

BÀI 3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Bài toán chung: Tìm giá trị nhỏ nhất hoặc lớn nhất của hàm số $f(x)$

Bước 1: Dự đoán và chứng minh $f(x) \geq c; f(x) \leq c$

Bước 2: Chỉ ra 1 điều kiện đủ để $f(x) = c$

2. Các phương pháp thường sử dụng

Phương pháp 1: Biến đổi thành tổng các bình phương

Phương pháp 2: Tam thức bậc hai.

Phương pháp 3: Sử dụng bất đẳng thức cổ điển: *Côsi*; *Bunhiacôpski*

Phương pháp 4: Sử dụng đạo hàm.

Phương pháp 5: Sử dụng đổi biến lượng giác.

Phương pháp 6: Sử dụng phương pháp vectơ và hệ tọa độ

Phương pháp 7: Sử dụng phương pháp hình học và hệ tọa độ.

II. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA:

Bài 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P(x, y) = x^2 + 11y^2 - 6xy + 8x - 28y + 21$

Giải. Biến đổi biểu thức dưới dạng $P(x, y) = (x - 3y + 4)^2 + 2(y - 1)^2 + 3 \geq 3$

$$\text{Từ đó suy ra } \text{Min}P(x, y) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} y - 1 = 0 \\ x - 3y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Bài 2. Cho $x, y > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $S = \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

$$\text{Giải. } S = \left(\frac{x^2}{y^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right)^2 - 2 + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

$$S = \left(\frac{x^2}{y^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2\right) + 2$$

$$S = \left(\frac{x^2}{y^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)^2 + \frac{(x - y)^2}{xy} + 2 \geq 2.$$

Với $x = y > 0$ thì $\text{Min}S = 2$

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $S = \sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2(x + y)$

Giải. $S = \sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2(x + y) = \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 2y}{2} + 1 - \cos^2(x + y)$

$$S = 2 - \cos(x + y)\cos(x - y) - \cos^2(x + y) = \frac{9}{4} - \left[\frac{1}{4} + \cos(x + y)\cos(x - y) + \cos^2(x + y) \right]$$

$$S = \frac{9}{4} - \left[\frac{1}{2} \cos(x - y) + \cos(x + y) \right]^2 - \frac{1}{4} \sin^2(x - y) \leq \frac{9}{4}.$$

Với $x = y = \frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ thì $\text{Max } S = \frac{9}{4}$

Bài 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_8^2 - (x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_6x_7 + x_7x_8 + x_8)$$

Giải. $S = \left(x_1 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{4}{6}\left(x_3 - \frac{3}{4}x_4\right)^2 + \frac{5}{8}\left(x_4 - \frac{4}{5}x_5\right)^2 +$

$$+ \frac{6}{10}\left(x_5 - \frac{5}{6}x_6\right)^2 + \frac{7}{12}\left(x_6 - \frac{6}{7}x_7\right)^2 + \frac{8}{14}\left(x_7 - \frac{7}{8}x_8\right)^2 + \frac{9}{16}\left(x_8 - \frac{8}{9}\right)^2 - \frac{4}{9} \geq -\frac{4}{9}$$

Với $x_1 = \frac{1}{2}x_2; x_2 = \frac{2}{3}x_3; \dots; x_6 = \frac{6}{7}x_7; x_7 = \frac{7}{8}x_8; x_8 = \frac{8}{9}$, thì $\text{Min } S = -\frac{4}{9}$

Bài 5. Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = 19x^2 + 54y^2 + 16z^2 - 16xz - 24y + 36xy$$

Giải. Biến đổi $S \Leftrightarrow f(x) = 19x^2 - 2(8z - 18y)x + 54y^2 + 16z^2 - 24y$

Ta có $\Delta'_x = g(y) = (8z - 18y)^2 - (54y^2 + 16z^2 - 24y) = -702y^2 + 168zy - 240z^2$

$$\Rightarrow \Delta'_y = (84z)^2 - 702 \cdot 240z^2 = -161424z^2 \leq 0 \quad \forall z \in \mathbb{R} \Rightarrow g(y) \leq 0 \quad \forall y, z \in \mathbb{R}$$

Suy ra $\Delta'_x \leq 0 \quad \forall y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \geq 0$. Với $x = y = z = 0$ thì $\text{Min } S = 0$

Bài 6. Cho $x^2 + xy + y^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = x^2 - xy + y^2$$

Giải Xét $y = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow S = 3$ là 1 giá trị của hàm số.

Xét $y \neq 0$, khi đó biến đổi biểu thức dưới dạng sau đây

$$u = \frac{S}{3} = \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2} = \frac{(x/y)^2 - (x/y) + 1}{(x/y)^2 + (x/y) + 1} = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + t + 1} = u \quad \text{với } t = \frac{x}{y}$$

$$\Leftrightarrow u(t^2 + t + 1) = t^2 - t + 1 \Leftrightarrow (u - 1)t^2 + (u + 1)t + (u - 1) = 0 \quad (*)$$

+ Nếu $u = 1$, thì $t = 0 \Rightarrow x = 0, y = \pm\sqrt{3} \Rightarrow u = 1$ là 1 giá trị của hàm số

+ Nếu $u \neq 1$, thì u thuộc tập giá trị hàm số $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có nghiệm t

$$\Leftrightarrow \Delta = (3u - 1)(3 - u) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq u \leq 3.$$

Vậy tập giá trị của u là $\left[\frac{1}{3}, 3\right] \Rightarrow \text{Min } u = \frac{1}{3}; \text{Max } u = 3$

$$\text{Min } S = 1 \Leftrightarrow \text{Min } u = \frac{1}{3} \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \pm 1$$

$$\text{Max } S = 9 \Leftrightarrow \text{Max } u = 3 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ x^2 + xy + y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3}, y = -\sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3}, y = \sqrt{3} \end{cases}$$

Bài 7. Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2 - (x^2 + y^2) = 0$
 Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $S = x^2 + y^2$

Giải. Biến đổi $(x^2 - y^2)^2 + 2(x^2 - y^2) + 1 + 4x^2y^2 - (x^2 + y^2) = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 - 3(x^2 + y^2) + 1 + 4x^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 - 3(x^2 + y^2) + 1 = -4x^2$$

$$\text{Do } -4x^2 \leq 0 \text{ nên } (x^2 + y^2)^2 - 3(x^2 + y^2) + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Với } x = 0, y = \pm\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}, \text{ thì } \text{Min}(x^2 + y^2) = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Với } x = 0, y = \pm\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}, \text{ thì } \text{Max}(x^2 + y^2) = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

Bài 8. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \sqrt{4x^2 + 2x + 1}$

Giải. Gọi y_0 là 1 giá trị của hàm $f(x)$

$$\Rightarrow \text{tồn tại } x_0 \text{ sao cho } y_0 = x_0 + \sqrt{4x_0^2 + 2x_0 + 1}$$

$$\Leftrightarrow y_0 - x_0 = \sqrt{4x_0^2 + 2x_0 + 1} \Rightarrow y_0^2 - 2y_0x_0 + x_0^2 = 4x_0^2 + 2x_0 + 1$$

$$\Leftrightarrow g(x_0) = 3x_0^2 + 2(1 - y_0)x_0 + 1 - y_0^2 = 0. \text{ Ta có } g(x) = 0 \text{ có nghiệm } x_0$$

$$\Leftrightarrow \Delta' = (1 - y_0)^2 - 3(1 - y_0^2) = 2(2y_0^2 + y_0 - 1) = 2(y_0 + 1)(2y_0 - 1) \geq 0$$

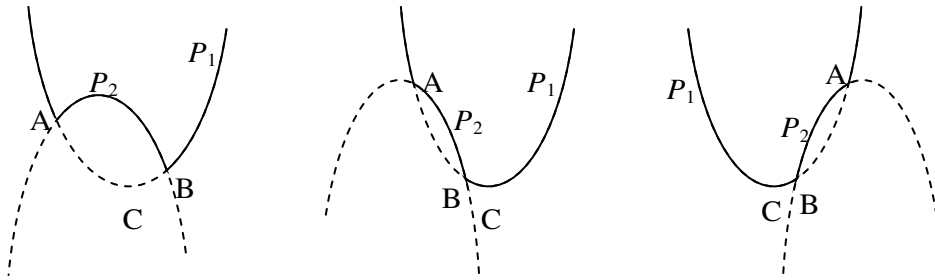
Do $y_0 = x_0 + \sqrt{3x_0^2 + (x_0 + 1)^2} \geq x_0 + \sqrt{3x_0^2} = x_0 + \sqrt{3}|x_0| \geq 0$ nên

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 2y_0 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow y_0 \geq \frac{1}{2}. \text{ Với } x = -\frac{1}{2} \text{ thì } \text{Min}f(x) = \frac{1}{2}$$

Bài 9. Cho $y = f(x) = |x^2 - 5x + 4| + mx$. Tìm các giá trị của m sao cho $\text{Min } y > 1$

Giải. Ta có $f(x) = \begin{cases} x^2 + (m-5)x + 4 & ; x \leq 1 \vee x \geq 4 : (P_1) \\ -x^2 + (m+5)x - 4 & ; 1 \leq x \leq 4 : (P_2) \end{cases}$

Gọi (P) là đồ thị của $y = f(x) \Rightarrow (P) = (P_1) \cup (P_2)$ khi đó (P) có 1 trong các hình dạng đồ thị sau đây



Hoàn độ của các điểm đặc biệt trong đồ thị (P):

Hoàn độ giao điểm $(P_1), (P_2)$ $x_A = 1; x_B = 4$; Hoàn độ đỉnh (P_1) : $x_C = \frac{5-m}{2}$.

Nhìn vào đồ thị ta xét các khả năng sau:

• Nếu $x_C \in [x_A, x_B] \Leftrightarrow m \in [-3, 3]$ thì $\text{Min}f(x) = \text{Min}\{f(1), f(4)\}$.

$$\text{Khi đó } \text{Min}f(x) > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq m \leq 3 \\ f(1) = m > 1 \\ f(4) = 4m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m \leq 3 \quad (1)$$

• Nếu $x_C \notin [x_A, x_B] \Leftrightarrow m \notin [-3, 3]$ thì $\text{Min}f(x) = f_1(x_C) = f_1\left(\frac{5-m}{2}\right) = \frac{-m^2 + 10m - 9}{4}$

$$\text{Khi đó } \text{Min}f(x) > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \notin [-3, 3] \\ m^2 - 10m + 13 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < 5 + 2\sqrt{3} \quad (2)$$

• **Kết luận:** Từ (1) và (2) suy ra $\text{Min}f(x) > 1 \Leftrightarrow 1 < m < 5 + 2\sqrt{3}$

Bài 10. (Đề thi TSDH 2005 khối A)

Cho $x, y, z > 0$; $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$. Tìm Min của $S = \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z}$

Giải: Sử dụng bất đẳng thức Côsi cho các số $a, b, c, d > 0$ ta có:

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) \geq 4\sqrt[4]{abcd} \cdot 4\sqrt[4]{\frac{1}{abcd}} = 16 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq \frac{16}{a+b+c+d}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{16}{x+x+y+z} = \frac{16}{2x+y+z} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{16}{x+y+y+z} = \frac{16}{x+2y+z} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z} \geq \frac{16}{x+y+z+z} = \frac{16}{x+y+2z} \end{cases}$$

$$16 = 4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 16\left(\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z}\right) \Rightarrow \text{Min } S = 1$$

Bài 11. (Đề thi TSDH 2007 khối B)

Cho $x, y, z > 0$. Tìm Min của $S = x\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{yz}\right) + y\left(\frac{y}{2} + \frac{1}{zx}\right) + z\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{xy}\right)$

Giải: Sử dụng bất đẳng thức Côsi cho 9 số ta có

$$S = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2 + \frac{x}{yz} + \frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy} + \frac{z}{xy}\right) \geq \frac{9}{2} \cdot \sqrt[9]{\frac{x^4 y^4 z^4}{x^4 y^4 z^4}} = \frac{9}{2} \Rightarrow \text{Min } S = \frac{9}{2}$$

Bài 12. Cho $\begin{cases} x, y > 0 \\ x+y=1 \end{cases}$ Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}}$

Giải: $S = \left(\frac{x}{\sqrt{y}} + \sqrt{y}\right) + \left(\frac{y}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right) - (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \geq 2(\sqrt{x} + \sqrt{y}) - (\sqrt{x} + \sqrt{y}) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

Mặt khác, $S = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}} = \frac{1-y}{\sqrt{y}} + \frac{1-x}{\sqrt{x}} = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right) - (\sqrt{x} + \sqrt{y})$

Suy ra $2S \geq \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \geq \frac{2}{\sqrt[4]{xy}} \geq \frac{2}{\sqrt{\frac{x+y}{2}}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow S \geq \sqrt{2} \Rightarrow \text{Min } S = \sqrt{2}$.

Bài 13. Cho $x, y, z > 0$. Tìm Max của: $S = \frac{xyz(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)}$

Giải: Sử dụng bất đẳng thức **Côsi** và **BunhiaCôpski** ta có 3 đánh giá sau:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{x^2 y^2 z^2}, xy + yz + zx \geq 3 \cdot \sqrt[3]{xy \cdot yz \cdot zx} = 3 \cdot \sqrt[3]{x^2 y^2 z^2}$$

$$x + y + z \leq \sqrt{(1^2 + 1^2 + 1^2)(x^2 + y^2 + z^2)} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \text{ Từ đó suy ra}$$

$$S \leq \frac{xyz(1 + \sqrt{3})\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{(x^2 + y^2 + z^2)3\sqrt[3]{x^2 y^2 z^2}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{xyz}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \leq \frac{1 + \sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{xyz}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{xyz}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{9}$$

Bài 14. (Đề thi TSDH 2003 khối B)

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2}$

Cách 1: Tập xác định $D = [-2; 2]$;

$$y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}; y' = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{4 - x^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 4 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} \max y = 2\sqrt{2} \\ \min y = -2 \end{cases}$$

x	-2	$\sqrt{2}$	2
y'	+	0	-
y	-2	$2\sqrt{2}$	2

Cách 2: Đặt $x = 2 \sin u, u \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$$\Rightarrow y = 2(\sin u + \cos u) = 2\sqrt{2} \sin\left(u + \frac{\pi}{4}\right) \in [-2; 2\sqrt{2}]; \max y = 2\sqrt{2}; \min y = -2$$

Bài 15. (Đề dự bị TSDH 2003 khối B)

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $y = x^6 + 4(1 - x^2)^3$ trên đoạn $[-1; 1]$

Cách 1. Đặt $u = x^2 \in [0; 1]$. Ta có $y = u^3 + 4(1 - u)^3 = -3u^3 + 12u^2 - 12u + 4$

$$y' = -9u^2 + 24u - 12 = 0 \Leftrightarrow u_1 = \frac{2}{3} \in [0; 1]; u_2 = 2 > 1$$

Nhìn bảng biến thiên ta có $\max y = 4$; $\min y = \frac{4}{9}$

Cách 2. Đặt $x = \sin u \Rightarrow y = \sin^6 u + 4 \cos^6 u$.

$$= (\sin^6 u + \cos^6 u) + 3 \cos^6 u \leq (\sin^2 u + \cos^2 u) + 3 = 4$$

Với $x = 0$ thì $\max y = 4$. Sử dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\begin{cases} \sin^6 u + \frac{8}{27} + \frac{8}{27} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\sin^6 u \cdot \frac{8}{27} \cdot \frac{8}{27}} = \frac{4}{3} \sin^2 u \\ 4 \cos^6 u + \frac{4}{27} + \frac{4}{27} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{4 \cos^6 u \cdot \frac{4}{27} \cdot \frac{4}{27}} = \frac{4}{3} \cos^2 u \end{cases}$$

$$y = \sin^6 u + 4 \cos^6 u + \frac{8}{9} \geq \frac{4}{3}(\sin^2 u + \cos^2 u) = \frac{4}{3} \Rightarrow y \geq \frac{4}{3}. \text{ Với } x = \frac{2}{3} \Rightarrow \min y = \frac{4}{9}$$

x	0	$\frac{2}{3}$	1
y'	0	-	0
y	4	$\frac{4}{9}$	1

Bài 16. a) Lập bảng biến thiên và tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$

b) Cho $a+b+c=1$. Chứng minh rằng: $\sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1} + \sqrt{c^2+1} \geq \sqrt{10}$

Giải. a) TXĐ: $D = \mathbb{R}$; $y' = \frac{1-3x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow y\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{10}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+3)/|x|}{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+3)/|x|}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{|x|}.$$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -1$. Nhìn BBT

ta có $y = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}} \leq \sqrt{10} \Rightarrow \max y = \sqrt{10}$

x	$-\infty$	$1/3$	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$
y	-1	$\sqrt{10}$	1

b) Theo phần a) thì $y \leq \sqrt{10}, \forall x \Leftrightarrow x+3 \leq \sqrt{10} \cdot \sqrt{x^2+1}, \forall x$.

Đặc biệt hóa bất đẳng thức này tại các giá trị $x=a, x=b, x=c$ ta có:

$$\begin{cases} x=a: a+3 \leq \sqrt{10} \cdot \sqrt{a^2+1} \\ x=b: b+3 \leq \sqrt{10} \cdot \sqrt{b^2+1} \\ x=c: c+3 \leq \sqrt{10} \cdot \sqrt{c^2+1} \end{cases}$$

$$a+b+c+9 \leq \sqrt{10} \cdot (\sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1} + \sqrt{c^2+1}) \Leftrightarrow \sqrt{10} \leq \sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1} + \sqrt{c^2+1}$$

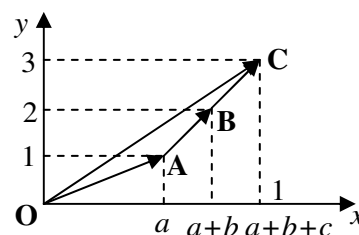
Cách 2. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy đặt

$$\overrightarrow{OA} = (a; 1); \overrightarrow{AB} = (b; 1); \overrightarrow{BC} = (c; 1).$$

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (a+b+c; 3).$$

$$\text{Do } |\overrightarrow{OA}| + |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| \geq |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{OC}|$$

$$\text{Từ đó suy ra } \sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1} + \sqrt{c^2+1} \geq \sqrt{10}$$



Bài 17. (Đề 33 III.2, Bộ đề thi TSĐH 1987 – 1995)

Cho $x^2 + y^2 = 1$. Tìm Max, Min của $A = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}$.

Giải. 1. Tìm MaxA: Sử dụng bất đẳng thức **BunhiaCôpski** ta có

$$A \leq \sqrt{(x^2 + y^2)[(1+y) + (1+x)]} = \sqrt{2+x+y} \leq \sqrt{2+\sqrt{2(x^2+y^2)}} = \sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

Với $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ thì $\text{Max } A = \sqrt{2+\sqrt{2}}$

2. Tìm MinA: Xét 2 trường hợp sau đây

• **Trường hợp 1:** Nếu $xy \geq 0$, xét 2 khả năng sau:

+) Nếu $x \geq 0, y \geq 0$ thì $A > 0 \Rightarrow \text{Min } A > 0$

+) Nếu $x \leq 0, y \leq 0$ thì

$$|A| \leq \sqrt{(x^2 + y^2)[(1+x) + (1+y)]} = \sqrt{2+x+y} = \sqrt{2-|x|-|y|} \leq \sqrt{2-(x^2 + y^2)} = 1$$

Từ 2 khả năng đã xét suy ra với $xy \geq 0$ thì $\text{Min } A = -1$

• **Trường hợp 2:** Xét $xy < 0$: Đặt $x + y = t \Rightarrow xy = \frac{t^2 - 1}{2} < 0 \Rightarrow t \in (-1, 1)$

$$A^2 = x^2(1+y) + 2xy\sqrt{(1+x)(1+y)} + y^2(1+x) = 1 + xy(x+y) + 2xy\sqrt{1+x+y+xy}$$

$$= 1 + t \cdot \frac{t^2 - 1}{2} + 2 \cdot \frac{t^2 - 1}{2} \sqrt{1 + t + \frac{t^2 - 1}{2}} = \frac{t^2 - 1}{2} [(1 + \sqrt{2})t + \sqrt{2}] + 1$$

$$\Leftrightarrow A^2 = f(t) = \frac{1}{2} [(1 + \sqrt{2})t^3 + \sqrt{2}t^2 - (1 + \sqrt{2})t + 2 - \sqrt{2}]$$

$$\text{Ta có: } f'(t) = \frac{3(1 + \sqrt{2})}{2}t^2 + \sqrt{2}t - \frac{1 + \sqrt{2}}{2} = 0 \Leftrightarrow t = t_1 = -\frac{1 + \sqrt{2}}{3}; t = t_2 = \sqrt{2} - 1$$

$$\text{Thế } t_1, t_2 \text{ vào phần dư của } f(t) \text{ chia cho } f'(t) \Rightarrow f(t_1) = \frac{2(19 - 3\sqrt{2})}{27}; f(t_2) = 0.$$

Nhìn bảng biến thiên suy ra:

$$A^2 \leq f(t_1) \Rightarrow A \geq -\sqrt{f(t_1)} \text{ suy ra}$$

$$\text{Min } A = -\sqrt{f(t_1)} = -\sqrt{\frac{2(19 - 3\sqrt{2})}{27}} < -1$$

$$\text{xảy ra } \Leftrightarrow x + y = t_1; xy = \frac{t_1^2 - 1}{2}$$

$$\Rightarrow x, y \text{ là nghiệm của } u^2 + \frac{1 + \sqrt{2}}{3}u + \frac{\sqrt{2} - 3}{9} = 0 \Rightarrow x, y = \frac{-(1 + \sqrt{2}) \pm \sqrt{15 - 2\sqrt{2}}}{6}$$

t	-1	t_1	t_2	1
f'	+	0	-	0
f	1	$f(t_1)$	$f(t_2)$	1

$$\text{Kết luận: } \text{Max } A = \sqrt{2 + \sqrt{2}}; \text{Min } A = -\sqrt{\frac{2(19 - 3\sqrt{2})}{27}}$$

Bài 18. Cho $x, y, z \in [0, 1]$ thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = \frac{3}{2}$.

Tìm Max, Min của biểu thức: $S = \cos(x^2 + y^2 + z^2)$

Giải. Do $x, y, z \in [0, 1]$ nên $0 < x^2 + y^2 + z^2 < x + y + z = \frac{3}{2} < \frac{\pi}{2}$.

Vì hàm số $y = \cos \alpha$ nghịch biến trên $(0, \frac{\pi}{2})$ nên bài toán trở thành.

1. Tìm MaxS hay tìm Min $(x^2 + y^2 + z^2)$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{3}(1^2 + 1^2 + 1^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2 = \frac{3}{4}.$$

Với $x = y = z = \frac{1}{2}$ thì $\text{MaxS} = \cos \frac{3}{4}$

2. Tìm MinS hay tìm Max $(x^2 + y^2 + z^2)$

Cách 1: Phương pháp tam thức bậc hai:

Không mất tính tổng quát giả sử $z = \text{Max}\{x, y, z\} \Rightarrow z \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Biến đổi và đánh giá đưa về tam thức bậc hai biến z

$$x^2 + y^2 + z^2 = z^2 + (x + y)^2 - 2xy \geq z^2 + \left(\frac{3}{2} - z\right)^2 = 2z^2 - 3z + \frac{9}{4} = f(z)$$

Do đồ thị hàm $y = f(z)$ là một parabol quay bề lõm lên trên nên ta có:

$$\text{Max } f(z) = \text{Max} \left\{ f\left(\frac{1}{2}\right); f(1) \right\} = f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) = \frac{5}{4}.$$

Với $z = 1; x = \frac{1}{2}; y = 0$ thì $\text{MinS} = \cos \frac{5}{4}$

Cách 2: Phương pháp hình học

Xét hệ tọa Đề các vuông góc Oxyz. Tập hợp các điểm $M(x, y, z)$ thỏa mãn điều kiện $x, y, z \in [0, 1]$ nằm trong hình lập phương ABCDA'B'C'O cạnh 1 với A(0, 1, 1); B(1, 1, 1); C(1, 0, 1); D(0, 0, 1); A'(0, 1, 0); B'(1, 1, 0); C'(1, 0, 0).

Mặt khác do $x + y + z = \frac{3}{2}$ nên $M(x, y, z)$ nằm trên mặt phẳng (P): $x + y + z = \frac{3}{2}$

Vậy tập hợp các điểm $M(x, y, z)$ thỏa mãn điều kiện giả thiết nằm trên thiết diện EIJKNL với các điểm E, I, J, K, L, N là trung điểm các cạnh hình lập phương. Gọi O' là hình chiếu của O lên EIJKNL thì O' là tâm của hình lập phương và cũng là tâm của lục giác đều EIJKNL. Ta có O'M là hình chiếu của OM lên EIJKNL. Do $OM^2 = x^2 + y^2 + z^2$ nên OM lớn nhất $\Leftrightarrow$ O'M lớn nhất

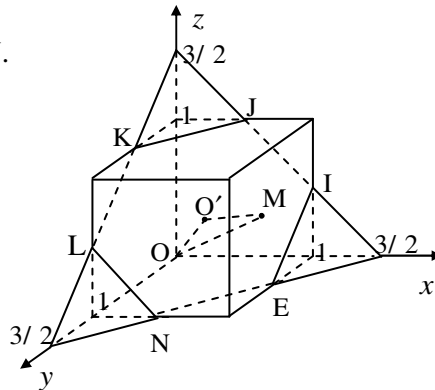
$\Leftrightarrow M$ trùng với 1 trong 6 đỉnh E, I, J, K, L, N.

Từ đó suy ra:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq OK^2 = 1 + \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \cos(x^2 + y^2 + z^2) \geq \cos\left(\frac{5}{4}\right)$$

Với $z = 1; x = \frac{1}{2}; y = 0$ thì $\text{MinS} = \cos \frac{5}{4}$



Bài 19. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện $a + b + c \leq \frac{3}{2}$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}}$

Giải. Sai lầm thường gặp:

$$\begin{aligned} S &\geq 3 \cdot \sqrt[3]{\sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} \cdot \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} \cdot \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}}} = 3 \cdot \sqrt[6]{\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right) \left(b^2 + \frac{1}{c^2}\right) \left(c^2 + \frac{1}{a^2}\right)} \\ &\geq 3 \cdot \sqrt[6]{\left(2 \cdot \sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{b^2}}\right) \left(2 \cdot \sqrt{b^2 \cdot \frac{1}{c^2}}\right) \left(2 \cdot \sqrt{c^2 \cdot \frac{1}{a^2}}\right)} = 3 \cdot \sqrt[6]{8} = 3\sqrt{2} \Rightarrow \text{Min } S = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

• **Nguyên nhân:**

$\text{Min } S = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} = 1 \Rightarrow a + b + c = 3 > \frac{3}{2}$ mâu thuẫn với giả thiết

• **Phân tích và tìm tòi lời giải :**

Do S là một biểu thức đối xứng với a, b, c nên dự đoán Min S đạt tại $a = b = c = \frac{1}{2}$

• **Sơ đồ điểm rơi:**

$$\boxed{a=b=c=\frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 = c^2 = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{\alpha a^2} = \frac{1}{\alpha b^2} = \frac{1}{\alpha c^2} = \frac{4}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{4}{\alpha} \Rightarrow \boxed{\alpha = 16}$$

• **Cách 1:** Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức **Côsi** ta có

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{a^2 + \underbrace{\frac{1}{16b^2} + \dots + \frac{1}{16b^2}}_{16}} + \sqrt{b^2 + \underbrace{\frac{1}{16c^2} + \dots + \frac{1}{16c^2}}_{16}} + \sqrt{c^2 + \underbrace{\frac{1}{16a^2} + \dots + \frac{1}{16a^2}}_{16}} \\ &\geq \sqrt{17 \cdot \sqrt[17]{\frac{a^2}{16^{16}b^{32}}}} + \sqrt{17 \cdot \sqrt[17]{\frac{b^2}{16^{16}c^{32}}}} + \sqrt{17 \cdot \sqrt[17]{\frac{c^2}{16^{16}a^{32}}}} = \sqrt{17} \left[\sqrt[17]{\frac{a}{16^8b^{16}}} + \sqrt[17]{\frac{b}{16^8c^{16}}} + \sqrt[17]{\frac{c}{16^8a^{16}}} \right] \\ &\geq \sqrt{17} \left[3 \cdot \sqrt[3]{\sqrt[17]{\frac{a}{16^8b^{16}}} \cdot \sqrt[17]{\frac{b}{16^8c^{16}}} \cdot \sqrt[17]{\frac{c}{16^8a^{16}}}} \right] = 3\sqrt{17} \sqrt[17]{\frac{1}{16^8a^5b^5c^5}} \\ &= \frac{3\sqrt{17}}{2 \cdot \sqrt[17]{(2a \cdot 2b \cdot 2c)^5}} \geq \frac{3\sqrt{17}}{2 \cdot \sqrt[17]{\left(\frac{2a+2b+2c}{3}\right)^{15}}} \geq \frac{3\sqrt{17}}{2}. \text{ Với } a=b=c=\frac{1}{2} \text{ thì } \text{Min } S = \frac{3\sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

• **Cách 2:** Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức **BunhiaCôpski** ta có

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned} \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} &= \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right)(1^2 + 4^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \left(a + \frac{4}{b}\right) \\ \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} &= \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \sqrt{\left(b^2 + \frac{1}{c^2}\right)(1^2 + 4^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \left(b + \frac{4}{c}\right) \\ \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} &= \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \sqrt{\left(c^2 + \frac{1}{a^2}\right)(1^2 + 4^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \left(c + \frac{4}{a}\right) \end{aligned} \right. \\
 \Rightarrow S &\geq \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \left(a + b + c + \frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{c}\right) = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \left[a + b + c + \frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c} + \frac{15}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\right] \\
 &\geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left[6 \cdot \sqrt[6]{abc} \cdot \frac{1}{4a} \cdot \frac{1}{4b} \cdot \frac{1}{4c} + \frac{15}{4} \left(3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{17}} \left(3 + \frac{45}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right) \\
 &\geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(3 + \frac{45}{4} \cdot \frac{1}{\frac{a+b+c}{3}}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(3 + \frac{45}{4} \cdot 2\right) = \frac{3\sqrt{17}}{2}. \text{ Với } a=b=c=\frac{1}{2} \text{ thì } \text{Min} S = \frac{3\sqrt{17}}{2}
 \end{aligned}$$

• **Cách 3:** Đặt $\vec{u} = \left(a, \frac{1}{b}\right)$; $\vec{v} = \left(b, \frac{1}{c}\right)$; $\vec{w} = \left(c, \frac{1}{a}\right)$

Do $|\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}| \geq |\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|$ nên suy ra :

$$\begin{aligned}
 S &= \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \sqrt{(a+b+c)^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2} \\
 &= \sqrt{(a+b+c)^2 + \frac{1}{16} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 + \frac{15}{16} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2} \\
 &\geq \sqrt{2(a+b+c) \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{15}{16} \left(3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}}\right)^2} \\
 &\geq \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{abc} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} + \frac{135}{16} \cdot \frac{1}{(\sqrt[3]{abc})^2}} \geq \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{135}{16} \cdot \frac{1}{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2}} \\
 &\geq \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{135}{16} \cdot 4} = \sqrt{\frac{18}{4} + \frac{135}{4}} = \sqrt{\frac{153}{4}} = \frac{3\sqrt{17}}{2}. \text{ Với } a=b=c=\frac{1}{2} \text{ thì } \text{Min} S = \frac{3\sqrt{17}}{2}
 \end{aligned}$$

B. CÁC ỨNG DỤNG GTLN, GTNN CỦA HÀM SỐ

I. ỨNG DỤNG TRONG PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Bài 1. Giải phương trình: $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} = 2$

Giải. Đặt $f(x) = \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x}$ với $2 \leq x \leq 4$

$$f'(x) = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\sqrt[4]{(x-2)^3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{(4-x)^3}} \right] = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Nhìn BBT suy ra: $f(x) \geq f(3) = 2 \quad \forall x \in [2, 4]$

$\Rightarrow$ Phương trình $f(x) = \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} = 2$ có nghiệm duy nhất $x = 3$

x	2	3	4
f'	-	0	+
f			

Bài 2. Giải phương trình: $3^x + 5^x = 6x + 2$

Giải. PT $\Leftrightarrow f(x) = 3^x + 5^x - 6x - 2 = 0$. Ta có: $f'(x) = 3^x \ln 3 + 5^x \ln 5 - 6$

$\Rightarrow f''(x) = 3^x (\ln 3)^2 + 5^x (\ln 5)^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x)$ đồng biến

Mặt khác $f'(x)$ liên tục và

$$f'(0) = \ln 3 + \ln 5 - 6 < 0, \quad f'(1) = 3 \ln 3 + 5 \ln 5 - 6 > 0$$

$\Rightarrow$ Phương trình $f'(x) = 0$ có đúng 1 nghiệm x_0

Nhìn bảng biến thiên suy ra:

x	$-\infty$	0	x_0	1	$+\infty$
f'	-		0	+	
f					

Phương trình $f(x) = 3^x + 5^x - 6x - 2 = 0$ có không quá 2 nghiệm.

Mà $f(0) = f(1) = 0$ nên phương trình (1) có đúng 2 nghiệm $x = 0$ và $x = 1$

Bài 3. Tìm m để BPT: $m\sqrt{2x^2+9} < x+m$ có nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

Giải. $m\sqrt{2x^2+9} < x+m \Leftrightarrow m(\sqrt{2x^2+9}-1) < x \Leftrightarrow m < f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x^2+9}-1}$

Ta có: $f'(x) = \frac{9 - \sqrt{2x^2+9}}{\sqrt{2x^2+9}(\sqrt{2x^2+9}-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+9} = 9 \Leftrightarrow x = \pm 6$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2 + \frac{9}{x^2}} - \frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{\sqrt{2 + \frac{9}{x^2}} + \frac{1}{x}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

x	$-\infty$	-6	6	$+\infty$		
f'		$-$	0	$+$	0	$-$
f		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	

Nhìn BBT ta có $f(x) > m, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f(-6) = -\frac{3}{4} > m \Leftrightarrow m < -\frac{3}{4}$

Bài 4. Tìm m để PT: $2 + 2\sin 2x = m(1 + \cos x)^2$ (1) có nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Giải. Do $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \frac{x}{2} \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ nên đặt $t = \tan \frac{x}{2} \in [-1, 1]$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \sin x = \frac{2t}{1+t^2}. \text{ Khi đó (1) } \Leftrightarrow 2(\sin x + \cos x)^2 = m(1 + \cos x)^2$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{2t+1-t^2}{1+t^2}\right)^2 = m\left(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 \Leftrightarrow f(t) = (2t+1-t^2)^2 = 2m \quad (2)$$

Ta có: $f'(t) = 2(2t+1-t^2)(2-2t) = 0 \Leftrightarrow t = 1; t = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow$ Bảng biến thiên

Nhìn bảng biến thiên suy ra:

t	-1	$1-\sqrt{2}$	1
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	4	↘ 0 ↗	4

Đề (2) có nghiệm $t \in [-1, 1]$

$$\text{thì } \min_{t \in [-1, 1]} f(t) \leq 2m \leq \max_{t \in [-1, 1]} f(t)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2m \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2. \text{ Vậy đề (1) có nghiệm } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ thì } m \in [0; 2].$$

Bài 5. Tìm m để hệ BPT: $\begin{cases} x^2 - 3x \leq 0 \\ x^3 - 2x|x-2| - m^2 + 4m \geq 0 \end{cases}$ (1) có nghiệm.

Giải. (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ f(x) = x^3 - 2x|x-2| \geq m^2 - 4m \end{cases} \quad (2).$

Ta có: $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 4x - 4 & \forall x \in [0; 2) \\ 3x^2 - 4x + 4 & \forall x \in (2; 3] \end{cases};$

x	0	$\frac{2}{3}$	2	3
f'	-	0	+	+
f	0	↘ CT ↗	8	21

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}. \text{ Nhìn BBT suy ra: } \max_{x \in [0; 3]} f(x) = f(3) = 21$$

$$\text{Đề (2) có nghiệm thì } \max_{x \in [0; 3]} f(x) \geq m^2 - 4m \Leftrightarrow m^2 - 4m \leq 21 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 7$$

Bài 6. Tìm $m \geq 0$ để hệ: $\begin{cases} \sin x \cos y = m^3 - m^2 - 6m + \frac{35}{4} \\ \cos x \sin y = m^2 - 6m + \frac{33}{4} \end{cases}$ (1) có nghiệm.

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \cos y + \cos x \sin y = m^3 - 12m + 17 \\ \sin x \cos y - \cos x \sin y = m^3 - 2m^2 + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x+y) = m^3 - 12m + 17 \\ \sin(x-y) = m^3 - 2m^2 + \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2)$$

Xét $f(m) = m^3 - 12m + 17$. Ta có: $f'(m) = 3m^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow m = 2 > 0$

Nhìn BBT suy ra: $f(m) \geq f(2) = 1, \forall m \geq 0$

kết hợp với $\sin(x+y) \leq 1$ suy ra để hệ (2)

có nghiệm thì $m = 2$, khi đó hệ (2) trở thành:

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 1 \\ \sin(x-y) = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ có nghiệm } x = \frac{\pi}{3}; y = \frac{\pi}{6}. \text{ Vậy (1) có nghiệm } \Leftrightarrow m = 2.$$

m	0	2	$+\infty$
f'	-	0	+
f	17	1	$+\infty$

II. ỨNG DỤNG GTLN, GTNN CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Bài 1. Chứng minh rằng: $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{BĐT} \Leftrightarrow f(x) = 1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ta có: $f'(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\Rightarrow$ Bảng biến thiên.

Nhìn bảng biến thiên suy ra:

$$f(x) \geq f(0) = 0 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-	0	+
f		0	

Bài 2. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$ CMR: $T = \frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$$\text{Ta có: } T = \frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} = \frac{a^2}{a(1-a^2)} + \frac{b^2}{b(1-b^2)} + \frac{c^2}{c(1-c^2)}.$$

Xét hàm số $f(x) = x(1-x^2)$ với $x > 0$

$$\text{Ta có } f'(x) = 1 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0.$$

Nhìn bảng biến thiên $\Rightarrow f(x) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \quad \forall x > 0.$

x	$-\infty$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
f'	+	0	-
f		$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	

$$\text{Khi đó: } T = \frac{a^2}{f(a)} + \frac{b^2}{f(b)} + \frac{c^2}{f(c)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Bài 3. Cho $3 \leq n$ lẻ. Chứng minh rằng: $\forall x \neq 0$ ta có:

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots - \frac{x^n}{n!}\right) < 1$$

Đặt $u(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$; $v(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots - \frac{x^n}{n!}$.

Ta cần chứng minh $f(x) = u(x).v(x) < 1$

Ta có:
$$\begin{cases} u'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = u(x) - \frac{x^n}{n!} \\ v'(x) = -1 + x - \frac{x^2}{2!} + \dots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = -v(x) - \frac{x^n}{n!} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x) = \left[u(x) - \frac{x^n}{n!}\right]v(x) - u(x)\left[v(x) + \frac{x^n}{n!}\right]$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-x^n}{n!} [u(x) + v(x)] = \frac{-2x^n}{n!} \left[1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right]$$

Do $3 \leq n$ lẻ nên $f'(x)$ cùng dấu với $(-2x)$

Nhìn bảng biến thiên suy ra:

$$f(x) < f(0) = 1 \quad \forall x \neq 0 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$
f		1	

Bài 4. Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}} \leq \sqrt[4]{\frac{a^4 + b^4}{2}} \quad \forall a, b > 0.$

$$\frac{\sqrt[4]{a^4 + b^4}}{\sqrt[3]{a^3 + b^3}} \geq \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt[4]{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^4}}{\sqrt[3]{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^3}} = \frac{\sqrt[4]{1 + t^4}}{\sqrt[3]{1 + t^3}} \geq \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{2}}$$

Xét $f(t) = \frac{\sqrt[4]{1 + t^4}}{\sqrt[3]{1 + t^3}} = \frac{(1 + t^4)^{\frac{1}{4}}}{(1 + t^3)^{\frac{1}{3}}}$ với $t = \frac{a}{b} > 0$

t	0	1	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	1	$\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{2}}$	1

$$f'(t) = \frac{(1 + t^4)^{-\frac{3}{4}} t^3 (1 + t^3)^{\frac{1}{3}} - (1 + t^4)^{\frac{1}{4}} t^2 (1 + t^3)^{-\frac{2}{3}}}{(1 + t^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{t^2 \left(1 + t^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{2}{3}} (1 + t^4)^{-\frac{3}{4}} (t - 1)}{(1 + t^3)^{\frac{2}{3}}}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \text{Bảng biến thiên của } f(t)$$

$$\text{Từ BBT} \Rightarrow \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{2}} \leq f(t) < 1 \quad \forall t > 0 \Rightarrow \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{2}} \leq \frac{\sqrt[4]{a^4 + b^4}}{\sqrt[3]{a^3 + b^3}} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}} \leq \sqrt[4]{\frac{a^4 + b^4}{2}}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow a = b > 0.$$

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1. Cho ΔABC có $A > B > C$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x - \sin A}{x - \sin C}} + \sqrt{\frac{x - \sin B}{x - \sin C}} - 1$$

Bài 2. Tìm Max, Min của: $y = \sin^6 x + \cos^6 x + a \sin x \cos x$

Bài 3. Cho $ab \neq 0$. Tìm Min của $y = \frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4} - \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$

Bài 4. Cho $x^2 + y^2 > 0$. Tìm Max, Min của $S = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + xy + 4y^2}$

Bài 5. Giả sử phương trình $x^2 + px + \frac{1}{p^2} = 0$ có nghiệm x_1, x_2 .

Tìm $p \neq 0$ sao cho $S = x_1^4 + x_2^4$ nhỏ nhất.

Bài 6. Tìm Min của $y = (2 + \sqrt{3})^{2x} + (2 - \sqrt{3})^{2x} - 8[(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x]$

Bài 7. Cho $x, y \geq 0$ và $x + y = 1$. Tìm Max, Min của $S = 3^x + 9^y$.

Bài 8. Cho $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm Max, Min của $P = x + y + z + xy + yz + zx$.

Bài 9. Tìm m để PT: $\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} - \sqrt{(2-x)(2+x)} = m$ có nghiệm.

Bài 10. Tìm m để PT: $\sqrt{x} + \sqrt{9-x} = \sqrt{-x^2 + 9x + m}$ có nghiệm.

Bài 11. Tìm m để PT: $\sqrt{(x^2 - 2x + 2)^3} - 4\sqrt{x^2 - 2x + 2} = 2x^2 - 4x + m$ có 4 nghiệm phân biệt.

Bài 12. Tìm m để PT: $\frac{3x^2 - 1}{\sqrt{2x - 1}} = \sqrt{2x - 1} + mx$ có nghiệm duy nhất.

Bài 13. Tìm m để PT: $m \cos 2x - 4 \sin x \cos x + m - 2 = 0$ có nghiệm $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Bài 14. Tìm m để PT: $\sin x \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x = m$ có đúng 2 nghiệm $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Bài 15. Tìm m để hệ BPT: $\begin{cases} 3x^2 + 2x - 1 < 0 \\ x^2 + 3mx + 1 < 0 \end{cases}$ có nghiệm.

Bài 16. a. Tìm m để: $m\sqrt{x^2 + 8} = x + 2$ có 2 nghiệm phân biệt.

b. Cho $a + b + c = 12$. CMR: $\sqrt{a^2 + 8} + \sqrt{b^2 + 8} + \sqrt{c^2 + 8} \geq 6\sqrt{6}$

Bài 17. Chứng minh: $2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x) \leq 3$, $\forall x, y, z \in [0, 1]$