

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

NGUYỄN THỊ MỸ LỆ

PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP VỚI CÁC BÀI TOÁN PHỔ THÔNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

HÀ NỘI - NĂM 2015

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

NGUYỄN THỊ MỸ LÊ

PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP VỚI CÁC BÀI TOÁN PHỔ THÔNG

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
GS.TS. ĐẶNG HUY RUẬN

Hà Nội - Năm 2015

Mục lục

Mở đầu	3
1 Kiến thức cơ bản về phương pháp quy nạp toán học	6
1.1 Nguồn gốc của phương pháp quy nạp toán học	6
1.2 Quy nạp và quy nạp toán học	8
1.3 Giới thiệu phương pháp quy nạp toán học	12
1.3.1 Nguyên lí quy nạp toán học	13
1.3.2 Phương pháp quy nạp toán học	15
1.3.3 Các ví dụ	17
1.4 Một số hình thức của phương pháp quy nạp toán học . .	22
1.4.1 Hình thức quy nạp chuẩn tắc	22
1.4.2 Hình thức quy nạp nhảy bước	26
1.4.3 Hình thức quy nạp kép	31
2 Ứng dụng phương pháp quy nạp toán học trong giải toán	35
2.1 Phương pháp quy nạp toán học trong các bài toán số học, đại số, giải tích	35
2.1.1 Một số bài toán chia hết và chia có dư.	35
2.1.2 Một số bài toán về dãy số	41
2.1.3 Một số bài toán về tính tổng và chứng minh đẳng thức	50
2.1.4 Một số bài toán chứng minh bất đẳng thức	61
2.2 Phương pháp quy nạp toán học trong các bài toán hình học	70
2.2.1 Tính toán bằng quy nạp	70
2.2.2 Chứng minh bằng quy nạp	76

2.2.3	Dựng hình bằng quy nạp	82
2.2.4	Quy nạp với bài toán quỹ tích	85
2.3	Phương pháp quy nạp toán học trong các bài toán rời rạc khác	89
3	Một số đề thi tham khảo	101
3.1	Đề thi Olympic toán học quốc tế	101
3.2	Đề thi vô địch các nước và khu vực	103

Mở đầu

Nhà toán học vĩ đại Euclid đã viết *"Trong thực tế, nhiều tính chất của các số đã biết đều được tìm ra bằng phép quy nạp và được tìm thấy rất lâu trước khi sự đúng đắn của chúng được chứng minh chặt chẽ. Cũng có rất nhiều tính chất quen thuộc với chúng ta nhưng hiện thời chúng ta còn chưa chứng minh được. Chỉ có con đường quan sát và tư duy quy nạp mới có thể dẫn chúng ta đến chân lý."* Câu nói này đã phần nào lột tả được tầm quan trọng của phép quy nạp trong cuộc sống, khoa học và toán học. Tuy nhiên, quá trình quy nạp là quá trình đi từ "tính chất" của một số cá thể suy ra "tính chất" của tập thể nên không phải lúc nào cũng đúng. Phép suy luận này chỉ đúng khi thỏa mãn những điều kiện nhất định. Trong toán học cũng vậy, quá trình suy luận này chỉ đúng khi nó thỏa mãn nguyên lý quy nạp.

Trong toán học có nhiều bài toán nếu chúng ta giải hay chứng minh theo phương pháp thông thường thì rất khó khăn và phức tạp, khi đó rất có thể phương pháp quy nạp toán học lại là công cụ đắc lực giúp chúng ta giải bài toán đó.

Trong chương trình toán học phổ thông, phương pháp quy nạp đã được đề cập đến ở lớp 11, nhưng phương pháp này mới được đề cập trong một phạm vi hạn chế, chưa mô tả được một cách hệ thống, chưa nêu rõ được ứng dụng của phương pháp này trong Số học, Đại số, Hình học,....

Từ niềm yêu thích môn Toán nói chung và phương pháp quy nạp nói riêng, cùng mong muốn nghiên cứu phương pháp này một cách sâu hơn và hệ thống, mong muốn được tích lũy kiến thức toán học nhiều hơn, có chuyên môn vững vàng hơn, tác giả đã lựa chọn đề tài

"Phương pháp quy nạp với các bài toán phổ thông"

Cuốn luận văn này nhằm đưa ra cái nhìn tổng quan về phương pháp quy nạp toán học, từ nguyên lý và các hình thức của phương pháp đến những bài tập áp dụng trong các phân môn khác nhau. Hệ thống các bài tập được đưa ra phong phú. Tác giả đã sưu tầm một số đề thi Olympic toán các quốc gia và quốc tế giải được bằng phương pháp này.

Luận văn gồm phần mở đầu, ba chương và danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày nguồn gốc của phương pháp quy nạp và những kiến thức cơ bản về phương pháp quy nạp toán học.

Chương 2: Trình bày những ứng dụng của phương pháp quy nạp trong giải toán, bao gồm một số bài toán số học, đại số, giải tích, hình học và một số bài toán rời rạc khác.

Chương 3: Gồm một số bài toán tham khảo trích trong các đề thi IMO và đề thi vô địch các nước và khu vực.

LỜI CẢM ƠN

Tác giả xin gửi lời cảm ơn sâu sắc đến Thầy Đặng Huy Ruận, Thầy đã quan tâm, động viên, giúp đỡ tác giả rất tận tình trong suốt thời gian thực hiện luận văn.

Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành của mình đến các Thầy Cô trong khoa Toán – Cơ – Tin học, những người đã tham gia giảng dạy, truyền thụ cho tác giả những kiến thức vô cùng quý báu. Tác giả xin cảm ơn các Thầy Cô phòng Đào Tạo sau Đại học trường Đại Học Khoa học Tự Nhiên – Đại học Quốc Gia Hà Nội đã tạo điều kiện tốt nhất cho tác giả và các bạn trong suốt thời gian học tập.

Mặc dù tác giả đã hết sức cố gắng, song do thời gian và trình độ còn hạn chế, cuốn luận văn chắc chắn không tránh khỏi những thiếu sót.

Tác giả kính mong nhận được sự chỉ dạy của các Quý Thầy Cô và ý kiến đóng góp của quý độc giả. Tác giả xin chân thành cảm ơn.

Chương 1

Kiến thức cơ bản về phương pháp quy nạp toán học

1.1 Nguồn gốc của phương pháp quy nạp toán học

(Trích trong tài liệu tham khảo [11])

Khi ta tính một số trong tam giác Pascal bằng cách áp dụng công thức truy toán, ta phải dựa vào hai số đã tìm được trước ở cạnh đáy trên. Phép tính độc lập dựa vào công thức quen thuộc

$$C_n^r = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1.2.3\dots r}$$

mà ta sẽ gọi là công thức tường minh để tính các hệ số của nhị thức C_n^r . Công thức tường minh đó có trong công trình của Pascal (trong đó nó được diễn đạt bằng lời chứ không phải bằng các kí hiệu hiện đại). Pascal không cho biết ông làm thế nào để ra công thức đó (có thể lúc đầu chỉ là phỏng đoán- ta thường phát hiện ra các quy luật tương tự nhờ quan sát lúc đầu, rồi sau đó thử khái quát các kết quả có được). Tuy vậy, Pascal đưa ra một cách chứng minh xuất sắc cho công thức tường minh của mình.

Công thức tường minh dưới dạng đã viết không áp dụng được trong trường hợp $r = 0$. Tuy vậy, ta quy ước khi $r = 0$, theo định nghĩa $C_n^0 = 1$. Còn trong trường hợp, $r = n$ thì công thức không mất ý nghĩa và ta có

$$C_n^n = \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2.1}{1.2.3\dots(n-1)n} = 1.$$

Đó là một kết quả đúng. Như vậy, ta cần chứng minh công thức đúng với $0 < r < n$, tức là ở bên trong tam giác Pascal công thức truy toán có thể sử dụng được. Tiếp theo ta trích dẫn Pascal với một số thay đổi không căn bản. Một phần những thay đổi đó ở giữa các dấu ngoặc vuông.

Mặc dù mệnh đề đang xét (công thức tường minh đối với các hệ số nhị thức) có vô số trường hợp riêng, tôi chứng minh nó một cách hoàn toàn ngắn gọn dựa trên hai bổ đề.

Bổ đề thứ nhất khẳng định, mệnh đề đó đúng với dãy thứ nhất-điều này là hiển nhiên (khi $n = 1$ công thức tường minh đúng vì trong trường hợp đó mọi giá trị có thể được của r , nghĩa là $r = 0, r = 1$ rơi vào điều đã nhận xét ở trên)

Bổ đề thứ hai khẳng định, nếu mệnh đề đúng với một dãy tùy ý [đối với giá trị n tùy ý] thì nó sẽ đúng với dãy tiếp theo của nó [đối với $n + 1$].

Từ hai bổ đề trên, ta suy ra được sự đúng đắn của mệnh đề đối với mọi giá trị của n . Thật vậy, do bổ đề thứ nhất, mệnh đề đúng với $n = 1$. Do đó, theo bổ đề thứ hai nó đúng với $n = 2$, cho nên theo bổ đề thứ hai nó đúng với $n = 3$ và cứ như thế đến vô hạn.

Như vậy, ta chỉ còn phải chứng minh bổ đề thứ hai. Theo cách phát biểu của bổ đề đó, ta giả thiết công thức của ta đúng đối với dãy thứ n , nghĩa là đối với giá trị tùy ý n và với mọi giá trị có thể được của r (đối với $r = 1, 2, \dots, n$). Đặc biệt đồng thời với cách viết

$$C_n^r = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1.2.3\dots(r-1)r}$$

ta cũng có thể viết (với $r \geq 1$)

$$C_n^{r-1} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+2)}{1.2.3\dots(r-1)}.$$

Cộng hai đẳng thức đó và áp dụng công thức truy toán, ta được hệ quả

$$\begin{aligned} C_{n+1}^r &= C_n^r + C_n^{r-1} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+2)}{1.2\dots(r-1)} \cdot \left(\frac{n-r+1}{r} + 1 \right) \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-r+2)}{1.2\dots(r-1)} \cdot \frac{n+1}{r} = \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-r+2)}{1.2.3\dots r}. \end{aligned}$$

Nói cách khác, sự đúng đắn của công thức tường minh đối với giá trị n nào đó kéo theo tính đúng đắn của nó đối với $n + 1$. Chính điều này được khẳng định trong bổ đề thứ hai. Như vậy, ta đã chứng minh được bổ đề đó.

Những lời của Pascal trích dẫn có một giá trị lịch sử vì chứng minh của ông là sự vận dụng lần đầu tiên của một phương pháp suy luận cơ bản và mới mẻ, thường gọi là ***phương pháp quy nạp toán học***.

1.2 Quy nạp và quy nạp toán học

(Trích trong tài liệu tham khảo [10])

Quy nạp là một quá trình nhận thức những quy luật chung bằng cách quan sát và so sánh những trường hợp riêng. Nó được dùng trong các khoa học và cả toán học. Còn như ***quy nạp toán học*** thì chỉ dùng trong toán học để chứng minh một loại định lý nào đó. Thật không may ở chỗ hai tên gọi lại liên quan với nhau, vì rằng giữa hai phương pháp này hầu như không có một liên hệ logic nào. Tuy nhiên, cũng có một liên hệ thực tế vì người ta thường đồng thời dùng hai phương pháp đó. Ta minh họa hai phương pháp đó bằng ví dụ sau.

1. Một cách ngẫu nhiên, ta thấy $1 + 8 + 27 + 64 = 100$ có thể viết lại như sau $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$. Khi đó ta tự hỏi là tổng những lập phương các số tự nhiên liên tiếp có luôn luôn là một bình phương không? Để trả lời câu hỏi đó, ta sẽ làm như nhà tự nhiên học, tức là đi kiểm tra những trường hợp riêng khác nhau, lần lượt với $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 5$.

$$1^3 = 1^2$$

$$1^3 + 2^3 = 9 = 3^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225 = 15^2.$$

Qua đó, nhà tự nhiên không nghi ngờ gì về tính đúng đắn của quy

luật tổng quát suy ra từ những trường hợp riêng đã quan sát. Nhà toán học nói phép quy nạp đã gợi ý cho ta định lý sau: "*Tổng của n lập phương đầu tiên là một bình phương*".

2. Tại sao tổng các lập phương liên tiếp lại là những bình phương?

Trong trường hợp này, nhà tự nhiên học tiếp tục nghiên cứu giả thuyết của mình và có thể đi theo nhiều hướng khác nhau. Tiếp tục xét tới những trường hợp $n = 6, 7, \dots$. Nhà tự nhiên học cố rút ra một quy luật sâu sắc hơn. Ta nhận thấy quy luật của dãy số 1, 3, 6, 10, 15

$$1 = 1$$

$$3 = 1 + 2$$

$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$10 = 1 + 2 + 3 + 4$$

$$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5.$$

Từ đó ta dự đoán $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$.

3. Chính nhờ quy nạp ta đã có được quy luật trên. Thật ra, cả quá trình lí luận, dù chỉ mới một chiều và chưa hoàn chỉnh hợp lí đã cho ta hình dung được phương pháp đó (quy nạp). Phép quy nạp cố gắng phát hiện ra các quy luật và các liên hệ ẩn giấu đằng sau các hiện tượng quan sát được bề ngoài.

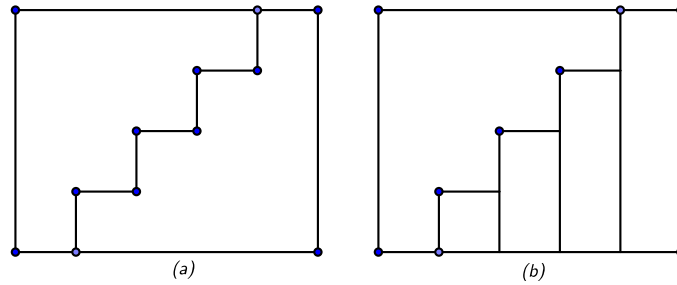
Nhiều kết quả toán học thoát tiên có được bằng quy nạp, sau đó mới được chứng minh. Toán học trình bày chặt chẽ là một khoa học suy diễn, có hệ thống, nhưng toán học trong lúc hình thành là một khoa học thực nghiệm, quy nạp.

4. Trong toán học cũng như trong các khoa học tự nhiên, ta có thể dùng quan sát và quy nạp để khám phá ra những quy luật tổng quát, nhưng giữa chúng có sự khác nhau. Trong các khoa học tự nhiên, không có gì cao hơn sự quan sát và quy nạp, còn trong toán học ngoài quan sát và quy nạp còn có sự chứng minh chặt chẽ.

Ta xét "bài toán chứng minh"

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Trong mọi trường hợp, hệ thức đó đều dễ nghiệm lại. Xét một hình chữ nhật có các cạnh bằng n và $n+1$, chia nó làm hai phần bằng một đường gấp khúc như ở hình 1.1 (ứng với trường hợp $n=4$). Mỗi nửa đều có "dạng bậc thang" và có diện tích biểu diễn bởi công thức $1 + 2 + \dots + n$.



Hình 1.1

Trường hợp $n=4$, diện tích đó bằng $1 + 2 + 3 + 4$ hình 1.1b. Mặt khác, diện tích hình bậc thang là một nửa diện tích hình chữ nhật đó, điều đó chứng tỏ công thức đúng.

Như vậy, ta có thể biến đổi kết quả tìm ra bằng phương pháp quy nạp và biểu diễn nó như sau

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2. \quad (1.1)$$

5. Nếu ta không có cách nào để chứng minh, thì ta cũng có thể thử lại. Ta thử cho trường hợp đầu tiên, tức là thử với $n=6$ và thấy đẳng thức đúng. Ta cũng có thể thử nữa. Công thức có lẽ là tổng quát, tức là đúng với mọi giá trị của n . Nhưng nó có còn đúng không khi ta đi từ một giá trị n đến bất kì tới giá trị tiếp theo là $n+1$.

Áp dụng công thức trên ta phải có

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2. \quad (1.2)$$

Ta lấy (1.2) trừ từng vế (1.1), ta có

$$(n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2 - \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2. \quad (1.3)$$

Vế phải có thể viết lại như sau

$$\begin{aligned} & \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 \left[(n+2)^2 - n^2 \right] \\ &= \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 [n^2 + 4n + 4 - n^2] \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} (4n+4) = (n+1)^3. \end{aligned}$$

Như vậy công thức tìm ra bằng thực nghiệm đã được thử lại chặt chẽ. Ta hãy làm rõ ý nghĩa của phép thử.

Ta đã có (1.3). Nhưng ta còn chưa biết chắc đẳng thức sau có đúng không

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

Nhưng nếu ta biết rằng nó đúng thì có thể suy ra bằng cách thêm vào đẳng thức đã thiết lập ở trên, rằng đẳng thức sau cũng đúng

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2.$$

Đó chính là biểu thức (1.1), chỉ khác là $n+1$ thay thế cho n . Nhưng ta đã biết điều giả định của ta là đúng với $n = 1, 2, \dots, 6$, đúng với $n = 6$, nên cũng phải đúng với $n = 7$, đã đúng với $n = 7$ thì cũng phải đúng với $n = 8$ và cứ tiếp tục như vậy nên công thức đúng với mọi giá trị của n . Vậy nó là tổng quát.

6. Chứng minh trên có thể xem là mẫu mực cho nhiều trường hợp tương tự. Vậy những nét cơ bản của nó là gì?

Điều khẳng định mà ta cần chứng minh phải được phát biểu rõ ràng, chính xác.

Nó phụ thuộc vào một số tự nhiên n .

Điều khẳng định đó phải được "xác định" đến mức khiến ta có thể thử được là nó còn đúng không khi đi từ một số tự nhiên n sang một số tự nhiên tiếp theo $n + 1$.

Nếu ta đã thử được có kết quả điều đó, thì ta có thể dùng kinh nghiệm có được trong quá trình thử để đi đến kết luận điều khẳng định phải đúng với $n + 1$, nếu như nó đã đúng với n . Có được điều đó rồi, ta chỉ cần biết rằng điều khẳng định đúng với $n = 1$, khi đó nó sẽ đúng với $n = 2$, rồi với $n = 3$ và cứ thế tiếp tục. Bằng cách đi từ một số nguyên bất kì đến một số nguyên liền sau nó, ta đã chứng minh tính tổng quát của điều khẳng định. Phương pháp chứng minh này rất hay dùng và xứng đáng có một tên gọi. Ta có thể gọi nó là phép chứng minh đi từ n đến $n + 1$, hay đơn giản hơn là phép "chuyển tới một số nguyên tiếp sau". Do một sự ngẫu nhiên, phương pháp này mang một cái tên không tiện lợi "quy nạp toán học". Điều khẳng định ta vừa chứng minh trên có thể có một nguồn gốc nào đó nhưng về phương diện logic thì nguồn gốc đó không quan trọng lắm. Thế mà, trong nhiều trường hợp như trường hợp ta vừa xét một cách chi tiết ở trên thì nguồn gốc lại là quy nạp. Ta đi tới nó bằng con đường thực nghiệm. Thành thử, chứng minh có vẻ như là một bổ sung toán học cho quy nạp. Điều đó giải thích tên gọi của phương pháp.

1.3 Giới thiệu phương pháp quy nạp toán học

Trong đời sống thực tế, việc gặp các suy luận mang tính quy nạp là không ít. Chẳng hạn, ví dụ sau.

Lớp trưởng kiểm tra bài tập của các bạn trong lớp (có 35 học sinh), kiểm tra được 8 bạn, cả 8 bạn đều chưa làm bài tập, bản thân lớp trưởng cũng chưa làm bài. Lớp trưởng kết luận: "Tất cả các bạn đều chưa làm bài".

Trong ví dụ này, lớp trưởng đã sử dụng phép quy nạp, mà phép quy nạp có thể đúng, có thể sai. Như vậy, lớp trưởng kết luận chưa chính

xác, còn 26 bạn nữa chưa kiểm tra, không thể kết luận ngay như vậy được.

Hay một ví dụ về định lý cuối của Fermat (hay còn gọi là Định lý lớn Fermat) là một trong những định lý nổi tiếng trong lịch sử toán học. Định lý này phát biểu như sau:

"Tồn tại các nghiệm nguyên khác không x , y , và z thoả mãn $x^n + y^n = z^n$, trong đó n là một số nguyên lớn hơn 2."

Định lý này đã làm hao mòn không biết bao bộ óc vĩ đại của các nhà toán học lừng danh trong gần 4 thế kỉ. Cho tới đầu thế kỷ 20 các nhà toán học mới chỉ chứng minh được định lý này đúng với $n = 3, 4, 5, 7$ và các bội số của nó. Nhà toán học người Đức Ernst Kummer đã chứng minh định lý này là đúng với mọi số nguyên tố tới 100 (trừ 3 số 37, 59, 67). Cuối cùng nó được Andrew Wiles chứng minh vào năm 1993 sau gần 8 năm ròng nghiên cứu, phát triển từ chứng minh các giả thiết có liên quan. Tuy nhiên chứng minh này còn thiếu sót và đến năm 1995 Wiles mới hoàn tất, công bố chứng minh trọn vẹn.

Như vậy, mỗi tình huống thực tế hay một bài toán ta không thể kết luận ngay khi kiểm tra với một vài trường hợp, và chúng ta cũng không thể kiểm tra hết mọi trường hợp, khi đó phương pháp quy nạp toán học là công cụ đắc lực giúp chúng ta giải quyết vấn đề.

1.3.1 Nguyên lí quy nạp toán học

Hệ khái niệm không định nghĩa được qua các khái niệm khác về tập hợp số tự nhiên là: "Số tự nhiên", "số tự nhiên nhỏ nhất" (có thể là số 0 hoặc số 1), "Số liền sau".

Cơ sở của nguyên lý quy nạp toán học là tiên đề thứ 5 (còn gọi là tiên đề quy nạp) của hệ tiên đề PEANO về tập hợp số tự nhiên được xây dựng từ cuối thế kỉ 19. Lý thuyết có ba khái niệm cơ bản và 5 tiên đề sử dụng 3 khái niệm trên. Các khái niệm không định nghĩa được qua các khái niệm khác của Peano là "1", "Số tự nhiên", "Số liền sau". Các tiên đề của Peano có thể được phát biểu như sau:

Tiên đề 1. 1 là số tự nhiên.

Tiên đề 2. Với mọi số tự nhiên a , có một số tự nhiên a^* đi liền sau a .

Tiên đề 3. 1 không là số liền sau của bất kì số tự nhiên nào.

Tiên đề 4. Nếu $a^*=b^*$, thì $a = b$. Số tự nhiên đi liền sau a là duy nhất.

Tiên đề 5. (Tiên đề quy nạp) Nếu A là một tập hợp con của tập hợp số tự nhiên, sao cho $1 \in A$, và đối với mọi số tự nhiên n , nếu $n \in A$ và m là số tiếp sau của n thì $m \in A$, khi đó mọi số tự nhiên đều thuộc A , tức là A là tập hợp số tự nhiên.

Một tính chất nữa của số tự nhiên người ta công nhận như một tiên đề và thường gọi là tiên đề thứ tự.

Tiên đề thứ tự. ([4]) Trong mọi tập khác rỗng của số tự nhiên có phần tử nhỏ nhất.

Định lý 1. (Nguyên lý quy nạp toán học) ([4])

Cho n_0 là một số tự nhiên và $P(n)$ là một mệnh đề có nghĩa với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$. Nếu mệnh đề $P(n)$ thỏa mãn hai điều kiện sau:

(1) $P(n_0)$ đúng;

(2) Từ tính đúng đắn của $P(k)$ (k là số tự nhiên, $k \geq n_0$) suy ra tính đúng đắn của $P(k+1)$,
thì mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh bằng phản chứng. Giả sử ngược lại, mệnh đề khẳng định $P(n)$ trong định lý 1 không đúng với một số tự nhiên $n \geq n_0$ nào đó. Nghĩa là tồn tại số tự nhiên $m \geq n_0$ mà $P(m)$ không đúng. Ta lấy số tự nhiên nhỏ nhất m mà $P(m)$ không đúng (điều này thực hiện được do tiên đề thứ tự). Theo điều kiện (1) ta có bất đẳng thức $m > n_0$, từ đó suy ra $m-1 \geq n_0$. Từ bất đẳng thức vừa lập và cách chọn số tự nhiên m suy ra $P(m-1)$ là đúng, nhưng nó không kéo theo được $P(m)$ đúng cho số tiếp theo vì $m = (m-1) + 1$. Điều này trái với giả thiết (2). Như vậy, điều giả sử sai và $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$, nên định lý được chứng minh.

1.3.2 Phương pháp quy nạp toán học

(Trích trong tài liệu tham khảo ([4]))

Phương pháp dùng nguyên lý quy nạp toán học để giải toán, người ta gọi là **phương pháp quy nạp toán học**.

Giả sử khẳng định $P(n)$ xác định với mọi $n \geq n_0$ (n, n_0 là các số tự nhiên). Để chứng minh $P(n)$ đúng với mọi $n \geq n_0$ bằng phương pháp quy nạp, ta thực hiện hai bước:

(1) Cơ sở quy nạp. Ta kiểm tra mệnh đề $P(n_0)$ có đúng không. Nếu bước cơ sở đúng, ta chuyển sang bước thứ hai.

(2) Bước quy nạp. Chứng minh: Nếu với mỗi $k \geq n_0$ (k là số tự nhiên), $P(k)$ là mệnh đề đúng, thì suy ra $P(k+1)$ cũng đúng.

Sau bước (1) và (2), kết luận $P(n)$ đúng với mọi $n \geq n_0$.

Chú ý.

- "Phép quy nạp" là một phương pháp tư duy dùng để tìm tòi, dự đoán, từ những khẳng định riêng tiến tới khẳng định chung. Phép quy nạp có khi đưa ra những khẳng định đúng, có khi đưa ra khẳng định sai.
- "Phương pháp quy nạp toán học" ta gọi tắt "Phương pháp quy nạp" là một phương pháp dùng để chứng minh các mệnh đề chứa biến thuộc tập hợp số tự nhiên. Cách chứng minh quy nạp tránh cho ta phải đi kiểm tra vô hạn bước các khẳng định của mệnh đề. Đôi khi bài toán phụ thuộc vào nhiều biến số, nên khi chứng minh ta cần nói rõ chứng minh quy nạp theo biến nào.
- Ta cũng có thể sử dụng phương pháp quy nạp toán học để chứng minh các mệnh đề đối với số nguyên không âm.
- Phương pháp quy nạp toán học rất có tác dụng trong nghiên cứu, dự đoán kết quả và chứng minh kiểm nghiệm kết quả. Nhưng nhiều khi chính phương pháp quy nạp toán học làm cho việc chứng minh

dài dòng, biến đổi phức tạp, gặp nhiều khó khăn. Chính G.Polya nói: "Nhiều bài toán chứng minh bằng quy nạp toán học có thể chứng minh bằng cách khác, cách khác đó nằm trong chính cách chứng minh quy nạp toán học khi ta phân tích kỹ nội dung chứng minh."

Trong chứng minh bằng quy nạp, cả hai bước đều cần thiết. Nếu thiếu một trong hai bước, thì sẽ dẫn đến sai lầm. Một số ví dụ sau sẽ chứng tỏ điều này.

Ví dụ 1. ([4]) *Chứng minh rằng mọi số tự nhiên đều bằng số tự nhiên liền sau nó.*

Ta chứng minh theo phương pháp quy nạp toán học. Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$ với k là số tự nhiên nào đó, nghĩa là ta có

$$k = k + 1. \quad (1.4)$$

Ta sẽ chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$, nghĩa là phải chứng minh $k + 1 = k + 2$. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp bài toán đúng với $n = k$, cộng hai vế của đẳng thức (1.4) với 1 ta nhận được $k + 1 = (k + 1) + 1 = k + 2$.

Như vậy khẳng định với $n = k$ thì nó cũng đúng với $n = k + 1$, do đó bài toán đúng với mọi số tự nhiên n .

Hệ quả của bài toán này là tất cả các số tự nhiên đều bằng nhau. Điều này vô lí, vậy cách chứng minh sai ở đâu? Lời giải của ví dụ đã áp dụng nguyên lí quy nạp toán học nhưng bỏ qua bước cơ sở quy nạp. Nghĩa là đã không kiểm tra bài toán có đúng trong trường hợp $n = 1$ hay không. Ta thấy rằng với $n = 1$ thì khẳng định sai vì $1 \neq 2$.

Bước kiểm tra ban đầu có một ý nghĩa đặc biệt là tạo ra cơ sở để thực hiện quy nạp. Bước thứ hai đưa ra nguyên tắc cho việc mở rộng tự động vô hạn trên cơ sở điều kiện ban đầu, đây là nguyên tắc đi từ trường hợp riêng này sang trường hợp riêng khác: từ k đến $k + 1$.

Phản ví dụ trên chứng tỏ rằng: Khi chưa kiểm tra điều kiện ban đầu thì không có cơ sở để thực hiện quy nạp, vì vậy không có nghĩa gì khi

thực hiện kiểm tra phần quy nạp.

Ngược lại, khi áp dụng phương pháp quy nạp mà chỉ chứng minh được một số điều kiện ban đầu, mà bỏ qua phần quy nạp thì mới chỉ đưa ra được cơ sở chứ chưa có nguyên tắc nào để mở rộng cơ sở đó. Ta xét ví dụ.

Ví dụ 2. ([13]) Do bỏ qua bước quy nạp nên nhà Toán học Pháp P.Fermat (1601-1665) đã cho rằng các số dạng $2^{2^n} + 1$ là số nguyên tố.

Ông đã xét 5 số đầu tiên:

Với $n = 0$ cho $2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3$ là số nguyên tố.

Với $n = 1$ cho $2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5$ là số nguyên tố.

Với $n = 2$ cho $2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$ là số nguyên tố.

Với $n = 3$ cho $2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$ là số nguyên tố.

Với $n = 4$ cho $2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65537$ là số nguyên tố.

Nhưng đến thế kỷ 18 Euler đã phát hiện ra: Với $n = 5$ không đúng vì $2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641.6700417$ là hợp số.

Ví dụ 3. ([13]) D.A.Grave- nhà toán học Xô Viết; Ông giả định rằng: Với mọi số nguyên tố p , $2^{p-1} - 1$ không chia hết cho p^2 . Bằng kết quả kiểm tra trực tiếp với mọi số nguyên tố p nhỏ hơn 1000 càng củng cố thêm giả định này của ông. Nhưng chẳng bao lâu sau người ta chỉ ra rằng $2^{1092} - 1$ chia hết cho 1093^2 (1093 là số nguyên tố). Như vậy, phỏng đoán của Grave là sai lầm.

Như vậy việc kiểm tra cả hai bước cần được tôn trọng và thực hiện đầy đủ khi áp dụng phương pháp quy nạp toán học.

1.3.3 Các ví dụ

Phần này trình bày một số ví dụ nhằm minh họa việc vận dụng phương pháp quy nạp để giải toán.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 2$, ta có đẳng thức

$$(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9})...(1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}.$$

Lời giải.

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 2$, ta có $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2 \cdot 2}$ nên đẳng thức đúng.

(2) Bước quy nạp. Giả sử đẳng thức đúng với $n = k$ (k là số nguyên, $k \geq 2$), ta có

$$(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9}) \dots (1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{k+1}{2k}.$$

Ta chứng minh đẳng thức đúng với $n = k + 1$. Thật vậy,

$$\begin{aligned} (1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9}) \dots (1 - \frac{1}{k^2})(1 - \frac{1}{(k+1)^2}) &= \frac{k+1}{2k} (1 - \frac{1}{(k+1)^2}) \\ &= \frac{k+1}{2k} \cdot \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} \\ &= \frac{k+2}{2(k+1)}. \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 5. (IMO 1966) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n và mọi số thực x sao cho $\sin 2^n x \neq 0$, ta có

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x. \quad (1.5)$$

Lời giải. Ta có

$$\cot y - \cot 2y = \frac{\cos y}{\sin y} - \frac{2\cos^2 y - 1}{2\sin y \cos y} = \frac{1}{2\sin y \cos y} = \frac{1}{\sin 2y}. \quad (1.6)$$

Ta sử dụng phương pháp quy nạp theo n để chứng minh (1.5)

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 1$, ta phải chứng minh

$$\frac{1}{\sin 2x} = \cot x - \cot 2x.$$

Đẳng thức này hiển nhiên đúng khi ta thay $y = x$ trong (1.6)

(2) Bước quy nạp. Giả sử đẳng thức (1.5) đúng với số tự nhiên n , nghĩa là

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x.$$

Ta chứng minh đẳng thức (1.5) đúng với $n + 1$.

Thay $y = 2^n x$ vào (1.6), ta có

$$\frac{1}{\sin 2^{n+1} x} = \cot 2^n x - \cot 2^{n+1} x.$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n x} + \frac{1}{\sin 2^{n+1} x} \\ &= \cot x - \cot 2^n x + \cot 2^n x - \cot 2^{n+1} x. \\ &= \cot x - \cot 2^{n+1} x. \end{aligned}$$

nên bài toán đúng với $n + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 6. Chứng minh rằng $2^x > x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

(i) Với $x < 0$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

(ii) Với $x \geq 0$, thì $x = [x] + \{x\}$, kí hiệu $n = [x]$, với n là số nguyên không âm. Khi đó $n \leq x < n + 1$. Trước tiên, ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo n bài toán sau:

Chứng minh rằng với mọi số nguyên không âm n thì

$$2^{n+1} \geq n + 2. \quad (1.7)$$

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 0$, ta có $2^1 \geq 2$ là hiển nhiên, nên bất đẳng thức đúng với $n = 0$.

(2) Bước quy nạp. Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$ với k là số nguyên không âm bất kỳ, nghĩa là

$$2^{k+1} \geq k + 2.$$

Ta chứng minh bất đẳng thức cũng đúng với $n = k + 1$.

Thật vậy,

$$\begin{aligned} 2^{k+1+1} &= 2 \cdot 2^{k+1} \geq 2 \cdot (k+2) \text{ (theo giả thiết quy nạp)} \\ &= 2k + 4 > 2k + 3 \geq k + 3 = (k+1) + 2. \end{aligned}$$

Do đó, bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$.

Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Quay trở lại bài toán đầu, ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo n .

(1) Cơ sở quy nạp.

Khi $n = 0$ nghĩa là $0 \leq x < 1$, ta có $2^x \geq 2^0 = 1 > x$ nên bất đẳng thức đúng.

(2) Bước quy nạp. Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$, nghĩa là với $k \leq x < k + 1$ (k là số nguyên không âm) thì $2^x > x$.

Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, nghĩa là khi $k + 1 \leq x < k + 2$, thì $2^x > x$. Thật vậy, ta có

$$x \geq k + 1 \Leftrightarrow 2^x \geq 2^{k+1} \geq k + 2 \text{ (theo (1.7))} > x.$$

Do đó, bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp, bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 7. ([4]) Xét tập hợp những phân số có tử số là 1 và mẫu số là những số tự nhiên lớn hơn 1: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 3$ có thể biểu diễn 1 thành dạng tổng của n phân số khác nhau trong tập hợp trên. Ví dụ $n = 3$, ta có thể viết

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

Lời giải. Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học.

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 3$, ta có thể viết

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

thỏa mãn bài toán.

(2) Bước quy nạp. Giả sử bài toán đúng với $n = k$, ($k \in \mathbb{N}, k \geq 3$) nghĩa là 1 được viết thành tổng của k phân số khác nhau có tử là 1 và mẫu là các số tự nhiên lớn hơn 1.

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \cdots + \frac{1}{k}. \quad (1.8)$$

Ta có thể cho rằng những phân số sắp xếp theo thứ tự nhỏ dần, nghĩa là số ở mẫu tăng dần.

Ta chứng minh bài toán đúng với $n = k + 1$.

$$\text{Do } \frac{1}{k} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k(k+1)},$$

nên khi thay $\frac{1}{k}$ trong (1.8) bằng $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k(k+1)}$, ta được

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \cdots + \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \cdots + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k(k+1)}. \end{aligned}$$

Ta thấy các phân số đầu giữ nguyên, chỉ có phân số cuối tách làm hai phân số, nên bài toán đúng với $n = k + 1$.

Vậy theo nguyên lí quy nạp, bài toán được chứng minh.

Ví dụ 8. ([4]) Trên mặt phẳng cho n hình tròn ($n \geq 1$). Chứng minh rằng với bất kì cách sắp đặt nào, thì hình nhận được cũng có thể tô bằng hai màu, để cho hai phần mặt phẳng kề nhau (có biên chung) cũng được tô bằng hai màu khác nhau.

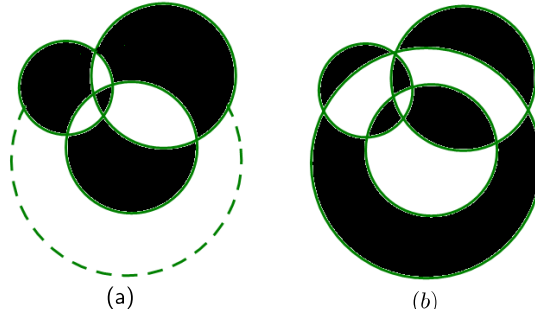
Lời giải.

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 1$, trên mặt phẳng chỉ có một hình tròn.

Ta tô hình tròn bằng màu đen. Khi đó phần mặt phẳng còn lại kề với hình tròn được để trắng, nên hai phần mặt phẳng kề nhau có màu khác nhau. Nên bài toán đúng với $n = 1$.

(2) Bước quy nạp. Giả sử bài toán đúng với bức tranh gồm n hình tròn. Giả sử trên mặt phẳng cho $n + 1$ hình tròn tùy ý. Xóa đi một

trong những hình tròn sẽ nhận được bức tranh gồm n hình tròn (hình 1.2a). Theo giả thiết quy nạp, bức tranh này chỉ tô bằng hai màu, chẳng hạn đen và trắng mà hai miền kề nhau có màu khác nhau.



Hình 1.2

Khôi phục lại hình tròn đã xóa, tức là trở lại hình ban đầu gồm $n + 1$ hình tròn, rồi theo một phía đối với hình tròn vừa khôi phục, chẳng hạn phía trong của hình tròn này thay đổi các màu đã tô bằng hai màu, mà hai miền kề nhau tùy ý đều có màu khác nhau (hình 1.2b).

Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

1.4 Một số hình thức của phương pháp quy nạp toán học

Phần này trình bày một số hình thức thể hiện của phương pháp quy nạp toán học.

1.4.1 Hình thức quy nạp chuẩn tắc

Hình thức quy nạp này chính là nội dung của nguyên lý quy nạp đã trình bày ở phần trước. Ta có thể tóm tắt lại như sau.

"Mệnh đề P đúng với số tự nhiên k_0 và với mọi số tự nhiên $k \geq k_0$, từ việc P đúng với k , thì cũng suy ra được tính đúng đắn của P với $(k + 1)$. Khi đó mệnh đề P đúng đối với mọi số tự nhiên $k \geq k_0$."

Sau đây tác giả xin trình bày một số ví dụ minh họa.

Ví dụ 9. ([6]) Cho $A(n) = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1$ với n là số tự nhiên bất kỳ.

Chứng minh $A(n) = n^2$.

Từ đó suy ra

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2^n - 1) = 4^{n-1}. \quad (1.9)$$

Lời giải.

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 1$ ta có $A(1) = 1 = 1^2$, nên khẳng định đúng với $n = 1$.

(2) Bước quy nạp. Giả sử khẳng định đúng với $n = k$, k là số tự nhiên bất kỳ, nghĩa là $A(k) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$. Ta chứng minh, khẳng định đúng với $n = k + 1$.

Theo giả thiết quy nạp, ta có

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2,$$

$$\text{nên } A(k + 1) = k^2 + [2(k + 1) - 1] = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

Do đó, khẳng định đúng với $n = k + 1$.

Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $A(n) = n^2$.

Để có đẳng thức (1.9), ta áp dụng kết quả trên:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2^n - 1) = \left[\frac{(2^n - 1) + 1}{2} \right]^2 = 4^{n-1}.$$

Ví dụ 10. (USAMTS, 2000-2001, Cuộc thi chọn tài năng Toán học Mỹ).
Hãy tìm số dư khi chia số $1776^{1492!}$ cho 2000.

Lời giải. Trước hết ta chứng minh bổ đề "Với mọi số nguyên dương n thì $1376^n \equiv 1376 \pmod{2000}$ " bằng phương pháp quy nạp theo n .

(1) Cơ sở quy nạp. Ta có

$$\text{Với } n = 1 \text{ thì } 1376^1 \equiv 1376 \pmod{2000},$$

$$\text{Với } n = 2 \text{ thì } 1376^2 = 1893376 \equiv 1376 \pmod{2000}.$$

(2) Bước quy nạp. Giả sử bổ đề đúng với $n = k$, $k \in \mathbb{Z}^+$, nghĩa là $1376^k \equiv 1376 \pmod{2000}$.

Ta chứng minh bổ đề đúng với $n = k + 1$. Thật vậy, từ giả thiết

quy nạp ta có

$$1376^{k+1} \equiv 1376^2 \pmod{2000} \text{ mà } 1376^2 \equiv 1376 \pmod{2000} \\ \text{nên } 1376^{k+1} \equiv 1376 \pmod{2000}.$$

Như vậy, theo nguyên lý quy nạp, bổ đề được chứng minh.

Quay lại bài toán ta có $1776^5 \equiv 1376 \pmod{2000}$, nên

$$1776^{1492!} = (1776^5)^{\frac{1492!}{5}} \equiv 1376^{\frac{1492!}{5}} \pmod{2000}$$

mà 5 là ước của $1492!$ nên theo bổ đề ta có

$$1376^{\frac{1492!}{5}} \equiv 1376 \pmod{2000}.$$

Vậy khi chia số $1776^{1492!}$ cho 2000 được số dư là 1376.

Ví dụ 11. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n đều có:

$$C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \dots + C_{n+1}^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Lời giải.

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 1$ thì $C_2^2 = 1 = \frac{1.2.3}{6}$, nên bài toán đúng với $n = 1$.

(2) Bước quy nạp. Giả sử bài toán đúng với $n = k$ (k là số tự nhiên bất kỳ). Khi đó

$$C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \dots + C_{k+1}^2 = \frac{k(k+1)(k+2)}{6}. \quad (1.10)$$

Ta chứng minh bài toán đúng với $n = k + 1$. Ta có

$$\begin{aligned} C_2^2 + C_3^2 + \dots + C_{k+1}^2 + C_{k+2}^2 &= \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + C_{k+2}^2 \text{ (theo (1.10))} \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6} \end{aligned}$$

Như vậy, bài toán đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 12. (*Định lý Fermat nhỏ*) Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố, thì với mọi số nguyên dương n , hiệu $n^p - n$ chia hết cho p .

Lời giải. Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp theo n .

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 1$, ta có $1^p - 1 = 0$ chia hết cho p . Do đó bài toán đúng với $n = 1$.

(2) Bước quy nạp. Giả sử bài toán đúng với $n = a$ ($a \in \mathbb{Z}^+$), nghĩa là $a^p - a$ chia hết cho p . Ta chứng minh, bài toán đúng với $n = a + 1$, nghĩa là ta chứng minh $(a + 1)^p - (a + 1)$ cũng chia hết cho p . Theo khai triển nhị thức Newton ta có:

$$\begin{aligned} & (a + 1)^p - (a + 1) \\ &= C_p^0 a^p + C_p^1 a^{p-1} + C_p^2 a^{p-2} + \dots + C_p^{p-1} a + C_p^p - a - 1 \\ &= (a^p - a) + C_p^1 a^{p-1} + C_p^2 a^{p-2} + \dots + C_p^{p-1} a \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{1.2.3\dots k} \quad (\text{với } 1 \leq k \leq p-1)$$

Do p là số nguyên tố, nên $(p, k) = 1; \forall k, 1 \leq k \leq p-1$, suy ra C_p^k chia hết cho p với mọi $k, 1 \leq k \leq p-1$, mà $(a^p - a)$ cũng chia hết cho p (theo giả thiết quy nạp) nên $(a + 1)^p - (a + 1)$ cũng chia hết cho p .

Vậy, theo nguyên lý quy nạp định lý được chứng minh.

Ví dụ 13. ([4]) Chứng minh rằng n dây cung cắt nhau tại m điểm trong của hình tròn ($n > m$) sẽ chia hình tròn này thành $n + m + 1$ phần.

Lời giải. Khẳng định được chứng minh bằng quy nạp theo số dây cung n .

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 1$ hình tròn chỉ có một dây cung. Nó chia hình tròn thành hai phần. Vì chỉ có một dây cung nên số điểm cắt trong $m = 0$ nên ta có số phần trong hình tròn là $2 = 1 + 0 + 1$, do đó bài toán đúng với $n = 1$.

(2) Bước quy nạp. Giả sử bài toán đúng với $n = k$, nghĩa là k dây cung cắt nhau tại m_1 điểm trong hình tròn, hình tròn được chia thành $k + m_1 + 1$ phần. Ta chứng minh bài toán đúng với $n = k + 1$, nghĩa là $k + 1$ dây cung cắt nhau tại m điểm trong hình tròn, hình tròn được chia thành $k + 1 + m + 1 = k + m + 2$ phần.

Thật vậy, xét $n = k + 1$ dây cung tùy ý, cắt nhau tại m điểm trong. Đánh số các dây cung từ 1 đến $k + 1$. Ta bỏ đi một dây cung tùy ý, chẳng hạn dây cung $k + 1$. Khi đó, trong hình tròn chỉ còn k dây cung cắt nhau tại m_1 điểm trong, theo giả thiết quy nạp, hình tròn được chia thành $k + m_1 + 1$ phần. "Khôi phục" lại dây cung thứ $k + 1$, khi đó dây cung $k + 1$ bị các dây cung có chỉ số từ 1 đến k chia cắt thành $m - m_1 + 1$ phần, nên hình tròn được thêm $m - m_1 + 1$ phần. Bởi vậy, số phần hình tròn được chia bởi $k + 1$ dây cung là

$$k + m_1 + 1 + m - m_1 + 1 = k + 1 + m + 1 = k + m + 2.$$

Vậy, theo nguyên lí quy nạp ta có điều phải chứng minh.

1.4.2 Hình thức quy nạp nhảy bước

Định lý 2. Cho p là số nguyên dương và dãy các mệnh đề

$$P(1), P(2), \dots, P(n), \dots$$

nếu

1. $P(1), P(2), \dots, P(p)$ là những mệnh đề đúng và
2. Với mỗi số tự nhiên $k \geq p$ các mệnh đề $P(k-p+1), P(k-p+2), \dots, P(k)$ đúng kéo theo mệnh đề $P(k+1)$ cũng đúng,

thì mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương n .

Ví dụ 14. ([4]) Cho x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - 27x + 14 = 0$ và n là số tự nhiên bất kỳ. Chứng minh rằng tổng $S_n = x_1^n + x_2^n$ không chia hết cho 715.

Lời giải. Theo công thức Viet, ta có $x_1 + x_2 = 27$ và $x_1x_2 = 14$.

(1) Cơ sở quy nạp. Ta có $S_1 = 27$, $S_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 701$ và $S_3 = (x_1 + x_2) \left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 \right] = 18549$ đều không chia hết cho 715. Do đó, bài toán đúng với $n = 1, 2, 3$.

(2) Bước quy nạp. Giả sử bài toán đúng với $n = k - 2$, $n = k - 1$, $n = k$, nghĩa là S_{k-2} , S_{k-1} , S_k đều không chia hết cho 715.

Ta tính

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= x_1^{k+1} + x_2^{k+1} = (x_1 + x_2)(x_1^k + x_2^k) - x_1x_2(x_1^{k-1} + x_2^{k-1}) \\ &= (x_1 + x_2) \left[(x_1 + x_2)(x_1^{k-1} + x_2^{k-1}) - x_1x_2(x_1^{k-2} + x_2^{k-2}) \right] \\ &\quad - x_1x_2(x_1^{k-1} + x_2^{k-1}) \\ &= 715(x_1^{k-1} + x_2^{k-1}) - 378(x_1^{k-2} + x_2^{k-2}) \\ &= 715S_{k-1} - 378S_{k-2}. \end{aligned}$$

Do 378 và S_{k-2} đều không chia hết cho 715, nên S_{k+1} không chia hết cho 715. Suy ra, bài toán đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Hình thức quy nạp nhảy bước là một trường hợp đặc biệt của định lý 2, được phát biểu như sau:

Cho a, k_0 là các số nguyên dương, $P(k_0), P(k_0 + 1), \dots, P(k_0 + a - 1)$ là những mệnh đề đúng. Nếu mệnh đề $P(k)$ đúng ($\forall k \geq k_0$) kéo theo mệnh đề $P(k + a)$ đúng thì mệnh đề $P(n)$ đúng $\forall n \geq k_0$.

Ví dụ 15. ([4]) Chứng minh với mọi số thực $x > 0$ và mọi số tự nhiên $n \geq 1$ bất đẳng thức sau đúng

$$x^n + x^{n-2} + x^{n-4} + \dots + \frac{1}{x^{n-4}} + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^n} \geq n + 1. \quad (1.11)$$

Lời giải.

(1a) Với $n = 1$ bất đẳng thức (1.11) có dạng

$$x + \frac{1}{x} \geq 2. \quad (1.12)$$

Bất đẳng thức (1.12) đúng vì

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \text{ (vì } x > 0) \Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0 \text{ (hiển nhiên).}$$

(1b) Với $n = 2$ bất đẳng thức (1.11) có dạng

$$x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} \geq 3. \quad (1.13)$$

Bất đẳng thức (1.12) đúng với mọi $x > 0$, nên nó đúng với x^2 thỏa mãn $x > 0$, nên ta có $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$. Cộng hai vế của bất đẳng thức này với 1, ta được (1.13).

(2) Giả sử bất đẳng thức (1.11) đúng với $n = k$, với k là số tự nhiên nào đó, nghĩa là

$$x^k + x^{k-2} + x^{k-4} + \cdots + \frac{1}{x^{k-4}} + \frac{1}{x^{k-2}} + \frac{1}{x^k} \geq k + 1. \quad (1.14)$$

Ta chứng minh bất đẳng thức (1.11) đúng với $n = k + 2$, nghĩa là

$$x^{k+2} + x^k + x^{k-2} + \cdots + \frac{1}{x^{k-2}} + \frac{1}{x^k} + \frac{1}{x^{k+2}} \geq k + 3. \quad (1.15)$$

Thật vậy, trong (1.12) thế $x > 0$ bởi x^{k+2} , ta được

$$x^{k+2} + \frac{1}{x^{k+2}} \geq 2. \quad (1.16)$$

Cộng vế tương ứng của (1.14) và (1.16) cho bất đẳng thức (1.15)

Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Tóm lại.

Bước cơ sở. Trong (1a) và (1b) ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = 1$ và $n = 2$.

Bước quy nạp. Trong (2) ta đã chứng minh từ giả thiết quy nạp (1.11) đúng với $n = k$ suy ra nó đúng với $n = k + 2$. Kết quả là

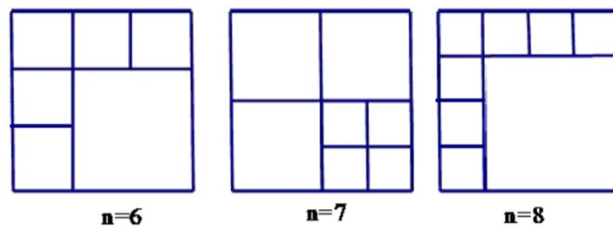
- Từ (1a) và (2) cho khẳng định (1.11) đúng cho mọi số lẻ n .
- Từ (1b) và (2) cho khẳng định (1.11) đúng cho mọi số chẵn n .

Do đó (1.11) đúng với mọi số tự nhiên n .

Ví dụ 16. Cho n là số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 6. Chứng minh rằng luôn chia được một hình vuông thành n hình vuông nhỏ (các hình vuông sau khi chia không nhất thiết phải bằng nhau).

Lời giải.

(1) Cơ sở quy nạp. Trường hợp $n = 6, 7, 8$ đã được giải trong hình 1.3



Hình 1.3

(2) Bước quy nạp. Ta chứng minh bài toán nếu đúng với $n = k, k \geq 6, k \in \mathbb{N}$ thì cũng đúng với $n = k + 3$. Thật vậy, ta chọn một hình vuông bất kì trong k hình vuông đã có, chia nó ra làm 4 hình vuông nhỏ hơn, khi đó số hình vuông được tạo ra là $k + 3$.

Như vậy bài toán thỏa mãn nguyên lý quy nạp, nên ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 17. Tìm các số tự nhiên n để phương trình

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_n^2} = 1$$

có nghiệm mà các thành phần của nó là số tự nhiên.

Lời giải.

(i) Khi $n = 1$, phương trình có nghiệm $x_1 = 1$.

(ii) Khi $n = 2$, ta có phương trình : $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 1$.

Giả sử phương trình có nghiệm (α_1, α_2) , α_1, α_2 là các số tự nhiên. Có

thể giả thiết $\alpha_1 \leq \alpha_2$ vì vai trò của x_1, x_2 như nhau.

$$\text{Tacó: } \frac{1}{\alpha_1^2} \geq \frac{1}{\alpha_2^2} \Rightarrow 1 = \frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} \leq \frac{2}{\alpha_1^2} \Rightarrow \alpha_1^2 \leq 2$$

nên $\alpha_1 = 1$. Thay vào phương trình ta có: $\frac{1}{\alpha_2^2} = 0$ (vô lý)

Vậy khi $n = 2$, phương trình không có nghiệm mà thành phần là các số tự nhiên.

(iii) Khi $n = 3$ tương tự như trên, phương trình không có nghiệm mà thành phần là các số tự nhiên.

(iv) Khi $n = 4$, phương trình có nghiệm $(2; 2; 2; 2)$.

(v) Khi $n = 5$, tương tự như trường hợp $n = 2, n = 3$ phương trình không có nghiệm mà thành phần là các số tự nhiên.

(vi) Khi $n = 6$, phương trình có nghiệm $(2; 2; 2; 3; 6)$.

(vii) Khi $n = 7$, phương trình có nghiệm $(2; 2; 2; 4; 4; 4; 4)$.

(viii) Khi $n = 8$, phương trình có nghiệm $(3; 3; 3; 3; 3; 7; 14; 21)$.

(ix) Giả sử với $n = k$ tự nhiên nào đó phương trình có nghiệm $(\alpha_1; \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ với α_i là số tự nhiên, $i = \overline{1, k}$.

$$\text{Ta có } \frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} + \dots + \frac{1}{\alpha_k^2} = 1.$$

Mặt khác

$$\frac{1}{\alpha_k^2} = \frac{1}{4\alpha_k^2} + \frac{1}{4\alpha_k^2} + \frac{1}{4\alpha_k^2} + \frac{1}{4\alpha_k^2}, \text{ nên}$$

$$\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} + \dots + \frac{1}{\alpha_{k-1}^2} + \frac{1}{4\alpha_k^2} + \frac{1}{4\alpha_k^2} + \frac{1}{4\alpha_k^2} + \frac{1}{4\alpha_k^2} = 1.$$

Do đó, với $n = k + 3$ thì phương trình có nghiệm

$$(\alpha_1; \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}; 2\alpha_k; 2\alpha_k; 2\alpha_k; 2\alpha_k)$$

(hiển nhiên các thành phần của nghiệm này cũng là số tự nhiên).

Như vậy, nếu phương trình có nghiệm thỏa mãn đề bài với $n = k$, thì phương trình cũng có nghiệm thỏa mãn đề bài với $n = k + 3$. Mà phương trình có nghiệm mà thành phần là các số tự nhiên với $n = 6; 7; 8$ nên theo nguyên lý quy nạp thì phương trình có nghiệm mà thành phần là các số tự nhiên với mọi $n \geq 6$. Ngoài ra, phương trình cũng có nghiệm thỏa mãn đề bài với $n = 1; n = 4$.

1.4.3 Hình thức quy nạp kép

Hình thức quy nạp kép cũng là một trường hợp đặc biệt của định lý 2, được phát biểu như sau:

Cho k_0 là số nguyên dương, $P(k_0), P(k_0 + 1)$ là những mệnh đề đúng. Nếu mệnh đề $P(k - 1), P(k) (\forall k \geq k_0)$ đúng kéo theo mệnh đề $P(k + 1)$ đúng, thì mệnh đề $P(n)$ đúng $\forall n \geq k_0$.

Dưới đây là một số ví dụ minh họa cho việc vận dụng phương pháp này.

Ví dụ 18. ([4]) Cho $v_0 = 2, v_1 = 3$ và với mỗi số tự nhiên $n \geq 1$ có $v_{n+1} = 3v_n - 2v_{n-1}$. Chứng minh rằng $v_n = 2^n + 1$, với n là số nguyên không âm bất kỳ.

Lời giải.

Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp kép theo n .

(1) Cơ sở quy nạp.

Với $n = 0$ thì $v_0 = 2^0 + 1 = 2$.

Với $n = 1$ thì $v_1 = 2^1 + 1 = 3$.

Như vậy, công thức của bài toán cho kết quả đúng với $n = 0$ và $n = 1$.

(2) Bước quy nạp. Giả sử bài toán đã đúng cho $n = k$ và $n = k - 1$ ($k \in \mathbb{Z}, k \geq 1$), nghĩa là $v_k = 2^k + 1$ và $v_{k-1} = 2^{k-1} + 1$. Khi đó

$$v_{k+1} = 3(2^k + 1) - 2(2^{k-1} + 1) = 2^{k+1} + 1.$$

Do đó bài toán đúng với $n = k + 1$. Vậy theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 19. (Thi học sinh giỏi Việt Nam, 1989)

Với $n = 0, 1, 2, \dots$, ta gọi $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ là hai dãy số được xác định một cách đệ quy như sau

$$x_0 = 1, x_1 = 4, x_{n+2} = 3x_{n+1} - x_n;$$

$$y_0 = 1, y_1 = 2, y_{n+2} = 3y_{n+1} - y_n.$$

Chứng minh rằng $x_n^2 - 5y_n^2 + 4 = 0$ với mọi số nguyên không âm n .

Lời giải. Ta tính được $x_2 = 11, y_2 = 5$. Ta chứng minh

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = \left(\frac{3x_n + 5y_n}{2}, \frac{x_n + 3y_n}{2} \right), (n \text{ là số nguyên không âm}) \quad (1.17)$$

bằng phương pháp quy nạp theo n .

(1) Cơ sở quy nạp.

$$\text{Với } n = 0 \text{ thì } (x_1, y_1) = \left(\frac{3 \cdot 1 + 5 \cdot 1}{2}, \frac{1 + 3 \cdot 1}{2} \right) = (4; 2).$$

$$\text{Với } n = 1 \text{ thì } (x_2, y_2) = \left(\frac{3 \cdot 4 + 5 \cdot 2}{2}, \frac{4 + 3 \cdot 2}{2} \right) = (11; 5).$$

Vậy (1.17) đúng với $n = 0, n = 1$.

(2) Bước quy nạp. Giả sử (1.17) đúng khi $n = k$ và $n = k + 1$ với k là số nguyên không âm. Ta chứng minh (1.17) đúng với $n = k + 2$.

Ta có

$$(x_{k+3}, y_{k+3}) = (3x_{k+2} - x_{k+1}, 3y_{k+2} - y_{k+1}),$$

suy ra

$$\begin{aligned} (x_{k+3}, y_{k+3}) &= \left(3 \cdot \frac{3x_{k+1} + 5y_{k+1}}{2} - \frac{3x_k + 5y_k}{2}, 3 \cdot \frac{x_{k+1} + 3y_{k+1}}{2} - \frac{x_k + 3y_k}{2} \right) \\ &= \left(\frac{3(3x_{k+1} - x_k) + 5(3y_{k+1} - y_k)}{2}, \frac{3x_{k+1} - x_k + 3(3y_{k+1} - y_k)}{2} \right) \\ &= \left(\frac{3x_{k+2} + 5y_{k+2}}{2}, \frac{x_{k+2} + 3y_{k+2}}{2} \right). \end{aligned}$$

Như vậy (1.17) đúng với $n = k + 2$.

Theo nguyên lý quy nạp, (1.17) đúng với số nguyên n không âm.

Bằng phương pháp quy nạp theo n , ta chứng minh tiếp

$$x_n^2 - 5y_n^2 + 4 = 0. \quad (1.18)$$

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 0$ thì ta có $1 - 5 + 4 = 0$, nên (1.18) đúng với $n = 0$.

(2) Bước quy nạp. Giả sử (1.18) đúng với $n = k$ (k là số nguyên không âm), ta có $x_k^2 - 5y_k^2 + 4 = 0$. Ta chứng minh (1.18) đúng với $n = k + 1$.

Thật vậy,

$$\begin{aligned}x_{k+1}^2 - 5y_{k+1}^2 + 4 &= \left(\frac{3x_k + 5y_k}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{x_k + 3y_k}{2}\right)^2 + 4 \\&= \frac{4x_k^2 - 20y_k^2}{4} + 4 = x_k^2 - 5y_k^2 + 4 = 0.\end{aligned}$$

Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Chú ý. Một định lý tương đương định lý 2 nhưng có giả thiết quy nạp mạnh hơn trong bước quy nạp và thực tế nội dung định lý này được áp dụng dễ hơn định lý 2 là định lý 3.

Định lý 3. Cho một dãy mệnh đề

$$P(1), P(2), \dots, P(n), \dots$$

nếu

(1) $P(1)$ là khẳng định đúng và

(2) với mỗi số tự nhiên $k \geq 1$, những khẳng định $P(1), P(2), \dots, P(k)$ đúng kéo theo mệnh đề $P(k+1)$ cũng đúng,

thì mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương n .

Ví dụ 20. ([4]) Chứng minh rằng số $x + \frac{1}{x}$ là số nguyên dương thì $x^n + \frac{1}{x^n}$ cũng là số nguyên với mọi số nguyên dương n .

Lời giải.

(1) **Cơ sở quy nạp.** Khi $n = 1$ mệnh đề hiển nhiên đúng.

(2) **Bước quy nạp.** Giả sử với mọi số nguyên dương từ 1 đến k , biểu thức $x^k + \frac{1}{x^k}$ là những số nguyên. Ta cần chứng minh $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}$ cũng là số nguyên. Thật vậy,

$$x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) - \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right).$$

Theo giả thiết quy nạp $x + \frac{1}{x}, x^k + \frac{1}{x^k}, x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}$ đều biểu diễn các số nguyên, nên $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}$ cũng là số nguyên.

Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Với bài toán này, ta có thể thay n là số nguyên dương tùy ý. Với mỗi số nguyên dương n , ta được một bài toán mới. Ví dụ cho bài toán sau:

"Cho $x + \frac{1}{x}$ là một số nguyên ($x \neq 0$). Chứng minh rằng $x^{2015} + \frac{1}{x^{2015}}$ cũng là một số nguyên."

Chương 2

Ứng dụng phương pháp quy nạp toán học trong giải toán

2.1 Phương pháp quy nạp toán học trong các bài toán số học, đại số, giải tích

Phần này trình bày việc vận dụng phương pháp quy nạp để giải một số bài toán số học, đại số và giải tích.

2.1.1 Một số bài toán chia hết và chia có dư.

Bài toán 1. (*Thi vào lớp 10 chuyên, ĐHKHTN-ĐHQGHN 1996*)

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta có $A(n) = n^3 + 5n$ chia hết cho 6.

Lời giải.

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 1$ ta có $A(1) = 6$ chia hết cho 6 nên bài toán đúng với $n = 1$.

(2) Bước quy nạp. Giả sử bài toán đúng với $n = k$, nghĩa là $A(k):6$ với $A(k) = k^3 + 5k$, ta chứng minh bài toán đúng với $n = k + 1$.

Thật vậy, với $n = k + 1$ thì

$$\begin{aligned} A(k+1) &= (k+1)^3 + 5(k+1) \\ &= k^3 + 3k^2 + 8k + 6 \\ &= k^3 + 5k + 3k(k+1) + 6 \\ &= A(k) + 3k(k+1) + 6. \end{aligned}$$

Ta có $A(k):6$ (theo giả thiết quy nạp), $3k(k+1):6$ (vì tích hai số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 2) suy ra $A(k+1):6$ nên bài toán đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 2. ([3]) *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ,*
 $S_n = (n+1)(n+2) \dots (n+n)$ *chia hết cho 2^n .*

Lời giải.

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 1$, ta có $S_1 = 1 + 1 = 2$ chia hết cho $2^1 = 2$. Vậy bài toán đúng với $n = 1$.

(2) Bước quy nạp. Giả sử bài toán đúng với $n = k$ (k là số tự nhiên bất kỳ), nghĩa là
 $S_k = (k+1)(k+2) \dots (k+k)$ chia hết cho 2^k . Ta phải chứng minh bài toán đúng với $n = k + 1$.

Thật vậy,

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= (k+1+1)(k+1+2) \dots (k+1+k)(k+1+k+1) \\ &= (k+2)(k+3) \dots (2k+1)(2k+2) \\ &= 2(k+1)(k+2) \dots (k+k)(2k+1) \\ &= 2S_k \cdot (2k+1). \end{aligned}$$

Theo giả thiết quy nạp thì S_k chia hết cho 2^k , suy ra S_{k+1} chia hết cho 2^{k+1} .

Theo nguyên lý quy nạp toán học thì S_n chia hết cho 2^n với mọi số tự nhiên n .

Bài toán 3. *Hãy tìm chữ số tận cùng của số: $A_n = 2^{2^n} + 1$ với mọi số nguyên n , $n \geq 2$.*

Lời giải.

Nhận xét. Với dạng toán tìm n chữ số tận cùng của một số thật ra là đi tìm số dư của số đó khi chia cho 10^n .

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 2$, số $A_2 = 2^{2^2} + 1 = 17$, có chữ số tận cùng là 7.

(2) Bước quy nạp. Giả sử với $n = k$ ($k \in \mathbb{Z}, k \geq 2$), số $A_k = 2^{2^k} + 1$ có chữ số tận cùng là 7. Ta sẽ chứng minh A_{k+1} cũng có chữ số tận cùng là 7.

Thật vậy, do A_k có chữ số tận cùng là 7 nên tồn tại số nguyên dương m để $A_k = 10m + 7$, hay $2^{2^k} + 1 = 10m + 7$ nên $2^{2^k} = 10m + 6$.

Từ đó

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= 2^{2^{k+1}} + 1 = 2^{2^k \cdot 2} + 1 \\ &= (2^{2^k})^2 + 1 \\ &= (10m + 6)^2 + 1 \\ &= (100m^2 + 120m + 37) \\ &= 10(10m^2 + 12m + 3) + 7 \end{aligned}$$

nên A_{k+1} cũng có chữ số tận cùng là 7.

Vậy với mọi số nguyên n , $n \geq 2$ thì $A_n = 2^{2^n} + 1$ có chữ số tận cùng là 7.

Bài toán 4. ([3]) Viết tổng $\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \dots + \frac{2^n}{n} = \frac{p_n}{q_n}$ trong đó p_n, q_n là các số nguyên dương, p_n, q_n nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng $p_n \not\equiv 8, \forall n \geq 4$.

Lời giải. Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo n bài toán sau:

Chứng minh rằng

$$2^{n-2} > n + 1, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5. \quad (2.1)$$

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 5$ thì $2^3 = 8 > 6$, nên (2.1) đúng với $n = 5$.

(2) Bước quy nạp. Giả sử (2.1) đúng với $n = k$ ($k \in \mathbb{N}, k \geq 5$), nghĩa là $2^{k-2} > k + 1$. Ta chứng minh (2.1) đúng với $n = k + 1$. Ta có $2^{(k+1)-2} = 2 \cdot 2^{k-2} > 2 \cdot (k+1)$ (theo giả thiết quy nạp) $= 2k+2 > k+2$. Nên (2.1) đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp (2.1) đúng với mọi số tự nhiên $n, n \geq 5$.

Ta chứng minh bài toán ban đầu bằng phương pháp quy nạp theo n .

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 4$ thì $\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \frac{2^4}{4} = \frac{32}{3}$ khi đó $p_4 = 32$ chia hết cho 8 nên bài toán đúng với $n = 4$.

(2) Bước quy nạp. Giả sử bài toán đúng với số tự nhiên $n = k, k \geq 4$, nghĩa là

$\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \dots + \frac{2^k}{k} = \frac{p_k}{q_k}$, trong đó p_k, q_k là các số nguyên dương, $(p_k, q_k) = 1$ và $p_k : 8$, nên q_k phải là số lẻ. Ta chứng minh bài toán đúng với $n = k + 1$. Thật vậy, ta có

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{p_k}{q_k} + \frac{2^{k+1}}{k+1} = \frac{(k+1)p_k + 2^{k+1}q_k}{q_k(k+1)}.$$

Nếu $k + 1$ lẻ, khi đó $q_k(k + 1)$ lẻ nên lũy thừa 2 trên tử không bị rút gọn. Do đó $p_{k+1} : 8$.

Nếu $k + 1$ chẵn, đặt $k + 1 = 2^s \cdot m$ (m lẻ). Áp dụng (2.1), ta có $2^{k-2} > k + 1 \Leftrightarrow 2^{k-2} > 2^s \cdot m$, suy ra

$$\begin{aligned} k - 2 &> s \\ \Leftrightarrow k + 1 &> s + 3 \\ \Leftrightarrow 2^s \cdot m - s &> 3 \end{aligned}$$

khi đó

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{2^s \cdot m \cdot p_k + 2^{(2^s \cdot m)} \cdot q_k}{q_k \cdot 2^s \cdot m} = \frac{2^s (mp_k + 2^{(2^s \cdot m - s)} q_k)}{q_k \cdot 2^s \cdot m} = \frac{mp_k + 2^{(2^s \cdot m - s)} q_k}{q_k \cdot m}$$
mà $p_k : 8, 2^s \cdot m - s > 3, q_k, m$ lẻ, nên ta có $p_{k+1} : 8$.

Theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 5. (Đề thi học sinh giỏi toàn quốc 1978)

Chứng minh rằng với số nguyên dương n tùy ý, số A_n gồm 3^n chữ số giống nhau luôn luôn chia hết cho 3^n .

Lời giải.

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 1$, số $A_1 = \overline{aaa}$ với a là chữ số tùy ý. Tổng các chữ số của A_1 là $a + a + a = 3a$ chia hết cho $3^1 = 3$, nên A_1 chia hết cho 3^1 . Bởi vậy, bài toán đúng với $n = 1$.

(2) Bước quy nạp. Giả sử khẳng định đúng với $n = k$, nghĩa là số $A_k = \overline{bb \dots b}$ (gồm 3^k chữ số b tùy ý) chia hết cho 3^k .

Ta chứng minh bài toán đúng với $n = k+1$, nghĩa là số $A_{k+1} = \overline{cc \dots c}$ (gồm 3^{k+1} chữ số c tùy ý) chia hết cho 3^{k+1} .

Thật vậy,

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= \underbrace{\overline{cc \dots cc}}_{3^k c/s} \underbrace{\overline{cc \dots cc}}_{3^k c/s} \underbrace{\overline{cc \dots c}}_{3^k c/s} \quad (\text{vì } 3^{k+1} = 3 \cdot 3^k) \\ &= \underbrace{\overline{cc \dots c}}_{3^k c/s} \cdot 10^{6k} + \underbrace{\overline{cc \dots c}}_{3^k c/s} \cdot 10^{3k} + \underbrace{\overline{cc \dots c}}_{3^k c/s} \\ &= \underbrace{\overline{cc \dots c}}_{3^k c/s} \cdot 1 \underbrace{00 \dots 0}_{(3^k-1)c/s0} 1 \underbrace{00 \dots 0}_{(3^k-1)c/s0} 1 \end{aligned}$$

Theo giả thiết quy nạp, số $\underbrace{\overline{cc \dots c}}_{3^k c/s}$ chia hết cho 3^k ,

mà số $1 \underbrace{00 \dots 0}_{(3^k-1)c/s0} 1 \underbrace{00 \dots 0}_{(3^k-1)c/s0} 1$ có tổng các chữ số là 3 nên nó chia hết cho 3.

Do đó A_{k+1} chia hết cho 3^{k+1} .

Theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 6. (Vô địch toán Hungari 1932)

Chứng minh rằng nếu a, b, n là những nguyên không âm và b chia hết cho a^n , thì số $(a+1)^b - 1$ chia hết cho a^{n+1} .

Lời giải. Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo n .

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 0$, ta có $(a+1)^b - 1$ luôn chia hết cho $a^{0+1} = a$, nên bài toán đúng với $n = 0$.

(2) Bước quy nạp. Giả sử bài toán đúng với $n = k$ (k là số nguyên không âm nào đó), tức là nếu b chia hết cho a^k , thì $(a+1)^b - 1$ chia

hết cho a^{k+1} . Ta chứng minh bài toán đúng với $n = k + 1$, tức là nếu b_1 là số tự nhiên chia hết cho a^{k+1} thì $(a + 1)^{b_1} - 1$ chia hết cho a^{k+2} .

Thật vậy, đặt $c = \frac{b_1}{a}$, thì c chia hết cho a^k .

Ta có

$$\begin{aligned}(a + 1)^{b_1} - 1 &= (a + 1)^{ca} - 1 \\&= [(a + 1)^c]^a - 1 \\&= [(a + 1)^c - 1][(a + 1)^{c(a-1)} + (a + 1)^{c(a-2)} \\&\quad + \dots + (a + 1)^c + 1]\end{aligned}$$

Biểu thức trong dấu ngoặc vuông thứ nhất chia hết cho a^{k+1} (theo giả thiết quy nạp).

Biểu thức trong dấu ngoặc vuông thứ hai chia hết cho a vì ta có thể biểu diễn nó dưới dạng

$$[(a + 1)^{c(a-1)} - 1] + [(a + 1)^{c(a-2)} - 1] + \dots + [(a + 1)^c - 1] + a$$

(mỗi số hạng của tổng này đều chia hết cho a)

Như vậy, bài toán đúng với $k + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 7. (Vô địch Toán Ba Lan 1982)

Cho q là một số tự nhiên chẵn lớn hơn 0. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên không âm n , số $q^{(q+1)^n} + 1$ chia hết cho $(q + 1)^{n+1}$ và không chia hết cho $(q + 1)^{n+2}$.

Lời giải. Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo n .

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 0$, ta có $q^{(q+1)^0} + 1 = q + 1$ chia hết cho $(q + 1)$ và không chia hết cho $(q + 1)^2$. Do đó, mệnh đề đúng với $n = 0$.

(2) Bước quy nạp. Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$ (k là số nguyên không âm), nghĩa là $q^{(q+1)^k} + 1$ chia hết cho $(q + 1)^{k+1}$ và không chia

hết cho $(q+1)^{k+2}$. Ta chứng minh mệnh đề đúng với $n = k+1$, tức là: $q^{(q+1)^{k+1}} + 1$ chia hết cho $(q+1)^{k+2}$ và không chia hết cho $(q+1)^{k+3}$.

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có thể viết

$$q^{(q+1)^k} + 1 = (q+1)^{k+1} \cdot s \quad (s \text{ là số tự nhiên không chia hết cho } (q+1)).$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} q^{(q+1)^{k+1}} + 1 &= [q^{(q+1)^k}]^{q+1} + 1 \\ &= [(q+1)^{k+1} \cdot s - 1]^{q+1} + 1 \\ &= C_{q+1}^0 \cdot (q+1)^{(k+1) \cdot 0} \cdot s^0 \cdot (-1)^{q+1} + C_{q+1}^1 \cdot (q+1)^{k+1} \cdot s \cdot (-1)^q \\ &\quad + C_{q+1}^2 \cdot (q+1)^{2(k+1)} \cdot s^2 \cdot (-1)^{q-1} + \dots + \\ &\quad + C_{q+1}^{q+1} \cdot (q+1)^{(q+1)(k+1)} \cdot s^{q+1} + 1 \\ &= (q+1)(q+1)^{k+1} \cdot s - C_{q+1}^2 (q+1)^{2(k+1)} \cdot s^2 + \dots + \\ &\quad + (q+1)^{(q+1)(k+1)} \cdot s^{q+1} \quad (\text{do } q \text{ chẵn}) \\ &= (q+1)^{k+2} [s - C_{q+1}^2 (q+1)^k \cdot s^2 + \dots + (q+1)^{qk+q-1} \cdot s^{q+1}]. \end{aligned}$$

Do đó $q^{(q+1)^{k+1}} + 1$ chia hết cho $(q+1)^{k+2}$. Mặt khác biểu thức trong dấu ngoặc vuông không chia hết cho $(q+1)$ (do s không chia hết cho $(q+1)$), nên $q^{(q+1)^{k+1}} + 1$ không chia hết cho $(q+1)^{k+3}$.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề được chứng minh.

2.1.2 Một số bài toán về dãy số

Bài toán 8. ([1]) Cho $(a_1, a_2, \dots, a_{2007})$ là một hoán vị của $(1, 2, \dots, 2007)$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $S_{2007} = \sum_{i=1}^{2007} |a_{i+1} - a_i|$, ($a_{2008} = a_1$).

Lời giải. Ta chứng minh trong trường hợp tổng quát $S_n \geq 2(n-1)$, với $a_{n+1} = a_1$, n là số tự nhiên, $n \geq 2$.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a_1 = 1$ (vì dễ thấy hai hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 1, a_{k+1}, \dots, a_n)$ và $(1, a_{k+1}, \dots, a_n, a_1, a_2, \dots, a_{k-1})$ có cùng tổng S_n).

(1) **Cơ sở quy nạp.** Khi $n = 2$ có hai hoán vị là $(1, 2)$ và $(2, 1)$ cả hai đều có tổng $S_2 = |2 - 1| + |1 - 2| = 2$.

(2) **Bước quy nạp.** Giả sử khi $n = k$ với $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ ta có $S_k \geq 2(k - 1)$. Khi đó, với $n = k + 1$ ta có

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} |a_{i+1} - a_i| &= \sum_{i=2}^k |a_{i+1} - a_i| + |a_2 - a_1| + |a_1 - a_{k+1}| \\ &= \sum_{i=2}^k |a_{i+1} - a_i| + a_{k+1} + a_2 - 2 \\ &= |a_3 - a_2| + |a_4 - a_3| + \dots + |a_{k+1} - a_k| + |a_2 - a_{k+1}| \\ &\quad + a_{k+1} + a_2 - |a_2 - a_{k+1}| - 2. \end{aligned}$$

Ta thấy $(a_2 - 1, a_3 - 1, \dots, a_{k+1} - 1)$ là một hoán vị của $(1, 2, \dots, k)$.

Do đó theo giả thiết quy nạp ta có

$$\begin{aligned} &|a_3 - a_2| + |a_4 - a_3| + \dots + |a_{k+1} - a_k| + |a_2 - a_{k+1}| \\ &\quad + a_{k+1} + a_2 - |a_2 - a_{k+1}| - 2 \\ &= |(a_3 - 1) - (a_2 - 1)| + \dots + |(a_2 - 1) - (a_{k+1} - 1)| \\ &\quad + (a_{k+1} + a_2 - |a_2 - a_{k+1}| - 2) \\ &\geq 2(k - 1) + 2 \min \{a_{k+1}, a_2\} - 2 \\ &\geq 2(k - 1) + 4 - 2 = 2k. \end{aligned}$$

Theo nguyên lý quy nạp ta có $S_n \geq 2(n - 1)$ với mọi số tự nhiên $n \geq 2$.

Hoán vị $(1, 2, \dots, n)$ có $S_n = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n-1 \text{ số}} + |1 - n| = 2(n - 1)$.

Áp dụng bài toán trên với $n = 2007$, ta có giá trị nhỏ nhất của S_{2007} là 4012.

Bài toán 9. ([2]) Cho dãy số $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ là các số thực thỏa mãn

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 1 \\ u_k = (k - 1)(u_{k-1} + u_{k-2}), \forall k = 3, 4, \dots, n \dots \end{cases}$$

Chứng minh rằng, với mọi số nguyên dương bất kỳ, thì

$$C_n^0 u_n + C_n^1 u_{n-1} + C_n^2 u_{n-2} + \dots + C_n^{n-1} u_1 = n! - 1. \quad (2.2)$$

Lời giải. Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo n .

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 1$ ta có $C_1^0 u_1 = 0 = 1! - 1$ nên bài toán đúng với $n = 1$.

(2) Bước quy nạp. Giả sử bài toán đúng tới n , ta chứng minh bài toán đúng với $n + 1$. Gọi vế trái của (2.2) là S_n . Từ công thức

$$\begin{aligned} C_{n+1}^{k+1} &= C_n^k + C_n^{k+1}, \text{ ta có} \\ S_{n+1} &= C_{n+1}^0 u_{n+1} + (C_n^1 + C_n^0) u_n + \dots + (C_n^n + C_n^{n-1}) u_1 \\ &= C_{n+1}^0 u_{n+1} + (C_n^0 u_n + C_n^1 u_{n-1} + \dots + C_n^{n-1} u_1) \\ &\quad + C_n^1 u_n + C_n^2 u_{n-1} + \dots + C_n^n u_1 \\ &= S_n + n C_n^0 u_n + [n + C_n^1(n-1)] u_{n-1} + [C_n^1(n-1) + C_n^2(n-2)] u_{n-2} \\ &\quad + \dots + [C_n^{n-3} \cdot 3 + C_n^{n-2} \cdot 2] u_2 + C_n^{n-1} u_2 + C_n^n u_1 \\ &= S_n + n (C_n^0 u_n + C_n^1 u_{n-1} + \dots + C_n^{n-2} u_2 + C_n^{n-1} u_1) + C_n^{n-1} u_2. \end{aligned}$$

Do đó,

$$S_{n+1} = S_n + n S_n + n = S_n + n(S_n + 1) = n! - 1 + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

Vậy bài toán đúng với $n + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 10. ([2]) Dãy số $u_0, u_1, u_2, \dots$ được xác định như sau:

Các số u_0, u_1 là những số tự nhiên nhỏ hơn 1000, còn với $n \geq 2$, thì $u_n = |u_{n-1} - u_{n-2}|$. Chứng minh rằng, ít nhất một trong các số $u_1, u_2, \dots, u_{1500}$ phải bằng 0.

Lời giải. Ta chứng minh bằng quy nạp theo n , "nếu trong dãy đã cho u_0, u_1 là các số tự nhiên đều nhỏ hơn $2n$ (n là số nguyên dương), thì một trong các số $u_1, u_2, \dots, u_{3n}$ phải bằng 0"

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 1$, theo đề bài thì u_0, u_1 đều nhỏ hơn 2 nên $u_0 = u_1 = 1$ (vì u_0, u_1 là các số tự nhiên). Khi đó, $u_2 = 0$.

Vậy khẳng định đúng với $n = 1$.

(2) Bước quy nạp. Giả sử với mọi số nguyên dương k nhỏ hơn n , khẳng định đúng, nghĩa là: Với u_0, u_1 nhỏ hơn $2k$ thì trong các số $u_1, u_2, \dots, u_{3k}$ có ít nhất một số bằng 0.

Ta cần chứng minh khẳng định đúng với nguyên dương n , nghĩa là ta phải chứng minh rằng: Nếu trong dãy số đã cho u_0, u_1 đều nhỏ hơn $2n$, thì một trong các số $u_1, u_2, \dots, u_{3n}$ phải bằng 0.

Ta có $u_2 = |u_1 - u_0|$, nên $u_2 \geq 0$. Nếu $u_2 = 0$, thì khẳng định đúng. Ta xét trường hợp $u_2 \geq 1$.

Vì $u_2 \geq 1$, mà $u_1 \leq 2n - 1$ (do $u_1 < 2n$) nên

$$u_3 = |u_2 - u_1| \leq |2n - 1 - 1| = 2n - 2$$

$$u_4 = |u_3 - u_2| \leq |2n - 2 - 1| = 2n - 3$$

a) Nếu $u_3 < 2n - 2 = 2(n - 1)$ và $u_4 < 2n - 2 = 2(n - 1)$ thì theo giả thiết quy nạp, khẳng định đúng.

b) Nếu $u_3 = 2n - 2$, thì có thể xảy ra hai trường hợp:

TH1. $u_2 = 1, u_1 = 2n - 1$. Khi đó $u_0 = 2n - 2, u_3 = 2n - 2, u_4 = 2n - 3, u_5 = 1, u_6 = 2n - 4, u_7 = 2n - 5, u_8 = 1, \dots, u_{3k} = 2n - 2k, \dots, u_{3n} = 2n - 2n = 0$.

Như vậy, khẳng định đúng trong trường hợp này.

TH2. $u_1 = 1, u_2 = 2n - 1$. Khi đó $u_0 = 2n$. Ta thấy trường hợp này không xảy ra vì $u_0 < 2n$ theo giả thiết quy nạp.

Vậy, khẳng định đúng với n .

Theo nguyên lý quy nạp khẳng định đúng với mọi giá trị của n nguyên dương.

Vận dụng kết luận này với $n = 500$, ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 11. ([2]) Dãy số $u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$ được xác định như sau:

$u_0, u_1, u_2 = |u_1 - u_0|, u_3 = |u_2 - u_1|, \dots$, trong đó u_0, u_1 là các số tự nhiên. Biết rằng tồn tại số tự nhiên N , sao cho $u_N = 0$ và mỗi số hạng của dãy số đều không lớn hơn 1978. Hỏi số các số lớn nhất có thể của dãy số là bao nhiêu?

Lời giải. Trước hết ta thấy rằng, với $k \geq 2$ thì $u_k < \max[u_{k-1}, u_{k-2}]$, nên số lớn nhất trong dãy số đã cho chỉ có thể là u_0 hoặc u_1 . Hơn nữa trong dãy số có số các số hạng lớn nhất thì u_1 là số lớn nhất vì khi đó có thể chọn $u_0 = u_1 - u_2$ và ta có dãy số mới

$u_0 = u_1 - u_2, u_1, u_2 = |u_1 - u_0|, \dots$ mà $u_1 > u_0$ thỏa mãn điều kiện của

bài toán.

Nếu $u_1 = 1$ thì dãy số có không quá 2 số.

Nếu $u_1 = 2$ thì các số chứa trong dãy không quá 3 số.

Nếu $u_1 = 3$ thì các số chứa trong dãy không quá 5 số.

Như vậy, nếu dãy số có chứa các số lớn nhất, thì $u_1 = n, u_2 = 1$.

Khi đó dãy số có dạng sau

$$n, 1, n-1, n-2, 1, \dots \quad (*)$$

Ta kí hiệu số các số trong dãy (*) là k_n , thì có công thức tính số phần tử của dãy (*) sau đây:

$$k_n = 3 + k_{n-2}. \quad (**)$$

Bằng phép quy nạp ta có

$$k_n = \left[\frac{3n+1}{2} \right]. \quad (***)$$

Như vậy, ta còn phải chứng minh: Nếu dãy số thỏa mãn điều kiện của bài toán, $u_1 = n$ (số lớn nhất), thì số các số trong dãy này sẽ không vượt quá k_n . Khẳng định này sẽ được chứng minh bằng quy nạp theo n .

(1) Cơ sở quy nạp.

Với $n = 1$ khi đó dãy có hai số là 1, 1 và $k_1 = \left[\frac{3 \cdot 1 + 1}{2} \right] = 2$.

Với $n = 2$ khi đó dãy có ba số là 2, 1, 1 và $k_2 = \left[\frac{3 \cdot 2 + 1}{2} \right] = 3$.

Với $n = 3$ khi đó dãy có ba số là 3, 1, 1 và $k_3 = \left[\frac{3 \cdot 3 + 1}{2} \right] = 5$.

Vậy khẳng định đúng với $n = 1, 2, 3$.

(2) Bước quy nạp. Giả sử khẳng định đúng với mọi số tự nhiên nhỏ hơn n , ta chứng minh khẳng định đúng với n . Thật vậy, giả sử có dãy

$$n, m, \dots$$

trong đó $m \leq n$, ta có các trường hợp:

1. Nếu $m = n$ thì dãy chỉ gồm 2 số hạng khác nhau.
2. Nếu $m = \frac{n}{2}$ (vì m là số nguyên, nên n phải chẵn), thì dãy chỉ gồm 3 số hạng khác nhau.

Do n là một số chẵn dương, nên $k_n \geq k_2 = \left\lceil \frac{2 \cdot 3 + 1}{2} \right\rceil = 3$. Khẳng định là đúng trong trường hợp này.

3. Nếu $n > m > \frac{n}{2}$, thì khi bỏ bớt đi số n ta có dãy số $m, n-m, \dots$.
Dãy này có số hạng lớn nhất là m nên số các số trong dãy, theo giả thiết quy nạp sẽ không vượt quá $k_m = \left\lceil \frac{3m+1}{2} \right\rceil$, mà $m \leq n-1$, nên

$$1 + \left\lceil \frac{3m+1}{2} \right\rceil \leq 1 + \left\lceil \frac{3(n-1)+1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{3n+1}{2} \right\rceil = k_n.$$

4. Nếu $m < \frac{n}{2}$ thì dãy số có dạng $n, m, n-m, \dots$.

- Nếu $n-2m \geq m$ (hay $m \leq \frac{n}{3}$), thì khi xét dãy số bắt đầu từ $n-2m$ ta có số các số trong đó sẽ không vượt quá k_{n-2m} (theo giả thiết quy nạp)

$$k_{n-2m} = \left\lceil \frac{3(n-2m)+1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{3n+1}{2} - 3m \right\rceil \leq \left\lceil \frac{3n+1}{2} \right\rceil = k_n.$$

Do đó số các số của dãy ban đầu không vượt quá k_n

- Nếu $n-2m < m$ thì số hạng thứ sáu là $m - (n-2m) < m$, nên bắt đầu từ số hạng thứ năm, số các số có trong dãy số

$$\text{không vượt quá } k_m = \left\lceil \frac{3m+1}{2} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{3 \cdot \frac{n}{2} + 1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{3n+2}{4} \right\rceil$$

(do $m < \frac{n}{2}$), nên số các số trong dãy không vượt quá

$$k_m + 4 < \left\lceil \frac{3n+2}{4} \right\rceil + 4 \leq \left\lceil \frac{3n+1}{2} \right\rceil = k_n.$$

Vậy trong mọi trường hợp số các số của dãy đều không vượt quá k_n .

Xét bài toán này với $n = 1978$, thì dãy chứa không quá

$$1 + k_{1977} = 1 + \frac{3 \cdot 1977 + 1}{2} = 2967$$

Vậy số các số lớn nhất có thể chứa trong dãy là 2967.

Bài toán 12. Cho dãy số u_n xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 3 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 1; n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , số $A_n = 4u_n u_{n+2} + 1$ là số chính phương.

Lời giải.

Ta sẽ chứng minh $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$ với mọi số nguyên dương n bằng phương pháp quy nạp.

(1) Cơ sở quy nạp.

Với $n = 1$, $u_1 = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ khẳng định trên đúng.

Với $n = 2$, ta có $u_2 = 3 = \frac{2(2+1)}{2}$ nên khẳng định trên đúng.

(2) Bước quy nạp.

Giả sử khẳng định đúng với $n = k - 1$, $n = k$ ($k \in \mathbb{Z}, k > 1$). Ta chứng minh bài toán cũng đúng khi $n = k + 1$.

Thật vậy, theo công thức xác định u_{k+1} , ta có

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 2u_k - u_{k-1} + 1 \\ &= 2 \frac{k(k+1)}{2} - \frac{(k-1)k}{2} + 1 \\ &= \frac{2k^2 + 2k - k^2 + k + 2}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

Do đó, khẳng định trên đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp thì khẳng định trên đúng với mọi số nguyên

dương n . Như vậy,

$$\begin{aligned}A_n &= 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{(n+2)(n+3)}{2} + 1 \\&= n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 \\&= (n^2 + 3n + 1)^2.\end{aligned}$$

Vậy A_n là số chính phương với mọi số nguyên dương n .

Bài toán 13. Cho dãy số u_n xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = \frac{u_{n-1}^2}{u_{n-2}} + 2, n = 3, 4, 5 \dots \end{cases}$$

Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy đều là số nguyên.

Lời giải.

Ta sẽ chứng minh $u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2}; \forall n = 3, 4, \dots$ bằng phương pháp quy nạp theo n .

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 3$, ta có $u_3 = \frac{u_2^2 + 2}{u_1} = \frac{1^2 + 2}{1} = 3$.

Mặt khác $4u_2 - u_1 = 4 \cdot 1 - 1 = 3$. Vậy $u_3 = 4u_2 - u_1$ hay khẳng định đúng khi $n = 3$.

(2) Bước quy nạp. Giả sử khẳng định đúng với $n = k (k \geq 3)$, tức là $u_k = 4u_{k-1} - u_{k-2}$. Ta chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$, tức là $u_{k+1} = 4u_k - u_{k-1}$.

Thật vậy,

$$\begin{aligned}
u_{k+1} &= 4u_k - u_{k-1} \\
\Leftrightarrow \frac{u_k^2 + 2}{u_{k-1}} &= 4u_k - u_{k-1} \\
\Leftrightarrow u_k^2 + 2 &= 4u_k u_{k-1} - u_{k-1}^2 \\
\Leftrightarrow (4u_{k-1} - u_{k-2})^2 + 2 &= 4u_{k-1}(4u_{k-1} - u_{k-2}) - u_{k-1}^2 \\
\Leftrightarrow u_{k-2}^2 - 4u_{k-1}u_{k-2} + 2 &= -u_{k-1}^2 \\
\Leftrightarrow u_{k-1}^2 + 2 &= u_{k-2}(4u_{k-1} - u_{k-2}) \\
\Leftrightarrow \frac{u_{k-1}^2 + 2}{u_{k-2}} &= 4u_{k-1} - u_{k-2} \\
\Leftrightarrow u_k &= 4u_{k-1} - u_{k-2}.
\end{aligned}$$

Đồng thức cuối này đúng theo giả thiết quy nạp. Do đó ta có

$$u_{k+1} = 4u_k - u_{k-1}.$$

Khẳng định trên được chứng minh.

Mặt khác có $u_1 = u_2 = 1$ đều là số nguyên nên sử dụng phương pháp quy nạp một lần nữa kết hợp với khẳng định trên ta đi đến kết luận mọi số hạng của dãy đều là số nguyên.

Bài toán 14. ([7]) Cho dãy số (x_n) thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} x_0 = 4, x_1 = 34 \\ x_{n+2} \cdot x_n = x_{n+1}^2 + 18 \cdot 10^{n+1}, \forall n \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \quad (1)$$

Đặt $S_n = \sum_{k=0}^{26} x_{n+k}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên lẻ n , ta luôn có $S_n \vdots 66$.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh

$$x_n = \frac{10^{n+1} + 2}{3}, \text{ với } n \text{ là số nguyên không âm} \quad (2)$$

bằng phương pháp quy nạp theo n .

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 0$ thì $x_0 = 4$, $n = 1$ thì $x_1 = 34$ nên (2) đúng.

(2) Bước quy nạp. Giả sử (2) đúng với n và $n + 1$, ta sẽ chứng minh (2) đúng với $n + 2$. Ta có,

$$\begin{aligned}
 x_{n+2}.x_n &= x_{n+1}^2 + 18.10^{n+1} = \left(\frac{10^{n+2} + 2}{3}\right)^2 + 18.10^{n+1} \\
 &\Leftrightarrow x_{n+2} \cdot \frac{10^{n+1} + 2}{3} = \frac{10^{2n+4} + 4.10^{n+2} + 4 + 162.10^{n+1}}{9} \\
 &\Leftrightarrow x_{n+2} \cdot \frac{10^{n+1} + 2}{3} = \frac{10^{2n+4} + 202.10^{n+1} + 4}{9} \\
 &\Leftrightarrow x_{n+2} \cdot \frac{10^{n+1} + 2}{3} = \frac{10^{n+1} + 2}{3} \cdot \frac{10^{n+3} + 2}{3} \\
 &\Leftrightarrow x_{n+2} = \frac{10^{n+3} + 2}{3}
 \end{aligned}$$

Như vậy (2) đúng với $n + 2$.

Theo nguyên lý quy nạp, (2) đúng với mọi n nguyên không âm. Khi đó

$$S_n = \frac{10^{n+1}(1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{26}) + 2.27}{3} = \frac{T}{3}.$$

Ta luôn có

$$10^k \equiv 1 \pmod{9}, 10^k \equiv (-1)^k \pmod{11}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Do đó

$$T \equiv 1.27 + 2.27 \equiv 0 \pmod{9},$$

$$T \equiv 1.1 + 2.27 = 55 \equiv 0 \pmod{11} \text{ (vì } n \text{ lẻ)}.$$

Suy ra $T:9, T:11$, mà $T:2$ và $2, 9, 11$ là ba số nguyên tố cùng nhau từng đôi một, nên $T:2.9.11$. Do $S_n = \frac{T}{3}:2.3.11$, nên $S_n:66$. Ta có điều phải chứng minh.

2.1.3 Một số bài toán về tính tổng và chứng minh đẳng thức

Vận dụng phương pháp quy nạp toán học vào tính tổng và chứng minh đẳng thức được sử dụng khá phổ biến trong các bài toán phổ thông.

Bài toán 15. ([4]) Tính $A(n) = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

với $n \in \mathbb{Z}^+$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} A(1) &= \frac{1}{1.2.3} = \frac{1(1+3)}{4(1+1)(1+2)} \\ A(2) &= \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} = \frac{2(2+3)}{4(2+1)(2+2)} \\ A(3) &= \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} = \frac{3(3+3)}{4(3+1)(3+2)} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Ta dự đoán

$$A(n) = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}, \forall n \in \mathbb{Z}^+. \quad (2.3)$$

Ta chứng minh (2.3) bằng phương pháp quy nạp theo n .

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 1$ thì $A(1) = \frac{1}{1.2.3} = \frac{1(1+3)}{4(1+1)(1+2)}$,
nên (2.3) đúng với $n = 1$.

(2) Bước quy nạp. Giả sử (2.3) đúng với $n = k (k \in \mathbb{Z}^+)$, nghĩa là

$$A(k) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}$$

Ta chứng minh (2.3) đúng với $n = k + 1$. Thật vậy,

$$\begin{aligned} A(k+1) &= \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)(i+2)} \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{i(i+1)(i+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} \\ &= \frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} \\ &= \frac{k(k+3)^2 + 4}{4(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{k^3 + 6k^2 + 9k + 4}{4(k+1)(k+2)(k+3)} \\ &= \frac{(k+1)^2(k+4)}{4(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)}. \end{aligned}$$

Như vậy, (2.3) đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp thì (2.3) là đúng.

$$\text{Vậy } A(n) = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Bài toán 16. (Đề thi vô địch CHLB Đức 1982)

Gọi $S(n)$ là tổng tất cả các ước số lẻ lớn nhất của các số tự nhiên từ 1 đến 2^n . Chứng minh rằng $3S(n) = 4^n + 2$.

Lời giải. Các số tự nhiên từ 1 đến 2^n bao gồm các số lẻ từ 1 đến 2^n , các số còn lại nhận được bằng cách gấp đôi các số tự nhiên từ 1 đến 2^{n-1} . Do đó

$$S(n) = S(n-1) + 1 + 3 + 5 + \cdots + (2^n - 1),$$

áp dụng công thức (1.9) trong ví dụ 9 ta có,

$$S(n) = S(n-1) + 4^{n-1}. \quad (2.4)$$

Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp theo n .

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 1$, $3S(1) = 3(1 + 1) = 4^1 + 2$, do đó bài toán đúng với $n = 1$.

(2) Bước quy nạp. Giả sử bài toán đúng với $n = k, k \in \mathbb{Z}^+$, nghĩa là $3S(k) = 4^k + 2$, ta chứng minh bài toán đúng với $n = k + 1$. Từ (2.4) ta có $S(k+1) = S(k) + 4^k$, áp dụng giả thiết quy nạp ta được

$$\begin{aligned} S(k+1) &= \frac{4^k + 2}{3} + 4^k \\ &= \frac{4^{k+1} + 2}{3} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 3S(k+1) = 4^{k+1} + 2.$$

Do đó bài toán đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 17. Cho dãy số Fibonacci xác định như sau:

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = 1$$

$$F_2 = 0 + 1$$

...

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}; n \geq 1$$

Chứng minh

$$a) F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_{n+1}F_m; \text{ với } m \geq 1, n \geq 1 \quad (2.5)$$

$$b) F_1F_2 + F_2F_3 + \cdots + F_{2n}F_{2n+1} = F_{2n+1}^2 - 1, \forall n \in \mathbb{Z}^+. \quad (2.6)$$

Lời giải.

a) Với m bất kì, $m \geq 1$ ta chứng minh (2.5) bằng phương pháp quy nạp kép theo n .

(1) Cơ sở quy nạp.

- Khi $n = 1$, đẳng thức trở thành $F_{m+1} = F_m + F_{m-1}$ (vì $F_1 = F_2 = 1$) nên đẳng thức đúng với $n = 1$.
- Khi $n = 2$, đẳng thức trở thành

$$\begin{aligned} F_{m+2} &= F_{m+1} + F_m \\ &= F_m + F_{m-1} + F_m \\ &= 2F_m + F_{m-1} \text{ thỏa mãn (2.5) (vì } F_2 = 1, F_3 = 2). \end{aligned}$$

Do đó, (2.5) đúng với $n = 2$.

(2) Bước quy nạp.

Giả sử đẳng thức đúng với $n = k - 1; n = k (k \geq 1)$, tức là ta có

$$F_{m+k-1} = F_{m-1} \cdot F_{k-1} + F_k \cdot F_m$$

$$F_{m+k} = F_{m-1} \cdot F_k + F_{k+1} \cdot F_m.$$

Ta chứng minh đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là

$$F_{m+k+1} = F_{m-1} \cdot F_{k+1} + F_{k+2} \cdot F_m$$

Thật vậy, theo cách cho dãy số và giả thiết quy nạp ta có

$$\begin{aligned} F_{m+k+1} &= F_{m+k} + F_{m+k-1} \\ &= F_{m-1} \cdot F_k + F_{k+1} \cdot F_m + F_{m-1} \cdot F_{k-1} + F_k \cdot F_m \\ &= F_{m-1} \cdot (F_k + F_{k-1}) + F_m (F_{k+1} + F_k) \\ &= F_{m-1} F_{k+1} + F_{k+2} F_m. \end{aligned}$$

Do đó, (2.5) đúng với $n = k + 1$.

Vậy, theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh.

b) Ta chứng minh (2.6) bằng phương pháp quy nạp toán học.

(1) Cơ sở quy nạp.

Với $n = 1$ thì $F_1 F_2 + F_2 F_3 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 2^2 - 1 = F_3^2 - 1$. Vậy (2.6) đúng với $n = 1$.

(2) Bước quy nạp. Giả sử (2.6) đúng với $n = k (k \in \mathbb{Z}^+)$. Khi đó

$$F_1 F_2 + F_2 F_3 + \dots + F_{2k} F_{2k+1} = F_{2k+1}^2 - 1.$$

Ta chứng minh, (2.6) đúng với $n = k + 1$.

Ta có,

$$\begin{aligned} &F_1 F_2 + F_2 F_3 + \dots + F_{2k} F_{2k+1} + F_{2k+1} F_{2k+2} + F_{2k+2} F_{2k+3} \\ &= F_{2k+1}^2 - 1 + F_{2k+1} F_{2k+2} + F_{2k+2} F_{2k+3} \text{ (theo giả thiết quy nạp)} \\ &= F_{2k+1} (F_{2k+1} + F_{2k+2}) + F_{2k+2} F_{2k+3} - 1 \\ &= F_{2k+1} F_{2k+3} + F_{2k+2} F_{2k+3} - 1 \\ &= F_{2k+3} (F_{2k+1} + F_{2k+2}) - 1 \\ &= F_{2k+3}^2 - 1. \end{aligned}$$

Vậy, (2.6) đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 18. (Công thức nhị thức Newton)

Chứng minh rằng $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$, với n là số nguyên dương.

Lời giải.

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 1$, ta có $a + b = C_1^0 a b^0 + C_1^1 a^0 b$ là hiển nhiên.

Vậy công thức đúng với $n = 1$.

(2) Bước quy nạp. Giả sử công thức đúng với số nguyên dương n , tức là ta có

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Ta chứng minh công thức đúng với $n + 1$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)^n \cdot (a + b) \\ &= [C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n a^0 b^n] (a + b) \\ &= a^{n+1} + C_n^1 a^n b + \dots + C_n^k a^{n+1-k} b^k + \dots + \\ &\quad + a b^n + C_n^1 a^n b + C_n^1 a^{n-1} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^{k+1} + \dots + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + (C_n^1) a^n b + (C_n^1 + C_n^2) a^{n-1} b^2 + \dots + \\ &\quad + (C_n^{k-1} + C_n^k) a^{n+1-k} b^k + \dots + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + C_{n+1}^1 a^n b + C_{n+1}^2 a^{n-1} b^2 + \dots + \\ &\quad + C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k + \dots + b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k. \end{aligned}$$

Như vậy, công thức đúng với $n = k + 1$.

Ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 19. (Olympic 1983) Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn hai điều kiện sau:

(i) $f(xf(y)) = yf(x), \forall x, y \in \mathbb{R}^+$

(ii) $f(x) \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow +\infty$

Lời giải. Với $x \in \mathbb{R}^+$, từ (i) ta có $f(xf(x)) = xf(x)$.

Do đó $f(f(xf(x))) = f(xf(x)) = xf(x)$.

Cho $x = 1$ ta được

$$f(f(f(1))) = f(1) \quad (2.7)$$

Đặt $w = f(1)$ thì $f(f(w)) = f(1f(w)) = wf(1) = f(1)f(1)$.

Mặt khác $f(f(w)) = f(f(f(1)))$, nên

$$f(f(f(1))) = f(1)f(1). \quad (2.8)$$

Từ (2.7) và (2.8) suy ra $f(1) = 1$ (loại $f(1) = 0$ vì $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$).

Giả sử $z \in \mathbb{R}^+$ thỏa mãn $f(z) = z$. Khi đó,

$$zf\left(\frac{1}{z}\right) = f\left(\frac{1}{z}f(z)\right) = f(1) = 1.$$

Do đó $f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z}$.

Ta sẽ chứng minh với $z \in \mathbb{R}^+$ thỏa mãn $f(z) = z$, thì

$$f(z^n) = z^n, n \text{ là số nguyên dương.} \quad (2.9)$$

Ta dùng phương pháp quy nạp để chứng minh (2.9).

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 1$ thì $f(z) = z$. Vậy (2.9) đúng với $n = 1$.

(2) Bước quy nạp. Giả sử (2.9) đúng với $n = k$ ($k \in \mathbb{Z}^+$), nghĩa là $f(z^k) = z^k$. Ta cần chứng minh (2.9) đúng với $n = k + 1$.

Thật vậy,

$$\begin{aligned} f(z^{k+1}) &= f(z^k \cdot z) \\ &= f(z^k f(z)) \\ &= z f(z^k) \\ &= z \cdot z^k = z^{k+1}. \end{aligned}$$

Do đó, (2.9) đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp thì (2.9) đúng với mọi số nguyên dương n .
Vì $\frac{1}{z}$ là điểm bất động, theo (2.9) ta có $f\left(\frac{1}{z^n}\right) = \frac{1}{z^n}$ với n nguyên

dương.

Nếu $z > 1$, thì $f(z^n) = z^n \rightarrow +\infty$, hoặc $0 < z < 1$ thì $f\left(\frac{1}{z^n}\right) = \frac{1}{z^n} \rightarrow +\infty$ (điều này không thỏa mãn điều kiện (ii)). Do đó có duy nhất điểm bất động của f là 1.

Tuy nhiên, ta có $f(xf(x)) = xf(x)$ với $x \in \mathbb{R}^+$ nên suy ra $xf(x) = 1$.

Do đó, hàm duy nhất thỏa mãn (i) và (ii) là $f(x) = \frac{1}{x}$.

Vậy hàm thỏa mãn bài toán là $f(x) = \frac{1}{x}$.

Bài toán 20. (Vô địch Toán Matxcova 1945). Một vài số trong các số $a_1, a_2, \dots, a_n$ bằng 1, các số còn lại bằng -1. Chứng minh rằng

$$2 \sin \left[\left(a_1 + \frac{a_1 a_2}{2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{2^2} + \dots + \frac{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}{2^{n-1}} \right) \frac{\pi}{4} \right] \\ = a_1 \sqrt{2 + a_2 \sqrt{2 + \dots + a_n \sqrt{2}}}.$$

Lời giải.

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 1$, ta thấy công thức $2 \sin a_1 \frac{\pi}{4} = a_1 \sqrt{2}$ đúng cả khi $a_1 = 1$ hay $a_1 = -1$.

(2) Bước quy nạp. Giả sử công thức đúng với $n = k$ (k nguyên dương), tức là ta có

$$2 \sin \left[\left(a_1 + \frac{a_1 a_2}{2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{2^2} + \dots + \frac{a_1 a_2 a_3 \dots a_k}{2^{k-1}} \right) \frac{\pi}{4} \right] \\ = a_1 \sqrt{2 + a_2 \sqrt{2 + \dots + a_k \sqrt{2}}}.$$

Ta chứng minh công thức đúng với $n = k + 1$. Thật vậy, từ giả thiết quy nạp ta có

$$2 + a_1 \sqrt{2 + a_2 \sqrt{2 + \dots + a_k \sqrt{2}}} \\ = 2 + 2 \sin \left[\left(a_1 + \frac{a_1 a_2}{2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{2^2} + \dots + \frac{a_1 a_2 a_3 \dots a_k}{2^{k-1}} \right) \frac{\pi}{4} \right] \\ = 2 - 2 \cos \left[\frac{\pi}{2} + \left(a_1 + \frac{a_1 a_2}{2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{2^2} + \dots + \frac{a_1 a_2 a_3 \dots a_k}{2^{k-1}} \right) \frac{\pi}{4} \right] \\ = 2 \left[1 - \cos 2 \left(1 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_1 a_2}{4} + \dots + \frac{a_1 a_2 a_3 \dots a_k}{2^k} \right) \frac{\pi}{4} \right] \\ = 4 \sin^2 \left[\left(1 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_1 a_2}{4} + \dots + \frac{a_1 a_2 a_3 \dots a_k}{2^k} \right) \frac{\pi}{4} \right].$$

Mặt khác các số $a_1, a_2, \dots, a_k$ là 1 hoặc -1 mà

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^k} + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

nên ta có $-1 < \frac{a_1}{2} + \frac{a_1 a_2}{4} + \dots + \frac{a_1 a_2 a_3 \dots a_k}{2^k} < 1$.

Do đó $0 < 1 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_1 a_2}{4} + \dots + \frac{a_1 a_2 a_3 \dots a_k}{2^k} < 2$.

Hay $0 < (1 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_1 a_2}{4} + \dots + \frac{a_1 a_2 a_3 \dots a_k}{2^k}) \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$

và $\sin(1 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_1 a_2}{4} + \dots + \frac{a_1 a_2 a_3 \dots a_k}{2^k}) \frac{\pi}{4} > 0$.

Vậy từ đẳng thức trên suy ra

$$\begin{aligned} & \sqrt{2 + a_1 \sqrt{2 + a_2 \sqrt{2 + \dots + a_k \sqrt{2}}}} \\ &= 2 \sin \left[\left(1 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_1 a_2}{4} + \dots + \frac{a_1 a_2 a_3 \dots a_k}{2^k} \right) \frac{\pi}{4} \right]. \end{aligned}$$

Với $a_{k+1} = \pm 1$, ta nhân vào hai vế của đẳng thức trên

$$\begin{aligned} & a_{k+1} \sqrt{2 + a_1 \sqrt{2 + a_2 \sqrt{2 + \dots + a_k \sqrt{2}}}} \\ &= a_{k+1} 2 \sin \left[\left(1 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_1 a_2}{4} + \dots + \frac{a_1 a_2 a_3 \dots a_k}{2^k} \right) \frac{\pi}{4} \right] \\ &= 2 \sin \left[\left(a_{k+1} + \frac{a_1 a_{k+1}}{2} + \frac{a_1 a_2 a_{k+1}}{4} + \dots + \frac{a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1}}{2^k} \right) \frac{\pi}{4} \right] \end{aligned}$$

(do hàm sin là hàm lẻ).

Vậy đẳng thức đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 21. Cho $f_1, f_2, \dots, f_n (n \geq 2)$ là các hàm khả vi. Chứng minh rằng

$$(f_1 f_2 \dots f_n)' = f_1' f_2 f_3 \dots f_n + f_1 f_2' f_3 \dots f_n + \dots + f_1 f_2 f_3 \dots f_n'. \quad (2.10)$$

Lời giải.

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 2$ thì $(f_1 f_2)' = f_1' f_2 + f_1 f_2'$ (theo công thức tính đạo hàm một tích), nên (2.10) đúng với $n = 2$.

(2) Bước quy nạp. Giả sử (2.10) đúng với $n = k$ ($k \in \mathbb{N}, k \geq 2$), nghĩa là

$$(f_1 f_2 \dots f_k)' = f_1' f_2 f_3 \dots f_k + f_1 f_2' f_3 \dots f_k + \dots + f_1 f_2 f_3 \dots f_k'.$$

Ta phải chứng minh (2.10) đúng với $n = k + 1$. Thật vậy,

$$\begin{aligned} (f_1 f_2 \dots f_k f_{k+1})' &= (f_1 f_2 \dots f_k)' f_{k+1} + (f_1 f_2 \dots f_k) f_{k+1}' \\ &= (f_1' f_2 f_3 \dots f_k + f_1 f_2' f_3 \dots f_k + \dots + f_1 f_2 f_3 \dots f_k') f_{k+1} \\ &\quad + f_1 f_2 \dots f_k f_{k+1}' \\ &= f_1' f_2 f_3 \dots f_k f_{k+1} + f_1 f_2' f_3 \dots f_k f_{k+1} + \dots \\ &\quad + f_1 f_2 f_3 \dots f_k' f_{k+1} + f_1 f_2 \dots f_k f_{k+1}'. \end{aligned}$$

Như vậy, (2.10) đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 22. Cho n nguyên dương, chứng minh rằng

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx = \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!} \quad (2.11)$$

Lời giải. Trước hết, ta chứng minh

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx = \frac{2n}{2n+1} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^{n-1} dx \quad (2.12)$$

Ta đặt $I = \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx$

Đặt $\begin{cases} u = (1 - x^2)^n \\ dv = dx \end{cases}$ khi đó $\begin{cases} du = n(-2x)(1 - x^2)^{n-1} dx \\ v = x \end{cases}$

$$I = x(1 - x^2)^n \Big|_{-1}^1 + n \int_{-1}^1 2x^2 (1 - x^2)^{n-1} dx$$

$$= 0 + 2n \int_{-1}^1 x^2 (1 - x^2)^{n-1} dx$$

$$\begin{aligned}
&= -2n \int_{-1}^1 \left[(1-x^2) (1-x^2)^{n-1} - (1-x^2)^{n-1} \right] dx \\
&= -2n \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx + 2n \int_{-1}^1 (1-x^2)^{n-1} dx \\
&= -2nI + 2n \int_{-1}^1 (1-x^2)^{n-1} dx
\end{aligned}$$

suy ra

$$\begin{aligned}
(2n+1)I &= 2n \int_{-1}^1 (1-x^2)^{n-1} dx \\
\Leftrightarrow I &= \frac{2n}{2n+1} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{n-1} dx.
\end{aligned}$$

Ta chứng minh (2.11) bằng phương pháp quy nạp.

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 1$ ta có

$$\int_{-1}^1 (1-x^2) dx = \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{4}{3} = \frac{2^3}{3!}.$$

Vậy (2.11) đúng với $n = 1$.

(2) Bước quy nạp. Giả sử (2.11) đúng với $n = k, k \in \mathbb{Z}^+$, ta có

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^k dx = \frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+1)!}$$

Ta cần chứng minh (2.11) đúng với $n = k + 1$.

Thật vậy,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 (1-x^2)^{k+1} dx &= \frac{2(k+1)}{2(k+1)+1} \int_{-1}^1 (1-x^2)^k dx \text{ (theo (2.12))} \\
&= \frac{2k+2}{2k+3} \cdot \frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+1)!} = \frac{(2k+2)(2k+2)}{(2k+2)(2k+3)} \cdot \frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+1)!} \\
&= \frac{2^2(k+1)^2 \cdot 2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+1)!(2k+2)(2k+3)} \\
&= \frac{2^{2k+3}[(k+1)!]^2}{(2k+3)!}.
\end{aligned}$$

Vậy (2.11) đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh.

2.1.4 Một số bài toán chứng minh bất đẳng thức

Đối với học sinh, bất đẳng thức vẫn được coi là dạng toán khó và việc vận dụng phương pháp quy nạp để chứng minh bất đẳng thức là hiếm gặp trong các bài toán phổ thông. Dưới đây, tác giả xin trình bày một số ví dụ về sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh bất đẳng thức.

Bài toán 23. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , a là số thực không âm, thì*

$$\sqrt{a+1} + \sqrt{a+2} + \dots + \sqrt{a+n} < a+3.$$

Lời giải.

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 1$ thì $\sqrt{a+1} < a+3$ luôn đúng $\forall a \geq 0$.

Thật vậy,

$$\sqrt{a+1} < a+3$$

$$\Leftrightarrow a+1 < (a+3)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 5a + 8 = \left(a + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \text{ luôn đúng } \forall a \geq 0.$$

(2) **Bước quy nạp.** Giả sử bài toán đúng với $n = k$ ($k \in \mathbb{Z}^+$).

Khi đó,

$$\sqrt{a+1+\sqrt{a+2+\dots+\sqrt{a+k}}} < a+3 \quad (2.13)$$

Ta cần chứng minh bài toán đúng với $n = k+1$, nghĩa là với b là số thực không âm, k nguyên dương, thì

$$\sqrt{b+1+\sqrt{b+2+\dots+\sqrt{b+k+\sqrt{b+k+1}}}} < b+3 \quad (2.14)$$

Để chứng minh (2.14), ta đặt $a = b+1$.

Khi đó

$$\begin{aligned} & \sqrt{b+1+\sqrt{b+2+\dots+\sqrt{b+k+\sqrt{b+k+1}}}} \\ &= \sqrt{b+1+\sqrt{a+1+\dots+\sqrt{a+k-1+\sqrt{a+k}}}} \\ & < \sqrt{b+1+a+3} = \sqrt{2b+5}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned} & \sqrt{2b+5} < b+3 \\ \Leftrightarrow & 2b+5 < (b+3)^2 = b^2+6b+9 \\ \Leftrightarrow & 0 < b^2+4b+4 = (b+2)^2 \quad (\text{hiển nhiên đúng với } b \geq 0) \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức (2.15) đúng với mọi số thực b không âm. Do vai trò của a và b như nhau nên

$$\sqrt{a+1+\sqrt{a+2+\dots+\sqrt{a+k+\sqrt{a+k+1}}}} < a+3.$$

Như vậy bài toán đúng với $n = k+1$, nên theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 24. (Vô địch Toán Matxcova 1984) Cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ là n số không âm ($n \in \mathbb{Z}, n \geq 4$), tổng của chúng bằng 1. Chứng minh rằng

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_nx_1 \leq \frac{1}{4}.$$

Lời giải.

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau bằng phương pháp quy nạp theo n .

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \geq 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_nx_1)$$

với $x_i \geq 0, i = \overline{1, n}$ và $n \geq 4$.

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 4$, ta có

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 \geq 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1)$$
$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 \geq 0 \text{ nên bất đẳng thức đúng với } n = 4.$$

(2) Bước quy nạp. Giả sử bất đẳng thức đúng với số tự nhiên $n = k$ ($k \geq 4$), tức là ta có

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^2 \geq 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_kx_1)$$

Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức ta cũng có

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1})^2 \geq 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_kx_{k+1} + x_{k+1}x_1).$$

Vì tổng hai vế của bất đẳng thức này là vòng tròn theo chỉ số, nên ta có thể giả thiết $x_{k+1} \leq x_i, i = \overline{1, k}$.

Khi đó, từ giả thiết quy nạp ta có,

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1})^2 = (x_1 + x_2 + \dots + (x_k + x_{k+1}))^2$$
$$\geq 4[x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{k-1}(x_k + x_{k+1}) + (x_k + x_{k+1})x_1],$$

mà

$$[x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{k-1}(x_k + x_{k+1}) + (x_k + x_{k+1})x_1] =$$
$$(x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_kx_{k+1} + x_{k+1}x_1) + x_{k-1}x_{k+1} + x_k(x_1 - x_{k+1})$$

Vì $x_i \geq 0$ và $x_1 - x_{k+1} \geq 0$, nên ta có:

$$[x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{k-1}(x_k + x_{k+1}) + (x_k + x_{k+1})x_1] \geq$$
$$(x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{k-1}x_k + x_kx_{k+1} + x_{k+1}x_1).$$

Vậy

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1})^2 \geq 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_kx_{k+1} + x_{k+1}x_1)$$

nên ta có điều phải chứng minh!

Bài toán 25. Chứng minh rằng nếu tích n số thực dương bằng 1, thì tổng của chúng không nhỏ hơn n . Nói cách khác, cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ là những số thực dương, chứng minh rằng nếu $x_1x_2 \dots x_n = 1$ thì $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n$ với mọi $n = 1, 2, \dots$

Lời giải.

(1) Cơ sở quy nạp. Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo n .

Với $n = 1$, ta thấy bài toán thỏa mãn.

Với $n = 2$, ta phải chứng minh: Nếu $x_1x_2 = 1$ thì $x_1 + x_2 \geq 2$ trong đó x_1, x_2 là những số thực dương.

Thật vậy, ta luôn có

$$(x_1 - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x_1^2 + 1 \geq 2x_1 \Leftrightarrow x_1 + \frac{1}{x_1} \geq 2 \text{ vì } (x_1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 \geq 2 \text{ (do } x_2 = \frac{1}{x_1} \text{.)}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = 1$.

(2) Bước quy nạp. Giả sử bài toán đúng với số tự nhiên n , ta sẽ chứng minh bài toán đúng với $n + 1$, nghĩa là cho

$$x_1x_2 \dots x_nx_{n+1} = 1 \tag{2.16}$$

ta phải chứng minh

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1} \geq n + 1 \tag{2.17}$$

Đẳng thức (2.16) xảy ra hai trường hợp:

1. $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x_{n+1} = 1$. Khi đó $x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1} = n + 1$.

2. $x_1, x_2, \dots, x_n$ có các số không bằng nhau. Khi đó để (2.16) xảy ra thì phải có thừa số lớn hơn 1 và có thừa số nhỏ hơn 1. Do sự bình đẳng giữa các số, ta giả sử $x_1 < 1$ và $x_{n+1} > 1$. Khi đó từ (2.16) ta có $y_1 x_2 x_3 \dots x_n = 1$, trong đó $y_1 = x_1 x_{n+1}$. Do giả thiết quy nạp đúng với n , nên $y_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n$. Khi đó,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1} &= (y_1 + x_2 + \dots + x_n) + x_{n+1} - y_1 + x_1 \\ &\geq n + x_{n+1} - y_1 + x_1 \\ &= (n + 1) + x_{n+1} - y_1 + x_1 - 1 \\ &= (n + 1) + x_{n+1} - x_1 x_{n+1} + x_1 - 1 \\ &= (n + 1) + (x_{n+1} - 1)(1 - x_1) \\ &> (n + 1) \text{ (vì } x_{n+1} > 1 \text{ và } x_1 < 1) \end{aligned}$$

Do đó, bài toán đúng với $n + 1$.

Theo nguyên lí quy nạp ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Phương pháp quy nạp toán học được ứng dụng để chứng minh một số bất đẳng thức nổi tiếng.

Bài toán 26. (Bất đẳng thức giữa giá trị trung bình cộng và trung bình nhân). Với mọi số nguyên $n \geq 2$ và mọi bộ n số thực không âm $x_1, x_2, \dots, x_n$ đều có:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}. \quad (2.18)$$

Lời giải.

Cách 1: Áp dụng bài toán 25

$$\text{Đặt } a = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, g = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

- Xét trường hợp $x_1, x_2, \dots, x_n$ đều dương.

Khi đó, bất đẳng thức (2.18) chỉ là hệ quả của bài toán 25.

Thật vậy, ta có $g^n = x_1 x_2 \dots x_n$, nên $\frac{x_1}{g} \cdot \frac{x_2}{g} \dots \frac{x_n}{g} = 1$. Do đó theo

kết quả của bài toán 25, ta có

$$\frac{x_1}{g} + \frac{x_2}{g} + \dots + \frac{x_n}{g} \geq n$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{x_1}{g} = \frac{x_2}{g} = \dots = \frac{x_n}{g}$ hay $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

- Xét trường hợp $\exists x_i = 0, i = \overline{1, n}$.

Khi đó hiển nhiên ta có $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq 0 = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$.

Ta có điều phải chứng minh.

Cách 2. Đây là kiểu quy nạp theo cặp hướng (lên - xuống) do Cauchy đề xuất năm 1821. Một số người đã lợi dụng tình huống này để gọi tên bất đẳng thức này là Bất đẳng thức Cauchy. Tuy nhiên cho đến nay, theo thông lệ quốc tế và theo cách gọi của các nhà toán học thì bất đẳng thức này được gọi là **Bất đẳng thức giữa giá trị trung bình cộng và trung bình nhân**.

Để cho gọn ta kí hiệu

$$S_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

$$\Pi_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n},$$

$$\Pi_n^m = (\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n})^m.$$

(1). Với $n = 2$, x_1, x_2 là hai số không âm, ta có

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2} \quad (2.19)$$

được suy ra từ $(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0$ với x_1, x_2 là các số không âm.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2$.

(2). Quy nạp tiến (quy nạp lên)

Giả sử bất đẳng thức đúng với k số không âm bất kì ($k \geq 2$), ta chứng minh nó cũng đúng với $2k$ số không âm bất kì.

Thật vậy ta có,

$$\begin{aligned}
S_{2k} &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1} + \dots + x_{2k}}{2k} \\
&= \frac{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k} + \frac{x_{k+1} + \dots + x_{2k}}{k}}{2} \\
&\geq \sqrt{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k} \cdot \frac{x_{k+1} + \dots + x_{2k}}{k}} \text{ (áp dụng (1) với } n = 2) \\
&\geq \sqrt{\sqrt[k]{x_1 x_2 \dots x_k} \sqrt[k]{x_{k+1} x_{k+2} \dots x_{2k}}} \text{ (theo giả thiết quy nạp)} \\
&= \sqrt[2k]{x_1 x_2 \dots x_{2k}} = \Pi_{2k}
\end{aligned}$$

Vậy $S_{2k} \geq \Pi_{2k}$.

(3). Quy nạp lùi (Quy nạp xuống)

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$ ($k \geq 2$), tức là với mọi bộ số không âm $x_1, x_2, \dots, x_k$, ta có

$$S_k \geq \Pi_k.$$

Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k - 1$.

Thật vậy, áp dụng giả thiết quy nạp với $x_k = S_{k-1}$, ta có

$$\begin{aligned}
S_k &= \frac{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1}}{k-1} \cdot (k-1) + x_k}{k} \\
&= \frac{(k-1)S_{k-1} + x_k}{k} \\
&= \frac{(k-1)S_{k-1} + S_{k-1}}{k} \\
&= \frac{k \cdot S_{k-1}}{k} = S_{k-1}.
\end{aligned}$$

$$\Pi_k = \sqrt[k]{\Pi_{k-1}^{k-1} \cdot x_k} = \sqrt[k]{\Pi_{k-1}^{k-1} \cdot S_{k-1}}$$

Do $S_k \geq \Pi_k$, nên $S_{k-1} \geq \sqrt[k]{\Pi_{k-1}^{k-1} \cdot S_{k-1}}$ và $(S_{k-1})^k \geq \Pi_{k-1}^{k-1} \cdot S_{k-1}$

Vậy

$$S_{k-1} \geq \Pi_{k-1}$$

Từ các bước trên, ta thấy bất đẳng thức đúng với mọi bộ n số không âm bất kì.

Ta kiểm tra xem dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

- Hiển nhiên nếu tất cả các số bằng nhau, thì dấu đẳng thức xảy ra. Giả sử tồn tại hai số khác nhau, ta chứng minh dấu đẳng thức không xảy ra. Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 < x_2$. Khi đó ta có bất đẳng thức thực sự $\frac{x_1 + x_2}{2} > \sqrt{x_1 x_2}$, nên

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} > \frac{\sqrt{x_1 x_2} + \sqrt{x_1 x_2} + x_3 + \dots + x_n}{n} \\ &\geq \sqrt[n]{\sqrt{x_1 x_2} \sqrt{x_1 x_2} x_3 \dots x_n} = \Pi_n \end{aligned}$$

Vậy dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tất cả n số không âm đó bằng nhau.

Bài toán 27. (Bất đẳng thức Bernoulli) Chứng minh rằng với mọi $x > -1$, $x \neq 0$ và với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, ta có

$$(1 + x)^n > 1 + nx.$$

Lời giải.

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 2$, bất đẳng thức có dạng $(1 + x)^2 > 1 + 2x$ hay $x^2 > 0$, điều này đúng do $x \neq 0$.

(2) Bước quy nạp. Giả sử bất đẳng thức đúng với số tự nhiên $n = k$ ($k \geq 2$), tức là ta có $(1 + x)^k > 1 + kx$.

Ta chứng minh nó cũng đúng với $n = k + 1$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} (1 + x)^{k+1} &= (1 + x)^k (1 + x) > (1 + kx)(1 + x) \\ &= 1 + (k + 1)x + kx^2 > 1 + (k + 1)x \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài toán 28. (Bất đẳng thức Cauchy- Bunyakovsky)

Chứng minh rằng với $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$, n là số tự nhiên, $n \geq 1$. Ta luôn có

$$(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n)^2$$

Lời giải.

(1) Cơ sở quy nạp.

- Với $n = 1$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng.
- Với $n = 2$, ta có

$$\begin{aligned}(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) &= (x_1y_1 + x_2y_2)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\ &\geq (x_1y_1 + x_2y_2)^2, \text{ nên bất đẳng thức đúng với } n = 2.\end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1y_2 = x_2y_1$, hay tồn tại cặp số thực α, β không đồng thời bằng không, sao cho

$$\begin{cases} \alpha x_1 = \beta y_1 \\ \alpha x_2 = \beta y_2 \end{cases}$$

(2) Bước quy nạp. Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k (k \geq 2)$, tức là ta có

$$(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_k^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ky_k)^2$$

Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$. Thật vậy ta có

$$\begin{aligned}&(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{k+1}^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{k+1}^2) \\ &= \left[\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2}^2 + x_{k+1}^2 \right] \left[\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_k^2}^2 + y_{k+1}^2 \right] \\ &\geq \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_k^2} + x_{k+1}y_{k+1} \right)^2 \text{ (do bất đẳng thức đúng với } n = 2) \\ &= \left(\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_k^2)} + x_{k+1}y_{k+1} \right)^2 \text{ (theo giả thiết quy nạp)} \\ &\geq \left(\sqrt{(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ky_k)^2} + x_{k+1}y_{k+1} \right)^2 \\ &\geq (x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ky_k + x_{k+1}y_{k+1})^2. \tag{*}\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Trong giả thiết quy nạp ta cũng giả sử, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tồn tại cặp số α, β với $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, sao cho $\alpha x_i = \beta y_i; \forall i = \overline{1, k}$

Khi đó dấu đẳng thức ở (*) xảy ra khi và chỉ khi tồn tại các cặp số $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ với $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0; \alpha'^2 + \beta'^2 \neq 0$, sao cho

$$\begin{cases} \alpha x_i = \beta y_i; \forall i = \overline{1, k} \\ \alpha' \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2} = \beta' \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_k^2} \\ \alpha' x_{k+1} = \beta' y_{k+1} \end{cases}$$

Dễ dàng chứng minh được các cặp số α, β và α', β' tỉ lệ. Vậy dấu đẳng thức ở bất đẳng thức cần chứng minh xảy ra khi và chỉ khi tồn tại cặp số α, β với $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, sao cho $\alpha x_i = \beta y_i; \forall i = \overline{1, k}$.

2.2 Phương pháp quy nạp toán học trong các bài toán hình học

Phương pháp quy nạp không chỉ được áp dụng trong các bài toán số học, đại số, ..., mà còn được áp dụng để giải quyết các bài toán hình học. Sau đây tác giả xin trình bày một vài dạng toán trong hình học được áp dụng phương pháp này.

2.2.1 Tính toán bằng quy nạp

Các bài tập về tính toán tưởng chừng như rất khó khăn, nhưng phương pháp quy nạp như một chiếc chìa khóa để mở ra các bài toán này.

Bài toán 29. *Tính số đường chéo của đa giác lồi n cạnh ($n \geq 4$).*

Lời giải. Ta tìm một số giá trị của công thức này với $S(n)$ là số đường chéo của đa giác n cạnh.

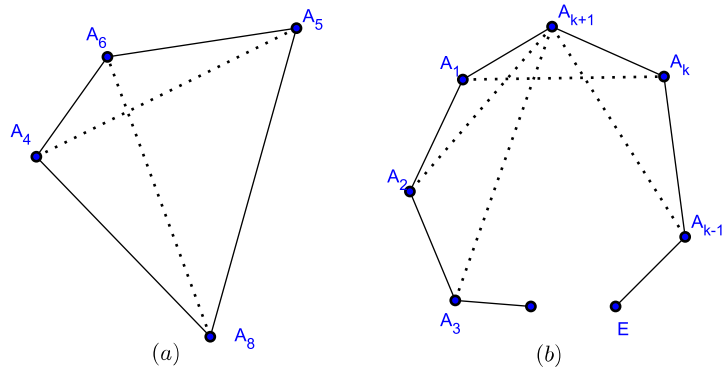
n	4	5	6	7	8
$S(n)$	$2 = \frac{4(4-3)}{2}$	$5 = \frac{5(5-3)}{2}$	$9 = \frac{6(6-3)}{2}$	$14 = \frac{7(7-3)}{2}$	$20 = \frac{8(8-3)}{2}$

Từ bảng trên ta đưa ra giả thiết quy nạp

$$S(n) = \frac{n(n-3)}{2}. \quad (2.20)$$

Ta sẽ chứng minh công thức (2.20) bằng phương pháp quy nạp theo n .

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 4$, ta thấy tứ giác có hai đường chéo (hình 2.1a), thỏa mãn (2.20), nên (2.20) đúng với $n = 4$.



Hình 2.1

(2) Bước quy nạp. Giả sử (2.20) đúng với $n = k$, nghĩa là đa giác lồi k cạnh có số đường chéo là $S(k) = \frac{k(k-3)}{2}$. Ta chứng minh (2.20) đúng với $n = k + 1$.

Thật vậy, khi thêm đỉnh thứ $k + 1$ thì có thêm $k - 2$ đường chéo nối từ A_{k+1} tới $A_2, A_3, \dots, A_{k-1}$ (hình 2.1b), ngoài ra A_1A_k cũng trở thành đường chéo. Do đó,

$$\begin{aligned} S(k+1) &= S(k) + (k-2) + 1 = \frac{k(k-3)}{2} + k - 1 = \frac{k^2 - k - 2}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k-2)}{2}. \end{aligned}$$

Như vậy, (2.20) đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp, $S(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 4$.

Vậy số đường chéo trong một đa giác lồi n cạnh là $\frac{n(n-3)}{2}$.

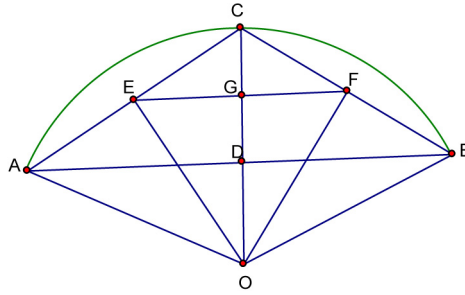
Bài toán 30. ([13]) Tính bán kính r_n, R_n của đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp 2^n -giác đều chu vi p cho trước ($n \geq 2$).

Lời giải.

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 2$, ta có hình vuông chu vi p . Dễ dàng tính được

$$r_2 = \frac{p}{8}; R_2 = \frac{p\sqrt{2}}{8}$$

(2) Bước quy nạp. Giả sử biết bán kính r_n, R_n của các đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp 2^n -giác đều chu vi p , ta tính các bán kính r_{n+1}, R_{n+1} của các đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp 2^{n+1} -giác đều chu vi p .



Hình 2.2

Gọi AB là cạnh của 2^n -giác đều chu vi p tâm O . Gọi C là điểm chính giữa cung AB , D, E, F lần lượt là trung điểm của dây AB, AC, BC ; G là trung điểm của EF . Vì $(\widehat{OE}, \widehat{OF}) = (\widehat{OE}, \widehat{OC}) + (\widehat{OF}, \widehat{OC}) = \frac{1}{2}(\widehat{OA}, \widehat{OC}) + \frac{1}{2}(\widehat{OB}, \widehat{OC}) = \frac{1}{2}(\widehat{OA}, \widehat{OB})$ và EF bằng cạnh của 2^{n+1} -giác đều nội tiếp đường tròn bán kính OE , nên chu vi của 2^{n+1} -giác này là

$$2^{n+1} \cdot EF = 2^{n+1} \frac{AB}{2} = 2^n \cdot AB = p.$$

Do đó $r_{n+1} = OG$ và $R_{n+1} = OE$.

Mặt khác, ta dễ thấy

$$OC - OG = OG - OD (= \frac{1}{2}CD)$$

nên $R_n - r_{n+1} = r_{n+1} - r_n$ hay $r_{n+1} = \frac{R_n + r_n}{2}$.

Cuối cùng, từ tam giác vuông OEC ta có, $OE^2 = OC \cdot OG$.

Nghĩa là $R_{n+1}^2 = R_n r_{n+1}$, nên $R_{n+1} = \sqrt{R_n r_{n+1}}$.

Vậy $r_{n+1} = \frac{R_n + r_n}{2}$, $R_{n+1} = \sqrt{R_n r_{n+1}}$.

Bài toán 31. Trên một mặt phẳng cho n đường tròn phân biệt, đôi một cắt nhau và không có ba đường tròn nào giao nhau tại một điểm. Các đường tròn này chia mặt phẳng thành các miền rời nhau. Tính số miền thu được.

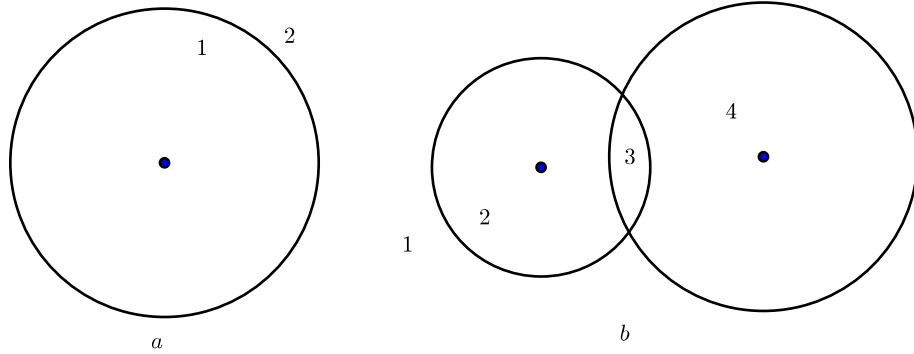
Lời giải.

Gọi số miền thu được bởi n đường tròn trong mặt phẳng thỏa mãn điều kiện đề bài là $F(n)$.

(1) Cơ sở quy nạp.

Với $n = 1$, dễ thấy $F(1) = 2$ (hình 2.3a).

Với $n = 2$, ta có hai đường tròn cắt nhau và $F(2) = 4$ (hình 2.3b).



Hình 2.3

(2) Bước quy nạp. Giả sử với k đường tròn thỏa mãn điều kiện đề bài, chúng chia mặt phẳng ra làm $F(k)$ miền. Xét $(k + 1)$ đường tròn thỏa mãn điều kiện đề bài. Ta tính $F(k + 1)$.

Gọi $(k + 1)$ đường tròn đó là $(C_1), (C_2), \dots, (C_{k+1})$. Bỏ đi một đường tròn bất kỳ trong $(k + 1)$ đường tròn đó, chẳng hạn (C_{k+1}) . Khi đó còn k đường tròn, theo giả thiết quy nạp, số miền thu được là $F(k)$. Bây giờ ta dựng lại (C_{k+1}) . Khi đó đường tròn (C_{k+1}) giao với cả

k đường tròn ban đầu. Trên (C_{k+1}) có k cặp giao điểm nên cho ta thêm $2k$ miền.

Vậy $F(k+1) = F(k) + 2k$. Do đó ta có,

$$\begin{aligned} F(k) &= F(k-1) + 2(k-1) \\ F(k-1) &= F(k-2) + 2(k-2) \\ &\dots \\ F(2) &= F(1) + 2.1 \\ F(1) &= 2 \end{aligned}$$

Cộng các đẳng thức trên lại ta được,

$$\begin{aligned} F(k) &= 2[1 + 1 + 2 + 3 + \dots + (k-2) + (k-1)] \\ &= 2 \left[1 + \frac{k(k-1)}{2} \right] \\ &= k^2 - k + 2. \end{aligned}$$

Vậy số miền thu được từ n đường tròn thỏa mãn đề bài là $F(n) = n^2 - n + 2$.

Bài toán 32. (Đề thi vô địch toán nước Anh năm 1970). Tìm số ít nhất các mặt phẳng chia khối lập phương ra không ít hơn 300 phần.

Lời giải. Ta chứng minh bằng quy nạp theo n khẳng định: n đường thẳng chia mặt phẳng ra không nhiều hơn $p(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1$ phần, đồng thời nhận được đúng $p(n)$ phần khi không có hai đường thẳng nào song song và không có ba đường thẳng nào đồng quy. Thật vậy,

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 0$, ta có $p(0) = 1$, hiển nhiên đúng vì một đường thẳng chia mặt phẳng thành hai phần.

(2) Bước quy nạp. Giả sử khẳng định đúng với $n - 1$, nghĩa là $n - 1$ đường thẳng chia mặt phẳng ra không nhiều hơn $p(n - 1) =$

$\frac{(n-1)n}{2} + 1$ phần. Ta chứng minh, khẳng định đúng với n . Với mọi n nguyên không âm, ta có

$$p(n) \leq p(n-1) + n = \frac{(n-1)n}{2} + 1 + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi đường thẳng n cắt mỗi đường còn lại và bị chia ra không nhiều hơn n đoạn, mỗi đoạn đó xác định một phần mặt phẳng mới.

Tương tự, ta chứng minh được n mặt phẳng chia không gian ra không nhiều hơn $q(n) = \frac{n^3 + 5n + 6}{6}$ phần, đồng thời nhận được đúng $q(n)$ phần nếu không có 2 mặt phẳng nào song song, không có 3 mặt phẳng nào cùng đi qua một đường thẳng. Thật vậy,

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 0$, ta có $q(0) = 1$ là đúng.

(2) Bước quy nạp. Giả sử khẳng định đúng với $n - 1$, nghĩa là $n - 1$ mặt phẳng chia không gian ra không nhiều hơn

$$q(n-1) = \frac{(n-1)^3 + 5(n-1) + 6}{6} \text{ phần.}$$

Ta chứng minh khẳng định đúng với mọi n nguyên không âm. Với mọi n nguyên không âm, ta có

$$\begin{aligned} q(n) &\leq q(n-1) + p(n-1) = \frac{(n-1)^3 + 5(n-1) + 6}{6} + \frac{n-1}{2} + 1 \\ &= \frac{n^3 + 5n + 6}{6}, \end{aligned}$$

đồng thời đẳng thức xảy ra (mặt phẳng thứ n cắt các mặt phẳng còn lại và bị chia ra không nhiều hơn $p(n-1)$ phần, mỗi phần đó xác định một phần không gian mới).

Số mặt phẳng cần tìm là 13 vì $q(12) = 299 < 300 < 378 = q(13)$.

Thật vậy, 12 mặt phẳng chưa đủ, còn 13 mặt phẳng có thể chia không gian thành $q(13)$ phần, sau đó chọn trong mỗi phần một điểm và lấy khối lập phương chứa tất cả $q(13)$ điểm đó, cuối cùng thì chỉ cần dùng phép đồng dạng với tỉ số thích hợp đưa về khối lập phương cần thiết.

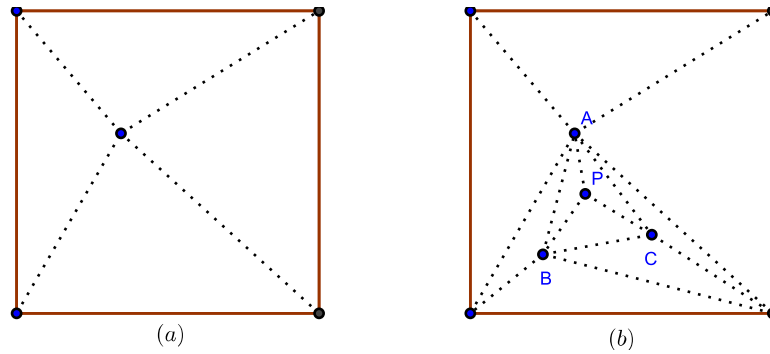
2.2.2 Chứng minh bằng quy nạp

Bài toán 33. ([5]) Cho 27 điểm phân biệt trên mặt phẳng và không có 3 điểm nào thẳng hàng. 4 điểm trong chúng lập thành các đỉnh của hình vuông đơn vị; 23 điểm còn lại nằm trong hình vuông trên. Chứng minh rằng tồn tại 3 điểm riêng biệt $X; Y; Z$ sao cho tam giác XYZ có diện tích không quá $\frac{1}{48}$.

Lời giải. Trước hết, ta chứng minh bằng quy nạp bài toán:

Lấy $n \geq 1$ điểm nằm trong hình vuông (trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng, tính cả các đỉnh của hình vuông). Khi đó hình vuông có thể được chia thành $2n + 2$ tam giác, mà các đỉnh của tam giác cũng là 1 trong n điểm hoặc các tam giác nằm bên trong hình vuông.

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 1$, vì hình vuông là đa giác lồi nên có thể chia hình vuông thành 4 tam giác (hình 2.4a) bởi các đường nằm trong hình vuông. Do đó, các tam giác đều nằm trong hình vuông.



Hình 2.4

(2) Bước quy nạp. Giả sử bài toán đúng với $n = k, k \geq 1$. Ta chứng minh bài toán đúng với $n = k + 1$.

Thật vậy, với $n = k$, giả sử ta có thể chia hình vuông thành $2k + 2$ tam giác mà các đỉnh tam giác nằm trong k điểm hoặc các tam giác nằm bên trong hình vuông. Với $n = k + 1$, ta xét thêm điểm P . Vì không có 3 điểm nào thẳng hàng nên P nằm

trong một tam giác trong $2n + 2$ tam giác. Ví dụ P nằm trong tam giác ABC . Như vậy, tam giác ABC được chia thành các tam giác nhỏ là $APB; BPC; CPA$. Như vậy, hình vuông được chia thành $(2k + 2) + 3 - 1 = 2k + 4 = 2(k + 1) + 2$ tam giác. Như vậy, bài toán đúng với $n = k + 1$.

Vậy theo nguyên lý quy nạp, bài toán được chứng minh. Quay trở lại bài toán ban đầu, xét trường hợp $n = 23$. Khi đó, hình vuông đơn vị có thể được chia thành $2 \cdot 23 + 2 = 48$ tam giác với tổng diện tích bằng 1. Vậy một trong các tam giác trên có diện tích tối đa là $\frac{1}{48}$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Bài toán 34. ([13]) Cho n hình vuông bất kỳ. Chứng minh rằng có thể cắt chúng (bằng nhát cắt thẳng) làm một số mảnh đa giác rồi từ đó có thể ghép lại thành một hình vuông mới.

Lời giải.

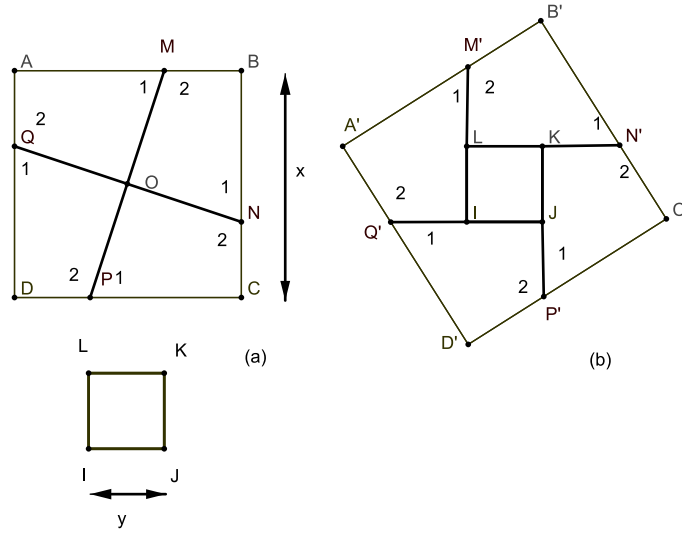
(1) Cơ sở quy nạp.

Với $n = 1$, bài toán hiển nhiên đúng.

Với $n = 2$, ta gọi độ dài các cạnh hình vuông cho trước $ABCD$ và $IJKL$ tương ứng là x và y . Giả sử $x \geq y$. Trên các cạnh của hình vuông $ABCD$, ta lấy các điểm M, N, P, Q , sao cho $AM = BN = CP = DQ = \frac{x + y}{2}$ (hình 2.5a).

Cắt hình vuông này dọc theo các đường thẳng MP, NQ , dễ thấy MP và NQ vuông góc với nhau tại tâm O của hình vuông và chia hình vuông thành 4 mảnh bằng nhau. Bây giờ ta ghép các mảnh này với hình vuông thứ 2 như trong hình 2.5b, ta được một hình vuông mới vì tại M', N', P', Q' các góc bù nhau, $\widehat{A'}, \widehat{B'}, \widehat{C'}, \widehat{D'}$ là các góc vuông và $A'B' = B'C' = C'D' = D'A'$.

(2) Bước quy nạp. Giả sử bài toán đúng với $n(n \geq 1)$ hình vuông. Ta chứng minh bài toán đúng với $n = k + 1$ hình vuông.



Hình 2.5

Thật vậy, giả sử ta có $n + 1$ hình vuông $K_1, K_2, \dots, K_n, K_{n+1}$. Ta lấy hai hình vuông bất kì, chẳng hạn K_n và K_{n+1} . Nhờ bước cơ sở, ta có thể cắt một trong hai hình vuông này và ghép các mảnh với hình vuông còn lại để có hình vuông mới K' . Khi đó, nhờ giả thiết quy nạp ta có thể cắt và ghép n hình vuông $K_1, K_2, \dots, K_{n-1}, K'$ để tạo thành một hình vuông mới.

Ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 35. Cho n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ và n số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$, sao cho $a_1 + a_2 + \dots + a_n = k \neq 0$. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm O , sao cho $\sum_{i=1}^n a_i \cdot \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}$

Lời giải.

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 1$, ta thấy O trùng với A_1 là điểm duy nhất thỏa mãn bài toán.

(2) Bước quy nạp. Giả sử bài toán đúng với $n \geq 1$, nghĩa là

với n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ và n số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn

$a_1 + a_2 + \dots + a_n = k' \neq 0$, tồn tại duy nhất điểm O' , sao cho $\sum_{i=1}^n a_i \cdot \overrightarrow{O'A_i} = \vec{0}$. Ta phải chứng minh bài toán đúng với hệ $n + 1$

điểm $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ và hệ $n + 1$ số thực $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ thỏa mãn $a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} = k \neq 0$.

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} a_i \cdot \overrightarrow{OA_i} &= \sum_{i=1}^{n+1} a_i \cdot (\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} a_i \cdot \overrightarrow{OO'} + \sum_{i=1}^n a_i \cdot \overrightarrow{O'A_i} + a_{n+1} \overrightarrow{O'A_{n+1}} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} a_i \cdot \overrightarrow{OO'} + a_{n+1} \overrightarrow{O'A_{n+1}} = \overrightarrow{0} \quad (\text{vì } \sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{O'A_i} = \overrightarrow{0}) \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{OO'} = \frac{a_{n+1}}{\sum_{i=1}^{n+1} a_i} \overrightarrow{A_{n+1}O'} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{OO'} = \frac{a_{n+1}}{k} \overrightarrow{A_{n+1}O'}.
\end{aligned}$$

Do O' và A_{n+1} cố định và k, a_{n+1} không đổi, nên O' cố định và duy nhất. Vậy bài toán đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 36. Trong mặt phẳng cho n hình lồi ($n \geq 4$), mà ba hình bất kỳ trong chúng có điểm chung. Chứng minh rằng cả n hình lồi đã cho có điểm chung.

Lời giải.

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 4$, xét 4 hình lồi ký hiệu $(H_1), (H_2), (H_3), (H_4)$ và:

$$A_1 \in (H_2) \cap (H_3) \cap (H_4)$$

$$A_2 \in (H_1) \cap (H_3) \cap (H_4)$$

$$A_3 \in (H_1) \cap (H_2) \cap (H_4)$$

$$A_4 \in (H_1) \cap (H_2) \cap (H_3)$$

Có hai khả năng sau:

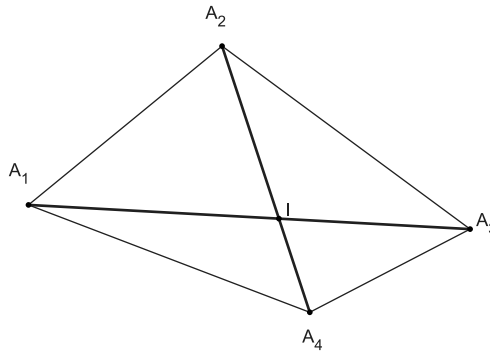
(i) 3 trong 4 điểm A_1, A_2, A_3, A_4 thẳng hàng.

Giả sử A_1, A_2, A_3 thẳng hàng và điểm A_2 nằm trên đoạn A_1A_3 : $A_2 \in [A_1A_3]$. Ta có $A_1, A_3 \in H_2$ (lời) nên $[A_1A_3] \subset H_2$. Do đó $A_2 \in H_2$.

Vậy $A_2 \in (H_1) \cap (H_3) \cap (H_4) \cap H_2$ hay cả 4 hình có điểm chung.

(ii) Trong 4 điểm không có 3 điểm nào thẳng hàng. Lại có hai khả năng:

+) 4 điểm A_1, A_2, A_3, A_4 là 4 đỉnh của một tứ giác lồi. Giả sử đó là tứ giác $A_1A_2A_3A_4$. Gọi I là giao điểm hai đường chéo A_1A_3 và A_2A_4 . Ta có,



Hình 2.6

$A_2, A_4 \in (H_1), (H_3) \Rightarrow [A_2A_4] \subset (H_1), (H_3) \Rightarrow I \in (H_1), (H_3)$

$A_1, A_3 \in (H_2), (H_4) \Rightarrow [A_1A_3] \subset (H_2), (H_4) \Rightarrow I \in (H_2), (H_4)$

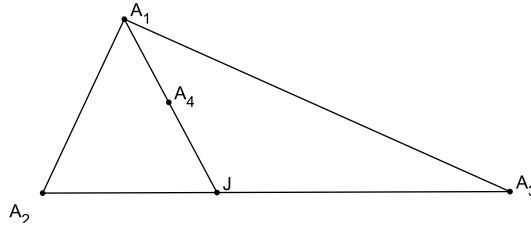
Vậy $I \in (H_1) \cap (H_2) \cap (H_3) \cap (H_4)$ hay cả 4 hình có điểm chung là I .

+) Trong 4 điểm có 3 điểm làm thành một tam giác, điểm còn lại nằm bên trong. Giả sử tam giác $A_1A_2A_3$ chứa A_4 bên trong. Gọi J là giao điểm của đoạn A_2A_3 , và A_1A_4 .

Tương tự như trên ta có

$$J \in (H_1) \cap (H_2) \cap (H_3) \cap H_4$$

Vậy mệnh đề đúng với $n = 4$.



Hình 2.7

(2) Bước quy nạp. Giả sử mệnh đề đúng với $n = k (k \geq 4)$, ta chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$. Thật vậy, xét $k + 1$ hình lồi $(H_1), (H_2), \dots, (H_k), (H_{k+1})$ mà ba hình bất kỳ trong chúng có điểm chung.

Đặt $(H'_k) = (H_k) \cap (H_{k+1})$

Xét k hình lồi $(H_1), (H_2), \dots, (H_{k-1}), (H'_k)$. Dễ thấy ba hình bất kỳ trong k hình này có điểm chung. Theo giả thiết quy nạp thì cả k hình này có điểm chung. Đó cũng là điểm chung của $(k + 1)$ hình lồi $(H_1), (H_2), \dots, (H_k), (H_{k+1})$.

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài toán 37. Chứng minh rằng mọi n -giác lồi ($n \geq 5$) đều được chia thành một số hữu hạn các ngũ giác lồi.

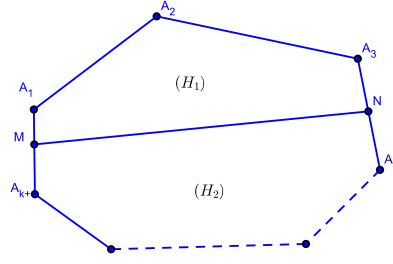
Lời giải.

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 5$, mệnh đề hiển nhiên đúng.

(2) Bước quy nạp.

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k (k \geq 5)$, tức là mọi k -giác lồi đều chia được thành một số hữu hạn các ngũ giác lồi. Ta chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$, tức là mọi $(k + 1)$ -giác lồi (H) đều chia được thành một số hữu hạn các ngũ giác lồi.

Thật vậy, xét $(k + 1)$ -giác lồi $(H) = A_1A_2\dots A_kA_{k+1}$. Trên các cạnh A_1A_{k+1} và A_3A_4 lần lượt lấy các điểm M, N khác các đỉnh. Đoạn MN chia (H) thành hai đa giác.



Hình 2.8

$$(H_1) = MA_1A_2A_3N \text{ và } (H_2) = MNA_4A_5 \dots A_kA_{k+1}$$

Rõ ràng (H_1) là ngũ giác lồi, còn (H_2) là k - giác lồi. Theo giả thiết quy nạp, (H_2) chia được thành một số hữu hạn ngũ giác lồi. Vậy $(k+1)$ - giác lồi (H) chia được thành một số hữu hạn các ngũ giác lồi.

Mệnh đề được chứng minh.

2.2.3 Dựng hình bằng quy nạp

Bài toán 38. ([13]) Cho hai đường thẳng song song l và l_1 . Bằng một cây thước hãy chia đoạn AB nằm trên đường thẳng l làm n phần bằng nhau.

Lời giải.

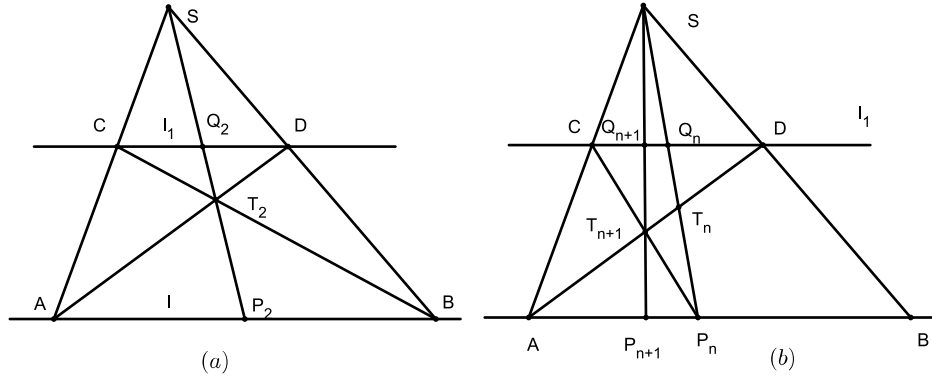
(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 2$. Nối điểm S bất kỳ của mặt phẳng với A và B (hình 2.9a).

Lần lượt gọi C và D là giao điểm của AS và BS với l_1 . Gọi giao điểm của AD và BC là T_2 , giao điểm của ST_2 và AB là P_2 . Ta sẽ chứng minh P_2 là điểm cần dựng, nghĩa là $AP_2 = \frac{1}{2}AB$.

Gọi Q_2 là giao điểm của ST_2 và l_1 , ta thấy rằng

$$\Delta T_2P_2B \sim \Delta T_2Q_2C, \Delta ABT_2 \sim \Delta DCT$$

$$\Delta SAP_2 \sim \Delta SCQ_2C, \Delta SAB \sim \Delta SCD,$$



Hình 2.9

khi đó $\frac{P_2B}{Q_2C} = \frac{T_2B}{T_2C} = \frac{AB}{CD}$ và $\frac{P_2A}{Q_2C} = \frac{SA}{SC} = \frac{AB}{CD}$.
 Suy ra $\frac{P_2B}{Q_2C} = \frac{P_2A}{Q_2C}$, do đó $P_2A = P_2B$ và $AP_2 = \frac{1}{2}AB$.

(2) Bước quy nạp. Giả sử rằng chỉ bằng một cây thước ta đã dựng được điểm P_n trên AB , sao cho $AP_n = \frac{1}{n}AB$. Lấy một điểm S bất kỳ không ở trên l hay l_1 . Ta gọi T_n, Q_n lần lượt là giao điểm của SP_n với AD và l_1 (hình 2.9b). Nối giao điểm của T_{n+1} của AD và CP_n với S và gọi các giao điểm của ST_{n+1} với l_1 và l lần lượt là Q_{n+1} và P_{n+1} . Ta chứng minh P_{n+1} là điểm cần dựng. Thật vậy, vì các tam giác $CQ_{n+1}T_{n+1}$ và $P_nP_{n+1}T_{n+1}$, $CT_{n+1}D$ và $P_nT_{n+1}A$ đồng dạng, nên ta có

$$\frac{P_{n+1}P_n}{CQ_{n+1}} = \frac{P_nT_{n+1}}{CT_{n+1}} = \frac{AP_n}{CD} \quad (2.21)$$

Vì các tam giác SAP_{n+1} và SCQ_{n+1} , SAB và SCD đồng dạng, nên

$$\frac{AP_{n+1}}{CQ_{n+1}} = \frac{SA}{SC} = \frac{AB}{CD} \quad (2.22)$$

Từ (2.21) và (2.22) ta có $\frac{P_{n+1}P_n}{AP_{n+1}} = \frac{AP_n}{AB}$

lại có $P_{n+1}P_n = AP_n - AP_{n+1}$ và $AP_n = \frac{1}{n}AB$

nên $\frac{\frac{1}{n}AB - AP_{n+1}}{AP_{n+1}} = \frac{\frac{1}{n}AB}{AB} \Leftrightarrow \frac{1}{n}AB - AP_{n+1} = \frac{1}{n}AP_{n+1}$.

Cuối cùng ta có $AP_{n+1} = \frac{1}{n+1}AB$.

Để tìm các điểm chia liên tiếp $P'_{n+1}, P''_{n+1} \dots$ ta chỉ cần dựng các đoạn thẳng $P_{n+1}P'_{n+1} = \frac{1}{n}P_{n+1}B, P'_{n+1}P''_{n+1} = \frac{1}{n-1}P'_{n+1}B \dots$ bằng cách tương tự.

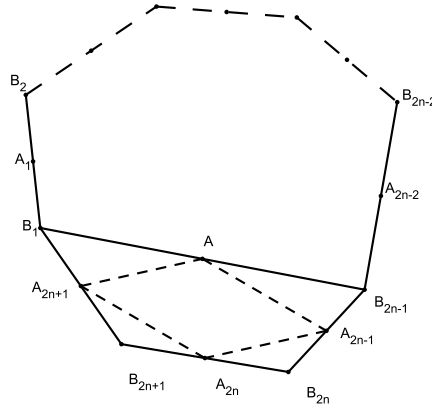
Bài toán 39. ([13]) Trên mặt phẳng cho $(2n+1)$ điểm. Hãy dựng một $(2n+1)$ -giác để các điểm đã cho là trung điểm các cạnh của đa giác.

Lời giải.

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n=1$, ta dựng tam giác ABC khi biết 3 trung điểm M, N, P bằng cách qua M, N, P lần lượt dựng các đường thẳng song song với NP, MP, MN . Chúng cắt nhau cho ta tam giác ABC .

(2) Bước quy nạp. Giả sử dựng được $(2(n-1)+1)$ -giác hay $(2n-1)$ -giác từ trung điểm các cạnh của nó. Ta chứng minh có thể dựng được $(2n+1)$ -giác từ trung điểm các cạnh của nó.

Gọi $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ là $(2n+1)$ điểm đã cho làm trung điểm các cạnh của $(2n+1)$ -giác cần dựng $B_1, B_2, \dots, B_{2n+1}$



Hình 2.10

Xét tứ giác $B_1B_{2n-1}B_{2n}B_{2n+1}$ có $A_{2n-1}, A_{2n}, A_{2n+1}$ lần lượt là trung điểm các cạnh $B_{2n-1}B_{2n}, B_{2n}B_{2n+1}, B_{2n+1}B_1$. Gọi A là trung điểm B_1B_{2n-1} thì $AA_{2n-1}A_{2n}A_{2n+1}$ là hình bình hành. Vì $A_{2n-1}A_{2n}A_{2n+1}$ cho trước nên ta dựng được A . Xét $(2n-1)$ -giác $B_1B_2 \dots B_{2n-1}$ có $(2n-1)$ trung điểm các cạnh là: $A_1, A_2, \dots, A_{2n-2}$. A đã xác định nên theo giả thiết quy nạp ta dựng được đa giác này. Từ B_1, B_{2n-1}

và các trung điểm A_{2n-1}, A_{2n+1} ta dựng được nốt B_{2n} và B_{2n+1} .

Vậy ta dựng được $(2n + 1)$ -giác $B_1 B_2 \dots B_{2n+1}$ khi biết trung điểm các cạnh của nó.

2.2.4 Quy nạp với bài toán quỹ tích

Đối với học sinh thì bài toán quỹ tích vẫn luôn là bài toán khó nhưng lại rất thú vị. Dưới đây, tác giả xin nêu ví dụ về bài toán quỹ tích mà được giải bằng cách vận dụng phương pháp quy nạp toán học.

Bài toán 40. Trong không gian cho mặt cầu (C) tâm O bán kính R và hệ điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$. G gọi là trọng tâm của hệ điểm, nếu $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$. Tìm tập hợp trọng tâm của hệ điểm $A_1, A_2, \dots, A_n, M$ với M là điểm di động trên mặt cầu (C) .

Lời giải.

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 1$ khi đó trọng tâm của $A_1 M$ là trung điểm của $A_1 M$ và ta có

$$\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GM} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1 G} = \frac{1}{2} \overrightarrow{A_1 M}.$$

Do đó G là ảnh của M qua phép vị tự tâm A_1 tỉ số $\frac{1}{2}$.

Vậy tập hợp các điểm G là mặt cầu (C_1) ảnh của mặt cầu (C) qua phép vị tự tâm A_1 , tỉ số $\frac{1}{2}$.

(2) Bước quy nạp. Giả sử ta tìm được trọng tâm G_n của hệ điểm $A_1, A_2, \dots, A_n, M$ là mặt cầu (C_n) tâm O_n bán kính R_n . Ta tìm tập hợp trọng tâm G_{n+1} của hệ điểm $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}, M$.

Ta có

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{G_{n+1}A_1} + \overrightarrow{G_{n+1}A_2} + \dots + \overrightarrow{G_{n+1}A_{n+1}} + \overrightarrow{G_{n+1}M} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow & (n+2)\overrightarrow{G_{n+1}G_n} + \left(\overrightarrow{G_nA_1} + \overrightarrow{G_nA_2} + \dots + \overrightarrow{G_nA_n} + \overrightarrow{G_nM} \right) + \overrightarrow{G_nA_{n+1}} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow & (n+2)\overrightarrow{G_{n+1}G_n} + \overrightarrow{G_nA_{n+1}} = \vec{0} \quad (\text{vì } G_n \text{ là trọng tâm của hệ điểm } A_1, A_2, \dots, A_n, M) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (n+2)\overrightarrow{G_{n+1}G_n} = \overrightarrow{A_{n+1}G_n} \\
&\Leftrightarrow (n+2)\overrightarrow{G_{n+1}G_n} = \overrightarrow{A_{n+1}G_{n+1}} + \overrightarrow{G_{n+1}G_n} \\
&\Leftrightarrow (n+1)\overrightarrow{G_{n+1}G_n} = \overrightarrow{A_{n+1}G_{n+1}} \\
&\Leftrightarrow (n+1)\left(\overrightarrow{A_{n+1}G_n} - \overrightarrow{A_{n+1}G_{n+1}}\right) = \overrightarrow{A_{n+1}G_{n+1}} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{A_{n+1}G_{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}\overrightarrow{A_{n+1}G_n}
\end{aligned}$$

Do đó, G_{n+1} là ảnh của G_n qua phép vị tự tâm A_{n+1} , tỉ số $\frac{n+1}{n+2}$. Theo giả thiết quy nạp, quỹ tích của G_n là mặt cầu (C_n) , nên quỹ tích của G_{n+1} là mặt cầu (C_{n+1}) là ảnh của (C_n) qua phép vị tự tâm A_{n+1} , tỉ số $\frac{n+1}{n+2}$. Vậy quỹ tích của G_{n+1} là mặt cầu ảnh của mặt cầu (C) tâm O , bán kính R qua $n+1$ phép vị tự.

Bài toán 41. ([13]) Cho n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ và n số $a_1, a_2, \dots, a_n$ (dương hoặc âm). Tìm quỹ tích các điểm M để tổng

$$a_1 MA_1^2 + a_2 MA_2^2 + \dots + a_n MA_n^2$$

là hằng số.

Lời giải.

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 2$.

a) Xét trường hợp a_1, a_2 đều dương. Trên đoạn A_1A_2 ta lấy điểm O chia nó theo tỉ số $a_2 : a_1$, sao cho

$$OA_1 = \frac{a_2}{a_1 + a_2} A_1A_2; \quad OA_2 = \frac{a_1}{a_1 + a_2} A_1A_2. \quad (2.23)$$

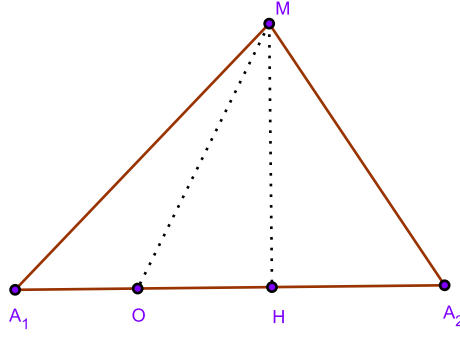
Gọi M là điểm bất kỳ trên mặt phẳng và H là chân đường vuông góc hạ từ M xuống đường thẳng A_1A_2 (hình 2.11)

Khi đó ta có

$$MA_1^2 = MO^2 + A_1O^2 + 2A_1O \cdot HO$$

$$MA_2^2 = MO^2 + A_2O^2 - 2A_2O \cdot HO$$

Nhân đẳng thức thứ nhất với A_2O , đẳng thức thứ hai với A_1O rồi cộng theo vế, ta có



Hình 2.11

$$\begin{aligned}
 & MA_1^2 \cdot A_2O + MA_2^2 \cdot A_1O \\
 &= MO^2 (A_2O + A_1O) + A_1O^2 \cdot A_2O + A_2O^2 \cdot A_1O \\
 &= MO^2 \cdot A_1A_2 + A_2O \cdot A_1O \cdot A_1A_2.
 \end{aligned}$$

Kết hợp với (2.23) ta được

$$\begin{aligned}
 MA_1^2 \cdot A_2O + MA_2^2 \cdot A_1O &= MA_1^2 \cdot \frac{a_1}{a_1 + a_2} A_1A_2 + MA_2^2 \cdot \frac{a_2}{a_1 + a_2} A_1A_2 \\
 &= MO^2 \cdot A_1A_2 + \frac{a_1a_2}{(a_1 + a_2)^2} (A_1A_2)^3 \\
 \Leftrightarrow a_1MA_1^2 + a_2MA_2^2 &= (a_1 + a_2) MO^2 + \frac{a_1a_2}{a_1 + a_2} (A_1A_2)^2.
 \end{aligned}$$

Do đó nếu $a_1MA_1^2 + a_2MA_2^2 = R^2$, thì

$$MO^2 = \frac{R^2}{a_1 + a_2} - \frac{a_1a_2}{(a_1 + a_2)^2} (A_1A_2)^2 \text{ không đổi.}$$

Đặt $\frac{R^2}{a_1 + a_2} - \frac{a_1a_2}{(a_1 + a_2)^2} (A_1A_2)^2 = k$, khi đó xảy ra các trường hợp sau:

(*) $k > 0$ thì quỹ tích cần tìm là đường tròn tâm O bán kính

$$\sqrt{\frac{R^2}{a_1 + a_2} - \frac{a_1a_2}{(a_1 + a_2)^2} (A_1A_2)^2}$$

(*) $k = 0$ thì quỹ tích cần tìm là điểm O .

(*) $k < 0$ thì quỹ tích là tập hợp rỗng.

b) Nếu a_1, a_2 đều âm, ta đưa về trường hợp **a)**

c) Nếu $a_1 > 0, a_2 < 0$ và $a_1 + a_2 \neq 0$, chẳng hạn $a_1 + a_2 > 0$, thì điểm O được chọn trên phần kéo dài của đoạn A_1A_2 về phía

phải của điểm A_2 để

$$A_2O = \left| \frac{a_1}{a_1 + a_2} \right| A_1A_2; \quad A_1O = \left| \frac{a_2}{a_1 + a_2} \right| A_1A_2$$

Sau đó, ta lập luận tương tự trên.

- d) Cuối cùng nếu $a_1 + a_2 = 0$ thì $a_1 = -a_2$ bài toán của ta được đưa về bài toán sau: Tìm quỹ tích các điểm M , sao cho hiệu bình phương khoảng cách từ M đến A_1, A_2 cho trước là hằng số.

Gọi H là hình chiếu của M xuống đường thẳng A_1A_2 (hình 2.11), thì

$$MA_1^2 = MH^2 + A_1H^2$$

$$MA_2^2 = MH^2 + A_2H^2$$

Do đó, $MA_1^2 - MA_2^2 = A_1H^2 - A_2H^2$.

Nếu $MA_1^2 - MA_2^2 = R^2$, thì $A_1H - A_2H = \frac{R^2}{A_1A_2}$. Vậy H được xác định hoàn toàn. Suy ra, trong trường hợp này quỹ tích cần tìm là đường thẳng đi qua H và vuông góc với A_1A_2 .

(2) Bước quy nạp. Giả sử ta đã chứng minh được với n điểm đã cho khi $a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 0$ quỹ tích là một đường tròn (hoặc quỹ tích là một đường thẳng khi $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$)

Bây giờ ta xét với $n + 1$ điểm $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ và $n + 1$ số $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$. Giả sử rằng $a_n + a_{n+1} \neq 0$ (nếu $a_n + a_{n+1} = 0$, ta sẽ thay cặp số này bằng cặp số a_{n-1}, a_{n+1} hoặc cặp số a_{n-1}, a_n . Nếu đồng thời $a_n + a_{n+1} = 0, a_{n-1} + a_{n+1} = 0, a_{n-1} + a_n = 0$ thì $a_{n-1} = a_n = a_{n+1} = 0$, khi đó ta sử dụng trực tiếp giả thiết quy nạp vì lúc này bài toán đưa về trường hợp $n - 2$ điểm $A_1, A_2, \dots, A_{n-2}$ và $n - 2$ số $a_1, a_2, \dots, a_n$).

Như trong phần cơ sở quy nạp, ta chứng minh rằng trên đoạn thẳng A_nA_{n+1} có thể tìm ra một điểm O để với mọi điểm M trong mặt phẳng

$$a_n MA_n^2 + a_{n+1} MA_{n+1}^2 = (a_n + a_{n+1}) MO^2 + \frac{a_n a_{n+1}}{a_n + a_{n+1}} (A_n A_{n+1})^2$$

Do đó, bài toán của ta quy về việc tìm quỹ tích của các điểm M , sao cho

$$a_1 M A_1^2 + a_2 M A_2^2 + \dots + a_{n-1} M A_{n-1}^2 + (a_n + a_{n+1}) M O^2 \text{ là hằng số}$$

$$\left(\text{vì } \frac{a_n a_{n+1}}{a_n + a_{n+1}} (A_n A_{n+1})^2 \text{ là hằng số.} \right)$$

Theo giả thiết quy nạp, quỹ tích cần tìm sẽ là đường tròn khi $a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 0$ và là đường thẳng khi $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$.

2.3 Phương pháp quy nạp toán học trong các bài toán rời rạc khác

Các ví dụ được chọn lọc trong phần này, có một số ví dụ là các bài toán logic, một số khác là các dạng khác với các dạng được nêu trong các phần trên.

Bài toán 42. ([2]) Ở một nước nào đó, giữa hai thành phố bất kỳ có thể đi từ thành phố này đến thành phố kia theo một đường thẳng, theo một đường sắt nhưng chỉ có thể đi một chiều. Chứng minh rằng, có một thành phố sao cho từ bất kỳ thành phố nào cũng có thể đi đến nó mà không phải đi qua quá một thành phố trung gian.

Lời giải. Ta gọi các thành phố có thể đi thẳng đến thành phố N là "những thành phố liên sát N ", còn những thành phố đi đến N phải đi không quá một thành phố trung gian là "những thành phố gần N ". Ta sẽ chứng minh khẳng định của bài toán bằng phương pháp quy nạp theo số các thành phố.

(1) Cơ sở quy nạp. Với những nước chỉ có 2 thành phố thì điều khẳng định đúng là hiển nhiên.

(2) Bước quy nạp. Giả sử khẳng định của bài toán đúng với những nước có n thành phố, ta chứng minh bài toán đúng với những nước có $n + 1$ thành phố. Ta vẽ sơ đồ các đường nối n thành phố nào

đó. Hệ thống đường này thỏa mãn điều kiện bài toán và theo giả thiết quy nạp có thành phố A, sao cho $n - 1$ thành phố còn lại đều "gần A", nghĩa là các thành phố này hoặc "liền sát A" hoặc "gần A". Nếu như thành phố B thứ $n + 1$ cũng "gần A" thì tất cả các thành phố đều "gần A". Nếu B "không gần A" thì thành phố A và các thành phố "liền sát A" là những thành phố "liền sát B". Mỗi thành phố còn lại "liền sát" với một trong các thành phố "liền sát A", nên "gần B". Do đó bài toán đúng với $n + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp, bài toán đúng với mọi n .

Bài toán 43. ([2]) *Chứng minh rằng từ các chữ số 1 và 2 có thể lập 2^{n+1} số có 2^n chữ số, sao cho 2 số bất kỳ khác nhau không ít hơn 2^{n-1} hàng.*

Lời giải.

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 1$ thì hai số bất kỳ trong các số hai chữ số 11; 12; 21; 22 khác nhau ở ít nhất một hàng. Vậy bài toán đúng với $n = 1$.

(2) Bước quy nạp. Giả sử bài toán đúng với số tự nhiên n , nghĩa là từ 1 và 2 lập được 2^{n+1} số có 2^n chữ số, sao cho hai số bất kỳ khác nhau ít nhất ở 2^{n-1} hàng. Ta chứng minh bài toán đúng với $n + 1$. Từ 2^{n+1} số trong giả thiết quy nạp, ta thành lập bảng A kích thước $2^{n+1} \times 2^n$ mà mỗi số là một dòng, còn cột là các hàng chữ số của chúng. Ta viết mỗi số a sang bên phải nó và như vậy nhận được 2^{n+1} số gồm 2^{n+1} chữ số và lập thành bảng AA. Từ bảng A lập bảng $A\bar{A}$ bằng cách viết vào bên phải số a số $\bar{a}$ (số $\bar{a}$ nhận được bằng cách thay từ số a chữ số 2 thành 1, chữ số 1 thành 2). Nhập bảng AA và bảng $A\bar{A}$ (bảng 2.1).

Theo giả thiết quy nạp các số ở nửa trên của bảng (phần AA), khác nhau ở không dưới $2^{n-1} \times 2 = 2^n$ hàng. Đối với 2 số bất kỳ ở nửa dưới cũng có kết quả tương tự. Nếu ta lấy 2 số ở 2 nửa khác nhau

A	A
A	$\bar{A}$

Bảng 2.1

của bảng là aa và $b\bar{b}$ thì nếu a khác b ở k hàng, ta sẽ có a khác $\bar{b}$ ở $2^n - k$ hàng. Do đó, chúng cũng khác nhau ở 2^n hàng. Vậy bài toán đúng với $n + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp, bài toán đúng với mọi số tự nhiên n .

Bài toán 44. ([2]) Có n tên cướp muốn chia của ($n \geq 2$). Mỗi tên đều nói là nó đã chia số của cướp được thành n phần bằng nhau, nhưng $n - 1$ đứa còn lại không tin. Hãy chỉ ra phương pháp chia để mỗi tên cướp đều tin rằng nó đã nhận không ít hơn $\frac{1}{n}$ số của mà chúng cướp được.

Lời giải. Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học.

(1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 2$, ta thực hiện phép chia như sau. Một tên chia số của thành 2 phần, tên còn lại sẽ lấy phần mà nó cho là nhiều hơn. Như vậy, bài toán là đúng với $n = 2$.

(2) Bước quy nạp. Giả sử n tên cướp đã tiến hành một cách chia mà mỗi tên đều vừa ý. Ta xét trường hợp số tên cướp là $n + 1$. Ta chia số của cho n tên cướp, sau đó đề nghị mỗi tên chia phần của mình thành $n + 1$ phần bằng nhau (theo ý chúng). Bây giờ tên cướp thứ $n + 1$ lấy ở mỗi tên cướp trong chúng một phần trong số $n + 1$ phần đã chia.

Khi đó mỗi tên cướp trong n tên cướp đầu đều nhận $\frac{n}{n+1}$ phần ban đầu của nó nên số của nó nhận được theo ý nó không ít hơn $\frac{1}{n+1}$ số của. Ngay tên cướp cuối cùng cũng vừa ý vì nó đã lấy ở mỗi tên cướp trong bọn không ít hơn $\frac{1}{n+1}$ của mỗi phần (theo ý nó) và do đó nhận được không ít hơn $\frac{1}{n+1}$ số của cướp được. Do đó bài toán đúng với $n + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 45. (IMO 1998) Với mọi số nguyên dương n , ta ký hiệu $d(n)$ là số tất cả các ước số dương của n (kể cả 1 và n). Hãy xác định tất cả các số nguyên dương k , sao cho $d(n^2) = kd(n)$, với n nguyên dương nào đó.

Lời giải. Giả sử khi phân tích thành thừa số nguyên tố, số n có dạng

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}.$$

Ta có,

$$d(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_r + 1).$$

$$d(n^2) = (2a_1 + 1)(2a_2 + 1) \dots (2a_r + 1).$$

Để $d(n^2) = kd(n)$ thì ta phải chọn các số a_i , sao cho

$$(2a_1 + 1)(2a_2 + 1) \dots (2a_r + 1) = k(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_r + 1). \quad (*)$$

Do $(2a_i + 1) (1 \leq i \leq r)$ đều là các số lẻ nên k phải là số lẻ. Ta sẽ chứng minh mệnh đề đảo lại rằng: "Với số lẻ k bất kì, ta có thể tìm được các số a_i thỏa mãn (*) (tức là tìm được n)"

Dùng phương pháp quy nạp theo k .

(1) Cơ sở quy nạp. Với $k = 1$, mệnh đề đúng ($n = 1, a_i = 0$).

(2) Bước quy nạp. Giả sử mệnh đề đúng với số k nào đó, ta chứng minh nó cũng đúng cho $(2^m \cdot k - 1) (m \geq 1)$. Lúc đó mệnh đề đúng cho mọi số lẻ vì mọi số lẻ l đều viết được dưới dạng $(2^m \cdot l' - 1)$ (với l' là số lẻ nhỏ hơn l).

Đặt $a_i = 2^{i-1}[(2^m - 1)k - 1]$ với $i = 1, 2, \dots, m$.

Khi đó

$$2a_i + 1 = 2^i(2^m - 1) \cdot k - (2^i - 1),$$

$$a_i + 1 = 2^{i-1}(2^m - 1)k - (2^{i-1} - 1) = 2a_{i-1} + 1.$$

Do vậy, tích của các số $(2a_i + 1)$ chia hết cho tích các số $(a_i + 1)$ với $i = \overline{1, m}$ khi $(2a_m + 1)$ chia hết cho $(a_1 + 1)$ hay $[2^m(2^m - 1)k - (2^m - 1)]$

chia hết cho $(2^m - 1).k$, có nghĩa là $(2^m.k - 1)$ chia hết cho k .

Vậy nếu ta chọn các a_i như trên với k đã cho thì mệnh đề trên đúng cho $(2^m.k - 1)$.

Mệnh đề được chứng minh. Như vậy tất cả các số nguyên dương k cần phải tìm là số lẻ.

Bài toán 46. (*Vô địch Toán Canada, 1982*)

Cho a, b và c là những nghiệm của phương trình

$$x^3 - x^2 - x - 1 = 0$$

Chứng minh rằng số

$$\frac{b^{1982} - c^{1982}}{b - c} + \frac{c^{1982} - a^{1982}}{c - a} + \frac{a^{1982} - b^{1982}}{a - b}$$

là một số nguyên.

Lời giải.

Đặt $u_n = \frac{b^n - c^n}{b - c}$, $v_n = \frac{c^n - a^n}{c - a}$, $w_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}$, với n nguyên, $n \geq 1$.

Ta sẽ chứng minh $u_n + v_n + w_n$ nguyên với mọi n nguyên, $n \geq 1$ (*). Trước hết ta thấy rằng

$$u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + u_n, \forall n, n \geq 1.$$

Thật vậy, do b, c là nghiệm phương trình $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$, nên

$$b^3 = b^2 + b + 1; c^3 = c^2 + c + 1.$$

Do đó

$$\begin{aligned} u_{n+3} &= \frac{b^{n+3} - c^{n+3}}{b - c} = \frac{b^n.b^3 - c^n.c^3}{b - c} \\ &= \frac{b^n(b^2 + b + 1) - c^n(c^2 + c + 1)}{b - c} \\ &= \frac{b^{n+2} - c^{n+2}}{b - c} + \frac{b^{n+1} - c^{n+1}}{b - c} + \frac{b^n - c^n}{b - c} \\ &= u_{n+2} + u_{n+1} + u_n. \end{aligned}$$

Tương tự ta có

$$v_{n+3} = v_{n+2} + v_{n+1} + v_n,$$

$$w_{n+3} = w_{n+2} + w_{n+1} + w_n.$$

Tiếp theo ta sẽ dùng phương pháp quy nạp để chứng minh khẳng định (*)

(1) Cơ sở quy nạp.

Với $n = 1$, ta có $u_1 + v_1 + w_1 = 1 + 1 + 1 = 3 \in \mathbb{Z}$.

Với $n = 2$,

Vì a, b, c là nghiệm của phương trình $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$, nên theo hệ thức Vi-et ta có

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ ab + bc + ca = -1 \end{cases}$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} u_2 + v_2 + w_2 &= \frac{b^2 - c^2}{b - c} + \frac{c^2 - a^2}{c - a} + \frac{a^2 - b^2}{a - b} \\ &= 2(a + b + c) = 2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Với $n = 3$, ta có

$$\begin{aligned} u_3 + v_3 + w_3 &= \frac{b^3 - c^3}{b - c} + \frac{c^3 - a^3}{c - a} + \frac{a^3 - b^3}{a - b} \\ &= 2(a^2 + b^2 + c^2) + (bc + ca + ab) \\ &= 2(a + b + c)^2 - 3(bc + ca + ab) = 5 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Vậy khẳng định đúng với $n = 1, 2, 3$.

(2) Bước quy nạp. Giả sử khẳng định đúng với $n = k, k + 1, k + 2$ ($k \geq 1$). Ta chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 3$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} u_{k+3} + v_{k+3} + w_{k+3} &= (u_{k+2} + u_{k+1} + u_k) + (v_{k+2} + v_{k+1} + v_k) + (w_{k+2} + w_{k+1} + w_k) \\ &= (u_{k+2} + v_{k+2} + w_{k+2}) + (u_{k+1} + v_{k+1} + w_{k+1}) + (u_k + v_k + w_k) \end{aligned}$$

Theo giả thiết quy nạp, cả ba số hạng của tổng trên đều nguyên nên $(u_{k+3} + v_{k+3} + w_{k+3})$ cũng nguyên.

Theo nguyên lý quy nạp, khẳng định được chứng minh.

Áp dụng khẳng định (*) với $n = 1982$, ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Từ bài toán (*), ta có thể sáng tác ra nhiều bài toán khác bằng cách thay n bằng các giá trị nguyên dương khác nhau.

Bài toán 47. ([8]) *Chứng minh rằng mỗi số tự nhiên không vượt quá $n!$ đều phân tích được thành tổng gồm không quá n số, sao cho hai số bất kì đều khác nhau và mỗi số này đều là ước của $n!$.*

Lời giải.

(1) Cơ sở quy nạp.

Với $n = 1$, thì $1! = 1$ có số nguyên dương duy nhất $a = 1$, không vượt quá $1!$. Khi đó ta phân tích $a = 1$. Vì 1 là ước của $1!$, nên khẳng định được chứng minh.

Với $n = 2$, thì $2! = 2$, có hai số nguyên dương không vượt quá $2!$ là $a_1 = 1, a_2 = 2$. Ta phân tích

$$a_1 = 1 = 1, \quad a_2 = 2 = 2.$$

Vì 1 và 2 đều là ước của $2!$, nên khẳng định được chứng minh.

Với $n = 3$, thì $3! = 6$ có 6 số nguyên dương không vượt quá $3!$ là $a_i = i, i = \overline{1; 6}$.

Ta phân tích:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 = 1, & a_2 &= 2 = 2, & a_3 &= 3 = 1 + 2, \\ a_4 &= 4 = 1 + 3, & a_5 &= 5 = 2 + 3, & a_6 &= 6 = 1 + 2 + 3. \end{aligned}$$

Mỗi tổng đều gồm các số khác nhau từng đôi một và 1, 2, 3 đều là các ước của $3!$, nên khẳng định được chứng minh.

(2) Bước quy nạp. Giả sử mệnh đề đúng với $n = k (k \geq 1)$, tức là với mọi số tự nhiên không vượt quá $k!$ đều phân tích được thành tổng gồm không quá k số, mà hai số bất kì đều khác nhau

và mỗi số này là ước của $k!$. Ta chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

Thật vậy, giả sử a là số tự nhiên tùy ý và $a \leq (k + 1)!$. Chia a cho $(k + 1)$ được thương là d và dư là r , khi đó a được viết

$$a = d(k + 1) + r; 0 \leq r < k + 1$$

Do $a \leq (k + 1)!$ nên $d \leq k!$. Theo giả thiết quy nạp, ta có

$$d = d_1 + d_2 + \dots + d_l$$

trong đó $d_1, d_2, \dots, d_l$ là các số tự nhiên đôi một khác nhau, là ước của $k!$ và $l \leq k$.

Ta có

$$\begin{aligned} a &= (d_1 + d_2 + \dots + d_l)(k + 1) + r \\ &= d_1(k + 1) + d_2(k + 1) + \dots + d_l(k + 1) + r \end{aligned}$$

Do $l \leq k$ nên trong tổng này có không quá $(k + 1)$ số; các số này đôi một khác nhau (do $d_1, d_2, \dots, d_l$ là các số tự nhiên đôi một khác nhau và $r < k + 1$).

Lại do $d_1, d_2, \dots, d_l$ là ước của $k!$ nên $d_1(k + 1), d_2(k + 1), \dots, d_l(k + 1)$ là ước của $(k + 1)!$. Mà $0 < r < k + 1$ nên hiển nhiên r là ước của $(k + 1)!$ (nếu $r = 0$, ta không tính số hạng này).

Như vậy, mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 48. (IMO 1973) Cho $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \dots, \overrightarrow{OP_{2n+1}}$ là các vectơ đơn vị trong một mặt phẳng. Các điểm $P_1, P_2, \dots, P_{2n+1}$ đều cùng nằm về một phía của một đường thẳng qua O . Chứng minh rằng

$$|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \dots + \overrightarrow{OP_{2n+1}}| \geq 1.$$

Lời giải.

(1) **Cơ sở quy nạp.** Với $n = 0$, mệnh đề hiển nhiên đúng do

$$|\overrightarrow{OP_1}| = 1 \geq 1.$$

(2) **Bước quy nạp.** Giả sử mệnh đề đúng với $n = k - 1 (k \geq 1)$, tức là với hệ vectơ đơn vị

$$\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \dots, \overrightarrow{OP_{2k-1}}$$

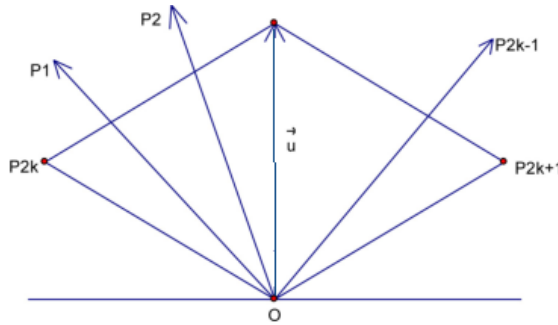
trong một mặt phẳng; các điểm $P_1, P_2, \dots, P_{2k-1}$ cùng nằm về một phía của một đường thẳng qua O. Ta có,

$$|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \dots + \overrightarrow{OP_{2k-1}}| \geq 1.$$

Ta chứng minh mệnh đề đúng với $n = k$, tức là với hệ $(2k + 1)$ vectơ $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \dots, \overrightarrow{OP_{2k+1}}$ thỏa mãn các điều kiện trên, ta cũng có,

$$|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \dots + \overrightarrow{OP_{2k+1}}| \geq 1.$$

Thật vậy, do vai trò của $\overrightarrow{OP_i} (1 \leq i \leq 2k + 1)$ như nhau, nên ta



Hình 2.12

có thể sắp xếp lại, sao cho $\overrightarrow{OP_i} (1 \leq i \leq 2k - 1)$ nằm giữa $\overrightarrow{OP_{2k}}$ và $\overrightarrow{OP_{2k+1}}$ (hình 2.12). Đặt

$$\vec{u} = \overrightarrow{OP_{2k}} + \overrightarrow{OP_{2k+1}}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \dots + \overrightarrow{OP_{2k-1}}.$$

Khi đó $\vec{u}$ có phương nằm trên phân giác góc $\widehat{P_{2k}OP_{2k+1}}$. Áp dụng quy tắc hình bình hành nhiều lần, ta được $\vec{v}$ nằm giữa $\overrightarrow{OP_1}$ và $\overrightarrow{OP_{2k-1}}$, nên nó nằm giữa $\overrightarrow{OP_{2k}}$ và $\overrightarrow{OP_{2k+1}}$. Vậy góc giữa $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bé hơn hoặc bằng $\frac{\pi}{2}$.

Ta lại có,

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\begin{aligned}
&= \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos(\vec{u}, \vec{v}) \\
&\geq \vec{v}^2 \text{ (do } \cos(\vec{u}, \vec{v}) \geq 0).
\end{aligned}$$

Do đó, $|\vec{u} + \vec{v}| \geq |\vec{v}|$, mà theo giả thiết quy nạp ta có $|\vec{v}| \geq 1$.

Vậy $|\vec{u} + \vec{v}| \geq 1$ hay

$$|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \dots + \overrightarrow{OP_{2k+1}}| \geq 1.$$

Mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

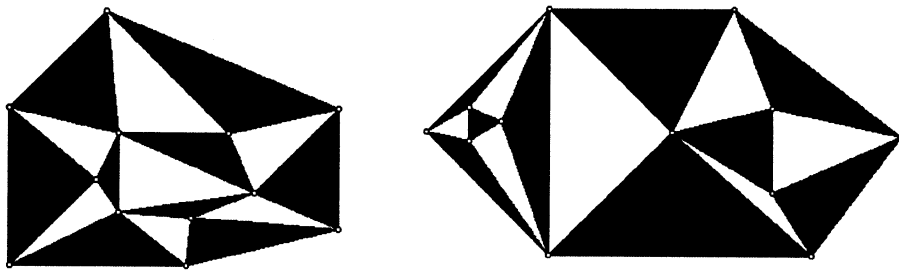
Bài toán 49. ([8]) *Hãy chia một lục giác thành các tam giác đen, trắng sao cho:*

- (i) *Hai tam giác tùy ý hoặc rời nhau hoặc có đỉnh chung hoặc có cạnh chung.*
- (ii) *Hai tam giác tùy ý có cạnh chung thì có màu khác nhau.*
- (iii) *Mỗi cạnh của lục giác đồng thời là cạnh của tam giác đen.*

Chứng minh rằng đa giác n cạnh có thể chia được theo cách trên khi và chỉ khi $n \equiv 3$.

Lời giải.

Đối với lục giác, có ít nhất hai cách chia theo hình 2.13 thỏa mãn ba điều kiện trên.



Hình 2.13

Ta chứng minh n -giác chia được theo cách trên khi và chỉ khi $n \equiv 3$.

a) Điều kiện cần. Giả sử n -giác đã chia được thành các tam giác thỏa mãn ba điều kiện trên. Ta chứng minh $n \equiv 3$.

Gọi tổng số cạnh của tất cả các tam giác đen là x ; tổng số cạnh của tất cả các tam giác trắng là y .

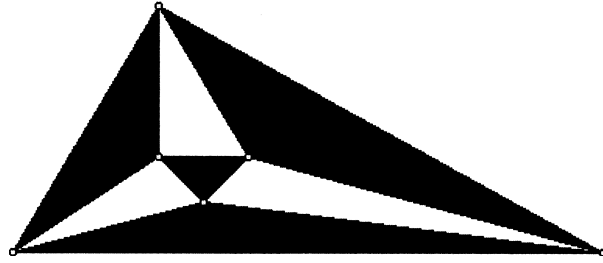
Vì hai tam giác chung cạnh có màu khác nhau và cạnh của đa giác luôn là cạnh của tam giác đen nên $x = y + n$, mà $x:3, y:3$, nên $n:3$.

b) Điều kiện đủ.

Giả sử n -giác T có $n:3$. Ta cần chỉ ra rằng có thể chia T thành các tam giác thỏa mãn ba điều kiện trên.

Vì $n:3$, nên tồn tại số nguyên dương k , sao cho $n = 3k$. Ta chứng minh bằng quy nạp theo k .

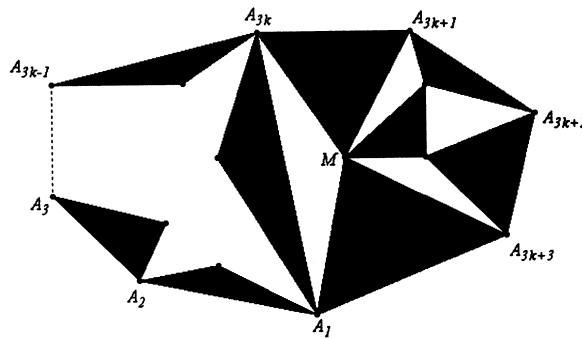
(1) Cơ sở quy nạp. Với $k = 1$, ta có tam giác, có thể chia như hình 2.14.



Hình 2.14

(2) Bước quy nạp. Giả sử đối với các đa giác có $n = 3k$ cạnh, ta đã chia được thành các tam giác thỏa mãn ba điều kiện trên. Ta cần chứng minh đa giác có $n = 3(k + 1)$ cạnh cũng chia được như vậy.

Xét đa giác có $n = 3(k + 1)$ cạnh $A_1A_2...A_{3k+2}A_{3k+3}$.



Hình 2.15

Theo giả thiết quy nạp, đa giác có $3k$ cạnh $A_1A_2...A_{3k}$ chia được thành các tam giác thỏa ba điều kiện trên.

Còn lại ngũ giác $A_1A_{3k}A_{3k+1}A_{3k+2}A_{3k+3}$, trong đó A_1A_{3k} đã là cạnh của tam giác đen, ta chia tiếp ngũ giác này. Có nhiều cách, chẳng hạn lấy M thuộc miền trong ngũ giác, tô tam giác A_1MA_{3k} màu trắng; lúc đó lục giác $A_1MA_{3k}A_{3k+1}A_{3k+2}A_{3k+3}$ dễ dàng chia được thành các tam giác thỏa mãn ba điều kiện trên.

Như vậy, đối với đa giác có $n = 3(k + 1)$ cạnh ta cũng chia được theo cách trên. Bài toán được chứng minh.

Chương 3

Một số đề thi tham khảo

3.1 Đề thi Olympic toán học quốc tế

Bài toán 50. (IMO 1977) Cho hàm f xác định trên tập hợp các số nguyên dương và cũng nhận các giá trị nguyên dương. Giả sử với mọi n ta có: $n + 1 > f(f(n))$. Chứng minh rằng $f(n) = n$ với mọi n .

Hướng dẫn.

Chứng tỏ rằng $f(1) < f(2) < f(3) \dots$ bằng quy nạp.

Gọi $S(n)$ là phát biểu: Nếu $r \leq n$ và $m > r$ thì $f(r) < f(m)$.

Chứng minh $f(m) \leq m$ và $f(m) \geq m$ với mọi giá trị của m , nên $f(m) = m$, với mọi m .

Bài toán 51. (IMO 1979)

Một con ếch nhảy từ đỉnh A đến đỉnh đối tâm E của một hình bát giác đều. Tại mỗi đỉnh của bát giác trừ đỉnh E , con ếch có thể nhảy một bước tới một trong hai đỉnh kề. Đến E con ếch dừng lại và ở luôn tại đó. Gọi a_n là số các đường đi phân biệt của con ếch đi từ A đến E bằng đúng n bước nhảy. Chứng minh rằng $a_{2n-1} = 0, a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}[(2 + \sqrt{2})^{n-1} - (2 - \sqrt{2})^{n-1}]$.

Hướng dẫn.

Mỗi bước con ếch nhảy thuận chiều kim đồng hồ ta biểu thị bằng một dấu cộng và mỗi bước con ếch nhảy ngược chiều kim đồng hồ ta biểu thị bằng một dấu trừ. Lúc đó mỗi đường đi phân biệt của con ếch có n bước nhảy sẽ được biểu thị bằng một dãy n dấu cộng trừ. Dễ thấy rằng mỗi dãy đều có hai tính chất

- (i) Số dấu cộng và trừ chên nhau đúng 4
- (ii) Một dãy con gồm các dấu thứ nhất đến dấu thứ m , với $m < n$ tùy ý có các dấu cộng trừ chên nhau không quá 3.
1. Ta thấy $a_{2n-1} = 0$ vì một dãy gồm $2n - 1$ dấu thì số dấu cộng và số dấu trừ phải có một số lẻ và một số chẵn nên không thể chên nhau đúng 4, do đó không thể thỏa mãn tính chất (i).
 2. Xét các dãy $2n$ dấu có số dấu cộng nhiều hơn số dấu trừ (ứng với đường đi đến E qua D, gọi tắt các dãy đó là các dãy cộng $2n$).

Số các dãy cộng $2n$ là $b_{2n} = \frac{a_{2n}}{2}$. Chứng minh bằng quy nạp công thức

$$b_{2n} = 4b_{2n-2} - 2b_{2n-4}$$

Bài toán 52. (IMO 1997) Với mỗi số nguyên dương n , ta kí hiệu $f(n)$ là số tất cả các cách biểu diễn n như một tổng các lũy thừa của 2 với số mũ nguyên và không âm. Các biểu diễn khác nhau về thứ tự sắp xếp các số hạng của tổng được xem như giống nhau. Ví dụ, $f(4) = 4$, vì

$$4 = 2^2 = 2^1 + 2^1 = 2^1 + 2^0 + 2^0 = 2^0 + 2^0 + 2^0 + 2^0.$$

Chứng minh rằng với $n \geq 3$, ta có:

$$\frac{n^2}{2 \cdot 4} < f(2^n) < 2 \frac{n^2}{2}.$$

Hướng dẫn. Nếu n là số lẻ, khi biểu diễn n như một tổng các lũy thừa của 2 với số mũ nguyên và không âm, bao giờ trong tổng cũng phải xuất hiện 2^0 . Nhận xét này giúp ta thiết lập tương ứng 1-1 giữa các tổng của n và các tổng của $n - 1$. Nói cách khác: $f(2n + 1) = f(2n)$.

Nếu n chẵn. Ta cũng thiết lập được tương ứng 1-1 giữa các tổng của n mà có chứa 2^0 với các tổng của $n - 1$. Các tổng của n mà không chứa 1 thì tương ứng 1-1 với các tổng của $\frac{n}{2}$.

Như vậy, ta có: $f(2n) = f(2n - 1) + f(n) = f(2n - 2) + f(n)$.

Các đẳng thức trên chứng tỏ f là hàm đơn điệu tăng.

Áp dụng hệ thức trên nhiều lần để tính $f(2^{n+1})$, ta có:

$$\begin{aligned} f(2^{n+1}) &= f(2^{n+1} - 2^n) + f(2^n - 2^{n-1} + 1) + \dots + f(2^n - 1) + f(2^n) \\ &= f(2^n) + f(2^n - 1) + \dots + f(2^{n-1} + 1) + f(2^n), \end{aligned} \quad (*)$$

và suy ra $f(2^{n+1}) \geq (2^{n-1} + 1)f(2^n)$. Ta chứng minh $f(2^n) < 2^{\frac{n^2}{4}}$ bằng quy nạp.

Áp dụng (*) nhiều lần ta có:

$$f(2^{n+1}) = f(2^n) + f(2^n - 1) + \dots + f(3) + f(2) + f(1) + 1. \quad (**)$$

Để chứng minh $2^{\frac{n^2}{4}} < f(2^n)$, ta sử dụng bổ đề sau.

Bổ đề: Ta có $f(1) + f(2) + \dots + f(2r) \geq 2rf(r)$.

Áp dụng bổ đề cho (**) ta được:

$$f(2^{n+1}) > 2^{n+1}f(2^{n-1}). \quad (***)$$

Từ (***), bằng quy nạp chứng minh $2^{\frac{n^2}{4}} < f(2^n)$.

3.2 Đề thi vô địch các nước và khu vực

Bài toán 53. (Putnam, 1997)

Cho dãy số a_n xác định bởi $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2^{a_n}$.

Chứng minh rằng $a_n \equiv a_{n-1} \pmod{n}$ với $n \geq 2$.

Hướng dẫn. Chứng minh: $a_n \equiv a_{n-1} \pmod{m}$ với mọi $m \leq n$ bằng quy nạp.

Kết quả hiển nhiên đúng với $n = 2$. Giả sử kết quả đúng với $k < n$. Ta phải chứng minh $a_n \equiv a_{n-1} \pmod{m}$ với mọi $m \leq n$, nghĩa là $2^{a_{n-1}} \equiv 2^{a_{n-2}} \pmod{m}$ với mọi $m \leq n$. Đặt $m = 2^r(2s + 1)$, khi đó theo định lý Euler: $2^{\phi(2r+1)} \equiv 1 \pmod{2r+1}$, do $\phi(2r+1) \leq 2r+1 \leq m \leq n$, theo giả thiết quy nạp ta có:

$$a_{n-1} \equiv a_{n-2} \pmod{\phi(2r+1)},$$

suy ra $2^{a_{n-1}} \equiv 2^{a_{n-2}} \pmod{2r+1}$.

Hiển nhiên ta có $2^s \mid 2^{a_{n-1}}$ và $2^s \mid 2^{a_{n-2}}$ nên $2^{a_{n-1}} \equiv 2^{a_{n-2}} \pmod{2^s}$.

Nhưng $(2r + 1)$ và 2^s nguyên tố cùng nhau, do đó:

$$2^{a_{n-1}} \equiv 2^{a_{n-2}} \pmod{m} \text{ với mọi } m \leq n.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 54. (*Putnam, 1999*)

Cho $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 24$ và với mọi $n \geq 3$

$$u_n = \frac{6u_{n-1}^2 u_{n-3} - 8u_{n-1} u_{n-2}^2}{u_{n-2} u_{n-3}}.$$

Chứng minh rằng u_n luôn là bội của n .

Hướng dẫn.

$$\text{Đặt } v_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \quad (*)$$

Khi đó, $u_n = \frac{6u_{n-1}^2 u_{n-3} - 8u_{n-1} u_{n-2}^2}{u_{n-2} u_{n-3}}$ được viết thành

$v_n = 6v_{n-1} - 8v_{n-2}$. Chứng minh bằng quy nạp $v_n = A2^n + B4^n$. Nhưng ta có:

$$v_2 = \frac{u_2}{u_1} = 2, v_3 = \frac{u_3}{u_2} = 12,$$

nên ta được $v_{n+1} = 4^n - 2^n$.

Suy ra $u_n = (4^{n-1} - 2^{n-1})(4^{n-2} - 2^{n-2}) \dots (4 - 2)$.

Với mọi số p nguyên tố, $4^{p-1} \equiv 2^{p-1} \pmod{p}$, do đó p chia hết $4^{p-1} - 2^{p-1}$, và p chia hết $4^s - 2^s$, với mọi s là bội của $p - 1$. Nếu p^r chia hết n , thì tồn tại ít nhất r bội số của $p - 1$ nhỏ hơn n . Do đó, p^r chia hết u_n . Từ đó suy ra n chia hết u_n .

Bài toán 55. ([2]) Cho trước một số quả tạ mà trọng lượng của mỗi quả là một số tự nhiên. Biết rằng có thể phân chúng thành k nhóm có trọng lượng bằng nhau $k \geq 2$. Chứng minh rằng có không ít hơn k cách chọn 1 quả tạ sao cho các quả tạ còn lại không thể chia thành k nhóm có trọng lượng bằng nhau.

Hướng dẫn.

Ta gọi quả tạ là cơ bản nếu khi chọn nó ra thì các quả còn lại không thể chia thành k nhóm có trọng lượng bằng nhau. Các quả tạ không có tính chất đó gọi là các quả tạ không cơ bản.

Giả sử kết luận của bài toán là sai, nghĩa là số quả tạ cơ bản nhỏ hơn k . Khi đó ta có mệnh đề sau:

Với mọi số tự nhiên n , trọng lượng của một quả tạ không cơ bản bất kỳ là bội của k^n .

Chứng minh mệnh đề này bằng phương pháp quy nạp.

Một quả tạ không cơ bản có trọng lượng là một số tự nhiên a nào đó. Rõ ràng $a < 2^{a+1}$, nhưng theo mệnh đề trên thì a chia hết cho 2^{a+1} , nên $a \geq 2^{a+1}$, mâu thuẫn suy ra ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 56. ([2]) Trong một cái bảng kích thước $m \times n$, người ta viết các số sao cho khi lấy hai dòng và hai cột bất kỳ của bảng tạo thành hình chữ nhật thì tổng các số ở hai đỉnh đối diện bằng tổng các số ở hai đỉnh đối diện khác. Người ta xóa đi một số sao cho từ các số còn lại có thể xác định được các số đã xóa đi. Chứng minh rằng các số còn lại không nhỏ hơn $(n + m - 1)$ số.

Hướng dẫn. Ta chứng minh khẳng định của bài toán bằng phương pháp quy nạp theo $m + n$. Không mất tính tổng quát, ta coi $n \geq m$. Ta sẽ chứng tỏ nếu số các số còn lại bé hơn $(n + m - 1)$ thì bảng không được xác định duy nhất.

Bài toán 57. ([2]) Ta gọi tam giác Pascal là tam giác số trong đó các

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots &
 \end{array}$$

số ở biên là 1, còn mỗi số ở trong bằng tổng hai số trên nó ở hàng trên gần nhất. Có bao nhiêu số không chia hết cho p trong p hàng đầu? (p là số nguyên tố cho trước, n là số tùy ý.)

Hướng dẫn.

Kí hiệu số ở hàng thứ n , chỗ thứ k tính từ bên trái (số ở biên coi như thứ 0) của bảng tam giác là C_n^k . Bằng quy nạp ta chứng minh được

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_n^k = C_n^{k-1} + C_{n-1}^{k-1}.$$

Do p là số nguyên tố nên $C_p^k: p, k = 1, 2, \dots, p-1$, tức là trừ hai số ở biên, dòng thứ p của bảng gồm toàn các số là bội của p .

Từ đó cũng bằng quy nạp ta chứng minh số các số không chia hết cho p ở p^n dòng đầu của bảng là $\left[\frac{1}{2}p(p+1) \right]^n$.

Kỳ thi Olympic truyền thống 30/4 lần thứ XIII tại thành phố Huế

Bài toán 58. ([1]) Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = 2, x_{n+1} = \frac{2+x_n}{1-2x_n}$ với $n = 1, 2, 3, \dots$

1. Chứng minh rằng $x_n \neq 0$ với mọi n .
2. Chứng minh rằng dãy số không tuần hoàn.

Hướng dẫn.

Bằng quy nạp chứng minh được $x_n = \tan(n\alpha)$, ở đây $\tan \alpha = 2$. Từ đó

$$x_{2m} = \tan(2m\alpha) = \frac{2 \tan(m\alpha)}{1 - \tan^2(m\alpha)} = \frac{2x_m}{1 - x_m^2}.$$

1. Giả sử $x_n = 0$ với $n = 2m$.

Khi đó ta có $x_m = 0$. Xét $n = 2^k(2s+1)$ với k, s là các số nguyên không âm. Lập luận tương tự, ta suy ra được $x_{2s+1} = 0$. Do đó

$$\frac{2+x_{2s}}{1-2x_{2s}} = 0 \Rightarrow x_{2s} = -2 \Rightarrow \frac{2x_s}{1-x_s^2} = -2.$$

Giải phương trình trên ta được hai nghiệm vô tỷ. Vô lý.

Từ trên ta thấy với n lẻ, $x_n \neq 0$.

Vậy $x_n \neq 0$ với mọi n .

2. Giả sử có m, n sao cho $x_{m+n} = x_n$. Khi đó

$$\tan(m+n)\alpha - \tan m\alpha = \frac{\sin m\alpha}{\cos(m+n)\alpha \cos n\alpha} = 0.$$

Như thế $x_m = \tan m\alpha = 0$. Điều này mâu thuẫn với (1).

Kết luận

Phương pháp quy nạp là phương pháp chứng minh cổ điển, là một trong những công cụ được sử dụng đặc lực trong giải toán học, không chỉ dừng lại ở các bài toán cơ bản mà được vận dụng khá nhiều trong các bài toán thi học sinh giỏi quốc gia, thi Olympic toán học quốc tế. Luận văn đã hoàn thành và đạt được những kết quả sau:

- Trình bày nguồn gốc của phương pháp quy nạp, làm rõ được quy nạp và quy nạp toán học.
- Nêu được nguyên lý quy nạp toán học, phương pháp quy nạp toán học, khắc sâu hai bước: Bước cơ sở và bước quy nạp cũng như tầm quan trọng phải thực hiện đầy đủ hai bước này, thông qua các ví dụ và phản ví dụ.
- Nêu được một số hình thức của phương pháp quy nạp cùng các ví dụ minh họa.
- Sư tầm được hệ thống bài toán phong phú về ứng dụng của phương pháp quy nạp trong các phân môn khác nhau của Toán học: số học, đại số, giải tích, hình học. Đặc biệt, luận văn đã sư tầm một số các đề thi Olympic toán các quốc gia và quốc tế được giải bằng phương pháp này.

Luận văn là kết quả của quá trình tích lũy, học hỏi về nội dung phương pháp quy nạp toán học. Hy vọng luận văn sẽ là một tài liệu có ích với các độc giả quan tâm đến phương pháp này. Tuy đã rất cố gắng, nhưng trong điều kiện thời gian, năng lực bản thân còn hạn chế, luận văn không

tránh khỏi thiếu sót. Trong thời gian tới, tác giả sẽ dành nhiều thời gian để nghiên cứu, tìm hiểu sâu hơn về đề tài này.

Tác giả kính mong nhận được sự chỉ dạy của các Quý Thầy Cô và ý kiến đóng góp của quý độc giả để luận văn được hoàn thiện hơn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn.

Tài liệu tham khảo

- [1] Ban tổ chức kì thi (2007), *Tuyển tập đề thi Olympic, 30 tháng 4, lần thứ XIII-2007, Toán học*, NXB đại học sư phạm.
- [2] Lê Trần Chính, Nguyễn Quý Dy, Nguyễn Văn Lộc, Vũ Văn Thỏa (2000), *Tuyển tập 200 bài thi vô địch toán (Số học và đại số)*, NXB Giáo dục.
- [3] Doãn Minh Cường (chủ biên), Phạm Minh Phương, Trần Văn Tấn, Nguyễn Thị Thanh Thủy (2004), *Toán bồi dưỡng học sinh giỏi phổ thông THCS, tập 1- Số học*, NXB đại học sư phạm.
- [4] Nguyễn Hữu Điển (2000), *Phương pháp quy nạp toán học*, NXB Giáo dục.
- [5] Nguyễn Hữu Điển (2010), *Olympic toán năm 2000, 33 đề thi và lời giải*, NXB Giáo dục.
- [6] Đoàn Quỳnh, Nguyễn Huy Doan, Nguyễn Xuân Liêm, Nguyễn Khắc Minh, Đặng Hùng Thắng (2006), *Đại số và Giải tích nâng cao 11*, NXB Giáo dục.
- [7] Trần Hữu Nam (2015), *Toán học và tuổi trẻ*, (453), tr.23.
- [8] Đặng Huy Ruận (2002), *Sáu phương pháp giải các bài toán không mẫu mực*, NXB Khoa học và Kỹ thuật.
- [9] Vũ Dương Thụy, Nguyễn Văn Nho (2002), *40 năm Olympic Toán học Quốc tế*, NXB Giáo dục.

- [10] G.Polya (2009), người dịch: Hồ Thuần, Bùi Tường, *Giải một bài toán như thế nào*, NXB Giáo dục.
- [11] G.Polya (2010), người dịch: Hà Sĩ Hồ, Hoàng Chúng, Lê Đình Phi, Nguyễn Hữu Chương, Hồ Thuần, *Sáng tạo toán học*, NXB Giáo dục.
- [12] G.Polya (2010), người dịch: Nguyễn Sỹ Tuyển, Phan Tất Đắc, Hồ Thuần, Nguyễn Giản, *Toán học và những suy luận có lí*, NXB Giáo dục.
- [13] L.I.Golovina, I.M.Yaglom (1987), người dịch: Khổng Xuân Hiền, *Phép quy nạp trong hình học*, Sở Giáo Dục Nghĩa Bình.