

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 02 trang, gồm 10 câu)

Môn thi: **TOÁN**

Thời gian làm bài: **180** phút

Câu 1. (2,0 điểm)

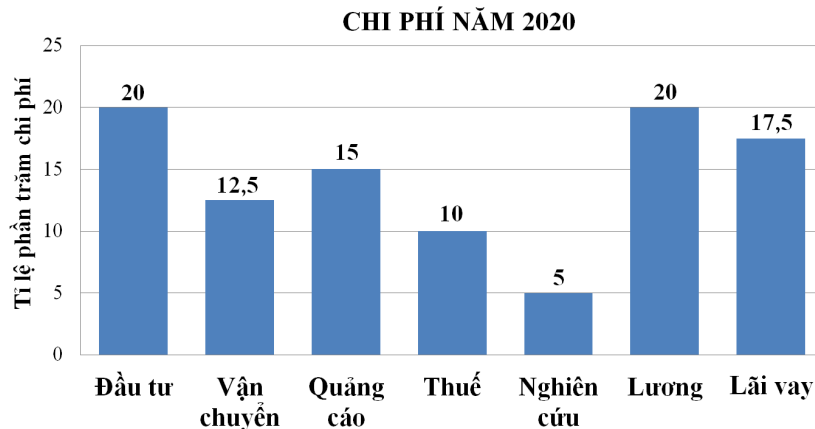
Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x + 2}{x - 2}$ có đồ thị (C) và điểm $A(1;3)$. Gọi B là điểm cực tiểu và Δ là đường tiệm cận xiên của (C) . Tìm tọa độ điểm M thuộc Δ sao cho tam giác ABM cân tại A .

Câu 2. (2,0 điểm)

Công ty X cần vận chuyển hàng đến một địa điểm cách công ty 100 dặm. Chi phí trên mỗi chuyến hàng mà công ty phải trả bao gồm chi phí nhiên liệu và chi phí thuê tài xế. Khi xe chở hàng di chuyển với tốc độ x dặm/giờ thì chi phí nhiên liệu (tính bằng USD) trên mỗi dặm đường được cho bởi công thức $C(x) = \frac{1}{5} \left(\frac{64}{x} + \frac{9}{100}x \right)$. Ngoài ra, giá thuê tài xế là 16 USD trên mỗi giờ lái xe. Biết rằng tốc độ di chuyển của xe chở hàng không được phép vượt quá 50 dặm/giờ. Hỏi chi phí nhỏ nhất mà công ty đó phải trả trên mỗi chuyến hàng là bao nhiêu USD?

Câu 3. (2,0 điểm)

Biểu đồ bên dưới thể hiện tỉ lệ phần trăm chi phí trong năm 2020 của một công ty.



Năm 2020 công ty đã xây dựng tốt thương hiệu cũng như trả được nhiều khoản vay nên năm 2021 chi phí cho Lãi vay đã giảm 25% so với năm 2020, đồng thời công ty cũng quyết định giảm 20% chi phí Quảng cáo so với năm 2020. Toàn bộ lượng giảm chi phí đó được dùng để tăng lương cho tất cả nhân viên. Hỏi chi phí cho Lương năm 2021 đã tăng bao nhiêu phần trăm so với năm 2020?

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(m^2 + 2m)x + 2025$, với m là tham số. Tìm tất cả giá trị m để trên khoảng $(-\infty; 0)$, hàm số đã cho tồn tại giá trị lớn nhất.

Câu 5. (2,0 điểm)

Xét một hệ trục tọa độ $Oxyz$, đơn vị độ dài trên mỗi trục là 100 mét. Có hai tổ công nhân đồng thời đào đường hầm xuyên núi. Tổ thứ nhất bắt đầu đào từ vị trí điểm $A(5;7;10)$, đi thẳng xuyên qua vị trí điểm $B(6;9;12)$ với tốc độ đào không đổi là 12 mét/ngày. Cùng thời điểm đó, tổ thứ hai bắt đầu đào một đường hầm khác, xuất phát từ vị trí điểm $C(4;17;12)$ và cũng đào theo đường thẳng với tốc độ đào không đổi. Mục tiêu đặt ra là hai đường hầm này sẽ gặp nhau tại vị trí điểm E cách vị trí điểm A một khoảng bằng 1,5 kilômét. Để cả hai tổ công nhân đồng thời đào đến vị trí điểm E trong cùng một thời điểm thì tốc độ đào hầm của tổ thứ hai bằng bao nhiêu mét/ngày?

Câu 6. (2,0 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , góc $\widehat{ABC} = 60^\circ$ và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SB, SD . Biết góc nhị diện $[M, AC, N]$ bằng 120° , tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) .

Câu 7. (2,0 điểm)

Một nhóm có 10 người gồm 5 bạn nam, 4 bạn nữ và 1 thầy giáo đứng thành hai hàng ngang để chụp ảnh kỉ niệm, mỗi hàng 5 người. Có bao nhiêu cách sắp xếp để thầy giáo đứng xen giữa hai bạn nam, đồng thời trong mỗi hàng không có hai bạn nữ nào đứng cạnh nhau?

Câu 8. (2,0 điểm)

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;7;-4)$, $B(-5;4;4)$ và vector $\vec{u} = (0;-2;1)$. Các điểm M, N thay đổi trên mặt phẳng (Oyz) sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{u}$ và $MN = 5\sqrt{5}$. Tìm giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$.

Câu 9. (2,0 điểm)

Cho một bảng ô vuông 3×3 như hình vẽ bên. Điền ngẫu nhiên 9 số thuộc tập hợp $X = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ vào 9 ô vuông trong bảng (mỗi ô điền một số khác nhau). Tính xác suất của biến cố “mỗi hàng, mỗi cột bất kì trong bảng đều có ít nhất một số lẻ”.

Câu 10. (2,0 điểm)

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $BC = 4a$, tam giác $AA'C$ cân tại A' và tam giác $AB'C'$ vuông tại B' . Biết khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB' và BC' bằng a . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

-----**HẾT**-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu;
- Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

ĐỀ HSG 12 HÀ TĨNH 2025

Câu 1. Khảo sát được điểm cực tiểu là $B(4;7)$.

Tiệm cận xiên là đường thẳng $\Delta: y = x + 1$.

Điểm $M \in \Delta \Leftrightarrow M(m; m+1)$.

Tam giác ABM cân tại A nên $AM = AB \Leftrightarrow (m-1)^2 + (m-2)^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 5 \end{cases}$.

+) Với $m = -2$ thì $M(-2; -1)$: loại vì khi đó A là trung điểm BM .

+) Với $m = 5$ thì $M(5; 6)$: thỏa mãn.

Vậy $M(5; 6)$.

Câu 2. Quảng đường là 100 dặm nên chi phí nhiên liệu là $100 \cdot \frac{1}{5} \left(\frac{64}{x} + \frac{9}{100}x \right) = \frac{1280}{x} + \frac{9}{5}x$.

Thời gian di chuyển là $\frac{100}{x}$ (giờ) nên chi phí thuê tài xế là $16 \cdot \frac{100}{x} = \frac{1600}{x}$ (USD).

Tổng chi phí mỗi chuyến hàng là $f(x) = \frac{1280}{x} + \frac{9}{5}x + \frac{1600}{x} = \frac{2880}{x} + \frac{9}{5}x$.

Xét $f(x)$ trên $(0; 50]$, có $f'(x) = -\frac{2880}{x^2} + \frac{9}{5}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 40$ (do $0 < x \leq 50$).

Từ đó chi phí mỗi chuyến hàng nhỏ nhất là $f(40) = 144$ (USD).

Câu 3. Gọi chi phí cho Lương năm 2020 là x . Khi đó:

Chi phí cho Lãi vay năm 2020 là $\frac{x}{20} \cdot 17,5 = \frac{7x}{8}$.

Chi phí cho Quảng cáo năm 2020 là $\frac{x}{20} \cdot 15 = \frac{3x}{4}$.

Suy ra chi phí về Lương năm 2021 tăng thêm là $25\% \cdot \frac{7x}{8} + 20\% \cdot \frac{3x}{4} = \frac{59}{160}x$.

Vậy chi phí về Lương đã tăng $\frac{59}{160} = 36,875\%$.

Câu 4. Có $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 3(m^2 + 2m)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + (m^2 + 2m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m + 2 \end{cases}$.

Lập bảng biến thiên suy ra hàm số có giá trị lớn nhất trên khoảng $(-\infty; 0)$ khi và chỉ khi:

TH1: $m < 0 \leq m + 2 \Leftrightarrow -2 \leq m < 0$.

TH2: $\begin{cases} m + 2 < 0 \\ y(m) \geq y(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m^3 - 3(m+1)m^2 + 3(m^2 + 2m)m + 2025 \geq 2025 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m^2(m+3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m < -2$.

Kết luận: $-3 \leq m < 0$.

Câu 5. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; 2; 2) \Rightarrow AB = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$.

Theo bài ra, ta có $AE = 15$; $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AE}$ cùng hướng.

Do đó: $\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{AB} = (5; 10; 10) \Rightarrow E(10; 17; 20)$. Suy ra $CE = 10$.

Khi đến điểm E thì thời gian đào đường hầm thứ nhất là $t_0 = \frac{1500}{12} = 125$ (ngày).

Vì đến E cùng thời điểm nên tốc độ đào đường hầm thứ hai là $v = \frac{100CE}{t_0} = \frac{100 \cdot 10}{125} = 8$ (mét/ngày)

Vậy tốc độ đào đường hầm thứ hai là 8 mét/ngày.

Câu 6. Gọi P, H, Q lần lượt là trung điểm AB, AO, AD .

Khi đó $[M, AC, N] = \widehat{MHN} = 120^\circ$.

Dễ thấy $MNQP$ là hình chữ nhật và H là trung điểm PQ nên $MH = NH$.

Có $MN = BO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Áp dụng định lí côsin cho tam giác MHN ta được $MH = NH = \frac{a}{2}$.

Lại có $PH = \frac{1}{2}BO = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow MP = \sqrt{MH^2 - PH^2} = \frac{a}{4} \Rightarrow SA = 2MP = \frac{a}{2}$.

Ta có $d(C, (SBD)) = d(A, (SBD)) = AE$, với E là hình chiếu của A trên SO .

Có $SA = AO = \frac{a}{2}$ nên E là trung điểm $SO \Rightarrow AE = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Câu 7.

TH1: Hàng có thầy giáo đứng có đúng 2 bạn nam và 2 bạn nữ; hàng còn lại có 3 bạn nam và 2 bạn nữ.

+ Chọn hàng cho thầy giáo: có 2 cách.

+ Xếp hàng có thầy giáo: có $A_5^2 \cdot A_4^2$ cách.

+ Xếp hàng còn lại: có $3! \cdot A_4^2$ cách.

Số cách xếp thỏa mãn trong TH1 là $2 \cdot A_5^2 \cdot A_4^2 \cdot 3! \cdot A_4^2 = 34560$ cách.

TH2: Hàng có thầy giáo đứng có đúng 3 bạn nam và 1 bạn nữ; hàng còn lại có 3 nữ và 2 nam.

+ Chọn hàng cho thầy giáo: có 2 cách.

+ Xếp hàng có thầy giáo: có $A_5^3 \cdot 2 \cdot C_4^1 \cdot 3$ cách.

+ Xếp hàng còn lại: có $3! \cdot 2!$ cách.

Số cách xếp thỏa mãn trong TH2 là $2 \cdot A_5^3 \cdot 2 \cdot C_4^1 \cdot 3 \cdot 3! \cdot 2! = 34560$.

Vậy tổng số cách xếp thỏa mãn là $34560 + 34560 = 69120$.

Câu 8. Có $\overrightarrow{MN} = 5\vec{u} = (0; -10; 5)$.

Ta thấy A và B nằm khác phía đối với mặt phẳng (Oyz) .

Gọi C là điểm đối xứng với A qua (Oyz) thì $C(-3; 7; -4)$ và ta có $AM = CM$.

Gọi D là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MN} = (0; -10; 5)$ thì $D(-3; -3; 1)$.

Khi đó $CDNM$ là hình bình hành nên $CM = DN$.

Dẫn tới $|AM - BN| = |DN - BN| \leq BD = \sqrt{62}$.

Đẳng thức xảy ra khi N là giao điểm của BD với (Oyz) .

Câu 9. Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = A_{10}^9$.

Gọi A là biến cố theo yêu cầu bài toán thì $\overline{A}$: “tồn tại một hàng hoặc một cột chứa toàn số chẵn”.

TH1: 9 số được điền có 4 số chẵn, 5 số lẻ: có 5 cách chọn.

Khi đó có đúng 1 hàng hoặc đúng 1 cột chứa toàn số chẵn.

Chọn một hàng hoặc một cột chứa toàn số chẵn: có 6 cách.

Chọn ba số chẵn trong 4 số chẵn và xếp vào hàng (hoặc cột) được chọn: có A_4^3 cách.

Xếp 6 số còn lại vào 6 ô còn lại: có $6!$ cách.

Do đó TH1 có $5 \cdot 6 \cdot A_4^3 \cdot 6!$ cách điền.

TH2: 9 số được điền có 5 số chẵn, 4 số lẻ: có 5 cách chọn.

Khi đó không quá 1 hàng và không quá 1 cột chứa toàn số chẵn.

Số cách xếp sao cho có 1 hàng toàn số chẵn là $3 \cdot A_5^3 \cdot 6!$.

Số cách xếp sao cho có 1 cột toàn số chẵn là $3 \cdot A_5^3 \cdot 6!$.

Số cách xếp sao cho có 1 hàng và 1 cột toàn số chẵn là $3 \cdot 3 \cdot 5! \cdot 4!$.

Tóm lại TH2 có $5 \cdot (2 \cdot 3 \cdot A_5^3 \cdot 6! - 3 \cdot 3 \cdot 5! \cdot 4!)$ cách điền.

$$\text{Do đó } P(\overline{A}) = \frac{5.6.A_4^3.6! + 5.(2.3.A_5^3.6! - 3.3.5!.4!)}{A_{10}^9} = \frac{13}{28}.$$

$$\text{Vậy } P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{15}{28}.$$

Câu 10. Gọi H là hình chiếu của A' trên mặt phẳng (ABC) .

+) Gọi D đối xứng B qua A thì $ADA'B'$ là hình bình hành nên $A'D \parallel AB'$.

Dẫn tới $A'D \perp B'C' \Rightarrow A'D \perp BC$. Kết hợp $BC \perp A'H$ suy ra $BC \perp (A'DH) \Rightarrow BC \perp DH$.

Lại có $AB = AC = AD$ nên $BC \perp CD$, do đó D, H, C thẳng hàng, hay $H \in CD$. (1)

+) Gọi M là trung điểm AC thì $\begin{cases} AC \perp A'M \\ AC \perp A'H \end{cases} \Rightarrow AC \perp (A'MH) \Rightarrow AC \perp MH$.

Mà $AC \perp AB$ nên $MH \parallel AB$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra H là trung điểm CD .

+) Gọi E đối xứng C qua B thì $BEB'C'$ là hình bình hành nên $B'E \parallel BC'$.

Suy ra $d(B, (B'AE)) = d(AB', BC') = a$.

+) Gọi K là trung điểm BC thì $A'B'KH$ là hình bình hành nên $B'K \parallel A'H \Rightarrow B'K \perp (ABC)$.

Khi đó $KA = \frac{1}{2}BC = 2a$, $KE = KB + BE = 6a$.

Dẫn tới $KE = \frac{3}{2}BE \Rightarrow d(K, (B'AE)) = \frac{3}{2}d(B, (B'AE)) = \frac{3a}{2}$.

+) Tứ diện $B'AEK$ là tứ diện vuông tại K nên $\frac{1}{d^2(K, (B'AE))} = \frac{1}{KA^2} + \frac{1}{KE^2} + \frac{1}{KB'^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{KB'^2} = \frac{1}{6a^2} \Rightarrow B'K = a\sqrt{6}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = B'K.S_{ABC} = a\sqrt{6}.4a^2 = 4a^3\sqrt{6}.$$

Xem thêm: ĐỀ THI HSG TOÁN 12
<https://toanmath.com/de-thi-hsg-toan-12>