệ trục $Oxyz$ sao cho O trùng với F, Ox trùng với FA, Oy trùng với tia Fy song song với AD.

Khi đó Parabol (P) có phương trình dạng $y=ax^2$, đi qua điểm $P\left(1;\frac{5}{2}\right)$ do đó $a=\frac{5}{2}\Rightarrow y=\frac{5}{2}x^2$.

Cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với Ox và đi qua điểm $M(x;0;0),0\le x\le 1$ ta được thiết diện là hình chữ nhật $MNHK$ có cạnh là $MN=\frac{5}{2}x^2$ và $MK=\frac{5}{2}$ do đó diện tích $S(x)=\frac{25}{4}x^2$

Áp dụng công thức thể tích vật thể ta có $V_2=\int_0^1\frac{25}{4}x^2dx=\frac{25}{12}$

Từ đó $V=\frac{125}{8}+\frac{25}{12}=\frac{425}{24}\approx 17,7\left(cm^3\right)$

Câu 239. Hai ống nhựa PVC hình trụ có cùng bán kính $R=5$ cm xuyên qua nhau sao cho trục của hai ống cắt và vuông góc với nhau (xem hình minh họa). Tính thể tích phần chung của hai ống nhựa đó. *(bề dày của ống nhựa là không đáng kể; đơn vị tính là* cm^3 *và đáp số được làm tròn đến hàng đơn vị)*

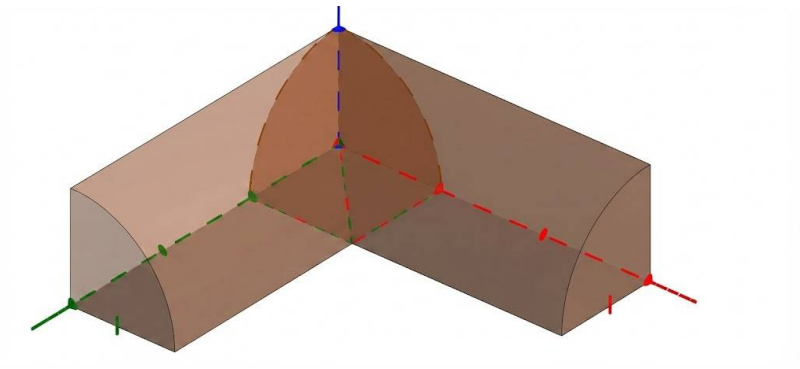


Trả lời: ……..

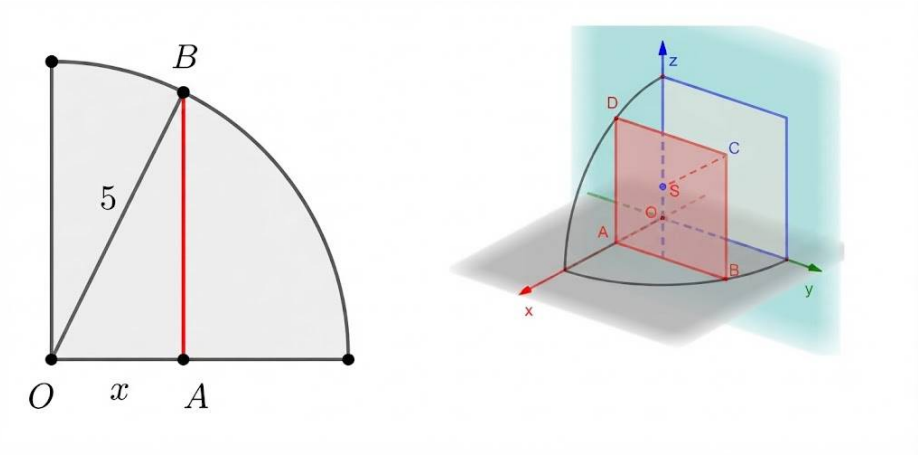
Lời giải

Đáp án: 667

Ta xét $\frac{1}{8}$ phần giao của hai khối trụ như hình vẽ.



Ta gọi hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ.



Khi đó phần giao (H) là một vật thể có đáy là một phần tư hình tròn tâm O bán kính 5.

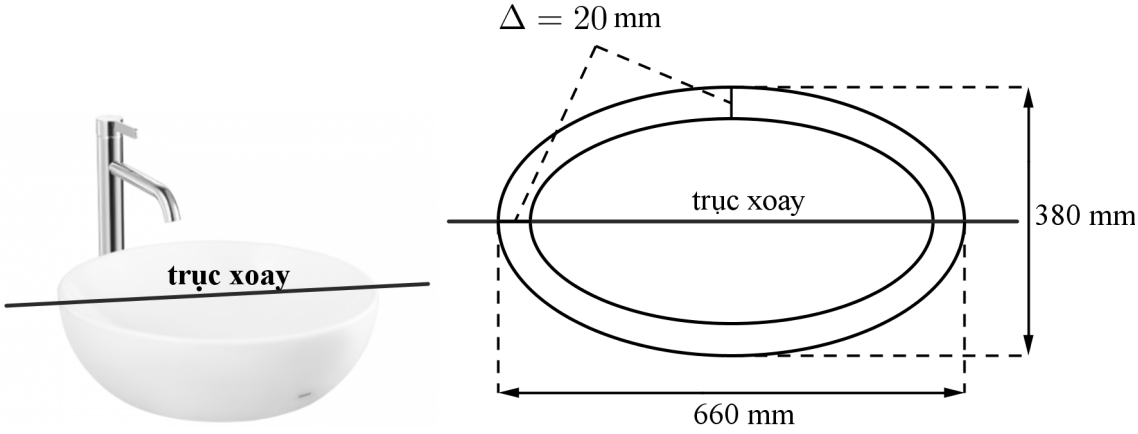
Hình tạo bởi các đoạn giao tuyến của mặt phẳng vuông góc với trục Ox là một hình vuông $ABCD$ có cạnh $AB=\sqrt{OB^2-OA^2}=\sqrt{5^2-x^2}$.

Suy ra diện tích $S(x)=5^2-x^2$.

Thể tích khối (H) là: $\int_0^5 S(x)dx=\int_0^5\left(25-x^2\right)dx=\frac{250}{3}$.

Vậy thể tích phần giao là $8\cdot\frac{250}{3}=\frac{2000}{3}\approx 667\left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 240. Hình elip được ứng dụng nhiều trong thực tiễn, đặc biệt là kiến trúc, xây dựng, thiết bị nội thất,. Mặt trong (lọt lòng) và ngoài (phủ bì) của một bồn rửa (lavabo) bằng sứ có hình dạng là một nửa khối tròn xoay khi quay quanh một trục của 2 elip có chung các trục đối xứng (hình minh họa). Thông số kĩ thuật mặt trên của bồn rửa: dài × rộng là 660×380 mm (phủ bì) và elip (lọt lòng) có trục lớn, trục nhỏ ít hơn elip phủ bì một khoảng 40 mm. Tính thể tích chứa nước của bồn rửa (đơn vị: lít) (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Trả lời: ……..

Lời giải

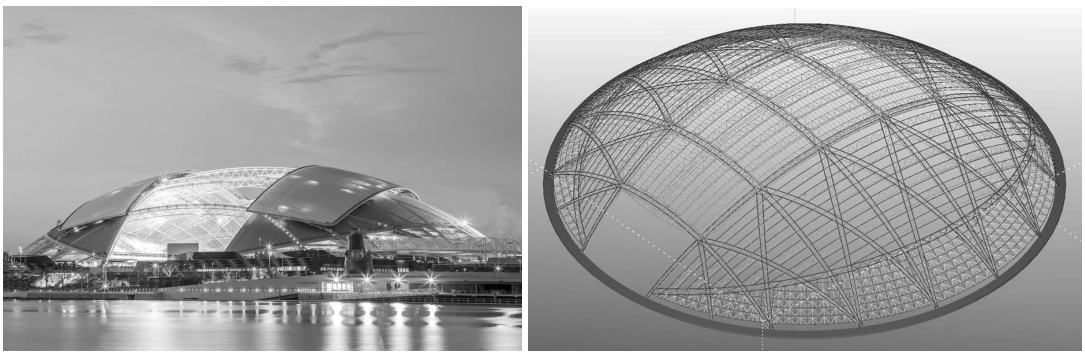
Đáp án: 18,8

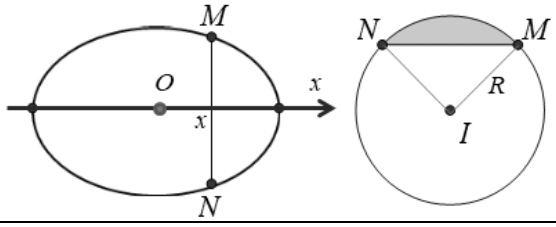
Chọn hệ trục tọa độ Oxy thích hợp với đơn vị trên trục là decimet.

Phương trình elip lọt lòng: $(E): \frac{x^2}{3,1^2}+\frac{y^2}{1,7^2}=1 \Leftrightarrow y=\pm 1,7\sqrt{1-\frac{x^2}{3,1^2}}$.

Thể tích chứa nước của bồn rửa: $V=\frac{1}{2}.\pi \int\limits_{-3,1}^{3,1} 1,7^2\left(1-\frac{x^2}{3,1^2}\right)dx \approx 18,8$ lít.

Câu 241. Sân vận động Sport Hub (Singapore) là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức tại Singapore năm 2015. Nền sân là một elip (E) có trục lớn dài $150m$, trục bé dài $90m$ (hình vẽ). Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của (E) và cắt elip ở M, N (hình vẽ) thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm I (phần tô đậm trong hình 4) với MN là một dây cung và góc $\widehat{MIN}=90^0$. Để lắp máy điều hòa không khí thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu là mái không đáng kể. Hỏi thể tích phần không gian bên trong sân vận động bằng nhiêu kilômét vuông? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của kilômét vuông).

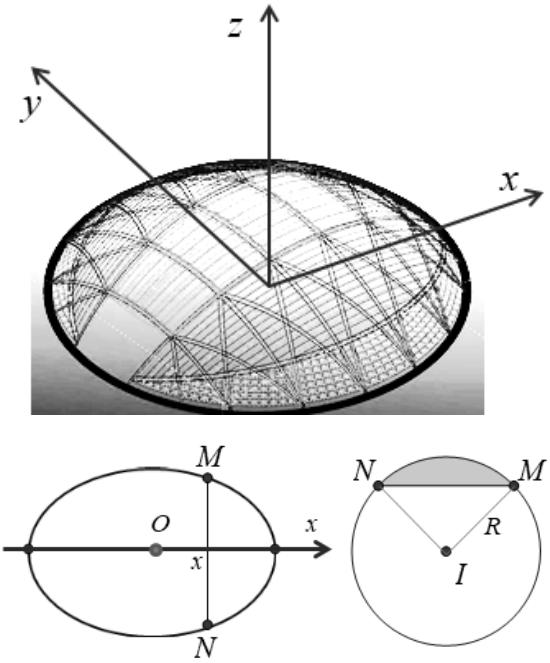




Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 116



Chọn hệ trục như hình vẽ

Ta cần tìm diện tích của $S(x)$ thiết diện.

Gọi $d(O,MN)=x$

$(E):\dfrac{x^2}{75^2}+\dfrac{y^2}{45^2}=1.$

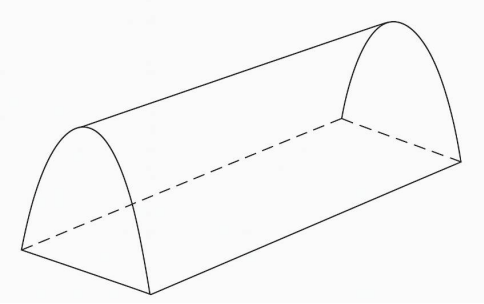
Lúc đó $MN=2y=2\sqrt{45^2\left(1-\dfrac{x^2}{75^2}\right)}=90\sqrt{1-\dfrac{x^2}{75^2}}$

$\Rightarrow R=\dfrac{MN}{\sqrt{2}}=\dfrac{90}{\sqrt{2}}.\sqrt{1-\dfrac{x^2}{75^2}}\Rightarrow R^2=\dfrac{90^2}{2}.\left(1-\dfrac{x^2}{75^2}\right)$

$S(x)=\dfrac{1}{4}\pi R^2-\dfrac{1}{2}R^2=\left(\dfrac{1}{4}\pi-\dfrac{1}{2}\right)R^2=(\pi-2)\dfrac{2025}{2}.\left(1-\dfrac{x^2}{75^2}\right).$

Thể tích khoảng không cần tìm là: $V=\int\limits_{-75}^{75}(\pi-2)\dfrac{2025}{2}.\left(1-\dfrac{x^2}{75^2}\right)\approx 115586\left(m^3\right)\approx 116\left(km^3\right)$

Câu 242. Nhân dịp đi dã ngoại, lớp 12A dự kiến dựng một cái trại các khung xương có dạng hình parabol như hình vẽ. Nền của lều trại là một hình chữ nhật có kích thước bề ngang 3 mét, chiều dài 5 mét, đỉnh trại cách nền 3 mét. Thể tích phần không gian bên trong lều trại bằng bao nhiêu mét khối?

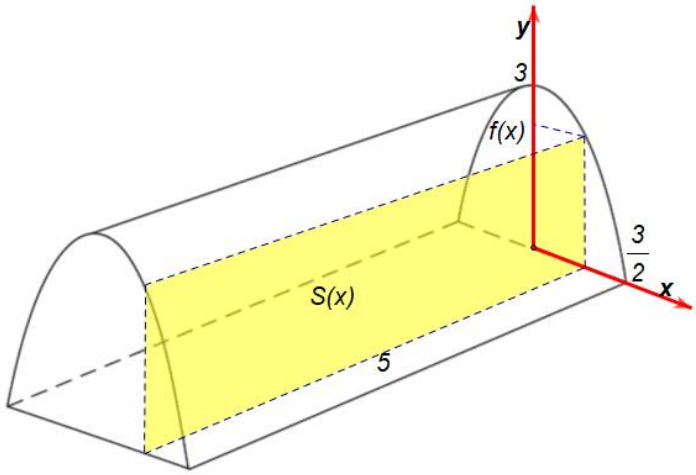


Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 30

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, hình dạng khung trại là parabol có phương trình $y=f(x)=ax^2+bx+c$, vì đỉnh trại cao 3 m và bề ngang rộng 3 m nên parabol đi qua điểm $(0;3)$ và $\left(\frac{3}{2};0\right)$.



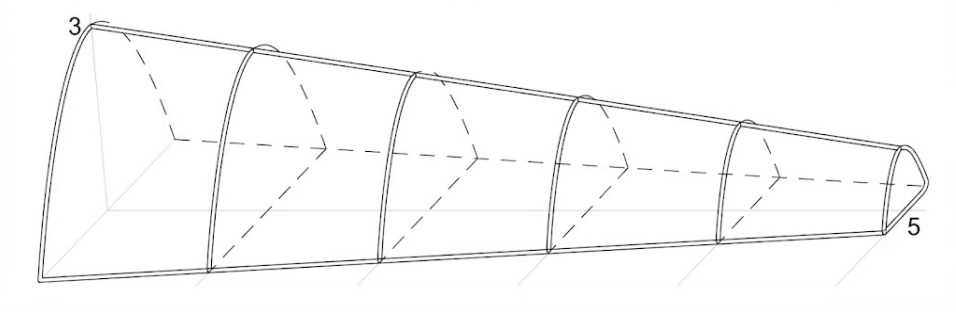
Ta có : $\begin{cases} b=0 \\ 3=c \\ 0=a\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=-\frac{4}{3} \\ c=3 \end{cases}$

Suy ra parabol có phương trình $y=f(x)=-\frac{4}{3}x^2+3$.

Mỗi mặt phẳng vuông góc Ox tại điểm có hoành độ $x, 0\le x\le h$ cắt khối chót theo mặt cắt là hình chữ nhật có độ dài các cạnh lần lượt là 5 và $|f(x)|$, có diện tích $S(x)=5.|f(x)|$, với $-\frac{3}{2}\le x\le\frac{3}{2}$.

Vậy thể tích phần không gian trong trại là $V=\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}5.|f(x)|dx=5.\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}\left|-\frac{4}{3}x^2+3\right|dx=30\,m^3$.

Câu 243. Cho một mô hình $3D$ mô phỏng một đường hầm như hình vẽ bên dưới.

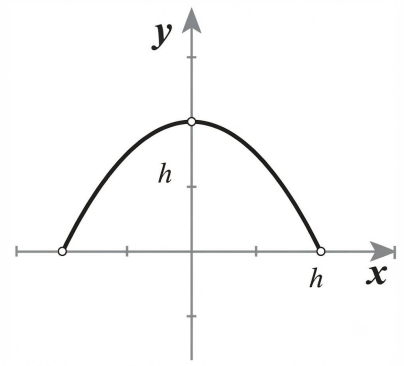


Biết rằng đường hầm mô hình có chiều dài $5(\text{cm})$; khi cắt hình này bởi mặt phẳng vuông góc với đáy của nó, ta được thiết diện là một hình parabol có độ dài đáy gấp đôi chiều cao parabol. Chiều cao của mỗi thiết diện parobol cho bởi công thức $y=3-\frac{2}{5}x\ (\text{cm})$, với $x\ (\text{cm})$ là khoảng cách tính từ lối vào lớn hơn của đường hầm mô hình. Tính thể tích (theo đơn vị cm^3) không gian bên trong đường hầm mô hình (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 29



Xét một thiết diện parabol có chiều cao là h và độ dài đáy $2h$ và chọn hệ trục Oxy như hình vẽ trên.

Parabol (P) có phương trình (P): $y=ax^2+h,\ (a<0)$

Có $B(h;0)\in(P)\Leftrightarrow 0=ah^2+h\Leftrightarrow a=-\frac{1}{h}\ (do\ h>0)$

Diện tích S của thiết diện: $S=\int_{-h}^{h}\left(-\frac{1}{h}x^2+h\right)\text{dx}=\frac{4h^2}{3}$, với $h=3-\frac{2}{5}x$

$\Rightarrow S(x)=\frac{4}{3}\left(3-\frac{2}{5}x\right)^2$

Suy ra thể tích không gian bên trong của đường hầm mô hình:

$\Rightarrow V=\int_0^5 S(x)\text{dx}=\int_0^5\frac{4}{3}\left(3-\frac{2}{5}x\right)^2\text{dx}\approx 28,888\Rightarrow V\approx 29\ (\text{cm}^3)$

Câu 244. Một quả bóng bầu dục theo quy định được sử dụng trong giải bóng bầu dục quốc gia có kích thước 28cm từ đầu này đến đầu kia và đường kính 17cm ở phần dày nhất (quy định cho phép thay đổi một chút về các kích thước này)



Hình dạng của một quả bóng bầu dục có kích thước nói trên có thể được tạo thành khi quay phần diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$, trục hoành và các đường thẳng $x=-4; x=24$, trong đó x tính bằng cm. Thể tích (đơn vị: cm^3, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị) của quả bóng bầu dục có kích thước nói trên bằng bao nhiêu.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3390

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho parabol $f(x)=ax^2+bx+c$ cắt trục hoành tại các điểm $(-4;0)$, $(24;0)$ và tọa độ đỉnh $I\left(10;-\frac{17}{2}\right)$.

ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}16a-4b+c=0\\576a+24b+c=0\\100a+10b+c=-\frac{17}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{17}{392}\\b=-\frac{85}{98}\\c=-\frac{204}{49}\end{cases}$$

Nên $f(x)=\frac{17}{392}x^2-\frac{85}{98}x-\frac{204}{49}$

Thể tích của quả bóng bầu dục là

$$V=\pi\int_{-4}^{24}\left[f(x)\right]^2dx=\pi\int_{-4}^{24}\left[\frac{17}{392}x^2-\frac{85}{98}x-\frac{204}{49}\right]^2dx=\frac{16184\pi}{15}\approx 3390\ \text{cm}^3.$$

Câu 245. Một nhà máy nhiệt điện sử dụng 100 máng Parabol thu nhiệt năng lượng mặt trời có cùng kích thước, bề mặt cong đều nhau (tham khảo hình vẽ).

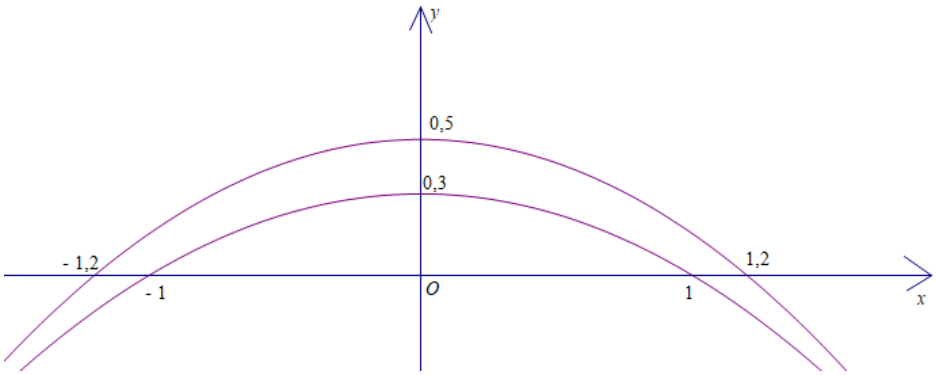


Mỗi máng có chiều rộng $2m$, bề dày của khối silic làm mặt máng là $2dm$, chiều dài $3m$. Đặt máng tiếp giáp mặt đất có điểm cao nhất của khối silic làm mặt máng so với mặt đất là $5dm$. Khi đó thể tích của khối silic làm 100 mặt máng bằng bao nhiêu m^3?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 120



Xét hệ trục Oxy như hình vẽ.

Khi đó đường Parabol tương ứng với vành trên và vành dưới của máng lần lượt là $(P_1): f(x)=ax^2+b$ và $(P_2): g(x)=mx^2+n$.

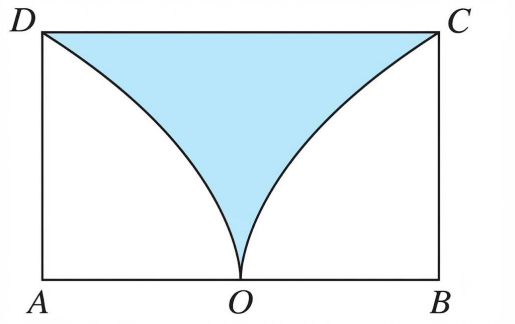
Ta có (P_1) đi qua các điểm $(0;0,5)$ và $(-1,2;0) \Rightarrow f(x)=-\dfrac{25}{72}x^2+0,5$.

(P_2) đi qua các điểm $(0;0,3)$ và $(-1;0) \Rightarrow g(x)=-\dfrac{3}{10}x^2+0,3$.

Diện tích mặt cắt của máng $S=\int\limits_{-1,2}^{1,2} f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x=0,4$.

Thể tích khối silic $V=100.\int\limits_0^3 S(x)\mathrm{d}x=100.\int\limits_0^3 0,4\mathrm{d}x=120\left(\mathrm{m}^3\right)$.

Câu 246. Từ hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB=8cm$ và chiều rộng $BC=4cm$, người ta cắt bỏ miền (R) được giới hạn bởi cạnh CD của hình chữ nhật và hai nửa đường thẳng parabol có chung đỉnh là trung điểm cạnh AB, chúng lần lượt đi qua hai đầu mút C,D của hình chữ nhất đó (phần tô đậm như hình vẽ). Phần còn lại cho quay quanh trục AB để tạo nên một đồ vật làm trang trí, thể tích của vật trang trí đó bằng bao nhiêu cm^3. Viết kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 201

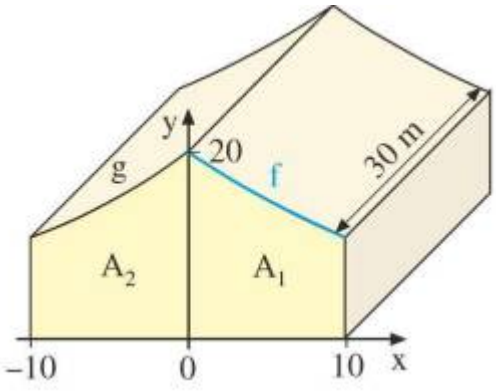
Phương trình Parabol OC có dạng: $y^2 = ax$

Mặt khác Parabol đi qua điểm $C(4;4) \Rightarrow 4^2 = 4a \Rightarrow a = 4$

Khi đó phương trình đường cong OC là $y = \sqrt{4x}$.

Thể tích của vật thể thu được là: $V = 2\left(\pi\int_0^4 (\sqrt{4x})^2\,dx\right) = 64\pi \approx 201\left(cm^3\right)$.

Câu 247. Thể tích không khí của chiếc lều hội chợ trong hình bên dưới là bao nhiêu ML (megalit) (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



Biết biên dạng mái lều được cho bởi hai hàm biên: $f(x) = 20\cdot e^{-\frac{1}{40}x}$, $g(x) = 20\cdot e^{\frac{1}{40}x}$

Trả lời: ……..

Lời giải

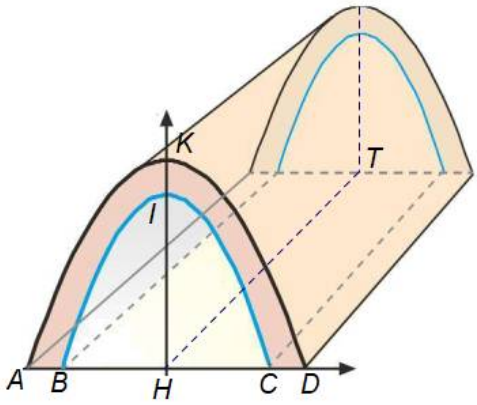
Đáp án: 10,6

Diện tích nửa phải: $A_1 = \int_0^{10} 20e^{-\frac{1}{40}x}\,dx = \left[-800e^{-\frac{1}{40}x}\right]\Big|_0^{10} \approx 176,96\,m^2$

Mặt cắt đối xứng nên $A = A_1 + A_2 = 2A_1 \approx 353,92\,m^2$

Thể tích không khí: $V = A\cdot 30 \approx 353,92\cdot 30 \approx 10617,6\,m^3 \approx 10,6(\text{ML})$

Câu 248. Trên một tuyến đường thẳng có một đoạn phải đi xuyên qua một quả núi nhỏ, do đó người ta đã tạo một hầm chui để thuận tiện cho các phương tiện giao thông di chuyển, vòm của hầm chui được đổ bê tông có dạng như hình vẽ dưới đây



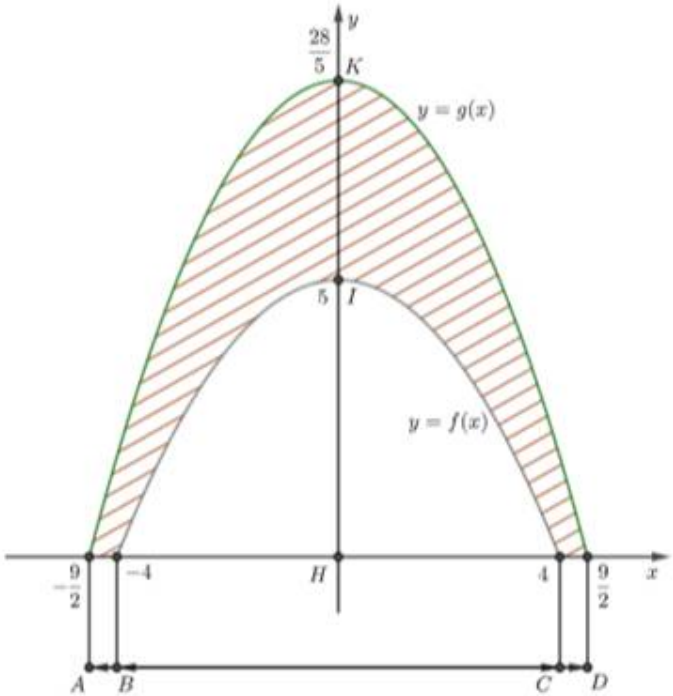
Cho biết $BC=8(m);IH=5(m);IK=0,6(m);AB=CD=0,5(m);HT=10(m)$. Biết khi cắt vòm của hầm chui bằng mặt phẳng vuông góc với trục của tuyến đường ta luôn có thiết diện là một hình phẳng được giới hạn bởi hai parabol và giao tuyến của mặt cắt với mặt đường. Hỏi cần bao nhiêu mét khối bê tông để đổ vòm của hầm chui. (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 69,3

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai parabol và giao tuyến của mặt cắt với mặt đường. Thể tích vòm của hầm chui được đổ bê tông là: $V=S.HT=10S$. Gắn phần diện tích vào hệ trục tọa độ Oxy, ta có đồ thị như hình vẽ.



Từ đồ thị, ta xác định được hai hàm số parabol:

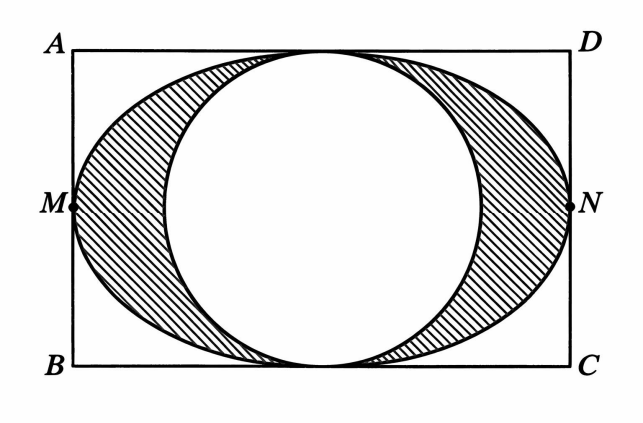
$$g(x)=k\left(x^2-\frac{81}{4}\right)\xrightarrow{g(0)=\frac{28}{5}}k=-\frac{112}{405}\Rightarrow g(x)=-\frac{112}{405}\left(x^2-\frac{81}{4}\right)$$

$$f(x)=h\left(x^2-16\right)h=-\frac{5}{16}\Rightarrow h(x)=-\frac{5}{16}\left(x^2-16\right)$$

$$\Rightarrow S=\int_{\frac{-9}{2}}^{\frac{9}{2}}g(x)dx-\int_{-4}^{4}f(x)dx=\int_{\frac{-9}{2}}^{\frac{9}{2}}\left(-\frac{112}{405}\left(x^2-\frac{81}{4}\right)\right)dx-\int_{-4}^{4}\left(-\frac{5}{16}\left(x^2-16\right)\right)dx=\frac{104}{15}.$$

Vậy thể tích của vòm là: $V=\frac{104}{15}\cdot 10=\frac{208}{3}\approx 69,3\left(m^3\right)$.

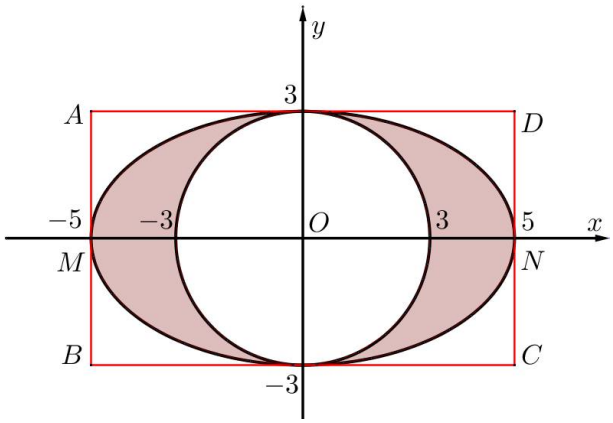
Câu 249. Một vật trang trí có dạng một khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (R) (phần gạch chéo trong hình vẽ) quanh trục MN. Biết rằng $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=6cm, AD=10cm$ và M,N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Hai đường cong là đường Elip có hình chữ nhật cơ sở là $ABCD$ và đường tròn tiếp xúc với hai cạnh AD và BC (tham khảo hình vẽ). Tính thể tích của vật trang trí đó (*kết quả làm tròn đến hàng phần chục theo đơn vị* cm^3).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 75



Gắn vào hình chữ nhật $ABCD$ hệ trục tọa độ Oxy với gốc O trùng với giao hai đường chéo, các điểm M,N nằm trên Ox (tham khảo hình vẽ).

Do MN là trục đối xứng của miền (R) nên khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (R) quanh trục MN trùng với khối tròn xoay được tạo thành khi quay phần (R) nằm phía trên MN quanh MN.

Gọi V_1, V_2, V tương ứng là thể tích của các khối tròn xoay được tạo thành khi quay Elips (E), hình tròn (C) và miền (R) quanh MN (hay quanh Ox), ta có $V = V_1 - V_2$.

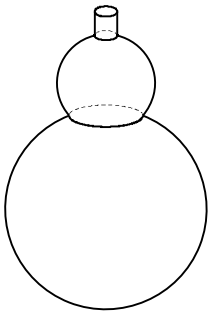
Elip (E) có các bán trục $a = \frac{1}{2}AD = 5, b = \frac{1}{2}AB = 3$ nên có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Ta có $V_1 = \pi \int_{-5}^{5} 9\left(1 - \frac{x^2}{25}\right)dx = \pi\left(9x - \frac{9}{25}x^3\right)\Big|_{-5}^{5} = 60\pi \ (cm^3)$.

Hình tròn (C) có tâm tại O, bán kính $R = 3$ khi quay quanh MN tạo thành khối cầu tâm O, bán kính bằng 3. Do đó $V_2 = \frac{4}{3}\pi.3^3 = 36\pi \ (cm^3)$.

Vậy thể tích của vật trang trí đó là: $V = V_1 - V_2 = 24\pi \simeq 75(cm^3)$.

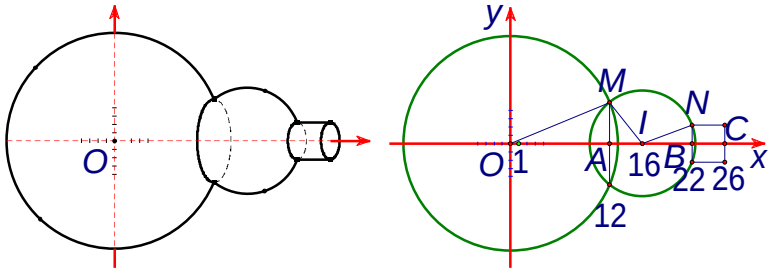
Câu 250. Người ta cắt hai hình cầu có bán kính lần lượt là $R = 13cm$ và $r = \sqrt{41}cm$ để làm hồ lô đựng rượu như hình vẽ bên. Biết đường tròn giao của hai hình cầu có bán kính $r' = 5cm$ và nút đựng rượu là một hình trụ có bán kính đáy bằng $\sqrt{5}\ cm$, chiều cao bằng $4cm$. Giả sử độ dày vỏ hồ lô không đáng kể. Hỏi hồ lô đựng được bao nhiêu lít rượu? (kết quả làm tròn đến phần mười của decimét khối).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 10,

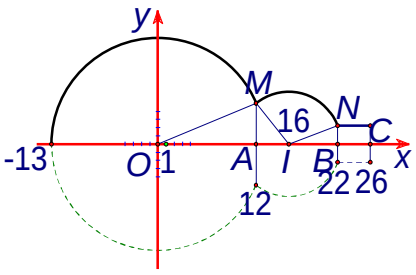


Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Ta có:

$OM = R = 13, AM = r' = 5 \Rightarrow OA = 12 \Rightarrow A(12;0)$.

$IM = r = \sqrt{41}, AM = r' = 5 \Rightarrow AI = \sqrt{41 - 5^2} = 4 \Rightarrow I(16;0)$

$IN = r = \sqrt{41}, BN = r_T = \sqrt{5} \Rightarrow IB = \sqrt{41 - 5} = 6 \Rightarrow B(22;0), C(26;0)$.



Ta có:

$(C_1): x^2 + y^2 = 13^2 \Rightarrow y^2 = 169 - x^2 \Rightarrow V_1 = \pi \int\limits_{-13}^{12} (169 - x^2)\mathrm{d}x = \dfrac{8750\pi}{3}.$

$(C_2): (x-16)^2 + y^2 = \sqrt{41}^2 \Rightarrow y^2 = 41 - (x-16)^2 \Rightarrow V_2 = \pi \int\limits_{12}^{22} \left[41 - (x-16)^2\right]\mathrm{d}x = \dfrac{950\pi}{3}.$

$V_3 = \pi \int\limits_{22}^{26} \sqrt{5}^2 \mathrm{d}x = 20\pi.$

Vậy $V = V_1 + V_2 + V_3 = \dfrac{9760\pi}{3} \approx 10220,65\ cm^3 \approx 10,2\ dm^3.$