

BÀI 3

PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN

❏ Vấn đề 1. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại một điểm.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) và $M(x_0; y_0)$ là điểm trên (C) . Tiếp tuyến với đồ thị (C) tại $M(x_0; y_0)$ có:

☑ Hệ số góc: $k = f'(x_0)$

☑ Phương trình: $y - y_0 = k(x - x_0)$ hay $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Vậy để viết được phương trình tiếp tuyến tại $M(x_0; y_0)$ chúng ta cần đủ **3 yếu tố** sau:

- ① Hoành độ tiếp điểm x_0 .
- ② Tung độ tiếp điểm y_0 (Nếu đề chưa cho, ta phải tính bằng cách thay x_0 và hàm số $y_0 = f(x_0)$).
- ③ Hệ số góc $k = f'(x_0)$.

Ví dụ 1 Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị là (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) :

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------------|
| a) Tại điểm $M(-1; 3)$. | b) Tại điểm có hoành độ bằng 2. |
| c) Tại điểm có tung độ bằng 1. | d) Tại giao điểm (C) với trục tung. |

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2 Cho hàm số $y = x^3 - (m - 1)x^2 + (3m + 1)x + m - 2$. Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng 1 đi qua điểm $A(2; -1)$

Ví dụ 3 Gọi (C_m) là đồ thị hàm số $y = x^3 - (2m + 1)x^2 + (m + 3)x - 3$ và (d) là tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x - 2$. Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (d) bằng $\frac{7}{\sqrt{17}}$.

 **Nhắc lại:** Khoảng cách từ $M(x_0; y_0)$ đến đường thẳng $(\Delta): Ax + By + C = 0$ là:

$$d(M, \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ví dụ 4 Cho hàm số $y = \frac{3-x}{x+2}$. Viết phương trình tiếp tuyến (d) của (C) biết (d) cách đều hai điểm $A(-1; -2)$ và $B(1; 0)$.

Ví dụ 5 Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$. Viết phương trình tiếp tuyến (d) của (C) biết (d) cách đều hai điểm $A(2;7)$ và $B(-2;7)$.

Ví dụ 6 Viết phương trình tiếp tuyến d với đồ thị (C) : $y = x^3 - 3x^2 + 2$, biết d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B thỏa mãn: $OB = 9OA$.

Ví dụ 7 Gọi M là một điểm thuộc (C) là đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+3}$ có khoảng cách tới trục hoành bằng 5. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại M .

Ví dụ 8 Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = \frac{2x+3}{x+1}$ tại những điểm thuộc đồ thị có khoảng cách đến đường thẳng $(d): 3x + 4y - 2 = 0$ bằng 2.

❏ Vấn đề 2. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết hệ số góc.

Phương pháp:

- ☑ Giải phương trình $f'(x) = k$ tìm các nghiệm $x_1, x_2, \dots$
- ☑ Viết phương trình tiếp tuyến: $y = f'(x_i)(x - x_i) + f(x_i) (i = 1, 2, \dots, n)$.

Chú ý:

- ☑ Số tiếp tuyến của đồ thị chính là số nghiệm của phương trình: $f'(x) = k$.
- ☑ Cho hai đường thẳng $d_1: y = k_1x + b_1$ và $d_2: y = k_2x + b_2$. Khi đó:

$$* d_1 // d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$$

$$* d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1$$

$$* d \text{ cắt các trục } Ox, Oy \text{ lần lượt tại } A, B \text{ thì } \tan \widehat{OAB} = \pm \frac{OB}{OA}.$$

Ví dụ 9 Tìm hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị $y = \tan x$ tại điểm có hoành độ $x = \frac{\pi}{4}$.

- (A) $k = 1$. (B) $k = \frac{1}{2}$. (C) $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$. (D) 2.

Ví dụ 10 Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ tại giao điểm với trục tung bằng :

- (A) -2. (B) 2. (C) 1. (D) -1.

Ví dụ 11 Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x + 1$ có đồ thị (C). Trong các tiếp tuyến với (C), tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất bằng bao nhiêu?

(A) $k = 3$.

(B) $k = 2$.

(C) $k = 1$.

(D) $k = 0$.

Ví dụ 12 Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $f(x) = \frac{3x+2}{2x-3}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ có hệ số góc bằng bao nhiêu?

(A) 13.

(B) -1.

(C) -5.

(D) -13.

Ví dụ 13 Tìm hệ số góc tiếp tuyến k của đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{1-x}$ tại giao điểm của nó với trục hoành.

(A) $k = -3$.

(B) $k = -\frac{1}{3}$.

(C) $k = \frac{1}{3}$.

(D) $k = 3$.

Ví dụ 14 Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết Hệ số góc của tiếp tuyến bằng 9

(A) $y = 9x - 1$ hay $y = 9x + 17$.

(B) $y = 9x - 1$ hay $y = 9x + 1$.

(C) $y = 9x - 13$ hay $y = 9x + 1$.

(D) $y = 9x - 13$ hay $y = 9x + 17$

Ví dụ 15 Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số: $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 48x - 1$.

(A) $y = 48x - 9$

(B) $y = 48x - 7$

(C) $y = 48x - 10$

(D) $y = 48x - 79$

Ví dụ 16 Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{18}x + 1$

(A) $y = 18x + 8$ và $y = 18x - 27$.

(B) $y = 18x + 8$ và $y = 18x - 2$.

(C) $y = 18x + 81$ và $y = 18x - 2$.

(D) $y = 18x + 81$ và $y = 18x - 27$.

Ví dụ 17 Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số: $y = \frac{2x}{x-1}$, biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng -2

(A) $y = -2x + 1, y = -2x$

(B) $y = -2x + 2, y = -2x + 4$

(C) $y = -2x + 9, y = -2x$

(D) $y = -2x + 8, y = -2x$

Ví dụ 18 Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng $-\frac{1}{4}$.

(A) $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$ và $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$.

(B) $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$ và $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$.

(C) $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$ và $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$.

(D) $y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$ và $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$.

Ví dụ 19 Cho hàm số $y = x^3 + 6x^2 + 7x + 5$ (C). Tìm trên (C) những điểm có hệ số góc tiếp tuyến tại điểm đó bằng -2 ?

Ⓐ $(1;9); (3;1).$

Ⓑ $(1;7); (3;1).$

Ⓒ $(1;7); (3;97).$

Ⓓ $(1;7); (1;9).$

Ví dụ 20 Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 2$ có hệ số góc $k = -9$, có phương trình là :

Ⓐ $y - 16 = -9(x + 3).$

Ⓑ $y = -9(x + 3).$

Ⓒ $y - 16 = -9(x - 3).$

Ⓓ $y + 16 = -9(x + 3).$

Ví dụ 21 Cho hàm số $y = x^4 + x^2 + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 6x - 1$

Ⓐ $y = 6x - 2$

Ⓑ $y = 6x - 7$

Ⓒ $y = 6x - 8$

Ⓓ $y = 6x - 3$

Ví dụ 22 Cho hàm số $y = \frac{2x+2}{x-1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d : y = -4x + 1$.

Ⓐ $\begin{cases} y = -4x + 2 \\ y = -4x + 14 \end{cases}$

Ⓑ $\begin{cases} y = -4x + 21 \\ y = -4x + 14 \end{cases}$

Ⓒ $\begin{cases} y = -4x + 2 \\ y = -4x + 1 \end{cases}$

Ⓓ $\begin{cases} y = -4x + 12 \\ y = -4x + 14 \end{cases}$

Ví dụ 23 Cho hàm số: $y = \frac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d : y = -4x + 1$.

Ⓐ $y = -4x + 3, y = -4x + 4.$

Ⓑ $y = -4x + 2, y = -4x + 44.$

Ⓒ $y = -4x + 2, y = -4x + 1.$

Ⓓ $y = -4x + 2, y = -4x + 14.$

Ví dụ 24 Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số: $y = \frac{2x}{x-1}$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $(d): x + 2y = 0$

(A) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}, y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}$

(B) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{27}{4}, y = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{4}$

(C) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}, y = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{4}$

(D) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{27}{4}, y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}$

Ví dụ 25 Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (m-1)x + 2m$ có đồ thị là (C_m) . Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị (C_m) tại điểm có hoành độ $x = 1$ song song với đường thẳng $y = 3x + 10$.

(A) $m = 2$

(B) $m = 4$

(C) $m = 0$

(D) Không tồn tại m

Ví dụ 26 Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết Tiếp tuyến vuông góc với trục Oy .

(A) $y = 2, y = -1.$

(B) $y = 3, y = -1.$

(C) $y = 3, y = -2.$

(D) $x = 3, x = -1.$

Ví dụ 27 Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: 24x - y + 1 = 0$.

(A) $\Delta: y = 24x - 4.$

(B) $\Delta: y = 24x - 42.$

(C) $\Delta: y = 24x - 23.$

(D) $\Delta: y = 4x - 42.$

Ví dụ 28 Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{3}x + 2$

(A) $y = -3x - 11$ hay $y = -3x + 11$

(B) $y = -3x - 11$ hay $y = -3x + 1$

(C) $y = -3x - 1$ hay $y = -3x + 1$

(D) $y = -3x - 1$ hay $y = -3x + 11$

Ví dụ 29 Cho hàm số $y = \frac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = -4x + 1$.

(A) $\Delta: y = -4x + 2$; $\Delta: y = -4x + 1$

(B) $\Delta: y = -4x + 2$; $\Delta: y = -4x + 7$

(C) $\Delta: y = -4x + 6$; $\Delta: y = -4x + 14$

(D) $\Delta: y = -4x + 2$; $\Delta: y = -4x + 14$

Ví dụ 30 Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{4}{3}$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x + 4y - 1 = 0$.

(A) $y = 4x + \frac{7}{6}$; $y = 4x - \frac{2}{3}$

(B) $y = 4x + \frac{73}{6}$; $y = 4x - \frac{26}{3}$

(C) $y = 4x + \frac{73}{6}$; $y = 4x - \frac{2}{3}$

(D) $y = 4x + \frac{7}{6}$; $y = 4x - \frac{26}{3}$

Ví dụ 31 Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = 9x - 7$.

(A) $y = 9x + 25$.

(B) $y = 7x + 2$.

(C) $y = 9x + 5$.

(D) $y = 9x + 2$.

Ví dụ 32 Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số: $y = \frac{2x}{x-1}$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $(\Delta): 9x - 2y + 1 = 0$

(A) $y = -\frac{2}{9}x + \frac{2}{9}, y = -\frac{2}{9}x + \frac{8}{9}$

(B) $y = -\frac{2}{9}x + \frac{32}{9}, y = -\frac{2}{9}x + \frac{8}{9}$

(C) $y = -\frac{2}{9}x + \frac{1}{9}, y = -\frac{2}{9}x + \frac{8}{9}$

(D) $y = -\frac{2}{9}x + \frac{32}{9}, y = -\frac{2}{9}x - \frac{4}{9}$

Ví dụ 33 Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu tiếp tuyến của (C) song song đường thẳng $y = 9x + 10$?

(A) 1.

(B) 3.

(C) 2.

(D) 4.

Ví dụ 34 Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x + 1$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{x}{5} + 2$.

(A) $y = 5x + \frac{2}{3}$ hoặc $y = 5x - 8$

(B) $y = 5x + \frac{8}{3}$ hoặc $y = 5x - 9$

(C) $y = 5x + \frac{8}{3}$ hoặc $y = 5x - 5$

(D) $y = 5x + \frac{8}{3}$ hoặc $y = 5x - 8$

Ví dụ 35 Cho hàm số $y = x^2 - 6x + 5$ có tiếp tuyến song song với trục hoành. Phương trình tiếp tuyến đó là:

☐ A $x = -3$.

☐ B $y = -4$.

☐ C $y = 4$.

☐ D $x = 3$.

Ví dụ 36 Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = x^4 + x$. Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $d : x + 5y = 0$ có phương trình là:

☐ A $y = 5x - 3$.

☐ B $y = 3x - 5$.

☐ C $y = 2x - 3$.

☐ D $y = x + 4$.

Ví dụ 37 Lập phương trình tiếp tuyến của đường cong $(C) : y = x^3 + 3x^2 - 8x + 1$, biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $\Delta : y = x + 2017$?

☐ A $y = x + 2018$.

☐ B $y = x + 4$.

☐ C $y = x - 4; y = x + 28$.

☐ D $y = x - 2018$.

Ví dụ 38 Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C) .

a) Giải bất phương trình $y' < -4$;

b) Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến này cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B mà $OA = 4OB$.

Ví dụ 39 Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ có đồ thị là (C) . Tìm tất cả các tiếp tuyến của đồ thị (C) , hãy tìm tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất.

Ví dụ 40 Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = -2x^3 + 6x^2 - 5$.

- Viết phương trình tiếp tuyến (d) của (C) tại điểm A thuộc (C) có hoành độ $x = 3$. Tìm giao điểm khác A của (d) và (C) .
- Xác định tham số a để tồn tại ít nhất một tiếp tuyến của (C) có hệ số góc a .
- Chứng minh rằng chỉ có duy nhất một tiếp tuyến của (C) đi qua điểm có hoành độ thỏa mãn phương trình $y'' = 0$ của (C) .

Ví dụ 41 Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị $y = x^3 - 3x^2 + m$ tại điểm có hoành độ bằng 1 cắt các trục Ox , Oy lần lượt tại A và B sao cho diện tích tam giác OAB có diện tích bằng 1,5.

📁 Vấn đề 3. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua một điểm.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x)$ đi qua điểm $M(x_1; y_1)$.

☑ Cách 1:

- Phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm M có hệ số góc là k có dạng: $y = k(x - x_1) + y_1$.
- (d) tiếp xúc với đồ thị (C) tại $N(x_0; y_0)$; khi hệ:
$$\begin{cases} f(x_0) = k(x_0 - x_1) + y_1 \\ f'(x_0) = k \end{cases} \quad \text{có nghiệm } x_0.$$

☑ Cách 2:

- Gọi $N(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của đồ thị (C) và tiếp tuyến (d) qua điểm M , nên (d) cũng có dạng $y = y'_0(x - x_0) + y_0$.
- (d) đi qua điểm M nên có phương trình: $y_1 = y'_0(x_1 - x_0) + y_0 (*)$.
- Từ phương trình $(*)$ ta tìm được tọa độ điểm $N(x_0; y_0)$; từ đây ta tìm được phương trình đường thẳng (d) .

Ví dụ 42 Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 5$ có đồ thị là (C) . Tìm phương trình các đường thẳng đi qua điểm $A\left(\frac{19}{12}; 4\right)$ và tiếp xúc với đồ thị (C) của hàm số.

Ví dụ 43 Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến đó đi qua điểm $M\left(0; \frac{3}{2}\right)$.

Ví dụ 44 Cho hàm số: $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị là (C) điểm $A(0;m)$; Xác định m để từ A kẻ được 2 tiếp tuyến đến (C) sao cho hai tiếp điểm tương ứng nằm về hai phía đối với trục Ox .

Ví dụ 45 Tìm số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$, biết tiếp tuyến đó đi qua điểm $M(-1; -9)$.

A 0

B 1.

C 2

D 3

Ví dụ 46 Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị (C) . Gọi Δ là đoạn thẳng đi qua điểm $A(1; -2)$ và có hệ số góc m . Tổng các giá trị của m để Δ tiếp xúc với đồ thị (C) là:

A $-\frac{9}{4}$

B 0.

C $\frac{1}{2}$

D $-\frac{3}{2}$

Ví dụ 47 Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ có đồ thị (C) và điểm $A(m; 2)$. Tìm tập hợp S tất cả các giá trị thực của m để có 3 tiếp tuyến của (C) đi qua A .

Ⓐ $S = (-\infty; -1) \cup \left(\frac{5}{3}; 2\right) \cup (2; +\infty)$

Ⓑ $S = (-\infty; -1) \cup \left(\frac{5}{3}; 3\right) \cup (3; +\infty)$.

Ⓒ $S = (-\infty; -1) \cup \left(\frac{4}{3}; 2\right) \cup (2; +\infty)$

Ⓓ $S = (-\infty; -2) \cup \left(\frac{5}{3}; 2\right) \cup (2; +\infty)$

Ví dụ 48 Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết Tiếp tuyến đi qua điểm $N(0; 1)$.

Ⓐ $y = -\frac{33}{4}x + 11$.

Ⓑ $y = -\frac{33}{4}x + 12$.

Ⓒ $y = -\frac{33}{4}x + 1$.

Ⓓ $y = -\frac{33}{4}x + 2$.

Ví dụ 49 Tiếp tuyến kẻ từ điểm $A(2;3)$ tới đồ thị hàm số $y = \frac{3x+4}{x-1}$ là:

A

$y = -28x + 59; y = -24x + 51$

C

$y = -24x + 51; y = x + 1$

B

$y = -28x + 59; y = x + 1.$

D

$y = -28x + 59$

Ví dụ 50 Cho hàm số $y = \frac{x-2}{1-x}$ có đồ thị (C) và điểm $A(m;1)$. Gọi S là tập các giá trị của m để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A . Tính tổng bình phương các phần tử của tập S .

A

$\frac{13}{4}$

B

$\frac{5}{2}.$

C

$\frac{25}{4}$

D

$\frac{9}{4}$

GV: Nguyễn Hữu Học

17