

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 04 trang)

Môn thi: Toán

Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Họ, tên thí sinh:

Số báo danh:

Mã đề: 0110

Phần I. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12, mỗi câu hỏi chọn một phương án.**Câu 1.** Phương trình $\sin x = 0$ có tập nghiệm là

A. $S = \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $S = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$

C. $S = \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$

D. $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 2. Sau khi khảo sát về mức lương khởi điểm (đơn vị: triệu đồng) của 20 công nhân, người ta thu được mẫu số liệu ghép nhóm như sau:

Mức lương	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10)	[10; 11)
Tần số	4	5	5	3	2	1

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đó bằng

A. 6.

B. 1.

C. 7,35.

D. 1,42.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình của đường thẳng đi qua điểm $A(1; 3; -5)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -1; 3)$ là

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-5}{3}.$

B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+5}{3}.$

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+5}{3}.$

D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-5}{3}.$

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có một nguyên hàm là $F(x)$ thỏa mãn $F(1) = 3$, $F(2) = 9$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int_1^2 f(x) dx = 12.$

B. $\int_1^2 f(x) dx = 3.$

C. $\int_1^2 f(x) dx = 6.$

D. $\int_1^2 f(x) dx = 27.$

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax+4}{3x+1}$ (với $a > 12$). Đạo hàm của hàm số đã cho là

A. $y' = \frac{-a-12}{(3x+1)^2}.$

B. $y' = \frac{a-12}{(3x+1)^2}.$

C. $y' = \frac{a+12}{(3x+1)^2}.$

D. $y' = \frac{12-a}{(3x+1)^2}.$

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$). Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int 7f(x) dx = 7 + \int f(x) dx.$

B. $\int 7f(x) dx = 7 \int f(x) dx.$

C. $\int 7f(x) dx = 7 - \int f(x) dx.$

D. $\int 7f(x) dx = -7 \int f(x) dx.$

Câu 7. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên đoạn $[-1; 2]$ như sau:

x	-1	0	1	2	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	-4	1	0	5	

Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

- A. 1. B. 5. C. 0. D. -4.

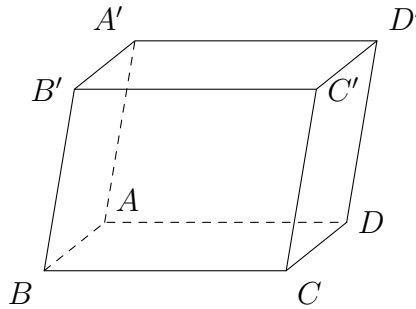
Câu 8. Sau khi khảo sát tổng số giờ xem truyền hình (đơn vị: giờ) của 100 gia đình trong hai ngày nghỉ cuối tuần, người ta thu được mẫu số liệu ghép nhóm như sau:

Số giờ xem truyền hình	$[0; 2)$	$[2; 4)$	$[4; 6)$	$[6; 8)$	$[8; 10)$
Tần số	20	35	30	10	5

Giá trị trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm đó bằng (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

- A. 3,9. B. 4,6. C. 2,1. D. 10.

Câu 9. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (xem hình minh họa bên dưới). Vectơ nào sau đây cùng phương với vectơ $\vec{A'D'}$?

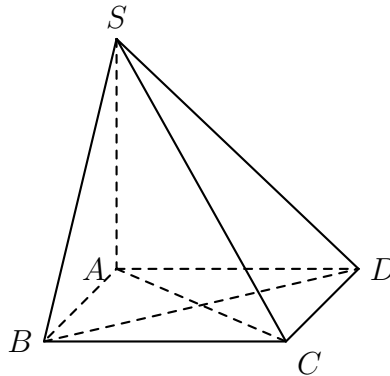


- A. $\vec{BD}$. B. $\vec{AB}$. C. $\vec{AC}$. D. $\vec{AD}$.

Câu 10. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q với $u_1 = m$ và $u_2 = n$, trong đó $m > 2, n > 2m$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. $n = m \cdot q$. B. $m = n + q$. C. $m = n \cdot q$. D. $n = m + q$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc với $(ABCD)$. Đường thẳng BC vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau đây?



- A. (SCD) . B. (SAB) . C. (SBC) . D. (SBD) .

Câu 12. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 - \cos x$ là

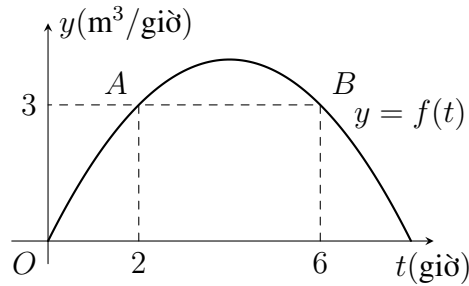
- A. $x^3 + \sin x + C$. B. $6x + \sin x + C$. C. $6x - \sin x + C$. D. $x^3 - \sin x + C$.

Phần II. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4, trong ý a), b), c), d) ở mỗi câu câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$.

- a) Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.
b) Phương trình $f'(x) = 0$ có tập nghiệm là $S = \{1; 3\}$.
c) Hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[2; 4]$ tại $x = 2$.
d) Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$. Khi đó, phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $M_1(x_1; f(x_1))$ và $M_2(x_2; f(x_2))$ là $y = -2x + 1$.

Câu 2. Người ta dùng một thiết bị bơm nước vào một bể không có nước. Tính từ lúc thiết bị bắt đầu hoạt động, tại thời điểm t giờ với $0 \leq t \leq 8$, thiết bị đó có tốc độ bơm nước vào bể là $f(t)$ ($\text{m}^3/\text{giờ}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(t)$ là một phần đường parabol đi qua gốc tọa độ O và hai điểm $A(2; 3)$, $B(6; 3)$ (xem hình minh họa bên dưới).



- Với $0 \leq t \leq 8$ thì $f(t) = 3t - \frac{t^2}{6}$ ($\text{m}^3/\text{giờ}$).
- Tại thời điểm t giờ ($0 \leq t \leq 8$) tính từ lúc thiết bị bắt đầu hoạt động, lượng nước trong bể là $V(t) = t^2 - \frac{t^3}{12}$ (m^3).
- Tại thời điểm thiết bị có tốc độ bơm nước vào bể là lớn nhất, lượng nước trong bể lớn hơn 10,7 mét khối.
- Sau $\frac{a}{b}$ giờ tính từ lúc thiết bị bắt đầu hoạt động (trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $b > 0$), lượng nước trong bể là 13,824 mét khối. Khi đó, giá trị của $a + b$ là 29.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một trạm thu phát sóng điện thoại di động được đặt ở vị trí $I(2; 1; 12)$, trong đó một đơn vị độ dài trên mỗi trục tương ứng với 10 mét trên thực tế. Trạm thu phát sóng đó có bán kính phủ sóng là 130 mét. Vùng phủ sóng của trạm thu phát được quy ước là tập hợp tất cả các điểm P trên mặt đất và trong không gian sao cho khoảng cách IP không vượt quá 130 mét. Mặt đất được coi là một phần của mặt phẳng (Oxy) và mỗi người trên mặt đất được coi như một chất điểm.

- Vùng phủ sóng của trạm thu phát là một phần của hình cầu giới hạn bởi mặt cầu (S) có phương trình $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 12)^2 = 169$.
- Giả sử một người cầm điện thoại đang ở vị trí điểm $M(3; 1; 0)$ và chuyển động thẳng đều trên mặt đất với tốc độ 3,6 km/h. Khi đó, tại giây thứ 40 tính từ lúc xuất phát ở vị trí điểm $M(3; 1; 0)$, người đó đã đi được ra ngoài vùng phủ sóng của trạm thu phát.
- Khoảng cách ngắn nhất để một người cầm điện thoại đang ở vị trí có tọa độ $N(8; 9; 0)$ di chuyển trên mặt đất tới được vùng phủ sóng (theo đơn vị mét) là 100 m.
- Giả sử một người cầm điện thoại chuyển động thẳng đều trên mặt đất từ vị trí $A(6; 9; 0)$ đến vị trí $B(-4; b; 0)$ với tốc độ 3,6 km/h sao cho khoảng thời gian người đó thuộc vùng phủ sóng đúng bằng 60 giây. Khi đó $b = \frac{3}{2}$.

Câu 4. Một trường đại học trao hai loại học bổng A và B cho sinh viên trong trường, một sinh viên có thể được nhận cả hai loại học bổng A và B . Trong số các sinh viên được trao học bổng loại A có 12% số bạn được trao học bổng loại B và trong số các sinh viên không được trao học bổng loại A có 10% số bạn được trao học bổng loại B . Có 10,2% số sinh viên toàn trường được trao học bổng loại B . Chọn ngẫu nhiên một sinh viên trong trường.

- Xác suất để sinh viên đó không được trao học bổng loại B là 0,898.
- Xác suất để sinh viên đó không được trao học bổng loại B , biết sinh viên đó không được trao học bổng loại A , là 0,88.
- Xác suất để sinh viên đó không được trao học bổng loại A là 0,89.
- Xác suất để sinh viên đó không được trao học bổng loại A , biết sinh viên đó không được trao học bổng loại B , lớn hơn 0,9.

Phần III. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6 (không làm tròn các phép tính trung gian trong các câu từ 1 đến câu 6)

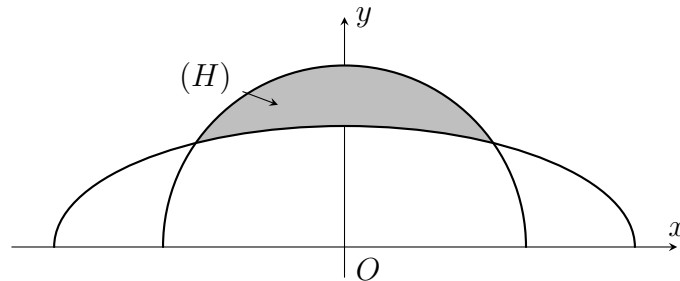
Câu 1. Cho bảng 6×6 gồm 36 ô vuông đơn vị và cho 8 quân cờ đôi một khác nhau. Người ta xếp ngẫu nhiên 8 quân cờ đó vào 36 ô trong bảng sao cho mỗi ô xếp nhiều nhất một quân cờ. Hai cách xếp được gọi là như nhau nếu vị trí của 8 quân cờ tương ứng trên bảng là giống nhau sau khi xếp xong (không tính đến thứ tự xếp các quân cờ vào bảng). Chọn ngẫu nhiên một cách xếp như trên. Gọi P là xác suất của biến cố: “Cách xếp được chọn thỏa mãn đồng thời ba điều kiện sau:

- Trên mỗi hàng có ít nhất một quân cờ;
- Trên mỗi cột có ít nhất một quân cờ;
- Mỗi quân cờ phải cùng hàng với đúng một quân cờ khác hoặc cùng cột với đúng một quân cờ khác.”

Giá trị của 9^4P bằng bao nhiêu (không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả phép tính cuối cùng đến hàng phần trăm)?

Câu 2. Công ty vận tải nhận một đơn hàng vận chuyển ít nhất 23 tấn hàng loại A , ít nhất 59 tấn hàng loại B và không quá 139 tấn hàng loại C . Công ty vận tải sử dụng hai loại xe X và Y để chở số hàng đó. Mỗi xe loại X đều chở 12 tấn hàng loại A , 6 tấn hàng loại B và 18 tấn hàng loại C . Mỗi xe loại Y đều chở 2 tấn hàng loại A , 20 tấn hàng loại B và 22 tấn hàng loại C . Chi phí cho 1 xe loại X là 37 triệu đồng và cho 1 xe loại Y là 45 triệu đồng. Gọi T (triệu đồng) là chi phí nhỏ nhất để công ty hoàn thành đơn hàng. Giá trị của $10T$ bằng bao nhiêu?

Câu 3. Người ta cần tính thể tích của một vật thể được chế tác như sau. Trên mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy (một đơn vị độ dài trên mỗi trục tương ứng với một xấp-ti-mét trong thực tế), gọi (H) là hình phẳng được tô đậm, giới hạn bởi đường elip $\frac{x^2}{256} + \frac{y^2}{48} = 1$ và đường tròn tâm O có bán kính 10 (xem hình minh họa bên dưới). Vật thể có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng (H) quanh trục hoành.



Lưu ý: Các kích thước trong hình minh họa có thể không đúng tỉ lệ thực tế.

Thể tích của vật thể nói trên bằng bao nhiêu xấp-ti-mét khối (không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả phép tính cuối cùng đến hàng đơn vị)?

Câu 4. Cho bảng 5×5 gồm 25 ô vuông đơn vị và cho bốn màu. Người ta tô mỗi ô trong bảng bởi một trong bốn màu đã cho sao cho hai ô bất kỳ có chung đỉnh hoặc chung cạnh thì khác màu. Hai cách tô màu bảng được gọi là giống nhau nếu mỗi ô của bảng có cùng màu ở cả hai cách tô (không tính đến thứ tự tô màu các ô). Gọi S là số cách tô màu bảng phân biệt thỏa mãn điều kiện trên. Giá trị của $9S$ bằng bao nhiêu?

Câu 5. Một doanh nghiệp dự kiến sản xuất không quá 2000 sản phẩm cùng loại. Giả sử rằng doanh thu của doanh nghiệp khi sản xuất x sản phẩm ($x \in \mathbb{N}; 0 \leq x \leq 2000$) là $R(x) = 16x - 0,005x^2$ (triệu đồng) và doanh nghiệp phải nộp một khoản thuế là 5% của doanh thu $R(x)$. Chi phí để sản xuất mỗi sản phẩm là bốn triệu đồng. Lợi nhuận của doanh nghiệp (khi sản xuất x sản phẩm) được tính theo công thức: Lợi nhuận bằng doanh thu trừ đi thuế và chi phí. Doanh nghiệp phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm để thu được lợi nhuận lớn nhất?

Câu 6. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 20\sqrt{5}$, $AC = BD = 50$, $AD = BC = 10\sqrt{13}$. Thể tích của khối tứ diện đã cho bằng bao nhiêu?

— HẾT —

Câu/Đề	0101	0102	0103	0104	0105	0106	0107	0108	0109	0110	0111	0112	0113	0114	0115	0116	0117	0118	0119	0120	0121	0122	0123	0124
1	B	D	D	A	A	C	D	D	B	B	D	D	C	B	A	C	D	A	A	B	C	A	C	A
2	D	A	A	A	B	A	D	A	C	A	D	B	D	A	A	D	B	D	B	D	C	D	D	A
3	C	A	D	B	D	D	B	A	B	C	D	A	D	C	D	B	A	A	D	A	C	C	D	B
4	A	A	B	B	A	B	C	A	C	C	A	B	B	D	B	B	A	A	D	A	B	B	A	D
5	B	B	B	D	B	B	C	C	D	B	C	B	C	A	D	B	B	C	B	B	D	B	B	D
6	A	A	C	A	C	C	A	A	A	B	C	D	B	A	A	C	C	D	D	A	C	D	B	D
7	A	C	D	C	C	D	C	B	C	B	A	B	C	A	B	C	A	D	A	B	A	D	B	A
8	B	B	D	B	B	A	C	D	B	A	D	A	B	C	B	B	D	D	C	A	B	A	A	C
9	D	B	C	A	D	A	A	B	A	D	D	A	A	B	D	A	B	B	B	A	A	A	A	B
10	B	D	A	B	A	D	C	B	D	A	D	B	B	D	A	C	B	A	B	D	A	D	B	C
11	D	A	B	D	A	D	B	D	A	B	B	D	A	C	A	B	A	C	A	B	D	B	D	B
12	B	B	A	D	C	B	D	B	A	D	B	B	B	A	D	A	D	B	A	D	B	B	A	A
13	D,D,S,S	D,D,S,S	D,S,S,D	S,D,D,S	D,D,S,S	D,S,S,D	D,S,S,D	S,D,D,S	D,S,S,D	D,D,S,S	D,D,S,S	S,D,D,S	D,S,S,D	D,S,S,D	S,D,S,D	D,S,S,D	D,D,S,S	S,D,S,D	D,S,S,D	S,D,D,S	D,D,S,S	D,D,S,S	S,D,D,S	S,D,D,S
14	D,D,S,S	S,D,S,D	S,D,S,D	D,S,S,D	D,D,S,S	D,S,S,D	D,D,S,S	D,D,S,S	D,D,S,S	S,D,S,D	S,D,S,D	D,S,S,D	S,D,D,S	D,S,S,D	D,D,S,S	S,D,D,S	S,D,D,S	D,D,S,S	D,D,S,S	D,S,S,D	D,S,S,D	D,D,S,S	D,D,S,S	D,D,S,S
15	S,D,D,S	D,S,S,D	D,D,S,S	D,D,S,S	D,S,S,D	S,D,S,D	D,D,S,S	D,S,S,D	S,D,D,S	D,S,S,D	D,D,S,S	D,D,S,S	D,D,S,S	S,D,S,D	D,D,S,S	D,S,S,D	D,S,S,D	S,D,S,D	S,D,S,D	D,D,S,S	D,D,S,S	S,D,S,D	D,S,S,D	D,S,S,D
16	D,S,S,D	D,S,S,D	D,D,S,S	D,S,S,D	S,D,D,S	D,D,S,S	S,D,S,D	D,S,S,D	D,D,S,S	D,S,S,D	D,S,S,D	D,S,S,D	D,D,S,S	D,D,S,S	D,S,S,D	D,D,S,S	D,D,S,S	D,S,S,D	D,D,S,S	S,D,D,S	S,D,D,S	S,D,S,D	S,D,S,D	D,S,S,D
17	62,8	3240	3240	2090	4000	8000	1179	1,76	62,8	1,76	2460	1274	2460	2090	2,68	1274	62,8	1179	1743	1274	4000	1179	1179	8000
18	1274	1179	2,68	1274	2,68	3240	4000	2090	4000	2090	1743	2090	1274	1743	4000	8000	2880	1,76	2460	8000	1274	3240	1743	2880
19	2,68	2090	1743	62,8	2460	2090	2460	1274	2,68	1743	3240	1,76	2,68	1179	1743	62,8	2460	3240	1179	1,76	2880	1743	2,68	1,76
20	2880	1,76	1179	8000	2880	1179	2,68	2880	2460	3240	4000	62,8	62,8	1,76	3240	2090	2,68	8000	4000	2880	2460	8000	4000	2090
21	2460	1743	4000	1,76	62,8	1,76	3240	62,8	2880	1179	1179	8000	4000	3240	1179	2880	1274	1743	3240	62,8	2090	2090	3240	62,8
22	4000	8000	2460	2880	1274	1743	1743	8000	1274	8000	2,68	2880	2880	8000	2460	1,76	4000	2090	2,68	2090	2,68	1,76	2460	1274

HƯỚNG DẪN GIẢI

Được thực hiện bởi AI Gemini Pro

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1.

Phương trình $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Tập nghiệm của phương trình là $S = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

→ Chọn B.

Câu 2.

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là hiệu giữa đầu mút phải của nhóm cuối cùng và đầu mút trái của nhóm đầu tiên:

$$R = 11 - 5 = 6$$

→ Chọn A.

Câu 3.

Đường thẳng đi qua điểm $A(1; 3; -5)$ và có một vector chỉ phương $\vec{u} = (2; -1; 3)$ có phương trình chính tắc là:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+5}{3}$$

→ Chọn C.

Câu 4.

Áp dụng định nghĩa tích phân:

$$\int_1^2 f(x)dx = F(2) - F(1) = 9 - 3 = 6$$

→ Chọn C.

Câu 5.

Áp dụng công thức đạo hàm hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$:

$$y' = \frac{a \cdot 1 - 4 \cdot 3}{(3x+1)^2} = \frac{a-12}{(3x+1)^2}$$

→ Chọn B.

Câu 6.

Theo tính chất cơ bản của nguyên hàm, với hằng số $k \neq 0$: $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$.

Do đó: $\int 7f(x)dx = 7 \int f(x)dx$.

→ Chọn B.

Câu 7.

Quan sát bảng biến thiên trên đoạn $[-1; 2]$:

$$f(-1) = -4$$

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 0$$

$$f(2) = 5$$

Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 2]$ là 5 (đạt tại $x = 2$).

→ Chọn B.

Câu 8.

Giá trị đại diện của các nhóm lần lượt là: $c_1 = 1; c_2 = 3; c_3 = 5; c_4 = 7; c_5 = 9$.

Giá trị trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm:

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 20 + 3 \cdot 35 + 5 \cdot 30 + 7 \cdot 10 + 9 \cdot 5}{100} = \frac{20 + 105 + 150 + 70 + 45}{100} = \frac{390}{100} = 3,9$$

→ Chọn A.

Câu 9.

Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, cạnh $A'D'$ song song và bằng cạnh AD . Do đó, vector $\overrightarrow{AD}$ cùng phương (và cùng hướng) với vector $\overrightarrow{A'D'}$.

→ Chọn D.

Câu 10.

Theo định nghĩa cấp số nhân: $u_2 = u_1 \cdot q \Rightarrow n = m \cdot q$.

→ Chọn A.

Câu 11.

Do $ABCD$ là hình vuông nên $BC \perp AB$.

Mặt khác, $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$.

Vì $BC \perp AB$ và $BC \perp SA$ (với $AB, SA \subset (SAB)$ cắt nhau tại A) nên $BC \perp (SAB)$.

→ Chọn B.

Câu 12.

Áp dụng bảng nguyên hàm cơ bản:

$$\int (3x^2 - \cos x) dx = x^3 - \sin x + C$$

→ Chọn D.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$.

a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

→ ĐÚNG.

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$. Tập nghiệm $S = \{1; 3\}$.

→ ĐÚNG.

c) Xét hàm số trên đoạn $[2; 4]$:

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \in [2; 4]$.

Tính các giá trị: $f(2) = 4$; $f(3) = 2$; $f(4) = 6$.

Suy ra $\max_{[2;4]} f(x) = 6$ tại $x = 4$. Do đó hàm số đạt GTLN tại $x = 4$, không phải tại $x = 2$.

→ SAI.

d) Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $M_1(1; 6)$ và $M_2(3; 2)$.

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị có hệ số góc $k = \frac{2-6}{3-1} = -2$, phương trình là:

$$y - 6 = -2(x - 1) \Leftrightarrow y = -2x + 8$$

→ SAI.

Câu 2. Thiết bị bơm nước vào bể có tốc độ $f(t)$ ($\text{m}^3 / \text{giờ}$) có đồ thị là parabol đi qua $O(0; 0)$, $A(2; 3)$, $B(6; 3)$.

a) Giả sử parabol có dạng $f(t) = at^2 + bt + c$.

Đồ thị qua $O(0; 0) \Rightarrow c = 0$.

Đồ thị qua $A(2; 3) \Rightarrow 4a + 2b = 3$.

Đồ thị qua $B(6;3) \Rightarrow 36a + 6b = 3$.

Giải hệ phương trình ta được $a = -\frac{1}{4}$ và $b = 2$.

Vậy $f(t) = 2t - \frac{t^2}{4}$ ($\text{m}^3 / \text{giờ}$).

→ SAI.

b) Lượng nước trong bể tại thời điểm t là:

$$V(t) = \int_0^t f(u) du = \int_0^t \left(2u - \frac{u^2}{4} \right) du = \left(u^2 - \frac{u^3}{12} \right) \Big|_0^t = t^2 - \frac{t^3}{12} (\text{m}^3)$$

→ ĐÚNG.

c) Tốc độ bơm $f(t) = -\frac{1}{4}(t-4)^2 + 4$ đạt giá trị lớn nhất tại $t = 4$ giờ.

Khi đó lượng nước trong bể là:

$$V(4) = 4^2 - \frac{4^3}{12} = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} \approx 10,67 \text{ m}^3 < 10,7 \text{ m}^3$$

→ SAI.

d) Lượng nước trong bể bằng $13,824 \text{ m}^3$:

$$t^2 - \frac{t^3}{12} = 13,824 \Leftrightarrow t^3 - 12t^2 + 165,888 = 0 \Leftrightarrow t = 4,8 = \frac{24}{5} (\text{giờ})$$

Phân số tối giản $\frac{a}{b} = \frac{24}{5} \Rightarrow a = 24, b = 5 \Rightarrow a + b = 29$.

→ ĐÚNG.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, trạm phát sóng tại $I(2;1;12)$, 1 đơn vị = 10 m. Bán kính phát sóng $R = 130 \text{ m} = 13$ đơn vị. Mặt đất là mặt phẳng $(Oxy): z = 0$.

a) Mặt cầu giới hạn vùng phủ sóng có tâm $I(2;1;12)$ và bán kính $R = 13$:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-12)^2 = 13^2 = 169$$

→ ĐÚNG.

b) Giao của mặt cầu với mặt đất $(Oxy): z = 0$ là hình tròn có tâm $H(2;1;0)$, bán kính

$$r = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5 \text{ đơn vị} = 50 \text{ m}.$$

Vị trí ban đầu $M(3;1;0) \Rightarrow HM = \sqrt{(3-2)^2 + (1-1)^2 + 0^2} = 1$ đơn vị $= 10$ m .

Tốc độ di chuyển $v = 3,6 \text{ km/h} = 1 \text{ m/s}$. Sau 40 s , quãng đường đi được là $s = 40$ m .

Khoảng cách tối đa từ H tới người sau 40 s là $d_{\max} = HM + s = 10 + 40 = 50 \text{ m} = r$. Do đó người này vẫn luôn ở trong vùng phủ sóng (chưa đi ra ngoài).

→ SAI.

c) Điểm $N(8;9;0)$ có khoảng cách đến tâm $H(2;1;0)$ là:

$$HN = \sqrt{(8-2)^2 + (9-1)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ đơn vị} = 100 \text{ m}$$

Khoảng cách ngắn nhất từ N đến vùng phủ sóng là:

$$d = HN - r = 100 \text{ m} - 50 \text{ m} = 50 \text{ m}$$

→ SAI.

d) Vận tốc $v = 1 \text{ m/s} = 0,1$ đơn vị/s . Thời gian trong vùng phủ sóng là 60 s , suy ra chiều dài đoạn đường trong vùng phủ sóng (dây cung của đường tròn đáy) là $L = 60 \times 0,1 = 6$ đơn vị .

Khoảng cách từ tâm $H(2;1;0)$ đến đường thẳng AB là:

$$d(H, AB) = \sqrt{r^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

Đường thẳng AB trên mặt phẳng (Oxy) đi qua $A(6;9)$ và $B(-4;b)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-10; b-9) \Rightarrow \vec{n} = (b-9; 10)$.

Phương trình đường thẳng AB : $(b-9)(x-6) + 10(y-9) = 0 \Leftrightarrow (b-9)x + 10y - 6b - 36 = 0$.

Khoảng cách từ $H(2;1)$ đến AB :

$$d(H, AB) = \frac{|2(b-9) + 10(1) - 6b - 36|}{\sqrt{(b-9)^2 + 10^2}} = \frac{4|b+11|}{\sqrt{b^2 - 18b + 181}} = 4$$

$$\Leftrightarrow (b+11)^2 = b^2 - 18b + 181 \Leftrightarrow 40b = 60 \Leftrightarrow b = \frac{3}{2}$$

→ ĐÚNG.

Câu 4. Gọi A là biến cố sinh viên nhận học bổng loại A , B là biến cố sinh viên nhận học bổng loại B .

Theo giả thiết: $P(B|A) = 0,12$; $P(B|\bar{A}) = 0,10$; $P(B) = 0,102$.

Theo công thức xác suất toàn phần:

$$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})$$

$$0,102 = P(A) \cdot 0,12 + [1 - P(A)] \cdot 0,10 \Rightarrow 0,02 \cdot P(A) = 0,002 \Rightarrow P(A) = 0,1$$

a) Xác suất sinh viên không nhận học bổng B :

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,102 = 0,898$$

→ ĐÚNG.

b) Xác suất sinh viên không nhận học bổng B biết không nhận học bổng A :

$$P(\bar{B}|\bar{A}) = 1 - P(B|\bar{A}) = 1 - 0,10 = 0,90$$

→ SAI.

c) Xác suất sinh viên không nhận học bổng A :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,1 = 0,90$$

→ SAI.

d) Áp dụng công thức Bayes:

$$P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}|\bar{A})}{P(\bar{B})} = \frac{0,9 \cdot 0,9}{0,898} = \frac{0,81}{0,898} \approx 0,902 > 0,9$$

→ ĐÚNG.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1.

Xếp 8 quân cờ vào bảng 6×6 sao cho mỗi hàng, mỗi cột có ít nhất 1 quân cờ. Vì tổng số quân cờ là 8 trên 6 hàng và 6 cột, số quân cờ trên các hàng chỉ có thể phân bố theo dạng $(2, 2, 1, 1, 1, 1)$, và trên các cột cũng là $(2, 2, 1, 1, 1, 1)$.

Để mỗi quân cờ đều cùng hàng với đúng 1 quân khác hoặc cùng cột với đúng 1 quân khác:

4 quân cờ ở 4 hàng đơn bắt buộc phải nằm trên 2 cột đôi.

4 quân cờ ở 2 hàng đôi bắt buộc phải nằm trên 4 cột đơn.

Số cách chọn vị trí 8 ô thỏa mãn:

$$N = \binom{6}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} = 15 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 6 = 8100$$

Tổng số cách chọn 8 ô bất kì từ 36 ô là $\binom{36}{8} = 30260340$.

$$\text{Xác suất } P = \frac{8100}{30260340}.$$

Giá trị của $9^4 P$:

$$9^4 P = 6561 \cdot \frac{8100}{30260340} \approx 1,76$$

Đáp số: 1,76

Câu 2.

Gọi x, y lần lượt là số xe loại X và loại Y ($x, y \in \mathbb{N}$).

Ta có hệ ràng buộc:

$$\begin{cases} 12x + 2y \geq 23 \\ 6x + 20y \geq 59 \\ 18x + 22y \leq 139 \end{cases}$$

Chi phí cần tối thiểu hóa: $T(x, y) = 37x + 45y$ (triệu đồng).

Khảo sát các cặp nghiệm nguyên không âm thỏa mãn hệ bất phương trình:

$$\text{Với } x = 2: \text{ Hệ trở thành } \begin{cases} 2y \geq -1 \\ 20y \geq 47 \\ 22y \leq 103 \end{cases} \Rightarrow y \in \{3; 4\}.$$

Tại $(2; 3)$: $T = 37(2) + 45(3) = 209$ triệu đồng.

Tại $(2; 4)$: $T = 37(2) + 45(4) = 254$ triệu đồng.

Với các giá trị $x \in \{3, 4, 5\}$, chi phí T đều lớn hơn 209.

Chi phí nhỏ nhất là $T = 209$ triệu đồng. Do đó $10T = 2090$.

Đáp số: 2090

Câu 3.

$$\text{Phương trình nửa trên elip: } y^2 = 48 \left(1 - \frac{x^2}{256} \right) = 48 - \frac{3}{16} x^2.$$

$$\text{Phương trình nửa trên đường tròn: } y^2 = 100 - x^2.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường cong:

$$100 - x^2 = 48 - \frac{3}{16} x^2 \Leftrightarrow \frac{13}{16} x^2 = 52 \Leftrightarrow x^2 = 64 \Leftrightarrow x = \pm 8$$

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay miền (H) quanh trục hoành Ox :

$$V = \pi \int_{-8}^8 \left| (100 - x^2) - \left(48 - \frac{3}{16}x^2 \right) \right| dx = 2\pi \int_0^8 \left(52 - \frac{13}{16}x^2 \right) dx$$

$$V = 2\pi \left(52x - \frac{13}{48}x^3 \right) \Big|_0^8 = 2\pi \left(416 - \frac{416}{3} \right) = \frac{1664\pi}{3} \approx 1742,54 \text{ cm}^3$$

Làm tròn đến hàng đơn vị: 1743.

Đáp số: 1743

Câu 4.

Mỗi khối ô vuông 2×2 gồm 4 ô đôi một chung cạnh hoặc chung đỉnh nên bắt buộc phải tô bằng 4 màu đôi một khác nhau.

Có 2 dạng cấu trúc tô màu thỏa mãn cho bảng 5×5 :

Dạng 1 (Theo cột): Cột lẻ nhận màu từ tập A (gồm 2 màu), cột chẵn nhận màu từ tập B (gồm 2 màu còn lại).

Số cách chọn tập A là $\binom{4}{2} = 6$.

Mỗi cột trong 5 cột có 2 cách tô xen kẽ $\Rightarrow 6 \cdot 2^5 = 192$ cách.

Dạng 2 (Theo hàng): Hàng lẻ nhận màu từ tập A , hàng chẵn nhận màu từ tập B .

Tương tự có $6 \cdot 2^5 = 192$ cách.

Số cách trùng lặp giữa hai dạng: Là các cách mà màu sắc được xác định hoàn toàn theo tính chẵn lẻ của cả hàng và cột, gồm $4! = 24$ cách.

Tổng số cách tô màu phân biệt là:

$$S = 192 + 192 - 24 = 360$$

Giá trị của $9S = 9 \cdot 360 = 3240$.

Đáp số: 3240

Câu 5.

Doanh thu sau thuế của doanh nghiệp khi sản xuất x sản phẩm:

$$R_{\text{sau thuế}}(x) = 0,95 \cdot R(x) = 0,95(16x - 0,005x^2) = 15,2x - 0,00475x^2$$

Lợi nhuận của doanh nghiệp:

$$L(x) = R_{\text{sau thuế}}(x) - C(x) = 15,2x - 0,00475x^2 - 4x = -0,00475x^2 + 11,2x$$

Hàm số $L(x)$ đạt cực đại tại đỉnh của parabol:

$$x_0 = \frac{11,2}{2 \cdot 0,00475} = \frac{22400}{19} \approx 1178,95$$

Vì $x \in \mathbb{N}$, so sánh $L(1178)$ và $L(1179)$, ta thấy điểm $x = 1179$ gần đỉnh hơn

($|1179 - x_0| = \frac{1}{19} < |1178 - x_0| = \frac{18}{19}$) nên mang lại lợi nhuận lớn nhất.

Đáp số: 1179

Câu 6.

Tứ diện $ABCD$ có các cặp cạnh đối bằng nhau đôi một:

$$a = AB = CD = 20\sqrt{5} \Rightarrow a^2 = 2000$$

$$b = AC = BD = 50 \Rightarrow b^2 = 2500$$

$$c = AD = BC = 10\sqrt{13} \Rightarrow c^2 = 1300$$

Đây là tứ diện gần đều. Dựng hình hộp chữ nhật ngoại tiếp tứ diện có ba kích thước x, y, z :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2000 \\ y^2 + z^2 = 2500 \\ z^2 + x^2 = 1300 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{2000 + 2500 + 1300}{2} = 2900$$

Suy ra:

$$x = \sqrt{2900 - 2500} = \sqrt{400} = 20$$

$$y = \sqrt{2900 - 1300} = \sqrt{1600} = 40$$

$$z = \sqrt{2900 - 2000} = \sqrt{900} = 30$$

Thể tích của khối tứ diện $ABCD$:

$$V = \frac{1}{3}xyz = \frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 40 \cdot 30 = 8000$$

Đáp số: 8000

_____ **HẾT** _____