

BỘ ĐỀ ÔN TẬP

MÔN TOÁN

THPTQG PHẦN 2

2026

**Bám sát đề thi minh
họa và chính thức 2025**

Sưu tầm các bài tập hay từ
các đề thi giúp HS tư duy và
tăng kỹ năng phản xạ đề.

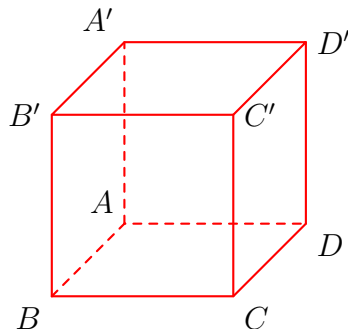
- ① Trắc nghiệm nhiều phương án
- ② Trắc nghiệm đúng sai
- ③ Trả lời ngắn



LÊ MINH KHA - 0399653362

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

❖ **Câu 1.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm mệnh đề sai?



(A) $(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{A'B'}) = 90^\circ$.

(B) $(\overrightarrow{A'A}; \overrightarrow{CB'}) = 45^\circ$.

(C) $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'C'}) = 45^\circ$.

(D) $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{B'D'}) = 90^\circ$.

❖ **Câu 2.** Gieo ngẫu nhiên một con xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo bằng 8 biết rằng lần gieo thứ nhất xuất hiện mặt 5 chấm.

(A) $\frac{1}{3}$.

(B) $\frac{5}{6}$.

(C) $\frac{1}{36}$.

(D) $\frac{1}{6}$.

❖ **Câu 3.** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số đồng biến trên khoảng nào?

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			1			$-\infty$	
		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
			-1		-1			

(A) $(-3; 0)$.

(B) $(0; +\infty)$.

(C) $(-\infty; 3)$.

(D) $(-3; 3)$.

❖ **Câu 4.** Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 1$ và $u_2 = 2$. Công bội của cấp số nhân đã cho là

(A) $q = -2$.

(B) $q = 2$.

(C) $q = -\frac{1}{2}$.

(D) $q = \frac{1}{2}$.

❖ **Câu 5.** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x - 2y - 4 = 0$, khi đó một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là

(A) $\vec{n} = (-1; 2; 4)$.

(B) $\vec{n} = (1; -2; 0)$.

(C) $\vec{n} = (1; -2; -4)$.

(D) $\vec{n} = (-1; 2; -4)$.

❖ **Câu 6.** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}$ thỏa mãn $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$. Tọa độ vectơ $\vec{a}$ là

- (A) $(-5; 4; 3)$. (B) $(4; 3; -5)$. (C) $(-4; -3; 5)$. (D) $(3; 4; -5)$.

❖ **Câu 7.** Cho hàm số $f(x) = 3^x + 1$. Một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ là

- (A) $F(x) = 3^x + x$. (B) $F(x) = \frac{3^x}{\ln 3}$.
(C) $F(x) = 3^x \ln 3$. (D) $F(x) = \frac{3^x}{\ln 3} + x$.

❖ **Câu 8.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^5 f(x)dx = 6$, $\int_2^5 f(x)dx = 2$. Giá trị của biểu thức $\int_0^2 f(x)dx$ bằng

- (A) 8. (B) 4. (C) 3. (D) 2.

❖ **Câu 9.** Khảo sát thời gian ứng dụng AI vào học tập trong một ngày của học sinh lớp 12A, thu được mẫu số liệu ghép nhóm như sau:

Thời gian (pht)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)
Số học sinh	5	8	14	10	6

Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng (làm tròn kết quả hàng phần trăm)?

- (A) 31, 95. (B) 31, 94. (C) 32, 96. (D) 32, 97.

❖ **Câu 10.** Phương trình $\sin x + 1 = 0$ có nghiệm là

- (A) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. (B) $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
(C) $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. (D) $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

❖ **Câu 11.** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x - 1) + 3 > 0$ là

- (A) $(-\infty; 9)$. (B) $(9; +\infty)$. (C) $(1; 9)$. (D) $(1; 7)$.

❖ **Câu 12.** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{3x + 2}{x + 1}$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng

- (A) $\frac{10}{3}$. (B) $\frac{8}{3}$. (C) 3. (D) 2.

Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai

❖ **Bài 1.** Một con sư tử đang đuổi theo một con ngựa vằn. Con ngựa vằn nhận ra con sư tử khi con sư tử cách xa nó 40 m. Từ thời điểm này, con sư tử đuổi con ngựa vằn với tốc độ $v_1(t) = 15e^{-0,1t}$ m/s và con ngựa vằn chạy trốn với tốc độ $v_2(t) = 20 - 20e^{-0,1t}$ m/s trên cùng một đường thẳng (với t tính theo giây và $0 \leq t \leq 60$).

- Tại thời điểm ban đầu $t = 0$ vận tốc của con ngựa vằn là 20 m/s.
- Tốc độ của sư tử giảm dần theo thời gian, trong khi tốc độ của ngựa vằn tăng dần theo thời gian.
- Sư tử sẽ ở gần ngựa vằn nhất khi $v'_1(t) = v'_2(t)$.
- Sư tử sẽ không bắt được con ngựa vằn và khoảng cách ngắn nhất giữa chúng là 1,42 mét (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

❖ **Bài 2.** Trong một bài kiểm tra trắc nghiệm có 50 câu hỏi, mỗi câu có bốn phương án trả lời A,

B, C, D trong đó chỉ có một phương án trả lời đúng. Mỗi câu trả lời đúng được cộng 0,2 điểm và mỗi câu trả lời sai bị trừ 0,1 điểm. Trong 50 câu trên, bạn Nam đã làm được và chắc đúng 35 câu, 15 câu còn lại bạn không biết làm nên ở mỗi câu bạn chọn ngẫu nhiên một đáp án.

- Nếu trong 15 câu còn lại bạn Nam tô ngẫu nhiên và đúng thêm 3 câu nữa, khi đó bài của bạn Nam được 6,4 điểm.
- Ở mỗi câu còn lại, xác suất để bạn Nam làm đúng là $\frac{1}{4}$.
- Bạn Nam làm được 7,0 điểm, khi đó bạn Nam làm đúng 35 câu và sai 15 câu.
- Xác suất để bạn Nam đạt được 7,0 điểm là 0,165 (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

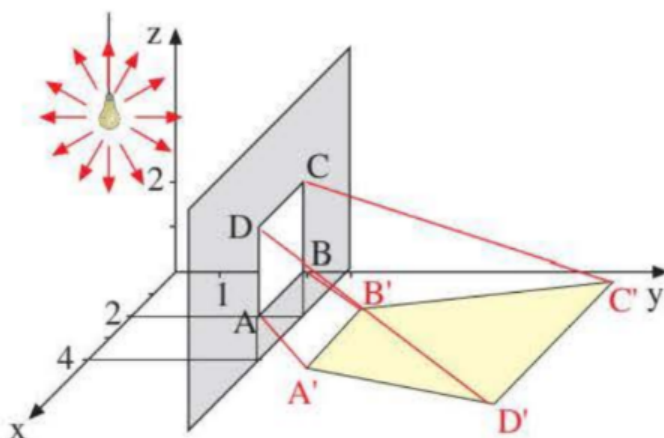
Bài 3. Giả sử tốc độ v (m/s) của một thang máy di chuyển từ tầng 1 lên tầng cao nhất theo

$$v(t) = \begin{cases} t & \text{nếu } 0 \leq t \leq 2 \\ 2 & \text{nếu } 2 < t \leq 20 \\ 12 - 0,5t & \text{nếu } 20 < t \leq 24 \end{cases}$$

thời gian t được cho bởi công thức

- Tốc độ tại thời điểm $t = 2$ s là 2.
- Gia tốc chuyển động của thang máy tại thời điểm $t = 15$ s là $2 \text{ (m/s}^2\text{)}$.
- Quãng đường chuyển động của thang máy là 42 m.
- Tốc độ trung bình của thang máy là $1,75 \text{ (m/s)}$.

Bài 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ vuông góc $Oxyz$ (có mặt sàn là Oxy , Oz thẳng đứng lên), có một cửa sổ hình vuông $ABCD$ song song với mặt phẳng Oxz , cạnh dài bằng 2m. Cửa sổ được chiếu sáng bởi một nguồn sáng đặt tại $L(3; 0; 5)$. Biết điểm $A(4; 4; 1)$. Trên mặt sàn xuất hiện hình bóng của cửa sổ. Hãy dựa vào hình vẽ bên xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau:



- Gọi G là tâm của cửa sổ, khi đó $G(1; 2; 3)$.
- Gọi D' của bóng của điểm D trên mặt sàn, khi đó tọa độ của D' là $\left(\frac{11}{2}; 10; 0\right)$.
- Diện tích bóng của cửa sổ trên mặt sàn lớn hơn 15m^2 .
- Hình bóng của cửa sổ trên mặt sàn lớn hơn cửa sổ thật 4 lần.

Phần III. Câu trả lời ngắn Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 6. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC (làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; -4; 4)$, $B(-1; -2; 4)$ và $C(0; -4; 4)$. Mặt phẳng (P) có dạng $ax + 2025y + cz + d = 0$ đi qua điểm A sao cho hai điểm B, C nằm về cùng một phía. Đặt $h_1 = d(B, (P))$ là khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (P) và $h_2 = d(C, (P))$ là khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (P) . Khi biểu thức $2025h_1 + 2026h_2$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị của biểu thức $T = -9a + 10c + d$ bằng bao nhiêu?

Bài 3. Hiện nay, nước ta đang trong quá trình tinh gọn bộ máy và thực hiện nghị quyết không tổ chức công an cấp huyện. Do vậy, trong đợt điều động cán bộ công an từ huyện về công tác tại cơ sở hoặc công tác tại công an tỉnh, phòng tổ chức cán bộ nhận thấy rằng: có 60% cán bộ có nguyện vọng về công tác tại cơ sở là các xã vùng sâu vùng xa, số còn lại nguyện vọng về công tác tại công an tỉnh.

- ◇ Trong số cán bộ có nguyện vọng về công tác tại cơ sở thì 70% có trình độ đại học và 30% có trình độ trung cấp.
- ◇ Trong số cán bộ có nguyện vọng về công tác tại công an tỉnh thì 80% có trình độ đại học và 20% có trình độ trung cấp.

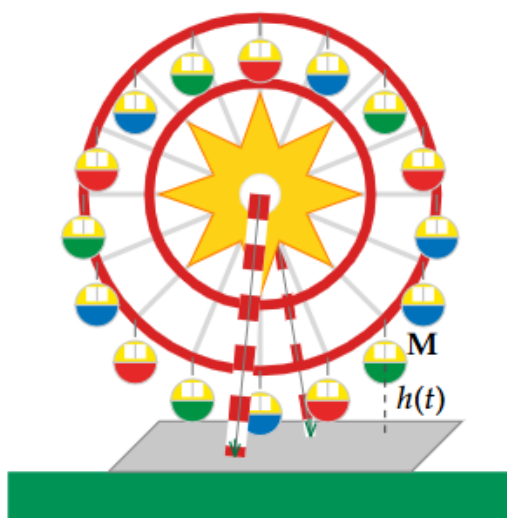
Tuy nhiên, năng lực công tác cũng là một yếu tố quan trọng. Dựa trên hồ sơ đánh giá năng lực:

- ◇ Trong số cán bộ có nguyện vọng về cơ sở thì tỷ lệ cán bộ được đánh giá có năng lực “Tốt” trở lên với trình độ đại học là 60% và với trình độ trung cấp là 30%.
- ◇ Trong số cán bộ có nguyện vọng về công tác tại công an tỉnh thì tỷ lệ cán bộ được đánh giá có năng lực “Tốt” trở lên với trình độ đại học là 85% và với trình độ trung cấp là 25%.

Chọn ngẫu nhiên một cán bộ công an. Tính xác suất để cán bộ này vừa có trình độ đại học, vừa được đánh giá có năng lực “Tốt” và có nguyện vọng về công tác tại cơ sở là các xã vùng sâu vùng xa. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 4. Cho một hình bát giác đều $ABCDEFGH$ nội tiếp trong một đường tròn tâm O như hình bên. Gắn ngẫu nhiên tám số tự nhiên $\{9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16\}$ vào tám đỉnh của bát giác đều này (mỗi số gắn đúng một đỉnh). Chọn ngẫu nhiên một tam giác có ba đỉnh lấy từ tám đỉnh của bát giác đã cho. Gọi xác suất để thu được một tam giác vuông với ba số trên ba đỉnh của tam giác (theo một thứ tự nào đó) lập thành một cấp số cộng là $\frac{m}{n}$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$; $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản). Giá trị của $m + n$ bằng bao nhiêu?

Bài 5. Một vòng quay Mặt Trời quay quanh trục mỗi vòng hết 15 phút. Khi vòng quay quay đều, khoảng cách h m từ một cabin M trên vòng quay đến mặt đất được tính bởi công thức $h(t) = a \sin\left(\frac{2\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) + b$; $a > 0$. Với t là thời gian quay của vòng quay tính bằng phút ($t \geq 0$). Biết rằng khi lên đến vị trí cao nhất cabin M cách mặt đất 114,5 m và khi xuống đến vị trí thấp nhất cabin M cách mặt đất 0,5 m. Trong vòng quay đầu tiên tính từ thời điểm $t = 0$ (phút), những thời điểm cabin M đạt được độ cao 86 m so với mặt đất là t_1, t_2 . Tính $t_1 + t_2$.



Bài 6. Một doanh nghiệp dự định sản xuất x sản phẩm trong một tháng ($x \in \mathbb{N}; 100 \leq x \leq 800$). Tổng doanh thu khi bán hết x sản phẩm đó là $F(x) = -0,001x^3 + 0,6x^2 + 500x + 100\,000$ (nghìn đồng). Chi phí để sản xuất bình quân cho mỗi sản phẩm là $G(x) = 0,0002x^2 + \frac{40\,000}{x}$ (nghìn đồng) và chi phí để mua nguyên vật liệu khi chưa triết khấu là $H(x) = \frac{-4}{49}x^2 + \frac{750}{49}x + \frac{1\,500\,000}{49}$ (nghìn đồng). Công ty cung cấp nguyên vật liệu đang giảm 2% tổng tiền mua nguyên vật liệu. Trong một tháng, doanh nghiệp đó cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

❖ **Câu 1.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x + 1)(2x - 5)^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?

- (A) $(-1; +\infty)$. (B) $(-3; 1)$. (C) $\left(-1; \frac{5}{2}\right)$. (D) $(-\infty; -1)$.

❖ **Câu 2.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A) $(ACC'A') \perp (BDD'B')$. (B) $(A'BC) \perp (A'B'C'D')$.
(C) $(ABCD) \perp (A'B'C'D')$. (D) $(A'BC) \perp (ABCD)$.

❖ **Câu 3.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α) có phương trình $x + 2z + 3 = 0$. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là

- (A) $\vec{a} = (2; -1; 0)$. (B) $\vec{a} = (2; 0; -1)$.
(C) $\vec{a} = (1; 0; 2)$. (D) $\vec{a} = (1; 2; 3)$.

❖ **Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , tam giác ABC vuông cân tại B và $SA = AB = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng

- (A) 90° . (B) 45° . (C) 30° . (D) 60° .

❖ **Câu 5.** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_4(x + 1) \geq 2$ là

- (A) $(-1; 15)$. (B) $(-1; 5]$. (C) $[15; +\infty)$. (D) $(15; +\infty)$.

❖ **Câu 6.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3, y = 0, x = 0, x = 2$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$. (B) $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3) dx$.
(C) $V = \int_0^2 (x^2 + 3) dx$. (D) $V = \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$.

❖ **Câu 7.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2026^x$ là

- (A) $\frac{2026^{x+1}}{\ln 2026} + C$. (B) $\frac{2026^x}{\ln 2026} + C$.
(C) $2026^{x+1} + C$. (D) $2026^x + C$.

❖ **Câu 8.** Tổng các nghiệm của phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x} = \frac{9}{4}$ là

- (A) 0. (B) 2. (C) 3. (D) 1.

❖ **Câu 9.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Vectơ $\vec{u} = \vec{A'A} + \vec{A'B'} + \vec{A'D'}$ bằng vectơ nào dưới đây?

- (A) $\overrightarrow{CA'}$. (B) $\overrightarrow{C'A}$. (C) $\overrightarrow{A'C}$. (D) $\overrightarrow{AC'}$.

⇒ **Câu 10.** Tập nghiệm của phương trình $\cos 2x = 1$ là

- (A) $\left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. (B) $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
(C) $\{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. (D) $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

⇒ **Câu 11.** Khảo sát thời gian tập thể dục của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Thời gian (phút)	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số học sinh	5	9	12	10	6

Nhóm chứa tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

- (A) [40; 60). (B) [20; 40). (C) [60; 80). (D) [80; 100).

⇒ **Câu 12.** Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$. Giá trị của u_4 bằng

- (A) 162. (B) 24. (C) 48. (D) 54.

Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai

✂ **Bài 1.** Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 4x - 1}{x - 1}$. Các phát biểu sau đúng hay sai?

- a) Hàm số đã cho có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
b) Hàm số đã cho có đạo hàm là $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$.
c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[2; 3]$ bằng 7.
d) Phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$ là $y = x + 5$.

✂ **Bài 2.** Trong lễ hội thường niên của một địa phương, tốc độ khách vào và tốc độ khách ra lễ hội tại thời điểm t lần lượt được xác định bằng hàm số $a(t) = -24t^2 + 190t + 500$ và $b(t) = -7,8t^3 + kt^2$ (k là số thực). Trong đó $a(t)$ và $b(t)$ được tính bằng người/giờ, t tính bằng giờ kể từ lúc 12 giờ trưa, giờ đóng cửa lễ hội là 22 giờ đêm và khi đóng cửa thì không còn ai có mặt trong lễ hội. Biết tại mọi thời điểm, người đã ra sẽ không vào lại.

- a) Tổng lượng khách tham dự lễ hội là 6000 người.
b) $k = 78$.
c) Số lượng khách có mặt trong lễ hội tại thời điểm t được ước lượng theo công thức $N(t) = \int_0^t (7,8x^3 - 102x^2 + 190x + 500)dx$.
d) Số lượng khách có mặt trong lễ hội khi lớn nhất không vượt quá 1970 người.

✂ **Bài 3.** Cuối tuần bạn Bảo được cha chở đi mua sách tại một tiệm sách cũ. Bảo chọn mua 12 quyển (không có hai quyển nào giống nhau), trong đó có 7 quyển thuộc thể loại Khoa Học Tự Nhiên và 5 quyển còn lại thuộc thể loại Khoa Học Xã Hội. Trước khi tính tiền sách cho Bảo, cha chọn ngẫu nhiên 3 quyển trong 12 quyển đã được Bảo chọn mua để kiểm tra nội dung trong sách có thực sự phù hợp với Bảo hay không.

- a) Nếu P_a là xác suất để 3 quyển sách được cha của Bảo chọn để kiểm tra đều thuộc thể loại Khoa Học Xã Hội thì $11P_a = 1$.

- b) Nếu P_b là xác suất để 3 quyển sách được cha của Bảo chọn để kiểm tra có đúng một quyển thuộc thể loại Khoa Học Tự Nhiên thì $22P_b = 7$.
- c) Nếu P_c là xác suất để 3 quyển sách được cha của Bảo chọn để kiểm tra có đúng hai quyển thuộc thể loại Khoa Học Tự Nhiên thì $44P_c = 21$.
- d) Nếu P_d là xác suất để 3 quyển sách được cha của Bảo chọn để kiểm tra có đủ hai thể loại Khoa Học Tự Nhiên và Khoa Học Xã Hội thì $44P_d = 35$.

Bài 4. Đường ống dẫn dầu trên không là hệ thống đường ống được treo trên các giá đỡ hoặc cột cao, dùng để vận chuyển dầu thô hoặc các sản phẩm dầu mỏ từ nơi này đến nơi khác mà không cần chôn dưới lòng đất. Hệ thống này thường được sử dụng trong các khu vực có địa hình khó khăn, vùng băng giá, rừng rậm... những nơi mà việc đào đường ống ngầm không khả thi.



Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ thích hợp, mặt đất là mặt phẳng (Oxy) , đơn vị trên mỗi trục là mét, người ta thiết lập một đường ống dẫn dầu trên không dọc theo đường thẳng $d : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 20 \end{cases} \quad (t \text{ là tham số}).$ Vì địa hình phức tạp, người ta chọn điểm $A(15; 10; 15)$ để làm điểm trung chuyển dầu từ mặt đất đến đường ống này. a) Đường thẳng d nằm trên mặt phẳng (Oyz) .

b) Điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxy) có tọa độ $A'(-15; -10; 15)$.

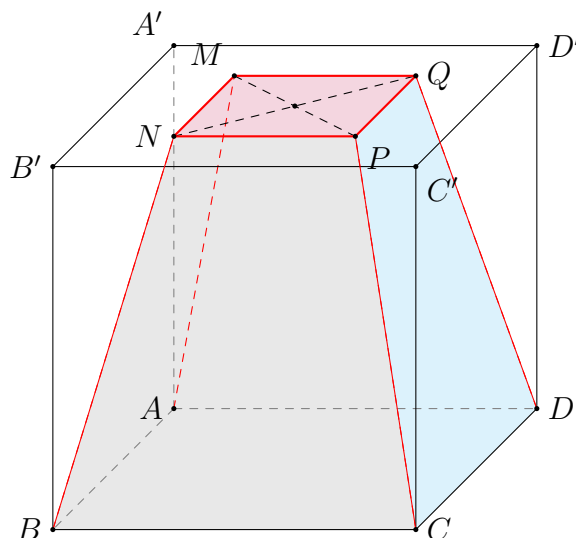
c) Do thực tế công việc, người ta cần xác định vị trí điểm $B(0; b; 20)$ thuộc đường ống và vị trí điểm $C(m; n; 0)$ thuộc mặt đất sao cho tổng độ dài các đoạn đường AB, BC, AC nhỏ nhất. Ta có $m + n + b = \frac{200}{7}$.

d) Giá trị nhỏ nhất của tổng độ dài các đoạn thẳng AB, BC, AC làm tròn đến hàng chục bằng 45,5m.

Phần III. Câu trả lời ngắn Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Bài 1. Một vật lưu niệm làm bằng thủy tinh có dạng hình lăng trụ đều có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $AB = 10$ (cm). Phía bên trong làm bằng nhựa đặc là hình chóp cụt đều $MNPQ.ABCD$ có $MN = 5$ (cm) và chiều cao bằng chiều cao của lăng trụ như hình vẽ. Biết rằng khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(CDQP)$ bằng $3\sqrt{10}$ (cm). Phần khoảng trống bên trong vật lưu niệm người ta bơm chất lỏng có màu sắc (xem độ dày thành vật thể không đáng kể). Khi đó thể tích

phần chất lỏng bơm vào là $\frac{a}{b}$ (lít) với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tìm $a + b$.



Bài 2. Vệ tinh Van Allen Probes được phóng lên không gian để nghiên cứu các vành đai bức xạ bao quanh Trái Đất. Vệ tinh này bay theo một quỹ đạo có chu kỳ 10 giờ - nghĩa là mỗi vòng bay quanh Trái Đất kéo dài đúng 10 giờ. Cứ mỗi vòng bay, vệ tinh lại xuyên qua vùng bức xạ mạnh và tích lũy thêm *liều bức xạ*. Biết rằng đơn vị của bức xạ là Gray (Gy), và khi tổng *liều bức xạ* chiếu vào vệ tinh đạt 1000 Gray, thì vệ tinh hỏng hoàn toàn. Khoảng cách từ tâm Trái Đất đến vệ tinh được mô hình hóa bằng hàm số $R(T) = 7000 + 3000T$ (km), trong đó T là thời gian tính bằng giờ, $0 \leq T \leq 10$, kể từ đầu vòng bay. Công thức *suất liều bức xạ* - tức là lượng bức xạ vệ tinh nhận được trong 1 giờ, phụ thuộc vào khoảng cách R (km) từ vệ tinh tới tâm Trái Đất, là $D(R) = 60 \cdot \left(\frac{R}{25000}\right)^2$ milliGray/giờ. Biết rằng do tính đối xứng và chu kỳ của quỹ đạo bay, tổng liều bức xạ vệ tinh nhận được trong một vòng bay 10 giờ được tính bằng công thức $L = 2 \cdot \int_0^{10} D(R(T))dT$, và 1 Gray = 1000 milliGray. Tính số năm hoạt động của vệ tinh từ lúc bắt

đầu hoạt động tới khi hỏng hoàn toàn (không làm tròn các bước trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng tới hai chữ số thập phân sau dấu phẩy, coi một năm có 365 ngày, mỗi ngày có 24 giờ).

Bài 3. Trong âm nhạc, một quãng tám (octave) là khoảng cách âm thanh từ nốt Đô tới nốt Đô tiếp theo, theo thứ tự từ thấp đến cao là:

Đô – Đô# – Rê – Rê# – Mi (E4) – Pha – Pha# – Sol – Sol# – La (A4) – La# – Si – Đô

trong đó khoảng cách giữa hai nốt liên tiếp gọi là một nửa cung (semitone). Hai nốt cách nhau n nửa cung thì tỷ lệ tần số nốt cao f_{nc} và tần số nốt thấp f_{nt} là $\frac{f_{nc}}{f_{nt}} = 2^{\frac{n}{12}}$. Cho biết tần số chuẩn của nốt La (A4) là 440 Hz. Trên đàn guitar, dây số 1 là nốt Mi (E4) đang bị chùng do thời tiết, tần số đo được hiện tại đang là 300 Hz. Để căng lại dây đàn cho chuẩn, ta dùng núm xoay, và cứ vặn núm xoay 90° thì nốt nhạc được tăng lên một nửa cung. Hỏi phải xoay núm của dây số 1 một góc bao nhiêu độ để dây số 1 trở về âm chuẩn (không làm tròn các bước trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng tới hàng đơn vị)?

Bài 4. Hệ thống gồm các vật như sau được gọi là máng n :

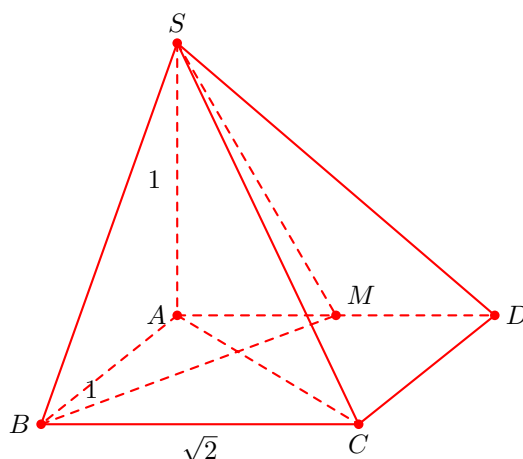
- ◇ Một máng nghiêng có n lỗ dọc theo đáy. Tính từ trên cao xuống, các lỗ lần lượt có đường kính là $1, 2, 3, \dots, n$.
- ◇ n quả bóng có đường kính là các số nguyên dương không lớn hơn n , trong đó có thể có nhiều

quả bóng có cùng đường kính.

Xét máng n , thả lần n quả bóng từ đỉnh máng xuống, lần lượt từng quả. Đối với mỗi quả bóng, khi lăn đến lỗ có đường kính lớn hơn hoặc bằng đường kính của nó thì nó sẽ lọt vào đồng thời đóng lỗ này lại. Đối với một thứ tự các quả bóng sau khi thả lần, nếu các quả bóng đều lọt vào lỗ thì thứ tự các quả bóng ấy được gọi là dãy đẹp. Hai dãy đẹp giống nhau khi và chỉ khi thứ tự bán kính của bóng lọt lỗ là như nhau. Có thể tạo được bao nhiêu dãy đẹp khác nhau đối với máng 5 biết rằng có đúng một quả có đường kính là 4 và một quả có đường kính là 5?

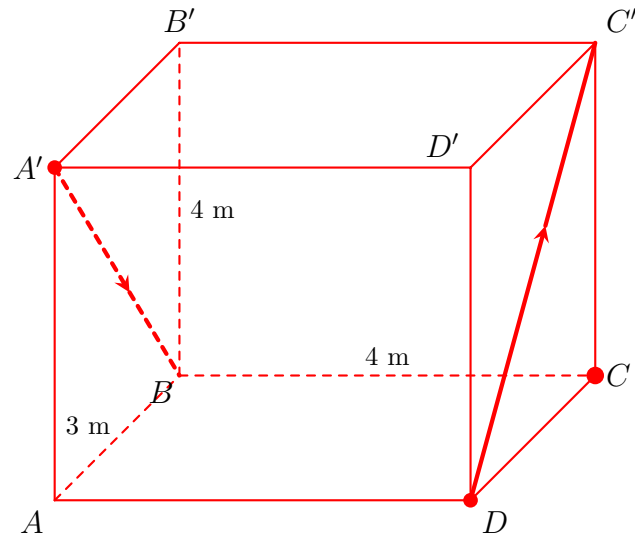


Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 1$, $AD = \sqrt{2}$, $SA = 1$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của AD . Khoảng cách từ điểm C tới mặt phẳng (SBM) bằng bao nhiêu?



Bài 6. Hình vẽ dưới đây mô tả một căn phòng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ với $AB = 3$

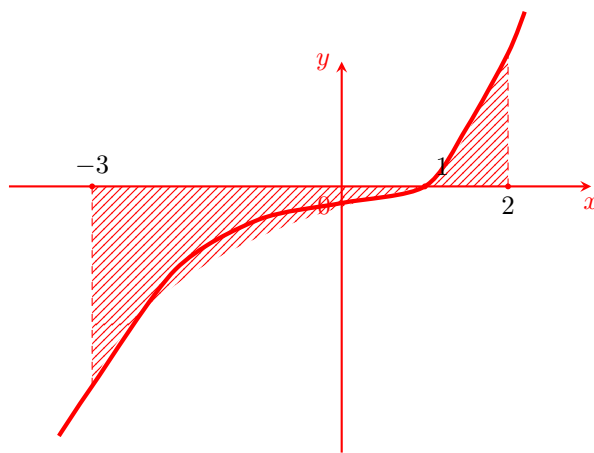
m, $BB' = BC = 4$ m, tại C có một tổ kiến.



Kiến 1 xuất phát từ A' bò về tổ với vận tốc $0,02$ m/s trên hai đoạn thẳng liên tiếp $A'B, BC$. Kiến 2 xuất phát từ D bò về tổ với vận tốc $0,06$ m/s trên hai đoạn thẳng liên tiếp $DC', C'C$. Biết rằng, hai con kiến xuất phát cùng một lúc. Hỏi, khi kiến 2 còn cách tổ 1 m thì khoảng cách giữa hai con kiến là bao nhiêu m? (làm tròn đến hàng phần trăm).

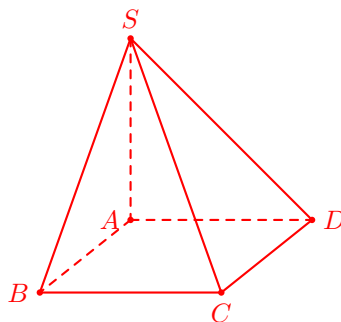
Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

❖ **Câu 1.** Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -3, x = 2$, như hình vẽ bên dưới. Đặt $a = \int_{-3}^1 f(x)dx$, $b = \int_1^2 f(x)dx$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



- (A) $S = a + b$. (B) $S = -a - b$. (C) $S = a - b$. (D) $S = b - a$.

❖ **Câu 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng



- (A) $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (B) $a^3\sqrt{3}$. (C) $\frac{a^3}{3}$. (D) a^3 .

❖ **Câu 3.** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P) : x + 5y - 2z - 2 = 0$ song song với mặt phẳng nào dưới đây?

- (A) $x - 5y + 2z + 2 = 0$. (B) $2x + 10y - 4z + 1 = 0$.
 (C) $-x - 5y - 2z + 2 = 0$. (D) $x + 5y - 2z - 2 = 0$.

❖ **Câu 4.** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(2; 1; -4)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha) :$

$x - 2y + 2z - 7 = 0$ có phương trình là

- (A) $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 4)^2 = 25.$
- (B) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 4)^2 = 25.$
- (C) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 4)^2 = 25.$
- (D) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 4)^2 = 25.$

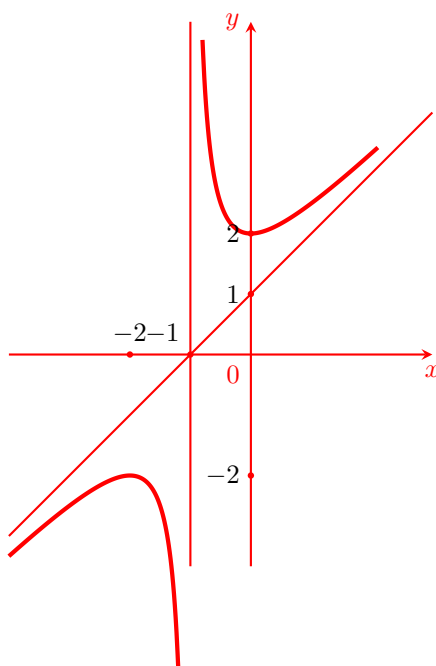
❖ **Câu 5.** Thống kê cân nặng của học sinh lớp 12A ở một trường THPT ta có bảng số liệu. Tìm số trung bình của bảng số liệu.

- (A) 51, 80.
- (B) 51, 81.
- (C) 51, 809.
- (D) 52.

❖ **Câu 6.** Hàm số $F(x)$ được gọi là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu

- (A) $f'(x) = F(x), \forall x \in K.$
- (B) $f'(x) = -F(x), \forall x \in K.$
- (C) $F'(x) = -f(x), \forall x \in K.$
- (D) $F'(x) = f(x), \forall x \in K.$

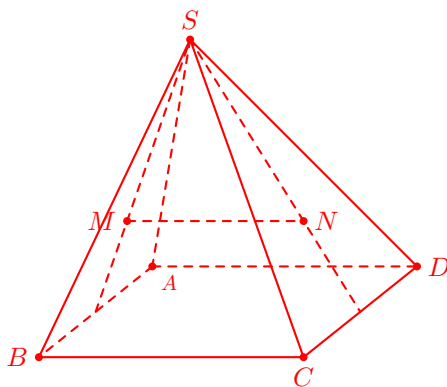
❖ **Câu 7.** Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số nào sau đây?



- (A) $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}.$
- (B) $y = \frac{x^2 + 3x}{x - 2}.$
- (C) $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 2}.$
- (D) $y = \frac{x^2 - 2x}{x + 1}.$

❖ **Câu 8.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi M, N theo thứ tự là

trọng tâm tam giác SAB và tam giác SCD . Khi đó MN song song với mặt phẳng nào sau đây?



- Ⓐ $(ABCD)$. Ⓑ (SAB) . Ⓒ (SAC) . Ⓓ (SBD) .

❖ **Câu 9.** Nghiệm của phương trình $\cos x = 1$ là

- Ⓐ $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Ⓑ $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Ⓒ $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Ⓓ $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

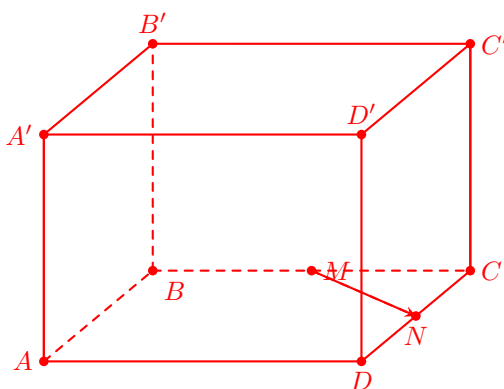
❖ **Câu 10.** Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $\log_2(x^2 - 5x + 7) = 0$ bằng

- Ⓐ 7. Ⓑ 13. Ⓒ 5. Ⓓ 6.

❖ **Câu 11.** Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_4 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$. Công sai của (u_n) là

- Ⓐ $d = 3$. Ⓑ $d = 5$. Ⓒ $d = -3$. Ⓓ $d = 6$.

❖ **Câu 12.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và CD . Vectơ nào sau đây bằng $2\overrightarrow{MN}$?

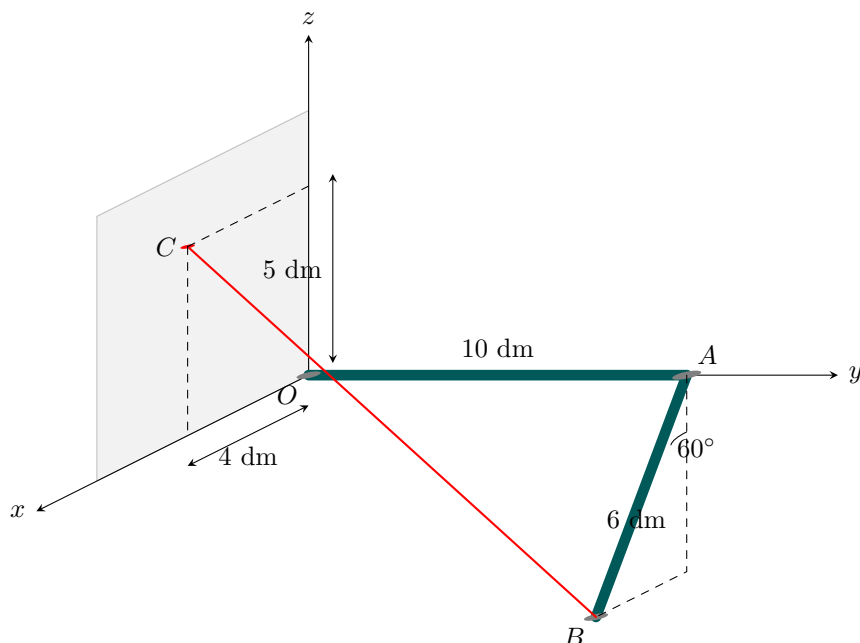


- Ⓐ $\overrightarrow{AD}$. Ⓑ $\overrightarrow{B'D'}$. Ⓒ $\overrightarrow{BC}$. Ⓓ $\overrightarrow{A'C'}$.

Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai

❖ **Bài 1.** Một ống dẫn nước OAB được cố định vào một bức tường đồng thời được đặt trong hệ

tọa độ $Oxyz$ và có các kích thước như hình vẽ.



Mô phỏng lại hình ống nước của đề sở Đồng Nai

- ◇ Đoạn ống OA nằm trên tia Oy (vuông góc với tường), có chiều dài $OA = 10$ dm.
 - ◇ Đoạn ống AB nối tiếp với OA , có chiều dài $AB = 6$ dm. Ống AB vuông góc với OA và hướng xuống dưới, tạo với mặt phẳng nằm ngang (Oxy) một góc 60° .
 - ◇ Đầu B của ống được giữ cố định bởi một thanh sắt nối với điểm C trên tường. Biết điểm $C(4; 0; 5)$. (Đơn vị trên các trục là dm).
- a) Tọa độ của điểm $A(0; 10; 0)$.
 - b) Hình chiếu vuông góc của điểm B lên mặt phẳng (Oyz) là điểm $H(0; 10; -3\sqrt{3})$.
 - c) Độ dài thanh sắt BC là 14,1 dm.
 - d) Cao độ của điểm B là -3 .

Bài 2. Trong một khu vực đô thị, cảnh sát giao thông ghi nhận các trường hợp vi phạm tốc độ trong giờ cao điểm. Thống kê cho thấy:

- ◇ Tỷ lệ nam giới tham gia giao thông trong giờ cao điểm là 60%, tỷ lệ nữ giới là 40%.
- ◇ Trong số các lái xe nam, tỷ lệ vi phạm tốc độ là 10%.
- ◇ Trong số các lái xe nữ, tỷ lệ vi phạm tốc độ là 3%.

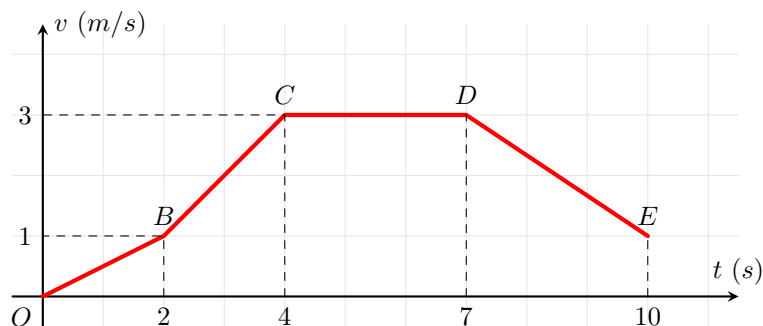
Xét tính đúng/sai của các khẳng định sau:

- a) Xác suất một lái xe được chọn ngẫu nhiên trong giờ cao điểm là nam giới và vi phạm tốc độ là 0,06.
- b) Xác suất một lái xe được chọn ngẫu nhiên trong giờ cao điểm vi phạm tốc độ là 0,13.
- c) Nếu một lái xe được chọn ngẫu nhiên vi phạm tốc độ, khả năng cao người đó là nam giới.
- d) Giả sử cảnh sát chỉ dừng xe của những người vi phạm tốc độ để xử phạt. Biết một người đã bị dừng xe, xác suất người đó là nữ giới lớn hơn 0,2.

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + 3x^2 - 3x + 1$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Hàm số trên có hai cực trị gồm một cực tiểu và một cực đại.
b) Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 12.
c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; -1)$.
d) Đạo hàm của $f(x)$ là $f'(x) = x^2 + 6x - 3$.

Bài 4. Cho hình vẽ dưới đây là đồ thị vận tốc $v(t)$ (m/s) của một ca nô chạy trên sông trong 10 giây đầu tiên ($t = 0$ là thời điểm ca nô bắt đầu chuyển động).



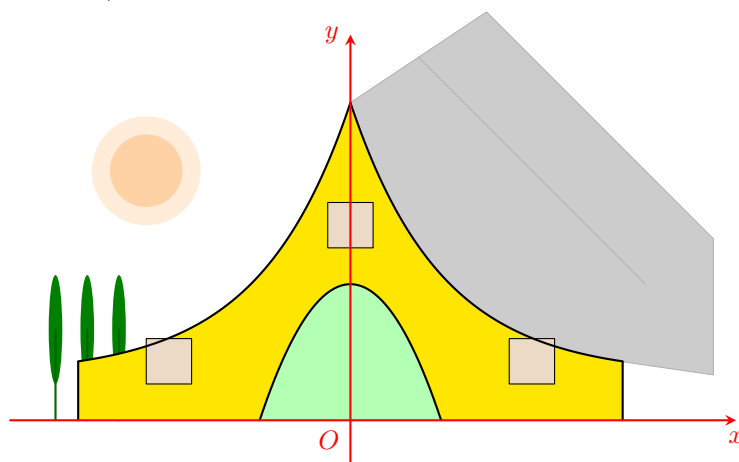
- a) Vận tốc chạy của ca nô trong khoảng thời gian từ 4 giây đầu tiên tăng dần.
b) Trong 10 giây đầu tiên, vận tốc ca nô chạy lớn nhất trong 4 giây.

c) Trong 10 giây đầu tiên, ca nô chạy với vận tốc $v(t)$ theo hàm $v(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t & \text{khi } 0 \leq t \leq 2 \\ t - 1 & \text{khi } 2 < t \leq 4 \\ 3 & \text{khi } 4 < t \leq 7 \\ -\frac{2}{3}t + \frac{23}{3} & \text{khi } 7 < t \leq 10 \end{cases}$.

- d) Vận tốc chạy trung bình của ca nô 10 giây đầu tiên là 2,5 (m/s).

Phần III. Câu trả lời ngắn Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

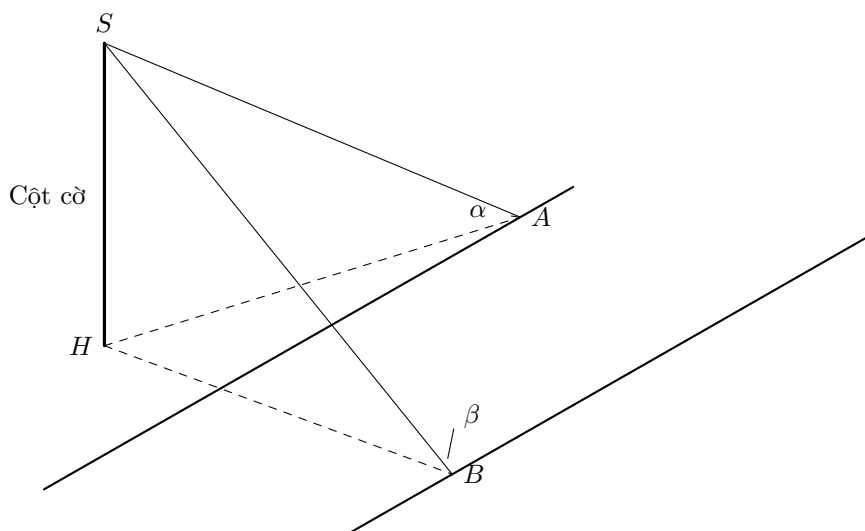
Bài 1. Mái chùa đối xứng qua trục, có biên dạng $f(x) = 6 \cdot e^{-0,5x} + 1$ ($0 \leq x \leq 6$). Cổng chùa dạng parabol, rộng 4 m và cao 3 m. Mỗi cửa sổ kích thước 1 m $\times$ 0,5 m (có 3 cửa sổ). Mặt tiền phía trước của mặt sẽ được sơn màu vàng dày 0,1 mm. Hỏi cần bao nhiêu lít nước sơn? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Bài 2. An và Bình rất giỏi Toán, cùng tham gia một trò chơi, đầu tiên An bốc ngẫu nhiên một thẻ từ hộp thứ nhất chứa sáu thẻ giống nhau được đánh số từ 1 đến 6, tiếp theo Bình bốc ngẫu nhiên một thẻ từ hộp thứ hai chứa bốn thẻ giống nhau được đánh số từ 1 đến 4. Gọi số An bốc được là a và số của Bình là b , sau đó hai người cùng tính giá trị của tích phân $I = \int_0^a x^b dx$. Nếu

kết quả I là một số nguyên thì An thắng, ngược lại Bình thắng. Tính xác suất An thắng cuộc (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

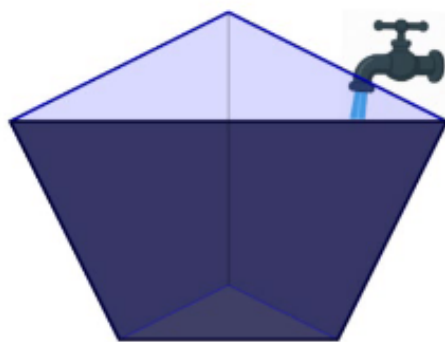
Bài 3. Dòng Hương hiền hòa trong xanh, lững lờ trôi giữa lòng thành phố Huế cổ kính và mộng mơ. Nhìn từ trên cao, hai bờ sông trải dài như hai đường thẳng song song. Cột cờ Phú Văn Lâu sừng sững cao 54,5 mét như là một chứng tích hào hùng của lịch sử. Biết rằng hai bờ sông cách nhau 400 mét và chân cột cờ (hình chiếu vuông góc của đỉnh cột cờ xuống mặt đất) nằm cách mép sông gần nhất một khoảng 200 mét. Có hai bạn học sinh đứng ở hai bờ sông, bạn học sinh A ở cùng bờ với cột cờ nhìn đỉnh cột cờ so với mặt đất một góc α với $\tan \alpha = 0,1$ và bạn học sinh B đứng ở bờ bên kia nhìn đỉnh cột cờ so với mặt đất một góc β với $\tan \beta = 0,07$. Hỏi hai bạn học sinh cách nhau xa nhất là bao nhiêu mét? (Giả sử rằng mặt đất là bằng phẳng và tầm mắt hai bạn học sinh ngang với mặt đất, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Bài 4. Một doanh nghiệp phân bổ ngân sách quảng cáo trên Facebook và Google với tổng số tiền không vượt quá 80 triệu. Chi phí cho Facebook nằm trong khoảng từ 20 đến 50 triệu. Chi phí cho Google tối thiểu là 15 triệu. Số tiền chi cho chạy quảng cáo trên Google không được vượt quá chi phí chi cho quảng cáo trên Facebook. Biết rằng số khách tiếp cận là 4 nghìn khách cho mỗi triệu tiền chi quảng cáo trên Facebook và 6 nghìn khách cho mỗi triệu quảng cáo trên Google. Hỏi lượng khách tiếp cận lớn nhất là bao nhiêu nghìn?

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SD vuông góc với $(ABCD)$, $SD = 5\sqrt{5}$. Đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $CD = 2AD = 2AB = 10$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SM .

Bài 6. Một cái chậu đựng nước có dạng hình chóp cụt đều, đáy chậu là tam giác đều cạnh bằng 2 dm, miệng chậu là tam giác đều cạnh bằng 5 dm và chiều cao chậu nước bằng 3 dm. Người ta bơm nước vào chậu với lưu lượng không đổi $\frac{\sqrt{3}}{3}$ lít/phút. Tại thời điểm 14 phút sau khi bơm tốc độ dâng lên của nước trong chậu là $\frac{1}{a}$ dm/phút, giá trị của a bằng bao nhiêu?



Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

❖ **Câu 1.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có một nguyên hàm là $F(x)$. Biết rằng $F(1) = 9, F(2) = 5$. Giá trị của tích phân $\int_1^2 f(x)dx$ bằng

- (A) 14. (B) 4. (C) -4. (D) 45.

❖ **Câu 2.** Cho hình chóp đều $S.ABCD$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng (SAC) ?

- (A) (SAD) . (B) (SBC) . (C) (SAB) . (D) (SBD) .

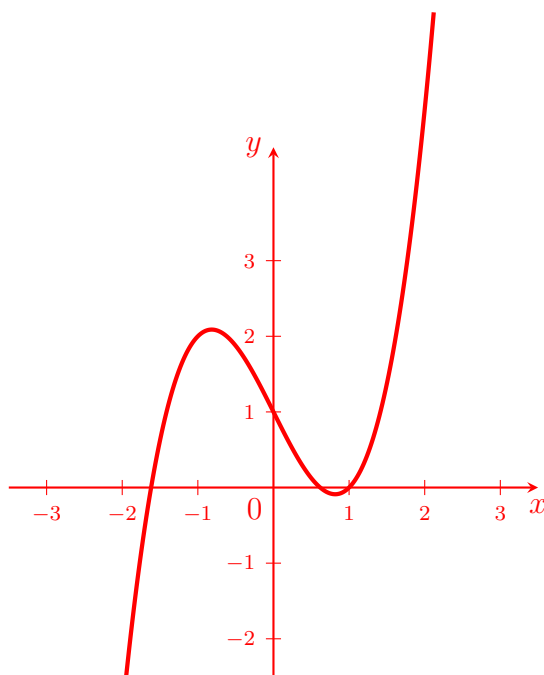
❖ **Câu 3.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-7}$. Phương trình mặt phẳng đi qua $A(1; 2; 3)$ và vuông góc với đường thẳng d là

- (A) $4x + 3y + 7z - 11 = 0$. (B) $4x + 3y + 7z + 11 = 0$.
(C) $4x + 3y - 7z + 11 = 0$. (D) $4x + 3y - 7z - 11 = 0$.

❖ **Câu 4.** Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $(2 - \sqrt{3})^x < 1$.

- (A) $S = (0; +\infty)$. (B) $S = (0; 1)$.
(C) $S = (-1; 0)$. (D) $S = (-\infty; 0)$.

❖ **Câu 5.** Hình vẽ sau đây là đồ thị hàm số nào?



- (A) $y = x^3 - 2x + 1$. (B) $y = x^3 - 2x^2 + 1$.

Ⓒ $y = -x^3 + 2x^2 + 1.$

Ⓓ $y = x^3 + 2x^2 + 1.$

❖ **Câu 6.** Cho cấp số nhân (u_n) có $u_3 = 5$ và $u_6 = 40$. Số hạng u_4 của cấp số nhân là

Ⓐ $u_4 = -15.$

Ⓑ $u_4 = -10.$

Ⓒ $u_4 = 15.$

Ⓓ $u_4 = 10.$

❖ **Câu 7.** Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 - \sin x$ là

Ⓐ $F(x) = x^3 - \cos x + C.$

Ⓑ $F(x) = x^3 + \cos x + C.$

Ⓒ $F(x) = 6x - \cos x + C.$

Ⓓ $F(x) = 6x + \cos x + C.$

❖ **Câu 8.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{B'C} = -\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.$

Ⓑ $\overrightarrow{B'C} = -\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$

Ⓒ $\overrightarrow{B'C} = -\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.$

Ⓓ $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$

❖ **Câu 9.** Rút gọn biểu thức $P = \sin 3x \cos x - \sin x \cos 3x.$

Ⓐ $P = \sin 4x.$

Ⓑ $P = \cos 2x.$

Ⓒ $P = \sin 2x.$

Ⓓ $P = \cos 4x.$

❖ **Câu 10.** Thống kê điểm kiểm tra học kì 1 môn Toán của 300 học sinh lớp 12 được mô tả ở bảng sau:

Điểm	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)
Số học sinh	20	50	70	160

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là

Ⓐ 7.

Ⓑ 140.

Ⓒ 8.

Ⓓ 160.

❖ **Câu 11.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x - 3y - 4z + 1 = 0$. Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) có tọa độ là

Ⓐ $(-1; -3; -4).$

Ⓑ $(1; -3; -4).$

Ⓒ $(1; -3; 4).$

Ⓓ $(1; 3; 4).$

❖ **Câu 12.** Có 7 chiếc ghế xếp thành hàng ngang. Có bao nhiêu cách xếp 3 người vào 7 chiếc ghế đó sao cho mỗi người ngồi một ghế?

Ⓐ 21.

Ⓑ 210.

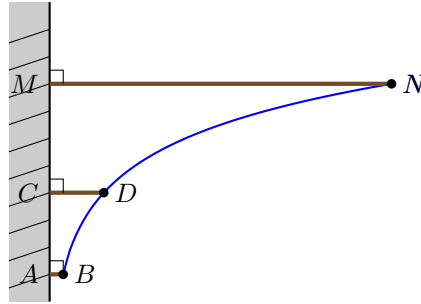
Ⓒ 35.

Ⓓ 343.

Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai

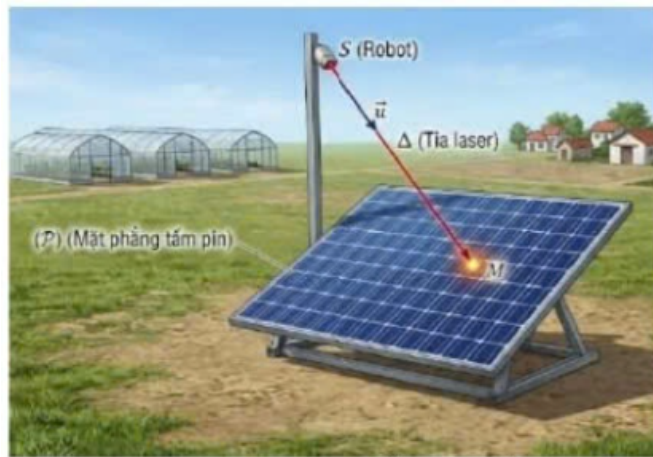
❖ **Bài 1.** Người ta muốn tạo một giá đỡ bằng sắt bên cạnh một bức tường có hình dạng là đoạn cong BDN như hình vẽ dưới, giá đỡ được gắn với tường bằng ba thanh sắt AB, CD, MN cùng vuông góc với tường (A, C, M thẳng hàng). Giá đỡ được xem như là một phần của đồ thị hàm số $y = \log x$ trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) với trục tung trùng với hình chiếu vuông góc của giá đỡ lên mặt tường (đơn vị trên trục tính bằng mét). Biết $AB = 10$ cm, $AM = 1,4$ m và độ dài phần đồ

thị của hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ được tính theo công thức $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$.



- Đạo hàm của hàm số $y = \log x$ là $y' = \frac{1}{x \ln 10}$.
- Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) , điểm B có hoành độ bằng 0, 1.
- Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) , điểm N có tung độ bằng 1, 4.
- Độ dài giá đỡ bằng 2, 97 mét (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 2. Trong một mô hình nông nghiệp công nghệ cao, một tấm pin năng lượng mặt trời phẳng được lắp đặt nghiêng sao cho bề mặt của nó nằm trên mặt phẳng $(P) : 2x + 2y + z - 6 = 0$ (xét trong hệ không gian tọa độ $Oxyz$ với đơn vị đo là mét, mặt phẳng (Oxy) được xem là mặt đất phẳng). Người ta lắp đặt một robot cố định ở trên cao để kiểm tra bụi bẩn. Robot có mắt phát tia laser tại điểm $S(1; 1; 6)$. Robot thực hiện quét tia laser trên bề mặt tấm pin. Tại một thời điểm tia laser được chiếu theo đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; -2; -2)$ và chạm vào bề mặt tấm pin tại điểm M .



- Khoảng cách từ mắt phát tia laser S đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{4}{3}$ mét.
- Điểm M có tọa độ là $(1; 1; 2)$.
- Góc α hợp bởi tia laser Δ và mặt phẳng (P) thỏa mãn hệ thức $\sin \alpha = \frac{4}{9}$.
- Khi vệ sinh, nước được phun trúng điểm chạm của tia laser trên tấm pin sẽ tạo thành dòng nước chảy trên bề mặt pin xuống đất theo hướng dốc nhất, quỹ đạo chảy của dòng nước nằm trên một đường thẳng. Đường thẳng đó có một vectơ chỉ phương là $\vec{v} = (1; 1; 3)$.

Bài 3. Một nhà đầu tư có kế hoạch xây dựng một trạm điện gió tại thành phố Hà Nội, bao gồm hai huyện là huyện Mỹ Đức và huyện Ứng Hòa. Để tìm hiểu cách dân cư đánh giá dự án này,

hội đồng thành phố đã tổ chức một cuộc khảo sát trong số các cử tri hợp lệ. Tại Mỹ Đức, có 1722 cử tri được tham gia khảo sát, trong khi ở Ứng Hòa, con số này là 258. Theo kết quả khảo sát:

✧ Có 1089 người tham gia khảo sát ủng hộ trạm điện gió, trong đó có 27 người từ Ứng Hòa.

✧ Các cử tri còn lại bày tỏ sự phản đối dự án này.

a) Có 38,3% cử tri ở Mỹ Đức phản đối dự án này (làm tròn hàng phần chục).

b) Chọn ngẫu nhiên một người được khảo sát, gọi p_1 là xác suất người này ủng hộ trạm điện gió và đến từ Mỹ Đức, p_2 là xác suất người này đến từ Mỹ Đức, biết người này ủng hộ trạm điện gió. Khi đó $p_1 < p_2$.

c) Chọn ngẫu nhiên 1 người và thấy rằng người này ủng hộ trạm điện gió. Khả năng người này đến từ Ứng Hòa cao hơn.

d) Chọn ngẫu nhiên một người được khảo sát thấy rằng người này phản đối trạm điện gió. Xác suất người này là cử tri đến từ Ứng Hòa là 0,25 (làm tròn đến hàng phần trăm).

✧ Bài 4. Một nghiên cứu cho rằng, hàm số $f(x)$ biểu diễn tổng số lượng từ mới mà một học sinh đã ghi nhớ sau x phút. Nhà tâm lý học gọi đồ thị của $y = f(x)$ là đường cong học tập và $y = f'(x)$ là tốc độ học tập (từ mới/phút). Thời điểm đạt hiệu suất học tập cao nhất là thời gian mà tốc độ học tập đạt cực đại.

Trong một tiết học từ vựng 20 phút, tốc độ học tập của bạn Long được mô hình thông qua hàm số $f'(x) = 0,1(10 + ax - 0,6x^2)$ với $0 \leq x \leq 20$ và $a \in \mathbb{R}$. Biết rằng thời điểm Long có hiệu suất học tập cao nhất là phút thứ 10.

a) Tốc độ học tập của Long tại thời điểm ban đầu là 1 từ/phút.

b) $a = 12$.

c) Số từ mà Long nhớ được trong 10 phút đầu tiên là 50.

d) Bạn Hoàng vào lớp muộn hơn 1 phút và bắt đầu học với tốc độ học tập bằng $g'(x) = k\sqrt{x}$. Sau 9 phút Hoàng vào lớp thì Hoàng bắt kịp bạn Long. Tốc độ học tập của bạn Hoàng tại thời điểm 16 phút lớn hơn 11 từ/phút.

Phần III. Câu trả lời ngắn Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

✧ Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy là trung điểm H của AD , góc giữa SB và mặt phẳng đáy ($ABCD$) là 45° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và BH theo a được kết quả $m.a$. Khi đó giá trị $\frac{3}{5}m^2$ là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần trăm)

✧ Bài 2. Một hợp tác xã nông nghiệp dự định sử dụng một khu nhà màng có diện tích tối đa là 750 m^2 để trồng hai loại nông sản giá trị cao: Dưa lưới và Cà chua bi. Hợp tác xã đang cân nhắc việc phân bổ diện tích trồng sao cho thu được lợi nhuận cao nhất, dựa trên các điều kiện thực tế sau:

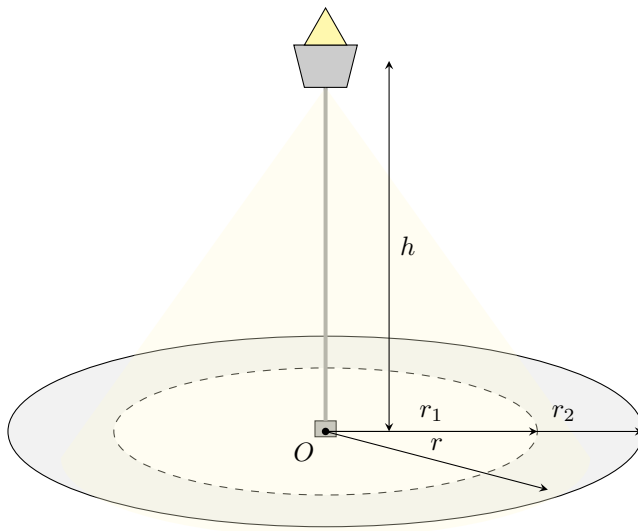
✧ Về nhân công: Để chăm sóc 100 m^2 dưa lưới trong một vụ cần 20 ngày công; đối với cà chua bi là 30 ngày công. Hợp tác xã chỉ có thể huy động tối đa 180 ngày công cho vụ mùa này.

✧ Về vốn đầu tư (giống, vật tư): Chi phí đầu tư cho 100 m^2 dưa lưới là 30 triệu đồng; cho cà chua bi là 20 triệu đồng. Tổng số vốn hợp tác xã có thể giải ngân tối đa là 210 triệu đồng.

✧ Về lợi nhuận dự kiến: Sau khi thu hoạch, mỗi 100 m^2 dưa lưới mang lại mức lợi nhuận 50 triệu đồng, và mỗi 100 m^2 cà chua bi mang lại 40 triệu đồng.

Ban chủ nhiệm hợp tác xã cần quyết định diện tích trồng mỗi loại nông sản để tổng lợi nhuận thu được là lớn nhất, lợi nhuận lớn nhất đó là bao nhiêu triệu đồng?

Bài 3. Một lối đi dạo trong công viên có dạng hình vành khăn, được giới hạn bởi hai đường tròn đồng tâm với bán kính lần lượt là $r_1 = 6$ m và $r_2 = 8$ m. Tại tâm O của các đường tròn này, người ta dựng một cột đèn có chiều cao h (mét) để chiếu sáng. Giả sử theo mô hình kỹ thuật của loại đèn này, cường độ sáng I (lux) tại một điểm trên mặt đất cách chân cột đèn một khoảng r (mét) được tính bởi công thức $I(r) = \frac{h}{r^2 + 4h^2}$. Xác định chiều cao h của cột đèn sao cho cường độ sáng tại vị trí tối nhất trên lối đi đạt giá trị lớn nhất.



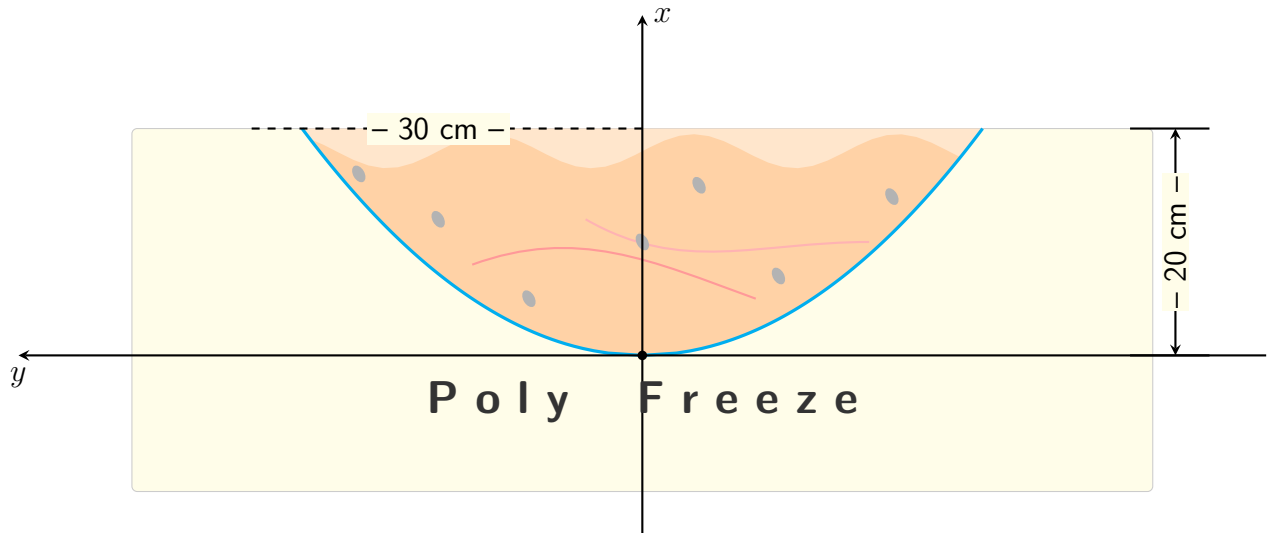
Bài 4. Cho bảng ô vuông 3×3 . Hãy tìm cách điền các số tự nhiên từ 1 đến 9 vào bảng sao cho mỗi số chỉ xuất hiện một lần và tổng các số theo hàng ngang, cột dọc, hai đường chéo đều bằng 15. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách điền như vậy?

→

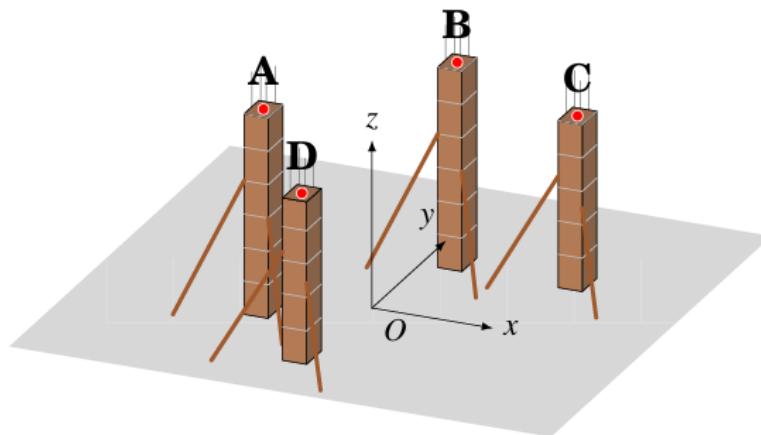
8	1	6
3	5	7
4	9	2

Bài 5. Một thùng làm kem có mặt cắt dạng parabol như hình. Biết phương trình đường biên

có dạng $f(x) = a\sqrt{x}$, hỏi dung tích của thùng bằng bao nhiêu lít.



Bài 6. Hình vẽ minh họa một khu nhà đang xây dựng được gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét). Mỗi cột bê tông có dạng hình lăng trụ tứ giác đều và tâm của mặt đáy trên lần lượt là các điểm $A(2; 1; 3)$, $B(4; 3; 3)$, $C(6; 3; 2, 5)$, $D(4k; 0; 3k)$. Biết rằng 4 điểm A, B, C, D đồng phẳng, tính giá trị của k (viết kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

❖ **Câu 1.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là

- (A) $x^3 + C$. (B) $\frac{x^3}{3} + x + C$. (C) $6x + C$. (D) $x^3 + x + C$.

❖ **Câu 2.** Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ bằng

- (A) $\left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$. (B) $\int_a^b |f(x) + g(x)| dx$.
(C) $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$. (D) $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$.

❖ **Câu 3.** Mỗi ngày bác Hương đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (km) của bác Hương trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau

Quãng đường (km)	[2, 7; 3, 0)	[3, 0; 3, 3)	[3, 3; 3, 6)	[3, 6; 3, 9)	[3, 9; 4, 2)
Số ngày	3	6	5	4	2

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

- (A) 3, 39. (B) 11, 62. (C) 0, 1314. (D) 0, 36.

❖ **Câu 4.** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+2}{3}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d ?

- (A) $\vec{u} = (1; 3; -2)$. (B) $\vec{u} = (2; 5; 3)$.
(C) $\vec{u} = (2; -5; 3)$. (D) $\vec{u} = (1; 3; 2)$.

❖ **Câu 5.** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+2}{x-2}$ là đường thẳng có phương trình

- (A) $x = 2$. (B) $x = -1$. (C) $x = 3$. (D) $x = -2$.

❖ **Câu 6.** Giải bất phương trình $\log_2(3x-1) > 3$.

- (A) $x > 3$. (B) $\frac{1}{3} < x < 3$. (C) $x < 3$. (D) $x > \frac{10}{3}$.

❖ **Câu 7.** Cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -2$ và $u_2 = 3$. Số hạng u_8 của cấp số cộng là

- (A) 33. (B) -33. (C) 5. (D) 38.

❖ **Câu 8.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 3y - 4z + 5 = 0$. Vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) ?

- (A) $\vec{n}_1 = (3; 4; 5)$. (B) $\vec{n}_2 = (1; 3; -4)$.
(C) $\vec{n}_3 = (1; 3; 4)$. (D) $\vec{n}_4 = (3; -4; 5)$.

❖ **Câu 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mệnh

đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $BA \perp (SAD)$.

Ⓑ $BA \perp (SAC)$.

Ⓒ $BA \perp (SBC)$.

Ⓓ $BA \perp (SCD)$.

❖ **Câu 10.** Nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{25}\right)^{3-2x} = 5^{x+3}$ là

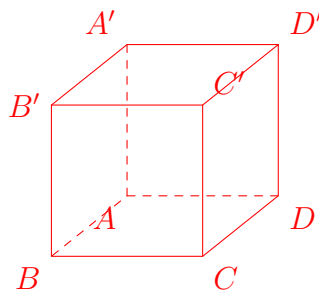
Ⓐ $x = -3$.

Ⓑ $x = 5$.

Ⓒ $x = -5$.

Ⓓ $x = 3$.

❖ **Câu 11.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (minh họa như hình bên). Phát biểu nào sau đây là đúng?



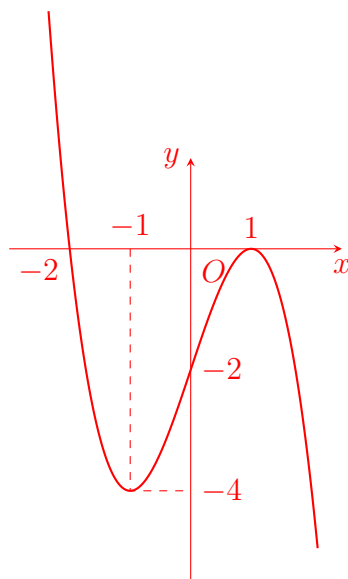
Ⓐ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{AC'}$.

Ⓑ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC'}$.

Ⓒ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

Ⓓ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{AC'}$.

❖ **Câu 12.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?



Ⓐ $(-\infty; -1)$.

Ⓑ $(-1; 1)$.

Ⓒ $(-2; 1)$.

Ⓓ $(1; +\infty)$.

Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai

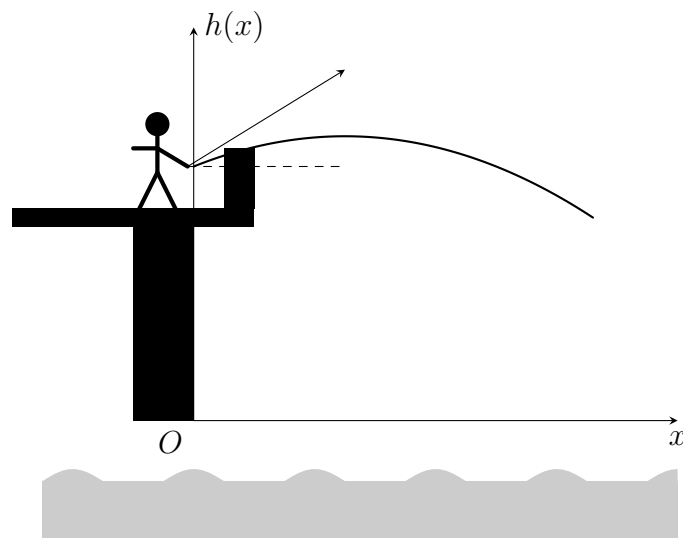
❖ **Bài 1.** Một gian thương đã trộn các sản phẩm sữa kém chất lượng (sữa giả) với các sản phẩm sữa chất lượng. Trong một lô hàng có 20 hộp sữa chất lượng và 10 hộp sữa giả. Sau khi một khách hàng đến mua 1 hộp sữa từ lô hàng trên thì lực lượng quản lý thị trường đến và lấy ngẫu nhiên 3 hộp sữa từ lô hàng đó đi kiểm tra. Các khẳng định sau là đúng hay sai?

- a) Xác suất khách hàng mua phải hộp sữa giả là $\frac{1}{3}$.
- b) Xác suất để lực lượng quản lý thị trường phát hiện lô hàng có hộp sữa giả là $\frac{146}{203}$.
- c) Nếu biết khách hàng đó đã mua phải hộp sữa giả, xác suất để quản lý thị trường phát hiện lô hàng có hộp sữa giả là $\frac{419}{1827}$.
- d) Nếu biết quản lý thị trường sau khi kiểm tra đã phát hiện lô hàng có hộp sữa giả, xác suất để khách hàng đó mua phải hộp sữa giả là $\frac{419}{1314}$.

Bài 2. Một địa phương A bị thiệt hại do lũ lụt được trợ cấp số tiền 2 tỷ đồng. Số tiền này sẽ được giải ngân toàn bộ trong 100 ngày kể từ khi bắt đầu giải ngân. Kết quả theo dõi cho thấy tốc độ giải ngân tiền trợ cấp $M'(t)$ (đơn vị: triệu đồng/ngày) tại thời điểm t ngày ($0 \leq t \leq 100$) kể từ khi bắt đầu giải ngân, được cho bởi công thức $M'(t) = k(100 - t)^2$ ($0 \leq t \leq 100$), trong đó $M(t)$ (đơn vị: triệu đồng) là số tiền đã giải ngân sau t ngày ($0 \leq t \leq 100$) kể từ khi bắt đầu giải ngân và k là hằng số khác không.

- a) $M(t) = k \left(10000t - 100t^2 + \frac{t^3}{3} \right) + C$.
- b) $C = 2000$.
- c) $k = 0,6$.
- d) Số tiền còn lại chưa giải ngân sau 40 ngày kể từ khi bắt đầu giải ngân là 432 triệu đồng.

Bài 3. Một hòn đá được ném từ một cây cầu với quỹ đạo ban đầu là 25° so với phương nằm ngang. Vào thời điểm nó di chuyển được x (m) theo phương ngang, chiều cao của hòn đá so với mặt nước dưới cầu được cho bởi $h(x) = ax^2 + bx + c$ (mét) với $a, b, c \in \mathbb{R}$. Hòn đá được ném từ độ cao 3 mét so với mặt nước và đạt độ cao cực đại khi $x = 5$.



- a) Giá trị $c = 3$.
- b) Đạo hàm của $h(x)$ là $h'(x) = 2ax + b$.
- c) Độ cao lớn nhất của hòn đá so với mặt nước là 4,16 mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).
- d) Hòn đá rơi xuống nước tại vị trí $x = 4,45$ mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Bài 4. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước, trong đó xem mặt phẳng (Oxy) là mặt đất, mỗi đơn vị trên trục tương ứng với 1 km, một ra đa được đặt tại vị trí gốc tọa độ O phát

hiện một máy bay chiến đấu di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(500; 200; 10)$ đến điểm $N(300; 800; 10)$ trong 40 phút.

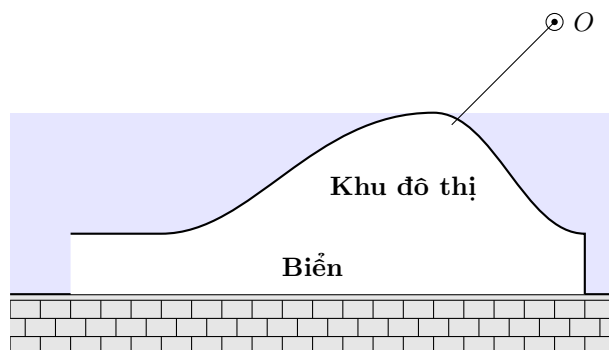
- Khoảng cách $MN = 200\sqrt{10}$ km.
- Khi đến N máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 8 phút tiếp theo là $Q(a; b; c)$ với $a + b + c = 1030$.
- Máy bay chiến đấu khi bay từ M đến N luôn cách mặt đất là 10 km.
- Góc $\widehat{MON}$ được gọi là góc quét của radar khi quan sát máy bay chiến đấu bay từ M đến N . Trong tình huống trên góc quét $\widehat{MON}$ lớn hơn 45° .

Phần III. Câu trả lời ngắn Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

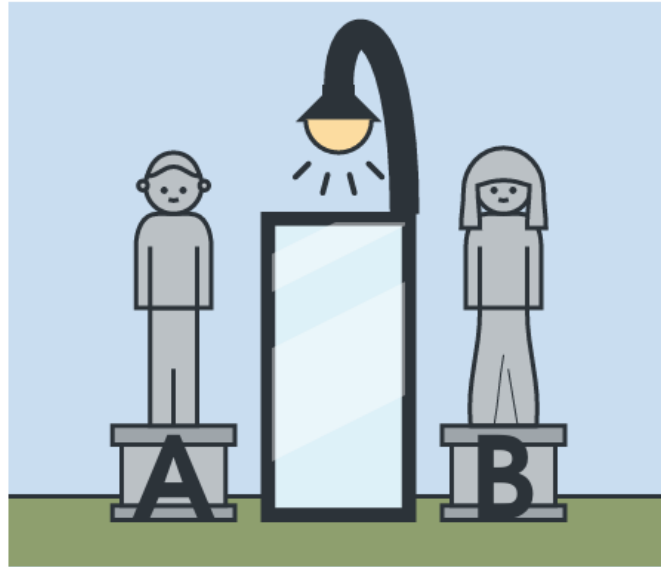
Bài 1. Để làm công tác cứu nạn ở một ngôi nhà ba tầng có một hàng rào cao $2,2(m)$ song song và cách bức tường ngôi nhà một khoảng bằng $1,6(m)$. Người ta dựng một cái thang thẳng có một đầu chạm đất, đầu kia chạm vào bức tường ngôi nhà, thân của thang chạm vào mép trên hàng rào (tham khảo hình vẽ). Chiều dài ngắn nhất của cái thang là bao nhiêu? (đơn vị là mét, không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần trăm)

Bài 2. Do gặp mưa bão và sự cố nên một con tàu bị hỏng động cơ và thiết bị liên lạc. Tại thời điểm cuối cùng trước khi mất liên lạc con tàu, radar của trung tâm phòng chống lụt bão xác định được tàu ở vị trí $T(60; 75; 0)$ trong hệ $Oxyz$ mà mỗi đơn vị trên trục tương ứng có độ dài 1 km. Đội cứu hộ đã ngay lập tức dùng trực thăng cứu hộ, sau 2 phút trực thăng ở vị trí $A(0; 0; 2)$. Trong điều kiện bình thường (không gió) động cơ máy bay đẩy được máy bay bay với tốc độ tối đa 400 km/h. Lúc này, sức gió mạnh sẽ đẩy máy bay với vận tốc 50 km/h và hướng theo $\vec{v}_1 = (4; 3; 0)$. Động cơ trực thăng đẩy máy bay bay với vận tốc n km/h, hướng theo $\vec{v}_2 = (a; b; 0)$. Một chuyên gia cứu hộ ở trung tâm phân tích được gió và sóng biển đẩy con tàu đi với vận tốc 20 km/h và cũng hướng theo $\vec{v}_1 = (4; 3; 0)$ nên đã sử dụng phương án tối ưu, cho máy bay bay từ A hướng đến vị trí có thể gặp được con tàu sớm nhất. Tính từ thời điểm mất liên lạc con tàu, hãy tính thời gian sớm nhất máy bay tới được vị trí con tàu biết thời gian hạ cánh từ độ cao 2 km xuống mặt biển của máy bay là 1 phút (giả định để đảm bảo an toàn, máy bay cất và hạ cánh theo phương thẳng đứng đồng thời có cơ chế để cân bằng sức gió khi đó). (tính theo đơn vị phút và làm tròn đến hàng phần chục).

Bài 3. Ở một vịnh biển, ngoài xa có một hòn đảo nhỏ. Người ta tiến hành lấn biển để xây một khu đô thị và làm một tuyến cáp treo nối khu đô thị với hòn đảo để phát triển du lịch. Xét trong hệ tọa độ Oxy với đơn vị đo tương ứng 1 km có hòn đảo ở O thì đường bao của phần đất lấn biển có dạng là một phần của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 1}{x}$. Giả sử tuyến cáp treo được thiết kế nối đảo với đường bao của khu đô thị với độ dài ngắn nhất. Độ dài của tuyến cáp treo là bao nhiêu km (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

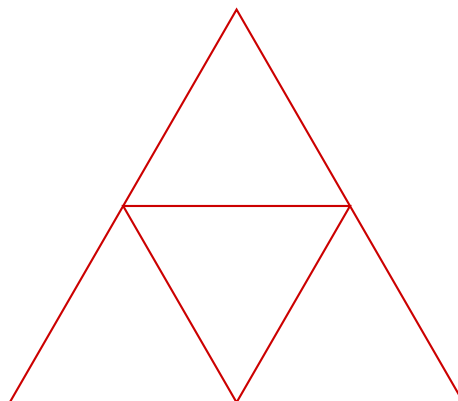


Bài 4. Trong một quảng trường, có hai bức tượng nghệ thuật được đặt cố định tại các vị trí $A(1; 2; -1)$ và $B(-2; 1; 0)$. Một trụ đèn chiếu sáng thông minh được lắp đặt trên một tấm kính lớn cố định, có phương trình $(P) : x - 2y + z + 4 = 0$. Gọi tọa độ điểm đặt trụ đèn là $M(a; b; c)$. Để tạo hiệu ứng ánh sáng đối xứng hoàn hảo giữa hai bức tượng, qua tính toán người thiết kế yêu cầu trụ đèn phải cách đều hai điểm A và B sao cho $MA^2 = MB^2 = 2,75$. Tính giá trị của $a + b + c$.



Bài 5. Một phân xưởng sản xuất hai kiểu mũ. Thời gian để làm ra một chiếc mũ kiểu thứ nhất nhiều gấp hai lần thời gian làm ra một chiếc mũ kiểu thứ hai. Nếu chỉ sản xuất toàn kiểu mũ thứ hai thì trong 1 giờ phân xưởng làm được 60 chiếc. Phân xưởng làm việc tối đa 8 tiếng mỗi ngày và thị trường tiêu thụ tối đa trong một ngày là 200 chiếc mũ kiểu thứ nhất và 240 chiếc mũ kiểu thứ hai. Tiền lãi khi bán một chiếc mũ kiểu thứ nhất là 24 nghìn đồng, một chiếc mũ kiểu thứ hai là 15 nghìn đồng. Tính số tiền lãi mà phân xưởng thu được trong một ngày cao nhất là bao nhiêu nghìn đồng.

Bài 6. Cho hình vẽ bên gồm 4 tam giác. Người ta chọn 3 số phân biệt từ tập hợp $S = \{1; 2; \dots; 26\}$ để xếp vào 3 tam giác ở 3 góc. Sau đó, tính tổng bình phương của 3 số đó rồi ghi kết quả vào tam giác còn lại ở giữa. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho số ghi ở tam giác giữa là một số chia hết cho 5?



Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

❖ **Câu 1.** Hàm số $y = -x^3 + 2x^2 + 4x$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 . Khi đó giá trị của biểu thức $S = x_1^2 + x_2^2$ bằng

- (A) $\frac{10}{9}$. (B) $\frac{40}{9}$. (C) $\frac{10}{3}$. (D) $\frac{20}{3}$.

❖ **Câu 2.** Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng d đi qua hai điểm $M(1; -1; 3)$, $N(3; 0; 2)$ có phương trình tham số là

- (A) $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$. (B) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$.
(C) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$.

❖ **Câu 3.** Thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$), xung quanh trục Ox là

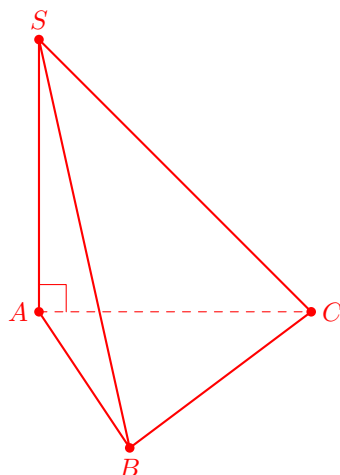
- (A) $V = \int_a^b |f(x)|dx$. (B) $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$.
(C) $V = \int_a^b f^2(x)dx$. (D) $V = \pi \int_a^b f(x)dx$.

❖ **Câu 4.** Cho f là hàm số liên tục trên đoạn $[2; 4]$. Biết F là nguyên hàm của f trên đoạn $[2; 4]$ thỏa mãn $F(2) = 6$ và $F(4) = 3$. Tích phân $\int_2^4 f(x)dx$ bằng

- (A) 2. (B) 3. (C) 9. (D) -3.

❖ **Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều, $SA \perp (ABC)$. Đường thẳng BC vuông

góc với đường thẳng nào sau đây?



- (A) SB . (B) SA . (C) AB . (D) SC .

❖ **Câu 6.** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2}{x-1}$ là đường thẳng

- (A) $x = 1$. (B) $y = 2$. (C) $x = 0$. (D) $y = 0$.

❖ **Câu 7.** Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số cộng?

- (A) 1; 4; 7; 10; 13. (B) 1; 3; 1; 3; 1.
(C) 1; 3; 7; 10; 13. (D) 2; 4; 5; 6; 8.

❖ **Câu 8.** Trong không gian $Oxyz$, một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-1}$ là:

- (A) $\vec{u}_3 = (2; 1; -1)$. (B) $\vec{u}_2 = (-1; 2; -3)$.
(C) $\vec{u}_4 = (2; 1; 1)$. (D) $\vec{u}_1 = (1; -2; 3)$.

❖ **Câu 9.** Cho hai số thực dương a, b , $a \neq 1$. Nếu $\log_a b = 6$ thì $\log_a b^2$ bằng

- (A) 12. (B) 36. (C) 3. (D) 8.

❖ **Câu 10.** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S) : (x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$ có tâm I và bán kính R lần lượt là

- (A) $I(2; -1; 0)$, $R = 2$. (B) $I(2; -1; 0)$, $R = 4$.
(C) $I(-2; 1; 0)$, $R = 4$. (D) $I(-2; 1; 0)$, $R = 2$.

❖ **Câu 11.** Phương trình $\tan 2x = 1$ có họ nghiệm là

- (A) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. (B) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
(C) $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. (D) $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

❖ **Câu 12.** Một công ty xây dựng khảo sát khách hàng xem họ có nhu cầu mua nhà ở mức giá nào. Kết quả khảo sát được ghi lại ở bảng sau:

Mức giá (triệu đồng/m ²)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)
Số khách hàng	52	75	123	48	10

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

(A) 42.

(B) 5.

(C) 13.

(D) 25.

Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai

Bài 1. Lớp 12A có 40 học sinh, trong đó có 8 em tham gia Câu lạc bộ Toán học. Điểm thi học kì 1 môn Toán của cả lớp được thống kê trong bảng sau:

Nhóm	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10)
Tần số	2	3	8	15	12

- a) Khoảng biến thiên của số liệu là 5.
- b) Có ít nhất 13 học sinh có điểm thi thấp hơn điểm trung bình của cả lớp.
- c) Biết rằng 8 học sinh trong Câu lạc bộ Toán học đều có điểm thi không dưới 8. Chọn ngẫu nhiên 6 học sinh trong lớp có điểm lớn hơn hoặc bằng 8. Xác suất có đúng 2 em của Câu lạc bộ Toán học được chọn nhỏ hơn $\frac{1}{3}$.
- d) Biết 8 học sinh trong Câu lạc bộ Toán học gồm có 5 học sinh nam và 3 học sinh nữ. Trong buổi lễ tuyên dương khen thưởng, 8 học sinh trong Câu lạc bộ Toán học được sắp xếp ngẫu nhiên thành một hàng ngang để trao quà. Xác suất không có 2 học sinh nữ nào đứng cạnh nhau lớn hơn $\frac{1}{3}$.

Bài 2. Hải đăng là một ngọn tháp (nhà hoặc khung) được thiết kế để chiếu sáng từ một hệ thống đèn và thấu kính, hoặc thời xưa là chiếu sáng bằng lửa, với mục đích hỗ trợ cho các hoa tiêu trên biển định hướng và tìm đường. Vào năm 293 trước Công nguyên, ngọn hải đăng đầu tiên đã được người Phoenicia xây dựng trên hòn đảo Pharos tại Alexandria. Trong không gian với hệ tọa



độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là một mét), coi một phần mặt biển được khảo sát là mặt phẳng (Oxy), trục Oz hướng lên trên vuông góc với mặt biển; một ngọn hải đăng đỉnh cao 50 mét so với mực nước biển (Hình bên) biết đỉnh ở vị trí $I(21; 35; 50)$, biết rằng ngọn hải đăng này được thiết kế với bán kính phủ sáng là $4km$.

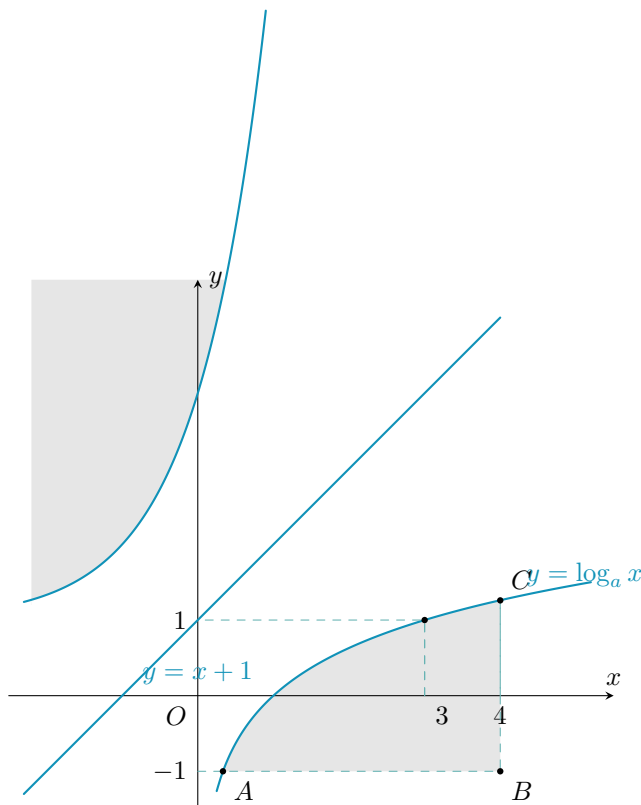
- a) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới của vùng phủ sáng trên biển của ngọn hải đăng trên là $(x - 21)^2 + (y - 35)^2 + (z - 50)^2 = 16$.
- b) Người đi biển coi là một điểm ở vị trí $D(5121; 658; 0)$ thì có thể nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng trên.

- c) Ngọn Hải đăng phủ một vùng sáng trên mặt biển thì bán kính vùng sáng này là 3999,7 (làm tròn đến hàng phần mười của mét) giả sử yếu tố bị che khuất bởi địa hình là không đáng kể.
- d) Giả sử người đi biển coi là một điểm từ vị trí $D(5121; 658; 0)$ di chuyển theo đường thẳng đến chân ngọn Hải đăng với tốc độ 7 hải lý/giờ; biết một hải lý bằng 1852 mét thì mất 5,27 phút (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm) để đến điểm đầu tiên nhìn thấy được ánh sáng ngọn Hải đăng trên.

Bài 3. Một bể chứa dầu ban đầu có 40 000 lít dầu. Gọi $V(t)$ là thể tích dầu (lít) trong bể tại thời điểm t , trong đó t tính theo giờ ($0 \leq t \leq 24$). Trong quá trình bơm dầu vào bể, thể tích dầu tăng theo tốc độ được biểu diễn bởi hàm số $V'(t) = k\sqrt{t}$, với k là hằng số dương. Sau 4 giờ bơm liên tục, thể tích dầu trong bể đạt 48 000 lít.

- a) Hàm số $V(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(t) = k\sqrt{t}$.
- b) $V(t) = \frac{2k}{3}t\sqrt{t} + C$ với $0 \leq t \leq 24$ và k, C là các hằng số.
- c) Sau 9 giờ bơm liên tục, thể tích dầu trong bể đạt được 67 000 lít.
- d) Trong quá trình bơm dầu, nếu sau mỗi giờ lượng dầu bị rò rỉ đều đặn với tốc độ 300 lít/giờ, thì tại thời điểm t bằng 9 giờ, thể tích dầu trong bể là 63 400 lít.

Bài 4. Vịnh Hạ Long là một địa danh du lịch được nhiều người biết đến trên thế giới, nơi đây vẫn còn nhiều đảo lớn nhỏ chưa được khám phá. Một công ty du lịch quyết định khai thác khu vực có một số đảo nhỏ với hình dáng đặc biệt nếu nhìn từ trên xuống, trong đó có hai hòn đảo mà phần giới hạn đất liền của nó được mô phỏng như hai đồ thị hàm số trên hình. Với hệ trục Oxy thích hợp, đơn vị trên mỗi trục là 100 m, đường cong mô tả hòn đảo thứ nhất có dạng $y = \log_a x$ đi qua điểm có tọa độ $(3; 1)$.



- a) Điểm có tọa độ $(9; 3)$ thuộc đường cong $y = \log_a x$.
- b) Chủ dự án muốn xây dựng một nơi trực tiếp nhìn ra biển để du khách tham quan, ăn uống. Họ đã lựa chọn khu vực tam giác cong ABC như trong hình (đường cong AC tiếp giáp biển);

diện tích của khu vực này là 536 m^2 (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

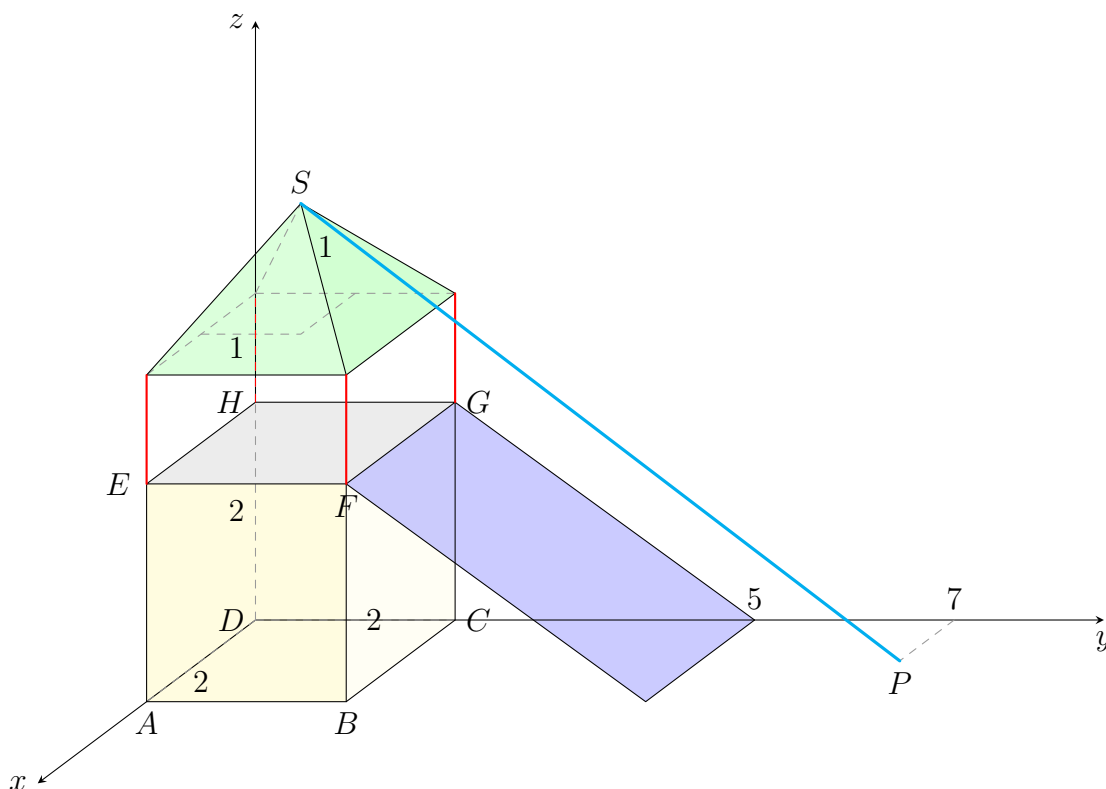
- c) Chủ dự án đã thuê một số kỹ sư giỏi Toán (đặc biệt giỏi về hàm số mũ-logarit) đi khảo sát khu vực này và họ nhận thấy có thể bồi đắp thêm cho hòn đảo thứ hai để đường cong giáp biển $y = g(x)$ của nó đối xứng với đường cong $y = \log_a x$ qua đường thẳng $y = x + 1$. Khi đó đường cong $g(x) = 1 + 3 \cdot 3^x$.
- d) Chủ dự án định xây một cây cầu nối liền hai đảo, khoảng cách ngắn nhất theo đường chim bay của cây cầu bằng 285 m (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Phần III. Câu trả lời ngắn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.*

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = 3a$. Biết $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{5}$. Tang của góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Bài 2. Một chiếc đèn được đặt cố định tại điểm $(3; 0)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy . Một con kiến đang di chuyển trong góc phần tư thứ nhất và bóng của nó in lên trục tung. Hãy xác định tốc độ thay đổi (đơn vị/giây) của bóng con kiến trên trục tung tại thời điểm nó ở vị trí có tọa độ $(1; 2)$, biết rằng kiến đang di chuyển theo hướng có hoành độ x tăng $\frac{1}{3}$ đơn vị/giây và tung độ y giảm $\frac{1}{4}$ đơn vị/giây (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Bài 3. Tháp gồm một khối lập phương, trên đó gắn thêm một khung hộp chữ nhật, và phía trên là một khối chóp tứ giác đều. Tại độ cao bằng chiều cao khối lập phương, có gắn một mặt phẳng trượt hình chữ nhật (xem hình, các kích thước tính bằng mét). Từ đỉnh S có buộc một sợi dây xuống điểm $P(1; 7; 0)$ làm dây leo. Trên mặt phẳng trượt, có một đĩa trẻ đứng thẳng tại vị trí chính giữa tấm trượt và với thẳng tay (vuông góc với mặt đất) nắm được dây leo. Tính chiều cao tay vịn của đĩa trẻ tính từ mặt đất.



Bài 4. Bạn An muốn làm các viên đá có dạng khối chóp cụt tứ giác đều có cạnh của đáy lớn bằng 3 cm , cạnh của đáy nhỏ bằng $1,5 \text{ cm}$ và cao 3 cm bằng cách dùng khay đá, mỗi khay sẽ tạo được 6 viên đá. Gọi a là số khay ít nhất để chứa 2 lít nước. Giá trị của $\frac{a}{100}$ bằng bao nhiêu?

Bài 5. Trong một trò chơi “giải mật mã tại ngày hội khoa học”, ban tổ chức chuẩn bị một hộp chứa 9 tấm thẻ được ghi các số từ tập hợp $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Một người chơi rút ngẫu nhiên 5 tấm thẻ khác nhau từ hộp. Sau đó các số được sắp xếp theo thứ tự tăng dần thành $a < b < c < d < e$. Người chơi được coi là giải được mật mã nếu trong năm số này tồn tại bốn số liên tiếp tạo thành một cấp số cộng. Biết xác suất để người chơi giải được mật mã là A . Giá trị $\frac{1}{A}$ là bao nhiêu?

Bài 6. Một cơ sở thủ công mỹ nghệ ở Khánh Hòa sản xuất các chân đế kim loại để trưng bày quả cầu pha lê trong cửa hàng lưu niệm. Ban đầu, người ta đúc một khối kim loại hình trụ đặc có đường kính đáy 12 cm và chiều cao 10 cm. Sau đó, để đặt vừa quả cầu pha lê, người thợ khoét ở mặt trên của khối trụ một phần của khối cầu bán kính 5 cm. Phần của khối cầu nhô lên khỏi mặt trên của khối trụ 4 cm như hình minh họa. Biết thể tích kim loại còn lại của chân đế sau khi khoét là $m\pi$ (cm³). Giá trị của m là bao nhiêu?



Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

❖ **Câu 1.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình của đường thẳng đi qua điểm $M(3; -4; -2)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (5; -4; 7)$ là:

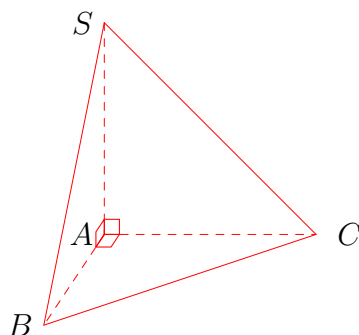
Ⓐ $\frac{x+3}{5} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z-2}{7}$.

Ⓑ $\frac{x-5}{3} = \frac{y+4}{-4} = \frac{z-7}{-2}$.

Ⓒ $\frac{x+5}{3} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z+7}{-2}$.

Ⓓ $\frac{x-3}{5} = \frac{y+4}{-4} = \frac{z+2}{7}$.

❖ **Câu 2.** Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $AB = 3a$, SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$ (tham khảo hình bên).



Thể tích khối chóp đã cho bằng

Ⓐ $3a^3$.

Ⓑ $2a^3$.

Ⓒ $9a^3$.

Ⓓ $6a^3$.

❖ **Câu 3.** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): y + 2z - 1 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là:

Ⓐ $\vec{n} = (0; 1; 2)$.

Ⓑ $\vec{n} = (1; 0; 2)$.

Ⓒ $\vec{n} = (1; 2; -1)$.

Ⓓ $\vec{n} = (2; 1; -1)$.

❖ **Câu 4.** Phương trình: $\cos x = 0$ có tập nghiệm là

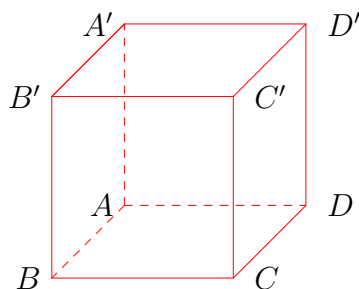
Ⓐ $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Ⓑ $S = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Ⓒ $S = \{\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Ⓓ $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

❖ **Câu 5.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (xem hình dưới). Đường thẳng CC' song song với mặt phẳng nào sau đây?

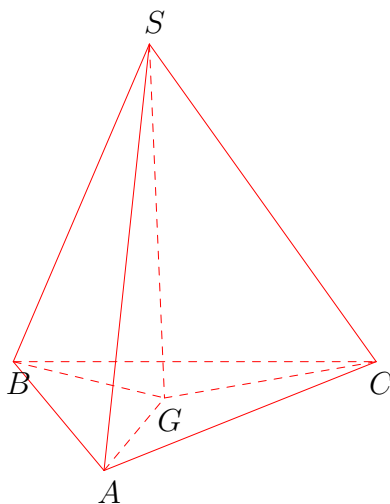


- (A) $(ABCD)$. (B) $(BCC'B')$. (C) $(ABB'A')$. (D) $(ACC'A')$.

❖ **Câu 6.** Một nguyên hàm của hàm số $y = 3^x$ là

- (A) 3^x . (B) $\frac{3^x}{\ln x}$. (C) $3^x \cdot \ln 3$. (D) $\frac{3^x}{\ln 3}$.

❖ **Câu 7.** Cho hình chóp $S.ABC$ (xem hình bên). Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$. Phát biểu nào sau đây là **đúng**?

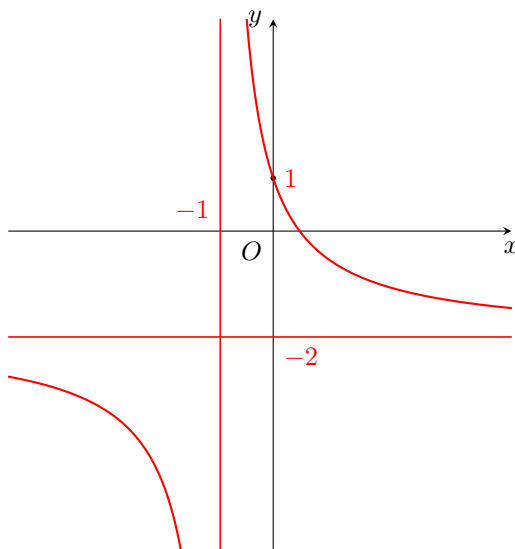


- (A) $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} = \vec{0}$. (B) $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} = \vec{SG}$.
(C) $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} = 3\vec{SG}$. (D) $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} = 2\vec{SG}$.

❖ **Câu 8.** Nghiệm của phương trình $3^{2x+1} = 243$ là

- (A) $x = 3$. (B) $x = 1$. (C) $x = 2$. (D) $x = 5$.

❖ **Câu 9.** Hàm số nào dưới đây có đồ thị là đường cong trong hình bên?



- (A) $y = \frac{-2x-1}{x+1}$. (B) $y = \frac{x-1}{x+1}$.
(C) $y = \frac{-2x+1}{x+1}$. (D) $y = \frac{x+1}{x-1}$.

❖ **Câu 10.** Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ khi xoay quanh trục Ox được xác định bởi công thức nào sau đây?

(A) $V = \pi \int_b^a [f(x)]^2 dx.$

(B) $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$

(C) $V = \int_a^b [f(x)]^2 dx.$

(D) $V = \pi \int_a^b f(x^2) dx.$

❖ **Câu 11.** Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 7$ và công sai $d = -3$. Giá trị của u_4 bằng

(A) $u_4 = 4.$

(B) $u_4 = -2.$

(C) $u_4 = 1.$

(D) $u_4 = -5.$

❖ **Câu 12.** Số lần ném vào rổ của 30 vận động viên khi ném 30 lần được thống kê lại bằng bảng sau

Số lần vào rổ	[20; 22)	[22; 24)	[24; 26)	[26; 28)	[28; 30)
Số VĐV	7	9	7	5	2

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là (làm tròn đến hàng phần mười)

(A) 6,3.

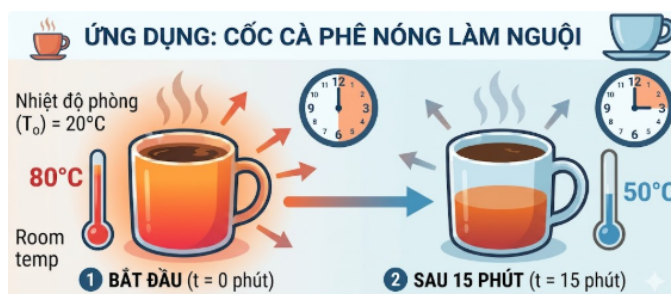
(B) 5,8.

(C) 24,1.

(D) 2,4.

Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai

❖ **Bài 1.** Một cốc cà phê nóng có nhiệt độ ban đầu là 80°C được đặt trong một phòng có nhiệt độ ổn định là 20°C . Sau 15 phút, nhiệt độ của cốc cà phê giảm xuống còn 50°C . Gọi $T(t)$ là nhiệt độ của cốc cà phê tại thời điểm t (phút) và $y(t) = T(t) - 20$ là chênh lệch nhiệt độ giữa cà phê và môi trường. Biết rằng tốc độ thay đổi chênh lệch nhiệt độ tỉ lệ thuận với chính nó, tức là $y'(t) = k \cdot y(t)$ (với k là hằng số).



a) Hằng số tốc độ làm mát của cốc cà phê $k = \frac{1}{15} \ln 2$.

b) Sau 30 phút kể từ khi đặt vào phòng, nhiệt độ của cốc cà phê là 30°C (làm tròn đến hàng đơn vị).

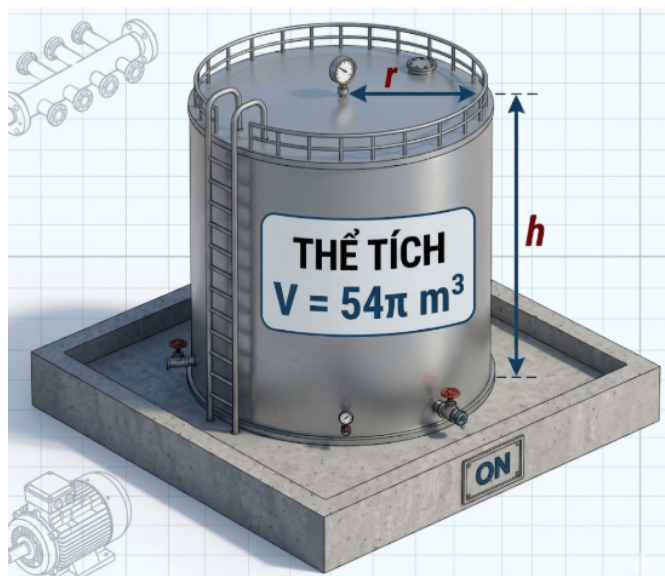
c) $y(t) = 60e^{kt}$ với mọi $t \geq 0$.

d) Tại thời điểm ban đầu ($t = 0$), giá trị của hằng số C trong biểu thức $y(t) = e^{kt+C}$ là $C = \ln 60$.

❖ **Bài 2.** Một đại lý xăng dầu tại Quảng Ngãi cần làm một bồn chứa dầu hình trụ bằng tôn có thể tích $V = 54\pi$ (m^3). Gọi r, h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của cái bồn dầu.

a) Công thức để tính thể tích bồn chứa dầu là $V = \pi r^2 h$.

b) Để diện tích toàn phần nhỏ nhất thì bán kính $r = 3$ (m).



- c) Diện tích toàn phần của bồn chứa dầu theo bán kính r là $S(r) = 2\pi \left(\frac{54}{r} + r^2 \right)$.
- d) Biết chi phí vật liệu (tôn) để làm bồn chứa là 500.000 đồng/m². Khi đó, số tiền ít nhất để mua nguyên vật liệu làm bồn chứa dầu là khoảng 81 triệu đồng (làm tròn đến hàng phần mười).

Bài 3. Trong một kì thi tốt nghiệp trung học phổ thông, một tỉnh X có 70% học sinh lựa chọn tổ hợp A00 (gồm các môn Toán học, Vật lí, Hóa học). Biết rằng, nếu một học sinh chọn tổ hợp A00 thì xác suất để học sinh đó đỗ đại học là 0,55; còn nếu học sinh không chọn tổ hợp A00 thì xác suất để học sinh đó đỗ đại học là 0,6. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của tỉnh X đã tốt nghiệp trung học phổ thông trong kì thi trên.

◇ Gọi A là biến cố: "Chọn được học sinh lựa chọn khối A00".

◇ Gọi B là biến cố: "Chọn được học sinh đỗ đại học".

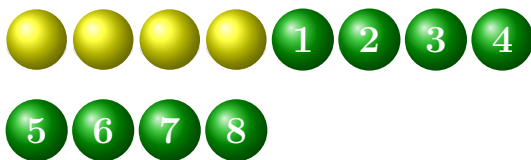
- a) $P(A) = 0,7$; $P(\bar{A}) = 0,3$.
- b) $P(\bar{B}|\bar{A}) = 0,45$.
- c) Xác suất để học sinh đó chọn tổ hợp A00, biết học sinh không đỗ đại học là $\frac{22}{29}$.
- d) Xác suất để học sinh đó không chọn tổ hợp A00, biết học sinh không đỗ đại học là $\frac{7}{29}$.

Bài 4. Một tàu thăm dò tự hành (AUV) đang hoạt động dưới biển sâu. Hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập với mặt nước biển yên tĩnh là mặt phẳng (Oxy), trục Oz hướng thẳng đứng xuống dưới (độ sâu $z > 0$), đơn vị tính bằng hectomét (hm). AUV bắt đầu hành trình từ vị trí $A(8; 6; 1)$ và dự định di chuyển theo đường thẳng đến vị trí cuối $B(4; -2; 2)$. Trong hành trình của mình AUV cần tránh một khu vực hình cầu (S), tâm tại điểm $K(2; -4; 2)$, bán kính $R = 1$ hm (khu vực có thiết bị nhạy cảm).

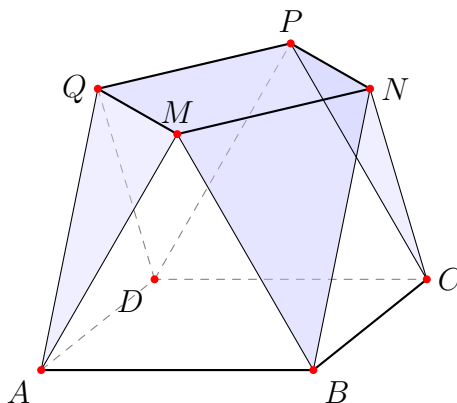
- a) Đường thẳng chứa hành trình của AUV có phương trình là $\frac{x-8}{-4} = \frac{y-6}{-8} = \frac{z-1}{1}$.
- b) Mặt cầu (S) có phương trình $(x-2)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2 = 1$.
- c) Trên hành trình AUV luôn cách tâm K một khoảng lớn hơn bán kính R .
- d) Hành trình của AUV không đi qua khu vực có thiết bị nhạy cảm hình cầu (S).

Phần III. Câu trả lời ngắn Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Bài 1. Có 12 quả bóng gồm 4 quả bóng vàng giống nhau và 8 quả bóng xanh được đánh số $1, 2, \dots, 8$. Người ta bỏ ngẫu nhiên tất cả số bóng trên vào ba hộp đựng A, B, C khác nhau, mỗi hộp có 4 ngăn đánh số $1, 2, 3, 4$, mỗi ngăn chứa được đúng 1 quả bóng. Gọi T là số cách phân bố các quả bóng vào các ngăn của ba hộp trên sao cho có đúng một hộp chứa toàn các bóng mang số chẵn. Tính giá trị $\frac{T}{70}$.



Bài 2. Bác An làm nghề đồ gỗ muốn thiết kế một chiếc đôn bằng gỗ như hình vẽ bên. Chiếc đôn có dạng là hình đa diện gồm có 8 đỉnh là A, B, C, D, M, N, P, Q ; hai mặt $(ABCD)$ và $(MNPQ)$ là hai hình vuông và nằm trên hai mặt phẳng song song với nhau, hình chiếu vuông góc của M, N, P, Q lên mặt phẳng $(ABCD)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA . Biết MAB là tam giác đều cạnh 6 dm, hỏi thể tích của chiếc đôn như trên bằng bao nhiêu deximet khối (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Bài 3. Một quân nhân đang ở trong một chiếc xe tăng X (loại quân sự) di chuyển dọc theo trục Oy về phía gốc tọa độ. Tại thời điểm xe cách gốc tọa độ 4 km, và 10 phút sau xe cách gốc tọa độ 2 km. Tốc độ của xe (km/h) tỉ lệ nghịch với khoảng cách của xe (km) đến gốc tọa độ. Biết rằng một xe tăng địch đang chờ ở tại điểm $A(3; 0)$ trên trục Ox , nhưng có một bức tường cao dọc theo đường cong (tất cả khoảng cách tính bằng km) ngăn cản bạn nhìn thấy vị trí chính xác của nó. Tại thời điểm đầu tiên quân địch phát hiện xe tăng, tốc độ của xe tăng X bằng bao nhiêu km/h (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Bài 4. Mô hình EOQ (Economic Order Quantity) được công bố năm 1913 là một công cụ quản trị vận hành dùng để xác định lượng hàng nhập kho tối ưu. Giả sử một cửa hàng thức ăn cho mèo có nhu cầu tiêu thụ hàng hóa đều đặn với tốc độ bán hàng $d = 100$ hộp/ngày. Các thông số chi phí được xác định như sau:

- ◇ $K = 1.000.000$ đồng: chi phí cố định cho mỗi lần đặt hàng (phí vận chuyển, nhân công...);
- ◇ c đồng/hộp: giá nhập mỗi hộp hàng (giả định không đổi và không có chiết khấu);
- ◇ $h = 500$ đồng/hộp/ngày: đơn giá lưu kho (chi phí lưu giữ một hộp hàng trong kho trong một ngày).

Gọi Q (hộp) là số lượng hàng mà người bán nhập vào trong mỗi lần đặt hàng. Thời gian tiêu

thụ hết lượng hàng là $\frac{Q}{d}$ (ngày). Tổng chi phí cho một chu kỳ đặt hàng và tiêu thụ hết hàng là $f = K + cQ + \frac{hQ^2}{2d}$. Hỏi cửa hàng nên nhập bao nhiêu hộp trong mỗi lần đặt hàng để chi phí trung bình mỗi ngày là nhỏ nhất (không làm tròn các bước trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng tới hàng đơn vị)?

Bài 5. Đề thi Tốt nghiệp THPT môn Toán năm 2025 gồm 3 dạng thức trắc nghiệm, trong đó dạng thức I là câu hỏi trắc nghiệm 4 phương án lựa chọn gồm 12 câu hỏi, mỗi câu trả lời đúng được 0,25 điểm; dạng thức II là loại câu hỏi Đúng/Sai gồm 4 câu hỏi. Mỗi câu hỏi có 4 ý hỏi, mỗi ý học sinh chỉ cần trả lời đúng hoặc chỉ trả lời sai; nếu 1 ý trả lời đúng đáp án thì được 0,1 điểm, đúng 2 ý được 0,25 điểm, đúng 3 ý được 0,5 điểm và đúng cả 4 ý được 1 điểm. Giả sử một thí sinh làm bài thi này và chắc chắn trả lời đúng 12 câu hỏi dạng thức I. Các câu còn lại của dạng thức II học sinh đó chọn ngẫu nhiên phương án trả lời cho mỗi ý. Gọi a là xác suất để học sinh đó làm được đúng 5 điểm cho cả hai dạng thức. Giá trị của $1000a$ bằng bao nhiêu (không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần mười)?

Bài 6. Ở thị trấn của tôi, trời mưa một phần ba số ngày. Nếu trời mưa, sẽ có khả năng xảy ra ùn tắc giao thông với xác suất $\frac{1}{2}$, nếu trời không mưa, sẽ có khả năng xảy ra ùn tắc giao thông là $\frac{1}{4}$. Nếu trời mưa và có ùn tắc giao thông, tôi sẽ đến muộn làm việc với xác suất $\frac{1}{2}$. Mặt khác, xác suất đến muộn là $\frac{1}{8}$ nếu trời không mưa và không có ùn tắc giao thông. Trong các tình huống khác (mưa và không có ùn tắc giao thông, không mưa và có ùn tắc giao thông), xác suất đến muộn của tôi đều là 0,25. Chọn một ngày ngẫu nhiên mà tôi đi làm muộn, vậy xác suất trời mưa vào ngày hôm đó là bao nhiêu %? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

❖ **Câu 1.** Trong bốn dãy số sau, có bao nhiêu dãy số lập thành một cấp số cộng?

- (I) $10; -2; -14; -26; -38$.
(II) $\frac{1}{2}; \frac{5}{4}; 2; \frac{11}{4}; \frac{7}{2}$.
(III) $\sqrt{1}; \sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{4}; \sqrt{5}$.
(IV) $1; 4; 7; 10; 13$.

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

❖ **Câu 2.** Phương trình $\sin x = 0$ có họ nghiệm là

- (A) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. (B) $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
(C) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. (D) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

❖ **Câu 3.** Với mọi số thực dương a thì $\log_2(16a) - \log_2 a$ bằng

- (A) $\log_2(15a)$. (B) 8. (C) 4. (D) $4 - 2\log_2 a$.

❖ **Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và cạnh bên SA vuông góc với đáy, biết $AB = a, AC = 2a, SA = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- (A) $\frac{1}{2}a^3$. (B) $\frac{3}{2}a^3$. (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}a^3$. (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}a^3$.

❖ **Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Đẳng thức nào sau đây sai?

- (A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. (B) $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD}$.
(C) $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO}$. (D) $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$.

❖ **Câu 6.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, có bảng biến thiên như sau. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $y = -1$ và tiệm cận ngang $x = -2$.
(B) Đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận.
(C) Đồ thị hàm số có ba tiệm cận.
(D) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận ngang $y = -2$.

❖ **Câu 7.** Hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ có cực đại là

- (A) -1. (B) 12. (C) 3. (D) -20.

❖ **Câu 8.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2025^x$ là

- (A) $F(x) = 2025^x + C$. (B) $F(x) = \frac{2025^x}{\ln(2025)} + C$.

Ⓒ $F(x) = 2025 \cdot 2024^x + C.$

Ⓓ $F(x) = 2025x + C.$

❖ **Câu 9.** Kết quả kiểm tra môn toán của lớp 12A được cho bởi mẫu số liệu ghép nhóm như sau:

Nhóm điểm	[0;2)	[2;4)	[4;6)	[6;8)	[8;10)
Tần số	4	5	6	25	10

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên thuộc nhóm nào dưới đây?

Ⓐ [6;8).

Ⓑ [2;4).

Ⓒ [4;6).

Ⓓ [8;10).

❖ **Câu 10.** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oxz) có phương trình là

Ⓐ $y = 0.$

Ⓑ $z = 0.$

Ⓒ $x = 0.$

Ⓓ $x + y + z = 0.$

❖ **Câu 11.** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{3}$. Điểm nào sau đây thuộc đường thẳng d ?

Ⓐ $Q(2; 1; 1).$

Ⓑ $M(1; 2; 3).$

Ⓒ $P(2; 1; -1).$

Ⓓ $N(1; -2; 3).$

❖ **Câu 12.** Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 1; 0)$ và có đường kính bằng 8 là

Ⓐ $(x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 8.$

Ⓑ $(x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 16.$

Ⓒ $(x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 64.$

Ⓓ $(x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 64.$

Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai

❖ **Bài 1.** Cho hàm số $y = f(x) = (x^2 - 5x + 7)e^x$. Xét tính đúng/sai của các khẳng định sau:

a) Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 2]$ lần lượt là 7 và $3e$.

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = (2x - 5)e^x$.

c) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; \frac{5}{2})$ và đồng biến trên khoảng $(\frac{5}{2}; +\infty)$.

d) $f(0) = 7$.

❖ **Bài 2.** Một tổ cắt vải của một công ty may mặc có hai chiếc máy. Xác suất để máy thứ nhất, máy thứ hai hoạt động ổn định lần lượt là 0,95 và 0,98. Biết việc hoạt động ổn định hay không ổn định của hai chiếc máy là độc lập với nhau và tổ cắt vải hoạt động bình thường được khi ít nhất một máy hoạt động ổn định.

a) Xác suất máy thứ nhất hoạt động không ổn định là 0,05.

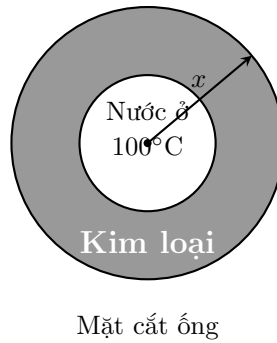
b) Xác suất chỉ có một máy hoạt động ổn định là 0,06.

c) Xác suất cả hai máy đều không hoạt động ổn định là 0,01.

d) Xác suất để tổ cắt vải hoạt động bình thường là 0,999.

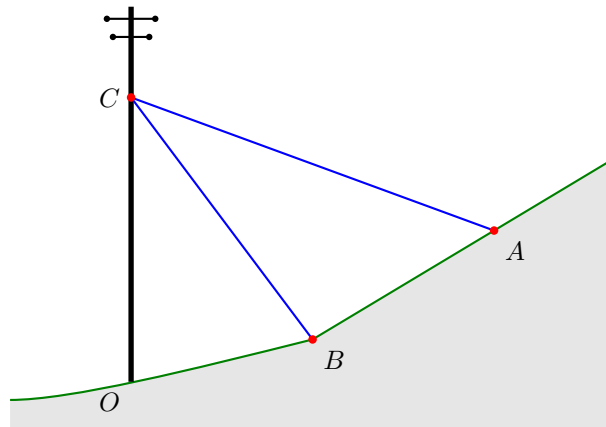
❖ **Bài 3.** Mặt cắt ngang của một ống dẫn nước nóng là hình vành khuyên như hình vẽ. Bán kính ngoài là r cm và bán kính trong là 2 cm ($r > 2$). Bên trong ống, nhiệt độ nước được duy trì ở mức 100°C . Bên trong kim loại, nhiệt độ giảm dần từ bên trong ra bên ngoài. Biết rằng nhiệt độ T ($^\circ\text{C}$) tại điểm A trên thành ống là hàm số của khoảng cách x (cm) từ A đến tâm của mặt cắt

và thoả mãn $T'(x) = -\frac{10}{x}$, với $2 \leq x \leq r$.



- $T(x) = -10 \ln x + C$ với C là hằng số.
- $T(x) = 100 - 10 \ln \frac{x}{2}$.
- Nếu bán kính ngoài là $r = 4$ cm thì nhiệt độ bề mặt ngoài của ống là $93,1^\circ\text{C}$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của $^\circ\text{C}$).
- Để nhiệt độ bề mặt ngoài của ống không vượt quá 90°C thì nên thiết kế ống với bán kính ngoài tối thiểu là 5,5 cm (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của cm).

Bài 4. Trên một sườn đồi, người ta trồng một trụ điện và muốn giữ nó thẳng đứng bằng hai sợi dây neo AC và BC . Hai sợi dây này được kéo căng thành hai đoạn thẳng có chung điểm C trên trụ điện và hai đầu A, B được neo trên sườn đồi (tham khảo hình minh họa).



Giả sử trong một hệ trục tọa độ $Oxyz$ phù hợp (có đơn vị các trục tọa độ là mét), gốc trụ điện đặt tại gốc tọa độ O , đầu các sợi dây neo có tọa độ lần lượt là $A(-3; 4; 2)$, $B(4; 2; 1)$ và $C(0; 0; 5)$.

- Trụ điện cao hơn 5 mét.
- Tổng chiều dài hai sợi dây neo là gần bằng 11,83 mét.
- Hai sợi dây neo tạo với nhau một góc gần bằng $76,8^\circ$.
- Để gia cố trụ điện, người ta cần thêm sợi dây neo thứ ba. Giả sử, dây neo thứ 3 này được kéo căng tạo thành đoạn thẳng CD thỏa ba điểm A, B và D thẳng hàng. Sợi dây neo thứ 3 có độ dài ngắn nhất bằng $\frac{2\sqrt{435}}{9}$ mét.

Phần III. Câu trả lời ngắn Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Bài 1. Một cá nhân gây thiệt hại cho tài sản nhà nước với tổng số tiền là 450 triệu đồng. Để được giảm nhẹ trách nhiệm hình sự, người này được yêu cầu phải hoàn thành việc bồi thường ít nhất 60% tổng số tiền gốc trong vòng 6 tháng đầu tiên. Phương thức bồi thường được thỏa thuận

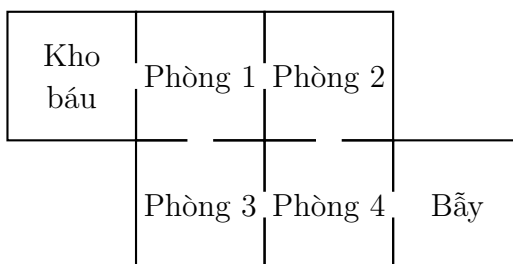
như sau: Tháng thứ nhất người đó nộp m (triệu đồng); kể từ tháng thứ hai, mỗi tháng số tiền nộp bằng 90% số tiền đã nộp ở tháng liền trước đó. Hỏi số tiền m nhỏ nhất mà người này phải nộp trong tháng đầu tiên là bao nhiêu để được giảm nhẹ trách nhiệm hình sự? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Bài 2. Nhân dịp nghỉ lễ 30/4, siêu thị X in ra 100 phiếu thưởng được đánh số thứ tự từ 1 đến 100, mỗi phiếu ghi 1 số, các phiếu khác nhau ghi số khác nhau. Mỗi khách hàng trong 100 khách hàng đầu tiên đến siêu thị trong ngày 30/4 sẽ được nhận 1 phiếu thưởng. Những người được nhận phiếu thưởng có thể tìm thêm 2 người khác để ghép thành 1 nhóm có 3 người. Nếu tổng các số ghi trên 3 thẻ của 3 người trong nhóm bằng 100 thì mỗi người trong nhóm được nhận 50.000đ. Siêu thị quy định:

- 1) Một người có thể ghép vào nhiều nhóm nên có thể nhận thưởng nhiều lần.
- 2) Mỗi nhóm 3 người chỉ được nhận thưởng 1 lần.

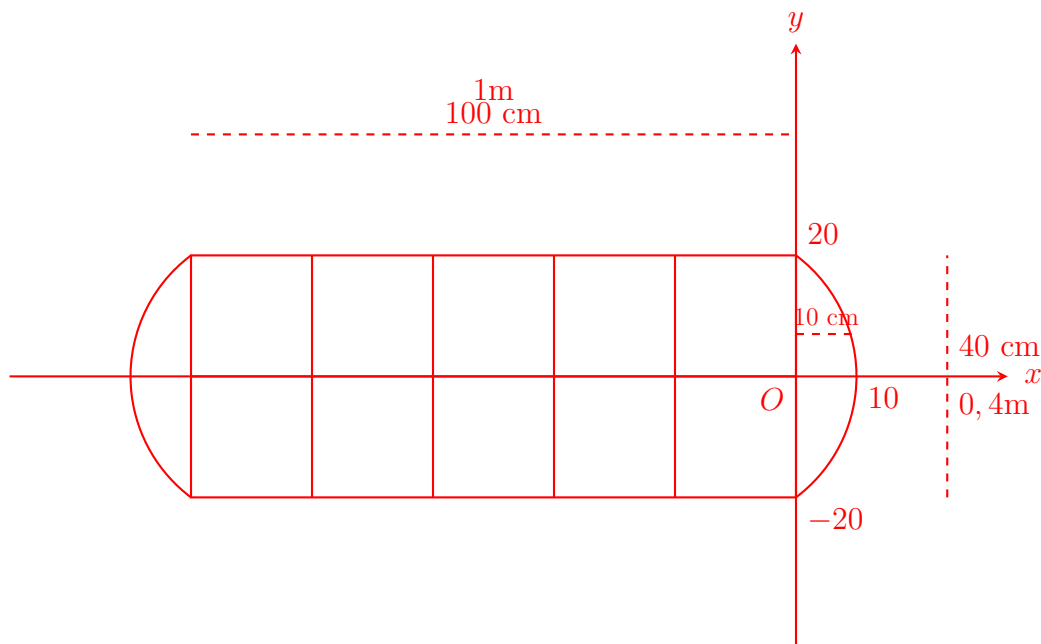
Hỏi ban quản lý siêu thị phải chuẩn bị số tiền thưởng lớn nhất là bao nhiêu triệu đồng (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

Bài 3. Trong một trò chơi thám hiểm, anh Sơn phải vượt qua một mê cung gồm các phòng thông nhau như sơ đồ dưới đây. Tại mỗi phòng, anh Sơn sẽ chọn ngẫu nhiên một trong các cửa thông với phòng hiện tại (với xác suất như nhau) để đi tiếp. Quá trình di chuyển diễn ra liên tục và trò chơi sẽ kết thúc ngay khi anh bước vào phòng chứa Kho báu hoặc phòng có Bẫy. Biết anh Sơn bắt đầu từ Phòng 1, tính xác suất để anh tìm được kho báu. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

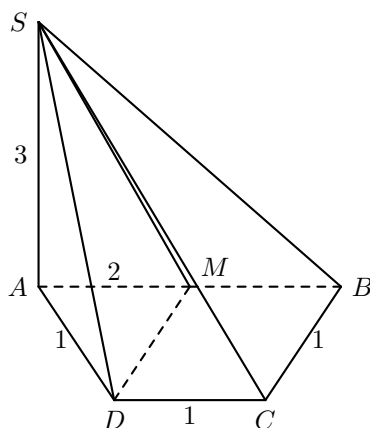


Bài 4. Một xưởng mộc tại Mai Sơn sản xuất những chiếc bàn cờ Ô ăn quan bằng gỗ nguyên khối. Mặt trên của bàn cờ là một mặt phẳng được thiết kế và có kích thước như hình vẽ gồm ba phần: phần chính giữa là một hình chữ nhật có chiều dài 100 cm và chiều rộng 40 cm; hai "ô quan" ở hai đầu trái và phải là hai hình phẳng bằng nhau được ghép nối liền mạch với hai cạnh chiều rộng của hình chữ nhật. Biết rằng đường bao ngoài của mỗi "ô quan" là một cung tròn. Xưởng mộc tiến hành phủ một lớp keo bảo vệ bóng lên toàn bộ bề mặt trên của chiếc bàn cờ này. Biết chi phí vật tư và nhân công để phủ keo là 100 000 đồng/m². Tính tổng chi phí x (nghìn đồng) để

hoàn thiện việc phủ keo cho mặt bàn cờ (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

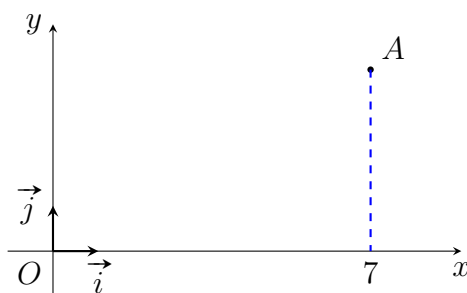


Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $AB = 2a, AD = DC = CB = a, SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 3a$. Gọi M là trung điểm của AB . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và DM bằng $\frac{xa}{y}$ (với $x, y \in \mathbb{N}^*, \frac{x}{y}$ tối giản). Tính $x + y + xy$.



Bài 6. Chú kiến bị lạc tổ, chú đang loay hoay để tìm tổ. Chú đi theo suy đoán và đặt hệ trục tọa độ Oxy thì đường đi của chú có quỹ đạo là một phần đường cong đồ thị hàm số có công thức $y = f(x) = a(x - b)^2$ (với a, b là các số thực dương). Hàm số $y = f(x)$ có tính chất: Với số thực k gọi hàm số $g(k) = \max_{[k; k+2]} f(x) - \min_{[k; k+2]} f(x)$. Hàm số $g(k)$ thỏa mãn $\begin{cases} g(3) = a \\ g(2) + g(6) = 32. \end{cases}$

Biết tổ của chú nằm ngay tại gốc tọa độ O . Thời điểm 9 h sáng chú đang ở vị trí A như hình vẽ. Khoảng cách giữa chú kiến và tổ của mình là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?



Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

❖ **Câu 1.** Cho tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Mặt phẳng nào sau đây song song với đường thẳng MN ?

- (A) (ACD) . (B) (ABD) . (C) (ABC) . (D) (BCD) .

❖ **Câu 2.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2; 2; 3), B(2; -2; -1)$. Tọa độ của điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ là

- (A) $(2; -1; 0)$. (B) $(-2; -1; 0)$. (C) $(2; 1; 0)$. (D) $(2; -1; 1)$.

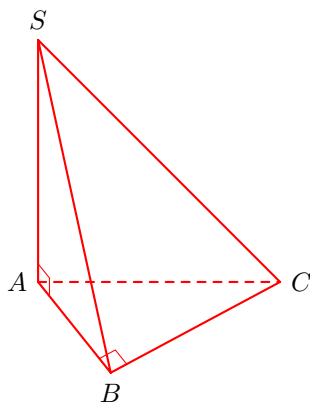
❖ **Câu 3.** Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 3$ quanh trục Ox . Khi đó V bằng

- (A) $\int_0^3 e^{2x} dx$. (B) $\int_0^3 e^x dx$. (C) $\pi \int_0^3 e^x dx$. (D) $\pi \int_0^3 e^{2x} dx$.

❖ **Câu 4.** Có bao nhiêu nghiệm nguyên trong đoạn $[-8; 8]$ của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \leq 3$.

- (A) 8. (B) 9. (C) 16. (D) 10.

❖ **Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B . Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $SA = AB = 4a, BC = 3a$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là



- (A) $8a^3$. (B) $4a^3$. (C) $16a^3$. (D) $24a^3$.

❖ **Câu 6.** Cho số thực $a > 0$. Biểu thức $\log(1000a)$ bằng biểu thức nào dưới đây?

- (A) $1000 \log a$. (B) $3 \log a$.
(C) $1000 + \log a$. (D) $3 + \log a$.

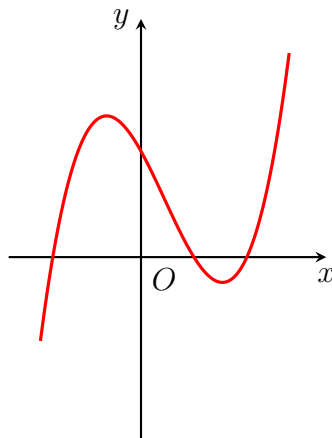
❖ **Câu 7.** Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng thứ n là $u_n = 3 + 5n$ thì công sai d bằng

- (A) 5. (B) 3. (C) -2. (D) 8.

❖ **Câu 8.** Một cửa hàng quần áo khảo sát nhu cầu mua quần áo trẻ em. Khoảng $[a; b)$ chứa tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm. Tính tổng $S = a + b$.

- (A) 210. (B) 90. (C) 150. (D) 120.

❖ **Câu 9.** Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng?



- (A) $ad > 0$. (B) $a + d < 0$. (C) $a + d > 0$. (D) $ad < 0$.

❖ **Câu 10.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3)$ và $B(2; -1; 1)$. Phương trình của mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB là

- (A) $x - 3y - 2z + 13 = 0$. (B) $x - 3y - 2z + 11 = 0$.
(C) $x - 3y + 2z - 1 = 0$. (D) $x + 3y - 2z + 1 = 0$.

❖ **Câu 11.** Tập nghiệm của phương trình $\cos x = 0$ là

- (A) $S = \{\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. (B) $S = \left\{\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
(C) $S = \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. (D) $S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

❖ **Câu 12.** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số đồng biến trên khoảng nào?

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			1			$+\infty$	
		$\searrow$		$\nearrow$	$\searrow$		$\nearrow$	
			-1		-1			

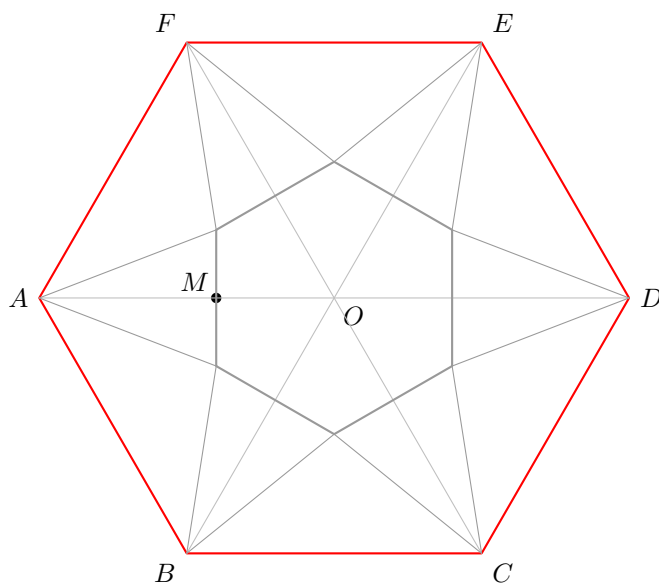
- (A) $(-3; 0)$. (B) $(0; +\infty)$. (C) $(-\infty; 3)$. (D) $(-3; 3)$.

Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai

❖ **Bài 1.** Một công ty đấu thầu hai dự án. Xác suất trúng thầu dự án thứ nhất là 0,8. Nếu trúng thầu dự án thứ nhất thì xác suất trúng thầu dự án thứ hai là 0,9. Nếu không trúng thầu dự án thứ nhất thì xác suất trúng thầu dự án thứ hai là 0,2.

- Nếu công ty không trúng thầu dự án thứ hai thì xác suất trúng thầu dự án thứ nhất là 0,12.
- Xác suất để công ty trúng thầu dự án thứ hai là 0,76.
- Xác suất để công ty trúng thầu cả hai dự án là 0,72.
- Xác suất để công ty không trúng thầu dự án thứ nhất là 0,2.

Bài 2. Từ một tấm bìa mỏng hình lục giác đều $ABCDEF$ cạnh 4 (cm), bên trong có một lục giác đều nhỏ hơn. Các đường chéo AD, BE, CF cắt nhau tại O , OA cắt cạnh lục giác đều nhỏ tại M (hình vẽ). Đặt $OM = x$ (cm). Bạn Khôi cắt bỏ 6 tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy là cạnh của hình lục giác đều ban đầu và đỉnh là đỉnh của lục giác đều nhỏ phía trong rồi gấp lên sao cho các đỉnh A, B, C, D, E, F trùng nhau tạo thành một khối chóp lục giác đều. Khi đó:



- Tam giác OAB đều cạnh bằng 4 (cm).
- Cạnh đáy của khối chóp lục giác đều bằng $\frac{x\sqrt{3}}{6}$ (cm).
- Đường cao của khối chóp lục giác đều là $\sqrt{16 - 8x}$ (cm).
- Thể tích lớn nhất mà khối chóp lục giác đều có thể đạt được là $\frac{256\sqrt{10}}{375}$ (cm³).

Bài 3. Cho hàm số $f(x) = \sin 2x - 2x$. Khi đó:

- Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = \cos 2x - 2$.
- Hàm số nghịch biến trên tập xác định.
- Nghiệm dương lớn nhất của phương trình $f'(x) + 1 = 0$ trên khoảng $(-\pi; \pi)$ là $\frac{5\pi}{6}$.
- Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ là $-\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}$.

Bài 4. Thầy An là một thủ khoa xuất sắc được tuyển đặc cách vào một trường THPT ở thủ đô. Sau thời gian tập sự, thầy chính thức bắt đầu tính thâm niên biên chế từ ngày 01/01/2020. Năm 2020 (năm thứ nhất), tổng thu nhập ở trường của thầy An là 60 triệu đồng/năm. Giả định mức tăng lương hằng năm là cố định 6 triệu đồng/năm cho mỗi năm tiếp theo. Nhờ được ở nhà công vụ miễn phí và sống tối giản, mỗi năm thầy dành đúng 50% tổng thu nhập hằng năm gửi tiết kiệm để mua nhà (lãi tiền gửi đều rút ra để chi tiêu, không nhập gốc và không tính vào thu nhập).

◇ Đầu năm 2020, thầy nhắm một căn hộ giá 1500 triệu đồng. Do nhu cầu thị trường, giá căn

hộ này mỗi năm tăng 10% so với giá cuối năm trước, giá được cập nhật vào ngày 31/12 hằng năm.

♦ Đầu năm 2025, thầy chốt mua căn hộ trên với giá giao dịch bằng giá thị trường tại thời điểm mua, làm tròn đến hàng triệu đồng. Khi mua, ngoài tiền tiết kiệm tích lũy trong 5 năm (2020–2024), thầy được gia đình hỗ trợ đúng 1400 triệu đồng. Số tiền còn thiếu thầy vay ngân hàng với lãi suất cố định 7%/năm trong 35 năm. Ngân hàng đưa ra 2 phương án trả nợ:

♦ **Phương án 1:** Trả một số tiền cố định (gồm cả gốc và lãi) hằng năm.

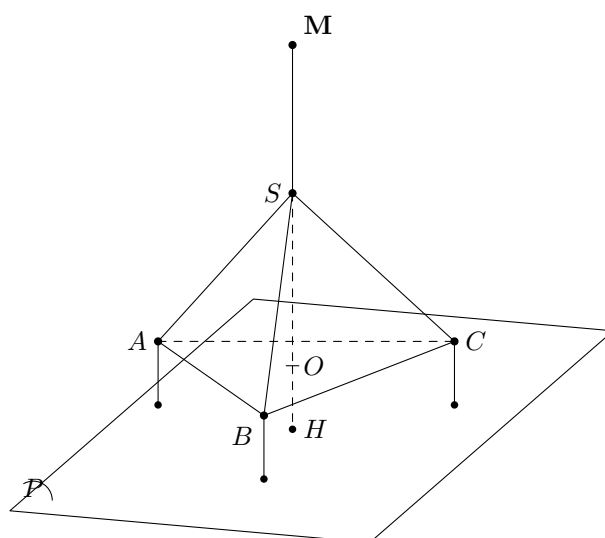
♦ **Phương án 2:** Trả gốc chia đều trong 35 năm, cộng với lãi tính trên dư nợ thực tế đầu mỗi năm đó.

Các phương án đều tính lãi theo năm trả nợ vào cuối mỗi năm, kỳ trả đầu tiên là 31/12/2025, các tính toán vay và trả nợ được làm tròn đến hàng triệu đồng gần nhất. Khi đó:

- Giá niêm yết của căn hộ tại thời điểm thầy An chốt mua (đầu năm 2025) là 2250 triệu đồng.
- Số tiền thầy An phải vay ngân hàng là 670 triệu đồng.
- Tổng số tiền phải trả cả gốc và lãi sau 35 năm của hai phương án chênh nhau hơn 370 triệu đồng.
- Gọi một năm (từ 2025) là thâm hụt nếu tiền trả nợ cuối năm lớn hơn 50% thu nhập năm đó. Khi đó, số năm thâm hụt liên tiếp theo phương án 2 nhiều hơn đúng 2 năm so với phương án 1.

Phần III. Câu trả lời ngắn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.*

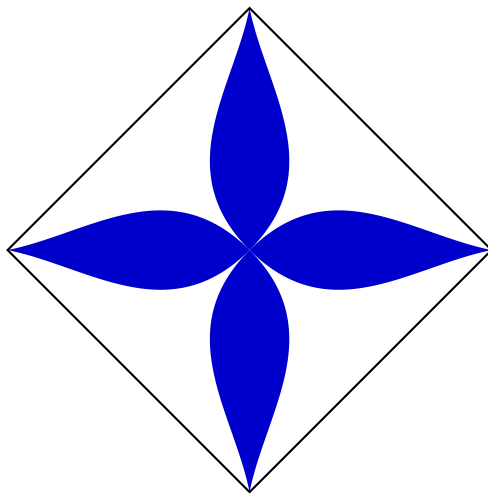
🔗 **Bài 1.** Ba quả bóng dạng hình cầu có bán kính bằng 1 đôi một tiếp xúc nhau và cùng tiếp xúc với mặt phẳng (P). Mặt cầu (S) bán kính bằng 2 tiếp xúc với ba quả bóng trên. Gọi M là điểm bất kỳ trên (S). Khoảng cách lớn nhất từ điểm M đến mặt phẳng (P) bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)



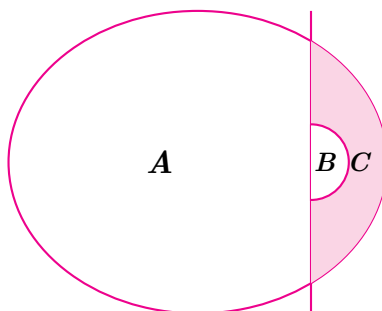
🔗 **Bài 2.** Một người tập thể hình tìm mua thanh protein để tăng cơ nhanh chóng, với 2 loại sản phẩm: thanh protein loại A và loại B. Mỗi thanh loại A chứa 15g protein, 30g carbohydrate và 200 calo. Mỗi thanh loại B chứa 30g protein, 20g carbohydrate và 240 calo. Theo kế hoạch dinh dưỡng, người này cần ít nhất 20 000 calo trong tháng từ các thanh protein, trong đó phải có ít nhất 1800g protein và 2200g carbohydrate. Biết giá mỗi thanh loại A là 30 000 đồng và giá mỗi thanh loại B là 40 000 đồng. Hỏi tổng số tiền ít nhất (đơn vị triệu đồng) để người đó đáp ứng toàn bộ nhu cầu

đinh dưỡng trong một tháng là bao nhiêu?

Bài 3. Một công ty thiết kế logo hình vuông có độ dài nửa đường chéo bằng 4. Biểu tượng 4 chiếc lá (được tô màu) được tạo thành bởi các đường cong đối xứng với nhau qua tâm của hình vuông và qua các đường chéo. Một trong số các đường cong ở nửa bên phải của logo là một phần của đồ thị hàm số bậc ba dạng $y = ax^3 + bx^2 - x$ với hệ số $a < 0$. Để kỷ niệm ngày thành lập $\frac{2}{3}$, tỉ số diện tích được tô màu so với phần không được tô màu bằng $\frac{2}{3}$. Tính $a + b$.



Bài 4. Một khu vườn hình elip (E), có độ dài trục lớn bằng 10 m và trục nhỏ bằng 8 m (như hình vẽ). Khu vực A để trồng hoa; khu vực B để trồng cỏ, là nửa hình tròn có tâm là một tiêu điểm của elip (E), bán kính bằng 1 m; còn lại là khu vực C (phần tô đậm) người ta lát gạch.



Diện tích phần lát gạch bằng bao nhiêu m^2 ? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Bài 5. Trong buổi hoạt động trải nghiệm khoa học của học sinh trường Trường THPT Nguyễn Thị Minh Khai, giáo viên chuẩn bị một bộ 8 viên bi kim loại khác nhau để thực hiện thí nghiệm về va chạm và chuyển động trên máng nghiêng. Để tiện cho việc quan sát và ghi chép kết quả, giáo viên đặt trước mặt học sinh 4 khay thí nghiệm được đánh số 1, 2, 3, 4. Trước khi tiến hành thí nghiệm, các viên bi sẽ được đặt vào các khay theo những quy tắc sau:

- ◇ Mỗi khay phải có ít nhất một viên bi để đảm bảo mỗi nhóm học sinh đều có vật mẫu quan sát.
- ◇ Các viên bi trong cùng một khay được xếp thành một hàng từ trái sang phải để thuận tiện cho việc lấy ra thí nghiệm theo thứ tự.
- ◇ Vì mỗi viên bi có khối lượng và màu sắc khác nhau, nên thứ tự các viên bi trong mỗi khay là quan trọng.

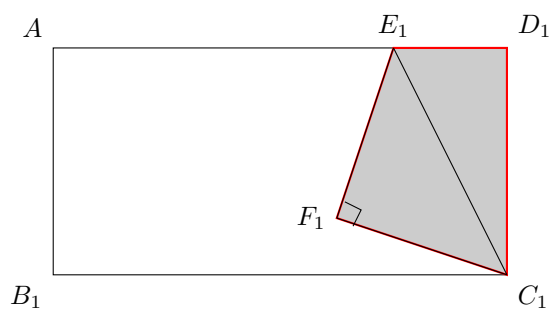
Hai cách sắp xếp được xem là giống nhau nếu:

- ◇ Mỗi khay có cùng số viên bi.

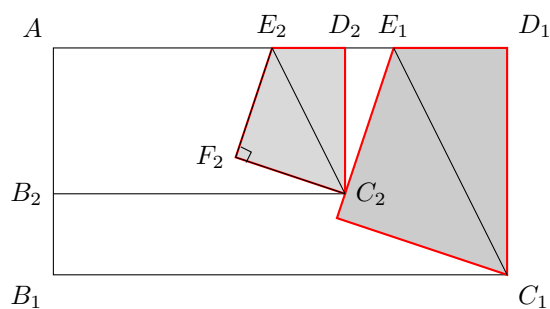
◇ Thứ tự các viên bi từ trái sang phải trong từng khay hoàn toàn giống nhau.

Gọi T là số cách sắp xếp khác nhau. Giá trị $\frac{T}{200}$ bằng bao nhiêu?

Bài 6. Cho hình chữ nhật $AB_1C_1D_1$ có độ dài cạnh $AD_1 = 2AB_1 = 20$ cm. Điểm E_1 thuộc đoạn AD_1 sao cho $AE_1 = 3E_1D_1$. Lấy điểm F_1 sao cho tam giác $F_1E_1C_1$ vuông cân tại F_1 (F_1 và D_1 khác phía nhau so với đường thẳng C_1E_1), sau đó tô đậm tứ giác $C_1D_1E_1F_1$ (hình 1). Tiếp theo lấy điểm B_2 trên đoạn AB_1 , điểm C_2 trên đoạn E_1F_1 và điểm D_2 trên đoạn AE_1 sao cho $AD_2 = 2AB_2$ và thoả mãn $AB_2C_2D_2$ là hình chữ nhật. Điểm E_2 thuộc đoạn AD_2 sao cho $AE_2 = 3E_2D_2$. Lấy điểm F_2 sao cho tam giác $F_2E_2C_2$ vuông cân tại F_2 (F_2 và D_2 khác phía nhau so với đường thẳng C_2E_2), sau đó tô đậm tứ giác $C_2D_2E_2F_2$ (hình 2). Cứ tiếp tục như vậy, tính tổng vô hạn các hình tứ giác được tô đậm là T (cm^2), tính $46T$.



Hình 1



Hình 2

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

❖ **Câu 1.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q) : 2x - y + 4z - 5 = 0$. Vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của (Q) ?

- (A) $\vec{n}_3 = (2; -1; -5)$. (B) $\vec{n}_1 = (2; -1; 4)$.
(C) $\vec{n}_1 = (2; 4; -5)$. (D) $\vec{n}_2 = (2; 1; 4)$.

❖ **Câu 2.** Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2026^x, y = 0, x = 0, x = 2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $S = \int_0^2 2026^{2x} dx$. (B) $S = \int_0^2 2026^x dx$.
(C) $S = \pi \int_0^2 2026^x dx$. (D) $S = \pi \int_0^2 2026^{2x} dx$.

❖ **Câu 3.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ và $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	+		+
y	2	$+\infty$	2

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là đường thẳng có phương trình

- (A) $x = 2$. (B) $x = -\frac{1}{2}$. (C) $y = 2$. (D) $y = -\frac{1}{2}$.

❖ **Câu 4.** Nghiệm của phương trình $\log_2 x = 3$ là

- (A) $x = 8$. (B) $x = \frac{3}{2}$. (C) $x = 6$. (D) $x = 9$.

❖ **Câu 5.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$. Điểm

nào dưới đây thuộc đường thẳng d ?

- (A) $P(-2; 1; -3)$. (B) $M(2; -1; 3)$.
(C) $Q(3; 1; -2)$. (D) $N(-3; -1; 2)$.

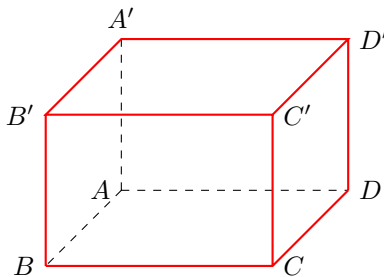
❖ **Câu 6.** Bảng dưới đây thống kê cự li ném tạ của một vận động viên.

Cự li (m)	[19; 19, 5)	[19, 5; 20)	[20; 20, 5)	[20, 5; 21)	[21; 21, 5)
Tần số	13	45	24	12	6

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến hàng phần trăm) là

- (A) 0,26. (B) 0,27. (C) 0,29. (D) 0,28.

❖ **Câu 7.** Trong không gian, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

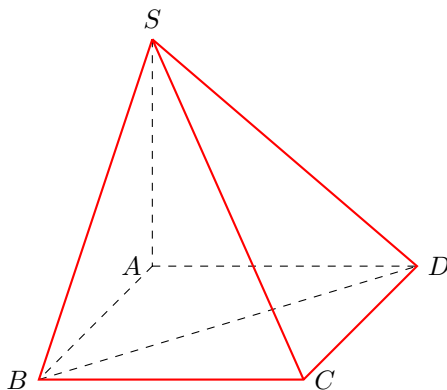


- (A) $\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CC'}$. (B) $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$.
(C) $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BB'}$. (D) $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

❖ **Câu 8.** Cho cấp số nhân (u_n) có $u_3 = 2, u_6 = 16$. Công bội q của cấp số nhân đã cho là

- (A) $q = 1$. (B) $q = 4$. (C) $q = 2$. (D) $q = 3$.

❖ **Câu 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và $SA \perp (ABCD)$. Đường thẳng nào sau đây vuông góc với SA ?



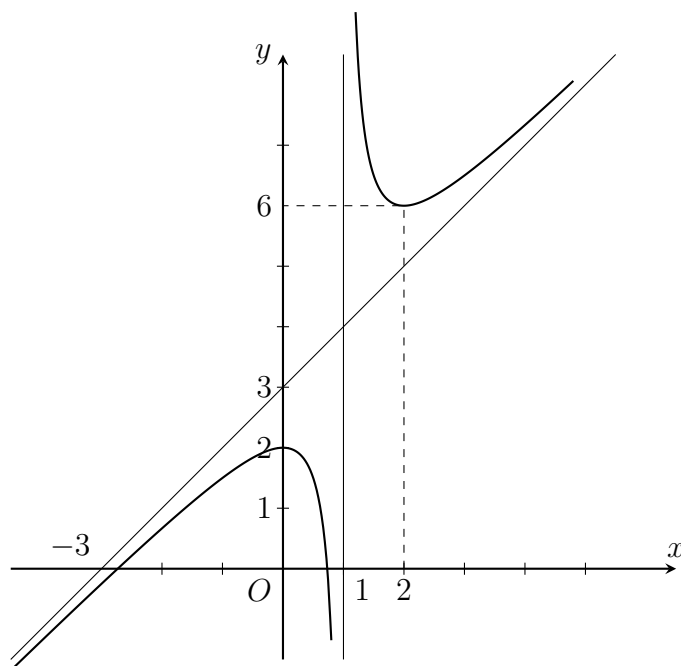
- (A) SD . (B) SC . (C) SB . (D) BD .

❖ **Câu 10.** Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$ là

- (A) $-\frac{1}{2} \sin 2x + C$. (B) $\sin 2x + C$.
(C) $-\sin 2x + C$. (D) $\frac{1}{2} \sin 2x + C$.

❖ **Câu 11.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới. Khẳng định nào

đúng?



- (A) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$. (B) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.
(C) Hàm số đạt cực đại tại $x = 6$. (D) Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

❖ **Câu 12.** Tập nghiệm S của bất phương trình $3^x \geq \frac{1}{27}$ là

- (A) $S = (-\infty; -3)$. (B) $S = (-3; +\infty)$.
(C) $S = [-3; +\infty)$. (D) $S = (-\infty; -3]$.

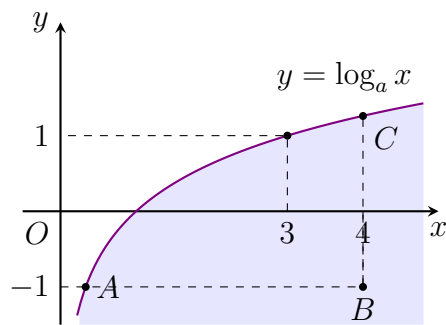
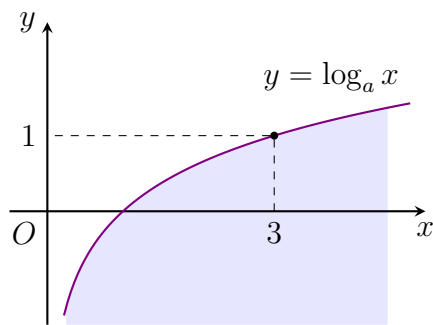
Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai

❖ **Bài 1.** Hưng có một đồng xu không cân đối, mà khả năng xuất hiện mặt sấp là 60% và một con xúc xắc không cân đối, mà khả năng xuất hiện mặt 1 chấm nhiều gấp đôi so với các mặt còn lại. Hưng gieo đồng xu và quan sát mặt xuất hiện. Nếu mặt xuất hiện là mặt sấp thì Hưng gieo con xúc xắc 2 lần liên tiếp. Nếu mặt xuất hiện là mặt ngửa thì Hưng gieo con xúc xắc 1 lần.

- a) Xác suất của biến cố: “Con xúc xắc xuất hiện mặt 1 chấm” là $\frac{2}{7}$.
b) Biết rằng Hưng gieo đồng xu ra mặt sấp, xác suất để Hưng gieo con xúc xắc xuất hiện mặt 1 chấm bằng $\frac{24}{49}$.
c) Xác suất để Hưng tung con xúc xắc có mặt 1 chấm bằng 42% (làm tròn đến hàng đơn vị).
d) Biết rằng Hưng gieo xúc xắc xuất hiện mặt 1 chấm. Khi đó, xác suất của biến cố: “Đồng xu xuất hiện mặt sấp” là 28%.

❖ **Bài 2.** Vịnh Hạ Long là một địa danh du lịch được nhiều người biết đến trên thế giới, nơi đây vẫn còn nhiều quần thể đảo lớn nhỏ chưa được khám phá. Một công ty du lịch quyết định khai thác khu vực có một số đảo nhỏ với hình dáng đặc biệt nếu nhìn từ trên xuống; trong số đó có hai hòn đảo mà phần giới hạn đất liền của nó được mô phỏng như hai đồ thị hàm số trên hình. Với hệ trục tọa độ Oxy thích hợp, đơn vị trên mỗi trục là 100 mét, đường cong mô tả cho hòn đảo thứ

nhất có dạng $y = \log_a x$ đi qua điểm có tọa độ $(3; 1)$.



- Điểm có tọa độ $(9; 3)$ thuộc đường cong $y = \log_a x$.
- Chủ dự án muốn xây dựng một nơi trực tiếp nhìn ra biển để du khách tham quan, ăn uống. Họ đã lựa chọn khu vực tam giác cong ABC như trong hình (đường cong AC tiếp giáp biển); diện tích khu vực này là 536 m^2 (làm tròn đến hàng đơn vị).
- Chủ dự án đã thuê một số kỹ sư rất giỏi toán (**đặc biệt giỏi về hàm số mũ-log**) đi khảo sát khu vực này và họ nhận thấy có thể bồi đắp thêm cho hòn đảo thứ hai để đường cong giáp biển $y = g(x)$ của nó đối xứng với đường cong $y = \log_a x$ qua đường thẳng $y = x + 1$. Khi đó đường cong $g(x) = 1 + 3 \cdot 3^x$.
- Chủ dự án định xây một cây cầu nối liền hai hòn đảo, khoảng cách ngắn nhất theo đường chim bay của cây cầu bằng 285 m (làm tròn đến hàng đơn vị của mét).

Bài 3. Tại một nút giao thông của một khu vực đông dân cư với tốc độ tối đa cho phép đối với ô tô là 50 km/h , người ta gắn một camera phạt nguội tại điểm $S(0; 0; 14)$ trong không gian $(Oxyz)$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét), mặt phẳng (Oxy) song song với mặt đường và chứa vùng nhận diện biển số xe của các phương tiện tham gia giao thông. Biết rằng camera nhận diện tốt nhất biển số xe của các phương tiện tham gia giao thông là khi biển số của chúng nằm trong hình thang cân $ABCD$ với: $SA = SB = 27 \text{ m}$, $OD = OC = 5 \text{ m}$, $AB = 14 \text{ m}$, $CD = 9,6 \text{ m}$ và tia Ox nằm trên đường trung trực các đoạn thẳng AB và CD (xem hình vẽ minh họa). Giả sử tại thời điểm 8 giờ sáng (được xem là thời điểm xuất phát) một ô tô chuyển động thẳng đều theo phương song song với trục Ox , hướng về phía trục Oy và có vị trí của biển số xe ở đầu ô tô là điểm $M(50; -6; 0)$.

- Hình chiếu của điểm D trên trục Oy là $H(0; 4; 8; 0)$.
- Điểm D có tọa độ là $(1, 4; -4, 8; 0)$.
- Đường thẳng AD có phương trình là
$$\begin{cases} x = 1, 4 - 20, 6t \\ y = -4, 8 + 2, 2t \\ z = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$
- Nếu ô tô đi với vận tốc 45 km/h thì sau đúng $2, 2$ giây kể từ thời điểm xuất phát thì biển số của xe ô tô đã nằm trong vùng nhận diện tốt nhất của camera.

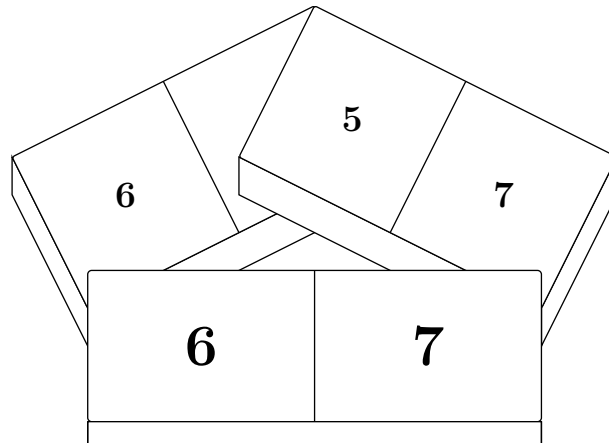
Bài 4. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$.

- Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng $y = ax + b$. Khi đó $a - 2b = 5$.
- Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình là $y = 2x - 3$.
- Gọi A, B lần lượt là các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số và O là gốc tọa độ. Diện tích tam giác OAB bằng 6 .

d) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 3)$.

Phần III. Câu trả lời ngắn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.*

Bài 1. Bạn Nam có 6 quân domino, mỗi quân có hai kí tự được đánh số. Tập hợp các quân domino và các số được đánh là: $(1; 2)$, $(1; 3)$, $(2; 3)$, $(2; 4)$, $(3; 4)$, $(4; 5)$. Bạn Nam chọn ngẫu nhiên 3 quân domino và xếp chúng thành một hình tam giác. Tính xác suất để 3 quân domino được chọn có thể xếp thành một hình tam giác có mặt của mỗi quân tiếp giáp với mặt của quân khác có cùng số (tham khảo như hình vẽ).



Bài 2. Trên sân khấu của chương trình ngoại khóa Toán học của trường THPT X, người ta đặt hai màn hình cảm ứng A và B hoạt động độc lập với nhau. Trên mỗi màn hình có một thanh trượt di chuyển đều từ 0 đến 2. Khi người chơi bấm dừng, thanh trượt dừng ngẫu nhiên tại một số thực thuộc đoạn $[0; 2]$. Gọi 2 số thực xuất hiện trên hai màn hình A, B lần lượt là a, b . MC đưa ra phương trình $x^3 - 3bx + 2a = 0$ và quy định: Nếu phương trình có ít nhất 2 nghiệm thực, người chơi nhận được một phần quà lưu niệm. Nếu phương trình chỉ có 1 nghiệm thực, người chơi sẽ nhận được 1 tràng pháo tay từ khán giả. Hãy tính xác suất để người chơi nhận được 1 phần quà lưu niệm (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Bài 3. Một cửa hàng bán tạp chí với giá 40 nghìn đồng một cuốn. Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in,...) được cho bởi công thức $C(x) = 0,004x^2 - 2x + 1000$, $C(x)$ được tính theo đơn vị nghìn đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 10 nghìn đồng. Các khoản thu bao gồm tiền bán tạp chí và 50 triệu nhận được từ sự trợ giúp của báo chí. Giả sử số cuốn tạp chí in ra đều được bán hết. Cửa hàng thu được lợi nhuận nhiều nhất khi in a cuốn tạp chí, khi đó lợi nhuận thu được là T (triệu đồng). Tính $a + T$.

Bài 4. Hai người là A và B chơi trò chơi leo cầu thang bằng cách oẳn tù tì (xác suất thắng, hoà, thua trong trò chơi oẳn tù tì của A là bằng nhau). Luật chơi như sau:

- ◇ Trong mỗi lượt chơi, người thắng sẽ leo 2 bậc thang và người thua sẽ đứng yên tại chỗ.
- ◇ Nếu hoà thì cả hai người cùng leo lên 1 bậc thang.

Sau khi chơi oẳn tù tì 5 lần, xác suất để vị trí của A tăng 5 bậc so với vị trí ban đầu là T , tính $\frac{238}{T}$.

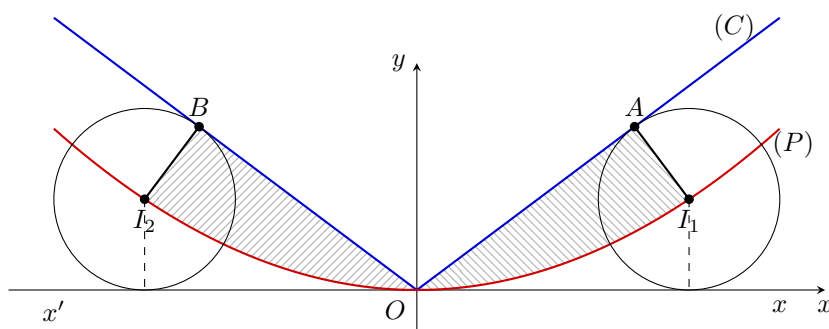
Bài 5. Trong mặt phẳng Oxy cho:

- ◇ Đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{3}{4}|x|$.
- ◇ Đường tròn (C_1) có tâm I_1 , bán kính 1 tiếp xúc với (C) tại A và tiếp xúc với tia Ox .

◇ Đường tròn (C_2) có tâm I_2 , bán kính 1 tiếp xúc với (C) tại B và tiếp xúc với tia Ox' .

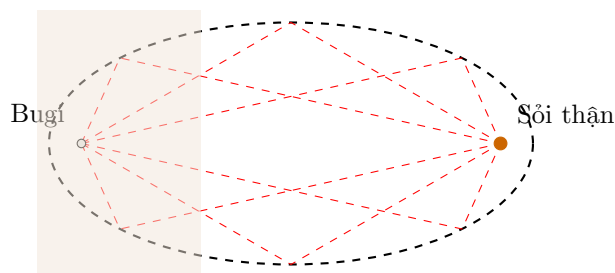
◇ Parabol (P) có đỉnh là O , qua I_1 và I_2 .

(tham khảo hình vẽ dưới đây)



Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (C) , (P) và các đường thẳng I_1A , I_2B .

Bài 6. Một máy tán sỏi sử dụng mặt phản xạ có dạng hình elip để phá vỡ sỏi thận mà không cần phẫu thuật. Một bugi đặt tại một tiêu điểm của elip phát ra các xung năng lượng. Nhờ đặc tính phản xạ của elip, các xung này được hội tụ về tiêu điểm còn lại - nơi đặt viên sỏi thận với đủ năng lượng để làm vỡ viên sỏi (xem hình minh họa).

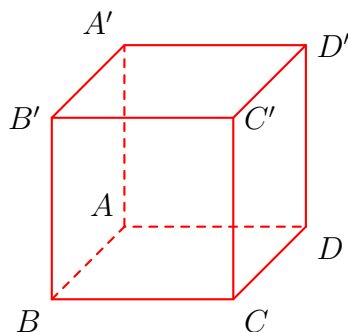


Gương phản xạ hình elip

Độ dài các trục lớn và nhỏ của elip lần lượt là 28 cm và 14 cm. Hỏi khoảng cách từ bugi đến viên sỏi là bao nhiêu cm (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

❖ **Câu 1.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm mệnh đề sai?



(A) $(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{A'B'}) = 90^\circ$.

(B) $(\overrightarrow{A'A}; \overrightarrow{CB'}) = 45^\circ$.

(C) $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'C'}) = 45^\circ$.

(D) $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{B'D'}) = 90^\circ$.

➤ *Hướng dẫn giải.*

Giả sử cạnh hình lập phương bằng a .

❖ $(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB}) = \widehat{DAB} = 90^\circ$. (Đúng)

❖ $(\overrightarrow{A'A}; \overrightarrow{CB'}) = (\overrightarrow{B'B}; \overrightarrow{CB'}) = \widehat{BB'C} = 135^\circ$ (vì $\triangle BCC'$ vuông cân tại B). Vậy mệnh đề B sai.

❖ $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{A'C'}) = \widehat{B'A'C'} = 45^\circ$. (Đúng)

❖ $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ mà $\overrightarrow{BD} \parallel \overrightarrow{B'D'} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{B'D'}$. (Đúng)

❖ **Câu 2.** Gieo ngẫu nhiên một con xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo bằng 8 biết rằng lần gieo thứ nhất xuất hiện mặt 5 chấm.

(A) $\frac{1}{3}$.

(B) $\frac{5}{6}$.

(C) $\frac{1}{36}$.

(D) $\frac{1}{6}$.

➤ *Hướng dẫn giải.* Vì lần gieo thứ nhất đã xuất hiện mặt 5 chấm, nên các kết quả có thể xảy ra của lần gieo thứ hai là $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Có 6 khả năng xảy ra.

Để tổng số chấm hai lần bằng 8, khi biết lần đầu là 5 chấm, thì lần thứ hai phải ra mặt 3 chấm ($5 + 3 = 8$).

Chỉ có 1 kết quả thuận lợi là (5; 3).

Xác suất là $P = \frac{1}{6}$.

❖ **Câu 3.** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số đồng biến trên khoảng

nào?

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			1				$+\infty$
			-1		-1			

- (A) $(-3; 0)$. (B) $(0; +\infty)$. (C) $(-\infty; 3)$. (D) $(-3; 3)$.

Hướng dẫn giải.

Hàm số đồng biến trên các khoảng mà đạo hàm $f'(x)$ mang dấu dương (+).

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đồng biến trên các khoảng $(-3; 0)$ và $(3; +\infty)$.

Trong các phương án đưa ra, khoảng $(-3; 0)$ là đáp án chính xác.

Câu 4. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 1$ và $u_2 = 2$. Công bội của cấp số nhân đã cho là

- (A) $q = -2$. (B) $q = 2$. (C) $q = -\frac{1}{2}$. (D) $q = \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải. Theo định nghĩa cấp số nhân, ta có $u_2 = u_1 \cdot q \Rightarrow q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{2}{1} = 2$.

Câu 5. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x - 2y - 4 = 0$, khi đó một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là

- (A) $\vec{n} = (-1; 2; 4)$. (B) $\vec{n} = (1; -2; 0)$.
 (C) $\vec{n} = (1; -2; -4)$. (D) $\vec{n} = (-1; 2; -4)$.

Hướng dẫn giải. Mặt phẳng $(P) : Ax + By + Cz + D = 0$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C)$.

Từ phương trình $x - 2y - 4 = 0$, ta có $A = 1, B = -2, C = 0$.

Vậy $\vec{n} = (1; -2; 0)$.

Câu 6. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}$ thỏa mãn $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$. Tọa độ vectơ $\vec{a}$ là

- (A) $(-5; 4; 3)$. (B) $(4; 3; -5)$. (C) $(-4; -3; 5)$. (D) $(3; 4; -5)$.

Hướng dẫn giải. Tọa độ của vectơ $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ là $(x; y; z)$.

Với $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$, ta có tọa độ là $(4; 3; -5)$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = 3^x + 1$. Một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ là

- (A) $F(x) = 3^x + x$. (B) $F(x) = \frac{3^x}{\ln 3}$.
 (C) $F(x) = 3^x \ln 3$. (D) $F(x) = \frac{\ln 3}{3^x} + x$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\int (3^x + 1)dx = \int 3^x dx + \int 1dx = \frac{3^x}{\ln 3} + x + C$.

Với $C = 0$, ta được một nguyên hàm là $F(x) = \frac{3^x}{\ln 3} + x$.

❖ **Câu 8.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^5 f(x)dx = 6, \int_2^5 f(x)dx = 2$. Giá trị của biểu thức $\int_0^2 f(x)dx$ bằng

- (A) 8. (B) 4. (C) 3. (D) 2.

🔗 *Hướng dẫn giải.* Ta có tính chất: $\int_0^5 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx$.

$$\text{Thay số vào: } 6 = \int_0^2 f(x)dx + 2 \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx = 6 - 2 = 4.$$

❖ **Câu 9.** Khảo sát thời gian ứng dụng AI vào học tập trong một ngày của học sinh lớp 12A, thu được mẫu số liệu ghép nhóm như sau:

Thời gian (pht)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)
Số học sinh	5	8	14	10	6

Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng (làm tròn kết quả hàng phần trăm)?

- (A) 31, 95. (B) 31, 94. (C) 32, 96. (D) 32, 97.

🔗 *Hướng dẫn giải.* Xác định giá trị đại diện x_i cho từng nhóm:

- ❖ Nhóm [20; 25) có $x_1 = 22, 5$.
- ❖ Nhóm [25; 30) có $x_2 = 27, 5$.
- ❖ Nhóm [30; 35) có $x_3 = 32, 5$.
- ❖ Nhóm [35; 40) có $x_4 = 37, 5$.
- ❖ Nhóm [40; 45) có $x_5 = 42, 5$.

Tổng số học sinh là: $n = 5 + 8 + 14 + 10 + 6 = 43$.

Số trung bình cộng là:

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 22,5 + 8 \cdot 27,5 + 14 \cdot 32,5 + 10 \cdot 37,5 + 6 \cdot 42,5}{43} = \frac{1417,5}{43} \approx 32,9651...$$

Làm tròn đến hàng phần trăm ta được 32, 97.

❖ **Câu 10.** Phương trình $\sin x + 1 = 0$ có nghiệm là

- (A) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. (B) $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 (C) $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. (D) $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

🔗 *Hướng dẫn giải.* Ta có: $\sin x + 1 = 0 \iff \sin x = -1$.

Trên đường tròn lượng giác, điểm có tung độ bằng -1 ứng với cung $-\frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

❖ **Câu 11.** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x - 1) + 3 > 0$ là

- (A) $(-\infty; 9)$. (B) $(9; +\infty)$. (C) $(1; 9)$. (D) $(1; 7)$.

🔗 *Hướng dẫn giải.* Điều kiện: $x - 1 > 0 \iff x > 1$.

Bất phương trình tương đương với: $\log_{\frac{1}{2}}(x - 1) > -3$.

Vì cơ số $\frac{1}{2} < 1$ nên bất phương trình đổi chiều: $x - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \iff x - 1 < 8 \iff x < 9$.

Kết hợp điều kiện $x > 1$, ta có tập nghiệm là $S = (1; 9)$.

❖ **Câu 12.** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{3x+2}{x+1}$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng

- (A) $\frac{10}{3}$. (B) $\frac{8}{3}$. (C) 3. (D) 2.

👉 *Hướng dẫn giải.* Xét hàm số $y = \frac{3x+2}{x+1}$ trên đoạn $[0; 2]$.

$$\text{Đạo hàm: } y' = \frac{3(x+1) - (3x+2)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in [0; 2].$$

Vì $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên đoạn $[0; 2]$.

$$\text{Giá trị lớn nhất đạt được tại } x = 2: \max_{[0;2]} y = y(2) = \frac{3(2)+2}{2+1} = \frac{8}{3}.$$

Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai

🔗 **Bài 1.** Một con sư tử đang đuổi theo một con ngựa vằn. Con ngựa vằn nhận ra con sư tử khi con sư tử cách xa nó 40 m. Từ thời điểm này, con sư tử đuổi con ngựa vằn với tốc độ $v_1(t) = 15e^{-0,1t}$ m/s và con ngựa vằn chạy trốn với tốc độ $v_2(t) = 20 - 20e^{-0,1t}$ m/s trên cùng một đường thẳng (với t tính theo giây và $0 \leq t \leq 60$).

- Tại thời điểm ban đầu $t = 0$ vận tốc của con ngựa vằn là 20 m/s.
- Tốc độ của sư tử giảm dần theo thời gian, trong khi tốc độ của ngựa vằn tăng dần theo thời gian.
- Sư tử sẽ ở gần ngựa vằn nhất khi $v_1'(t) = v_2'(t)$.
- Sư tử sẽ không bắt được con ngựa vằn và khoảng cách ngắn nhất giữa chúng là 1,42 mét (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

👉 *Hướng dẫn giải.* a) **Sai.**

Tại thời điểm $t = 0$, vận tốc của con ngựa vằn là: $v_2(0) = 20 - 20e^{-0,1 \cdot 0} = 20 - 20 = 0$ (m/s).

b) **Đúng.**

$$+) \text{ Ta có } v_1'(t) = -0,1 \cdot 15 \cdot e^{-0,1t} = -1,5e^{-0,1t} < 0, \forall t \in [0; 60].$$

Suy ra tốc độ của sư tử giảm dần theo thời gian.

$$+) \text{ Ta có } v_2'(t) = -0,1 \cdot (-20) \cdot e^{-0,1t} = 2e^{-0,1t} > 0, \forall t \in [0; 60].$$

Suy ra tốc độ của ngựa vằn tăng dần theo thời gian.

Vậy tốc độ của sư tử giảm dần theo thời gian, trong khi tốc độ của ngựa vằn tăng dần theo thời gian.

c) **Sai.**

$$\forall t \begin{cases} v_1'(t) < 0, \forall t \in [0; 60] \\ v_2'(t) > 0, \forall t \in [0; 60] \end{cases} \implies v_1'(t) \neq v_2'(t), \forall t \in [0; 60].$$

d) **Sai.**

Gọi quãng đường chạy được của sư tử và ngựa vằn lần lượt là $s_1(t), s_2(t)$ (m).

$$+) \text{ Ta có: } s_1(t) = \int v_1(t)dt = \int 15e^{-0,1t}dt = \frac{15}{-0,1}e^{-0,1t} + C = -150e^{-0,1t} + C.$$

Coi điểm O là vị trí xuất phát ban đầu của sư tử, tại $t = 0$ ta có $s_1(0) = 0 \iff -150e^0 + C = 0 \implies C = 150$.

$$\text{Vậy } s_1(t) = -150e^{-0,1t} + 150.$$

$$+) \text{ Ta có: } s_2(t) = \int v_2(t)dt = \int (20 - 20e^{-0,1t})dt = 20t + \frac{20}{0,1}e^{-0,1t} + C = 20t + 200e^{-0,1t} + C.$$

So với vị trí xuất phát ban đầu O của sư tử, tại thời điểm $t = 0$ ngựa vằn cách sư tử 40 m $\implies s_2(0) = 40$.

$$\iff 20 \cdot 0 + 200e^0 + C = 40 \iff 200 + C = 40 \implies C = -160.$$

$$\text{Vậy } s_2(t) = 20t + 200e^{-0,1t} - 160.$$

Khoảng cách giữa sư tử và ngựa vằn là $d(t) = s_2(t) - s_1(t)$:

$$d(t) = (20t + 200e^{-0,1t} - 160) - (-150e^{-0,1t} + 150) = 20t + 350e^{-0,1t} - 310.$$

Xét hàm số $d(t)$ trên đoạn $[0; 60]$:

$$d'(t) = 20 - 35e^{-0,1t}.$$

$$d'(t) = 0 \iff 20 - 35e^{-0,1t} = 0 \iff e^{-0,1t} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}.$$

$$\iff -0,1t = \ln\left(\frac{4}{7}\right) \implies t = \frac{\ln(4/7)}{-0,1} \approx 5,6 \text{ (s)}.$$

t	0	5,6	60
$d'(t)$		0	
		-	+
$d(t)$	40	1,92	890,87

Dựa vào bảng biến thiên, sư tử ở gần ngựa vằn nhất khi $v_1(t) = v_2(t)$ và khoảng cách ngắn nhất giữa chúng là 1,92 mét. Do đó mệnh đề d sai.

Bài 2. Trong một bài kiểm tra trắc nghiệm có 50 câu hỏi, mỗi câu có bốn phương án trả lời A, B, C, D trong đó chỉ có một phương án trả lời đúng. Mỗi câu trả lời đúng được cộng 0,2 điểm và mỗi câu trả lời sai bị trừ 0,1 điểm. Trong 50 câu trên, bạn Nam đã làm được và chắc đúng 35 câu, 15 câu còn lại bạn không biết làm nên ở mỗi câu bạn chọn ngẫu nhiên một đáp án.

- Nếu trong 15 câu còn lại bạn Nam tô ngẫu nhiên và đúng thêm 3 câu nữa, khi đó bài của bạn Nam được 6,4 điểm.
- Ở mỗi câu còn lại, xác suất để bạn Nam làm đúng là $\frac{1}{4}$.
- Bạn Nam làm được 7,0 điểm, khi đó bạn Nam làm đúng 35 câu và sai 15 câu.
- Xác suất để bạn Nam đạt được 7,0 điểm là 0,165 (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

Hướng dẫn giải. Nam đã chắc chắn đúng 35 câu. Số câu Nam chọn ngẫu nhiên là 15 câu.

- Đúng.** Nếu đúng thêm 3 câu trong 15 câu ngẫu nhiên, tổng số câu đúng là $35 + 3 = 38$ câu.

Số câu sai là $15 - 3 = 12$ câu. Số điểm của Nam là: $38 \cdot 0,2 - 12 \cdot 0,1 = 7,6 - 1,2 = 6,4$ (điểm).

b) **Đúng.** Mỗi câu có 4 phương án và chỉ có 1 phương án đúng. Khi chọn ngẫu nhiên, xác suất chọn đúng mỗi câu là $p = \frac{1}{4} = 0,25$.

c) **Sai.** Gọi k là số câu đúng thêm trong 15 câu chọn ngẫu nhiên ($0 \leq k \leq 15, k \in \mathbb{N}$). Số câu đúng tổng cộng là $35 + k$, số câu sai tổng cộng là $15 - k$. Để được 7,0 điểm, ta có phương trình:

$$(35 + k) \cdot 0,2 - (15 - k) \cdot 0,1 = 7,0$$

$$\iff 7,0 + 0,2k - 1,5 + 0,1k = 7,0$$

$$\iff 0,3k = 1,5 \iff k = 5.$$

Như vậy, để được 7,0 điểm Nam phải đúng thêm 5 câu (tổng 40 câu đúng) và sai 10 câu. Mệnh đề nói đúng 35 câu và sai 15 câu là sai.

d) **Đúng.** Việc chọn ngẫu nhiên 15 câu là thực hiện 15 phép thử Bernoulli với xác suất thành công mỗi lần là $p = 0,25$. Để đạt 7,0 điểm, Nam cần đúng thêm chính xác $k = 5$ câu trong 15 câu chọn ngẫu nhiên đó. Xác suất cần tìm là:

$$P = C_{15}^5 \cdot (0,25)^5 \cdot (0,75)^{10} \approx 0,1651459...$$

Làm tròn đến hàng phần nghìn, ta được 0,165.

Bài 3. Giả sử tốc độ v (m/s) của một thang máy di chuyển từ tầng 1 lên tầng cao nhất theo

$$\text{thời gian } t \text{ được cho bởi công thức } v(t) = \begin{cases} t & \text{nếu } 0 \leq t \leq 2 \\ 2 & \text{nếu } 2 < t \leq 20 \\ 12 - 0,5t & \text{nếu } 20 < t \leq 24 \end{cases}$$

a) Tốc độ tại thời điểm $t = 2$ s là 2.

b) Gia tốc chuyển động của thang máy tại thời điểm $t = 15$ s là 2 (m/s²).

c) Quãng đường chuyển động của thang máy là 42 m.

d) Tốc độ trung bình của thang máy là 1,75 (m/s).

Hướng dẫn giải.



a) **Đúng.** Tại $t = 2$, dựa vào công thức nhánh đầu tiên hoặc nhánh thứ hai, ta có $v(2) = 2$ (m/s).

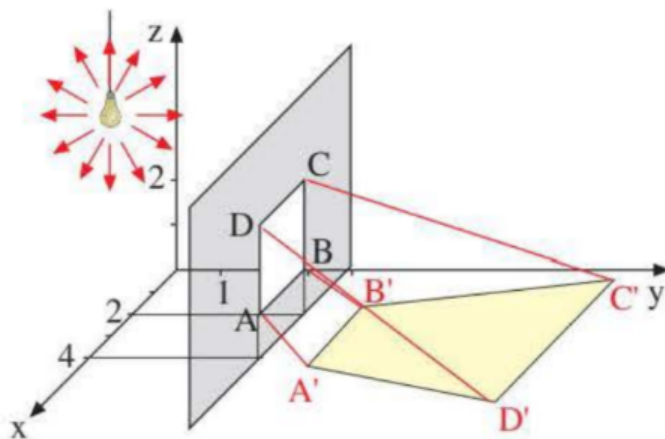
b) **Sai.** Tại $t = 15$ s, thời gian nằm trong khoảng $2 < t \leq 20$. Trong khoảng này, vận tốc là hằng số $v(t) = 2$ nên gia tốc $a(t) = v'(t) = 0$. Vậy gia tốc tại $t = 15$ s phải bằng 0 (m/s²).

c) **Đúng.** Quãng đường chuyển động S được tính bằng tích phân của vận tốc trên toàn bộ thời gian: $S = \int_0^{24} v(t) dt = \int_0^2 t dt + \int_2^{20} 2 dt + \int_{20}^{24} (12 - 0,5t) dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^2 + [2t]_2^{20} + [12t - 0,25t^2]_{20}^{24}$

$S = 2 + (40 - 4) + (288 - 144) - (240 - 100) = 2 + 36 + 4 = 42$ (m). *(Hoặc tính nhanh bằng diện tích hình thang màu đỏ: $S = \frac{(18 + 24) \cdot 2}{2} = 42$ m).*

d) **Đúng.** Tốc độ trung bình được tính theo công thức: $v_{tb} = \frac{S}{t_{total}} = \frac{42}{24} = 1,75$ (m/s).

Bài 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ vuông góc $Oxyz$ (có mặt sàn là Oxy , Oz thẳng đứng lên), có một cửa sổ hình vuông $ABCD$ song song với mặt phẳng Oxz , cạnh dài bằng 2m. Cửa sổ được chiếu sáng bởi một nguồn sáng đặt tại $L(3; 0; 5)$. Biết điểm $A(4; 4; 1)$. Trên mặt sàn xuất hiện hình bóng của cửa sổ. Hãy dựa vào hình vẽ bên xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau:



- Gọi G là tâm của cửa sổ, khi đó $G(1; 2; 3)$.
- Gọi D' của bóng của điểm D trên mặt sàn, khi đó tọa độ của D' là $\left(\frac{11}{2}; 10; 0\right)$.
- Diện tích bóng của cửa sổ trên mặt sàn lớn hơn 15m^2 .
- Hình bóng của cửa sổ trên mặt sàn lớn hơn cửa sổ thật 4 lần.

Hướng dẫn giải. a) **Sai.** Vì cửa sổ song song với mặt phẳng Oxz , các cạnh của nó song song với trục Ox và Oz . Vì hình vuông cạnh 2, $A(4; 4; 1)$ là một đỉnh, lại có:

- ◇ $AB \parallel Ox$ và sang trái (giảm x), độ dài 2: $\Rightarrow B(4 - 2; 4; 1) = (2; 4; 1)$.
- ◇ $AD \parallel Oz$ và lên trên (tăng z), độ dài 2: $\Rightarrow D(4; 4; 1 + 2) = (4; 4; 3)$.
- ◇ C là đỉnh còn lại, nằm lệch theo cả Ox và Oz so với A : $C(2; 4; 3)$.

Ta có G là tâm của cửa sổ, khi đó G là trung điểm của BD nên $G\left(\frac{2+4}{2}; \frac{4+4}{2}; \frac{1+3}{2}\right) = G(3; 4; 2)$.

b) **Đúng.** Lấy một đỉnh chung $P(x_P; 4; z_P) \in$ cửa sổ.

$$\text{Đường thẳng } LP \text{ có phương trình tham số: } \begin{cases} x = 3 + t(x_P - 3) \\ y = 4t \\ z = 5 + t(z_P - 5) \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$$

Điểm chiếu P' thuộc mặt phẳng $z = 0$ nên: $5 + t(z_P - 5) = 0 \Rightarrow t = \frac{5}{5 - z_P}$.

Thay lần lượt cho từng đỉnh:

Xét điểm $A(4; 4; 1)$ có: $z_A = 1; t_A = \frac{5}{4} \Rightarrow x_{A'} = 3 + \frac{5}{4}(4 - 3) = 3 + \frac{5}{4} = \frac{17}{4}; y_{A'} = 4 \cdot \frac{5}{4} = 5 \Rightarrow A' \left(\frac{17}{4}; 5; 0 \right)$.

Tương tự ta tìm được $B' \left(\frac{7}{4}; 5; 0 \right), C' \left(\frac{1}{2}; 10; 0 \right), D' \left(\frac{11}{2}; 10; 0 \right)$.

c) Đúng. Diện tích tứ giác $A'B'C'D'$.

Trong mặt phẳng $z = 0$ ta có: $A' \left(\frac{17}{4}; 5 \right), B' \left(\frac{7}{4}; 5 \right), C' \left(\frac{1}{2}; 10 \right), D' \left(\frac{11}{2}; 10 \right)$.

Ta thấy: $y_{A'} = y_{B'} = 5, y_{C'} = y_{D'} = 10$, nên $A'B'C'D'$ là hình thang, hai đáy song song trục Ox .

Đáy nhỏ: $A'B' = \left| \frac{17}{4} - \frac{7}{4} \right| = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$.

Đáy lớn: $C'D' = \left| \frac{11}{2} - \frac{1}{2} \right| = \frac{10}{2} = 5$.

Chiều cao: $h = 10 - 5 = 5$.

Diện tích: $S_{A'B'C'D'} = \frac{(A'B' + C'D') \cdot h}{2} = \frac{\left(\frac{5}{2} + 5 \right) \cdot 5}{2} = \frac{15}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{75}{4} = 18,75(\text{m}^2)$.

d) Sai. Cửa sổ $ABCD$ là hình vuông cạnh 2: $S_{ABCD} = 2^2 = 4$.

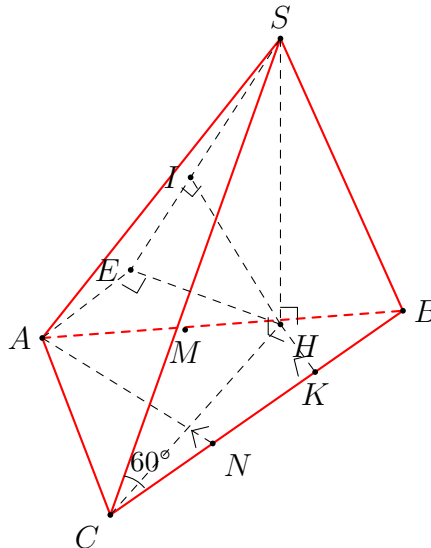
Do đó: $k = \frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{75}{4}}{4} = \frac{75}{16} \approx 4,7$.

Vậy hình bóng của cửa sổ trên mặt sàn lớn hơn cửa sổ thật khoảng 4,7 lần.

Phần III. Câu trả lời ngắn Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 6. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC (làm tròn đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn giải.



Gọi N là trung điểm BC . Trong mặt phẳng (ABC) dựng đường thẳng d qua A và song song với BC . Qua H dựng đường thẳng song song với AN cắt d tại E và cắt BC tại K . Khi đó tứ giác $AEKN$ là hình chữ nhật.

Ta có: $BC // AE \Rightarrow BC // (SAE) \Rightarrow d(BC, SA) = d(BC, (SAE)) = d(K, (SAE))$.

Mặt khác $\frac{HB}{HA} = \frac{HK}{HE} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{KH}{KE} = \frac{1}{3} \Rightarrow d(K, (SAE)) = \frac{KE}{HE} d(H, (SAE)) = \frac{3}{2} d(H, (SAE))$.

Ta có $\begin{cases} AE \perp SH \\ AE \perp KE \end{cases} \Rightarrow AE \perp (SHE) \Rightarrow (SHE) \perp (SAE)$.

Trong mặt phẳng (SHE) kẻ $HI \perp SE$ tại I . Từ đó suy ra: $HI \perp (SAE) \Rightarrow d(H, (SAE)) = HI \Rightarrow d(BC, SA) = \frac{3}{2} HI$.

Tính toán các giá trị:

◇ Đáy ABC đều cạnh 6 nên đường cao $AN = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

◇ $HA = \frac{2}{3}AB = 4, HB = \frac{1}{3}AB = 2$.

◇ Trong $\triangle BHC$: $HC^2 = HB^2 + BC^2 - 2HB \cdot BC \cos 60^\circ = 2^2 + 6^2 - 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 28 \Rightarrow HC = 2\sqrt{7}$.

◇ Góc $(SC, (ABC)) = \widehat{SCH} = 60^\circ$. Trong $\triangle SHC$ vuông tại H : $SH = HC \cdot \tan 60^\circ = 2\sqrt{7} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{21}$.

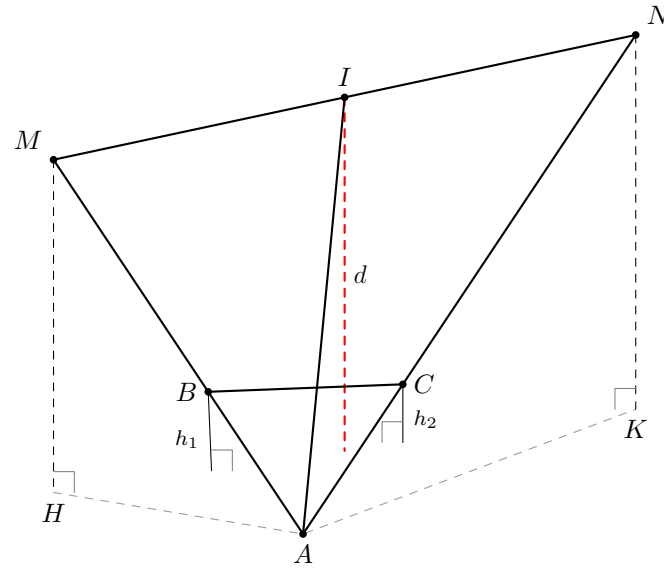
◇ Vì $HK // AN \Rightarrow \frac{HK}{AN} = \frac{BH}{BA} = \frac{1}{3} \Rightarrow HK = \frac{1}{3}AN$.

◇ $EH = EK - HK = AN - \frac{1}{3}AN = \frac{2}{3}AN = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

◇ Trong $\triangle SHE$ vuông tại H : $HI = \frac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{2\sqrt{21} \cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{(2\sqrt{21})^2 + (2\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{42}}{2}$.

Vậy $d(SA, BC) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{42}}{2} = \frac{3\sqrt{42}}{4} \approx 4,86$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; -4; 4)$, $B(-1; -2; 4)$ và $C(0; -4; 4)$. Mặt phẳng (P) có dạng $ax + 2025y + cz + d = 0$ đi qua điểm A sao cho hai điểm B, C nằm về cùng một phía. Đặt $h_1 = d(B, (P))$ là khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (P) và $h_2 = d(C, (P))$ là khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (P) . Khi biểu thức $2025h_1 + 2026h_2$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị của biểu thức $T = -9a + 10c + d$ bằng bao nhiêu?



————— (P)

Gọi M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = 2025\overrightarrow{AB}$, suy ra $M(-1; 4046; 4)$.

Khi đó $2025h_1 = 2025 \cdot d(B, (P)) = d(M, (P))$.

Gọi N là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AN} = 2026\overrightarrow{AC}$, suy ra $N(2025; -4; 4)$.

Khi đó $2026h_2 = 2026 \cdot d(C, (P)) = d(N, (P))$.

Suy ra $2025h_1 + 2026h_2 = d(M, (P)) + d(N, (P))$.

Gọi I là trung điểm của MN , suy ra $I(1012; 2021; 4)$.

Vì B, C nằm về cùng một phía đối với (P) nên M, N cũng nằm về cùng một phía.

Khi đó $2025h_1 + 2026h_2 = d(M, (P)) + d(N, (P)) = 2d(I, (P)) \leq 2IA$.

Do vậy $2025h_1 + 2026h_2$ đạt giá trị lớn nhất khi mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng IA .

Hay (P) đi qua $A(-1; -4; 4)$ và nhận $\overrightarrow{AI} = (1013; 2025; 0)$ làm vectơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (P) là:

$$1013(x + 1) + 2025(y + 4) + 0(z - 4) = 0 \iff 1013x + 2025y + 9113 = 0.$$

So sánh với phương trình dạng $ax + 2025y + cz + d = 0$, ta có: $a = 1013; c = 0; d = 9113$.

Vậy giá trị biểu thức $T = -9a + 10c + d = -9(1013) + 10(0) + 9113 = -9117 + 9113 = -4$.

Bài 3. Hiện nay, nước ta đang trong quá trình tinh gọn bộ máy và thực hiện nghị quyết không tổ chức công an cấp huyện. Do vậy, trong đợt điều động cán bộ công an từ huyện về công tác tại cơ sở hoặc công tác tại công an tỉnh, phòng tổ chức cán bộ nhận thấy rằng: có 60% cán bộ có nguyện vọng về công tác tại cơ sở là các xã vùng sâu vùng xa, số còn lại nguyện vọng về công tác tại công an tỉnh.

- ♦ Trong số cán bộ có nguyện vọng về công tác tại cơ sở thì 70% có trình độ đại học và 30% có trình độ trung cấp.

- ◇ Trong số cán bộ có nguyện vọng về công tác tại công an tỉnh thì 80% có trình độ đại học và 20% có trình độ trung cấp.

Tuy nhiên, năng lực công tác cũng là một yếu tố quan trọng. Dựa trên hồ sơ đánh giá năng lực:

- ◇ Trong số cán bộ có nguyện vọng về cơ sở thì tỷ lệ cán bộ được đánh giá có năng lực “Tốt” trở lên với trình độ đại học là 60% và với trình độ trung cấp là 30%.
- ◇ Trong số cán bộ có nguyện vọng về công tác tại công an tỉnh thì tỷ lệ cán bộ được đánh giá có năng lực “Tốt” trở lên với trình độ đại học là 85% và với trình độ trung cấp là 25%.

Chọn ngẫu nhiên một cán bộ công an. Tính xác suất để cán bộ này vừa có trình độ đại học, vừa được đánh giá có năng lực “Tốt” và có nguyện vọng về công tác tại cơ sở là các xã vùng sâu vùng xa. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

 *Hướng dẫn giải.* Gọi các biến cố liên quan đến cán bộ được chọn như sau:

- ◇ A : "Cán bộ có nguyện vọng về công tác tại cơ sở".
- ◇ B : "Cán bộ có trình độ đại học".
- ◇ C : "Cán bộ được đánh giá có năng lực Tốt trở lên".

Yêu cầu của bài toán là tính xác suất để cả ba biến cố này đồng thời xảy ra, tức là tính $P(A \cap B \cap C)$. Dựa vào dữ liệu bài toán, ta có các xác suất sau:

- ◇ Xác suất cán bộ có nguyện vọng về cơ sở: $P(A) = 60\% = 0,6$.
- ◇ Xác suất cán bộ có trình độ đại học trong nhóm nguyện vọng về cơ sở: $P(B|A) = 70\% = 0,7$.
- ◇ Xác suất cán bộ có năng lực Tốt trong nhóm nguyện vọng về cơ sở và có trình độ đại học: $P(C|A \cap B) = 60\% = 0,6$.

Áp dụng công thức nhân xác suất mở rộng:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$$

Thay số vào ta được:

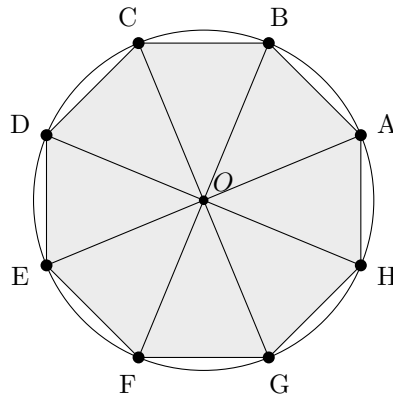
$$P(A \cap B \cap C) = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,6 = 0,252.$$

Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo yêu cầu của đề bài:

$$P(A \cap B \cap C) \approx 0,25.$$

Vậy xác suất cần tìm là 0,25.

 **Bài 4.** Cho một hình bát giác đều $ABCDEFGH$ nội tiếp trong một đường tròn tâm O như hình bên. Gắn ngẫu nhiên tám số tự nhiên $\{9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16\}$ vào tám đỉnh của bát giác đều này (mỗi số gắn đúng một đỉnh). Chọn ngẫu nhiên một tam giác có ba đỉnh lấy từ tám đỉnh của bát giác đã cho. Gọi xác suất để thu được một tam giác vuông với ba số trên ba đỉnh của tam giác (theo một thứ tự nào đó) lập thành một cấp số cộng là $\frac{m}{n}$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$; $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản). Giá trị của $m + n$ bằng bao nhiêu?



- Tổng số tam giác có thể chọn từ 8 đỉnh của bát giác đều là $C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$.

- Để tam giác tạo thành là tam giác vuông, một cạnh của nó phải là đường kính của đường tròn.

- Số đường kính đi qua các đỉnh của bát giác là 4 (AE, BF, CG, DH).

- Với mỗi đường kính, ta có thể chọn thêm 1 đỉnh từ 6 đỉnh còn lại để tạo thành một tam giác vuông.

- Do đó, số tam giác vuông có thể tạo thành là: $4 \times 6 = 24$.

- Xác suất để chọn được một tam giác vuông là $P_1 = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$.

- Xét tập hợp các số $S = \{9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16\}$. Cần chọn ra 3 số từ S để tạo thành cấp số cộng. Số cách chọn ra 3 số bất kỳ từ S là $C_8^3 = 56$.

- Các bộ 3 số tạo thành cấp số cộng (với $a < b < c$ và $2b = a + c$):

◇ Công sai $d = 1$: $\{9, 10, 11\}, \{10, 11, 12\}, \{11, 12, 13\}, \{12, 13, 14\}, \{13, 14, 15\}, \{14, 15, 16\}$ (6 bộ)

◇ Công sai $d = 2$: $\{9, 11, 13\}, \{10, 12, 14\}, \{11, 13, 15\}, \{12, 14, 16\}$ (4 bộ)

◇ Công sai $d = 3$: $\{9, 12, 15\}, \{10, 13, 16\}$ (2 bộ)

Tổng cộng có $6 + 4 + 2 = 12$ bộ 3 số lập thành cấp số cộng.

- Vì việc gán số vào các đỉnh là ngẫu nhiên, xác suất để 3 số tại 3 đỉnh của tam giác đã chọn tạo thành cấp số cộng là $P_2 = \frac{12}{56} = \frac{3}{14}$.

- Xác suất cần tìm là tích của hai xác suất:

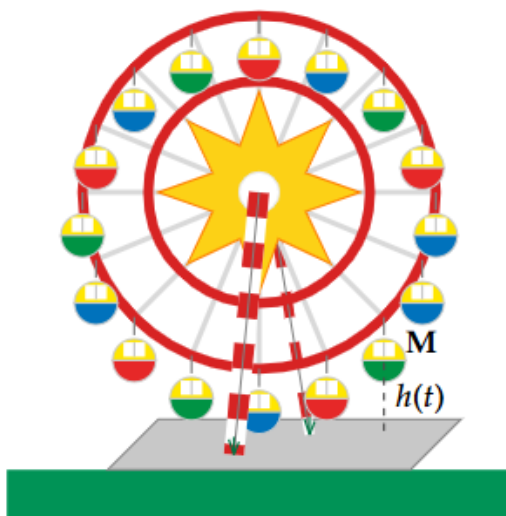
$$P = P_1 \cdot P_2 = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{14} = \frac{9}{98}.$$

- Ta có $m = 9, n = 98$ (phân số đã tối giản vì $\text{ƯCLN}(9, 98) = 1$).

- Vậy $m + n = 9 + 98 = 107$.

✂ Bài 5. Một vòng quay Mặt Trời quay quanh trục mỗi vòng hết 15 phút. Khi vòng quay quay đều, khoảng cách h m từ một cabin M trên vòng quay đến mặt đất được tính bởi công thức $h(t) = a \sin\left(\frac{2\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) + b; a > 0$. Với t là thời gian quay của vòng quay tính bằng phút ($t \geq 0$). Biết rằng khi lên đến vị trí cao nhất cabin M cách mặt đất 114,5 m và khi xuống đến vị trí thấp

nhất cabin M cách mặt đất 0,5 m. Trong vòng quay đầu tiên tính từ thời điểm $t = 0$ (phút), những thời điểm cabin M đạt được độ cao 86 m so với mặt đất là t_1, t_2 . Tính $t_1 + t_2$.



Hướng dẫn giải.

Dựa vào giả thiết, ta có:

◇ Giá trị cao nhất của hàm số là $h_{max} = a + b = 114,5$ (do $a > 0$).

◇ Giá trị thấp nhất của hàm số là $h_{min} = -a + b = 0,5$.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} a + b = 114,5 \\ -a + b = 0,5 \end{cases} \iff \begin{cases} 2b = 115 \\ 2a = 114 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 57,5 \\ a = 57 \end{cases}$ Vậy công thức

tính độ cao là: $h(t) = 57 \sin\left(\frac{2\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) + 57,5$.

Tại thời điểm cabin đạt độ cao 86 m, ta có phương trình: $57 \sin\left(\frac{2\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) + 57,5 = 86$

$$\iff 57 \sin\left(\frac{2\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) = 28,5$$

$$\iff \sin\left(\frac{2\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{28,5}{57} = \frac{1}{2}$$

$$\iff \sin\left(\frac{2\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{Trường hợp 1: } \frac{2\pi}{15}t - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \iff \frac{2\pi}{15}t = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \iff t = 5 + 15k.$$

Trong vòng quay đầu tiên ($0 \leq t \leq 15$), ta chọn $k = 0 \Rightarrow t_1 = 5$ (phút).

$$\text{Trường hợp 2: } \frac{2\pi}{15}t - \frac{\pi}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \iff \frac{2\pi}{15}t = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \iff t = 10 + 15k.$$

Trong vòng quay đầu tiên ($0 \leq t \leq 15$), ta chọn $k = 0 \Rightarrow t_2 = 10$ (phút).

Vậy $t_1 + t_2 = 5 + 10 = 15$ (phút).

 Bài 6. Một doanh nghiệp dự định sản xuất x sản phẩm trong một tháng ($x \in \mathbb{N}; 100 \leq x \leq 800$). Tổng doanh thu khi bán hết x sản phẩm đó là $F(x) = -0,001x^3 + 0,6x^2 + 500x + 100\,000$ (nghìn đồng). Chi phí để sản xuất bình quân cho mỗi sản phẩm là $G(x) = 0,0002x^2 + \frac{40\,000}{x}$ (nghìn đồng)

và chi phí để mua nguyên vật liệu khi chưa chiết khấu là $H(x) = \frac{-4}{49}x^2 + \frac{750}{49}x + \frac{1\,500\,000}{49}$ (nghìn đồng). Công ty cung cấp nguyên vật liệu đang giảm 2% tổng tiền mua nguyên vật liệu. Trong một tháng, doanh nghiệp đó cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

 *Hướng dẫn giải.* Doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm ($100 \leq x \leq 800, x \in \mathbb{N}$).

◇ Tổng doanh thu: $R(x) = -0,001x^3 + 0,6x^2 + 500x + 100\,000$.

◇ Tổng chi phí sản xuất: $C_1(x) = x \cdot G(x) = 0,0002x^3 + 40\,000$.

◇ Tổng chi phí nguyên liệu (giảm 2%): $C_2(x) = 0,98 \cdot H(x) = -0,08x^2 + 15x + 30\,000$.

◇ Hàm lợi nhuận: $L(x) = R(x) - C_1(x) - C_2(x) = -0,0012x^3 + 0,68x^2 + 485x + 30\,000$.

Xét hàm số $L(x)$ trên đoạn $[100; 800]$:

Đạo hàm: $L'(x) = -0,0036x^2 + 1,36x + 485$. $L'(x) = 0 \iff x \approx 601,67$ (thỏa mãn) hoặc $x \approx -223,89$ (loại).

Bảng biến thiên:

x	100	601,67	800
$L'(x)$	+	0	-
$L(x)$	$L(100)$	$L(x_{max})$	$L(800)$

Dựa vào bảng biến thiên, lợi nhuận lớn nhất đạt được khi $x \approx 601,67$. Vì $x \in \mathbb{N}$, ta so sánh $L(601)$ và $L(602)$:

◇ $L(601) \approx 306\,604,24$ (nghìn đồng).

◇ $L(602) \approx 306\,605,03$ (nghìn đồng).

Vì $L(602) > L(601)$ nên doanh nghiệp cần sản xuất 602 sản phẩm.

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

❖ **Câu 1.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x + 1)(2x - 5)^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?

- (A) $(-1; +\infty)$. (B) $(-3; 1)$. (C) $\left(-1; \frac{5}{2}\right)$. (D) $(-\infty; -1)$.

➤ **Hướng dẫn giải.** Ta xét dấu của đạo hàm $f'(x)$:

Vì $(2x - 5)^2 \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, nên dấu của $f'(x)$ chỉ phụ thuộc vào biểu thức $(x + 1)$.

Hàm số nghịch biến khi $f'(x) \leq 0 \iff x + 1 \leq 0 \iff x \leq -1$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

❖ **Câu 2.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A) $(ACC'A') \perp (BDD'B')$. (B) $(A'BC) \perp (A'B'C'D')$.
(C) $(ABCD) \perp (A'B'C'D')$. (D) $(A'BC) \perp (ABCD)$.

➤ **Hướng dẫn giải.** Trong hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, ta có:

- $AC \perp BD$ (hai đường chéo hình vuông $ABCD$).
- $AA' \perp (ABCD) \implies AA' \perp BD$.

Vì BD vuông góc với cả AC và AA' nên $BD \perp (ACC'A')$. Mà $BD \subset (BDD'B')$ nên $(BDD'B') \perp (ACC'A')$.

❖ **Câu 3.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α) có phương trình $x + 2z + 3 = 0$. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là

- (A) $\vec{a} = (2; -1; 0)$. (B) $\vec{a} = (2; 0; -1)$.
(C) $\vec{a} = (1; 0; 2)$. (D) $\vec{a} = (1; 2; 3)$.

➤ **Hướng dẫn giải.** Mặt phẳng $(\alpha): 1x + 0y + 2z + 3 = 0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 0; 2)$.

Vì đường thẳng $\Delta \perp (\alpha)$ nên vectơ chỉ phương $\vec{a}$ của Δ cùng phương với vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.

Vậy $\vec{a} = (1; 0; 2)$ là một vectơ chỉ phương của Δ .

❖ **Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , tam giác ABC vuông cân tại B và $SA = AB = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng

- (A) 90° . (B) 45° . (C) 30° . (D) 60° .

➤ **Hướng dẫn giải.** Vì $SA \perp (ABC)$ nên hình chiếu của SB lên mặt phẳng (ABC) là đoạn thẳng AB .

Góc giữa SB và (ABC) chính là góc giữa SB và AB , tức là góc $\widehat{SBA}$.

Xét tam giác SAB vuông tại A , ta có $\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = 1. \implies \widehat{SBA} = 45^\circ$.

❖ **Câu 5.** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_4(x+1) \geq 2$ là

- (A) $(-1; 15)$. (B) $(-1; 5]$. (C) $[15; +\infty)$. (D) $(15; +\infty)$.

➤ *Hướng dẫn giải.* Điều kiện xác định: $x+1 > 0 \iff x > -1$.

Bất phương trình $\iff x+1 \geq 4^2 \iff x+1 \geq 16 \iff x \geq 15$.

Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm là $S = [15; +\infty)$.

❖ **Câu 6.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3, y = 0, x = 0, x = 2$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$. (B) $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3) dx$.
(C) $V = \int_0^2 (x^2 + 3) dx$. (D) $V = \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$.

➤ *Hướng dẫn giải.* Theo công thức tính thể tích khối tròn xoay quanh trục Ox : $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$.

Ở đây $f(x) = x^2 + 3$, cận từ $x = 0$ đến $x = 2$.

Vậy $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$.

❖ **Câu 7.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2026^x$ là

- (A) $\frac{2026^{x+1}}{\ln 2026} + C$. (B) $\frac{2026^x}{\ln 2026} + C$.
(C) $2026^{x+1} + C$. (D) $2026^x + C$.

➤ *Hướng dẫn giải.* Áp dụng công thức nguyên hàm cơ bản $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

Với $a = 2026$, ta có $\int 2026^x dx = \frac{2026^x}{\ln 2026} + C$.

❖ **Câu 8.** Tổng các nghiệm của phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x} = \frac{9}{4}$ là

- (A) 0. (B) 2. (C) 3. (D) 1.

➤ *Hướng dẫn giải.* Ta có $\frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$.

Phương trình $\iff \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \iff x^2 - 3x = -2 \iff x^2 - 3x + 2 = 0$.

Theo định lý Vi-ét, tổng các nghiệm là $x_1 + x_2 = -\frac{-3}{1} = 3$.

❖ **Câu 9.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Vectơ $\vec{u} = \vec{A'A} + \vec{A'B'} + \vec{A'D'}$ bằng vectơ nào dưới đây?

- (A) $\vec{CA'}$. (B) $\vec{C'A}$. (C) $\vec{A'C}$. (D) $\vec{AC'}$.

➤ *Hướng dẫn giải.* Theo quy tắc hình hộp, tổng của ba vectơ chung đỉnh A' là vectơ đường chéo chính xuất phát từ đỉnh đó:

$$\vec{A'A} + \vec{A'B'} + \vec{A'D'} = \vec{A'C}.$$

❖ **Câu 10.** Tập nghiệm của phương trình $\cos 2x = 1$ là

Ⓐ $\left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Ⓑ $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Ⓒ $\{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Ⓓ $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\cos 2x = 1 \iff 2x = k2\pi \iff x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập nghiệm là $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

❖ Câu 11. Khảo sát thời gian tập thể dục của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Thời gian (phút)	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số học sinh	5	9	12	10	6

Nhóm chứa tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

Ⓐ [40; 60).

Ⓑ [20; 40).

Ⓒ [60; 80).

Ⓓ [80; 100).

Hướng dẫn giải. Tổng số học sinh là $n = 5 + 9 + 12 + 10 + 6 = 42$.

Vị trí của tứ phân vị thứ ba Q_3 là $\frac{3n}{4} = \frac{3 \cdot 42}{4} = 31,5$.

Ta tính tần số tích lũy:

- Nhóm 1: 5.

- Nhóm 2: $5 + 9 = 14$.

- Nhóm 3: $14 + 12 = 26$.

- Nhóm 4: $26 + 10 = 36$.

Vì $26 < 31,5 \leq 36$ nên tứ phân vị thứ ba nằm ở nhóm [60; 80).

❖ Câu 12. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$. Giá trị của u_4 bằng

Ⓐ 162.

Ⓑ 24.

Ⓒ 48.

Ⓓ 54.

Hướng dẫn giải. Công thức số hạng tổng quát của cấp số nhân là $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.

Với $n = 4$, ta có $u_4 = u_1 \cdot q^3 = 2 \cdot 3^3 = 2 \cdot 27 = 54$.

Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai

❖ Bài 1. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 4x - 1}{x - 1}$. Các phát biểu sau đúng hay sai?

a) Hàm số đã cho có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) Hàm số đã cho có đạo hàm là $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$.

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[2; 3]$ bằng 7.

d) Phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$ là $y = x + 5$.

Hướng dẫn giải. a) **Đúng.**

Điều kiện xác định của hàm số là $x - 1 \neq 0 \iff x \neq 1$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) **Đúng.**

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{(x^2 + 4x - 1)'(x - 1) - (x^2 + 4x - 1)(x - 1)'}{(x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x + 4)(x - 1) - (x^2 + 4x - 1)}{(x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 2x + 4x - 4 - x^2 - 4x + 1}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}.$$

c) Sai.

$$\text{Xét hàm số trên đoạn } [2; 3], \text{ ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin [2; 3] \\ x = 3 \in [2; 3] \end{cases}$$

Trên đoạn $[2; 3]$, ta có $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in [2; 3]$ (vì $(x + 1)(x - 3) \leq 0$ khi $2 \leq x \leq 3$).

Do đó hàm số nghịch biến trên đoạn $[2; 3]$.

$$\text{Giá trị nhỏ nhất là } \min_{[2; 3]} f(x) = f(3) = \frac{3^2 + 4 \cdot 3 - 1}{3 - 1} = \frac{20}{2} = 10 \neq 7.$$

d) Đúng.

Ta thực hiện phép chia đa thức tử cho mẫu:

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x - 1}{x - 1} = \frac{x(x - 1) + 5(x - 1) + 4}{x - 1} = x + 5 + \frac{4}{x - 1}.$$

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (x + 5)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x - 1} = 0.$$

Vậy đường thẳng $y = x + 5$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Bài 2. Trong lễ hội thường niên của một địa phương, tốc độ khách vào và tốc độ khách ra lễ hội tại thời điểm t lần lượt được xác định bằng hàm số $a(t) = -24t^2 + 190t + 500$ và $b(t) = -7,8t^3 + kt^2$ (k là số thực). Trong đó $a(t)$ và $b(t)$ được tính bằng người/giờ, t tính bằng giờ kể từ lúc 12 giờ trưa, giờ đóng cửa lễ hội là 22 giờ đêm và khi đóng cửa thì không còn ai có mặt trong lễ hội. Biết tại mọi thời điểm, người đã ra sẽ không vào lại.

a) Tổng lượng khách tham dự lễ hội là 6000 người.

b) $k = 78$.

c) Số lượng khách có mặt trong lễ hội tại thời điểm t được ước lượng theo công thức $N(t) = \int_0^t (7,8x^3 - 102x^2 + 190x + 500)dx$.

d) Số lượng khách có mặt trong lễ hội khi lớn nhất không vượt quá 1970 người.

Hướng dẫn giải. a) Sai.

Vì tốc độ khách vào lễ hội tại thời điểm t (giờ) (được tính từ lúc 12 giờ trưa) được xác định bằng hàm số $a(t) = -24t^2 + 190t + 500$ và tại mọi thời điểm, người đã ra sẽ không vào lại nên số lượng khách vào lễ hội bằng $\int_0^n a(t)dt$, với n là số giờ tính từ thời điểm 12 giờ.

Ta có giờ đóng cửa lễ hội là 22 giờ đêm nên tính từ lúc 12 giờ trưa, lễ hội đã mở cửa được $22 - 12 = 10$ (giờ).

Vậy tổng lượng khách tham dự lễ hội là:

$$\int_0^{10} a(t)dt = \int_0^{10} (-24t^2 + 190t + 500)dt = 6500 \text{ (người)}.$$

b) Đúng.

Tương tự, dựa vào tốc độ khách ra lễ hội tại thời điểm t (giờ) là $b(t) = -7,8t^3 + kt^2$ (người/giờ) ta có tổng lượng khách ra lễ hội tại thời điểm m giờ (số giờ tính từ 12 giờ) là $\int_0^m b(t)dt$.

Biết tổng tổng lượng khách ra lễ hội tại thời điểm 10 giờ (tức lúc tổng 6500 khách vào ra về hết) là:

$$\begin{aligned}\int_0^{10} b(t)dt &= 6500 \Leftrightarrow \int_0^{10} (-7,8t^3 + kt^2)dt = 6500 \Leftrightarrow \left(\frac{-7,8t^4}{4} + \frac{kt^3}{3} \right) \Big|_0^{10} = 6500 \\ \Leftrightarrow \left[\frac{-7,8 \cdot 10^4}{4} + \frac{k \cdot 10^3}{3} - \left(\frac{-7,8 \cdot 0^4}{4} + \frac{k \cdot 0^3}{3} \right) \right] &= 6500 \\ \Leftrightarrow -19500 + \frac{1000k}{3} &= 6500 \Leftrightarrow \frac{1000k}{3} = 26000 \Leftrightarrow k = 78.\end{aligned}$$

c) Đúng.

$$a(t) = -24t^2 + 190t + 500 \Rightarrow a(x) = -24x^2 + 190x + 500.$$

$$b(t) = -7,8t^3 + 78t^2 \Rightarrow b(x) = -7,8x^3 + 78x^2.$$

Số lượng khách có mặt trong lễ hội tại thời điểm t được ước lượng bằng tổng số người vào trừ tổng số người ra tức bằng:

$$\begin{aligned}N(t) &= \int_0^t [a(t) - b(t)]dt = \int_0^t [a(x) - b(x)]dx \\ &= \int_0^t [-24x^2 + 190x + 500 - (-7,8x^3 + 78x^2)]dx \\ &= \int_0^t (-24x^2 + 190x + 500 + 7,8x^3 - 78x^2)dx \\ &= \int_0^t (7,8x^3 - 102x^2 + 190x + 500)dx.\end{aligned}$$

d) Sai.

Từ phần (c) ta có số lượng khách có mặt trong lễ hội tại thời điểm t được bằng:

$$N(t) = \int_0^t (7,8x^3 - 102x^2 + 190x + 500)dx.$$

Số lượng khách có mặt trong lễ hội khi lớn nhất bằng với $N(t)$ cực đại trên đoạn $[0; 10]$.

Ta có $N'(t) = 7,8t^3 - 102t^2 + 190t + 500$.

$$N'(t) = 0 \Leftrightarrow 7,8t^3 - 102t^2 + 190t + 500 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1,424... \notin [0; 10] (L) \\ t = 10 \in [0; 10] (tm) \\ t = 4,5... \in [0; 10] (tm) \end{cases}.$$

Ta có $N(10) = N(0) = 0$; $N(4,5...) \approx 1875$.

Suy ra số lượng khách có mặt trong lễ hội khi lớn nhất bằng 1875 người.

🔗 Bài 3. Cuối tuần bạn Bảo được cha chở đi mua sách tại một tiệm sách cũ. Bảo chọn mua 12 quyển (không có hai quyển nào giống nhau), trong đó có 7 quyển thuộc thể loại Khoa Học Tự Nhiên và 5 quyển còn lại thuộc thể loại Khoa Học Xã Hội. Trước khi tính tiền sách cho Bảo, cha

chọn ngẫu nhiên 3 quyển trong 12 quyển đã được Bảo chọn mua để kiểm tra nội dung trong sách có thực sự phù hợp với Bảo hay không.

- a) Nếu P_a là xác suất để 3 quyển sách được cha của Bảo chọn để kiểm tra đều thuộc thể loại Khoa Học Xã Hội thì $11P_a = 1$.
- b) Nếu P_b là xác suất để 3 quyển sách được cha của Bảo chọn để kiểm tra có đúng một quyển thuộc thể loại Khoa Học Tự Nhiên thì $22P_b = 7$.
- c) Nếu P_c là xác suất để 3 quyển sách được cha của Bảo chọn để kiểm tra có đúng hai quyển thuộc thể loại Khoa Học Tự Nhiên thì $44P_c = 21$.
- d) Nếu P_d là xác suất để 3 quyển sách được cha của Bảo chọn để kiểm tra có đủ hai thể loại Khoa Học Tự Nhiên và Khoa Học Xã Hội thì $44P_d = 35$.

 **Hướng dẫn giải.** Số cách chọn ngẫu nhiên 3 quyển sách từ 12 quyển là $n(\Omega) = C_{12}^3 = 220$.

Xét mệnh đề a)

Biến cố "3 quyển sách đều thuộc thể loại Khoa Học Xã Hội": chọn 3 quyển từ 5 quyển Xã Hội.

Số kết quả thuận lợi là $C_5^3 = 10$.

$$\text{Xác suất } P_a = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}.$$

Suy ra $11P_a = 11 \cdot \frac{1}{22} = \frac{1}{2} \neq 1$. Vậy mệnh đề a) **Sai**.

Xét mệnh đề b)

Biến cố "có đúng một quyển thuộc thể loại Khoa Học Tự Nhiên": chọn 1 quyển Tự Nhiên và 2 quyển Xã Hội.

Số kết quả thuận lợi là $C_7^1 \cdot C_5^2 = 7 \cdot 10 = 70$.

$$\text{Xác suất } P_b = \frac{70}{220} = \frac{7}{22}.$$

Suy ra $22P_b = 22 \cdot \frac{7}{22} = 7$. Vậy mệnh đề b) **Đúng**.

Xét mệnh đề c)

Biến cố "có đúng hai quyển thuộc thể loại Khoa Học Tự Nhiên": chọn 2 quyển Tự Nhiên và 1 quyển Xã Hội.

Số kết quả thuận lợi là $C_7^2 \cdot C_5^1 = 21 \cdot 5 = 105$.

$$\text{Xác suất } P_c = \frac{105}{220} = \frac{21}{44}.$$

Suy ra $44P_c = 44 \cdot \frac{21}{44} = 21$. Vậy mệnh đề c) **Đúng**.

Xét mệnh đề d)

Biến cố "có đủ hai thể loại" có nghĩa là cha Bảo chọn (1 Tự nhiên, 2 Xã hội) hoặc (2 Tự nhiên, 1 Xã hội).

$$\text{Xác suất là } P_d = P_b + P_c = \frac{7}{22} + \frac{21}{44} = \frac{14 + 21}{44} = \frac{35}{44}.$$

Suy ra $44P_d = 44 \cdot \frac{35}{44} = 35$. Vậy mệnh đề d) **Đúng**.

Bài 4. Đường ống dẫn dầu trên không là hệ thống đường ống được treo trên các giá đỡ hoặc cột cao, dùng để vận chuyển dầu thô hoặc các sản phẩm dầu mỏ từ nơi này đến nơi khác mà không cần chôn dưới lòng đất. Hệ thống này thường được sử dụng trong các khu vực có địa hình khó khăn, vùng băng giá, rừng rậm... những nơi mà việc đào đường ống ngầm không khả thi.



Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ thích hợp, mặt đất là mặt phẳng (Oxy) , đơn vị trên mỗi trục là mét, người ta thiết lập một đường ống dẫn dầu trên không dọc theo đường thẳng $d : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 20 \end{cases}$ (t là tham số). Vì địa hình phức tạp, người ta chọn điểm $A(15; 10; 15)$ để làm điểm trung chuyển dầu từ mặt đất đến đường ống này.

- Đường thẳng d nằm trên mặt phẳng (Oyz) .
- Điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxy) có tọa độ $A'(-15; -10; 15)$.
- Do thực tế công việc, người ta cần xác định vị trí điểm $B(0; b; 20)$ thuộc đường ống và vị trí điểm $C(m; n; 0)$ thuộc mặt đất sao cho tổng độ dài các đoạn đường AB, BC, AC nhỏ nhất. Ta có $m + n + b = \frac{200}{7}$.
- Giá trị nhỏ nhất của tổng độ dài các đoạn thẳng AB, BC, AC làm tròn đến hàng chục bằng 45,5m.

Hướng dẫn giải. a) **Đúng.** Vì đường ống dẫn dầu trên không dọc theo đường thẳng

$d : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 20 \end{cases}$, trong đó điểm $M(0; 0; 20) \in Oz$ thuộc đường thẳng d và có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}(0; 1; 0) = \vec{j} \in Oy$.

Do đó, đường ống dẫn dầu nằm trên mặt phẳng (Oyz) .

b) **Sai.** Vì điểm đối xứng với $A(15; 10; 15)$ qua mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là $A'(15; 10; -15)$.

c) **Đúng.** Vì $B(0; b; 20)$ nằm trên đường d nên tọa độ phải có dạng $x = 0, z = 20, y$ tùy ý.

Gọi $C(m; n; 0)$ là điểm trên mặt đất. Ta cần tổng các đoạn đường $AB + BC + AC$ nhỏ nhất. Tổng độ dài: $T = AB + BC + AC$ min khi $T = AB + CB + CA' \geq AB + A'B$ hay A', C, B thẳng

hàng. Khi đó:

$$\begin{cases} AB_{\min} \text{ khi } AB \perp d \\ A'B_{\min} \text{ khi } A'B \perp d \end{cases} \Leftrightarrow d \perp (ABA')$$

Suy ra $b = 10$ (Vì $y_B = y_A = 10$).

Vì $C(m; n; 0)$ là điểm trên mặt đất và C là giao điểm $A'B$ và (Oxy) nên ta xét hệ sau:

$$\text{Phương trình đường thẳng } A'B \text{ là } \begin{cases} x = -3t \\ y = 10 \\ z = 20 + 7t \end{cases} \text{ giao với } (Oxy) \text{ nên } 20 + 7t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{20}{7}.$$

$$\text{Do đó tọa độ điểm } C \text{ là } \begin{cases} x = \frac{60}{7} \\ y = 10 \\ z = 0 \end{cases} \text{ hay } C\left(\frac{60}{7}; 10; 0\right).$$

Theo đề bài ta được: $m = \frac{60}{7}, n = 10, b = 10$ nên $m + n + b = \frac{60}{7} + 10 + 10 = \frac{200}{7}$.

d) **Sai.** Ta có: $A(15; 10; 15), A'(15; 10; -15), B(0; 10; 20)$.

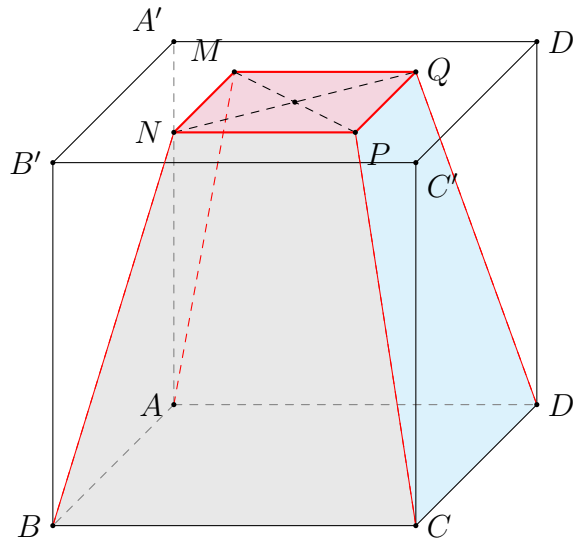
$$AB = \sqrt{15^2 + 5^2} = 5\sqrt{10}.$$

$$A'B = \sqrt{15^2 + 35^2} = 5\sqrt{58}.$$

$$\text{Vậy } T = AB + A'B = 5\sqrt{10} + 5\sqrt{58} \approx 53,89.$$

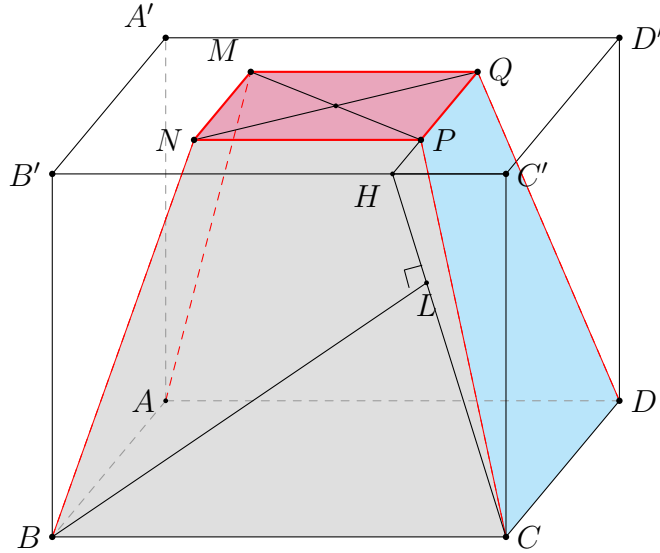
Phần III. Câu trả lời ngắn Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Bài 1. Một vật lưu niệm làm bằng thủy tinh có dạng hình lăng trụ đều có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $AB = 10$ (cm). Phía bên trong làm bằng nhựa đặc là hình chóp cụt đều $MNPQ.ABCD$ có $MN = 5$ (cm) và chiều cao bằng chiều cao của lăng trụ như hình vẽ. Biết rằng khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(CDQP)$ bằng $3\sqrt{10}$ (cm). Phần khoảng trống bên trong vật lưu niệm người ta bơm chất lỏng có màu sắc (xem độ dày thành vật thể không đáng kể). Khi đó thể tích phần chất lỏng bơm vào là $\frac{a}{b}$ (lít) với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tìm $a + b$.



Hướng dẫn giải. Gọi chiều cao của khối lăng trụ và khối chóp cụt là $h = CC'$ (đơn vị: cm).

Đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a = 10$, đáy $MNPQ$ là hình vuông cạnh $b = 5$.



Kéo dài PQ cắt $B'C'$ tại H . Vì $PQ \parallel C'D'$ và $B'C' \perp C'D'$ nên $PQ \perp B'C'$.

Khi đó, mặt phẳng $(CDQP)$ chứa các điểm C, D, Q, P và cả điểm H (do H thuộc đường thẳng PQ).

Kẻ $BL \perp CH$ tại L . Vì $CD \perp (BCC'B')$ nên $CD \perp BL$. Từ đó $BL \perp (CDQP)$, suy ra khoảng cách $d(B, (CDQP)) = BL = 3\sqrt{10}$.

Trong hình vuông $A'B'C'D'$, khoảng cách từ PQ đến $C'D'$ là 2,5, do đó $C'H = 2,5$ cm.

Xét tam giác vuông $CC'H$, ta có $CH = \sqrt{CC'^2 + C'H^2} = \sqrt{h^2 + 2,5^2}$.

Dễ thấy $\triangle LBC \sim \triangle C'CH$ (chung góc C), ta có tỉ số đồng dạng:

$$\frac{BL}{CC'} = \frac{BC}{CH} \Rightarrow \frac{3\sqrt{10}}{h} = \frac{10}{\sqrt{h^2 + 2,5^2}} \Leftrightarrow \frac{90}{h^2} = \frac{100}{h^2 + 6,25}$$

$$\Leftrightarrow 90(h^2 + 6,25) = 100h^2 \Leftrightarrow 10h^2 = 562,5 \Leftrightarrow h^2 = 56,25 \Rightarrow h = 7,5 \text{ (cm)}.$$

Thể tích khối lăng trụ thủy tinh là: $V_{lt} = S_{ABCD} \cdot h = 10^2 \cdot 7,5 = 750 \text{ (cm}^3\text{)}.$

Thể tích khối nhựa chóp cắt đều: $V_{cc} = \frac{h}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) = \frac{7,5}{3}(10^2 + 5^2 + \sqrt{10^2 \cdot 5^2}) = 437,5 \text{ (cm}^3\text{)}.$

Thể tích phần chất lỏng bơm vào là: $V_{cl} = V_{lt} - V_{cc} = 750 - 437,5 = 312,5 \text{ (cm}^3\text{)}.$

Đổi sang đơn vị lít ($1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ lít}$): $V_{cl} = \frac{312,5}{1000} = \frac{3125}{10000} = \frac{5}{16} \text{ (lít)}.$

Theo đề bài $V_{cl} = \frac{a}{b} \Rightarrow a = 5, b = 16$.

Vậy giá trị biểu thức $a + b = 5 + 16 = 21$.

Bài 2. Vệ tinh Van Allen Probes được phóng lên không gian để nghiên cứu các vành đai bức xạ bao quanh Trái Đất. Vệ tinh này bay theo một quỹ đạo có chu kỳ 10 giờ - nghĩa là mỗi vòng bay quanh Trái Đất kéo dài đúng 10 giờ. Cứ mỗi vòng bay, vệ tinh lại xuyên qua vùng bức xạ mạnh và tích lũy thêm *liều bức xạ*. Biết rằng đơn vị của bức xạ là Gray (Gy), và khi tổng *liều bức xạ* chiếu vào vệ tinh đạt 1000 Gray, thì vệ tinh hỏng hoàn toàn. Khoảng cách từ tâm Trái Đất đến vệ tinh được mô hình hóa bằng hàm số $R(T) = 7000 + 3000T$ (km), trong đó T là thời gian tính bằng giờ, $0 \leq T \leq 10$, kể từ đầu vòng bay. Công thức *suất liều bức xạ* - tức là lượng

bức xạ vệ tinh nhận được trong 1 giờ, phụ thuộc vào khoảng cách R (km) từ vệ tinh tới tâm Trái Đất, là $D(R) = 60 \cdot \left(\frac{R}{25000}\right)^2$ milliGray/giờ. Biết rằng do tính đối xứng và chu kỳ của quỹ đạo bay, tổng liều bức xạ vệ tinh nhận được trong một vòng bay 10 giờ được tính bằng công thức $L = 2 \cdot \int_0^5 D(R(T))dT$, và 1 Gray = 1000 milliGray. Tính số năm hoạt động của vệ tinh từ lúc bắt đầu hoạt động tới khi hỏng hoàn toàn (không làm tròn các bước trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng tới hai chữ số thập phân sau dấu phẩy, coi một năm có 365 ngày, mỗi ngày có 24 giờ).

 *Hướng dẫn giải.* Hàm suất liều bức xạ theo thời gian T (giờ) trong mỗi vòng bay là:

$$D(R(T)) = 60 \cdot \left(\frac{7000 + 3000T}{25000}\right)^2 = 60 \cdot \left(\frac{7 + 3T}{25}\right)^2 = \frac{12}{125}(7 + 3T)^2 \text{ (mGy/h)}.$$

Tổng liều bức xạ vệ tinh nhận được trong một vòng bay (chu kỳ 10 giờ) là:

$$L = 2 \int_0^5 D(R(T))dT = 2 \int_0^5 \frac{12}{125}(7 + 3T)^2dT = \frac{24}{125} \int_0^5 (7 + 3T)^2dT.$$

$$\int_0^5 (7 + 3T)^2dT = \left[\frac{(7 + 3T)^3}{3 \cdot 3}\right]_0^5 = \frac{1}{9} [(7 + 3 \cdot 5)^3 - 7^3] = \frac{22^3 - 7^3}{9} = \frac{10305}{9} = 1145.$$

Suy ra liều bức xạ trong một vòng bay là:

$$L = \frac{24}{125} \cdot 1145 = \frac{24 \cdot 229}{25} = 219,84 \text{ (mGy/vòng)}.$$

Tổng liều bức xạ cho phép trước khi hỏng là 1000 Gray = 1.000.000 mGy.

Số vòng bay tối đa vệ tinh thực hiện được là: $n = \frac{1.000.000}{219,84}$ (vòng).

Tổng số giờ hoạt động của vệ tinh là: $t = n \cdot 10 = \frac{10.000.000}{219,84}$ (giờ).

Đổi thời gian hoạt động sang đơn vị năm (với 1 năm = $365 \times 24 = 8760$ giờ):

$$\text{Số năm hoạt động} = \frac{t}{8760} = \frac{10.000.000}{219,84 \cdot 8760} = \frac{10.000.000}{1.925.798,4} \approx 5,1926...$$

Vậy vệ tinh hoạt động được khoảng 5,19 năm thì hỏng hoàn toàn.

 **Bài 3.** Trong âm nhạc, một quãng tám (octave) là khoảng cách âm thanh từ nốt Đô tới nốt Đô tiếp theo, theo thứ tự từ thấp đến cao là:

Đô – Đô# – Rê – Rê# – Mi (E4) – Pha – Pha# – Sol – Sol# – La (A4) – La# – Si – Đô trong đó khoảng cách giữa hai nốt liên tiếp gọi là một nửa cung (semitone). Hai nốt cách nhau n nửa cung thì tỷ lệ tần số nốt cao f_{nc} và tần số nốt thấp f_{nt} là $\frac{f_{nc}}{f_{nt}} = 2^{\frac{n}{12}}$. Cho biết tần số chuẩn của nốt La (A4) là 440 Hz. Trên đàn guitar, dây số 1 là nốt Mi (E4) đang bị chùng do thời tiết, tần số đo được hiện tại đang là 300 Hz. Để căng lại dây đàn cho chuẩn, ta dùng núm xoay, và cứ vặn núm xoay 90° thì nốt nhạc được tăng lên một nửa cung. Hỏi phải xoay núm của dây số 1 một góc bao nhiêu độ để dây số 1 trở về âm chuẩn (không làm tròn các bước trung gian, chỉ làm tròn

kết quả cuối cùng tới hàng đơn vị)?

Hướng dẫn giải. Đếm số nửa cung từ nốt Mi (E4) đến nốt La (A4) dựa trên dãy nốt đã cho:

$$\text{Mi (E4)} \xrightarrow{1} \text{Pha} \xrightarrow{2} \text{Pha\#} \xrightarrow{3} \text{Sol} \xrightarrow{4} \text{Sol\#} \xrightarrow{5} \text{La (A4)}.$$

Như vậy, nốt La (A4) cao hơn nốt Mi (E4) đúng 5 nửa cung. Gọi f_{Mi} là tần số chuẩn của nốt Mi (E4), ta có:

$$\frac{f_{La}}{f_{Mi}} = 2^{\frac{5}{12}} \Rightarrow f_{Mi} = \frac{440}{2^{\frac{5}{12}}} \text{ (Hz)}.$$

Để dây số 1 trở về âm chuẩn, cần tăng tần số từ 300 Hz lên f_{Mi} Hz. Gọi n là số nửa cung cần tăng thêm, ta có phương trình:

$$\frac{f_{Mi}}{300} = 2^{\frac{n}{12}} \Leftrightarrow \frac{440}{300 \cdot 2^{\frac{5}{12}}} = 2^{\frac{n}{12}} \Leftrightarrow \frac{22}{15} \cdot 2^{-\frac{5}{12}} = 2^{\frac{n}{12}}.$$

Lấy logarit cơ số 2 cả hai vế:

$$\log_2 \left(\frac{22}{15} \right) - \frac{5}{12} = \frac{n}{12} \Rightarrow n = 12 \cdot \log_2 \left(\frac{22}{15} \right) - 5.$$

Vì mỗi nửa cung ứng với góc xoay 90° , nên tổng góc cần xoay là:

$$\alpha = n \cdot 90^\circ = \left[12 \cdot \log_2 \left(\frac{22}{15} \right) - 5 \right] \cdot 90^\circ.$$

$$\alpha \approx (12 \cdot 0,5525 - 5) \cdot 90^\circ \approx 1,6303 \cdot 90^\circ \approx 146,73^\circ.$$

Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị, ta được góc xoay cần thiết là 147° .

Bài 4. Hệ thống gồm các vật như sau được gọi là máng n :

- ◇ Một máng nghiêng có n lỗ dọc theo đáy. Tính từ trên cao xuống, các lỗ lần lượt có đường kính là $1, 2, 3, \dots, n$.
- ◇ n quả bóng có đường kính là các số nguyên dương không lớn hơn n , trong đó có thể có nhiều quả bóng có cùng đường kính.

Xét máng n , thả lần n quả bóng từ đỉnh máng xuống, lần lượt từng quả. Đối với mỗi quả bóng, khi lăn đến lỗ có đường kính lớn hơn hoặc bằng đường kính của nó thì nó sẽ lọt vào đồng thời đóng lỗ này lại. Đối với một thứ tự các quả bóng sau khi thả lần, nếu các quả bóng đều lọt vào lỗ thì thứ tự các quả bóng ấy được gọi là dãy đẹp. Hai dãy đẹp giống nhau khi và chỉ khi thứ tự bán kính của bóng lọt lỗ là như nhau. Có thể tạo được bao nhiêu dãy đẹp khác nhau đối với máng 5 biết rằng có đúng một quả có đường kính là 4 và một quả có đường kính là 5?



 **Hướng dẫn giải.** Để n quả bóng đều lọt được vào các lỗ (tạo thành dãy đẹp), đa tập hợp các đường kính của các quả bóng $\{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5\}$ phải thỏa mãn điều kiện: Với mọi số nguyên k từ 1 đến 5, số lượng các quả bóng có đường kính lớn hơn hoặc bằng k không được vượt quá số lượng các lỗ có đường kính lớn hơn hoặc bằng k .

Số lượng lỗ có đường kính $\geq k$ trong máng 5 là $5 - k + 1 = 6 - k$.

Gọi n_i là số quả bóng có đường kính bằng i và c_k là số quả bóng có đường kính $\geq k$. Ta có điều kiện:

$$c_k = \sum_{i=k}^5 n_i \leq 6 - k.$$

Theo giả thiết, có đúng một quả đường kính 4 và một quả đường kính 5 nên $n_4 = 1, n_5 = 1$. Khi đó:

- ◇ $k = 5 : c_5 = n_5 = 1 \leq 1$ (thỏa mãn).
- ◇ $k = 4 : c_4 = n_4 + n_5 = 2 \leq 2$ (thỏa mãn).
- ◇ $k = 3 : c_3 = n_3 + 2 \leq 3 \Rightarrow n_3 \leq 1$.
- ◇ $k = 2 : c_2 = n_2 + n_3 + 2 \leq 4 \Rightarrow n_2 + n_3 \leq 2$.
- ◇ $k = 1 : c_1 = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 5 \leq 5$ (luôn đúng).

Vì tổng số bóng là 5 nên $n_1 + n_2 + n_3 = 3$. Các bộ (n_1, n_2, n_3) thỏa mãn là:

① Nếu $n_3 = 1$: Ta có $n_2 + 1 \leq 2 \Rightarrow n_2 \in \{0, 1\}$.

- ◇ $n_2 = 1 \Rightarrow n_1 = 1$: Tập bóng $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Số dãy đẹp là $5! = 120$.
- ◇ $n_2 = 0 \Rightarrow n_1 = 2$: Tập bóng $\{1, 1, 3, 4, 5\}$. Số dãy đẹp là $\frac{5!}{2!} = 60$.

② Nếu $n_3 = 0$: Ta có $n_2 \leq 2 \Rightarrow n_2 \in \{0, 1, 2\}$.

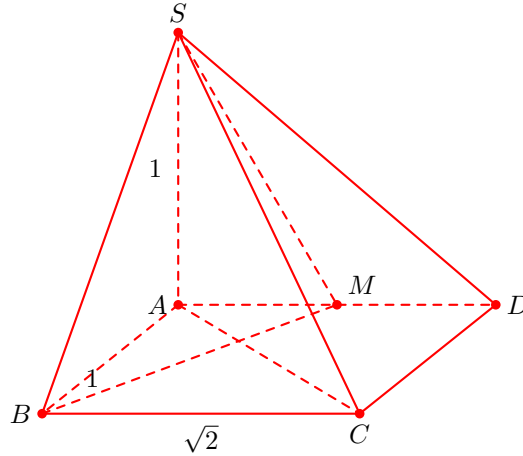
- ◇ $n_2 = 2 \Rightarrow n_1 = 1$: Tập bóng $\{1, 2, 2, 4, 5\}$. Số dãy đẹp là $\frac{5!}{2!} = 60$.
- ◇ $n_2 = 1 \Rightarrow n_1 = 2$: Tập bóng $\{1, 1, 2, 4, 5\}$. Số dãy đẹp là $\frac{5!}{2!} = 60$.
- ◇ $n_2 = 0 \Rightarrow n_1 = 3$: Tập bóng $\{1, 1, 1, 4, 5\}$. Số dãy đẹp là $\frac{5!}{3!} = 20$.

Tổng số dãy đẹp khác nhau có thể tạo được là:

$$120 + 60 + 60 + 60 + 20 = 320 \text{ (dãy)}.$$

 **Bài 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 1, AD = \sqrt{2}, SA = 1$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của AD . Khoảng cách từ điểm C tới mặt phẳng (SBM)

bằng bao nhiêu?



Hướng dẫn giải. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A \equiv O(0; 0; 0)$, điểm B nằm trên tia Ox , điểm D nằm trên tia Oy và điểm S nằm trên tia Oz .

Dựa vào giả thiết, ta có tọa độ các điểm như sau:

$A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $D(0; \sqrt{2}; 0)$, $S(0; 0; 1)$. Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $C(1; \sqrt{2}; 0)$.

M là trung điểm của $AD \Rightarrow M\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$.

Xét mặt phẳng (SBM) :

Vectơ $\overrightarrow{SB} = (1; 0; -1)$, $\overrightarrow{SM} = \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; -1\right)$.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SBM) là:

$$\vec{n} = [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SM}] = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Để đơn giản, ta chọn vectơ pháp tuyến là $\vec{n}' = \sqrt{2} \cdot \vec{n} = (1; \sqrt{2}; 1)$.

Phương trình mặt phẳng (SBM) đi qua $S(0; 0; 1)$ có dạng:

$$1(x - 0) + \sqrt{2}(y - 0) + 1(z - 1) = 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{2}y + z - 1 = 0.$$

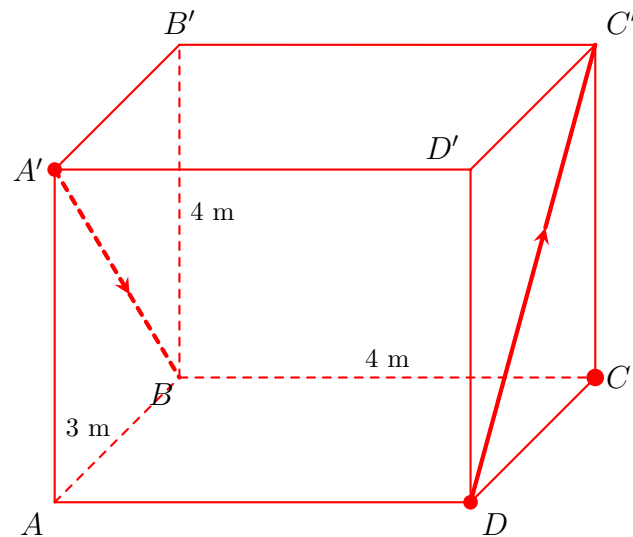
Khoảng cách từ điểm $C(1; \sqrt{2}; 0)$ tới mặt phẳng (SBM) là:

$$d(C, (SBM)) = \frac{|1 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2}} = \frac{|1 + 2 - 1|}{\sqrt{1 + 2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{4}} = \frac{2}{2} = 1.$$

Vậy khoảng cách từ điểm C tới mặt phẳng (SBM) bằng 1.

Bài 6. Hình vẽ dưới đây mô tả một căn phòng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ với $AB = 3$

m, $BB' = BC = 4$ m, tại C có một tổ kiến.



Kiến 1 xuất phát từ A' bò về tổ với vận tốc $0,02 \text{ m/s}$ trên hai đoạn thẳng liên tiếp $A'B, BC$. Kiến 2 xuất phát từ D bò về tổ với vận tốc $0,06 \text{ m/s}$ trên hai đoạn thẳng liên tiếp $DC', C'C$. Biết rằng, hai con kiến xuất phát cùng một lúc. Hỏi, khi kiến 2 còn cách tổ 1 m thì khoảng cách giữa hai con kiến là bao nhiêu m? (làm tròn đến hàng phần trăm).

 *Hướng dẫn giải.* Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A(0; 0; 0)$, $D(4; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $A'(0; 0; 4)$. Khi đó ta có:

$$C(4; 3; 0), C'(4; 3; 4).$$

Độ dài các đoạn đường di chuyển:

◆ $A'B = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-4)^2} = 5 \text{ m}; BC = 4 \text{ m}$. Tổng quãng đường kiến 1 là 9 m.

◆ $DC' = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = 5$ m; $C'C = 4$ m. Tổng quãng đường kiến 2 là 9 m.

Khi kiến 2 còn cách tổ 1 m, quãng đường kiến 2 đã đi được là $s_2 = 9 - 1 = 8$ m.

Thời gian di chuyển là: $t = \frac{s_2}{v_2} = \frac{8}{0.06} = \frac{400}{3}$ (giây).

Tại thời điểm này, kiến 2 đang nằm trên đoạn $C'C$ và cách $C(4; 3; 0)$ một khoảng 1 m về phía trên theo trục Oz , nên tọa độ kiến 2 là $P_2(4; 3; 1)$.

Trong thời gian t , kiến 1 đi được quãng đường là: $s_1 = v_1 \cdot t = 0,02 \cdot \frac{400}{3} = \frac{8}{3}$ m.

Vì $s_1 = \frac{8}{3} < A'B = 5$, nên kiến 1 đang ở trên đoạn $A'B$. Tọa độ điểm P_1 thỏa mãn:

$$\overrightarrow{A'P_1} = \frac{s_1}{A'B} \overrightarrow{A'B} = \frac{8/3}{5} (0; 3; -4) = \left(0; \frac{8}{5}; -\frac{32}{15}\right).$$

Tọa độ kiến 1 là: $P_1 = A' + \overrightarrow{A'P_1} = (0; 0; 4) + \left(0; 1; 6; -\frac{32}{15}\right) = \left(0; 1; 6; \frac{28}{15}\right)$.

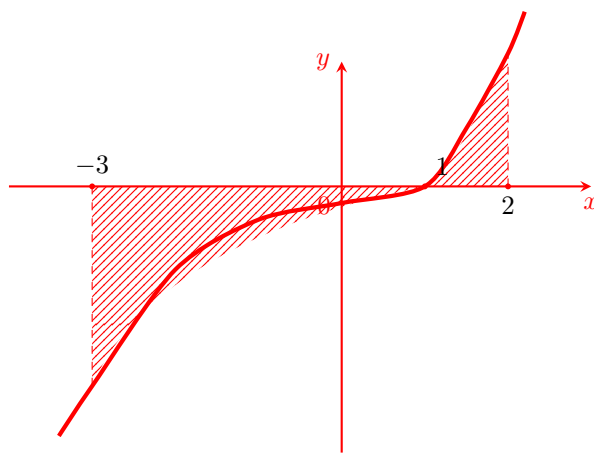
Khoảng cách giữa hai con kiến là:

$$P_1 P_2 = \sqrt{(4-0)^2 + (3-1,6)^2 + \left(1 - \frac{28}{15}\right)^2} = \sqrt{16 + 1,96 + \frac{169}{225}} \approx 4,33 \text{ m.}$$

Vậy khi kiến 2 cách tổ 1 m thì khoảng cách giữa hai con kiến là 4,33 m.

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

❖ **Câu 1.** Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -3, x = 2$, như hình vẽ bên dưới. Đặt $a = \int_{-3}^1 f(x)dx$, $b = \int_1^2 f(x)dx$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



- (A) $S = a + b$. (B) $S = -a - b$. (C) $S = a - b$. (D) $S = b - a$.

➤ **Hướng dẫn giải.** Dựa vào hình vẽ, trên đoạn $[-3; 1]$ đồ thị hàm số nằm phía dưới trục hoành nên $f(x) \leq 0$.

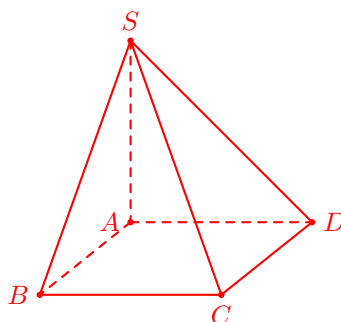
Trên đoạn $[1; 2]$ đồ thị hàm số nằm phía trên trục hoành nên $f(x) \geq 0$.

Diện tích hình phẳng là:

$$S = \int_{-3}^2 |f(x)|dx = \int_{-3}^1 -f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = -\int_{-3}^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = -a + b = b - a.$$

Vậy đáp án đúng là D.

❖ **Câu 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng



(A) $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

(B) $a^3\sqrt{3}$.

(C) $\frac{a^3}{3}$.

(D) a^3 .

Hướng dẫn giải. Diện tích đáy hình vuông $ABCD$ là $B = a^2$.

Chiều cao khối chóp là $h = SA = a\sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3}B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P) : x + 5y - 2z - 2 = 0$ song song với mặt phẳng nào dưới đây?

(A) $x - 5y + 2z + 2 = 0$.

(B) $2x + 10y - 4z + 1 = 0$.

(C) $-x - 5y - 2z + 2 = 0$.

(D) $x + 5y - 2z - 2 = 0$.

Hướng dẫn giải. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (1; 5; -2)$.

Mặt phẳng ở phương án B có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_B = (2; 10; -4) = 2(1; 5; -2) = 2\vec{n}_P$.

Vì $\frac{2}{1} = \frac{10}{5} = \frac{-4}{-2} \neq \frac{1}{-2}$ nên hai mặt phẳng này song song với nhau.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(2; 1; -4)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha) : x - 2y + 2z - 7 = 0$ có phương trình là

(A) $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 4)^2 = 25$.

(B) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 4)^2 = 25$.

(C) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 4)^2 = 25$.

(D) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 4)^2 = 25$.

Hướng dẫn giải. Bán kính mặt cầu bằng khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (α) :

$$R = d(I, (\alpha)) = \frac{|2 - 2(1) + 2(-4) - 7|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{|-15|}{3} = 5.$$

Phương trình mặt cầu là: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 4)^2 = 5^2 = 25$.

Câu 5. Thống kê cân nặng của học sinh lớp 12A ở một trường THPT ta có bảng số liệu. Tìm số trung bình của bảng số liệu.

(A) 51, 80.

(B) 51, 81.

(C) 51, 809.

(D) 52.

Hướng dẫn giải. Giá trị đại diện cho các nhóm lần lượt là: 43; 48; 53; 58; 63; 68.

Tổng số học sinh là $n = 10 + 7 + 16 + 4 + 2 + 3 = 42$.

Số trung bình là: $\bar{x} = \frac{10 \cdot 43 + 7 \cdot 48 + 16 \cdot 53 + 4 \cdot 58 + 2 \cdot 63 + 3 \cdot 68}{42} = \frac{2176}{42} \approx 51,8095$.

Gần nhất với đáp án C.

Câu 6. Hàm số $F(x)$ được gọi là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu

(A) $f'(x) = F(x), \forall x \in K$.

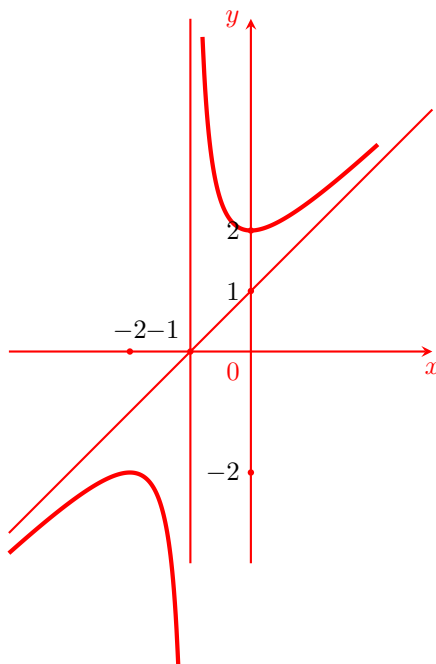
(B) $f'(x) = -F(x), \forall x \in K$.

(C) $F'(x) = -f(x), \forall x \in K$.

(D) $F'(x) = f(x), \forall x \in K$.

Hướng dẫn giải. Theo định nghĩa nguyên hàm, $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.

❖ **Câu 7.** Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số nào sau đây?



(A) $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$.

(B) $y = \frac{x^2 + 3x}{x - 2}$.

(C) $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 2}$.

(D) $y = \frac{x^2 - 2x}{x + 1}$.

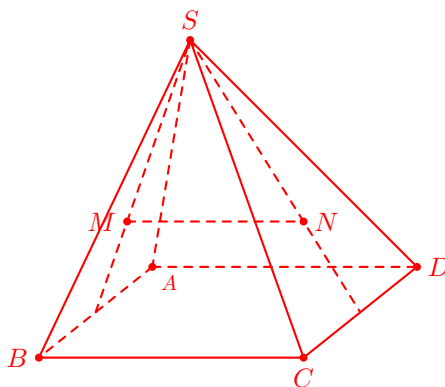
🔍 *Hướng dẫn giải.* Đồ thị có tiệm cận đứng là $x = -1$, loại B và C.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0; 2)$.

Với hàm số ở phương án A: $y(0) = \frac{2}{1} = 2$ (thỏa mãn).

Với hàm số ở phương án D: $y(0) = \frac{0}{1} = 0$ (không thỏa mãn).

❖ **Câu 8.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi M, N theo thứ tự là trọng tâm tam giác SAB và tam giác SCD . Khi đó MN song song với mặt phẳng nào sau đây?



(A) $(ABCD)$.

(B) (SAB) .

(C) (SAC) .

(D) (SBD) .

🔍 *Hướng dẫn giải.* Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD .

Vì M, N là trọng tâm $\triangle SAB$ và $\triangle SCD$ nên $\frac{SM}{SE} = \frac{SN}{SF} = \frac{2}{3}$.

Trong $\triangle SEF$, theo định lý Thales đảo ta có $MN \parallel EF$.

Mà $EF \parallel BC$ và $EF \subset (ABCD)$ nên $MN \parallel (ABCD)$.

❖ **Câu 9.** Nghiệm của phương trình $\cos x = 1$ là

- (A) $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. (B) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
(C) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. (D) $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

🔗 *Hướng dẫn giải.* Phương trình lượng giác cơ bản $\cos x = 1$ có nghiệm là $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

❖ **Câu 10.** Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $\log_2(x^2 - 5x + 7) = 0$ bằng

- (A) 7. (B) 13. (C) 5. (D) 6.

🔗 *Hướng dẫn giải.* Phương trình tương đương: $x^2 - 5x + 7 = 2^0 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$.

Phương trình có hai nghiệm $x_1 = 2, x_2 = 3$ (đều thỏa mãn điều kiện $x^2 - 5x + 7 > 0$).

Tổng bình phương các nghiệm là $x_1^2 + x_2^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$.

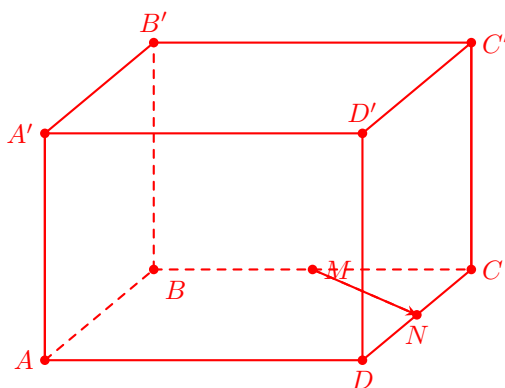
❖ **Câu 11.** Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_4 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$. Công sai của (u_n) là

- (A) $d = 3$. (B) $d = 5$. (C) $d = -3$. (D) $d = 6$.

🔗 *Hướng dẫn giải.* Ta có $u_4 = 10$. Thay vào phương trình thứ hai: $10 + u_6 = 26 \Rightarrow u_6 = 16$.

Mặt khác $u_6 = u_4 + 2d \Rightarrow 16 = 10 + 2d \Rightarrow 2d = 6 \Rightarrow d = 3$.

❖ **Câu 12.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và CD . Vectơ nào sau đây bằng $2\overrightarrow{MN}$?



- (A) $\overrightarrow{AD}$. (B) $\overrightarrow{B'D'}$. (C) $\overrightarrow{BC}$. (D) $\overrightarrow{A'C'}$.

🔗 *Hướng dẫn giải.* Trong tam giác BCD , M và N là trung điểm của BC và CD nên MN là đường trung bình.

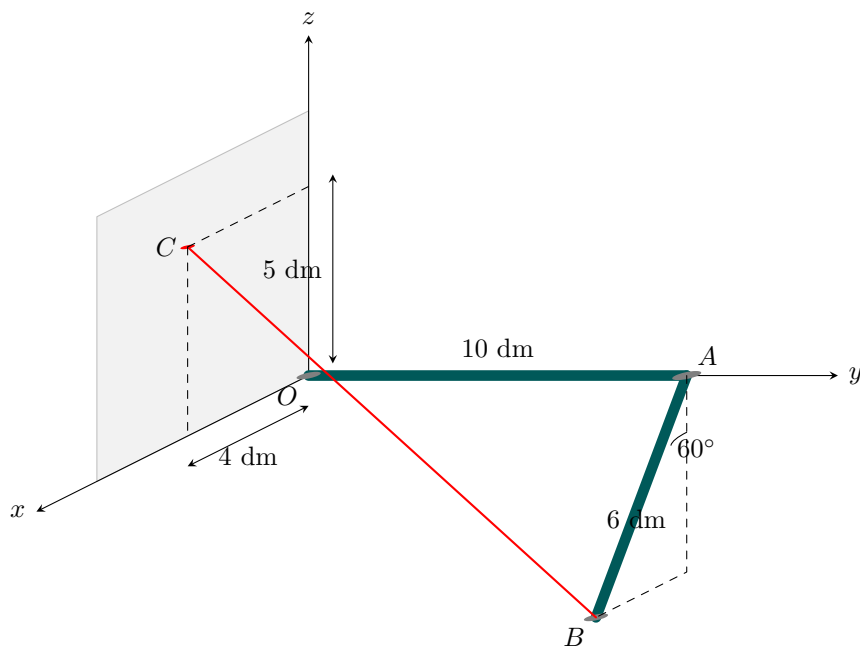
$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BD}.$$

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{B'D'}$.

Vậy $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{B'D'}$.

Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai

Bài 1. Một ống dẫn nước OAB được cố định vào một bức tường đồng thời được đặt trong hệ tọa độ $Oxyz$ và có các kích thước như hình vẽ.



Mô phỏng lại hình ống nước của đề sở Đồng Nai

- ◇ Đoạn ống OA nằm trên tia Oy (vuông góc với tường), có chiều dài $OA = 10$ dm.
- ◇ Đoạn ống AB nối tiếp với OA , có chiều dài $AB = 6$ dm. Ống AB vuông góc với OA và hướng xuống dưới, tạo với mặt phẳng nằm ngang (Oxy) một góc 60° .
- ◇ Đầu B của ống được giữ cố định bởi một thanh sắt nối với điểm C trên tường. Biết điểm $C(4; 0; 5)$. (Đơn vị trên các trục là dm).
- a) Tọa độ của điểm $A(0; 10; 0)$.
- b) Hình chiếu vuông góc của điểm B lên mặt phẳng (Oyz) là điểm $H(0; 10; -3\sqrt{3})$.
- c) Độ dài thanh sắt BC là 14,1 dm.
- d) Cao độ của điểm B là -3 .

Hướng dẫn giải. Dựa vào các dữ kiện bài toán, ta xác định tọa độ các điểm như sau:

- ◇ Vì OA nằm trên tia Oy và $OA = 10$ dm nên điểm A có tọa độ là $A(0; 10; 0)$. Suy ra khẳng định **a) Đúng**.
- ◇ Điểm C nằm trên tường (mặt phẳng Oxz), cách O theo trục Ox một đoạn 4 dm và cao độ là 5 dm nên $C(4; 0; 5)$.
- ◇ Xét đoạn ống AB :
 - ★ Vì $AB \perp OA$ và OA nằm trên trục Oy nên vectơ $\overrightarrow{AB}$ vuông góc với trục Oy , dẫn đến $y_B = y_A = 10$.
 - ★ AB tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc 60° và hướng xuống dưới, nên độ chênh lệch cao độ là: $z_B - z_A = -AB \cdot \sin 60^\circ = -6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -3\sqrt{3}$. Do $z_A = 0$ nên $z_B = -3\sqrt{3} \approx -5,196$.
 Suy ra khẳng định **d) Sai**.

★ Độ dời theo phương Ox là: $x_B - x_A = AB \cdot \cos 60^\circ = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$. Vì điểm B nằm cùng phía dương với C trên trục Ox nên $x_B = 3$.

◇ Vậy tọa độ điểm B là $B(3; 10; -3\sqrt{3})$.

◇ Hình chiếu của B lên mặt phẳng (Oyz) (mặt phẳng $x = 0$) là điểm $H(0; 10; -3\sqrt{3})$. Suy ra khẳng định **b) Đúng**.

◇ Độ dài thanh sắt BC :

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2} = \sqrt{(4 - 3)^2 + (0 - 10)^2 + (5 - (-3\sqrt{3}))^2}$$

$$BC = \sqrt{1^2 + (-10)^2 + (5 + 3\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 100 + (25 + 27 + 30\sqrt{3})} = \sqrt{153 + 30\sqrt{3}} \approx 14,316 \text{ dm.}$$

Vậy khẳng định **c) Sai** (vì $14,316 \neq 14,1$).

Bài 2. Trong một khu vực đô thị, cảnh sát giao thông ghi nhận các trường hợp vi phạm tốc độ trong giờ cao điểm. Thống kê cho thấy:

◇ Tỷ lệ nam giới tham gia giao thông trong giờ cao điểm là 60%, tỷ lệ nữ giới là 40%.

◇ Trong số các lái xe nam, tỷ lệ vi phạm tốc độ là 10%.

◇ Trong số các lái xe nữ, tỷ lệ vi phạm tốc độ là 3%.

Xét tính đúng/sai của các khẳng định sau:

- Xác suất một lái xe được chọn ngẫu nhiên trong giờ cao điểm là nam giới và vi phạm tốc độ là 0,06.
- Xác suất một lái xe được chọn ngẫu nhiên trong giờ cao điểm vi phạm tốc độ là 0,13.
- Nếu một lái xe được chọn ngẫu nhiên vi phạm tốc độ, khả năng cao người đó là nam giới.
- Giả sử cảnh sát chỉ dừng xe của những người vi phạm tốc độ để xử phạt. Biết một người đã bị dừng xe, xác suất người đó là nữ giới lớn hơn 0,2.

Hướng dẫn giải. Gọi các biến cố:

◇ M : "Lái xe được chọn là nam giới". Ta có $P(M) = 60\% = 0,6$.

◇ F : "Lái xe được chọn là nữ giới". Ta có $P(F) = 40\% = 0,4$.

◇ V : "Lái xe được chọn vi phạm tốc độ".

Theo giả thiết về tỷ lệ vi phạm có điều kiện:

◇ Xác suất nam giới vi phạm: $P(V|M) = 10\% = 0,1$.

◇ Xác suất nữ giới vi phạm: $P(V|F) = 3\% = 0,03$.

a) Xác suất lái xe được chọn là nam giới và vi phạm tốc độ là:

$$P(M \cap V) = P(M) \cdot P(V|M) = 0,6 \cdot 0,1 = 0,06.$$

Khẳng định **a) Đúng**.

b) Xác suất một lái xe được chọn ngẫu nhiên vi phạm tốc độ tính theo công thức xác suất đầy đủ:

$$P(V) = P(M) \cdot P(V|M) + P(F) \cdot P(V|F) = 0,6 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,03 = 0,06 + 0,012 = 0,072.$$

Vì $0,072 \neq 0,13$ nên khẳng định **b) Sai**.

c) Nếu biết lái xe vi phạm tốc độ, xác suất người đó là nam giới là (theo công thức Bayes):

$$P(M|V) = \frac{P(M \cap V)}{P(V)} = \frac{0,06}{0,072} = \frac{5}{6} \approx 0,8333.$$

Vì $P(M|V) \approx 83,33\% > 50\%$ nên khả năng cao người vi phạm là nam giới. Khẳng định **c) Đúng**.

d) Xác suất người bị dừng xe (người vi phạm) là nữ giới là:

$$P(F|V) = \frac{P(F \cap V)}{P(V)} = \frac{0,012}{0,072} = \frac{1}{6} \approx 0,1667.$$

Vì $0,1667 < 0,2$ nên khẳng định **d) Sai**.

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + 3x^2 - 3x + 1$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- Hàm số trên có hai cực trị gồm một cực tiểu và một cực đại.
- Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 12.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; -1)$.
- Đạo hàm của $f(x)$ là $f'(x) = x^2 + 6x - 3$.

Hướng dẫn giải. Xét hàm số $y = f(x) = x^3 + 3x^2 - 3x + 1$.

◇ Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

◇ Đạo hàm: $f'(x) = 3x^2 + 6x - 3$.

◇ Xét phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{2} \approx -2,41 \\ x = -1 + \sqrt{2} \approx 0,41 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-1 - \sqrt{2}$	$-1 + \sqrt{2}$	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$						
	$-\infty$	$6 + 4\sqrt{2}$		$6 - 4\sqrt{2}$		$+\infty$

◇ **ý a) Đúng:** Đạo hàm $f'(x)$ là một tam thức bậc hai có hai nghiệm phân biệt, do đó hàm số bậc ba luôn có hai điểm cực trị (một cực đại và một cực tiểu).

◇ **ý b) Sai:** Trên đoạn $[-1; 2]$, ta tính các giá trị tại biên và điểm cực trị nằm trong đoạn:

★ $f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 3(-1) + 1 = 6.$

★ $f(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = 15.$

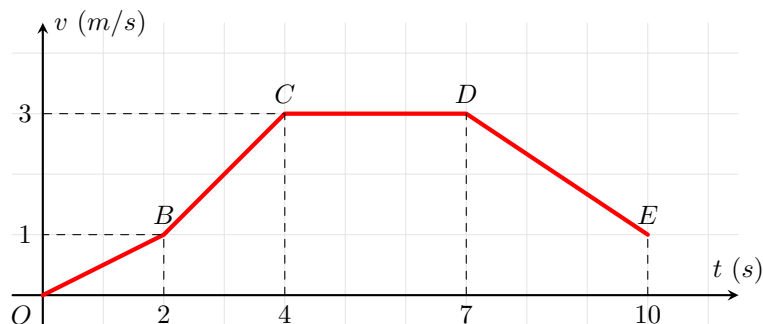
★ $x = -1 + \sqrt{2} \approx 0,41 \in [-1; 2]$, ta có $f(-1 + \sqrt{2}) = 6 - 4\sqrt{2} \approx 0,34.$

So sánh các giá trị trên, ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 2]$ là 15.

◇ **ý c) Đúng:** Dựa vào bảng biến thiên, hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2})$. Vì $(-2; -1) \subset (-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2})$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; -1)$.

◇ **ý d) Sai:** Đạo hàm đúng của hàm số là $f'(x) = (x^3 + 3x^2 - 3x + 1)' = 3x^2 + 6x - 3.$

Bài 4. Cho hình vẽ dưới đây là đồ thị vận tốc $v(t)$ (m/s) của một ca nô chạy trên sông trong 10 giây đầu tiên ($t = 0$ là thời điểm ca nô bắt đầu chuyển động).



a) Vận tốc chạy của ca nô trong khoảng thời gian từ 4 giây đầu tiên tăng dần.

b) Trong 10 giây đầu tiên, vận tốc ca nô chạy lớn nhất trong 4 giây.

c) Trong 10 giây đầu tiên, ca nô chạy với vận tốc $v(t)$ theo hàm $v(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t & \text{khi } 0 \leq t \leq 2 \\ t - 1 & \text{khi } 2 < t \leq 4 \\ 3 & \text{khi } 4 < t \leq 7 \\ -\frac{2}{3}t + \frac{23}{3} & \text{khi } 7 < t \leq 10 \end{cases}$.

d) Vận tốc chạy trung bình của ca nô 10 giây đầu tiên là 2,5 (m/s).

Hướng dẫn giải.

a) Từ đồ thị ta thấy: Trong khoảng thời gian từ 0 đến 4 giây, đồ thị đi lên, do đó vận tốc chạy của ca nô tăng dần. (Đúng)

b) Vận tốc lớn nhất của ca nô là 3 m/s, đạt được trong khoảng thời gian từ $t = 4$ đến $t = 7$. Thời gian duy trì vận tốc này là $7 - 4 = 3$ giây. Vậy trong 10 giây đầu tiên, vận tốc lớn nhất được duy trì trong 3 giây. (Sai)

c) Xác định phương trình các đoạn thẳng trên đồ thị:

◇ Đoạn OB : Đi qua $(0, 0)$ và $(2, 1) \Rightarrow v = \frac{1}{2}t$.

◇ Đoạn BC : Đi qua $(2, 1)$ và $(4, 3) \Rightarrow v - 1 = \frac{3 - 1}{4 - 2}(t - 2) \Rightarrow v = t - 1$.

◇ Đoạn CD : Là đường nằm ngang đi qua $v = 3 \Rightarrow v = 3$.

◇ Đoạn DE : Đi qua $(7, 3)$ và $(10, 1) \Rightarrow v - 1 = \frac{3 - 1}{7 - 10}(t - 10) \Rightarrow v = -\frac{2}{3}(t - 10) + 1 = -\frac{2}{3}t + \frac{23}{3}$.

Vậy hàm số $v(t)$ như đề bài nêu là chính xác. (Đúng)

d) Quãng đường chuyển động của ca nô trong 10 giây là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị và trục hoành:

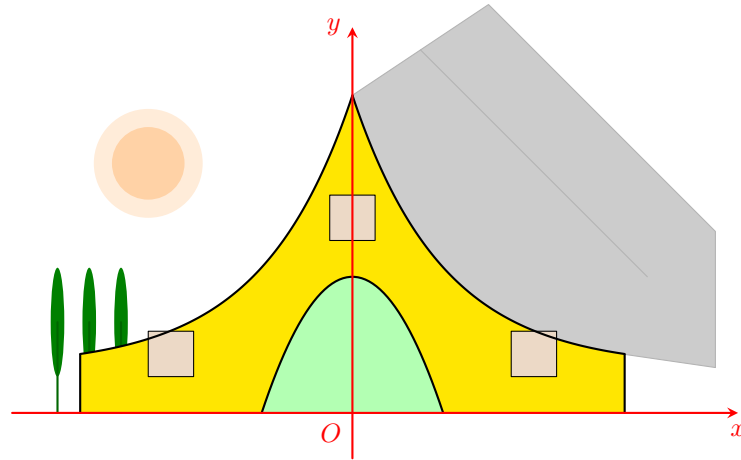
$$s = \int_0^{10} v(t)dt = \int_0^2 \frac{1}{2}t dt + \int_2^4 (t - 1)dt + \int_4^7 3dt + \int_7^{10} \left(-\frac{2}{3}t + \frac{23}{3}\right) dt$$

$$s = \left[\frac{t^2}{4}\right]_0^2 + \left[\frac{t^2}{2} - t\right]_2^4 + [3t]_4^7 + \left[-\frac{t^2}{3} + \frac{23t}{3}\right]_7^{10} = 1 + 4 + 9 + 6 = 20 \text{ (m)}.$$

Vận tốc trung bình là: $v_{tb} = \frac{s}{10} = \frac{20}{10} = 2 \text{ (m/s)}$. (Sai)

Phần III. Câu trả lời ngắn Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Bài 1. Mái chùa đối xứng qua trục, có biên dạng $f(x) = 6 \cdot e^{-0,5x} + 1$ ($0 \leq x \leq 6$). Cổng chùa dạng parabol, rộng 4 m và cao 3 m. Mỗi cửa sổ kích thước 1 m $\times$ 0,5 m (có 3 cửa sổ). Mặt tiền phía trước của mặt sẽ được sơn màu vàng dày 0,1 mm. Hỏi cần bao nhiêu lít nước sơn? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hướng dẫn giải. Mái chùa đối xứng qua trục Oy , nên diện tích mặt tiền được tính như sau:

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi biên dạng mái chùa và trục hoành: Do tính đối xứng, diện tích này là:

$$S_1 = 2 \int_0^6 (6e^{-0,5x} + 1)dx = 2 \left[\frac{6}{-0,5} e^{-0,5x} + x \right]_0^6 = 2 [-12e^{-3} + 6 - (-12e^0 + 0)]$$

$$S_1 = 2(18 - 12e^{-3}) = 36 - 24e^{-3} \approx 34,805 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Diện tích cổng chùa (hình Parabol): Cổng rộng 4 m (từ $x = -2$ đến $x = 2$) và cao 3 m.

Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và trục hoành:

$$S_2 = \frac{2}{3} \times \text{rộng} \times \text{cao} = \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 3 = 8 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Diện tích của 3 cửa sổ:

$$S_3 = 3 \times (1 \times 0,5) = 1,5 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Diện tích mặt tiền thực tế cần sơn:

$$S = S_1 - S_2 - S_3 = (36 - 24e^{-3}) - 8 - 1,5 = 26,5 - 24e^{-3} \approx 25,305 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Độ dày lớp sơn $d = 0,1 \text{ mm} = 0,0001 \text{ m}$.

Thể tích sơn cần dùng là:

$$V = S \cdot d \approx 25,305 \cdot 0,0001 = 0,0025305 \text{ (m}^3\text{)}.$$

Đổi sang đơn vị lít ($1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ lít}$):

$$V_{\text{lit}} = 0,0025305 \cdot 1000 \approx 2,5305 \text{ (lít)}.$$

Làm tròn kết quả đến hàng phần mười, ta cần khoảng 2,5 lít nước sơn.

Bài 2. An và Bình rất giỏi Toán, cùng tham gia một trò chơi, đầu tiên An bốc ngẫu nhiên một thẻ từ hộp thứ nhất chứa sáu thẻ giống nhau được đánh số từ 1 đến 6, tiếp theo Bình bốc ngẫu nhiên một thẻ từ hộp thứ hai chứa bốn thẻ giống nhau được đánh số từ 1 đến 4. Gọi số An bốc

được là a và số của Bình là b , sau đó hai người cùng tính giá trị của tích phân $I = \int_0^a x^b dx$. Nếu kết quả I là một số nguyên thì An thắng, ngược lại Bình thắng. Tính xác suất An thắng cuộc (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

 **Hướng dẫn giải.** Gọi a là số trên thẻ An bốc được, ta có $a \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Gọi b là số trên thẻ Bình bốc được, ta có $b \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Mỗi cặp số (a, b) tương ứng với một kết quả bốc thẻ. Số phần tử của không gian mẫu là:

$$n(\Omega) = 6 \cdot 4 = 24.$$

Giá trị của tích phân được tính như sau:

$$I = \int_0^a x^b dx = \left[\frac{x^{b+1}}{b+1} \right]_0^a = \frac{a^{b+1}}{b+1}.$$

An thắng cuộc khi và chỉ khi I là một số nguyên, tức là $a^{b+1} : (b+1)$. Ta xét các trường hợp dựa trên giá trị của b :

♦ **Trường hợp 1:** $b = 1 \Rightarrow b + 1 = 2$. $I = \frac{a^2}{2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a^2 : 2 \Leftrightarrow a$ là số chẵn $\Rightarrow a \in \{2; 4; 6\}$. Có 3 kết quả.

♦ **Trường hợp 2:** $b = 2 \Rightarrow b + 1 = 3$. $I = \frac{a^3}{3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a^3 : 3 \Leftrightarrow a$ chia hết cho 3 $\Rightarrow a \in \{3; 6\}$. Có 2 kết quả.

♦ **Trường hợp 3:** $b = 3 \Rightarrow b + 1 = 4$. $I = \frac{a^4}{4} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a^4 : 4$. Nếu a lẻ thì a^4 lẻ, không chia hết cho 4.

Nếu a chẵn thì $a = 2k \Rightarrow a^4 = 16k^4 : 4$. Vậy $a \in \{2; 4; 6\}$. Có 3 kết quả.

♦ **Trường hợp 4:** $b = 4 \Rightarrow b + 1 = 5$. $I = \frac{a^5}{5} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a^5 : 5 \Leftrightarrow a$ chia hết cho 5 $\Rightarrow a = 5$. Có 1 kết quả.

Tổng số các kết quả thuận lợi cho biến cố A "An thắng cuộc" là:

$$n(A) = 3 + 2 + 3 + 1 = 9.$$

Xác suất để An thắng cuộc là:

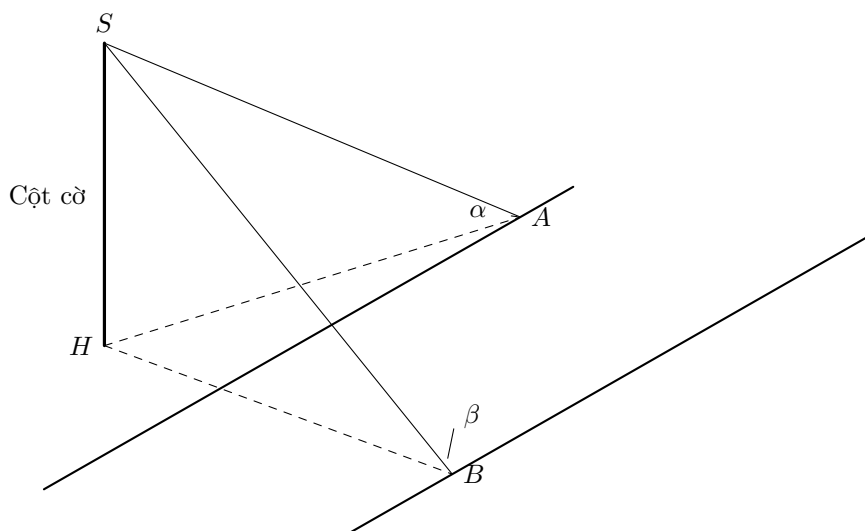
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{9}{24} = 0,375.$$

Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm (chữ số thập phân thứ hai), ta được:

$$P(A) \approx 0,38.$$

 **Bài 3.** Dòng Hương hiền hòa trong xanh, lững lờ trôi giữa lòng thành phố Huế cổ kính và mộng mơ. Nhìn từ trên cao, hai bờ sông trải dài như hai đường thẳng song song. Cột cờ Phú Văn Lâu sừng sững cao 54,5 mét như là một chứng tích hào hùng của lịch sử. Biết rằng hai bờ sông cách nhau 400 mét và chân cột cờ (hình chiếu vuông góc của đỉnh cột cờ xuống mặt đất) nằm cách mép sông gần nhất một khoảng 200 mét. Có hai bạn học sinh đứng ở hai bờ sông, bạn học sinh A ở cùng bờ với cột cờ nhìn đỉnh cột cờ so với mặt đất một góc α với $\tan \alpha = 0,1$ và bạn học sinh B

đứng ở bờ bên kia nhìn đỉnh cột cờ so với mặt đất một góc β với $\tan \beta = 0,07$. Hỏi hai bạn học sinh cách nhau xa nhất là bao nhiêu mét? (Giả sử rằng mặt đất là bằng phẳng và tầm mắt hai bạn học sinh ngang với mặt đất, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Hướng dẫn giải. Gọi S là đỉnh cột cờ và H là chân cột cờ trên mặt đất. Theo giả thiết, $SH = 54,5$ m.

Gọi A và B lần lượt là vị trí của hai bạn học sinh đứng ở hai bên bờ sông.

♦ Trong tam giác vuông SHA , ta có: $HA = \frac{SH}{\tan \alpha} = \frac{54,5}{0,1} = 545$ (m).

♦ Trong tam giác vuông SHB , ta có: $HB = \frac{SH}{\tan \beta} = \frac{54,5}{0,07} = \frac{5450}{7} \approx 778,57$ (m).

Chọn hệ trục tọa độ Oxy trên mặt đất với gốc tọa độ $O \equiv H(0;0)$.

Giả sử hai bờ sông song song với trục Oy .

♦ Bờ sông thứ nhất (nơi bạn A đứng) cách H một khoảng 200 m nên có phương trình $x = 200$.

Khi đó tọa độ của A là $(200; y_A)$. Vì $HA = 545$ nên:

$$200^2 + y_A^2 = 545^2 \Rightarrow y_A^2 = 545^2 - 200^2 = 257025 \Rightarrow y_A \approx \pm 506,98 \text{ (m)}.$$

♦ Bờ sông thứ hai (nơi bạn B đứng) cách bờ thứ nhất 400 m và nằm khác phía với H so với bờ thứ nhất, nên có phương trình $x = 200 + 400 = 600$.

Khi đó tọa độ của B là $(600; y_B)$. Vì $HB = \frac{5450}{7}$ nên:

$$600^2 + y_B^2 = \left(\frac{5450}{7}\right)^2 \Rightarrow y_B^2 = \frac{12062500}{49} \Rightarrow y_B \approx \pm 496,16 \text{ (m)}.$$

Khoảng cách giữa hai bạn học sinh là: $AB = \sqrt{(600 - 200)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Để AB đạt giá trị lớn nhất thì $|y_B - y_A|$ phải lớn nhất. Điều này xảy ra khi y_A và y_B nằm về hai phía so với trục Ox (trái dấu nhau).

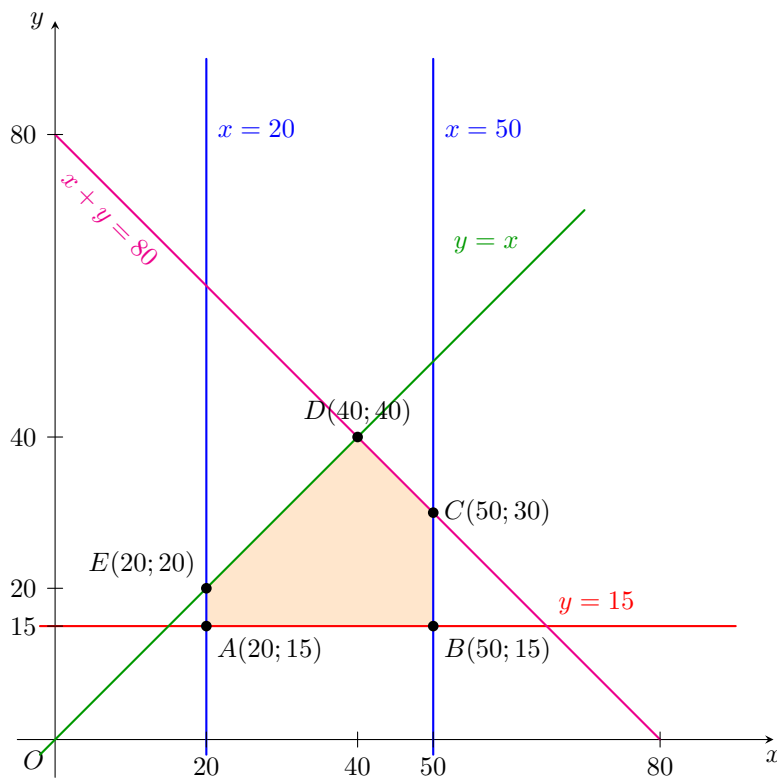
$$|y_B - y_A|_{\max} \approx 506,98 + 496,16 = 1003,14 \text{ (m)}.$$

Khi đó, khoảng cách xa nhất giữa hai bạn là:

$$AB_{\max} = \sqrt{400^2 + 1003,14^2} \approx 1079,95 \text{ (m)}.$$

Làm tròn đến hàng đơn vị, ta được kết quả là 1080 mét.

Bài 4. Một doanh nghiệp phân bổ ngân sách quảng cáo trên Facebook và Google với tổng số tiền không vượt quá 80 triệu. Chi phí cho Facebook nằm trong khoảng từ 20 đến 50 triệu. Chi phí cho Google tối thiểu là 15 triệu. Số tiền chi cho chạy quảng cáo trên Google không được vượt quá chi phí chi cho quảng cáo trên Facebook. Biết rằng số khách tiếp cận là 4 nghìn khách cho mỗi triệu tiền chi quảng cáo trên Facebook và 6 nghìn khách cho mỗi triệu quảng cáo trên Google. Hỏi lượng khách tiếp cận lớn nhất là bao nhiêu nghìn?



Hướng dẫn giải. Gọi x (triệu đồng) là số tiền chi cho quảng cáo trên Facebook.

Gọi y (triệu đồng) là số tiền chi cho quảng cáo trên Google.

Điều kiện: $x, y \geq 0$.

Dựa vào các dữ kiện của bài toán, ta lập được hệ bất phương trình ràng buộc sau:

$$\begin{cases} x + y \leq 80 & (\text{tổng ngân sách không quá 80 triệu}) \\ 20 \leq x \leq 50 & (\text{ngân sách FB từ 20 đến 50 triệu}) \\ y \geq 15 & (\text{ngân sách Google tối thiểu 15 triệu}) \\ y \leq x & (\text{ngân sách Google không vượt quá FB}) \end{cases}$$

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền đa giác $ABCDE$ (phần tô màu trong hình vẽ). Tọa độ các đỉnh của đa giác là:

- ◇ $A(20; 15)$: giao của $x = 20$ và $y = 15$.
- ◇ $B(50; 15)$: giao của $x = 50$ và $y = 15$.
- ◇ $C(50; 30)$: giao của $x = 50$ và $x + y = 80$.
- ◇ $D(40; 40)$: giao của $x + y = 80$ và $y = x$.
- ◇ $E(20; 20)$: giao của $x = 20$ và $y = x$.

Hàm số biểu thị tổng lượng khách tiếp cận (đơn vị: nghìn người) là: $F(x; y) = 4x + 6y$.

Giá trị của $F(x; y)$ tại các đỉnh của miền nghiệm là:

$$\diamond F(A) = F(20; 15) = 4 \cdot 20 + 6 \cdot 15 = 170.$$

$$\diamond F(B) = F(50; 15) = 4 \cdot 50 + 6 \cdot 15 = 290.$$

$$\diamond F(C) = F(50; 30) = 4 \cdot 50 + 6 \cdot 30 = 380.$$

$$\diamond F(D) = F(40; 40) = 4 \cdot 40 + 6 \cdot 40 = 400.$$

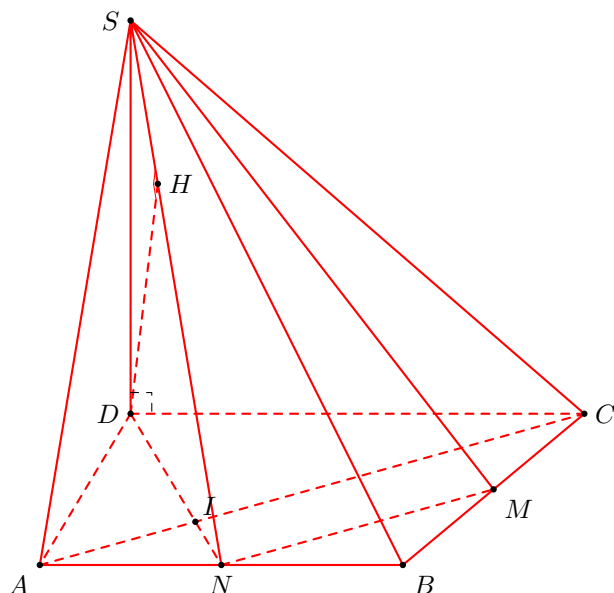
$$\diamond F(E) = F(20; 20) = 4 \cdot 20 + 6 \cdot 20 = 200.$$

So sánh các giá trị, ta thấy $F(x; y)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 400 tại điểm $D(40; 40)$.

Vậy lượng khách tiếp cận lớn nhất là 400 nghìn khách.

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SD vuông góc với $(ABCD)$, $SD = 5\sqrt{5}$. Đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $CD = 2AD = 2AB = 10$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SM .

Hướng dẫn giải.



Gọi N là trung điểm của AB . Suy ra MN là đường trung bình của $\triangle ABC$.

$$\Rightarrow d(AC, SM) = d(AC, (SMN)) = d(I, (SMN)) \text{ (với } I = DN \cap AC \text{)}.$$

Ta có

$$ID \cap (SMN) = N \Rightarrow \frac{d(I, (SMN))}{d(D, (SMN))} = \frac{IN}{DN} = \frac{1}{5} \text{ (do } AN \parallel CD \Rightarrow \frac{IN}{ID} = \frac{AN}{CD} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{IN}{DN} = \frac{1}{5} \text{)}$$

$$\Rightarrow d(I, (SMN)) = \frac{1}{5} d(D, (SMN)).$$

Xét $\triangle ADN$ và $\triangle DCA$ có

$$\widehat{D} = \widehat{A} = 90^\circ$$

$$\frac{AN}{AD} = \frac{AD}{DC} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \triangle ADN = \triangle DCA \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{ADN} = \widehat{DCA}$$

$$\Rightarrow DN \perp AC \Rightarrow MN \perp (SDN).$$

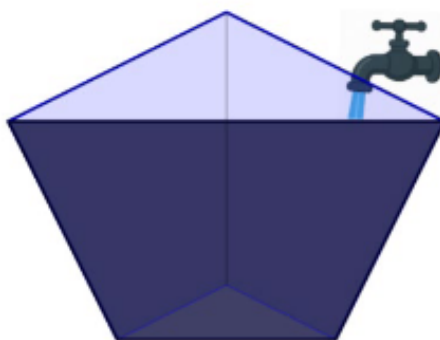
Ta có

$$\begin{cases} (SMN) \perp (SDN) \\ (SMN) \cap (SDN) = SN \\ \text{Trong } (SDN), DH \perp SN \end{cases} \Rightarrow d(D, (SMN)) = DH.$$

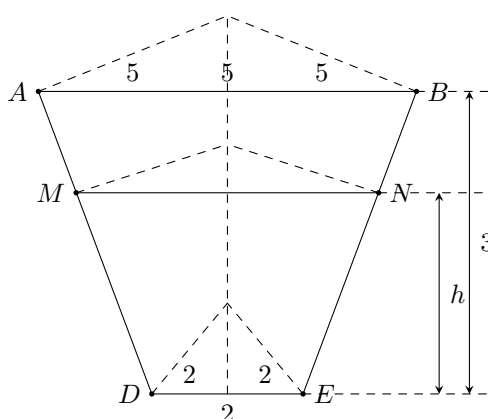
$$\triangle SDN \text{ vuông tại } D: \frac{1}{DH^2} = \frac{1}{SD^2} + \frac{1}{DN^2} \Rightarrow DH = 5.$$

$$\Rightarrow d(I, (SMN)) = \frac{1}{5}d(D, (SMN)) = 1.$$

Bài 6. Một cái chậu đựng nước có dạng hình chóp cụt đều, đáy chậu là tam giác đều cạnh bằng 2 dm, miệng chậu là tam giác đều cạnh bằng 5 dm và chiều cao chậu nước bằng 3 dm. Người ta bơm nước vào chậu với lưu lượng không đổi $\frac{\sqrt{3}}{3}$ lít/phút. Tại thời điểm 14 phút sau khi bơm tốc độ dâng lên của nước trong chậu là $\frac{1}{a}$ dm/phút, giá trị của a bằng bao nhiêu?



Hướng dẫn giải. Gọi MN là độ dài cạnh tam giác đều theo mực nước tức thời (MN thay đổi).



Đặt $MN = a \times h + b$ (hàm số bậc nhất theo h).

Khi $h = 0$ thì $MN = 2$; khi $h = 3$ thì $MN = 5$.

$$\text{Do đó } \begin{cases} b = 2 \\ 3a + b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 1 \end{cases}; \text{ suy ra } \boxed{MN = h + 2}.$$

$$\text{Diện tích mặt nước tức thời là } S = \frac{MN^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(h + 2)^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Thể tích nước tức thời là $V = \frac{1}{3}h(S_0 + \sqrt{S_0S} + S)$; S_0 là diện tích mặt nước ban đầu (đáy nhỏ).

$$V = \frac{1}{3}h \left(\sqrt{3} + \sqrt{\sqrt{3} \cdot \frac{(h+2)^2\sqrt{3}}{4} + \frac{(h+2)^2\sqrt{3}}{4}} \right) = \frac{h\sqrt{3}}{12} [4 + 2(h+2) + (h+2)^2].$$

$$V = \frac{h\sqrt{3}}{12}(h^2 + 6h + 12) = \frac{\sqrt{3}}{12}(h^3 + 6h^2 + 12h) \quad (*).$$

Sau 14 phút thì lượng nước trong chậu là $V = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 14 = \frac{14\sqrt{3}}{3} dm^3$.

$$\text{Do đó } \frac{\sqrt{3}}{12}(h^3 + 6h^2 + 12h) = \frac{14\sqrt{3}}{3} \Rightarrow h = 2 dm.$$

Từ (*) đạo hàm hai vế theo t ta được: $V'(t) = \frac{\sqrt{3}}{12}(3h^2 + 12h + 12) \cdot h'(t) \quad (**).$

Thay các giá trị $h = 2$; $V'(t) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ vào (**) ta được: $h'(t) = \frac{1}{12} dm/\text{phút}$.

Vậy $a = 12$.

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

❖ **Câu 1.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có một nguyên hàm là $F(x)$. Biết rằng $F(1) = 9, F(2) = 5$. Giá trị của tích phân $\int_1^2 f(x)dx$ bằng

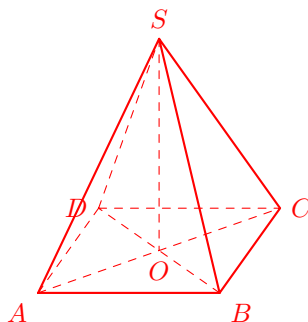
- (A) 14. (B) 4. (C) -4. (D) 45.

🔗 *Hướng dẫn giải.* Theo định nghĩa tích phân, ta có $\int_1^2 f(x)dx = F(2) - F(1) = 5 - 9 = -4$.

❖ **Câu 2.** Cho hình chóp đều $S.ABCD$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng (SAC) ?

- (A) (SAD) . (B) (SBC) . (C) (SAB) . (D) (SBD) .

🔗 *Hướng dẫn giải.*



Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên đáy $ABCD$ là hình vuông. Gọi O là giao điểm của AC và BD , khi đó $SO \perp (ABCD)$.

Ta có $BD \perp AC$ (tính chất hình vuông) và $BD \perp SO$ (do $SO \perp (ABCD)$).

Suy ra $BD \perp (SAC)$. Mà $BD \subset (SBD)$ nên $(SBD) \perp (SAC)$.

❖ **Câu 3.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-7}$.

Phương trình mặt phẳng đi qua $A(1; 2; 3)$ và vuông góc với đường thẳng d là

- (A) $4x + 3y + 7z - 11 = 0$. (B) $4x + 3y + 7z + 11 = 0$.
(C) $4x + 3y - 7z + 11 = 0$. (D) $4x + 3y - 7z - 11 = 0$.

🔗 *Hướng dẫn giải.* Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (4; 3; -7)$.

Mặt phẳng vuông góc với đường thẳng d nên nhận $\vec{n} = \vec{u}_d = (4; 3; -7)$ làm vectơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng đi qua $A(1; 2; 3)$ là:

$$4(x-1) + 3(y-2) - 7(z-3) = 0 \iff 4x + 3y - 7z + 11 = 0.$$

❖ **Câu 4.** Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $(2 - \sqrt{3})^x < 1$.

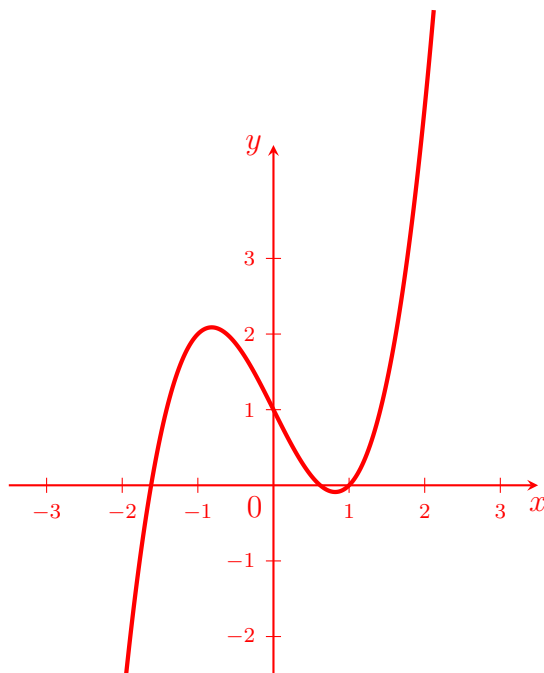
- (A) $S = (0; +\infty)$. (B) $S = (0; 1)$.
(C) $S = (-1; 0)$. (D) $S = (-\infty; 0)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $0 < 2 - \sqrt{3} < 1$.

Bất phương trình $(2 - \sqrt{3})^x < 1 \iff (2 - \sqrt{3})^x < (2 - \sqrt{3})^0 \iff x > 0$.

Vậy tập nghiệm là $S = (0; +\infty)$.

❖ **Câu 5.** Hình vẽ sau đây là đồ thị hàm số nào?



(A) $y = x^3 - 2x + 1$.

(B) $y = x^3 - 2x^2 + 1$.

(C) $y = -x^3 + 2x^2 + 1$.

(D) $y = x^3 + 2x^2 + 1$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị hàm số, nhánh cuối bên phải đi lên nên hệ số $a > 0$.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0; 1)$ và đi qua điểm $(1; 0)$.

Kiểm tra với phương án $y = x^3 - 2x + 1$, ta thấy hoàn toàn khớp với hình vẽ.

❖ **Câu 6.** Cho cấp số nhân (u_n) có $u_3 = 5$ và $u_6 = 40$. Số hạng u_4 của cấp số nhân là

(A) $u_4 = -15$.

(B) $u_4 = -10$.

(C) $u_4 = 15$.

(D) $u_4 = 10$.

Hướng dẫn giải. Ta có $u_6 = u_3 \cdot q^3 \iff 40 = 5 \cdot q^3 \iff q = 2$.

Vậy số hạng $u_4 = u_3 \cdot q = 5 \cdot 2 = 10$.

❖ **Câu 7.** Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 - \sin x$ là

(A) $F(x) = x^3 - \cos x + C$.

(B) $F(x) = x^3 + \cos x + C$.

(C) $F(x) = 6x - \cos x + C$.

(D) $F(x) = 6x + \cos x + C$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\int (3x^2 - \sin x) dx = x^3 + \cos x + C$.

❖ **Câu 8.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) $\overrightarrow{B'C} = -\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

(B) $\overrightarrow{B'C} = -\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

(C) $\overrightarrow{B'C} = -\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

(D) $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AA'} + (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

❖ **Câu 9.** Rút gọn biểu thức $P = \sin 3x \cos x - \sin x \cos 3x$.

(A) $P = \sin 4x$.

(B) $P = \cos 2x$.

(C) $P = \sin 2x$.

(D) $P = \cos 4x$.

Hướng dẫn giải. Áp dụng công thức cộng: $P = \sin(3x - x) = \sin 2x$.

Câu 10. Thống kê điểm kiểm tra học kì 1 môn Toán của 300 học sinh lớp 12 được mô tả ở bảng sau:

Điểm	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)
Số học sinh	20	50	70	160

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là

- (A) 7. (B) 140. (C) 8. (D) 160.

Hướng dẫn giải. Khoảng biến thiên là $R = 10 - 2 = 8$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x - 3y - 4z + 1 = 0$. Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) có tọa độ là

- (A) $(-1; -3; -4)$. (B) $(1; -3; -4)$.
(C) $(1; -3; 4)$. (D) $(1; 3; 4)$.

Hướng dẫn giải. Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -3; -4)$.

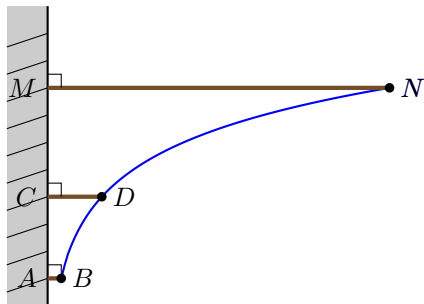
Câu 12. Có 7 chiếc ghế xếp thành hàng ngang. Có bao nhiêu cách xếp 3 người vào 7 chiếc ghế đó sao cho mỗi người ngồi một ghế?

- (A) 21. (B) 210. (C) 35. (D) 343.

Hướng dẫn giải. Số cách xếp là $A_7^3 = 210$ cách.

Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai

Bài 1. Người ta muốn tạo một giá đỡ bằng sắt bên cạnh một bức tường có hình dạng là đoạn cong BDN như hình vẽ dưới, giá đỡ được gắn với tường bằng ba thanh sắt AB, CD, MN cùng vuông góc với tường (A, C, M thẳng hàng). Giá đỡ được xem như là một phần của đồ thị hàm số $y = \log x$ trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) với trục tung trùng với hình chiếu vuông góc của giá đỡ lên mặt tường (đơn vị trên trục tính bằng mét). Biết $AB = 10$ cm, $AM = 1,4$ m và độ dài phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ được tính theo công thức $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$.



- a) Đạo hàm của hàm số $y = \log x$ là $y' = \frac{1}{x \ln 10}$.
b) Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) , điểm B có hoành độ bằng 0,1.
c) Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) , điểm N có tung độ bằng 1,4.
d) Độ dài giá đỡ bằng 2,97 mét (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn giải. Thiết lập hệ trục tọa độ (Oxy) sao cho trục tung Oy trùng với mặt tường,

trục hoành Ox vuông góc với mặt tường. Đơn vị tính là mét (m).

a) Hàm số $y = \log x = \log_{10} x$. Theo công thức đạo hàm hàm số logarit cơ số a : $y' = (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

Vậy $y' = \frac{1}{x \ln 10}$. Đây là khẳng định **Đúng**.

b) Thanh sắt AB vuông góc với tường và có độ dài $10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$.

Do điểm B nằm trên đồ thị hàm số và AB là khoảng cách từ B đến trục tung nên hoành độ của điểm B là $x_B = AB = 0,1$. Đây là khẳng định **Đúng**.

c) Ta có $x_B = 0,1 \Rightarrow y_B = \log(0,1) = -1$.

Vì thanh sắt AB nằm ngang nên tung độ của điểm A trên tường cũng là $y_A = -1$.

Biết $AM = 1,4 \text{ m}$ và M nằm phía trên A trên trục tung nên tung độ của điểm M là:

$$y_M = y_A + AM = -1 + 1,4 = 0,4.$$

Vì thanh sắt MN nằm ngang nên tung độ của điểm N bằng tung độ điểm M , tức là $y_N = 0,4$.

Khẳng định nói tung độ N bằng $1,4$ là **Sai**.

d) Để tính độ dài giá đỡ L , ta cần xác định cận x của điểm N .

Với $y_N = 0,4$, ta có: $0,4 = \log x_N \Rightarrow x_N = 10^{0,4} \approx 2,512$.

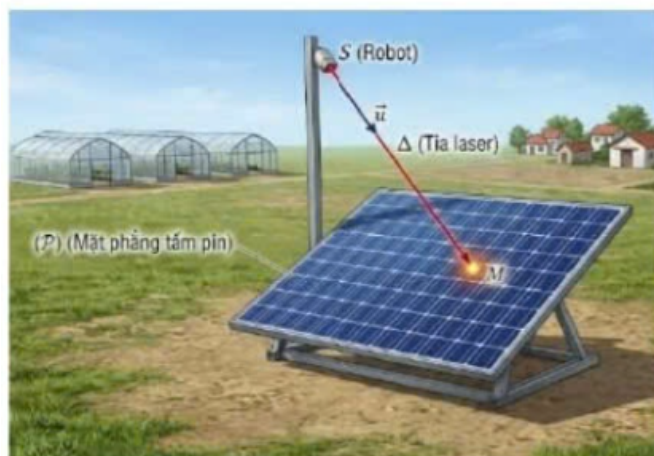
Độ dài giá đỡ là:

$$L = \int_{0,1}^{10^{0,4}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x \ln 10}\right)^2} dx$$

Sử dụng máy tính cầm tay tính tích phân này, ta được: $L \approx 2,54 \text{ m}$.

Khẳng định nói độ dài bằng $2,97 \text{ m}$ là **Sai**.

Bài 2. Trong một mô hình nông nghiệp công nghệ cao, một tấm pin năng lượng mặt trời phẳng được lắp đặt nghiêng sao cho bề mặt của nó nằm trên mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z - 6 = 0$ (xét trong hệ không gian tọa độ $Oxyz$ với đơn vị đo là mét, mặt phẳng (Oxy) được xem là mặt đất phẳng). Người ta lắp đặt một robot cố định ở trên cao để kiểm tra bụi bẩn. Robot có mắt phát tia laser tại điểm $S(1; 1; 6)$. Robot thực hiện quét tia laser trên bề mặt tấm pin. Tại một thời điểm tia laser được chiếu theo đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; -2; -2)$ và chạm vào bề mặt tấm pin tại điểm M .



- a) Khoảng cách từ mắt phát tia laser S đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{4}{3}$ mét.
- b) Điểm M có tọa độ là $(1; 1; 2)$.
- c) Góc α hợp bởi tia laser Δ và mặt phẳng (P) thỏa mãn hệ thức $\sin \alpha = \frac{4}{9}$.
- d) Khi vệ sinh, nước được phun trúng điểm chạm của tia laser trên tấm pin sẽ tạo thành dòng nước chảy trên bề mặt pin xuống đất theo hướng dốc nhất, quỹ đạo chảy của dòng nước nằm trên một đường thẳng. Đường thẳng đó có một vectơ chỉ phương là $\vec{v} = (1; 1; 3)$.

 **Hướng dẫn giải.** Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2; 2; 1)$.

a) Đúng. Khoảng cách từ điểm $S(1; 1; 6)$ đến mặt phẳng (P) được tính theo công thức:

$$d(S, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 6 - 6|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3} \text{ (mét)}.$$

b) Sai. Đường thẳng Δ đi qua điểm $S(1; 1; 6)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; -2; -2)$ có phương trình tham số:

$$\Delta : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 6 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Điểm M là giao điểm của Δ và (P) , tọa độ của M ứng với t thỏa mãn:

$$2(1 + t) + 2(1 - 2t) + (6 - 2t) - 6 = 0 \Leftrightarrow -4t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Thay $t = 1$ vào phương trình đường thẳng Δ , ta được $M(2; -1; 4)$.

c) Đúng. Góc α giữa đường thẳng Δ (có VTCP $\vec{u}$) và mặt phẳng (P) (có VTPT $\vec{n}$) được tính theo công thức:

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|1 \cdot 2 + (-2) \cdot 2 + (-2) \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|2 - 4 - 2|}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}.$$

d) Sai. Dòng nước chảy theo hướng dốc nhất trên mặt phẳng (P) phải là một đường thẳng nằm trong (P) . Do đó, vectơ chỉ phương $\vec{v}$ của nó phải vuông góc với vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 2; 1)$ của mặt phẳng (P) .

Xét vectơ $\vec{v} = (1; 1; 3)$, ta có tích vô hướng:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7 \neq 0.$$

Vì $\vec{v} \cdot \vec{n} \neq 0$ nên vectơ $\vec{v}$ không vuông góc với $\vec{n}$, suy ra đường thẳng này không nằm trong mặt phẳng (P) . Do đó, nó không thể là quỹ đạo của dòng nước chảy trên bề mặt tấm pin.

Vectơ chỉ phương đúng của hướng dốc nhất là hình chiếu của vectơ trọng lực lên mặt phẳng, có dạng $\vec{a} = (1; 1; -4)$.

 **Bài 3.** Một nhà đầu tư có kế hoạch xây dựng một trạm điện gió tại thành phố Hà Nội, bao gồm hai huyện là huyện Mỹ Đức và huyện Ứng Hòa. Để tìm hiểu cách dân cư đánh giá dự án này, hội đồng thành phố đã tổ chức một cuộc khảo sát trong số các cử tri hợp lệ. Tại Mỹ Đức, có 1722 cử tri được tham gia khảo sát, trong khi ở Ứng Hòa, con số này là 258. Theo kết quả khảo sát:

◇ Có 1089 người tham gia khảo sát ủng hộ trạm điện gió, trong đó có 27 người từ Ứng Hòa.

◇ Các cử tri còn lại bày tỏ sự phản đối dự án này.

a) Có 38,3% cử tri ở Mỹ Đức phản đối dự án này (làm tròn hàng phần chục).

b) Chọn ngẫu nhiên một người được khảo sát, gọi p_1 là xác suất người này ủng hộ trạm điện gió và đến từ Mỹ Đức, p_2 là xác suất người này đến từ Mỹ Đức, biết người này ủng hộ trạm điện gió. Khi đó $p_1 < p_2$.

c) Chọn ngẫu nhiên 1 người và thấy rằng người này ủng hộ trạm điện gió. Khả năng người này đến từ Ứng Hòa cao hơn.

d) Chọn ngẫu nhiên một người được khảo sát thấy rằng người này phản đối trạm điện gió. Xác suất người này là cử tri đến từ Ứng Hòa là 0,25 (làm tròn đến hàng phần trăm).

🔗 *Hướng dẫn giải.* Dựa vào dữ liệu bài toán, ta lập bảng thống kê số liệu như sau:

Địa phương	Ủng hộ	Phản đối	Tổng cộng
Mỹ Đức	$1089 - 27 = 1062$	$1722 - 1062 = 660$	1722
Ứng Hòa	27	$258 - 27 = 231$	258
Tổng cộng	1089	$660 + 231 = 891$	$1722 + 258 = 1980$

a) Đúng.

Tỷ lệ cử tri ở Mỹ Đức phản đối dự án là: $\frac{660}{1722} \times 100\% \approx 38,327\% \approx 38,3\%$ (làm tròn đến hàng phần chục).

b) Đúng.

p_1 là xác suất chọn 1 người ủng hộ và đến từ Mỹ Đức trong tổng số người khảo sát: $p_1 = \frac{1062}{1980} \approx 0,536$.

p_2 là xác suất người đó đến từ Mỹ Đức trong số những người ủng hộ (xác suất có điều kiện): $p_2 = \frac{1062}{1089} \approx 0,975$.

Rõ ràng $0,536 < 0,975 \Rightarrow p_1 < p_2$.

c) Sai.

Trong tổng số 1089 người ủng hộ, số người đến từ Mỹ Đức là 1062, số người đến từ Ứng Hòa là 27.

Vì $1062 > 27$ nên khả năng người đó đến từ Mỹ Đức cao hơn rất nhiều so với Ứng Hòa.

d) Sai.

Số người phản đối trạm điện gió là 891 người. Trong đó, số người phản đối đến từ Ứng Hòa là 231 người.

Xác suất chọn được người phản đối đến từ Ứng Hòa là: $P = \frac{231}{891} \approx 0,259259...$

Làm tròn đến hàng phần trăm (chữ số thập phân thứ hai), ta được kết quả là 0,26.

🔗 **Bài 4.** Một nghiên cứu cho rằng, hàm số $f(x)$ biểu diễn tổng số lượng từ mới mà một học sinh đã ghi nhớ sau x phút. Nhà tâm lý học gọi đồ thị của $y = f(x)$ là đường cong học tập và $y = f'(x)$ là tốc độ học tập (từ mới/phút). Thời điểm đạt hiệu suất học tập cao nhất là thời gian mà tốc độ

học tập đạt cực đại.

Trong một tiết học từ vựng 20 phút, tốc độ học tập của bạn Long được mô hình thông qua hàm số $f'(x) = 0,1(10 + ax - 0,6x^2)$ với $0 \leq x \leq 20$ và $a \in \mathbb{R}$. Biết rằng thời điểm Long có hiệu suất học tập cao nhất là phút thứ 10.

- a) Tốc độ học tập của Long tại thời điểm ban đầu là 1 từ/phút.
- b) $a = 12$.
- c) Số từ mà Long nhớ được trong 10 phút đầu tiên là 50.
- d) Bạn Hoàng vào lớp muộn hơn 1 phút và bắt đầu học với tốc độ học tập bằng $g'(x) = k\sqrt{x}$. Sau 9 phút Hoàng vào lớp thì Hoàng bắt kịp bạn Long. Tốc độ học tập của bạn Hoàng tại thời điểm 16 phút lớn hơn 11 từ/phút.

 *Hướng dẫn giải.* a) Đúng.

Ta có: $f'(x) = 0,1(10 + ax - 0,6x^2) \Rightarrow f'(0) = 0,1(10 + a \cdot 0 - 0,6 \cdot 0^2) = 1$ (từ/phút).

b) Đúng.

Ta có: $f'(x) = 0,1(10 + ax - 0,6x^2) \Rightarrow f''(x) = 0,1(a - 1,2x)$.

Thời điểm hiệu suất học tập cao nhất là thời gian mà tốc độ học tập $f'(x)$ đạt cực đại, tức là $f''(x) = 0$.

Theo đề bài, thời điểm này là phút thứ 10 $\Rightarrow f''(10) = 0 \Leftrightarrow 0,1(a - 1,2 \cdot 10) = 0 \Leftrightarrow a = 12$.

c) Đúng.

Với $a = 12$, ta có: $f'(x) = 0,1(10 + 12x - 0,6x^2) = 1 + 1,2x - 0,06x^2$.

Số từ Long nhớ được sau x phút là nguyên hàm của tốc độ học tập:

$$f(x) = \int (1 + 1,2x - 0,06x^2) dx = x + 0,6x^2 - 0,02x^3 + C.$$

Giả sử tại thời điểm bắt đầu học Long chưa nhớ từ nào: $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$.

$$\Rightarrow f(x) = x + 0,6x^2 - 0,02x^3.$$

Số từ Long nhớ được trong 10 phút đầu tiên là: $f(10) = 10 + 0,6 \cdot 10^2 - 0,02 \cdot 10^3 = 10 + 60 - 20 = 50$ (từ).

d) Đúng.

$$\text{Ta có: } g'(x) = k\sqrt{x} \Rightarrow g(x) = \int k\sqrt{x} dx = \frac{2}{3}k \cdot x^{\frac{3}{2}} + C.$$

Tại thời điểm Hoàng bắt đầu học ($x = 0$), số từ nhớ được là 0 $\Rightarrow g(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow g(x) = \frac{2}{3}k \cdot x^{\frac{3}{2}}$.

Bạn Hoàng vào lớp muộn 1 phút, sau 9 phút ở trong lớp (tổng thời gian tiết học là $1 + 9 = 10$ phút) thì bắt kịp Long.

Nghĩa là số từ Hoàng học được trong 9 phút bằng số từ Long học được trong 10 phút:

$$\Rightarrow g(9) = f(10) = 50 \Leftrightarrow \frac{2}{3}k \cdot 9^{\frac{3}{2}} = 50 \Leftrightarrow \frac{2}{3}k \cdot 27 = 50 \Leftrightarrow 18k = 50 \Rightarrow k = \frac{25}{9}.$$

Tốc độ học tập của Hoàng là $g'(x) = \frac{25}{9}\sqrt{x}$.

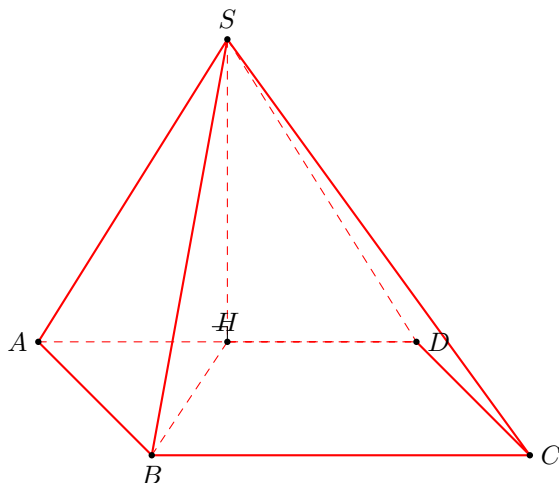
$$g'(16) = \frac{25}{9} \cdot \sqrt{16} = \frac{100}{9} \approx 11,1 > 11.$$

Vậy khẳng định d) là Đúng.

Phần III. Câu trả lời ngắn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.*

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = 2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy là trung điểm H của AD , góc giữa SB và mặt phẳng đáy ($ABCD$) là 45° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và BH theo a được kết quả $m.a$. Khi đó giá trị $\frac{3}{5}m^2$ là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần trăm)

Hướng dẫn giải.



Hình chiếu của S lên đáy là H nên $SH \perp (ABCD)$.

Góc giữa SB và đáy là $\widehat{SBH} = 45^\circ$.

Trong $\triangle ABH$ vuông tại A (H là trung điểm AD nên $AH = a$): $BH = \sqrt{AB^2 + AH^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Xét $\triangle SBH$ vuông tại H : $SH = BH \cdot \tan 45^\circ = a\sqrt{2}$.

Sử dụng phương pháp tọa độ hóa với $H(0; 0; 0)$, $A(0; a; 0)$, $D(0; -a; 0)$, $B(a; a; 0)$, $S(0; 0; a\sqrt{2})$.

Ta có $\overrightarrow{SD} = (0; -a; -a\sqrt{2})$ và $\overrightarrow{BH} = (-a; -a; 0)$.

Vectơ pháp tuyến chung của SD và BH là $\vec{n} = [\overrightarrow{SD}, \overrightarrow{BH}] = (-a^2\sqrt{2}; a^2\sqrt{2}; -a^2)$.

Chọn $D(0; -a; 0) \in SD$ và $H(0; 0; 0) \in BH \Rightarrow \overrightarrow{DH} = (0; a; 0)$.

Khoảng cách giữa SD và BH là:

$$d(SD, BH) = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{DH}|}{|\vec{n}|} = \frac{|a^3\sqrt{2}|}{\sqrt{2a^4 + 2a^4 + a^4}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{a^2\sqrt{5}} = a\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Từ đó ta có $m = \sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow m^2 = \frac{2}{5}$.

Giá trị của biểu thức $\frac{3}{5}m^2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25} = 0,24$.

Bài 2. Một hợp tác xã nông nghiệp dự định sử dụng một khu nhà màng có diện tích tối đa là 750 m^2 để trồng hai loại nông sản giá trị cao: Dưa lưới và Cà chua bi. Hợp tác xã đang cân nhắc việc phân bổ diện tích trồng sao cho thu được lợi nhuận cao nhất, dựa trên các điều kiện thực tế sau:

- ◇ Về nhân công: Để chăm sóc 100 m^2 dưa lưới trong một vụ cần 20 ngày công; đối với cà chua bi là 30 ngày công. Hợp tác xã chỉ có thể huy động tối đa 180 ngày công cho vụ mùa này.
- ◇ Về vốn đầu tư (giống, vật tư): Chi phí đầu tư cho 100 m^2 dưa lưới là 30 triệu đồng; cho cà chua bi là 20 triệu đồng. Tổng số vốn hợp tác xã có thể giải ngân tối đa là 210 triệu đồng.
- ◇ Về lợi nhuận dự kiến: Sau khi thu hoạch, mỗi 100 m^2 dưa lưới mang lại mức lợi nhuận 50 triệu đồng, và mỗi 100 m^2 cà chua bi mang lại 40 triệu đồng.

Ban chủ nhiệm hợp tác xã cần quyết định diện tích trồng mỗi loại nông sản để tổng lợi nhuận thu được là lớn nhất, lợi nhuận lớn nhất đó là bao nhiêu triệu đồng?

Hướng dẫn giải. Gọi x (đơn vị: 100 m^2) là diện tích trồng Dưa lưới ($x \geq 0$).

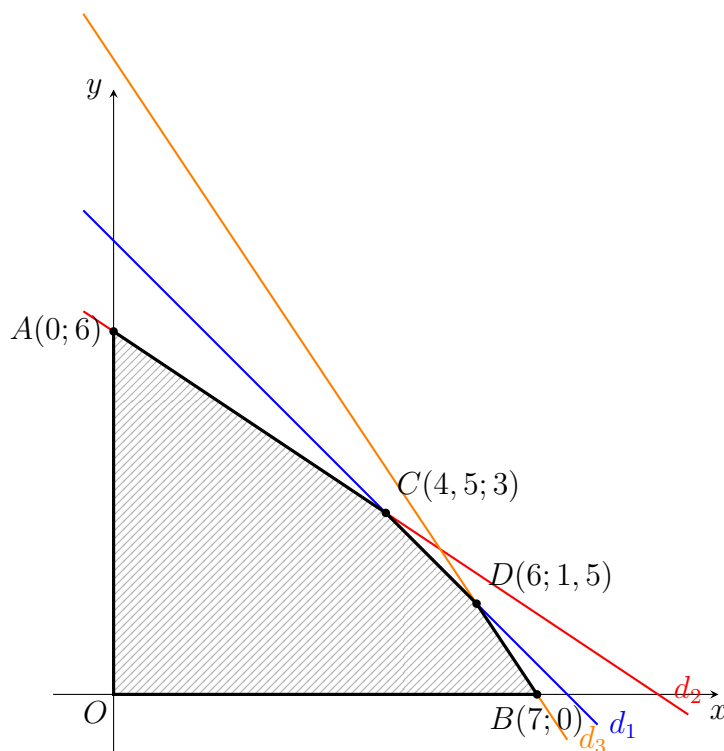
Gọi y (đơn vị: 100 m^2) là diện tích trồng Cà chua bi ($y \geq 0$).

Từ các điều kiện của bài toán, ta có hệ bất phương trình sau:

- ◇ Diện tích tối đa 750 m^2 : $100x + 100y \leq 750 \iff x + y \leq 7,5$.
- ◇ Giới hạn nhân công: $20x + 30y \leq 180 \iff 2x + 3y \leq 18$.
- ◇ Giới hạn vốn đầu tư: $30x + 20y \leq 210 \iff 3x + 2y \leq 21$.

Như vậy, ta cần tìm $(x; y)$ thỏa mãn hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 7,5 \\ 2x + 3y \leq 18 \\ 3x + 2y \leq 21 \end{cases}$$



Hàm lợi nhuận: $F(x, y) = 50x + 40y$

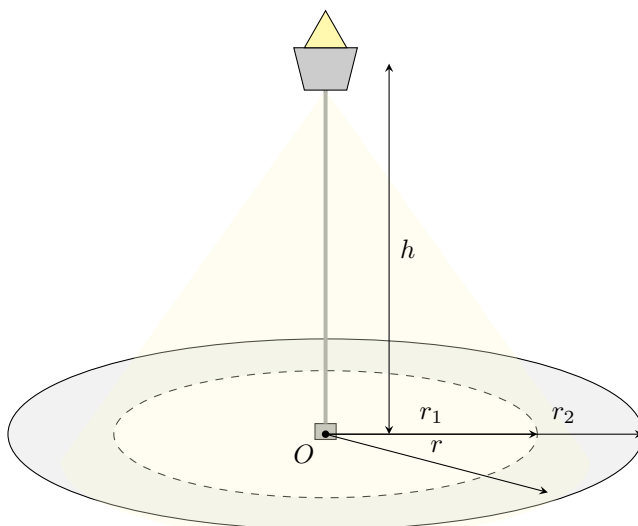
- ◇ $F(0; 0) = 50 \cdot 0 + 40 \cdot 0 = 0$.

- ◇ $F(0; 6) = 50 \cdot 0 + 40 \cdot 6 = 240$.
- ◇ $F(7; 0) = 50 \cdot 7 + 40 \cdot 0 = 350$.
- ◇ $F(4, 5; 3) = 50 \cdot 4, 5 + 40 \cdot 3 = 225 + 120 = 345$.
- ◇ $F(6; 1, 5) = 50 \cdot 6 + 40 \cdot 1, 5 = 300 + 60 = 360$.

So sánh các giá trị trên, ta thấy lợi nhuận lớn nhất là 360 triệu đồng đạt được khi $x = 6$ và $y = 1, 5$.

Vậy hợp tác xã nên trồng 600 m² dưa lưới và 150 m² cà chua bi. Lợi nhuận lớn nhất thu được là 360 triệu đồng.

Bài 3. Một lối đi dạo trong công viên có dạng hình vành khăn, được giới hạn bởi hai đường tròn đồng tâm với bán kính lần lượt là $r_1 = 6$ m và $r_2 = 8$ m. Tại tâm O của các đường tròn này, người ta dựng một cột đèn có chiều cao h (mét) để chiếu sáng. Giả sử theo mô hình kỹ thuật của loại đèn này, cường độ sáng I (lux) tại một điểm trên mặt đất cách chân cột đèn một khoảng r (mét) được tính bởi công thức $I(r) = \frac{h}{r^2 + 4h^2}$. Xác định chiều cao h của cột đèn sao cho cường độ sáng tại vị trí tối nhất trên lối đi đạt giá trị lớn nhất.



Hướng dẫn giải. Lối đi dạo là tập hợp các điểm có khoảng cách r đến tâm O thỏa mãn $6 \leq r \leq 8$.

Với mỗi chiều cao $h > 0$ cố định, cường độ sáng là hàm số $I(r) = \frac{h}{r^2 + 4h^2}$.

Vì $h > 0$ nên mẫu số $r^2 + 4h^2$ là hàm đồng biến theo r trên $[6; 8]$, dẫn đến $I(r)$ là hàm nghịch biến trên $[6; 8]$.

Do đó, vị trí tối nhất trên lối đi ứng với giá trị r lớn nhất, tức là $r = 8$ m.

Cường độ sáng tại vị trí tối nhất này là:

$$f(h) = I(8) = \frac{h}{8^2 + 4h^2} = \frac{h}{4h^2 + 64}$$

Xét hàm số $f(h) = \frac{h}{4h^2 + 64}$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Ta có đạo hàm:

$$f'(h) = \frac{(h)'(4h^2 + 64) - h(4h^2 + 64)'}{(4h^2 + 64)^2} = \frac{4h^2 + 64 - 8h^2}{(4h^2 + 64)^2} = \frac{64 - 4h^2}{(4h^2 + 64)^2}$$

$$\text{Cho } f'(h) = 0 \iff 64 - 4h^2 = 0 \iff h^2 = 16 \iff h = 4 \text{ (do } h > 0 \text{)}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(h)$:

h	0	4	$+\infty$
$f'(h)$	+	0	-
$f(h)$	0	$\frac{1}{32}$	0

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $f(h)$ đạt giá trị lớn nhất tại $h = 4$.

Vậy chiều cao cột đèn $h = 4$ mét là giá trị cần tìm.

Bài 4. Cho bảng ô vuông 3×3 . Hãy tìm cách điền các số tự nhiên từ 1 đến 9 vào bảng sao cho mỗi số chỉ xuất hiện một lần và tổng các số theo hàng ngang, cột dọc, hai đường chéo đều bằng 15. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách điền như vậy?

→

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Hướng dẫn giải.

Tìm số ở chính giữa bảng (ô tâm)

- ◇ Có 4 đường đi qua ô trung tâm: 1 hàng ngang, 1 cột dọc và 2 đường chéo.
- ◇ Tổng của 4 đường này là: $15 \times 4 = 60$.
- ◇ Trong tổng này, các số từ 1 đến 9 mỗi số xuất hiện 1 lần, riêng số ở tâm được tính 4 lần (lặp lại thêm 3 lần).
- ◇ Tổng các số từ 1 đến 9 là: $1 + 2 + \dots + 9 = 45$.
- ◇ Gọi số ở tâm là x , ta có: $45 + 3x = 60 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5$.

Số chính giữa bảng luôn luôn là số **5**.

Xác định vị trí các số chẵn và lẻ

- ◇ Để tổng bằng 15 (số lẻ), và ô giữa là số 5 (số lẻ), ta xét các cặp số đối xứng qua số 5 có tổng bằng 10: (1, 9); (2, 8); (3, 7); (4, 6).
- ◇ Các số chẵn {2, 4, 6, 8} bắt buộc phải nằm ở 4 góc của bảng. Nếu đặt số lẻ vào góc, ta sẽ không thể tạo ra tổng bằng 15 ở các hàng/cột liên quan mà không bị lặp số.

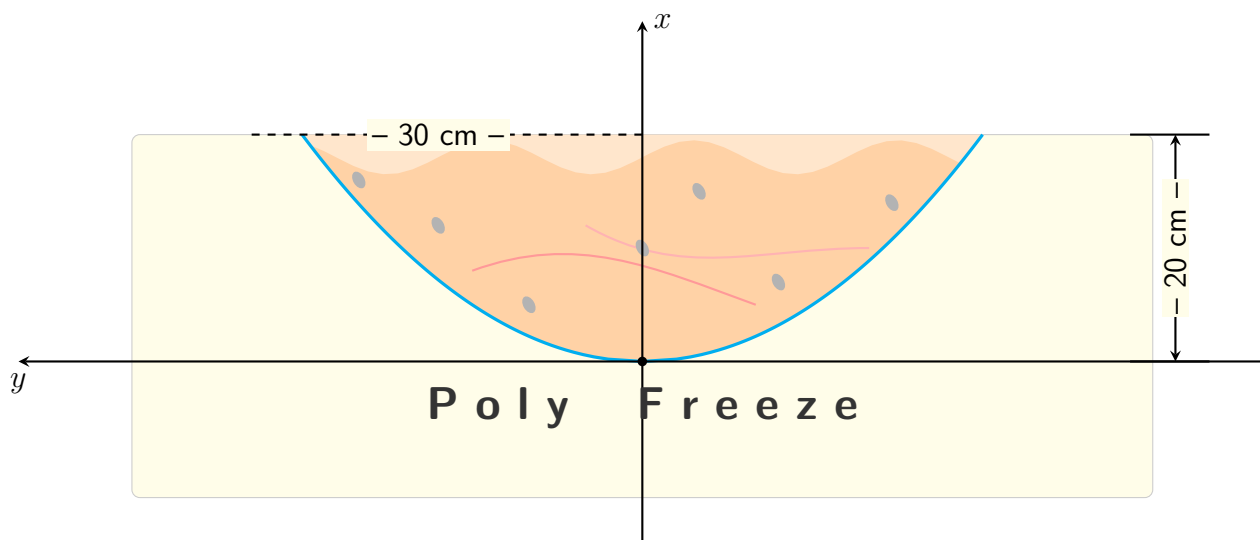
Tính số cách điền

- ◇ Chọn vị trí cho số 2: Có 4 cách (là 4 ô ở góc).
- ◇ Chọn vị trí cho số 4: Số 4 không được đối diện với số 2 (vì $2 + 5 + 4 = 11 \neq 15$), nên số 4 chỉ có thể nằm ở 2 góc còn lại.
- ◇ Sau khi cố định được số 2 và 4, các vị trí còn lại sẽ được tính toán tự động theo quy tắc tổng bằng 15 (duy nhất).

◇ Vậy tổng số cách điền là: $4 \times 2 = 8$ (cách).

Vậy có 8 cách điền số khác nhau.

Bài 5. Một thùng làm kem có mặt cắt dạng parabol như hình. Biết phương trình đường biên có dạng $f(x) = a\sqrt{x}$, hỏi dung tích của thùng bằng bao nhiêu lít.



Hướng dẫn giải.

Từ hình vẽ, ta thấy tại vị trí cao nhất của thùng (ứng với trục x), chiều cao là 20 cm và bán kính miệng thùng là 30 cm. Điều này tương ứng với điểm $(20; 30)$ thuộc đồ thị hàm số $f(x)$.

Ta có:

$$f(20) = 30 \Rightarrow a\sqrt{20} = 30 \Rightarrow a = \frac{30}{\sqrt{20}} = \frac{30}{2\sqrt{5}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}.$$

Vậy phương trình đường biên là $f(x) = 3\sqrt{5}\sqrt{x}$.

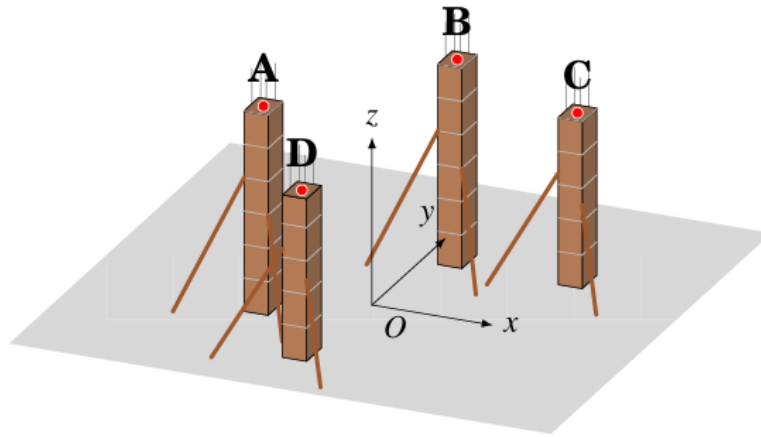
Dung tích của thùng chính là thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $f(x)$, trục Ox và các đường thẳng $x = 0, x = 20$ quanh trục Ox :

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{20} (f(x))^2 dx = \pi \int_0^{20} (3\sqrt{5}\sqrt{x})^2 dx \\ &= \pi \int_0^{20} 45x dx = \pi \cdot \left[\frac{45}{2} x^2 \right]_0^{20} \\ &= \pi \cdot \left(\frac{45}{2} \cdot 20^2 \right) = \pi \cdot 9000 \approx 28274,33 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Đổi đơn vị sang lít ($1 \text{ lít} = 1000 \text{ cm}^3$):

$$V \approx \frac{28274,33}{1000} \approx 28,3 \text{ lít}.$$

Bài 6. Hình vẽ minh họa một khu nhà đang xây dựng được gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét). Mỗi cột bê tông có dạng hình lăng trụ tứ giác đều và tâm của mặt đáy trên lần lượt là các điểm $A(2; 1; 3)$, $B(4; 3; 3)$, $C(6; 3; 2,5)$, $D(4k; 0; 3k)$. Biết rằng 4 điểm A, B, C, D đồng phẳng, tính giá trị của k (viết kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



Hướng dẫn giải. Ta có tọa độ các điểm $A(2; 1; 3)$, $B(4; 3; 3)$, $C(6; 3; 2, 5)$.

◇ $\overrightarrow{AB} = (2; 2; 0)$.

◇ $\overrightarrow{AC} = (4; 2; -0, 5)$.

Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-1; 1; -4)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) đi qua $A(2; 1; 3)$ là: $-1(x - 2) + 1(y - 1) - 4(z - 3) = 0 \Leftrightarrow x - y + 4z - 13 = 0$.

Vì bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng nên điểm $D(4k; 0; 3k)$ thuộc mặt phẳng (ABC) .

Thay tọa độ điểm D vào phương trình mặt phẳng (ABC) , ta được: $4k - 0 + 4(3k) - 13 = 0 \Leftrightarrow 16k = 13 \Leftrightarrow k = \frac{13}{16} = 0,8125$.

Vậy giá trị của k làm tròn đến hàng phần mười là $k \approx 0,8$.

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

❖ **Câu 1.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là

- (A) $x^3 + C$. (B) $\frac{x^3}{3} + x + C$. (C) $6x + C$. (D) $x^3 + x + C$.

➤ *Hướng dẫn giải.* Ta có $\int (3x^2 + 1)dx = x^3 + x + C$.

❖ **Câu 2.** Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ bằng

- (A) $\left| \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \right|$. (B) $\int_a^b |f(x) + g(x)|dx$.
(C) $\int_a^b |f(x) - g(x)|dx$. (D) $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$.

➤ *Hướng dẫn giải.* Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số liên tục trên $[a; b]$ là $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$.

❖ **Câu 3.** Mỗi ngày bác Hương đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (km) của bác Hương trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau

Quãng đường (km)	[2, 7; 3, 0)	[3, 0; 3, 3)	[3, 3; 3, 6)	[3, 6; 3, 9)	[3, 9; 4, 2)
Số ngày	3	6	5	4	2

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

- (A) 3, 39. (B) 11, 62. (C) 0, 1314. (D) 0, 36.

➤ *Hướng dẫn giải.* Giá trị đại diện các nhóm: 2, 85; 3, 15; 3, 45; 3, 75; 4, 05.

Số trung bình: $\bar{x} = \frac{3 \cdot 2,85 + 6 \cdot 3,15 + 5 \cdot 3,45 + 4 \cdot 3,75 + 2 \cdot 4,05}{20} = 3,39$.

Phương sai: $s^2 = \frac{1}{20} [3(2,85 - 3,39)^2 + \dots + 2(4,05 - 3,39)^2] = 0,1314$.

❖ **Câu 4.** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+2}{3}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d ?

- (A) $\vec{u} = (1; 3; -2)$. (B) $\vec{u} = (2; 5; 3)$.
(C) $\vec{u} = (2; -5; 3)$. (D) $\vec{u} = (1; 3; 2)$.

➤ *Hướng dẫn giải.* Từ phương trình đường thẳng d , ta thấy vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; -5; 3)$.

❖ **Câu 5.** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+2}{x-2}$ là đường thẳng có phương trình

- (A) $x = 2$. (B) $x = -1$. (C) $x = 3$. (D) $x = -2$.

Hướng dẫn giải. Nghiệm của mẫu số $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 6. Giải bất phương trình $\log_2(3x - 1) > 3$.

- (A) $x > 3$. (B) $\frac{1}{3} < x < 3$. (C) $x < 3$. (D) $x > \frac{10}{3}$.

Hướng dẫn giải. Điều kiện $3x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1/3$. BPT $\Leftrightarrow 3x - 1 > 2^3 \Leftrightarrow 3x > 9 \Leftrightarrow x > 3$.

Câu 7. Cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -2$ và $u_2 = 3$. Số hạng u_8 của cấp số cộng là

- (A) 33. (B) -33. (C) 5. (D) 38.

Hướng dẫn giải. Công sai $d = u_2 - u_1 = 3 - (-2) = 5$. Ta có $u_8 = u_1 + 7d = -2 + 7 \cdot 5 = 33$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x + 3y - 4z + 5 = 0$. Vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) ?

- (A) $\vec{n}_1 = (3; 4; 5)$. (B) $\vec{n}_2 = (1; 3; -4)$.
(C) $\vec{n}_3 = (1; 3; 4)$. (D) $\vec{n}_4 = (3; -4; 5)$.

Hướng dẫn giải. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng là hệ số của x, y, z , đó là $\vec{n} = (1; 3; -4)$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $BA \perp (SAD)$. (B) $BA \perp (SAC)$.
(C) $BA \perp (SBC)$. (D) $BA \perp (SCD)$.

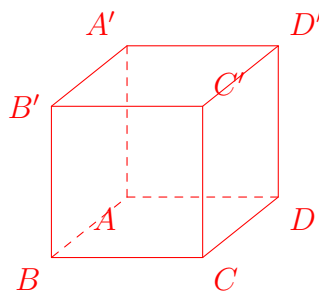
Hướng dẫn giải. Ta có $BA \perp AD$ (đáy vuông) và $BA \perp SA$ (do $SA \perp$ đáy). Suy ra $BA \perp (SAD)$.

Câu 10. Nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{25}\right)^{3-2x} = 5^{x+3}$ là

- (A) $x = -3$. (B) $x = 5$. (C) $x = -5$. (D) $x = 3$.

Hướng dẫn giải. PT $\Leftrightarrow (5^{-2})^{3-2x} = 5^{x+3} \Leftrightarrow -6 + 4x = x + 3 \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3$.

Câu 11. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (minh họa như hình bên). Phát biểu nào sau đây là đúng?

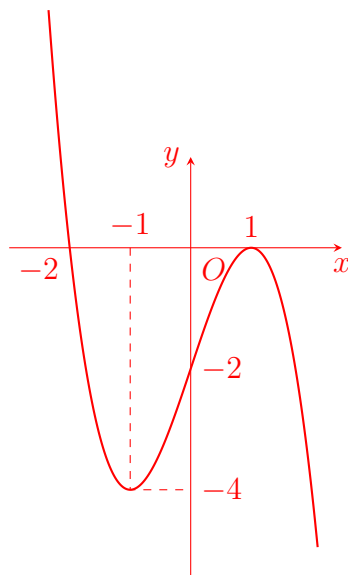


- (A) $\vec{AB} + \vec{BB'} + \vec{B'A'} = \vec{AC'}$. (B) $\vec{AB} + \vec{AA'} + \vec{AD} = \vec{AC'}$.
(C) $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AA'} = \vec{AC'}$. (D) $\vec{AB} + \vec{BC'} + \vec{C'D'} = \vec{AC'}$.

Hướng dẫn giải. Theo quy tắc hình hộp: $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'} = \vec{AC'}$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng

nào sau đây?



- Ⓐ $(-\infty; -1)$. Ⓑ $(-1; 1)$. Ⓒ $(-2; 1)$. Ⓓ $(1; +\infty)$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị, hàm số đi lên từ $x = -1$ đến $x = 1$. Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai

Bài 1. Một gian thương đã trộn các sản phẩm sữa kém chất lượng (sữa giả) với các sản phẩm sữa chất lượng. Trong một lô hàng có 20 hộp sữa chất lượng và 10 hộp sữa giả. Sau khi một khách hàng đến mua 1 hộp sữa từ lô hàng trên thì lực lượng quản lý thị trường đến và lấy ngẫu nhiên 3 hộp sữa từ lô hàng đó đi kiểm tra. Các khẳng định sau là đúng hay sai?

- a) Xác suất khách hàng mua phải hộp sữa giả là $\frac{1}{3}$.
- b) Xác suất để lực lượng quản lý thị trường phát hiện lô hàng có hộp sữa giả là $\frac{146}{203}$.
- c) Nếu biết khách hàng đó đã mua phải hộp sữa giả, xác suất để quản lý thị trường phát hiện lô hàng có hộp sữa giả là $\frac{419}{1827}$.
- d) Nếu biết quản lý thị trường sau khi kiểm tra đã phát hiện lô hàng có hộp sữa giả, xác suất để khách hàng đó mua phải hộp sữa giả là $\frac{419}{1314}$.

Hướng dẫn giải. Xét các biến cố:

- ◇ A: "Khách hàng mua phải hộp sữa giả". Suy ra $P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.
- ◇ $\bar{A}$: "Khách hàng mua phải hộp sữa chất lượng". Suy ra $P(\bar{A}) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$.
- ◇ D: "Quản lý thị trường phát hiện lô hàng có hộp sữa giả" (tức là lấy được ít nhất một hộp giả trong 3 hộp).
- a) Xác suất khách hàng mua phải hộp sữa giả là $P(A) = \frac{1}{3}$. Đây là khẳng định **Đúng**.
- c) Nếu biết khách hàng đã mua phải hộp sữa giả (biến cố A đã xảy ra), trong lô còn lại 29 hộp

(9 hộp giả và 20 hộp chất lượng). Số cách chọn 3 hộp từ 29 hộp là $n(\Omega') = C_{29}^3 = 3654$.

Xác suất để quản lý thị trường phát hiện sữa giả (trong 3 hộp có ít nhất 1 giả) là:

$$P(D|A) = 1 - \frac{C_{20}^3}{C_{29}^3} = 1 - \frac{1140}{3654} = 1 - \frac{190}{609} = \frac{419}{609}.$$

Ta thấy $\frac{419}{1827} = \frac{1}{3} \cdot \frac{419}{609} = P(A) \cdot P(D|A) = P(A \cap D)$. Đây là xác suất đồng thời chứ không phải xác suất có điều kiện. Vậy khẳng định c **Sai**.

b) Nếu khách hàng mua phải hộp sữa chất lượng (biến cố $\bar{A}$ đã xảy ra), trong lô còn lại 29 hộp (10 hộp giả và 19 hộp chất lượng).

Xác suất quản lý thị trường phát hiện sữa giả khi đó là:

$$P(D|\bar{A}) = 1 - \frac{C_{19}^3}{C_{29}^3} = 1 - \frac{969}{3654} = 1 - \frac{323}{1218} = \frac{895}{1218}.$$

Xác suất đầy đủ để quản lý thị trường phát hiện sữa giả là:

$$P(D) = P(A) \cdot P(D|A) + P(\bar{A}) \cdot P(D|\bar{A}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{419}{609} + \frac{2}{3} \cdot \frac{895}{1218} = \frac{419}{1827} + \frac{895}{1827} = \frac{1314}{1827} = \frac{146}{203}.$$

Đây là khẳng định **Đúng**.

d) Nếu biết quản lý thị trường đã phát hiện lô hàng có hộp sữa giả, xác suất khách hàng đã mua phải hộp sữa giả là:

$$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{419}{1827}}{\frac{1314}{1827}} = \frac{419}{1314}.$$

Đây là khẳng định **Đúng**.

 **Bài 2.** Một địa phương A bị thiệt hại do lũ lụt được trợ cấp số tiền 2 tỷ đồng. Số tiền này sẽ được giải ngân toàn bộ trong 100 ngày kể từ khi bắt đầu giải ngân. Kết quả theo dõi cho thấy tốc độ giải ngân tiền trợ cấp $M'(t)$ (đơn vị: triệu đồng/ngày) tại thời điểm t ngày ($0 \leq t \leq 100$) kể từ khi bắt đầu giải ngân, được cho bởi công thức $M'(t) = k(100 - t)^2$ ($0 \leq t \leq 100$), trong đó $M(t)$ (đơn vị: triệu đồng) là số tiền đã giải ngân sau t ngày ($0 \leq t \leq 100$) kể từ khi bắt đầu giải ngân và k là hằng số khác không.

a) $M(t) = k \left(10000t - 100t^2 + \frac{t^3}{3} \right) + C.$

b) $C = 2000.$

c) $k = 0,6.$

d) Số tiền còn lại chưa giải ngân sau 40 ngày kể từ khi bắt đầu giải ngân là 432 triệu đồng.

 **Hướng dẫn giải.** a) **Đúng**

Ta có $M(t)$ là nguyên hàm của $M'(t)$:

$$M(t) = \int k(100 - t)^2 dt = \int k(10000 - 200t + t^2) dt$$

$$M(t) = k \left(10000t - \frac{200t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \right) + C = k \left(10000t - 100t^2 + \frac{t^3}{3} \right) + C.$$

b) **Sai**

Tại thời điểm bắt đầu giải ngân ($t = 0$), số tiền đã giải ngân phải bằng 0, tức là $M(0) = 0$.

Thay vào công thức ở câu a: $M(0) = k(0) + C = 0 \Rightarrow C = 0$.

c) Sai

Tổng số tiền trợ cấp là 2 tỷ đồng = 2000 triệu đồng. Sau 100 ngày giải ngân hết nên $M(100) = 2000$.

Với $C = 0$, ta có:

$$\begin{aligned} M(100) &= k \left(10000 \cdot 100 - 100 \cdot 100^2 + \frac{100^3}{3} \right) = 2000 \\ &\Leftrightarrow k \left(1.000.000 - 1.000.000 + \frac{1.000.000}{3} \right) = 2000 \\ &\Leftrightarrow k \cdot \frac{1.000.000}{3} = 2000 \Rightarrow k = \frac{6000}{1.000.000} = 0,006. \end{aligned}$$

d) Đúng

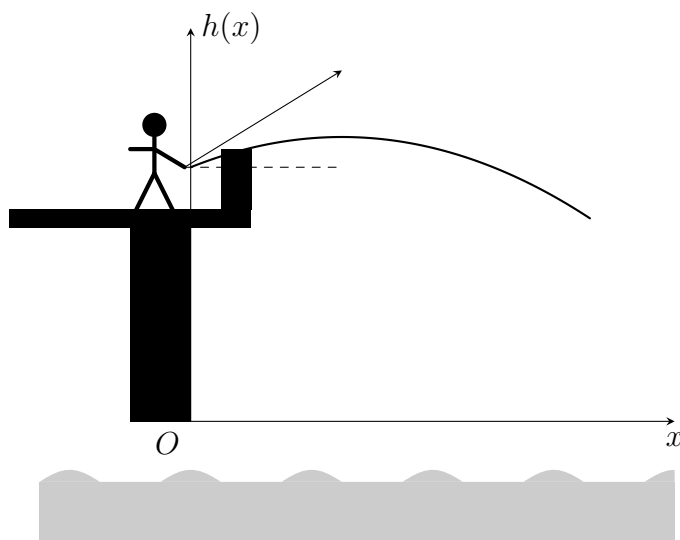
Số tiền đã giải ngân sau 40 ngày là:

$$\begin{aligned} M(40) &= 0,006 \left(10000 \cdot 40 - 100 \cdot 40^2 + \frac{40^3}{3} \right) \\ M(40) &= 0,006 \left(400000 - 160000 + \frac{64000}{3} \right) = 0,006 \cdot \frac{784000}{3} = 1568 \text{ (triệu đồng)}. \end{aligned}$$

Số tiền còn lại chưa giải ngân là:

$$2000 - 1568 = 432 \text{ (triệu đồng)}.$$

Bài 3. Một hòn đá được ném từ một cây cầu với quỹ đạo ban đầu là 25° so với phương nằm ngang. Vào thời điểm nó di chuyển được x (m) theo phương ngang, chiều cao của hòn đá so với mặt nước dưới cầu được cho bởi $h(x) = ax^2 + bx + c$ (mét) với $a, b, c \in \mathbb{R}$. Hòn đá được ném từ độ cao 3 mét so với mặt nước và đạt độ cao cực đại khi $x = 5$.



- Giá trị $c = 3$.
- Đạo hàm của $h(x)$ là $h'(x) = 2ax + b$.
- Độ cao lớn nhất của hòn đá so với mặt nước là 4,16 mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).
- Hòn đá rơi xuống nước tại vị trí $x = 4,45$ mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

 **Hướng dẫn giải.** a) **Đúng.**

Ta có $h(0) = 3 \Leftrightarrow c = 3$, khi đó $h(x) = ax^2 + bx + 3$ (mét).

Mặt khác hòn đá đạt độ cao cực đại khi $x = 5$ suy ra $\frac{-b}{2a} = 5 \Rightarrow a = \frac{-1}{10}b$.

Mà ban đầu hòn đá được ném với góc 25° so với phương nằm ngang nên hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm ném ($x = 0$) là $h'(0) = \tan 25^\circ$.

Suy ra $h'(0) = \tan 25^\circ \Leftrightarrow b = \tan 25^\circ$.

Từ đó ta được $a = \frac{-1}{10} \cdot \tan 25^\circ$.

Suy ra $h(x) = \frac{-\tan 25^\circ}{10}x^2 + \tan 25^\circ x + 3$.

b) **Đúng.**

Ta có $h'(x) = 2ax + b = -\frac{\tan 25^\circ}{5}x + \tan 25^\circ$.

c) **Sai.**

Hòn đá đạt độ cao lớn nhất so với mặt nước khi $x = 5$, khi đó ta có:

$$h(5) = -\frac{\tan 25^\circ}{10} \cdot 5^2 + \tan 25^\circ \cdot 5 + 3 \approx 4,17 \text{ mét.}$$

d) **Sai.**

Hòn đá rơi xuống mặt nước khi $h(x) = 0$. Xét phương trình:

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-\tan 25^\circ}{10}x^2 + \tan 25^\circ x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx -4,45 \text{ (loại)} \\ x \approx 14,45 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

Vậy hòn đá rơi xuống mặt nước tại vị trí $x \approx 14,45$ mét.

 **Bài 4.** Trong không gian chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước, trong đó xem mặt phẳng (Oxy) là mặt đất, mỗi đơn vị trên trục tương ứng với 1 km, một ra đa được đặt tại vị trí gốc tọa độ O phát hiện một máy bay chiến đấu di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(500; 200; 10)$ đến điểm $N(300; 800; 10)$ trong 40 phút.

- a) Khoảng cách $MN = 200\sqrt{10}$ km.
- b) Khi đến N máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 8 phút tiếp theo là $Q(a; b; c)$ với $a + b + c = 1030$.
- c) Máy bay chiến đấu khi bay từ M đến N luôn cách mặt đất là 10 km.
- d) Góc $\widehat{MON}$ được gọi là góc quét của ra đa khi quan sát máy bay chiến đấu bay từ M đến N . Trong tình huống trên góc quét $\widehat{MON}$ lớn hơn 45° .

 **Hướng dẫn giải.** Từ giả thiết ta có $M(500; 200; 10)$ và $N(300; 800; 10)$.

a) **Đúng.**

Vectơ $\overrightarrow{MN} = (300 - 500; 800 - 200; 10 - 10) = (-200; 600; 0)$.

Khoảng cách $MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(-200)^2 + 600^2 + 0^2} = \sqrt{400000} = 200\sqrt{10}$ (km).

b) **Sai.**

Vận tốc máy bay (km/phút) là: $\vec{v} = \frac{1}{40}\overrightarrow{MN} = \left(\frac{-200}{40}; \frac{600}{40}; \frac{0}{40}\right) = (-5; 15; 0)$.

Tọa độ máy bay sau 8 phút tiếp theo (điểm Q): $\overrightarrow{NQ} = 8 \cdot \vec{v} = (-40; 120; 0)$.

Suy ra $Q(300 - 40; 800 + 120; 10 + 0) \Rightarrow Q(260; 920; 10)$.

Khi đó $a + b + c = 260 + 920 + 10 = 1190 \neq 1030$.

c) **Đúng.**

Máy bay di chuyển từ M đến N , có tọa độ cao độ (trục Oz) là $z_M = 10$ và $z_N = 10$. Vì máy bay di chuyển thẳng nên cao độ luôn không đổi $z = 10$.

Mặt đất là mặt phẳng (Oxy) có phương trình $z = 0$. Vậy khoảng cách luôn là 10 km.

d) **Đúng.**

Ta có $\overrightarrow{OM} = (500; 200; 10)$ và $\overrightarrow{ON} = (300; 800; 10)$.

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{500^2 + 200^2 + 10^2} = \sqrt{290100} = 10\sqrt{2901}.$$

$$|\overrightarrow{ON}| = \sqrt{300^2 + 800^2 + 10^2} = \sqrt{730100} = 10\sqrt{7301}.$$

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 500 \cdot 300 + 200 \cdot 800 + 10 \cdot 10 = 310100.$$

$$\cos \widehat{MON} = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}}{|\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{ON}|} = \frac{310100}{10\sqrt{2901} \cdot 10\sqrt{7301}} = \frac{3101}{\sqrt{2901 \cdot 7301}} \approx 0,6738.$$

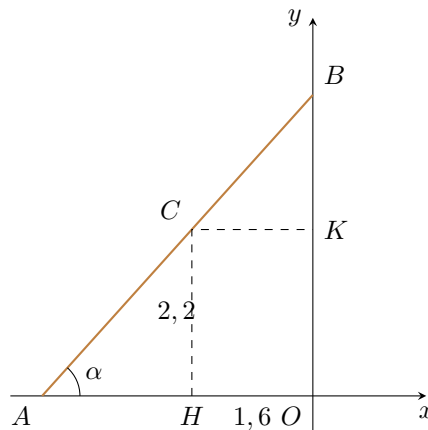
$$\text{Vì } \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071.$$

Do $0,6738 < 0,7071$ nên $\widehat{MON} > 45^\circ$.

Phần III. Câu trả lời ngắn Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Bài 1. Để làm công tác cứu nạn ở một ngôi nhà ba tầng có một hàng rào cao $2,2(m)$ song song và cách bức tường ngôi nhà một khoảng bằng $1,6(m)$. Người ta dựng một cái thang thẳng có một đầu chạm đất, đầu kia chạm vào bức tường ngôi nhà, thân của thang chạm vào mép trên hàng rào (tham khảo hình vẽ). Chiều dài ngắn nhất của cái thang là bao nhiêu? (đơn vị là mét, không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần trăm)

Hướng dẫn giải. Gọi α là góc tạo bởi cái thang và mặt đất ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$).



Dựa vào hình vẽ, chiều dài của cái thang L được tính bằng tổng hai đoạn: đoạn từ mặt đất đến mép hàng rào và đoạn từ mép hàng rào đến tường.

Ta có công thức:

$$L = f(\alpha) = \frac{2,2}{\sin \alpha} + \frac{1,6}{\cos \alpha}$$

Xét hàm số $f(\alpha)$ trên khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$:

$$f'(\alpha) = -\frac{2,2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{1,6 \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1,6 \sin^3 \alpha - 2,2 \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$$

$$f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 1,6 \sin^3 \alpha = 2,2 \cos^3 \alpha \Leftrightarrow \tan^3 \alpha = \frac{2,2}{1,6} = \frac{11}{8} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt[3]{11}}{2}.$$

Đặt α_0 là giá trị thỏa mãn $\tan \alpha_0 = \frac{\sqrt[3]{11}}{2}$.

Bảng biến thiên:

α	0	α_0	$\frac{\pi}{2}$		
$f'(\alpha)$	//	-	0	+	//
$f(\alpha)$	$+\infty$			$+\infty$	

Giá trị nhỏ nhất của chiều dài thang là:

$$L_{\min} = f(\alpha_0) = \left(2,2 \frac{2}{3} + 1,6 \frac{2}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \approx 5,3515 \dots$$

Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm, ta được 5,35 (m).

Bài 2. Do gặp mưa bão và sự cố nên một con tàu bị hỏng động cơ và thiết bị liên lạc. Tại thời điểm cuối cùng trước khi mất liên lạc con tàu, radar của trung tâm phòng chống lụt bão xác định được tàu ở vị trí $T(60; 75; 0)$ trong hệ $Oxyz$ mà mỗi đơn vị trên trục tương ứng có độ dài 1 km. Đội cứu hộ đã ngay lập tức dùng trực thăng cứu hộ, sau 2 phút trực thăng ở vị trí $A(0; 0; 2)$. Trong điều kiện bình thường (không gió) động cơ máy bay đẩy được máy bay bay với tốc độ tối đa 400 km/h. Lúc này, sức gió mạnh sẽ đẩy máy bay với vận tốc 50 km/h và hướng theo $\vec{v}_1 = (4; 3; 0)$. Động cơ trực thăng đẩy máy bay bay với vận tốc n km/h, hướng theo $\vec{v}_2 = (a; b; 0)$. Một chuyên gia cứu hộ ở trung tâm phân tích được gió và sóng biển đẩy con tàu đi với vận tốc 20 km/h và cũng hướng theo $\vec{v}_1 = (4; 3; 0)$ nên đã sử dụng phương án tối ưu, cho máy bay bay từ A hướng đến vị trí có thể gặp được con tàu sớm nhất. Tính từ thời điểm mất liên lạc con tàu, hãy tính thời gian sớm nhất máy bay tới được vị trí con tàu biết thời gian hạ cánh từ độ cao 2 km xuống mặt biển của máy bay là 1 phút (giả định để đảm bảo an toàn, máy bay cất và hạ cánh theo phương thẳng đứng đồng thời có cơ chế để cân bằng sức gió khi đó). (tính theo đơn vị phút và làm tròn đến hàng phần chục).

Hướng dẫn giải. Chọn gốc thời gian $t = 0$ là lúc con tàu mất liên lạc. Đơn vị khoảng cách là km, đơn vị thời gian là giờ.

♦ Véc-tơ hướng gió và hướng tàu là $\vec{v}_1 = (4; 3; 0)$, có độ dài $|\vec{v}_1| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 0^2} = 5$.

♦ Véc-tơ vận tốc của gió là: $\vec{V}_g = \frac{50}{5} \cdot (4; 3; 0) = (40; 30; 0)$ (km/h).

♦ Véc-tơ vận tốc của tàu do bị đẩy là: $\vec{V}_t = \frac{20}{5} \cdot (4; 3; 0) = (16; 12; 0)$ (km/h).

- ◇ Tại thời điểm t (giờ), vị trí của con tàu là: $S(t) = (60 + 16t; 75 + 12t; 0)$.
- ◇ Trực thăng ở vị trí $A(0; 0; 2)$ tại thời điểm $t_0 = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$ (giờ).
- ◇ Để gặp tàu sớm nhất, trực thăng phải bay với tốc độ tối đa 400 km/h. Gọi $\vec{v}_e = (n_x; n_y; 0)$ là véc-tơ vận tốc do động cơ tạo ra, ta có $n_x^2 + n_y^2 = 400^2$.
- ◇ Vận tốc thực tế của trực thăng đối với mặt đất khi bay ngang là: $\vec{V}_h = \vec{v}_e + \vec{V}_g = (n_x + 40; n_y + 30; 0)$.
- ◇ Gọi Δt là thời gian trực thăng bay ngang (giờ). Thời điểm trực thăng bắt đầu hạ cánh là $t_1 = \frac{1}{30} + \Delta t$.
- ◇ Thời gian hạ cánh là 1 phút $= \frac{1}{60}$ giờ. Vì máy bay hạ cánh thẳng đứng và có cơ chế cân bằng gió nên tọa độ ngang không đổi. Thời điểm gặp tàu là $t_f = t_1 + \frac{1}{60} = \Delta t + \frac{3}{60} = \Delta t + \frac{1}{20}$ (giờ).
- ◇ Để trực thăng gặp tàu tại thời điểm t_f , tọa độ ngang của trực thăng sau khi bay xong quãng đường Δt phải khớp với tọa độ tàu tại thời điểm t_f :

$$\begin{cases} (n_x + 40)\Delta t = 60 + 16\left(\Delta t + \frac{1}{20}\right) \\ (n_y + 30)\Delta t = 75 + 12\left(\Delta t + \frac{1}{20}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n_x\Delta t = 60,8 - 24\Delta t \\ n_y\Delta t = 75,6 - 18\Delta t \end{cases}$$

- ◇ Từ điều kiện $(n_x\Delta t)^2 + (n_y\Delta t)^2 = (400\Delta t)^2$, ta thiết lập phương trình:

$$\begin{aligned} (60,8 - 24\Delta t)^2 + (75,6 - 18\Delta t)^2 &= 160000\Delta t^2 \\ \Leftrightarrow 9412 - 5640\Delta t + 900\Delta t^2 &= 160000\Delta t^2 \\ \Leftrightarrow 159100\Delta t^2 + 5640\Delta t - 9412 &= 0 \end{aligned}$$

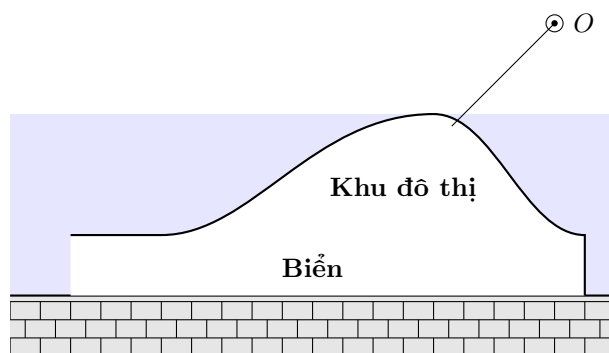
- ◇ Giải phương trình trên, ta lấy nghiệm dương: $\Delta t \approx 0,226156$ (giờ).
- ◇ Đổi sang phút: $\Delta t \approx 0,226156 \times 60 \approx 13,57$ (phút).
- ◇ Tổng thời gian tính từ khi mất liên lạc là:

$$T = 2 \text{ (phút chuẩn bị)} + 13,57 \text{ (phút bay)} + 1 \text{ (phút hạ cánh)} = 16,57 \approx 16,6 \text{ (phút)}.$$

Vậy thời gian sớm nhất để máy bay tới được vị trí con tàu là 16,6 phút.

Bài 3. Ở một vịnh biển, ngoài xa có một hòn đảo nhỏ. Người ta tiến hành lấn biển để xây một khu đô thị và làm một tuyến cáp treo nối khu đô thị với hòn đảo để phát triển du lịch. Xét trong hệ tọa độ Oxy với đơn vị đo tương ứng 1 km có hòn đảo ở O thì đường bao của phần đất lấn biển có dạng là một phần của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 1}{x}$. Giả sử tuyến cáp treo được thiết kế nối đảo với đường bao của khu đô thị với độ dài ngắn nhất. Độ dài của tuyến cáp treo là bao nhiêu km

(làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Hướng dẫn giải. Độ dài ngắn nhất của tuyến cáp treo nối với đường bao của khu đô thị chính là khoảng cách từ $O(0; 0)$ tới điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 1}{x}$.

Xét hàm số $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ với $x \neq 0$.

$$\text{Ta có: } y' = \frac{2x \cdot x - (x^2 + 1) \cdot 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}.$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-2	$+\infty$	2	$+\infty$	

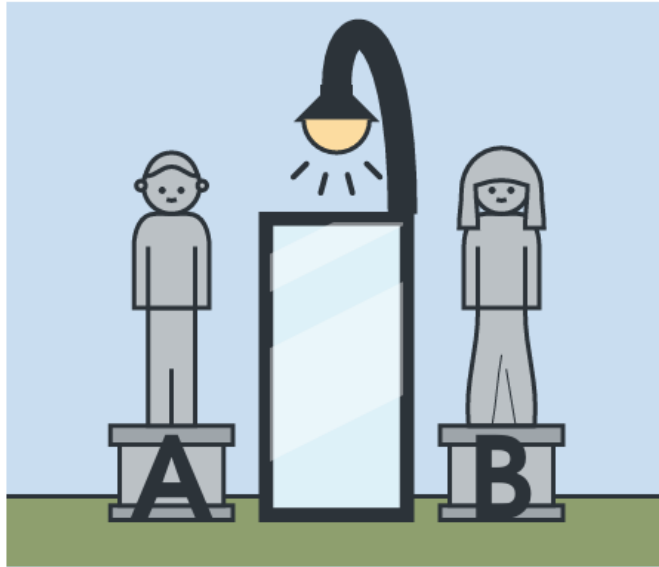
Dựa vào bảng biến thiên, đồ thị hàm số có điểm cực đại là $A(-1; -2)$.

Khi đó độ dài tuyến cáp treo ngắn nhất là khoảng cách OA :

$$OA = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \approx 2,236.$$

Làm tròn đến hàng phần mười, ta được kết quả là 2,2 km.

Bài 4. Trong một quảng trường, có hai bức tượng nghệ thuật được đặt cố định tại các vị trí $A(1; 2; -1)$ và $B(-2; 1; 0)$. Một trụ đèn chiếu sáng thông minh được lắp đặt trên một tấm kính lớn cố định, có phương trình $(P) : x - 2y + z + 4 = 0$. Gọi tọa độ điểm đặt trụ đèn là $M(a; b; c)$. Để tạo hiệu ứng ánh sáng đối xứng hoàn hảo giữa hai bức tượng, qua tính toán người thiết kế yêu cầu trụ đèn phải cách đều hai điểm A và B sao cho $MA^2 = MB^2 = 2,75$. Tính giá trị của $a + b + c$.



Hướng dẫn giải. Gọi (Q) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB , khi đó (Q) qua điểm $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB} = (-3; -1; 1)$, nên có phương trình là:

$$-3\left(x + \frac{1}{2}\right) - \left(y - \frac{3}{2}\right) + \left(z + \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -3x - y + z + \frac{1}{2} = 0.$$

Vì $MA = MB$ nên M thuộc mặt phẳng (Q) , do đó tọa độ M thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y + z + 4 = 0 \\ -3x - y + z + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y + z = -x - 4 \\ -y + z = 3x - \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x + \frac{7}{2} \\ z = 7x + 3 \end{cases}$$

Suy ra điểm M có dạng $M\left(x; 4x + \frac{7}{2}; 7x + 3\right)$.

Ta có $MA^2 = 2,75 = \frac{11}{4}$:

$$(x - 1)^2 + \left(4x + \frac{7}{2} - 2\right)^2 + (7x + 3 + 1)^2 = \frac{11}{4}$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + \left(4x + \frac{3}{2}\right)^2 + (7x + 4)^2 = \frac{11}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + 16x^2 + 12x + \frac{9}{4} + 49x^2 + 56x + 16 = \frac{11}{4}$$

$$\Leftrightarrow 66x^2 + 66x + \frac{77}{4} = \frac{11}{4} \Leftrightarrow 66x^2 + 66x + 16,5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Với $x = -\frac{1}{2}$, ta được $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Vậy $a + b + c = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0,5$.

Bài 5. Một phân xưởng sản xuất hai kiểu mũ. Thời gian để làm ra một chiếc mũ kiểu thứ nhất nhiều gấp hai lần thời gian làm ra một chiếc mũ kiểu thứ hai. Nếu chỉ sản xuất toàn kiểu mũ thứ hai thì trong 1 giờ phân xưởng làm được 60 chiếc. Phân xưởng làm việc tối đa 8 tiếng mỗi ngày và thị trường tiêu thụ tối đa trong một ngày là 200 chiếc mũ kiểu thứ nhất và 240 chiếc mũ kiểu

thứ hai. Tiền lãi khi bán một chiếc mũ kiểu thứ nhất là 24 nghìn đồng, một chiếc mũ kiểu thứ hai là 15 nghìn đồng. Tính số tiền lãi mà phân xưởng thu được trong một ngày cao nhất là bao nhiêu nghìn đồng.

Hướng dẫn giải. Gọi số lượng mũ kiểu thứ nhất và kiểu thứ hai mà phân xưởng cần sản xuất trong một ngày lần lượt là x, y ($x, y \in \mathbb{N}$).

◇ Thời gian để làm ra một chiếc mũ kiểu thứ hai là $\frac{1}{60}$ (giờ).

◇ Thời gian để làm ra một chiếc mũ kiểu thứ nhất là $2 \cdot \frac{1}{60} = \frac{1}{30}$ (giờ).

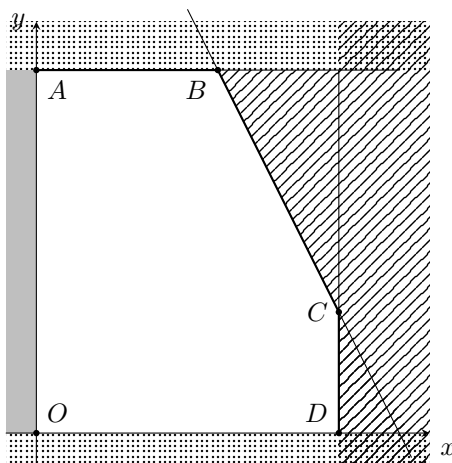
◇ Thời gian để làm ra x chiếc mũ kiểu thứ nhất và y chiếc mũ kiểu thứ hai là:

$$\frac{1}{30} \cdot x + \frac{1}{60} \cdot y = \frac{2x + y}{60} \text{ (giờ)}.$$

Theo giả thiết, phân xưởng làm tối đa 8 tiếng mỗi ngày nên $\frac{2x + y}{60} \leq 8 \Leftrightarrow 2x + y \leq 480$. Kết hợp với các điều kiện về thị trường tiêu thụ, x và y phải thỏa mãn hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 200 \\ 0 \leq y \leq 240 \\ 2x + y \leq 480. \end{cases}$$

Tổng số tiền lãi thu được là $T = 24x + 15y$ (nghìn đồng).



Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền ngũ giác $OABCD$ với: $O(0; 0)$, $A(0; 240)$, $B(120; 240)$, $C(200; 80)$, $D(200; 0)$.
Giá trị của $T = 24x + 15y$ tại các đỉnh:

◇ $T(O) = 24 \cdot 0 + 15 \cdot 0 = 0$,

◇ $T(A) = 24 \cdot 0 + 15 \cdot 240 = 3600$,

◇ $T(B) = 24 \cdot 120 + 15 \cdot 240 = 2880 + 3600 = 6480$,

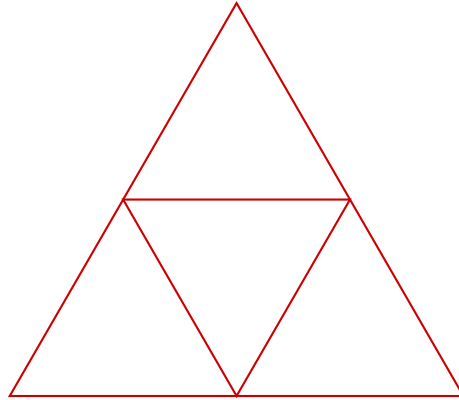
◇ $T(C) = 24 \cdot 200 + 15 \cdot 80 = 4800 + 1200 = 6000$,

◇ $T(D) = 24 \cdot 200 + 15 \cdot 0 = 4800$.

Giá trị lớn nhất là $T_{\max} = 6480$ (nghìn đồng) đạt tại đỉnh $B(120; 240)$.

Vậy để thu được tiền lãi là cao nhất thì trong một ngày, phân xưởng cần sản xuất 120 chiếc mũ kiểu thứ nhất và 240 chiếc mũ kiểu thứ hai. Khi đó tiền lãi thu được là 6480 nghìn đồng hay 6.480.000 đồng.

Bài 6. Cho hình vẽ bên gồm 4 tam giác. Người ta chọn 3 số phân biệt từ tập hợp $S = \{1; 2; \dots; 26\}$ để xếp vào 3 tam giác ở 3 góc. Sau đó, tính tổng bình phương của 3 số đó rồi ghi kết quả vào tam giác còn lại ở giữa. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho số ghi ở tam giác giữa là một số chia hết cho 5?



Hướng dẫn giải. Xét số dư của n^2 khi chia cho 5 với $n \in S$:

◇ Nếu $n \equiv 0 \pmod{5}$ thì $n^2 \equiv 0 \pmod{5}$.

Trong tập S , có 5 số là $\{5, 10, 15, 20, 25\}$. Gọi tập này là A , khi đó $|A| = 5$.

◇ Nếu $n \equiv 1$ hoặc $n \equiv 4 \pmod{5}$ thì $n^2 \equiv 1 \pmod{5}$.

Các số chia 5 dư 1 là $\{1, 6, 11, 16, 21, 26\}$ (6 số).

Các số chia 5 dư 4 là $\{4, 9, 14, 19, 24\}$ (5 số).

Vậy có $6 + 5 = 11$ số. Gọi tập này là B , khi đó $|B| = 11$.

◇ Nếu $n \equiv 2$ hoặc $n \equiv 3 \pmod{5}$ thì $n^2 \equiv 4 \pmod{5}$.

Các số chia 5 dư 2 là $\{2, 7, 12, 17, 22\}$ (5 số). Các số chia 5 dư 3 là $\{3, 8, 13, 18, 23\}$ (5 số).

Vậy có $5 + 5 = 10$ số. Gọi tập này là C , khi đó $|C| = 10$.

Gọi 3 số được chọn và xếp vào 3 góc là a, b, c . Số ghi ở tam giác giữa là $T = a^2 + b^2 + c^2$.

Để $T \equiv 0 \pmod{5}$, tức là $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 0 \pmod{5}$, ta có các trường hợp sau về số dư của (a^2, b^2, c^2) khi chia cho 5 (lấy từ tập $\{0, 1, 4\}$):

◇ **Trường hợp 1:** Cả 3 số a, b, c đều có bình phương chia hết cho 5.

Tức là $a, b, c \in A$. Vì 3 số phân biệt và có thứ tự (xếp vào 3 góc khác nhau), số cách chọn và xếp là: $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ (cách).

◇ **Trường hợp 2:** Trong 3 số, có một số bình phương dư 0, một số bình phương dư 1 và một số bình phương dư 4.

Tức là một số thuộc A , một số thuộc B và một số thuộc C . Số cách chọn 3 số từ 3 tập này là: $5 \cdot 11 \cdot 10 = 550$ (cách).

Với mỗi bộ 3 số chọn được, có $3! = 6$ cách xếp chúng vào 3 góc.

Số cách xếp trong trường hợp này là: $550 \cdot 6 = 3300$ (cách).

Vậy tổng số cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $60 + 3300 = 3360$ (cách).

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

❖ **Câu 1.** Hàm số $y = -x^3 + 2x^2 + 4x$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 . Khi đó giá trị của biểu thức $S = x_1^2 + x_2^2$ bằng

- (A) $\frac{10}{9}$. (B) $\frac{40}{9}$. (C) $\frac{10}{3}$. (D) $\frac{20}{3}$.

➤ *Hướng dẫn giải.* Ta có $y' = -3x^2 + 4x + 4$. Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Theo hệ thức Vi-ét: $x_1 + x_2 = \frac{4}{3}$ và $x_1x_2 = -\frac{4}{3}$. Ta có $S = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 2\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{9} + \frac{8}{3} = \frac{40}{9}$.

❖ **Câu 2.** Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng d đi qua hai điểm $M(1; -1; 3)$, $N(3; 0; 2)$ có phương trình tham số là

- (A) $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$. (B) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$.
(C) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$.

➤ *Hướng dẫn giải.* Vectơ chỉ phương $\overrightarrow{MN} = (2; 1; -1)$. Đường thẳng đi qua $N(3; 0; 2)$ và có véc-tơ chỉ phương $(2; 1; -1)$ có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$.

❖ **Câu 3.** Thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$), xung quanh trục Ox là

- (A) $V = \int_a^b |f(x)|dx$. (B) $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$.
(C) $V = \int_a^b f^2(x)dx$. (D) $V = \pi \int_a^b f(x)dx$.

➤ *Hướng dẫn giải.* Theo công thức tính thể tích khối tròn xoay quanh trục Ox , ta có $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$.

❖ **Câu 4.** Cho f là hàm số liên tục trên đoạn $[2; 4]$. Biết F là nguyên hàm của f trên đoạn $[2; 4]$ thỏa mãn $F(2) = 6$ và $F(4) = 3$. Tích phân $\int_2^4 f(x)dx$ bằng

(A) 2.

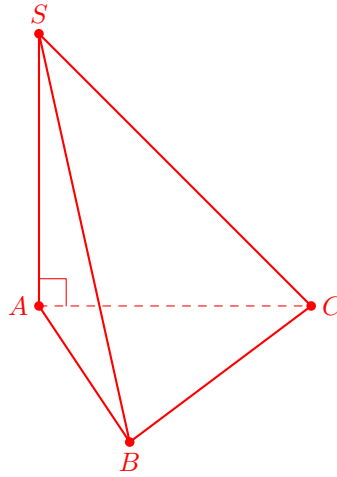
(B) 3.

(C) 9.

(D) -3.

Hướng dẫn giải. Ta có $\int_2^4 f(x)dx = F(4) - F(2) = 3 - 6 = -3$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều, $SA \perp (ABC)$. Đường thẳng BC vuông góc với đường thẳng nào sau đây?



(A) SB .

(B) SA .

(C) AB .

(D) SC .

Hướng dẫn giải.

Vì $SA \perp (ABC)$ mà $BC \subset (ABC)$ nên $SA \perp BC$.

Câu 6. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2}{x-1}$ là đường thẳng

(A) $x = 1$.

(B) $y = 2$.

(C) $x = 0$.

(D) $y = 0$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x-1} = 0$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x-1} = 0$.

Do đó, đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 7. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số cộng?

(A) 1; 4; 7; 10; 13.

(B) 1; 3; 1; 3; 1.

(C) 1; 3; 7; 10; 13.

(D) 2; 4; 5; 6; 8.

Hướng dẫn giải. Xét dãy số 1; 4; 7; 10; 13, ta có: $4 - 1 = 3$; $7 - 4 = 3$; $10 - 7 = 3$; $13 - 10 = 3$.

Vì hiệu của hai số hạng liên tiếp luôn bằng 3 nên đây là một cấp số cộng với công sai $d = 3$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-1}$ là:

(A) $\vec{u}_3 = (2; 1; -1)$.

(B) $\vec{u}_2 = (-1; 2; -3)$.

(C) $\vec{u}_4 = (2; 1; 1)$.

(D) $\vec{u}_1 = (1; -2; 3)$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào mẫu số của phương trình chính tắc, một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u} = (2; 1; -1)$.

Câu 9. Cho hai số thực dương a, b , $a \neq 1$. Nếu $\log_a b = 6$ thì $\log_a b^2$ bằng

(A) 12.

(B) 36.

(C) 3.

(D) 8.

Hướng dẫn giải. Ta có $\log_a b^2 = 2\log_a b = 2 \cdot 6 = 12$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S) : (x + 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 4$ có tâm I và bán kính R lần lượt là

- (A) $I(2; -1; 0), R = 2$. (B) $I(2; -1; 0), R = 4$.
(C) $I(-2; 1; 0), R = 4$. (D) $I(-2; 1; 0), R = 2$.

Hướng dẫn giải. Từ phương trình mặt cầu, ta có tâm $I(-2; 1; 0)$ và bán kính $R = \sqrt{4} = 2$.

Câu 11. Phương trình $\tan 2x = 1$ có họ nghiệm là

- (A) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. (B) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
(C) $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. (D) $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải. $\tan 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 12. Một công ty xây dựng khảo sát khách hàng xem họ có nhu cầu mua nhà ở mức giá nào. Kết quả khảo sát được ghi lại ở bảng sau:

Mức giá (triệu đồng/m ²)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)
Số khách hàng	52	75	123	48	10

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

- (A) 42. (B) 5. (C) 13. (D) 25.

Hướng dẫn giải. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là hiệu giữa giá trị biên trên của nhóm cuối cùng và giá trị biên dưới của nhóm đầu tiên: $R = 35 - 10 = 25$.

Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai

Bài 1. Lớp 12A có 40 học sinh, trong đó có 8 em tham gia Câu lạc bộ Toán học. Điểm thi học kì 1 môn Toán của cả lớp được thống kê trong bảng sau:

Nhóm	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10)
Tần số	2	3	8	15	12

- a) Khoảng biến thiên của số liệu là 5.
b) Có ít nhất 13 học sinh có điểm thi thấp hơn điểm trung bình của cả lớp.
c) Biết rằng 8 học sinh trong Câu lạc bộ Toán học đều có điểm thi không dưới 8. Chọn ngẫu nhiên 6 học sinh trong lớp có điểm lớn hơn hoặc bằng 8. Xác suất có đúng 2 em của Câu lạc bộ Toán học được chọn nhỏ hơn $\frac{1}{3}$.
d) Biết 8 học sinh trong Câu lạc bộ Toán học gồm có 5 học sinh nam và 3 học sinh nữ. Trong buổi lễ tuyên dương khen thưởng, 8 học sinh trong Câu lạc bộ Toán học được sắp xếp ngẫu nhiên thành một hàng ngang để trao quà. Xác suất không có 2 học sinh nữ nào đứng cạnh nhau lớn hơn $\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải. a) Đúng.

Giá trị lớn nhất trong bảng số liệu là 10, giá trị nhỏ nhất trong bảng số liệu là 5, vậy khoảng biến thiên của số liệu là $10 - 5 = 5$.

b) Đúng.

Nhóm	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10)
Giá trị đại diện	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5
Tần số	2	3	8	15	12

Giá trị trung bình của bảng số liệu là

$$\bar{x} = \frac{5,5 \cdot 2 + 6,5 \cdot 3 + 7,5 \cdot 8 + 8,5 \cdot 15 + 9,5 \cdot 12}{40} = 8,3.$$

Tổng tần số của 3 nhóm đầu tiên là 13, vậy ta thấy có 13 em học sinh có điểm thi thấp hơn điểm trung bình của cả lớp.

c) Sai.

Từ bảng số liệu ta thấy, số học sinh có điểm lớn hơn hoặc bằng 8 của cả lớp là 27 học sinh, trong đó có 8 học sinh trong Câu lạc bộ Toán.

Số phần tử của không gian mẫu là $C_{27}^6 = 296010$;

Số phần tử của biến cố “có đúng 2 em của Câu lạc bộ Toán học được chọn” là $C_8^2 \cdot C_{19}^4 = 108528$.

Vậy xác suất của biến cố “có đúng 2 em của Câu lạc bộ Toán học được chọn” là $\frac{C_8^2 \cdot C_{19}^4}{C_{27}^6} \approx 0,3666 > \frac{1}{3}$.

d) Đúng.

Số phần tử của không gian mẫu là $P_8 = 8!$;

Xếp 5 học sinh nam vào 5 vị trí có 5! cách. Khi xếp 5 học sinh nam vào 5 vị trí tạo thành 6 khoảng trống.

Số cách xếp 3 học sinh nữ vào 6 khoảng trống là A_6^3 .

Xác suất cần tìm là $\frac{5! \cdot A_6^3}{8!} = \frac{5}{14} \approx 0,3(571428)$.

Bài 2. Hải đăng là một ngọn tháp (nhà hoặc khung) được thiết kế để chiếu sáng từ một hệ thống đèn và thấu kính, hoặc thời xưa là chiếu sáng bằng lửa, với mục đích hỗ trợ cho các hoa tiêu trên biển định hướng và tìm đường. Vào năm 293 trước Công nguyên, ngọn hải đăng đầu tiên đã được người Phoenicia xây dựng trên hòn đảo Pharos tại Alexandria. Trong không gian với hệ tọa



độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là một mét), coi một phần mặt biển được khảo sát là mặt phẳng (Oxy), trục Oz hướng lên trên vuông góc với mặt biển; một ngọn hải đăng đỉnh cao 50 mét so với mực nước biển (Hình bên) biết đỉnh ở vị trí $I(21; 35; 50)$, biết rằng ngọn hải đăng này được thiết kế với bán kính phủ sáng là $4km$.

- Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới của vùng phủ sáng trên biển của ngọn hải đăng trên là $(x - 21)^2 + (y - 35)^2 + (z - 50)^2 = 16$.
- Người đi biển coi là một điểm ở vị trí $D(5121; 658; 0)$ thì có thể nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng trên.
- Ngọn Hải đăng phủ một vùng sáng trên mặt biển thì bán kính vùng sáng này là 3999,7 (làm tròn đến hàng phần mười của mét) giả sử yếu tố bị che khuất bởi địa hình là không đáng kể.
- Giả sử người đi biển coi là một điểm từ vị trí $D(5121; 658; 0)$ di chuyển theo đường thẳng đến chân ngọn Hải đăng với tốc độ 7 hải lý/giờ; biết một hải lý bằng 1852 mét thì mất 5,27 phút (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm) để đến điểm đầu tiên nhìn thấy được ánh sáng ngọn Hải đăng trên.

Hướng dẫn giải.

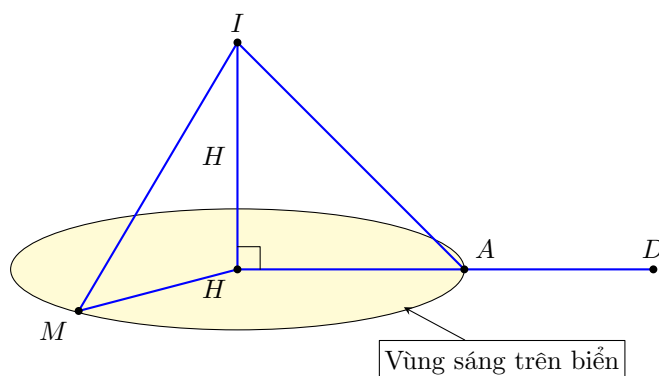
- Sai.** Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới của vùng phủ sáng trên biển của ngọn hải đăng là $(x - 21)^2 + (y - 35)^2 + (z - 50)^2 = 4000^2$. Mệnh đề sai.

- Sai.** Ta có $ID = \sqrt{(5121 - 21)^2 + (658 - 35)^2 + (0 - 50)^2} = \sqrt{26400629} > 4000$.

Vì $ID > R$ nên điểm D nằm ngoài mặt cầu.

Vậy người đi biển ở vị trí $D(5121; 658; 0)$ không thể nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng. Mệnh đề sai.

- Đúng.** Gọi M là điểm biên ngoài vùng sáng trên biển, khi đó vùng sáng là một hình tròn tâm $H(21; 35; 0)$ là chân ngọn Hải đăng (Như hình vẽ dưới)



Ta có $IH = 50$; $IM = 4000$ bán kính phủ sáng trên biển là $MH = \sqrt{IM^2 - IH^2} = \sqrt{4000^2 - 50^2} = 450\sqrt{79} \approx 3999,7(m)$. Mệnh đề đúng.

- Đúng.** Giả sử di chuyển từ D đến vị trí A là điểm đầu tiên nhìn thấy được ánh sáng ngọn Hải đăng.

Ta có $DA = DH - HA = \sqrt{(5121 - 21)^2 + (658 - 35)^2 + 0^2} - \sqrt{4000^2 - 50^2} \approx 1138,22(m)$.

Đổi vận tốc $v = 7$ hải lý/ giờ $= 7 \cdot 1852$ mét/giờ $= 12964$ mét/giờ.

Thời gian di chuyển từ D đến vị trí A là $t = \frac{DA}{12964} \cdot 60 \approx 5,28$ phút. Mệnh đề đúng.

Bài 3. Một bể chứa dầu ban đầu có 40 000 lít dầu. Gọi $V(t)$ là thể tích dầu (lít) trong bể tại thời điểm t , trong đó t tính theo giờ ($0 \leq t \leq 24$). Trong quá trình bơm dầu vào bể, thể tích dầu tăng theo tốc độ được biểu diễn bởi hàm số $V'(t) = k\sqrt{t}$, với k là hằng số dương. Sau 4 giờ bơm liên tục, thể tích dầu trong bể đạt 48 000 lít.

- Hàm số $V(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(t) = k\sqrt{t}$.
- $V(t) = \frac{2k}{3}t\sqrt{t} + C$ với $0 \leq t \leq 24$ và k, C là các hằng số.
- Sau 9 giờ bơm liên tục, thể tích dầu trong bể đạt được 67 000 lít.
- Trong quá trình bơm dầu, nếu sau mỗi giờ lượng dầu bị rò rỉ đều đặn với tốc độ 300 lít/giờ, thì tại thời điểm t bằng 9 giờ, thể tích dầu trong bể là 63 400 lít.

Hướng dẫn giải.

♦ **a) Đúng.** Theo giả thiết $V'(t) = k\sqrt{t}$ nên theo định nghĩa nguyên hàm, $V(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(t) = k\sqrt{t}$.

♦ **b) Đúng.** Ta có $V(t) = \int V'(t)dt = \int kt^{\frac{1}{2}}dt = k \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2k}{3}t\sqrt{t} + C$.

♦ **c) Đúng.** Tại thời điểm $t = 0$, thể tích dầu là 40 000 lít $\Rightarrow V(0) = \frac{2k}{3} \cdot 0 + C = 40\,000 \Rightarrow C = 40\,000$.

Tại thời điểm $t = 4$, thể tích dầu là 48 000 lít $\Rightarrow V(4) = \frac{2k}{3} \cdot 4\sqrt{4} + 40\,000 = 48\,000 \Leftrightarrow \frac{16k}{3} = 8\,000 \Leftrightarrow k = 1\,500$.

Hàm số thể tích là $V(t) = \frac{2 \cdot 1500}{3}t\sqrt{t} + 40\,000 = 1\,000t\sqrt{t} + 40\,000$.

Sau 9 giờ ($t = 9$), thể tích dầu là: $V(9) = 1\,000 \cdot 9\sqrt{9} + 40\,000 = 27\,000 + 40\,000 = 67\,000$ (lít).

♦ **d) Sai.**

Nếu dầu bị rò rỉ với tốc độ 300 lít/giờ, tốc độ tăng thể tích dầu thực tế là $V'_{tt}(t) = k\sqrt{t} - 300$.

Khi đó thể tích thực tế là $V_{tt}(t) = \int (k\sqrt{t} - 300)dt = \frac{2k}{3}t\sqrt{t} - 300t + C$.

Với $V_{tt}(0) = 40\,000 \Rightarrow C = 40\,000$.

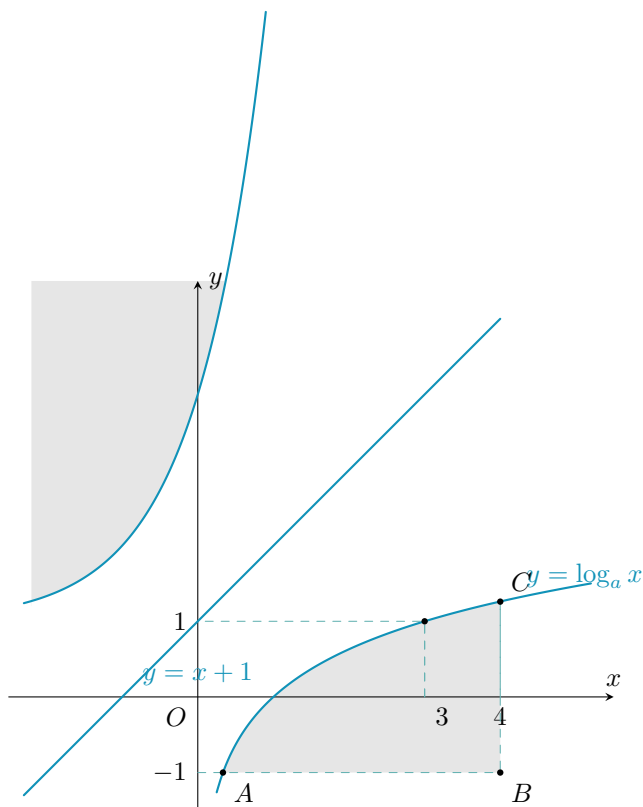
Tại $t = 9$ giờ, thể tích dầu là:

$V_{tt}(9) = 1\,000 \cdot 9\sqrt{9} - 300 \cdot 9 + 40\,000 = 27\,000 - 2\,700 + 40\,000 = 64\,300$ (lít).

Vì $64\,300 \neq 63\,400$ nên mệnh đề này sai.

Bài 4. Vịnh Hạ Long là một địa danh du lịch được nhiều người biết đến trên thế giới, nơi đây vẫn còn nhiều đảo lớn nhỏ chưa được khám phá. Một công ty du lịch quyết định khai thác khu vực có một số đảo nhỏ với hình dáng đặc biệt nếu nhìn từ trên xuống, trong đó có hai hòn đảo mà phần giới hạn đất liền của nó được mô phỏng như hai đồ thị hàm số trên hình. Với hệ trục Oxy thích hợp, đơn vị trên mỗi trục là 100 m, đường cong mô tả hòn đảo thứ nhất có dạng $y = \log_a x$

đi qua điểm có tọa độ $(3; 1)$.



- Điểm có tọa độ $(9; 3)$ thuộc đường cong $y = \log_a x$.
- Chủ dự án muốn xây dựng một nơi trực tiếp nhìn ra biển để du khách tham quan, ăn uống. Họ đã lựa chọn khu vực tam giác cong ABC như trong hình (đường cong AC tiếp giáp biển); diện tích của khu vực này là 536 m^2 (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).
- Chủ dự án đã thuê một số kỹ sư giỏi Toán (đặc biệt giỏi về hàm số mũ-logarit) đi khảo sát khu vực này và họ nhận thấy có thể bồi đắp thêm cho hòn đảo thứ hai để đường cong giáp biển $y = g(x)$ của nó đối xứng với đường cong $y = \log_a x$ qua đường thẳng $y = x + 1$. Khi đó đường cong $g(x) = 1 + 3 \cdot 3^x$.
- Chủ dự án định xây một cây cầu nối liền hai đảo, khoảng cách ngắn nhất theo đường chim bay của cây cầu bằng 285 m (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Hướng dẫn giải.

◇ **Sai.** Đường cong $y = \log_a x$ đi qua $(3; 1)$ nên $1 = \log_a 3 \Leftrightarrow a = 3$.

Hàm số là $y = \log_3 x$. Với $x = 9$ thì $y = \log_3 9 = 2 \neq 3$. Vậy điểm $(9; 3)$ không thuộc đường cong.

◇ **Sai.** Điểm $A \in (C)$ có $y_A = -1 \Rightarrow \log_3 x_A = -1 \Rightarrow x_A = \frac{1}{3}$.

Diện tích tam giác cong ABC trên đồ thị là:

$$S_0 = \int_{1/3}^4 (\log_3 x - (-1)) dx = \int_{1/3}^4 (\log_3 x + 1) dx \approx 5,71 \text{ (đơn vị diện tích)}.$$

Diện tích thực tế: $S = S_0 \cdot 100^2 \approx 57100 \text{ m}^2$.

◇ **Đúng.** Lấy $M(x_M; y_M) \in (C_1) : y = \log_3 x$.

Điểm $N(x; y) \in (C_2)$ đối xứng với M qua $d : x - y + 1 = 0$ thỏa mãn:
$$\begin{cases} x_M = y - 1 \\ y_M = x + 1 \end{cases}.$$

Thay vào (C_1) ta có $x + 1 = \log_3(y - 1) \Leftrightarrow y - 1 = 3^{x+1} \Leftrightarrow y = 1 + 3 \cdot 3^x$.

♦ **Sai.** Khoảng cách ngắn nhất giữa hai đảo bằng $2 \cdot d(M, d)$ với $M \in (C_1)$ có tiếp tuyến song song d .

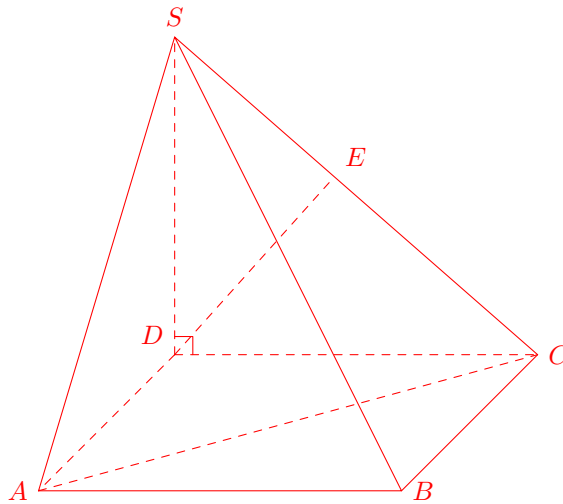
$$y' = \frac{1}{x \ln 3} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\ln 3}. \text{ Điểm } M \left(\frac{1}{\ln 3}; \log_3 \left(\frac{1}{\ln 3} \right) \right).$$

Khoảng cách $d(M, d) \approx 1,41$ (đơn vị). Thực tế $L = 2 \cdot 1,41 \cdot 100 = 282$ m.

Phần III. Câu trả lời ngắn Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

🔗 **Bài 1.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = 3a$. Biết $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{5}$. Tang của góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

🔗 *Hướng dẫn giải.*



Dựng điểm D sao cho $ABCD$ là hình vuông. Khi đó $AB \parallel CD$.

Vì $\triangle ABC$ vuông cân tại B nên $AB = BC = 3a$. Do đó $ABCD$ là hình vuông cạnh $3a$.

Ta có $AB \perp BC \Rightarrow CD \perp BC$.

$$\text{Lại có } \begin{cases} BC \perp SC \text{ (giả thiết } \widehat{SCB} = 90^\circ) \\ BC \perp CD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SCD).$$

Mà $BC \subset (SBC)$ nên $(SBC) \perp (SCD)$.

Kẻ $DE \perp SC$ tại E . Do $(SBC) \perp (SCD)$ theo giao tuyến SC nên $DE \perp (SBC)$.

Suy ra $d(D, (SBC)) = DE$.

Vì $AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC)$, do đó $d(A, (SBC)) = d(D, (SBC)) = DE = a\sqrt{5}$.

Xét $\triangle CDE$ vuông tại E , ta có $CD = AB = 3a$ và $DE = a\sqrt{5}$.

Áp dụng định lý Pythagore: $EC = \sqrt{CD^2 - DE^2} = \sqrt{(3a)^2 - (a\sqrt{5})^2} = \sqrt{9a^2 - 5a^2} = 2a$.

Vì $AB \parallel CD$ nên góc giữa AB và SC là góc giữa CD và SC , chính là góc $\widehat{SCD}$ (hay $\widehat{ECD}$).

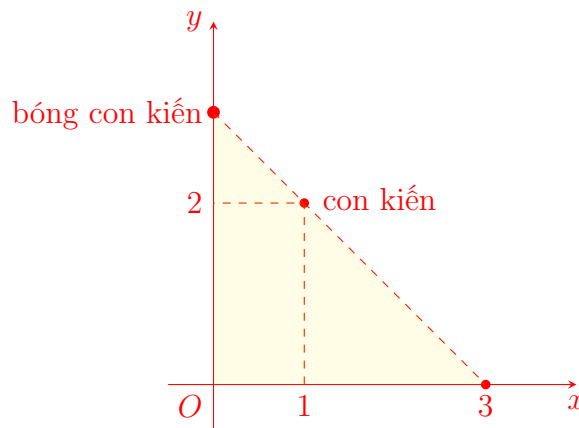
Trong tam giác vuông CDE tại E , ta có:

$$\tan \widehat{ECD} = \frac{DE}{EC} = \frac{a\sqrt{5}}{2a} = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,12.$$

Vậy tang của góc giữa hai đường thẳng AB và SC xấp xỉ 1,12.

Bài 2. Một chiếc đèn được đặt cố định tại điểm $(3; 0)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy . Một con kiến đang di chuyển trong góc phần tư thứ nhất và bóng của nó in lên trục tung. Hãy xác định tốc độ thay đổi (đơn vị/giây) của bóng con kiến trên trục tung tại thời điểm nó ở vị trí có tọa độ $(1; 2)$, biết rằng kiến đang di chuyển theo hướng có hoành độ x tăng $\frac{1}{3}$ đơn vị/giây và tung độ y giảm $\frac{1}{4}$ đơn vị/giây (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn giải.



Gọi vị trí của con kiến là $M(x, y)$, nguồn sáng tại $A(3, 0)$, bóng của con kiến trên trục tung là $B(0, Y)$.

Phương trình đường thẳng (d) đi qua hai điểm $M(x, y)$ và $A(3, 0)$ có dạng:

$$\frac{X - 3}{x - 3} = \frac{Y - 0}{y - 0} \Rightarrow \frac{X - 3}{x - 3} = \frac{Y}{y}$$

Vì bóng $B(0, Y)$ thuộc đường thẳng (d) , thay $X = 0$ vào phương trình trên ta được:

$$\frac{0 - 3}{x - 3} = \frac{Y}{y} \Rightarrow Y = \frac{-3y}{x - 3}$$

Lấy đạo hàm hai vế theo thời gian t , ta có tốc độ thay đổi của bóng trên trục tung là:

$$Y'(t) = -3 \cdot \frac{y'(t)(x - 3) - y \cdot x'(t)}{(x - 3)^2}$$

Tại thời điểm con kiến ở vị trí $(1; 2)$, ta có $x = 1, y = 2$.

Theo giả thiết: $x'(t) = \frac{1}{3}$ (hoành độ tăng) và $y'(t) = -\frac{1}{4}$ (tung độ giảm).

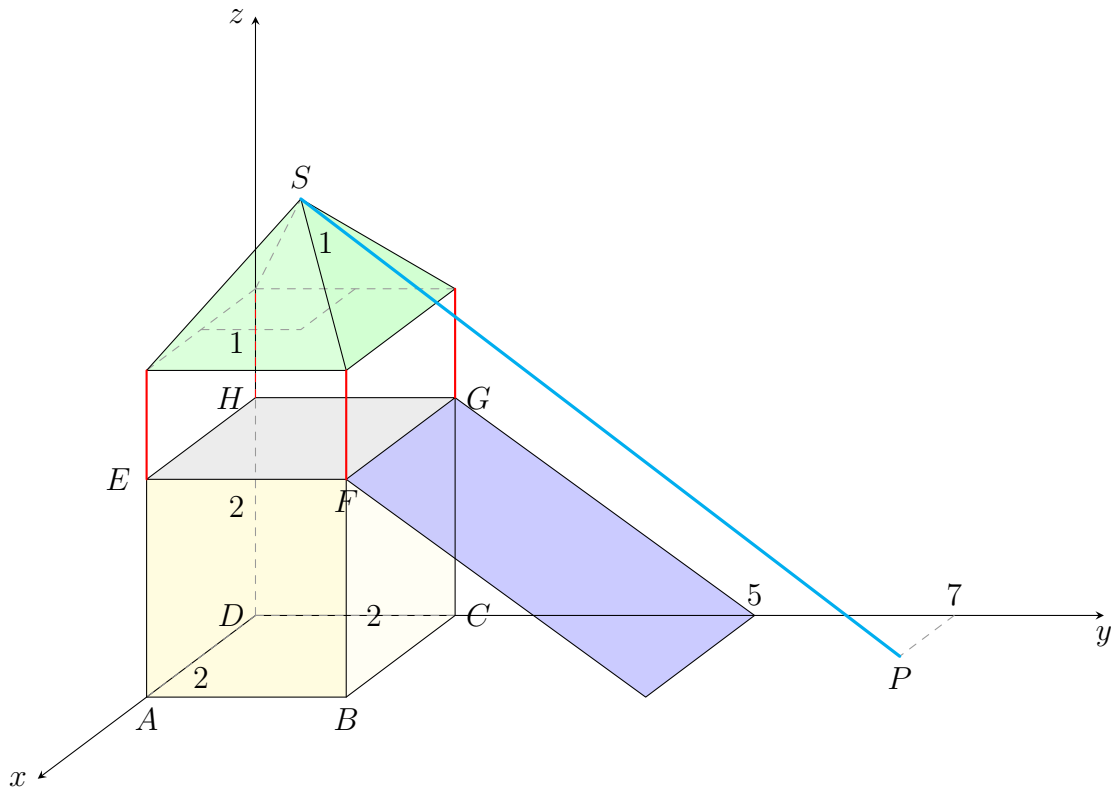
Thay các giá trị vào công thức đạo hàm:

$$Y'(t) = -3 \cdot \frac{-\frac{1}{4}(1 - 3) - 2 \cdot \frac{1}{3}}{(1 - 3)^2} = -3 \cdot \frac{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}}{4} = -3 \cdot \frac{-\frac{1}{6}}{4} = \frac{1}{8} \approx 0,13 \text{ (đơn vị/giây)}.$$

Vậy tốc độ thay đổi của bóng con kiến trên trục tung xấp xỉ 0,13 đơn vị/giây.

Bài 3. Tháp gồm một khối lập phương, trên đó gắn thêm một khung hộp chữ nhật, và phía trên là một khối chóp tứ giác đều. Tại độ cao bằng chiều cao khối lập phương, có gắn một mặt

phẳng trượt hình chữ nhật (xem hình, các kích thước tính bằng mét). Từ đỉnh S có buộc một sợi dây xuống điểm $P(1; 7; 0)$ làm dây leo. Trên mặt phẳng trượt, có một đĩa trẻ đứng thẳng tại vị trí chính giữa tấm trượt và với thẳng tay (vuông góc với mặt đất) nắm được dây leo. Tính chiều cao tay vịn của đĩa trẻ tính từ mặt đất.



Hướng dẫn giải.

Ta xác định tọa độ các điểm dựa trên hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc $D(0; 0; 0)$ như sau: $D(0; 0; 0)$, $A(2; 0; 0)$, $B(2; 2; 0)$, $C(0; 2; 0)$.

Tại độ cao $z = 2$, ta có các đỉnh của khối lập phương: $H(0; 0; 2)$, $E(2; 0; 2)$, $F(2; 2; 2)$, $G(0; 2; 2)$.

Tọa độ đỉnh S của khối chóp là $S(1; 1; 4)$.

Điểm buộc dây trên mặt đất là $P(1; 7; 0)$.

Phương trình đường thẳng SP đi qua $S(1; 1; 4)$ và $P(1; 7; 0)$ là:

$$SP : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 6t \\ z = 4 - 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Mặt phẳng trượt đi qua các điểm $F(2; 2; 2)$, $G(0; 2; 2)$ và chân tấm trượt trên trục Oy là $K(0; 5; 0)$ nên có phương trình: $2y + 3z - 10 = 0$.

Điểm chính giữa tấm trượt I là trung điểm của đường chéo tấm trượt (nối $G(0; 2; 2)$ và $L(2; 5; 0)$):

$$I = \left(\frac{0+2}{2}; \frac{2+5}{2}; \frac{2+0}{2} \right) = (1; 3; 5)$$

Đĩa trẻ đứng tại $I(1; 3; 5)$ và đưa thẳng tay lên theo phương thẳng đứng, do đó vị trí tay vịn

thuộc đường thẳng Δ :

$$\Delta : \begin{cases} x = 1 \\ y = 3,5 \\ z = 1 + k \end{cases} \quad (k \text{ là chiều cao cánh tay của trẻ})$$

Tìm giao điểm của Δ với sợi dây SP :

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ 3,5 = 1 + 6t \\ 1 + k = 4 - 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2,5}{6} = \frac{5}{12} \\ 1 + k = 4 - 4 \cdot \frac{5}{12} = \frac{7}{3} \approx 2,33 \end{cases}$$

Vậy chiều cao tay vịn của đĩa trẻ tính từ mặt đất là $z = 1 + k = \frac{7}{3} \approx 2,33\text{m}$.

Bài 4. Bạn An muốn làm các viên đá có dạng khối chóp cụt tứ giác đều có cạnh của đáy lớn bằng 3 cm, cạnh của đáy nhỏ bằng 1,5 cm và cao 3 cm bằng cách dùng khay đá, mỗi khay sẽ tạo được 6 viên đá. Gọi a là số khay ít nhất để chứa 2 lít nước. Giá trị của $\frac{a}{100}$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải.

Mỗi viên đá có dạng khối chóp cụt tứ giác đều với:

- ◇ Cạnh đáy lớn $b_1 = 3 \text{ cm} \Rightarrow$ Diện tích đáy lớn $S_1 = b_1^2 = 3^2 = 9 \text{ cm}^2$.
- ◇ Cạnh đáy nhỏ $b_2 = 1,5 \text{ cm} \Rightarrow$ Diện tích đáy nhỏ $S_2 = b_2^2 = (1,5)^2 = 2,25 \text{ cm}^2$.
- ◇ Chiều cao $h = 3 \text{ cm}$.

Thể tích của một viên đá được tính theo công thức:

$$V_{\text{viên}} = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot (9 + 2,25 + \sqrt{9 \cdot 2,25}) = 11,25 + 4,5 = 15,75 \text{ cm}^3.$$

Mỗi khay làm được 6 viên đá, nên thể tích nước tối đa mỗi khay chứa được là:

$$V_{\text{khay}} = 6 \cdot V_{\text{viên}} = 6 \cdot 15,75 = 94,5 \text{ cm}^3.$$

Đổi lượng nước cần chứa: 2 lít = 2000 cm³.

Số khay ít nhất a cần dùng để chứa hết lượng nước này là:

$$a = \left\lceil \frac{2000}{94,5} \right\rceil \approx [21,164] = 22 \text{ (khay)}.$$

Giá trị của $\frac{a}{100}$ là:

$$\frac{a}{100} = \frac{22}{100} = 0,22.$$

Vậy giá trị cần tìm là 0,22.

Bài 5. Trong một trò chơi “giải mật mã tại ngày hội khoa học”, ban tổ chức chuẩn bị một hộp chứa 9 tấm thẻ được ghi các số từ tập hợp $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Một người chơi rút ngẫu nhiên 5 tấm thẻ khác nhau từ hộp. Sau đó các số được sắp xếp theo thứ tự tăng dần thành $a < b < c < d < e$. Người chơi được coi là giải được mật mã nếu trong năm số này tồn tại bốn số liên tiếp tạo thành một cấp số cộng. Biết xác suất để người chơi giải được mật mã là A . Giá trị $\frac{1}{A}$ là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Không gian mẫu: $n(\Omega) = C_9^5 = 126$.

Cấp số cộng là khoảng cách giữa các số luôn bằng nhau, giả sử khoảng cách đó là r .

Nếu $r = 1 \rightarrow$ Có 6 bộ: $(1; 2; 3; 4); (2; 3; 4; 5); \dots; (6; 7; 8; 9)$.

Nếu $r = 2 \rightarrow$ Có 3 bộ: $(1; 3; 5; 7); (2; 4; 6; 8); (3; 5; 7; 9)$.

Nếu $r > 2 \rightarrow$ Không có bộ nào.

Có tất cả 9 bộ, mỗi bộ chọn thêm 1 số từ 5 số còn lại để được bộ 5 số thỏa yêu cầu bài toán, nghĩa là có $9 \cdot 5 = 45$ (bộ).

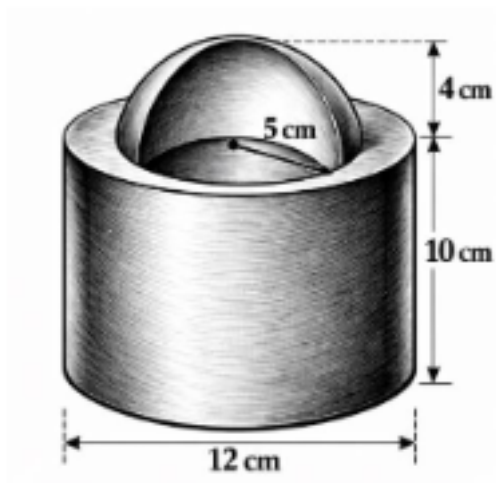
Tuy nhiên có 5 bộ trùng nhau:

- ◇ $(1; 2; 3; 4)$ thêm số 5 và $(2; 3; 4; 5)$ thêm số 1.
- ◇ $(2; 3; 4; 5)$ thêm số 6 và $(3; 4; 5; 6)$ thêm số 2.
- ◇ $(3; 4; 5; 6)$ thêm số 7 và $(4; 5; 6; 7)$ thêm số 3.
- ◇ $(4; 5; 6; 7)$ thêm số 8 và $(5; 6; 7; 8)$ thêm số 4.
- ◇ $(5; 6; 7; 8)$ thêm số 9 và $(6; 7; 8; 9)$ thêm số 5.

Nên có $45 - 5 = 40$ (bộ).

$$\text{Xác suất là } A = \frac{40}{126} = \frac{20}{63} \Rightarrow \frac{1}{A} = \frac{63}{20} = 3,15.$$

Bài 6. Một cơ sở thủ công mỹ nghệ ở Khánh Hòa sản xuất các chân đế kim loại để trưng bày quả cầu pha lê trong cửa hàng lưu niệm. Ban đầu, người ta đúc một khối kim loại hình trụ đặc có đường kính đáy 12 cm và chiều cao 10 cm. Sau đó, để đặt vừa quả cầu pha lê, người thợ khoét ở mặt trên của khối trụ một phần của khối cầu bán kính 5 cm. Phần của khối cầu nhô lên khỏi mặt trên của khối trụ 4 cm như hình minh họa. Biết thể tích kim loại còn lại của chân đế sau khi khoét là $m\pi$ (cm³). Giá trị của m là bao nhiêu?



Hướng dẫn giải.

Thể tích khối trụ: $V_{\text{trụ}} = \pi \cdot \left(\frac{12}{2}\right)^2 \cdot 10 = 360\pi$ (cm³).

Phần chỏm cầu chìm trong khối trụ có chiều cao là $10 - 4 = 6$ (cm) nên thể tích phần bị chìm trong khối trụ là

$$V = \frac{\pi \cdot h^2}{3}(3R - h) = \frac{\pi \cdot 6^2}{3}(3 \cdot 5 - 6) = 108\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

Thể tích kim loại còn lại là $360\pi - 108\pi = 252\pi \rightarrow m = 252$.

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

❖ **Câu 1.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình của đường thẳng đi qua điểm $M(3; -4; -2)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (5; -4; 7)$ là:

(A) $\frac{x+3}{5} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z-2}{7}$.

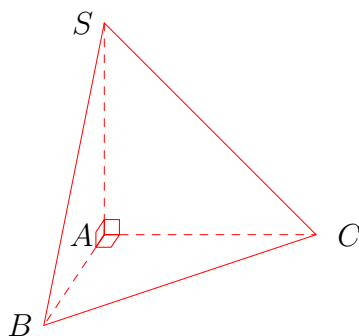
(B) $\frac{x-5}{3} = \frac{y+4}{-4} = \frac{z-7}{-2}$.

(C) $\frac{x+5}{3} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z+7}{-2}$.

(D) $\frac{x-3}{5} = \frac{y+4}{-4} = \frac{z+2}{7}$.

➤ **Hướng dẫn giải.** Đường thẳng đi qua điểm $M(3; -4; -2)$ và có VTCP $\vec{u} = (5; -4; 7)$ có phương trình chính tắc là: $\frac{x-3}{5} = \frac{y+4}{-4} = \frac{z+2}{7}$.

❖ **Câu 2.** Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $AB = 3a$, SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$ (tham khảo hình bên).



Thể tích khối chóp đã cho bằng

(A) $3a^3$.

(B) $2a^3$.

(C) $9a^3$.

(D) $6a^3$.

➤ **Hướng dẫn giải.** Diện tích đáy $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 3a = \frac{9a^2}{2}$. Thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{9a^2}{2} \cdot 2a = 3a^3$.

❖ **Câu 3.** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P) : y + 2z - 1 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là:

(A) $\vec{n} = (0; 1; 2)$.

(B) $\vec{n} = (1; 0; 2)$.

(C) $\vec{n} = (1; 2; -1)$.

(D) $\vec{n} = (2; 1; -1)$.

➤ **Hướng dẫn giải.** Mặt phẳng (P) có phương trình $0x + 1y + 2z - 1 = 0$ nên có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (0; 1; 2)$.

❖ **Câu 4.** Phương trình: $\cos x = 0$ có tập nghiệm là

(A) $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

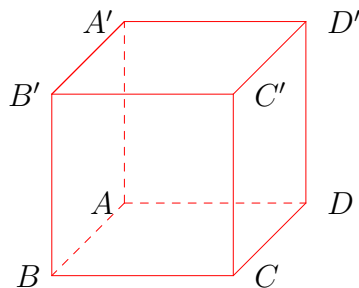
(B) $S = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

(C) $S = \{\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

(D) $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

➤ **Hướng dẫn giải.** $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

❖ **Câu 5.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (xem hình dưới). Đường thẳng CC' song song với mặt phẳng nào sau đây?



- (A) $(ABCD)$. (B) $(BCC'B')$. (C) $(ABB'A')$. (D) $(ACC'A')$.

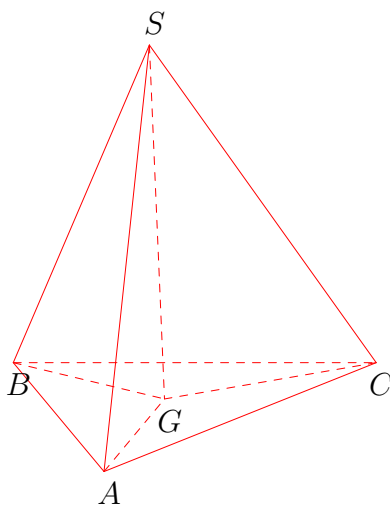
➤ *Hướng dẫn giải.* Trong hình hộp, $CC' \parallel BB'$ mà $BB' \subset (ABB'A')$ nên $CC' \parallel (ABB'A')$.

❖ **Câu 6.** Một nguyên hàm của hàm số $y = 3^x$ là

- (A) 3^x . (B) $\frac{3^x}{\ln x}$. (C) $3^x \cdot \ln 3$. (D) $\frac{3^x}{\ln 3}$.

➤ *Hướng dẫn giải.* Nguyên hàm của a^x là $\frac{a^x}{\ln a} + C$. Với $a = 3$, một nguyên hàm là $\frac{3^x}{\ln 3}$.

❖ **Câu 7.** Cho hình chóp $S.ABC$ (xem hình bên). Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$. Phát biểu nào sau đây là **đúng**?



- (A) $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} = \vec{0}$. (B) $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} = \vec{SG}$.
(C) $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} = 3\vec{SG}$. (D) $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} = 2\vec{SG}$.

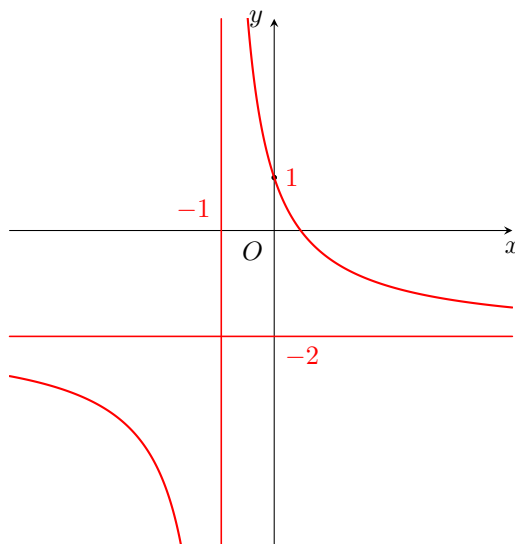
➤ *Hướng dẫn giải.* Vì G là trọng tâm tam giác ABC , ta có $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$. Khi đó $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} = (\vec{SG} + \vec{GA}) + (\vec{SG} + \vec{GB}) + (\vec{SG} + \vec{GC}) = 3\vec{SG}$.

❖ **Câu 8.** Nghiệm của phương trình $3^{2x+1} = 243$ là

- (A) $x = 3$. (B) $x = 1$. (C) $x = 2$. (D) $x = 5$.

➤ *Hướng dẫn giải.* $3^{2x+1} = 3^5 \Leftrightarrow 2x + 1 = 5 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

❖ **Câu 9.** Hàm số nào dưới đây có đồ thị là đường cong trong hình bên?



Ⓐ $y = \frac{-2x - 1}{x + 1}.$

Ⓑ $y = \frac{x - 1}{x + 1}.$

Ⓒ $y = \frac{-2x + 1}{x + 1}.$

Ⓓ $y = \frac{x + 1}{x - 1}.$

🔗 *Hướng dẫn giải.* Dựa vào đồ thị, ta có các đặc điểm sau:

- ❖ Tiệm cận đứng: $x = -1 \Rightarrow$ loại phương án D.
- ❖ Tiệm cận ngang: $y = -2 \Rightarrow$ loại phương án B.
- ❖ Giao điểm với trục tung Oy : Khi $x = 0$ thì $y = 1$.

★ Với phương án A: $y(0) = \frac{-1}{1} = -1$ (loại).

★ Với phương án C: $y(0) = \frac{1}{1} = 1$ (thỏa mãn).

Vậy hàm số đúng là $y = \frac{-2x + 1}{x + 1}.$

❖ **Câu 10.** Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ khi xoay quanh trục Ox được xác định bởi công thức nào sau đây?

Ⓐ $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$

Ⓑ $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$

Ⓒ $V = \int_a^b [f(x)]^2 dx.$

Ⓓ $V = \pi \int_a^b f(x^2) dx.$

🔗 *Hướng dẫn giải.* Công thức tính thể tích khối tròn xoay quanh trục Ox là $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$

❖ **Câu 11.** Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 7$ và công sai $d = -3$. Giá trị của u_4 bằng

Ⓐ $u_4 = 4.$

Ⓑ $u_4 = -2.$

Ⓒ $u_4 = 1.$

Ⓓ $u_4 = -5.$

🔗 *Hướng dẫn giải.* Số hạng thứ 4 là $u_4 = u_1 + 3d = 7 + 3(-3) = -2.$

❖ **Câu 12.** Số lần ném vào rổ của 30 vận động viên khi ném 30 lần được thống kê lại bằng bảng sau

Số lần vào rổ	[20; 22)	[22; 24)	[24; 26)	[26; 28)	[28; 30)
Số VDV	7	9	7	5	2

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là (làm tròn đến hàng phần mười)

- (A) 6,3. (B) 5,8. (C) 24,1. (D) 2,4.

➤ *Hướng dẫn giải.* Giá trị đại diện lần lượt là 21; 23; 25; 27; 29. Tính được trung bình $\bar{x} \approx 24,07$ và phương sai $s^2 \approx 5,8$.

Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai

❖ **Bài 1.** Một cốc cà phê nóng có nhiệt độ ban đầu là 80°C được đặt trong một phòng có nhiệt độ ổn định là 20°C . Sau 15 phút, nhiệt độ của cốc cà phê giảm xuống còn 50°C . Gọi $T(t)$ là nhiệt độ của cốc cà phê tại thời điểm t (phút) và $y(t) = T(t) - 20$ là chênh lệch nhiệt độ giữa cà phê và môi trường. Biết rằng tốc độ thay đổi chênh lệch nhiệt độ tỉ lệ thuận với chính nó, tức là $y'(t) = k \cdot y(t)$ (với k là hằng số).



- a) Hằng số tốc độ làm mát của cốc cà phê $k = \frac{1}{15} \ln 2$.
b) Sau 30 phút kể từ khi đặt vào phòng, nhiệt độ của cốc cà phê là 30°C (làm tròn đến hàng đơn vị).
c) $y(t) = 60e^{kt}$ với mọi $t \geq 0$.
d) Tại thời điểm ban đầu ($t = 0$), giá trị của hằng số C trong biểu thức $y(t) = e^{kt+C}$ là $C = \ln 60$.

➤ *Hướng dẫn giải.* Từ phương trình vi phân $y'(t) = k \cdot y(t)$, ta có nghiệm tổng quát là $y(t) = C_0 \cdot e^{kt}$ (với C_0 là hằng số).

❖ **Xét ý c):** Tại thời điểm ban đầu $t = 0$, nhiệt độ cốc cà phê là $T(0) = 80^\circ\text{C}$, suy ra chênh lệch nhiệt độ là $y(0) = T(0) - 20 = 80 - 20 = 60$.

Thay vào công thức: $60 = C_0 \cdot e^{k \cdot 0} \Rightarrow C_0 = 60$. Vậy $y(t) = 60e^{kt}$ với mọi $t \geq 0$. Do đó, ý c) **đúng**.

❖ **Xét ý a):** Sau 15 phút, nhiệt độ là $T(15) = 50^\circ\text{C}$, suy ra $y(15) = 50 - 20 = 30$.

Ta có phương trình: $30 = 60 \cdot e^{15k} \Leftrightarrow e^{15k} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$.

Lấy logarit tự nhiên hai vế: $15k = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 \Rightarrow k = -\frac{1}{15} \ln 2$.

Vì k mang giá trị âm nên ý a) **sai**.

◇ **Xét ý b):** Sau 30 phút ($t = 30$), chênh lệch nhiệt độ là: $y(30) = 60 \cdot e^{30k} = 60 \cdot (e^{15k})^2 = 60 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 60 \cdot \frac{1}{4} = 15$.

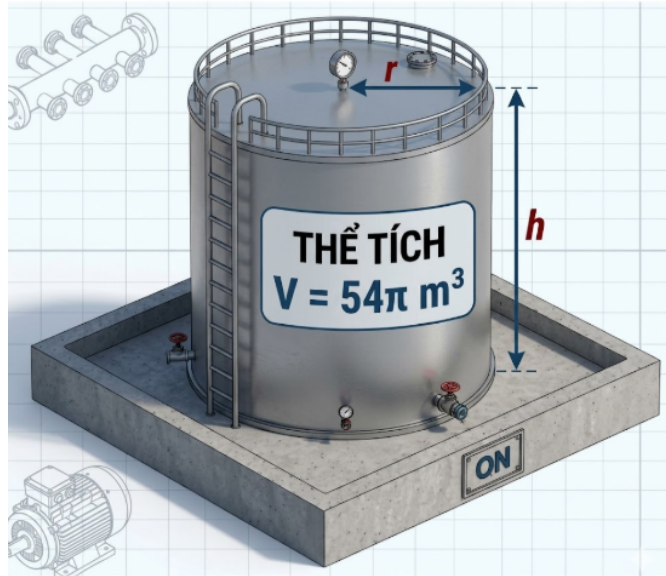
Nhiệt độ của cốc cà phê lúc này là: $T(30) = y(30) + 20 = 15 + 20 = 35^\circ\text{C}$. Vậy **ý b) sai**.

◇ **Xét ý d):** Nếu biểu diễn $y(t) = e^{kt+C}$, tại thời điểm $t = 0$ ta có: $y(0) = e^{k \cdot 0 + C} = e^C$.

Mà theo tính toán ở trên $y(0) = 60$, nên $e^C = 60 \Rightarrow C = \ln 60$.

Vậy **ý d) đúng**.

🔗 **Bài 2.** Một đại lý xăng dầu tại Quảng Ngãi cần làm một bồn chứa dầu hình trụ bằng tôn có thể tích $V = 54\pi \text{ (m}^3\text{)}$. Gọi r, h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của cái bồn dầu.



a) Công thức để tính thể tích bồn chứa dầu là $V = \pi r^2 h$.

b) Để diện tích toàn phần nhỏ nhất thì bán kính $r = 3 \text{ (m)}$.

c) Diện tích toàn phần của bồn chứa dầu theo bán kính r là $S(r) = 2\pi \left(\frac{54}{r} + r^2 \right)$.

d) Biết chi phí vật liệu (tôn) để làm bồn chứa là 500.000 đồng/m^2 . Khi đó, số tiền ít nhất để mua nguyên vật liệu làm bồn chứa dầu là khoảng 81 triệu đồng (làm tròn đến hàng phần mười).

🔗 *Hướng dẫn giải.*

◇ **Ý a): Đúng.** Công thức thể tích hình trụ là $V = B \cdot h = \pi r^2 h$.

◇ **Ý c): Đúng.** Ta có $V = \pi r^2 h = 54\pi \Rightarrow h = \frac{54}{r^2}$.

Diện tích toàn phần của hình trụ là:

$$S(r) = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r \cdot \frac{54}{r^2} + 2\pi r^2 = \frac{108\pi}{r} + 2\pi r^2 = 2\pi \left(\frac{54}{r} + r^2 \right)$$

◇ **Ý b): Đúng.** Xét hàm số $S(r) = 2\pi \left(\frac{54}{r} + r^2 \right)$ với $r > 0$.

$$\text{Ta có } S'(r) = 2\pi \left(-\frac{54}{r^2} + 2r \right) = 2\pi \left(\frac{2r^3 - 54}{r^2} \right).$$

$$S'(r) = 0 \Leftrightarrow 2r^3 - 54 = 0 \Leftrightarrow r^3 = 27 \Leftrightarrow r = 3 \text{ (m)}.$$

♦ **Ý d): Sai.** Với $r = 3$, diện tích toàn phần nhỏ nhất là:

$$S(3) = 2\pi \left(\frac{54}{3} + 3^2 \right) = 2\pi(18 + 9) = 54\pi \text{ (m}^2\text{)}$$

Số tiền ít nhất là: $54\pi \times 500.000 \approx 169.646 \times 500.000 \approx 84.823.000$ đồng $\approx 84,8$ triệu đồng.

🔗 **Bài 3.** Trong một kì thi tốt nghiệp trung học phổ thông, một tỉnh X có 70% học sinh lựa chọn tổ hợp A00 (gồm các môn Toán học, Vật lí, Hóa học). Biết rằng, nếu một học sinh chọn tổ hợp A00 thì xác suất để học sinh đó đỗ đại học là 0,55; còn nếu học sinh không chọn tổ hợp A00 thì xác suất để học sinh đó đỗ đại học là 0,6. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của tỉnh X đã tốt nghiệp trung học phổ thông trong kì thi trên.

♦ Gọi A là biến cố: "Chọn được học sinh lựa chọn khối A00".

♦ Gọi B là biến cố: "Chọn được học sinh đỗ đại học".

a) $P(A) = 0,7$; $P(\bar{A}) = 0,3$.

b) $P(\bar{B}|\bar{A}) = 0,45$.

c) Xác suất để học sinh đó chọn tổ hợp A00, biết học sinh không đỗ đại học là $\frac{22}{29}$.

d) Xác suất để học sinh đó không chọn tổ hợp A00, biết học sinh không đỗ đại học là $\frac{7}{29}$.

🔗 **Hướng dẫn giải.** Dựa trên các dữ liệu bài toán, ta có các thông tin sau:

♦ $P(A) = 70\% = 0,7$. Suy ra $P(\bar{A}) = 1 - 0,7 = 0,3$.

♦ Xác suất đỗ khi chọn A00: $P(B|A) = 0,55 \Rightarrow P(\bar{B}|A) = 1 - 0,55 = 0,45$.

♦ Xác suất đỗ khi không chọn A00: $P(B|\bar{A}) = 0,6 \Rightarrow P(\bar{B}|\bar{A}) = 1 - 0,6 = 0,4$.

Xét tính đúng sai của các mệnh đề:

♦ **Mệnh đề a): Đúng.** Theo tính toán trên $P(A) = 0,7$ và $P(\bar{A}) = 0,3$.

♦ **Mệnh đề b): Sai.** Vì $P(\bar{B}|\bar{A}) = 0,4$ (khác 0,45).

♦ **Xét mệnh đề c) và d):** Áp dụng công thức xác suất toàn phần, xác suất học sinh không đỗ đại học là: $P(\bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B}|A) + P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}|\bar{A}) = 0,7 \cdot 0,45 + 0,3 \cdot 0,4 = 0,315 + 0,12 = 0,435$.

Áp dụng công thức Bayes, xác suất học sinh chọn tổ hợp A00 khi biết học sinh đó không đỗ là: $P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0,7 \cdot 0,45}{0,435} = \frac{315}{435} = \frac{21}{29} \Rightarrow$ **Mệnh đề c) Sai.**

Xác suất học sinh không chọn tổ hợp A00 khi biết học sinh đó không đỗ là: $P(\bar{A}|\bar{B}) = 1 - P(A|\bar{B}) = 1 - \frac{21}{29} = \frac{8}{29} \Rightarrow$ **Mệnh đề d) Sai.**

🔗 **Bài 4.** Một tàu thăm dò tự hành (AUV) đang hoạt động dưới biển sâu. Hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập với mặt nước biển yên tĩnh là mặt phẳng (Oxy), trục Oz hướng thẳng đứng xuống dưới (độ sâu $z > 0$), đơn vị tính bằng hectomét (hm). AUV bắt đầu hành trình từ vị trí $A(8; 6; 1)$ và dự định di chuyển theo đường thẳng đến vị trí cuối $B(4; -2; 2)$. Trong hành trình của mình AUV cần tránh một khu vực hình cầu (S), tâm tại điểm $K(2; -4; 2)$, bán kính $R = 1$ hm (khu vực có thiết bị nhạy cảm).

a) Đường thẳng chứa hành trình của AUV có phương trình là $\frac{x-8}{-4} = \frac{y-6}{-8} = \frac{z-1}{1}$.

- b) Mặt cầu (S) có phương trình $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 + (z - 2)^2 = 1$.
 c) Trên hành trình AUV luôn cách tâm K một khoảng lớn hơn bán kính R .
 d) Hành trình của AUV không đi qua khu vực có thiết bị nhạy cảm hình cầu (S) .

Hướng dẫn giải.

♦ **Ý a): Đúng.** Ta có véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB là $\overrightarrow{AB} = (4 - 8; -2 - 6; 2 - 1) = (-4; -8; 1)$. Đường thẳng đi qua $A(8; 6; 1)$ nên có phương trình chính tắc là $\frac{x - 8}{-4} = \frac{y - 6}{-8} = \frac{z - 1}{1}$.

♦ **Ý b): Đúng.** Mặt cầu tâm $K(2; -4; 2)$ và bán kính $R = 1$ có phương trình là: $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 + (z - 2)^2 = 1^2 = 1$.

♦ **Xét ý c) và d):** Để biết AUV có đi qua khu vực hình cầu hay không, ta cần tìm khoảng cách ngắn nhất từ tâm K đến đoạn thẳng AB .

Véc-tơ $\overrightarrow{AK} = (2 - 8; -4 - 6; 2 - 1) = (-6; -10; 1)$.

Véc-tơ $\overrightarrow{BK} = (2 - 4; -4 - (-2); 2 - 2) = (-2; -2; 0)$.

Xét véc-tơ $\overrightarrow{BA} = (4; 8; -1)$. Ta thấy $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{BA} = (-2)(4) + (-2)(8) + 0(-1) = -24 < 0$.

Vì tích vô hướng âm nên góc $\angle KBA$ là góc tù, điều này có nghĩa là hình chiếu của K lên đường thẳng AB nằm ngoài đoạn AB (về phía điểm B).

Do đó, khoảng cách ngắn nhất từ K đến đoạn thẳng AB chính là độ dài đoạn KB .

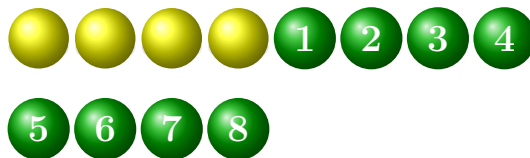
Ta có $KB = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2,828$.

Vì $2,828 > R = 1$ nên trong suốt hành trình từ A đến B , AUV luôn cách tâm K một khoảng lớn hơn bán kính R .

$\Rightarrow$ Ý c) và d) đều Đúng.

Phần III. Câu trả lời ngắn Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

❧ **Bài 1.** Có 12 quả bóng gồm 4 quả bóng vàng giống nhau và 8 quả bóng xanh được đánh số $1, 2, \dots, 8$. Người ta bỏ ngẫu nhiên tất cả số bóng trên vào ba hộp đựng A, B, C khác nhau, mỗi hộp có 4 ngăn đánh số $1, 2, 3, 4$, mỗi ngăn chứa được đúng 1 quả bóng. Gọi T là số cách phân bố các quả bóng vào các ngăn của ba hộp trên sao cho có đúng một hộp chứa toàn các bóng mang số chẵn. Tính giá trị $\frac{T}{70}$.



❧ *Hướng dẫn giải.* Trong 8 quả bóng xanh đánh số từ 1 đến 8, có 4 quả bóng mang số chẵn là $\{2, 4, 6, 8\}$ và 4 quả bóng mang số lẻ là $\{1, 3, 5, 7\}$.

Tổng cộng có 12 ngăn (vị trí) phân biệt trong 3 hộp. Vì mỗi hộp có đúng 4 ngăn và đề bài yêu cầu "có đúng một hộp chứa toàn các bóng mang số chẵn", mà chỉ có tổng cộng 4 quả bóng mang số chẵn, nên hộp đó phải chứa trọn bộ 4 quả $\{2, 4, 6, 8\}$.

Số cách phân bố T được tính qua các bước sau:

♦ **Bước 1:** Chọn 1 trong 3 hộp A, B, C để chứa các bóng số chẵn: có $C_3^1 = 3$ cách.

- ◇ **Bước 2:** Xếp 4 quả bóng số chẵn phân biệt vào 4 ngăn của hộp đã chọn: có $4! = 24$ cách.
- ◇ **Bước 3:** Phân bố 8 quả bóng còn lại (4 quả bóng vàng giống nhau và 4 quả bóng xanh số lẻ phân biệt) vào 8 ngăn còn lại của hai hộp còn lại:
- ☆ Chọn 4 ngăn trong 8 ngăn trống để đặt các bóng xanh số lẻ: có $C_8^4 = 70$ cách.
 - ☆ Hoán vị 4 quả bóng xanh số lẻ vào các ngăn đã chọn: có $4! = 24$ cách.
 - ☆ 4 quả bóng vàng giống nhau được đặt vào 4 ngăn còn lại: có 1 cách (vì các bóng vàng giống nhau).

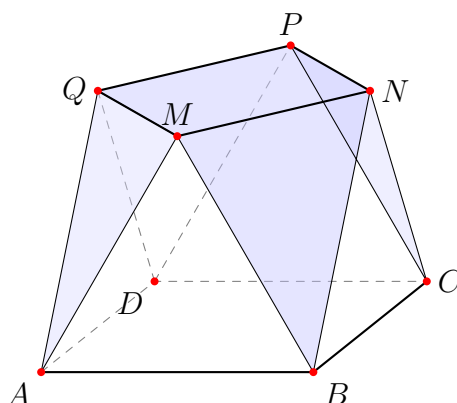
Suy ra tổng số cách là:

$$T = 3 \cdot 24 \cdot 70 \cdot 24 \cdot 1 = 120\,960.$$

Vậy giá trị cần tìm là:

$$\frac{T}{70} = \frac{120\,960}{70} = 1728.$$

Bài 2. Bác An làm nghề đồ gỗ muốn thiết kế một chiếc đôn bằng gỗ như hình vẽ bên. Chiếc đôn có dạng là hình đa diện gồm có 8 đỉnh là A, B, C, D, M, N, P, Q ; hai mặt $(ABCD)$ và $(MNPQ)$ là hai hình vuông và nằm trên hai mặt phẳng song song với nhau, hình chiếu vuông góc của M, N, P, Q lên mặt phẳng $(ABCD)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA . Biết MAB là tam giác đều cạnh 6 dm, hỏi thể tích của chiếc đôn như trên bằng bao nhiêu deximet khối (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



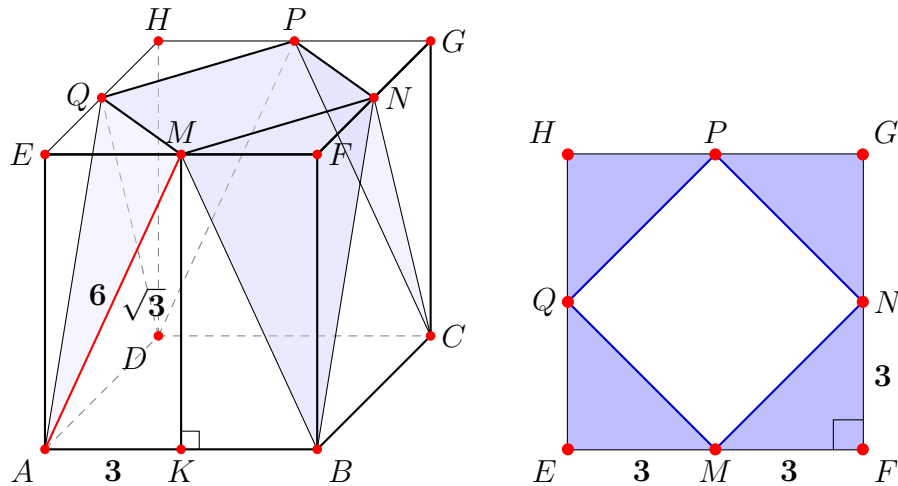
Hướng dẫn giải. Gọi K là trung điểm của AB . Vì $\triangle MAB$ đều nên MK đồng thời là chiều cao của tam giác MAB vừa là chiều cao của chiếc đôn.

$$\text{Suy ra } AK = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ dm};$$

$$MK = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

Vì hình chiếu vuông góc của M, N, P, Q lên mặt phẳng $(ABCD)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA nên khi đó hình chiếu vuông góc của hình vuông $ABCD$ lên mặt phẳng

($MNPQ$) là hình vuông $EFGH$ như hình vẽ.



Suy ra $ABCD.EFGH$ là hình hộp chữ nhật và do tính chất đối xứng và các mặt phẳng song song thì M, N, P, Q tương ứng là trung điểm của EF, FG, GH, HE .

Khi đó thể tích chiếc đôn là

$$\begin{aligned}
 V &= V_{ABCD.EFGH} - V_{MNB F} - V_{NPG C} - V_{PQH D} - V_{EQMA} \\
 &= V_{ABCD.EFGH} - (V_{MNB F} + V_{NPG C} + V_{PQH D} + V_{EQMA}) \\
 &= V_{ABCD.EFGH} - 4V_{MNB F} \text{ (dễ thấy } V_{MNB F} = V_{NPG C} = V_{PQH D} = V_{EQMA} \text{ vì diện tích đáy và chiều cao của chúng đều bằng nhau)} \\
 &= S_{ABCD} \cdot MK - 4 \cdot \frac{1}{3} MK \cdot S_{MNF} \\
 &= AB \cdot BC \cdot MK - 4 \cdot \frac{1}{3} MK \cdot \frac{1}{2} \cdot MF \cdot FN \\
 &= 6 \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3} - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \approx 156 \text{ (dm}^3\text{)}.
 \end{aligned}$$

Bài 3. Một quân nhân đang ở trong một chiếc xe tăng X (loại quân sự) di chuyển dọc theo trục Oy về phía gốc tọa độ. Tại thời điểm xe cách gốc tọa độ 4 km, và 10 phút sau xe cách gốc tọa độ 2 km. Tốc độ của xe (km/h) tỉ lệ nghịch với khoảng cách của xe (km) đến gốc tọa độ. Biết rằng một xe tăng địch đang chờ ở tại điểm $A(3;0)$ trên trục Ox , nhưng có một bức tường cao dọc theo đường cong (tất cả khoảng cách tính bằng km) ngăn cản bạn nhìn thấy vị trí chính xác của nó. Tại thời điểm đầu tiên quân địch phát hiện xe tăng, tốc độ của xe tăng X bằng bao nhiêu km/h (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Hướng dẫn giải. Ta có đường cong $xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2}$.

Xét tại thời điểm đầu tiên quân địch phát hiện xe tăng, ta có phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = \frac{1}{x}$ có dạng:

$$y = y'_0(x - x_0) + y_0 \Rightarrow y = \left(-\frac{1}{x_0^2}\right)(x - x_0) + \frac{1}{x_0}.$$

Ta có tiếp tuyến đi qua điểm $(3;0)$ là điểm xe địch đang đứng:

$$\Rightarrow y(3) = \left(-\frac{1}{x_0^2}\right)(3 - x_0) + \frac{1}{x_0} = 0 \Leftrightarrow -(3 - x_0) + x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{3}{2}.$$

Khi đó, phương trình tiếp tuyến là:

$$y = -\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} \left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{2}{3} \Leftrightarrow y = -\frac{4}{9} \left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{2}{3} \Leftrightarrow y = -\frac{4}{9}x + \frac{4}{3}.$$

Tọa độ vị trí xe tăng ta lúc địch thấy tại điểm $\left(0; \frac{4}{3}\right)$.

Gọi $S(t)$ là quãng đường xe đi, $4 - S(t)$ là khoảng cách từ xe đến O . Theo đề bài:

$$v(t) = \frac{k}{4 - S(t)} \quad (k \in \mathbb{R}).$$

$$\Rightarrow S' = \frac{k}{4 - S} \Rightarrow S'(4 - S) = k \Rightarrow \int S'(4 - S)dt = \int kdt \Rightarrow \int (4 - S)ds = kt + C.$$

$$\Rightarrow -\frac{(4 - S)^2}{2} = kt + C.$$

Dựa vào dữ kiện thời gian (10 phút = 1/6 giờ):

$$\begin{cases} S(0) = 0 \\ S\left(\frac{1}{6}\right) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{4^2}{2} = C \Rightarrow C = -8 \\ -\frac{(4 - 2)^2}{2} = \frac{1}{6}k - 8 \Rightarrow -2 = \frac{1}{6}k - 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -8 \\ k = 36 \end{cases}$$

Vậy phương trình chuyển động là: $-\frac{(4 - S)^2}{2} = 36t - 8$.

Tại vị trí địch phát hiện, khoảng cách đến gốc tọa độ là $y = \frac{4}{3} \Rightarrow 4 - S = \frac{4}{3}$.

Tốc độ của xe tăng X lúc đó là:

$$v = S' = \frac{36}{4 - S} = \frac{36}{\frac{4}{3}} = 27 \text{ (km/h)}.$$

Bài 4. Mô hình *EOQ* (Economic Order Quantity) được công bố năm 1913 là một công cụ quản trị vận hành dùng để xác định lượng hàng nhập kho tối ưu. Giả sử một cửa hàng thức ăn cho mèo có nhu cầu tiêu thụ hàng hóa đều đặn với tốc độ bán hàng $d = 100$ hộp/ngày. Các thông số chi phí được xác định như sau:

- ◇ $K = 1.000.000$ đồng: chi phí cố định cho mỗi lần đặt hàng (phí vận chuyển, nhân công...);
- ◇ c đồng/hộp: giá nhập mỗi hộp hàng (giả định không đổi và không có chiết khấu);
- ◇ $h = 500$ đồng/hộp/ngày: đơn giá lưu kho (chi phí lưu giữ một hộp hàng trong kho trong một ngày).

Gọi Q (hộp) là số lượng hàng mà người bán nhập vào trong mỗi lần đặt hàng. Thời gian tiêu thụ hết lượng hàng là $\frac{Q}{d}$ (ngày). Tổng chi phí cho một chu kỳ đặt hàng và tiêu thụ hết hàng là $f = K + cQ + \frac{hQ^2}{2d}$. Hỏi cửa hàng nên nhập bao nhiêu hộp trong mỗi lần đặt hàng để chi phí trung bình mỗi ngày là nhỏ nhất (không làm tròn các bước trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng tới hàng đơn vị)?

Hướng dẫn giải. Gọi $G(Q)$ là chi phí trung bình mỗi ngày. Ta có công thức:

$$G(Q) = \frac{\text{Tổng chi phí một chu kỳ}}{\text{Thời gian một chu kỳ}} = \frac{f}{Q/d} = \left(K + cQ + \frac{hQ^2}{2d}\right) \cdot \frac{d}{Q}$$

$$\Rightarrow G(Q) = \frac{Kd}{Q} + cd + \frac{hQ}{2}$$

Xét hàm số $G(Q)$ trên khoảng $(0; +\infty)$, với các thông số đã cho: $K = 1.000.000$, $d = 100$, $h = 500$.

$$G(Q) = \frac{100.000.000}{Q} + 100c + 250Q$$

Đạo hàm của hàm số theo biến Q :

$$G'(Q) = -\frac{100.000.000}{Q^2} + 250$$

Cho $G'(Q) = 0$, ta có:

$$\frac{100.000.000}{Q^2} = 250 \Leftrightarrow Q^2 = \frac{100.000.000}{250} = 400.000 \Leftrightarrow Q = \sqrt{400.000} = 200\sqrt{10} \approx 632,46$$

Bảng biến thiên:

Q	0	$200\sqrt{10}$	$+\infty$
$G'(Q)$		- 0 +	
$G(Q)$	$+\infty$	G_{min}	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, chi phí trung bình mỗi ngày đạt giá trị nhỏ nhất khi $Q = 200\sqrt{10} \approx 632,46$. Làm tròn đến hàng đơn vị, ta được $Q = 632$.

Vậy cửa hàng nên nhập 632 hộp trong mỗi lần đặt hàng.

Bài 5. Đề thi Tốt nghiệp THPT môn Toán năm 2025 gồm 3 dạng thức trắc nghiệm, trong đó dạng thức I là câu hỏi trắc nghiệm 4 phương án lựa chọn gồm 12 câu hỏi, mỗi câu trả lời đúng được 0,25 điểm; dạng thức II là loại câu hỏi Đúng/Sai gồm 4 câu hỏi. Mỗi câu hỏi có 4 ý hỏi, mỗi ý học sinh chỉ cần trả lời đúng hoặc chỉ trả lời sai; nếu 1 ý trả lời đúng đáp án thì được 0,1 điểm, đúng 2 ý được 0,25 điểm, đúng 3 ý được 0,5 điểm và đúng cả 4 ý được 1 điểm. Giả sử một thí sinh làm bài thi này và chắc chắn trả lời đúng 12 câu hỏi dạng thức I. Các câu còn lại của dạng thức II học sinh đó chọn ngẫu nhiên phương án trả lời cho mỗi ý. Gọi a là xác suất để học sinh đó làm được đúng 5 điểm cho cả hai dạng thức. Giá trị của $1000a$ bằng bao nhiêu (không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần mười)?

Hướng dẫn giải. Số điểm học sinh đạt được ở dạng thức I là: $12 \times 0,25 = 3,0$ điểm.

Để đạt được đúng 5 điểm cho cả bài thi, số điểm học sinh cần đạt thêm ở dạng thức II là: $5,0 - 3,0 = 2,0$ điểm.

Xét một câu hỏi trong dạng thức II gồm 4 ý, mỗi ý có 2 lựa chọn (Đúng/Sai). Vì chọn ngẫu nhiên nên xác suất chọn đúng mỗi ý là $p = 0,5$.

Gọi X là số ý trả lời đúng trong một câu hỏi. Xác suất để có k ý đúng là: $P(X = k) = C_4^k \cdot (0,5)^4 = \frac{C_4^k}{16}$. Bảng phân bố điểm cho một câu hỏi:

$$\diamond P(0 \text{ điểm}) = P(X = 0) = \frac{1}{16}.$$

$$\begin{aligned}\diamond P(0, 1 \text{ điểm}) &= P(X = 1) = \frac{4}{16} \\ \diamond P(0, 25 \text{ điểm}) &= P(X = 2) = \frac{6}{16} \\ \diamond P(0, 5 \text{ điểm}) &= P(X = 3) = \frac{4}{16} \\ \diamond P(1, 0 \text{ điểm}) &= P(X = 4) = \frac{1}{16}\end{aligned}$$

Gọi s_1, s_2, s_3, s_4 là điểm của 4 câu hỏi dạng thức II. Ta cần $\sum_{i=1}^4 s_i = 2, 0$.

Các tổ hợp điểm thỏa mãn (không xét đến các bộ có điểm 0, 1 vì không thể tổng bằng 2, 0 với 4 câu):

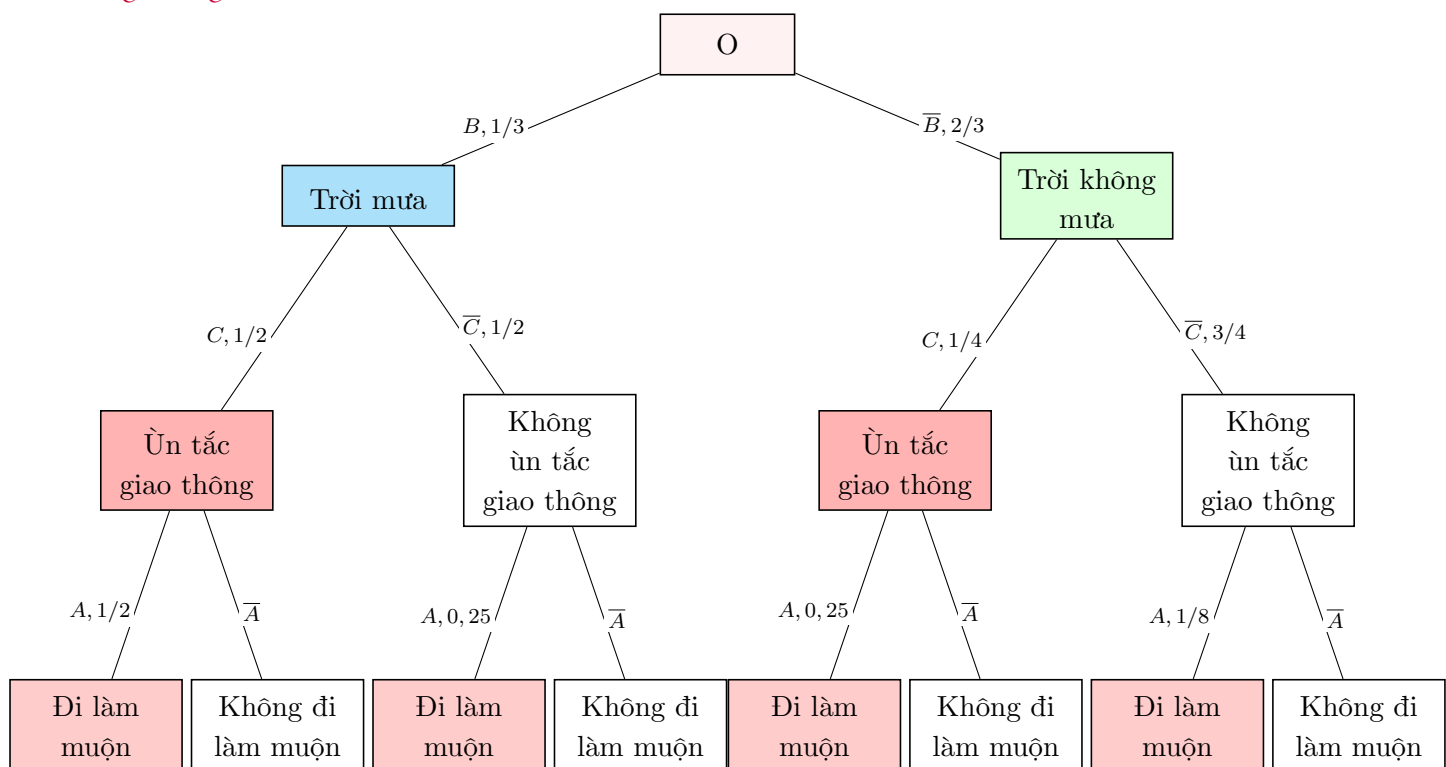
- 1) Bộ $\{1; 1; 0; 0\}$: Có $\frac{4!}{2!2!} = 6$ hoán vị. Xác suất: $P_1 = 6 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^2 = \frac{6}{65536}$.
- 2) Bộ $\{1; 0, 5; 0, 5; 0\}$: Có $\frac{4!}{2!} = 12$ hoán vị. Xác suất: $P_2 = 12 \cdot \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{4}{16}\right)^2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{192}{65536}$.
- 3) Bộ $\{1; 0, 5; 0, 25; 0, 25\}$: Có $\frac{4!}{2!} = 12$ hoán vị. Xác suất: $P_3 = 12 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{4}{16} \cdot \left(\frac{6}{16}\right)^2 = \frac{1728}{65536}$.
- 4) Bộ $\{0, 5; 0, 5; 0, 5; 0, 5\}$: Có 1 hoán vị. Xác suất: $P_4 = 1 \cdot \left(\frac{4}{16}\right)^4 = \frac{256}{65536}$.

$$\text{Tổng xác suất } a = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \frac{6 + 192 + 1728 + 256}{65536} = \frac{2182}{65536}.$$

$$\text{Giá trị của } 1000a = 1000 \cdot \frac{2182}{65536} \approx 33,2946.$$

Làm tròn đến hàng phần mười, ta được kết quả là 33,3.

Bài 6. Ở thị trấn của tôi, trời mưa một phần ba số ngày. Nếu trời mưa, sẽ có khả năng xảy ra ùn tắc giao thông với xác suất $\frac{1}{2}$, nếu trời không mưa, sẽ có khả năng xảy ra ùn tắc giao thông là $\frac{1}{4}$. Nếu trời mưa và có ùn tắc giao thông, tôi sẽ đến muộn làm việc với xác suất $\frac{1}{2}$. Mặt khác, xác suất đến muộn là $\frac{1}{8}$ nếu trời không mưa và không có ùn tắc giao thông. Trong các tình huống khác (mưa và không có ùn tắc giao thông, không mưa và có ùn tắc giao thông), xác suất đến muộn của tôi đều là 0,25. Chọn một ngày ngẫu nhiên mà tôi đi làm muộn, vậy xác suất trời mưa vào ngày hôm đó là bao nhiêu %? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



Theo công thức xác suất có điều kiện, ta có

$$P(\text{trời mưa}|\text{đi làm muộn}) = P(\text{trời mưa và đi làm muộn})/P(\text{đi làm muộn})$$

$$+) P(\text{trời mưa và đi làm muộn}) = P(OBCA) + P(O\overline{B}\overline{C}A) + P(O\overline{B}CA) + P(O\overline{B}\overline{C}A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,25 = \frac{1}{8}.$$

$$+) P(\text{đi làm muộn}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,25 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,25 + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{11}{48}.$$

$$\text{Suy ra } P(\text{trời mưa}|\text{đi làm muộn}) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{11}{48}} = \frac{6}{11} \approx 54,5\%.$$

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

❖ **Câu 1.** Trong bốn dãy số sau, có bao nhiêu dãy số lập thành một cấp số cộng?

(I) $10; -2; -14; -26; -38$.

(II) $\frac{1}{2}; \frac{5}{4}; 2; \frac{11}{4}; \frac{7}{2}$.

(III) $\sqrt{1}; \sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{4}; \sqrt{5}$.

(IV) $1; 4; 7; 10; 13$.

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

➤ *Hướng dẫn giải.* Xét từng dãy số:

❖ (I): $-2 - 10 = -12; -14 - (-2) = -12; -26 - (-14) = -12; -38 - (-26) = -12$. Các hiệu số không đổi bằng -12 , nên đây là cấp số cộng.

❖ (II): $\frac{5}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}; 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}; \frac{11}{4} - 2 = \frac{3}{4}; \frac{7}{2} - \frac{11}{4} = \frac{14 - 11}{4} = \frac{3}{4}$. Các hiệu số không đổi bằng $\frac{3}{4}$, nên đây là cấp số cộng.

❖ (III): $\sqrt{2} - \sqrt{1} \approx 0,41; \sqrt{3} - \sqrt{2} \approx 0,32$. Hiệu số thay đổi nên không phải cấp số cộng.

❖ (IV): $4 - 1 = 3; 7 - 4 = 3; 10 - 7 = 3; 13 - 10 = 3$. Các hiệu số không đổi bằng 3, nên đây là cấp số cộng.

Vậy có 3 dãy số là cấp số cộng. Chọn đáp án C.

❖ **Câu 2.** Phương trình $\sin x = 0$ có họ nghiệm là

(A) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(B) $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(C) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(D) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

➤ *Hướng dẫn giải.* Phương trình lượng giác cơ bản $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Chọn đáp án D.

❖ **Câu 3.** Với mọi số thực dương a thì $\log_2(16a) - \log_2 a$ bằng

(A) $\log_2(15a)$.

(B) 8.

(C) 4.

(D) $4 - 2\log_2 a$.

➤ *Hướng dẫn giải.* Áp dụng quy tắc tính logarit của một thương: $\log_2(16a) - \log_2 a = \log_2 \left(\frac{16a}{a} \right) = \log_2 16 = \log_2(2^4) = 4$. Chọn đáp án C.

❖ **Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và cạnh bên SA vuông góc với đáy, biết $AB = a, AC = 2a, SA = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

(A) $\frac{1}{2}a^3$.

(B) $\frac{3}{2}a^3$.

(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}a^3$.

(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}a^3$.

Hướng dẫn giải. Trong tam giác vuông ABC , ta có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

$$\text{Diện tích đáy } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Thể tích khối chóp } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{3a^3}{6} = \frac{a^3}{2}. \text{ Chọn đáp án A.}$$

❖ Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Đẳng thức nào sau đây sai?

(A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

(B) $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD}$.

(C) $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO}$.

(D) $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$.

Hướng dẫn giải.

♦ Theo quy tắc hình bình hành trong mặt phẳng đáy, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ là đúng.

♦ Vì O là tâm hình bình hành nên O là trung điểm của AC và BD .

♦ Xét điểm S bất kỳ, ta luôn có $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO}$ và $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$ (tính chất trung điểm).

♦ Từ đó suy ra $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} \Leftrightarrow \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$. Đẳng thức này đúng vì $ABCD$ là hình bình hành.

♦ Đẳng thức ở câu B: $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} \Leftrightarrow \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC}$, điều này sai vì trong hình bình hành $ABCD$ ta có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ nên $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{BC}$.

Chọn đáp án B.

❖ Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, có bảng biến thiên như sau. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

(A) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $y = -1$ và tiệm cận ngang $x = -2$.

(B) Đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận.

(C) Đồ thị hàm số có ba tiệm cận.

(D) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận ngang $y = -2$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

♦ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2 \Rightarrow$ đường thẳng $y = -2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

♦ $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \Rightarrow$ đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án D.

❖ Câu 7. Hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ có cực đại là

(A) -1 .

(B) 12 .

(C) 3 .

(D) -20 .

Hướng dẫn giải. Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 3.$$

Bảng biến thiên cho thấy hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

$$\text{Giá trị cực đại } y(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 7 = -1 - 3 + 9 + 7 = 12. \text{ Chọn đáp án B.}$$

❖ Câu 8. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2025^x$ là

(A) $F(x) = 2025^x + C$.

(B) $F(x) = \frac{2025^x}{\ln(2025)} + C$.

(C) $F(x) = 2025 \cdot 2024^x + C$.

(D) $F(x) = 2025x + C$.

Hướng dẫn giải. Sử dụng công thức nguyên hàm cơ bản: $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$. Với $a = 2025$, ta có $\int 2025^x dx = \frac{2025^x}{\ln 2025} + C$. Chọn đáp án B.

Câu 9. Kết quả kiểm tra môn toán của lớp 12A được cho bởi mẫu số liệu ghép nhóm như sau:

Nhóm điểm	[0;2)	[2;4)	[4;6)	[6;8)	[8;10)
Tần số	4	5	6	25	10

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên thuộc nhóm nào dưới đây?

- (A) [6;8). (B) [2;4). (C) [4;6). (D) [8;10).

Hướng dẫn giải. Tổng tần số (cỡ mẫu) là $n = 4 + 5 + 6 + 25 + 10 = 50$.

Vị trí của trung vị là $\frac{n}{2} = 25$.

Tần số tích lũy các nhóm:

- Nhóm [0;2): 4
- Nhóm [2;4): $4 + 5 = 9$
- Nhóm [4;6): $9 + 6 = 15$
- Nhóm [6;8): $15 + 25 = 40$

Vì $15 < 25 \leq 40$ nên trung vị thuộc nhóm [6;8). Chọn đáp án A.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oxz) có phương trình là

- (A) $y = 0$. (B) $z = 0$.
(C) $x = 0$. (D) $x + y + z = 0$.

Hướng dẫn giải. Mọi điểm nằm trên mặt phẳng (Oxz) đều có tung độ bằng 0.

Vậy phương trình của mặt phẳng (Oxz) là $y = 0$. Chọn đáp án A.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{3}$. Điểm nào sau đây thuộc đường thẳng d ?

- (A) $Q(2; 1; 1)$. (B) $M(1; 2; 3)$. (C) $P(2; 1; -1)$. (D) $N(1; -2; 3)$.

Hướng dẫn giải. Thay tọa độ điểm $P(2; 1; -1)$ vào phương trình đường thẳng d :

$\frac{2-2}{1} = 0; \frac{1-1}{-2} = 0; \frac{-1+1}{3} = 0$. Các tỉ số bằng nhau nên $P \in d$. Chọn đáp án C.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 1; 0)$ và có đường kính bằng 8 là

- (A) $(x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 8$. (B) $(x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 16$.
(C) $(x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 64$. (D) $(x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 64$.

Hướng dẫn giải. Đường kính bằng 8 nên bán kính $R = 4 \Rightarrow R^2 = 16$.

Phương trình mặt cầu tâm $I(-2; 1; 0)$, bán kính $R = 4$ là: $(x - (-2))^2 + (y - 1)^2 + (z - 0)^2 = 4^2 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 16$. Chọn đáp án B.

Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai

Bài 1. Cho hàm số $y = f(x) = (x^2 - 5x + 7)e^x$. Xét tính đúng/sai của các khẳng định sau:

- a) Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 2]$ lần lượt là 7 và $3e$.
b) Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = (2x - 5)e^x$.

c) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; \frac{5}{2})$ và đồng biến trên khoảng $(\frac{5}{2}; +\infty)$.

d) $f(0) = 7$.

 **Hướng dẫn giải.** Xét hàm số $f(x) = (x^2 - 5x + 7)e^x$ trên tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có đạo hàm:

$$f'(x) = (x^2 - 5x + 7)' \cdot e^x + (x^2 - 5x + 7) \cdot (e^x)'$$

$$f'(x) = (2x - 5)e^x + (x^2 - 5x + 7)e^x = (x^2 - 3x + 2)e^x$$

$\Rightarrow$ Khẳng định b) **Sai**.

$$\text{Cho } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$			$3e$			$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
	0			e^2		

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$. $\Rightarrow$ Khẳng định c) **Sai**.

- Xét trên đoạn $[0; 2]$:

Ta có: $f(0) = (0^2 - 5 \cdot 0 + 7)e^0 = 7 \cdot 1 = 7$. Khẳng định d) **Đúng**.

Trên đoạn $[0; 2]$, ta so sánh các giá trị:

$$\diamond f(0) = 7 \approx 7,00.$$

$$\diamond f(1) = 3e \approx 8,15.$$

$$\diamond f(2) = e^2 \approx 7,39.$$

Dựa vào các giá trị này và bảng biến thiên trên đoạn $[0; 2]$ (tăng từ 0 đến 1, giảm từ 1 đến 2):

- Giá trị lớn nhất là $\max_{[0;2]} f(x) = f(1) = 3e$.

- Giá trị nhỏ nhất là $\min_{[0;2]} f(x) = f(0) = 7$.

$\Rightarrow$ Khẳng định a) **Đúng**.

 **Bài 2.** Một tổ cắt vải của một công ty may mặc có hai chiếc máy. Xác suất để máy thứ nhất, máy thứ hai hoạt động ổn định lần lượt là 0,95 và 0,98. Biết việc hoạt động ổn định hay không ổn định của hai chiếc máy là độc lập với nhau và tổ cắt vải hoạt động bình thường được khi ít nhất một máy hoạt động ổn định.

a) Xác suất máy thứ nhất hoạt động không ổn định là 0,05.

b) Xác suất chỉ có một máy hoạt động ổn định là 0,06.

c) Xác suất cả hai máy đều không hoạt động ổn định là 0,01.

d) Xác suất để tổ cắt vải hoạt động bình thường là 0,99.

 **Hướng dẫn giải.** Gọi A là biến cố "Máy thứ nhất hoạt động ổn định", ta có $P(A) = 0,95$.

Suy ra xác suất máy thứ nhất hoạt động không ổn định là $P(\bar{A}) = 1 - 0,95 = 0,05$.

Gọi B là biến cố "Máy thứ hai hoạt động ổn định", ta có $P(B) = 0,98$.

Suy ra xác suất máy thứ hai hoạt động không ổn định là $P(\bar{B}) = 1 - 0,98 = 0,02$.

Vì hai máy hoạt động độc lập nên các biến cố A, B độc lập với nhau.

a) Xác suất máy thứ nhất hoạt động không ổn định là $P(\bar{A}) = 0,05$. $\Rightarrow$ Khẳng định a) **Đúng**.

b) Biến cố "Chỉ có một máy hoạt động ổn định" là $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$.

Xác suất là: $P = P(A) \cdot P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \cdot P(B) = 0,95 \cdot 0,02 + 0,05 \cdot 0,98 = 0,019 + 0,049 = 0,068$.
 $\Rightarrow$ Khẳng định b) **Sai**.

c) Xác suất cả hai máy đều không hoạt động ổn định là: $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 0,05 \cdot 0,02 = 0,001$.

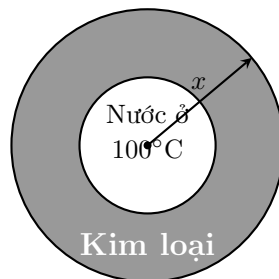
$\Rightarrow$ Khẳng định c) **Sai** (vì đề bài ghi 0,01).

d) Tổ cắt vải hoạt động bình thường khi có ít nhất một máy ổn định.

Đây là biến cố đối của biến cố "cả hai máy đều không hoạt động ổn định".

Xác suất là: $P = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0,001 = 0,999$. $\Rightarrow$ Khẳng định d) **Đúng**.

Bài 3. Mặt cắt ngang của một ống dẫn nước nóng là hình vành khuyên như hình vẽ. Bán kính ngoài là r cm và bán kính trong là 2 cm ($r > 2$). Bên trong ống, nhiệt độ nước được duy trì ở mức 100°C . Bên trong kim loại, nhiệt độ giảm dần từ bên trong ra bên ngoài. Biết rằng nhiệt độ T ($^\circ\text{C}$) tại điểm A trên thành ống là hàm số của khoảng cách x (cm) từ A đến tâm của mặt cắt và thoả mãn $T'(x) = -\frac{10}{x}$, với $2 \leq x \leq r$.



Mặt cắt ống

a) $T(x) = -10 \ln x + C$ với C là hằng số.

b) $T(x) = 100 - 10 \ln \frac{x}{2}$.

c) Nếu bán kính ngoài là $r = 4$ cm thì nhiệt độ bề mặt ngoài của ống là $93,1^\circ\text{C}$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của $^\circ\text{C}$).

d) Để nhiệt độ bề mặt ngoài của ống không vượt quá 90°C thì nên thiết kế ống với bán kính ngoài tối thiểu là 5,5 cm (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của cm).

Hướng dẫn giải. a) **Đúng**.

Hàm số nhiệt độ $T(x)$ là một nguyên hàm của $T'(x)$:

$$T(x) = \int T'(x) dx = \int -\frac{10}{x} dx = -10 \ln |x| + C$$

Vì x là khoảng cách ($x \geq 2$) nên $x > 0$. Vậy $T(x) = -10 \ln x + C$.

b) **Đúng**.

Tại mặt trong của ống ($x = 2$ cm), nhiệt độ bằng nhiệt độ nước: $T(2) = 100$.

Thay vào công thức: $100 = -10 \ln 2 + C \Rightarrow C = 100 + 10 \ln 2$.

Khi đó: $T(x) = -10 \ln x + 100 + 10 \ln 2 = 100 - 10(\ln x - \ln 2) = 100 - 10 \ln \frac{x}{2}$.

c) Sai.

Với $r = 4$, nhiệt độ bề mặt ngoài là: $T(4) = 100 - 10 \ln \frac{4}{2} = 100 - 10 \ln 2 \approx 93,0685^\circ\text{C}$.

Làm tròn đến hàng phần trăm ta được $93,07^\circ\text{C}$. (Giá trị $93,1^\circ\text{C}$ là làm tròn đến hàng phần mười).

d) Đúng.

Để nhiệt độ bề mặt ngoài $T(r) \leq 90$:

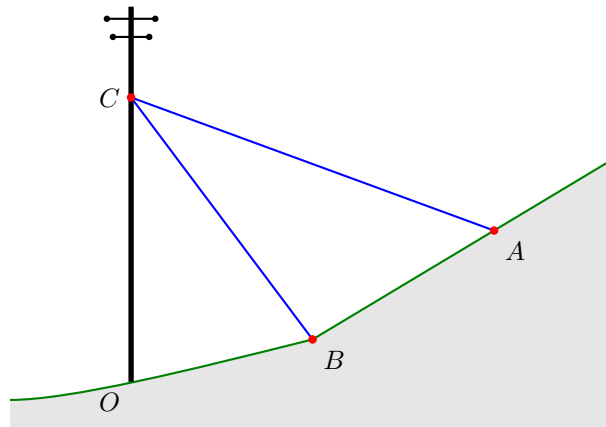
$$100 - 10 \ln \frac{r}{2} \leq 90 \Leftrightarrow 10 \ln \frac{r}{2} \geq 10 \Leftrightarrow \ln \frac{r}{2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{r}{2} \geq e \Leftrightarrow r \geq 2e$$

Ta có $2e \approx 5,43656$ cm.

Để thỏa mãn điều kiện $r \geq 5,43656$ và làm tròn đến hàng phần mười, ta phải chọn $r \geq 5,5$ cm.

Vậy bán kính tối thiểu là $5,5$ cm.

Bài 4. Trên một sườn đồi, người ta trồng một trụ điện và muốn giữ nó thẳng đứng bằng hai sợi dây neo AC và BC . Hai sợi dây này được kéo căng thành hai đoạn thẳng có chung điểm C trên trụ điện và hai đầu A, B được neo trên sườn đồi (tham khảo hình minh họa).



Giả sử trong một hệ trục tọa độ $Oxyz$ phù hợp (có đơn vị các trục tọa độ là mét), gốc trụ điện đặt tại gốc tọa độ O , đầu các sợi dây neo có tọa độ lần lượt là $A(-3; 4; 2)$, $B(4; 2; 1)$ và $C(0; 0; 5)$.

- Trụ điện cao hơn 5 mét.
- Tổng chiều dài hai sợi dây neo là gần bằng 11,83 mét.
- Hai sợi dây neo tạo với nhau một góc gần bằng $76,8^\circ$.
- Để gia cố trụ điện, người ta cần thêm sợi dây neo thứ ba. Giả sử, dây neo thứ 3 này được kéo căng tạo thành đoạn thẳng CD thỏa ba điểm A, B và D thẳng hàng. Sợi dây neo thứ 3 có độ dài ngắn nhất bằng $\frac{2\sqrt{435}}{9}$ mét.

Hướng dẫn giải. Gốc trụ điện tại $O(0; 0; 0)$, các điểm $A(-3; 4; 2)$, $B(4; 2; 1)$ và $C(0; 0; 5)$.

a) Đúng.

Vì trụ điện được đặt thẳng đứng từ gốc tọa độ $O(0; 0; 0)$ và điểm $C(0; 0; 5)$ nằm trên trụ điện,

nên chiều cao của trụ điện tính từ gốc đến điểm C đã là 5 m.

b) Đúng.

Độ dài dây neo $AC = \sqrt{(-3-0)^2 + (4-0)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{9+16+9} = \sqrt{34} \approx 5,831$ (m).

Độ dài dây neo $BC = \sqrt{(4-0)^2 + (2-0)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6$ (m).

Tổng chiều dài hai sợi dây: $L = \sqrt{34} + 6 \approx 5,831 + 6 = 11,831 \approx 11,83$ (m).

c) Đúng.

Ta có $\vec{CA} = (-3; 4; -3)$ và $\vec{CB} = (4; 2; -4)$.

$$\cos \widehat{ACB} = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{|\vec{CA}| \cdot |\vec{CB}|} = \frac{(-3) \cdot 4 + 4 \cdot 2 + (-3) \cdot (-4)}{\sqrt{34} \cdot 6} = \frac{-12 + 8 + 12}{6\sqrt{34}} = \frac{8}{6\sqrt{34}} = \frac{4}{3\sqrt{34}} \approx 0,2287.$$

Suy ra $\widehat{ACB} \approx \arccos(0,2287) \approx 76,78^\circ \approx 76,8^\circ$.

d) Đúng.

Dây neo thứ ba CD có độ dài ngắn nhất khi D là hình chiếu vuông góc của C lên đường thẳng AB . Khi đó độ dài CD chính là khoảng cách từ C đến đường thẳng AB .

Ta có $\vec{AB} = (7; -2; -1)$. Chọn $\vec{u}_{AB} = (7; -2; -1) \Rightarrow |\vec{u}_{AB}| = \sqrt{7^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$.

$\vec{AC} = (3; -4; 3)$.

Tích có hướng: $[\vec{AC}, \vec{u}_{AB}] = ((-4)(-1) - 3(-2); 3 \cdot 7 - 3(-1); 3(-2) - (-4)7) = (10; 24; 22)$.

Độ dài $|\vec{AC}, \vec{u}_{AB}| = \sqrt{10^2 + 24^2 + 22^2} = \sqrt{100 + 576 + 484} = \sqrt{1160} = 2\sqrt{290}$.

Khoảng cách $d(C, AB) = \frac{|\vec{AC}, \vec{u}_{AB}|}{|\vec{u}_{AB}|} = \frac{2\sqrt{290}}{3\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{145}}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{435}}{9}$ (m).

Phần III. Câu trả lời ngắn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.*

Bài 1. Một cá nhân gây thiệt hại cho tài sản nhà nước với tổng số tiền là 450 triệu đồng. Để được giảm nhẹ trách nhiệm hình sự, người này được yêu cầu phải hoàn thành việc bồi thường ít nhất 60% tổng số tiền gốc trong vòng 6 tháng đầu tiên. Phương thức bồi thường được thỏa thuận như sau: Tháng thứ nhất người đó nộp m (triệu đồng); kể từ tháng thứ hai, mỗi tháng số tiền nộp bằng 90% số tiền đã nộp ở tháng liền trước đó. Hỏi số tiền m nhỏ nhất mà người này phải nộp trong tháng đầu tiên là bao nhiêu để được giảm nhẹ trách nhiệm hình sự? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Hướng dẫn giải. Số tiền tối thiểu mà người này cần phải bồi thường trong 6 tháng là:

$$450 \times 60\% = 270 \text{ (triệu đồng)}.$$

Số tiền nộp hàng tháng lập thành một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = m$ và công bội $q = 90\% = 0,9$.

Tổng số tiền bồi thường sau $n = 6$ tháng là:

$$S_6 = u_1 \cdot \frac{1 - q^6}{1 - q} = m \cdot \frac{1 - (0,9)^6}{1 - 0,9} = 10m \cdot [1 - (0,9)^6].$$

Để người này được giảm nhẹ trách nhiệm hình sự, ta phải có:

$$S_6 \geq 270 \iff 10m \cdot [1 - (0,9)^6] \geq 270$$
$$\iff m \geq \frac{27}{1 - (0,9)^6} \approx 57,6234.$$

Làm tròn đến hàng đơn vị, ta được $m = 58$.

Vậy số tiền m nhỏ nhất cần nộp trong tháng đầu tiên là 58 triệu đồng.

Bài 2. Nhân dịp nghỉ lễ 30/4, siêu thị X in ra 100 phiếu thưởng được đánh số thứ tự từ 1 đến 100, mỗi phiếu ghi 1 số, các phiếu khác nhau ghi số khác nhau. Mỗi khách hàng trong 100 khách hàng đầu tiên đến siêu thị trong ngày 30/4 sẽ được nhận 1 phiếu thưởng. Những người được nhận phiếu thưởng có thể tìm thêm 2 người khác để ghép thành 1 nhóm có 3 người. Nếu tổng các số ghi trên 3 thẻ của 3 người trong nhóm bằng 100 thì mỗi người trong nhóm được nhận 50.000đ. Siêu thị quy định:

- 1) Một người có thể ghép vào nhiều nhóm nên có thể nhận thưởng nhiều lần.
- 2) Mỗi nhóm 3 người chỉ được nhận thưởng 1 lần.

Hỏi ban quản lý siêu thị phải chuẩn bị số tiền thưởng lớn nhất là bao nhiêu triệu đồng (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

Hướng dẫn giải. Mỗi nhóm gồm 3 người có tổng các số trên phiếu bằng 100 sẽ được nhận thưởng. Vì mỗi người trong nhóm nhận 50.000 đồng nên tổng số tiền thưởng siêu thị chi trả cho một nhóm hợp lệ là:

$$3 \times 50.000 = 150.000 \text{ (đồng)}.$$

Bài toán quy về tìm số lượng các tập con gồm 3 phần tử $\{a, b, c\}$ khác nhau từ tập $\{1; 2; \dots; 100\}$ sao cho $a + b + c = 100$.

Số các bộ số (a, b, c) nguyên dương thỏa mãn $a + b + c = 100$ là số nghiệm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 100$ trong tập $\mathbb{N}^*$, bằng:

$$C_{100-1}^{3-1} = C_{99}^2 = \frac{99 \times 98}{2} = 4851 \text{ (bộ có thứ tự)}.$$

Ta loại trừ các trường hợp có ít nhất hai số bằng nhau:

- ♦ Trường hợp 3 số bằng nhau: $3a = 100$ (không có nghiệm nguyên).
- ♦ Trường hợp có đúng 2 số bằng nhau: Giả sử $a = b \neq c$, ta có $2a + c = 100$.
Vì $c \geq 1$ nên $2a \leq 99 \Rightarrow a \in \{1; 2; \dots; 49\}$.
Có 49 giá trị của a , mỗi giá trị tương ứng với 3 hoán vị của bộ (a, a, c) .
Vậy có $49 \times 3 = 147$ bộ có thứ tự mà trong đó có đúng 2 số bằng nhau.

Số bộ có thứ tự (a, b, c) đôi một khác nhau là: $4851 - 147 = 4704$ bộ.

Vì trong một nhóm không tính thứ tự các phiếu, nên số tập hợp $\{a, b, c\}$ thỏa mãn là:

$$N = \frac{4704}{3!} = \frac{4704}{6} = 784 \text{ (nhóm)}.$$

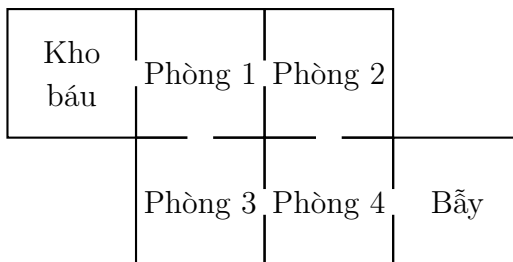
Tổng số tiền thưởng lớn nhất mà siêu thị cần chuẩn bị là:

$$T = 784 \times 150.000 = 117.600.000 \text{ (đồng)} = 117,6 \text{ (triệu đồng)}.$$

Làm tròn đến hàng đơn vị theo yêu cầu đề bài, ta được kết quả là 118 triệu đồng.

Bài 3. Trong một trò chơi thám hiểm, anh Sơn phải vượt qua một mê cung gồm các phòng thông nhau như sơ đồ dưới đây. Tại mỗi phòng, anh Sơn sẽ chọn ngẫu nhiên một trong các cửa

thông với phòng hiện tại (với xác suất như nhau) để đi tiếp. Quá trình di chuyển diễn ra liên tục và trò chơi sẽ kết thúc ngay khi anh bước vào phòng chứa Kho báu hoặc phòng có Bẫy. Biết anh Sơn bắt đầu từ Phòng 1, tính xác suất để anh tìm được kho báu. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Hướng dẫn giải. Gọi P_i là xác suất để anh Sơn tìm được kho báu khi đang đứng ở Phòng i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Dựa vào sơ đồ, ta xác định số lượng cửa thông tại mỗi phòng:

- ◇ Phòng 1 có 3 cửa dẫn đến: Kho báu, Phòng 2, Phòng 3.
- ◇ Phòng 2 có 2 cửa dẫn đến: Phòng 1, Phòng 4.
- ◇ Phòng 3 có 2 cửa dẫn đến: Phòng 1, Phòng 4.
- ◇ Phòng 4 có 3 cửa dẫn đến: Phòng 2, Phòng 3, Bẫy.

Ta thiết lập hệ phương trình xác suất sau:

$$\begin{cases} P_1 = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{3}P_3 \\ P_2 = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_4 \\ P_3 = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_4 \\ P_4 = \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{3}P_3 + \frac{1}{3} \cdot 0 \end{cases}$$

Vì $P_2 = P_3$, hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} P_1 = \frac{1+2P_2}{3} & (1) \\ P_4 = \frac{2P_2}{3} & (2) \\ P_2 = \frac{P_1+P_4}{2} & (3) \end{cases}$$

Thay (1) và (2) vào (3), ta được:

$$P_2 = \frac{\frac{1+2P_2}{3} + \frac{2P_2}{3}}{2} = \frac{1+4P_2}{6} \implies 6P_2 = 1+4P_2 \implies P_2 = 0,5.$$

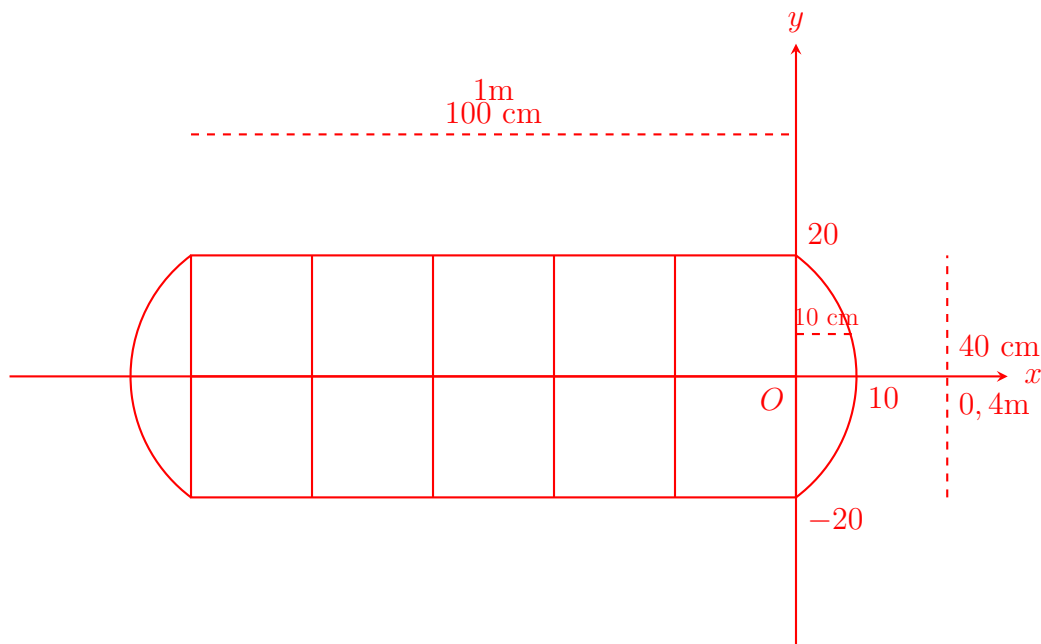
Thay $P_2 = 0,5$ vào (1), ta có xác suất cần tìm là:

$$P_1 = \frac{1+2 \cdot 0,5}{3} = \frac{2}{3} \approx 0,67.$$

Vậy xác suất để anh Sơn tìm được kho báu là 0,67.

Bài 4. Một xưởng mộc tại Mai Sơn sản xuất những chiếc bàn cờ Ô ăn quan bằng gỗ nguyên khối. Mặt trên của bàn cờ là một mặt phẳng được thiết kế và có kích thước như hình vẽ gồm ba phần: phần chính giữa là một hình chữ nhật có chiều dài 100 cm và chiều rộng 40 cm; hai "ô quan" ở hai đầu trái và phải là hai hình phẳng bằng nhau được ghép nối liền mạch với hai cạnh chiều rộng của hình chữ nhật. Biết rằng đường bao ngoài của mỗi "ô quan" là một cung tròn. Xưởng mộc tiến hành phủ một lớp keo bảo vệ bóng lên toàn bộ bề mặt trên của chiếc bàn cờ này. Biết chi phí vật tư và nhân công để phủ keo là 100 000 đồng/m². Tính tổng chi phí x (nghìn đồng) để

hoàn thiện việc phủ keo cho mặt bàn cờ (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Hướng dẫn giải. Diện tích phần hình chữ nhật ở giữa là:

$$S_1 = 100 \times 40 = 4000 \text{ (cm}^2\text{)} = 0,4 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, cung tròn đi qua các điểm $A(0; 20)$, $B(0; -20)$ và $C(10; 0)$ (đơn vị cm).

Gọi phương trình đường tròn chứa cung tròn là $(x - a)^2 + y^2 = R^2$. Thay tọa độ các điểm vào ta có:

$$\begin{cases} a^2 + 20^2 = R^2 \\ (10 - a)^2 + 0 = R^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 + 400 = 100 - 20a + a^2 \Rightarrow 20a = -300 \Rightarrow a = -15.$$

$$\text{Suy ra } R^2 = 625 \Rightarrow R = 25 \text{ cm} = 0,25 \text{ m}.$$

Diện tích của một "ô quan" (hình viên phân) là:

$$S_2 = \int_0^{10} 2\sqrt{25^2 - (x + 15)^2} dx \approx 279,56 \text{ (cm}^2\text{)} = 0,027956 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Tổng diện tích bề mặt cần phủ keo là:

$$S = S_1 + 2S_2 = 0,4 + 2 \times 0,027956 = 0,455912 \text{ (m}^2\text{)}.$$

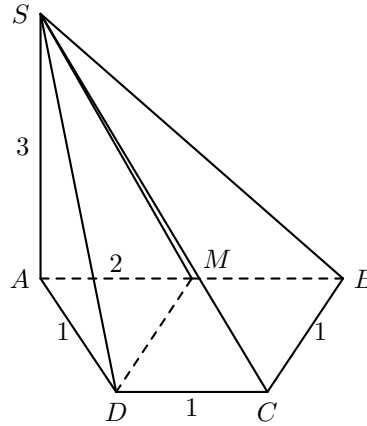
Tổng chi phí x (nghìn đồng) là:

$$x = S \times 100 = 0,455912 \times 100 = 45,5912 \approx 46.$$

Vậy tổng chi phí để hoàn thiện việc phủ keo là 46 nghìn đồng.

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $AB = 2a$, $AD = DC = CB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 3a$. Gọi M là trung điểm của AB . Khoảng cách giữa hai

đường thẳng SB và DM bằng $\frac{xa}{y}$ (với $x, y \in \mathbb{N}^*$, $\frac{x}{y}$ tối giản). Tính $x + y + xy$.



Hướng dẫn giải. Xét hình thang $ABCD$ có $AB = 2a$, $AD = DC = CB = a$. Do M là trung điểm của AB nên $AM = MB = a$.

Tứ giác $MBCD$ có $MB \parallel CD$ ($AB \parallel CD$) và $MB = CD = a$, nên $MBCD$ là hình bình hành.

Suy ra $DM \parallel BC$.

Vì $DM \parallel BC$ và $BC \subset (SBC)$ nên $DM \parallel (SBC)$.

Do đó, $d(DM, SB) = d(DM, (SBC)) = d(M, (SBC))$.

Vì A, M, B thẳng hàng và M là trung điểm của AB nên $d(M, (SBC)) = \frac{1}{2}d(A, (SBC))$.

Tính $d(A, (SBC))$:

♦ Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kẻ $AH \perp BC$ tại H . Ta có đáy $ABCD$ được ghép bởi 3 tam giác đều cạnh a (ADM, DMC, MCB).

Xét tam giác ABC : Ta có $AM = MC = CB = a \Rightarrow \triangle MCB$ đều, $\triangle AMC$ cân tại M với $\widehat{AMC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{ACB} = 90^\circ$ (vì $\widehat{ACM} = 30^\circ, \widehat{MCB} = 60^\circ$).

Vậy $AC \perp BC$ tại C .

Suy ra $H \equiv C$ và $d(A, BC) = AC = a\sqrt{3}$.

♦ Kẻ $AK \perp SC$ tại K .

Vì $BC \perp AC$ và $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AK$.

Mà $AK \perp SC$ nên $AK \perp (SBC)$.

Vậy $d(A, (SBC)) = AK$.

Trong tam giác vuông SAC :

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{(3a)^2} + \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} = \frac{1}{9a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{9a^2} \Rightarrow AK = \frac{3a}{2}.$$

$$\text{Vậy } d(DM, SB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{3a}{4}.$$

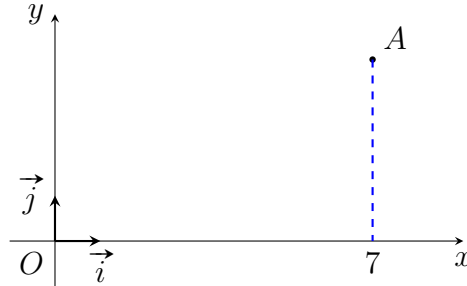
Đổi chiếu với giả thiết $\frac{xa}{y}$, ta có $x = 3, y = 4$ (vì $\frac{3}{4}$ tối giản).

Tính giá trị biểu thức: $x + y + xy = 3 + 4 + 3 \cdot 4 = 19$.

Bài 6. Chú kiến bị lạc tổ, chú đang loay hoay để tìm tổ. Chú đi theo suy đoán và đặt hệ trục

tọa độ Oxy thì đường đi của chú có quỹ đạo là một phần đường cong đồ thị hàm số có công thức $y = f(x) = a(x - b)^2$ (với a, b là các số thực dương). Hàm số $y = f(x)$ có tính chất: Với số thực k gọi hàm số $g(k) = \max_{[k; k+2]} f(x) - \min_{[k; k+2]} f(x)$. Hàm số $g(k)$ thỏa mãn $\begin{cases} g(3) = a \\ g(2) + g(6) = 32. \end{cases}$

Biết tổ của chú nằm ngay tại gốc tọa độ O . Thời điểm 9 h sáng chú đang ở vị trí A như hình vẽ. Khoảng cách giữa chú kiến và tổ của mình là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?



Hướng dẫn giải. Hàm số $y = f(x) = a(x - b)^2$ có đồ thị là một parabol có đỉnh tại $(b, 0)$ và bề lõm hướng lên trên (do $a > 0$).

Xét hàm số $g(k) = \max_{[k; k+2]} f(x) - \min_{[k; k+2]} f(x)$.

Nếu $b \in [3; 5]$, giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên $[3; 5]$ là $f(b) = 0$. Khi đó:

$$g(3) = \max\{f(3), f(5)\} - 0 = a \cdot \max\{(3 - b)^2, (5 - b)^2\} = a.$$

$$\Leftrightarrow \max\{(b - 3)^2, (5 - b)^2\} = 1.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (b - 3)^2 = 1 \\ (5 - b)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \text{ hoặc } b = 2 \\ b = 4 \text{ hoặc } b = 6 \end{cases}$$

Vì $b \in [3; 5]$ nên ta chọn $b = 4$.

(Kiểm tra các trường hợp $b < 3$ hoặc $b > 5$ ta đều thấy không thỏa mãn $g(3) = a$).

◇ Với $k = 2$, khoảng xét là $[2; 4]$. Vì $b = 4$ là đầu mút và $f(x)$ nghịch biến trên $[2; 4]$ nên: $g(2) = f(2) - f(4) = a(2 - 4)^2 - 0 = 4a$.

◇ Với $k = 6$, khoảng xét là $[6; 8]$. Vì $b = 4 < 6$ nên $f(x)$ đồng biến trên $[6; 8]$: $g(6) = f(8) - f(6) = a(8 - 4)^2 - a(6 - 4)^2 = 16a - 4a = 12a$.

Thay vào giả thiết: $g(2) + g(6) = 4a + 12a = 16a = 32 \Rightarrow a = 2$.

Vậy hàm số là $f(x) = 2(x - 4)^2$.

Dựa vào hình vẽ, điểm A có hoành độ $x_A = 7$.

Tọa độ điểm A là: $y_A = f(7) = 2(7 - 4)^2 = 2 \cdot 3^2 = 18 \Rightarrow A(7, 18)$.

Gốc tọa độ $O(0, 0)$. Khoảng cách từ chú kiến đến tổ là: $OA = \sqrt{7^2 + 18^2} = \sqrt{49 + 324} = \sqrt{373} \approx 19,313...$

Làm tròn đến hàng phần chục (phần mười), ta được kết quả 19,3.

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

❖ **Câu 1.** Cho tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Mặt phẳng nào sau đây song song với đường thẳng MN ?

- (A) (ACD) . (B) (ABD) . (C) (ABC) . (D) (BCD) .

➤ **Hướng dẫn giải.** Trong tam giác ABC , vì M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC nên MN là đường trung bình của tam giác ABC .

Suy ra $MN // BC$.

Mà $BC \subset (BCD)$ và $MN \not\subset (BCD)$, nên $MN // (BCD)$.

❖ **Câu 2.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2; 2; 3), B(2; -2; -1)$. Tọa độ của điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ là

- (A) $(2; -1; 0)$. (B) $(-2; -1; 0)$. (C) $(2; 1; 0)$. (D) $(2; -1; 1)$.

➤ **Hướng dẫn giải.** Gọi $M(x; y; z)$. Ta có hệ thức $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{1 + 3}$.

Hoành độ: $x_M = \frac{2 + 3(2)}{4} = \frac{8}{4} = 2$.

Tung độ: $y_M = \frac{2 + 3(-2)}{4} = \frac{-4}{4} = -1$.

Cao độ: $z_M = \frac{3 + 3(-1)}{4} = \frac{0}{4} = 0$.

Vậy $M(2; -1; 0)$.

❖ **Câu 3.** Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 3$ quanh trục Ox . Khi đó V bằng

- (A) $\int_0^3 e^{2x} dx$. (B) $\int_0^3 e^x dx$. (C) $\pi \int_0^3 e^x dx$. (D) $\pi \int_0^3 e^{2x} dx$.

➤ **Hướng dẫn giải.** Công thức tính thể tích khối tròn xoay là $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$.

Áp dụng vào bài toán: $V = \pi \int_0^3 (e^x)^2 dx = \pi \int_0^3 e^{2x} dx$.

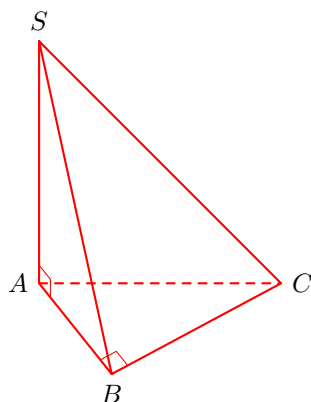
❖ **Câu 4.** Có bao nhiêu nghiệm nguyên trong đoạn $[-8; 8]$ của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \leq 3$.

- (A) 8. (B) 9. (C) 16. (D) 10.

➤ **Hướng dẫn giải.** Ta có: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \leq 3 \Leftrightarrow 3^{-(x-1)} \leq 3^1 \Leftrightarrow -(x-1) \leq 1 \Leftrightarrow -x+1 \leq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Xét trên đoạn $[-8; 8]$, các nghiệm nguyên là $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Có tất cả 9 giá trị.

❖ **Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B . Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $SA = AB = 4a, BC = 3a$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là



- (A) $8a^3$. (B) $4a^3$. (C) $16a^3$. (D) $24a^3$.

➤ *Hướng dẫn giải.*

$$\text{Diện tích đáy } S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot 3a = 6a^2.$$

$$\text{Thể tích khối chóp } V = \frac{1}{3}SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 4a \cdot 6a^2 = 8a^3.$$

❖ **Câu 6.** Cho số thực $a > 0$. Biểu thức $\log(1000a)$ bằng biểu thức nào dưới đây?

- (A) $1000 \log a$. (B) $3 \log a$.
(C) $1000 + \log a$. (D) $3 + \log a$.

➤ *Hướng dẫn giải.* Ta có $\log(1000a) = \log(10^3 \cdot a) = \log(10^3) + \log a = 3 + \log a$.

❖ **Câu 7.** Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng thứ n là $u_n = 3 + 5n$ thì công sai d bằng

- (A) 5. (B) 3. (C) -2. (D) 8.

➤ *Hướng dẫn giải.* Công sai $d = u_{n+1} - u_n = [3 + 5(n+1)] - [3 + 5n] = 5$.

❖ **Câu 8.** Một cửa hàng quần áo khảo sát nhu cầu mua quần áo trẻ em. Khoảng $[a; b)$ chứa tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm. Tính tổng $S = a + b$.

- (A) 210. (B) 90. (C) 150. (D) 120.

➤ *Hướng dẫn giải.* Tổng số khách hàng $n = 20 + 65 + 40 + 25 + 12 + 10 + 8 + 5 = 185$. Vị trí của tứ phân vị thứ nhất Q_1 là $\frac{n}{4} = \frac{185}{4} = 46,25$.

Tần số tích lũy của nhóm thứ nhất là 20.

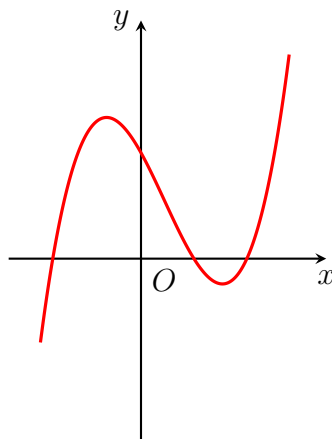
Tần số tích lũy của nhóm thứ hai là $20 + 65 = 85$.

Vì $20 < 46,25 < 85$ nên Q_1 thuộc nhóm thứ hai là $[90; 120)$.

Vậy $a = 90, b = 120 \Rightarrow S = 90 + 120 = 210$.

❖ **Câu 9.** Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây

đúng?



- (A) $ad > 0$. (B) $a + d < 0$. (C) $a + d > 0$. (D) $ad < 0$.

Hướng dẫn giải. - Khi $x \rightarrow +\infty$, nhánh cuối của đồ thị đi lên nên $a > 0$.

- Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $f(0) = d > 0$.

Vậy $a \cdot d > 0$.

❖ Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3)$ và $B(2; -1; 1)$. Phương trình của mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB là

- (A) $x - 3y - 2z + 13 = 0$. (B) $x - 3y - 2z + 11 = 0$.
(C) $x - 3y + 2z - 1 = 0$. (D) $x + 3y - 2z + 1 = 0$.

Hướng dẫn giải. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng là $\vec{n} = \overrightarrow{AB} = (2 - 1; -1 - 2; 1 - 3) = (1; -3; -2)$.

Phương trình mặt phẳng đi qua $A(1; 2; 3)$ là: $1(x - 1) - 3(y - 2) - 2(z - 3) = 0 \Leftrightarrow x - 3y - 2z + 11 = 0$.

❖ Câu 11. Tập nghiệm của phương trình $\cos x = 0$ là

- (A) $S = \{\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. (B) $S = \left\{\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
(C) $S = \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. (D) $S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Hướng dẫn giải. Nghiệm của phương trình cơ bản $\cos x = 0$ là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

❖ Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số đồng biến trên khoảng nào?

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			1			$+\infty$	
		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
			-1		-1			

- (A) $(-3; 0)$. (B) $(0; +\infty)$. (C) $(-\infty; 3)$. (D) $(-3; 3)$.

Hướng dẫn giải.

Hàm số đồng biến trên các khoảng mà đạo hàm $f'(x)$ mang dấu dương (+).

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đồng biến trên các khoảng $(-3; 0)$ và $(3; +\infty)$.

Trong các phương án đưa ra, khoảng $(-3; 0)$ là đáp án chính xác.

Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai

 **Bài 1.** Một công ty đấu thầu hai dự án. Xác suất trúng thầu dự án thứ nhất là 0,8. Nếu trúng thầu dự án thứ nhất thì xác suất trúng thầu dự án thứ hai là 0,9. Nếu không trúng thầu dự án thứ nhất thì xác suất trúng thầu dự án thứ hai là 0,2.

- a) Nếu công ty không trúng thầu dự án thứ hai thì xác suất trúng thầu dự án thứ nhất là 0,12.
- b) Xác suất để công ty trúng thầu dự án thứ hai là 0,76.
- c) Xác suất để công ty trúng thầu cả hai dự án là 0,72.
- d) Xác suất để công ty không trúng thầu dự án thứ nhất là 0,2.

 Hướng dẫn giải. Gọi các biến cố:

◇ A: “Công ty trúng thầu dự án thứ nhất”.

◇ B: “Công ty trúng thầu dự án thứ hai”.

Theo đề bài, ta có các xác suất: $P(A) = 0,8$; $P(B|A) = 0,9$; $P(B|\bar{A}) = 0,2$.

Kiểm tra khẳng định d): Xác suất để công ty không trúng thầu dự án thứ nhất là xác suất của biến cố đối $\bar{A}$:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,8 = 0,2$$

Do đó, khẳng định d) là **Đúng**.

Kiểm tra khẳng định c): Xác suất để công ty trúng thầu cả hai dự án (biến cố $A \cap B$) là:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = 0,8 \cdot 0,9 = 0,72$$

Do đó, khẳng định c) là **Đúng**.

Kiểm tra khẳng định b): Xác suất để công ty trúng thầu dự án thứ hai (biến cố B) áp dụng công thức xác suất toàn phần:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})$$

$$P(B) = 0,8 \cdot 0,9 + 0,2 \cdot 0,2 = 0,72 + 0,04 = 0,76$$

Do đó, khẳng định b) là **Đúng**.

a): Khẳng định “Nếu công ty không trúng thầu dự án thứ hai thì xác suất trúng thầu dự án thứ nhất” chính là xác suất có điều kiện $P(A|\bar{B})$.

Theo công thức Bayes, ta có:

$$P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}$$

Trong đó:

$$\diamond P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,76 = 0,24.$$

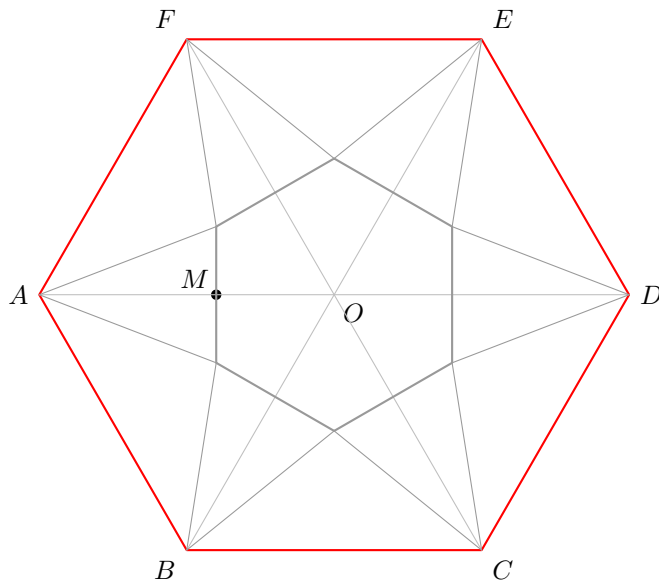
$$\diamond P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B}|A) = P(A) \cdot [1 - P(B|A)] = 0,8 \cdot (1 - 0,9) = 0,08.$$

Thay vào công thức ta được:

$$P(A|\overline{B}) = \frac{0,08}{0,24} = \frac{1}{3} \approx 0,333$$

Do đó, khẳng định a) là **Sai**.

Bài 2. Từ một tấm bìa mỏng hình lục giác đều $ABCDEF$ cạnh 4 (cm), bên trong có một lục giác đều nhỏ hơn. Các đường chéo AD, BE, CF cắt nhau tại O , OA cắt cạnh lục giác đều nhỏ tại M (hình vẽ). Đặt $OM = x$ (cm). Bạn Khôi cắt bỏ 6 tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy là cạnh của hình lục giác đều ban đầu và đỉnh là đỉnh của lục giác đều nhỏ phía trong rồi gấp lên sao cho các đỉnh A, B, C, D, E, F trùng nhau tạo thành một khối chóp lục giác đều. Khi đó:



- (a) Tam giác OAB đều cạnh bằng 4 (cm).
 (b) Cạnh đáy của khối chóp lục giác đều bằng $\frac{x\sqrt{3}}{6}$ (cm).
 (c) Đường cao của khối chóp lục giác đều là $\sqrt{16 - 8x}$ (cm).
 (d) Thể tích lớn nhất mà khối chóp lục giác đều có thể đạt được là $\frac{256\sqrt{10}}{375}$ (cm³).

Hướng dẫn giải.

(a) Đúng: Lục giác đều cạnh 4 có tâm O thì khoảng cách từ tâm đến các đỉnh bằng cạnh của nó. Do đó $OA = OB = AB = 4$ (cm), suy ra $\triangle OAB$ đều.

(b) Sai: Gọi s là cạnh đáy khối chóp (cạnh lục giác nhỏ).

$$M \text{ là trung điểm cạnh lục giác nhỏ, nên } x = s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow s = \frac{2x}{\sqrt{3}} = \frac{2x\sqrt{3}}{3} \text{ (cm).}$$

(c) Đúng: Khi gấp, các điểm A, B trùng nhau tạo thành đỉnh S của chóp.

Cạnh bên $l = SH = AH$. Xét $\triangle OAH$ có $OA = 4, OH = \frac{2x}{\sqrt{3}}, \widehat{AOH} = 30^\circ$.

$$\text{Theo định lý cosin: } AH^2 = 4^2 + \left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{2x}{\sqrt{3}} \cdot \cos 30^\circ = 16 + \frac{4x^2}{3} - 8x.$$

$$\text{Đường cao } h = \sqrt{SH^2 - OH^2} = \sqrt{\left(16 + \frac{4x^2}{3} - 8x\right) - \frac{4x^2}{3}} = \sqrt{16 - 8x} \text{ (cm).}$$

◇ (d) **Sai:** Diện tích đáy $S = 2x^2\sqrt{3}$.

$$\text{Thể tích } V = \frac{1}{3}S \cdot h = \frac{2x^2\sqrt{3}}{3}\sqrt{16-8x} = \frac{4\sqrt{6}}{3}\sqrt{x^4(2-x)}.$$

$$\text{Hàm } f(x) = x^4(2-x) \text{ đạt cực đại tại } x = 1,6. \text{ Khi đó } V_{\max} = \frac{512\sqrt{15}}{375} (\text{cm}^3).$$

🔗 **Bài 3.** Cho hàm số $f(x) = \sin 2x - 2x$. Khi đó:

- (a) Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = \cos 2x - 2$.
- (b) Hàm số nghịch biến trên tập xác định.
- (c) Nghiệm dương lớn nhất của phương trình $f'(x) + 1 = 0$ trên khoảng $(-\pi; \pi)$ là $\frac{5\pi}{6}$.
- (d) Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ là $-\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}$.

🔗 **Hướng dẫn giải.** Xét hàm số $f(x) = \sin 2x - 2x$ trên tập xác định $D = \mathbb{R}$.

◇ (a) **Sai:** Ta có $f'(x) = (\sin 2x)' - (2x)' = 2\cos 2x - 2$. Mệnh đề ghi thiếu hệ số 2 của $\cos 2x$.

◇ (b) **Đúng:** Ta có $f'(x) = 2(\cos 2x - 1)$. Vì $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $f'(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Đấu bằng xảy ra khi } \cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi.$$

Do đó, hàm số nghịch biến trên tập xác định $\mathbb{R}$.

◇ (c) **Đúng:** Phương trình $f'(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x - 2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

$$\text{Các nghiệm thuộc khoảng } (-\pi; \pi) \text{ là: } x \in \left\{-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}.$$

$$\text{Nghiệm dương lớn nhất trong số đó là } x = \frac{5\pi}{6}.$$

◇ (d) **Sai:** Vì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$, hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại đầu mút bên phải $x = \frac{\pi}{6}$.

$$\min_{\left[0; \frac{\pi}{6}\right]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) - 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{Giá trị này khác với } -\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}.$$

🔗 **Bài 4.** Thầy An là một thủ khoa xuất sắc được tuyển đặc cách vào một trường THPT ở thủ đô. Sau thời gian tập sự, thầy chính thức bắt đầu tính thâm niên biên chế từ ngày 01/01/2020. Năm 2020 (năm thứ nhất), tổng thu nhập ở trường của thầy An là 60 triệu đồng/năm. Giả định mức tăng lương hằng năm là cố định 6 triệu đồng/năm cho mỗi năm tiếp theo. Nhờ được ở nhà công vụ miễn phí và sống tối giản, mỗi năm thầy dành đúng 50% tổng thu nhập hằng năm gửi tiết kiệm để mua nhà (lãi tiền gửi đều rút ra để chi tiêu, không nhập gốc và không tính vào thu nhập).

◇ Đầu năm 2020, thầy nhắm một căn hộ giá 1500 triệu đồng. Do nhu cầu thị trường, giá căn hộ này mỗi năm tăng 10% so với giá cuối năm trước, giá được cập nhật vào ngày 31/12 hằng năm.

◇ Đầu năm 2025, thầy chốt mua căn hộ trên với giá giao dịch bằng giá thị trường tại thời điểm mua, làm tròn đến hàng triệu đồng. Khi mua, ngoài tiền tiết kiệm tích lũy trong 5 năm (2020–2024), thầy được gia đình hỗ trợ đúng 1400 triệu đồng. Số tiền còn thiếu thầy vay ngân hàng với lãi suất cố định 7%/năm trong 35 năm. Ngân hàng đưa ra 2 phương án trả nợ:

◇ **Phương án 1:** Trả một số tiền cố định (gồm cả gốc và lãi) hằng năm.

◇ **Phương án 2:** Trả gốc chia đều trong 35 năm, cộng với lãi tính trên dư nợ thực tế đầu mỗi năm đó.

Các phương án đều tính lãi theo năm trả nợ vào cuối mỗi năm, kỳ trả đầu tiên là 31/12/2025, các tính toán vay và trả nợ được làm tròn đến hàng triệu đồng gần nhất. Khi đó:

- (a) Giá niêm yết của căn hộ tại thời điểm thầy An chốt mua (đầu năm 2025) là 2250 triệu đồng.
- (b) Số tiền thầy An phải vay ngân hàng là 670 triệu đồng.
- (c) Tổng số tiền phải trả cả gốc và lãi sau 35 năm của hai phương án chênh nhau hơn 370 triệu đồng.
- (d) Gọi một năm (từ 2025) là thâm hụt nếu tiền trả nợ cuối năm lớn hơn 50% thu nhập năm đó. Khi đó, số năm thâm hụt liên tiếp theo phương án 2 nhiều hơn đúng 2 năm so với phương án 1.

Hướng dẫn giải.

◇ **(a) Sai:** Giá căn hộ ban đầu là 1500 triệu. Sau 5 năm (từ cuối 2020 đến cuối 2024), giá căn hộ theo lãi kép là:

$$P = 1500 \cdot (1 + 10\%)^5 \approx 2415,765 \approx 2416 \text{ (triệu đồng)}.$$

◇ **(b) Sai:** Tổng thu nhập trong 5 năm (2020–2024) là: $60 + 66 + 72 + 78 + 84 = 360$ (triệu đồng).

$$\text{Số tiền tiết kiệm tích lũy: } S = 360 \cdot 50\% = 180 \text{ (triệu đồng)}.$$

$$\text{Tổng tài sản có sẵn: } 180 + 1400 = 1580 \text{ (triệu đồng)}.$$

$$\text{Số tiền cần vay: } V = 2416 - 1580 = 836 \text{ (triệu đồng)}.$$

◇ **(c) Đúng:** Xét $V = 836, r = 7\%, n = 35$.

$$\text{Phương án 1: Số tiền trả cố định mỗi năm là } A = V \cdot \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \approx 64,58 \approx 65 \text{ (triệu)}.$$

$$\text{Tổng tiền trả PA1: } 65 \cdot 35 = 2275 \text{ (triệu đồng)}.$$

$$\text{Phương án 2: Gốc trả mỗi năm } G = \frac{836}{35} \approx 23,89 \approx 24 \text{ (triệu)}.$$

$$\text{Tổng tiền trả PA2 (gốc + lãi): } V + r \cdot V \cdot \frac{n+1}{2} = 836 + 0,07 \cdot 836 \cdot 18 \approx 1889,36 \approx 1889 \text{ (triệu)}.$$

$$\text{Chênh lệch: } 2275 - 1889 = 386 > 370 \text{ (triệu đồng)}.$$

◇ **(d) Đúng:** Thu nhập năm 2025 là 90 triệu, mỗi năm tăng 6 triệu. Mức 50% thu nhập năm k ($k = 1$ ứng với 2025) là: $J_k = 45 + 3(k - 1)$.

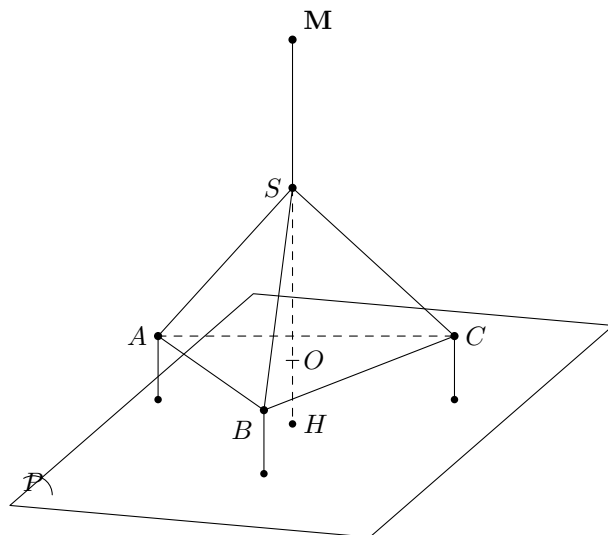
$$\text{PA1: Thâm hụt khi } 65 > 45 + 3(k - 1) \Rightarrow k - 1 \leq 6,6 \Rightarrow k \in \{1, \dots, 7\} \text{ (7 năm)}.$$

$$\text{PA2: Tiền trả năm } k \text{ là } P_k \approx 82,52 - 1,68(k - 1).$$

Thâm hụt khi $P_k > J_k \Rightarrow 37,52 > 4,68(k-1) \Rightarrow k-1 < 8,01 \Rightarrow k \leq 9$ (9 năm). Số năm thâm hụt PA2 nhiều hơn PA1 là: $9 - 7 = 2$ (năm).

Phần III. Câu trả lời ngắn Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Bài 1. Ba quả bóng dạng hình cầu có bán kính bằng 1 đôi một tiếp xúc nhau và cùng tiếp xúc với mặt phẳng (P) . Mặt cầu (S) bán kính bằng 2 tiếp xúc với ba quả bóng trên. Gọi M là điểm bất kỳ trên (S) . Khoảng cách lớn nhất từ điểm M đến mặt phẳng (P) bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)



Hướng dẫn giải. Gọi tâm quả ba quả cầu nhỏ là A, B, C và tâm của quả cầu lớn bên trên là S .

Khi đó $S.ABC$ là chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng 2 (do hai cầu nhỏ bán kính 1 tiếp xúc nhau) và cạnh bên bằng 3 (do cầu lớn bán kính 2 tiếp xúc cầu nhỏ bán kính 1).

Gọi O là chân đường cao của chóp $S.ABC$. Gọi H là hình chiếu của M lên mặt phẳng (P) .

Suy ra MH lớn nhất khi M, S, O, H thẳng hàng.

$$MH_{\max} = MS + SO + OH = 2 + SO + 1.$$

Ta có AO là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC cạnh 2: $AO = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$$\text{Trong tam giác vuông } SAO: SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{9 - \frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{69}}{3}.$$

$$\text{Suy ra: } MH_{\max} = 3 + SO = 3 + \frac{\sqrt{69}}{3} \approx 5,77.$$

Bài 2. Một người tập thể hình tìm mua thanh protein để tăng cơ nhanh chóng, với 2 loại sản phẩm: thanh protein loại A và loại B. Mỗi thanh loại A chứa 15g protein, 30g carbohydrate và 200 calo. Mỗi thanh loại B chứa 30g protein, 20g carbohydrate và 240 calo. Theo kế hoạch dinh dưỡng, người này cần ít nhất 20 000 calo trong tháng từ các thanh protein, trong đó phải có ít nhất 1800g protein và 2200g carbohydrate. Biết giá mỗi thanh loại A là 30 000 đồng và giá mỗi thanh loại B là 40 000 đồng. Hỏi tổng số tiền ít nhất (đơn vị triệu đồng) để người đó đáp ứng toàn bộ nhu cầu dinh dưỡng trong một tháng là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Gọi x là số thanh protein loại A và y là số thanh protein loại B cần mua ($x, y \geq 0, x, y \in \mathbb{N}$).

Ta có bảng tóm tắt thông số sau:

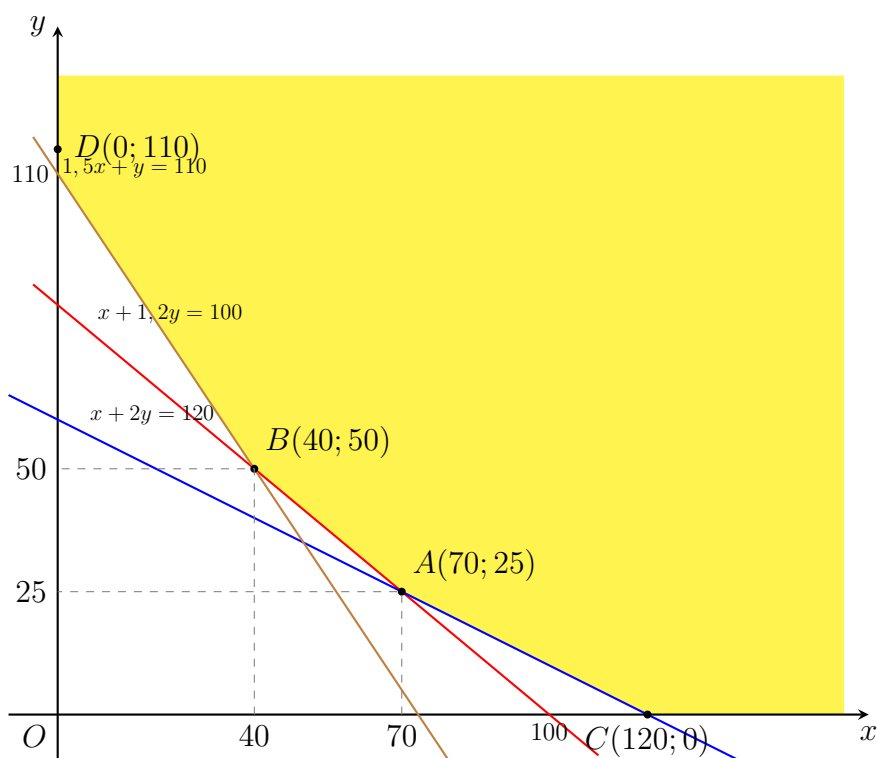
	Protein (g)	Carbohydrate (g)	calo	Price (triệu)
x Loại A	$15x$	$30x$	$200x$	$0,03x$
y Loại B	$30y$	$20y$	$240y$	$0,04y$

Từ các điều kiện bài toán, ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ 200x + 240y \geq 20000 \\ 15x + 30y \geq 1800 \\ 30x + 20y \geq 2200 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x + 1,2y \geq 100 \quad (d_1) \\ x + 2y \geq 120 \quad (d_2) \\ 1,5x + y \geq 110 \quad (d_3) \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán là tìm giá trị nhỏ nhất của hàm mục tiêu: $F(x, y) = 0,03x + 0,04y$ trên miền nghiệm của hệ trên.

Biểu diễn miền nghiệm của hệ trên mặt phẳng tọa độ



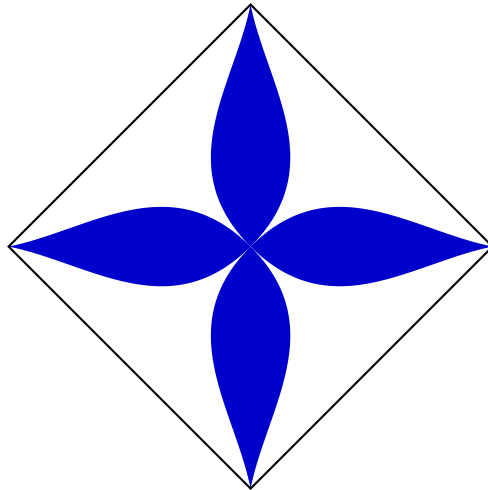
Giá trị của biểu thức F tại các đỉnh của miền nghiệm:

- ◊ Tại $D(0; 110)$: $F = 0,03(0) + 0,04(110) = 4,4$.
- ◊ Tại $B(40; 50)$: $F = 0,03(40) + 0,04(50) = 3,2$.
- ◊ Tại $A(70; 25)$: $F = 0,03(70) + 0,04(25) = 3,1$.
- ◊ Tại $C(120; 0)$: $F = 0,03(120) + 0,04(0) = 3,6$.

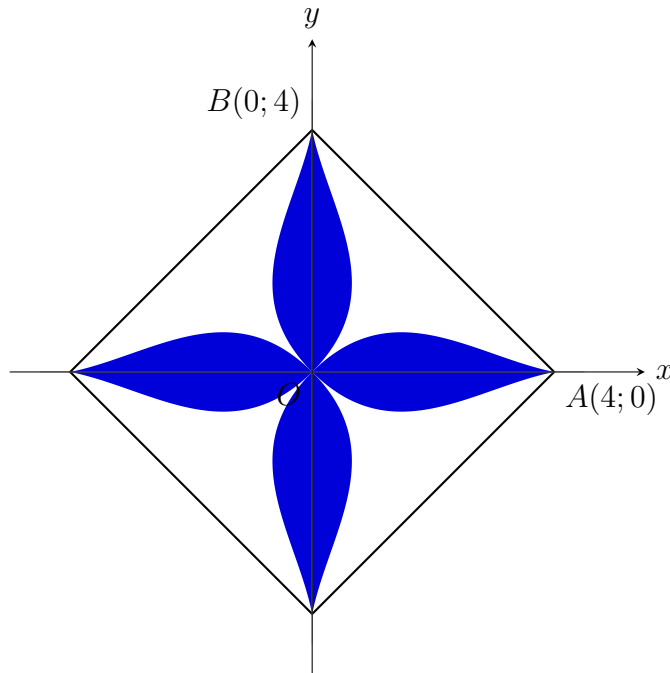
Vậy tổng số tiền ít nhất là 3,1 triệu đồng.

❧ Bài 3. Một công ty thiết kế logo hình vuông có độ dài nửa đường chéo bằng 4. Biểu tượng 4 chiếc lá (được tô màu) được tạo thành bởi các đường cong đối xứng với nhau qua tâm của hình vuông và qua các đường chéo. Một trong số các đường cong ở nửa bên phải của logo là một phần

của đồ thị hàm số bậc ba dạng $y = ax^3 + bx^2 - x$ với hệ số $a < 0$. Để kỷ niệm ngày thành lập 2/3, tỉ số diện tích được tô màu so với phần không được tô màu bằng $\frac{2}{3}$. Tính $a + b$.



Hướng dẫn giải. Xét hệ trục tọa độ như hình vẽ, diện tích tam giác OAB vuông cân tại O (với $A(4; 0)$ và $B(0; 4)$ là hai đỉnh của hình vuông).



Theo giả thiết ta có $OA = 4$, $A(4; 0)$. Hình vuông có nửa đường chéo bằng 4 nên diện tích hình vuông là 32.

Diện tích tô màu là $\frac{64}{5}$.

Xét riêng trong tam giác OAB có diện tích phần tô màu bằng $\frac{8}{5}$.

Theo giả thiết, diện tích phần tô màu trong tam giác OAB được tính bởi công thức

$$\int_0^4 |ax^3 + bx^2 - x| dx = \frac{8}{5}. \text{ Từ đó ta có hệ:}$$

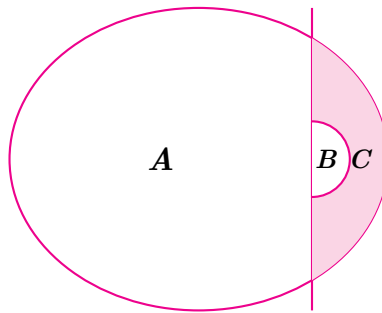
$$\begin{cases} \int_0^4 |ax^3 + bx^2 - x| dx = \frac{8}{5} \\ 64a + 16b - 4 = 0 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ b = \frac{21}{20} \end{cases} \\ \begin{cases} a = -\frac{1}{20} \\ b = \frac{9}{20} \end{cases} \end{cases}$$

◇ Trường hợp $\begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ b = \frac{21}{20} \end{cases} \Rightarrow f(x) = 0$ có nghiệm $0; \frac{5}{4}; 4$ (đồ thị cắt Ox trong $(0; 4)$ - loại).

◇ Trường hợp $\begin{cases} a = -\frac{1}{20} \\ b = \frac{9}{20} \end{cases} \Rightarrow f(x) = 0$ có nghiệm $0; 4; 5$ (thỏa mãn).

Vậy, $a + b = \frac{2}{5} = 0,4$.

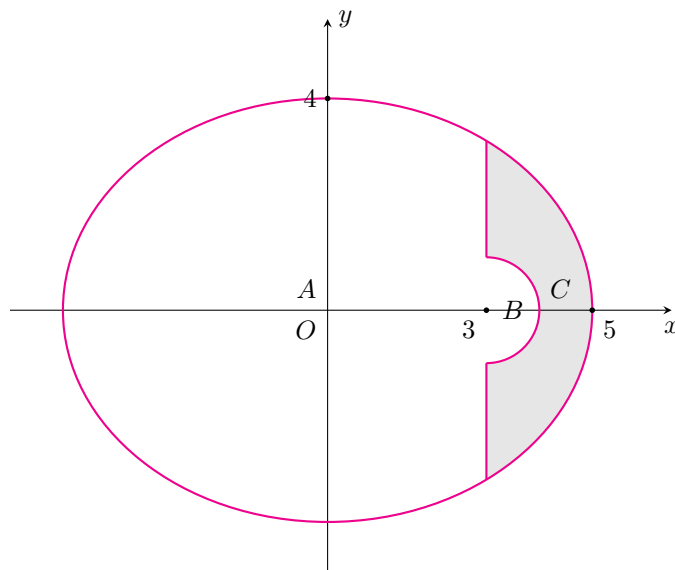
Bài 4. Một khu vườn hình elip (E), có độ dài trục lớn bằng 10m và trục nhỏ bằng 8m (như hình vẽ). Khu vực A để trồng hoa; khu vực B để trồng cỏ, là nửa hình tròn có tâm là một tiêu điểm của elip (E), bán kính bằng 1m; còn lại là khu vực C (phần tô đậm) người ta lát gạch.



Diện tích phần lát gạch bằng bao nhiêu m^2 ? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Hướng dẫn giải.

Gắn tình huống bài toán vào mặt phẳng tọa độ Oxy như hình vẽ:



Phương trình elip là: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Có thể xem phần elip nằm phía trên trục Ox là đồ thị hàm số: $y = 4\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}$ (C).

Gọi S_1 là diện tích phần B nằm phía trên trục Ox , vậy nó là diện tích của $\frac{1}{4}$ hình tròn:

$$S_1 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{4} (\text{m}^2)$$

Tổng diện tích phần B và phần C nằm phía trên trục Ox có thể xem là diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $y = 4\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}$; trục hoành và hai đường thẳng $x = 3$; $x = 5$:

$$S_2 = \int_3^5 4\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}} dx \approx 4,47 (\text{m}^2)$$

Diện tích phần C nằm phía trên trục Ox : $S = S_2 - S_1 \approx 3,69 (\text{m}^2)$.

Diện tích khu vực C người ta lát gạch là: $2S = 7,38 (\text{m}^2)$.

Bài 5. Trong buổi hoạt động trải nghiệm khoa học của học sinh trường THPT Nguyễn Thị Minh Khai, giáo viên chuẩn bị một bộ 8 viên bi kim loại khác nhau để thực hiện thí nghiệm về va chạm và chuyển động trên máng nghiêng. Để tiện cho việc quan sát và ghi chép kết quả, giáo viên đặt trước mặt học sinh 4 khay thí nghiệm được đánh số 1, 2, 3, 4. Trước khi tiến hành thí nghiệm, các viên bi sẽ được đặt vào các khay theo những quy tắc sau:

- ◇ Mỗi khay phải có ít nhất một viên bi để đảm bảo mỗi nhóm học sinh đều có vật mẫu quan sát.
- ◇ Các viên bi trong cùng một khay được xếp thành một hàng từ trái sang phải để thuận tiện cho việc lấy ra thí nghiệm theo thứ tự.
- ◇ Vì mỗi viên bi có khối lượng và màu sắc khác nhau, nên thứ tự các viên bi trong mỗi khay là quan trọng.

Hai cách sắp xếp được xem là giống nhau nếu:

- ◇ Mỗi khay có cùng số viên bi.
- ◇ Thứ tự các viên bi từ trái sang phải trong từng khay hoàn toàn giống nhau.

Gọi T là số cách sắp xếp khác nhau. Giá trị $\frac{T}{200}$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Để tính số cách sắp xếp T , ta thực hiện qua hai bước:

- ◇ **Bước 1:** Xếp 8 viên bi kim loại khác nhau thành một hàng ngang duy nhất. Số cách xếp là hoán vị của 8 phần tử:

$$8! = 40\,320 (\text{cách}).$$

- ◇ **Bước 2:** Chia hàng ngang gồm 8 viên bi này thành 4 phần liên tiếp để đặt vào 4 khay đã đánh số 1, 2, 3, 4. Để mỗi khay có ít nhất một viên bi, ta cần đặt 3 vách ngăn vào 7 khoảng trống nằm giữa các viên bi.

- ◇ Số cách chọn 3 vị trí đặt vách ngăn từ 7 khoảng trống là:

$$C_7^3 = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35 (\text{cách}).$$

Vì các khay đã được đánh số, nên thứ tự của các phần sau khi chia tương ứng duy nhất với các khay từ 1 đến 4.

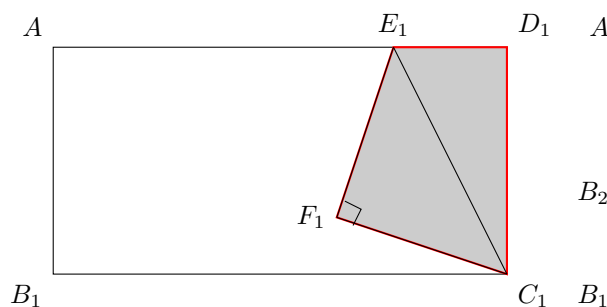
Vậy tổng số cách sắp xếp là:

$$T = 8! \cdot C_7^3 = 40\,320 \cdot 35 = 1\,411\,200.$$

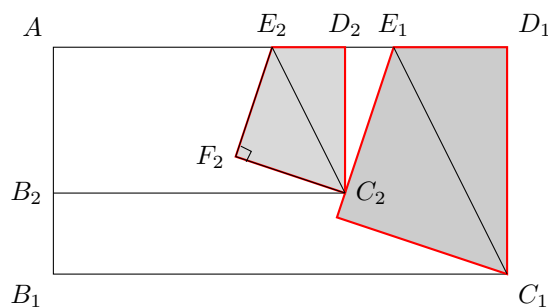
Giá trị biểu thức theo yêu cầu bài toán là:

$$\frac{T}{200} = \frac{1\,411\,200}{200} = 7056.$$

Bài 6. Cho hình chữ nhật $AB_1C_1D_1$ có độ dài cạnh $AD_1 = 2AB_1 = 20$ cm. Điểm E_1 thuộc đoạn AD_1 sao cho $AE_1 = 3E_1D_1$. Lấy điểm F_1 sao cho tam giác $F_1E_1C_1$ vuông cân tại F_1 (F_1 và D_1 khác phía nhau so với đường thẳng C_1E_1), sau đó tô đậm tứ giác $C_1D_1E_1F_1$ (hình 1). Tiếp theo lấy điểm B_2 trên đoạn AB_1 , điểm C_2 trên đoạn E_1F_1 và điểm D_2 trên đoạn AE_1 sao cho $AD_2 = 2AB_2$ và thỏa mãn $AB_2C_2D_2$ là hình chữ nhật. Điểm E_2 thuộc đoạn AD_2 sao cho $AE_2 = 3E_2D_2$. Lấy điểm F_2 sao cho tam giác $F_2E_2C_2$ vuông cân tại F_2 (F_2 và D_2 khác phía nhau so với đường thẳng C_2E_2), sau đó tô đậm tứ giác $C_2D_2E_2F_2$ (hình 2). Cứ tiếp tục như vậy, tính tổng vô hạn các hình tứ giác được tô đậm là T (cm²), tính $46T$.



Hình 1



Hình 2

Hướng dẫn giải. Tứ giác đầu tiên có diện tích

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot \frac{C_1E_1^2}{2} = \frac{225}{4}.$$

Ta có:

$$\widehat{F_1E_1D_2} = 180^\circ - \arctan 2 - 45^\circ \Rightarrow \tan \widehat{F_1E_1D_2} = 3$$

Khi đó

$$D_2E_1 = x \Rightarrow C_2D_2 = 3x \Rightarrow AD_2 = 6x$$

Suy ra

$$6x + x + 5 = 20 \Rightarrow x = \frac{15}{7} \Rightarrow C_2D_2 = \frac{45}{7}.$$

Do đó hình 1 đồng dạng với hình 2 theo tỷ số $\frac{14}{9}$. Vậy nên

$$\lim S_n = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{225}{4}}{1 - \left(\frac{9}{14}\right)^2} \Rightarrow 46T = 4410.$$

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

❖ **Câu 1.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q) : 2x - y + 4z - 5 = 0$. Vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của (Q) ?

- (A) $\vec{n}_3 = (2; -1; -5)$. (B) $\vec{n}_1 = (2; -1; 4)$.
(C) $\vec{n}_1 = (2; 4; -5)$. (D) $\vec{n}_2 = (2; 1; 4)$.

➤ *Hướng dẫn giải.* Mặt phẳng (Q) có phương trình $2x - y + 4z - 5 = 0$ nên vectơ pháp tuyến là hệ số của x, y, z . Vậy $\vec{n} = (2; -1; 4)$. Chọn đáp án B.

❖ **Câu 2.** Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2026^x, y = 0, x = 0, x = 2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $S = \int_0^2 2026^{2x} dx$. (B) $S = \int_0^2 2026^x dx$.
(C) $S = \pi \int_0^2 2026^x dx$. (D) $S = \pi \int_0^2 2026^{2x} dx$.

➤ *Hướng dẫn giải.* Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là $S = \int_a^b |f(x)| dx$. Vì $2026^x > 0$ với mọi $x \in [0; 2]$ nên $S = \int_0^2 2026^x dx$. Chọn đáp án B.

❖ **Câu 3.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; -\frac{1}{2})$ và $(-\frac{1}{2}; +\infty)$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	+		+
y	2	$+\infty$	2

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là đường thẳng có phương trình

- (A) $x = 2$. (B) $x = -\frac{1}{2}$. (C) $y = 2$. (D) $y = -\frac{1}{2}$.

➤ *Hướng dẫn giải.* Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 2$. Vậy tiệm cận ngang là $y = 2$. Chọn đáp án C.

❖ **Câu 4.** Nghiệm của phương trình $\log_2 x = 3$ là

- (A) $x = 8$. (B) $x = \frac{3}{2}$. (C) $x = 6$. (D) $x = 9$.

➤ *Hướng dẫn giải.* $\log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 2^3 = 8$. Chọn đáp án A.

❖ **Câu 5.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$. Điểm

nào dưới đây thuộc đường thẳng d ?

(A) $P(-2; 1; -3)$.

(B) $M(2; -1; 3)$.

(C) $Q(3; 1; -2)$.

(D) $N(-3; -1; 2)$.

➤ *Hướng dẫn giải.* Với $t = 0$, ta được điểm $(2; -1; 3)$. Vậy điểm M thuộc đường thẳng d . Chọn đáp án B.

❖ **Câu 6.** Bảng dưới đây thống kê cự li ném tạ của một vận động viên.

Cự li (m)	[19; 19, 5)	[19, 5; 20)	[20; 20, 5)	[20, 5; 21)	[21; 21, 5)
Tần số	13	45	24	12	6

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến hàng phần trăm) là

(A) 0, 26.

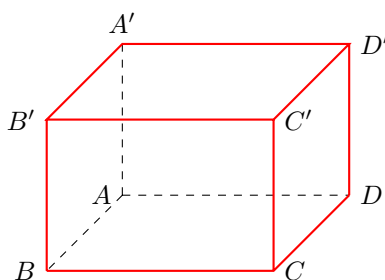
(B) 0, 27.

(C) 0, 29.

(D) 0, 28.

➤ *Hướng dẫn giải.* Tính toán dựa trên công thức phương sai cho mẫu số liệu ghép nhóm, ta được kết quả xấp xỉ 0, 28. Chọn đáp án D.

❖ **Câu 7.** Trong không gian, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?



(A) $\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CC'}$.

(B) $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$.

(C) $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BB'}$.

(D) $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

➤ *Hướng dẫn giải.* Theo quy tắc hình hộp, $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}$. Ở câu C, $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BB'}$ là sai vì $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.

❖ **Câu 8.** Cho cấp số nhân (u_n) có $u_3 = 2, u_6 = 16$. Công bội q của cấp số nhân đã cho là

(A) $q = 1$.

(B) $q = 4$.

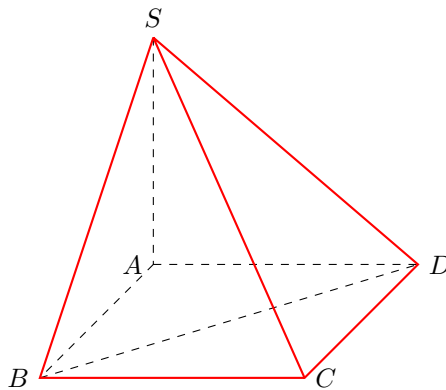
(C) $q = 2$.

(D) $q = 3$.

➤ *Hướng dẫn giải.* $u_6 = u_3 \cdot q^3 \Rightarrow 16 = 2 \cdot q^3 \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$. Chọn đáp án C.

❖ **Câu 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và $SA \perp (ABCD)$. Đường

thẳng nào sau đây vuông góc với SA ?



- (A) SD . (B) SC . (C) SB . (D) BD .

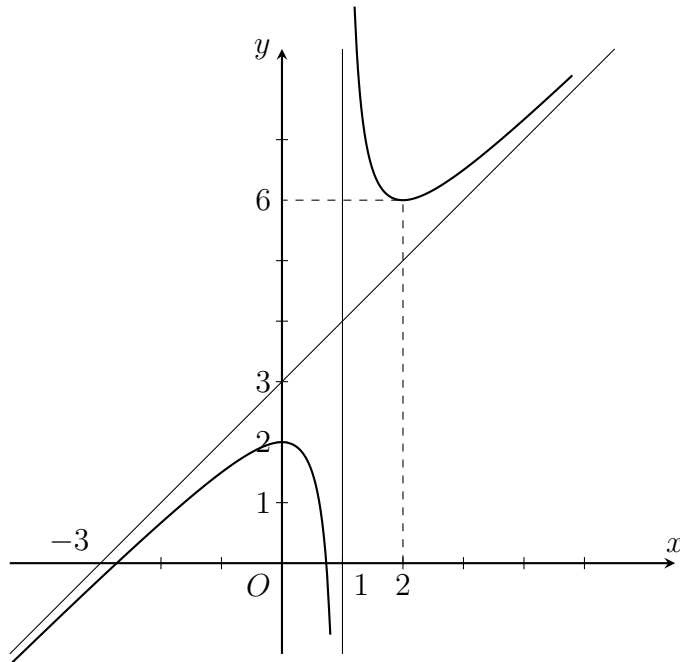
Hướng dẫn giải. Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp BD$ (do $BD \subset (ABCD)$). Chọn đáp án D.

Câu 10. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$ là

- (A) $-\frac{1}{2} \sin 2x + C$. (B) $\sin 2x + C$.
(C) $-\sin 2x + C$. (D) $\frac{1}{2} \sin 2x + C$.

Hướng dẫn giải. $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$. Chọn đáp án D.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới. Khẳng định nào đúng?



- (A) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$. (B) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.
(C) Hàm số đạt cực đại tại $x = 6$. (D) Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

Hướng dẫn giải. Nhìn đồ thị ta thấy tại $x = 2$ đồ thị hàm số đạt điểm thấp nhất của nhánh bên phải, tức là đạt cực tiểu tại $x = 2$. Chọn đáp án B.

Câu 12. Tập nghiệm S của bất phương trình $3^x \geq \frac{1}{27}$ là

(A) $S = (-\infty; -3)$.

(B) $S = (-3; +\infty)$.

(C) $S = [-3; +\infty)$.

(D) $S = (-\infty; -3]$.

Hướng dẫn giải. $3^x \geq 3^{-3} \Leftrightarrow x \geq -3$. Vậy $S = [-3; +\infty)$. Chọn đáp án C.

Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai

Bài 1. Hưng có một đồng xu không cân đối, mà khả năng xuất hiện mặt sấp là 60% và một con xúc xắc không cân đối, mà khả năng xuất hiện mặt 1 chấm nhiều gấp đôi so với các mặt còn lại. Hưng gieo đồng xu và quan sát mặt xuất hiện. Nếu mặt xuất hiện là mặt sấp thì Hưng gieo con xúc xắc 2 lần liên tiếp. Nếu mặt xuất hiện là mặt ngửa thì Hưng gieo con xúc xắc 1 lần.

- Xác suất của biến cố: “Con xúc xắc xuất hiện mặt 1 chấm” là $\frac{2}{7}$.
- Biết rằng Hưng gieo đồng xu ra mặt sấp, xác suất để Hưng gieo con xúc xắc xuất hiện mặt 1 chấm bằng $\frac{24}{49}$.
- Xác suất để Hưng tung con xúc xắc có mặt 1 chấm bằng 42% (làm tròn đến hàng đơn vị).
- Biết rằng Hưng gieo xúc xắc xuất hiện mặt 1 chấm. Khi đó, xác suất của biến cố: “Đồng xu xuất hiện mặt sấp” là 28%.

Hướng dẫn giải. Gọi $P(1)$ là xác suất xuất hiện mặt 1 chấm và $P(2), P(3), \dots, P(6)$ là xác suất xuất hiện các mặt còn lại trong một lần gieo xúc xắc.

Theo đề bài, các mặt còn lại có xác suất bằng nhau, gọi là x . Ta có: $P(1) = 2x$ và $P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = x$.

Vì tổng xác suất các mặt bằng 1 nên: $2x + 5x = 1 \Leftrightarrow 7x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{7}$.

Suy ra xác suất mặt 1 chấm trong một lần gieo là $P(1) = \frac{2}{7}$.

Xác suất của đồng xu: $P(S) = 60\% = 0,6$; $P(N) = 40\% = 0,4$.

- Xác suất mặt 1 chấm xuất hiện trong mỗi lần gieo xúc xắc là $P(1) = \frac{2}{7}$.

Vậy mệnh đề **a) Đúng**.

- Khi đồng xu ra mặt sấp (S), Hưng gieo xúc xắc 2 lần. Biến cố “Con xúc xắc xuất hiện mặt 1 chấm” được hiểu là có ít nhất một lần xuất hiện mặt 1 chấm trong 2 lần gieo.

Xác suất này là: $P(A|S) = 1 - P(\bar{1}) \cdot P(\bar{1}) = 1 - \left(1 - \frac{2}{7}\right)^2 = 1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2 = 1 - \frac{25}{49} = \frac{24}{49}$.

Vậy mệnh đề **b) Đúng**.

- Gọi A là biến cố “Con xúc xắc xuất hiện mặt 1 chấm” trong toàn bộ quá trình.

Xác suất cần tìm theo công thức xác suất đầy đủ là: $P(A) = P(S) \cdot P(A|S) + P(N) \cdot P(A|N)$

Trong đó $P(A|N) = P(1) = \frac{2}{7} = \frac{14}{49}$.

$$\Rightarrow P(A) = 0,6 \cdot \frac{24}{49} + 0,4 \cdot \frac{14}{49} = \frac{14,4 + 5,6}{49} = \frac{20}{49} \approx 40,816\%.$$

Làm tròn đến hàng đơn vị ta được 41%.

Vậy mệnh đề **c) Sai**.

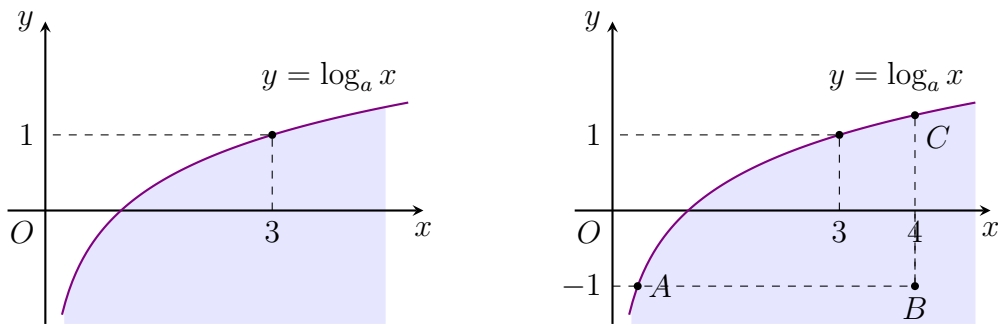
d) Xác suất để đồng xu xuất hiện mặt sấp khi biết xúc xắc đã xuất hiện mặt 1 chấm là $P(S|A)$:

$$P(S|A) = \frac{P(S \cap A)}{P(A)} = \frac{P(S) \cdot P(A|S)}{P(A)} = \frac{0,6 \cdot \frac{24}{49}}{\frac{20}{49}} = \frac{14,4}{20} = 0,72 = 72\%.$$

Giá trị 28% thực chất là xác suất của mặt ngửa $P(N|A) = 1 - 72\% = 28\%$.

Vậy mệnh đề d) **Sai**.

Bài 2. Vịnh Hạ Long là một địa danh du lịch được nhiều người biết đến trên thế giới, nơi đây vẫn còn nhiều quần thể đảo lớn nhỏ chưa được khám phá. Một công ty du lịch quyết định khai thác khu vực có một số đảo nhỏ với hình dáng đặc biệt nếu nhìn từ trên xuống; trong số đó có hai hòn đảo mà phần giới hạn đất liền của nó được mô phỏng như hai đồ thị hàm số trên hình. Với hệ trục tọa độ Oxy thích hợp, đơn vị trên mỗi trục là 100 mét, đường cong mô tả cho hòn đảo thứ nhất có dạng $y = \log_a x$ đi qua điểm có tọa độ $(3; 1)$.



- Điểm có tọa độ $(9; 3)$ thuộc đường cong $y = \log_a x$.
- Chủ dự án muốn xây dựng một nơi trực tiếp nhìn ra biển để du khách tham quan, ăn uống. Họ đã lựa chọn khu vực tam giác cong ABC như trong hình (đường cong AC tiếp giáp biển); diện tích khu vực này là 536 m^2 (làm tròn đến hàng đơn vị).
- Chủ dự án đã thuê một số kỹ sư rất giỏi toán (**đặc biệt giỏi về hàm số mũ-log**) đi khảo sát khu vực này và họ nhận thấy có thể bồi đắp thêm cho hòn đảo thứ hai để đường cong giáp biển $y = g(x)$ của nó đối xứng với đường cong $y = \log_a x$ qua đường thẳng $y = x + 1$. Khi đó đường cong $g(x) = 1 + 3 \cdot 3^x$.
- Chủ dự án định xây một cây cầu nối liền hai hòn đảo, khoảng cách ngắn nhất theo đường chim bay của cây cầu bằng 285 m (làm tròn đến hàng đơn vị của mét).

Hướng dẫn giải. Đường cong $y = \log_a x$ đi qua điểm $(3; 1) \Rightarrow 1 = \log_a 3 \Leftrightarrow a = 3$.

Vậy phương trình đường cong hòn đảo thứ nhất là $y = \log_3 x$.

a) **Sai.** Với $x = 9 \Rightarrow y = \log_3 9 = 2 \neq 3$. Vậy điểm $(9; 3)$ không thuộc đồ thị.

b) **Sai.** Tam giác cong ABC được giới hạn bởi $y = \log_3 x$, $x = 4$ và $y = -1$.

◊ Hoành độ điểm A là nghiệm của $\log_3 x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.

◊ Diện tích tam giác cong ABC (đơn vị diện tích) tính theo tích phân:

$$S = \int_{\frac{1}{3}}^4 (\log_3 x - (-1)) dx = \int_{\frac{1}{3}}^4 (\log_3 x + 1) dx \approx 5,71.$$

◊ Đổi sang đơn vị thực tế: $1 \text{ đvdt} = (100\text{m})^2 = 10000\text{m}^2 \Rightarrow S_{tt} \approx 57100\text{m}^2 \neq 536\text{m}^2$.

c) **Đúng.** Phép đối xứng qua đường thẳng $y = x + 1$ biến $(x; y)$ thành $(X; Y)$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} X = y - 1 \\ Y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = X + 1 \\ x = Y - 1 \end{cases}. \text{ Thay vào } y = \log_3 x \text{ ta được: } X + 1 = \log_3(Y - 1) \Leftrightarrow Y - 1 = 3^{X+1} \Leftrightarrow Y = 1 + 3 \cdot 3^X.$$

Vậy $g(x) = 1 + 3 \cdot 3^x$.

d) **Sai.** Khoảng cách ngắn nhất bằng 2 lần khoảng cách từ đường $y = \log_3 x$ đến đường thẳng $d: x - y + 1 = 0$. Xét $f(x) = \log_3 x$, ta tìm x_0 sao cho $f'(x_0) = 1$:

$$f'(x_0) = \frac{1}{x_0 \ln 3} = 1 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{\ln 3} \approx 0,91 \Rightarrow y_0 \approx -0,086.$$

Khoảng cách ngắn nhất là $2 \cdot \frac{|x_0 - y_0 + 1|}{\sqrt{2}} \cdot 100\text{m} \approx 282\text{m} \neq 285\text{m}$.

Bài 3. Tại một nút giao thông của một khu vực đông dân cư với tốc độ tối đa cho phép đối với ô tô là 50 km/h, người ta gắn một camera phạt nguội tại điểm $S(0; 0; 14)$ trong không gian $(Oxyz)$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét), mặt phẳng (Oxy) song song với mặt đường và chứa vùng nhận diện biển số xe của các phương tiện tham gia giao thông. Biết rằng camera nhận diện tốt nhất biển số xe của các phương tiện tham gia giao thông là khi biển số của chúng nằm trong hình thang cân $ABCD$ với: $SA = SB = 27$ m, $OD = OC = 5$ m, $AB = 14$ m, $CD = 9,6$ m và tia Ox nằm trên đường trung trực các đoạn thẳng AB và CD (xem hình vẽ minh họa). Giả sử tại thời điểm 8 giờ sáng (được xem là thời điểm xuất phát) một ô tô chuyển động thẳng đều theo phương song song với trục Ox , hướng về phía trục Oy và có vị trí của biển số xe ở đầu ô tô là điểm $M(50; -6; 0)$.

a) Hình chiếu của điểm D trên trục Oy là $H(0; 4; 8; 0)$.

b) Điểm D có tọa độ là $(1, 4; -4, 8; 0)$.

c) Đường thẳng AD có phương trình là $\begin{cases} x = 1,4 - 20,6t \\ y = -4,8 + 2,2t \\ z = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$

d) Nếu ô tô đi với vận tốc 45 km/h thì sau đúng 2,2 giây kể từ thời điểm xuất phát thì biển số của xe ô tô đã nằm trong vùng nhận diện tốt nhất của camera.

Hướng dẫn giải.

a) **Sai.** Do Ox là đường trung trực của CD , nên C, D đối xứng qua Ox .

Vì $CD = 9,6$ m nên $|y_C - y_D| = 9,6 \Rightarrow y_C = 4,8$ và $y_D = -4,8$. Hình chiếu của $D(x_D; -4,8; 0)$ trên trục Oy phải là $(0; -4,8; 0)$.

b) **Đúng.** Ta có $y_D = -4,8$. Từ $OD = 5$ m, suy ra $x_D^2 + (-4,8)^2 = 5^2 \Rightarrow x_D^2 = 1,96 \Rightarrow x_D = 1,4$ (do $x_D > 0$).

Vậy $D(1,4; -4,8; 0)$.

c) **Đúng.** Tương tự, $y_A = -7$.

Từ $SA = 27$, suy ra $x_A^2 + (-7)^2 + 14^2 = 27^2 \Rightarrow x_A^2 = 484 \Rightarrow x_A = 22$.

Vậy $A(22; -7; 0)$.

Vectơ $\overrightarrow{AD} = (1,4 - 22; -4,8 - (-7); 0) = (-20,6; 2,2; 0)$.

Phương trình tham số của AD qua D là
$$\begin{cases} x = 1, 4 - 20, 6t \\ y = -4, 8 + 2, 2t \\ z = 0 \end{cases}.$$

d) **Sai.** Vận tốc $v = 45 \text{ km/h} = 12,5 \text{ m/s}$. Vị trí xe tại thời điểm t là $M(50 - 12,5t; -6; 0)$.

Tại $t = 2,2 \text{ s}$, hoành độ xe là $x = 50 - 12,5 \cdot 2,2 = 22,5$.

Vì $22,5 > x_A = 22$ nên biển số xe chưa đi vào vùng nhận diện $ABCD$.

Bài 4. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$.

- Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng $y = ax + b$. Khi đó $a - 2b = 5$.
- Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình là $y = 2x - 3$.
- Gọi A, B lần lượt là các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số và O là gốc tọa độ. Diện tích tam giác OAB bằng 6.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 3)$.

Hướng dẫn giải. Xét hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$. Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

a) Ta có $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1} = x - 2 + \frac{4}{x - 1}$.

Vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [y - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x - 1} = 0$, nên đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng $y = x - 2$.

Suy ra $a = 1, b = -2$. Khi đó $a - 2b = 1 - 2(-2) = 1 + 4 = 5$.

Vậy mệnh đề a) **Đúng**.

b) Ta có $y' = \frac{(2x - 3)(x - 1) - (x^2 - 3x + 6)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$.

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số phân thức bậc hai trên bậc nhất $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ có phương trình:

$$y = \frac{u'(x)}{v'(x)} = \frac{(x^2 - 3x + 6)'}{(x - 1)'} = \frac{2x - 3}{1} = 2x - 3.$$

Vậy mệnh đề b) **Đúng**.

c) Xét $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = -5 \\ x = 3 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$.

Tọa độ hai điểm cực trị là $A(-1; -5)$ và $B(3; 3)$. Gốc tọa độ $O(0; 0)$.

Ta có $\overrightarrow{OA} = (-1; -5), \overrightarrow{OB} = (3; 3)$.

Diện tích tam giác OAB là:

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} |x_A y_B - x_B y_A| = \frac{1}{2} |(-1) \cdot 3 - 3 \cdot (-5)| = \frac{1}{2} |-3 + 15| = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6.$$

Vậy mệnh đề c) **Đúng**.

d) Ta có $y' = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} < 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$.

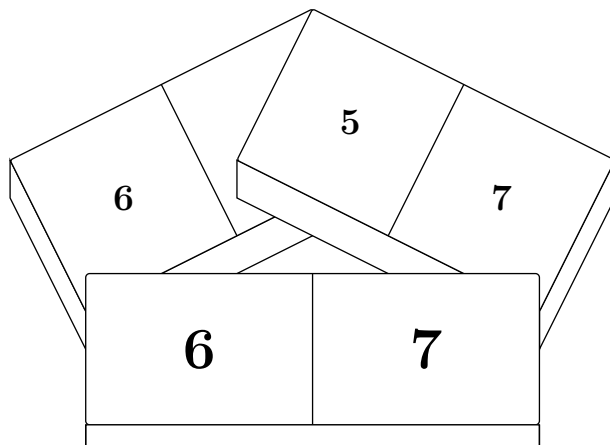
Tuy nhiên, hàm số không xác định tại điểm $x = 1 \in (-1; 3)$. Do đó, hàm số chỉ nghịch biến trên các khoảng $(-1; 1)$ và $(1; 3)$.

Vì khoảng $(-1; 3)$ chứa điểm gián đoạn $x = 1$, nên không thể khẳng định hàm số nghịch biến trên cả khoảng $(-1; 3)$.

Vậy mệnh đề d) Sai.

Phần III. Câu trả lời ngắn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.*

Bài 1. Bạn Nam có 6 quân domino, mỗi quân có hai kí tự được đánh số. Tập hợp các quân domino và các số được đánh là: $(1; 2), (1; 3), (2; 3), (2; 4), (3; 4), (4; 5)$. Bạn Nam chọn ngẫu nhiên 3 quân domino và xếp chúng thành một hình tam giác. Tính xác suất để 3 quân domino được chọn có thể xếp thành một hình tam giác có mặt của mỗi quân tiếp giáp với mặt của quân khác có cùng số (tham khảo như hình vẽ).



Hướng dẫn giải.

Ta thấy chỉ có 2 trường hợp thỏa mãn yêu cầu đề bài (tương ứng với việc chọn được 3 cạnh tạo thành một tam giác trong đồ thị biểu diễn các quân domino):

◇ Chu trình 1-2-3: Gồm các quân $(1; 2), (2; 3), (1; 3)$.

◇ Chu trình 2-3-4: Gồm các quân $(2; 3), (3; 4), (2; 4)$.

Số cách chọn ngẫu nhiên 3 quân domino từ 6 quân là $n(\Omega) = C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố là $n(A) = 2$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \frac{2}{C_6^3} = \frac{2}{20} = 0,1$.

Bài 2. Trên sân khấu của chương trình ngoại khóa Toán học của trường THPT X, người ta đặt hai màn hình cảm ứng A và B hoạt động độc lập với nhau. Trên mỗi màn hình có một thanh trượt di chuyển đều từ 0 đến 2. Khi người chơi bấm dừng, thanh trượt dừng ngẫu nhiên tại một số thực thuộc đoạn $[0; 2]$. Gọi 2 số thực xuất hiện trên hai màn hình A, B lần lượt là a, b . MC đưa ra phương trình $x^3 - 3bx + 2a = 0$ và quy định: Nếu phương trình có ít nhất 2 nghiệm thực, người chơi nhận được một phần quà lưu niệm. Nếu phương trình chỉ có 1 nghiệm thực, người chơi sẽ nhận được 1 tràng pháo tay từ khán giả. Hãy tính xác suất để người chơi nhận được 1 phần quà lưu niệm (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Hướng dẫn giải. Vì $a, b \in [0; 2]$ nên không gian mẫu là hình vuông giới hạn bởi $0 \leq a \leq 2$ và $0 \leq b \leq 2$ trên mặt phẳng tọa độ Oab .

Diện tích không gian mẫu là: $S_{\Omega} = 2 \cdot 2 = 4$.

Xét phương trình: $x^3 - 3bx + 2a = 0$. Đặt $f(x) = x^3 - 3bx + 2a$. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3b$.

◇ Nếu $b \leq 0$, hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên phương trình luôn có duy nhất 1 nghiệm thực (không thỏa mãn).

◇ Nếu $b > 0$, hàm số có hai điểm cực trị là $x = \pm\sqrt{b}$. Phương trình có ít nhất 2 nghiệm thực khi và chỉ khi giá trị cực đại và cực tiểu thỏa mãn:

$$f(\sqrt{b}) \cdot f(-\sqrt{b}) \leq 0 \Leftrightarrow (2a - 2b\sqrt{b})(2a + 2b\sqrt{b}) \leq 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 4b^3 \leq 0 \Leftrightarrow a^2 \leq b^3.$$

Do $a, b \geq 0$ nên điều kiện tương đương với $a \leq b\sqrt{b} \Leftrightarrow a \leq b^{\frac{3}{2}}$.

Miền thuận lợi H là phần diện tích nằm trong hình vuông $[0; 2] \times [0; 2]$ và nằm dưới đường cong $a = b^{\frac{3}{2}}$.

Giao điểm của đường cong $a = b^{\frac{3}{2}}$ và đường thẳng $a = 2$ là $b = \sqrt[3]{4} \approx 1,587 < 2$.

Diện tích miền thuận lợi được tính bằng tích phân:

$$S_H = \int_0^{\sqrt[3]{4}} b^{\frac{3}{2}} db + \int_{\sqrt[3]{4}}^2 2 db = \frac{2}{5} b^{\frac{5}{2}} \Big|_0^{\sqrt[3]{4}} + 2(2 - \sqrt[3]{4}) = 4 - \frac{6}{5} \sqrt[3]{4} \approx 2,095.$$

Xác suất để người chơi nhận được phần quà là:

$$P = \frac{S_H}{S_{\Omega}} = \frac{4 - 1,2 \cdot \sqrt[3]{4}}{4} \approx 0,5237.$$

Làm tròn đến hàng phần chục, ta được kết quả: $P \approx 0,5$.

Bài 3. Một cửa hàng bán tạp chí với giá 40 nghìn đồng một cuốn. Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in,...) được cho bởi công thức $C(x) = 0,004x^2 - 2x + 1000$, $C(x)$ được tính theo đơn vị nghìn đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 10 nghìn đồng. Các khoản thu bao gồm tiền bán tạp chí và 50 triệu nhận được từ sự trợ giúp của báo chí. Giả sử số cuốn tạp chí in ra đều được bán hết. Cửa hàng thu được lợi nhuận nhiều nhất khi in a cuốn tạp chí, khi đó lợi nhuận thu được là T (triệu đồng). Tính $a + T$.

Hướng dẫn giải. Đổi đơn vị: 50 triệu đồng = 50.000 nghìn đồng. Gọi đơn vị chung là nghìn đồng.

Tổng doanh thu khi bán hết x cuốn tạp chí là:

$$R(x) = 40x + 50.000 \text{ (nghìn đồng)}.$$

Tổng chi phí bao gồm chi phí xuất bản và chi phí phát hành:

$$TC(x) = C(x) + 10x = (0,004x^2 - 2x + 1000) + 10x = 0,004x^2 + 8x + 1000 \text{ (nghìn đồng)}.$$

Hàm lợi nhuận của cửa hàng là:

$$L(x) = R(x) - TC(x) = (40x + 50.000) - (0,004x^2 + 8x + 1000) = -0,004x^2 + 32x + 49.000.$$

Hàm số $L(x)$ là hàm bậc hai có hệ số $a = -0,004 < 0$ nên đồ thị là parabol có bề lõm quay xuống dưới.

Lợi nhuận đạt giá trị lớn nhất tại đỉnh của parabol:

$$a = -\frac{b}{2a} = -\frac{32}{2 \cdot (-0,004)} = 4000 \text{ (cuốn)}.$$

Lợi nhuận lớn nhất tương ứng là:

$$L(4000) = -0,004 \cdot (4000)^2 + 32 \cdot 4000 + 49.000 = 113.000 \text{ (nghìn đồng)}.$$

Đổi sang đơn vị triệu đồng, ta được $T = \frac{113.000}{1.000} = 113$ (triệu đồng).

Vậy $a + T = 4000 + 113 = 4113$.

Bài 4. Hai người là A và B chơi trò chơi leo cầu thang bằng cách oẳn tù tì (xác suất thắng, hoà, thua trong trò chơi oẳn tù tì của A là bằng nhau). Luật chơi như sau:

- ◇ Trong mỗi lượt chơi, người thắng sẽ leo 2 bậc thang và người thua sẽ đứng yên tại chỗ.
- ◇ Nếu hoà thì cả hai người cùng leo lên 1 bậc thang.

Sau khi chơi oẳn tù tì 5 lần, xác suất để vị trí của A tăng 5 bậc so với vị trí ban đầu là T , tính $\frac{238}{T}$.

Hướng dẫn giải. Trong mỗi lượt chơi oẳn tù tì, xác suất để A thắng, hòa hoặc thua đều bằng $\frac{1}{3}$.

Gọi x, y, z lần lượt là số lần A thắng, hòa và thua trong 5 lượt chơi ($x, y, z \in \mathbb{N}$).

Theo đề bài, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

Từ phương trình $2x + y = 5$, ta có các bộ số $(x; y; z)$ thỏa mãn là:

- ◇ Trường hợp 1: $x = 0 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow z = 0$. Số cách xảy ra là: $\frac{5!}{0!5!0!} = 1$.
- ◇ Trường hợp 2: $x = 1 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow z = 1$. Số cách xảy ra là: $\frac{5!}{1!3!1!} = 20$.
- ◇ Trường hợp 3: $x = 2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow z = 2$. Số cách xảy ra là: $\frac{5!}{2!1!2!} = 30$.

Tổng số kết quả có thể xảy ra khi chơi 5 lần là: $3^5 = 243$.

Xác suất để vị trí của A tăng đúng 5 bậc là:

$$T = \frac{1 + 20 + 30}{243} = \frac{51}{243} = \frac{17}{81}.$$

Khi đó, giá trị của biểu thức cần tính là:

$$\frac{238}{T} = \frac{238}{\frac{17}{81}} = 238 \cdot \frac{81}{17} = 14 \cdot 81 = 1134.$$

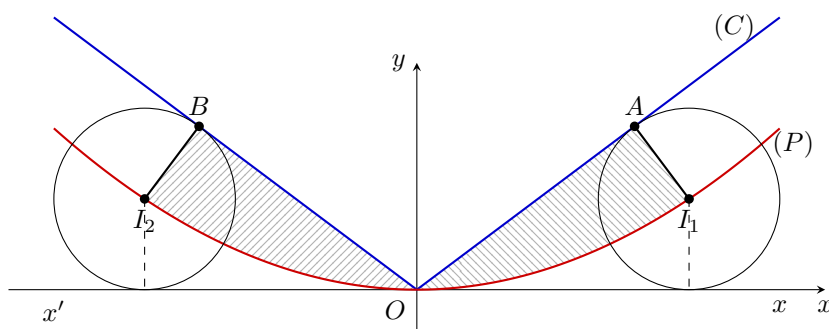
Vậy $\frac{238}{T} = 1134$.

Bài 5. Trong mặt phẳng Oxy cho:

- ◇ Đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{3}{4}|x|$.

- ◇ Đường tròn (C_1) có tâm I_1 , bán kính 1 tiếp xúc với (C) tại A và tiếp xúc với tia Ox .
- ◇ Đường tròn (C_2) có tâm I_2 , bán kính 1 tiếp xúc với (C) tại B và tiếp xúc với tia Ox' .
- ◇ Parabol (P) có đỉnh là O , qua I_1 và I_2 .

(tham khảo hình vẽ dưới đây)



Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (C) , (P) và các đường thẳng I_1A , I_2B .

Hướng dẫn giải. Nhánh phải của đồ thị (C) là đường thẳng $\Delta : 3x - 4y = 0$.

Đường tròn (C_1) có bán kính $R = 1$ và tiếp xúc với tia Ox nên tâm I_1 có tung độ $y = 1$.

Do (C_1) cũng tiếp xúc với (C) nên: $d(I_1, \Delta) = 1 \Rightarrow \frac{|3x - 4|}{5} = 1 \Rightarrow x = 3$, vậy $I_1(3; 1)$.

Parabol (P) đỉnh $O(0; 0)$ đi qua $I_1(3; 1)$ dễ dàng suy ra phương trình là $y = \frac{1}{9}x^2$.

Gọi $H(3; 0)$ là hình chiếu vuông góc của I_1 lên Ox . Phần diện tích S_1 bên phải trục tung được giới hạn bởi đường gấp khúc $O - A - I_1$ ở trên và (P) ở dưới.

Kẻ đường chéo OI_1 chia tứ giác OAI_1H thành hai tam giác vuông có diện tích bằng:

$$S_{OAI_1H} = S_{\triangle OHI_1} + S_{\triangle AOI_1} = \frac{1}{2} \cdot OH \cdot HI_1 + \frac{1}{2} \cdot OA \cdot I_1A = 1,5 + 1,5 = 3.$$

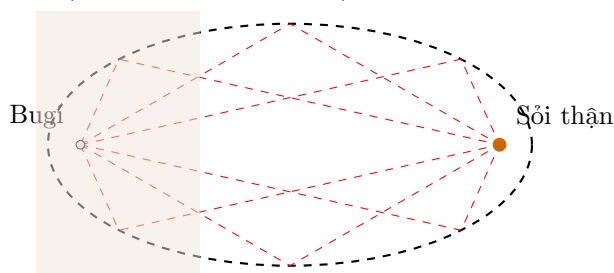
(Vì $I_1A = 1$, $OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = 3$ với A là hình chiếu của I_1 lên Δ).

Phần diện tích nằm dưới Parabol (P) trên đoạn $[0; 3]$ là: $\int_0^3 \frac{1}{9}x^2 dx = 1$.

Lấy diện tích tứ giác trừ đi diện tích dưới Parabol, ta được $S_1 = 3 - 1 = 2$.

Vậy tổng diện tích hình phẳng giới hạn hai bên là $S = 2 \times S_1 = 4$.

Bài 6. Một máy tán sỏi sử dụng mặt phản xạ có dạng hình elip để phá vỡ sỏi thận mà không cần phẫu thuật. Một bugi đặt tại một tiêu điểm của elip phát ra các xung năng lượng. Nhờ đặc tính phản xạ của elip, các xung này được hội tụ về tiêu điểm còn lại - nơi đặt viên sỏi thận với đủ năng lượng để làm vỡ viên sỏi (xem hình minh họa).



Gương phản xạ hình elip

Độ dài các trục lớn và nhỏ của elip lần lượt là 28 cm và 14 cm. Hỏi khoảng cách từ bugi đến viên sỏi là bao nhiêu cm (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

 *Hướng dẫn giải.* Từ dữ kiện: "Một bugi đặt tại một tiêu điểm của elip và viên sỏi nằm ở tiêu điểm còn lại" nên khoảng cách từ bugi đến viên sỏi bằng khoảng cách giữa hai tiêu điểm của hình elip, tức bằng $F_1F_2 = 2c$.

Giả thiết cho: "Độ dài các trục lớn và nhỏ của elip lần lượt là 28 cm và 14 cm" nên ta có:

$$\begin{cases} A_1A_2 = 2a = 28 \\ B_1B_2 = 2b = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 14 \\ b = 7 \end{cases}.$$

Ta có $c^2 = a^2 - b^2 = 14^2 - 7^2 = 196 - 49 = 147 \Rightarrow c = \sqrt{147} = 7\sqrt{3}$.

Vậy khoảng cách từ bugi đến viên sỏi bằng:

$$F_1F_2 = 2c = 2 \cdot 7\sqrt{3} = 14\sqrt{3} \approx 24,2 \text{ (cm)}.$$