Chương 3

Bài 1 PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH QUY NẠP

Lý thuyết. Phương pháp quy nạp toán học

Để chứng minh những mệnh đề liên quan đến số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$ là đúng với mọi n mà không thể thử trực tiếp thì có thể làm như sau:

- Bước 1. Kiểm tra rằng mệnh đề đúng với $n=1$.
- Bước 2. Giả thiết mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kì $n=k\geq 1$ (gọi là giả thiết quy nạp), chứng minh rằng nó cũng đúng với $n=k+1$.

Đó là phương pháp quy nạp toán học, hay còn gọi tắt là phương pháp quy nạp.

Một cách đơn giản, ta có thể hình dung như sau: Mệnh đề đã đúng khi $n=1$ nên theo kết quả ở bước 2, nó cũng đúng với $n=1+1=2$. Vì nó đúng với $n=2$ nên lại theo kết quả ở bước 2, nó đúng với $n=2+1=3,...$ Bằng cách ấy, ta có thể khẳng định rằng mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Chú ý: Nếu phải chứng minh mệnh đề là đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là một số tự nhiên) thì:

- Bước 1, ta phải kiểm tra mệnh đề đúng với $n=p$;
- Bước 2, giả thiết mệnh đề đúng với số tự nhiên bất kì $n=k\geq p$ và phải chứng minh rằng nó cũng đúng với $n=k+1$.

DẠNG: ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP ĐỂ CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC, TÍNH CHIA HẾT, HÌNH HỌC…

A. Phương pháp giải

Giả sử cần chứng minh đẳng thức $P(n)=Q(n)$ (hoặc $P(n)>Q(n)$) đúng với $\forall n \geq n_0,\ n_0 \in \mathbb{N}$ ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tính $P(n_0),\ Q(n_0)$ rồi chứng minh $P(n_0)=Q(n_0)$

Bước 2: Giả sử $P(k)=Q(k);\ k \in \mathbb{N}, k \geq n_0$, ta cần chứng minh $P(k+1)=Q(k+1)$.

B. Bài tập tự luận

Câu 1. Chứng minh với mọi số tự nhiên $n \geq 1$ ta luôn có: $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 2. Chứng minh với mọi số tự nhiên $n \geq 1$ ta luôn có: $1+3+5+...+2n-1=n^2$

Câu 3. Chứng minh rằng với $\forall n \geq 1$, ta có bất đẳng thức: $\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6.2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 4. Chứng minh rằng với $\forall n \geq 1, \forall x > 0$ ta có bất đẳng thức: $\frac{x^n(x^{n+1}+1)}{x^n+1} \leq \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n+1}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Câu 5. Cho hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $n\geq 2$ là số nguyên. Chứng minh rằng nếu

$\dfrac{f(x)+f(y)}{2}\geq f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\ \forall x,y\geq 0$ (1)thìta có

$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n}\geq f\left(\dfrac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)\forall x_i\geq 0,\ i=\overline{1,n}$ (2).

Nguyễn Bảo Vương

Câu 6. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n\geq 1$, ta luôn có

a. $1^2+2^2+...+(n-1)^2+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b. $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3^2}+...+\dfrac{n}{3^n}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{2n+3}{4.3^n}$

Câu 7.

a. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$ ta có:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} \text{ (n dấu căn)}$$

b. Chứng minh các đẳng thức $\sin x + \sin 2x + ...\sin nx = \dfrac{\sin\dfrac{nx}{2}\sin\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$ với $x \neq k2\pi$ với $n \geq 1$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 8. Chứng minh rằng với mọi $n \geq 1$ ta có bất đẳng thức:

$$|\sin nx| \leq n|\sin x| \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Câu 9.

a. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, ta có : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$

b. $3^n > 3n+1$ với mọi số tự nhiên $n \geq 2$;

c. $\frac{2.4.6.2n}{1.3.5...(2n-1)} > \sqrt{2n+1}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$;

Nguyễn Bảo Vương

Câu 10. Cho hàm số f xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ và thoả mãn điều kiện: $f(x+y) \geq f(x).f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ (*). Chứng minh rằng với mọi số thực x và mọi số tự nhiên n ta có: $f(x) \geq \left[f\left(\frac{x}{2^n} \right) \right]^{2n}$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 11. Cho n là số tự nhiên dương. Chứng minh rằng: $a_n = 16^n - 15n - 1 \vdots 225$

Câu 12. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$ thì $A(n) = 7^n + 3n - 1$ luôn chia hết cho 9

Câu 13. Cho n là số tự nhiên dương. Chứng minh rằng: $B_n = (n+1)(n+2)(n+3)\ldots(3n) \vdots 3^n$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 14. Trong mặt mặt phẳng cho n điểm rời nhau (n > 2) tất cả không nằm trên một đường thẳng. Chứng minh rằng tất cả các đường thẳng nối hai điểm trong các điểm đã cho tạo ra số đường thẳng khác nhau không nhỏ hơn n.

Câu 15. Chứng minh rằng tổng các trong một n – giác lồi $(n \geq 3)$ bằng $(n-2)180^0$.

Câu 16.

a. Chứng minh rằng với $\forall n \geq 2$, ta luôn có $a_n = (n+1)(n+2)...(n+n)$ chia hết cho 2^n.

b. Cho a, b là nghiệm của phương trình $x^2 - 27x + 14 = 0$

Đặt $S(n) = a^n + b^n$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì $S(n)$ là một số nguyên không chia hết cho 715.

c. Cho hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thỏa $f(1) = 1, f(2) = 2$ và $f(n+2) = 2f(n+1) + f(n)$.

Chứng minh rằng: $f^2(n+1) - f(n+2)f(n) = (-1)^n$

d. Cho p_n là số nguyên tố thứ n. Chứng minh rằng: $2^{2^n} > p_n$.

e. Chứng minh rằng mọi số tự nhiên không vượt qua $n!$ đều có thể biểu diễn thành tổng của không quá n ước số đôi một khác nhau của $n!$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 17. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 6x + 1 = 0$. Đặt $a_n = x_1^n + x_2^n$. Chứng minh rằng:

a. $a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2} \quad \forall n \geq 2$.

b. a_n là một số nguyên và a_n không chia hết cho 5 với mọi $n \geq 1$.

Câu 18.

a. Trong không gian cho n mặt phẳng phân biệt ($n \geq 1$), trong đó ba mặt phẳng luôn cắt nhau và không có bốn mặt phẳng nào có điểm chung. Hỏi n mặt phẳng trên chia không gian thành bao nhiêu miền?

b. Cho n đường thẳng nằm trong mặt phẳng trong đóhai đường thẳng bất kì luôn cắt nhau và không có ba đường thẳng nào đồng quy. Chứng minh rằng n đường thẳng này chia mặt phẳng thành $\frac{n^2+n+2}{2}$ miền.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 19.

a. Cho a,b,c,d,m là các số tự nhiên sao cho $a+d$, $(b-1)c$, $ab-a+c$ chia hết cho m. Chứng minh rằng $x_n = a.b^n + cn + d$ chia hết cho m với mọi số tự nhiên n.

b. Chứng minh rằng từ $n+1$ số bất kì trong $2n$ số tự nhiên đầu tiên luôn tìm được hai số là bội của nhau.

Nguyễn Bảo Vương

C. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Một học sinh chứng minh mệnh đề "8^n+1 chia hết cho 7, $\forall n\in\mathbb{N}^*$" $(*)$ như sau:

- Giả sử $(*)$ đúng với $n=k$, tức là 8^k+1 chia hết cho 7.
- Ta có: $8^{k+1}+1=8\left(8^k+1\right)-7$, kết hợp với giả thiết 8^k+1 chia hết cho 7 nên suy ra được $8^{k+1}+1$ chia hết cho 7. Vậy đẳng thức $(*)$ đúng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Học sinh trên chứng minh đúng.

B. Học sinh chứng minh sai vì không có giả thiết qui nạp.

C. Học sinh chứng minh sai vì không dùng giả thiết qui nạp.

D. Học sinh không kiểm tra bước 1 (bước cơ sở) của phương pháp qui nạp.

Câu 2. Cho $S_n=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n.(n+1)}$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_3=\dfrac{1}{12}$. **B.** $S_2=\dfrac{1}{6}$. **C.** $S_2=\dfrac{2}{3}$. **D.** $S_3=\dfrac{1}{4}$.

Câu 3. Cho $S_n=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n.(n+1)}$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n=\dfrac{n-1}{n}$. **B.** $S_n=\dfrac{n}{n+1}$. **C.** $S_n=\dfrac{n+1}{n+2}$. **D.** $S_n=\dfrac{n+2}{n+3}$.

Câu 4. Cho $S_n=\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n=\dfrac{n-1}{2n-1}$. **B.** $S_n=\dfrac{n}{2n+1}$. **C.** $S_n=\dfrac{n}{3n-2}$. **D.** $S_n=\dfrac{n+2}{2n+5}$.

Câu 5. Cho $P_n=\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ với $n\geq 2$ và $n\in\mathbb{N}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P=\dfrac{n+1}{n+2}$. **B.** $P=\dfrac{n-1}{2n}$. **C.** $P=\dfrac{n+1}{n}$. **D.** $P=\dfrac{n+1}{2n}$.

Câu 6. Với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, hệ thức nào sau đây là sai?

A. $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

B. $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

C. $1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

D. $2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2=\dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Câu 7. Xét hai mệnh đề sau:

I) Với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, số n^3+3n^2+5n chia hết cho 3.

II) Với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, ta có $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{13}{24}$.

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ I. **B.** Chỉ II. **C.** Không có. **D.** Cả I và II.

Câu 8. Với $n\in\mathbb{N}^*$, hãy rút gọn biểu thức $S=1.4+2.7+3.10+\ldots+n(3n+1)$.

A. $S=n(n+1)^2$. **B.** $S=n(n+2)^2$.

C. $S=n(n+1)$. **D.** $S=2n(n+1)$.

Câu 9. Kí hiệu $k!=k(k-1)...2.1, \forall k\in\mathbb{N}^*$. Với $n\in\mathbb{N}^*$, đặt $S_n=1.1!+2.2!+...+n.n!$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $S_n=2.n!$. **B.** $S_n=(n+1)!-1$. **C.** $S_n=(n+1)!$. **D.** $S_n=(n+1)!+1$.

Câu 10. Với $n\in\mathbb{N}^*$, đặt $T_n=1^2+2^2+3^2+...+(2n)^2$ và $M_n=2^2+4^2+6^2+...+(2n)^2$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $\frac{T_n}{M_n}=\frac{4n+1}{2n+2}$. **B.** $\frac{T_n}{M_n}=\frac{4n+1}{2n+1}$. **C.** $\frac{T_n}{M_n}=\frac{8n+1}{n+1}$. **D.** $\frac{T_n}{M_n}=\frac{2n+1}{n+1}$.

Câu 11. Tìm số nguyên dương p nhỏ nhất để $2^n>2n+1$ với mọi số nguyên $n\ge p$.

A. $p=5$. **B.** $p=3$. **C.** $p=4$. **D.** $p=2$.

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị của $n\in\mathbb{N}^*$ sao cho $2^n>n^2$.

A. $n\ge 5$. **B.** $n=1$ **hoặc** $n\ge 6$. **C.** $n\ge 7$. **D.** $n=1$ **hoặc** $n\ge 5$.

Câu 13. Với mọi số nguyên dương n, ta có: $\frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+...+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{an+b}{cn+4}$, trong đó a,b,c là các số nguyên. Tính các giá trị của biểu thức $T=ab^2+bc^2+ca^2$.

A. $T=3$. **B.** $T=6$. **C.** $T=43$. **D.** $T=42$.

Câu 14. Với mọi số nguyên dương $n\ge 2$, ta có: $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{an+2}{bn+4}$, trong đó a,b là các số nguyên. Tính các giá trị của biểu thức $T=a^2+b^2$.

A. $P=5$. **B.** $P=9$. **C.** $P=20$. **D.** $P=36$.

Câu 15. Biết rằng $1^3+2^3+...+n^3=an^4+bn^3+cn^2+dn+e,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Tính giá trị biểu thức $M=a+b+c+d+e$.

A. $M=4$. **B.** $M=1$. **C.** $M=\frac{1}{4}$. **D.** $M=\frac{1}{2}$.

Câu 16. Biết rằng mọi số nguyên dương n, ta có $1.2+2.3+...+n(n+1)=a_1n^3+b_1n^2+c_1n+d_1$ và $1.2+2.5+3.8+...+n(3n-1)=a_2n^3+b_2n^2+c_2n+d_2$. Tính giá trị biểu thức $T=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2+d_1d_2$.

A. $T=2$. **B.** $T=1$. **C.** $M=\frac{4}{3}$. **D.** $T=\frac{2}{3}$.

Câu 17. Biết rằng $1^k+2^k+...+n^k$, trong đó n,k là số nguyên dương. Xét các mệnh đề sau:

$S_1=\frac{n(n+1)}{2}$, $S_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $S_3=\frac{n^2(n-1)^2}{4}$ và $S_4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

Số các mệnh đề đúng trong các mệnh đề nói trên là:

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 1, chúng ta thấy ngay được chỉ có $S_3=\frac{n^2(n-1)^2}{4}$ là sai.

Câu 18. Xét Câu toán: "Kiểm nghiệm với số nguyên dương n bất đẳng thức $n!\ge 2^{n-1}$". Một học sinh đã trình bày lời giải Câu toán này bằng các bước như sau:

Bước 1: Với $n=1$, ta có: $n!=1!=1$ và $2^{n-1}=2^{1-1}=2^0=1$. Vậy $n!\ge 2^{n-1}$ đúng.

Bước 2 : Giả sử bất đẳng thức đúng với $n=k\ge 1$, tức là ta có $k!\ge 2^{k-1}$.

Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n=k+1$, nghĩa là phải chứng minh $(k+1)!\ge 2^k$.

Bước 3 : Ta có $(k+1)!=(k+1).k!\geq 2.2^{k-1}=2^k$. Vậy $n!\geq 2^{n-1}$ với mọi số nguyên dương n.

Chứng minh trên đúng hay sai, nếu sai thì sai từ bước nào ?

A. Đúng. **B.** Sai từ bước 2. **C.** Sai từ bước 1. **D.** Sai từ bước 3.

Câu 19. Biết rằng $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{an^2+bn}{cn^2+dn+16}$, trong đó a,b,c,d và n là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức $T=(a+c)(b+d)$.

là :

A. $T=75$. **B.** $T=364$. **C.** $T=300$. **D.** $T=256$.

Câu 20. Tam giác ABC là tam giác đều có độ dài cạnh là 1. Gọi A_1,B_1,C_1 lần lượtlà trung điểm BC,CA,AB. Gọi A_2,B_2,C_2 lần lượtlà trung điểm B_1C_1,C_1A_1,A_1B_1 …Gọi A_n,B_n,C_n lần lượtlà trung điểm $B_{n-1}C_{n-1},C_{n-1}A_{n-1},A_{n-1}B_{n-1}$. Tính diện tích tam giác $A_nB_nC_n$?

A. $\frac{1}{4^n}$. **B.** $\frac{1}{3^n}$. **C.** $\frac{1}{2^n}$. **D.** $\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Câu 21. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh là 1. Gọi A_1,B_1,C_1,D_1 lần lượtlà trung điểm AC,BC,CD,DA. Gọi A_2,B_2,C_2,D_2 lần lượtlà trung điểm $A_1B_1,B_1C_1,C_1D_1,D_1A_1$ …Gọi A_n,B_n,C_n,D_n lần lượtlà trung điểm $A_{n-1}B_{n-1},B_{n-1}C_{n-1},C_{n-1}D_{n-1},D_{n-1}A_{n-1}$. Tính diện tích tứ giác $A_nB_nC_nD_n$?

A. $\frac{1}{4^n}$. **B.** $\frac{1}{3^n}$. **C.** $\frac{1}{2^n}$. **D.** $\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Câu 22. Trên một mặt phẳng cho n đường tròn phân biệt, đôi một cắt nhau và không có ba đường tròn nào giao nhau tại một điểm. Các đường tròn này chia mặt phẳng thành 92 các miền rời nhau. Tìm n.

A. 10. **B.** 12. **C.** 9. **D.** 11.

Câu 23. $S_n=(n+1)(n+2)(n+3)...(n+n)$ luôn chia hết cho

A. 2^n. **B.** 3^n. **C.** 4^n. **D.** 2^{n+1}.

Câu 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của $n,n\leq 100$ để $u_n=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^n+\left(2+\sqrt{3}\right)^n}{2}-1$ là số chính phương?

A. 50. **B.** 30. **C.** 49. **D.** 49.

Câu 25. Trên một mặt phẳng cho n đường thẳng phân biệt cùng đi qua 1 điểm phân biệt, này chia mặt phẳng thành 100 phần rời nhau. Tìm n.

A. 50. **B.** 40. **C.** 20. **D.** 25.

Câu 26. Bài toán chứng minh $A=4^n+15n-1$ chia hết cho 9 bằng phương pháp nào dưới đây là thích hợp nhất?

A. Đồng dư thức. **B.** Quy nạp.

C. Tách hạng tử. **D.** Sử dụng dấu hiệu chia hết cho 9.

Câu 27. Chứng minh. $B=7.2^{2n-2}+3^{2n-1}\vdots 5$ (1) với n là số nguyên dương. Một học sinh đã giải như sau:

Bước 1: Xét với $n=1$ ta có $B=10\vdots 5$

Bước 2: Giả sử (1) đúng với $n=k$ $(k\in\mathbb{N},k>1)$, khi đó: $B_k=7.2^{2k-2}+3^{2k-1}\vdots 5$.

Bước 3: Chứng minh (1) đúng với $n=k+1$, hay ta cần chứng minh

$B_{k+1}=7.2^{2(k+1)-2}+3^{2(k+1)-1}\vdots 5$

Thật vậy $B_{k+1}=7.2^{2(k+1)-2}+3^{2(k+1)-1}\vdots 5$

$=7.2^{2k-2+2}+3^{2k-1+2}$

$=7.2^{2k-2}.4+3^{2k-1}.9$

$=4(7.2^{2k-2}.4+3^{2k-1})+5.3^{2k-1}\vdots 5$

$=4B_k+5.3^{2k-1}\vdots 5$ ($B_k\vdots 5$)

Vậy $B_{k+1}\vdots 5$

Bước 4: Vậy $B=7.2^{2n-2}+3^{2n-1}\vdots 5$ với n là số nguyên dương.

Lập luận trên đúng đến bước nào?

A. Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3. **D.** Bước 4.

Câu 28. Cho $C=7^n+3n-1$,Trong quy trình chứng minh $C\vdots 9$ theo phương pháp quy nạp, giá trị của a trong biểu thức $C_{k+1}=7.C_k-a(2k-1)$ là:

A. -9. **B.** 0. **C.** 9. **D.** 18.

Câu 29. Với mọi số nguyên dương n thì $S_n=n^3+11n$ chia hết cho số nào sau đây?

A. 6. **B.** 4. **C.** 9. **D.** 12.

Câu 30. Với mọi số nguyên dương n thì $S_n=n^3+3n^2+5n+3$ chia hết cho số nào sau đây?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 31. Với mọi số nguyên dương n, a là số nguyên dương cho trước, $D=a^{2n}-1$ chia hết cho:

A. a. **B.** a^2-1. **C.** a^2. **D.** $-a^2-1$.

Câu 32. Cho $E=4^k+a.k-1$, với a là số tự nhiên. Giá trị nhỏ nhất của a để $E\vdots 9$ là:

A. 0. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 9.

Câu 33. Với mọi số nguyên dương n thì $S_n=4^n+15n-1$ chia hết cho số nào sau đây?

A. 4. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 34. Với mọi $n\in N^*$, tổng $S_n=1^2+2^2+3^2+...+n^2$ thu gọn có dạng là biểu thức nào sau đây?

A. $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$. **B.** $\dfrac{n(n+2)(2n+1)}{6}$.

C. $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. **D.** $\dfrac{n^2(n+1)}{2}$.

Câu 35. Với mọi số nguyên dương n thì $S_n=4^{2n}-3^{2n}-7$ chia hết cho số nào sau đây?

A. $2^3.3$. **B.** $2^2.3.7$. **C.** $2.3^2.7$. **D.** $2.3.7^2$.

Câu 36. Với mọi $n\in\mathbb{N}^*$ biểu thức $S(n)=1+2+3+...+n$ bằng

A. $\dfrac{n(n+1)}{2}$. **B.** $n(n+1)$. **C.** $\dfrac{n(n-1)}{2}$. **D.** $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

Câu 37. Biết rằng với mọi số nguyên dương n ta có $1+2+3+.....+n=an^2+bn$. Tính $\dfrac{a}{b}$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 38. Tổng các góc trong một đa giác lồi n cạnh $(n\geq 3)$ là:

A. $n.180^0$. **B.** $(n-1)180^0$. **C.** $(n-2)180^0$. **D.** $(n-3)180^0$.

Câu 39. Mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

A. $2^n>n^2,\forall n\in\mathbb{N}^*$. **B.** $2^n>n^2,\forall n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1;2;3;4\}$.

C. $2^n<n^2,\forall n\in\mathbb{N}^*$ **D.** $2^n>n^2,\forall n\in\mathbb{N}$.

Câu 40. Với mọi $n \in N^*$, tổng $S_n = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n.(n+1)$ thu gọn có dạng là biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$. **B.** $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

C. $\frac{n(n+1)(n+2)}{2}$ **D.** $\frac{n^2(3n+1)}{4}$.

Câu 41. Với mọi $n \in N^*$, tổng $S_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2$ thu gọn có dạng là biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{n(n^2-1)}{3}$. **B.** $\frac{n(2n^2-1)}{3}$. **C.** $\frac{n(4n^2-1)}{3}$ **D. Đáp số khác.**

Câu 42. Giả sử với mọi n nguyên dương ta có: $1.4 + 2.7 + ... + n(3n+1) = An^3 + Bn^2 + Cn$. Tính $A + B + C$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 43. Mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

A. Với mọi số tự nhiên n, tồn tại một đa thức $P(n)$ sao cho $\cos n\alpha = P_n(\cos\alpha)$.

B. $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n-1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

C. $2^n > n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$

D. $(n+1)^n > n^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 44. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $2^{n+1} > n^2 + 3n$.

A. $n \geq 3$. **B.** $n \geq 5$. **C.** $n \geq 6$. **D.** $n \geq 4$.

Nguyễn Bảo Vương

Chương 3

Bài 1 PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH QUY NẠP

Lý thuyết. Phương pháp quy nạp toán học

Để chứng minh những mệnh đề liên quan đến số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$ là đúng với mọi n mà không thể thử trực tiếp thì có thể làm như sau:

- Bước 1. Kiểm tra rằng mệnh đề đúng với $n=1$.
- Bước 2. Giả thiết mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kì $n=k\geq 1$ (gọi là giả thiết quy nạp), chứng minh rằng nó cũng đúng với $n=k+1$.

Đó là phương pháp quy nạp toán học, hay còn gọi tắt là phương pháp quy nạp.

Một cách đơn giản, ta có thể hình dung như sau: Mệnh đề đã đúng khi $n=1$ nên theo kết quả ở bước 2, nó cũng đúng với $n=1+1=2$. Vì nó đúng với $n=2$ nên lại theo kết quả ở bước 2, nó đúng với $n=2+1=3,...$ Bằng cách ấy, ta có thể khẳng định rằng mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Chú ý: Nếu phải chứng minh mệnh đề là đúng với mọi số tự nhiên $n\geq p$ (p là một số tự nhiên) thì:

- Bước 1, ta phải kiểm tra mệnh đề đúng với $n=p$;
- Bước 2, giả thiết mệnh đề đúng với số tự nhiên bất kì $n=k\geq p$ và phải chứng minh rằng nó cũng đúng với $n=k+1$.

DẠNG: ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP ĐỂ CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC, TÍNH CHIA HẾT, HÌNH HỌC…

A. Phương pháp giải

Giả sử cần chứng minh đẳng thức $P(n)=Q(n)$ (hoặc $P(n)>Q(n)$) đúng với $\forall n\geq n_0,\ n_0\in\mathbb{N}$ ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tính $P(n_0),\ Q(n_0)$ rồi chứng minh $P(n_0)=Q(n_0)$

Bước 2: Giả sử $P(k)=Q(k);\ k\in\mathbb{N},k\geq n_0$, ta cần chứng minh $P(k+1)=Q(k+1)$.

B. Bài tập tự luận

Câu 1. Chứng minh với mọi số tự nhiên $n\geq 1$ ta luôn có: $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Lời giải

Đặt $P(n)=1+2+3+...+n$: tổng n số tự nhiên đầu tiên :

$Q(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Ta cần chứng minh $P(n)=Q(n)\ \ \forall n\in\mathbb{N},n\geq 1$.

Bước 1: Với $n=1$ ta có $P(1)=1,\ Q(1)=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

$\Rightarrow P(1)=Q(1)\Rightarrow (1)$ đúng với $n=1$.

Bước 2: Giả sử $P(k)=Q(k)$ với $k\in\mathbb{N},k\geq 1$ tức là:

$$1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}(1)$$

Ta cần chứng minh $P(k+1)=Q(k+1)$, tức là:

$$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}(2)$$

Thật vậy: $VT(2)=(1+2+3+...+k)+(k+1)$

$=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$ (Do đẳng thức (1))

$=(k+1)(\frac{k}{2}+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}=VP(2)$

Vậy đẳng thức chođúng với mọi $n\geq 1$.

Câu 2. Chứng minh với mọi số tự nhiên $n\geq 1$ ta luôn có: $1+3+5+...+2n-1=n^2$

Lời giải

- Với $n=1$ ta có $\text{VT}=1,\ \text{VP}=1^2=1$

Suy ra $VT=VP\Rightarrow$ đẳng thức cho đúng với $n=1$.

- Giả sử đẳng thức chođúng với $n=k$ với $k\in\mathbb{N},k\geq 1$ tức là:

$$1+3+5+...+2k-1=k^2(1)$$

Ta cần chứng minh đẳng thức chođúng với $n=k+1$, tức là:

$$1+3+5+...+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2(2)$$

Thật vậy: $VT(2)=(1+3+5+...+2k-1)+(2k+1)$

$=k^2+(2k+1)$ (Do đẳng thức (1))

$=(k+1)^2=VP(1.2)$

Vậy đẳng thức chođúng với mọi $n\geq 1$.

Câu 3. Chứng minh rằng với $\forall n\geq 1$, ta có bất đẳng thức: $\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6.2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

Lời giải

* Với $n=1$ ta có đẳng thức chotrở thành: $\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow 2>\sqrt{3}$ đúng.

$\Rightarrow$ đẳng thức chođúng với $n=1$.

* Giả sử đẳng thức chođúng với $n=k\geq 1$, tức là:

$$\frac{1.3.5...(2k-1)}{2.4.6...2k}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}(1)$$

Ta phải chứng minh đẳng thức chođúng với $n=k+1$, tức là:

$$\frac{1.3.5...(2k-1)(2k+1)}{2.4.6....2k(2k+2)}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}}(2)$$

Thật vậy, ta có:

$$VT(2)=\frac{1.3.5...(2k-1)}{2.4.6...2k}.\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}$$

Ta chứng minh: $\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}}\Leftrightarrow(2k+1)(2k+3)<(2k+2)^2$

$\Leftrightarrow 3>1$ (luôn đúng)

Vậy đẳng thức chođúng với mọi số tự nhiên $n\geq 1$.

Câu 4. Chứng minh rằng với $\forall n\geq 1,\forall x>0$ ta có bất đẳng thức: $\frac{x^n(x^{n+1}+1)}{x^n+1}\leq\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n+1}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải

- Với $n=1$ ta cần chứng minh: $\frac{x(x^2+1)}{x+1}\le\left(\frac{x+1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow 8x(x^2+1)\le(x+1)^4$

Tức là: $x^4-4x^3+6x^2-4x+1\ge 0\Leftrightarrow(x-1)^4\ge 0$ (đúng)

Đẳng thức xảy ra khi $x=1$.

- Giả sử $\frac{x^k(x^{k+1}+1)}{x^k+1}\le\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2k+1}$, ta chứng minh $\frac{x^{k+1}(x^{k+2}+1)}{x^{k+1}+1}\le\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2k+3}$ (*)

Thật vậy, ta có: $\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2k+3}=\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2k+1}\ge\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\frac{x^k(x^{k+1}+1)}{x^k+1}$

Nên để chứng minh (*) ta chỉ cần chứng minh $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\frac{x^k(x^{k+1}+1)}{x^k+1}\ge\frac{x^{k+1}(x^{k+2}+1)}{x^{k+1}+1}$

Hay $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2(x^{k+1}+1)^2\ge x(x^{k+2}+1)(x^k+1)$ (**)

Khai triển (**), biến đổi và rút gọn ta thu được

$x^{2k+2}(x-1)^2-2x^{k+1}(x-1)^2+(x-1)^2\ge 0\Leftrightarrow(x-1)^2(x^{k+1}-1)^2\ge 0$ BĐT này hiển nhiên đúng. Đẳng thức có $\Leftrightarrow x=1$.

Vậy Câu toán được chứng minh.

Chú ý: Trong một số trường hợp để chứng minh mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên n ta có thể chứng minh theo cách sau

Bước 1: Ta chứng minh $P(n)$ đúng với $n=1$ và $n=2^k$

Bước 2: Giả sử $P(n)$ đúng với $n=k+1$, ta chứng minh $P(n)$ đúng với $n=k$.

Cách chứng minh trên được gọi là quy nạp theo kiểu Cauchy (Cô si).

Câu 5. Cho hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $n\ge 2$ là số nguyên. Chứng minh rằng nếu $\frac{f(x)+f(y)}{2}\ge f\left(\frac{x+y}{2}\right)\ \forall x,y\ge 0$ (1)thìta có

$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}\ge f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)\forall x_i\ge 0,\ i=\overline{1,n}$ (2).

Lời giải

Ta chứng minh (2) đúng với $n=2^k$, $k\ge 1$

* Với $k=1$ thì (8.2) đúng (do (1))

* Giả sử (2) đúng với $n=2^k$, ta chứng minh (2) đúng với $n=2^{k+1}$

Thật vậy: $f(x_1)+\ldots f(x_{2^k})\ge 2^k f\left(\frac{x_1+\ldots+x_{2^k}}{2^k}\right)$

$f(x_{2^k+1})+\ldots f(x_{2^{k+1}})\ge 2^k f\left(\frac{x_{2^k+1}+\ldots+x_{2^{k+1}}}{2^k}\right)$

Do đó: $f(x_1)+\ldots f(x_{2^{k+1}})\ge 2^k f\left(\frac{x_1+\ldots+x_{2^k}}{2^k}\right)+2^k f\left(\frac{x_{2^k+1}+\ldots+x_{2^{k+1}}}{2^k}\right)$

$\ge 2^{k+1} f\left(\frac{x_1+\ldots+x_{2^k}+x_{2^k+1}+\ldots+x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right)$.

Do vậy (2) đúng với mọi $n=2^k$.

- Giả sử (2) đúng với mọi $n=k+1\ge 3$, tức là

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{k+1})}{k+1} \ge f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_{k+1}}{k+1}\right)(3)$$

Ta chứng minh (8.2) đúng với $n=k$, tức là

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_k)}{k} \ge f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_k}{k}\right)(4)$$

Thật vậy: đặt $x_{k+1}=\frac{x_1+x_2+...+x_k}{k}=\frac{x}{k}$, áp dụng (3) ta có

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_k)+f\left(\frac{x}{k}\right)}{k+1} \ge f\left(\frac{x_1+x_2+...+\frac{x}{k}}{k+1}\right)$$

Hay $\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_k)}{k} \ge f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_k}{k}\right)$.

Vậy Câu toán được chứng minh.

Chú ý: Chứng minh tương tự ta cũng có Câu toán sau

Nếu $\frac{f(x)+f(y)}{2} \ge f(\sqrt{xy})\ \forall x,y \ge 0$ (a) thì ta có $\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n} \ge f\left(\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}\right)$ với $\forall x_i \ge 0,\ i=\overline{1,n}$ (b).

Câu 6. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \ge 1$, ta luôn có

a. $1^2+2^2+...+(n-1)^2+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b. $\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+...+\frac{n}{3^n}=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4.3^n}$

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

a. Bước 1: Với $n=1$ ta có:

$VT=1^2=1,\ VP=\frac{1(1+1)(2.1+1)}{6}=1 \Rightarrow VT=VP$

$\Rightarrow$ đẳng thức cho đúng với $n=1$.

Bước 2: Giả sử đẳng thức chođúng với $n=k \ge 1$, tức là:

$$1^2+2^2+...+(k-1)^2+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}(1)$$

Ta sẽ chứng minh đẳng thức cho đúng với $n=k+1$, tức là cần chứng minh:

$$1^2+2^2+...+(k-1)^2+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+1)(2k+3)}{6}(2).$$

Thật vậy:

$VT(2)=\left[1^2+2^2+...+k^2\right]+(k+1)^2 \overset{\text{do (1)}}{=} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$

$=(k+1)\left[\frac{2k^2+k}{6}+k+1\right]=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$

$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}=VP(2)$

$\Rightarrow (2)$ đúng $\Rightarrow$đẳng thức chođúng với mọi $n \ge 1$.

b. * Với $n=1$ ta có $VT=1=VP \Rightarrow$ đẳng thức cho đúng với $n=1$

* Giả sử đẳng thức cho đúng với $n=k \ge 1$, tức là: $\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+...+\frac{k}{3^k}=\frac{3}{4}-\frac{2k+3}{4.3^k}(1)$

Ta sẽ chứng minh đẳng thức chođúng với $n=k+1$, tức là cần chứng minh

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+...+\frac{k}{3^k}+\frac{k+1}{3^{k+1}}=\frac{3}{4}-\frac{2k+5}{4.3^{k+1}}(2).$$

Thật vậy: $VT(2)=\frac{3}{4}-\frac{2k+3}{4.3^k}+\frac{k+1}{3^{k+1}}=\frac{3}{4}-\frac{2k+5}{4.3^{k+1}}=VP(2)$

$\Rightarrow (2)$ đúng $\Rightarrow$ đẳng thức cho đúng.

Câu 7.

a. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n\geq 1$ ta có:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\text{ (n dấu căn)}$$

b. Chứng minh các đẳng thức $\sin x+\sin 2x+...\sin nx=\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ với $x\neq k2\pi$ với $n\geq 1$.

Lời giải

a.

* Với $n=1\Rightarrow VT=\sqrt{2},\ VP=2\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$

$\Rightarrow VT=VP\Rightarrow$ đẳng thức cho đúng với $n=1$.

* Giả sử đẳng thức chođúng với $n=k$, tức là:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}=2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}\text{ (k dấu căn)}(1)$$

Ta sẽ chứng minh đẳng thức chođúng với $n=k+1$, tức là:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}=2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}(k+1\text{ dấu căn})(2).$$

Thật vậy: $VT(2)=\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{k\text{ dau can}}}=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}}$

$$=\sqrt{2(1+\cos\frac{\pi}{2^{k+1}})}=\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}}=2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}=VP(2)$$

(Ở trên ta đã sử đụng công thức $1+\cos a=2\cos^2\frac{a}{2}$).

$\Rightarrow (2)$ đúng $\Rightarrow$ đẳng thức chođúng.

b. • Với $n=1$ ta có $VT=\sin x,\ VP=\frac{\sin\frac{x}{2}\sin x}{\sin\frac{x}{2}}=\sin x$ nên đẳng thức chođúng với $n=1$

• Giả sử đẳng thức chođúng với $n=k\geq 1$, tức là:

$$\sin x+\sin 2x+...\sin kx=\frac{\sin\frac{kx}{2}\sin\frac{(k+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}(1)$$

Ta chứng minh (4) đúng với $n=k+1$, tức là

$$\sin x+\sin 2x+...\sin(k+1)x=\frac{\sin\frac{(k+1)x}{2}\sin\frac{(k+2)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}(2)$$

Thật vậy: $VT(2)=\frac{\sin\frac{kx}{2}\sin\frac{(k+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}+\sin(k+1)x$

$$=\sin\frac{(k+1)x}{2}\left[\frac{\sin\frac{kx}{2}+2\cos\frac{(k+1)x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right]$$

$$=\frac{\sin\frac{(k+1)x}{2}\sin\frac{(k+2)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=VP(2)$$

Nên (2) đúng. Suy ra đẳng thức chođúng với mọi $n\ge 1$.

Câu 8. Chứng minh rằng với mọi $n\ge 1$ ta có bất đẳng thức:

$|\sin nx|\le n|\sin x|\ \forall x\in\mathbb{R}$

Lời giải

* Với $n=1$ ta có: $VT=|\sin 1.\alpha|=1.|\sin\alpha|=VP$ nên đẳng thức cho đúng.

* Giả sử đẳng thức cho đúng với $n=k\ge 1$, tức là: $|\sin kx|\le k|\sin x|(1)$

Ta phải chứng minh đẳng thức chođúng với $n=k+1$,tức là:

$$|\sin(k+1)\alpha|\le(k+1)|\sin\alpha|(2)$$

Thật vậy:

$|\sin(k+1)\alpha|=|\sin k\alpha\cos\alpha+\cos k\alpha\sin\alpha|$

$\le|\sin k\alpha|.|\cos\alpha|+|\cos k\alpha|.|\sin\alpha|\le|\sin k\alpha|+|\sin\alpha|$

$\le k|\sin\alpha|+|\sin\alpha|=(k+1).|\sin\alpha|$

Vậy đẳng thức chođúng với $n=k+1$, nên đẳng thức chocũng đúng với mọi số nguyên dương n.

Câu 9.

a. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n\ge 1$, ta có : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$

b. $3^n>3n+1$ với mọi số tự nhiên $n\ge 2$;

c. $\frac{2.4.6.2n}{1.3.5...(2n-1)}>\sqrt{2n+1}$ với mọi số tự nhiên $n\ge 1$;

Lời giải

a. Ta chứng minh $\left(1+\frac{1}{n}\right)^k<\frac{n^2}{k^2}+\frac{n}{k}+1$,$1\le k\le n(1)$ bằng phương pháp quy nạp theo k. Sau đó cho $k=n$ ta có (7).

* Với $k=1\Rightarrow VT(1)=1+\frac{1}{n}<\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+1=VP(1)$

$\Rightarrow(1)$ đúng với $k=1$.

* Giải sử (1) đúng với $k=p,\ 1\le p\le n$, tức là:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^p < \frac{p^2}{n^2}+\frac{p}{n}+1\,(2).$$

Ta chứng minh (1) đúng với $k = p+1$, tức là

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1} < \frac{(p+1)^2}{n^2}+\frac{p+1}{n}+1\,(3).$$

Thật vậy: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^p.\left(1+\frac{1}{n}\right) < \left(\frac{p^2}{n^2}+\frac{p}{n}+1\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$= \frac{p^2}{n^3}+\frac{p^2+p}{n^2}+\frac{p+1}{n}+1 \le \frac{p}{n^2}+\frac{p^2+p}{n^2}+\frac{p+1}{n}+1$

$< \frac{p^2+2p+1}{n^2}+\frac{p+1}{n}+1 = \frac{(p+1)^2}{n^2}+\frac{p+1}{n}+1 \Rightarrow (3)$ đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Cách khác: Khi $n=1 \Rightarrow 2<3$ (đúng) dễ thấy khi $n>1 \Rightarrow \frac{1}{n}$ tiến dần về $0 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tiến gần về 1. Vậy $\forall n \ge 1$ ta luôn có $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$

b. Với $n=2$ ta có: $VT = 3^2 = 9 > VP = 3.2+1 = 7$ nên đẳng thức chođúng với $n=1$

- Giả sử đẳng thức chođúng với $n = k \ge 2$, tức là: $3^k > 3k+1\,(1)$

Ta chứng minh đẳng thức chođúng với $n = k+1$, tức là:

$$3^{k+1} \ge 3(k+1)+1 = 3k+4\,(2)$$

Thật vậy: $3^{k+1} = 3.3^k > 3(3k+1) = 3k+4+(6k-1) > 3k+4$ nên (2) đúng.

Vậy Câu tóan được chứng minh.

c. Với $n=1$ ta có: $VT = \frac{2}{1} = 2,\ VP = \sqrt{3} \Rightarrow$ đẳng thức chođúng với $n=1$

- Giả sử đẳng thức chođúng với $n = k \ge 1$, tức là:

$$\frac{2.4.6.2k}{1.3.5...(2k-1)} > \sqrt{2k+1}\,(1)$$

Ta chứng minh đẳng thức chođúng với $n = k+1$, tức là:

$$\frac{2.4.6.2k(2k+2)}{1.3.5...(2k-1)(2k+1)} > \sqrt{2k+3}\,(2)$$

Thật vậy: $\frac{2.4.6.2k(2k+2)}{1.3.5...(2k-1)(2k+1)} > \sqrt{2k+1}.\frac{2k+2}{2k+1} = \frac{2k+2}{\sqrt{2k+1}}$

Nên ta chứng minh $\frac{2k+2}{\sqrt{2k+1}} > \sqrt{2k+3} \Leftrightarrow (2k+2)^2 > (2k+1)(2k+3)$

$\Leftrightarrow 4>3$ hiển nhiên đúng.

Vậy Câu toán được chứng minh.

Câu 10. Cho hàm số f xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ và thoả mãn điều kiện: $f(x+y) \ge f(x).f(y),\ \forall x,y \in \mathbb{R}$ (*). Chứng minh rằng với mọi số thực x và mọi số tự nhiên n ta có: $f(x) \ge \left[f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right]^{2n}$

Lời giải

a. Trong BĐT $f(x+y) \ge f(x).f(y)$ thay x và y bằng $\frac{x}{2}$, ta được:

$$f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)\geq f\left(\frac{x}{2}\right).f\left(\frac{x}{2}\right)\Rightarrow f\left(x\right)\geq\left[f(\frac{x}{2})\right]^2$$

Vậybất đẳng thức đã chođúng với $n=1$.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n=k\geq 1$. Ta có

$$f\left(x\right)\geq\left[f\left(\frac{x}{2^k}\right)\right]^{2k} \quad (1)$$

Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n=k+1$, tức là:

$$f\left(x\right)\geq\left[f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right]^{2k+1} \quad (2)$$

Thật vậy ta có: $f\left(\frac{x}{2^k}\right)=f\left(\frac{x}{2^{k+1}}+\frac{x}{2^{k+1}}\right)\geq\left[f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right]^2$

$$\Rightarrow\left[f\left(\frac{x}{2^k}\right)\right]^{2^k}\geq\left[\left[f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right]^2\right]^{2^k}$$

$$\Rightarrow\left[f\left(\frac{x}{2^k}\right)\right]^{2^k}\geq\left[f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right]^{2^{k+1}}$$

Do tính chất bắc cầu ta có được: $f\left(x\right)\geq\left[f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right]^{2k+1}$

Bất đẳng thức đúng với $n=k+1$ nên cũng đúng với mọi số tự nhiên n.

Câu 11. Cho n là số tự nhiên dương. Chứng minh rằng: $a_n=16^n-15n-1\vdots 225$

Lời giải

- Với $n=1$ ta có: $a_1=0\Rightarrow a_1\vdots 225$.
- Giả sử $a_k=16^k-15k-1\vdots 225$, ta chứng minh

$$a_{k+1}=16^{k+1}-15(k+1)-1\vdots 225$$

Thậ vậy: $a_{k+1}=16.16^k-15k-16=16^k-15k-1-15\left(16^k-1\right)$

$=a_k-15\left(16^k-1\right)$

Vì $16^k-1=15.\left(16^{k-1}+16^{k-2}+...+1\right)\vdots 15$ và $a_k\vdots 225$

Nên ta suy ra $a_{k+1}\vdots 225$. Vậy Câu toán được chứng minh

Câu 12. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n\geq 1$ thì $A(n)=7^n+3n-1$ luôn chia hết cho 9

Lời giải

* Với $n=1\Rightarrow A(1)=7^1+3.1-1=9\Rightarrow A(1)\vdots 9$

* Giả sử $A(k)\vdots 9\ \forall k\geq 1$, ta chứng minh $A(k+1)\vdots 9$

Thật vậy: $A(k+1)=7^{k+1}+3(k+1)-1=7.7^k+21k-7-18k+9$

$\Rightarrow A(k+1)=7A(k)-9(2k-1)$

Vì $\begin{cases} A(k) \vdots 9 \\ 9(2k-1) \vdots 9 \end{cases} \Rightarrow A(k+1) \vdots 9$

Vậy $A(n)$ chia hết cho 9 với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

Câu 13. Cho n là số tự nhiên dương. Chứng minh rằng: $B_n = (n+1)(n+2)(n+3)....(3n) \vdots 3^n$

Lời giải

- Với $n = 1$, ta có: $B_1 = 2.3 \vdots 3$
- Giả sử mệnh đề đúng với n = k, tức là:

$$B_k = (k+1)(k+2)(k+3)\ldots(3k) \vdots 3^k$$

Ta chứng minh: $B_{k+1} = (k+2)(k+3)(k+4)\ldots[3(k+1)] \vdots 3^{k+1}$

$B_{k+1} = 3(k+1)(k+2)(k+3)\ldots(3k)(3k+1)(3k+2)$

$= 3B_k(3k+1)(3k+2)$

Mà $B_k \vdots 3^k$ nên suy ra $B_{k+1} \vdots 3^{k+1}$.

Vậy Câu toán được chứng minh.

Câu 14. Trong mặt mặt phẳng cho n điểm rời nhau (n > 2) tất cả không nằm trên một đường thẳng. Chứng minh rằng tất cả các đường thẳng nối hai điểm trong các điểm đã cho tạo ra số đường thẳng khác nhau không nhỏ hơn n.

Lời giải

Giả sử mệnh đề đẳng với $n = k \geq 3$ điểm.

Ta chứng minh nĩ cũng đẳng cho $n = k+1$ điểm.

Ta có thể chứng minh rằng tồn tại ít nhất một đường thẳng chỉ chứa có hai điểm. Ta kí hiệu đường thẳng đi qua hai điểm A_n và A_{n+1} là A_nA_{n+1}. Nếu những điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ nằm trên một đường thẳng thì số lượng các đường thẳng sẽ đúng là $n+1$: Gồm n đường thẳng nối A_{n+1} với các điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ và đường thẳng chúng nối chung. Nếu $A_1, A_2, ..., A_n$ không nằm trên một đường thẳng thì theo giả thiết quy nạp có n đường thẳng khác nhau. Bây giờ ta thêm các đường thẳng nối A_{n+1} với các điểm $A_1, A_2, ..., A_n$. Vì đường thẳng A_nA_{n+1} không chứa một điểm nào trong $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$, nên đường thẳng này khác hoàn toàn với n đường thẳng tạo ra bởi $A_1, A_2, ..., A_n$. Như vậy số đường thẳng tạo ra cũng không nhỏ hơn $n+1$.

Câu 15. Chứng minh rằng tổng các trong một n – giác lồi $(n \geq 3)$ bằng $(n-2)180^0$.

Lời giải

- **Với $n = 3$ ta cĩ tổng ba gĩc trong tam gíc bằng 180^0**
- **Giả sử cơng thức đẳng cho tất cả k-gíc, với $k < n$, ta phải chứng minh mệnh đề cũng đẳng cho n-gíc. Ta cĩ thể chia n-gíc bằng một đường chéo thành ra hai đa gíc. Nếu số cạnh của một đa gíc là k+1, thì số cạnh của đa gíc kia là n – k + 1, hơn nữa cả hai số ấy đều nhỏ hơn n. Theo giả thiết quy nạp tổng ốc gĩc của hai đa gíc ấy lần lượt là $(k-1)180^0$ và $(n-k-1)180^0$.**

Tổng ốc gĩc của n-gíc bằng tổng ốc gĩc của hai đa gíc trn, nghĩa l

$$(k-1+n-k-1)180^0=(n-2)180^0.$$

Suy ra mệnh đề đng với mọi $n\ge 3$.

Câu 16.

a. Chứng minh rằng với $\forall n\ge 2$, ta luôn có $a_n=(n+1)(n+2)...(n+n)$ chia hết cho 2^n.

b. **Cho** a,b **l nghiệm của phương trình** $x^2-27x+14=0$

Đặt $S(n)=a^n+b^n$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì $S(n)$ là một số nguyên không chia hết cho 715.

c. Cho hàm số $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ thỏa $f(1)=1, f(2)=2$ và $f(n+2)=2f(n+1)+f(n)$.

Chứng minh rằng: $f^2(n+1)-f(n+2)f(n)=(-1)^n$

d. Cho p_n là số nguyên tố thứ n. Chứng minh rằng: $2^{2^n}>p_n$.

e. Chứng minh rằng mọi số tự nhiên không vượt qua $n!$ đều có thể biểu diễn thành tổng của không quá n ước số đôi một khác nhau của $n!$.

Lời giải

a. * Với $n=2$, ta có: $a_2=(2+1)(2+2)=12\Rightarrow a_2\vdots 4=2^2$.

* Giả sử $a_k\vdots 2^k$ ta chứng minh $a_{k+1}\vdots 2^{k+1}$. Thật vậy:

$$a_{k+1}=(k+1+1)(k+1+2)...(k+k+1+1)$$
$$=(k+2)(k+3)...(k+k+2)$$
$$=(k+2)(k+3)...(k+k)(k+k+1)(k+k+2)$$
$$=\underbrace{\left[(k+1)(k+2)(k+3)...(k+k)\right]}_{a_k}.2.(k+k+1)=2a_k.(k^2+k+1)$$

Do $a_k\vdots 2^k\Rightarrow 2a_k\vdots 2^{k+1}\Rightarrow a_{k+1}\vdots 2^{k+1}$ đpcm.

b. Ta có: $S(n)=27S(n-1)-14S(n-2)$ rồi dùng quy nạp để chứng minh $S(n)$ chia hết cho 751.

c.

- Ta có: $f(3)=2f(2)+f(1)=5$, nên $f^2(2)-f(3)f(1)=2^2-5.1=(-1)^1$

Suy ra đẳng thức cho đúng với $n=1$.

- Giả sử đẳng thức cho đúng với $n=k$, tức là:

$$f^2(k+1)-f(k+2)f(k)=(-1)^k\ (1)$$

Ta chứng minh đẳng thức cho đúng với $n=k+1$, tức là:

$$f^2(k+2)-f(k+3)f(k+1)=(-1)^{k+1}\ (2)$$

Ta có:

$$f^2(k+2)-f(k+3)f(k+1)=f^2(k+2)-\left[2f(n+2)+f(n+1)\right]f(k+1)$$
$$=f(k+2)\left[f(k+2)-2f(k+1)\right]-f^2(k+1)$$
$$=f(k+2)f(k)-f^2(k+1)=-(-1)^k=(-1)^{k+1}$$

Vậy Câu toán được chứng minh.

d. Trước hết ta có nhận xét: $p_1.p_2...p_n+1>p_{n+1}$

- Với $n=1$ ta có: $2^{2^1}=4>p_1=2$
- Giả sử $2^{2^k}>p_k\ \forall k\le n$, ta cần chứng minh $2^{2^{k+1}}>p_{k+1}$

Thật vậy, ta có: $2^{2^1}.2^{2^2}...2^{2^{pk}}+1>p_1.p_2...p_k+1>p_{k+1}$

Suy ra $2^{2^1+2^2+...+2^k}>p_{k+1}\Rightarrow 2^{2^{2^{k+1}-1}}+1>p_{k+1}\Rightarrow 2^{2^{k+1}}>p_{k+1}$

Vậy Câu toán được chứng minh

e.

- Với $n=1$ Câu toán hiển nhiên đúng.
- Giả sử Câu toán đúng với $n=k$, ta chứng minh Câu toán đúng với $n=k+1$

Nếu $a=(k+1)!$ thì Câu toán hiển nhiên đúng

Ta xét $a<(k+1)!$, ta có: $a=(k+1)d+r$ với $d<k!, r<k+1$

Vì $d<k!$ nên $d=d_1+d_2+...+d_k$ với d_i $(i=\overline{1,k})$ là các ước đôi một khác nhau của $k!$

Khi đó: $a=(k+1)d_1+(k+1)d_2+...+(k+1)d_k+r$

Vì $(k+1)d_i, r$ là các ước đôi một khác nhau của $(k+1)!$

Vậy Câu toán được chứng minh.

Câu 17. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2-6x+1=0$. Đặt $a_n=x_1^n+x_2^n$. Chứng minh rằng:

a. $a_n=6a_{n-1}-a_{n-2}\quad \forall n\geq 2$.

b. a_n là một số nguyên và a_n không chia hết cho 5 với mọi $n\geq 1$.

Lời giải

a. Ta có: $a_n=(x_1+x_2)(x_1^{n-1}+x_2^{n-1})-x_1x_2(x_1^{n-2}+x_1^{n-2})$

Theo định lí Viét: $\begin{cases}x_1+x_2=6\\x_1x_2=1\end{cases}$ nên ta có:

$a_n=6(x_1^{n-1}+x_2^{n-1})-(x_1^{n-2}+x_1^{n-2})=6a_{n-1}-a_{n-2}$.

b.

* Với $n=1\Rightarrow a_1=x_1+x_2=6\Rightarrow a_1\in\mathbb{Z}$

Và a_1 không chia hết cho 5

* Giả sử $a_k\in\mathbb{Z}$ và a_k không chia hết cho 5 với mọi $k\geq 1$.

Ta chứng minh $a_{k+1}\in\mathbb{Z}$ và a_{k+1} không chia hết cho 5.

Do $a_{k+1}=6a_k-a_{k-1}$

Mà $a_k, a_{k-1}\in\mathbb{Z}\Rightarrow a_{k+1}\in\mathbb{Z}$.

Mặt khác: $a_{k+1}=5a_k+(a_k-a_{k-1})=5a_k+5a_{k-1}-a_{k-2}$

Vì a_{k-2} không chia hết cho 5 và $\begin{cases}5a_k\vdots 5\\5a_{k-1}\vdots 5\end{cases}$ nên suy ra a_{k+1} không chia hết cho 5.

Câu 18.

a. Trong không gian cho n mặt phẳng phân biệt ($n\geq 1$), trong đó ba mặt phẳng luôn cắt nhau và không có bốn mặt phẳng nào có điểm chung. Hỏi n mặt phẳng trên chia không gian thành bao nhiêu miền?

b. Cho n đường thẳng nằm trong mặt phẳng trong đóhai đường thẳng bất kì luôn cắt nhau và không có ba đường thẳng nào đồng quy. Chứng minh rằng n đường thẳng này chia mặt phẳng thành $\frac{n^2+n+2}{2}$ miền.

Lời giải

a. Giả sử n mặt phẳng chia không gian thành a_n miền

Ta chứng minh được: $a_{n+1}=a_n+\dfrac{n^2+n+2}{2}$

Từ đó ta tính được: $a_n=\dfrac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}$.

b. Gọi a_n là số miền do n đường thẳng trên tạo thành.

Ta có: $a_1=2$.

Ta xét đường thẳng thứ $n+1$ (ta gọi là d), khi đó d cắt n đường thẳng đã cho tại n điểmvà bị n đường thẳng chia thành $n+1$phần đồng thời mỗi phần thuộc một miền của a_n. Mặt khác với mỗi đoạn nằm trong miền của a_n sẽ chia miền đó thành 2 miền, nên số miền có thêm là $n+1$. Do vậy, ta có: $a_{n+1}=a_n+n+1$

Từ đây ta có: $a_n=\dfrac{n^2+n+2}{2}$.

Câu 19.

a. Cho a,b,c,d,m là các số tự nhiên sao cho $a+d$, $(b-1)c$, $ab-a+c$ chia hết cho m. Chứng minh rằng $x_n=a.b^n+cn+d$ chia hết cho m với mọi số tự nhiên n.

b. Chứng minh rằng từ $n+1$ số bất kì trong $2n$ số tự nhiên đầu tiên luôn tìm được hai số là bội của nhau.

Lời giải

a.

- Với $n=0$ ta có $x_0=a+d\vdots m$
- Giả sử $x_k=a.b^k+ck+d\vdots m$ với $k\ge 0,k\in\mathbb{N}$, ta chứng minh

$x_{k+1}=a.b^{k+1}+c(k+1)+d\vdots m$. Thật vậy:

$x_{k+1}-x_k=a.b^{k+1}-a.b^k+c=b^k\left(ab-a+c\right)-c.b^k+c$

$=b^k\left(ab-a+c\right)-c(b-1)\left(b^{k-1}+b^{k-2}+...+1\right)$

Mà $x_k,ab-a+c,c(b-1)\vdots m\Rightarrow x_{k+1}\vdots m$

Vậy Câu toán được chứng minh.

b.

- Với $n=1$ ta thấy Câu toán hiển nhiên đúng
- Giả sử Câu toán đúng với $n-1$, có nghĩa là: từ n số bất kì trong $2n-2$ số tự nhiên đầu tiên luôn tìm được hai số là bội của nhau.

Ta chứng minh Câu toán đúng với n, tức là: từ $n+1$ số bất kì trong $2n$ số tự nhiên đầu tiên luôn tìm được hai số là bội của nhau.

Ta chứng minh bằng phản chứng:

Giả sử tồn tại một tập con X có $n+1$ phần tử của tập $A=\{1,2,...,2n\}$ sao cho hai số bất kì trong X không là bội của nhau.

Ta sẽ chứng minh rằng có một tập con X' gồm n phần tử của tập $\{1,2,...,2n-2\}$ sao cho hai phần tử bất kì của X' không là bội của nhau

Để chứng minh điều này ta xét các trường hợp sau đây

TH 1: X không chứa $2n$ và $2n-1$

Ta bỏ đi một phần tử bất kì của tập X ta được một tập X' gồm n phần tử và là tập con của $\{1,2,...,2n-2\}$ mà hai phần tử bất kì thuộc X' không là bội của nhau.

TH 2: X chứa $2n$ mà không chứa $2n-1$

Ta bỏ đi phần tử $2n$ thì ta thu được tập X' gồm n phần tử và là tập con của $\{1,2,...,2n-2\}$ mà hai phần tử bất kì thuộc X' không là bội của nhau.

TH 3: X chứa $2n-1$ mà không chứa $2n$

Ta bỏ đi phần tử $2n-1$ thì ta thu được tập X' gồm n phần tử và là tập con của $\{1,2,...,2n-2\}$ mà hai phần tử bất kì thuộc X' không là bội của nhau.

TH 2: X chứa $2n$ và $2n-1$

Vì X không chứa hai số là bội của nhau nên X không chứa n và ước của n (Vì nếu chứa ước của n thì số đó là ước của $2n$)

Bây giờ trong X, ta bỏ đi hai phần tử $2n-1$ và $2n$ rồi bổ sung thêm n vào thì ta thu được tập X' gồm n phần tử và là tập con của $\{1,2,...,2n-2\}$ mà hai phần tử bất kì thuộc X' không là bội của nhau.

Như vậy ta luôn thu được một tập con X' gồm n phần tử của tập $\{1,2,...,2n-2\}$ mà các phần tử không là bội của nhau. Điều này trái với giả thiết quay nạp.

Vậy Câu toán được chứng minh theo nguyên lí quy nạp.

C. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Một học sinh chứng minh mệnh đề "8^n+1 chia hết cho 7, $\forall n\in\mathbb{N}^*$" $(*)$ như sau:

- Giả sử $(*)$ đúng với $n=k$, tức là 8^k+1 chia hết cho 7.
- Ta có: $8^{k+1}+1=8\left(8^k+1\right)-7$, kết hợp với giả thiết 8^k+1 chia hết cho 7 nên suy ra được $8^{k+1}+1$ chia hết cho 7. Vậy đẳng thức $(*)$ đúng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Học sinh trên chứng minh đúng.

B. Học sinh chứng minh sai vì không có giả thiết qui nạp.

C. Học sinh chứng minh sai vì không dùng giả thiết qui nạp.

D. Học sinh không kiểm tra bước 1 (bước cơ sở) của phương pháp qui nạp.

Lời giải.

Thiếu bước 1 là kiểm tra với $n=1$, khi đó ta có $8^1+1=9$ không chi hết cho 7.

Câu 2. Cho $S_n=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+...+\dfrac{1}{n.(n+1)}$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_3=\dfrac{1}{12}$. **B.** $S_2=\dfrac{1}{6}$. **C.** $S_2=\dfrac{2}{3}$. **D.** $S_3=\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Nhìn vào đuôi của S_n là $\dfrac{1}{n.(n+1)}\longrightarrow$ cho $n=2$, ta được $\dfrac{1}{2.(2+1)}=\dfrac{1}{2\cdot 3}$.

Do đó với $n=2$, ta có $S_2=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}=\dfrac{2}{3}$.

Câu 3. Cho $S_n=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+...+\dfrac{1}{n.(n+1)}$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n=\dfrac{n-1}{n}$. **B.** $S_n=\dfrac{n}{n+1}$. **C.** $S_n=\dfrac{n+1}{n+2}$. **D.** $S_n=\dfrac{n+2}{n+3}$.

Lời giải.

Cách trắc nghiệm: Ta tính được $S_1=\frac{1}{2}$, $S_2=\frac{2}{3}$, $S_3=\frac{3}{4}$. Từ đó ta thấy quy luật là từ nhỏ hơn mẫu đúng 1 đơn vị. **Chọn B.**

Cách tự luận. Ta có $S_1=\frac{1}{2}$, $S_2=\frac{2}{3}$, $S_3=\frac{3}{4}\longrightarrow$ dự đoán $S_n=\frac{n}{n+1}$.

- Với $n=1$, ta được $S_1=\frac{1}{1.2}=\frac{1}{1+1}$: đúng.
- Giả sử mệnh đề đúng khi $n=k\ (k\ge 1)$, tức là $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$.
- Ta có $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$. Suy ra mệnh đề đúng với $n=k+1$.

Câu 4. Cho $S_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n=\frac{n-1}{2n-1}$. **B.** $S_n=\frac{n}{2n+1}$. **C.** $S_n=\frac{n}{3n-2}$. **D.** $S_n=\frac{n+2}{2n+5}$.

Lời giải.

Nguyễn Bảo Vương

Cho $\begin{cases} n=1\longrightarrow S_1=\frac{1}{3} \\ n=2\longrightarrow S_2=\frac{6}{15} \\ n=3\longrightarrow S_3=\frac{3}{7} \end{cases}$. Kiểm tra các đáp án chỉ cho B thỏa.

Câu 5. Cho $P_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ với $n\ge 2$ và $n\in\mathbb{N}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P=\frac{n+1}{n+2}$. **B.** $P=\frac{n-1}{2n}$. **C.** $P=\frac{n+1}{n}$. **D.** $P=\frac{n+1}{2n}$.

Lời giải.

Vì $n\ge 2$ nên ta cho $\begin{cases} n=2\longrightarrow P_2=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)=\frac{3}{4} \\ n=3\longrightarrow P_3=\left(1-\frac{1}{2^2}\right).\left(1-\frac{1}{3^2}\right)=\frac{2}{3} \end{cases}$.

Kiểm tra các đáp án chỉ cho D thỏa.

Câu 6. Với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, hệ thức nào sau đây là sai?

A. $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

B. $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$.

C. $1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

D. $2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2=\dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Lời giải.

Bằng cách thử với $n=1$, $n=2$, $n=3$ là ta kết luận được.

Câu 7. Xét hai mệnh đề sau:

I) Với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, số n^3+3n^2+5n chia hết cho 3.

II) Với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, ta có $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{13}{24}$.

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ I. **B.** Chỉ II. **C.** Không có. **D.** Cả I và II.

Lời giải.

● Ta chứng minh I) đúng.

Với $n=1$, ta có $u_1=1^3+3.1^2+5.1=9\vdots 3$: đúng.

Giả sử mệnh đề đúng khi $n=k$ $(k\ge 1)$, tức là $u_k=k^3+3k^2+5k\vdots 3$.

Ta có $u_{k+1}=\left(k^3+3k^2+5k\right)+3k^2+9k+9=u_k+3\left(k^2+3k+3\right)\vdots 3$. Kết thúc chứng minh.

● Mệnh đề II) sai vì với $n=1$, ta có $\text{VT}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{12}{24}>\dfrac{13}{24}$: Vô lý.

Câu 8. Với $n\in\mathbb{N}^*$, hãy rút gọn biểu thức $S=1.4+2.7+3.10+\ldots+n(3n+1)$.

A. $S=n(n+1)^2$. **B.** $S=n(n+2)^2$.

C. $S=n(n+1)$. **D.** $S=2n(n+1)$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn A

Để chọn được S đúng, chúng ta có thể dựa vào một trong ba cách sau đây:

Cách 1: Kiểm tra tính đúng –sai của từng phương án với những giá trị của n.

Với $n=1$ thì $S=1.4=4$ (loại ngay được phương án B và C); với $n=2$ thì $S=1.4+2.7=18$ (loại được phương án D).

Cách 2: Bằng cách tính S trong các trường hợp $n=1,S=4$; $n=2,S=18$; $n=3,S=48$ ta dự đoán được công thức $S=n(n+1)^2$.

Cách 3: Ta tính S dựa vào các tổng đã biết kết quả như $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ và $1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Ta có: $S=3\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)+(1+2+\ldots+n)=n(n+1)^2$.

Câu 9. Kí hiệu $k!=k(k-1)\ldots 2.1,\forall k\in\mathbb{N}^*$. Với $n\in\mathbb{N}^*$, đặt $S_n=1.1!+2.2!+\ldots+n.n!$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $S_n=2.n!$. **B.** $S_n=(n+1)!-1$. **C.** $S_n=(n+1)!$. **D.** $S_n=(n+1)!+1$.

Lời giải

Chọn B

Chúng ta có thể chọn phương án đúng dựa vào một trong hai cách sau đây:

Cách 1: Kiểm nghiệm từng phương án đúng đối với những giá trị cụ thể của n.

Với $n=1$ thì $S_1=1.1!=1$ (Loại ngay được các phương án A, C, D).

Cách 2: Rút gọn S_n dựa vào việc phân tích phần tử đại diện $k.k!=(k+1-1).k!=(k+1).k!-k!=(k+1)!-k!$. Suy ra: $S_n=(2!-1!)+(3!-2!)+...+((n+1)!-n!)=(n+1)!-1$.

Câu 10. Với $n\in\mathbb{N}^*$, đặt $T_n=1^2+2^2+3^2+...+(2n)^2$ và $M_n=2^2+4^2+6^2+...+(2n)^2$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $\frac{T_n}{M_n}=\frac{4n+1}{2n+2}$. **B.** $\frac{T_n}{M_n}=\frac{4n+1}{2n+1}$. **C.** $\frac{T_n}{M_n}=\frac{8n+1}{n+1}$. **D.** $\frac{T_n}{M_n}=\frac{2n+1}{n+1}$.

Lời giải

Chọn A

Chúng ta có thể chọn phương án đúng dựa vào một trong hai cách sau đây:

Cách 1: Kiểm nghiệm từng phương án đúng đối với những giá trị cụ thể của n.

Với $n=1$ thì $T_1=1^2+2^2=5;M_1=2^2=4$ nên $\frac{T_1}{M_1}=\frac{5}{4}$ (loại ngay được các phương án B, C, D).

Cách 2: Chúng ta tính T_n,M_n dựa vào những tổng đã biết kết quả. Cụ thể dựa vào $T_n=\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6};M_n=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$. Suy ra $\frac{T_n}{M_n}=\frac{4n+1}{2n+2}$.

Câu 11. Tìm số nguyên dương p nhỏ nhất để $2^n>2n+1$ với mọi số nguyên $n\ge p$.

A. $p=5$. **B.** $p=3$. **C.** $p=4$. **D.** $p=2$.

Lời giải

Chọn B

Dễ thấy $p=2$ thì bất đẳng thức $2^p>2p+1$ là sai nên loại ngay phương án **D.**

Xét với $p=3$ ta thấy $2^p>2p+1$ là bất đẳng thức đúng. Bằng phương pháp quy nạp toán học chúng ta chứng minh được rằng $2^n>2n+1$ với mọi $n\ge 3$. Vậy $p=3$ là số nguyên dương nhỏ nhất cần tìm.

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị của $n\in\mathbb{N}^*$ sao cho $2^n>n^2$.

A. $n\ge 5$. **B.** $n=1$ **hoặc** $n\ge 6$. **C.** $n\ge 7$. **D.** $n=1$ **hoặc** $n\ge 5$.

Lời giải

Chọn D

Kiểm tra với $n=1$ ta thấy bất đẳng thức đúng nên loại ngay phương án A và **C.**

Kiểm tra với $n=1$ ta thấy bất đẳng thức đúng. Bằng phương pháp quy nạp toán học chúng ta chứng minh được rằng $2^n>n^2,\forall n\ge 5$.

Câu 13. Với mọi số nguyên dương n, ta có: $\frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+...+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{an+b}{cn+4}$, trong đó a,b,c là các số nguyên. Tính các giá trị của biểu thức $T=ab^2+bc^2+ca^2$.

A. $T=3$. **B.** $T=6$. **C.** $T=43$. **D.** $T=42$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Với chú ý $\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)$, chúng ta có:

$\frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+...+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+...+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$

$=\frac{1}{3}.\frac{3n}{2(3n+2)}=\frac{n}{6n+4}$.

Đối chiếu với đẳng thức đã cho, ta có: $a=1,b=0,c=6$.

Suy ra $T=ab^2+bc^2+ca^2=6$.

Cách 2: Cho $n=1,n=2,n=3$ ta được: $\frac{a+b}{c=4}=\frac{1}{10};\frac{2a+b}{2c+4}=\frac{1}{8};\frac{3x+b}{3c+4}=\frac{3}{22}$.

Giải hệ phương trình trên ta được $a=1,b=0,c=6$. Suy ra $T=ab^2+bc^2+ca^2=6$.

Câu 14. Với mọi số nguyên dương $n\geq 2$, ta có: $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{an+2}{bn+4}$, trong đó a,b là các số nguyên. Tính các giá trị của biểu thức $T=a^2+b^2$.

A. $P=5$. **B.** $P=9$. **C.** $P=20$. **D.** $P=36$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Bằng cách phân tích số hạng đại diện, ta có: $1-\frac{1}{k^2}=\frac{k-1}{k}.\frac{k+1}{k}$. Suy ra

$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{2}{3}.\frac{4}{3}...\frac{n-1}{n}.\frac{n+1}{2n}=\frac{n+1}{2n}=\frac{2n+2}{4n}$.

Đối chiếu với đẳng thức đã cho ta có: $a=2,b=4$. Suy ra $P=a^2+b^2=20$.

Cách 2: Cho $n=2,n=3$ ta được $\frac{a+1}{b}=\frac{3}{4};\frac{3a+2}{3b}=\frac{2}{3}$. Giải hệ phương trình trren ta được $a=2;b=4$. Suy ra $P=a^2+b^2=20$.

Câu 15. Biết rằng $1^3+2^3+...+n^3=an^4+bn^3+cn^2+dn+e,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Tính giá trị biểu thức $M=a+b+c+d+e$.

A. $M=4$. **B.** $M=1$. **C.** $M=\frac{1}{4}$. **D.** $M=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Sử dụng kết quả đã biết: $1^3+2^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$. So sánh cách hệ số, ta được $a=\frac{1}{4};b=\frac{1}{2};c=\frac{1}{4};d=e=0$.

Cách 2: Cho $n=1,n=2,n=3,n=4,n=5$, ta được hệ 5 phương trình 5 ẩn a,b,c,d,e. Giải hệ phương trình đó, ta tìm được $a=\frac{1}{4};b=\frac{1}{2};c=\frac{1}{4};d=e=0$. Suy ra $M=a+b+c+d+e=1$.

Câu 16. Biết rằng mọi số nguyên dương n, ta có $1.2+2.3+...+n(n+1)=a_1n^3+b_1n^2+c_1n+d_1$ và $1.2+2.5+3.8+...+n(3n-1)=a_2n^3+b_2n^2+c_2n+d_2$. Tính giá trị biểu thức $T=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2+d_1d_2$.

A. $T=2$. **B.** $T=1$. **C.** $M=\frac{4}{3}$. **D.** $T=\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Sử dụng các tổng lũy thừa bậc 1 và bậc 2 ta có:

+) $1.2+2.3+...+n(n+1)=(1^2+2^2+...+n^2)+(1+2+...+n)=\frac{1}{3}n^3+n^2+\frac{2}{3}n$.

Suy ra $a_1=\frac{1}{3};b_1=1;c_1=\frac{2}{3};d_1=0$.

+) $1.2+2.5+3.8+...+n(3n-1)=3(1^2+2^2+...+n^2)-(1+2+...+n)=n^3+n^2$.

Suy ra $a_2=b_2=1;c_2=d_2=0$.

Do đó $T=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2+d_1d_2=\frac{4}{3}$.

Cách 2: Cho $n=1,n=2,n=3,n=4$ và sử dụng phương pháp hệ số bất đinh ta cũng tìm được

$a_1=\frac{1}{3};b_1=1;c_1=\frac{2}{3};d_1=0$; $a_2=b_2=1;c_2=d_2=0$.

Do đó $T=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2+d_1d_2=\frac{4}{3}$.

Câu 17. Biết rằng $1^k+2^k+...+n^k$, trong đó n,k là số nguyên dương. Xét các mệnh đề sau:

$S_1=\frac{n(n+1)}{2}$, $S_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $S_3=\frac{n^2(n-1)^2}{4}$ và $S_4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

Số các mệnh đề đúng trong các mệnh đề nói trên là:

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Bằng các kết quả đã biết ở Câu 1, chúng ta thấy ngay được chỉ có $S_3=\frac{n^2(n-1)^2}{4}$ là sai.

Câu 18. Xét Câu toán: "Kiểm nghiệm với số nguyên dương n bất đẳng thức $n!\geq 2^{n-1}$". Một học sinh đã trình bày lời giải Câu toán này bằng các bước như sau:

Bước 1: Với $n=1$, ta có: $n!=1!=1$ và $2^{n-1}=2^{1-1}=2^0=1$. Vậy $n!\geq 2^{n-1}$ đúng.

Bước 2 : Giả sử bất đẳng thức đúng với $n=k\geq 1$, tức là ta có $k!\geq 2^{k-1}$.

Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n=k+1$, nghĩa là phải chứng minh $(k+1)!\geq 2^k$.

Bước 3 : Ta có $(k+1)!=(k+1).k!\geq 2.2^{k-1}=2^k$. Vậy $n!\geq 2^{n-1}$ với mọi số nguyên dương n.

Chứng minh trên đúng hay sai, nếu sai thì sai từ bước nào ?

A. Đúng. **B.** Sai từ bước 2. **C.** Sai từ bước 1. **D.** Sai từ bước 3.

Lời giải

Chọn A

Câu 19. Biết rằng $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{an^2+bn}{cn^2+dn+16}$, trong đó a,b,c,d và n là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức $T=(a+c)(b+d)$.

là :

A. $T=75$. **B.** $T=364$. **C.** $T=300$. **D.** $T=256$.

Lời giải

Chọn C

Phân tích phần tử đại diện, ta có: $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$.

Suy ra: $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3}-.\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=\frac{n^2+3n}{4n^2+12n+8}=\frac{2n^2+6n}{8n^2+24n+16}$.

Đối chiếu với hệ số, ta được: $a=2;b=6;c=8;d=24$.

Suy ra: $T=(a+c)(b+d)=300$.

Câu 20. Tam giác ABC là tam giác đều có độ dài cạnh là 1. Gọi A_1,B_1,C_1 lần lượtlà trung điểm BC,CA,AB. Gọi A_2,B_2,C_2 lần lượtlà trung điểm B_1C_1,C_1A_1,A_1B_1 …Gọi A_n,B_n,C_n lần lượtlà trung điểm $B_{n-1}C_{n-1},C_{n-1}A_{n-1},A_{n-1}B_{n-1}$. Tính diện tích tam giác $A_nB_nC_n$?

A. $\frac{1}{4^n}$. **B.** $\frac{1}{3^n}$. **C.** $\frac{1}{2^n}$. **D.** $\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Lời giải

Chọn A

$S_{A_1B_1C_1}=\frac{1}{4}S_{ABC},S_{A_2B_2C_2}=\frac{1}{4}S_{A_1B_1C_1}=\frac{1}{4^2}S_{ABC},...,S_{A_nB_nC_n}=\frac{1}{4^n}S_{ABC}$

Câu 21. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh là 1. Gọi A_1,B_1,C_1,D_1 lần lượtlà trung điểm AC,BC,CD,DA. Gọi A_2,B_2,C_2,D_2 lần lượtlà trung điểm $A_1B_1,B_1C_1,C_1D_1,D_1A_1$ …Gọi A_n,B_n,C_n,D_n lần lượtlà trung điểm $A_{n-1}B_{n-1},B_{n-1}C_{n-1},C_{n-1}D_{n-1},D_{n-1}A_{n-1}$. Tính diện tích tứ giác $A_nB_nC_nD_n$?

A. $\frac{1}{4^n}$. **B.** $\frac{1}{3^n}$. **C.** $\frac{1}{2^n}$. **D.** $\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Lời giải

Chọn C

$S_{A_1B_1C_1D_1}=\frac{1}{2}S_{ABCD},S_{A_2B_2C_2D_2}=\frac{1}{2}S_{A_1B_1C_1}=\frac{1}{2^2}S_{ABC},...,S_{A_nB_nC_n}=\frac{1}{2^n}S_{ABC}$

Câu 22. Trên một mặt phẳng cho n đường tròn phân biệt, đôi một cắt nhau và không có ba đường tròn nào giao nhau tại một điểm. Các đường tròn này chia mặt phẳng thành 92 các miền rời nhau. Tìm n.

A. 10. **B.** 12. **C.** 9. **D.** 11.

Lời giải

Chọn A

Chứng minh bằng phương pháp quy nạp ta được số miền tạo thành là n^2-n+2

$n^2-n+2=92\Rightarrow n=10$

Câu 23. $S_n=(n+1)(n+2)(n+3)...(n+n)$ luôn chia hết cho

A. 2^n. **B.** 3^n. **C.** 4^n. **D.** 2^{n+1}.

Lời giải

Chọn A

Chứng minh bằng phương pháp quy nạp $S_n=(n+1)(n+2)(n+3)...(n+n)$ luôn chia hết cho 2^n

Giả sử $S_k=(k+1)(k+2)(k+3)...(k+k)\vdots 2^k$

Ta chứng minh $S_{k+1}=(k+1+1)(k+1+2)(k+3)...(k+1+k+1)\vdots 2^{k+1}$

$S_{k+1}=2S_k(2k+1)\Rightarrow S_{k+1}\vdots 2^{k+1}\left(S_k\vdots 2^k\right)$.

Câu 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của $n, n\le 100$ để $u_n=\dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)^n+\left(2+\sqrt{3}\right)^n}{2}-1$ là số chính phương?

A. 50. **B.** 30. **C.** 49. **D.** 49.

Lời giải

Chọn A

Chứng minh $u_n=\dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)^n+\left(2+\sqrt{3}\right)^n}{2}-1$ là số chính phương khi n lẻ

Hay chứng minh $u_n=\dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)^{2n-1}+\left(2+\sqrt{3}\right)^{2n-1}}{2}-1, n\in\mathbb{N}^*$ là số chính phương

$u_1=1$ là số chính phương

$u_k=\dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)^{2k-1}+\left(2+\sqrt{3}\right)^{2k-1}}{2}-1, n\in\mathbb{N}^*$ là số chính phương

CM: $u_{k+1}=\dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)^{2k+1}+\left(2+\sqrt{3}\right)^{2k+1}}{2}-1, n\in\mathbb{N}^*$

Là số chính phương

Từ đó ta có $u_1, u_3, u_5, ..., u_{99}$ là số chính phương nên có 50 giá trị của n.

Câu 25. Trên một mặt phẳng cho n đường thẳng phân biệt cùng đi qua 1 điểm phân biệt, này chia mặt phẳng thành 100 phần rời nhau. Tìm n.

A. 50. **B.** 40. **C.** 20. **D.** 25.

Lời giải

Chọn A

Trên một mặt phẳng cho n đường thẳng phân biệt cùng đi qua 1 điểm phân biệt, này chia mặt phẳng thành $2n$ phần rời nhau.

Câu 26. Bài toán chứng minh $A=4^n+15n-1$ chia hết cho 9 bằng phương pháp nào dưới đây là thích hợp nhất?

A. Đồng dư thức. **B.** Quy nạp.

C. Tách hạng tử. **D.** Sử dụng dấu hiệu chia hết cho 9.

Lời giải

Chọn **B**

Do A vừa chứa lũy thừa vừa chứa đơn thức nên sử dụng phương pháp quy nạp là thích hợp.

Câu 27. Chứng minh. $B=7.2^{2n-2}+3^{2n-1}.\vdots 5$ (1) với n là số nguyên dương. Một học sinh đã giải như sau:

Bước 1: Xét với $n=1$ ta có $B=10\vdots 5$

Bước 2: Giả sử (1) đúng với $n=k$ $(k\in\mathbb{N},k>1)$, khi đó: $B_k=7.2^{2k-2}+3^{2k-1}\vdots 5$.

Bước 3: Chứng minh (1) đúng với $n=k+1$, hay ta cần chứng minh

$B_{k+1}=7.2^{2(k+1)-2}+3^{2(k+1)-1}\vdots 5$

Thật vậy $B_{k+1}=7.2^{2(k+1)-2}+3^{2(k+1)-1}\vdots 5$

$=7.2^{2k-2+2}+3^{2k-1+2}$

$=7.2^{2k-2}.4+3^{2k-1}.9$

$=4(7.2^{2k-2}.4+3^{2k-1})+5.3^{2k-1}\vdots 5$

$=4B_k+5.3^{2k-1}\vdots 5$ ($B_k\vdots 5$)

Vậy $B_{k+1}\vdots 5$

Bước 4: Vậy $B=7.2^{2n-2}+3^{2n-1}\vdots 5$ với n là số nguyên dương.

Lập luận trên đúng đến bước nào?

A. Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3. **D.** Bước 4.

Lời giải

Chọn **B**

Ở bước 3: $B_{k+1}=7.2^{2(k+1)-2}+3^{2(k+1)-1}$

$=7.2^{2k-2+2}+3^{2k-1+2}$

$=7.2^{2k-2}.4+3^{2k-1}.9$

$=4(7.2^{2k-2}+3^{2k-1})+5.3^{2k-1}\vdots 5$

$=4B_k+5.3^{2k-1}\vdots 5$ ($B_k\vdots 5$)

Nguyễn Bảo Vương

Câu 28. Cho $C=7^n+3n-1$,Trong quy trình chứng minh $C\vdots 9$ theo phương pháp quy nạp, giá trị của a trong biểu thức $C_{k+1}=7.C_k-a(2k-1)$ là:

A. –9. **B.** 0. **C.** 9. **D.** 18.

Lời giải

Chọn **C**

$C_{k+1}=7^{k+1}+3(k+1)-1=7.7^k+3k+2=7(7^n+3n-1)-9(2k-1)=7.C_k-9(2k-1)$

Vậy $a=9$.

Câu 29. Với mọi số nguyên dương n thì $S_n=n^3+11n$ chia hết cho số nào sau đây?

A. 6. **B.** 4. **C.** 9. **D.** 12.

Lời giải

Chọn **A**

Ta chứng minh bằng qui nạp:

Với mọi số nguyên dương n thì $S_n=n^3+11n$ chia hết cho số 6 (1).

- Với $n=1\Rightarrow S_1=12\vdots 6$ (luôn đúng).
- Giả sử (1) đúng với $n=k$ ta có: $S_k=k^3+11k\vdots 6$.

Ta chứng minh: $S_{k+1}=(k+1)^3+11(k+1)\vdots 6$.

Thật vậy ta có: $S_{k+1}-S_k=(k+1)^3+11(k+1)-k^3-11k=3k^2+3k+12=3k(k+1)+12$.

Vì $k,(k+1)$ là hai số tự nhiên liên tiếp nên $k.(k+1)\vdots 2\Rightarrow 3k.(k+1)\vdots 6\Rightarrow S_{k+1}-S_k\vdots 6$

mà $S_k\vdots 6\Rightarrow S_{k+1}\vdots 6$. Do đó (1) đúng với $n=k+1$.

Vậy theo nguyên lí qui nạp thì (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

Đáp án B,C,D sai vì với $n=2\Rightarrow S_2=30$ không chia hết cho $4,9,12$.

Câu 30. Với mọi số nguyên dương n thì $S_n=n^3+3n^2+5n+3$ chia hết cho số nào sau đây?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn **A**

Ta chứng minh bằng qui nạp:

Với mọi số nguyên dương n thì $S_n=n^3+3n^2+5n+3$ chia hết cho số $3\ (1)$.

- Với $n=1\Rightarrow S_1=12\vdots 6$ (luôn đúng).

- Giả sử (1) đúng với $n=k$ ta có: $S_k=k^3+3k^2+5k+3\ \vdots 6$.

Ta chứng minh: $S_{k+1}=(k+1)^3+3(k+1)^2+5(k+1)+3\ \vdots 3$.

Thật vậy ta có: $S_{k+1}-S_k=(k+1)^3+3(k+1)^2+5(k+1)+3\ -\left(k^3+3k^2+5k+3\right)$

$=3k^2+9k+9\ \vdots 3\Rightarrow S_{k+1}-S_k\ \vdots 3$

mà $S_k\ \vdots 3\ \Rightarrow S_{k+1}\ \vdots 3$. Do đó (1) đúng với $n=k+1$.

Vậy theo nguyên lí qui nạp thì (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

Đáp án B,C,D sai vì với $n=2\Rightarrow S_2=33$ không chia hết cho $4,5,7$.

Câu 31. Với mọi số nguyên dương n, a là số nguyên dương cho trước, $D=a^{2n}-1$ chia hết cho:

A. a. **B.** a^2-1. **C.** a^2. **D.** $-a^2-1$.

Lời giải

Chọn B

Sử dụng phương pháp quy nạp

Giả sử $D\vdots m$

Với $n=k$ hay $D_k=a^{2k}-1\ \vdots m\ \ (k\in\mathbb{N},k>1)$

Với $n=k+1$: $D_{k+1}=a^{2(k+1)}-1=a^2.a^{2k}-a^2+a^2-1=a^2(a^{2k}-1)+a^2-1=a^2.D_k+a^2-1$

hay $D_{k+1}=a^2.D_k+a^2-1$

Do $D_{k+1}\vdots m, D_k\vdots m$ nên $a^2-1\vdots m$

Suy ra hoặc $m=a+1$ hoặc $m=a^2-1$

Câu 32. Cho $E=4^k+a.k-1$, với a là số tự nhiên. Giá trị nhỏ nhất của a để $E\vdots 9$ là:

A. 0. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 9.

Lời giải

Chọn **C**

Sử dụng phương pháp quy nạp

Để $E\vdots 9$ thì $E_k=4^k+a.k-1\vdots 9$, $E_{k+1}=4^{k+1}+a.(k+1)-1\ \vdots 9\ (k\in\mathbb{N},k>1)$

$E_{k+1}=4^{k+1}+a.(k+1)-1=4.4^k+a.k+a-1=4(4^k+a.k-1)-3a.k+3+a=4.E_k-3a.k+3+a$

Do $E_{k+1}\vdots 9$, $E_k\vdots 9$ nên $(3a.k+3+a)\vdots 9\Rightarrow\begin{cases}3a\vdots 9\\(a+3)\vdots 9\end{cases}\Rightarrow a=9t-3$ với $(t\in\mathbb{N},k>0)$

Vậy giá trị nhỏ nhất của a là 6 $(t=1)$.

Câu 33. Với mọi số nguyên dương n thì $S_n=4^n+15n-1$ chia hết cho số nào sau đây?

A. 4. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Chọn **C**

Ta chứng minh bằng qui nạp:

Với mọi số nguyên dương n thì $S_n = 4^n + 15n - 1$ chia hết cho số $9\ (1)$.

- Với $n = 1 \Rightarrow S_1 = 18 \vdots 9$ (luôn đúng).

- Giả sử (1) đúng với $n = k$ ta có: $S_k = 4^k + 15k - 1 \ \vdots 9$.

Ta chứng minh: $S_{k+1} = 4^{k+1} + 15(k+1) - 1 \ \vdots 9$.

Thật vậy ta có:

$S_{k+1} - S_k = 4^{k+1} + 15(k+1) - 1 \ - \left(4^k + 15k - 1\right) = 3.4^k + 15 = 3\left(4^k + 15k - 1\right) - 45k - 18$

mà $S_k = 4^k + 15k - 1 \vdots 9 \Rightarrow S_{k+1} - S_k \ \vdots 9 \Rightarrow S_{k+1} \vdots 9$. Do đó (1) đúng với $n = k+1$.

Vậy theo nguyên lí qui nạp thì (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

Đáp án A,B,D sai vì vì với $n = 2 \Rightarrow S_2 = 45$ không chia hết cho $4, 6, 7$.

Câu 34. Với mọi $n \in N^*$, tổng $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ thu gọn có dạng là biểu thức nào sau đây?

A. $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$. **B.** $\dfrac{n(n+2)(2n+1)}{6}$.

C. $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. **D.** $\dfrac{n^2(n+1)}{2}$.

Lời giải

Chọn **D.**

Ta chứng minh bằng qui nạp:

Với mọi số nguyên dương n thì $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ (1)$.

Nguyễn Bảo Vương

- Với $n = 1 \Rightarrow S_1 = 1$ (luôn đúng).

- Giả sử (1) đúng với $n = k$ ta có: $S_k = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

Ta chứng minh: $S_{k+1} = \dfrac{(k+1)(k+2)\left(2(k+1)+1\right)}{6}$.

Thật vậy ta có: $S_{k+1} = S_k + (k+1)^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \dfrac{(k+1)\left(2k^2 + k + 6k + 6\right)}{6}$

$= \dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \dfrac{(k+1)(k+2)\left(2(k+1)+1\right)}{6}$.

Do đó (1) đúng với $n = k+1$.

Vậy theo nguyên lí qui nạp thì (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

Câu 35. Với mọi số nguyên dương n thì $S_n = 4^{2n} - 3^{2n} - 7$ chia hết cho số nào sau đây?

A. $2^3.3$. **B.** $2^2.3.7$. **C.** $2.3^2.7$. **D.** $2.3.7^2$.

Lời giải

Chọn **B**

Ta chứng minh bằng qui nạp:

Với mọi số nguyên dương n thì $S_n = 4^{2n} - 3^{2n} - 7$ chia hết cho số $2^2.3.7\ (1)$.

- Với $n = 1 \Rightarrow S_1 = 0 \vdots 2^2.3.7$ (luôn đúng).

- Giả sử (1) đúng với $n=k$ ta có: $S_k=4^{2k}-3^{2k}-7 \ \vdots\ 2^2.3.7$.

Ta chứng minh: $S_{k+1}=4^{2k+2}-3^{2k+2}-7 \ \vdots\ 2^2.3.7$.

Thật vậy ta có:

$S_{k+1}-S_k=4^{2k+2}-3^{2k+2}-7-\left(4^{2k}-3^{2k}-7\right)=15.4^{2k}-8.3^{2k}=15\left(4^{2k}-3^{2k}-7\right)+7.3^{2k}+15.7$ mà

$S_k=4^{2k}-3^{2k}-7 \ \vdots\ 2^2.3.7 \Rightarrow S_{k+1}-S_k \ \vdots\ 3,7\,(2)$

Và: $S_{k+1}-S_k=15.4^{2k}-8.3^{2k} \ \vdots\ 4\ (3)$

Từ $(2);(3)$ mà các số $3,4,7$ đôi một nguyên tố cùng nhau do

đó: $\Rightarrow S_{k+1}-S_k \ \vdots\ 4.3.7 \Rightarrow S_{k+1} \ \vdots\ 4.3.7$ .Do đó (1) đúng với $n=k+1$.

Vậy theo nguyên lí qui nạp thì (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

Câu 36. Với mọi $n\in\mathbb{N}^*$ biểu thức $S(n)=1+2+3+...+n$ bằng

A. $\dfrac{n(n+1)}{2}$. **B.** $n(n+1)$. **C.** $\dfrac{n(n-1)}{2}$. **D.** $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

Lời giải

Chọn **A**

□ Với $n=1$ ta có $S(1)=1$ nên loại đáp án B và **C.**

□ Với $n=2$ ta có $S(2)=3$ nên loại đáp án **D.**

Câu 37. Biết rằng với mọi số nguyên dương n ta có $1+2+3+.....+n=an^2+bn$. Tính $\dfrac{a}{b}$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn **A.**

Áp dụng công thức tổng đặc biệt: $1+2+3+.....+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. Suy ra $a=b=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $\dfrac{a}{b}=1$.

Câu 38. Tổng các góc trong một đa giác lồi n cạnh $(n\geq 3)$ là:

A. $n.180^0$. **B.** $(n-1)180^0$. **C.** $(n-2)180^0$. **D.** $(n-3)180^0$.

Lời giải

Chọn **C.**

Áp dụng trong trường hợp tam giác: $n=3$ ta có tổng ba góc là 180^0.

Áp dụng trong trường hợp tứ giác: $n=4$ ta có tổng 4 góc là 360^0.

Tổng quát ta chọn phương án **C.**

Câu 39. Mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

A. $2^n>n^2,\forall n\in\mathbb{N}^*$. **B.** $2^n>n^2,\forall n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1;2;3;4\}$.

C. $2^n<n^2,\forall n\in\mathbb{N}^*$ **D.** $2^n>n^2,\forall n\in\mathbb{N}$.

Lời giải

Chọn **B**

Với $n=0$ ta thấy đáp án D sai.

Với $n=2$ ta thấy đáp án B và C sai.

Với $n=5$ ta có $2^5=32>5^2=25$. Do đó bất đẳng thức đúng cho trường hợp $n=5$.

Giả sử rằng bất đẳng thức đúng cho các trường hợp $5 \le n \le k$. Chúng ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng cho trường hợp $n = k+1$.

Thực vậy, theo giả thiết quy nạp thì bất đẳng thức đúng cho trường hợp $n = k$, nên chúng ta có $2^k > k^2$.

Do đó $2^{k+1} = 2 \times 2^k > 2k^2 = (k+1)^2 + (k-1)^2 - 2$.

Vì $k \ge 5$ nên $(k-1)2 - 2 > 0$, do đó $2^{k+1} > (k+1)^2$.

Vậy bất đẳng thức đúng cho trường hợp $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp thì bất đẳng thức $2^n > n^2$ đúng với mọi số tự nhiên $n \ge 5$.

Câu 40. Với mọi $n \in N^*$, tổng $S_n = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n.(n+1)$ thu gọn có dạng là biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$. **B.** $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

C. $\frac{n(n+1)(n+2)}{2}$ **D.** $\frac{n^2(3n+1)}{4}$.

Lời giải

Chọn **B.**

Ta chứng minh bằng qui nạp:

Với mọi số nguyên dương n thì $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ (1).

- Với $n = 1 \Rightarrow S_1 = 2$ (luôn đúng).

- Giả sử (1) đúng với $n = k$ ta có: $S_k = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$.

Ta chứng minh: $S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$.

Thật vậy ta có: $S_{k+1} = S_k + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$

Do đó (1) đúng với $n = k+1$.

Vậy theo nguyên lí qui nạp thì (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

Câu 41. Với mọi $n \in N^*$, tổng $S_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2$ thu gọn có dạng là biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{n(n^2-1)}{3}$. **B.** $\frac{n(2n^2-1)}{3}$. **C.** $\frac{n(4n^2-1)}{3}$ **D. Đáp số khác.**

Lời giải

Chọn **C.**

Ta chứng minh bằng qui nạp:

Với mọi số nguyên dương n thì $S_n = \frac{n(4n^2-1)}{3}$ (1).

- Với $n = 1 \Rightarrow S_1 = 1$ (luôn đúng).

- Giả sử (1) đúng với $n = k$ ta có: $S_k = \frac{k(4k^2-1)}{3}$.

Ta chứng minh: $S_{k+1} = \frac{(k+1)(4(k+1)^2-1)}{3}$.

Thật vậy ta có: $S_{k+1}=S_k+\left(2\left(k+1\right)-1\right)^2=\dfrac{k\left(4k^2-1\right)}{3}+\left(2k+1\right)^2=\dfrac{4k^3-k+12k^2+12k+3}{3}$

$=\dfrac{4\left(k+1\right)^3-\left(k+1\right)}{3}$.

Do đó $\left(1\right)$ đúng với $n=k+1$.

Vậy theo nguyên lí qui nạp thì $\left(1\right)$ đúng với mọi số nguyên dương n.

Câu 42. Giả sử với mọi n nguyên dương ta có: $1.4+2.7+.....+n\left(3n+1\right)=An^3+Bn^2+Cn$. Tính $A+B+C$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn **D.**

Xét $A\left(n\right)=1.4+2.7+.....+n\left(3n+1\right)$.

Ta có $A\left(1\right)=4=1.2^2$; $A\left(2\right)=18=2.3^2$; $A\left(3\right)=48=3.4^2$. Dự đoán $A(n)=n\left(n+1\right)^2$. Ta chứng minh bằng quy nạp.

Có $A\left(1\right)=4$ đúng.

Giả sử đúng với $n=k$, tức là $A\left(k\right)=k\left(k+1\right)^2$.

Ta có $A(k+1)=A(k)+\left(k+1\right)\left(3\left(k+1\right)+1\right)=k\left(k+1\right)^2+\left(k+1\right)\left(3\left(k+1\right)+1\right)=\left(k+1\right)\left(k+2\right)^2$.

Vậy đẳng thức đúng với $n=k+1$. Ta có đpcm.

Ta có $A(n)=n\left(n+1\right)^2=n^3+2n^2+n$. Vậy $A+B+C=4$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 43. Mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

A. Với mọi số tự nhiên n, tồn tại một đa thức $P\left(n\right)$ sao cho $\cos n\alpha=P_n\left(\cos\alpha\right)$.

B. $1+2+....+n=\dfrac{n\left(n-1\right)}{2},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

C. $2^n>n^2,\forall n\in\mathbb{N}^*$

D. $\left(n+1\right)^n>n^{n+1},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Lời giải

Chọn **A**

Với $n=1$ đáp án B sai.

Với $n=2$ đáp án C sai.

$n=3$ đáp án D sai

Ta chứng minh đáp án A đúng

Với $n=0$, chúng ta có $\cos 0=1$

do đó chúng ta có thể chọn đa thức $P_0\left(x\right)=1$ và mệnh đề đúng với trường hợp $n=0$.

Mệnh đề hiển nhiên đúng với trường hợp $n=1$ với đa thức $P_1\left(x\right)=x$.

Giả sử mệnh đề đúng với các trường hợp $0\le n\le k$ trong đó $k\ge 1$. Chúng ta sẽ chứng minh mệnh đề cũng đúng với trường hợp $n=k+1$.

Chúng ta có $\cos(k+1)\alpha+\cos(k-1)\alpha=2\cos k\alpha\cos\alpha$

Do đó $\cos(k+1)\alpha=2\cos k\alpha\cos\alpha-\cos(k-1)\alpha$

Vì $0 \le k-1 < k$, theo giả thiết quy nạp thì mệnh đề đúng cho trường hợp $n = k-1$, cho nên sẽ tồn tại một đa thức $P_{k-1}(x)$ để $\cos(k-1)\alpha = P_{k-1}(\cos\alpha)$

Cũng theo giả thiết quy nạp thì mệnh đề đúng cho trường hợp $n = k$, do đó sẽ tồn tại một đa thức $P_k(x)$ để $\cos k\alpha = P_k(\cos\alpha)$. Suy ra $\cos(k+1)\alpha = 2P_k(\cos\alpha)\cos\alpha - P_{k-1}(\cos\alpha)$

Do đó nếu chúng ta chọn đa thức $P_{k+1}(x) = 2P_k(x)x - P_{k-1}(x)$ thì $\cos(k+1)\alpha = P_{k+1}(\cos\alpha)$.

Như vậy thì mệnh đề đúng cho trường hợp $n = k+1$.

Theo nguyên lý quy nạp thì mệnh đề đúng với mọi n.

Câu 44. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $2^{n+1} > n^2 + 3n$.

A. $n \ge 3$. **B.** $n \ge 5$. **C.** $n \ge 6$. **D.** $n \ge 4$.

Lời giải

Đáp án D.

Kiểm tra tính đúng – sai của bất đẳng thức với các trường hợp $n = 1,2,3,4,$ ta dự đoán được $2^{n+1} > n^2 + 3n,$ với $n \ge 4.$ Ta chứng minh bất đẳng thức này bằng phương pháp quy nạp toán học.

Thật vậy:

-Bước 1: Với $n = 4$ thì vế trái bằng $2^{4+1} = 2^5 = 32,$ còn vế phải bằng $4^2 + 3.4 = 28.$

Do $32 > 28$ nên bất đẳng thức đúng với $n = 4.$

-Bước 2: Giả sử đẳng thức đúng với $n = k \ge 4,$ nghĩa là $2^{k+1} > k^2 + 3k.$

Ta phải chứng minh bất đẳng thức cũng đúng với $n = k+1,$ tức là phải chứng minh $2^{(k+1)+1} > (k+1)^2 + 3(k+1)$ hay $2^{k+2} > k^2 + 5k + 4.$

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có $2^{k+1} > k^2 + 3k.$

Suy ra $2.2^{k+1} > 2(k^2 + 3k)$ hay $2^{k+2} > 2k^2 + 6k$

Mặt khác $2k^2 + 6k - (k^2 + 5k + 4) = k^2 + k - 4 \ge 4^2 + 4 - 4 = 16$ với mọi $k \ge 4.$

Do đó $2^{k+2} > 2(k^2 + 3k) > k^2 + 5k + 4$ hay bất đẳng thức đúng với $n = k+1.$

Suy ra bất đẳng thức được chứng minh.

Vậy phương án đúng là **D.**

Nguyễn Bảo Vương

Chương 3

Bài 2 SỐ HẠNG CỦA DÃY SỐ

Lý thuyết

1. Định nghĩa dãy số

Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số).

Kí hiệu:

$$u:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$$
$$n\mapsto u(n).$$

Người ta thường viết dãy số dưới dạng khai triển

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots,$$

trong đó $u_n=u(n)$ hoặc viết tắt là (u_n), và gọi u_1 là số hạng đầu, u_n là số hạng thứ n và là số hạng tổng quát của dãy số.

2. Định nghĩa dãy số hữu hạn

Mỗi hàm số u xác định trên tập $M=\{1,2,3,...,m\}$ với $m\in\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số hữu hạn.

Dạng khai triển của nó là $u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,$ trong đó u_1 là số hạng đầu, u_m là số hạng cuối.

II. CÁCH CHO MỘT DÃY SỐ

1. Dãy số cho bằng công thức của số hạng tổng quát

2. Dãy số cho bằng phương pháp mô tả

3. Dãy số cho bằng phương pháp truy hồi

Cách cho một dãy số bằng phương pháp truy hồi, tức là:

a) Cho số hạng đầu (hay vài số hạng đầu).

b) Cho hệ thức truy hồi, tức là hệ thức biểu thị số hạng thứ n qua số hạng (hay vài số hạng) đứng trước nó.

DẠNG 1: TÌM SỐ HẠNG CỦA DÃY SỐ

A. Phương pháp giải

Bài toán 1: Cho dãy số (u_n): $u_n=f(n)$ (trong đó $f(n)$ là một biểu thức của n). Hãy tìm số hạng u_k.

□ **Phương pháp:** Thay trực tiếp $n=k$ vào u_n.

Bài toán 2: Cho dãy số (u_n) cho bởi $\begin{cases}u_1=a\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$ (với $f(u_n)$ là một biểu thức của u_n). Hãy tìm số hạng u_k.

□ **Phương pháp:** Tính lần lượt $u_2;u_3;...;u_k$ bằng cách thế u_1 vào u_2, thế u_2 vào u_3, …, thế u_{k-1} vào u_{k+1}.

Bài toán 3: Cho dãy số (u_n) cho bởi $\begin{cases}u_1=a,u_2=b\\u_{n+2}=c.u_{n+1}+d.u_n+e\end{cases}$. Hãy tìm số hạng u_k.

□ **Phương pháp:** Tính lần lượt $u_3;u_4;...;u_k$ bằng cách thế u_1,u_2 vào u_3; thế u_2,u_3 vào u_4; …; thế u_{k-2},u_{k-1} vào u_k.

Bài toán 4: Cho dãy số (u_n) cho bởi $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = f\left(\{n, u_n\}\right) \end{cases}$. Trong đó $f\left(\{n, u_n\}\right)$ là kí hiệu của biểu thức u_{n+1} tính theo u_n và n. Hãy tìm số hạng u_k.

□ **Phương pháp:** Tính lần lượt $u_2; u_3; ...; u_k$ bằng cách thế $\{1, u_1\}$ vào u_2; thế $\{2, u_2\}$ vào u_3; …; thế $\{k-1, u_{k-1}\}$ vào u_k.

B. Bài tập tự luận

Câu 1. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$. Tìm số hạng u_6.

.....
.....
.....

Câu 2. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$. Số $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ mấy?

.....
.....
.....

Câu 3. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n + 1} \end{cases}$. Tìm số hạng u_{10}.

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Nguyễn Bảo Vương

Câu 4. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$. Tìm số hạng u_{50}.

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 5. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 2 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n + 5 \end{cases}$. Tìm số hạng u_8.

.....
.....
.....

Câu 6. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{n}{n+1}(u_n + 1) \end{cases}$. Tìm số hạng u_{11}.

.....
.....
.....
.....
.....

Câu 7. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n + 2n \end{cases}$. Tìm số hạng u_{50}.

.....
.....
.....
.....
.....

C. Bài tập trắc nghiệm

DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH - KHÁ

Câu 1. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \frac{2n^2-1}{n^2+3}$. Tìm số hạng u_5.

A. $u_5 = \frac{1}{4}$. **B.** $u_5 = \frac{17}{12}$. **C.** $u_5 = \frac{7}{4}$. **D.** $u_5 = \frac{71}{39}$.

Câu 2. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = (-1)^n.2n$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $u_1 = -2$. **B.** $u_2 = 4$. **C.** $u_3 = -6$. **D.** $u_4 = -8$.

Câu 3. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = (-1)^n.\frac{2^n}{n}$. Tìm số hạng u_3.

A. $u_3 = \frac{8}{3}$. **B.** $u_3 = 2$. **C.** $u_3 = -2$. **D.** $u_3 = -\frac{8}{3}$.

Câu 4. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \frac{n}{2^n}$. Chọn đáp án đúng.

A. $u_4 = \frac{1}{4}$. **B.** $u_5 = \frac{1}{16}$. **C.** $u_5 = \frac{1}{32}$. **D.** $u_3 = \frac{1}{8}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 5. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = n(-1)^n \sin(\frac{n\pi}{2})$. Số hạng thứ 9 của dãy số đó là:

A. 0. **B.** 9. **C.** –1. **D.** –9.

Câu 6. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \frac{1}{n+1}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4}$. **B.** $1;\frac{1}{2};\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{6}$. **D.** $1;\frac{1}{3};\frac{1}{5}$.

Câu 7. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$. Viết năm số hạng đầu của dãy số.

A. $u_1 = 1, u_2 = \frac{3}{4}, u_3 = \frac{7}{5}, u_4 = \frac{3}{2}, u_5 = \frac{11}{7}$. **B.** $u_1 = 1, u_2 = \frac{5}{4}, u_3 = \frac{7}{5}, u_4 = \frac{3}{2}, u_5 = \frac{11}{7}$.

C. $u_1 = 1, u_2 = \frac{5}{4}, u_3 = \frac{8}{5}, u_4 = \frac{3}{2}, u_5 = \frac{11}{7}$ **D.** $u_1 = 1, u_2 = \frac{5}{4}, u_3 = \frac{7}{5}, u_4 = \frac{7}{2}, u_5 = \frac{11}{3}$.

Câu 8. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \frac{n}{3^n-1}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó là

A. $\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8}$. **B.** $\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{3}{26}$. **C.** $\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{16}$. **D.** $\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4}$.

Câu 9. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \frac{n+1}{2n+1}$. Số $\frac{8}{15}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. 8. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 10. Cho dãy số (u_n), biết $u_n=\dfrac{2n+5}{5n-4}$. Số $\dfrac{7}{12}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. 6. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 11. Cho dãy số (u_n), biết $u_n=\dfrac{n-1}{n^2+1}$. Số $\dfrac{2}{13}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. Thứ 3. **B.** Thứ tư. **C.** Thứ năm. **D.** Thứ 6.

Câu 12. Cho dãy số (u_n), biết $u_n=n^3-8n^2-5n+7$. Số -33 là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. 5. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 13. Cho dãy số (u_n) với $u_n=3^n$. Tìm số hạng u_{2n-1}.

A. $u_{2n-1}=3^2.3^n-1$. **B.** $u_{2n-1}=3^n.3^{n-1}$. **C.** $u_{2n-1}=3^{2n}-1$. **D.** $u_{2n-1}=3^{2(n-1)}$.

Câu 14. Cho dãy số (u_n) với $u_n=3^n$. Số hạng u_{n+1} bằng:

A. 3^n+1. **B.** 3^n+3. **C.** $3^n.3$. **D.** $3(n+1)$.

Câu 15. Cho dãy (u_n) với $u_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+...+\dfrac{1}{2n}$. Số hạng thứ 4 của dãy (u_n) là:

A. $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\dfrac{1}{n+4}$. **B.** $\dfrac{533}{840}$.

C. $\dfrac{1}{8}$. **D.** Một kết quả khác.

Câu 16. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{n+1}{n}$. Tính u_5.

A. 5. **B.** $\dfrac{6}{5}$. **C.** $\dfrac{5}{6}$. **D.** 1.

Câu 17. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{an^2}{n+1}$ (a hằng số). Tìm số hạng thứ u_{n+1}.

A. $u_{n+1}=\dfrac{a.(n+1)^2}{n+1}$. **B.** $u_{n+1}=\dfrac{a.(n+1)^2}{n+2}$. **C.** $u_{n+1}=\dfrac{a.n^2+1}{n+1}$. **D.** $u_{n+1}=\dfrac{an^2}{n+2}$.

Câu 18. Xét dãy các số tự nhiên lẻ. Số 2017 là số hạng thứ mấy?

A. 2017. **B.** 1008. **C.** 1009. **D.** 2015.

Câu 19. Số $\dfrac{9}{41}$ là số hạng thứ bao nhiêu của dãy số $u_n=\dfrac{2n}{n^2+1}$?

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 20. Cho dãy số (u_n) biết $u_n=\dfrac{2n-1}{n+1}$. Số $\dfrac{3}{2}$ là số hạng thứ mấy của dãy số trên.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 21. Cho dãy số (u_n), biết $u_n=\dfrac{-n}{n+1}$. Năm số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $-\dfrac{1}{2};-\dfrac{2}{3};-\dfrac{3}{4};-\dfrac{4}{5};-\dfrac{5}{6}$. **B.** $-\dfrac{2}{3};-\dfrac{3}{4};-\dfrac{4}{5};-\dfrac{5}{6};-\dfrac{6}{7}$.

C. $\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3};\dfrac{3}{4};\dfrac{4}{5};\dfrac{5}{6}$. **D.** $\dfrac{2}{3};\dfrac{3}{4};\dfrac{4}{5};\dfrac{5}{6};\dfrac{6}{7}$.

Câu 22. Cho dãy số (u_n), biết $u_n=\dfrac{n}{3^n-1}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8}$. **B.** $\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{3}{26}$. **C.** $\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{16}$. **D.** $\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4}$.

Câu 23. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = 2^n$. Tìm số hạng u_{n+1}.

A. $u_{n+1} = 2^n.2$. **B.** $u_{n+1} = 2^n + 1$. **C.** $u_{n+1} = 2(n+1)$. **D.** $u_{n+1} = 2^n + 2$.

Câu 24. Cho dãy số (u_n), với $u_n = 5^{n+1}$. Tìm số hạng u_{n-1}.

A. $u_{n-1} = 5^{n-1}$. **B.** $u_{n-1} = 5^n$. **C.** $u_{n-1} = 5.5^{n+1}$. **D.** $u_{n-1} = 5.5^{n-1}$.

Câu 25. Cho dãy số (u_n), với $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3}$. Tìm số hạng u_{n+1}.

A. $u_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2(n+1)+3}$. **B.** $u_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2(n-1)+3}$.

C. $u_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+3}$. **D.** $u_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$.

Câu 26. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \frac{n}{2^n - 1}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số là

A. $\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4}$. **B.** $1;\frac{1}{2};\frac{1}{16}$ **C.** $1;\frac{1}{4};\frac{1}{8}$ **D.** $1;\frac{2}{3};\frac{3}{7}$.

Câu 27. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = 1 - \frac{n}{n^2+1}$ (với $n \in \mathbb{N}^*$). Số hạng đầu tiên của dãy là:

A. 2. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** 0. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 28. Cho dãy số (u_n) có $u_n = -n^2 + n + 1$. Số -19 là số hạng thứ mấy của dãy?

A. 5. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 29. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = (-1)^n \cos(n\pi)$. Giá trị u_{99} bằng

A. 99. **B.** -1. **C.** 1. **D.** -99.

Câu 30. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2n + 1$ số hạng thứ 2019 của dãy là

A. 4039. **B.** 4390. **C.** 4930. **D.** 4093.

Câu 31. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 1 + 2^n$. Khi đó số hạng u_{2018} bằng

A. 2^{2018}. **B.** $2017 + 2^{2017}$. **C.** $1 + 2^{2018}$. **D.** $2018 + 2^{2018}$.

Câu 32. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n-2}{3n+1}, n \geq 1$. Tìm khẳng định **sai**.

A. $u_3 = \frac{1}{10}$. **B.** $u_{10} = \frac{8}{31}$. **C.** $u_{21} = \frac{19}{64}$. **D.** $u_{50} = \frac{47}{150}$.

Câu 33. Cho dãy số $u_n = \frac{n^2 + 2n - 1}{n+1}$. Tính u_{11}.

A. $u_{11} = \frac{182}{12}$. **B.** $u_{11} = \frac{1142}{12}$. **C.** $u_{11} = \frac{1422}{12}$. **D.** $u_{11} = \frac{71}{6}$.

Câu 34. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = \frac{2n+1}{n^2+1}$. Khi đó $\frac{39}{362}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. 20. **B.** 19. **C.** 22. **D.** 21.

DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ – GIỎI

Câu 35. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n^2 + 3n + 7}{n+1}$.

Hỏi dãy số trên có bao nhiêu số hạng nhận giá trị nguyên.

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** Không có.

Câu 36. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 1) \end{cases}$. Tìm số hạng u_4.

A. $u_4 = \frac{5}{9}$. **B.** $u_4 = 1$. **C.** $u_4 = \frac{2}{3}$. **D.** $u_4 = \frac{14}{27}$.

Câu 37. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 2 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $u_2 = \frac{5}{2}$. **B.** $u_3 = \frac{15}{4}$. **C.** $u_4 = \frac{31}{8}$. **D.** $u_5 = \frac{63}{16}$.

Câu 38. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 7 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$ khi đó u_5 bằng:

A. 317. **B.** 157. **C.** 77. **D.** 112.

Câu 39. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó là

A. $-1;2;5$. **B.** $1;4;7$. **C.** $4;7;10$ **D.** $-1;3;7$.

Câu 40. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó là

A. $-3;6;9$. **B.** $3;-2;-7$. **C.** $3;8;13$. **D.** $3;5;7$.

Câu 41. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_n = 2u_{n-1} + n^2 \end{cases} (n \geq 2)$. Số hạng thứ tư của dãy số đó bằng

A. 0. **B.** 93. **C.** 9. **D.** 34.

Câu 42. Cho dãy số $(u_n): \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_n = \frac{2}{u_{n-1}^2 + 1} \ khi \ n \geq 2 \end{cases}$. Tính tổng số hạng thứ ba và thứ tư của dãy số đã cho

A. $\frac{308}{145}$. **B.** $\frac{12}{5}$. **C.** $\frac{64}{35}$. **D.** 2.

Câu 43. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{2n+1}$. Tìm số hạng u_{n+1}.

A. $u_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{2n+3}$. **B.** $u_{n+1} = \left(\frac{n}{n+3}\right)^{2n+3}$. **C.** $u_{n+1} = \left(\frac{n}{n+3}\right)^{2n+1}$. **D.** $u_{n+1} = \left(\frac{n}{n+3}\right)^{2n+2}$.

Câu 44. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = 2017\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 2018\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $u_{n+9} = u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. **B.** $u_{n+15} = u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

C. $u_{n+12} = u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. **D.** $u_{n+6} = u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 45. Cho dãy số (u_n) có $u_1 = u_2 = 1$ và $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \forall n \in \mathbb{N}*$. Tính u_4.

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 46. Cho dãy số $(u_n): \begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$. Số 20 là số hạng thứ mấy trong dãy?

A. 5. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 47. Cho dãy số $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$. Tìm số hạng thứ 5 của dãy số.

A. 16. **B.** 12. **C.** 15. **D.** 14.

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH CÔNG THỨC CỦA DÃY SỐ (UN)

A. Phương pháp giải

Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1. Sử dụng biến đổi đại số để thu gọn và đơn giản biểu thức của u_n

Cách 2. Sử dụng phương pháp quy nạp bằng việc thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Viết một vài số hạng đầu của dãy, từ đó dự đoán công thức cho u_n

Bước 2. Chứng minh công thức dự đoán bằng phương pháp quy nạp

B. Bài tập tự luận

Câu 1. Tìm 5 số hạng đầu và tìm công thức tính số hạng tổng quát u_n theo n của các dãy số sau :

a). $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$

b). $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n. \end{cases}$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 2. Dãy số (u_n) được xác định bằng cộng thức: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^3 \end{cases} \quad \forall n \geq 1.$

a). Tìm công thức của số hạng tổng quát.

b). Tính số hạng thứ 100 của dãy số.

Câu 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 2$ và $u_{n+1} = 5u_n$ với mọi $n \geq 1$.

a). Hãy tính u_2, u_4 và u_6.

b). Chứng minh rằng $u_n = 2.5^{n-1}$ với mọi $n \geq 1$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 4. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = u_n + 7$ với mọi $n \geq 1$

a) Hãy tính u_2, u_4 và u_6.

b) Chứng minh rằng: $u_n = 7n - 6$ (1) với mọi $n \geq 1$

Câu 5. Cho dãy số (u_n) với $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = 3u_n + 10$ với mọi $n \geq 1$.

Chứng minh rằng: $u_n = 2.3^n - 5 \quad \forall n \geq 1$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 6. Cho dãy số (u_n), biết $u_1 = 3, u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$ với $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$

a). Viết năm số hạng đầu tiên của dãy số.

b). Dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n và chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Nguyễn Bảo Vương

Câu 7. Tìm 5 số hạng đầu và tìm công thức tính số hạng tổng quát u_n theo n của các dãy số sau :

a). $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ b). $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$ với $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 8. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 3 \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$.

1. Viết năm số hạng đầu của dãy;

2. Chứng minh rằng $u_n = 2^{n+1} - 3$;

Nguyễn Bảo Vương

Câu 9. Cho hai dãy số $(u_n),(v_n)$ được xác định như sau $u_1=3, v_1=2$ và $\begin{cases} u_{n+1}=u_n^2+2v_n^2 \\ v_{n+1}=2u_n.v_n \end{cases}$ với $n\geq 2$.

1. Chứng minh: $u_n^2-2v_n^2=1$ và $u_n-\sqrt{2}v_n=\left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}$ với $\forall n\geq 1$;

2. Tìm công thức tổng quát của hai dãy (u_n) và (v_n).

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Nguyễn Bảo Vương

C. Bài tập trắc nghiệm

DÀNH CHO HỌC SINH TRUNG BÌNH - KHÁ

Câu 1. Cho dãy số viết dưới dạng khai triển là $1,4,9,16,25,n$. Trong các công thức sau, công thức nào là công thức tổng quát của dãy số trên.

A. $u_n=3n-2$. **B.** $u_n=n+3$. **C.** $u_n=n^2$. **D.** $u_n=2n^2-1$.

Câu 2. Cho dãy số có các số hạng đầu là: $8,15,22,29,36,\ldots$. Tìm số hạng tổng quát của dãy số đã cho.

A. $u_n=7n+7$. **B.** $u_n=7n$. **C.** $u_n=7n+1$. **D.** $u_n=7n+3$.

Câu 3. Cho dãy số $\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{5}{7},\ldots$. Công thức tổng quát u_n nào là của dãy số đã cho?

A. $u_n=\frac{n}{n+1}\forall n\in\mathbb{N}^*$. **B.** $u_n=\frac{n}{2^n}\forall n\in\mathbb{N}^*$. **C.** $u_n=\frac{n+1}{n+3}\forall n\in\mathbb{N}^*$. **D.** $u_n=\frac{2n}{2n+1}\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Câu 4. Cho dãy số có các số hạng đầu là: $5;10;15;20;25;\ldots$ Số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n=5(n-1)$. **B.** $u_n=5n$. **C.** $u_n=5+n$. **D.** $u_n=5.n+1$.

Câu 5. Cho dãy số có các số hạng đầu là: $0;\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\ldots$. Số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n=\dfrac{n+1}{n}$. **B.** $u_n=\dfrac{n}{n+1}$. **C.** $u_n=\dfrac{n-1}{n}$. **D.** $u_n=\dfrac{n^2-n}{n+1}$.

Câu 6. Cho dãy số có các số hạng đầu là: $-1;1;-1;1;-1;\ldots$.Số hạng tổng quát của dãy số này có dạng

A. $u_n=1$. **B.** $u_n=-1$. **C.** $u_n=(-1)^n$. **D.** $u_n=(-1)^{n+1}$.

Câu 7. Cho dãy số có các số hạng đầu là: $-2;0;2;4;6;\ldots$.Số hạng tổng quát của dãy số này có dạng?

A. $u_n=-2n$. **B.** $u_n=(-2)+n$. **C.** $u_n=(-2)(n+1)$. **D.** $u_n=(-2)+2(n-1)$.

Câu 8. Cho dãy số có các số hạng đầu là: $\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3^2};\dfrac{1}{3^3};\dfrac{1}{3^4};\dfrac{1}{3^5};\ldots$.Số hạng tổng quát của dãy số này là?

A. $u_n=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{3^{n+1}}$. **B.** $u_n=\dfrac{1}{3^{n+1}}$. **C.** $u_n=\dfrac{1}{3^n}$. **D.** $u_n=\dfrac{1}{3^{n-1}}$.

DÀNH CHO HỌC SINH KHÁ – GIỎI

Câu 9. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases}u_1=1\\u_{n+1}=3u_n\end{cases}(n\ge 1)$. Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số trên.

A. $u_n=3^n$. **B.** $u_n=3^{n-1}$. **C.** $u_n=3^{n+1}-2$. **D.** $u_n=3^n-2$.

Câu 10. Cho dãy số có các số hạng đầu là: $0.1;0.01;0.001;0.0001\ldots$. Số hạng tổng quát của dãy số này có dạng?

A. $u_n=\underbrace{0.00\ldots01}_{n\ số\ 0}$. **B.** $u_n=\underbrace{0.00\ldots01}_{n-1\ số\ 0}$.

C. $u_n=\dfrac{1}{10^{n-1}}$. **D.** $u_n=\dfrac{1}{10^{n+1}}$.

Câu 11. Cho dãy số có 4 số hạng đầu là: $-1,3,19,53$. Hãy tìm một quy luật của dãy số trên và viết số hạng thứ 10 của dãy với quy luật vừa tìm.

A. $u_{10}=97$ **B.** $u_{10}=71$ **C.** $u_{10}=1414$ **D.** $u_{10}=971$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 12. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases}u_1=5\\u_{n+1}=u_n+n\end{cases}$.Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n=\dfrac{(n-1)n}{2}$. **B.** $u_n=5+\dfrac{(n-1)n}{2}$.

C. $u_n=5+\dfrac{(n+1)n}{2}$. **D.** $u_n=5+\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Câu 13. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases}u_1=1\\u_{n+1}=u_n+(-1)^{2n}\end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n=1+n$. **B.** $u_n=1-n$. **C.** $u_n=1+(-1)^{2n}$. **D.** $u_n=n$.

Câu 14. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases}u_1=1\\u_{n+1}=u_n+(-1)^{2n+1}\end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n=2-n$. **B.** u_n không xác định.

C. $u_n=1-n$. **D.** $u_n=-n$ với mọi n.

Câu 15. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases}u_1=1\\u_{n+1}=u_n+n^2\end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 1 + \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. **B.** $u_n = 1 + \dfrac{n(n-1)(2n+2)}{6}$.

C. $u_n = 1 + \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$. **D.** $u_n = 1 + \dfrac{n(n+1)(2n-2)}{6}$.

Câu 16. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} - u_n = 2n-1 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 2 + (n-1)^2$. **B.** $u_n = 2 + n^2$. **C.** $u_n = 2 + (n+1)^2$. **D.** $u_n = 2 - (n-1)^2$.

Câu 17. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = -2 - \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n = -\dfrac{n-1}{n}$. **B.** $u_n = \dfrac{n+1}{n}$. **C.** $u_n = -\dfrac{n+1}{n}$. **D.** $u_n = -\dfrac{n}{n+1}$.

Câu 18. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n = \dfrac{1}{2} + 2(n-1)$. **B.** $u_n = \dfrac{1}{2} - 2(n-1)$. **C.** $u_n = \dfrac{1}{2} - 2n$. **D.** $u_n = \dfrac{1}{2} + 2n$.

Câu 19. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n = (-1).\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. **B.** $u_n = (-1).\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$. **C.** $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$. **D.** $u_n = (-1).\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Câu 20. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này:

A. $u_n = n^{n-1}$. **B.** $u_n = 2^n$. **C.** $u_n = 2^{n+1}$. **D.** $u_n = 2$.

Câu 21. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này:

A. $u_n = -2^{n-1}$. **B.** $u_n = \dfrac{-1}{2^{n-1}}$. **C.** $u_n = \dfrac{-1}{2^n}$. **D.** $u_n = 2^{n-2}$.

Câu 22. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^3, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $\sqrt{u_n - 1} \geq 2039190$.

A. $n = 2017$. **B.** $n = 2019$. **C.** $n = 2020$. **D.** $n = 2018$.

Câu 23. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 1, n \geq 1 \end{cases}$. Giá trị của n để $-u_n + 2017n + 2018 = 0$ là

A. Không có n. **B.** 1009. **C.** 2018. **D.** 2017.

Câu 24. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases} (n \geq 1)$. Xác định công thức của số hạng tổng quát.

A. $u_n = 2n - 1$. **B.** $u_n = 3n - 2$.

C. $u_n = 4n - 3$. **D.** $u_n = 8n - 7$.

Câu 25. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ và dãy số (v_n) xác định bởi $\begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_{n+1} = v_n + u_{n+1} \end{cases} (n \geq 1)$. Xác định công thức tổng quát của dãy (v_n).

A. $v_n = \dfrac{n+1}{n+3}$. **B.** $v_n = \dfrac{2n}{3n+1}$.

C. $v_n = \dfrac{n+2}{n+4}$. **D.** $v_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Câu 26. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n - 2u_{n-1} + u_{n-2} = 2 \end{cases} (n \geq 3)$. Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số đó.

A. $u_n = n^2 + 3n - 2$. **B.** $u_n = n^2 - 4n + 3$.

C. $u_n = n^2 - 3n - 2$. **D.** $u_n = n^2 - 3n + 3$.

Câu 27. Tìm công thức tổng quát của dãy số cho bởi $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 - 3n \end{cases}$

A. $u_n = 2n + 3$. **B.** $u_n = 3n + 2$.

C. $u_n = 3^n + 2$. **D.** $u_n = 2^n + 3n$.

Câu 28. Tìm số hạng tổng quát của dãy số cho bởi công thức truy hồi sau $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{2}n \end{cases}$

A. $u_n = 4 - \dfrac{1}{2^n}$. **B.** $u_n = 4 - \dfrac{2}{2^n}$.

C. $u_n = 4 - \dfrac{1}{2^{n-2}}$. **D.** $u_n = 4 + \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Câu 29. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 - u_n} \end{cases}$. Đặt $v_n = \dfrac{1 + u_n}{u_n}$. Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số (v_n).

A. $v_n = \dfrac{6}{11 + n}$. **B.** $v_n = \dfrac{2}{1 + 3n}$.

C. $v_n = \dfrac{2}{1 - 2n}$. **D.** $v_n = \dfrac{3}{2} - n$.

Câu 30. Xác định công thức tính số hạng tổng quát u_n theo n của dãy số sau: $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$.

A. $u_n = 2n + 1$. **B.** $u_n = 2n - 1$.

C. $u_n = 2^n + 1$. **D.** $u_n = 2^n - 1$.

Câu 31. Xác định công thức tính số hạng tổng quát u_n theo n của dãy số sau: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^3 \end{cases} \quad \forall n \geq 1.$

A. $u_n = \dfrac{n^2(n-1)^2}{4}$.

B. $u_n = 1 + \dfrac{n^2(n-1)^2}{4}$.

C. $u_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

D. $u_n = 1 - \dfrac{n^2(n-1)^2}{4}$.

Nguyễn Bảo Vương

Chương 3

Bài 2 SỐ HẠNG CỦA DÃY SỐ

Lý thuyết

1. Định nghĩa dãy số

Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số).

Kí hiệu:

$$u:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$$
$$n\mapsto u(n).$$

Người ta thường viết dãy số dưới dạng khai triển

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots,$$

trong đó $u_n=u(n)$ hoặc viết tắt là (u_n), và gọi u_1 là số hạng đầu, u_n là số hạng thứ n và là số hạng tổng quát của dãy số.

2. Định nghĩa dãy số hữu hạn

Mỗi hàm số u xác định trên tập $M=\{1,2,3,\ldots,m\}$ với $m\in\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số hữu hạn.

Dạng khai triển của nó là $u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,$ trong đó u_1 là số hạng đầu, u_m là số hạng cuối.

II. CÁCH CHO MỘT DÃY SỐ

1. Dãy số cho bằng công thức của số hạng tổng quát

2. Dãy số cho bằng phương pháp mô tả

3. Dãy số cho bằng phương pháp truy hồi

Cách cho một dãy số bằng phương pháp truy hồi, tức là:

a) Cho số hạng đầu (hay vài số hạng đầu).

b) Cho hệ thức truy hồi, tức là hệ thức biểu thị số hạng thứ n qua số hạng (hay vài số hạng) đứng trước nó.

DẠNG 1: TÌM SỐ HẠNG CỦA DÃY SỐ

A. Phương pháp giải

Bài toán 1: Cho dãy số (u_n): $u_n=f(n)$ (trong đó $f(n)$ là một biểu thức của n). Hãy tìm số hạng u_k.

□ **Phương pháp:** Thay trực tiếp $n=k$ vào u_n.

Bài toán 2: Cho dãy số (u_n) cho bởi $\begin{cases}u_1=a\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$ (với $f(u_n)$ là một biểu thức của u_n). Hãy tìm số hạng u_k.

□ **Phương pháp:** Tính lần lượt $u_2;u_3;\ldots;u_k$ bằng cách thế u_1 vào u_2, thế u_2 vào u_3, …, thế u_{k-1} vào u_{k+1}.

Bài toán 3: Cho dãy số (u_n) cho bởi $\begin{cases}u_1=a,u_2=b\\u_{n+2}=c.u_{n+1}+d.u_n+e\end{cases}$. Hãy tìm số hạng u_k.

□ **Phương pháp:** Tính lần lượt $u_3;u_4;\ldots;u_k$ bằng cách thế u_1,u_2 vào u_3; thế u_2,u_3 vào u_4; …; thế u_{k-2},u_{k-1} vào u_k.

Bài toán 4: Cho dãy số (u_n) cho bởi $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = f\left(\{n, u_n\}\right) \end{cases}$. Trong đó $f\left(\{n, u_n\}\right)$ là kí hiệu của biểu thức u_{n+1} tính theo u_n và n. Hãy tìm số hạng u_k.

□ **Phương pháp:** Tính lần lượt $u_2; u_3; ...; u_k$ bằng cách thế $\{1, u_1\}$ vào u_2; thế $\{2, u_2\}$ vào u_3; …; thế $\{k-1, u_{k-1}\}$ vào u_k.

B. Bài tập tự luận

Câu 1. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$. Tìm số hạng u_6.

Lời giải

Thế trực tiếp: $u_6 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^6 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^6\right] = 8$.

Câu 2. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$. Số $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ mấy?

Lời giải

Giả sử $u_n = \frac{167}{84} \Leftrightarrow \frac{2n+1}{n+2} = \frac{167}{84} \Leftrightarrow 84(2n+1) = 167(n+2) \Leftrightarrow n = 250$.

Vậy $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ 250 của dãy số (u_n).

Câu 3. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n + 1} \end{cases}$. Tìm số hạng u_{10}.

Lời giải

$u_2 = \frac{u_1+2}{u_1+1} = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}$; $u_3 = \frac{u_2+2}{u_2+1} = \frac{\frac{3}{2}+2}{\frac{3}{2}+1} = \frac{7}{5}$; $u_4 = \frac{u_3+2}{u_3+1} = \frac{\frac{7}{5}+2}{\frac{7}{5}+1} = \frac{17}{12}$;

$u_5 = \frac{u_4+2}{u_4+1} = \frac{\frac{17}{12}+2}{\frac{17}{12}+1} = \frac{41}{29}$; $u_6 = \frac{u_5+2}{u_5+1} = \frac{\frac{41}{29}+2}{\frac{41}{29}+1} = \frac{99}{70}$; $u_7 = \frac{u_6+2}{u_6+1} = \frac{\frac{99}{70}+2}{\frac{99}{70}+1} = \frac{239}{169}$

$u_8 = \frac{u_7+2}{u_7+1} = \frac{\frac{239}{169}+2}{\frac{239}{169}+1} = \frac{577}{408}$; $u_9 = \frac{u_8+2}{u_8+1} = \frac{\frac{577}{408}+2}{\frac{577}{408}+1} = \frac{1393}{985}$; $u_{10} = \frac{u_9+2}{u_9+1} = \frac{\frac{1393}{985}+2}{\frac{1393}{985}+1} = \frac{3363}{2378}$

Câu 4. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$. Tìm số hạng u_{50}.

Lời giải

Từ giả thiết ta có:

$u_1 = 1$

$u_2 = u_1 + 2$

$u_3 = u_2 + 2$

...

$u_{50} = u_{49} + 2$

Cộng theo vế các đẳng thức trên, ta được:

$u_{50} = 1 + 2.49 = 99$

Câu 5. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 2 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n + 5 \end{cases}$. Tìm số hạng u_8.

Lời giải

$u_3 = 2u_2 + 3u_1 + 5 = 12$ $u_4 = 2u_3 + 3u_2 + 5 = 35$ $u_5 = 2u_4 + 3u_3 + 5 = 111$

$u_6 = 2u_5 + 3u_4 + 5 = 332$ $u_7 = 2u_6 + 3u_5 + 5 = 1002$ $u_8 = 2u_7 + 3u_6 + 5 = 3005$

Câu 6. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}(u_n + 1) \end{cases}$. Tìm số hạng u_{11}.

Lời giải

$u_2 = \dfrac{1}{2}(u_1 + 1) = \dfrac{1}{2}$ $u_3 = \dfrac{2}{3}(u_2 + 1) = 1$ $u_4 = \dfrac{3}{4}(u_3 + 1) = \dfrac{3}{2}$ $u_5 = \dfrac{4}{5}(u_4 + 1) = 2$

$u_6 = \dfrac{5}{6}(u_5 + 1) = \dfrac{5}{2}$ $u_7 = \dfrac{6}{7}(u_6 + 1) = 3$ $u_8 = \dfrac{7}{8}(u_7 + 1) = \dfrac{7}{2}$ $u_9 = \dfrac{8}{9}(u_8 + 1) = 4$

$u_{10} = \dfrac{9}{10}(u_9 + 1) = \dfrac{9}{2}$ $u_{11} = \dfrac{10}{11}(u_{10} + 1) = 5$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 7. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n + 2n \end{cases}$. Tìm số hạng u_{50}.

Lời giải

Từ giả thiết ta có:

$u_1 = \dfrac{1}{2}$

$u_2 = u_1 + 2.2$

$u_3 = u_2 + 2.3$

...

$u_{50} = u_{49} + 2.50$

Cộng theo vế các đẳng thức trên, ta được:

$u_{50} = \dfrac{1}{2} + 2.(2 + 3 + ... + 50) = \dfrac{1}{2} + 2.\sum_{x=2}^{50} x = 2548,5$

C. Bài tập trắc nghiệm

DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH - KHÁ

Câu 1. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{2n^2 - 1}{n^2 + 3}$. Tìm số hạng u_5.

A. $u_5 = \dfrac{1}{4}$. **B.** $u_5 = \dfrac{17}{12}$. **C.** $u_5 = \dfrac{7}{4}$. **D.** $u_5 = \dfrac{71}{39}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_5 = \dfrac{2.5^2 - 1}{5^2 + 3} = \dfrac{7}{4}$

Câu 2. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = (-1)^n .2n$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $u_1 = -2$. **B.** $u_2 = 4$. **C.** $u_3 = -6$. **D.** $u_4 = -8$.

Lời giải

Chọn D

Vì $u_4 = (-1)^4 .2.4 = 8$

Câu 3. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = (-1)^n . \dfrac{2^n}{n}$. Tìm số hạng u_3.

A. $u_3 = \dfrac{8}{3}$. **B.** $u_3 = 2$. **C.** $u_3 = -2$. **D.** $u_3 = -\dfrac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $u_3 = (-1)^3 \dfrac{2^3}{3} = -\dfrac{8}{3}$

Câu 4. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{n}{2^n}$. Chọn đáp án đúng.

A. $u_4 = \dfrac{1}{4}$. **B.** $u_5 = \dfrac{1}{16}$. **C.** $u_5 = \dfrac{1}{32}$. **D.** $u_3 = \dfrac{1}{8}$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn A

Ta có $u_4 = \dfrac{4}{2^4} = \dfrac{1}{4}$

Câu 5. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = n(-1)^n \sin(\dfrac{n\pi}{2})$. Số hạng thứ 9 của dãy số đó là:

A. 0. **B.** 9. **C.** –1. **D.** –9.

Lời giải

Chọn D

Ta có $u_9 = 9.(-1)^9 .\sin\left(\dfrac{9\pi}{2}\right) = -9$

Câu 6. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{4}$. **B.** $1; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{6}$. **D.** $1; \dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $u_1 = \dfrac{1}{2}, u_2 = \dfrac{1}{3}, u_3 = \dfrac{1}{4}$

Câu 7. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$. Viết năm số hạng đầu của dãy số.

A. $u_1=1,u_2=\frac{3}{4},u_3=\frac{7}{5},u_4=\frac{3}{2},u_5=\frac{11}{7}$. **B.** $u_1=1,u_2=\frac{5}{4},u_3=\frac{7}{5},u_4=\frac{3}{2},u_5=\frac{11}{7}$.

C. $u_1=1,u_2=\frac{5}{4},u_3=\frac{8}{5},u_4=\frac{3}{2},u_5=\frac{11}{7}$ **D.** $u_1=1,u_2=\frac{5}{4},u_3=\frac{7}{5},u_4=\frac{7}{2},u_5=\frac{11}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Câu 8. Cho dãy số (u_n), biết $u_n=\frac{n}{3^n-1}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó là

A. $\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8}$. **B.** $\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{3}{26}$. **C.** $\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{16}$. **D.** $\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Câu 9. Cho dãy số (u_n), biết $u_n=\frac{n+1}{2n+1}$. Số $\frac{8}{15}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. 8. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Ta có $u_n=\frac{8}{15}\Leftrightarrow\frac{n+1}{2n+1}=\frac{8}{15}\left(n\in\mathbb{N}^*\right)\Leftrightarrow 15n+15=16n+8\Leftrightarrow n=7$

Câu 10. Cho dãy số (u_n), biết $u_n=\frac{2n+5}{5n-4}$. Số $\frac{7}{12}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. 6. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Ta có $u_n=\frac{7}{12}\Leftrightarrow\frac{2n+5}{5n-4}=\frac{7}{12}\left(n\in\mathbb{N}^*\right)\Leftrightarrow 24n+60=35n-28\Leftrightarrow 11n=88\Leftrightarrow n=8$

Câu 11. Cho dãy số (u_n), biết $u_n=\frac{n-1}{n^2+1}$. Số $\frac{2}{13}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. Thứ 3. **B.** Thứ tư. **C.** Thứ năm. **D.** Thứ 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_n=\frac{2}{13}\Leftrightarrow\frac{n-1}{n^2+1}=\frac{2}{13}\left(n\in\mathbb{N}^*\right)\Leftrightarrow 13n-13=2n^2+2\Leftrightarrow 2n^2-13n+15=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=5\ (n)\\n=\frac{3}{2}\ (l)\end{array}\right.$

Câu 12. Cho dãy số (u_n), biết $u_n=n^3-8n^2-5n+7$. Số -33 là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. 5. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_n=-33\Leftrightarrow n^3-8n^2-5n+7=-33\left(n\in\mathbb{N}^*\right)\Leftrightarrow n^3-8n^2-5n+40=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=8\ (n)\\n=\pm\sqrt{5}\ (l)\end{array}\right.$

Câu 13. Cho dãy số (u_n) với $u_n=3^n$. Tìm số hạng u_{2n-1}.

A. $u_{2n-1}=3^2.3^n-1$. **B.** $u_{2n-1}=3^n.3^{n-1}$. **C.** $u_{2n-1}=3^{2n}-1$. **D.** $u_{2n-1}=3^{2(n-1)}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $u_{2n-1}=3^{2n-1}=3^n.3^{n-1}$

Câu 14. Cho dãy số (u_n) với $u_n=3^n$. Số hạng u_{n+1} bằng:

A. 3^n+1. **B.** 3^n+3. **C.** $3^n.3$. **D.** $3(n+1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_{n+1}=3^{n+1}=3^n.3$

Câu 15. Cho dãy (u_n) với $u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+...+\frac{1}{2n}$. Số hạng thứ 4 của dãy (u_n) là:

A. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}$. **B.** $\frac{533}{840}$.

C. $\frac{1}{8}$. **D.** Một kết quả khác.

Lời giải

Chọn A

Câu 16. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{n+1}{n}$. Tính u_5.

A. 5. **B.** $\frac{6}{5}$. **C.** $\frac{5}{6}$. **D.** 1.

Lời giải:

Chọn **B**

Thay $n=5$ vào $u_n=\frac{n+1}{n}$ ta được $u_5=\frac{5+1}{5}=\frac{6}{5}$.

Câu 17. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{an^2}{n+1}$ (a hằng số). Tìm số hạng thứ u_{n+1}.

A. $u_{n+1}=\frac{a.(n+1)^2}{n+1}$. **B.** $u_{n+1}=\frac{a.(n+1)^2}{n+2}$. **C.** $u_{n+1}=\frac{a.n^2+1}{n+1}$. **D.** $u_{n+1}=\frac{an^2}{n+2}$.

Lời giải:

Chọn **B**

Ta có $u_{n+1}=\frac{a.(n+1)^2}{(n+1)+1}=\frac{a(n+1)^2}{(n+2)^2}$.

Câu 18. Xét dãy các số tự nhiên lẻ. Số 2017 là số hạng thứ mấy?

A. 2017. **B.** 1008. **C.** 1009. **D.** 2015.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $u_n=2n-1$, $u_n=2017\Rightarrow n=1009$.

Câu 19. Số $\frac{9}{41}$ là số hạng thứ bao nhiêu của dãy số $u_n=\frac{2n}{n^2+1}$?

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải:

Chọn **C**

Xét $\frac{2n}{n^2+1}=\frac{9}{41}\Leftrightarrow\begin{cases}n\in\mathbb{N}^*\\9n^2-82n+9=0\end{cases}\Leftrightarrow n=9.$

Câu 20. Cho dãy số (u_n) biết $u_n=\frac{2n-1}{n+1}$. Số $\frac{3}{2}$ là số hạng thứ mấy của dãy số trên.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải:

Chọn C

Nhập vào máy tính biểu thức $\frac{2X-1}{X+1}$, sử dụng chức năng CALC tại các đáp án, ta được $\frac{2X-1}{X+1}$

CALC 5 $\rightarrow\frac{3}{2}$

Câu 21. Cho dãy số (u_n), biết $u_n=\frac{-n}{n+1}$. Năm số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $-\frac{1}{2};-\frac{2}{3};-\frac{3}{4};-\frac{4}{5};-\frac{5}{6}$. **B.** $-\frac{2}{3};-\frac{3}{4};-\frac{4}{5};-\frac{5}{6};-\frac{6}{7}$.

C. $\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\frac{5}{6};\frac{6}{7}$.

Lời giải

Ta có $u_1=-\frac{1}{2};u_2=-\frac{2}{3};u_3=-\frac{3}{4};u_4=-\frac{4}{5};u_5=-\frac{5}{6}$. **Chọn A.**

Nhận xét: (i) Dùng MTCT chức năng CALC để kiểm tra (tính) nhanh.

(ii) Ta thấy dãy (u_n) là dãy số âm nên loại các phương án C,D. Đáp án đúng là A hoặc B. Ta chỉ cần kiểm tra một số hạng nào đó mà cả hai đáp án khác nhau là được. Chẳng hạng kiểm tra u_1 thì thấy $u_1=-\frac{1}{2}$ nên

ChọnA.

Câu 22. Cho dãy số (u_n), biết $u_n=\frac{n}{3^n-1}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8}$. **B.** $\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{3}{26}$. **C.** $\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{16}$. **D.** $\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4}$.

Lời giải

Dùng MTCT chức năng CALC: ta có

$$u_1=\frac{1}{2};u_2=\frac{2}{3^2-1}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4};u_3=\frac{3}{3^3-1}=\frac{3}{26}.$$ **Chọn B.**

Câu 23. Cho dãy số (u_n), biết $u_n=2^n$. Tìm số hạng u_{n+1}.

A. $u_{n+1}=2^n.2$. **B.** $u_{n+1}=2^n+1$. **C.** $u_{n+1}=2(n+1)$. **D.** $u_{n+1}=2^n+2$.

Lời giải

Thay n bằng $n+1$ trong công thức u_n ta được: $u_{n+1}=2^{n+1}=2.2^n$. **Chọn A.**

Câu 24. Cho dãy số (u_n), với $u_n=5^{n+1}$. Tìm số hạng u_{n-1}.

A. $u_{n-1}=5^{n-1}$. **B.** $u_{n-1}=5^n$. **C.** $u_{n-1}=5.5^{n+1}$. **D.** $u_{n-1}=5.5^{n-1}$.

Lời giải

$u_n = 5^{n+1} \xrightarrow{n \leftrightarrow n-1} u_{n-1} = 5^{(n-1)+1} = 5^n$. **Chọn B.**

Câu 25. Cho dãy số (u_n), với $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3}$. Tìm số hạng u_{n+1}.

A. $u_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2(n+1)+3}$. **B.** $u_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2(n-1)+3}$.

C. $u_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+3}$. **D.** $u_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$.

Lời giải

$u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3} \xrightarrow{n \leftrightarrow n+1} u_{n+1} = \left(\frac{(n+1)-1}{(n+1)+1}\right)^{2(n+1)+3} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$. **Chọn D.**

Câu 26. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \frac{n}{2^n - 1}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số là

A. $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}$. **B.** $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{16}$ **C.** $1; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}$ **D.** $1; \frac{2}{3}; \frac{3}{7}$.

Lời giải

Chọn D.

$u_1 = 1, u_2 = \frac{2}{3}, u_3 = \frac{3}{7}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 27. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = 1 - \frac{n}{n^2+1}$ (với $n \in \mathbb{N}^*$). Số hạng đầu tiên của dãy là:

A. 2. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** 0. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $u_1 = 1 - \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}$.

Câu 28. Cho dãy số (u_n) có $u_n = -n^2 + n + 1$. Số -19 là số hạng thứ mấy của dãy?

A. 5. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $u_n = -19$, $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Suy ra $-n^2 + n + 1 = -19$

$\Leftrightarrow -n^2 + n + 20 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 5 \\ n = -4 \ (l) \end{array}\right.$.

Vậy số -19 là số hạng thứ 5 của dãy.

Câu 29. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n=(-1)^n\cos(n\pi)$. Giá trị u_{99} bằng

A. 99. **B.** -1. **C.** 1. **D.** -99.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $u_{99}=(-1)^{99}\cos(99\pi)=-\cos(98\pi+\pi)=-\cos(\pi)=1$.

Câu 30. Cho dãy số (u_n) với $u_n=2n+1$ số hạng thứ 2019 của dãy là

A. 4039. **B.** 4390. **C.** 4930. **D.** 4093.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $u_{2019}=2.2019+1=4039$.

Câu 31. Cho dãy số (u_n) với $u_n=1+2^n$. Khi đó số hạng u_{2018} bằng

A. 2^{2018}. **B.** $2017+2^{2017}$. **C.** $1+2^{2018}$. **D.** $2018+2^{2018}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_{2018}=1+2^{2018}$.

Câu 32. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{n-2}{3n+1}$, n ≥ 1. Tìm khẳng định **sai**.

A. $u_3=\dfrac{1}{10}$. **B.** $u_{10}=\dfrac{8}{31}$. **C.** $u_{21}=\dfrac{19}{64}$. **D.** $u_{50}=\dfrac{47}{150}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $u_{50}=\dfrac{50-2}{3.50+1}=\dfrac{48}{151}$.

Câu 33. Cho dãy số $u_n=\dfrac{n^2+2n-1}{n+1}$. Tính u_{11}.

A. $u_{11}=\dfrac{182}{12}$. **B.** $u_{11}=\dfrac{1142}{12}$. **C.** $u_{11}=\dfrac{1422}{12}$. **D.** $u_{11}=\dfrac{71}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $u_{11}=\dfrac{11^2+2.11-1}{11+1}=\dfrac{71}{6}$.

Câu 34. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n=\dfrac{2n+1}{n^2+1}$. Khi đó $\dfrac{39}{362}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. 20. **B.** 19. **C.** 22. **D.** 21.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\dfrac{2n+1}{n^2+1}=\dfrac{39}{362}\Leftrightarrow 39n^2-724n-323=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=19\\ n=-\dfrac{17}{39}\end{array}\right.$, do $n\in\mathbb{N}^*$ nên $n=19$.

Câu 35. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n^2+3n+7}{n+1}$.

Hỏi dãy số trên có bao nhiêu số hạng nhận giá trị nguyên.

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** Không có.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_n = \dfrac{n^2+3n+7}{n+1} = n+2+\dfrac{5}{n+1}\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$

Để u_n nhận giá trị nguyên thì $\dfrac{5}{n+1}\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ là số nguyên hay $n=4$

Vậy dãy số (u_n) chỉ có một số hạng nhận giá trị nguyên.

Câu 36. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n+1) \end{cases}$. Tìm số hạng u_4.

A. $u_4 = \dfrac{5}{9}$. **B.** $u_4 = 1$. **C.** $u_4 = \dfrac{2}{3}$. **D.** $u_4 = \dfrac{14}{27}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $u_2 = \dfrac{1}{3}(2+1) = 1$, $u_3 = \dfrac{1}{3}(1+1) = \dfrac{2}{3}$, $u_4 = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}+1\right) = \dfrac{5}{9}$

Câu 37. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2}+2 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $u_2 = \dfrac{5}{2}$. **B.** $u_3 = \dfrac{15}{4}$. **C.** $u_4 = \dfrac{31}{8}$. **D.** $u_5 = \dfrac{63}{16}$.

Lời giải

Chọn A

Vì $u_2 = \dfrac{3}{2}+2 = \dfrac{7}{2}$

Câu 38. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 7 \\ u_{n+1} = 2u_n+3 \end{cases}$ khi đó u_5 bằng:

A. 317. **B.** 157. **C.** 77. **D.** 112.

Lời giải

Chọn B

Ta có $u_2 = 2.7+3 = 17$, $u_3 = 2.17+3 = 37$, $u_4 = 2.37+3 = 77$, $u_5 = 2.77+3 = 157$

Câu 39. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n+3 \end{cases}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó là

A. $-1;2;5$. **B.** $1;4;7$. **C.** $4;7;10$ **D.** $-1;3;7$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $u_1 = -1$, $u_2 = -1+3 = 2$, $u_3 = 2+3 = 5$

Câu 40. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó là

A. $-3;6;9$. **B.** $3;-2;-7$. **C.** $3;8;13$. **D.** $3;5;7$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_1 = 3, u_2 = 3+5 = 8, u_3 = 8+5 = 13$

Câu 41. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_n = 2u_{n-1} + n^2 \end{cases} (n \geq 2)$. Số hạng thứ tư của dãy số đó bằng

A. 0. **B.** 93. **C.** 9. **D.** 34.

Lời giải

Chọn D

Ta có $u_2 = 2.(-2) + 2^2 = 0, u_3 = 2.0 + 3^3 = 9, u_4 = 2.9 + 4^2 = 34$

Câu 42. Cho dãy số $(u_n): \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_n = \dfrac{2}{u_{n-1}^2 + 1} \ khi \ n \geq 2 \end{cases}$. Tính tổng số hạng thứ ba và thứ tư của dãy số đã cho

A. $\dfrac{308}{145}$. **B.** $\dfrac{12}{5}$. **C.** $\dfrac{64}{35}$. **D.** 2.

Lời giải:

Chọn A

Ta có: $u_2 = \dfrac{2}{u_1^2+1} = \dfrac{2}{0^2+1} = 2$; $u_3 = \dfrac{2}{u_2^2+1} = \dfrac{2}{2^2+1} = \dfrac{2}{5}$; $u_4 = \dfrac{2}{u_3^2+1} = \dfrac{2}{\left(\frac{2}{5}\right)^2+1} = \dfrac{50}{29}$

Do đó $u_3 + u_4 = \dfrac{2}{5} + \dfrac{50}{29} = \dfrac{308}{145}$.

Câu 43. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \left(\dfrac{n-1}{n+2}\right)^{2n+1}$. Tìm số hạng u_{n+1}.

A. $u_{n+1} = \left(\dfrac{n-1}{n+2}\right)^{2n+3}$. **B.** $u_{n+1} = \left(\dfrac{n}{n+3}\right)^{2n+3}$. **C.** $u_{n+1} = \left(\dfrac{n}{n+3}\right)^{2n+1}$. **D.** $u_{n+1} = \left(\dfrac{n}{n+3}\right)^{2n+2}$.

Lời giải:

Chọn B

$u_{n+1} = \left(\dfrac{(n+1)-1}{(n+1)+2}\right)^{2(n+1)+1} = \left(\dfrac{n}{n+3}\right)^{2n+3}$.

Câu 44. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = 2017\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) + 2018\cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $u_{n+9} = u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. **B.** $u_{n+15} = u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

C. $u_{n+12} = u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. **D.** $u_{n+6} = u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $u_{n+12} = 2017\sin\left(\dfrac{(n+12)\pi}{2}\right) + 2018\cos\left(\dfrac{(n+12)\pi}{3}\right)$

$= 2017\sin\left(\frac{n\pi}{2}+6\pi\right)+2018\cos\left(\frac{n\pi}{3}+4\pi\right)$

$= 2017\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)+2018\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)=u_n, \forall n\in\mathbb{N}^*.$

Câu 45. Cho dãy số (u_n) có $u_1=u_2=1$ và $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n, \forall n\in\mathbb{N}*$. Tính u_4.

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $u_3=u_2+u_1=2$.

$u_4=u_3+u_2=3$.

Câu 46. Cho dãy số $(u_n):\begin{cases}u_1=5\\u_{n+1}=u_n+n\end{cases}$. Số 20 là số hạng thứ mấy trong dãy?

A. 5. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

$u_1=5, u_2=6, u_3=8, u_4=11, u_5=15, u_6=20$

Vậy số 20 là số hạng thứ 6.

Cách 2:

Dựa vào công thức truy hồi ta có

$u_1=5$

$u_2=5+1$

$u_3=5+1+2$

$u_4=5+1+2+3$

.....

$\Rightarrow u_n=5+1+2+...+n-1=5+\frac{n(n-1)}{2}$

$\Rightarrow 20=5+\frac{n(n-1)}{2}(n\in\mathbb{N}*) \Leftrightarrow n^2-n-30=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=6\\n=-5(\text{loại})\end{array}\right.$

Vậy 20 là số hạng thứ 6.

Cách 3: Sử dụng máy tính CASIO fx – 570VN PLUS

1 SHIFT STO A

5 SHIFT STO B

Ghi vào màn hình C = B + A: A = A + 1: B = C

Ấn CALC và lặp lại phím =

Ta tìm được số 20 là số hạng thứ 6

Câu 47. Cho dãy số $\begin{cases}u_1=4\\u_{n+1}=u_n+n\end{cases}$. Tìm số hạng thứ 5 của dãy số.

A. 16. **B.** 12. **C.** 15. **D.** 14.

Lời giải

Ta có $u_2 = u_1 + 1 = 5$; $u_3 = u_2 + 2 = 7$; $u_4 = u_3 + 3 = 10$. Do đó số hạng thứ 5 của dãy số là $u_5 = u_4 + 4 = 14$.

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH CÔNG THỨC CỦA DÃY SỐ (UN)

A. Phương pháp giải

Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1. Sử dụng biến đổi đại số để thu gọn và đơn giản biểu thức của u_n

Cách 2. Sử dụng phương pháp quy nạp bằng việc thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Viết một vài số hạng đầu của dãy, từ đó dự đoán công thức cho u_n

Bước 2. Chứng minh công thức dự đoán bằng phương pháp quy nạp

B. Bài tập tự luận

Câu 1. Tìm 5 số hạng đầu và tìm công thức tính số hạng tổng quát u_n theo n của các dãy số sau :

a). $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$

b). $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n. \end{cases}$

Lời giải

a). $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$

Ta có:

$u_2 = u_1 + 2 = 3 + 2 = 5.$

$u_3 = u_2 + 2 = 5 + 2 = 7.$

$u_4 = u_3 + 2 = 7 + 2 = 9.$

$u_5 = u_4 + 2 = 9 + 2 = 11.$

Từ các số hạng đầu trên, ta dự đoán số hạng tổng quát u_n có dạng:

$u_n = 2n + 1 \quad \forall n \geq 1 (*)$

Ta dùng phương pháp chứng minh quy nạp để chứng minh công thức $(*)$ đúng.

Với $n = 1; u_1 = 2.1 + 1 = 3$ (đúng). Vậy $(*)$ đúng với $n = 1$.

Giả sử $(*)$ đúng với $n = k$. Có nghĩa ta có: $u_k = 2k + 1 \quad (2)$

Ta cần chứng minh $(*)$ đúng với $n = k + 1$. Có nghĩa là ta phải chứng minh:

$u_{k+1} = 2(k+1) + 1 = 2k + 3.$

Thật vậy từ hệ thức xác định dãy số và theo (2) ta có:

$u_{k+1} = u_k + 2 = 2k + 1 + 2 = 2k + 3.$

Vậy $(*)$ đúng khi $n = k + 1$. Kết luận $(*)$ đúng với mọi số nguyên dương n.

b). $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n. \end{cases}$

Ta có:

$u_2 = 2u_1 = 2.2 = 4 = 2^2$

Nguyễn Bảo Vương

$u_3 = 2u_2 = 2.4 = 8 = 2^3$

$u_4 = 2u_3 = 2.8 = 16 = 2^4$

$u_5 = 2u_4 = 2.16 = 32 = 2^5$

Từ các số hạng đầu tiên, ta dự đoán số hạng tổng quát u_n có dạng: $u_n = 2^n \forall n \geq 1 (*)$

Ta dùng phương pháp chứng minh quy nạp để chứng minh cộng thức $(*)$ đúng.

Với $n = 1$, có: $u_1 = 2^1 = 2$ (đúng). Vậy $(*)$ đúng với $n = 1$

Giả sử $(*)$ đúng với $n = k$, có nghĩa ta có: $u_k = 2^k \quad (2)$

Ta cần chứng minh $(*)$ đúng với $n = k+1$. Có nghĩa là ta phải chứng minh:

$u_{k+1} = 2^{k+1}$.

Thật vậy từ hệ thức xác định dãy số và theo (2) ta có:

$u_{k+1} = 2.u_k = 2.2^k = 2^{k+1}$.

Vậy $(*)$ đúng với $n = k+1$. Kết luận $(*)$ đúng với mọi số nguyên dương n.

Câu 2. Dãy số (u_n) được xác định bằng cộng thức: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^3 \end{cases} \quad \forall n \geq 1.$

a). Tìm công thức của số hạng tổng quát.
b). Tính số hạng thứ 100 của dãy số.

Lời giải

a). Ta có: $u_{n+1} = u_n + n^3 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = n^3$.

Từ đó suy ra:

$u_1 = 1$

$u_2 - u_1 = 1^3$

$u_3 - u_2 = 2^3$

$u_4 - u_3 = 3^3$

.....

$u_{n-1} - u_{n-2} = (n-2)^3$

$u_n - u_{n-1} = (n-1)^3$

Cộng từng vế n đẳng thức trên:

$u_1 + u_2 - u_1 + u_3 - u_2 + ... + u_{n-1} - u_{n-2} + u_n - u_{n-1} = 1 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + (n-2)^3 + (n-1)^3$

$\Leftrightarrow u_n = 1 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + (n-2)^3 + (n-1)^3$.

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được: $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + (n-1)^3 = \dfrac{(n-1)^2.n^2}{4}$

Vậy $u_n = 1 + \dfrac{n^2(n-1)^2}{4}$

b). $u_{100} = 1 + \dfrac{100^2.99^2}{4} = 24502501.$

Câu 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 2$ và $u_{n+1} = 5u_n$ với mọi $n \geq 1$.

a). Hãy tính u_2, u_4 và u_6.

b). Chứng minh rằng $u_n = 2.5^{n-1}$ với mọi $n \geq 1$.

Lời giải

a). Ta có:

$u_2 = 5u_1 = 5.2 = 10.$

$u_3 = 5.u_2 = 5.10 = 50.$

$u_4 = 5.u_3 = 5.50 = 250.$

$u_5 = 5.u_4 = 5.250 = 1250.$

$u_6 = 5.u_5 = 5.1250 = 6250.$

b). Ta sẽ chứng minh: $u_n = 2.5^{n-1}$ (1) với mọi $n \geq 1$, bằng phương pháp quy nạp

Với $n = 1$, ta có: $u_1 = 2.5^0 = 2$ (đúng). Vậy (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1) đúng với $n = k\left(k \in N^*\right)$. Có nghĩa là ta có: $u_k = 2.5^{k-1}$.

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n = k+1$.

Có nghĩa ta phải chứng minh: $u_{k+1} = 2.5^k$.

Từ hệ thức xác định dãy số: (u_n) và giả thiết quy nạp ta có:

$u_{k+1} = 5.u_k = 2.5^{k-1}.5 = 2.5^k$ (đpcm).

Câu 4. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = u_n + 7$ với mọi $n \geq 1$

a) Hãy tính u_2, u_4 và u_6.

b) Chứng minh rằng: $u_n = 7n - 6$ (1) với mọi $n \geq 1$

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

a). Ta có:

$u_2 = u_1 + 7 = 1 + 7 = 8.$

$u_3 = u_2 + 7 = 8 + 7 = 15.$

$u_4 = u_3 + 7 = 15 + 7 = 22.$

$u_5 = u_4 + 7 = 22 + 7 = 29.$

$u_6 = u_5 + 7 = 29 + 7 = 36.$

b). Với $n = 1$, ta có: $u_1 = 7.1 - 6 = 1$ (đúng). Vậy (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1) đúng với $n = k\left(k \in N^*\right)$. Có nghĩa là ta có: $u_k = 7k - 6$.

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n = k+1$. Có nghĩa ta phải chứng minh:

$u_{k+1} = 7(k+1) - 6.$

Từ hệ thức xác định dãy số (u_n) và giả thiết quy nạp ta có:

$u_{k+1} = u_k + 7 = (7k - 6) + 7 = 7(k+1) - 6$ (đúng).

Câu 5. Cho dãy số (u_n) với $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = 3u_n + 10$ với mọi $n \geq 1$.

Chứng minh rằng: $u_n = 2.3^n - 5 \quad \forall n \geq 1.$

Lời giải

Ta sẽ chứng minh $u_n = 2.3^n - 5$ (1) bằng phương pháp quy nạp.

Với $n = 1$, ta có: $u_1 = 2.3^1 - 1 = 1$ (đúng). Vậy (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1) đúng với $n=k\left(k\in N^*\right)$. Có nghĩa là ta có: $u_k=2.3^k-5\quad(2)$

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n=k+1$. Có nghĩa ta phải chứng minh:

$u_{n+1}=2.3^{k+1}-5.$

Từ hệ thức xác định dãy số (u_n) và từ (2) ta có:

$u_{k+1}=3u_k+10=3.\left(2.3^k-5\right)+10=2.3^k.3-15+10=2.3^{k+1}-5$ (đpcm).

Câu 6. Cho dãy số (u_n), biết $u_1=3, u_{n+1}=\sqrt{1+u_n^2}$ với $n\geq 1, n\in\mathbb{N}$

a). Viết năm số hạng đầu tiên của dãy số.

b). Dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n và chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Lời giải

a). Ta có:

$u_2=\sqrt{1+u_1^2}=\sqrt{10}$

$u_3=\sqrt{1+u_2^2}=\sqrt{11}$

$u_4=\sqrt{1+u_3^2}=\sqrt{12}$

$u_5=\sqrt{1+u_4^2}=\sqrt{13}$

b). Ta có: $u_1=\sqrt{1+8}, u_2=\sqrt{2+8}, u_3=\sqrt{3+8}, u_4=\sqrt{4+8}, u_5=\sqrt{5+8}$.

Ta dự đoán $u_n=\sqrt{n+8}\quad(1)$

Với $n=1$, có: $u_1=\sqrt{1+8}=3$ (đúng). Vậy (1) đúng với $n=1$

Giả sử (1) đúng với $n=k$, có nghĩa ta có: $u_k=\sqrt{k+8}\quad(2)$

Ta cần chứng minh (1) đúng với $n=k+1$. Có nghĩa là ta phải chứng minh:

$u_{k+1}=\sqrt{k+9}$

Thật vậy từ hệ thức xác định dãy số và theo (2) ta có:

$u_{k+1}=\sqrt{1+u_k^2}=\sqrt{1+(\sqrt{k+8})^2}=\sqrt{k+9}$

Vậy (1) đúng với $n=k+1$. Kết luận $(*)$ đúng với mọi số nguyên dương n.

Câu 7. Tìm 5 số hạng đầu và tìm công thức tính số hạng tổng quát u_n theo n của các dãy số sau :

a). $\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+u_n}\end{cases},\forall n\in\mathbb{N}^*$ b). $\begin{cases}u_1=-1\\ u_{n+1}=u_n+3\end{cases}$ với $n\geq 1, n\in\mathbb{N}$

Lời giải

a). Ta có:

$u_2=\dfrac{u_1}{1+u_1}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}.\ u_3=\dfrac{u_2}{1+u_2}=\dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}.$

$u_4=\dfrac{u_3}{1+u_3}=\dfrac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{4}.\ u_5=\dfrac{u_4}{1+u_4}=\dfrac{\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{5}.$

Từ các số hạng đầu trên, ta dự đoán số hạng tổng quát u_n có dạng: $u_n = \frac{1}{n}, \forall n \geq 1. (*)$

Ta dùng phương pháp quy nạp để chứng minh công thức $(*)$

Đã có: $(*)$ đúng với $n = 1$

Giả sử $(*)$ đúng khi $n = k$. Nghĩa là ta có: $u_k = \frac{1}{k}$

Ta chứng minh $(*)$ đúng khi $n = k+1$. Nghĩa là ta phải chứng minh: $u_{k+1} = \frac{1}{k+1}$.

Thật vậy từ hệ thức xác định dãy số và giả thiết quy nạp ta có:

$$u_{k+1} = \frac{u_k}{1+u_k} = \frac{\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k}} = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{k+1}{k}} = \frac{1}{k+1}.$$

Kết luận: $(*)$ đúng khi $n = k+1$,suy ra $(*)$ đúng với mọi số nguyên dương n.

b). Ta có :

$u_2 = u_1 + 3 = 2 = 3.2 - 4$

$u_3 = u_2 + 3 = 5 = 3.3 - 4$

$u_4 = u_3 + 3 = 8 = 3.4 - 4$

$u_5 = u_4 + 3 = 11 = 3.5 - 4$

Từ các số hạng đầu trên, ta dự đoán số hạng tổng quát u_n có dạng: $u_n = 3n - 4, \forall n \geq 1. (*)$

Ta dùng phương pháp quy nạp để chứng minh công thức $(*)$

Đã có: $(*)$ đúng với $n = 1$

Giả sử $(*)$ đúng khi $n = k$. Nghĩa là ta có: $u_k = 3k - 4$

Ta chứng minh $(*)$ đúng khi $n = k+1$. Nghĩa là ta phải chứng minh: $u_{k+1} = 3(k+1) - 4$

Thật vậy từ hệ thức xác định dãy số và giả thiết quy nạp ta có:

$u_{k+1} = u_k + 3 = 3k - 4 + 3 = 3(k+1) - 4$

Kết luận: $(*)$ đúng khi $n = k+1$,suy ra $(*)$ đúng với mọi số nguyên dương n.

Câu 8. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 3 \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$.

1. Viết năm số hạng đầu của dãy;

2. Chứng minh rằng $u_n = 2^{n+1} - 3$;

Lời giải.

1. Ta có 5 số hạng đầu của dãy là:

$u_1 = 1; u_2 = 2u_1 + 3 = 5; u_3 = 2u_2 + 3 = 13; u_4 = 2u_3 + 3 = 29$

$u_5 = 2u_4 + 3 = 61$.

2. Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp

* Với $n = 1 \Rightarrow u_1 = 2^{1+1} - 3 = 1 \Rightarrow$ bài toán đúng với $N = 1$

* Giả sử $u_k = 2^{k+1} - 3$, ta chứng minh $u_{k+1} = 2^{k+2} - 3$

Thật vậy, theo công thức truy hồi ta có:

$u_{k+1} = 2u_k + 3 = 2(2^{k+1} - 3) + 3 = 2^{k+2} - 3$ đpcm.

Câu 9. Cho hai dãy số $(u_n),(v_n)$ được xác định như sau $u_1=3, v_1=2$ và $\begin{cases} u_{n+1}=u_n^2+2v_n^2 \\ v_{n+1}=2u_n.v_n \end{cases}$ với $n\geq 2$.

1. Chứng minh: $u_n^2-2v_n^2=1$ và $u_n-\sqrt{2}v_n=\left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}$ với $\forall n\geq 1$;

2. Tìm công thức tổng quát của hai dãy (u_n) và (v_n).

Lời giải.

1. Ta chứng minh bài toán theo quy nạp

a) Chứng minh: $u_n^2-2v_n^2=1$ (1)

- Ta có $u_1^2-2v_1^2=3^2-2.2^2=1$ nên (1) đúng với $n=1$
- Giả sử $u_k^2-2v_k^2=1$, khi đó ta có:

$u_{k+1}^2-2v_{k+1}^2=\left(u_k^2+2v_k^2\right)^2-2\left(2u_kv_k\right)=\left(u_k^2-2v_k^2\right)^2=1$

Từ đó suy ra (1) đúng với $\forall n\geq 1$.

b) Chứng minh $u_n-\sqrt{2}v_n=\left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}$ (2)

Ta có: $u_n-\sqrt{2}v_n=u_{n-1}^2+2v_{n-1}^2-2\sqrt{2}u_{n-1}v_{n-1}=\left(u_{n-1}-\sqrt{2}v_{n-1}\right)^2$

- Ta có: $u_1-\sqrt{2}v_1=3-2\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$ nên (2) đúng với $n=1$
- Giả sử $u_k-\sqrt{2}v_k=\left(\sqrt{2}-1\right)^{2^k}$, ta có:

$$u_{k+1}-\sqrt{2}v_{k+1}=\left(u_k-\sqrt{2}v_k\right)^2=\left(\sqrt{2}-1\right)^{2^{k+1}}$$

Vậy (2) đúng với $\forall n\geq 1$.

2. Theo kết quả bài trên và đề bài ta có: $u_n+\sqrt{2}v_n=\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n}$

Do đó ta suy ra $\begin{cases} 2u_n=\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n}+\left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n} \\ 2\sqrt{2}v_n=\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n}-\left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n} \end{cases}$

Hay $\begin{cases} u_n=\dfrac{1}{2}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n}+\left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}\right] \\ v_n=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n}-\left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}\right] \end{cases}$.

C. Bài tập trắc nghiệm

DÀNH CHO HỌC SINH TRUNG BÌNH - KHÁ

Câu 1. Cho dãy số viết dưới dạng khai triển là $1,4,9,16,25,n$. Trong các công thức sau, công thức nào là công thức tổng quát của dãy số trên.

A. $u_n=3n-2$. **B.** $u_n=n+3$. **C.** $u_n=n^2$. **D.** $u_n=2n^2-1$.

Lời giải:

Chọn C

Thử từng đáp án với $n=1,2,3,4,5$ ta thấy đáp án C đúng.

Câu 2. Cho dãy số có các số hạng đầu là: $8,15,22,29,36,\ldots$. Tìm số hạng tổng quát của dãy số đã cho.

A. $u_n=7n+7$. **B.** $u_n=7n$. **C.** $u_n=7n+1$. **D.** $u_n=7n+3$.

Lời giải:

Chọn **C**

Ta có:

$8=7.1+1$

$15=7.2+1$

$22=7.3+1$

$29=7.4+1$

$36=7.5+1$

Suy ra số hạng tổng quát $u_n=7n+1$.

Câu 3. Cho dãy số $\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{5}{7},\ldots$. Công thức tổng quát u_n nào là của dãy số đã cho?

A. $u_n=\frac{n}{n+1}\forall n\in\mathbb{N}^*$. **B.** $u_n=\frac{n}{2^n}\forall n\in\mathbb{N}^*$. **C.** $u_n=\frac{n+1}{n+3}\forall n\in\mathbb{N}^*$. **D.** $u_n=\frac{2n}{2n+1}\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Lời giải

Viết lại dãy số: $\frac{2}{4},\frac{3}{5},\frac{4}{6},\frac{5}{7},\ldots$

$\Rightarrow u_n=\frac{n+1}{n+3}\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Câu 4. Cho dãy số có các số hạng đầu là: $5;10;15;20;25;\ldots$ Số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n=5(n-1)$. **B.** $u_n=5n$. **C.** $u_n=5+n$. **D.** $u_n=5.n+1$.

Lời giải

Chọn **B.**

Ta có:

$5=5.1$

$10=5.2$

$15=5.3$

$20=5.4$

$25=5.5$

Suy ra số hạng tổng quát $u_n=5n$.

Câu 5. Cho dãy số có các số hạng đầu là: $0;\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\ldots$.Số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n=\frac{n+1}{n}$. **B.** $u_n=\frac{n}{n+1}$. **C.** $u_n=\frac{n-1}{n}$. **D.** $u_n=\frac{n^2-n}{n+1}$.

Lời giải

Chọn **B.**

Ta có:

$0=\frac{0}{0+1}$

$\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$

$\frac{2}{3}=\frac{2}{2+1}$

$\frac{3}{4}=\frac{3}{3+1}$

$\frac{4}{5}=\frac{4}{4+1}$

Suy ra $u_n=\frac{n}{n+1}$.

Câu 6. Cho dãy số có các số hạng đầu là: $-1;1;-1;1;-1;\ldots$.Số hạng tổng quát của dãy số này có dạng

A. $u_n=1$. **B.** $u_n=-1$. **C.** $u_n=(-1)^n$. **D.** $u_n=(-1)^{n+1}$.

Lời giải

Chọn **C.**

Ta có:

Các số hạng đầu của dãy là $(-1)^1;(-1)^2;(-1)^3;(-1)^4;(-1)^5;\ldots\Rightarrow u_n=(-1)^n$.

Câu 7. Cho dãy số có các số hạng đầu là: $-2;0;2;4;6;\ldots$.Số hạng tổng quát của dãy số này có dạng?

A. $u_n=-2n$. **B.** $u_n=(-2)+n$. **C.** $u_n=(-2)(n+1)$. **D.** $u_n=(-2)+2(n-1)$.

Lời giải

Chọn **D.**

Dãy số là dãy số cách đều có khoảng cách là 2 và số hạng đầu tiên là (-2) nên $u_n=(-2)+2.(n-1)$.

Câu 8. Cho dãy số có các số hạng đầu là: $\frac{1}{3};\frac{1}{3^2};\frac{1}{3^3};\frac{1}{3^4};\frac{1}{3^5};\ldots$.Số hạng tổng quát của dãy số này là?

A. $u_n=\frac{1}{3}\frac{1}{3^{n+1}}$. **B.** $u_n=\frac{1}{3^{n+1}}$. **C.** $u_n=\frac{1}{3^n}$. **D.** $u_n=\frac{1}{3^{n-1}}$.

Lời giải

Chọn **C.**

5 số hạng đầu là $\frac{1}{3_1};\frac{1}{3^2};\frac{1}{3^3};\frac{1}{3^4};\frac{1}{3^5};\ldots$ nên $u_n=\frac{1}{3^n}$.

DÀNH CHO HỌC SINH KHÁ – GIỎI

Câu 9. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases}u_1=1\\u_{n+1}=3u_n\end{cases}(n\geq 1)$. Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số trên.

A. $u_n=3^n$. **B.** $u_n=3^{n-1}$. **C.** $u_n=3^{n+1}-2$. **D.** $u_n=3^n-2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$u_1=1=3^0$

$u_2=3^1$

$u_3=3^2$

…

Dự đoán $u_n=3^{n-1},n\in\mathbb{N}^*$. Ta dễ dàng chứng minh được công thức này bằng quy nạp

+ với $n=1\Rightarrow u_1=1$ suy ra khẳng định đúng

+ Giả sử $n=k\geq 2$ ta có $u_k=3^{k-1}$. Ta phải chứng minh $u_{k+1}=3^k$

Thật vậy, theo công thức truy hồi ta có $u_{k+1}=3.u_k=3.3^{k-1}=3^k$

Vậy theo nguyên lý quy nạp ta dã chứng minh được $u_n=3^{n-1}, n\in\mathbb{N}^*$

Câu 10. Cho dãy số có các số hạng đầu là: $0.1;0.01;0.001;0.0001\ldots$. Số hạng tổng quát của dãy số này có dạng?

A. $u_n=\underbrace{0.00\ldots01}_{n\ số\ 0}$. **B.** $u_n=\underbrace{0.00\ldots01}_{n-1\ số\ 0}$.

C. $u_n=\dfrac{1}{10^{n-1}}$. **D.** $u_n=\dfrac{1}{10^{n+1}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$u_1=0.1=\dfrac{1}{10}$

$u_2=0.01=\dfrac{1}{10^2}$

$u_3=0.001=\dfrac{1}{10^3}$

…

Dự đoán $u_n=\dfrac{1}{10^n}=\underbrace{0.00\ldots01}_{n\ số\ 0}$.

Câu 11. Cho dãy số có 4 số hạng đầu là: $-1,3,19,53$. Hãy tìm một quy luật của dãy số trên và viết số hạng thứ 10 của dãy với quy luật vừa tìm.

A. $u_{10}=97$ **B.** $u_{10}=71$ **C.** $u_{10}=1414$ **D.** $u_{10}=971$

Lời giải:

Chọn A.

Xét dãy (u_n) có dạng: $u_n=an^3+bn^2+cn+d$

Ta có hệ: $\begin{cases}a+b+c+d=-1\\8a+4b+2c+d=3\\27a+9b+3c+d=19\\64a+16b+4c+d=53\end{cases}$

Giải hệ trên ta tìm được: $a=1,b=0,c=-3,d=1$

$\Rightarrow u_n=n^3-3n+1$ là một quy luật.

Số hạng thứ 10: $u_{10}=971$.

Câu 12. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases}u_1=5\\u_{n+1}=u_n+n\end{cases}$.Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n=\dfrac{(n-1)n}{2}$. **B.** $u_n=5+\dfrac{(n-1)n}{2}$.

C. $u_n=5+\dfrac{(n+1)n}{2}$. **D.** $u_n=5+\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Lời giải

Chọn **B.**

Ta có $u_n = 5+1+2+3+...+n-1 = 5+\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Câu 13. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n} \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 1+n$. **B.** $u_n = 1-n$. **C.** $u_n = 1+(-1)^{2n}$. **D.** $u_n = n$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n} = u_n + 1 \Rightarrow u_2 = 2; u_3 = 3; u_4 = 4; ...$ Dễ dàng dự đoán được $u_n = n$.

Thật vậy, ta chứng minh được $u_n = n$ $(*)$ bằng phương pháp quy nạp như sau:

+ Với $n = 1 \Rightarrow u_1 = 1$. Vậy $(*)$ đúng với $n = 1$

+ Giả sử $(*)$ đúng với mọi $n = k\left(k \in \mathbb{N}^*\right)$, ta có: $u_k = k$. Ta đi chứng minh $(*)$ cũng đúng với $n = k+1$, tức là: $u_{k+1} = k+1$

+ Thật vậy, từ hệ thức xác định dãy số (u_n) ta có: $u_{k+1} = u_k + (-1)^{2k} = k+1$. Vậy $(*)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 14. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n+1} \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 2-n$. **B.** u_n không xác định.

C. $u_n = 1-n$. **D.** $u_n = -n$ với mọi n.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $u_2 = 0; u_3 = -1; u_4 = -2$,. Dễ dàng dự đoán được $u_n = 2-n$.

Câu 15. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 1+\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. **B.** $u_n = 1+\dfrac{n(n-1)(2n+2)}{6}$.

C. $u_n = 1+\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$. **D.** $u_n = 1+\dfrac{n(n+1)(2n-2)}{6}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = u_1 + 1^2 \\ u_3 = u_2 + 2^2 \\ ... \\ u_n = u_{n-1} + (n-1)^2 \end{cases}$.

Cộng hai vế ta được $u_n = 1+1^2+2^2+...+(n-1)^2 = 1+\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

Câu 16. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} - u_n = 2n-1 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 2+(n-1)^2$. **B.** $u_n = 2+n^2$. **C.** $u_n = 2+(n+1)^2$. **D.** $u_n = 2-(n-1)^2$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = u_1 + 1 \\ u_3 = u_2 + 3 \\ \ldots \\ u_n = u_{n-1} + 2n - 3 \end{cases}$. Cộng hai vế ta được $u_n = 2+1+3+5+\ldots+(2n-3) = 2+(n-1)^2$

Câu 17. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = -2 - \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n = -\dfrac{n-1}{n}$. **B.** $u_n = \dfrac{n+1}{n}$. **C.** $u_n = -\dfrac{n+1}{n}$. **D.** $u_n = -\dfrac{n}{n+1}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $u_1 = -\dfrac{3}{2}; u_2 = -\dfrac{4}{3}; u_3 = -\dfrac{5}{4}; \ldots$ Dễ dàng dự đoán được $u_n = -\dfrac{n+1}{n}$.

Câu 18. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n = \dfrac{1}{2} + 2(n-1)$. **B.** $u_n = \dfrac{1}{2} - 2(n-1)$. **C.** $u_n = \dfrac{1}{2} - 2n$. **D.** $u_n = \dfrac{1}{2} + 2n$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_2 = u_1 - 2 \\ u_3 = u_2 - 2 \\ \ldots \\ u_n = u_{n-1} - 2 \end{cases}$. Cộng hai vế ta được $u_n = \dfrac{1}{2} - 2 - 2 \ldots - 2 = \dfrac{1}{2} - 2(n-1)$.

Câu 19. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n = (-1).\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. **B.** $u_n = (-1).\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$. **C.** $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$. **D.** $u_n = (-1).\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_2 = \dfrac{u_1}{2} \\ u_3 = \dfrac{u_2}{2} \\ \ldots \\ u_n = \dfrac{u_{n-1}}{2} \end{cases}$.

Nhân hai vế ta được $u_1.u_2.u_3...u_n = (-1).\dfrac{u_1.u_2.u_3...u_{n-1}}{\underbrace{2.2.2...2}_{n-1 \text{ lan}}} \Leftrightarrow u_n = (-1).\dfrac{1}{2^{n-1}} = (-1).\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

Câu 20. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này:

A. $u_n = n^{n-1}$. **B.** $u_n = 2^n$. **C.** $u_n = 2^{n+1}$. **D.** $u_n = 2$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = 2u_1 \\ u_3 = 2u_2 \\ \ldots \\ u_n = 2u_{n-1} \end{cases}$. Nhân hai vế ta được $u_1.u_2.u_3...u_n = 2.2^{n-1}.u_1.u_2...u_{n-1} \Leftrightarrow u_n = 2^n$

Câu 21. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này:

A. $u_n = -2^{n-1}$. **B.** $u_n = \dfrac{-1}{2^{n-1}}$. **C.** $u_n = \dfrac{-1}{2^n}$. **D.** $u_n = 2^{n-2}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_2 = 2u_1 \\ u_3 = 2u_2 \\ \ldots \\ u_n = 2u_{n-1} \end{cases}$. Nhân hai vế ta được $u_1.u_2.u_3...u_n = \dfrac{1}{2}.2^{n-1}.u_1.u_2...u_{n-1} \Leftrightarrow u_n = 2^{n-2}$

Câu 22. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^3, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $\sqrt{u_n - 1} \geq 2039190$.

A. $n = 2017$. **B.** $n = 2019$. **C.** $n = 2020$. **D.** $n = 2018$.

Lời giải

Theo hệ thức đã cho ta có:

$u_n = u_{n-1} + (n-1)^3 = u_{n-2} + (n-2)^3 + (n-1)^3 = ... = u_1 + 1^3 + 2^3 + ... + (n-1)^3$.

Lại có $1^3 + 2^3 + ... + (n-1)^3 = (1 + 2 + ... + (n-1))^2 = \dfrac{(n-1)^2 n^2}{4}$.

Suy ra: $u_n = 1 + \dfrac{n^2(n-1)^2}{4} \Rightarrow \sqrt{u_n - 1} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Sử dụng mode 7 cho n chạy từ 2017 đến 2020, ta được kết quả $n = 2020$.

Câu 23. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 1, n \geq 1 \end{cases}$. Giá trị của n để $-u_n + 2017n + 2018 = 0$ là

A. Không có n. **B.** 1009. **C.** 2018. **D.** 2017.

Lời giải

Với $n = 1$ ta có: $u_2 = u_1 + 3 = 4 = 2^2$.

Với $n = 2$ ta có: $u_3 = u_2 + 2.2 + 1 = 9 = 3^2$.

Với $n = 3$ ta có: $u_4 = u_3 + 2.3 + 1 = 16 = 4^2$.

Từ đó ta có: $u_n = n^2$.

Suy ra $-u_n + 2017n + 2018 = 0 \Leftrightarrow -n^2 + 2017n + 2018 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -1 (L) \\ n = 2018 (N) \end{array}\right.$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 24. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases} (n \geq 1)$. Xác định công thức của số hạng tổng quát.

A. $u_n = 2n - 1$. **B.** $u_n = 3n - 2$.

C. $u_n = 4n - 3$. **D.** $u_n = 8n - 7$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$u_1 = 1$

$u_2 = 3$

$u_3 = 5$

…

Dự đoán $u_n = 2n - 1, n \in \mathbb{N}^*$. Ta dễ dàng chứng minh được công thức dự đoán bằng quy nạp

Câu 25. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ và dãy số (v_n) xác định bởi $\begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_{n+1} = v_n + u_{n+1} \end{cases} (n \geq 1)$. Xác định công thức tổng quát của dãy (v_n).

A. $v_n = \dfrac{n+1}{n+3}$. **B.** $v_n = \dfrac{2n}{3n+1}$.

C. $v_n = \dfrac{n+2}{n+4}$. **D.** $v_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $v_1=\frac{1}{2}$ và $v_{n+1}-v_n=u_{n+1}$

$v_1=\frac{1}{2}$

$v_2-v_1=\frac{1}{2.3}$

$v_3-v_2=\frac{1}{3.4}$

...

$v_n-v_{n-1}=\frac{1}{n(n+1)}$

Cộng vế theo vế các đẳng thức trên ta được

$$v_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

Câu 26. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases}u_1=u_2=1\\u_n-2u_{n-1}+u_{n-2}=2\end{cases}(n\geq 3)$. Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số đó.

A. $u_n=n^2+3n-2$. **B.** $u_n=n^2-4n+3$.

C. $u_n=n^2-3n-2$. **D.** $u_n=n^2-3n+3$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn D

Ta có $u_n-2u_{n-1}+u_{n-2}=2\Leftrightarrow u_n-u_{n-1}=u_{n-1}-u_{n-2}+2,\ n\geq 3$

$$\left.\begin{aligned}&u_3-u_2=u_2-u_1+2\\&u_4-u_3=u_3-u_2+2\\&...\\&u_n-u_{n-1}=u_{n-1}-u_{n-2}+2\end{aligned}\right\}\Rightarrow u_n-u_2=u_{n-1}-u_1+2(n-2)\Leftrightarrow u_n-u_{n-1}=2n-4\ (*)$$

Từ $(*)$ và giả thiết ta lại có

$$\left.\begin{aligned}&u_2-u_1=0\\&u_3-u_2=2\\&u_4-u_3=4\\&...\\&u_n-u_{n-1}=2n-4\end{aligned}\right\}\Rightarrow u_n-u_1=0+2+4+...+2n-4$$

$$\Leftrightarrow u_n-u_1=\sum_{k=2}^{n}(2k-4)=n^2-3n+2\Leftrightarrow u_n=n^2-3n+3$$

Câu 27. Tìm công thức tổng quát của dãy số cho bởi $\begin{cases}u_1=5\\u_{n+1}=2u_n+3-3n\end{cases}$

A. $u_n=2n+3$. **B.** $u_n=3n+2$.

C. $u_n=3^n+2$. **D.** $u_n=2^n+3n$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$u_2 = 10 = 2^2 + 3.2$

$u_3 = 17 = 2^3 + 3.3$

$u_4 = 28 = 2^4 + 3.4$

...

$u_n = 2^n + 3n$

Ta có thể chứng minh công thức dự đoán trên bằng quy nạp

Câu 28. Tìm số hạng tổng quát của dãy số cho bởi công thức truy hồi sau $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2 + \frac{1}{2}n \end{cases}$

A. $u_n = 4 - \frac{1}{2^n}$. **B.** $u_n = 4 - \frac{2}{2^n}$.

C. $u_n = 4 - \frac{1}{2^{n-2}}$. **D.** $u_n = 4 + \frac{1}{2^{n-1}}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$u_2 = 3 + \frac{1}{2} = 3 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 4 - \frac{1}{2}$

$u_3 = 3 + \frac{3}{4} = 3 + \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 4 - \frac{1}{4}$

$u_4 = 3 + \frac{7}{8} = 3 + \left(1 - \frac{1}{8}\right) = 4 - \frac{1}{8}$

...

$u_n = 4 - \frac{1}{2^{n-1}} = 4 - \frac{2}{2^n}$

Ta có thể chứng minh công thức dự đoán trên bằng quy nạp

Câu 29. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1 - u_n} \end{cases}$. Đặt $v_n = \frac{1 + u_n}{u_n}$. Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số (v_n).

A. $v_n = \frac{6}{11 + n}$. **B.** $v_n = \frac{2}{1 + 3n}$.

C. $v_n = \frac{2}{1 - 2n}$. **D.** $v_n = \frac{3}{2} - n$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Ta có $v_n=\dfrac{1+u_n}{u_n}\Rightarrow v_{n+1}=\dfrac{1+u_{n+1}}{u_{n+1}}=\dfrac{1+\dfrac{u_n}{1-u_n}}{\dfrac{u_n}{1-u_n}}=\dfrac{1}{u_n}\Rightarrow v_{n+1}-v_n=\dfrac{1}{u_n}-\dfrac{1+u_n}{u_n}=-1$

Khi đó

$$\left.\begin{array}{l}v_2-v_1=-1\\ v_3-v_2=-1\\ \ldots\\ v_n-v_{n-1}=-1\end{array}\right\}\Rightarrow v_n-v_1=-1(n-1)\Leftrightarrow v_n=1-n+v_1.$$ Ta lại có $v_1=\dfrac{1+u_1}{u_1}=\dfrac{1-2}{-2}=\dfrac{1}{2}$

Vậy $v_n=1-n+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}-n$

Cách 2:Tìm u_n rồi suy ra v_n

$$\left.\begin{array}{l}u_2=-\dfrac{2}{3}\\ u_3=-\dfrac{2}{5}\\ u_4=-\dfrac{2}{7}\\ \ldots\\ u_n=-\dfrac{2}{2n-1}\end{array}\right\}\Rightarrow v_n=\dfrac{1-\dfrac{2}{2n-1}}{\dfrac{2}{2n-1}}=\dfrac{3}{2}-n$$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 30. Xác định công thức tính số hạng tổng quát u_n theo n của dãy số sau: $\begin{cases}u_1=3\\ u_{n+1}=u_n+2\end{cases}$.

A. $u_n=2n+1$. **B.** $u_n=2n-1$.

C. $u_n=2^n+1$. **D.** $u_n=2^n-1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$u_2=u_1+2=3+2=5.$

$u_3=u_2+2=5+2=7.$

$u_4=u_3+2=7+2=9.$

$u_5=u_4+2=9+2=11.$

Từ các số hạng đầu trên, ta dự đoán số hạng tổng quát u_n có dạng:

$u_n=2n+1\quad\forall n\geq 1(*)$

Ta dùng phương pháp chứng minh quy nạp để chứng minh công thức $(*)$ đúng.

Với $n=1;u_1=2.1+1=3$ (đúng). Vậy $(*)$ đúng với $n=1$.

Giả sử $(*)$ đúng với $n=k$. Có nghĩa ta có: $u_k=2k+1\quad(2)$

Ta cần chứng minh $(*)$ đúng với $n=k+1$. Có nghĩa là ta phải chứng minh:

$u_{k+1}=2(k+1)+1=2k+3.$

Thật vậy từ hệ thức xác định dãy số và theo (2) ta có:

$u_{k+1}=u_k+2=2k+1+2=2k+3.$

Vậy $(*)$ đúng khi $n=k+1$. Kết luận $(*)$ đúng với mọi số nguyên dương n.

Câu 31. Xác định công thức tính số hạng tổng quát u_n theo n của dãy số sau: $\begin{cases}u_1=1\\u_{n+1}=u_n+n^3\end{cases}\quad \forall n\geq 1.$

A. $u_n=\dfrac{n^2(n-1)^2}{4}.$ **B.** $u_n=1+\dfrac{n^2(n-1)^2}{4}.$

C. $u_n=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}.$ **D.** $u_n=1-\dfrac{n^2(n-1)^2}{4}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $u_{n+1}=u_n+n^3\Rightarrow u_{n+1}-u_n=n^3.$

Từ đó suy ra:

$u_1=1$

$u_2-u_1=1^3$

$u_3-u_2=2^3$

$u_4-u_3=3^3$

.....

$u_{n-1}-u_{n-2}=(n-2)^3$

$u_n-u_{n-1}=(n-1)^3$

Cộng từng vế n đẳng thức trên:

$u_1+u_2-u_1+u_3-u_2+...+u_{n-1}-u_{n-2}+u_n-u_{n-1}=1+1^3+2^3+3^3+...+(n-2)^3+(n-1)^3$

$\Leftrightarrow u_n=1+1^3+2^3+3^3+...+(n-2)^3+(n-1)^3.$

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được: $1^3+2^3+3^3+...+(n-1)^3=\dfrac{(n-1)^2.n^2}{4}$

Vậy $u_n=1+\dfrac{n^2(n-1)^2}{4}$

Mở rộng phương pháp:

Nếu dãy số (u_n) được cho dưới dạng liệt kê thì ta có thể thử giá trị n vào từng đáp án.

Nếu dãy số (u_n) được cho bởi một hệ thức truy hồi tính vài số hạng đầu của dãy số sau đó ta có thể thử giá trị n vào từng đáp án.

Nguyễn Bảo Vương

Chương 3

Bài 1 DÃY SỐ TĂNG, GIẢM VÀ DÃY SỐ BỊ CHẶN

Lý thuyết

DÃY SỐ TĂNG, DÃY SỐ GIẢM VÀ DÃY SỐ BỊ CHẶN

1. Dãy số tăng, dãy số giảm

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu ta có $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu ta có $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Chú ý: Không phải mọi dãy số đều tăng hoặc giảm. Chẳng hạn, dãy số (u_n) với $u_n = (-3)^n$ tức là dãy $-3, 9, -27, 81, \ldots$ không tăng cũng không giảm.

2. Dãy số bị chặn

Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho

$$\boxed{u_n \le M,\ \forall n \in \mathbb{N}^*}.$$

Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho

$$\boxed{u_n \ge m,\ \forall n \in \mathbb{N}^*}.$$

Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số m, M sao cho

$$\boxed{m \le u_n \le M,\ \forall n \in \mathbb{N}^*}.$$

Lưu y: + Dãy tăng sẽ bị chặn dưới bởi u_1

+ Dãy giảm sẽ bị chặn trên bởi u_1

Nguyễn Bảo Vương

DẠNG 1: XÉT TÍNH TĂNG, GIẢM CỦA DÃY SỐ

A. Phương pháp giải.

Cách 1: Xét hiệu $u_{n+1} - u_n$

- Nếu $u_{n+1} - u_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $u_{n+1} - u_n < 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Cách 2: Khi $u_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ ta xét tỉ số $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

- Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Cách 3: Nếu dãy số (u_n) được cho bởi một hệ thức truy hồi thì ta có thể sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh $u_{n+1} > u_n\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ (hoặc $u_{n+1} < u_n\ \forall n \in \mathbb{N}^*$)

*** Công thức giải nhanh một số dạng toán về dãy số**

Dãy số (u_n) có $u_n = an + b$ tăng khi $a > 0$ và giảm khi $a < 0$

Dãy số (u_n) có $u_n = q^n$

- Không tăng, không giảm khi $q < 0$
- Giảm khi $0 < q < 1$

- Tăng khi $q>1$

Dãy số (u_n) có $u_n=\dfrac{an+b}{cn+d}$ với điều kiện $cn+d>0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$

- Tăng khi $ad-bc>0$
- Giảm khi $ad-bc<0$

Dãy số đan dấu cũng là dãy số không tăng, không giảm

Nếu dãy số (u_n) tăng hoặc giảm thì dãy số $\left(q^n.u_n\right)$ (với $q<0$) không tăng, không giảm

Dãy số (u_n) có $u_{n+1}=au_n+b$ tăng nếu $\begin{cases}a>0\\u_2-u_1>0\end{cases}$; giảm nếu $\begin{cases}a>0\\u_2-u_1<0\end{cases}$ và không tăng không giảm nếu $a<0$

Dãy số (u_n) có $\begin{cases}u_{n+1}=\dfrac{au_n+b}{cu_n+d}\\c,d>0,u_n>0\ \forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$ tăng nếu $\begin{cases}ad-bc>0\\u_2-u_1>0\end{cases}$ và giảm nếu $\begin{cases}ad-bc>0\\u_2-u_1<0\end{cases}$

Dãy số (u_n) có $\begin{cases}u_{n+1}=\dfrac{au_n+b}{cu_n+d}\\c,d>0,u_n>0\ \forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$ không tăng không giảm nếu $ad-bc<0$

Nếu $\begin{cases}(u_n)\uparrow\\(v_n)\uparrow\end{cases}$ thì dãy số $(u_n+v_n)\uparrow$	Nếu $\begin{cases}(u_n)\downarrow\\(v_n)\downarrow\end{cases}$ thì dãy số $(u_n+v_n)\downarrow$
Nếu $\begin{cases}(u_n)\uparrow;u_n\ge 0\ \forall n\in\mathbb{N}^*\\(v_n)\uparrow;v_n\ge 0\ \forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$ thì dãy số $(u_n.v_n)\uparrow$	Nếu $\begin{cases}(u_n)\downarrow;u_n\ge 0\ \forall n\in\mathbb{N}^*\\(v_n)\downarrow;v_n\ge 0\ \forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$ thì dãy số $(u_n.v_n)\downarrow$
Nếu $(u_n)\uparrow$ và $u_n\ge 0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ thì dãy số $\left(\sqrt{u_n}\right)\uparrow$ và dãy số $\left((u_n)^m\right)\uparrow\forall m\in\mathbb{N}^*$	Nếu $(u_n)\downarrow$ và $u_n\ge 0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ thì dãy số $\left(\sqrt{u_n}\right)\downarrow$ và dãy số $\left((u_n)^m\right)\downarrow\forall m\in\mathbb{N}^*$
Nếu $(u_n)\uparrow$ và $u_n>0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ thì dãy số $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)\downarrow$	Nếu $(u_n)\downarrow$ và $u_n>0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ thì dãy số $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)\uparrow$

B. Bài tập tự luận

Câu 1. Xét tính tăng giảm của các dãy số sau:

1). Dãy số (u_n) với $u_n=2n^3-5n+1$

2). Dãy số (u_n) với $u_n=3^n-n.$

3). Dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{n}{n^2+1}.$

4). Dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{\sqrt{n}}{2^n}$

5). Dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{3^n}{n^2}$

6). Dãy số (u_n): Với $u_n=\dfrac{3n^2-2n+1}{n+1}$

7). Dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{n^2+n+1}{2n^2+1}$

8). Dãy số (u_n) với $u_n = n - \sqrt{n^2 - 1}$

9). Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - 1}{n}$

Nguyễn Bảo Vương

Nguyễn Bảo Vương

Câu 2. Xét tính tăng giảm của các dãy số (u_n) được cho bởi hệ thức truy hồi sau:

a). $\begin{cases} u_2 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}, \forall n \in N^* \end{cases}$ b). $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{3 + u_n} \end{cases}$

Câu 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 3n - 2. \end{cases}$

a). Tìm công thức của số hạng tổng quát.

b). Chứng minh dãy số tăng.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 4. Cho dãy số (a_n) định bởi: $\begin{cases} 0 < a_n < 1; \forall n \in N^* \\ a_{n+1}(1-a_n) \geq \frac{1}{4}; \forall n \in N^* \end{cases}$

a). Chứng minh: $a_n > \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \forall n \in N^* (1)$

b). Xét tính đơn điệu của dãy số (a_n).

Nguyễn Bảo Vương

Câu 5. Cho $a > 2$. Xét dãy (U_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = a^2 \\ u_{n+1} = (u_n - a)^2 \ \forall n \in N^* \end{cases}$. Xét tính đơn điệu của dãy (U_n)

.....
.....
.....
.....

Câu 6. Cho dãy số (u_n) định bởi: $u_n = \dfrac{a.n^4+2}{2n^4+5}; n \in N^*$. Định a để dãy số (u_n) tăng.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

C. Bài tập trắc nghiệm

DÀNH CHO HỌC SINH TRUNG BÌNH - KHÁ

Câu 1. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = 3n+6$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng
B. Dãy số giảm
C. Dãy số không tăng, không giảm
D. Cả A, B, C đều sai

Câu 2. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \dfrac{n+5}{n+2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng
B. Dãy số giảm
C. Dãy số không tăng, không giảm
D. Có số hạng $u_{n+1} = \dfrac{n+5}{n+2}+1$

Câu 3. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \dfrac{5^n}{n^2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng
B. Dãy số giảm
C. Dãy số không tăng, không giảm
D. Dãy số là dãy hữu hạn

Câu 4. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào tăng?

A. $u_n = \dfrac{n}{2^n}$.
B. $u_n = \dfrac{n}{2n^2+1}$.
C. $u_n = \dfrac{n^2+1}{3n+2}$.
D. $u_n = (-2)^n\sqrt{n^2-1}$.

Câu 5. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \sqrt{5n+2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng
B. Dãy số giảm
C. Dãy số không tăng, không giảm
D. Cả A, B, C đều sai

Câu 6. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \dfrac{1}{3n+2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng
B. Dãy số giảm
C. Dãy số không tăng, không giảm
D. Cả A, B, C đều đúng

Câu 7. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \dfrac{10}{3^n}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng
B. Dãy số giảm

Nguyễn Bảo Vương

C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** $u_{n-1}=\dfrac{10}{3^n-1}$

Câu 8. Cho dãy số (u_n) biết $u_n=2n^2+3n+1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** $u_{n+1}=2\left(n+1^2\right)+3(n+1)+1$

Câu 9. Cho dãy số (u_n) biết $u_n=(-1)^n\left(n^2+1\right)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** Dãy số là dãy hữu hạn

Câu 10. Cho dãy số (u_n) biết $u_n=n^2-400n$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** Mọi số hạng đều âm

Câu 11. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào tăng?

A. $u_n=\dfrac{1}{3^n}$. **B.** $u_n=\dfrac{1}{2n+1}$. **C.** $u_n=\dfrac{n+1}{3n+2}$. **D.** $u_n=\dfrac{4n-2}{n+3}$.

Câu 12. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào giảm?

A. $u_n=\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$. **B.** $u_n=(-1)^n\left(5^n-1\right)$. **C.** $u_n=-3^n$. **D.** $u_n=\sqrt{n+4}$.

Câu 13. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào không tăng, không giảm?

A. $u_n=n+\dfrac{1}{n}$. **B.** $u_n=5^n+3n$. **C.** $u_n=-3^n$. **D.** $u_n=(-3)^n.\sqrt{n^2+1}$

Câu 14. Cho dãy số (u_n) biết $u_n=5^n-4^n$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** Dãy số có số hạng thứ 100 bé hơn 1

Câu 15. Cho dãy số (u_n) biết $u_n=\dfrac{an+2}{3n+1}$. Tìm tất cả các giá trị của a để dãy số tăng.

A. $a=6$ **B.** $a>6$ **C.** $a<6$ **D.** $a\ge 6$

Câu 16. Cho dãy số (u_n) biết $u_n=2^n-an$. Tìm tất cả các giá trị của a để dãy số tăng.

A. $a=2$ **B.** $a>2$ **C.** $a<2$ **D.** $a\ge 2$

Câu 17. Cho dãy số (u_n) biết $u_n=\dfrac{3^n}{an}$. Tìm tất cả các giá trị của a để dãy số tăng.

A. $\forall a<0$ **B.** Không tồn tại a **C.** $\forall a\in\mathbb{R}^*$ **D.** $a>0$

Câu 18. Cho dãy số (u_n) biết $u_n=\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n+1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** Cả A, B, C đều đúng

Câu 19. Cho dãy số (u_n) biết $u_n=n-\sqrt{n^2+1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** Các số hạng đều dương

Câu 20. Cho dãy số (u_n) biết $u_n=\dfrac{2n^2-n-1}{n+2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** Có số hạng âm

Câu 21. Trong các dãy số có công thức tổng quát sau, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n=\frac{n}{2}-1$ **B.** $u_n=\frac{2}{n}+1$ **C.** $u_n=\frac{2n+1}{5n+2}$ **D.** $u_n=(-1)^n.3^n$

Câu 22. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n=\frac{1}{2^n}$. **B.** $u_n=\frac{3n-1}{n+1}$. **C.** $u_n=n^2$. **D.** $u_n=\sqrt{n+2}$.

Câu 23. Trong các dãy số sau, dãy số nào là dãy số giảm

A. $u_n=\frac{n-3}{n+1}$. **B.** $u_n=\frac{n}{2}$. **C.** $u_n=\frac{2}{n^2}$. **D.** $u_n=\frac{(-1)^n}{3^n}$.

Câu 24. Dãy số nào sau đây là dãy số giảm?

A. $u_n=\frac{5-3n}{2n+3},(n\in\mathbb{N}^*)$. **B.** $u_n=\frac{n-5}{4n+1},(n\in\mathbb{N}^*)$.

C. $u_n=2n^3+3,(n\in\mathbb{N}^*)$. **D.** $u_n=\cos(2n+1),(n\in\mathbb{N}^*)$.

Câu 25. Cho các dãy số sau. Dãy số nào là dãy số tăng?

A. 1; 1; 1; 1; 1; 1;⋯ **B.** 1; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$;⋯

C. 1; 3; 5; 7; 9;⋯ **D.** 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$;⋯

Câu 26. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n=\frac{1}{2^n}$. **B.** $u_n=\frac{1}{n}$. **C.** $u_n=\frac{n+5}{3n+1}$. **D.** $u_n=\frac{2n-1}{n+1}$.

Câu 27. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n=\frac{2}{3^n}$. **B.** $u_n=\frac{3}{n}$. **C.** $u_n=2^n$. **D.** $u_n=(-2)^n$.

Câu 28. Trong các dãy số sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n=n^2$. **B.** $u_n=2n$. **C.** $u_n=n^3-1$. **D.** $u_n=\frac{2n+1}{n-1}$.

Câu 29. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n=\sin n$. **B.** $u_n=\frac{n^2+1}{n}$.

C. $u_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$. **D.** $u_n=(-1)^n.(2^n+1)$.

Câu 30. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số $u_n=\frac{1}{n}-2$ là dãy tăng. **B.** Dãy số $u_n=(-1)^n(2^n+1)$ là dãy giảm.

C. Dãu số $u_n=\frac{n-1}{n+1}$ là dãy giảm. **D.** Dãy số $u_n=2n+\cos\frac{1}{n}$ là dãy tăng.

Câu 31. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Dãy số $u_n=\frac{1-n}{\sqrt{n}}$ là dãy giảm. **B.** Dãy số $u_n=2n^2-5$ là dãy tăng.

C. Dãy số $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ là dãy giảm. **D.** Dãy số $u_n=n+\sin^2 n$ là dãy tăng.

DÀNH CHO HỌC SINH KHÁ – GIỎI

Câu 32. Cho dãy số (u_n) biết $(u_n):\begin{cases}u_1=2\\ u_n=\dfrac{3u_{n-1}+1}{4}\end{cases}\forall n\ge 2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** Cả A, B đều đúng

Câu 33. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào tăng?

A. $u_n=\dfrac{\sin n}{n}$. **B.** $u_n=\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{2n+1}$. **C.** $u_n=\dfrac{3^n}{n^2}$. **D.** $u_n=4n^3-3n^2+1$.

Câu 34. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases}u_1=1\\ u_n=\dfrac{1}{3}u_{n-1}+\dfrac{5}{3}\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** Cả A, B, C đều sai

Câu 35. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=\sqrt{u_n^2+3},\forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** Cả A, B, C đều đúng

Câu 36. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases}u_1=3\\ u_{n+1}=\dfrac{3u_n}{3+u_n}\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** Có $u_{10}=2$

Câu 37. Cho dãy số (u_n) biết $u_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+...+\dfrac{1}{n+n}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** Có hữu hạn số hạng

Câu 38. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases}u_1=1,u_2=2\\ u_{n+2}=au_{n+1}+(1-a)u_n\end{cases}\forall n\in\mathbb{N}^*$. Tìm tất cả các giá trị của a để (u_n) tăng?

A. $a>0$. **B.** $0<a<1$. **C.** $a<1$. **D.** $a>1$.

Câu 39. Cho (u_n) biết $u_n=\dfrac{an+b}{cn+d}$ và $c>0,d>0$. Khi đó điều kiện đủ để dãy số (u_n) tăng là?

A. $a<0,b<0$. **B.** $a>0,b>0$. **C.** $a>0,b<0$. **D.** $a<0,b>0$.

Câu 40. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases}u_1=2\\ u_{n+1}=\dfrac{u_n^2+1}{4}\end{cases}\forall n\in\mathbb{N}^*$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** Là dãy số không đổi

Câu 41. Với giá trị nào của a thì dãy số (u_n), với $u_n=\dfrac{na+2}{n+1}$, là dãy số tăng?

A. $a\ge 2$. **B.** $a<2$. **C.** $a\le 2$. **D.** $a>2$.

Câu 42. Gọi A là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của a thuộc đoạn $[-5;\ 5]$ sao cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{an^2+1}{2n^2+3}$ là một dãy số tăng. Hỏi tập hợp A có bao nhiêu phần tử?

A. 6. **B.** 11. **C.** 5. **D.** Vô số.

Câu 43. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{n+1}{3^n}$. Biết hiệu $u_{n+1}-u_n=\dfrac{\dfrac{a}{c}n+\dfrac{b}{c}}{3^n}$ trong đó $\dfrac{a}{c},\dfrac{b}{c}$ là các phân số tối giản. Tính tổng $\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}$.

A. 1. **B.** -1. **C.** $-\dfrac{1}{3}$. **D.** –3.

Câu 44. Cho dãy số tăng (u_n)với $u_n=\dfrac{an+3}{bn+1}$, với $a,\ b$ là hai số thực dương. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $3b-a<0$. **B.** $a<3b$. **C.** $a+3b>0$. **D.** $a-3b+6>0$.

Câu 45. dãy số (u_n) xác định bởi $u_n=\sqrt{2010+\sqrt{2010+...+\sqrt{2010}}}$ (n dấu căn)Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Tăng **B.** Giảm **C.** Không tăng, không giảm **D.** Bị chặn

DẠNG 2: XÉT TÍNH BỊ CHẶN CỦA DÃY SỐ

A. Phương pháp giải

Phương pháp 1: Chứng minh trực tiếp bằng các phương pháp chứng minh bất đẳng thức

Cách 1: Dãy số (u_n) có $u_n=f(n)$ là hàm số đơn giản.

Ta chứng minh trực tiếp bất đẳng thức $u_n=f(n)\le M,\forall n\in\mathbb{N}^*$ hoặc $u_n=f(n)\ge m,\forall n\in\mathbb{N}^*$

Cách 2: Dãy số (u_n) có $u_n=v_1+v_2+...+v_k+...+v_n$ (tổng hữu hạn)

Ta làm trội $v_k\le a_k-a_{k+1}$

Lúc đó $u_n\le(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+...(a_n-a_{n+1})$

Suy ra $u_n\le a_1-a_{n+1}\le M,\forall n\in\mathbb{N}^*$

Cách 3: Dãy số (u_n) có $u_n=v_1.v_2v_3...v_n$ với $v_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$ (tích hữu hạn)

Ta làm trội $v_k\le\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$

Lúc đó $u_n\le\dfrac{a_2}{a_1}.\dfrac{a_3}{a_2}...\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

Suy ra $u_n\le\dfrac{a_{n+1}}{a_1}\le M,\forall n\in\mathbb{N}^*$

Phương pháp 2: Dự đoán và chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Nếu dãy số (u_n) được cho bởi một hệ thức truy hồi thì ta có thể sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh

Chú ý: ***Nếu dãy số*** (u_n) ***giảm thì bị chặn trên, dãy số*** (u_n) ***tăng thì bị chặn dưới***

*** Công thức giải nhanh một số dạng toán về dãy số bị chặn**

Dãy số (u_n) có $u_n=q^n\quad(|q|\le1)$ bị chặn

Dãy số (u_n) có $u_n=q^n\quad(q<-1)$ không bị chặn

Dãy số (u_n) có $u_n=q^n$ với $q>1$ bị chặn dưới

Dãy số (u_n) có $u_n=an+b$ bị chặn dưới nếu $a>0$ và bị chặn trên nếu $a<0$

Dãy số (u_n) có $u_n = an^2 + bn + c$ bị chặn dưới nếu $a > 0$ và bị chặn trên nếu $a < 0$

Dãy số (u_n) có $u_n = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + ... + a_1 n + a_0$ bị chặn dưới nếu $a_m > 0$ và bị chặn trên nếu $a_m < 0$

Dãy số (u_n) có $u_n = q^n \left(a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + ... + a_1 n + a_0 \right)$ với $a_m \neq 0$ và $q < -1$ không bị chặn

Dãy số (u_n) có $u_n = \sqrt{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + ... + a_1 n + a_0}$ bị chặn dưới với $a_m > 0$

Dãy số (u_n) có $u_n = \sqrt[3]{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + ... + a_1 n + a_0}$ bị chặn dưới nếu $a_m > 0$ và bị chặn trên nếu $a_m < 0$

Dãy số (u_n) có $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ trong đó $P(n)$ và $Q(n)$ là các đa thức, bị chặn nếu bậc của $P(n)$ nhỏ hơn hoặc bằng bậc của $Q(n)$

Dãy số (u_n) có $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ trong đó $P(n)$ và $Q(n)$ là các đa thức, bị chặn dưới hoặc bị chặn trên nếu bậc của $P(n)$ lớn hơn bậc của $Q(n)$

B. Bài tập tự luận

Câu 1. Xét tính bị chặn của các dãy số sau

a) $u_n = \dfrac{1}{2n^2 - 1}$. **b)** $u_n = 3.\cos\dfrac{nx}{3}$. **c)** $u_n = 2n^3 + 1$.

d) $u_n = \dfrac{n^2 + 2n}{n^2 + n + 1}$. **e)** $u_n = n + \dfrac{1}{n}$.

Nguyễn Bảo Vương

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 2. Xét tính tăng hay giảm và bị chặn của dãy số: $u_n = \dfrac{2n-1}{n+3}; n \in N^*$

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 3. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 1 + (n-1).2^n$

a). Viết 5 số hạng đầu của dãy số.

b). Tìm công thức truy hồi.

c). Chứng minh dãy số tăng và bị chặn dưới.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 4. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{2u_n - 1},\ n \geq 1,\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Chứng minh rằng dãy số (u_n) giảm và bị chặn.

2) Hãy xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

Câu 5. Chứng minh rằng dãy số (u_n), với $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n^2-3}$ là một dãy số bị chặn.

Câu 6. Chứng minh dãy số (u_n), với $u_n = \dfrac{7n+5}{5n+7}$ là một dãy số tăng và bị chặn.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 7. Cho dãy số (u_n) với $u_n = n^2 - 4n + 3$.

a). Viết công thức truy hồi của dãy số.

b). Chứng minh dãy số bị chặn dưới.

c). Tính tổng n số hạng đầu của dãy số đã cho.

Câu 8. Xét tính bị chặn của dãy số: $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n ; n \in N*$

Câu 9. Cho $U_n = 1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+...+\frac{1}{n^5} \forall n \in N*$. Chứng minh (U_n) bị chặn trên.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 10. Cho dãy số (u_n) định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 5 \end{cases} \forall n \in N^*$

a). Chứng minh $u_n < 15, \forall n \in N*$.

b). Chứng minh dãy số (u_n) tăng và bị chặn dưới

Câu 11. Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

a). $u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$ b). $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$

c). $u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.5} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ d). $u_n = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + ... + \frac{1}{n(n+3)}$

Nguyễn Bảo Vương

C. Bài tập trắc nghiệm

DÀNH CHO HỌC SINH TRUNG BÌNH - KHÁ

Câu 1. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{-1}{2n+3}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. Dãy số bị chặn. **B.** Dãy số bị chặn trên.

C. Dãy số bị chặn dưới. **D.** Không bị chặn

Câu 2. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{4n+5}{n+1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. Dãy số bị chặn. **B.** Dãy số bị chặn trên.
C. Dãy số bị chặn dưới. **D.** Không bị chặn

Câu 3. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \dfrac{n^3}{n^2+1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. Dãy số bị chặn. **B.** Dãy số bị chặn trên.
C. Dãy số bị chặn dưới. **D.** Không bị chặn

Câu 4. Trong các dãy số sau dãy số nào bị chặn ?

A. Dãy (a_n), với $a_n = \sqrt{n^3+n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

B. Dãy (b_n), với $b_n = n^2 + \dfrac{1}{2n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

C. Dãy (c_n), với $c_n = (-2)^n + 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

D. Dãy (d_n), với $d_n = \dfrac{3n}{n^3+2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 5. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = a\sin n + b\cos n$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. Dãy số không bị chặn. **B.** Dãy số bị chặn.
C. Dãy số bị chặn dưới. **D.** Dãy số bị chặn trên

Câu 6. Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n = (-1)^n$

A. Bị chặn. **B.** Không bị chặn. **C.** Bị chặn trên. **D.** Bị chặn dưới.

Câu 7. Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n = 3n-1$

A. Bị chặn. **B.** Bị chặn trên. **C.** Bị chặn dưới. **D.** Không bị chặn dưới.

Câu 8. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát (u_n) sau, dãy số nào bị chặn?

A. $u_n = n^2$. **B.** $u_n = 2^n$. **C.** $u_n = \dfrac{1}{n}$. **D.** $u_n = \sqrt{n+1}$.

Câu 9. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào bị chặn?

A. $u_n = \dfrac{1}{2^n}$. **B.** $u_n = 3^n$. **C.** $u_n = \sqrt{n+1}$. **D.** $u_n = n^2+1$.

Câu 10. Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$

A. Bị chặn. **B.** Không bị chặn. **C.** Bị chặn trên. **D.** Bị chặn dưới.

Câu 11. Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n), biết: $u_n = \dfrac{2n-13}{3n-2}$

A. Dãy số tăng, bị chặn.
B. Dãy số giảm, bị chặn.
C. Dãy số không tăng không giảm, không bị chặn.
D. Cả A, B, C đều sai.

Câu 12. Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}$

A. Bị chặn. **B.** Không bị chặn. **C.** Bị chặn trên. **D.** Bị chặn dưới.

Câu 13. Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n = 4-3n-n^2$

A. Bị chặn. **B.** Không bị chặn. **C.** Bị chặn trên. **D.** Bị chặn dưới.

Câu 14. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào bị chặn?

A. $u_n = n + \dfrac{1}{n}$. **B.** $u_n = n+1$. **C.** $u_n = \dfrac{n}{2n^2+1}$. **D.** $u_n = n^2+n+1$.

Câu 15. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào bị chặn?

A. $u_n = n - \sin 3n$ **B.** $u_n = \dfrac{n^2+1}{n}$. **C.** $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. **D.** $u_n = n.\sin(3n-1)$.

Câu 16. Trong các dãy số (u_n) cho dưới đây dãy số nào là dãy số bị chặn ?

A. $u_n = \dfrac{n^3}{n^2+1}$. **B.** $u_n = n^2 + 2017$. **C.** $u_n = (-1)^n(n+2)$. **D.** $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$.

Câu 17. Xét tính tăng giảm và bị chặn của dãy số sau: $(u_n): u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$

A. Tăng, bị chặn. **B.** Giảm, bị chặn. **C.** Tăng, chặn dưới. **D.** Giảm, chặn trên.

Câu 18. Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n), biết: $(u_n): u_n = n^3 + 2n + 1$

A. Tăng, bị chặn. **B.** Giảm, bị chặn. **C.** Tăng, chặn dưới. **D.** Giảm, chặn trên.

Câu 19. Cho dãy số $(u_n): u_n = \dfrac{3n-1}{3n+1}$. Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi số nào dưới đây?

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 0.

Câu 20. Khẳng định nào sau đây là **sai?**

A. Mỗi dãy số tăng là một dãy số bị chặn dưới. **B.** Mỗi dãy số giảm là một dãy số bị chặn trên.

C. Mỗi hàm số là một dãy số. **D.** Mọi dãy số hữu hạn đều bị chặn.

Câu 21. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào bị chặn?

A. $u_n = n^2 + 1$. **B.** $u_n = 1 - \dfrac{2}{3n}$. **C.** $u_n = n + \sin n$. **D.** $u_n = \sin^2 n$.

Câu 22. Xét tính bị chặn của dãy số sau $u_n = \dfrac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$

A. Bị chặn **B.** Không bị chặn **C.** Bị chặn trên **D.** Bị chặn dưới

Câu 23. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{-n}{n+1}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Là dãy số không bị chặn.

B. Năm số hạng đầu của dãy là: $\dfrac{-1}{2}; \dfrac{-2}{3}; \dfrac{-3}{4}; \dfrac{-5}{5}; \dfrac{-5}{6}$.

C. Là dãy số tăng.

D. Năm số hạng đầu của dãy là: $\dfrac{-1}{2}; \dfrac{-2}{3}; \dfrac{-3}{4}; \dfrac{-4}{5}; \dfrac{-5}{6}$.

Câu 24. Trong các dãy số sau, dãy nào là dãy số bị chặn?

A. $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$. **B.** $u_n = 2n + \sin(n)$. **C.** $u_n = n^2$. **D.** $u_n = n^3 - 1$.

Câu 25. Chọn kết luận sai:

A. Dãy số $(2n-1)$ tăng và bị chặn trên. **B.** Dãy số $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$ giảm và bị chặn dưới.

C. Dãy số $\left(-\dfrac{1}{n}\right)$ tăng và bị chặn trên. **D.** Dãy số $\left(\dfrac{1}{3.2^n}\right)$ giảm và bị chặn dưới.

Câu 26. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \cos n + \sin n$. Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi số nào dưới đây?

A. 0. **B.** 1.

C. $\sqrt{2}$. **D.** Không bị chặn trên.

Câu 27. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \sin n - \cos n$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới bởi số nào dưới đây?

A. 0. **B.** -1.

C. $-\sqrt{2}$. **D.** Không bị chặn dưới.

Câu 28. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \sqrt{3}\cos n - \sin n$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và chặn trên lần lượt bởi các số m và M nào dưới đây?

A. $m = -2;\ M = 2$. **B.** $m = -\dfrac{1}{2};\ M = \sqrt{3}+1$.

C. $m = -\sqrt{3}+1;\ M = \sqrt{3}-1$. **D.** $m = -\dfrac{1}{2};\ M = \dfrac{1}{2}$.

Câu 29. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = (-1)^n.5^{2n+5}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.

B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.

C. Dãy số (u_n) bị chặn.

D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Câu 30. Cho dãy số (u_n), với $u_n = \dfrac{1}{1.4}+\dfrac{1}{2.5}+...+\dfrac{1}{n(n+3)}, \forall n = 1;\ 2;\ 3\cdots$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.

B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.

C. Dãy số (u_n) bị chặn.

D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Câu 31. Cho dãy số (u_n), với $u_n = \dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+...+\dfrac{1}{n^2}, \forall n = 2;\ 3;\ 4;\cdots$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.

B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.

C. Dãy số (u_n) bị chặn.

D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Câu 32. Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào là dãy số bị chặn?

A. $u_n = \sqrt{n^2+1}$. **B.** $u_n = n+\dfrac{1}{n}$. **C.** $u_n = 2^n+1$. **D.** $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Câu 33. Cho dãy số (u_n), xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{6+u_n},\ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\sqrt{6} \le u_n < \dfrac{5}{2}$. **B.** $\sqrt{6} \le u_n < 3$.

C. $\sqrt{6} \le u_n < 2$. **D.** $\sqrt{6} \le u_n \le 2\sqrt{3}$.

Câu 34. Cho dãy số (u_n), với $u_n = \sin\dfrac{\pi}{n+1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Số hạng thứ $n+1$ của dãy là $u_{n+1} = \sin\dfrac{\pi}{n+1}$.

B. Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.

C. Dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

D. Dãy số (u_n) không tăng không giảm.

DÀNH CHO HỌC SINH KHÁ – GIỎI

Câu 35. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. Dãy số bị chặn. **B.** Dãy số bị chặn trên.
C. Dãy số bị chặn dưới. **D.** Không bị chặn

Câu 36. Xét tính bị chặn của các dãy số sau $u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + ... + \frac{1}{n.(n+2)}$

A. Bị chặn **B.** Không bị chặn **C.** Bị chặn trên **D.** Bị chặn dưới

Câu 37. Xét tính bị chặn của các dãy số sau $u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

A. Bị chặn **B.** Không bị chặn **C.** Bị chặn trên **D.** Bị chặn dưới

Câu 38. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6.2n}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. Dãy số bị chặn dưới. **B.** Dãy số bị chặn trên.
C. Dãy số không bị chặn. **D.** Dãy số bị chặn

Câu 39. Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n), biết: $u_n = \frac{n^2+3n+1}{n+1}$

A. Tăng, bị chặn trên. **B.** Tăng, bị chặn dưới. **C.** Giảm, bị chặn trên. **D.** Cả A, B, C đều sai.

Câu 40. Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n), biết: $u_n = \frac{1}{\sqrt{1+n+n^2}}$

A. Tăng, bị chặn trên. **B.** Tăng, bị chặn dưới. **C.** Giảm, bị chặn. **D.** Cả A, B, C đều sai.

Câu 41. Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n), biết: $u_n = \frac{2^n}{n!}$

A. Tăng, bị chặn trên. **B.** Tăng, bị chặn dưới. **C.** Giảm, bị chặn. **D.** Cả A, B, C đều sai.

Câu 42. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \cos n + \sin n$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới bởi số nào dưới đây?

A. 0. **B.** -1. **C.** $-\sqrt{2}$. **D.** Không bị chặn dưới.

Câu 43. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \sqrt{3}\cos n - \sin n$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và chặn trên lần lượt bởi các số m và M nào dưới đây?

A. $m = -2;\ M = 2$. **B.** $m = -\frac{1}{2};\ M = \sqrt{3}+1$.

C. $m = -\sqrt{3}+1;\ M = \sqrt{3}-1$. **D.** $m = -\frac{1}{2};\ M = \frac{1}{2}$.

Câu 44. Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n), biết: $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$.

A. Dãy số tăng, bị chặn. **B.** Dãy số tăng, bị chặn dưới.
C. Dãy số giảm, bị chặn trên. **D.** Cả A, B, C đều sai.

Câu 45. Xét tính tăng giảm và bị chặn của dãy số sau: $(u_n): \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2},\ \forall n \geq 2 \end{cases}$

A. Tăng, bị chặn. **B.** Giảm, bị chặn.
C. Tăng, chặn dưới, không bị chặn trên. **D.** Giảm, chặn trên, không bị chặn dưới.

Câu 46. Cho hai dãy số $(x_n);(y_n)$ xác định: $\begin{cases} x_1=\sqrt{3} \\ y_1=\sqrt{3} \end{cases}$ và $\begin{cases} x_n=x_{n-1}+\sqrt{1+x_{n-1}^2} \\ y_n=\dfrac{y_{n-1}}{1+\sqrt{1+y_{n-1}^2}} \end{cases}$, $\forall n\geq 2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $1<x_ny_n<2,\ \forall n\geq 2.$

B. $3<x_ny_n<4,\ \forall n\geq 2.$

C. $4<x_ny_n<5,\ \forall n\geq 2.$

D. $2<x_ny_n<3,\ \forall n\geq 2.$

Nguyễn Bảo Vương

Chương 3

Bài 1 DÃY SỐ TĂNG, GIẢM VÀ DÃY SỐ BỊ CHẶN

Lý thuyết

DÃY SỐ TĂNG, DÃY SỐ GIẢM VÀ DÃY SỐ BỊ CHẶN

1. Dãy số tăng, dãy số giảm

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu ta có $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu ta có $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Chú ý: Không phải mọi dãy số đều tăng hoặc giảm. Chẳng hạn, dãy số (u_n) với $u_n = (-3)^n$ tức là dãy $-3, 9, -27, 81, \ldots$ không tăng cũng không giảm.

2. Dãy số bị chặn

Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho

$$\boxed{u_n \le M,\ \forall n \in \mathbb{N}^*}.$$

Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho

$$\boxed{u_n \ge m,\ \forall n \in \mathbb{N}^*}.$$

Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số m, M sao cho

$$\boxed{m \le u_n \le M,\ \forall n \in \mathbb{N}^*}.$$

Lưu y: + Dãy tăng sẽ bị chặn dưới bởi u_1

+ Dãy giảm sẽ bị chặn trên bởi u_1

Nguyễn Bảo Vương

DẠNG 1: XÉT TÍNH TĂNG, GIẢM CỦA DÃY SỐ

A. Phương pháp giải.

Cách 1: Xét hiệu $u_{n+1} - u_n$

- Nếu $u_{n+1} - u_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $u_{n+1} - u_n < 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Cách 2: Khi $u_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ ta xét tỉ số $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

- Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Cách 3: Nếu dãy số (u_n) được cho bởi một hệ thức truy hồi thì ta có thể sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh $u_{n+1} > u_n\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ (hoặc $u_{n+1} < u_n\ \forall n \in \mathbb{N}^*$)

*** Công thức giải nhanh một số dạng toán về dãy số**

Dãy số (u_n) có $u_n = an + b$ tăng khi $a > 0$ và giảm khi $a < 0$

Dãy số (u_n) có $u_n = q^n$

- Không tăng, không giảm khi $q < 0$
- Giảm khi $0 < q < 1$

- Tăng khi $q>1$

Dãy số (u_n) có $u_n=\dfrac{an+b}{cn+d}$ với điều kiện $cn+d>0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$

- Tăng khi $ad-bc>0$
- Giảm khi $ad-bc<0$

Dãy số đan dấu cũng là dãy số không tăng, không giảm

Nếu dãy số (u_n) tăng hoặc giảm thì dãy số $\left(q^n.u_n\right)$ (với $q<0$) không tăng, không giảm

Dãy số (u_n) có $u_{n+1}=au_n+b$ tăng nếu $\begin{cases}a>0\\u_2-u_1>0\end{cases}$; giảm nếu $\begin{cases}a>0\\u_2-u_1<0\end{cases}$ và không tăng không giảm nếu $a<0$

Dãy số (u_n) có $\begin{cases}u_{n+1}=\dfrac{au_n+b}{cu_n+d}\\c,d>0,u_n>0\ \forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$ tăng nếu $\begin{cases}ad-bc>0\\u_2-u_1>0\end{cases}$ và giảm nếu $\begin{cases}ad-bc>0\\u_2-u_1<0\end{cases}$

Dãy số (u_n) có $\begin{cases}u_{n+1}=\dfrac{au_n+b}{cu_n+d}\\c,d>0,u_n>0\ \forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$ không tăng không giảm nếu $ad-bc<0$

Nếu $\begin{cases}(u_n)\uparrow\\(v_n)\uparrow\end{cases}$ thì dãy số $(u_n+v_n)\uparrow$	Nếu $\begin{cases}(u_n)\downarrow\\(v_n)\downarrow\end{cases}$ thì dãy số $(u_n+v_n)\downarrow$
Nếu $\begin{cases}(u_n)\uparrow;u_n\ge 0\ \forall n\in\mathbb{N}^*\\(v_n)\uparrow;v_n\ge 0\ \forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$ thì dãy số $(u_n.v_n)\uparrow$	Nếu $\begin{cases}(u_n)\downarrow;u_n\ge 0\ \forall n\in\mathbb{N}^*\\(v_n)\downarrow;v_n\ge 0\ \forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$ thì dãy số $(u_n.v_n)\downarrow$
Nếu $(u_n)\uparrow$ và $u_n\ge 0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ thì dãy số $\left(\sqrt{u_n}\right)\uparrow$ và dãy số $\left((u_n)^m\right)\uparrow\forall m\in\mathbb{N}^*$	Nếu $(u_n)\downarrow$ và $u_n\ge 0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ thì dãy số $\left(\sqrt{u_n}\right)\downarrow$ và dãy số $\left((u_n)^m\right)\downarrow\forall m\in\mathbb{N}^*$
Nếu $(u_n)\uparrow$ và $u_n>0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ thì dãy số $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)\downarrow$	Nếu $(u_n)\downarrow$ và $u_n>0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ thì dãy số $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)\uparrow$

B. Bài tập tự luận

Câu 1. Xét tính tăng giảm của các dãy số sau:

1). Dãy số (u_n) với $u_n=2n^3-5n+1$

2). Dãy số (u_n) với $u_n=3^n-n.$

3). Dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{n}{n^2+1}.$

4). Dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{\sqrt{n}}{2^n}$

5). Dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{3^n}{n^2}$

6). Dãy số (u_n): Với $u_n=\dfrac{3n^2-2n+1}{n+1}$

7). Dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{n^2+n+1}{2n^2+1}$

8). Dãy số (u_n) với $u_n = n - \sqrt{n^2 - 1}$

9). Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - 1}{n}$

Lời giải

1). Dãy số (u_n) với $u_n = 2n^3 - 5n + 1$

Với mỗi $n \in N^*$, ta có: $u_{n+1} - u_n = \left[2(n+1)^3 - 5(n+1) + 1\right] - \left(2n^3 - 5n + 1\right)$

$= 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 5n - 5 - 1 - 2n^3 + 5n - 1$

$= 6n^2 + 6n - 3 = 6n^2 + 3n + (3n - 3) > 0$ (đúng) do $n \geq 1$.

Vì thế dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

2). Dãy số (u_n) với $u_n = 3^n - n$.

Với mỗi $n \in N^*$, ta có: $u_{n+1} - u_n = \left[3^{n+1} - (n+1)\right] - \left(3^n - n\right)$.

$= 3.3^n - n - 1 - 3^n + n$

$= 2.3^n + 3^n - 3^n - 1 = 2.3^n - 1 > 0$ (đúng) (vì $n \geq 1$.)

Kết luận dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

3). Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n}{n^2 + 1}$.

Với mỗi $n \in N^*$, ta có:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{(n+1)^2 + 1} - \frac{n}{n^2 + 1} = \frac{(n+1)\left(n^2 + 1\right) - n\left[(n+1)^2 + 1\right]}{\left[(n+1)^2 + 1\right]\left(n^2 + 1\right)}$$

$$= \frac{n^3 + n + n^2 + 1 - \left(n^3 + 2n^2 + 2n\right)}{\left[(n+1)^2 + 1\right]\left(n^2 + 1\right)} = \frac{-n^2 - n + 1}{\left[(n+1)^2 + 1\right]\left(n^2 + 1\right)} < 0.$$

Vì $-n^2 - n + 1 < 0 \ \ \forall n \geq 1$, và $\left[(n+1)^2 + 1\right]\left(n^2 + 1\right) > 0 \ \ \forall n \geq 1$.

Kết luận: dãy số (u_n) là một dãy số giảm.

4). Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2^n}$

Dễ thấy $u_n > 0 \ \ \forall n \in N^*$. Xét tỉ số: $\dfrac{u_n}{u_{n+1}}$

Ta có: $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \dfrac{\sqrt{n}}{2^n} . \dfrac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} > 1 \ \ (\forall n \geq 1)$

Thật vậy: $\dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{4n}{n+1} > 1 \Leftrightarrow 4n > n + 1 \Leftrightarrow 3n > 1$ (đúng $\forall n \geq 1$)

Kết luận: (u_n) là một dãy số giảm.

5). Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{3^n}{n^2}$

Dễ thấy $u_n > 0 \ \ \forall n \in N^*$. Xét tỉ số: $\dfrac{u_n}{u_{n+1}}$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{3^n}{n^2}\cdot\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$$

Nếu $\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2>1\Leftrightarrow\left(\frac{n+1}{n}\right)^2>3$

$\Leftrightarrow\frac{n+1}{n}>\sqrt{3}\Leftrightarrow n+1>\sqrt{3}.n\Leftrightarrow\sqrt{3}.n-n<1$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{3}-1\right)n<1\Leftrightarrow n<\frac{1}{\sqrt{3}-1}\Rightarrow n=1$

Nếu $\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2<1\Leftrightarrow\left(\frac{n+1}{n}\right)^2<3\Leftrightarrow\frac{n+1}{n}<\sqrt{3}\Leftrightarrow n+1<\sqrt{3}.n\Leftrightarrow\left(\sqrt{3}-1\right)n>1$

$\Leftrightarrow n>\frac{1}{\sqrt{3}-1}\Leftrightarrow n>2.$

6). Dãy số (u_n): Với $u_n=\frac{3n^2-2n+1}{n+1}$

Ta có: $u_n=3n-5+\frac{6}{n+1}$

Với mọi $n\in N^*$ ta có:

$$u_{n+1}-u_n=\left[3(n+1)-5+\frac{6}{n+2}\right]-\left(3n-5+\frac{6}{n+1}\right)=3+\frac{6}{n+2}-\frac{6}{n+1}$$

$$=3\left[\frac{(n+1)(n+2)+2(n+1)-2(n+2)}{(n+2)(n+1)}\right]=\frac{3\left(n^2+3n\right)}{(n+2)(n+1)}>0.\quad\forall n\geq 1.$$

Kết luận (u_n) là dãy số tăng.

7). Dãy số (u_n) với $u_n=\frac{n^2+n+1}{2n^2+1}=\frac{1}{2}+\frac{n+\frac{3}{2}}{2n^2+1}$

Với mọi $n\in N^*$, xét hiệu số:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}+\frac{n+1+\frac{3}{2}}{2(n+1)^2+1}-\left(\frac{1}{2}+\frac{n+\frac{3}{2}}{2n^2+1}\right)=\frac{n+\frac{5}{2}}{2n^2+2n+3}-\frac{n+\frac{3}{2}}{2n^2+1}$$

$$=\frac{\left(n+\frac{5}{2}\right)\left(2n^2+1\right)-\left(n+\frac{3}{2}\right)\left(2n^2+2n+3\right)}{\left(2n^2+2n+3\right)\left(2n^2+1\right)}=\frac{-5n-2}{\left(2n^2+2n+3\right)\left(2n^2+1\right)}<0\quad\forall n\geq 1.$$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số giảm.

8). Dãy số (u_n) với $u_n=n-\sqrt{n^2-1}$

Ta có: $u_n=n-\sqrt{n^2-1}=\frac{n^2-\left(n^2-1\right)}{n+\sqrt{n^2-1}}=\frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}}$

Dễ dàng ta có: $(n+1)+\sqrt{(n+1)^2-1}>n+\sqrt{n^2-1}$

$$\Rightarrow\frac{1}{(n+1)+\sqrt{(n+1)^2-1}}<\frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}}\Leftrightarrow u_{n+1}<u_n$$

Từ đó suy ra dãy số (u_n) là dãy số giảm.

9). Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-1}{n}$

Ta có: $u_n = \dfrac{(n+1)-1}{n\left(\sqrt{n+1}+1\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+1}$

Dễ dàng ta có: $\sqrt{(n+1)+1}+1 > \sqrt{n+1}+1 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)+1}+1} < \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+1} \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$. Vậy dãy số (u_n) là dãy số giảm.

Câu 2. Xét tính tăng giảm của các dãy số (u_n) được cho bởi hệ thức truy hồi sau:

a). $\begin{cases} u_2 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n+3}, \forall n \in N^* \end{cases}$ b). $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{3+u_n} \end{cases}$

Lời giải

a). $\begin{cases} u_2 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n+3}, \forall n \in N^* \end{cases}$

Vì $u_2 = \sqrt{2u_1+3} = \sqrt{7} > u_1$, ta dự đoán $u_{n+1} > u_n\,(*)$ với mọi $n \geq 1$.

Ta có $(*)$ đúng với $n = 1$.

Giả sử ta có: $u_k > u_{k-1}$. Khi đó ta có:

$u_{k+1} = \sqrt{2u_k+3} > \sqrt{2u_{k-1}+3} = u_k$ (do $u_k > u_{k-1}$)

Suy ra $(*)$ đúng với mọi $n \in N^*$, suy ra (u_n) là dãy số tăng.

Nguyễn Bảo Vương

b). $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{3+u_n} \end{cases}$

Từ hệ thức truy hồi đã cho, dễ thấy $u_n > 0$ với mọi $n \in N^*$

Ta có: $u_2 = \dfrac{2u_1}{3+u_1} = \dfrac{6}{6} = 1 < u_1$.

Ta dự đoán $u_{n+1} < u_n\,(**)$ với mọi $n \in N^*$.

Ta có $(**)$ đúng khi $n = 1$. Giả sử có $u_k < u_{k-1}$

Khi đó $u_{k+1} = \dfrac{2u_k}{3+u_k} = \dfrac{2u_k+6-6}{3+u_k} = 2 - \dfrac{6}{u_k+3}$.

Vì $u_k < u_{k-1}$ nên $\dfrac{6}{u_k+3} > \dfrac{6}{u_{k-1}+3} \Rightarrow u_{k+1} < 2 - \dfrac{6}{u_{k-1}+3} = u_k$.

Suy ra $(**)$ đúng với mọi $n \in N^*$. Vậy (u_n) là dãy số giảm.

Câu 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 3n - 2. \end{cases}$

a). Tìm công thức của số hạng tổng quát.

b). Chứng minh dãy số tăng.

Lời giải

a)Ta có: $u_{n+1}=u_n+3n-2\Rightarrow u_{n+1}-u_n=3n-2$. Từ đó suy ra:

$u_1=5.$

$u_2-u_1=3.1-2.$

$u_3-u_2=3.2-2.$

$u_4-u_3=3.3-2.$

.....

$u_{n-1}-u_{n-2}=3(n-2)-2.$

$u_n-u_{n-1}=3(n-1)-2.$

Cộng từng vế của n đẳng thức trên và rút gọn, ta được:

$u_n=5+3\left[1+2+3+...+(n-1)\right]-2(n-1).$

$\Leftrightarrow u_n=5+\dfrac{3(n-1).n}{2}-2(n-1)=5+\dfrac{3(n-1).n-4(n-1)}{2}$

$\Leftrightarrow u_n=5+\dfrac{(n-1)(3n-4)}{2}$

Vậy: $u_n=5+\dfrac{(n-1)(3n-4)}{2}$.

b) Ta có: $u_{n+1}-u_n=3n-2>0\ \ \forall n\geq 1.$

$\Rightarrow u_{n+1}>u_n\ \ \ \forall n\geq 1.$ Kết luận dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

Câu 4. Cho dãy số (a_n) định bởi: $\begin{cases}0<a_n<1;\forall n\in N^*\\ a_{n+1}(1-a_n)\geq\dfrac{1}{4};\forall n\in N^*\end{cases}$

a). Chứng minh: $a_n>\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2n},\forall n\in N^*(1)$

b). Xét tính đơn điệu của dãy số (a_n).

Lời giải

a). Ta có: $0<a_n<1\Rightarrow a_1>0=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2.1}:(1)$ đúng khi n=1

Giả sử (1) đúng khi n=k$\in N^*$, nghĩa là: $a_k>\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2k};k\in N^*$

Ta cần chứng minh (1) đúng khi $n=k+1$, nghĩa là chứng minh: $a_{k+1}>\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2(k+1)};k\in N^*$

Ta có: $a_k>\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2k}$

$\Rightarrow -a_k<-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2k}\Rightarrow 1-a_k<1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2k}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2k}=\dfrac{k+1}{2k}\Rightarrow\dfrac{1}{1-a_k}>\dfrac{2k}{k+1}$

Theo giả thiết: $a_{k+1}(1-a_k)\geq\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow a_{k+1} \geq \dfrac{1}{4(1-a_k)} > \dfrac{2k}{4(k+1)} = \dfrac{(2k+2)-2}{4(k+1)} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2(k+1)}$: (1) đúng khi $n = k+1$

Vậy: $a_n > \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2n}, \forall n \in N^*$.

b). Ta có: $a_n^2 - a_n + \dfrac{1}{4} = \left(a_n - \dfrac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow a_n(a_n - 1) + \dfrac{1}{4} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{1}{4} \geq a_n(1-a_n)$

Từ giả thiết suy ra: $a_{n+1}(1-a_n) \geq \dfrac{1}{4} \geq a_n(1-a_n) \Rightarrow a_{n+1} \geq a_n; \forall n \in N^*$

Vậy: (a_n) tăng.

Câu 5. Cho $a > 2$. Xét dãy (U_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = a^2 \\ u_{n+1} = (u_n - a)^2 \ \forall n \in N^* \end{cases}$. Xét tính đơn điệu của dãy (U_n)

Lời giải

Ta có $u_1 = a^2 > 2a$ (do $a > 2$)

Giả sử $u_k > 2a$ khi đó $u_k - a > a \Rightarrow u_{k+1} = (u_k - a)^2 > a^2 > 2a$. Vậy $u_n > 2a; \forall n \in N^*$

$u_{n+1} - u_n = (u_n - a)^2 - u_n = u_n^2 - (2a+1)u_n + a^2$

$= (u_n - 2a)(u_n - 1) + (a^2 - 2a) > 0; \forall n \in N^* \Rightarrow (u_n)$ đơn điệu tăng.

Câu 6. Cho dãy số (u_n) định bởi: $u_n = \dfrac{a.n^4 + 2}{2n^4 + 5}; n \in N^*$. Định a để dãy số (u_n) tăng.

Lời giải

Ta có: $u_n = \dfrac{a.n^4 + 2}{2n^4 + 5} = \dfrac{a}{2} + \dfrac{4 - 5a}{2(2n^4 + 3)}; n \in N^*$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4-5a}{2\left[2(n+1)^4 + 5\right]} - \frac{4-5a}{2\left[2n^4 + 5\right]} = \frac{4-5a}{2}\left[\frac{1}{2(n+1)^4 + 5} - \frac{1}{2n^4 + 5}\right]$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{4-5a}{2} \frac{2n^4 + 5 - 2(n+1)^4 - 5}{\left[2(n+1)^4 + 5\right]\left[2(n+1)^4 + 5\right]}$$

$$= (4-5a) \frac{n^4 - (n+1)^4}{\left[2(n+1)^4 + 5\right]\left[2(n+1)^4 + 5\right]}$$

Mà: $\dfrac{n^4 - (n+1)^4}{\left[2(n+1)^4 + 5\right]\left[2(n+1)^4 + 5\right]} < 0; \forall n \in N^*$

Nên: (u_n) tăng $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0; \forall n \in N^* \Leftrightarrow 4 - 5a < 0 \Leftrightarrow a > \dfrac{4}{5}$

C. Bài tập trắc nghiệm

DÀNH CHO HỌC SINH TRUNG BÌNH - KHÁ

Câu 1. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = 3n+6$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng
B. Dãy số giảm
C. Dãy số không tăng, không giảm
D. Cả A, B, C đều sai

Lời giải

Chọn A

Ta có $u_n = 3n+6 \Rightarrow u_{n+1} = 3(n+1)+6 = 3n+9$

Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = (3n+9)-(3n+6) = 3 > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy (u_n) là dãy số tăng

Giải nhanh: Dãy này có dạng $u_n = an+b$; a = 3 > 0 nên dãy số tăng

Câu 2. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \dfrac{n+5}{n+2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng
B. Dãy số giảm
C. Dãy số không tăng, không giảm
D. Có số hạng $u_{n+1} = \dfrac{n+5}{n+2}+1$

Lời giải

Chọn B

Ta có $u_n = \dfrac{n+5}{n+2} = 1+\dfrac{3}{n+2} \Rightarrow u_{n+1} = 1+\dfrac{3}{n+3}$

Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3}{n+3} - \dfrac{3}{n+2} = \dfrac{-3}{(n+2)(n+3)} < 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy (u_n) là dãy số giảm

Giải nhanh: Dãy này có dạng $u_n = \dfrac{an+b}{cn+d}$

Mẫu $n+2 > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $ad-bc = 2-5 = -3 < 0$ nên (u_n) là dãy số giảm

Câu 3. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \dfrac{5^n}{n^2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng
B. Dãy số giảm
C. Dãy số không tăng, không giảm
D. Dãy số là dãy hữu hạn

Lời giải

Chọn A

Ta có $u_n = \dfrac{5^n}{n^2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{5^{n+1}}{(n+1)^2}$

Xét tỉ số $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{5^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \dfrac{n^2}{5^n} = \dfrac{5n^2}{n^2+2n+1} = \dfrac{n^2+2n+1+4n^2-2n-1}{n^2+2n+1}$

$= 1+\dfrac{2n(n-1)+2n^2-1}{n^2+2n+1} > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy (u_n) là dãy số tăng

Câu 4. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào tăng?

A. $u_n = \dfrac{n}{2^n}$. **B.** $u_n = \dfrac{n}{2n^2+1}$. **C.** $u_n = \dfrac{n^2+1}{3n+2}$. **D.** $u_n = (-2)^n\sqrt{n^2-1}$.

Lời giải

Chọn C

Ta xét đáp án A $u_n = \dfrac{n}{2^n} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_2 = \dfrac{2}{4} \end{cases} \Rightarrow u_1 = u_2 \Rightarrow$ **Loại A**

Ta xét đáp án B $u_n = \dfrac{n}{2n^2+1}. \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ u_2 = \dfrac{2}{9} \end{cases} \Rightarrow u_1 > u_2 \Rightarrow$ **Loại B**

Ta xét đáp án C $u_n = \dfrac{n^2+1}{3n+2}.. \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{2}{5} = \dfrac{16}{40} \\ u_2 = \dfrac{5}{8} = \dfrac{25}{40} \end{cases} \Rightarrow u_1 < u_2 \Rightarrow$ **Xét tiếp**

Ta xét đáp án D $u_n = (-2)^n\sqrt{n^2-1}. \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 4\sqrt{3} \\ u_3 = -8\sqrt{8} \end{cases} \Rightarrow u_1 < u_2 > u_3 \Rightarrow$ **Loại D**

Có thể dùng Table trong casio để nhập hàm rồi loại trừ với **Start 1; End 20; Step 1**

Chú ý: Nếu bài này mà giải theo tự luận thì rất dài ta phải xét $u_{n+1} - u_n$ của 4 dãy số

Câu 5. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \sqrt{5n+2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** Cả A, B, C đều sai

Lời giải

Chọn A

* Trắc nghiệm: Tính vài số hạng đầu của dãy số rồi suy ra kết quả

* Tự luận:

Ta có $u_{n+1} - u_n = \sqrt{5(n+1)+2} - \sqrt{5n+2} = \sqrt{5n+7} - \sqrt{5n+2} > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$

Câu 6. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \dfrac{1}{3n+2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** Cả A, B, C đều đúng

Lời giải

Chọn B

Ta có $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{3(n+1)+2} - \dfrac{1}{3n+2} = \dfrac{1}{3n+5} - \dfrac{1}{3n+2} = -\dfrac{3}{(3n+5)(3n+2)} < 0$.

Vậy $u_{n+1} - u_n < 0 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Câu 7. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \dfrac{10}{3^n}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** $u_{n-1} = \dfrac{10}{3^n - 1}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $u_{n+1}-u_n=\frac{10}{3^{n+1}}-\frac{10}{3^n}=\frac{10}{3.3^n}-\frac{10}{3^n}=\frac{-20}{3.3^n}<0$

Vậy $u_{n+1}-u_n<0\Leftrightarrow u_{n+1}<u_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$

Câu 8. Cho dãy số (u_n) biết $u_n=2n^2+3n+1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** $u_{n+1}=2\left(n+1^2\right)+3\left(n+1\right)+1$

Lời giải

Chọn A

Ta có $u_{n+1}-u_n=2\left(n+1\right)^2+3\left(n+1\right)+1-2n^2-3n-1=4n+5>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$

Vậy $u_{n+1}-u_n<0\Leftrightarrow u_{n+1}<u_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$

Câu 9. Cho dãy số (u_n) biết $u_n=(-1)^n\left(n^2+1\right)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** Dãy số là dãy hữu hạn

Lời giải

Chọn C

Dãy không tăng, không giảm vì các số hạng đan dấu

Câu 10. Cho dãy số (u_n) biết $u_n=n^2-400n$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** Mọi số hạng đều âm

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_{n+1}-u_n=\left(n+1\right)^2-400\left(n+1\right)-n^2+400n=2n-399$

Do $2n-399>0$ khi $n>\frac{399}{2}$ và $2n-399<0$ khi $n<\frac{399}{2}$.

Vậy dãy số đã cho không tăng, không giảm

Câu 11. Trong các dãy số $\left(u_n\right)$ cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào tăng?

A. $u_n=\frac{1}{3^n}$. **B.** $u_n=\frac{1}{2n+1}$. **C.** $u_n=\frac{n+1}{3n+2}$. **D.** $u_n=\frac{4n-2}{n+3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{3^n}=\frac{1}{3.3^n}-\frac{1}{3^n}=\frac{-2}{3.3^n}<0$ $\rightarrow$ loại A

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2\left(n+1\right)+1}-\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+1}=\frac{-2}{\left(2n+3\right)\left(2n+1\right)}<0$ $\rightarrow$ loại B

$u_{n+1}-u_n=\frac{n+2}{3n+5}-\frac{n+1}{3n+2}=-\frac{1}{\left(3n+5\right)\left(3n+2\right)}<0$ $\rightarrow$ loại C

$u_{n+1}-u_n=\frac{4n+2}{n+4}-\frac{4n-2}{n+3}=\frac{14}{\left(n+4\right)\left(n+3\right)}>0$ $\rightarrow$ Chọn D

Câu 12. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào giảm?

A. $u_n=\left(\frac{4}{3}\right)^n$. **B.** $u_n=(-1)^n\left(5^n-1\right)$. **C.** $u_n=-3^n$. **D.** $u_n=\sqrt{n+4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$u_{n+1}-u_n=\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}-\left(\frac{4}{3}\right)^n=\frac{4}{3}.\left(\frac{4}{3}\right)^n-\left(\frac{4}{3}\right)^n=\frac{1}{3}.\left(\frac{4}{3}\right)^n>0 \rightarrow$ loại A

Dãy (u_n) với $u_n=(-1)^n\left(5^n-1\right)$. có các số hạng đan dấu nên dãy không tăng, không giảm $\rightarrow$ loại B

$u_{n+1}-u_n=-3^{n+1}+3^n=-3.3^n+3^n=-2.3^n<0 \rightarrow$ Chọn C

$u_{n+1}-u_n=\sqrt{n+5}-\sqrt{n+4}=\frac{1}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+4}}>0 \rightarrow$ loại D

Câu 13. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào không tăng, không giảm?

A. $u_n=n+\frac{1}{n}$. **B.** $u_n=5^n+3n$. **C.** $u_n=-3^n$. **D.** $u_n=(-3)^n.\sqrt{n^2+1}$

Lời giải

Chọn D

Dãy không tăng, không giảm vì các số hạng đan dấu

Dãy trong đáp án A và B tăng, dãy trong đáp án C là dãy giảm

Câu 14. Cho dãy số (u_n) biết $u_n=5^n-4^n$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** Dãy số có số hạng thứ 100 bé hơn 1

Lời giải

Chọn A

Ta có $u_{n+1}-u_n=5^{n+1}-4^{n+1}-5^n+4^n=4\left(5^n-4^n\right)>0, \forall n\in\mathbb{N}^*$

Vậy $u_{n+1}-u_n>0\Leftrightarrow u_{n+1}>u_n, \forall n\in\mathbb{N}^*$

Câu 15. Cho dãy số (u_n) biết $u_n=\frac{an+2}{3n+1}$. Tìm tất cả các giá trị của a để dãy số tăng.

A. $a=6$ **B.** $a>6$ **C.** $a<6$ **D.** $a\geq 6$

Lời giải

Chọn B

Ta có $u_{n+1}-u_n=\frac{an+a+2}{3n+4}-\frac{an+2}{3n+1}=\frac{a-6}{(3n+4)(3n+1)}, \forall n\in\mathbb{N}^*$

Để dãy số tăng thì $u_{n+1}-u_n=\frac{a-6}{(3n+4)(3n+1)}>0, \forall n\in\mathbb{N}^*\Leftrightarrow a>6$

Câu 16. Cho dãy số (u_n) biết $u_n=2^n-an$. Tìm tất cả các giá trị của a để dãy số tăng.

A. $a=2$ **B.** $a>2$ **C.** $a<2$ **D.** $a\geq 2$

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_{n+1}-u_n=2^{n+1}-an-a-2^n+an=2^n-\text{a}, \forall n\in\mathbb{N}^*$

Để dãy số tăng thì $u_{n+1}-u_n=2^n-\mathrm{a}>0,\forall n\in\mathbb{N}^*\Leftrightarrow a<2^n,\forall n\in\mathbb{N}^*\Leftrightarrow a<2,\forall n\in\mathbb{N}^*$

Câu 17. Cho dãy số (u_n) biết $u_n=\dfrac{3^n}{an}$. Tìm tất cả các giá trị của a để dãy số tăng.

A. $\forall a<0$ **B.** Không tồn tại a **C.** $\forall a\in\mathbb{R}^*$ **D.** $a>0$

Lời giải

Chọn D

Ta có $u_{n+1}-u_n=\dfrac{3^{n+1}}{an+a}-\dfrac{3^n}{an}=\dfrac{a.3^n(2n-1)}{a^2(n^2+n)},\forall n\in\mathbb{N}^*$

Để dãy số tăng thì $u_{n+1}-u_n=\dfrac{a.3^n(2n-1)}{a^2(n^2+n)}>0,\forall n\in\mathbb{N}^*\Leftrightarrow a>0$

Câu 18. Cho dãy số (u_n) biết $u_n=\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n+1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** Cả A, B, C đều đúng

Lời giải

Chọn B

Ta có $u_n=\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n+1}}$

Khi đó

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{\sqrt{3n+5}+\sqrt{3n+4}}-\frac{1}{\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n+1}}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n+5}\right)+\left(\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n+4}\right)}{\left(\sqrt{3n+5}+\sqrt{3n+4}\right)\left(\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n+1}\right)}<0,\forall n\in\mathbb{N}^*$$

Câu 19. Cho dãy số (u_n) biết $u_n=n-\sqrt{n^2+1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** Các số hạng đều dương

Lời giải

Chọn A

Ta có $u_n=n-\sqrt{n^2+1}=\dfrac{-1}{n+\sqrt{n^2+1}}$

Khi đó

$$u_{n+1}-u_n=\frac{-1}{n+1+\sqrt{(n+1)^2+1}}+\frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}=\frac{1+\left(\sqrt{(n+1)^2+1}-\sqrt{n^2+1}\right)}{\left(n+1+\sqrt{(n+1)^2+1}\right)\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$$

Vậy dãy số đã cho là dãy tăng

Câu 20. Cho dãy số (u_n) biết $u_n=\dfrac{2n^2-n-1}{n+2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** Có số hạng âm

Lời giải

Chọn A

Ta có $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2n^2+3n}{n+3}-\dfrac{2n^2-n-1}{n+2}=\dfrac{2n^2+10n+3}{(n+3)(n+2)}>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$

Vậy dãy số đã cho là dãy tăng

Câu 21. Trong các dãy số có công thức tổng quát sau, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n=\dfrac{n}{2}-1$ **B.** $u_n=\dfrac{2}{n}+1$ **C.** $u_n=\dfrac{2n+1}{5n+2}$ **D.** $u_n=(-1)^n.3^n$

Lời giải:

Chọn A

Thử từng đáp án với n=1,2 ta được:

A. $u_1=-\dfrac{1}{2};u_2=0$ → tăng

B. $u_1=3;u_2=2$ → giảm (loại)

C. $u_1=\dfrac{3}{7};u_2=\dfrac{5}{12}$ → giảm (loại)

D. $u_1=-3;u_2=9$ → tăng. Tính thêm $u_3=-27$ →giảm (loại)

Câu 22. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n=\dfrac{1}{2^n}$. **B.** $u_n=\dfrac{3n-1}{n+1}$. **C.** $u_n=n^2$. **D.** $u_n=\sqrt{n+2}$.

Lời giải

Ta có $u_n=\dfrac{1}{2^n}<\dfrac{1}{2^{n+1}}=u_{n+1}\ \ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 23. Trong các dãy số sau, dãy số nào là dãy số giảm

A. $u_n=\dfrac{n-3}{n+1}$. **B.** $u_n=\dfrac{n}{2}$. **C.** $u_n=\dfrac{2}{n^2}$. **D.** $u_n=\dfrac{(-1)^n}{3^n}$.

Lời giải

Xét A:

Ta có $u_n=\dfrac{n-3}{n+1};\ u_{n+1}=\dfrac{n-2}{n+2}$. Khi đó: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{n-2}{n+2}-\dfrac{n-3}{n+1}=\dfrac{4}{(n+1)(n+2)}>0\ \ \forall n\in\mathbb{N}$

Vậy (u_n) là dãy số tăng.

Xét B:

Ta có $u_n=\dfrac{n}{2};\ u_{n+1}=\dfrac{n+1}{2}$. Khi đó: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{n+1}{2}-\dfrac{n}{2}=\dfrac{1}{2}>0\ \ \forall n\in\mathbb{N}$

Vậy (u_n) là dãy số tăng.

Xét C:

Ta có $u_n=\dfrac{2}{n^2}$, $u_{n+1}=\dfrac{2}{(n+1)^2}$

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{n^2}{(n+1)^2}<\dfrac{n^2}{n^2}=1,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Vậy (u_n) là dãy giảm.

Xét D:

Ta có $u_1=\dfrac{-1}{3};\ u_2=\dfrac{1}{9};\ u_3=\dfrac{-1}{27}$. Vậy (u_n) là dãy số không tăng không giảm.

Câu 24. Dãy số nào sau đây là dãy số giảm?

A. $u_n=\dfrac{5-3n}{2n+3},(n\in\mathbb{N}^*)$. **B.** $u_n=\dfrac{n-5}{4n+1},(n\in\mathbb{N}^*)$.

C. $u_n=2n^3+3,(n\in\mathbb{N}^*)$. **D.** $u_n=\cos(2n+1),(n\in\mathbb{N}^*)$.

Lời giải

Xét $u_n=\dfrac{5-3n}{2n+3},(n\in\mathbb{N}^*)$, ta có $u_{n+1}-u_n=\dfrac{5-3(n+1)}{2(n+1)+3}-\dfrac{5-3n}{2n+3}=\dfrac{2-3n}{2n+5}-\dfrac{5-3n}{2n+3}$

$=\dfrac{(2-3n)(2n+3)-(2n+5)(5-3n)}{(2n+5)(2n+3)}$

$=\dfrac{4n-6n^2+6-9n-10n+6n^2-25+15n}{(2n+5)(2n+3)}=\dfrac{-19}{(2n+5)(2n+3)}<0,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Vậy $u_n=\dfrac{5-3n}{2n+3},(n\in\mathbb{N}^*)$ là dãy giảm.

Câu 25. Cho các dãy số sau. Dãy số nào là dãy số tăng?

A. 1; 1; 1; 1; 1; 1;⋯ **B.** 1; $-\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{4};\ -\dfrac{1}{8};\ \dfrac{1}{16};\cdots$

C. 1; 3; 5; 7; 9;⋯ **D.** 1; $\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{4};\ \dfrac{1}{8};\ \dfrac{1}{16};\cdots$

Lời giải

Xét đáp án A: 1; 1; 1; 1; 1; 1;⋯ đây là dãy hằng nên không tăng không giảm.

Xét đáp án B: 1; $-\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{4};\ -\dfrac{1}{8};\ \dfrac{1}{16};\cdots\longrightarrow u_1>u_2<u_3\longrightarrow$ loại **B.**

Xét đáp án C: 1; 3; 5; 7; 9;$\cdots\longrightarrow u_n<u_{n+1},\ n\in\mathbb{N}^*\longrightarrow$ **Chọn C.**

Xét đáp án D: 1; $\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{4};\ \dfrac{1}{8};\ \dfrac{1}{16};\cdots\longrightarrow u_1>u_2>u_3\ldots>u_n>\ldots\longrightarrow$ loại **D.**

Câu 26. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n=\dfrac{1}{2^n}$. **B.** $u_n=\dfrac{1}{n}$. **C.** $u_n=\dfrac{n+5}{3n+1}$. **D.** $u_n=\dfrac{2n-1}{n+1}$.

Lời giải

Vì $2^n;n$ là các dãy dương và tăng nên $\dfrac{1}{2^n};\dfrac{1}{n}$ là các dãy giảm, do đó loại các đáp án A và **B.**

Xét đáp án C: $u_n=\dfrac{n+5}{3n+1}\longrightarrow\begin{cases}u_1=\dfrac{3}{2}\\ u_2=\dfrac{7}{6}\end{cases}\longrightarrow u_1>u_2\longrightarrow$ loại **C.**

Xét đáp án D: $u_n=\dfrac{2n-1}{n+1}=2-\dfrac{3}{n+1}\Rightarrow u_{n+1}-u_n=3\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)>0\longrightarrow$ **Chọn D.**

Câu 27. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n=\dfrac{2}{3^n}$. **B.** $u_n=\dfrac{3}{n}$. **C.** $u_n=2^n$. **D.** $u_n=(-2)^n$.

Lời giải

Xét đáp án C: $u_n=2^n\longrightarrow u_{n+1}-u_n=2^{n+1}-2^n=2^n>0\longrightarrow$ **Chọn C.**

Vì $2^n; n$ là các dãy dương và tăng nên $\frac{1}{2^n}; \frac{1}{n}$ là các dãy giảm, do đó loại các đáp án A và **B.**

Xét đáp án D: $u_n = (-2)^n \longrightarrow \begin{cases} u_2 = 4 \\ u_3 = -8 \end{cases} \longrightarrow u_2 > u_3 \longrightarrow$ loại **D.**

Câu 28. Trong các dãy số sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n = n^2$. **B.** $u_n = 2n$. **C.** $u_n = n^3 - 1$. **D.** $u_n = \frac{2n+1}{n-1}$.

Lời giải

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có: $n^2 < (n+1)^2$ nên A sai; $2n < 2(n+1)$ nên B sai; $n^3 - 1 < (n+1)^3 - 1$ nên C sai.

Với $u_n = \frac{2n+1}{n-1}$ thì $u_{n+1} - u_n = \frac{-3}{(n-1).n} < 0$ nên dãy $u_n = \frac{2n+1}{n-1}$ giảm.

Câu 29. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n = \sin n$. **B.** $u_n = \frac{n^2+1}{n}$.

C. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$. **D.** $u_n = (-1)^n.(2^n + 1)$.

Lời giải

A. $u_n = \sin n \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 2\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\sin\frac{1}{2}$ có thể dương hoặc âm phụ thuộc n nên đáp án A sai. Hoặc dễ thấy $\sin n$ có dấu thay đổi trên $\mathbb{N}^*$ nên dãy $\sin n$ không tăng, không giảm.

B. $u_n = \frac{n^2+1}{n} = n + \frac{1}{n} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n^2+n-1}{n(n+1)} > 0$ nên dãy đã cho tăng nên B sai.

C. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$, dãy $\sqrt{n} + \sqrt{n-1} > 0$ là dãy tăng nên suy ra u_n giảm.

Chọn C.

D. $u_n = (-1)^n (2^n + 1)$ là dãy thay dấu nên không tăng không giảm.

Cách trắc nghiệm.

A. $u_n = \sin n$ có dấu thay đổi trên $\mathbb{N}^*$ nên dãy này không tăng không giảm.

B. $u_n = \frac{n^2+1}{n}$, ta có $\begin{cases} n = 1 \to u_1 = 2 \\ n = 2 \to u_2 = \frac{5}{2} \end{cases} \longrightarrow u_1 < u_2 \longrightarrow u_n = \frac{n^2+1}{n}$ không giảm.

C. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$, ta có $\begin{cases} n = 1 \to u_1 = 1 \\ n = 2 \to u_2 = \sqrt{2} - 1 \end{cases} \longrightarrow u_1 > u_2$ nên dự đoán dãy này giảm.

D. $u_n = (-1)^n (2^n + 1)$ là dãy thay dấu nên không tăng không giảm.

Cách CASIO.

- Các dãy $\sin n; (-1)^n (2^n + 1)$ có dấu thay đổi trên $\mathbb{N}^*$ nên các dãy này không tăng không giảm nên loại các đáp án A, **D.**
- Còn lại các đáp án B, C ta chỉ cần kiểm tra một đáp án bằng chức năng TABLE.

Chẳng hạn kiểm tra đáp án B, ta vào chức năng TABLE nhập $F(X) = \frac{X^2+1}{X}$ với thiết lập Start = 1, End = 10, Step = 1.

Nếu thấy cột $F(X)$ các giá trị tăng thì loại B và chọn C, nếu ngược lại nếu thấy cột $F(X)$ các giá trị giảm dần thị chọn B và loại **C.**

Câu 30. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số $u_n=\frac{1}{n}-2$ là dãy tăng.

B. Dãy số $u_n=(-1)^n\left(2^n+1\right)$ là dãy giảm.

C. Dãu số $u_n=\frac{n-1}{n+1}$ là dãy giảm.

D. Dãy số $u_n=2n+\cos\frac{1}{n}$ là dãy tăng.

Lời giải

Xét đáp án A: $u_n=\frac{1}{n}-2\longrightarrow u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}<0\longrightarrow$ loại **A.**

Xét đáp án B: $u_n=(-1)^n\left(2^n+1\right)$ là dãy có dấu thay đổi nên không giảm nên loại **B.**

Xét đáp án C: $u_n=\frac{n-1}{n+1}=1-\frac{2}{n+1}\longrightarrow u_{n+1}-u_n=2\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)>0\longrightarrow$ loại **C.**

Xét đáp án D: $u_n=2n+\cos\frac{1}{n}\longrightarrow u_{n+1}-u_n=\left(2-\cos\frac{1}{n+1}\right)+\cos\frac{1}{n+2}>0$ nên **Chọn D.**

Câu 31. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Dãy số $u_n=\frac{1-n}{\sqrt{n}}$ là dãy giảm.

B. Dãy số $u_n=2n^2-5$ là dãy tăng.

C. Dãy số $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ là dãy giảm.

D. Dãy số $u_n=n+\sin^2 n$ là dãy tăng.

Lời giải

Xét A: $u_n=\frac{1-n}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{n}\longrightarrow u_{n+1}-u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}+\sqrt{n}-\sqrt{n+1}<0$ nên dãy (u_n) là dãy giảm nên C đúng.

Xét đáp án B: $u_n=2n^2-5$ là dãy tăng vì n^2 là dãy tăng nên B đúng. Hoặc

$$u_{n+1}-u_n=2(2n+1)>0 \text{ nên } (u_n) \text{ là dãy tăng.}$$

Xét đáp án C: $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n>0\longrightarrow\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+2}{n+1}.\left(\frac{n+2}{n}\right)^n>1\longrightarrow(u_n)$ là dãy tăng nên **Chọn C.**

Xét đáp án D: $u_n=n+\sin^2 n\longrightarrow u_{n+1}-u_n=\left(1-\sin^2(n+1)\right)+\sin^2 n>0$ nên D đúng.

DÀNH CHO HỌC SINH KHÁ – GIỎI

Câu 32. Cho dãy số (u_n) biết $(u_n):\begin{cases}u_1=2\\ u_n=\frac{3u_{n-1}+1}{4}\end{cases}\forall n\geq 2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng

B. Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm

D. Cả A, B đều đúng

Lời giải

Chọn B

(Dãy số này cho bởi công thức truy hồi nên ta làm theo cách 3)

Ta dự đoán dãy số giảm sau đó ta sẽ chứng minh nó giảm

Ta có $u_n-u_{n-1}=\frac{3u_{n-1}+1}{4}-u_{n-1}=\frac{1-u_{n-1}}{4}$

Do đó, để chứng minh dãy (u_n) giảm ta chứng minh $u_n > 1\ \forall n \geq 1$ bằng phương pháp quy nạp toán học. Thật vậy

Với $n=1 \Rightarrow u_1 = 2 > 1$

Giả sử $u_k > 1 \Rightarrow u_{k+1} = \dfrac{3u_k+1}{4} > \dfrac{3+1}{4} = 1$

Theo nguyên lí quy nạp ta có $u_n > 1\ \forall n \geq 1$

Suy ra $u_n - u_{n-1} < 0 \Leftrightarrow u_n < u_{n-1}\ \ \forall n \geq 2$ hay dãy (u_n) giảm

Giải nhanh: Dãy (u_n) có dạng $u_{n+1} = au_n + b$

Ở đây $a = \dfrac{3}{4} > 0$ và $u_2 - u_1 = \dfrac{7}{4} - 2 = -\dfrac{1}{4} < 0$ Suy ra dãy số giảm

Tổng quát ta có thể chứng minh dãy số $(u_n): \begin{cases} u_1 = c > 1 \\ u_n = \dfrac{au_{n-1}+b}{a+b}, (a,b>0)\ \ \forall n \geq 2 \end{cases}$ giảm tương tự như trên.

Câu 33. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào tăng?

A. $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$. **B.** $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{2n+1}$. **C.** $u_n = \dfrac{3^n}{n^2}$. **D.** $u_n = 4n^3 - 3n^2 + 1$.

Lời giải

Chọn D

* Với $n \in (k2\pi; \pi + k2\pi), k \in \mathbb{N} \Rightarrow \sin n > 0 \Rightarrow \dfrac{\sin n}{n} > 0$

và $n \in (\pi + k2\pi; 2\pi + k2\pi), k \in \mathbb{N} \Rightarrow \sin n < 0 \Rightarrow \dfrac{\sin n}{n} < 0$. Suy ra dãy số trong đáp án A không tăng, không giảm $\rightarrow$ loại A

* Ta có $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{2n+1} = \sqrt{\dfrac{n^2+1}{(2n+1)^2}}$. Xét dãy (v_n) với $v_n = \dfrac{n^2+1}{(2n+1)^2}$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n^2+2n+2}{4n^2+12n+9} - \frac{n^2+1}{4n^2+4n+1} = \frac{4n^2-2n-7}{(2n+3)^2(2n+1)^2}$$

Do $v_{n+1} - v_n$ vừa nhận giá trị âm lẫn dương nên dãy số (v_n) không tăng, không giảm $\rightarrow$ loại B

* $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3.3^n}{(n+1)^2} - \dfrac{3^n}{n^2} = \dfrac{3^n(2n^2-2n-1)}{(n+1)^2 n^2}$. Do $u_{n+1} - u_n$ nhận giá trị âm lẫn dương nên dãy đã cho không tăng, không giảm $\rightarrow$ loại C

* Theo phương pháp loại trừ ta chọn D

Câu 34. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \dfrac{1}{3}u_{n-1} + \dfrac{5}{3} \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** Cả A, B, C đều sai

Lời giải

Chọn A

Ta có $u_1 < u_2 < u_3$. Dự đoán dãy số đã cho tăng, ta chứng minh bằng quy nạp

Từ giả thiết thì $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Giả sử $u_k > u_{k-1}, k \geq 2$. Ta chứng minh $u_{k+1} > u_k$

Thật vậy: $u_{k+1} - u_k = \frac{1}{3}(u_k - u_{k-1}) > 0 \Leftrightarrow u_{k+1} > u_k$. Vậy dãy đã cho là dãy tăng

Câu 35. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 3}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** Cả A, B, C đều đúng

Lời giải

Chọn A

Ta có $0 < u_1 < u_2 < u_3$. Dự đoán dãy số đã cho tăng, ta chứng minh bằng quy nạp

Từ giả thiết thì $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Giả sử $u_k > u_{k-1}, k \geq 2$. Ta chứng minh $u_{k+1} > u_k$

Thật vậy: $u_{k+1} - u_k = \sqrt{u_k^2 + 3} - \sqrt{u_{k-1}^2 + 3} = \frac{(u_k - u_{k-1})(u_k + u_{k-1})}{\sqrt{u_k^2 + 3} + \sqrt{u_{k-1}^2 + 3}} > 0 \Leftrightarrow u_{k+1} > u_k$. vậy dãy đã cho là dãy tăng

Câu 36. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n}{3 + u_n} \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** Có $u_{10} = 2$

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn B

Ta có $u_1 > u_2 > u_3$. Dự đoán dãy số đã cho giảm, ta chứng minh bằng quy nạp

Từ giả thiết thì $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Giả sử $u_k < u_{k-1}, k \geq 2$. Ta chứng minh $u_{k+1} < u_k$

Thật vậy: $u_{k+1} - u_k = \frac{3u_k}{3 + u_k} - \frac{3u_{k-1}}{3 + u_{k-1}} = \frac{9(u_k - u_{k-1})}{(3 + u_k)(3 + u_{k-1})} < 0 \Leftrightarrow u_{k+1} < u_k$. vậy dãy đã cho là dãy giảm

Câu 37. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** Có hữu hạn số hạng

Lời giải

Chọn A

Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{4n^2 + 3n + 1}{2(2n+1)(n+1)^2} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Câu 38. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ u_{n+2} = au_{n+1} + (1-a)u_n \ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của a để (u_n) tăng?

A. $a > 0$. **B.** $0 < a < 1$. **C.** $a < 1$. **D.** $a > 1$.

Lời giải

Chọn D

Xét hiệu $u_{n+2}-u_{n+1}=au_{n+1}+(1-a)u_n-u_{n+1}=(a-1)(u_{n+1}-u_n)$

$\Rightarrow u_3-u_2=(a-1)(u_2-u_1)=(a-1)$

$\Rightarrow u_4-u_3=(a-1)(u_3-u_2)=(a-1)^2$

...

$\Rightarrow u_{n+1}-u_n=(a-1)^{n-1}>0$

Để dãy số (u_n) tăng suy ra $a>1$.

Câu 39. Cho (u_n) biết $u_n=\dfrac{an+b}{cn+d}$ và $c>0,d>0$. Khi đó điều kiện đủ để dãy số (u_n) tăng là?

A. $a<0,b<0.$ **B.** $a>0,b>0.$ **C.** $a>0,b<0.$ **D.** $a<0,b>0.$

Lời giải

Chọn C

Xét hiệu $u_{n+1}-u_n=\dfrac{ad-bc}{\left[c(n+1)+d\right](cn+d)}$

Câu 40. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases}u_1=2\\ u_{n+1}=\dfrac{u_n^2+1}{4}\end{cases}\forall n\in\mathbb{N}^*$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** Là dãy số không đổi

Lời giải

Chọn B

Dự đoán dãy giảm sau đó chứng minh $u_{n+1}-u_n<0$ bằng quy nạp toán học

Chú ý: Từ giả thiết suy ra $u_n>0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$

Ta có $u_2-u_1=\dfrac{5}{4}-2=\dfrac{-3}{4}<0$

Giả sử $u_{k+1}-u_k<0,\forall k\geq 1$

Xét hiệu $u_{k+2}-u_{k+1}=\dfrac{u_{k+1}^2+1}{4}-\dfrac{u_k^2+1}{4}=\dfrac{1}{4}(u_{k+1}+u_k)(u_{k+1}-u_k)<0$

Theo nguyên lý quy nạp suy ra $u_{n+1}-u_n<0,\forall n\in\mathbb{N}^*$

Vậy dãy số (u_n) giảm

Câu 41. Với giá trị nào của a thì dãy số (u_n), với $u_n=\dfrac{na+2}{n+1}$, là dãy số tăng?

A. $a\geq 2$. **B.** $a<2$. **C.** $a\leq 2$. **D.** $a>2$.

Lời giải:

Chọn D.

Ta có: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{a-2}{(n+2)(n+1)}>0\Leftrightarrow a>2$.

Câu 42. Gọi A là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của a thuộc đoạn $[-5;\ 5]$ sao cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{an^2+1}{2n^2+3}$ là một dãy số tăng. Hỏi tập hợp A có bao nhiêu phần tử?

A. 6. **B.** 11. **C.** 5. **D.** Vô số.

Lời giải:

Chọn C.

Ta có $u_n=\frac{a}{2}+\frac{2-3a}{2\left(2n^2+3\right)}$ nên $u_{n+1}-u_n=\frac{2-3a}{2}\left[\frac{1}{2\left(n+1\right)^2+3}-\frac{1}{2n^2+3}\right]$, với mọi $n=1,\ 2,\ldots$

Với $n\in\mathbb{N}^*$ thì $\frac{1}{2\left(n+1\right)^2+3}-\frac{1}{2n^2+3}<0$ nên dãy số tăng khi $u_{n+1}-u_n>0$ hay $a>\frac{2}{3}$.

Trên đoạn $\left[-5;\ 5\right]$, ta có 5 giá trị nguyên của a là 1; 2; 3; 4; 5.

Câu 43. Cho dãy số $\left(u_n\right)$ với $u_n=\frac{n+1}{3^n}$. Biết hiệu $u_{n+1}-u_n=\frac{\frac{a}{c}n+\frac{b}{c}}{3^n}$ trong đó $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ là các phân số tối giản. Tính tổng $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$.

A. 1. **B.** -1. **C.** $-\frac{1}{3}$. **D.** –3.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1: Ta có $u_{n+1}-u_n=\frac{n+2}{3^{n+1}}-\frac{n+1}{3^n}=\frac{-2n-1}{3.3^n}=\frac{-\frac{2}{3}n-\frac{1}{3}}{3^n}$. Do đó $\frac{a}{c}=-\frac{2}{3}$, $\frac{b}{c}=-\frac{1}{3}$, suy ra $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=-1$.

Cách 2: Thay $n=1$ vào $u_{n+1}-u_n=\frac{\frac{a}{c}n+\frac{b}{c}}{3^n}$, ta có $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=3\left(u_2-u_1\right)=-1$.

Câu 44. Cho dãy số tăng $\left(u_n\right)$ với $u_n=\frac{an+3}{bn+1}$, với a, b là hai số thực dương. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $3b-a<0$. **B.** $a<3b$. **C.** $a+3b>0$. **D.** $a-3b+6>0$.

Lời giải:

Chọn A.

Ta có: $u_{n+1}-u_n=\frac{a\left(n+1\right)+3}{b\left(n+1\right)+1}-\frac{an+3}{bn+1}=\frac{\left(an+a+3\right)\left(bn+1\right)-\left(an+3\right)\left(bn+b+1\right)}{\left(bn+b+1\right)\left(bn+1\right)}$

$=\frac{abn^2+an+abn+3bn+a+3-\left(abn^2+abn+an+3bn+3b+3\right)}{\left(bn+b+1\right)\left(bn+1\right)}$

$=\frac{a-3b}{\left(bn+b+1\right)(bn+1)}$.

Do đó dãy $\left(u_n\right)$ tăng khi $a-3b>0.\ \Leftrightarrow 3b-a<0$

Câu 45. dãy số (u_n) xác định bởi $u_n=\sqrt{2010+\sqrt{2010+...+\sqrt{2010}}}$ (n dấu căn)Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Tăng **B.** Giảm **C.** Không tăng, không giảm **D.** Bị chặn sai

Lời giải:

Chọn A.

Ta có $u_{n+1}^2=2010+u_n \Rightarrow u_{n+1}-u_n=-u_{n+1}^2+u_{n+1}+2010$

Bằng quy nạp ta chứng minh được $u_n<\dfrac{1+\sqrt{8041}}{2}\ \ \forall n$

Suy ra $u_{n+1}-u_n>0\Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy tăng

DẠNG 2: XÉT TÍNH BỊ CHẶN CỦA DÃY SỐ

A. Phương pháp giải

Phương pháp 1: Chứng minh trực tiếp bằng các phương pháp chứng minh bất đẳng thức

Cách 1: Dãy số (u_n) có $u_n=f(n)$ là hàm số đơn giản.

Ta chứng minh trực tiếp bất đẳng thức $u_n=f(n)\le M,\forall n\in\mathbb{N}^*$ hoặc $u_n=f(n)\ge m,\forall n\in\mathbb{N}^*$

Cách 2: Dãy số (u_n) có $u_n=v_1+v_2+...+v_k+...+v_n$ (tổng hữu hạn)

Ta làm trội $v_k\le a_k-a_{k+1}$

Lúc đó $u_n\le(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+...(a_n-a_{n+1})$

Suy ra $u_n\le a_1-a_{n+1}\le M,\forall n\in\mathbb{N}^*$

Cách 3: Dãy số (u_n) có $u_n=v_1.v_2v_3...v_n$ với $v_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$ (tích hữu hạn)

Ta làm trội $v_k\le\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$

Lúc đó $u_n\le\dfrac{a_2}{a_1}.\dfrac{a_3}{a_2}...\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

Suy ra $u_n\le\dfrac{a_{n+1}}{a_1}\le M,\forall n\in\mathbb{N}^*$

Phương pháp 2: Dự đoán và chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Nếu dãy số (u_n) được cho bởi một hệ thức truy hồi thì ta có thể sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh

Chú ý: ***Nếu dãy số*** (u_n) ***giảm thì bị chặn trên, dãy số*** (u_n) ***tăng thì bị chặn dưới***

*** Công thức giải nhanh một số dạng toán về dãy số bị chặn**

Dãy số (u_n) có $u_n=q^n\ \ (|q|\le 1)$ bị chặn

Dãy số (u_n) có $u_n=q^n\ \ (q<-1)$ không bị chặn

Dãy số (u_n) có $u_n=q^n$ với $q>1$ bị chặn dưới

Dãy số (u_n) có $u_n=an+b$ bị chặn dưới nếu $a>0$ và bị chặn trên nếu $a<0$

Dãy số (u_n) có $u_n=an^2+bn+c$ bị chặn dưới nếu $a>0$ và bị chặn trên nếu $a<0$

Dãy số (u_n) có $u_n=a_mn^m+a_{m-1}n^{m-1}+...+a_1n+a_0$ bị chặn dưới nếu $a_m>0$ và bị chặn trên nếu $a_m<0$

Dãy số (u_n) có $u_n=q^n\left(a_mn^m+a_{m-1}n^{m-1}+...+a_1n+a_0\right)$ với $a_m\ne 0$ và $q<-1$ không bị chặn

Dãy số (u_n) có $u_n=\sqrt{a_m n^m+a_{m-1}n^{m-1}+...+a_1 n+a_0}$ bị chặn dưới với $a_m>0$

Dãy số (u_n) có $u_n=\sqrt[3]{a_m n^m+a_{m-1}n^{m-1}+...+a_1 n+a_0}$ bị chặn dưới nếu $a_m>0$ và bị chặn trên nếu $a_m<0$

Dãy số (u_n) có $u_n=\dfrac{P(n)}{Q(n)}$ trong đó $P(n)$ và $Q(n)$ là các đa thức, bị chặn nếu bậc của $P(n)$ nhỏ hơn hoặc bằng bậc của $Q(n)$

Dãy số (u_n) có $u_n=\dfrac{P(n)}{Q(n)}$ trong đó $P(n)$ và $Q(n)$ là các đa thức, bị chặn dưới hoặc bị chặn trên nếu bậc của $P(n)$ lớn hơn bậc của $Q(n)$

B. Bài tập tự luận

Câu 1. Xét tính bị chặn của các dãy số sau

a) $u_n=\dfrac{1}{2n^2-1}$. **b)** $u_n=3.\cos\dfrac{nx}{3}$. **c)** $u_n=2n^3+1$.

d) $u_n=\dfrac{n^2+2n}{n^2+n+1}$. **e)** $u_n=n+\dfrac{1}{n}$.

Lời giải

a) $u_n=\dfrac{1}{2n^2-1}$ Có $2n^2-1\ge 1\Rightarrow u_n=\dfrac{1}{2n^2-1}\le 1,\ \forall n\ge 1$. Vậy dãy số bị chặn trên bởi 1.

b) $u_n=3.\cos\dfrac{nx}{3}$ có $-1\le\cos\dfrac{nx}{3}\le 1\Rightarrow -3\le 3.\cos\dfrac{nx}{3}\le 3$.

Vậy dãy số bị chặn dưới bởi -3; chặn trên bởi 3.

c) $u_n=2n^3+1$ có $2n^3+1\ge 3,\ \forall n\ge 1$. Vậy dãy số bị chặn dưới bởi 3.

d) $u_n=\dfrac{n^2+2n}{n^2+n+1}$ có $u_n=\dfrac{n^2+2n}{n^2+n+1}=1+\dfrac{n-1}{n^2+n+1}\ge 1,\ \forall n\ge 1$.

Vậy dãy số bị chặn dưới bởi 1.

e) $u_n=n+\dfrac{1}{n}$ có $u_n=n+\dfrac{1}{n}\ge 2\sqrt{n.\dfrac{1}{n}}=2,\ \forall n>0$. Vậy dãy số bị chặn bởi 2.

Câu 2. Xét tính tăng hay giảm và bị chặn của dãy số: $u_n=\dfrac{2n-1}{n+3};n\in N^*$

Lời giải

Ta có: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2n+1}{n+4}-\dfrac{2n-1}{n+3}=\dfrac{2n^2+7n+3-2n^2-7n+4}{(n+4)(n+3)}=\dfrac{7}{(n+4)(n+3)}>0;\forall n\in N^*$

Vậy: (u_n) là dãy số tăng.

Ta có $u_n=\dfrac{2n-1}{n+3}=\dfrac{2(n+3)-7}{n+3}=2-\dfrac{7}{n+3}$, suy ra:

$\forall n\in\mathbb{N}^*,u_n<2$ nên (u_n) bị chặn trên. Vì (u_n) là dãy số tăng $\forall n\in\mathbb{N}^*,u_1=\dfrac{1}{4}\le u_n$ Nên (u_n) bị chặn dưới. Vậy (u_n) bị chặn.

Câu 3. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 1+(n-1).2^n$

a). Viết 5 số hạng đầu của dãy số.

b). Tìm công thức truy hồi.

c). Chứng minh dãy số tăng và bị chặn dưới.

Lời giải

a).Ta có:

$u_1 = 1+(1-1).2^1 = 1$

$u_2 = 1+(2-1).2^2 = 5$

$u_3 = 1+(3-1).2^3 = 17$

$u_4 = 1+(4-1).2^4 = 49$

$u_5 = 1+(5-1).2^5 = 129$

b). Xét hiệu: $u_{n+1}-u_n = 1+n.2^{n+1}-\left(1+(n+1).2^n\right)$

$= 2n.2^n-(n-1).2^n = (2n-n+1).2^n = (n+1).2^n \Rightarrow u_{n+1} = u_n+(n+1)2^n.$

Vậy công thức truy hồi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n+(n+1).2^n \end{cases} \quad \forall n \geq 1.$

c). Ta có: $u_{n+1}-u_n = (n+1).2^n > 0 \quad \forall n \geq 1.$ Từ đó suy ra dãy số (u_n) là dãy số tăng.

Ta có: $u_n = 1+(n-1).2^n \geq 1 \quad \forall n \geq 1.$ Kết luận (u_n) là dãy số bị chặn dưới.

Câu 4. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{2u_n-1}, \ n \geq 1, \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Chứng minh rằng dãy số (u_n) giảm và bị chặn.

2) Hãy xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

Lời giải

1) Ta có $u_1 = 2; \ u_2 = \dfrac{4}{3} > 1.$

Giả sử $u_k > 1, \ k \geq 2$ (giả thiết quy nạp)

Ta sẽ chứng minh $u_{k+1} > 1 \quad (*)$

Theo công thức truy hồi $(*) \Leftrightarrow \dfrac{u_k^2}{2u_k-1} > 1 \Leftrightarrow u_k^2 > 2u_k-1$ vì $(2u_k-1>0)$

$\Leftrightarrow u_k^2-2u_k+1 > 0 \Leftrightarrow (u_k-1)^2 > 0$ đúng (vì $u_k > 1$)

Vậy $u_n > 1, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$, suy ra (u_n) bị chặn dưới.

+) Xét hiệu $u_{n+1}-u_n = \dfrac{u_n^2}{2u_n-1}-u_n = \dfrac{u_n(1-u_n)}{2u_n-1} < 0$ (vì $u_k > 1$) $\Rightarrow (u_n)$ giảm

$\Rightarrow 2 = u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > \ldots \Rightarrow (u_n)$ bị chặn trên.

Vậy dãy số (u_n) giảm và bị chặn.

2) Từ $u_{n+1}=\dfrac{u_n^2}{2u_n-1}\Rightarrow\dfrac{1}{u_{n+1}}=\dfrac{2}{u_n}-\dfrac{1}{u_n^2}=-\left(\dfrac{1}{u_n^2}-\dfrac{2}{u_n}+1\right)=-\left(\dfrac{1}{u_n}-1\right)^2$.

Đặt $v_n=\dfrac{1}{u_n}-1\Rightarrow v_1=\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{1}{2}$ và $v_{n+1}=-v_n^2$.

Từ đó suy ra $v_1=-2^{-1};\ v_2=-2^{-2};\ v_3=-2^{-4};\ v_4=-2^{-8}$.

Giả sử $v_n=-2^{-2^{n-1}}$, $n\geq 4$ (giả thiết quy nạp).

$\Rightarrow v_{n+1}=-\left(2^{-2^{n-1}}\right)^2=-2^{-2^n}$. Do đó $v_n=-2^{-2^n},\ \forall n$

Mà $v_n=\dfrac{1}{u_n}-1\Rightarrow u_n=\dfrac{1}{1+v_n}=\dfrac{1}{1-2^{-2^{n-1}}}=\dfrac{2^{2^{n-1}}}{2^{2^{n-1}}-1}$.

Vậy số hạng tổng quát của dãy số (u_n) là $u_n=\dfrac{2^{2^{n-1}}}{2^{2^{n-1}}-1}$.

Câu 5. Chứng minh rằng dãy số (u_n), với $u_n=\dfrac{n^2+1}{2n^2-3}$ là một dãy số bị chặn.

Lời giải

Công thức u_n được viết lại: $u_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2\left(2n^2-3\right)}\quad(1)$

Dễ thấy $\forall n\geq 1$ ta có: $-1\leq\dfrac{1}{2n^2-3}\leq\dfrac{1}{5}$. Do đó từ (1) suy ra $-2\leq u_n\leq 1\quad(\forall n\geq 1)$

Từ đó suy ra (u_n) là một dãy số bị chặn.

Câu 6. Chứng minh dãy số (u_n), với $u_n=\dfrac{7n+5}{5n+7}$ là một dãy số tăng và bị chặn.

Lời giải

Công thức u_n được viết lại: $u_n=\dfrac{7}{5}-\dfrac{24}{5(5n+7)}$

Xét hiệu số: $u_{n+1}-u_n=\left(\dfrac{7}{5}-\dfrac{24}{5\left[5(n+1)+7\right]}\right)-\left(\dfrac{7}{5}-\dfrac{24}{5(5n+7)}\right)$

$=\dfrac{24}{5}\left(\dfrac{1}{5n+7}-\dfrac{1}{5(n+1)+7}\right)>0\quad\forall n\geq 1.\ \Rightarrow u_{n+1}>u_n$. Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng.

Ta có: $0<\dfrac{1}{5n+7}\leq\dfrac{1}{12}\quad\forall n\geq 1\ \Leftrightarrow 0>-\dfrac{24}{5(5n+7)}\geq-\dfrac{2}{5}\ \Leftrightarrow\dfrac{7}{5}>\dfrac{7}{5}-\dfrac{24}{5(5n+7)}\geq\dfrac{7}{5}-\dfrac{2}{5}$

$\Leftrightarrow 1\leq u_n<\dfrac{7}{5}$. Suy ra (u_n) là một dãy số bị chặn.

Kết luận (u_n) là một dãy số tăng và bị chặn.

Câu 7. Cho dãy số (u_n) với $u_n=n^2-4n+3$.

a). Viết công thức truy hồi của dãy số.

b). Chứng minh dãy số bị chặn dưới.

c). Tính tổng n số hạng đầu của dãy số đã cho.

Lời giải

a).Ta có: $u_1 = 1^2 - 4.1 + 3 = 0.$

Xét hiệu: $u_{n+1} - u_n = \left[(n+1)^2 - 4(n+1) + 3\right] - \left(n^2 - 4n + 3\right) = 2n - 3 \Rightarrow u_{n+1} = u_n + 2n - 3.$

Vậy công thức truy hồi: $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 2n - 3 \end{cases} \quad \forall n \geq 1.$

b). Ta có: $u_n = n^2 - 4n + 4 - 1 = (n-2)^2 - 1 \geq -1 \quad \forall n \geq 1.$

Vậy dãy số bị chặn dưới, nhưng không bị chặn trên.

c). Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = 1^2 - 4.1 + 3 \\ u_2 = 2^2 - 4.2 + 3 \\ u_3 = 3^2 - 4.2 + 3 \\ \ldots \\ u_n = n^2 - 4.n + 3 \end{array}\right\} +$$

$$S_n = \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2\right) - 4(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + 3n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + 3n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) - 12n(n+1) + 18n}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n-11) + 18n}{6}$$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 8. Xét tính bị chặn của dãy số: $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n ; n \in N^*$

Lời giải

Ta có: $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 0; \forall n \in N^*$ nên (u_n) bị chặn dưới (1).

Lại có: $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{n!}{k!(n-k)!n^k}\right]$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{1}{k!} . \frac{(n-k+1)}{n} . \frac{(n-k+2)}{n} \ldots \frac{(n-k+k)}{n}\right] \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}; n \in N^*$$

Mà: $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{(n-1).n}$

$$= 2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 3 - \frac{1}{n} < 3; \forall n \in N^*$$

Suy ra: $u_n < 3, \forall n \in N^*$ nên dãy số (u_n) bị chặn trên (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ dãy số (u_n) bị chặn.

Câu 9. Cho $U_n = 1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+...+\frac{1}{n^5}\forall n \in N^*$. Chứng minh (U_n) bị chặn trên.

Lời giải

Với $k = 2,3,...,n$ ta có $k^5 > k(k-1) > 0$ (do $k^5 - k(k-1) = k^2(k^3-1)+k > 0$)

$\Rightarrow \frac{1}{k^5} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

Do đó:

$1 = 1$

$\frac{1}{2^5} < 1 - \frac{1}{2}$

$\frac{1}{3^5} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

.....

$\frac{1}{n^5} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$

$\Rightarrow U_n \le 2 - \frac{1}{n} < 2 \forall n \in N^* \Rightarrow (U_n)$ bị chặn trên

Câu 10. Cho dãy số (u_n) định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 5 \end{cases} \forall n \in N^*$

a). Chứng minh $u_n < 15, \forall n \in N^*$.

b). Chứng minh dãy số (u_n) tăng và bị chặn dưới

Lời giải

a). Ta có $u_1 = 1 < 15$, giả sử $u_k < 15$, khi đó $u_{k+1} = \frac{2}{3}u_k + 5 < \frac{2}{3}.(15) + 5 = 15$

Vậy $u_n < 15 \forall, n \in N^*(1)$

b). Ta có $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + 5 - u_n = \frac{15-u_n}{3} > 0, \forall n \in N^*(do(1))$

$\Rightarrow$ dãy số (u_n) tăng $\Rightarrow u_n \ge u_1 = 1 \Rightarrow (u_n)$ bị chặn dưới.

Câu 11. Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

a). $u_n = \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}$ b). $u_n = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}$

c). $u_n = \frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ d). $u_n = \frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+...+\frac{1}{n(n+3)}$

Lời giải

a). Rõ ràng $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (u_n) bị chặn dưới.

Lại có: $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$. Suy ra

$u_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}<1,\forall n\in\mathbb{N}^*$ nên (u_n) bị chặn trên.

Kết luận (u_n) bị chặn.

b). Rõ ràng $u_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$ nên (u_n) bị chặn dưới.

Có $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k},\forall k\geq 2,k\in\mathbb{N}$. Do đó:

$u_n<1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}<2$ với mọi số nguyên dương n, nên (u_n) bị chặn trên.

Kết luận (u_n) bị chặn.

c). Rõ ràng $u_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$ nên (u_n) bị chặn dưới.

Lại có: $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$. Suy ra

$u_n=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+...+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)<\frac{1}{2}$ với mọi số nguyên dương n, nên (u_n) bị chặn trên.

Kết luận (u_n) bị chặn.

d). Rõ ràng $u_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$ nên (u_n) bị chặn dưới.

Lại có: $\frac{1}{k(k+3)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right)$. Suy ra $u_n=\frac{1}{3}[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)$

$+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+...+\left(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)]$

$u_n=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)<\frac{11}{18}$ với mọi số nguyên dương n, nên (u_n) bị chặn trên.

Kết luận (u_n) bị chặn.

C. Bài tập trắc nghiệm

DÀNH CHO HỌC SINH TRUNG BÌNH - KHÁ

Câu 1. Cho dãy số (u_n) biết $u_n=\frac{-1}{2n+3}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. Dãy số bị chặn. **B.** Dãy số bị chặn trên.
C. Dãy số bị chặn dưới. **D.** Không bị chặn

Lời giải

Chọn A

Ta có $2n+3\geq 5,\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow 0<\frac{1}{2n+3}\leq\frac{1}{5},\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow -\frac{1}{5}\leq\frac{-1}{2n+3}<0,\forall n\in\mathbb{N}^*$

$\Rightarrow -\frac{1}{5}\leq u_n<0$

Suy ra dãy số (u_n) bị chặn

Giải nhanh: dãy số (u_n) có u_n có bậc của tử thấp hơn bậc của mẫu nên bị chặn

Câu 2. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \dfrac{4n+5}{n+1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. Dãy số bị chặn. **B.** Dãy số bị chặn trên.

C. Dãy số bị chặn dưới. **D.** Không bị chặn

Lời giải

Chọn A

Ta có $u_n = \dfrac{4n+5}{n+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$u_n = \dfrac{4n+5}{n+1} = \dfrac{4(n+1)+1}{n+1} = 4 + \dfrac{1}{n+1} \le 4 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{9}{2} \Rightarrow u_n \le \dfrac{9}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Suy ra $0 < u_n \le \dfrac{9}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy dãy số (u_n) bị chặn

Giải nhanh: dãy số (u_n) có u_n có bậc của tử bằng bậc của mẫu nên bị chặn

Câu 3. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \dfrac{n^3}{n^2+1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. Dãy số bị chặn. **B.** Dãy số bị chặn trên.

C. Dãy số bị chặn dưới. **D.** Không bị chặn

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_n = \dfrac{n^3}{n^2+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (u_n)$ bị chặn dưới (không bị chặn do bậc của tử cao hơn bậc mẫu)

Nguyễn Bảo Vương

Câu 4. Trong các dãy số sau dãy số nào bị chặn ?

A. Dãy (a_n), với $a_n = \sqrt{n^3+n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

B. Dãy (b_n), với $b_n = n^2 + \dfrac{1}{2n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

C. Dãy (c_n), với $c_n = (-2)^n + 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

D. Dãy (d_n), với $d_n = \dfrac{3n}{n^3+2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải

Chọn D

Xét dãy (a_n), có $a_n = \sqrt{n^3+n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ bị chặn dưới

Xét dãy (b_n), có $b_n = n^2 + \dfrac{1}{2n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ bị chặn dưới

Xét dãy (c_n), có $c_n = (-2)^n + 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$ không bị chặn

Xét dãy (d_n), có $d_n = \dfrac{3n}{n^3+2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ Ta có $n^3 - 3n + 2 = (n-1)^2(n+2) \ge 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow n^3 + 2 \ge 3n \Rightarrow 0 < \dfrac{3n}{n^3+2} \le 1 \Rightarrow (d_n)$ bị chặn.

Cách khác: $n^3 + 2 = n^3 + 1 + 1 \ge 3\sqrt[3]{n^3.1.1} = 3n$

Giải nhanh: Ta dễ thấy dãy số (d_n) có bậc của tử thấp hơn bậc của mẫu. Suy ra dãy (d_n) bị chặn

Cách khác: Dãy đã cho là dãy số giảm nên bị chặn trên bởi $u_1 = 1$

Câu 5. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = a\sin n + b\cos n$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. Dãy số không bị chặn. **B.** Dãy số bị chặn.

C. Dãy số bị chặn dưới. **D.** Dãy số bị chặn trên

Lời giải

Chọn B

Xét $|u_n| = |a\sin n + b\cos n| \le |a| + |b| \Rightarrow -(|a| + |b|) \le u_n \le |a| + |b|$

Vậy (u_n) bị chặn

Câu 6. Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n = (-1)^n$

A. Bị chặn. **B.** Không bị chặn. **C.** Bị chặn trên. **D.** Bị chặn dưới.

Lời giải

Chọn A

Câu 7. Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n = 3n - 1$

A. Bị chặn. **B.** Bị chặn trên. **C.** Bị chặn dưới. **D.** Không bị chặn dưới.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_n \ge 2, \forall n \in \mathbb{N}^* \rightarrow$ Dãy bị chặn dưới

Khi n tiến tới dương vô cực thì u_n cũng tiến tới dương vô cực nên dãy số không bị chặn trên

Vậy dãy đã cho bị chặn dưới

Câu 8. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát (u_n) sau, dãy số nào bị chặn?

A. $u_n = n^2$. **B.** $u_n = 2^n$. **C.** $u_n = \dfrac{1}{n}$. **D.** $u_n = \sqrt{n+1}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $0 < u_n = \dfrac{1}{n} \le 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy (u_n) bị chặn.

Nhận xét: Các dãy số n^2; 2^n; $n+1$ là các dãy tăng đến vô hạn khi n tăng lên vô hạn nên chúng không bị chặn trên (có thể dùng chức năng TABLE của MTCT để kiểm tra).

Câu 9. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào bị chặn?

A. $u_n = \dfrac{1}{2^n}$. **B.** $u_n = 3^n$. **C.** $u_n = \sqrt{n+1}$. **D.** $u_n = n^2 + 1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $0 < u_n = \dfrac{1}{2^n} \le \dfrac{1}{2}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy (u_n) bị chặn.

Câu 10. Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$

A. Bị chặn. **B.** Không bị chặn. **C.** Bị chặn trên. **D.** Bị chặn dưới.

Lời giải

Chọn A

Ta có $0<u_n=\dfrac{2n+1}{n+2}<\dfrac{2n+4}{n+2}=\dfrac{2(n+2)}{n+2}=2\ \ \forall n$ nên dãy (u_n) bị chặn.

Câu 11. Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n), biết: $u_n=\dfrac{2n-13}{3n-2}$

A. Dãy số tăng, bị chặn.
B. Dãy số giảm, bị chặn.
C. Dãy số không tăng không giảm, không bị chặn.
D. Cả A, B, C đều sai.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2n-11}{3n+1}-\dfrac{2n-13}{3n-2}=\dfrac{34}{(3n+1)(3n-2)}>0$ với mọi $n\ge 1$.

Suy ra $u_{n+1}>u_n\ \ \forall n\ge 1\Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy tăng $\Rightarrow$ dãy bị chặn dưới bởi $u_1=-\dfrac{9}{4}$.

Mặt khác: $u_n=\dfrac{2}{3}-\dfrac{35}{3(3n-2)}\Rightarrow -\dfrac{9}{4}\le u_n<\dfrac{2}{3}\ \ \forall n\ge 1$

Vậy dãy (u_n) là dãy bị chặn.

Câu 12. Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n=\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}$

A. Bị chặn. **B.** Không bị chặn. **C.** Bị chặn trên. **D.** Bị chặn dưới.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $0<u_n=\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}=\sqrt{\dfrac{n^2+2n+1}{n^2+1}}=\sqrt{1+\dfrac{2n}{n^2+1}}\le\sqrt{1+\dfrac{2n}{2n}}=\sqrt{2}\ ,\forall n\Rightarrow(u_n)$ bị chặn.

Câu 13. Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n=4-3n-n^2$

A. Bị chặn. **B.** Không bị chặn. **C.** Bị chặn trên. **D.** Bị chặn dưới.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $u_n=\dfrac{25}{4}-\left(n+\dfrac{3}{2}\right)^2<\dfrac{25}{4}\Rightarrow(u_n)$ bị chặn trên; dãy (u_n) không bị chặn dưới.

Câu 14. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào bị chặn?

A. $u_n=n+\dfrac{1}{n}$. **B.** $u_n=n+1$. **C.** $u_n=\dfrac{n}{2n^2+1}$. **D.** $u_n=n^2+n+1$.

Lời giải

Chọn C

Câu 15. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào bị chặn?

A. $u_n=n-\sin 3n$ **B.** $u_n=\dfrac{n^2+1}{n}$. **C.** $u_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$. **D.** $u_n=n.\sin(3n-1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $0<u_n=\dfrac{1}{n(n+1)}\le\dfrac{1}{2},\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow$ Dãy (u_n) với $u_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$ bị chặn

Câu 16. Trong các dãy số (u_n) cho dưới đây dãy số nào là dãy số bị chặn ?

A. $u_n = \dfrac{n^3}{n^2+1}$. **B.** $u_n = n^2 + 2017$. **C.** $u_n = (-1)^n(n+2)$. **D.** $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $0 < u_n = \dfrac{n}{n^2+1} \le \dfrac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ Dãy (u_n) với $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ bị chặn

Câu 17. Xét tính tăng giảm và bị chặn của dãy số sau: $(u_n): u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$

A. Tăng, bị chặn. **B.** Giảm, bị chặn. **C.** Tăng, chặn dưới. **D.** Giảm, chặn trên.

Lời giải

Chọn A

Ta có $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+2}{n+3} - \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{(n+2)^2 - (n+3)(n+1)}{(n+2)(n+3)} = \dfrac{1}{(n+2)(n+3)} > 0, \ \forall n$.

Và $0 < u_n = \dfrac{n+1}{n+2} < \dfrac{n+2}{n+2} = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy dãy (u_n) là dãy tăng và bị chặn.

Câu 18. Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n), biết: $(u_n): u_n = n^3 + 2n + 1$

A. Tăng, bị chặn. **B.** Giảm, bị chặn. **C.** Tăng, chặn dưới. **D.** Giảm, chặn trên.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $u_{n+1} - u_n = (n+1)^3 + 2(n+1) - n^3 - 2n = 3n^2 + 3n + 3 > 0, \ \forall n$

Mặt khác: $u_n > 1, \ \forall n$ và khi n càng lớn thì u_n càng lớn.

Vậy dãy (u_n) là dãy tăng và bị chặn dưới.

Câu 19. Cho dãy số $(u_n): u_n = \dfrac{3n-1}{3n+1}$. Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi số nào dưới đây?

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có $u_n = \dfrac{3n-1}{3n+1} = 1 - \dfrac{2}{3n+1} < 1$. Mặt khác: $u_2 = \dfrac{5}{7} > \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{3} > 0$ nên suy ra dãy (u_n) bị chặn trên bởi số 1.

Câu 20. Khẳng định nào sau đây là **sai?**

A. Mỗi dãy số tăng là một dãy số bị chặn dưới. **B.** Mỗi dãy số giảm là một dãy số bị chặn trên.

C. Mỗi hàm số là một dãy số. **D.** Mọi dãy số hữu hạn đều bị chặn.

Lời giải

Chọn **C**

Mọi dãy số là một hàm số, điều ngược lại không đúng (khác nhau tập xác định).

Câu 21. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào bị chặn?

A. $u_n = n^2 + 1$. **B.** $u_n = 1 - \dfrac{2}{3n}$. **C.** $u_n = n + \sin n$. **D.** $u_n = \sin^2 n$.

Lời giải:

Chọn D.

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $-1 \le \sin n \le 1 \Rightarrow 0 \le \sin^2 n \le 1$ nên dãy số đã cho bị chặn.

Câu 22. Xét tính bị chặn của dãy số sau $u_n = \dfrac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$

A. Bị chặn **B.** Không bị chặn **C.** Bị chặn trên **D.** Bị chặn dưới

Lời giải:

Chọn A.

Ta có: $1 < u_n < 2 \ \forall n \Rightarrow (u_n)$ bị chặn

Câu 23. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{-n}{n+1}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Là dãy số không bị chặn.

B. Năm số hạng đầu của dãy là: $\dfrac{-1}{2}; \dfrac{-2}{3}; \dfrac{-3}{4}; \dfrac{-5}{5}; \dfrac{-5}{6}$.

C. Là dãy số tăng.

D. Năm số hạng đầu của dãy là: $\dfrac{-1}{2}; \dfrac{-2}{3}; \dfrac{-3}{4}; \dfrac{-4}{5}; \dfrac{-5}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Năm số hạng đầu của dãy là: $\dfrac{-1}{2}; \dfrac{-2}{3}; \dfrac{-3}{4}; \dfrac{-4}{5}; \dfrac{-5}{6}$.

Câu 24. Trong các dãy số sau, dãy nào là dãy số bị chặn?

A. $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$. **B.** $u_n = 2n + \sin(n)$. **C.** $u_n = n^2$. **D.** $u_n = n^3 - 1$.

Lời giải

Xét dãy số $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$ ta có:

* $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1} > 0; \ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ dãy (u_n) bị chặn dưới bởi giá trị 0.

* $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1} = 2 - \dfrac{1}{n+1} < 2; \ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ dãy (u_n) bị chặn trên bởi giá trị 2.

$\Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy bị chặn.

Câu 25. Chọn kết luận sai:

A. Dãy số $(2n-1)$ tăng và bị chặn trên. **B.** Dãy số $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$ giảm và bị chặn dưới.

C. Dãy số $\left(-\dfrac{1}{n}\right)$ tăng và bị chặn trên. **D.** Dãy số $\left(\dfrac{1}{3.2^n}\right)$ giảm và bị chặn dưới.

Lời giải

Đáp án B đúng vì dãy số $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$ giảm và bị chặn dưới bởi 0.

Đáp án C đúng vì dãy số $\left(-\dfrac{1}{n}\right)$ tăng và bị chặn trên bởi 0.

Đáp án D đúng vì dãy số $\left(\frac{1}{3.2^n}\right)$ giảm và bị chặn dưới bởi 0.

Đáp án A sai vì dãy số $(2n-1)$ tăng nhưng không bị chặn trên.

Chọn A

Câu 26. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \cos n + \sin n$. Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi số nào dưới đây?

A. 0. **B.** 1.

C. $\sqrt{2}$. **D.** Không bị chặn trên.

Lời giải

Ta có $u_n \xrightarrow{MTCT} u_1 = \sin 1 + \cos 1 > 1 > 0$ nên loại các đáp án A và B (dùng TABLE của MTCT để kiểm tra, chỉ cần 1 số hạn nào đó của dãy số lớn hơn α thì dãy số đó không thể bị chặn trên bởi α.)

Ta có $u_n = \cos n + \sin n = \sqrt{2}\sin\left(n + \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2} \longrightarrow$ **Chọn C.**

Câu 27. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \sin n - \cos n$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới bởi số nào dưới đây?

A. 0. **B.** -1.

C. $-\sqrt{2}$. **D.** Không bị chặn dưới.

Lời giải

$u_n \xrightarrow{MTCT} u_5 = \sin 5 - \cos 5 < -1 < 0 \longrightarrow$ loại A và B (dùng TABLE của MTCT để kiểm tra, chỉ cần có một số hạng nào đó của dãy số nhỏ hơn α thì dãy số đó không thể bị chặn dưới với số α.)

Ta có $u_n = \sqrt{2}\sin\left(n - \frac{\pi}{4}\right) \ge -\sqrt{2} \longrightarrow$ **Chọn C.**

Câu 28. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \sqrt{3}\cos n - \sin n$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và chặn trên lần lượt bởi các số m và M nào dưới đây?

A. $m = -2;\ M = 2$. **B.** $m = -\frac{1}{2};\ M = \sqrt{3} + 1$.

C. $m = -\sqrt{3} + 1;\ M = \sqrt{3} - 1$. **D.** $m = -\frac{1}{2};\ M = \frac{1}{2}$.

Lời giải

$u_n \xrightarrow{MTCT(TABLE)} u_1 > \sqrt{3} - 1 > \frac{1}{2} \longrightarrow$ loại C và **D.**

$u_n \xrightarrow{MTCT(TABLE)} u_4 < -\frac{1}{2} \longrightarrow$ loại **B.** Vậy **Chọn A.**

Nhận xét: $u_n = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin n - \frac{1}{2}\cos n\right) = 2\sin\left(n - \frac{\pi}{6}\right) \longrightarrow -2 \le u_n \le 2.$

Câu 29. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = (-1)^n.5^{2n+5}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.

B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.

C. Dãy số (u_n) bị chặn.

D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Lời giải

Nếu n chẵn thì $u_n = 5^{2n+1} > 0$ tăng lên vô hạn (dương vô cùng) khi n tăng lên vô hạn nên dãy (u_n) không bị chặn trên.

Nếu n lẻ thì $u_n = -5^{2n+1} < 0$ giảm xuống vô hạn (âm vô cùng) khi n tăng lên vô hạn nên dãy (u_n) không bị chặn dưới.

Vậy dãy số đã cho không bị chặn. **Chọn D.**

Câu 30. Cho dãy số (u_n), với $u_n = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + ... + \frac{1}{n(n+3)}, \forall n = 1;\ 2;\ 3\cdots$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.

B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.

C. Dãy số (u_n) bị chặn.

D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Lời giải

Ta có $u_n > 0 \longrightarrow (u_n)$ bị chặn dưới bởi 0. Mặt khác $\frac{1}{k(k+3)} < \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\ (k \in \mathbb{N}^*)$ nên suy ra:

$$u_n < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

nên dãy (u_n) bị chặn trên, do đó dãy (u_n) bị chặn. **Chọn C.**

Câu 31. Cho dãy số (u_n), với $u_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}, \forall n = 2;\ 3;\ 4;\cdots$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.

B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.

C. Dãy số (u_n) bị chặn.

D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Lời giải

Ta có $u_n > 0 \longrightarrow (u_n)$ bị chặn dưới bởi 0. Mặt khác $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\ (k \in \mathbb{N}^*, k \geq 2)$ nên suy ra:

$$u_n < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

nên dãy (u_n) bị chặn trên, do đó dãy (u_n) bị chặn. **Chọn C.**

Câu 32. Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào là dãy số bị chặn?

A. $u_n = \sqrt{n^2+1}$. **B.** $u_n = n + \frac{1}{n}$. **C.** $u_n = 2^n + 1$. **D.** $u_n = \frac{n}{n+1}$.

Lời giải

Các dãy số $n^2;\ n;\ 2^n$ dương và tăng lên vô hạn (dương vô cùng) khi n tăng lên vô hạn, nên các dãy $\sqrt{n^2+1};\ n + \frac{1}{n};\ 2^n + 1$ cũng tăng lên vô hạn (dương vô cùng), suy ra các dãy này không bị chặn trên, do đó chúng không bị chặn. **Chọn D.**

Nhận xét: $0<u_n=\dfrac{n}{n+1}=1-\dfrac{1}{n+1}<1.$

Câu 33. Cho dãy số (u_n), xác định bởi $\begin{cases}u_1=6\\ u_{n+1}=\sqrt{6+u_n},\ \forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\sqrt{6}\le u_n<\dfrac{5}{2}.$ **B.** $\sqrt{6}\le u_n<3.$

C. $\sqrt{6}\le u_n<2.$ **D.** $\sqrt{6}\le u_n\le 2\sqrt{3}.$

Lời giải

Ta có $u_2=\sqrt{12}>3>\dfrac{5}{2}>2$ nên loại các đáp án A, B, **C. Chọn** **D.**

Nhận xét: Ta có

$$\begin{cases}u_1=6\\ u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}u_1=6\\ u_{n+1}\ge 0\end{cases}\longrightarrow u_n\ge 0\longrightarrow\begin{cases}u_1=6\\ u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}\ge\sqrt{6}\end{cases}\longrightarrow u_n\ge\sqrt{6}.$$

Ta chứng minh quy nạp $u_n\le 2\sqrt{3}.$

$$u_1\le 2\sqrt{3};u_k\le 2\sqrt{3}\longrightarrow u_{k+1}=\sqrt{6+u_{k+1}}\le\sqrt{6+2\sqrt{3}}<\sqrt{6+6}=2\sqrt{3}.$$

Câu 34. Cho dãy số (u_n), với $u_n=\sin\dfrac{\pi}{n+1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Số hạng thứ $n+1$ của dãy là $u_{n+1}=\sin\dfrac{\pi}{n+1}.$

B. Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.

C. Dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

D. Dãy số (u_n) không tăng không giảm.

Lời giải

$u_n=\sin\dfrac{\pi}{n+1}\longrightarrow u_{n+1}=\sin\dfrac{\pi}{(n+1)+1}=\sin\dfrac{\pi}{n+2}\longrightarrow$ A sai.

$u_n=\sin\dfrac{\pi}{n+1}\longrightarrow -1\le u_n\le 1\longrightarrow$ B đúng. **Chọn** **B.**

$u_{n+1}-u_n=\sin\dfrac{\pi}{n+2}-\sin\dfrac{\pi}{n+1}<0\left(0<\dfrac{\pi}{n+2}<\dfrac{\pi}{n+1}\le\dfrac{\pi}{2}\right)\longrightarrow$ C, D sai.

DÀNH CHO HỌC SINH KHÁ – GIỎI

Câu 35. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n-1\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. Dãy số bị chặn. **B.** Dãy số bị chặn trên.

C. Dãy số bị chặn dưới. **D.** Không bị chặn

Lời giải

Chọn A

Ta dự đoán dãy số này bị chặn (dùng máy casio để tính một vài số hạng). Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp: $-2\le u_n\le 1,\forall n\in\mathbb{N}*$

Với $n=1$ ta có $-2\le u_1\le 1$ (đúng)

Giả sử mệnh đề trên đúng với $n=k\ge 1$: $-2\le u_k\le 1$

$\Rightarrow -1\le \frac{1}{2}u_k\le \frac{1}{2}\Rightarrow -2\le \frac{1}{2}u_k-1\le -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow -2\le u_{k+1}\le 1$

Theo nguyên lí quy nạp ta đã chứng minh được $-2\le u_n\le 1,\forall n\in\mathbb{N}^*$

Vậy (u_n) bị chặn

Câu 36. Xét tính bị chặn của các dãy số sau $u_n=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+...+\frac{1}{n.(n+2)}$

A. Bị chặn **B.** Không bị chặn **C.** Bị chặn trên **D.** Bị chặn dưới

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $0<u_n<\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n.(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}<1$ Dãy (u_n) bị chặn.

Câu 37. Xét tính bị chặn của các dãy số sau $u_n=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

A. Bị chặn **B.** Không bị chặn **C.** Bị chặn trên **D.** Bị chặn dưới

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $u_n=\frac{n}{2n+1}\Rightarrow 0<u_n<1$, dãy (u_n) bị chặn.

Câu 38. Cho dãy số (u_n) biết $u_n=\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6.2n}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. Dãy số bị chặn dưới. **B.** Dãy số bị chặn trên.

C. Dãy số không bị chặn. **D.** Dãy số bị chặn

Lời giải

Chọn D

Xét $\frac{2k-1}{2k}<\frac{2k-1}{\sqrt{4k^2-1}}=\frac{\sqrt{(2k-1)^2}}{\sqrt{(2k-1)(2k+1)}}=\frac{\sqrt{2k-1}}{\sqrt{2k+1}},\forall k\ge 1$

$\Rightarrow u_n<\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}.\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}...\frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\le\frac{1}{\sqrt{3}},\forall n\in\mathbb{N}^*$

$\Rightarrow 0<u_n<\frac{1}{\sqrt{3}},\forall n\in\mathbb{N}^*$

Vậy (u_n) bị chặn

Câu 39. Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n), biết: $u_n=\frac{n^2+3n+1}{n+1}$

A. Tăng, bị chặn trên. **B.** Tăng, bị chặn dưới. **C.** Giảm, bị chặn trên. **D.** Cả A, B, C đều sai.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $u_{n+1}-u_n=\frac{(n+1)^2+3(n+1)+1}{n+2}-\frac{n^2+3n+1}{n+1}=\frac{n^2+5n+5}{n+2}-\frac{n^2+3n+1}{n+1}$

$= \dfrac{(n^2+5n+5)(n+1)-(n^2+3n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{n^2+3n+3}{(n+1)(n+2)} > 0 \ \forall n \ge 1$

$\Rightarrow u_{n+1} > u_n \ \forall n \ge 1 \Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy số tăng.

$u_n > \dfrac{n^2+2n+1}{n+1} = n+1 \ge 2 \Rightarrow$ dãy (u_n) bị chặn dưới.

Câu 40. Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n), biết: $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+n+n^2}}$

A. Tăng, bị chặn trên. **B.** Tăng, bị chặn dưới. **C.** Giảm, bị chặn. **D.** Cả A, B, C đều sai.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $u_n > 0 \ \forall n \ge 1$

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt{(n+1)^2+(n+1)+1}} = \sqrt{\dfrac{n^2+n+1}{n^2+3n+3}} < 1 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow u_{n+1} < u_n \ , \forall n \ge 1 \Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy số giảm.

Mặt khác: $0 < u_n < 1 \Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy bị chặn.

Câu 41. Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n), biết: $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$

A. Tăng, bị chặn trên. **B.** Tăng, bị chặn dưới. **C.** Giảm, bị chặn. **D.** Cả A, B, C đều sai.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} : \dfrac{2^n}{n!} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} . \dfrac{n!}{2^n} = \dfrac{2}{n+1} \le 1 \ \forall n \ge 1$

Mà $u_n > 0 \ \forall n \Rightarrow u_{n+1} < u_n \ \forall n \ge 1 \Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy số giảm.

Vì $0 < u_n \le u_1 = 2 \ \forall n \ge 1 \Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy bị chặn.

Câu 42. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \cos n + \sin n$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới bởi số nào dưới đây?

A. 0. **B.** -1. **C.** $-\sqrt{2}$. **D.** Không bị chặn dưới.

Lời giải

Chọn C

$u_n \xrightarrow{MTCT} u_5 = \sin 5 - \cos 5 < -1 < 0 \longrightarrow$ loại A và B (dùng TABLE của MTCT để kiểm tra, chỉ cần có một số hạng nào đó của dãy số nhỏ hơn α thì dãy số đó không thể bị chặn dưới bởi α)

Ta có $u_n = \sqrt{2}\sin\left(n - \dfrac{\pi}{4}\right) > -\sqrt{2}$

Câu 43. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \sqrt{3}\cos n - \sin n$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và chặn trên lần lượt bởi các số m và M nào dưới đây?

A. $m = -2; \ M = 2$. **B.** $m = -\dfrac{1}{2}; \ M = \sqrt{3}+1$.

C. $m = -\sqrt{3}+1; \ M = \sqrt{3}-1$. **D.** $m = -\dfrac{1}{2}; \ M = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$u_n \xrightarrow{MTCT(TABLE)} u_1 > \sqrt{3}-1 > \frac{1}{2} \longrightarrow$ loại C và **D**

$u_n \xrightarrow{MTCT(TABLE)} u_4 < -\frac{1}{2} \longrightarrow$ loại **B**

Nhận xét: $u_n = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin n - \frac{1}{2}\cos n\right) = 2\sin\left(n - \frac{\pi}{6}\right) \longrightarrow -2 < u_n < 2.$

Câu 44. Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n), biết: $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$.

A. Dãy số tăng, bị chặn. **B.** Dãy số tăng, bị chặn dưới.

C. Dãy số giảm, bị chặn trên. **D.** Cả A, B, C đều sai.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0 \Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy số tăng.

Do $u_n < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{(n-1)n} = 2 - \frac{1}{n}$

$\Rightarrow 1 < u_n < 2,\ \forall n \geq 1 \Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy bị chặn.

Câu 45. Xét tính tăng giảm và bị chặn của dãy số sau: $(u_n): \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}, \ \forall n \geq 2 \end{cases}$

A. Tăng, bị chặn. **B.** Giảm, bị chặn.

C. Tăng, chặn dưới, không bị chặn trên. **D.** Giảm, chặn trên, không bị chặn dưới.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn B

Trước hết bằng quy nạp ta chứng minh: $1 < u_n \leq 2,\ \forall n$

Điều này đúng với $n = 1$, giả sử $1 < u_n < 2$ ta có:

$1 < u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2} < 2$ nên ta có đpcm.

Mà $u_{n+1} - u_n = \frac{1 - u_n}{2} < 0,\ \forall n$.

Vậy dãy (u_n) là dãy giảm và bị chặn.

Câu 46. Cho hai dãy số $(x_n); (y_n)$ xác định: $\begin{cases} x_1 = \sqrt{3} \\ y_1 = \sqrt{3} \end{cases}$ và $\begin{cases} x_n = x_{n-1} + \sqrt{1 + x_{n-1}^2} \\ y_n = \frac{y_{n-1}}{1 + \sqrt{1 + y_{n-1}^2}} \end{cases}$, $\forall n \geq 2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $1 < x_n y_n < 2,\ \forall n \geq 2.$ **B.** $3 < x_n y_n < 4,\ \forall n \geq 2.$

C. $4 < x_n y_n < 5,\ \forall n \geq 2.$ **D.** $2 < x_n y_n < 3,\ \forall n \geq 2.$

Lời giải:

Chọn **D**

Ta có: $x_1 = \sqrt{3} = \cot\frac{\pi}{6} \Rightarrow x_2 = \cot\frac{\pi}{6} + \sqrt{1+\cot^2\frac{\pi}{6}} = \frac{\cos\frac{\pi}{6}+1}{\sin\frac{\pi}{6}} = \cot\frac{\pi}{2.6}$

Bằng quy nạp ta chứng minh được: $x_n = \cot\frac{\pi}{2^{n-1}.6}$.

Tương tự, ta cũng có: $y_n = \tan\frac{\pi}{2^{n-1}.3}$

Đặt $\alpha_n = \frac{\pi}{2^n.3} \Rightarrow x_n = \cot\alpha_n;\ y_n = \tan 2\alpha_n \Rightarrow x_n.y_n = \tan 2\alpha_n.\cot\alpha_n$

Đặt $t = \tan\alpha_n \Rightarrow \tan 2\alpha_n.\cot\alpha_n = \frac{2t}{1-t^2}.\frac{1}{t} = \frac{2}{1-t^2}$.

Vì $n \geq 2 \Rightarrow 0 < \alpha_n < \frac{\pi}{6} \Rightarrow 0 < t < \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{2}{3} \leq 1-t^2 < 1$

$\Rightarrow 2 < \frac{2}{1-t^2} < 3 \Rightarrow 2 < x_n y_n < 3,\ \ \forall n \geq 2$.

Nguyễn Bảo Vương

Chương 3

Bài 4 CẤP SỐ CỘNG

Lý thuyết

1. Cấp số cộng là một dãy số (vô hạn hay hữu hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó và một số d không đổi, nghĩa là:

(u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow \forall n \geq 2, u_n = u_{n-1} + d$

Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.

2. **Định lý 1**: Nếu (u_n) là một cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là

$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$

Hệ quả: Ba số a, b, c (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số cộng $\Leftrightarrow a + c = 2b$.

3. **Định lý 2**: Nếu một cấp số cộng có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức sau: $u_n = u_1 + (n-1)d$

4. **Định lý 3**: Giả sử (u_n) là một cấp số cộng có công sai d.

Gọi $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + ... + u_n$

(S_n là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng). Ta có:

$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2}$.

Nguyễn Bảo Vương

DẠNG 1: CHỨNG MINH MỘT DÃY SỐ (u_n) LÀ CẤP SỐ CỘNG.

A. Phương pháp giải

Để chứng minh dãy số (u_n) là một cấp số cộng, ta xét $A = u_{n+1} - u_n$

- Nếu A là hằng số thì (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = A$.
- Nếu A phụ thuộc vào n thì (u_n) không là cấp số cộng.

Câu 1. Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số cộng. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng đó:

a). Dãy số (u_n) với $u_n = 19n - 5$ b). Dãy số (u_n) với $u_n = -3n + 1$

c). Dãy số (u_n) với $u_n = n^2 + n + 1$ d). Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n + 10n$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 2. Định x để 3 số $10-3x, 2x^2+3, 7-4x$ theo thứ tự đó lập thành 1 cấp số cộng.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 3. Một tam giác vuông có chu vi bằng 3a, và 3 cạnh lập thành một CSC. Tính độ dài ba cạnh của tam giác theo a.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 4. Ba góc của một tam giác vuông lập thành một CSC. Tìm số đo các góc đó.

.....
.....
.....
.....
.....

C. Bài tập trắc nghiệm

DÀNH CHO HỌC SINH TRUNG BÌNH – KHÁ

Câu 1. Dãy số nào sau đây là một cấp số cộng?

A. $(u_n): \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2,\ \forall n \geq 1 \end{cases}$.

B. $(u_n): \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1,\ \forall n \geq 1 \end{cases}$.

C. (u_n): 1; 3; 6; 10; 15; ….

D. (u_n): −1; 1; −1; 1; −1; ….

Câu 2. Trong các dãy số sau, có bao nhiêu dãy số là cấp số cộng?

a) Dãy số (u_n) với $u_n = 4n$. b) Dãy số (v_n) với $v_n = 2n^2 + 1$.

b) Dãy số (w_n) với $w_n = \frac{n}{3} - 7$. d) Dãy số (t_n) với $t_n = \sqrt{5} - 5n$.

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 3. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số cộng?

A. 1;−2;−4;−6;−8. **B.** 1;−3;−6;−9;−12.

C. 1;−3;−7;−11;−15. **D.** 1;−3;−5;−7;−9.

Câu 4. Trong các dãy số sau, dãy số nào không phải cấp số cộng?

A. $\frac{1}{2};\frac{3}{2};\frac{5}{2};\frac{7}{2};\frac{9}{2}$. **B.** $1;1;1;1;1$. **C.** $-8;-6;-4;-2;0$. **D.** $3;1;-1;-2;-4$.

Câu 5. Xác định a để 3 số $1+2a;2a^2-1;-2a$ theo thứ tự thành lập một cấp số cộng?

A. Không có giá trị nào của a. **B.** $a=\pm\frac{\sqrt{3}}{4}$.

C. $a=\pm 3$. **D.** $a=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 6. Trong các dãy số sau đây, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $u_n=3n^2+2017$. **B.** $u_n=3n+2018$. **C.** $u_n=3^n$. **D.** $u_n=(-3)^{n+1}$.

Câu 7. Dãy số nào sau đây là cấp số cộng?

A. $(u_n):u_n=\frac{1}{n}$. **B.** $(u_n):u_n=u_{n-1}-2,\forall n\geq 2$.

C. $(u_n):u_n=2^n-1$. **D.** $(u_n):u_n=2u_{n-1},\forall n\geq 2$.

Câu 8. Trong các dãy số sau đây, dãy số nào là một cấp số cộng?

A. $u_n=n^2+1,\quad n\geq 1$. **B.** $u_n=2^n,\quad n\geq 1$. **C.** $u_n=\sqrt{n+1},n\geq 1$. **D.** $u_n=2n-3,\quad n\geq 1$

Câu 9. Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số cộng:

A. $u_n=3^{n+1}$. **B.** $u_n=\frac{2}{n+1}$. **C.** $u_n=\sqrt{n^2+1}$. **D.** $u_n=\frac{5n-2}{3}$.

Câu 10. Các dãy số có số hạng tổng quát u_n. Trong các dãy số sau, dãy số nào không phải là cấp số cộng?

A. $u_n=2n+5$. **B.** 49, $43,37$, 31, 25. **C.** $u_n=1+3^n$. **D.** $u_n=(n+3)^2-n^2$.

Câu 11. Dãy số nào dưới đây là cấp số cộng?

A. $u_n=n+2^n,(n\in\mathbb{N}^*)$. **B.** $u_n=3n+1,(n\in\mathbb{N}^*)$.

C. $u_n=3^n,(n\in\mathbb{N}^*)$. **D.** $u_n=\frac{3n+1}{n+2},(n\in\mathbb{N}^*)$.

Câu 12. Dãy số nào sau đây là cấp số cộng ?

A. $1;2;3;4;5$. **B.** $1;2;4;8;16$. **C.** $1;-1;1;-1;1$. **D.** $1;-3;9;-27;81$.

Câu 13. Dãy số nào sau đây là một cấp số cộng?

A. $(u_n):\begin{cases}u_1=1\\u_{n+1}=u_n+2,\ \forall n\geq 1\end{cases}$. **B.** $(u_n):\begin{cases}u_1=3\\u_{n+1}=2u_n+1,\ \forall n\geq 1\end{cases}$.

C. (u_n): 1; 3; 6; 10; 15; ... . **D.** (u_n): -1; 1; -1; 1; -1; ... .

DÀNH CHO HỌC SINH KHÁ – GIỎI

Câu 14. Tam giác ABC có ba cạnh a, b, c thỏa mãn a^2, b^2, c^2 theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $\tan^2 A$, $\tan^2 B$, $\tan^2 C$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.

B. $\cot^2 A$, $\cot^2 B$, $\cot^2 C$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.

C. $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.

D. $\sin^2 A$, $\sin^2 B$, $\sin^2 C$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.

Câu 15. Biết bốn số 5; x; 15; y theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Giá trị của biểu thức $3x+2y$ bằng.

A. 50. **B.** 70. **C.** 30. **D.** 80.

Câu 16. Cho tam giác ABC, có ba cạnh a,b,c theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng. Tính giá trị biểu thức $P=\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{C}{2}$.

A. $P=1$. **B.** $P=2$. **C.** $P=3$. **D.** $P=4$.

Câu 17. Với giá trị nào của a, ta có thể tìm được các giá trị của x để các số:

$5^{x+1}+5^{1-x},\frac{a}{2},25^{x}+25^{-x}$ lập thành một cấp số cộng?

A. 2. **B.** 12. **C.** 4. **D.** 24.

Câu 18. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh a,b,c theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$. **B.** $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$

C. $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{C}{2}=3$ **D.** $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{C}{2}=2$

Câu 19. Cho tam giác ABC biết ba góc tam giác lập thành cấp số cộng và $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ tính các góc của tam giác

A. $30^0,60^0,90^0$ **B.** $20^0,60^0,100^0$ **C.** $10^0,50^0,120^0$ **D.** $40^0,60^0,80^0$

Câu 20. Cho $x^2;\frac{1}{2};y^2$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{3}xy+y^2$. Tính $S=M+m$

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$.

Câu 21. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên k sao cho C_{14}^{k}, C_{14}^{k+1}, C_{14}^{k+2} theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 12. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 6.

Câu 22. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc đoạn $[0;2018]$ sao cho ba số

$$5^{x+1}+5^{1-x};\ \frac{a}{2};\ 25^{x}+25^{-x},$$

theo thứ tự đó, lập thành một cấp số cộng?

A. 2008. **B.** 2006. **C.** 2018. **D.** 2007.

Câu 23. Biết x thỏa mãn $x^2-2,x,5-6x$ lập thành cấp số cộng. Tính tổng bình phương các giá trị x tìm được.

A. 12 **B.** 17. **C.** 26. **D.** 10.

Câu 24. Tìm x biết $x^2+1,x-2,1-3x$ lập thành cấp số cộng.

A. $x=4,x=3$. **B.** $x=2,x=3$. **C.** $x=2,x=5$. **D.** $x=2,x=1$.

Câu 25. Cho các số dương a, b, c. Nếu các số $\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a},\frac{1}{a+b}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì các số nào sau đây theo thứ tự cũng lập thành một cấp số cộng?

A. a, b, c. **B.** a^2, b^2, c^2. **C.** a^3, b^3, c^3. **D.** a^4, b^4, c^4.

Câu 26. Cho tam giác ABC biết 3 góc của tam giác lập thành một cấp số cộng và có một góc bằng 25°.Tìm 2 góc còn lại?

A. $65°;\ 90°$. **B.** $75°;\ 80°$. **C.** $60°;\ 95°$. **D.** $60°;\ 90°$.

Câu 27. Cho tứ giác $ABCD$ biết (s_n) góc của tứ giác lập thành một cấp số cộng và góc $\widehat{A}$ bằng $30°$. Tìm các góc còn lại?

A. $75°\ 120°;165°$. **B.** $72°;114°;156°$.

C. $70°;\ 110°;150°$. **D.** $80°;\ 110°;135°$.

DẠNG 2: TÌM SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN, CÔNG SAI CỦA CẤP SỐ CỘNG, TÌM SỐ HẠNG THỨ K CỦA CẤP SỐ CỘNG, TÍNH TỔNG K SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN.

A. Phương pháp giải

Ta thiết lập một hệ phương trình gồm hai ẩn u_1 và d. Sau đó giải hệ phương trình này tìm được u_1 và d.

Muốn tìm số hạng thứ k, trước tiên ta phải tìm u_1 và d. Sau đó áp dụng công thức:

$u_k = u_1 + (k-1)d$.

Muốn tính tổng của k số hạng đầu tiên, ta phải tìm u_1 và d. Sau đó áp dụng công thức:

$$S_k = \frac{k(u_1+u_k)}{2} = \frac{k[2u_1+(k-1)d]}{2}$$

B. Bài tập tự luận

Câu 1. Tìm số hạng đầu tiên, công sai, số hạng thứ 20 và tổng của 20 số hạng đầu tiên của các cấp số cộng sau, biết rằng:

a) $\begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ s_{12} = 129 \end{cases}$ d) $\begin{cases} u_6 = 8 \\ u_2^2 + u_4^2 = 16 \end{cases}$

Nguyễn Bảo Vương

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 2. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết:

a). $\begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59 \end{cases}$ b). $\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases}$ c). $\begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4 \end{cases}$

d). $\begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2.u_7 = 75 \end{cases}$ e). $\begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \\ s_3 = 21 \end{cases}$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 3. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết:

1) $\begin{cases} S_3 = 12 \\ S_5 = 35 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 35 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 16 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 84 \end{cases}$

4) $\begin{cases} S_5 = 5 \\ u_1.u_2.u_3.u_4.u_5 = 45 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} S_4 = 20 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = \frac{25}{24} \end{cases}$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 4. Xác định số hạng đầu, công sai và số hạng thứ n của các cấp số cộng sau, biết rằng:

a). $\begin{cases} S_{12} = 34 \\ S_{18} = 45 \end{cases}$ b). $\begin{cases} u_5 = 10 \\ S_{10} = 5 \end{cases}$ c). $\frac{S_{20}}{5} = \frac{S_{10}}{3} = \frac{S_5}{2}$ d). $\begin{cases} S_{20} = 2S_{10} \\ S_{15} = 3S_5 \end{cases}$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 5. Cho cấp số cộng: $u_1;u_2;u_3;....$ có công sai d.

1). Biết $u_2+u_{22}=40$. Tính S_{23}

2). Biết $u_1+u_4+u_7+u_{10}+u_{13}+u_{16}=147$. Tính u_6+u_{11} $\vee$ $u_1+u_6+u_{11}+u_{16}$

4). Biết $u_4+u_8+u_{12}+u_{16}=224$. Tính: S_{19}

5). Biết $u_{23}+u_{57}=29$. Tính: $u_{10}+u_{70}+u_{157}+3u_1$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 6. Tìm 3 số hạng liên tiếp của 1 cấp số cộng biết tổng của chúng bằng 27 và tổng các bình phương của chúng là 293.

Câu 7. Tìm 4 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng có tổng bằng 20 và tích của chúng là 384.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 8. Tìm 3 số hạng liên tiếp của một CSC biết tổng của chúng bằng 15 và tổng bình phương của chúng bằng 83.

Câu 9. Tìm 5 số hạng liên tiếp của một CSC biết tổng của chúng bằng 40 và tổng bình phương của chúng bằng 480.

Câu 10. Tìm 4 số hạng liên tiếp của một CSC biết tổng của chúng bằng 10 và tổng bình phương của chúng bằng 30.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 11. Một CSC có 7 số hạng với công sai d dương và số hạng thứ tư bằng 11. Hãy tìm các số hạng còn lại của CSC đó, biết hiệu của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 6.

Câu 12. Một CSC có 7 số hạng mà tổng của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 28, tổng số hạng thứ năm và số hạng cuối bằng 140. Tìm CSC đó.

Câu 13. Viết sáu số xen giữa hai số 3 và 24 để được CSC có tám số hạng. Tìm CSC đó

Câu 14. Bốn số nguyên lập thành CSC, biết tổng của chúng bằng 20, tổng nghịch đảo của chúng bằng $\frac{25}{24}$. Tìm bốn số đó.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 15. Tính các tổng sau:

a). $S = 1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)$

b). $S = 1+4+7+\cdots+(3n-2)+(3n+1)+(3n+4)$

c). $S = 100^2-99^2+98^2-97^2+...+2^2-1^2$

.....
.....
.....
.....
.....

C. Bài tập trắc nghiệm

DÀNH CHO HỌC SINH TRUNG BÌNH – KHÁ

Câu 1. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 9$ và công sai $d = 2$. Giá trị của u_2 bằng

A. 11. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 18. **D.** 7.

Câu 2. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 8$ và công sai $d = 3$. Giá trị của u_2 bằng

A. $\frac{8}{3}$. **B.** 24. **C.** 5. **D.** 11.

Câu 3. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 7$ công sai $d = 2$. Giá trị u_2 bằng

A. 14. **B.** 9. **C.** $\frac{7}{2}$. **D.** 5

Câu 4. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1 = \frac{1}{3}$, $u_8 = 26$. Tìm công sai d

A. $d = \frac{11}{3}$. **B.** $d = \frac{10}{3}$. **C.** $d = \frac{3}{10}$. **D.** $d = \frac{3}{11}$.

Câu 5. Cho dãy số (u_n) là một cấp số cộng có $u_1 = 3$ và công sai $d = 4$. Biết tổng n số hạng đầu của dãy số (u_n) là $S_n = 253$. Tìm n.

A. 9. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 10.

Câu 6. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = 3n - 2$. Tìm công sai d của cấp số cộng.

A. $d = 3$. **B.** $d = 2$. **C.** $d = -2$. **D.** $d = -3$.

Câu 7. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -3$, $u_6 = 27$. Tính công sai d.

A. $d = 7$. **B.** $d = 5$. **C.** $d = 8$. **D.** $d = 6$.

Câu 8. Cho dãy số vô hạn $\{u_n\}$ là cấp số cộng có công sai d, số hạng đầu u_1. Hãy chọn khẳng định sai?

A. $u_5 = \frac{u_1 + u_9}{2}$. **B.** $u_n = u_{n-1} + d$, $n \geq 2$.

C. $S_{12} = \frac{n}{2}(2u_1 + 11d)$. **D.** $u_n = u_1 + (n-1).d$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 9. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 5$ và tổng của 50 số hạng đầu bằng 5150. Tìm công thức của số hạng tổng quát u_n.

A. $u_n = 1 + 4n$. **B.** $u_n = 5n$. **C.** $u_n = 3 + 2n$. **D.** $u_n = 2 + 3n$.

Câu 10. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_4 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$ có công sai là

A. $d = -3$. **B.** $d = 3$. **C.** $d = 5$. **D.** $d = 6$.

Câu 11. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_5 = -15$, $u_{20} = 60$. Tổng của 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là:

A. $S_{10} = -125$. **B.** $S_{10} = -250$. **C.** $S_{10} = 200$. **D.** $S_{10} = -200$.

Câu 12. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12$, $u_{14} = 18$. Tính tổng 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này.

A. $S_{16}=-24$. **B.** $S_{16}=26$. **C.** $S_{16}=-25$. **D.** $S_{16}=24$.

Câu 13. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_5=18$ và $4S_n=S_{2n}$. Tìm số hạng đầu tiên u_1 và công sai d của cấp số cộng.

A. $u_1=2;d=4$. **B.** $u_1=2;\ d=3$. **C.** $u_1=2;\ d=2$. **D.** $u_1=3;d=2$.

Câu 14. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=-2$ và công sai $d=3$. Tìm số hạng u_{10}.

A. $u_{10}=-2.3^9$. **B.** $u_{10}=25$. **C.** $u_{10}=28$. **D.** $u_{10}=-29$.

Câu 15. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=11$ và công sai $d=4$. Hãy tính u_{99}.

A. 401. **B.** 403. **C.** 402. **D.** 404.

Câu 16. Cho cấp số cộng (u_n), $n\in\mathbb{N}^*$ có số hạng tổng quát $u_n=1-3n$. Tổng của 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng bằng

A. -59048. **B.** -59049. **C.** -155. **D.** -310.

Câu 17. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=4;u_2=1$. Giá trị của u_{10} bằng

A. $u_{10}=31$. **B.** $u_{10}=-23$. **C.** $u_{10}=-20$. **D.** $u_{10}=15$.

Câu 18. Cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1=3$, công sai $d=5$, số hạng thứ tư là

A. $u_4=23$. **B.** $u_4=18$. **C.** $u_4=8$. **D.** $u_4=14$.

Câu 19. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1=3$ và công sai $d=2$. Tính u_5.

A. 11. **B.** 15. **C.** 12. **D.** 14.

Câu 20. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=123$, $u_3-u_{15}=84$. Số hạng u_{17} bằng

A. 235. **B.** 11. **C.** 96000cm^3. **D.** 81000cm^3.

Câu 21. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=1$ và công sai $d=2$. Tổng $S_{10}=u_1+u_2+u_3.....+u_{10}$ bằng:

A. $S_{10}=110$. **B.** $S_{10}=100$. **C.** $S_{10}=21$. **D.** $S_{10}=19$.

Câu 22. Cho cấp số cộng (u_n), biết $u_2=3$ và $u_4=7$. Giá trị của u_{15} bằng

A. 27. **B.** 31. **C.** 35. **D.** 29.

Câu 23. Viết ba số xen giữa 2 và 22 để ta được một cấp số cộng có 5 số hạng?

A. 6, 12, 18. **B.** 8, 13, 18. **C.** 7, 12, 17. **D.** 6, 10, 14.

Câu 24. Cho dãy số $u_1=1;u_n=u_{n-1}+2$, $(n\in\mathbb{N},n>1)$. Kết quả nào đúng?

A. $u_5=9$. **B.** $u_3=4$. **C.** $u_2=2$. **D.** $u_6=13$.

Câu 25. Cho cấp số cộng có tổng n số hạng đầu là $S_n=3n^2+4n$, $n\in\mathbb{N}*$. Giá trị của số hạng thứ 10 của cấp số cộng là

A. $u_{10}=55$. **B.** $u_{10}=67$. **C.** $u_{10}=61$. **D.** $u_{10}=59$.

Câu 26. Cho cấp số cộng có tổng n số hạng đầu là $S_n=4n^2+3n$, $n\in\mathbb{N}^*$ thì số hạng thứ 10 của cấp số cộng là

A. $u_{10}=95$. **B.** $u_{10}=71$. **C.** $u_{10}=79$. **D.** $u_{10}=87$.

Câu 27. Người ta viết thêm 999 số thực vào giữa số 1 và số 2018 để được cấp số cộng có 1001 số hạng. Tìm số hạng thứ 501.

A. 1009. **B.** $\frac{2019}{2}$. **C.** 1010. **D.** $\frac{2021}{2}$.

DÀNH CHO HỌC SINH KHÁ – GIỎI

Câu 28. Bốn số tạo thành một cấp số cộng có tổng bằng 28 và tổng các bình phương của chúng bằng 276. Tích của bốn số đó là :

A. 585. **B.** 161. **C.** 404. **D.** 276.

Câu 29. Chu vi một đa giác là $158cm$, số đo các cạnh của nó lập thành một cấp số cộng với công sai $d = 3cm$. Biết cạnh lớn nhất là $44cm$. Số cạnh của đa giác đó là?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 30. Cho hai cấp số cộng (x_n): 4, 7, 10,… và (y_n): 1, 6, 11,…. Hỏi trong 2018 số hạng đầu tiên của mỗi cấp số có bao nhiêu số hạng chung?

A. 404. **B.** 673. **C.** 403. **D.** 672.

Câu 31. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng bằng 20 và tổng các bình phương của chúng bằng 120.

A. $1,5,6,8$. **B.** $2,4,6,8$. **C.** $1,4,6,9$. **D.** $1,4,7,8$.

Câu 32. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa: $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$. Xác định công sai d và số hạng đầu tiên u_1.

A. $d = 3, u_1 = 1$. **B.** $d = 1, u_1 = 1$. **C.** $d = 1, u_1 = 3$. **D.** $d = -3, u_1 = 1$.

Câu 33. Xen vào giữa hai số 4 và 40 bốn số để được một cấp số cộng? Tìm tổng bốn số đó?

A. 72. **B.** 88. **C.** 100. **D.** 66

Câu 34. Ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng có tổng của chúng bằng 3 và tổng các nghịch đảo của chúng bằng $\frac{1}{3}$. Tìm tổng bình phương các số hạng.

A. 8 **B.** 11 **C.** 14 **D.** 15

Câu 35. Cho cấp số cộng (u_n) có công sai dương và $\begin{cases} u_{21} + u_{27} = 86 \\ u_{21}^2 + u_{27}^2 = 3770 \end{cases}$. Tích của số hạng đầu và công sai bằng:

Nguyễn Bảo Vương

A. -36. **B.** -26. **C.** -16. **D.** -6.

Câu 36. Cho cấp số cộng (u_n) biết tổng của n số hạng đầu là $S_n = -4n^2 + 17n$. Tìm u_6 ?

A. $u_6 = -27$. **B.** $u_1 = -23$. **C.** $u_1 = 28$. **D.** $u_1 = 22$.

Câu 37. Cho một tam giác vuông có độ dài ba cạnh lập thành cấp số cộng. Chu vi tam giác đó bằng 24. Độ dài cạnh nhỏ nhất của tam giác này là:

A. 3. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 6.

Câu 38. Ba góc của một tam giác vuông lập thành một cấp số cộng. Công sai $d\ (d > 0)$ của cấp số cộng đó bằng

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 25°. **D.** 20°.

Câu 39. Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng cho bởi $S_n = 3n^2 - n$. Công sai của cấp số cộng đó là

A. $d = 4$. **B.** $d = 5$. **C.** $d = 6$. **D.** $d = 7$.

Câu 40. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa: $\begin{cases} u_5 + 3u_3 - u_2 = -21 \\ 3u_7 - 2u_4 = -34 \end{cases}$.Tính $S = u_4 + u_5 + ... + u_{30}$

A. $S = -1286$ **B.** $S = -1276$ **C.** $S = -1242$ **D.** $S = -1222$

Câu 41. Cho một dãy số có các số hạng đầu tiên là 1,8,22,43,. Hiệu của hai số hạng liên tiếp của dãy số đó lập thành một cấp số cộng: 7,14,21., 7n. số 35351 là số hạng thứ mấy của cấp số đã cho?

A. 99. **B.** 101. **C.** 100. **D.** 102.

Câu 42. Một dãy số (u_n) có số hạng tổng quát là $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \dfrac{n^2 + 2n}{2}$. Khẳng định nào sau đây là đúng khi nói về (u_n)?

A. (u_n) không là cấp số cộng. **B.** (u_n) là cấp số cộng có $u_{100} = \dfrac{101}{2}$.

C. (u_n) là cấp số cộng có $u_{100} = \dfrac{301}{2}$. **D.** (u_n) là cấp số cộng có $u_{100} = \dfrac{201}{2}$.

Câu 43. Cho hai cấp số cộng hữu hạn $(a_n): 2;5;8;11;...;a_{1000}$. và $(b_n): -1;6;13;20;...;b_{1000}$. Có bao nhiêu số hạng có mặt ở cả hai dãy số trên?

A. 213. **B.** 400. **C.** 142. **D.** 138.

Câu 44. Biết tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng bằng nửa tổng n số hạng tiếp theo. Tính tỷ số $\dfrac{S_{3n}}{S_{2n}}$?

A. 4. **B.** -5. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 45. Một đồng hồ đánh giờ, khi kim giờ chỉ số n (từ 1 đến 12) thì đồng hồ đánh đúng n tiếng. Hỏi trong một ngày (24 giờ) đồng hồ đánh được bao nhiêu tiếng?

A. 156. **B.** 152. **C.** 148. **D.** 160.

Câu 46. Cho ba số lập thành một cấp số cộng. Tổng của chúng bằng 15 và tích của chúng bằng 80. Công sai $d\ (d > 0)$ của cấp số cộng đó bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 47. Cho cấp số cộng (u_n) biết: $\begin{cases} u_3 + u_5 - u_6 = 6 \\ u_8 + u_4 = 52 \end{cases}$. Tính $S = u_2 + u_4 + u_6 + ... + u_{2020}$

A. $S = 5105110$. **B.** $S = 5101510$. **C.** $S = 5105010$. **D.** $S = 5105101$.

Câu 48. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$. Tính $S = u_1 + u_4 + u_7 + ... + u_{2020}$.

A. S = 2041881. **B.** S = 2041882. **C.** S = 2041883. **D.** S = 2041884.

Câu 49. Một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 2018$ công sai $d = -5$. Hỏi bắt đầu từ số hạng nào của cấp số cộng đó thì nó nhận giá trị âm.

A. u_{406}. **B.** u_{403}. **C.** u_{405}. **D.** u_{404}.

Câu 50. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1$?

A. -20. **B.** -6. **C.** -8. **D.** -24.

Câu 51. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 3$ và công sai $d = 7$. Hỏi kể từ số hạng thứ mấy trở đi thì các số hạng của (u_n) đều lớn hơn 2018?

A. 287. **B.** 289. **C.** 288. **D.** 286.

Câu 52. Cho tam giác đều $A_1B_1C_1$ có độ dài cạnh bằng 4. Trung điểm của các cạnh tam giác $A_1B_1C_1$ tạo thành tam giác $A_2B_2C_2$, trung điểm của các cạnh tam giác $A_2B_2C_2$ tạo thành tam giác $A_3B_3C_3$ … Gọi $P_1, P_2, P_3, ...$ lần lượt là chu vi của tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$,…Tính tổng chu vi $P = P_1 + P_2 + P_3 + ...$

A. $P = 8$. **B.** $P = 24$. **C.** $P = 6$. **D.** $P = 18$.

DÀNH CHO HỌC SINH KHÁ – GIỎI

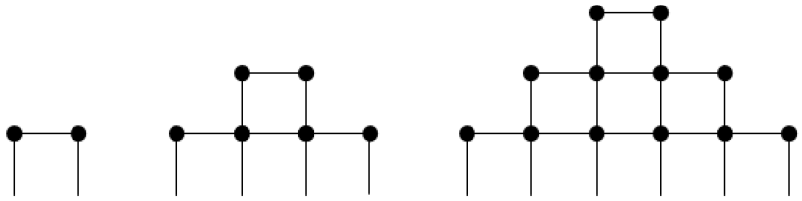
Câu 1. Sinh nhật lần thứ 17 của An vào ngày 01 tháng 5 năm 2018. Bạn An muốn mua một chiếc máy ảnh giá 3850000 đồng để làm quà sinh nhật cho chính mình nên An quyết định bỏ ống heo 1000 đồng vào ngày 01 tháng 02 năm 2018. Trong các ngày tiếp theo, ngày sau bỏ ống nhiều hơn ngày trước 1000 đồng. Hỏi đến ngày sinh nhật của mình, An có bao nhiêu tiền (tính đến ngày 30 tháng 4 năm 2018)?

A. 4095000 đồng. **B.** 89000 đồng. **C.** 4005000 đồng. **D.** 3960000 đồng.

Câu 2. Người ta trồng 3003 cây theo dạng một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, hàng thứ hai trồng 2 cây, hàng thứ ba trồng 3 cây, …, cứ tiếp tục trồng như thế cho đến khi hết số cây. Số hàng cây được trồng là

A. 77. **B.** 79. **C.** 76. **D.** 78.

Câu 3. Một em học sinh dùng các que diêm để xếp thành hình tháp có quy luật được thể hiện như trong hình sau:



1 tầng 2 tầng 3 tầng

Hỏi cần bao nhiêu que diêm để xếp thành hình tháp có 10 tầng?

A. 69. **B.** 39. **C.** 420. **D.** 210.

Câu 4. Sinh nhật bạn của An vào ngày 01 tháng năm. An muốn mua một món quà sinh nhật cho bạn nên quyết định bỏ ống heo 100 đồng vào ngày 01 tháng 01 năm 2016, sau đó cứ liên tục ngày sau hơn ngày trước 100 đồng. Hỏi đến ngày sinh nhật của bạn, An đã tích lũy được bao nhiêu tiền? (thời gian bỏ ống heo tính từ ngày 01 tháng 01 năm 2016 đến ngày 30 tháng 4 năm 2016).

A. 738.100 đồng. **B.** 726.000 đồng. **C.** 714.000 đồng. **D.** 750.300 đồng.

Câu 5. Trong sân vận động có tất cả 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 15 ghế, các dãy liền sau nhiều hơn dãy trước 4 ghế, hỏi sân vận động đó có tất cả bao nhiêu ghế?

A. 2250. **B.** 1740. **C.** 4380. **D.** 2190.

Câu 6. Một gia đình cần khoan một cái giếng để lấy nước. Họ thuê một đội khoan giếng nước. Biết giá của mét khoan đầu tiên là 80.000 đồng, kể từ mét khoan thứ hai giá của mỗi mét khoan tăng thêm 5.000 đồng so với giá của mét khoan trước đó. Biết cần phải khoan sâu xuống 50m mới có nước. Hỏi phải trả bao nhiêu tiền để khoan cái giếng đó?

A. 4.000.000 đồng. **B.** 10.125.000 đồng. **C.** 52.500.000 đồng. **D.** 52.500.000 đồng.

Câu 7. Trong hội chợ tết Mậu Tuất 2018, một công ty sữa muốn xếp 900 hộp sữa theo số lượng 1, 3, 5, ... từ trên xuống dưới (số hộp sữa trên mỗi hàng xếp từ trên xuống là các số lẻ liên tiếp - mô hình như hình bên). Hàng dưới cùng có bao nhiêu hộp sữa?



A. 59. **B.** 30. **C.** 61. **D.** 57.

Câu 8. Người ta trồng 465 cây trong một khu vườn hình tam giác như sau: Hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ hai có 2 cây, hàng thứ ba có 3 cây….Số hàng cây trong khu vườn là

A. 31. **B.** 30. **C.** 29. **D.** 28.

Câu 9. Hùng đang tiết kiệm để mua một cây guitar. Trong tuần đầu tiên, anh ta để dành 42 đô la, và trong mỗi tuần tiếp theo, anh ta đã thêm 8 đô la vào tài khoản tiết kiệm của mình. Cây guitar Hùng cần mua có giá 400 đô la. Hỏi vào tuần thứ bao nhiêu thì anh ấy có đủ tiền để mua cây guitar đó?

A. 47. **B.** 45. **C.** 44. **D.** 46.

Câu 10. Một công ti trách nhiệm hữu hạn thực hiện việc trả lương cho các kĩ sư theo phương thức sau: Mức lương của quý làm việc đầu tiên cho công ti là $4,5$ triệu đồng/quý, và kể từ quý làm việc thứ hai, mức lương sẽ được tăng thêm $0,3$ triệu đồng mỗi quý. Hãy tính tổng số tiền lương một kĩ sư nhận được sau 3 năm làm việc cho công ti.

A. $83,7$ (triệu đồng). **B.** $78,3$ (triệu đồng). **C.** $73,8$ (triệu đồng). **D.** $87,3$ (triệu đồng).

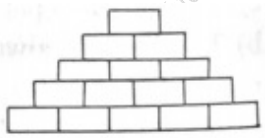
Câu 11. Người ta trồng 465 cây trong một khu vườn hình tam giác như sau: Hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ hai có 2 cây, hàng thứ ba có 3 cây….Số hàng cây trong khu vườn là

A. 31. **B.** 30. **C.** 29. **D.** 28.

Câu 12. Người ta trồng 1275 cây theo hình tam giác như sau: Hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ 2 có 2 cây, hàng thứ 3 có 3 cây,.hàng thứ k có k cây $(k \geq 1)$. Hỏi có bao nhiêu hàng ?

A. 51. **B.** 52. **C.** 53. **D.** 50.

Câu 13. Bà chủ quán trà sữa X muốn trang trí quán cho đẹp nên quyết định thuê nhân công xây một bức tường bằng gạch với xi măng (như hình vẽ bên dưới), biết hàng dưới cùng có 500 viên, mỗi hàng tiếp theo đều có ít hơn hàng trước 1 viên và hàng trên cùng có 1 viên. Hỏi số gạch cần dùng để hoàn thành bức tường trên là bao nhiêu viên?



A. 25250. **B.** 250500. **C.** 12550. **D.** 125250.

Câu 14. Người ta trồng 3240 cây theo một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, kể từ hàng thứ hai trở đi số cây trồng mỗi hàng nhiều hơn 1 cây so với hàng liền trước nó. Hỏi có tất cả bao nhiêu hàng cây?

A. 81. **B.** 82. **C.** 80. **D.** 79.

Chương 3

Bài 4 CẤP SỐ CỘNG

Lý thuyết

1. Cấp số cộng là một dãy số (vô hạn hay hữu hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó và một số d không đổi, nghĩa là:

(u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow \forall n \geq 2, u_n = u_{n-1} + d$

Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.

2. **Định lý 1**: Nếu (u_n) là một cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là

$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$

Hệ quả: Ba số a, b, c (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số cộng $\Leftrightarrow a + c = 2b$.

3. **Định lý 2**: Nếu một cấp số cộng có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức sau: $u_n = u_1 + (n-1)d$

4. **Định lý 3**: Giả sử (u_n) là một cấp số cộng có công sai d.

Gọi $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + ... + u_n$

(S_n là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng). Ta có:

$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2}$.

Nguyễn Bảo Vương

DẠNG 1: CHỨNG MINH MỘT DÃY SỐ (u_n) LÀ CẤP SỐ CỘNG.

A. Phương pháp giải

Để chứng minh dãy số (u_n) là một cấp số cộng, ta xét $A = u_{n+1} - u_n$

- Nếu A là hằng số thì (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = A$.
- Nếu A phụ thuộc vào n thì (u_n) không là cấp số cộng.

B. Bài tập tự luận

Câu 1. Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số cộng. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng đó:

a). Dãy số (u_n) với $u_n = 19n - 5$ b). Dãy số (u_n) với $u_n = -3n + 1$

c). Dãy số (u_n) với $u_n = n^2 + n + 1$ d). Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n + 10n$

Lời giải

a). Dãy số (u_n) với $u_n = 19n - 5$

Ta có $u_{n+1} - u_n = 19(n+1) - 5 - (19n - 5) = 19$. Vậy (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 19$ và số hạng đầu $u_1 = 19.1 - 5 = 14$.

b). Dãy số (u_n) với $u_n = -3n + 1$

Ta có $u_{n+1}-u_n=-3(n+1)+1-(-3n+1)=-3$. Vậy (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d=-3$ và số hạng đầu $u_1=-3.1+1=-2$.

c). Dãy số (u_n) với $u_n=n^2+n+1$

Ta có $u_{n+1}-u_n=(n+1)^2+(n+1)+1-(n^2+n+1)=2n+2$, phụ thuộc vào n

Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

d). Dãy số (u_n) với $u_n=(-1)^n+10n$

Ta có $u_{n+1}-u_n=(-1)^{n+1}+10(n+1)-\left[(-1)^n+10n\right]=-(-1)^n+10-(-1)^n=10-2(-1)^n$, phụ thuộc vào n. Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

Câu 2. Định x để 3 số $10-3x, 2x^2+3, 7-4x$ theo thứ tự đó lập thành 1 cấp số cộng.

Lời giải

Theo tính chất cấp số cộng ta có: $(10-3x)+(7-4x)=2(2x^2+3)$

$\Leftrightarrow 17-7x=4x^2+6 \Leftrightarrow 4x^2+7x-11=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-\frac{11}{4}$.

Câu 3. Một tam giác vuông có chu vi bằng 3a, và 3 cạnh lập thành một CS**C.** Tính độ dài ba cạnh của tam giác theo a.

Lời giải

Gọi x, y, z theo thứ tự tăng dần của độ dài ba cạnh của tam giác.

Chu vi của tam giác: $x+y+z=3a$ (1)

Tính chất của CSC có $x+z=2y$ (2)

Vì tam giác vuông nên có: $x^2+y^2=z^2$ (3)

Thay (2) vào (1) được $3y=3a \Leftrightarrow y=a$, thay y = a vào (2) được: $x+z=2a \Rightarrow x=2a-z$

Thay x và y vào (3) được: $(2a-z)^2+a^2=z^2 \Leftrightarrow 5a^2-4az=0 \Leftrightarrow z=\frac{5a}{4} \Rightarrow x=\frac{3a}{4}$

Kết luận độ dài ba cạnh của tam giác thỏa yêu cầu: $\frac{3a}{4}, a, \frac{5a}{4}$.

Câu 4. Ba góc của một tam giác vuông lập thành một CS**C.** Tìm số đo các góc đó.

Lời giải

Gọi 3 góc A, B, C theo thứ tự đó là ba góc của tam giác ABC lập thành CS**C.**

Ta có $\begin{cases} A+B+C=180 \\ A+C=2B \\ C=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=90 \\ A-2B=-90 \\ C=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=30 \\ B=60 \\ C=90 \end{cases}$

C. Bài tập trắc nghiệm

DÀNH CHO HỌC SINH TRUNG BÌNH – KHÁ

Câu 1. Dãy số nào sau đây là một cấp số cộng?

A. $(u_n): \begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=u_n+2, \forall n \ge 1 \end{cases}$.

B. $(u_n): \begin{cases} u_1=3 \\ u_{n+1}=2u_n+1, \forall n \ge 1 \end{cases}$.

C. (u_n): 1; 3; 6; 10; 15; ….

D. (u_n): −1; 1; −1; 1; −1; ….

Lời giải

Chọn A

Dãy số ở đáp án A thỏa $u_{n+1}-u_n=2$ với mọi $n\geq 1$ nên là cấp số cộng.

Câu 2. Trong các dãy số sau, có bao nhiêu dãy số là cấp số cộng?

a) Dãy số (u_n) với $u_n=4n$. b) Dãy số (v_n) với $v_n=2n^2+1$.

b) Dãy số (w_n) với $w_n=\frac{n}{3}-7$. d) Dãy số (t_n) với $t_n=\sqrt{5}-5n$.

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Dãy số (u_n) với $u_n=4n$ có $u_{n+1}=4(n+1)=4n+4\Rightarrow u_{n+1}=u_n+4$, $\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow$ dãy số (u_n) là cấp số cộng với công sai $d=4$.

Dãy số (v_n) với $v_n=2n^2+1$ có $v_1=3$, $v_2=9$, $v_3=19$ nên dãy số (v_n) không là cấp số cộng.

Dãy số (w_n) với $w_n=\frac{n}{3}-7$ có $w_{n+1}=\frac{n+1}{3}-7=\frac{n}{3}-7+\frac{1}{3}\Rightarrow u_{n+1}=u_n+\frac{1}{3}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow$ dãy số (w_n) là cấp số cộng với công sai $d=\frac{1}{3}$.

Dãy số (t_n) với $t_n=\sqrt{5}-5n$ có $t_{n+1}=\sqrt{5}-5n-5\Rightarrow u_{n+1}=u_n-5$, $\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow$ dãy số (w_n) là cấp số cộng với công sai $d=-5$.

Vậy có 3 dãy số là cấp số cộng.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 3. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số cộng?

A. $1;-2;-4;-6;-8$. **B.** $1;-3;-6;-9;-12$.

C. $1;-3;-7;-11;-15$. **D.** $1;-3;-5;-7;-9$.

Lời giải

Chọn C

Dãy số (u_n) có tính chất $u_{n+1}=u_n+d$ thì được gọi là một cấp số cộng.

Ta thấy dãy số: $1;-3;-7;-11;-15$ là một cấp số cộng có số hạng đầu là 1 và công sai bằng -4.

Câu 4. Trong các dãy số sau, dãy số nào không phải cấp số cộng?

A. $\frac{1}{2};\frac{3}{2};\frac{5}{2};\frac{7}{2};\frac{9}{2}$. **B.** $1;1;1;1;1$. **C.** $-8;-6;-4;-2;0$. **D.** $3;1;-1;-2;-4$.

Lời giải

Chọn D

Định nghĩa:

Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn) mà trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó và một số d không đổi.

Đáp án A: Là cấp số cộng với $u_1=\frac{1}{2};d=1$.

Đáp án B: Là cấp số cộng với $u_1=1;d=0$.

Đáp án C: Là cấp số cộng với $u_1=-8; d=2$.

Đáp án D: Không là cấp số cộng vì $u_2=u_1+(-2); u_4=u_3+(-1)$.

Câu 5. Xác định a để 3 số $1+2a; 2a^2-1; -2a$ theo thứ tự thành lập một cấp số cộng?

A. Không có giá trị nào của a. **B.** $a=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

C. $a=\pm 3$. **D.** $a=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Theo công thức cấp số cộng ta có: $2(2a^2-1)=(1+2a)+(-2a)\Leftrightarrow a^2=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow a=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 6. Trong các dãy số sau đây, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $u_n=3n^2+2017$. **B.** $u_n=3n+2018$. **C.** $u_n=3^n$. **D.** $u_n=(-3)^{n+1}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $u_{n+1}-u_n=3(n+1)+2018-(3n+2018)=3\Leftrightarrow u_{n+1}=u_n+3$.

Vậy dãy số trên là cấp số cộng có công sai $d=3$.

Câu 7. Dãy số nào sau đây là cấp số cộng?

A. $(u_n): u_n=\dfrac{1}{n}$. **B.** $(u_n): u_n=u_{n-1}-2, \forall n\geq 2$.

C. $(u_n): u_n=2^n-1$. **D.** $(u_n): u_n=2u_{n-1}, \forall n\geq 2$.

Lời giải

Chọn B

Xét dãy số $(u_n): u_n=u_{n-1}-2, \forall n\geq 2$

Ta có $u_n-u_{n-1}=-2, \forall n\geq 2$

Vậy dãy số đã cho là cấp số cộng với công sai $d=-2$

Câu 8. Trong các dãy số sau đây, dãy số nào là một cấp số cộng?

A. $u_n=n^2+1,\quad n\geq 1$. **B.** $u_n=2^n,\quad n\geq 1$. **C.** $u_n=\sqrt{n+1}, n\geq 1$. **D.** $u_n=2n-3,\quad n\geq 1$

Lời giải

Chọn D

Theo định nghĩa cấp số cộng ta có: $u_{n+1}=u_n+d\Leftrightarrow u_{n+1}-u_n=d,\quad \forall n\geq 1,\ d=const$

Thử các đáp án ta thấy với dãy số: $u_n=2n-3,\quad n\geq 1$ thì:

$$\begin{cases} u_n=2n-3 \\ u_{n+1}=2(n+1)-3=2n-1 \end{cases}\Rightarrow u_{n+1}-u_n=2=const$$

Câu 9. Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số cộng:

A. $u_n=3^{n+1}$. **B.** $u_n=\dfrac{2}{n+1}$. **C.** $u_n=\sqrt{n^2+1}$. **D.** $u_n=\dfrac{5n-2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có dãy u_n là cấp số cộng khi $u_{n+1}-u_n=d$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ với d là hằng số.

Bằng cách tính 3 số hạng đầu của các dãy số ta dự đoán đáp án **D.**

Xét hiệu $u_{n+1}-u_n=\dfrac{5(n+1)-2}{3}-\dfrac{5n-2}{3}=\dfrac{5}{3}$,$\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Vậy dãy $u_n=\dfrac{5n-2}{3}$ là cấp số cộng.

Câu 10. Các dãy số có số hạng tổng quát u_n. Trong các dãy số sau, dãy số nào không phải là cấp số cộng?

A. $u_n=2n+5$. **B.** 49 , 43 , 37 , 31, 25 . **C.** $u_n=1+3^n$. **D.** $u_n=(n+3)^2-n^2$.

Lời giải

Chọn C.

Xét dãy số $u_n=1+3^n$, suy ra $u_{n+1}=1+3^{n+1}$. Ta có $u_{n+1}-u_n=2.3^n,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Do đó $u_n=1+3^n$ không phải là cấp số cộng.

Câu 11. Dãy số nào dưới đây là cấp số cộng?

A. $u_n=n+2^n,(n\in\mathbb{N}^*)$. **B.** $u_n=3n+1,(n\in\mathbb{N}^*)$.

C. $u_n=3^n,(n\in\mathbb{N}^*)$. **D.** $u_n=\dfrac{3n+1}{n+2},(n\in\mathbb{N}^*)$.

Lời giải

Chọn B

Với dãy số $u_n=n+2^n,(n\in\mathbb{N}^*)$, xét hiệu: $u_{n+1}-u_n=n+1+2^{n+1}-n-2^n=2^n+1,(n\in\mathbb{N}^*)$ thay đổi theo n nên $u_n=n+2^n,(n\in\mathbb{N}^*)$ không là cấp số cộng. (A loại)

Với dãy số $u_n=3n+1,(n\in\mathbb{N}^*)$, xét hiệu: $u_{n+1}-u_n=3(n+1)+1-3n-1=3,(n\in\mathbb{N}^*)$ là hằng số nên $u_n=3n+1,(n\in\mathbb{N}^*)$ là cấp số cộng. (B đúng)

Với dãy số $u_n=3^n,(n\in\mathbb{N}^*)$, xét hiệu: $u_{n+1}-u_n=3^{n+1}-3^n=2.3^n,(n\in\mathbb{N}^*)$ thay đổi theo n nên $u_n=3^n,(n\in\mathbb{N}^*)$ không là cấp số cộng. (C loại)

Với dãy số $u_n=\dfrac{3n+1}{n+2},(n\in\mathbb{N}^*)$, xét hiệu:

$u_{n+1}-u_n=\dfrac{3(n+1)+1}{n+1+2}-\dfrac{3n+1}{n+2}=\dfrac{5}{(n+2)(n+3)},(n\in\mathbb{N}^*)$ thay đổi theo n nên $u_n=\dfrac{3n+1}{n+2},(n\in\mathbb{N}^*)$ không là cấp số cộng. (D loại)

Câu 12. Dãy số nào sau đây là cấp số cộng ?

A. $1;2;3;4;5$. **B.** $1;2;4;8;16$. **C.** $1;-1;1;-1;1$. **D.** $1;-3;9;-27;81$.

Lời giải

Chọn A

Câu 13. Dãy số nào sau đây là một cấp số cộng?

A. $(u_n):\begin{cases}u_1=1\\u_{n+1}=u_n+2,\ \forall n\ge 1\end{cases}$. **B.** $(u_n):\begin{cases}u_1=3\\u_{n+1}=2u_n+1,\ \forall n\ge 1\end{cases}$.

C. (u_n): $1;\ 3;\ 6;\ 10;\ 15;\ \ldots$. **D.** (u_n): $-1;\ 1;\ -1;\ 1;\ -1;\ \ldots$.

Lời giải

Chọn A

Dãy số ở đáp án A thỏa $u_{n+1}-u_n=2$ với mọi $n\geq 1$ nên là cấp số cộng.

DÀNH CHO HỌC SINH KHÁ – GIỎI

Câu 14. Tam giác ABC có ba cạnh a, b, c thỏa mãn a^2, b^2, c^2 theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $\tan^2 A$, $\tan^2 B$, $\tan^2 C$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.

B. $\cot^2 A$, $\cot^2 B$, $\cot^2 C$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.

C. $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.

D. $\sin^2 A$, $\sin^2 B$, $\sin^2 C$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC ta có

$a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$

Theo giả thiết a^2, b^2, c^2 theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng nên $a^2+c^2=2b^2$

$\Leftrightarrow 4R^2.\sin^2 A+4R^2.\sin^2 C=2.4R^2.\sin^2 B \Leftrightarrow \sin^2 A+\sin^2 C=2.\sin^2 B$.

Vậy $\sin^2 A$, $\sin^2 B$, $\sin^2 C$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.

Câu 15. Biết bốn số 5; x; 15; y theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Giá trị của biểu thức $3x+2y$ bằng.

A. 50. **B.** 70. **C.** 30. **D.** 80.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $x=\dfrac{5+15}{2}=10\Rightarrow y=20$. Vậy $3x+2y=70$.

Câu 16. Cho tam giác ABC, có ba cạnh a,b,c theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng. Tính giá trị biểu thức $P=\cot\dfrac{A}{2}.\cot\dfrac{C}{2}$.

A. $P=1$. **B.** $P=2$. **C.** $P=3$. **D.** $P=4$.

Lời giải

Chọn C

Nếu ba cạnh a,b,c lập thành cấp số cộng thì ta có: $a+c=2b$.

$\Leftrightarrow \sin A+\sin C=2\sin B \Leftrightarrow 2\sin\dfrac{A+C}{2}\cos\dfrac{\text{A-C}}{2}=4\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{\text{B}}{2}$ (1)

Vì: $A+C=180^0-B\Rightarrow\dfrac{A+C}{2}=90^0-\dfrac{B}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\dfrac{A+C}{2}=\sin\left(90^0-\dfrac{B}{2}\right)=\cos\dfrac{\text{B}}{2}\\ \cos\dfrac{A+C}{2}=\cos\left(90^0-\dfrac{B}{2}\right)=\sin\dfrac{B}{2}\end{array}\right.(*)$

Do đó (1) trở thành:

$\Leftrightarrow \sin\dfrac{A+C}{2}\cos\dfrac{\text{A-C}}{2}=2\sin\dfrac{A+C}{2}\cos\dfrac{\text{A+C}}{2}\Leftrightarrow\cos\dfrac{\text{A-C}}{2}=2\sin\dfrac{B}{2}\Leftrightarrow\cos\dfrac{\text{A-C}}{2}=2\cos\dfrac{\text{A+C}}{2}$

$\Leftrightarrow\cos\dfrac{\text{A}}{2}\cos\dfrac{\text{C}}{2}+\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{C}{2}=2\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{\text{C}}{2}-2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{C}{2}\Leftrightarrow\cos\dfrac{\text{A}}{2}\cos\dfrac{\text{C}}{2}=3\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

$\Rightarrow \cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2}=3.$

Câu 17. Với giá trị nào của a, ta có thể tìm được các giá trị của x để các số:

$5^{x+1}+5^{1-x}, \frac{a}{2}, 25^{x}+25^{-x}$ lập thành một cấp số cộng?

A. 2. **B.** 12. **C.** 4. **D.** 24.

Lời giải

Chọn **B**

Để 3 số hạng đó lập thành cấp số cộng, ta có:

$\left(5^{1+x}+5^{1-x}\right)+\left(25^{x}+25^{-x}\right)=2\left(\frac{a}{2}\right)\Leftrightarrow a=5\left(5^{x}+\frac{1}{5^{x}}\right)+\left(5^{2x}+\frac{1}{5^{2x}}\right)$

Theo bất đẳng thức cô si, ta có: $5^{x}+\frac{1}{5^{x}}\geq 2\sqrt{1}=2, 5^{2x}+\frac{1}{5^{2x}}\geq 2\Rightarrow a\geq 5.2+2=12$.

Vậy với $a\geq 12$, thì ba số đó lập thành cấp số cộng.

Câu 18. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh a,b,c theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$. **B.** $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$

C. $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{C}{2}=3$ **D.** $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{C}{2}=2$

Lời giải

Chọn A

Ta có a,b,c theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng suy ra

$a+c=2b\Leftrightarrow 2R\sin A+2R\sin C=2R\sin B$

$\Leftrightarrow \sin A+\sin C=\sin B$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{A-C}{2}=2\sin\frac{B}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{A}{2}-\frac{C}{2}\right)=2\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}=2\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}.\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}.$

Các đáp án A, C, D là cấp số cộng, đáp án B không phải là cấp số cộng.

Câu 19. Cho tam giác ABC biết ba góc tam giác lập thành cấp số cộng và $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ tính các góc của tam giác

A. $30^0, 60^0, 90^0$ **B.** $20^0, 60^0, 100^0$ **C.** $10^0, 50^0, 120^0$ **D.** $40^0, 60^0, 80^0$

Lời giải

Chọn A

. Từ giả thiết bài toán ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} A+B+C=180^0 \\ A+C=2B \\ C=5A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=5A \\ B=3A \\ 9A=180^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=20^0 \\ B=60^0 \\ C=100^0 \end{cases}.$$

Ba góc của tam giác: $30^0, 60^0, 90^0$

Câu 20. Cho $x^2; \frac{1}{2}; y^2$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{3}xy+y^2$. Tính $S=M+m$

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $x^2; \frac{1}{2}; y^2$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng $x^2+y^2=1$.

Đặt $x=\sin\alpha$, $y=\cos\alpha$.

$$P=\sqrt{3}xy+y^2=\sqrt{3}\sin\alpha.\cos\alpha+\cos^2\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha+\frac{1+\cos 2\alpha}{2} \Leftrightarrow 2P-1=\sqrt{3}\sin 2\alpha+\cos 2\alpha.$$

Giả sử P là giá trị của biểu thức $\Rightarrow 2P-1=\sqrt{3}\sin 2\alpha+\cos 2\alpha$ có nghiệm.

$$\Leftrightarrow (2P-1)^2 \le \left(\sqrt{3}\right)^2+1^2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le P\le \frac{3}{2}.$$

Nguyễn Bảo Vương

Vậy $M=\frac{3}{2}; m=-\frac{1}{2} \Rightarrow S=1$.

Câu 21. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên k sao cho C_{14}^k, C_{14}^{k+1}, C_{14}^{k+2} theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 12. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $k\in\mathbb{N}, k\le 12$

C_{14}^k, C_{14}^{k+1}, C_{14}^{k+2} theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng ta có

$$C_{14}^k+C_{14}^{k+2}=2C_{14}^{k+1} \Leftrightarrow \frac{14!}{k!(14-k)!}+\frac{14!}{(k+2)!(12-k)!}=2\frac{14!}{(k+1)!(13-k)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(14-k)(13-k)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{2}{(k+1)(13-k)}$$

$$\Leftrightarrow (14-k)(13-k)+(k+1)(k+2)=2(14-k)(k+2)$$

$$\Leftrightarrow k^2-12k+32=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=4 \text{ (tm)} \\ k=8 \text{ (tm)} \end{array}\right.$$

Có $4+8=12$.

Câu 22. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc đoạn $[0;2018]$ sao cho ba số

$$5^{x+1}+5^{1-x};\ \frac{a}{2};\ 25^{x}+25^{-x},$$

theo thứ tự đó, lập thành một cấp số cộng?

A. 2008. **B.** 2006. **C.** 2018. **D.** 2007.

Lời giải

Chọn D.

Ba số $5^{x+1}+5^{1-x};\ \frac{a}{2};\ 25^{x}+25^{-x}$, theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi

$$a=\left(5^{x+1}+5^{1-x}\right)+\left(25^{x}+25^{-x}\right)\geq 2\sqrt{5^{x+1}\cdot 5^{1-x}}+2\sqrt{25^{x}\cdot 25^{-x}}=12.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}5^{x+1}=5^{1-x}\\25^{x}=25^{-x}\end{cases}\Leftrightarrow x=0$.

Như vậy nếu xét $a\in[0;2018]$ thì ta nhận $a\in[12;2018]$. Có 2007 số a thoả đề

Câu 23. Biết x thỏa mãn $x^2-2,x,5-6x$ lập thành cấp số cộng. Tính tổng bình phương các giá trị x tìm được.

A. 12 **B.** 17. **C.** 26. **D.** 10.

Lời giải

Chọn **D**

Ta có: $x^2-2,x,5-6x$ lập thành cấp số cộng

$\Rightarrow -2x=5-6x+x^2-2\Leftrightarrow x^2-4x+3=0$

$\Rightarrow x_1=1;x_2=3\Rightarrow x^2_1+x^2_2=10$

Câu 24. Tìm x biết $x^2+1,x-2,1-3x$ lập thành cấp số cộng.

A. $x=4,x=3.$ **B.** $x=2,x=3.$ **C.** $x=2,x=5.$ **D.** $x=2,x=1.$

Lời giải

Chọn **B**

Ta có: $x^2+1,x-2,1-3x$ lập thành cấp số cộng

$\Leftrightarrow x^2+1+1-3x=2(x-2)\Leftrightarrow x^2-5x+6=0\Leftrightarrow x=2;x=3$

Vậy $x=2,x=3$ là những giá trị cần tìm.

Câu 25. Cho các số dương $a,\ b,\ c$. Nếu các số $\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a},\frac{1}{a+b}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì các số nào sau đây theo thứ tự cũng lập thành một cấp số cộng?

A. $a,\ b,\ c.$ **B.** $a^2,\ b^2,\ c^2.$ **C.** $a^3,\ b^3,\ c^3.$ **D.** $a^4,\ b^4,\ c^4.$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}=\frac{2}{c+a}\Leftrightarrow a^2+c^2=2b^2$

Câu 26. Cho tam giác ABC biết 3 góc của tam giác lập thành một cấp số cộng và có một góc bằng 25°.Tìm 2 góc còn lại?

A. $65°;\ 90°$. **B.** $75°;\ 80°$. **C.** $60°;\ 95°$. **D.** $60°;\ 90°$.

Lời giải

Chọn **C**

Dựa vào Chọn ta có $u_1 = 25°$

Lại có $u_2 = u_1 + d;\ u_3 = u_1 + 2d$ .Ta có tổng 3 góc của tam giác bằng $180°$ hay

$u_1 + u_2 + u_3 = 180° \Leftrightarrow u_1 + (u_1 + d) + (u_1 + 2d) = 180° \Leftrightarrow u_1 + d = 60°$

Suy ra $u_2 = 60°$ hay $d = 35°$

Từ đó ta có $u_3 = 95°$

Câu 27. Cho tứ giác $ABCD$ biết (s_n) góc của tứ giác lập thành một cấp số cộng và góc $\widehat{A}$ bằng $30°$. Tìm các góc còn lại?

A. $75°\ 120°;165°$. **B.** $72°;114°;156°$.

C. $70°;\ 110°;150°$. **D.** $80°;\ 110°;135°$.

Lời giải

Chọn **C**

Dựa vào Chọn ta có $u_1 = 30°$

Lại có $u_2 = u_1 + d;\ u_3 = u_1 + 2d;\ u_4 = u_1 + 3d$.

Ta có tổng 4 góc của tứ giác bằng $360°$

Hay $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 360° \Leftrightarrow 4u_1 + 6d = 360° \Leftrightarrow d = 40°$

Suy ra $u_2 = 70°;u_3 = 110°;u_4 = 150°$.

DẠNG 2: TÌM SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN, CÔNG SAI CỦA CẤP SỐ CỘNG, TÌM SỐ HẠNG THỨ K CỦA CẤP SỐ CỘNG, TÍNH TỔNG K SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN.

A. Phương pháp giải

Ta thiết lập một hệ phương trình gồm hai ẩn u_1 và d. Sau đó giải hệ phương trình này tìm được u_1 và d.

Muốn tìm số hạng thứ k, trước tiên ta phải tìm u_1 và d. Sau đó áp dụng công thức:

$u_k = u_1 + (k-1)d$.

Muốn tính tổng của k số hạng đầu tiên, ta phải tìm u_1 và d. Sau đó áp dụng công thức:

$$S_k = \frac{k(u_1 + u_k)}{2} = \frac{k[2u_1 + (k-1)d]}{2}$$

B. Bài tập tự luận

Câu 1. Tìm số hạng đầu tiên, công sai, số hạng thứ 20 và tổng của 20 số hạng đầu tiên của các cấp số cộng sau, biết rằng:

a) $\begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ s_{12} = 129 \end{cases}$ d) $\begin{cases} u_6 = 8 \\ u_2^2 + u_4^2 = 16 \end{cases}$

Lời giải

a) $\begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35 \end{cases}$ (1). Áp dụng công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$, ta có: $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 19 \\ u_1 + 8d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$

Vậy số hạng đầu tiên $u_1 = 3$, công sai $d = 4$.

Số hạng thứ 20: $u_{20} = u_1 + 19d = 3 + 19.4 = 79$.

Tổng của 20 số hạng đầu tiên: $S_{20}=\dfrac{20\left(2u_1+19d\right)}{2}=10\left(2.3+19.4\right)=820$

b) $\begin{cases}u_2-u_3+u_5=10\\u_4+u_6=26\end{cases}$ (1). Ta cũng áp dụng công thức $u_n=u_1+(n-1)d$:

$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+d-\left(u_1+2d\right)+u_1+4d=10\\u_1+3d+u_1+5d=26\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+3d=10\\2u_1+8d=26\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=1\\d=3.\end{cases}$

Vậy số hạng đầu tiên $u_1=1$, công sai $d=3$.

Số hạng thứ 20 : $u_{20}=u_1+19d=1+19.3=58$.

Tổng của 20 số hạng đầu tiên: $S_{20}=\dfrac{20\left(2u_1+19d\right)}{2}=10\left(2.1+19.3\right)=590$

c) $\begin{cases}u_3+u_5=14\\s_{12}=129\end{cases}$ (1). Áp dụng công thức $u_n=u_1+(n-1)d$, $S_n=\dfrac{n\left[2u_1+(n-1)d\right]}{2}$ Ta có:

$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+2d+u_1+4d=14\\6\left(u_1+u_{12}\right)=129\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2u_1+6d=14\\12u_1+66d=129\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=\dfrac{5}{2}\\d=\dfrac{3}{2}.\end{cases}$

Vậy số hạng đầu tiên $u_1=\dfrac{5}{2}$, công sai $d=\dfrac{3}{2}$.

Số hạng thứ 20 : $u_{20}=u_1+19d=\dfrac{5}{2}+19.\dfrac{3}{2}=31$.

Tổng của 20 số hạng đầu tiên: $S_{20}=\dfrac{20\left(2u_1+19d\right)}{2}=10\left(2.\dfrac{5}{2}+19.\dfrac{3}{2}\right)=335$

d) $\begin{cases}u_6=8\\u_2{}^2+u_4{}^2=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+5d=8\\\left(u_1+d\right)^2+\left(u_1+3d\right)^2=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=8-5d\\\left(8-5d+d\right)^2+\left(8-5d+3d\right)^2=16\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=8-5d\\\left(8-4d\right)^2+\left(8-2d\right)^2=16\end{cases}$ $(*)$

Giải $(*):20d^2-96d+112=0\Leftrightarrow d=\dfrac{14}{5}\ \vee\ \mathrm{d}=2$.

Với $d=\dfrac{14}{5}\Rightarrow u_1=-6$

Số hạng thứ 20 : $u_{20}=u_1+19d=-6+19.\dfrac{14}{5}=\dfrac{236}{5}$.

Tổng của 20 số hạng đầu tiên: $S_{20}=\dfrac{20\left(2u_1+19d\right)}{2}=10\left(2.(-6)+19.\dfrac{14}{5}\right)=412$

Với $d=2\Rightarrow u_1=-2$

Số hạng thứ 20 : $u_{20}=u_1+19d=-2+19.2=36$.

Tổng của 20 số hạng đầu tiên: $S_{20}=\dfrac{20\left(2u_1+19d\right)}{2}=10\left(2.(-2)+19.2\right)=340$

Câu 2. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết:

a). $\begin{cases}u_7=27\\u_{15}=59\end{cases}$ b). $\begin{cases}u_9=5u_2\\u_{13}=2u_6+5\end{cases}$ c). $\begin{cases}u_2+u_4-u_6=-7\\u_8-u_7=2u_4\end{cases}$

d). $\begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2.u_7 = 75 \end{cases}$ e). $\begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \\ s_3 = 21 \end{cases}$

Lời giải

Gọi số hạng đầu là u_1 và công sai là d.

a). $\begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 6d = 27 \\ u_1 + 14d = 59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$

b). $\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 8d = 5(u_1 + d) \\ u_1 + 12d = 2(u_1 + 5d) + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1 - 3d = 0 \\ u_1 - 2d = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4 \end{cases}$ (1)

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d + u_1 + 3d - (u_1 + 5d) = -7 \\ u_1 + 7d - (u_1 + 6d) = 2(u_l + 3d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - d = -7 \\ 2u_1 + 5d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -5 \\ d = 2. \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2.u_7 = 75 \end{cases}$ (1)

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d - (u_1 + 6d) = -8 \\ (u_1 + d)(u_1 + 6d) = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4d = -8 \\ (u_1 + d)(u_1 + 6d) = 75 \end{cases} \begin{cases} d = 2 \\ (u_1 + 2)(u_1 + 12) = 75 \end{cases}$ (*)

Giải $(*) \Leftrightarrow u_1^2 + 14u_1 - 51 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_1 = -17 \end{cases}$

Vậy $\begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1 = -17 \\ d = 2. \end{cases}$

Nguyễn Bảo Vương

e). $\begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \\ s_3 = 21 \end{cases}$

Ta có: $S_3 = 21 \Leftrightarrow u_1 + u_2 + u_3 = 21 \Leftrightarrow u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d = 21 \Leftrightarrow d = 7 - u_1.$

Ta có: $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \Leftrightarrow u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 = 155$

$\Leftrightarrow u_1^2 + (u_1 + 7 - u_1)^2 + (u_1 + 14 - 2u_1)^2 = 155 \Leftrightarrow u_1^2 + 49 + (14 - u_1)^2 = 155$

$\Leftrightarrow 2u_1 - 28u_1 + 90 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 9 \vee \text{u}_1 = 5$

Với $u_1 = 9 \Rightarrow d = -2$. Với $u_1 = 5 \Rightarrow d = 2$

Câu 3. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết:

1) $\begin{cases} S_3 = 12 \\ S_5 = 35 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 35 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 16 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 84 \end{cases}$

4) $\begin{cases} S_5 = 5 \\ u_1.u_2.u_3.u_4.u_5 = 45 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} S_4 = 20 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = \frac{25}{24} \end{cases}$

6) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 20 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 = 170 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = -12 \\ u_1.u_2.u_3 = 8 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} u_1 + u_5 = \frac{5}{3} \\ u_3.u_4 = \frac{65}{72} \end{cases}$

Lời giải

1) $\begin{cases} S_3 = 12 \\ S_5 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}(2u_1 + 2d) = 12 \\ \frac{5}{2}(2u_1 + 4d) = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 2d = 8 \\ 2u_1 + 4d = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3. \end{cases}$

2) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d = 9 \\ u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 = 35 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 - d \\ (3-d)^2 + 3^2 + (3+d)^2 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 - d \\ d^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 - d \\ d = \pm 2 \end{cases}$

Với $d = 2 \Rightarrow u_1 = 1$. Với $d = -2 \Rightarrow u_1 = 5.$

3) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 16 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d + u_1 + 3d = 16 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 84 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1 + 6d = 16 \quad (1) \\ u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 + (u_1 + 3d)^2 = 84 \quad (2) \end{cases}$

Từ $(1) \Rightarrow u_1 = \frac{16 - 6d}{4} = 4 - \frac{3}{2}d$ thay vào (2) được:

$\left(4 - \frac{3}{2}d\right)^2 + \left(4 - \frac{3}{2}d + d\right)^2 + \left(4 - \frac{3}{2}d + 2d\right)^2 + \left(4 - \frac{3}{2}d + 3d\right)^2 = 84$

$\Leftrightarrow \left(4 - \frac{3}{2}d\right)^2 + \left(4 - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(4 + \frac{d}{2}\right)^2 + \left(4 + \frac{3d}{2}\right)^2 = 84 \Leftrightarrow 64 + 5d^2 = 84 \Leftrightarrow d^2 = 4 \Leftrightarrow d = \pm 2$ Với

$d = 2 \Rightarrow u_1 = 1$. Với $d = -2 \Rightarrow u_1 = 7$

4) $\begin{cases} S_5 = 5 \\ u_1.u_2.u_3.u_4.u_5 = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}(2u_1 + 4d) = 5 \Leftrightarrow 2u_1 + 4d = 2 \Rightarrow u_1 = 1 - 2d \quad (1) \\ u_1(u_1 + d)(u_1 + 2d)(u_1 + 3d)(u_1 + 4d) = 45 \quad (2) \end{cases}$

Thay (1) vào (2):

$\Leftrightarrow (1-2d)(1-2d+d)(1-2d+2d)(1-2d+3d)(1-2d+4d) = 45$

$\Leftrightarrow (1-2d)(1-d)(1+d)(1+2d) = 45 \Leftrightarrow (1-2d)(1+2d)(1-d)(1+d) = 45$

$\Leftrightarrow (1-4d^2)(1-d^2) = 45$. Đặt $t = d^2$, $t \geq 0$

$\Leftrightarrow (1-4t)(1-t) = 45 \Leftrightarrow 4t^2 - 5t - 44 = 0$

$\Leftrightarrow t = 4$ (nhận) hoặc $t = -\frac{11}{4}$ (loại) $\Leftrightarrow d^2 = 4 \Leftrightarrow d = \pm 2$

Với $d = 2 \Rightarrow u_1 = -3$. Với $d = -2 \Rightarrow u_1 = 5.$

5). $\begin{cases} S_4 = 20 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = \frac{25}{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2u_1 + 3d) = 20 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = \frac{25}{24} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 5 - \frac{3}{2}d \\ \frac{1}{5-\frac{3}{2}d} + \frac{1}{5-\frac{3}{2}d+d} + \frac{1}{5-\frac{3}{2}d+2d} + \frac{1}{5-\frac{3}{2}d+3d} = \frac{25}{24} \quad (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5-\frac{3}{2}d} + \frac{1}{5+\frac{3}{2}d}\right) + \left(\frac{1}{5-\frac{d}{2}} + \frac{1}{5+\frac{d}{2}}\right) = \frac{25}{24} \Leftrightarrow \frac{10}{25-\frac{9d^2}{4}} + \frac{10}{25-\frac{d^2}{4}} = \frac{25}{24}$$

Đặt: $\frac{d^2}{4} = t; t \geq 0.$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{25-9t} + \frac{10}{25-t} = \frac{25}{24} \Leftrightarrow \frac{2(25-t)+2(25-9t)}{(25-9t)(25-t)} = \frac{5}{24} \Leftrightarrow \frac{100-20t}{(25-9t)(25-t)} = \frac{5}{24}$$

$$\Leftrightarrow 24(20-4t) = (25-9t)(25-t) \Leftrightarrow 9t^2 - 154t + 145 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{145}{9} \ \vee \ t = 1$$

• $t = \frac{145}{9} \Leftrightarrow d^2 = \frac{145}{9} \Rightarrow d = \pm\frac{\sqrt{145}}{3}$

Với $d = \frac{\sqrt{145}}{3} \Rightarrow u_1 = 5 - \frac{\sqrt{145}}{2}$. Với $d = -\frac{\sqrt{145}}{3} \Rightarrow u_1 = 5 + \frac{\sqrt{145}}{2}$

• $t = 1 \Leftrightarrow d^2 = 1 \Leftrightarrow d = \pm 1$

Với $d = 1 \Rightarrow u_1 = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$. Với $d = -1 \Leftrightarrow u_1 = 5 + \frac{3}{2} = \frac{13}{2}$.

6) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 20 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 = 170 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d + u_1 + 3d + u_1 + 4d = 20 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 = 170 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5u_1 + 10d = 20 \Rightarrow u_1 = 4 - 2d \\ u_1^2 + (u_1+d)^2 + (u_1+2d)^2 + (u_1+3d)^2 + (u_1+4d)^2 = 170 \quad (2) \end{cases}$$

Thay: $u_1 = 4 - 2d$ vào (2) được:

$$(4-2d)^2 + (4-2d+d)^2 + (4-2d+2d)^2 + (4-2d+3d)^2 + (4-2d+4d)^2 = 170$$

$$\Leftrightarrow (4-2d)^2 + (4-d)^2 + 4^2 + (4+d)^2 + (4+2d)^2 = 170$$

$$\Leftrightarrow 80 + 10d^2 = 170 \Leftrightarrow d^2 = 9 \Leftrightarrow d = \pm 3.$$

Với $d = 3 \Rightarrow u_1 = 4 - 6 = -2$. Với $d = -3 \Rightarrow u_1 = 4 + 6 = 10.$

7). $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = -12 \\ u_1.u_2.u_3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d = -12 \\ u_1.u_2.u_3 = 8 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3u_1 + 3d = -12 \\ u_1(u_1+d)(u_1+2d) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -4 - d \quad (1) \\ u_1(u_1+d)(u_1+2d) = 8 \quad (2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2) ta được: $(-4-d)(-4-d+d)(-4-d+2d) = 8 \Leftrightarrow (4+d)(d-4) = 2$

$$\Leftrightarrow d^2 - 16 = 2 \Leftrightarrow d^2 = 18 \Leftrightarrow d = \pm 3\sqrt{2}$$

Với $d = 3\sqrt{2} \Rightarrow u_1 = -4 - 3\sqrt{2}$. Với $d = -3\sqrt{2} \Rightarrow u_1 = -4 + 3\sqrt{2}.$

8) $\begin{cases} u_1+u_5=\dfrac{5}{3} \\ u_3.u_4=\dfrac{65}{72} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_1+4d=\dfrac{5}{3}. \\ (u_1+2d)(u_1+3d)=\dfrac{65}{72} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1=\dfrac{5}{6}-2d \\ \left(\dfrac{5}{6}-2d+2d\right)\left(\dfrac{5}{6}-2d+3d\right)=\dfrac{65}{72} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=\dfrac{5}{6}-2d \\ \dfrac{5}{6}+d=\dfrac{13}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=\dfrac{1}{3} \\ d=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$

Câu 4. Xác định số hạng đầu, công sai và số hạng thứ n của các cấp số cộng sau, biết rằng:

a). $\begin{cases} S_{12}=34 \\ S_{18}=45 \end{cases}$ b). $\begin{cases} u_5=10 \\ S_{10}=5 \end{cases}$ c). $\dfrac{S_{20}}{5}=\dfrac{S_{10}}{3}=\dfrac{S_5}{2}$ d). $\begin{cases} S_{20}=2S_{10} \\ S_{15}=3S_5 \end{cases}$

Lời giải

a). $\begin{cases} S_{12}=34 \\ S_{18}=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{12(2u_1+11d)}{2}=34 \\ \dfrac{18(2u_1+17d)}{2}=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6u_1+33d=17 \\ 2u_1+17d=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=\dfrac{32}{9} \\ d=-\dfrac{1}{9} \end{cases}$

$u_n=u_1+(n-1)d=\dfrac{33}{9}-\dfrac{1}{9}n$

b). $\begin{cases} u_5=10 \\ S_{10}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+4d=10 \\ \dfrac{10(2u_1+9d)}{2}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+4d=10 \\ 2u_1+9d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=86 \\ d=-19 \end{cases}$

$u_n=u_1+(n-1)d=105-19n$

c). $\dfrac{S_{20}}{5}=\dfrac{S_{10}}{3}=\dfrac{S_5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{S_{20}}{5}=\dfrac{S_{10}}{3} \\ \dfrac{S_{10}}{3}=\dfrac{S_5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{20(2u_1+19d)}{10}=\dfrac{10(2u_1+9d)}{6} \\ \dfrac{10(2u_1+9d)}{6}=\dfrac{5(2u_1+4d)}{4} \end{cases}$

$\begin{cases} 2u_1+55d=0 \\ 2u_1+24d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=0 \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow u_n=0$

d). $\begin{cases} S_{20}=2S_{10} \\ S_{15}=3S_5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20(2u_1+19d)=20(2u_1+9d) \\ 15(2u_1+14d)=15(2u_1+4d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=0 \\ u_1\in\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow u_n=u_1\in\mathbb{R}$

Câu 5. Cho cấp số cộng: $u_1;u_2;u_3;....$ có công sai d.

1). Biết $u_2+u_{22}=40$. Tính S_{23}

2). Biết $u_1+u_4+u_7+u_{10}+u_{13}+u_{16}=147$. Tính u_6+u_{11} $\vee$ $u_1+u_6+u_{11}+u_{16}$

4). Biết $u_4+u_8+u_{12}+u_{16}=224$. Tính: S_{19}

5). Biết $u_{23}+u_{57}=29$. Tính: $u_{10}+u_{70}+u_{157}+3u_1$

Lời giải

1). Biết $u_2+u_{22}=40$. Tính S_{23}

Ta có: $u_2+u_{22}=40 \Leftrightarrow u_1+d+u_1+21d=40 \Leftrightarrow 2u_1+22d=40$

Mà $S_{23}=\dfrac{23}{2}(2u_1+22d)=\dfrac{23}{2}.40=460.$

2). Biết $u_1+u_4+u_7+u_{10}+u_{13}+u_{16}=147$. Tính u_6+u_{11} $\vee$ $u_1+u_6+u_{11}+u_{16}$

Có: $u_1+u_4+u_7+u_{10}+u_{13}+u_{16}=147.$

$\Leftrightarrow u_1+u_1+3d+u_1+6d+u_1+9d+u_1+12d+u_1+15d=147.$

$\Leftrightarrow 6u_1+45d=147 \Leftrightarrow 2u_1+15d=49.$

Ta có: $u_6+u_{11}=u_1+5d+u_1+10d=2u_1+15d=49.$

Ta có: $u_1+u_6+u_{11}+u_{16}=u_1+u_1+5d+u_1+10d+u_1+15d$

$=4u_1+30d=2\left(2u_1+15d\right)=2.49=98.$

4). Biết $u_4+u_8+u_{12}+u_{16}=224$. Tính: S_{19}

Có: $u_4+u_8+u_{12}+u_{16}=224$

$\Leftrightarrow u_1+3d+u_1+7d+u_1+15d=224 \Leftrightarrow 4u_1+36d=224 \Leftrightarrow u_1+9d=56$

Ta có: $S_{19}=\frac{19}{2}\left(2u_1+18d\right)=19\left(u_1+9d\right)=19.56=1064.$

5). Biết $u_{23}+u_{57}=29$. Tính: $u_{10}+u_{70}+u_{157}+3u_1$

Ta có: $u_{23}+u_{57}=29 \Leftrightarrow u_1+22d+u_1+56d=29 \Leftrightarrow 2u_1+78d=29.$

Ta có: $3u_1+u_{10}+u_{70}+u_{157}=3u_1+u_1+9d+u_1+69d+u_1+156d$

$=6u_1+234d=3\left(2u_1+78d\right)=3.29=87$

Câu 6. Tìm 3 số hạng liên tiếp của 1 cấp số cộng biết tổng của chúng bằng 27 và tổng các bình phương của chúng là 293.

Lời giải

Gọi 3 số hạng liên tiếp của cấp số cộng: $u_1;u_2;u_3$. Theo đề bài ta có:

$$\begin{cases} u_1+u_2+u_3=27 \quad (1) \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2=293 \quad (2) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow u_1+u_1+d+u_1+2d=27 \Leftrightarrow 3u_1+3d=27 \Leftrightarrow d=9-u_1.$

$(2) \Leftrightarrow u_1^2+\left(u_1+d\right)^2+\left(u_1+2d\right)^2=293$

$\Leftrightarrow u_1^2+\left(u_1+9-u_1\right)^2+\left(u_1+18-2u_1\right)^2=293 \Leftrightarrow u_1^2+81+\left(18-u_1\right)^2=293$

$\Leftrightarrow 2u_1^2-36u_1-112=0 \Leftrightarrow u_1=14 \vee u_1=4$

Với $u_1=14 \Rightarrow d=-5 \Rightarrow u_2=9;u_3=4.$

Với $u_1=4 \Rightarrow d=5 \Rightarrow u_2=9;u_3=14.$

Ta có thể gọi 3 số hạng liên tiếp của CSC là $u_1=u-d,u_2=u,u_3=u+d$ với công sai d

Câu 7. Tìm 4 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng có tổng bằng 20 và tích của chúng là 384.

Lời giải

Gọi 4 số hạng của cấp số cộng cần tìm là u_1,u_2,u_3,u_4 có công sai d.

Theo đề bài ta có: $\Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_2+u_3+u_4=20 \quad (1) \\ u_1.u_2.u_3.u_4=384 \quad (2) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow u_1+u_1+d+u_1+2d+u_1+3d=20$

$\Leftrightarrow 4u_1+6d=20 \Rightarrow u_1=\frac{20-6d}{4}=5-\frac{3}{2}d.$

$(2) \Leftrightarrow u_1(u_1+d)(u_1+2d)(u_1+3d)=384.$

$\Leftrightarrow \left(5-\frac{3}{2}d\right)\left(5-\frac{3}{2}d+d\right)\left(5-\frac{3}{2}d+2d\right)\left(5-\frac{3}{2}d+3d\right)=384$

$\Leftrightarrow \left(5-\frac{3}{2}d\right)\left(5+\frac{3}{2}d\right)\left(5-\frac{d}{2}\right)\left(5+\frac{d}{2}\right)=384 \Leftrightarrow \left(25-\frac{9d^2}{4}\right)\left(25-\frac{d^2}{4}\right)=384.$

Đặt $t=\frac{d^2}{4}, t\ge 0.$

$\Leftrightarrow (25-9t)(25-t)=384 \Leftrightarrow 9t^2-250t+241=0 \Leftrightarrow t_1=\frac{241}{9} \vee t_2=1.$

Cách 2: gọi $u_1=u-3d,\ u_2=u-d,\ u_3=u+d,\ u_4=u+3d$

Ta có: $u_1+u_2+u_3+u_4=20 \Leftrightarrow 4u=20 \Rightarrow u=5.$

Và: $u_1.u_2.u_3.u_4=384. \Leftrightarrow (u-3d)(u-d)(u+d)(u+3d)=384$

$\Leftrightarrow \left(u^2-9d^2\right)\left(u^2-d^2\right)=384 \Leftrightarrow \left(25-9d^2\right)\left(25-d^2\right)=384.$

Đặt: $t=d^2, t\ge 0.$

$\Leftrightarrow 9t^2-250t+241=0 \Leftrightarrow t=1 \vee t=\frac{241}{9}$

Với $t=1 \Leftrightarrow d^2=1 \Leftrightarrow d=\pm 1.$

• $d=1 \Rightarrow u_1=2; u_2=4; u_3=6; u_4=8$

• $d=-1 \Rightarrow u_1=8; u_2=6; u_3=4; u_4=2$

Với: $t=\frac{241}{9} \Rightarrow d=\pm\frac{\sqrt{241}}{3}$

• $d=\frac{\sqrt{241}}{3} \Rightarrow u_1=5-\sqrt{241}; u_2=5-\sqrt{241}; u_3=5+\frac{\sqrt{241}}{3}; u_4=5+\sqrt{241}$

• $d=-\frac{\sqrt{241}}{3} \Rightarrow u_1=5+\sqrt{241}; u_2=5+\frac{\sqrt{241}}{3}; u_3=5-\frac{\sqrt{241}}{3}; u_4=5-\sqrt{241}.$

Ta có thể gọi 4 số hạng liên tiếp của CSC là $u_1=u-3d, u_2=u-d, u_3=u+d, u_4=u+3d$ với công sai 2d.

Câu 8. Tìm 3 số hạng liên tiếp của một CSC biết tổng của chúng bằng 15 và tổng bình phương của chúng bằng 83.

Lời giải

Gọi ba số hạng liên tiếp của CSC là $u_1=u-d, u_2=u, u_3=u+d$ với công sai là d:

Theo đề bài ta có: $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=15 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2=83 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u=15 \\ (u-d)^2+u^2+(u+d)^2=83 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=5 \\ d^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=5 \\ d=\pm 2 \end{cases}$

Với $d=2 \Rightarrow u_1=3, u_2=5, u_3=7$

Với $d=-2 \Rightarrow u_1=7, u_2=5, u_3=3.$

Câu 9. Tìm 5 số hạng liên tiếp của một CSC biết tổng của chúng bằng 40 và tổng bình phương của chúng bằng 480.

Lời giải

Gọi năm số hạng liên tiếp của CSC là $u_1=u-2d,u_2=u-d,u_3=u,u_4=u+d,u_5=u+2d$ với công sai là d:

Theo đề bài ta có: $\begin{cases}u_1+u_2+u_3+u_4+u_5=40\\u_l^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2=480\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}5u=40\\(u-2d)^2+(u-d)^2+u^2+(u+d)^2+(u+2d)^2=480\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=8\\d^2=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=8\\d=\pm4\end{cases}$

Với $d=4\Rightarrow u_1=0,u_2=4,u_3=8,u_4=12,u_5=16$.

Với $d=-4\Rightarrow u_1=16,u_2=12,u_3=8,u_4=4,u_5=0$

Câu 10. Tìm 4 số hạng liên tiếp của một CSC biết tổng của chúng bằng 10 và tổng bình phương của chúng bằng 30.

Lời giải

Gọi bốn số hạng liên tiếp của CSC là $u_1=u-3d,u_2=u-d,u_3=u+d,u_4=u+3d$ với công sai là 2d:

Theo đề bài ta có: $\begin{cases}u_1+u_2+u_3+u_4=10\\u_l^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=30\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}4u=10\\(u-3d)^2+(u-2d)^2+(u+2d)^2+(u+3d)^2=30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\dfrac{5}{2}\\d^2=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=8\\d=\pm4\end{cases}$

Câu 11. Một CSC có 7 số hạng với công sai d dương và số hạng thứ tư bằng 11. Hãy tìm các số hạng còn lại của CSC đó, biết hiệu của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 6.

Lời giải

Gọi $u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7$ là bảy số hạng liên tiếp của CSC với công sai d.

Theo đề bài ta có hệ phương trình:

$\begin{cases}u_4=11\\u_3-u_5=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+3d=11\\(u_1+2d)-(u_1+5d)=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+3d=11\\d=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=17\\d=-2\end{cases}$

Kết luận: $u_1=17,u_2=15,u_3=13,u_4=11,u_5=9,u_4=7,u_5=5,u_6=3,u_7=1$.

Câu 12. Một CSC có 7 số hạng mà tổng của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 28, tổng số hạng thứ năm và số hạng cuối bằng 140. Tìm CSC đó.

Lời giải

Gọi $u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7$ là bảy số hạng liên tiếp của CSC với công sai d.

Theo đề bài ta có hệ phương trình:

$\begin{cases}u_3+u_5=28\\u_5+u_7=140\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+2d+u_1+4d=28\\u_1+4d+u_1+6d=140\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2u_1+6d=28\\2u_1+10d=140\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=-70\\d=28\end{cases}$

Câu 13. Viết sáu số xen giữa hai số 3 và 24 để được CSC có tám số hạng. Tìm CSC đó

Lời giải

Gọi $3,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7,24$ là CSC cần tìm, ta có:

$\begin{cases}u_1=3\\u_8=24\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=3\\u_1+7d=24\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=3\\d=3\end{cases}$

Vậy $u_1=3,u_2=6,u_3=9,u_4=12,u_5=15,u_6=18,u_7=21,u_8=24$

Câu 14. Bốn số nguyên lập thành CSC, biết tổng của chúng bằng 20, tổng nghịch đảo của chúng bằng $\frac{25}{24}$. Tìm bốn số đó.

Lời giải

Gọi bốn số hạng liên tiếp của CSC là $u_1=u-3d,u_2=u-d,u_3=u+d,u_4=u+3d$ với công sai là 2d:

Theo đề bài ta có: $\begin{cases}u_1+u_2+u_3+u_4=20\\ \frac{1}{u_l}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4}=\frac{25}{24}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4u=20\\ \frac{1}{u-3d}+\frac{1}{u-d}+\frac{1}{u+d}+\frac{1}{u+3d}=\frac{25}{24}\end{cases}$

$\begin{cases}u=5\\ \frac{1}{5-3d}+\frac{1}{5+3d}+\frac{1}{5-d}+\frac{1}{5+d}=\frac{25}{24}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=5\\ \frac{10}{25-9d^2}+\frac{10}{25-d^2}=\frac{25}{24}\end{cases}\quad(2)$

Giải (2): đặt $t=d^2$, điều kiện $t\ge 0$

$(2)\Leftrightarrow\frac{2}{25-9t}+\frac{2}{25-t}=\frac{5}{24}\Leftrightarrow\frac{100-20t}{(25-9t)(25-t)}=\frac{5}{24}\Leftrightarrow 24(20-4t)=(25-9t)(25-t)$

$\Leftrightarrow 9t^2-154t+145=0\Leftrightarrow t=1\vee t=\frac{145}{9}$

Vì các số hạng là những số nguyên nên chọn t = 1.

Câu 15. Tính các tổng sau:

a). $S=1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)$

b). $S=1+4+7+\cdots+(3n-2)+(3n+1)+(3n+4)$

c). $S=100^2-99^2+98^2-97^2+...+2^2-1^2$

Lời giải

a). Ta có dãy số $1,3,5,\cdots,(2n-1),(2n+1)$ là cấp số cộng với công sai $d=2$ và $u_1=1$, số hạng tổng quát $u_m=2n+1$. Do đó có $2n+1=u_1+(m-1)d\Leftrightarrow 2n+1=1+(m-1).2\Rightarrow m=n+1$.

Vậy $S_{n+1}=\frac{(n+1)(2u_1+nd)}{2}=\frac{(n+1)(2n+1)}{2}$.

b). Ta có dãy số $1,4,7,\cdots,(3n-2),(3n+1),(3n+4)$ là cấp số cộng với công sai $d=3$ và $u_1=1$, số hạng tổng quát $u_m=3n+4$. Do đó có: $3n+4=u_1+(m-1)d\Leftrightarrow 3n+4=1+(m-1).3\Rightarrow m=n+2$

Vậy $S_{n+2}=\frac{m(2u_1+(m-1)d)}{2}=\frac{(n+2)[2+(n+1)3]}{2}=\frac{(n+2)(3n+5)}{2}$.

c). $S=100^2-99^2+98^2-97^2+...+2^2-1^2$

$=(100-99)(100+99)+(98-97)(98+97)+...+(2-1)(2+1)$

$=199+195+...+3$

Ta có dãy số $3,7,...,195,199$ là cấp số cộng với công sai $d=4$, số hạng đầu tiên $u_1=3$ và số hạng n là $u_n=199$.

Do đó có $199=3+(n-1).4\Rightarrow n=50$.

Vậy $S=\frac{50(2.3+49.4)}{2}=5050$.

C. Bài tập trắc nghiệm

DÀNH CHO HỌC SINH TRUNG BÌNH – KHÁ

Câu 1. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 9$ và công sai $d = 2$. Giá trị của u_2 bằng

A. 11. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 18. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $u_2 = u_1 + d = 9 + 2 = 11$.

Câu 2. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 8$ và công sai $d = 3$. Giá trị của u_2 bằng

A. $\frac{8}{3}$. **B.** 24. **C.** 5. **D.** 11.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức ta có: $u_2 = u_1 + d = 8 + 3 = 11$.

Câu 3. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 7$ công sai $d = 2$. Giá trị u_2 bằng

A. 14. **B.** 9. **C.** $\frac{7}{2}$. **D.** 5

Lời giải

Chọn B

Vì (u_n) là một cấp số cộng thì $u_{n+1} = u_n + d \Rightarrow u_2 = u_1 + d = 7 + 2 = 9$

Câu 4. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1 = \frac{1}{3}$, $u_8 = 26$. Tìm công sai d

A. $d = \frac{11}{3}$. **B.** $d = \frac{10}{3}$. **C.** $d = \frac{3}{10}$. **D.** $d = \frac{3}{11}$.

Lời giải

Chọn A

$u_8 = u_1 + 7d \Leftrightarrow 26 = \frac{1}{3} + 7d \Leftrightarrow d = \frac{11}{3}$.

Câu 5. Cho dãy số (u_n) là một cấp số cộng có $u_1 = 3$ và công sai $d = 4$. Biết tổng n số hạng đầu của dãy số (u_n) là $S_n = 253$. Tìm n.

A. 9. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Ta có $S_n = \frac{n\left(2u_1 + (n-1)d\right)}{2} \Leftrightarrow \frac{n\left(2.3 + (n-1).4\right)}{2} = 253$

$\Leftrightarrow 4n^2 + 2n - 506 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 11 \\ n = -\frac{23}{2} (L) \end{array}\right.$.

Câu 6. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = 3n - 2$. Tìm công sai d của cấp số cộng.

A. $d = 3$. **B.** $d = 2$. **C.** $d = -2$. **D.** $d = -3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $u_{n+1}-u_n=3(n+1)-2-3n+2=3$

Suy ra $d=3$ là công sai của cấp số cộng.

Câu 7. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=-3$, $u_6=27$. Tính công sai d.

A. $d=7$. **B.** $d=5$. **C.** $d=8$. **D.** $d=6$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $u_6=u_1+5d=27\Rightarrow d=6$.

Câu 8. Cho dãy số vô hạn $\{u_n\}$ là cấp số cộng có công sai d, số hạng đầu u_1. Hãy chọn khẳng định sai?

A. $u_5=\dfrac{u_1+u_9}{2}$. **B.** $u_n=u_{n-1}+d$, $n\geq 2$.

C. $S_{12}=\dfrac{n}{2}(2u_1+11d)$. **D.** $u_n=u_1+(n-1).d$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Lời giải

Chọn C

Ta có công thức tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng là: $S_n=nu_1+\dfrac{n(n-1)d}{2}$

Suy ra $S_{12}=12u_1+\dfrac{12.11.d}{2}=6(2u_1+11d)\neq\dfrac{n}{2}(2u_1+11d)$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 9. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1=5$ và tổng của 50 số hạng đầu bằng 5150. Tìm công thức của số hạng tổng quát u_n.

A. $u_n=1+4n$. **B.** $u_n=5n$. **C.** $u_n=3+2n$. **D.** $u_n=2+3n$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $S_{50}=\dfrac{50}{2}(2u_1+49d)=5150\Rightarrow d=4$.

Số hạng tổng quát của cấp số cộng bằng $u_n=u_1+(n-1)d=1+4n$.

Câu 10. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases}u_4=10\\u_4+u_6=26\end{cases}$ có công sai là

A. $d=-3$. **B.** $d=3$. **C.** $d=5$. **D.** $d=6$.

Lời giải

Chọn B

Gọi d là công sai.

Ta có: $\begin{cases}u_4=10\\u_4+u_6=26\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+3d=10\\2u_1+8d=26\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=1\\d=3\end{cases}$.

Vậy công sai $d=3$.

Câu 11. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_5 = -15$, $u_{20} = 60$. Tổng của 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là:

A. $S_{10} = -125$. **B.** $S_{10} = -250$. **C.** $S_{10} = 200$. **D.** $S_{10} = -200$.

Lời giải

Chọn A

Gọi u_1, d lần lượt là số hạng đầu và công **sai** của cấp số cộng.

Ta có: $\begin{cases} u_5 = -15 \\ u_{20} = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = -15 \\ u_1 + 19d = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -35 \\ d = 5 \end{cases}$.

Vậy $S_{10} = \frac{10}{2}.(2u_1 + 9d) = 5.[2.(-35) + 9.5] = -125$.

Câu 12. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12$, $u_{14} = 18$. Tính tổng 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này.

A. $S_{16} = -24$. **B.** $S_{16} = 26$. **C.** $S_{16} = -25$. **D.** $S_{16} = 24$.

Lời giải

Chọn D

Gọi d là công sai của cấp số cộng. Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} u_1 + 3d = -12 \\ u_1 + 13d = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -21 \\ d = 3 \end{cases}$.

Khi đó, $S_{16} = \frac{(2u_1 + 15d).16}{2} = 8(-42 + 45) = 24$.

Câu 13. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_5 = 18$ và $4S_n = S_{2n}$. Tìm số hạng đầu tiên u_1 và công sai d của cấp số cộng.

A. $u_1 = 2; d = 4$. **B.** $u_1 = 2;\ d = 3$. **C.** $u_1 = 2;\ d = 2$. **D.** $u_1 = 3; d = 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $u_5 = 18 \Leftrightarrow u_1 + 4d = 18\ (1)$.

$4S_n = S_{2n} \Leftrightarrow 4\left[nu_1 + \frac{n(n-1)d}{2}\right] = \left[2nu_1 + \frac{2n(2n-1)d}{2}\right] \Leftrightarrow 4u_1 + 2nd - 2d = 2u_1 + 2nd - d$

$\Leftrightarrow 2u_1 - d = 0\ (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $u_1 = 2; d = 4$.

Câu 14. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -2$ và công sai $d = 3$. Tìm số hạng u_{10}.

A. $u_{10} = -2.3^9$. **B.** $u_{10} = 25$. **C.** $u_{10} = 28$. **D.** $u_{10} = -29$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $u_{10} = u_1 + 9d = -2 + 9.3 = 25$.

Câu 15. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 11$ và công sai $d = 4$. Hãy tính u_{99}.

A. 401. **B.** 403. **C.** 402. **D.** 404.

Lời giải

Chọn B

Ta có : $u_{99} = u_1 + 98d = 11 + 98.4 = 403$.

Câu 16. Cho cấp số cộng (u_n), $n \in \mathbb{N}^*$ có số hạng tổng quát $u_n = 1-3n$. Tổng của 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng bằng

A. -59048. **B.** -59049. **C.** -155. **D.** -310.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $u_n = 1-3n \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 1-3.1 = -2 \\ u_{10} = 1-3.10 = -29 \end{cases}$.

Áp dụng công thức: $S = \dfrac{n(u_1+u_n)}{2} = \dfrac{10(u_1+u_{10})}{2} = -155$.

Câu 17. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 4; u_2 = 1$. Giá trị của u_{10} bằng

A. $u_{10} = 31$. **B.** $u_{10} = -23$. **C.** $u_{10} = -20$. **D.** $u_{10} = 15$.

Lời giải

Chọn B.

$u_1 = 4; u_2 = 1 \Rightarrow d = -3$. Vậy $u_{10} = u_1 + 9d = 4 + 9.(-3) = -23$.

Câu 18. Cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$, công sai $d = 5$, số hạng thứ tư là

A. $u_4 = 23$. **B.** $u_4 = 18$. **C.** $u_4 = 8$. **D.** $u_4 = 14$.

Lời giải

Chọn B.

$u_4 = u_1 + 3d = 3 + 5.3 = 18$.

Câu 19. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công sai $d = 2$. Tính u_5.

A. 11. **B.** 15. **C.** 12. **D.** 14.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $u_5 = u_1 + 4d = 3 + 4.2 = 11$.

Câu 20. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 123$, $u_3 - u_{15} = 84$. Số hạng u_{17} bằng

A. 235. **B.** 11. **C.** 96000cm^3. **D.** 81000cm^3.

Lời giải

Chọn B.

Giả sử cấp số cộng (u_n) có công sai d.

Theo giả thiết ta có: $u_3 - u_{15} = 84 \Leftrightarrow u_1 + 2d - u_1 - 14d = 84 \Leftrightarrow -12d = 84 \Leftrightarrow d = -7$.

Vậy $u_{17} = u_1 + 16d = 123 + 16.(-7) = 11$.

Câu 21. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$ và công sai $d = 2$. Tổng $S_{10} = u_1 + u_2 + u_3 ..... + u_{10}$ bằng:

A. $S_{10} = 110$. **B.** $S_{10} = 100$. **C.** $S_{10} = 21$. **D.** $S_{10} = 19$.

Lời giải

Chọn B.

* Áp dụng công thức $S_n = \dfrac{n(u_n+u_1)}{2} = \dfrac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2}$ ta được:

$S_{10}=\dfrac{10\left[2+(10-1)2\right]}{2}=100$.

Câu 22. Cho cấp số cộng (u_n), biết $u_2=3$ và $u_4=7$. Giá trị của u_{15} bằng

A. 27. **B.** 31. **C.** 35. **D.** 29.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết $u_2=3$ và $u_4=7$ suy ra ta có hệ phương trình: $\begin{cases}u_1+d=3\\u_1+3d=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u_1=1\\d=2\end{cases}$.

Vậy $u_{15}=u_1+14d=29$.

Câu 23. Viết ba số xen giữa 2 và 22 để ta được một cấp số cộng có 5 số hạng?

A. $6, 12, 18$. **B.** $8, 13, 18$. **C.** $7, 12, 17$. **D.** $6, 10, 14$.

Lời giải

Chọn C

Xem cấp số cộng cần tìm là (u_n) có: $\begin{cases}u_1=2\\u_5=22\end{cases}$. Suy ra: $\begin{cases}u_1=2\\d=5\end{cases}$.

Vậy cấp số cộng cần tìm là (u_n): $2, 7, 12, 17, 22$.

Câu 24. Cho dãy số $u_1=1; u_n=u_{n-1}+2$, $(n\in\mathbb{N}, n>1)$. Kết quả nào đúng?

A. $u_5=9$. **B.** $u_3=4$. **C.** $u_2=2$. **D.** $u_6=13$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $u_n=u_{n-1}+2\Rightarrow u_n-u_{n-1}=2$ nên dãy (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d=2$.

Nên theo công thức tổng quát của CSC $u_n=u_1+(n-1)d$.

Do đó: $u_2=u_1+d=1+2=3$; $u_3=u_1+2d=1+2.2=5$; $u_5=u_1+4d=1+4.2=9$;

$u_6=u_1+5d=1+5.2=11$.

Vậy $u_5=9$.

Câu 25. Cho cấp số cộng có tổng n số hạng đầu là $S_n=3n^2+4n$, $n\in\mathbb{N}^*$. Giá trị của số hạng thứ 10 của cấp số cộng là

A. $u_{10}=55$. **B.** $u_{10}=67$. **C.** $u_{10}=61$. **D.** $u_{10}=59$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết ta có $S_1=u_1=3.1^2+4.1=7$.

Ta có $S_n=3n^2+4n=\dfrac{n(8+6n)}{2}=\dfrac{n(7+6n+1)}{2}\Rightarrow u_n=6n+1\Rightarrow u_{10}=61$.

Câu 26. Cho cấp số cộng có tổng n số hạng đầu là $S_n=4n^2+3n$, $n\in\mathbb{N}^*$ thì số hạng thứ 10 của cấp số cộng là

A. $u_{10}=95$. **B.** $u_{10}=71$. **C.** $u_{10}=79$. **D.** $u_{10}=87$.

Lời giải

Chọn C

Theo công thức ta có $\frac{n(u_1+u_n)}{2}=4n^2+3n \Leftrightarrow u_1+u_n=8n+6 \Rightarrow u_n=-u_1+8n+6$.

Mà $u_1=S_1=7$ do đó $u_{10}=-7+8.10+6=79$.

Câu 27. Người ta viết thêm 999 số thực vào giữa số 1 và số 2018 để được cấp số cộng có 1001 số hạng. Tìm số hạng thứ 501.

A. 1009. **B.** $\frac{2019}{2}$. **C.** 1010. **D.** $\frac{2021}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức cấp số cộng ta có:

$u_n=u_1+(n-1)d \Rightarrow u_{1001}=u_1+(1001-1)d \Leftrightarrow 2018=1+(1001-1)d \Rightarrow d=\frac{2017}{1000}$.

Vậy số hạng thứ 501 là $u_{501}=u_1+(501-1)d=\frac{2019}{2}$.

DÀNH CHO HỌC SINH KHÁ – GIỎI

Câu 28. Bốn số tạo thành một cấp số cộng có tổng bằng 28 và tổng các bình phương của chúng bằng 276. Tích của bốn số đó là :

A. 585. **B.** 161. **C.** 404. **D.** 276.

Lời giải

Chọn A

Gọi 4 số cần tìm là $a-3r$, $a-r$, $a+r$, $a+3r$.

Ta có: $\begin{cases} a-3r+a-r+a+r+a+3r=28 \\ (a-3r)^2+(a-r)^2+(a+r)^2+(a+3r)^2=276 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=7 \\ r^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=7 \\ r=\pm 2 \end{cases}$.

Bốn số cần tìm là 1, 5, 9, 13 có tích bằng 585.

Câu 29. Chu vi một đa giác là $158cm$, số đo các cạnh của nó lập thành một cấp số cộng với công sai $d=3cm$. Biết cạnh lớn nhất là $44cm$. Số cạnh của đa giác đó là?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Giả sử đã giác đã cho có n cạnh thì chu vi của đa giác là: $S_n=\frac{(u_1+u_n)n}{2}$ với u_1 là cạnh nhỏ nhất.

Suy ra: $158=\frac{(u_1+44)n}{2} \Leftrightarrow 316=(u_1+44)n \Leftrightarrow 2^2.79=(u_1+44)n$

Do đó u_1+44 là ước nguyên dương của $316=2^2.79$ và đa giác có ít nhất ba cạnh nên

$\frac{316}{3}>u_1+44>44$. Suyra: $u_1+44=79 \Leftrightarrow u_1=35$.

Số cạnh của đa giác đã cho là: $\frac{44-35}{3}+1=4$ (cạnh).

Câu 30. Cho hai cấp số cộng (x_n): 4, 7, 10,… và (y_n): 1, 6, 11,…. Hỏi trong 2018 số hạng đầu tiên của mỗi cấp số có bao nhiêu số hạng chung?

A. 404. **B.** 673. **C.** 403. **D.** 672.

Lời giải

Chọn C

Số hạng tổng quát của cấp số cộng (x_n) là: $x_n = 4+(n-1).3 = 3n+1$.

Số hạng tổng quát của cấp số cộng (y_n) là: $y_m = 1+(m-1).5 = 5m-4$.

Giả sử k là 1 số hạng chung của hai cấp số cộng trong 2018 số hạng đầu tiên của mỗi cấp số.

Vì k là 1 số hạng của cấp số cộng (x_n) nên $k = 3i+1$ với $1 \le i \le 2018$ và $i \in \mathbb{N}^*$.

Vì k là 1 số hạng của cấp số cộng (y_n) nên $k = 5j-4$ với $1 \le j \le 2018$ và $j \in \mathbb{N}^*$.

Do đó $3i+1 = 5j-4 \Rightarrow 3i = 5j-5 \Rightarrow i \vdots 5 \Rightarrow i \in \{5;10;15;...;2015\} \Rightarrow$ có 403 số hạng chung.

Câu 31. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng bằng 20 và tổng các bình phương của chúng bằng 120.

A. 1,5,6,8. **B.** 2,4,6,8. **C.** 1,4,6,9. **D.** 1,4,7,8.

Lời giải

Chọn **B**

Giả sử bốn số hạng đó là $a-3x;a-x;a+x;a+3x$ với công sai là $d = 2x$.Khi đó, ta có:

$$\begin{cases} (a-3x)+(a-x)+(a+x)+(a+3x) = 20 \\ (a-3x)^2+(a-x)^2+(a+x)^2+(a+3x)^2 = 120 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 20 \\ 4a^2+20x^2 = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Vậy bốn số cần tìm là 2,4,6,8.

Câu 32. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa: $\begin{cases} u_2-u_3+u_5 = 10 \\ u_4+u_6 = 26 \end{cases}$. Xác định công sai d và số hạng đầu tiên u_1.

A. $d = 3, u_1 = 1$. **B.** $d = 1, u_1 = 1$. **C.** $d = 1, u_1 = 3$. **D.** $d = -3, u_1 = 1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$\begin{cases} (u_1+d)-(u_1+2d)+(u_1+4d) = 10 \\ (u_1+3d)+(u_1+5d) = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+3d = 10 \\ u_1+4d = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases}$$

Vậy $d = 3, u_1 = 1$.

Câu 33. Xen vào giữa hai số 4 và 40 bốn số để được một cấp số cộng? Tìm tổng bốn số đó?

A. 72. **B.** 88. **C.** 100. **D.** 66

Lời giải

Chọn **B**

Nếu xen 4 số vào giữa hai số để được một cấp số cộng thì cấp số đó có 6 số hạng. Theo đầu bài ta có: $u_1 = 4, u_6 = 40 \Rightarrow 40 = 4+5d \Leftrightarrow d = \dfrac{40-4}{5} = 7,2$

4 số thêm vào là: $11,2;\ 18,4.,25,6,32,8 \Rightarrow S = 11,2+\ 18,4+25,6+32,8 = 88$

Câu 34. Ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng có tổng của chúng bằng 3 và tổng các nghịch đảo của chúng bằng $\dfrac{1}{3}$. Tìm tổng bình phương các số hạng.

A. 8 **B.** 11 **C.** 14 **D.** 15

Lời giải

Chọn **B**

Giả sử bốn số hạng đó là $a-x;a;a+x$ với công sai là $d=x$ .Khi đó, ta có:

$$\begin{cases}(a-x)+a+(a+x)=3\\ \dfrac{1}{a-x}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a+x}=\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ \dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}=\frac{-2}{3}\Leftrightarrow 2(1-x^2)+6=0\Rightarrow x=\pm 2$$

Vậy tổng bình phương các số hạng là $(-1)^2+(1)^2+3^2=11$

Câu 35. Cho cấp số cộng (u_n) có công sai dương và $\begin{cases}u_{21}+u_{27}=86\\ u_{21}^2+u_{27}^2=3770\end{cases}$. Tích của số hạng đầu và công sai bằng:

A. -36. **B.** -26. **C.** -16. **D.** -6.

Lời giải

Chọn **D**

Vì công sai là số dương nên $u_{27}>u_{21}$.

Ta có $\begin{cases}u_{21}+u_{27}=86\\ u_{21}^2+u_{27}^2=3770\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_{21}+u_{27}=86\\ (u_{21}+u_{27})^2-2u_{21}.u_{27}=3770\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_{21}+u_{27}=86\\ u_{21}.u_{27}=1813\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_{21}=37\\ u_{27}=49\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+20d=37\\ u_1+26d=49\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d=2\\ u_1=-3\end{cases}$. Suy ra $u_1.d=-6$.

Câu 36. Cho cấp số cộng (u_n) biết tổng của n số hạng đầu là $S_n=-4n^2+17n$. Tìm u_6 ?

A. $u_6=-27$. **B.** $u_1=-23$. **C.** $u_1=28$. **D.** $u_1=22$.

Lời giải

Nguyễn Bảo Vương

Chọn **A**

Ta có $u_6=S_6-S_5=(-4.6^2+17.6)-(-4.5^2+17.5)=-27$.

Câu 37. Cho một tam giác vuông có độ dài ba cạnh lập thành cấp số cộng. Chu vi tam giác đó bằng 24. Độ dài cạnh nhỏ nhất của tam giác này là:

A. 3. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

Chọn **D**

Vì ba cạnh lập thành cấp số cộng nên độ dài ba cạnh là: $a-d;a;a+d\ (a>d;d>0)$.

Chu vi tam giác bằng $24\Rightarrow a-d+a+a+d=24\Leftrightarrow a=8$. (1)

Mặt khác tam giác này vuông nên ta có: $(a-d)^2+a^2=(a+d)^2\Leftrightarrow a^2-4ad=0\Leftrightarrow a=4d$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases}a=8\\ d=2\end{cases}\Rightarrow a-d=6$.

Câu 38. Ba góc của một tam giác vuông lập thành một cấp số cộng. Công sai $d\ (d>0)$ của cấp số cộng đó bằng

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 25°. **D.** 20°.

Lời giải

Chọn A

Gọi 3 góc của tam giác vuông là $a-d,\ a,\ a+d\ (d>0)$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}(a-d)+a+(a+d)=180^o\\ a+d=90^o\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=60^o\\ d=30^o\end{cases}$

Câu 39. Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng cho bởi $S_n=3n^2-n$. Công sai của cấp số cộng đó là

A. $d=4$. **B.** $d=5$. **C.** $d=6$. **D.** $d=7$.

Lời giải

Chọn C

$S_1=u_1=2,\ S_2=u_1+u_2=10\Rightarrow u_2=8\Rightarrow d=u_2-u_1=6$

Câu 40. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa: $\begin{cases}u_5+3u_3-u_2=-21\\ 3u_7-2u_4=-34\end{cases}$.Tính $S=u_4+u_5+...+u_{30}$

A. $S=-1286$ **B.** $S=-1276$ **C.** $S=-1242$ **D.** $S=-1222$

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết bài toán, ta có: $\begin{cases}u_1+4d+3(u_1+2d)-(u_1+d)=-21\\ 3(u_1+6d)-2(u_1+3d)=-34\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+3d=-7\\ u_1+12d=-34\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=2\\ d=-3\end{cases}$.

Ta có: $S=u_4+u_5+...+u_{30}=\dfrac{27}{2}\left[2u_4+26d\right]$

$=27\left(u_1+16d\right)=-1242$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 41. Cho một dãy số có các số hạng đầu tiên là 1,8,22,43,. Hiệu của hai số hạng liên tiếp của dãy số đó lập thành một cấp số cộng: 7,14,21., 7n. số 35351 là số hạng thứ mấy của cấp số đã cho?

A. 99. **B.** 101. **C.** 100. **D.** 102.

Lời giải

Chọn B

Theo đầu bài ta có:

$$\begin{cases}u_2-u_1=7\\ u_3-u_2=14\\ u_4-u_3=21\\ .....\\ u_n-u_{n-1}=7(n-1)\end{cases}$$

Cộng các vế của các phương trình của hệ ta dược:

$\Leftrightarrow u_n-u_1=7+14+21+...+7(n-1)=7\dfrac{n(n-1)}{2}\quad(1)$

Đặt: $u_n=35351\Rightarrow(1)\Leftrightarrow 35351-1=7\dfrac{n(n-1)}{2}\Leftrightarrow n^2-n-10100=0\rightarrow n=101$.

Do đó: 35351 là số hạng thứ 101 của dãy số.

Câu 42. Một dãy số (u_n) có số hạng tổng quát là $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \dfrac{n^2 + 2n}{2}$. Khẳng định nào sau đây là đúng khi nói về (u_n)?

A. (u_n) không là cấp số cộng.

B. (u_n) là cấp số cộng có $u_{100} = \dfrac{101}{2}$.

C. (u_n) là cấp số cộng có $u_{100} = \dfrac{301}{2}$.

D. (u_n) là cấp số cộng có $u_{100} = \dfrac{201}{2}$.

Lời giải

Chọn **D**

$S_n = u_1 + u_2 + ...u_{n-1} + u_n = \dfrac{n^2 + 2n}{2}$

$\Rightarrow S_{n-1} = u_1 + u_2 + ... + u_{n-1} = \dfrac{(n-1)^2 + 2(n-1)}{2} = \dfrac{n^2 - 1}{2}$

$\Rightarrow u_n = S_n - S_{n-1} = \dfrac{2n+1}{2} \Rightarrow u_{100} = \dfrac{201}{2}$

Câu 43. Cho hai cấp số cộng hữu hạn $(a_n): 2;5;8;11;...;a_{1000}$. và $(b_n): -1;6;13;20;...;b_{1000}$. Có bao nhiêu số hạng có mặt ở cả hai dãy số trên?

A. 213. **B.** 400. **C.** 142. **D.** 138.

Lời giải

Chọn **C**

Ta thấy cấp số cộng (a_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d_1 = 3$. Khi đó số hạng thứ m của cấp số cộng này là: $a_m = 2 + (m-1).3$

Cấp số cộng (b_n) có số hạng đầu $u_1 = -1$ và công sai $d_2 = 7$. Khi đó số hạng thứ n của cấp số cộng này là: $b_n = -1 + (n-1).7$

Xét $a_m = b_n \Leftrightarrow 2 + (m-1)3 = -1 + (n-1).7 \Leftrightarrow 3m = 7(n-1) \Rightarrow m \vdots 7 \Rightarrow m = 7k \ (k \in \mathbb{N}^*)$

Mà $1 \le m \le 1000 \Leftrightarrow 1 \le 7k \le 1000 \Leftrightarrow k \in \left[\dfrac{1}{7}; \dfrac{1000}{7}\right], k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow k \in \{1;2;3;...;142\}$. Vậy có 142 giá trị k tương ứng với 142 số hạng có mặt ở cả hai dãy số trên.

Câu 44. Biết tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng bằng nửa tổng n số hạng tiếp theo. Tính tỷ số $\dfrac{S_{3n}}{S_{2n}}$?

A. 4. **B.** –5. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn **D**

Từ giả thiết ta có:

$S_n = \dfrac{1}{2}(S_{2n} - S_n) \Leftrightarrow S_{2n} = 3S_n \Leftrightarrow 2nu_1 + n(n-1)d = 3\left(nu_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d\right) \Leftrightarrow 2u_1 = d(n+1)$

Khi đó $\frac{S_{3n}}{S_{2n}}=\frac{S_{3n}}{3S_n}=\frac{3nu_1+\frac{3n(3n-1)}{2}d}{3\left[nu_1+\frac{n(n-1)}{2}d\right]}=\frac{2u_1+(3n-1)d}{2u_1+(n-1)d}=\frac{(n+1)d+(3n-1)d}{(n+1)d+(n-1)d}=2.$

Câu 45. Một đồng hồ đánh giờ, khi kim giờ chỉ số n (từ 1 đến 12) thì đồng hồ đánh đúng n tiếng. Hỏi trong một ngày (24 giờ) đồng hồ đánh được bao nhiêu tiếng?

A. 156. **B.** 152. **C.** 148. **D.** 160.

Lời giải

Chọn A

Số tiếng đồng hồ đánh trong một ngày là

$S=2(1+2+...+12)=2.\frac{12.13}{2}=156$

Câu 46. Cho ba số lập thành một cấp số cộng. Tổng của chúng bằng 15 và tích của chúng bằng 80. Công sai $d\ (d>0)$ của cấp số cộng đó bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Gọi 3 số lập thành cấp số cộng là $a-d,\ a,\ a+d\ (d>0)$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}(a-d)+a+(a+d)=15\\(a-d).a.(a+d)=80\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5\\d=3\end{cases}$

Câu 47. Cho cấp số cộng (u_n) biết: $\begin{cases}u_3+u_5-u_6=6\\u_8+u_4=52\end{cases}$. Tính $S=u_2+u_4+u_6+...+u_{2020}$

A. $S=5105110.$ **B.** $S=5101510.$ **C.** $S=5105010.$ **D.** $S=5105101.$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\begin{cases}u_3+u_5-u_6=6\\u_8+u_4=52\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+2d+u_1+4d-u_1-5d=6\\u_1+7d+u_1+3d=52\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+d=6\\2u_1+10d=52\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=1\\d=5\end{cases}.$

Ta có: Dãy số $u_2=6,u_4=16,u_6=26,u_8=36,...,u_{2020}=10096$ là một cấp số cộng với số hạng đầu $v_1=u_2=6,d=10,v_{1010}=u_{2020}=10096.$

$S=u_2+u_4+u_6+...+u_{2020}=\frac{1010}{2}[2.6+(1010-1).10]=5101510.$

Câu 48. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $\begin{cases}u_2-u_3+u_5=10\\u_4+u_6=26\end{cases}$. Tính $S=u_1+u_4+u_7+...+u_{2020}.$

A. S = 2041881. **B.** S = 2041882. **C.** S = 2041883. **D.** S = 2041884.

Lời giải

Chọn C

$\begin{cases}u_2-u_3+u_5=10\\u_4+u_6=26\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+d-u_1-2d+u_1+4d=10\\u_1+3d+u_1+5d=26\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+3d=10\\2u_1+8d=26\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=1\\d=3\end{cases}.$

$u_4=10,u_7=19,u_{10}=28,...$

Ta có $u_1, u_4, u_7, u_{10}, ..., u_{2020}$ là cấp số cộng có $\begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 9 \\ n = 674 \end{cases}$

Do đó $S = \frac{674}{2}(2.1 + 673.9) = 2041883.$

Câu 49. Một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 2018$ công sai $d = -5$. Hỏi bắt đầu từ số hạng nào của cấp số cộng đó thì nó nhận giá trị âm.

A. u_{406}. **B.** u_{403}. **C.** u_{405}. **D.** u_{404}.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $u_n = (n-1)d + u_1 \ (n \in \mathbb{N})$.

Theo đề ra $u_n = 2018 - 5(n-1) < 0$

$\Leftrightarrow 2018 < 5(n-1)$

$\Leftrightarrow 2023 < 5n \Leftrightarrow n > \frac{2023}{5} \Rightarrow n = 405$

PP trắc nghiệm:

Vì $u_n = (n-1)d + u_1 = 2018 - 5(n-1)$

Thay từng giá trị vào ta có:

$u_{403} = 2018 - 5.402 = 8$

$u_{404} = 2018 - 5.403 = 3$

$u_{405} = 2018 - 5.404 = -2$.

Câu 50. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1$?

A. -20. **B.** -6. **C.** -8. **D.** -24.

Lời giải

Chọn D

Ta gọi d là công sai của cấp số cộng.

$u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1 = 4(4+d) + (4+d)(4+2d) + 4(4+2d)$

$= 2d^2 + 24d + 48 = 2(d+6)^2 - 24 \geq -24$

Dấu "=" xảy ra khi $d = -6$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1$ là -24.

Câu 51. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 3$ và công sai $d = 7$. Hỏi kể từ số hạng thứ mấy trở đi thì các số hạng của (u_n) đều lớn hơn 2018?

A. 287. **B.** 289. **C.** 288. **D.** 286.

Lời giải

Chọn B

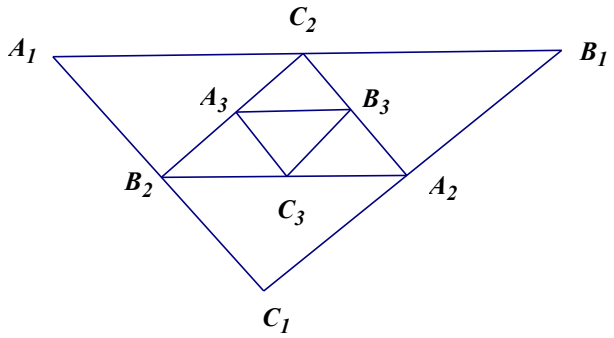
Ta có: $u_n = u_1 + (n-1)d = 3 + 7(n-1) = 7n - 4$; $u_n > 2018 \Leftrightarrow 7n - 4 > 2018 \Leftrightarrow n > \frac{2022}{7}$

Vậy $n = 289$.

Câu 52. Cho tam giác đều $A_1B_1C_1$ có độ dài cạnh bằng 4. Trung điểm của các cạnh tam giác $A_1B_1C_1$ tạo thành tam giác $A_2B_2C_2$, trung điểm của các cạnh tam giác $A_2B_2C_2$ tạo thành tam giác $A_3B_3C_3$ … Gọi $P_1, P_2, P_3, ...$ lần lượt là chu vi của tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$,…Tính tổng chu vi $P = P_1 + P_2 + P_3 + ...$

A. $P = 8$. **B.** $P = 24$. **C.** $P = 6$. **D.** $P = 18$.

Lời giải



Chọn B

Ta có:

$P_2 = \frac{1}{2}P_1;\ P_3 = \frac{1}{2}P_2 = \frac{1}{4}P_1;\ P_4 = \frac{1}{2}P_3 = \frac{1}{8}P_1 \ldots; P_n = \frac{1}{2^{n-1}}P_1$

…

Vậy $P = P_1 + P_2 + P_3 + ... = P_1 + \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{4}P_1 + \frac{1}{8}P_1 + ... = \frac{P_1}{1-\frac{1}{2}} = 2P_1 = 24.$

DẠNG 3. MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN CẤP SỐ CỘNG

DÀNH CHO HỌC SINH KHÁ – GIỎI

Câu 1. Sinh nhật lần thứ 17 của An vào ngày 01 tháng 5 năm 2018. Bạn An muốn mua một chiếc máy ảnh giá 3850000 đồng để làm quà sinh nhật cho chính mình nên An quyết định bỏ ống heo 1000 đồng vào ngày 01 tháng 02 năm 2018. Trong các ngày tiếp theo, ngày sau bỏ ống nhiều hơn ngày trước 1000 đồng. Hỏi đến ngày sinh nhật của mình, An có bao nhiêu tiền (tính đến ngày 30 tháng 4 năm 2018)?

A. 4095000 đồng. **B.** 89000 đồng. **C.** 4005000 đồng. **D.** 3960000 đồng.

Lời giải

Chọn C

* Số tiền bỏ heo của An mỗi ngày tạo thành một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 1000$ công sai $d = 1000$.

* Tổng số tiền bỏ heo tính đến ngày thứ n là:

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2}$$

* Tính đến ngày 30 tháng 4 năm 2018 (tính đến ngày thứ 89) tổng số tiền bỏ heo là:

$$S_{89}=\frac{89\left[2.1000+(89-1).1000\right]}{2}=45.89.1000=4005000 \text{ đồng.}$$

Câu 2. Người ta trồng 3003 cây theo dạng một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, hàng thứ hai trồng 2 cây, hàng thứ ba trồng 3 cây, …, cứ tiếp tục trồng như thế cho đến khi hết số cây. Số hàng cây được trồng là

A. 77. **B.** 79. **C.** 76. **D.** 78.

Lời giải

Chọn A

Gọi số cây ở hàng thứ n là u_n.

Ta có: $u_1=1$, $u_2=2$, $u_3=3$, … và $S=u_1+u_2+u_3+...+u_n=3003$.

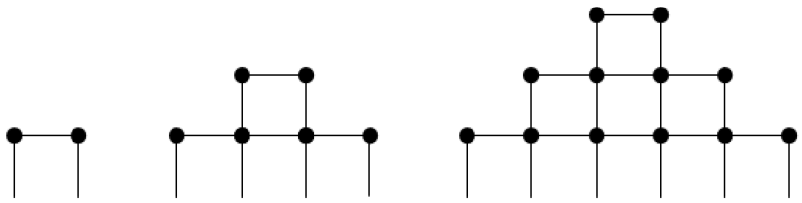
Nhận xét dãy số (u_n) là cấp số cộng có $u_1=1$, công sai $d=1$.

Khi đó $S=\frac{n\left[2u_1+(n-1)d\right]}{2}=3003$.

Suy ra $\frac{n\left[2.1+(n-1)1\right]}{2}=3003\Leftrightarrow n(n+1)=6006\Leftrightarrow n^2+n-6006=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=77\\n=-78\end{array}\right.\Leftrightarrow n=77$ (vì $n\in\mathbb{N}$).

Vậy số hàng cây được trồng là 77.

Câu 3. Một em học sinh dùng các que diêm để xếp thành hình tháp có quy luật được thể hiện như trong hình sau:



1 tầng 2 tầng 3 tầng

Hỏi cần bao nhiêu que diêm để xếp thành hình tháp có 10 tầng?

A. 69. **B.** 39. **C.** 420. **D.** 210.

Lời giải

Chọn **D.**

Ta có: Số que diêm để xếp được tầng đế của tháp là một cấp số cộng với $u_1=3;d=4$.

Suy ra số que diêm để xếp được tầng đế của tháp 10 tầng là $u_{10}=u_1+9d=39$.

Từ đó số que diêm để xếp được hình tháp 10 tầng là $S_{10}=u_1+u_2+...+u_{10}=\frac{10(3+39)}{2}=210$.

Câu 4. Sinh nhật bạn của An vào ngày 01 tháng năm. An muốn mua một món quà sinh nhật cho bạn nên quyết định bỏ ống heo 100 đồng vào ngày 01 tháng 01 năm 2016, sau đó cứ liên tục ngày sau hơn ngày trước 100 đồng. Hỏi đến ngày sinh nhật của bạn, An đã tích lũy được bao nhiêu tiền? (thời gian bỏ ống heo tính từ ngày 01 tháng 01 năm 2016 đến ngày 30 tháng 4 năm 2016).

A. 738.100 đồng. **B.** 726.000 đồng. **C.** 714.000 đồng. **D.** 750.300 đồng.

Lời giải

Số ngày bạn An để dành tiền (thời gian bỏ ống heo tính từ ngày 01 tháng 01 năm 2016 đến ngày 30 tháng 4 năm 2016) là $31+29+31+30=121$ ngày.

Số tiền bỏ ống heo ngày đầu tiên là: $u_1=100$.

Số tiền bỏ ống heo ngày thứ hai là: $u_2 = 100 + 1.100$.

Số tiền bỏ ống heo ngày thứ ba là: $u_3 = 100 + 2.100$.

…

Số tiền bỏ ống heo ngày thứ n là: $u_n = u_1 + (n-1)d = 100 + (n-1)100 = 100n$.

Số tiền bỏ ống heo ngày thứ 121 là: $u_{121} = 100.121 = 12100$.

Sau 121 ngày thì số tiền An tích lũy được là tổng của 121 số hạng đầu của cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 100$, công sai $d = 100$.

Vậy số tiền An tích lũy được là $S_{121} = \frac{121}{2}(u_1 + u_{121}) = \frac{121}{2}(100 + 12100) = 738100$ đồng.

Câu 5. Trong sân vận động có tất cả 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 15 ghế, các dãy liền sau nhiều hơn dãy trước 4 ghế, hỏi sân vận động đó có tất cả bao nhiêu ghế?

A. 2250. **B.** 1740. **C.** 4380. **D.** 2190.

Lời giải

Gọi $u_1, u_2, ...u_{30}$ lần lượt là số ghế của dãy ghế thứ nhất, dãy ghế thứ hai,… và dãy ghế số ba mươi.

Ta có công thức truy hồi ta có $u_n = u_{n-1} + 4 \ (n = 2,3,...,30)$.

Ký hiệu: $S_{30} = u_1 + u_2 + ... + u_{30}$, theo công thức tổng các số hạng của một cấp số cộng, ta được:

$S_{30} = \frac{30}{2}(2u_1 + (30-1)4) = 15(2.15 + 29.4) = 2190$.

Câu 6. Một gia đình cần khoan một cái giếng để lấy nước. Họ thuê một đội khoan giếng nước. Biết giá của mét khoan đầu tiên là 80.000 đồng, kể từ mét khoan thứ hai giá của mỗi mét khoan tăng thêm 5.000 đồng so với giá của mét khoan trước đó. Biết cần phải khoan sâu xuống 50m mới có nước. Hỏi phải trả bao nhiêu tiền để khoan cái giếng đó?

A. 4.000.000 đồng. **B.** 10.125.000 đồng. **C.** 52.500.000 đồng. **D.** 52.500.000 đồng.

Lời giải

Chọn B

* Áp dụng công thức tính tổng của n số hạng đầu của cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 80.000$, công sai $d = 5.000$ ta được số tiền phải trả khi khoan đến mét thứ n là

$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$

* Khi khoan đến mét thứ 50, số tiền phải trả là

$S_{50} = \frac{50[2.80000 + (50-1).5000]}{2} = 10.125.000$ đồng.

Câu 7. Trong hội chợ tết Mậu Tuất 2018, một công ty sữa muốn xếp 900 hộp sữa theo số lượng 1, 3, 5, ... từ trên xuống dưới (số hộp sữa trên mỗi hàng xếp từ trên xuống là các số lẻ liên tiếp - mô hình như hình bên). Hàng dưới cùng có bao nhiêu hộp sữa?



A. 59. **B.** 30. **C.** 61. **D.** 57.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: p dụng công thức tính tổng n số hạng liên tiếp của CSC:

$S_n = \frac{n}{2}\left[2u_1 + (n-1)d\right] \Leftrightarrow 900 = \frac{n}{2}\left[2.1 + (n-1).2\right] \Leftrightarrow n^2 = 900 \Rightarrow n = 30.$

Vậy $u_{30} = 1 + 29 * 2 = 59.$

Cách 2: Áp dụng công thức $1+3+5+.....+(2n-1) = n^2$, suy ra $n = 30.$

Vậy $2n - 1 = 59..$

Câu 8. Người ta trồng 465 cây trong một khu vườn hình tam giác như sau: Hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ hai có 2 cây, hàng thứ ba có 3 cây….Số hàng cây trong khu vườn là

A. 31. **B.** 30. **C.** 29. **D.** 28.

Lời giải

Chọn B

Cách trồng 465 cây trong một khu vườn hình tam giác như trên lập thành một cấp số cộng (u_n) với số u_n là số cây ở hàng thứ n và $u_1 = 1$ và công sai $d = 1$.

Tổng số cây trồng được là: $S_n = 465 \Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 465 \Leftrightarrow n^2 + n - 930 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 30 \\ n = -31 (l) \end{array}\right.$.

Như vậy số hàng cây trong khu vườn là 30.

Câu 9. Hùng đang tiết kiệm để mua một cây guitar. Trong tuần đầu tiên, anh ta để dành 42 đô la, và trong mỗi tuần tiếp theo, anh ta đã thêm 8 đô la vào tài khoản tiết kiệm của mình. Cây guitar Hùng cần mua có giá 400 đô la. Hỏi vào tuần thứ bao nhiêu thì anh ấy có đủ tiền để mua cây guitar đó?

A. 47. **B.** 45. **C.** 44. **D.** 46.

Lời giải

Sau tuần đầu, Hùng cần thêm 358 đô la. Như vậy Hùng cần thêm $358 : 8 = 44,75$ tuần.

Vậy đến tuần thứ 46 Hùng đủ tiền.

Câu 10. Một công ti trách nhiệm hữu hạn thực hiện việc trả lương cho các kĩ sư theo phương thức sau: Mức lương của quý làm việc đầu tiên cho công ti là 4,5 triệu đồng/quý, và kể từ quý làm việc thứ hai, mức lương sẽ được tăng thêm 0,3 triệu đồng mỗi quý. Hãy tính tổng số tiền lương một kĩ sư nhận được sau 3 năm làm việc cho công ti.

A. 83,7 (triệu đồng). **B.** 78,3 (triệu đồng). **C.** 73,8 (triệu đồng). **D.** 87,3 (triệu đồng).

Lời giải

Ta có 3 năm bằng 12 quý.

Gọi $u_1, u_2, \ldots, u_{12}$ là tiền lương kĩ sư đó trong các quý (từ quý 1 đến quý 12).

Suy ra (u_n) là cấp số cộng với công sai 4,5.

Vậy số tiền lương kĩ sư nhận được là

$S_{12} = n\frac{2u_1 + (n-1)d}{2} = 12\frac{2 \times 4,5 + 11 \times 0,3}{2} = 73,8$ (triệu đồng).

Câu 11. Người ta trồng 465 cây trong một khu vườn hình tam giác như sau: Hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ hai có 2 cây, hàng thứ ba có 3 cây….Số hàng cây trong khu vườn là

A. 31. **B.** 30. **C.** 29. **D.** 28.

Lời giải

Cách trồng 465 cây trong một khu vườn hình tam giác như trên lập thành một cấp số cộng (u_n) với số u_n là số cây ở hàng thứ n và $u_1=1$ và công sai $d=1$.

Tổng số cây trồng được là: $S_n=465 \Leftrightarrow \dfrac{n(n+1)}{2}=465 \Leftrightarrow n^2+n-930=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=30 \\ n=-31(l) \end{array}\right.$.

Như vậy số hàng cây trong khu vườn là 30.

Câu 12. Người ta trồng 1275 cây theo hình tam giác như sau: Hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ 2 có 2 cây, hàng thứ 3 có 3 cây,.hàng thứ k có k cây $(k\geq 1)$. Hỏi có bao nhiêu hàng ?

A. 51. **B.** 52. **C.** 53. **D.** 50.

Lời giải

Chọn D

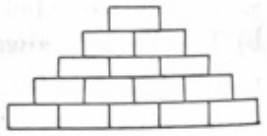
Đặt u_k là hàng thứ k

Ta có : $S=u_1+u_2+...+u_k=1+2+3+...+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$

Theo giả thiết ta có : $\dfrac{k(k+1)}{2}=1275 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=50 \\ k=-51<0 \end{array}\right.$

Vậy $k=50$ nên có 50 hàng.

Câu 13. Bà chủ quán trà sữa X muốn trang trí quán cho đẹp nên quyết định thuê nhân công xây một bức tường bằng gạch với xi măng (như hình vẽ bên dưới), biết hàng dưới cùng có 500 viên, mỗi hàng tiếp theo đều có ít hơn hàng trước 1 viên và hàng trên cùng có 1 viên. Hỏi số gạch cần dùng để hoàn thành bức tường trên là bao nhiêu viên?



A. 25250. **B.** 250500. **C.** 12550. **D.** 125250.

Lời giải

Chọn D

Ta có số gạch ở mỗi hàng là các số hạng của 1 cấp số cộng: 500, 499, 498,., 2, 1.

⇒ Tổng số gạch cần dùng là tổng của cấp số cộng trên, bằng

$S_{500}=\dfrac{500(500+1)}{2}=250.501=125250$ (viên)

Câu 14. Người ta trồng 3240 cây theo một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, kể từ hàng thứ hai trở đi số cây trồng mỗi hàng nhiều hơn 1 cây so với hàng liền trước nó. Hỏi có tất cả bao nhiêu hàng cây?

A. 81. **B.** 82. **C.** 80. **D.** 79.

Lời giải

Chọn C

Giả sử trồng được n hàng cây $(n\geq 1, n\in\mathbb{N})$.

Số cây ở mỗi hàng lập thành cấp số cộng có $u_1 = 1$ và công sai $d = 1$.

Theo giả thiết:

$$S_n = 3240 \Leftrightarrow \frac{n}{2}\left[2u_1 + (n-1)d\right] = 3240 \Leftrightarrow n(n+1) = 6480 \Leftrightarrow n^2 + n - 6480 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 80 \\ n = -81 \end{array}\right.$$

So với điều kiện, suy ra: $n = 80$.

Vậy có tất cả 80 hàng cây.

Nguyễn Bảo Vương

Chương 3

Bài 5 CẤP SỐ NHÂN

Lý thuyết

I.Định nghĩa

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q.

Số q được gọi là công bội của cấp số nhân.

Nếu (u_n) là cấp số nhân với công bội q, ta có công thức truy hồi:

$$u_{n+1} = u_n q \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

Đặc biệt:

- Khi $q = 0$, cấp số nhân có dạng $u_1, 0, 0, ..., 0, ...$
- Khi $q = 1$, cấp số nhân có dạng $u_1, u_1, u_1, ..., u_1, ...$
- Khi $u_1 = 0$ thì với mọi q, cấp số nhân có dạng $0, 0, 0, ..., 0, ...$

II.Số hạng tổng quát

Định lí 1. Nếu cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức

$$u_n = u_1.q^{n-1} \text{ với } n \geq 2.$$

III.Tính chất

Định lí 2. Trong một cấp số nhân, bình phương của mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là tích của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là

$$u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1}, \text{ với } k \geq 2.$$

IV.Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân

Định lí 3. Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

Khi đó $\boxed{S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}}$.

Chú ý: Nếu $q = 1$ thì cấp số nhân là $u_1, u_1, u_1, ..., u_1, ...$ khi đó $S_n = nu_1$.

DẠNG 1: CHỨNG MINH MỘT DÃY (u_n) LÀ CẤP SỐ NHÂN.

A. Phương pháp giải

Chứng minh $\forall n \geq 1, u_{n+1} = u_n.q$ trong đó q là một số không đổi.

Nếu $u_n \neq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì ta lập tỉ số $T = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

* T là hằng số thì (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = T$.
* T phụ thuộc vào n thì (u_n) không là cấp số nhân.

B. Bài tập tự luận

Câu 1. Xét trong các dãy số số sau, dãy số nào là cấp số nhân, (nếu có) tìm công bối của cấp số nhân đó:

a). $u_n = (-3)^{2n+1}$ b). $u_n = (-1)^n.5^{3n+2}$ c). $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$ d). $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{9}{u_n} \end{cases}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Chứng minh rằng dãy số $(v_n): v_n = (-1)^n.3^{2n}$ là một cấp số nhân.

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Giá trị của a để $\dfrac{-1}{5}$; a; $\dfrac{-1}{125}$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân?

.....

.....

.....

.....

Câu 4. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n + 9 \end{cases}, \forall n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = u_n + 3, \forall n \geq 1$ là một cấp số nhân. Hãy xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5. Cho x, 3, y theo thứ tự lập thành cấp số nhân và $x^4 = y\sqrt{3}$. Tìm x, y.

.....

.....

.....

.....

.....

C. Bài tập trắc nghiệm

DÀNH CHO HỌC SINH TRUNG BÌNH - KHÁ

Câu 1. Chọn cấp số nhân trong các dãy số sau:

A. $1;\ 0,2;\ 0,04;\ 0,0008;\ ...$ **B.** $2;\ 22;\ 222;2222;\ ...$

C. $x;\ 2x;\ 3x;\ 4x;\ ...$ **D.** $1;\ -x^2;\ x^4;\ -x^6;\ ...$

Câu 2. Xác định x để 3 số $x-2;\ x+1;\ 3-x$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân:

A. Không có giá trị nào của x. **B.** $x=\pm 1$.

C. $x=2$. **D.** $x=-3$.

Câu 3. Xác định x để 3 số $2x-1;\ x;\ 2x+1$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân:

A. $x=\pm\dfrac{1}{3}$. **B.** $x=\pm\sqrt{3}$.

C. $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** Không có giá trị nào của x.

Câu 4. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy nào là cấp số nhân?

A. $u_n=n^2+n+1$. **B.** $u_n=(n+2).3^n$.

C. $\begin{cases}u_1=2\\ u_{n+1}=\dfrac{6}{u_n},\forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$. **D.** $u_n=(-4)^{2n+1}$.

Câu 5. Dãy số nào sau đây là cấp số nhân?

A. $\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=u_n+1,\ n\ge 1\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}u_1=-1\\ u_{n+1}=-3u_n,\ n\ge 1\end{cases}$.

C. $\begin{cases}u_1=-2\\ u_{n+1}=2u_n+3,\ n\ge 1\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}u_1=\dfrac{\pi}{2}\\ u_n=\sin\left(\dfrac{\pi}{n-1}\right),\ n\ge 1\end{cases}$.

Câu 6. Cho dãy số (u_n) là một cấp số nhân với $u_n\neq 0,\ n\in\mathbb{N}^*$. Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

A. $u_1;\ u_3;\ u_5;\ ...$ **B.** $3u_1;\ 3u_2;\ 3u_3;\ ...$

C. $\dfrac{1}{u_1};\ \dfrac{1}{u_2};\ \dfrac{1}{u_3};\ ...$ **D.** $u_1+2;\ u_2+2;\ u_3+2;\ ...$

Câu 7. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. $128;\ -64;\ 32;\ -16;\ 8;\ ...$ **B.** $\sqrt{2};\ 2;\ 4;\ 4\sqrt{2};\ ....$

C. $5;\ 6;\ 7;\ 8;\ ...$ **D.** $15;\ 5;\ 1;\ \dfrac{1}{5};\ ...$

Câu 8. Trong các dãy số sau, dãy số nào **không phải** là một cấp số nhân?

A. $2;\ 4;\ 8;\ 16;\ \ldots$ **B.** $1;\ -1;\ 1;\ -1;\ \cdots$

C. $1^2;\ 2^2;\ 3^2;\ 4^2;\ \cdots$ **D.** $a;\ a^3;\ a^5;\ a^7;\ \cdots(a\neq 0)$.

Câu 9. Dãy số nào sau đây **không phải** là cấp số nhân?

A. $1;\ 2;\ 4;\ 8;\ \cdots$ **B.** $3;\ 3^2;\ 3^3;\ 3^4;\ \cdots$

C. $4;\ 2;\ \dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{4};\ \cdots$ **D.** $\dfrac{1}{\pi};\ \dfrac{1}{\pi^2};\ \dfrac{1}{\pi^4};\ \dfrac{1}{\pi^6};\ \cdots$

Câu 10. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1=-2$ và $q=-5$. Viết bốn số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

A. $-2;\ 10;\ 50;\ -250$. **B.** $-2;\ 10;\ -50;\ 250$.

C. $-2;\ -10;\ -50;\ -250$. **D.** $-2;\ 10;\ 50;\ 250$.

Câu 11. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. $u_n=\dfrac{1}{3^{n-2}}$. **B.** $u_n=\dfrac{1}{3^n}-1$. **C.** $u_n=n+\dfrac{1}{3}$. **D.** $u_n=n^2-\dfrac{1}{3}$.

Câu 12. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. $u_n=7-3n$. **B.** $u_n=7-3^n$. **C.** $u_n=\dfrac{7}{3n}$. **D.** $u_n=7.3^n$.

Câu 13. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào là **sai**?

A. Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số nhân.

B. Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số cộng.

C. Một cấp số cộng có công sai dương là một dãy số tăng.

D. Một cấp số cộng có công sai dương là một dãy số dương.

Câu 14. Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số nhân?

A. $u_n=(-1)^n n$. **B.** $u_n=n^2$. **C.** $u_n=2^n$. **D.** $u_n=\dfrac{n}{3^n}$.

Câu 15. Xác định x dương để $2x-3;\ x;\ 2x+3$ lập thành cấp số nhân.

A. $x=3$. **B.** $x=\sqrt{3}$.

C. $x=\pm\sqrt{3}$. **D.** không có giá trị nào của x.

Câu 16. Tìm x để các số $2;\ 8;\ x;\ 128$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $x=14$. **B.** $x=32$. **C.** $x=64$. **D.** $x=68$.

Câu 17. Với giá trị x nào dưới đây thì các số $-4;\ x;\ -9$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân?

A. $x=36$. **B.** $x=-\dfrac{13}{2}$. **C.** $x=6$. **D.** $x=-36$.

Câu 18. Tìm $b>0$ để các số $\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ \sqrt{b};\ \sqrt{2}$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $b=-1$. **B.** $b=1$. **C.** $b=2$. **D.** $b=-2$.

Câu 19. Tìm x để ba số $1+x;\ 9+x;\ 33+x$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $x=1$. **B.** $x=3$. **C.** $x=7$. **D.** $x=3;\ x=7$.

Câu 20. Với giá trị $x,\ y$ nào dưới đây thì các số hạng lần lượt là $-2;\ x;\ -18;\ y$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân?

A. $\begin{cases}x=6\\y=-54\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-10\\y=-26\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-6\\y=-54\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-6\\y=54\end{cases}$.

Câu 21. Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là $x;\ 12;\ y;\ 192$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x=1; y=144$. **B.** $x=2; y=72$. **C.** $x=3; y=48$. **D.** $x=4; y=36$.

Câu 22. Thêm hai số thực dương x và y vào giữa hai số 5 và 320 để được bốn số $5;\ x;\ y;\ 320$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\begin{cases}x=25\\y=125\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=20\\y=80\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=15\\y=45\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=30\\y=90\end{cases}$.

Câu 23. Ba số hạng đầu của một cấp số nhân là $x-6;\ x$ và y. Tìm y, biết rằng công bội của cấp số nhân là 6.

A. $y=216.$ **B.** $y=\dfrac{216}{5}.$ **C.** $y=\dfrac{1296}{5}.$ **D.** $y=12.$

Câu 24. Hai số hạng đầu của của một cấp số nhân là $2x+1$ và $4x^2-1$. Số hạng thứ ba của cấp số nhân là:

A. $2x-1.$ **B.** $2x+1.$

C. $8x^3-4x^2-2x+1.$ **D.** $8x^3+4x^2-2x-1.$

Câu 25. Cho dãy số: $-1;1;-1;1;-1;\ldots$ *Khẳng định nào sau đây là* ***đúng****?*

A. Dãy số này không phải là cấp số nhân. **B.** Số hạng tổng quát $u_n=1^n=1.$

C. Dãy số này là cấp số nhân có $u_1=-1, q=-1.$

D. Số hạng tổng quát $u_n=(-1)^{2n}.$

DÀNH CHO HỌC SINH KHÁ – GIỎI

Câu 26. Các số $x+6y,\ 5x+2y,\ 8x+y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng; đồng thời các số $x-1,\ y+2,\ x-3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Tính x^2+y^2.

A. $x^2+y^2=40.$ **B.** $x^2+y^2=25.$ **C.** $x^2+y^2=100.$ **D.** $x^2+y^2=10.$

Câu 27. Ba số $x;\ y;\ z$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân với công bội q khác 1; đồng thời các số $x;\ 2y;\ 3z$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với công sai khác 0. Tìm giá trị của q.

A. $q=\dfrac{1}{3}.$ **B.** $q=\dfrac{1}{9}.$ **C.** $q=-\dfrac{1}{3}.$ **D.** $q=-3.$

Câu 28. Số hạng thứ hai, số hạng đầu và số hạng thứ ba của một cấp số cộng với công sai khác 0 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân với công bội q. Tìm q.

A. $q=2.$ **B.** $q=-2.$ **C.** $q=-\dfrac{3}{2}.$ **D.** $q=\dfrac{3}{2}.$

Câu 29. Cho Cấp số nhân có bốn số hạng: $-2\ ;\ x;-18\ ;y$. Hãy chọn kết quả đúng:

A. $x=-6\ ;y=54.$ **B.** $x=6;\ y=-54.$

C. $x=-6\ ;\ y=-54.$ **D.** $x=-10\ ;\ y=-26.$

Câu 30. Tìm hai số x và y sao cho $x;\ 2x-3y;y$ theo thứ tự lập thành CSC, các số $x^2;\ xy-6\ ;\ y^2$ lập thành CSN:

A. $\left(\sqrt{7};\dfrac{3\sqrt{7}}{7}\right)$ và $\left(-\sqrt{7};\dfrac{-3\sqrt{7}}{7}\right).$ **B.** $\left(-\sqrt{7};\dfrac{3\sqrt{7}}{7}\right)$ và $\left(\sqrt{7};\dfrac{-3\sqrt{7}}{7}\right).$

C. $\left(2;\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ và $\left(-2;\dfrac{-3\sqrt{2}}{2}\right).$ **D.** $\left(-2;\dfrac{3\sqrt{7}}{7}\right)$ và $\left(2;\dfrac{-3\sqrt{7}}{7}\right).$

Câu 31. Tìm x,y biết các số $5x-y;2x+3y;x+2y$ lập thành cấp số cộng và các số $(y+1)^2;xy+1;(x-1)^2$ lập thành cấp số nhân.

A. $(0;0);\left(-\frac{3}{4};-\frac{3}{10}\right);\left(-\frac{10}{3};-\frac{4}{3}\right)$. **B.** $(0;0);\left(-\frac{3}{4};-\frac{3}{10}\right);\left(\frac{10}{3};\frac{4}{3}\right)$.

C. $(0;0);\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right);\left(\frac{10}{3};\frac{4}{3}\right)$. **D.** $(0;0);\left(-\frac{3}{4};\frac{3}{10}\right);\left(\frac{10}{3};\frac{4}{3}\right)$.

Câu 32. Xác định m để phương trình $x^3-(3m+1)x^2+(5m+4)x-8=0$ có 3 nghiệm lập thành một cấp số nhân.

A. $m=2$. **B.** $m=2$ hoặc $m=\frac{-1}{2}$.

C. $m=0$ hoặc $m=-6$. **D.** $m=1$ hoặc $m=-6$.

Câu 33. Số đo bốn góc của một tứ giác lập thành cấp số nhân và góc cuối gấp 9 lần góc thứ hai. Tìm số đo của góc thứ nhất.

A. 10^0. **B.** 9^0. **C.** 8^0. **D.** 12^0.

Câu 34. Cho phương trình $x^3-(2m-1)x^2+(m^2+4m-2)x-m^2-2m=0$ có nghiệm là một cấp số nhân có công bội $q=-2$ thì giá trị m phải thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $(-1;2)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 35. Cho phương trình: $x^3+mx^2-9x-9m=0$. Để phương trình có ba nghiệm lập thành cấp số nhân thì tất cả các giá trị m phải thỏa mãn phương án nào dưới đây?

A. $m=3$. **B.** $m\in(-9;0)$. **C.** $m\in(-5;5)$. **D.** $m=-6$.

Câu 36. Cho phương trình $x^3-(3m+1)x^2+(5m+4)x-8=0$ Tìm tất cả các giá trị m để phương trình có ba nghiệm lập thành cấp số nhân?

A. $m=-7$ **B.** $m\in(0;9)$ **C.** $m\in(-9;0)$ **D.** $m=3$.

Câu 37. Cho phương trình: $2x^3+2mx^2-7(m-1)x-54=0$. Để phương trình có ba nghiệm lập thành cấp số nhân thì tất cả các giá trị m phải thỏa mãn phương án nào dưới đây?

A. $m=-7$ **B.** $m\in(0;9)$ **C.** $m\in(-9;0)$ **D.** $m=3$.

Câu 38. Tìm m để phương trình: $x^3+2x^2+(m+1)x+2(m+1)=0$ có ba nghiệmphân biệt lập thành cấp số nhân?

A. $m=3$ **B.** $m<-1$ **C.** $m\neq-5$ **D.** Không tồn tại m.

Câu 39. Tìm m để phương trình: $16x^4-ax^3+(2a+17)x^2-ax+16=0$ có bốn nghiệmphân biệt lập thành cấp số nhân?

A. $a=170$ **B.** $a\in(0;170)$ **C.** $a=\frac{5}{2}$ **D.** $a=\frac{3}{2}$

Câu 40. Giả sử $\frac{\sin\alpha}{6}$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ theo thứ tự đó là một cấp số nhân. Tính $\cos 2\alpha$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

DẠNG 2: XÁC ĐỊNH SỐ HẠNG ĐẦU CÔNG BỘI, XÁC ĐỊNH SỐ HẠNG THỨ K, TÍNH TỔNG CỦA N SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN:

A. Phương pháp giải

Dựa vào giả thuyết, ta lập một hệ phương trình chứa công bội q và số hạng đầu u_1, giải hệ phương trình này tìm được q và u_1.

Để xác định số hạng thứ k, ta sử dụng công thức: $u_k = u_1.q^{k-1}$.

Để tính tổng của n số hạng, ta sử dụng công thức: $S_n = u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q}, q \neq 1$. Nếu $q = 1$ thì $u_1 = u_2 = u_3 = ... = u_n$, do đó $S_n = nu_1$.

Câu 1. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân, biết:

a) $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 40 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_2 = 6 \\ S_3 = 43. \end{cases}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Nguyễn Bảo Vương

Câu 2. Cho CSN (u_n) có các số hạng thỏa: $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}$

a). Tìm số hạng đầu và công bội của CSN.

b). Hỏi tổng bao nhiêu số hạng đầu tiên bằng 3069?

c). Số 12288 là số hạng thứ mấy?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Cho cấp số nhân (u_n). Tìm u_1 và q, biết rằng:

1) $\begin{cases} u_2+u_3+u_4=\dfrac{35}{2} \\ u_1u_5=25 \\ u_i>0\,(i=1,\ldots,5) \end{cases}$ 2) $\begin{cases} u_1-u_3+u_5=65 \\ u_1+u_7=325. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} u_2+u_4+u_6=-42 \\ u_3+u_5=20 \end{cases}$

4) $u_1+u_6=165; u_3+u_4=60.$ 5). $\begin{cases} u_1+u_2+u_3+u_4=15 \\ u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+u_3^{\,2}+u_4^{\,2}=85. \end{cases}$

6) $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=13 \\ u_4+u_5+u_6=351 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 8u_2+5\sqrt{5}u_5=0 \\ u_1^{\,3}+u_3^{\,3}=189 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} u_1u_2u_3=1728 \\ u_1+u_2+u_3=63 \end{cases}$

9). $\begin{cases} u_1+u_3=3 \\ u_1^{\,2}+u_3^{\,2}=5 \end{cases}$ 10). $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=7 \\ u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+u_3^{\,2}=21 \end{cases}$

Nguyễn Bảo Vương

Nguyễn Bảo Vương

Câu 4. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân, biết:

a) $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240 \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_1.u_2.u_3 = 64 \end{cases}$ e) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 21 \\ \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \dfrac{1}{u_3} = \dfrac{7}{12} \end{cases}$ f) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 30 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 340 \end{cases}$

Nguyễn Bảo Vương

Nguyễn Bảo Vương

Câu 5. Tìm a, b biết rằng: 1, a, b là 3 số hạng liên tiếp của cấp số cộng và $1, a^2, b^2$ là 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân.

Câu 6. Tìm số hạng đầu của CSN biết công bội bằng 3, tổng số các số hạng là 728 và số hạng cuối bằng 486.

.....
.....
.....
.....
.....

Câu 7. Cho 3 số tạo thành một cấp số cộng có tổng 21.Nếu thêm 2, 3, 9 lần lượt vào số thứ nhất, số thứ hai, số thứ ba tạo thành một cấp số nhân. Tìm 3 số đó.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 8. Cho 3 số dương có tổng là 65 lập thành một cấp số nhân tăng, nếu bớt một đơn vị ở số hạng thứ nhất và 19 đơn vị ở số hạng thứ ba ta được một cấp số cộng. Tìm 3 số đó.

Nguyễn Bảo Vương

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 9. Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân biết tổng của chúng là 19 và tích là 216.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 10. Tìm công bội của một cấp số nhân có số hạng đầu là 7, số hạng cuối là 448 và tổng số các số hạng là 889.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 11. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, trong đó số hạng thứ hai nhỏ hơn số hạng thứ nhất 35, còn số hạng thứ ba lớn hơn số hạng thứ tư 560.

Nguyễn Bảo Vương

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 12. Tìm các số dương a và b sao cho a, a + 2b, 2a + b lập thành một cấp số cộng và $(b + 1)^2$, ab + 5, $(a + 1)^2$ lập thành một cấp số nhân.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 13. Tính các tổng sau:

a). $S_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$

b). $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}$

c). $S_n = \left(3 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(9 + \frac{1}{9}\right)^2 + \cdots + \left(3^n + \frac{1}{3^n}\right)^2$

d). $S_n = 6 + 66 + 666 + \cdots + \underbrace{666...6}_{n \text{ so } 6}$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 14. Tính tổng $B = 7 + 77 + 777 + \cdots + \underbrace{777\ldots7}_{n}$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

C. Bài tập trắc nghiệm

DÀNH CHO HỌC SINH TRUNG BÌNH - KHÁ

Câu 1. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -2$ và công bội $q = 3$. Số hạng u_2 là:

A. $u_2 = -6$. **B.** $u_2 = 6$. **C.** $u_2 = 1$. **D.** $u_2 = -18$.

Câu 2. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$ và $q = \frac{2}{3}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $u_5 = -\frac{27}{16}$. **B.** $u_5 = -\frac{16}{27}$. **C.** $u_5 = \frac{16}{27}$. **D.** $u_5 = \frac{27}{16}$.

Câu 3. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_n = 81$ và $u_{n+1} = 9$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $q = \frac{1}{9}$. **B.** $q = 9$. **C.** $q = -9$. **D.** $q = -\frac{1}{9}$.

Câu 4. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 \neq 0$ và $q \neq 0$. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $u_7 = u_4.q^3$. **B.** $u_7 = u_4.q^4$. **C.** $u_7 = u_4.q^5$. **D.** $u_7 = u_4.q^6$.

Câu 5. Cho cấp số nhân $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \cdots; \frac{1}{4096}$. Hỏi số $\frac{1}{4096}$ là số hạng thứ mấy trong cấp số nhân đã cho?

A. 11. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 13.

Câu 6. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3}{2}.5^n$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. (u_n) không phải là cấp số nhân.

B. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = 5$ và số hạng đầu $u_1 = \frac{3}{2}$.

C. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = 5$ và số hạng đầu $u_1 = \frac{15}{2}$.

D. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q=\dfrac{5}{2}$ và số hạng đầu $u_1=3$.

Câu 7. Một cấp số nhân có ba số hạng là $a,\ b,\ c$ (theo thứ tự đó) trong đó các số hạng đều khác 0 và công bội $q\neq 0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{1}{bc}$. **B.** $\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{ac}$. **C.** $\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{1}{ba}$. **D.** $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{2}{c}$.

Câu 8. Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là $3;\ 9;\ 27;\ 81;\ \ldots$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số nhân đã cho.

A. $u_n=3^{n-1}$. **B.** $u_n=3^n$. **C.** $u_n=3^{n+1}$. **D.** $u_n=3+3^n$.

Câu 9. Một cấp số nhân có 6 số hạng, số hạng đầu bằng 2 và số hạng thứ sáu bằng 486. Tìm công bội q của cấp số nhân đã cho.

A. $q=3$. **B.** $q=-3$. **C.** $q=2$. **D.** $q=-2$.

Câu 10. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=2$ và $u_2=-8$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_6=130$. **B.** $u_5=256$. **C.** $S_5=256$. **D.** $q=-4$.

Câu 11. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=3$ và $q=-2$. Số 192 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân đã cho?

A. Số hạng thứ 5. **B.** Số hạng thứ 6.
C. Số hạng thứ 7. **D.** Không là số hạng của cấp số đã cho.

Câu 12. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=-1$ và $q=-\dfrac{1}{10}$. Số $\dfrac{1}{10^{103}}$ là số hạng thứ mấy của cấp số nhân đã cho?

A. Số hạng thứ 103. **B.** Số hạng thứ 104.
C. Số hạng thứ 105. **D.** Không là số hạng của cấp số đã cho.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 13. Một dãy số được xác định bởi $u_1=-4$ và $u_n=-\dfrac{1}{2}u_{n-1},\ n\geq 2$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số đó là:

A. $u_n=2^{n-1}$. **B.** $u_n=(-2)^{n-1}$. **C.** $u_n=-4\left(2^{-n+1}\right)$. **D.** $u_n=-4\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Câu 14. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=-3$ và $q=-2$. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho.

A. $S_{10}=-511$. **B.** $S_{10}=-1025$. **C.** $S_{10}=1025$. **D.** $S_{10}=1023$.

Câu 15. Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là $1;\ 4;\ 16;\ 64;\ \cdots$ Gọi S_n là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n=4^{n-1}$. **B.** $S_n=\dfrac{n\left(1+4^{n-1}\right)}{2}$. **C.** $S_n=\dfrac{4^n-1}{3}$. **D.** $S_n=\dfrac{4\left(4^n-1\right)}{3}$.

Câu 16. Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là $\dfrac{1}{4};\ \dfrac{1}{2};\ 1;\ \cdots;\ 2048$. Tính tổng S của tất cả các số hạng của cấp số nhân đã cho.

A. $S=2047,75$. **B.** $S=2049,75$. **C.** $S=4095,75$. **D.** $S=4096,75$.

Câu 17. Tính tổng $S=-2+4-8+16-32+64-\ldots+(-2)^{n-1}+(-2)^n$ với $n\geq 1,\ n\in\mathbb{N}$.

A. $S=2n$. **B.** $S=2^n$. **C.** $S=\dfrac{-2\left(1-2^n\right)}{1-2}$. **D.** $S=-2.\dfrac{1-(-2)^n}{3}$.

Câu 18. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=-6$ và $q=-2$. Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho bằng 2046. Tìm n.

A. $n=9$. **B.** $n=10$. **C.** $n=11$. **D.** $n=12$.

Câu 19. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2=-6$ và $u_6=-486$. Tìm công bội q của cấp số nhân đã cho, biết rằng $u_3>0$.

A. $q=-3$. **B.** $q=-\dfrac{1}{3}$. **C.** $q=\dfrac{1}{3}$. **D.** $q=3$.

Câu 20. Một cấp số nhân có số hạng thứ hai bằng 4 và số hạng thứ sáu bằng 64, thì số hạng tổng quát của cấp số nhân đó có thể tính theo công thức nào dưới đây?

A. $u_n=2^{n-1}$. **B.** $u_n=2^n$ **C.** $u_n=2^{n+1}$. **D.** $u_n=2n$.

Câu 21. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $u_k=u_1.q^{k-1}$. **B.** $u_k=\dfrac{u_{k-1}+u_{k+1}}{2}$.

C. $S=9+99+999+...+999...9$ **D.** $S=\dfrac{10^n-1}{9}$.

Câu 22. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1\neq 0$ và $q\neq 0$. Với $1<k<m$, đẳng thức nào dưới đây là đúng?

A. $u_m=u_k.q^k$. **B.** $u_m=u_k.q^m$. **C.** $u_m=u_k.q^{m-k}$. **D.** $u_m=u_k.\mathrm{q}^{m+k}$.

Câu 23. Cho một cấp số nhân có 15 số hạng. Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

A. $u_1.u_{15}=u_2.u_{14}$. **B.** $u_1.u_{15}=u_5.u_{11}$. **C.** $u_1.u_{15}=u_6.u_9$. **D.** $u_1.u_{15}=u_{12}.u_4$.

Câu 24. Cho một cấp số nhân có n số hạng $(n>k>55)$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $u_1.u_n=u_2.u_{n-1}$. **B.** $u_1.u_n=u_5.u_{n-4}$. **C.** $u_1.u_n=u_{55}.u_{n-55}$. **D.** $u_1.u_n=u_k.u_{n-k+1}$.

Câu 25. Xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n) có $u_4-u_2=54$ và $u_5-u_3=108$.

A. $u_1=3$ và $q=2$. **B.** $u_1=9$ và $q=2$. **C.** $u_1=9$ và $q=-2$. **D.** $u_1=3$ và $q=-2$.

Câu 26. Cho cấp số nhân $(u_n);u_1=1,q=2$. Hỏi số 1024 là số hạng thứ mấy?

A. 11. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 27. Cho cấp số nhân (u_n), biết $u_1=12$, $\dfrac{u_3}{u_8}=243$. Tìm u_9.

A. $u_9=\dfrac{2}{2187}$. **B.** $u_9=\dfrac{4}{6563}$. **C.** $u_9=78732$. **D.** $u_9=\dfrac{4}{2187}$.

Câu 28. Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n=5^n-1$ với $n=1,2,...$. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân đó?

A. $u_1=5$, $q=4$. **B.** $u_1=5$, $q=6$. **C.** $u_1=4$, $q=5$. **D.** $u_1=6$, $q=5$.

Câu 29. Cho cấp số nhân (u_n) biết $\begin{cases}u_4-u_2=54\\u_5-u_3=108\end{cases}$. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân trên.

A. $u_1=9$; $q=2$. **B.** $u_1=9$; $q=-2$. **C.** $u_1=-9$; $q=-2$. **D.** $u_1=-9$; $q=2$.

Câu 30. Cho một cấp số nhân có các số hạng đều không âm thỏa mãn $u_2=6$, $u_4=24$. Tính tổng của 12 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó.

A. $3.2^{12}-3$. **B.** $2^{12}-1$. **C.** $3.2^{12}-1$. **D.** 3.2^{12}.

Câu 31. Tổng $S=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}+\cdots$ có giá trị là:

A. $\frac{1}{9}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 32. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1=2$, $a_{n+1}=-2a_n$, $n\geq 1$, $n\in\mathbb{N}$. Tính tổng của 10 số hạng đầu tiên của dãy số.

A. $\frac{2050}{3}$. **B.** 2046. **C.** -682. **D.** -2046.

Câu 33. Cho cấp số nhân $u_1=-1$, $u_6=0{,}00001$. Khi đó q và số hạng tổng quát là?

A. $q=\frac{1}{10}, u_n=\frac{-1}{10^{n-1}}$. **B.** $q=\frac{-1}{10}, u_n=-10^{n-1}$.

C. $q=\frac{-1}{10}, u_n=\frac{(-1)^n}{10^{n-1}}$. **D.** $q=\frac{1}{10}, u_n=\frac{1}{10^{n-1}}$.

Câu 34. Cho cấp số nhân u_n có $u_2=\frac{1}{4}$, $u_5=16$. Tìm công bội q và số hạng đầu u_1.

A. $q=\frac{1}{2}$, $u_1=\frac{1}{2}$. **B.** $q=-\frac{1}{2}$, $u_1=-\frac{1}{2}$. **C.** $q=-4$, $u_1=-\frac{1}{16}$. **D.** $q=4$, $u_1=\frac{1}{16}$.

Câu 35. Tính tổng tất cả các số hạng của một cấp số nhân có số hạng đầu là $\frac{1}{2}$, số hạng thứ tư là 32 và số hạng cuối là 2048 ?

A. $\frac{1365}{2}$. **B.** $\frac{5416}{2}$. **C.** $\frac{5461}{2}$. **D.** $\frac{21845}{2}$.

Câu 36. Cho cấp số nhân có số hạng đầu $u_1=-2$, công bội $q=\frac{3}{4}$. Số $-\frac{81}{128}$ là số hạng thứ mấy của cấp số này?

A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Câu 37. Một cấp số nhân (u_n) có n số hạng, số hạng đầu $u_1=7$, công bội $q=2$. Số hạng thứ n bằng 1792. Tính tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n)?

A. 5377. **B.** 5737. **C.** 3577. **D.** 3775.

Câu 38. Cho dãy số $4,12,36,108,324,\ldots$. Số hạng thứ 10 của dãy số đó là?

A. 73872. **B.** 77832. **C.** 72873. **D.** 78732.

Câu 39. Tính tổng cấp số nhân lùi vô hạn $-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\ldots,\frac{(-1)^2}{2^n},\ldots$ là.

A. -1. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $-\frac{1}{4}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

DÀNH CHO HỌC SINH KHÁ – GIỎI

Câu 40. Một cấp số nhân có công bội bằng 3 và số hạng đầu bằng 5. Biết số hạng chính giữa là 32805. Hỏi cấp số nhân đã cho có bao nhiêu số hạng?

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 9.

Câu 41. Một cấp số nhân có 6 số hạng với công bội bằng 2 và tổng số các số hạng bằng 189. Tìm số hạng cuối u_6 của cấp số nhân đã cho.

A. $u_6=32$. **B.** $u_6=104$. **C.** $u_6=48$. **D.** $u_6=96$.

Câu 42. Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n=5^n-1$. Tìm số hạng thứ 4 của cấp số nhân đã cho.

A. $u_4=100$. **B.** $u_4=124$. **C.** $u_4=500$. **D.** $u_4=624$.

Câu 43. Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n=\frac{3^n-1}{3^{n-1}}$. Tìm số hạng thứ 5 của cấp số nhân đã cho.

A. $u_5=\frac{2}{3^4}$. **B.** $u_5=\frac{1}{3^5}$. **C.** $u_5=3^5$. **D.** $u_5=\frac{5}{3^5}$.

Câu 44. Cho cấp số nhân (u_n) có tổng của hai số hạng đầu tiên bằng 4, tổng của ba số hạng đầu tiên bằng 13. Tính tổng của năm số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho, biết công bội của cấp số nhân là một số dương.

A. $S_5=\frac{181}{16}$. **B.** $S_5=141$. **C.** $S_5=121$. **D.** $S_5=\frac{35}{16}$.

Câu 45. Một cấp số nhân có số hạng thứ bảy bằng $\frac{1}{2}$, công bội bằng $\frac{1}{4}$. Hỏi số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng bao nhiêu?

A. 4096. **B.** 2048. **C.** 1024. **D.** $\frac{1}{512}$.

Câu 46. Cho cấp số nhân $u_1;\ u_2;\ u_3;\ \cdots$ với $u_1=1$. Tìm công bội q để $4u_2+5u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $q=-\frac{2}{5}$. **B.** $q=0$. **C.** $q=\frac{2}{5}$. **D.** $q=1$.

Câu 47. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân (u_n), biết $\begin{cases}u_6=192\\u_7=384\end{cases}$.

A. $\begin{cases}u_1=5\\q=2\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}u_1=6\\q=2\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}u_1=6\\q=3\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}u_1=5\\q=3\end{cases}$.

Câu 48. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases}u_4-u_2=36\\u_5-u_3=72\end{cases}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\begin{cases}u_1=4\\q=2\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}u_1=6\\q=2\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}u_1=9\\q=2\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}u_1=9\\q=3\end{cases}$.

Câu 49. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases}u_{20}=8u_{17}\\u_1+u_5=272\end{cases}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $q=2$. **B.** $q=-4$. **C.** $q=4$. **D.** $q=-2$.

Câu 50. Một cấp số nhân có năm số hạng mà hai số hạng đầu tiên là các số dương, tích của số hạng đầu và số hạng thứ ba bằng 1, tích của số hạng thứ ba và số hạng cuối bằng $\frac{1}{16}$. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân đã cho.

A. $\begin{cases}u_1=\frac{1}{2}\\q=2\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}u_1=2\\q=\frac{1}{2}\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}u_1=-2\\q=-\frac{1}{2}\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}u_1=-\frac{1}{2}\\q=-2\end{cases}$.

Câu 51. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa $\begin{cases}u_1-u_3+u_5=65\\u_1+u_7=325\end{cases}$. Tính u_3.

A. $u_3=10$. **B.** $u_3=15$. **C.** $u_3=20$. **D.** $u_3=25$.

Câu 52. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa $\begin{cases}u_1+u_2+u_3=14\\u_1.u_2.u_3=64\end{cases}$. Tính u_2.

A. $u_2=4$. **B.** $u_2=6$. **C.** $u_2=8$. **D.** $u_2=10$.

Câu 53. Xen giữa số 3 và số 768 là 7 số để được một cấp số nhân có $u_1=3$. Khi đó u_5 là:

A. 72. **B.** -48. **C.** ± 48. **D.** 48.

Câu 54. Viết thêm bốn số vào giữa hai số 160 và 5 để được một cấp số nhân. Tổng các số hạng của cấp số nhân đó là

A. 215. **B.** 315. **C.** 415. **D.** 515.

Câu 55. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=13 \\ u_4-u_1=26 \end{cases}$. Tổng 8 số hạng đầu của cấp số nhân (u_n) là

A. $S_8=1093$. **B.** $S_8=3820$. **C.** $S_8=9841$. **D.** $S_8=3280$.

Câu 56. Cấp số nhân (u_n) có $\begin{cases} u_{20}=8u_{17} \\ u_1+u_5=272 \end{cases}$. Tìm u_1, biết rằng $u_1\le 100$.

A. $u_1=16$. **B.** $u_1=2$. **C.** $u_1=-16$. **D.** $u_1=-2$.

Câu 57. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2=-2$ và $u_5=54$. Tính tổng 1000 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho.

A. $S_{1000}=\dfrac{1-3^{1000}}{4}$. **B.** $S_{1000}=\dfrac{3^{1000}-1}{2}$. **C.** $S_{1000}=\dfrac{3^{1000}-1}{6}$. **D.** $S_{1000}=\dfrac{1-3^{1000}}{6}$.

Câu 58. Số hạng đầu và công bội q của CSN với $u_7=-5, u_{10}=135$ là:

A. $u_1=\dfrac{5}{729}, q=-3$. **B.** $u_1=-\dfrac{5}{729}, q=3$. **C.** $u_1=\dfrac{5}{729}, q=3$. **D.** $u_1=-\dfrac{5}{729}, q=-3$.

Câu 59. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q và thỏa $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=26 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2=364 \end{cases}$. Tìm q biết rằng $q>1$.

A. $q=\dfrac{5}{4}$. **B.** $q=4$. **C.** $q=\dfrac{4}{3}$. **D.** $q=3$.

Câu 60. Gọi $S=9+99+999+...+999...9$ (n số 9) thì S nhận giá trị nào sau đây?

A. $S=\dfrac{10^n-1}{9}$. **B.** $S=10\left(\dfrac{10^n-1}{9}\right)$.

C. $S=10\left(\dfrac{10^n-1}{9}\right)-n$. **D.** $S=10\left(\dfrac{10^n-1}{9}\right)+n$.

Câu 61. Giá trị của tổng $4+44+444+...+44...4$ (tổng đó có 2018 số hạng) bằng

A. $\dfrac{40}{9}\left(10^{2018}-1\right)+2018$. **B.** $\dfrac{4}{9}\left(\dfrac{10^{2019}-10}{9}-2018\right)$.

C. $\dfrac{4}{9}\left(\dfrac{10^{2019}-10}{9}+2018\right)$. **D.** $\dfrac{4}{9}\left(10^{2018}-1\right)$.

Câu 62. Gọi $S=1+11+111+...+111...1$ (n số 1) thì S nhận giá trị nào sau đây?

A. $S=\dfrac{10^n-1}{81}$. **B.** $S=10\left(\dfrac{10^n-1}{81}\right)$.

C. $S=10\left(\dfrac{10^n-1}{81}\right)-n$. **D.** $S=\dfrac{1}{9}\left[10\left(\dfrac{10^n-1}{9}\right)-n\right]$.

Câu 63. Bốn góc của một tứ giác tạo thành cấp số nhân và góc lớn nhất gấp 27 lần góc nhỏ nhất. Tổng của góc lớn nhất và góc bé nhất bằng:

A. 56^0. **B.** 102^0. **C.** 252^0. **D.** 168^0.

Câu 64. Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A, biết độ dài cạnh đáy BC, đường cao AH và cạnh bên AB theo thứ tự lập thành cấp số nhân với công bội q. Giá trị của q^2 bằng

A. $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

Câu 65. Cho dãy số xác định bởi $u_1=1$, $u_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2u_n+\frac{n-1}{n^2+3n+2}\right)$; $n\in\mathbb{N}^*$. Khi đó u_{2018} bằng:

A. $u_{2018}=\frac{2^{2016}}{3^{2017}}+\frac{1}{2019}$. **B.** $u_{2018}=\frac{2^{2018}}{3^{2017}}+\frac{1}{2019}$.

C. $u_{2018}=\frac{2^{2017}}{3^{2018}}+\frac{1}{2019}$. **D.** $u_{2018}=\frac{2^{2017}}{3^{2018}}+\frac{1}{2019}$.

Câu 66. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1=a$ và $u_{n+1}=4u_n(1-u_n)$ với mọi n nguyên dương. Có bao nhiêu giá trị của a để $u_{2018}=0$.

A. $2^{2016}+1$. **B.** $2^{2017}+1$. **C.** $2^{2018}+1$. **D.** 3.

Câu 67. Biết

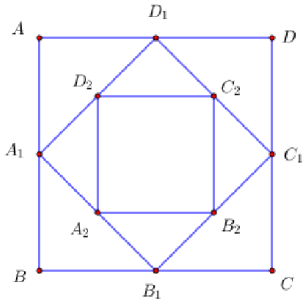
$1+2.2+3.2^2+4.2^3+...+2018.2^{2017}=a.2^{2018}+b$, với a, b là các số nguyên dương. Tính $P=a.b$

A. $P=2017$. **B.** $P=2018$. **C.** $P=2019$. **D.** $P=2020$.

Câu 68. Biết rằng $S=1+2.3+3.3^2+...+11.3^{10}=a+\frac{21.3^b}{4}$. Tính $P=a+\frac{b}{4}$.

A. $P=1$. **B.** $P=2$. **C.** $P=3$. **D.** $P=4$.

Câu 69. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a và có diện tích S_1. Nối 4 trung điểm A_1, B_1, C_1, D_1 theo thứ tự của 4 cạnh AB, BC, CD, DA ta được hình vuông thứ hai có diện tích S_2. Tiếp tục làm như thế, ta được hình vuông thứ ba là $A_2B_2C_2D_2$ có diện tích S_3, …và cứ tiếp tục làm như thế, ta tính được các hình vuông lần lượt có diện tích S_4, S_5,…, S_{100} (tham khảo hình bên). Tính tổng $S=S_1+S_2+S_3+...+S_{100}$.



A. $S=\frac{a^2\left(2^{100}-1\right)}{2^{100}}$. **B.** $S=\frac{a^2\left(2^{100}-1\right)}{2^{99}}$. **C.** $S=\frac{a^2}{2^{100}}$. **D.** $S=\frac{a^2\left(2^{99}-1\right)}{2^{98}}$.

Câu 70. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases}u_1=1\\u_n=2u_{n-1}+1;n\ge 2\end{cases}$. Tổng $S=u_1+u_2+...+u_{20}$ bằng

A. $2^{20}-20$. **B.** $2^{21}-22$. **C.** 2^{20}. **D.** $2^{21}-20$.

Câu 71. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội $q>1$ và $\begin{cases}u_1+u_3=3\\u_1^2+u_3^2=5\end{cases}$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân là:

A. $S_{10}=\dfrac{31\left(2+\sqrt{2}\right)}{16}$. **B.** $S_{10}=31\left(1-\sqrt{2}\right)$.

C. $S_{10}=31\left(\sqrt{2}+1\right)$. **D.** $S_{10}=31\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Câu 72. Cho cấp số nhân $\left(u_n\right)$ có các số hạng khác không, tìm u_1 biết: $\begin{cases}u_1+u_2+u_3+u_4=15\\u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=85\end{cases}$

A. $u_1=1,u_1=2$. **B.** $u_1=1,u_1=8$.

C. $u_1=1,u_1=5$. **D.** $u_1=1,u_1=9$.

DẠNG 3. MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN CẤP SỐ NHÂN

Câu 1. Có hai cơ sở khoan giếng A và B. Cơ sở A giá mét khoan đầu tiên là 8000 (đồng) và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét sau tăng thêm 500 (đồng) so với giá của mét khoan ngay trước đó. Cơ sở B: Giá của mét khoan đầu tiên là 6000 (đồng) và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét khoan sau tăng thêm 7% giá của mét khoan ngay trước đó. Một công ty giống cây trồng muốn thuê khoan hai giếng với độ sâu lần lượt là 20 (m) và 25 (m) để phục vụ sản xuất. Giả thiết chất lượng và thời gian khoan giếng của hai cơ sở là như nhau. Công ty ấy nên chọn cơ sở nào để tiết kiệm chi phí nhất?

A. luôn chọn A.

B. luôn chọn B.

C. giếng 20 (m) chọn A còn giếng 25 (m) chọn B.

D. giếng 20 (m) chọn B còn giếng 25 (m) chọn A.

Câu 2. Bạn A thả quả bóng cao su từ độ cao $10\,\text{m}$ theo phương thẳng đứng. Mỗi khi chạm đất nó lại nảy lên theo phương thẳng đứng có độ cao bằng $\dfrac{3}{4}$ độ cao trước đó. Tính tổng quãng đường bóng đi được đến khi bóng dừng hẳn.

A. $40\,\text{m}$. **B.** $70\,\text{m}$. **C.** $50\,\text{m}$. **D.** $80\,\text{m}$.

Câu 3. Ngày mùng $3/03/2015$ anh A vay ngân hàng 50 triêu đồng với lãi suất kép là $0,6\%/$ tháng theo thể thức như sau: đúng ngày mùng 3 hàng tháng kể từ một tháng sau khi vay, ngân hàng sẽ tính số tiền nợ của anh bằng số tiền nợ tháng trước cộng với tiền lãi của số tiền nợ đó. Sau khi vay anh A trả nợ như sau: đúng ngày mùng 3 hàng tháng kể từ một tháng sau khi vay anh A đều đến trả ngân hàng 3 triệu đồng. Tính số tháng mà anh A trả được hết nợ ngân hàng, kể từ một tháng sau khi vay. Biết rằng lãi suất không đổi trong suốt quá trình vay.

A. 15 tháng. **B.** 19 tháng. **C.** 16 tháng. **D.** 18 tháng.

Câu 4. Trong năm đầu tiên đi làm, anh A được nhận lương là 10 triệu đồng mỗi tháng. Cứ hết một năm, anh A lại được tăng lương, mỗi tháng năm sau tăng 12% so với mỗi tháng năm trước. Mỗi khi lĩnh lương anh A đều cất đi phần lương tăng so với năm ngay trước để tiết kiệm mua ô tô. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì anh A mua được ô tô giá 500 triệu biết rằng anh A được gia đình hỗ trợ 32% giá trị chiếc xe?

A. 11. **B.** 12. **C.** 13. **D.** 10.

Câu 5. Trên một bàn cờ vua kích thước 8x8 người ta đặt số hạt thóc theo cách như sau. Ô thứ nhất đặt một hạt thóc, ô thứ hai đặt hai hạt thóc, các ô tiếp theo đặt số hạt thóc gấp đôi ô đứng liền kề trước nó. Hỏi phải tối thiểu từ ô thứ bao nhiêu để tổng số hạt thóc từ ô đầu tiên đến ô đó lớn hơn 20172018 hạt thóc.

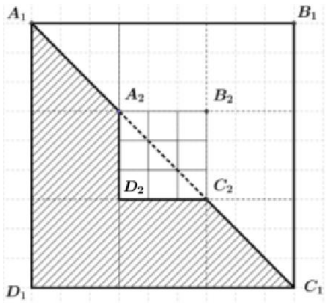
A. 26 **B.** 23 **C.** 24 **D.** 25

Câu 6. Một du khách vào chuồng đua ngựa đặt cược, lần đầu đặt 20000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi lần tiền đặt cọc trước. Người đó thua 9 lần liên tiếp và thắng ở lần thứ 10. Hỏi du khác trên thắng hay thua bao nhiêu?

A. Hòa vốn. **B.** Thua 20000 đồng.

C. Thắng 20000 đồng. **D.** Thua 40000 đồng.

Câu 7. Với hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ như hình vẽ bên, cách tô màu như phần gạch sọc được gọi là cách tô màu "đẹp". Một nhà thiết kế tiến hành tô màu cho một hình vuông như hình bên, theo quy trình sau:



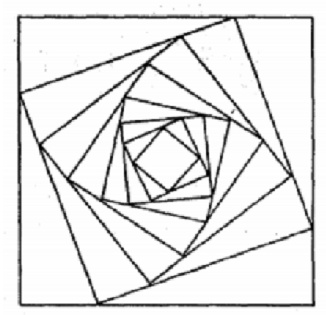
Bước 1: Tô màu "đẹp" cho hình vuông $A_1B_1C_1D_1$.

Bước 2: Tô màu "đẹp" cho hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ là hình vuông ở chính giữa khi chia hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ thành 9 phần bằng nhau như hình vẽ.

Bước 3: Tô màu "đẹp" cho hình vuông $A_3B_3C_3D_3$ là hình vuông ở chính giữa khi chia hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ thành 9 phần bằng nhau. Cứ tiếp tục như vậy. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu bước để tổng diện tích phần được tô màu chiếm $49,99\%$.

A. 9 bước. **B.** 4 bước. **C.** 8 bước. **D.** 7 bước.

Câu 8. Cho hình vuông (C_1) có cạnh bằng a. Người ta chia mỗi cạnh của hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông (C_2)(Hình vẽ).



Từ hình vuông (C_2) lại tiếp tục làm như trên ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, .., C_n$.

Gọi S_i là diện tích của hình vuông $C_i\left(i \in \{1,2,3,.....\}\right)$. Đặt $T = S_1 + S_2 + S_3 + ...S_n + ...$ Biết $T = \frac{32}{3}$, tính a?

A. 2. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 9. Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nữa diện tích của mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp (có diện tích là 12 288 m^2). Tính diện tích mặt trên cùng.

A. $6m^2$. **B.** $8m^2$. **C.** $10m^2$. **D.** $12m^2$.

Câu 10. Ba số phân biệt có tổng là 217 có thể coi là các số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, cũng có thể coi là số hạng thứ 2, thứ 9, thứ 44 của một cấp số cộng. Hỏi phải lấy bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng này để tổng của chúng bằng 820?

A. 20. **B.** 42. **C.** 21. **D.** 17.

Câu 11. Một loại vi khuẩn sau mỗi phút số lượng tăng gấp đôi biết rằng sau 5 phút người ta đếm được có 64000 con hỏi sau bao nhiêu phút thì có được 2048000 con.

A. 10. **B.** 11. **C.** 26. **D.** 50.

Câu 12. Đầu mùa thu hoạch xoài, một bác nông dân đã bán cho người thứ nhất, nửa số xoài thu hoạch được và nửa quả, bán cho người thứ hai nửa số còn lại và nửa quả, bán cho người thứ ba nửa số xoài còn lại và nửa quả v.v. Đến lượt người thứ bảy bác cũng bán nửa số xoài còn lại và nửa quả thì không còn quả nào nữa.Hỏi bác nông dân đã thu hoạch được bao nhiêu quả xoài đầu mùa?

A. 125. **B.** 126. **C.** 127. **D.** 128.

Câu 13. Qua điều tra chăn nuôi bò ở huyện X cho thấy ở đây trong nhiều năm qua, tỉ lệ tăng đàn hàng năm là 2%. Tính xem, sau một kế hoạch 3 năm, với số lượng đàn bò thống kê được ở huyện này vào ngày 1/1/2017 là 18.000 con, thì với tỉ lệ tăng đàn trên đây, đàn bò sẽ đạt tới bao nhiêu con?

A. 18.360. **B.** 18.727. **C.** 19.102. **D.** 19.101.

Câu 14. Kết quả kiểm kê vào cuối năm 2006, cho biết tổng đàn bò ở vùng Y là 580 con và trong mấy năm qua tỉ lệ tăng đàn đạt 12% mỗi năm. Hãy tính xem vào đầu năm 2004 (cách đó 3 năm về trước) đàn bò ở đây có bao nhiêu con?

A. 410. **B.** 412. **C.** 413. **D.** 415.

Câu 15. Bạn định mua một chiếc xe máy theo phương thức trả góp. Theo phương thức này sau một tháng kể từ khi nhận xe bạn phải trả đều đặn mỗi tháng một lượng tiền nhất định nào đó, liên tiếp trong 24 tháng. Giả sử giá xe máy thời điểm bạn mua là 16 triệu đồng và giả sử lãi suất ngân hàng là 1% một tháng. Với mức phải trả hàng tháng là bao nhiêu thì việc mua trả góp là chấp nhận được?

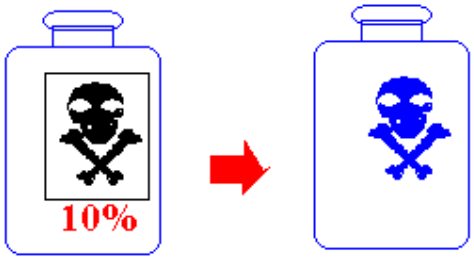
A. 660.883,9 (đồng). **B.** 560.883,9 (đồng). **C.** 661.883,9 (đồng). **D.** 662.883,9 (đồng).

Câu 16. Người ta dự định xây dựng 1 tòa tháp 11 tầng tại một ngôi chùa nọ, theo cấu trúc diện tích của mặt sàn tầng trên bằng nửa diện tích mặt sàn tầng dưới, biết diện tích mặt đáy tháp là $12{,}28\text{m}^2$. Hãy giúp nhà chùa ước lượng số gạch hoa cần dùng để lát nền nhà. Để cho đồng bộ các nhà chùa yêu cầu nền nhà phải lót gạch hoa cỡ 30x30cm.

A. 273000 viên. **B.** 272000 viên. **C.** 271000 viên. **D.** 270000 viên.

Câu 17. Một lọ thủy tinh dung tích 1 000 ml chứa đầy 1 loại dung dịch chất độc nồng độ 10 % đã được chuyển sang bình chứa khác; nhưng dung dịch độc hại sau khi đổ hết vẫn còn dính lọ 0,1 %. Để chất độc còn trong lọ ≤ 0,001 μ gam (microgam), Người ta dùng nước cất xúc rửa lọ thủy tinh này. Hỏi phải xúc rửa bao nhiêu lần nếu mỗi lần dùng 1000 ml nước cất?

Giả thử rằng mỗi lần xúc rửa, chất độc hòa tan hết trong nước và sau khi đổ đi dung dịch mới cũng vẫn còn dính lọ một lượng như nhau.



A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 18. "Trong 1 bàn cờ gồm có 64 ô. Bắt đầu từ ô thứ nhất, Vua đặt vào 1 hạt gạo. Tiếp tục ở ô thứ hai, Vua đặt vào 2 hạt gạo. Cứ thế với những ô tiếp theo với số gạo gấp đôi số gạo ở ô liền trước nó. Cuối cùng cho đến hết 64 ô của bàn cờ. Tổng số hạt gạo thu được trong 64 ô đó là số gạo mà thần xin bệ hạ ban tặng".

Nhà vua nghĩ "Như thế thì chắc chỉ có 1 bao gạo là cùng". Nhưng sau tính ra với một con số khủng lồ. Vậy số gạo mà Nhà thông thái cần là bao nhiêu?

A. $2^{64}-1$. **B.** 2^{64}. **C.** $2^{64}+1$. **D.** $2^{64}+2$.

Lý thuyết

I.Định nghĩa

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q.

Số q được gọi là công bội của cấp số nhân.

Nếu (u_n) là cấp số nhân với công bội q, ta có công thức truy hồi:

$$u_{n+1} = u_n q \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

Đặc biệt:

- Khi $q = 0$, cấp số nhân có dạng $u_1,\ 0,\ 0,\ ...,\ 0,\ ...$
- Khi $q = 1$, cấp số nhân có dạng $u_1,\ u_1,\ u_1,\ ...,\ u_1,\ ...$
- Khi $u_1 = 0$ thì với mọi q, cấp số nhân có dạng $0,\ 0,\ 0,\ ...,\ 0,\ ...$

II.Số hạng tổng quát

Định lí 1. Nếu cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức

$$u_n = u_1.q^{n-1} \text{ với } n \geq 2.$$

III.Tính chất

Định lí 2. Trong một cấp số nhân, bình phương của mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là tích của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là

$$u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1}, \text{ với } k \geq 2.$$

IV.Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân

Định lí 3. Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

Khi đó $\boxed{S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}.}$

Chú ý: Nếu $q = 1$ thì cấp số nhân là $u_1,\ u_1,\ u_1,\ ...,\ u_1,\ ...$ khi đó $S_n = nu_1$.

DẠNG 1: CHỨNG MINH MỘT DÃY (u_n) LÀ CẤP SỐ NHÂN.

A. Phương pháp giải

Chứng minh $\forall n \geq 1, u_{n+1} = u_n.q$ trong đó q là một số không đổi.

Nếu $u_n \neq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì ta lập tỉ số $T = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

* T là hằng số thì (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = T$.
* T phụ thuộc vào n thì (u_n) không là cấp số nhân.

B. Bài tập tự luận

Câu 1. Xét trong các dãy số số sau, dãy số nào là cấp số nhân, (nếu có) tìm công bối của cấp số nhân đó:

a). $u_n = (-3)^{2n+1}$ b). $u_n = (-1)^n.5^{3n+2}$ c). $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$ d). $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{9}{u_n} \end{cases}$

Lời giải

a). Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(-3)^{2n+3}}{(-3)^{2n+1}}=(-3)^2=9$ (không đổi). Kết luận (u_n) là cấp số nhân với công bội $q=9$.

b). Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(-1)^{n+1}.5^{3(n+1)+2}}{(-1)^n.5^{3n+2}}=-1.5^3=-125$ (không đổi). Kết luận (u_n) là cấp số nhân với công bội $q=-125$.

c). Ta có $u_2=u_1^2=4$, $u_3=u_2^2=16$, $u_4=u_3^2=256$, suy ra $\frac{u_2}{u_1}=\frac{4}{2}=2$ và $\frac{u_4}{u_3}=\frac{256}{16}=16\Rightarrow\frac{u_2}{u_1}\neq\frac{u_4}{u_3}$. Do đó (u_n) không là cấp số nhân.

d). $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{9}{u_n}}{\frac{9}{u_{n-1}}}=\frac{u_{n-1}}{u_n}\Rightarrow u_{n+1}=u_{n-1},\forall n\geq 2$. Do đó có:

$u_1=u_3=u_5=....=u_{2n+1}....$ (1)

Và $u_2=u_4=u_6=....=u_{2n}=...$ (2)

Theo đề bài có $u_1=3\Rightarrow u_2=\frac{9}{u_1}=3$ (3)

Từ (1), (2),(3) suy ra $u_1=u_2=u_3=u_4=u_5=....=u_{2n}=u_{2n+1}....$ Kết luận (u_n) là cấp số nhân với công bội $q=1$.

Câu 2. Chứng minh rằng dãy số $(v_n): v_n=(-1)^n.3^{2n}$ là một cấp số nhân.

Lời giải

$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{(-1)^{n+1}3^{2(n+1)}}{(-1)^n3^{2n}}=-9,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Vậy $(v_n): v_n=(-1)^n.3^{2n}$ là một cấp số nhân.

Câu 3. Giá trị của a để $\frac{-1}{5}$; a; $\frac{-1}{125}$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân?

Lời giải

Ta có: $a^2=\left(-\frac{1}{5}\right).\left(-\frac{1}{125}\right)=\frac{1}{625}\Leftrightarrow a=\pm\frac{1}{25}$

Câu 4. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases}u_1=2\\u_{n+1}=4u_n+9\end{cases},\forall n\geq 1$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) xác định bởi $v_n=u_n+3,\forall n\geq 1$ là một cấp số nhân. Hãy xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

Lời giải

Vì có $v_n=u_n+3$ (1) $\Rightarrow v_{n+1}=u_{n+1}+3$ (2).

Theo đề $u_{n+1}=4u_n+9\Rightarrow u_{n+1}+3=4(u_n+3)$ (3).

Thay (1) và (2) vào (3) được: $v_{n+1}=4v_n,\forall n\geq 1\Rightarrow\frac{v_{n+1}}{v_n}=4$ (không đổi). Kết luận (v_n) là cấp số nhân với công bội $q=4$ và số hạng đầu $v_1=u_1+3=5$.

Câu 5. Cho x, 3, y theo thứ tự lập thành cấp số nhân và $x^4 = y\sqrt{3}$. Tìm x, y.

Lời giải

Ta có: $x.y = 9 \Rightarrow y = \dfrac{9}{x}$

Thay vào $x^4 = y\sqrt{3} \Leftrightarrow x^4 = \dfrac{9}{x}\sqrt{3} \Leftrightarrow x^5 = \left(\sqrt{3}\right)^4.\sqrt{3} \Leftrightarrow x^5 = \left(\sqrt{3}\right)^5 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$

$\Rightarrow y = \dfrac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$. Kết luận $\begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = 3\sqrt{3} \end{cases}$

C. Bài tập trắc nghiệm

DÀNH CHO HỌC SINH TRUNG BÌNH - KHÁ

Câu 1. Chọn cấp số nhân trong các dãy số sau:

A. 1; 0,2; 0,04; 0,0008; ... **B.** 2; 22; 222; 2222; ...

C. x; $2x$; $3x$; $4x$; ... **D.** 1; $-x^2$; x^4; $-x^6$; ...

Lời giải

Chọn D.

Dãy số : 1; $-x^2$; x^4; $-x^6$; ... là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 1$; công bội $q = -x^2$.

Câu 2. Xác định x để 3 số $x-2$; $x+1$; $3-x$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân:

A. Không có giá trị nào của x. **B.** $x = \pm 1$.

C. $x = 2$. **D.** $x = -3$.

Lời giải

Chọn A.

Ba số $x-2$; $x+1$; $3-x$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân $\Leftrightarrow (x-2)(3-x) = (x+1)^2$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 7 = 0$ (Phương trình vô nghiệm)

Câu 3. Xác định x để 3 số $2x-1$; x; $2x+1$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân:

A. $x = \pm\dfrac{1}{3}$. **B.** $x = \pm\sqrt{3}$.

C. $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** Không có giá trị nào của x.

Lời giải

Chọn C.

Ba số: $2x-1$; x; $2x+1$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân $\Leftrightarrow (2x-1)(2x+1) = x^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 1 = x^2$

$\Leftrightarrow 3x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 4. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy nào là cấp số nhân?

A. $u_n = n^2 + n + 1$. **B.** $u_n = (n+2).3^n$.

C. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{6}{u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. **D.** $u_n = (-4)^{2n+1}$.

Lời giải

Chọn đáp án D

A. $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^2+3n+3}{n^2+n+1},\forall n\in\mathbb{N}^*$, không phải là hằng số. Vậy (u_n) không phải là cấp số nhân.

B. $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+3).3^{n+1}}{(n+2).3^n}=\frac{3(n+3)}{n+2},\forall n\in\mathbb{N}^*$, không phải là hằng số. Vậy (u_n) không phải là cấp số nhân.

C. Từ công thức truy hồi của dãy số, suy ra $u_1=2;u_2=3;u_3=2;u_4=3;...$

Vì $\frac{u_3}{u_2}\neq\frac{u_2}{u_1}$ nên (u_n) không phải là cấp số nhân.

D. $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(-4)^{2(n+1)+1}}{(-4)^{2n+1}}=16,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Vậy (u_n) là một cấp số nhân.

Câu 5. Dãy số nào sau đây là cấp số nhân?

A. $\begin{cases}u_1=1\\u_{n+1}=u_n+1,\ n\geq 1\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}u_1=-1\\u_{n+1}=-3u_n,\ n\geq 1\end{cases}$.

C. $\begin{cases}u_1=-2\\u_{n+1}=2u_n+3,\ n\geq 1\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}u_1=\frac{\pi}{2}\\u_n=\sin\left(\frac{\pi}{n-1}\right),\ n\geq 1\end{cases}$.

Lời giải

(u_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow u_{n+1}=qu_n\longrightarrow$ **Chọn B.**

Câu 6. Cho dãy số (u_n) là một cấp số nhân với $u_n\neq 0,\ n\in\mathbb{N}^*$. Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

A. $u_1;\ u_3;\ u_5;\ ...$ **B.** $3u_1;\ 3u_2;\ 3u_3;\ ...$

C. $\frac{1}{u_1};\ \frac{1}{u_2};\ \frac{1}{u_3};\ ...$ **D.** $u_1+2;\ u_2+2;\ u_3+2;\ ...$

Lời giải

Giả sử (u_n) là cấp số nhân công bội q, thì

Dãy $u_1;\ u_3;\ u_5;\ ...$ là cấp số nhân công bội q^2.

Dãy $3u_1;\ 3u_2;\ 3u_3;\ ...$ là cấp số nhân công bội $2q$.

Dãy $\frac{1}{u_1};\ \frac{1}{u_2};\ \frac{1}{u_3};\ ...$ là cấp số nhân công bội $\frac{1}{q}$.

Dãy $u_1+2;\ u_2+2;\ u_3+2;\ ...$ không phải là cấp số nhân. **Chọn D.**

Câu 7. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. $128;\ -64;\ 32;\ -16;\ 8;\ ...$ **B.** $\sqrt{2};\ 2;\ 4;\ 4\sqrt{2};\ ....$

C. $5;\ 6;\ 7;\ 8;\ ...$ **D.** $15;\ 5;\ 1;\ \frac{1}{5};\ ...$

Lời giải

Xét đáp án: $128;\ -64;\ 32;\ -16;\ 8;\ ...\longrightarrow\frac{u_2}{u_1}=-\frac{1}{2}=\frac{u_3}{u_2}=\frac{u_4}{u_3}$.

Câu 8. Trong các dãy số sau, dãy số nào **không phải** là một cấp số nhân?

A. $2;\ 4;\ 8;\ 16;\ \ldots$ **B.** $1;\ -1;\ 1;\ -1;\ \cdots$

C. $1^2;\ 2^2;\ 3^2;\ 4^2;\ \cdots$ **D.** $a;\ a^3;\ a^5;\ a^7;\ \cdots (a \neq 0)$.

Lời giải

Xét đáp án: $1^2;\ 2^2;\ 3^2;\ 4^2;\ \cdots \longrightarrow \frac{u_2}{u_1} = 4 \neq \frac{9}{4} = \frac{u_3}{u_2}$.

Câu 9. Dãy số nào sau đây **không phải** là cấp số nhân?

A. $1;\ 2;\ 4;\ 8;\ \cdots$ **B.** $3;\ 3^2;\ 3^3;\ 3^4;\ \cdots$

C. $4;\ 2;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \cdots$ **D.** $\frac{1}{\pi};\ \frac{1}{\pi^2};\ \frac{1}{\pi^4};\ \frac{1}{\pi^6};\ \cdots$

Lời giải

Xét đáp án $\frac{1}{\pi};\ \frac{1}{\pi^2};\ \frac{1}{\pi^4};\ \frac{1}{\pi^6};\ \cdots \longrightarrow \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{\pi} \neq \frac{1}{\pi^2} = \frac{u_3}{u_2}$.

Câu 10. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -2$ và $q = -5$. Viết bốn số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

A. $-2;\ 10;\ 50;\ -250$. **B.** $-2;\ 10;\ -50;\ 250$.

C. $-2;\ -10;\ -50;\ -250$. **D.** $-2;\ 10;\ 50;\ 250$.

Lời giải

$$\begin{cases} u_1 = -2 \\ q = -5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = -2 \\ u_2 = u_1 q = 10 \\ u_3 = u_2 q = -50 \\ u_4 = u_3 q = 250 \end{cases}.$$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 11. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. $u_n = \frac{1}{3^{n-2}}$. **B.** $u_n = \frac{1}{3^n} - 1$. **C.** $u_n = n + \frac{1}{3}$. **D.** $u_n = n^2 - \frac{1}{3}$.

Lời giải

Dãy $u_n = \frac{1}{3^{n-2}} = 9.\left(\frac{1}{3}\right)^n$ là cấp số nhân có $\begin{cases} u_1 = 3 \\ q = \frac{1}{3} \end{cases}$.

Câu 12. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. $u_n = 7 - 3n$. **B.** $u_n = 7 - 3^n$. **C.** $u_n = \frac{7}{3n}$. **D.** $u_n = 7.3^n$.

Lời giải

Dãy $u_n = 7.3^n$ là cấp số nhân có $\begin{cases} u_1 = 21 \\ q = 3 \end{cases}$.

Câu 13. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào là **sai**?

A. Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số nhân.

B. Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số cộng.

C. Một cấp số cộng có công sai dương là một dãy số tăng.

D. Một cấp số cộng có công sai dương là một dãy số dương.

Lời giải

Một cấp số cộng có công sai dương là một dãy số dương.

Ví dụ dãy $-5;\ -2;\ 1;\ 3;\ \ldots$ là dãy số có $d=3>0$ nhưng không phải là dãy số dương.

Câu 14. Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số nhân?

A. $u_n=(-1)^n n$. **B.** $u_n=n^2$. **C.** $u_n=2^n$. **D.** $u_n=\dfrac{n}{3^n}$.

Lời giải

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{2^{n+1}}{2^n}=2\Rightarrow u_{n+1}=2u_n\Rightarrow (u_n)$ là cấp số nhân có công bội bằng 2.

Câu 15. Xác định x dương để $2x-3;\ x;\ 2x+3$ lập thành cấp số nhân.

A. $x=3$. **B.** $x=\sqrt{3}$.

C. $x=\pm\sqrt{3}$. **D.** không có giá trị nào của x.

Lời giải

$2x-3;\ x;\ 2x+3$ lập thành cấp số nhân

$\Leftrightarrow x^2=(2x-3)(2x+3)\Leftrightarrow x^2=4x^2-9\Leftrightarrow x^2=3\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$.

Vì x dương nên $x=\sqrt{3}$.

Câu 16. Tìm x để các số $2;\ 8;\ x;\ 128$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $x=14$. **B.** $x=32$. **C.** $x=64$. **D.** $x=68$.

Lời giải

Cấp số nhân $2;\ 8;\ x;\ 128$ theo thứ tự đó sẽ là $u_1;u_2;u_3;u_4$, ta có

$$\begin{cases}\dfrac{u_2}{u_1}=\dfrac{u_3}{u_2}\\ \dfrac{u_3}{u_2}=\dfrac{u_4}{u_3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{8}{2}=\dfrac{x}{8}\\ \dfrac{128}{x}=\dfrac{x}{8}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=32\\ x^2=1024\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=32\\ \left[\begin{array}{l}x=32\\ x=-32\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=32.$$

Câu 17. Với giá trị x nào dưới đây thì các số $-4;\ x;\ -9$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân?

A. $x=36$. **B.** $x=-\dfrac{13}{2}$. **C.** $x=6$. **D.** $x=-36$.

Lời giải

Cấp số nhân: q.

Nhận xét: ba số $a;\ b;\ c$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân $\Leftrightarrow ac=b^2$.

Câu 18. Tìm $b>0$ để các số $\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ \sqrt{b};\ \sqrt{2}$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $b=-1$. **B.** $b=1$. **C.** $b=2$. **D.** $b=-2$.

Lời giải

Cấp số nhân $\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ \sqrt{b};\ \sqrt{2}\longrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}=\left(\sqrt{b}\right)^2\Leftrightarrow b=1$.

Câu 19. Tìm x để ba số $1+x;\ 9+x;\ 33+x$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $x=1$. **B.** $x=3$. **C.** $x=7$. **D.** $x=3;\ x=7$.

Lời giải

Cấp số nhân $1+x;\ 9+x;\ 33+x \longrightarrow (1+x)(33+x)=(9+x)^2 \Leftrightarrow x=3.$

Câu 20. Với giá trị $x,\ y$ nào dưới đây thì các số hạng lần lượt là $-2;\ x;\ -18;\ y$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân?

A. $\begin{cases} x=6 \\ y=-54 \end{cases}.$ **B.** $\begin{cases} x=-10 \\ y=-26 \end{cases}.$ **C.** $\begin{cases} x=-6 \\ y=-54 \end{cases}.$ **D.** $\begin{cases} x=-6 \\ y=54 \end{cases}.$

Lời giải

Cấp số nhân: $-2;\ x;\ -18;\ y \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{-2}=\dfrac{-18}{x} \\ \dfrac{-18}{x}=\dfrac{y}{-18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 6 \\ y=\dfrac{324}{x}=\pm 54 \end{cases}.$ Vậy

$(x;y)=(6;54)$ hoặc $(x;y)=(-6;-54).$

Câu 21. Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là $x;\ 12;\ y;\ 192.$ Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x=1; y=144.$ **B.** $x=2; y=72.$ **C.** $x=3; y=48.$ **D.** $x=4; y=36.$

Lời giải

Cấp số nhân: $x;\ 12;\ y;\ 192 \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{12}{x}=\dfrac{y}{12} \\ \dfrac{y}{12}=\dfrac{192}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{144}{y} \\ y^2=2304 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 3 \\ y=\pm 48 \end{cases}.$

Câu 22. Thêm hai số thực dương x và y vào giữa hai số 5 và 320 để được bốn số $5;\ x;\ y;\ 320$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\begin{cases} x=25 \\ y=125 \end{cases}.$ **B.** $\begin{cases} x=20 \\ y=80 \end{cases}.$ **C.** $\begin{cases} x=15 \\ y=45 \end{cases}.$ **D.** $\begin{cases} x=30 \\ y=90 \end{cases}.$

Lời giải

Cấp số nhân: $5;\ x;\ y;\ 320 \longrightarrow \begin{cases} u_1=5 \\ q=\dfrac{x}{5} \\ y=u_3=u_1q^2=\dfrac{x^2}{5} \\ 320=u_4=u_1q^3=\dfrac{x^3}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=20 \\ y=80 \end{cases}.$

Câu 23. Ba số hạng đầu của một cấp số nhân là $x-6;\ x$ và $y.$ Tìm y, biết rằng công bội của cấp số nhân là 6.

A. $y=216.$ **B.** $y=\dfrac{216}{5}.$ **C.** $y=\dfrac{1296}{5}.$ **D.** $y=12.$

Lời giải

Cấp số nhân $x-6;\ x$ và y có công bội $q=6$ nên ta có

$$\begin{cases} u_1=x-6,\ q=6 \\ x=u_2=u_1q=6(x-6) \\ y=u_3=u_2q=6x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{36}{5} \\ y=6.\dfrac{36}{5}=\dfrac{216}{5} \end{cases}.$$

Câu 24. Hai số hạng đầu của của một cấp số nhân là $2x+1$ và $4x^2-1.$ Số hạng thứ ba của cấp số nhân là:

A. $2x-1.$ **B.** $2x+1.$

C. $8x^3-4x^2-2x+1$. **D.** $8x^3+4x^2-2x-1$.

Lời giải

Công bội của cấp số nhân là: $q=\dfrac{4x^2-1}{2x+1}=2x-1$. Vậy số hạng thứ ba của cấp số nhân là: $\left(4x^2-1\right)\left(2x-1\right)=8x^3-4x^2-2x+1$.

Câu 25. Cho dãy số: $-1;1;-1;1;-1;\ldots$ *Khẳng định nào sau đây là* ***đúng****?*

A. Dãy số này không phải là cấp số nhân. **B.** Số hạng tổng quát $u_n=1^n=1$.

C. Dãy số này là cấp số nhân có $u_1=-1, q=-1$. **D.** Số hạng tổng quát $u_n=\left(-1\right)^{2n}$.

Lời giải:

Chọn C

Ta có $1=-1(-1);\ -1=1(-1)$. Vậy dãy số trên là cấp số nhân với $u_1=-1;\ q=-1$.

DÀNH CHO HỌC SINH KHÁ – GIỎI

Câu 26. Các số $x+6y,\ 5x+2y,\ 8x+y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng; đồng thời các số $x-1,\ y+2,\ x-3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Tính x^2+y^2.

A. $x^2+y^2=40$. **B.** $x^2+y^2=25$. **C.** $x^2+y^2=100$. **D.** $x^2+y^2=10$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có $\begin{cases}\left(x+6y\right)+\left(8x+y\right)=2\left(5x+2y\right)\\ \left(x-1\right)\left(x-3y\right)=\left(y+2\right)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=3y\\ \left(3y-1\right)\left(3y-3y\right)=\left(y+2\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3y\\ 0=\left(y+2\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-6\\ y=-2\end{cases}$.

Suy ra $x^2+y^2=40$.

Câu 27. Ba số $x;\ y;\ z$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân với công bội q khác 1; đồng thời các số $x;\ 2y;\ 3z$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với công sai khác 0. Tìm giá trị của q.

A. $q=\dfrac{1}{3}$. **B.** $q=\dfrac{1}{9}$. **C.** $q=-\dfrac{1}{3}$. **D.** $q=-3$.

Lời giải

$\begin{cases}y=xq;\ z=xq^2\\ x+3z=2\left(2y\right)\end{cases}\Rightarrow x+3xq^2=4xq\Rightarrow x\left(3q^2-4q+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ 3q^2-4q+1=0\end{array}\right.$.

Nếu $x=0\Rightarrow y=z=0\Rightarrow$ công sai của cấp số cộng: $x;\ 2y;\ 3z$ bằng 0 (vô lí).

Nếu $3q^2-4q+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}q=1\\ q=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow q=\dfrac{1}{3}\ (q\neq 1)$.

Câu 28. Số hạng thứ hai, số hạng đầu và số hạng thứ ba của một cấp số cộng với công sai khác 0 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân với công bội q. Tìm q.

A. $q=2$. **B.** $q=-2$. **C.** $q=-\dfrac{3}{2}$. **D.** $q=\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Giả sử ba số hạng $a;b;c$ lập thành cấp số cộng thỏa yêu cầu, khi đó $b;a;c$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân công bội q. Ta có

$$\begin{cases} a+c=2b \\ a=bq; c=bq^2 \end{cases} \Rightarrow bq+bq^2=2b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ q^2+q-2=0 \end{array}\right.$$

Nếu $b=0 \Rightarrow a=b=c=0$ nên $a;b;c$ là cấp số cộng công sai $d=0$ (vô lí).

Nếu $q^2+q-2=0 \Leftrightarrow q=1$ hoặc $q=-2$. Nếu $q=1 \Rightarrow a=b=c$ (vô lí), do đó $q=-2$.

Câu 29. Cho Cấp số nhân có bốn số hạng: $-2\ ;\ x;-18\ ;y$. Hãy chọn kết quả đúng:

A. $x=-6\ ;y=54$. **B.** $x=6;\ y=-54$.

C. $x=-6\ ;\ y=-54$. **D.** $x=-10\ ;\ y=-26$.

Lời giải:

Chọn C

Ta có: $\begin{cases} x^2=(-2)(-18)=36 \Rightarrow x=\pm 6 \\ xy=(-18)^2=324 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=6 \\ y=54 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-6 \\ y=-54 \end{cases} \end{array}\right.$.

Câu 30. Tìm hai số x và y sao cho $x;\ 2x-3y;y$ theo thứ tự lập thành CSC, các số $x^2;\ xy-6\ ;\ y^2$ lập thành CSN:

A. $\left(\sqrt{7};\frac{3\sqrt{7}}{7}\right)$ và $\left(-\sqrt{7};\frac{-3\sqrt{7}}{7}\right)$. **B.** $\left(-\sqrt{7};\frac{3\sqrt{7}}{7}\right)$ và $\left(\sqrt{7};\frac{-3\sqrt{7}}{7}\right)$.

C. $\left(2;\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ và $\left(-2;\frac{-3\sqrt{2}}{2}\right)$. **D.** $\left(-2;\frac{3\sqrt{7}}{7}\right)$ và $\left(2;\frac{-3\sqrt{7}}{7}\right)$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải:

Chọn A

Ta có $\begin{cases} x+y=2(2x-3y) \\ x^2y^2=(xy-6)^2 \end{cases}$

Với phương trình thứ 2 đặt $t=xy$ ta giải ra được $t=xy=3$.

Từ phương trình thứ nhất ta rút ra được $x=\frac{7}{3}y$.

Do đó ta có $(x;y)=\left(\sqrt{7};\frac{3\sqrt{7}}{7}\right)$ hoặc $(x;y)=\left(-\sqrt{7};\frac{-3\sqrt{7}}{7}\right)$.

Câu 31. Tìm x,y biết các số $5x-y;2x+3y;x+2y$ lập thành cấp số cộng và các số $(y+1)^2;xy+1;(x-1)^2$ lập thành cấp số nhân.

A. $(0;0);\left(-\frac{3}{4};-\frac{3}{10}\right);\left(-\frac{10}{3};-\frac{4}{3}\right)$. **B.** $(0;0);\left(-\frac{3}{4};-\frac{3}{10}\right);\left(\frac{10}{3};\frac{4}{3}\right)$.

C. $(0;0);\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right);\left(\frac{10}{3};\frac{4}{3}\right)$. **D.** $(0;0);\left(-\frac{3}{4};\frac{3}{10}\right);\left(\frac{10}{3};\frac{4}{3}\right)$.

Lời giải:

Chọn B

Dãy số $5x-y;2x+3y;x+2y$ lập thành cấp số cộng

$\Leftrightarrow 2(x+3y)=(5x-y)+(x+2y)\Leftrightarrow y=\frac{2}{5}x(*)$

Dãy số $(y+1)^2;xy+1;(x-1)^2$ lập thành cấp số nhân

$\Leftrightarrow (xy+1)^2=(y+1)^2(x-1)^2\Leftrightarrow (xy+1)^2=(xy+x-y-1)^2$

Trường hợp 1. $xy+1=xy+x-y-1\Leftrightarrow x-y=2(**)$. Từ (*) và (**)

$\Rightarrow x=\frac{10}{3};y=\frac{4}{3}\Rightarrow\left(\frac{10}{3};\frac{4}{3}\right)$

Trường hợp 2. $xy+1=-xy-x+y+1\Leftrightarrow 2xy+x-y=0(**)$. Từ (*) và (**)

$\Rightarrow \frac{4}{5}x^2+\frac{3}{5}x=0\Rightarrow\begin{bmatrix}x=0;y=0\\x=-\frac{3}{4};y=-\frac{3}{10}\end{bmatrix}\Rightarrow(0;0);\left(-\frac{3}{4};-\frac{3}{10}\right)$.

Câu 32. Xác định m để phương trình $x^3-(3m+1)x^2+(5m+4)x-8=0$ có 3 nghiệm lập thành một cấp số nhân.

A. $m=2$. **B.** $m=2$ hoặc $m=\frac{-1}{2}$.

C. $m=0$ hoặc $m=-6$. **D.** $m=1$ hoặc $m=-6$.

Lời giải:

Chọn A

Giả sử $x_1;x_2;x_3$ là ba ngiệm của phương trình $x^3-(3m+1)x^2+(5m+4)x-8=0\quad(1)$, vì ba nghiệm lập thành một cấp số nhân nên ta có $x_2^2=x_1x_3\Rightarrow x_1x_2x_3=x_2^3$. Áp dụng định lý Vi-et cho phương trình (1) ta có:

$x_1x_2x_3=-8\Rightarrow x_2^3=-8\Leftrightarrow x_2=-2$. Mà x_2 là nghiệm của phương trình (1) nên

$(-2)^3-(3m+1).(-2)^2+(5m+4).(-2)-8=0\Leftrightarrow m=2$

Thử lại với $m=2$ thì phương trình (1) trở thành $x^3-7x^2+14x-8=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=1\\x=2\\x=4\end{bmatrix}$

Vậy chọn $m=2$.

Câu 33. Số đo bốn góc của một tứ giác lập thành cấp số nhân và góc cuối gấp 9 lần góc thứ hai. Tìm số đo của góc thứ nhất.

A. 10^0. **B.** 9^0. **C.** 8^0. **D.** 12^0.

Lời giải:

Chọn B

Gọi A, B, C, D theo thứ tự đó là số đo các góc của tứ giác lập thành csn với công bội q.

$\Rightarrow B = Aq, C = Aq^2, D = Aq^3$

Theo đề bài ta có: $D = 9B \Leftrightarrow Aq^3 = 9Aq \Leftrightarrow q^2 = 9 \Leftrightarrow q = \pm 3$

Với $q = -3 \Rightarrow B = -3A < 0$ nên loại

Với $q = 3$ ta có $A + B + C + D = 360^0 \Leftrightarrow A + 3A + 9A + 27A = 360^0 \Leftrightarrow A = 9^0$.

Câu 34. Cho phương trình $x^3 - (2m-1)x^2 + (m^2 + 4m - 2)x - m^2 - 2m = 0$ có nghiệm là một cấp số nhân có công bội $q = -2$ thì giá trị m phải thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $(-1;2)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải:

Chọn D

Ta nhẩm được một nghiệm phương trình là $x = 1$ nên nhóm được phương trình về dạng $(x-1)\left[x^2 - (2m-2)x - \left(m^2 + 2m\right)\right] = 0$. Từ đó ta suy ra 2 nghiệm còn lại là -2 và 4. Thay vào phương trình $x^2 - (2m-2)x - \left(m^2 + 2m\right) = 0$ ta được $m = 2$.

Câu 35. Cho phương trình: $x^3 + mx^2 - 9x - 9m = 0$. Để phương trình có ba nghiệm lập thành cấp số nhân thì tất cả các giá trị m phải thỏa mãn phương án nào dưới đây?

A. $m = 3$. **B.** $m \in (-9;0)$. **C.** $m \in (-5;5)$. **D.** $m = -6$.

Lời giải:

chọn **C.**

Ta nhẩm được 2 nghiệm là 3 và -3 do đó nghiệm còn lại chỉ có thể là 3 hoặc -3. Từ đó ta nhóm biến đổi phương trình thành: $(x^2 - 9)(x + m) = 0$, từ đó ta có kết quả $m \in (-5;5)$.

Câu 36. Cho phương trình $x^3 - (3m+1)x^2 + (5m+4)x - 8 = 0$ Tìm tất cả các giá trị m để phương trình có ba nghiệm lập thành cấp số nhân?

A. $m = -7$ **B.** $m \in (0;9)$ **C.** $m \in (-9;0)$ **D.** $m = 3$.

Lời giải:

Chọn B

Theo định lý Viet cho phương trình bậc 3 ta có $x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \Leftrightarrow x_2^3 = -\frac{d}{a} = 8 \Leftrightarrow x_2 = 2$. Thay vào phương trình tìm được m=2. Thử lại ta có 3 nghiệm của phương trình x=1,x = 2, x =4, ta được đáp án **B.**

Câu 37. Cho phương trình: $2x^3 + 2mx^2 - 7(m-1)x - 54 = 0$. Để phương trình có ba nghiệm lập thành cấp số nhân thì tất cả các giá trị m phải thỏa mãn phương án nào dưới đây?

A. $m = -7$ **B.** $m \in (0;9)$ **C.** $m \in (-9;0)$ **D.** $m = 3$.

Lời giải:

Chọn B

Theo định lý Viet cho phương trình bậc 3 ta có $x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \Leftrightarrow x_2^3 = -\frac{d}{a} = 27 \Leftrightarrow x_2 = 3$. Thay vào phương trình tìm được m = 7. Thử lại ta được 3 nghiệm của phương trình là x= -1 ; x= 3 ; x=-9 ta được đáp án **B.**

Câu 38. Tìm m để phương trình: $x^3+2x^2+(m+1)x+2(m+1)=0$ có ba nghiệmphân biệt lập thành cấp số nhân?

A. $m=3$ **B.** $m<-1$ **C.** $m\neq -5$ **D.** Không tồn tại m.

Lời giải:

Chọn D

Phương trình $x^3+2x^2+(m+1)x+2(m+1)=0$ tương đương với $(x+2)\left(x^2+m+1\right)=0$

Nghiệm là $x=-2$ hoặc $x^2=-m-1$

Để phương trình có 3 nghiệm thì: $\begin{cases} m<-1 \\ m\neq -5 \end{cases}$. Khi đó hệ có 3 nghiệm là: $x=-2,\ x=\pm\sqrt{-m-1}$

Xét hai trường hợp:

TH1: $-5<m<-1$ thì 3 nghiệm theo thứ tự là: $-2,\ -\sqrt{-m-1};\sqrt{-m-1}$

Để lập thành cấp số nhân thì trường hợp này không xảy ra

TH2: $m<-5$ thì 3 nghiệm theo thứ tự là: $-\sqrt{-m-1};-2;\sqrt{-m-1}$

Để lập thành cấp số nhân thì: $4=-(-m-1)\Leftrightarrow \mathrm{m}=3$ (loại)

Vậy: Không có giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 39. Tìm m để phương trình: $16x^4-ax^3+\left(2a+17\right)x^2-ax+16=0$ có bốn nghiệmphân biệt lập thành cấp số nhân?

A. $a=170$ **B.** $a\in(0;170)$ **C.** $a=\dfrac{5}{2}$ **D.** $a=\dfrac{3}{2}$

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải:

Chọn A

Giả sử phương trình: $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0\ \ (a\neq 0)$ có 4 nghiệm x_1,x_2,x_3,x_4 theo định lý Viet bậc 4 ta có: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=\dfrac{c}{a} \end{cases}$

Áp dụng vào bài ta có:

*** Điều kiện cần:**

Nếu $x=a$ là 1 nghiệm của phương trình thì $x=\dfrac{1}{a}$ cũng là một nghiệm của phương trình

Giả sử 4 nghiệm đó là: $a;aq;\mathrm{aq}^2;aq^3$ với $a\neq 0;|q|\geq 1\Rightarrow |a|<|qa|<|q^2a|<|q^3a|$

Do $\dfrac{1}{a};\dfrac{1}{qa};\dfrac{1}{q^2a};\dfrac{1}{q^3a}$ cũng là nghiệm nên $aq^3=\dfrac{1}{a}\Leftrightarrow;\mathrm{q}=\mathrm{a}^{-\frac{2}{3}}\Rightarrow$ 4 nghiệm là: $a;\mathrm{a}^{\frac{1}{3}};\mathrm{a}^{-\frac{1}{3}};a^{-1}$

Theo Viet bậc 4 ta có: $\begin{cases} a+\mathrm{a}^{\frac{1}{3}}+\mathrm{a}^{-\frac{1}{3}}+a^{-1}=\dfrac{a}{16} \\ \mathrm{a}^{\frac{4}{3}}+\mathrm{a}^{\frac{2}{3}}+1+1+a^{-\frac{2}{3}}+a^{-\frac{4}{3}}=\dfrac{2a+17}{16} \end{cases}$

Đặt $t = a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}} \geq 2$ ta có:

$$\begin{cases} t^3 - 2t = \dfrac{a}{16} \\ t^4 - 3t^2 + 2 = \dfrac{2a+17}{16} \end{cases} \Leftrightarrow (2t-5)(2t-3)(4t^2-4t-1) = 0 \Leftrightarrow (2t-5)(2t-3)\left[(2t-1)^2 - 2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{5}{2} \Rightarrow a = 170$$

*** Điều kiện đủ:**

Với a = 170 ta có: $16x^4 - 170x^3 + 357x^2 - 170x + 16 = 0$

Giải ra ta được $x_1 = \frac{1}{8}; x_2 = \frac{1}{2}; x_3 = 2; x_4 = 8$

Từ điều kiện cần và đủ suy ra a = 170

Câu 40. Giả sử $\frac{\sin\alpha}{6}$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ theo thứ tự đó là một cấp số nhân. Tính $\cos 2\alpha$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Điều kiện: $\cos\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Theo tính chất của cấp số nhân, ta có: $\cos^2\alpha = \frac{\sin\alpha}{6}.\tan\alpha \Leftrightarrow 6\cos^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$.

$\Leftrightarrow 6\cos^3\alpha - \sin^2\alpha = 0 \Leftrightarrow 6\cos^3\alpha + \cos^2\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}$.

Ta có: $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2.\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{2}$.

DẠNG 2: XÁC ĐỊNH SỐ HẠNG ĐẦU CÔNG BỘI, XÁC ĐỊNH SỐ HẠNG THỨ K, TÍNH TỔNG CỦA N SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN:

A. Phương pháp giải

Dựa vào giả thuyết, ta lập một hệ phương trình chứa công bội q và số hạng đầu u_1, giải hệ phương trình này tìm được q và u_1.

Để xác định số hạng thứ k, ta sử dụng công thức: $u_k = u_1.q^{k-1}$.

Để tính tổng của n số hạng, ta sử dụng công thức: $S_n = u_1.\frac{1-q^n}{1-q}, q \neq 1$. Nếu $q = 1$ thì

$u_1 = u_2 = u_3 = ... = u_n$, do đó $S_n = nu_1$.

B. Bài tập tự luận

Câu 1. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân, biết:

a) $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 40 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_2 = 6 \\ S_3 = 43. \end{cases}$

Lời giải

a). $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q^4 = 51 \\ u_1q + u_1q^5 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q^4) = 51 \quad (*) \\ u_1q(1+q^4) = 102 \quad (**) \end{cases}$

Lấy $\frac{(**)}{(*)} \Leftrightarrow \frac{u_1 q\left(1+q^4\right)}{u_1\left(1+q^4\right)} = \frac{102}{51} \Leftrightarrow q = 2 \Rightarrow u_1 = \frac{51}{1+q^4} = \frac{51}{17} = 3.$

Kết luận có công bội $q = 2$ và số hạng đầu tiên $u_1 = 3$.

Kết luận: $u_1 = 3$ và $q = 2$

b) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 135 \\ u_1 . q^3 + u_1 q^4 + u_1 q^5 = 40 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right) = 135 \quad (*) \\ u_1 q^3\left(1+q+q^2\right) = 40 \quad (**) \end{cases}$

Lấy $\frac{(**)}{(*)} \Leftrightarrow \frac{u_1 q^3\left(1+q+q^2\right)}{u_1\left(1+q+q^2\right)} = \frac{40}{135} \Leftrightarrow q^3 = \frac{8}{27} \Leftrightarrow q = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow u_1 = \frac{135}{1+q+q^2} = \frac{1215}{19}.$

Kết luận có công bội $q = \frac{2}{3}$ và số hạng đầu tiên $u_1 = \frac{1215}{19}$.

c) $\begin{cases} u_2 = 6 \\ S_3 = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q = 6 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q = 6 \\ u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 43 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q = 6 \quad (*) \\ u_1\left(1+q+q^2\right) = 43 \quad (**) \end{cases}$. Lấy $\frac{(*)}{(**)} \Leftrightarrow \frac{u_1 q}{u_1\left(1+q+q^2\right)} = \frac{6}{43}$

$\Leftrightarrow 43q = 6\left(1+q+q^2\right) \Leftrightarrow 6q^2 - 37q + 6 = 0 \Leftrightarrow q = 6 \vee q = \frac{1}{6}$

Với $q = 6 \Rightarrow u_1 = 1$. Với $q = \frac{1}{6} \Rightarrow u_1 = 36.$

Kết luận $\begin{cases} q = 6 \\ u_1 = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} q = \frac{1}{6} \\ u_1 = 36 \end{cases}$

Câu 2. Cho CSN (u_n) có các số hạng thỏa: $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}$

a). Tìm số hạng đầu và công bội của CSN.

b). Hỏi tổng bao nhiêu số hạng đầu tiên bằng 3069?

c). Số 12288 là số hạng thứ mấy?

Lời giải

a). Ta có $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q^4 = 51 \\ u_1 q + u_1 q^5 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q^4) = 51 \quad (*) \\ u_1 q(1+q^4) = 102 \quad (**) \end{cases}$

Lấy $\frac{(**)}{(*)} \Leftrightarrow \frac{u_1 q(1+q^4)}{u_1(1+q^4)} = \frac{102}{51} \Leftrightarrow q = 2 \Rightarrow u_1 = 3.$

b). Có $S_n = 3069 \Leftrightarrow u_1 . \frac{1-q^n}{1-q} = 3069 \Leftrightarrow 3 . \frac{1-2^n}{1-2} = 3069 \Leftrightarrow 2^n = 1024 \Rightarrow n = 10$. Kết luận tổng của 10 số hạng đầu tiên bằng 3069.

c).Có $u_k = 12288 \Leftrightarrow u_1.q^{k-1} = 12288 \Leftrightarrow 3.2^{k-1} = 12288 \Leftrightarrow 2^{k-1} = 4096 = 2^{12}$

$\Rightarrow k-1 = 12 \Leftrightarrow k = 13$. Kết luận số 12288 là số hạng thứ 13.

Câu 3. Cho cấp số nhân (u_n). Tìm u_1 và q, biết rằng:

1) $\begin{cases} u_2+u_3+u_4 = \dfrac{35}{2} \\ u_1u_5 = 25 \\ u_i > 0 (i = 1,...,5) \end{cases}$ 2) $\begin{cases} u_1-u_3+u_5 = 65 \\ u_1+u_7 = 325. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} u_2+u_4+u_6 = -42 \\ u_3+u_5 = 20 \end{cases}$

4) $u_1+u_6 = 165; u_3+u_4 = 60.$ 5). $\begin{cases} u_1+u_2+u_3+u_4 = 15 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2 = 85. \end{cases}$

6) $\begin{cases} u_1+u_2+u_3 = 13 \\ u_4+u_5+u_6 = 351 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 8u_2+5\sqrt{5}u_5 = 0 \\ u_1^3+u_3^3 = 189 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} u_1u_2u_3 = 1728 \\ u_1+u_2+u_3 = 63 \end{cases}$

9). $\begin{cases} u_1+u_3 = 3 \\ u_1^2+u_3^2 = 5 \end{cases}$ 10). $\begin{cases} u_1+u_2+u_3 = 7 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2 = 21 \end{cases}$

Lời giải

1). $\begin{cases} u_2+u_3+u_4 = \dfrac{35}{2} \\ u_1u_5 = 25 \\ u_i > 0 (i = 1,,,5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q+u_1.q^2+u_1.q^3 = \dfrac{35}{2} \quad (1) \\ u_1.u_1.q^4 = 25 \quad (2) \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow (u_1.q^2) = 5^2 \Leftrightarrow u_1.q^2 = 5 \Rightarrow u_1 = \dfrac{5}{q^2}$ thay vào (1) được:

$\dfrac{5}{q^2}(q+q^2+q^3) = \dfrac{35}{2} \Leftrightarrow 2(1+q+q^2) = 79 \Leftrightarrow 2q^2-5q+2 = 0 \Leftrightarrow q = 2 \quad \vee \quad q = \dfrac{1}{2}.$

Với $q = 2 \Rightarrow u_1 = \dfrac{5}{4}$. Với $q = \dfrac{1}{2} \Rightarrow u_1 = 20.$

2). $\begin{cases} u_1-u_3+u_5 = 65 \\ u_1+u_7 = 325. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1-u_1q^2+u_1q^4 = 65 \\ u_1+u_1q^6 = 325. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1-q^2+q^4) = 65 \quad (1) \\ u_1(1+q^6) = 325 \quad (2) \end{cases}$

Lấy: $\dfrac{(2)}{(1)} \Leftrightarrow \dfrac{1+q^6}{1-q^2+q^4} = \dfrac{325}{65} \Leftrightarrow \dfrac{(1+q^2)(1-q^2+q^4)}{1-q^2+q^4} = 5 \left(vi\ 1+q^6 = 1+(q^2)^3\right)$

$\Leftrightarrow 1+q^2 = 5 \Leftrightarrow q^2 = 4 \Leftrightarrow q = \pm 2.$

Với $q = 2 \Rightarrow u_1 = \dfrac{65}{1-2^2+2^4} = 5$. Với $q = -2 \Rightarrow u_1 = \dfrac{65}{1-(-2)^2+(-2)^4} = 5.$

3). $\begin{cases} u_2+u_4+u_6 = -42 \\ u_3+u_5 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q+u_1.q^3+u_1.q^5 = -42. \\ u_1.q^2+u_1.q^4 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q(1+q^2+q^4) = -42 \quad (1) \\ u_1.q(1+q^2) = 20 \quad (2) \end{cases}$

Lấy: $\dfrac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \dfrac{1+q^2+q^4}{q(1+q^2)} = -\dfrac{21}{10} \Leftrightarrow 10+10q^2+10q^4 = -21q-21q^3$

$\Leftrightarrow 10q^4+21q^3+10q^2+21q+10=0 \Leftrightarrow 10q^2+21q+10+\frac{21}{q}+\frac{10}{q^2}=10$

$\Leftrightarrow 10\left(q^2+\frac{1}{q^2}\right)+21\left(1+\frac{1}{q}\right)+10=0 \quad (*)$

Đặt: $t=q+\frac{1}{q} \Rightarrow t^2=\left(q+\frac{1}{q}\right)^2 \Leftrightarrow q^2+\frac{1}{q^2}=t^2-2$. Điều kiện $|t|\geq 2$

$(*) \Leftrightarrow 10\left(t^2-2\right)+21t+10=0 \Leftrightarrow 10t^2+21t-10=0 \Leftrightarrow$ t= $-\frac{5}{2} \vee t=\frac{2}{5}$ (loại).

Với $t=-\frac{5}{2} \Leftrightarrow q+\frac{1}{q}=-\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2+5q+2=0 \Leftrightarrow q=-\frac{1}{2} \ \vee \ q=-2$

- Nếu $q=-\frac{1}{2} \Rightarrow u_1=\frac{20}{q^2+q^4}=\frac{20}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^4}=64$

- Nếu $q=-2 \Rightarrow u_1=\frac{20}{q^2+q^4}=\frac{20}{2^2+2^4}=1.$

4). $u_1+u_6=165;\ u_3+u_4=60.$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_1q^5=165 \\ u_1q^2+u_1q^3=60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q^5\right)=165 \quad (1) \\ u_1q^2\left(1+q\right)=60 \quad (2) \end{cases}$

Lấy $\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{1+q^5}{q^2(1+q)}=\frac{11}{4} \Leftrightarrow \frac{(1+q)\left(1-q+q^2-q^3+q^4\right)}{q^2(1+q)}=\frac{11}{4}$

$\Leftrightarrow 4\left(1-q+q^2-q^3+q^4\right)=11q^2 \Leftrightarrow 4q^4-4q^3-7q^2-4q+4=0$

$\Leftrightarrow \frac{4q^4}{q^2}-\frac{4q^3}{q^2}-\frac{7q^2}{q^2}-\frac{4q}{q^2}+\frac{4}{q^2}=0 \Leftrightarrow 4\left(q^2+\frac{1}{q^2}\right)-4\left(q+\frac{1}{q}\right)-7=0 \quad (*)$

Đặt: $t=q+\frac{1}{q} \Rightarrow t^2=\left(q+\frac{1}{q}\right)^2 \Rightarrow q^2+\frac{1}{q^2}=t^2-2$. Điều kiện: $|t|\geq 2$.

$(*) \Leftrightarrow 4\left(t^2-2\right)-4t-7=0 \Leftrightarrow 4t^2-4t-15=0 \Leftrightarrow t=\frac{5}{2} \ \vee \ t=-\frac{3}{2}$ (loại).

Với $t=\frac{5}{2} \Leftrightarrow q+\frac{1}{q}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2-5q+2=0 \Leftrightarrow q=2 \ \vee$ q $=\frac{1}{2}$

- với $q=2 \Rightarrow u_1=\frac{165}{1+q^5}=\frac{165}{1^2+2^5}=5$ • với $q=\frac{1}{2} \Rightarrow u_1=\frac{165}{1+q^2}=\frac{165}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^5}=160.$

5). $\begin{cases} u_1+u_2+u_3+u_4=15 \\ {u_1}^2+{u_2}^2+{u_3}^2+{u_4}^2=85. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_1q+u_1q^2+u_1q^3=15 \\ {u_1}^2+{u_1}^2q^2+{u_1}^2q^4+u_1q^6=85. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2+q^3\right)=15 \\ {u_1}^2\left(1+q^2+q^4+q^6\right)=85. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {u_1}^2\left(1+q+q^2+q^3\right)^2=15^2 \quad (1) \\ {u_1}^2\left(1+q^2+q^4+q^6\right)=85 \quad (2). \end{cases}$

Lấy $\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{\left(1+q+q^2+q^3\right)^2}{1+q^2+q^4+q^6}=\frac{45}{17} \Leftrightarrow \frac{\left[(1+q)+q^2(1+q)\right]^2}{\left(1+q^2\right)+q^4\left(1+q^2\right)}=\frac{45}{17}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left[(1+q)(1+q^2)\right]^2}{(1+q^2)+(1+q^4)}=\dfrac{45}{17} \Leftrightarrow \dfrac{(1+q)^2(1+q^2)}{1+q^4}=\dfrac{45}{17} \Leftrightarrow \dfrac{(1+2q+q^2)(1+q^2)}{1+q^4}=\dfrac{45}{17}$

$\Leftrightarrow 17(1+q^2+2q+2q^3+q^2+q^4)=45(1+q^4)$

$\Leftrightarrow 28q^4-34q^3-34q^2-34q+28=0 \Leftrightarrow \dfrac{28q^4}{q^2}-\dfrac{34q^3}{q^2}-\dfrac{34q^2}{q^2}-\dfrac{34q}{q^2}+\dfrac{28}{q^2}=0$ (vì dễ dàng thấy $q\neq 0$)

$\Leftrightarrow 28q^2-34q-34-\dfrac{34}{q}+28=0 \Leftrightarrow 14\left(q^2+\dfrac{1}{q^2}\right)-17\left(q+\dfrac{1}{q}\right)-17=0 \quad (*)$

Đặt $t=q+\dfrac{1}{q} \Rightarrow t^2=\left(q+\dfrac{1}{q}\right)^2 \Rightarrow q^2+\dfrac{1}{q^2}=t^2-2$. Điều kiện: $|t|\geq 2$.

$(*) \Leftrightarrow 14(t^2-2)-17t-17=0 \Leftrightarrow 14t^2-17t-45=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{5}{2} \vee t=-\dfrac{9}{7}$ (loại)

Với $t=\dfrac{5}{2} \Rightarrow q+\dfrac{1}{q}=\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2-5q+2=0 \Leftrightarrow q=2 \vee q=\dfrac{1}{2}$

• với $q=2 \Rightarrow u_1=1$. • với $q=\dfrac{1}{2} \Rightarrow u_1=\dfrac{15}{1+q+q^2+q^3}=8$.

6). $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=13 \\ u_4+u_5+u_6=351 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2)=13 \quad (*) \\ u_1q^3(1+q+q^2)=351 \quad (**) \end{cases}$

Lấy $\dfrac{(**)}{(*)} \Leftrightarrow q^3=27 \Rightarrow q=3 \Rightarrow u_1=\dfrac{13}{1+q+q^2}=\dfrac{13}{1+3+9}=1$.

7). $\begin{cases} 8u_2+5\sqrt{5}u_5=0 \\ {u_1}^3+{u_3}^3=189. \end{cases} \quad (1)$

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 8u_1q-5\sqrt{5}u_1q^4=0 \\ {u_1}^3+(u_1q^2)^3=189. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8=5\sqrt{5}q^3 \Rightarrow q^3=\dfrac{8}{5\sqrt{5}}=\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^3 \Rightarrow q=\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ {u_1}^3(1+q^6)=189 \Rightarrow {u_1}^3=\dfrac{189}{1+q^6}=125 \Rightarrow u_1=5. \end{cases}$

8). $\begin{cases} u_1u_2u_3=1728 \\ u_1+u_2+u_3=63 \end{cases} \quad (1)$

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.u_1.q.u_1.q^2=1728 \\ u_1+u_1q+u_1q^2=\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_1q)^3=12^3 \\ u_1(1+q+q^2)=63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q=12 \\ u_1(1+q+q^2)=63 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1=\dfrac{12}{q} \\ \dfrac{12}{q}(1+q+q^2)=63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=\dfrac{12}{q} \\ 12q^2-51q+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=4 \Rightarrow u_1=3 \\ q=\dfrac{1}{4} \Rightarrow u_1=48. \end{cases}$

9). $\begin{cases} u_1+u_3=3 \\ {u_1}^2+{u_3}^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q^2)=3 \\ u_2(1+q^4)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {u_1}^2(1+q^2)^2=9 \quad (*) \\ {u_1}^2(1+q^4)=5 \quad (**) \end{cases}$

Lấy $\frac{(*)}{(**)} \Leftrightarrow \frac{\left(1+q^2\right)^2}{1+q^4}=\frac{9}{5}$. Đặt: $t=q^2, t \geq 0$.

$\Leftrightarrow 5(1+t)^2=9\left(1+t^2\right) \Leftrightarrow 4t^2-10t+4=0 \Leftrightarrow t=2 \vee t=\frac{1}{2}$

Với $t=2 \Rightarrow q=\pm\sqrt{2}$

$\bullet q=\sqrt{2} \Rightarrow u_1=\frac{3}{1+q^2}=1$ $\bullet q=-\sqrt{2} \Rightarrow u_1=\frac{3}{1+q^2}=1$

Với $t=\frac{1}{2} \Rightarrow q=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\bullet q=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow u_1=\frac{3}{1+q^2}=2$ $\bullet q=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow u_1=\frac{3}{1+q^2}=2$.

10). $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=7 \\ {u_1}^2+{u_2}^2+{u_3}^2=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_1q+u_1q^2=7 \\ {u_1}^2+\left(u_1q\right)^2+\left(u_1q^2\right)^2=21 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right)=7 \\ {u_1}^2\left(1+q^2+q^4\right)=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {u_1}^2\left(1+q+q^2\right)^2=49 \ (*) \\ {u_1}^2\left(1+q^2+q^4\right)=21 \ (**) \end{cases}$. Lấy $\frac{(*)}{(**)}$ được:

$\frac{\left(1+q+q^2\right)^2}{1+q^2+q^4}=\frac{49}{21} \Leftrightarrow 21\left(1+q^2+q^4+2q+2q^2+2q^3\right)=49\left(1+q^2+q^4\right)$

$\Leftrightarrow 21\left(1+2q+3q^2+2q^3+q^4\right)=49\left(1+q^2+q^4\right) \Leftrightarrow 28q^4-42q^3-14q^2-42q+28=0.$

$\Leftrightarrow \frac{28q^4}{q^2}-\frac{42q^3}{q^2}-\frac{14q^2}{q^2}-\frac{42q}{q^2}+\frac{28}{q^2}=0 \Leftrightarrow 28q^2-42q-14-\frac{42}{q}+\frac{28}{q^2}=0$

$\Leftrightarrow 28\left(q^2+\frac{1}{q^2}\right)-42\left(q+\frac{1}{q}\right)-14=0 \quad (2)$

Đặt: $t=q+\frac{1}{q} \Rightarrow t^2=\left(q+\frac{1}{q}\right)^2 \Rightarrow q^2+\frac{1}{q^2}=t^2-2$. Điều kiện: $|t| \geq 2$

$(2) \Leftrightarrow 28\left(t^2-2\right)-42t-14=0 \Leftrightarrow 28t^2-42t-70=0 \Leftrightarrow t=\frac{5}{2} \vee t=-1$ (loại)

Với $t=\frac{5}{2} \Leftrightarrow q+\frac{1}{q}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2-5q+2=0 \Leftrightarrow q=2 \vee q=\frac{1}{2}$

$\bullet \ q=2 \Rightarrow u_1=\frac{7}{1+q+q^2}=1$ $\bullet \ q=\frac{1}{2} \Rightarrow u_1=\frac{7}{1+q+q^2}=4$

Câu 4. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân, biết:

a) $\begin{cases} u_4-u_2=72 \\ u_5-u_3=144 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_1-u_3+u_5=65 \\ u_1+u_7=325 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_3+u_5=90 \\ u_2-u_6=240 \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=14 \\ u_1.u_2.u_3=64 \end{cases}$ e) $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=21 \\ \frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}=\frac{7}{12} \end{cases}$ f) $\begin{cases} u_1+u_2+u_3+u_4=30 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=340 \end{cases}$

Lời giải

a) $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^3 - u_1q = 72 \\ u_1q^4 - u_1q^2 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q\left(q^2-1\right) = 72 \quad (1) \\ u_1q^2\left(q^2-1\right) = 144 \quad (2) \end{cases}$

Lấy (2):(1) được: $q = 2$, thay $q = 2$ vào (1) được $u_1 = 12$

c) $\begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^2 + u_1q^4 = 90 \\ u_1q - u_1q^5 = 240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^2\left(1+q^2\right) = 90 \quad (1) \\ u_1q\left(1-q^4\right) = 240 \quad (2) \end{cases}$

Lấy $\dfrac{(2)}{(1)} \Leftrightarrow \dfrac{u_1q\left(1-q^4\right)}{u_1q^2\left(1+q^2\right)} = \dfrac{240}{90} \Leftrightarrow \dfrac{\left(1-q^2\right)\left(1+q^2\right)}{q\left(1+q^2\right)} = \dfrac{8}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1-q^2}{q} = \dfrac{8}{3}$

$\Leftrightarrow 3q^2 + 8q - 3 = 0 \Leftrightarrow q = \dfrac{1}{3} \vee q = -3$

Với $q = \dfrac{1}{3}$ thay vào (1) được $u_1 = 729$.

Với $q = -3$ thay vào (1) được $u_1 = 1$.

d) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_1.u_2.u_3 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q + u_1q^2 = 14 \\ u_1u_1qu_1q^2 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right) = 14 \quad (1) \\ \left(u_1q\right)^3 = 64 \quad (2) \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow u_1q = 4 \Rightarrow u_1 = \dfrac{4}{q}$, thay vào (1) được $\dfrac{4}{q}\left(1+q+q^2\right) = 14$

$\Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2 \vee q = \dfrac{1}{2}$

Với $q = 2 \Rightarrow u_1 = 2$. Với $q = \dfrac{1}{2} \Rightarrow u_1 = 8$.

e) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 21 \\ \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \dfrac{1}{u_3} = \dfrac{7}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q + u_1q^2 = 21 \\ \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_1q} + \dfrac{1}{u_1q^2} = \dfrac{7}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right) = 21 \quad (1) \\ \dfrac{q^2+q+1}{u_1q^2} = \dfrac{7}{12} \quad (2) \end{cases}$

$(1) \Rightarrow 1 + q + q^2 = \dfrac{21}{u_1}$, thay vào (2): $\dfrac{21}{u_1} \cdot \dfrac{1}{u_1q^2} = \dfrac{7}{12} \Leftrightarrow \left(u_1q\right)^2 = 36 \Leftrightarrow u_1q = \pm 6$

Với $u_1 = \dfrac{6}{q}$ thay vào (1): $\dfrac{6}{q}\left(1+q+q^2\right) = 21 \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2 \vee q = \dfrac{1}{2}$

Nếu $q = 2 \Rightarrow u_1 = 3$. Nếu $q = \dfrac{1}{2} \Rightarrow u_1 = 12$

Với $u_1 = -\dfrac{6}{q}$ thay vào (1):

$-\dfrac{6}{q}\left(1+q+q^2\right) = 21 \Leftrightarrow 2q^2 + 9q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = \dfrac{-9+\sqrt{65}}{4} \vee q = \dfrac{-9-\sqrt{65}}{4}$

Nếu $q = \dfrac{-9+\sqrt{65}}{4} \Rightarrow u_1 = \dfrac{27+3\sqrt{65}}{2}$. Nếu $q = \dfrac{-9-\sqrt{65}}{4} \Rightarrow u_1 = \dfrac{27-3\sqrt{65}}{2}$

f) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 30 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 340 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q + u_1q^2 + u_1q^3 = 30 \\ u_1^2 + u_1^2q^2 + u_1^2q^4 + u_1^2q^6 = 340 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2+q^3\right) = 30 \\ u_1^2\left(1+q^2+q^4+q^6\right) = 340 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q\right)\left(1+q^2\right) = 30 \\ u_1^2\left(1+q^4\right)\left(1+q^2\right) = 340 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2(1+q)^2(1+q^2)^2 = 900 \quad (1) \\ u_1^2(1+q^4)(1+q^2) = 340 \quad (2) \end{cases}$$

Lấy $\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{(1+q)^2(1+q^2)}{1+q^4} = \frac{45}{17}$, quy đồng rút gọn được:

$14q^4 - 17q^3 - 17q^2 - 17q + 14 = 0 \Leftrightarrow 14q^2 - 17q - 17 - \frac{17}{q} + \frac{14}{q^2} = 0$

$\Leftrightarrow 14\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) - 17\left(q + \frac{1}{q}\right) - 17 = 0$. Đặt $t = q + \frac{1}{q}$, điều kiện $|t| \geq 2$

$\Leftrightarrow 14t^2 - 17t - 45 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2} \vee t = -\frac{9}{7}$ (loại).

Với $t = \frac{5}{2} \Rightarrow q + \frac{1}{q} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2 \vee q = \frac{1}{2}$

Với $q = 2 \Rightarrow u_1 = 2$. Với $q = \frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = 16$

Câu 5. Tìm a, b biết rằng: 1, a, b là 3 số hạng liên tiếp của cấp số cộng và $1, a^2, b^2$ là 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân.

Lời giải

Theo đề bài ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 1+b = 2a \\ b^2 = a^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+b = 2a \, (1) \\ b = \pm a^2 \end{cases}$

Với $b = a^2$ thay vào (1) được $1 + a^2 = 2a \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow b = 1$

Với $b = -a^2$ thay vào (1) được $1 - a^2 = 2a \Leftrightarrow a^2 + 2a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1 + \sqrt{2} \vee a = -1 - \sqrt{2}$

• $a = -1 + \sqrt{2} \Rightarrow b = -\left(-1 + \sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow b = -3 + 2\sqrt{2}$

• $a = -1 - \sqrt{2} \Rightarrow b = -\left(-1 - \sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow b = -3 - 2\sqrt{2}$

Kết luận $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -1 + \sqrt{2} \\ b = -3 + 2\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} a = -1 - \sqrt{2} \\ b = -3 - 2\sqrt{2} \end{cases}$ thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 6. Tìm số hạng đầu của CSN biết công bội bằng 3, tổng số các số hạng là 728 và số hạng cuối bằng 486.

Lời giải

Theo đề bài ta có: $\begin{cases} S_n = 728 \\ u_n = 486 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} = 728 \\ u_1 q^{n-1} = 486 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_1 q^n = 728(1-q) \\ u_1 q^n = 486q \end{cases} \Rightarrow u_1 - 486q = 728(1-q) \Leftrightarrow u_1 = 2$$

Câu 7. Cho 3 số tạo thành một cấp số cộng có tổng 21.Nếu thêm 2, 3, 9 lần lượt vào số thứ nhất, số thứ hai, số thứ ba tạo thành một cấp số nhân. Tìm 3 số đó.

Lời giải

Gọi u_1,u_2,u_3 thành lập cấp số cộng.

Theo đề bài: $u_1+2;u_2+3;u_3+9$ là ba số liên tiếp tạo thành cấp số nhân.

Theo đề bài: $\begin{cases}u_1+u_2+u_3=21\\u_1+u_3=2u_2\\(u_1+2)(u_3+9)=(u_2+3)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3u_2=21\\u_1+u_3=2u_2\\(u_1+2)(u_3+9)=(u_2+3)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}u_2=7\\u_1=14-u_3\\(14-u_3+2)(u_3+9)=100\ (*)\end{cases}$

Giải $(*):(16-u_3)(u_3+9)=100\Leftrightarrow -u_3{}^2+7u_3+44=0\Leftrightarrow u_3=11\ \vee\ u_3=-4$

Với $u_3=11\Rightarrow u_1=3$. Với $u_3=-4\Rightarrow u_1=18$.

Câu 8. Cho 3 số dương có tổng là 65 lập thành một cấp số nhân tăng, nếu bớt một đơn vị ở số hạng thứ nhất và 19 đơn vị ở số hạng thứ ba ta được một cấp số cộng. Tìm 3 số đó.

Lời giải

Gọi u_1,u_2,u_3 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

Theo đề: $u_1-1;u_3-19$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.

Ta có: $\begin{cases}u_1+u_2+u_3=65\\u_1-1+u_3-19=2u_2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+u_2+u_3=65\\u_1-2u_2+u_3=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1-u_1.q+u_1.q^2=65\\u_1-2u_1.q+u_1.q^2=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1\left(1+q+q^2\right)=65\ \ (1)\\u_1\left(1-2q+q^2\right)=20\ \ (2)\end{cases}$

Lấy $\dfrac{(1)}{(2)}\Leftrightarrow\dfrac{1+q+q^2}{1-2q+q^2}=\dfrac{65}{20}=\dfrac{13}{4}\Leftrightarrow 4\left(1+q+q^2\right)=13\left(1-2q+q^2\right)$

$\Leftrightarrow 9q^2-30q+9=0\Leftrightarrow q=3\ \vee\ q=\dfrac{1}{3}$

Vì u_1,u_2,u_3 theo thứ tự lập thành cấp số nhân tăng dần nên chọn $q=3\Rightarrow u_1=5$

Vậy $u_1=5;\ u_2=15;\ u_3=45$.

Câu 9. Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân biết tổng của chúng là 19 và tích là 216.

Lời giải

Gọi ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân là u_1,u_2,u_3 với công bội là q. Theo đề bài ta có hệ

phương trình: $\begin{cases}u_1+u_2+u_3=19\\u_1.u_2.u_3=216\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+u_1q+u_1q^2=19\\(u_1q)^3=6^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1\left(1+q+q^2\right)=19\quad(*)\\u_1q=6\Rightarrow u_1=\dfrac{6}{q}\end{cases}$

Thay $u_1=\dfrac{6}{q}$ vào $(*)$ được: $6q^2-13q+6=0\Leftrightarrow q=\dfrac{3}{2}$ hoặc $q=\dfrac{2}{3}$.

Với $q=\dfrac{3}{2}\Rightarrow u_1=4,u_2=6,u_3=9$.

Với $q=\frac{2}{3}\Rightarrow u_1=9,u_2=6,u_3=4$.

Câu 10. Tìm công bội của một cấp số nhân có số hạng đầu là 7, số hạng cuối là 448 và tổng số các số hạng là 889.

Lời giải

Theo đề bài ta có $\begin{cases}S_n=889\\u_n=448\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{u_1\left(q^n-1\right)}{q-1}=889\\u_1q^{n-1}=448\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1q^n-u_1=889(q-1) & (1)\\u_1q^n=448q & (2)\end{cases}$

Thay (2) vào (1) được: $448q-7=889q-889\Leftrightarrow q=2$

Câu 11. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, trong đó số hạng thứ hai nhỏ hơn số hạng thứ nhất 35, còn số hạng thứ ba lớn hơn số hạng thứ tư 560.

Lời giải

Theo đề bài ta có hệ phương trình: $\begin{cases}u_1-u_2=35\\u_3-u_4=560\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1-u_1q=35\\u_1q^2-u_1q^3=560\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1(1-q)=35 & (1)\\u_1q^2(1-q)=560 & (2)\end{cases}$

Thay (1) vào (2) ta được $q^2=16\Leftrightarrow q=\pm4$

Với $q=4$ thay vào (1) được $u_1=-\frac{35}{3},u_2=u_1q=-\frac{140}{3},u_3=-\frac{560}{3},u_3=-\frac{2240}{3}$

Tìm 3 số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng khi tăng số thứ hai thêm 2 thì các số đó tạo thành một cấp số cộng, còn nếu sau đó tăng số cuối thêm 9 thì chúng lại lập thành một cấp số nhân.

Câu 12. Tìm các số dương a và b sao cho a, a + 2b, 2a + b lập thành một cấp số cộng và $(b + 1)^2$, ab + 5, $(a + 1)^2$ lập thành một cấp số nhân.

Lời giải

Theo tính chất của CSC ta có: $a+(2a+b)=2(a+2b)$ (1)

Theo tính chất của CSN ta có: $(b+1)^2(a+1)^2=(ab+5)^2$ (2)

Từ (1) khai triển rút gọn ta được: $a=3b$, thay vào (2):

$(b+1)^2(3b+1)^2=(3b^2+5)^2\Leftrightarrow(b+1)(3b+1)=\pm(3b^2+5)$

Với $(b+1)(3b+1)=3b^2+5\Leftrightarrow b=1\Rightarrow a=3$

Với $(b+1)(3b+1)=-3b^2-5\Leftrightarrow 6b^2+4b+6=0$ (vô nghiệm).

Kết luận $a=3,b=1$

Câu 13. Tính các tổng sau:

a). $S_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n$

b). $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}$

c). $S_n=\left(3+\frac{1}{3}\right)^2+\left(9+\frac{1}{9}\right)^2+\cdots+\left(3^n+\frac{1}{3^n}\right)^2$

d). $S_n=6+66+666+\cdots+\underbrace{666...6}_{n\text{ so }6}$

Lời giải

a). Ta có dãy số $2,2^2,2^3,\cdots,2^n$ là một cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1=2$ và công bội $q=\dfrac{2^2}{2}=2$. Do đó $S_n=u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q}=2.\dfrac{1-2^n}{1-2}=2\left(2^n-1\right)$.

b). Ta có dãy số $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2^2},\dfrac{1}{2^3},\cdots,\dfrac{1}{2^n}$ là một cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1=\dfrac{1}{2}$ và công bội $q=\dfrac{\dfrac{1}{2^2}}{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$. Do đó $S_n=u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\dfrac{1}{2}}=1-\dfrac{1}{2^n}$.

c). $S_n=\left(3+\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(9+\dfrac{1}{9}\right)^2+\cdots+\left(3^n+\dfrac{1}{3^n}\right)^2$

$=3^2+2+\dfrac{1}{3^2}+3^4+2+\dfrac{1}{3^4}+\cdots+3^{2n}+2+\dfrac{1}{3^{2n}}$

$=\left(3^2+3^4+\cdots+3^{2n}\right)+\left(\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^4}+\cdots+\dfrac{1}{3^{2n}}\right)+\underbrace{2+2+2+\cdots+2}_{n}$

• Có dãy số $3^2,3^4,\cdots,3^{2n}$ là cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1=3^2$ và công bội $q=\dfrac{3^4}{3^2}=9$. Do đó $S_1=u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q}=9.\dfrac{1-9^n}{1-9}=\dfrac{9}{8}\left(9^n-1\right)$.

• Có dãy số $\dfrac{1}{3^2},\dfrac{1}{3^4},\cdots,\dfrac{1}{3^{2n}}$ là cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1=\dfrac{1}{3^2}$ và công bội $q=\dfrac{1}{9}$. Do đó $S_1=u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q}=\dfrac{1}{9}.\dfrac{1-\dfrac{1}{9^n}}{1-\dfrac{1}{9}}=\dfrac{1}{8}\left(1-\dfrac{1}{9^n}\right)=\dfrac{9^n-1}{8.9^n}$.

Vậy $S_n=\dfrac{9}{8}\left(9^n-1\right)+\dfrac{9^n-1}{8.9^n}+2n=\dfrac{\left(9^n-1\right)\left(9^{n+1}+1\right)}{8.9^n}+2n$.

d). $S_n=6+66+666+\cdots+\underbrace{666\ldots6}_{n\text{ so }6}=\dfrac{6}{9}\left(9+99+999+\cdots+\underbrace{999\ldots9}_{n}\right)$

$=\dfrac{2}{3}\left[(10-1)+(100-1)+(1000-1)+\cdots+(10^n-1)\right]$

$=\dfrac{2}{3}\left[10+10^2+10^3+\cdots+10^n-n\right]=\dfrac{2}{3}\left[10.\dfrac{10^n-1}{10-1}-n\right]=\dfrac{20}{27}\left(10^n-1\right)-\dfrac{2n}{3}$

Câu 14. Tính tổng $B=7+77+777+\cdots+\underbrace{777\ldots7}_{n}$

Lời giải

$B=7+77+777+\cdots+\underbrace{777\ldots7}_{n}$

$\Leftrightarrow B=7\left(1+11+111+\cdots+\underbrace{111\ldots1}_{n}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{B}{7}=1+11+111+\cdots+\underbrace{111\ldots1}_{n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9B}{7}=9+99+999+\cdots+\underbrace{99\ldots9}_{n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9B}{7}=(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots+(10^n-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{9B}{7}=(10+10^2+10^3+\cdots+10^n)-\left(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{9B}{7}=\frac{10(1-10^n)}{1-10}-n$$

$$\Leftrightarrow \frac{9B}{7}=\frac{10^{n+1}-9n-10}{9}$$

$$\Leftrightarrow B=\frac{7(10^{n+1}-9n-10)}{81}$$

C. Bài tập trắc nghiệm

DÀNH CHO HỌC SINH TRUNG BÌNH - KHÁ

Câu 1. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=-2$ và công bội $q=3$. Số hạng u_2 là:

A. $u_2=-6$. **B.** $u_2=6$. **C.** $u_2=1$. **D.** $u_2=-18$.

Lời giải

Số hạng u_2 là: $u_2=u_1.q=-6$

Câu 2. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=-3$ và $q=\frac{2}{3}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $u_5=-\frac{27}{16}$. **B.** $u_5=-\frac{16}{27}$. **C.** $u_5=\frac{16}{27}$. **D.** $u_5=\frac{27}{16}$.

Lời giải

$$\begin{cases}u_1=-3\\ q=\frac{2}{3}\end{cases}\longrightarrow u_5=u_1q^4=-3.\left(\frac{2}{3}\right)^4=-3.\frac{16}{81}=-\frac{16}{27}.$$

Câu 3. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_n=81$ và $u_{n+1}=9$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $q=\frac{1}{9}$. **B.** $q=9$. **C.** $q=-9$. **D.** $q=-\frac{1}{9}$.

Lời giải

Công bội $q=\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{9}{81}=\frac{1}{9}$.

Câu 4. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1\neq 0$ và $q\neq 0$. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $u_7=u_4.q^3$. **B.** $u_7=u_4.q^4$. **C.** $u_7=u_4.q^5$. **D.** $u_7=u_4.q^6$.

Lời giải

$$\begin{cases}u_4=u_1q^3\\ u_7=u_1q^6\end{cases}\longrightarrow u_7=(u_1q^3).q^3=u_4q^3.$$

Câu 5. Cho cấp số nhân $\frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \cdots;\ \frac{1}{4096}$. Hỏi số $\frac{1}{4096}$ là số hạng thứ mấy trong cấp số nhân đã cho?

A. 11. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 13.

Lời giải

Cấp số nhân: $\frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \cdots;\ \frac{1}{4096} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow u_n = \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^n}.$

$u_n = \frac{1}{4096} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{12}} \Leftrightarrow n = 12.$

Câu 6. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3}{2}.5^n$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. (u_n) không phải là cấp số nhân.

B. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = 5$ và số hạng đầu $u_1 = \frac{3}{2}$.

C. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = 5$ và số hạng đầu $u_1 = \frac{15}{2}$.

D. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = \frac{5}{2}$ và số hạng đầu $u_1 = 3$.

Lời giải

$u_n = \frac{3}{2}.5^n$ là cấp số nhân công bội $q = 5$ và $u_1 = \frac{15}{2}$.

Câu 7. Một cấp số nhân có ba số hạng là $a,\ b,\ c$ (theo thứ tự đó) trong đó các số hạng đều khác 0 và công bội $q \neq 0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{bc}$. **B.** $\frac{1}{b^2} = \frac{1}{ac}$. **C.** $\frac{1}{c^2} = \frac{1}{ba}$. **D.** $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{c}$.

Lời giải

Ta có $ac = b^2 \Rightarrow \frac{1}{b^2} = \frac{1}{ac}$.

Câu 8. Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là 3; 9; 27; 81; .... Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số nhân đã cho.

A. $u_n = 3^{n-1}$. **B.** $u_n = 3^n$. **C.** $u_n = 3^{n+1}$. **D.** $u_n = 3 + 3^n$.

Lời giải

Cấp số nhân 3; 9; 27; 81; ... $\longrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ q = \frac{9}{3} = 3 \end{cases} \Rightarrow u_n = u_1 q^{n-1} = 3.3^{n-1} = 3^n$.

Câu 9. Một cấp số nhân có 6 số hạng, số hạng đầu bằng 2 và số hạng thứ sáu bằng 486. Tìm công bội q của cấp số nhân đã cho.

A. $q = 3$. **B.** $q = -3$. **C.** $q = 2$. **D.** $q = -2$.

Lời giải

Theo giải thiết ta có: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_6 = 486 \end{cases} \longrightarrow 486 = u_6 = u_1 q^5 = 2q^5 \Leftrightarrow q^5 = 243 \Leftrightarrow q = 3.$

Câu 10. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=2$ và $u_2=-8$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_6=130$. **B.** $u_5=256$. **C.** $S_5=256$. **D.** $q=-4$.

Lời giải

$$\begin{cases}u_1=2\\u_2=-8=u_1q=2q\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u_1=2\\q=-4\\S_5=u_1.\dfrac{1-q^5}{1-q}=2.\dfrac{1-(-4)^5}{1+4}=410.\\S_6=2.\dfrac{1-(-4)^6}{1+4}=-1638\\u_5=u_1q^4=2.(-4)^4=512.\end{cases}$$

Câu 11. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=3$ và $q=-2$. Số 192 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân đã cho?

A. Số hạng thứ 5. **B.** Số hạng thứ 6.
C. Số hạng thứ 7. **D.** Không là số hạng của cấp số đã cho.

Lời giải

$$192=u_n=u_1q^{n-1}=3.(-2)^{n-1}\Leftrightarrow(-1)^{n-1}.2^{n-1}=64=(-1)^6.2^6\Leftrightarrow n=7.$$

Câu 12. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=-1$ và $q=-\dfrac{1}{10}$. Số $\dfrac{1}{10^{103}}$ là số hạng thứ mấy của cấp số nhân đã cho?

A. Số hạng thứ 103. **B.** Số hạng thứ 104.
C. Số hạng thứ 105. **D.** Không là số hạng của cấp số đã cho.

Lời giải

$$\frac{1}{10^{103}}=u_n=u_1q^{n-1}=-1.\left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1}=\frac{(-1)^n}{10^{n-1}}\Leftrightarrow\begin{cases}n\ chan\\n-1=103\end{cases}\Leftrightarrow n=104.$$

Câu 13. Một dãy số được xác định bởi $u_1=-4$ và $u_n=-\dfrac{1}{2}u_{n-1}$, $n\geq 2$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số đó là:

A. $u_n=2^{n-1}$. **B.** $u_n=(-2)^{n-1}$. **C.** $u_n=-4\left(2^{-n+1}\right)$. **D.** $u_n=-4\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Lời giải

$$\begin{cases}u_1=-4\\u_{n+1}=-\dfrac{1}{2}u_n\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}u_1=-4\\q=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow u_n=u_1q^{n-1}=-4.\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}.\end{cases}$$

Câu 14. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=-3$ và $q=-2$. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho.

A. $S_{10}=-511$. **B.** $S_{10}=-1025$. **C.** $S_{10}=1025$. **D.** $S_{10}=1023$.

Lời giải

$$\begin{cases}u_1=-3\\q=-2\end{cases}\longrightarrow S_{10}=u_1.\frac{1-q^{10}}{1-q}=-3.\frac{1-(-2)^{10}}{1-(-2)}=1023.$$

Câu 15. Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là 1; 4; 16; 64; ⋯ Gọi S_n là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n = 4^{n-1}$. **B.** $S_n = \dfrac{n\left(1+4^{n-1}\right)}{2}$. **C.** $S_n = \dfrac{4^n-1}{3}$. **D.** $S_n = \dfrac{4\left(4^n-1\right)}{3}$.

Lời giải

Cấp số nhân đã cho có $\begin{cases} u_1 = 1 \\ q = 4 \end{cases} \longrightarrow S_n = u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q} = 1.\dfrac{1-4^n}{1-4} = \dfrac{4^n-1}{3}$.

Câu 16. Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là $\dfrac{1}{4}$; $\dfrac{1}{2}$; 1; ⋯; 2048. Tính tổng S của tất cả các số hạng của cấp số nhân đã cho.

A. $S = 2047,75$. **B.** $S = 2049,75$. **C.** $S = 4095,75$. **D.** $S = 4096,75$.

Lời giải

Cấp số nhân đã cho có

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{4} \\ q = 2 \end{cases} \longrightarrow 2048 = 2^{11} = u_1 q^{n-1} = \frac{1}{4}.2^{n-1} = 2^{n-3} \Leftrightarrow n = 14.$$

Vậy cấp số nhân đã cho có tất cả 14 số hạng. Vậy

$S_{14} = u_1.\dfrac{1-q^{14}}{1-q} = \dfrac{1}{4}.\dfrac{1-2^{14}}{1-2} = 4095,75$.

Câu 17. Tính tổng $S = -2+4-8+16-32+64-...+(-2)^{n-1}+(-2)^n$ với $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

A. $S = 2n$. **B.** $S = 2^n$. **C.** $S = \dfrac{-2\left(1-2^n\right)}{1-2}$. **D.** $S = -2.\dfrac{1-(-2)^n}{3}$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Các số hạng -2; 4; -8; 16; -32; 64;...;$(-2)^{n-1}$; $(-2)^n$ trong tổng S gồm có n số hạng theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân có $u_1 = -2$, $q = -2$. Vậy

$S = S_n = u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q} = -2.\dfrac{1-(-2)^n}{1-(-2)} = -2.\dfrac{1-(-2)^n}{3}$.

Câu 18. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -6$ và $q = -2$. Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho bằng 2046. Tìm n.

A. $n = 9$. **B.** $n = 10$. **C.** $n = 11$. **D.** $n = 12$.

Lời giải

Ta có $2046 = S_n = u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q} = -6.\dfrac{1-(-2)^n}{1-(-2)} = 2\left((-2)^n - 1\right) \Rightarrow (-2)^n = 1024 \Leftrightarrow n = 10$.

Câu 19. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = -6$ và $u_6 = -486$. Tìm công bội q của cấp số nhân đã cho, biết rằng $u_3 > 0$.

A. $q = -3$. **B.** $q = -\dfrac{1}{3}$. **C.** $q = \dfrac{1}{3}$. **D.** $q = 3$.

Lời giải

$\begin{cases} -6 = u_2 = u_1 q \\ -486 = u_6 = u_1 q^5 = u_1 q.q^4 = -6.q^4 \end{cases} \Rightarrow q^4 = 81 = 3^4 \Rightarrow q = 3$.

Câu 20. Một cấp số nhân có số hạng thứ hai bằng 4 và số hạng thứ sáu bằng 64, thì số hạng tổng quát của cấp số nhân đó có thể tính theo công thức nào dưới đây?

A. $u_n = 2^{n-1}$. **B.** $u_n = 2^n$ **C.** $u_n = 2^{n+1}$. **D.** $u_n = 2n$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} 4 = u_2 = u_1 q \\ 64 = u_6 = u_1 q^5 = u_1 q.q^4 = 4q^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ q = 2 \end{cases} \Rightarrow u_n = u_1 q^{n-1} = 2.2^{n-1} = 2^n$.

Câu 21. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $u_k = u_1.q^{k-1}$. **B.** $u_k = \dfrac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$.

C. $S = 9 + 99 + 999 + ... + 999...9$ **D.** $S = \dfrac{10^n - 1}{9}$.

Lời giải

$u_k = u_1.q^{k-1}$.

Câu 22. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 \neq 0$ và $q \neq 0$. Với $1 < k < m$, đẳng thức nào dưới đây là đúng?

A. $u_m = u_k.q^k$. **B.** $u_m = u_k.q^m$. **C.** $u_m = u_k.q^{m-k}$. **D.** $u_m = u_k.\mathrm{q}^{m+k}$.

Lời giải

$u_k = u_1 q^{k-1} \longrightarrow u_m = u_1 q^{m-1} = \left(u_1 q^{k-1}\right).q^{m-k} = u_k q^{m-k}$.

Câu 23. Cho một cấp số nhân có 15 số hạng. Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

A. $u_1.u_{15} = u_2.u_{14}$. **B.** $u_1.u_{15} = u_5.u_{11}$. **C.** $u_1.u_{15} = u_6.u_9$. **D.** $u_1.u_{15} = u_{12}.u_4$.

Lời giải

$u_1.u_{15} = u_1.u_1.q^{14} = \left(u_1 q^{m-1}\right).\left(u_1 q^{n-1}\right) = u_m.u_n$ với $m + n = 16$.

Câu 24. Cho một cấp số nhân có n số hạng $(n > k > 55)$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $u_1.u_n = u_2.u_{n-1}$. **B.** $u_1.u_n = u_5.u_{n-4}$. **C.** $u_1.u_n = u_{55}.u_{n-55}$. **D.** $u_1.u_n = u_k.u_{n-k+1}$.

Lời giải

$u_1 u_n = u_1.u_1 q^{n-1} = \left(u_1 q^{k-1}\right).\left(u_1 q^{m-1}\right) = u_k.u_m$ với $k + m = n + 1$.

Câu 25. Xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n) có $u_4 - u_2 = 54$ và $u_5 - u_3 = 108$.

A. $u_1 = 3$ và $q = 2$. **B.** $u_1 = 9$ và $q = 2$. **C.** $u_1 = 9$ và $q = -2$. **D.** $u_1 = 3$ và $q = -2$.

Lời giải

Gọi số hạng đầu của cấp số nhân là u_1 và công bội là q.

Theo giả thiết, ta có

$\begin{cases} u_4 - u_2 = 54 \\ u_5 - u_3 = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q^3 - u_1.q = 54 \\ u_1.q^4 - u_1.q^2 = 108 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{q\left(q^2 - 1\right)}{q^2\left(q^2 - 1\right)} = \dfrac{54}{108} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow q = 2$.

Với $q = 2$, ta có $8u_1 - 2u_1 = 54 \Leftrightarrow 6u_1 = 54 \Leftrightarrow u_1 = 9$.

Câu 26. Cho cấp số nhân $(u_n); u_1 = 1, q = 2$. Hỏi số 1024 là số hạng thứ mấy?

A. 11. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Ta có $u_n = u_1.q^{n-1} \Leftrightarrow 1.2^{n-1} = 1024 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 2^{10} \Leftrightarrow n - 1 = 10 \Leftrightarrow n = 11$.

Câu 27. Cho cấp số nhân (u_n), biết $u_1=12$, $\dfrac{u_3}{u_8}=243$. Tìm u_9.

A. $u_9=\dfrac{2}{2187}$. **B.** $u_9=\dfrac{4}{6563}$. **C.** $u_9=78732$. **D.** $u_9=\dfrac{4}{2187}$.

Lời giải

Gọi q là công bội của cấp số nhân (u_n).

Ta có $u_3=u_1q^2$, $u_8=u_1q^7 \Rightarrow \dfrac{u_3}{u_8}=\dfrac{1}{q^5}=243 \Rightarrow q=\dfrac{1}{3}$.

Do đó $u_9=u_1q^8=12.\left(\dfrac{1}{3}\right)^8=\dfrac{4}{2187}$.

Câu 28. Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n=5^n-1$ với $n=1,2,\ldots$. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân đó?

A. $u_1=5$, $q=4$. **B.** $u_1=5$, $q=6$. **C.** $u_1=4$, $q=5$. **D.** $u_1=6$, $q=5$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases}u_1=S_1=5-1=4\\ u_1+u_2=S_2=5^2-1=24\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u_1=4\\ u_2=24-u_1=20\end{cases}\Rightarrow u_1=4,\ q=\dfrac{u_2}{u_1}=5$.

Câu 29. Cho cấp số nhân (u_n) biết $\begin{cases}u_4-u_2=54\\ u_5-u_3=108\end{cases}$. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân trên.

A. $u_1=9;\ q=2$. **B.** $u_1=9;\ q=-2$. **C.** $u_1=-9;\ q=-2$. **D.** $u_1=-9;\ q=2$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases}u_4-u_2=54\\ u_5-u_3=108\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1q^3-u_1q=54\\ u_1q^4-u_1q^2=108\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1q\left(q^2-1\right)=54\\ u_1q^2\left(q^2-1\right)=108\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=9\\ q=2\end{cases}$.

Vậy $u_1=9;\ q=2$.

Câu 30. Cho một cấp số nhân có các số hạng đều không âm thỏa mãn $u_2=6$, $u_4=24$. Tính tổng của 12 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó.

A. $3.2^{12}-3$. **B.** $2^{12}-1$. **C.** $3.2^{12}-1$. **D.** 3.2^{12}.

Lời giải

Gọi công bội của CSN bằng q. Suy ra $u_4=u_2.q^2 \Rightarrow q=\pm 2$. Do CSN có các số hạng không âm nên $q=2$.

Ta có $S_{12}=u_1.\dfrac{1-q^{12}}{1-q}=3.\dfrac{1-2^{12}}{1-2}=3\left(2^{12}-1\right)$.

Câu 31. Tổng $S=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}+\cdots$ có giá trị là:

A. $\dfrac{1}{9}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $S=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) với $u_n=\frac{1}{3^n}$ có số hạng đầu $u_1=\frac{1}{3}$, công sai $q=\frac{1}{3}$.

Do đó $S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$.

Câu 32. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1=2$, $a_{n+1}=-2a_n$, $n\geq 1$, $n\in\mathbb{N}$. Tính tổng của 10 số hạng đầu tiên của dãy số.

A. $\frac{2050}{3}$. **B.** 2046. **C.** -682. **D.** -2046.

Lời giải

Vì $\frac{a_{n+1}}{a_n}=-2$ suy ra (a_n) là một cấp số nhân với $\begin{cases}a_1=2\\ q=-2\end{cases}$.

Suy ra $S_{10}=\frac{a_1\left(1-q^{10}\right)}{1-q}=-682$.

Câu 33. Cho cấp số nhân $u_1=-1$, $u_6=0,00001$. Khi đó q và số hạng tổng quát là?

A. $q=\frac{1}{10}, u_n=\frac{-1}{10^{n-1}}$. **B.** $q=\frac{-1}{10}, u_n=-10^{n-1}$.

C. $q=\frac{-1}{10}, u_n=\frac{(-1)^n}{10^{n-1}}$. **D.** $q=\frac{1}{10}, u_n=\frac{1}{10^{n-1}}$.

Lời giải

Ta có: $u_6=u_1.q^5=0,00001\Leftrightarrow q^5=\frac{-1}{10^5}\Leftrightarrow q=\frac{-1}{10}$.

$\Rightarrow u_n=u_1.q^{n-1}=-1.\left(\frac{-1}{10}\right)^{n-1}=\frac{(-1)^n}{10^{n-1}}$.

Câu 34. Cho cấp số nhân u_n có $u_2=\frac{1}{4}$, $u_5=16$. Tìm công bội q và số hạng đầu u_1.

A. $q=\frac{1}{2}$, $u_1=\frac{1}{2}$. **B.** $q=-\frac{1}{2}$, $u_1=-\frac{1}{2}$. **C.** $q=-4$, $u_1=-\frac{1}{16}$. **D.** $q=4$, $u_1=\frac{1}{16}$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases}u_2=\frac{1}{4}\\ u_5=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1.q=\frac{1}{4} & (1)\\ u_1.q^4=16 & (2)\end{cases}$.

Chia hai vế của (2) cho (1) ta được $q^3=64\Leftrightarrow q=4\Rightarrow u_1=\frac{1}{16}$.

Câu 35. Tính tổng tất cả các số hạng của một cấp số nhân có số hạng đầu là $\frac{1}{2}$, số hạng thứ tư là 32 và số hạng cuối là 2048?

A. $\frac{1365}{2}$. **B.** $\frac{5416}{2}$. **C.** $\frac{5461}{2}$. **D.** $\frac{21845}{2}$.

Lời giải

Theo bài ra ta có $u_1=\frac{1}{2}$, $u_4=32$ và $u_n=2048$.

$u_4=u_1.q^3 \Rightarrow 32=\frac{1}{2}.q^3 \Rightarrow q=4$

$u_n=2048 \Rightarrow u_1.q^{n-1}=2048 \Rightarrow 4^{n-1}=4^6 \Rightarrow n=7$

Khi đó tổng của cấp số nhân này là $S_7=\frac{u_1\left(1-q^7\right)}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-4^7\right)}{1-4}=\frac{5461}{2}$.

Câu 36. Cho cấp số nhân có số hạng đầu $u_1=-2$, công bội $q=\frac{3}{4}$. Số $-\frac{81}{128}$ là số hạng thứ mấy của cấp số này?

A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Áp dụng công thức cấp số nhân $u_n=u_1q^{n-1} \Rightarrow -\frac{81}{128}=-2.\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^4=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \Leftrightarrow n=5$.

Câu 37. Một cấp số nhân (u_n) có n số hạng, số hạng đầu $u_1=7$, công bội $q=2$. Số hạng thứ n bằng 1792. Tính tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n)?

A. 5377. **B.** 5737. **C.** 3577. **D.** 3775.

Lời giải

Ta có $u_n=u_1.q^{n-1}$

$\Rightarrow 7.2^{n-1}=1792 \Leftrightarrow n=9 \Rightarrow S_8=3577$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 38. Cho dãy số $4,12,36,108,324,\ldots$. Số hạng thứ 10 của dãy số đó là?

A. 73872. **B.** 77832. **C.** 72873. **D.** 78732.

Lời giải

Xét dãy số $4,12,36,108,324,\ldots$ là cấp số nhân có $u_1=4$, $q=3$.

Số hạng thứ 10 của dãy số là $u_{10}=u_1.q^9=4.3^9=78732$.

Câu 39. Tính tổng cấp số nhân lùi vô hạn $-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\ldots,\frac{(-1)^2}{2^n},\ldots$ là.

A. -1. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $-\frac{1}{4}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Cấp số nhân có $u_1=-\frac{1}{2}$ công bội $q=-\frac{1}{2}$ nên tổng của cấp số nhân lùi vô hạng là.

$\lim S_n=\lim\frac{u_1\left(1-q^n\right)}{1-q}=\frac{u_1}{1-q}=-\frac{1}{3}$

DÀNH CHO HỌC SINH KHÁ – GIỎI

Câu 40. Một cấp số nhân có công bội bằng 3 và số hạng đầu bằng 5. Biết số hạng chính giữa là 32805. Hỏi cấp số nhân đã cho có bao nhiêu số hạng?

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 9.

Lời giải

$32805 = u_n = u_1 q^{n-1} = 5.3^{n-1} \Leftrightarrow 3^{n-1} = 6561 = 3^8 \Leftrightarrow n = 9$. Vậy u_9 là số hạng chính giữa của cấp số nhân, nên cấp số nhân đã cho có 17 số hạng.

Câu 41. Một cấp số nhân có 6 số hạng với công bội bằng 2 và tổng số các số hạng bằng 189. Tìm số hạng cuối u_6 của cấp số nhân đã cho.

A. $u_6 = 32$. **B.** $u_6 = 104$. **C.** $u_6 = 48$. **D.** $u_6 = 96$.

Lời giải

Theo giả thiết:

$$\begin{cases} q = 2 \\ S_6 = 189 = u_1 \dfrac{1-q^6}{1-q} = u_1 . \dfrac{1-2^6}{1-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow u_6 = u_1 q^5 = 3.2^5 = 96.$$

Câu 42. Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = 5^n - 1$. Tìm số hạng thứ 4 của cấp số nhân đã cho.

A. $u_4 = 100$. **B.** $u_4 = 124$. **C.** $u_4 = 500$. **D.** $u_4 = 624$.

Lời giải

Ta có $5^{n-1} - 1 = S_n = u_1 . \dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{u_1}{q-1}\left(q^n - 1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = q - 1 \\ q = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4 \\ q = 5 \end{cases}$.

Khi đó: $u_4 = u_1 q^3 = 4.5^3 = 500$.

Câu 43. Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = \dfrac{3^n - 1}{3^{n-1}}$. Tìm số hạng thứ 5 của cấp số nhân đã cho.

A. $u_5 = \dfrac{2}{3^4}$. **B.** $u_5 = \dfrac{1}{3^5}$. **C.** $u_5 = 3^5$. **D.** $u_5 = \dfrac{5}{3^5}$.

Lời giải

Ta có $\dfrac{3^n - 1}{3^{n-1}} = 3\left(1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right) = S_n = \dfrac{u_1}{1-q}\left(1 - q^n\right) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3(1-q) \\ q = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ q = \dfrac{1}{3} \end{cases}$.

Khi đó: $u_5 = u_1 q^4 = \dfrac{2}{3^4}$.

Câu 44. Cho cấp số nhân (u_n) có tổng của hai số hạng đầu tiên bằng 4, tổng của ba số hạng đầu tiên bằng 13. Tính tổng của năm số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho, biết công bội của cấp số nhân là một số dương.

A. $S_5 = \dfrac{181}{16}$. **B.** $S_5 = 141$. **C.** $S_5 = 121$. **D.** $S_5 = \dfrac{35}{16}$.

Lời giải

$\begin{cases} 4 = S_2 = u_1 + u_2 = u_1(1+q) \\ 13 = S_3 = u_1\left(1 + q + q^2\right) \end{cases} \Leftrightarrow 4\left(1 + q + q^2\right) = 13(1+q) \Leftrightarrow q = 3 \ (q > 0) \Rightarrow u_1 = 1.$ Khi đó

$S_5 = u_1 . \dfrac{1-q^5}{1-q} = 1 . \dfrac{1-3^5}{1-3} = 121.$

Câu 45. Một cấp số nhân có số hạng thứ bảy bằng $\dfrac{1}{2}$, công bội bằng $\dfrac{1}{4}$. Hỏi số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng bao nhiêu?

A. 4096. **B.** 2048. **C.** 1024. **D.** $\frac{1}{512}$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} q=\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}=u_7=u_1q^6=\frac{u_1}{4^6} \end{cases} \Rightarrow u_1=\frac{4^6}{2}=2048.$

Câu 46. Cho cấp số nhân $u_1;\ u_2;\ u_3;\ \cdots$ với $u_1=1$. Tìm công bội q để $4u_2+5u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $q=-\frac{2}{5}$. **B.** $q=0$. **C.** $q=\frac{2}{5}$. **D.** $q=1$.

Lời giải

Ta có $4u_2+5u_3=4u_1q+5u_1q^2=5q^2+4q=5\left(q+\frac{2}{5}\right)^2-\frac{4}{5}\ge-\frac{4}{5}$. Vậy

$$\min\left(4u_2+5u_3\right)=-\frac{4}{5} \text{ khi } q=-\frac{2}{5}.$$

Câu 47. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân (u_n), biết $\begin{cases} u_6=192 \\ u_7=384 \end{cases}$.

A. $\begin{cases} u_1=5 \\ q=2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1=6 \\ q=2 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} u_1=6 \\ q=3 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1=5 \\ q=3 \end{cases}$.

Lời giải

$$\begin{cases} 192=u_6=u_1q^5 \\ 384=u_7=u_1q^6=\left(u_1q^5\right)q=192q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=2 \\ u_1=\frac{192}{q^5}=6 \end{cases}.$$

Câu 48. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_4-u_2=36 \\ u_5-u_3=72 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\begin{cases} u_1=4 \\ q=2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1=6 \\ q=2 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} u_1=9 \\ q=2 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1=9 \\ q=3 \end{cases}$.

Lời giải

$$\begin{cases} 36=u_4-u_2=u_1q\left(q^2-1\right) \\ 72=u_5-u_3=u_1q^2\left(q^2-1\right)=\left[u_1q\left(q^2-1\right)\right]q=36q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=2 \\ u_1=\frac{36}{q\left(q^2-1\right)}=6 \end{cases}.$$

Câu 49. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_{20}=8u_{17} \\ u_1+u_5=272 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $q=2$. **B.** $q=-4$. **C.** $q=4$. **D.** $q=-2$.

Lời giải

$$\begin{cases} u_{20}=8u_{17} \\ u_1+u_5=272 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^{19}=8u_1q^{16} \\ u_1\left(1+q^4\right)=272 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^3=8 \\ u_1=\frac{272}{1+q^4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=2 \\ u_1=16 \end{cases}.$$

Câu 50. Một cấp số nhân có năm số hạng mà hai số hạng đầu tiên là các số dương, tích của số hạng đầu và số hạng thứ ba bằng 1, tích của số hạng thứ ba và số hạng cuối bằng $\frac{1}{16}$. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân đã cho.

A. $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ q = 2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1 = 2 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} u_1 = -2 \\ q = -\frac{1}{2} \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1 = -\frac{1}{2} \\ q = -2 \end{cases}$.

Lời giải

$$\begin{cases} u_1 > 0 \\ u_2 > 0 \\ u_1.u_3 = 1 \\ u_3.u_5 = \frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 > 0 \\ q > 0 \\ u_1^2 q^2 = 1 \\ \frac{1}{16} = u_1^2 q^6 = \left(u_1^2 q^2\right) q^4 = q^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ u_1 = \frac{1}{q} = 2 \end{cases}.$$

Câu 51. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$. Tính u_3.

A. $u_3 = 10$. **B.** $u_3 = 15$. **C.** $u_3 = 20$. **D.** $u_3 = 25$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_1 q^2 + u_1 q^4 = 65 \\ u_1 + u_1 q^6 = 325 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1 - q^2 + q^4\right) = 65 \quad (1) \\ u_1\left(1 + q^6\right) = 325 \quad (2) \end{cases}$.

Lấy (2) chia (1), ta được $\frac{1+q^6}{1-q^2+q^4} = \frac{325}{65} \Leftrightarrow 1 + q^2 = 5 \Leftrightarrow q = \pm 2$.

Vậy $\begin{cases} u_1 = 5 \\ q = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1 = 5 \\ q = -2 \end{cases} \longrightarrow u_3 = u_1 q^2 = 5.4 = 20.$

Câu 52. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_1.u_2.u_3 = 64 \end{cases}$. Tính u_2.

A. $u_2 = 4$. **B.** $u_2 = 6$. **C.** $u_2 = 8$. **D.** $u_2 = 10$.

Lời giải

Từ $u_1.u_2.u_3 = 64 \Leftrightarrow u_1.u_1 q.u_1 q^2 = 64 \Leftrightarrow \left(u_1 q\right)^3 = 64 \Leftrightarrow u_1 q = 4$ hay $u_2 = 4$.

Thay vào hệ ban đầu ta được $\begin{cases} u_1 + 4 + u_3 = 14 \\ u_1.4.u_3 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_3 = 10 \\ u_1.u_3 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 \\ u_3 = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_3 = 8 \end{cases}$.

Vậy $\begin{cases} u_1 = 8 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1 = 2 \\ q = 2 \end{cases} \longrightarrow u_2 = u_1 q = 4.$

Câu 53. Xen giữa số 3 và số 768 là 7 số để được một cấp số nhân có $u_1 = 3$. Khi đó u_5 là:

A. 72. **B.** -48. **C.** ± 48. **D.** 48.

Lời giải

Ta có $u_1 = 3$ và $u_9 = 768$ nên $768 = 3.q^8 \Rightarrow q^8 = 256 \Rightarrow q = \pm 2$.

Do đó $u_5 = u_1.q^4 = 3.2^4 = 48$.

Câu 54. Viết thêm bốn số vào giữa hai số 160 và 5 để được một cấp số nhân. Tổng các số hạng của cấp số nhân đó là

A. 215. **B.** 315. **C.** 415. **D.** 515.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} u_1 = 160 \\ u_6 = 5 \end{cases} \Rightarrow q = \sqrt[5]{\dfrac{u_6}{u_1}} = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra tổng các số hạng của cấp số nhân đó là: $S = \dfrac{u_1\left(1-q^6\right)}{1-q} = \dfrac{160\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^6\right)}{\dfrac{1}{2}} = 315$.

Câu 55. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1+u_2+u_3 = 13 \\ u_4-u_1 = 26 \end{cases}$. Tổng 8 số hạng đầu của cấp số nhân (u_n) là

A. $S_8 = 1093$. **B.** $S_8 = 3820$. **C.** $S_8 = 9841$. **D.** $S_8 = 3280$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} u_1+u_2+u_3 = 13 \\ u_4-u_1 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_1.q+u_1.q^2 = 13 \\ u_1.q^3-u_1 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right) = 13 \\ u_1.(q-1)\left(1+q+q^2\right) = 26 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right) = 13 \\ q = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ q = 3 \end{cases}$.

Vậy tổng $S_8 = \dfrac{u_1\left(1-q^8\right)}{1-q} = \dfrac{1\left(1-3^8\right)}{1-3} = 3280$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 56. Cấp số nhân (u_n) có $\begin{cases} u_{20} = 8u_{17} \\ u_1+u_5 = 272 \end{cases}$. Tìm u_1, biết rằng $u_1 \le 100$.

A. $u_1 = 16$. **B.** $u_1 = 2$. **C.** $u_1 = -16$. **D.** $u_1 = -2$.

Lời giải

Ta có:

$\begin{cases} u_{20} = 8u_{17} \\ u_1+u_5 = 272 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q^{19} = 8u_1q^{16} \\ u_1+u_1.q^4 = 272 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^{16}\left(q^3-8\right) = 0(1) \\ u_1\left(1+q^4\right) = 272(2) \end{cases}$.

Từ (2) suy ra $u_1 \ne 0$ do đó: $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = 0 \\ q = 2 \end{array}\right.$.

Nếu $q = 0$ thì $(2) \Leftrightarrow u_1 = 272$ không thỏa điều kiện $u_1 \le 100$.

Nếu $q = 2$ thì $(2) \Leftrightarrow u_1 = 16$ thỏa điều kiện $u_1 \le 100$.

Câu 57. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = -2$ và $u_5 = 54$. Tính tổng 1000 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho.

A. $S_{1000} = \dfrac{1-3^{1000}}{4}$. **B.** $S_{1000} = \dfrac{3^{1000}-1}{2}$. **C.** $S_{1000} = \dfrac{3^{1000}-1}{6}$. **D.** $S_{1000} = \dfrac{1-3^{1000}}{6}$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} -2 = u_2 = u_1q \\ 54 = u_5 = u_1q^4 = u_1q.q^3 = -2q^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{2}{3} \\ q = -3 \end{cases}$.

Khi đó $S_{1000}=u_1.\dfrac{1-q^{1000}}{1-q}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{1-(-3)^{1000}}{1-(-3)}=\dfrac{1-3^{1000}}{6}$.

Câu 58. Số hạng đầu và công bội q của CSN với $u_7=-5, u_{10}=135$ là:

A. $u_1=\dfrac{5}{729}, q=-3$. **B.** $u_1=-\dfrac{5}{729}, q=3$. **C.** $u_1=\dfrac{5}{729}, q=3$. **D.** $u_1=-\dfrac{5}{729}, q=-3$.

Lời giải

Vì (u_n) là CSN nên: $u_7=u_1.q^6=-5$, $u_{10}=u_1.q^9=135$

$\Rightarrow \dfrac{u_{10}}{u_7}=\dfrac{135}{-5}\Leftrightarrow \dfrac{u_1q^9}{u_1q^6}=-27\Rightarrow q=-3 \Rightarrow u_1=\dfrac{u_7}{q^6}=-\dfrac{5}{729}$.

Câu 59. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q và thỏa $\begin{cases}u_1+u_2+u_3=26\\ u_1^2+u_2^2+u_3^2=364\end{cases}$. Tìm q biết rằng $q>1$.

A. $q=\dfrac{5}{4}$. **B.** $q=4$. **C.** $q=\dfrac{4}{3}$. **D.** $q=3$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{cases}u_1+u_2+u_3=26\\ u_1^2+u_2^2+u_3^2=364\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1\left(1+q+q^2\right)=26\\ u_1^2\left(1+q^2+q^4\right)=364\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1^2\left(1+q+q^2\right)^2=26^2 \quad (1)\\ u_1^2\left(1+q^2+q^4\right)=364 \quad (2)\end{cases}.$$

Lấy (1) chia (2), ta được

$$\frac{\left(1+q+q^2\right)^2}{1+q^2+q^4}=\frac{26^2}{364}\Leftrightarrow 3q^4-7q^3-4q^2-7q+3=0\Leftrightarrow 3\left(q^2+\frac{1}{q^2}\right)-7\left(q+\frac{1}{q}\right)-4=0.$$

Đặt $t=q+\dfrac{1}{q}$, $|t|\ge 2$. Phương trình trở thành $3t^2-7t-10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1 \ (\text{loại})\\ t=-\dfrac{10}{3}\end{array}\right.$.

Với $t=-\dfrac{10}{3}$, suy ra $q+\dfrac{1}{q}=-\dfrac{10}{3}\Leftrightarrow 3q^2-10q+3=0\Leftrightarrow q=3$ hoặc $q=\dfrac{1}{3}$. Vì $q>1$ nên $q=3$.

Câu 60. Gọi $S=9+99+999+...+999...9$ (n số 9) thì S nhận giá trị nào sau đây?

A. $S=\dfrac{10^n-1}{9}$. **B.** $S=10\left(\dfrac{10^n-1}{9}\right)$.

C. $S=10\left(\dfrac{10^n-1}{9}\right)-n$. **D.** $S=10\left(\dfrac{10^n-1}{9}\right)+n$.

Lời giải

Ta có $S=9+99+999+...+\underbrace{99...9}_{\text{n so 9}}=(10-1)+\left(10^2-1\right)+...+\left(10^n-1\right)$

$=10+10^2+...+10^n-n=10.\dfrac{1-10^n}{1-10}-n.$

Câu 61. Giá trị của tổng $4+44+444+...+44...4$ (tổng đó có 2018 số hạng) bằng

A. $\dfrac{40}{9}\left(10^{2018}-1\right)+2018$. **B.** $\dfrac{4}{9}\left(\dfrac{10^{2019}-10}{9}-2018\right)$.

C. $\frac{4}{9}\left(\frac{10^{2019}-10}{9}+2018\right)$. **D.** $\frac{4}{9}\left(10^{2018}-1\right)$.

Lời giải

Đặt $S=4+44+444+...+44...4$ (tổng đó có 2018 số hạng). Ta có:

$\frac{9}{4}S=9+99+999+...+99...9=\left(10-1\right)+\left(10^2-1\right)+\left(10^3-1\right)+...\left(10^{2018}-1\right)$

Suy ra: $\frac{9}{4}S=\left(10+10^2+10^3+...+10^{2018}\right)-2018=A-2018$.

Với $A=10+10^2+10^3+...+10^{2018}$ là tổng 2018 số hạng của một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1=10$, công bội $q=10$ nên ta có $A=u_1\frac{1-q^{2018}}{1-q}=10\frac{1-10^{2018}}{-9}=\frac{10^{2019}-10}{9}$.

Do đó $\frac{9}{4}S=\frac{10^{2019}-10}{9}-2018\Leftrightarrow S=\frac{4}{9}\left(\frac{10^{2019}-10}{9}-2018\right)$.

Câu 62. Gọi $S=1+11+111+...+111...1$ (n số 1) thì S nhận giá trị nào sau đây?

A. $S=\frac{10^n-1}{81}$. **B.** $S=10\left(\frac{10^n-1}{81}\right)$.

C. $S=10\left(\frac{10^n-1}{81}\right)-n$. **D.** $S=\frac{1}{9}\left[10\left(\frac{10^n-1}{9}\right)-n\right]$.

Lời giải

Ta có $S=\frac{1}{9}\left(9+99+999+...+\underbrace{99...9}_{\text{n số 9}}\right)=\frac{1}{9}.\left[10.\frac{1-10^n}{1-10}-n\right]$.

Câu 63. Bốn góc của một tứ giác tạo thành cấp số nhân và góc lớn nhất gấp 27 lần góc nhỏ nhất. Tổng của góc lớn nhất và góc bé nhất bằng:

A. 56^0. **B.** 102^0. **C.** 252^0. **D.** 168^0.

Lời giải

Giả sử 4 góc A, B, C, D (với $A<B<C<D$) theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân thỏa yêu cầu với công bội q. Ta có

$$\begin{cases}A+B+C+D=360\\D=27A\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A\left(1+q+q^2+q^3\right)=360\\Aq^3=27A\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}q=3\\A=9\\D=Aq^3=243\end{cases}\Rightarrow A+D=252.$$

Câu 64. Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A, biết độ dài cạnh đáy BC, đường cao AH và cạnh bên AB theo thứ tự lập thành cấp số nhân với công bội q. Giá trị của q^2 bằng

A. $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

Lời giải

Đặt $BC=a;\ AB=AC=b;AH=h$. Theo giả thiết ta có a, h, b lập cấp số nhân, suy ra

$h^2=ab$. Mặt khác tam giác ABC cân tại đỉnh A nên $h^2=m_a{}^2=\frac{b^2+b^2}{2}-\frac{a^2}{4}$

Do đó $\frac{b^2+b^2}{2}-\frac{a^2}{4}=ab\Leftrightarrow a^2+4ab-4b^2=0\Leftrightarrow a=\left(2\sqrt{2}-2\right)b$ (vì $a,b>0$)

Lại có $b=q^2a$ nên suy ra $q^2=\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}-2}=\dfrac{2\sqrt{2}+2}{4}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$.

Câu 65. Cho dãy số xác định bởi $u_1=1$, $u_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2u_n+\dfrac{n-1}{n^2+3n+2}\right)$; $n\in\mathbb{N}^*$. Khi đó u_{2018} bằng:

A. $u_{2018}=\dfrac{2^{2016}}{3^{2017}}+\dfrac{1}{2019}$. **B.** $u_{2018}=\dfrac{2^{2018}}{3^{2017}}+\dfrac{1}{2019}$.

C. $u_{2018}=\dfrac{2^{2017}}{3^{2018}}+\dfrac{1}{2019}$. **D.** $u_{2018}=\dfrac{2^{2017}}{3^{2018}}+\dfrac{1}{2019}$.

Lời giải

Ta có: $u_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2u_n+\dfrac{n-1}{n^2+3n+2}\right)=\dfrac{1}{3}\left(2u_n+\dfrac{3}{n+2}-\dfrac{2}{n+1}\right)=\dfrac{2}{3}u_n+\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{n+1}$.

$\Leftrightarrow u_{n+1}-\dfrac{1}{n+2}=\dfrac{2}{3}\left(u_n-\dfrac{1}{n+1}\right)\ (1)$

Đặt $v_n=u_n-\dfrac{1}{n+1}$, từ (1) ta suy ra: $v_{n+1}=\dfrac{2}{3}v_n$.

Do đó (v_n) là cấp số nhân với $v_1=u_1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$, công bội $q=\dfrac{2}{3}$.

Suy ra: $v_n=v_1.q^{n-1}=\dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\Leftrightarrow u_n-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\Leftrightarrow u_n=\dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{n+1}$.

Vậy $u_{2018}=\dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2017}+\dfrac{1}{2019}=\dfrac{2^{2016}}{3^{2017}}+\dfrac{1}{2019}$.

Câu 66. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1=a$ và $u_{n+1}=4u_n(1-u_n)$ với mọi n nguyên dương. Có bao nhiêu giá trị của a để $u_{2018}=0$.

A. $2^{2016}+1$. **B.** $2^{2017}+1$. **C.** $2^{2018}+1$. **D.** 3.

Lời giải

Do $u_{2018}=4u_{2017}(1-u_{2017})\Rightarrow\left[\begin{array}{l}u_{2017}=0\\u_{2017}=1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}u_{2016}=0\\u_{2016}=1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}u_1=0\\u_1=1\end{array}\right.$

Trường hợp $u_1=u_2=...=u_{2018}=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=1\end{array}\right.$

Xét phương trình $4x^2-4x+m=0$ với $0<m<1$ có $\Delta'=4-4m>0$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và $x_1+x_2=1$, $x_1x_2=\dfrac{m}{4}\Rightarrow x_1,x_2\in(0;1)$.

Ta có $u_2=1\Rightarrow 4u_1-4u_1^2=1\Leftrightarrow u_1=\dfrac{1}{2}\Rightarrow$ có 2^0 nghiệm u_1.

$u_3=1\Rightarrow u_2=\dfrac{1}{2}\Rightarrow 4u_1^2-4u_1+\dfrac{1}{2}=0\Rightarrow$ có 2^1 nghiệm u_1.

$u_4=1\Rightarrow u_3=\dfrac{1}{2}\Rightarrow 4u_2^2-4u_2+\dfrac{1}{2}=0$ có 2 nghiệm $u_2\in(0;1)\Rightarrow 2^2$ nghiệm u_1.

$u_{2017}=1$ có 2^{2015} nghiệm u_1.

Vậy có $2+2^0+2^1+2^2+...+2^{2015}=2+\dfrac{2^{2016}-1}{2-1}=2^{2016}+1$.

Câu 67. Biết $1+2.2+3.2^2+4.2^3+...+2018.2^{2017}=a.2^{2018}+b$, với a, b là các số nguyên dương. Tính $P=a.b$

A. $P=2017$. **B.** $P=2018$. **C.** $P=2019$. **D.** $P=2020$.

Lời giải

Ta có $2.2+3.2^2+4.2^3+...+2018.2^{2017}=(n-1).2^n$

Với $n=2018$: $1+2.2+3.2^2+4.2^3+...+2018.2^{2017}=2017.2^{2018}+1$

Suy ra $\begin{cases}a=2017\\b=1\end{cases}$. Vậy $P=2017.1=2017$.

Câu 68. Biết rằng $S=1+2.3+3.3^2+...+11.3^{10}=a+\dfrac{21.3^b}{4}$. Tính $P=a+\dfrac{b}{4}$.

A. $P=1$. **B.** $P=2$. **C.** $P=3$. **D.** $P=4$.

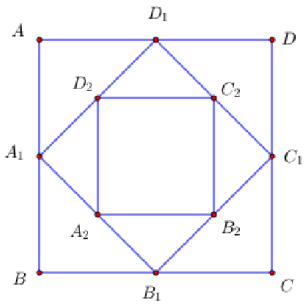
Lời giải

Từ giả thiết suy ra $3S=3+2.3^2+3.3^3+...+11.3^{11}$. Do đó

$$-2S=S-3S=1+3+3^2+...+3^{10}-10.3^{11}=\frac{1-3^{11}}{1-3}-11.3^{11}=-\frac{1}{2}-\frac{21.3^{11}}{2}\Rightarrow S=\frac{1}{4}+\frac{21}{4}.3^{11}.$$

Vì $S=\dfrac{1}{4}+\dfrac{21.3^{11}}{4}=a+\dfrac{21.3^b}{4}\Rightarrow a=\dfrac{1}{4},\ b=11\longrightarrow P=\dfrac{1}{4}+\dfrac{11}{4}=3.$

Câu 69. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a và có diện tích S_1. Nối 4 trung điểm A_1, B_1, C_1, D_1 theo thứ tự của 4 cạnh AB, BC, CD, DA ta được hình vuông thứ hai có diện tích S_2. Tiếp tục làm như thế, ta được hình vuông thứ ba là $A_2B_2C_2D_2$ có diện tích S_3, …và cứ tiếp tục làm như thế, ta tính được các hình vuông lần lượt có diện tích S_4, S_5,…, S_{100} (tham khảo hình bên). Tính tổng $S=S_1+S_2+S_3+...+S_{100}$.



A. $S=\dfrac{a^2\left(2^{100}-1\right)}{2^{100}}$. **B.** $S=\dfrac{a^2\left(2^{100}-1\right)}{2^{99}}$. **C.** $S=\dfrac{a^2}{2^{100}}$. **D.** $S=\dfrac{a^2\left(2^{99}-1\right)}{2^{98}}$.

Lời giải

Ta có $S_1=a^2$; $S_2=\dfrac{1}{2}a^2$; $S_3=\dfrac{1}{4}a^2$,…

Do đó S_1, S_2, S_3,…, S_{100} là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1=S_1=a^2$ và công bội $q=\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $S=S_1+S_2+S_3+...+S_{100}=S_1.\dfrac{1-q^n}{1-q}=\dfrac{a^2\left(2^{100}-1\right)}{2^{99}}$.

Câu 70. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 1; n \geq 2 \end{cases}$. Tổng $S = u_1 + u_2 + ... + u_{20}$ bằng

A. $2^{20} - 20$. **B.** $2^{21} - 22$. **C.** 2^{20}. **D.** $2^{21} - 20$.

Lời giải

$u_n = 2u_{n-1} + 1 \Leftrightarrow u_n + 1 = 2(u_{n-1} + 1)$

Đặt $v_n = u_n + 1$, ta có $v_n = 2v_{n-1}$ trong đó $v_1 = 2$

Vậy (v_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $v_1 = 2$ và công bội bằng 2, nên số hạng tổng quát

$v_n = 2^n \Rightarrow u_n = v_n - 1 = 2^n - 1$

$\Rightarrow S = u_1 + u_2 + ... + u_{20} = (2^1 - 1) + (2^2 - 1) + ... + (2^{20} - 1) = (2^1 + 2^2 + ... + 2^{20}) - 20$

$S = 2.(2^{20} - 1) - 20 = 2^{21} - 22.$

Câu 71. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội $q > 1$ và $\begin{cases} u_1 + u_3 = 3 \\ u_1^2 + u_3^2 = 5 \end{cases}$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân là:

A. $S_{10} = \dfrac{31(2+\sqrt{2})}{16}$. **B.** $S_{10} = 31(1-\sqrt{2})$.

C. $S_{10} = 31(\sqrt{2}+1)$. **D.** $S_{10} = 31(\sqrt{2}-1)$.

Lời giải:

Chọn C

Gọi công bội của cấp số nhân (u_n) là q

$$\begin{cases} u_1 + u_3 = 3 \\ u_1^2 + u_3^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_3 = 3 \\ (u_1 + u_3)^2 - 2u_1.u_3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_3 = 3 \\ u_1.u_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_3 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_3 = 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

TH1. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow q^2 = \dfrac{u_3}{u_1} = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = \sqrt{2} \\ q = -\sqrt{2} \end{array}\right.$

Nếu $q = \sqrt{2}$ thì $S_{10} = \dfrac{u_1(1-q^{10})}{1-q} = \dfrac{1.(1-2^5)}{1-\sqrt{2}} = 31(\sqrt{2}+1)$

Nếu $q = -\sqrt{2}$ thì $S_{10} = \dfrac{u_1(1-q^{10})}{1-q} = \dfrac{1.(1-2^5)}{1+\sqrt{2}} = 31(1-\sqrt{2})$

TH 2. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow q^2 = \dfrac{u_3}{u_1} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ q = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$

Nếu $q=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ thì $S_{10}=\dfrac{u_1\left(1-q^{10}\right)}{1-q}=\dfrac{2\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\right)}{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{31\left(2+\sqrt{2}\right)}{16}$

Nếu $q=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ thì $S_{10}=\dfrac{u_1\left(1-q^{10}\right)}{1-q}=\dfrac{2\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\right)}{1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{31\left(2-\sqrt{2}\right)}{16}$.

Câu 72. Cho cấp số nhân $\left(u_n\right)$ có các số hạng khác không, tìm u_1 biết: $\begin{cases}u_1+u_2+u_3+u_4=15\\u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=85\end{cases}$

A. $u_1=1,u_1=2$. **B.** $u_1=1,u_1=8$.

C. $u_1=1,u_1=5$. **D.** $u_1=1,u_1=9$.

Lời giải:

Chọn B

Ta có: $\begin{cases}u_1(1+q+q^2+q^3)=15\\u_1^2\left(1+q^2+q^4+q^6\right)=85\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1\dfrac{q^4-1}{q-1}=15\\u_1^2\dfrac{q^8-1}{q^2-1}=85\end{cases}$

$\Rightarrow\left(\dfrac{q^4-1}{q-1}\right)^2\left(\dfrac{q^2-1}{q^8-1}\right)=\dfrac{45}{17}\Leftrightarrow\dfrac{(q^4-1)(q+1)}{(q-1)(q^4+1)}=\dfrac{45}{17}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}q=2\\q=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Từ đó ta tìm được $u_1=1,u_1=8$.

DẠNG 3. MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN CẤP SỐ NHÂN

Câu 1. Có hai cơ sở khoan giếng A và B. Cơ sở A giá mét khoan đầu tiên là 8000 (đồng) và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét sau tăng thêm 500 (đồng) so với giá của mét khoan ngay trước đó. Cơ sở B: Giá của mét khoan đầu tiên là 6000 (đồng) và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét khoan sau tăng thêm 7% giá của mét khoan ngay trước đó. Một công ty giống cây trồng muốn thuê khoan hai giếng với độ sâu lần lượt là 20 (m) và 25 (m) để phục vụ sản xuất. Giả thiết chất lượng và thời gian khoan giếng của hai cơ sở là như nhau. Công ty ấy nên chọn cơ sở nào để tiết kiệm chi phí nhất?

A. luôn chọn A.

B. luôn chọn B.

C. giếng 20 (m) chọn A còn giếng 25 (m) chọn B.

D. giếng 20 (m) chọn B còn giếng 25 (m) chọn A.

Lời giải

Cơ sở A giá mét khoan đầu tiên là 8000 (đồng) và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét sau tăng thêm 500 (đồng) so với giá của mét khoan ngay trước đó.

+ Nếu đào giếng 20 (m) hết số tiền là: $S_{20}=\dfrac{20}{2}\left[2.8000+(20-1)500\right]=255000$ (đồng).

+ Nếu đào giếng 25 (m) hết số tiền là: $S_{25}=\frac{25}{2}\left[2.8000+(25-1)500\right]=350000$ (đồng).

Cơ sở B Giá của mét khoan đầu tiên là 6000 (đồng) và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét khoan sau tăng thêm 7% giá của mét khoan ngay trước đó.

+ Nếu đào giếng 20 (m) hết số tiền là: $S'_{20}=6000\frac{1-(1,07)^{20}}{1-1,07}\approx 245973$ (đồng).

+ Nếu đào giếng 25 (m) hết số tiền là: $S'_{25}=6000\frac{1-(1,07)^{25}}{1-1,07}\approx 379494$ (đồng).

Ta thấy $S'_{20}<S_{20}$, $S'_{25}>S_{25}$ nên giếng 20 (m) chọn B còn giếng 25 (m) chọn A.

Câu 2. Bạn A thả quả bóng cao su từ độ cao 10 m theo phương thẳng đứng. Mỗi khi chạm đất nó lại nảy lên theo phương thẳng đứng có độ cao bằng $\frac{3}{4}$ độ cao trước đó. Tính tổng quãng đường bóng đi được đến khi bóng dừng hẳn.

A. 40 m. **B.** 70 m. **C.** 50 m. **D.** 80 m.

Lời giải

Các quãng đường khi bóng đi xuống tạo thành một cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1=10$ và $q=\frac{3}{4}$.

Tổng các quãng đường khi bóng đi xuống là $S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{10}{1-\frac{3}{4}}=40$.

Tổng quãng đường bóng đi được đến khi bóng dừng hẳn $2S-10=70$ (m).

Câu 3. Ngày mùng 3/03/2015 anh A vay ngân hàng 50 triêu đồng với lãi suất kép là 0,6%/tháng theo thể thức như sau: đúng ngày mùng 3 hàng tháng kể từ một tháng sau khi vay, ngân hàng sẽ tính số tiền nợ của anh bằng số tiền nợ tháng trước cộng với tiền lãi của số tiền nợ đó. Sau khi vay anh A trả nợ như sau: đúng ngày mùng 3 hàng tháng kể từ một tháng sau khi vay anh A đều đến trả ngân hàng 3 triệu đồng. Tính số tháng mà anh A trả được hết nợ ngân hàng, kể từ một tháng sau khi vay. Biết rằng lãi suất không đổi trong suốt quá trình vay.

A. 15 tháng. **B.** 19 tháng. **C.** 16 tháng. **D.** 18 tháng.

Lời giải

Gọi số tiền vay ban đầu là N, lãi suất là x, n là số tháng phải trả, A là số tiền trả vào hàng tháng để sau n tháng là hết nợ.

Ta có

Số tiền gốc cuối tháng 1: $N+Nx-A=N(x+1)-A$

Cuối tháng 2: $\left[N(x+1)-A\right]+\left[N(x+1)-A\right]x-A=N(x+1)^2-A\left[(x+1)+1\right]$

Cuối tháng 3: $\left[N(x+1)^2-A\left[(x+1)+1\right]\right](1+x)-A=N(x+1)^3-A\left[(x+1)^2+(x+1)+1\right]$

……

Cuối tháng n: $N(x+1)^n-A\left[(x+1)^{n-1}+(x+1)^{n-2}+...+(x+1)+1\right]$.

Trả hết nợ thì sau n tháng, số tiền sẽ bằng 0.

$\Leftrightarrow N(x+1)^n-A\left[(x+1)^{n-1}+(x+1)^{n-2}+...+(x+1)+1\right]=0$

$\Leftrightarrow N(x+1)^n=A\left[(x+1)^{n-1}+(x+1)^{n-2}+...+(x+1)+1\right]$

Đặt $y=x+1=1,006$ ta được:

$N.y^n = A\left(y^{n-1}+y^{n-2}+...+y+1\right) \Leftrightarrow N.y^n = A.\dfrac{1\left(1-y^n\right)}{1-y} \Leftrightarrow N.x.y^n = A.\left(y^n-1\right)$

$\Leftrightarrow 50.\dfrac{0,6}{100}.y^n = 3.\left(y^n-1\right) \Leftrightarrow y^n = \dfrac{10}{9} \Leftrightarrow n = \log_y \dfrac{10}{9} \Rightarrow n = 18$.

Câu 4. Trong năm đầu tiên đi làm, anh A được nhận lương là 10 triệu đồng mỗi tháng. Cứ hết một năm, anh A lại được tăng lương, mỗi tháng năm sau tăng 12% so với mỗi tháng năm trước. Mỗi khi lĩnh lương anh A đều cất đi phần lương tăng so với năm ngay trước để tiết kiệm mua ô tô. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì anh A mua được ô tô giá 500 triệu biết rằng anh A được gia đình hỗ trợ 32% giá trị chiếc xe?

A. 11. **B.** 12. **C.** 13. **D.** 10.

Lời giải

Số tiền anh A cần tiết kiệm là $500-500.0,12=340$ (triệu).

Gọi số tiền mà anh A nhận được ở mỗi tháng trong năm đầu tiên là $u_1=10$ (triệu).

Thì số tiền mà anh A nhận được ở mỗi tháng trong năm thứ hai là

$u_2 = u_1.\left(1+0,12\right) = u_1.1,12$ (triệu).

Số tiền mà anh A nhận được ở mỗi tháng trong năm thứ ba là

$u_3 = u_1.\left(1+0,12\right)^2 = u_1.\left(1,12\right)^2$ (triệu).

…

Số tiền mà anh A nhận được ở mỗi tháng trong năm thứ n là

$u_n = u_1.\left(1+0,12\right)^{n-1} = u_1.\left(1,12\right)^{n-1}$ (triệu).

Vậy số tiền mà anh A tiết kiệm được sau n năm là

$12.\left(u_2-u_1+u_3-u_2+\cdots+u_{n-1}-u_{n-2}+u_n-u_{n-1}\right) = 12.\left(u_n-u_1\right) = 12.\left[u_1.\left(1,12\right)^{n-1}-u_1\right]$.

Cho $12.\left[u_1.\left(1,12\right)^{n-1}-u_1\right] = 340 \Leftrightarrow \left(1,12\right)^{n-1} = \dfrac{23}{6} \Leftrightarrow n = \log_{1,12}\dfrac{23}{6}+1 \Rightarrow n = 13$.

Vậy sau ít nhất 13 năm thì anh A sẽ tiết kiệm đủ tiền để mua ô tô.

Câu 5. Trên một bàn cờ vua kích thước 8x8 người ta đặt số hạt thóc theo cách như sau. Ô thứ nhất đặt một hạt thóc, ô thứ hai đặt hai hạt thóc, các ô tiếp theo đặt số hạt thóc gấp đôi ô đứng liền kề trước nó. Hỏi phải tối thiểu từ ô thứ bao nhiêu để tổng số hạt thóc từ ô đầu tiên đến ô đó lớn hơn 20172018 hạt thóc.

A. 26 **B.** 23 **C.** 24 **D.** 25

Lời giải

Số thóc ở ô sau gấp đôi ở ô trước, đặt u_n là số thóc ở ô thứ n thì số thóc ở mỗi ô sẽ lập thành một cấp số nhân: $\begin{cases} u_1 = 1 = 2^0 \\ u_{n+1} = 2u_n = 2^n \end{cases}$.

Khi đó tổng số thóc từ ô đầu tới ô thứ k là $S_k = u_1+u_2+...+u_k = 1+2^1+...+2^{k-1}$

Vậy $S_k = \dfrac{2^k-1}{2-1} = 2^k-1$

Theo đề ta có: $2^k-1 > 20172018 \Leftrightarrow 2^k > 20172019 \Leftrightarrow k > \log_2 20172019$

Vậy phải lấy tối thiểu từ ô thứ 25

Câu 6. Một du khách vào chuồng đua ngựa đặt cược, lần đầu đặt 20000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi lần tiền đặt cọc trước. Người đó thua 9 lần liên tiếp và thắng ở lần thứ 10. Hỏi du khác trên thắng hay thua bao nhiêu?

A. Hòa vốn. **B.** Thua 20000 đồng.

C. Thắng 20000 đồng. **D.** Thua 40000 đồng.

Lời giải

Số tiền du khác đặt trong mỗi lần (kể từ lần đầu) là một cấp số nhân có $u_1 = 20\,000$ và công bội $q = 2$.

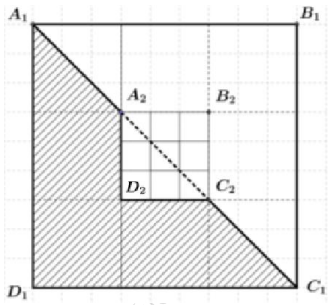
Du khách thua trong 9 lần đầu tiên nên tổng số tiền thua là:

$$S_9 = u_1 + u_2 + ... + u_9 = \frac{u_1\left(1-p^9\right)}{1-p} = 10220000$$

Số tiền mà du khách thắng trong lần thứ 10 là $u_{10} = u_1.p^9 = 10240000$

Ta có $u_{10} - S_9 = 20\,000 > 0$ nên du khách thắng 20 000.

Câu 7. Với hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ như hình vẽ bên, cách tô màu như phần gạch sọc được gọi là cách tô màu "đẹp". Một nhà thiết kế tiến hành tô màu cho một hình vuông như hình bên, theo quy trình sau**:**



Bước 1: Tô màu "đẹp" cho hình vuông $A_1B_1C_1D_1$.

Bước 2: Tô màu "đẹp" cho hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ là hình vuông ở chính giữa khi chia hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ thành 9 phần bằng nhau như hình vẽ.

Bước 3: Tô màu "đẹp" cho hình vuông $A_3B_3C_3D_3$ là hình vuông ở chính giữa khi chia hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ thành 9 phần bằng nhau. Cứ tiếp tục như vậy. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu bước để tổng diện tích phần được tô màu chiếm $49,99\%$.

A. 9 bước. **B.** 4 bước. **C.** 8 bước. **D.** 7 bước.

Lời giải

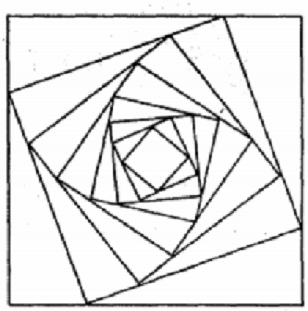
Gọi diện tích được tô màu ở mỗi bước là u_n, $n \in \mathbb{N}^*$. Dễ thấy dãy các giá trị u_n là một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = \frac{4}{9}$ và công bội $q = \frac{1}{9}$.

Gọi S_k là tổng của k số hạng đầu trong cấp số nhân đang xét thì $S_k = \frac{u_1\left(q^k-1\right)}{q-1}$.

Để tổng diện tích phần được tô màu chiếm $49,99\%$ thì $\frac{u_1\left(q^k-1\right)}{q-1} \geq 0,4999 \Leftrightarrow k \geq 3,8$.

Vậy cần ít nhất 4 bước.

Câu 8. Cho hình vuông (C_1) có cạnh bằng a. Người ta chia mỗi cạnh của hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông (C_2)(Hình vẽ).



Từ hình vuông (C_2) lại tiếp tục làm như trên ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, .., C_n$. Gọi S_i là diện tích của hình vuông $C_i\left(i \in \{1,2,3,.....\}\right)$. Đặt $T = S_1 + S_2 + S_3 + ...S_n + ...$ Biết $T = \dfrac{32}{3}$, tính a?

A. 2. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Cạnh của hình vuông (C_2) là: $a_2 = \sqrt{\left(\dfrac{3}{4}a\right)^2 + \left(\dfrac{1}{4}a\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$. Do đó diện tích $S_2 = \dfrac{5}{8}a^2 = \dfrac{5}{8}S_1$.

Cạnh của hình vuông (C_3) là: $a_3 = \sqrt{\left(\dfrac{3}{4}a_2\right)^2 + \left(\dfrac{1}{4}a_2\right)^2} = \dfrac{a_2\sqrt{10}}{4} = a\left(\dfrac{\sqrt{10}}{4}\right)^2$. Do đó diện tích $S_3 = \left(\dfrac{5}{8}\right)^2 a^2 = \dfrac{5}{8}S_2$. Lý luận tương tự ta có các $S_1, S_2, S_3, ...S_n....$ tạo thành một dãy cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = S_1$ và công bội $q = \dfrac{5}{8}$.

$T = \dfrac{S_1}{1-q} = \dfrac{8a^2}{3}$. Với $T = \dfrac{32}{3}$ ta có $a^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2$.

Câu 9. Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nữa diện tích của mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp (có diện tích là 12 288 m^2). Tính diện tích mặt trên cùng.

A. $6m^2$. **B.** $8m^2$. **C.** $10m^2$. **D.** $12m^2$.

Lời giải

Diện tích bề mặt của mỗi tầng (kể từ 1) lập thành một cấp số nhân có công bội $q = \dfrac{1}{2}$ và $u_1 = \dfrac{12\,288}{2} = 6\,144$. Khi đó diện tích mặt trên cùng là

$$u_{11} = u_1 q^{10} = \frac{6144}{2^{10}} = 6.$$

Câu 10. Ba số phân biệt có tổng là 217 có thể coi là các số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, cũng có thể coi là số hạng thứ 2, thứ 9, thứ 44 của một cấp số cộng. Hỏi phải lấy bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng này để tổng của chúng bằng 820?

A. 20. **B.** 42. **C.** 21. **D.** 17.

Lời giải

Gọi ba số đó là x, y, z. Do ba số là các số hạng thứ 2, thứ 9 và thứ 44 của một cấp số cộng nên ta có: x; $y=x+7d$; $z=x+42d$ (với d là công sai của cấp số cộng).

Theo giả thiết, ta có: $x+y+z=x+x+7d+x+42d=3x+49d=217$.

Mặt khác, do x, y, z là các số hạng liên tiếp của một cấp số nhân nên:

$$y^2=xz \Leftrightarrow (x+7d)^2=x(x+42d) \Leftrightarrow d(-4x+7d)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=0 \\ -4x+7d=0 \end{array}\right.$$

Với $d=0$, ta có: $x=y=z=\dfrac{217}{3}$. Suy ra $n=820:\dfrac{217}{3}=\dfrac{2460}{217}\notin \mathbb{N}$.

Với $-4x+7d=0$, ta có: $\begin{cases} -4x+7d=0 \\ 3x+49d=217 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ d=4 \end{cases}$. Suy ra $u_1=7-4=3$.

Do đó, $S_n=820 \Leftrightarrow \dfrac{\left[2u_1+(n-1)d\right]n}{2}=820 \Leftrightarrow \dfrac{[2.3+4(n-1)]n}{2}=820 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=20 \\ n=-\dfrac{41}{2} \end{array}\right.$

Vậy $n=20$.

Câu 11. Một loại vi khuẩn sau mỗi phút số lượng tăng gấp đôi biết rằng sau 5 phút người ta đếm được có 64000 con hỏi sau bao nhiêu phút thì có được 2048000 con.

A. 10. **B.** 11. **C.** 26. **D.** 50.

Lời giải

Số lượng vi khuẩn tăng lên là cấp số nhân (u_n) với công bội $q=2$.

Ta có:

$u_6=64000 \Rightarrow u_1.q^5=64000 \Rightarrow u_1=2000$.

Sau n phút thì số lượng vi khuẩn là u_{n+1}.

$u_{n+1}=2048000 \Rightarrow u_1.q^n=2048000 \Rightarrow 2000.2^n=2048000 \Rightarrow n=10$.

Vậy sau 10 phút thì có được 2048000 con.

Câu 12. Đầu mùa thu hoạch xoài, một bác nông dân đã bán cho người thứ nhất, nửa số xoài thu hoạch được và nửa quả, bán cho người thứ hai nửa số còn lại và nửa quả, bán cho người thứ ba nửa số xoài còn lại và nửa quả v.v. Đến lượt người thứ bảy bác cũng bán nửa số xoài còn lại và nửa quả thì không còn quả nào nữa.Hỏi bác nông dân đã thu hoạch được bao nhiêu quả xoài đầu mùa?

A. 125. **B.** 126. **C.** 127. **D.** 128.

Lời giải:

Chọn C

Gọi x là số quả Xoài thu hoạch được đầu mùa của người nông dân.

Người khách hàng thứ nhất đã mua: $\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{x+1}{2}$ quả; người thứ 2 mua:

$\dfrac{1}{2}(x-\dfrac{x+1}{2})+\dfrac{1}{2}=\dfrac{x+1}{2^2}$ quả; người khách hàng thứ 3 mua:

$\dfrac{1}{2}(x-\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{x+1}{2^2})+\dfrac{1}{2}=\dfrac{x+1}{2^3}$ quả;. và người khách hàng thứ 7 mua: $\dfrac{x+1}{2^7}$ quả. Ta có phương trình:

$\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{x+1}{2^2}+...+\dfrac{x+1}{2^7}=x$

$\Leftrightarrow (x+1)(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^7}) = x$ (*)

Tính tổng các số hạng của cấp số nhân trong ngoặc ta được:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^7} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^7}}{\frac{1}{2}} = \frac{127}{128}$$

Do đó phương trình (*) $\Leftrightarrow (x+1)\frac{127}{128} = x \Leftrightarrow x = 127$

Vậy bác nông dân đã thu hoạch được 127 quả Xoài đầu mùa.

Câu 13. Qua điều tra chăn nuôi bò ở huyện X cho thấy ở đây trong nhiều năm qua, tỉ lệ tăng đàn hàng năm là 2%. Tính xem, sau một kế hoạch 3 năm, với số lượng đàn bò thống kê được ở huyện này vào ngày 1/1/2017 là 18.000 con, thì với tỉ lệ tăng đàn trên đây, đàn bò sẽ đạt tới bao nhiêu con?

A. 18.360. **B.** 18.727. **C.** 19.102. **D.** 19.101.

Lời giải:

Chọn C

Thông thường bài toán trên được giải như sau:

Sau một năm đàn bò ở huyên này tăng được: 18.000 × 2% = 360 (con).

Nên tổng số đàn bò sau năm thứ nhất (cuối năm 2006) là:

18.000 + 360 = 18.360 (con).

Sau 2 năm đàn bò lại tăng thêm: 18.360 × 2% = 367 (con).

Nên tổng số bò sau năm thứ 2(cuối năm 2007) là:

18.360 + 367 = 18.727 (con).

Sau 3 năm đàn bò lại tăng thêm: 18.727 ×2% = 375 (con).

Như vậy tổng đàn bò cuối năm thứ 3 (cuối 2008) là:

18.727 + 375 = 19.102 (con).

Câu 14. Kết quả kiểm kê vào cuối năm 2006, cho biết tổng đàn bò ở vùng Y là 580 con và trong mấy năm qua tỉ lệ tăng đàn đạt 12% mỗi năm. Hãy tính xem vào đầu năm 2004 (cách đó 3 năm về trước) đàn bò ở đây có bao nhiêu con?

A. 410. **B.** 412. **C.** 413. **D.** 415.

Lời giải:

Chọn C

Thông thường bài toán trên được giải như sau:

Coi số bò mẹ đầu năm 2006 là 100%, với tỉ lệ tăng đàn 12%, số 580 bò mẹ cuối năm 2006 so với đầu năm là: 100% + 12% = 112%.

Nghĩa là 112% số bò ứng với 580 con. Vậy số bò đầu năm 2006 là:

$$\frac{580\times100}{112} = \frac{580\times100}{(1+0,12)\times100} = \frac{580}{1+0,12} \text{ (con).}$$

Tương tự như trên, số bò đầu năm 2005(trước đó 2 năm) là:

$$\frac{580\times100}{(1+0,12)\times112} = \frac{580\times100}{(1+0,12)(1+0,12)\times100} = \frac{580}{(1+0,12)^2} \text{ (con).}$$

Tiếp tục lập luận như trên ta có số bò mẹ đầu năm 2004 (trước đó 3 năm) là:

$$\frac{580\times100}{(1+0,12)^2\times112} = \frac{580\times100}{(1+0,12)\times(1+0,12)\times100} = \frac{580}{(1+0,12)^3} = 413 \text{ (con).}$$

Câu 15. Bạn định mua một chiếc xe máy theo phương thức trả góp. Theo phương thức này sau một tháng kể từ khi nhận xe bạn phải trả đều đặn mỗi tháng một lượng tiền nhất định nào đó, liên tiếp trong 24 tháng. Giả sử giá xe máy thời điểm bạn mua là 16 triệu đồng và giả sử lãi suất ngân hàng là 1% một tháng. Với mức phải trả hàng tháng là bao nhiêu thì việc mua trả góp là chấp nhận được?

A. 660.883,9 (đồng). **B.** 560.883,9 (đồng). **C.** 661.883,9 (đồng). **D.** 662.883,9 (đồng).

Lời giải:

Chọn A

Gọi khoản tiền phải trả hàng tháng là a đồng. Nếu gửi vào ngân hàng thì giá trị hiện tại của toàn bộ khoản tiền trả góp tại thời điểm nhận hàng là:

$$\frac{a}{1+0,01}+\frac{a}{(1+0,01)^2}+\frac{a}{(1+0,01)^3}+...+\frac{a}{(1+0,01)^{24}}$$

$$=a\frac{\frac{100}{101}\left[1-\left(\frac{100}{101}\right)^{24}\right]}{1-\frac{100}{101}}\approx 21,24a \text{ đồng}$$

Như vậy, việc mua trả góp sẽ tương đương với mua trả ngay (bằng cách vay ngân hàng) nếu:

24,21a = 16.000.000 (đồng) $\Leftrightarrow$ a = 660.883,9 (đồng)

Câu 16. Người ta dự định xây dựng 1 tòa tháp 11 tầng tại một ngôi chùa nọ, theo cấu trúc diện tích của mặt sàn tầng trên bằng nửa diện tích mặt sàn tầng dưới, biết diện tích mặt đáy tháp là 12,28m^2. Hãy giúp nhà chùa ước lượng số gạch hoa cần dùng để lát nền nhà. Để cho đồng bộ các nhà chùa yêu cầu nền nhà phải lót gạch hoa cỡ 30x30cm.

A. 273000 viên. **B.** 272000 viên. **C.** 271000 viên. **D.** 270000 viên.

Lời giải:

Nguyễn Bảo Vương

Chọn A

Phương án giải quyết:

Nếu gọi S_1 là diện tích của mặt đáy tháp thì S_1=12,28 m^2

S_i là diện tích mặt trờn của tầng thứ i.i=$\overline{1,11}$

Ta nhận thấy {S_i,.i=$\overline{1,11}$} lập thành một cấp số nhân với công bội q= $\frac{1}{2}$

Tổng diện tích mặt trên của 11 tầng tháp là tổng của 11 số hạng đầu tiên của cấp số nhân trên.

Ta nhận thấy {S_i,.i=$\overline{1,11}$} lập thành một cấp số nhân với công bội q= $\frac{1}{2}$

Tổng diện tích mặt trên của 11 tầng tháp là tổng của 11 số hạng đầu tiên của cấp số nhân trên

$$T_{11}=\frac{S_1(1-q^{11})}{1-q}=12,28.\frac{1-(\frac{1}{2})^{11}}{1-\frac{1}{2}}=24564(m^2)$$

Diện tích của mỗi viên gạch là 30 x 30 = 900cm^2 = 0,09m^2

Vậy số lượng gạch cần dùng là:

N = 24564: 0,09 = 272.934 (viờn).

Trong quá trình xây dựng có thể viên gạch hoa được cắt ra nên ta nên mua số lượng nhiều hơn số liệu tính toán ra, chẳng hạn mua 273000 viên.

$$T_{11} = \frac{S_1(1-q^{11})}{1-q} = 12,28.\frac{1-(\frac{1}{2})^{11}}{1-\frac{1}{2}} = 24564(m^2)$$

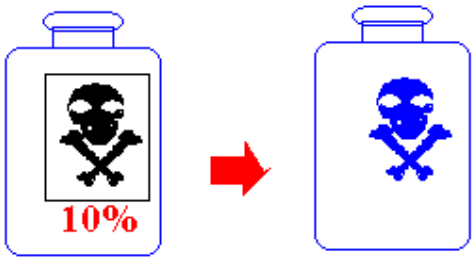
Diện tích của mỗi viên gạch là 30 x 30 = 900cm^2 = 0,09m^2

Vậy số lượng gạch cần dùng là:

N = 24564: 0,09 = 272.934 (viên).

Trong quá trình xây dựng có thể viên gạch hoa được cắt ra nên ta nên mua số lượng nhiều hơn số liệu tính toán ra, chẳng hạn mua 273000 viên.

Câu 17. Một lọ thủy tinh dung tích 1 000 ml chứa đầy 1 loại dung dịch chất độc nồng độ 10 % đã được chuyển sang bình chứa khác; nhưng dung dịch độc hại sau khi đổ hết vẫn còn dính lọ 0,1 %. Để chất độc còn trong lọ ≤ 0,001 μ gam (microgam), Người ta dùng nước cất xúc rửa lọ thủy tinh này. Hỏi phải xúc rửa bao nhiêu lần nếu mỗi lần dùng 1000 ml nước cất?



Giả thử rằng mỗi lần xúc rửa, chất độc hòa tan hết trong nước và sau khi đổ đi dung dịch mới cũng vẫn còn dính lọ một lượng như nhau.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải:

Nguyễn Bảo Vương

Chọn B

Giải

Lượng chất độc tồn trong lọ lúc đầu là: (100 g: 1000) = $\frac{1}{10}$ (gam)

Lượng chất độc tồn trong lọ theo yêu cầu là: 0,001 μ gam = $\frac{1}{1000}$ (gam)

Mỗi lần xúc rửa với 1.000 ml nước cất, vẫn còn dính lọ 1 ml (0,1 %) nghĩa là lượng chất độc đã giảm đi 1.000 (10^3) lần. Lập bảng lượng chất độc tồn đọng sau các lần xúc rửa, ta có:

Vậy sau 3 lần xúc rửa với 1.000 ml/ lần thì chất độc còn $\frac{1}{10}\times\frac{1}{10^9} \le \frac{1}{10^9}$

Câu 18. "Trong 1 bàn cờ gồm có 64 ô. Bắt đầu từ ô thứ nhất, Vua đặt vào 1 hạt gạo. Tiếp tục ở ô thứ hai, Vua đặt vào 2 hạt gạo. Cứ thế với những ô tiếp theo với số gạo gấp đôi số gạo ở ô liền trước nó. Cuối cùng cho đến hết 64 ô của bàn cờ. Tổng số hạt gạo thu được trong 64 ô đó là số gạo mà thần xin bệ hạ ban tặng".

Nhà vua nghĩ "Như thế thì chắc chỉ có 1 bao gạo là cùng". Nhưng sau tính ra với một con số khủng lồ. Vậy số gạo mà Nhà thông thái cần là bao nhiêu?

A. $2^{64}-1$. **B.** 2^{64}. **C.** $2^{64}+1$. **D.** $2^{64}+2$.

Lời giải:

Chọn A

Bài Giải:

Ký hiệu số thứ tự các ô lần lượt là từ 1 đến 64, Tổng số hạt gạo trên đó là

. $S = u_1 + u_2 + ... + u_{64}$

Khi đó, S là một cấp số nhân với công bội là 2, $u_1 = 1$.

$$S = u_1 + u_2 + ... + u_{64} = u_1 \times \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1$$

.

Đáp số của bài toán là một con số gồm 20 chữ số. Số gạo này có thể trải lên toàn bộ bề mặt trái đất với độ dày lên đến 2 mm.

Nguyễn Bảo Vương

Chương 3

Bài 6 MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÓ

PHẦN 1. CÁC DẠNG TOÁN KHÓ

DẠNG 1. TÍNH TỔNG CỦA DÃY SỐ

Bài tập tự luận

Câu 1. Tính tổng: $S=1+2+2^2+...+2^{100}$

Câu 2. Tính tổng $S=10+10^2+...+10^{20}$

Câu 3. Tính tổng $M=\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+...+\frac{1}{5^{10}}$

Câu 4. Tính tổng $S=1.2+3.4+5.6+...+11.12$

Câu 5. Tính tổng $S=2.3+4.5+6.7+...+20.21$

Câu 6. Tìm x biết: $(2x+3)+(2x+7)+(2x+11)+...+(2x+79)=1720$

Câu 7. Tính giá trị biểu thức: $A=\frac{1+2+3+...+2018}{1+3+5+...+1009}$

Câu 8. Cho tổng: $S_n=1+5+9+...+4n-3$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Tính $S_{10}^2+S_{15}^2$

Câu 9. Tìm x biết: $(x^2-5x+3)+(x^2-5x+7)+(x^2-5x+11)+...+(x^2-5x+79)=740$

Câu 10. Cho tổng: $S_n=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. Tính S_{30}

Câu 11. Tìm x biết: $\left(x+\frac{2}{1.3}\right)+\left(x+\frac{2}{3.5}\right)+\left(x+\frac{2}{5.7}\right)+...+\left(x+\frac{2}{51.53}\right)=\frac{1430}{53}$

Câu 12. Cho tổng: $S_n=1+2.2!+3.3!+...+n.n!$. Tính S_{20}

Câu 13. Cho tổng $S_n=\frac{5}{1.2}+\frac{5}{2.3}+\frac{5}{3.4}+...+\frac{5}{n(n+1)}$. Tính $S_4^2+S_6^2$

Câu 14. Tìm x biết:

$$\left(x^2-3x+\frac{3}{1.4}\right)+\left(x^2-3x+\frac{5}{4.9}\right)+\left(x^2-3x+\frac{7}{9.16}\right)+...+\left(x^2-3x+\frac{19}{81.100}\right)=-\frac{1701}{100}$$

Câu 15. Tìm x biết:

$$\left(\cos x-\sin x+\frac{5}{1.4}\right)+\left(\cos x-\sin x+\frac{5}{4.7}\right)+...+\left(\cos x-\sin x+\frac{5}{19.22}\right)=\frac{35}{22}+7\sqrt{2}$$

Câu 16. Tìm x biết: $\left(x^2+1\right)+\left(x^2+\frac{1}{3}\right)+\left(x^2+\frac{1}{3^2}\right)+...+\left(x^2+\frac{1}{3^7}\right)=\frac{3^8+16.3^7x-1}{2.3^7}$

Câu 17. Cho tổng: $S=\frac{9-1}{9}+\frac{9^2-1}{9^2}+\frac{9^3-1}{9^9}+...+\frac{9^9-1}{9^9}$. Tính 8S

Câu 18. Cho tổng: $S_n=1.a^0+2.a^1+3.a^2+...+(n+1).a^n$ với $n\in\mathbb{N}^*, a\neq 1$. Tìm công thức S_n

Câu 19. Tính tổng: $S=9+99+999+...+9...999$ (n chữ số 9)

DẠNG 2: DỰA VÀO TÍNH CHẤT CỦA CẤP SỐ CỘNG, CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

Bài tập tự luận

Câu 1. Cho a,b,c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, chứng minh rằng:

a). $a^2+2bc=c^2+2ab$

b). $a^2+8bc=(2b+c)^2$

c). $a^2+ab+b^2, a^2+ac+c^2, b^2+bc+c^2$ là cấp số cộng.

Câu 2. Cho a, b, c là 3 số hạng liên tiếp của một CS**C.** Chứng minh:

a). a^2-bc, b^2-ac, c^2-ab cũng là 3 số hạng liên tiếp của một CS**C.**

b). $2(a+b+c)^3=9\left[a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)\right]$

Câu 3. Cho a^2, b^2, c^2 lập thành 1 cấp số cộng có công sai khác không.

Chứng minh rằng $\frac{1}{b+c};\frac{1}{c+a};\frac{1}{a+b}$ cũng lập thành một cấp số cộng.

Câu 4. Cho cấp số cộng:a,b,c. CMR: $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}};\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}};\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}, (a>0;b>0;c>0)$ theo thứ tự đó cũng lập thành CS**C.**

Câu 5. Cho cấp số cộng $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ với công sai $d\neq 0$ và tất cả các số hạng đều dương. Chứng minh:

$$\frac{1}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_2}}+\frac{1}{\sqrt{u_2}+\sqrt{u_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{u_{n-1}}+\sqrt{u_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_n}}$$

Câu 6. Một cấp số cộng có tính chất với mọi số nguyên dương m và n khác nhau, có các tổng S_m và S_n thỏa hệ thức: $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}$. Chứng minh: $\frac{u_m}{u_n}=\frac{2m-1}{2n-1}$

Câu 7. Cho tam giác ABC có $\tan\frac{A}{2}, \tan\frac{B}{2}, \tan\frac{C}{2}$ theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng. Chứng minh $\cos A, \cos B, \cos C$ theo thứ tự cũng lập thành cấp số cộng.

Câu 8. Cho ΔABC có $\cot\frac{A}{2}, \cot\frac{B}{2}, \cot\frac{C}{2}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh: Ba cạnh a,b,c theo thứ tự cũng tạo thành một cấp số cộng.

Câu 9. Chứng minh rằng nếu ba số a, b, c lập thành một cấp số cộng thì ba số x, y, z cũng lập thành một cấp số cộng, với: $x=a^2-bc$, $y=b^2-ca$, $z=c^2-ab$.

DẠNG 3: DỰA VÀO TÍNH CHẤT CỦA CẤP SỐ NHÂN, CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC:

Bài tập tự luận

Câu 1. Cho a, b, c, d là bốn số hạng liên tiếp của một cấp số nhân. Chứng minh:

$a).(ab+bc+ca)^3=abc(a+b+c)^3$

$b).\ (a^2+b^2)(b^2+c^2)=(ab+bc)^2$

$c).\ (a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2$

d). $(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2=(a-d)^2$

e). $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=a^3+b^3+c^3$

Câu 2. Cho tổng $A=1+11+111+\cdots+\underbrace{111...1}_{n}$. Chứng minh rằng $A=\frac{10^{n+1}-9(n+1)-1}{81}$

Câu 3. Cho cấp số nhân có số hạng đầu $u_1\neq 0$ và $q\neq 0, q\neq\pm 1$. Gọi S_n là tổng của n số hạng đầu tiên. Chứng minh: $S_n(S_{3n}-S_{2n})=(S_{2n}-S_n)^2$

Câu 4. Cho ba số dương a, b, c lập thành CSN. Chứng minh:

$\frac{1}{3}(a+b+c), \sqrt{\frac{1}{3}(ab+bc+ca)}, \sqrt[3]{abc}$ cũng lập thành CSN.

Câu 5. Cho CSN (u_n) và các số nguyên dương $m, k\,(m<k)$.

Chứng minh rằng: $u_{k-m}u_{k+m}=u_k^2$

Câu 6. Cho 3 số a, b, c là 3 số hạng liên tiếp của cấp số nhân. Chứng minh rằng: $(a^2+b^2)(b^2+c^2)=(ab+bc)^2$

Câu 7. Cho a, b, c là CSC thỏa $a+b+c=\frac{3\pi}{4}$. Chứng minh $\tan a, \tan b, \tan c$ theo thứ tự đó lập thành CSN.

PHẦN 2. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tổng: $A=2+4+6+\ldots+2018$ có giá trị là:

A. 2018001. **B.** 1209900. **C.** 1010101. **D.** 1019090.

Câu 2. Tổng: $B=1+4+7+\ldots+3031$ bằng:

A. 1532676. **B.** 1435000. **C.** 1351110. **D.** 1322300.

Câu 3. Giá trị của tổng: $C=-13-9-5+\ldots+387$ bằng:

A. 23455. **B.** 18887. **C.** 36778. **D.** 43234.

Câu 4. Tổng: $S=(2+\sqrt{2})+(4+\sqrt{2})+(6+\sqrt{2})+\ldots+(1000+\sqrt{2})$ có giá trị là:

A. $250500+\sqrt{2}$. **B.** $250500+500\sqrt{2}$. **C.** $255500+500\sqrt{2}$. **D.** $250050+500\sqrt{2}$.

Câu 5. Giá trị của tổng: $S=\frac{1}{100}+\frac{101}{100}+\frac{201}{100}+\ldots+\frac{1001}{100}$ bằng:

A. $\frac{5514}{100}$. **B.** $\frac{5501}{100}$. **C.** $\frac{5511}{100}$. **D.** $\frac{5515}{100}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 6. Cho tổng: $S_n=1+3+5+\ldots+2n+1, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Tìm S_{100}?

A. 10201. **B.** 10000. **C.** 10200. **D.** 10202.

Câu 7. Cho tổng: $S_n=2+4+6+\ldots+2n$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Khi đó công thức của S_n là?

A. $n(n+2)$. **B.** $\frac{n(n+1)}{2}$. **C.** $n(n+1)$. **D.** n^2.

Câu 8. Tìm x biết: $(x+3)+(x+7)+(x+11)+\ldots+(x+79)=860$

A. $x=2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=4$. **D.** $x=3$.

Câu 9. Cho tổng: $S_n=1+10+19+\ldots+9n-8$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Biết: $S_k=415$ Khi đó: $2k^3+18$ bằng:

A. 2016. **B.** 2017. **C.** 2018. **D.** 2019.

Câu 10. Tìm x biết: $(\sin x+\sqrt{3}\cos x+3)+(\sin x+\sqrt{3}\cos x+7)+\ldots+(\sin x+\sqrt{3}\cos x+79)=860$

A. $x=\frac{\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$. **B.** $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$.

C. $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$. **D.** $x=\frac{\pi}{6}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$.

Câu 11. Cho tổng: $S_n=-10-5+5\ldots+(5n-15)$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Biết: $S_k=375$. Khi đó tam giác đều cạnh $k\,(cm)$ có diện tích bằng:

A. $\frac{125\sqrt{3}}{4}(\text{cm}^2)$. **B.** $\frac{196\sqrt{3}}{4}(\text{cm}^2)$. **C.** $50(cm^2)$. **D.** $\frac{225\sqrt{3}}{4}(\text{cm}^2)$.

Câu 12. Tổng $S=\frac{100}{10.15.20}+\frac{100}{15.20.25}+\frac{100}{20.25.30}+\ldots+\frac{100}{110.115.120}$ có giá trị bằng:

A. $\frac{93}{1380}$ **B.** $\frac{91}{13800}$ **C.** $\frac{9}{138}$ **D.** $\frac{91}{1380}$

Câu 13. Giá trị của tổng: $S=\frac{12}{4.16}+\frac{20}{16.36}+\frac{28}{36.64}+...+\frac{84}{400.484}$ là:

A. $\frac{31}{121}$ **B.** $\frac{30}{121}$ **C.** $\frac{32}{121}$ **D.** $\frac{33}{121}$

Câu 14. Cho tổng: $S=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Lựa chọn đáp án đúng.

A. $S_3=\frac{1}{12}$. **B.** $S_2=\frac{1}{6}$. **C.** $S_2=\frac{2}{3}$. **D.** $S_3=\frac{1}{4}$.

Câu 15. Tìm x biết: $\left(x-\frac{2}{1.2.3}\right)+\left(x-\frac{2}{2.3.4}\right)+\left(x-\frac{2}{3.4.5}\right)+...+\left(x-\frac{2}{20.21.22}\right)=\frac{9125}{231}$

A. $x=1$ **B.** $x=2$ **C.** $x=3$ **D.** $x=4$

Câu 16. Cho $M=\frac{5}{1024}+\frac{5}{512}+\frac{5}{256}+...+\frac{5}{2}$. Khi đó M bằng:

A. $\frac{1023}{1024}$ **B.** $\frac{5111}{1024}$ **C.** $\frac{1024}{1023}$ **D.** $\frac{5115}{1024}$

Câu 17. Cho $M=5+\frac{5}{3}+\frac{5}{9}+...+\frac{5}{729}$. Khi đó $729M$ bằng:

A. $\frac{5465}{729}$ **B.** 5460 **C.** 5465 **D.** $\frac{5460}{729}$

Câu 18. Cho tổng: $S_n=1+2+2^2+...+2^n$. Chọn mệnh đề đúng:

A. $S_{10}=2047$ **B.** $S_{10}=2048$ **C.** $S_{10}=1024$ **D.** $S_{10}=1023$

Câu 19. Cho tổng: $S=1-3+3^2+...+3^{10}$. Chọn mệnh đề đúng:

A. $S>0$ **B.** $S<0$ **C.** $S=-132860$ **D.** $S=132860$

Câu 20. Tìm x biết: $(x+1)+(x+4)+(x+16)+...+(x+4096)=5482$

A. $x=1$ **B.** $x=2$ **C.** $x=3$ **D.** $x=4$

Câu 21. Cho $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}$. Công thức của S_n là:

A. $\frac{2^n-1}{2^{n-1}}$ **B.** $\frac{2^{n+1}-1}{2^n}$ **C.** $\frac{2^n-1}{2^n}$ **D.** $\frac{2^{n+1}-1}{2^{n-1}}$

Câu 22. Cho tổng: $S=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{8}\right)+...+\left(1-\frac{1}{2048}\right)$. Khi đó: $2^{11}.S$ bằng:

A. $5.2^{12}+1$ **B.** 5.2^{12} **C.** $5.2^{12}-1$ **D.** $5.2^{13}+1$

Câu 23. Tính tổng: $S_n=1.5+3.7+5.9+...+(2n-1).(2n+3)$ khi $n=15$

A. 5450 **B.** 5400 **C.** 5395 **D.** 5650

Câu 24. Giá trị của tổng: $S_n=1.4+3.8+5.12+...+(2n-1).4n$ khi $n=10$ là:

A. 1650 **B.** 2860 **C.** 2650 **D.** 1950

Câu 25. Cho tổng $S_n=1.2+3.4+5.6+...+(2n-1)2n$. Tính giá trị của S_{50}

A. 169150 **B.** 155000 **C.** 165050 **D.** 165000

Câu 26. Cho tổng $S_n=1.2+2.5+3.8+...+n(3n-1)$. Mệnh đề đúng là:

A. $S_6=650$ **B.** $S_8=576$ **C.** $S_{10}=150$ **D.** $S_{12}=850$

Câu 27. Tìm x biết: $(x+1.2)+(x+2.5)+(x+3.8)+...+(x+10.29)=1200$

A. $x=7$ **B.** $x=8$ **C.** $x=9$ **D.** $x=10$

Câu 28. Cho tổng $S_n=1.3+3.5+5.7+...+(2n-1)(2n+1)$. Công thức của S_n là:

A. $\dfrac{n\left[2(n+1)(2n+1)-3\right]}{3}$ **B.** $\dfrac{n\left[(n+1)(2n+1)-6\right]}{3}$

C. $\dfrac{n\left[(n+1)(2n+1)-6\right]}{2}$ **D.** $\dfrac{(n+1)(2n+1)-6}{6}$

Câu 29. Cho: $1.3+4.5+9.7+...+n^2(2n+1)$

. Biết: $\sum_1^n n^3=1+2^3+3^3+...n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$. Công thức của S_n. là:

A. $\dfrac{n(n+1)(3n^2+5n+1)}{3}$ **B.** $\dfrac{n(n+1)(3n+1)}{6}$

C. $\dfrac{n(n+1)(3n^2+5n+1)}{6}$ **D.** $\dfrac{n(n+1)(5n+1)}{3}$

Câu 30. Tìm x biết: $(x^2-x+1.2)+(x^2-x+2.5)+(x^2-x+3.8)+...+(x^2-x+13.38)=2444$

A. $x=2\vee x=3$ **B.** $x=-2\vee x=3$ **C.** $x=-2\vee x=-3$ **D.** $x=2\vee x=-3$

Câu 31. Tìm $x\in[0;\pi]$ biết: $(2\sin x+1.2)+(2\sin x+2.5)+(2\sin x+3.8)+...+(2\sin x+13.38)=2392$

A. $x=\dfrac{\pi}{2}$ **B.** $x=\dfrac{\pi}{3}$ **C.** $x=\dfrac{\pi}{4}$ **D.** $x=\dfrac{\pi}{6}$

Câu 32. Cho tổng: $1.4+2.7+3.10+...+n(3n+1)$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Biết: $S_k=294$. Hoán vị của k phần tử là:

A. 5040 **B.** 620 **C.** 120 **D.** 720

Câu 33. Cho tổng: $S_k=1.2+2.5+3.8+...+n(3n-1)$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Biết: $S_k=576$. Khi đó hình vuông có cạnh $k(m)$ có diện tích là:

A. $64m^2$ **B.** $64cm^2$ **C.** $81m^2$ **D.** $81cm^2$

Câu 34. Cho tổng: $1+3.4+5.9+...+(2n-1)n^2$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Tính $S_6^2-S_5^2$:

A. 469606 **B.** 469650 **C.** 469656 **D.** 46965

Câu 35. Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau: $\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=\dfrac{u_n^2}{2017}+u_n,\quad n=1,2,...\end{cases}$.

Tính tổng $S_n=\dfrac{u_1}{u_2}+\dfrac{u_2}{u_3}+\cdots+\dfrac{u_n}{u_{n+1}}$.

A. $S_n=2017\left(1-\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$. **B.** $S_n=2017\left(1-\dfrac{1}{u_n}\right)$. **C.** $S_n=2017(u_n-1)$. **D.** $S_n=\dfrac{u_n}{2017}$.

Câu 36. Cho dãy số (u_n) có: $\begin{cases}u_1=2039\\ u_{n+1}=u_n+2^n+2011\ \ (n\ge 1)\end{cases}$. Hãy tính tổng $S_n=u_1+u_2+...+u_n$.

A. $S_n=26n+2^n-1+2011\dfrac{n(n+1)}{2}$. **B.** $S_n=26n-2(2^n-1)+2011\dfrac{n(n+1)}{2}$.

C. $S_n=26n+2(2^n-1)+2011\dfrac{n(n+1)}{2}$. **D.** $S_n=26n+2(2^n+1)+2011\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Câu 37. Cho dãy số (u_n), được xác định bởi $u_1=\frac{2}{3}$ và $u_{n+1}=\frac{u_n}{2(2n+1)u_n+1}$

Tính tổng 2017 số hạng đầu tiên của dãy số đó.

A. $\frac{2016}{2017}$. **B.** $\frac{4035}{4034}$. **C.** $\frac{4034}{4035}$. **D.** $\frac{2017}{2016}$.

Câu 38. Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi $u_n=\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}+\sqrt[4]{n^3+n^2}+\sqrt[4]{n^3+2n^2+n}+\sqrt[4]{n^3+3n^2+3n+1}}$, $n\geq 1$.

Tính tổng $S=u_1+u_2+...+u_{2018^4-1}$.

A. 2016. **B.** 2017. **C.** 2018. **D.** 2019.

Câu 39. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1=\frac{2}{3}$ và $u_{n+1}=\frac{u_n}{2(2n+1)u_n+1}$, $(n\in\mathbb{N}^*)$. Tính tổng 2018 số hạng đầu tiên của dãy số đó?

A. $\frac{4036}{4035}$. **B.** $\frac{4035}{4034}$. **C.** $\frac{4038}{4037}$. **D.** $\frac{4036}{4037}$.

Câu 40. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1=5$, $a_{n+1}=q.a_n+3$ với mọi $n\geq 1$, trong đó q là hằng số, $q\neq 0$, $q\neq 1$. Biết công thức số hạng tổng quát của dãy số viết được dưới dạng $a_n=\alpha.q^{n-1}+\beta\frac{1-q^{n-1}}{1-q}$.

Tính $\alpha+2\beta$?

A. 13. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 16.

Câu 41. Cho bốn số a, b, c, d theo thứ tự đó tạo thành cấp số nhân với công bội khác 1. Biết tổng ba số hạng đầu bằng $\frac{148}{9}$, đồng thời theo thứ tự đó chúng lần lượt là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng. Tính giá trị biểu thức $T=a-b+c-d$.

A. $T=\frac{101}{27}$. **B.** $T=\frac{100}{27}$. **C.** $T=-\frac{100}{27}$. **D.** $T=-\frac{101}{27}$.

Câu 42. Cho dãy số (U_n) xác định bởi: $U_1=\frac{1}{3}$ và $U_{n+1}=\frac{n+1}{3n}.U_n$. Tổng $S=U_1+\frac{U_2}{2}+\frac{U_3}{3}+...+\frac{U_{10}}{10}$ bằng:

A. $\frac{3280}{6561}$. **B.** $\frac{29524}{59049}$. **C.** $\frac{25942}{59049}$. **D.** $\frac{1}{243}$.

Câu 43. Cho năm số a, b, c, d, e tạo thành một cấp số nhân theo thứ tự đó và các số đều khác 0, biết $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=10$ và tổng của chúng bằng 40. Tính giá trị $|S|$ với $S=abcde$.

A. $|S|=42$. **B.** $|S|=62$. **C.** $|S|=32$. **D.** $|S|=52$.

Câu 44. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases}5u_1+\sqrt{5u_1-u_2}=u_2+6\\ u_{n+1}=3u_n\ \forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n\geq 2.3^{2018}$ bằng:

A. 2017. **B.** 2018. **C.** 2019. **D.** 2010

Câu 45. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q và thỏa

$$\begin{cases}u_1+u_2+u_3+u_4+u_5=49\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4}+\frac{1}{u_5}\right).\\ u_1+u_3=35\end{cases}$$

Tính $P=u_1+4q^2$.

A. $P=24$. **B.** $P=29$. **C.** $P=34$. **D.** $P=39$.

Câu 46. Cho dãy số tăng a, b, c $(c\in\mathbb{Z})$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân; đồng thời a, $b+8$, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng và a, $b+8$, $c+64$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tính giá trị biểu thức $P=a-b+2c$.

A. $P=\dfrac{184}{9}$. **B.** $P=64$. **C.** $P=\dfrac{92}{9}$. **D.** $P=32$.

Câu 47. Cho bố số a, b, c, d biết rằng a, b, c theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân công bội $q>1$; còn b, c, d theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng. Tìm q biết rằng $a+d=14$ và $b+c=12$.

A. $q=\dfrac{18+\sqrt{73}}{24}$. **B.** $q=\dfrac{19+\sqrt{73}}{24}$. **C.** $q=\dfrac{20+\sqrt{73}}{24}$. **D.** $q=\dfrac{21+\sqrt{73}}{24}$.

Câu 48. Cho ba số a, b, c là ba số liên tiếp của một cấp số cộng có công sai là 2. Nếu tăng số thứ nhất thêm 1, tăng số thứ hai thêm 1 và tăng số thứ ba thêm 3 thì được ba số mới là ba số liên tiếp của một cấp số nhân. Tính $(a+b+c)$.

A. 12. **B.** 18. **C.** 3. **D.** 9.

Câu 49. Cho ba số $x;5;2y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng và ba số $x;4;2y$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân thì $|x-2y|$ bằng

A. $|x-2y|=10$. **B.** $|x-2y|=9$. **C.** $|x-2y|=6$. **D.** $|x-2y|=8$.

Câu 50. Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) biết $u_1=1$ và u_1,u_3,u_4 theo thứ tự là ba số hạng liên tiếp trong một cấp số cộng.

A. $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}-1}$. **D.** 2.

Câu 51. Ba số phân biệt có tổng là 217 có thể coi là các số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, cũng có thể coi là số hạng thứ 2, thứ 9, thứ 44 của một cấp số cộng. Hỏi phải lấy bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng này để tổng của chúng bằng 820?

A. 20. **B.** 42. **C.** 21. **D.** 17.

Câu 52. Cho khai triển

$$P(x)=(1+x)(1+2x)(1+3x)...(1+2017x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{2017}x^{2017}.$$

Tính $T=a_2+\dfrac{1}{2}\left(1^2+2^2+...+2017^2\right)$.

A. $\left(\dfrac{2016.2017}{2}\right)^2$. **B.** $\left(\dfrac{2017.2018}{2}\right)^2$. **C.** $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2016.2017}{2}\right)^2$. **D.** $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2017.2018}{2}\right)^2$.

Câu 53. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1=2018$ và $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{\sqrt{1+u_n^{\,2}}}$ với mọi $n\geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n<\dfrac{1}{2018}$ bằng

A. 4072325 **B.** 4072324 **C.** 4072326 **D.** 4072327

Câu 54. Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng đều dương, số hạng đầu $u_1=1$ và tổng của 100 số hạng đầu tiên bằng 14950. Tính giá trị của tổng

$$S=\frac{1}{u_2\sqrt{u_1}+u_1\sqrt{u_2}}+\frac{1}{u_3\sqrt{u_2}+u_2\sqrt{u_3}}+...+\frac{1}{u_{2018}\sqrt{u_{2017}}+u_{2017}\sqrt{u_{2018}}}.$$

A. $\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{6052}}\right)$. **B.** $1-\frac{1}{\sqrt{6052}}$. **C.** 2018. **D.** 1.

Câu 55. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu bằng 1 và tổng 100 số hạng đầu bằng 14950. Giá trị của tổng $\frac{1}{u_1u_2}+\frac{1}{u_2u_3}+...+\frac{1}{u_{49}u_{50}}$ bằng.

A. $\frac{49}{74}$. **B.** 148. **C.** $\frac{49}{148}$. **D.** 74.

Câu 56. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1=1$ và tổng 100 số hạng đầu bằng 10000. Tính tổng $S=\frac{1}{u_1u_2}+\frac{1}{u_2u_3}+...+\frac{1}{u_{99}u_{100}}$.

A. $S=\frac{100}{201}$. **B.** $S=\frac{200}{201}$. **C.** $S=\frac{198}{199}$. **D.** $S=\frac{99}{199}$.

Câu 57. Cho cấp số cộng (u_n) biết: $\begin{cases}u_1+u_5=6\\u_{10}-u_2=8\end{cases}$. Tính $S=\frac{u_1.u_2+u_2.u_3+u_3.u_4+...+u_{2018}.u_{2019}+u_{2019}.u_{2020}}{2019}$

A. $S=\frac{4080499}{3}$. **B.** $S=\frac{4078380}{3}$. **C.** $S=\frac{4082420}{3}$. **D.** $S=\frac{4088483}{3}$.

Câu 58. Phương trình $x^4-2(m+1)x^2+2m+1=0$ (1) có bốn nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

A. $m=2$ hoặc $m=-\frac{4}{9}$. **B.** $m=4$ hoặc $m=-\frac{4}{9}$. **C.** $m=4$ hoặc $m=-2$. **D.** $m=3$ hoặc $m=-1$.

Câu 59. Gọi S là tổng tất cả các giá trị m để phương trình $(x^2+2x-3)(x-2m)=0$ có 3 nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng có công sai lớn hơn 2. Tính S.

A. $S=-1$. **B.** $S=-\frac{3}{2}$. **C.** $S=2$. **D.** $S=-4$.

Chương 3

Bài 6 MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÓ

PHẦN 1. CÁC DẠNG TOÁN KHÓ

DẠNG 1. TÍNH TỔNG CỦA DÃY SỐ

Bài tập tự luận

Câu 1. Tính tổng: $S=1+2+2^2+...+2^{100}$

Lời giải

Ta có

$S=1+2+2^2+...+2^{100} \Leftrightarrow (2-1)S=(2-1)\left(2^{100}+...+2^2+2+1\right)$

$\Leftrightarrow S=2^{101}-1$

Câu 2. Tính tổng $S=10+10^2+...+10^{20}$

Lời giải

Ta có

$S=10+10^2+...+10^{20} \Leftrightarrow S+1=1+10+10^2+...+10^{20}$

$\Leftrightarrow (S+1)(10-1)=(10-1)\left(10^{20}+...+10^2+10+1\right)$

$\Leftrightarrow 9(S+1)=10^{21}-1 \Leftrightarrow S=\dfrac{10^{21}-10}{9}$

Câu 3. Tính tổng $M=\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{5^3}+...+\dfrac{1}{5^{10}}$

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Ta có

$M=\dfrac{1}{5^{10}}+...+\dfrac{1}{5^3}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{5} \Leftrightarrow M+1=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{10}+...+\left(\dfrac{1}{5}\right)^3+\left(\dfrac{1}{5}\right)^2+\dfrac{1}{5}+1$

$\Leftrightarrow (M+1)\left(\dfrac{1}{5}-1\right)=\left(\dfrac{1}{5}-1\right)\left[\left(\dfrac{1}{5}\right)^{10}+...+\left(\dfrac{1}{5}\right)^3+\left(\dfrac{1}{5}\right)^2+\dfrac{1}{5}+1\right]$

$\Leftrightarrow -\dfrac{4}{5}(M+1)=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{11}-1 \Leftrightarrow M+1=\dfrac{5.5^{10}-1}{4.5^{10}} \Leftrightarrow M=\dfrac{5^{10}-1}{4.5^{10}}=\dfrac{1}{4}\left[1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^{10}\right]$

Câu 4. Tính tổng $S=1.2+3.4+5.6+...+11.12$

Lời giải

Ta có

$a_k=(2k-1)2k, k\in\mathbb{N}^*.\ S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=1.2+3.4+5.6+...+(2n-1)2n$

$\Leftrightarrow S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)2k=4\sum_{k=1}^{n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}k$

$\Leftrightarrow S_n=\dfrac{4n(n+1)(2n+1)}{6}-n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(4n-1)}{3}$

Vậy $S=1.2+3.4+5.6+...+11.12=\dfrac{6(6+1)(4.6-1)}{3}=322$

Câu 5. Tính tổng $S=2.3+4.5+6.7+...+20.21$

Lời giải

Ta có

$a_k = 2k(2k+1), k \in \mathbb{N}^*$. $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = 2.3 + 4.5 + 6.7 + ... + 2n(2n+1)$

$\Leftrightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} 2k(2k+1) = 4\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k$

$\Leftrightarrow S_n = \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} + n(n+1) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{3}$

Vậy $S = 2.3 + 4.5 + 6.7 + ... + 20.21 = \frac{10(10+1)(40+5)}{3} = 1650$

Câu 6. Tìm x biết: $(2x+3)+(2x+7)+(2x+11)+...+(2x+79)=1720$

Lời giải

Ta có $3440 = (2x+3+2x+79)+(2x+7+2x+75)+...+(2x+79+2x+3)$ (có 20 ngoặc đơn)

Do đó $3440 = 20(2x+3+2x+79) \Leftrightarrow 3440 = 20(4x+82) \Leftrightarrow x = \frac{45}{2}$

Câu 7. Tính giá trị biểu thức: $A = \frac{1+2+3+...+2018}{1+3+5+...+1009}$

Lời giải

Đặt $P = 1+2+3+...+2018, \quad Q = 1+3+5+...+1009$

Ta có $2P = (1+2018)+(2+2017)+...+(2018+1) = 2018.2019 \Rightarrow P = 2037171$

$2Q = (1+1009)+(2+1007)+...+(1009+1) = 505.1010 \Rightarrow Q = 255025$

Vậy $A = \frac{2037171}{255025}$

Câu 8. Cho tổng: $S_n = 1+5+9+...+4n-3$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Tính $S_{10}^2 + S_{15}^2$

Lời giải

Ta có $S_{10} = 1+5+9+...+37 = 190 \Rightarrow (S_{10})^2 = 36100$

$S_{15} = 1+5+9+...+57 = 435 \Rightarrow (S_{15})^2 = 189225$

Vậy $S_{10}^2 + S_{15}^2 = 225325$

Câu 9. Tìm x biết: $(x^2-5x+3)+(x^2-5x+7)+(x^2-5x+11)+...+(x^2-5x+79)=740$

Lời giải

Ta có

$1480 = (x^2-5x+3+x^2-5x+79)+...+(x^2-5x+79+x^2-5x+3) = 20(2x^2-10x+82)$

$\Leftrightarrow 74 = 2x^2-10x+82 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$

Câu 10. Cho tổng: $S_n = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. Tính S_{30}

Lời giải

Ta có $2S_n = \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \frac{2}{3.4.5} + ... + \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$

Trong đó

$\frac{2}{1.2.3}=\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3};\frac{2}{2.3.4}=\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4};\frac{2}{3.4.5}=\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5};$

$\frac{2}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

Khi đó

$2S_n=\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}\right)+\left(\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}\right)+\left(\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}\right)+...+\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$

$=\frac{1}{1.2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+3n}{(n+1)(n+2)}\Rightarrow S_n=\frac{n^2+3n}{2(n+1)(n+2)}$

Vậy $S_{30}=\frac{30^2+3.30}{2.(30+1)(30+2)}=\frac{495}{992}$

Câu 11. Tìm x biết: $\left(x+\frac{2}{1.3}\right)+\left(x+\frac{2}{3.5}\right)+\left(x+\frac{2}{5.7}\right)+...+\left(x+\frac{2}{51.53}\right)=\frac{1430}{53}$

Lời giải

Ta có

$\left(x+\frac{2}{1.3}\right)+\left(x+\frac{2}{3.5}\right)+\left(x+\frac{2}{5.7}\right)+...+\left(x+\frac{2}{51.53}\right)=\frac{1430}{53}$

$\Leftrightarrow 26x+\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+\frac{1}{51}-\frac{1}{53}\right)=\frac{1430}{53}\Leftrightarrow 26x+\frac{52}{53}=\frac{1430}{53}\Leftrightarrow x=1$

Câu 12. Cho tổng: $S_n=1+2.2!+3.3!+...+n.n!$. Tính S_{20}

Lời giải

Ta có $S_1=1=2!-1;\ S_2=2!-1+2.2!=3!-1;\ S_3=3!-1+3.3!=4!-1$

Dự đoán $S_n=1+2.2!+3.3!+...+n.n!=(n+1)!-1$. Ta dễ dàng chứng minh dự đoán này bằng quy nạp

Vậy $S_{20}=21!-1$

Câu 13. Cho tổng $S_n=\frac{5}{1.2}+\frac{5}{2.3}+\frac{5}{3.4}+...+\frac{5}{n(n+1)}$. Tính $S_4^2+S_6^2$

Lời giải

Ta có

$S_n=\frac{5}{1.2}+\frac{5}{2.3}+\frac{5}{3.4}+...+\frac{5}{n(n+1)}=5\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=5\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{5n}{n+1}$

Suy ra $S_4=4;\ S_6=\frac{30}{7}$. Vậy $S_4^2+S_6^2=16+\frac{900}{49}=\frac{1684}{49}$

Câu 14. Tìm x biết: $\left(x^2-3x+\frac{3}{1.4}\right)+\left(x^2-3x+\frac{5}{4.9}\right)+\left(x^2-3x+\frac{7}{9.16}\right)+...+\left(x^2-3x+\frac{19}{81.100}\right)=-\frac{1701}{100}$

Lời giải

Ta có

$$\left(x^2-3x+\frac{3}{1.4}\right)+\left(x^2-3x+\frac{5}{4.9}\right)+\left(x^2-3x+\frac{7}{9.16}\right)+...+\left(x^2-3x+\frac{19}{81.100}\right)=-\frac{1701}{100}$$

$$\Leftrightarrow 9\left(x^2-3x\right)+\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+...+\frac{1}{81}-\frac{1}{100}\right)=-\frac{1701}{100}\Leftrightarrow 9x^2-27x+\frac{99}{100}=-\frac{1701}{100}$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$$

Câu 15. Tìm x biết: $\left(\cos x-\sin x+\frac{5}{1.4}\right)+\left(\cos x-\sin x+\frac{5}{4.7}\right)+...+\left(\cos x-\sin x+\frac{5}{19.22}\right)=\frac{35}{22}+7\sqrt{2}$

Lời giải

Ta có

$$\left(\cos x-\sin x+\frac{5}{1.4}\right)+\left(\cos x-\sin x+\frac{5}{4.7}\right)+...+\left(\cos x-\sin x+\frac{5}{19.22}\right)=\frac{35}{22}+7\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 7\left(\cos x-\sin x\right)+\frac{5}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+...+\frac{1}{19}-\frac{1}{22}\right)=\frac{35}{22}+7\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 7\left(\cos x-\sin x\right)+\frac{35}{22}=\frac{35}{22}+7\sqrt{2}\Leftrightarrow \cos x-\sin x=\sqrt{2}\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=k2\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$$

Câu 16. Tìm x biết: $\left(x^2+1\right)+\left(x^2+\frac{1}{3}\right)+\left(x^2+\frac{1}{3^2}\right)+...+\left(x^2+\frac{1}{3^7}\right)=\frac{3^8+16.3^7x-1}{2.3^7}$

Lời giải

Ta có

$$\left(x^2+1\right)+\left(x^2+\frac{1}{3}\right)+\left(x^2+\frac{1}{3^2}\right)+...+\left(x^2+\frac{1}{3^7}\right)=\frac{3^8+16.3^7x-1}{2.3^7}$$

$$8x^2+\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^7}\right)=\frac{3^8+8.3^7x-1}{3^7}\Leftrightarrow 8x^2+\frac{3^8-1}{2.3^7}=\frac{3^8+16.3^7x-1}{2.3^7}$$

$$\Leftrightarrow 8x^2-8x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$$

Câu 17. Cho tổng: $S=\frac{9-1}{9}+\frac{9^2-1}{9^2}+\frac{9^3-1}{9^9}+...+\frac{9^9-1}{9^9}$. Tính 8S

Lời giải

Ta có

$$S=\frac{9-1}{9}+\frac{9^2-1}{9^2}+\frac{9^3-1}{9^3}+...+\frac{9^9-1}{9^9}\Leftrightarrow S=9-\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{9^3}+...+\frac{1}{9^9}\right)$$

$$\Leftrightarrow S=10-\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{9^3}+...+\frac{1}{9^9}\right)\Leftrightarrow S=10-\frac{9^{10}-1}{8.9^9}=\frac{71.9^9+1}{8.9^9}\Rightarrow 8S=71+\frac{1}{9^9}$$

Câu 18. Cho tổng: $S_n=1.a^0+2.a^1+3.a^2+...+(n+1).a^n$ với $n\in\mathbb{N}^*, a\neq 1$. Tìm công thức S_n

Lời giải

Ta có

$S_n = 1.a^0 + 2.a^1 + 3.a^2 + ... + (n+1).a^n$

$a.S_n = a + 2a^2 + 3a^3 + ...na^n + (n+1).a^{n+1}$

$\Rightarrow S_n(a-1) = -(1 + a + a^2 + ... + a^n) + (n+1).a^{n+1}$

$\Leftrightarrow S_n(a-1) = -\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a} + (n+1).a^{n+1} \Leftrightarrow S_n = \dfrac{1-a^{n+1}}{(a-1)^2} + \dfrac{(n+1).a^{n+1}}{a-1}$

Câu 19. Tính tổng: $S = 9 + 99 + 999 + ... + 9...999$ (n chữ số 9)

Lời giải

Ta có

$S = 9 + 99 + 999 + ... + 9...999 = (9+1) + (99+1) + ... + (9...999+1) - n$

$\Leftrightarrow S = 10^1 + 10^2 + 10^3 + ... + 10^n - n \Leftrightarrow S = 10\dfrac{1-10^n}{1-10} - n = \dfrac{10^{n+1} - 10 - 9n}{9}$

DẠNG 2: DỰA VÀO TÍNH CHẤT CỦA CẤP SỐ CỘNG, CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

Bài tập tự luận

Câu 1. Cho a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, chứng minh rằng:

a). $a^2 + 2bc = c^2 + 2ab$

b). $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$

c). $a^2 + ab + b^2, a^2 + ac + c^2, b^2 + bc + c^2$ là cấp số cộng.

Lời giải

a). Vì a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng: $a + c = 2b \Leftrightarrow a = 2b - c$

Ta có: $a^2 - 2ab = a^2 - a(a+c) = -ac = -c(2b-c) = c^2 - 2bc$

Vậy $a^2 - 2ab = c^2 - 2bc \Leftrightarrow a^2 + 2bc = c^2 + 2ab.$

b). Ta có $a^2 + 8bc = (2b-c)^2 + 8bc$

$= 4b^2 - 4bc + c^2 + 8bc = 4b^2 + 4bc + c^2 = (2b+c)^2.$

c). Ta cần chứng minh:

$(a^2 + ab + b^2) + (b^2 + bc + c^2) = 2(a^2 + ac + c^2)$

$\Leftrightarrow 2b^2 + ab + bc = a^2 + 2ac + c^2$

$\Leftrightarrow 2b^2 + b(a+c) = (a+c)^2$

$\Leftrightarrow 2b^2 + 2b^2 = (2b)^2$

$\Leftrightarrow 4b^2 = 4b^2$ (đúng).

Câu 2. Cho a, b, c là 3 số hạng liên tiếp của một CS**C.** Chứng minh:

a). $a^2 - bc, b^2 - ac, c^2 - ab$ cũng là 3 số hạng liên tiếp của một CS**C.**

b). $2(a+b+c)^3 = 9\left[a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b)\right]$

Lời giải

Vì a, b, c là 3 số hạng liên tiếp của một CS**C.** Nen theo tính chất CSC có: $a + c = 2b$

a). Ta phải chứng minh: $a^2 - bc + c^2 - ab = 2(b^2 - ac)$

$\Leftrightarrow a^2 + c^2 - b(a+c) = 2b^2 - 2ac \Leftrightarrow a^2 + 2ac + c^2 - 2b^2 = 2b^2$

$\Leftrightarrow (a+c)^2 = 4b^2 \Leftrightarrow 4b^2 = 4b^2$ (đúng) (đpcm).

b). Ta có: $9\left[a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)\right]=9\left[a^2(3b-a)+2b^3+(2b-a)^2(a+b)\right]$

$=9\left[3a^2b-a^3+2b^3+\left(4b^2-4ab+a^2\right)(a+b)\right]$

$=9\left(3a^2b-a^3+2b^3+4ab^2+4b^3-4a^2b-4ab^2+a^3+a^2b\right)=54b^3$ (1)

Ngoài ra: $2(a+b+c)^3=2(3b)^3=54b^3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Câu 3. Cho a^2,b^2,c^2 lập thành 1 cấp số cộng có công sai khác không.

Chứng minh rằng $\frac{1}{b+c};\frac{1}{c+a};\frac{1}{a+b}$ cũng lập thành một cấp số cộng.

Lời giải

Theo giả thuyết $a^2+c^2=2b^2$

Ta phải chứng minh: $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}=\frac{2}{c+a}$

Ta có: $a^2+c^2=b^2+b^2$

$\Leftrightarrow a^2-b^2=b^2-c^2 \Leftrightarrow (a-b)(a+b)=(b-c)(b+c) \Leftrightarrow \frac{a-b}{b+c}=\frac{b-c}{a+b}$

$\Leftrightarrow \frac{a-b}{(b+c)(c+a)}=\frac{(b-c)}{(a+b)(c+a)} \Leftrightarrow \frac{(a+c)-(b+c)}{(b+c)(c+a)}=\frac{(a+b)-(c+a)}{(a+b)(c+a)}$

$\Leftrightarrow \frac{a+c}{(a+c)(c+a)}-\frac{b+c}{(b+c)(c+a)}=\frac{a+b}{(a+b)(c+a)}-\frac{c+a}{(a+b)(c+a)}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{b+c}-\frac{1}{c+a}=\frac{1}{c+a}-\frac{1}{a+b}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{2}{c+a}$ (đpcm).

Nguyễn Bảo Vương

Câu 4. Cho cấp số cộng:a,b,c. CMR: $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}};\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}};\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}},(a>0;b>0;c>0)$ theo thứ tự đó cũng lập thành CSC.

Lời giải

Vì a, b, c lập thành CSC, ta có $a+c=2b$

Ta cần chứng minh: $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$

Ta có: $a+c=2b \Leftrightarrow a-b=b-c \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)}=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)}$

$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)-\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)}=\frac{\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)-\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}};\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}};\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ Theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng.

Câu 5. Cho cấp số cộng $u_1,u_2,...,u_n,...$ với công sai $d\neq 0$ và tất cả các số hạng đều dương. Chứng minh:

$$\frac{1}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_2}}+\frac{1}{\sqrt{u_2}+\sqrt{u_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{u_{n-1}}+\sqrt{u_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_n}}$$

Lời giải

Ta có $\frac{1}{\sqrt{u_{k-1}}+\sqrt{u_k}}=\frac{\sqrt{u_k}-\sqrt{u_{k-1}}}{u_k-u_{k-1}}=\frac{1}{d}\left(\sqrt{u_k}-\sqrt{u_{k-1}}\right),\left(\forall k=2,3,...,n\right)$

$$VT=\frac{1}{d}\left(\sqrt{u_2}-\sqrt{u_1}+\sqrt{u_3}-\sqrt{u_2}+\cdots+\sqrt{u_{n-1}}-\sqrt{u_{n-2}}+\sqrt{u_n}-\sqrt{u_{n-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{d}\left(\sqrt{u_n}-\sqrt{u_1}\right)=\frac{1}{d}\frac{u_n-u_1}{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_1}}=\frac{n-1}{\sqrt{u_n}-\sqrt{u_1}}\text{ (đpcm).}$$

Câu 6. Một cấp số cộng có tính chất với mọi số nguyên dương m và n khác nhau, có các tổng S_m và S_n thỏa hệ thức: $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}$. Chứng minh: $\frac{u_m}{u_n}=\frac{2m-1}{2n-1}$

Lời giải

$$\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}\Leftrightarrow\frac{m\left[2u_1+(m-1)d\right]}{n\left[2u_1+(n-1)d\right]}=\frac{m^2}{n^2}\Leftrightarrow\frac{2u_1+(m-1)d}{2u_1+(n-1)d}=\frac{m}{n}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2u_1+(m-1)d}{m}=\frac{2u_1+(n-1)d}{n}=\frac{\left[2u_1+(m-1)d\right]-\left[2u_1+(n-1)d\right]}{m-n}=d$$

$$\Rightarrow d=2u_1$$

Ta có $\frac{u_m}{u_n}=\frac{u_1+(m-1)d}{u_1+(n-1)d}=\frac{u_1+(m-1)2u_1}{u_1+(n-1)2u_1}=\frac{2m-1}{2n-1}$ (đpcm)

Câu 7. Cho tam giác ABC có $\tan\frac{A}{2},\tan\frac{B}{2},\tan\frac{C}{2}$ theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng. Chứng minh $\cos A,\cos B,\cos C$ theo thứ tự cũng lập thành cấp số cộng.

Lời giải

Ta có: $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}=2\tan\frac{B}{2}\Leftrightarrow\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=2.\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{C}{2}}=2.\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)}{\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{C}{2}}=2\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}\Leftrightarrow\frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{C}{2}}=2.\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\cos^2\frac{B}{2}=2.\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{C}{2}.\sin\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1+\cos B}{2}=\left[\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)+\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)\right].\sin\frac{B}{2}.$$

$$\Leftrightarrow\frac{1+\cos B}{2}=\cos\frac{A-C}{2}.\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{B}{2}.$$

$\Leftrightarrow \frac{1+\cos B}{2}=\cos\frac{A-C}{2}.\cos\frac{A+C}{2}+\sin^2\frac{B}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1+\cos B}{2}=\frac{1}{2}\left[\cos(-C)+\cos A\right]+\frac{1-\cos B}{2}$

$\Leftrightarrow 1+\cos B=\cos C+\cos A+1-\cos B \Leftrightarrow \cos A+\cos C=2\cos B.$

$\Rightarrow \cos A,\cos B,\cos C$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.

Câu 8. Cho ΔABC có $\cot\frac{A}{2},\cot\frac{B}{2},\cot\frac{C}{2}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh: Ba cạnh a,b,c theo thứ tự cũng tạo thành một cấp số cộng.

Lời giải

Ta có: $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{C}{2}=2\cot\frac{B}{2}\Leftrightarrow\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=2.\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$

$\Leftrightarrow\frac{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{C}{2}}=2\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$

$\Leftrightarrow\frac{\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{C}{2}}=2.\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}\Leftrightarrow\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}}=2.\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$

$\Leftrightarrow\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{B}{2}=2.\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{B}{2}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sin B=\left[\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{C}{2}\right)-\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)\right].\cos\frac{B}{2}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sin B=\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{C}{2}\right).\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{B}{2}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sin B=\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{C}{2}\right).\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin B$

$\Leftrightarrow\sin B=\frac{1}{2}(\sin A+\sin C)\Leftrightarrow 2\sin B=\sin A+\sin C\Leftrightarrow 2.\frac{b}{2R}=\frac{a}{2R}+\frac{c}{2R}\Leftrightarrow a+c=2b$

$\Rightarrow$ Ba cạnh của Δ tạo thành cấp số cộng.

Câu 9. Chứng minh rằng nếu ba số a, b, c lập thành một cấp số cộng thì ba số x, y, z cũng lập thành một cấp số cộng, với: $x=a^2-bc$, $y=b^2-ca$, $z=c^2-ab$.

Lời giải

a, b, c là cấp số cộng nên $a+c=2b$

Ta có 2y = $2b^2-2ca, x+z=a^2+c^2-b(a+c)$

$\Rightarrow x+z=(a+c)^2-2ac-2b^2=4b^2-2ac-2b^2=2b^2-2ac=2y$ (đpcm)

DẠNG 3: DỰA VÀO TÍNH CHẤT CỦA CẤP SỐ NHÂN, CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC:

Bài tập tự luận

Câu 1. Cho a,b,c,d là bốn số hạng liên tiếp của một cấp số nhân. Chứng minh:

$a).\left(ab+bc+ca\right)^3=abc\left(a+b+c\right)^3$

$b).\ \left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)=\left(ab+bc\right)^2$

$c).\ \left(a+b+c\right)\left(a-b+c\right)=a^2+b^2+c^2$

d). $\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2+\left(d-b\right)^2=\left(a-d\right)^2$

e). $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=a^3+b^3+c^3$

Lời giải

Vì a,b,c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, nên có $ac=b^2$.

a). Ta có $abc\left(a+b+c\right)^3=b^3\left(a+b+c\right)^3=\left(ab+b^2+bc\right)^3=\left(ab+bc+ca\right)^3$ (đpcm).

b). Ta có: $\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)=a^2b^2+a^2c^2+b^4+b^2c^2=a^2b^2+2b^4+b^2c^2$

$=a^2b^2+2ab.bc+b^2c^2=\left(ab+bc\right)^2$ (đpcm).

c). Ta có $\left(a+b+c\right)\left(a-b+c\right)=\left[\left(a+c\right)+b\right]\left[\left(a+c\right)-b\right]=\left(a+c\right)^2-b^2$

$=a^2+2ac+c^2-b^2=a^2+2b^2+c^2-b^2=a^2+b^2+c^2$ (đpcm).

d). Vì a,b,c,d lập thành CSN nên có: $a.d=bc,a.c=b^2,b.d=c^2$

Khai triển: $\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2+\left(d-b\right)^2=a^2+2b^2+2c^2+d^2-2bc-2ca-2bd$

$=a^2+2b^2+2c^2+d^2-2ad-2b^2-2c^2$

$=a^2-2ad+d^2$

$=\left(a-d\right)^2$

Nguyễn Bảo Vương

e). Có: $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=\frac{b^2c^2}{a}+\frac{a^2c^2}{b}+\frac{a^2b^2}{c}$ (1). Ta có $ac=b^2\Rightarrow\begin{cases}ac^3=b^2c^2\\a^3c=b^2a^2\\a^2c^2=b^4\end{cases}$

$\left(1\right)\Leftrightarrow a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=\frac{ac^3}{a}+\frac{b^4}{b}+\frac{a^3c}{c}=a^3+b^3+c^3$ (điều phải chứng minh).

Câu 2. Cho tổng $A=1+11+111+\cdots+\underbrace{111...1}_{n}$. Chứng minh rằng $A=\frac{10^{n+1}-9\left(n+1\right)-1}{81}$

Lời giải

Ta có $A=1+11+111+\cdots+\underbrace{111...1}_{n}\Leftrightarrow 9A=9+99+999+\cdots+\underbrace{99...9}_{n}$

$=\left(10-1\right)+\left(10^2-1\right)+\left(10^3-1\right)+\cdots+\left(10^n-1\right)$

$=\left(10+10^2+10^3+\cdots+10^n\right)-\left(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n}\right)$

$=\frac{10\left(1-10^n\right)}{1-10}-n=\frac{10^{n+1}-9n-10}{9}$

Vậy $A=\frac{10^{n+1}-9\left(n+1\right)-1}{81}$

Câu 3. Cho cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 \neq 0$ và $q \neq 0, q \neq \pm 1$. Gọi S_n là tổng của n số hạng đầu tiên.

Chứng minh: $S_n\left(S_{3n}-S_{2n}\right)=\left(S_{2n}-S_n\right)^2$

Lời giải

$$VT = S_n\left(S_{3n}-S_{2n}\right)=\frac{u_1\left(1-q^n\right)}{1-q}\left(\frac{u_1\left(1-q^{3n}\right)}{1-q}-\frac{u_1\left(1-q^{2n}\right)}{1-q}\right)$$

$$=\frac{u_1^2}{(1-q)^2}\cdot\left(1-q^n\right)\cdot\left(q^{2n}-q^{3n}\right)=\frac{u_1^2}{(1-q)^2}\cdot\left(1-q^n\right)\cdot q^{2n}\cdot\left(1-q^n\right)=\left(\frac{u_1q^n\left(1-q^n\right)}{1-q}\right)^2 (1)$$

$$VP=\left(S_{2n}-S_n\right)^2=\left[\frac{u_1\left(1-q^{2n}\right)}{1-q}-\frac{u_1\left(1-q^n\right)}{1-q}\right]^2=\left\{\frac{u_1}{1-q}\left[\left(1-q^n\right)\left(1+q^n\right)-\left(1-q^n\right)\right]\right\}^2$$

$$=\left[\frac{u_1}{1-q}q^n\left(1-q^n\right)\right]^2 (2)$$

Kết luận từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Câu 4. Cho ba số dương a, b, c lập thành CSN. Chứng minh:

$\frac{1}{3}(a+b+c), \sqrt{\frac{1}{3}(ab+bc+ca)}, \sqrt[3]{abc}$ cũng lập thành CSN.

Lời giải

Ta có $ac=b^2$ (tính chất CSN)

Ta phải chứng minh: $\frac{1}{3}(a+b+c).\sqrt[3]{abc}=\left(\sqrt{\frac{1}{3}(ab+bc+ca)}\right)^2$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(a+b+c)\sqrt[3]{b^3}=\frac{1}{3}(ab+bc+ca)\Leftrightarrow \frac{1}{3}(a+b+c)b=\frac{1}{3}(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(ab+b^2+cb\right)=\frac{1}{3}(ab+bc+ca)\Leftrightarrow \frac{1}{3}(ab+ac+cb)=\frac{1}{3}(ab+bc+ca)$$ (đpcm).

Câu 5. Cho CSN (u_n) và các số nguyên dương $m,k\,(m<k)$.

Chứng minh rằng: $u_{k-m}u_{k+m}=u_k^2$

Lời giải

Có $u_{k-m}u_{k+m}=u_1.q^{k-m-1}.u_1.q^{k+m-1}=u_1^2.q^{2k-2}=\left(u_1.q^{k-1}\right)^2=u_k^2$ (đpcm).

Câu 6. Cho 3 số a, b, c là 3 số hạng liên tiếp của cấp số nhân. Chứng minh rằng: $(a^2+b^2)(b^2+c^2)=(ab+bc)^2$

Lời giải

Cho 3 số a, b, c là 3 số hạng liên tiếp của cấp số nhân.

- Gọi q là công bội của cấp số nhân ta có $b=aq,\ c=aq^2$
- $(a^2+b^2)(b^2+c^2)=(a^2+a^2q^2)(a^2q^2+a^2q^4)=a^4q^2(1+q^2)^2$ (1)
- $(ab+bc)^2=(a.aq+aq.aq^2)^2=a^4q^2(1+q^2)^2$ (2)
- Từ (1) và (2) ta suy ra $(a^2+b^2)(b^2+c^2)=(ab+bc)^2$.

Câu 7. Cho a, b, c là CSC thỏa $a+b+c=\frac{3\pi}{4}$. Chứng minh $\tan a, \tan b, \tan c$ theo thứ tự đó lập thành CSN.

Lời giải

Ta có $a+c=2b$ tính chất của CSC. Có $a+b+c=\frac{3\pi}{4} \Rightarrow 3b=\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow b=\frac{\pi}{4}$. Suy ra $a+c=\frac{\pi}{2}$

Ta có $\tan a.\tan c=\tan a.\tan\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\tan a.\cot a=1=\tan^2\frac{\pi}{4}=\tan^2 b$

Vậy $\tan a.\tan c=\tan^2 b \Rightarrow \tan a, \tan b, \tan c$ theo thứ tự đó lập thành CSN.

PHẦN 2. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tổng: $A=2+4+6+\ldots+2018$ có giá trị là:

A. 2018001. **B.** 1209900. **C.** 1010101. **D.** 1019090.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2A=(2+2018)+(4+2016)+\ldots+(2018+2)$ (có 1009 ngoặc đơn)

Do đó $A=\frac{1009(2+2018)}{2}=1019090$

Câu 2. Tổng: $B=1+4+7+\ldots+3031$ bằng:

A. 1532676. **B.** 1435000. **C.** 1351110. **D.** 1322300.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2B=(1+3031)+(4+3028)+\ldots+(3031+1)$ (có 1011 ngoặc đơn)

Do đó $B=\frac{1011(1+3031)}{2}=1532676$

Câu 3. Giá trị của tổng: $C=-13-9-5+\ldots+387$ bằng:

A. 23455. **B.** 18887. **C.** 36778. **D.** 43234.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2C=(-13+387)+(-9+383)+\ldots+(387-13)$ (có 101 ngoặc đơn)

Do đó $C=\frac{101(-13+387)}{2}=18887$

Câu 4. Tổng: $S=(2+\sqrt{2})+(4+\sqrt{2})+(6+\sqrt{2})+\ldots+(1000+\sqrt{2})$ có giá trị là:

A. $250500+\sqrt{2}$. **B.** $250500+500\sqrt{2}$. **C.** $255500+500\sqrt{2}$. **D.** $250050+500\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $S=(2+4+6+\ldots+1000)+500\sqrt{2}$. Đặt $A=2+4+6+\ldots+1000$

$2A=(2+1000)+(4+998)+\ldots+(1000+2)$ (có 500 ngoặc đơn)

Do đó $C=\frac{500(2+1000)}{2}=250500$. Vậy $S=250500+500\sqrt{2}$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 5. Giá trị của tổng: $S=\frac{1}{100}+\frac{101}{100}+\frac{201}{100}+\ldots+\frac{1001}{100}$ bằng:

A. $\frac{5514}{100}$. **B.** $\frac{5501}{100}$. **C.** $\frac{5511}{100}$. **D.** $\frac{5515}{100}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $2S=\left(\frac{1}{100}+\frac{1001}{100}\right)+\left(\frac{101}{100}+\frac{901}{100}\right)+\ldots+\left(\frac{1001}{100}+\frac{1}{100}\right)$ (có 11 ngoặc đơn)

Do đó $S=\frac{11\left(\frac{1}{100}+\frac{1001}{100}\right)}{2}=\frac{5511}{100}$.

Câu 6. Cho tổng: $S_n=1+3+5+\ldots+2n+1,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Tìm S_{100}?

A. 10201. **B.** 10000. **C.** 10200. **D.** 10202.

Lời giải

Chọn A

Ta có $S_{100}=1+3+5+\ldots+201$

Suy ra $2S_{100}=(1+201)+(3+199)+\ldots+(201+1)$ (có 101 ngoặc đơn)

Vậy $S_{100}=\frac{101(1+201)}{2}=10201$

Câu 7. Cho tổng: $S_n=2+4+6+\ldots+2n$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Khi đó công thức của S_n là?

A. $n(n+2)$. **B.** $\frac{n(n+1)}{2}$. **C.** $n(n+1)$. **D.** n^2.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn C

Ta có $2S_n=(2+2n)+(4+2n-2)+\ldots+(2n+2)$ (có n ngoặc đơn)

Vậy $S_n=\frac{n(2+2n)}{2}=n(n+1)$

Câu 8. Tìm x biết: $(x+3)+(x+7)+(x+11)+\ldots+(x+79)=860$

A. $x=2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=4$. **D.** $x=3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $1720=(x+3+x+79)+(x+7+x+75)+\ldots+(x+79+x+3)$ (có 20 ngoặc đơn)

Do đó $1720=20(x+3+x+79)\Leftrightarrow 1720=20(2x+82)\Leftrightarrow x=2$

Câu 9. Cho tổng: $S_n=1+10+19+\ldots+9n-8$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Biết: $S_k=415$ Khi đó: $2k^3+18$ bằng:

A. 2016. **B.** 2017. **C.** 2018. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn C

Ta có $2S_n=(1+9n-8)+(10+9n-17)+\ldots+(9n-8+1)=n(9n-7)\Rightarrow S_n=\frac{n(9n-7)}{2}$

Khi đó $S_k=415\Leftrightarrow\frac{k(9k-7)}{2}=415\Leftrightarrow 9k^2-7k-830=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=10\ (n)\\k=-\frac{83}{9}\ (l)\end{array}\right.$

Vậy $2k^3+18=2.10^3+18=2018$

Câu 10. Tìm x biết: $(\sin x+\sqrt{3}\cos x+3)+(\sin x+\sqrt{3}\cos x+7)+\ldots+(\sin x+\sqrt{3}\cos x+79)=860$

A. $x=\frac{\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$. **B.** $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$.

C. $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$. **D.** $x=\frac{\pi}{6}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $1720=\left(2\sin x+2\sqrt{3}\cos x+3+79\right)+\ldots+\left(2\sin x+2\sqrt{3}\cos x+79+3\right)$ (có 20 ngoặc đơn)

Do đó $1720=20\left(2\sin x+2\sqrt{3}\cos x+3+79\right)\Leftrightarrow\sin x+\sqrt{3}\cos x=2$

$\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$

Câu 11. Cho tổng: $S_n=-10-5+5\ldots+(5n-15)$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Biết: $S_k=375$. Khi đó tam giác đều cạnh $k\left(cm\right)$ có diện tích bằng:

A. $\frac{125\sqrt{3}}{4}\left(\text{cm}^2\right)$. **B.** $\frac{196\sqrt{3}}{4}\left(\text{cm}^2\right)$. **C.** $50\left(cm^2\right)$. **D.** $\frac{225\sqrt{3}}{4}\left(\text{cm}^2\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2S_n=\left(-10+5n-15\right)+\left(-5+5n-20\right)+\ldots+\left(5n-15-10\right)$ (có n ngoặc đơn)

Suy ra $S_n=\frac{n\left(-10+5n-15\right)}{2}=\frac{5n^2-25n}{2}$

Khi đó $S_k=375\Leftrightarrow\frac{5n^2-25n}{2}=375\Leftrightarrow5n^2-25n-750=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=15\ \ (n)\\x=-10\ \ (l)\end{array}\right.$

Vậy $S_\Delta=\frac{15^2\sqrt{3}}{4}=\frac{225\sqrt{3}}{4}\left(cm^2\right)$

Câu 12. Tổng $S=\frac{100}{10.15.20}+\frac{100}{15.20.25}+\frac{100}{20.25.30}+\ldots+\frac{100}{110.115.120}$ có giá trị bằng:

A. $\frac{93}{1380}$ **B.** $\frac{91}{13800}$ **C.** $\frac{9}{138}$ **D.** $\frac{91}{1380}$

Lời giải

Chọn D

Ta có

$\frac{100}{10.15.20}=10\left(\frac{1}{10.15}-\frac{1}{15.20}\right);\ \frac{100}{15.20.25}=10\left(\frac{1}{15.20}-\frac{1}{20.25}\right);$

$\frac{100}{20.25.30}=10\left(\frac{1}{20.25}-\frac{1}{25.30}\right);\ \frac{100}{110.115.120}=10\left(\frac{1}{110.115}-\frac{1}{115.120}\right)$

Khi đó

$S=10\left(\frac{1}{10.15}-\frac{1}{15.20}\right)+10\left(\frac{1}{15.20}-\frac{1}{20.25}\right)+10\left(\frac{1}{20.25}-\frac{1}{25.30}\right)+\ldots+10\left(\frac{1}{110.115}-\frac{1}{115.120}\right)$

$=\frac{1}{15}-\frac{1}{115.12}=\frac{91}{1380}$

Câu 13. Giá trị của tổng: $S=\frac{12}{4.16}+\frac{20}{16.36}+\frac{28}{36.64}+...+\frac{84}{400.484}$ là:

A. $\frac{31}{121}$ **B.** $\frac{30}{121}$ **C.** $\frac{32}{121}$ **D.** $\frac{33}{121}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\frac{12}{4.16}=\frac{1}{4}-\frac{1}{16};\frac{20}{16.36}=\frac{1}{16}-\frac{1}{36};\frac{28}{36.64}=\frac{1}{36}-\frac{1}{64};\frac{84}{400.484}=\frac{1}{400}-\frac{1}{484}$

Khi đó $S=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{36}\right)+\left(\frac{1}{36}-\frac{1}{64}\right)+...+\left(\frac{1}{400}-\frac{1}{484}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{484}=\frac{30}{121}$

Câu 14. Cho tổng: $S=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Lựa chọn đáp án đúng.

A. $S_3=\frac{1}{12}.$ **B.** $S_2=\frac{1}{6}.$ **C.** $S_2=\frac{2}{3}.$ **D.** $S_3=\frac{1}{4}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $S_2=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}=\frac{2}{3}$

Câu 15. Tìm x biết: $\left(x-\frac{2}{1.2.3}\right)+\left(x-\frac{2}{2.3.4}\right)+\left(x-\frac{2}{3.4.5}\right)+...+\left(x-\frac{2}{20.21.22}\right)=\frac{9125}{231}$

A. $x=1$ **B.** $x=2$ **C.** $x=3$ **D.** $x=4$

Lời giải

Chọn B

Ta có

$\left(x-\frac{2}{1.2.3}\right)+\left(x-\frac{2}{2.3.4}\right)+\left(x-\frac{2}{3.4.5}\right)+...+\left(x-\frac{2}{20.21.22}\right)=\frac{9125}{231}$

$\Leftrightarrow 20x-\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}+...+\frac{1}{20.21}-\frac{1}{21.22}\right)=\frac{9125}{231}$

$\Leftrightarrow 20x-\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{21.22}\right)=\frac{9125}{231}\Leftrightarrow 20x-\frac{115}{231}=\frac{9125}{231}\Leftrightarrow x=2$

Câu 16. Cho $M=\frac{5}{1024}+\frac{5}{512}+\frac{5}{256}+...+\frac{5}{2}$. Khi đó M bằng:

A. $\frac{1023}{1024}$ **B.** $\frac{5111}{1024}$ **C.** $\frac{1024}{1023}$ **D.** $\frac{5115}{1024}$

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$M=\frac{5}{1024}+\frac{5}{512}+\frac{5}{256}+...+\frac{5}{2}=5\left(\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{2^9}+\frac{1}{2^8}+...+\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow M+5=5\left(\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{2^9}+\frac{1}{2^8}+...+\frac{1}{2}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow (M+5)\left(\frac{1}{2}-1\right)=5\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{2^9}+\frac{1}{2^8}+...+\frac{1}{2}+1\right)\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(M+5)=5\left(\frac{1}{2^{11}}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow M+5=10\left(1-\frac{1}{2^{11}}\right)\Leftrightarrow M=10\left(1-\frac{1}{2^{11}}\right)-5=\frac{5115}{1024}$$

Câu 17. Cho $M=5+\frac{5}{3}+\frac{5}{9}+...+\frac{5}{729}$. Khi đó $729M$ bằng:

A. $\frac{5465}{729}$ **B.** 5460 **C.** 5465 **D.** $\frac{5460}{729}$

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$M=5+\frac{5}{3}+\frac{5}{9}+...+\frac{5}{729}=5\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^6}\right)$$

$$\Leftrightarrow M\left(1-\frac{1}{3}\right)=5\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}M=5\left(1-\frac{1}{3^7}\right)\Leftrightarrow M=\frac{5}{2}\left(\frac{3^7-1}{3^6}\right)\Rightarrow 729M=729.\frac{5}{2}.\left(\frac{3^7-1}{3^6}\right)=5465$$

Câu 18. Cho tổng: $S_n=1+2+2^2+...+2^n$. Chọn mệnh đề đúng:

A. $S_{10}=2047$ **B.** $S_{10}=2048$ **C.** $S_{10}=1024$ **D.** $S_{10}=1023$

Lời giải

Chọn A

Ta có $S_n=1+2+2^2+...+2^n\Leftrightarrow S_n=(2-1)\left(1+2+2^2+...+2^n\right)=2^{n+1}-1$

Vậy $S_{10}=2^{11}-1=2047$

Câu 19. Cho tổng: $S=1-3+3^2+...+3^{10}$. Chọn mệnh đề đúng:

A. $S>0$ **B.** $S<0$ **C.** $S=-132860$ **D.** $S=132860$

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$S=1-3+3^2+...+3^{10}$$

$$\Leftrightarrow S\left[1-(-3)\right]=\left[1-(-3)\right]\left[1+(-3)+(-3)^2+...+(-3)^{10}\right]$$

$$\Leftrightarrow 4S=1-(-3)^{10}\Leftrightarrow S=\frac{1-(-3)^{10}}{4}<0$$

Câu 20. Tìm x biết: $(x+1)+(x+4)+(x+16)+...+(x+4096)=5482$

A. $x=1$ **B.** $x=2$ **C.** $x=3$ **D.** $x=4$

Lời giải

Chọn C

Ta có

$(x+1)+(x+4)+(x+16)+...+(x+4096)=5482$

$\Leftrightarrow 7x+(1+4+4^2+...+4^6)=5482 \Leftrightarrow 7x+5461=5482 \Leftrightarrow x=3$

Câu 21. Cho $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}$. Công thức của S_n là:

A. $\frac{2^n-1}{2^{n-1}}$ **B.** $\frac{2^{n+1}-1}{2^n}$ **C.** $\frac{2^n-1}{2^n}$ **D.** $\frac{2^{n+1}-1}{2^{n-1}}$

Lời giải

Chọn B

Ta có

$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n} \Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{2}\right)S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}S_n=1-\frac{1}{2^{n+1}} \Leftrightarrow S_n=\frac{2^{n+1}-1}{2^n}$

Câu 22. Cho tổng: $S=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{8}\right)+...+\left(1-\frac{1}{2048}\right)$. Khi đó: $2^{11}.S$ bằng:

A. $5.2^{12}+1$ **B.** 5.2^{12} **C.** $5.2^{12}-1$ **D.** $5.2^{13}+1$

Lời giải

Chọn A

Ta có

$S=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{8}\right)+...+\left(1-\frac{1}{2048}\right)=11-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{11}}\right)$

$S=12-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{11}}\right) \Leftrightarrow S=12-\frac{2^{12}-1}{2^{11}}=\frac{5.2^{12}+1}{2^{11}} \Rightarrow 2^{11}S=5.2^{12}+1$

Câu 23. Tính tổng: $S_n=1.5+3.7+5.9+...+(2n-1).(2n+3)$ khi $n=15$

A. 5450 **B.** 5400 **C.** 5395 **D.** 5650

Lời giải

Chọn C

Ta có

$a_k=(2k-1)(2k+3), k\in\mathbb{N}^*.\ S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=1.5+3.7+5.9+...+(2n-1)(2n+3)$

$\Leftrightarrow S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(2k+3)=4\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k-3n$

$\Leftrightarrow S_n=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}+2n(n+1)-3n=\frac{2n(n+1)(2n+4)}{3}-3n$

Vậy $S_n=1.5+3.7+5.9+...+(2n-1).(2n+3) \Rightarrow S_{15}=\frac{30.16.34}{3}-45=5395$

Câu 24. Giá trị của tổng: $S_n=1.4+3.8+5.12+...+(2n-1).4n$ khi $n=10$ là:

A. 1650 **B.** 2860 **C.** 2650 **D.** 1950

Lời giải

Chọn B

Ta có

$a_k=(2k-1)4\text{k}, k\in\mathbb{N}^*.\ S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=1.4+3.8+5.12+...+(2n-1)4n$

$$\Leftrightarrow S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)4k=8\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k$$

$$\Leftrightarrow S_n=\frac{4n(n+1)(2n+1)}{3}-2n(n+1)=\frac{2n(n+1)(4n-1)}{3}$$

Vậy $S_n=1.4+3.8+5.12+...+(2n-1).4n\Rightarrow S_{10}=\frac{20.11.39}{3}=2860$

Câu 25. Cho tổng $S_n=1.2+3.4+5.6+...+(2n-1)2n$. Tính giá trị của S_{50}

A. 169150 **B.** 155000 **C.** 165050 **D.** 165000

Lời giải

Chọn A

Ta có

$a_k=(2k-1)2k, k\in\mathbb{N}^*.\ S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=1.2+3.4+5.6+...+(2n-1)2n$

$$\Leftrightarrow S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)2k=4\sum_{k=1}^{n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}k$$

$$\Leftrightarrow S_n=\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}-n(n+1)=\frac{n(n+1)(4n-1)}{3}$$

Vậy $S_n=1.2+3.4+5.6+...+(2n-1)2n=\frac{n(n+1)(4n-1)}{3}\Rightarrow S_{50}=\frac{50.51.199}{3}=169150$

Câu 26. Cho tổng $S_n=1.2+2.5+3.8+...+n(3n-1)$. Mệnh đề đúng là:

A. $S_6=650$ **B.** $S_8=576$ **C.** $S_{10}=150$ **D.** $S_{12}=850$

Lời giải

Chọn B

Ta có

$a_k=k(3k-1), k\in\mathbb{N}^*.\ S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=1.2+2.5+3.8+...+n(3n-1)$

$$\Leftrightarrow S_n=\sum_{k=1}^{n}k(3k-1)=3\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k$$

$$\Leftrightarrow S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}=n^2(n+1)$$

Vậy $S_8=1.2+2.5+3.8+...+8.23=8^2(8+1)=576$

Câu 27. Tìm x biết: $(x+1.2)+(x+2.5)+(x+3.8)+...+(x+10.29)=1200$

A. $x=7$ **B.** $x=8$ **C.** $x=9$ **D.** $x=10$

Lời giải

Chọn D

Ta có

$(x+1.2)+(x+2.5)+(x+3.8)+...+(x+10.29)=1200$

$\Leftrightarrow 10x+(1.2+2.5+3.8+...+10.29)=1200\Leftrightarrow 10x+1100=1200\Leftrightarrow x=10$

Câu 28. Cho tổng $S_n=1.3+3.5+5.7+...+(2n-1)(2n+1)$. Công thức của S_n là:

A. $\dfrac{n\left[2(n+1)(2n+1)-3\right]}{3}$ **B.** $\dfrac{n\left[(n+1)(2n+1)-6\right]}{3}$

C. $\dfrac{n\left[(n+1)(2n+1)-6\right]}{2}$ **D.** $\dfrac{(n+1)(2n+1)-6}{6}$

Lời giải

Chọn A

Ta có

$a_k=(2k-1)(2k+1), k\in\mathbb{N}^*.\ S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=1.3+3.5+5.7+...+(2n-1)(2n+1)$

$\Leftrightarrow S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(2k+1)=4\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}1$

$\Leftrightarrow S_n=\dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3}-n=\dfrac{n\left[2(n+1)(2n+1)-3\right]}{3}$

Câu 29. Cho: $1.3+4.5+9.7+...+n^2(2n+1)$

. Biết: $\sum_{1}^{n}n^3=1+2^3+3^3+...n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$. Công thức của S_n. là:

A. $\dfrac{n(n+1)(3n^2+5n+1)}{3}$ **B.** $\dfrac{n(n+1)(3n+1)}{6}$

C. $\dfrac{n(n+1)(3n^2+5n+1)}{6}$ **D.** $\dfrac{n(n+1)(5n+1)}{3}$

Lời giải

Chọn C

Ta có

$a_k=k^2(2k+1), k\in\mathbb{N}^*.\ S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=1.3+4.5+9.7+...+n^2(2n+1)$

$\Leftrightarrow S_n=\sum_{k=1}^{n}k^2(2k+1)=2\sum_{k=1}^{n}k^3+\sum_{k=1}^{n}k^2$

$\Leftrightarrow S_n=\dfrac{n^2(n+1)^2}{2}+\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\dfrac{n(n+1)(3n^2+5n+1)}{6}$

Câu 30. Tìm x biết: $(x^2-x+1.2)+(x^2-x+2.5)+(x^2-x+3.8)+...+(x^2-x+13.38)=2444$

A. $x=2\vee x=3$ **B.** $x=-2\vee x=3$ **C.** $x=-2\vee x=-3$ **D.** $x=2\vee x=-3$

Lời giải

Chọn B

Ta có

$(x^2-x+1.2)+(x^2-x+2.5)+(x^2-x+3.8)+...+(x^2-x+13.38)=2444$

$\Leftrightarrow 13(x^2-x)+(1.2+2.5+3.8+...+13.38)=2444\Leftrightarrow 13(x^2-x)+13^2.14=2444$

$\Leftrightarrow 13(x^2-x)+2366=2444\Leftrightarrow x^2-x-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-2\end{array}\right.$

Câu 31. Tìm $x\in[0;\pi]$ biết: $(2\sin x+1.2)+(2\sin x+2.5)+(2\sin x+3.8)+...+(2\sin x+13.38)=2392$

A. $x=\dfrac{\pi}{2}$ **B.** $x=\dfrac{\pi}{3}$ **C.** $x=\dfrac{\pi}{4}$ **D.** $x=\dfrac{\pi}{6}$

Lời giải

Chọn A

Ta có

$(2\sin x+1.2)+(2\sin x+2.5)+(2\sin x+3.8)+...+(2\sin x+13.38)=2392$

$\Leftrightarrow 26\sin x+(1.2+2.5+3.8+...+13.38)=2392 \Leftrightarrow 26\sin x+13^2.14=2392$

$\Leftrightarrow 26\sin x+2366=2392 \Leftrightarrow \sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}\in[0;\pi]$

Câu 32. Cho tổng: $1.4+2.7+3.10+...+n(3n+1)$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Biết: $S_k=294$. Hoán vị của k phần tử là:

A. 5040 **B.** 620 **C.** 120 **D.** 720

Lời giải

Chọn D

Ta có

$a_k=k(3k+1), k\in\mathbb{N}^*.\ S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=1.4+2.7+3.10+...+n(3n+1)$

$\Leftrightarrow S_n=\sum_{k=1}^{n}k(3k+1)=3\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$

$\Leftrightarrow S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}=n(n+1)^2$

$S_k=294 \Leftrightarrow k(k+1)^2=294 \Leftrightarrow k^3+2k^2+k-294=0 \Leftrightarrow k=6 \Rightarrow 6!=720$

Câu 33. Cho tổng: $S_k=1.2+2.5+3.8+...+n(3n-1)$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Biết: $S_k=576$. Khi đó hình vuông có cạnh $k(m)$ có diện tích là:

A. $64m^2$ **B.** $64cm^2$ **C.** $81m^2$ **D.** $81cm^2$

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn A

Ta có

$a_k=k(3k-1), k\in\mathbb{N}^*.\ S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=1.2+2.5+3.8+...+n(3n-1)$

$\Leftrightarrow S_n=\sum_{k=1}^{n}k(3k-1)=3\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k$

$\Leftrightarrow S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}=n^2(n+1)$

$S_k=576 \Leftrightarrow k^2(k+1)=576 \Leftrightarrow k^3+k^2-576=0 \Leftrightarrow k=8$

Vậy diện tích hình vuông là $8^2=64m^2$

Câu 34. Cho tổng: $1+3.4+5.9+...+(2n-1)n^2$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Tính $S_6^2-S_5^2$:

A. 469606 **B.** 469650 **C.** 469656 **D.** 46965

Lời giải

Chọn C

Ta có

$a_k=(2k-1)k^2, k\in\mathbb{N}^*.\ S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=1+3.4+5.9+...+(2n-1)n^2$

$$\Leftrightarrow S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)k^2=2\sum_{k=1}^{n}k^3-\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$\Leftrightarrow S_n=\frac{n^2(n+1)^2}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n(n+1)(3n^2+n-1)}{6}$$

$$\begin{cases}S_6=\dfrac{6.7.(3.6^2+6-1)}{6}=791\Rightarrow S_6^2=625681\\ S_5=\dfrac{5.6.(3.5^2+5-1)}{6}=395\Rightarrow S_5^2=156025\end{cases}\Rightarrow S_6^2-S_5^2=469656$$

Câu 35. Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau: $\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=\dfrac{u_n^2}{2017}+u_n,\quad n=1,2,...\end{cases}$.

Tính tổng $S_n=\dfrac{u_1}{u_2}+\dfrac{u_2}{u_3}+\cdots+\dfrac{u_n}{u_{n+1}}$.

A. $S_n=2017\left(1-\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$. **B.** $S_n=2017\left(1-\dfrac{1}{u_n}\right)$. **C.** $S_n=2017(u_n-1)$. **D.** $S_n=\dfrac{u_n}{2017}$.

Lời giải

: Chọn A

Ta có: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n^2}{2017},\ n=1,2,3,...\Rightarrow\dfrac{u_n}{u_{n+1}}=2017\left(\dfrac{1}{u_n}-\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$

$$\Rightarrow\frac{u_1}{u_2}+\frac{u_2}{u_3}+\cdots+\frac{u_n}{u_{n+1}}$$

$$=2017\left[\left(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_2}\right)+\left(\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{u_{n-1}}-\frac{1}{u_n}\right)+\left(\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_{n+1}}\right)\right]$$

$$=2017\left(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_{n+1}}\right)=2017\left(1-\frac{1}{u_{n+1}}\right).$$

Ngoài ra, có thể tính $u_2=\dfrac{u_1^{\ 2}}{2017}+u_1=\dfrac{1}{2017}+1=\dfrac{2018}{2017}\rightarrow S_1=\dfrac{u_1}{u_2}=\dfrac{1}{\frac{2018}{2017}}=\dfrac{2017}{2018}$.

Thay n=1 vào các đáp án, ta nhận được đáp án A

Câu 36. Cho dãy số (u_n) có: $\begin{cases}u_1=2039\\ u_{n+1}=u_n+2^n+2011\ \ (n\ge1)\end{cases}$. Hãy tính tổng $S_n=u_1+u_2+...+u_n$.

A. $S_n=26n+2^n-1+2011\dfrac{n(n+1)}{2}$. **B.** $S_n=26n-2(2^n-1)+2011\dfrac{n(n+1)}{2}$.

C. $S_n=26n+2(2^n-1)+2011\dfrac{n(n+1)}{2}$. **D.** $S_n=26n+2(2^n+1)+2011\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$u_n = 2039 + \left(2 + 2^2 + ... + 2^{n-1}\right) + 2011\left(n-1\right)$

$= 2011 + 28 + 2.\dfrac{1-2^{n-1}}{1-2} + 2011\left(n-1\right)$

$= 26 + 2^n + 2011n$

$S_n = \left(26 + 2^1 + 2011.1\right) + \left(26 + 2^2 + 2011.2\right) + ... + \left(26 + 2^n + 2011.n\right)$

$= 26.n + \left(2^1 + 2^2 + ... + 2^n\right) + 2011\left(1 + 2 + ... + n\right)$

$= 26n + 2\left(2^n - 1\right) + 2011\dfrac{n\left(n+1\right)}{2}$

Ngoài ra, có thể tính

$u_2 = u_1 + 2^1 + 2011 = 2039 + 2 + 2011 = 4052 \rightarrow S_2 = u_1 + u_2 = 2039 + 4052 = 6091.$

Thay $n = 2$ vào các đáp án, ta được đáp án C

Câu 37. Cho dãy số $\left(u_n\right)$, được xác định bởi $u_1 = \dfrac{2}{3}$ và $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2\left(2n+1\right)u_n + 1}$

Tính tổng 2017 số hạng đầu tiên của dãy số đó.

A. $\dfrac{2016}{2017}$. **B.** $\dfrac{4035}{4034}$. **C.** $\dfrac{4034}{4035}$. **D.** $\dfrac{2017}{2016}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2\left(2n+1\right)u_n + 1} \Leftrightarrow u_{n+1}\left[2\left(2n+1\right)u_n + 1\right] = u_n \Leftrightarrow 2\left(2n+1\right) = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.

Đặt $v_n = \dfrac{1}{u_n}$, ta có $v_{n+1} = v_n + 4n + 2$. Suy ra

$v_n = v_{n-1} + 4\left(n-1\right) + 2 = \left[v_{n-2} + 4\left(n-2\right) + 2\right] + 4\left(n-1\right) + 2$

$= ... = v_1 + 2n\left(n-1\right) + 2\left(n-1\right) = 2n^2 - \dfrac{1}{2}.$

Do đó $u_n = \dfrac{2}{4n^2 - 1} = \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}$.

Vậy $S_{2017} = 1 - \dfrac{1}{4035} = \dfrac{4034}{4035}$.

Câu 38. Cho dãy số $\left\{u_n\right\}$ xác định bởi $u_n = \dfrac{1}{\sqrt[4]{n^3} + \sqrt[4]{n^3 + n^2} + \sqrt[4]{n^3 + 2n^2 + n} + \sqrt[4]{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}}$, $n \geq 1$.

Tính tổng $S = u_1 + u_2 + ... + u_{2018^4 - 1}$.

A. 2016. **B.** 2017. **C.** 2018. **D.** 2019.

Lời giải

Ta có: $u_n = \dfrac{1}{\sqrt[4]{n^3} + \sqrt{n}.\sqrt[4]{n+1} + \sqrt[4]{n}.\sqrt{n+1} + \sqrt[4]{\left(n+1\right)^3}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt[4]{n} + \sqrt[4]{n+1}\right) + \sqrt{n+1}.\left(\sqrt[4]{n} + \sqrt[4]{n+1}\right)}$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt[4]{n}+\sqrt[4]{n+1}\right)\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n}+\sqrt[4]{n+1}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right).\left(\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}\right)}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$

$$= \sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}\,.$$

Do đó $S = \sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{1}+\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}+...+\sqrt[4]{2018^4-1+1}-\sqrt[4]{2018^4-1}$

$= -1+\sqrt[4]{2018^4} = -1+2018 = 2017$.

Câu 39. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = \frac{2}{3}$ và $u_{n+1} = \frac{u_n}{2(2n+1)u_n+1}$, $(n \in \mathbb{N}^*)$. Tính tổng 2018 số hạng đầu tiên của dãy số đó?

A. $\frac{4036}{4035}$. **B.** $\frac{4035}{4034}$. **C.** $\frac{4038}{4037}$. **D.** $\frac{4036}{4037}$.

Lời giải

- Ta có: $\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{2(2n+1)u_n+1}{u_n} = \frac{1}{u_n}+4n+2 = \left(\frac{1}{u_{n-1}}+4(n-1)+2\right)+4n+2$

Tương tự ta được:

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_1}+(4.1+2)+(4.2+2)+...+(4n+2) = \frac{3}{2}+2n+2n(n+1) = \frac{4n^2+8n+3}{2}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = \frac{2}{4n^2+8n+3} = \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} u_k = 1-\frac{1}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \Rightarrow \sum_{k=1}^{2018} u_k = \frac{4036}{4037}.$$

Câu 40. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 5$, $a_{n+1} = q.a_n + 3$ với mọi $n \geq 1$, trong đó q là hằng số, $q \neq 0$, $q \neq 1$. Biết công thức số hạng tổng quát của dãy số viết được dưới dạng $a_n = \alpha.q^{n-1} + \beta\frac{1-q^{n-1}}{1-q}$. Tính $\alpha+2\beta$?

A. 13. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 16.

Lời giải

Cách 1. Ta có: $a_{n+1}-k = q(a_n-k) \Leftrightarrow k-kq = 3 \Leftrightarrow k = \frac{3}{1-q}$

Đặt $v_n = a_n - k \Rightarrow v_{n+1} = q.v_n = q^2.v_{n-1} = ... = q^n.v_1$

Khi đó $v_n = q^{n-1}.v_1 = q^{n-1}.(a_1-k) = q^{n-1}.\left(5-\frac{3}{1-q}\right)$

Vậy $a_n = v_n + k = q^{n-1}.\left(5-\frac{3}{1-q}\right)+k = q^{n-1}.\left(5-\frac{3}{1-q}\right)+\frac{3}{1-q} = 5.q^{n-1}+3.\frac{1-q^{n-1}}{1-q}$.

Do đó: $\alpha = 5;\ \beta = 3 \Rightarrow \alpha+2\beta = 5+2.3 = 11$.

Cách 2. Theo giả thiết ta có $a_1=5,\ a_2=5q+3$. Áp dụng công thức tổng quát, ta được

$$\begin{cases} a_1=\alpha.q^{1-1}+\beta\dfrac{1-q^{1-1}}{1-q}=\alpha \\ a_2=\alpha.q^{2-1}+\beta\dfrac{1-q^{2-1}}{1-q}=\alpha q+\beta \end{cases}, \text{ suy ra } \begin{cases} 5=\alpha \\ 5q+3=\alpha q+\beta \end{cases}, \text{ hay } \begin{cases} \alpha=5 \\ \beta=3 \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha+2\beta=5+2.3=11$

Câu 41. Cho bốn số $a,\ b,\ c,\ d$ theo thứ tự đó tạo thành cấp số nhân với công bội khác 1. Biết tổng ba số hạng đầu bằng $\dfrac{148}{9}$, đồng thời theo thứ tự đó chúng lần lượt là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng. Tính giá trị biểu thức $T=a-b+c-d$.

A. $T=\dfrac{101}{27}$. **B.** $T=\dfrac{100}{27}$. **C.** $T=-\dfrac{100}{27}$. **D.** $T=-\dfrac{101}{27}$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} ac=b^2 & (1) \\ bd=c^2 & (2) \\ a+b+c=\dfrac{148}{9} & (3) \end{cases}$.

Và cấp số cộng có $u_1=a$, $u_4=b$, $u_8=c$. Gọi x là công sai của cấp số cộng. Vì cấp số nhân có công bội khác 1 nên $x\neq 0$.

Ta có : $\begin{cases} b=a+3x \\ c=a+7x \end{cases}(4)$.

Từ (1) và (4) ta được : $a(a+7x)=(a+3x)^2 \Leftrightarrow ax-9x^2=0$.

Do $x\neq 0$ nên $a=9x$.

Từ (3) và (4), suy ra $3a+10x=\dfrac{148}{9}$.

Do đó : $\begin{cases} a=4 \\ x=\dfrac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\dfrac{16}{3} \\ c=\dfrac{64}{9} \\ d=\dfrac{256}{27} \end{cases}$.

Vậy $T=a-b+c-d=\dfrac{-100}{27}$.

Câu 42. Cho dãy số (U_n) xác định bởi: $U_1=\dfrac{1}{3}$ và $U_{n+1}=\dfrac{n+1}{3n}.U_n$. Tổng $S=U_1+\dfrac{U_2}{2}+\dfrac{U_3}{3}+...+\dfrac{U_{10}}{10}$ bằng:

A. $\dfrac{3280}{6561}$. **B.** $\dfrac{29524}{59049}$. **C.** $\dfrac{25942}{59049}$. **D.** $\dfrac{1}{243}$.

Lời giải

Theo đề ta có: $U_{n+1}=\dfrac{n+1}{3n}.U_n \Leftrightarrow \dfrac{U_{n+1}}{n+1}=\dfrac{1}{3}\dfrac{U_n}{n}$ mà $U_1=\dfrac{1}{3}$ hay $\dfrac{U_1}{1}=\dfrac{1}{3}$

Nên ta có $\frac{U_2}{2}=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{3}\right)^2$; $\frac{U_3}{3}=\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^3$; …; $\frac{U_{10}}{10}=\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$.

Hay dãy $\left(\frac{U_n}{n}\right)$ là một cấp số nhân có số hạng đầu $U_1=\frac{1}{3}$, công bội $q=\frac{1}{3}$.

Khi đó $S=U_1+\frac{U_2}{2}+\frac{U_3}{3}+...+\frac{U_{10}}{10}=\frac{1}{3}\pi.2^2.\sqrt{3}=\frac{3^{10}-1}{2.3^{10}}=\frac{59048}{2.3^{10}}=\frac{29524}{59049}$.

Câu 43. Cho năm số a, b, c, d, e tạo thành một cấp số nhân theo thứ tự đó và các số đều khác 0, biết $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=10$ và tổng của chúng bằng 40. Tính giá trị $|S|$ với $S=abcde$.

A. $|S|=42$. **B.** $|S|=62$. **C.** $|S|=32$. **D.** $|S|=52$.

Lời giải

Gọi q $(q\neq 0)$ là công bội của cấp số nhân a, b, c, d, e. Khi đó $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$, $\frac{1}{e}$ là cấp số nhân có công bội $\frac{1}{q}$.

Theo đề bài ta có

$$\begin{cases}a+b+c+d+e=40\\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a.\frac{1-q^5}{1-q}=40\\ \frac{1}{a}.\frac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^5}{1-\frac{1}{q}}=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a.\frac{1-q^5}{1-q}=40\\ \frac{1}{a}.\frac{q^5-1}{q^4(q-1)}=10\end{cases}\Leftrightarrow a^2q^4=4.$$

Ta có $S=abcde=a.aq.aq^2.aq^3.aq^4=a^5q^{10}$.

Nên $S^2=\left(a^5q^{10}\right)^2=\left(a^2q^4\right)^5=4^5$.

Suy ra $|S|=\sqrt{4^5}=32$.

Câu 44. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases}5u_1+\sqrt{5u_1-u_2}=u_2+6\\ u_{n+1}=3u_n\ \forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n\geq 2.3^{2018}$ bằng:

A. 2017. **B.** 2018. **C.** 2019. **D.** 2010

Lời giải

$$\begin{cases}5u_1+\sqrt{5u_1-u_2}=u_2+6\ (1)\\ u_{n+1}=3u_n\ \forall n\in\mathbb{N}^*\ (2)\end{cases}.$$

Từ (1) có $5u_1+\sqrt{5u_1-u_2}=u_2+6\Leftrightarrow\left(\sqrt{5u_1-u_2}\right)^2+\sqrt{5u_1-u_2}-6=0$

$\Leftrightarrow\sqrt{5u_1-u_2}=2\Leftrightarrow 5u_1-u_2=4$.

Từ (2) có $u_{n+1}=3u_n\Rightarrow u_2=3u_1$. Giải hệ $\begin{cases}5u_1-u_2=4\\ u_2=3u_1\end{cases}$ được $u_1=2$.

Dãy (u_n) là cấp số nhân với $\begin{cases}u_1=2\\ q=3\end{cases}$ có SHTQ: $u_n=2.3^{n-1}$ với $n\in\mathbb{N}*$

$u_n\geq 2.3^{2018}\Leftrightarrow 2.3^{n-1}\geq 2.3^{2018}\Leftrightarrow n-1\geq 2018\Leftrightarrow n\geq 2019$.

Vậy giá trị nhỏ nhất thỏa mãn là 2019.

Câu 45. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q và thỏa

$$\begin{cases} u_1+u_2+u_3+u_4+u_5=49\left(\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}+\dfrac{1}{u_3}+\dfrac{1}{u_4}+\dfrac{1}{u_5}\right). \\ u_1+u_3=35 \end{cases}$$

Tính $P=u_1+4q^2$.

A. $P=24$. **B.** $P=29$. **C.** $P=34$. **D.** $P=39$.

Lời giải

Nhận xét: Nếu u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 là một cấp số nhân với công bội q thì $\dfrac{1}{u_1}$, $\dfrac{1}{u_2}$, $\dfrac{1}{u_3}$, $\dfrac{1}{u_4}$, $\dfrac{1}{u_5}$ cũng tạo thành cấp số nhân với công bội $\dfrac{1}{q}$.

Do đó từ giả thiết ta có $\begin{cases} u_1.\dfrac{q^5-1}{q-1}=49\left(\dfrac{1}{u_1}.\dfrac{\dfrac{1}{q^5}-1}{\dfrac{1}{q}-1}\right) & (1) \\ u_1+u_1q^2=35 & (2) \end{cases}$.

Phương trình $(1)\Leftrightarrow u_1.\dfrac{q^5-1}{q-1}=\dfrac{49}{u_1}\left(\dfrac{q^5-1}{q^4(q-1)}\right)\Leftrightarrow u_1^2q^4=49\Leftrightarrow u_1q^2=\pm 7$.

Với $u_1q^2=-7$. Thay vào (2), ta được $u_1-7=35\Leftrightarrow u_1=42$. Suy ra $q^2=-\dfrac{7}{42}$: vô lý.

Với $u_1q^2=7$. Thay vào (2), ta được $u_1+7=35\Leftrightarrow u_1=28$. Vậy $\begin{cases} u_1=28 \\ q=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1=28 \\ q=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$. Khi đó $u_1+4q^2=29$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 46. Cho dãy số tăng a, b, c $(c\in\mathbb{Z})$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân; đồng thời a, $b+8$, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng và a, $b+8$, $c+64$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tính giá trị biểu thức $P=a-b+2c$.

A. $P=\dfrac{184}{9}$. **B.** $P=64$. **C.** $P=\dfrac{92}{9}$. **D.** $P=32$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} ac=b^2 \\ a+c=2(b+8) \\ a(c+64)=(b+8)^2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} ac=b^2 & (1) \\ a-2b=16-c & (2) \\ ac+64a=(b+8)^2 & (3) \end{cases}$.

Thay (1) vào (3) ta được: $b^2+64a=b^2+16b+64\Leftrightarrow 4a-b=4$ (4).

Kết hợp (2) với (4) ta được: $\begin{cases} a-2b=16-c \\ 4a-b=4 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=\dfrac{c-8}{7} \\ b=\dfrac{4c-60}{7} \end{cases}$ (5)

Thay (5) vào (1) ta được:

$$7(c-8)c=(4c-60)^2 \Leftrightarrow 9c^2-424c+3600=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=36 \\ c=\dfrac{100}{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow c=36\ (c\in\mathbb{Z}).$$

Với $c=36 \Rightarrow a=4,\ b=12 \Rightarrow P=4-12+72=64.$

Câu 47. Cho bốn số a, b, c, d biết rằng a, b, c theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân công bội $q>1$; còn b, c, d theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng. Tìm q biết rằng $a+d=14$ và $b+c=12$.

A. $q=\dfrac{18+\sqrt{73}}{24}$. **B.** $q=\dfrac{19+\sqrt{73}}{24}$. **C.** $q=\dfrac{20+\sqrt{73}}{24}$. **D.** $q=\dfrac{21+\sqrt{73}}{24}$.

Lời giải

Giả sử a,b,c lập thành cấp số cộng công bội q. Khi đó theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} b=aq,\ c=aq^2 \\ b+d=2c \\ a+d=14 \\ b+c=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} aq+d=2aq^2 & (1) \\ a+d=14 & (2) \\ a\left(q+q^2\right)=12 & (3) \end{cases}$$

Nếu $q=0 \Rightarrow b=c=0=d$ (vô lí)

Nếu $q=-1 \Rightarrow b=-a; c=a \Rightarrow b+c=0$ (vô lí).

Vậy $q\neq 0,\ q\neq -1$, từ (2) và (3) ta có: $d=14-a$ và $a=\dfrac{12}{q+q^2}$ thay vào (1) ta được:

$$\frac{12q}{q+q^2}+\frac{14q^2+14q-12}{q+q^2}=\frac{24q^3}{q+q^2} \Leftrightarrow 12q^3-7q^2-13q+6=0$$

$$\Leftrightarrow (q+1)\left(12q^2-19q+6\right)=0 \Leftrightarrow q=\frac{19\pm\sqrt{73}}{24}$$

Vì $q>1$ nên $q=\dfrac{19+\sqrt{73}}{24}$.

Câu 48. Cho ba số a, b, c là ba số liên tiếp của một cấp số cộng có công sai là 2. Nếu tăng số thứ nhất thêm 1, tăng số thứ hai thêm 1 và tăng số thứ ba thêm 3 thì được ba số mới là ba số liên tiếp của một cấp số nhân. Tính $(a+b+c)$.

A. 12. **B.** 18. **C.** 3. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

+) a, b, c là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng có công sai bằng $d=2 \Rightarrow \begin{cases} b=a+2 \\ c=a+4 \end{cases}$.

+) Ba số $a+1$, $a+3$, $a+7$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân

$\Leftrightarrow (a+3)^2=(a+1).(a+7) \Leftrightarrow a^2+6a+9=a^2+8a+7 \Leftrightarrow 2a=2 \Leftrightarrow a=1.$

$\Rightarrow T=a+b+c=3a+6=9.$

Câu 49. Cho ba số $x;5;2y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng và ba số $x;4;2y$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân thì $|x-2y|$ bằng

A. $|x-2y|=10$. **B.** $|x-2y|=9$. **C.** $|x-2y|=6$. **D.** $|x-2y|=8$.

Lời giải

Chọn C

Do ba số $x;5;2y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng, ta có: $S=x+2y=10$ (1)

Ta lại có ba số $x;4;2y$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân nên: $P=x.2y=16\ (2)$

Từ $(1),(2)$ suy ra hai số $x;2y$ là nghiệm của phương trình $X^2-S.X+P=0$ hay

$X^2-10X+16=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}X=2\\X=8\end{array}\right.$

Theo yêu cầu bài toán $|x-2y|=|2-8|=6$

Câu 50. Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) biết $u_1=1$ và u_1,u_3,u_4 theo thứ tự là ba số hạng liên tiếp trong một cấp số cộng.

A. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{5}-1}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

(u_n) là cấp số nhân lùi vô hạn có công bội q, suy ra $|q|<1$ và $u_3=u_1.q^2=q^2, u_4=u_1.q^3=q^3$.

Mà và u_1,u_3,u_4 theo thứ tự là ba số hạng liên tiếp trong một cấp số cộng nên $u_1+u_4=2.u_3$.

Từ đó ta có $1+q^3=2.q^2\Leftrightarrow q^3-2.q^2+1=0\Leftrightarrow(q-1)(q^2-q-1)=0\Leftrightarrow q^2-q-1=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}q=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\q=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\Rightarrow q=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (vì $|q|<1$).Vậy $S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Câu 51. Ba số phân biệt có tổng là 217 có thể coi là các số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, cũng có thể coi là số hạng thứ 2, thứ 9, thứ 44 của một cấp số cộng. Hỏi phải lấy bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng này để tổng của chúng bằng 820?

A. 20. **B.** 42. **C.** 21. **D.** 17.

Lời giải

Gọi ba số đó là x, y, z. Do ba số là các số hạng thứ 2, thứ 9 và thứ 44 của một cấp số cộng nên ta có: x; $y=x+7d$; $z=x+42d$ (với d là công sai của cấp số cộng).

Theo giả thiết, ta có: $x+y+z=x+x+7d+x+42d=3x+49d=217$.

Mặt khác, do x, y, z là các số hạng liên tiếp của một cấp số nhân nên:

$y^2=xz\Leftrightarrow(x+7d)^2=x(x+42d)\Leftrightarrow d(-4x+7d)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=0\\-4x+7d=0\end{array}\right.$

Với $d=0$, ta có: $x=y=z=\frac{217}{3}$. Suy ra $n=820:\frac{217}{3}=\frac{2460}{217}\notin\mathbb{N}$.

Với $-4x+7d=0$, ta có: $\left\{\begin{array}{l}-4x+7d=0\\3x+49d=217\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=7\\d=4\end{array}\right.$. Suy ra $u_1=7-4=3$.

Do đó, $S_n=820\Leftrightarrow\frac{[2u_1+(n-1)d]n}{2}=820\Leftrightarrow\frac{[2.3+4(n-1)]n}{2}=820\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=20\\n=-\frac{41}{2}\end{array}\right.$

Vậy $n=20$.

Câu 52. Cho khai triển

$P(x)=(1+x)(1+2x)(1+3x)...(1+2017x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{2017}x^{2017}$.

Tính $T=a_2+\frac{1}{2}\left(1^2+2^2+...+2017^2\right)$.

A. $\left(\frac{2016.2017}{2}\right)^2$. **B.** $\left(\frac{2017.2018}{2}\right)^2$. **C.** $\frac{1}{2}\left(\frac{2016.2017}{2}\right)^2$. **D.** $\frac{1}{2}\left(\frac{2017.2018}{2}\right)^2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$a_2=1.(1+2+3+...+2017)+2.(3+4+...+2017)+...+2015.(2016+2017)+2016.2017$

$=1.0+2.1+3.(1+2)+....+2016.(1+2+...+2015)+2017.(1+2+...+2016)$

$\Rightarrow 2a_2=1.(1+2+...+2017)+2.(1+2+...+2017)+...$

$...+2017.(1+2+...+2017)-\left(1^2+2^2+...+2017^2\right)$

Khi đó, ta có

$T=a_2+\frac{1}{2}\left(1^2+2^2+...+2017^2\right)=\frac{2a_2+\left(1^2+2^2+...+2017^2\right)}{2}$

$=\frac{1}{2}\cdot\left[1.(1+2+...+2017)+2.(1+2+...+2017)+...+2017.(1+2+...+2017)\right]$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2017.2018}{2}\cdot\frac{2017.2018}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{2017.2018}{2}\right)^2$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 53. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1=2018$ và $u_{n+1}=\frac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}$ với mọi $n\geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n<\frac{1}{2018}$ bằng

A. 4072325 **B.** 4072324 **C.** 4072326 **D.** 4072327

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết suy ra $u_n>0,\forall n\geq 1$

Ta có $u_{n+1}=\frac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}$, $\forall n\geq 1\Leftrightarrow u_{n+1}^2=\frac{u_n^2}{1+u_n^2}\Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1}^2}=1+\frac{1}{u_n^2}$

Đặt $v_n=\frac{1}{u_n^2}$, khi đó $v_1=\frac{1}{2018^2}$ và $v_{n+1}=1+v_n$ nên (v_n) là cấp số cộng có công sai là 1.

$v_n=v_1+(n-1)=\frac{1}{2018^2}+n-1$ suy ra $\frac{1}{u_n^2}=\frac{1}{2018^2}+n-1$.

Để $u_n<\frac{1}{2018}\Leftrightarrow \frac{1}{u_n^2}>2018^2\Leftrightarrow (n-1)+\frac{1}{2018^2}>2018^2$

$\Leftrightarrow n>1-\frac{1}{2018^2}+2018^2\Leftrightarrow n>4072325-\frac{1}{2018^2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của n thỏa mãn điều kiện là 4072325.

Câu 54. Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng đều dương, số hạng đầu $u_1=1$ và tổng của 100 số hạng đầu tiên bằng 14950. Tính giá trị của tổng

$$S=\frac{1}{u_2\sqrt{u_1}+u_1\sqrt{u_2}}+\frac{1}{u_3\sqrt{u_2}+u_2\sqrt{u_3}}+\ldots+\frac{1}{u_{2018}\sqrt{u_{2017}}+u_{2017}\sqrt{u_{2018}}}.$$

A. $\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{6052}}\right)$. **B.** $1-\frac{1}{\sqrt{6052}}$. **C.** 2018. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A.

Gọi d là công sai của cấp số cộng. Khi đó:

$$S_{100}=100u_1+\frac{100.99}{2}d\Leftrightarrow 100+4950d=14950\Leftrightarrow d=3.$$

Do đó $u_{2018}=u_1+2017d=6052$.

Ta có: $\frac{1}{u_{k+1}\sqrt{u_k}+u_k\sqrt{u_{k+1}}}=\frac{1}{\sqrt{u_k}.\sqrt{u_{k+1}}.\left(\sqrt{u_k}+\sqrt{u_{k+1}}\right)}=\frac{1}{d}.\frac{\sqrt{u_{k+1}}-\sqrt{u_k}}{\sqrt{u_k}.\sqrt{u_{k+1}}}=\frac{1}{d}.\left(\frac{1}{\sqrt{u_k}}-\frac{1}{\sqrt{u_{k+1}}}\right)$.

Do đó:

$$S=\frac{1}{d}.\left(\frac{1}{\sqrt{u_1}}-\frac{1}{\sqrt{u_2}}\right)+\frac{1}{d}.\left(\frac{1}{\sqrt{u_2}}-\frac{1}{\sqrt{u_3}}\right)+\ldots+\frac{1}{d}.\left(\frac{1}{\sqrt{u_{2017}}}-\frac{1}{\sqrt{u_{2018}}}\right)=\frac{1}{d}.\left(\frac{1}{\sqrt{u_1}}-\frac{1}{\sqrt{u_{2018}}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{6052}}\right).$$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 55. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu bằng 1 và tổng 100 số hạng đầu bằng 14950. Giá trị của tổng $\frac{1}{u_1u_2}+\frac{1}{u_2u_3}+\ldots+\frac{1}{u_{49}u_{50}}$ bằng.

A. $\frac{49}{74}$. **B.** 148. **C.** $\frac{49}{148}$. **D.** 74.

Lời giải

Gọi d là công sai của cấp số cộng. Ta có $S_{100}=50\left(2u_1+99d\right)=14950$ với $u_1=1\Rightarrow d=3$

Đặt $S=\frac{1}{u_1u_2}+\frac{1}{u_2u_3}+\ldots+\frac{1}{u_{49}u_{50}}$.

Ta có

$$S.d=\frac{d}{u_1u_2}+\frac{d}{u_2u_3}+\ldots+\frac{d}{u_{49}u_{50}}=\frac{u_2-u_1}{u_1u_2}+\frac{u_3-u_2}{u_2u_3}+\ldots+\frac{u_{50}-u_{49}}{u_{49}u_{50}}=\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_{50}}=1-\frac{1}{1+49.3}=\frac{147}{148}.$$

Với $d=3$ nên $S=\frac{49}{148}$.

Câu 56. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1=1$ và tổng 100 số hạng đầu bằng 10000. Tính tổng $S=\frac{1}{u_1u_2}+\frac{1}{u_2u_3}+\ldots+\frac{1}{u_{99}u_{100}}$.

A. $S=\dfrac{100}{201}$. **B.** $S=\dfrac{200}{201}$. **C.** $S=\dfrac{198}{199}$. **D.** $S=\dfrac{99}{199}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi d là công sai của cấp số cộng đã cho.

Ta có: $S_{100}=50\left(2u_1+99d\right)=10000\Rightarrow d=\dfrac{200-2u_1}{99}=2$.

$$\Rightarrow 2S=\frac{2}{u_1u_2}+\frac{2}{u_2u_3}+...+\frac{2}{u_{99}u_{100}}$$

$$=\frac{u_2-u_1}{u_1u_2}+\frac{u_3-u_2}{u_2u_3}+...+\frac{u_{99}-u_{100}}{u_{99}u_{100}}$$

$$=\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_3}+...+\frac{1}{u_{98}}-\frac{1}{u_{99}}+\frac{1}{u_{99}}-\frac{1}{u_{100}}$$

$$=\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_{100}}=\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_1+99d}=\frac{198}{199}$$

$$\Rightarrow S=\frac{99}{199}.$$

Câu 57. Cho cấp số cộng (u_n) biết: $\begin{cases}u_1+u_5=6\\u_{10}-u_2=8\end{cases}$. Tính $S=\dfrac{u_1.u_2+u_2.u_3+u_3.u_4+...+u_{2018}.u_{2019}+u_{2019}.u_{2020}}{2019}$

A. $S=\dfrac{4080499}{3}$. **B.** $S=\dfrac{4078380}{3}$. **C.** $S=\dfrac{4082420}{3}$. **D.** $S=\dfrac{4088483}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\begin{cases}u_1+u_5=6\\u_{10}-u_2=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2u_1+4d=6\\u_1+9d-(u_1+d)=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+2d=3\\d=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=1\\d=1\end{cases}$.

$$S=\frac{u_1.u_2+u_2.u_3+u_3.u_4+...+u_{2018}.u_{2019}+u_{2019}.u_{2020}}{2019}$$

$$\Leftrightarrow 2019.S=u_1.u_2+u_2.u_3+u_3.u_4+...+u_{2019}.u_{2020}$$

$$\Leftrightarrow 2019.S=1.2+2.3+3.4+...+2019.2020$$

$$\Leftrightarrow 3.2019.S=1.2.3+2.3.3+3.4.3+...+2019.2020.3$$

$$\Leftrightarrow 3.2019.S=1.2.3+2.3.(4-1)+3.4.(5-2)+...+2019.2020.(2021-2018)$$

$$\Leftrightarrow 3.2019.S=1.2.3+2.3.4-1.2.3+3.4.5-2.3.4+...+2019.2020.2021-2018.2019.2020$$

$$\Leftrightarrow 3.2019.S=2019.2020.2021$$

$$\Leftrightarrow S=\frac{4082420}{3}.$$

Câu 58. Phương trình $x^4-2\left(m+1\right)x^2+2m+1=0$ (1) có bốn nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

A. $m=2$ hoặc $m=-\dfrac{4}{9}$. **B.** $m=4$ hoặc $m=-\dfrac{4}{9}$. **C.** $m=4$ hoặc $m=-2$. **D.** $m=3$ hoặc $m=-1$.

Lời giải

Chọn **B**

Đặt $t=x^2, t\ge 0$.

Phương trình trở thành: $t^2-2\left(m+1\right)t+2m+1=0$ (2)

Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi PT (2) có hai nghiệm dương phân biệt $t_2 > t_1 > 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - (2m+1) > 0 \\ 2m+1 > 0 \\ 2(m+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m \neq 0$$

Khi đó PT(2) có bốn nghiệm là: $-\sqrt{t_2}; -\sqrt{t_1}; \sqrt{t_1}; \sqrt{t_2}$

Bốn nghiệm này lập thành cấp số cộng khi:

$$\begin{cases} -\sqrt{t_2} + \sqrt{t_1} = -2\sqrt{t_1} \\ -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} = 2\sqrt{t_1} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1$$

Theo định lý viet thì: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 2(m+1) \\ t_1 t_2 = 2m+1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 + 9t_1 = 2(m+1) \\ t_1 9t_1 = 2m+1 \end{cases} \Rightarrow 9m^2 - 32m - 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -\frac{4}{9} \end{array} \right.$$

Vậy $m = 4$ hoặc $m = -\frac{4}{9}$ là những giá trị cần tìm.

Câu 59. Gọi S là tổng tất cả các giá trị m để phương trình $(x^2 + 2x - 3)(x - 2m) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng có công sai lớn hơn 2. Tính S.

A. $S = -1$. **B.** $S = -\frac{3}{2}$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = -4$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn **A.**

Ta có: $(x^2 + 2x - 3)(x - 2m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \\ x = 2m \end{array} \right.$.

Ba nghiệm này lập thành một cấp số cộng có công sai lớn hơn 2 nên có 3 trường hợp:

TH1: CSC -3; 1; $2m$. Suy ra $d = 4$; $m = \frac{5}{2}$ (thỏa mãn)

TH2: CSC -3; $2m$; 1. Suy ra $d = 2$; $m = -\frac{1}{2}$ (loại)

TH3: CSC $2m$; -3; 1. Suy ra $d = 4$; $m = -\frac{7}{2}$ (thỏa mãn). Suy ra $S = \frac{5}{2} - \frac{7}{2} = -1$.