

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

(Đề thi gồm 02 trang, 10 câu)

Câu 1. (2 điểm)

Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - x^2 + 2mx - 4$. Tìm tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Câu 2. (2 điểm)

Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ có đồ thị (C) và điểm $M(-1; 3)$. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị (C) . Tính diện tích của tam giác MAB .

Câu 3. (2 điểm)

a) Giải phương trình $\cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x = 0$.

b) Xét dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = 3, u_{n+1} = 3 - \frac{4}{u_n + 2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số.

Câu 4. (2 điểm)

Trước kì bầu cử bí thư lớp 10A, cô giáo chủ nhiệm có cuộc thăm dò tín nhiệm của 43 bạn học sinh đối với ba ứng cử viên A, B, C có kết quả như sau: số phiếu tín nhiệm ứng cử viên A là 15, B là 23, C là 16, A và B là 9, B và C là 12, C và A là 7, số học sinh không có ý kiến là 10. Hỏi số phiếu tín nhiệm cả ba bạn A, B, C là bao nhiêu?

Câu 5. (2 điểm)

Cho hai số thực a, b đều lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \frac{1}{\log_{ab} a} + \frac{1}{\log_{\sqrt[4]{ab}} b}.$$

Câu 6. (2 điểm)

Giải phương trình $\frac{x^3 + 3x^2 - 4x + 1}{x^2 + 3} = \sqrt{x^2 - x + 1}$.

Câu 7. (2 điểm)

Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B. Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hàng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 150 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $p(x) = 231 - 0,02x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm

trong một tháng là $C(x) = 150 + 15x$ (triệu đồng). Hỏi A bán cho B bao nhiêu tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận cao nhất?

Câu 8. (2 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A , phương trình đường thẳng BC là $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$, các đỉnh A và B thuộc trục hoành và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 2. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

Câu 9. (2 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh 1. Cạnh bên SB vuông góc với đáy và $SB = 2$. Gọi N là trung điểm của BC . Điểm E thuộc cạnh SA sao cho $SE = 2EA$. Gọi F là trọng tâm của tam giác ACD , P là trung điểm SN . Mặt phẳng (EFP) cắt AD tại G , cắt CD tại H .

a) Gọi $\alpha = [S, NA, D]$, tính $\tan \alpha$.

b) Tính thể tích khối chóp $S.DHG$.

Câu 10. (2 điểm)

Lớp 12A có 50 quyển vở giống nhau để tặng cho 5 học sinh có thành tích xuất sắc trong đợt thi đua học kì 1, sao cho học sinh nào cũng được tặng vở. Tính xác suất để không có học sinh nào nhận được số quyển vở là một số chia hết cho 3.

..... **HẾT**

- Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị **KHÔNG** giải thích gì thêm.

Lời giải đề thi học sinh giỏi Toán 12 Vĩnh Long 2025 – 2026

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - x^2 + 2mx - 4$. Tìm tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 2x + 2m$.

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in (-1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 2m \geq 0, \forall x \in (-1; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow 2m \geq -3x^2 + 2x, \forall x \in (-1; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \geq -\frac{3}{2}x^2 + x, \forall x \in (-1; +\infty)$$

Đặt $g(x) = -\frac{3}{2}x^2 + x$ với $x \in (-1; +\infty)$. Ta có: $g'(x) = -3x + 1$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

x	-1	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\infty$

Ta có giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ trên khoảng $(-1; +\infty)$ là $\frac{1}{6}$.

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty) \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{6}$.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ có đồ thị (C) và điểm $M(-1;3)$. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị (C) . Tính diện tích của tam giác MAB .

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Ta có: $y' = \frac{(2x-1)(x-1) - (x^2 - x + 1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
y'		+	0	-	
y	$-\infty \nearrow -1 \searrow -\infty$			$+\infty \searrow 3 \nearrow +\infty$	

Vậy hai điểm cực trị của đồ thị (C) là $A(0;-1)$ và $B(2;3)$.

Ngoài ra $M(-1;3)$ nên $MB = 3$ và phương trình đường thẳng MB là $y = 3$ hay $y - 3 = 0$.

Suy ra $d(A, MB) = \frac{|-1-3|}{\sqrt{1^2}} = 4$.

Do đó diện tích tam giác MAB bằng $\frac{1}{2}MB \cdot d(A, MB) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$.

Câu 3:

a) Giải phương trình: $\cos^2 3x \cdot \cos 2x - \cos^2 x = 0$.

b) Xét dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = 3$, $u_{n+1} = 3 - \frac{4}{u_n + 2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số.

a)

$$\begin{aligned}
 & \cos^2 3x \cdot \cos 2x - \cos^2 x = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{1 + \cos 6x}{2} \cdot \cos 2x - \frac{1 + \cos 2x}{2} = 0 \\
 \Leftrightarrow & (1 + \cos 6x) \cdot \cos 2x - (1 + \cos 2x) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \cos 2x + \cos 6x \cdot \cos 2x - 1 - \cos 2x = 0 \\
 \Leftrightarrow & \cos 6x \cdot \cos 2x - 1 = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 8x) - 1 = 0 \\
 \Leftrightarrow & \cos 4x + \cos 8x - 2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & \cos 4x + (2\cos^2 4x - 1) - 2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & 2\cos^2 4x + \cos 4x - 3 = 0 \\
 \Leftrightarrow & (\cos 4x - 1)(2\cos 4x + 3) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos 4x = 1 \\ \cos 4x = -\frac{3}{2} \text{ (vn)} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & 4x = k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\
 \Leftrightarrow & x = \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

b) Ta có:

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= 3 - \frac{4}{u_n + 2} \\
 \Leftrightarrow u_{n+1} - 2 &= 1 - \frac{4}{u_n + 2} \\
 \Leftrightarrow u_{n+1} - 2 &= \frac{u_n - 2}{u_n + 2} \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1} - 2} &= \frac{u_n + 2}{u_n - 2}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1}-2} = 1 + \frac{4}{u_n-2}$$

Đặt $v_n = \frac{1}{u_n-2}$, $v_1 = \frac{1}{u_1-2} = \frac{1}{3-2} = 1$. Khi đó:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 4v_n + 1 \\ \Leftrightarrow v_{n+1} + \frac{1}{3} &= 4\left(v_n + \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

Đặt $a_n = v_n + \frac{1}{3}$, $a_1 = v_1 + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. Khi đó: $a_{n+1} = 4a_n$.

Suy ra (a_n) là cấp số nhân với số hạng đầu $a_1 = \frac{4}{3}$ và công bội $q = 4$.

Suy ra $a_n = \frac{4}{3} \cdot 4^{n-1}$, $\forall n \geq 1$.

Suy ra $v_n = \frac{4}{3} \cdot 4^{n-1} - \frac{1}{3}$, $\forall n \geq 1$

Suy ra $u_n = 2 + \frac{1}{v_n} = 2 + \frac{1}{\frac{4}{3} \cdot 4^{n-1} - \frac{1}{3}} = 2 + \frac{3}{4^n - 1}$, $\forall n \geq 1$.

Vậy số hạng tổng quát của dãy số (u_n) là $u_n = 2 + \frac{3}{4^n - 1}$, $\forall n \geq 1$.

Câu 4: Trước kì bầu cử bí thư lớp 10A, cô giáo chủ nhiệm có cuộc thăm dò tín nhiệm của 43 bạn học sinh đối với ba ứng cử viên A, B, C có kết quả như sau: số phiếu tín nhiệm ứng cử viên A là 15, B là 23, C là 16, A và B là 9, B và C là 12, C và A là 7, số học sinh không có ý kiến là 10. Hỏi số phiếu tín nhiệm cả ba bạn A, B, C là bao nhiêu?

Gọi A, B, C lần lượt là tập hợp các bạn học sinh tín nhiệm ứng cử viên A, B, C.

Ta có: $n(A) = 15$, $n(B) = 23$, $n(C) = 16$, $n(A \cap B) = 9$, $n(B \cap C) = 12$, $n(A \cap C) = 7$

$n(A \cup B \cup C) = 43 - 10 = 33$.

Ta có: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 15 + 23 - 9 = 29$.

$n((A \cup B) \cap C) = n(A \cup B) + n(C) - n((A \cup B) \cup C) = 29 + 16 - 33 = 12$.

$n((A \cap B) \cap C) = n(A \cap C) + n(B \cap C) - n((A \cup B) \cap C) = 7 + 12 - 12 = 7$.

Vậy có 7 phiếu tín nhiệm cả ba bạn A, B, C.

Cách khác: Dùng công thức sau

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

Câu 5: Cho hai số thực a, b đều lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \frac{1}{\log_{ab} a} + \frac{1}{\log_{\sqrt[4]{ab}} b}.$$

Ta có:

$$\begin{aligned} S &= \log_a ab + \log_b \sqrt[4]{ab} \\ &= \log_a ab + \frac{1}{4} \log_b ab \\ &= (\log_a a + \log_a b) + \frac{1}{4} (\log_b a + \log_b b) \\ &= (1 + \log_a b) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\log_a b} + 1 \right) \\ &= \frac{5}{4} + \log_a b + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\log_a b} \end{aligned}$$

Đặt $t = \log_a b$ ($t > 0$). Khi đó: $S = \frac{5}{4} + t + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t} = f(t)$ với $t > 0$.

Ta có: $f'(t) = 1 - \frac{1}{4t^2}$. Suy ra $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{4t^2} = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$.

Vẽ bảng biến thiên ta được giá trị nhỏ nhất của $f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là $\frac{9}{4}$.

Câu 6: Giải phương trình: $\frac{x^3 + 3x^2 - 4x + 1}{x^2 + 3} = \sqrt{x^2 - x + 1}$.

Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}
 & x + 3 - \frac{7x + 8}{x^2 + 3} = \sqrt{x^2 - x + 1} \\
 \Leftrightarrow & x + 3 - \sqrt{x^2 - x + 1} - \frac{7x + 8}{x^2 + 3} = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{(x + 3)^2 - (x^2 - x + 1)}{x + 3 + \sqrt{x^2 - x + 1}} - \frac{7x + 8}{x^2 + 3} = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{7x + 8}{x + 3 + \sqrt{x^2 - x + 1}} - \frac{7x + 8}{x^2 + 3} = 0 \\
 \Leftrightarrow & (7x + 8) \left(\frac{1}{x + 3 + \sqrt{x^2 - x + 1}} - \frac{1}{x^2 + 3} \right) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 7x + 8 = 0 \\ \frac{1}{x + 3 + \sqrt{x^2 - x + 1}} - \frac{1}{x^2 + 3} = 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = -\frac{7}{8} \\ x + 3 + \sqrt{x^2 - x + 1} = x^2 + 3 \quad (*) \end{cases}
 \end{aligned}$$

(*) tương đương với $\sqrt{x^2 - x + 1} = x^2 - x$ (**).

Đặt $t = \sqrt{x^2 - x + 1}$ với $t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ta được $x^2 - x = t^2 - 1$.

(**) trở thành

$$\begin{aligned}
 & t = t^2 - 1 \\
 \Leftrightarrow & -t^2 + t + 1 = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ (nhận)} \\ t = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (loại)} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{x^2 - x + 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\
 \Leftrightarrow & x^2 - x + 1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{3 + 2\sqrt{5}}}{2}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ -\frac{7}{8}; \frac{1 \pm \sqrt{3 + 2\sqrt{5}}}{2} \right\}$.

Câu 7: Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B. Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hàng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 150 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $p(x) = 231 - 0,02x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 150 + 15x$ (triệu đồng). Hỏi A bán cho B bao nhiêu tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận cao nhất?

Doanh thu của nhà máy A khi bán x tấn sản phẩm là $x(231 - 0,02x^2) = 231x - 0,02x^3$ (triệu đồng).

Lợi nhuận thu được khi nhà máy A bán x tấn sản phẩm là $(231x - 0,02x^3) - (150 + 15x) = -0,02x^3 + 216x - 150$ (triệu đồng).

Đặt $f(x) = -0,02x^3 + 216x - 150$ với $x \in [0; 150]$.

Ta có: $f'(x) = -0,06x^2 + 216$. Khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -0,06x^2 + 216 \Leftrightarrow x = 60$.

Ta có: $f(0) = -150$, $f(60) = 8490$, $f(150) = -35250$.

Suy ra giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0; 150]$ là 8490 tại $x = 60$.

Vậy A bán cho B là 60 tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận cao nhất.

Câu 8: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A , phương trình đường thẳng BC là $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$, các đỉnh A và B thuộc trục hoành và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 2. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

Ta có B là giao điểm của đường thẳng BC và trục hoành nên $B(1; 0)$.

Vì C thuộc đường thẳng BC nên $C(c; \sqrt{3}c - \sqrt{3})$ với $c \neq 1$.

Vì tam giác ABC vuông tại A và A thuộc trục hoành nên A là hình chiếu của C trên trục hoành. Suy ra $A(c; 0)$.

Khi đó: $AB = |c - 1|$, $AC = \sqrt{3}|c - 1|$, $BC = 2|c - 1|$.

Tam giác ABC có diện tích là $S = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}|c - 1|.\sqrt{3}|c - 1| = \frac{\sqrt{3}}{2}(c - 1)^2$ và nửa chu vi là

$$p = \frac{1}{2}(AB + AC + BC) = \frac{1}{2}(|c - 1| + \sqrt{3}|c - 1| + 2|c - 1|) = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}|c - 1|.$$

Ta có bán kính đường tròn nội tiếp là $r = 2$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} S &= pr \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}(c - 1)^2 &= \frac{3 + \sqrt{3}}{2}|c - 1|.2 \\ \Leftrightarrow (c - 1)^2 &= 2(\sqrt{3} + 1)|c - 1| \\ \Leftrightarrow \begin{cases} |c - 1| = 0 \text{ (loại)} \\ |c - 1| = 2(\sqrt{3} + 1) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} c - 1 = 2(\sqrt{3} + 1) \\ c - 1 = -2(\sqrt{3} + 1) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2\sqrt{3} + 3 \\ c = -2\sqrt{3} - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

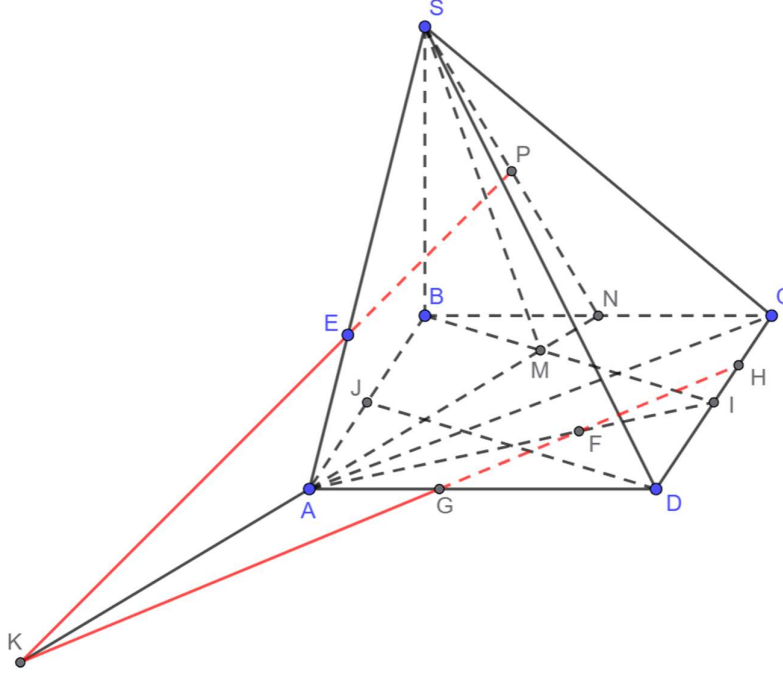
Với $c = 2\sqrt{3} + 3$ thì $C(2\sqrt{3} + 3; 6 + 2\sqrt{3})$, $A(2\sqrt{3} + 3; 0)$. Khi đó trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(\frac{7 + 4\sqrt{3}}{3}; \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Với $c = -2\sqrt{3} - 1$ thì $C(-2\sqrt{3} - 1; -6 - 2\sqrt{3})$, $A(-2\sqrt{3} - 1; 0)$. Khi đó trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(-\frac{1 + 4\sqrt{3}}{3}; -\frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh 1. Cạnh bên SB vuông góc với đáy và $SB = 2$. Gọi N là trung điểm của BC . Điểm E thuộc cạnh SA sao cho $SE = 2EA$. Gọi F là trọng tâm của tam giác ACD , P là trung điểm SN . Mặt phẳng (EFP) cắt AD tại G , cắt CD tại H .

a) Gọi $\alpha = [S, NA, D]$, tính $\tan \alpha$.

b) Tính thể tích khối chóp $S.DHG$.



a) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của CD, AB . Gọi M là giao điểm của BI và NA .

Để thấy $BI \perp NA, DJ \perp NA$ và $BI \parallel DJ$.

Ta có $NA \perp BI, NA \perp SB$ nên $NA \perp (SBI)$. Suy ra $NA \perp SG$.

Do đó $\alpha = [S, NA, D] = [S, NA, I] = \widehat{SMI}$.

Mà $\widehat{SMI}$ và $\widehat{SMB}$ là hai góc kề bù nên $\tan \alpha = -\tan SMB = -\frac{SB}{BM}$.

Ta có: $AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Suy ra $BM = \frac{AB \cdot BN}{AN} = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Suy ra $\tan \alpha = -\frac{2}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = -2\sqrt{5}$.

b) Trong (SAN) gọi K là giao điểm của PE và AN .

Gọi G, H lần lượt là giao điểm của FK với AD, CD .

Khi đó mặt phẳng (EFP) cắt AD tại G , cắt CD tại H .

Áp dụng định lí Menelaus vào tam giác SAN , ta có:

$$\begin{aligned}\frac{PS}{PN} \cdot \frac{KN}{KA} \cdot \frac{EA}{ES} &= 1 \\ \Leftrightarrow 1 \cdot \frac{KN}{KA} \cdot \frac{1}{2} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{KN}{KA} &= 2\end{aligned}$$

Do đó A là trung điểm của KN .

Xây dựng mặt phẳng tọa độ Oxy trong mặt đáy $(ABCD)$, ta tính được $DG = \frac{5}{8}$, $DH = \frac{5}{7}$.

Do đó thể tích khối chóp $S.DHG$ bằng

$$\frac{1}{3} \cdot SB \cdot S_{\Delta DGH} = \frac{1}{3} \cdot SB \cdot \frac{1}{2} \cdot DG \cdot DH = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{25}{168}.$$

Câu 10: Lớp 12A có 50 quyển vở giống nhau để tặng cho 5 học sinh có thành tích xuất sắc trong đợt thi đua học kì 1, sao cho học sinh nào cũng được tặng vở. Tính xác suất để không có học sinh nào nhận được số quyển vở là một số chia hết cho 3.

Gọi A là biến cố “Không có học sinh nào nhận được số quyển vở là một số chia hết cho 3”.

Gọi x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 là số quyển vở mà 5 học sinh nhận được.

Ta có: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 50$ và $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{N}^*$.

Theo bài toán chia kẹo Euler, ta có $n(\Omega) = C_{49}^4$.

Đặt $x_1 = 3y_1 + r_1, x_2 = 3y_2 + r_2, \dots, x_5 = 3y_5 + r_5$ với y_i và r_i lần lượt là thương và số dư của phép chia x_i cho 3.

Ta có $y_i \in \mathbb{N}, r_i = 1$ hoặc $r_i = 2$ với $1 \leq i \leq 5$.

Ta được:

$$\begin{aligned} (3y_1 + r_1) + (3y_2 + r_2) + \dots + (3y_5 + r_5) &= 50 \\ \Leftrightarrow 3(y_1 + y_2 + \dots + y_5) + (r_1 + r_2 + \dots + r_5) &= 50 \end{aligned}$$

Mà 50 chia 3 dư 2 nên $r_1 + r_2 + \dots + r_5$ chia 3 dư 2.

Mà $5 \leq r_1 + r_2 + \dots + r_5 \leq 10$ nên $r_1 + r_2 + \dots + r_5 = 5$ hoặc $r_1 + r_2 + \dots + r_5 = 8$.

Với $r_1 + r_2 + \dots + r_5 = 5$ thì $r_1 = r_2 = \dots = r_5 = 1$. Khi đó

$$\begin{aligned} 3(y_1 + y_2 + \dots + y_5) + 5 &= 50 \\ \Leftrightarrow y_1 + y_2 + \dots + y_5 &= 15 \\ \Leftrightarrow (y_1 + 1) + (y_2 + 1) + \dots + (y_5 + 1) &= 20 \end{aligned}$$

Suy ra có C_{19}^4 bộ số $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$. Suy ra có C_{19}^4 cách chọn.

Với $r_1 + r_2 + \dots + r_5 = 8$. Suy ra trong các số r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 có 3 số bằng 2 và 2 số bằng 1. Suy ra có C_5^3 cách chọn.

Với mỗi bộ số $(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)$, ta được:

$$\begin{aligned} 3(y_1 + y_2 + \dots + y_5) + 8 &= 50 \\ \Leftrightarrow y_1 + y_2 + \dots + y_5 &= 14 \\ \Leftrightarrow (y_1 + 1) + (y_2 + 1) + \dots + (y_5 + 1) &= 19 \end{aligned}$$

Suy ra có C_{18}^4 bộ số $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$. Suy ra có $10.C_{18}^4$ cách chọn.

Vậy $n(A) = C_{19}^4 + C_5^3 C_{18}^4$.

Do đó xác suất của biến cố A là:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_{19}^4 + C_5^3 C_{18}^4}{C_{49}^4}.$$