TRƯỜNG THPT CHU VĂN AN
GV: PHẠM LÊ DUY
SĐT: 0704.963.919

# TOÁN 11

(THEO CHƯƠNG TRÌNH GDPT 2018 - NXB: BGDĐT)

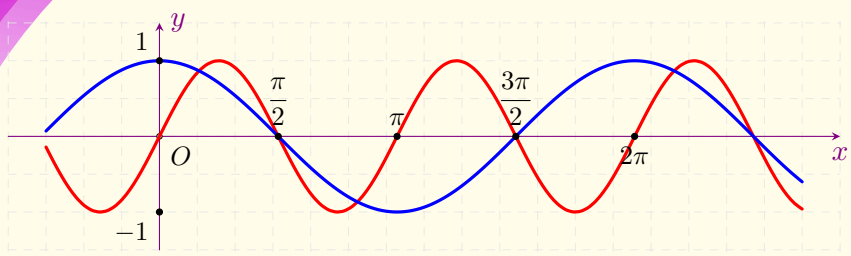
Năm Học: 2026-2027

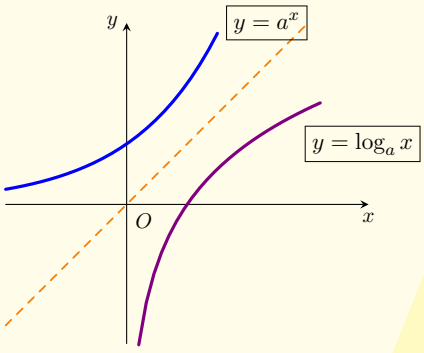
Tóm tắt lí thuyết A

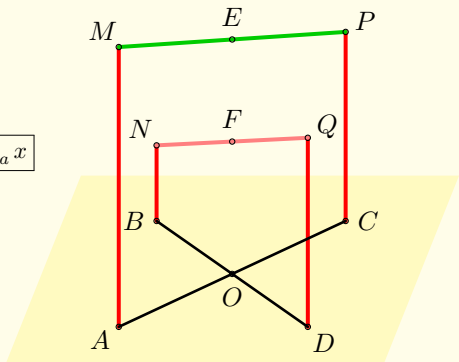
Ví dụ minh hoạ B

Bài tập vận dụng C

Bài tập rèn luyện D




LƯU HÀNH NỘI BỘ

# Mục lục


**CHƯƠNG 1 HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC 17**

1 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC 17

1 Lý thuyết 17

2 Các dạng bài tập 22

*Dạng 1. Mối liên hệ giữa độ và rađian* 22

*Dạng 2. Độ dài cung tròn* 24

*Dạng 3. Biểu diễn góc lượng giác trên đường tròn lượng giác* 26

*Dạng 4. Tính giá trị lượng giác của một góc lượng giác* 28

*Dạng 5. Tính giá trị lượng giác liên quan góc đặc biệt* 30

*Dạng 6. Rút gọn biểu thức lượng giác* 33

*Dạng 7. Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất* 35

3 Bài tập rèn luyện 38

2 CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC 75

1 Lý thuyết 75

2 Các dạng bài tập 76

*Dạng 1. Công thức cộng* 76

*Dạng 2. Công thức nhân đôi* 78

*Dạng 3. Công thức biến đổi tích thành tổng* 80

*Dạng 4. Công thức biến đổi tổng thành tích* 82

3 Bài tập rèn luyện 84

3 HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC 98

1 Lí thuyết 98

2 Các dạng bài tập 101

*Dạng 1.* 101

*Dạng 2. Tính chẵn -lẻ* 104

*Dạng 3. Tính tuần hoàn* 105

*Dạng 4. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác* 107

3 Bài tập rèn luyện 109

4 PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN 131

1 Lý thuyết 131

2 Các dạng bài tập 133

*Dạng 1. Phương trình* $\sin x = a$ 133

*Dạng 2. phương trình* $\cos x = a$ 134

*Dạng 3. Phương trình* $\tan x = a$ *và* $\cot x = a$ 135

*Dạng 4. Phương trình có nghiệm thuộc khoảng – đoạn* 136

*Dạng 5. Bài toán thực tế liên quan phương trình lượng giác* 139

3 Bài tập rèn luyện 141

**CHƯƠNG 2 DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN 169**

5 DÃY SỐ 169

1 Lí thuyết 169

2 Các dạng bài tập 170

*Dạng 1. Tìm số hạng của dãy số từ dãy số cho trước* 170

*Dạng 2. Tính tăng giảm của dãy số* 175

*Dạng 3. Tính bị chặn của dãy số* 178

3 Bài tập rèn luyện 182

6 CẤP SỐ CỘNG 201

1 Lý thuyết 201

2 Các dạng bài tập 202

*Dạng 1. Xác định dãy đã cho là cấp số cộng* 202

*Dạng 2. Xác định các yếu tố qua số hạng tổng quát* 205

*Dạng 3. Tính chất cấp số cộng* 208

*Dạng 4. Tính tổng n số hạng đầu của cấp số cộng* 212

3 Bài tập rèn luyện 217

7 CẤP SỐ NHÂN 239

1 Lí thuyết 239

2 Các dạng bài tập 240

*Dạng 1. Xác định dãy đã cho là cấp số nhân* 240

*Dạng 2. Xác định các yếu tố qua số hạng tổng quát* 242

*Dạng 3. Tính tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân* 244

*Dạng 4. Cấp số nhân liên quan hình học* 247

*Dạng 5. Nghiệm của phương trình liên quan cấp số nhân* 251

*Dạng 6. Cấp số nhân & cấp số cộng* 253

*Dạng 7. Cấp số cộng và cấp số nhân* 254

*Dạng 8. Bài toán thực tế liên quan cấp số nhân* 256

3 Bài tập rèn luyện 261

**CHƯƠNG 3 CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM3**

8 MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM 301

1 Lý thuyết 301

2 Các dạng bài tập 303

3 Bài tập rèn luyện 311

9 CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM 344

1 Lí thuyết 344

2 Các Dạng Bài Tập 346

3 Bài tập rèn luyện 354

**CHƯƠNG 4 QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN 391**

10 ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN 391

1 Lí thuyết 391

2 Các dạng bài tập 394

*Dạng 1. Các tính chất được thừa nhận của hình học không gian* 394

*Dạng 2. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng phân biệt cắt nhau* 396

*Dạng 3. Xác định giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng* 399

*Dạng 4. Ba điểm thẳng hàng - Ba đường đồng quy* 401

3 Bài tập rèn luyện 405

11 HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG 418

1 Lý thuyết 418

2 Các dạng bài tập 419

*Dạng 1. Chứng minh hai đường song song* 419

*Dạng 2. Giao tuyến của 2 mặt chứa 2 đường thẳng song song* 421

*Dạng 3. Giao điểm sử dụng giao tuyến song song* 424

3 Bài tập rèn luyện 426

12 ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG 439

1 Lý thuyết 439

2 Các dạng bài tập 440

*Dạng 1. Chứng minh đường thẳng song song mặt phẳng* 440

*Dạng 2. Giao tuyến của hai mặt chứa một đường song song với mặt* 445

*Dạng 3. Thiết diện* 447

3 Bài tập rèn luyện 450

13 HAI MẶT PHẲNG SONG SONG 463

1 Lý thuyết 463

2 Các dạng bài tập 466

*Dạng 1. Chứng minh hai mặt song song* 466

*Dạng 2. Tìm giao tuyến của hai mặt, có một mặt song song với mặt khác* 469

*Dạng 3. Định lý Thales trong không gian* 470

3 Bài tập rèn luyện 474

14 PHÉP CHIẾU SONG SONG 488

1 Lý thuyết 488

2 Các dạng bài tập 489

*Dạng 1. Xác định ảnh qua phép chiếu song song* 489

*Dạng 2. Xác định hình biểu diễn qua phép chiếu song song* 490

*Dạng 3. Bài toán tổng hợp* 491

3 Bài tập rèn luyện 493

**CHƯƠNG 5 GIỚI HẠN - HÀM SỐ LIÊN TỤC 507**

15 GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ 507

1 Lý thuyết 507

2 Các dạng bài tập 510

*Dạng 1. Dùng định nghĩa chứng minh giới hạn* 510

*Dạng 2. Giới hạn dãy số dạng phân thức* 511

*Dạng 3. Giới hạn của dãy số: dạng lũy thừa* 513

*Dạng 4. Giới hạn của dãy số: dạng căn thức* 516

3 Bài tập rèn luyện 519

16 GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ 552

1 Lý thuyết 552

2 Các dạng bài tập 555

*Dạng 1. Giới hạn của hàm số tại 1 điểm* 555

*Dạng 2. Giới hạn của hàm số tại vô cực* 558

*Dạng 3. Giới hạn một bên của hàm số* 560

3 Bài tập rèn luyện 564

17 HÀM SỐ LIÊN TỤC 589

1 Lý thuyết 589

2 Các dạng bài tập 590

*Dạng 1. Xét tính liên tục của hàm số tại 1 điểm* 590

*Dạng 2. Tìm tham số để hàm số liên tục – gián đoạn tại 1 điểm* 593

*Dạng 3. Chứng minh phương trình có nghiệm* 597

3 Bài tập rèn luyện 602

**CHƯƠNG 6 HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT 629**

18 LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC 629

1 Lý thuyết 629

2 Các dạng bài tập 630

*Dạng 1. Tính giá trị biểu thức* 630

*Dạng 2. Rút gọn biểu thức* 633

*Dạng 3. So sánh* 635

*Dạng 4. Bài toán lãi kép* 636

3 Bài tập rèn luyện 639

19 LÔGARIT 664

1 Lý thuyết 664

2 Các dạng bài tập 665

*Dạng 1. Tính giá trị biểu thức* 665

*Dạng 2. Biểu diễn logarit* 667

*Dạng 3. Bài toán thực tế* 670

3 Bài tập rèn luyện 674

20 HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT 696

1 Lí thuyết 696

2 Các dạng bài tập 697

*Dạng 1. Tập xác định của hàm số* 697

*Dạng 2. Sự biến thiên của hàm số* 699

3 Bài tập rèn luyện 709

21 PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT 731

1 Tóm tắt lý thuyết 731

2 Các dạng bài tập 733

*Dạng 1. Phương trình mũ cơ bản* 733

*Dạng 2. Phương trình mũ đưa về cùng cơ số* 734

*Dạng 3. Phương trình mũ dùng logarit hóa* 735

*Dạng 4. Phương trình mũ đặt ẩn phụ cơ bản* 735

*Dạng 5. Phương trình logarit cơ bản* 736

*Dạng 6. Phương trình logarit đưa về cùng cơ số* 737

*Dạng 7. Phương trình logarit dùng mũ hóa* 738

*Dạng 8. Phương trình logarit đặt ẩn phụ* 739

*Dạng 9. Bất phương trình mũ cơ bản* 740

*Dạng 10. Bất phương trình logarit cơ bản* 741

*Dạng 11. Bất phương trình mũ giải bằng các phương pháp* 742

*Dạng 12. Bất phương trình mũ giải bằng các phương pháp* 744

3 Bài tập rèn luyện 747

**CHƯƠNG 7 QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN 783**

22 HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC 783

1 Lý thuyết 783

2 Các dạng bài tập 784

*Dạng 1. Xác định góc giữa hai đường thẳng trong không gian* 784

*Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc* 787

3 Bài tập rèn luyện 790

23 ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG 812

1 Lý thuyết 812

2 Các dạng bài tập 819

*Dạng 1. Chứng minh đường thẳng vuông góc mặt phẳng* 819

*Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc* 821

3 Bài tập rèn luyện 823

24 HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC 842

1 Lý thuyết 842

2 Các dạng bài tập 848

*Dạng 1. Xác định góc giữa hai mặt phẳng bằng cách dùng định nghĩa* 848

*Dạng 2. Xác định góc giữa hai mặt phẳng dựa trên giao tuyến* 849

*Dạng 3. Xác định góc giữa hai mặt phẳng dựa vào định lý hình chiếu* 851

*Dạng 4. Tổng hợp các phương pháp xác định góc giữa hai mặt phẳng* 852

*Dạng 5. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc* 855

*Dạng 6. Thiết diện* 858

*Dạng 7. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng* 861

*Dạng 8. Góc nhị diện* 865

3 Bài tập rèn luyện 871

25 KHOẢNG CÁCH 916

1 Lý thuyết 916

2 Các dạng bài tập 918

*Dạng 1. Khoảng cách từ chân đường cao đến một mặt bên* 918

*Dạng 2. Khoảng cách từ điểm bất kỳ đến một mặt phẳng* 920

*Dạng 3. Khoảng cách giữa hai đường thẳngchéo nhau* 921

3 Bài tập rèn luyện 925

26 THỂ TÍCH 946

1 Lý thuyết 946

2 Các dạng bài tập 950

*Dạng 1. Hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy* 950

*Dạng 2. Hình chóp có mặt bên vuông góc với đáy* 957

*Dạng 3. Tính thể tích hình chóp đều* 961

*Dạng 4. Tính thể tích khối lăng trụ đứng* 967

3 Bài tập rèn luyện 973

**CHƯƠNG 8 QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT** **995**

28 BIẾN CỐ HỢP,BIẾN CỐ GIAO, BIẾN CỐ ĐỘC LẬP 995

1 Lí thuyết 995

2 Các dạng bài tập 996

*Dạng 1. Xác định và đếm số phần tử biến cố hợp* 996

*Dạng 2. Biến cố giao* 999

3 Bài tập rèn luyện 1007

29 CÔNG THỨC CỘNG XÁC SUẤT 1020

1 Lý thuyết 1020

2 Các dạng bài tập 1020

*Dạng 1. Quy tắc cộng xác suất cho hai biến cố xung khắc* 1020

*Dạng 2. Quy tắc cộng xác suất cho hai biến cố bất kỳ* 1021

*Dạng 3. Tổng hợp* 1023

3 Bài tập rèn luyện 1026

30 CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT CHO HAI BIẾN CỐ ĐỘC LẬP 1044

1 Lí thuyết 1044

2 Các dạng bài tập 1044

*Dạng 1.* 1044

3 Bài tập rèn luyện 1052

**CHƯƠNG 9 ĐẠO HÀM** **1063**

31 ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM 1063

1 Kiến thức cần nhớ 1063

2 Các dạng bài tập 1065

*Dạng 1. Tính đạo hàm tại 1 điểm bằng định nghĩa* 1065

*Dạng 2. Tính đạo hàm tại 1 điểm bất kỳ trên $(a;b)$ bằng định nghĩa* 1067

*Dạng 3. Ý nghĩa hình học của đạo hàm.* 1068

*Dạng 4. Ý Nghĩa Vật Lý Đạo Hàm* 1069

*Dạng 5. Tìm tham số để hàm số có đạo hàm tại $x_0$* 1071

3 Bài tập rèn luyện 1074

32 CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM 1091

1 Lý thuyết 1091

2 Các dạng bài tập 1092

*Dạng 1. Tính đạo hàm đa thức–hữu tỉ–căn thức* 1092

*Dạng 2. Tính đạo hàm lượng giác* 1093

*Dạng 3. Tính đạo hàm mũ–logarit* 1094

*Dạng 4. Tổng hợp* 1095

3 Bài tập rèn luyện 1098

33 ĐẠO HÀM CẤP HAI 1106

1 Lý thuyết 1106

2 Các dạng bài tập 1106

*Dạng 1. Đạo hàm cấp 2* 1106

3 Bài tập rèn luyện 1109

Chương 1: Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác

Chương 1

# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

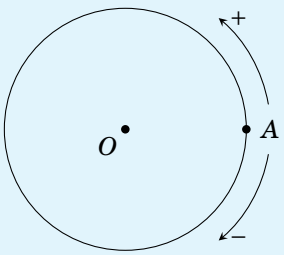
## BÀI 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC

### A Lý thuyết

#### 1 Đường tròn định hướng và cung lượng giác

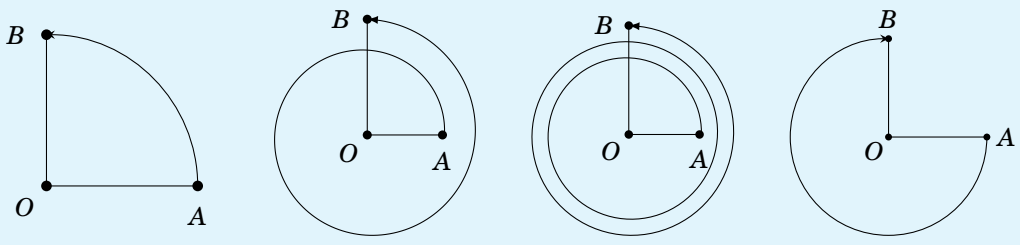
**Định nghĩa 1**

Đường tròn định hướng là một đường tròn trên đó đã chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương, chiều ngược lại là chiều âm.
Quy ước chọn chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ làm chiều dương.




**Định nghĩa 2**

Trên đường tròn định hướng cho 2 điểm $A$, $B$. Một điểm $M$ di động trên đường tròn luôn theo một chiều từ $A$ đến $B$ tạo nên một *cung lượng giác có điểm đầu $A$ và điểm cuối $B$*.
Với 2 điểm $A$, $B$ đã cho trên đường tròn định hướng ta có vô số cung lượng giác có điểm đầu $A$, điểm cuối $B$. Kí hiệu $\overset{\curvearrowright}{AB}$.



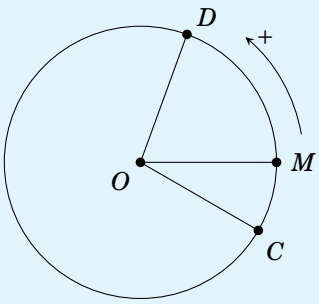

⚠ *Trên một đường tròn định hướng, lấy 2 điểm $A$, $B$ thì*

- *Kí hiệu $\overset{\frown}{AB}$ chỉ một cung hình học (lớn hoặc bé) hoàn toàn xác định.*
- *Kí hiệu $\overset{\curvearrowright}{AB}$ chỉ một cung lượng giác điểm đầu $A$, điểm cuối $B$.*

## 2 Góc lượng giác

**Định nghĩa 3**

Một điểm $M$ chuyển động trên đường tròn từ $C$ đến $D$ tạo nên cung lượng giác $CD$. Khi đó tia $OM$ quay xung quanh gốc $O$ từ vị trí $OC$ đến $OD$. Ta nói tia $OM$ tạo nên *góc lượng giác, có tia đầu $OC$ và tia cuối $OD$*. Kí hiệu: $(OC,OD)$.




Ta quy ước chiều quay

- ngược với chiều quay kim đồng hồ là chiều dương.
- cùng với chiều quay kim đồng hồ là chiều âm.

Khi tia $OM$ quay góc $\alpha$ thì ta nói góc lượng giác mà tia đó quét nên có số đo $\alpha$.

Số đo của góc lượng giác với tia đầu $OC$, tia cuối $OD$ được kí hiệu là $\text{sđ}(OC,OD)=\alpha$.

**Nhận xét**: Số đo của các góc lượng giác có cùng tia đầu $OC$ và tia cuối $OD$ sai khác nhau một bội nguyên của $360^\circ$ nên có công thức tổng quát là $\text{sđ}(OC,OD)=\alpha^\circ+k\cdot 360^\circ\,(k\in\mathbb{Z})$.

Thường viết là $(OC,OD)=\alpha^\circ+k\cdot 360^\circ$.

**Hệ thức Chasles**: Với 3 tia $Oa$, $Ob$, $Oc$ bất kì ta có

$$(Oa,Ob)+(Ob,Oc)=(Oa,Oc)+k\cdot 360^\circ\,(k\in\mathbb{Z}).$$

## 3 Đơn vị radian

**Định nghĩa 4**

Trên đường tròn tùy ý, cung có độ dài bằng bán kính được gọi là *cung có số đo* 1 rad.

**Quan hệ giữa độ và radian**: $1^\circ=\dfrac{\pi}{180}\text{rad}$ và $1\text{rad}=\dfrac{180^\circ}{\pi}$.

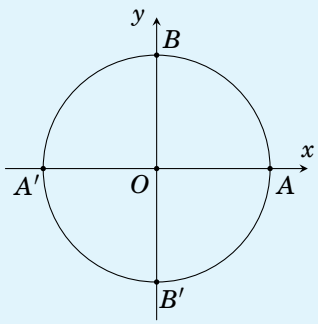
⚠ *Khi viết số đo của một góc (cung) theo đơn vị radian, ta không viết chữ* rad *sau số đó.*

$$180^\circ=\pi\to 60^\circ=\frac{\pi}{3};180^\circ=\pi\to 45^\circ=\frac{\pi}{4}.$$

## 4 Đường tròn lượng giác

**Định nghĩa 5**

Trong mặt phẳng $Oxy$, vẽ đường tròn định hướng tâm $O$, bán kính $R = 1$. Đường tròn này cắt hai trục tọa độ tại bốn điểm $A(1;0)$, $A'(-1;0)$, $B(0;1)$, $B'(0;-1)$.
Ta lấy $A(1;0)$ làm điểm gốc của đường tròn. Đường tròn xác định như trên được gọi là *đường tròn lượng giác (gốc A)*.



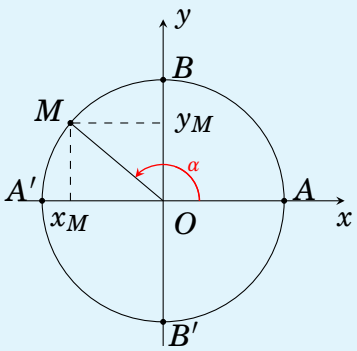

## 5 Độ dài cung tròn

Cung có số đo $\alpha$ rad của đường tròn bán kính $R$ có độ dài $l = R\alpha$.

## 6 Giá trị lượng giác của một góc lượng giác

**Định nghĩa 6**

- Trên đường tròn lượng giác, gọi $M(x_M;y_M)$ là điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo $\alpha$. Khi đó
- Quy ước chiều **ngược** với chiều quay của kim đồng hồ là **chiều dương**.
- Tung độ $y_M$ điểm $M$ gọi là sin của $\alpha$. Ký hiệu là $\sin\alpha = y_M$.
- Hoành độ $x_M$ điểm $M$ gọi là cos của $\alpha$. Ký hiệu là $\cos\alpha = x_M$.




- Nếu $\cos\alpha = x_M \neq 0$, $\dfrac{y_M}{x_M} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ gọi là tan của $\alpha$. Ký hiệu $\tan\alpha = \dfrac{y_M}{x_M} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.
- Nếu $\sin\alpha = y_M \neq 0$, $\dfrac{x_M}{y_M} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ gọi là cot của $\alpha$. Ký hiệu $\cot\alpha = \dfrac{x_M}{y_M} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

**CHÚ Ý**

a) Các giá trị

(a) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ xác định $\forall\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) $\tan\alpha$ xác định $\forall\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

(c) $\cot\alpha$ xác định $\forall\alpha \neq k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

b) Với mọi góc lượng giác $\alpha$, ta có

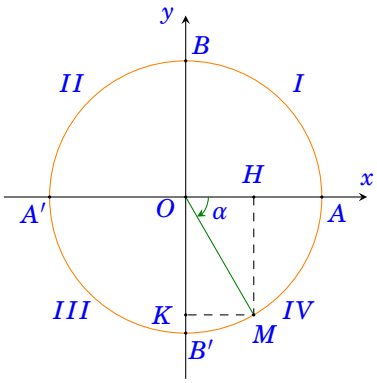
(a) $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

(b) $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha,\ \forall k \in \mathbb{Z}$.

(c) $\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha,\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$.

(d) $\cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha,\ \alpha \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$.

c) Dấu của các giá trị lượng giác của góc $\alpha$




| | Góc phần tư | | | |
|---|---|---|---|---|
| Giá trị lượng giác | I | II | III | IV |
| $\sin\alpha$ | + | + | − | − |
| $\cos\alpha$ | + | − | − | + |
| $\tan\alpha$ | + | − | + | − |
| $\cot\alpha$ | + | − | + | − |

## 7 Hệ thức cơ bản giữa các giá trị lượng giác của một góc lượng giác

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

2) $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

3) $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

4) $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$

5) $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

6) $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

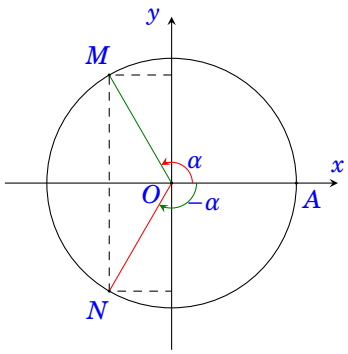
## 8 Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc đối nhau

1) $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

2) $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

3) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

4) $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$



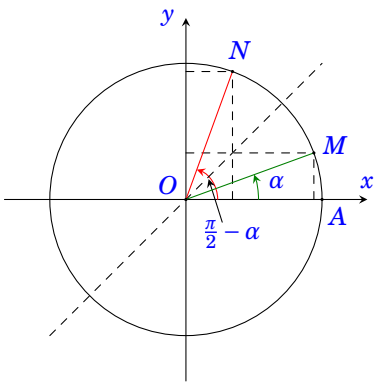

## 9 Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau

1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

2) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$

3) $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$

4) $\cot\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$



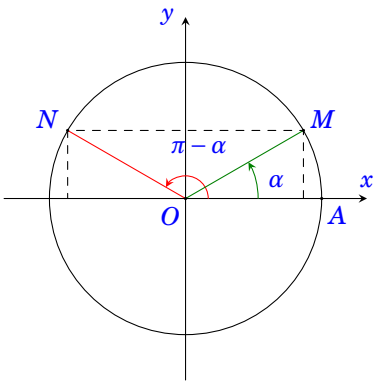
## 10 Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc phụ nhau

1) $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$

2) $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$

3) $\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$

4) $\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$




## 11 Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc hơn kém

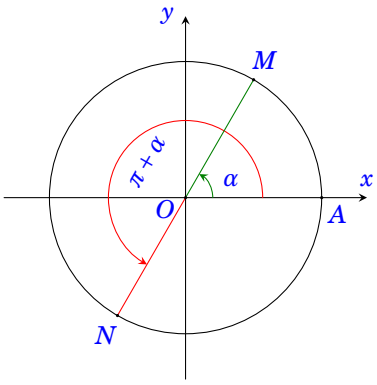
**Hơn kém $\pi$**

1) $\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha$

2) $\cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha$

3) $\tan(\alpha+\pi)=\tan\alpha$

4) $\cot(\alpha+\pi)=\cot\alpha$




**Hơn kém $\dfrac{\pi}{2}$**

1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$

2) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$

3) $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$

4) $\cot\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$

## 12 Giá trị lượng giác của các cung đặc biệt

| Góc $\alpha$ | 0 | $\dfrac{\pi}{6}$ | $\dfrac{\pi}{4}$ | $\dfrac{\pi}{3}$ | $\dfrac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $0^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $90^\circ$ |
| $\sin\alpha$ | 0 | $\dfrac{1}{2}$ | $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\cos\alpha$ | 1 | $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ | $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $\dfrac{1}{2}$ | 0 |
| $\tan\alpha$ | 0 | $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | Không xác định |
| $\cot\alpha$ | Không xác định | $\sqrt{3}$ | 1 | $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 |

# B Các dạng bài tập

## Dạng 1. Mối liên hệ giữa độ và radian

Dùng mối quan hệ giữa độ và radian: $180^\circ = \pi \,\text{rad}$

- Đổi cung $a$ có số đo từ radian sang độ: $a \cdot \dfrac{180^\circ}{\pi}$.
- Đổi cung $x^\circ$ có số đo từ độ ra radian: $\dfrac{x \cdot \pi}{180}$.

**Ví dụ 1.**

a) Đổi số đo của các góc sau ra radian: $72^\circ$, $600^\circ$, $-37^\circ 45' 30''$.

b) Đổi số đo của các góc sau ra độ: $\dfrac{5\pi}{18}$, $\dfrac{3\pi}{5}$, $-4$.

**Lời giải**

**Ví dụ 2.** Đổi số đo của góc $45°32'$ sang đơn vị radian với độ chính xác đến hàng phần nghìn.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 3.** Đổi số đo radian sang số đo độ.

a) $\pi$ rad. b) $\frac{\pi}{3}$ rad. c) $\frac{\pi}{10}$ rad.

d) $\frac{22\pi}{3}$ rad. e) $-\frac{5\pi}{9}$ rad. f) $-\frac{12\pi}{5}$ rad.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 4.** Đổi số đo độ sang số đo radian:

a) $170°$. b) $1000°$. c) $3100°$.

d) $-90°$. e) $-240°$. f) $-125°$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 2. Độ dài cung tròn

Cung tròn bán kính $R$ có số đo $\alpha\,(0 \le \alpha \le 2\pi)$, có số đo độ $a°\,(0° \le a \le 360°)$ và có độ dài $l$ thì

$l = R\alpha = \dfrac{\pi a}{180} \cdot R$ do đó $\dfrac{\alpha}{\pi} = \dfrac{a}{180}$.

- Đặc biệt: $1\,\text{rad} = \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ, 1° = \dfrac{\pi}{180}\,\text{rad}$.

**Ví dụ 5.** Một đường tròn có bán kính 36 m. Tính độ dài (đơn vị m) của cung trên đường tròn đó có số đo

a) $\frac{3\pi}{4}$. b) $51^\circ$. c) $\frac{1}{3}$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 6.** Một hải lí là độ dài cung tròn xích đạo có số đo $\left(\frac{1}{60}\right)^0 = 1'$. Biết độ dài xích đạo là 40 000 km, hỏi một hải lí dài bao nhiêu km?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 7.** Cho hình vuông $A_0A_1A_2A_3$ nội tiếp đường tròn tâm $O$ (các đỉnh được sắp xếp theo chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ). Tính số đo của các góc lượng giác $(A_0A_i)$, $\left(A_iA_j\right)$, $(i,j=0,1,2,3;i\neq j)$

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

## Dạng 3. Biểu diễn góc lượng giác trên đường tròn lượng giác

**Phương pháp**

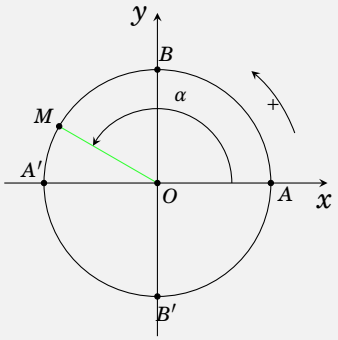
Để biểu diễn góc lượng giác có số đo $\alpha$ trên đường tròn lượng giác ta cần thực hiện các bước sau:

- Bước 1: Vẽ đường tròn lượng giác. Chọn gốc A$(1;0)$ làm điểm đầu.
- Bước 2: Chọn điểm cuối $M$ trên đường tròn lượng giác sao cho $(OA,OM)=\alpha$. Điểm cuối $M$ chính là điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo $\alpha$.

**Kiến thức cần lưu ý:**

✓ Đường tròn lượng giác là đường tròn có tâm tại gốc tọa độ, bán kính bằng 1, được định hướng với:

- Chiều quay dương (ngược chiều quay của kim đồng hồ).
- Chiều quay âm (cùng chiều quay của kim đồng hồ).
- Lấy điểm $A(1;0)$ làm điểm gốc của đường tròn.
- Các điểm $B(0;1)$, $A(1;0)$, $B'(0;-1)$ nằm trên đường tròn lượng giác.




✓ Nếu $|\alpha|>2\pi$ (hoặc $|\alpha|>360^\circ$ ) ta phân tích $\alpha=\beta+k2\pi$ hoặc $\alpha=\beta+k360^\circ$ với $-\pi<\beta<\pi$. Khi đó, điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo $\alpha$ sẽ trùng với điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo là $\beta$.

✓ $a>0$ thì góc $a$ quay theo chiều dương, $a<0$ thì góc $a$ quay theo chiều âm.

**Ví dụ 8.** Xác định điểm $M$ trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo bằng

a) $45^\circ$ b) $-\dfrac{9\pi}{4}$

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 9.** Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác có số đo:

a) $\dfrac{9\pi}{4}$ b) $-765^0$ c) $x = k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 10.** Cho cung lượng giác có số đo $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ với $k$ là số nguyên tùy ý. Có bao nhiêu giá trị $k$ thỏa mãn $x\in[2\pi;5\pi]$ ?

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 11.** Cho cung lượng giác có số đo $x=-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{4}$ với $k$ là số nguyên tùy ý. Có bao nhiêu giá trị của $k$ thỏa mãn $x\in\left(-\dfrac{3\pi}{5};4\pi\right]$?

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 4. Tính giá trị lượng giác của một góc lượng giác

Áp dụng hệ thức cơ bản:

a) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

b) $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$, $\alpha\neq\dfrac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.

c) $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

d) $1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$, $\alpha\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

e) $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

f) $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Đồng thời từ điều kiện $a < \alpha < b$ $(a < b)$ thì xác định cụ thể dấu của $\sin\alpha$ hoặc $\cos\alpha$.
Từ đó tính được chính xác các giá trị lượng giác còn lại.

**Ví dụ 12.** Cho $\cos x = \dfrac{-2}{\sqrt{5}}$, với $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$. Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 13.** Cho $\sin x = \dfrac{3}{5}$ với $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$. Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 14.** Cho $\tan x = \dfrac{3}{4}$ với $-\pi < x < -\dfrac{\pi}{2}$. Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 15.** Cho $\cot x = \dfrac{4}{3}$ với $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$. Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 5. Tính giá trị lượng giác liên quan góc đặc biệt

- Áp dụng các hệ thức cơ bản.
- Áp dụng mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác.

(1) **Cos - đối**

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha.$$

(2) **Sin - bù**

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha.$$

(3) **Hơn kém $\frac{\pi}{2}$**

a) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$

c) $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$

d) $\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$

e) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$

f) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$

g) $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$

h) $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha.$

(4) **Phụ - chéo**

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$$
$$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha.$$

(5) **Hơn kém $\pi$**

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$$
$$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha.$$

**Ví dụ 16.** Tính giá trị của biểu thức:

a) $S = 3 - \sin^2 90^\circ + 2\cos^2 60^\circ - 3\tan^2 45^\circ$.

b) $K = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \cdots + \sin^2 70^\circ + \sin^2 80^\circ$.

c) $M = \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \cdots + \cos^2 170^\circ + \cos^2 180^\circ$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 17.** Chứng minh

$$D = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(13\pi + \alpha) - 3\sin(\alpha - 5\pi) = 3\sin\alpha.$$

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 18.** Trên đường tròn lượng giác, xác định điểm $M$ biểu diễn góc lượng giác có số đo $\dfrac{5\pi}{6}$. Trong khoảng $(-1012\pi;1012\pi)$ có bao nhiêu cặp góc đối nhau $\alpha$ và $-\alpha$ để $|\sin\alpha| = |\sin(-\alpha)| = \sin\dfrac{5\pi}{6}$?

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 6. Rút gọn biểu thức lượng giác

- Áp dụng các hệ thức cơ bản:
  a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.
  b) $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$, $\alpha \neq \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.
  c) $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$, $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
  d) $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
  e) $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.
  f) $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.
- Áp dụng các hệ thức cơ bản.
- Áp dụng mối quan hệ: Cos - đối; Sin - bù; Phụ - chéo; Hơn kém $\pi$ - tan, cot.

**Ví dụ 19.** Rút gọn biểu thức

a) $A=(1-\sin^2 x)\cdot\cot^2 x+(1-\cot^2 x)$.

b) $M=(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 20.** Rút gọn biểu thức

a) $C=2\left(\cos^4 x+\sin^4 x+\cos^2 x\sin^2 x\right)^2-\left(\cos^8 x+\sin^8 x\right)$.

b) $E=\dfrac{(\sin x-\cos x)^2-1}{\tan x-\sin x\cos x}$.

c) $F=\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 21.** Cho $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. Tính

$$\frac{\sqrt{1+\sin\alpha}}{\sqrt{1-\sin\alpha}}+\frac{\sqrt{1-\sin\alpha}}{\sqrt{1+\sin\alpha}}.$$

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 7. Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất

**1.** Các hệ thức cơ bản:

- $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.
- $\tan\alpha\cot\alpha=1$ với $\alpha\neq\dfrac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.
- $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ với $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
- $1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ với $\alpha\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
- $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.
- $\sin(\alpha+k2\pi)=\sin\alpha$, $\cos(\alpha+k2\pi)=\cos\alpha$ với mọi góc $\alpha$ và mọi $k\in\mathbb{Z}$.

**2.** Các phương pháp giải có thể sử dụng:

- Áp dụng các hệ thức cơ bản.
- Áp dụng mối quan hệ: Cos-đối; Sin-bù; Phụ-chéo; Sai khác $\dfrac{\pi}{2}$ và $\pi$.
- Với mọi góc lượng giác $\alpha$ thì $\sin\alpha,\cos\alpha\in[-\pi;\pi]$.

**Ví dụ 22.** Tìm giá trị lớn nhất - nhỏ nhất của các biểu thức sau.

a) $A = \cos(2x) + 3$.

b) $B = 1 - \sin 2x$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 23.** Tìm giá trị lớn nhất - nhỏ nhất của các biểu thức sau.

a) $A = \sqrt{2\cos x + 3} - 4$.

b) $B = \sqrt{2 + \cos 2x}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 24.** Tìm giá trị lớn nhất - nhỏ nhất của các biểu thức sau.

a) $P = 7\cos^2 x - 2\sin^2 x$.

b) $Q = \sin^6 x + \cos^6 x$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Ví dụ 25.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \cot^4 a + \cot^4 b + 2\tan^2 a \tan^2 b + 2$.

**Lời giải**

. . . . . .

# C Bài tập rèn luyện

## PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1.** Góc có số đo $\frac{\pi}{24}$ đổi sang độ bằng

**A.** $7°$. **B.** $7°30'$. **C.** $8°$. **D.** $8°30'$.

Lời giải

**Câu 2.** Một đường tròn có đường kính là 50 (cm). Một góc ở tâm có số đo $\frac{\pi}{4}$ chắn cung tròn có độ dài bằng (làm tròn đến hàng đơn vị):

**A.** 40 (cm). **B.** 39 (cm). **C.** 19 (cm). **D.** 20 (cm).

Lời giải

**Câu 3.** Số đo theo đơn vị radian của góc $315°$ là

**A.** $\frac{7\pi}{2}$. **B.** $\frac{7\pi}{4}$. **C.** $\frac{2\pi}{7}$. **D.** $\frac{4\pi}{7}$.

Lời giải

**Câu 4.** Góc lượng giác có số đo là $\frac{5\pi}{4}$. Hãy chọn số đo độ của góc trong các góc dưới đây.

**A.** $5°$. **B.** $15°$. **C.** $172°$. **D.** $225°$.

**Lời giải**

**Câu 5.** Góc lượng giác có số đo là $\pi$. Hãy chọn số đo độ của góc đó trong các góc có số đo sau đây.

**A.** $30°$. **B.** $45°$. **C.** $90°$. **D.** $180°$.

**Lời giải**

**Câu 6.** Góc có số đo $\frac{2\pi}{5}$ đổi sang độ là

**A.** $135°$. **B.** $72°$. **C.** $270°$. **D.** $240°$.

**Lời giải**

**Câu 7.** Góc có số đo $108^\circ$ đổi ra rađian là

**A.** $\frac{3\pi}{5}$. **B.** $\frac{\pi}{10}$. **C.** $\frac{3\pi}{2}$. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

**Lời giải**

**Câu 8.** Một bánh xe có 72 răng. Số đo góc mà bánh xe đã quay được khi di chuyển 10 răng là

**A.** $60^\circ$. **B.** $30^\circ$. **C.** $40^\circ$. **D.** $50^\circ$.

**Lời giải**

**Câu 9.** Trên đường tròn với điểm gốc là $A$. Điểm $M$ thuộc đường tròn sao cho góc lượng giác $(OA,OM)$ có số đo $60^\circ$. Gọi $N$ là điểm đối xứng với điểm $M$ qua trục $Oy$, số đo góc $(OA,ON)$ là

**A.** $-120^\circ$ hoặc $240^\circ$. **B.** $120^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$. **C.** $120^\circ$. **D.** $-240^\circ$.

**Lời giải**

**Câu 10.** Trên đường tròn bán kính $r = 15$, độ dài cung tròn chắn bởi góc ở tâm có số đo $50^\circ$ là

**A.** $l = 15 \cdot \dfrac{180}{\pi}$. **B.** $l = \dfrac{15\pi}{180}$. **C.** $l = 15 \cdot \dfrac{\pi}{180} \cdot 50$. **D.** $l = 750$.

**Lời giải**

**Câu 11.** Trên đường tròn bán kính $r = 5$, độ dài của cung tròn chắn bởi góc ở tâm có số đo $\dfrac{\pi}{8}$ bằng

**A.** $l = \dfrac{\pi}{8}$. **B.** $l = \dfrac{3\pi}{8}$. **C.** $l = \dfrac{5\pi}{8}$. **D.** $l = \dfrac{2\pi}{3}$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .

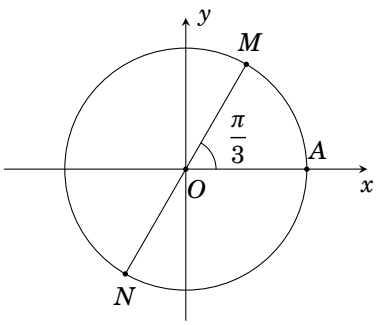
**Câu 12.** Số đo của góc ở tâm chắn cung tròn có độ dài 75 (cm) trên đường tròn có đường kính 30 (cm) (lấy $\pi \approx 3{,}14$ và làm tròn đến phút) có dạng $a^\circ b'$ $(a,\ b \in \mathbb{Z})$. Giá trị của biểu thức $P = 2a - b$ bằng

**A.** 533. **B.** 535. **C.** 267. **D.** 266.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 13.** Trên hình vẽ hai điểm $M$, $N$ biểu diễn các góc lượng giác có số đo là




**A.** $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$. **B.** $x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

**C.** $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$. **D.** $x = \dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{\pi}{2}$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 14.** Trên đường tròn lượng giác gốc $A$, cho điểm $M$ xác định bởi sđ$(OA, OM) = \dfrac{\pi}{3}$. Gọi $M_1$ là điểm đối xứng của $M$ qua trục $Ox$. Tìm số đo của góc lượng giác $(OA, OM_1)$.

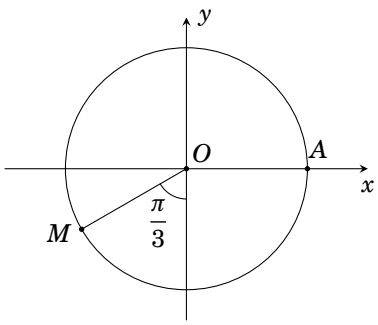
**A.** sđ$(OA, OM_1) = \dfrac{-5\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. **B.** sđ$(OA, OM_1) = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

**C.** $\text{sđ}(OA,OM_1)=\dfrac{-\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

**D.** $\text{sđ}(OA,OM_1)=\dfrac{-\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

**Lời giải**

**Câu 15.** Điểm $M$ trong hình vẽ sau là điểm biểu diễn của góc $\alpha$. Số đo của $\alpha$ là




**A.** $\alpha=\dfrac{-\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

**B.** $\alpha=\dfrac{-5\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

**C.** $\alpha=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

**D.** $\alpha=\dfrac{-5\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

**Lời giải**

**Câu 16.** Khi biểu diễn góc lượng giác trên đường tròn lượng giác, khẳng định nào dưới đây sai?

**A.** Điểm biểu diễn góc $\alpha$ và góc $\pi-\alpha$ đối xứng nhau qua trục tung.

**B.** Điểm biểu diễn góc $\alpha$ và góc $-\alpha$ đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

**C.** Mỗi góc lượng giác được biểu diễn bởi một điểm duy nhất.

**D.** Góc $\alpha$ và góc có cùng điểm biểu diễn.

**Lời giải**

**Câu 17.** Một đồng hồ treo tường, kim giờ dài 10,57 cm và kim phút dài 13,34 cm. Trong 30 phút mũi kim giờ vạch lên cung tròn có độ dài là

**A.** 2,78 cm. **B.** 2,77 cm. **C.** 2,76 cm. **D.** 2,8 cm.

**Lời giải**

**Câu 18.** Trong 20 giây bánh xe của xe gắn máy quay được 60 vòng. Tính độ dài quãng đường xe gắn máy đã đi được trong vòng 3 phút, biết rằng bán kính bánh xe gắn máy bằng 6,5 cm (lấy $\pi = 3{,}1416$).

**A.** 22043 cm. **B.** 22055 cm. **C.** 22042 cm. **D.** 22054 cm.

**Lời giải**

**Câu 19.** Một bánh xe đạp quay được 25 vòng trong 10 giây. Tính độ dài quãng đường mà người đi xe thực hiện được trong 2,35 phút, biết rằng bán kính bánh xe bằng 340 mm. (Tính theo đơn vị mét, kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).

**A.** 314,5 (m). **B.** 753,04 (m). **C.** 514,8 (m). **D.** 437,8 (m).

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 20.** Từ một vị trí ban đầu trong không gian, vệ tinh $X$ chuyển động theo quỹ đạo là một đường tròn quanh Trái Đất và luôn cách tâm Trái Đất một khoảng bằng 9200 km. Sau 2 giờ thì vệ tinh $X$ hoàn thành hết một vòng di chuyển. Quãng đường vệ tinh $X$ chuyển động được sau 1 giờ là

**A.** 28902,65 (km). **B.** 29802,65 (km). **C.** 32102,65 (km). **D.** 28905 (km).

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

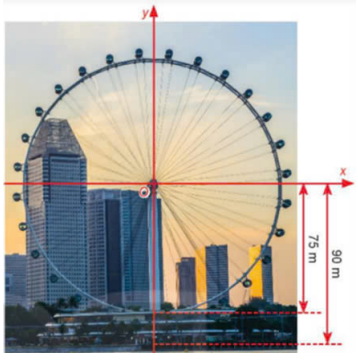
.....

.....

.....

**Câu 21.** Một chiếc đu quay có bán kính 75 m, tâm của vòng quay ở độ cao 90 m, thời gian thực hiện mỗi vòng quay của đu quay là 30 phút. Nếu một người vào cabin tại vị trí thấp nhất của vòng quay, thì sau 20 phút quay, người đó ở độ cao bao nhiêu mét?

**A.** 127,5 (m). **B.** 154,3 (m). **C.** 87,7 (m). **D.** 157,5 (m).



**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 22.** Cho $\frac{\pi}{2} < a < \pi$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $\sin a > 0, \cos a > 0$. **B.** $\sin a < 0, \cos a < 0$. **C.** $\sin a > 0, \cos a < 0$. **D.** $\sin a < 0, \cos a > 0$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 23.** Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

**A.** $\sin(180^\circ - a) = -\cos a$. **B.** $\sin(180^\circ - a) = -\sin a$.

**C.** $\sin(180^\circ - a) = \sin a$. **D.** $\sin(180^\circ - a) = \cos a$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 24.** Trong các đẳng thức sau, đẳng thức **sai** là

**A.** $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$. **B.** $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$. **C.** $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cot x$. **D.** $\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cot x$.

**Lời giải**

**Câu 25.** Cho biết $\tan\alpha=\frac{1}{2}$. Tính $\cot\alpha$.

**A.** $\cot\alpha=2$. **B.** $\cot\alpha=\frac{1}{4}$. **C.** $\cot\alpha=\frac{1}{2}$. **D.** $\cot\alpha=\sqrt{2}$.

**Lời giải**

**Câu 26.** Cho $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $\sin\alpha<0$. **B.** $\tan\alpha>0$. **C.** $\cot\alpha>0$. **D.** $\cos\alpha<0$.

**Lời giải**

**Câu 27.** Biết $\tan\alpha = 2$ và $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$. Tính $\sin\alpha$.

**A.** $-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

**Lời giải**

**Câu 28.** Biết $\tan\alpha = -3$. Tính $\tan\left(\alpha - \dfrac{7\pi}{2}\right)$.

**A.** $-\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $3$. **D.** $-3$.

**Lời giải**

**Câu 29.** Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào sai?

**A.** $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

**B.** $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}\left(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$.

**C.** $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}(\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$.

**D.** $\tan\alpha + \cot\alpha = 1\left(\alpha \neq \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right)$.

**Lời giải**

**Câu 30.** Cho $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Giá trị của $\cos\alpha$ là

**A.** $\frac{4}{5}$. **B.** $-\frac{4}{5}$. **C.** $\pm\frac{4}{5}$. **D.** $\frac{16}{25}$.

Lời giải

**Câu 31.** Cho $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin\alpha$.

**A.** $\sin\alpha = \frac{1}{5}$. **B.** $\sin\alpha = -\frac{1}{5}$. **C.** $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. **D.** $\sin\alpha = \pm\frac{3}{5}$.

Lời giải

**Câu 32.** Rút gọn biểu thức $P = \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$.

**A.** $-\frac{3}{2}\cos 2a$. **B.** $\frac{1}{2}\cos 2a$. **C.** $-\frac{2}{3}\cos 2a$. **D.** $-\frac{1}{2}\cos 2a$.

Lời giải

**Câu 33.** Giá trị biểu thức $P=\sin^2\dfrac{\pi}{6}+\sin^2\dfrac{\pi}{3}+\sin^2\dfrac{\pi}{4}+\sin^2\dfrac{9\pi}{4}+\tan\dfrac{\pi}{6}\cot\dfrac{\pi}{6}$ bằng

**A.** 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

**Câu 34.** Cho $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ và $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Giá trị của $\cos\alpha$ là

**A.** $\dfrac{4}{5}$. **B.** $-\dfrac{4}{5}$. **C.** $\pm\dfrac{4}{5}$. **D.** $\dfrac{16}{25}$.

Lời giải

**Câu 35.** Cho $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$ với $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. Tính $\sin\alpha$.

**A.** $\sin\alpha=\dfrac{1}{5}$. **B.** $\sin\alpha=-\dfrac{1}{5}$. **C.** $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$. **D.** $\sin\alpha=\pm\dfrac{3}{5}$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 36.** Cho $\tan\alpha = -\dfrac{4}{5}$ với $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $\sin\alpha = -\dfrac{4}{\sqrt{41}}, \cos\alpha = -\dfrac{5}{\sqrt{41}}$.

**B.** $\sin\alpha = \dfrac{4}{\sqrt{41}}, \cos\alpha = \dfrac{5}{\sqrt{41}}$.

**C.** $\sin\alpha = -\dfrac{4}{\sqrt{41}}, \cos\alpha = \dfrac{5}{\sqrt{41}}$.

**D.** $\sin\alpha = \dfrac{4}{\sqrt{41}}, \cos\alpha = -\dfrac{5}{\sqrt{41}}$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 37.** Trên nửa đường tròn đơn vị cho góc $\alpha$ thỏa mãn $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$ và $\cos\alpha < 0$. Tính $\tan\alpha$.

**A.** $-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

**B.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

**C.** $-\dfrac{2}{5}$.

**D.** $1$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .
. . . . . .

**Câu 38.** Cho $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ và $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Khi đó $\cos\alpha$ có giá trị bằng

**A.** $-\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{8}{9}$. **D.** $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 39.** Cho $P = \dfrac{3\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}$ và $\tan x = 2$. Giá trị của biểu thức $P$ bằng

**A.** $\dfrac{8}{9}$. **B.** $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{5}{4}$.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 40.** Cho $\sin x = \dfrac{1}{2}$ và $\cos x < 0$. Giá trị của biểu thức $A = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ bằng

**A.** $-2-\sqrt{3}$. **B.** $2+\sqrt{3}$. **C.** $-2+\sqrt{3}$. **D.** $2-\sqrt{3}$.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 41.** Biểu thức $P=\dfrac{3}{\cos^4 x}-2\tan^4 x$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$ tại điểm nào sau đây?

**A.** $x=0$. **B.** $x=\dfrac{\pi}{3}$. **C.** $x=\dfrac{\pi}{6}$. **D.** $x=\dfrac{\pi}{12}$.

**Lời giải**

**Câu 42.** Một vật dao động điều hòa theo phương trình $x=1{,}25\cos\left(2\pi t-\dfrac{\pi}{12}\right)$ (cm), với $t$ là thời gian được tính theo giây. Tính quãng đường vật đi được sau thời gian $t=2{,}5$ giây kể từ lúc bắt đầu dao động (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

**A.** 4,21 (cm). **B.** 3,21 (cm). **C.** 1,21 (cm). **D.** 2,21 (cm).

**Lời giải**

**Câu 43.** Hằng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu $h$ (m) của con kênh tính theo thời gian $t$ (giờ) trong một ngày được cho bởi công thức

$$h(t)=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{8}+\frac{\pi}{4}\right)+3,\ 0\le t\le 24.$$

Hỏi tại thời điểm nào trong ngày thì mực nước của con kênh cao nhất?

**A.** 10 (h). **B.** 12 (h). **C.** 14 (h). **D.** 15 (h).

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Câu 1. B | Câu 2. D | Câu 3. B | Câu 4. D | Câu 5. D | Câu 6. B | Câu 7. A |
| Câu 8. D | Câu 9. C | Câu 10. C | Câu 11. C | Câu 12. B | Câu 13. C | Câu 14. C |
| Câu 15. D | Câu 16. B | Câu 17. B | Câu 18. D | Câu 19. B | Câu 20. A | Câu 21. A |
| Câu 22. C | Câu 23. C | Câu 24. D | Câu 25. A | Câu 26. D | Câu 27. A | Câu 28. B |
| Câu 29. D | Câu 30. B | Câu 31. C | Câu 32. D | Câu 33. C | Câu 34. B | Câu 35. C |
| Câu 36. C | Câu 37. A | Câu 38. D | Câu 39. D | Câu 40. A | Câu 41. B | Câu 42. C |
| Câu 43. C | | | | | | |

## PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

**Câu 1.** Đổi số đo của các góc sang radian.

**a)** $30^\circ = \dfrac{\pi}{6}$ rad. **b)** $\left(\dfrac{15}{\pi}\right)^\circ = \dfrac{1}{20}$ rad. **c)** $132^\circ = \dfrac{11\pi}{15}$ rad. **d)** $-495^\circ = -\dfrac{13\pi}{4}$ rad.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Đổi số đo của các góc sang độ.

**a)** $\dfrac{3\pi}{4}$ rad $= 135^\circ$. **b)** $-\dfrac{\pi}{360}$ rad $= -0{,}5^\circ$. **c)** $\dfrac{31\pi}{2}$ rad $= 27^\circ$. **d)** $-4$ rad $\approx -229{,}18^\circ$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 3.** Biểu diễn góc lượng giác trên đường tròn lượng giác. Khi đó

**a)** $125^\circ$ là điểm $M$ thuộc góc phần tư thứ thứ II.

**b)** $405^\circ$ là điểm $N$ thuộc góc phần tư thứ III.

**c)** $\dfrac{19\pi}{3}$ là điểm $P$ thuộc góc phần tư thứ II.

**d)** $-\dfrac{13\pi}{6}$ là điểm $Q$ thuộc góc phần tư thứ IV.

Lời giải

.....

.....

.....

**Câu 4.** Biểu diễn góc lượng giác trên đường tròn lượng giác. Khi đó

**a)** $36^\circ + k360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$ là điểm $M$ thuộc góc phần tư thứ II.

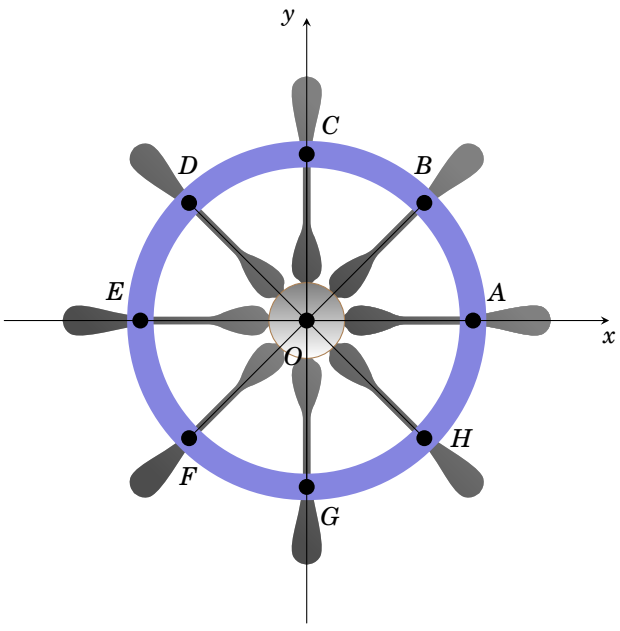
**b)** $-60^\circ + k180^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$ là các điểm $M_1$, $M_2$ thuộc góc phần tư thứ II và IV.

**c)** $-\dfrac{\pi}{4} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ là $M$ thuộc góc phần tư thứ III.

**d)** $-\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ là bốn điểm $M$, $N$, $P$, $Q$ thuộc góc phần tư thứ I, II, III, IV.

Lời giải

**Câu 5.** Trong hình vẽ bên, ta xem hình ảnh đường tròn trên một bánh lái tàu thuỷ tương ứng với một đường tròn lượng giác.



**a)** Công thức tổng quát biểu diễn góc lượng giác $(OA,OB)$ theo đơn vị radian là $(OA,OB)=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

**b)** Công thức tổng quát chỉ ra góc lượng giác tương ứng với bốn điểm biểu diễn là $A$, $C$, $E$, $G$ theo đơn vị radian là $k\dfrac{\pi}{3}\,(k\in\mathbb{Z})$.

**c)** Công thức tổng quát chỉ ra góc lượng giác tương ứng với hai điểm biểu diễn là $A$, $E$ theo đơn vị độ là $k180^\circ\,(k\in\mathbb{Z})$.

**d)** Công thức tổng quát biểu diễn góc lượng giác $(OA,OC)+(OC,OH)$ theo đơn vị radian $-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

**Lời giải**

**Câu 6.** Đường kính của một bánh xe máy là 60 cm. Khi đó

**a)** Độ dài cung $40^\circ$ của một bánh xe gần bằng 20,94 cm.

**b)** Mỗi bánh xe phải lăn một vòng thì người đi xe đi được quãng đường khoảng 94,2 cm.

**c)** Để người đi xe đi được quãng đường 2 km thì mỗi bánh xe phải lăn 1000 vòng.

**d)** Nếu xe chạy với vận tốc 50 km/h thì trong 5 giây bánh xe quay được gần 37 vòng.

**Lời giải**

**Câu 7.** Trên đường tròn lượng giác tâm $O$ và hệ trục tọa độ $Oxy$ cho điểm $M$ sao cho $\widehat{AOM}=\dfrac{\pi}{5}$. Khi đó

**a)** Số đo của góc lượng giác có tia đầu là $OA$ tia cuối là $OM$ bằng $\dfrac{\pi}{5}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

**b)** Góc lượng giác có số đo $\dfrac{11\pi}{5}$ có cùng tia đầu và tia cuối với góc lượng giác $(OA, OM)$.

**c)** Trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo $\alpha = \dfrac{\pi}{5} + \dfrac{k\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$ ta được 6 điểm.

**d)** Khi biểu diễn góc $\alpha = \dfrac{\pi}{5} + \dfrac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ lên đường tròn lượng giác ta được tập hợp điểm là một đa giác đều thì diện tích của đa giác đều đó bằng 4.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 8.** Từ một vị trí ban đầu trong không gian, vệ tinh $X$ chuyển động theo quỹ đạo là một đường tròn quanh Trái Đất và luôn cách tâm Trái Đất một khoảng bằng 9200 km. Sau 2 giờ thì vệ tinh $X$ hoàn thành hết một vòng di chuyển. Khi đó

**a)** Quãng đường vệ tinh $X$ chuyển động được sau 1 giờ là xấp xỉ 28902,65 km.

**b)** Quãng đường vệ tinh $X$ chuyển động được sau 1,5 giờ là xấp xỉ 43353,98 km.

**c)** Sau khoảng 5,3 giờ thì vệ tinh $X$ di chuyển được quãng đường 240000 km.

**d)** Giả sử vệ tinh di chuyển theo chiều dương của đường tròn, sau 4,5 giờ thì vệ tinh vẽ nên một góc bằng $\dfrac{9\pi}{2}$ rad.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 9.** Cho $0° < \alpha < 90°$. Khi đó

**a)** $A = \sin(\alpha + 90°) > 0$.

**b)** $B = \cos(\alpha - 45°) > 0$.

**c)** $C = \tan(270° - \alpha) < 0$.

**d)** $D = \cos(2\alpha + 90°) > 0$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 10.** Cho $\tan x = -2$. Xét các biểu thức $A_1 = \dfrac{5\cot x + 4\tan x}{5\cot x - 4\tan x}$, $A_2 = \dfrac{2\sin x + \cos x}{\cos x - 3\sin x}$.

**a)** $\cot x = -\dfrac{1}{2}$.

**b)** Vì $\tan x = -2$ nên $\cos x = 0$.

**c)** $A_1 = -\dfrac{21}{11}$.

**d)** $A_2 = \dfrac{3}{7}$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 11.** Cho $\cot x = 2$. Xét các biểu thức $B_1 = \dfrac{2\sin x + 3\cos x}{3\sin x - 2\cos x}$, $B_2 = \dfrac{2}{\cos^2 x - \sin x \cos x}$.

**a)** Vì $\cot x = 2$ nên $\sin x \neq 0$.

**b)** $B_1 = -8$.

**c)** $B_2 = -5$.

**d)** $B_1 + B_2 = -13$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .
. . . . . .

**Câu 12.** Từ một vị trí ban đầu trong không gian, vệ tinh $X$ chuyển động theo quỹ đạo là một đường tròn quanh Trái Đất và luôn cách tâm Trái Đất một khoảng bằng 9200 km. Sau 2 giờ thì vệ tinh $X$ hoàn thành hết một vòng di chuyển.

**a)** Quãng đường vệ tinh $X$ chuyển động được sau 1 giờ là $\approx 28902{,}65$ km.

**b)** Quãng đường vệ tinh $X$ chuyển động được sau 1,5 giờ là $\approx 43353{,}98$ km.

**c)** Sau khoảng 5,3 giờ thì $X$ di chuyển được quãng đường 240000 km.

**d)** Giả sử vệ tinh di chuyển theo chiều dương của đường tròn, sau 4,5 giờ thì vệ tinh vẽ nên một góc $\dfrac{9\pi}{2}$ rad.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 13.** Cho $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

**a)** $A = \cos(\alpha + \pi) < 0$.

**b)** $B = \tan(\alpha - \pi) > 0$.

**c)** $C = \sin\left(\alpha + \dfrac{2\pi}{5}\right) < 0$.

**d)** $D = \cos\left(\alpha - \dfrac{3\pi}{8}\right) < 0$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 14.** Cho $\tan x = \dfrac{1}{3}$ với $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$.

**a)** $\cos x < 0$.

**b)** $\cos x = -\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

**c)** $\sin x = -\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

**d)** $\sin x + \cos x = -\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

**Lời giải**

**Câu 15.** Cho $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$, với $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

**a)** $\cos^2\alpha = \dfrac{9}{16}$.

**b)** $\cos\alpha = -\dfrac{3}{4}$.

**c)** $\cot\alpha = -\dfrac{3}{\sqrt{7}}$.

**d)** $\tan\alpha + \cot\alpha = -\dfrac{16\sqrt{7}}{23}$.

**Lời giải**

**Câu 16.** Cho $\tan\alpha = 2$, với $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

**a)** $\cot\alpha = \dfrac{1}{2}$.

**b)** $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{5}$.

**c)** $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

**d)** $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

**Lời giải**

**Câu 17.** Cho $\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$, với $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

**a)** $\cos\alpha<0$. **b)** $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **c)** $\tan\alpha=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **d)** $\cot\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

**Câu 18.** Cho $\cos\alpha=-\dfrac{3}{4}$, với $-\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<-\pi$.

**a)** $\sin\alpha<0$. **b)** $\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{7}}{4}$. **c)** $\tan\alpha=-\dfrac{\sqrt{7}}{3}$. **d)** $\cot\alpha=-\dfrac{3}{\sqrt{7}}$.

Lời giải

**Câu 19.** Tính được các giá trị lượng giác của góc $\alpha$, biết $\tan\alpha=\dfrac{2\sqrt{10}}{9}$, $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$. Khi đó

**a)** $\cot\alpha=\dfrac{9}{2\sqrt{10}}$. **b)** $\cos\alpha=-\dfrac{9}{11}$. **c)** $\begin{cases}\cos\alpha<0\\ \sin\alpha<0\end{cases}$. **d)** $\sin\alpha=-\dfrac{2\sqrt{10}}{11}$.

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

**Câu 20.** Tính được các giá trị lượng giác của góc $\alpha$, biết $\cot\alpha=\sqrt{2}+1$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. Khi đó

**a)** $\begin{cases}\cos\alpha>0\\ \sin\alpha>0\end{cases}$. **b)** $\tan\alpha=\sqrt{2}+1$. **c)** $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. **d)** $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

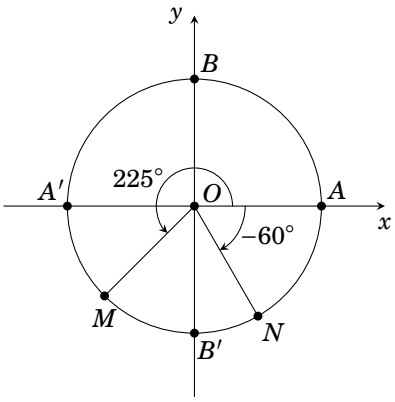
## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | |
|---|---|---|
| **Câu 1.** a Đ b Đ c Đ d S | **Câu 2.** a Đ b Đ c S d Đ | **Câu 3.** a Đ b S c S d Đ |
| **Câu 4.** a S b Đ c S d Đ | **Câu 5.** a Đ b S c Đ d Đ | **Câu 6.** a Đ b S c S d Đ |
| **Câu 7.** a S b Đ c Đ d S | **Câu 8.** a Đ b Đ c S d Đ | **Câu 9.** a Đ b Đ c S d S |
| **Câu 10.** a Đ b S c Đ d S | **Câu 11.** a Đ b Đ c S d S | **Câu 12.** a Đ b Đ c S d Đ |
| **Câu 13.** a Đ b Đ c S d S | **Câu 14.** a Đ b S c Đ d S | **Câu 15.** a Đ b S c Đ d S |
| **Câu 16.** a Đ b Đ c S d Đ | **Câu 17.** a Đ b S c Đ d Đ | **Câu 18.** a S b S c Đ d Đ |
| **Câu 19.** a Đ b Đ c Đ d Đ | **Câu 20.** a Đ b S c Đ d Đ | |

## PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Từ hình vẽ đường tròn lượng giác, công thức số đo tổng quát của góc lượng giác $(OA,OM)$; $(OA,ON)$ có dạng lần lượt là $n^\circ + k360^\circ$, $(k \in \mathbb{Z})$; $m^\circ + k360^\circ$, $(k \in \mathbb{Z})$ với $n$; $m$ là các số nguyên. Tính giá trị $S = \frac{1}{4}m^2 - n$.

KQ: | | | | |




**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

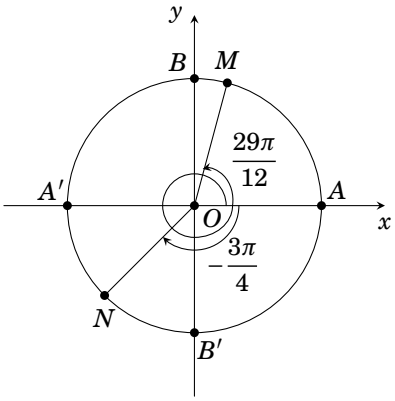
.....

.....

.....

**Câu 2.** Từ hình vẽ đường tròn lượng giác, công thức số đo tổng quát của góc lượng giác $(OA,OM)$; $(OA,ON)$ có dạng lần lượt là $\frac{n}{m}\pi + k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$; $-\frac{p}{q}\pi + k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ với $m$; $n$; $p$; $q$ là các số nguyên và $\frac{n}{m}$, $\frac{p}{q}$ là phân số tối giản. Tính giá trị $T = (m+p) - (n+q)$.

KQ: | | | | |




**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

**Câu 3.** Một bánh xe có đường kính kể cả lốp xe là 55 cm. Nếu xe chạy với tốc độ 50 km/h thì trong một giây bánh xe quay được bao nhiêu vòng? (*Kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm*). KQ: | | | | |

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

**Câu 4.** Một bánh xe đạp quay được 25 vòng trong 10 giây. Tính độ dài quãng đường mà người đi xe thực hiện được trong 2,35 phút, biết rằng bán kính bánh xe bằng 340 mm. (*Tính theo đơn vị mét, kết quả được làm tròn đến hàng đơn vị*). KQ: | | | | |

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

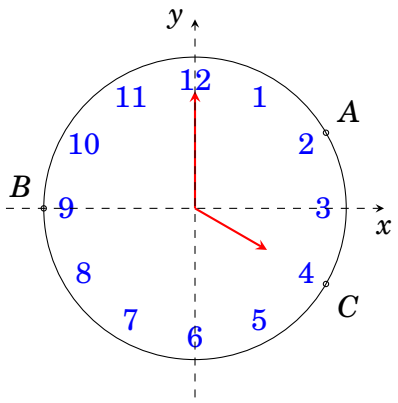
. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

**Câu 5.** Một cái đồng hồ treo tường có đường kính bằng 60 cm, ta xem vành ngoài chiếc đồng hồ là một đường tròn với các điểm $A$, $B$, $C$ lần lượt tương ứng với vị trí các số 2, 9, 4. Tính tổng độ dài các cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ và $\overset{\frown}{AC}$ (*kết quả tính theo đơn vị centimét và làm tròn đến hàng đơn vị*). KQ: | | | | |




**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 6.** Gọi $M$, $N$, $P$ là các điểm trên đường tròn lượng giác sao cho số đo các góc lượng giác $(OA,OM)$, $(OA,ON)$, $(OA,OP)$ lần lượt bằng $\frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{6}$ và $MN = NP = 2$. Tính diện tích tam giác $MNP$ (*kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2*). KQ: | | | | |

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 7.** Cho $\cos x = \frac{1}{2}$. Tính giá trị biểu thức $P = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x$. KQ: |

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 8.** Biểu thức sau $T=2\sin\left(\dfrac{9\pi}{2}-x\right)+3\cos(19\pi-x)=k\cos x$. Khi đó $k=?$ KQ:

**Lời giải**

**Câu 9.** Biểu thức $S=\dfrac{\sin\left(\dfrac{15\pi}{2}-x\right)-2\cos(x-\pi)}{\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}-x\right)}=k\cot x$. Khi đó $k=?$ KQ:

**Lời giải**

**Câu 10.** Cho tam giác $ABC$, khi đó biểu thức $\dfrac{\sin^3\dfrac{\widehat{B}}{2}}{\cos\left(\dfrac{\widehat{A}+\widehat{C}}{2}\right)}+\dfrac{\cos^3\dfrac{\widehat{B}}{2}}{\sin\left(\dfrac{\widehat{A}+\widehat{C}}{2}\right)}-\dfrac{\cos\left(\widehat{A}+\widehat{C}\right)}{\sin\widehat{B}}\tan\widehat{B}$

bằng? KQ:

**Lời giải**

**Câu 11.** Biểu thức $A=\tan\left(\dfrac{17\pi}{2}\right)+2\cot(5\pi+x)=k\cot x$, khi đó $k=$? KQ:

**Lời giải**

**Câu 12.** Biểu thức $B=\dfrac{2\sin\left(x-4\pi+\cos\left(x-\dfrac{5\pi}{2}\right)\right)}{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)}=k\tan x$, khi đó $k=$? KQ:

**Lời giải**

Vậy $k=-3$.

**Câu 13.** Cho $\cot\alpha=\dfrac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $A=\dfrac{3\sin\alpha+4\cos\alpha}{2\sin\alpha-5\cos\alpha}$. KQ: $\boxed{\phantom{00}}$

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 14.** Cho $\cos\alpha=\dfrac{3}{4}$. Tính giá trị của biểu thức $B=\dfrac{\tan\alpha+3\cot\alpha}{\tan\alpha+\cot\alpha}$. *Kết quả làm tròn đến chữ số thập nhân thứ hai.* KQ: $\boxed{\phantom{00}}$

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 15.** Cho $\tan\alpha=\sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức $C=\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin^3\alpha+3\cos^3\alpha+2\sin\alpha}$. (*Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai.*) KQ: $\boxed{\phantom{00}}$

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 16.** Biết $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$. Tính giá trị của $\sin^4 a + \cos^4 a$. KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 17.** Đơn giản các biểu thức sau (giả sử mỗi biểu thức sau luôn có nghĩa) $C = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} - \cot^2 x \cot^2 y$. KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 18.** Trong tam giác $ABC$ ta có $\cos\widehat{A} + \cos\left(\widehat{B}+\widehat{C}\right) + \tan\dfrac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2} = k\cot\dfrac{\widehat{C}}{2}$. Tính giá trị $k$.

KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 19.** Cho biểu thức $f(x)=3\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)-2\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)$. Tính $f(1)$. KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 20.** Cho biểu thức $g(x)=\dfrac{-2\cot^2 x-\cos^2 x}{\cot^2 x}+\dfrac{\sin x\cos x}{\cot x}$ với $x\neq 0$, $x\neq\dfrac{\pi}{2}$, $x\neq\pi$. Tính $g\left(\dfrac{2024\pi}{2023}\right)$.

KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 21.** Cho hai góc nhọn $a$ và $b$. Biết $\cos a=\dfrac{1}{3}$ và $\cos b=\dfrac{1}{4}$. Tính giá trị của $P=(\cos a\cdot\cos b)^2-(\sin a\cdot\sin b)^2$. (*Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất.*) KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

. . . . . .

**Câu 22.** Cho $\tan x = -\dfrac{4}{3}$ và $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$. Tính giá trị của biểu thức $M = \dfrac{\sin^2 x - \cos x}{\sin x - \cos^2 x}$. (*Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai.*)

KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 23.** Cho $3\cos\alpha - \sin\alpha = 1$, $0° < \alpha < 90°$. Tính giá trị của $\tan\alpha$. Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai.

KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 24.** Cho biểu thức $A = \dfrac{\left(1-\tan^2 x\right)^2}{4\tan^2 x} - \dfrac{1}{4\sin^2 x\cos^2 x}$ khi $x = \dfrac{2024\pi}{2023}$ thì $A$ bằng bao nhiêu?

KQ: [ ]

**Lời giải**

**Câu 25.** Cho biểu thức $B=\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin(10\pi+x)\right]^2+\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\cos(8\pi-x)\right]^2$ khi $x=\frac{2024\pi}{2023}$ thì $B$ bằng bao nhiêu? KQ: [ ]

**Lời giải**

**Câu 26.** Tính $S=\sin^2 5^\circ+\sin^2 10^\circ+\sin^2 15^\circ+\ldots+\sin^2 80^\circ+\sin^2 85^\circ$. KQ: [ ]

**Lời giải**

**BẢNG ĐÁP ÁN**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Câu 1.** 675 | **Câu 2.** 6 | **Câu 3.** 8,04 | **Câu 4.** 753 | **Câu 5.** 110 |
| **Câu 6.** 3,46 | **Câu 7.** 3,25 | **Câu 8.** $-1$ | **Câu 9.** 1 | **Câu 10.** 2 |
| **Câu 11.** 3 | **Câu 12.** 3 | **Câu 13.** 13 | **Câu 14.** 2,13 | **Câu 15. 0,09** |
| **Câu 16. 0,5** | **Câu 17. -1** | **Câu 18. 1** | **Câu 19. 1** | **Câu 20. -2** |
| **Câu 21. -0,8** | **Câu 22. 2,82** | **Câu 23. 1,33** | **Câu 24. -1** | **Câu 25. 2** |
| **Câu 26. 8,5** | | | | |

# BÀI 2. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

## A Lý thuyết

### 1 Công thức cộng

- $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b.$
- $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b.$
- $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b.$
- $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b.$
- $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}.$
- $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}.$

### 2 Công thức nhân đôi

#### 2.1 Công thức nhân đôi

- $\sin 2a=2\sin a\cos a.$
- $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a.$
- $\tan 2a=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}.$

#### 2.2 Công thức hạ bậc

- $\cos^2 a=\dfrac{1+\cos 2a}{2}.$
- $\sin^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{2}$
- $\tan^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$

### 3 Công thức biến đổi tích thành tổng

- $\cos a\cdot\cos b=\dfrac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)].$
- $\sin a\cdot\sin b=\dfrac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)].$
- $\sin a\cdot\cos b=\dfrac{1}{2}[\sin(a-b)+\sin(a+b)].$

## 4 Công thức biến đổi tổng thành tích

- $\cos a+\cos b=2\cos\dfrac{a+b}{2}\cdot\cos\dfrac{a-b}{2}$.
- $\cos a-\cos b=-2\sin\dfrac{a+b}{2}\cdot\sin\dfrac{a-b}{2}$.
- $\sin a+\sin b=2\sin\dfrac{a+b}{2}\cdot\cos\dfrac{a-b}{2}$.
- $\sin a-\sin b=2\cos\dfrac{a+b}{2}\cdot\sin\dfrac{a-b}{2}$.

# B Các dạng bài tập

### Dạng 1. Công thức cộng

- $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$.
- $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$.
- $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$.
- $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$.
- $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$.
- $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$.

**Ví dụ 1.** Rút gọn các biểu thức

a) $A=\dfrac{\sqrt{2}\cos a-2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+a\right)}{-\sqrt{2}\sin a+2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+a\right)}$.

b) $B=(\tan a-\tan b)\cot(a-b)-\tan a\tan b$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 2.** Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ biết $\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ và $0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

b) $B=\cos(a+b)\cdot\cos(a-b)$ biết $\cos a=\dfrac{1}{3}$ và $\cos b=\dfrac{1}{4}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 3.**

a) $a-b=\dfrac{\pi}{4}$, chứng minh rằng $\dfrac{1+\tan b}{1+\tan a}=\tan a$.

b) $a+b=\dfrac{\pi}{4}$, chứng minh rằng $(1+\tan a)(1+\tan b)=2$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

## Dạng 2. Công thức nhân đôi

**Công thức nhân đôi.**

- $\sin 2a=2\sin a\cos a$.
- $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$.
- $\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$.

**Công thức hạ bậc.**

- $\cos^2 a=\dfrac{1+\cos 2a}{2}$.
- $\sin^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{2}$
- $\tan^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$

**Ví dụ 4.** Rút gọn các biểu thức sau,

a) $A = \sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$.

b) $B = \cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 5.** Tính các giá trị lượng giác của các góc $2a$ biết

a) $\cos a = \dfrac{5}{13}$, $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$.

b) $\sin a = \dfrac{1}{4}$, $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 6.** Cho $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, với $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$. Tính giá trị của $E = \sin 2\alpha + \tan 2\alpha$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 7.** Chứng minh biểu thức $P = \dfrac{1-\cos 2x+\sin 2x}{1+\cos 2x+\sin 2x}.\cot x$ không phụ thuộc giá trị của $x$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 3. Công thức biến đổi tích thành tổng

1. $\cos a \cdot \cos b = \dfrac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)]$.
2. $\sin a \cdot \sin b = \dfrac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$.
3. $\sin a \cdot \cos b = \dfrac{1}{2}[\sin(a-b)+\sin(a+b)]$.

**Ví dụ 8.** Biến mỗi biểu thức sau thành dạng tổng.

a) $A = 2\sin(a+b)\sin(a-b)$.

b) $B = \sin x \sin 2x \sin 3x$.

c) $C = 8\cos x \sin 2x \sin 3x$.

d) $D = \cos x \cos(x-60^\circ)\cos(x+60^\circ)$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 9.** Chứng minh rằng $4\cos x \cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right) = \cos 3x$, với $x \in \mathbb{R}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 10.** Chứng minh $S=\cos^2 x+\cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3}+x\right)+\cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right)$ không phụ thuộc giá trị của $x$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 4. Công thức biến đổi tổng thành tích

1. $\cos a+\cos b=2\cos\dfrac{a+b}{2}\cdot\cos\dfrac{a-b}{2}$.
2. $\cos a-\cos b=-2\sin\dfrac{a+b}{2}\cdot\sin\dfrac{a-b}{2}$.
3. $\sin a+\sin b=2\sin\dfrac{a+b}{2}\cdot\cos\dfrac{a-b}{2}$.
4. $\sin a-\sin b=2\cos\dfrac{a+b}{2}\cdot\sin\dfrac{a-b}{2}$.

**Ví dụ 11.** Biến đổi mỗi biểu thức dưới đây thành một tích.

a) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x$.

b) $\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\sin 7x$.

c) $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x$.

d) $\dfrac{\cos x+\cos y}{\cos x-\cos y}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 12.** Chứng minh:

a) $\cos 5x\cos 3x+\sin 7x\sin x=\cos 2x\cos 4x$.

b) $\sin 5x-2\sin x(\cos 2x+\cos 4x)=\sin x$.

c) $\cos 5x\cos x+\sin 3x\sin x=\cos 2x\cos 4x$.

d) $2(\sin a\cos 2a-\sin 2a\cos 3a)+\sin 5a=\sin 3a$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

# C Bài tập rèn luyện

## PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1.** Rút gọn biểu thức $M = \cos 2x \cdot \cos x + \sin 2x \cdot \sin x$ ta được kết quả là

**A.** $M = \cos x$. **B.** $M = \cos 3x$. **C.** $M = \sin x$. **D.** $M = \sin 3x$.

Lời giải

**Câu 2.** Rút gọn biểu thức $\cos(120^\circ - x) + \cos(120^\circ + x) - \cos x$ ta được kết quả là

**A.** $0$. **B.** $-\cos x$. **C.** $-2\cos x$. **D.** $\sin x - \cos x$.

Lời giải

**Câu 3.** Biết $\sin a = \dfrac{5}{13}$, $\cos b = \dfrac{3}{5}$, $\left(\dfrac{\pi}{2} < a < \pi;\ 0 < b < \dfrac{\pi}{2}\right)$. Kết quả của biểu thức $\sin(a+b)$ bằng

**A.** $0$. **B.** $\dfrac{63}{65}$. **C.** $\dfrac{56}{65}$. **D.** $\dfrac{-33}{65}$.

Lời giải

**Câu 4.** Trong các công thức sau, công thức nào **sai**?

**A.** $\cos 6a = \cos^2 3a - \sin^2 3a$.

**B.** $\cos 6a = 1 - 2\sin^2 3a$.

**C.** $\cos 6a = 1 - 6\sin^2 a$.

**D.** $\cos 6a = 2\cos^2 3a - 1$.

**Lời giải**

**Câu 5.** Đẳng thức nào **không đúng** với mọi $x$?

**A.** $\cos^2 3x = \dfrac{1+\cos 6x}{2}$.

**B.** $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.

**C.** $\sin 2x = 2\sin x \cos x$.

**D.** $\sin^2 2x = \dfrac{1+\cos 4x}{2}$.

**Lời giải**

**Câu 6.** Nếu $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{2}$ thì $\sin 2x$ bằng

**A.** $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{3}{8}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{-3}{4}$.

**Lời giải**

**Câu 7.** Biết rằng $\frac{1}{\cos^2 x-\sin^2 x}+\frac{2\cdot\tan x}{1-\tan^2 x}=\frac{\cos(ax)}{b-\sin(ax)}$ với $(a,\, b\in\mathbb{R})$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$.

**A.** $P=4$. **B.** $P=1$. **C.** $P=2$. **D.** $P=3$.

**Lời giải**

**Câu 8.** Biết $\sin\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)=\sqrt{2}$. Tính $\sin(\alpha+\pi)-2\cos(\alpha-\pi)$.

**A.** $\frac{3}{\sqrt{2}}$. **B.** $-\frac{3}{\sqrt{2}}$. **C.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

**Câu 9.** Biết tam giác $ABC$ có các góc thỏa mãn $\sin A+\sin B+\sin C=a\cos\dfrac{A}{b}\cos\dfrac{B}{b}\cos\dfrac{C}{b}$ với $a$, $b$ nguyên. Tính $a+b$.

**A.** $a+b=6$. **B.** $a+b=4$. **C.** $a+b=2$. **D.** $a+b=8$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

**Câu 10.** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{2\sin x+2}$.

**A.** $-1$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $0$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

**Câu 11.** Cho tam giác $ABC$. Giá trị của biểu thức $P=\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C-2\cos A\cos B\cos C$ bằng

**A.** $1$. **B.** $3$. **C.** $2$. **D.** $0$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 12.** Cho biểu thức $S = \sin x + \sin(x+a) + \sin(x+2a) + \sin(x+3a) + \sin(x+4a)$. Nếu $0 < a < \pi$ thì $S$ không phụ thuộc vào $x$ khi $a$ nhận giá trị nào?

**A.** $a = \dfrac{2\pi}{5}$.
**B.** $a = \dfrac{2\pi}{5}$ hoặc $a = \dfrac{4\pi}{5}$.
**C.** $a = -\dfrac{2\pi}{5}$ hoặc $a = \dfrac{4\pi}{5}$.
**D.** $a = \dfrac{4\pi}{5}$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Câu 1. A** | **Câu 2. C** | **Câu 3. D** | **Câu 4. C** | **Câu 5. D** | **Câu 6. D** | **Câu 7. D** |
| **Câu 8. B** | **Câu 9. A** | **Câu 10. C** | **Câu 11. C** | **Câu 12. B** | | |

## PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

**Câu 1.** Cho biết $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$ và các biểu thức $A=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(\pi+\alpha)$; $B=\cos(\pi-\alpha)+\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$. Khi đó

**a)** $A=\cos\alpha-\sin\alpha$. **b)** $B=\cos\alpha+\tan\alpha$. **c)** $A+B=\dfrac{27}{20}$. **d)** $A-B=-\dfrac{29}{20}$.

Lời giải

**Câu 2.** Cho $0<a<\dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{\pi}{2}<b<\pi$ và $\tan a=3$; $\tan b=-2$.

**a)** $\tan(a+\pi)=-3$. **b)** $\tan(a+b)=-1$. **c)** $\cot(a-b)=1$. **d)** $\sin(a-b)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

**Câu 3.** Cho $\sin x=-\dfrac{4}{5}$ và $\dfrac{3\pi}{2}<x<2\pi$.

**a)** $\cos 2x=-\dfrac{\sqrt{7}}{5}$. **b)** $\sin\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

**c)** $\tan\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}$. **d)** $C=\dfrac{2\sin 2x-\cos 2x}{\tan 2x+\cos 2x}=-\dfrac{287}{551}$.

Lời giải

**Câu 4.** Biết $\sin 2\alpha = -\dfrac{4}{5}$, $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{3\pi}{4}$.

**a)** $A = \cos 2\alpha = \dfrac{3}{5}$.

**b)** $B = \left(1+3\sin^2\alpha\right)\left(1-4\cos^2\alpha\right) = \dfrac{17}{25}$.

**c)** $C = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha = \dfrac{7}{25}$.

**d)** $D = \sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$.

**Lời giải**

**Câu 5.** Cho tam giác $ABC$.

**a)** $\widehat{A} = 180^\circ - \left(\widehat{B}+\widehat{C}\right)$.

**b)** $\sin B + \sin(A+C) = 0$.

**c)** $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$.

**d)** $\triangle ABC$ cân khi $\sin A \cdot \sin C = \cos A \cdot \cos C$.

**Lời giải**

**Câu 6.** Biết $\tan x = -\dfrac{1}{2}$ và $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$.

**a)** $\cot x = -2$.

**b)** $\cos x = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

**c)** $\sin x+\cos x=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

**d)** $M=\dfrac{2\sin^2 x+3\sin x\cdot\cos x-4\cos^2 x}{5\cos^2 x-\sin^2 x}=-\dfrac{8}{19}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

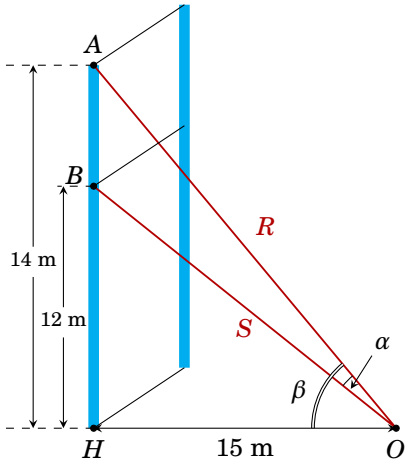
**Câu 7.** Trong vật lý, phương trình tổng quát của một vật giao động điều hòa được cho bởi công thức $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$ trong đó $t$ là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm $t$, $A$ là biên độ dao động ($A>0$).

**a)** Nếu một vật giao động theo phương trình $x(t)=5\cos\left(100\pi t+\dfrac{\pi}{4}\right)$ thì li độ của vật ở thời điểm ban đầu là $5\sqrt{2}$.

**b)** Một vật giao động điều hòa theo phương trình $x(t)=10\sin(50\pi t)\cos(50\pi t)$ thì biên độ của giao động là 5.

**c)** Cho hai dao động điều hòa cùng phương có phương trình lần lượt là $x_1=5\cos(100\pi t+\pi)$ (cm) và $x_2=5\cos\left(100\pi t-\dfrac{\pi}{2}\right)$ (cm). Khi đó phương trình dao động tổng hợp của hai dao động trên là $x=5\sqrt{2}\cos\left(100\pi t+\dfrac{\pi}{4}\right)$ (cm).

**d)** Một sợi cáp $R$ được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất 14m. Một sợi cáp $S$ khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất 12m. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột 15 m (Hình vẽ bên dưới). Gọi $\alpha$ là góc giữa hai sợi cáp trên khi đó $\tan\alpha=\dfrac{10}{131}$




.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | |
|---|---|---|
| **Câu 1.** a Đ b S c S d Đ | **Câu 2.** a S b S c S d Đ | **Câu 3.** a S b Đ c S d Đ |
| **Câu 4.** a S b Đ c S d Đ | **Câu 5.** a Đ b S c Đ d S | **Câu 6.** a Đ b S c Đ d S |
| **Câu 7.** a S b Đ c S d Đ | | |

## PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Cho biểu thức $P=\cos 5x\cdot\cos 3x-\cos(5x+90^\circ)\cdot\cos(-3x-90^\circ)$. Sau khi đơn giản hóa, ta được biểu thức $P=\cos(ax)$. Giá trị của $a$ bằng KQ:

**Lời giải**

**Câu 2.** Cho góc $\alpha$ thỏa mãn $\sin\alpha=\dfrac{1}{5}$. Khi đó giá trị biểu thức $P=\cos^2 2x+\cos^2 x$ bằng $\dfrac{a}{b}$. Tính $a+b$. Biết rằng phân số $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. KQ:

**Lời giải**

**Câu 3.** Tính giá trị biểu thức $A=\dfrac{\cos 10x-\cos 9x-\cos 8x+\cos 7x}{\sin 10x-\sin 9x-\sin 8x+\sin 7x}$ với $x=\dfrac{\pi}{34}$. KQ:

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 4.** Cho $\tan\alpha = 2$ và $\alpha \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Tính $A = 2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm). KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 5.** Cho $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Giá trị gần đúng của biểu thức $E = \frac{2\tan\alpha - \cot\alpha}{\tan\alpha + 3\cot\alpha}$ là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng trăm)? KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 6.** Cho biểu thức lượng giác $A = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) + \cot(3\pi - x)$. Khi đó giá trị của $10A$ bằng bao nhiêu? KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

**Câu 7.** Đơn giản biểu thức $P=\left(\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1}{1+\cos\alpha}\right)\sin^2\alpha$. KQ:

**Lời giải**

**Câu 8.** Gọi $S$ là tập hợp các giá trị của tham số $m$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=|\cos^4 x-\cos 2x+m|$ bằng 3. Tính tổng các phần tử của tập $S$. KQ:

**Lời giải**

**Câu 9.** Cho tam giác $ABC$ có độ dài ba cạnh $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ thỏa mãn $a+c=4b$. Tính giá trị biểu thức $P=\tan\dfrac{A}{2}\cdot\tan\dfrac{C}{2}$. KQ:

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 10.** Trong vật lý, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hòa cho bởi công thức $x(t) = A\cos\left(\omega t + \varphi\right)$, trong đó $t$ là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm $t$, $A$ là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi;\pi]$ là pha ban đầu của dao động. Xét hai dao động điều hòa có phương trình $x_1(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)$ (cm), $x_2(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right)$ (cm). Tìm pha ban đầu của dao động tổng hợp này. Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.
KQ: ☐

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**BẢNG ĐÁP ÁN**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Câu 1.** 8 | **Câu 2.** 1754 | **Câu 3.** 0,71 | **Câu 4.** 1,45 | **Câu 5.** 0,04 |
| **Câu 6.** 0 | **Câu 7.** 2 | **Câu 8.** $-1$ | **Câu 9.** 0,6 | **Câu 10.** -0,26 |

# BÀI 3. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

## A Lí thuyết

### 1 Định nghĩa hàm số lượng giác

**Định nghĩa 1**

- **Hàm số sin** là quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực $x$ với số thực $\sin x$, ký hiệu $y=\sin x$.
- **Hàm số cos** là quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực $x$ với số thực $\cos x$, ký hiệu $y=\cos x$.
- **Hàm số tan** là hàm số được xác định bởi công thức:

$$y=\frac{\sin x}{\cos x},\quad \text{với } x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\quad (k\in\mathbb{Z}),\quad \text{ký hiệu } y=\tan x.$$

- **Hàm số cotan** là hàm số được xác định bởi công thức:

$$y=\frac{\cos x}{\sin x},\quad \text{với } x\neq k\pi\quad (k\in\mathbb{Z}),\quad \text{ký hiệu } y=\cot x.$$

**Nhận xét.**

- *Tập xác định của hàm số* $y=\sin x$ *và* $y=\cos x$ *là* $\mathbb{R}$.
- *Tập xác định của hàm số* $y=\tan x$ *là* $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.
- *Tập xác định của hàm số* $y=\cot x$ *là* $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$.

### 2 Hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn

**Định nghĩa 2**

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là

- **Hàm số chẵn** nếu $\forall x\in D$ ta có $-x\in D$ và $f(-x)=f(x)$.
- **Hàm số lẻ** nếu $\forall x\in D$ ta có $-x\in D$ và $f(-x)=-f(x)$.

**Định nghĩa 3**

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là hàm số tuần hoàn nếu tồn tại số $T\neq 0$ sao cho $\forall x\in D$ ta có

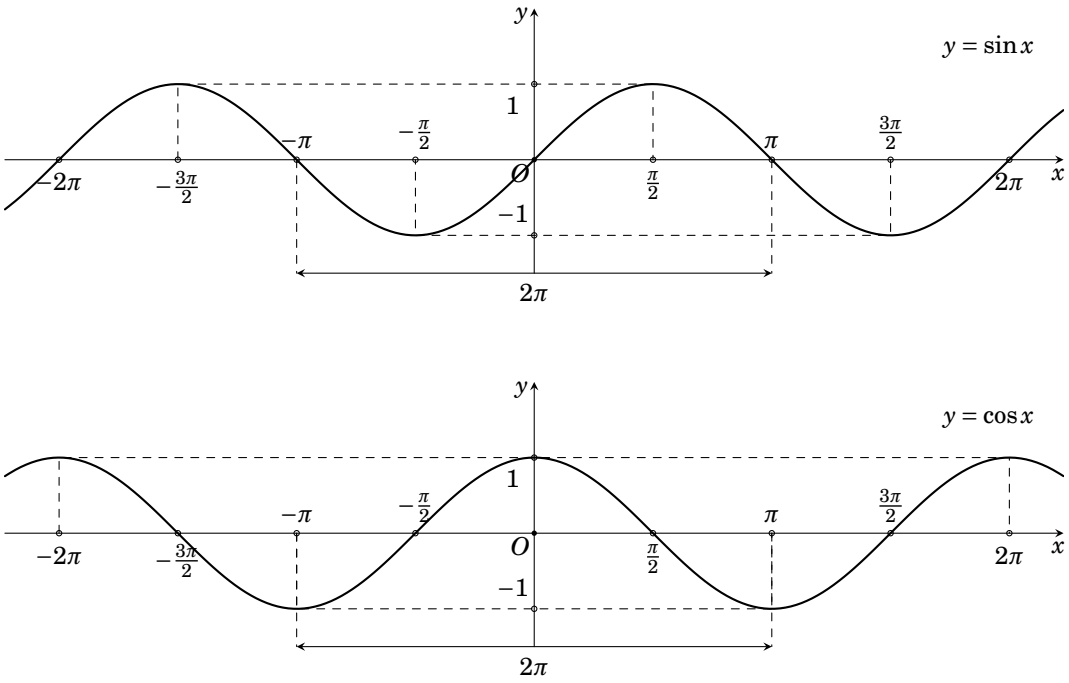
- $x+T\in D$ và $x-T\in D$.
- $f(x+T)=f(x)$.

Số $T$ dương nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên (nếu có) được gọi là **chu kì** của hàm

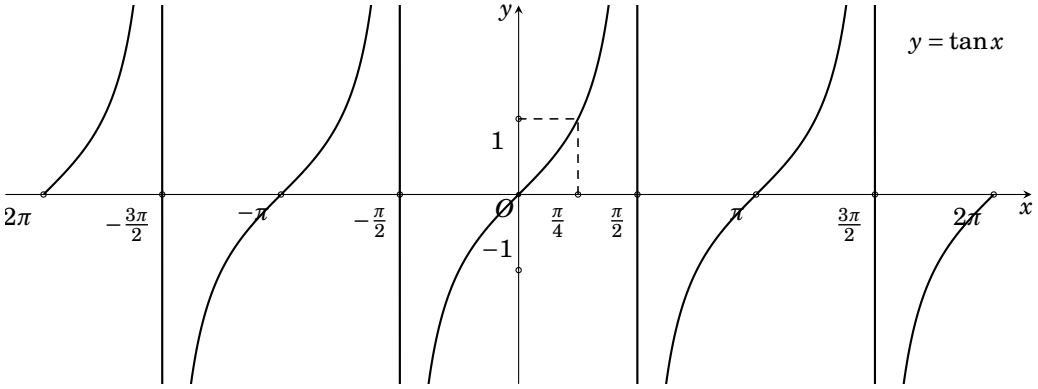
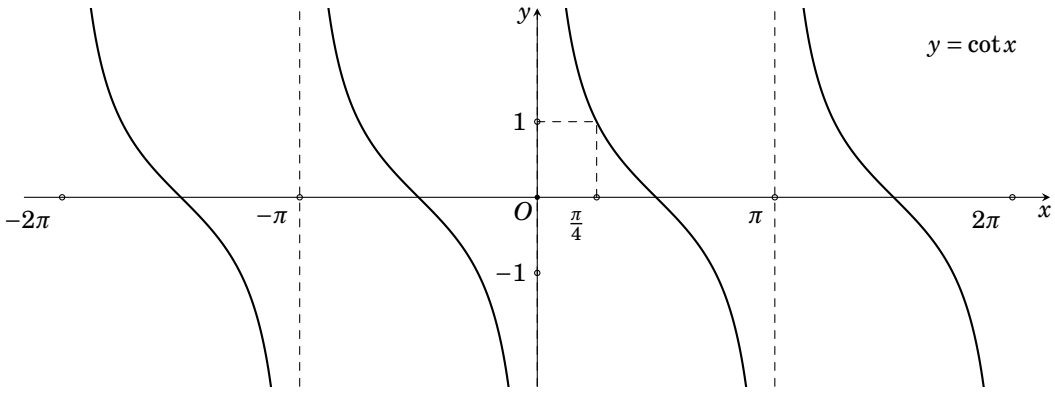
số tuần hoàn đó.

! a) Hàm số $y=\sin x$ và $y=\cos x$ là các hàm số tuần hoàn với chu kì $2\pi$.

b) Hàm số $y=\tan x$ và $y=\cot x$ là các hàm số tuần hoàn với chu kì $\pi$.

| | **Hàm số** $y=\sin x$ | **Hàm số** $y=\cos x$ |
|---|---|---|
| **1. Định nghĩa** | Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực $x$ với sin của góc lượng giác có số đo $x$ radian được gọi là hàm số sin.<br>Kí hiệu $y=\sin x$. | Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực $x$ với cos của góc lượng giác có số đo $x$ radian được gọi là hàm số cos.<br>Kí hiệu $y=\cos x$. |
| **2. Tập xác định** | $\mathscr{D}=\mathbb{R}$ | $\mathscr{D}=\mathbb{R}$ |
| **3. Tập giá trị** | $[-1;1]$ | $[-1;1]$ |
| **4. Tính chất** | Là hàm số lẻ. | Là hàm số chẵn. |
| **5. Chu kì** | Chu kì $2\pi$. | Chu kì $2\pi$. |
| **6. Đơn điệu** | Hàm số<br>+ Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right)$.<br>+ Nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$. | Hàm số<br>+ Đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi+k2\pi;k2\pi)$.<br>+ Nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi;\pi+k2\pi)$. |
| **7. Đồ thị** |  |  |
| **Giá trị đặc biệt** | $\sin x=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$.<br>$\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi$.<br>$\sin x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$. | $\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi$.<br>$\cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$.<br>$\cos x=1\Leftrightarrow x=k2\pi$. |

## 3 Đồ thị & tính chất hàm số $y=\tan x$ và $y=\cot x$

| | **Hàm số** $y=\tan x$ | **Hàm số** $y=\cot x$ |
|---|---|---|
| **1. Định nghĩa** | Hàm số tan là hàm số được xác định bởi công thức $y=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ $(\cos x\neq 0)$<br>$\Rightarrow$ Kí hiệu $y=\tan x$. | Hàm số côtan là hàm số được xác định bởi công thức $y=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ $(\sin x\neq 0)$<br>$\Rightarrow$ Kí hiệu $y=\cot x$. |
| **2. Tập xác định** | $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$ | $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ |
| **3. Tập giá trị** | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ |
| **4. Tính chất hàm** | Là hàm số lẻ. | Là hàm số lẻ. |
| **5. Chu kì** | Chu kì $\pi$. | Chu kì $\pi$. |
| **6. Đơn điệu** | Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{3\pi}{2}+k\pi\right)$. | Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi;\pi+k\pi)$. |
| **7. Đồ thị** |  <br>  | |

# B Các dạng bài tập

### Dạng 1.

Tập xác định hàm số lượng giác cơ bản

- Hàm số $y=\sin x$, $y=\cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

- Hàm số $y=\tan x$ có tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.
- Hàm số $y=\cot x$ có tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

Ngoài ra còn có các dạng

- $y=f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ lưu ý $Q(x)\neq 0$.
- $y=f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{Q(x)}}$ thì $f(x)$ có nghĩa khi $Q(x)\geq 0$.
- $y=f(x)=\dfrac{P(x)}{2\sqrt{Q(x)}}$ lưu ý $Q(x)>0$.

**Ví dụ 1.** Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y=\sin 4x$.

b) $y=\sin\dfrac{3x+1}{x^2-1}$.

c) $y=\cos\sqrt{x+2}$.

d) $y=\cos\dfrac{2025}{\sqrt{3-x}}$.

**Lời giải**

**Ví dụ 2.** Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ b) $y=\cot\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 3.** Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=\sqrt{3+2\cos x}$ b) $y=\dfrac{\tan 2x}{\sin x+1}+\cot\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

c) $y=\dfrac{\tan 5x}{\sin 4x-\cos 3x}$ d) $y=\dfrac{\sin x}{\sin^2 x-\cos^2 x}$

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 2. Tính chẵn -lẻ

**Định nghĩa 4**

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathscr{D}$.

- **Hàm số chẵn** nếu $\forall x\in\mathscr{D}$ ta có $-x\in\mathscr{D}$ và $f(-x)=f(x)$.
- **Hàm số lẻ** nếu $\forall x\in\mathscr{D}$ ta có $-x\in\mathscr{D}$ và $f(-x)=-f(x)$.

Để xác định tính chẵn - lẻ của hàm số ta thực hiện theo các bước sau:

a) Tìm tập xác định của hàm số, khi đó:

- Nếu $\mathscr{D}$ là tập đối xứng (tức là $\forall x\in\mathscr{D}$ ta có $-x\in\mathscr{D}$), ta thực hiện tiếp bước 2.
- Nếu $\mathscr{D}$ không là tập đối xứng (tức là $\exists x\in\mathscr{D}$ mà $-x\notin\mathscr{D}$). ta kết luận hàm số không chẵn cũng không lẻ.

b) Xác định $f(-x)$, khi đó:

- Nếu $f(-x)=f(x)$ kết luận hàm số là hàm số chẵn.
- Nếu $f(-x)=-f(x)$ kết luận hàm số là hàm số lẻ.
- Ngoài ra kết luận hàm số không chẵn cũng không lẻ.

**Ví dụ 4.** Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

a) $y=3\cos x+\sin^2 x$

b) $y=\dfrac{1+\sin^2 2x}{1+\cos 3x}$

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 5.** Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

a) $y = 2x \cdot \sin x$

b) $y = \cos x + \sin 2x$

c) $y = \dfrac{\cos 2x}{x}$

d) $y = \tan^2 2x \cdot \sin 5x$

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 3. Tính tuần hoàn

Hàm số lượng giác cơ bản

1) Hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ là các hàm số tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$.
2) Hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ là các hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \pi$.

Các kết quả có thể áp dụng

1) Hàm số $y = A\sin(ax+b)$ $(A \cdot a \neq 0)$ là một hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \dfrac{2\pi}{|a|}$.
2) Hàm số $y = A\cos(ax+b)$ $(A \cdot a \neq 0)$ là một hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \dfrac{2\pi}{|a|}$.
3) Hàm số $y = A\tan(ax+b)$ $(A \cdot a \neq 0)$ là một hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \dfrac{\pi}{|a|}$.
4) Hàm số $y = A\cot(ax+b)$ $(A \cdot a \neq 0)$ là một hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \dfrac{\pi}{|a|}$.
5) Nếu hàm số $y = f(x)$ chỉ chứa các hàm số lượng giác có chu kì lần lượt là $T_1$, $T_2$, ..., $T_n$ thì hàm số $f$ có chu kì $T$ là bội chung nhỏ nhất của $T_1$, $T_2$, ..., $T_n$.
6) Nếu hàm số $y = f(x)$ tuần hoàn với chu kì $T$ thì hàm số $y = f(x) + c$ ($c$ là hằng số) cũng là hàm số tuần hoàn với chu kì $T$.

**!** Một số dấu hiệu nhận biết hàm số $y = f(x)$ không phải là hàm tuần hoàn.
Hàm số $y = f(x)$ không phải là hàm tuần hoàn khi một trong các điều kiện sau bị vi phạm

1) Tập xác định của hàm số là tập hữu hạn.

2) Tồn tại số $a$ sao cho hàm số không xác định với $x>a$ hoặc $x<a$.

3) Phương trình $f(x)=k$ có nghiệm nhưng số nghiệm hữu hạn.

4) Phương trình $f(x)=k$ có vô số nghiệm sắp thứ tự $\ldots<x_n<x_{n+1}<\ldots$ mà $|x_n-x_{n+1}|\to 0$ hay $\infty$.

**Ví dụ 6.** Tìm chu kì (nếu có) của các hàm số sau

1) $y=1-\sin 5x$.

2) $y=\cos^2 x-1$.

3) $y=\sin\left(\frac{2}{5}x\right)\cdot\cos\left(\frac{2}{5}x\right)$.

4) $y=\cos x+\cos\left(\sqrt{3}\cdot x\right)$.

**Lời giải**

**Ví dụ 7.** Xét tính tuần hoàn và tìm chu kì (nếu có) của hàm số sau

1) $y=\cos^2 x-1$.

2) $y=\sin\left(\frac{2}{5}x\right)\cdot\cos\left(\frac{2}{5}x\right)$.

3) $y=\cos x+\sqrt{3}\cos x$.

**Lời giải**

## Dạng 4. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác

Ta có tập giá trị của hàm số $y=\sin x$, $y=\cos x$ đều là $[-1;1]$ tức là $\begin{cases}-1\le \sin x\le 1\\ -1\le \cos x\le 1.\end{cases}$

Từ đó ta có các hệ quả sau

1) $\begin{cases}0\le |\sin x|\le 1\\ 0\le |\cos x|\le 1.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}0\le \sin^2 x\le 1\\ 0\le \cos^2 x\le 1.\end{cases}$ 3) $\begin{cases}0\le \sqrt{\sin x}\le 1\\ 0\le \sqrt{\cos x}\le 1.\end{cases}$

**!** Nếu $a\le P(x)\le b$ thì $\dfrac{1}{a}\ge \dfrac{1}{P(x)}\ge \dfrac{1}{b}$.

**Ví dụ 1.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau

1) $y=4-3\sin 5x$.
2) $y=-2|\sin x|$.
3) $y=\sqrt{2}\sin 2x+\cos 2x+1$.
4) $y=\sin x$, $x\in\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$.

**Lời giải**

**Ví dụ 2.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau

1) $y = -2\sin^2 x + 3\sin x - 1$.

2) $y = \cos^2 x + 2\sin x + 2$.

**Lời giải**

# C Bài tập rèn luyện

## PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1.** Tập xác định của hàm số $y=\tan 2x$ là

**A.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

**B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

**C.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

**D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

**Lời giải**

**Câu 2.** Tập xác định của hàm số $y=\sin x$ là

**A.** $[-1;1]$.

**B.** $(-1;1)$.

**C.** $(0;+\infty)$.

**D.** $\mathbb{R}$.

**Lời giải**

**Câu 3.** Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1}{\sin x}$ là

**A.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

**B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{k2\pi,k\in\mathbb{Z}\}$.

**C.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$.

**D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{0;\pi\}$.

**Lời giải**

**Câu 4.** Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1}{\sin 2x+1}$ là

**A.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

**B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

**C.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

**D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

**Lời giải**

**Câu 5.** Hàm số $y=\dfrac{\cos 2x}{1+\tan x}$ không xác định trong khoảng nào trong các khoảng sau đây?

**A.** $\left(\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi\right),k\in\mathbb{Z}$.

**B.** $\left(\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi;\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$.

**C.** $\left(\pi+k2\pi;\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi\right),k\in\mathbb{Z}$.

**D.** $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right),k\in\mathbb{Z}$.

**Lời giải**

**Câu 6.** Tập xác định của hàm số $y=\cot 2x-\tan x$ là

**A.** $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

**B.** $\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$.

**C.** $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

**D.** $\mathbb{R}\setminus\left\{k\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

**Lời giải**

**Câu 7.** Chọn phát biểu đúng.

**A.** Các hàm số $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\cot x$ đều là hàm số chẵn.

**B.** Các hàm số $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\cot x$ đều là hàm số lẻ.

**C.** Các hàm số $y=\sin x$, $y=\cot x$, $y=\tan x$ đều là hàm số chẵn.

**D.** Các hàm số $y=\sin x$, $y=\cot x$, $y=\tan x$ đều là hàm số lẻ.

**Lời giải**

**Câu 8.** Trong các hàm số sau đây, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua trục tung?

**A.** $y=\tan x$. **B.** $y=\cos x$. **C.** $y=\sin x$. **D.** $y=\cot x$.

**Lời giải**

**Câu 9.** Trong các hàm số sau, hàm số nào tuần hoàn với chu kì $2\pi$?

**A.** $y=\sin x$. **B.** $y=\tan x$. **C.** $y=\cot x$. **D.** $y=\cos 2x$.

**Lời giải**

**Câu 10.** Chu kì tuần hoàn của hàm số $\tan x+\sin^2 x$ là

**A.** $k2\pi$. **B.** $2\pi$. **C.** $\pi$. **D.** $4\pi$.

**Lời giải**

**Câu 11.** Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ?

**A.** $y=2x+\cos x$. **B.** $y=\cos 3x$. **C.** $y=x^2\sin(x+3)$. **D.** $y=\dfrac{\cos x}{x^3}$.

**Lời giải**

**Câu 12.** Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ?

**A.** $y=\cot 4x$. **B.** $y=\dfrac{\sin x+1}{\cos x}$. **C.** $y=\tan^2 x$. **D.** $y=|\cot x|$.

**Lời giải**

**Câu 13.** Cho hai hàm số $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{1+\sin^2 3x}$ và $g(x)=\dfrac{|\sin 2x|-\cos 3x}{2+\tan^2 x}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

**A.** $f(x)$ lẻ và $g(x)$ chẵn. **B.** $f(x)$ và $g(x)$ chẵn.

**C.** $f(x)$ chẵn, $g(x)$ lẻ. **D.** $f(x)$ và $g(x)$ lẻ.

**Lời giải**

**Câu 14.** Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ?

**A.** $y=\dfrac{1}{\sin^3 x}$. **B.** $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$. **C.** $y=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$. **D.** $y=\sqrt{\sin 2x}$.

**Lời giải**

**Câu 15.** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=3\sin\left(x+\dfrac{3\pi}{4}\right)-1$ lần lượt là

**A.** $4;-2$. **B.** $2;-4$. **C.** $1;-1$. **D.** $3;-3$.

**Lời giải**

**Câu 16.** Gọi $M,m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=6\cos 2x-7$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{6}\right]$. Tính $M+m$.

**A.** $-14$. **B.** $3$. **C.** $-11$. **D.** $-10$.

**Lời giải**

**Câu 17.** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2\sin^2 x+3\sin 2x-4\cos^2 x$.

**A.** $\min y=-3\sqrt{2}-1;\ \max y=3\sqrt{2}+1$. **B.** $\min y=-3\sqrt{2}-2;\ \max y=3\sqrt{2}-1$.

**C.** $\min y=-3\sqrt{2};\ \max y=3\sqrt{2}-1$. **D.** $\min y=-3\sqrt{2}-1;\ \max y=3\sqrt{2}-1$.

**Lời giải**

**Câu 18.** Xét sự biến thiên của hàm số $y=\tan 2x$ trên một chu kì tuần hoàn. Trong các kết luận sau, kết luận nào đúng?

**A.** Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ và $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

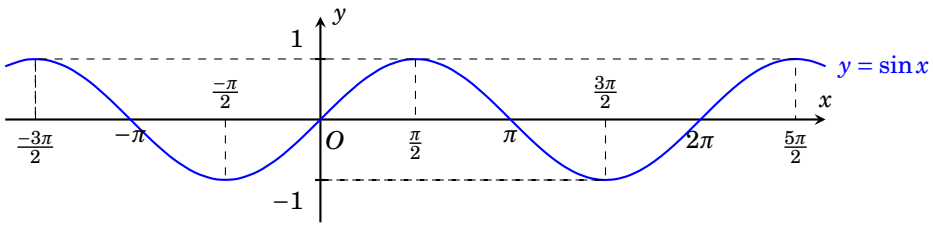
**B.** Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

**C.** Hàm số đã cho luôn đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

**D.** Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

**Lời giải**

**Câu 19.** Cho đồ thị hàm số lượng giác $y=\sin x$ như hình vẽ dưới đây




Hàm số $y=|\sin x|$ có bao nhiêu lần đạt giá trị bằng 1 trong đoạn $\left[\dfrac{-3\pi}{2};\dfrac{5\pi}{2}\right]$?

**A.** 5. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 7.

**Lời giải**

**Câu 20.** Huyết áp là áp lực máu cần thiết tác động lên thành động mạch nhằm đưa máu đi nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Nhờ lực co bóp của tim và sức cản của động mạch mà huyết áp được tạo ra. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu tương ứng được gọi là huyết áp tâm thu và huyết áp tâm trương. Chỉ số huyết áp của chúng ta được tính bằng huyết áp tâm thu/huyết áp tâm trương. Giả sử huyết áp của người đó thay đổi theo thời gian được cho bởi công thức $p(t) = 115 + 25\sin(160\pi t)$ trong đó $p(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimet thủy ngân) và thời gian $t$ tính theo đơn vị phút. Khi đó, chỉ số huyết áp bằng

**A.** $\frac{115}{90}$. **B.** $\frac{150}{60}$. **C.** $\frac{120}{80}$. **D.** $\frac{140}{90}$.

Lời giải

**Câu 21.** Một con lắc lò xo sau khi được kéo xuống dưới vị trí cân bằng 4 (cm) và thả ra thì nó dao động điều hòa với phương trình $y = -4\cos 8t$ (cm). Biên độ $A$ (cm) và chu kỳ $T$ của dao động là

**A.** $A = 4\text{cm}$, $T = \frac{\pi}{4}$. **B.** $A = 4\text{cm}$, $T = \frac{\pi}{2}$. **C.** $A = 9\text{cm}$, $T = \frac{\pi}{4}$. **D.** $A = 4\text{cm}$, $T = 2\pi$.

Lời giải

**Câu 22.** Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu $h$(mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm $t$ (giờ) trong một ngày bởi công thức

$$h(t)=3\cos\left(\frac{\pi t}{8}+\frac{\pi}{4}\right)+12.$$

Mực nước của kênh cao nhất khi

**A.** $t=13$ (giờ). **B.** $t=14$ (giờ). **C.** $t=15$ (giờ). **D.** $t=16$ (giờ).

**Lời giải**

**Câu 23.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y=\sqrt{\sin^2 x-2\sin x+m-1}$ xác định trên $\mathbb{R}$?

**A.** 8. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 13.

**Lời giải**

**Câu 24.** Số giờ có ánh sáng của một thành phố $A$ trong ngày thứ $t$ của năm 2021 được cho bởi một hàm số $y=4\sin\left|\frac{\pi}{178}(t-60)\right|+10$, với $t\in\mathbb{Z}$ và $0<t\le 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố $A$ có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất?

**A.** 28 tháng 5. **B.** 29 tháng 5. **C.** 30 tháng 5. **D.** 31 tháng 5.

## Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Câu 1. B | Câu 2. D | Câu 3. C | Câu 4. C | Câu 5. D | Câu 6. D | Câu 7. D |
| Câu 8. B | Câu 9. A | Câu 10. C | Câu 11. D | Câu 12. A | Câu 13. B | Câu 14. A |
| Câu 15. B | Câu 16. C | Câu 17. D | Câu 18. A | Câu 19. A | Câu 20. D | Câu 21. A |
| Câu 22. B | Câu 23. B | Câu 24. B | | | | |

## PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

**Câu 1.** Cho hàm số $y = 3 - \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$. Khi đó

| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Hàm số có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. | | |
| **b)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 2. | | |
| **c)** Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4. | | |
| **d)** Tập giá trị của hàm số là $T = [2;4]$. | | |

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 2.** Cho hàm số $f(x) = \tan 2x - 1$. Khi đó

| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Giá trị của hàm số tại $x = \dfrac{\pi}{8}$ bằng 0. | | |
| **b)** Giá trị của hàm số tại $x = \dfrac{\pi}{3}$ bằng $-\sqrt{3} - 1$. | | |
| **c)** Có 3 giá trị $x$ thuộc $[0;\pi]$ khi hàm số đạt giá trị bằng $-2$. | | |
| **d)** Hàm số đã cho là hàm số tuần hoàn. | | |

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

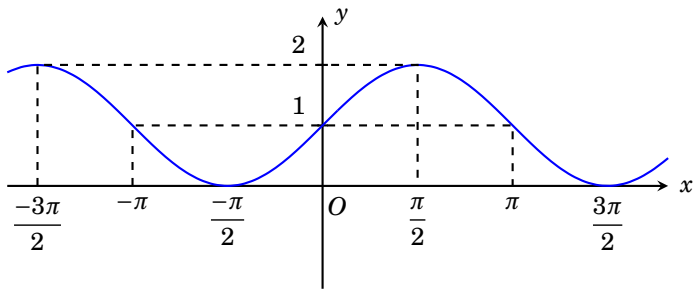
**Câu 3.** Cho hàm số $f(x)=|x|\sin x$. Khi đó

| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Tập xác định của hàm số $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. | | |
| **b)** $f(-\pi)=f(\pi)$. | | |
| **c)** Đồ thị hàm số đã cho đối xứng qua gốc tọa độ $O(0;0)$. | | |
| **d)** $f(-x)=-f(x)$. | | |

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 4.** Hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như sau.




| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Hàm số có tập xác định $\mathscr{D}=\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$. | | |
| **b)** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\pi;0)$. | | |

| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| **c)** Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)$. | | |
| **d)** Tập giá trị của hàm số là $[0;2]$. | | |

Lời giải

**Câu 5.** Cho hàm số $f(x)=|\tan x|+\left|x^3-3x\right|$. Khi đó

**a)** Tập xác định hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

**b)** Hàm số đã cho là hàm số chẵn.

**c)** $f(-\pi)=-f(\pi)$.

**d)** Đồ thị hàm số đã cho đối xứng qua gốc tọa độ $O(0;0)$.

Lời giải

**Câu 6.** Cho hàm số $f(x)=2\cos x+1$ và $g(x)=\sin x+\tan x$. Khi đó

**a)** Tập xác định hàm số $f(x)$ là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

**b)** Hàm số $f(x)$ là hàm tuần hoàn.

**c)** Tập xác định hàm số $g(x)$ là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

**d)** Hàm số $g(x)$ là hàm không tuần hoàn.

Lời giải

**Câu 7.** Cho hàm số $f(x)=\tan x$ và $g(x)=\cot^2 x-\dfrac{\sin 2x}{2}$. Khi đó

**a)** Tập xác định hàm số $f(x)$ là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

**b)** Hàm số $f(x)$ là hàm không tuần hoàn.

**c)** Tập xác định hàm số $g(x)$ là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

**d)** Hàm số $g(x)$ là hàm tuần hoàn.

Lời giải

**Câu 8.** Cho hàm số $f(x)=2+3\cos x$ và $g(x)=\sin x+\cos x$. Khi đó

| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ bằng 5 . | | |
| **b)** Hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x=\pi+k2\pi$. | | |
| **c)** Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ bằng $-\sqrt{2}$ . | | |
| **d)** Hàm số $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x=-\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi$. | | |

Lời giải

**Câu 9.** Cho các hàm số sau $f(x)=\sqrt{5-3\sin^2 x}$; $g(x)=\tan x - x\cos x$. Khi đó

**a)** Tập xác định hàm số $f(x)$ là $D=\mathbb{R}$.

**b)** Hàm số $f(x)$ đã cho là hàm số lẻ.

**c)** Tập xác định hàm số $g(x)$ là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

**d)** Hàm số $g(x)$ đã cho là hàm số lẻ.

Lời giải

**Câu 10.** Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu $h$ (mét) của mực nước trong kênh tính theo thời gian $t$ (giờ) được cho bởi công thức $h(t)=3\cos\left(\dfrac{\pi t}{6}+\dfrac{\pi}{4}\right)+14$.

**a)** Hàm số tuần hoàn với chu kì $T=2\pi$.

**b)** Chiều sâu của mực nước thấp nhất là 11 m.

**c)** Chiều sâu của mực nước cao nhất là 14 m.

**d)** Thời gian để mực nước cao nhất là 9 giờ.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .

**Câu 11.** Chiều cao so với mực nước biển trung bình tại thời điểm $t$ (giây) của mỗi cơn sóng được cho bởi hàm số $h(t) = 75\sin\left(\frac{\pi t}{8}\right)$, trong đó $h(t)$ được tính bằng centimet (tất cả kết quả được làm tròn đến hàng phần mười).

**a)** Chiều cao của sóng tại các thời điểm 5 giây bằng 69,3 cm.

**b)** Chiều cao của sóng tại các thời điểm 20 giây bằng 75 cm.

**c)** Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc $t = 0$ giây), thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất là 6 giây.

**d)** Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc $t = 0$ giây), thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất là 18 giây.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**BẢNG ĐÁP ÁN**

| | | |
|---|---|---|
| **Câu 1.** a Đ b Đ c Đ d Đ | **Câu 2.** a Đ b Đ c S d Đ | **Câu 3.** a S b S c Đ d Đ |
| **Câu 4.** a S b S c Đ d Đ | **Câu 5.** a Đ b Đ c S d S | **Câu 6.** a Đ b Đ c S d S |
| **Câu 7.** a Đ b S c Đ d Đ | **Câu 8.** a Đ b Đ c S d Đ | **Câu 9.** a Đ b S c Đ d Đ |
| **Câu 10.** a S b Đ c S d S | **Câu 11.** a Đ b Đ c S d S | |

## PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Tập giá trị của hàm số: $y=5+4\sin 2x\cos 2x$ có dạng $[a;b]$ với $a$, $b$ là các số nguyên. Tính giá trị $S=a^2-2ab$.

KQ:

Lời giải

**Câu 2.** Tập giá trị của hàm số: $y=\sin^6 x+\cos^6 x$ có dạng $\left[\frac{a}{b};1\right]$ với $a$, $b$ là các số nguyên, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị $S=a+ab^2$.

KQ:

Lời giải

**Câu 3.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ trong đoạn $[0;10]$ để hàm số $y=\sqrt{m-2\sin x}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

KQ:

Lời giải

**Câu 4.** Số giờ có ánh sáng của thành phố $T$ ở vĩ độ $40^\circ$ bắc trong ngày thứ $t$ của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t)=3\cdot\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right]+12$ với $t\in\mathbb{Z}$ và $0<t\le 365$. Bạn An muốn đi tham quan thành phố $T$ nhưng lại không thích ánh sáng mặt trời, vậy bạn An nên chọn đi vào ngày nào trong năm để thành phố $T$ có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

KQ:

**Lời giải**

**Câu 5.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ trong đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y=\dfrac{\sin x-1}{\cos x+m}$ có tập xác định $\mathbb{R}$.

KQ:

**Lời giải**

**Câu 6.** Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số: $y=2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)-1$.

KQ:

Lời giải

**Câu 7.** Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số: $y = \sqrt{1+\sin x} - 3$. Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.

KQ:

Lời giải

**Câu 8.** Hàm số $y = 1 - 3\sqrt{1-\cos^2 x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x = \dfrac{a}{b}\pi + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, với $a$; $b$ là các số nguyên, $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị $S = a + ab^2$.

KQ:

Lời giải

**Câu 9.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\sqrt{\dfrac{m-1}{m}-2\cos 4x}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

KQ:

**Lời giải**

**Câu 10.** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2024;2024]$ để hàm số $y=\sqrt{\sin^2 x-2\sin x+1-m}$ xác định trên $\mathbb{R}$?

KQ:

**Lời giải**

**Câu 11.** Gọi $M$ và $m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x+3$. Tính $M+m$.

KQ:

**Lời giải**

**Câu 12.** Trong các hàm số $y=\sin 2x$, $y=\tan|x|$, $y=\tan x+\cot x$, $y=2\sin x+3$ có bao nhiêu hàm số lẻ?

KQ:

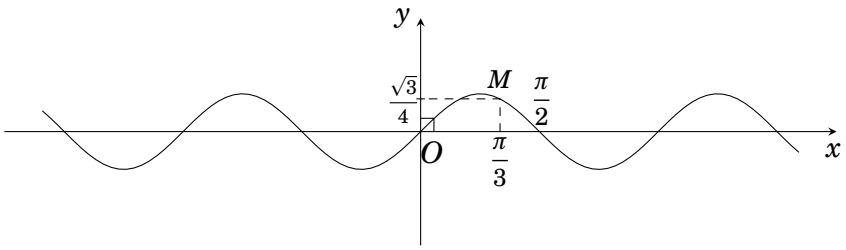
**Lời giải**

**Câu 13.** Tìm chu kì tuần hoàn của hàm số $f(x)=\tan 2x$ (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

**Lời giải**

**Câu 14.** Cho hàm số $y=k\sin(tx)$ với $k$, $t\in\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số có tập giá trị là $[a;b]$. Tính $T=2a+6b$.




KQ:

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 15.** Số giờ có ánh sáng của một thành phố $A$ trong ngày thứ $t$ của năm 2024 được cho bởi một hàm số $y = 4\sin\left[\frac{\pi}{178}(t-60)\right] + 10$, với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$. Vào ngày nào trong tháng 5 năm 2024 thì thành phố $A$ có số giờ ánh sáng mặt trời chiếu nhiều nhất?

KQ:

**Lời giải**

. . . . . .

**BẢNG ĐÁP ÁN**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Câu 1.** −33 | **Câu 2.** 17 | **Câu 3.** 9 | **Câu 4.** 353 | **Câu 5.** 18 |
| **Câu 6.** −2 | **Câu 7.** −4,59 | **Câu 8.** 5 | **Câu 9.** 2 | **Câu 10.** 2025 |
| **Câu 11.** 6 | **Câu 12.** 2 | **Câu 13.** 1,57 | **Câu 14.** 2 | **Câu 15.** 28 |

# BÀI 4. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

## A Lý thuyết

### 1 Khái niệm phương trình tương đương

**Định nghĩa 1**

- Hai phương trình được gọi là tương đương khi chúng có cùng tập nghiệm.
- Nếu phương trình $f(x)=0$ tương đương với phương trình $g(x)=0$ thì ta viết

$$f(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=0.$$

- *Để giải phương trình, ta biến đổi phương trình đó thành một phương trình tương đương đơn giản hơn. Các phép biến đổi như vậy được gọi là các phép biến đổi tương đương.*
- *Ta có một số phép biến đổi tương đương thường sử dụng sau:*
  - ***(1)*** *Cộng hoặc trừ hai vế của phương trình với cùng 1 số hoặc cùng 1 biểu thức mà không làm thay đổi điều kiện của phương trình.*
  - ***(2)*** *Nhân hoặc chia hai vế của phương trình với cùng 1 số khác 0 hoặc cùng 1 biểu thức luôn có giá trị khác 0 mà không làm thay đổi điều kiện của phương trình.*
- *Để chỉ sự tương đương của các phương trình, người ta dùng kí hiệu $\Leftrightarrow$.*

### 2 Phương trình $\sin x = a$

Xét phương trình $\sin x = a$ (1)

- Nếu $|a|>1$ thì phương trình (1) vô nghiệm.
- Nếu $|a|\le 1$ thì phương trình (1) có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=\alpha+k2\pi \\ x=\pi-\alpha+k2\pi \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.

- $\sin u=\sin v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v+k2\pi \\ u=\pi-v+k2\pi \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.
- *Trường hợp đặc biệt:*
  - ***(1)*** $\sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$
  - ***(2)*** $\sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

**(3)** $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

- *Phương trình* $\sin x = \sin \beta^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \beta^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x = 180^\circ - \beta^\circ + k \cdot 360^\circ \end{array}\right. , (k \in \mathbb{Z})$

## 3 Phương trình $\cos x = a$

Xét phương trình $\cos x = a \quad (1)$

- Nếu $|a| > 1$ thì phương trình (1) vô nghiệm.
- Nếu $|a| \le 1$ thì phương trình (1) có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \arccos a + k2\pi \\ x = -\arccos a + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

⚠

- $\cos u = \cos v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.
- *Trường hợp đặc biệt:*

**(1)** $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

**(2)** $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

**(3)** $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

- *Phương trình* $\cos x = \cos \beta^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \beta^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x = -\beta^\circ + k \cdot 360^\circ \end{array}\right. , (k \in \mathbb{Z})$.

## 4 Phương trình $\tan x = a$ và $\cot x = a$

| Phương trình | $\tan x = a$ | $\cot x = a$ |
|---|---|---|
| Điều kiện | $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$ | $x \ne k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$ |
| Nghiệm | $x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ | $x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ |

⚠

- $\tan u = \tan v \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi \left(hay\ v \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z} \\ u = v + k\pi \end{array}\right.$
- $\cot u = \cot v \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u \ne k\pi\ (hay\ v \ne k\pi) \\ u = v + k\pi \end{array}\right. , k \in \mathbb{Z}$

- *Trường hợp đặc biệt:*

  **(1)** $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

  **(2)** $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

  **(3)** $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

  **(4)** $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

  **(5)** $\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

  **(6)** $\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

- *Phương trình* $\tan x = \tan \beta^\circ \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k \cdot 180^\circ,\ k \in \mathbb{Z}$

- *Phương trình* $\cot x = \cot \beta^\circ \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k \cdot 180^\circ,\ k \in \mathbb{Z}$

# B Các dạng bài tập

## Dạng 1. Phương trình $\sin x = a$

**Phương pháp**

Xét phương trình $\sin x = a$ (1)

- Nếu $|a| > 1$ thì phương trình (1) vô nghiệm.
- Nếu $|a| \le 1$ thì phương trình (1) có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

⚠
- $\sin u = \sin v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$
- *Trường hợp đặc biệt:*

  **(1)** $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

  **(2)** $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

  **(3)** $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

- *Phương trình* $\sin x = \sin \beta^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \beta^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x = 180^\circ - \beta^\circ + k \cdot 360^\circ \end{array}\right. ,(k \in \mathbb{Z})$.

**Ví dụ 1.** Giải các phương trình sau

a) $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

b) $\sin(x - 60^\circ)$;

c) $\sin 3x = -\dfrac{4}{3}$;

d) $\sin\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

e) $2\sin(3x+1) = 1$;

f) $\sin\left[\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)\right] = 0$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 2. phương trình $\cos x = a$

**Phương pháp**

Xét phương trình $\cos x = a$ (1)

- Nếu $|a| > 1$ thì phương trình (1) vô nghiệm.
- Nếu $|a| \le 1$ thì phương trình (1) có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right.$ (với $\cos\alpha = a, k \in \mathbb{Z}$).

⚠

- $\cos u = \cos v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$.
- *Trường hợp đặc biệt:*

  *1)* $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

  *2)* $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

  *3)* $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

- *Phương trình* $\cos x = \cos\beta^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \beta^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x = -\beta^\circ + k \cdot 360^\circ \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$

**Ví dụ 1.** Giải các phương trình sau

a) $\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

b) $\cos(x-2)=\dfrac{2}{5}$;

c) $\cos(2x+50^\circ)=\dfrac{1}{2}$;

d) $2\cos x=-1$;

e) $2024\cdot\cos(x+30^\circ)=2025$;

f) $\cos(\cos(x+2))=1$

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 3. Phương trình $\tan x=a$ và $\cot x=a$

**Phương pháp**

| Phương trình | $\tan x=a$ | $\cot x=a$ |
|---|---|---|
| Điều kiện | $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ với $k\in\mathbb{Z}$ | $x\neq k\pi$ với $k\in\mathbb{Z}$ |
| Nghiệm | $x=\alpha+k\pi$, với $\tan\alpha=a$, $k\in\mathbb{Z}$ | $x=\alpha+k\pi$, với $\cot\alpha=a$, $k\in\mathbb{Z}$ |

⚠

- $\tan u=\tan v\Leftrightarrow\begin{cases}u\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\quad(\text{hay } v\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi)\\ u=v+k\pi\end{cases}$, $k\in\mathbb{Z}$.
- $\cot u=\cot v\Leftrightarrow\begin{cases}u\neq k\pi\quad(\text{hay } v\neq k\pi)\\ u=v+k\pi\end{cases}$, $k\in\mathbb{Z}$.
- *Trường hợp đặc biệt:*

*a)* $\tan x=0\Leftrightarrow x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;

*b)* $\tan x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;

*c)* $\tan x=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;

*d)* $\cot x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;

*e)* $\cot x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;

*f)* $\cot x=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

- *Phương trình* $\tan x = \tan \beta^\circ \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k \cdot 180^\circ,\ k \in \mathbb{Z}$.
- *Phương trình* $\cot x = \cot \beta^\circ \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k \cdot 180^\circ,\ k \in \mathbb{Z}$.

**Ví dụ 1.** Giải các phương trình sau

a) $\tan 2x = \tan \dfrac{2\pi}{7}$;

b) $\tan \dfrac{x}{2} = \sqrt{3}$;

c) $\tan(3x - 30^\circ) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

d) $\cot\left(4x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$;

e) $\left(\cot \dfrac{x}{2} - 1\right)\left(\cot \dfrac{x}{2} + 1\right) = 0$;

f) $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + 2\tan\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

**Lời giải**

. . . . . .

## Dạng 4. Phương trình có nghiệm thuộc khoảng – đoạn

**Phương pháp**

Phương pháp tìm nghiệm trong khoảng, đoạn $(a;b)$ hoặc $[a;b]$ hoặc $[a;b)$ hoặc $(\cdot a;b]$:

- **Bước 1:** Giải phương trình (đưa về phương trình cơ bản).
- **Bước 2:** Ứng với mỗi nghiệm thuộc khoảng đoạn, tìm điều kiện của các số nguyên $k$ thỏa mãn.

  **Ví dụ:**

  Ở bước 1 ta tìm được họ nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{2} + k\pi. \end{array}\right.$

  – Với $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$: $a < -\dfrac{\pi}{4} + k\pi < b \to k = ?$

  – Với $x = \dfrac{3\pi}{2} + k\pi$: $a < \dfrac{3\pi}{2} + k\pi < b \to k = ?$
- **Bước 3:** Kết luận nghiệm.

**Ví dụ 1.** Giải phương trình lượng giác $\cos x = 0$ trên khoảng $(0;2\pi)$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 2.** Tìm nghiệm của phương trình $2\sin(x+40^\circ) = \sqrt{3}$ trên khoảng $(-180^\circ;180^\circ)$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 3.** Giải phương trình lượng giác $\tan x = -1$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 4.** Giải phương trình lượng giác $\cot\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$ trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 5.** Tìm nghiệm của phương trình $\dfrac{\sin 3x}{\cos x+1}=0$ trên đoạn $[2\pi;4\pi]$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

## Dạng 5. Bài toán thực tế liên quan phương trình lượng giác

**Phương pháp**

- **Bước 1:** Đọc và hiểu nội dung bài toán thực tế đã cho.
- **Bước 2:** Phân tích bài toán để nhận diện bài toán thuộc nội dung kiến thức liên quan đến hàm số lượng giác, phương trình lượng giác nào.
- **Bước 3:** Dùng kiến thức đã học, giải bài toán và kết luận nghiệm.

**Ví dụ 1.** Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ $t$ của năm 2017 được cho bởi một hàm số $y=4\sin\left[\dfrac{\pi}{178}(t-60)\right]+10$ với $t\in\mathbb{Z}$ và $0<t\le 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

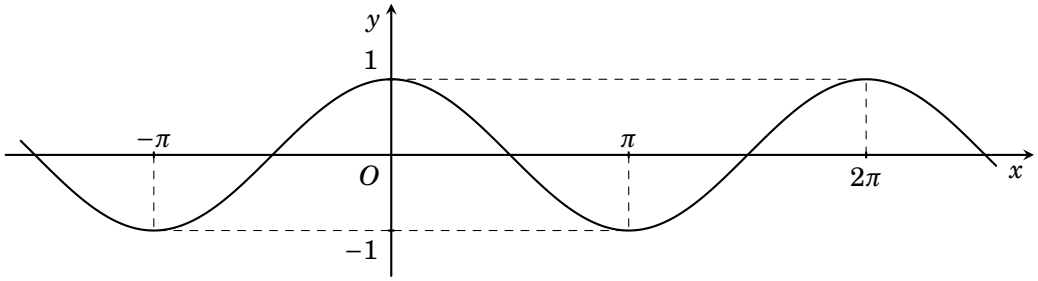
**Ví dụ 2.** Chiều cao $h$ (m) của một cabin trên vòng quay vào thời điểm $t$ giây sau khi bắt đầu chuyển động được cho bởi công thức $h(t)=30+20\sin\left(\frac{\pi}{25}t+\frac{\pi}{3}\right)$. Sau 2 phút kể từ khi bắt đầu chuyển động, cabin đạt độ cao tối đa bao nhiêu lần?

**Lời giải**

# C Bài tập rèn luyện

## PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1.** Cho hàm số $y=\cos x$ có đồ thị như hình vẽ.




Nghiệm của phương trình $\cos x=-1$ trong khoảng $(0;2\pi)$ là

**A.** $x=0$. **B.** $x=\pi$. **C.** $x=2\pi$. **D.** $x=\dfrac{\pi}{2}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

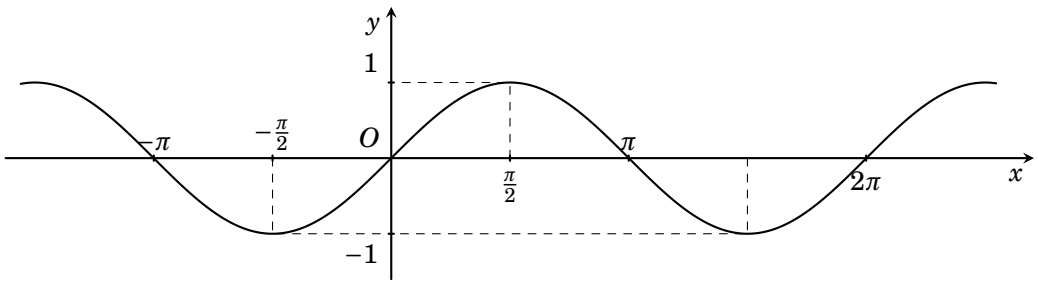
.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Cho hàm số $y=\sin x$ có đồ thị như hình vẽ.




Nghiệm của phương trình $\sin x=1$ trong khoảng $(0;\pi)$ là

**A.** $x=0$. **B.** $x=\pi$. **C.** $x=-\dfrac{\pi}{2}$. **D.** $x=\dfrac{\pi}{2}$.

**Lời giải**

.....

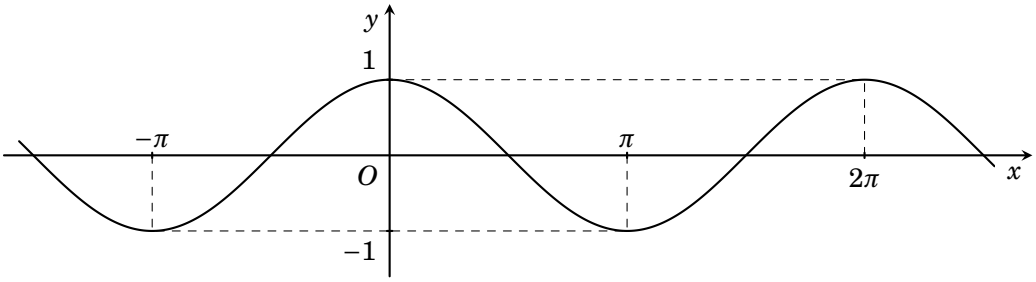
.....

.....

.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 3.** Cho hàm số $y = \cos x$ có đồ thị như hình vẽ.




Tập nghiệm của phương trình $\cos x = 1$ là

**A.** $x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$. **B.** $x = \pi + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$. **C.** $x = k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$. **D.** $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 4.** Phương trình $\cos x = 0$ có nghiệm là

**A.** $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$. **B.** $x = k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$. **C.** $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$. **D.** $x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 5.** Phương trình $2\sin x - 1 = 0$ có tập nghiệm là

**A.** $S = \left\{\frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

**B.** $S = \left\{\frac{\pi}{3} + k2\pi; -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

**C.** $S = \left\{\frac{\pi}{6} + k2\pi; -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

**D.** $S = \left\{\frac{1}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

**Lời giải**

**Câu 6.** Phương trình $\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$ có tất cả các nghiệm là

**A.** $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

**B.** $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

**C.** $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

**D.** $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

**Lời giải**

**Câu 7.** Tất cả các nghiệm của phương trình $\sin x = \sin\frac{\pi}{3}$ là

**A.** $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$.

**B.** $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$.

**C.** $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

**D.** $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$.

**Lời giải**

**Câu 8.** Nghiệm của phương trình $\cos x = \dfrac{1}{2}$ là

**A.** $x = \pm\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$. **B.** $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$. **C.** $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi$. **D.** $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi$.

**Lời giải**

**Câu 9.** Phương trình $\cos 2\pi x = \dfrac{2025}{2024}$ có bao nhiêu nghiệm trong $(-\pi;\pi)$?

**A.** 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 5.

**Lời giải**

**Câu 10.** Nghiệm của phương trình $2\cos(x-15^\circ)-1=0$ là

**A.** $\left[\begin{array}{l} x = 75^\circ + k360^\circ \\ x = 135^\circ + k360^\circ \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$. **B.** $\left[\begin{array}{l} x = 60^\circ + k360^\circ \\ x = -60^\circ + k360^\circ \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

**C.** $\begin{cases} x = 45^\circ + k360^\circ \\ x = -45^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

**D.** $\begin{cases} x = 75^\circ + k360^\circ \\ x = -45^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

**Lời giải**

**Câu 11.** Giải phương trình $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

**A.** $x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

**B.** $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

**C.** $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

**D.** $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

**Lời giải**

**Câu 12.** Nghiệm của phương trình $\cos x = \cos\dfrac{\pi}{12}$ là

**A.** $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \dfrac{11\pi}{12} + l2\pi \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z}).$

**B.** $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{12} + l2\pi \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z}).$

**C.** $x = \dfrac{\pi}{12} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

**D.** $x = \dfrac{11\pi}{12} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

**Lời giải**

**Câu 13.** Phương trình $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=0$ có nghiệm là

**A.** $x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$. **B.** $x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$. **C.** $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. **D.** $x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

**Lời giải**

**Câu 14.** Giải phương trình $\cos x=1$.

**A.** $x=\dfrac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$. **B.** $x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$. **C.** $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$. **D.** $x=k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

**Lời giải**

**Câu 15.** Phương trình $2\sin x-\sqrt{3}=0$ có tập nghiệm là

**A.** $\left\{\pm\dfrac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$. **B.** $\left\{\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

**C.** $\left\{\dfrac{\pi}{6}+k2\pi, \dfrac{5\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$. **D.** $\left\{\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, \dfrac{2\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

**Lời giải**

**Câu 16.** Tổng các nghiệm của phương trình $2\sin(x+40^\circ)=\sqrt{3}$ trên khoảng $(-180^\circ;180^\circ)$ là

**A.** $20^\circ$. **B.** $100^\circ$. **C.** $80^\circ$. **D.** $120^\circ$.

**Lời giải**

**Câu 17.** Tìm tổng các nghiệm của phương trình $\cos\left(5x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ trên $[0;\pi]$.

**A.** $\dfrac{47\pi}{18}$. **B.** $\dfrac{4\pi}{18}$. **C.** $\dfrac{45\pi}{18}$. **D.** $\dfrac{7\pi}{18}$.

**Lời giải**

**Câu 18.** Số nghiệm phương trình $\dfrac{\sin 3x}{\cos x+1}=0$ thuộc đoạn $[2\pi;4\pi]$ là

**A.** 7. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 5.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 19.** Với những giá trị nào của $x$ thì giá trị của các hàm số $y=\sin 3x$ và $y=\sin x$ bằng nhau?

**A.** $\left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$.

**B.** $x=k\dfrac{\pi}{4},(k\in\mathbb{Z})$.

**C.** $x=k\dfrac{\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})$.

**D.** $\left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 20.** Số nghiệm của phương trình $\sin x=0$ trên đoạn $[0;\pi]$ là

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 5.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 21.** Nghiệm của phương trình $\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+1=0$ là

**A.** $x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$. **B.** $x=\frac{5\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. **C.** $x=-\frac{7\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. **D.** $x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

**Lời giải**

**Câu 22.** Tập nghiệm của phương trình $\cos 3x+\sin\frac{2\pi}{3}=0$ là

**A.** $\left\{\pm\frac{5\pi}{16}+\frac{k2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}\right\}$. **B.** $\left\{\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{k2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

**C.** $\left\{\pm\frac{5\pi}{9}+\frac{k2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}\right\}$. **D.** $\left\{\pm\frac{5\pi}{12}+\frac{k2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

**Lời giải**

**Câu 23.** Trong các phương trình sau, phương trình nào có nghiệm?

**A.** $\cos x=3$. **B.** $\sin 2x=-2$. **C.** $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-1$. **D.** $\cos(2x-1)=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

**Lời giải**

**Câu 24.** Phương trình nào sau đây có nghiệm?

**A.** $\sin 2021x - 2 = 0$. **B.** $\cos(2x + 2021) = 3$. **C.** $\sin^2 x + 1 = 0$. **D.** $\cos(2x+2021) = -1$.

**Lời giải**

**Câu 25.** Phương trình $2\sin x + \sqrt{3} = 0$ có tổng nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất bằng

**A.** $\dfrac{4\pi}{3}$. **B.** $2\pi$. **C.** $\dfrac{\pi}{3}$. **D.** $\pi$.

**Lời giải**

**Câu 26.** Nghiệm của phương trình $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ là

**A.** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{12} + 2k\pi \\ x = -\dfrac{7\pi}{12} + 2k\pi \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi \\ x = -\dfrac{7\pi}{12} + k\pi \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{12} + 2k\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{12} + 2k\pi \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi \end{array}\right.$.

**Lời giải**

**Câu 27.** Tập nghiệm của phương trình $\sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0$ là

**A.** $x = -\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

**B.** $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

**C.** $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

**D.** $x = -\dfrac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

**Lời giải**

**Câu 28.** Cho phương trình $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Số nghiệm của phương trình trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$ là

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 29.** Phương trình $3\cos^2 x + 7\cos x - 10 = 0$ có nghiệm là

**A.** $x = \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. **B.** $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. **C.** $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. **D.** $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 30.** Phương trình $\cos(2x + 30^\circ) + \sin x = 0$ có nghiệm là

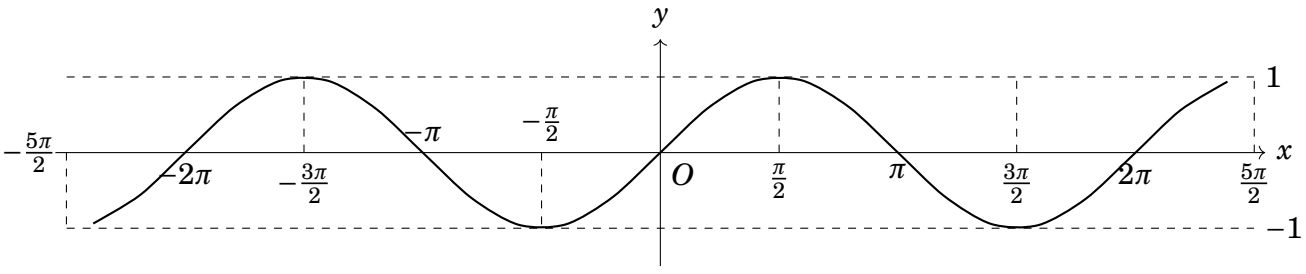
**A.** $\left[\begin{array}{l} x = 60^\circ + k180^\circ \\ x = 40^\circ + k120^\circ \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$. **B.** $\left[\begin{array}{l} x = 60^\circ + k360^\circ \\ x = -40^\circ + k120^\circ \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

**C.** $\left[\begin{array}{l} x = 30^\circ + k360^\circ \\ x = 15^\circ + k180^\circ \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$. **D.** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 31.** Cho hàm số $y = \sin x$ có đồ thị như hình vẽ. Hãy tìm tập tất cả các giá trị của $m$ để phương trình $|\sin x| = m$ có nghiệm?



**A.** $-1 \le m \le 1$. **B.** $-1 \le m \le 0$. **C.** $-1 < m < 0$. **D.** $0 \le m \le 1$.

**Lời giải**

**Câu 32.** Giải phương trình: $\sin x \cdot \sin \dfrac{\pi}{3} + \cos 2x \cdot \sin \dfrac{\pi}{4} = \cos x \cdot \cos \dfrac{\pi}{3} + \sin 2x \cdot \cos \dfrac{\pi}{4}$.

**A.** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\dfrac{7\pi}{36} + k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

**B.** $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{7\pi}{12} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{36} + k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

**C.** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

**D.** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{36} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

**Lời giải**

**Câu 33.** Phương trình $\sin 5x - \sin x = 0$, có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[-2018\pi; 2018\pi]$?

**A.** 20179. **B.** 20181. **C.** 16144. **D.** 16145.

**Lời giải**

**Câu 34.** Nghiệm của phương trình $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x)$ là

**A.** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{7} \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$.

**B.** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$.

**C.** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{5} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{7} + k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$.

**D.** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{9} + k\dfrac{\pi}{3} \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$.

**Lời giải**

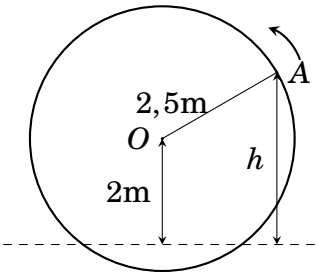
**Câu 35.** Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ $40^\circ$ bắc trong ngày thứ $t$ của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t) = 3\sin\left[\dfrac{\pi}{180}(t-80)\right] + 12$ với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \le 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

**A.** 170. **B.** 171. **C.** 172. **D.** 173.

**Lời giải**

**Câu 36.**

Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 2,5 m; trục của nó đặt cách mặt nước 2 m (hình vẽ). Khi guồng quay đều, khoảng cách $h$ m (mét) từ một chiếc gầu gắn tại điểm $A$ của guồng đến mặt nước được tính theo công thức $h = |y|$ trong đó $y = 2 + 2{,}5\sin\left[2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right)\right]$ với $x$ là thời gian quay của guồng ($x \geq 0$), tính bằng phút (quy ước $y > 0$ khi gầu ở bên trên mặt nước và $y < 0$ khi gầu ở dưới nước). Chiếc gầu cách mặt nước 2 m lần đầu tiên khi nào?




**A.** 4 phút. **B.** $\frac{1}{4}$ phút. **C.** 2 phút. **D.** $\frac{1}{2}$ phút.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 37.**

Guồng nước (hay còn gọi là con nước) không chỉ là công cụ phục vụ sản xuất nông nghiệp, mà đã trở thành hình ảnh quen thuộc của bản làng và là một nét văn hóa đặc trưng của đồng bào dân tộc miền núi phía Bắc. Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 3,5 (m); trục của nó đặt cách mặt nước 3 (m).



(Nguồn: https://shutterstock.com)

Khi guồng quay đều, khoảng cách $h$ (m) từ một ống đựng nước gắn tại một điểm của guồng đến mặt nước được tính theo công thức $h = |y|$, trong đó $y = 3{,}5\sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 3$, với $x$ (phút) là thời gian quay của guồng ($x \geq 0$). Hãy chỉ ra giá trị của $x$ nhỏ nhất để ống đựng nước cách mặt nước 3 (m).

**A.** $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** $\frac{7}{8}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Câu 1. B | Câu 2. D | Câu 3. C | Câu 4. A | Câu 5. A | Câu 6. C | Câu 7. B |
| Câu 8. B | Câu 9. B | Câu 10. D | Câu 11. C | Câu 12. B | Câu 13. B | Câu 14. D |
| Câu 15. D | Câu 16. B | Câu 17. A | Câu 18. B | Câu 19. D | Câu 20. B | Câu 21. D |
| Câu 22. A | Câu 23. C | Câu 24. D | Câu 25. D | Câu 26. C | Câu 27. B | Câu 28. A |
| Câu 29. D | Câu 30. B | Câu 31. D | Câu 32. A | Câu 33. B | Câu 34. A | Câu 35. A |
| Câu 36. B | Câu 37. A | | | | | |

## PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

**Câu 1.** Cho phương trình $\sin x = a$. (1)

**a)** Nếu $a > 1$ thì phương trình (1) vô nghiệm.

**b)** Nếu $a = 1$ thì phương trình (1) có nghiệm $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

**c)** Nếu $-1 \le a \le 1$ thì phương trình (1) có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$, với $a = \sin\alpha$.

**d)** Phương trình (1) có hai điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.

Lời giải

**Câu 2.** Cho phương trình lượng giác $2\sin x - \sqrt{2} = 0$. Khi đó

**a)** Phương trình tương đương với phương trình $\sin x = \sin\dfrac{\pi}{4}$.

**b)** Phương trình có nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right.$, $(k \in \mathbb{Z})$.

**c)** Phương trình có nghiệm âm lớn nhất là $-\dfrac{\pi}{4}$.

**d)** Số nghiệm của phương trình trong khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ là hai nghiệm.

Lời giải

**Câu 3.** Cho phương trình lượng giác $\sin 2x = -\dfrac{1}{2}$ $(*)$. Khi đó

**a)** Phương trình $(*)$ tương đương $\sin 2x = \sin\dfrac{\pi}{6}$.

**b)** Trong khoảng $(0;\pi)$ phương trình có 3 nghiệm.

**c)** Tổng các nghiệm của phương trình trên khoảng $(0;\pi)$ bằng $\dfrac{3\pi}{2}$.

**d)** Trên khoảng $(0;\pi)$ phương trình có nghiệm lớn nhất bằng $\dfrac{11\pi}{12}$.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 4.** Cho phương trình lượng giác $2\cos x = \sqrt{3}$, khi đó

**a)** Phương trình có nghiệm $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

**b)** Trên đoạn $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$ phương trình có 4 nghiệm.

**c)** Tổng các nghiệm của phương trình trên đoạn $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$ bằng $\dfrac{25\pi}{6}$.

**d)** Trên đoạn $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$ phương trình có nghiệm lớn nhất bằng $\dfrac{13\pi}{6}$.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 5.** Cho phương trình $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right)$ $(*)$. Khi đó

**a)** Phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

**b)** Trên khoảng $(0;\pi)$ phương trình có 2 nghiệm.

**c)** Trên khoảng $(0;\pi)$ phương trình có 2 nghiệm âm.

**d)** Tổng các nghiệm của phương trình trên khoảng $(0;\pi)$ bằng $\dfrac{7\pi}{6}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 6.** Cho phương trình lượng giác $3-\sqrt{3}\tan\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=0$, khi đó

**a)** Phương trình có nghiệm $x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.

**b)** Khi $-\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{2\pi}{3}$ thì phương trình có ba nghiệm.

**c)** Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\dfrac{\pi}{3}$.

**d)** Tổng các nghiệm của phương trình trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{2\pi}{3}\right)$ bằng $\dfrac{\pi}{6}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 7.** Cho hai đồ thị hàm số $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ và $y=\sin x$, khi đó

**a)** Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin x$.

**b)** Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là $x=\dfrac{3\pi}{8}+k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$.

**c)** Khi $x\in[0;2\pi]$ thì hai đồ thị hàm số cắt nhau tại ba điểm.

**d)** Khi $x\in[0;2\pi]$ thì toạ độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là $\left(\dfrac{5\pi}{8};\sin\dfrac{5\pi}{8}\right)$, $\left(\dfrac{7\pi}{8};\sin\dfrac{7\pi}{8}\right)$.

**Lời giải**

.....

**Câu 8.** Cho phương trình lượng giác $2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)+\sqrt{3}=0$.

**a)** Phương trình tương đương $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

**b)** Phương trình có nghiệm là $x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi; x=\dfrac{7\pi}{12}+k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

**c)** Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\dfrac{\pi}{4}$.

**d)** Số nghiệm của phương trình trong khoảng $(-\pi;\pi)$ là hai nghiệm.

Lời giải

**Câu 9.** Cho phương trình $(2\cos x-1)(\sin 2x-m)=0$. (1)

**a)** $x=\dfrac{7\pi}{3}$ là một nghiệm của phương trình (1).

**b)** Khi $m=2$ thì phương trình (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{2}+l2\pi \end{array}\right.$ $(k,l\in\mathbb{Z})$.

**c)** Khi $m=1$ thì tập nghiệm của phương trình (1) có tất cả 4 điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.

**d)** Chỉ tìm được một giá trị của $m$ để phương trình (1) có đúng hai nghiệm thuộc $\left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right]$.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 10.** Hằng ngày, mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu $h$ (m) của mực nước trong kênh tại thời điểm $t$ (h) $(0 \le t \le 24)$ được cho bởi công thức $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12$.

**a)** Độ sâu của mực nước trong kênh nhỏ nhất bằng 9 (m).

**b)** Độ sâu của mực nước trong kênh lớn nhất bằng 15 (m).

**c)** Trong 1 ngày có đúng 3 thời điểm mà độ sâu của mực nước trong kênh đạt giá trị lớn nhất.

**d)** Độ sâu của mực nước trong kênh tại thời điểm 12 (h) bằng 13 (m).

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | |
|---|---|---|
| **Câu 1.** a Đ b S c Đ d S | **Câu 2.** a Đ b Đ c S d S | **Câu 3.** a S b S c Đ d Đ |
| **Câu 4.** a S b S c Đ d Đ | **Câu 5.** a Đ b Đ c S d S | **Câu 6.** a S b S c S d Đ |
| **Câu 7.** a Đ b Đ c S d S | **Câu 8.** a S b S c Đ d Đ | **Câu 9.** a Đ b S c Đ d S |
| **Câu 10.** a Đ b Đ c S d S | | |

## PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Họ nghiệm phương trình lượng giác $\cos(x+30^\circ)+1=0$ có dạng $x=a^\circ+k\cdot b^\circ$ $(k\in\mathbb{Z})$, với $a$; $b$ là các số nguyên. Tính giá trị $S=b-a$.

KQ: ☐

Lời giải

. . . . . .

**Câu 2.** Phương trình lượng giác $\tan\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ có họ nghiệm dạng $x=\dfrac{\pi}{a}+k\dfrac{\pi}{b}$ $(k\in\mathbb{Z})$, với $a$; $b$ là các số nguyên. Tính giá trị $T=a(a+b)$.

KQ: ☐

Lời giải

. . . . . .

**Câu 3.** Họ nghiệm phương trình lượng giác $\sqrt{3}\tan\dfrac{\pi x}{2}=3$ có dạng $x=\dfrac{2}{m}+kn$ $(k\in\mathbb{Z})$, với $m$; $n$ là các số nguyên và $\dfrac{2}{m}$ là phân số tối giản. Tính giá trị $P=m^n$.

KQ: ☐☐☐☐

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 4.** Phương trình $2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+2=0$ có bao nhiêu nghiệm trên khoảng $(0;2\pi)$?

KQ: | | | | |

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 5.** Cho phương trình $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)$. Tìm số nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{3};\frac{8\pi}{3}\right)$ của phương trình.

KQ: | | | | |

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 6.** Cho phương trình $\cos x=\sin 3x$. Tính tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0;2\pi)$ của phương trình (*làm tròn đến hàng phần chục*).

KQ: | | | | |

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .

**Câu 7.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $\cos x = m$ có nghiệm?

KQ: | | | | |

**Lời giải**

**Câu 8.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $\sin x - m = 1$ có nghiệm?

KQ: | | | | |

**Lời giải**

**Câu 9.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $2 + \cos x - m(\cos x - 3) = 0$ có nghiệm?

KQ: | | | | |

**Lời giải**

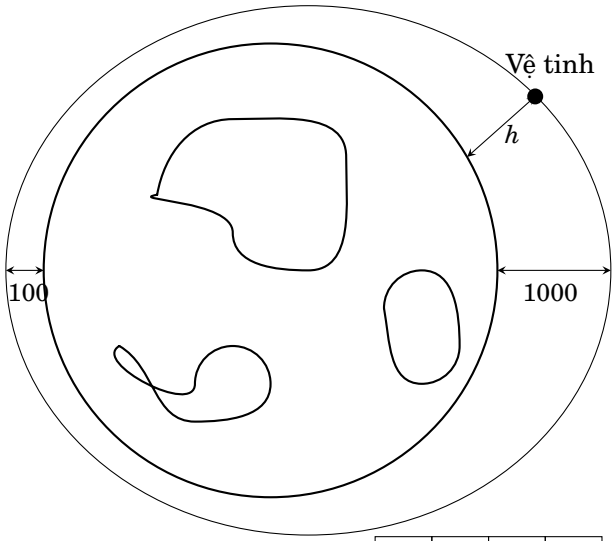
**Câu 10.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ trong đoạn $[-10;10]$ để phương trình $m\tan x+2=m$ có nghiệm?

KQ: | | | | |

**Lời giải**

**Câu 11.**

Một vệ tinh bay quanh Trái Đất theo một quỹ đạo hình elip (như hình vẽ). Độ cao $h$ (tính bằng kilômet) của vệ tinh so với bề mặt Trái Đất được xác định bởi công thức $h=550+450\cdot\cos\left(\frac{\pi}{50}t\right)$, trong đó $t$ là thời gian tính bằng phút kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo. Người ta cần thực hiện một thí nghiệm khoa học khi vệ tinh cách mặt đất 250 km. Trong khoảng 60 phút đầu tiên kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo, hãy tìm thời điểm $t$ để có thể thực hiện thí nghiệm đó (*kết quả làm tròn đến hàng phần chục*)?



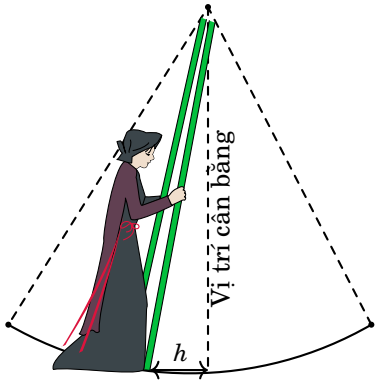

KQ: | | | | |

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 12.**

Mùa xuân ở Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) thường có trò chơi đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động qua lại vị trí cân bằng. Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách $h$ (mét) được tính từ vị trí chân người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn bởi hệ thức $h = |d|$ với $d = 3\cos\left[\dfrac{2\pi}{3}(2t-1)\right]$ ($t \geq 0$ và được tính bằng giây), trong đó ta quy ước $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở về phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp ngược lại. Hỏi trong 3 giây đầu tiên, có tất cả bao nhiêu lần người chơi đu ở cách vị trí cân bằng 1 mét?



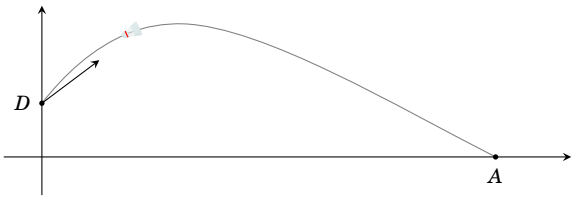

KQ: | | | | |

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 13.**

Trong môn cầu lông, khi phát cầu, người chơi cần đánh cầu qua khỏi lưới sang phía sân đối phương và không được để cho cầu rơi ngoài biên. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, chọn điểm có tọa độ $(0; y_0)$ là điểm xuất phát thì phương trình quỹ đạo của cầu lông khi rời khỏi mặt vợt là $y = \dfrac{-g \cdot x^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \cdot \tan\alpha + y_0$.




Trong đó

- $g$ là gia tốc trọng trường (thường được chọn là 9,8 m/s$^2$);

- $\alpha$ là góc phát cầu (so với phương ngang của mặt đất);
- $v_0$ là vận tốc ban đầu của cầu;
- $y_0$ là khoảng cách từ vị trí phát cầu đến mặt đất.

Đây là một hàm số bậc hai nên quỹ đạo chuyển động của cầu lông là một parabol. Một người chơi cầu lông đang đứng, khoảng cách từ vị trí người này đến vị trí cầu rơi chạm đất (tầm bay xa) là 6,68 m. Quan sát hình vẽ trên, hỏi người chơi đã phát cầu góc khoảng bao nhiêu độ so với mặt đất? Biết cầu rời mặt vợt ở độ cao 0,7 m so với mặt đất; vận tốc xuất phát của cầu là 8 m/s; người chơi không phát cầu quá 50° và bỏ qua sức cản của gió và xem quỹ đạo của cầu luôn nằm trong mặt phẳng phẳng đứng (*kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của độ*).

KQ: | | | | |

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

**BẢNG ĐÁP ÁN**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Câu 1.** 210 | **Câu 2.** 48 | **Câu 3.** 8 | **Câu 4.** 1 | **Câu 5.** 5 |
| **Câu 6.** 15,7 | **Câu 7.** 3 | **Câu 8.** 3 | **Câu 9.** 1 | **Câu 10.** 20 |
| **Câu 11.** 36,6 | **Câu 12.** 4 | **Câu 13.** 30 | | |

Chương 2

# DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

## BÀI 5. DÃY SỐ

### A Lí thuyết

#### 1 Dãy số

**Định nghĩa 1**

Mỗi hàm số $u$ xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn.
Nghĩa là:

$$\begin{aligned} u: \quad \mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u_n = u(n) \end{aligned}$$

Dãy số trên được kí hiệu là $(u_n)$.
Dạng khai triển của dãy số $(u_n)$ là: $u_1; u_2; u_3; \ldots; u_n; \ldots$

⚠ *(1)* $u_1 = u(1)$ *là số hạng đầu,*
$u_n = u(n)$ *là số hạng thứ* $n$ *(số hạng tổng quát) của dãy số.*

*(2) Nếu* $u_n = C, \forall n \in \mathbb{N}^*$ *thì ta nói* $(u_n)$ *là dãy số không đổi.*

*(3) Hàm số* $u$ *xác định trên tập* $M = \{1; 2; 3; \ldots; m\}$ *với* $m \in \mathbb{N}^*$ *thì được gọi là một dãy số hữu hạn.*

*(4) Dạng khai triển của dãy số này là:* $u_1; u_2; u_3; \ldots; u_m$*, trong đó* $u_1$ *là số hạng đầu,* $u_m$ *là số hạng cuối.*

#### 2 Cách xác định một dãy số

Một dãy số có thể được cho bằng các các sau:

(1) Cho bằng liệt kê các số hạng.

(2) Cho bằng công thức của số hạng tổng quát.

(3) Cho bằng phương pháp truy hồi.
Tức là:

- Cho số hạng đầu.
- Cho hệ thức truy hồi, tức là hệ thức biểu thị số hạng thứ $n$ qua số hạng đứng trước nó.

(4) Cho bằng phương pháp mô tả.

## 3 Dãy số tăng, dãy số giảm

**Định nghĩa 2**

- Dãy số $(u_n)$ được gọi là dãy số tăng nếu ta có $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số $(u_n)$ được gọi là dãy số giảm nếu ta có $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

⚠ *Không phải mọi dãy số đều tăng hoặc giảm.*
*Chẳng hạn:*
*Dãy số $(u_n)$ với $u_n = (-3)^n$ tức là dãy $-3; 9; -27; 81; \ldots$ không tăng cũng không giảm.*

## 4 Dãy số bị chặn

**Định nghĩa 3**

- Dãy số $(u_n)$ được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số $M$: $u_n \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số $(u_n)$ được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số $m$: $u_n \ge m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số $(u_n)$ được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới. Tức là tồn tại các số $m, M$: $m \le u_n \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

⚠ *(1) Dãy tăng sẽ bị chặn dưới bởi $u_1$.*

*(2) Dãy giảm sẽ bị chặn trên bởi $u_1$.*

# B Các dạng bài tập

### Dạng 1. Tìm số hạng của dãy số từ dãy số cho trước

*Phương pháp: Ở dạng này ta có 4 bài toán thường gặp*

1. Bài toán 1: Cho dãy số $(u_n)$: $u_n = f(n)$. Hãy tìm số hạng $u_k$.
   - Cách 1. Tự luận: Thay trực tiếp $n = k$ vào $u_n = 2n + 3$.
   - Cách 2. Dùng máy tính:
     »Nhập: $f(n)$ CALC $X = k$.
     »Bấm "=" ➞Kết quả.

2. Bài toán 2: Cho dãy số $(u_n): \begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$. Hãy tìm số hạng $u_k$.

   - Cách 1. Tự luận: Tính lần lượt $u_2$; $u_3$; ...; $u_k$ bằng cách thế $u_1$ vào $u_2$, thế $u_2$ vào $u_3$,..., thế $u_{k-1}$ vào $u_{k+1}$.
   - Cách 2. Dùng máy tính: Cách lập quy trình bấm máy:
     »Nhập giá trị của số hạng $u_1 : a =\rightarrow$ ANS.
     »Nhập biểu thức của $u_{n+1} = f(u_n)$.
     »Lặp dấu "=" lần thứ k-1 cho ra giá trị của số hạng $u_k$.

3. Bài toán 3: Cho dãy số $(u_n): \begin{cases} u_1 = a, u_2 = b \\ u_{n+2} = c \cdot u_{n+1} + d \cdot u_n + e \end{cases}$. Hãy tìm số hạng $u_k$.

   - Cách 1. Tự luận: Tính lần lượt $u_2; u_3; \ldots; u_k$ bằng cách thế $u_1$ vào $u_2$, thế $u_2$ vào $u_3$,..., thế $u_{k-1}$ vào $u_{k+1}$.
   - Cách 2. Dùng máy tính: Cách lập quy trình bấm máy:
     A: chứa giá trị của $u_n$.
     B: chứa giá trị của $u_{n+1}$.
     C: chứa giá trị của $u_{n+2}$.
     »Nhập C = $c \cdot$ B + $d \cdot$ A + $e$ : A = B : B = C.
     »Bấm "=" rồi cho B = $b$, ấn "=" , nhập A = $a$ ấn "=" .
     »Lặp dấu "=" cho đến khi xuất hiện lần thứ $k-2$ giá trị của C thì đó chính là giá trị của số hạng $u_k$.

4. Bài toán 4: Cho dãy số $(u_n): \begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = f(\{n, u_n\}) \end{cases}$. Trong đó $f(\{n, u_n\})$ là kí hiệu của biểu thức $u_{n+1}$ tính theo $u_n$ và $n$. Hãy tìm số hạng $u_k$.

   - Cách 1. Tự luận: Tính lần lượt $u_2; u_3; \ldots; u_k$ bằng cách thế $\{1, u_1\}$ vào $u_2$; thế $\{2, u_2\}$ vào $u_3$; ...; thế $\{k-1, u_{k-1}\}$ vào $u_k$.
   - Cách 2. Dùng máy tính: Cách lập quy trình bấm máy:
     A : chứa giá trị của $n$.
     B : chứa giá trị của $u_n$.
     C: chứa giá trị của $u_{n+1}$.
     Lập công thức tính $u_{n+1}$.
     »Gán $A := A + 1; B := C$ để tính số hạng tiếp theo của dãy.
     »Lặp dấu "=" cho đến khi xuất hiện lần thứ $k-1$ giá trị của C thì đó chính là giá trị của số hạng $u_k$.

**Ví dụ 1.**

(1) Xét dãy số gồm tất cả các số tự nhiên chia cho 5 dư 1 theo thứ tự tăng dần. Xác định số hạng tổng quát của dãy số.

(2) Viết dãy số hữu hạn gồm năm số hạng đầu của dãy số trong câu $a$. Xác định số hạng đầu và số hạng cuối của dãy số hữu hạn này.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 2.**

(1) Viết năm số hạng đầu của dãy số $(u_n)$ với số hạng tổng quát $u_n = n!$ .

(2) Viết năm số hạng đầu của dãy số Fibonacci $(F_n)$ cho bởi hệ thức truy hồi

$$\begin{cases} F_1 = 1, F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 3). \end{cases}$$

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 3.** Viết năm số hạng đầu và số hạng thứ 100 của các dãy số $(u_n)$ có số hạng tổng quát cho bởi:

(1) $u_n = 3n - 2$;

(2) $u_n = 3 \cdot 2^n$;

(3) $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 4.** Cho dãy số $(u_n)$ biết $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$. Tìm số hạng $u_6$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 5.** Cho dãy số $(u_n)$ biết $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1} \end{cases}$. Tìm số hạng $u_{10}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 6.** Cho dãy số $(u_n)$ được xác định như sau $\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 2 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n + 5 \end{cases}$. Tìm số hạng $u_8$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 7.** Cho dãy số $(u_n)$ được xác minh như sau $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}(u_n + 1) \end{cases}$. Tìm số hạng $u_{11}$

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 2. Tính tăng giảm của dãy số

**Phương pháp:**

- Dãy số $(u_n)$ được gọi là *dãy số tăng* nếu ta có $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathrm{N}^*$.
- Dãy số $(u_n)$ được gọi là *dãy số giảm* nếu ta có $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathrm{N}^*$.

**Cách 1:** Xét hiệu $u_{n+1} - u_n$

- Nếu $u_{n+1} - u_n > 0 \, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $(u_n)$ là dãy số tăng.
- Nếu $u_{n+1} - u_n < 0 \, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $(u_n)$ là dãy số giảm.

**Cách 2:** Khi $u_n > 0 \, \forall n \in \mathbb{N}^*$ ta xét tỉ số $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

- Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì $(u_n)$ là dãy số tăng.
- Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì $(u_n)$ là dãy số giảm.

*** * Tính chất:**

(1) Nếu $\begin{cases} (u_n) \uparrow \\ (v_n) \uparrow \end{cases}$ thì dãy số $(u_n + v_n) \uparrow$.

(2) Nếu $\begin{cases} (u_n) \downarrow \\ (v_n) \downarrow \end{cases}$ thì dãy số $(u_n + v_n) \downarrow$.

(3) Nếu $\begin{cases} (u_n) \uparrow; u_n \geq 0 \\ (v_n) \uparrow; u_n \geq 0 \end{cases}$ thì dãy số $(u_n \cdot v_n) \uparrow$.

(4) Nếu $\begin{cases}(u_n)\downarrow;u_n\geq 0\\(v_n)\downarrow;u_n\geq 0\end{cases}$ thì dãy số $(u_n\cdot v_n)\downarrow$.

(5) Nếu $(u_n)\uparrow$ và $u_n\geq 0\,\forall n\in\mathbb{N}^*$ thì dãy số $\left(\sqrt{u_n}\right)\uparrow$ và dãy số $((u_n)^m)\uparrow\ \forall m\in\mathbb{N}^*$.

(6) Nếu $(u_n)\downarrow$ và $u_n\geq 0\,\forall n\in\mathbb{N}^*$ thì dãy số $\left(\sqrt{u_n}\right)\downarrow$ và dãy số $((u_n)^m)\downarrow\ \forall m\in\mathbb{N}^*$.

(7) Nếu $(u_n)\uparrow$ và $u_n>0\,\forall n\in\mathbb{N}^*$ thì dãy số $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)\downarrow$.

(8) Nếu $(u_n)\downarrow$ và $u_n>0\,\forall n\in\mathbb{N}^*$ thì dãy số $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)\uparrow$.

*** * Một vài kết quả về dạng toán tăng-giảm dãy số:**

(1) Dãy số $(u_n)$ có $u_n=an+b$.
Tăng khi $a>0$, Giảm khi $a<0$

(2) Dãy số $(u_n)$ có $u_n=q^n$.
Tăng khi $q>1$, giảm khi $0<q<1$, không tăng không giảm khi $q<0$.

(3) Dãy số $(u_n)$ có $u_n=\dfrac{an+b}{cn+d}$ với điều kiện $cn+d>0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.
Tăng khi $ad-bc>0$; Giảm khi $ad-bc<0$.

(4) Dãy số *đan dấu* cũng là dãy số không tăng, không giảm.

(5) Nếu dãy số $(u_n)$ tăng hoặc giảm thì dãy số $(q^n\cdot u_n)$ không tăng, không giảm.

(6) Dãy số $(u_n)$ có $u_{n+1}=au_n+b$.
Tăng nếu $\begin{cases}a>0\\u_2-u_1>0\end{cases}$;
Giảm nếu $\begin{cases}a>0\\u_2-u_1<0\end{cases}$;
Không tăng không giảm nếu $a<0$.

(7) Dãy số $(u_n)$ có $\begin{cases}u_{n+1}=\dfrac{au_n+b}{cu_n+d}\\c,d>0;u_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$.
Tăng nếu $\begin{cases}ad-bc>0\\u_2-u_1>0\end{cases}$; Giảm nếu $\begin{cases}ad-bc>0\\u_2-u_1>0\end{cases}$.

**Ví dụ 8.** Xét tính đơn điệu của dãy số $(u_n)$ biết

1) $u_n = 3n + 6$;

2) $u_n = \dfrac{n+5}{n+2}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 9.** Xét tính tăng giảm của các dãy số sau:

**1)** Dãy số $(u_n)$ với $u_n = 2n^3 - 5n + 1$.

**2)** Dãy số $(u_n)$ với $u_n = 3^n - n$.

**3)** Dãy số $(u_n)$ với $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$.

**4)** Dãy số $(u_n)$ vớ $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2^n}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 10.** Anh Thanh vừa được tuyển dụng vào một công ty công nghệ, được cam kết lương năm đầu sẽ là 200 triệu đồng và lương mỗi năm tiếp theo sẽ được tăng thêm 25 triệu đồng. Gọi $s_n$ (triệu đồng) là lương vào năm thứ $n$ mà anh Thanh làm việc cho công ty đó. Khi đó ta có: $s_1 = 200$, $s_n = s_{n-1} + 25$; $n \geqslant 2$.

1) Tính lương của anh Thanh vào năm thứ 5 làm việc cho công ty.

2) Chứng minh $(s_n)$ là dãy số tăng. Giải thích ý nghĩa thực tế của kết quả này.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

## Dạng 3. Tính bị chặn của dãy số

- Dãy số $(u_n)$ được gọi là ***bị chặn trên*** nếu tồn tại một số $M$ : $u_n \leqslant M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số $(u_n)$ được gọi là ***bị chặn dưới*** nếu tồn tại một số $m$ : $u_n \geqslant m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số $(u_n)$ được gọi là ***bị chặn*** nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới.

✓**Phương Pháp:** Chứng minh trực tiếp bằng các phương pháp chứng minh bất đẳng thức.

**Cách 1:** Dãy số $(u_n)$ có $u_n = f(n)$ là hàm số đơn giản.

- Ta chứng minh bất đẳng thức $\left[\begin{array}{l} u_n = f(n) \leqslant M,\ \forall n \in \mathbb{N}^* \\ u_n = f(n) \geqslant m,\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{array}\right.$

**Cách 2:** Dãy số $(u_n)$ có $u_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_k + \ldots + v_n$.

- Ta làm trội $v_k \leqslant a_k - a_{k+1}$.
- Lúc đó $u_n \leqslant (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots (a_n - a_{n+1})$. Suy ra $u_n \leqslant a_1 - a_{n+1} \leqslant M,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

**Cách 3:** Dãy số $(u_n)$ có $u_n = v_1 v_2 v_3 \ldots v_n$ với $v_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

- Ta làm trội $v_k \leqslant \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$.
- Lúc đó $u_n \leqslant \dfrac{a_2}{a_1} \cdot \dfrac{a_3}{a_2} \ldots \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

Suy ra $u_n \leqslant \dfrac{a_{n+1}}{a_1} \leqslant M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

**Chú ý:** Nếu dãy số $(u_n)$ giảm thì bị chặn trên, dãy số $(u_n)$ tăng thì bị chặn dưới.

**˘Một vài kết quả về dạng toán dãy số bị chặn:**

**1)** Dãy số $(u_n)$ có $u_n = q^n$ với $(|q| \leqslant 1)$ bị chặn.

**2)** Dãy số $(u_n)$ có $u_n = q^n$ với $(q < -1)$ không bị chặn.

**3)** Dãy số $(u_n)$ có $u_n = q^n$ với $q > 1$ bị chặn dưới.

**4)** Dãy số $(u_n)$ có $u_n = an + b$ bị chặn dưới nếu $a > 0$ và bị chặn trên nếu $a < 0$.

**5)** Dãy số $(u_n)$ có $u_n = an^2 + bn + c$ bị chặn dưới nếu $a > 0$ và bị chặn trên nếu $a < 0$.

**6)** Dãy số $(u_n)$ có $u_n = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \ldots + a_1 n + a_0$ bị chặn dưới nếu $a_m > 0$, bị chặn trên nếu $a_m < 0$.

**7)** Dãy số $(u_n)$ có $u_n = q^n \left(a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \ldots + a_1 n + a_0\right)$ với $a_m \neq 0$ và $q < -1$ không bị chặn.

**8)** Dãy số $(u_n)$ có $u_n = \sqrt{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \ldots + a_1 n + a_0}$ bị chặn dưới với $a_m > 0$.

**9)** Dãy số $(u_n)$ có $u_n = \sqrt[3]{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \ldots + a_1 n + a_0}$ bị chặn dưới nếu $a_m > 0$, bị chặn trên nếu $a_m < 0$.

**10)** Dãy số $(u_n)$ có $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ trong đó $P(n)$ và $Q(n)$ là các đa thức, bị chặn nếu bậc của $P(n)$ nhỏ hơn hoặc bằng bậc của $Q(n)$.

**11)** Dãy số $(u_n)$ có $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ trong đó $P(n)$ và $Q(n)$ là các đa thức, bị chặn dưới hoặc bị chặn trên nếu bậc của $P(n)$ lớn hơn bậc của $Q(n)$.

**Ví dụ 11.** Xét tính bị chặn của dãy số $(u_n)$ biết

**1)** $u_n = \dfrac{-1}{2n+3}$.

**2)** $u_n = \dfrac{n+5}{n+2}$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

**Ví dụ 12.** Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

**1)** $u_n = \dfrac{1}{2n^2-1}$.

**2)** $u_n = 3 \cdot \cos \dfrac{nx}{3}$.

**3)** $u_n = 2n^3 + 1$.

**4)** $u_n = \dfrac{n^2+2n}{n^2+n+1}$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

**Ví dụ 13.** Cho dãy số $(u_n)$ xác định bởi $u_1 = 0$ và $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4, \forall n \geqslant 1$.

**1)** Chứng minh dãy $(u_n)$ bị chặn trên bởi số 8.

**2)** Chứng minh dãy $(u_n)$ tăng, từ đó suy ra dãy $(u_n)$ bị chặn.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 14.** Cho dãy số $(u_n)$ với $u_n = n^2 - 4n + 3$.

**1)** Viết công thức truy hồi của dãy số.

**2)** Chứng minh dãy số bị chặn dưới.

**3)** Tính tổng $n$ số hạng đầu của dãy số đã cho.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

# C Bài tập rèn luyện

## PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1.** Cho dãy số có các số hạng đầu là $\frac{1}{3}; \frac{1}{3^2}; \frac{1}{3^3}; \frac{1}{3^4}; \frac{1}{3^5}; \ldots$. Số hạng tổng quát của dãy số này là

**A.** $u_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^{n+1}}$. **B.** $u_n = \frac{1}{3^{n+1}}$. **C.** $u_n = \frac{1}{3^n}$. **D.** $u_n = \frac{1}{3^{n-1}}$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 2.** Cho dãy số $(u_n)$ với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} - u_n = 2n - 1 \end{cases}$. Số hạng tổng quát $u_n$ của dãy số là số hạng nào dưới đây?

**A.** $u_n = 2 + (n-1)^2$. **B.** $u_n = 2 + n^2$. **C.** $u_n = 2 + (n+1)^2$. **D.** $u_n = 2 - (n-1)^2$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 3.** Cho dãy số $(u_n)$ với $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = -2 - \frac{1}{u_n} \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này là

**A.** $u_n = -\frac{n-1}{n}$. **B.** $u_n = \frac{n+1}{n}$. **C.** $u_n = -\frac{n+1}{n}$. **D.** $u_n = -\frac{n}{n+1}$.

**Lời giải**

**Câu 4.** Cho dãy số $(u_n)$, biết $u_n = \dfrac{n}{2^n}$. Chọn phát biểu đúng.

**A.** $u_4 = \dfrac{1}{4}$. **B.** $u_5 = \dfrac{1}{16}$. **C.** $u_5 = \dfrac{1}{32}$. **D.** $u_3 = \dfrac{1}{8}$.

**Lời giải**

**Câu 5.** Cho dãy số $(u_n)$, biết $u_n = \dfrac{2n+5}{5n-4}$. Số $\dfrac{7}{12}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

**A.** 6. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

**Lời giải**

**Câu 6.** Cho dãy số $(u_n)$, biết $u_n = \dfrac{n-1}{n^2+1}$. Số $\dfrac{2}{13}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

**A.** Thứ 3. **B.** Thứ 4. **C.** Thứ 5. **D.** Thứ 6.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 7.** Cho dãy số $(u_n)$, biết $u_n = n^3 - 8n^2 - 5n + 7$. Số $-33$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

**A.** 5. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 9.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 8.** Cho dãy số $(u_n)$ với $u_n = \dfrac{n^2 + 3n + 7}{n + 1}$. Hỏi dãy số trên có bao nhiêu số hạng nhận giá trị nguyên?

**A.** 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** Không có.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 9.** Cho dãy số $(u_n)$ với $u_n = 2^n$. Tìm số hạng $u_{n+1}$.

**A.** $u_{n+1} = 2^n \cdot 2$. **B.** $u_{n+1} = 2^n + 1$. **C.** $u_{n+1} = 2(n+1)$. **D.** $u_{n+1} = 2^n + 2$.

**Lời giải**

**Câu 10.** Cho dãy số $(u_n)$ với $u_n = 3^n$. Số hạng $u_{n+1}$ bằng

**A.** $3^n + 1$. **B.** $3^n + 3$. **C.** $3^n \cdot 3$. **D.** $3(n+1)$.

**Lời giải**

**Câu 11.** Cho dãy số $(u_n)$ với $u_n = 3^n$. Số hạng $u_{2n}$ bằng

**A.** $3^n + 3$. **B.** $9^n$. **C.** $3^n \cdot 3$. **D.** $4^{2n}$.

**Lời giải**

**Câu 12.** Cho dãy số $(u_n)$ với $u_n = 5^{n+1}$. Tìm số hạng $u_{n-1}$.

**A.** $u_{n-1} = 5^{n-1}$. **B.** $u_{n-1} = 5^n$. **C.** $u_{n-1} = 5 \cdot 5^{n+1}$. **D.** $u_{n-1} = 5 \cdot 5^{n-1}$.

**Lời giải**

**Câu 13.** Cho dãy số $(u_n)$ xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + 1) \end{cases}$. Tìm số hạng $u_4$.

**A.** $u_4 = \dfrac{5}{9}$. **B.** $u_4 = 1$. **C.** $u_4 = \dfrac{2}{3}$. **D.** $u_4 = \dfrac{14}{27}$.

**Lời giải**

**Câu 14.** Cho dãy số $(u_n)$ xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + 2 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

**A.** $u_2 = \dfrac{5}{2}$. **B.** $u_3 = \dfrac{15}{4}$. **C.** $u_4 = \dfrac{31}{8}$. **D.** $u_5 = \dfrac{63}{16}$.

**Lời giải**

**Câu 15.** Cho dãy số $(u_n)$ xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó là

**A.** $-3; 6; 9$. **B.** $3; -2; -7$. **C.** $3; 8; 13$. **D.** $3; 5; 7$.

Lời giải

**Câu 16.** Cho dãy số $(u_n)$, biết công thức số hạng tổng quát $u_n = 2n - 3$. Số hạng thứ 10 của dãy số bằng

**A.** 17. **B.** 20. **C.** 10. **D.** 7.

Lời giải

**Câu 17.** Cho dãy số $(u_n)$ có công thức số hạng tổng quát $u_n = 8 - 3n$. Tính $u_4$.

**A.** 2. **B.** $-7$. **C.** $-5$. **D.** $-4$.

Lời giải

**Câu 18.** Cho dãy số $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$. Tìm số hạng thứ 5 của dãy số.

**A.** 16. **B.** 12. **C.** 15. **D.** 14.

**Lời giải**

**Câu 19.** Cho dãy số $(u_n)$ biết $u_n = \dfrac{10}{3^n}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** Dãy số tăng. **B.** Dãy số giảm.

**C.** Dãy số không tăng, không giảm. **D.** Dãy số vừa tăng vừa giảm.

**Lời giải**

**Câu 20.** Trong các dãy số $(u_n)$ cho bởi số hạng tổng quát $u_n$ sau, dãy số nào tăng?

**A.** $u_n = \dfrac{1}{3^n}$. **B.** $u_n = \dfrac{1}{2n+1}$. **C.** $u_n = \dfrac{n+1}{3n+2}$. **D.** $u_n = \dfrac{4n-2}{n+3}$.

**Lời giải**

**Câu 21.** Trong các dãy số $(u_n)$ cho bởi số hạng tổng quát $u_n$ sau, dãy số nào giảm?

**A.** $u_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$. **B.** $u_n = (-1)^n(5^n - 1)$. **C.** $u_n = -3^n$. **D.** $u_n = \sqrt{n+4}$.

**Lời giải**

**Câu 22.** Trong các dãy số sau, dãy số nào là dãy số giảm?

**A.** $u_n = \frac{2n+1}{n-1}$. **B.** $u_n = n^3 - 1$. **C.** $u_n = n^2$. **D.** $u_n = 2n$.

**Lời giải**

**Câu 23.** Trong các dãy số $(u_n)$ cho bởi số hạng tổng quát $u_n$ sau, dãy số nào bị chặn?

**A.** $u_n = n^2$. **B.** $u_n = 2^n$. **C.** $u_n = \dfrac{1}{n}$. **D.** $u_n = \sqrt{n+1}$.

**Lời giải**

**Câu 24.** Trong các dãy số $(u_n)$ cho bởi số hạng tổng quát $u_n$ sau, dãy số nào bị chặn?

**A.** $u_n = \dfrac{1}{2^n}$. **B.** $u_n = 3^n$. **C.** $u_n = \sqrt{n+1}$. **D.** $u_n = n^2 + 1$.

**Lời giải**

**Câu 25.** Xét tính bị chặn của các số $(u_n)$ với $u_n = 4 - 3n - n^2$.

**A.** Bị chặn. **B.** Không bị chặn. **C.** Bị chặn trên. **D.** Bị chặn dưới.

**Lời giải**

.....

**Câu 26.** Trong các dãy số $(u_n)$ sau, dãy số nào bị chặn?

**A.** $u_n = n - \sin 3n$. **B.** $u_n = \dfrac{n^2+1}{n}$. **C.** $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. **D.** $u_n = n \cdot \sin(3n-1)$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 27.** Cho dãy số $(u_n)$ thỏa mãn $\log^2 u_1 + \log u_1 - 6 = 0$ và $u_{n+1} = u_n + 5$, với mọi $n \geq 1, n \in \mathrm{N}$. Giá trị lớn nhất của $n$ để $u_n < 500$ bằng

**A.** 80. **B.** 100. **C.** 99. **D.** 82.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 28.** Cho dãy số $(u_n)$ được xác định bởi $u_1 = \dfrac{2}{3}$ và $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2(2n+1)u_n + 1}, (n \in \mathbb{N}^*)$. Tính tổng 2018 số hạng đầu tiên của dãy số đó.

**A.** $\dfrac{4036}{4035}$. **B.** $\dfrac{4035}{4034}$. **C.** $\dfrac{4038}{4037}$. **D.** $\dfrac{4036}{4037}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 29.** Cho dãy số $(u_n)$ thỏa mãn $u_n = u_{n-1} + 6, \forall n \geq 2$ và $\log_2 u_5 + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{u_9 + 8} = 11$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Tìm số tự nhiên $n$ nhỏ nhất thỏa mãn $S_n \geq 20172018$.

**A.** 2587. **B.** 2590. **C.** 2593. **D.** 2584.

**Lời giải**

**Câu 30.** Tìm $x$ biết $(x+3) + (x+7) + (x+11) + \cdots + (x+79) = 860$.

**A.** $x = 2$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = 4$. **D.** $x = 3$.

**Lời giải**

**Câu 31.** Tìm $x$ biết $(2x+3) + (2x+7) + (2x+11) + \cdots + (2x+79) = 1720$.

**A.** $x = 35$. **B.** $x = \dfrac{45}{2}$. **C.** $x = 10$. **D.** $x = 15$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Câu 1. C | Câu 2. A | Câu 3. C | Câu 4. A | Câu 5. B | Câu 6. C | Câu 7. C |
| Câu 8. C | Câu 9. A | Câu 10. C | Câu 11. B | Câu 12. B | Câu 13. A | Câu 14. A |
| Câu 15. C | Câu 16. A | Câu 17. D | Câu 18. D | Câu 19. B | Câu 20. D | Câu 21. C |
| Câu 22. A | Câu 23. C | Câu 24. A | Câu 25. C | Câu 26. C | Câu 27. B | Câu 28. D |
| Câu 29. C | Câu 30. A | Câu 31. B | | | | |

## PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

**Câu 1.** Cho dãy số $(u_n)$, biết $u_n = -\dfrac{n}{n+1}$. Khi đó

**a)** Năm số hạng đầu tiên của dãy số là $u_1 = -\dfrac{1}{2}; u_2 = -\dfrac{2}{3}; u_3 = -\dfrac{3}{4}; u_4 = -\dfrac{4}{5}; u_5 = -\dfrac{5}{6}$.

**b)** Số hạng $u_{10}, u_{100}$ lần lượt là $-\dfrac{10}{11}; -\dfrac{100}{101}$.

**c)** $-\dfrac{85}{86}$ là số hạng thứ 86 của dãy số $(u_n)$.

**d)** $-\dfrac{99}{101}$ là một số hạng của dãy số $(u_n)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Cho dãy số $(u_n)$ có số hạng tổng quát $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$. Khi đó

**a)** Số hạng đầu tiên của dãy số là 1.

**b)** Số hạng $u_2 = \dfrac{5}{4}; u_3 = \dfrac{7}{5}$.

**c)** $u_4 > u_5$.

**d)** Số $\dfrac{167}{84}$ là số hạng thứ 252 của dãy số $(u_n)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 3.** Cho dãy số $(u_n)$ xác định bởi $u_n = \dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$. Khi đó

**a)** Số hạng thứ 2021 là $\dfrac{2021}{4040}$.

**b)** Số hạng thứ 2022 là $\dfrac{2022}{4043}$.

**c)** Số hạng thứ 2023 là $\dfrac{2023}{4047}$.

**d)** Tổng các số hạng thứ 2021; 2022; 2023 và 2024 nhỏ hơn 2.

Lời giải

**Câu 4.** Cho dãy số $(u_n)$ có số hạng tổng quát $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$. Khi đó

**a)** $u_3 = \dfrac{2}{3}$.

**b)** $u_7 - u_8 = \dfrac{1}{56}$.

**c)** $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1}{n(n+1)}$.

**d)** Dãy số $(u_n)$ là dãy số tăng.

Lời giải

**Câu 5.** Cho dãy số $(u_n)$ có số hạng tổng quát $u_n = \dfrac{n}{4^n}$. Khi đó

**a)** Ta có $u_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

**b)** Ta có $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

**c)** Ta có $u_{2024} < u_{2023}$.

**d)** Dãy số $(u_n)$ là dãy số tăng.

Lời giải

**Câu 6.** Cho dãy số $(u_n)$ có số hạng tổng quát $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Khi đó

**a)** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}}$.

**b)** $\dfrac{u_{2024}}{u_{2023}} < 1$.

**c)** $u_{n+1} < u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

**d)** Dãy số $(u_n)$ là dãy số giảm.

**Lời giải**

**Câu 7.** Cho dãy số $(u_n)$ có số hạng tổng quát $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$.

**a)** $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+3)(n+2)}$.

**b)** $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

**c)** Dãy số $(u_n)$ là dãy số giảm.

**d)** Dãy $(u_n)$ là dãy số bị chặn.

**Lời giải**

**Câu 8.** Cho dãy số $(u_n)$ có số hạng tổng quát $u_n = n + \dfrac{1}{n}$. Khi đó

**a)** $u_{n+1} > u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

**b)** Dãy số $(u_n)$ là dãy số tăng.

**c)** $u_n \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

**d)** Dãy số đã cho bị chặn dưới.

## Lời giải

. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | |
|---|---|---|
| **Câu 1.** a Đ b Đ c S d S | **Câu 2.** a Đ b Đ c S d S | **Câu 3.** a S b S c Đ d Đ |
| **Câu 4.** a Đ b S c S d Đ | **Câu 5.** a S b Đ c Đ d S | **Câu 6.** a S b Đ c Đ d Đ |
| **Câu 7.** a Đ b S c S d Đ | **Câu 8.** a Đ b Đ c S d S | |

## PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Cho dãy số $(u_n)$ với $u_n = \dfrac{2n+1}{n^2}$. Hãy tính số hạng thứ 6 của dãy số (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười). KQ: | | | | |

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 2.** Cho dãy số $(u_n): -3;-1;1;3;5;\ldots$ Một hệ thức truy hồi xác định dãy số đã cho có dạng $\begin{cases} u_1 = -b \\ u_{n+1} = a \cdot u_n + 2. \end{cases}$ với $n \geq 1$ và $a$; $b$ là các số tự nhiên. Tính $T = a + b$. KQ: | | | | |

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 3.** Cho dãy số $(u_n)$ có số hạng tổng quát $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$. Số $\dfrac{167}{84}$ là số hạng thứ mấy của dãy?

KQ: | | | | |

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 4.** Số hạng tổng quát $u_n$ theo $n$ của dãy số $(u_n)$ : $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n, \ \forall n \geq 1 \end{cases}$ có dạng $u_n = a^n$, với $a$ là số tự nhiên. Xác định giá trị của $a$.

KQ: | | | | |

**Lời giải**

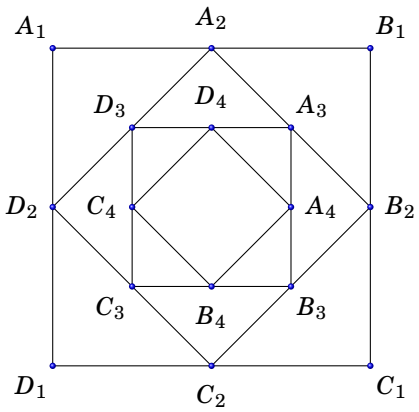
**Câu 5.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ trong đoạn $[-20;20]$ để dãy số $(u_n)$ với $u_n = \dfrac{mn+1}{n+1}$ là dãy số tăng?

KQ: | | | | |

**Lời giải**

**Câu 6.**

Cho hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng 4. Với mọi số nguyên dương $n \geq 2$, gọi $A_n$, $B_n$, $C_n$, $D_n$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $A_{n-1}B_{n-1}$, $B_{n-1}C_{n-1}$, $C_{n-1}D_{n-1}$, $D_{n-1}A_{n-1}$. Gọi $S_n$ là diện tích của tứ giác $A_nB_nC_nD_n$. Kết quả của $S_{12}$ có dạng $\left(\frac{a}{2}\right)^b$ với $a$; $b$ là các số tự nhiên. Khi đó giá trị của $b-4a$ bằng bao nhiêu? KQ: | | | | |




## Lời giải

. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | |
|---|---|---|
| **Câu 1.** 6,7 | **Câu 2.** 4 | **Câu 3.** 250 |
| **Câu 4.** 2 | **Câu 5.** 19 | **Câu 6.** 11 |

# BÀI 6. CẤP SỐ CỘNG

## A Lý thuyết

### 1 Cấp số cộng

**Định nghĩa 1**

Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi $d$. Nghĩa là:

$$u_{n+1} = u_n + d$$

với $n \in \mathbb{N}^*$. Số không đổi $d$ được gọi là công sai của cấp số cộng.

⚠ *Khi $d = 0$ thì cấp số cộng là một dãy số không đổi (tất cả các số hạng đều bằng nhau).*

### 2 Số hạng tổng quát

**Định lý 1**

Nếu một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1$ và công sai $d$ thì số hạng tổng quát của nó được xác định theo công thức:

$$u_n = u_1 + (n-1)d, \forall n \geq 1.$$

**Hệ quả 1.** Ba số $a$, $b$, $c$ (theo thứ tự đó) lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi $a + c = 2b$.

### 3 Tổng của $n$ số hạng đầu tiên của một cấp số cộng

**Định lý 2**

Cho cấp số cộng $(u_n)$ có công sai $d$.

Nếu $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ ($S_n$ là tổng của $n$ số hạng đầu tiên của cấp số cộng) thì

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = n \cdot u_1 + \frac{n(n-1)}{2}d.$$

*Chứng minh.*

Ta có $S_n = u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d + \cdots + u_1 + (n-2)d + u_1 + (n-1)d$ (1).

Mà $S_n = u_n - (n-1)d + u_n - (n-2)d + \cdots + u_n - 2d + u_n - d + u_n$ (2).

Cộng vế với vế của (1) và (2) ta được $2S_n = n(u_1 + u_n) \Rightarrow S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$.

Do $u_n = u_1 + (n-1)d$ nên $S_n = \frac{n[u_1 + u_1 + (n-1)d]}{2} = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$.

**Nhận xét.** *a) Nếu $(u_n)$ là một cấp số cộng thì mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$ với $k \geq 2$.*

*b) Cấp số cộng $(u_n)$ là một dãy số tăng khi và chỉ khi công sai $d > 0$.*

*c) Cấp số cộng $(u_n)$ là một dãy số giảm khi và chỉ khi công sai $d < 0$.*

## B Các dạng bài tập

### Dạng 1. Xác định dãy đã cho là cấp số cộng

Để chứng minh một dãy đã cho là một cấp số cộng thì ta chứng minh:

$$u_{n+1} - u_n = d.$$

với $d$ là một hằng số không đổi.

**Ví dụ 1.** Cho $(u_n)$ là một cấp số cộng có sáu số hạng với $u_1 = -2$, $d = 3$. Viết khai triển của cấp số cộng.

**Lời giải**

**Ví dụ 2.** Cho dãy số $(u_n)$ với $u_n = 2n - 3$. Chứng minh rằng $(u_n)$ là một cấp số cộng. Tìm $u_1$ và $d$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 3.** Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số cộng?

a) $1, 3, 5, 7$.

b) $2, 4, 8, 16$.

c) $5, 10, 15, 20$.

d) $1, 4, 9, 16$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 4.** Trong các dãy số $(u_n)$ sau, dãy số nào là cấp số cộng?

a) $u_n = 3n + 2$.

b) $u_n = 3^n - 1$.

c) $u_n = (n+2)^2 - n^2$.

d) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3 - u_n \end{cases}$ với $n \geq 1$.

**Lời giải**

**Ví dụ 5.** Trong các dãy số $(u_n)$ sau, dãy số nào là cấp số cộng? Nếu là cấp số cộng, hãy tính số hạng đầu và công sai.

a) $u_n = 2 - 3n$.

b) $u_n = \dfrac{n}{3} - 2$.

c) $u_n = \dfrac{1}{n} + 3$.

d) $u_n = 2^n + 4$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 2. Xác định các yếu tố qua số hạng tổng quát

Nếu một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1$ và công sai $d$ thì số hạng tổng quát là

$$u_n = u_1 + (n-1)d, \forall n \geq 1.$$

**Ví dụ 6.** Cho cấp số cộng $(u_n)$, biết $u_1 = -3$, $d = 7$. Tìm $u_{15}$, $u_{20}$, $u_{25}$, $u_{30}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 7.** Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng $(u_n)$, biết $\begin{cases} u_1+u_5-u_3=10 \\ u_1+u_6=17. \end{cases}$

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 8.** Giữa các số 7 và 35 hãy đặt thêm 6 số nữa để được một cấp số cộng.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 9.** Cho cấp số cộng $(u_n)$, biết: $\begin{cases} u_1 = -15 \\ d = 18. \end{cases}$

a) Tìm $u_5, u_{10}, u_{15}, u_{20}, u_{25}$.

b) Số 1209 là số hạng thứ bao nhiêu?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 10.** Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng $(u_n)$, biết:

a) $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_3 + u_4 = 17. \end{cases}$

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 11.** Tổng ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng bằng 2 và tổng các bình phương của ba số đó bằng $\frac{14}{9}$. Xác định ba số đó và tính công sai của cấp số cộng.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

## Dạng 3. Tính chất cấp số cộng

**Phương pháp.**

- Trong một cấp số cộng, mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và số hạng cuối) đều bằng trung bình cộng của hai số hạng đứng liền kề với nó, nghĩa là

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}, \forall k \geq 2.$$

- Hệ quả: Ba số $a$, $b$, $c$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng nếu và chỉ nếu $b - a = c - b$.

Đôi khi ta cũng viết $b - a = c - b$ sẽ thuận lợi hơn trong việc giải toán. Các bài toán thường gặp:

1. Tìm ẩn $x$ để 3 số đã cho lập thành cấp số cộng.
2. Ba góc trong một tam giác lập thành cấp số cộng.
3. Ba nghiệm phân biệt tạo thành một cấp số cộng.

**Ví dụ 1.** Ba số lập thành một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 2 và tổng bình phương của chúng bằng $\frac{14}{9}$. Tìm ba số hạng đó.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 2.** Tìm $x$ biết ba số $10-3x$, $3x^2+5$, $5-4x$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 3.** Cho tam giác $ABC$ có số đo ba góc lập thành một cấp số cộng và một góc có số đo bằng $25^\circ$. Tính số đo hai góc còn lại.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 4.** Tìm $x$ để ba số $a$, $b$, $c$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng, biết:

a) $a = 10 - 3x$, $b = 2x^2 + 3$, $c = 7 - 4x$.

b) $a = x + 1$, $b = 3x - 2$, $c = x^2 - 1$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 5.** Cho ba số dương $a$, $b$, $c$. Đặt $A=\dfrac{1}{b+c}$, $B=\dfrac{1}{c+a}$, $C=\dfrac{1}{a+b}$. Chứng minh rằng $C$, $A$, $B$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi $c^2$, $a^2$, $b^2$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 6.** Cho tam giác $ABC$ có $\cot A$, $\cot B$, $\cot C$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh rằng $a^2$, $b^2$, $c^2$ cũng lập thành cấp số cộng.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 7.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình $2x^3-18x^2+mx-6=0$ có ba nghiệm phân biệt tạo thành một cấp số cộng.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

## Dạng 4. Tính tổng $n$ số hạng đầu của cấp số cộng

*Phương pháp*

Tìm $u_1$, $d$ hoặc $u_1$, $u_n$ và tính $S_n$ theo một trong hai công thức sau:

a) $S_n=\dfrac{n(u_1+u_n)}{2}$;

b) $S_n=nu_1+\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot d$.

**Ví dụ 8.** Cho cấp số cộng $(u_n)$ có số hạng đầu $u_1=2$ và công sai $d=3$. Tính tổng $S_{100}$ của 100 số hạng đầu tiên.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 9.** Tính tổng $S = 100 + 105 + 110 + \cdots + 995$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 10.** Cho cấp số cộng $(u_n)$ có $u_3 = -15$, $u_4 = 18$. Tính tổng $S_{20}$ của 20 số hạng đầu tiên.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 11.** Cho cấp số cộng $(u_n)$ thoả mãn $\begin{cases} S_4 = 9 \\ S_6 = \dfrac{45}{2} \end{cases}$. Tính $u_1$, $d$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 12.** Cho dãy số $(u_n)$ với $u_n = 2n - 3$.

a) Chứng minh rằng $(u_n)$ là cấp số cộng.

b) Tính tổng của 30 số hạng đầu.

c) Biết $S_n = 195$, tìm $n$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 13.** Cho dãy số $(u_n)$ có $\begin{cases} u_7+u_{15}=60 \\ u_4^2+u_{12}^2=1\,170 \end{cases}$ và công sai $d>0$. Tính tổng $S_{2026}$ số hạng đầu.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 14.** Cho cấp số cộng $(u_n)$ thoả mãn $\begin{cases} u_2+u_5-u_3=10 \\ u_4+u_6=26 \end{cases}$. Tính tổng $S_{10}$ của 10 số hạng đầu.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 15.** Một cấp số hữu hạn $(u_n)$ có tổng tất cả các số hạng trừ số hạng đầu tiên bằng $-36$, còn tổng tất cả các số hạng cuối cùng bằng $0$. Biết $u_{10}-u_6$. Tìm số hạng đầu tiên và công sai của cấp số cộng đó.

**Lời giải**

# C Bài tập rèn luyện

## PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1.** Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số cộng?

**A.** $1;-2;-4;-6;-8$. **B.** $1;-3;-6;-9;-12$. **C.** $1;-3;-7;-11;-15$. **D.** $1;-3;-5;-7;-9$.

**Lời giải**

**Câu 2.** Trong các dãy số có công thức tổng quát sau, dãy số nào là cấp số cộng?

**A.** $u_n = 2021^n$. **B.** $u_n = 2n + 2021$. **C.** $u_n = \dfrac{2}{n+2021}$. **D.** $u_n = n^2 - 2$.

**Lời giải**

**Câu 3.** Trong các dãy số sau đây, dãy số nào là cấp số cộng?

**A.** $u_n = 3^n$. **B.** $u_n = (-3)^{n+1}$. **C.** $u_n = 3n + 1$. **D.** $u_n = 2^{n+1}$.

**Lời giải**

**Câu 4.** Trong các dãy số sau đây, dãy số nào là một cấp số cộng?

**A.** $u_n = n^2 + 1, n \geq 1$. **B.** $u_n = 2^n, n \geq 1$. **C.** $u_n = \sqrt{n+1}, n \geq 1$. **D.** $u_n = 2n - 3, n \geq 1$.

**Lời giải**

**Câu 5.** Cho cấp số cộng $(u_n)$ với $u_1 = 2$ và $u_2 = 7$ . Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

**A.** 5. **B.** $\frac{2}{7}$. **C.** $-5$. **D.** $\frac{7}{2}$.

**Lời giải**

**Câu 6.** Cho cấp số cộng $(u_n)$ với $u_1 = 9$ và công sai $d = 2$. Giá trị của $u_2$ bằng

**A.** 11. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 18. **D.** 7.

**Lời giải**

**Câu 7.** Cho cấp số cộng $(u_n)$ với $u_1 = 8$ và công sai $d = 3$. Giá trị của $u_2$ bằng

**A.** $\frac{8}{3}$. **B.** 24. **C.** 5. **D.** 11.

**Lời giải**

**Câu 8.** Cho cấp số cộng $(u_n)$ với $u_1 = 2022$ và công sai $d = 7$. Giá trị của $u_6$ bằng

**A.** 2043. **B.** 2064. **C.** 2050. **D.** 2057.

**Lời giải**

**Câu 9.** Tìm công sai $d$ của cấp số cộng $(u_n)$, có $u_1 = 1$; $u_4 = 13$.

**A.** $d = 3$. **B.** $d = \frac{1}{4}$. **C.** $d = 4$. **D.** $d = \frac{1}{3}$.

**Lời giải**

**Câu 10.** Cho cấp số cộng có $u_3 = 2$, công sai $d = -2$. Số hạng thứ hai của cấp số cộng đó là

**A.** $u_2 = 4$. **B.** $u_2 = 0$. **C.** $u_2 = -4$. **D.** $u_2 = 3$.

**Lời giải**

**Câu 11.** Cho cấp số cộng $(u_n)$ với $u_{17} = 33$ và $u_{33} = 65$ thì công sai bằng

**A.** 1. **B.** 3. **C.** $-2$. **D.** 2.

**Lời giải**

**Câu 12.** Một cấp số cộng gồm 5 số hạng. Hiệu số hạng đầu và số hạng cuối bằng 20. Tìm công sai $d$ của cấp số cộng đã cho.

**A.** $d = -5$. **B.** $d = 4$. **C.** $d = -4$. **D.** $d = 5$.

**Lời giải**

**Câu 13.** Cho cấp số cộng $u_n$ có các số hạng đầu lần lượt là $5;9;13;17;\ldots$. Tìm số hạng tổng quát $u_n$ của cấp số cộng?

**A.** $u_n = 4n+1$. **B.** $u_n = 5n-1$. **C.** $u_n = 5n+1$. **D.** $u_n = 4n-1$.

**Lời giải**

**Câu 14.** Tìm công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng $(u_n)$ thỏa mãn $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 7 \\ u_1 + u_6 = 12. \end{cases}$

**A.** $u_n = 2n+3$. **B.** $u_n = 2n-1$. **C.** $u_n = 2n+1$. **D.** $u_n = 2n-3$.

**Lời giải**

**Câu 15.** Cấp số cộng $(u_n)$ có số hạng đầu $u_1 = 3$, công sai $d = -2$ thì số hạng thứ 5 là

**A.** $u_5 = 8$. **B.** $u_5 = 1$. **C.** $u_5 = -5$. **D.** $u_5 = -7$.

**Lời giải**

**Câu 16.** Cho cấp số cộng có $u_1 = -3$, $d = 4$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

**A.** $u_5 = 15$. **B.** $u_4 = 8$. **C.** $u_3 = 5$. **D.** $u_2 = 2$.

**Lời giải**

**Câu 17.** Một cấp số cộng $(u_n)$ có $u_{13} = 8$ và $d = -3$. Tìm số hạng thứ ba của cấp số cộng $(u_n)$.

**A.** 50. **B.** 28. **C.** 38. **D.** 44.

**Lời giải**

**Câu 18.** Cho cấp số cộng $(u_n)$ có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công sai $d = 2$. Giá trị của $u_7$ bằng

**A.** 15. **B.** 17. **C.** 19. **D.** 13.

**Lời giải**

**Câu 19.** Tìm số hạng thứ 11 của cấp số cộng có số hạng đầu bằng 3 và công sai $d = -2$.

**A.** $-21$. **B.** 23. **C.** $-19$. **D.** $-17$.

**Lời giải**

**Câu 20.** Viết ba số xen giữa 2 và 22 để ta được một cấp số cộng có 5 số hạng?

**A.** 6, 12, 18. **B.** 8, 13, 18. **C.** 7, 12, 17. **D.** 6, 10, 14.

**Lời giải**

.....

**Câu 21.** Cho cấp số cộng $(u_n)$, biết $u_2 = 3$ và $u_4 = 7$. Giá trị của $u_{15}$ bằng

**A.** 27. **B.** 31. **C.** 35. **D.** 29.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 22.** Cho dãy số $(u_n)$ là một cấp số cộng có $u_1 = 3$ và công sai $d = 4$. Biết tổng $n$ số hạng đầu của dãy số $(u_n)$ là $S_n = 253$. Tìm $n$.

**A.** 9. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 10.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 23.** Cho $(u_n)$ là cấp số cộng biết $u_3 + u_{13} = 80$. Tổng 15 số hạng đầu của cấp số cộng đó bằng

**A.** 800. **B.** 600. **C.** 570. **D.** 630.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 24.** Cho dãy $(u_n)$ là một cấp số cộng với số hạng đầu 2 và số hạng thứ 36 là 72. Công sai của cấp số cộng $(u_n)$ là

**A.** $d=3$. **B.** $d=-2$. **C.** $d=2$. **D.** $d=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

**Câu 25.** Cho cấp số cộng $(u_n)$ có $u_{2013}+u_6=1000$. Tổng 2018 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó là

**A.** 1009000. **B.** 100800. **C.** 1008000. **D.** 100900.

Lời giải

**Câu 26.** Cho cấp số cộng $(u_n)$ thỏa $\begin{cases} u_2-u_3+u_5=10 \\ u_4+u_6=26 \end{cases}$. Tính $S=u_1+u_4+u_7+\cdots+u_{2011}$.

**A.** $S=2023736$. **B.** $S=2023563$. **C.** $S=6730444$. **D.** $S=6734134$.

Lời giải

**Câu 27.** Gọi $S_n$ là tổng $n$ số hạng đầu tiên trong cấp số cộng $(a_n)$. Biết $S_6 = S_9$, tỉ số $\dfrac{a_3}{a_5}$ bằng

**A.** $\dfrac{9}{5}$. **B.** $\dfrac{5}{9}$. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{5}$.

Lời giải

**Câu 28.** Cho một cấp số cộng $(u_n)$ có $u_1 = 1$ và tổng 100 số hạng đầu bằng 10000. Tính tổng $S = \dfrac{1}{u_1 u_2} + \dfrac{1}{u_2 u_3} + \cdots + \dfrac{1}{u_{99} u_{100}}$.

**A.** $S = \dfrac{100}{201}$. **B.** $S = \dfrac{200}{201}$. **C.** $S = \dfrac{198}{199}$. **D.** $S = \dfrac{99}{199}$.

Lời giải

**Câu 29.** Người ta trồng 820 cây theo một hình tam giác như sau: Hàng thứ nhất trồng 1 cây, kể từ hàng thứ hai trở đi số cây trồng mỗi hàng nhiều hơn 1 cây so với hàng liền trước nó. Hỏi có tất cả bao nhiêu hàng cây?

**A.** 42. **B.** 41. **C.** 40. **D.** 39.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 30.** Một công ti trách nhiệm hữu hạn thực hiện việc trả lương cho các kĩ sư theo phương thức sau: Mức lương của quý làm việc đầu tiên cho công ti là 4,5 triệu đồng/quý, và kể từ quý làm việc thứ hai, mức lương sẽ được tăng thêm 0,3 triệu đồng mỗi quý. Hãy tính tổng số tiền lương một kĩ sư nhận được sau 3 năm làm việc cho công ti.

**A.** 83,7. **B.** 78,3. **C.** 73,8. **D.** 87,3.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 31.** Trong sân vận động có tất cả 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 15 ghế, các dãy liền sau nhiều hơn dãy trước 4 ghế, hỏi sân vận động đó có tất cả bao nhiêu ghế?

**A.** 2250. **B.** 1740. **C.** 4380. **D.** 2190.

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 32.** Một tam giác vuông có chu vi bằng 3 và độ dài các cạnh lập thành một cấp số cộng. Độ dài các cạnh của tam giác đó là

**A.** $\frac{1}{3};1;\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{1}{4};1;\frac{7}{4}$. **C.** $\frac{3}{4};1;\frac{5}{4}$. **D.** $\frac{1}{2};1;\frac{3}{2}$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 33.** Người ta trồng 3003 cây theo hình tam giác như sau: Hàng thứ nhất trồng 1 cây, hàng thứ hai trồng 2 cây, hàng thứ ba trồng 3 cây, .... Hỏi có bao nhiêu hàng cây.

**A.** 78. **B.** 243. **C.** 77. **D.** 244.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 34.** Người ta trồng 3240 cây theo một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, kể từ hàng thứ hai trở đi số cây trồng mỗi hàng sau nhiều hơn 1 cây so với hàng liền ngay trước nó. Hỏi có tất cả bao nhiêu hàng cây?

**A.** 81. **B.** 82. **C.** 80. **D.** 79.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 35.** Cho một cấp số cộng $(u_n)$ có $u_1 = 5$ và tổng của 40 số hạng đầu là 3320. Tìm công sai của cấp số cộng đó.

**A.** $-4$. **B.** 8. **C.** $-8$. **D.** 4.

**Lời giải**

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Câu 1. C | Câu 2. B | Câu 3. C | Câu 4. D | Câu 5. A | Câu 6. A | Câu 7. D |
| Câu 8. D | Câu 9. C | Câu 10. A | Câu 11. D | Câu 12. A | Câu 13. A | Câu 14. B |
| Câu 15. C | Câu 16. C | Câu 17. C | Câu 18. A | Câu 19. D | Câu 20. C | Câu 21. D |
| Câu 22. B | Câu 23. B | Câu 24. C | Câu 25. A | Câu 26. A | Câu 27. C | Câu 28. D |
| Câu 29. C | Câu 30. C | Câu 31. D | Câu 32. C | Câu 33. C | Câu 34. C | Câu 35. D |

## PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

**Câu 1.** Cho dãy số hữu hạn gồm các số hạng: $-1$; 2; 5; 8; 11; 14; 17.

| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Dãy số đã cho không phải là cấp số cộng. | | |
| **b)** Số hạng $u_1 = -1$. | | |
| **c)** Nếu dãy số đã cho là một cấp số cộng thì công sai của cấp số cộng là $d = 2$. | | |
| **d)** Tổng tất cả các số hạng của dãy số bằng 56. | | |

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 2.** Cho cấp số cộng $(u_n)$ có số hạng đầu $u_1 = \dfrac{3}{2}$, công sai $d = \dfrac{1}{2}$.

| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Công thức của số hạng tổng quát của cấp số cộng đã cho là $u_n = 1 + \dfrac{n}{3}$. | | |
| **b)** 5 là số hạng thứ tám của cấp số cộng đã cho. | | |
| **c)** $\dfrac{15}{4}$ là một số hạng của cấp số cộng đã cho. | | |
| **d)** Tổng 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho bằng 2620. | | |

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 3.** Cho cấp số cộng $(u_n)$ có $u_1 = -3$, $u_6 = 27$.

| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Công sai của cấp số cộng đã cho bằng 7. | | |
| **b)** Số hạng $u_{85} = 501$. | | |
| **c)** Số hạng $u_{10} = 52$. | | |
| **d)** Tổng của 85 số hạng đầu $S_{85} = 21\,165$. | | |

Lời giải

**Câu 4.** Cho cấp số cộng $(u_n)$ có $u_1 = 5$ và tổng của 50 số hạng đầu bằng 5150.

| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Công sai của cấp số cộng bằng 6. | | |
| **b)** Số hạng $u_{85} = 341$. | | |
| **c)** Số hạng $u_{10} = 42$. | | |
| **d)** Tổng của 85 số hạng đầu $S_{85} = 14\,705$. | | |

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 5.** Cho cấp số cộng $(u_n)$ có $u_5 = 18$ và $4S_n = S_{2n}$ (trong đó $S_n$, $S_{2n}$ lần lượt là tổng của $n$ và $2n$ số hạng đầu của cấp số cộng).

| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Số hạng đầu của cấp số cộng đã cho bằng 2. | | |
| **b)** Công sai của cấp số cộng $(u_n)$ bằng 3. | | |
| **c)** Số hạng $u_{15} = 58$. | | |
| **d)** Tổng của 15 số hạng đầu của cấp số cộng bằng 350. | | |

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 6.** Cho cấp số cộng $(u_n)$. Gọi $S_n$ là tổng của $n$ số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho. Biết $S_7 = 77$ và $S_{12} = 192$.

| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Số hạng $u_1 = 5$. | | |
| **b)** Tổng $u_1 + u_3 = 14$. | | |
| **c)** Công sai của cấp số cộng bằng 3. | | |

| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| **d)** Số hạng $u_{11}=25$. | | |

Lời giải

**Câu 7.** Cho cấp số cộng $(u_n)$ có công sai $d<0$ thỏa mãn $\begin{cases} u_1+u_7=26 \\ u_2^2+u_6^2=466 \end{cases}$.

| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Số hạng thứ nhất của cấp số cộng đã cho $u_1=25$. | | |
| **b)** Công sai của cấp số cộng đã cho $d=-3$. | | |
| **c)** Số hạng $u_{10}=-11$. | | |
| **d)** Số hạng $u_{2024}=-8067$. | | |

Lời giải

**Câu 8.** Cho cấp số cộng $(u_n)$ có $u_1=5$ và $d=-7$. Khi đó

**a)** $u_{11}=-65$.

**b)** $u_5+u_7=-50$.

**c)** Số $-849$ là số hạng thứ 123 của cấp số cộng.

**d)** Số $-114$ là số hạng thứ 18 của cấp số cộng.

**Lời giải**

**Câu 9.** Cho cấp số cộng $(u_n)$ thoả mãn $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 15 \\ u_1 + u_6 = 27 \end{cases}$. Khi đó

**a)** Số hạng $u_1 = 21$.

**b)** Công sai của cấp số cộng bằng $-2$.

**c)** Số hạng $u_{11} = -9$.

**d)** Số $-6048$ là số hạng thứ 2024.

**Lời giải**

**BẢNG ĐÁP ÁN**

| | | |
|---|---|---|
| **Câu 1.** a S b Đ c S d Đ | **Câu 2.** a S b Đ c S d S | **Câu 3.** a S b Đ c S d Đ |
| **Câu 4.** a S b Đ c S d Đ | **Câu 5.** a Đ b S c Đ d S | **Câu 6.** a Đ b Đ c S d Đ |
| **Câu 7.** a Đ b S c Đ d Đ | **Câu 8.** a Đ b S c Đ d Đ | **Câu 9.** a Đ b S c Đ d Đ |

## PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Tìm số hạng đầu $u_1$ của cấp số cộng $(u_n)$ biết rằng $\begin{cases} u_4 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$.

KQ:

Lời giải

**Câu 2.** Trong một khán phòng có tất cả 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 15 ghế, các dãy liền sau nhiều hơn dãy trước đó 4 ghế, hỏi khán phòng đó có tất cả bao nhiêu ghế?

KQ:

Lời giải

**Câu 3.** Cho bốn số thực tạo thành một cấp số cộng có tổng bằng 28 và tổng các bình phương của chúng bằng 276. Tìm tích của bốn số đó. KQ:

Lời giải

**Câu 4.** Cho cấp số cộng có số hạng tổng quát $u_n = 5n - 7$, biết tổng $n$ số hạng đầu của cấp số cộng là $S_n = 817$. Tìm $n$.

KQ:

**Lời giải**

**Câu 5.** Cho cấp số cộng $(u_n)$ có $u_4 = -12$, $u_{14} = 18$. Tìm $u_9$.

KQ:

**Lời giải**

**Câu 6.** Giải phương trình sau $2 + 7 + 12 + \cdots + x = 245$.

KQ:

**Lời giải**

**Câu 7.** Một ngôi nhà hình kim tự tháp (có gạch nâu ốp bên ngoài) được bao quanh bởi rất nhiều cây cối và là nơi tuyệt vời để nghỉ mát mùa hè. Ngôi nhà có chiều dài, chiều rộng là 6,8 m, chiều cao là 2,72 m. Khi xây dựng ngôi nhà, người chủ đã tính toán số viên gạch nâu hình hộp chữ nhật cần ốp tường; biết hàng trên ít hơn hàng dưới 1 viên, hàng trên cùng là 1 viên, kích thước viên gạch nâu hình hộp chữ nhật là 0,2 m – 0,08 m – 1 m. Hãy dự tính số viên gạch nâu ốp tường cả bốn mặt của ngôi nhà.

KQ:

**Lời giải**

**Câu 8.** Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng $x^3-3mx^2+2m(m-4)x+9m^2-m=0$.

KQ:

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Câu 1.** 1 | **Câu 2.** 2190 | **Câu 3.** 585 | **Câu 4.** 19 | **Câu 5.** 3 |
| **Câu 6.** 47 | **Câu 7.** 2380 | **Câu 8.** 1 | | |

# BÀI 7. CẤP SỐ NHÂN

## A Lí thuyết

### 1 Cấp số nhân

**Định nghĩa 1**

- Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với một số không đổi $q$. Nghĩa là:

$$(u_n) \text{ là cấp số nhân} \Leftrightarrow n \geq 2, u_n = q \cdot u_{n-1}.$$

  Số $q$ được gọi là công bội của cấp số nhân $\left(q = \dfrac{u_n}{u_{n-1}}; n \geq 2\right)$.

- Đặc biệt:
  - Khi $q = 0$, cấp số nhân có dạng $u_1, 0, 0, 0, \ldots$.
  - Khi $q = 1$, cấp số nhân có dạng $u_1, u_1, u_1, \ldots$.
  - Khi $u_1 = 0$, cấp số nhân có dạng $0, 0, 0, 0, \ldots$.

### 2 Số hạng tổng quát

**Định lý 1**

Nếu một cấp số nhân có số hạng đầu là $u_1$ và công bội $q$ thì số hạng tổng quá $u_n$ của nó tính bởi công thức

$$u_n = q^{n-1} \cdot u_1, n \geq 2.$$

### 3 Tính chất các số hạng của cấp số nhân

**Định lý 2**

- Trong một cấp số nhân, bình phương của mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là trung bình nhân của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là:

$$u_k = \sqrt{u_{k-1} \cdot u_{k+1}} \text{ hay } u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1} (k \geq 2).$$

- **Hệ quả**: Nếu $a, b, c$ là ba số khác 0, thì ba số $a$, $b$, $c$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân khi và chỉ khi $ac = b^2$.

## 4 Tổng của $n$ số hạng đầu tiên của một cấp số cộng

**Định lý 3**

Cho cấp số nhân $u_n$ với công bội $q \neq 1$.
Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

- Nếu $q = 1$ thì $S_n = n$.
- Nếu $q \neq 1$ thì $S_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q}$.

# B Các dạng bài tập

### Dạng 1. Xác định dãy đã cho là cấp số nhân

Nếu $(u_n)$ là một cấp số nhân với công bội $q$ thì $u_{n+1} = u_n \cdot q$ với $n \in \mathbb{N}^*$.
Để chứng minh một dãy đã cho là một cấp số nhân, ta chứng minh:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q, n \geq 1, \text{với} q \text{ là một hằng số không đổi.}$$

**Ví dụ 1.** Chứng minh rằng dãy số $(v_n)$: $v_n = (-1)^n \cdot 3^{2n}$ là một cấp số nhân.

**Lời giải**

**Ví dụ 2.** Chứng minh các dãy số $(u_n)$ sau là cấp số nhân biết

a) $u_n = \frac{3}{5} \cdot 2^n$.

b) $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 3.** Chứng minh các dãy số sau là một cấp số nhân. Xác định công bội và số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó?

a) Dãy số $(u_n)$ với $u_n = (-3)^{2n+1}$.

b) Dãy số $(u_n)$ với $u_n = (-1)^n \cdot 5^{3n+2}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 4.** Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số nhân?

a) Dãy số $(x_n)$, với $x_n = n^2$.

b) Dãy số $(y_n)$, với $y_n = \sqrt{5}^{2n-3}$.

c) Dãy số $(z_n)$, với $z_n = \dfrac{2}{n}$.

d) Dãy số $(w_n)$, với $w_n = \dfrac{3^n + 1}{3^{n+1}}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 2. Xác định các yếu tố qua số hạng tổng quát

- Nếu một cấp số nhân có số hạng đầu là $u_1$ và công bội $q$ thì số hạng tổng quát $u_n$ của nó tính bởi công thức

$$u_n = q^{n-1} \cdot u_1, n \geq 2.$$

**Ví dụ 5.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ với công bội $q < 0$ và $u_2 = 4$, $u_4 = 9$. Tìm $u_1$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 6.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ biết $u_1+u_5=51$, $u_2+u_6=102$. Hỏi số 12288 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 7.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ thỏa $\begin{cases} u_4=\dfrac{2}{27} \\ u_3=243u_8 \end{cases}$.

a) Viết năm số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

b) Số $\dfrac{2}{6561}$ là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số nhân?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 8.** Cho tứ giác $ABCD$ có 4 góc tạo thành 1 cấp số nhân có công bội bằng 2. Tìm số đo 4 góc ấy.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 9.** Cho 5 số lập thành một cấp số nhân. Biết công bội bằng một phần tư số hạng đầu tiên và tổng 2 số hạng đầu bằng 8.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 3. Tính tổng $n$ số hạng đầu tiên của một cấp số nhân

- Cho cấp số nhân $(u_n)$ với công bội $q \neq 1$.

Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \cdot + u_n$.

- Nếu $q = 1$ thì $S_n = n$.
- Nếu $q \neq 1$ thì $S_n = \dfrac{u_n(1-q^n)}{1-q}$.

**Ví dụ 10.** Tính tổng sau $A = 2 - 1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{512}$.

**Lời giải**

**Ví dụ 11.** Cho $n$ là số tự nhiên và $n \geq 2$, tính tổng sau

$$S_n = \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2^2 + \frac{1}{2^2}\right)^2 + \ldots + \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)^2.$$

**Lời giải**

**Ví dụ 12.** Tính tổng sau $S_n = 5 + 55 + 555 + \ldots + \underbrace{555\ldots5}_{n}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 13.** Giải phương trình sau $2+4+8+\ldots+y=1022$ biết $y$ là số hạng thứ $n$ của cấp số nhân.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 14.** Giải phương trình sau $5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^8 \ldots 5^{2x} = (0,04)^{-63}$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

## Dạng 4. Cấp số nhân liên quan hình học

• Để giải các bài toán cấp số nhân liên quan hình học, ngoài vận dụng các tính chất của cấp số nhân, tính chất hình học thuần túy như vuông,... cần vận dụng linh hoạt các hệ thức lượng trong tam giác, các công thức lượng giác.
Ta chú ý các tính chất sau

- Tổng các góc ở đỉnh đa giác lồi bằng $360^\circ$.
- Định lí cô-sin trong tam giác
  Cho tam giác $\triangle ABC$ với $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ ta có
  $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$
- Định lí hàm sin $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$.

**Ví dụ 15.** Tìm 4 góc của một tứ giác, biết rằng các góc đó lập thành một cấp số nhân và góc cuối gấp 9 lần góc thứ hai.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 16.** Độ dài các cạnh của $\triangle ABC$ lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ có hai góc không quá $60^\circ$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 17.** Tìm điều kiện cho một cấp số nhân để ba số hạng liên tiếp của nó là độ dài ba cạnh của một tam giác.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 18.** Số đo ba kích thước của hình hộp chữ nhật lập thành một cấp số nhân. Biết thể tích của khối hộp là 125 $\text{cm}^3$ và diện tích toàn phần là 175 $\text{cm}^2$. Tính tổng số đo ba kích thước của hình hộp chữ nhật đó.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 19.** Cho $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ đều khác $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Giả sử $\sin^2\alpha$, $\sin^2\beta$, $\sin^2\gamma$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng đồng thời $\sin\beta\neq 0$ và $\tan\alpha\tan\gamma=1$. Chứng minh rằng $\tan\alpha$, $\tan\beta$, $\tan\gamma$ lập thành cấp số nhân.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 20.** Cho tam giác $ABC$ có $A=90^\circ$ và $a$, $\dfrac{b\sqrt{6}}{3}$, $c$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Tính góc $B,C$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 21.** Cho tam giác $ABC$ có $C-A=60^\circ$ và $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Tính góc $A$, $B$, $C$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 5. Nghiệm của phương trình liên quan cấp số nhân

a) Định lý Vi-ét đối với phương trình bậc ba:
Nếu phương trình bậc ba $ax^3+bx^2+cx+d=0$ có ba nghiệm $x_1$, $x_2$, $x_3$ thì
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a}. \end{cases}$$

b) Sử dụng kết quả này kết hợp với giả thiết của bài toán để tìm ra nghiệm của phương trình hoặc xác định mối liên hệ giữa các hệ số của phương trình. Trường hợp nếu $x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a}$ là hằng số thì điều kiện cần để phương trình bậc ba nói trên có ba nghiệm lập thành một cấp số nhân là $x=\sqrt[3]{-\dfrac{d}{a}}$ là nghiệm của phương trình bậc ba.

**Ví dụ 22.** Cho phương trình $x^2-12x+m=0$ (1) và $x^2-48x+q=0$ (2). Giả sử (1) có hai nghiệm là $x_1$, $x_2$; (2) có hai nghiệm là $x_3$, $x_4$. Tìm $m$, $q$ biết rằng $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân tăng.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 23.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $a$ để phương trình $x^3+x^2+2ax+a=0$ có ba nghiệm lập thành cấp số nhân.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 24.** Chứng minh phương trình $x^3-\left(m^2+3\right)x^2+\left(m^2+3\right)x-1=0$, với $m\neq 0$ luôn có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 6. Cấp số nhân & cấp số cộng

Để làm các bài toán dạng này học sinh cần nắm vững và vận dụng linh hoạt định nghĩa và các tính chất cấp số nhân và cấp số cộng

| | Cấp số cộng | Cấp số nhân |
|---|---|---|
| Định nghĩa | $u_{n+1}=u_n+d$ với $n\in\mathbb{N}^*$ | $u_n=q\cdot u_{n-1}$ với $n\geq 2$ |
| Số hạng tổng quát | $u_n=u_1+(n-1)d,\ \forall n\geq 1$ | $u_n=q^{n-1}\cdot u_1,\ n\geq 2$ |
| Tính chất | $u_k=\dfrac{u_{k-1}+u_{k+1}}{2},\ \forall k\geq 1$ | $u_k^2=u_{k-1}\cdot u_{k+1}\ (k\geq 2)$ |

**Ví dụ 25.** Tìm 4 số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng tổng 3 số hạng đầu là $\frac{148}{9}$, đồng thời, theo thứ tự, chúng là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 26.** Tìm 4 số trong đó ba số đầu là ba số hạng kế tiếp của một cấp số nhân, còn ba số sau là ba số hạng kế tiếp của một cấp số cộng; tổng hai số đầu và cuối bằng 32, tổng hai số giữa bằng 24.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

## Dạng 7. Cấp số cộng và cấp số nhân

**Ví dụ 27.** Tìm các các số dương $a$ và $b$ sao cho $a$, $a+2b$, $2a+b$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng và $(b+1)^2$, $ab+5$, $(a+1)^2$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 28.** Chứng minh rằng nếu ba số $\dfrac{2}{y-x}$, $\dfrac{1}{y}$, $\dfrac{2}{y-z}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì $x$, $y$, $z$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 29.** Một cấp số nhân và một cấp số cộng đều có số hạng thứ nhất bằng 5, số hạng thứ hai của cấp số cộng lớn hơn số hạng thứ hai của một cấp số nhân là 10, còn các số hạng thứ ba thì bằng nhau. Tìm các cấp số ấy.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

## Dạng 8. Bài toán thực tế liên quan cấp số nhân

**Ví dụ 30.** Một khu rừng có trữ lượng gỗ là $4 \cdot 10^5$ mét khối. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây ở khu rừng đó là 4% mỗi năm. Hỏi sau 5 năm, khu rừng sẽ có bao nhiêu mét khối gỗ?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 31.** Một người gửi số tiền 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7% năm. Biết rằng, nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi được nhập vào vốn ban đầu (*người ta gọi là lãi kép*). Giả sử trong khoảng thời gian gửi người gửi không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi, hỏi sau 10 năm thì tổng số tiền cả vốn lẫn lãi mà người gửi nhận được số tiền là bao nhiêu?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 32.** Một người gửi ngân hàng 150 triệu đồng theo thể thức lãi kép, lãi suất 0,58% một tháng (kể từ tháng thứ 2, tiền lãi được tính theo phần trăm của tổng tiền lãi tháng trước đó và tiền gốc của tháng trước đó). Sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có 180 triệu đồng?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 33.** Một của hàng kinh doanh, ban đầu bán mặt hàng $A$ với giá 100 (đơn vị nghìn đồng). Sau đó, cửa hàng tăng giá mặt hàng $A$ lên 10%. Nhưng sau một thời gian, cửa hàng lại tiếp tục tăng giá mặt hàng đó lên 10%. Hỏi giá của mặt hàng $A$ của cửa hàng sau hai lần tăng giá là bao nhiêu?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 34.** Tỷ lệ tăng dân số của tỉnh $M$ là 1,2%. Biết rằng số dân của tỉnh $M$ hiện nay là 2 triệu người. Nếu lấy kết quả chính xác đến hàng nghìn thì sau 9 năm nữa số dân của tỉnh $M$ sẽ là bao nhiêu?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 35.** Anh An mua nhà trị giá 500 triệu đồng theo phương thức trả góp

a) Nếu cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất anh An trả 6000000 và chịu lãi số tiền chưa trả là 5%/tháng thì sau bao lâu anh An trả hết số tiền trên?

b) Nếu anh An muốn trả hết nợ trong 3 năm và phải trả lãi với mức 6%/năm thì mỗi tháng anh phải trả bao nhiêu tiền? (Làm tròn đến nghìn đồng).

**Lời giải**

**Ví dụ 36.** Bố bạn An tặng bạn ấy một máy vi tính trị giá 15 triệu đồng bằng cách cho bạn ấy tiền hàng tháng theo phương thức: tháng đầu tiên cho 300 000 đồng, các tháng từ tháng thứ 2 trở đi mỗi tháng nhận được số tiền nhiều hơn tháng trước 50 000 đồng.

a) Nếu chọn cách gửi tiết kiệm số tiền được nhận hàng tháng với lãi suất 0,6%/tháng thì bạn An gửi bao nhiêu tháng mới đủ mua máy vi tính?

b) Nếu bạn An muốn có ngay máy vi tính để học bằng phương thức mua trả góp hàng tháng bằng số tiền bố cho với lãi suất ngân hàng là 0,7%/tháng thì bạn An mất bao nhiêu tháng để trả đủ số tiền và tháng cuối cùng trả bao nhiêu?

**Lời giải**

# C Bài tập rèn luyện

## PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1.** Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

**A.** 1; −3; 9; −27; 54. **B.** 1; 2; 4; 8; 16. **C.** 1; −1; 1; −1; 1. **D.** 1; −2; 4; −8; 16.

Lời giải

**Câu 2.** Trong các dãy số cho dưới đây, dãy số nào là cấp số nhân?

**A.** 1; 2; 3; 4; 5. **B.** 1; 3; 6; 9; 12. **C.** 2; 4; 6; 8; 10. **D.** 2; 2; 2; 2; 2.

Lời giải

**Câu 3.** Trong các dãy số cho dưới đây, dãy số nào là cấp số nhân?

**A.** 1; 2; 3; 4; 5; 6. **B.** 2; 4; 6; 8; 16; 32.

**C.** −2; −3; −4; −5; −6; −7. **D.** 1; 2; 4; 8; 16; 32.

Lời giải

**Câu 4.** Trong các dãy số cho dưới đây, dãy số nào là cấp số nhân?

**A.** 1; 0,2; 0,04; 0,0008.

**B.** 2; 22; 222; 2222.

**C.** $x$; $2x$; $3x$; $4x$ với $x \neq 0$.

**D.** 1; $-x^2$; $x^4$; $-x^6$ với $x \neq 0$.

**Lời giải**

**Câu 5.** Xác định $x$ để ba số $x-2$; $x+1$; $3-x$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

**A.** Không có giá trị nào của $x$.

**B.** $x = \pm 1$.

**C.** $x = 2$.

**D.** $x = -3$.

**Lời giải**

**Câu 6.** Trong các dãy số $(u_n)$ sau, dãy nào là cấp số nhân?

**A.** $u_n = n^2 + n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

**B.** $u_n = (n+2) \cdot 3^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

**C.** $u_n = \dfrac{6}{u_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

**D.** $u_n = (-4)^{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

**Lời giải**

**Câu 7.** Trong các dãy số $(u_n)$ sau, dãy nào là cấp số nhân?

**A.** $u_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

**B.** $u_n = n^2 - \dfrac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

**C.** $u_n = \dfrac{1}{2^n} - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

**D.** $u_n = n^2 + \dfrac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

**Lời giải**

**Câu 8.** Cho dãy số $(u_n)$ có số hạng tổng quát là $u_n = 3 \cdot 2^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Chọn kết luận đúng.

**A.** Dãy số $(u_n)$ là một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 12$.

**B.** Dãy số $(u_n)$ là một cấp số cộng có công sai $d = 2$.

**C.** Dãy số $(u_n)$ là một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 6$.

**D.** Dãy số $(u_n)$ là một cấp số nhân có công bội $q = 3$.

**Lời giải**

**Câu 9.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ với $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$. Giá trị của $u_2$ bằng

**A.** 6. **B.** 9. **C.** 8. **D.** $\frac{2}{3}$.

**Lời giải**

**Câu 10.** Tìm công bội của một cấp số nhân $(u_n)$ có $u_1 = \frac{1}{2}$ và $u_6 = 16$.

**A.** $q = \frac{1}{2}$. **B.** $q = -2$. **C.** $q = 2$. **D.** $q = -\frac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Câu 11.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ có $u_1 = 2$ và $u_4 = 54$. Giá trị của công bội $q$ bằng

**A.** 3. **B.** 9. **C.** 27. **D.** $-3$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 12.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ với $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$. Tìm số hạng thứ 4 của cấp số nhân này.

**A.** 24. **B.** 54. **C.** 162. **D.** 48.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 13.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ với $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$. Giá trị $u_{2025}$ bằng

**A.** $2 \cdot 3^{2024}$. **B.** $2 \cdot 3^{2025}$. **C.** $3 \cdot 2^{2024}$. **D.** $3 \cdot 2^{2025}$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 14.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ với $u_1 = 1$ và công bội $q = 2$. Hỏi số 1024 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân này?

**A.** 11. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 10.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 15.** Tập hợp các giá trị của $x$ để bộ ba số $x$, $2x$, $x+3$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân là

**A.** $\{0;1\}$. **B.** $\varnothing$. **C.** $\{1\}$. **D.** $\{0\}$.

**Lời giải**

**Câu 16.** Trong các phát biểu sau, phát biểu nào là **sai**?

**A.** Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số nhân.

**B.** Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số cộng.

**C.** Một cấp số cộng có công sai dương là một dãy số tăng.

**D.** Một cấp số cộng có công sai dương là một dãy số dương.

**Lời giải**

**Câu 17.** Giả sử $\dfrac{\sin\alpha}{6}$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Tính $\cos 2\alpha$.

**A.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 18.** Cho dãy số có các số hạng đầu là $\frac{1}{3}; \frac{1}{3^2}; \frac{1}{3^3}; \frac{1}{3^4}; \ldots$ Số hạng tổng quát của dãy số này là

**A.** $u_n = \frac{1}{3}^{n-1}$. **B.** $u_n = \frac{1}{3}^{n+2}$. **C.** $u_n = \frac{1}{3}^{n}$. **D.** $u_n = \frac{1}{3}^{n+1}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 19.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ với $u_1 = 1$ và $u_2 = 2$. Công bội của cấp số nhân đã cho là

**A.** $q = \frac{1}{2}$. **B.** $q = 2$. **C.** $q = -2$. **D.** $q = -\frac{1}{2}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 20.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ với $u_1 = 3$ và $u_2 = 9$. Công bội của cấp số nhân đã cho là

**A.** $q = -6$. **B.** $q = \frac{1}{3}$. **C.** $q = 3$. **D.** $q = 6$.

**Lời giải**

**Câu 21.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ với $u_1 = 3$ và $u_2 = 12$. Công bội của cấp số nhân đã cho là

**A.** $q = 9$. **B.** $q = -9$. **C.** $q = \frac{1}{4}$. **D.** $q = 4$.

**Lời giải**

**Câu 22.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ với $u_1 = 3$ và $u_2 = 15$. Công bội của cấp số nhân đã cho là

**A.** $q = -12$. **B.** $q = \frac{1}{5}$. **C.** $q = 5$. **D.** $q = 12$.

**Lời giải**

.....

**Câu 23.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ với $u_1 = 2$ và $u_2 = 6$. Công bội của cấp số nhân đã cho là

**A.** $q = 3$. **B.** $q = -4$. **C.** $q = 4$. **D.** $q = \frac{1}{3}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 24.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ với $u_1 = 3$ và công bội $q = 2$. Giá trị của $u_2$ bằng

**A.** $u_2 = 8$. **B.** $u_2 = 9$. **C.** $u_2 = 6$. **D.** $u_2 = \frac{3}{2}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 25.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ với $u_1 = -\frac{1}{2}$ và $u_7 = -32$. Tìm công bội $q$.

**A.** $q = \pm\frac{1}{2}$. **B.** $q = \pm 2$. **C.** $q = \pm 4$. **D.** $q = \pm 1$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 26.** Biết bộ ba số $x^2$, 8, $x$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Giá trị của $x$ bằng

**A.** $x=4$. **B.** $x=5$. **C.** $x=2$. **D.** $x=1$.

**Lời giải**

**Câu 27.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ có công bội $q$. Chọn hệ thức đúng trong các hệ thức sau:

**A.** $u_k=\sqrt{u_{k+1}\cdot u_{k+2}}$. **B.** $u_k=\dfrac{u_{k-1}+u_{k+1}}{2}$. **C.** $u_k=u_1\cdot q^{k-1}$. **D.** $u_k=u_1+(k-1)\cdot q$.

**Lời giải**

**Câu 28.** Cho dãy số $(u_n)$ xác định bởi $\begin{cases} u_1=-2 \\ u_{n+1}=-\dfrac{1}{10}\cdot u_n \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

**A.** $(u_n)$ là cấp số nhân có công bội $q=-\dfrac{1}{10}$. **B.** $u_n=(-2)\cdot\dfrac{1}{10^{n-1}}$.

**C.** $u_n=\dfrac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2}$, $n\geq 2$. **D.** $u_n=\sqrt{u_{n-1}\cdot u_{n+1}}$, $n\geq 2$.

**Lời giải**

**Câu 29.** Với $x$ là số nguyên dương, ba số $2x$, $3x+3$, $5x+5$ theo thứ tự là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân. Số hạng tiếp theo của cấp số nhân đó là

**A.** $-\dfrac{250}{3}$. **B.** $\dfrac{250}{3}$. **C.** $250$. **D.** $-250$.

**Lời giải**

**Câu 30.** Cho cấp số nhân $(u_n)$, biết $u_1=4$ và $u_4=64$. Tính công bội $q$ của cấp số nhân đã cho.

**A.** $q=4$. **B.** $q=-4$. **C.** $q=21$. **D.** $q=2\sqrt{2}$.

**Lời giải**

**Câu 31.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ có $(u_n)$ và $u_5=-162$. Công bội $q$ bằng

**A.** $q=-3$. **B.** $q=3$. **C.** $q=3$; $q=-3$. **D.** $q=-2$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 32.** Cấp số nhân $(u_n)$ có $u_4 = 9$, $u_5 = 81$ có công bội là

**A.** 3. **B.** 72. **C.** 18. **D.** 9.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 33.** Cho cấp số nhân $(u_n)$, có $u_1 = -3$ và $q = -2$. Tính tổng của 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân trên.

**A.** $S_{10} = -511$. **B.** $S_{10} = 1023$. **C.** $S_{10} = 1025$. **D.** $S_{10} = -1025$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 34.** Cho một cấp số nhân có các số hạng đều không âm thỏa mãn $u_2 = 6$, $u_4 = 24$. Tính tổng của 12 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó.

**A.** $3 \cdot 2^{12} - 3$. **B.** $2^{12} - 1$. **C.** $3 \cdot 2^{12} - 1$. **D.** $3 \cdot 2^{12}$.

**Lời giải**

**Câu 35.** Cho dãy $(u_n)$ với $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Tính $S_{2019} = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{2019}$, ta được kết quả

**A.** $S_{2019} = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{2019}$. **B.** $\frac{4039}{2}$.

**C.** $2019 + \frac{1}{2^{2019}}$. **D.** $\frac{6057}{2}$.

**Lời giải**

**Câu 36.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ có $u_3 = 12$, $u_5 = 48$, có công bội âm. Tổng 7 số hạng đầu của cấp số nhân đã cho bằng

**A.** 129. **B.** $-129$. **C.** 128. **D.** $-128$.

**Lời giải**

**Câu 37.** Biết rằng $S = 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \ldots + 11 \cdot 3^{10} = a + \dfrac{21 \cdot 3^b}{4}$. Tính $P = a + \dfrac{b}{4}$.

**A.** $P = 1$. **B.** $P = 2$. **C.** $P = 3$. **D.** $P = 3$.

**Lời giải**

**Câu 38.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ có $S_2 = 4$ và $S_3 = 13$. Tìm $S_5$.

**A.** $S_5 = 121$ hoặc $S_5 = \dfrac{181}{16}$. **B.** $S_5 = 121$ hoặc $S_5 = \dfrac{35}{16}$.

**C.** $S_5 = 114$ hoặc $S_5 = 114$. **D.** $S_5 = 141$ hoặc $S_5 = \dfrac{183}{16}$.

**Lời giải**

**Câu 39.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ có $u_1 = 8$ và biểu thức $4u_3 + 2u_2 - 15u_1$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $S_10$.

**A.** $S_10 = \dfrac{2\left(4^{11} + 1\right)}{5 \cdot 4^9}$. **B.** $S_{10} = \dfrac{2\left(4^{10} + 1\right)}{5 \cdot 4^8}$. **C.** $S_10 = \dfrac{2^{10} - 1}{3 \cdot 2^6}$. **D.** $S_10 = \dfrac{2^{11} - 1}{3 \cdot 2^7}$.

**Lời giải**

**Câu 40.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ có $\begin{cases} u_4+u_6=-540 \\ u_3+u_5=180 \end{cases}$. Tính $S_{21}$.

**A.** $S_{21}=\frac{1}{2}\left(3^{21}+1\right)$. **B.** $S_{21}=3^{21}-1$. **C.** $S_{21}=3^{21}-1$. **D.** $S_{21}=-\frac{1}{2}\left(3^{21}+1\right)$.

**Lời giải**

**Câu 41.** Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; 1; 2048. Tính tổng $S$ của tất cả các số hạng của cấp số nhân đã cho.

**A.** $S=2047{,}75$. **B.** $S=2049{,}75$. **C.** $S=4095{,}75$. **D.** $S=4096{,}75$.

**Lời giải**

**Câu 42.** Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0{,}121212\ldots$ được biểu diễn bởi phân số

**A.** $\frac{3}{25}$. **B.** $\frac{12}{99}$. **C.** $\frac{1}{11}$. **D.** $\frac{3}{22}$.

**Lời giải**

**Câu 43.** Cho dãy số xác định bởi $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2u_n + \frac{n-1}{n^2+3n+2}\right)$; $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó $u_{2018}$ bằng

**A.** $u_{2018} = \frac{2^{2016}}{3^{2017}} + \frac{1}{2019}$. **B.** $u_{2018} = \frac{2^{2018}}{3^{2017}} + \frac{1}{2019}$.

**C.** $u_{2018} = \frac{2^{2017}}{3^{2018}} + \frac{1}{2019}$. **D.** $u_{2018} = \frac{2^{2017}}{3^{2018}} + \frac{1}{2019}$.

**Lời giải**

**Câu 44.** Ba số theo thứ tự lập thành một cấp số nhân có số hạng cuối lớn hơn số hạng đầu 16 đơn vị. Ba số đó là các số hạng thứ nhất, thứ hai và thứ năm của một cấp số cộng. Tìm ba số đó.

**A.** 2, 6, 18. **B.** 4, 8, 20. **C.** $\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{49}{3}$. **D.** $4, 4\sqrt{5}, 20$.

**Lời giải**

**Câu 45.** Ba số dương $x, y, z$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng và có tổng bằng 30. Biết $x+2; y+2; z+18$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Tính $T = x^2 + z^2$.

**A.** $T = 328$. **B.** $T = 424$. **C.** $T = 296$. **D.** $T = 428$.

**Lời giải**

**Câu 46.** Ba số $x$, $y$, $z$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng tăng có tổng bằng 24. Nếu cộng thêm lần lượt các số 1, 4, 13 vào ba số ta được ba số theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tính giá trị biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2$.

**A.** 200. **B.** 210. **C.** 220. **D.** 190.

**Lời giải**

**Câu 47.** Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $(u_n)$ biết $u_1 = 1$ và $u_1$, $u_3$, $u_4$ theo thứ tự là ba số hạng liên tiếp trong một cấp số cộng.

**A.** $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}-1}$. **D.** 2.

**Lời giải**

**Câu 48.** Người ta thiết kế một cái tháp 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp. Tính diện tích mặt trên cùng.

**A.** $8\ \text{m}^2$. **B.** $6\ \text{m}^2$. **C.** $10\ \text{m}^2$. **D.** $12\ \text{m}^2$.

**Lời giải**

**Câu 49.** Một hình vuông $ABCD$ có cạnh $AB = a$, diện tích $S_1$. Nối 4 trung điểm $A_1, B_1, C_1, D_1$ theo thứ tự của 4 cạnh $AB, BC, CD, DA$ ta được hình vuông thứ hai là $A_1B_1C_1D_1$ có diện tích $S_2$. Tiếp tục như thế ta được hình vuông thứ ba $A_2B_2C_2D_2$ có diện tích $S_3$ và cứ tiếp tục như thế, ta được diện tích $S_4, S_5, \ldots$ Tính $S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{100}$.

**A.** $S = \dfrac{2^{100}-1}{2^{99}a^2}$. **B.** $S = \dfrac{a\left(2^{100}-1\right)}{2^{99}}$. **C.** $S = \dfrac{a^2\left(2^{100}-1\right)}{2^{99}}$. **D.** $S = \dfrac{a^2\left(2^{99}-1\right)}{2^{99}}$.

**Lời giải**

.....
.....

**Câu 50.** Bạn $A$ thả quả bóng cao su từ độ cao 10 m theo phương thẳng đứng. Mỗi khi chạm đất nó lại nảy lên theo phương thẳng đứng có độ cao bằng $\frac{3}{4}$ độ cao trước đó. Tính tổng quãng đường bóng đi được đến khi bóng dừng hẳn.

**A.** 40 m. **B.** 70 m. **C.** 50 m. **D.** 80 m.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 51.** Một loại vi khuẩn sau mỗi phút số lượng tăng gấp đôi biết rằng sau 5 phút người ta đếm được có 64000 con hỏi sau bao nhiêu phút thì có được 2048000 con.

**A.** 10. **B.** 11. **C.** 26. **D.** 50.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 52.** Cho dãy số $(a_n)$ xác định bởi $a_1 = 5, a_{n+1} = q \cdot a_n + 3$ với mọi $n \geq 1$, trong đó $q$ là hằng số, $q \neq 0$, $q \neq 1$. Biết công thức số hạng tổng quát của dãy số viết được dưới dạng $a_n = \alpha \cdot q^{n-1} + \beta \cdot \dfrac{1-q^{n-1}}{1-q}$. Tính $\alpha + 2\beta$ ?

**A.** 13. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 16.

**Lời giải**

.....

**Câu 53.**

Từ độ cao $55{,}8m$ của tháp nghiêng Pisa nước Italia người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất. Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt trước đó. Tổng độ dài hành trình của quả bóng được thả từ lúc ban đầu cho đến khi nó nằm yên trên mặt đất thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?



**A.** $(67m;69m)$. **B.** $(60m;63m)$. **C.** $(64m;66m)$. **D.** $(69m;72m)$.

**Lời giải**

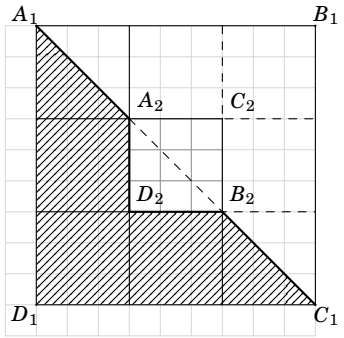
**Câu 54.** Có bao nhiêu giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $(x-1)(x-3)(x-m)=0$ có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân tăng?

**A.** 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

**Lời giải**

**Câu 55.**

Với hình vuông như hình vẽ bên, cách tô màu như phần gạch sọc được gọi là cách tô màu "đẹp". Một nhà thiết kế tiến hành tô màu cho một hình vuông như hình bên, theo quy trình sau




**Bước 1:** Tô màu "đẹp" cho hình vuông $A_1B_1C_1D_1$.

**Bước 2:** Tô màu "đẹp" cho hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ là hình vuông ở chính giữa khi chia hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ thành 9 phần bằng nhau như hình vẽ.

**Bước 3:** Tô màu "đẹp" cho hình vuông $A_3B_3C_3D_3$ là hình vuông ở chính giữa khi chia hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ thành 9 phần bằng nhau. Cứ tiếp tục như vậy. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu bước để tổng diện tích phần được tô màu chiếm 49,99%.

**A.** 9 bước. **B.** 4 bước. **C.** 7 bước. **D.** 8 bước.

**Lời giải**

**Câu 56.** Cho năm số $a,b,c,d,e$ tạo thành một cấp số nhân theo thứ tự đó và các số đều khác 0, biết $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=10$ và tổng của chúng bằng 40 . Tính giá trị $|S|$ với $S=abcde$.

**A.** $|S|=42$. **B.** $|S|=62$. **C.** $|S|=32$. **D.** $|S|=52$.

**Lời giải**

.....

**Câu 57.** Các số $x+6y$, $5x+2y$, $8x+y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng, đồng thời, các số $x+\dfrac{5}{3}$, $y-1$, $2x-3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm $x$ và $y$.

**A.** $x=-3$, $y=-1$ hoặc $x=\dfrac{3}{8}$, $y=\dfrac{1}{8}$.
**B.** $x=3$, $y=1$ hoặc $x=-\dfrac{3}{8}$, $y=-\dfrac{1}{8}$.
**C.** $x=24$, $y=8$ hoặc $x=-3$, $y=-1$.
**D.** $x=-24$, $y=-8$ hoặc $x=3$, $y=1$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 58.** Ba số $x$, $y$, $z$ lập thành một cấp số cộng và có tổng bằng 21. Nếu lần lượt thêm các số 2; 3; 9 vào ba số đó thì được ba số lập thành một cấp số nhân. Tính $F=x^2+y^2+z^2$.

**A.** $F=389$ hoặc $F=395$.
**B.** $F=395$ hoặc $F=179$.
**C.** $F=389$ hoặc $F=179$.
**D.** $F=441$ hoặc $F=357$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 59.** Một người đem 100 triệu đồng đi gửi tiết kiệm với kỳ hạn 6 tháng, mỗi tháng lãi suất là 0,7% số tiền mà người đó có. Hỏi sau khi hết kỳ hạn, người đó được lĩnh về bao nhiêu tiền?

**A.** $10^8\cdot(0{,}007)^5$.
**B.** $10^8\cdot(1{,}007)^5$.
**C.** $10^8\cdot(0{,}007)^6$.
**D.** $10^8\cdot(1{,}007)^6$.

**Lời giải**

.....

**Câu 60.** Tỷ lệ tăng dân số của tỉnh M là 1,2%. Biết rằng số dân của tỉnh M hiện nay là 2 triệu người. Nếu lấy kết quả chính xác đến hàng nghìn thì sau 9 năm nữa số dân của tỉnh $M$ sẽ là bao nhiêu?

**A.** 10320 nghìn người. **B.** 3000 nghìn người.

**C.** 2227 nghìn người. **D.** 2300 nghìn người.

**Lời giải**

**Câu 61.** Tế bào E. Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại nhân đôi một lần. Nếu lúc đầu có $10^{12}$ tế bào thì sau 3 giờ sẽ phân chia thành bao nhiêu tế bào?

**A.** $1024 \cdot 10^{12}$ tế bào. **B.** $256 \cdot 10^{12}$ tế bào. **C.** $512 \cdot 10^{12}$ tế bào. **D.** $512 \cdot 10^{13}$ tế bào.

**Lời giải**

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Câu 1. A | Câu 2. D | Câu 3. D | Câu 4. D | Câu 5. A | Câu 6. D | Câu 7. A |
| Câu 8. A | Câu 9. A | Câu 10. C | Câu 11. A | Câu 12. B | Câu 13. A | Câu 14. A |
| Câu 15. A | Câu 16. D | Câu 17. D | Câu 18. C | Câu 19. B | Câu 20. C | Câu 21. D |
| Câu 22. C | Câu 23. A | Câu 24. C | Câu 25. B | Câu 26. C | Câu 27. C | Câu 28. A |
| Câu 29. B | Câu 30. A | Câu 31. C | Câu 32. D | Câu 33. B | Câu 34. A | Câu 35. A |
| Câu 36. A | Câu 37. C | Câu 38. A | Câu 39. B | Câu 40. A | Câu 41. A | Câu 42. B |
| Câu 43. A | Câu 44. A | Câu 45. A | Câu 46. B | Câu 47. B | Câu 48. B | Câu 49. C |
| Câu 50. B | Câu 51. A | Câu 52. C | Câu 53. A | Câu 54. B | Câu 55. B | Câu 56. C |
| Câu 57. A | Câu 58. C | Câu 59. D | Câu 60. C | Câu 61. C | | |

## PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

**Câu 1.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ với công bội $q<0$ và $u_2=4$, $u_4=9$. Khi đó:

**a)** Số hạng đầu $u_1=-\dfrac{8}{3}$.

**b)** Số hạng $u_5=\dfrac{27}{2}$.

**c)** $-\dfrac{2187}{32}$ là số hạng thứ 8.

**d)** Cấp số nhân có công bội $q=-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Cho cấp số nhân $(u_n)$, biết $u_1+u_5=51$; $u_2+u_6=102$. Khi đó

**a)** Số hạng $u_1=3$.

**b)** Số hạng $u_4=48$.

**c)** Số 12288 là số hạng thứ 12 của cấp số nhân $(u_n)$.

**d)** Tổng tám số hạng đầu của cấp số nhân là 765.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 3.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ thoả mãn $\begin{cases} u_4=\dfrac{2}{27} \\ u_3=243u_8 \end{cases}$. Khi đó

**a)** Số hạng $u_1=2$; $u_2=\dfrac{2}{3}$.

**b)** $u_5-u_3=-\dfrac{16}{81}$.

**c)** Số $\dfrac{2}{6561}$ là số hạng thứ 8 của cấp số nhân.

**d)** Tổng chín số hạng đầu của cấp số nhân là số lớn hơn 3.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 4.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ thoả mãn $\begin{cases} u_4+u_6=-540 \\ u_3+u_5=180 \end{cases}$. Khi đó

**a)** Số hạng $u_1=2$.

**b)** Gọi $q$ là công bội của cấp số nhân, thì ba số $q$; 1; 3 tạo thành một cấp số cộng.

**c)** Số $-486$ là số hạng thứ 5 của cấp số nhân.

**d)** Tổng của 21 số hạng đầu cấp số nhân đã cho bằng $5\,230\,176\,602$.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 5.** Cho tứ giác $ABCD$ có bốn góc tạo thành một cấp số nhân có công bội bằng 2. Khi đó

**a)** Số đo góc nhỏ nhất bằng $24^\circ$.

**b)** Số đo góc lớn nhất bằng $196^\circ$.

**c)** Tổng số đo góc lớn nhất với góc nhỏ nhất bằng $220^\circ$.

**d)** Số đo góc lớn nhất trừ cho số đo góc nhỏ nhất bằng $168^\circ$.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 6.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ biết rằng $u_1+u_2+u_3=168$ và $u_4+u_5+u_6=21$. Khi đó

**a)** Số hạng $u_1=90$.

**b)** Công bội của cấp số nhân bằng 2.

**c)** Số 24 là số hạng thứ 3 của cấp số nhân.

**d)** Tổng của 10 số hạng đầu cấp số nhân đã cho bằng $\dfrac{3069}{16}$.

Lời giải

**Câu 7.** Aladin nhặt được cây đèn thần, chàng miết tay vào cây đèn và gọi Thần đèn ra. Thần đèn cho chàng 3 điều ước. Aladin ước 2 điều đầu tiên tùy thích, nhưng điều ước thứ 3 của chàng là "Ước gì ngày mai tôi lại nhặt được cây đèn và Thần cho tôi số điều ước gấp đôi số điều ước ngày hôm nay". Thần đèn chấp thuận và mỗi ngày Aladin đều thực hiện theo quy tắc như trên: ước hết các điều đầu tiên và luôn chừa lại điều ước cuối cùng để kéo dài thỏa thuận với thần đèn cho ngày hôm sau. Khi đó

**a)** Ngày thứ hai Aladin ước 6 điều.

**b)** Ngày thứ ba Aladin ước 12 điều.

**c)** Ngày thứ tư Aladin ước 48 điều.

**d)** Sau 10 ngày gặp Thần đèn, Aladin ước tất cả 3269 điều ước.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 8.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ có công bội nguyên và các số hạng thoả mãn $\begin{cases} u_4 - u_2 = 54 \\ u_5 - u_3 = 108. \end{cases}$

**a)** Số hạng đầu của cấp số nhân bằng 9.
**b)** Công bội của cấp số nhân $q = 3$.
**c)** Tổng của 9 số hạng đầu tiên bằng 4599.
**d)** Số 576 là số hạng thứ 6 của cấp số nhân.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | |
|---|---|---|
| **Câu 1.** a Đ b S c S d Đ | **Câu 2.** a Đ b S c S d Đ | **Câu 3.** a Đ b Đ c S d S |
| **Câu 4.** a Đ b S c S d Đ | **Câu 5.** a Đ b S c S d S | **Câu 6.** a S b S c Đ d Đ |
| **Câu 7.** a Đ b Đ c S d S | **Câu 8.** a Đ b S c Đ d S | |

## PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ có tổng $n$ số hạng đầu tiên là $S_n = 5^n - 1$. Tính tổng số hạng đầu $u_1$ và công bội $q$ của cấp số nhân đó.

KQ:

Lời giải

**Câu 2.** Tìm số hạng đầu của cấp số nhân $(u_n)$, biết $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102. \end{cases}$

KQ:

Lời giải

**Câu 3.** Biết $(u_1; q)$ là cặp số hạng đầu và công bội của cấp số nhân $(u_n)$: $\begin{cases} u_2 = 6 \\ S_3 = 43 \end{cases}$. Có bao nhiêu cặp $(u_1; q)$ thỏa cấp số nhân đã cho?

KQ:

Lời giải

**Câu 4.** Biết $(u_1;q)$ là cặp số hạng đầu và công bội của cấp số nhân $(u_n)$: $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=31 \\ u_1+u_3=26. \end{cases}$

Có bao nhiêu cặp $(u_1;q)$ có công bội là số nguyên thỏa cấp số nhân đã cho? KQ: ☐

**Lời giải**

**Câu 5.** Tìm số hạng đầu của cấp số nhân $(u_n)$, biết $\begin{cases} u_5+u_2=36 \\ u_6-u_4=48 \end{cases}$. KQ: ☐

**Lời giải**

**Câu 6.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ biết $u_1=5$, $u_5=405$ và tổng $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=1820$. Tìm $n$.

KQ: ☐

**Lời giải**

**Câu 7.** Viết thêm bốn số vào giữa hai số 160 và 5 để được một cấp số nhân gồm sáu số hạng. Tìm tổng tất cả các số hạng của cấp số nhân đó. KQ:

**Lời giải**

**Câu 8.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ có $u_1 = 3$ và $15u_1 - 4u_2 + u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm số hạng thứ 10 của cấp số nhân đã cho. KQ:

**Lời giải**

**Câu 9.** Biết một cấp số nhân có số hạng đầu bằng 18, số hạng thứ hai bằng 54 và số hạng cuối bằng 39366. Tổng tất cả các số hạng của cấp số nhân có dạng $500a + b$, với $a, b$ là các số tự

nhiên. Tính $S = a + b$. KQ:

**Lời giải**

.....

**Câu 10.** Kết quả của tổng sau theo $n$:

$$S_n = \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4 + \frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)^2$$

có dạng $-1 + \frac{a^{n+1}}{3} - \frac{1}{3 \cdot a^n} + \frac{a}{2}n$ với $a$ là số tự nhiên. Giá trị của $a$ bằng bao nhiêu? KQ:

**Lời giải**

.....

**Câu 11.** Kết quả của tổng sau theo $n$:

$$S_n = 8 + 88 + 888 + \ldots + \underbrace{88\ldots8}_{n \text{ chữ số } 8}$$

có dạng

$$\frac{a(10^n - b)}{81} - \frac{8}{9}n$$

với $a$; $b$ là các số tự nhiên. Giá trị của $P = a - 30b$ bằng bao nhiêu? KQ:

**Lời giải**

**Câu 12.** Tổng ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng là 21. Nếu lấy số thứ hai trừ đi 1 và số thứ ba cộng thêm 1 thì ba số đó lập thành một cấp số nhân. Tính tích ba số đó biết số hạng đầu có giá trị nhỏ hơn 4.

KQ:

**Lời giải**

**Câu 13.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân:

$$x^3-7x^2+2\left(m^2+6m\right)x-8=0.$$

KQ:

**Lời giải**

.....

**Câu 14.** Chu kì bán rã của nguyên tố phóng xạ polonium 210 là 138 ngày (nghĩa là sau 138 ngày khối lượng của nguyên tố đó chỉ còn một nửa). Khối lượng còn lại của 20 gam polonium 210 sau 7314 ngày (khoảng 20 năm) có dạng $\approx a{,}22 \cdot 10^{-b}$ với $a$; $b$ là các số tự nhiên. Tính $S = b - 2a$.

KQ: ☐

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 15.** Ông Minh gửi số tiền 100 triệu đồng vào một ngân hàng với hình thức lãi kép kì hạn 12 tháng, lãi suất 7%/năm. Giả sử trong khoảng thời gian gửi tiền, ông Minh không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi. Sau 10 năm, tổng số tiền cả vốn lẫn lãi mà ông nhận được là $\approx \overline{a9b7c5000}$ với $a$; $b$; $c$ là các số tự nhiên và đơn vị: đồng, kết quả gần đúng đến hàng nghìn. Tính $S = a + b + c$.

KQ: ☐

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 16.** Cho cấp số nhân có $u_1 = -3$, $q = \dfrac{2}{3}$. Số $\dfrac{-96}{243}$ là số hạng thứ mấy của cấp số nhân này?

KQ: ☐

**Lời giải**

.....
.....

**Câu 17.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ có $S_2 = 4$ và $S_3 = 13$ (trong đó $S_2$, $S_3$ theo thứ tự là tổng của hai và ba số hạng đầu của cấp số nhân). Tổng của năm số hạng đầu của cấp số nhân có công bội dương có giá trị bằng bao nhiêu? KQ:

**Lời giải**

**Câu 18.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của $x$ để các số $2x-1$; $x$; $2x+1$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân? KQ:

**Lời giải**

**Câu 19.** Cho các số $x+6y$, $5x+2y$, $8x+y$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng, đồng thời các số $x-1$, $y+2$, $x-3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Tính $x^2+y^2$.

KQ:

Lời giải

. . . . . .

**Câu 20.** Kết quả của tổng $S = 1 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 + \cdots + 79 \cdot 5^{78}$ được viết dưới dạng $a + \dfrac{315}{16} \cdot 5^b$ ($b \in \mathbb{N}$, $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính giá trị biểu thức $P = a + \dfrac{b}{16}$.

KQ:

Lời giải

. . . . . .

**Câu 21.** Theo báo cáo của Chính phủ, dân số của nước ta tính đến tháng 12 năm 2018 là 95,93 triệu người, nếu tỉ lệ tăng trưởng dân số trung bình hằng năm là 1,33% thì dân số nước ta vào tháng 12 năm 2025 là bao nhiêu người? (Tính theo đơn vị triệu người, làm tròn đến hàng đơn vị)

KQ:

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 22.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ có $u_1 = -3$, công bội $q = -2$. Hỏi $-192$ là số hạng thứ mấy của $(u_n)$?

KQ: ☐

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 23.** Một cấp số nhân hữu hạn có công bội $q = -3$, số hạng thứ ba bằng 27 và số hạng cuối bằng 1594323. Hỏi cấp số nhân đó có bao nhiêu số hạng?

KQ: ☐

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 24.** Cho các số nguyên $x$ và $y$ thỏa mãn $5x-y$, $2x+3y$, $x+2y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng, đồng thời $(y+1)^2$, $xy+1$, $(x-1)^2$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tính tổng giá trị $x$ và $y$.

KQ: ☐

**Lời giải**

**Câu 25.** Cho tam giác $ABC$ cân tại $A$. Biết rằng độ dài cạnh $BC$, trung tuyến $AM$ và độ dài cạnh $AB$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân có công bội $q$. Có bao nhiêu giá trị công bội $q$ nguyên của cấp số nhân đó?

KQ: ☐

**Lời giải**

**Câu 26.** Cho 3 số tạo thành một cấp số cộng có tổng 21. Nếu thêm 2, 3, 9 lần lượt vào số thứ nhất, số thứ hai, số thứ ba tạo thành một cấp số nhân. Có bao nhiêu bộ 3 số thỏa các điều kiện trên?

KQ: ☐

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 27.** Bạn Lan thả quả bóng cao su từ độ cao 12 m theo phương thẳng đứng. Mỗi khi chạm đất nó lại nảy lên theo phương thẳng đứng với độ cao bằng $\frac{2}{3}$ độ cao trước đó. Tổng quãng đường bóng đi được đến khi bóng dừng hẳn là bao nhiêu mét?

KQ: ☐

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 28.** Cho dãy số $(u_n)$ xác định bởi $u_1 = \frac{1}{3}$ và $u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} \cdot u_n$.
Tổng $S = u_1 + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + \cdots + \frac{u_{10}}{10}$ có giá trị bằng bao nhiêu? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

KQ: ☐

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 29.** Cho 3 số dương có tổng là 65 lập thành một cấp số nhân tăng. Nếu bớt một đơn vị ở số hạng thứ nhất và 19 đơn vị ở số hạng thứ ba ta được một cấp số cộng. Tính tích 3 số đó?

KQ: ☐

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

**Câu 30.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ thì phương trình $x^3 - mx^2 - 6x - 8 = 0$ có ba nghiệm thực lập thành một cấp số nhân?

KQ:

**Lời giải**

. . . . . .

**BẢNG ĐÁP ÁN**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Câu 1.** 9 | **Câu 2.** 3 | **Câu 3.** 2 | **Câu 4.** 1 | **Câu 5.** 2 |
| **Câu 6.** 6 | **Câu 7.** 315 | **Câu 8.** 3072 | **Câu 9.** 13 | **Câu 10.** 4 |
| **Câu 11.** 50 | **Câu 12.** 231 | **Câu 13.** 2 | **Câu 14.** 11 | **Câu 15.** 8 |
| **Câu 16.** 6 | **Câu 17.** 121 | **Câu 18.** 2 | **Câu 19.** 40 | **Câu 20.** 5 |
| **Câu 21.** 105 | **Câu 22.** 7 | **Câu 23.** 13 | **Câu 24.** 0 | **Câu 25.** 0 |
| **Câu 26.** 2 | **Câu 27.** 60 | **Câu 28.** 0,5 | **Câu 29.** 3375 | **Câu 30.** 1 |

Chương 3

# CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

## BÀI 8. MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

### A Lý thuyết

#### 1 Số kiệu ghép nhóm

**Định nghĩa 1**

Một số loại điều tra có thể nhận nhiều những giá trị khác nhau, hoặc khó xác định được giá trị chính xác, ví dụ như chiều cao, cân nặng, tuổi thọ, ...

- Để thuận tiện cho việc lưu trữ và xử lí các loại số liệu này, người ta thường ghép các mẫu số liệu gần nhau lại thành nhóm.
- Mẫu số liệu ghép nhóm thường được trình bày dưới dạng bảng thống kê có dạng như sau

***Bảng 1: Bảng tần số ghép nhóm***

| **Nhóm** | $[u_1;u_2)$ | $[u_2;u_3)$ | ... | $[u_k;u_{k+1})$ |
|---|---|---|---|---|
| **Tần số** | $n_1$ | $n_2$ | ... | $n_k$ |

! 1) Bảng trên gồm $k$ nhóm $\left[u_j;u_{j+1}\right)$ với $1 \le j \le k$, mỗi nhóm gồm một số giá trị được ghép theo một tiêu chí xác định.

2) Cỡ mẫu $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

3) Giá trị chính giữa mỗi nhóm được dùng làm giá trị đại diện cho nhóm ấy. Ví dụ nhóm $[u_1;u_2)$ có giá trị đại diện là $\frac{1}{2}(u_1+u_2)$.

4) Hiệu $u_{j+1}-u_j$ được gọi là độ dài của nhóm $\left[u_j;u_{j+1}\right)$.

**Nhận xét.** ***Một số quy tắc ghép nhóm của mẫu số liệu***

*Mỗi mẫu số liệu có thể được ghép nhóm theo nhiều cách khác nhau nhưng thường tuân theo một số quy tắc sau:*

- *Sử dụng từ $k = 5$ đến $k = 20$ nhóm. Cỡ mẫu càng lớn thì cần càng nhiều nhóm số liệu. Các*

*nhóm có cùng độ dài bằng $L$ thoả mãn $R < k \cdot L$, trong đó $R$ là khoảng biến thiên, $k$ là số nhóm.*

- *Giá trị nhỏ nhất của mẫu thuộc vào nhóm $[u_1;u_2)$ và càng gần $u_1$ càng tốt. Giá trị lớn nhất của mẫu thuộc nhóm $[u_k;u_{k+1})$ và càng gần $u_{k+1}$ càng tốt.*

## 2 Số trung bình

**Định nghĩa 2**

Giả sử mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số ghép nhóm

| Nhóm | Nhóm 1 | Nhóm 2 | ... | Nhóm $k$ |
|---|---|---|---|---|
| Giá trị đại diện | $c_1$ | $c_2$ | ... | $c_k$ |
| Tần số | $n_1$ | $n_2$ | ... | $n_k$ |

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu $\bar{x}$, được tính như sau

$$\bar{x} = \frac{n_1c_1 + n_2c_2 + \cdots + n_kc_k}{n},$$

trong đó $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

⚠ ***Ý nghĩa của số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm:*** *Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho số trung bình của mẫu số liệu gốc. Nó thường dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu.*

## 3 Mốt

**Định nghĩa 3**

***Nhóm chứa mốt*** của mẫu số liệu ghép nhóm là nhóm có tần số lớn nhất.
Giả sử nhóm chứa mốt là $[u_m;u_{m+1})$, khi đó mốt của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là $M_0$, được xác định bởi công thức

$$M_0 = u_m + \frac{n_m - n_{m-1}}{(n_m - n_{m-1}) + (n_m - n_{m+1})} \cdot (u_{m+1} - u_m).$$

❗
- Nếu không có nhóm kề trước của nhóm chứa mốt thì $u_{m-1} = 0$.
- Nếu không có nhóm kề sau của nhóm chứa mốt thì $n_{m+1} = 0$.

⚠ ***Ý nghĩa của mốt của mẫu số liệu ghép nhóm***

- *Mốt của mẫu số liệu không ghép nhóm là giá trị có khả năng xuất hiện cao nhất khi lấy mẫu.*

- *Mốt của mẫu số liệu sau khi ghép nhóm $M_0$ xấp xỉ với mốt của mẫu số liệu không ghép nhóm. Các giá trị nằm xung quanh $M_0$ thường có khả năng xuất hiện cao hơn các giá trị khác.*

- *Một mẫu số liệu ghép nhóm có thể có nhiều nhóm chứa mốt và nhiều mốt.*

## B Các dạng bài tập

**Ví dụ 1.** Bảng thống kê sau cho biết thời gian chạy (phút) của 30 vận động viên (VĐV) trong một giải chạy Marathon:

| Thời gian | 129 | 130 | 133 | 134 | 135 | 136 | 138 | 141 | 142 | 143 | 144 | 145 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Số VĐV | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 2 | 5 |

Hãy chuyển mẫu số liệu trên sang mẫu số liệu ghép nhóm gồm sáu nhóm có độ dài bằng nhau và bằng 3.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 2.** Tìm cân nặng trung bình của học sinh lớp $11D$ cho trong bảng sau:

| Cân nặng (kg) | [40,5;45,5) | [45,5;50,5) | [50,5;55,5) | [55,5;60,5) | [60,5;65,5) | [65,5;70,5) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Số họ sinh | 10 | 7 | 16 | 4 | 2 | 3 |

**Lời giải**

. . . . . .

**Ví dụ 3.** Khối lượng 30 chi tiết máy được cho bởi bảng sau

| Khối lượng (gam) | 250 | 300 | 350 | 400 | 450 | 500 | Tổng |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 4 | 4 | 5 | 6 | 4 | 7 | 30 |

Tính số trung bình $\overline{x}$ (làm tròn đến chữ số thứ hai sau dấu phẩy) của bảng nói trên.

**Lời giải**

. . . . . .

**Ví dụ 4.** Tìm hiểu thời gian xem tivi trong tuần trước (đơn vị: giờ) của một số học sinh thu được kết quả sau

| Thời gian | $[0;5)$ | $[5;10)$ | $[10;15)$ | $[15;20)$ | $[20;25)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 8 | 16 | 4 | 2 | 2 |

Tính thời gian xem tivi trung bình trong tuần trước của các bạn học sinh này.

**Lời giải**

**Ví dụ 5.** Chiều cao của 20 cây giống được cho bởi bảng sau

| Lớp (cm) | Tần số |
|---|---|
| [40;44] | 2 |
| [45;49] | 5 |
| [50;54] | 3 |
| [55;59] | 4 |
| [60;64] | 3 |
| [64;69] | 3 |
| | $N = 20$ |

Tính số trung bình (làm tròn đến chữ số thứ hai sau dấu phẩy) của bảng nói trên.

**Lời giải**

**Ví dụ 6.** Bảng số liệu sau đây thống kê thời gian nảy mầm một loại hạt đậu mới trong các điều kiện khác nhau

| Thời gian (phút) | 420 | 440 | 450 | 480 | 500 | 540 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 8 | 17 | 18 | 16 | 11 | 10 |

Tính giá trị trung bình $\overline{x}$ (làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy) về thời gian nảy mầm loại hạt mới nói trên.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 7.** Bảng số liệu ghép nhóm sau cho biết chiều cao (cm) của 50 bạn học sinh lớp 11*A*.

| Khoảng chiều cao (cm) | [145;150) | [150;155) | [155;160) | [160;165) | [165;170) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 7 | 14 | 10 | 10 | 9 |

Tính mốt của mẫu số liệu ghép nhóm này. Có thể kết luận gì từ giá trị nhận được?

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 8.** Thời gian (phút) để học sinh hoàn thành một câu hỏi thi được cho như sau:

| Thời gian (phút) | [0,5;10,5) | [10,5;20,5) | [20,5;30,5) | [30,5;40,5) | [40,5;50,5) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 2 | 10 | 6 | 4 | 3 |

Tính mốt của mẫu số liệu ghép nhóm này.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 9.** Tuổi thọ của 30 bóng đèn được thắp thử (đơn vị: giờ) được cho bởi bảng số liệu thống kê dưới đây

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1180 | 1150 | 1190 | 1170 | 1180 | 1170 | 1160 | 1170 | 1160 | 1150 |
| 1190 | 1180 | 1170 | 1170 | 1170 | 1190 | 1170 | 1170 | 1170 | 1180 |
| 1170 | 1160 | 1160 | 1160 | 1170 | 1160 | 1180 | 1180 | 1150 | 1170 |

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 10.** Kết quả kiểm tra chất lượng đầu năm (thang điểm 30) của 41 học sinh của một lớp được cho bởi bảng số liệu thống kê dưới đây

| Điểm | 9 | 11 | 14 | 16 | 17 | 18 | 20 | 21 | 23 | 25 | Tổng |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 3 | 7 | 4 | 4 | 6 | 7 | 3 | 3 | 2 | 2 | 41 |

Hãy tính mốt của bảng số liệu thống kê trên.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 11.** Một bác sĩ mắt ghi lại tuổi của 30 bệnh nhân mắc bệnh đau mắt hột. Kết quả thu được mẫu số liệu như sau:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 17 | 22 | 18 | 20 | 17 | 15 | 13 | 15 | 20 |
| 15 | 12 | 18 | 17 | 25 | 17 | 21 | 15 | 12 | 18 |
| 16 | 23 | 14 | 18 | 19 | 13 | 16 | 19 | 18 | 17 |

Tính mốt $M_o$ của bảng số liệu đã cho.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 12.** Một cửa hàng đã thống kê số ba lô bán được mỗi ngày trong tháng 9 với kết quả cho như sau:

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 29 | 12 | 19 | 15 | 21 | 19 | 29 | 28 | 12 | 15 | 25 | 16 | 20 | 29 |
| 21 | 12 | 24 | 14 | 10 | 12 | 10 | 23 | 27 | 28 | 18 | 16 | 10 | 20 | 21 |

Hãy chia mẫu số liệu trên thành 5 nhóm, lập bảng tần số ghép nhóm, hiệu chỉnh bảng tần số ghép nhóm và xác định giá trị đại diện cho mỗi nhóm.

**Lời giải**

# C Bài tập rèn luyện

## PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1.** Điền từ thích hợp và chỗ trống: "Mẫu số liệu... là mẫu số liệu cho dưới dạng bảng tần số của các nhóm số liệu."

**A.** Không ghép nhóm. **B.** Ghép nhóm.

**C.** Ghép nhóm và không ghép nhóm. **D.** Cả ba câu trên đều sai.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Mỗi nhóm số liệu ghép nhóm là tập hợp gồm:

**A.** các giá trị của số liệu được ghép nhóm theo nhiều tiêu chí xác định.

**B.** các giá trị của số liệu được ghép nhóm theo hai tiêu chí xác định.

**C.** các giá trị của số liệu được ghép nhóm theo một tiêu chí xác định.

**D.** các giá trị của số liệu được ghép nhóm theo ba tiêu chí xác định.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 3.** Nhóm số liệu ghép nhóm thường được cho dưới dạng

**A.** $[a;b]$, trong đó $a$ là đầu mút trái, $b$ là đầu mút phải.

**B.** $(a;b)$, trong đó $a$ là đầu mút trái, $b$ là đầu mút phải.

**C.** $(a;b]$, trong đó $a$ là đầu mút trái, $b$ là đầu mút phải.

**D.** $[a;b)$, trong đó $a$ là đầu mút trái, $b$ là đầu mút phải.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 4.** Mẫu số liệu (T) được mô tả dưới dạng bảng thống kê sau:

| Tổng điểm | $<6$ | [6;7) | [7;8) | ⋯ | [28;29) | [29;30) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 23 | 69 | 129 | ⋯ 216 | 12 | |

Tổng số giá trị của mẫu số liệu là:

**A.** 2589863. **B.** 14586632. **C.** 125863. **D.** 1379008.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 5.** Mẫu số liệu được mô tả dưới dạng bảng thống kê sau:

| Tổng điểm | $<6$ | [6;7) | [7;8) | ⋯ | [28;29) | [29;30) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 23 | 69 | 129 | ⋯ | 216 | 12 |

Số lượng thí sinh có ít nhất một môn học có điểm từ 6 đến dưới 7 là:

**A.** 23. **B.** 192. **C.** 56. **D.** 69.

**Lời giải**

**Câu 6.** Cho mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian (phút) đi từ nhà đến nơi làm việc của các nhân viên một công ty như sau:

| Thời gian | [15;20 | [20;25) | [25;30) | [30;35) | [35;40) | [40;45) | [45;50) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Số nhân viên | 6 | 14 | 25 | 37 | 21 | 13 | 9 |

Mẫu số liệu được chia thành bao nhiêu nhóm?

**A.** 6 nhóm. **B.** 5 nhóm. **C.** 7 nhóm. **D.** 8 nhóm.

**Lời giải**

**Câu 7.** Cho mẫu số liệu ghép nhóm về số tiền mà sinh viên chi cho thanh toán cước điện thoại trong tháng

| Số tiền (Nghìn đồng) | [0;50 | [50;100) | [100;150) | [150;200) | [200;250) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số sinh viên | 5 | 12 | 23 | 17 | 31 |

Có bao nhiêu sinh viên chi từ 100 đến dưới 150 nghìn đồng cho việc thanh toán cước điện thoại trong tháng?

**A.** 5. **B.** 23. **C.** 12. **D.** 17.

**Lời giải**

**Câu 8.** Cho mẫu số liệu ghép nhóm về thống kê nhiệt độ tại một địa điểm trong 40 ngày, ta có bảng số liệu sau:

| Nhiệt độ ($°C$) | [19;22 | [22;25) | [25;28) | [28;31) |
|---|---|---|---|---|
| Số ngày | 7 | 15 | 12 | 6 |

Có bao nhiêu ngày có nhiệt độ từ $28°C$ đến dưới $31°C$?

**Lời giải**

**Câu 9.** Một công ty may quần áo đồng phục học sinh cho biết cỡ áo theo chiều cao của học sinh được tính như sau:

| Chiều cao (cm) | [150;160 | [160;167) | [167;170) | [170;175) | [175;180) |
|---|---|---|---|---|---|
| Cỡ áo | $S$ | $M$ | $L$ | $XL$ | $XXL$ |

Công ty muốn ước lượng tỉ lệ các cỡ áo khi may cho học sinh lớp 11 đã đo chiều cao của 36 học sinh khối 11 của một trường và thu được mẫu số liệu sau (đơn vị là cm)

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 160 | 161 | 161 | 162 | 162 | 162 | 163 | 163 | 163 |
| 164 | 164 | 164 | 164 | 165 | 165 | 165 | 165 | 165 |
| 166 | 166 | 166 | 166 | 167 | 167 | 168 | 168 | 168 |
| 168 | 169 | 169 | 170 | 171 | 171 | 172 | 172 | 174 |

Số học sinh có chiều cao vừa vặn với size L là bao nhiêu?

**A.** 8. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 10.** Điều tra về chiều cao của học sinh khối lớp 11, ta được mẫu số liệu sau:

| Chiều cao | Số học sinh |
|---|---|
| [150;152 | 5 |
| [152;154 | 18 |
| [154;156 | 40 |
| [156;158 | 26 |
| [158;160 | 8 |
| [160;162 | 3 |

Mẫu số liệu ghép nhóm đã cho có bao nhiêu nhóm?

**A.** 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 12.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 11.** Độ dài của mỗi nhóm trong mẫu số liệu ghép nhóm được tính thế nào?

**A.** $a-b$. **B.** $a+b$. **C.** $ab$. **D.** $b-a$.

**Lời giải**

**Câu 12.** Chọn đáp án sai trong các đáp án sau:

**A.** Nên chia thành nhiều nhóm.

**B.** Mẫu số liệu ghép nhóm được dùng khi ta không thể thu thập được số liệu chính xác.

**C.** Trong một số trường hợp, nhóm số liệu cuối cùng có thể lấy đầu mút bên phải.

**D.** Độ dài cuả nhóm là $b-a$.

**Lời giải**

**Câu 13.** Tìm hiểu thời gian xem tivi trong tuần trước (đơn vị: giờ) của một số học sinh thu được kết quả sau:

| Thời gian (giờ) | [0;5 | [5;10) | [10;15) | [15;20) | [20;25) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 8 | 16 | 4 | 2 | 2 |

Có bao nhiêu học sinh có thời gian xem ti vi từ 20 giờ đến dưới 25 giờ trong tuần trước?

**A.** 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

**Lời giải**

**Câu 14.** Cho bảng khảo sát về cân nặng học sinh trong lớp:

| Cân nặng ($kg$) | 45;50) | [50;55) | [55;60) | [60;65) | [65;70) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 2 | 14 | 11 | 10 | 3 |

Khoảng cân nặng mà số học sinh chiếm nhiều nhất là:

**A.** [60;65). **B.** [55;60). **C.** [50;55). **D.** [60;65).

**Lời giải**

**Câu 15.** Cho bảng khảo sát về chiều cao học sinh trong lớp:

| Chiều cao ($cm$) | [150;160) | [160;167) | [167;170) | [170;175) | [175;180) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 12 | 18 | 8 | 3 | 1 |

Nhóm số liệu nào có độ dài bằng 7?

**A.** [150;160). **B.** [167;170). **C.** [175;180). **D.** [160;167).

**Lời giải**

**Câu 16.** Cho bảng khảo sát về tiền điện của một số hộ gia đình:

| Số tiền (nghìn đồng) | [350;400) | [400;450) | [450;500) | [500;550) | [550;600) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số hộ gia đình | 6 | 14 | 21 | 17 | 2 |

Các nhóm số liệu ở bảng trên có độ dài là bao nhiêu?

**A.** 45. **B.** 48. **C.** 50. **D.** 54.

**Lời giải**

**Câu 17.** Bảng số liệu nào gồm các nhóm độ dài bằng 10

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Bảng 1 | Điểm | [6;7) | [7;8) | [8;9) | [9;10) |
| | Số học sinh | 9 | 14 | 12 | 5 |
| Bảng 2 | Cân nặng (kg) | [30;40) | [40;50) | [50;60) | [60;70) |
| | Số giáo viên | 5 | 3 | 4 | 2 |
| Bảng 3 | Chiều cao (m) | [2,5;3) | [3;3,5) | [3,5;4) | [4;4,5) |
| | Số cây | 12 | 6 | 7 | 5 |
| Bảng 4 | Tiền (nghìn đồng) | [30;35) | [35;40) | [40;45) | [45;50) |
| | Số sách | 14 | 16 | 12 | 18 |

**A.** Bảng 1. **B.** Bảng 2. **C.** Bảng 3. **D.** Bảng 4.

**Lời giải**

**Câu 18.** Mẫu số liệu sau cho biết cân nặng của học sinh lớp 12 trong một lớp:

| Cân nặng | Dưới 55 | Từ 55 đến 65 | Trên 65 |
|---|---|---|---|
| Số học sinh | 20 | 15 | 2 |

Số học sinh của lớp đó là bao nhiêu?

**A.** 37. **B.** 35. **C.** 33. **D.** 31.

**Lời giải**

**Câu 19.** Điểm thi môn Toán (thang điểm 100, điểm được làm tròn đến 1) của 60 thí sinh được cho trong bảng sau:

| Điểm | [20;30) | [30;40) | [40;50) | [50;60) | [60;70) | [70;80) | [80;90) | [90;100] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Số thí sinh | 4 | 6 | 15 | 12 | 10 | 6 | 4 | 3 |

Có bao nhiêu học sinh thi trượt môn Toán? Biết rằng thí sinh đạt từ 50 điểm trở nên thì tính là đỗ.

**A.** 24. **B.** 25. **C.** 26. **D.** 27.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 20.** Điều tra về chiều cao của học sinh khối lớp 11, ta có kết quả sau:

| Nhóm | Chiều cao ($cm$) | Số học sinh |
|---|---|---|
| 1 | $[150;152)$ | 5 |
| 2 | $[152;154)$ | 18 |
| 3 | $[154;156)$ | 40 |
| 4 | $[156;158)$ | 26 |
| 5 | $[158;160)$ | 8 |
| 6 | $[160;162)$ | 3 |
| | | $N = 100$ |

Giá trị đại diện của nhóm thứ tư là

**A.** 156,5. **B.** 157. **C.** 157,5. **D.** 158.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 21.** Đo chiều cao (tính bằng cm) của 500 học sinh trong một trường THPT ta thu được kết quả như sau:

| Chiều cao | [150;154) | [154;158) | [158;162) | [162;166) | [166;170) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 25 | 50 | 200 | 175 | 50 |

Mẫu số liệu ghép nhóm đã cho có tất cả bao nhiêu nhóm?

**A.** 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 12.

**Lời giải**

**Câu 22.** Đo chiều cao (tính bằng cm) của 500 học sinh trong một trường THPT ta thu được kết quả như sau:

| Chiều cao | [150;154) | | [158;162) | [162;166) | [166;170) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 25 | 50 | 200 | 175 | 50 |

Giá trị đại diện của nhóm [162;166) là

**A.** 162. **B.** 164. **C.** 166. **D.** 4.

**Lời giải**

**Câu 23.** Đo cân nặng của một số học sinh lớp 11$D$ cho trong bảng sau:

| Cân nặng (kg) | [40,5;45,5) | [45,5;50,5) | [50,5;55,5) | [55,5;60,5) | [60,5;65,5) | [65,5;70,5) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 10 | 7 | 16 | 4 | 2 | 3 |

Giá trị đại diện của nhóm $[60,5;65,5)$ là

**A.** $55,5$. **B.** $63$. **C.** $60,5$. **D.** $5$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 24.** Tìm hiểu thời gia xem tivi trong tuần trước (đơn vị: giờ) của một số học sinh thu được kết quả sau:

| Thời gian (giờ) | $[0;5)$ | $[5;10)$ | $[10;15)$ | $[15;20)$ | $[20;25)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 8 | 16 | 4 | 2 | 2 |

Giá trị đại diện của nhóm $[20;25)$ là

**A.** $22,5$. **B.** $23$. **C.** $20$. **D.** $5$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 25.** Thời gian truy cập Internet mỗi buổi tối của một số học sinh được cho trong bảng sau:

| Thời gian (phút) | $[9,5;12,5)$ | $[12,5;15,5)$ | $[15,5;18,5)$ | $[18,5;21,5)$ | $[21,5;24,5)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 3 | 12 | 15 | 24 | 2 |

Có bao nhiêu học sinh truy cập Internet mỗi buổi tối có thời gian từ $18,5$ phút đến dưới $21,5$ phút?

**A.** 24. **B.** 15. **C.** 2. **D.** 20.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 26.** Để đánh giá kết quả của một đề tài sau khi áp dụng vào thực tiễn dạy học người ta thực nghiệm bằng cách ra đề kiểm tra một tiết cho ba lớp $12A$, $12B$ và $12C$. Kết quả điểm của học sinh ba lớp như sau:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Lớp 12A | Điểm | [5;6) | [6;7) | [7;8) | [8;10] |
| | Số học sinh | 9 | 14 | 12 | 5 |
| Lớp 12B | Điểm | [5;6) | [6;7) | [7;8) | [8;10] |
| | Số học sinh | 12 | 16 | 8 | 3 |
| Lớp 12C | Điểm | [5;6) | [6;7) | [7;8) | [8;10] |
| | Số học sinh | 15 | 17 | 5 | 1 |

Lớp nào có tỉ lệ học sinh đạt điểm giỏi cao nhất?

**A.** Lớp $12A$.

**B.** Lớp $12B$.

**C.** Lớp $12C$.

**D.** Cả 3 lớp có tỉ lệ học sinh đạt điểm giỏi bằng nhau.

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .

**Câu 27.** Độ dài của 60 lá dương xỉ trưởng thành được cho bằng bảng sau:

| Độ dài ($cm$) | $[10;20)$ | $[20;30)$ | $[30;40)$ | $[40;50)$ |
|---|---|---|---|---|
| Số lá | 8 | 18 | 24 | 10 |

Hỏi số lá có chiều dài từ 30 $cm$ đến 50 $cm$ chiếm bao nhiêu %?

**A.** 40%. **B.** 16,7%. **C.** 56,7%. **D.** 33,3%.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 28.** Thành tích chạy 50 $m$ của học sinh lớp 10$A$ ở trường THPT C (đơn vị: giây) được cho bằng bảng sau:

| Thành tích (m) | $[6,5;7,0)$ | $[7,0;7,5)$ | $[7,5;8,0)$ | $[8,0;8,5)$ |
|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 5 | 10 | 9 | 4 |

Bảng số liệu tần suất các nhóm nào sau đây là **đúng**?

content...

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Bảng 1 | Thành tích (m) | $[6,5;7,0)$ | $[7,0;7,5)$ | $[7,5;8,0)$ | $[8,0;8,5)$ |
| | Tần suất (%) | 17,9 | 35,7 | 32,1 | 14,3 |
| Bảng 2 | Thành tích (m) | $[6,5;7,0)$ | $[7,0;7,5)$ | $[7,5;8,0)$ | $[8,0;8,5)$ |
| | Tần suất (%) | 32,1 | 35,7 | 17,9 | 14,3 |
| Bảng 3 | Thành tích (m) | $[6,5;7,0)$ | $[7,0;7,5)$ | $[7,5;8,0)$ | $[8,0;8,5)$ |
| | Tần suất (%) | 14,3 | 35,7 | 32,1 | 32,1 |
| Bảng 4 | Thành tích (m) | $[6,5;7,0)$ | $[7,0;7,5)$ | $[7,5;8,0)$ | $[8,0;8,5)$ |
| | Tần suất (%) | 17,9 | 32,1 | 35,7 | 14,3 |

**A.** Bảng 1. **B.** Bảng 2. **C.** Bảng 3. **D.** Bảng 4.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 29.** Cho bảng số liệu thống kê sau:

Tiền lãi (nghìn đồng) của mỗi ngày trong 14 ngày được khảo sát ở một quầy bán báo

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 69 | 37 | 39 | 65 | 31 | 33 | 63 |
| 51 | 44 | 62 | 33 | 47 | 55 | 42 |

Bảng số liệu ghép nhóm nào sau đây là **đúng**?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Bảng 1 | Số tiền lãi (nghìn đồng) | [30;40) | [40;50) | [50;60) | [60;70) |
| | Số ngày | 5 | 3 | 2 | 4 |
| Bảng 2 | Số tiền lãi (nghìn đồng) | [30;40) | [40;50) | [50;60) | [60;70) |
| | Số ngày | 5 | 3 | 4 | 2 |
| Bảng 3 | Số tiền lãi (nghìn đồng) | [30;40) | [40;50) | [50;60) | [60;70) |
| | Số ngày | 5 | 2 | 3 | 4 |
| Bảng 4 | Số tiền lãi (nghìn đồng) | [30;40) | [40;50) | [50;60) | [60;70) |
| | Số ngày | 3 | 5 | 2 | 4 |

**A.** Bảng 1. **B.** Bảng 2. **C.** Bảng 3. **D.** Bảng 4.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 30.** Một trường trung học cơ sở chọn 36 học sinh nam của khối 9 để đo chiều cao của các bạn học sinh đó và thu được mẫu số liệu theo bảng sau (đơn vị là centimet)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 160 | 161 | 161 | 162 | 162 | 162 | 163 | 163 | 163 | 164 |
| 164 | 164 | 164 | 165 | 165 | 165 | 165 | 165 | 166 | 166 |
| 166 | 166 | 167 | 167 | 168 | 168 | 168 | 168 | 169 | 169 |
| 170 | 171 | 171 | 172 | 172 | 174 | | | | |

Từ mẫu số liệu không ghép nhóm trên, hãy ghép các số liệu thành 5 nhóm theo các nửa khoảng có độ dài bằng nhau. Các nhóm đó là

**A.** $[160;163);[163;165);[165;170);[170;172);[172;175)$.

**B.** $[160;165);[165;168);[168;170);[170;172);[172;175)$.

**C.** $[160;163);[163;166);[166;169);[169;172);[172;175)$.

**D.** $[160;162);[162;166);[166;168);[168;170);[172;175)$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 31.** Quãng đường (km) từ nhà đến nơi làm việc của 40 công nhân một nhà máy được ghi lại như sau:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 3 | 10 | 20 | 25 | 11 | 13 | 7 | 12 | 31 |
| 19 | 10 | 12 | 17 | 18 | 11 | 32 | 17 | 16 | 2 |
| 7 | 9 | 7 | 8 | 3 | 5 | 12 | 15 | 18 | 3 |
| 12 | 14 | 2 | 9 | 6 | 15 | 15 | 7 | 6 | 12 |

Ghép nhóm dãy số liệu trên thành các khoảng có độ rộng bằng nhau, khoảng đầu tiên là $[0;5)$. Tần suất nhóm $[10;15)$ là

**A.** 15%. **B.** 22,5%. **C.** 25%. **D.** 27,5%.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 32.** Cho các số liệu thống kê ghi trong bảng sau đây. Thành tích chạy 50 m của học sinh lớp 10*A* ở trường THPT B (đơn vị: giây)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6,3 | 6,2 | 6,5 | 6,8 | 6,9 | 8,2 | 8,6 |
| 6,6 | 6,7 | 7,0 | 7,1 | 7,2 | 8,3 | 8,5 |
| 7,4 | 7,3 | 7,2 | 7,1 | 7,0 | 8,4 | 8,1 |
| 7,1 | 7,3 | 7,5 | 7,5 | 7,6 | 8,7 | |
| 7,6 | 7,7 | 7,8 | 7,5 | 7,7 | 7,8 | |

Trong lớp 10*A*, số học sinh chạy 50 m hết 7 giây đến dưới 8,5 giây chiếm bao nhiêu phần trăm?

**A.** 30,30%. **B.** 27,27%. **C.** 12,12%. **D.** 69,69%.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 33.** Tuổi thọ của 35 bóng đèn (đơn vị: giờ)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1120 | 1150 | 1121 | 1170 | 1136 | 1150 | 1140 |
| 1130 | 1165 | 1142 | 1133 | 1157 | 1115 | 1132 |
| 1162 | 1179 | 1109 | 1131 | 1147 | 1168 | 1152 |
| 1134 | 1116 | 1177 | 1145 | 1164 | 1111 | 1125 |
| 1144 | 1160 | 1155 | 1103 | 1127 | 1166 | 1101 |

Từ mẫu số liệu không ghép nhóm trên, ghép các số liệu thành 4 nhóm theo các nửa khoảng có độ dài bằng nhau. Độ dài của mỗi nhóm là

**A.** 20. **B.** 22. **C.** 23. **D.** 25.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 34.** Chiều cao của 35 cây bạch đàn (đơn vị: $m$ )

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6,6 | 7,5 | 8,2 | 8,2 | 7,8 | 7,9 | 9,0 | 8,9 | 8,2 | 7,2 |
| 7,5 | 8,3 | 7,4 | 8,7 | 7,7 | 7,0 | 9,4 | 8,7 | 8,0 | 7,7 |
| 7,8 | 8,3 | 8,6 | 8,1 | 8,1 | 8,5 | 6,9 | 8,0 | 7,6 | 7,9 |
| 7,3 | 8,5 | 8,4 | 8,0 | 8,8 | | | | | |

Từ mẫu số liệu không ghép nhóm trên, ghép các số liệu thành 6 nhóm theo các nửa khoảng có độ dài bằng nhau. Nhóm chiếm tỉ lệ cao nhất là

**A.** [7,0;7,5). **B.** [7,5;8,0). **C.** [8,0;8,5). **D.** [8,5;9,0).

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Câu 1. B | Câu 2. C | Câu 3. D | Câu 4. D | Câu 5. D | Câu 6. C | Câu 7. B |
| Câu 9. A | Câu 10. B | Câu 11. D | Câu 12. A | Câu 13. D | Câu 14. C | Câu 15. D |
| Câu 16. C | Câu 17. B | Câu 18. A | Câu 19. B | Câu 20. B | Câu 21. A | Câu 22. B |
| Câu 23. B | Câu 24. A | Câu 25. A | Câu 26. A | Câu 27. C | Câu 28. A | Câu 29. A |
| Câu 30. C | Câu 31. D | Câu 32. D | Câu 33. A | Câu 34. C | | |

## PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

**Câu 1.** Cho mẫu số liệu ghép nhóm sau:

| Điểm số môn Toán | [0;2) | [2;4) | [4;6) | [6;8) | [8;10) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh đạt được | 1 | 6 | 12 | 14 | 8 |

Khi đó

**a)** Cỡ mẫu của mẫu số liệu bằng 40.

**b)** Giá trị đại diện nhóm [2;4) bằng 3.

**c)** Độ dài nhóm [6;8) bằng 3.

**d)** Độ dài nhóm [8;10) bằng 2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Bảng thống kê sau cho biết thời gian chạy (phút) của 30 vận động viên (VĐV) trong một giải chạy marathon:

| Thời gian | 129 | 130 | 133 | 134 | 135 | 136 | 138 | 141 | 142 | 143 | 144 | 145 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Số VĐV | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 2 | 5 |

Khi đó

**a)** Giá trị lớn nhất $x_{\max} = 145$.

**b)** Giá trị nhỏ nhất $x_{\min} = 129$.

**c)** Khoảng biến thiên bằng 15.

**d)** Mẫu số liệu ghép nhóm:

| Thời gian | Số VĐV |
|---|---|
| [127,5;130,5) | 3 |
| [130,5;133,5) | 1 |
| [133,5;136,5) | 4 |
| [136,5;139,5) | 3 |
| [139,5;142,5) | 9 |
| [142,5;145,5) | 10 |

.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 3.** Một trường trung học phổ thông có 36 học sinh nam của khối 11, đo chiều cao của các bạn học sinh đó, người ta thu được mẫu số liệu sau (đơn vị: centimét).

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 160 | 161 | 161 | 162 | 162 | 162 | 163 | 163 | 163 | 164 | 164 | 164 |
| 164 | 165 | 165 | 165 | 165 | 165 | 166 | 166 | 166 | 166 | 167 | 167 |
| 168 | 168 | 168 | 168 | 169 | 169 | 170 | 171 | 171 | 172 | 172 | 174 |

Khi đó

**a)** Giá trị lớn nhất $x_{\max} = 174$.

**b)** Giá trị nhỏ nhất $x_{\min} = 160$.

**c)** Khoảng biến thiên là 15.

**d)** Ta có bảng tần số ghép nhóm sau:

| Chiều cao | $[160;163)$ | $[163;166)$ | $[166;169)$ | $[169;172)$ | $[172;175)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 6 | 10 | 12 | 3 | 3 |

.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 4.** Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả cam ở mỗi lô hàng $A, B$ được cho ở bảng sau:

| Cân nặng (gam) | [150;155) | [155;160) | [160;165) | [165;170) | [170;175) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số quả cam ở lô hàng $A$ | 2 | 6 | 12 | 4 | 1 |
| Số quả cam ở lô hàng $B$ | 1 | 3 | 7 | 10 | 4 |

Khi đó

**a)** Giá trị đại diện nhóm [150;155) bằng 152,5.

**b)** Cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô $A$ là 163,7 (gam).

**c)** Cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô $B$ là 162,1 (gam).

**d)** Theo số trung bình thì cam ở lô hàng $B$ nặng hơn cam ở lô hàng $A$.

**Lời giải**

**Câu 5.** Số lượng người đi xem một bộ phim mới theo độ tuổi trong một rạp chiếu phim (sau 1 giờ đầu công chiếu) được ghi lại theo bảng phân phối ghép nhóm sau

| Độ tuổi | [10;20) | [20;30) | [30;40) | [40;50) | [50;60) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số người | 6 | 12 | 16 | 7 | 2 |

**a)** Giá trị đại diện nhóm [50;60) là $\dfrac{50+60}{2}=55$.

**b)** Độ tuổi được dự báo là ít xem phim đó nhất là thuộc nhóm [50;60).

**c)** Nhóm chứa mốt là nửa khoảng [30;40).

**d)** Độ tuổi được dự báo là thích xem phim đó nhiều nhất là 31 tuổi.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 6.** Một mẫu số liệu được cho ở dạng bảng tần số ghép nhóm như sau

| Nhóm | [0,5;2,5) | [2,5;4,5) | [4,5;6,5) | [6,5;8,5) | [8,5;10,5) |
|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 4 | 7 | 16 | 8 | 5 |

**a)** Cỡ mẫu của mẫu số liệu là 40.
**b)** Nhóm [0,5;2,5) có giá trị đại diện là 1,5.
**c)** Nhóm [4,5;6,5) có giá trị đại diện là 5,5.
**d)** Nhóm [8,5;10,5) có độ dài lớn nhất trong các nhóm còn lại.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 7.** Một nhà thực vật học đo chiều dài trung bình 74 lá cây (đơn vị: milimet) và thu được bảng tần số ghép nhóm như sau:

| Nhóm | Giá trị đại diện | Tần số |
|---|---|---|
| [5,45;5,85) | 5,65 | 5 |
| [5,85;6,25) | 6,05 | 9 |
| [6,25;6,65) | 6,45 | 15 |
| [6,65;7,05) | 6,85 | 19 |
| [7,05;7,45) | 7,25 | 16 |
| [7,45;7,85) | 7,65 | 8 |
| [7,85;8,25) | 8,05 | 2 |

**a)** Chiều dài trung bình của 74 là cây bằng $\approx 6{,}4(mm)$.
**b)** Độ dài của nhóm là 0,4.

**c)** Nhóm chứa mốt là $[7{,}05;7{,}45)$.

**d)** Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là $\approx 6{,}65$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 8.** Số cuộc điện thoại một người thực hiện trong 30 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên được thống kê trong bảng sau:

| Số cuộc gọi | $[2{,}5;5{,}5)$ | $[5{,}5;8{,}5)$ | $[8{,}5;11{,}5)$ | $[11{,}5;14{,}5)$ | $[14{,}5;17{,}5)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Số ngày | 5 | 13 | 7 | 3 | 2 |

**a)** Số cuộc gọi trung bình mỗi ngày là 8,1.

**b)** Nhóm chứa mốt là $[5{,}5;8{,}5)$.

**c)** Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là $\approx 7{,}21$.

**d)** Người đó thực hiện tối đa khoảng 8 cuộc gọi mỗi ngày.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 9.** Thống kê tuổi thọ của các bóng đèn do một nhà máy sản xuất ta có bảng số liệu sau

| Tuổi thọ (giờ) | $[1200;1300)$ | $[1300;1400)$ | $[1400;1500)$ | $[1500;1600)$ | $[1600;1700)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Số bóng | 15 | 20 | 48 | 42 | 25 |

**a)** Bảng số liệu trên gồm 5 nhóm.
**b)** Số lượng bóng đèn là 120 bóng đèn.
**c)** Giá trị đại diện của nhóm [1200;1300) là 1250.
**d)** Độ dài của mỗi nhóm trong mẫu số liệu ở trên là 100.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 10.** Số tiền thu từ heo đất của một trường THPT phát động ở 40 lớp thu được trong năm học được tổng hợp qua bảng sau

| Số tiền (triệu đồng) | [1,5;1,7) | [1,7;1,9) | [1,9;2,1) | [2,1;2,3) | [2,3;2,5) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số lớp | 5 | 6 | 13 | 7 | 9 |

**a)** Bảng số liệu trên gồm 5 nhóm.
**b)** Giá trị đại diện nhóm [1,9;2,1) là 2,0.
**c)** Giá trị đại diện nhóm [1,5;1,7) là 1,6.
**d)** Độ dài của mỗi nhóm trong mẫu số liệu ở trên là 0,3.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 11.** Thâm niên giảng dạy của một số giáo viên trường THPT được ghi lại ở bảng sau

| Thâm niên (số năm) | [1;5) | [5;10) | [10;15) | [15;20) | [20;25) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số giáo viên | 4 | 12 | 16 | 8 | 3 |

**a)** Cỡ mẫu của mẫu số liệu bằng 50.
**b)** Số trung bình của mẫu ghép nhóm là 11,84.
**c)** Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu trên là nhóm [10;15).
**d)** Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm bằng 11,74.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 12.** Thống kê số giờ tự học của học sinh tại một trường THPT trong một tuần, người ta ghi được kết quả sau (đơn vị: giờ).

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 12,5 | 15 | 16,5 | 17 | 14,5 | 13 | 15,5 | 16,5 | 17,5 |
| 16,5 | 18,5 | 19 | 20 | 19,5 | 17 | 16,5 | 14 | 18 | 21 |
| 15,5 | 13,5 | 12,5 | 14,5 | 17,5 | 19 | 19,5 | 20,5 | 20 | 17 |
| 14,5 | 13 | 14,5 | 18 | 16 | 15 | 13 | 18,5 | 14,5 | 12,5 |

Khi đó
**a)** Tổng số giờ tự học của học sinh là 829,5 giờ.
**b)** Tổng hợp kết quả tự học của học sinh vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

| Giờ tự học | [12,5;14,5) | [14,5;16,5) | [16,5;18,5) | [18,5;20,5) | [20,5;22,5) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 9 | 13 | 17 | 9 | 2 |

**c)** Thời gian trung bình học của mỗi học sinh dựa vào bảng tần số ghép nhóm tìm được ở ý (b) là 16,78.
**d)** Khả năng tự học trong tuần cao nhất của học sinh là 16,28 giờ.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 13.** Số câu trả lời đúng một bài thi trắc nghiệm môn Sinh học gồm 50 câu của nhóm 11*A* ở một trường THPT như sau.

| Số câu đúng | [14;21) | [21;28) | [28;35) | [35;42) | [42;49) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 4 | 8 | 25 | 6 | 7 |

Khi đó

**a)** Giá trị đại diện của nhóm [14;21) là 17,5. **b)** Giá trị đại diện của nhóm [21;28) là 24,5.

**c)** Giá trị đại diện của nhóm [42;49) là 45,5. **d)** Số câu đúng trung bình là 32,26.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 14.** Một nhà nghiên cứu ghi lại thời gian (giờ) sử dụng Facebook của 30 học sinh trong 02 tuần. Kết quả thu được mẫu số liệu như sau.

21 17 22 18 20 17 15 13 15 20

15 12 18 17 25 17 21 15 12 18

16 23 14 18 19 13 16 19 18 17

Khi đó

**a)** Số giờ trung bình của học sinh trong 02 tuần 16,37 giờ.

**b)** Tổng hợp kết quả thời gian sử dụng Facebook của học sinh vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau.

| Số giờ | [12;15) | [15;18) | [18;21) | [21;24) | [24;27) |
|---|---|---|---|---|---|
| Giá trị đại diện | 13,5 | 16,5 | 18,5 | 21,5 | 24,5 |
| Số học sinh | 5 | 12 | 8 | 4 | 1 |

**c)** Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu ý (b) là nhóm [15;18).

**d)** Mốt của mẫu số liệu ý (b) bằng 16,91.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 15.** Người ta tiến hành phỏng vấn 30 người về một bộ phim mới chiếu trên truyền hình. Người điều tra yêu cầu cho điểm bộ phim (thang điểm là 100). Kết quả được trình bày trong bảng phân bố tần số ghép nhóm sau đây.

| Số điểm | [50;60) | [60;70) | [70;80) | [80;90) | [90;100) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số người | 2 | 6 | 10 | 8 | 4 |

Khi đó

**a)** Ước lượng số trung bình của mẫu ghép là 77.
**b)** Giá trị đại diện của nhóm [90;100) là 95.
**c)** Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu trên là nhóm [80;90).
**d)** Mốt của mẫu số liệu là 74,67.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 16.** Chiều cao của 35 cây bạch đàn sinh trưởng của 12 tháng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: mét).

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6,6 | 7,5 | 8,2 | 8,2 | 7,8 | 7,9 | 9,0 | 8,9 | 8,2 |
| 7,2 | 7,5 | 8,3 | 7,4 | 8,7 | 7,7 | 7,0 | 9,4 | 8,7 |
| 8,0 | 7,7 | 7,8 | 8,3 | 8,6 | 8,1 | 8,1 | 9,5 | 6,9 |
| 8,0 | 7,6 | 7,9 | 7,3 | 8,5 | 8,4 | 8,0 | 8,8 | |

Khi đó

**a)** Chiều cao sinh trưởng trung bình của mỗi tháng của cây bạch đàn là 8,05 (m).

**b)** Tổng hợp lại kết quả chiều cao của cây bạch đàn vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau.

| Chiều cao (m) | [6,5;7,0) | [7,0;7,5) | [7,5;8) | [8;8,5) | [8,5;9,0) | [9,0;9,5) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Số cây | 2 | 4 | 9 | 11 | 6 | 3 |

.

**c)** Ước lượng chiều cao trung bình mỗi tháng của cây bạch đàn từ bảng tần số ghép nhóm ở ý (b) là $\approx 8{,}09$ (m).

**d)** Chiều cao tăng trưởng của cây bạch đàn được 8,18 (m) là cao nhất.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | |
|---|---|---|
| **Câu 1.** a S b Đ c S d Đ | **Câu 2.** a Đ b Đ c S d S | **Câu 3.** a Đ b Đ c S d S |
| **Câu 4.** a Đ b S c S d Đ | **Câu 5.** a Đ b Đ c Đ d S | **Câu 6.** a Đ b Đ c Đ d S |
| **Câu 7.** a S b Đ c S d S | **Câu 8.** a S b Đ c Đ d S | **Câu 9.** a Đ b S c Đ d Đ |
| **Câu 10.** a Đ b Đ c Đ d S | **Câu 11.** a Đ b Đ c Đ d S | **Câu 12.** a S b Đ c Đ d S |
| **Câu 13.** a Đ b Đ c Đ d S | **Câu 14.** a S b Đ c Đ d Đ | **Câu 15.** a Đ b Đ c S d S |
| **Câu 16.** a Đ b Đ c Đ d S | | |

## PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Khảo sát số lần sử dụng Facebook của một người thực hiện mỗi ngày trong 30 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên được thống kê trong bảng sau:

| Số lần sử dụng Facebook | [3;5] | [6;8] | [9;11] | [12;14] | [15;17] |
|---|---|---|---|---|---|
| Số ngày | 2 | 5 | 11 | 8 | 4 |

Xác định mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên. KQ:

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 2.** Bảng sau cho ta cân nặng của học sinh một nhóm 11.

| Cân nặng (kg) | [40,5;45,5) | [45,5;50,5) | [50,5;55,5) | [55,5;60,5) | [60,5;65,5) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 10 | 7 | 16 | 4 | 2 |

Tìm cân nặng (kg) trung bình của học sinh nhóm 11 đó. Kết quả làm tròn đến hàng phần mười. KQ:

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 3.** Bảng sau cho ta cân nặng của học sinh một lớp 11:

| Cân nặng (kg) | [40,5;45,5) | [45,5;50,5) | [50,5;55,5) | [55,5;60,5) | [60,5;65,5) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 10 | 7 | 16 | 4 | 2 |

Tìm cân nặng (kg) trung bình của học sinh lớp 11 đó (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

KQ:

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 4.** Kết quả đo chiều cao của 250 cây dừa đột biến 3 năm tuổi ở một viện nghiên cứu được tổng hợp ở bảng sau:

| Chiều cao ($m^2$) | [8,5;8,8) | [8,8;9,1) | [9,1;9,4) | [9,4;9,7) | [9,7;10) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số cây | 36 | 45 | 83 | 65 | 21 |

Tính mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

KQ:

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 5.** Một công ty bất động sản Đất Vàng thực hiện cuộc khảo sát khách hàng xem họ có nhu cầu mua nhà ở mức giá nào để tiến hành dự án xây nhà ở Thăng Long group sắp tới. Kết quả khảo sát 500 khách hàng được ghi lại ở bảng sau:

| Mức giá (triệu đồng) | [10;14) | [14;18) | [18;22) | [22;26) | [26;30) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số khách hàng | 75 | 105 | 179 | 96 | 45 |

Công ty bất động sản Đất Vàng nên xây nhà ở mức giá nào để nhiều người có nhu cầu xây nhà (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

KQ:

Lời giải

. . . . . .

**Câu 6.** Người ta tiến hành phỏng vấn 50 người về phim chiếu rạp Lật mặt 6 của Lý Hải. Người điều tra yêu cầu cho điểm phim theo thang điểm 100. Kết quả được trình bày trong bảng phân bố tần số ghép lớp sau đây:

| Số điểm | [50;60) | [60;70) | [70;80) | [80;90) | [90;100) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số người | 4 | 7 | 9 | 18 | 12 |

Hãy ước lượng mốt của mẫu số liệu ghép nhóm ở trên.

KQ:

Lời giải

. . . . . .

BẢNG ĐÁP ÁN

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Câu 1.** 10,5 | **Câu 2.** 50,6 | **Câu 3.** **50,6** | **Câu 4.** **9,3** | **Câu 5.** **19,9** |
| **Câu 6.** **80** | | | | |

# BÀI 9. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM

## A Lí thuyết

### 1 Trung vị

**Định nghĩa 1**

Công thức xác định trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm:

- Gọi $n$ là cỡ mẫu.
- Giả sử nhóm $[u_m;u_{m+1})$ chứa trung vị;
- $n_m$ là tần số của nhóm chứa trung vị;
- $C = n_1 + n_2 + \cdots + n_{m-1}$.

Khi đó $M_e = u_m + \dfrac{\dfrac{n}{2} - C}{n_m} \cdot (u_{m+1} - u_m)$.

**Nhận xét.** ***Ý nghĩa của trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm***

*Từ dữ liệu ghép nhóm nói chung không thể xác định chính xác trung vị của mẫu số liệu gốc.*

*Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho mẫu số liệu gốc và có thể lấy làm giá trị đại diện cho mẫu số liệu.*

## 2 Tứ phân vị

**Định nghĩa 2**

Công thức xác định tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm:

- Tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là $Q_2$ , cũng chính là trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm.
- Để tìm tứ phân vị thứ nhất ($Q_1$) của mẫu số liệu ghép nhóm, ta thực hiện như sau:
  - Giả sử nhóm $[u_m;u_{m+1})$ chứa tứ phân vị thứ nhất;
  - $n_m$ là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất;
  - $C = n_1 + n_2 + \cdots + n_{m-1}$.

  Khi đó $Q_1 = u_m + \dfrac{\frac{n}{4} - C}{n_m} \cdot (u_{m+1} - u_m)$.
- Để tìm tứ phân vị thứ ba ($Q_3$) của mẫu số liệu ghép nhóm, ta thực hiện như sau:
  - Giả sử nhóm $\left[u_j;u_{j+1}\right)$ chứa tứ phân vị thứ ba;
  - $n_j$ là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ ba;
  - $C = n_1 + n_2 + \cdots + n_{j-1}$

  Khi đó $Q_3 = u_j + \dfrac{\frac{3n}{4} - C}{n_j} \cdot \left(u_{j+1} - u_j\right)$ .

⚠ ***Chú ý:*** *Nếu tứ phân vị thứ $k$ là $\frac{1}{2}(x_m + x_{m+1})$, trong đó $x_m$ và $x_{m+1}$ thuộc hai nhóm liên tiếp, ví dụ như $x_m \in \left[u_{j-1};u_j\right)$ và $x_{m+1} \in \left[u_j;u_{j+1}\right)$ thì ta lấy $Q_k = u_j$.*

**Nhận xét.** ***Ý nghĩa của tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm***

- *Ba điểm tứ phân vị chia mẫu số liệu đã sắp xếp theo thứ tự không giảm thành bốn phần đều nhau.*
  *Giống như với trung vị, nói chung không thể xác định chính xác các điểm tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm*
- *Bộ ba tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và được sử dụng làm giá trị đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu.*
- *Tứ phân vị thứ nhất và thứ ba đo xu thế trung tâm của nửa dưới (các dữ liệu nhỏ hơn $Q_2$) và nửa trên (các dữ liệu lớn hơn $Q_2$) của mẫu số liệu.*

# B Các Dạng Bài Tập

**Ví dụ 1.** Điều tra số học sinh của 30 lớp học, ta được bảng số liệu như sau

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 35 | 39 | 39 | 40 | 40 | 41 | 41 | 41 | 41 | 44 | 44 | 45 | 45 | 45 | 46 |
| 48 | 48 | 48 | 48 | 49 | 49 | 49 | 49 | 49 | 49 | 50 | 50 | 50 | 50 | 51 |

Tính số trung vị của bảng nói trên.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 2.** Điều tra điểm môn Văn của một nhóm học sinh, ta được bảng số liệu như sau

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8,5 | 9 |

Tính số trung vị của bảng nói trên.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 3.** Điều tra số học sinh giỏi khối 10 của 15 trường cấp ba trên địa bàn tỉnh $A$, ta được bảng số liệu như sau

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 22 | 29 | 29 | 29 | 30 | 31 | 32 | 32 | 33 | 34 | 34 | 35 | 35 | 35 | 36 |

Tính số trung vị của bảng nói trên.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 4.** Tốc độ phát triển của một loại Virus trong 10 ngày với các điều kiện khác nhau (đơn vị nghìn con) được thống kê như sau

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 100 | 30 | 980 | 440 | 20 | 20 | 150 | 60 | 270 |

Trong trường hợp này ta chọn số nào dưới đây là giá trị đại diện là tốt nhất? Tính giá trị đại diện đó.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 5.** Thời gian truy cập Internet mỗi buổi tối của một số học sinh được cho trong bảng sau

| Thời gian (phút) | [9,5;12,5) | [12,5;15,5) | [15,5;18,5) | [18,5;21,5) | [21,5;24,5) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 3 | 12 | 15 | 24 | 2 |

Tính trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm này.

**Lời giải**

**Ví dụ 6.** Ghi lại tốc độ bóng trong 200 lần giao bóng của một vận động viên môn quần vợt cho kết quả như bảng sau

| Tốc độ $v$ (km/h) | Số lần |
|---|---|
| $150 \le v < 155$ | 18 |
| $155 \le v < 160$ | 28 |
| $160 \le v < 165$ | 35 |
| $165 \le v < 170$ | 43 |
| $170 \le v < 175$ | 41 |
| $175 \le v < 180$ | 35 |

Tính trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm này.

**Lời giải**

**Ví dụ 7.** Ghi lại tốc độ bóng trong 200 lần giao bóng của một vận động viên môn quần vợt cho kết quả như bảng sau

| Tốc độ $v$ (km/h) | Số lần |
|---|---|
| $150 \le v < 155$ | 18 |
| $155 \le v < 160$ | 28 |
| $160 \le v < 165$ | 35 |
| $165 \le v < 170$ | 43 |
| $170 \le v < 175$ | 41 |
| $175 \le v < 180$ | 35 |

Tìm tứ phân vị thứ nhất $Q_1$ và tứ phân vị thứ ba $Q_3$ của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

**Lời giải**

**Ví dụ 8.** Thống kê điểm trung bình môn Toán của một số hoc sinh lớp 11 được cho ở bảng sau

| Khoảng điểm | [6,5;7) | [7;7,5) | [7,5;8) | [8;8,5) | [8,5;9) | [9;9,5) | [9,5;10) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 8 | 10 | 16 | 24 | 13 | 7 | 4 |

Hãy ước lượng số tứ phân vị của mẫu số liệu ở bảng tần số ghép nhóm trên.

**Lời giải**

**Ví dụ 9.** Một cửa hàng bán 3 loại hoa quả nhập khẩu: Lê, Dưa vàng và Bưởi với số liệu tính toán được cho bởi bảng (trong một quý) sau khi giảm giá mỗi loại lần lượt là $x$, $y$, $z$ trên 1 kg

| Loại quả | Lê | Dưa vàng | Bưởi |
|---|---|---|---|
| Giá bán (nghìn/kg) | $200-x$ | $300-y$ | $400-z$ |
| Số lượng bán (kg) | $200+x$ | $300+y$ | $400+z$ |

Biết rằng $x+y+z=90$ (nghìn). Tính giá trị $x$, $y$, $z$ để lợi nhuận bình quân của 1 kg hoa quả đạt được cao nhất.

**Lời giải**

**Ví dụ 10.** Để đảm bảo bảng số liệu được phân bố đồng đều người ta điều chỉnh các giá trị $x$, $y$ sao cho số trung bình cộng và số trung vị bằng nhau. Khi đó bảng số liệu được cho như sau

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Giá trị | 40 | 50 | $60+x$ | $90+y$ | |
| Tần số | 20 | 30 | $60-x$ | $90-y$ | 200 |

Biết rằng $x \le 0$. Tìm $x$?

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

# C Bài tập rèn luyện

## PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1.** Giả sử mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số ghép nhóm.

| Nhóm | Nhóm 1 | Nhóm 2 | ... | Nhóm $k$ |
|---|---|---|---|---|
| Giá trị đại diện | $c_1$ | $c_2$ | ... | $c_k$ |
| Tần số | $n_1$ | $n_2$ | ... | $n_k$ |

Đặt $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu $\overline{x}$, được tính theo công thức nào?

**A.** $\overline{x} = \dfrac{n_1c_1 + n_2c_2 + \cdots + n_kc_k}{n}$.

**B.** $\overline{x} = \dfrac{n_1c_1 + n_2c_2 + \cdots + n_kc_k}{2n}$.

**C.** $\overline{x} = \dfrac{n_1^2c_1 + n_2^2c_2 + \cdots + n_k^2c_k}{n}$.

**D.** $\overline{x} = \dfrac{n_1c_1 + n_2c_2 + \cdots + n_kc_k}{\sqrt{n}}$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 2.** Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả cam ở lô hàng $A$ được cho ở bảng sau

| Cân nặng | [150;155) | [155;160) | [160;165) | [165;170) | [170;175) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số quả cam ở lô hàng $A$ | 1 | 3 | 7 | 10 | 4 |

Nhóm chứa mốt là nhóm nào?

**A.** [150;155). **B.** [155;160). **C.** [165;170). **D.** [170;175).

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 3.** Cân nặng của 28 học sinh nam lớp 11 được cho như sau

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 55,4 | 62,6 | 54,2 | 56,8 | 58,8 | 59,4 | 60,7 | 58 | 59,5 | 63,6 | 61,8 | 52,3 | 63,4 | 57,9 |
| 49,7 | 45,1 | 56,2 | 63,2 | 46,1 | 49,6 | 59,1 | 55,3 | 55,8 | 45,5 | 46,8 | 54 | 49,2 | 52,6 |

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm trên xấp xỉ bằng

**A.** 55,6. **B.** 65,5. **C.** 48,8. **D.** 57,7.

Lời giải

**Câu 4.** Khảo sát thời gian tập thể dục của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau

| Thời gian (phút) | [0;20) | [20;40) | [40;60) | [60;80) | [80;100) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 5 | 9 | 12 | 10 | 6 |

Giá trị đại diện của nhóm [20;40) là

**A.** 10. **B.** 20. **C.** 30. **D.** 40.

Lời giải

**Câu 5.** Khảo sát thời gian chạy bộ trong một ngày của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau

| Thời gian (phút) | [0;20) | [20;40) | [40;60) | [60;80) | [80;100) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 5 | 9 | 12 | 10 | 6 |

Giá trị đại diện của nhóm [0;20) là

**A.** 10. **B.** 20. **C.** 30. **D.** 40.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 6.** Khảo sát thời gian chạy bộ trong một ngày của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau

| Thời gian (phút) | [0;20) | [20;40) | [40;60) | [60;80) | [80;100) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 5 | 9 | 12 | 10 | 6 |

Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

**A.** [20;40). **B.** [40;60). **C.** [60;80). **D.** [80;100).

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 7.** Khảo sát thời gian chạy bộ trong một ngày của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau

| Thời gian (phút) | [0;20) | [20;40) | [40;60) | [60;80) | [80;100) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 5 | 9 | 12 | 10 | 6 |

Mẫu số liệu ghép nhóm này có mốt là

**A.** 59. **B.** 40. **C.** 52. **D.** 53.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 8.** Khảo sát thời gian chạy bộ trong một ngày của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau

| Thời gian (phút) | [0;20) | [20;40) | [40;60) | [60;80) | [80;100) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 5 | 9 | 12 | 10 | 6 |

Nhóm chứa trung vị của mẫu số liệu trên là

**A.** [40;60). **B.** [20;40). **C.** [60;80). **D.** [80;100).

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 9.** Khảo sát thời gian chạy bộ trong một ngày của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau

| Thời gian (phút) | [0;20) | [20;40) | [40;60) | [60;80) | [80;100) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 5 | 9 | 12 | 10 | 6 |

Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu trên là

**A.** [40;60). **B.** [20;40). **C.** [60;80). **D.** [80;100).

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 10.** Khảo sát thời gian chạy bộ trong một ngày của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau

| Thời gian (phút) | [0;20) | [20;40) | [40;60) | [60;80) | [80;100) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 5 | 9 | 12 | 10 | 6 |

Nhóm chứa tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu trên là

**A.** [40;60). **B.** [20;40). **C.** [60;80). **D.** [80;100).

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 11.** Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một của hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng)

| Doanh thu | [5;7) | [7;9) | [9;11) | [11;13) | [13;15) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số ngày | 2 | 7 | 7 | 3 | 1 |

Số trung bình của mẫu số liệu trên thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

**A.** [7;9). **B.** [9;11). **C.** [11;13). **D.** [13;15).

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 12.** Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một của hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng)

| Doanh thu | [5;7) | [7;9) | [9;11) | [11;13) | [13;15) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số ngày | 2 | 7 | 7 | 3 | 1 |

Trung vị của mẫu số liệu trên thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

**A.** [7;9). **B.** [9;11). **C.** [11;13). **D.** [13;15).

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 13.** Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một của hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng)

| Doanh thu | [5;7) | [7;9) | [9;11) | [11;13) | [13;15) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số ngày | 2 | 7 | 7 | 3 | 1 |

Mốt của mẫu số liệu trên thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

**A.** [7;9). **B.** [9;11). **C.** [11;13). **D.** [13;15).

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 14.** Số khách hàng nam mua bảo hiểm ở từng độ tuổi được thống kê như sau

| **Độ tuổi** | [20;30) | [30;40) | [40;50) | [50;60) | [60;70) |
|---|---|---|---|---|---|
| **Số khách hàng nam** | 4 | 6 | 10 | 7 | 3 |

Hãy sử dụng dữ liệu ở trên để tư vấn cho đại lí bảo hiểm xác định khách hàng nam ở tuổi nào hay mua bảo hiểm nhất.

**A.** 47. **B.** 46. **C.** 48. **D.** 49.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 15.** Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả cam ở lô hàng $A$ được cho ở bảng sau

| Cân nặng (g) | [150;155) | [155;160) | [160;165) | [165;170) | [170;175) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số quả cam ở lô hàng A | 1 | 3 | 7 | 10 | 4 |

Cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô hàng $A$ xấp xỉ bằng

**A.** 162,7. **B.** 161,7. **C.** 163,7. **D.** 164,7.

**Lời giải**

**Câu 16.** Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một của hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng)

| Doanh thu | [5;7) | [7;9) | [9;11) | [11;13) | [13;15) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số ngày | 2 | 7 | 7 | 3 | 1 |

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gần nhất với giá trị nào trong các giá trị dưới đây?

**A.** 7. **B.** 7,6. **C.** 8. **D.** 8,6.

**Lời giải**

**Câu 17.** Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một của hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng)

| **Doanh thu** | [5;7) | [7;9) | [9;11) | [11;13) | [13;15) |
|---|---|---|---|---|---|
| **Số ngày** | 2 | 7 | 7 | 3 | 1 |

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gần nhất với giá trị nào trong các giá trị dưới đây?

**A.** 10. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 13.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 18.** Anh Văn ghi lại cự li 30 lần ném lao của mình ở bảng sau (đơn vị: mét) rồi tổng hợp lại kết quả ném của anh Văn vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau

| Cự li (m) | [69,2;70) | [70;70,8) | [70,8;71,6) | [71,6;72,4) | [72,4;73,2) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số lần | 4 | 2 | 9 | 10 | 5 |

Khả năng anh Văn ném được khoảng bao nhiêu mét là cao nhất?

**A.** 47,7. **B.** 65,6. **C.** 71,5. **D.** 49,9.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 19.** Bảng số liệu ghép nhóm sau cho biết chiều cao (cm) của 50 học sinh lớp 11*A*

| Khoảng chiều cao (cm) | [145;150) | [150;155) | [155;160) | [160;165) | [165;170) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 7 | 14 | 10 | 10 | 9 |

Tính mốt của mẫu số liệu ghép nhóm này (làm tròn đến hàng phần trăm).

**A.** 153,18. **B.** 153,81. **C.** 154,18. **D.** 153,28.

**Lời giải**

**Câu 20.** Lương tháng của một số nhân viên một văn phòng được ghi lại như sau (đơn vị: triệu đồng)

| Lương tháng (triệu đồng) | [6;8) | [8;10) | [10;12) | [12;14) |
|---|---|---|---|---|
| Số nhân viên | 3 | 6 | 8 | 7 |

Tìm tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

**A.** $Q_1 = 9; Q_2 = 10{,}75; Q_3 = 12{,}3$.

**B.** $Q_1 = 9; Q_2 = 10{,}75; Q_3 = 14{,}3$.

**C.** $Q_1 = 9; Q_2 = 11{,}75; Q_3 = 12{,}3$.

**D.** $Q_1 = 10; Q_2 = 10{,}75; Q_3 = 12{,}3$.

**Lời giải**

**Câu 21.** Thời gian luyện tập trong một ngày (tính theo giờ) của một số vận động viên được ghi lại ở bảng sau

| Thời gian luyện tập (giờ) | [0;2) | [2;4) | [4;6) | [6;8) | [8;10) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số vận động viên | 3 | 8 | 12 | 12 | 4 |

Hãy xác định tứ phân vị thứ 3 của mẫu số liệu trên.

**A.** 3,6875.

**B.** 5,417.

**C.** 7,042.

**D.** 7,68.

**Lời giải**

**Câu 22.** Trong tuần lễ bảo vệ môi trường, các học sinh khối 11 tiến hành thu nhặt vỏ chai nhựa để tái chế. Nhà trường thống kê kết quả thu nhặt vỏ chai của học sinh khối 11 ở bảng sau

| Số vỏ chai nhựa | [11;15] | [16;20] | [21;25] | [26;30] | [31;35] |
|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 53 | 82 | 48 | 39 | 18 |

Hãy tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

**A.** 19,51. **B.** 19,59. **C.** 20,2. **D.** 18,6.

**Lời giải**

**Câu 23.** Thời gian truy cập Internet mỗi buổi tối của một số học sinh được cho trong bảng sau

| Thời gian (phút) | [9,5;12,5) | [12,5;15,5) | [15,5;18,5) | [18,5;21,5) | [21,5;24,5) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 3 | 12 | 15 | 24 | 2 |

Tính trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm này.

**A.** 18,1. **B.** 18,5. **C.** 17,2. **D.** 15,6.

**Lời giải**

**Câu 24.** Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả bơ ở một lô hàng cho trong bảng sau

| Cân nặng (g) | [150;155) | [155;160) | [160;165) | [165;170) | [170;175) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số quả bơ | 1 | 7 | 12 | 3 | 2 |

Trung vị của mẫu số liệu trên thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

**A.** [170;175). **B.** [155;160). **C.** [165;170). **D.** [160;165).

**Lời giải**

**Câu 25.** Một hãng ô tô thống kê lại số lần gặp sự cố về động cơ của 100 chiếc xe cùng loại sau 2 năm sử dụng đầu tiên ở bảng sau

| Số lần gặp sự cố | [1;2] | [3;4] | [5;6] | [7;8] | [9;10] |
|---|---|---|---|---|---|
| Số xe | 17 | 33 | 25 | 20 | 5 |

Hãy ước lượng tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép số trên.

**A.** 2,64. **B.** 2,89. **C.** 2,73. **D.** 2,98.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 26.** Cho bảng tần số ghép nhóm số liệu thống kê cân nặng của 40 học sinh lớp 11*A* trong một trường trung học phổ thông (đơn vị: kilôgam)

| Nhóm | [30;40) | [40;50) | [50;60) | [60;70) | [70;80) | [80;90) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 2 | 10 | 16 | 8 | 2 | 2 |

Hãy ước lượng các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

**A.** $Q_1 = 49$ (kg) ; $Q_2 = 50$ (kg) ; $Q_3 = 52{,}5$ (kg). **B.** $Q_1 = 48$ (kg) ; $Q_2 = 55$ (kg) ; $Q_3 = 62{,}5$ (kg).

**C.** $Q_1 = 47$ (kg) ; $Q_2 = 54$ (kg) ; $Q_3 = 63{,}5$ (kg). **D.** $Q_1 = 46$ (kg) ; $Q_2 = 53$ (kg) ; $Q_3 = 64{,}5$ (kg).

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 27.** Kiểm tra điện lượng của một số viên pin tiểu do một hãng sản xuất thu được kết quả sau

| Điện lượng (nghìn mAh ) | [0,9;0,95) | [0,95;1,0) | [1,0;1,05) | [1,05;1,1) | [1,1;1,15) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số viên pin | 10 | 20 | 35 | 15 | 5 |

Hãy ước lượng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

**A.** $Q_1 = 0{,}58; Q_2 = 1{,}02; Q_3 = 1{,}048$. **B.** $Q_1 = 0{,}98; Q_2 = 1{,}02; Q_3 = 1{,}248$.

**C.** $Q_1 = 0{,}98; Q_2 = 1{,}22; Q_3 = 1{,}048$. **D.** $Q_1 = 0{,}98; Q_2 = 1{,}02; Q_3 = 1{,}048$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 28.** Tổng lượng mưa trong tháng 8 đo được tại một trạm quan trắc đặt tại Vũng Tàu từ năm 2002 đến năm 2020 được ghi lại như dưới đây (đơn vị: mm)

121,8 158,3 334,9 200,9 165,6 161,5 194,3 220,7 189,8 234,2

165,9 165,9 134 173 169 189 254 168 255

*(Nguồn: Tổng cục Thống kê).*

Hoàn thiện bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau và tìm tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

| Tổng lượng mưa trong tháng 8 (mm) | [120;175) | [175;230) | [230;285) | [285;340) |
|---|---|---|---|---|
| Số năm | $x$ | $y$ | $z$ | $t$ |

**A.** $x=10; y=5; z=3; t=1; Q_2=172{,}5$.
**B.** $x=9; y=6; z=3; t=1; Q_2=172{,}5$.
**C.** $x=10; y=5; z=2; t=2; Q_2=182{,}5$.
**D.** $x=10; y=4; z=4; t=1; Q_2=162{,}5$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 29.** Cân nặng của lợn con giống $A$ và giống $B$ được thống kê như bảng sau

| Cân nặng (kg) | [1,0;1,1) | [1,1;1,2) | [1,2;1,3) | [1,3;1,4) |
|---|---|---|---|---|
| Số con giống $A$ | 8 | 28 | 32 | 17 |
| Số con giống $B$ | 13 | 14 | 24 | 14 |

Hãy ước lượng trung vị và tứ phân vị thứ nhất của cân nặng lợn con mới sinh giống $A$ và của cân nặng lợn con mới sinh giống $B$.

**A.** $M_A = 1{,}22$; $Q_{1A} = 1{,}15$; $M_B = 1{,}223$; $Q_{1B} = 1{,}12$.
**B.** $M_A = 1{,}22$; $Q_{1A} = 1{,}45$; $M_B = 1{,}223$; $Q_{1B} = 1{,}12$.
**C.** $M_A = 1{,}22$; $Q_{1A} = 1{,}15$; $M_B = 1{,}43$; $Q_{1B} = 1{,}12$.
**D.** $M_A = 1{,}02$; $Q_{1A} = 1{,}15$; $M_B = 1{,}223$; $Q_{1B} = 1{,}12$.

**Lời giải**

**Câu 30.** Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một cửa hàng được ghi lại ở bảng sau:

| Doanh thu | [5;7) | [7;9) | [9;11) | [11;13) | [13;15) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số ngày | 2 | 7 | 7 | 3 | 1 |

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu trên gần nhất với giá trị nào dưới đây?

**A.** 13. **B.** 12. **C.** 11. **D.** 10.

**Lời giải**

**Câu 31.** Số lượng huy chương vàng tại Sea Games 31 được thống kê trong bảng sau:

| Số huy chương | [0;10) | [10;50) | [50;100) | [100;210) |
|---|---|---|---|---|
| Quốc gia | 5 | 2 | 3 | 1 |

Xác định trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên

**A.** 10. **B.** 15. **C.** 20. **D.** 30.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 32.** Đo cân nặng của 1 lớp gồm 40 học sinh lớp 12B. Kết quả được ghi lại trong bảng sau:

| Khối lượng (kg) | [40;45) | [45;50) | [50;55) | [55;60) | [60;65) | [65;70) | [70;75) | [75;80) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 4 | 13 | 7 | 5 | 6 | 2 | 1 | 2 |

Tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu ghép nhóm thuộc khoảng nào sau đây?

**A.** [40;45]. **B.** [45;50]. **C.** [50;55]. **D.** [55;60].

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 33.** Đo cân nặng của 1 lớp gồm 40 học sinh lớp 12B. Kết quả được ghi lại trong bảng sau:

| Khối lượng (kg) | [40;45) | [45;50) | [50;55) | [55;60) | [60;65) | [65;70) | [70;75) | [75;80) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 4 | 13 | 7 | 5 | 6 | 2 | 1 | 2 |

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm thuộc khoảng nào sau đây?

**A.** [40;45]. **B.** [45;50]. **C.** [50;55]. **D.** [55;60].

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 34.** Thống kê điểm thi đánh giá năng lực môn Toán của 120 học sinh một trường THPT được cho trong bảng sau:

| Điểm | [0;20) | [20;40) | [40;60) | [60;80) | [80;100] |
|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 25 | 35 | 37 | 15 | 8 |

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm thuộc khoảng nào sau đây?

**A.** [40;45]. **B.** [45;50]. **C.** [50;55]. **D.** [55;60].

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 35.** Đo chiều cao các em học sinh khối 10 ta thu được kết quả

| Chiều cao (cm) | Số học sinh |
|---|---|
| [150;152) | 5 |
| [152;154) | 18 |
| [154;156) | 40 |
| [156;158) | 26 |
| [158;160) | 8 |
| [160;162) | 3 |

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

**A.** 152,2. **B.** 153,3. **C.** 154,1. **D.** 151,5.

**Lời giải**

**Câu 36.** Chiều dài của 60 lá dương xỉ trường thành

| Lớp của chiều dài (cm) | Tần số |
|---|---|
| [10;20) | 8 |
| [20;30) | 18 |
| [30;40) | 24 |
| [40;50) | 10 |

Tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

**A.** $\frac{95}{3}$. **B.** $\frac{91}{3}$. **C.** $\frac{89}{3}$. **D.** $\frac{93}{3}$.

**Lời giải**

**Câu 37.** Khối lượng của 30 củ khoai lang thu hoạch ở 1 hộ gia đình

| Lớp khối lượng (gam) | Tần số |
|---|---|
| [70;80) | 3 |
| [80;90) | 6 |
| [90;100) | 12 |
| [100;110) | 6 |
| [110;120) | 3 |

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

**A.** 90. **B.** 95. **C.** 98. **D.** 97.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 38.** Chiều cao của học sinh lớp 5 được mô tả như bảng sau

| Lớp chiều cao | Tần số |
|---|---|
| [98;103) | 6 |
| [103;108) | 7 |
| [108;113) | 9 |
| [113;118) | 5 |
| [118;123) | 6 |
| [123;128) | 4 |
| [128;133) | 2 |
| [133;138) | 2 |
| [138;143) | 3 |
| [143;148] | 1 |

Tứ phân vị thứ nhất của bảng phân bố ghép nhóm trên thuộc khoảng nào sau đây?

**A.** $[95;100]$. **B.** $[101;107]$. **C.** $[108;112]$. **D.** $[113;115]$.

**Lời giải**

**Câu 39.** Điểm thi của 32 học sinh trong kì thi Tiếng Anh (thang 100 điểm) được phân bố như sau

| Lớp điểm | Tần số $n_i$ |
|---|---|
| $[40;50)$ | 4 |
| $[50;60)$ | 6 |
| $[60;70)$ | 10 |
| $[70;80)$ | 6 |
| $[80;90)$ | 4 |
| $[90;100]$ | 2 |

Tứ phân vị thứ ba của bảng phân bố ghép nhóm bằng

**A.** $\frac{310}{4}$. **B.** $\frac{315}{3}$. **C.** $\frac{220}{4}$. **D.** $\frac{230}{3}$.

**Lời giải**

**Câu 40.** Khảo sát thời gian chạy bộ trong một ngày của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau

| Thời gian (phút) | [0;20) | [20;40) | [40;60) | [60;80) | [80;100) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 5 | 9 | 12 | 10 | 6 |

Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là

**A.** [0;20). **B.** [20;40). **C.** [40;60). **D.** [60;80).

**Lời giải**

**Câu 41.** Khảo sát thời gian chạy bộ trong một ngày của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau

| Thời gian (phút) | [0;20) | [20;40) | [40;60) | [60;80) | [80;100) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 5 | 9 | 12 | 10 | 6 |

Nhóm chứa trung vị là

**A.** [0;20). **B.** [20;40). **C.** [40;60). **D.** [60;80).

**Lời giải**

**Câu 42.** Người ta tiến hành phỏng vấn 40 người về một mẫu áo khoác. Người điều tra yêu cầu cho điểm mẫu áo đó theo thang điểm là 100. Kết quả được trình bày trong bảng ghép nhóm sau

| Nhóm | $[50;60)$ | $[60;70)$ | $[70;80)$ | $[80;90)$ | $[90;100)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 4 | 5 | 23 | 6 | 2 | $n=40$ |

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên gần nhất với giá trị

**A.** 74. **B.** 75. **C.** 76. **D.** 77.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 43.** Người ta tiến hành phỏng vấn 40 người về một mẫu áo khoác. Người điều tra yêu cầu cho điểm mẫu áo đó theo thang điểm là 100. Kết quả được trình bày trong bảng ghép nhóm sau

| Nhóm | $[50;60)$ | $[60;70)$ | $[70;80)$ | $[80;90)$ | $[90;100)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 4 | 5 | 23 | 6 | 2 | $N=40$ |

Tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến hàng đơn vị) là

**A.** $Q_1 \approx 71, Q_2 \approx 76, Q_3 \approx 78$. **B.** $Q_1 \approx 71, Q_2 \approx 75, Q_3 \approx 78$.

**C.** $Q_1 \approx 70, Q_2 \approx 76, Q_3 \approx 79$. **D.** $Q_1 \approx 70, Q_2 \approx 75, Q_3 \approx 79$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 44.** Người ta tiến hành phỏng vấn 40 người về một mẫu áo khoác. Người điều tra yêu cầu cho điểm mẫu áo đó theo thang điểm là 100. Kết quả được trình bày trong bảng ghép nhóm sau

| Nhóm | $[50;60)$ | $[60;70)$ | $[70;80)$ | $[80;90)$ | $[90;100)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 4 | 5 | 23 | 6 | 2 | $N=40$ |

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) là

**A.** 73. **B.** 74. **C.** 75. **D.** 76.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 45.** Dưới đây là một mẫu số liệu cho ở dạng bảng tần số ghép nhóm

| Nhóm | $[0;50)$ | $[50;100)$ | $[100;150)$ | $[150;200)$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 6 | 8 | 7 | 6 | $N=27$ |

Số trung bình của mẫu số liệu là (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

**A.** $\overline{x}\approx 112{,}8$. **B.** $\overline{x}\approx 107{,}8$. **C.** $\overline{x}\approx 99{,}1$. **D.** $\overline{x}\approx 85{,}5$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 46.** Dưới đây là một mẫu số liệu cho ở dạng bảng tần số ghép nhóm

| Nhóm ghép | Tần số | Nhóm ghép | Tần số |
|---|---|---|---|
| [62,5;67,5) | 4 | [82,5;87,5) | 22 |
| [67,5;72,5) | 7 | [87,5;92,5) | 5 |
| [72,5;77,5) | 10 | [92,5;97,5) | 10 |
| [77,5;82,5) | 26 | [97,5;102,5) | 16 |

Khẳng định nào sau đây là đúng

**A.** $77,5 \le M_e < 82,5$. **B.** $82,5 \le M_e < 87,5$. **C.** $87,5 \le M_e < 92,5$. **D.** $92,5 \le M_e < 97,5$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Câu 1. A** | **Câu 2. C** | **Câu 3. A** | **Câu 4. C** | **Câu 5. A** | **Câu 6. B** | **Câu 7. C** |
| **Câu 8. A** | **Câu 9. B** | **Câu 10. C** | **Câu 11. B** | **Câu 12. B** | **Câu 13. B** | **Câu 14. B** |
| **Câu 15. B** | **Câu 16. C** | **Câu 17. B** | **Câu 18. C** | **Câu 19. A** | **Câu 20. A** | **Câu 21. C** |
| **Câu 22. B** | **Câu 23. A** | **Câu 24. D** | **Câu 25. D** | **Câu 26. B** | **Câu 27. D** | **Câu 28. A** |
| **Câu 29. A** | **Câu 30. C** | **Câu 31. C** | **Câu 32. C** | **Câu 33. B** | **Câu 34. A** | **Câu 35. C** |
| **Câu 36. A** | **Câu 37. B** | **Câu 38. B** | **Câu 39. D** | **Câu 40. B** | **Câu 41. C** | **Câu 42. B** |
| **Câu 43. D** | **Câu 44. B** | **Câu 45. C** | **Câu 46. B** | | | |

## PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

**Câu 1.** Cho bảng số liệu ghép nhóm như sau

| Nhóm | [30;40) | [40;50) | [50;60) | [60;70) | [70;80) | [80;90) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 2 | 10 | 16 | 8 | 2 | 2 |

Khi đó

**a)** Cỡ mẫu của mẫu số liệu là $n = 40$.

**b)** Tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_2 = 45$.

**c)** Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_1 = 48$.

**d)** Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_3 = 61{,}5$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Một hãng xe ô tô thống kê lại số lần gặp sự cố về động cơ của 100 chiếc xe cùng loại sau 2 năm sử dụng đầu tiên ở bảng sau

| Số lần gặp sự cố | [1;2] | [3;4] | [5;6] | [7;8] | [9;10] |
|---|---|---|---|---|---|
| Số xe | 17 | 33 | 25 | 20 | 5 |

Khi đó

**a)** Cỡ mẫu của mẫu số liệu là $n = 100$.

**b)** Tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_2 = 4{,}5$.

**c)** Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_1 \approx 1{,}98$.

**d)** Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_3 = 6{,}5$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 3.** Cho bảng số liệu ghép nhóm sau

| Nhóm | [0;2) | [2;4) | [4;6) | [6;8) | [8;10) |
|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 3 | 8 | 12 | 12 | 4 |

Khi đó

**a)** Cỡ mẫu của mẫu số liệu là $n = 38$.

**b)** Tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_2 \approx 5{,}42$.

**c)** Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_1 \approx 2{,}69$.

**d)** Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_3 \approx 7{,}04$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 4.** Người ta đo đường kính của 61 cây gỗ được trồng sau 12 năm (đơn vị: centimét), họ thu được bảng tần số ghép nhóm sau

| Đường kính | [20;25) | [25;30) | [30;35) | [35;40) | [40;45) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số cây | 4 | 12 | 26 | 13 | 6 |

Khi đó

**a)** Cỡ mẫu của mẫu số liệu là $n = 61$.

**b)** Tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_2 \approx 32{,}79$.

**c)** Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_1 \approx 19{,}69$.

**d)** Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_3 \approx 36{,}44$.

Lời giải

.....
.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 5.** Kiểm tra điện lượng của một số viên pin tiểu do một hãng sản xuất thu được kết quả sau:

| Điện lượng (Nghìn mAh) | [0,9;0,95) | [0,95;1,0) | [1,0;1,05) | [1,05;1,1) | [1,1;1,15) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số pin | 10 | 20 | 35 | 15 | 5 |

Khi đó

**a)** Số trung bình của dãy số liệu xấp xỉ 1,016.

**b)** Nhóm chứa mốt của dãy số liệu là [1,05;1,1).

**c)** Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu nhóm là $Q_1 \approx 0{,}98$.

**d)** Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu nhóm là $Q_3 \approx 1{,}248$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 6.** Thống kê điểm trung bình môn Toán của một số học sinh lớp 11 được cho ở bảng sau:

| Khoảng điểm | [6,5;7) | [7;7,5) | [7,5;8) | [8;8,5) | [8,5;9) | [9;9,5) | [9,5;10) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 8 | 10 | 16 | 24 | 13 | 7 | 4 |

Khi đó

**a)** Cỡ mẫu của mẫu số liệu là $n = 80$.

**b)** Tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_2 \approx 8{,}15$.

**c)** Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_1 \approx 7{,}58$.

**d)** Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_3 \approx 8{,}63$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 7.** Khi đo mặt cho học sinh khối 10 ở một trường THPT nhân viên y tế ghi nhận lại ở bảng sau

| Thời gian | [0,25;0,57) | [0,75;1,25) | [1,25;1,75) | [1,75;2,25) | [2,25;2,75) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số lần | 25 | 32 | 14 | 12 | 4 |

Khi đó

**a)** Số trung bình của mẫu số liệu trên là 1,14.

**b)** Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu là [0,75;1,25).

**c)** Mốt của mẫu số liệu là $M_0 = 0{,}89$.

**d)** Trung vị của mẫu số liệu là $M_e \approx 1{,}039$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 8.** Tiền lương tháng của một số nhân viên ở 01 công ty được ghi lại như sau (đơn vị: triệu đồng)

13,8 6,7 8,4 11,9 11,1 8,3 13,2 11,2 8,9 10,7 6,5 13,1

12,5 9,6 11,7 12,7 10,0 10,0 12,2 9,8 10,9 6,7 13,6 9,2

Khi đó

**a)** Tứ phân vị thứ hai của dãy số liệu là $Q_2 = 10{,}8$.

**b)** Tứ phân vị thứ nhất của dãy số liệu là $Q_1 = 6{,}05$.

**c)** Tổng hợp lại dãy số liệu trên vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau

| Lương tháng (triệu đồng) | [6;8) | [8;10) | [10;12) | [12;14) |
|---|---|---|---|---|
| Số nhân viên | 3 | 6 | 8 | 7 |

.

**d)** Ước lượng tứ phân vị của số liệu ở bảng tần số ghép nhóm trên ta được $Q_2 = 6{,}75$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 9.** Số điểm một cầu thủ ghi được trong 20 trận đấu được cho ở bởi bảng sau

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 23 | 21 | 13 | 8 | 14 | 15 | 18 | 22 | 11 |
| 24 | 12 | 14 | 14 | 18 | 6 | 8 | 25 | 10 | 11 |

**a)** Tứ phân vị thứ hai của dãy số liệu là $Q_2 = 14$.

**b)** Tứ phân vị thứ ba của dãy số liệu là $Q_3 = 11{,}5$.

**c)** Tổng hợp dãy số liệu trên vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau

| Điểm số | [6;10) | [11;15) | [16;20) | [21;25) |
|---|---|---|---|---|
| Số trận | 4 | 8 | 2 | 6 |

.

**d)** Ước lượng tứ phân vị của số liệu ở bảng tần số ghép nhóm trên ta được tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu là $Q_2 = 8{,}25$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

. . . . . .

. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | |
|---|---|---|
| **Câu 1.** a Đ b S c Đ d S | **Câu 2.** a Đ b Đ c S d Đ | **Câu 3.** a S b Đ c Đ d Đ |
| **Câu 4.** a Đ b Đ c S d Đ | **Câu 5.** a Đ b S c Đ d S | **Câu 6.** a S b Đ c Đ d Đ |
| **Câu 7.** a Đ b Đ c Đ d Đ | **Câu 8.** a Đ b S c Đ d S | **Câu 9.** a Đ b S c S d S |

## PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Chiều cao (đơn vị: m) của 35 cây bạch đàn được cho ở bảng sau:

| Số đo chiều cao ($m$) | [6,5;7) | [7;7,5) | [7,5;8) | [8;8,5) | [8,5;9) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số cây | 6 | 9 | 15 | 4 | 1 |

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng bao nhiêu? (*Kết quả được làm tròn đến hàng phần mười*). KQ: ☐

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 2.** Số câu hỏi mà một nhóm học sinh làm được trong 1 bài kiểm tra được cho bởi bảng sau:

| Số bài tập | [5;12) | [12;19) | [19;26) | [26;33) | [33;40] |
|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 27 | 58 | 22 | 23 | 10 |

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng bao nhiêu? (*Kết quả được làm tròn đến hàng phần mười*). KQ: ☐

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 3.** Số tiền mà một nhóm học sinh lớp 11 chi cho ăn uống sinh hoạt trong 01 tuần được tổng hợp ở bảng sau:

| Số tiền (nghìn đồng) | [300;340) | [340;380) | [380;420) | [420;460) | [460;500) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 5 | 9 | 12 | 7 | 6 |

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng bao nhiêu? (*Kết quả được làm tròn đến hàng đơn vị*). KQ: ☐

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 4.** Trong một bài kiểm tra nội dung chạy ở cự ly 1500 m, kết quả của các em học sinh được giáo viên ghi lại như bảng sau:

| Thời gian (phút) | [7;9) | [9;11) | [11;13) | [13;15) | [15;17) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 5 | 8 | 13 | 9 | 6 |

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng bao nhiêu? (*Kết quả được làm tròn đến hàng phần mười*). KQ: ☐

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 5.** Ở lớp 11A của trường THPT, kết quả phần thi lý thuyết trong kỳ thi Nghề môn Tin học được giáo viên tổng hợp như sau:

| Điểm thi | [6;7) | [7;8) | [8;9) | [9;10) | [10;11) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 3 | 4 | 5 | 2 | 1 |

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng bao nhiêu? (*Kết quả làm tròn đến hàng phần mười*). KQ: ☐

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 6.** Chiều cao (đơn vị: m) của 35 cây bạch đàn được cho ở bảng sau:

| Số đo chiều cao (m) | [6,5;7) | [7;7,5) | [7,5;8) | [8;8,5) | [8,5;9) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số cây | 6 | 9 | 15 | 4 | 1 |

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng bao nhiêu? (*Kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm*). KQ: ☐

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 7.** Kết quả thi đấu thể thao của 20 đội được cho bởi bảng sau:

| Điểm số | [5,5;10,5) | [10,5;15,5) | [15,5;20,5) | [20,5;25,5) |
|---|---|---|---|---|
| Số đội | 4 | 8 | 2 | 6 |

Tứ phân vị thứ hai của số liệu ở bảng tần số ghép nhóm trên bằng bao nhiêu? (*Kết quả được làm tròn đến hàng đơn vị*). KQ:

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 8.** Thời gian (phút) di chuyển đến trường của nhóm học sinh trường THPT A được tổng hợp dưới bảng sau:

| Thời gian | [15;20) | [20;25) | [25;30) | [30;35) | [35;40) | [40;44) | [45;50) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 6 | 14 | 25 | 37 | 13 | 9 | 21 |

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng bao nhiêu? (*Kết quả được làm tròn đến hàng đơn vị*). KQ:

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 9.** Cân nặng (đơn vị: kg) của nhóm học sinh trường THPT được tổng hợp dưới bảng sau:

| Cân nặng | [40;45) | [45;50) | [50;55) | [55;60) | [60;65) |
|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 7 | 5 | 11 | 5 | 7 |

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng bao nhiêu? (*Kết quả được làm tròn đến hàng phần chục*). KQ:

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 10.** Tổng hợp tiền lương tháng của một số nhân viên văn phòng được ghi lại như sau (đơn vị: triệu đồng):

| Lương tháng (triệu đồng) | [6;8) | [8;10) | [10;12) | [12;14) |
|---|---|---|---|---|
| Số nhân viên | 3 | 6 | 8 | 7 |

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ở bảng tần số ghép nhóm trên bằng bao nhiêu? KQ:

**Lời giải**

. . . . . .

**BẢNG ĐÁP ÁN**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Câu 1.** 7,6 | **Câu 2.** 17,2 | **Câu 3.** 398 | **Câu 4.** 12,2 | **Câu 5.** 8,1 |
| **Câu 6.** 7,58 | **Câu 7.** 14 | **Câu 8.** 32 | **Câu 9.** 52,5 | **Câu 10.** 9 |

Chương 4: Quan hệ song song trong không gian

Chương 4

# QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

## BÀI 10. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

## A Lí thuyết

### 1 Mặt phẳng

Hình ảnh mô phỏng trong thực tế ví dụ: mặt gương phẳng, mặt hồ phẳng lặng được xem là một phần của mặt phẳng.

- *Mặt phẳng không có bề dày và không bị giới hạn.*
- *Cách biểu diễn mặt phẳng lên mặt phẳng hình học: dùng hình bình hành hay một góc và ghi tên của mặt phẳng vào một góc của hình.*
- *Kí hiệu mặt phẳng mp($P$), mp($Q$), mp($\alpha$), mp($\beta$), …*



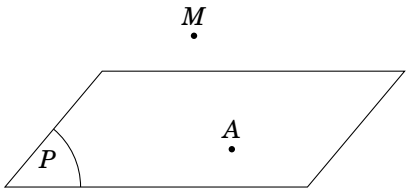




### 2 Điểm thuộc mặt phẳng

*Cho điểm $A$ và mp($\alpha$). Khi đó*

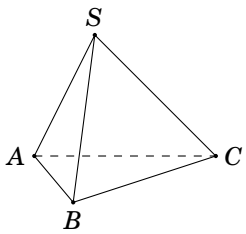
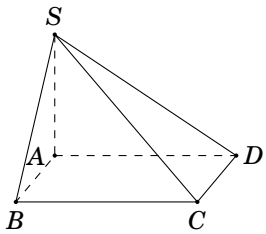
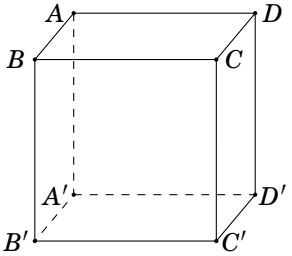
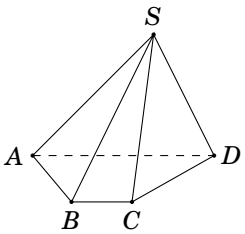
- *Điểm $A$ thuộc ($\alpha$) hay $A$ nằm trên ($\alpha$) hay ($\alpha$) chứa $A$ hoặc đi qua $A$. Kí hiệu $A \in (\alpha)$.*
- *Điểm $A$ nằm ngoài ($\alpha$) hay ($\alpha$) không chứa $M$ hoặc không đi qua $M$. Kí hiệu $M \notin (\alpha)$.*



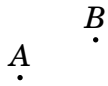
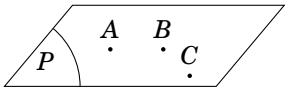
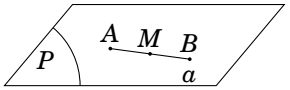
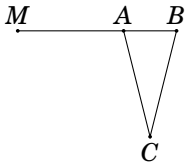
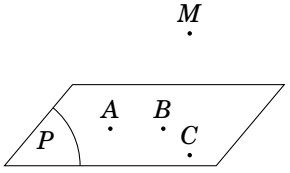
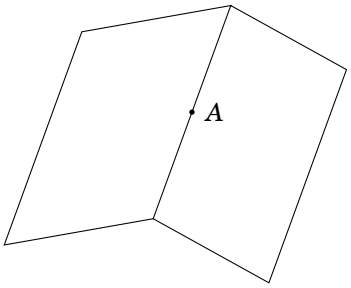
## 3 Hình biểu diễn của một hình không gian

**Các nguyên tắc vẽ hình**.
Khi vẽ một hình không gian lên bảng, lên giấy ta tuân thủ nguyên tắc sau:

- Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.
- Hình biểu diễn của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song, hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng cắt nhau.
- Giữ nguyên quan hệ thuộc giữa điểm với đường thẳng.
- Nét liền để vẽ đường nhìn thấy, nét đứt đoạn để vẽ đường bị che khuất.
- Bảo toàn tỷ lệ giữa các đoạn thẳng song song, các đoạn thẳng cùng nằm trên một đường thẳng. Không bảo toàn về góc.
- Một tam giác bất kỳ đều được coi là hình biểu diễn của tam giác có dạng tùy ý( vuông, cân, đều).
- Hình bình hành là hình biểu diễn cho hình bình hành có dạng tùy ý (hình bình hành, vuông, chữ nhật, thoi) và kèm theo kí hiệu vuông, bằng nhau nếu là hình đặc biệt.

| |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|
| Nhìn thấy | $(SAB)$, $(SBC)$ | $(SBC)$, $(SCD)$ | $(BCC'B')$, $(CDD'C')$, $(ABCD)$ | $(SAB)$, $(SBC)$, $(SCD)$ |
| Không nhìn thấy | $(SAC)$, $(ABC)$ | $(SAB)$, $(SAD)$, $(ABCD)$ | $(ABB'A')$, $(AA'D'D)$, $(AB'C'D')$ | $(SAD)$, $(ABCD)$ |

## 4 Các tính chất thừa nhận

| | Tính chất | Hình minh họa |
|---|---|---|
| 1 | Có một và chỉ một đường thẳng đi qua 2 điểm phân biệt. |   |
| 2 | Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua 3 điểm không thẳng hàng. Kí hiệu $(ABC)$. |   |
| 3 | Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó. $\begin{cases} A \in a \cap (\alpha) \\ B \in a \cap (\alpha) \end{cases}$ nên $AB \equiv a \subset (\alpha)$ |   |
| 4 | Điểm $M$ và đường thẳng $AM$ đều nằm trong $(ABC)$ vì $M$ thuộc đường thẳng $AB$ còn $AM$ trùng với đường thẳng $AB$ mà $AB$ nằm trong $(ABC)$. |   |
| 5 | Tồn tại 4 điểm không cùng thuộc 1 mặt phẳng. |   |
| 6 | Nếu hai mặt phẳng phân biệt có 1 điểm chung thì chúng còn có điểm chung khác nữa. Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung chưa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng. Đường thẳng chung gọi là **giao tuyến** của hai mặt phẳng. |   |
| 7 | Trong mỗi mặt phẳng, các kết quả của hình học phẳng đều đúng. | |

## 5 Cách xác định một mặt phẳng

- Khi biết nó đi qua 3 điểm không thẳng hàng cho trước.
  Kí hiệu mp$(ABC)$ hoặc $(ABC)$.

- Khi biết nó đi qua một đường thẳng và một điểm không nằm trên đường thẳng đó.
  Kí hiệu mp$(d;A)$ hoặc mp$(A;d)$.

- Khi biết nó đi qua hai đường thẳng cắt nhau.
  Kí hiệu mp$(a;b)$ hoặc mp$(b;a)$.

## 6 Hình chóp và tứ diện

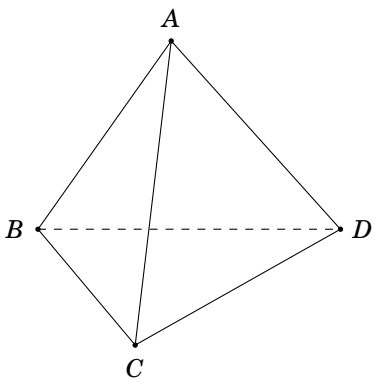
**Định nghĩa 1**

Trong mặt phẳng $(\alpha)$ cho đa giác lồi $A_1A_2\ldots A_n$. Lấy $S$ nằm ngoài $(\alpha)$.

- Lần lượt nối $S$ với $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ được $n$ tam giác $\triangle SA_1A_2$, $\triangle SA_2A_3$, …, $\triangle SA_nA_1$.
- Hình gồm đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ và $n$ tam giác $\triangle SA_1A_2$, $\triangle SA_2A_3$, …, $\triangle SA_nA_1$ gọi là hình chóp.

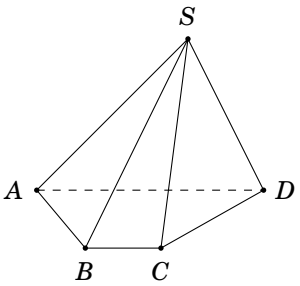
Kí hiệu $S.A_1A_2\ldots A_n$.

Hình tứ diện là hình được tạo thành từ bốn tam giác $ABC$, $ABD$, $ACD$, $BCD$ trong đó $A$, $B$, $C$, $D$ không đồng phẳng.




- Đỉnh $A$, $B$, $C$, $D$.
- Mặt bên. các tam giác $ABC$, $ABD$, $ACD$.
- Cạnh bên. $AB$, $AC$, $AD$.
- Mặt đáy. $BCD$.
- Cạnh đáy. $BC$, $BD$, $CD$.
- Cặp cạnh đối diện. $BC$, $AD$ và $BD$, $AC$ và $AB$, $DC$.
- Đỉnh đối diện với mặt. đỉnh $A$ đối diện $(BCD)$, đỉnh $B$ đối diện $(ACD)$; đỉnh $C$ đối diện $(ABD)$, đỉnh $D$ đối diện $(ABC)$.
- Tứ diện đều là hình tứ diện có bốn mặt là các tam giác đều.

Các mặt bên, cạnh bên, cạnh đáy của hình chóp $S.ABCD$




- Mặt bên là các tam giác $SBC$, $SAD$, $SCD$, $SAB$.
- Cạnh bên $SA$, $SB$, $SC$, $SD$.
- Cạnh đáy $AB$, $BC$, $AD$, $CD$.

# B Các dạng bài tập

### Dạng 1. Các tính chất được thừa nhận của hình học không gian

- Chứng minh điểm $M$ thuộc mặt phẳng $(\alpha)$.
  - Điểm $M$ có trong tên mặt phẳng.

– Điểm $M$ thuộc một đường thẳng nằm trên mặt phẳng $(\alpha)$.

- Chứng minh đường thẳng nằm trên mặt phẳng $(\alpha)$. Tìm hai điểm phân biệt thuộc đường thẳng nằm trên mặt phẳng.

**Ví dụ 1.** Cho chóp $S.ABC$, $M$ là trung điểm $AB$. Chứng minh $M \in (ABC)$ và $MC \subset (ABC)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 2.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $BC$. Gọi $I$ là giao điểm của $AN$ và $MC$. Chứng minh rằng

a) $M \in (ABC)$.

b) $MN \subset (ABC)$.

c) $SI \subset (SAN)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

## Dạng 2. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng phân biệt cắt nhau

**Giao tuyến** của hai mặt phẳng phân biệt là đường thẳng chung (đường thẳng đi qua ít nhất 2 điểm chung) của hai mặt phẳng đó.

- **Tình huống 1**.

| | |
|---|---|
| Giả thiết | $M = d_1 \cap d_2$, $d_1 \subset (\alpha)$, $d_2 \subset (\beta)$ |
| Kết luận | $M \in (\alpha) \cap (\beta)$ |

- **Tình huống 2**.

| | |
|---|---|
| Giả thiết | $M \in (\alpha) \cap (\beta)$, $N \in (\alpha) \cap (\beta)$ |
| Kết luận | $(\alpha) \cap (\beta) = MN$. |

**Kỹ thuật**. Nối các đoạn hoặc kéo dài các đoạn thẳng có trong mặt phẳng để tìm điểm chung và chú ý nét vẽ đứt hoặc liền.

**Ví dụ 3.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $M$ là trung điểm của $AB$. Xác định giao tuyến của mặt phẳng $(SMC)$ với mặt phẳng $(ABC)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 4.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $BC$. Xác định giao tuyến của mặt phẳng $(SMC)$ với $(SNA)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song, điểm $M$ thuộc cạnh $SA$. Tìm giao tuyến của

a) $(SAC)$ và $(SBD)$.

b) $(SAC)$ và $(MBD)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 6.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $I$, $J$ là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh $AB$, $AD$ với $AI = \dfrac{1}{2}AB$, $AJ = \dfrac{3}{2}JD$. Tìm giao tuyến của

a) $(ACD) \cap (CIJ)$.

b) $(CIJ) \cap (BCD)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 7.** Cho $S$ là một điểm không thuộc mặt phẳng $(P)$ chứa tứ giác $ABCD$ có $AB$ không song song $CD$; $BC$ không song song $DA$. Tìm giao tuyến của

a) $(SAB) \cap (SBC)$

b) $(SAB) \cap (SCD)$

c) $(SAD) \cap (SBC)$

d) $(SAC) \cap (SBD)$

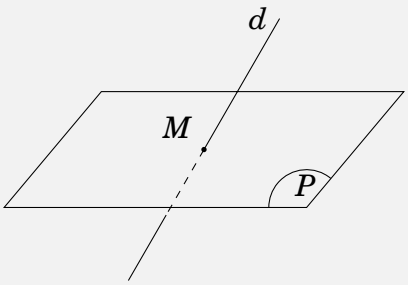
**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

## Dạng 3. Xác định giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

**Bài toán:** Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng.

| | |
|---|---|
| Giả thiết | $d \not\subset (P)$, $M \in d$, $M \in (P)$ |
| Kết luận | $M = d \cap (P)$ |




Ta có các trường hợp sau xảy ra:

- **Trường hợp 1:** Trong $(P)$ có sẵn đường thẳng $a$ cắt $d$ tại $M$.
  *Trình bày:* $\begin{cases} a \cap d = M \\ a \subset (P) \end{cases} \Rightarrow d \cap (P) = M.$
- **Trường hợp 2:** Trong mặt phẳng $(P)$ chưa có đường $a$ cắt $d$. Khi đó
  - **Bước 1:** Chọn mặt phẳng phụ $(Q)$ chứa $d$.
  - **Bước 2:** Tìm giao tuyến $a$ của $(P)$ và $(Q)$.
  - **Bước 3:** Trong $(Q)$, cho $a$ cắt $d$ tại $M$, khi đó $M$ thuộc $d$, $M$ thuộc $a$ mà $a$ chứa trong $(Q)$. Vậy $M$ là điểm cần tìm.

*Trình bày:*

- Chọn $(Q)$ chứa $d$.
- Tìm $(Q) \cap (P) = a$.
- Trong $(Q)$, $a \cap d = M \Rightarrow \begin{cases} M \in d \\ M \in a,\ a \subset (P) \end{cases} \Rightarrow d \cap (P) = M.$

**Ví dụ 8.** Cho bốn điểm $A, B, C, D$ không đồng phẳng. Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm của $AC$ và $BC$. Trên đoạn $BD$ lấy điểm $P$ sao cho $BP = 2PD$. Tìm giao điểm của đường thẳng $CD$ và mặt phẳng $(MNP)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 9.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $E$ và $F$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $CD$; $G$ là trọng tâm tam giác $BCD$. Tìm giao điểm của đường thẳng $EG$ và mặt phẳng $(ACD)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 10.** Trong mặt phẳng $(\alpha)$, cho tứ giác $ABCD$. Gọi $S$ là điểm không thuộc $(\alpha)$, $M$ là điểm nằm trong tam giác $SCD$. Xác định giao điểm của $AM$ và mặt phẳng $(SBD)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 11.** Cho tứ giác $ABCD$ có $AC$ và $BD$ giao nhau tại $O$ và một điểm $S$ không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Trên đoạn $SC$ lấy một điểm $M$ không trùng với $S$ và $C$. Tìm giao điểm của đường thẳng $SD$ với mặt phẳng $(ABM)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

## Dạng 4. Ba điểm thẳng hàng - Ba đường đồng quy

**Bài toán:** Chứng minh ba điểm $A$, $B$, $C$ thẳng hàng.

- Ta chứng minh ba điểm đó đồng thời thuộc hai mặt phẳng $(\alpha)$ và $(\beta)$.
  Suy ra $A$, $B$, $C$ nằm trên giao tuyến của $(\alpha)$ và $(\beta)$ nên chúng thẳng hàng.
- Cơ sở $\begin{cases} A \in (\alpha) \cap (\beta) \\ B \in (\alpha) \cap (\beta) \end{cases} \Rightarrow AB \equiv AC = (\alpha) \cap (\beta)$.
  $C \in (\alpha) \cap (\beta)$

**Bài toán:** Chứng minh ba đường thẳng $a$, $b$, $c$ đồng quy.

Ta chọn một mặt phẳng $(P)$ chứa đường thẳng $a$ và $b$.
Gọi $I = a \cap b$. Chứng minh $I \in c$ (chứng minh ba điểm thẳng hàng như trên).

**Ví dụ 12.** Cho 3 điểm $A, B, C$ không thuộc mặt phẳng $(P)$, $BC \cap (P) = M$, $CA \cap (P) = N$, $AB \cap (P) = Q$. Chứng minh $M, N, Q$ thẳng hàng.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 13.** Cho tứ diện $SABC$. Trên $SA, SB$ và $SC$ lấy các điểm $D, E$ và $F$ sao cho $DE$ cắt $AB$ tại $I$, $EF$ cắt $BC$ tại $J$, $FD$ cắt $CA$ tại $K$. Chứng minh rằng ba điểm $I, J, K$ thẳng hàng.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 14.** Cho tứ diện $SABC$. Gọi $L$, $M$, $N$ lần lượt là các điểm trên các cạnh $SA$, $SB$ và $AC$ sao cho $LM$ không song song với $AB$, $LN$ không song song với $SC$. Mặt phẳng $(LMN)$ cắt các cạnh $AB$, $BC$, $SC$ lần lượt tại $K$, $I$, $J$. Chứng minh rằng ba điểm $M$, $I$, $J$ thẳng hàng.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 15.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ không phải là hình thang. Trên cạnh $SC$ lấy điểm $M$. Gọi $N$ là giao điểm của đường thẳng $SD$ với mặt phẳng $(AMB)$. Chứng minh rằng ba đường thẳng $AB$, $CD$, $MN$ đồng quy.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 16.** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, gọi $O$ là giao điểm của hai đường chéo $AC$ và $BD$. Một mặt phẳng $(\alpha)$ cắt các cạnh bên $SA$, $SB$, $SC$, $SD$ ứng tại các điểm $M$, $N$, $P$, $Q$. Chứng minh rằng các đường thẳng $MP$, $NQ$, $SO$ đồng quy.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 17.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $CD$. Mặt phẳng $(\alpha)$ qua $MN$ cắt $AD$, $BC$ lần lượt tại $P$ và $Q$. Biết $MP$ cắt $NQ$ tại $I$. Chứng minh ba điểm $I$, $B$, $D$ thẳng hàng.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

# C Bài tập rèn luyện

## PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1.** Trong hình học không gian, cho trước một mặt phẳng $(P)$. Khẳng định nào đúng?

**A.** Điểm luôn phải thuộc mặt phẳng $(P)$.

**B.** Điểm luôn không thuộc mặt phẳng $(P)$.

**C.** Điểm vừa thuộc, đồng thời vừa không thuộc mặt phẳng $(P)$.

**D.** Điểm có thể thuộc mặt phẳng $(P)$, có thể không thuộc mặt phẳng $(P)$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

**A.** Qua 2 điểm phân biệt có duy nhất một mặt phẳng.

**B.** Qua 3 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.

**C.** Qua 3 điểm không thẳng hàng có duy nhất một mặt phẳng.

**D.** Qua 4 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 3.** Cho 2 đường thẳng $a$, $b$ cắt nhau và không đi qua điểm $A$. Xác định được nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng bởi $a$, $b$ và $A$?

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 4.** Một hình chóp có đáy là ngũ giác có số mặt và số cạnh là

**A.** 5 mặt, 5 cạnh. **B.** 6 mặt, 5 cạnh. **C.** 6 mặt, 10 cạnh. **D.** 5 mặt, 10 cạnh.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Gọi $M$ là trung điểm $CD$. Giao tuyến của hai mặt phẳng $(MSB)$ và $(SAC)$ là

**A.** $SI$ ($I$ là giao điểm của $AC$ và $BM$). **B.** $SJ$ ($J$ là giao điểm của $AM$ và $BD$).

**C.** $SO$ ($O$ là giao điểm của $AC$ và $BD$). **D.** $SP$ ($P$ là giao điểm của $AB$ và $CD$).

**Lời giải**

. . . . . .

.....

**Câu 6.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm $O$. Giao tuyến của hai mặt phẳng $(SAC)$ và $(SBD)$ là

**A.** $SO$. **B.** $SC$. **C.** $SD$. **D.** $SA$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 7.** Cho bốn điểm $A, B, C, D$ không đồng phẳng. Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm của $AC$ và $BC$. Trên đoạn $BD$ lấy điểm $P$ sao cho $BP = 2PD$. Giao điểm của đường thẳng $CD$ và mặt phẳng $(MNP)$ là giao điểm của

**A.** $CD$ và $NP$. **B.** $CD$ và $MN$. **C.** $CD$ và $MP$. **D.** $NP$ và $AP$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 8.** Trong mặt phẳng $(\alpha)$ cho tứ giác $ABCD$, điểm $E \notin (\alpha)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tạo bởi ba trong năm điểm $A, B, C, D, E$?

**A.** 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 6.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....

**Câu 9.** Cho tứ diện $ABCD$. Các cạnh $AC$, $BD$, $AB$, $CD$, $AD$, $BC$ có trung điểm lần lượt là $M$, $N$, $P$, $Q$, $R$, $S$. Bốn điểm nào sau đây **không** cùng thuộc một mặt phẳng?

**A.** $M, P, R, S$. **B.** $M, N, P, Q$. **C.** $M, R, S, N$. **D.** $P, Q, R, S$.

Lời giải

**Câu 10.** Cho tứ diện $ABCD$. $G$ là trọng tâm tam giác $BCD$. Giao tuyến của hai mặt phẳng $(ACD)$ và $(GAB)$ là

**A.** $AN$, $N$ là trung điểm $CD$. **B.** $AM$, $M$ là trung điểm $AB$.

**C.** $AH$, $H$ là hình chiếu của $B$ trên $CD$. **D.** $AK$, $K$ là hình chiếu của $C$ trên $BD$.

Lời giải

**Câu 11.** Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi $M$ nằm trong tam giác $SAB$, $N$ thuộc đoạn $BC$. Giao tuyến của $(SMN)$ và $(ABC)$ là

**A.** $NA$. **B.** $NE$ với $E = SM \cap AB$.

**C.** $NF$ với $F = SM \cap AC$. **D.** $NK$ với $K$ nằm trong tam giác $ABC$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 12.** Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi $H$, $K$ lần lượt là hai điểm trên hai cạnh $SA$, $SC$ ($H \neq A$, $H \neq S$ và $K \neq S$, $K \neq C$) sao cho $HK$ không song song với $AC$. Gọi $I$ là trung điểm của $BC$. Giao điểm của đường thẳng $BK$ và mặt phẳng $(SAI)$ là

**A.** $J$ với $J = SI \cap BK$.

**B.** $J$ với $J = SI \cap BH$.

**C.** $J$ với $J = SI \cap HK$.

**D.** $J$ với $J = SI \cap HK$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 13.** Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi $M$ là trung điểm $SA$, $N$ và $P$ lần lượt là điểm bất kì trên cạnh $SB$, $SC$ (không trùng với trung điểm và hai đầu mút của đoạn thẳng tương ứng). Giao điểm của $MN$ với $(ABC)$ là

**A.** Giao điểm của $MN$ với $BC$.

**B.** Giao điểm của $MP$ với $BC$.

**C.** Giao điểm của $MN$ với $AB$.

**D.** Giao điểm của $MP$ với $AC$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 14.** Cho tứ diện $ABCD$. Lấy điểm $M$ sao cho $AM = 2BM$ và $N$ là trung điểm $AD$. Gọi $O$ là một điểm thuộc miền trong của $\triangle BCD$ và giả sử $MN$ cắt $DB$ tại $F$. Giao điểm của $BC$ với $(OMN)$ là

**A.** Giao điểm của $BC$ với $OM$.
**B.** Giao điểm của $BC$ với $MN$.
**C.** Giao điểm của $BC$ với $OF$.
**D.** Giao điểm của $BC$ với $ON$.

**Lời giải**

**Câu 15.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành. Điểm $M$ thuộc cạnh $SC$ sao cho $SM = 3MC$, $N$ là giao điểm của $SD$ và $(MAB)$. Gọi $O$ là giao điểm của $AC$ và $BD$. Khi đó ba đường thẳng nào đồng quy?

**A.** $AB, MN, CD$.
**B.** $SO, BD, AM$.
**C.** $SO, AM, BN$.
**D.** $SO, AC, BN$.

**Lời giải**

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Câu 1. D | Câu 2. C | Câu 3. C | Câu 4. C | Câu 5. A | Câu 6. A | Câu 7. A |
| Câu 8. A | Câu 9. A | Câu 10. A | Câu 11. B | Câu 12. A | Câu 13. C | Câu 14. C |
| Câu 15. C | | | | | | |

## PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

**Câu 1.** Cho tứ diện $SABC$. Gọi $M$ và $N$ lần lượt là hai điểm trên hai cạnh $AB$ và $BC$ sao cho $MN$ không song song với $AC$. Khi đó

**a)** Đường thẳng $MN$ cắt đường thẳng $AC$.

**b)** Giao điểm của đường thẳng $MN$ và mặt phẳng $(SAC)$ là giao điểm của $MN$ và $AC$.

**c)** Giao tuyến của hai mặt phẳng $(SMN)$ và $(SAC)$ là đường thẳng đi qua giao điểm của $MN$ và $AC$.

**d)** Giao tuyến của hai mặt phẳng $(SAN)$ và $(SCM)$ là đường thẳng đi qua giao điểm của $MN$ và $AC$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 2.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $I$, $J$ lần lượt là trung điểm của $AD$, $BC$, $M$ là một điểm trên cạnh $AB$, $N$ là một điểm trên cạnh $AC$ sao cho $MN$ không song song $BC$. Khi đó

**a)** $ND$ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(MND)$, $(ADC)$.

**b)** $BI$ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(BCI)$, $(ABD)$.

**c)** $IJ$ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(IBC)$, $(JAD)$.

**d)** Giao tuyến của hai mặt phẳng $(IBC)$, $(DMN)$ song song với đường thẳng $IJ$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi $O$ là giao điểm của $AC$ và $BD$; gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $SB$, $SD$; điểm $P$ thuộc đoạn $SC$ và không là trung điểm

của $SC$.

**a)** Giao tuyến của hai mặt phẳng $(SAC)$ và $(SBD)$ là $SO$.

**b)** Giao điểm $E$ của đường thẳng $SO$ và $(MNP)$ là giao điểm của $MN$ và $SO$.

**c)** Giao điểm $Q$ của đường thẳng $SA$ và $(MNP)$ là giao điểm của $PE$ và $SO$.

**d)** Gọi $I$, $J$, $K$ lần lượt là giao điểm của $QM$ và $AB$, $QP$ và $AC$, $QN$ và $AD$. Khi đó $I$, $J$, $K$ thẳng hàng.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $SA$, $SB$, $O$ là giao điểm của $AC$ và $BD$.

**a)** Giao điểm của đường thẳng $SA$ và $(ABCD)$ là điểm $D$.

**b)** Giao điểm của đường thẳng $BD$ và $(SAC)$ là trung điểm của đoạn thẳng $AC$.

**c)** Giao điểm của đường thẳng $SO$ và $(ABNM)$ là điểm $D$.

**d)** Gọi $I$ giao điểm của $SO$ và mặt phẳng $(MNCD)$. Khi đó $SI = 2IO$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 5.** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân $(AD \parallel BC, AD > BC)$. Gọi $I$ là giao điểm của $AB$ và $DC$. Gọi $O$ là giao điểm của $AC$ và $BD$. Gọi $M$, $K$ lần lượt là trung điểm của $SC$ và $AD$.

**a)** Ba điểm $S$, $O$, $I$ thẳng hàng.

**b)** Ba điểm $K$, $O$, $I$ thẳng hàng.

**c)** $DM$ cắt mặt phẳng $(SAB)$ tại $J$, khi đó $S$, $J$, $I$ thẳng hàng.

**d)** Mặt phẳng $(\alpha)$ qua $M$ cắt các cạnh $SA$, $SB$, $SD$ lần lượt tại $P$, $N$, $Q$ thì $SO$, $MP$, $NQ$ đồng quy.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

**BẢNG ĐÁP ÁN**

| | | |
|---|---|---|
| **Câu 1.** a Đ b Đ c Đ d S | **Câu 2.** a Đ b Đ c Đ d S | **Câu 3.** a Đ b Đ c S d Đ |
| **Câu 4.** a S b Đ c S d Đ | **Câu 5.** a S b Đ c Đ d Đ | |

## PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $G$, $J$ lần lượt là trọng tâm $\triangle ABD$, $\triangle ACD$. Gọi $d$ là giao tuyến của mặt phẳng $(AGJ)$ và $(BCD)$. Biết $\triangle BCD$ là tam giác đều cạnh bằng $\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ $D$ đến đường thẳng $d$. KQ: _____

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm $O$. Gọi $M$ là trung điểm $SC$ và $I$ là giao điểm của $AM$ và mặt phẳng $(SBD)$. Biết rằng $\triangle SAC$ vuông tại $S$ và $AC = 6$. Tính độ dài đoạn $OI$. KQ: _____

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 3.** Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 1. Gọi $I$, $J$ lần lượt là trung điểm của $AC$, $BC$, $K$ là một điểm trên cạnh $BD$ sao cho $KB = 2KD$. Tính diện tích của thiết diện tạo bởi $(IJK)$ và tứ diện $ABCD$. (làm tròn đến hàng phần trăm) KQ: _____

**Lời giải**

.....

.....

.....

**Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm $O$, cạnh bằng $a$, $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$. Điểm $M$ là trung điểm $SC$. Gọi $N$ giao điểm của đường thẳng $SD$ với mặt phẳng $(ABM)$. Tính tỉ số $\dfrac{SN}{SD}$ KQ: [ ]

**Lời giải**

**Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác vuông cân tại $A$ và $AB = 2$. Lấy điểm $M$ là trung điểm $SB$, lấy điểm $E$ đối xứng với $B$ qua $C$, $N$ là giao điểm của $SC$ và $BE$. Lấy điểm $F$ đối xứng với $C$ qua $A$, đường thẳng $NF$ cắt $SA$ tại $P$. Trong mặt phẳng $(SAB)$ đường thẳng $MP$ cắt $AB$ tại $G$. Tính tổng $EG + GF$ (làm tròn đến hàng phần trăm) KQ: [ ]

**Lời giải**

**Câu 6.** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, gọi $O$ là giao điểm của hai đường chéo $AC$ và $BD$. Gọi $M$, $P$ lần lượt là trung điểm $SA$ và $SC$, một mặt phẳng $(\alpha)$ qua $MP$ cắt $SB$, $SD$ lần lượt tại $N$

và $Q$. Gọi $I$ là giao điểm $MP$ và $NQ$. Tính tỉ số $\dfrac{SI}{IO}$ KQ:

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Câu 1.** 0,75 | **Câu 2.** 1 | **Câu 3.** 0,25 | **Câu 4.** 0,5 | **Câu 5.** 6,32 |
| **Câu 6.** 1 | | | | |

# BÀI 11. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

## A Lý thuyết

### 1 Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian

**Định nghĩa 1**

- Hai đường thẳng gọi là đồng phẳng nếu chúng cùng nằm trong một mặt phẳng.
- Hai đường thẳng chéo nhau nếu chúng không đồng phẳng.
- Hai đường thẳng song song nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung.

***Chú ý***

*a) Có đúng một mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song.*

*b) $a \parallel b \Leftrightarrow a$ và $b$ cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.*

*c) $a$ cắt $b$ hay $a \cap b \Leftrightarrow a$ và $b$ cùng nằm trong một mặt phẳng và có một điểm chung duy nhất.*

*d) $a \equiv b \Leftrightarrow a$ và $b$ cùng nằm trong một mặt phẳng và có từ hai điểm chung trở lên.*

*e) $a$ chéo $b \Leftrightarrow a$ và $b$ không cùng nằm trong một mặt phẳng.*

### 2 Tính chất cơ bản về 2 đường thẳng song song

**Định lý 1**

Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.

**Nhận xét.** *Ta có thêm một cách để xác định mặt phẳng như sau:*
*Hai đường thẳng song song $a$ và $b$ xác định nên một mặt phẳng ký hiệu $(a,b)$.*

**Định lý 2**

Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song đường thẳng đã cho.

**Hệ quả 1.** Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

**Định lý 3**

Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

# B Các dạng bài tập

## Dạng 1. Chứng minh hai đường song song

Ta có thể dùng một trong các cách sau:

- **Cách 1:** Xét mặt phẳng chứa $a$, $b$. Dùng các tính chất đường trung bình, Định lý Thales đảo,.... để chứng minh $a \parallel b$.
- **Cách 2:** Dùng tính chất bắc cầu $\begin{cases} a \parallel c \\ b \parallel c \end{cases} \Rightarrow a \parallel b$.
- **Cách 3:** Dùng định lý $\begin{cases} a \parallel b \\ a \subset (\alpha), b \subset (\beta) \Rightarrow \\ (\alpha) \cap (\beta) = c \end{cases} \left[\begin{array}{l} a \parallel b \parallel c \\ c \equiv a \\ c \equiv b \end{array}\right.$

**Ví dụ 1.** Cho tứ diện $ABCD$ có $M$, $N$, $P$, $Q$ lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng $AB$, $CD$, $BC$, $AD$. Chứng minh rằng tứ giác $MPNQ$ là hình bình hành.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 2.** Cho tứ diện $ABCD$ có $I$, $J$ lần lượt là trọng tâm của tam giác $ABC$, $ABD$. Chứng minh rằng $IJ \parallel CD$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $M$, $N$, $P$, $Q$ lần lượt là các điểm nằm nằm trên các cạnh $BC$, $SC$, $SD$, $AD$ sao cho $MN \parallel BS$, $NP \parallel CD$, $MQ \parallel CD$. Chứng minh rằng $PQ \parallel SA$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 4.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $M, N, P, Q, R, S$ lần lượt là trung điểm của $AB, CD, BC, AD, AC, BD$. Chứng minh $MPNQ$ là hình bình hành. Từ đó suy ra ba đoạn $MN, PQ, RS$ cắt nhau tại trung điểm $G$ của mỗi đoạn.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thang với đáy lớn $AB$. Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm của $SA, SB$. Gọi $P$ là giao điểm của $SC$ và $(ADN)$, $I$ là giao điểm của $AN$ và $DP$. Chứng minh rằng $SI \parallel CD$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

## Dạng 2. Giao tuyến của 2 mặt chứa 2 đường thẳng song song

Thông thường tiến hành các phương pháp sau:

- **Bước 1:** Xác định điểm $S \in (\alpha) \cap (\beta)$ ($S$ là một điểm chung của $(\alpha)$ và $(\beta)$)
- **Bước 2:** Xác định đường thẳng $a \subset (\alpha)$ và đường thẳng $b \subset (\beta)$ sao cho $a \parallel b$.
- **Bước 3:** Kết luận $(\alpha) \cap (\beta) = Sx$ với $Sx$ là đường thẳng đi qua điểm $S$ và $Sx \parallel a \parallel b$.

**Ví dụ 6.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng $(SAB)$ và $(SCD)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 7.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy điểm $M$ thuộc cạnh $SA$. Gọi $E$ và $F$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $BC$. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng $(MEF)$ và $(SAC)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 8.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Điểm $M$ thuộc cạnh $SA$, điểm $E$ và $F$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $BC$. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng

a) $(SAB)$ và $(SCD)$.

b) $(MBC)$ và $(SAD)$.

c) $(MEF)$ và $(SAC)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$. Mặt đáy là hình thang có cạnh đáy lớn $AD$, $AB$ cắt $CD$ tại $K$, điểm $M$ thuộc cạnh $SD$.

a) Xác định giao tuyến $(d)$ của $(SAD)$ và $(SBC)$.

b) Tìm giao điểm $N$ của $KM$ và $(SBC)$.

c) Chứng minh rằng $AM$, $BN$, $(d)$ đồng quy.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

### Dạng 3. Giao điểm sử dụng giao tuyến song song

- **Bước 1.** Xác định giao tuyến song song $Sx$.
- **Bước 2.** Giao tuyến $Sx$ cắt mặt đang xét tại 1 điểm.
- **Bước 3.** Kết luận giao điểm cần tìm.

⚠ *Thông thường "S" sẽ nằm trong mặt phẳng còn lại.*

**Ví dụ 10.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Trên đoạn $SA$ lấy điểm $M$ sao cho $SM = \frac{2}{3}SA$, trên đoạn $SB$ lấy điểm $N$ sao cho $SN = 2NB$. Điểm $P$ nằm trên cạnh $SC$ và không trùng với $S$.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $(MNP)$ và $(SCD)$.

b) Tìm giao điểm của $SD$ và $(MNP)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 11.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $M$ là điểm thuộc cạnh $SA$ ($M \neq A$, $M \neq S$). Tìm giao điểm $K$ của $BM$ với mặt phẳng $(SCD)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 12.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đạy $ABCD$ là hình bình hành. Trên cạnh $BC$, $AD$, $SD$ lần lượt lấy các điểm $I$, $J$, $K$ sao cho $\dfrac{BI}{BC} = \dfrac{AJ}{AD} = \dfrac{SK}{SD}$. Tìm giao điểm của $SC$ với mặt phẳng $(IJK)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

# C Bài tập rèn luyện

## PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1.** Chọn khẳng định đúng

**A.** Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.

**B.** Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau thì song song.

**C.** Hai đường thẳng không cùng nằm trên một mặt phẳng thì chéo nhau.

**D.** Hai đường thẳng không có điểm chung thì song song với nhau.

**Lời giải**

**Câu 2.** Cho hình tứ diện $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $AB$ và $CD$ cắt nhau.

**B.** $AB$ và $CD$ chéo nhau.

**C.** $AB$ và $CD$ song song.

**D.** Tồn tại một mặt phẳng chứa $AB$ và $CD$.

**Lời giải**

**Câu 3.** Chọn khẳng định **sai**.

**A.** Hai đường chéo nhau thì không có điểm chung.

**B.** Hai đường thẳng không có điểm chung thì không chéo.

**C.** Hai đường thẳng chéo nhau thì không cùng nằm trên bất kì mặt nào.

**D.** Hai đường thẳng có từ 2 điểm chung thì trùng nhau.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 4.** Cho ba mặt phẳng phân biệt cắt nhau từng đôi một theo ba giao tuyến $d_1$, $d_2$, $d_3$, biết $d_1$ song song với $d_2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $d_1$, $d_3$ chéo nhau.
**B.** $d_1$, $d_3$ cắt nhau.
**C.** $d_1$, $d_3$ song song với nhau.
**D.** $d_1$, $d_3$ trùng nhau.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 5.** Cho hai đường thẳng $a$, $b$ chéo nhau. Một đường thẳng $c$ song song với $a$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $b$ và $c$ song song.
**B.** $b$ và $c$ chéo nhau hoặc cắt nhau.
**C.** $b$ và $c$ cắt nhau.
**D.** $b$ và $c$ chéo nhau.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 6.** Cho hai đường thẳng phân biệt không có điểm chung cùng nằm trong một mặt phẳng thì hai đường thẳng đó

**A.** song song. **B.** chéo nhau. **C.** cắt nhau. **D.** trùng nhau.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 7.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $d$ là giao tuyến của mặt phẳng $(SAD)$ và $(SBC)$. Tìm mệnh đề đúng

**A.** $d$ qua $S$ và song song với $BC$. **B.** $d$ qua $S$ và song song với $AB$.

**C.** $d$ qua $S$ và song song với $DC$. **D.** $d$ qua $S$ và song song với $BD$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 8.** Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm $SA$, $SC$ và $P$ nằm trên cạnh $AB$ sao cho $AB = 3AP$. Gọi $Q$ là giao điểm của $BC$ và mặt phẳng $(MNP)$. Khi đó tỉ số $\dfrac{BQ}{CQ}$ bằng

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Câu 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm $M$ thuộc cạnh $SC$ sao cho $SM = 3MC$, $N$ là giao điểm của $SD$ và $(MAB)$. Khi đó hai đường thẳng $CD$ và $MN$ là hai đường thẳng

**A.** song song. **B.** chéo nhau. **C.** cắt nhau. **D.** trùng nhau.

**Lời giải**

**Câu 10.** Cho các mệnh đề sau:

(I) Hai đường thẳng song song với nhau thì đồng phẳng.

(II) Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.

(III) Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.

(IV) Hai đường thẳng chéo nhau thì không đồng phẳng.

Có bao nhiêu mệnh đề đúng?

**A.** 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

**Lời giải**

**Câu 11.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $SA$, $SC$. Gọi $d$ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(BMN)$ và $(ACD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $d$ qua $D$ và song song với $AC$.
**B.** $d$ qua $B$ và song song với $AC$.
**C.** $d$ qua hai điểm $A$ và $C$.
**D.** $d$ qua hai điểm $B$ và $D$.

**Lời giải**

**Câu 12.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi $M$ là một điểm trên cạnh $SC$ ($M \neq S$ và $M \neq C$). Gọi $d$ là đường thẳng qua điểm $S$ và song song với $AB$, $d'$ là đường thẳng qua điểm $S$ và song song với $AD$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $BM$ không cắt mặt phẳng $(SAD)$.
**B.** $BM$ cắt mặt phẳng $(SAD)$ tại một điểm thuộc $SD$.
**C.** $BM$ cắt mặt phẳng $(SAD)$ tại một điểm thuộc $d$.
**D.** $BM$ cắt mặt phẳng $(SAD)$ tại một điểm thuộc $d'$.

**Lời giải**

.....

**Câu 13.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi $I$, $J$, $E$, $F$ lần lượt là trung điểm $SA$, $SB$, $SC$, $SD$. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào không song song với $IJ$?

**A.** $EF$. **B.** $DC$. **C.** $AD$. **D.** $AB$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 14.** Cho tứ diện $ABCD$. Lấy điểm $M$ thuộc cạnh $BC$ sao cho $MC = 2MB$. Gọi $N$, $P$ lần lượt là trung điểm của $BD$ và $AD$. Gọi $Q$ là giao điểm của $AC$ với mặt phẳng $(MNP)$. Tính $\dfrac{QC}{QA}$.

**A.** $\dfrac{QC}{QA} = \dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{QC}{QA} = \dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{QC}{QA} = 2$. **D.** $\dfrac{QC}{QA} = \dfrac{5}{2}$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 15.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $I$, $J$ lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABC$, $ABD$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $\begin{cases} IJ \parallel AB \\ IJ = \dfrac{1}{3}AB \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} IJ \parallel AB \\ IJ = \dfrac{2}{3}AB \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} IJ \parallel CD \\ IJ = \dfrac{1}{3}CD \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} IJ \parallel CD \\ IJ = \dfrac{2}{3}CD \end{cases}$.

**Lời giải**

.....
.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Câu 1. C | Câu 2. B | Câu 3. B | Câu 4. C | Câu 5. B | Câu 6. A | Câu 7. A |
| Câu 8. B | Câu 9. A | Câu 10. B | Câu 11. B | Câu 12. D | Câu 13. C | Câu 14. C |
| Câu 15. C | | | | | | |

## PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

**Câu 1.** Cho chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm $O$. $M$ , $N$ lần lượt là trung điểm của $SA$, $SB$.

**a)** $MN$ song song với $AB$.

**b)** $MN$ song song với $CD$.

**c)** $MO$ và $SD$ cắt nhau.

**d)** $NO$ và $SC$ cắt nhau.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm $O$, $I$ là trung điểm của $SC$. Xét các mệnh đề

**a)** Đường thẳng $IO$ song song với $SA$.

**b)** Mặt phẳng $(IBD)$ cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là một tứ giác.

**c)** Giao điểm của đường thẳng $AI$ với mặt phẳng $(SBD)$ là trọng tâm của tam giác $(SBD)$.

**d)** Giao tuyến của hai mặt phẳng $(IBD)$ và $(SAC)$ là $IO$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi $I$, $J$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AD$,$BC$ và $G$ là trọng tâm của tam giác $SAB$. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng $(SAB)$ và $(IJG)$.

**a)** Giao tuyến của hai mặt phẳng $(SAB)$ và $(SCD)$ là đường thẳng qua $S$ và song song với $AB$.

**b)** Giao tuyến của hai mặt phẳng $(SAC)$ và $(SBD)$ là đường thẳng qua $S$ và song song với $AC$.

**c)** Giao tuyến của hai mặt phẳng $(SAB)$ và $(IJG)$ là đường thẳng qua $G$ và song song với $CD$.

**d)** $M$ trên $SD$ sao cho $SM = \frac{2}{3}SD$. Giao tuyến của $(CGM)$ và $(SBC)$ là đường thẳng $CB$.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm $O$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $SA$, $SC$.

**a)** $MN$ cắt mặt phẳng $(SBD)$.

**b)** $SB$ cắt mặt phẳng $(MCD)$.

**c)** $SD$ cắt mặt phẳng $(MBC)$.

**d)** $BN$ cắt mặt phẳng $(SAD)$.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có đáy lớn $AB$ và $AB = 2CD$. Gọi $O$ là giao điểm của $AC$ và $BD$, $I$ là trung điểm của $SA$, $G$ là trọng tâm $\triangle SBC$ và $E \in SD$ sao cho $3SE = 2SD$.

**a)** Đường thẳng $SB$ cắt mặt phẳng $(ICD)$.

**b)** Đường thẳng $GO$ cắt mặt phẳng $(SCD)$.

**c)** Đường thẳng $SB$ cắt mặt phẳng $(ACE)$.

**d)** Đường thẳng $BG$ cắt mặt phẳng $(ACE)$.

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

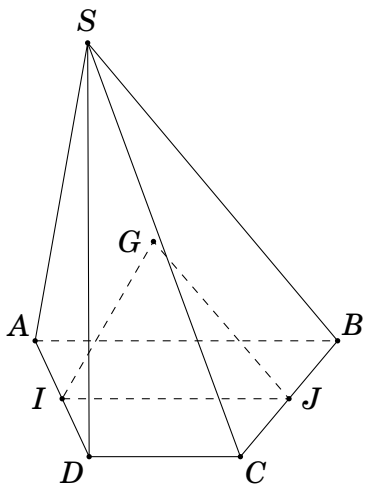
## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | |
|---|---|---|
| **Câu 1.** a Đ b Đ c S d S | **Câu 2.** a Đ b S c Đ d Đ | **Câu 3.** a Đ b S c Đ d Đ |
| **Câu 4.** a Đ b Đ c Đ d Đ | **Câu 5.** a Đ b S c S d Đ | |

## PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang, $AB \parallel CD$. Gọi $I$, $J$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AD$, $BC$ và $G$ là trọng tâm tam giác $SAB$. Mặt phẳng $(GIJ)$ cắt $SA$, $SB$ lần lượt tại $M$, $N$. Biết $AB = kCD$, tìm $k$ để $MNIJ$ là hình bình hành.

KQ: ☐




**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 2.** Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 1. Gọi $I$, $J$ lần lượt là trung điểm của $AC$, $BC$. Gọi $K$ là một điểm trên cạnh $BD$ với $KB = 2KD$. Xác định thiết diện của tứ diện với mặt phẳng $(IJK)$. Tính diện tích thiết diện (kết quả làm tròn đến hàng thứ hai). KQ: ☐

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 2, tâm $O$. Mặt bên $SAB$ là tam giác đều. Ngoài ra $\widehat{SAD} = 90^\circ$. Gọi $Dx$ là đường thẳng song song với $SC$. Gọi giao điểm $I$ của $Dx$ với $(SAB)$. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng $(ACI)$. Tính diện tích thiết diện (Kết quả được làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai). KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $K$ là trung điểm cạnh $SB$. Gọi $E$ là điểm trên $SC$ sao cho $\dfrac{SE}{SC} = \dfrac{1}{3}$, gọi $H$ là giao điểm của $KE$ và $(SAD)$. Tính tỉ số $\dfrac{HE}{HK}$ (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai). KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 5.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $M$, $N$, $I$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $CD$, $AC$, $BD$, $G$ là trung điểm $NI$. Giả sử giao điểm của $GM$ và $(ABD)$ là $F$. Tính tỉ số $\dfrac{FA}{FB}$. KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 6.** Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm $P$, $Q$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $CD$; điểm $R$ nằm trên cạnh $BC$ sao cho $BR = 2RC$. Gọi $S$ là giao điểm của $(PQR)$ và cạnh $AD$. Tính tỉ số $\dfrac{SA}{SD}$.

KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**BẢNG ĐÁP ÁN**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Câu 1.** 3 | **Câu 2.** 0,25 | **Câu 3.** 1,32 | **Câu 4.** 0,67 | **Câu 5.** 1 |
| **Câu 6.** 2 | | | | |

# BÀI 12. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

## A Lý thuyết

### 1 Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng trong không gian

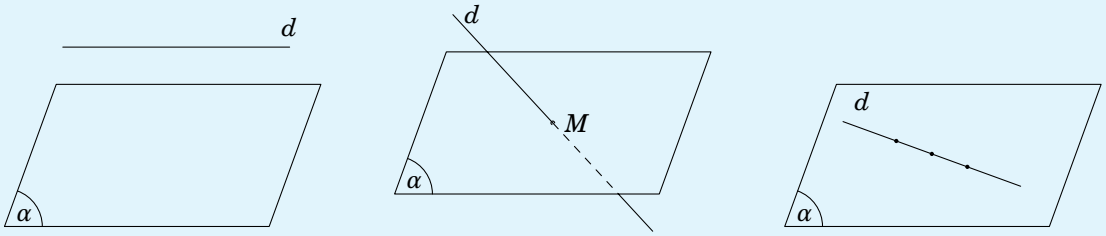
**Định nghĩa 1**

Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng được xét theo số điểm chung của chúng.

**Trường hợp 1.** Đường thẳng $d$ và mặt phẳng $(\alpha)$ không có điểm chung.
Khi đó, ta nói $d$ song song với $(\alpha)$ hay $(\alpha)$ song song với $d$.
Kí hiệu $d \parallel (\alpha)$ hay $(\alpha) \parallel d$.

**Trường hợp 2.** Đường thẳng $d$ và mặt phẳng $(\alpha)$ có một điểm chung duy nhất $M$.
Khi đó, ta nói $d$ và $(\alpha)$ cắt nhau tại điểm $M$.
Kí hiệu $d \cap (\alpha) = \{M\}$ hay $d \cap (\alpha) = M$.

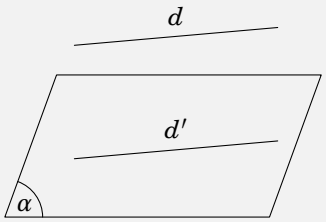
**Trường hợp 3.** Đường thẳng $d$ và mặt phẳng $(\alpha)$ có từ hai điểm chung trở lên.
Khi đó, ta nói $d$ nằm trong $(\alpha)$ hay $(\alpha)$ chứa $d$.
Kí hiệu $d \subset (\alpha)$ hay $(\alpha) \supset d$.




**Định lý 1**

Nếu đường thẳng $d$ không nằm trong mặt phẳng $(\alpha)$ và $d$ song song với đường thẳng $d'$ nằm trong mặt phẳng $(\alpha)$, thì $d$ song song với $(\alpha)$.

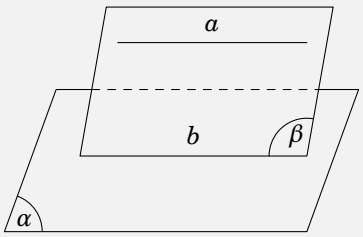
Tóm tắt: $\begin{cases} d \not\subset (\alpha) \\ d \parallel d' \\ d' \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow d \parallel (\alpha).$



**Định lý 2**

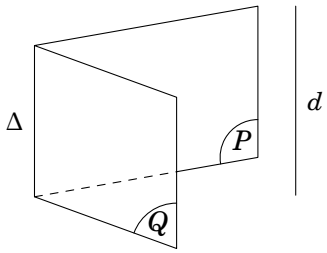
Cho đường thẳng $a$ song song với mặt phẳng $(\alpha)$. Nếu mặt phẳng $(\beta)$ chứa $a$ và cắt $(\alpha)$ theo giao tuyến $b$, thì $b$ song song với $a$.

Tóm tắt $\begin{cases} a \parallel (\alpha) \\ a \subset (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = b \end{cases} \Rightarrow a \parallel b$



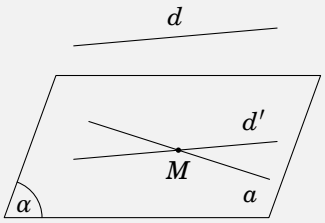

**Hệ quả 1.** Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.

$$\begin{cases} (P) \cap (Q) = \Delta \\ (P) \parallel d, (Q) \parallel d \end{cases} \Rightarrow \Delta \parallel d$$



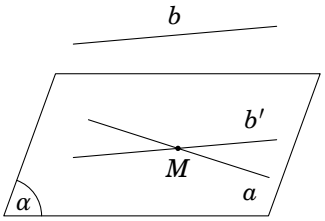

**Định lý 3**

Cho hai đường thẳng chéo nhau, có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng còn lại.




Cho $a$ và $b$ là hai đường thẳng chéo nhau. Cách dựng mặt phẳng $(\alpha)$ chứa đường thẳng $a$ và song song với đường thẳng $b$

- Lấy $M$ thuộc $a$.
- Qua $M$ kẻ đường thẳng $b'$ song song với $b$.
- Mặt phẳng $(\alpha)$ chứa $a$ và $b'$.




## B Các dạng bài tập

### Dạng 1. Chứng minh đường thẳng song song mặt phẳng

Để chứng minh đường thẳng $d$ song song với mặt phẳng $(\alpha)$, ta chứng minh

- Sử dụng định nghĩa
$$\begin{cases} a \parallel b \\ b \subset (\alpha) \Rightarrow a \parallel (\alpha). \\ a \not\subset (\alpha) \end{cases}$$
- Xét mặt phẳng $(\beta)$ chứa $d$.
Tìm giao tuyến $b = (\alpha) \cap (\beta)$.
Chứng minh $d \parallel b \Rightarrow d \parallel (\alpha)$.

**Ví dụ 1.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $M$ là trung điểm của đoạn $AD$.

a) Xác định mặt phẳng chứa $SD$ và song song với $BM$.

b) Xác định mặt phẳng chứa $CD$ và song song với $SB$.

**Lời giải**

**Ví dụ 2.** Cho tứ diện $ABCD$. $G$ là trọng tâm của $\triangle ABD$. $M$ là điểm trên cạnh $BC$ sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh $MG \parallel (ACD)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 3.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trọng tâm của các tam giác $ABC$ và $BCD$. Chứng minh rằng $MN \parallel (ABD)$ và $MN \parallel (ACD)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 4.** Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi $O$, $O'$ lần lượt là tâm của $ABCD$ và $ABEF$. Chứng minh $OO'$ song song với các mặt phẳng $(ADF)$ và $(BCE)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 5.** Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi $M$, $N$ lần lượt là hai điểm trên các cạnh $AE$, $BD$ sao cho $AM = \dfrac{1}{3}AE$, $BN = \dfrac{1}{3}BD$. Chứng minh $MN$ song song với $(CDEF)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 6.** Cho tứ diện $ABCD$ có $G$ là trọng tâm tam giác $ABD$. Trên đoạn $BC$ lấy điểm $M$ sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh rằng đường thẳng $MG$ song song với $(ACD)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 7.** Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi $O$ và $O'$ lần lượt là tâm của hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$.

a) Tìm $(BDF) \cap (ACE)$.

b) Chứng minh $OO' \parallel (ADF)$ và $OO' \parallel (BCE)$.

c) Gọi $M$ và $N$ là trọng tâm $\triangle ABD$ và $\triangle ABF$. Chứng minh $MN \parallel (DCFE)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

### Dạng 2. Giao tuyến của hai mặt chứa một đường song song với mặt

1) Dùng $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (\beta) \\ a \subset (\alpha); b \subset (\beta) \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = Mx \parallel a. \\ a \parallel b \end{cases}$

2) Dùng $\begin{cases} a \parallel (P) \\ a \parallel (Q) \\ (P) \cap (Q) = b \end{cases} \Rightarrow b \parallel a.$

**Ví dụ 8.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $AC$. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $(DBC)$ và $(DMN)$.

**Lời giải**

**Ví dụ 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Điểm $I$ là giao điểm của hai đường chéo $AC$ và $BD$. Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng $(P)$ đi qua $I$ và song song với $AB$, $SC$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 10.** Cho hình chóp $S.ABCD$ là đáy là hình thang, đáy lớn $AD$. Gọi $I$ là trung điểm của $SB$. Gọi $(P)$ là mặt phẳng qua $I$, song song với $SD$, $AC$.

a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng $(P)$ và $(SBD)$.

b) Tìm giao tuyến của mặt phẳng $(P)$ và $(ABCD)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 11.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $I$ và $J$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $CD$, $M$ là một điểm trên đoạn $IJ$. Gọi $(P)$ là mặt phẳng qua $M$, song song với $AB$ và $CD$.

a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng $(P)$ và mặt phẳng $(ICD)$.

b) Xác định thiết diện của tứ diện với mặt phẳng $(P)$. Thiết diện là hình gì?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

## Dạng 3. Thiết diện

- Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ và $(\alpha)$.
  - Nếu $(\alpha)$ cắt hình chóp tại một mặt nào đó hình chóp thì sẽ cắt mặt phẳng này theo một đoạn thẳng gọi là đoạn giao tuyến của $(\alpha)$ và mặt đó.
  - Các đoạn giao tuyến nối tiếp nhau tạo thành một đa giác phẳng gọi là thiết diện.
  - Như vậy muốn tìm thiết diện của hình chóp với $(\alpha)$, ta tìm các giao tuyến (nếu có).
  - Đa giác tạo bởi các giao tuyến là thiết diện cần tìm.
- Sử dụng định lý
  Cho đường thẳng $d$ song song với $(\alpha)$. Nếu $(\beta)$ chứa $d$ và cắt $(\alpha)$ theo giao tuyến $d'$ thì $d' \parallel d$.

**Ví dụ 12.** Cho tứ diện $ABCD$, điểm $M$ thuộc $AC$. Mặt phẳng $(\alpha)$ đi qua $M$ song song với $AB$ và $AD$. Thiết diện của $(\alpha)$ với tứ diện $ABCD$ là hình gì?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 13.** Cho tứ diện $ABCD$. Giả sử $M$ thuộc đoạn thẳng $BC$. Một mặt phẳng $(\alpha)$ qua $M$ song song với $AB$ và $CD$. Thiết diện của $(\alpha)$ và hình tứ diện $ABCD$ là hình gì?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 14.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm $O$, $M$ là trung điểm của $OC$. Gọi $(\alpha)$ là mặt phẳng đi qua $M$ và song song với $SA$, $BD$. Tìm thiết diện của hình chóp với $(\alpha)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 15.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi. Gọi $E$, $F$ lần lượt là trung điểm của $SA$, $SB$. Điểm $M$ bất kì thuộc cạnh $BC$. Tìm thiết diện của hình chóp với $(MEF)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

# C Bài tập rèn luyện

## PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1.** Trong không gian, cho đường thẳng $a$ và mặt phẳng $(P)$. Có bao nhiêu vị trí tương đối giữa đường thẳng $a$ và mặt phẳng $(P)$.

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

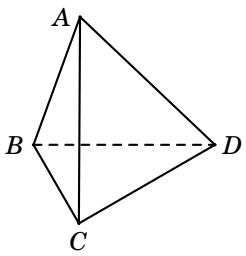
.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Cho tứ diện $ABCD$. Vị trí tương đối giữa đường thẳng $BC$ và mặt phẳng $(BCD)$ là




**A.** $BC \parallel (BCD)$. **B.** $BC \subset (BCD)$.

**C.** $BC \cap (BCD) = A$. **D.** $BC \cap (BCD) = D$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

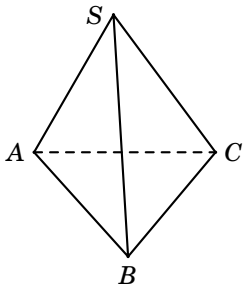
.....

.....

.....

.....

**Câu 3.** Cho hình chóp $S.ABC$. Vị trí tương đối giữa đường thẳng $SB$ và mặt phẳng $(ABC)$ là




**A.** $SB \parallel (ABC)$. **B.** $SB \subset (ABC)$.

**C.** $SB \cap (ABC) = A$. **D.** $SB \cap (ABC) = B$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Vị trí tương đối giữa đường thẳng $AB$ và mặt phẳng $(SCD)$ là

**A.** $AB \cap (SCD) = B$. **B.** $AB \cap (SCD) = S$. **C.** $AB \subset (SCD)$. **D.** $AB \parallel (SCD)$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 5.** Cho hai đường thẳng $a$ và $b$ chéo nhau. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa $a$ và song song với $b$?

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

**Lời giải**

.....

.....

**Câu 6.** Cho đường thẳng $a$ nằm trong mặt phẳng $(\alpha)$. Giả sử $b \not\subset (\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** Nếu $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$.

**B.** Nếu $b$ cắt $(\alpha)$ thì $b$ cắt $a$.

**C.** Nếu $b$ cắt $(\alpha)$ và $(\beta)$ chứa $b$ thì giao tuyến của $(\alpha)$ và $(\beta)$ là đường thẳng cắt cả $a$ và $b$.

**D.** Nếu $b \parallel a$ thì $b \parallel (\alpha)$.

**Lời giải**

**Câu 7.** Cho tứ diện $ABCD$. Cho các mệnh đề sau

a) $AD \subset (ABC)$. b) $AD \cap (ABC)$. c) $AB \subset (ABC)$. d) $AC \parallel (ABD)$.

Trong các mệnh đề đã cho, có bao nhiêu mệnh đề đúng?

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .

**Câu 8.** Cho tứ diện $ABCD$, gọi $G$ là trọng tâm tam giác $ACD$, $M$ thuộc đoạn $BC$ sao cho $CM = 2MB$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

**A.** $MG \parallel (ABC)$. **B.** $MG \parallel (ABD)$. **C.** $MG \parallel CD$. **D.** $MG \parallel BD$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 9.** Cho tam giác $A'B'C'$, dựng các đường thẳng $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$ sao cho chúng không thuộc mặt phẳng $(A'B'C')$ và lần lượt đi qua các điểm $A'$, $B'$, $C'$. Trên các đường thẳng $d_1$, $d_2$, $d_3$ lần lượt lấy các điểm $A$, $B$, $C$ sao cho $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $AA'$, $B'C'$. Khi đó đường thẳng $AB'$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

**A.** $(BMN)$. **B.** $(C'MN)$. **C.** $(A'CN)$. **D.** $(A'BN)$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 10.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $M$, $N$, $H$ lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng $AB$, $CD$, $SD$. Gọi $I$, $J$ lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng $CN$ và $SH$. Trong các khẳng định sau có bao nhiêu khẳng định đúng?

a) $MN \parallel (SBC)$. b) $AD \parallel (SBC)$. c) $HN \parallel (SBC)$. d) $IJ \parallel (HMN)$.

**A.** 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 11.** Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có $O$ là giao điểm hai đường chéo. Gọi $M$ là trung điểm $SC$. Đường thẳng $OM$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

**A.** $(SAD)$ và $(SBC)$. **B.** $(SAD)$ và $(SBA)$. **C.** $(SBA)$ và $(SCD)$. **D.** $(SAC)$ và $(ABCD)$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 12.** Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm $O$ và $M$, $N$, $E$ lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng $AB$, $CD$, $SA$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

**A.** $MN$ song song với hai mặt phẳng $(SBC)$ và $(SAD)$.

**B.** $SB$ và $SC$ song song với $(MNE)$.

**C.** $ME$ song song với hai mặt phẳng $(SAB)$ và $(SBC)$.

**D.** $EO$ song song với hai mặt phẳng $(SBC)$ và $(SCD)$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 13.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $SAB$, $I$ là trung điểm của $AB$ và $M$ là điểm trên cạnh $AD$ sao cho $AM = \frac{1}{3}AD$. $MG$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

**A.** $(SBC)$. **B.** $(SAD)$. **C.** $(SBD)$. **D.** $(SCD)$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 14.** Cho tứ diện $ABCD$, lấy điểm $M$ là một điểm thuộc miền trong của tam giác $BCD$. Gọi $(\alpha)$ là mặt phẳng qua $M$ và song song với $AC$ và $BD$. Hình tạo bởi các giao tuyến của $(\alpha)$ với các mặt của tứ diện $ABCD$ là hình gì?

**A.** Hình bình hành. **B.** Hình thang. **C.** Hình vuông. **D.** Hình thoi.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 15.** Cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh $AD$ lấy trung điểm $M$, trên đoạn thẳng $BC$ lấy điểm $N$. Gọi $(\alpha)$ là mặt phẳng chứa đường thẳng $MN$ và song song với $CD$ và gọi $(H)$ là hình tạo bởi các giao tuyến của $(\alpha)$ với các mặt của tứ diện. Xác định vị trí của điểm $N$ trên đoạn $BC$ sao cho $(H)$ là một hình bình hành.

**A.** $BN = \frac{1}{2}BC$. **B.** $BN = 2BC$. **C.** $BN = \frac{3}{2}BC$. **D.** $3BN = 2BC$.

## Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Câu 1. C | Câu 2. B | Câu 3. D | Câu 4. D | Câu 5. B | Câu 6. D | Câu 7. B |
| Câu 8. B | Câu 9. C | Câu 10. C | Câu 11. B | Câu 12. C | Câu 13. D | Câu 14. A |
| Câu 15. A | | | | | | |

## PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

**Câu 1.** Cho đường thẳng $a$ và mặt phẳng $(\alpha)$.

**a)** Nếu $a \cap (\alpha) = \varnothing$ thì $a \parallel (\alpha)$.

**b)** Nếu $a \parallel b$ và $b \parallel (\alpha)$ thì $a \parallel (\alpha)$ .

**c)** Nếu $a$ và $(\alpha)$ có 2 điểm chung thì $a \subset (\alpha)$.

**d)** Nếu $a \parallel b$ và $b \subset (\alpha)$ thì $a \parallel (\alpha)$.

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

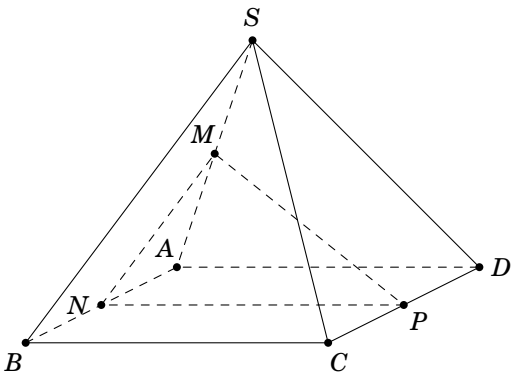
. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

**Câu 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Các điểm $M,N,P$ lần lượt là các trung điểm của các đoạn $SA,AB,CD$ như hình vẽ.




**a)** $SB \parallel (MNP)$ .

**b)** $AD \parallel (MNP)$ .

**c)** Giao tuyến của $(SAD)$ và $(MNP)$ là đường thẳng song song với $AD$.

**d)** Giao tuyến của $(SAB)$ và $(MNP)$ là đường thẳng song song với $MN$.

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .
. . . . . .

**Câu 3.** Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không đồng phẳng có tâm lần lượt là $I$ và $J$.

**a)** $IJ \parallel (ADF)$. **b)** $IJ \parallel (CEB)$. **c)** $IJ \parallel (CEA)$. **d)** $IJ \parallel (CDFE)$.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm $O$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $SA$, $SB$.

**a)** $MN$ song song với mặt phẳng $(SAB)$. **b)** $MO$ song song với mặt phẳng $(SBC)$.

**c)** $NO$ song song với mặt phẳng $(SBD)$. **d)** $CD$ song song với mặt phẳng $(MNO)$.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại $A$ và $D$, $AB = 2CD$. Trên các cạnh $SA$, $SB$, $SD$ lấy các điểm $M$, $N$, $P$ sao cho $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SN}{SB} = \dfrac{SP}{SD} = \dfrac{2}{3}$.

**a)** Giao tuyến của hai mặt phẳng $(SAD)$ và $(SMP)$ là đường thẳng đi qua $S$ và song song với $AD$.

**b)** Giao tuyến của hai mặt phẳng $(SCD)$ và $(SMN)$ là đường thẳng đi qua $S$ và song song với $AB$.

**c)** Giao tuyến của hai mặt phẳng $(CPM)$ và $(ABCD)$ là đường thẳng $CI$ với $I$ là trung điểm của $AB$.

**d)** Giao tuyến của hai mặt phẳng $(CMN)$ và $(PAB)$ là đường thẳng đi qua $Q$ và song song với $MN$ với $Q = PA \cap MD$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

**BẢNG ĐÁP ÁN**

| | | |
|---|---|---|
| **Câu 1.** a Đ b S c Đ d S | **Câu 2.** a Đ b Đ c Đ d S | **Câu 3.** a Đ b Đ c S d Đ |
| **Câu 4.** a S b Đ c S d Đ | **Câu 5.** a S b Đ c Đ d Đ | |

## PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $AD$ và $P$ là điểm trên cạnh $AC$ sao cho $PA = 2PC$. Trong ba đường thẳng $MN$, $NP$, $PM$ có bao nhiêu đường thẳng song song với mặt phẳng $(BCD)$? KQ: [ ]

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 2.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $M$,$N$ lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABC$ và $ABD$. Đường thẳng $MN$ song song với bao nhiêu mặt phẳng trong bốn mặt của tứ diện? KQ: [ ]

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $M$,$N$,$Q$ lần lượt là trung điểm các cạnh $AB$,$CD$,$SA$. Có tất cả bao nhiêu cạnh của hình chóp song song với mặt phẳng $(MNQ)$ KQ: [ ]

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....

**Câu 4.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $G_1$, $G_2$ lần lượt là trọng tâm tam giác $BCD$ và $ACD$. Khi đó đoạn thẳng $G_1G_2$ song song với bao nhiêu mặt của tứ diện $ABCD$. KQ: [ ]

**Lời giải**

**Câu 5.** Cho tứ diện $ABCD$ và điểm $M$ là trung điểm $AB$. Gọi $(\alpha)$ là mặt phẳng qua $M$, song song với hai đường thẳng $BC$ và $AD$. Gọi $N$, $P$, $Q$ lần lượt là giao điểm của mặt phẳng $(\alpha)$ với các cạnh $AC, CD$ và $DB$. Biết khi $AD = kBC$ thì $MNPQ$ là hình thoi. Hãy xác định giá trị của $k$, $(k \in \mathbb{R}, k > 0)$. KQ: [ ]

**Lời giải**

**Câu 6.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 10. Gọi $M$ là điểm trên $SA$ sao cho $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{2}{3}$. Một mặt phẳng $(\alpha)$ đi qua $M$ song song với $AB$ và $CD$, cắt hình chóp theo một tứ giác. Hãy xác định diện tích của tứ giác đó (làm tròn tới hàng phần mười). KQ: [ ]

## Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Câu 1.** 1 | **Câu 2.** 2 | **Câu 3.** 4 | **Câu 4.** 2 | **Câu 5.** 1 |
| **Câu 6.** 44,4 | | | | |

# BÀI 13. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

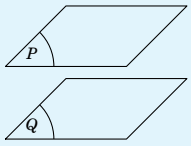
## A Lý thuyết

### 1 Định nghĩa

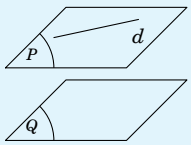
**Định nghĩa 1**

Hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$ được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

**Ký hiệu:** $(P) \parallel (Q)$ hoặc $(Q) \parallel (P)$.




⚠ *Nếu hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$ song song với nhau thì bất kì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này cũng song song với mặt phẳng kia.*

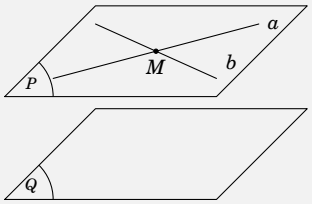



### 2 Tính chất

**Định lý 1**

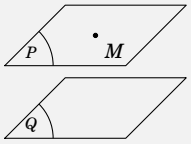
Nếu mặt phẳng $(P)$ chứa hai đường thẳng cắt nhau $a$, $b$ và $a$, $b$ cùng song song với mặt phẳng $(Q)$ thì $(P)$ song song với $(Q)$.

$$\begin{cases} a \subset (P); b \subset (P) \\ a \cap b = \{M\} \\ a \parallel (P) \\ b \parallel (P) \end{cases} \Rightarrow (P) \parallel (Q).$$




**Định lý 2**

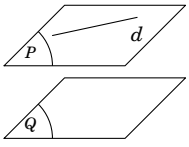
Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.




⚠ *Từ **Định lý 2**, ta có các hệ quả sau:*

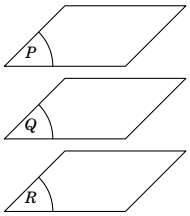
**Hệ quả 1.**

Nếu đường thẳng $d$ song song với mặt phẳng $(Q)$ thì qua $d$ có duy nhất một mặt phẳng song song với mặt phẳng $(Q)$.



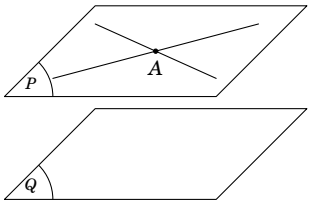

**Hệ quả 2.**

Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.




**Hệ quả 3.**

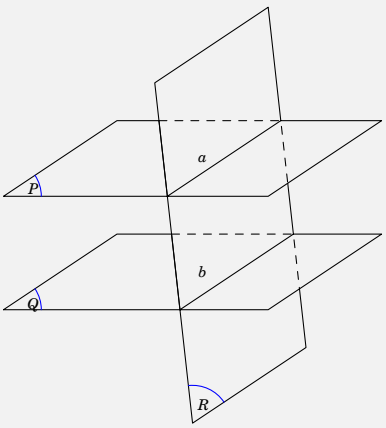
Cho điểm $A$ không nằm trong mặt phẳng $(Q)$. Mọi đường thẳng đi qua điểm $A$ và song song với $(Q)$ đều nằm trong mặt phẳng qua $A$ song song với $(Q)$ là $(P)$.




**Định lý 3**

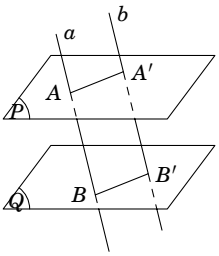
Nếu một mặt phẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì sẽ cắt mặt phẳng còn lại và hai giao tuyến thu được sẽ song song với nhau.

$$\begin{cases} (P) \parallel (Q) \\ a = (R) \cap (P) \Rightarrow a \parallel b. \\ b = (R) \cap (Q) \end{cases}$$




**Hệ quả 4.**

Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.

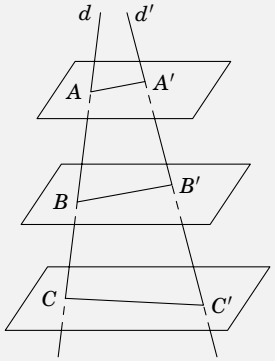



## 3 Định lý Thales trong hình học không gian

**Định lý 4**

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

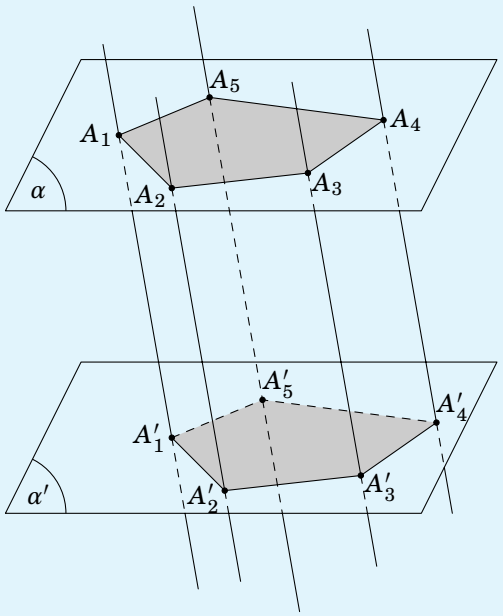
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}.$$



## 4 Hình lăng trụ và hình hộp

**Định nghĩa 2**

Cho hai mặt phẳng song song $(\alpha)$ và $(\alpha')$. Trên $(\alpha)$ cho đa giác lồi $A_1A_2\ldots A_n$. Qua các đỉnh $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ vẽ các đường thẳng đôi một song song và cắt mặt phẳng $(\alpha')$ tại $A'_1$, $A'_2$, …, $A'_n$.




**Hình lăng trụ gồm:**

- Hai đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ và $A'_1A'_2\ldots A'_n$;
- Các hình bình hành $A_1A'_1A_2A'_2$, $A_2A'_2A_3A'_3$, …, $A_nA'_nA_1A'_1$.

**Hình lăng trụ có:**

- Đỉnh: $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ và $A'_1$, $A'_2$, …, $A'_n$;
- Cạnh bên: $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, …, $A_nA'_n$;
- Cạnh đáy: $A_1A_2$, $A_2A_3$, …, $A_nA_1$ và $A'_1A'_2$, $A'_2A'_3$, …, $A'_nA'_1$;
- Mặt đáy: $A_1A_2\ldots A_n$, $A'_1A'_2\ldots A'_n$;
- Mặt bên: $A_1A'_1A_2A'_2$, $A_2A'_2A_3A'_3$, …, $A_nA'_nA_1A'_1$.

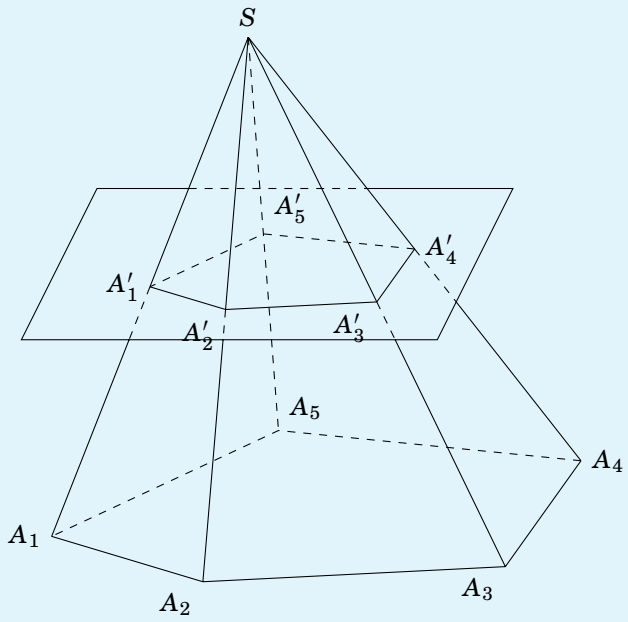
## 5 Hình chóp cụt

**Định nghĩa 3**

Cắt hình chóp bởi mặt phẳng song song với đáy nhưng không đi qua đỉnh ta được hình chóp cụt.

**Tính chất:**

- Hai đáy là hai đa giác có cạnh tương ứng song song, các tỷ số các cặp cạnh tương ứng bằng nhau.
- Các mặt bên là những hình thang.
- Các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng quy tại một điểm.




## B Các dạng bài tập

### Dạng 1. Chứng minh hai mặt song song

Ta có thể dùng một trong các cách sau

a) Trên mặt phẳng này có hai đường thẳng cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng còn lại $\begin{cases} a \subset (\alpha), b \subset (\beta) \\ a \cap b \neq \varnothing \\ a \parallel (\beta), b \parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta).$

b) Hai mặt phẳng cùng song song với mặt phẳng thứ 3 tức là

$$\begin{cases} (\alpha) \neq (\beta) \\ (\alpha) \parallel (\gamma); (\beta) \parallel (\gamma) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta).$$

**Ví dụ 1.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm $O$. Gọi $M,N$ lần lượt là trung điểm của $SA,SD$. Chứng minh $(OMN) \parallel (SBC)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AD = 2BC$. Gọi $E$, $F$, $I$ lần lượt là trung điểm của $SA$, $AD$, $SD$. Chứng minh $(EFB) \parallel (SCD)$, từ đó suy ra $CI \parallel (EFB)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 3.** Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo $AC$ và $BF$ lần lượt lấy các điểm $M$, $N$ sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với $AB$ vẽ từ $M$, $N$ lần lượt cắt $AD$ và $AF$ tại $M'$ và $N'$. Chứng minh

a) $(ADF) \parallel (BCE)$.

b) $(DEF) \parallel (MM'N'N)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 4.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi $E$ là điểm thuộc đoạn $AC'$, $F$ là một điểm trên đoạn $B'D'$, $G$ là một điểm thuộc đoạn $CD'$ sao cho $AE = \frac{1}{3}AC'$, $D'F = \frac{1}{3}D'B$, $CG = \frac{1}{3}CD'$. Gọi $I$, $J$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $CD$ và $A'D'$. Chứng minh rằng $(EFG) \parallel (AIJ)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

### Dạng 2. Tìm giao tuyến của hai mặt, có một mặt song song với mặt khác

Ta có thể dùng một trong các cách sau

a) $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (\gamma) \\ (\alpha) \parallel (\beta) \\ (\beta) \cap (\gamma) = b \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (\gamma) = Mx; Mx \parallel b.$

b) Đưa về dạng thiết diện song song với đường thẳng $\begin{cases} (\alpha) \parallel (\beta) \\ a, b \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow a, b \parallel (\alpha).$

Như vậy thay vì tìm thiết diện song song với mặt phẳng $(\beta)$ thì ta tìm thiết diện song song với các đường thẳng $a$, $b$ nằm trong $(\beta)$.

**Ví dụ 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm $H$. Mặt phẳng $(P)$ đi qua $H$ và song song với $(SAB)$. Tìm giao tuyến của

a) hai mặt phẳng $(P)$ và $(ABCD)$.

b) hai mặt phẳng $(P)$ và $(SBC)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 6.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $M$ là điểm bất kì trên cạnh $AB$, $(\alpha)$ là mặt phẳng đi qua $M$ và song song với $(SBC)$. Tìm giao tuyến của $(\alpha)$ với các mặt của hình chóp.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 7.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi $M$, $N$, $P$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB$, $AD$, $A'D'$. Xác định giao tuyến của $(MNP)$ và $(A'B'C'D')$, $(AA'B'B)$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 3. Định lý Thales trong không gian

Ta dùng một trong hai cách sau

- $\begin{cases} (\alpha) \parallel (\beta) \\ d \cup (\alpha) = A, d \cup (\beta) = B \\ d' \cup (\alpha) = A', d' \cup (\beta) = B' \\ d \parallel d' \end{cases} \Rightarrow AB = A'B'.$

- $\begin{cases} (\alpha) \parallel (\beta) \parallel (\gamma) \\ d \cap (\alpha) = A, d \cap (\beta) = B, d \cap (\gamma) = C \\ d' \cap (\alpha) = A', d' \cap (\beta) = B', d' \cap (\gamma) = C' \end{cases} \Rightarrow \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}.$

**Ví dụ 8.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 12$, $SB = 15$, $SC = 17$. Trên cạnh $SA$ lấy các điểm $M$, $N$ sao cho $SM = 3$, $MN = 5$, $NA = 4$. Gọi $(P)$, $(Q)$ là hai mặt phẳng song song với $(ABC)$ lần lượt đi qua $M$, $N$. Và $(P)$ cắt $SB$, $SC$ tại $M_1$, $M_2$, $(Q)$ cắt $SB$, $SC$ tại $N_1$, $N_2$. Tính độ dài các đoạn thẳng $M_1N_1$ và $M_2N_2$.

**Lời giải**

**Ví dụ 9.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh $a$. Các điểm $M$, $N$ lần lượt trên $AD'$, $BD$ sao cho $AM = DN = x$, $(0 < x < a\sqrt{2})$.

a) Chứng minh khi $x$ biến thiên, đường thẳng $MN$ luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b) Chứng minh khi $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$ thì $MN \parallel A'C$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 10.** Cho tứ điểm $ABCD$, $M$ là một điểm lưu động trên cạnh $AB$; $N$ là điểm lưu động trên cạnh $CD$. Chứng minh rằng trung điểm $I$ của đoạn $MN$ thuộc một mặt phẳng cố định.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 11.** Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm trên hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo $AC$, $BF$ lấy các điểm $M$, $N$ sao cho $MC = 2AM$, $NF = 2BN$. Qua $M$, $N$ lần lượt kẻ các đường thẳng song song với cạnh $AB$, cắt cạnh $AD$, $AF$ theo thứ tự tại $M_1$, $N_1$. Chứng minh rằng:

a) $MN \parallel DE$.

b) $M_1N_1 \parallel (DEF)$.

c) $(MNM_1N_1) \parallel (DEF)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 12.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi $I$, $J$, $K$ lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABC$, $ACC'$, $A'B'C'$. Chứng minh rằng $(IJK) \parallel (BCC'B')$ và $(A'JK) \parallel (AIB')$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

# C Bài tập rèn luyện

## PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1.** Hai mặt phẳng được gọi là song song với nhau nếu

**A.** chúng không có điểm chung.
**B.** chúng có một đường thẳng chung.
**C.** chúng có đúng một điểm chung.
**D.** chúng có ít nhất một điểm chung.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 2.** Mệnh đề nào sau đây là đúng?

**A.** Hình hộp là hình tứ diện.
**B.** Hình tứ diện là hình hộp.
**C.** Hình lập phương là hình hộp.
**D.** Hình hộp là hình lập phương.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 3.** Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

**A.** Qua một điểm bất kỳ có một và chỉ một mặt phẳng song song với một mặt phẳng cho trước.
**B.** Hai mặt phẳng được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.
**C.** Ba mặt phẳng phân biệt đôi một song song với nhau cắt trên hai cát tuyến bất kỳ những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.
**D.** Hai mặt phẳng song song cắt mặt phẳng thứ ba theo hai giao tuyến song song với nhau.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 4.** Cho mặt phẳng $(P)$ chứa hai đường thẳng $a, b$ và mặt phẳng $(Q)$ chứa đường thẳng $c$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

**A.** Nếu $a \parallel c$ thì $(P) \parallel (Q)$.

**B.** Nếu $b \parallel c$ thì $(P) \parallel (Q)$.

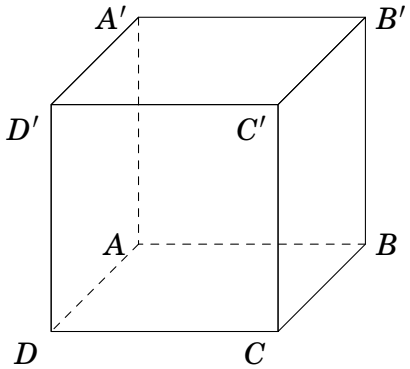
**C.** Nếu $a \parallel (Q)$ và $b \parallel (Q)$ thì $(P) \parallel (Q)$.

**D.** Nếu $a, b$ cắt nhau, $a \parallel (Q)$ và $b \parallel (Q)$ thì $(P) \parallel (Q)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 5.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?




**A.** $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$.

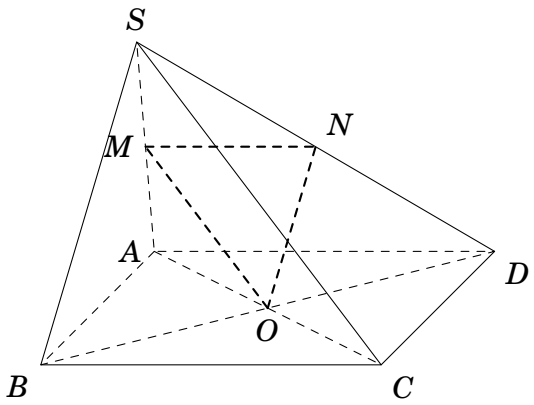
**B.** $(ABB'A') \parallel (DCC'D')$.

**C.** $(ACC'A') \parallel (ABD)$. **D.** $(A'B'C') \parallel (ABD)$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 6.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm $O$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm các cạnh $SA$, $SD$. Mặt phẳng $(OMN)$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

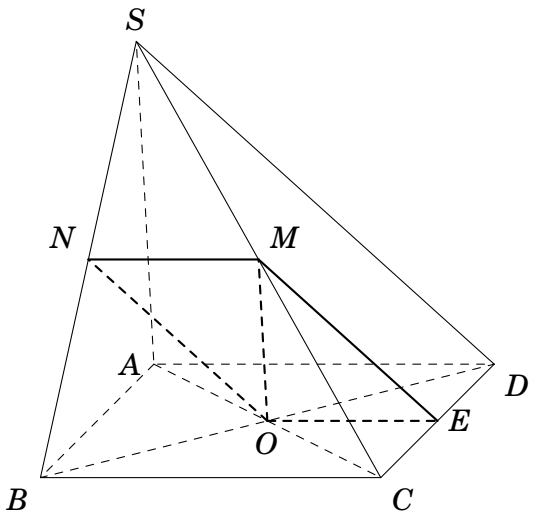



**A.** $(SAD)$. **B.** $(SAC)$. **C.** $(SBD)$. **D.** $(SBC)$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 7.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm $O$. Gọi $M$,$N$,$E$ lần lượt là trung điểm các cạnh $SC$, $SB$, $CD$. Khẳng định nào đúng?




**A.** $(OMN) \parallel (SBD)$. **B.** $(OME) \parallel (SBD)$. **C.** $(SCD) \parallel (SAB)$. **D.** $(OMN) \parallel (SAD)$..

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 8.** Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$. Gọi $O, M, N, P, Q$ lần lượt là trung điểm các cạnh $FD$, $FA$, $FC$, $EB$, $FB$. Khẳng định nào sai?

**A.** $(OMN) \parallel (ABC)$. **B.** $(OMN) \parallel (ACD)$. **C.** $(DMN) \parallel (ACP)$. **D.** $(DMN) \parallel (ACQ)$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 9.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.EFGH$. Gọi $M$, $N$, $O$ lần lượt là trung điểm các cạnh $GH$, $GF$, $BD$. Mặt phẳng $(AFH)$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

**A.** $(OMN)$. **B.** $(GBD)$. **C.** $(AMN)$. **D.** $(BCD)$.

Lời giải

**Câu 10.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.EFGH$. Gọi $O,M,N$ lần lượt là tâm của các hình $ABCD$, $CGHD$, $EFGH$.
Khẳng định nào sau đây là **sai**?

**A.** $(OMN) \parallel (BFC)$. **B.** $(OMN) \parallel (CGF)$. **C.** $(OMN) \parallel (ABE)$. **D.** $(OMN) \parallel (AEH)$.

Lời giải

**Câu 11.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, $AC$ cắt $BD$ tại $O$ và $A'C'$ cắt $B'D'$ tại $O'$. Khi đó mặt phẳng $(AB'D')$ sẽ song song với mặt phẳng nào sau đây?

**A.** $(A'O'C')$. **B.** $(BDA')$. **C.** $(BDC')$. **D.** $(BDC)$.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 12.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $(ABCD)$ với $AB = 2CD$. Gọi $I$, $J$ lần lượt là trung điểm của $SB$ và $AB$. Mặt phẳng nào song song với mặt phẳng $(SAD)$?

**A.** $(BCI)$. **B.** $(BIJ)$. **C.** $(CIJ)$. **D.** $(SLC)$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 13.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm $O$. Gọi $M$,$N$ lần lượt là trung điểm các đoạn $SA$, $SD$. Mặt phẳng $(OMN)$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

**A.** $(ABCD)$. **B.** $(SBC)$. **C.** $(SAB)$. **D.** $(SCD)$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 14.** Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi $I$,$J$,$K$ lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABD$, $ACD$, $ABC$, và $M$, $N$, $P$ lần lượt là trung điểm các cạnh $BD$, $CD$, $BC$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $(DJK) \parallel (ABC)$. **B.** $(IJK) \parallel (BCD)$. **C.** $(KMN) \parallel (ABC)$. **D.** $(IJK) \parallel (AMD)$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 15.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, gọi $I, J, K$ lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABC, ACC'$ và $AB'C'$. Mặt phẳng nào sau đây song song với $(IJK)$?

**A.** $(BC'A)$. **B.** $(ABA')$. **C.** $(BB'C')$. **D.** $(CC'A)$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**BẢNG ĐÁP ÁN**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Câu 1. A | Câu 2. C | Câu 3. A | Câu 4. D | Câu 5. C | Câu 6. D | Câu 7. D |
| Câu 8. D | Câu 9. B | Câu 10. C | Câu 11. C | Câu 12. C | Câu 13. B | Câu 14. B |
| Câu 15. C | | | | | | |

## PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

**Câu 1.** Cho các mệnh đề sau, hãy xét tính đúng-sai:

**a)** Cho $(a)$ và $(b)$ là hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt $(a)$ thì nó cũng cắt $(b)$.

**b)** Hai mặt phẳng phân biệt chứa hai đường thẳng song song cắt nhau theo giao tuyến song song với hai đường thẳng đó.

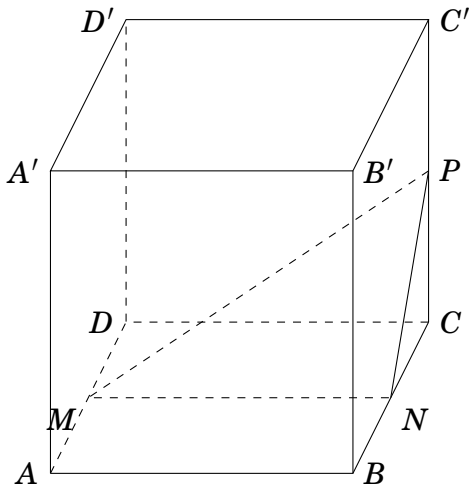
**c)** Một mặt phẳng cắt hai mặt phẳng song song cho trước theo hai giao tuyến thì hai giao tuyến đó song song với nhau.

**d)** Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến thì ba giao tuyến đó phải đồng quy.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 2.** Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có hai đáy là các hình bình hành. Các điểm $M$, $N$, $P$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AD$, $BC$, $CC'$.




**a)** $A'B' \parallel (MNP)$. **b)** $(MNP) \parallel (BC'D')$. **c)** $(MNP) \subset (B'C'D')$. **d)** $DD'$ cắt $(MNP)$.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 3.** Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $I$, $K$, $G$ lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABC$, $A'B'C'$, $ACC'$.

**a)** $BB' \parallel (ACC'A')$. **b)** $(ABC) \parallel (A'B'C')$. **c)** $IG$ cắt $(BCC'B')$. **d)** $(IKG) \parallel (BCC'B')$.

Lời giải

**Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 9$; $SB = 12$; $SC = 15$. Trên cạnh $SA$ lấy các điểm $M$, $N$ sao cho $SM = 4$; $MN = 3$; $NA = 2$. Vẽ hai mặt phẳng song song với mặt phẳng $(ABC)$ lần lượt đi qua $M$, $N$ cắt $SB$ theo thứ tự tại $M'$; $N'$ và cắt $SC$ theo thứ tự tại $M''$; $N''$.

**a)** $SM' = 4$. **b)** $M'N' = 4$. **c)** $M'N' + M''N'' = 9$. **d)** $N''C = \dfrac{10}{3}$.

Lời giải

**Câu 5.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi $G_1$, $G_2$ là trọng tâm của các tam giác $A'BD$; $B'D'C$. Khi đó

**a)** $A'D'CB$ là hình bình hành. **b)** $(A'BD) \parallel (B'D'C)$.

**c)** $G_1, G_2$ cùng thuộc $AC'$. **d)** $G_1G_2 = \dfrac{2}{3}AC'$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | |
|---|---|---|
| **Câu 1.** a Đ b S c Đ d S | **Câu 2.** a Đ b Đ c S d Đ | **Câu 3.** a Đ b Đ c S d Đ |
| **Câu 4.** a S b Đ c Đ d Đ | **Câu 5.** a Đ b Đ c Đ d S | |

## PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Có bao nhiêu khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây

a) Nếu hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng khác thì chúng song song với nhau.

b) Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến thì ba giao tuyến đó đồng quy.

c) Nếu đường thẳng $a$ song song với mặt phẳng $(P)$ thì $a$ song song với một đường thẳng nào đó nằm trong $(P)$.

d) Cho hai đường thẳng $a$, $b$ nằm trong mặt phẳng $(P)$ và hai đường thẳng $a'$, $b'$ nằm trong mặt phẳng $(Q)$. Khi đó, nếu $a \parallel a'$; $b \parallel b'$ thì $(P) \parallel (Q)$.

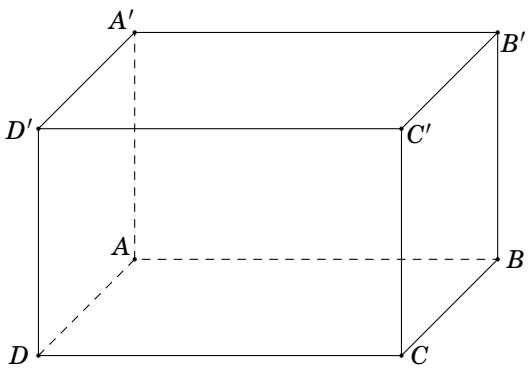
e) Hai mặt phẳng không cắt nhau thì song song.

KQ:

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 2.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Có bao nhiêu kết luận đúng?




a) $AC \parallel B'D'$.

b) $(BB'D') \parallel (ACC')$.

c) $(AA'D) \parallel (BCC')$.

d) $AD'$ cắt $(A'BC')$.

e) $(DD'C) \parallel (AA'B)$.

f) $(ABCD) \parallel (A'D'C'B')$.

KQ:

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm $O$, $AB = 8$ Hai cạnh bên $SA = SB = 6$ Gọi $(\alpha)$ là mặt phẳng qua $O$ và song song với $(SAB)$ Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng $(\alpha)$ có diện tích bằng $a\sqrt{5}$. Khi đó $a$ bằng bao nhiêu? KQ:

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm $O$, cạnh bằng 2. Tam giác $SBD$ đều. Một mặt phẳng $(\alpha)$ song song với $(SBD)$ và qua trung điểm $I$ của đoạn thẳng $AO$. Gọi $S$ là diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng $(\alpha)$ và hình chóp. Tính $S^2$. KQ:

**Lời giải**

**Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, cạnh bên $BC = \sqrt{5}$, hai đáy $AB = 11$, $CD = 7$. Mặt phẳng $(\alpha)$ song song với $(ABCD)$ và cắt cạnh $SO$ tại $I$ sao cho $2SO = 5SI$. Tính diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng $(\alpha)$ và hình chóp. KQ: [ ]

**Lời giải**

**Câu 6.** Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng 1 và $G$ là trọng tâm của tam giác $ABC$. Cắt tứ diện bởi mặt phẳng $(P)$ qua $G$ và song song với mặt phẳng $(BCD)$. Tính diện tích thiết diện thu được (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm). KQ: [ ]

**Lời giải**

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Câu 1.** 1 | **Câu 2.** 3 | **Câu 3.** 6 | **Câu 4.** 3 | **Câu 5.** 1,44 |
| **Câu 6.** 0,19 | | | | |

# BÀI 14. PHÉP CHIẾU SONG SONG

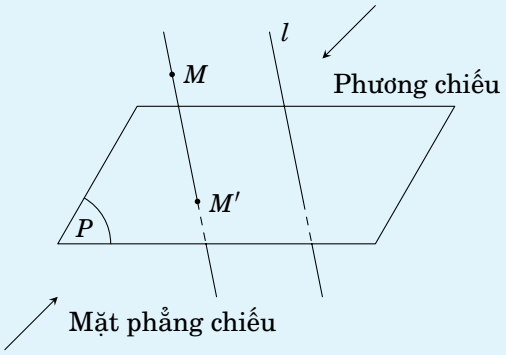
## A Lý thuyết

### 1 Phép chiếu song song

**Định nghĩa 1**

Cho mặt phẳng $(P)$ và một đường thẳng $l$ cắt $(P)$.

- Với mỗi điểm $M$ trong không gian, vẽ đường thẳng qua $M$ và song song hoặc trùng với $l$.
- Phép cho tương ứng mỗi điểm $M$ trong không gian với điểm $M'$ trong $(P)$ được gọi là **phép chiếu song song** lên mặt phẳng $(P)$ theo phương $l$.




**Chú thích:** Trên mặt phẳng $(P)$ theo phương $l$

- Điểm $M'$ được gọi là **hình chiếu song song** của điểm $M$.
- Mặt phẳng $(P)$ được gọi là **mặt phẳng chiếu**.
- $l$ được gọi là **phương chiếu**.

### 2 Tính chất của phép chiếu song song

**Tính chất 1.**

- Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó.
- Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
- Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.
- Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.

### 3 Hình biểu diễn của một số hình không gian trên mặt phẳng

**Định nghĩa 2**

Hình biểu diễn của một hình $H$ trong không gian là hình chiếu song song của $H$ trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó, hoặc là hình đồng dạng với hình chiếu đó.

! Dựa theo tính chất của phép chiếu song song, ta tuân theo các quy tắc khi vẽ hình:

- Nếu trên $H$ có hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau) thì chúng được biểu diễn bằng hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau).
  $\longrightarrow$ Tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng này phải bằng tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng tương ứng trên $H$.
- Nếu hình phẳng nằm trong mặt phẳng không song song với phương chiếu thì:
  - Hình biểu diễn của một đường tròn thường là một elip.
  - Hình biểu diễn của một tam giác (vuông, cân, đều) là một tam giác.
  - Hình biểu diễn của hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành là hình bình hành.

## B Các dạng bài tập

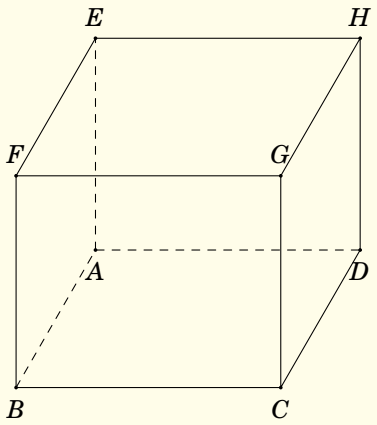
**Dạng 1. Xác định ảnh qua phép chiếu song song**

Dựa theo tính chất của phép chiếu song song, ta tuân theo các quy tắc khi vẽ hình

- Nếu trên $H$ có hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau) thì chúng được biểu diễn bằng hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau).
  $\longrightarrow$ Tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng này phải bằng tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng tương ứng trên $H$.
- Nếu hình phẳng nằm trong mặt phẳng không song song với phương chiếu thì:
  - Hình biểu diễn của một đường tròn thường là một elip.
  - Hình biểu diễn của một tam giác (vuông, cân, đều) là một tam giác.
  - Hình biểu diễn của hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành là hình bình hành.

**Ví dụ 1.**

Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Xác định hình chiếu của điểm $A$ trên mặt phẳng $(CDHG)$ theo phương $BC$ và theo phương $BG$.




**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 2. Xác định hình biểu diễn qua phép chiếu song song

Cho hình $H$ trong không gian.

- Ta gọi tập hợp $P'$ các ảnh $M'$ của tất cả những điểm $M$ thuộc $H$ qua phép chiếu song song theo phương $l$ là hình chiếu song song của $H$ lên mặt phẳng $(P)$.
- Để tìm hình chiếu của một đường thẳng ta tìm hình chiếu của 2 điểm phân biệt trên đường thẳng, hình chiếu là đường thẳng đi qua hai điểm vừa tìm được.
- Để tìm hình chiếu của một đa giác ta tìm hình chiếu của các đỉnh.

**Ví dụ 2.** Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi $I$ là trung điểm của $AB$.

a) Gọi $M$, $N$, $E$ lần lượt là trung điểm của $SA$, $SB$, $SC$. Tìm ảnh của $\triangle MNE$ trong phép chiếu song song trên mặt phẳng $(ABC)$ theo phương $SC$.

b) Tìm ảnh của tam giác $MNE$ trong phép chiếu song song trên $(ABC)$ theo phương trung tuyến $SI$ của $\triangle SAB$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 3.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi $O = AC \cap BD$ và $O' = A'C' \cap B'D'$. Điểm $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $CD$. Qua phép chiếu song song theo phương $AO'$ lên mặt phẳng $(ABCD)$, xác định hình chiếu của tam giác $C'MN$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

## Dạng 3. Bài toán tổng hợp

**Ví dụ 4.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $CD$ và $CC'$. Gọi $\Delta$ là đường thẳng đi qua $M$, đồng thời cắt $AN$ và $A'B$. Gọi $I$, $J$ lần lượt là giao điểm của $\Delta$ với $AN$ và $A'B$. Hãy tính tỉ số $\dfrac{IM}{IJ}$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 5.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định các điểm $M$, $N$ tương ứng trên các đoạn $AC'$, $B'D'$ sao cho $MN$ song song với $BA'$ và tính tỉ số $\dfrac{MA}{MC'}$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

# C Bài tập rèn luyện

## PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hình chiếu của tam giác $A'D'C'$ theo phương $B'B$ lên mặt phẳng $(ABC)$ là hình nào?

**A.** $ADC$. **B.** $ADB$. **C.** $BCD$. **D.** $ABC$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 2.** Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** Hình chiếu song song của một hình chóp cụt có thể là một hình tam giác.

**B.** Hình chiếu song song của một hình chóp cụt có thể là một đoạn thẳng.

**C.** Hình chiếu song song của một hình chóp cụt có thể là một hình chóp cụt.

**D.** Hình chiếu song song của một hình chóp cụt có thể là một điểm.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 3.** Qua phép chiếu song song, tính chất nào không được bảo toàn?

**A.** Chéo nhau. **B.** Đồng quy. **C.** Thẳng hàng. **D.** Song song.

Lời giải

.....

**Câu 4.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

**A.** Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.

**B.** Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau thì song song.

**C.** Hình chiếu song song của một hình vuông là một hình vuông.

**D.** Hình chiếu song song của một lục giác đều là một lục giác đều.

**Lời giải**

**Câu 5.** Qua phép chiếu song song lên mặt phẳng $(P)$, hai đường thẳng $a$ và $b$ có hình chiếu là hai đường thẳng song song $a'$ và $b'$. Khi đó:

**A.** $a$ và $b$ phải song song với nhau.

**B.** $a$ và $b$ phải cắt nhau.

**C.** $a$ và $b$ có thể chéo nhau hoặc song song với nhau.

**D.** $a$ và $b$ không thể song song.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 6.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $G$ là trọng tâm của tam giác $ACD$. Hình chiếu $G'$ của điểm $G$ trên mặt phẳng $(BCD)$ theo phương chiếu $AB$ là

**A.** Trọng tâm của tam giác $BCD$.
**B.** Trung điểm $BC$.
**C.** Trung điểm $CD$.
**D.** Trung điểm $BI$ với $I$ là trung điểm $CD$.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 7.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. $A'$ hình chiếu của $A$ trên $(A'B'C')$ qua phép chiếu song song theo phương là đường thẳng nào?

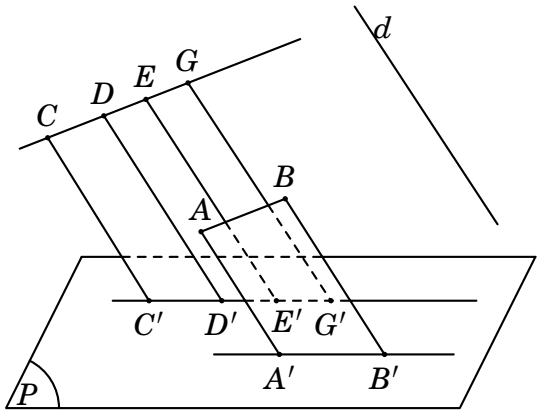
**A.** $CC'$.
**B.** $CA'$.
**C.** $C'A'$.
**D.** $B'A'$.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 8.** Trên hình bên, ta có phép chiếu song song theo phương $d$ và mặt phẳng chiếu $(P)$; $AB \parallel CG$ và $AB = DG$; $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, $E'$, $G'$ lần lượt là hình chiếu của $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $G$ qua phép chiếu nói trên. Khi đó, có bao nhiêu khẳng định đúng trong các mệnh đề sau

(i) $\dfrac{DG}{AB} = \dfrac{D'G'}{A'B'} = 1$. (ii) $\dfrac{C'D'}{D'E'} = \dfrac{CD}{DE}$. (iii) $D'G' = A'B'$.




**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 9.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi $G$ là trọng tâm của tam giác $ABC$. Qua phép chiếu song song đường thẳng $AA'$ mặt phẳng chiếu là $(A'B'C')$ biến $G$ thành $G'$. Tìm mệnh đề đúng?

**A.** $G'$ là trọng tâm tam giác $A'B'C'$. **B.** $G'$ là trung điểm của $A'B'$.

**C.** $G'$ là trực tâm tam giác $A'B'C'$. **D.** $G'$ là trung điểm của $B'C'$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 10.** Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm $O$. Trên cạnh $SB$, $SD$ lần lượt lấy điểm $M$, $N$ sao cho $SM = 2MB$ và $SN = \dfrac{1}{3}SD$. Hình chiếu của $M$, $N$ qua phép chiếu song

song lên mặt phẳng chiếu $(ABCD)$ theo phương của đường thẳng $SO$ lần lượt là $P$, $Q$. Tính tỉ số $\dfrac{OP}{OQ}$.

**A.** 2. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

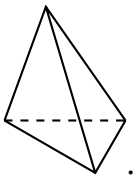
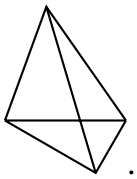
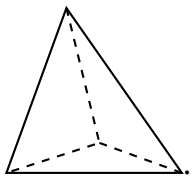
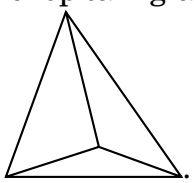
**Lời giải**

**Câu 11.** Hình biểu diễn của hình chữ nhật trong không gian không thể là hình nào trong các hình sau?

**A.** Hình thang. **B.** Hình bình hành. **C.** Hình chữ nhật. **D.** Hình thoi.

**Lời giải**

**Câu 12.** Trong không gian, hình nào không phải là hình biểu diễn của hình chóp tam giác?

**A.**  . **B.**  . **C.**  . **D.**  .

**Lời giải**

**Câu 13.** Hình biểu diễn của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ lên $(BC'D)$ theo phương $AB$ là

**A.** Một tam giác.
**B.** Một hình bình hành.
**C.** Một ngũ giác.
**D.** Một lục giác.

**Lời giải**

**Câu 14.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ . Hình biểu diễn của $\triangle A'C'D'$ qua phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương $A'B$ là

**A.** Một tam giác $ABC$.
**B.** Một tam giác $BCI$, với $I$ là điểm sao cho $C$ là trung điểm của $DI$.
**C.** Một tam giác $ACD$.
**D.** Một tam giác $DCM$, với $M$ là điểm sao cho $C$ là trung điểm của $BM$.

**Lời giải**

**Câu 15.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB \parallel CD$, $AB = 3CD$. Gọi $M$, $N$ theo thứ tự là trung điểm $SB$, $SC$ và $K$ là giao điểm của đường thẳng $SD$ với mặt phẳng

$(AMN)$. Tính tỷ số $\dfrac{SK}{SD}$.

**A.** $\dfrac{SK}{SD}=\dfrac{3}{5}$. **B.** $\dfrac{SK}{SD}=\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{SK}{SD}=\dfrac{4}{7}$. **D.** $\dfrac{SK}{SD}=\dfrac{2}{3}$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Câu 1. A** | **Câu 2. A** | **Câu 3. A** | **Câu 4. A** | **Câu 5. C** | **Câu 6. A** | **Câu 7. A** |
| **Câu 8. D** | **Câu 9. A** | **Câu 10. A** | **Câu 11. A** | **Câu 12. B** | **Câu 13. B** | **Câu 14. B** |
| **Câu 15. A** | | | | | | |

## PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

**Câu 1.** Cho các mệnh đề sau?

**a)** Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng cắt nhau.

**b)** Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự giữa các điểm.

**c)** Cho mặt phẳng $(P)$, đường thẳng $l$ cắt $(P)$ và điểm $M$ không nằm trên đường thẳng $l$. Gọi điểm $M'$ là ảnh của điểm $M$ lên mặt phẳng $(P)$ theo phương chiếu $l$ của phép chiếu song song. Khi đó $MM'$ song song $l$.

**d)** Phép chiếu song song làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xét phép chiếu song song theo phương chiếu $AA'$.

**a)** Hình chiếu của $C'$ lên mặt phẳng $(ABCD)$ là $C$.

**b)** Hình chiếu của $B$ lên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ là $A'$.

**c)** Gọi $O$ và $O'$ lần lượt là tâm của hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Hình chiếu của $O$ lên mặt phẳng $(ABCD)$ là $O'$.

**d)** Hình chiếu của $AC$ lên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ là $A'C'$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 3.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Xét tính đúng, sai các mệnh đề sau:

**a)** Hình chiếu của $C$ lên $(A'B'C')$ theo phương chiếu $DA'$ trong phép chiếu song song là điểm $C'$.

**b)** Gọi $O$ và $O'$ lần lượt là tâm của $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Hình chiếu của điểm $A$ lên mặt phẳng $(A'B'C')$ theo phương chiếu $OO'$ trong phép chiếu song song là điểm $A'$.

**c)** Gọi $I$ và $I'$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $A'B'$. Hình chiếu của $I$ lên mặt phẳng $(A'B'C')$ theo phương chiếu $AI'$ trong phép chiếu song song là điểm $A'$.

**d)** Gọi $G$ là trọng của $\triangle ABC$. Gọi $G'$ là hình chiếu của $G$ lên $(A'B'C'D')$ theo phương chiếu $II'$ trong phép chiếu song song. Khi đó $G'$ là trọng tâm $\Delta A'B'C'$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 4.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $I$ và $I'$ lần lượt là trung điểm của đoạn $AB$ và $A'B'$. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau

**a)** $AI' \parallel IB'$.

**b)** Hình chiếu song song của $I$ trên mặt phẳng $(A'B'C')$ phương $A'I$ là điểm $C'$.

**c)** Trong $(A'B'C')$, vẽ hình bình hành $A'C'MI'$. Suy ra $ACMI'$ là hình bình hành.

**d)** $\Delta MAA'$ là hình chiếu song song của $\Delta CAA'$ theo phương $AI'$ trên $(A'B'C')$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 5.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

**a)** $ADC'B'$ là hình bình hành.

**b)** Hình chiếu song song của $A$ lên mặt phẳng $(BCC'B')$ qua phép chiếu song song theo phương của đường thẳng $C'D$ là $B'$.

**c)** Hình chiếu song song của $\triangle AB'D'$ trên mặt phẳng $(BCC'B')$ qua phép chiếu song song theo phương $C'D'$ là $\triangle BB'C'$.

**d)** Hình chiếu của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ lên mặt phẳng $(BC'D)$ theo phương $AB$ là một hình tam giác.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

**BẢNG ĐÁP ÁN**

| | | |
|---|---|---|
| **Câu 1.** a S b Đ c Đ d S | **Câu 2.** a Đ b S c S d Đ | **Câu 3.** a S b Đ c S d Đ |
| **Câu 4.** a Đ b S c Đ d S | **Câu 5.** a Đ b Đ c Đ d S | |

## PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Có bao nhiêu mệnh đề đúng trong số các mệnh đề dưới đây
(a) Phép chiếu song song biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
(b) Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng cắt nhau.
(c) Phép chiếu song song biến tam giác đều thành tam giác cân.
(d) Phép chiếu song song biến hình vuông thành hình bình hành. KQ:

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 2.** Cho tứ diện $ABCD$, $M$ là trọng tâm của tam giác $ABC$. Gọi $N$ là hình chiếu song song của điểm $M$ theo phương $CD$ lên mặt phẳng $(ABD)$. Khi đó $\dfrac{EN}{ED}$ bằng bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần trăm) KQ:

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm $O$. Trên cạnh $SB$, $SD$ lần lượt lấy điểm $M$, $N$ sao cho $SM = 2MB$ và $SN = \dfrac{1}{3}SD$. Hình chiếu của $M$, $N$ qua phép chiếu song song với phương chiếu là đường thẳng $SO$ lên mặt phẳng chiếu $(ABCD)$ lần lượt là $P$, $Q$. Tính tỉ số $\dfrac{OP}{OQ}$. KQ:

**Lời giải**

**Câu 4.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, gọi $I$ là trung điểm $AB$. Gọi $S$, $S'$ lần lượt là diện tích của tam giác $ABC$ và hình chiếu của tam giác $AA'C'$ lên mặt phẳng $(A'B'C')$ theo phương $IB'$. Khi đó tỉ số $\dfrac{S'}{S}$ bằng KQ: \boxed{\phantom{00}}

**Lời giải**

**Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông tâm $O$ cạnh bằng 2. Trên cạnh $SB$, $SD$ lần lượt lấy điểm $M$, $N$ sao cho $SM = 2MB$ và $SN = \dfrac{1}{3}SD$. Diện tích hình chiếu song song của tam giác $AMN$ lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương của đường thẳng $SO$ bằng KQ: \boxed{\phantom{00}}

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 6.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, trên cạnh $SA$ lấy điểm $M$ sao cho $MA = 2MS$. Gọi $O$ là tâm của hình bình hành $ABCD$. Một phép chiếu song song theo phương $MO$ lên mặt phẳng $(ABCD)$ biến điểm $S$ thành điểm $N$. Tỉ số $\dfrac{CN}{CA}$ bằng KQ: .....

**Lời giải**

. . . . . .

**BẢNG ĐÁP ÁN**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Câu 1.** 2 | **Câu 2.** 0,33 | **Câu 3.** 2 | **Câu 4.** 0,5 | **Câu 5.** 1 |
| **Câu 6.** 0,25 | | | | |

Chương 5: Giới hạn - Hàm số liên tục

Chương 5

# GIỚI HẠN - HÀM SỐ LIÊN TỤC

## BÀI 15. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

## A Lý thuyết

### 1 Giới hạn hữu hạn của dãy số

**Định nghĩa 1**

Ta nói dãy số $(u_n)$ có giới hạn là $a$ khi $n \to +\infty$ nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - a) = 0$.
Kí hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ hay $u_n \to a$ khi $n \to +\infty$.

! Từ nay về sau, thay cho $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, ta viết tắt là $\lim u_n = a$.

**Tính chất 1.**

- $\lim \dfrac{1}{n} = 0$; $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0$ (với $k$ là số nguyên dương).
- $\lim q^n = 0$ (nếu $|q| < 1$).
- Nếu $u_n = c$ (với $c$ là hằng số) thì $\lim u_n = \lim c = c$.

### 2 Định lí về giới hạn hữu hạn

**Định lý 1**

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì

- $\lim(u_n + v_n) = a + b$; $\lim(u_n - v_n) = a - b$;
- $\lim(u_n \cdot v_n) = a \cdot b$; $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}$ (nếu $b \neq 0$).

b) Nếu $\lim u_n = a$ thì $\lim |u_n| = |a|$ và $\lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{a}$.

c) Nếu $u_n \geq 0$ với mọi $n$ và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

## 3 Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

**Định nghĩa 2**

Cấp số nhân vô hạn $(u_n)$ có công bội $q$ thỏa mãn $|q|<1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

**Định lý 2**

Cho cấp số nhân lùi vô hạn $(u_n)$ có công bội $q$ (với $|q|<1$). Gọi $S=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$ là tổng vô hạn của $(u_n)$. Khi đó

$$\boxed{S=\frac{u_1}{1-q}}$$

## 4 Giới hạn vô cực

**Định nghĩa 3**

- Ta nói dãy số $(u_n)$ có giới hạn $+\infty$ khi $n\to+\infty$, nếu $u_n$ có thể lớn hơn một số dương tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.
  Kí hiệu $\lim(u_n)=+\infty$ hoặc $\lim u_n=+\infty$ hoặc $u_n\to+\infty$.
- Ta nói dãy số $(u_n)$ có giới hạn $-\infty$ khi $n\to+\infty$ nếu $u_n$ có thể nhỏ hơn một số âm tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.
  Kí hiệu $\lim(u_n)=-\infty$ hoặc $\lim u_n=-\infty$ hoặc $u_n\to-\infty$.

**Nhận xét.** $\lim u_n=+\infty\Leftrightarrow\lim(-u_n)=-\infty$.

**Tính chất 2.**

- $\lim n^k=+\infty$ (với $k$ là số nguyên dương).
- $\lim q^n=+\infty$ (nếu $q>1$).

## 5 Quy tắc tìm giới hạn vô cực

**Định lý 3**

Nếu $\lim u_n=a$ và $\lim v_n=\pm\infty$ thì $\lim\dfrac{u_n}{v_n}=0$.

**Định lý 4**

Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim(u_n \cdot v_n)$ được cho bằng bảng sau

| $\lim u_n$ | $\lim v_n$ | $\lim(u_n \cdot v_n)$ |
|---|---|---|
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |

**Định lý 5**

Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = a \neq 0$ thì $\lim(u_n \cdot v_n)$ được cho bằng bảng sau

| $\lim u_n$ | $\lim v_n = a \neq 0$ | $\lim(u_n \cdot v_n)$ |
|---|---|---|
| $+\infty$ | $a > 0$ | $+\infty$ |
| $+\infty$ | $a < 0$ | $-\infty$ |
| $-\infty$ | $a < 0$ | $+\infty$ |
| $-\infty$ | $a > 0$ | $-\infty$ |

**Định lý 6**

Nếu $\lim u_n = a \neq 0$, $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ hoặc $v_n < 0$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n}$ được cho bằng bảng sau

| $\lim u_n = a \neq 0$ | $\lim v_n = 0$ | $\lim \dfrac{u_n}{v_n}$ |
|---|---|---|
| $a > 0$ | $v_n > 0$ | $+\infty$ |
| $a > 0$ | $v_n < 0$ | $-\infty$ |
| $a < 0$ | $v_n < 0$ | $+\infty$ |
| $a < 0$ | $v_n > 0$ | $-\infty$ |

# B Các dạng bài tập

## Dạng 1. Dùng định nghĩa chứng minh giới hạn

**1)** Để chứng minh $\lim u_n = 0$ ta chứng minh

$\forall a > 0$ nhỏ tùy ý luôn tồn tại một số $n_a$ sao cho $|u_n| < a$, $\forall n > n_a$.

**2)** Để chứng minh $\lim u_n = L$ ta chứng minh $\lim (u_n - L) = 0$.

**3)** Để chứng minh $\lim u_n = +\infty$ ta chứng minh

$\forall M > 0$ lớn tùy ý luôn tồn tại một số $n_m$ sao cho $u_n > M$, $\forall n > n_m$.

**4)** Để chứng minh $\lim u_n = -\infty$ ta chứng minh $\lim (-u_n) = +\infty$.

**5)** Một dãy số nếu có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.

**Ví dụ 1.** Chứng minh rằng

a) $\lim \left( \dfrac{-n^3}{n^3+1} \right) = -1$;

b) $\lim \left( \dfrac{n^2+3n+2}{2n^2+n} \right) = \dfrac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Ví dụ 2.** Chứng minh rằng

a) $\lim \dfrac{2n^2+n}{n^2+4}=2$;

b) $\lim \dfrac{6n+2}{n+5}=6$;

c) $\lim \dfrac{7^n-2\cdot 8^n}{8^n+3^n}=-2$;

d) $\lim \dfrac{2\cdot 3^n+5^n}{5^n+3^n}=1$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 3.** Chứng minh rằng

a) $\lim\left(\dfrac{3\cdot 3^n-\sin 3n}{3^n}\right)=3$;

b) $\lim\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\dfrac{1}{2}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 2. Giới hạn dãy số dạng phân thức

Tính giới hạn $\lim \dfrac{f(n)}{g(n)}$ trong đó $f(n)$ và $g(n)$ là các đa thức bậc $n$.

- **Bước 1:** Đặt $n^k, n^i$ với $k$ là số mũ cao nhất của đa thức $f(n)$ và $i$ là số mũ cao nhất

của đa thức $g(n)$ ra làm nhân tử chung.

- **Bước 2:** Áp dụng kết quả $\lim \frac{1}{n^k} = 0 \to \lim \frac{f(n)}{g(n)} = \ldots$.

**Ví dụ 1.** Tính các giới hạn sau

a) $\lim \frac{n^2 - 4n^3}{2n^3 + 5n - 2}$; b) $\lim \frac{n^3 - 7n}{1 + 2n^2}$; c) $\lim \frac{n+2}{n^2 + n + 1}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 2.** Tính các giới hạn của các dãy số sau

a) $u_n = \frac{-3n^3 + 2n^2 + 1}{2n^3 - n}$; b) $u_n = \frac{2n+1}{n^2 + n + 3}$; c) $u_n = \frac{2025n + 2024}{n - 2023}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 3.** Tính các giới hạn sau

a) $\lim \dfrac{5n^2+3n-7}{n^2}$;

b) $\lim \dfrac{-4n^2+n+2}{2n^2+n+1}$;

c) $\lim \dfrac{n^4}{(n+1)(2+n)\left(n^2+1\right)}$;

d) $\lim \left[(2n+1)^2\left(\dfrac{3}{n^2+2n}-\dfrac{1}{n^2+3n-1}\right)\right]$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 3. Giới hạn của dãy số: dạng lũy thừa

Để tính giới hạn $\lim \dfrac{f(n)}{g(n)}$ trong đó $f(n)$ và $g(n)$ là các lũy thừa dạng $x^n$ ta làm các bước sau:

- Bước 1: Đưa biểu thức về cùng số mũ $n$.
- Bước 2: Chia cả tử và mẫu số cho $a^n$ trong đó $a$ là số có giá trị tuyệt đối lớn nhất.
- Bước 3: Áp dụng kết quả "Nếu $|q|<1$ thì $\lim q^n=0$".

**Ví dụ 4.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim(2^n+3^n)$;

b) $\lim[-4^n+(-2)^n]$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 5.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\dfrac{1+3^n}{3\cdot3^n+2^n}$;

b) $\lim\dfrac{4\cdot3^n-2^n}{2\cdot5^n-4^n}$;

c) $\lim\dfrac{7^n+1}{-2\cdot3^n-3\cdot6^n}$;

d) $\lim\dfrac{5^{n+1}-4^n+1}{-2\cdot5^n-6^n}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 6.** Tính các giới hạn sau

a) $\lim \dfrac{1+3+3^2+\cdots+3^n}{2\cdot 3^{n+1}+2^n}$;

b) $\lim \dfrac{1+\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1+\dfrac{2}{5}+\left(\dfrac{2}{5}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 7.** Cho dãy số $(u_n)$ xác định bởi $u_1=1$; $u_{n+1}=\dfrac{u_n-4}{u_n+6}$ $(\forall n \geq 1)$. Tính giới hạn $\lim \dfrac{u_n+1}{u_n+4}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 8.** Cho dãy số $(u_n)$ xác định bởi $u_1 = 3$; $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}$ $(\forall n \geq 1)$. Tính giới hạn $\lim u_n$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 4. Giới hạn của dãy số: dạng căn thức

Tính giới hạn $\lim \dfrac{f(n)}{g(n)}$ trong đó $f(n)$ và $g(n)$ chứa căn thức, ta xét hai trường hợp:

- **Trường hợp 1:** Đơn giản - chỉ cần rút nhân tử chung (tương tự dạng 2).

> **!** $\sqrt[2a]{n^{2a}} = |n| = \begin{cases} n & \text{khi} \quad n \geq 0 \\ -n & \text{khi} \quad n < 0. \end{cases}$
> Trong giới hạn của dãy số ta chỉ xét $n \to +\infty$ nên $\sqrt[2a]{n^{2a}} = n$.

- **Trường hợp 2:** Nhân lượng liên hợp, khi giới hạn ở dạng vô định $\dfrac{0}{0}$; $0 \cdot \infty$; $\dfrac{\infty}{\infty}$.

  - $\sqrt{A} - \sqrt{B} = \dfrac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$;
  - $\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} = \dfrac{A - B}{\left(\sqrt[3]{A}\right)^2 + \sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{B} + \left(\sqrt[3]{B}\right)^2}$;
  - $\sqrt{A} - B = \dfrac{A - B^2}{\sqrt{A} + B}$;
  - $\sqrt[3]{A} - B = \dfrac{A - B^3}{\left(\sqrt[3]{A}\right)^2 + \sqrt[3]{A} \cdot B + B^2}$.

Bên cạnh đó áp dụng các tính chất sau để tính được kết quả của giới hạn:

a) $\lim \dfrac{1}{n} = 0$; $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0$ (với $k$ là số nguyên dương).

b) $\lim q^n = 0$ (với $|q| < 1$).

c) Nếu $u_n = c$ (với $c$ là hằng số) thì $\lim u_n = \lim c = c$.

**Ví dụ 9.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \sqrt{\dfrac{8n+2}{2n-1}}$;

b) $\lim \sqrt{\dfrac{2n+9}{n+2}}$

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 10.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2+1}+2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}+n}$;

b) $\lim \dfrac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}+n^2}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 11.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\left(\sqrt{4n^2+3n+1}-2n\right)$;

b) $\lim\left[\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-5}\right)n\right]$.

**Lời giải**

# C Bài tập rèn luyện

## PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1.** Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào **sai**?

**A.** Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim(u_n v_n) = +\infty$.

**B.** Nếu $\lim u_n = a \neq 0$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$ .

**C.** Nếu $\lim u_n = a > 0$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$.

**D.** Nếu $\lim u_n = a < 0$, $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ với mọi $n$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = -\infty$.

**Lời giải**

**Câu 2.** Trong các khẳng định dưới đây, có bao nhiêu khẳng định đúng?

a) $\lim n^k = +\infty$ với mọi số $k$ nguyên dương.

b) $\lim q^n = +\infty$ nếu $|q| < 1$.

c) $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$.

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

**Lời giải**

**Câu 3.** Phát biểu nào sau đây là **sai**?

**A.** $\lim u_n = c$ ($u_n = c$ là hằng số). **B.** $\lim q^n = 0$ ($|q| > 1$).

**C.** $\lim \dfrac{1}{n} = 0$. **D.** $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

**Lời giải**

**Câu 4.** $\lim \dfrac{1}{5n+3}$ bằng

**A.** $0$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

**Lời giải**

**Câu 5.** $\lim \dfrac{1}{2n+5}$ bằng

**A.** $\dfrac{1}{2}$. **B.** $0$. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

**Lời giải**

**Câu 6.** $\lim \dfrac{7n^2-2n^3+1}{3n^3+2n^2+1}$ bằng

**A.** $\dfrac{7}{3}$. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** $0$. **D.** $1$.

Lời giải

**Câu 7.** $\lim \dfrac{2n^2-3}{n^6+5n^5}$ bằng

**A.** $2$. **B.** $-3$. **C.** $-\dfrac{3}{5}$. **D.** $0$.

Lời giải

**Câu 8.** Tính giới hạn $L=\lim \dfrac{2n+1}{2+n-n^2}$.

**A.** $L=-\infty$. **B.** $L=-2$. **C.** $L=1$. **D.** $L=0$.

Lời giải

**Câu 9.** Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

**A.** $u_n = \dfrac{n^2-2}{5n+3n^2}$. **B.** $u_n = \dfrac{n^2-2n}{5n+3n^2}$. **C.** $u_n = \dfrac{1-2n}{5n+3n^2}$. **D.** $u_n = \dfrac{1-2n^2}{5n+3n^2}$.

**Lời giải**

**Câu 10.** Giá trị của $\lim \dfrac{2-n}{n+1}$ bằng bao nhiêu?

**A.** 1. **B.** 2. **C.** $-1$. **D.** 0.

**Lời giải**

**Câu 11.** Giá trị của $\lim \dfrac{1+19n}{18n+19}$ bằng

**A.** $\dfrac{19}{18}$. **B.** $\dfrac{1}{18}$. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{1}{19}$.

**Lời giải**

**Câu 12.** Dãy số nào sau đây có giới hạn khác 0?

**A.** $\frac{1}{n}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{n}}$. **C.** $\frac{n+1}{n}$. **D.** $\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$.

**Lời giải**

**Câu 13.** Tìm $\lim \frac{8n^5-2n^3+1}{4n^5+2n^2+1}$ bằng

**A.** 2. **B.** 8. **C.** $+\infty$. **D.** 4.

**Lời giải**

**Câu 14.** Tìm $\lim \frac{2n^4-2n+2}{4n^4+2n+5}$ bằng

**A.** $\frac{2}{11}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

**Lời giải**

**Câu 15.** Giới hạn của dãy số $(u_n)$ với $u_n = \dfrac{2n-1}{3-n}, n \in \mathbb{N}^*$ là

**A.** $-2$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $1$. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

**Lời giải**

**Câu 16.** Tính $\lim \dfrac{8n^2+3n-1}{4+5n+2n^2}$.

**A.** $2$. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** $4$. **D.** $-\dfrac{1}{4}$.

**Lời giải**

**Câu 17.** Cho hai dãy số $(u_n)$ và $(v_n)$ có $u_n = \dfrac{1}{n+1}$; $v_n = \dfrac{3}{n+3}$. Tính $\lim \dfrac{u_n}{v_n}$.

**A.** $0$. **B.** $3$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $+\infty$.

**Lời giải**

**Câu 18.** Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n$ bằng.

**A.** 2. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 0.

**Lời giải**

**Câu 19.** Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

**A.** $(0{,}999)^n$. **B.** $(-1)^n$. **C.** $(-1{,}0001)^n$. **D.** $(1{,}2345)^n$.

**Lời giải**

**Câu 20.** $\lim \dfrac{100^{n+1}+3\cdot 99^n}{10^{2n}-2\cdot 98^{n+1}}$ là

**A.** $+\infty$. **B.** 100. **C.** $\dfrac{1}{100}$. **D.** 0.

Lời giải

**Câu 21.** Giới hạn của dãy số $(u_n)$ với $u_n = 3^n - 4^n$ là

**A.** $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** 1.

Lời giải

**Câu 22.** Tính giới hạn $\lim \dfrac{3\cdot 2^{n+1}-2\cdot 3^{n+1}}{4+3^n}$.

**A.** $\dfrac{3}{2}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{6}{5}$. **D.** $-6$.

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .

**Câu 23.** Tính giới hạn $T = \lim\left(\sqrt{16^{n+1}+4^n} - \sqrt{16^{n+1}+3^n}\right)$.

**A.** $T = 0$. **B.** $T = \dfrac{1}{4}$. **C.** $T = \dfrac{1}{8}$. **D.** $T = \dfrac{1}{16}$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

**Câu 24.** Cho dãy số $(u_n)$ thỏa $|u_n - 2| < \dfrac{1}{n^3}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó

**A.** $\lim u_n$ không tồn tại. **B.** $\lim u_n = 1$.

**C.** $\lim u_n = 0$. **D.** $\lim u_n = 2$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

**Câu 25.** Gọi $S$ là tập hợp các tham số nguyên $a$ thỏa mãn $\lim\left(\dfrac{3n+2}{n+2} + a^2 - 4a\right) = 0$. Tổng các phần tử của $S$ bằng

**A.** 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

**Câu 26.** Dãy số $(u_n)$ với $u_n = \dfrac{(3n-1)(3-n)^2}{(4n-5)^3}$ có giới hạn bằng phân số tối giản $\dfrac{a}{b}$. Tính $a \cdot b$.

**A.** 1728. **B.** 68. **C.** 32. **D.** 128.

**Lời giải**

**Câu 27.** Biết $\lim \dfrac{2n^3+n^2-4}{an^3+2} = \dfrac{1}{2}$ với $a$ là tham số. Khi đó $a-a^2$ bằng

**A.** $-12$. **B.** $-2$. **C.** 0. **D.** $-6$.

**Lời giải**

**Câu 28.** Giới hạn $\lim \dfrac{1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2}{n^3+2n+7}$ có giá trị bằng?

**A.** $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

**Lời giải**

**Câu 29.** Tìm $\lim\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$.

**A.** $+\infty$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{n}$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Câu 30.** Giới hạn $\lim\left[(2-3n)^4(n+1)^3\right]$ là

**A.** $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** $81$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Câu 31.** Giới hạn $\lim\dfrac{\sqrt{1+5+\cdots+(4n-3)}}{2n-1}$ bằng

**A.** $1$. **B.** $+\infty$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Câu 32.** Tìm $\lim u_n$ biết $u_n = \dfrac{n \cdot \sqrt{1+3+5+\cdots+(2n-1)}}{2n^2+1}$.

**A.** $\dfrac{1}{2}$. **B.** $+\infty$. **C.** $1$. **D.** $-\infty$.

**Lời giải**

**Câu 33.** Giới hạn $\lim(\sqrt{n^2-3n+1}-n)$ bằng

**A.** $-3$. **B.** $+\infty$. **C.** $0$. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

**Lời giải**

**Câu 34.** Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào có giá trị bằng 1?

**A.** $\lim \dfrac{3^{n+1}+2n}{5+3^n}$. **B.** $\lim \dfrac{3n^2+n}{4n^2-5}$.

**C.** $\lim(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1})$. **D.** $\lim\dfrac{2n^3+3}{1+2n^2}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 35.** Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt{9n^2+2n-1}-\sqrt{4n^2+1}\right)$.

**A.** $+\infty$. **B.** $1$. **C.** $-\infty$. **D.** $\dfrac{9}{4}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 36.** Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt[3]{8n^3+3n^2-2}+\sqrt[3]{5n^2-8n^3}\right)$.

**A.** $+\infty$. **B.** $-7$. **C.** $\dfrac{53}{2}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 37.** Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt[3]{8n^3+3n^2+4}-2n+6\right)$.

**A.** $+\infty$. **B.** $\frac{25}{4}$. **C.** $\frac{53}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Câu 38.** Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt[3]{n-n^3}+n+2\right)$.

**A.** $+\infty$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Câu 39.** Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt{n^4+n^2}-\sqrt[3]{n^6+1}\right)$.

**A.** $+\infty$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{5}{3}$.

**Lời giải**

**Câu 40.** Tính giới hạn $L = \lim\left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^3+n}\right)$.

**A.** $+\infty$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{53}{2}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

**Lời giải**

**Câu 41.** Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

**A.** $\left(\frac{4}{e}\right)^n$. **B.** $\left(\frac{1}{3}\right)^n$. **C.** $\left(\frac{5}{3}\right)^n$. **D.** $\left(\frac{-5}{3}\right)^n$.

**Lời giải**

**Câu 42.** Tính tổng $S$ của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = -\frac{1}{2}$.

**A.** $S = 2$. **B.** $S = \frac{3}{2}$. **C.** $S = 1$. **D.** $S = \frac{2}{3}$.

**Lời giải**

**Câu 43.** Tổng vô hạn sau đây $S = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{2}{3^n} + \cdots$ có giá trị bằng

**A.** $\frac{8}{3}$. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

**Lời giải**

**Câu 44.** Số thập phân vô hạn tuần hoàn $3{,}15555\ldots = 3{,}1(5)$ viết dưới dạng hữu tỉ là

**A.** $\frac{63}{20}$. **B.** $\frac{142}{45}$. **C.** $\frac{1}{18}$. **D.** $\frac{7}{2}$.

**Lời giải**

**Câu 45.** Tổng $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2^n} + \cdots$ bằng

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

**Lời giải**

**Câu 46.** Cho dãy số $(u_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = -\dfrac{u_n}{5} \end{cases}$. Gọi $S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$ là tổng $n$ số hạng đầu tiên của dãy số đã cho. Khi đó $\lim S_n$ bằng

**A.** $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{3}{5}$. **C.** $0$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

**Lời giải**

**Câu 47.** Cho cấp số cộng $(u_n)$ có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 3$. Tìm $\lim \dfrac{n}{u_n}$.

**A.** $L = \dfrac{1}{3}$. **B.** $L = \dfrac{1}{2}$. **C.** $L = 3$. **D.** $L = 2$.

**Lời giải**

**Câu 48.** Dãy số $(u_n)$ nào sau đây có giới hạn khác số 1 khi $n$ dần đến dương vô cùng?

**A.** $u_n = \dfrac{(2017-n)^{2018}}{n(2018-n)^{2017}}$. **B.** $u_n = n\left(\sqrt{n^2+2018} - \sqrt{n^2+2016}\right)$.

**C.** $\begin{cases} u_1 = 2017 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + 1), \quad n = 1,\ 2,\ 3\ldots \end{cases}$. **D.** $u_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$.

**Lời giải**

**Câu 49.** Cho dãy số $(u_n)$ như sau $u_n = \dfrac{n}{1+n^2+n^4}$, $n = 1,\ 2,\ldots$ Tính giới hạn $\lim(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$.

**A.** $\dfrac{1}{4}$. **B.** $1$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

**Lời giải**

**Câu 50.** Cho dãy số $(u_n)$ biết $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_n = 3u_{n-1} - 1,\ \forall n \geq 2 \end{cases}$. Tính $L = \lim \dfrac{u_n}{3^n}$.

**A.** Không xác định. **B.** $L = +\infty$. **C.** $L = -\dfrac{5}{6}$. **D.** $L = 0$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 51.** Cho hai dãy số $(u_n)$, $(v_n)$ đều tồn tại giới hạn hữu hạn. Biết rằng hai dãy số đồng thời thỏa mãn các hệ thức $u_{n+1} = 4v_n - 2$, $v_{n+1} = u_n + 1$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. Giá trị của giới hạn $\lim(u_n + 2v_n)$ bằng

**A.** 0. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $-1$. **D.** $\frac{1}{2}$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 52.** Một mô hình gồm các khối cầu xếp chồng lên nhau tạo thành một cột thẳng đứng. Biết rằng mỗi khối cầu có bán kính gấp đôi khối cầu nằm ngay trên nó và bán kính khối cầu dưới cùng là 50 cm. Hỏi mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

**A.** Chiều cao mô hình không quá 1,5 mét. **B.** Chiều cao mô hình tối đa là 2 mét.
**C.** Chiều cao mô hình dưới 2 mét. **D.** Mô hình có thể đạt được chiều cao tùy ý.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 53.** Trong một lần Đoàn trường Lê Văn Hưu tổ chức chơi bóng chuyền hơi, bạn Nam thả một quả bóng chuyền hơi từ tầng ba, độ cao 8 m so với mặt đất và thấy rằng mỗi lần chạm đất thì quả bóng lại nảy lên một độ cao bằng ba phần tư độ cao lần rơi trước. Biết quả bóng

chuyển động vuông góc với mặt đất. Khi đó tổng quãng đường quả bóng đã bay từ lúc thả bóng đến khi quả bóng không máy nữa gần bằng số nào dưới đây nhất?

**A.** 57 m. **B.** 54 m. **C.** 56 m. **D.** 58 m.

**Lời giải**

**Câu 54.** Với mỗi số nguyên dương $n$, gọi $s_n$ là số cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^2+y^2 \le n^2$ (nếu $a \ne b$ thì hai cặp số $(a;b)$ và $(b;a)$ khác nhau). Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

**A.** $\lim \dfrac{\sqrt{s_n}}{n} = \sqrt{2\pi}$. **B.** $\lim \dfrac{\sqrt{s_n}}{n} = 2$. **C.** $\lim \dfrac{\sqrt{s_n}}{n} = \sqrt{\pi}$. **D.** $\lim \dfrac{\sqrt{s_n}}{n} = 4$.

**Lời giải**

**Câu 55.** Tính giới hạn $\lim \left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$.

**A.** 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

**Lời giải**

**Câu 56.** Tìm $L=\lim\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\cdots+\frac{1}{1+2+\ldots+n}\right)$.

**A.** $L=\frac{5}{2}$. **B.** $L=+\infty$. **C.** $L=2$. **D.** $L=\frac{3}{2}$.

**Lời giải**

**Câu 57.** Tổng $S=\frac{100}{10\cdot15\cdot20}+\frac{100}{15\cdot20\cdot25}+\frac{100}{10\cdot25\cdot30}+\cdots+\frac{100}{110\cdot115\cdot120}$ có giá trị bằng

**A.** $\frac{93}{1380}$. **B.** $\frac{91}{13800}$. **C.** $\frac{9}{138}$. **D.** $\frac{91}{1380}$.

**Lời giải**

**Câu 58.** Giá trị của tổng $S=\frac{12}{4\cdot16}+\frac{20}{16\cdot36}+\frac{28}{36\cdot64}+\cdots+\frac{84}{400\cdot484}$ là

**A.** $\frac{31}{121}$. **B.** $\frac{30}{121}$. **C.** $\frac{32}{121}$. **D.** $\frac{33}{121}$.

**Lời giải**

**Câu 59.** Cho $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$. Công thức của $S_n$ là

**A.** $\frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$. **B.** $\frac{2^{n+1} - 1}{2^n}$. **C.** $\frac{2^n - 1}{2^n}$. **D.** $\frac{2^{n+1} - 1}{2^{n-1}}$.

**Lời giải**

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Câu 1. C | Câu 2. D | Câu 3. B | Câu 4. A | Câu 5. B | Câu 6. B | Câu 7. D |
| Câu 8. D | Câu 9. C | Câu 10. C | Câu 11. A | Câu 12. C | Câu 13. A | Câu 14. B |
| Câu 15. A | Câu 16. C | Câu 17. C | Câu 18. B | Câu 19. A | Câu 20. B | Câu 21. B |
| Câu 22. D | Câu 23. C | Câu 24. D | Câu 25. A | Câu 26. A | Câu 27. A | Câu 28. D |
| Câu 29. B | Câu 30. B | Câu 31. B | Câu 32. A | Câu 33. D | Câu 34. C | Câu 35. A |
| Câu 36. D | Câu 37. B | Câu 38. B | Câu 39. C | Câu 40. D | Câu 41. B | Câu 42. D |
| Câu 43. B | Câu 44. B | Câu 45. B | Câu 46. D | Câu 47. A | Câu 48. A | Câu 49. A |
| Câu 50. C | Câu 51. A | Câu 52. A | Câu 53. C | Câu 54. C | Câu 55. C | Câu 56. C |
| Câu 57. D | Câu 58. B | Câu 59. B | | | | |

## PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

**Câu 1.** Cho dãy số $(u_n)$ với $u_n = \dfrac{4n^2+n+2}{an^2+5}$.

**a)** Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 2, giá trị của $a = 2$.

**b)** Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 1, giá trị của $a = 3$.

**c)** Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 3, giá trị của $a$ là một số nguyên.

**d)** Để dãy số đã cho có giới hạn bằng $-2$, giá trị của $a = -2$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Đặt $I = \lim\left(\sqrt{n^2+a^2n} - \sqrt{n^2+(a+2)n+1}\right)$. Khi đó

**a)** Ta biến đổi được $I = \lim \dfrac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}$.

**b)** Nếu $I = 0$ thì có 3 giá trị $a$ thỏa mãn.

**c)** Nếu $I = 0$ thì tổng các giá trị $a$ tìm được bằng 1.

**d)** Có 2 giá trị $a$ nguyên để $I = 1$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 3.** Biết $\lim\left(\sqrt{n^2-8n} - n + a^2\right) = 0$. Khi đó

**a)** Có tất cả 3 giá trị $a$ thỏa mãn.

**b)** Tổng các giá trị $a$ tìm được bằng 0.

**c)** Có 2 giá trị nguyên âm $a$ thỏa mãn.

**d)** Tích các giá trị $a$ tìm được bằng $-4$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 4.** Cho giới hạn $L=\lim \dfrac{\sqrt[3]{an^3+5n^2-7}}{\sqrt{3n^2-n+2}}$. Khi đó

**a)** Khi $a=1$ thì $L=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

**b)** Khi $a=0$ thì $L=\dfrac{1}{3}$.

**c)** Khi $a>0$ thì $L>0$.

**d)** Khi $L=b\sqrt{3}+c$ với $b,c$ là các tham số thì $P=\dfrac{a+c}{b^3}=\dfrac{1}{2}$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 5.** Cho giới hạn $L=\lim \sqrt{3+\dfrac{an^2-1}{3+n^2}-\dfrac{1}{2^n}}$. Khi đó

**a)** $L=2$ khi $a=1$.

**b)** $L=3$ thì có 2 giá trị nguyên $a$ thỏa mãn.

**c)** $L>3$ khi $a>6$.

**d)** Có 3 giá trị nguyên của $a$ thuộc $(0;20)$ sao cho $\lim \sqrt{3+\dfrac{an^2-1}{3+n^2}-\dfrac{1}{2^n}}$ là một số nguyên.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 6.** Biết $\lim \dfrac{2n^2-n+4}{an^2+n+3}=2$ và $\lim \dfrac{3^n+4^{n+1}}{4^n+3}=b$.

**a)** Giá trị của $a=2$.

**b)** Giá trị của $b=4$.

**c)** $2a-b=0$.

**d)** Ba số $a,b,16$ lập thành một cấp số nhân.

Lời giải

**Câu 7.** Cho dãy số $(u_n)$ với $u_n=an^2+n-1$ với $a\in\mathbb{R}$.

**a)** Với $a=1$, giới hạn của dãy số đã cho là 1.

**b)** Với $a=2$, giới hạn của dãy số đã cho là $+\infty$.

**c)** Với $a=-\dfrac{5}{2}$, giới hạn của dãy số đã cho là $-\infty$.

**d)** Với $a\le 0$, giới hạn của dãy số đã cho là $-\infty$.

Lời giải

**Câu 8.** Ông An bắt đầu đi làm với mức lương khởi điểm là 5000000 đồng một tháng. Cứ sau một chu kỳ 3 năm thì ông An được tăng lương 4%.

**a)** Mức lương ông An nhận được sau 3 năm là 5200000 đồng.

**b)** Tổng số tiền lương ông An nhận được sau 6 năm đầu là 374400000 đồng.

**c)** Dự đoán công thức tính số tiền lương ông An được nhận $u_n$, sau $n$ chu kì năm công tác là $u_n = 5000000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^n$ đồng.

**d)** Giả sử ông An đi làm sau đúng 35 năm thì được về hưu. Tổng số tiền lương ông nhận được trong cả quá trình công tác là 2612277740 đồng.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**BẢNG ĐÁP ÁN**

| | | |
|---|---|---|
| **Câu 1.** a Đ b S c S d Đ | **Câu 2.** a S b S c Đ d S | **Câu 3.** a S b Đ c S d Đ |
| **Câu 4.** a Đ b S c Đ d S | **Câu 5.** a Đ b S c Đ d Đ | **Câu 6.** a S b Đ c S d Đ |
| **Câu 7.** a S b Đ c Đ d S | **Câu 8.** a Đ b S c S d Đ | |

## PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Giới hạn $\lim \dfrac{2n^2-3\sqrt{n}+1}{3n\sqrt{n}+2n} = \lim \dfrac{a\sqrt{n}-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n\sqrt{n}}}{b+\dfrac{2}{\sqrt{n}}}$ với $a;b$ là các số tự nhiên. Tính $P = a+b^2$.

KQ: | | | | |

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Biết rằng giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2+2n-2}-n\right) = \lim \dfrac{a\cdot\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}{\sqrt{1+b\cdot\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)}+1}$ với $a;b$ là các số tự nhiên. Tính $S=(a+b)^2$.

KQ: | | | | |

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 3.** Tìm giới hạn $\lim \dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+3n}$.

KQ: | | | | |

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

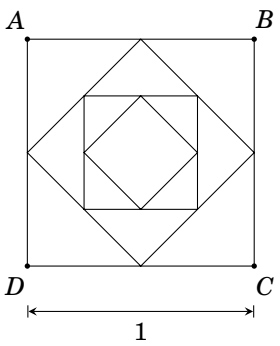
**Câu 4.** Tìm giới hạn $\lim \dfrac{n \cdot \sqrt{1+3+5+\cdots+(2n-1)}}{2n^2+n+1}$.

KQ: | | | | |

Lời giải

**Câu 5.**

Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1. Nối các trung điểm của bốn cạnh hình vuông $ABCD$, ta được hình vuông thứ hai. Tiếp tục nối các trung điểm của bốn cạnh hình vuông thứ hai, ta được hình vuông thứ ba. Tiếp tục như thế ta nhận được một dãy các hình vuông. Tìm tổng chu vi của dãy các hình vuông đó (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).




KQ: | | | | |

Lời giải

**Câu 6.** Giới hạn $\lim \sqrt[3]{\dfrac{2^{3n}-3^{n+1}}{8^{n+1}+6^{n-1}}} = \lim \sqrt[3]{\dfrac{1-3\cdot a^n}{8+\dfrac{1}{6}\cdot b^n}}$ với $a;b$ là các số hữu tỉ. Tính giá trị $8(a+b)$.

KQ: | | | | |

Lời giải

. . . . . .

**Câu 7.** Tìm giới hạn $\lim\left[\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$. KQ: | | | | |

Lời giải

. . . . . .

**Câu 8.** Tìm tổng $S=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}-\cdots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{3^n}+\cdots$ KQ: | | | | |

Lời giải

. . . . . .

.....

**Câu 9.** Giá trị của tổng $T = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \cdots + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + \cdots = a + \sqrt{b}$ với $a;b$ là các số tự nhiên. Tính giá trị $S = (a+b)^2$. KQ: | | | | |

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 10.** Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0{,}271414\ldots$ viết dạng phân số có dạng $\dfrac{m}{n}$ với $m;n$ là các số tự nhiên và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $n-3m$. KQ: | | | | |

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 11.** Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0{,}511111\ldots$ viết dạng phân số có dạng $\dfrac{a}{b}$ với $a;b$ là các số tự nhiên và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $|b-2a|$. KQ: | | | | |

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 12.** Cho dãy số $(u_n)$ với $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_n = 3u_{n-1} - 1, \ \forall n \geq 2 \end{cases}$. Tính $\lim \dfrac{u_n}{3^n}$ (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

KQ: | | | | |

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 13.** Biết rằng giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2-4n+5}+3-n\right) = \lim\left(\dfrac{5-a\cdot n}{\sqrt{n^2-4n+5}+n}+b\right)$ với $a;b$ là các số tự nhiên. Tính giá trị $S = a^b$.

KQ: | | | | |

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 14.** Biết rằng giới hạn

$$\lim\left(1+3n-\sqrt{9n^2-n+7}\right) = \lim\left(a+\frac{n-7}{b\cdot n+c\cdot\sqrt{9n^2-n+7}}\right)$$

với $a;b;c$ là các số tự nhiên. Tính giá trị $|a-b|+c$.

KQ: | | | | |

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .

**Câu 15.** Biết rằng

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^3+3}-\sqrt{n^2+2}\right)=\lim\frac{a}{\sqrt[3]{\left(n^3+3\right)^2}+n^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+3}}-\lim\frac{b}{n+\sqrt{n^2+2}}$$

với $a;b$ là các số nguyên dương. Tính $T=2a+3b$. KQ: | | | | |

Lời giải

**Câu 16.** Giới hạn dãy số $u_n=\dfrac{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+n}}{n}$ có dạng $\lim\dfrac{\dfrac{a}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{b}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{c}{n}}}$ với $a;b;c$ là các số tự nhiên. Tính giá trị $a^2+b^2+c^2$. KQ: | | | | |

Lời giải

**Câu 17.** Biết giới hạn $\lim \dfrac{\sqrt[3]{2n^2-n^3}+n}{\sqrt{n^2+n}-n} = \lim \dfrac{2\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1\right)}{\sqrt[3]{\left(\dfrac{a}{n}-b\right)^2}+1-\sqrt[3]{\dfrac{2}{n}-1}}$ với $a;b$ là các số nguyên dương. Tính $S=a+b$.

KQ: | | | | |

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 18.** Tìm tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $S=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\cdots$ (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

KQ: | | | | |

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**BẢNG ĐÁP ÁN**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Câu 1.** 11 | **Câu 2.** 16 | **Câu 3.** 0,5 | **Câu 4.** 0,5 | **Câu 5.** 13,7 |
| **Câu 6.** 9 | **Câu 7.** 0,5 | **Câu 8.** 0,25 | **Câu 9.** 16 | **Câu 10.** 1839 |
| **Câu 11.** 1 | **Câu 12.** −0,8 | **Câu 13.** 64 | **Câu 14.** 3 | **Câu 15.** 12 |
| **Câu 16.** 6 | **Câu 17.** 3 | **Câu 18.** 0,7 | | |

# BÀI 16. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

## A Lý thuyết

### 1 Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm

**Định nghĩa 1**

Cho khoảng $K$ chứa $x_0$ và hàm số $y=f(x)$ xác định trên $K$ hoặc $K\setminus\{x_0\}$.
Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn là số thực $L$ khi $x$ dần tới $x_0$ nếu với dãy số $(x_n)$ bất kì, $x_n\in K\setminus\{x_0\}$ và $x_n\to x_0$, ta có $f(x_n)\to L$.
***Kí hiệu:*** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$.

**Nhận xét.**

- $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$, *với* $c$ *là hằng số.*

**Định lý 1**

Định lí về giới hạn hữu hạn

a) Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=M$, khi đó

- $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=L+M$.
- $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=L-M$.
- $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=L\cdot M$.
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M}$ (nếu $M\neq 0$).

b) Nếu $f(x)\geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$, thì $L\geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$.
(*Dấu của* $f(x)$ *được xét trên khoảng đang tìm giới hạn, với* $x\neq x_0$)

### 2 Giới hạn một bên

**Định nghĩa 2**

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0;b)$.
Số thực $L$ được gọi là **giới hạn bên phải** của hàm số $f(x)$ khi $x\to x_0$ nếu với mọi dãy số $(x_n)$ bất kì, $x_0<x_n<b$ và $x_n\to x_0$, ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=L$.
***Kí hiệu:*** $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$, hoặc $f(x)\to L$ khi $x\to x_0^+$.

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;x_0)$.
Số thực $L$ được gọi là **giới hạn bên trái** của hàm số $f(x)$ khi $x\to x_0$ nếu với mọi

dãy số $(x_n)$ bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \to x_0$, ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = L$.
***Kí hiệu:*** $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$, hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to x_0^-$.

**Định lý 2**

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L.$$

**Nhận xét.** ***Nguyên lý kẹp***
*Cho ba hàm số $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ xác định trên $K$ chứa điểm $x_0$.*
*Nếu $g(x) \le f(x) \le h(x)$ $\forall x \in K$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = L$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$.*

## 3 Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực

**Định nghĩa 3**

a) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$.
Ta nói hàm số $y = f(x)$ có **giới hạn là số thực** $L$ khi $x \to +\infty$ nếu với dãy số $(x_n)$ bất kỳ, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$ ta có $f(x_n) \to L$.
***Kí hiệu:*** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to +\infty$.

b) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty;a)$.
Ta nói hàm số $y = f(x)$ có **giới hạn là số thực** $L$ khi $x \to -\infty$ nếu với dãy số $(x_n)$ bất kỳ, $x_n < a$ và $x_n \to -\infty$ ta có $f(x_n) \to L$.
***Kí hiệu:*** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to -\infty$.

**Nhận xét.**

- *Với $c$, $k$ là các hằng số và $k$ nguyên dương, ta luôn có* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} c = c$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{c}{x^k} = 0$.
- *Định lý về giới hạn hữu hạn của hàm số khi $x \to x_0$, vẫn còn đúng khi $x \to \pm\infty$.*

## 4 Giới hạn vô cực của hàm số

Các định nghĩa về giới hạn $+\infty$ (hoặc $-\infty$) của hàm số được phát biểu tương tự các định nghĩa về *giới hạn hữu hạn*.
Chẳng hạn, giới hạn $-\infty$ của hàm số $y = f(x)$ khi $x$ dần tới $+\infty$ được định nghĩa như sau

**Định nghĩa 4**

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$.
Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn $-\infty$ khi $x$ dần tới dương vô cực nếu với dãy số $(x_n)$ bất kì, $x_n > a$, $x_n \to +\infty$, ta có $f(x_n) \to -\infty$.

***Kí hiệu:*** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

**Nhận xét.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} (-f(x)) = -\infty$.

**Tính chất 1.**

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$ với $k$ nguyên dương.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = -\infty$ với $k$ là số lẻ.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = +\infty$ với $k$ là số chẵn.

## 5 Quy tắc tìm giới hạn vô cực của hàm số

Các định lí sau vẫn đúng cho các trường hợp $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

**Định lý 3**

Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x)\cdot g(x)$

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)\cdot g(x)]$ được tính theo quy tắc trong bảng sau:

| **Dấu của L** | $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ | $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)\cdot g(x)]$ |
|---|---|---|
| + | $+\infty$ | $+\infty$ |
| + | $-\infty$ | $-\infty$ |
| - | $+\infty$ | $-\infty$ |
| - | $-\infty$ | $+\infty$ |

**Định lý 4**

Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$.
- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L\neq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ và $g(x)>0$ hoặc $g(x)<0$ với mọi $x\neq x_0$, thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ được tính theo quy tắc trong bảng sau

| **Dấu của $L$** | **Dấu của $g(x)$** | **Kết quả giới hạn** |
|---|---|---|
| + | + | $+\infty$ |
| + | - | $-\infty$ |
| - | + | $-\infty$ |
| - | - | $+\infty$ |

# B Các dạng bài tập

## Dạng 1. Giới hạn của hàm số tại 1 điểm

a) Tử và mẫu đều là đa thức

- Biểu thức có dạng $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ trong đó $f(x)$, $g(x)$ là các *đa thức* và $f(x_0)=g(x_0)=0$.
- Khử dạng vô định $\dfrac{0}{0}$: phân tích tử và mẫu thành nhân tử với nhân tử chung là $x-x_0$.
- Giả sử $f(x)=(x-x_0)\cdot f_1(x)$ và $g(x)=(x-x_0)\cdot g_1(x)$.
- Khi đó $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$.

**Nhận xét.**

- *Nếu giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ vẫn ở dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ thì ta lặp lại quá trình trên cho đến khi không còn dạng vô định.*
- *Việc phân tích thành nhân tử ở trên được thực hiện bằng phương pháp chia Horner.*

b) Tử và mẫu đều là căn thức

- Biểu thức có dạng $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, trong đó $f(x)$, $g(x)$ là các căn thức và $f(x_0)=g(x_0)=0$.

- Khử dạng vô định $\frac{0}{0}$: nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp tương ứng của biểu thức chứa căn để trục các nhân tử $x-x_0$ ra khỏi căn thức, nhằm khử các thành phần có giới hạn bằng 0.

**Nhận xét.** *Có thể nhân liên hợp một hoặc nhiều lần để khử dạng vô định.*

! Các hằng đẳng thức

- $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$.
- $A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$.
- $A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$.

**Ví dụ 1.** Tìm giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2+4x}$.

b) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-5x+2}{1-2x}$.

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2+x-6}$.

d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+x^3}{1-x^2}$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Ví dụ 2.** Tìm giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{x^2-9}$.

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{2x^2-5x+2}$.

c) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-7x-4}{x^2+x-20}$.

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+3x^2-9x-2}{-x^3+x+6}$.

e) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2-3x-7}{x^3+1}$.

f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2+x-6)^2}{-x^3+2x^2}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 3.** Tìm giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{2x}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\sqrt{9+x}-3}$.

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+7}-3}{2-\sqrt{x+3}}$.

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}}$.

f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+7}+x+4}{x^3-4x^2+3}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 4.** Tìm giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{2x+\sqrt{3x^2+1}}$.

b) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x-5\sqrt{x-1}}{3-\sqrt{x+4}}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{12x+1}}{4x}$.

d) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{2x+9}-x-5}{\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+3}}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 2. Giới hạn của hàm số tại vô cực

a) *Dạng 1.1: Giới hạn* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *với* $P(x)$, $Q(x)$ *là các đa thức hoặc các hàm số.*
Gọi $p$ là bậc của $P(x)$, $q$ là bậc $Q(x)$ và $m=\max\{p;q\}$.
Chia cả tử và mẫu cho $x^m$ ta có kết luận.
Khi đó:

- Nếu $p\le q$ thì tồn tại giới hạn hữu hạn.
- Nếu $p>q$ thì tồn tại giới hạn vô cực.

b) *Dạng 1.2: Giới hạn* $\infty-\infty$.
Sử dụng các biểu thức liên hợp đưa về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$.

c) *Dạng 1.3: Giới hạn* $0\cdot\infty$.
Sử dụng các biểu thức liên hợp đưa về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$.
Các công thức liên hợp thường gặp:

- $\sqrt{A}-\sqrt{B}=\dfrac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$.
- $\sqrt{A}-B=\dfrac{A-B^2}{\sqrt{A}+B}$.
- $\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}=\dfrac{A-B}{(\sqrt[3]{A})^2+\sqrt[3]{A}\cdot\sqrt[3]{B}+(\sqrt[3]{B})^2}$.

- $\sqrt[3]{A}-B=\dfrac{A-B^3}{(\sqrt[3]{A})^2+\sqrt[3]{A}\cdot B+(B)^2}$.

**Ví dụ 5.** Tính các giới hạn sau:

a) $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+4x+1}{x^4-5x^3+2x^2-x+3}$

b) $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt[3]{8x^3+x^2+1}}$

c) $C=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})$

d) $D=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 6.** Tính các giới hạn sau.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-6x^5+7x^3-4x+3}{8x^5-5x^4+2x^2-1}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+2}-\sqrt[3]{6x^2+5}}{\sqrt[4]{16x^4+3}-\sqrt[5]{8x^4+7}}$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+2}$.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 7.** Tính các giới hạn sau.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}\right)$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\right)$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 8.** Tính các giới hạn sau.

a) $\lim\limits_{x\to0}\left[x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+5x-2}\right)$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 3. Giới hạn một bên của hàm số

a) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L\neq0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\pm\infty$ thì

- $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\begin{cases}+\infty & \text{khi } L\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)>0\\ -\infty & \text{khi } L\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)<0.\end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}0 & \text{khi } \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty\\ +\infty & \text{khi } \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0 \text{ và } L\cdot g(x)>0\\ -\infty & \text{khi } \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0 \text{ và } L\cdot g(x)<0.\end{cases}$

b) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L.$

**Ví dụ 9.** Tính các giới hạn sau.

a) $\lim\limits_{x\to -4^+}\dfrac{x^3-16x}{|x+4|}$.

b) $\lim\limits_{x\to -4^-}\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{|x+4|}$

c) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$.

d) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{|x-1|}{2-x^2-3x}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 10.**

a) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-15}{x-2}$.

b) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Ví dụ 11.** Tính giới hạn của các hàm số sau.

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\sqrt{1-x}} & \text{với } x<1\\ \sqrt{3x^2+1} & \text{với } x\geq 1.\end{cases}$. Tính $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$.

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{1-x} & \text{với } x<1\\ \sqrt{2x-2} & \text{với } x\geq 1.\end{cases}$. Tính $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Ví dụ 12.** Tìm các giới hạn một bên và giới hạn (nếu có) của các hàm số sau.

a) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{9-x^2} & \text{với } -3\le x\le 3\\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}} & \text{với } x>3\end{cases}$ khi $x\to 3$.

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{với } x>1\\ \dfrac{x^2-3x+2}{4\left(3x^2-5x+2\right)} & \text{với } x<1.\end{cases}$ khi $x\to 1$.

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & \text{với } x<0\\ 5+\dfrac{4-x}{x+1} & \text{với } x\ge 0.\end{cases}$ khi $x\to 0$

**Lời giải**

# C Bài tập rèn luyện

## PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1.** Giới hạn $L=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x+3}$ bằng

**A.** $L=-\infty$. **B.** $L=0$. **C.** $L=+\infty$. **D.** $L=1$.

Lời giải

**Câu 2.** Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}$ bằng

**A.** 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

**Câu 3.** Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2+2020}{2x-1}$ bằng

**A.** 0. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$. **D.** 2019.

Lời giải

**Câu 4.** Giới hạn $A = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+1}{x^2+x+4}$ bằng

**A.** $-\dfrac{1}{6}$. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

Lời giải

**Câu 5.** Cho $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = -2$. Tính $\lim\limits_{x\to 3}[f(x)+4x-1]$.

**A.** 5. **B.** 6. **C.** 11. **D.** 9.

Lời giải

**Câu 6.** Biểu thức $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{x}$ bằng

**A.** 0. **B.** $\dfrac{2}{\pi}$. **C.** $\dfrac{\pi}{2}$. **D.** 1.

Lời giải

**Câu 7.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

**A.** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$. **B.** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=-\infty$. **C.** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^5}=+\infty$. **D.** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$.

**Lời giải**

**Câu 8.** Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng $-\infty$?

**A.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x+4}{x-2}$. **B.** $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-3x+4}{x-2}$. **C.** $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-3x+4}{x-2}$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x+4}{x-2}$.

**Lời giải**

**Câu 9.** Trong các giới hạn dưới đây, giới hạn nào là $+\infty$?

**A.** $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{2x-1}{4-x}$. **B.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3+2x+3\right)$.

**C.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$. **D.** $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{2x-1}{4-x}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 10.** Giới hạn $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1}$ bằng

**A.** $\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 11.** $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x+1}{x-1}$ bằng

**A.** $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** $1$. **D.** $0$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 12.** Tìm $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1-2x}{x-1}$.

**A.** $-\infty$. **B.** $-2$. **C.** $0$. **D.** $+\infty$.

**Lời giải**

**Câu 13.** Tính giới hạn bên phải của hàm số $f(x)=\dfrac{3x-7}{x-2}$ khi $x\to 2$.

**A.** $+\infty$. **B.** $3$. **C.** $\dfrac{7}{2}$. **D.** $-\infty$.

**Lời giải**

**Câu 14.** Biết $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=4$. Khi đó $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{(x+1)^4}$ bằng

**A.** $-\infty$. **B.** $4$. **C.** $+\infty$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Câu 15.** Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3-x^2+1\right)$.

**A.** $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** $2$. **D.** $0$.

Lời giải

**Câu 16.** Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x+1}{x}$ bằng

**A.** $+\infty$. **B.** $1$. **C.** $-\infty$. **D.** $0$.

Lời giải

**Câu 17.** Tính $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-12x+35}{25-5x}$.

**A.** $-\dfrac{2}{5}$. **B.** $+\infty$. **C.** $\dfrac{2}{5}$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

**Câu 18.** Tính $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$ bằng

**A.** 3. **B.** 6. **C.** $+\infty$. **D.** $-3$.

Lời giải

**Câu 19.** Tính $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}$.

**A.** $L=-5$. **B.** $L=0$. **C.** $L=-3$. **D.** $L=5$.

Lời giải

**Câu 20.** Gọi $a$, $b$ là các giá trị để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-4}, & \text{khi } x<-2\\ x+1, & \text{khi } x\geq -2\end{cases}$ có giới hạn hữu hạn khi $x$ dần tới $-2$. Tính $3a-b$.

**A.** 8. **B.** 4. **C.** 24. **D.** 12.

Lời giải

**Câu 21.** Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}+x\right)$.

**A.** $+\infty$. **B.** $-1$. **C.** $-\infty$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Câu 22.** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{(4x+1)^3(2x+1)^4}{(3+2x)^7}$. Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

**A.** $2$. **B.** $8$. **C.** $4$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Câu 23.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{mx^2-7x+5}{2x^2+8x-1}=-4$.

**A.** $m=-4$. **B.** $m=-8$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-3$.

**Lời giải**

**Câu 24.** Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax+\sqrt{x^2-3x+5}}{2x-7}=2$. Khi đó

**A.** $-1\le a\le 2$. **B.** $a<-1$. **C.** $a\ge 5$. **D.** $2<a<5$.

**Lời giải**

**Câu 25.** Cho $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+3x+1}{x+1}+ax+b\right)=1$. Khi đó giá trị của biểu thức $T=a+b$ bằng

**A.** $-2$. **B.** $0$. **C.** $1$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Câu 26.** Biết rằng $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-2}+ax-b\right)=-5$. Tính tổng $a+b$.

**A.** $6$. **B.** $7$. **C.** $8$. **D.** $5$.

**Lời giải**

**Câu 27.** Giá trị của $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{x+3}$ bằng

**A.** $-\infty$. **B.** $-1$. **C.** $+\infty$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Câu 28.** Cho số thực $a$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a\sqrt{2x^2+3}+2017}{2x+2018}=\dfrac{1}{2}$. Khi đó giá trị của $a$ là

**A.** $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $a=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$. **C.** $a=\dfrac{1}{2}$. **D.** $a=-\dfrac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Câu 29.** Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2-a)x-3}{x-\sqrt{x^2+1}}=+\infty$ (với $a$ là tham số). Giá trị nhỏ nhất của $P=a^2-2a+4$ là

**A.** 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 1.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 30.** Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+3}}{3x+2}$.

**A.** $-\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{2}{3}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 31.** Cho giới hạn $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\dfrac{a}{b}$ trong đó $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S=a^2+b^2$.

**A.** $S=20$. **B.** $S=17$. **C.** $S=10$. **D.** $S=25$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 32.** Giá trị của $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2018}+x-2}{x^{2017}+x-2}$ bằng $\dfrac{a}{b}$, với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a^2-b^2$.

**A.** 4037. **B.** 4035. **C.** $-4035$. **D.** 4033.

**Lời giải**

**Câu 33.** $\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{|10-2x|}{x^2-6x+5}$ là

**A.** $+\infty$. **B.** 0. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Câu 34.** Cho $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}=\dfrac{a}{b}$ với $a$, $b$ là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính tổng $S=a+b$.

**A.** 5. **B.** 10. **C.** 3. **D.** 4.

**Lời giải**

**Câu 35.** Biết $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+bx+c}{x-3}=8$. $(b,c\in\mathbb{R})$. Tính $P=b+c$.

**A.** $P=-13$. **B.** $P=-11$. **C.** $P=5$. **D.** $P=-12$.

Lời giải

**Câu 36.** Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{3x^2+8x+5}$.

**A.** $L=-\dfrac{3}{2}$. **B.** $L=\dfrac{1}{2}$. **C.** $L=-\infty$. **D.** $L=0$.

Lời giải

**Câu 37.** Cặp $(a,b)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+ax+b}{x-3}=3$ là

**A.** $a=-3,b=0$. **B.** $a=3,b=0$.

**C.** $a=0,b=-9$. **D.** không tồn tại cặp $(a,b)$.

Lời giải

**Câu 38.** Cho $a$, $b$ là số nguyên và $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2+bx-5}{x-1}=7$. Tính $a^2+b^2+a+b$.

**A.** 18. **B.** 1. **C.** 15. **D.** 5.

**Lời giải**

**Câu 39.** Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{1-\cos 3x\cos 5x\cos 7x}{\sin^2 7x}$. Tính $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

**A.** $\dfrac{83}{49}$. **B.** $\dfrac{105}{49}$. **C.** $\dfrac{15}{49}$. **D.** $\dfrac{83}{98}$.

**Lời giải**

**Câu 40.** Cho biết $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{ax^2+1}-bx-2}{x^3-3x+2}$ $(a,b\in\mathbb{R})$ có kết quả là một số thực. Giá trị của biểu thức $a^2+b^2$ bằng

**A.** $6+5\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{45}{16}$. **C.** $\dfrac{9}{4}$. **D.** $87-48\sqrt{3}$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 41.** Cho $f(x)$ là đa thức thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-20}{x-2}=10$. Tính $T=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{6f(x)+5}-5}{x^2+x-6}$.

**A.** $T=\dfrac{12}{25}$. **B.** $T=\dfrac{4}{25}$. **C.** $T=\dfrac{4}{15}$. **D.** $T=\dfrac{6}{25}$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 42.** Biết rằng $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-3x+1}+x\sqrt{2}\right)=\dfrac{a}{b}\sqrt{2},\left(a;b\in\mathbb{Z},\dfrac{a}{b}\right.$ tối giản $)$. Tổng $a+b$ có giá trị là

**A.** 1. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 7.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 43.** Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-(ax+b)\right)=0$. Tính $a-4b$.

**A.** 3. **B.** 5. **C.** $-1$. **D.** 2.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 44.** Tìm giới hạn $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1-\sqrt{x^2-x+2}\right)$.

**A.** $I=\dfrac{1}{2}$. **B.** $I=\dfrac{46}{31}$. **C.** $I=\dfrac{17}{11}$. **D.** $I=\dfrac{3}{2}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**BẢNG ĐÁP ÁN**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Câu 1. B | Câu 2. A | Câu 3. D | Câu 4. A | Câu 5. D | Câu 6. B | Câu 7. B |
| Câu 8. C | Câu 9. A | Câu 10. D | Câu 11. A | Câu 12. A | Câu 13. D | Câu 14. C |
| Câu 15. B | Câu 16. D | Câu 17. C | Câu 18. B | Câu 19. D | Câu 20. D | Câu 21. A |
| Câu 22. B | Câu 23. B | Câu 24. D | Câu 25. A | Câu 26. A | Câu 27. B | Câu 28. A |
| Câu 29. A | Câu 30. A | Câu 31. B | Câu 32. A | Câu 33. D | Câu 34. A | Câu 35. A |
| Câu 36. A | Câu 37. A | Câu 38. A | Câu 39. D | Câu 40. B | Câu 41. B | Câu 42. D |
| Câu 43. B | Câu 44. D | | | | | |

## PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

**Câu 1.** Cho $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+x\right)$. Khi đó

| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** $L=5$ khi $a=-10$. | | |
| **b)** $L>0$ khi $a>0$. | | |
| **c)** $L<0$ khi $a>0$. | | |
| **d)** $L=-1$ thì $a$ là một nghiệm của phương trình $x^2-3x+2=0$. | | |

Lời giải

**Câu 2.** Cho $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{a\sqrt{x^2+1}+2023}{x+2024}=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+bx+1}-x\right)=2$. Khi đó

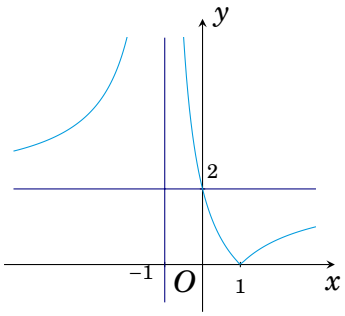
| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** $a>0$. | | |
| **b)** $b>0$. | | |

| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| **c)** $a>b$. | | |
| **d)** $P=4a+b=2$. | | |

Lời giải

. . . . . .

**Câu 3.** Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ.




| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2.$ | | |
| **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$ | | |

| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| **c)** $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 2.$ | | |
| **d)** $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty.$ | | |

Lời giải

. . . . . .

**Câu 4.** Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-(ax+b)\right) = 0$. Khi đó

| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** $a$ là số lẻ. | | |
| **b)** $b > 0.$ | | |

| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| **c)** $a \cdot b < 0.$ | | |
| **d)** $a - 4b = 5.$ | | |

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 5.** Cho các số thực $a$, $b$, $c$ thỏa mãn $c^2+a=18$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx}-cx\right)=-2$. Khi đó

| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** $a=9$. | | |
| **b)** $b=3c$. | | |

| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| **c)** $a=3c$. | | |
| **d)** $P=a+b+5c=14$. | | |

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 6.** Cho $a$, $b$ là các số thực khác 0. Biết giới hạn $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x}+ax}{bx-1}$. Khi đó

| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** $L=3$ khi $\dfrac{a-1}{b}=3$. | | |
| **b)** $L=6$ khi $\dfrac{a-1}{b}=4$. | | |

| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| **c)** $L=2$ khi $a+2b=1$. | | |
| **d)** $L=1$ khi $a+b=1$. | | |

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | |
|---|---|---|
| **Câu 1.** a Đ b S c Đ d Đ | **Câu 2.** a S b Đ c S d Đ | **Câu 3.** a Đ b S c S d Đ |
| **Câu 4.** a S b S c Đ d Đ | **Câu 5.** a Đ b S c Đ d S | **Câu 6.** a Đ b S c Đ d Đ |

## PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-ax}{bx\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+1\right)}$ với $a$, $b$ là các số tự nhiên và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $P=a+b^2$

KQ: 

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 2.** Hàm Heaviside có dạng $H(t)=\begin{cases}0 \text{ khi } t<0\\ 1 \text{ khi } t\geq 0\end{cases}$ thường được dùng để mô tả việc chuyển trạng thái tắt/mở của dòng điện tại thời điểm $t=0$. Tính $\lim\limits_{t\to0^-}H(t)+\lim\limits_{t\to0^+}H(t)$.

KQ: 

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 3.** Một cái hồ chứa 600 l nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối 30 g/l vào hồ với tốc độ 15 lít/phút. Nồng độ muối của nước trong hồ sau $t$ phút kể từ khi bắt đầu bơm là $C(t)=\dfrac{30\cdot15t}{600+15t}=\dfrac{30t}{40+t}$ (g/l). Khi đó nồng độ muối trong hồ sẽ bằng bao nhiêu gam/lít khi $t$ dần về dương vô cùng?

KQ: 

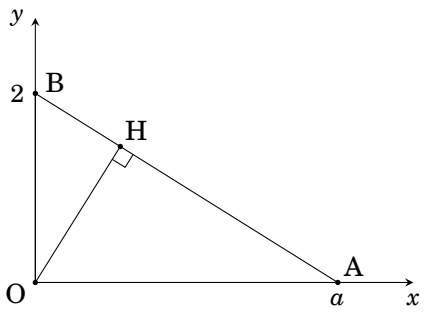
**Lời giải**

**Câu 4.** Biết rằng giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+16}-7}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{a}{\sqrt{x+9}+b}+\dfrac{c}{\sqrt{x+16}+d}\right]$ với $a$, $b$, $c$, $d$ là các số nguyên dương. Tính tổng các số $a$, $b$, $c$, $d$.

KQ:

**Lời giải**

**Câu 5.** Trong hệ trục toạ độ $Oxy$, lấy điểm $A$ thuộc tia $Ox$ và điểm $B(0;2)$ thuộc tia $Oy$. Giả sử hoành độ điểm $A$ là $a>0$. Độ dài đường cao $OH$ của tam giác $OAB$ được tính theo công thức $\dfrac{2a}{\sqrt{4+a^2}}$. Khi điểm $A$ dịch chuyển ra vô cực theo chiều dương trục $Ox$ thì độ dài $AH$ thay đổi về gần giá trị bao nhiêu?




KQ:

**Lời giải**

**Câu 6.** Biết rằng giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5x-1}-\sqrt{9x-2}+1}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{a}{b\sqrt{5x-1}+3}-\dfrac{c}{4+d\sqrt{9x-2}}\right)$ với $a$, $b$, $c$, $d$ là các số nguyên dương. Tính tổng các số $a$, $b$, $c$, $d$.

KQ:

**Lời giải**

**Câu 7.** Cho $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(3+2x^2)^5(3x^3-4)^2}{(5-x^3)^2(1-2x^2)^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}x^4\cdot\dfrac{\left(\dfrac{3}{x^2}+a\right)^5\left(b-\dfrac{4}{x^3}\right)^2}{\left(\dfrac{5}{x^3}-c\right)^2\left(\dfrac{1}{x^2}-d\right)^3}$ với $a$, $b$, $c$, $d$ là các số tự nhiên. Tính tích các số $a$, $b$, $c$, $d$.

KQ:

**Lời giải**

.....

.....

**Câu 8.** Biến đổi giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(6-2x^4)^4\cdot(2-x^2)}{(x^2-3)^5\cdot(6-4x)}$ ta thu được kết quả dạng $\lim\limits_{x\to+\infty}x^a\cdot\dfrac{\left(\dfrac{6}{x^4}-2\right)^4\cdot\left(\dfrac{2}{x^2}-1\right)}{\left(1-\dfrac{3}{x^2}\right)^5\cdot\left(\dfrac{6}{x}-4\right)}$ với $a$ là số tự nhiên. Xác định giá trị của $a$. KQ: ☐

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 9.** Cho $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(4-x^2)^6\cdot(3x^2+2)^2}{(5x^2-3)^2\cdot(1-2x^5)^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3}\cdot\dfrac{\left(\dfrac{4}{x^2}-1\right)^6\cdot\left(3+\dfrac{2}{x^2}\right)^b}{\left(5-\dfrac{3}{x^2}\right)^a\cdot\left(\dfrac{1}{x^5}-2\right)^3}$ với $a$, $b$, $c$, $d$ là các số tự nhiên. Tính $S=a-b$. KQ: ☐

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 10.** Tìm giới hạn của hàm số sau tại điểm cho trước $\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} & \text{khi } x>1\\ -\dfrac{x}{2} & \text{khi } x\le 1\end{cases}$, tại $x=1$.

KQ: ☐

## Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Câu 1.** 2 | **Câu 2.** 1 | **Câu 3.** 30 | **Câu 4.** 9 | **Câu 5.** 2 |
| **Câu 6.** 16 | **Câu 7.** 12 | **Câu 8.** 7 | **Câu 9.** 0 | **Câu 10.** -0,5 |

# BÀI 17. HÀM SỐ LIÊN TỤC

## A Lý thuyết

### 1 Hàm số liên tục tại một điểm

**Định nghĩa 1**

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $K$ và $x_0 \in K$.

- Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục tại $x_0$ nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.
- Hàm số $y=f(x)$ không liên tục tại $x_0$ được gọi là gián đoạn tại điểm đó.

### 2 Hàm số liên tục trên một khoảng

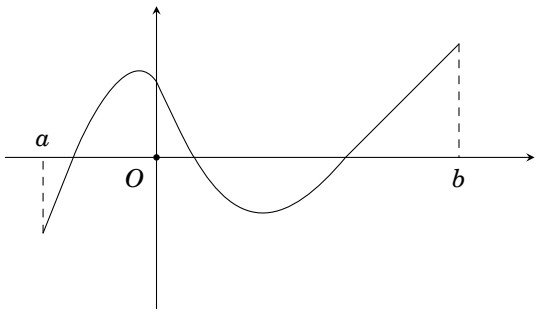
**Định nghĩa 2**

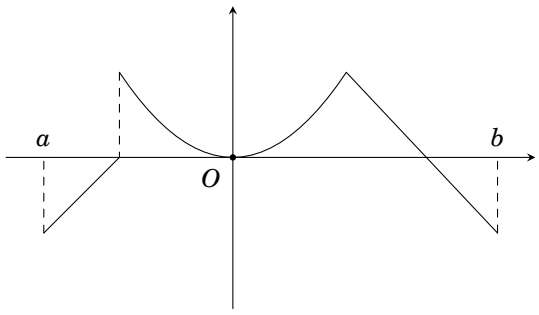
- Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên một khoảng $(a;b)$ nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.
- Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a;b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

!

a) Khái niệm hàm số liên tục trên nửa khoảng, như $(a;b]$, $[a;b)$, $(-\infty;b]$, $[a;+\infty)$ được định nghĩa một cách tương tự.

b) Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một "đường liền" trên khoảng đó.




### 3 Một số định lí

**Định lý 1**

- Hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) và các hàm số lượng giác thì liên tục trên từng khoảng xác định của nó.

**Định lý 2**

Giả sử $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là hai hàm số liên tục tại $x_0$. Khi đó

- Các hàm số $y=f(x)+g(x)$, $y=f(x)-g(x)$ cũng liên tục tại $x_0$.
- Hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tục tại $x_0$ nếu $g(x_0)\neq 0$.

**Định lý 3**

Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a)\cdot f(b)<0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c\in(a;b)$ sao cho $f(c)=0$.

- Định lí này thường được áp dụng để chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình trên một khoảng.
- Có thể phát biểu Định lí 3 dưới một dạng khác như sau
  Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a)\cdot f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm $x_0\in(a;b)$.

## B Các dạng bài tập

### Dạng 1. Xét tính liên tục của hàm số tại 1 điểm

**Phương pháp**

**Bài toán:** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập $\mathscr{D}$. Để xét tính liên tục của hàm số $y=f(x)$ tại điểm $x_0\in\mathscr{D}$, ta thực hiện các bước sau

- **Bước 1:** Tính $f(x_0)$.
- **Bước 2:** Tính $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
- **Bước 3:** So sánh và rút ra kết luận.
  - Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ thì hàm số $y=f(x)$ liên tục tại điểm $x_0$.
  - Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$ thì hàm số $y=f(x)$ không liên tục (gián đoạn) tại điểm $x_0$.

**Ví dụ 1.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$ tại điểm $x_0=2$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 2.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{khi } x>0\\ x & \text{khi } x\le 0\end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x_0=0$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 3.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x}{2} & \text{khi } x\le 1 \\ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} & \text{khi } x>1 \end{cases}$ tại điểm $x_0=1$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Ví dụ 4.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-6x+5}{x^2-1} & \text{khi } x\ne 1 \\ -2 & \text{khi } x=1 \end{cases}$ tại điểm $x_0=1$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Ví dụ 5.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{2x-3}}{2-x} & \text{khi } x\neq 2\\ 1 & \text{khi } x=2\end{cases}$ tại điểm $x_0=2$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

## Dạng 2. Tìm tham số để hàm số liên tục – gián đoạn tại 1 điểm

**Bước 1.** Tính $f(x_0)$.

**Bước 2.** Tìm $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.

**Bước 3.** So sánh và rút ra kết luận.

- Hàm số $f(x)$ **liên tục** tại điểm $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$.
- Hàm số $f(x)$ **gián đoạn** tại điểm $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq f(x_0)$.

Từ đó tìm được tham số thỏa yêu cầu.

**Ví dụ 6.** Tìm tham số $m$ để hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-m & \text{khi } x\neq 2\\ x+m & \text{khi } x=2\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=2$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 7.** Tìm tham số $m$ để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x-3}{x+1} & \text{khi } x\neq -1\\ m^2+5m & \text{khi } x=-1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=-1$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 8.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{4x+5}-3}{x^2-1} & \text{khi } x>1\\ m^2+5m & \text{khi } x\le -1.\end{cases}$
Tìm tham số $m$ để $f(x)$ gián đoạn tại $x_0=1$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 9.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & \text{khi } x>1\\ x^2+3 & \text{khi } x<1\\ k^2 & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tìm $k$ để $f(x)$ gián đoạn tại $x=1$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 10.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3m & \text{khi } x=1.\end{cases}$
Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số gián đoạn tại $x=1$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 11.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^3-\sqrt{8-4x}}{x-1} & \text{khi } x<1\\ 14ax & \text{khi } x\geq 1.\end{cases}$
Tìm $a$ để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=1$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 12.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{3x+a} & \text{khi } x\neq 1\\ 3x+a & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tìm các giá trị của tham số $a$ để $f(x)$ liên tục tại $x=1$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 3. Chứng minh phương trình có nghiệm

Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên $\mathscr{D}$.
Ta chứng minh hàm số $y=f(x)$:

- Liên tục trên $\mathscr{D}$ và
- Có hai số $a,b\in D$ sao cho $f(a)\cdot f(b)<0$.

Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có $k$ nghiệm trên $\mathscr{D}$.
Ta chứng minh hàm số $y=f(x)$:

- Liên tục trên $\mathscr{D}$ và
- Tồn tại $k$ khoảng rời nhau $(a_i;a_{i+1})$ $(i=1,2,\ldots,k)$ nằm trong $\mathscr{D}$: $f(a_i)\cdot f(a_{i+1})<0$.

**Ví dụ 13.** Chứng minh rằng phương trình $2x^4-2x^3-3=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-1;0)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 14.** Chứng minh rằng phương trình $6x^3+2x^2-31x+10=0$ có đúng ba nghiệm phân biệt.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 15.** Chứng minh rằng phương trình $x-1+\sin x=0$ có nghiệm.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 16.** Chứng minh rằng phương trình $x^3+(m+3)x^2+(1-m)x-1=0$ luôn có nghiệm $\forall m$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 17.** Chứng minh rằng phương trình $x^3-2x^2+x-1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{m}{x+3}=0$ luôn có nghiệm $\forall m$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 18.** Chứng minh rằng phương trình $\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{1}{\sin x}=m$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số $m$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 19.** Chứng minh rằng phương trình $a\cos 2x+b\sin x+\cos x=0$ luôn có nghiệm với mọi tham số $a$, $b$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 20.** Chứng minh rằng phương trình $a\cos 3x+b\cos 2x+c\cos x+\sin x=0$ luôn có nghiệm trên $[0;2\pi]$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

# C Bài tập rèn luyện

## PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1.** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên cm. Điều kiện cần và đủ để hàm số liên tục trên $[a;b]$ là

**A.** $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b)$.

**B.** $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

**C.** $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

**D.** $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b)$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 2.** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a;b]$. Tìm mệnh đề **đúng**.

**A.** Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $f(a)\cdot f(b)>0$ thì phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

**B.** Nếu $f(a)\cdot f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

**C.** Nếu hàm số $f(x)$ liên tục, tăng trên $[a;b]$ và $f(a)\cdot f(b)>0$ thì phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

**D.** Nếu phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trong khoảng $(a;b)$ thì hàm số $f(x)$ phải liên tục trên $(a;b)$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 3.** Cho hàm số $y=\begin{cases}\dfrac{1-x^3}{1-x}, \text{khi } x<1\\ 1 \quad , \text{khi } x\geqslant 1\end{cases}$. Hãy chọn kết luận **đúng**

**A.** $y$ liên tục phải tại $x=1$.
**B.** $y$ liên tục tại $x=1$.
**C.** $y$ liên tục trái tại $x=1$.
**D.** $y$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 4.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} & \text{khi } x\neq 2\\ 4 & \text{khi } x=2\end{cases}$. Chọn mệnh đề **đúng**?

**A.** Hàm số liên tục tại $x=2$.
**B.** Hàm số gián đoạn tại $x=2$.
**C.** $f(4)=2$.
**D.** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=2$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 5.** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^3-x}$. Kết luận nào sau đây **đúng**?

**A.** Hàm số liên tục tại $x=-1$.
**B.** Hàm số liên tục tại $x=0$.
**C.** Hàm số liên tục tại $x=1$.
**D.** Hàm số liên tục tại $x=\dfrac{1}{2}$.

**Lời giải**

.....
.....

**Câu 6.** Hàm số nào sau đây liên tục tại $x=1$

**A.** $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$. **B.** $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}$. **C.** $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x}$. **D.** $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

**Lời giải**

**Câu 7.** Hàm số nào dưới đây gián đoạn tại điểm $x_0=-1$.

**A.** $y=(x+1)\left(x^2+2\right)$. **B.** $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$.

**Lời giải**

**Câu 8.** Hàm số nào sau đây gián đoạn tại $x=2$?

**A.** $y=\dfrac{3x-4}{x-2}$. **B.** $y=\sin x$.

**C.** $y=x^4-2x^2+1$. **D.** $y=\tan x$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

**Câu 9.** Cho bốn hàm số $f_1(x)=2x^3-3x+1$, $f_2(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$, $f_3(x)=\cos x+3$ và $f_4(x)=\log_3 x$. Hỏi có bao nhiêu hàm số liên tục trên tập $\mathbb{R}$?

**A.** 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

**Câu 10.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{khi } x\neq 0\\ 1 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

**A.** $f(x)$ có đạo hàm tại $x=0$.

**B.** $f\left(\sqrt{2}\right)<0$.

**C.** $f(x)$ liên tục tại $x=0$.

**D.** $f(x)$ gián đoạn tại $x=0$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

**Câu 11.** Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{khi } x\neq -2\\ m & \text{khi } x=-2\end{cases}$ liên tục tại $x=-2$.

**A.** $m=-4$. **B.** $m=2$. **C.** $m=4$. **D.** $m=0$.

**Lời giải**

**Câu 12.** Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 2m+1 & \text{khi } x=1\end{cases}$. Giá trị của tham số $m$ để hàm số liên tục tại điểm $x_0=1$ là

**A.** $m=-\dfrac{1}{2}$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=0$.

**Lời giải**

**Câu 13.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tìm $a$ để hàm số liên tục tại $x_0=1$.

**A.** $a=0$. **B.** $a=-\dfrac{1}{2}$. **C.** $a=\dfrac{1}{2}$. **D.** $a=1$.

**Lời giải**

**Câu 14.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{khi } x\neq 3\\ m & \text{khi } x=3\end{cases}$. Hàm số đã cho liên tục tại $x=3$ khi $m=$?

**A.** $-1$. **B.** $1$. **C.** $4$. **D.** $-4$.

**Lời giải**

**Câu 15.** Có bao nhiêu số tự nhiên $m$ để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ m^2+m-1 & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=1$?

**A.** $0$. **B.** $3$. **C.** $2$. **D.** $1$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 16.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x+2}-2} & \text{khi } x>2\\ m^2x-4m+6 & \text{khi } x\leqslant 2\end{cases}$, m là tham số. Có bao nhiêu giá trị của $m$ để hàm số đã cho liên tục tại $x=2$?

**A.** 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 17.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} & \text{khi } x\neq 0\\ 2a-\dfrac{5}{4} & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tìm giá trị thực của tham số $a$ để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=0$.

**A.** $a=-\dfrac{3}{4}$. **B.** $a=\dfrac{4}{3}$. **C.** $a=-\dfrac{4}{3}$. **D.** $a=\dfrac{3}{4}$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 18.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ a & \text{khi } x=2\end{cases}$. Hàm số liên tục tại $x=2$ khi $a$ bằng

**A.** 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** $-1$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 19.** Tìm $m$ để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x-4} & \text{khi } x>4\\ mx+1 & \text{khi } x\leqslant 4\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=4$.

**A.** $m=\dfrac{7}{4}$. **B.** $m=8$. **C.** $m=-\dfrac{7}{4}$. **D.** $m=-8$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 20.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}-m}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ n & \text{khi } x=1\end{cases}$. Để hàm số liên tục tại $x_0=1$ thì giá trị của biểu thức $(m+n)$ tương ứng bằng

**A.** $\dfrac{3}{4}$. **B.** $1$. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{9}{4}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 21.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{khi } x\neq 3\\ mx+2 & \text{khi } x=3\end{cases}$. Hàm số liên tục tại điểm $x=3$ khi $m$ bằng

**A.** $-2$. **B.** $4$. **C.** $-4$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Câu 22.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x}{x-2} & \text{khi } x>2\\ mx-4 & \text{khi } x\leqslant 2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$.

**A.** $m=3$. **B.** $m=2$. **C.** $m=-2$. **D.** Không tồn tại $m$.

**Lời giải**

**Câu 23.** Tìm $m$ để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x+1} & \text{khi } x>-1\\ mx-2m^2 & \text{khi } x\leq -1\end{cases}$ liên tục tại $x=-1$.

**A.** $m\in\left\{1;-\dfrac{3}{2}\right\}$. **B.** $m\in\{1\}$. **C.** $m\in\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$. **D.** $m\in\left\{-1;\dfrac{3}{2}\right\}$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 24.** Tìm các giá trị của tham số $m$ để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x} & \text{khi } x<2\\ mx+m+1 & \text{khi } x\geqslant 2\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=2$.

**A.** $m=\dfrac{1}{6}$. **B.** $m=-\dfrac{1}{6}$. **C.** $m=-\dfrac{1}{2}$. **D.** $m=\dfrac{1}{2}$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 25.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{ax^2+1}-bx-2}{4x^3-3x+1} & \text{khi } x\neq\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{c}{2} & \text{khi } x=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$. Biết hàm số liên tục tại $x=\dfrac{1}{2}$. Tính $S=abc$.

**A.** $S=-36$. **B.** $S=18$. **C.** $S=36$. **D.** $S=-18$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 26.** Tìm $a$ để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=1$.

**A.** $a=1$. **B.** $a=0$. **C.** $a=2$. **D.** $a=-1$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 27.** Tìm giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ m & \text{khi } x=2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$.

**A.** $m=3$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=0$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 28.** Để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-3x+1}{2(x-1)} & \text{khi } x\neq 1\\ m & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$ thì giá trị $m$ bằng

**A.** 0,5. **B.** 1,5. **C.** 1. **D.** 2.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 29.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } x>1\\ m^2+m+\dfrac{1}{4} & \text{khi } x\le 1\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực $m$ để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$.

**A.** $m\in\{0;1\}$. **B.** $m\in\{0;-1\}$. **C.** $m\in\{1\}$. **D.** $m\in\{0\}$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 30.** Tìm $a$ để hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+a & \text{khi } x\le 1\\ \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x>1\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

**A.** $a=-2$. **B.** $a=1$. **C.** $a=2$. **D.** $a=-1$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 31.** Tìm $m$ để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+4x+3}{x+1} & \text{khi } x>-1\\ mx+2 & \text{khi } x\le -1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=-1$.

**A.** $m=2$. **B.** $m=0$. **C.** $m=-4$. **D.** $m=4$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 32.** Cho hàm số $y=\begin{cases}-x^2+x+3 & \text{khi } x\ge 2\\ 5x+2 & \text{khi } x<2\end{cases}$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

**A.** Hàm số liên tục tại $x_0=1$.

**B.** Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

**C.** Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty;2);(2;+\infty)$.

**D.** Hàm số gián đoạn tại $x_0=2$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 33.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x+a-1 & \text{khi } x\le 0\\ \dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x} & \text{khi } x>0\end{cases}$. Tìm tất cả giá trị thực của $a$ để hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

**A.** $a=1$. **B.** $a=3$. **C.** $a=4$. **D.** $a=2$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 34.** Tìm $P$ để hàm số $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & \text{khi } x>1\\ 6Px-3 & \text{khi } x\le 1\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

**A.** $P=\dfrac{5}{6}$. **B.** $P=\dfrac{1}{2}$. **C.** $P=\dfrac{1}{6}$. **D.** $P=\dfrac{1}{3}$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 35.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x-4} & \text{khi } x>4\\ mx+1 & \text{khi } x\le 4\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

**A.** $m=8$ hoặc $m=-\dfrac{7}{4}$. **B.** $m=\dfrac{7}{4}$.

**C.** $m=-\dfrac{7}{4}$. **D.** $m=-8$ hoặc $m=\dfrac{7}{4}$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 36.** Nếu hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & \text{khi } x<-5 \\ x+17 & \text{khi } -5\le x\le 10 \\ ax+b+10 & \text{khi } x>10 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $a+b$ bằng

**A.** $-1$. **B.** $0$. **C.** $1$. **D.** $2$.

Lời giải

**Câu 37.** Phương trình nào dưới đây có nghiệm trong khoảng $(0;1)$?

**A.** $2x^2-3x+4=0$. **B.** $(x-1)^5-x^7-2=0$. **C.** $3x^4-4x^2+5=0$. **D.** $3x^{2017}-8x+4=0$.

Lời giải

**Câu 38.** Phương trình $3x^5+5x^3+10=0$ có nghiệm thuộc khoảng nào sau đây?

**A.** $(-2;-1)$. **B.** $(-10;-2)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

**Câu 39.** Cho phương trình $2x^3-8x-1=0$ (1). Khẳng định nào sau đây **sai**?

**A.** Phương trình không có nghiệm lớn hơn 3.

**B.** Phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt.

**C.** Phương trình có 2 nghiệm lớn hơn 2.

**D.** Phương trình có nghiệm trong khoảng $(-5;-1)$.

Lời giải

**Câu 40.** Cho số thực $a$, $b$, $c$ thỏa mãn $\begin{cases}-8+4a-2b+c>0\\8+4a+2b+c<0\end{cases}$. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ và trục $Ox$ là

**A.** 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Câu 1. C | Câu 2. D | Câu 3. A | Câu 4. A | Câu 5. D | Câu 6. C | Câu 7. B |
| Câu 8. A | Câu 9. D | Câu 10. D | Câu 11. A | Câu 12. C | Câu 13. C | Câu 14. D |
| Câu 15. D | Câu 16. D | Câu 17. D | Câu 18. A | Câu 19. A | Câu 20. D | Câu 21. A |
| Câu 22. A | Câu 23. A | Câu 24. B | Câu 25. A | Câu 26. C | Câu 27. A | Câu 28. A |
| Câu 29. B | Câu 30. B | Câu 31. B | Câu 32. B | Câu 33. D | Câu 34. C | Câu 35. B |
| Câu 36. A | Câu 37. D | Câu 38. A | Câu 39. B | Câu 40. C | | |

## PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

**Câu 1.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x}{2} & \text{khi } x\le 1\\ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} & \text{khi } x>1\end{cases}$ và $g(x)=x^2-3x+1$.

| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0=1$. | | |
| **b)** Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0=1$. | | |
| **c)** Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\dfrac{1}{2}$. | | |
| **d)** Hàm số $y=f(x)+g(x)$ liên tục tại điểm $x_0=1$. | | |

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{5x+11}}{2x^2-5x-18} & \text{khi } x>-2\\ 4-x^2 & \text{khi } x\le -2\end{cases}$ và $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-6}{x+2} & \text{khi } x\ne -2\\ 2x+a & \text{khi } x=-2.\end{cases}$

| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Ta có $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\dfrac{5}{26}$. | | |
| **b)** Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0=-2$. | | |
| **c)** Để hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0=-2$ thì $a=1$. | | |
| **d)** Khi $a=-1$ thì hàm số $y=f(x)\cdot g(x)$ gián đoạn tại điểm $x_0=-2$. | | |

Lời giải

.....

.....

**Câu 3.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{x^2-4} & \text{khi } x>2\\ x^2+ax+3b & \text{khi } x<2\\ 2a+b-6 & \text{khi } x=2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$. Khi đó

**a)** $a>0$. **b)** $b>0$. **c)** $a>b$. **d)** $I=a+b=\dfrac{19}{32}$.

**Lời giải**

**Câu 4.** Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{|2x^2-7x+6|}{x-2} & \text{khi } x<2\\ a+\dfrac{1-x}{2+x} & \text{khi } x\geq 2\end{cases}$. Khi đó

**a)** Khi $a=3$ thì $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\dfrac{11}{2}$.

**b)** $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-1$.

**c)** Để hàm số liên tục tại $x_0=2$ thì $a=-\dfrac{1}{2}$.

**d)** Biết $a$ là giá trị để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=2$, thì bất phương trình $-x^2+ax+\dfrac{7}{4}>0$ có 1 nghiệm nguyên .

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 5.** Cho $a$, $b$ là hai số thực sao cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 2ax-1 & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó

**a)** $f(1)=2a-1$. **b)** $a>0$. **c)** $b>0$. **d)** $a-b=6$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 6.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+b & \text{khi } x<-5\\ x+17 & \text{khi } -5\le x\le 10\\ ax+b+10 & \text{khi } x>10\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó

**a)** $f(-5)=12$; $f(10)=17$. **b)** $a>0$.

**c)** $b>0$. **d)** $a+b=2$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 7.** Biết rằng hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+5x+6}{x+2} & \text{khi } x>-2\\ mx+n & \text{khi } x\le -2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $n$ là một số thực tùy

ý. Khi đó

**a)** $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = -2$.

**b)** Khi $m = 1$ thì $n = 2$.

**c)** Khi $m = 2$ thì $n = 5$.

**d)** Khi $m = 3$ thì $n = 7$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 8.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+6}{3x^2-27} & \text{khi } x \neq \pm 3 \\ -\dfrac{1}{9} & \text{khi } x = \pm 3 \end{cases}$. Khi đó

**a)** Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ các điểm thuộc khoảng $(-3;3)$.

**b)** Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = -3$.

**c)** Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = 3$.

**d)** Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 9.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x} & \text{khi } x < 1, x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \\ \sqrt{x} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Khi đó

**a)** Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ các điểm thuộc đoạn $[0;1]$.

**b)** Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = 0$.

**c)** Hàm số liên tục tại mọi điểm điểm thuộc $\mathbb{R}$.

**d)** Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = 1$.

## Lời giải

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | |
|---|---|---|
| **Câu 1.** a Đ b Đ c S d Đ | **Câu 2.** a Đ b S c S d Đ | **Câu 3.** a Đ b S c Đ d Đ |
| **Câu 4.** a S b Đ c S d S | **Câu 5.** a Đ b Đ c S d S | **Câu 6.** a Đ b Đ c S d S |
| **Câu 7.** a S b S c Đ d Đ | **Câu 8.** a S b S c Đ d S | **Câu 9.** a S b S c Đ d S |

## PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} & \text{khi } x\neq 1\\ m^2x & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=1$.

KQ: ☐

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Tìm giá trị của tham số $a$ để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{khi } x>1\\ ax-\dfrac{1}{2} & \text{khi } x\leq 1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=1$.

KQ: ☐

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 3.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-5x+2}{2x^2-x-6} & \text{khi } x\neq 2\\ \dfrac{4mx-1}{3} & \text{khi } x=2\end{cases}$. Tìm giá trị của tham số $m$ để hàm số trên liên tục tại $x_0=2$.

KQ: ☐

Lời giải

.....

**Câu 4.** Tìm $m$ để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3x+m & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=1$. KQ:

**Lời giải**

**Câu 5.** Tìm giá trị của $m$ để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{khi } x\neq -2\\ m & \text{khi } x=-2\end{cases}$ liên tục trên tập xác định của chúng. KQ:

**Lời giải**

**Câu 6.** Tìm giá trị của tham số $m$ để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3x+m & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$.

KQ:

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**BẢNG ĐÁP ÁN**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Câu 1.** 0 | **Câu 2.** 1 | **Câu 3.** 0,5 | **Câu 4.** 0 | **Câu 5.** 3 |
| **Câu 6.** 0 | | | | |

Chương 6: Hàm sô mũ và hàm số Lôgarit

Chương 6

# HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

## BÀI 18. LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

### A Lý thuyết

a) Lũy thừa với số mũ nguyên.

**Định nghĩa 1**

Cho $n$ là một số nguyên dương. Ta định nghĩa

- Với $a$ là số thực tùy ý: $a^n = a \cdot a \cdots a$ ($n$ thừa số $a$).
- Với $a$ là số thực khác 0: $a^0 = 1; a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.
- Trong biểu thức $a^m$, $a$ gọi là cơ số, $m$ gọi là số mũ.

Lũy thừa với số mũ nguyên có các tính chất như lũy thừa với số mũ nguyên dương.
Với $a \neq 0; b \neq 0$ và $m; n$ là các số nguyên, ta có:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.
- $(ab)^m = a^m \cdot b^m$.
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$.
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^m$.

⚠

- *$0^0$ và $0^{-n}$ không có nghĩa.*
- *Nếu $a > 1$ thì $a^m > a^n$ khi và chỉ khi $m > n$.*
- *Nếu $0 < a < 1$ thì $a^m > a^n$ khi và chỉ khi $m < n$.*

b) Căn bậc $n$.

**Định nghĩa 2**

Cho số thực $b$ và số nguyên dương $n \geq 2$.

- Số $a$ được gọi là căn bậc $n$ của số $b$ nếu $a^n = b$.

- Ta có các tính chất sau (với điều kiện các căn thức đều có nghĩa):
  - $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{khi } n \vdots 2 \\ |a| & \text{khi } n \nvdots 2. \end{cases}$
  - $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.
  - $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $a, b \neq 0$.
  - $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (\sqrt[n]{a})^{\frac{1}{m}} = \sqrt[mn]{a}$.
  - $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$.

| | | |
|---|---|---|
| *n lẻ* | $b \in \mathbb{R}$ | *Có duy nhất một căn bậc n của b, ký hiệu* $\sqrt[n]{b}$. |
| *n chẵn* | $b < 0$ | *Không tồn tại căn bậc n của b.* |
| | $b = 0$ | *Có một căn bậc n của b là 0.* |
| | $b > 0$ | *Có hai bậc n của a là hai số đối nhau.*<br>*Căn có giá trị dương ký hiệu là* $\sqrt[n]{b}$, *căn có giá trị âm ký hiệu là* $-\sqrt[n]{b}$. |

- *Nếu n chẵn thì* $\sqrt[n]{b}$ *có nghĩa chỉ khi* $b \geq 0$.
- *Nếu n lẻ thì* $\sqrt[n]{b}$ *luôn có nghĩa với mọi số thực b.*

c) Lũy thừa với số mũ hữu tỉ.

**Định nghĩa 3**

Cho số thực $a > 0$ và số hữu tỉ $r = \dfrac{m}{n}$, trong đó $m, n \in \mathbb{Z}, n > 0$.

Lũy thừa của $a$ với số mũ $r$, kí hiệu là $a^r$, được xác định bởi $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

d) Lũy thừa với số mũ thực.

**Định nghĩa 4**

Giới hạn của dãy số $(a^{r_n})$ gọi là lũy thừa của số thực dương $a$ với số mũ $\alpha$. Kí hiệu: $a^\alpha = \lim a^{r_n}$ với $\alpha = \lim r_n$.

## B Các dạng bài tập

### Dạng 1. Tính giá trị biểu thức

- Sử dụng phối hợp linh hoạt các tính chất của lũy thừa.
- Chọn $a$; $b$ là các số thực dương và $\alpha$; $\beta$ là các số thực tùy ý, ta có:

- $a^{\alpha}\cdot a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}$.
- $\dfrac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}=a^{\alpha-\beta}$.
- $(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\cdot\beta}$.
- $(ab)^{\alpha}=a^{\alpha}\cdot b^{\alpha}$.
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\alpha}=\dfrac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$.
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-\alpha}=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\alpha}$.

**Ví dụ 1.** Đưa các biểu thức sau về dạng lũy thừa:

a) $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$ $(a>0)$.

b) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}}{16^{0,75}}$.

c) $\sqrt{\sqrt[5]{a^{15}\cdot b^{15}}}$ $(a,b>0)$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

**Ví dụ 2.** Tính giá trị của biểu thức:

a) $P = \sqrt[5]{-4} \cdot \sqrt[5]{8}$.

b) $S = 27^{\frac{2}{3}}$.

c) $A = \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{-1}{3}} + \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{-3}{4}}$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

**Ví dụ 3.** Tính giá trị của biểu thức:

a) $A = \dfrac{3^4 \cdot 3^{-2} + 2^5 \cdot 2^{-4}}{2^4 \cdot 2^3 \cdot 2^{-2} \cdot 3^5 \cdot 3^{-4}}$.

b) $B = \dfrac{3^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(2^2\right)^{-3} \left(\frac{1}{4}\right)^{-4}}{5^{-3} \cdot 25^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{25}\right)^{-1}}$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

**Ví dụ 4.** Thực hiện các yêu cầu sau:

a) Cho $4^x+4^{-x}=7$. Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{5+2^x+2^{-x}}{8-4\cdot 2^{-x}-4\cdot 2^{-x}}$.

b) Cho $9^x+9^{-x}=23$. Khi đó biểu thức $A=\dfrac{5+3^x+3^{-x}}{1-3^x-3^{-x}}=\dfrac{a}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $a\cdot b$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

## Dạng 2. Rút gọn biểu thức

- Sử dụng phối hợp linh hoạt các tính chất của lũy thừa.
- Chọn $a$; $b$ là các số thực dương và $\alpha$; $\beta$ là các số thực tùy ý, ta có

a) $a^\alpha\cdot a^\beta=a^{\alpha+\beta}$.

b) $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta}=a^{\alpha-\beta}$.

c) $(a^\alpha)^\beta=a^{\alpha\cdot\beta}$.

d) $(ab)^\alpha=a^\alpha\cdot b^\alpha$.

e) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha=\dfrac{a^\alpha}{b^\alpha}$.

f) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-\alpha}=\left(\dfrac{b}{a}\right)^\alpha$.

**Ví dụ 5.** Rút gọn các biểu thức:

a) $P = a^{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1}$ với $a > 0$.

b) $Q = a^{\frac{7}{3}} : \sqrt[3]{a}$ với $a > 0$.

c) $K = \frac{x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}}{\sqrt[4]{x}}$ với $x > 0$.

d) $M = x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}$ với $x > 0$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 6.** Thực hiện các yêu cầu sau:

a) Cho $a$ là một số thực dương. Viết biểu thức $P = a^{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[3]{a^2}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ.

b) Viết biểu thức $P = \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[4]{x}}$ $(x > 0)$ dưới dạng luỹ thừa với số mũ hữu tỷ.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 3. So sánh

- Nếu $a>1$ thì $a^m>a^n$ khi và chỉ khi $m>n$.
- Nếu $0<a<1$ thì $a^m>a^n$ khi và chỉ khi $m<n$.

**Ví dụ 7.** Thực hiện các yêu cầu sau:

a) Cho $A=199^{2023}$, $B=\sqrt{199}^{2024}$. So sánh $A$, $B$.

b) Sắp theo $A=3^{4999}$, $B=11^{4001}$ và $C=1331^{1000}$ theo thứ tự từ lớn đến bé.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 8.** Với những giá trị nào của $a$ thì:

a) $a^{\mathrm{e}}>a^{\pi}$;

b) $(a-1)^2>(a-1)^{\sqrt{5}}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 4. Bài toán lãi kép

- Số tiền lãi không chỉ tính trên số tiền gốc mà còn tính trên số tiền lãi do tiền gốc đó sinh ra thay đổi theo từng định kỳ.
- Công thức $T_n = T_0(1+r)^n$, trong đó:
  - $T_n$: Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn;
  - $T_0$: Số tiền gửi ban đầu;
  - $n$: Số kỳ hạn tính lãi;
  - $r$: Lãi suất định kỳ, tính theo %.

**Ví dụ 9.** Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 0,4%/ tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ta khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được lập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền bao nhiêu, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi xuất không thay đổi?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 10.** Một học sinh A khi đủ 18 tuổi được cha mẹ cho 200000000 VNĐ. Số tiền này được bảo quản trong ngân hàng MSB với kì hạn thanh toán 1 năm và học sinh A chỉ nhận được số tiền này khi học xong 4 năm đại học. Biết rằng khi đủ 22 tuổi, số tiền mà học sinh A được nhận sẽ là 243101250 VNĐ. Vậy lãi suất kì hạn một năm của ngân hàng MSB là bao nhiêu?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 11.** Ông Đại mới xin được việc làm nên gửi tiết kiệm vào ngân hàng với hình thức cứ mỗi đầu tháng đóng vào 5 triệu đồng với lãi suất 0,33%/ tháng. Tính số tiền mà ông Đại thu được từ ngân hàng sau 5 năm.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 12.** Ông Bình vậy vốn ngân hàng với số tiền 100 000 000 đồng. Ông dự định sau đúng 5 năm thì trả hết nợ theo hình thức sau đúng một tháng kể từ ngày vậy, ông bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau. Hỏi theo cách đó, số tiền $a$ mà ông sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết lãi suất hàng tháng là 1,2% và không thay đổi trong thời gian ông hoàn nợ.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 13.** Lãi suất cho vay tại PVcomBank trong tháng 5/2022 rất ưu đãi, ở mức 5%/năm, được áp dụng trong 6 tháng đầu, từ tháng thứ 7 trở đi ấn định mức lãi 12%/năm. Tại ngân hàng này, thời hạn cho vậy mua nhà tối đa là 20 năm, mức vậy tối đa 85% giá trị tài sản đảm bảo. Một người có khả năng trả cố định hằng tháng là 15 triệu. Giả sử người đó có thể mượn người thân 15% giá trị căn nhà, nếu được sử dụng gói vậy ở trên với thời hạn tối đa và mức vậy tối đa thì có thể mua được căn nhà có giá trị tối đa khoảng?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

# C Bài tập rèn luyện

## PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1.** Cho $a,b>0$; $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Phát biểu nào đúng?

**A.** $a^{\alpha+\beta}=a^{\alpha}+a^{\beta}$. **B.** $a^{\alpha}b^{\beta}=(ab)^{\alpha\beta}$. **C.** $(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\beta}$. **D.** $\dfrac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}=a^{\alpha+\beta}$.

**Lời giải**

**Câu 2.** Với $a$ là số thực dương tuỳ ý, $\sqrt{a^3}$ bằng

**A.** $a^{\frac{1}{6}}$. **B.** $a^{\frac{2}{3}}$. **C.** $a^{6}$. **D.** $a^{\frac{3}{2}}$.

**Lời giải**

**Câu 3.** Với $\alpha$ là số thực bất kì, mệnh đề nào sai?

**A.** $\sqrt{10^{\alpha}}=\left(\sqrt{10}\right)^{\alpha}$. **B.** $\sqrt{10^{\alpha}}=10^{\frac{\alpha}{2}}$. **C.** $(10^{\alpha})^2=(100)^{\alpha}$. **D.** $(10^{\alpha})^2=(10)^{\alpha^2}$.

**Lời giải**

**Câu 4.** Với $a$ là số thực dương tuỳ ý, $\sqrt{a^3}$ bằng

**A.** $a^{\frac{1}{6}}$. **B.** $a^{\frac{2}{3}}$. **C.** $a^6$. **D.** $a^{\frac{3}{2}}$.

**Lời giải**

**Câu 5.** Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}$ với $x > 0$.

**A.** $P = \sqrt{x}$. **B.** $P = x^{\frac{1}{8}}$. **C.** $P = x^{\frac{2}{9}}$. **D.** $P = x^2$.

**Lời giải**

**Câu 6.** Rút gọn biểu thức $P = \dfrac{a^{\sqrt{5}+1} \cdot a^{2-\sqrt{5}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}$ với $a$ là số thực dương khác 1.

**A.** $a^5$. **B.** $a$. **C.** $a^3$. **D.** $a^4$.

**Lời giải**

**Câu 7.** Cho biểu thức $P=\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[4]{x^3\sqrt{x}}}$, với $x>0$. Mệnh đề nào đúng?

**A.** $P=x^{\frac{15}{24}}$. **B.** $P=x^{\frac{1}{2}}$. **C.** $P=x^{\frac{7}{24}}$. **D.** $P=x^{\frac{7}{12}}$.

**Lời giải**

**Câu 8.** Cho $a<0, b>0$. Mệnh đề nào sai?

**A.** $\sqrt[4]{a^4b^8}=|ab^2|$. **B.** $\sqrt[4]{a^4b^8}=|a|b^2$. **C.** $\sqrt[4]{a^4b^8}=ab^2$. **D.** $\sqrt[4]{a^4b^8}=-ab^2$.

**Lời giải**

**Câu 9.** Giá trị $\sqrt[3]{2021}\cdot\sqrt[5]{2021}$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ là

**A.** $2021^{\frac{2}{5}}$. **B.** $2021^{\frac{1}{15}}$. **C.** $2021^{\frac{8}{15}}$. **D.** $2021^{\frac{1}{10}}$.

**Lời giải**

**Câu 10.** Cho $a=\dfrac{1}{256}$ và $b=\dfrac{1}{27}$. Tính $A=a^{\frac{-3}{4}}+b^{\frac{-4}{3}}$.

**A.** 23. **B.** 89. **C.** 145. **D.** 26.

**Lời giải**

**Câu 11.** Cho $4^x+4^{-x}=7$. Biểu thức $P=\dfrac{5+2^x+2^{-x}}{8-4\cdot 2^x-4\cdot 2^{-x}}$ có giá trị bằng

**A.** $P=\dfrac{3}{2}$. **B.** $P=-\dfrac{5}{2}$. **C.** $P=2$. **D.** $P=-2$.

**Lời giải**

**Câu 12.** Cho $9^x+9^{-x}=23$. Khi đó biểu thức $A=\dfrac{5+3^x+3^{-x}}{1-3^x-3^{-x}}=\dfrac{a}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a,b\in\mathbb{Z}$. Tích $a\cdot b$ bằng

**A.** $-10$. **B.** 10. **C.** $-8$. **D.** 8.

**Lời giải**

**Câu 13.** Biết $4^x+4^{-x}=14$, tính giá trị của biểu thức $P=2^x+2^{-x}$.

**A.** 4. **B.** 16. **C.** $\sqrt{17}$. **D.** $\pm 4$.

**Lời giải**

**Câu 14.** Biết rằng $a-\dfrac{1}{a}=4, a>0$. Giá trị biểu thức $D=\dfrac{a^{\frac{4}{3}}\cdot\left(a^{\frac{-1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\cdot\left(a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{-1}{4}}\right)}$ là một số có dạng $m+\sqrt{n}$ với $m$, $n$ là hai số tự nhiên. Khẳng định nào đúng?

**A.** $m+n=7$. **B.** $m-n=7$. **C.** $2m+n=7$. **D.** $m+2n=7$.

**Lời giải**

.....

**Câu 15.** Tính giá trị của biểu thức $P=\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2017}\left(4\sqrt{3}-7\right)^{2016}$.

**A.** $P=\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2016}$. **B.** $P=1$. **C.** $P=7-4\sqrt{3}$. **D.** $P=7+4\sqrt{3}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 16.** Cho số thực dương $a>0$ và khác 1. Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{5}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{7}{12}}-a^{\frac{19}{12}}\right)}$ có kết quả dạng $m+a^n$ với $m$, $n$ là 2 số nguyên. Tổng của $m$ và $n$ bằng

**A.** 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 17.** Nếu $a^{\frac{1}{3}}>a^{\frac{1}{6}}$ và $b^{\sqrt{3}}>b^{\sqrt{5}}$ thì

**A.** $a<1;0<b<1$. **B.** $a>1;b<1$. **C.** $0<a<1;b<1$. **D.** $a>1;0<b<1$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 18.** Cho $a>1$. Mệnh đề nào đúng?

**A.** $\dfrac{1}{a^{2016}}<\dfrac{1}{a^{2017}}$. **B.** $a^{\frac{1}{3}}>\sqrt{a}$. **C.** $a^{-\sqrt{3}}>\dfrac{1}{a^{\sqrt{5}}}$. **D.** $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a}>1$.

**Lời giải**

**Câu 19.** Mệnh đề nào sai?

**A.** $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018}>\left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$. **B.** $2^{\sqrt{2}+1}>2^{\sqrt{3}}$.

**C.** $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017}>\left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}$. **D.** $\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2019}<\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}$.

**Lời giải**

**Câu 20.** Khẳng định nào đúng?

**A.** $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{\sqrt{3}}>\left(\dfrac{5}{8}\right)^{\sqrt{3}}$. **B.** $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\pi}<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\pi}$. **C.** $3^{-\sqrt{2}}<\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$. **D.** $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-50}<\left(\sqrt{2}\right)^{100}$.

**Lời giải**

**Câu 21.** Cho hai số thực dương $x$ và $y$. Rút gọn biểu thức $A=\left(\dfrac{x^{\sqrt{5}}}{y^{\sqrt{5}-2}}\right)^{\sqrt{5}+2}\cdot\left(\dfrac{x^{-2\sqrt{5}-2}}{y^{-3}}\right)$ được kết quả có dạng $x^a y^b$ với $a$, $b$ là 2 số nguyên. Khẳng định nào đúng?

**A.** $5b+a=13$. **B.** $5a+b=12$. **C.** $a+b=3$. **D.** $2a+b=1$.

**Lời giải**

**Câu 22.** Biết rằng $2^{\alpha}=\dfrac{1}{4}$ và $3^{\alpha}=\dfrac{1}{9}$. Khẳng định nào đúng?

**A.** $6^{-2\alpha}<6^5$. **B.** $6^{-2\alpha}>6^4$. **C.** $6^{-2\alpha}<6^3$. **D.** $6^{-2\alpha}>6^5$.

**Lời giải**

**Câu 23.** Biết rằng $10^{\alpha}=2$; $10^{\beta}=5$. Tính $10^{\alpha+\beta}+10^{\alpha-\beta}$.

**A.** 10. **B.** $\dfrac{52}{5}$. **C.** $\dfrac{2}{5}$. **D.** $\dfrac{5}{52}$.

**Lời giải**

**Câu 24.** Cho $a$, $b$ là các số thực thỏa mãn $3\cdot 2^a+2^b=7\sqrt{2}$ và $5\cdot 2^a-2^b=9\sqrt{2}$. Tính $S=2^{a+b}+2^{a-b}$.

**A.** $6\sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

**Lời giải**

**Câu 25.** Anh An gửi số tiền 58 triệu đồng vào một ngân hàng theo hình thức lãi kép và ổn định trong 9 tháng thì lĩnh về được 61 758 000 đồng. Hỏi lãi suất ngân hàng hàng tháng là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất không thay đổi trong thời gian gửi.

**A.** 0,8%. **B.** 0,6%. **C.** 0,7%. **D.** 0,5%.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .

**Câu 26.** Ông An gửi tiết kiệm 50 triệu đồng vào ngân hàng với kỳ hạn 3 tháng, lãi suất 8,4% một năm theo hình thức lãi kép. Ông gửi được đúng 3 kỳ hạn thì ngân hàng thay đổi lãi suất, ông gửi tiếp 12 tháng nữa với kỳ hạn như cũ và lãi suất trong thời gian này là 12% một năm thì ông rút tiền về. Số tiền ông An nhận được cả gốc lẫn lãi là

**A.** 62255910 đồng. **B.** 59895767 đồng. **C.** 59993756 đồng. **D.** 63545193 đồng.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 27.** Một học sinh $A$ khi 15 tuổi được hưởng tài sản thừa kế 200000000 VNĐ. Số tiền này được bảo quản trong ngân hàng $B$ với kì hạn thanh toán 1 năm và học sinh $A$ chỉ nhận được số tiền này khi 18 tuổi. Biết rằng khi 18 tuổi, số tiền mà học sinh $A$ được nhận sẽ là 231525000 VNĐ. Vậy lãi suất kì hạn một năm của ngân hàng $B$ là bao nhiêu?

**A.** 8%/năm. **B.** 7%/năm. **C.** 6%/năm. **D.** 5%/năm.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 28.** Ông An gửi vào ngân hàng 60 triệu đồng theo hình thức lãi kép. Lãi suất ngân hàng là 8%/năm. Sau 5 năm ông An tiếp tục gửi thêm 60 triệu đồng nữa. Hỏi sau 10 năm kể từ lần gửi đầu tiên ông An đến rút toàn bộ tiền gốc và tiền lãi được là bao nhiêu triệu đồng?

**A.** 231,815. **B.** 197,201. **C.** 217,695. **D.** 190,271.

**Lời giải**

**Câu 29.** Anh Nam gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn là một quý với lãi suất 3%/quý. Sau đúng 6 tháng anh Nam gửi thêm 100 triệu đồng với kì hạn và lãi suất như trước đó. Hỏi sau 1 năm số tiền anh Nam nhận được là bao nhiêu?

**A.** 218,64 triệu đồng. **B.** 208,25 triệu đồng. **C.** 210,45 triệu đồng. **D.** 209,25 triệu đồng.

**Lời giải**

**Câu 30.** Ông Tuấn gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với hình thức lãi kép, kỳ hạn 1 năm với lãi suất 8%. Sau 5 năm ông rút toàn bộ tiền và dùng 1 năm nữa để sửa nhà, số tiền còn lại ông tiếp tục gửi ngân hàng với lãi suất như lần trước. Số tiền lãi ông tuấn nhận được sau 10 năm gửi gần nhất với giá trị nào dưới đây?

**A.** 46,933 triệu đồng. **B.** 24,480 triệu đồng.

**C.** 81,413 triệu đồng. **D.** 107,946 triệu đồng.

**Lời giải**

**Câu 31.** Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S = A \cdot e^{\pi t}$, trong đó $A$ là dân số của năm lấy làm mốc, $S$ là dân số sau $n$ năm, $i$ là tỉ lệ tăng dân số hằng năm. Dân số Việt Nam năm 2019 là 95,5 triệu người, tỉ lệ tăng dân số hằng năm từ 2009 đến nay là 1,14%. Hỏi dân số Việt Nam năm 2009 gần với số nào nhất trong các số sau?

**A.** 94,4 triệu người. **B.** 85,2 triệu người. **C.** 86,2 triệu người. **D.** 83,9 triệu người.

Lời giải

**Câu 32.** Để dự báo dân số của một quốc gia, người ta sử dụng công thức $S = Ae^{\pi t}$ trong đó $A$ là dân số của năm lấy làm mốc tính, $S$ là dân số sau $n$ năm, $r$ là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Năm 2017, dân số Việt nam là 93671600 người. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi là 0,81% dự báo dân số Việt nam năm 2035 là bao nhiêu người?

**A.** 109256100. **B.** 108374700. **C.** 107500500. **D.** 108311100.

Lời giải

**Câu 33.** Ông Chính gửi 200 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7% năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính

lãi cho năm tiếp theo và từ năm thứ 2 trở đi, mỗi năm ông gửi thêm vào tài khoản với số tiền 20 triệu đồng. Hỏi sau 18 năm số tiền ông Chính nhận được cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu? Giả định trong suốt thời gian gửi lãi suất không thay đổi và ông Chính không rút tiền ra.

**A.** 1686898000 VNĐ. **B.** 743585000 VNĐ. **C.** 739163000 VNĐ. **D.** 1335967000 VNĐ.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 34.** Tại một xí nghiệp, công thức $P(t) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$ được dùng để tính giá trị còn lại (tính theo triệu đồng) của một chiếc máy sau thời gian $t$ (tính theo năm) kể từ khi đưa vào sử dụng. Sau một năm đưa vào sử dụng, giá trị còn lại của máy bằng bao nhiêu phần trăm so với ban đầu?

**A.** 84,3%. **B.** 57,1%. **C.** 39,3%. **D.** 79,4%.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 35.** Giả sử cường độ ánh sáng $l$ dưới mặt biển giảm dần theo độ sâu theo công thức $l = l_0 \cdot a^d$, trong đó $l_0$ là cường độ ánh sáng tại mặt nước biển, $a$ là một hằng số dương, $d$ là độ sâu tính từ mặt nước biển (tính bằng mét). Biết rằng ở một vùng biển $X$, cường độ ánh sáng tại độ sâu 1 m bằng 95% cường độ ánh sáng tại mặt nước biển thì tại độ sâu 15 m ở vùng biển đó, cường độ ánh sáng bằng bao nhiêu phần trăm so với cường độ ánh sáng tại mặt nước biển?

**A.** 45,9%. **B.** 38,1%. **C.** 59,7%. **D.** 46,3%.

## Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Câu 1. C | Câu 2. D | Câu 3. D | Câu 4. D | Câu 5. A | Câu 6. A | Câu 7. A |
| Câu 8. C | Câu 9. C | Câu 10. C | Câu 11. D | Câu 12. A | Câu 13. A | Câu 14. A |
| Câu 15. D | Câu 16. B | Câu 17. D | Câu 18. C | Câu 19. A | Câu 20. B | Câu 21. A |
| Câu 22. A | Câu 23. B | Câu 24. D | Câu 25. C | Câu 26. B | Câu 27. C | Câu 28. C |
| Câu 29. A | Câu 30. C | Câu 31. B | Câu 32. B | Câu 33. D | Câu 34. D | Câu 35. D |

## PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

**Câu 1.** Cho $a$, $b$ là các số thực dương.

**a)** $a^m \cdot b^n = (ab)^{m+n}$. **b)** $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. **c)** $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$. **d)** $a^m + a^n = a^{m+n}$.

Lời giải

**Câu 2.** Cho biểu thức $9^{\frac{2}{5}} \cdot 27^{\frac{2}{5}} = A$ và $144^{\frac{3}{4}} : 9^{\frac{3}{4}} = B$, khi đó

**a)** $9^{\frac{2}{5}} \cdot 27^{\frac{2}{5}} = (9 \cdot 27)^{\frac{2}{5}}$.

**b)** $9^{\frac{2}{5}} \cdot 27^{\frac{2}{5}} = 3^k$ thì $k = 3$.

**c)** $144^{\frac{3}{4}} : 9^{\frac{3}{4}} = 2^k$ thì $k = 3$.

**d)** Phép toán $A - B$ thu được kết quả là một số tự nhiên.

Lời giải

**Câu 3.** Cho biểu thức $Q = (\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} + 1)(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)$ với $x \geq 0$.

**a)** Khi $x = 2$ thì $Q = 7$.

**b)** Phương trình $Q = 0 \Rightarrow x = 1 + \sqrt{2}$.

**c)** Phương trình $Q = 3$ có hai nghiệm dương phân biệt.

**d)** Khi $x = 3$ thì $Q$ là một số nguyên tố.

Lời giải

**Câu 4.** Cho các biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}-\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$; $B=-\sqrt[4]{b}$; với $a>0$, $b>0$, $a\neq b$.

**a)** Sau khi rút gọn, thì $A$ chỉ chứa biến $b$.

**b)** Biểu thức $A>0$ luôn đúng.

**c)** $A=B+\sqrt{a}$.

**d)** $\dfrac{A-1}{B}=1-\dfrac{1}{B}$.

**Lời giải**

**Câu 5.** Cho biểu thức $A=(\sqrt{2}-1)^{2x}+(3+2\sqrt{2})^{x}$.

**a)** Cho $\left(\sqrt{2}+1\right)^{x}=3$ thì $A=\dfrac{82}{9}$.

**b)** Cho $\left(\sqrt{2}+1\right)^{x}=1$ thì $A=2$.

**c)** Cho $\left(\sqrt{2}+1\right)^{x}=2$ thì $A=\dfrac{17}{9}$.

**d)** Cho $\left(\sqrt{2}+1\right)^{x}=m^2$ thì $A=\dfrac{1+m^6}{m^4}$.

**Lời giải**

**Câu 6.** Với $x$ là số thực

**a)** Các số $1^{1,5}$; $\left(x^2+2\right)^{-1}$; $\left(\dfrac{1}{x^2+3}\right)^{-2}$ được viết theo thứ tự tăng dần.

**b)** Nếu $\left(x^2+1{,}5\right)^a > \left(x^2+2\right)^a$ thì $a<0$.

**c)** $(x-1)^{-2\sqrt{3}} > (x-1)^{-3\sqrt{2}} \Leftrightarrow x>2$.

**d)** $\left(x^2+2x+4\right)^{m^2-3} < \left(x^2+2x+3\right)^{m^2-3} \Leftrightarrow 0<m<\sqrt{3}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 7.** Tại một xí nghiệp, công thức $P(t)=500\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$ được dùng để tính giá trị còn lại (tính theo triệu đồng) của một chiếc máy sau thời gian $t$ (tính theo năm) kể từ khi đưa vào sử dụng.

**a)** Giá trị còn lại của máy sau 3 năm sử dụng là 250 triệu đồng.

**b)** Giá trị còn lại của máy sau 4 năm 3 tháng sử dụng gần bằng 180 triệu đồng.

**c)** Sau 2 năm đưa vào sử dưng thì giá trị của chiếc máy giảm 185 triệu đồng so với giá trị ban đầu.

**d)** Sau 1 năm đưa vào sử dụng thì giá trị của chiếc máy giảm 20,6% so với giá trị ban đầu của nó.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**BẢNG ĐÁP ÁN**

| | | |
|---|---|---|
| **Câu 1.** a S b Đ c Đ d S | **Câu 2.** a Đ b S c S d Đ | **Câu 3.** a Đ b S c S d Đ |

**Câu 4.** a Đ b S c S d Đ

**Câu 5.** a Đ b Đ c S d S

**Câu 6.** a S b Đ c Đ d S

**Câu 7.** a Đ b S c Đ d Đ

## PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Biết biểu thức $P=(5+2\sqrt{6})^{2024}\cdot(5-2\sqrt{6})^{2025}=a-2\sqrt{c}$ với $a$; $c$ là số tự nhiên. Tính giá trị $a^{c-2}$. KQ: | | | | |

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}-\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$ $(a>0,b>0)$ ta thu được kết quả có dạng $-m\sqrt[n]{b}$ với $m;n$ là số tự nhiên. Tính giá trị $m+2n$. KQ: | | | | |

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 3.** Rút gọn biểu thức sau $Q=\dfrac{a^{\sqrt{3}+1}\cdot a^{2-\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}$ với điều kiện $a>0$ ta thu được kết quả có dạng $a^m$ với $m$ là số tự nhiên. Tính giá trị $m$. KQ: | | | | |

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 4.** Biết $4^x + 4^{-x} = 23$, tính giá trị biểu thức $P = 2^x + 2^{-x}$. KQ: | | | | |

Lời giải

**Câu 5.** Cho $x$, $y$ là các số thực dương. Giả sử $\left(\sqrt[5]{x^3} \cdot y^{\frac{2}{5}}\right)^2 = x^a \cdot y^b$ với $a$, $b$ là số hữu tỷ. Tính $a + b$. KQ:

Lời giải

**Câu 6.** Tính giá trị của biểu thức $T = \dfrac{(2\sqrt{2}-3)^{2024}(2\sqrt{2}+3)^{2025}}{(2\sqrt{2}-3)^{-1}}$. KQ:

Lời giải

**Câu 7.** Biết rằng $3^x = 5$, giá trị của biểu thức $P = 81^x + \sqrt[4]{3^x} \cdot \sqrt[4]{27^x}$ bằng bao nhiêu? KQ:

**Lời giải**

**Câu 8.** Rút gọn biểu thức $E = \dfrac{3^{\sqrt{5}+2} \cdot 3^{1-\sqrt{5}}}{\left(3^{\sqrt{2}+2}\right)^{\sqrt{2}-2}}$ ta được kết quả là bao nhiêu? KQ:

**Lời giải**

**Câu 9.** Biết $2^\alpha + 2^{-\alpha} = 5$. Giá trị của biểu thức $P = 4^\alpha + 4^{-\alpha}$ bằng bao nhiêu? KQ:

**Lời giải**

**Câu 10.** Biết $4^x+25^y=10$. Giá trị của biểu thức $T=\dfrac{x+y}{xy}$ bằng bao nhiêu? KQ: [ ]

**Lời giải**

**Câu 11.** Giả sử số tiền gốc là $A$, lãi suất là $r\%$/kì hạn gửi (có thể là tháng, quý hay năm) thì tổng số tiền nhận được cả gốc và lãi sau $n$ kì hạn gửi là $A(1+r)^n$. Bà Hạnh gửi 100 triệu vào tài khoản định kỳ tính lãi kép với lãi suất là 8%/năm. Số tiền lãi bà Hạnh thu được sau 10 năm có dạng $1a5{,}8b2$ triệu đồng, với $a$, $b$ là các số tự nhiên. Tính giá trị $T=ab+1$.
KQ: [ ]

**Lời giải**

**Câu 12.** Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t)=s(0)\cdot 2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có

sau $t$ phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 con. Hỏi sau bao nhiêu phút, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con? KQ:

Lời giải

**Câu 13.** Cho $f(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}}}$. Biết rằng $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdots f(2025)=\mathrm{e}^{\frac{m}{n}}$ với $m$, $n$ là các số tự nhiên và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $m-n^2$. KQ:

Lời giải

**Câu 14.** Biết $10^{\alpha}=3$, $10^{\beta}=7$. Kết quả biểu thức $A=\frac{100^{\alpha}\cdot 0{,}001^{\beta}}{10^{-\alpha}\cdot 10^{2\beta}}$ có dạng $\frac{27}{16a0b}$, với $a$, $b$ là các số nguyên. Tính giá trị $S=a+b^2$. KQ:

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 15.** Biết $9^{\alpha}=\dfrac{1}{2}$. Tính $B=(3^{\alpha}+3^{-\alpha})^2-(81^{\alpha}-81^{-\alpha})$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 16.** Công ty FTK về mua bán xe ô tô đã qua sử dụng, sau khi khảo sát thị trường 6 tháng đã đưa ra công thức chung về giá trị còn lại của ô tô 4 chỗ kể từ khi đưa vào sử đựng (các loại xe 4 chỗ không sử dụng mục đích kinh doanh) được tính

$$P(t)=A\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{t}{4}}.$$

Trong đó $A$ là giá tiền ban đầu mua xe, $t$ là số năm kể từ khi đưa vào sử dụng. Giá trị còn lại của xe ô tô sau 30 tháng đưa vào sử dụng có dạng $768\,601abc$, với $a$; $b$; $c$ là các số nguyên, tính giá trị $S=a+b+c$? Biết giá trị mua xe ban đầu là 920 triệu. KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 17.** Số lượng vi khuẩn $V$ trong phòng thí nghiệm tính theo công thức $s(t)=s_0\cdot 2^t$ trong đó $s_0$ là số lượng vi khuẩn $V$ lúc đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn có trong $t$ phút. Biết sau 3 phút

thì số lượng vi khuẩn $A$ là 625 nghìn con. Sau 9 phút thì số lượng vi khuẩn $V$ có dạng $a \cdot 10^b$ con, với $a$; $b$ là các số tự nhiên, tính giá trị $S = a + b$? KQ:

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 18.** Một khu rừng có trữ lượng gỗ là $4 \cdot 10^5\,\text{m}^3$. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây lấy gỗ trong khu rừng này là 4% mỗi năm. Sau 5 năm không khai thác, khu rừng sẽ có số mét khối gỗ là $4abc61{,}161\,\text{m}^3$ với $a$, $b$, $c$ là số tự nhiên. Tính giá trị $a - b + c$. KQ:

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**BẢNG ĐÁP ÁN**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Câu 1.** 625 | **Câu 2.** 9 | **Câu 3.** 5 | **Câu 4.** 5 | **Câu 5.** 2 |
| **Câu 6.** −1 | **Câu 7.** 630 | **Câu 8.** 243 | **Câu 9.** 23 | **Câu 10.** 2 |
| **Câu 11.** 10 | **Câu 12.** 7 | **Câu 13.** −1 | **Câu 14.** 57 | **Câu 15.** 8,25 |
| **Câu 16.** 7 | **Câu 17.** 11 | **Câu 18.** 8 | | |

# BÀI 19. LÔGARIT

## A Lý thuyết

### 1 Khái niệm logarit

**Định nghĩa 1**

Cho hai số dương $a, b$ với $a \neq 1$.

- Số $\alpha$ thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là logarit cơ số $a$ của $b$ và kí hiệu là $\log_a b$.
- Ta viết $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$.
- $\log_a b$ xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ b > 0. \end{cases}$

a) Không có logarit của số 0 và số âm vì $a^\alpha > 0, \forall \alpha$.

b) $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$

c) $\log_a a^b = b$

d) $a^{\log_a b} = b$

### 2 Tính logarit bằng máy tính cầm tay

a) Logarit cơ số 10 được gọi là logarit thập phân. Ta viết $\log a$ hoặc $\lg a$ thay $\log_{10} a$.

b) Logarit cơ số e được gọi là logarit tự nhiên. Ta viết $\ln a$ thay $\log_e a$.

### 3 Tính chất của phép tính logarit

**Tính chất 1.** Với $0 < a \neq 1$; $b, c > 0$; $\alpha \in \mathbb{R}$, khi đó:

a) $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

b) $\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

c) $\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a^b$.

d) $\log_a a^b = b$

Đặc biệt với $a, b$ dương, $a \neq 1$ ta có:

a) $\log_a \dfrac{1}{b} = -\log_a b$

b) $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n}\log_a b\,(n \in \mathbb{N}^*)$

## 4 Công thức đổi cơ số

**Tính chất 2.** Cho các số dương $a, b, c$ với $a \neq 1$; $b \neq 1$. Ta có $\log_a c = \dfrac{\log_b c}{\log_b a}$

Đặc biệt ta có

a) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}\ (b \neq 1)$

b) $\log_{a^m} b = \dfrac{1}{m}\log_a b\ (m \neq 0)$

# B Các dạng bài tập

### Dạng 1. Tính giá trị biểu thức

Áp dụng các tính chất, công thức để biến đổi

a) Tính chất

- $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$
- $a^{\log_a b} = b$, $\log_a (a^\alpha) = \alpha$.
- $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

Đặc biệt: với $a, b > 0$, $a \neq 1$ thì $\log_a \dfrac{1}{b} = -\log_a b$.

b) Công thức "bay"

- $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$
- $\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha}\log_a b$

Đặc biệt: $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n}\log_a b$

c) Đổi cơ số

- $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$
- $\log_a b = \log_a c \cdot \log_c b$

**Ví dụ 1.** Cho $0 < a \neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $a^{\log_{\sqrt{a}} 4}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 2.** Tính giá trị của biểu thức $A = 2\log_2 12 + 3\log_2 5 - \log_2 15 - \log_2 150$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 3.** Cho các số dương $a, b$ và $a \neq 1$.
Rút gọn biểu thức $K = \log_a b^2 + 2\log_{a^2} b^4 + 3\log_{a^3} b^6 - 4\log_{a^4} b^8$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

## Dạng 2. Biểu diễn logarit

Ta thực hiện theo các bước sau:

- Bước 01. Biến đổi các biểu thức logarit phụ thuộc vào tham số $a$ và $b$.
- Bước 02. Đặt các biểu thức logarit của các số nguyên tố là các ẩn $x, y, z$.
  Từ đó ta thu được phương trình hoặc hệ phương trình với các ẩn $x, y, z$.
  Ta tìm các ẩn này theo $a, b$.
- Bước 03. Giải hệ tìm được $x, y, z, \ldots$ theo $a, b$.
  Từ đó tính được biểu thức theo các tham số $a, b$.

Các công thức nền tảng là $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ và $\dfrac{1}{\log_a b} = \log b_a$.

**Ví dụ 4.** Cho $a = \log_2 14$. Biểu diễn $\log_{49} 16$ theo $a$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 5.** Tính $M = \log_4 1250$ theo $a$ biết $a = \log_2 5$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 6.** Đặt $a = \log_2 3$ và $b = \log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 25$ theo $a$ và $b$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 7.** Cho $\log_2 6 = a$; $\log_2 7 = b$. Hãy biểu diễn $\log_{18} 42$ theo $a$ và $b$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 8.** Cho $\log_3 2 = a$ và $\log_3 5$. Tính $\log_{10} 60$ theo $a$ và $b$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 9.** Cho $a = \log_5 18$ và $b = \log_5 60$. Tính $\log_3 2$ theo $a$ và $b$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 3. Bài toán thực tế

**Bài toán lãi suất**

- Lãi kép: Là số tiền lãi được cộng vào gốc để tính lãi trong các kì tiếp theo. Cách này thường được dùng trong thực tế.
- Công thức tính là $A_n = A_0(1+r)^n$.
  Với
  - $A_0$ là số tiền ban đầu.
  - $r$ là lãi suất một kì (tháng, quý, năm,...).
  - $n$ là số kì hạn.
  - $A_n$ là số tiền cả vốn và lãi nhận được sau $n$ kì gửi.

**Chú ý.**

- *Lãi suất* $r = k\% = \dfrac{k}{100}$.
- *Tiền lãi thu được sau* $n$ *kì là* $A_n - A_0$.
- *Lãi kép kì hạn: tính số tiền sau* $N$ *kì gửi với* $n$ *kì hạn trong năm là* $A_n = A_0 \cdot \left(1 + \dfrac{r}{n}\right)^N$.
- *Lãi kép liên tục: Nếu kì tính lãi được chia càng ngày càng nhỏ tức là tính lãi hàng ngày, hàng phút, hàng giây,... gọi là lãi kép liên tục.*
- *Số tiền sau* $t$ *(năm) gửi là* $A = A_0 \cdot \mathrm{e}^{tr}$.

**Ví dụ 10.** Gia đình bác An gửi tiết kiệm 500 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 6,5%/năm. Biết rằng tiền lãi của kì trước được cộng vào gốc tính lãi kì sau (lãi kép).

a) Hỏi sau ba năm, gia đình bác nhận được số tiền cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu? Nếu tính theo thể thức lãi kép liên tục thì số tiền cả vốn lẫn lãi của gia đình bác An thu được là bao nhiêu (sau ba năm)?

b) Vẫn với 500 triệu đồng, gia đình bác An gửi tiết kiệm với lãi kép 6,5%/năm theo kì hạn 6 tháng. Hỏi để nhận được cả gốc và lãi là 1 tỉ đồng thì gia đình bác An cần gửi bao nhiêu năm?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Chú ý.**

Công thức lãi kép theo kì hạn chính là công thức lãi kép do chia nhỏ kì hạn gửi. Ta có thể hiểu là lãi suất mỗi năm là $r$, nếu chia mỗi năm thành $m$ kì hạn thì số tiền gốc và lãi thu được sau $n$ năm là

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \cdot n}$$

Với tổng số kì gửi là $N = m \cdot n$, lãi suất mỗi kì gửi là $\frac{r}{m}$.

**Ví dụ 11.** Người ta sử dụng công thức $S = A \cdot e^{n \cdot r}$ để dự báo dân số của một quốc gia, trong đó $A$ là số dân của năm lấy làm mốc tính, $S$ là số dân sau $n$ năm và $r$ là tỉ lệ gia tăng dân số hàng năm. Biết rằng năm 2001, dân số của Việt Nam là 78685800 người. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi là 1,2%, hỏi dân số nước ta đạt 110 triệu người vào năm nào?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 12.** Biết rằng khi độ cao tăng lên thì áp xuất không khí sẽ giảm và công thức tính áp suất dựa trên độ cao là $a = 15500 \cdot (5 - \log p)$, trong đó $a$ là độ cao so với mực nước biển (tính bằng mét) và $p$ là áp suất không khí (tính bằng pascal). Tính áp suất không khí ở đỉnh Everest có độ cao 8850 m so với mực nước biển.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 13.** Cường độ một trận động đất $M$ được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, với $A$ là biên độ rung chấn tối đa và $A_0$ là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8,3 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở gần đó đo được 7,1 độ Richter. Hỏi trận động đất ở San Francisco có biên độ gấp bao nhiêu trận động đất này?

**Lời giải**

# C Bài tập rèn luyện

## PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1.** Cho $0<a\neq 1$, $x>0$, $y>0$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

**A.** $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$.
**B.** $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.
**C.** $\log_a \sqrt{x} = \frac{1}{2}\log_a x$.
**D.** $\log_{\sqrt{a}} x = \frac{1}{2}\log_a x$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 2.** Với $a$, $b$ là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $a\neq 1$ và $\log_a b = 2$, giá trị của $\log_{a^2}(ab^2)$ bằng

**A.** 2.
**B.** $\frac{3}{2}$.
**C.** $\frac{1}{2}$.
**D.** $\frac{5}{2}$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 3.** Với $a$ là số thực dương tùy ý, $\log_7(7a)$ bằng

**A.** $1-\log_7 a$.
**B.** $1+\log_7 a$.
**C.** $1+a$.
**D.** $a$.

**Lời giải**

.....
.....
.....

**Câu 4.** Với $a$ là số thực dương tùy ý, $4\log\sqrt{a}$ bằng

**A.** $-4\log a$. **B.** $8\log a$. **C.** $2\log a$. **D.** $-2\log a$.

Lời giải

**Câu 5.** Với $a$ là số thực dương tùy ý, $\log_5 a^3$ bằng

**A.** $\frac{1}{3}\log_5 a$. **B.** $\frac{1}{3}+\log_5 a$. **C.** $3+\log_5 a$. **D.** $3\log_5 a$.

Lời giải

**Câu 6.** Cho $a$ là số thực dương tùy ý khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $\log_2 a=\log_a 2$. **B.** $\log_2 a=\frac{1}{\log_2 a}$. **C.** $\log_2 a=\frac{1}{\log_a 2}$. **D.** $\log_2 a=-\log_a 2$.

Lời giải

**Câu 7.** Cho $a$, $b$ là các số thực dương thỏa mãn $a \neq 1$, $a \neq \sqrt{b}$ và $\log_a b = \sqrt{3}$. Tính $P = \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \sqrt{\frac{b}{a}}$.

**A.** $P = -5 + 3\sqrt{3}$. **B.** $P = -1 + \sqrt{3}$. **C.** $P = -1 - \sqrt{3}$. **D.** $P = -5 - 3\sqrt{3}$.

**Lời giải**

**Câu 8.** Cho $a$ và $b$ là hai số thực dương thỏa mãn $a^2 b^3 = 16$. Giá trị của $2\log_2 a + 3\log_2 b$ bằng

**A.** 2. **B.** 8. **C.** 16. **D.** 4.

**Lời giải**

**Câu 9.** Với các số thực dương $x$, $y$ tùy ý, đặt $\log_3 x = \alpha$, $\log_3 y = \beta$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $\log_{27}\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)^3=\frac{\alpha}{2}+\beta$.
**B.** $\log_{27}\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)^3=9\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)$.
**C.** $\log_{27}\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)^3=\frac{\alpha}{2}-\beta$.
**D.** $\log_{27}\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)^3=9\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)$.

**Lời giải**

**Câu 10.** Với các số thực dương $a$, $b$ bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $\log_2\left(\frac{2a^3}{b}\right)=1+3\log_2 a+\log_2 b$.
**B.** $\log_2\left(\frac{2a^3}{b}\right)=1+\frac{1}{3}\log_2 a+\log_2 b$.
**C.** $\log_2\left(\frac{2a^3}{b}\right)=1+3\log_2 a-\log_2 b$.
**D.** $\log_2\left(\frac{2a^3}{b}\right)=1+\frac{1}{3}\log_2 a-\log_2 b$.

**Lời giải**

**Câu 11.** Cho $\log_3 a=2$ và $\log_2 b=\frac{1}{2}$. Tính $I=2\log_3\left[\log_3(3a)\right]+\log_{\frac{1}{4}} b^2$.

**A.** $I=\frac{5}{4}$.
**B.** $I=0$.
**C.** $I=4$.
**D.** $I=\frac{3}{2}$.

**Lời giải**

**Câu 12.** Với các số thực dương $a$, $b$ bất kỳ. Mệnh đề nào đúng?

**A.** $\log_2 \dfrac{2a^3}{b} = 1 + 3\log_2 a - \log_2 b$.

**B.** $\log_2 \dfrac{2a^3}{b} = 1 + \dfrac{1}{3}\log_2 a - \log_2 b$.

**C.** $\log_2 \dfrac{2a^3}{b} = 1 + 3\log_2 a + \log_2 b$.

**D.** $\log_2 \dfrac{2a^3}{b} = 1 + \dfrac{1}{3}\log_2 a + \log_2 b$.

**Lời giải**

**Câu 13.** Giá trị của biểu thức $M = \log_2 2 + \log_2 4 + \log_2 8 + \cdots + \log_2 256$ bằng

**A.** 48. **B.** 56. **C.** 36. **D.** $8\log_2 256$.

**Lời giải**

**Câu 14.** Tính $P = \log_{a^2}\left(a^{10}b^2\right) + \log_{\sqrt{a}}\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}}\right) + \log_{\sqrt[3]{b}} b^{-2}$ với $0 < a \neq 1$ và $0 < b \neq 1$.

**A.** $P = 2$. **B.** $P = 1$. **C.** $P = \sqrt{3}$. **D.** $P = \sqrt{3}$.

**Lời giải**

**Câu 15.** Cho $a>0$ và $a\neq 1$ và $b>0$. Rút gọn biểu thức $P=\sqrt{\log_a^2(ab)-\dfrac{2\log b}{\log a}-1}$

**A.** $P=\left|\log_a b+1\right|$. **B.** $P=\left|\log_a b-1\right|$. **C.** $P=\left|\log_a b\right|$. **D.** $P=0$.

**Lời giải**

**Câu 16.** Cho $a$ là số thực dương khác 4. Tính $I=\log_{\frac{a}{4}}\left(\dfrac{a^3}{64}\right)$.

**A.** $I=3$. **B.** $I=\dfrac{1}{3}$. **C.** $I=-3$. **D.** $I=-\dfrac{1}{3}$.

**Lời giải**

**Câu 17.** Cho các số thực dương $a$, $b$ với $a\neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

**A.** $\log_{a^2}(ab)=\dfrac{1}{2}\log_a b$. **B.** $\log_{a^2}(ab)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\log_a b$.

**C.** $\log_{a^2}(ab)=2+\log_a b$. **D.** $\log_{a^2}(ab)=\dfrac{1}{4}\log_a b$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 18.** Cho 2 số thực dương $a$, $b$ thỏa mãn $\sqrt{a} \neq b$, $a \neq 1$, $\log_a b = 2$. Tính $T = \log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} \sqrt[3]{ba}$

**A.** $T = -\frac{2}{5}$. **B.** $T = \frac{2}{5}$. **C.** $T = \frac{2}{3}$. **D.** $T = -\frac{2}{3}$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 19.** Cho $a$, $b$ là các số thực dương thỏa mãn $\log_{\sqrt{ab}}\left(a\sqrt[3]{b}\right) = 3$. Tính $\log_{\sqrt{ab}}\left(b\sqrt[3]{a}\right)$.

**A.** $-3$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $3$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 20.** Với mọi số thực dương $a$ và $b$ thỏa mãn $a^2+b^2=8ab$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $\log(a+b)=\dfrac{1}{2}(\log a+\log b)$.

**B.** $\log(a+b)=\dfrac{1}{2}+\log a+\log b$.

**C.** $\log(a+b)=\dfrac{1}{2}(1+\log a+\log b)$.

**D.** $\log(a+b)=1+\log a+\log b$.

**Lời giải**

**Câu 21.** Xét tất cả các số dương $a$ và $b$ thỏa mãn $\log_2 a=\log_8(ab)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $a=b^2$.

**B.** $a^3=b$.

**C.** $a=b$.

**D.** $a^2=b$.

**Lời giải**

**Câu 22.** Cho $\log_8|x|+\log_4 y^2=5$ và $\log_8|y|+\log_4 x^2=7$. Tìm giá trị của biểu thức $P=|x|-|y|$.

**A.** $P=56$.

**B.** $P=16$.

**C.** $P=8$.

**D.** $P=64$.

**Lời giải**

**Câu 23.** Nếu $\log_2 3 = a$ thì $\log_{72} 108$ bằng

**A.** $\dfrac{2+a}{3+a}$. **B.** $\dfrac{2+3a}{3+2a}$. **C.** $\dfrac{ab}{a+b}$. **D.** $\dfrac{2+3a}{2+2a}$.

**Lời giải**

**Câu 24.** Cho $\log_{30} 3 = a$, $\log_{30} 5 = b$. Tính $\log_{30} 1350$ theo $a, b$; $\log_{30} 1350$ bằng

**A.** $2a+b$. **B.** $2a+b+1$. **C.** $2a+b-1$. **D.** $2a+b-2$.

**Lời giải**

**Câu 25.** Cho $a$, $b$, $c > 1$. Biết rằng biểu thức $P = \log_a(bc) + \log_b(ac) + 4\log_c(ab)$ đạt giá trị lớn nhất $m$ khi $\log_b c = n$. Tính giá trị $m+n$.

**A.** $m+n=10$. **B.** $m+n=\dfrac{25}{2}$. **C.** $m+n=14$. **D.** $m+n=12$.

**Lời giải**

**Câu 26.** Chọn mệnh đề **sai**?

**A.** $1+\log_2 2<\log_3 3$. **B.** $\log_2\sqrt{2}<\log_2 2$. **C.** $\log_2 8>\log_2 4$. **D.** $\log_2\dfrac{1}{2}>\log_2\dfrac{1}{4}$.

**Lời giải**

**Câu 27.** Cho $a=\log_2 3$ và $b=\log_2 5$. Biểu diễn $\log 60$ theo $a$, $b$?

**A.** $\log 60=\dfrac{a+b+2}{1+b}$. **B.** $\log 60=\dfrac{a+b+2}{1+a}$. **C.** $\log 60=\dfrac{a+b+1}{1+a}$. **D.** $\log 60=\dfrac{a+b+1}{1+b}$.

**Lời giải**

**Câu 28.** Cho $\log_6 3=a$, $\log_6 5=b$. Biểu diễn $\log_{54}50$ theo $a$, $b$?

**A.** $\dfrac{2b-a+1}{2a+1}$. **B.** $\dfrac{2a-b+1}{2a+1}$. **C.** $\dfrac{2b+1+a}{2a+1}$. **D.** $\dfrac{2a+b+1}{2a+1}$.

**Lời giải**

**Câu 29.** Mức cường độ âm $L$ đo bằng decibel (viết tắt là $dB$, đọc là đề-xi-ben) của âm thanh có cường độ $I$ (đo bằng oát trên mét vuông, kí hiệu là $W/\text{m}^2$) được định nghĩa $L = 10\log\dfrac{I}{I_0}$, trong đó $I_0 = 10^{-12}W/\text{m}^2$ là cường độ âm thanh nhỏ nhất mà tai người có thể phát hiện được (gọi là ngưỡng nghe). Xác định mức cường độ âm của âm thanh giao thông thành phố đông đúc có cường độ $I = 10^{-3}W/\text{m}^2$?

**A.** 90. **B.** 130. **C.** 110. **D.** 150.

**Lời giải**

**Câu 30.** Độ lớn $M$ của một trận động đất theo thang Richter được tính theo công thức $M = \log\dfrac{A}{A_0}$, trong đó $A$ là biên độ lớn nhất ghi được bởi máy đo địa chất, $A_0 = 1$ (đơn vị là micro mét, kí hiệu là $\mu m$) là biên độ tiêu chuẩn được sử dụng để hiệu chỉnh độ lệch gây ra bởi khoảng cách của máy đo địa chấn so với tâm chấn. Năm 2011 tại Nhật Bản đã xảy ra một trận động đất độ lớn 8,9 độ Richter. Dự đoán tương lai nước Nhật Bản vào năm 2025 sẽ hứng chịu một trận động đất có biên độ lớn nhất gấp đôi năm 2011, hỏi độ lớn trận động đất là bao nhiêu?

**A.** 17,8. **B.** 10,9. **C.** 9,2. **D.** 8,6.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Câu 1. D | Câu 2. D | Câu 3. B | Câu 4. C | Câu 5. D | Câu 6. C | Câu 7. C |
| Câu 8. D | Câu 9. C | Câu 11. C | Câu 12. A | Câu 13. C | Câu 14. B | Câu 15. C |
| Câu 16. A | Câu 17. B | Câu 18. D | Câu 19. D | Câu 20. C | Câu 21. D | Câu 22. A |
| Câu 23. B | Câu 24. B | Câu 25. D | Câu 26. A | Câu 27. A | Câu 28. A | Câu 29. A |
| Câu 30. C | | | | | | |

## PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

**Câu 1.** Cho $a$, $b$, $c>0$, $a\neq 1$ và $m$, $n\in\mathbb{R}$.

**a)** $\log_a 1=1$.

**b)** $a^{\log_a b}=b$.

**c)** $\log_a a^m=\dfrac{1}{m}$.

**d)** $\log_a b^m c^n=m\log_a b+n\log_a c$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Xét tính đúng, sai trong các khẳng định sau

**a)** $\log 8-\log 27=3\log\dfrac{2}{3}$.

**b)** $\log_{16}3\cdot\log_9 64\cdot\log_4 27=\dfrac{8}{9}$.

**c)** $\log_{\sqrt{2}}5+\log_4\dfrac{1}{\sqrt{25}}+\log_{\frac{1}{2}}125=\dfrac{-3}{2}\log_2 5$.

**d)** $3\log_3\sqrt[3]{7}+\log_{\sqrt[3]{3}}21=4\log_3 7+3$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 3.** Cho $a$, $b$, $c>1$ và $m$, $n\in\mathbb{R}$.

**a)** $\log_a\sqrt{a\sqrt{a}}=\dfrac{3}{4}$.

**b)** $\log_a b^2\cdot\log_{\sqrt{b}}c\cdot\log_{c^2}a^3=\dfrac{1}{6}$.

**c)** Cho $\log 3=m,\log 7=n$. Khi đó $\log_3 70=\dfrac{n+1}{m}$.

**d)** Cho $\log_5 2=m,\log_5 3=n$. Khi đó $\log_{250}30=(m+n+1)(3+m)$.

Lời giải

**Câu 4.** Cho hai số thực $a$ và $b$, với $1<a<b$.

**a)** $\log_a b<1<\log_b a$. **b)** $1<\log_a b<\log_b a$. **c)** $\log_b a<\log_a b<1$. **d)** $\log_b a<1<\log_a b$.

Lời giải

**Câu 5.** Công thức $\log x=11{,}8+1{,}5M$ cho biết mối liên hệ giữa năng lượng $x$ tạo ra (tính theo erg, 1 erg tương đương $10^{-7}$ jun) với độ lớn $M$ theo thang Richter của một trận động đất.

**a)** Trận động đất có độ lớn 2 độ Richter tạo ra năng lượng khoảng $6{,}3\cdot 10^{34}$ erg.

**b)** Trận động đất có độ lớn 3 độ Richter tạo ra năng lượng khoảng $2\cdot 10^{9}$ jun.

**c)** Trận động đất có độ lớn 5 độ Richter tạo ra năng lượng gấp 100 lần so với trận động đất có độ lớn 3 độ Richter.

**d)** Người ta ước lượng rằng một trận động đất có độ lớn khoảng từ 4 đến 6 độ Richter. Năng lượng do trận động đất đó tạo ra nằm trong khoảng $10^{17{,}8}\le x\le 10^{20{,}8}$ erg.

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | |
|---|---|---|
| **Câu 1.** a S b Đ c S d Đ | **Câu 2.** a Đ b S c Đ d Đ | **Câu 3.** a Đ b S c Đ d S |
| **Câu 4.** a S b S c S d Đ | **Câu 5.** a S b Đ c S d Đ | |

## PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Cho $\log_a b = 2$ và $\log_a c = 3$. Tính $Q = \log_a(b^2c^3)$. KQ: ☐

Lời giải

**Câu 2.** Cho số thực $a$ thỏa mãn $0 < a \neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $T = \log_a\left(\dfrac{a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[15]{a^7}}\right)$.

KQ: ☐

Lời giải

**Câu 3.** Với $a$, $b$ là các số thực dương và $a$ khác 1, ta rút gọn biểu thức $Q = \sqrt{\log_a^2(ab) - \dfrac{2\ln b}{\ln a} - 1}$ thu được kết quả $m\left|\log_a b^n\right|$ với $m$; $n$ là các số tự nhiên. Tính giá trị $S = m+2n$. KQ: ☐

Lời giải

**Câu 4.** Cho $a=\log_2 5$, $b=\log_3 5$. Biểu diễn $\log_6 5$ theo $a$ và $b$ ta thu được kết quả dạng $\dfrac{a}{m+\dfrac{n\cdot a}{b}}$ với $m;n$ là các số tự nhiên. Tính giá trị $S=m-2n$. KQ:

Lời giải

**Câu 5.** Cho $a=\log 2$, $b=\ln 2$. Biểu diễn $\ln 800$ theo $a$ và $b$ ta thu được kết quả dạng $m\cdot b+\dfrac{n\cdot b}{a}$ với $m$; $n$ là các số tự nhiên. Tính giá trị $P=m\cdot n$. KQ:

Lời giải

**Câu 6.** Cho $\log_2 x=\sqrt{2}$. Tính giá trị biểu thức $P=\log_2 x^2+\log_{\frac{1}{2}} x^3+\log_4 x$. (Làm tròn đến hàng hàng phần mười). KQ:

Lời giải

**Câu 7.** Cho $a$, $b$, $c$ là các số thực khác 0 thỏa mãn $4^a = 25^b = 10^c$. Tính $T = \dfrac{c}{a} + \dfrac{c}{b}$. KQ:

**Lời giải**

**Câu 8.** Cho $\log_a b = 2$ và $\log_a c = 3$. Tính $A = \log_a(b^2c^3)$. KQ:

**Lời giải**

**Câu 9.** Cho $a$, $b$ là các số thực dương khác 1 và thoả mãn $ab \neq 1$. Biết rằng

$$\log_a \frac{3}{b} = \left(\log_a b + \log_b a + 2\right)\left(\log_a b - \log_{ab} b\right)\log_b a - 1.$$

Tìm $b$ (làm tròn kết quả đến hàng phần chục). KQ:

**Lời giải**

**Câu 10.** Cho $a$, $b>0$ và đều khác 1 thoả mãn $\ln a+\ln(8b)=2\ln(a+2b)$. Rút gọn biểu thức $P=\log_b(2a)+\log_{\frac{a}{2}}(2b)-\dfrac{1}{\log_8 b}$ được kết quả bằng bao nhiêu? KQ:

**Lời giải**

**Câu 11.** Với $a$, $b$ là các số thực dương và thoả mãn $ab\neq 1$. Ta rút gọn biểu thức

$$P=\left(\log_a b+\log_b a+2\right)\left(\log_a b-\log_{ab} b\right)\log_b a-1$$

thu được kết quả $(2m-1)\log_a b^n$ với $m$, $n$ là các số tự nhiên. Tính giá trị $S=m-n$. KQ:

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

**Câu 12.** Cho $a=\log_2 3$, $b=\log_5 2$, $c=\log_2 7$. Biểu diễn $\log_{42} 15$ theo $a$, $b$, $c$ ta thu được kết quả dạng $\dfrac{ab+m}{h\cdot b(a+c+n)}$ với $h$, $m$, $n$ là các số tự nhiên. Tính giá trị $P=m\cdot n+h$. KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

**Câu 13.** Cho các số thực dương $x,y$ thoả mãn $x^2+y^2=14xy$. Xác định giá trị $a$ thỏa mãn $\log_2(x+y)=a+\dfrac{\log_2 xy}{a}$. KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

**Câu 14.** Số tự nhiên $3^{2023}$ có bao nhiêu chữ số? KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

**Câu 15.** Dung dịch $A$ có nồng độ $H^+$ là 0,00001 mol/L và dung dịch $B$ có nồng độ $H^+$ là 0,00000001 mol/L. Tìm tổng độ $pH$ của hai dung dịch trên. KQ: [ ]

Lời giải

**Câu 16.** Trong nông nghiệp bèo hoa dâu được dùng làm phân bón, nó rất tốt cho cây trồng. Mới đây, các nhà khoa học Việt Nam đã phát hiện ra bèo hoa dâu có thể dùng để chiết xuất ra chất có tác dụng kích thích hệ miễn dịch và hỗ trợ điều trị bệnh ung thư. Bèo hoa dâu được thả nuôi trên mặt nước. Một người đã thả một lượng bèo hoa dâu chiếm 4% diện tích mặt hồ. Biết rằng cứ sau đúng một tuần bèo phát triển thành ba lần số lượng đã có và giả sử tốc độ phát triển của bèo ở mọi thời điểm như nhau. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu ngày bèo sẽ vừa phủ kín mặt hồ? KQ: [ ]

Lời giải

**Câu 17.** Cường độ một trận động đất $M$ (độ Richter) được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, với $A$ là biên độ rung chấn tối đa và $A_0$ là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế ki 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8 độ Richter. Trong cùng năm đó, một trận động đất khác

ở Nam Mỹ có biên độ rung chấn mạnh hơn gấp 4 lần. Hỏi cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ là bao nhiêu (kết quả được làm tròn đến hàng phần chục)? KQ:

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## BẢNG ĐÁP ÁN

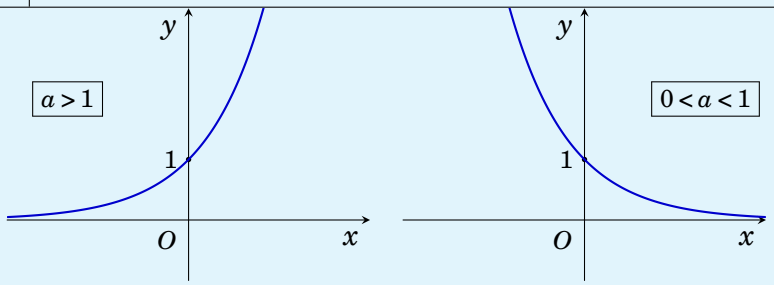
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Câu 1.** 13 | **Câu 2.** 3 | **Câu 3.** 3 | **Câu 4.** $-1$ | **Câu 5.** 6 |
| **Câu 6.** $-0{,}7$ | **Câu 7.** 2 | **Câu 8.** 13 | **Câu 9.** 1,7 | **Câu 10.** 2 |
| **Câu 11.** 0 | **Câu 12.** 2 | **Câu 13.** 2 | **Câu 14.** 966 | **Câu 15.** 13 |
| **Câu 16.** 21 | **Câu 17.** 8,6 | | | |

# BÀI 20. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

## A Lí thuyết

### 1 Hàm số mũ

**Định nghĩa 1**

| | | |
|---|---|---|
| **Tập xác định** | $\mathscr{D}=\mathbb{R}$ | |
| **Tập giá trị** | $T=(0;+\infty)$ nghĩa là khi giải phương trình mà đặt $t=a^{f(x)}$ thì $t>0$. | |
| **Đơn điệu** | $a>1$ | Hàm số $y=a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. |
| | $0<a<1$ | Hàm số $y=a^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. |
| **Đồ thị** |  | |



**Nhận xét.**

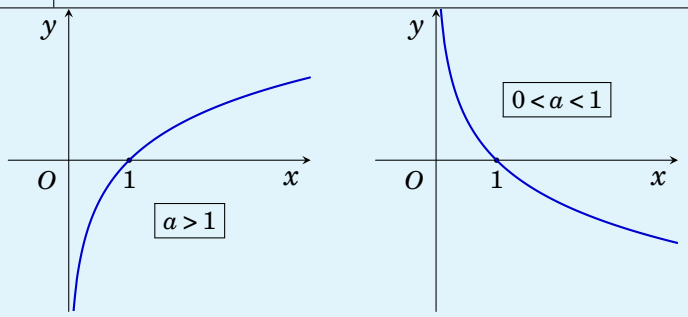
*a) Đồ thị đi qua điểm* $(0;1)$ *và* $(1;a)$.

*b) Đồ thị liên tục trên* $\mathbb{R}$.

*c) Đồ thị nằm ở phía trên trục hoành.*

### 2 Hàm số logarit

**Định nghĩa 2**

| | | |
|---|---|---|
| **Tập xác định** | $\mathscr{D} = (0;+\infty)$. | |
| **Tập giá trị** | $T = \mathbb{R}$, nghĩa là khi đặt $t = \log_a x$ thì $t$ không có điền kiện. | |
| **Đơn điệu** | $a > 1$ | Hàm số $y = \log_a x$ đồng biến trên $\mathscr{D}$. |
| | $0 < a < 1$ | Hàm số $y = \log_a x$ nghịch biến trên $\mathscr{D}$. |
| **Đồ thị** |  | |



**Nhận xét.**

*a) Đồ thị đi qua điểm* $(1;0)$ *và* $(a;1)$.

*b) Đồ thị liên tục trên* $(0;+\infty)$.

*c) Đồ thị nằm ở bên phải trục tung.*

## B Các dạng bài tập

### Dạng 1. Tập xác định của hàm số

Xét $1 \neq a > 0$:

- Hàm số $y = a^{f(x)}$ xác định $\Leftrightarrow f(x)$ xác định.
- Hàm số $y = \log_a f(x)$ xác định $\Leftrightarrow f(x) > 0$.

**Đặc biệt:**
Với hàm số $y = \log_{g(x)}[f(x)]^n$ ta lưu ý "**mũ** $n$" của $f(x)$:

a) Nếu $n \vdots 2$ thì điều kiện xác định của hàm số $y = \log_{g(x)}[f(x)]^n$ là $\begin{cases} g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \\ f(x) \neq 0. \end{cases}$

b) Nếu $n \not\vdots 2$ thì điều kiện xác định của hàm số $y = \log_{g(x)}[f(x)]^n$ là $\begin{cases} g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \\ f(x) > 0. \end{cases}$

Tóm lại nếu $f(x)$ hoặc $g(x)$ có "**mũ** $n$" ta chú ý xem "$n$" chẵn hay lẻ.

**Ví dụ 1.** Tìm tập xác định của các hàm số dưới đây:

a) $y=\log_2(2x-3)$. b) $y=7^{\sqrt{x-3}}$. c) $y=\log_2\left(x^2-9\right)$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 2.** Tìm tập xác định của các hàm số dưới đây:

a) $y=\log_{2025}(3-x)$. b) $y=\log_3(2-x)$. c) $y=\ln\left(-x^2+3\right)$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 3.** Tìm các giá trị thực của tham số $m$ để các hàm số dưới đây có tập xác định là $\mathbb{R}$.

a) $y = \mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{x^2+mx+1}}}$.

b) $y = \log\left(x^2 - 2x - m + 1\right)$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 4.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc đoạn $[-2021;2021]$ để hàm số $y = \log\left(x^2 - 2x - m + 2\right)$ có tập xác định $\mathbb{R}$?

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 2. Sự biến thiên của hàm số

| Hàm số Mũ $y = a^x$ $(1 \neq a > 0)$ | Hàm số Logarit $y = \log_a x$ $(1 \neq a > 0)$ |
|---|---|
| $a > 1 \Rightarrow$ HS đồng biến trên $\mathbb{R}$. | $a > 1 \Rightarrow$ HS đồng biến trên $(0;+\infty)$. |
| $0 < a < 1 \Rightarrow$ HS nghịch biến trên $\mathbb{R}$. | $0 < a < 1 \Rightarrow$ HS nghịch biến trên $(0;+\infty)$. |

**Ví dụ 5.** Xét sự biến thiên các hàm số sau:

a) $y=\ln x$. b) $y=\log_{1-\sqrt{\frac{2018}{2019}}} x$. c) $y=\log_{\pi} x$. d) $y=\log_{4-\sqrt{3}} x$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 6.** Xét sự biến thiên các hàm số sau:

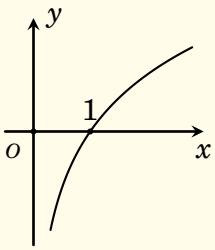
a) $y=5^x$ b) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

c) $y=(\pi-\sqrt{2})^x$ d) $y=(6-\sqrt{5})^x$

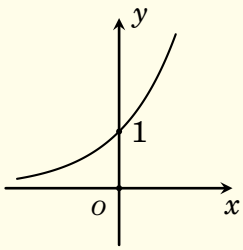
**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

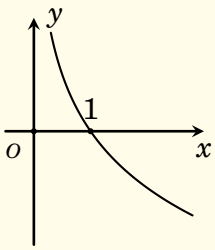
**Ví dụ 7.** Cho số thực $a \in (0;1)$. Đồ thị hàm số $y = \log_a x$ là đường cong nào dưới đây?



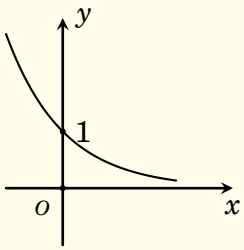
Hình 1



Hình 2



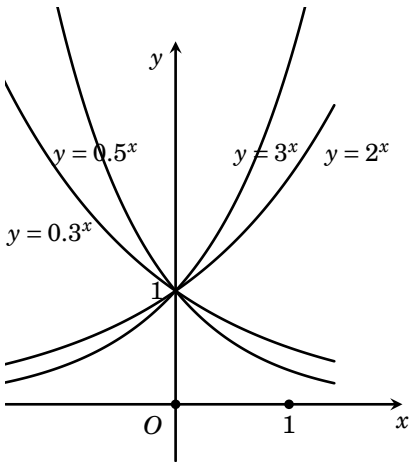
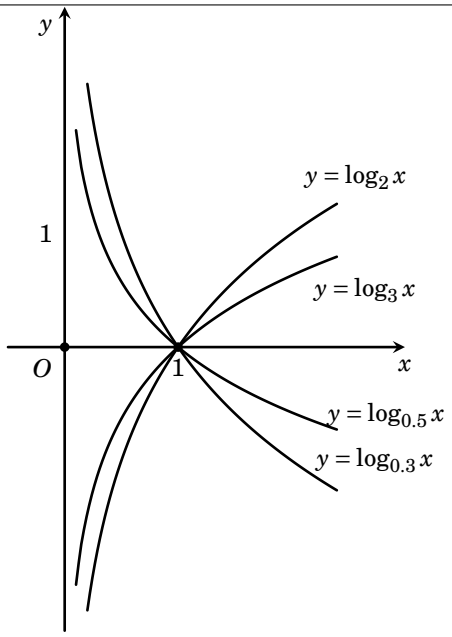
Hình 3



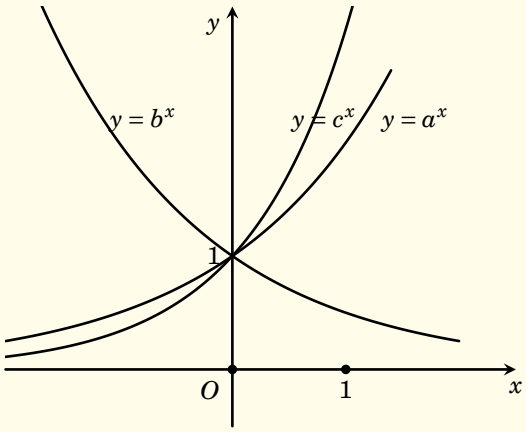
Hình 4

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

<table>
<tr><td colspan="2">( Xét $1 \neq a > 0$</td><td>Hàm số mũ $y = a^x$</td><td>Hàm số Logarit $y = \log_a x$</td></tr>
<tr><td></td><td>$a > 1$</td><td>Càng gần $Oy$ cơ số càng lớn.</td><td>Càng gần $Ox$ cơ số càng lớn.</td></tr>
<tr><td>Cơ số</td><td>$0 < a < 1$</td><td>Càng gần $Oy$ cơ số càng bé.</td><td>Càng gần $Ox$ cơ số càng bé.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hình minh họa</td><td> 
</td><td> 
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nhận xét</td><td>Nằm bên trên $Ox$.<br>Luôn đi qua điểm $(0;1)$.</td><td>Nằm bên phải $Oy$.<br>Luôn đi qua điểm $(1;0)$.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">Đường thẳng $y = a^x$ đối xứng $y = \log_a x$ qua $y = x$.</td></tr>
</table>

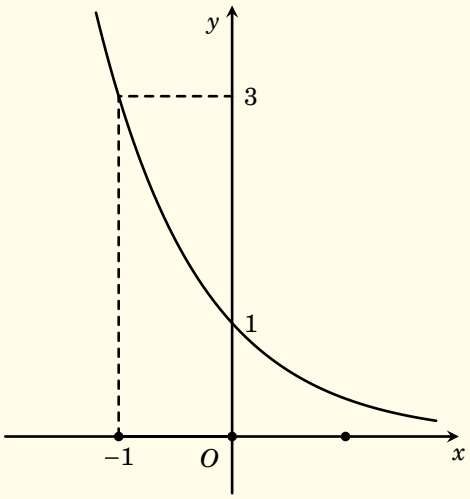
**Ví dụ 8.** Cho các hàm số $y=a^x, y=b^x$ và $y=c^x$ lần lượt có đồ thị như hình vẽ bên.




Hãy so sánh $a$, $b$, $c$.

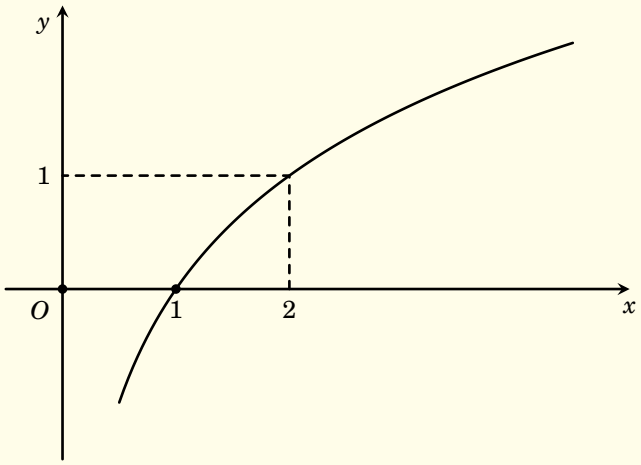
**Lời giải**

**Ví dụ 9.** Cho các hàm số $y=(\sqrt{3})^x, y=\left(\frac{1}{2}\right)^x, y=(\sqrt{2})^x$ và $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$. Đồ thị hàm số dưới đây là của hàm số nào đã cho?



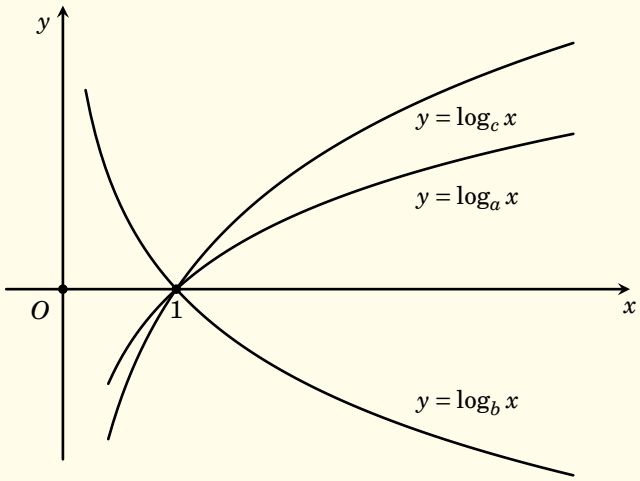

**Lời giải**

**Ví dụ 10.** Cho các hàm số $y=\log_2 x$, $y=\log_{\frac{1}{2}} x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ và $y=2^x$. Đồ thị hàm số dưới đây là của hàm số nào đã cho?



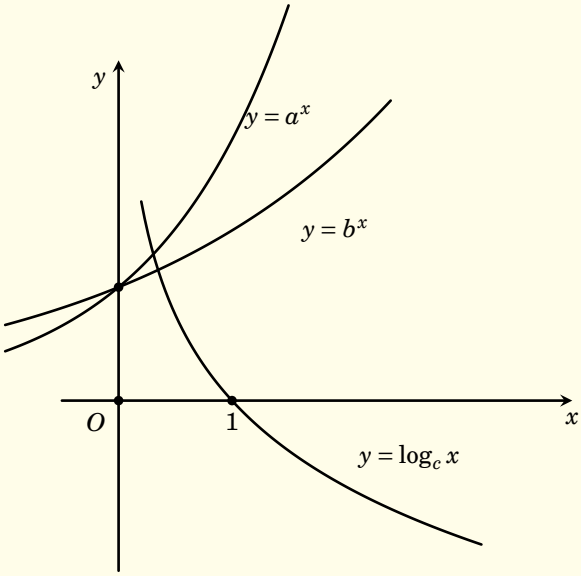

**Lời giải**

**Ví dụ 11.** Cho ba số thực dương $a$, $b$, $c$ khác $1$ . Đồ thị các hàm số $y=\log_a x$ , $y=\log_b x$, $y=\log_c x$ được cho trong hình vẽ bên. So sánh các số $a, bc$.



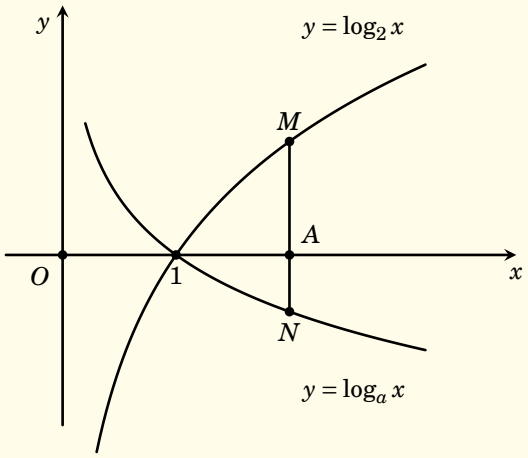

**Lời giải**

**Ví dụ 12.** Cho đồ thi hàm số $y=a^x; y=b^x; y=\log_c x$ như hình vẽ. Tìm mối liên hê của $a,b,c$.




**Lời giải**

**Ví dụ 13.** Cho số thực dương a khác 1 . Biết rằng bất kỳ đường thẳng nào vuông góc với trục hoành mà cắt các đồ thị của hàm số $y=\log_2 x$, $y=\log_a x$ và trục hoành lần lượt tại $M,N$ và $A$ thì $AM=2AN$ (hình vẽ bên). Tính giá trị của $a$.




**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

# C Bài tập rèn luyện

## PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1.** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số mũ?

**A.** $y=\dfrac{1}{2^{-x}}$. **B.** $y=x^{-3}$. **C.** $y=\ln\sqrt{x}$. **D.** $y=\dfrac{1}{3x}$.

Lời giải

**Câu 2.** Tìm tập xác định của hàm số $y=\log_3(x+3)$.

**A.** $\mathscr{D}=(0;+\infty)$. **B.** $\mathscr{D}=[-3;+\infty)$. **C.** $\mathscr{D}=(-3;+\infty)$. **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

Lời giải

**Câu 3.** Tìm tập giá trị của hàm số $y=3^x$ trên đoạn $[-1;3]$.

**A.** $\left(\dfrac{1}{3};27\right)$. **B.** $\left[\dfrac{1}{3};27\right]$. **C.** $\left[\dfrac{1}{3};27\right)$. **D.** $[3;27)$.

Lời giải

**Câu 4.** Tìm tập giá trị của hàm số $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ trên đoạn $[1;3]$.

**A.** $\left(\frac{1}{2};8\right)$. **B.** $\left[\frac{1}{8};\frac{1}{2}\right]$. **C.** $\left[\frac{1}{3};8\right)$. **D.** $\left[\frac{1}{8};2\right)$.

**Lời giải**

**Câu 5.** Tập xác định của hàm số $y=\log_2 x$ là

**A.** $[0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $[2;+\infty)$.

**Lời giải**

**Câu 6.** Tập xác định của hàm số $y=5^x$ là

**A.** $\mathbb{R}$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **D.** $[0;+\infty)$.

**Lời giải**

**Câu 7.** Tập xác định của hàm số $y = 2^x$ là

**A.** $\mathbb{R}$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $[0;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

**Lời giải**

**Câu 8.** Tập xác định của hàm số $y = \log_3(x-4)$ là

**A.** $(5;+\infty)$. **B.** $(-\infty;+\infty)$. **C.** $(4;+\infty)$. **D.** $(-\infty;4)$.

**Lời giải**

**Câu 9.** Có bao nhiêu số nguyên thuộc tập xác định của hàm số $y = \log[(6-x)(x+2)]$?

**A.** 7. **B.** 8. **C.** Vô số. **D.** 9.

**Lời giải**

**Câu 10.** Tập xác định của hàm số $f(x)=\log_5\left(30-x^2\right)$ chứa bao nhiêu số nguyên?

**A.** 11. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 10.

**Lời giải**

**Câu 11.** Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

**A.** $y=\log_3 x^2$. **B.** $y=\log\left(x^3\right)$. **C.** $y=\left(\dfrac{\mathrm{e}}{4}\right)^x$. **D.** $y=\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-x}$.

**Lời giải**

**Câu 12.** Mệnh đề nào trong các mệnh đề dưới đây **sai**?

**A.** Hàm số $y=\left(\dfrac{2025}{\pi}\right)^{x^2+1}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**B.** Hàm số $y=\log x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

**C.** Hàm số $y=\ln(-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

**D.** Hàm số $y=2^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 13.** Hàm số nào dưới đây đồng biến trên tập xác định của nó?

**A.** $y=\left(\frac{1}{\pi}\right)^x$. **B.** $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$. **C.** $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$. **D.** $y=(0,5)^x$.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 14.** Cho hàm số $y=\log_{\sqrt{5}}x$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề **sai**?

**A.** Hàm số đã cho đồng biến trên tập xác định.

**B.** Hàm số đã cho có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

**C.** Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng là trục tung.

**D.** Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .
. . . . . .

**Câu 15.** Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

**A.** $y=\log_{\sqrt{3}}x$. **B.** $y=\log_{\frac{\pi}{6}}x$. **C.** $y=\log_{\frac{e}{3}}x$. **D.** $y=\log_{\frac{1}{4}}x$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 16.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

**A.** Đồ thị của hàm số $y=2^x$ và $y=\log_2 x$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $y=-x$.

**B.** Đồ thị của hai hàm số $y=\mathrm{e}^x$ và $y=\ln x$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $y=x$.

**C.** Đồ thị của hai hàm số $y=2^x$ và hàm số $y=\dfrac{1}{2^x}$ đối xứng với nhau qua trục hoành.

**D.** Đồ thị của hai hàm số $y=\log_2 x$ và $y=\log_2\dfrac{1}{x}$ đối xứng với nhau qua trục tung.

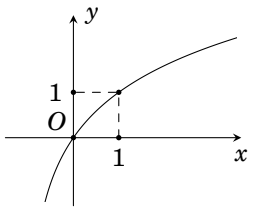
**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 17.**

Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên?

**A.** $y=\log_3 x$. **B.** $y=\log_2 x+1$. **C.** $y=\log_2(x+1)$. **D.** $y=\log_3(x+1)$.




**Lời giải**

**Câu 18.** Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào nghịch biến trên tập số thực $\mathbb{R}$.

**A.** $y=\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$. **B.** $y=\log_{\frac{\pi}{4}}\left(2x^2+1\right)$. **C.** $y=\left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^x$. **D.** $y=\log_{\frac{2}{3}}x$.

**Lời giải**

**Câu 19.** Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên tập xác định của nó?

**A.** $y=\log_{\sqrt{3}}x$. **B.** $y=\log_2\left(\sqrt{x}+1\right)$. **C.** $y=\log_{\frac{\pi}{4}}x$. **D.** $y=\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$.

**Lời giải**

**Câu 20.** Tìm tập xác định của hàm số $y=2^{\sqrt{x}}+\log(3-x)$.

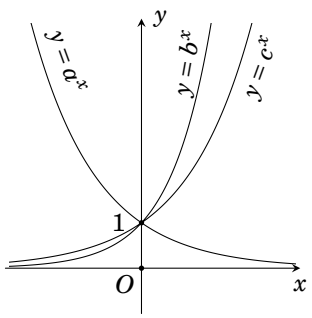
**A.** $[0;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $[0;3)$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 21.**

Cho ba số thực dương $a$, $b$, $c$ khác 1. Đồ thị các hàm số $y=a^x$, $y=b^x$, $y=c^x$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



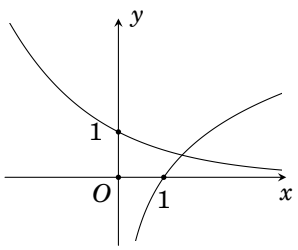

**A.** $b<c<a$. **B.** $c<a<b$. **C.** $a<b<c$. **D.** $a<c<b$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 22.**

Cho đồ thị hàm số $y=a^x$ và $y=\log_b x$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?




**A.** $0<a<\dfrac{1}{2}<b$. **B.** $0<a<1<b$.

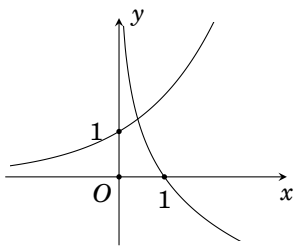
**C.** $0<b<1<a$. **D.** $0<a<1$, $0<b<\dfrac{1}{2}$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 23.**

Cho đồ thị hàm số $y=a^x$ và $y=\log_b x$ như hình vẽ bên. Trong các khẳng định sau, đâu là khẳng định đúng?




**A.** $0<a<1, 0<b<1$.
**B.** $a>1, b>1$.
**C.** $0<b<1<a$.
**D.** $0<a<1<b$.

**Lời giải**

**Câu 24.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=\log\left(x^2-2x-m+1\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

**A.** $m\le 2$.
**B.** $m>2$.
**C.** $m\ge 0$.
**D.** $m<0$.

**Lời giải**

.....

**Câu 25.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=\ln\left(x^2-2x+m+1\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

**A.** $0<m<3$. **B.** $m<-1$ hoặc $m>0$. **C.** $m>0$. **D.** $m=0$.

**Lời giải**

.....

**Câu 26.** Hàm số $y=\ln\left(x^2+mx+1\right)$ xác định với mọi giá trị của $x$ khi

**A.** $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$. **B.** $m>2$. **C.** $-2<m<2$. **D.** $m<2$.

**Lời giải**

.....

**Câu 27.** Tìm tất cả các giá trị của $m$ để hàm số $y=\ln\left(-x^2+mx+2m+1\right)$ xác định với mọi $x\in(1;2)$.

**A.** $m\geq-\dfrac{1}{3}$. **B.** $m\geq\dfrac{3}{4}$. **C.** $m>\dfrac{3}{4}$. **D.** $m<-\dfrac{1}{3}$.

**Lời giải**

.....

**Câu 28.** Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 0,4%/ tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ta khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được lập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi xuất không thay đổi?

**A.** 102160000 đồng. **B.** 102017000 đồng. **C.** 102424000 đồng. **D.** 102423000 đồng.

Lời giải

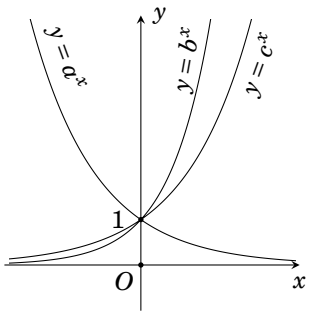
**Câu 29.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=\ln\left(x^2-2x+m+1\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

**A.** $0<m<3$. **B.** $m>0$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>0 \end{array}\right.$. **D.** $m=0$.

Lời giải

**Câu 30.**

Cho ba số thực dương $a$, $b$, $c$ khác 1. Đồ thị các hàm số $y=a^x$, $y=b^x$, $y=c^x$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

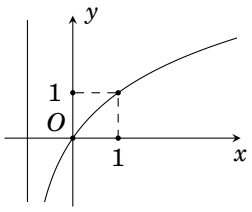



**A.** $a<b<c$. **B.** $a<c<b$. **C.** $b<c<a$. **D.** $c<a<b$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 31.** Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên?

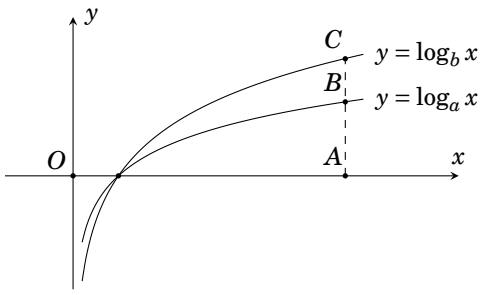



**A.** $y=\log_3 x$. **B.** $y=\log_2 x+1$. **C.** $y=\log_2(x+1)$. **D.** $y=\log_3(x+1)$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 32.** Cho các hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên.

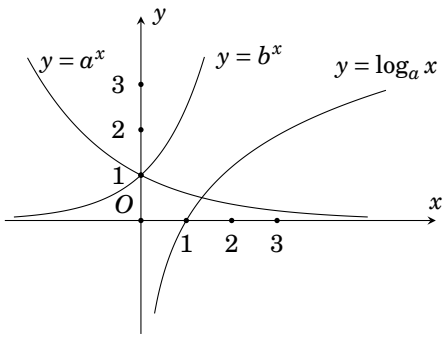



Đường thẳng $x=6$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ lần lượt tại $A$, $B$ và $C$. Nếu $AC=AB\log_2 3$ thì

**A.** $b^3=a^2$. **B.** $b^2=a^3$. **C.** $\log_3 b=\log_2 a$. **D.** $\log_2 b=\log_3 a$.

**Lời giải**

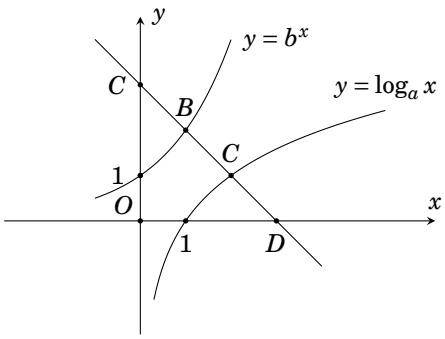
**Câu 33.** Trong hình vẽ bên có đồ thị các hàm số $y=a^x$, $y=b^x$, $y=\log_c x$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây?




**A.** $a<c<b$. **B.** $c<a<b$. **C.** $a<b=c$. **D.** $b<c<a$.

**Lời giải**

**Câu 34.** Cho hai hàm số $y=2^x$, $y=\log_2 x$ có đồ thị như hình vẽ. Đường thẳng $\Delta$ cắt trục $Oy$, đồ thị hàm số $y=2^x$, đồ thị hàm số $y=\log_2 x$ và trục $Ox$ lần lượt tại $A$, $B$, $C$, $D$ thỏa mãn $AB=BC=CD$. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng $\Delta$ như thế?




**A.** Vô số đường thẳng $\Delta$.
**B.** 2.
**C.** 3.
**D.** Không có đường thẳng nào.

**Lời giải**

**Câu 35.** Tìm tất cả các giá trị của $m$ để hàm số $y=\ln\left(x^2+2mx+3m-2\right)$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.

**A.** $m>2$.
**B.** $1<m<2$.
**C.** $m<1$.
**D.** $m<-\dfrac{1}{3}$.

**Lời giải**

**Câu 36.** Số giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc đoạn $[-2024;2025]$ sao cho hàm số $y=\ln(-3^x+3m-2)$ xác định trên khoảng $(1;+\infty)$ là

**A.** 2026. **B.** 2024. **C.** 2020. **D.** 2019.

**Lời giải**

**Câu 37.** Tìm tập giá trị của hàm số $f(x)=2+\log_2 x$ trên đoạn $[2;4]$.

**A.** $T=[1;3]$. **B.** $T=[0;2]$. **C.** $T=[3;4]$. **D.** $T=[2;4]$.

**Lời giải**

**Câu 38.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=\log\left(x^2+2x+11\right)+m$ có giá trị nhỏ nhất bằng 5.

**A.** $m=1$. **B.** $m\in\mathbb{R}$. **C.** $m>1$. **D.** $m=4$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 39.** Tìm giá trị nguyên lớn nhất của tham số $m$ để hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{\log_3\left(x^2 - 2mx + 17\right)}}$ có tập xác định $\mathbb{R}$.

**A.** 3. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 7.

**Lời giải**

. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Câu 1. A | Câu 2. C | Câu 3. B | Câu 4. B | Câu 5. C | Câu 6. A | Câu 7. A |
| Câu 8. C | Câu 9. A | Câu 10. A | Câu 11. C | Câu 12. A | Câu 13. C | Câu 14. B |
| Câu 15. A | Câu 16. B | Câu 17. C | Câu 18. C | Câu 19. C | Câu 20. D | Câu 21. D |
| Câu 22. B | Câu 23. C | Câu 24. D | Câu 25. C | Câu 26. C | Câu 27. B | Câu 28. C |
| Câu 29. B | Câu 30. B | Câu 31. C | Câu 32. D | Câu 33. A | Câu 34. A | Câu 35. B |
| Câu 36. B | Câu 37. C | Câu 38. D | Câu 39. A | | | |

## PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

**Câu 1.** Cho hàm số $y=a^x$ với $0<a\neq 1$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

**a)** Hàm số $y=a^x$ có tập xác định $\mathscr{D}=(0;+\infty)$.

**b)** Đồ thị hàm số $y=a^x$ đi qua điểm $(0;1)$.

**c)** Hàm số $y=a^x$ đồng biến trên nếu $0<a<1$.

**d)** Hàm số $y=a^x$ có tập giá trị là $(a;+\infty)$ nếu $x>1$ và $a>1$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Cho hàm số $y=2^x$. Khi đó

**a)** Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

**b)** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

**c)** Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(2;4)$.

**d)** Đồ thị hàm số $y=2^x$ đối xứng với đồ thị $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ qua trục tung.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 3.** Cho hàm số $y=\log_4 x$. Khi đó:

**a)** Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

**b)** Hàm số có tập giá trị $T=\mathbb{R}$.

**c)** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

**d)** Đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y=1$ tại điểm có hoành độ bằng 3.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 4.** Cho các hàm số $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ và $y=2^x$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

**a)** Có hai hàm số mũ.

**b)** Đồ thị hàm số $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ đi qua điểm $M(2;-1)$.

**c)** Đồ thị hàm số $y=2^x$ đi qua điểm $N(1;-1)$.

**d)** Hai đồ thị hàm số $y=2^x$ và $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ cắt nhau tại 1 điểm.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 5.** Cho các hàm số $y=\log_{\frac{1}{2}}x$; $y=2^x$; $y=\log_{\sqrt{3}}x$; $y=\log_{0,5}x$ và $y=(0,5)^x$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

**a)** Hàm số $y=2^x$ có tập giá trị là $(0;+\infty)$.

**b)** Hàm số $y=\log_{\sqrt{3}}x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$.

**c)** Có hai hàm số có tập giá trị là $\mathbb{R}$.

**d)** Có hai hàm số có tập giá trị là $(0;+\infty)$.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 6.** Cho các hàm số $y=\log_{\frac{1}{3}}x$; $y=\pi^x$; $y=\ln x$; $y=\log_{0,2}x$ và $y=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

**a)** Hàm số $y=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

**b)** Hàm số $y=\log_\pi x$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

**c)** Có ba hàm số nghịch biến trên tập xác định.

**d)** Có hai hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Lời giải

**Câu 7.** Cho hàm số $y=\log_3(5x-3)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

**a)** Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=(0;+\infty)$.

**b)** Hàm số đồng biến trên $\left(\dfrac{3}{5};+\infty\right)$.

**c)** Đồ thị hàm số đi qua điểm $M(2;7)$.

**d)** Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên $\left[\dfrac{4}{5};\dfrac{12}{5}\right]$ là 2.

Lời giải

BẢNG ĐÁP ÁN

| | | |
|---|---|---|
| **Câu 1.** a S b Đ c S d Đ | **Câu 2.** a Đ b S c Đ d Đ | **Câu 3.** a S b Đ c S d S |
| **Câu 4.** a S b Đ c S d Đ | **Câu 5.** a Đ b Đ c S d Đ | **Câu 6.** a Đ b S c Đ d S |
| **Câu 7.** a S b Đ c S d Đ | | |

## PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\log\left(x^2-2mx+4\right)$ xác định với mọi $x$ thuộc $\mathbb{R}$.

KQ: | | | | |

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{2m+1-x}}+\log_3\sqrt{x-m}$ xác định trên khoảng $(2;3)$.

KQ: | | | | |

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 3.** Trong vật lí, sự phân rã các chất phóng xạ được cho bởi công thức:

$$m(t)=m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

Trong đó, $m_0$ là khối lượng chất phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t=0$ ), $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm $t$ và $T$ là chu kì bán rã. Hạt nhân Poloni $(Po)$ là chất phóng xạ $a$ có chu kì bán rã 138 ngày. Giả sử lúc đầu có 100 Poloni. Tính khối lượng Poloni còn lại sau 100 ngày theo đơn vị gam (làm tròn kết quả đến phần chục).

KQ: | | | | |

Lời giải

.....

. . . . . .

**Câu 4.** Trong một nghiên cứu, một nhóm học sinh được cho xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ còn nhớ bao nhiêu phần trăm danh sách đó sau mỗi tháng. Giả sử sau $t$ tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó được tính theo công thức:

$$M(t) = 75 - 20\ln(t+1), 0 \le t \le 12$$

(đơn vị:%)

Đến tháng thứ mấy thì nhóm học sinh đó nhớ được khoảng một nửa danh sách các loài động vật đã xem?

KQ: | | | | |

**Lời giải**

. . . . . .

**BẢNG ĐÁP ÁN**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Câu 1.** 3 | **Câu 2.** 2 | **Câu 3.** 60,5 | **Câu 4.** 3 |

# BÀI 21. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

## A Tóm tắt lý thuyết

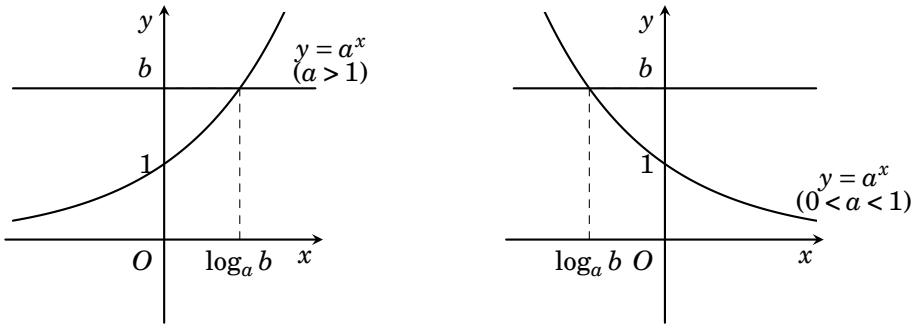
### 1 Phương trình và bất phương trình mũ

a) **Phương trình mũ cơ bản:**

Phương trình mũ cơ bản có dạng: $a^x = b$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, với $a$ và $b$ là các số cho trước.

***Nghiệm của phương trình mũ cơ bản:***

Cho đồ thị của hai hàm số $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ và $y = b$ như hình:




Từ hình vẽ ta thấy

- Với $b > 0$ đường thẳng $y = b$ cắt đường cong $y = a^x$ tại điểm $\left(\log_a b; b\right)$, suy ra phương trình có một nghiệm duy nhất.
- Với $b \leq 0$ đường thẳng $y = b$ không cắt đường cong $y = a^x$, suy ra phương trình vô nghiệm.

**Chú ý:**

- Nếu $b = a^m$ thì ta có $a^x = a^m \Leftrightarrow x = m$.
- Tổng quát hơn $a^{u(x)} = a^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) = v(x)$.

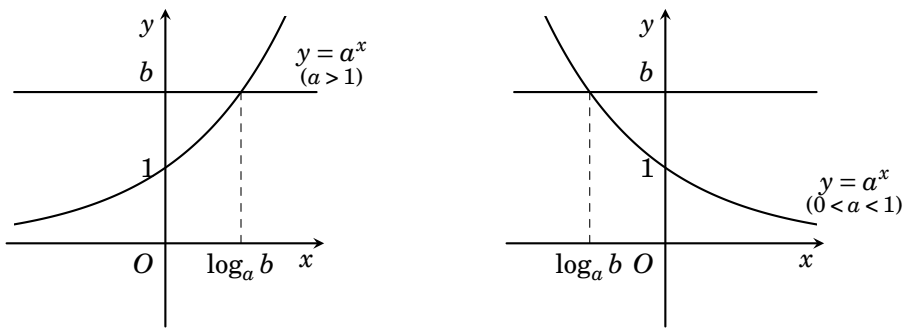
b) Bất phương trình mũ cơ bản:

Bất phương trình mũ cơ bản: $a^x > b$ hoặc $a^x < 0$, $a^x \geq b$, $a^x \leq b$, với $a > 0$, $a \neq 1$.

Với $a$ và $b$ là các số cho trước.

***Nghiệm của phương trình mũ cơ bản:***

Cho đồ thị của hai hàm số $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ và $y = b$ như hình vẽ dưới đây



Xét bất phương trình $a^x > b \quad (*)$

Nghiệm của $(*)$ là hoành độ các điểm trên đồ thị hàm số $y = a^x$ nằm phía trên đường thẳng $y = b$.

Từ hình vẽ ta nhận được

- Nếu $b \le 0$ thì $\forall x \in \mathbb{R}$ đều là nghiệm của $(*)$.
- Nếu $b > 0$ thì
  - Với $a > 1$: nghiệm của $(*)$ là $x > \log_a b$.
  - Với $0 < a < 1$: nghiệm của $(*)$ là $x < \log_a b$.

**Chú ý:**

- Nếu $a > 1$: $a^{u(x)} > a^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) > v(x)$.
- Nếu $0 < a < 1$: $a^{u(x)} > a^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) < v(x)$.

## 2 Phương trình và bất phương trình lôgarit

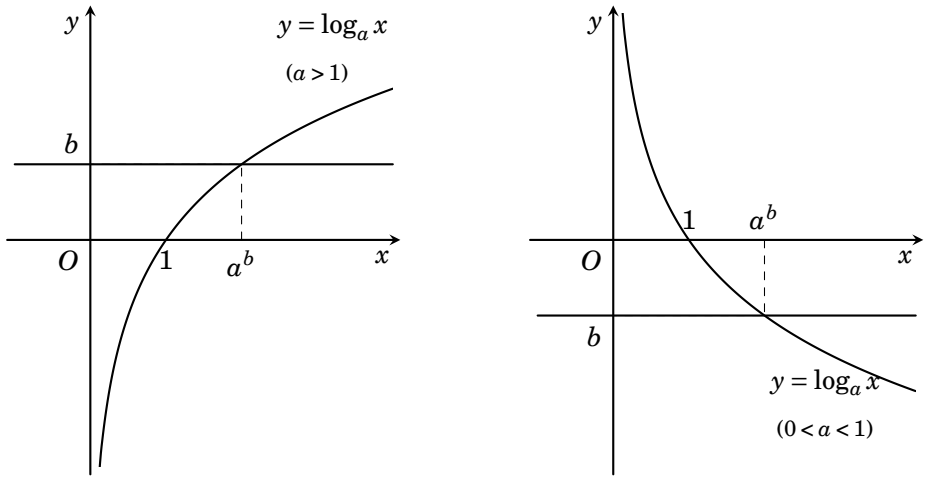
a) **Phương trình logarit cơ bản:**

Phương trình lôgarit cơ bản có dạng $\log_a x = b$ $(a > 0, a \neq 1)$.

Với $a$ và $b$ là các số cho trước.

***Nghiệm của phương trình logarit cơ bản:***

Cho đồ thị của hai hàm số $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ và $y = b$ như hình:




Từ hình vẽ ta thấy với:

- $b > 0$ đường thẳng $y = b$ cắt đường cong $y = \log_a x$ tại điểm $(a^b; b)$.
- $b \le 0$ đường thẳng $y = b$ cắt đường cong $y = \log_a x$ tại điểm $(a^b; b)$.

Suy ra, phương trình lôgarit cơ bản $\log_a x = b$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ luôn có nghiệm duy nhất $x = a^b$.

**Chú ý:**

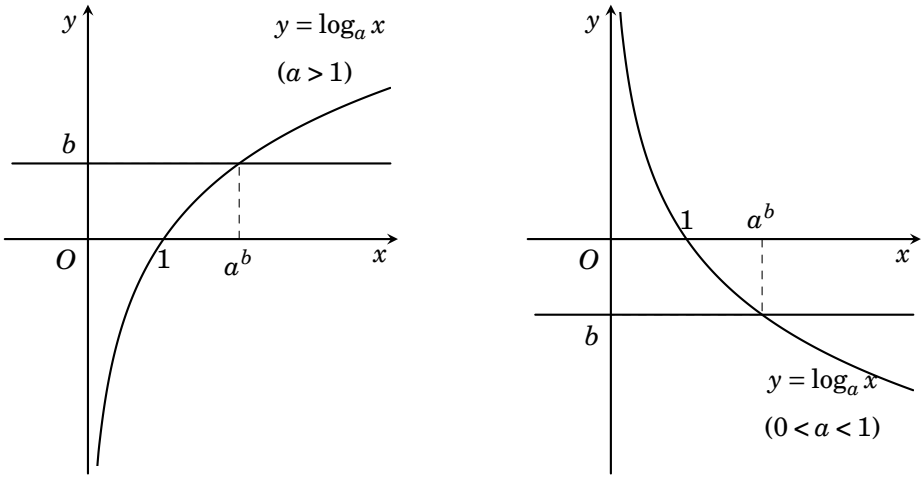
- Tổng quát $\log_a u(x) = \log_a v(x) \Leftrightarrow u(x) = v(x)$

- Lưu ý để giải phương trình lôgarit trước hết đặt điều kiện $\begin{cases} u(x) > 0 \\ v(x) > 0. \end{cases}$

b) **Bất phương trình lôgarit cơ bản:**

Bất phương trình lôgarit cơ bản có dạng $\log_a x > b$ hoặc $\log_a x < 0$, $\log_a x \geq b$, $\log_a x \leq b$, với $a > 0$, $a \neq 1$. Với $a$ và $b$ là các số cho trước.

Cho đồ thị của hai hàm số $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ và $y = b$ như hình vẽ dưới đây:




Xét bất phương trình $\log_a x > b \quad (*)$

Điều kiện $x > 0$.

Nghiệm của $(*)$ là hoành độ các điểm trên đồ thị hàm số $y = \log_a x$ nằm phía trên đường thẳng $y = b$. Từ hình vẽ ta nhận được

- Với $a > 1$ nghiệm của $(*)$ là $x > a^b$.
- Với $0 < a < 1$ nghiệm của $(*)$ là $0 < x < a^b$.

**Chú ý:**

- Nếu $a > 1$: $\log_a u(x) > \log_a v(x) \Leftrightarrow u(x) > v(x)$.
- Nếu $0 < a < 1$: $\log_a u(x) > \log_a v(x) \Leftrightarrow u(x) < v(x)$.

# B Các dạng bài tập

## Dạng 1. Phương trình mũ cơ bản

Giải phương trình mũ co bản $a^x = b$ $(a > 0, a \neq 1)$.

Khi đó $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$.

**Lưu ý:**

- Phương trình có một nghiệm duy nhất khi $b > 0$.
- Phương trình vô nghiệm khi $b \leq 0$.

**Ví dụ 1.** Giải các phương trình sau

a) $3^x = 4$ b) $8^x = 4$ c) $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{4}$

d) $(\sqrt{2})^x = 2$ e) $4^{x+1} = 25$ f) $4^{x^2-2x} = 1$

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 2. Phương trình mũ đưa về cùng cơ số

**Phương pháp:**

Với $a > 0$, $a \neq 1$: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

**Ví dụ 2.** Giải các phương trình sau

a) $2^{2x-1} - \frac{1}{8} = 0$; c) $25^x = 5^{x^2}$; e) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} = (2\sqrt{2})^{x+2}$;

b) $2^{(x-1)^2} = 4^x$; d) $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1} = 125^x$; f) $4^{x^2-2x} = 1$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 3. Phương trình mũ dùng logarit hóa

**Phương pháp:**

- Phương trình $a^{f(x)}=b \Leftrightarrow \begin{cases} 0<a\neq 1, b>0 \\ f(x)=\log_a b. \end{cases}$
- Phương trình $a^{f(x)}=b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)}=\log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x)\log_a b$ hoặc $a^{f(x)}=b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_b a^{f(x)}=\log_b b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)\log_b a=g(x)$.

**Ví dụ 3.** Giải các phương trình sau

a) $2^{x+1}=8^x$;

b) $3^{4^x}=4^{3^x}$;

c) $5^{2x+1}=\left(\dfrac{1}{125}\right)^{x+2}$;

d) $2^{x-1}=5^{x^2+2x-3}$;

e) $\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2x}=\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2}$;

f) $2^x\cdot 5^x=0{,}2\cdot\left(10^{x-1}\right)^5$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 4. Phương trình mũ đặt ẩn phụ cơ bản

**Phương pháp:**

- Biến đổi quy về dạng: $f\left[a^{g(x)}\right]=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=a^{g(x)}>0 \\ f(t)=0. \end{cases}$
- Thông thường sẽ gặp các cơ số $\begin{cases} 9^x \longrightarrow t=3^x \\ 4^x \longrightarrow t=2^x \\ 25^x \longrightarrow t=5^x. \end{cases}$

**Ví dụ 4.** Biến đổi các phương trình sau với phép đặt cho trước.

a) $4^x - 3\cdot 2^{x+1} + 2 = 0$, khi đặt $t = 2^x$;

b) $2^{2x+1} - 2^{x-1} - 1 = 0$, khi đặt $h = 2^x$;

c) $9^{x+1} - 3^{x+1} - 30 = 0$, khi đặt $u = 3^x$;

d) $5^{2x} - 3\cdot 5^{x+2} + 32 = 0$, khi đặt $m = 5^x$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 5.** Giải các phương trình sau:

a) $4^x - 2^{x+2} - 3 = 0$;

b) $9^x - 5\cdot 3^x + 6 = 0$;

c) $4\cdot 4^x - 9\cdot 2^{x+1} + 8 = 0$;

d) $2^{2x+1} + 15\cdot 2^x - 8 = 0$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 5. Phương trình logarit cơ bản

**Phương pháp:**

Phương trình logarit cơ bản là phương trình có dạng $\log_a x = b$ với $(a > 0, a \neq 1)$.

Phương trình logarit cơ bản luôn có một nghiệm duy nhất là $x = a^b$.

$$\boxed{\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b}$$

**Ví dụ 6.** Giải các phương trình sau:

a) $\log_2 x = 5$;

b) $\log_4(x-2) = 2$;

c) $\log_2(1-x) = 2$;

d) $\log_2|x-1| = 3$;

e) $\log_{\sqrt[4]{2}}\left(x^2-2\right)^2 = 8$;

f) $\log_2\sqrt{x^2+5} = 3$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

## Dạng 6. Phương trình logarit đưa về cùng cơ số

**Phương pháp**:

Cho $1 \neq a > 0$. Với điều kiện các biểu thức $f(x)$ và $g(x)$ xác định, ta thường đưa các phương trình logarit về các dạng cơ bản sau

- Loại 1: $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^b. \end{cases}$
- Loại 2: $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x). \end{cases}$

**Ví dụ 7.** Giải các phương trình sau

a) $\ln(x+1)+\ln(x+3)=\ln(x+7)$.

b) $2\log_2\left(x^2-x-1\right)=\log_{\sqrt{2}}(x-1)$.

c) $\log_4(x+12)\cdot\log_x 2=1$.

d) $\log_3(x+4)+2\log_9(14-x)=4$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

## Dạng 7. Phương trình logarit dùng mũ hóa

**Phương pháp**:

Cho $1\neq a>0$. Với điều kiện các biểu thức $f(x)$ và $g(x)$ xác định, ta thường đưa các phương trình logarit về: $\log_a f(x)=g(x)(0<a\neq 1)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0\\ f(x)=a^{g(x)}.\end{cases}$

**Ví dụ 8.** Giải các phương trình sau

a) $\log_{x^2}(3-2x)=1$.

b) $\log_{5-x}\left(x^2-2x+64\right)=2$.

c) $\log_2\left(5^{x+1}-25^x\right)=2$.

d) $\log\left(25^x-2^{2x+1}\right)=x$.

e) $\log_2(9-2^x)=3-x$.

f) $\log_2(4^x+4)=x-\log_{0,5}\left(2^{x+1}-3\right)$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 8. Phương trình logarit đặt ẩn phụ

**Phương pháp**:

Biến đổi quy về dạng: $f\left(\log_a g(x)\right)=0\ (0<a\neq 1)\Leftrightarrow\begin{cases}t=\log_a g(x)\\ f(t)=0.\end{cases}$

**!** Với $t=\log_a g(x)$ không có điều kiện của $t$.

**Ví dụ 9.** Giải các phương trình sau:

a) $\log_3^2 x - 4\log_3 x + 3 = 0$.

b) $\log_{0,5}^2 x + 2\log_{\sqrt{2}} x = 5$.

c) $\sqrt[3]{\log_3 x} - \log_3 3x - 1 = 0$.

d) $\log\left(25^x - 2^{2x+1}\right) = x$.

e) $\log_{\sqrt{2}}^2 x + \log_2(x\sqrt{8}) - 3 = 0$.

f) $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 5 = 0$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

## Dạng 9. Bất phương trình mũ cơ bản

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dạng 01. $a^x > b$ $(a>0, a\neq 1)$ | $b \le 0$ | Tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$ | |
| | $b > 0$ | $a > 1$ | $a^x > b \Leftrightarrow x > \log_a b$ |
| | | $a < a < 1$ | $a^x > b \Leftrightarrow x < \log_a b$ |
| Dạng 02. $a^x < b$ $(a>0, a\neq 1)$ | $b \le 0$ | Tập nghiệm của bất phương trình là $\varnothing$ | |
| | $b > 0$ | $a > 1$ | $a^x < b \Leftrightarrow x < \log_a b$ |
| | | $a < a < 1$ | $a^x < b \Leftrightarrow x > \log_a b$ |

**Ví dụ 10.** Giải các bất phương trình sau

a) $3^x \geq 9$;

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 4$;

c) $2^{x+2} < \sqrt{2^3}$;

d) $2^x > 3^{x+1}$;

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 32$;

f) $3^{x^2-2x} < 27$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 10. Bất phương trình logarit cơ bản

Giải bất phương trình logarit cơ bản $\log_a x > b \Leftrightarrow \begin{cases} x > a^b & \text{khi } a > 1 \\ x < a^b & \text{khi } 0 < a < 1. \end{cases}$

- Xác định điều kiện trước khi giải bất phương trình.
- Khi lấy cơ số cần quan tâm cơ số "$> 1$" hay "$< 1$" để xác định dấu của bất phương trình.

**Ví dụ 11.** Giải các bất phương trình sau

a) $\log_{e^2} x > 5$;

b) $\log_4(x-20) < 2$;

c) $\log_2 |x-1| > 2$;

d) $\log_3 \left(x^2-1\right)^2 > 2$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 11. Bất phương trình mũ giải bằng các phương pháp

- Phương pháp đưa về cùng cơ số:
  - Với $a > 1$, ta có $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.
  - Với $0 < a < 1$, ta có $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.
- Phương pháp dùng logarit hóa

  Bất phương trình $a^{f(x)} > b^{g(x)}$.
  - Với $a > 1$, ta có

$$a^{f(x)} > b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} > \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)\log_a b.$$

  - Với $0 < a < 1$, ta có

$$a^{f(x)} > b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} > \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)\log_a b.$$

  Bất phương trình $\log_b a^{f(x)} > g(x)$.
  - Với $b > 1$, ta có

$$\log_b a^{f(x)} > \log_b b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)\log_b a > g(x).$$

  Với $0 < b < 1$, ta có

$$\log_b a^{f(x)} > \log_b b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)\log_b a < g(x).$$

**Lưu ý:** Khi lấy cơ số cần quan tâm cơ số lớn hơn 1 hay bé hơn 1 để xác định dấu của bất phương trình.

- Phương pháp đặt ẩn phụ cơ bản
  - Biến đổi quy về dạng
$$f\left[a^{g(x)}\right]<b \Leftrightarrow \begin{cases} t=a^{g(x)}>0 \\ f(t)<b. \end{cases}$$
  - Thông thường ta sẽ gặp các cơ số $9^x$, $4^x$ và $25^x$. Khi đó ta đặt tương ứng $t=3^x$, $t=2^x$ và $t=5^x$ $(t>0)$.

**Ví dụ 12.** Giải các bất phương trình sau

a) $2^{2x-1}-2^{-2}>0$; b) $2^{2(x+5)^2}\geq 4^{1-2x}$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 13.** Giải các bất phương trình sau

a) $2^{x+1}>8^{x-1}$; b) $3^{4^x}\leq 4^{3^x}$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 14.** Giải các bất phương trình sau

a) $3^{2x+1}-4\cdot 3^x+1>0$; b) $9^x-5\cdot 3^x+6<0$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

## Dạng 12. Bất phương trình mũ giải bằng các phương pháp

- Phương pháp đưa về cùng cơ số

$$\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)>0\\f(x)>g(x)\end{cases}\quad\text{khi } a>1.\\\begin{cases}f(x)>0\\f(x)<g(x)\end{cases}\quad\text{khi } 0<a<1.\end{array}\right.$$

- Phương pháp dùng mũ hóa

$$\log_a f(x)>g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)>0\\f(x)>a^{g(x)}\end{cases}\quad\text{khi } a>1\\\begin{cases}f(x)>0\\f(x)<a^{g(x)}\end{cases}\quad\text{khi } 0<a<1.\end{array}\right.$$

- Phương pháp đặt ẩn phụ cơ bản

Biến đổi quy về dạng: $f\left(\log_a g(x)\right)>b\xrightarrow{0<a\neq 1}\begin{cases}t=\log_a g(x)\\f(t)>b.\end{cases}$

**Lưu ý:** với $t=\log_a g(x)$ không có điều kiện của $t$.

**Ví dụ 15.** Giải các bất phương trình sau

a) $\log_9(x+7) > \log_3(x+1)$.

b) $2\log_2\left(x^2-x-1\right) < \log_{\sqrt{2}}(x-1)$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 16.** Giải các bất phương trình sau

a) $\log_2(2\cdot 2^x+1) > 2x$.

b) $\log(3-2x) > 2^{\log_2 \log x}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 17.**

a) $\log_3^2 x - 4\log_3 x + 3 > 0$.

b) $\log_{0,5}^2 x + 2\log_{\sqrt{2}} x < 5$.

**Lời giải**

# C Bài tập rèn luyện

## PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1.** Nghiệm của phương trình $\log_2 x = 3$ là

**A.** 9. **B.** 6. **C.** 8. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

**Câu 2.** Tập nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2-1\right)=3$ là

**A.** $\{-3\}$. **B.** $\{3\}$. **C.** $\{-3;3\}$. **D.** $\left\{-\sqrt{10};\sqrt{10}\right\}$.

Lời giải

**Câu 3.** Phương trình $\log_3(2x+1)-\log_3(x-1)=1$ tương đương với hệ nào sau đây?

**A.** $\begin{cases} x>-\dfrac{1}{2} \\ 2x+1=x-1 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x>-\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2x+1}{x-1}=1 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x>1 \\ \dfrac{2x+1}{x-1}=1 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x>1 \\ 2x+1=3(x-1) \end{cases}$.

Lời giải

**Câu 4.** Tập nghiệm của phương trình $\log_3(2x-1)=\log_3(x-1)$ là

**A.** $S=\varnothing$. **B.** $S=\{-2\}$. **C.** $S=\{3\}$. **D.** $S=\{2\}$.

**Lời giải**

**Câu 5.** Phương trình $\log_5(x+1)+\log_{\frac{1}{5}}(7-x)=0$ có tập nghiệm là

**A.** $S=\{1\}$. **B.** $S=\{0\}$. **C.** $S=\{3\}$. **D.** $S=\{-\sqrt{7};\sqrt{7}\}$.

**Lời giải**

**Câu 6.** Tập nghiệm $S$ của phương trình $\log_2(x-1)=2\log_4(2x+1)$ là

**A.** $S=\varnothing$. **B.** $S=\{2\}$. **C.** $S=\{-2\}$. **D.** $S=\{0\}$.

**Lời giải**

**Câu 7.** Số nghiệm của phương trình $\log_3(3^x+2)=x+1$ là

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

**Câu 8.** Nghiệm của phương trình $2^{x-1}=3$ có dạng $a+\log_b 3 (a\in\mathbb{R}, 0<b\neq 1)$. Tính $S=a+b$.

**A.** 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

**Câu 9.** Nghiệm của phương trình $3^{x-1}=27$ là

**A.** $x=10$. **B.** $x=4$. **C.** $x=9$. **D.** $x=3$.

Lời giải

**Câu 10.** Phương trình $5^{x+2}-1=0$ có tập nghiệm là

**A.** $S=\{3\}$. **B.** $S=\{2\}$. **C.** $S=\{0\}$. **D.** $S=\{-2\}$.

**Lời giải**

**Câu 11.** Tổng các nghiệm của phương trình $2^{x^2-2x+1}=8$ bằng

**A.** 0. **B.** $-2$. **C.** 2. **D.** 1.

**Lời giải**

**Câu 12.** Phương trình $3^{x-2}=\dfrac{1}{9}$ có nghiệm

**A.** $x=0$. **B.** $x=2$. **C.** $x=4$. **D.** $x=\dfrac{19}{9}$.

**Lời giải**

**Câu 13.** Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $5^{3x-2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2}$ bằng

**A.** 0. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

**Lời giải**

**Câu 14.** Tích các nghiệm của phương trình $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1}=\left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$ là

**A.** $-2$. **B.** $-4$. **C.** 2. **D.** 4.

**Lời giải**

**Câu 15.** Phương trình $2^x\cdot 5^{x^2-2x}=1$ có bao nhiêu nghiệm?

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 16.** Tích các nghiệm của phương trình $2^{x^2-4}=3^{x-2}$ là

**A.** $\log_2 3$. **B.** $2\log_2 3-4$. **C.** $\log_3 2$. **D.** 3.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 17.** Tập nghiệm của bất phương trình $2^x<5$ là

**A.** $(-\infty;\log_2 5)$. **B.** $(\log_2 5;+\infty)$. **C.** $(-\infty;\log_5 2)$. **D.** $(\log_5 2;+\infty)$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 18.** Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-3x-7} > 3^{2x-21}$ là

**A.** 7. **B.** 6. **C.** vô số. **D.** 8.

**Lời giải**

**Câu 19.** Tập nghiệm của bất phương trình $2^{100x} \geq 4^{200}$ là

**A.** $[4;+\infty)$. **B.** $[2;+\infty)$. **C.** $(4;+\infty)$. **D.** $(-\infty;4]$.

**Lời giải**

**Câu 20.** Giải bất phương trình $(7+4\sqrt{3})^{x-1} < 7-4\sqrt{3}$.

**A.** $x>0$. **B.** $x<0$. **C.** $x>1$. **D.** $x<1$.

**Lời giải**

**Câu 21.** Bất phương trình $2^{x^2-3x+4} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-10}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

**A.** 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 2.

**Lời giải**

**Câu 22.** Tìm tập nghiệm của bất phương trình $2^{x+1} > 3^{x+2}$.

**A.** $\left(-\infty;\log_{\frac{2}{3}}\frac{9}{2}\right)$. **B.** $\left(-\infty;\log_{\frac{2}{3}}\frac{9}{2}\right]$. **C.** $\left(\log_{\frac{2}{3}}\frac{9}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\log_{\frac{3}{2}}\frac{9}{2}\right)$.

**Lời giải**

**Câu 23.** Biết phương trình $\log_2(3.2^{x+1}-9) = 2x$ có một nghiệm $x_0$. Giá trị của $2^{x_0}-1$ bằng

**A.** 3. **B.** $2^{\log_3 2}-1$. **C.** 2. **D.** $-\frac{3}{2}$.

**Lời giải**

**Câu 24.** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5}(3x) < \log_{0,5} 5$ là

**A.** $\left(\frac{3}{5};+\infty\right)$. **B.** $\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$. **C.** $\left(0;\frac{5}{3}\right)$. **D.** $\left(0;\frac{3}{5}\right)$.

**Lời giải**

**Câu 25.** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_5 x < 0$ là

**A.** $(-\infty;5)$. **B.** $(0;5)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(0;1)$.

**Lời giải**

**Câu 26.** Tập nghiệm $S$ của bất phương trình $\log_2(x-1) > 2\log_{\sqrt{2}} 3$ là

**A.** $S = (7;+\infty)$. **B.** $S = (4;+\infty)$. **C.** $S = (-\infty;4)$. **D.** $S = [4;+\infty)$.

**Lời giải**

**Câu 27.** Tập nghiệm $S$ của bất phương trình $\log_4(x+1) \geq 2$ là

**A.** $(-1;15)$. **B.** $(15;+\infty)$. **C.** $S=[15;+\infty)$. **D.** $(-1;5]$.

Lời giải

**Câu 28.** Tập nghiệm $S$ của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-3)-\log_3 2 \geq 0$ là

**A.** $S=(3;5]$. **B.** $[5;+\infty)$. **C.** $(-\infty;5]$. **D.** $[3;5]$.

Lời giải

**Câu 29.** Cho bất phương trình $\log_{0,2}x-\log_5(x-2)<\log_{0,2}3$. Khi đó tập nghiệm của phương trình là

**A.** $(2;3)$. **B.** $(-1;+\infty)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(3;4]$.

Lời giải

**Câu 30.** Giải bất phương trình $\log_3 x - \log_{\frac{1}{3}}(x-2) > 1$ được nghiệm là

**A.** $x > 2$. **B.** $x > 3$. **C.** $2 < x < 3$. **D.** $x < -1$.

Lời giải

**Câu 31.** Bất phương trình $3^{2x+1} > 3^{3-x}$ có tập nghiệm là

**A.** $S = \left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **B.** $S = \left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$. **C.** $S = \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **D.** $S = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

**Câu 32.** Tập nghiệm của bất phương trình $5^{x-1} \geq 5^{x^2-x-9}$ là

**A.** $S = [-4; 2]$. **B.** $S = (-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$.

**C.** $S = (-\infty; -4] \cup [2; +\infty)$. **D.** $S = [-2; 4]$.

Lời giải

**Câu 33.** Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-3x-7} > 3^{2x-21}$ là

**A.** 7. **B.** 6. **C.** vô số. **D.** 8.

Lời giải

**Câu 34.** Bất phương trình $3^{x^2} \cdot 2^x > 1$ có tập nghiệm là

**A.** $S = (-\log_2 3; +\infty)$. **B.** $S = (-\infty; -\log_2 3) \cup (0; +\infty)$.

**C.** $S = (0; +\infty)$. **D.** $S = (-\infty; 0) \cup (\log_2 3; +\infty)$.

Lời giải

**Câu 35.** Phương trình $3^{x^2} \cdot 4^{x+1} < \frac{1}{3^x}$ có dạng $S = (a; b)$. Khi đó $T = a \cdot b + a + b$ bằng

**A.** $T = 2$. **B.** $T = -\log_3 4$. **C.** $T = 1$. **D.** $T = -1$.

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Câu 1. C | Câu 2. C | Câu 3. D | Câu 4. D | Câu 5. C | Câu 6. A | Câu 7. A |
| Câu 8. A | Câu 9. B | Câu 10. D | Câu 11. C | Câu 12. A | Câu 13. B | Câu 14. A |
| Câu 15. B | Câu 16. B | Câu 17. A | Câu 18. A | Câu 19. A | Câu 20. B | Câu 21. C |
| Câu 22. A | Câu 23. C | Câu 24. B | Câu 25. D | Câu 26. B | Câu 27. C | Câu 28. A |
| Câu 29. A | Câu 30. B | Câu 31. C | Câu 32. D | Câu 33. A | Câu 34. B | Câu 35. D |

## PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

**Câu 1.** Cho phương trình $2^{x^2+2x}=2^3$ và phương trình $3^{3x^2-x}=3^{x+5}$

**a)** $x=1$ là nghiệm của phương trình $2^{x^2+2x}=2^3$.

**b)** Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $2^{x^2+2x}=2^3$ bằng 16.

**c)** Phương trình $3^{3x^2-x}=3^{x+5}$ có tích các nghiệm bằng $-\dfrac{5}{3}$.

**d)** Hai phương trình đã cho có cùng tập nghiệm.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Cho phương trình $3^{6x+27}=\left(\dfrac{1}{27}\right)^{x^2+3x-3}$ có hai nghiệm $x_1<x_2$.

**a)** Tích hai nghiệm của phương trình $x_1\cdot x_2=6$.

**b)** Giá trị $x_1^2+x_1^2=10$.

**c)** Phương trình $2^{x^2+x+8}-4^{1-2x}=0$ có cùng tập nghiệm với phương trình đã cho.

**d)** Phương trình $5\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^3-x^2-1}+2(x_1+x_2)=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 3.** Cho phương trình $5^x\cdot 3^{x^2}=1$ có hai nghiệm $x_1<x_2$.

**a)** $x_1$ là nghiệm của phương trình $3^x=5$.

**b)** $x_2$ là nghiệm của phương trình $5^{x^2-2x+3}=125$.

**c)** Tích hai nghiệm của phương trình đã cho là số dương.

**d)** $3^{x_1+x_2}<1$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 4.** Cho phương trình $\log_2\left(x^2-5x-6\right)=3$ (1)

**a)** Điều kiện của phương trình (1) là $-1<x<6$.

**b)** Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu.

**c)** Phương trình (1) có hai nghiệm $x_1<x_2$ thỏa mãn $2x_1+x_2=3$.

**d)** Tổng bình phương các nghiệm của phương trình (1) lớn hơn 53.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 5.** Cho phương trình $2\log_9 x+\log_3(x-8)=2$ (1)

**a)** Điều kiện của phương trình (1) là $x>8$.

**b)** Phương trình (1) $\Rightarrow x^2-8x-9=0$.

**c)** Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

**d)** Phương trình (1) có một nghiệm là số chính phương.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

**Câu 6.** Cho phương trình $\log_3(7-3^x)=2-x$.

**a)** Điều kiện xác định của phương trình là $x>\log_3 7$.

**b)** Mũ hóa cơ số 3 hai vế ta có phương trình tương đương $7-3^x=\dfrac{9}{3^x}$.

**c)** Phương trình có hai nghiệm là $x_1=\log_3\left(7-\sqrt{13}\right)$ và $x_2=\log_3\left(7+\sqrt{13}\right)$.

**d)** Tổng hai nghiệm của phương trình là $x_1+x_2=2$.

Lời giải

**Câu 7.** Cho bất phương trình $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x-1}\le\dfrac{1}{3^3}$ (1)

**a)** Bất phương trình (1) tương đương với bất phương trình $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x-1}\le\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$.

**b)** Bất phương trình (1) tương đương với bất phương trình $2x-1\le 3$.

**c)** Nghiệm của bất phương trình (1) là $x\ge 2$.

**d)** Tập nghiệm của bất phương trình (1) là $S=(2;+\infty)$.

Lời giải

**Câu 8.** Cho bất phương trình $2^x > 64$

**a)** Bất phương trình đã cho là bất phương trình logarit.

**b)** $64 = 2^5$.

**c)** Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình $2^x > 2^6$.

**d)** Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình $x < 6$.

Lời giải

**Câu 9.** Xét phương trình $\log_2\left(1-x^2\right) = 2\log_4(2x)$. Khi đó

**a)** Điều kiện của phương trình là $x > 0$.

**b)** Phương trình tương đương $1 - x^2 = 2x$.

**c)** Phương trình có điều kiện là $-1 < x < 1$.

**d)** Phương trình có nghiệm duy nhất là $x = -1 + \sqrt{2}$.

Lời giải

**Câu 10.** Cho phương trình $\log(x-1)^2 = \log(x+1)$. Khi đó

**a)** Điều kiện của phương trình là $x > 1$.

**b)** Phương trình đã cho có chung tập nghiệm với phương trình $x^2 - 3x + \dfrac{9}{4} = 0$.

**c)** Tổng các nghiệm của phương trình bằng $-3$.

**d)** Biết phương trình có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ $(x_1 < x_2)$. Khi đó 3 số $x_1$; $x_2$; 6 tạo thành một cấp số cộng.

Lời giải

**Câu 11.** Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

**a)** Phương trình $\log_2(2\cdot 2^x-1)=x$ có nghiệm duy nhất $x=x_0$. Giá trị của $P=x_0+1$ bằng 1.

**b)** Phương trình $\log_4(3\cdot 2^x)=x-1$ có nghiệm $x_0$ thuộc khoảng $(2;4)$.

**c)** Phương trình $\log_4\left(2^{\sqrt{x-1}-1}\right)=x-1$ có điều kiện $x>1$ .

**d)** Phương trình $2^{\log_4(x+3)}=x$ có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải

**Câu 12.** Cho bất phương trình $\left(\frac{5}{7}\right)^{x^2-x+1}>\left(\frac{5}{7}\right)^{2x-1}$. Khí đó

**a)** Bất phương trình có tập xác định $\mathscr{D}=\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

**b)** Bất phương trình tương đương với $x^2-x+1>2x-1$.

**c)** 1 và 2 là hai nghiệm của bất phương trình.

**d)** Bất phương trình vô nghiệm.

Lời giải

**Câu 13.** Cho bất phương trình $\left(\frac{1}{9}\right)^x > 3^{\frac{2x}{x+1}}$. Khi đó

**a)** Biến đổi $\left(\frac{1}{9}\right)^x = 3^{\frac{x}{2}}$.

**b)** Bất phương trình có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

**c)** $x = 0$ là một nghiệm của bất phương trình.

**d)** Bất phương trình có cùng tập nghiệm với bất phương trình $x^3 + 3x^2 + 2x < 0$.

Lời giải

**Câu 14.** Cho phương trình $\left(\frac{1}{9}\right)^x = 27 \cdot 2^x$. Khi đó

**a)** Phương trình tương đương với phương trình $2x = \log_3\left(3^3 \cdot 2^x\right)$.

**b)** Phương trình tương đương với phương trình $\left(2 - \log_3 2\right)x = -3$.

**c)** Phần nguyên của nghiệm là $-1$.

**d)** Phương trình có nghiệm dạng $x = \dfrac{a}{-b - \log_a b}$ thì $a + b = 5$, với $a, b > 0$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

**Câu 15.** Cho bất phương trình $16^{-x^2+1} < \frac{1}{16}$. Khi đó

**a)** Bất phương trình tương đương đương với bất phương trình $4^{-2x^2} < 4^{-2}$.

**b)** Bất phương trình tương đương đương với bất phương trình $-2x < 4$.

**c)** $16^{-x^2+1} < \dfrac{1}{16}$ có nghiệm nguyên dương nhỏ nhất là $x = 2$.

**d)** $16^{-x^2+1} < \dfrac{1}{16}$ có tập nghiệm $S = (a;b) \cup (c;d)$ thì $b + c = 0$.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 16.** Cho biểu thức $f(x) = 4^x - 2 \cdot 2^{x+1} + 3$. Khi đó

**a)** Bất phương trình $f(x) < 0$ có tập nghiệm là $\left(0; \log_2 3\right)$.

**b)** Bất phương trình $f(x) \geq 0$ có tập nghiệm là $(-\infty; 0) \cup \left(\log_3 2; +\infty\right)$.

**c)** Bất phương trình $f(x) < 0$ có có đúng một nghiệm nguyên dương.

**d)** Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là $-1$.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 17.** Cho bất phương trình $\log_{\frac{e}{3}} 2x < \log_{\frac{e}{3}} (9 - x)$. Khi đó

**a)** Điều kiện xác định của bất phương trình $0 < x < 9$.

**b)** Bất phương trình tương đương với bất phương trình $2x < 9 - x$.

**c)** Tập nghiệm bất phương trình là $(3;9)$.

**d)** Số nghiệm nguyên của bất phương trình là 3.

Lời giải

**Câu 18.** Áp suất khí quyển $p$ (tính bằng kilopascal, viết tắt là kPa) ở độ cao $h$ (so với mực nước biển, tính bằng đơn vị: km) được tính theo công thức sau: $\ln\left(\frac{p}{100}\right) = -\frac{h}{7}$ (theo britannica.com) (kết quả làm tròn đến hàng phần mười). Khi đó

**a)** Áp suất khí quyển ở độ cao 4 km là 55,5 kPa.

**b)** Áp suất khí quyển ở độ cao 10 km là 24,0 kPa.

**c)** Áp suất khí quyển ở độ cao 14 km là 12,5 kPa.

**d)** Áp suất khí quyển ở độ cao 50 km là 0,8 kPa.

Lời giải

**Câu 19.** Cho bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-2x+6\right) \le -2$. Khi đó

**a)** Tập nghiệm của bất phương trình trên là một nửa khoảng.

**b)** Bất phương trình trên xác định trên $\mathbb{R}$.

**c)** Có đúng 3 số nguyên không thuộc tập nghiệm của bất phương trình trên.

**d)** Bất phương trình trên tương đương với $\log_3\left(x^2-2x+6\right) \ge 2$.

Lời giải

**Câu 20.** Cho bất phương trình $\log(x-40)+\log(60-x)<2$.

**a)** Gọi $D=(a;b)$ là tập xác định của bất phương trình trên thì $b-a=20$.

**b)** Có 19 số nguyên dương thỏa mãn bất phương trình trên.

**c)** Bất phương trình trên tương đương với $\log[(x-40)(60-x)]<2$.

**d)** Tập nghiệm của bất phương trình trên chứa 8 số tự nhiên chẵn.

**Lời giải**

**Câu 21.** Một bà mẹ Việt Nam anh hùng được hưởng số tiền là 4 triệu đồng mỗi tháng (chuyển vào tài khoản ngân hàng của mẹ ở ngân hàng vào đầu mỗi tháng). Tháng 12 năm 2023 về trước, mẹ đã rút hết tiền hàng tháng. Từ tháng 1 năm 2024, mẹ không đi rút tiền mà để lại ngân hàng và được tính lãi 1%/tháng vào ngày mồng 1 đầu tháng trên tổng số tiền gốc và lãi có của tháng liền trước đó.

**a)** Đến ngày 29 tháng 2 năm 2024, mẹ đi rút tiền thì tổng số tiền nhận được bằng 8 080 000 đồng.

**b)** Đến ngày 02 tháng 3 năm 2024, mẹ đi rút tiền gốc và lãi của tháng 1, tháng 2 và tiền tháng 3, thì tổng số tiền nhận được bằng 12 120 400 đồng.

**c)** Đến ngày 05 tháng 01 năm 2025, mẹ đi rút tiền thì số tiền nhận được bằng 50 triệu 730 nghìn đồng (làm tròn đến hàng nghìn).

**d)** Để nhận được số tiền hơn 100 triệu đồng thì mẹ phải đi rút tiền trong tháng 12 năm 2025.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 22.** Lạm phát là sự tăng mức giá chung một cách liên tục của hàng hoá và dịch vụ theo thời gian, tức là sự mất giá trị của một loại tiền tệ nào đó. Chẳng hạn, nếu lạm phát là 5% mỗi năm thì sức mua của 1 triệu đồng sau một năm chỉ còn là 950 nghìn đồng (vì đã giảm mất 5% của 1 triệu đồng, tức là 50000 đồng). Nói chung, nếu tỉ lệ lạm phát trung bình là $r\%$ mỗi năm thì tổng số tiền $P$ ban đầu, sau $n$ năm số tiền đó chỉ còn giá trị là $A = P\left(1-\dfrac{r}{100}\right)^n$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

**a)** Nếu tỉ lệ lạm phát là 7% một năm thì sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm sẽ còn lại 86490000 đồng.

**b)** Nếu tỉ lệ lạm phát là 7% một năm thì sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm sẽ còn lại 96490000 đồng.

**c)** Nếu sức mua của 100 triệu đồng sau ba năm chỉ còn lại 80 triệu đồng thì tỉ lệ lạm phát trung bình của ba năm đó là 9,17% (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

**d)** Nếu tỉ lệ lạm phát trung bình là 6% một năm thì sau 15 năm sức mua của số tiền ban đầu chỉ còn lại một nửa.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | |
|---|---|---|
| **Câu 1.** a Đ b S c Đ d S | **Câu 2.** a Đ b S c Đ d S | **Câu 3.** a S b Đ c S d Đ |
| **Câu 4.** a S b Đ c Đ d S | **Câu 5.** a Đ b Đ c S d Đ | **Câu 6.** a S b Đ c S d Đ |
| **Câu 7.** a Đ b S c Đ d S | **Câu 8.** a S b S c Đ d S | **Câu 9.** a S b S c S d Đ |
| **Câu 10.** a S b S c Đ d Đ | **Câu 11.** a Đ b Đ c S d S | **Câu 12.** a S b S c S d S |
| **Câu 13.** a S b Đ c S d Đ | **Câu 14.** a S b S c Đ d Đ | **Câu 15.** a S b S c Đ d Đ |
| **Câu 16.** a Đ b S c Đ d Đ | **Câu 17.** a Đ b S c Đ d S | **Câu 18.** a S b Đ c S d S |

**Câu 19.** a S b Đ c Đ d Đ

**Câu 20.** a Đ b S c Đ d Đ

**Câu 21.** a S b Đ c Đ d S

**Câu 22.** a Đ b S c S d S

## PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Bất phương trình $3^{x^2+3} < 81^x$ có bao nhiêu nghiệm nguyên? KQ: ____

**Lời giải**

**Câu 2.** Bất phương trình $3^{2x-5} > \dfrac{1}{9}$ có tập nghiệm là $S = \left(\dfrac{a}{b}; +\infty\right)$, với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó giá trị của $a+b$ là KQ: ____

**Lời giải**

**Câu 3.** Tổng hai nghiệm của phương trình $100^{2x^2-3} = 0{,}1^{2x^2-18}$ là bao nhiêu? KQ: ____

**Lời giải**

**Câu 4.** Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(x+6) = \log_2(x+1)+1$. KQ: [ ]

Lời giải

**Câu 5.** Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2\left(x^2-3x+2\right) \le 1$ là KQ: [ ]

Lời giải

**Câu 6.** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(x-2) - \log_{\frac{1}{3}} x > 1$ là $S = (a;+\infty)$. Giá trị của $a$ là

KQ: [ ]

Lời giải

**Câu 7.** Số nghiệm nguyên thuộc $[-2024;2024]$ của bất phương trình $\log_2(2^x+1)>2+x$ là

KQ:

Lời giải

**Câu 8.** Cho $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ biết $\log\sin x+\log\cos x=-1$ và $\log(\sin x+\cos x)=\dfrac{1}{2}(\log n-1)$. Giá trị của $n$ là

KQ:

Lời giải

**Câu 9.** Cho bất phương trình $\log_m(x^2+x+3)\le\log_m\left(2x^2-x\right)$ (1). Với $m$ là tham số thực dương khác 1, $x$ là số thực dương và $x=1$ là một nghiệm của bất phương trình (1). Gọi $S=(a;b]$, $a$, $b\in\mathbb{Q}$ là tập nghiệm của bất phương trình thì $2a+3b$ bằng

KQ:

Lời giải

**Câu 10.** Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}(x+3)+\frac{1}{2}\log_9(x-1)^4 \geq 2\log_9(4x)$ là $S=(a;b]\cup[c;+\infty)$. Tính $T=a+c$. KQ: [ ]

**Lời giải**

**Câu 11.** Cho $x$, $y$ là các số thực dương thỏa mãn $\log_9 x=\log_6 y=\log_4\frac{x+y}{6}$. Tính tỉ số $\frac{x}{y}$.

KQ: [ ]

**Lời giải**

**Câu 12.** Một nhóm các chuyên gia y tế đang nghiên cứu và thử nghiệm độ chính xác của một xét nghiệm COVID-19. Giả sử cứ sau $n$ lần thử nghiệm và điều chỉnh thì tỉ lệ chính xác của bộ xét nghiệm đó tuân theo công thức $S(n)=\frac{1}{1+2020\cdot 10^{-0,01n}}$. Hỏi phải tiến hành ít nhất bao

nhiêu lần thử nghiệm và điều chỉnh bộ xét nghiệm để đảm bảo độ chính xác của bộ xét nghiệm đo trên 90%? KQ: [ ]

Lời giải

. . . . . .

**Câu 13.** Một ngân hàng X quy định về số tiền nhận được của khách hàng sau $n$ năm gửi tiền vào ngân hàng tuân theo công thức $P(n) = A(1+8\%)^n$, trong đó $A$ là số tiền gửi ban đầu của khách hàng. Hỏi số tiền $A$ (triệu đồng) ít nhất mà khách hàng phải gửi là bao nhiêu để sau 3 năm khác hàng đó nhận được lớn hơn 850 triệu đồng (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).
KQ: [ ]

Lời giải

. . . . . .

**Câu 14.** Anh Dũng đem gửi tiết kiệm số tiền là 400 triệu đồng ở hai loại kì hạn khác nhau. Anh gửi 250 triệu đồng theo kì hạn 3 tháng với lãi suất $x\%$ một quý, số tiền còn lại anh gửi theo kì hạn 1 tháng với lãi suất 0,25% một tháng. Biết rằng nếu không rút lãi thì số lãi được nhập vào số tiền gốc để tính lãi cho kì hạn tiếp theo. Sau 1 năm, số tiền cả gốc lẫn lãi của anh là 416780000 đồng. Tính $x$ (làm tròn đến hàng phần trăm). KQ: [ ]

Lời giải

. . . . . .

**Câu 15.** Sự tăng trưởng của một loài vi khuẩn được tính theo công thức $f(t) = A \cdot e^{rt}$, trong đó $A$ là số lượng vi khuẩn ban đầu, $r$ là tỷ lệ tăng trưởng ($r > 0$), $t$ (tính theo giờ) là thời gian tăng trưởng. Biết số vi khuẩn ban đầu có 1000 con và sau 10 giờ là 5000 con. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu giờ thì số lượng vi khuẩn tăng gấp 10 lần (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)?

KQ: ☐

**Lời giải**

**Câu 16.** Biết rằng mức cường độ âm (đo bằng $dB$ ) được tính bởi công thức $L = 10\log\dfrac{I}{I_0}$, trong đó $I$ là cường độ âm tính theo $W/m^2$ và $I_0 = 10^{-12}\left(\text{W/m}^2\right)$. Âm thanh trên một tuyến đường giao thông có mức cường độ âm thay đổi từ 70 dB đến 85 dB, khi đó cường độ âm thay đổi trong đoạn $[10^m; 10^n]$ (trong đó $m, n$ là các số thập phân). Tính giá trị $m - n$. KQ: ☐

**Lời giải**

**Câu 17.** Bác Hà gửi vào ngân hàng 50 triệu đồng với lãi kép 6%/năm. Biết rằng lãi kép là hình thức gửi tiền, nếu đến kỳ hạn người gửi không rút tiền lãi thì số tiền lãi sẽ được cộng dồn vào tiền vốn cho kỳ tiếp theo. Hãy tính số tiền cả gốc lẫn lãi bác Hà nhận được sau khi gửi ngân hàng 10 năm (kết quả làm tròn đến hàng phần chục). KQ: ☐

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 18.** Anh Việt có 200 triệu đồng gửi ngân hàng kỳ hạn là 1 năm với lãi suất 6,5% một năm theo hình thức lãi kỳ này được nhập vào vốn để tính lãi cho kỳ sau. Hỏi anh Việt phải gửi ít nhất bao nhiêu năm thì số tiền cả gốc lẫn lãi nhận được là trên 500 triệu đồng (biết rằng anh Việt không rút trước tiền trong suốt thời gian gửi). KQ: ☐

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 19.** Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = Ae^{rt}$, trong đó $A$ là số lượng vi khuẩn ban đầu, $r$ là tỉ lệ tăng trưởng ( $r > 0$, $t$ là thời gian tăng trưởng). Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 150 con và sau 5 giờ có 400 con. Để số lượng vi khuẩn ban đầu sẽ tăng gấp đôi thì thời gian tăng trưởng $t$ bằng bao nhiêu? (Thời gian tính theo giờ, lấy gần đúng đến hàng phần trăm). KQ: ☐

**Lời giải**

.....

**Câu 20.** Các khí thải gây hiệu ứng nhà kính là nguyên nhân chủ yếu làm Trái đất nóng lên. Theo OECD (Tổ chức Hợp tác và Phát triển kinh tế thế giới), khi nhiệt độ Trái đất tăng lên thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm. Người ta ước tính rằng, khi nhiệt độ Trái đất tăng thêm 2°C thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 3%; còn khi nhiệt độ Trái đất tăng thêm 5°C thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 10%. Biết rằng, nếu nhiệt độ Trái đất tăng thêm $t$°C, tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm $f(t)$% thì $f(t)=k\cdot a^t$ trong đó $k$, $a$ là các hằng số dương. Khi nhiệt độ Trái đất tăng thêm bao nhiêu độ thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm đến 25% (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)? KQ:

**Lời giải**

**Câu 21.** Theo một bài báo được công bố trên tạp chí Nature, trung bình làm cha ở tuổi 30 sẽ có 55 đột biến cho con cái của mình. Đột biến này tăng theo độ tuổi. Cứ tăng 1 tuổi, số lượng đột biến sẽ tăng thêm 12% so với số lượng đột biến trước đó. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì số lượng đột biến đạt đến 15800. KQ:

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 22.** Để ước tính dân số người ta sử dụng công thức $A_N = Ae^{NN}$, trong đó $A$ là dân số của năm lấy làm mốc tính, $A_N$ là dân số sau $N$ năm, $r$ là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Biết rằng dân số Việt Nam ở các năm 2014 và 2024 lần lượt là 85,9 và 96,2 triệu người. Hỏi ở năm nào dân số nước ta sẽ vượt qua ngưỡng 120 triệu người ? KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 23.** Sau khi uống rượu và điều khiển xe ô tô trên đường, ông A bị xử phạt số tiền là 40 triệu đồng và phải hoàn thành nộp phạt trong thời hạn 10 ngày kể từ ngày vi phạm. Theo Thông tư số 18/2023/TT-BTC ngày 21/3/2023 của Bộ Tài chính, cứ mỗi ngày chậm nộp phạt, cá nhân phải nộp thêm 0,05% trên tổng số tiền phạt chưa nộp của ngày hôm trước. Để số tiền phải nộp thêm do chậm nộp phạt không nhiều hơn 200000 đồng thì ngày muộn nhất ông A đến nộp phạt là ngày thứ bao nhiêu kể từ ngày vi phạm? KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**BẢNG ĐÁP ÁN**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Câu 1.** 1 | **Câu 2.** 5 | **Câu 3.** 0 | **Câu 4.** 4 | **Câu 5.** 2 |
| **Câu 6.** 3 | **Câu 7.** 2023 | **Câu 8.** 12 | **Câu 9.** 10 | **Câu 10.** 3 |
| **Câu 11.** 2 | **Câu 12.** 426 | **Câu 13.** 675 | **Câu 14.** 1,2 | **Câu 15.** 14,3 |
| **Câu 16.** −1,5 | **Câu 17.** 89,5 | **Câu 18.** 15 | **Câu 19.** 3,54 | **Câu 20.** 7,3 |
| **Câu 21.** 50 | **Câu 22.** 2044 | **Câu 23.** 19 | | |

Chương 7: Quan hệ vuông góc trong không gian

Chương 7

# QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

## BÀI 22. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

### A Lý thuyết

#### 1 Góc giữa hai đường thẳng

**Định nghĩa 1**

Góc giữa hai đường thẳng $a$, $b$ trong không gian, kí hiệu $(a,b)$, là góc giữa hai đường thẳng $a'$ và $b'$ cùng đi qua một điểm và lần lượt song song hoặc trùng với $a$ và $b$.

**Nhận xét.**
- *Để xác định góc giữa đường thẳng $a$ và $b$ ta có thể lấy điểm $O$ thuộc một trong hai đường thẳng đó rồi vẽ một đường thẳng qua $O$ song song với đường thẳng còn lại.*
- *Với hai đường thẳng $a$ và $b$ bất kì, ta có* $0^\circ \le (a,b) \le 90^\circ$.

Để tính số đo của góc giữa hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$ ta có thể thực hiện tính thông qua góc giữa hai đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với hai đường thẳng đã cho.

- ***Bước 1.*** Sử dụng tính chất sau: $\begin{cases} (d_1,d_2)=\alpha \\ d_2 \parallel d_3 \end{cases} \Rightarrow (d_1,d_2)=(d_1,d_3)=\alpha.$
- ***Bước 2.*** Áp dụng định lí côsin trong tam giác để tính góc.

#### 2 Hai đường thẳng vuông góc trong không gian

**Định nghĩa 2**

Hai đường thẳng $a$ và $b$ được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng $90^\circ$, kí hiệu $a \perp b$.

# B Các dạng bài tập

## Dạng 1. Xác định góc giữa hai đường thẳng trong không gian

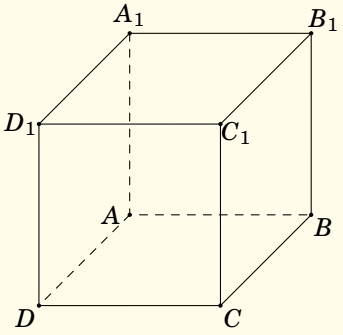
Phương pháp:

- $a(a,b)=(a',b')$ với $a' \parallel a$ và $b' \parallel b$.
- $a \perp b \Leftrightarrow (a,b)=90^\circ$.
- $\begin{cases} b \parallel c \\ a \perp c \end{cases} \Rightarrow a \perp b$.

**Ví dụ 1.** Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ (tham khảo hình vẽ bên). Xác định góc giữa các cặp đường thẳng

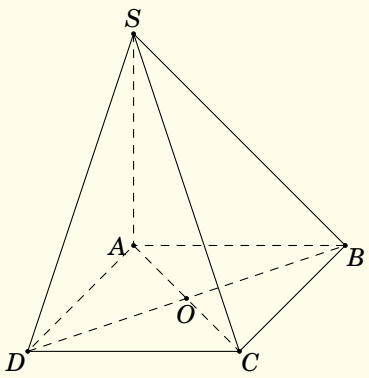
a) $A_1C_1$ và $AB$;

b) $B_1C$ và $BD$.




**Lời giải**

**Ví dụ 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $SA = AB$ và $SA \perp BC$ (tham khảo hình vẽ bên). Tính góc giữa hai đường thẳng $SD$ và $BC$.



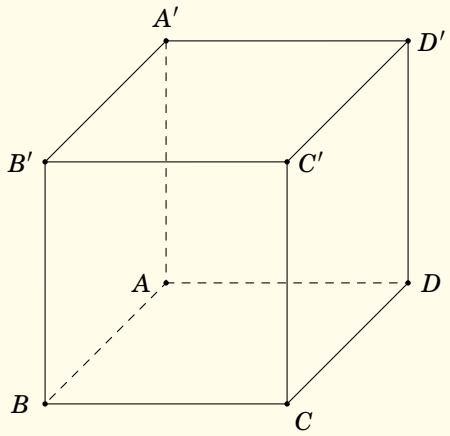

**Lời giải**

**Ví dụ 3.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ bên). Tính góc giữa hai đường thẳng:

a) $AB$ và $B'C'$;

b) $AC$ và $B'C'$;

c) $A'C'$ và $B'C$.




**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh đáy và các cạnh bên đều bằng $a$. Gọi $M$ và $N$ lần lượt là trung điểm của $AD$ và $SD$. Số đo của góc giữa hai đường thẳng $MN$ và $SC$ bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm $O$, cạnh bằng $a$. $SA$ vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng $SB$ và $AC$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 6.** Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy $ABC$ là tam giác cân, $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$ và cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng $AB'$ và $BC$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

## Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Phương pháp:

- ***Dùng định nghĩa:*** Hai đường thẳng $a$ và $b$ được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng $90^\circ$.
- ***Dùng định lí:*** $\begin{cases} b \parallel c \\ a \perp c \end{cases} \Rightarrow a \perp b$.

**Ví dụ 1.** Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{CBD} = 90^\circ$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $AD$. Chứng minh rằng $MN$ vuông góc với $BC$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 2.** Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài cạnh bằng $a$. Gọi $M$, $N$, $P$, $Q$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $CD$, $AD$, $BC$.

a) Chứng minh $MN \perp CD$.

b) Tính cosin của góc giữa $MC$ và $MD$.

c) Gọi $E$ là trung điểm của $AC$. Chưng minh rằng $QE \perp PE$.

d) Chứng minh $AB \perp CD$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $SA \perp AB$, $SA \perp AD$, $SA \perp AC$ và $SA = 2a$.

a) Chứng minh $SA \perp BC$, $SA \perp CD$.

b) Gọi $I$ là trung điểm của $CD$. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng $SB$ và $AI$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

# C Bài tập rèn luyện

## PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1.** Trong không gian, góc giữa hai đường thẳng $a$ và $b$ là góc giữa hai đường thẳng $a'$ và $b'$ thỏa mãn:

**A.** Cùng đi qua một điểm và lần lượt song song hoặc trùng với $a$ và $b$.

**B.** Lần lượt song song hoặc trùng với $a$ và $b$.

**C.** Cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với $a$ và $b$.

**D.** Lần lượt song song với $a$ và $b$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Trong không gian, hai đường thẳng $a$ và $b$ được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng

**A.** $90°$. **B.** $45°$. **C.** $0°$. **D.** $180°$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 3.** Trong không gian, cho hai đường thẳng $a$ và $b$ vuông góc với nhau. Khi đó:

**A.** Hai đường thẳng $a$ và $b$ có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

**B.** Hai đường thẳng $a$ và $b$ luôn cắt nhau.

**C.** Hai đường thẳng $a$ và $b$ chéo nhau.

**D.** Hai đường thẳng $a$ và $b$ song song với nhau.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 4.** Trong không gian, cho hai đường thẳng $a$ và $b$ song song với nhau. Nếu đường thẳng $c$ vuông góc với đường thẳng $a$ thì

**A.** Đường thẳng $c$ vuông góc với đường thẳng $b$.

**B.** Đường thẳng $c$ song song với đường thẳng $b$.

**C.** Đường thẳng $c$ song song hoặc trùng với đường thẳng $b$.

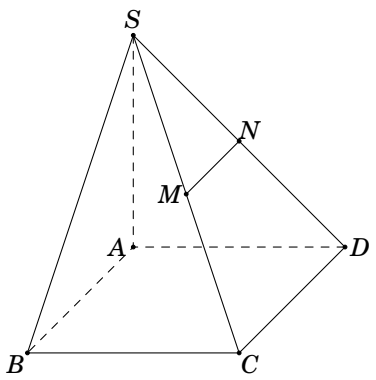
**D.** Đường thẳng $c$ cắt đường thẳng $b$ tại một điểm.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $SC$ và $SD$ (tham khảo hình vẽ bên). Khẳng định nào dưới đây đúng?

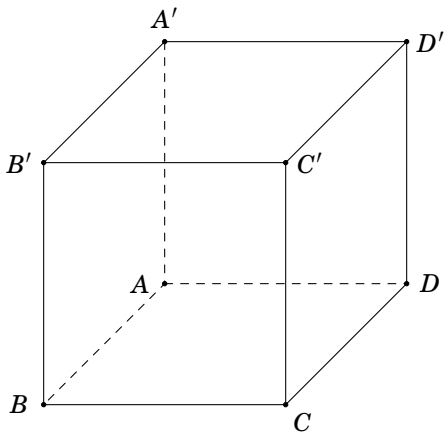
**A.** $MN \perp AC$. **B.** $MN \perp BD$. **C.** $MN \perp AB$. **D.** $MN \perp BC$.




**Lời giải**

**Câu 6.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ bên). Đường thẳng nào sau đây vuông góc với đường thẳng $BC'$?

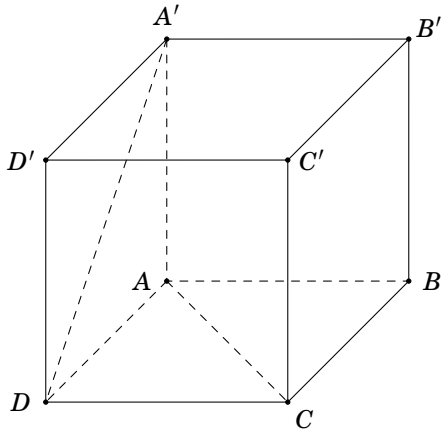
**A.** $A'D$. **B.** $AC$. **C.** $BB'$. **D.** $AD'$.




**Lời giải**

**Câu 7.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa hai đường thẳng $AC$ và $A'D$ bằng

**A.** $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.




**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 8.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng nào sau đây vuông góc với $BD$?

**A.** $CC'$. **B.** $B'C'$. **C.** $AB$. **D.** $B'C$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

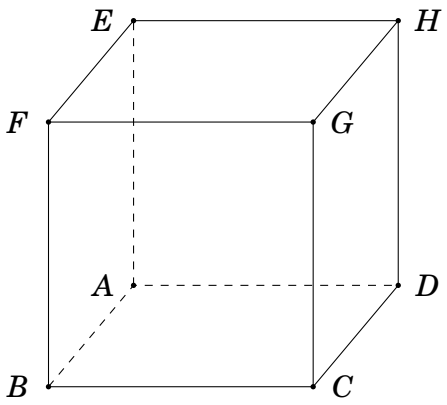
.....

.....

.....

**Câu 9.** Cho hình lăng trụ $ABCD.EFGH$ có 6 mặt đều là hình vuông. Tính góc giữa hai đường thẳng $EG$ và $GD$.

**A.** 83°. **B.** 90°. **C.** 50°. **D.** 60°.




**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 10.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $BC = a$, $BA = 4a$, $SB = \sqrt{5}a$. Biết $SB \perp BC$ và $SB \perp BA$. Tính góc giữa hai đường thẳng $SC$ và $DA$.

**A.** 69,61°. **B.** 65,91°. **C.** 82,71°. **D.** 77,71°.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 11.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng $AD$ vuông góc với đường thẳng nào sau đây?

**A.** $BB'$. **B.** $B'D'$. **C.** $AD'$. **D.** $B'D$.

**Lời giải**

**Câu 12.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các mặt là hình thoi. Phát biểu nào sau đây là đúng?

**A.** $AB \perp AD$. **B.** $BD \perp A'C'$. **C.** $DD' \perp DC$. **D.** $BD \perp AB$.

**Lời giải**

**Câu 13.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Gọi $I$, $J$ lần lượt là trung điểm của $SA$ và $SC$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

**A.** $AB \perp AD$. **B.** $IJ \perp SA$. **C.** $IJ \perp BD$. **D.** $BD \perp AB$.

**Lời giải**

**Câu 14.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $\widehat{SAB} = \widehat{SAD} = 90^\circ$. Gọi $H$, $K$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm $A$ trên các cạnh $SB$, $SD$. Đường thẳng $HK$ vuông góc với đường thẳng nào sau đây?

**A.** $AC$. **B.** $SB$. **C.** $SD$. **D.** $AB$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

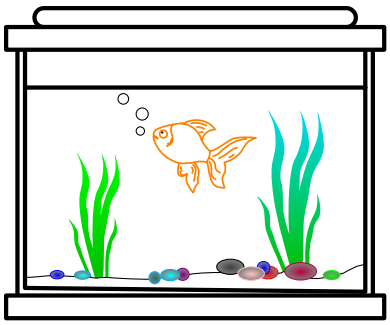
.....

.....

.....

.....

**Câu 15.** Ta biết hình hộp chữ nhật có 6 mặt là các hình chữ nhật. Quan sát một bể nuôi cá cảnh hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ sau và cho biết góc giữa hai đường thẳng $AA'$ và $C'D'$ bằng góc nào sau đây?



**A.** $(AA',AB)$. **B.** $(A'A,AD)$. **C.** $(A'A,AB)$. **D.** $(A'A,AB')$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 16.** Đối với nhà gỗ truyền thống, trong các cấu kiện hoành, quá giang, rui, cột tượng trưng được đánh số 1, 2, 3, 4, trong hình sau, những cặp cấu kiện nào vuông góc với nhau?

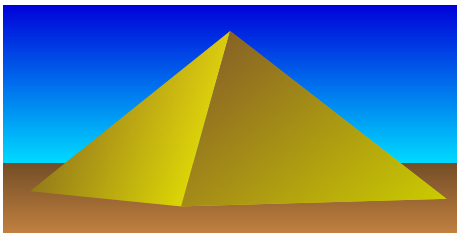



**A.** 1 – 4; 2 – 4; 1 – 3. **B.** 2 – 4; 1 – 3.
**C.** 1 – 4; 3 – 4; 1 – 2. **D.** 1 – 4; 2 – 4; 3 – 4.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 17.** Kim tự tháp Cheops là kim tự tháp lớn nhất trong các kim tự tháp ở Ai Cập, được xây dựng vào thế kỉ thứ 26 trước Công nguyên và là một trong bảy kì quan của thế giới cổ đại. Kim tự tháp có dạng hình chóp $S.ABCD$ với đáy là hình vuông $ABCD$ có cạnh dài khoảng 230 m, các cạnh bên bằng nhau và dài khoảng 219 m. Tính gần đúng góc tạo bởi cạnh bên $SC$ và cạnh đáy $AB$ của kim tự tháp.



**A.** $58°19'$. **B.** $61°29'$. **C.** $45°6'$. **D.** $30°7'$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

. . . . . .

**Câu 18.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2a$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $AD$ và $BC$. Biết $MN = a\sqrt{3}$, góc giữa hai đường thẳng $AB$ và $CD$ bằng

**A.** $45°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $30°$.

**Lời giải**

. . . . . .

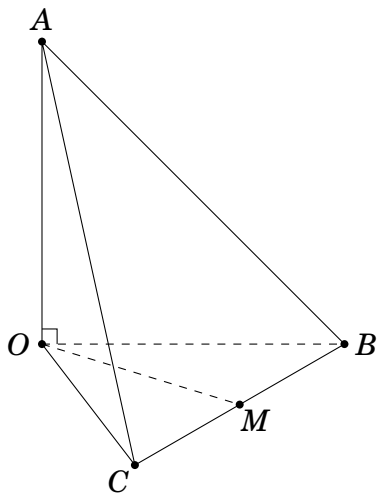
**Câu 19.** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng $AB'$ và $BC'$ bằng

**A.** $90°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 20.** Cho tứ diện $OABC$ có $OA$, $OB$, $OC$ đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC$. Gọi $M$ là trung điểm của $BC$ (tham khảo hình vẽ bên dưới). Góc giữa hai đường thẳng $OM$ và $AB$ bằng




**A.** 90°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 45°.

**Lời giải**

. . . . . .

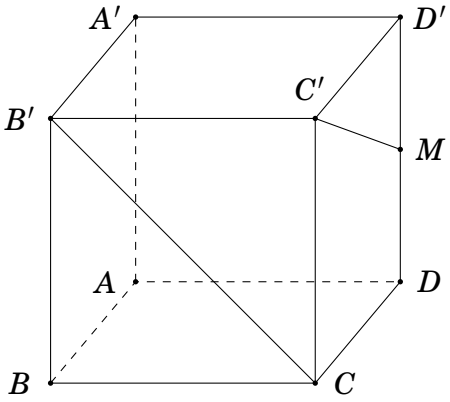
**Câu 21.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$; gọi $M$ là trung điểm của $B'C'$. Góc giữa hai đường thẳng $AM$ và $BC'$ bằng

**A.** 45°. **B.** 90°. **C.** 30°. **D.** 60°.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 22.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi $M$ là trung điểm của $DD'$. Tính cô sin góc giữa hai đường thẳng $B'C$ và $CM$.




**A.** $\frac{1}{\sqrt{10}}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{2\sqrt{2}}{9}$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 23.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{2}$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng $AB$ và $SC$ ta được kết quả

**A.** $90°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

**Lời giải**

. . . . . .

**BẢNG ĐÁP ÁN**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Câu 1. A** | **Câu 2. A** | **Câu 3. A** | **Câu 4. A** | **Câu 5. D** | **Câu 6. A** | **Câu 7. C** |
| **Câu 8. A** | **Câu 9. D** | **Câu 10. B** | **Câu 11. A** | **Câu 12. B** | **Câu 13. C** | **Câu 14. A** |
| **Câu 15. A** | **Câu 16. A** | **Câu 17. A** | **Câu 18. C** | **Câu 19. C** | **Câu 20. C** | **Câu 21. A** |
| **Câu 22. A** | **Câu 23. C** | | | | | |

## PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

**Câu 1.** Trong không gian, cho hai đường thẳng bất kỳ.

**a)** Góc giữa hai đường thẳng trong không gian là góc giữa 2 đường thẳng cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với hai đường thẳng đã cho.

**b)** Hai đường thẳng vuông góc thì cắt nhau.

**c)** Cho hai đường thẳng song song, đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

**d)** Nếu hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì hai đường thẳng đó song song với nhau.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

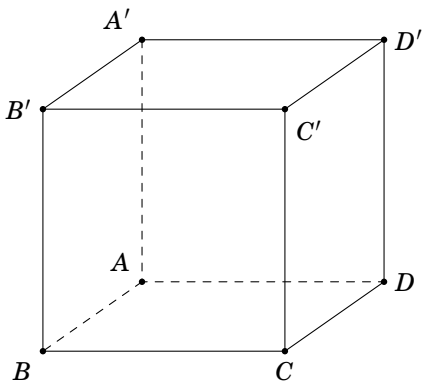
.....

.....

.....

**Câu 2.**

Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (như hình vẽ bên), gọi $M$, $N$, $E$, $F$ lần lượt là trung điểm của $BC$, $AB$, $AA'$, $A'D'$. Khi đó




**a)** Cạnh $MN$ và $AA'$ vuông góc với nhau.

**b)** Góc giữa $MN$ và $CD'$ bằng góc giữa $AC$ và $CD'$.

**c)** Góc giữa $EF$ và $CC'$ bằng góc giữa $AD'$ và $CC'$.

**d)** Góc giữa $EF$ và $CD'$ bằng $30°$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

. . . . . .
. . . . . .

**Câu 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên và cạnh đáy đều bằng $a$. Gọi $I$ và $J$ lần lượt là trung điểm của $SC$ và $BC$. Gọi $G$ là trọng tâm $\triangle SBC$ Khi đó

**a)** Góc giữa $IJ$ và $SA$ bằng $90^\circ$.

**b)** Góc giữa $IJ$ với $CD$ bằng $60^\circ$.

**c)** Côsin của góc giữa $BI$ với $SA$ bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

**d)** Côsin của góc giữa $DG$ và $SB$ bằng $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là vuông cạnh $a$. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với $AB$ và $AD$, $SC = a\sqrt{3}$. Khi đó

**a)** $SA \perp BC$.

**b)** $SA \perp CD$.

**c)** $BC \perp SB$.

**d)** $K$ là hình chiếu của $A$ lên $SB$ thì $SC \perp AK$.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 5.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó

**a)** $BD \parallel B'D'$.

**b)** $(\widehat{AC, B'D'}) = 90^\circ$.

**c)** Tam giác $ACD'$ đều.

**d)** $(\widehat{AC, A'B}) = 30^\circ$.

Lời giải

**Câu 6.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi. Gọi $M$, $N$ theo thứ tự là trung điểm của đoạn $SB$, $SD$. Khi đó

**a)** $MN \parallel BD$.

**b)** $MN$ và $AC$ là hai đường thẳng chéo nhau.

**c)** $AC \perp BD$.

**d)** $(\widehat{MN,AC}) = 90^\circ$.

**Lời giải**

**Câu 7.** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng $a$, $M$ là trung điểm cạnh $BC$, $N$ là trung điểm của $AC$. Khi đó

**a)** $MN \parallel AB$.

**b)** $MD = ND = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

**c)** $(\widehat{AB,DM}) = (\widehat{MN,DM})$.

**d)** $\cos(\widehat{AB,DM}) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 8.** Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại $A$ và $D$. Gọi $E$ là trung điểm của $AB$. Biết $AB = 2a$, $AD = DC = a$, đồng thời $SA \perp AB$, $SA \perp AD$ và $SA = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. Khi đó

**a)** $(\widehat{SB,DC}) = \widehat{SBA}$. **b)** $\tan\widehat{SBA} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **c)** $DE \parallel BC$. **d)** $(\widehat{SD,BC}) \approx 52{,}42°$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $a$. Cho biết $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp AB$, $SA \perp AD$ . Khi đó

**a)** $(\widehat{AB,SA}) = 90°$. **b)** $SA \perp CD$.

**c)** $(\widehat{SD,BC}) = (\widehat{SD,CD})$. **d)** $\widehat{SDA} = 60°$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 10.** Một ô che nắng có viền khung hình lục giác đều $ABCDEF$. Biết các thanh gỗ $a_1$, $a_3$, $a_5$ song song nhau, các thanh $a_2$, $a_4$ song song nhau đồng thời trục của cây dù $a_6$ vuông góc với các đường $AB$, $BC$, $CD$, $a_1$, $a_2$ và song song với các đường chân bàn $c_1$, $c_2$. Các đường gạch lát $b_1 \parallel AB$, $b_2 \parallel CD$. Khi đó

**a)** $a_6 \perp a_3$, $a_6 \perp a_4$, $a_6 \perp a_5$. **b)** $a_6 \perp ED$, $a_6 \perp EF$, $a_6 \perp FA$.

**c)** $c_1 \perp a_1$, $c_2 \perp a_2$. **d)** $b_1 \perp b_2$.

## Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | |
|---|---|---|
| **Câu 1.** a Đ b S c Đ d S | **Câu 2.** a Đ b Đ c Đ d S | **Câu 3.** a S b Đ c Đ d S |
| **Câu 4.** a Đ b Đ c Đ d Đ | **Câu 5.** a Đ b Đ c Đ d S | **Câu 6.** a Đ b Đ c Đ d Đ |
| **Câu 7.** a Đ b S c Đ d S | **Câu 8.** a Đ b S c Đ d S | **Câu 9.** a Đ b Đ c S d Đ |
| **Câu 10.** a Đ b Đ c Đ d S | | |

## PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, tam giác $SAB$ là tam giác đều. Tính sin của góc giữa đường thẳng $SA$ và $DC$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

KQ: ☐

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

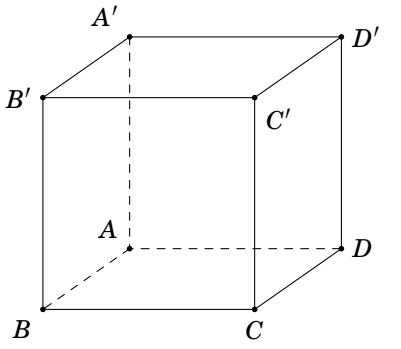
.....

.....

.....

**Câu 2.**

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng nhau (tham khảo hình vẽ). Góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và $BD$ bằng bao nhiêu? Viết câu trả lời theo đơn vị độ.




KQ: ☐

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 3.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $AD$ và $BC$. Tính độ dài đoạn thẳng $MN$ biết góc giữa hai đường thẳng $AB$ và $MN$ bằng $30^\circ$ (làm tròn kết

quả đến hàng phần trăm). KQ:

**Lời giải**

**Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $SB$, $SD$. Góc giữa đường thẳng $MN$ và $AC$ bằng bao nhiêu độ? KQ:

**Lời giải**

**Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$. Biết $SA = a$, $SC = a\sqrt{3}$. Gọi $M$, $N$ theo thứ tự là trung điểm các cạnh $AD$, $SD$. Góc của hai đường thẳng $MN$ và $SC$ bằng bao nhiêu độ? KQ:

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

**Câu 6.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB$, $AC$, $AD$ đôi một vuông góc với nhau, biết $AB = AC = AD = 1$. Góc của hai đường thẳng $AB$ và $CD$ bằng bao nhiêu độ? KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

**Câu 7.** Cho tứ diện đều $ABCD$. Góc của hai đường thẳng $AB$ và $CD$ bằng bao nhiêu độ? KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

**Câu 8.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa đường thẳng $CD'$ với đường thẳng $A'D$. KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng $a$. Gọi $I$ và $J$ lần lượt là trung điểm của $SC$ và $BC$. Tìm số đo của góc $(\widehat{IJ,CD})$. KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 10.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = 1$, $BD = 3$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $AD$ và $BC$. Biết $AC$ vuông góc với $BD$. Tính độ dài $MN$. Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.
KQ: [ ]

**Lời giải**

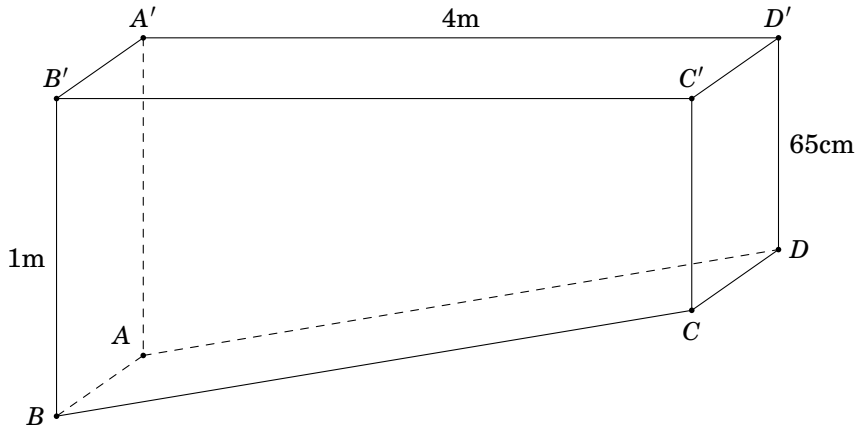
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 11.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, $\triangle SAB$ đều và $SC = 2a\sqrt{2}$. Gọi $H$, $K$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $CD$. Góc giữa đường thẳng $AK$ và $SH$ bằng bao nhiêu độ?
KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .

**Câu 12.** Bác Minh có một khối gỗ có kích thước như hình vẽ. Biết $ABCD$, $A'B'C'D'$, $A'B'BA$, $CDD'C'$ là các hình chữ nhật còn $A'D'DA$, $B'C'CB$ là các hình thang vuông. Bác Minh muốn làm đẹp khối gỗ đó bằng cách cắt khối gỗ theo mặt phẳng $(P)$ đi qua $C$ và song song với mặt phẳng $(A'B'C'D')$. Khi đó, bác Minh cần đặt mép $BC$ của khối gỗ tạo với lưỡi cắt của máy cắt một góc bao nhiêu độ? KQ:




## Lời giải

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Câu 1.** 0,87 | **Câu 2.** 90 | **Câu 3.** 1,73 | **Câu 4.** 90 | **Câu 5.** 90 |
| **Câu 6.** 90 | **Câu 7.** 90 | **Câu 8.** 60 | **Câu 9.** 60 | **Câu 10.** 1,6 |
| **Câu 11.** 90 | **Câu 12.** 5 | | | |

# BÀI 23. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

## A Lý thuyết

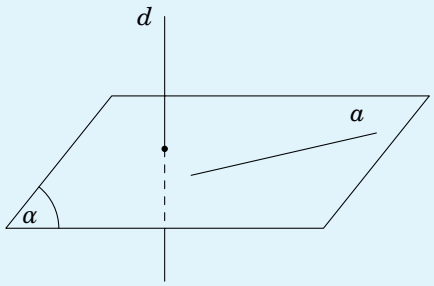
### 1 Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

**Định nghĩa 1**

Đường thẳng $d$ được gọi là vuông góc với mặt phẳng $(\alpha)$ nếu $d$ vuông góc với mọi đường thẳng $a$ nằm trong mặt phẳng $(\alpha)$.

***Ký hiệu:*** $d \perp (\alpha) \Leftrightarrow d \perp a,\ \forall a \subset (\alpha)$.

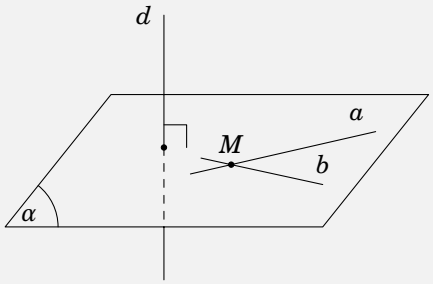
***Nhận xét:*** $\begin{cases} d \perp (P) \\ a \subset (P) \end{cases} \Rightarrow d \perp a.$




**Định lý 1**

Nếu đường thẳng $d$ vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau $d_1$ và $d_2$ cùng thuộc một mặt phẳng thì $d$ vuông góc với mặt phẳng ấy.

$$\begin{cases} d \perp a \subset (P) \\ d \perp b \subset (P) \\ a \cap b = M \end{cases} \Rightarrow d \perp (P).$$




**Định lý 2**

Có duy nhất

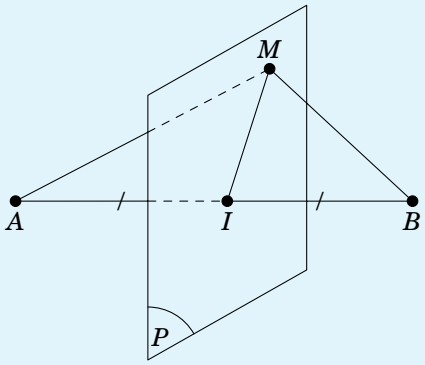
- một mặt phẳng
  - đi qua một điểm cho trước, và
  - vuông góc với đường thẳng cho trước.
- một đường thẳng
  - đi qua một điểm cho trước, và
  - vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

## Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng

**Định nghĩa 2**

Mặt phẳng đi qua trung điểm $I$ của đoạn thẳng $AB$ và vuông góc với đường thẳng $AB$ là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng $AB$.

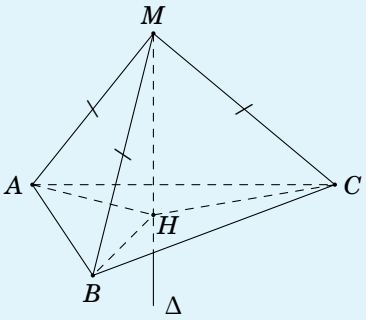
**Nhận xét:** $(P)$ là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \forall M \in (P),\ MA = MB$.



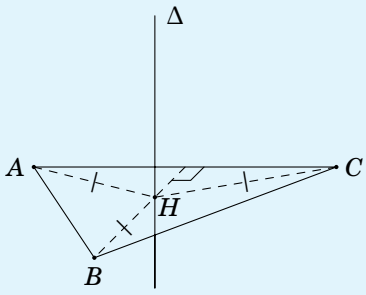

## Trục của đa giác

**Định nghĩa 3**

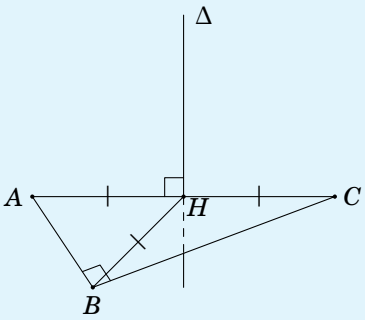
Trục của đa giác là đường thẳng qua tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác và vuông góc với mặt phẳng chứa đa giác đó. Nếu một điểm nằm trên trục của đa giác thì nó cách đều các đỉnh của đa giác.




Tam giác thường




Tam giác đều




Tam giác vuông

***Chứng minh:***

Cho đa giác có $n$ đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Gọi $O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác và $d$ là trục của đa giác.

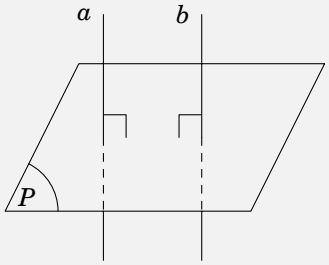
Lấy điểm $I \in d$.

Khi đó $\triangle IOA_1 = \triangle IOA_2 = \cdots = \triangle IOA_n$ (các tam giác vuông có hai cạnh bằng nhau)

$\Rightarrow IA_1 = IA_2 = \cdots = IA_n$.

## 2 Liên hệ giữa tính song song – vuông góc của đường thẳng & mặt phẳng

### Định lý 3



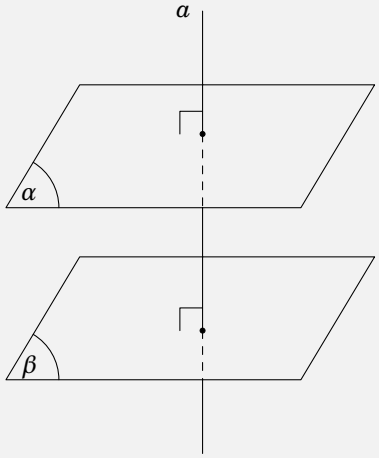

(1) Cho hai đường thẳng song song, nếu mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

***Tóm tắt*** $\begin{cases} a \parallel b \\ a \perp (P) \end{cases} \Rightarrow b \perp (P).$

(2) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.

***Tóm tắt*** $\begin{cases} a \neq b \\ a \perp (P) \Rightarrow a \parallel b. \\ b \perp (P) \end{cases}$

### Định lý 4




(1) Một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng thì nó cũng vuông góc với bất kì mặt phẳng nào song song với mặt phẳng ấy.

**Tóm tắt** $\begin{cases} (\alpha) \parallel (\beta) \\ a \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp (\beta).$

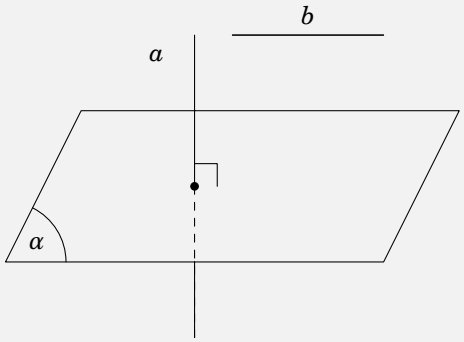
(2) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

**Tóm tắt** $\begin{cases} (\alpha) \neq (\beta) \\ (\alpha) \perp a \\ (\beta) \perp a \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta).$

**Định lý 5**

(1) Một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng thì nó vuông góc với bất kì đường thẳng nào song song với mặt phẳng ấy.

**Tóm tắt** $\begin{cases} a \perp (\alpha) \\ b \parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp b.$



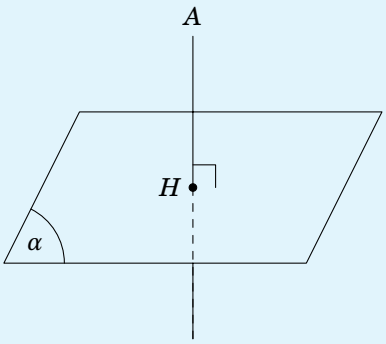

(2) Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng *(không chứa đường thẳng đó)* cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì chúng song song với nhau.

**Tóm tắt** $\begin{cases} b \not\subset (\alpha) \\ b \perp a \\ (\alpha) \perp a \end{cases} \Rightarrow b \parallel (\alpha).$

## 3 Phép chiếu vuông góc

**Định nghĩa 4**

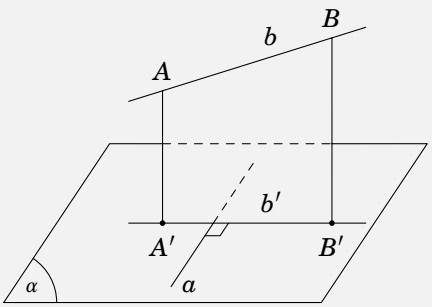
- Cho đường thẳng $\Delta$ vuông góc với $(\alpha)$. Phép chiếu song song theo phương của $\Delta$ lên $(\alpha)$ được gọi là phép chiếu vuông góc lên $(\alpha)$.
- $H$ là hình chiếu vuông góc *(gọi tắt là hình chiếu)* của $A$ lên $(P)$ nếu $AH \perp (P)$ và $H \in (P)$.




## 4 Định lý ba đường vuông góc

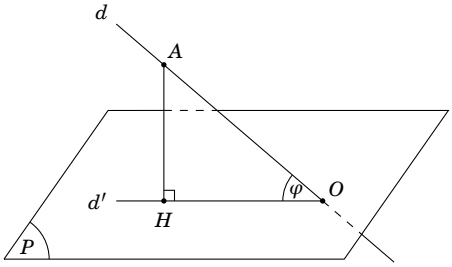
**Định lý 6**

- Cho $a$ nằm trong $(\alpha)$ và $b$ không thuộc $(\alpha)$ đồng thời không vuông góc với $(\alpha)$.
- Gọi $b'$ là hình chiếu của $b$ trên $(\alpha)$.
- Khi $a \perp b \Leftrightarrow a \perp b'$.



## 5 Góc giữa đường thẳng & mặt phẳng

**Nhận xét.**



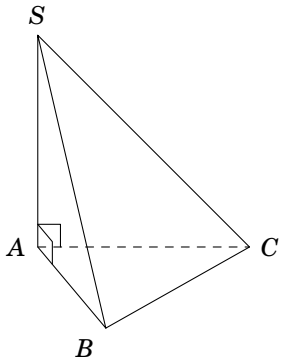

*(1)* $d \perp (P) \Rightarrow \left(\widehat{d;(P)}\right) = 90^\circ$.

*(2)* $d \not\perp (P) \Rightarrow \left(\widehat{d;(P)}\right) = \left(\widehat{d;d'}\right) = \widehat{AOH}$ *với* $d'$ *là hình chiếu của* $d$ *lên* $(P)$.
***Chú ý:*** $0 \leqslant \left(\widehat{d;(P)}\right) \leqslant 90^\circ$.

## 6 Kiến thức bổ trợ

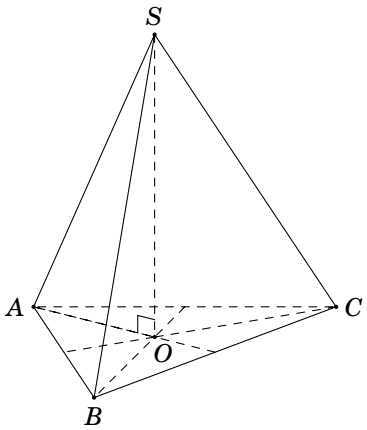
### 6.1 *Một số mô hình thường gặp*

(1) Hình chóp $S.ABC$ có $SA$ vuông góc đáy.




- $SA \perp BC$.
- $\triangle SAB$, $\triangle SAC$ vuông tại $A$.
- $A$ là hình chiếu vuông góc của $S$ lên $(ABC)$.

(2) Hình chóp tam giác đều.



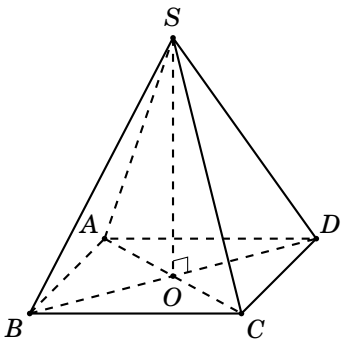

- Đáy $ABC$ là tam giác đều.
- Mặt bên là các tam giác cân tại $S$ (hoặc là tam giác đều nếu hình chóp là tứ diện đều).
- $O$ là trọng tâm $\triangle ABC$.
- $SO \perp (ABC)$, $SO$ là trục $\triangle ABC$.
- $SA = SB = SC$.

(3) Hình chóp tứ giác đều.

### 6.2 *Các hệ thức lượng trong tam giác*

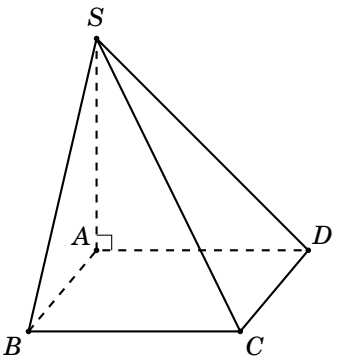
## 7 Hình chóp tứ giác đều

- Đáy $ABCD$ là hình vuông, các mặt bên là các tam giác cân tại $S$.
- Các tam giác $SAC$, $SBD$ cân tại $S$.
- $O$ là hình chiếu của $S$ lên $(ABCD)$.
- $SO \perp (ABC)$, $SO$ là trục hình vuông $ABCD$.
- $SA = SB = SC = SD$.



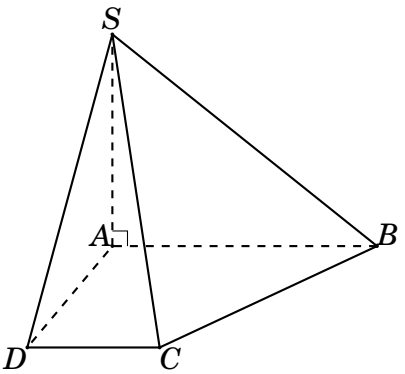

**8** **Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, hình chữ nhật, hình vuông, hình thoi.**

- $A$ là hình chiếu của $S$ lên $(ABCD)$.
- Các tam giác $SAB$, $SAC$, $SAD$ vuông tại $A$.
- Đặc biệt: Nếu $ABCD$ là hình vuông hoặc hình thoi thì $AC$ vuông góc $BD$.




**9** **Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có góc $A$ vuông và $SA$ vuông với đáy.**

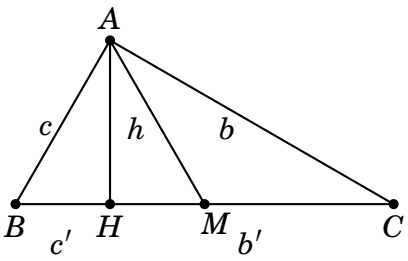
- $A$ là hình chiếu của $S$ lên $(ABCD)$.
- Các tam giác $SAB$, $SAC$, $SAD$ vuông tại $A$.
- Đặc biệt: Nếu $AD = 2BC$ thì
  + Gọi $I$ là trung điểm của $AD$ thì $CI \perp AD$.
  + Nếu thêm $AB = BC$ thì $AC \perp CD$.




**10** **Các hệ thức lượng trong tam giác**

a) Tam giác vuông

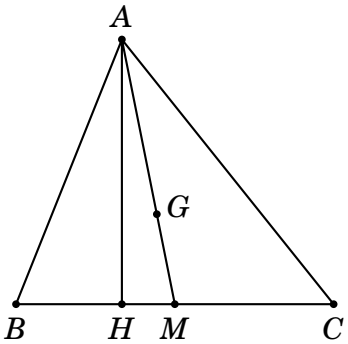
Tam giác $ABC$ vuông tại $A$.




- $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}a \cdot h = \dfrac{1}{2}b \cdot c.$
- $a^2 = b^2 + c^2$ (định lý Pitago).
- $b^2 = b' \cdot a.$
- $c^2 = c' \cdot a.$
- $h^2 = b' \cdot c'.$
- $a \cdot h = b \cdot c.$
- $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}.$
- $\dfrac{b'}{c'} = \dfrac{b^2}{c^2}.$
- $AM = \dfrac{1}{2}BC$ với $M$ là trung điểm $BC$.
- $\sin B = \cos C = \dfrac{AC}{BC}.$
- $\cos B = \sin C = \dfrac{AB}{BC}.$
- $\tan B = \cot C = \dfrac{AC}{AB}.$
- $\cot B = \cot C = \dfrac{AB}{AC}.$

b) Tam giác thường

**Định lí côsin:**




$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A.$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B.$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

**Tính côsin 1 góc:**

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$
$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}.$$
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

**Độ dài trung tuyến:**

$$m_a^2 = \frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}.$$
$$m_b^2 = \frac{2\left(a^2+c^2\right)-b^2}{4}.$$
$$m_c^2 = \frac{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}{4}.$$

**Định lí sin:** $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R.$

c) Tam giác đều

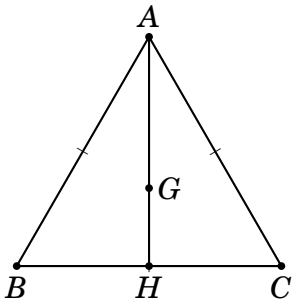
Xét tam giác đều cạnh $x$.

Diện tích tam giác đều $S = x^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Đường cao tam giác đều $h = x \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Với $G$ là trọng tâm $\triangle ABC$ khi đó

$$AG = \frac{2}{3} \cdot AH = x \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}.$$




## 11 Các chú ý khác

- Độ dài đường chéo hình vuông cạnh bằng $a$ là $a\sqrt{2}$.
- Độ dài đường chéo hình chữ nhật có độ đài 2 cạnh là $a$ và $b$ là $\sqrt{a^2+b^2}$.
- Trong hình vuông và hình thoi, các đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường và vuông góc nhau.

# B Các dạng bài tập

### Dạng 1. Chứng minh đường thẳng vuông góc mặt phẳng

**Cách 1.** Chứng minh $d$ vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng chứa trong $(P)$.

**Cách 2.** Chứng minh $d$ song song với $a$ mà $a \perp (P)$.

**Cách 3.** Chứng minh $d \perp (Q)$ và $(Q) \parallel (P)$.

**Ví dụ 1.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác $ABC$ vuông tại $B$ và có cạnh $SA$ vuông góc với mặt phẳng $(ABC)$.

a) Chứng minh $BC \perp (SAB)$.

b) Gọi $AH$ là đường cao của $\triangle SAB$. Chứng minh $AH \perp SC$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 2.** Cho tứ diện $OABC$ có $OA, OB, OC$ đôi một vuông góc với nhau. Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $O$ trên mặt phẳng $(ABC)$. Chứng minh

a) $BC \perp (OAH)$.

b) $H$ là trực tâm của $\triangle ABC$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 3.** Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác vuông tại $B$ và $SA \perp (ABC)$.

a) Chứng minh $BC \perp (SAB)$.

b) Gọi $AH$ và $AK$ là đường cao của $\triangle SAB$, $\triangle SAC$. Chứng minh $SC \perp (AHK)$.

c) $HK$ cắt tia $CB$ tại $I$. Chứng minh $\triangle AIC$ vuông.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

## Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

**Phương pháp** Chứng minh hai đường thẳng $a$ và $b$ vuông góc với nhau, ta làm như sau:

a) **Bước 1.** Chọn $(P)$ chứa đường thẳng $b$.

b) **Bước 2.** Chứng minh $a \perp (P) \Rightarrow a \perp b$.

**Ví dụ 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên $SA$ vuông góc với đáy. Gọi $H$, $K$ lần lượt là hình chiếu của $A$ lên $SC$, $SD$. Chứng minh $HK \perp SC$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại $A$ và $B$, $SA \perp (ACBD)$, $AD = 2a$, $AB = BC = a$. Chứng minh rằng $CD \perp SC$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 6.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm $O$ và $SA$ vuông góc với đáy. Gọi $H$, $I$, $K$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A$ lên $SB$, $SC$, $SD$.

a) Chứng minh rằng $CD \perp (SAD)$, $BD \perp (SAC)$.

b) Chứng minh $SC \perp HK$.

c) Chứng minh rằng $HK \perp AI$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

# C Bài tập rèn luyện

## PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1.** Trong không gian cho điểm $O$ và đường thẳng $d$. Qua điểm $O$ có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với đường thẳng $d$?

**A.** 1. **B.** Vô số. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Khẳng định nào sau đây là đúng.

**A.** Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì chúng vuông góc với nhau.

**B.** Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.

**C.** Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.

**D.** Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 3.** Cho mặt phẳng $(P)$ và hai đường thẳng phân biệt $a$ và $b$. Biết rằng $a \parallel (P)$. Hỏi mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** Nếu $b \parallel (P)$ thì $b \parallel a$. **B.** Nếu $b \perp (P)$ thì $b \perp a$.

**C.** Nếu $b \parallel a$ thì $b \parallel (P)$. **D.** Nếu $b \perp a$ thì $b \perp (P)$.

**Lời giải**

**Câu 4.** Cho hai đường thẳng $a$, $b$ và mặt phẳng $(P)$. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**?

**A.** Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp (P)$ thì $a \perp b$.

**B.** Nếu $a \subset (P)$ và $b \perp (P)$ thì $a \perp b$.

**C.** Nếu $a \perp (P)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$ hoặc $b \subset (P)$.

**D.** Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$.

**Lời giải**

**Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABC$, biết $SA$, $SB$, $SC$ đôi một vuông góc. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $AB \perp (SAC)$. **B.** $SA \perp (SBC)$. **C.** $SB \perp (ABC)$. **D.** $AC \perp (SAB)$.

**Lời giải**

**Câu 6.** Cho hình chóp $S.ABC$, biết $SA \perp (ABC)$ và tam giác $ABC$ vuông tại $A$. Đường thẳng $AB$ vuông góc với mặt phẳng nào?

**A.** $AB \perp (SAC)$. **B.** $AB \perp (ABC)$. **C.** $AB \perp (SBC)$. **D.** $AB \perp (SAB)$.

**Lời giải**

**Câu 7.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng nhau và $ABCD$ là hình vuông. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $BD \perp (SAD)$. **B.** $BD \perp (SCD)$. **C.** $BD \perp (SAC)$. **D.** $BD \perp (ABCD)$.

**Lời giải**

**Câu 8.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

**A.** $SA \perp (SBD)$. **B.** $BD \perp (SAC)$. **C.** $AB \perp (SAD)$. **D.** $AD \perp (SAB)$.

**Lời giải**

**Câu 9.** Cho mặt phẳng $(P)$ và hai đường thẳng $a$, $b$ phân biệt biết $a \perp (P)$ và $b \perp (P)$. Khẳng định nào đúng?

**A.** $(a,b) = 90^\circ$. **B.** $(a,b) = 0^\circ$. **C.** $(a,b) = 60^\circ$. **D.** $(a,b) = 45^\circ$.

**Lời giải**

**Câu 10.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi $AE$, $AF$ lần lượt là các đường cao của tam giác $SAB$ và tam giác $SAD$. Chọn khẳng định đúng?

**A.** $SC \perp (AEF)$. **B.** $SC \perp (AEC)$. **C.** $SC \perp (AFB)$. **D.** $SC \perp (AED)$.

**Lời giải**

**Câu 11.** Cho hai đường thẳng $a$, $b$ phân biệt và mặt phẳng $(P)$, biết $a \perp (P)$ và $b \subset (P)$. Khẳng định nào đúng?

**A.** $(a,b)=90^\circ$. **B.** $(a,b)=0^\circ$. **C.** $(a,b)=60^\circ$. **D.** $(a,b)=45^\circ$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 12.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $BA\perp(SAD)$. **B.** $BA\perp(SAC)$. **C.** $BA\perp(SBC)$. **D.** $BA\perp(SCD)$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 13.** Cho hình chóp $S.ABC$ đáy $ABC$ là tam giác đều, cạnh bên $SA$ vuông góc với đáy. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $SB$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề **sai**?

**A.** $CM\perp SB$. **B.** $CM\perp AN$. **C.** $MN\perp MC$. **D.** $AN\perp BC$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 14.** Cho tứ diện đều $ABCD$ có $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB$ và $CD$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

**A.** $MN \perp AB$. **B.** $MN \perp BD$. **C.** $MN \perp CD$. **D.** $AB \perp CD$.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 15.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = 2$, $DB = DC = 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $BC \perp AD$. **B.** $AC \perp BD$. **C.** $AB \perp (BCD)$. **D.** $DC \perp (ABC)$.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 16.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình vuông. Hình chiếu của tam giác $SCD$ trên mặt phẳng $(SAB)$ là

**A.** $\triangle ACD$. **B.** $\triangle SAD$. **C.** $\triangle SBC$. **D.** $\triangle SAB$.

Lời giải

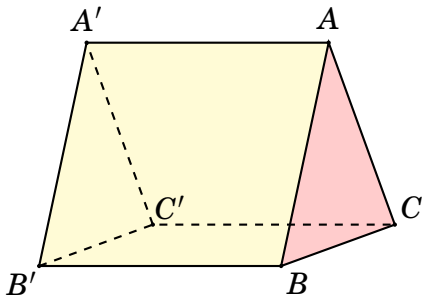
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 17.** Cho tứ diện $OABC$ có $OA \perp (OBC)$. Đường thẳng qua $O$ và vuông góc với $(ABC)$ tại $H$. Đường thẳng $AH$ vuông góc với đường nào dưới đây?

**A.** $BC$. **B.** $OA$. **C.** $AB$. **D.** $OC$.

**Lời giải**

**Câu 18.** Một cái lều có dạng hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên $AA'$ vuông góc với đáy như hình bên. Biết đáy là tam giác đều cạnh 2 m, cạnh bên $AA' = 3$ m. Diện tích hình chiếu vuông góc của $\triangle ABB'$ trên mặt phẳng $(BB'C'C)$ là




**A.** 1,5 m$^2$. **B.** 3 m$^2$. **C.** 6 m$^2$. **D.** 0,75 m$^2$.

**Lời giải**

**Câu 19.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều với cạnh $a$. Cạnh $SA$ vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$; $M$ là một điểm khác $B$ và ở trên $SB$ sao cho $AM$ vuông góc với $MD$. Khi đó, tỉ số $\dfrac{SM}{SB}$ bằng

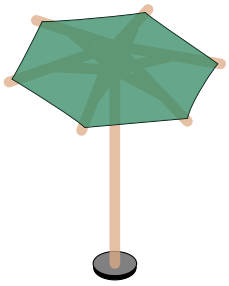
**A.** $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{8}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 20.**

Một cây dù đồng tâm được đặt theo phương thẳng đứng so với mặt đất. Vào thời điểm 12 giờ trưa, ánh nắng mặt trời chiếu vuông góc xuống mặt đất ta thấy bóng của tán dù là một hình lục giác đều có cạnh là 0,5 m. Biết rằng khoảng cách từ đỉnh dù đến một đỉnh bất kỳ của lục giác đều trên mặt đất là 2,5 m. Giả sử chiều cao của đế dù là không đáng kể, khi đó chiều cao của thân dù là bao nhiêu mét?



**A.** 2,15 m. **B.** 2,25 m. **C.** 2,45 m. **D.** 2,35 m.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**BẢNG ĐÁP ÁN**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Câu 1. A** | **Câu 2. C** | **Câu 3. B** | **Câu 4. D** | **Câu 5. B** | **Câu 6. A** | **Câu 7. C** |
| **Câu 8. A** | **Câu 9. B** | **Câu 10. A** | **Câu 11. A** | **Câu 12. A** | **Câu 13. C** | **Câu 14. B** |
| **Câu 15. A** | **Câu 16. D** | **Câu 17. A** | **Câu 18. A** | **Câu 19. A** | **Câu 20. C** | |

## PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

**Câu 1.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$.

**a)** $BC \perp (SAB)$. **b)** $CD \perp (SAD)$. **c)** $AC \perp (SBD)$. **d)** $BD \perp (SAC)$.

Lời giải

**Câu 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thoi tâm $O$ và $SA = SC$, $SB = SD$.

**a)** $SO \perp AC$. **b)** $SO \perp (ABCD)$. **c)** $AC \perp (SBD)$. **d)** $(AC, SB) = 60°$.

Lời giải

**Câu 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật và $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi $H$, $K$ theo thứ tự là hình chiếu của $A$ trên các cạnh $SB$, $SD$.

**a)** Tam giác $SBC$ vuông. **b)** Tam giác $SCD$ vuông.

**c)** $SC \perp (AHK)$. **d)** $HK \perp SC$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác $ABC$ nhọn. Gọi $H$, $K$ lần lượt là trực tâm của tam giác $ABC$ và $SBC$.

**a)** $BC \perp (SAH)$. **b)** $SB \perp (CHK)$. **c)** $HK \perp (SBC)$. **d)** $BC \perp (SAB)$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 5.** Cho tứ diện $OABC$ có $OA$, $OB$, $OC$ đôi một vuông góc với nhau. Gọi $H$ là hình chiếu của $O$ trên $(ABC)$.

**a)** $BC \perp (AOH)$.

**b)** $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

**c)** $H$ là trực tâm tam giác $ABC$.

**d)** $AH \perp (OBC)$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 6.** Cho hình chóp $S.ABC$có đáy $ABC$ là tam giác đều cạnh $a$. Biết $SA = a\sqrt{2}$ và $SA$ vuông góc với mặt đáy. Gọi $M$ là trung điểm của $BC$ và $H$ là hình chiếu vuông góc của $A$ lên $SM$.

**a)** Đường thẳng $BC$ vuông góc với đường thẳng $AH$.

**b)** Đường thẳng $AH$ vuông góc với mặt phẳng $(SBC)$.

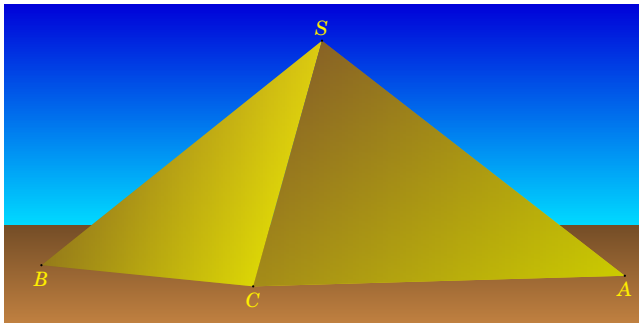
**c)** Đường thẳng $SH$ là hình chiếu của đường thẳng $SA$ lên mặt phẳng $(SBC)$.

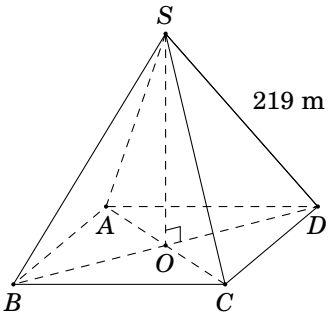
**d)** Độ dài đoạn thẳng $AH$ bằng $\dfrac{6a}{11}$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 7.** Kim tự tháp Cheops là kim tự tháp lớn nhất trong các kim tự tháp ở Ai Cập, được xây dựng vào thế kỉ thứ 26 trước Công nguyên và là một trong bảy kì quan của thế giới cổ đại. Kim tự tháp có dạng hình chóp với đáy là hình vuông có cạnh dài khoảng 230 m, các cạnh bên bằng nhau và dài khoảng 219 m (kích thước hiện nay). Kim tử tháp Cheops được mô phỏng bởi hình chóp $S.ABCD$ với $O$ là giao điểm của hai đường chéo $AC$ và $BD$ như hình bên dưới. (Theo britannica.com). Khi đó




**a)** Góc tạo bởi cạnh bên $SC$ và cạnh đáy $AB$ của kim tự tháp (gần đúng) là $48{,}3°$.

**b)** Đường thẳng $SO$ vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$.

**c)** Đường thẳng $SO$ vuông góc cạnh đáy $AB$ và $BC$.

**d)** Biết rằng độ dài $SO$ chính là chiều cao của kim tử tháp Cheops, ta tính được $SO \approx 146{,}67$ m.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .
. . . . . .

**Câu 8.** Cho tứ diện $OABC$ có $OA, OB, OC$ đôi một vuông góc với nhau. Gọi $OK$ là đường cao của tam giác $OBC$ và $OH$ là đường cao của tam giác $OAK$. Khi đó

**a)** $OA \perp (OBC)$.

**b)** $OB \perp (OAC)$.

**c)** Các cạnh đối nhau trong tứ diện $OABC$ thì vuông góc với nhau.

**d)** $OH$ không vuông góc với mặt phẳng $(ABC)$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 9.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và tam giác $ABC$ vuông tại $B$. Gọi $H$, $K$ là hình chiếu vuông góc của $A$ trên các cạnh $SB$, $SC$. Khi đó

**a)** Tam giác $SBC$ cân tại $B$.

**b)** $AH$ vuông góc với mặt phẳng $(SBC)$.

**c)** $(SC, HK) = 90^\circ$.

**d)** Giả sử $HK$ cắt $BC$ tại $D$. Khi đó $(AC, AD) = 90^\circ$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 10.** Cho tứ diện $OABC$ có $OA, OB, OC$ đôi một vuông góc. Kẻ $OH \perp (ABC)$ tại $H$. Khi đó

**a)** $OA \perp BC$, $OB \perp AC$, $OC \perp AB$.

**b)** Tam giác $ABC$ có ba góc nhọn.

**c)** $H$ là trọng tâm của tam giác $ABC$.

**d)** $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

## Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | |
|---|---|---|
| **Câu 1.** a Đ b Đ c S d Đ | **Câu 2.** a Đ b Đ c Đ d S | **Câu 3.** a Đ b Đ c Đ d Đ |
| **Câu 4.** a Đ b Đ c Đ d S | **Câu 5.** a Đ b Đ c Đ d S | **Câu 6.** a Đ b Đ c Đ d S |
| **Câu 7.** a S b Đ c Đ d Đ | **Câu 8.** a Đ b Đ c Đ d S | **Câu 9.** a S b Đ c Đ d Đ |
| **Câu 10.** a Đ b Đ c S d Đ | | |

## PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên $SA \perp (ABC)$ và đáy $ABC$ là tam giác cân ở $B$. Gọi $H$ và $K$ lần lượt là trung điểm của $AC$ và $SC$. Góc của hai đường thẳng $BH$, $SC$ bằng bao nhiêu độ? KQ: ☐

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại $A$ và $D$, $AB = 2AD = 2CD = 2$. Biết $SA \perp (ABCD)$, $SA = 3a$. Diện tích hình chiếu vuông góc của tam giác $SBC$ lên mặt phẳng $(SAB)$ là bao nhiêu? KQ: ☐

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Gọi $H$ là trung điểm của $AB$ và $SH \perp (ABCD)$; gọi $K$ là trung điểm của cạnh $AD$. Xác định góc của hai đường thẳng $AC$ và $SK$. KQ: ☐

**Lời giải**

.....

.....

.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 4.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$ và $DB = DC$. Xác định góc của hai đường thẳng $BC, AD$.

KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Gọi $I$, $J$, $K$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $BC$ và $SB$. Xác định góc của hai đường thẳng $KJ$, $BD$.

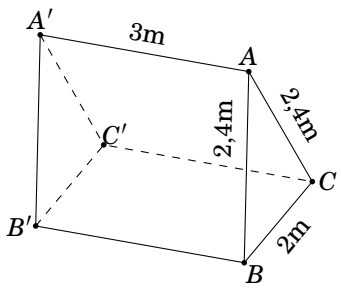
KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 6.**

Một cái lều có dạng hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các cạnh bên vuông góc với hai mặt phẳng đáy. Cho biết $AB = AC = 2{,}4$ m; $BC = 2$ m; $AA' = 3$ m. Diện tích hình chiếu của tam giác $ABA'$ trên mặt phẳng $(BCC'B')$ bao nhiêu $\text{m}^2$?




KQ:

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 7.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Gọi $H$, $K$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $AD$. Biết $SH \perp (ABCD)$. Góc giữa hai đường thẳng $BK$, $SC$ bằng bao nhiêu độ?

KQ:

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 8.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA$ vuông góc với mặt phẳng $(ABC)$, $SA = 2a$, tam giác $ABC$ vuông tại $B$, $AB = a\sqrt{3}$ và $BC = a$ (minh họa hình vẽ bên). Tính góc giữa hình chiếu của đường thẳng $SC$ xuống mặt phẳng $(SAB)$ và $AB$.

KQ:

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều với cạnh $a$. Cạnh $SA$ vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. $M$ là một điểm khác $B$ và ở trên $SB$ sao cho $AM$ vuông góc với $MD$. Khi đó, tỉ số $\dfrac{SM}{SB}$ bằng KQ:

**Lời giải**

**Câu 10.** Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh 1, $AA' = 3$. Mặt phẳng qua $A$ vuông góc với $A'C$ cắt các cạnh $BB'$, $CC'$, $DD'$ lần lượt tại $I$, $J$, $K$. Tính diện tích thiết diện $AIJK$ (làm tròn đến số thập phân thứ 2). KQ:

**Lời giải**

**BẢNG ĐÁP ÁN**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Câu 1.** 90 | **Câu 2.** 1,5 | **Câu 3.** 90 | **Câu 4.** 90 | **Câu 5.** 90 |
| **Câu 6.** 1,5 | **Câu 7.** 90 | **Câu 8.** 54,6 | **Câu 9.** 0,75 | **Câu 10.** 1,11 |

# BÀI 24. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

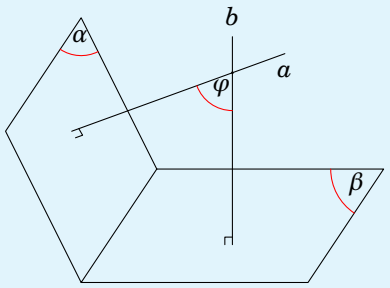
## A Lý thuyết

### 1 Góc giữa hai mặt phẳng

**Định nghĩa 1**

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

$$\left.\begin{array}{l} a \perp (\alpha) \\ b \perp (\beta) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[(\alpha),(\beta)\right] = (a,b).$$




- Nếu $\left[\begin{array}{l} (\alpha) \parallel (\beta) \\ (\alpha) \equiv (\beta) \end{array}\right.$ thì $\left[(\alpha),(\beta)\right] = 0°$.
- $0° \le \left[(\alpha),(\beta)\right] \le 90°$.

### 2 Hai mặt phẳng vuông góc

**Định nghĩa 2**

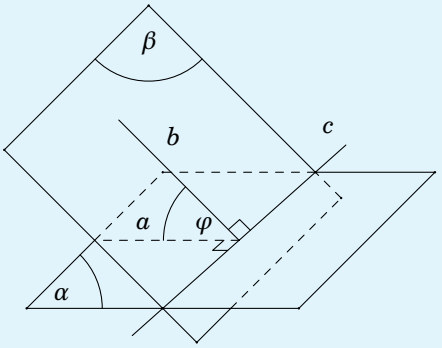
Hai mặt phẳng vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng $90°$.

$$(P) \perp (Q) \Leftrightarrow [(P),(Q)] = 90°$$

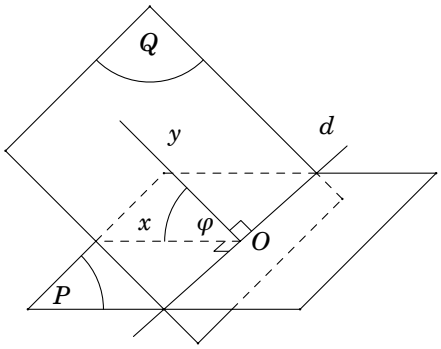
**Định nghĩa 3**

Cho 2 mặt phẳng $(\alpha)$ và $(\beta)$ cắt nhau theo giao tuyến $c$.

$$\begin{cases} a \subset (\alpha), a \perp c \\ b \subset (\beta), b \perp c \end{cases} \Rightarrow \left[(\alpha),(\beta)\right] = (a,b)$$



**Cách xác định góc dùng cho hai mặt phẳng cắt nhau**




- Bước 1. Tìm giao tuyến $d$ của $(P)$ và $(Q)$.
- Bước 2. Chọn điểm $O$ trên $d$, từ đó:
  - Trong $(P)$ dựng $Ox \perp d$.
  - Trong $(Q)$ dựng $Oy \perp d$.

Khi đó $[(P),(Q)] = (Ox, Oy)$.

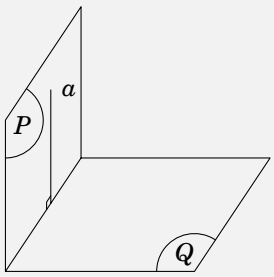
! Việc xác định điểm $O$ có thể được thực hiện theo cách sau:
- Chọn điểm $M$ trên $(Q)$ sao cho dễ dàng xác định hình chiếu $H$ của nó trên $(P)$.
- Dựng $MO \perp d$ thì khi đó $[(P),(Q)] = \widehat{MOH}$.

**Điều kiện hai mặt phẳng vuông góc**

**Định lý 1**

Hai mặt phẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi trong mặt phẳng này có một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases} a \subset (P) \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q).$$

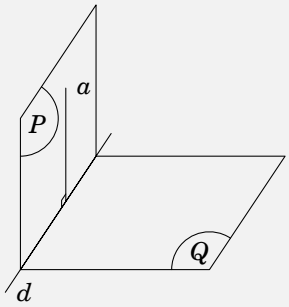



## 3 Tính chất cơ bản về hai mặt phẳng vuông góc

**Định lý 2**

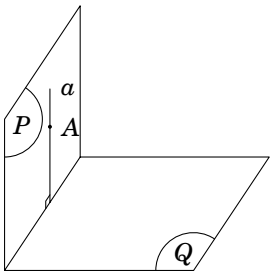
Nếu hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$ vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong $(P)$ mà vuông góc với giao tuyến của $(P)$ và $(Q)$ đều vuông góc với mặt phẳng $(Q)$.

$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = d \\ a \subset (P), a \perp d \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q)$$




**Nhận xét.** *Nếu hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$ vuông góc với nhau và $A$ là một điểm trong $(P)$ thì đường thẳng đi qua $A$ và vuông góc với $(Q)$ sẽ nằm trong mặt phẳng $(P)$.*

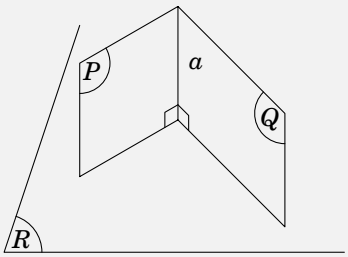
$$\begin{cases} (P)\perp(Q) \\ A\in(P) \\ A\in a\perp(Q) \end{cases} \Rightarrow a\subset(P).$$



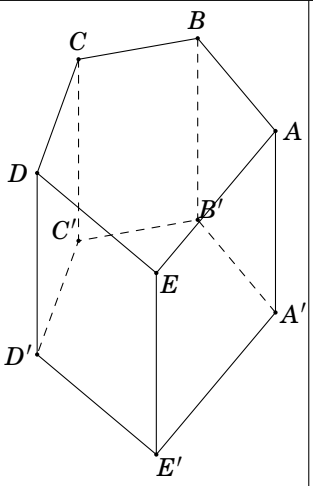
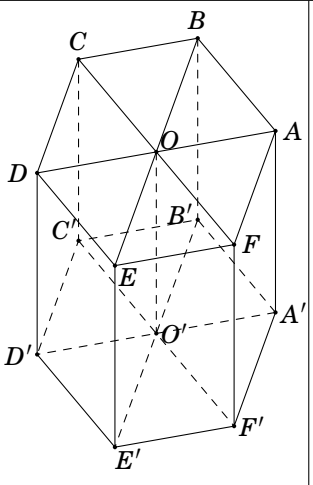

**Định lý 3**

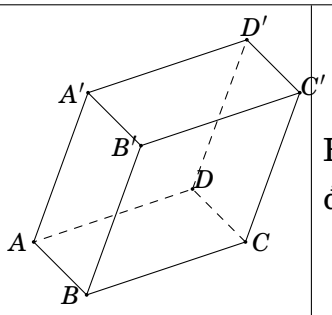
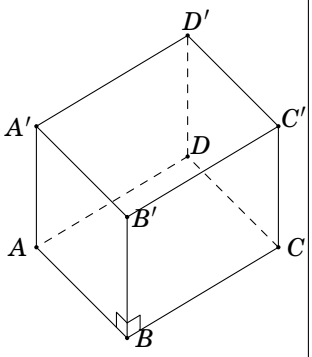
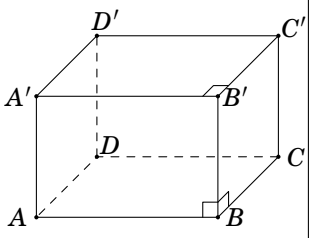
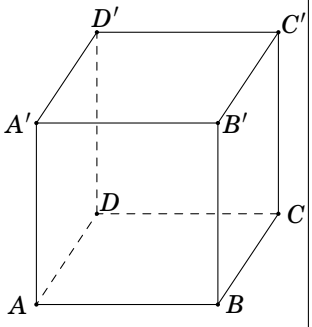
Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng sẽ vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

$$\begin{cases} (P)\cap(Q)=a \\ (P)\perp(R) \\ (Q)\perp(R) \end{cases} \Rightarrow a\perp(R).$$




## 4 Hình lăng trụ đứng, hình hộp chữ nhật, hình lập phương

| Tên hình | Hình vẽ | Tính chất |
|---|---|---|
| Hình lăng trụ đứng |   | • Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với hai mặt đáy.<br>• Mặt bên là các hình chữ nhật. |
| Hình lăng trụ đều |   | Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều. |

| | | |
|---|---|---|
| Hình hộp |  | Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành. |
| Hình hộp đứng |  | Hình hộp đứng là hình hộp có cạnh bên vuông góc với mặt đáy. |
| Hình hộp chữ nhật |  | • Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.<br>• Tất cả các mặt đều là hình chữ nhật.<br>• Độ dài đường chéo $d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ với $a, b, c$ là kích thước 3 cạnh. |
| Hình lập phương |  | Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau. |

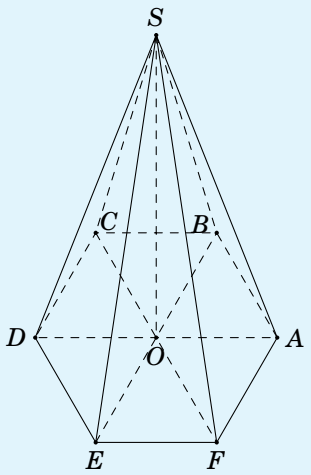
## 5 Hình chóp đều và hình chóp cụt đều

**Định nghĩa 4**

Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu nó có đáy là một đa giác đều và có chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy.

**Tính chất:**

- Các cạnh bên của hình chóp đều tạo với đáy các góc bằng nhau.
- Các mặt bên của hình chóp đều là các tam giác cân bằng nhau.
- Các mặt bên của hình chóp đều tạo với đáy các góc bằng nhau.

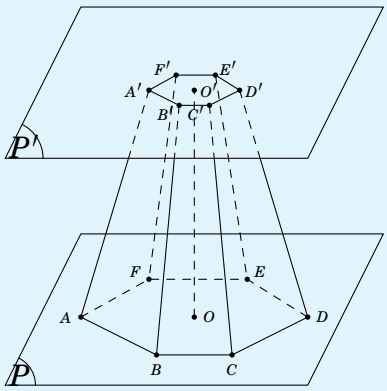



**Định nghĩa 5**

Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một mặt phẳng song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là hình chóp cụt đều.

Trong hình chóp cụt đều $ABCDE.A'B'C'D'E'$, ta gọi:

- Các điểm $A,B,C,D,E,A',B',C',D',E'$ là các đỉnh.
- Đa giác $ABCDE$ là đáy lớn, đa giác $A'B'C'D'E'$ là đáy nhỏ. Đáy lớn và đáy nhỏ nằm trên hai mặt phẳng song song.




**Nhận xét.**

- *Cạnh của hai đa giác là cạnh đáy. Các cạnh đáy tương ứng song song từng đôi một*
- *Các hình thang cân $AA'EE'$, $AA'B'B$, $BB'C'C$,$C'CDD'$,$DD'E'E$ là các mặt bên.*
- *Cạnh bên của mặt bên gọi là cạnh bên của hình chóp cụt đều. Hình chóp cụt đều có các cạnh bên bằng nhau, các mặt bên là những hình thang cân.*
- *Đoạn thẳng nối tâm hai đáy là đường cao. Độ dài đường cao là chiều cao.*

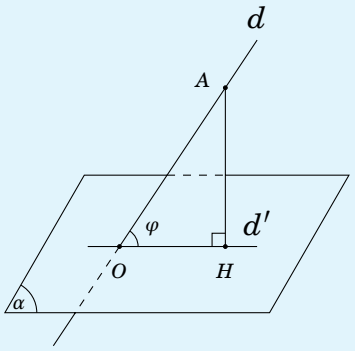
## 6 Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

**Định nghĩa 6**

Xác định góc giữa đường và mặt

- Trường hợp 1. $d \perp (P)$ suy ra $(d,(P)) = 90^\circ$.
- Trường hợp 2. $d$ không vuông góc với $(P)$.
  Khi đó ta làm như sau
  - Bước 1. Tìm $d \cap (P) = \{O\}$.
  - Bước 2. Trên $d$ lấy điểm $A$ khác $O$.
    Tìm hình chiếu $H$ của $A$ lên $(\alpha)$.
    Ta chọn điểm $A$ trên $d$ thỏa $A \in \Delta$ vuông góc với $(\alpha)$. (Khi đó hình chiếu của $A$ là giao điểm của $\Delta$ và $(\alpha)$).
  - Bước 3. Suy ra

$$(d,(P)) = (AO,HO) = \widehat{AOH} = \varphi.$$

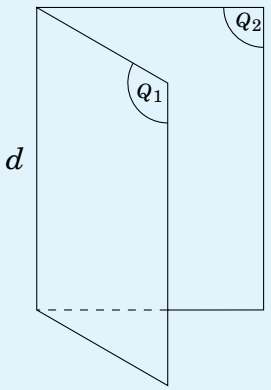



**!** $0 \le (d,(P)) \le 90^\circ$.

## 7 Góc nhị diện

**Định nghĩa 7**

- Cho hai nửa mặt $(P_1)$ và $(Q_1)$ có chung bờ là đường thẳng $d$.
- Hình tạo bởi $(P_1)$, $(Q_1)$ và $d$ được gọi là góc nhị diện tạo bởi $(P_1)$ và $(Q_1)$, kí hiệu $[P_1,d,Q_1]$.
- Hai nửa mặt $(P_1)$, $(Q_1)$ gọi là hai mặt của nhị diện và $d$ gọi là cạnh của nhị diện.




**!**

- Hai mặt phẳng cắt nhau theo giao tuyến $d$ tạo thành bốn góc nhị diện.
- Góc nhị diện $[P_1,d,Q_1]$ còn được ký hiệu là $[M,d,N]$ với $M$; $N$ tương ứng thuộc hai nửa mặt phẳng $(P_1)$, $(Q_1)$.

## 8 Góc phẳng nhị diện

**Định nghĩa 8**

Góc phẳng nhị diện của góc nhị diện là góc

- có đỉnh nằm trên cạnh của nhị diện,
- có hai cạnh lần lượt nằm trên hai mặt của nhị diện và vuông góc với cạnh của nhị diện.

- Số đo của góc nhị diện có thể nhận giá trị từ $0^\circ$ đến $180^\circ$.
- Góc nhị diện được gọi là vuông, nhọn, tù nếu nó có số đo tương ứng bằng, nhỏ hơn, lớn hơn $90^\circ$.
- Đối với hai điểm $M$, $N$ không thuộc đường thẳng $a$, ta kí hiệu $[M,a,N]$ là góc nhị diện có cạnh $a$ và các mặt tương ứng chứa $M$, $N$.
- Hai mặt phẳng cắt nhau tạo thành bốn góc nhị diện. Nếu một trong bốn góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông thì các góc nhị diện lại cũng là góc nhị diện vuông.

**Phương pháp xác định góc nhị diện**

Để xác định góc nhị diện tạo bởi hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$, ta thực hiện theo các bước

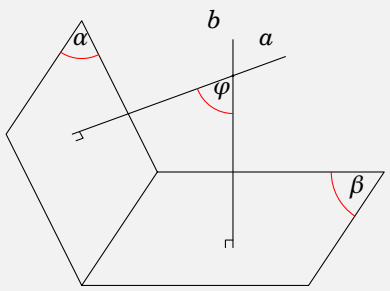
- Bước 1. Xác định giao tuyến $a=(P)\cap(Q)$.
- Bước 2. Tìm $Ox\subset(P)$ sao cho $Ox\perp a$ và $Oy\subset(Q)$ sao cho $Oy\perp a$.
- Bước 3. Kết luận $[P,a,Q]$.

# B Các dạng bài tập

### Dạng 1. Xác định góc giữa hai mặt phẳng bằng cách dùng định nghĩa

**Phương pháp:** Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

$$\begin{cases} a\perp(\alpha) \\ b\perp(\beta) \end{cases} \Rightarrow \big[(\alpha),(\beta)\big]=(a,b).$$



- Nếu $\begin{cases}(\alpha)\parallel(\beta)\\(\alpha)\equiv(\beta)\end{cases}\Rightarrow\left[(\alpha),(\beta)\right]=0^\circ$.
- $0^\circ\le\left[(\alpha),(\beta)\right]\le 90^\circ$.

**Ví dụ 1.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $a$, $SA$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA=a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(SAD)$ và $(SBC)$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a$, tam giác $SAB$ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính Côsin của góc hợp bởi hai mặt phẳng $(SAB)$ và $(SDC)$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

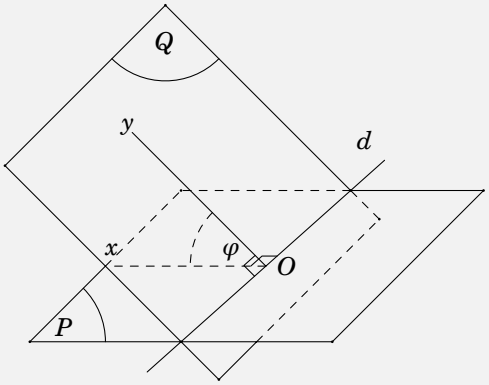
.....

.....

## Dạng 2. Xác định góc giữa hai mặt phẳng dựa trên giao tuyến

**Phương pháp:** Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại một điểm.
Cách xác định góc dùng cho hai mặt phẳng cắt nhau:

- Bước 1. Tìm giao tuyến $d$ của $(P)$ và $(Q)$.
- Bước 2. Chọn điểm $O$ trên $d$, từ đó:
  - Trong $(P)$ dựng $Ox \perp d$.
  - Trong $(Q)$ dựng $Oy \perp d$.
- Khi đó $[(P),(Q)] = (Ox, Oy)$.




**Ví dụ 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, cạnh bên $SA$ vuông góc với đáy và $SA = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(SBC)$ và $(SAD)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm $O$, cạnh $a$. Đường thẳng $SO$ vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng $(SBC)$ và $(ABCD)$ bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 5.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại $B$, $SA \perp (ABC)$, $SA = \sqrt{3}$ cm, $AB = 1$ cm . Mặt bên $(SBC)$ hợp với mặt đáy góc bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 6.** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy $ABC$ là tam giác vuông tại $B$, $BA = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi $\varphi$ là góc hợp bởi $(A'BC)$ và $(ABC)$. Tính $\tan\varphi$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

## Dạng 3. Xác định góc giữa hai mặt phẳng dựa vào định lý hình chiếu

Nội dung phương pháp giải

**Ví dụ 7.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA$ vuông góc với đáy. Tam giác $SBC$ vuông cân tại $S$ có $SB = a$. Mặt phẳng $(SBC)$ hợp với đáy một góc $30^\circ$. Tính diện tích tam giác $ABC$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 8.** Cho tứ diện $OABC$ có $OA$, $OB$, $OC$ đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}$, $OA = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(ABC)$ và $(OBC)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

## Dạng 4. Tổng hợp các phương pháp xác định góc giữa hai mặt phẳng

**Ví dụ 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm $O$, $AB = 2a$, $AD = a$, $SA = 3a$ và $SA$ vuông góc với đáy. Tính góc giữa hai mặt phẳng

a) $(SBC)$ và $(ABCD)$; b) $(SBD)$ và $(ABCD)$; c) $(SBC)$ và $(SAC)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 10.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a$, $SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng $(SBD)$ và $(ABCD)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 11.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác vuông cân tại $B$, $AB = a$, $SA = a$ và $SA \perp (ABC)$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(SAC)$ và $(SBC)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 12.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và $SA$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi $\alpha$ là góc giữa hai mặt phẳng $(SBD)$ và $(ABCD)$. Biết $\tan\alpha = \sqrt{2}$, tính góc giữa $(SAC)$ và $(SBC)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 13.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a$, cạnh $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính góc giữa các mặt phẳng

a) $(SBC)$ và $(ABCD)$

b) $(SBC)$ và $(SAD)$

c) $(SAB)$ và $(SBD)$

d) $(SBC)$ và $(SAC)$

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 5. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

Để chứng minh hai mặt phẳng vuông góc với nhau ta dùng một trong các cách sau

Cách 1. Xác định góc giữa hai mặt phẳng, rồi tính trực tiếp góc đó bằng $90^\circ$, nghĩa là $\big((\alpha),(\beta)\big) = 90^\circ \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$.

Cách 2. Chứng minh trong mặt này có một đường thẳng vuông góc với mặt kia nghĩa là $\begin{cases} a \subset (\alpha) \\ a \perp (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$.

**Ví dụ 14.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA = a$, các cạnh còn lại bằng $b$. Chứng minh $(SAC) \perp (ABCD)$ và $(SAC) \perp (SBD)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 15.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA$ vuông góc với đáy. Chứng minh $(SAB) \perp (SAD)$ và $(SAC) \perp (SBD)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 16.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA$ vuông góc với đáy. Gọi $H,K$ lần lượt là hình chiếu của $A$ trên $SB,SD$. Chứng minh rằng $(SAC)\perp(AHK)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 17.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác vuông tại $C$, tam giác $SAC$ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Chứng minh rằng $(SBC)\perp(SAC)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 18.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a$ cạnh bên $SA \perp (ABCD)$. Gọi $M,N$ là các điểm thuộc $BC$ và $CD$ sao cho $BM = \dfrac{a}{2}, DN = \dfrac{3a}{4}$. Chứng minh rằng $(SAM) \perp (SMN)$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 6. Thiết diện

Mặt phẳng $(P)$ đi qua một điểm và vuông góc đường thẳng $a$ cắt hình chóp theo thiết diện.

- Xác định mặt phẳng có tính chất gì? Tìm đường thẳng song song với $(P)$.
- Tìm các đoạn giao tuyến của và các mặt của hình chóp.
- Sử dụng tính chất về giao tuyến song song $\begin{cases} a \subset (Q) \\ a \parallel (P) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (Q) = m \parallel a$.

**Ví dụ 19.** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $AB = a, SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi $I$ là trung điểm của cạnh $BC$, mặt phẳng $(P)$ qua $A$ và vuông góc với $SI$ cắt hình chóp đã cho theo một thiết diện. Tính diện tích thiết diện đó.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 20.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại $A, D$; $AB = 2a; SA = AD = DC = a$; $SA \perp (ABCD)$. Tính diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng $(\alpha)$ qua $SD$ và $(\alpha) \perp (SAC)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 21.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a$, cạnh bên $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Mặt phẳng $(P)$ đi qua $A$ và vuông góc với $SC$. Tính diện tích của thiết diện cắt bởi $(P)$ và hình chóp $S.ABCD$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 22.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi $(\alpha)$ là mặt phẳng đi qua $A$ và vuông góc với $SB$. Khi đó, mặt phẳng $(\alpha)$ cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình gì?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 23.** Cho hình chóp $S{\cdot}ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác vuông cân tại $A$, $AB = AC = a$; cạnh bên $SA$ vuông góc với mặt đáy, $SA = a$. Gọi $M$ là trung điểm của $SC$. Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng $(P)$ đi qua $M$ và vuông góc với $AC$

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

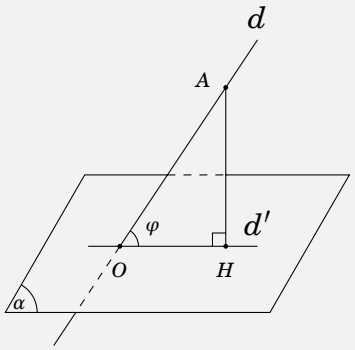
. . . . . .

## Dạng 7. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

**Phương pháp**

- Trường hợp 1. $d \perp (P) \Rightarrow (d,(P)) = 90^\circ$.
- Trường hợp 2. $d$ không vuông góc với $(P)$. Khi đó ta làm như sau
  - Bước 1. Tìm $d \cap (P) = \{O\}$.
  - Bước 2. Trên $d$ lấy điểm $A$ khác $O$. Tìm hình chiếu $H$ của $A$ lên $(\alpha)$.
    Ta chọn điểm $A$ trên $d$ thỏa: $A \in \Delta$ vuông góc với $(\alpha)$. (Khi đó hình chiếu của A là giao điểm của $\Delta$ và $(\alpha)$).
  - Bước 3. Suy ra $(d,(P)) = (AO,HO) = \widehat{AOH} = \varphi$.

! $0 \le (d,(P)) \le 90^\circ$



**Ví dụ 24.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm $O$,$SA$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tìm hình chiếu của

a) $SC$, $SB$, $SO$ lên mặt phẳng $(ABCD)$.

b) $AC$, $SC$, $SD$ lên mặt phẳng $(SAB)$.

c) $SB$, $DC$ lên mặt phẳng $(SAC)$.

d) $SA$, $AC$ lên mặt phẳng $(SCD)$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 25.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA$ vuông góc với đáy, $ABC$ là tam giác vuông cân tại $B$. Cho độ dài các cạnh $SA = AB = a$. Xác định và tính

a) Góc giữa $SB$ và $(ABC)$.

b) Góc giữa $SC$ và $(SAB)$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 26.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm $O$, $SO \perp (ABCD)$. Xác định

a) Góc giữa $SA$ và $(ABCD)$.

b) Góc giữa $SA$ và $(SBD)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 27.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = 2a$. Tam giác $ABC$ đều cạnh $a$. Tính

a) Góc giữa đường thẳng $SB$ và $(ABC)$.

b) Góc giữa đường thẳng $SC$ và $(SAB)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 28.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác vuông cân tại $B, AB = a$. Tam giác $SAB$ là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính góc giữa $SC$ và $(SAB)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 29.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác vuông tại $B$, có $AB = a$; $BC = a\sqrt{3}$. Biết $SA \perp (ABC)$, $SB$ tạo với đáy một góc $60^\circ$ và $H$ là trung điểm của $BC$.

a) Tính cosin góc giữa $SC$ và mặt phẳng $(ABC)$.

b) Tính cosin góc giữa $SH$ và mặt phẳng $(ABC)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 30.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $ABC$ là tam giác vuông cân tại $B$, $SA \perp (ABC)$, $AB = a$, $SA = a\sqrt{3}$.

a) Tính góc giữa đường thẳng $SC$ và $(ABC)$.

b) Gọi $H$, $K$ lần lượt là đường cao của $\triangle SAB$, $\triangle SAC$. Tính góc giữa đường thẳng $AK$ và $(SBC)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

## Dạng 8. Góc nhị diện

Cho hai nửa mặt $(P_1)$ và $(Q_1)$ có chung bờ là đường thẳng $d$.
Hình tạo bởi $(P_1)$ và $(Q_1)$ và $d$ được gọi là góc nhị diện tạo bởi $(P_1)$ và $(Q_1)$.
Kí hiệu $[P_1, d, Q_1]$.
Cách xác định góc nhị diện tạo bởi hai mặt phẳng $(P)$&$(Q)$, ta thực hiện theo các bước:

- Bước 1. Xác định giao tuyến $a = (P) \cap (Q)$.
- Bước 2. Tìm $Ox \subset (P)$ sao cho $Ox \perp a$ và $Oy \subset (Q)$ sao cho $Oy \perp a$.
- Bước 3. Kết luận $[P, a, Q]$.

!

- Số đo của góc nhị diện có thể nhận giá trị từ $0^\circ$ đến $180^\circ$.
- Góc nhị diện được gọi là vuông, nhọn, tù nếu nó có số đo tương ứng bằng, nhỏ hơn, lớn hơn $90^\circ$.
- Đối với hai điểm $M$, $N$ không thuộc đường thẳng $a$, ta kí hiệu $[M, a, N]$ là góc nhị diện có cạnh $a$ và các mặt tương ứng chứa $M$, $N$.
- Hai mặt phẳng cắt nhau tạo thành bốn góc nhị diện. Nếu một trong bốn góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông thì các góc nhị diện lại cũng là góc nhị diện vuông.

**Ví dụ 1.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác vuông tại $B$, $SA$ vuông góc với đáy. Xác định góc phẳng của góc nhị diện $[S,BC,A]$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm $O$, $SA$ vuông góc với đáy $ABCD$. Xác định góc phẳng của góc nhị diện $[S,BD,A]$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 3.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác đều cạnh $a$, $SA$ vuông góc với đáy và $SA = a$. Tính góc phẳng nhị diện $[B, SA, C]$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 4.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD$ và $BC = BD$. Gọi $I$ là trung điểm của $CD$. Xác định góc phẳng nhị diện $[A, CD, B]$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 5.** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng $a$. Tính cosin số đo góc nhị diện $[S,CD,A]$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 6.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $a$ và $AC = a$. Tính số đo của góc nhị diện $[S,DA,B]$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 7.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi có cạnh bằng $a$, $AC = a$, $SA = \dfrac{1}{2}a$. Gọi $O$ là giao điểm của hai đường chéo hình thoi $ABCD$ và $H$ là hình chiếu của $O$ trên $SC$.

a) Tính số đo của các góc nhị diện $[B,SA,D]$, $[S,BD,A]$, $[S,BD,C]$.

b) Chứng minh rằng $\widehat{BHD}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[B,SC,D]$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 8.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm $O$, đường thẳng $SO$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB = SB = a$, $SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính số đo của góc nhị diện $[B,SA,D]$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 9.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính số đo góc nhị diện $\left[A',B'D,C'\right]$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 10.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, tam giác $SBC$ là tam giác cân tại $S$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, biết $\alpha$ là góc giữa đường thẳng $SD$ và mặt phẳng $(SBC)$ và $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{26}}{13}$. Tính số đo của góc nhị diện $[S,AC,B]$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

# C Bài tập rèn luyện

## PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình vuông tâm $O$. Góc giữa $(SBD)$ và $(ABCD)$ là

**A.** $\widehat{SOA}$. **B.** $\widehat{SBA}$. **C.** $\widehat{SDA}$. **D.** $\widehat{SOC}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng $(SAB)$ và $(SCD)$ bằng góc nào sau đây?

**A.** $\widehat{ASD}$. **B.** $\widehat{BSC}$. **C.** $\widehat{ASC}$. **D.** $\widehat{BSD}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 3.** Cho các đường thẳng $a, b$ và các mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

**A.** $\begin{cases} a \perp (\alpha) \\ a \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$.

**B.** $\begin{cases} a \perp b \\ a \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow b \parallel (\alpha)$.

**C.** $\begin{cases} a \perp b \\ a \subset (\alpha) \\ b \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$..

**D.** $\begin{cases} (\alpha) \perp (\beta) \\ a \subset (\alpha) \\ b \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow a \perp b$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 4.** Cho đường thẳng $a$ không vuông góc với mặt phẳng $(\alpha)$. Có bao nhiêu mặt phẳng $a$ và vuông góc với $(\alpha)$ ?

**A.** 0. **B.** Vô số . **C.** 2. **D.** 1.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm $O$ và $SA = SC, SB = SD$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

**A.** $SO \perp (ABCD)$. **B.** $SC \perp (SBD)$. **C.** $(SBD) \perp (ABCD)$. **D.** $(SAC) \perp (ABCD)$.

**Lời giải**

. . . . . .

.....

**Câu 6.** Cho lăng trụ đứng $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy là tam giác $ABC$ vuông cân tại $A$. Gọi $M$ là trung điểm của $BC$, mệnh đề nào sau đây sai ?

**A.** $(ABB') \perp (ACC')$. **B.** $(AC'M) \perp (ABC)$. **C.** $(AMC') \perp (BCC')$. **D.** $(ABC) \perp (ABA')$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 7.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm $O$ và $SA = SC$, $SB = SD$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

**A.** $SC \perp (SBD)$. **B.** $SO \perp (ABCD)$. **C.** $(SBD) \perp (ABCD)$. **D.** $(SAC) \perp (ABCD)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 8.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác $ABC$ vuông tại $B$ và cạnh bên $SA$ vuông góc với mặt phẳng $(ABC)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

**A.** $SA \perp BC$. **B.** $AB \perp BC$. **C.** $AB \perp SC$. **D.** $SB \perp BC$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....

**Câu 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, hai mặt bên $(SAB)$ và $(SAD)$ vuông góc với mặt đáy. $AH$, $AK$ lần lượt là đường cao của tam giác $SAB$, $SAD$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

**A.** $BC \perp AH$. **B.** $SA \perp AC$. **C.** $HK \perp SC$. **D.** $AK \perp BD$.

Lời giải

**Câu 10.** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác $ABC$ vuông cân tại $A$. Gọi $M$ là trung điểm của $BC$, mệnh đề nào sau đây **sai**?

**A.** $(ABB') \perp (ACC')$. **B.** $(AC'M) \perp (ABC)$. **C.** $(AMC') \perp (BCC')$. **D.** $(ABC) \perp (ABA')$.

Lời giải

**Câu 11.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác cân tại $B$, cạnh bên $SA$ vuông góc với đáy, $I$ là trung điểm $AC$, $H$ là hình chiếu của $I$ lên $SC$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

**A.** $(BIH) \perp (SBC)$. **B.** $(SAC) \perp (SAB)$. **C.** $(SBC) \perp (ABC)$. **D.** $(SAC) \perp (SBC)$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 12.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác vuông cân tại $B$, $SA \perp (ABC)$, gọi $M$ là trung điểm của $AC$. Mệnh đề nào **sai**?

**A.** $(SAB) \perp (SAC)$. **B.** $BM \perp AC$. **C.** $(SBM) \perp (SAC)$. **D.** $(SAB) \perp (SBC)$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 13.** Cho hình lập phương $ABCD.A'BC'D'$. Tính góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và $\left(ACC'A'\right)$.

**A.** $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 14.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

**A.** $(ACC'A') \perp (BDD'B')$.
**B.** $(ABCD) \perp (BCD'A')$.
**C.** $(A'BC) \perp (ABCD)$.
**D.** $A'B \perp (ABCD)$.

**Lời giải**

**Câu 15.** Cho hình chóp đều $S.ABC$. Gọi $d$ và $\Delta$ là hai đường lần lượt vuông góc với mặt phẳng $(ABC)$ và mặt phẳng $(SBC)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $((SBC),(ABC)) = (\Delta, d)$.
**B.** $((SBC),(ABC)) = 60^\circ$.
**C.** $((SBC),(ABC)) = (\Delta,(ABC))$.
**D.** $((SBC),(ABC)) = (\Delta,(SBC))$.

**Lời giải**

**Câu 16.** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $M$ là trung điểm của $BC$. Xác định góc giữa hai mặt phẳng $(SBC)$ với mặt phẳng $(ABC)$.

**A.** $((SBC),(ABC)) = \widehat{SBA}$.
**B.** $((SBC),(ABC)) = \widehat{MSA}$.
**C.** $((SBC),(ABC)) = \widehat{SMA}$.
**D.** $((SBC),(ABC)) = \widehat{MAS}$.

**Lời giải**

**Câu 17.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $2a$, $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng $(SBC)$ và $(ABC)$ bằng

**A.** $30^\circ$. **B.** $60^\circ$. **C.** $90^\circ$. **D.** $45^\circ$.

**Lời giải**

**Câu 18.** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ với $ABCD$ có tâm $O$. Gọi $M$ là trung điểm của $CD$. Xác định góc giữa $(SCD)$ với $(ABCD)$.

**A.** $((SCD),(ABCD)) = \widehat{SMO}$. **B.** $((SCD),(ABCD)) = \widehat{MSO}$.

**C.** $((SCD),(ABCD)) = \widehat{SOC}$. **D.** $((SCD),(ABCD)) = \widehat{SOM}$.

**Lời giải**

**Câu 19.** Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình thoi tâm $O$, đường thẳng $SO$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB = SB = a$, $SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tìm số đo của góc giữa hai mặt phẳng $(SAB)$ và $(SAD)$.

**A.** $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

**Lời giải**

**Câu 20.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác $ABC$ đều cạnh $2a$, $SB$ tạo với mặt phẳng đáy một góc $30°$. Khi đó mp$(SBC)$ tạo với đáy một góc $x$. Tính $\tan x$.

**A.** $\tan x = 2$. **B.** $\tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\tan x = \dfrac{3}{2}$. **D.** $\tan x = \dfrac{2}{3}$.

**Lời giải**

**Câu 21.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a$, tam giác đều $SAB$ nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi $H$, $K$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $CD$. Ta có tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(SAB)$ và $(SCD)$ bằng

**A.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 22.** Cho hai tam giác $ACD$ và $BCD$ nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Tìm giá trị của $x$ để hai mặt phẳng $(ABC)$ và $(ABD)$ vuông góc với nhau.

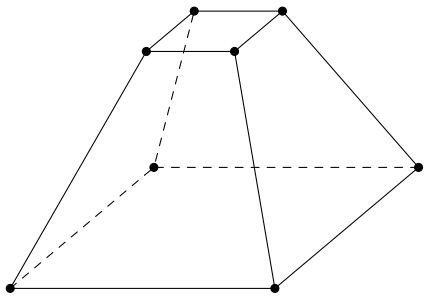
**A.** $x = \dfrac{a}{3}$. **B.** $x = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $x = \dfrac{a}{2}$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 23.**

Người ta cần sơn tất cả các mặt của một khối bê tông hình chóp cụt tứ giác đều, đáy lớn có cạnh bằng 2 m, đáy nhỏ có cạnh bằng 1 m và cạnh bên bằng 2 m như hình vẽ. Tính tổng diện tích các bề mặt cần sơn.



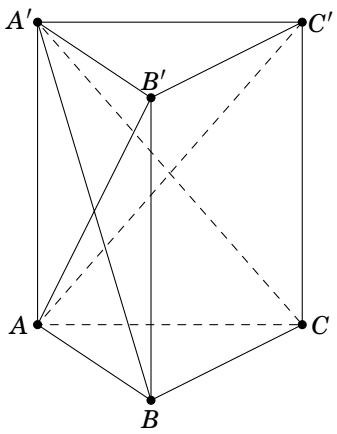
**A.** $5+3\sqrt{5}$. **B.** $4+3\sqrt{5}$. **C.** $2+3\sqrt{5}$. **D.** $5$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 24.**

Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi $\alpha$ là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'BC)$, tính $\cos\alpha$.




**A.** $\frac{1}{7}$. **B.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\frac{\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\frac{4}{7}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

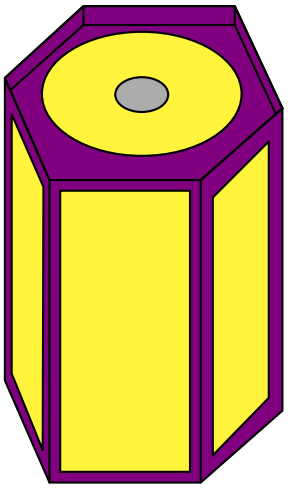
.....

.....

.....

**Câu 25.**

Một hộp đèn treo trần có hình dạng lăng trụ đứng lục giác đều như hình vẽ, cạnh đáy bằng 10 cm và cạnh bên bằng 50 cm. Tính tỉ số giữa diện tích xung quanh và diện tích một mặt đáy của hộp đèn.



**A.** $\frac{20\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{10\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{20}{3}$. **D.** $\frac{20\sqrt{3}}{5}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 26.** Nếu $A$ là một điểm không thuộc mặt phẳng $(P)$ và $A'$ là hình chiếu của $A$ trên $(P)$ thì

**A.** Đường thẳng $AA'$ nằm trên mặt phẳng $(P)$.

**B.** Đường thẳng $AA'$ vuông góc với mặt phẳng $(P)$.

**C.** Đường thẳng $AA'$ song song với mặt phẳng $(P)$.

**D.** Đường thẳng $AA'$ không cắt mặt phẳng $(P)$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 27.** Nếu đường thẳng $a$ vuông góc với mặt phẳng $(P)$ thì hình chiếu của $a$ trên $(P)$ là

**A.** Đường thẳng $a'$ song song với $a$.

**B.** Đường thẳng $a'$ vuông góc với $a$.

**C.** Đường thẳng $a'$ nằm trên mặt phẳng $(P)$.

**D.** Là giao điểm $H$ của đường thẳng $a$ với mặt phẳng $(P)$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 28.** Cho đường thẳng $a$ cắt mặt phẳng $(P)$ tại điểm $A$ và đường thẳng $a$ không vuông góc với mặt phẳng $(P)$. Trên đường thẳng $a$ lấy điểm $M$ khác $A$. Gọi $H$ là hình chiếu của $M$ trên $(P)$. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **đúng**?

**A.** Hình chiếu vuông góc của đường thẳng $a$ trên $(P)$ là đường thẳng $AH$.
**B.** Hình chiếu vuông góc của đường thẳng $a$ trên $(P)$ là đường thẳng đi qua $M$.
**C.** Hình chiếu vuông góc của đường thẳng $a$ trên $(P)$ là đường thẳng đi qua $H$ và song song với $a$.
**D.** Hình chiếu vuông góc của đường thẳng $a$ trên $(P)$ là đường thẳng đi qua $H$ và vuông góc với $a$.

**Lời giải**

**Câu 29.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

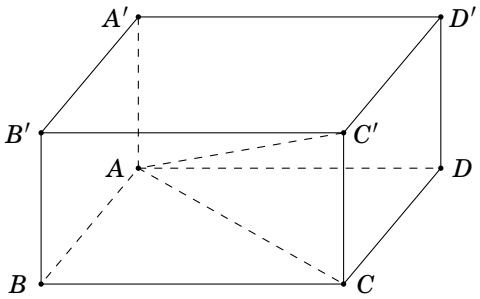
**A.** Hình chiếu vuông góc của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng song song.
**B.** Hình chiếu vuông góc của một hình bình hành là một hình bình hành.
**C.** Phép chiếu vuông góc biến một tam giác thành một tam giác nếu mặt phẳng chứa tam giác không song song với phương chiếu.
**D.** Phép chiếu vuông góc không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng.

**Lời giải**

**Câu 30.**

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ). Hình chiếu vuông góc của điểm $C'$ trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm

**A.** $C$. **B.** $A$. **C.** $D$. **D.** $B$.




**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

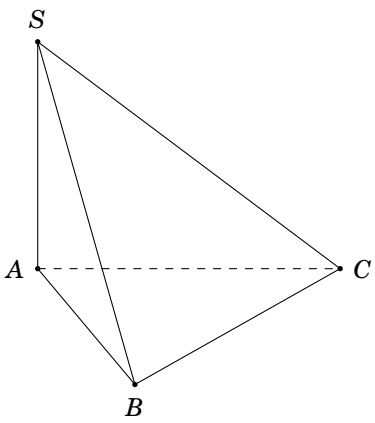
.....

.....

**Câu 31.**

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA$ vuông góc với mặt phẳng $(ABC)$, (tham khảo hình vẽ). Hình chiếu vuông góc của đường thẳng $SB$ trên mặt phẳng $(ABC)$ là đường thẳng

**A.** $BC$. **B.** $AB$. **C.** $AC$. **D.** $SA$.




**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

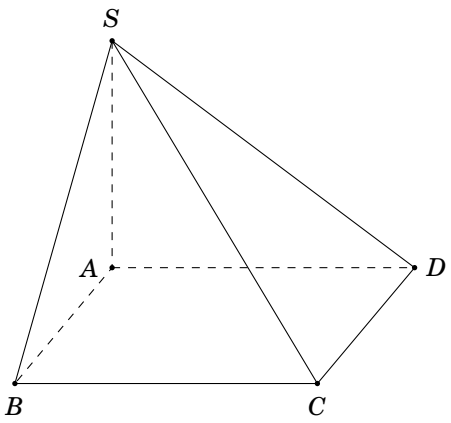
.....

.....

**Câu 32.**

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy (tham khảo hình vẽ). Hình chiếu vuông góc của tam giác $\triangle SCD$ mặt phẳng $(ABCD)$ là

**A.** $\triangle ABC$. **B.** $\triangle ACD$. **C.** $\triangle BCD$. **D.** $\triangle ABD$.



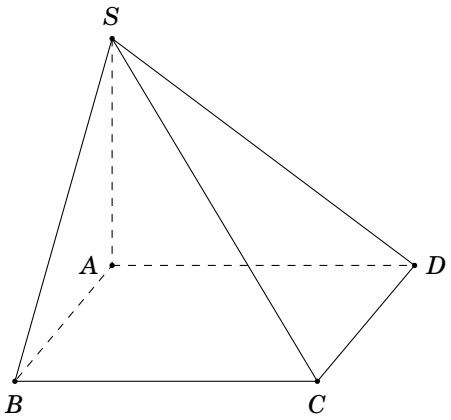

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 33.**

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh, $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy (tham khảo hình vẽ). Góc giữa đường thẳng $SC$ và $(ABCD)$ là góc nào sau đây.

**A.** $\widehat{SAC}$. **B.** $\widehat{CSA}$. **C.** $\widehat{SCA}$. **D.** $\widehat{ABC}$.

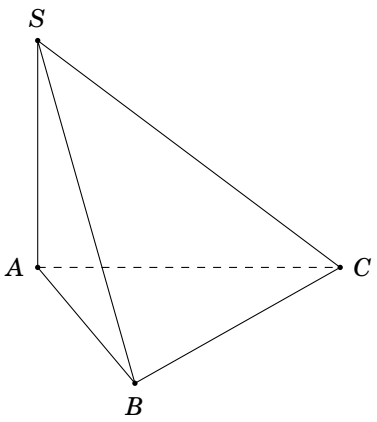



**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

. . . . . .

**Câu 34.**
Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA$ vuông góc với mặt phẳng $(ABC)$, $SA = a\sqrt{2}$, tam giác $ABC$ vuông cân tại $B$ và $AB = a\sqrt{2}$ (tham khảo hình vẽ). Góc giữa đường thẳng $SB$ và mặt phẳng $(ABC)$ bằng




**A.** $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 35.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Phát biểu nào sau đây **đúng**?

**A.** Góc phẳng nhị diện $[S,AB,C]$ là $\widehat{SBC}$. **B.** Góc phẳng nhị diện $[D,SA,C]$ là $\widehat{DAC}$.

**C.** Góc phẳng nhị diện $[S,AC,B]$ là $\widehat{SOB}$. **D.** Góc phẳng nhị diện $[D,SA,B]$ là $\widehat{BSD}$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 36.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, biết đáy $ABCD$ là hình vuông. Xác định góc giữa $A'C$ và $(ABCD)$.

**A.** $\widehat{A'CA}$. **B.** $\widehat{A'CA}$. **C.** $\widehat{A'AD}$. **D.** $\widehat{CA'A}$.

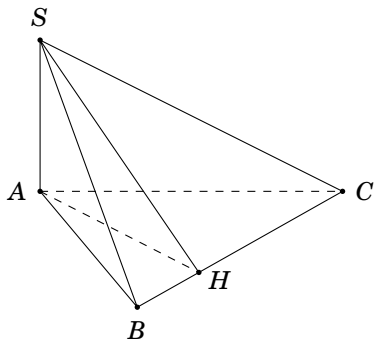
**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 37.**

Cho hình chóp $S.ABC$ như hình vẽ. Biết $SA \perp (ABC)$, $H$ là điểm thuộc đoạn thẳng $BC$. Xác định góc nhị diện $[H,SA,B]$.

**A.** $\widehat{HAB}$. **B.** $\widehat{HBA}$. **C.** $\widehat{CHA}$. **D.** $\widehat{CAH}$.




**Lời giải**

. . . . . .

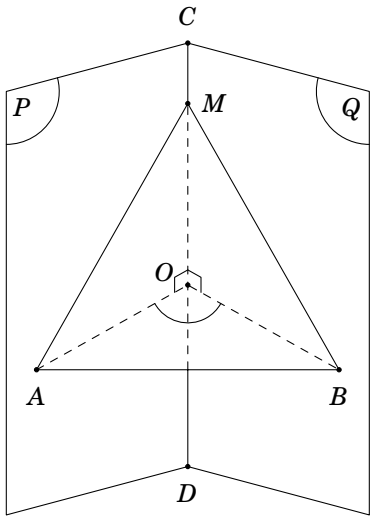
**Câu 13.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh, $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa đường thẳng $AD$ và mặt phẳng $(SAC)$

**A.** $\widehat{ACD}$. **B.** $\widehat{CBA}$. **C.** $\widehat{DAC}$. **D.** $\widehat{CAS}$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 14.** Cho hai mặt phẳng $(P)$, $(Q)$ có giao tuyến là đường thẳng $CD$. Điểm $A \in (P)$; $B \in (Q)$ và $AO$, $BO$ cùng vuông góc với $CD$. $M$ là một điểm bất kì thuộc $CD$ $(M \neq O)$. Xác định góc nhị diện $[A,CD,B]$




**A.** $\widehat{AOB}$. **B.** $\widehat{AMO}$. **C.** $\widehat{AMB}$. **D.** $\widehat{OAB}$.

**Lời giải**

**Câu 15.** Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh $2a$, $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy. Số đo của góc nhị diện $[S,BD,A]$

**A.** $90°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

**Lời giải**

**Câu 16.** Cho hình chóp $O.ABC$ có $OA$ vuông góc với mặt phẳng $(ABC)$, $OA = \dfrac{3a}{2}$, tam giác $ABC$ đều cạnh bằng $a$. Gọi $H$ là trung điểm $BC$. Góc giữa đường thẳng $OH$ và mặt phẳng $(ABC)$ bằng

**A.** $30^\circ$. **B.** $45^\circ$. **C.** $60^\circ$. **D.** $90^\circ$.

**Lời giải**

**Câu 17.** Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** Cho đường thẳng $a$ không vuông góc với mặt phẳng $(P)$ và đường thẳng $b$ nằm trong $(P)$. Khi đó, điều kiện cần và đủ để $b$ vuông góc với $a$ là $b$ vuông góc với hình chiếu $a'$ của $a$ trên $(P)$.

**B.** Cho đường thẳng $a$ không vuông góc với mặt phẳng $(P)$ và đường thẳng $b$ nằm trong $(P)$. Khi đó, điều kiện cần và đủ để $b$ vuông góc với $a$ là $b$ song song với hình chiếu $a'$ của $a$ trên $(P)$.

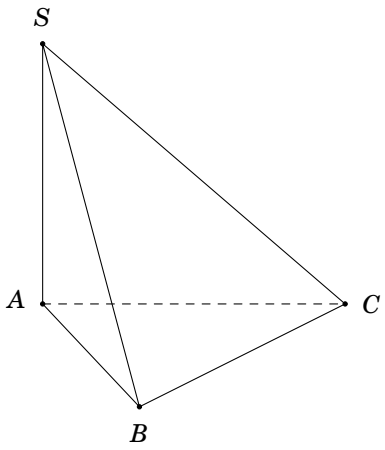
**C.** Cho đường thẳng $a$ vuông góc với mặt phẳng $(P)$ và đường thẳng $b$ nằm trong $(P)$. Khi đó, điều kiện cần và đủ để $b$ vuông góc với $a$ là $b$ vuông góc với hình chiếu $a'$ của $a$ trên $(P)$.

**D.** Cho đường thẳng $a$ tùy ý và đường thẳng $b$ nằm trong $(P)$. Khi đó, điều kiện cần và đủ để $b$ vuông góc với $a$ là $b$ vuông góc với hình chiếu $a'$ của $a$ trên $(P)$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 18.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA$ vuông góc với mặt phẳng $(ABC)$, tam giác $ABC$ vuông tại $B$ (tham khảo hình vẽ). Đường thẳng $SB$ vuông góc với đường thẳng nào sau đây?

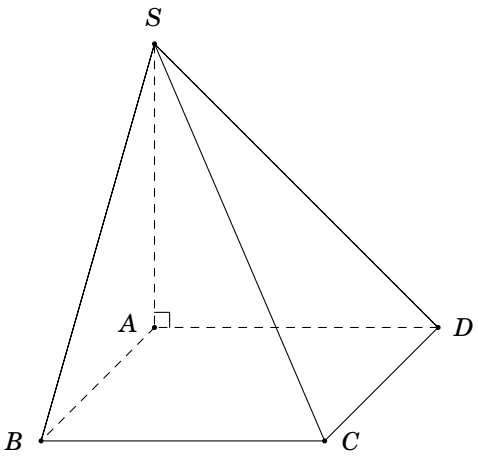



**A.** $SC$. **B.** $BC$. **C.** $AC$. **D.** $SA$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 19.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và $SA$ vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây đúng?




**A.** $BD \perp SC$. **B.** $BD \perp SD$. **C.** $AD \perp SD$. **D.** $AD \perp SC$.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 20.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, hai đường thẳng $AC$ và $BD$ cắt nhau tại $O$, $SO \perp (ABCD)$, tam giác $SAC$ là tam giác đều. Gọi $M$ là trung điểm của cạnh $AB$. Xác định góc nhị diện $[M,SO,D]$.

**A.** $\widehat{MOD}$. **B.** $\widehat{SOM}$. **C.** $\widehat{SOD}$. **D.** $\widehat{MOA}$.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 21.** Một chiếc máy bay cất cánh từ một đường băng và giữ vận tốc không đổi với độ lớn 240 km/h trong suốt 2 phút đầu kể từ khi cất cánh. Đường bay lên là một đường thẳng tạo với

mặt phẳng nằm ngang một góc 30°. Hỏi sau thời gian 1 phút kể từ lúc cất cánh, máy bay đạt độ cao bao nhiêu km so với mặt đất?

**Chú ý**: Độ cao của máy bay so với mặt đất là khoảng cách từ máy bay (coi là một điểm) đến hình chiếu của nó trên mặt đất.

**A.** 2 km. **B.** 2,5 km. **C.** 4 km. **D.** 4,5 km.

**Lời giải**

**Câu 22.** Một con diều được thả dây căng, tạo với mặt đất một góc 60°. Đoạn dây diều (từ đầu ở mặt đất đến đầu ở con diều) dài 10 m. Hỏi con diều cách mặt đất bao nhiêu centimét (lấy giá trị nguyên gần đúng)?

**A.** 866 (cm). **B.** 1154 (cm). **C.** 1000 (cm). **D.** 87 (cm).

**Lời giải**

**Câu 23.** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = 4a$, $AD = 3a$. Các cạnh bên đều có độ dài $5a$. Tính góc nhị diện $[S, BC, O]$

**A.** $\alpha \approx 75°46'$. **B.** $\alpha \approx 71°21'$. **C.** $\alpha \approx 68°31'$. **D.** $\alpha \approx 65°21'$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 24.** Cho tứ diện $OABC$ có $OA$, $OB$, $OC$ đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}$, $OA = a$. Tính góc nhị diện $[A,BC,O]$

**A.** $60°$. **B.** $30°$. **C.** $450°$. **D.** $90°$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 25.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $a$, gọi $\alpha$ là góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BB'D'D)$. Tính $\sin\alpha$.

**A.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

**Lời giải**

. . . . . .

**BẢNG ĐÁP ÁN**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Câu 1. A | Câu 2. A | Câu 3. A | Câu 4. D | Câu 5. B | Câu 6. B | Câu 7. A |
| Câu 8. C | Câu 9. D | Câu 10. B | Câu 11. A | Câu 12. A | Câu 13. D | Câu 14. A |
| Câu 15. A | Câu 16. C | Câu 17. A | Câu 18. A | Câu 19. A | Câu 20. D | Câu 21. B |
| Câu 22. B | Câu 23. A | Câu 24. A | Câu 25. A | Câu 26. B | Câu 27. D | Câu 28. A |
| Câu 29. C | Câu 30. A | Câu 31. B | Câu 32. B | Câu 33. C | Câu 34. B | Câu 35. C |
| Câu 36. A | Câu 37. A | Câu 13. C | Câu 14. A | Câu 15. C | Câu 16. C | Câu 17. A |
| Câu 18. B | Câu 19. A | Câu 20. A | Câu 21. A | Câu 23. D | Câu 24. B | Câu 25. D |

## PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

**Câu 1.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Khi đó

**a)** $AB \perp (SAD)$. **b)** $BC \perp (SAB)$. **c)** $AC \perp (SBD)$. **d)** $BC \perp (SCD)$.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Khi đó

**a)** $((SAC),(SBD)) = 90°$. **b)** $((SAC),(SBD)) = 45°$.

**c)** $(SAB) \perp (SBC)$. **d)** $(SCD) \perp (SAD)$.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Biết $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Khi đó

**a)** $((SAB),(ABCD)) = 90°$. **b)** $((SBC),(ABCD)) = \widehat{SAB}$.

**c)** $((SBC),(ABCD)) = 60°$. **d)** $((SBD),(ABCD)) \approx 69,43°$.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a$, cạnh bên $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khi đó

**a)** $((SCD),(ABCD)) = 45°$.

**b)** $((SBD),(ABCD)) = \widehat{SOA}$.

**c)** $((SBD),(ABCD)) \approx 58{,}74°$.

**d)** $(SBD) \perp (SAC)$.

Lời giải

**Câu 5.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a$, tâm của đáy là $O$ với $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm cạnh $AD$ và $BC$. Khi đó

**a)** $(SMN) \perp (ABCD)$.

**b)** $(SAD) \perp (SMN)$.

**c)** $((SBC),(ABCD)) = 30°$.

**d)** $((SBC),(SCD)) \approx 80{,}52°$.

Lời giải

**Câu 6.** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại $A$, biết $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và $\big((ACB'),(ABC)\big) = 60°$. Khi đó

**a)** $A'A \perp (ABC)$.
**b)** $\big((ACB'),(ABB'A')\big) = 60°$.
**c)** $((SBC),(ABCD)) = 30°$.
**d)** $((SBC),(SCD)) \approx 80{,}52°$.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 7.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi $E$, $F$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $BC$. Khi đó
**a)** Góc giữa đường thẳng $BD'$ và mặt phẳng $\big(A'B'CD\big)$ bằng $90°$.
**b)** Góc giữa đường thẳng $AC'$ và mặt phẳng $\big(A'BCD'\big)$ bằng $90°$.
**c)** Góc giữa đường thẳng $AC'$ và mặt phẳng $\big(CB'D'\big)$ bằng $90°$.
**d)** Góc giữa đường thẳng $EF$ và mặt phẳng $\big(BB'D'D\big)$ bằng $90°$.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 8.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên $SA$ vuông góc với đáy. Gọi $H$, $K$, $I$ lần lượt là hình chiếu của $A$ lên $SB$, $SC$, $SD$. Khi đó
**a)** $AH \perp (SBC)$.
**b)** $AI \perp (SCD)$.
**c)** $SC \perp (AHI)$.
**d)** $AK \perp (SBD)$.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 9.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $a$. Khi đó

**a)** Độ dài đường chéo của hình lập phương là $3a$.

**b)** Hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(BDD'C')$ vuông góc nhau.

**c)** Hình chiếu của $AC'$ trên mặt phẳng $(ABCD)$ là $A'C$.

**d)** Gọi $O$ là tâm của hình vuông $ABCD$. Một góc phẳng của góc nhị diện $[C,BD,C']$ là $\widehat{COC'}$.

Lời giải

**Câu 10.** Cho tứ diện đều $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $a$. Khi đó

**a)** $CD \perp (ABO)$ với $O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác $BCD$.

**b)** Góc giữa đường thẳng $AB$ và mặt phẳng $(BCD)$ bằng $60°$.

**c)** Côsin của góc giữa hai mặt phẳng $(ABC)$ và $(BCD)$ bằng $\frac{2}{3}$.

**d)** Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $CD$. Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng $AB$ và $CD$ là $MN$.

Lời giải

**Câu 11.** Cho hình chóp $S.ABCD$, $ABCD$ là hình vuông có tâm $O$ và $SA = SB = SC = SD$.

**a)** Hình chiếu vuông góc của $S$ trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm $O$.

**b)** Hình chiếu vuông góc của $SA$ trên mặt phẳng $(ABCD)$ là $SO$.

**c)** $BD \perp SA$.

**d)** Hình chiếu vuông góc của $\triangle SOB$ trên mặt phẳng $(ABCD)$ là $\triangle OBC$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 12.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm $O$. Biết $SA = SC$ và $SB = SD$.

**a)** Hình chiếu vuông góc của điểm $S$ lên $(ABCD)$ là điểm $O$.

**b)** Hình chiếu vuông góc của đường thẳng $SO$ lên $(ABCD)$ là điểm $O$.

**c)** Hình chiếu vuông góc của $\triangle SAB$ lên $(ABCD)$ là $\triangle OAB$.

**d)** Hình chiếu vuông góc của $\triangle BCD$ lên $(BCD)$ là $\triangle SBD$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 13.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a$, cạnh bên $SA$ vuông góc với đáy và $SA = a$. Gọi $E$, $F$ lần lượt là hình chiếu của $A$ lên $SB$, $SD$.

**a)** Góc giữa đường thẳng $AE$ và mặt phẳng $(SBC)$ bằng $90°$.

**b)** Góc giữa đường thẳng $AF$ và mặt phẳng $(SCD)$ bằng $60°$.

**c)** Góc giữa đường thẳng $SA$ và mặt phẳng $(SBC)$ bằng $45°$.

**d)** Góc giữa đường thẳng $SC$ và mặt phẳng $(AEF)$ bằng $30°$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 14.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a$, cạnh bên $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$.

**a)** $AB$ là hình chiếu của $SB$ trên mặt phẳng $(ABCD)$.

**b)** $(SB,(ABCD)) \approx 54{,}75°$.

**c)** $(SC,(ABCD)) = 45°$.

**d)** $(SC,(SAB)) = 60°$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 15.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB$, $AC$, $AD$ đôi một vuông góc với nhau. Biết rằng $AB = AC = a$, $AD = a\sqrt{3}$.

**a)** $AC \perp (ABD)$.

**b)** $(CD,(ABD)) = 30°$.

**c)** Góc phẳng nhị diện $[A,BC,D] \approx 87{,}79°$.

**d)** Góc phẳng nhị diện $[C,AB,D] = 90°$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 16.** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$, cạnh bên bằng $2a$. Gọi $M$ là trung điểm của cạnh $BC$. Khi đó:

**a)** $SO \perp (ABC)$.

**b)** $(SA,(ABC)) = (SA,OA)$.

**c)** $(SA,(ABC)) = 60°$.

**d)** $(SM,(ABC)) \approx 70{,}9°$.

Lời giải

**Câu 17.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

**a)** Số đo của góc nhị diện $[S,AB,D]$ bằng số đo góc $SDA$.

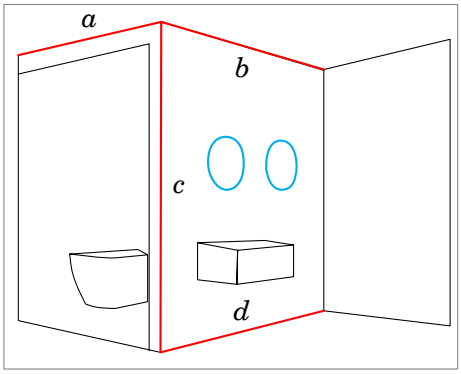
**b)** Số đo của góc nhị diện $[S,AD,B]$ bằng $90°$.

**c)** Số đo của góc nhị diện $[S,BD,C]$ bằng số đo của góc $SCO$.

**d)** Số đo của góc nhị diện $[S,BD,C]$ bằng $135°$.

Lời giải

**Câu 18.** Cho hình ảnh thiết kế phòng vệ sinh của một biệt thự.




**a)** Đường thẳng $c$ vuông góc với đường thẳng $a$.
**b)** Đường thẳng $c$ vuông góc với đường thẳng $b$.
**c)** Đường thẳng $a$ không vuông góc với đường thẳng $d$.
**d)** Khi đó đường thẳng $c$ vuông góc với mp $(a,b)$.

Lời giải

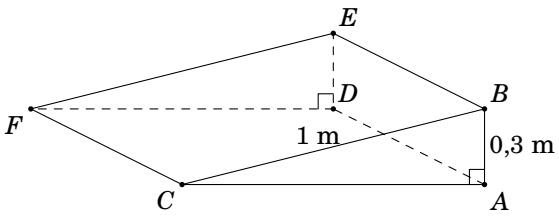
**Câu 19.** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$ và cạnh bên bằng $3a$.

**a)** Gọi $M$ là trung điểm $A'B'$, ta có $C'M = a\sqrt{2}$.
**b)** Góc phẳng nhị diện $[C,A'B',C']$ bằng $60°$.
**c)** Gọi $K$ là trung điểm $AB$, $M$ là trung điểm $A'B'$, khi đó: $A'B' \perp MK$.
**d)** Góc phẳng nhị diện $[A,A'B',C]$ bằng $30°$.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 20.** Một tấm cầu dốc kê bậc thềm được làm bằng cao su như hình vẽ sau. Biết $BCFE$ là hình vuông có cạnh bằng 1 m và $AB = 0{,}3$ m.




**a)** $\sin\widehat{BCA} = 0{,}5$.

**b)** $(BC,(ACFD)) \approx 17{,}46°$.

**c)** $BF = \sqrt{2}$ m.

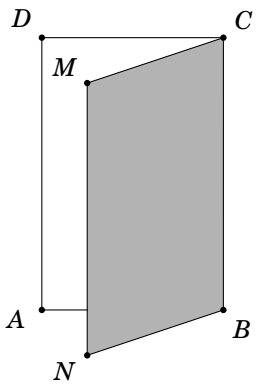
**d)** $(BF,(ACFD)) \approx 15{,}25°$.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 21.**

Hình dưới đây minh họa một cánh cửa và khung cửa. Cánh cửa có dạng hình chữ nhật $ABCD$ ở đó $AB = BN$. Góc mở cửa là góc nhị diện $[A,BC,N]$. Chiều rộng $BN$ của cửa là 1,2 m.




**a)** Góc giữa đường thẳng $MN$ và mặt sàn là 90°.

**b)** Số đo của góc nhị diện $[A,BC,N]$ bằng số đo góc nhị diện $[A,BC,M]$.

**c)** Biết khoảng cách $AN$ là 1,2 m, khi đó góc mở cửa là 60°.

**d)** Khi số đo góc mở cửa là 30°, thì khoảng cách $DM$ xấp xỉ 0,38 m (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2).

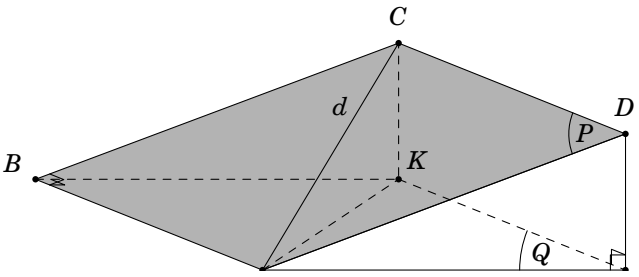
Lời giải

. . . . . .

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 22.** Trong lao động, mặt phẳng nghiêng thường được sử dụng vì tính tiện dụng của nó. Hình vẽ sau minh họa một mặt phẳng nghiêng dung để vận chuyển đồ, có độ nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang là 30°, vận chuyển lên mặt phẳng có độ cao 1 m.






**a)** $\widehat{CAK}$ được gọi là góc giữa đường thẳng $d$ và mặt phẳng $(Q)$.

**b)** $\widehat{CAK}$ là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[C,AB,K]$.

**c)** Mặt phẳng nghiêng có độ dài khoảng 1,73 m.

**d)** Biết chiều rộng của mặt phẳng nghiêng đang sử dụng là 1 m, khi đó sin của góc giữa đường thẳng $BC$ và mặt phẳng $(Q)$ là $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 23.** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông. Hình chiếu của $S$ trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm $H$ của $AD$. Gọi $M$, $N$, $P$ lần lượt là trung điểm của $SB$, $BC$, $CD$.

**a)** $BP \perp SC$. **b)** $BP \perp NM$. **c)** $BP \perp SA$. **d)** $BP \perp MA$.

**Lời giải**

. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | |
|---|---|---|
| **Câu 1.** a Đ b Đ c S d S | **Câu 2.** a Đ b S c Đ d Đ | **Câu 3.** a Đ b S c Đ d S |
| **Câu 4.** a Đ b Đ c S d Đ | **Câu 5.** a Đ b Đ c S d S | **Câu 6.** a Đ b S c Đ d Đ |
| **Câu 7.** a S b S c Đ d Đ | **Câu 8.** a Đ b Đ c Đ d S | **Câu 9.** a S b Đ c S d Đ |
| **Câu 10.** a Đ b S c S d Đ | **Câu 11.** a Đ b S c Đ d S | **Câu 12.** a Đ b Đ c Đ d S |
| **Câu 13.** a Đ b S c Đ d S | **Câu 14.** a Đ b Đ c Đ d S | **Câu 15.** a Đ b Đ c S d Đ |
| **Câu 16.** a Đ b Đ c S d S | **Câu 17.** a S b Đ c S d Đ | **Câu 18.** a Đ b Đ c S d Đ |
| **Câu 19.** a S b Đ c Đ d Đ | **Câu 20.** a S b Đ c Đ d S | **Câu 21.** a Đ b Đ c Đ d S |
| **Câu 22.** a Đ b S c S d Đ | **Câu 23.** a Đ b Đ c S d Đ | |

## PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác đều cạnh $a$, cạnh bên $SA$ vuông góc với đáy. Khi đó góc giữa hai mặt phẳng $(SAB)$ và $(SAC)$ bằng bao nhiêu độ?

KQ: | | | | |

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng đáy $2a$, đường cao bằng $a\sqrt{2}$. Tính $\tan\varphi$ của góc giữa mặt phẳng $(SCD)$ và $(ABCD)$. Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

KQ: | | | | |

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 3.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại $B$, $SA \perp (ABC)$, $AB = BC = a$, $SA = a\sqrt{3}$. Góc giữa hai mặt phẳng $(SBC)$ và $(ABC)$ bằng bao nhiêu độ?

KQ: | | | | |

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

**Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$, cạnh bên $SA$ vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{6}$. Góc giữa hai mặt phẳng $(SBD)$ và $(ABCD)$ bằng bao nhiêu độ?

KQ: | | | | |

**Lời giải**

**Câu 5.** Cho hai tam giác $ACD$ và $BCD$ nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = \sqrt{2}$, $CD = 2x\sqrt{2}$. Giá trị của $x$ để hai mặt phẳng $(ABC)$ và $(ABD)$ vuông góc với nhau là $x = \dfrac{a}{b}$ (với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị của $a^2 + 2b$ là bao nhiêu?

KQ: | | | | |

**Lời giải**

**Câu 6.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác $ABC$ vuông tại $B$ và $SA \perp (ABC)$, gọi $AH$ và $AK$ lần lượt là đường cao trong tam giác $SAB$ và $SAC$ và $D$ là giao điểm của $HK$ và $BC$. Mặt phẳng $(SAD)$ vuông góc với bao nhiêu mặt bên và mặt đáy của hình chóp?

KQ: | | | | |

**Lời giải**

. . . . . .

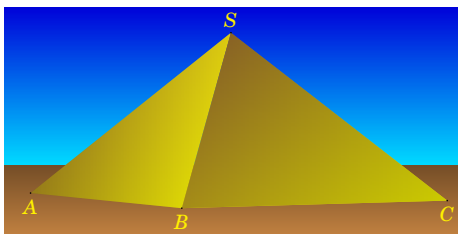
**Câu 7.** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $a$, $A'A = A'B = A'C = a$. $O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$, $H$ là trung điểm $BC$. Mặt phẳng $(A'AO)$ vuông góc với bao nhiêu mặt bên và mặt đáy của hình lăng trụ?

KQ: | | | | |

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 8.** Kim tự tháp Kheops ở Ai Cập có dạng là hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy dài 262 (m) cạnh bên dài 230 (m). Tính góc được tạo bởi các cạnh bên và mặt đáy (làm tròn đến hàng đơn vị của độ).




KQ: | | | | |

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 9.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = 1$ và đáy $ABC$ là tam giác đều với độ dài cạnh bằng 2. Góc giữa mặt phẳng $(SBC)$ và mặt phẳng $(ABC)$.

KQ: | | | | |

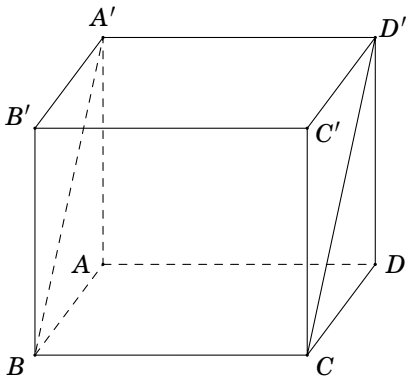
**Lời giải**

**Câu 10.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(AC'D')$.

KQ: | | | | |

**Lời giải**

**Câu 11.** Một khối gỗ có dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Biết rằng $AB = 10$ cm, $BC = 15$ cm và góc hai mặt phẳng $(BCD'A')$, $(ABCD)$ bằng $30°$. Tổng diện tích tất cả các mặt của khối gỗ đó đạt bao nhiêu $\text{cm}^2$? Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.




KQ: | | | | |

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 12.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Cạnh bên $SA$ vuông góc với đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng $(SBC)$ và $(SAD)$ bằng bao nhiêu độ?

KQ: | | | | |

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 13.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác $ABC$ vuông tại $C$, $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Trên hình có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với $BC$? KQ: [ ]

**Lời giải**

**Câu 14.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác đều cạnh bằng $a$. Biết $SA = 2a$ và $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi $\alpha$ là góc nhị diện $[S;BC;A]$. Tính $a+b$ biết $\tan\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{b}}\,(a,b \in \mathbb{N})$.

KQ: [ ]

**Lời giải**

**Câu 15.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi $K$ hình chiếu vuông góc của điểm $C$ trên mặt phẳng $(SBD)$. Biết rằng $SA = AC = 2\sqrt{5}$. Tính độ dài $CK$. KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 16.** Kim tự tháp Memphis tại bang Tennessee (Mỹ) có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao 98 m và cạnh đáy 180 m . Số đo góc nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy của kim tự tháp đó bằng bao nhiêu độ? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười. KQ: [ ]

**Lời giải**

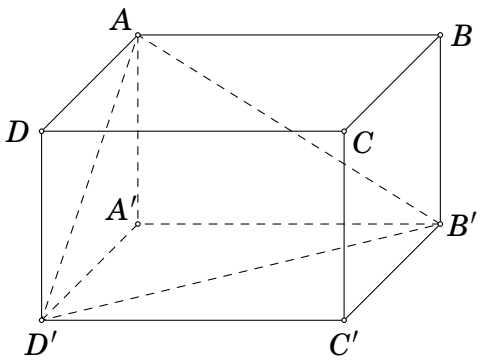
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 17.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa $A'C$ với mặt phẳng $(ABCD)$. (tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng phần chục). KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 18.** Một hộp phấn không bụi có dạng hình hộp chữ nhật, chiều cao hộp phấn bằng 8,2 cm và đáy của nó có hai kích thước là 8,5 cm và 10,5 cm (xem hình vẽ sau). Tìm góc phẳng nhị diện $[A, B'D', A']$ (tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng phần chục).




KQ:

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 19.** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có đáy tâm $O$, cạnh $a$ và cạnh bên là $2a$. Tính góc phẳng nhị diện $[S,BC,O]$? (tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng phần chục). KQ:

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 20.** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy tâm $O$ cạnh $a$ và cạnh bên là $a\sqrt{7}$. Tính góc giữa cạnh bên $SB$ và mặt phẳng đáy? (tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng phần chục).
KQ:

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 21.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a$, $AD=2a$, $AA'=3a$. Tính góc phẳng nhị diện $[A',BD,A]$? (tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng phần chục). KQ: ☐

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 22.** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy tâm $O$ cạnh $a$ và cạnh bên là $a\sqrt{7}$. Tính góc phẳng nhị diện $[S,BC,O]$? (tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng đơn vị). KQ: ☐

**Lời giải**

. . . . . .

.....

**Câu 23.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a$, hình chiếu vuông góc của $S$ trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm $H$ của $AB$. Cạnh bên $SB$ tạo với đáy một góc $60^\circ$. Gọi $\varphi$ là góc tạo bởi $SC$ và mặt phẳng $(ABCD)$. Biết rằng $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{x}}{y}$, trong đó $y$ là số nguyên dương nhỏ hơn 10. Tính giá trị của $S = x + y$. KQ: [ ]

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 24.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang cân $(AD \parallel BC)$ và $BC = 2$, $AB = AD = CD = 1$. Mặt bên $SBC$ là tam giác đều. Tính độ dài $SD$ để $SD$ vuông góc với $AC$. KQ: [ ]

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

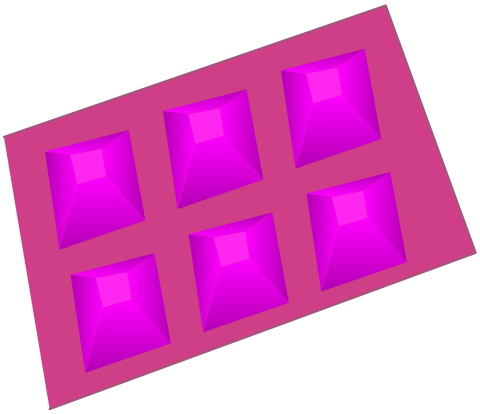
.....

.....

.....

.....

**Câu 25.** Một khay đá viên gồm 6 ngăn nhỏ có dạng là các hình chóp cụt với miệng và đáy là hình vuông (xem hình, kích thước của miệng lớn hơn của đáy).



Ta đo được độ đài cạnh đáy nhỏ, cạnh đáy lớn lần lượt bằng 1cm, 3 cm và chiều cao mặt bên bằng $\sqrt{2}$cm. Tính $cosin$ góc giữa đường chéo của viên đá với cạnh đáy của viên đá (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2). KQ: $\square$

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

**BẢNG ĐÁP ÁN**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Câu 1.** 60 | **Câu 2.** 1,4 | **Câu 3.** 60 | **Câu 4.** 60 | **Câu 5.** 9 |
| **Câu 6.** 2 | **Câu 7.** 3 | **Câu 8.** 36 | **Câu 9.** 30 | **Câu 10.** 60 |
| **Câu 11.** 589 | **Câu 12.** 45 | **Câu 13.** 3 | **Câu 14.** 7 | **Câu 15.** 2 |
| **Câu 16.** 47,4 | **Câu 17.** 35,3 | **Câu 18.** 51,1 | **Câu 19.** 81,4 | **Câu 20.** 74,5 |
| **Câu 21.** 73,4 | **Câu 22.** 79 | **Câu 23.** 20 | **Câu 24.** 2 | **Câu 25.** 0,67 |

# BÀI 25. KHOẢNG CÁCH

## A Lý thuyết

### 1 Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng, đến một mặt phẳng

#### 1.1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

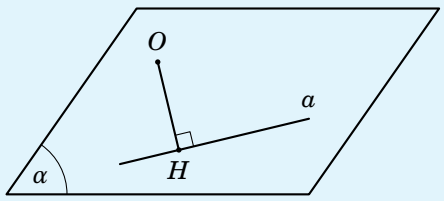
**Định nghĩa 1**

Cho điểm $O$ và đường thẳng $a$.
Trong mặt phẳng $(O,a)$

- Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $O$ trên $a$.
- Khi đó khoảng cách giữa hai điểm $O$ và $H$ được gọi là khoảng cách từ điểm $O$ đến đường thẳng $a$.

Kí hiệu: $\mathrm{d}(O,a)=OH$.
Nhận xét

- $\forall N\in a: ON\geq \mathrm{d}(O,a)=OH$.
- $\mathrm{d}(O,a)=0\Leftrightarrow O\in a$.




#### 1.2. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

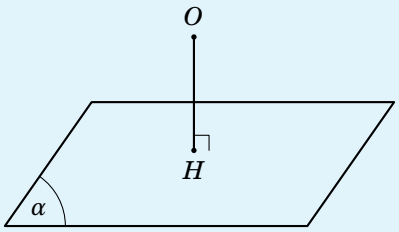
**Định nghĩa 2**

Cho điểm $O$ và mặt phẳng $(\alpha)$.

- Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $O$ trên mặt phẳng $(\alpha)$.
- Khi đó khoảng cách giữa hai điểm $O$ và $H$ được gọi là khoảng cách từ điểm $O$ đến mặt phẳng $(\alpha)$.

Kí hiệu: $\mathrm{d}(O,(\alpha))=OH$.
Nhận xét

- $\forall N\in (P): ON\geq \mathrm{d}(O,(P))=OH$.
- $\mathrm{d}(O,(P))=0\Leftrightarrow O\in (P)$.

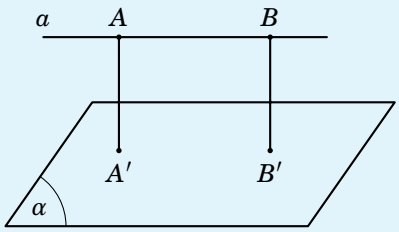


## 2 Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song, hai mặt phẳng song song

### 2.1. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

**Định nghĩa 3**

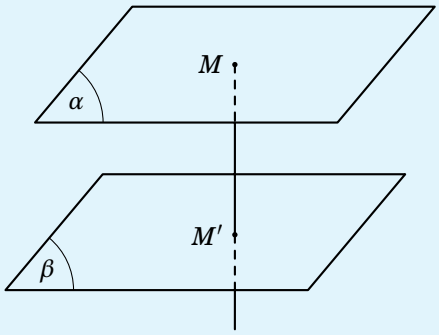
Cho đường thẳng $a$ song song với mặt phẳng $(\alpha)$.
Khoảng cách giữa đường thẳng $a$ và mặt phẳng $(\alpha)$ là khoảng cách từ một điểm bất kì của $a$ đến mặt phẳng $(\alpha)$.
Kí hiệu: $\mathrm{d}(a,(\alpha)) = \mathrm{d}(A,(\alpha))$.




### 2.2. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

**Định nghĩa 4**

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song $(\alpha)$, $(\beta)$ là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.
Kí hiệu: $\mathrm{d}((\alpha),(\beta)) = \mathrm{d}(M,(\beta))$ với điểm $M \in (\alpha)$.



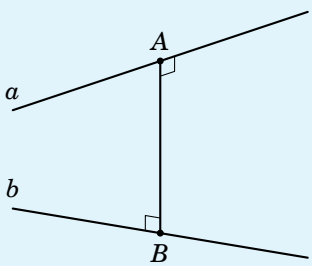

## 3 Đường vuông góc chung và khoảng cách giữa hai đường chéo nhau

### 3.1. Định nghĩa

**Định nghĩa 5**

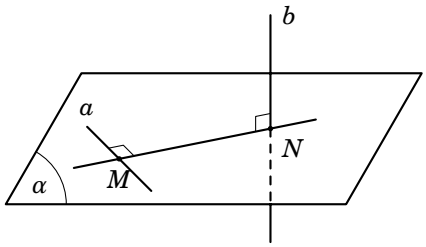
- Đường thẳng $\Delta$ cắt hai đường thẳng chéo nhau $a$ và $b$ và cùng vuông góc với mỗi đường ấy được gọi là đường vuông góc chung của $a$ và $b$.
- Nếu đường vuông góc chung $\Delta$ cắt hai đường thẳng chéo nhau $a$ và $b$ tại $A, B$ thì độ dài đoạn thẳng $AB$ gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau $a$ và $b$.

Kí hiệu: $\mathrm{d}(a,b) = AB$.



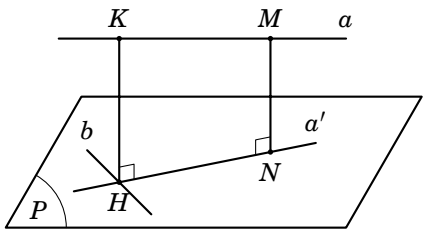
### 3.2. Cách dựng đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau

**Cách 1:** Khi $a$ vuông $b$.




- Dựng một mặt phẳng $(\alpha) \supset a$, $(\alpha) \perp b$ tại $N$.
- Trong $(\alpha)$ dựng $NM \perp a$ tại $M$.
- Đoạn $MN$ là đoạn vuông góc chung của $a$ và $b$.

**Cách 2:** Khi $a$ chéo $b$.




- Dựng một mặt phẳng $(P) \supset b$, $(P) \parallel a$.
- Dựng $a'$ là hình chiếu của $a$ lên mặt phẳng $(P)$, bằng cách lấy $M \in a$ dựng đoạn $MN \perp (P)$, lúc đó $a'$ là đường thẳng đi qua $N$ và song song với $a$.
- Gọi $H = a' \cap b$, dựng $HK \parallel MN \Rightarrow HK$ là đoạn vuông góc chung của $a$ và $b$.

**Nhận xét.**

*a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó với mặt phẳng song song với nó và chứa thằng còn lại.*

*b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.*

## B Các dạng bài tập

**Dạng 1. Khoảng cách từ chân đường cao đến một mặt bên**

**Bước 1:** Xác định giao tuyến $\Delta$.
**Bước 2:** Từ hình chiếu vuông góc của đỉnh, dựng $AH \perp \Delta$ (với $H \in \Delta$).
**Bước 3:** Dựng $AI \perp SH$ (với $I \in SH$ ). Khoảng cách cần tìm là $AI$. Với $S$ là đỉnh, $A$ là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.
**Ba bước dựng ở trên là sử dụng tính chất**
"Hai mặt phẳng vuông góc với nhau, nếu một đường thẳng nằm trên mặt này vuông góc với giao tuyến thì sẽ vuông góc với mặt phẳng kia."
**Nhận xét.** *Đây là bài toán cơ bản nhưng vô cùng quan trọng trong việc tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng. Hầu như tính khoảng cách từ một điểm bất kỳ đến mặt phẳng bên đều thông qua điểm này.*

**Ví dụ 1.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA$ vuông góc với đáy $(ABC)$. Hãy xác định khoảng cách từ điểm $A$ đến mặt bên $(SBC)$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 2.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác đều cạnh $a$, cạnh bên $SA$ vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ điểm $A$ đến mặt phẳng $(SBC)$ theo $a$, biết $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm $O$, cạnh $a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ $A$ đến mặt phẳng $(SBC)$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

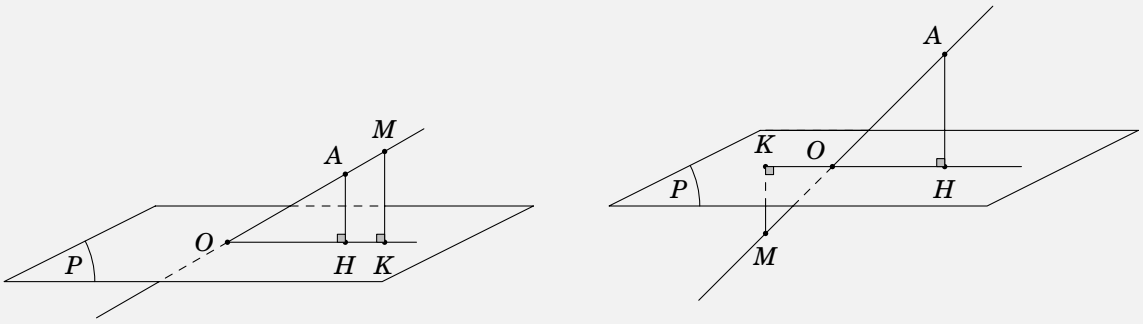
.....

.....

## Dạng 2. Khoảng cách từ điểm bất kỳ đến một mặt phẳng

Từ các điểm yêu cầu, ta quy về chân đường cao.

Giả sử $AM \cap (P) = \{O\}$ như hình vẽ.




Khi đó $\dfrac{\mathrm{d}(M,(P))}{\mathrm{d}(A,(P))} = \dfrac{OM}{OA} \Rightarrow \mathrm{d}(M,(P)) = \dfrac{OM}{OA} \cdot \mathrm{d}(A,(P))$ với $\dfrac{OM}{OA}$ là hằng số.

Để tính được $\mathrm{d}(M,(P))$ ta chỉ cần tính $\mathrm{d}(A,(P))$ bằng các bước sau:

**Bước 1:** Xác định giao tuyến $\Delta$.

**Bước 2:** Từ hình chiếu vuông góc của đỉnh, dựng $AH \perp \Delta$ (với $H \in \Delta$).

**Bước 3:** Dựng $AI \perp SH$ (với $I \in SH$). Khoảng cách cần tìm là $AI$.

Với $S$ là đỉnh, $A$ là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.

**Ví dụ 4.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại $A$ với $BC = 2a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Gọi $M$ là trung điểm $BC$. Biết $SA = SB = SC = a\sqrt{5}$.

a) Tính chiều cao của hình chóp.

b) Tính khoảng cách từ $M$ đến $(SAB)$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 5.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác vuông tại $B$, $BA = 3a$, $BC = 4a$; mặt phẳng $(SBC)$ vuông góc với mặt phẳng $(ABC)$. Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^\circ$. Tính khoảng cách từ điểm $B$ đến mặt phẳng $(SAC)$ theo $a$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 3. Khoảng cách giữa hai đường thẳngchéo nhau

**Phương pháp chung:** Ta phải chuyển khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau về khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng hoặc khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

**Trường hợp 1:** Nếu đường thẳng $\begin{cases} a \subset (P) \\ b \parallel (P) \end{cases} \Rightarrow \mathrm{d}(a,b) = \mathrm{d}(b,(P))$.

Khi đó chọn $M \in b$ sao cho có thể tính $\mathrm{d}(M,(P))$ là $\mathrm{d}(a,b)$.

Nếu không tìm được $\begin{cases} (P) \supset a \\ (P) \parallel b \end{cases}$ thì ta phải dựng $\begin{cases} (Q) \supset a \\ (Q) \parallel b \end{cases}$

**Trường hợp 2:** $a$ và $b$ lần lượt thuộc hai mặt phẳng song song nhau.

Nếu đường thẳng $\begin{cases} a \in (P) \\ b \in (Q) \\ (P) \parallel (Q) \end{cases} \Rightarrow \mathrm{d}(a,b) = \mathrm{d}((P),(Q))$

**Trường hợp 3:** $a$ là cạnh bên còn $b$ là một cạnh đáy của hình chóp.

Ta làm như sau:

- Gọi $I = a \cap (P)$ (mặt đáy).
- Từ $I$ dựng đường thẳng $\Delta$ song song với $b$.
- Khi đó $b$ song song với $(P)$ chứa $a$ và $\Delta$.
- Chọn $M$ trên $b$ sao cho có thể tính $\mathrm{d}(M,(P))$ là $\mathrm{d}(a,b)$.

! Để tính được $\mathrm{d}(M,(P))$ ta chỉ cần tính $\mathrm{d}(A,(P))$ bằng các bước sau:

**Bước 1:** Xác định giao tuyến $\Delta$.

**Bước 2:** Từ hình chiếu vuông góc của đỉnh, dựng $AH \perp \Delta$ (với $H \in \Delta$).

**Bước 3:** Dựng $AI \perp SH$ (với $I \in SH$). Khoảng cách cần tìm là $AI$. Với $S$ là đỉnh, $I$ là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.

**Ví dụ 6.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a$, $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$. Gọi $I$, $K$ lần lượt là trung điểm của $AD$, $BC$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $SB$ và $AD$ theo $a$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 7.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $a$. Hình chiếu vuông góc của $S$ trên $(ABC)$ là điểm $H$ thuộc cạnh $AB$ sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng $SC$ và $(ABC)$ bằng $60^\circ$. Tính khoảng cách giữa $SA$và $BC$ theo $a$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 8.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm $O$ cạnh $2a$, $SA \perp (ABCD)$, góc giữa $SB$ và mặt phẳng đáy bằng $60^\circ$.

a) Tính $\mathrm{d}(AC, SB)$.

b) Tính sin của góc giữa $SB$ và mặt phẳng $(SAC)$.

**Lời giải**

# C Bài tập rèn luyện

## PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

**A.** Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau $a$, $b$ là khoảng cách từ một điểm $M$ thuộc mặt phẳng $(\alpha)$ chứa $a$ và song song với $b$ đến một điểm $N$ bất kì trên $b$.

**B.** Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

**C.** Nếu hai đường thẳng $a$, $b$ chéo nhau và vuông góc với nhau thì đường vuông góc chung của chúng nằm trong mặt phẳng chứa đường này và vuông góc với đường kia.

**D.** Khoảng cách giữa đường thẳng $a$ và mặt phẳng $(\alpha)$ song song với $a$ là khoảng cách từ một điểm $A$ bất kì thuộc $a$ tới mặt phẳng $(\alpha)$.

**Lời giải**

**Câu 2.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $ABC$ là tam giác vuông tại $B$, $SA \perp (ABC)$. Khoảng cách từ điểm $A$ đến mặt phẳng $(SBC)$ là

**A.** Độ dài đoạn $AC$.

**B.** Độ dài đoạn $AB$.

**C.** Độ dài đoạn $AH$ trong đó $H$ là hình chiếu vuông góc của $A$ trên $SB$.

**D.** Độ dài đoạn $AM$ trong đó $M$ là trung điểm của $SC$.

**Lời giải**

.....

**Câu 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm $O$, $SA$ vuông góc với đáy $ABCD$. Xác định khoảng cách từ điểm $S$ đến $AB$

**A.** $SO$. **B.** $SA$. **C.** $SB$. **D.** $SD$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 4.** Cho khối chóp $S.ABC$ có chiều cao bằng 3, đáy $ABC$ có diện tích bằng 10. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

**A.** 2. **B.** 15. **C.** 10. **D.** 30.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $AD = 2a$, $SA = a$. Khoảng cách từ $A$ đến $(SCD)$ bằng

**A.** $\dfrac{3a}{\sqrt{7}}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....

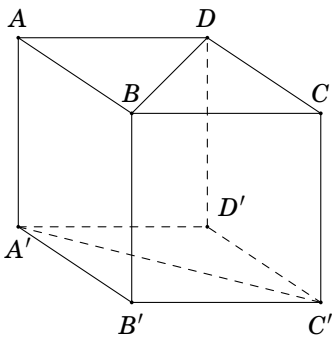
**Câu 6.** Tính thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC' = a\sqrt{3}$.

**A.** $a^3$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{6}a^3}{4}$. **C.** $3\sqrt{3}a^3$. **D.** $\dfrac{1}{3}a^3$.

**Lời giải**

**Câu 7.**

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $a$ (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng $BD$ và $A'C'$ bằng




**A.** $a$. **B.** $\sqrt{2}a$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. **D.** $\sqrt{3}a$.

**Lời giải**

**Câu 8.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với $AB = \dfrac{a}{2}$. Cạnh bên $SA$ vuông góc với đáy, $SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng $AD$ và $SC$ bằng

**A.** $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

**Lời giải**

**Câu 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a$, $SA$ vuông góc với đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng $SA$, $BC$ bằng

**A.** $a$. **B.** $\sqrt{2}a$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

**Lời giải**

**Câu 10.** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại $B$, $AB = a$ và $A'B = a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

**A.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

**Lời giải**

**Câu 11.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $a$. Biết $SA = a\sqrt{3}$ và $SA$ vuông góc với mặt phẳng $(ABC)$. Khoảng cách từ điểm $S$ đến đường thẳng $BC$ bằng

**A.** $a\sqrt{3}$. **B.** $a$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{3}$.

**Lời giải**

**Câu 12.** Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh $a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng $AB$ và $CD$ bằng

**A.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $a$.

**Lời giải**

**Câu 13.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại $C$, cạnh bên $SA$ vuông góc với mặt đáy, biết $AB = 4a$, $SB = 6a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V$, hãy tính tỷ số $\dfrac{a^3}{3V}$.

**A.** $\dfrac{\sqrt{5}}{80}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{40}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{20}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{80}$.

**Lời giải**

**Câu 14.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$ và $AD = 2a$, cạnh bên $SA$ vuông góc với đáy. Tính thể tích $V$ của khối chóp $S.ABCD$ biết góc giữa hai mặt phẳng $(SBD)$ và $(ABCD)$ bằng $60°$.

**A.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{15}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{6}$. **C.** $V = \dfrac{4a^3\sqrt{15}}{15}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}$.

**Lời giải**

**Câu 15.** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $a$, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Tính độ dài đường cao $SH$ của khối chóp.

**A.** $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $SH = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $SH = \dfrac{a}{2}$. **D.** $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

**Lời giải**

**Câu 16.** Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a$. Biết $\widehat{ASC} = 90^\circ$, tính thể tích $V$ của khối chóp đó.

**A.** $V = \dfrac{a^3}{3}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

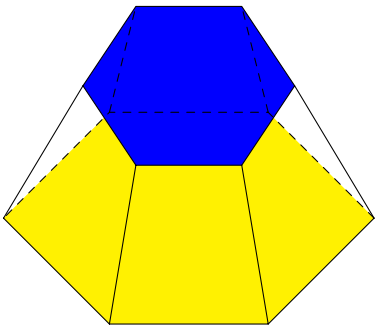
**Lời giải**

**Câu 17.** Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có góc giữa $A'C$ và hình chiếu của nó lên mặt phẳng $(ABC)$ là $45^\circ$, biết $A'C = a\sqrt{2}$. Tính độ dài $CC'$.

**A.** $a\sqrt{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $a^2$. **D.** $a$.

**Lời giải**

**Câu 18.** Cho một chậu nước hình chóp cụt đều (hình vẽ) có chiều cao bằng 3 dm, đáy là lục giác đều, độ dài cạnh đáy lớn bằng 2 dm và độ dài cạnh đáy nhỏ bằng 1 dm. Tính thể tích của chậu nước.

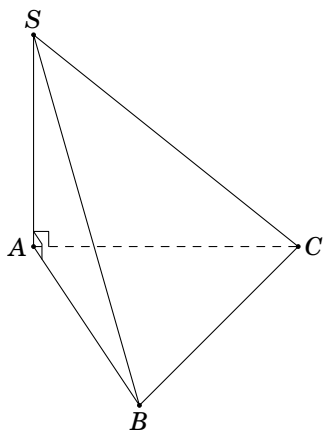


**A.** $\frac{21\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{21\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{21}{2}$. **D.** $\frac{21\sqrt{6}}{4}$.

**Lời giải**

**Câu 19.**

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác đều cạnh $a$, cạnh bên $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa $SA$ và mặt phẳng $(SBC)$ bằng $45^\circ$ (tham khảo hình bên). Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng




**A.** $\frac{a^3}{8}$. **B.** $\frac{3a^3}{8}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **D.** $\frac{a^3}{4}$.

**Lời giải**

**Câu 20.** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a$, $SA$ vuông góc với đáy và khoảng cách từ $A$ đến mặt phẳng $(SBC)$ bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích của khối chóp đã cho.

**A.** $\frac{a^3}{3}$. **B.** $a^3$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{9}$. **D.** $\frac{a^3}{2}$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Câu 1. A | Câu 2. C | Câu 3. B | Câu 4. C | Câu 5. C | Câu 6. A | Câu 7. A |
| Câu 8. D | Câu 9. A | Câu 10. D | Câu 12. B | Câu 13. B | Câu 14. C | Câu 15. C |
| Câu 16. C | Câu 17. D | Câu 18. A | Câu 19. A | Câu 20. A | | |

## PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

**Câu 1.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $a$. Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $B$ lên $B'D$. Khi đó

**a)** Khoảng cách từ điểm $B$ đến đường thẳng $DB'$ là $BH$.

**b)** Độ dài đoạn $BH = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

**c)** $\mathrm{d}(B,AC) = \dfrac{1}{2}AC$.

**d)** $\mathrm{d}(B,AA') = BA'$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại $A$ và $B$. Biết $BC = 2AB = 2AD = 2a$, $SB = a\sqrt{3}$. Cạnh bên $SB$ vuông góc với mặt đáy, $E$ là trung điểm của $BC$. Khi đó

**a)** $\mathrm{d}(D,(SAB)) = a$.

**b)** $\mathrm{d}(E,(SBD)) = EA$.

**c)** $\mathrm{d}(B,(SCD)) = BJ = \dfrac{a\sqrt{30}}{5}$, với $J$ là hình chiếu vuông góc của điểm $B$ lên $SD$.

**d)** $\mathrm{d}(I,(SCD)) = a\sqrt{30}$, với $I$ là giao điểm của $AC$ và $BD$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là vuông cạnh $a$. Biết $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Vẽ đường cao $AH$ của tam giác $SAB$. Vẽ đường cao $AK$ của tam giác $SAD$. Khi

đó

**a)** $BC \perp AH$.

**b)** Khoảng cách từ $A$ đến mặt phẳng $(SBC)$ bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

**c)** Khoảng cách từ $A$ đến mặt phẳng $(SBD)$ bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{7}$.

**d)** Khoảng cách từ $C$ đến mặt phẳng $(AHK)$ bằng $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

**Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a\sqrt{2}$, $AC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Khi đó

**a)** $AD \parallel (SBC)$.

**b)** Khoảng cách từ $D$ đến mặt phẳng $(SBC)$ bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

**c)** Khoảng cách giữa hai đường thẳng $SD$ và $AB$ bằng $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

**d)** Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

**Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt bên $(SAB)$ vuông góc với mặt đáy và tam giác $SAB$ đều cạnh $2a$. Biết tam giác $ABC$ vuông tại $C$ và cạnh $AC = a\sqrt{3}$. Khi đó

**a)** $SH \perp (ABC)$. **b)** $\mathrm{d}(S,(ABC)) = a\sqrt{3}$.

**c)** $\mathrm{d}(C,(SAB))=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

**d)** Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng $\dfrac{a^3}{6}$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 6.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác $ABC$ vuông tại $B$ có $AB=1$, $\widehat{ACB}=30^\circ$. Biết $SA$ vuông góc với mặt đáy và $SA=2$. Gọi $H$ là hình chiếu của $A$ trên $SB$. Khi đó

**a)** $\mathrm{d}(A,SB)=AH$.

**b)** $\mathrm{d}(B,(SAC))=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

**c)** $BC=\sqrt{3}$.

**d)** Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 7.** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC\cdot A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, khoảng cách từ điểm $A'$ đến mặt phẳng $(AB'C')$ bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Khi đó

**a)** Trong mặt phẳng $(A'B'C')$, kẻ $A'H\perp B'C'$ tại $H$. Khi đó $B'C'\perp(AA'H)$.

**b)** $\mathrm{d}\big((ABC),(A'B'C')\big)=a$.

**c)** Diện tích đáy của lăng trụ là $a^2\sqrt{5}$.

**d)** Thể tích khối lăng trụ là $a^3\sqrt{3}$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 8.** Xét khối tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB = x$, các cạnh còn lại đều bằng $2\sqrt{3}$.

**a)** Diện tích tam giác $BCD$ bằng $S_{BCD} = 3\sqrt{3}$.

**b)** $V_{ABCD} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \cdot x \cdot \sqrt{36 - x^2}$.

**c)** Khi $x = 3$ thì $V = \dfrac{9}{4}$.

**d)** Khi $x = 3\sqrt{2}$ thì thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

**Câu 9.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $a$. Gọi $O$ là giao điểm $AC$ và $BD$. Khi đó

**a)** $\mathrm{d}(SO, CD) = OE$ với $E$ là trung điểm $CD$.

**b)** $\mathrm{d}(AD, SB) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(A, (SBC))$.

**c)** Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $O$ lên $SE$. Khi đó $\mathrm{d}(AB, SC) = 2\mathrm{d}(O, (SCD)) = 2OH$.

**d)** Gọi $G$; $F$ lần lượt là trung điểm $BC$; $AD$. Khi đó $\mathrm{d}(GF, SE) = \dfrac{1}{2}OH$.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .

**Câu 10.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy $ABC$ là tam giác đều cạnh $a$, $AA' = \dfrac{3a}{2}$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của $A'$ lên $(ABC)$ là $H$ là trung điểm $BC$. Khi đó

**a)** $A'H$ là đường cao hình lăng trụ.

**b)** Tam giác $A'HA$ vuông tại $A'$.

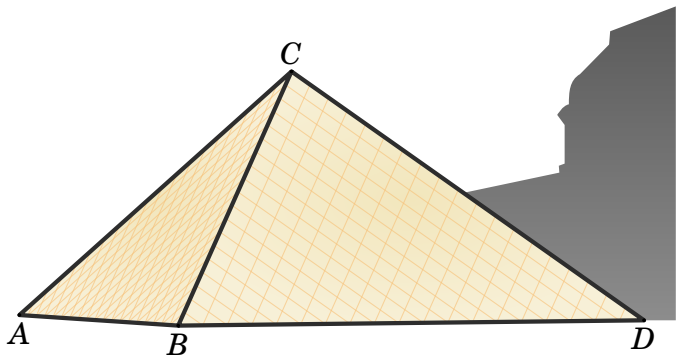
**c)** $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2}$.

**d)** Đường cao của khối lăng trụ trên là $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

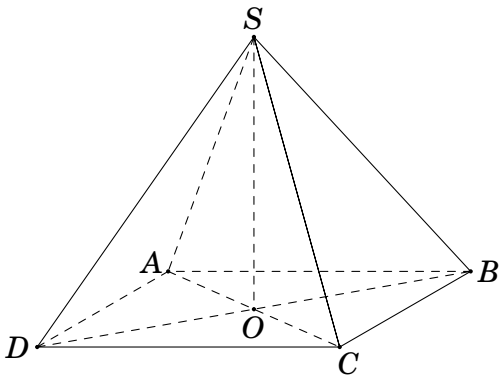
**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 11.** Kim tự tháp bằng kính tại bảo tàng Louvre ở Paris có dạng hình chóp tứ giác đều với cạnh bên là 32,32 m và cạnh đáy là 34 m.




Giả sử người ta kí hiệu hình chóp tứ giác đều là $S.ABCD$ tâm $O$ như hình vẽ.




Khi đó:

**a)** Chiều cao của kim tự tháp là $SA$.

**b)** Khoảng cách từ đỉnh tháp đến mặt phẳng đáy là $SO$.

**c)** Chiều cao của kim tự tháp là $\sqrt{SB^2 - OB^2}$.

**d)** Chiều cao của kim tự tháp là gần bằng 24,2 (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | |
|---|---|---|
| **Câu 1.** a Đ b S c Đ d S | **Câu 2.** a Đ b S c Đ d S | **Câu 3.** a Đ b Đ c S d S |
| **Câu 4.** a Đ b S c Đ d S | **Câu 5.** a Đ b Đ c S d S | **Câu 6.** a Đ b S c Đ d S |
| **Câu 7.** a Đ b Đ c S d Đ | **Câu 8.** a Đ b S c S d Đ | **Câu 9.** a Đ b S c Đ d S |
| **Câu 10.** a Đ b S c Đ d Đ | **Câu 11.** a S b Đ c Đ d S | |

## PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a$, cạnh bên $SA$ vuông góc với đáy và $SA = \sqrt{3}$. Khoảng cách từ $D$ đến mặt phẳng $(SBC)$ bằng bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

KQ: ☐

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 2.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác đều cạnh $a$, $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \dfrac{a}{2}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng $SA$ và $BC$ bằng bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

KQ: ☐

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 3.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác vuông tại $A$, $AB = 1$, $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi $M$ là trung điểm của $BC$. Biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng $AC$ và $SM$ bằng $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. Tính $SA$? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

KQ: ☐

**Lời giải**

**Câu 4.** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy $ABC$ là tam giác đều cạnh 1 và khoảng cách từ $A$ đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\dfrac{2\sqrt{57}}{19}$. Tính chiều cao của hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$?

KQ:

**Lời giải**

**Câu 5.** Một bể cá được làm bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật có ba kích thước là 0,6 m; 2 m; 0,8 m. Tìm thể tích của bể cá đó.

KQ:

**Lời giải**

**Câu 6.** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh 2. Tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau $AB$, $CD$. (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

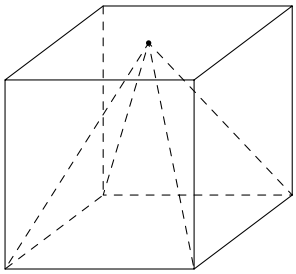
KQ: ☐

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 7.**

Một cái hộp hình lập phương, bên trong nó đựng một mô hình đồ chơi có dạng hình chóp tứ giác đều mà đỉnh của hình chóp đó trùng với tâm của một mặt chiếc hộp, giả sử hình vuông đáy của hình chóp trùng với một mặt của chiếc hộp (mặt này cùng với mặt chứa đỉnh hình chóp là hai mặt đối nhau). Biết cạnh của chiếc hộp bằng 30 cm, thể tích phần không gian bên trong chiếc hộp không bị chiếm bởi mô hình đồ chơi dạng hình chóp (mô hình đồ chơi được làm bởi chất liệu nhựa đặc bên trong) đạt bao nhiêu $\text{dm}^3$?



KQ: ☐

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 8.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh 1, tam giác $SAB$ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tìm thể tích khối chóp $S.ABCD$. (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

KQ: ☐

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 9.** Một hình chóp cụt đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy lớn bằng 4, cạnh đáy nhỏ bằng 2 và chiều cao của nó bằng $\frac{3}{2}$. Tìm thể tích của khối chóp cụt đều đó. (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

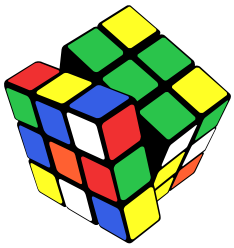
KQ: ☐

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 10.**

Một khối rubik $3 \times 3$ (được chia làm 27 khối lập phương nhỏ) có dạng một hình lập phương với kích thước cạnh bằng 6 cm. Tìm thể tích của khối rubik đó, biết khoảng hở giữa các khối lập phương nhỏ không đáng kể.



KQ: ☐

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 11.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $SA = 2$, $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Gọi $O$ là tâm của $ABCD$. Tính khoảng cách từ $S$ đến $DM$ với $M$ là trung điểm $OC$. (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 12.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh 2. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$, $(CB'D')$. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 13.** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có $BC = 2$, $AB = \sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ $AA'$ đến mặt phẳng $(BCC'B')$. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

KQ:

## Lời giải

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Câu 1.** 0,87 | **Câu 2.** 0,87 | **Câu 3.** 1,41 | **Câu 4.** 2 | **Câu 5.** 0,96 |
| **Câu 6.** 1,4 | **Câu 7.** 18 | **Câu 8.** 0,3 | **Câu 9.** 6,1 | **Câu 10.** 116 |
| **Câu 11.** 2,8 | **Câu 12.** 1,15 | **Câu 13.** 0,87 | | |

# BÀI 26. THỂ TÍCH

## A Lý thuyết

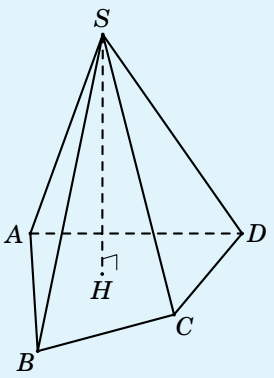
### 1 Thể tích khối chóp

**Định nghĩa 1**

**Công thức tính thể tích khối chóp:**

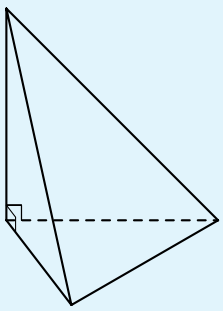
$$V = \frac{1}{3}S \cdot h$$

Trong đó:
$S$ là diện tích đáy
$h$ là chiều cao khối chóp
(khoảng cách từ đỉnh đến mặt đáy)

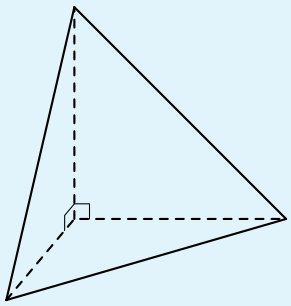



**Cách xác định đường cao khối chóp:**

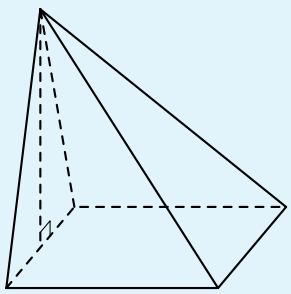
*Cạnh bên vuông góc với đáy*
Đường cao chính là cạnh bên.



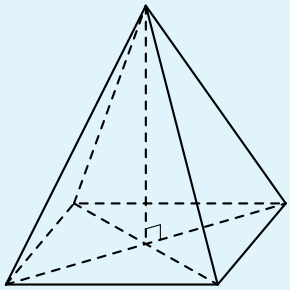
*Hai mặt bên vuông góc với đáy*
Đường cao là giao tuyến của hai mặt bên vuông góc với đáy.



*Mặt bên vuông góc với đáy*
Đường cao của mặt bên vuông góc với đáy.



*Hình chóp đều*
Đường cao hạ từ đỉnh đến tâm của đa giác đáy.



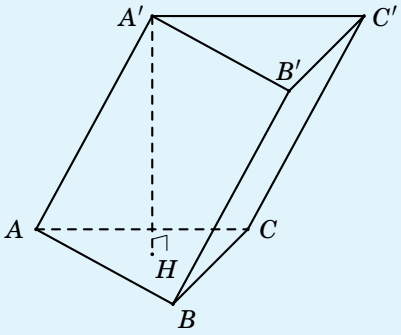
## 2 Thể tích khối lăng trụ

**Định nghĩa 2**

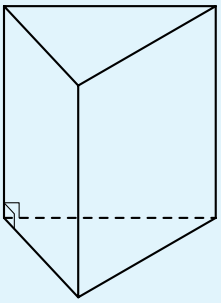
**Công thức tính thể tích khối lăng trụ:**

$$V = S \cdot h$$

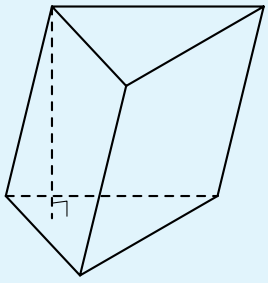
Trong đó:
$S$ là diện tích đáy
$h$ là chiều cao khối lăng trụ
(khoảng cách từ đỉnh đến mặt đáy)



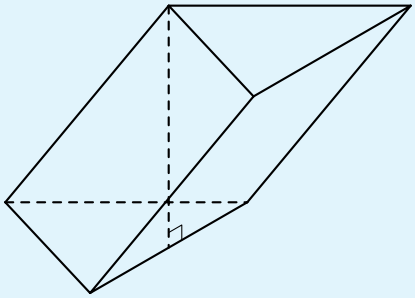

**Cách xác định đường cao khối lăng trụ:**
*Cạnh bên vuông góc với đáy*
Đường cao chính là cạnh bên.
*Lăng trụ đứng*
Đường cao chính là cạnh bên.



*Lăng trụ xiên*
Đường cao hạ từ đỉnh xuống mặt đáy.



*Lăng trụ có hình chiếu*
Đường cao là hình chiếu vuông góc của một đỉnh xuống mặt đáy.



## 3 Công thức tính diện tích đáy

*Tam giác*

$S = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c$.

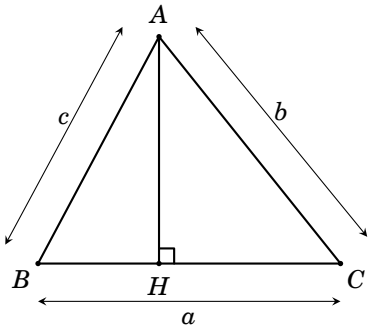
$S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C$.

$S = \frac{abc}{4R} = 2R^2 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$ với $R$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

$S = p \cdot r$ với $p$ là nửa chu vi và $r$ là bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

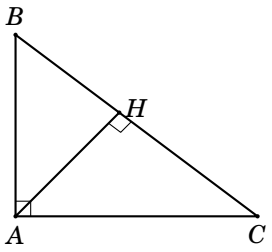
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với $p = \frac{a+b+c}{2}$

hoặc $S = \frac{1}{4}\sqrt{\left[(a+b)^2 - c^2\right]\left[c^2 - (a-b)^2\right]}$.




*Tam giác vuông* $\triangle ABC$ vuông tại $A$

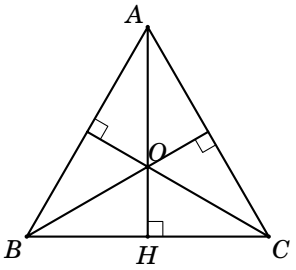
$S = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2}BC \cdot AH$.




*Tam giác đều*

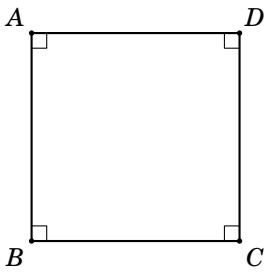
$\triangle ABC$ đều, cạnh $AB$ có $S = (AB)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$;

Chiều cao tam giác đều $h = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.




*Hình vuông cạnh* $AB$

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S = (AB)^2$.



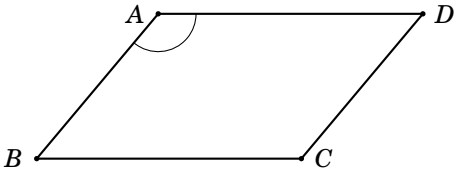

*Hình chữ nhật*

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S = AB \cdot BC$.



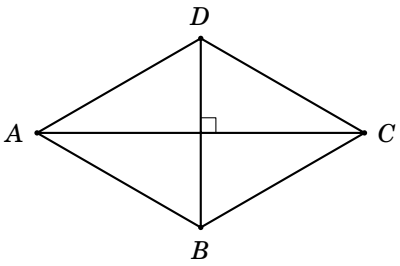

*Hình bình hành*

Diện tích hình bình hành $ABCD$ là $S = AB \cdot AD \cdot \sin\widehat{BAD}$.



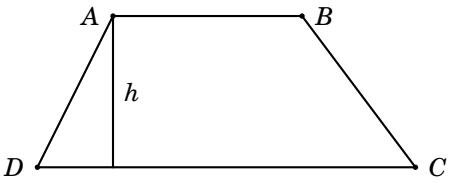
*Hình thoi*

Diện tích hình thoi $ABCD$ là $S = AB \cdot AD \cdot \sin\widehat{BAD} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BD$.




*Hình thang*

Diện tích hình thang $ABCD$ là $S = \dfrac{1}{2}(AB + CD) \cdot h$.



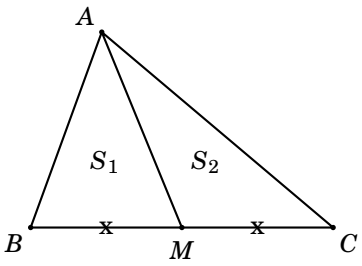

*Tứ giác có hai đường chéo vuông góc* có $S = \dfrac{1}{2}AC \cdot BD$.

## 4 Tỷ số diện tích

Ta có các tỷ số thường gặp sau

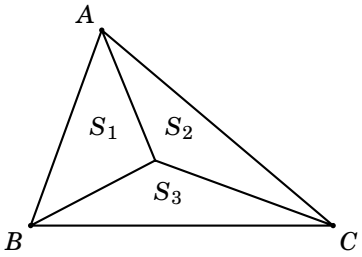
$AM$ trung tuyến, đặt $S_{ABC} = S$.

$\Rightarrow S_1 = S_2 = \dfrac{S}{2}$.



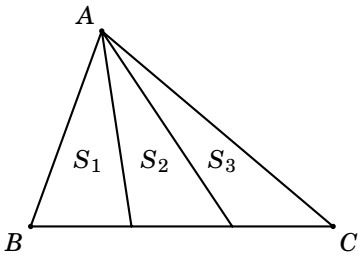

$G$ là trọng tâm, đặt $S_{ABC} = S$.

$\Rightarrow S_1 = S_2 = S_3 = \dfrac{S}{3}$.



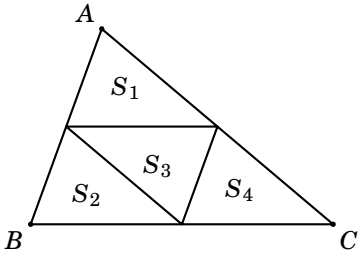

Ta có $BM = MN = NC$, đặt $S_{ABC} = S$.

$\Rightarrow S_1 = S_2 = S_3 = \dfrac{S}{3}$.



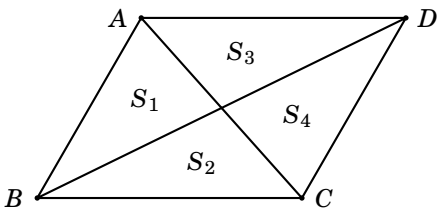

$M$; $N$; $F$ lần lượt là trung điểm $AB$; $AC$; $BC$, đặt $S_{ABC} = S$.

$\Rightarrow S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \dfrac{S}{4}$.

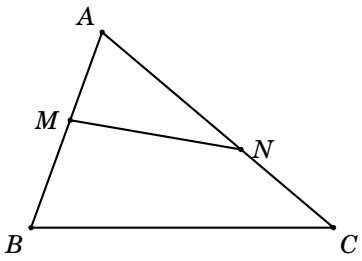


Đặt $S_{ABCD} = S$.

$\Rightarrow S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \dfrac{S}{4}$.




$\dfrac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \dfrac{AM}{AB} \cdot \dfrac{AN}{AC}$.




## B Các dạng bài tập

### Dạng 1. Hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy

Đây là dạng dễ xác định được đường cao $h$.

Áp dụng công thức $V = \dfrac{1}{3} S \cdot h$.

**Ví dụ 1.** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a$. Biết $SA$ vuông góc với $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ theo $a$.

**Lời giải**

**Ví dụ 2.** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, $BC = 2a$. Cạnh bên $SA$ vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ theo $a$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 3.** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông canh $a$. Cạnh bên $SA$ vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Tính thể tích của khối chóp $S.BCD$ theo $a$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 4.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $\Delta ABC$ vuông cân tại $A$, $SA = BC = a$. Tính theo $a$ thể tích $V$ của khối chóp $S.ABC$

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 5.** Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác $ABC$ vuông tại $B$, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$, biết rằng $SB = a\sqrt{5}$

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 6.** Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$, $AB = a$, $AC = 2a$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 7.** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$, $AB = 3a$, $AD = 2a$, $SB = 5a$. Tính thể tích $V$ của khối chóp $S.ABCD$ theo $a$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 8.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại $A$ và $B$ có $AB = a$, $AD = 3a$, $BC = a$. Biết $SA = a\sqrt{3}$, tính thể tích khối chóp $S.BCD$ theo $a$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$, $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa $SC$ và $(ABCD)$ là $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 10.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác vuông cân tại $B$ với $AC = a$ biết $SA$ vuông góc với đáy $ABC$ và $SC$ hợp với $(SAB)$ một góc $30^\circ$. Tính thể tích khối chóp

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 11.** Cho khối chóp $S.ABC$ có $ABC$ là tam giác vuông cân tại $A$, $BC = a\sqrt{2}$, $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa hai mặt phẳng $(SBC)$ và $(ABC)$ là $45^\circ$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 12.** Cho khối chóp $S.ABC$ có cạnh bên $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa hai mặt phẳng $(SBC)$ và $(ABC)$ là $60^\circ$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết $SA = a$ và diện tích tam giác $SBC$ bằng $3a^2$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 13.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác đều cạnh $a$ biết $SA$ vuông góc với đáy $ABC$ và $SA$ hợp với $(SBC)$ một góc $45^\circ$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 14.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy, tam giác $SBD$ là tam giác đều. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 15.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác đều cạnh $a$. Cạnh bên $SA$ vuông góc với mặt đáy $(ABC)$. Khoảng cách $d$ từ $A$ đến mặt phẳng $(SBC)$ bằng $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. Tính thể tích $V_{S.ABC}$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

## Dạng 2. Hình chóp có mặt bên vuông góc với đáy

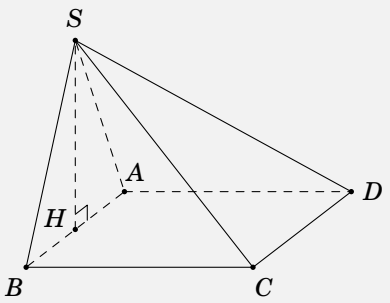
*Phương pháp:*

a) Khối chóp có mặt bên vuông góc mặt phẳng đáy.

- Áp dụng công thức $V = \dfrac{1}{3}Sh$.
- Chiều cao khối chóp là đoạn thẳng từ đỉnh của hình chóp ta kẻ vuông góc vào giao tuyến của mặt bên và mặt đáy.

b) Một số trường hợp thường gặp:

- Mặt bên $(SAB)$ vuông với đáy $(ABCD)$ và $SAB$ là tam giác đều cạnh $x$. Khi đó $SH \perp (ABCD) \Rightarrow h = SH = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$ với $H$ là trung điểm $AB$.
- Mặt bên $(SAB)$ vuông với đáy $(ABCD)$ và $SAB$ là tam giác cân tại $S$. Khi đó $SH \perp (ABCD)$ nên $h = SH$ với $H$ là trung điểm $AB$.




**Ví dụ 16.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có $AB = 2a\sqrt{3}$, $AD = 2a$. Mặt bên $(SAB)$ là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABD$.

**Lời giải**

**Ví dụ 17.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a$; hình chiếu của $S$ trên $(ABCD)$ trùng với trung điểm của cạnh $AB$; cạnh bên $SD = \dfrac{3}{2}a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ theo $a$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 18.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$. Tam giác $SAB$ cân tại $S$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Đường thẳng $SC$ tạo với mặt phẳng đáy một góc $60^\circ$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 19.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Mặt bên $SAB$ là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 20.** Cho tứ diện $ABCD$ có $ABC$ là tam giác đều cạnh $a$, tam giác $BCD$ cân tại $D$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABC)$. Biết $AD$ hợp với $(ABC)$ một góc $60^\circ$. Tính thể tích của khối tứ diện đã cho.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 21.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác $ABC$ vuông cân tại $C$, tam giác $SAB$ đều cạnh $a$ nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 22.** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a$, mặt bên $SAB$ là tam giác cân tại $S$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy, $SC$ tạo với $(SAB)$ một góc $45^\circ$. Tính thể tích của khối chóp đã cho.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

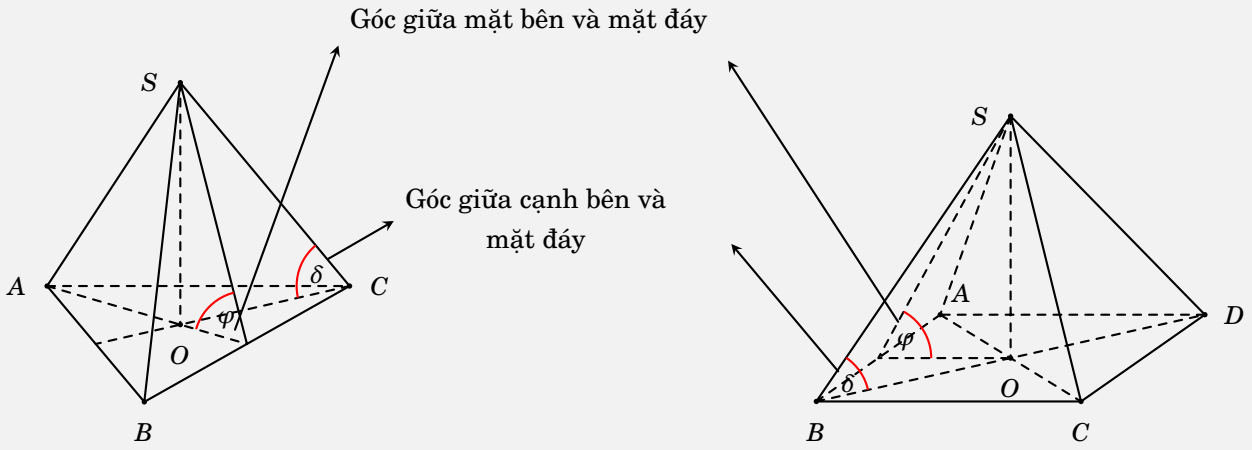
.....

.....

## Dạng 3. Tính thể tích hình chóp đều

- Khối chóp có các cạnh bên bằng nhau.
  - Áp dụng công thức $V = \dfrac{1}{3}Sh$.
  - Chiều cao khối chóp là đoạn thẳng từ đỉnh chóp hạ vuông góc xuống tâm mặt đáy.
- Một số dạng thường gặp:

- Hình chóp đều $S.ABC$, góc giữa mặt phẳng bên và mặt đáy là $\varphi$ hoặc góc giữa cạnh bên và mặt đáy là $\delta$.
- Hình chóp đều $S.ABCD$, góc giữa mặt phẳng bên và mặt đáy là $\varphi$ hoặc góc giữa cạnh bên và mặt đáy là $\delta$.




**Một số công thức tính nhanh**

| | |
|---|---|
| Chóp đều cạnh $x$, đáy là tam giác | $V=\dfrac{x^3\sqrt{2}}{12}$ |
| Chóp đều cạnh $x$, đáy là tứ giác | $V=\dfrac{x^3\sqrt{2}}{6}$ |
| Chóp đều, cạnh bên bằng $x$, đáy là tam giác cạnh $y$ | $V=\dfrac{y^2\sqrt{3x^2-y^2}}{12}$ |
| Chóp đều, cạnh bên bằng $x$, đáy là tứ giác cạnh $y$ | $V=\dfrac{y^2\sqrt{4x^2-2y^2}}{12}$ |
| Chóp đều, các mặt bên cùng tạo với đáy góc $\varphi$, đáy là tam giác cạnh $x$ | $V=\dfrac{x^3\tan\varphi}{24}$ |
| Chóp đều, các mặt bên cùng tạo với đáy góc $\varphi$, đáy là tứ giác cạnh $x$ | $V=\dfrac{x^3\tan\varphi}{6}$ |

**Ví dụ 23.** Tính chiều cao của hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $a$ và cạnh bên bằng $b$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 24.** Tính thể tích của khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $a$ và cạnh bên bằng $b$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 25.** Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $a$ và cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích $V$ của khối chóp đó theo $a$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 26.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a$, cạnh bên hợp với đáy một góc $60^\circ$. Thể tích $V$ của khối chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 27.** Khối chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau và có thể tích bằng $\frac{2}{3}$. Tính độ dài cạnh của khối chóp.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 28.** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm $O$ và cạnh bằng $a$, $SO \perp (ABCD)$, $SA = 3a$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 29.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, đáy $ABCD$ có diện tích $16\text{cm}^2$, diện tích một mặt bên là $8\sqrt{3}\text{cm}^2$. Tính thể tích $V$ của khối chóp $S.ABCD$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 30.** Cho khối tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng $a$, $M$ là trung điểm $DC$. Thể tích $V$ của khối chóp $M.ABC$ bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 31.** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $a$. Khoảng cách từ điểm $A$ đến mặt phẳng $(SBC)$ bằng $\frac{3a}{4}$. Tính thể tích khối chóp đã cho.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 32.** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA = 1$. Gọi $D$, $E$ lần lượt là trung điểm của $SA$, $SC$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết $BD \perp AE$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 4. Tính thể tích khối lăng trụ đứng

Áp dụng công thức chính $V = Sh$.

- Tính diện tích đáy $S$ ta xem lại phần **Công thức tính diện tích đáy**.
- Lăng trụ đứng có các đường cao song song nhau, tùy vào trường hợp đề ra ta sẽ sử dụng đường cao hợp lý.

| | ***Định nghĩa*** | ***Tính chất*** |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| ***Hình lăng trụ đứng*** | Là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy. | Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là các hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy. |
| ***Hình lăng trụ đều*** | Là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều. | Các mặt bên của hình lăng trụ đều là các hình chữ nhật bằng nhau và vuông góc với mặt đáy. |

**Ví dụ 33.** Khối lăng trụ có đáy là hình vuông cạnh $a$, đường cao bằng $a\sqrt{3}$ có thể tích bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 34.** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a$. Đáy $ABC$ là tam giác vuông cân tại $A$ và $AB = a$. Tính thể tích $V$ của khối lăng trụ đã cho.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 35.** Khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài đoạn $A'C = a\sqrt{3}$. Thể tích khối đó thu được bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 36.** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy $ABC$ là tam giác vuông cân tại $A$, $AB = 4a$ và $AA' = a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 37.** Cho lăng trụ tam giác đều có độ dài tất cả các cạnh bằng $3a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 38.** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy $ABC$ là tam giác vuông cân tại $B$. Biết $C'A = a\sqrt{2}$ và $\widehat{AC'C} = 45^\circ$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 39.** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 2. Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với mặt đáy bằng $45^\circ$. Thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 40.** Cho khối hộp đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $a$, $\widehat{ABC} = 120^\circ$, đường thẳng $AC_1$ tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc $60^\circ$. Tính thể tích khối hộp đã cho.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 41.** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy $ABC$ là tam giác đều cạnh $a\sqrt{3}$. Gọi $M$ là trung điểm của $BC$, $A'M = a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 42.** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy $ABC$ là tam giác vuông cân tại $B$ và $AC = 2a$, biết rằng $(A'BC)$ hợp với đáy $(ABC)$ một góc $45°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

# C Bài tập rèn luyện

## PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

**A.** Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau $a$, $b$ là khoảng cách từ một điểm $M$ thuộc mặt phẳng $(\alpha)$ chứa $a$ và song song với $b$ đến một điểm $N$ bất kì trên $b$.

**B.** Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

**C.** Nếu hai đường thẳng $a$, $b$ chéo nhau và vuông góc với nhau thì đường vuông góc chung của chúng nằm trong mặt phẳng chứa đường này và vuông góc với đường kia.

**D.** Khoảng cách giữa đường thẳng $a$ và mặt phẳng $(\alpha)$ song song với $a$ là khoảng cách từ một điểm $A$ bất kì thuộc $a$ tới mặt phẳng $(\alpha)$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $ABC$ là tam giác vuông tại $B$, $SA \perp (ABC)$. Khoảng cách từ điểm $A$ đến mặt phẳng $(SBC)$ là

**A.** Độ dài đoạn $AC$.

**B.** Độ dài đoạn $AB$.

**C.** Độ dài đoạn $AH$ trong đó $H$ là hình chiếu vuông góc của $A$ trên $SB$.

**D.** Độ dài đoạn $AM$ trong đó $M$ là trung điểm của $SC$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm $O$, $SA$ vuông góc với đáy $ABCD$. Xác định khoảng cách từ điểm $S$ đến $AB$

**A.** $SO$. **B.** $SA$. **C.** $SB$. **D.** $SD$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 4.** Cho khối chóp $S.ABC$ có chiều cao bằng 3, đáy $ABC$ có diện tích bằng 10. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

**A.** 2. **B.** 15. **C.** 10. **D.** 30.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $AD = 2a$, $SA = a$. Khoảng cách từ $A$ đến $(SCD)$ bằng

**A.** $\dfrac{3a}{\sqrt{7}}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....

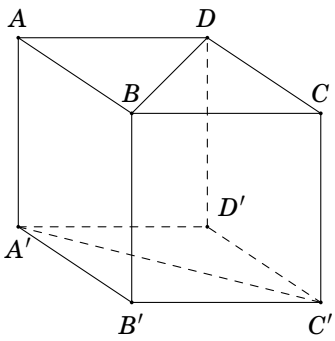
**Câu 6.** Tính thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC' = a\sqrt{3}$.

**A.** $a^3$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{6}a^3}{4}$. **C.** $3\sqrt{3}a^3$. **D.** $\dfrac{1}{3}a^3$.

**Lời giải**

**Câu 7.**

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $a$ (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng $BD$ và $A'C'$ bằng




**A.** $a$. **B.** $\sqrt{2}a$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. **D.** $\sqrt{3}a$.

**Lời giải**

**Câu 8.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với $AB = \dfrac{a}{2}$. Cạnh bên $SA$ vuông góc với đáy, $SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng $AD$ và $SC$ bằng

**A.** $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

**Lời giải**

**Câu 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a$, $SA$ vuông góc với đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng $SA$, $BC$ bằng

**A.** $a$. **B.** $\sqrt{2}a$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

**Lời giải**

**Câu 10.** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại $B$, $AB = a$ và $A'B = a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

**A.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

**Lời giải**

**Câu 11.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $a$. Biết $SA = a\sqrt{3}$ và $SA$ vuông góc với mặt phẳng $(ABC)$. Khoảng cách từ điểm $S$ đến đường thẳng $BC$ bằng

**A.** $a\sqrt{3}$. **B.** $a$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{3}$.

**Lời giải**

**Câu 12.** Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh $a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng $AB$ và $CD$ bằng

**A.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $a$.

**Lời giải**

**Câu 13.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại $C$, cạnh bên $SA$ vuông góc với mặt đáy, biết $AB = 4a$, $SB = 6a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V$, hãy tính tỷ số $\dfrac{a^3}{3V}$.

**A.** $\dfrac{\sqrt{5}}{80}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{40}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{20}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{80}$.

**Lời giải**

**Câu 14.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$ và $AD = 2a$, cạnh bên $SA$ vuông góc với đáy. Tính thể tích $V$ của khối chóp $S.ABCD$ biết góc giữa hai mặt phẳng $(SBD)$ và $(ABCD)$ bằng $60°$.

**A.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{15}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{6}$. **C.** $V = \dfrac{4a^3\sqrt{15}}{15}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}$.

**Lời giải**

**Câu 15.** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $a$, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Tính độ dài đường cao $SH$ của khối chóp.

**A.** $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $SH = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $SH = \dfrac{a}{2}$. **D.** $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

**Lời giải**

**Câu 16.** Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a$. Biết $\widehat{ASC} = 90^\circ$, tính thể tích $V$ của khối chóp đó.

**A.** $V = \dfrac{a^3}{3}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

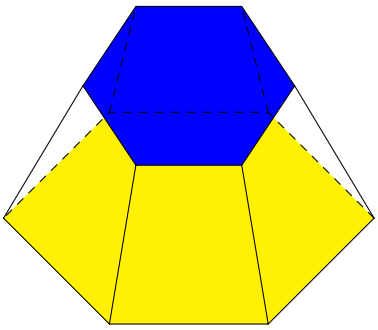
**Lời giải**

**Câu 17.** Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có góc giữa $A'C$ và hình chiếu của nó lên mặt phẳng $(ABC)$ là $45^\circ$, biết $A'C = a\sqrt{2}$. Tính độ dài $CC'$.

**A.** $a\sqrt{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $a^2$. **D.** $a$.

**Lời giải**

**Câu 18.** Cho một chậu nước hình chóp cụt đều (hình vẽ) có chiều cao bằng 3 dm, đáy là lục giác đều, độ dài cạnh đáy lớn bằng 2 dm và độ dài cạnh đáy nhỏ bằng 1 dm. Tính thể tích của chậu nước.



**A.** $\frac{21\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{21\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{21}{2}$. **D.** $\frac{21\sqrt{6}}{4}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

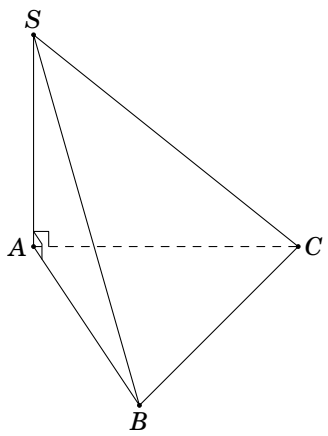
.....

.....

.....

**Câu 19.**

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác đều cạnh $a$, cạnh bên $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa $SA$ và mặt phẳng $(SBC)$ bằng $45^\circ$ (tham khảo hình bên). Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng




**A.** $\frac{a^3}{8}$. **B.** $\frac{3a^3}{8}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **D.** $\frac{a^3}{4}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 20.** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a$, $SA$ vuông góc với đáy và khoảng cách từ $A$ đến mặt phẳng $(SBC)$ bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích của khối chóp đã cho.

**A.** $\frac{a^3}{3}$. **B.** $a^3$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{9}$. **D.** $\frac{a^3}{2}$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Câu 1. A | Câu 2. C | Câu 3. B | Câu 4. C | Câu 5. C | Câu 6. A | Câu 7. A |
| Câu 8. D | Câu 9. A | Câu 10. D | Câu 12. B | Câu 13. B | Câu 14. C | Câu 15. C |
| Câu 16. C | Câu 17. D | Câu 18. A | Câu 19. A | Câu 20. A | | |

## PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

**Câu 1.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $a$. Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $B$ lên $B'D$. Khi đó

**a)** Khoảng cách từ điểm $B$ đến đường thẳng $DB'$ là $BH$.

**b)** Độ dài đoạn $BH = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

**c)** $\mathrm{d}(B,AC) = \dfrac{1}{2}AC$.

**d)** $\mathrm{d}(B,AA') = BA'$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại $A$ và $B$. Biết $BC = 2AB = 2AD = 2a$, $SB = a\sqrt{3}$. Cạnh bên $SB$ vuông góc với mặt đáy, $E$ là trung điểm của $BC$. Khi đó

**a)** $\mathrm{d}(D,(SAB)) = a$.

**b)** $\mathrm{d}(E,(SBD)) = EA$.

**c)** $\mathrm{d}(B,(SCD)) = BJ = \dfrac{a\sqrt{30}}{5}$, với $J$ là hình chiếu vuông góc của điểm $B$ lên $SD$.

**d)** $\mathrm{d}(I,(SCD)) = a\sqrt{30}$, với $I$ là giao điểm của $AC$ và $BD$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là vuông cạnh $a$. Biết $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Vẽ đường cao $AH$ của tam giác $SAB$. Vẽ đường cao $AK$ của tam giác $SAD$. Khi

đó

**a)** $BC \perp AH$.

**b)** Khoảng cách từ $A$ đến mặt phẳng $(SBC)$ bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

**c)** Khoảng cách từ $A$ đến mặt phẳng $(SBD)$ bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{7}$.

**d)** Khoảng cách từ $C$ đến mặt phẳng $(AHK)$ bằng $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

**Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a\sqrt{2}$, $AC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Khi đó

**a)** $AD \parallel (SBC)$.

**b)** Khoảng cách từ $D$ đến mặt phẳng $(SBC)$ bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

**c)** Khoảng cách giữa hai đường thẳng $SD$ và $AB$ bằng $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

**d)** Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

**Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt bên $(SAB)$ vuông góc với mặt đáy và tam giác $SAB$ đều cạnh $2a$. Biết tam giác $ABC$ vuông tại $C$ và cạnh $AC = a\sqrt{3}$. Khi đó

**a)** $SH \perp (ABC)$. **b)** $\mathrm{d}(S,(ABC)) = a\sqrt{3}$.

**c)** $\mathrm{d}(C,(SAB))=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

**d)** Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng $\dfrac{a^3}{6}$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 6.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác $ABC$ vuông tại $B$ có $AB=1$, $\widehat{ACB}=30^\circ$. Biết $SA$ vuông góc với mặt đáy và $SA=2$. Gọi $H$ là hình chiếu của $A$ trên $SB$. Khi đó

**a)** $\mathrm{d}(A,SB)=AH$.

**b)** $\mathrm{d}(B,(SAC))=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

**c)** $BC=\sqrt{3}$.

**d)** Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 7.** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC\cdot A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, khoảng cách từ điểm $A'$ đến mặt phẳng $(AB'C')$ bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Khi đó

**a)** Trong mặt phẳng $(A'B'C')$, kẻ $A'H\perp B'C'$ tại $H$. Khi đó $B'C'\perp(AA'H)$.

**b)** $\mathrm{d}\big((ABC),(A'B'C')\big)=a$.

**c)** Diện tích đáy của lăng trụ là $a^2\sqrt{5}$.

**d)** Thể tích khối lăng trụ là $a^3\sqrt{3}$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 8.** Xét khối tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB = x$, các cạnh còn lại đều bằng $2\sqrt{3}$.

**a)** Diện tích tam giác $BCD$ bằng $S_{BCD} = 3\sqrt{3}$.

**b)** $V_{ABCD} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \cdot x \cdot \sqrt{36 - x^2}$.

**c)** Khi $x = 3$ thì $V = \dfrac{9}{4}$.

**d)** Khi $x = 3\sqrt{2}$ thì thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

**Câu 9.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $a$. Gọi $O$ là giao điểm $AC$ và $BD$. Khi đó

**a)** $\mathrm{d}(SO, CD) = OE$ với $E$ là trung điểm $CD$.

**b)** $\mathrm{d}(AD, SB) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(A, (SBC))$.

**c)** Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $O$ lên $SE$. Khi đó $\mathrm{d}(AB, SC) = 2\mathrm{d}(O, (SCD)) = 2OH$.

**d)** Gọi $G$; $F$ lần lượt là trung điểm $BC$; $AD$. Khi đó $\mathrm{d}(GF, SE) = \dfrac{1}{2}OH$.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .

**Câu 10.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy $ABC$ là tam giác đều cạnh $a$, $AA' = \dfrac{3a}{2}$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của $A'$ lên $(ABC)$ là $H$ là trung điểm $BC$. Khi đó

**a)** $A'H$ là đường cao hình lăng trụ.

**b)** Tam giác $A'HA$ vuông tại $A'$.

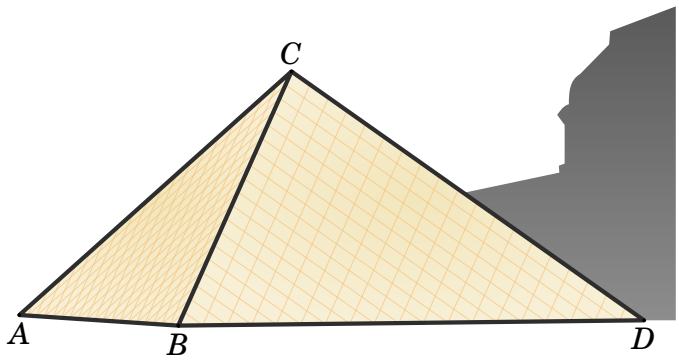
**c)** $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2}$.

**d)** Đường cao của khối lăng trụ trên là $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

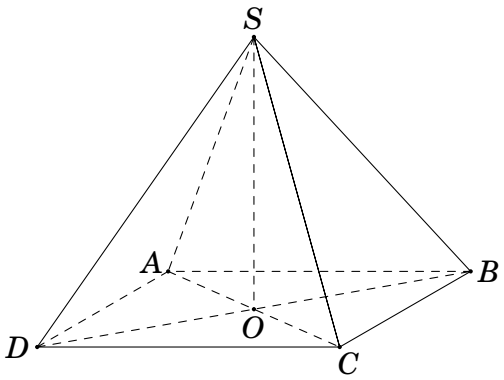
**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 11.** Kim tự tháp bằng kính tại bảo tàng Louvre ở Paris có dạng hình chóp tứ giác đều với cạnh bên là 32,32 m và cạnh đáy là 34 m.




Giả sử người ta kí hiệu hình chóp tứ giác đều là $S.ABCD$ tâm $O$ như hình vẽ.




Khi đó:

**a)** Chiều cao của kim tự tháp là $SA$.

**b)** Khoảng cách từ đỉnh tháp đến mặt phẳng đáy là $SO$.

**c)** Chiều cao của kim tự tháp là $\sqrt{SB^2 - OB^2}$.

**d)** Chiều cao của kim tự tháp là gần bằng 24,2 (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | |
|---|---|---|
| **Câu 1.** a Đ b S c Đ d S | **Câu 2.** a Đ b S c Đ d S | **Câu 3.** a Đ b Đ c S d S |
| **Câu 4.** a Đ b S c Đ d S | **Câu 5.** a Đ b Đ c S d S | **Câu 6.** a Đ b S c Đ d S |
| **Câu 7.** a Đ b Đ c S d Đ | **Câu 8.** a Đ b S c S d Đ | **Câu 9.** a Đ b S c Đ d S |
| **Câu 10.** a Đ b S c Đ d Đ | **Câu 11.** a S b Đ c Đ d S | |

## PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a$, cạnh bên $SA$ vuông góc với đáy và $SA = \sqrt{3}$. Khoảng cách từ $D$ đến mặt phẳng $(SBC)$ bằng bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

KQ:

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 2.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác đều cạnh $a$, $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \dfrac{a}{2}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng $SA$ và $BC$ bằng bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

KQ:

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 3.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác vuông tại $A$, $AB = 1$, $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi $M$ là trung điểm của $BC$. Biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng $AC$ và $SM$ bằng $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. Tính $SA$? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

KQ:

**Lời giải**

**Câu 4.** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy $ABC$ là tam giác đều cạnh 1 và khoảng cách từ $A$ đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\dfrac{2\sqrt{57}}{19}$. Tính chiều cao của hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$?

KQ:

**Lời giải**

**Câu 5.** Một bể cá được làm bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật có ba kích thước là 0,6 m; 2 m; 0,8 m. Tìm thể tích của bể cá đó.

KQ:

**Lời giải**

**Câu 6.** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh 2. Tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau $AB$, $CD$. (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

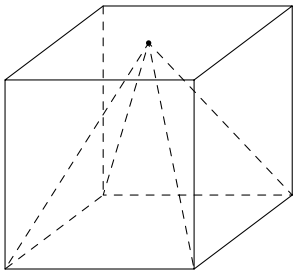
KQ: ☐

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 7.**

Một cái hộp hình lập phương, bên trong nó đựng một mô hình đồ chơi có dạng hình chóp tứ giác đều mà đỉnh của hình chóp đó trùng với tâm của một mặt chiếc hộp, giả sử hình vuông đáy của hình chóp trùng với một mặt của chiếc hộp (mặt này cùng với mặt chứa đỉnh hình chóp là hai mặt đối nhau). Biết cạnh của chiếc hộp bằng 30 cm, thể tích phần không gian bên trong chiếc hộp không bị chiếm bởi mô hình đồ chơi dạng hình chóp (mô hình đồ chơi được làm bởi chất liệu nhựa đặc bên trong) đạt bao nhiêu $\text{dm}^3$?



KQ: ☐

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 8.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh 1, tam giác $SAB$ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tìm thể tích khối chóp $S.ABCD$. (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

KQ: $\square$

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 9.** Một hình chóp cụt đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy lớn bằng 4, cạnh đáy nhỏ bằng 2 và chiều cao của nó bằng $\frac{3}{2}$. Tìm thể tích của khối chóp cụt đều đó. (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

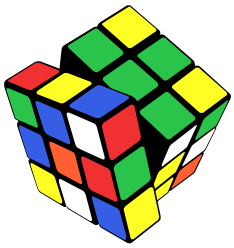
KQ: $\square$

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 10.**

Một khối rubik $3 \times 3$ (được chia làm 27 khối lập phương nhỏ) có dạng một hình lập phương với kích thước cạnh bằng 6 cm. Tìm thể tích của khối rubik đó, biết khoảng hở giữa các khối lập phương nhỏ không đáng kể.



KQ: $\square$

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 11.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $SA = 2$, $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Gọi $O$ là tâm của $ABCD$. Tính khoảng cách từ $S$ đến $DM$ với $M$ là trung điểm $OC$. (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

KQ:

**Lời giải**

**Câu 12.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh 2. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$, $(CB'D')$. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

KQ:

**Lời giải**

**Câu 13.** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có $BC = 2$, $AB = \sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ $AA'$ đến mặt phẳng $(BCC'B')$. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

KQ:

## Lời giải

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Câu 1.** 0,87 | **Câu 2.** 0,87 | **Câu 3.** 1,41 | **Câu 4.** 2 | **Câu 5.** 0,96 |
| **Câu 6.** 1,4 | **Câu 7.** 18 | **Câu 8.** 0,3 | **Câu 9.** 6,1 | **Câu 10.** 116 |
| **Câu 11.** 2,8 | **Câu 12.** 1,15 | **Câu 13.** 0,87 | | |

Chương 8: Xác suất

Chương 8

# QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

## BÀI 28. BIẾN CỐ HỢP,BIẾN CỐ GIAO, BIẾN CỐ ĐỘC LẬP

### A Lí thuyết

#### 1 Biến cố hợp

**Định nghĩa 1**

Cho hai biến cố $A$ và $B$. Biến cố "$A$ hoặc $B$ xảy ra" được gọi là biến cố hợp của $A$ và $B$. Ký hiệu: $A \cup B$.

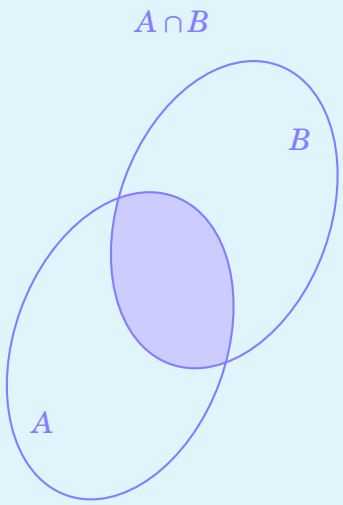
**Nhận xét.**

- *Biến cố $A \cup B$ xảy ra khi có ít nhất một trong hai biến cố $A$ hoặc $B$ xảy ra.*
- *Tập hợp mô tả biến cố $A \cup B$ là hợp của hai tập hợp mô tả biến cố $A$ và biến cố $B$.*

#### 2 Biến cố giao

**Định nghĩa 2**

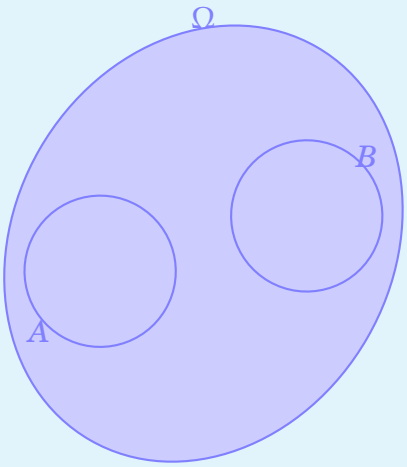
Cho hai biến cố $A$ và $B$. Biến cố "Cả $A$ và $B$ cùng xảy ra" được gọi là biến cố giao của $A$ và $B$. *Ký hiệu:* $AB$ hoặc $A \cap B$.



## 3 Hai biến cố xung khắc

**Định nghĩa 3**

Cho hai biến cố $A$ và $B$. Hai biến cố $A$ và $B$ được gọi là *xung khắc* nếu $A$ và $B$ không đồng thời xảy ra.




## 4 Biến cố độc lập

**Định nghĩa 4**

Cho hai biến cố $A$ và $B$. Hai biến cố $A$ và $B$ được gọi là *độc lập* nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.

**Nhận xét.** *Nếu hai biến cố $A$ và $B$ độc lập thì $A$ và $\overline{B}$, $\overline{A}$ và $B$, hoặc $\overline{A}$ và $\overline{B}$ cũng độc lập.*

# B Các dạng bài tập

**Dạng 1. Xác định và đếm số phần tử biến cố hợp**

Cho $k$ biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Biến cố "Có ít nhất một trong các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_k$ xảy ra" gọi là hợp của biến có đó, kí hiệu là $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$.

**Ví dụ 1.** Trong hộp có 4 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 4. Lấy ra ngẫu nhiên lần lượt 2 thẻ từ hộp. Xét các biến cố
$A$: "Thẻ lấy ra lần thứ nhất được số lẻ".
$B$: "Thẻ lấy ra lần thứ hai ghi số chẵn".
Hãy xác định và đếm số phần tử của biến cố $A \cup B$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 2.** Một hộp đựng 15 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 15. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong hộp. Xét các biến cố
$E$: "Số thẻ ghi trên tấm thẻ là số lẻ".
$F$: "Số thẻ ghi trên tấm thẻ là số nguyên tố".

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Nêu nội dung của biến cố hợp $G = E \cup F$. Hỏi $G$ là tập con nào của không gian mẫu?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 3.** Một hộp chứa 5 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ hộp. Xét các biến cố
$A$: "Hai viên bi lấy ra đều có màu xanh".
$B$: "Hai viên bi lấy ra đều có màu đỏ".

a) Có bao nhiêu kết quả thuận lợi cho biến cố $A$? Có bao nhiêu kết quả thuận lợi cho biến cố $B$?

b) Hãy mô tả bằng lời biến cố $A \cup B$ và tính số kết quả thuận lợi cho biến cố $A \cup B$.

**Lời giải**

**Ví dụ 4.** Thực hiện hai thí nghiệm. Xét các biến cố
$T_1$: "Thí nghiệm thứ nhất thành công".
$T_2$: "Thí nghiệm thứ hai thành công".
Hãy biểu diễn các biến cố sau theo hai biến cố $T_1$ và $T_2$.

a) $A$: "Có ít nhất một trong hai thí nghiệm thành công";

b) $B$: "Có đúng một trong hai thí nghiệm thành công".

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

## Dạng 2. Biến cố giao

- **Biến cố giao** Cho $k$ biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Biến cố "Tất cả $k$ biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_k$ đều xảy ra"gọi là giao của $k$ biến cố đó, kí hiệu là $A_1A_2\ldots A_k$.
- **Biến cố xung khắc** Hai biến cố $A$ và $B$ gọi là xung khắc nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra.
- **Biến cố độc lập** Cho $k$ biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_k$; $k$ biến cố này gọi là độc lập với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của mỗi biến cố không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của các biến cố còn lại.
- **Quy tắc Nhân Xác Suất** Nếu $k$ biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_k$ độc lập với nhau thì

$$P(A_1A_2\ldots A_k) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdots P(A_k).$$

**Nhận xét.**
- *Hai biến cố $A$ và $B$ là hai biến cố xung khắc khi và chỉ khi $A \cap B = \emptyset$.*
- *Nếu hai biến cố $A$ và $B$ độc lập với nhau thì $A$ và $\overline{B}$, $\overline{A}$ và $B$, $\overline{A}$ và $\overline{B}$ cũng độc lập với nhau.*

**Ví dụ 5.** Xét phép thử gieo một đồng xu và con xúc xắc (đều cân đối và đồng chất).
Xét các biến cố:
$A$: "Đồng xu xuất hiện mặt ngửa".
$B$: "Con xúc xắc xuất hiện mặt lẻ".

a) Biểu diễn các biến cố $A$, $B$ và $AB$ bởi các tập hợp.

b) Hai biến cố $A$, $B$ có độc lập hay không?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 6.** Xác định và đếm số phần tủ liên quan đến hai biến cố xung khắc.
Xét phép thử gieo một đồng xu hai lần và các biến cố sau:
$A$: "Kết quả gieo hai lân như nhau".
$B$: "Có ít nhất một lần xuất hiện mặt sấp".
$C$: "Lần thú hai mới xuất hiện mặt sấp".
$D$: "Lần đầu xuất hiện mặt sấp".
Hãy chỉ ra các cặp biến cố xung khắc trong các biến cố đã cho.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 7.** Xác định và đếm số phần tử liên quan đến hai biến cố xung khắc.
Khánh và Hà mỗi người ném một quả bóng vào rổ. Xét các biến cố:
$A$: "Không bạn nào ném bóng trúng vào rổ".
$B$: "Cả hai bạn đều ném bóng trúng rổ".
$C$: "Có đúng một bạn ném bóng trúng vào rổ".
$D$: "Có ít nhất một bạn ném bóng trúng vào rổ".
Hãy chỉ ra các cặp biến cố đối và xung khắc trong các biến cố đã cho.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 8.** Xác định và đếm số phần tử của biến cố giao.
Một hộp đựng 30 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 30. Rút ngẫu nhiên 1 tấm thẻ trong hộp. Xét hai biến cố sau:
$A$: "Rút được tấm thé ghi số chẵn lớn hơn 12 ".
$B$ : "Rút được tấm thẻ ghi số không nhỏ hơn 12 và không lớn hơn 18".
Hãy tính số phần tử của biến cố $A$, $B$ và $AB$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 9.** Xác định và đếm số phần tử của biến cố giao.

Một tổ trong lớp 11C có 9 học sinh. Phỏng vấn 9 bạn này với câu hỏi: Bạn có biết chơi môn thể thao nào trong hai môn này hay không? Nếu biết thì đánh dấu $X$ vào ô ghi tên môn thể thao đó, không biết thì để trống. Kết quả thu được như sau

| Tên học sinh | Cầu lông | Bóng bàn |
|---|---|---|
| Bảo | X | |
| Đăng | X | |
| Giang | | X |
| Hoa | | |
| Long | X | X |
| Mai | | |
| Phúc | $X$ | X |
| Tuấn | $X$ | X |
| Yến | $X$ | |

Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong tổ. Xét các biến cố sau:

$U$ : "Học sinh được chọn biết chơi cầu lông";

$V$ : "Học sinh được chọn biết chơi bóng bàn".

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Nội dung của biến cố giao $T = UV$ là gì? Mỗi biến cố $U$, $V$, $T$ là tập con nào của không gian mẫu?

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 10.** Quy tắc nhân xác suất liên quan đến hai biến cố độc lập.
Gieo hai con súc sắc. Tính xác suất để cả hai con súc sắc đều xuất hiện mặt 5 chấm.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 11.** Một chiếc máy có hai động cơ I và II hoạt động độc lập với nhau. Xác suất để động cơ I và II chạy tốt lần lượt là 0,8 và 0,7 . Tính xác suất để cả hai động cơ đều chạy tốt?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 12.** Quy tắc nhân xác suất liên quan đến hai biến cố độc lập.
Ba xạ thủ độc lập cùng bắn vào 1 tấm bia. Biết rằng xác suất bắn trúng mục tiêu của ba người đó lần lượt là 0,7; 0,6; 0,5. Tính xác suất để có ít nhất một xạ thủ bắn trúng.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 13.** Có hai hòm đựng thẻ, mỗi hòm đựng 13 thẻ đánh số từ 1 đến 13. Từ mỗi hòm rút ngẫu nhiên một thẻ. Tính xác suất để trong hai thẻ rút ra có ít nhất một thẻ đánh số 9.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 14.** Quy tắc nhân xác suất liên quan đến hai biến cố độc lập.
Cho $A$ và $B$ là hai biến cố độc lập.
$A$ : "Rút được tấm thẻ ghi số chẵn lớn hơn 12".
$B$ : "Rút được tấm thẻ ghi số không nhỏ hơn 12 và không lớn hơn 18".

a) Biết $\mathrm{P}(A) = 0{,}4$ và $\mathrm{P}(B) = 0{,}6$. Hãy tính xác suất của các biến cố $AB$, $\overline{A}B$ và $\overline{A}\overline{B}$.

b) Biết $\mathrm{P}(A) = 0{,}7$ và $\mathrm{P}(AB) = 0{,}35$. Hãy tính xác suất của các biến cố $B$, $\overline{A}B$ và $\overline{A}\overline{B}$.

**Lời giải**

**Ví dụ 15.** Có hai người $A$ và $B$ cùng nhau thi bắn súng. Biết rằng xác suất bắn trúng tâm của $A$ là 0,8 và của $B$ là 0,7. Hãy tính xác suất của các biến cố

a) "Cả hai người đều cùng bắn trúng vào tâm".

b) "Cả hai người đều bắn trượt tâm".

c) "Người $A$ bắn trúng còn người $B$ bắn trượt".

d) "1 trong 2 người bắn trượt".

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 16.** Gieo ba con xúc xắc cân đối và đồng chất. Xét các biến cố sau
$A$: "Số chấm xuất hiện trên mặt của ba con xúc xắc khác nhau".
$B$: "Có ít nhất một xúc xắc xuất hiện mặt 6 chấm".

a) Tính xác suất của các biến cố $A$ và $B$.

b) Tính xác suất của biến cố $AB$ và chứng minh $A$, $B$ không độc lập.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

# C Bài tập rèn luyện

## PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1.** Cho hai biến cố $A$ và $B$, nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố $A$ không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố $B$ thì hai biến cố $A$ và $B$ được gọi là

**A.** Xung khắc. **B.** Đối nhau. **C.** Độc lập. **D.** Hợp nhau.

Lời giải

**Câu 2.** Hai biến cố $A$ và $B$ được gọi là xung khắc khi và chỉ khi

**A.** $A \cup B = \Omega$. **B.** $A \cup B = \varnothing$. **C.** $A \cap B = \Omega$. **D.** $A \cap B = \varnothing$.

Lời giải

**Câu 3.** An và Bình mỗi người gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi $A$ là biến cố "An gieo được mặt có số lẻ chấm", biến cố nào sau đây vừa độc lập với biến cố $A$ vừa có số phần tử bằng với số phần tử của biến cố $A$?

**A.** An gieo được mặt 2 chấm. **B.** An gieo được mặt 3 chấm.

**C.** Bình gieo được mặt 3 chấm. **D.** Bình gieo được mặt có số lẻ chấm.

Lời giải

**Câu 4.** Một hộp chứa 15 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 15. Chọn ra ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp. Gọi $A$ là biến cố "Số ghi trên thẻ được chọn là số lẻ", biến cố nào sau đây là biến cố xung khắc với biến cố $A$?

**A.** Số ghi trên thẻ được chọn nhỏ hơn 10. **B.** Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 3.

**C.** Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 5. **D.** Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 4.

**Lời giải**

**Câu 5.** Gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất 2 lần. Xét các biến cố: $A$: "Số chấm xuất hiện trong hai lần gieo đều là số lẻ". $B$: "Số chấm xuất hiện trong hai lần gieo đều là số chẵn". $C$: "Số chấm xuất hiện trong lần gieo thứ nhất là 2 ". Khẳng định nào sau đây là **sai**?

**A.** Hai biến cố $A$ và $B$ xung khắc. **B.** Hai biến cố $A$ và $C$ xung khắc.

**C.** Hai biến cố $B$ và $C$ không xung khắc. **D.** Hai biến cố $B$ và $C$ xung khắc.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .

**Câu 6.** Một đội văn nghệ có 4 học sinh nam và 5 học sinh nữ. Giáo viên phụ trách đội muốn chọn ra một đội tốp ca gồm 3 học sinh sao cho có cả nam và nữ cùng tham gia. Giáo viên phụ trách đội có bao nhiêu cách chọn một đội tốp ca như vậy?

**A.** 30. **B.** 40. **C.** 70. **D.** 80.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 7.** Một hộp có 5 quả cầu xanh khác nhau và 6 quả cầu trắng khác nhau. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 quả cầu. Có bao nhiêu cách lấy ra hai quả cầu cùng màu?

**A.** 10. **B.** 15. **C.** 25. **D.** 55.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 8.** Lớp có 44 học sinh gồm 24 học sinh giỏi và 20 học sinh khá. Thầy giáo chủ nhiệm cần chọn ngẫu nhiên trong lớp một nhóm gồm 3 học sinh để kiểm tra kiến thức cũ. Có bao nhiêu cách chọn 3 bạn mà số học sinh giỏi nhiều hơn học sinh khá.

**A.** 7544. **B.** 3456. **C.** 4725. **D.** 7445.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .

**Câu 9.** Gieo 2 con xúc xắc cân đối và đồng chất. Có bao nhiêu khả năng để "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc chia hết cho 5 ".

**A.** 3. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 5.

**Lời giải**

**Câu 10.** Trên kệ sách có 8 sách Toán và 6 sách Văn. Lấy lần lượt 3 cuốn sách mà không để lại trên kệ. Có bao nhiêu cách để chọn được ít nhất hai cuốn sách Toán?

**A.** 1344. **B.** 1626. **C.** 7123. **D.** 1567.

**Lời giải**

**Câu 11.** Gieo một con xúc xắc cân đối, đồng chất hai lần liên tiếp. Xét các biến cố:
$A$: "số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất là số lẻ".

$B$: "số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ hai là số chẵn".

Phát biểu nào sau đây là đúng?

**A.** Biến cố giao của hai biến cố $A$, $B$ là "số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất là số lẻ hoặc số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ hai là số lẻ".

**B.** Số phần tử của biến cố $A$ giao $B$ là 9.

**C.** Biến cố giao của hai biến cố $A$ và $B$ là "tích số chấm xuất hiện ở hai lần gieo là số lẻ".

**D.** Số phần tử của biến cố $A$ giao $B$ là 18.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 12.** Cho $A$ và $B$ là hai biến cố. Biết $P(\overline{A}) = 0{,}7$; $P(B) = 0{,}3$; $P(AB) = 0{,}21$. Mệnh đề nào đúng?

**A.** $A$ và $B$ là hai biến cố xung khắc.

**B.** $A$ và $B$ là hai biến cố đối.

**C.** $A$ và $B$ là hai biến cố độc lập.

**D.** $A$ và $B$ là hai biến cố không độc lập.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**BẢNG ĐÁP ÁN**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Câu 1. C | Câu 2. D | Câu 3. D | Câu 4. D | Câu 5. D | Câu 6. C | Câu 7. C |
| Câu 8. A | Câu 9. B | Câu 10. A | Câu 11. B | Câu 12. D | | |

## PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

**Câu 1.** Cho $A$ và $B$ là hai biến cố liên quan cùng một phép thử $T$. Khi đó

**a)** Nếu $A$ và $B$ là hai biến cố xung khắc thì $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.

**b)** Nếu $A$ và $B$ là hai biến cố độc lập thì $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$.

**c)** Hai biến cố xung khắc là hai biến cố đối.

**d)** Hai biến cố đối là hai biến cố xung khắc.

**Lời giải**

**Câu 2.** Có hai chuồng nuôi gà. Chuồng I có 5 con gà trống và 10 con gà mái. Chuồng II có 3 con gà mái và 7 con gà trống. Từ mỗi chuồng bắt ngẫu nhiên một con gà. Gọi:

- $A$ là biến cố: "bắt được gà mái từ chuồng I";
- $B$ là biến cố: "bắt được gà trống từ chuồng II";

Khi đó

**a)** $n(A) = 10$.

**b)** $n(B) = 5$.

**c)** $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{3}$ và $P(B) = \dfrac{7}{10}$.

**d)** Hai biến cố $A$ và $B$ là độc lập.

**Lời giải**

**Câu 3.** Một hộp đựng 20 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 20. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong hộp. Gọi:

- $A$ là biến cố: "Số ghi trên tấm thẻ là số chia hết cho 4";
- $B$ là biến cố: "Số ghi trên tấm thẻ là số nguyên tố";
- $C$ là biến cố: "Số ghi trên tấm thẻ chia hết cho 6".

Khi đó

**a)** $A = \{4;8;12;16;20\}$, $B = \{3;5;7;11;13;17;19\}$, $C = \{6;12;18\}$.

**b)** $A$ và $B$ là hai biến cố xung khắc.

**c)** $B$ và $C$ là hai biến cố xung khắc.

**d)** $A$ và $C$ là hai biến cố xung khắc.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 4.** Một hộp đựng 15 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 15. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ, quan sát số ghi trên thẻ. Gọi $A$ là biến cố "Số ghi trên tấm thẻ nhỏ hơn 9 "$B$ là biến cố "Số ghi trên tấm thẻ là số nguyên tố nhỏ hơn 10 "và $C$ là biến cố "Số ghi trên tấm thẻ là số chẵn". Khi đó

**a)** $A \cap B$ là biến cố "Số ghi trên tấm thẻ là số nguyên tố nhỏ hơn 10".

**b)** $B \cap C$ là biến cố "Số ghi trên tấm thẻ là số chẵn".

**c)** Số kết quả thuận lợi cho biến cố $A \cap B$ là 4.

**d)** Không có kết quả thuận lợi cho biến cố $B \cap C$.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 5.** Cho $A$ và $B$ là hai biến cố độc lập với nhau. Biết $P(A) = 0{,}4$ và $P(B) = 0{,}6$. Khi đó

**a)** $\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}24$. **b)** $\mathrm{P}(A \cap \overline{B}) = 0{,}16$. **c)** $\mathrm{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}24$. **d)** $\mathrm{P}(\overline{A} \cap B) = 0{,}24$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 6.** Một người vừa gieo một con xúc xắc để ghi lại số chấm xuất hiện, sau đó người này tiếp tục chọn ngẫu nhiên một lá bài từ bộ bài 52 lá. Tính xác suất để

**a)** Gọi $A$ là biến cố: "Số chấm của xúc xắc lớn nhất", khi đó $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{6}$.

**b)** Gọi $B$ là biến cố: "Chọn được một lá bài tây", khi đó $\mathrm{P}(B) = \dfrac{3}{13}$.

**c)** Xác suất để số chấm trên con xúc xắc là lớn nhất và chọn được một lá bài tây bằng: $\dfrac{1}{26}$.

**d)** Xác suất để số chấm trên con xúc xắc và số của lá bài là giống nhau bằng $\dfrac{1}{16}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 7.** Trên một bảng quảng cáo, người ta mắc hai hệ thống bóng đèn. Hệ thống $I$ gồm 2 bóng mắc nối tiếp, hệ thống $II$ gồm 2 bóng mắc song song. Khả năng bị hỏng của mỗi bóng đèn sau 6 giờ thắp sáng liên tục là 0,15. Biết tình trạng của mỗi bóng đèn là độc lập. Khi đó xác suất để

**a)** Hệ thống $II$ bị hỏng (không sáng) bằng 0,0225.

**b)** Từ đó suy ra xác suất để hệ thống $II$ hoạt động bình thường bằng 0,9775.

**c)** Hệ thống $I$ bị hỏng (không sáng) bằng 0,5775.

**d)** Cả hai hệ thống bị hỏng (không sáng) (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm nghìn) $\approx 0{,}02624$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 8.** Gieo hai đồng xu $A$ và $B$ một cách độc lập. Đồng xu $A$ được chế tạo cân đối. Đồng xu $B$ được chế tạo không cân đối nên xác suất xuất hiện mặt sấp gấp 3 lần xác suất xuất hiện mặt ngửa. Khi đó xác suất để

**a)** Đồng xu $A$ xuất hiện mặt ngửa bằng $\dfrac{1}{2}$.

**b)** Đồng xu $B$ xuất hiện mặt ngửa bằng $\dfrac{1}{4}$.

**c)** Khi gieo hai đồng xu một lần thì cả hai đều ngửa bằng $\dfrac{1}{12}$.

**d)** Khi gieo hai đồng xu hai lần thì cả hai đồng xu đều ngửa bằng $\dfrac{1}{32}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 9.** Một hộp có chứa 6 bút mực xanh và 4 bút mực đỏ cùng loại, cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 3 bút từ hộp. Gọi $A$ là biến cố "ba bút lấy ra đều là bút mực xanh". $B$ là biến cố "ba bút lấy ra đều là bút mực đỏ". Khi đó

**a)** Có 30 kết quả thuận lợi cho biến cố $A$.

**b)** Có 4 kết quả thuận lợi cho biến cố $B$.

**c)** Xác suất của biến cố $A$ bằng $\dfrac{1}{6}$.

**d)** Xác suất của biến cố $B$ bằng $\dfrac{1}{30}$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | |
|---|---|---|
| **Câu 1.** a Đ b Đ c S d S | **Câu 2.** a Đ b S c S d Đ | **Câu 3.** a S b Đ c Đ d S |
| **Câu 4.** a Đ b S c Đ d S | **Câu 5.** a Đ b Đ c Đ d S | **Câu 6.** a Đ b S c S d S |
| **Câu 7.** a Đ b Đ c S d S | **Câu 8.** a Đ b Đ c S d S | **Câu 9.** a S b Đ c Đ d Đ |

## PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Trong phép thử $T$, cho các biến cố $A$ và $B$ độc lập nhau. Xét các khẳng định sau
$(I)$ : $A$ và $B$ không đồng thời xảy ra.
$(II)$ : $\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$.
$(III)$ : $\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.
Số khẳng định **đúng** trong các khẳng định trên là KQ: | | | | |

Lời giải

. . . . . .

**Câu 2.** Trong một hộp đựng 10 quả bóng gồm màu xanh và màu vàng. Các quả bóng có cùng kích thước và khối lượng. Chọn ngẫu nhiên 2 quả bóng, xem màu rồi trả vào hộp. Lặp lại phép thử trên 2 lần. Xác suất để chọn được 2 quả bóng màu xanh là $\frac{1}{15}$ và xác suất chọn được quả bóng màu vàng là $\frac{7}{15}$. Số kết quả thuận lợi cho biến cố chọn được 4 quả bóng màu vàng là
KQ: | | | | |

Lời giải

. . . . . .

**Câu 3.** Xét phép thử $T$, giả sử $A$ và $B$ là hai biến cố độc lập với nhau. Biết $\mathrm{P}(A) = 0{,}4$ và $\mathrm{P}(B) = 0{,}7$. Xác suất của biến cố $A \cdot \overline{B}$ bằng KQ: | | | | |

Lời giải

. . . . . .

**Câu 4.** Trong phép thử $T$, cho $A$ và $B$ là hai biến cố độc lập nhau. Biết $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=1{,}1$ và $\mathrm{P}(AB)=0{,}3$. Xác suất của biến cố $\overline{A}\cdot\overline{B}$ là KQ: | | | | |

**Lời giải**

**Câu 5.** Một bệnh truyền nhiễm có xác suất lây bệnh là 0,75 nếu tiếp xúc với người bệnh mà không đeo khẩu trang và là 0,05 nếu tiếp xúc với người bệnh mà có đeo khẩu trang. Ông $X$ tiếp xúc với người bệnh hai lần, trong đó có một lần không đeo khẩu trang và một lần có đeo khẩu trang. Xác suất ông $X$ bị bệnh do lây từ người bệnh đã tiếp xúc là bao nhiêu? (*Kết quả làm tròn đến hàng phần mười*) KQ: | | | | |

**Lời giải**

**BẢNG ĐÁP ÁN**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Câu 1.** 1 | **Câu 2.** 441 | **Câu 3.** 0,12 | **Câu 4.** 0,2 | **Câu 5.** 0,8 |

# BÀI 29. CÔNG THỨC CỘNG XÁC SUẤT

## A Lý thuyết

### 1 Quy tắc cộng

**Định lý 1**

- *Quy tắc cộng cho hai biến cố xung khắc*:
  Cho hai biến cố xung khắc $A$ và $B$. Khi đó $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.
- *Quy tắc cộng cho hai biến cố bất kì*:
  Cho hai biến cố $A$ và $B$. Khi đó $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB)$.
- *Quy tắc cộng cho hai biến cố đối*:
  Cho $A$ là một biến cố. Biến cố "không xảy ra $A$", kí hiệu là $\overline{A}$, gọi là biến cố đối của biến cố $A$. Khi đó $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$.

## B Các dạng bài tập

**Dạng 1. Quy tắc cộng xác suất cho hai biến cố xung khắc**

Hai biến cố $A$ và $B$ gọi là xung khắc nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra.

**Ví dụ 1.** Một lớp học 40 học sinh gồm có 15 học sinh nam giỏi Toán và 8 học sinh nữ giỏi Lý. Chọn ngẫu nhiên một học sinh. Hãy tính xác suất để chọn được một nam sinh giỏi Toán hoặc một nữ sinh giỏi Lý.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Ví dụ 2.** Một đội tình nguyện gồm 9 học sinh khối 10 và 7 học khối 11. Chọn ra ngẫu nhiên 3 người trong đội. Tính xác suất của biến cố: "Cả 3 người được chọn học cùng một khối".

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 3.** Trên kệ sách đang có 4 cuốn sách Toán và 5 cuốn sách Văn. Lần lượt lấy xuống ngẫu nhiên ba cuốn sách. Tính xác suất của biến cố: "Ba cuốn sách được chọn cùng loại".

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

## Dạng 2. Quy tắc cộng xác suất cho hai biến cố bất kỳ

Cho $k$ biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Các biến cố này được gọi là độc lập với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của mỗi biến cố không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của các biến cố còn lại.

**Ví dụ 4.** Cho hai biến cố $A$, $B$ độc lập với nhau. Biết $\mathrm{P}(A) = 0{,}2$; $\mathrm{P}(B) = 0{,}8$. Tính xác suất của biến cố $A \cup B$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 5.** Cho $A$ và $B$ là hai biến cố độc lập.

a) Biết $\mathrm{P}(A) = 0{,}8$; $\mathrm{P}(AB) = 0{,}2$. Tính xác suất của biến cố $A \cup B$.

b) Biết $\mathrm{P}(B) = 0{,}3$; $\mathrm{P}(A \cup B) = 0{,}6$. Tính xác suất của biến cố $A$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 6.** Một hộp chứa 100 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 100. Chọn ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp. Tính xác suất của biến cố: "Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 3 hoặc 5".

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 7.** Ở lúa, hạt gạo đục là tính trạng trội hoàn toàn so với hạt gạo trong. Cho cây lúa có hạt gạo đục thuần chủng thụ phấn với cây lúa có hạt gạo trong được $F_1$ toàn hạt gạo đục. Tiếp tục cho các cây lúa $F_1$ thụ phấn với nhau và thu được các hạt gạo mới. Lần lượt chọn ra ngẫu nhiên 2 hạt gạo mới, tính xác suất của biến cố: "Có đúng 1 hạt gạo đục trong 2 hạt gạo được lấy ra".

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

## Dạng 3. Tổng hợp

**Ví dụ 8.** Một hộp đựng 8 viên bi màu xanh và 6 viên bi màu đỏ, có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Sơn lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp (lấy xong không trả lại vào hộp). Tiếp đó đến lượt bạn Tùng lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp đó. Tính xác suất để bạn Tùng lấy được viên bi màu xanh.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 9.** Có hai túi mỗi túi đựng 10 quả cầu có cùng kích thước và khối lượng được đánh số từ 1 đến 10. Từ mỗi túi, lấy ngẫu nhiên ra một quả cầu. Tính xác suất để trong hai quả cầu được lấy ra không có quả cầu nào ghi số 1 hoặc ghi số 5.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 10.** Cho tập hợp $A = \{1;2;\ldots,10\}$. Chọn ngẫu nhiên ba số từ $A$. Tìm xác suất để trong ba số chọn ra không có hai số nào là hai số nguyên liên tiếp.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 11.** Cho tập $E = \{1;2;3;4;5;6;7\}$. Viết ngẫu nhiên lên bảng hai số tự nhiên, mỗi số gồm 3 chữ số đôi một khác nhau thuộc tập $E$. Tính xác suất để trong hai số đó có đúng một số có chữ số 5.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

# C Bài tập rèn luyện

## PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1.** Cho $A$ và $B$ là hai biến cố xung khắc. Chọn phát biểu đúng:

**A.** $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.
**B.** $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B)$.
**C.** $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.
**D.** $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B)$.

**Lời giải**

**Câu 2.** Cho $A$ và $B$ là hai biến cố độc lập. Biết $\mathrm{P}(A) = 0{,}5$ và $\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}2$. Xác suất $\mathrm{P}(A \cup B)$ bằng:

**A.** 0,3. **B.** 0,5. **C.** 0,6. **D.** 0,7.

**Lời giải**

**Câu 3.** Một hộp đựng 20 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 20. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong hộp. Gọi $A$ là biến cố "Rút được tấm thẻ ghi số chẵn lớn hơn 9"; $B$ là biến cố "Rút được tấm thẻ ghi số không nhỏ hơn 8 và không lớn hơn 15". Số phần tử của $A \cup B$ là

**A.** 11. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 13.

**Lời giải**

**Câu 4.** Một hộp đựng 5 quả cầu màu xanh và 3 quả cầu màu đỏ có cùng kích thước và khối lượng. Chọn ngẫu nhiên hai quả cầu trong hộp. Tính xác suất để chọn được hai quả cầu có cùng màu.

**A.** $\frac{10}{28}$. **B.** $\frac{3}{28}$. **C.** $\frac{13}{28}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Câu 5.** Một lớp học có 30 học sinh, trong đó có 16 bạn nam và 14 bạn nữ. Cô giáo chủ nhiệm chọn ngẫu nhiên 3 bạn vào đội cờ đỏ. Tính xác suất để cả 3 bạn đó đều là nam hoặc nữ.

**A.** 0,2. **B.** 0,286. **C.** 0,228. **D.** 0,443.

**Lời giải**

**Câu 6.** Một chiếc hộp chứa 9 viên bi cùng kích thước và khối lượng, trong đó có 4 viên bi màu đỏ, 5 viên bi màu xanh. Lấy ngẫu nhiên từ hộp 2 viên bi. Xác suất của biến cố "lấy được 2 viên bi cùng màu"bằng

**A.** $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{4}{9}$. **C.** $\frac{5}{18}$. **D.** $\frac{1}{9}$.

**Lời giải**

**Câu 7.** Một chiếc hộp có 10 chiếc thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 10. Rút ngẫu nhiên từ hộp ra 1 thẻ. Xét các biến cố

$A$: "Số ghi trên thẻ được lấy ra là số lớn hơn 6".

$B$: "Số ghi trên thẻ được lấy ra là không vượt quá 5".

Tính xác suất của biến cố $A \cup B$?

**A.** 0,4. **B.** 0,9. **C.** 0,5. **D.** 0,36.

**Lời giải**

**Câu 8.** Một hộp đựng 9 tấm thẻ cùng loại được ghi số từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên đồng thời hai tấm thẻ từ trong hộp. Xác suất để "Tích hai số ghi trên hai tấm thẻ là một số chẵn" là

**A.** $\frac{13}{18}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{5}{9}$. **D.** $\frac{7}{18}$.

**Lời giải**

**Câu 9.** Hộp $A$ có 4 viên bi trắng, 5 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh. Hộp $B$ có 7 viên bi trắng, 6 viên bi đỏ và 5 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên mỗi hộp một viên bi. Xác suất để hai viên bi được lấy ra có cùng màu là

**A.** $\frac{91}{135}$. **B.** $\frac{44}{135}$. **C.** $\frac{88}{135}$. **D.** $\frac{45}{88}$.

**Lời giải**

**Câu 10.** Có 6 học sinh gồm 3 nam và 3 nữ xếp thành hàng ngang để chụp ảnh. Tính xác suất để các bạn nữ đứng cạnh nhau hoặc nam nữ đứng xen kẽ.

**A.** $\frac{3}{10}$. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{50}$.

**Lời giải**

**Câu 11.** Cho một hộp đựng 20 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 20. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong hộp. Gọi $A$ là biến cố rút được tấm thẻ ghi số chẵn lớn hơn 9. Gọi $B$ là biến cố rút được tấm thẻ ghi số không nhỏ hơn 8 và không lớn hơn 15. Số phần tử của biến cố $A \cap B$ bằng bao nhiêu?

**A.** 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

**Lời giải**

**Câu 12.** Vinh và Hoà là hai xạ thủ bắn súng. Xác suất xạ thủ Vinh bắn trúng là 0,7. Xác suất xạ thủ Hoà bắn trúng là 0,6. Tính xác suất để cả hai xạ thủ đều bắn trúng mục tiêu. Biết rằng hai biến cố Vinh và Hoà bắn súng là độc lập nhau.

**A.** 0,28. **B.** 0,42. **C.** 0,12. **D.** 0,18.

**Lời giải**

**Câu 13.** Một bài thi trắc nghiệm có 50 câu. Mỗi câu có đúng 4 phương án trả lời, trong đó chỉ có một phương án đúng. Tính xác suất để học sinh đạt được đúng 6 điểm.

**A.** $0{,}25^{30} \cdot 0{,}75^{20} \cdot \mathrm{C}_{50}^{30}$. **B.** $0{,}25^{30} \cdot 0{,}75^{20}$. **C.** $0{,}75^{20} \cdot \mathrm{C}_{50}^{20}$. **D.** $0{,}25^{30} \cdot \mathrm{C}_{50}^{30}$.

**Lời giải**

**Câu 14.** Một lớp học có 40 học sinh, gồm 15 học sinh nam giỏi Toán và 8 học sinh nữ giỏi Văn. Chọn ngẫu nhiên một học sinh. Tính xác suất để chọn được một nam sinh giỏi Toán hoặc một nữ sinh giỏi Văn.

**A.** $\frac{7}{40}$. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{23}{40}$.

**Lời giải**

**Câu 15.** Ba xạ thủ bắn vào mục tiêu một cách độc lập với nhau. Xác suất bắn trúng của xạ thủ thứ nhất, thứ hai và thứ ba lần lượt là 0,6, 0,7, 0,8. Tính xác suất để cả ba xạ thủ cùng bắn trúng.

**A.** 0,42. **B.** 0,336. **C.** 0,56. **D.** 0,48.

**Lời giải**

**Câu 16.** Một tổ hợp máy có hai động cơ $I$ và $II$ hoạt động độc lập nhau, xác suất động cơ $I$ hoạt động được là 0,9, xác suất động cơ $II$ hoạt động được là 0,95. Biết tổ hợp máy chạy được nếu ít nhất một động cơ hoạt động. Tính xác suất để tổ hợp máy chạy được.

**A.** 0,955. **B.** 0,855. **C.** 0,95. **D.** 0,995.

**Lời giải**

**Câu 17.** Trong một kỳ thi có 60% thí sinh đỗ. Hai bạn $A$, $B$ cùng dự kỳ thi đó. Xác suất để chỉ có một bạn thi đỗ là

**A.** 0,24. **B.** 0,36. **C.** 0,16. **D.** 0,48.

**Lời giải**

**Câu 18.** Gieo một con xúc xắc cân đối đồng chất hai lần. Tính xác suất để lần đầu xuất hiện mặt 2 chấm.

**A.** $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{12}$. **D.** $\frac{1}{36}$.

**Lời giải**

**Câu 19.** Xác suất bắn trúng mục tiêu của một vận động viên khi bắn một viên đạn là 0,7. Người đó bắn hai viên đạn một cách độc lập. Xác suất để một viên trúng mục tiêu và một viên trượt mục tiêu là

**A.** 0,45. **B.** 0,42. **C.** 0,48. **D.** 0,24.

**Lời giải**

**Câu 20.** Ba người thi bắn cung. Người thứ nhất có xác suất bắn trúng là 0,6. Người thứ hai có xác suất bắn trúng là 0,8. Người thứ ba có xác suất bắn trúng là 0,9. Tính xác suất để có đúng một người bắn trúng mục tiêu.

**A.** 0,012. **B.** 0,032. **C.** 0,116. **D.** 0,056.

**Lời giải**

**Câu 21.** Có 2 hộp đựng bi, lấy mỗi hộp 1 viên bi. Biết ở hộp thứ nhất, xác suất lấy được 1 viên bi màu đỏ là 0,25; xác suất lấy được 1 viên bi màu xanh là 0,75. Ở hộp thứ hai, xác suất lấy được 1 viên bi màu đỏ là 0,375; xác suất lấy được 1 viên bi màu xanh là 0,625. Tính xác suất lấy được hai viên bi cùng màu.

**A.** $\frac{7}{16}$. **B.** $\frac{9}{16}$. **C.** $\frac{15}{32}$. **D.** $\frac{3}{32}$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Câu 1. A | Câu 2. D | Câu 3. A | Câu 4. C | Câu 5. C | Câu 6. B | Câu 7. B |
| Câu 8. A | Câu 9. B | Câu 10. A | Câu 11. A | Câu 12. B | Câu 13. A | Câu 14. D |
| Câu 15. B | Câu 16. D | Câu 17. D | Câu 18. A | Câu 19. B | Câu 20. C | Câu 21. B |

## PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

**Câu 1.** Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi $A$ là biến cố: "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc bằng 5", $B$ là biến cố: "Tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 6", $C$ là biến cố: "Có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 1 chấm ", $D$ là biến cố: "Số chấm trên hai con xúc xắc bằng nhau".

**a)** $n(A \cup B) = 9$. **b)** $n(B \cup C) = 13$. **c)** $n(\overline{A} \cup B) = 34$. **d)** $n(A \cup \overline{D}) = 30$.

Lời giải

**Câu 2.** Cho $A, B, C, D$ là các biến cố liên quan đến một phép thử. Biết $\mathrm{P}(A) = 0{,}4$, $\mathrm{P}(B) = 0{,}2$.

**a)** Nếu $A, B$ là hai biến cố xung khắc thì $\mathrm{P}(A \cup B) = 0{,}6$.

**b)** Nếu $A, C$ xung khắc và $\mathrm{P}(A \cup C) = 0{,}7$ thì $\mathrm{P}(C) = 0{,}3$.

**c)** Nếu $\overline{A}, B$ là hai biến cố xung khắc thì $\mathrm{P}(\overline{A} \cup B) = 0{,}8$.

**d)** Nếu $A, \overline{D}$ xung khắc và $\mathrm{P}(A \cup \overline{D}) = 0{,}6$ thì $\mathrm{P}(D) = 0{,}9$.

Lời giải

**Câu 3.** Một đội tình nguyện gồm 9 học sinh khối 10 và 7 học sinh khối 11. Chọn ra ngẫu nhiên 3 người trong đội. Gọi $A$ là biến cố: "Cả 3 học sinh được chọn đều thuộc khối 10", $B$ là biến cố: "Cả 3 học sinh được chọn đều thuộc khối 11", $C$ là biến cố: "Cả 3 người được chọn học cùng một khối".

**a)** $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{16}$. **b)** $C = AB$. **c)** $\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$. **d)** $\mathrm{P}(C) = \dfrac{17}{80}$.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 4.** Một hộp đựng 30 tấm thẻ có đánh số từ 1 đến 30, hai tấm thẻ khác nhau đánh hai số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một tấm thẻ từ hộp, khi đó xác suất để lấy được:

**a)** Thẻ đánh số chia hết cho 3 bằng $\frac{1}{3}$.

**b)** Thẻ đánh số chia hết cho 4 bằng $\frac{11}{30}$.

**c)** Thẻ đánh số chia hết cho 3 và chia hết cho 4 bằng $\frac{1}{15}$.

**d)** Thẻ đánh số chia hết cho 3 hoặc 4 bằng $\frac{1}{2}$.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 5.** Ba người cùng bắn vào 1 bia. Gọi $A$ là biến cố: "người thứ nhất bắn trúng đích", $B$ là biến cố: "người thứ hai bắn trúng đích", $C$ là biến cố: "người thứ ba bắn trúng đích". Xác suất bắn trúng đích của người thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là 0,7; 0,6; 0,8. Khi đó

**a)** $\mathrm{P}(A) = 0{,}7$; $\mathrm{P}(\overline{A}) = 0{,}7$.

**b)** $\mathrm{P}(B) = 0{,}6$; $\mathrm{P}(\overline{B}) = 0{,}4$.

**c)** $\mathrm{P}(C) = 0{,}8$; $\mathrm{P}(\overline{C}) = 0{,}2$.

**d)** Xác suất để có đúng 2 người bắn trúng đích là 0,452.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 6.** Cả hai xạ thủ cùng bắn vào bia. Xác suất người thứ nhất bắn trúng bia là 0,8; người thứ hai bắn trúng bia là 0,7. Khi đó xác suất để:

**a)** Người thứ nhất bắn trúng và người thứ hai bắn không trúng bia bằng 0,14.

**b)** Người thứ nhất bắn không trúng và người thứ hai bắn trúng bia bằng 0,14.

**c)** Hai người đều bắn trúng bia bằng 0,56.

**d)** Nếu $A$, $\overline{D}$ xung khắc và $\mathrm{P}(A \cup \overline{D}) = 0{,}6$ thì $\mathrm{P}(D) = 0{,}9$.

Lời giải

**Câu 7.** Túi $X$ chứa ba viên bi trắng và hai viên bi đỏ. Túi $Y$ chứa một màu trắng và ba màu đỏ viên bi. Người ta chọn ngẫu nhiên mỗi hộp và lấy ra hai viên bi.

**a)** Gọi $A$ là biến cố: "Lấy được viên bi màu trắng từ túi $X$". Khi đó $\mathrm{P}(A) = \dfrac{3}{5}$.

**b)** Gọi $B$ là biến cố: "Lấy được viên bi màu trắng từ túi $Y$". Khi đó $\mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{3}$.

**c)** Gọi $X_2$ là biến cố: "Lấy được hai viên bi cùng màu đỏ". Khi đó $\mathrm{P}(X_2) = \dfrac{4}{5}$.

**d)** Xác suất để lấy được hai viên bi cùng màu bằng $\mathrm{P}(X) = \dfrac{7}{15}$.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 8.** Một nhà xuất bản phát hành hai cuốn sách $A$ và $B$. Thống kê cho thấy có 60% người mua sách $A$; 70% người mua sách $B$; 50% người mua cả sách $A$ và sách $B$. Chọn ngẫu nhiên một người mua. Gọi $A$ là biến cố: "người đó mua quyển sách $A$", $B$ là biến cố: "người đó mua quyển sách $B$". Các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

**a)** $\mathrm{P}(A) = 0{,}6$; $\mathrm{P}(B) = 0{,}7$.

**b)** Biến cố $A \cap B$ là: "người mua đó mua cả sách $A$ và sách $B$".

**c)** Xác suất để người mua đó mua ít nhất một trong hai sách $A$ hoặc $B$ là 0,9.

**d)** Xác suất để người mua đó không mua cả sách $A$ và sách $B$ là 0,2.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | |
|---|---|---|
| **Câu 1.** a S b Đ c Đ d Đ | **Câu 2.** a Đ b Đ c Đ d S | **Câu 3.** a S b S c Đ d Đ |
| **Câu 4.** a Đ b S c Đ d Đ | **Câu 5.** a S b Đ c Đ d Đ | **Câu 6.** a S b Đ c Đ d Đ |
| **Câu 7.** a Đ b Đ c S d S | **Câu 8.** a Đ b Đ c S d Đ | |

## PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Lớp 11A1 có 50 học sinh, trong đó có 32 bạn thích học môn Toán, 17 bạn thích học môn Lịch Sử và 8 bạn thích cả hai môn trên. Chọn ngẫu nhiên một bạn trong lớp. Xác suất để bạn đó không thích cả môn Toán và môn Lịch Sử là bao nhiêu? KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 2.** Một hộp có chứa một số quả cầu gồm bốn màu xanh, vàng, đỏ, trắng (các quả cầu cùng màu thì khác nhau về bán kính). Lấy ngẫu nhiên một quả cầu từ hộp, biết xác suất để lấy được một quả cầu màu xanh bằng $\frac{1}{4}$, xác suất để lấy được một quả cầu màu vàng bằng $\frac{1}{3}$. Tính xác suất để lấy được một quả cầu xanh hoặc một quả cầu vàng. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm). KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 3.** Trong một bình có 2 viên bi trắng và 8 viên bi đen. Người ta bốc 2 viên bi bỏ ra ngoài rồi bốc tiếp một viên bi thứ ba. Tính xác suất để viên bi thứ ba là trắng. KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

**Câu 4.** Cho hai biến cố độc lập $A$ và $B$. Biết $\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A\cup B)=\dfrac{1}{2}$. Khi đó $\mathrm{P}(B)$ bằng bao nhiêu ( *làm tròn kết quả đến hàng phần chục* )? KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 5.** Có 2 hộp, hộp I đựng 4 gói quà màu đỏ và 6 gói quà màu xanh, hộp II đựng 2 gói quà màu đỏ và 8 gói quà màu xanh. Gieo một con xúc xắc, nếu được mặt 6 chấm thì lấy một gói quà từ hộp I, nếu mặt khác thì lấy một gói quà từ hộp II. Xác suất để lấy được gói quà màu đỏ bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)? KQ: [ ]

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 6.** Người ta thăm dò một số lượng người hâm mộ bóng đá tại một thành phố, nơi có hai đội bóng đá $X$ và $Y$ cùng thi đấu giải vô địch quốc gia. Biết rằng số lượng người hâm mộ đội bóng đá $X$ là 22%, số lượng người hâm mộ đội bóng đá $Y$ là 39%, trong số đó có 7% người nói rằng họ hâm mộ cả hai đội bóng trên. Chọn ngẫu nhiên một người hâm mộ trong số những người được hỏi, tính xác suất để chọn được người không hâm mộ đội nào trong hai đội bóng đá $X$ và $Y$. KQ: _____

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 7.** Một khu phố có 50 hộ gia đình trong đó có 18 hộ nuôi chó, 16 hộ nuôi mèo và 7 hộ nuôi cả chó và mèo. Chọn ngẫu nhiên một hộ trong khu phố trên, tính xác suất để hộ đó nuôi chó hoặc nuôi mèo. KQ: _____

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 8.** Một hộp có chứa một số quả cầu gồm bốn màu xanh, vàng, đỏ, trắng (các quả cầu cùng màu thì khác nhau về bán kính). Lấy ngẫu nhiên một quả cầu từ hộp, biết xác suất để lấy được một quả cầu màu xanh bằng $\frac{1}{4}$, xác suất để lấy được một quả cầu màu vàng bằng $\frac{1}{3}$. Tính xác suất để lấy được một quả cầu xanh hoặc một quả cầu vàng. Kết quả làm tròn đến hàng phần chục. KQ: _____

**Lời giải**

**Câu 9.** Hai bạn Chiến và Công cùng chơi cờ với nhau. Trong một ván cờ, xác suất Chiến thắng Công là 0,3 và xác suất để Công thắng Chiến là 0,4. Hai bạn dừng chơi khi có người thắng, người thua. Tính xác suất để hai bạn dừng chơi sau hai ván cờ. KQ:

**Lời giải**

**Câu 10.** Tại một trường trung học phổ thông $X$, có 12% học sinh học giỏi môn Tiếng Anh, 35% học sinh học giỏi môn Toán và 8% học sinh học giỏi cả hai môn Toán, Tiếng Anh. Chọn ngẫu nhiên một học sinh từ trường $X$, tính xác suất để chọn được một học sinh không giỏi môn nào trong hai môn Toán, Tiếng Anh. KQ:

**Lời giải**

**Câu 11.** Ba xạ thủ lần lượt bắn vào một bia. Xác suất để xạ thủ thứ nhất, thứ hai, thứ ba bắn trúng đích lần lượt là 0,8; 0,6; 0,5. Tính xác suất để có đúng hai người bắn trúng đích.

KQ:

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

**BẢNG ĐÁP ÁN**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Câu 1.** 0,18 | **Câu 2.** 0,58 | **Câu 3.** 0,2 | **Câu 4.** 0,3 | **Câu 5.** 0,23 |
| **Câu 6.** 0,46 | **Câu 7.** 0,54 | **Câu 8.** 0,6 | **Câu 9.** 0,21 | **Câu 10.** 0,61 |
| **Câu 11.** 0,46 | | | | |

# BÀI 30. CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT CHO HAI BIẾN CỐ ĐỘC LẬP

## A Lí thuyết

### 1 Biến cố độc lập

**Định nghĩa 1**

Cho hai biến cố $A$ và $B$. Hai biến cố $A$ và $B$ được gọi là *độc lập* nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.

**Nhận xét.** *Nếu hai biến cố $A$ và $B$ độc lập thì $A$ và $\overline{B}$, $\overline{A}$ và $B$, hoặc $\overline{A}$ và $\overline{B}$ cũng độc lập.*

### 2 Quy tắc nhân xác suất

**Định nghĩa 2**

Nếu hai biến cố $A$ và $B$ độc lập thì $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

**Nhận xét.** *Từ quy tắc nhân xác suất ta thấy, nếu $P(AB) \neq P(A) \cdot P(B)$ thì hai biến cố $A$ và $B$ không độc lập.*

## B Các dạng bài tập

**Dạng 1.**

- **Biến cố giao** Cho $k$ biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Biến cố "Tất cả $k$ biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_k$ đều xảy ra"gọi là giao của $k$ biến cố đó, kí hiệu là $A_1A_2 \ldots A_k$.
- **Biến cố xung khắc** Hai biến cố $A$ và $B$ gọi là xung khắc nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra.
- **Biến cố độc lập** Cho $k$ biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_k$; $k$ biến cố này gọi là độc lập với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của mỗi biến cố không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của các biến cố còn lại.
- **Quy tắc Nhân Xác Suất** Nếu $k$ biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_k$ độc lập với nhau thì

$$P(A_1A_2 \ldots A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \cdots \cdot P(A_k).$$

**Nhận xét.**
- *Hai biến cố $A$ và $B$ là hai biến cố xung khắc khi và chỉ khi $A \cap B = \emptyset$.*
- *Nếu hai biến cố $A$ và $B$ độc lập với nhau thì $A$ và $\overline{B}$, $\overline{A}$ và $B$, $\overline{A}$ và $\overline{B}$ cũng độc lập với nhau.*

**Ví dụ 1.** Xét phép thử gieo một đồng xu và con xúc xắc (đều cân đối và đồng chất).
Xét các biến cố:
$A$: "Đồng xu xuất hiện mặt ngửa".
$B$: "Con xúc xắc xuất hiện mặt lẻ".

a) Biểu diễn các biến cố $A$, $B$ và $AB$ bởi các tập hợp.

b) Hai biến cố $A$, $B$ có độc lập hay không?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 2.** Xác định và đếm số phần tủ liên quan đến hai biến cố xung khắc.
Xét phép thử gieo một đồng xu hai lần và các biến cố sau:
$A$: "Kết quả gieo hai lân như nhau".
$B$: "Có ít nhất một lần xuất hiện mặt sấp".
$C$: "Lần thú hai mới xuất hiện mặt sấp".
$D$: "Lần đầu xuất hiện mặt sấp".
Hãy chỉ ra các cặp biến cố xung khắc trong các biến cố đã cho.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 3.** Xác định và đếm số phần tử liên quan đến hai biến cố xung khắc.
Khánh và Hà mỗi người ném một quả bóng vào rổ. Xét các biến cố:
$A$: "Không bạn nào ném bóng trúng vào rổ".
$B$: "Cả hai bạn đều ném bóng trúng rổ".
$C$: "Có đúng một bạn ném bóng trúng vào rổ".
$D$: "Có ít nhất một bạn ném bóng trúng vào rổ".
Hãy chỉ ra các cặp biến cố đối và xung khắc trong các biến cố đã cho.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 4.** Xác định và đếm số phần tử của biến cố giao.
Một hộp đựng 30 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 30. Rút ngẫu nhiên 1 tấm thẻ trong hộp. Xét hai biến cố sau:
$A$: "Rút được tấm thé ghi số chẵn lớn hơn 12 ".
$B$ : "Rút được tấm thẻ ghi số không nhỏ hơn 12 và không lớn hơn 18".
Hãy tính số phần tử của biến cố $A$, $B$ và $AB$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 5.** Xác định và đếm số phần tử của biến cố giao.

Một tổ trong lớp 11C có 9 học sinh. Phỏng vấn 9 bạn này với câu hỏi: Bạn có biết chơi môn thể thao nào trong hai môn này hay không? Nếu biết thì đánh dấu $X$ vào ô ghi tên môn thể thao đó, không biết thì để trống. Kết quả thu được như sau

| Tên học sinh | Cầu lông | Bóng bàn |
|---|---|---|
| Bảo | X | |
| Đăng | X | |
| Giang | | X |
| Hoa | | |
| Long | X | X |
| Mai | | |
| Phúc | $X$ | X |
| Tuấn | $X$ | X |
| Yến | $X$ | |

Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong tổ. Xét các biến cố sau:

$U$ : "Học sinh được chọn biết chơi cầu lông";

$V$ : "Học sinh được chọn biết chơi bóng bàn".

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Nội dung của biến cố giao $T = UV$ là gì? Mỗi biến cố $U$, $V$, $T$ là tập con nào của không gian mẫu?

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 6.** Quy tắc nhân xác suất liên quan đến hai biến cố độc lập.
Gieo hai con súc sắc. Tính xác suất để cả hai con súc sắc đều xuất hiện mặt 5 chấm.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 7.** Một chiếc máy có hai động cơ I và II hoạt động độc lập với nhau. Xác suất để động cơ I và II chạy tốt lần lượt là 0,8 và 0,7 . Tính xác suất để cả hai động cơ đều chạy tốt?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 8.** Quy tắc nhân xác suất liên quan đến hai biến cố độc lập.
Ba xạ thủ độc lập cùng bắn vào 1 tấm bia. Biết rằng xác suất bắn trúng mục tiêu của ba người đó lần lượt là 0,7; 0,6; 0,5. Tính xác suất để có ít nhất một xạ thủ bắn trúng.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 9.** Có hai hòm đựng thẻ, mỗi hòm đựng 13 thẻ đánh số từ 1 đến 13. Từ mỗi hòm rút ngẫu nhiên một thẻ. Tính xác suất để trong hai thẻ rút ra có ít nhất một thẻ đánh số 9.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 10.** Quy tắc nhân xác suất liên quan đến hai biến cố độc lập.
Cho $A$ và $B$ là hai biến cố độc lập.
$A$ : "Rút được tấm thẻ ghi số chẵn lớn hơn 12".
$B$ : "Rút được tấm thẻ ghi số không nhỏ hơn 12 và không lớn hơn 18".

a) Biết $\mathrm{P}(A) = 0{,}4$ và $\mathrm{P}(B) = 0{,}6$. Hãy tính xác suất của các biến cố $AB$, $\overline{A}B$ và $\overline{A}\overline{B}$.

b) Biết $\mathrm{P}(A) = 0{,}7$ và $\mathrm{P}(AB) = 0{,}35$. Hãy tính xác suất của các biến cố $B$, $\overline{A}B$ và $\overline{A}\overline{B}$.

**Lời giải**

**Ví dụ 11.** Có hai người $A$ và $B$ cùng nhau thi bắn súng. Biết rằng xác suất bắn trúng tâm của $A$ là 0,8 và của $B$ là 0,7. Hãy tính xác suất của các biến cố

a) "Cả hai người đều cùng bắn trúng vào tâm".

b) "Cả hai người đều bắn trượt tâm".

c) "Người $A$ bắn trúng còn người $B$ bắn trượt".

d) "1 trong 2 người bắn trượt".

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 12.** Gieo ba con xúc xắc cân đối và đồng chất. Xét các biến cố sau
$A$: "Số chấm xuất hiện trên mặt của ba con xúc xắc khác nhau".
$B$: "Có ít nhất một xúc xắc xuất hiện mặt 6 chấm".

a) Tính xác suất của các biến cố $A$ và $B$.

b) Tính xác suất của biến cố $AB$ và chứng minh $A$, $B$ không độc lập.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

# C Bài tập rèn luyện

## PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1.** Một chiếc máy có hai động cơ $I$ và $II$ chạy độc lập nhau. Khả năng để động cơ $I$ và $II$ hoạt động tốt trong ngày lần lượt tương ứng là 75% và 85%. Xác suất để có đúng một động cơ hoạt động không tốt trong ngày là

**A.** 0,625. **B.** 0,325. **C.** 0,425. **D.** 0,525.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 2.** Gieo một con xúc xắc cân đối, đồng chất hai lần liên tiếp. Xét các biến cố:
$A$: "Tổng số chấm ở hai lần gieo bằng 8 ".
$B$: "Tích số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ hai là số chẵn".
Xác suất của biến cố $AB$ là

**A.** $\frac{1}{12}$. **B.** $\frac{1}{18}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 3.** Xác suất sinh con trai trong mỗi lần sinh là 0,51. Tính xác suất sao cho trong bốn lần sinh có ít nhất 1 lần là con trai (mỗi lần sinh 1 con).

**A.** 0,84. **B.** 0,74. **C.** 0,94. **D.** 0,64.

**Lời giải**

**Câu 4.** Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau

**A.** Hai biến cố $A$ và $B$ gọi là xung khắc nếu $AB = \varnothing$.

**B.** Nếu $AB = \varnothing$ thì $A = \overline{B}$.

**C.** Nếu $A = \overline{B}$ thì $AB = \varnothing$.

**D.** Hai biến cố $A$ và $\overline{A}$ gọi là xung khắc.

**Lời giải**

**Câu 5.** Gieo một con xúc sắc cân đối đồng chất 2 lần. Gọi $A$ là biến cố "Tổng số chấm 2 lần gieo là 5", $B$ là biến cố "Tích số chấm 2 lần gieo là 6 ", $C$ là biến cố "Lần gieo thứ nhất xuất hiện mặt 2 chấm". Khẳng định nào sau đây là **sai**?

**A.** $A = \{(1;4),(2;3),(3;2),(4;1)\}$.

**B.** $B = \{(1;6),(2;3),(3;2),(6;1)\}$.

**C.** $C = \{(2;1),(2;2),(2;3),(2;4),(2;5),(2;6)\}$.

**D.** $AC = \{(2;3),(3;2)\}$.

**Lời giải**

**Câu 6.** Cho $A$, $B$ là hai biến độc lập với nhau, biết $\mathrm{P}(A)=0{,}4$; $\mathrm{P}(B)=0{,}3$. Khi đó $\mathrm{P}(AB)$ bằng

**A.** 0,1. **B.** 0,12. **C.** 0,58. **D.** 0,7.

**Lời giải**

**Câu 7.** Hai xạ thủ cùng bắn vào bia. Xác suất người thứ nhất bắn trúng là 80%. Xác suất người thứ hai bắn trúng là 70%. Xác suất để cả hai người cùng bắn trúng là

**A.** 56%. **B.** 32,6%. **C.** 60%. **D.** 50%.

**Lời giải**

**Câu 8.** Một chiếc máy có hai động cơ I và II hoạt động độc lập với nhau. Xác suất để động cơ I và II chạy tốt lần lượt là 0,8 và 0,7. Tính xác suất để ít nhất một động cơ chạy tốt?

**A.** 0,56. **B.** 0,06. **C.** 0,94. **D.** 0,384.

**Lời giải**

**Câu 9.** Có ba vận động viên cùng thi chạy vượt rào. Xác suất để ba vận động viên này vượt qua được rào lần lượt là 0,9; 0,8; 0,7. Tìm xác suất để cả ba vận động viên vượt qua được rào.

**A.** P = 0,398. **B.** P = 0,994. **C.** P = 0,504. **D.** P = 0,72.

Lời giải

**Câu 10.** Một người có một chùm chìa khóa gồm 9 chiếc, bề ngoài của chúng giống hệt nhau và chỉ có đúng hai chiếc mở được cửa nhà. Người đó thử ngẫu nhiên từng chìa. Xác suất để mở được cửa trong lần mở thứ ba là

**A.** $\frac{14}{81}$. **B.** $\frac{7}{81}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{2}{7}$.

Lời giải

**Câu 11.** Ba xạ thủ độc lập cùng bắn vào 1 tấm bia. Biết rằng xác suất bắn trúng mục tiêu của ba người đó lần lượt là 0,7; 0,6; 0,5. Tính xác suất để có ít nhất một xạ thủ bắn trúng.

**A.** 0,8. **B.** 0,94. **C.** 0,45. **D.** 0,75.

**Lời giải**

**Câu 12.** Một đề thi trắc nghiệm gồm 50 câu, mỗi câu có 4 phương án trả lời trong đó chỉ có 1 phương án đúng, mỗi câu trả lời đúng được 0,2 điểm. Một thí sinh làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên 1 trong 4 phương án ở mỗi câu. Tính xác suất để thí sinh đó được 6 điểm.

**A.** $0{,}25^{30}\cdot 0{,}75^{20}\cdot \mathrm{C}_{50}^{20}$. **B.** $1-0{,}25^{20}\cdot 0{,}75^{30}$. **C.** $0{,}25^{20}\cdot 0{,}75^{30}$. **D.** $0{,}25^{30}\cdot 0{,}75^{20}$.

**Lời giải**

**Câu 13.** Một đề thi trắc nghiệm gồm 50 câu, mỗi câu có 4 phương án trả lời trong đó chỉ có 1 phương án đúng, mỗi câu trả lời đúng được 0,2 điểm. Một thí sinh làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên một trong 4 phương án ở mỗi câu. Tính xác suất để thí sinh đó được 8 điểm.

**A.** $\mathrm{P}=\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{40}$. **B.** $\mathrm{P}=\left(\frac{1}{4}\right)^{40}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$.

**C.** $\mathrm{P}=\mathrm{C}_{50}^{40}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{40}$. **D.** $\mathrm{P}=\mathrm{C}_{50}^{10}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{40}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Câu 1. B** | **Câu 2. A** | **Câu 3. C** | **Câu 4. B** | **Câu 5. D** | **Câu 6. B** | **Câu 7. A** |
| **Câu 8. C** | **Câu 9. C** | **Câu 10. C** | **Câu 11. B** | **Câu 12. A** | **Câu 13. D** | |

## PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

**Câu 1.** Hộp thứ nhất có 8 bi gồm bi xanh và bi đỏ và hộp thứ hai có 2 bi xanh và một số bi đỏ. Các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Chọn ngẫu nhiên từ mỗi hộp 2 viên bi. Xác suất để chọn được 2 bi xanh ở hộp thứ nhất là $\frac{3}{28}$ và xác suất để chọn được 2 bi xanh ở hộp thứ hai là $\frac{1}{15}$. Khi đó

**a)** Xác suất để chọn được hai bi màu xanh ở hộp thứ nhất và hai bi màu xanh ở hộp thứ hai bằng $\frac{1}{140}$.

**b)** Xác suất để chọn được hai bi màu đỏ ở hộp thứ nhất bằng $\frac{1}{28}$.

**c)** Xác suất để chọn được hai bi màu xanh ở hộp thứ nhất và hai bi màu đỏ ở hộp thứ hai bằng $\frac{3}{70}$.

**d)** Xác suất để chọn được ít nhất một bi màu xanh bằng $\frac{6}{7}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Câu 1.** | a | Đ | b | S | c | Đ | d | Đ |

## PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Tung đồng thời một đồng xu và một cục xúc xắc 12 mặt (1–12). Tính xác suất xuất hiện mặt ngửa và mặt là bội của 3. (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười) KQ: | | | | |

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Hai xạ thủ cùng bắn vào bia một cách độc lập với nhau. Xác suất bắn trúng bia của xạ thủ thứ nhất bằng $\frac{1}{2}$, xác suất bắn trúng bia của xạ thủ thứ hai bằng $\frac{1}{3}$. Tính xác suất của biến cố xạ thủ thứ nhất bắn trúng bia, xạ thủ thứ hai bắn trật bia. (*Kết quả làm tròn đến hàng phần mười*) KQ: | | | | |

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 3.** Trong một trận đấu bóng đá quan trọng ở vòng đấu loại trực tiếp, khi trận đấu buộc phải giải quyết bằng loạt sút luân lưu 11 m, huấn luyện viên đội $X$ đưa danh sách lần lượt 5 cầu thủ có xác suất sút luân lưu 11 m thành công là 0,8; 0,8; 0,76; 0,72; 0,68. Tìm xác suất để chỉ có cầu thủ cuối cùng sút trượt luân lưu. *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười*

KQ: | | | | |

**Lời giải**

.....

.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 4.** Trong phòng học của An có ba bóng đèn và xác suất hỏng của chúng lần lượt bằng 0,05; 0,04; 0,03. Chỉ cần có một bóng đèn sáng thì An vẫn có thể làm bài tập được. Xác suất để An có thể làm bài tập có dạng $\frac{\overline{4abc7}}{50\,000}$ $(a;b;c \in \mathbb{N})$, biết tình trạng (sáng hoặc bị hỏng) của mỗi bóng đèn không ảnh hưởng đến tình trạng các bóng còn lại. Tính $S = a \cdot b - c$ KQ: | | | | |

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**BẢNG ĐÁP ÁN**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Câu 1.** 0,2 | **Câu 2.** 0,3 | **Câu 3.** 0,1 | **Câu 4.** 72 |

Chương 9: Đạo hàm

Chương 9

# ĐẠO HÀM

## BÀI 31. ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

### A Kiến thức cần nhớ

#### 1 Đạo hàm

**Định nghĩa 1**

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0\in(a;b)$.

- Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của $f(x)$ tại điểm $x_0$, tức là

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

- Kí hiệu là $f'(x_0)$ hay $y'(x_0)$.

**Tính đạo hàm bằng định nghĩa.**

Để tính đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại $x_0\in(a;b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

- **Bước 1.** Tính $f(x)-f(x_0)$.
- **Bước 2.** Lập và rút gọn tỉ số $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ với $x\in(a;b),x\neq x_0$
- **Bước 3.** Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

⚠ *Trong định nghĩa và quy tắc trên đây, thay $x_0$ bởi $x$ ta sẽ có định nghĩa và quy tắc tính đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm $x\in(a;b)$.*

## 2 Ý nghĩa hình học của đạo hàm

**Ví dụ 1.** Cho hàm số $y = f(x) = x^2$ $(C)$ và điểm $M(1;1) \in (C)$.

1. Vẽ đồ thị $(C)$ và tính $f'(1)$.
2. Vẽ đường thẳng $d$ qua $M$ có hệ số góc $f'(1)$. Nhận xét về vị trí tương đối giữa $d$ và $(C)$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

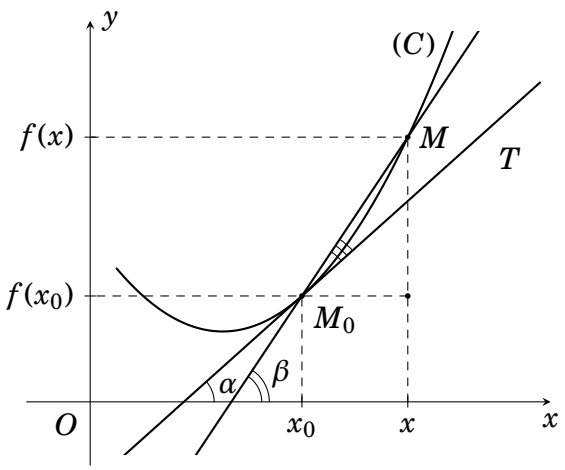
.....

Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho đồ thị $(C)$ của hàm số $y = f(x)$ và $M(x_0;y_0) \in (C)$. Xét $M(x;f(x))$ là một diểm di chuyển trên $(C)$.

Đường thẳng $MM_0$ là một cát tuyến của $(C)$. Hệ số góc của cát tuyến $MM_0$ được tính bởi công thức $k_{MM_0} = \tan\beta = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Khi cho $x$ dần tới $x_0$ thì $M$ di chuyển trên $(C)$ tới $M_0$.

Giả sử cát tuyến $MM_0$ có vị trí giới hạn là $M_0T$ thì $M_0T$ được gọi là tiếp tuyến của (C) tại $M_0$ và $M_0$ được gọi là tiếp điểm.




Ta có hệ số góc của tiếp tuyến $M_0T$ là

$$k_{M_0T} = \tan\alpha = \lim_{x\to x_0}(\tan\beta) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0).$$

⚠ *Đạo hàm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $x_0$ là hệ số góc của tiếp tuyến $M_0T$ của $(C)$ tại điểm $M_0(x_0;f(x_0))$.*
*Tiếp tuyến $M_0T$ có phương trình:*

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

## 3 Ý nghĩa vật lý của đạo hàm

- Nếu hàm số $s=f(t)$ biểu thị quãng đường di chuyển của vật theo thời gian $t$ thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ tức thời của chuyển động tại thời điểm $t_0$.

- Nếu hàm số $T=f(t)$ biểu thị nhiệt độ $T$ theo thời gian $t$ thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ thay đổi nhiệt độ theo thời gian tại thời điểm $t_0$.

## 4 Số e

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

Người ta còn biết rằng e là số vô tỉ và $\mathrm{e}=2{,}718281828\ldots$ (Số thập phân vô hạn không tuần hoàn).

# B Các dạng bài tập

### Dạng 1. Tính đạo hàm tại 1 điểm bằng định nghĩa

- Để tính đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại $x_0\in(a;b)$, ta thực hiện theo các bước sau:
  - **Bước 1.** Tính $f(x)-f(x_0)$.
  - **Bước 2.** Lập và rút gọn tỉ số $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ với $x\in(a;b)$ và $x\neq x_0$.
  - **Bước 3.** Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

    (1) $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

    (2) $f'\left(x_0^+\right)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

    (3) $f'\left(x_0^-\right)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

- Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x=x_0\Leftrightarrow f'\left(x_0^+\right)=f'\left(x_0^-\right)$.

- Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm thì trước hết phải liên tục tại điểm đó.

**Ví dụ 2.** Tính đạo hàm bằng định nghĩa tại một điểm của các hàm số sau:

a) $y = f(x) = 2x^3 + x - 1$ tại $x_0 = 0$.

b) $y = f(x) = x^2 + 2x - 1$ tại $x_0 = 1$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Ví dụ 3.** Tính đạo hàm bằng định nghĩa tại một điểm của các hàm số sau:

a) $y = f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$ tại $x_0 = -2$.

b) $y = f(x) = \dfrac{x^2 + x - 3}{2x - 1}$ tại $x_0 = 3$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Ví dụ 4.** Tính đạo hàm bằng định nghĩa tại một điểm của các hàm số sau:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ -3 & \text{khi } x=1\end{cases}$ tại $x=1$.

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^3+x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$ tại $x=0$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 5.** Tìm $a$ để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$ có đạo hàm tại $x=1$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 2. Tính đạo hàm tại 1 điểm bất kỳ trên $(a;b)$ bằng định nghĩa

Để tính đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại $x_0\in(a;b)$, ta thực hiện theo các bước sau

- **Bước 1.** Tính $f(x)-f(x_0)$.

- **Bước 2.** Lập và rút gọn tỉ số $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ với $x \in (a;b)$ và $x \neq x_0$
- **Bước 3.** Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm thì trước hết phải liên tục tại điểm đó.

**Ví dụ 6.** Tính đạo hàm bằng định nghĩa của các hàm số sau

a) $y=f(x)=4x+3$;

b) $y=f(x)=2024x+2025$;

c) $y=f(x)=2x^2+2024$;

d) $y=f(x)=x^2-3x+1$;

e) $y=f(x)=x^3-2x$;

f) $y=f(x)=x^4-2x^2+2$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 3. Ý nghĩa hình học của đạo hàm.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $(C)$, $M(x_0;y_0) \in (C)$.
Phương trình tiếp tuyến tại $M(x_0;y_0) \in (C)$ có dạng $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.
Trong đó: $x_0$ hoành độ tiếp điểm, $y_0$ tung độ tiếp điểm, $f'(x_0)$ hệ số góc tiếp tuyến.
**Bài toán:** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)(C)$ tại $x_0=a$.

- **Bước 1.** Tính $f'(x)$.
- **Bước 2.** Từ $x_0$, suy ra $\begin{cases} f'(x_0) \\ y_0. \end{cases}$
- **Bước 3.** Hoàn thiện phương trình tiếp tuyến cần tìm

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).$$

**Ví dụ 7.** Viết phương trình tiếp tuyến

a) Đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x - 4$ $(C)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$.

b) Đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$ $(C)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$.

c) Đồ thị hàm số $y = 2x^2 - 3$ $(C)$ tại điểm có tung độ $y_0 = -1$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 4. Ý Nghĩa Vật Lý Đạo Hàm

- Nếu hàm số $s = f(t)$ biểu thị quãng đường di chuyển của vật theo thời gian $t$ thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ tức thời của chuyển động tại thời điểm $t_0$.
- Nếu hàm số $T = f(t)$ biểu thị nhiệt độ $T$ theo thời gian $t$ thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ thay đổi nhiệt độ theo thời gian tại thời điểm $t_0$.

**Ví dụ 8.** Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là $s = f(t) = t^2+4t+6$ ($t$ được tính bằng giây, $s$ được tính bằng mét).

a) Tính đạo hàm của hàm số $f(t)$ tại điểm $t_0$.

b) Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 5$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 9.** Cho biết điện lượng trong một dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số $Q = 6t + 5$ ($t$ được tính bằng giây, $Q$ được tính bằng Coulomb). Tính cường độ của dòng điện trong dây dẫn tại thời điểm $t = 10$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 10.** Một vật chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = s(t)$ trong đó $t$ được tính bằng giây và $s$ được tính bằng mét. Hỏi

a) Gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu với $s = s(t) = t^3 - 3t^2 - 9t$ là bao nhiêu?

b) Gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu với $s = s(t) = t^3 + 3t^2 - 9t + 27$ là bao nhiêu?

c) Vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu với $s = s(t) = -t^3 + 3t^2 + 9t$ là bao nhiêu?

d) Vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu với $s = s(t) = t^3 - 3t^2$ là bao nhiêu?

e) Vận tốc tại thời điểm gia tốc bằng không với $s = s(t) = 2t^3 - 3t^2 + 4t$ là bao nhiêu?

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

## Dạng 5. Tìm tham số để hàm số có đạo hàm tại $x_0$

Cho hàm số $y = \begin{cases} g(x;m), & x \neq a \\ h(x;m), & x = a \end{cases}$ hoặc $y = \begin{cases} g(x;m), & x \geq a \\ h(x;m), & x < a \end{cases}$. Tìm tham số $m$ để hàm số có đạo hàm tại $x = a$.

- Xác định $\lim\limits_{x \to a^+} f(x;m)$, $\lim\limits_{x \to a^-} g(x;m)$, $f(a)$.
- Hàm số liên tục tại $x = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a^+} f(x;m) = \lim\limits_{x \to a^-} g(x;m) = f(a)$. Giải tìm $a$.
- Tính $f'\left(a^+\right) = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, $f'(a^-) = \lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
- Hàm số có đạo hàm tại $x = a \Leftrightarrow f'\left(a^+\right) = f'(a^-)$.

**Ví dụ 11.** Cho hàm số $y=\begin{cases}2x^2-x+a, & x\neq 0\\ x^2, & x=0\end{cases}$. Tìm $a$ để hàm số có đạo hàm tại $x=0$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 12.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2, & x\leq 1\\ ax+b, & x>1\end{cases}$. Tìm $a$, $b$ thì hàm số có đạo hàm tại $x=1$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 13.** Tìm tham số để hàm số có đạo hàm tại $x_0$.

a) Tìm $a$ để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1\\ a, & x=1\end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x=1$.

b) Tìm $a$, $b$ để hàm số $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+1, & x\geq 0\\ ax-b-1, & x<0\end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x=0$.

c) Tìm $a$, $b$ để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\geq 0\\ ax+b, & x<0\end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x=0$.

d) Tìm $a$, $b$ để hàm số $f(x)=\begin{cases}ax^2-2x+1, & x\geq 1\\ \sqrt{3-2x}-bx, & x<1\end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x=1$.

**Lời giải**

# C Bài tập rèn luyện

## PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm thỏa $f'(8)=5$. Giá trị của biểu thức $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{f(x)-f(8)}{x-8}$ bằng

**A.** 12. **B.** 5. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 2.** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=2$. Kết quả nào sau đây đúng?

**A.** $f'(2)=3$. **B.** $f'(x)=2$. **C.** $f'(3)=2$. **D.** $f'(x)=3$.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 3.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Giá trị $f'(0)$ bằng

**A.** 0. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 4.** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{3-\sqrt{4-x}}{4}$. Tính $f'(0)$.

**A.** $\dfrac{1}{32}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{16}$. **D.** Không tồn tại.

**Lời giải**

**Câu 5.** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $f'(3)=2$. **B.** $f'(2)=3$. **C.** $f'(x)=3$. **D.** $f'(x)=2$.

**Lời giải**

**Câu 6.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(6)=2$. Giá trị của biểu thức $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{f(x)-f(6)}{x-6}$ bằng

**A.** 12. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 7.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{3} & \text{khi } x\le 1\\ ax+b & \text{khi } x>1\end{cases}$. Với giá trị nào sau đây của $a$, $b$ thì hàm số có đạo hàm tại $x=1$?

**A.** $a=\frac{2}{3}; b=-\frac{1}{3}$. **B.** $a=1; b=-\frac{1}{2}$. **C.** $a=\frac{1}{2}; b=-\frac{1}{2}$. **D.** $a=1; b=\frac{1}{2}$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 8.** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{3x}{1+|x|}$. Giá trị $f'(0)$ bằng

**A.** $f'(0)=0$. **B.** $f'(0)=1$. **C.** $f'(0)=\frac{1}{3}$. **D.** $f'(0)=3$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 9.** Hệ số góc $k$ của tiếp tuyến đồ thị hàm số $y=x^3+1$ tại điểm $M(1;2)$ là

**A.** $k=3$. **B.** $k=4$. **C.** $k=5$. **D.** $k=12$.

**Lời giải**

**Câu 10.** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x=2$ có phương trình

**A.** $y=2x+7$. **B.** $y=-2x+7$. **C.** $y=2x+1$. **D.** $y=-2x-1$.

**Lời giải**

**Câu 11.** Cho đường cong $(C)$ có phương trình $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. Gọi $M$ là giao điểm của $(C)$ với trục tung. Tiếp tuyến của $(C)$ tại $M$ có phương trình là

**A.** $y=2x+1$. **B.** $y=x-2$. **C.** $y=-2x-1$. **D.** $y=2x-1$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 12.** Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ có đồ thị $(C)$. Đồ thị $(C)$ có bao nhiêu tiếp tuyến mà tiếp điểm thoả mãn hoành độ dương và tung độ bằng 1?

**A.** 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

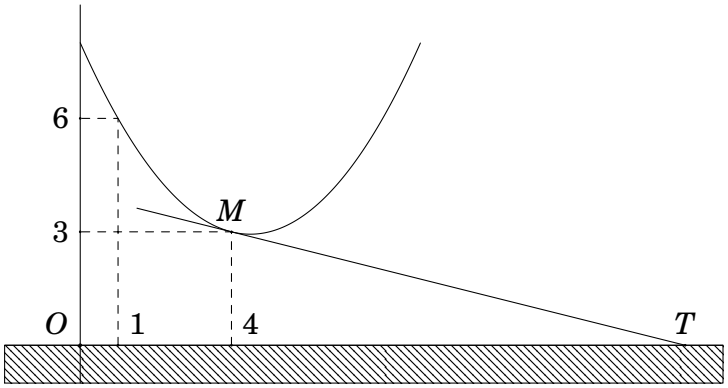
**Câu 13.** Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ qua điểm $A(1;-4)$.

**A.** 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Câu 14.** Một máy bay tại độ cao 8 km bắt đầu hạ độ cao theo quỹ đạo là một phần của parabol. Sau khi di chuyển theo phương ngang 1 km thì độ cao chỉ còn 6 km. Máy bay tiếp tục hạ độ cao còn 3 km sau khi di chuyển được 4 km theo phương ngang và phóng 1 tên lửa theo phương tiếp tuyến tại điểm phóng để hướng đến và trúng mục tiêu. Giả sử rằng quỹ đạo chuyển động của tên lửa là đường thẳng thì mục tiêu cách vị trí phóng tên lửa theo phương ngang là bao nhiêu km.




**A.** 12 km. **B.** 16 km. **C.** 14 km. **D.** 10 km.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 15.** Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2 + 5t + 2$, trong đó $t$ tính bằng giây và $s$ tính bằng mét. Vận tốc của chuyển động khi $t = 3$ là

**A.** 14 m/s. **B.** 15 m/s. **C.** 17 m/s. **D.** 12 m/s.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 16.** Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 2x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Mệnh đề **sai** là

**A.** $f'(1) = 2$. **B.** $f$ không có đạo hàm tại $x_0 = 1$.

**C.** $f'(0) = 2$. **D.** $f'(2) = 4$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 17.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+1 & \text{khi } x\geq 0 \\ ax-b-1 & \text{khi } x<0 \end{cases}$. Khi hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0=0$. Hãy tính $T=a+2b$.

**A.** $T=-4$. **B.** $T=0$. **C.** $T=-6$. **D.** $T=4$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 18.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3-\sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x\neq 0 \\ \dfrac{1}{4} & \text{khi } x=0 \end{cases}$. Khi đó $f'(0)$ là kết quả nào sau đây?

**A.** $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{16}$. **C.** $\dfrac{1}{32}$. **D.** Không tồn tại.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 19.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & \text{khi } x\geq 0\\ -x^2 & \text{khi } x<0\end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x_0=0$ là

**A.** $f'(0)=0$. **B.** $f'(0)=1$. **C.** $f'(0)=-2$. **D.** Không tồn tại.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 20.** Cho hàm số $y=\begin{cases}x^2+ax+b & \text{khi } x\geq 2\\ x^3-x^2-8x+10 & \text{khi } x<2\end{cases}$. Biết hàm số có đạo hàm tại điểm $x=2$. Giá trị của $a^2+b^2$ bằng

**A.** 20. **B.** 17. **C.** 18. **D.** 25.

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**BẢNG ĐÁP ÁN**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Câu 1. B** | **Câu 2. C** | **Câu 3. C** | **Câu 4. C** | **Câu 5. A** | **Câu 6. B** | **Câu 7. A** |
| **Câu 8. D** | **Câu 9. A** | **Câu 10. B** | **Câu 11. D** | **Câu 12. D** | **Câu 13. A** | **Câu 14. A** |
| **Câu 15. A** | **Câu 16. B** | **Câu 17. C** | **Câu 18. B** | **Câu 19. D** | **Câu 20. A** | |

## PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

**Câu 1.** Hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$. Khi đó

**a)** $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

**b)** $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

**c)** $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến tại $x = 0$.

**d)** $f'(x_0) > 0$.

Lời giải

**Câu 2.** Dùng định nghĩa tìm đạo hàm của hàm số $y = x^2 + 1$ trên tập xác định.
Khi đó các mệnh đề sau đúng hay sai?

**a)** $f'(x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

**b)** $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 2x_0$.

**c)** $f'(2) = 4$.

**d)** $f'(2) + f'(-2) = 0$.

Lời giải

**Câu 3.** Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$ tại điểm $x_0 = 0$
ta được $f'(0) = a$. Khi đó

**a)** $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

**b)** $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4}{x+1}$.

**c)** Phương trình $3^x = 3$ có nghiệm bằng $x = a - 2$.

**d)** $\log_a 9 = 3$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 4.** Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2}{1-x}$ với $x\neq 1$.
Khi đó

**a)** Với bất kì $x_0\neq 1$, ta có $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2}{(1-x)(1-x_0)}$.

**b)** $f'(2)=2$.

**c)** $f'(3)=\dfrac{1}{3}$.

**d)** $f'(2)+f'(3)=\dfrac{3}{2}$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 5.** Viết được phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+9}{x+1}$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: x-2y+2=0$. Khi đó

**a)** Có hai phương trình tiếp tuyến thỏa mãn.

**b)** Hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-2$.

**c)** Có tiếp tuyến đi qua điểm $A(1;5)$.

**d)** Có tiếp tuyến đi qua điểm $B(1;-7)$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 6.** Cho hàm số $y = x^2 + 2x - 4$ có đồ thị $(C)$. Khi đó

**a)** Hệ số góc của tiếp tuyến của $(C)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ thuộc $(C)$ là $-4$.

**b)** Có hai phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có tung độ $y_0 = -1$ thuộc $(C)$.

**c)** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết hệ số góc tiếp tuyến bằng $-4$ là $y = -4x - 12$.

**d)** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $y = 1 - 3x$ là $y = -3x - \dfrac{41}{4}$.

**Lời giải**

**Câu 7.** Một vật chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = s(t) = t^3 - 3t^2 - 9t$ trong đó $t$ được tính bằng giây và $s$ được tính bằng mét. Khi đó

**a)** Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 5$ s là 36 m/s.

**b)** Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 3$ s là 6 m/s$^2$.

**c)** Gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu là 12 m/s$^2$.

**d)** Vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu là 12 m/s$^2$.

**Lời giải**

**Câu 8.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ a & \text{khi } x=1.\end{cases}$

**a)** Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

**b)** Với $a=-2$ thì hàm số có đạo hàm tại $x=1$.

**c)** Với $a=2$ thì hàm số có đạo hàm tại $x=1$.

**d)** Với $a=m_0$ thì hàm số có đạo hàm tại $x=1$, khi đó: $\lim\limits_{x\to m_0}\left(x^2+2x-3\right)=5$.

**Lời giải**

**Câu 9.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+x & \text{khi } x\geqslant 1\\ ax+b & \text{khi } x<1\end{cases}$. Khi đó

**a)** $\lim\limits_{x\to +^+} f(x)=2$.

**b)** $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=a+b$.

**c)** Hàm có đạo hàm tại $x=1$ khi $a=m_0, b=n_0$ khi đó $n_0>m_0$.

**d)** Hàm có đạo hàm tại $x=1$ khi $a=m_0, b=n_0$ khi đó $n_0+m_0=2$.

**Lời giải**

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | |
|---|---|---|
| **Câu 1.** a Đ b Đ c S d S | **Câu 2.** a S b Đ c Đ d Đ | **Câu 3.** a Đ b S c Đ d S |
| **Câu 4.** a Đ b Đ c S d S | **Câu 5.** a Đ b Đ c Đ d S | **Câu 6.** a S b Đ c S d Đ |
| **Câu 7.** a Đ b Đ c Đ d S | **Câu 8.** a Đ b S c Đ d Đ | **Câu 9.** a Đ b Đ c S d Đ |

## PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$ tại $x_0 = -2$. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm). KQ: ☐

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Hàm số $y = f(x) = x^3 - 2x$ trên tập số thực là $y' = f'(x) = ax^2 + bx + c$. Tính $a^2 + b - c$.
KQ: ☐

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 3.** Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{3x}$. Tính hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng $-3$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm). KQ: ☐

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 4.** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x}$ có đồ thị $(C)$ và điểm $M(1;1)\in(C)$. Phương trình tiếp tuyến với $(C)$ tại điểm $M$ có dạng $y=ax+b$. Tính $T=2a+b$. KQ: ☐

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 5.** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ có đồ thị $(C)$. Phương trình tiếp tuyến với $(C)$ vuông góc với đường thẳng $\Delta: y=-\dfrac{1}{2}x+3$ có dạng $y=ax+b$. Tính $T=a^2b$, biết tọa độ tiếp điểm có hoành độ âm. KQ: ☐

**Lời giải**

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

**Câu 6.** Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là $s(t)=t^2+4t+6$ ($t$ được tính bằng giây, $s$ được tính bằng mét). Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t=5$. KQ: ☐

**Lời giải**

. . . . . .

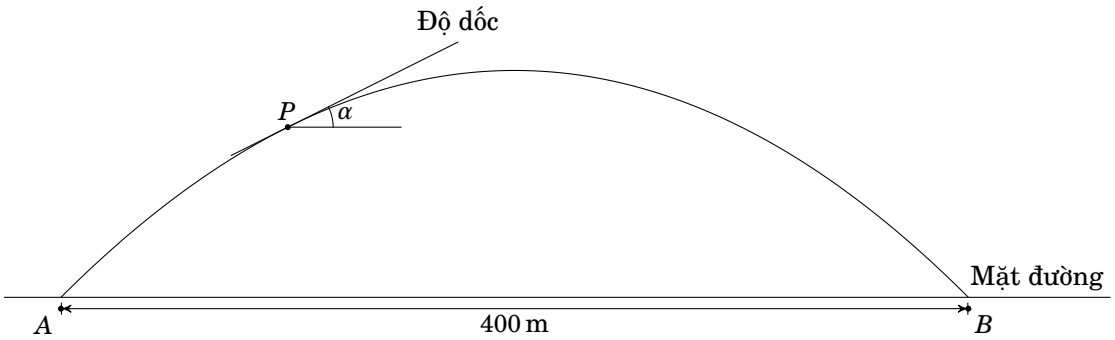
. . . . . .

**Câu 7.** Một chất điểm chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = \frac{1}{2}t^2$, trong đó $t$ là thời gian tính bằng giây và $s$ là quãng đường đi được trong $t$ giây tính bằng mét. Vận tốc tức thời của chất điểm tại $t = 5$ đạt bao nhiêu m/s ? KQ: ☐

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 8.** Người ta xây dựng một cây cầu vượt giao thông hình parabol nối hai điểm có khoảng cách là 400 m. Độ dốc của mặt cầu không vượt quá 10° (độ dốc tại một điểm được xác định bởi góc giữa phương tiếp xúc với mặt cầu và phương ngang). Chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường là bao nhiêu mét? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).




KQ: ☐

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Câu 1.** 0,33 | **Câu 2.** 11 | **Câu 3.** $-0,04$ | **Câu 4.** 0 | **Câu 5.** 28 |
| **Câu 6.** 14 | **Câu 7.** 5 | **Câu 8.** 17,6 | | |

# BÀI 32. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

## A Lý thuyết

### 1 Đạo hàm hàm số $y = x^n$

**Định nghĩa 1**

Hàm số $y = x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.

### 2 Đạo hàm hàm số $y = \sqrt{x}$

**Định nghĩa 2**

Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm trên $(0;+\infty)$ và $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

### 3 Đạo hàm hàm số lượng giác

a) Hàm số $y = \sin x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(\sin x)' = \cos x$.

b) Hàm số $y = \cos x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(\cos x)' = -\sin x$.

c) Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ và $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

d) Hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq k\pi$ và $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

### 4 Đạo hàm của hàm số mũ và hàm số logarit

a) Hàm số $y = \mathrm{e}^x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.

b) Hàm số $y = a^x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.

c) Hàm số $y = \log_a x$ có đạo hàm trên $x > 0$ và $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$.

d) Hàm số $y = \ln x$ có đạo hàm trên $x > 0$ và $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

### 5 Quy tắc tính đạo hàm

**Tính chất 1.** Giả sử các hàm số $u = u(x)$, $v = v(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$. Khi đó

a) $(k \cdot u)' = k \cdot u'$ ($k$ là hằng số).

b) $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

c) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

d) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$ $(v \neq 0)$, đặc biệt $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ $(v = v(x) \neq 0)$.

# 6 Đạo hàm của hàm hợp

## 6.1 Khái niệm hàm hợp

**Khái niệm.** Giả sử $u = g(x)$ là hàm số xác định trên khoảng $(a;b)$, có tập giá trị chứa khoảng $(c;d)$ và $y = f(u)$ là hàm số xác định trên $(c;d)$. Hàm số $y = f(g(x))$ được gọi là hàm số hợp của hàm số $f(u)$ với $u = g(x)$.

## 6.2 Đạo hàm của hàm số hợp

**Định nghĩa 3**

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $u'_x$ và hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y'_u$ tại $u$ thì hàm số hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm $y'_x$ tại $x$ là

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Từ đó ta có kết quả sau:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$<br>2) $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$<br>3) $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $(u^n)' = n \cdot n^{n-1} \cdot u'$<br>$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$<br>$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ | 8) $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$<br>9) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ | $(\mathrm{e}^u)' = u' \cdot \mathrm{e}^u$<br>$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$ |
| 4) $(\sin x)' = \cos x$<br>5) $(\cos x)' = -\sin x$<br>6) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$<br>7) $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ | $(\sin u)' = u' \cdot \cos u$<br>$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$<br>$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$<br>$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$ | 10) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$<br>11) $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ | $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$<br>$\left(\log_a u\right)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$ |

# B Các dạng bài tập

### Dạng 1. Tính đạo hàm đa thức–hữu tỉ–căn thức

1) Áp dụng quy tắc đạo hàm. Khi đó

- $(ku)' = ku'$, $(k = \text{const})$.
- $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2} (v \neq 0) \to \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} (v = v(x) \neq 0)$.

2) Áp dụng công thức đạo hàm

- $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.
- $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
- $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$.
- $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

**Ví dụ 1.** Tính đạo hàm các hàm số sau

a) $f(x) = \left(1-x^3\right)^5$.

b) $f(x) = x^4 - x^2 + x + 200$.

c) $f(x) = 3x^4 - x^3 + x - 2021$.

d) $f(x) = x^3 - 2x^2 + \dfrac{5}{x} + 7$.

e) $f(x) = x - \dfrac{4}{x}$.

f) $f(x) = -x^7 + 2x^5 + 3x^3$.

g) $f(x) = (x+1)(x-2)$.

h) $f(x) = \dfrac{3x+5}{-1+2x}$.

i) $f(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$.

j) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 2. Tính đạo hàm lượng giác

1) Áp dụng quy tắc đạo hàm

- $(ku)' = ku'$, ($k$ = const).
- $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2} (v \neq 0) \to \left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2} (v = v(x) \neq 0)$

2) Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại $x_0 \in (a;b)$, ta thực hiện theo các bước sau

- $(\sin x)' = \cos x$.
- $(\cos x)' = -\sin x$.
- $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
- $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

**Ví dụ 2.** Tính đạo hàm các hàm số sau

a) $y = \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - 3x\right)$.

b) $y = -\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x^2\right)$.

c) $y = 2\cos x^2$.

d) $y = \tan\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$.

e) $y = \sin\sqrt{2+x^2}$

f) $y = \sin(\sin x)$.

g) $y = 2\sin^2 x - \cos 2x + x$.

h) $y = \cos^3(2x-1)$.

i) $y = \tan^3 x + \cot 2x$.

j) $y = \sin\left(x^2 - 3x + 2\right)$.

**Lời giải**

## Dạng 3. Tính đạo hàm mũ–logarit

a) Áp dụng quy tắc đạo hàm

- $(ku)' = ku'$, ($k$ = const).
- $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}(v \neq 0) \to \left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}(v = v(x) \neq 0)$.

b) Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại $x_0 \in (a;b)$, ta thực hiện theo các bước sau

- $(e^x)' = e^x$.
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.
- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
- $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

**Ví dụ 3.** Tính đạo hàm các hàm số sau

a) $y=\log_3(2x+1)$.

b) $y=\log_3(1-2x)$.

c) $y=5^{2x-1}$

d) $y=2025^{x-2025}$.

e) $y=x+\ln(x+3)$.

f) $y=\mathrm{e}^{\sin x}$.

g) $y=\mathrm{e}^{2x-3}+\mathrm{e}^{2025}$.

h) $y=\log_2\left(x^2-2x\right)$.

i) $y=\log_3\left(2x^2-x+1\right)$.

j) $y=3^x+\log_3\left(x-2x^2\right)$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Dạng 4. Tổng hợp

Phương pháp: Áp dụng quy tắc đạo hàm

a) $(ku)'=ku'$ ($k$ = const).

b) $(u\pm v)'=u'\pm v'$.

c) $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$.

d) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-v'\cdot u}{v^2}$ $(v\neq 0)$. Ta có $\left(\dfrac{1}{v}\right)'=-\dfrac{v'}{v^2}$ $(v(x)\neq 0)$.

**Ví dụ 4.** Tính đạo hàm các hàm số sau:

a) $y=-2x^2+4\sqrt{x}$,

b) $y=(3x^2-1)^2$,

c) $y=-2x^3+4x^2+1$,

d) $y=\dfrac{1}{3}x^3-2\sqrt{2}x^2+8x-1$,

e) $y=\dfrac{2x+1}{x+2}$,

f) $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$,

g) $y=\dfrac{x^2+x+3}{x^2+x-1}$,

h) $y=\dfrac{-x^2+3x-3}{2(x-1)}$,

i) $y=x^2(2x+1)(5x-3)$,

j) $y=(x^2+1)(5-3x^2)$.

**Lời giải**

**Ví dụ 5.** Tính đạo hàm các hàm số sau:

a) $y=\sqrt{4x^2+3x+1}$,

b) $y=\sqrt{x^2+x+3}$,

c) $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$,

d) $y=(x^2+2x+3)^5$,

e) $y=\sqrt{2x^2+1}$,

f) $y=(2x^3-3x-7)^3$,

g) $y=\sqrt{1-3x^2}$,

h) $y=(2x-1)\sqrt{x^2+x}$,

i) $y=\dfrac{-3x+4}{x-2}$,

j) $y=\sqrt{x^4-4x^2+7}$.

**Lời giải**

# C Bài tập rèn luyện

## PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1.** Đạo hàm của hàm số $y = x^5$ tại điểm $x = 2$ là

**A.** 80. **B.** 16. **C.** 5. **D.** $5x^4$.

Lời giải

**Câu 2.** Đạo hàm của hàm số $y = \ln x$ tại điểm $x = \dfrac{1}{3}$ là

**A.** $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{9}$. **C.** 9. **D.** 3.

Lời giải

**Câu 3.** Với $x > 0$, đạo hàm của hàm số $y = 2^x + \log_5 x$ là

**A.** $y' = 2^x \cdot \ln 2 + \dfrac{1}{x \cdot \ln 2}$. **B.** $y' = 2^x + \dfrac{1}{x \cdot \ln 5}$.

**C.** $y' = 2^x \cdot \ln 2 + \dfrac{1}{\ln 5}$. **D.** $y' = 2^x \cdot \ln 2 + \dfrac{1}{\ln 5}$.

Lời giải

**Câu 4.** Cho $a, x > 0$, $a \neq 1$, trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

**A.** $\left(\mathrm{e}^{3x} - a^x + \pi\right)' = 3\mathrm{e}^x - a^x \cdot \ln a$.

**B.** $\left(\mathrm{e}^{3x} - a^x + \pi\right)' = 3\mathrm{e}^{3x} - a^x \ln a$.

**C.** $(\mathrm{e}^x - \ln(x+1) + \pi)' = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x}$.

**D.** $(\mathrm{e}^x - \ln(x+1) + \pi)' = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x+1} + \pi$.

**Lời giải**

**Câu 5.** Tính đạo hàm của hàm số $y = 2\sin 3x + \cos 2x$.

**A.** $y' = 6\cos 3x - 2\sin 2x$.

**B.** $y' = 2\cos 3x + \sin 2x$.

**C.** $y' = -6\cos 3x + 2\sin 2x$.

**D.** $y' = 2\cos 3x - \sin 2x$.

**Lời giải**

**Câu 6.** Đạo hàm của hàm số $y = x\mathrm{e}^x$ bằng

**A.** $y' = (1+x)\mathrm{e}^x$.

**B.** $y' = \mathrm{e}^x$.

**C.** $y' = x\mathrm{e}^x$.

**D.** $y' = (1-x)\mathrm{e}^x$.

**Lời giải**

**Câu 7.** Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{2x+1}{1-x}$ bằng

**A.** $y'=\dfrac{-2}{(1-x)^2}$. **B.** $y'=\dfrac{3}{(1-x)^2}$. **C.** $y'=-2$. **D.** $y'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$.

**Lời giải**

**Câu 8.** Hàm số $y=\sin^2 x\cdot\cos x$ có đạo hàm là

**A.** $y'=\sin x\cdot\left(3\cos^2 x-1\right)$. **B.** $y'=\sin x\cdot\left(3\cos^2 x+1\right)$.

**C.** $y'=\sin x\cdot\left(\cos^2 x+1\right)$. **D.** $y'=\sin x\cdot\left(\cos^2 x-1\right)$.

**Lời giải**

**Câu 9.** Cho hàm số $f(x)=\log_2\left(x^2+1\right)$, tính $f'(1)$.

**A.** $f'(1)=1$. **B.** $f'(1)=\dfrac{1}{2\ln 2}$. **C.** $f'(1)=\dfrac{1}{2}$. **D.** $f'(1)=\dfrac{1}{\ln 2}$.

**Lời giải**

**Câu 10.** Đạo hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{-5x^2+14x-9}$ là

**A.** $\dfrac{1}{\sqrt{-5x^2+14-9}}$. **B.** $\dfrac{-5x+7}{2\sqrt{-5x^2+14x-9}}$. **C.** $\dfrac{-5x+7}{\sqrt{-5x^2+14x-9}}$. **D.** $\dfrac{1}{2\sqrt{-5x^2+14-9}}$.

**Lời giải**

**Câu 11.** Cho hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{-x^3+x^2+x}$. Biết phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm $x_1$, $x_2$. Tính $3x_1x_2$.

**A.** $3x_1x_2=-\dfrac{1}{4}$. **B.** $3x_1x_2=-1$. **C.** $3x_1x_2=\dfrac{3}{4}$. **D.** $3x_1x_2=1$.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 12.** Cho hàm số $g(x)=f(x)-f(2x)$. Biết $g'(1)=10$ và $g'(2)=24$. Tính đạo hàm của hàm số $h(x)=f(x)-f(4x)$ tại $x=1$.

**A.** 56. **B.** 60. **C.** 58. **D.** 72.

**Lời giải**

. . . . . .

**Câu 13.** Cho hàm số $y=f(x)=x^3-12x+2024$. Bất phương trình $f'(x)<0$ có tập nghiệm là

**A.** $S=(-2;2)$. **B.** $S=(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

**C.** $S=(-\infty;-2)$. **D.** $S=(2;+\infty)$.

**Lời giải**

. . . . . .

**BẢNG ĐÁP ÁN**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Câu 1. A | Câu 2. D | Câu 3. D | Câu 4. B | Câu 5. A | Câu 6. A | Câu 7. B |
| Câu 8. A | Câu 9. D | Câu 10. C | Câu 11. B | Câu 12. C | Câu 13. A | |

## PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

**Câu 1.** Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+2x$. Khi đó

**a)** Hàm số có đạo hàm là $f'(x)=3x^2-6x+2$.

**b)** $f'(3)=6$.

**c)** $f'(4)<f'(5)$.

**d)** $f'(2)+f'(-2)=0$.

Lời giải

**Câu 2.** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x-3}{x+2}$ vvà $g(x)=x\ln x$. Khi đó

**a)** Hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=\dfrac{5}{(x+2)^2}$.

**b)** Hàm số $g(x)$ có đạo hàm là $g'(x)=\ln x+1$.

**c)** $f'(-1)-g'(\mathrm{e})=2$.

**d)** Phương trình $(x+2)^2f'(x)=g'(x)$ có hai nghiệm.

Lời giải

**Câu 3.** Cho hàm số $y=(x-2)\sqrt{x^2+m}$ với $m$ là tham số. Khi đó

**a)** Hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=\dfrac{x^2-2x+m}{\sqrt{x^2+m}}$.

**b)** $f'(0)=\sqrt{m}$.

**c)** Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $x_0=1$ là $\dfrac{m}{\sqrt{m+1}}$.

**d)** Để phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khi $m<\dfrac{1}{2}$.

## Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | |
|---|---|---|
| **Câu 1.** a Đ b S c Đ d S | **Câu 2.** a Đ b Đ c S d S | **Câu 3.** a S b Đ c Đ d Đ |

## PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Nhiệt độ cơ thể của một người trong thời gian bị bệnh được cho bởi công thức $T(t) = -0{,}1t^2 + 1{,}2t + 98{,}6$, trong đó $t$ là nhiệt độ (tính theo đơn vị đo nhiệt độ Farenheit) tại thời điểm $t$ (tính theo ngày). Tìm tốc độ thay đổi của nhiệt độ (đơn vị: °F/ngày) ở thời điểm $t = 2$.

KQ: ☐

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Dân số $P$ (tính theo nghìn người) của một thành phố nhỏ được cho bởi công thức $P(t) = \dfrac{500t}{t^2+9}$, trong đó $t$ là thời gian được tính bằng năm. Tìm tốc độ tăng dân số (đơn vị: nghìn người/năm) tại thời điểm $t = 7$ (làm tròn đến hàng phần chục). KQ: ☐

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | |
|---|---|
| **Câu 1.** 0,8 | **Câu 2.** −5,9 |

# BÀI 33. ĐẠO HÀM CẤP HAI

## A Lý thuyết

### 1 Đạo hàm cấp hai

**Định nghĩa 1**

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y'=f'(x)$ tại mọi điểm $x\in(a;b)$.
Nếu hàm số $y'=f'(x)$ có đạo hàm tại $x$ thì ta gọi đạo hàm của $y'(x)$ là đạo hàm cấp hai của hàm số $y=f(x)$ tại $x$, kí hiệu $y''$ hoặc $f''(x)$.
Khi đó $\big(f'(x)\big)'=f''(x)$.

**Định lý 1**

[Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai] Một chuyển động có phương trình quãng đường $s=f(t)$ thì đạo hàm cấp hai (nếu có) của hàm số $s=f(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động $s=f(t)$ tại thời điểm $t$. Ta có $a(t)=f''(t)$.

## B Các dạng bài tập

**Dạng 1. Đạo hàm cấp 2**

*Phương pháp:* Cho hàm số $y=f(x)$, tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y=f(x)$ ta thực hiện các bước sau:

**Bước 1.** Tính đạo hàm cấp một $y'=f'(x)$.

**Bước 2.** Lấy kết quả của đạo hàm cấp một đem đi đạo hàm $\big(y'\big)'=\big(f'(x)\big)'$.

**Bước 3.** Kết luận: $y''=f''(x)$.

**Ví dụ 1.** Tính đạo hàm cấp hai các hàm số sau:

a) $y = 2x$, b) $y = (2x-1)^2$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 2.** Cho hàm số $f(x) = \left(x^2-1\right)^2$. Tính $f''(1)$.

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 3.** Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S(t) = t^4 - 4t^2 + 4$, trong đó $t$ được tính bằng giây và $S$ được tính bằng mét. Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 2$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

**Ví dụ 4.** Xác định hàm số $f(x) = ax^5 + bx^3 - 2cx^2 + 3x - 2$, $(a \neq 0)$. Biết $f(1) = 5$, $f'(-1) = 0$, $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 5$.

**Lời giải**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

# C Bài tập rèn luyện

## PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1.** Hàm số $y=\dfrac{x}{x-2}$ có đạo hàm cấp hai là

**A.** $y''=0$. **B.** $y''=\dfrac{1}{(x-2)^2}$. **C.** $y''=-\dfrac{4}{(x-2)^2}$. **D.** $y''=\dfrac{4}{(x-2)^3}$.

**Lời giải**

**Câu 2.** Hàm số $y=\tan x$ có đạo hàm cấp hai bằng

**A.** $y''=-\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$. **B.** $y''=\dfrac{1}{\cos^2 x}$. **C.** $y''=-\dfrac{1}{\cos^2 x}$. **D.** $y''=\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$.

**Lời giải**

**Câu 3.** Hàm số $y=\dfrac{-2x^2+3x}{1-x}$ có đạo hàm cấp hai bằng

**A.** $y''=2+\dfrac{1}{(1-x)^2}$. **B.** $y''=\dfrac{2}{(1-x)^3}$. **C.** $y''=\dfrac{-2}{(1-x)^3}$. **D.** $y''=\dfrac{2}{(1-x)^4}$.

**Lời giải**

**Câu 4.** Cho hàm số $y=\sin 2x$. Chọn khẳng định đúng.

**A.** $4y-y'=0$. **B.** $4y+y''=0$. **C.** $y=y'\tan 2x$. **D.** $y^2=\left(y'\right)^2=4$.

Lời giải

**Câu 5.** Cho hàm số $y=-\dfrac{1}{x}$. Khi đó $y''\left(\dfrac{1}{2}\right)$ bằng

**A.** $-16$. **B.** $-8$. **C.** $8$. **D.** $16$.

Lời giải

**Câu 6.** Cho hàm số $f(x)=ax^2+bx+3$ ($a,b$ là các hằng số). Biết $f'(1)=0$ và $f''(1)=-2$. Tính $a+b$ bằng

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $-1$. **D.** $0$.

Lời giải

**Câu 7.** Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là $s(t)=\frac{2}{3}t^3-t^2+3t-4$, ($t$ được tính bằng giây, $s$ tính bằng mét). Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t=5$ là

**A.** 42 (m/s). **B.** 43 (m/s). **C.** 41 (m/s). **D.** 40 (m/s).

**Lời giải**

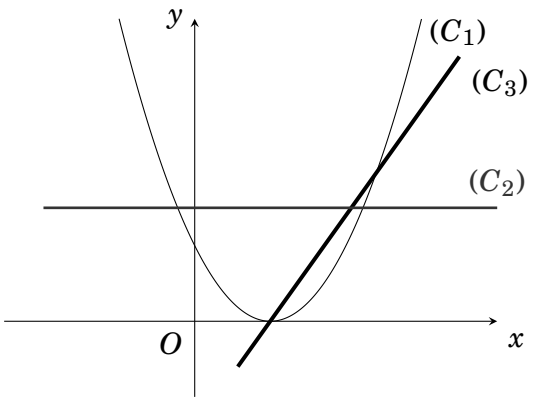
**Câu 8.** Nếu số lượng sản phẩm sản xuất được của một nhà máy là $x$ (đơn vị: trăm sản phẩm) thì lợi nhuận sinh ra là $P(x)=-150x^2+24000x-35000$ (nghìn đồng). Tính tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 1000 sản phẩm.

**A.** 20000. **B.** 22500. **C.** 21000. **D.** 24000.

**Lời giải**

**Câu 9.** Cho hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$. Đồ thị của hàm số $y=f(x), y=f'(x), y=f''(x)$ được vẽ trong cùng một hệ trục tọa độ $Oxy$ như hình dưới. Trong hình vẽ, đồ thị $(C_1)$ là đường cong

được vẽ bằng nét mảnh nhất, đồ thị $(C_3)$ được vẽ bằng nét đậm nhất và đường còn lại là $(C_2)$. Khẳng định nào sau đây đúng?




**A.** $(C_1): y = f(x), (C_2): y = f'(x), (C_3): y = f''(x)$.
**B.** $(C_1): y = f''(x), (C_2): y = f'(x), (C_3): y = f(x)$.
**C.** $(C_1): y = f(x), (C_2): y = f''(x), (C_3): y = f'(x)$.
**D.** $(C_1): y = f'(x), (C_2): y = f''(x), (C_3): y = f(x)$.

**Lời giải**

**Câu 10.** Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s = f(t)$ thỏa mãn $f''(t) = 2 + 3t$, với $t$ (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và $s$ (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Gia tốc tức thời tại điểm $t = 1$ giây của chuyển động bằng

**A.** 5 m/s$^2$. **B.** 3 m/s$^2$. **C.** 2 m/s$^2$. **D.** 6 m/s$^2$.

**Lời giải**

. . . . . .

. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Câu 1. D | Câu 2. D | Câu 3. B | Câu 4. B | Câu 5. A | Câu 6. A | Câu 7. B |
| Câu 8. C | Câu 9. C | Câu 10. A | | | | |

## PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

**Câu 1.** Cho hai hàm số $f(x)=x^3+2x+1$ và $g(x)=\mathrm{e}^{2x+1}$. Khi đó

**a)** Đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x)$ là $f''(x)=6x$.

**b)** Đạo hàm cấp hai của hàm số $g(x)$ là $g''(x)=4\cdot\mathrm{e}^{2x-1}$.

**c)** Đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x)$ tại $x_0=-2$ là $f''(-2)=12$.

**d)** Đạo hàm cấp hai của hàm số $g(x)$ tại $x_0=1$ là $g''(1)=4\cdot\mathrm{e}^3$.

**Lời giải**

**Câu 2.** Cho hàm số $f(x)=ax^2+bx+2, a\neq 0$ có đồ thị là một parabol $(P)$.

**a)** Biết $f'(-1)=-1$ và $f''(1)=4$. Khi đó $a+b=6$.

**b)** $(P)$ có trục đối xứng là đường thẳng $x=3$, $f''(3)=2$. Khi đó $b=6$.

**c)** $(P)$ đi qua điểm $A(1;2)$, $f''(2024)=-2$. Khi đó $b=1$.

**d)** $(P)$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng $-1$, $f''(-1)=6$. Khi đó $b=5$.

**Lời giải**

**Câu 3.** Cho hàm số $f(x)=(2x+5)^5$.

**a)** Phương trình $f''(x)=0$ có duy nhất một nghiệm $x=-\dfrac{5}{2}$.

**b)** Phương trình $f''(x)=80$ có tập nghiệm là $S=\{-3;-2\}$.

**c)** Phương trình $\dfrac{f''(x)}{(2x+5)^2}=0$ có duy nhất một nghiệm là $x=-\dfrac{5}{2}$.

**d)** Phương trình $f'(x)=f''(x)$ có duy nhất một nghiệm là $x=-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 4.** Một chất điểm chuyển động thẳng được xác định bởi phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 5t + 2$, trong đó $t$ tính bằng giây và $s$ tính bằng mét. Khi đó

**a)** Quãng đường tại thời điểm 3 giây là 17 m.

**b)** Vận tốc của chất điểm trong thời gian 4 giây là 29 m/s.

**c)** Tại thời điểm $t = 1$ (s) thì gia tốc của chất điểm bằng 0.

**d)** Trong khoảng thời gian từ 2 giây đến 5 giây thì chất điểm chuyển động được 85 m.

Lời giải

. . . . . .

**Câu 5.** Một vật chuyển động trên đường thẳng được xác đinh bởi công thức $s(t) = -t^3 + 3t^2 + 9t + 2$, trong đó $t > 0$ tính bằng giây và $s$ là quãng đường chuyển động được của vật trong $t$ giây tính bằng mét. Khi đó

**a)** Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 2$ là 9 m/s.

**b)** Vận tốc cực đại của chuyển động là 12 m/s.

**c)** Quãng đường của vật đi được từ thời điểm bắt đầu chuyển động cho đến lúc dừng lại là 30m.

**d)** Gia tốc của vật khi vận tốc đạt cực đại bằng 0.

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | |
|---|---|---|
| **Câu 1.** a Đ b S c S d Đ | **Câu 2.** a S b S c Đ d Đ | **Câu 3.** a Đ b S c S d S |
| **Câu 4.** a Đ b Đ c Đ d S | **Câu 5.** a Đ b Đ c S d Đ | |

## PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t) = 8t + 3t^2$, trong đó $t > 0$, $t$ tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng mét/giây. Tìm gia tốc của chất điểm tại thời điểm mà vận tốc chuyển động là 11 mét/giây. KQ: $\square$

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Một chuyển động theo qui luật là $s = -\frac{1}{2}t^3 + 3t^2 + 20$ với $t$ giây là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và $s$ (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Quãng đường vật đi được bắt đầu từ lúc vật chuyển động tới thời điểm vật đạt được vận tốc lớn nhất bằng bao nhiêu? KQ: $\square$

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 3.** Biết hàm số $y = f(x) - f(3x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm cấp hai với mọi $x \in \mathbb{R}$, biết $y''(3) = 5$, $y''(1) = 10$. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $g(x) = f(x) - f(9x)$ tại $x = 1$. KQ: $\square$

**Lời giải**

.....

.....

.....

**Câu 4.** Một công ty xác định rằng tổng chi phí của họ (tính theo nghìn đô la) để sản xuất $x$ mặt hàng là $H(x)=\sqrt{5x^2+60}$ và công ty lên kế hoạch nâng sản lượng trong $t$ tháng kể từ nay theo hàm số $x(t)=20t+40$. Chi phí sẽ tăng với tốc độ bao nhiêu nghìn đô la/tháng sau 5 tháng kể từ khi công ty thực hiện kế hoạch đó? (làm tròn đến hàng phần chục). KQ: ☐

**Lời giải**

**Câu 5.** Cho một vật chuyển động theo phương trình $s(t)=t^2+mt+10$, trong đó $s$ là quãng đường vật đi được (mét) và $t$ là thời gian vật chuyển động (giây). Xác đinh giá trị của tham số $m$ biết tại thời điểm $t=3$ thì vận tốc tức thời của vật là 4,5 m/s. KQ: ☐

**Lời giải**

**Câu 6.** Một chất điểm chuyển động thẳng trên trục với biểu thức tọa độ $x=\frac{1}{3}t^3-2t^2+6t+1$ (cm), $t$ tính theo giây (s). Hỏi từ thời điểm $t=0{,}5$ (s) đến thời điểm $t=5$ (s) thì vận tốc lớn nhất

của chất điểm là bao nhiêu cm/s? KQ:

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 7.** Số dân của một thị trấn sau $t$ năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \dfrac{26t+10}{t+5}$ (đơn vị: nghìn người). Biết rằng đạo hàm của hàm số $f$ biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (đơn vị: nghìn người/năm). Hỏi vào năm 2025, tốc độ tăng dân số của thị trấn này là bao nhiêu nghìn người/năm? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm). KQ:

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**BẢNG ĐÁP ÁN**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Câu 1.** 14 | **Câu 2.** 28 | **Câu 3.** 55 | **Câu 4.** 44,7 | **Câu 5.** −1,5 |
| **Câu 6.** 11 | **Câu 7.** 0,03 | | | |