

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề có 6 trang)

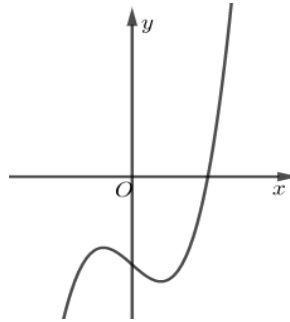
Họ, tên thí sinh:.....

Số báo danh:

Mã đề: 121

PHẦN I (8,0đ) Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án (0,4đ/câu).

Câu 1. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong hình dưới?



- A. $y = -x^3 + 3x - 1$. B. $y = x^4 - 2x^2 - 2$. C. $y = x^3 - x + 2$. D. $y = x^3 - x - 2$.

Câu 2. Cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 26; |\vec{b}| = 28; |\vec{a} + \vec{b}| = 48$. Độ dài vector $\vec{a} - \vec{b}$ bằng?

- A. 25. B. $\sqrt{616}$. C. 9. D. $\sqrt{618}$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-1; 2; 4)$, $B(-1; 1; 4)$, $C(0; 0; 4)$. Tìm số đo của góc $\widehat{ABC}$.

- A. 60° . B. 135° . C. 120° . D. 45° .

Câu 4. Thống kê chiều cao của 40 học sinh lớp 12 của một trường THPT, ta có bảng số liệu sau:

Chiều cao (cm)	[150;155)	[155;160)	[160;165)	[165;170)	[170;175)
Số học sinh	4	10	16	8	2

Cỡ của mẫu số liệu là

- A. 5. B. 30. C. 40 D. 175.

Câu 5. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = 3 \sin x - 4 \cos x + 1$. Tính tổng $M + m$.

- A. 12. B. 1. C. 2. D. 0.

Câu 6. Giá trị của $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n - \sqrt{n^3 + 2n - 2})$ là.

- A. 1. B. -1. C. Không tồn tại. D. $-\infty$.

Câu 7. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2}$ là

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Câu 8 Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Gọi I là tâm hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CA'} = \vec{v}$, $\overrightarrow{BD'} = \vec{x}$, $\overrightarrow{DB'} = \vec{y}$. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

B. $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

C. $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

D. $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;-1)$, $B(-1;1;0)$, $C(1;0;1)$. Tìm điểm M sao cho $3MA^2 + 2MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1\right)$.

B. $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; 2\right)$.

C. $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{2}; -1\right)$.

D. $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1\right)$.

Câu 10. Mỗi ngày bác Hương đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị km) của bác Hương trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau :

Quãng đường (km)	[2,7; 3,0)	[3,0; 3,3)	[3,3; 3,6)	[3,6; 3,9)	[3,9; 4,2)
Số ngày	3	6	5	4	2

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

A. 0,9.

B. 0,975

C. 0,5

D. 0,575

Câu 11: Cho hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{6-2(m+1)\cos^2 x + m(\sin x - \cos x)^2}}$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm

số đã cho xác định trên R là $m \in (a; b)$. Tính $a^2 - b^2$.

A. -7.

B. 25.

C. 11.

D. 7.

Câu 12. Tính tổng các nghiệm thực của phương trình $\log_5(2.5^x - 1) + 1 = 2x$

A. 6.

B. 1.

C. 0.

D. $\log_5 3$.

Câu 13. Bạn A thả quả bóng cao su từ độ cao 10m theo phương thẳng đứng. Mỗi khi chạm đất nó lại nảy lên theo phương thẳng đứng có độ cao bằng $\frac{3}{4}$ độ cao trước đó. Tính tổng quãng đường bóng đi được đến khi bóng dừng hẳn.

A. 40 m.

B. 70 m.

C. 50 m.

D. 80 m.

Câu 14. Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh có tên gọi khác nhau, gồm 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ thành một hàng ngang (trong đó có một học sinh nam tên Dũng và một học sinh nữ tên Lan). Xác suất để giữa hai học sinh nữ liên tiếp có đúng hai học sinh nam và Dũng luôn đứng cạnh Lan bằng

A. $\frac{1}{210}$.

B. $\frac{1}{2520}$.

C. $\frac{1}{840}$.

D. $\frac{1}{1260}$.

Câu 15. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 4x + m + 2 + 3\sqrt{x^2 - 4x}}{\sqrt{x^2 - 4x} + 2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-4; -1)$?

A. 17.

B. 18.

C. 58.

D. 57.

- Câu 16.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 6\text{ cm}$, $BC = BB' = 2\text{ cm}$. Điểm E là trung điểm cạnh BC . Một tứ diện đều $MNPQ$ có hai đỉnh M và N nằm trên đường thẳng EC' , hai đỉnh P và Q nằm trên đường thẳng đi qua điểm B' và cắt đường thẳng AD tại điểm F . Khoảng cách DF bằng
- A. 3 cm B. 2 cm C. 6 cm D. 1 cm
- Câu 17.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;3;-1)$, $B(2;3;2)$, $C(-1;0;2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxz) để $S = |\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MC}| + |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất.
- A. $M\left(-1;0;\frac{7}{3}\right)$. B. $M(0;3;0)$. C. $M\left(1;0;\frac{7}{3}\right)$. D. $M\left(-\frac{1}{2};0;2\right)$.
- Câu 18.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của y để tồn tại đúng 5 số nguyên x thỏa mãn bất phương trình $3^{\log(x^2-x+3)} < (x+y)^{\log 3}$
- A. 5. B. 7. C. 6. D. 10.
- Câu 19.** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng φ , với $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng
- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. B. $a^3\sqrt{2}$. C. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$. D. $\frac{2a^3}{3}$.
- Câu 20.** Từ các chữ số 0,1,2,3,4,5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên x , biết rằng $x \neq 0$, x chia hết cho 6 và $x < 3.10^7$.
- A. 139967. B. 139968. C. 138037. D. 267400.

PHẦN II (7.2đ). Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai (**Chọn đúng 1 ý được 0,12 điểm; đúng 2 ý được 0,3 điểm; đúng 3 ý được 0,6 điểm; đúng 4 ý được 1,2 điểm**)

- Câu 1.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O , các đỉnh $B(m;0;0)$, $D(0;m;0)$, $A'(0;0;n)$ với $m, n > 0$ và $m+n=4$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC' .
- a) Tọa độ của điểm C là $C(m;m;n)$.
- b) Khi $m=2; n=4$ thì khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng $(A'BD)$ là $d = \frac{4}{3}$.
- c) Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\frac{3}{2}$ lần khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng $(A'BD)$.
- d) Thể tích tứ diện $BDA'M$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{64}{27}$.

- Câu 2.** Giá đóng cửa của một cổ phiếu là giá của cổ phiếu đó cuối một phiên giao dịch. Bảng sau thống kê giá đóng cửa (đơn vị: nghìn đồng) của hai mã cổ phiếu A và B trong 50 ngày giao dịch liên tiếp.

Giá đóng cửa	$[120;122)$	$[122;124)$	$[124;126)$	$[126;128)$	$[128;130)$
Cổ phiếu A	8	9	12	10	11
Cổ phiếu B	16	4	3	6	21

- a) Xét mẫu số liệu của cổ phiếu A ta có phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là 7,5216
b) Xét mẫu số liệu của cổ phiếu B ta có số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là 115,28.
c) Xét mẫu số liệu của cổ phiếu B ta có độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là $\sqrt{15,4096}$
d) Người ta có thể dùng phương sai và độ lệch chuẩn để so sánh mức độ rủi ro của các loại cổ phiếu có giá trị trung bình gần bằng nhau. Cổ phiếu nào có phương sai, độ lệch chuẩn cao hơn thì được coi là có độ rủi ro lớn hơn. Theo quan điểm trên, thì cổ phiếu A có độ rủi ro thấp hơn cổ phiếu B .

- Câu 3.** Cho phương trình $\frac{\cos x \cdot \cos 2x - m \cdot \cos x + \cos 2x - m}{\sin x} = 0$ với m là tham số.

- a) Điều kiện xác định của phương trình là $x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$.
b) Với $m = 1$, phương trình đã cho có 2 nghiệm thuộc $[0; 2\pi]$
c) Khi $m = \frac{1}{2}$ các nghiệm của phương trình được biểu diễn trên đường tròn lượng giác là một đa giác. Diện tích đa giác đó bằng $\sqrt{3}$.
d) Có hai giá trị m để $4m$ nguyên và phương trình có đúng 2 nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.

- Câu 4.** Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là một tam giác vuông cân tại B , $AB = AA' = 2a$, M là trung điểm cạnh BC .

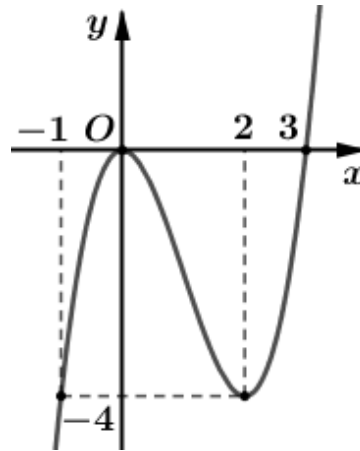
- a) Khoảng cách từ điểm C đến $mp(ABB'A')$ bằng $2a$.
b) Khoảng cách từ điểm A đến $mp(A'BC)$ bằng $a\sqrt{5}$.
c) Khoảng cách từ điểm B đến $mp(ACB')$ bằng $\sqrt{2}a$.
d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$ bằng $\frac{3a}{2}$.

- Câu 5.** Một bài thi trắc nghiệm gồm 12 câu hỏi, mỗi câu hỏi cho 5 câu trả lời trong đó chỉ có 1 câu trả lời đúng. Giả sử mỗi câu trả lời đúng được 4 điểm và mỗi câu trả lời sai bị trừ 1 điểm. Một học sinh kém làm bài bằng cách chọn hù họa 1 câu trả lời.

- a) Học sinh đó làm đúng 6 câu và sai 6 câu thì được 12 điểm.
b) Xác suất để học sinh đó được 13 điểm là $\frac{4^7}{5^{12}}$.
c) Xác suất để học sinh đó được 3 điểm là $\frac{4^9}{5^{12}} \cdot C_{12}^3$.

d) Xác suất để học sinh đó được điểm âm là $\frac{65}{8} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{12}$.

Câu 6. Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Các khẳng định sau đây đúng hay sai?



a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

b) Hàm số $g(x) = f(x) + 2025$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.

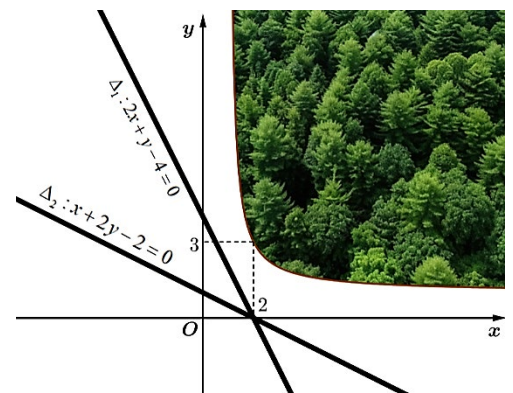
c) Hàm số $g(x) = f(|x + 2|)$ có 3 điểm cực trị.

d) Phương trình $|f(x) + 4| = m^2 - 3m + 2$ có 4 nghiệm phân biệt khi $m \in \left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}; 1\right) \cup \left(2; \frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right)$.

PHẦN III (4,8đ). Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6 (*trả lời đúng 1 câu được 0,8đ*)

Câu 1. Mảnh đất vườn của nhà anh Điệp có một phần ranh giới cũng là một phần đường cong (C): $y = \frac{x+a}{x+b}$, bao quanh nó là sông nước. Với hệ trục tọa độ Oxy thích hợp, đơn vị trên mỗi trục là 10 mét thì

đường cong (C) đi qua điểm $(2; 3)$ và có đường tiệm cận đứng $x = 1$. Hàng ngày anh Điệp phải dùng thuyền máy để vận chuyển trái cây từ khu vườn của mình đến hai tuyến đường $\Delta_1: 2x + y - 4 = 0$ và $\Delta_2: x + 2y - 2 = 0$ cho những người lái buôn từ nơi khác đến. Anh Điệp cần xác định một vị trí $M(x_0; y_0)$ thuộc khu vườn của mình để tổng các khoảng cách từ vị trí M đó đến hai tuyến đường Δ_1, Δ_2 là bé nhất. Hỏi khoảng cách từ vị trí được chọn làm gốc tọa độ đến điểm M là bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng phần chục)?



Câu 2. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho nhà máy B. Hai nhà máy thỏa thuận rằng: Hàng tháng nhà máy A cung cấp cho nhà máy B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm

thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x) = 45 - 0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng bao gồm:

- Chi phí cố định: 100 triệu đồng.
- Cho phí cho mỗi tấn sản phẩm làm ra: 30 triệu đồng.

Hỏi nhà máy A cần bán cho nhà máy B bao nhiêu tấn sản phẩm mỗi tháng để lợi nhuận thu được là lớn nhất? (Làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(4;1;5), B(3;0;1), C(-1;2;0)$ và điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - 5\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$ lớn nhất. Tính $P = a - 2b + 4c$.

Câu 4. Cho hai số thực $a, b > 1$ sao cho luôn tồn tại số thực x ($0 < x \neq 1$) thỏa mãn $a^{\log_b x} = b^{\log_a x^2}$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \ln^2 a + \ln^2 b - \ln(ab)$. (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục)

Câu 5. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , cạnh bên $AA' = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm G của tam giác ABC . Gọi P, Q, N lần lượt là trung điểm của AB, CC' và $A'G$. Tính khoảng cách từ N đến mặt phẳng (PQC) khi $a = 2$ (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Câu 6. Bạn Hoa chọn ngẫu nhiên 3 số phân biệt trong tập hợp $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ và sắp xếp chúng theo thứ tự giảm dần để tạo thành một số gồm ba chữ số. Bạn Bình chọn ngẫu nhiên 3 số phân biệt trong tập hợp $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ và sắp xếp chúng theo thứ tự giảm dần để tạo thành một số gồm ba chữ số. Tìm xác suất sao cho số của Hoa lớn hơn số của Bình (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

HẾT

SỞ GD&ĐT THANH HÓA
TRƯỜNG THPT VINH LỘC
ĐỀ THI CHÍNH THỨC

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG
KHỐI 12 - MÔN: TOÁN
NĂM HỌC: 2025 - 2026

(Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề)

Mã đề 121

A. PHẦN I: (Câu hỏi 4 lựa chọn)

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6	Câu 7	Câu 8	Câu 9	Câu 10
D	B	B	C	C	D	D	A	D	D
Câu 11	Câu 12	Câu 13	Câu 14	Câu 15	Câu 16	Câu 17	Câu 18	Câu 19	Câu 20
D	B	B	C	A	B	A	A	A	A

B. PHẦN II: (Câu hỏi lựa chọn đúng – sai)

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6
a) Sai	a) Đúng	a) Đúng	a) Đúng	a) Sai	a) Đúng
b) Đúng	b) Sai	b) Sai	b) Sai	b) Sai	b) Sai
c) Đúng	c) Sai	c) Đúng	c) Sai	c) Đúng	c) Đúng
d) Đúng	d) Đúng	d) Đúng	d) Sai	d) Đúng	d) Đúng

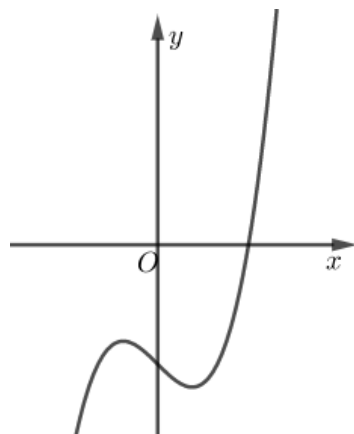
C. PHẦN III: (6 câu, mỗi câu đúng được 0,6 điểm)

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6
34,1	70,7	13	- 0,5	0,38	0,66

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

PHẦN I (8,0đ) Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án (0,4đ/câu).

Câu 1. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong hình dưới?



- A. $y = -x^3 + 3x - 1$. B. $y = x^4 - 2x^2 - 2$. C. $y = x^3 - x + 2$. D. $y = x^3 - x - 2$.

Lời giải

Chọn D

Dễ thấy đồ thị hàm số đã cho là đồ thị hàm số bậc ba có hệ số $a > 0$.

Mặt khác đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $d < 0$.

Suy ra hàm số cần tìm là $y = x^3 - x - 2$.

Câu 2. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 26; |\vec{b}| = 28; |\vec{a} + \vec{b}| = 48$. Độ dài vectơ $\vec{a} - \vec{b}$ bằng?

- A. 25. B. $\sqrt{616}$. C. 9. D. $\sqrt{618}$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 2(\vec{a}^2 + \vec{b}^2) - (\vec{a} + \vec{b})^2 \\ &= 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) - |\vec{a} + \vec{b}|^2 = 2(26^2 + 28^2) - 48^2 = 616 \\ \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| &= \sqrt{616}. \end{aligned}$$

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-1; 2; 4)$, $B(-1; 1; 4)$, $C(0; 0; 4)$. Tìm số đo của góc $\widehat{ABC}$.

- A. 60° . B. 135° . C. 120° . D. 45° .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BA} = (0; 1; 0), \overrightarrow{BC} = (1; -1; 0) \Rightarrow \cos \widehat{ABC} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{ABC} = 135^\circ.$$

Câu 4. Thống kê chiều cao của 40 học sinh lớp 12 của một trường THPT, ta có bảng số liệu sau:

Chiều cao (cm)	[150;155)	[155;160)	[160;165)	[165;170)	[170;175)
Số học sinh	4	10	16	8	2

Cỡ của mẫu số liệu là

A. 5.

B. 30.

C. 40

D. 175.

Câu 5. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = 3 \sin x - 4 \cos x + 1$. Tính tổng $M + m$.

A. 12.

B. 1.

C. 2.

D. 0.

Câu 6. Giá trị của $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n - \sqrt{n^3 + 2n - 2})$ là.

A. 1.

B. -1.

C. Không tồn tại.

D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Tự luận

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n - \sqrt{n^3 + 2n - 2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{n} \left(\frac{2}{\sqrt{n}} - \sqrt{1 + \frac{2}{n^2} - \frac{2}{n^3}} \right) = -\infty$$

$$\text{Vì } \lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{n} = +\infty; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\sqrt{n}} - \sqrt{1 + \frac{2}{n^2} - \frac{2}{n^3}} \right) = -1.$$

Cách 2: Máy tính

Nhập vào máy tính: $2X - \sqrt{X^3 + 2X - 2}$ CALC $X = 10^6$ (Hiểu là số vô cùng lớn) ta được đáp án là -998000000

Nghĩa là $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n - \sqrt{n^3 + 2n - 2}) = -\infty$.

Câu 7. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2}$ là

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Tập xác định: $D = (-\infty; -2] \cup (2; +\infty)$.

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{1 - \frac{2}{x}} = -1 \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{1 - \frac{2}{x}} = 1.$$

Suy ra đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang là $y = -1$; $y = 1$.

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x + 2}}{\sqrt{x - 2}} = +\infty.$$

Suy ra đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là $x = 2$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có tổng số 3 đường tiệm cận

Câu 8 Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Gọi I là tâm hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CA'} = \vec{v}$, $\overrightarrow{BD'} = \vec{x}$, $\overrightarrow{DB'} = \vec{y}$. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $2\vec{OI} = -\frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y}).$

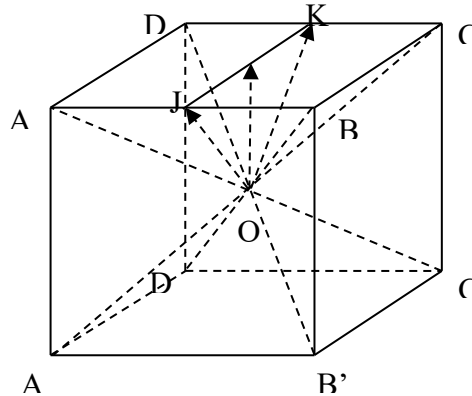
B. $2\vec{OI} = -\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y}).$

C. $2\vec{OI} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y}).$

D. $2\vec{OI} = \frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y}).$

Lời giải

Chọn A



+ Gọi J, K lần lượt là trung điểm của AB, CD .

+ Ta có: $2\vec{OI} = \vec{OJ} + \vec{OK} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}) = -\frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y}).$

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;-1), B(-1;1;0), C(1;0;1)$. Tìm điểm M sao cho $3MA^2 + 2MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1\right).$

B. $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; 2\right).$

C. $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{2}; -1\right).$

D. $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1\right).$

Lời giải

Chọn D

Giả sử $M(x; y; z) \Rightarrow \begin{cases} \vec{AM} = (x; y; z+1) \\ \vec{BM} = (x+1; y-1; z) \\ \vec{CM} = (x-1; y; z-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM^2 = x^2 + y^2 + (z+1)^2 \\ BM^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 \\ CM^2 = (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 \end{cases}$

$\Rightarrow 3MA^2 + 2MB^2 - MC^2 = 3[x^2 + y^2 + (z+1)^2] + 2[(x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2] - [(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2]$

$= 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 6x - 4y + 8z + 6 = \left(2x + \frac{3}{2}\right)^2 + (2y-1)^2 + (2z+2)^2 - \frac{5}{4} \geq -\frac{5}{4}.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}, y = \frac{1}{2}, z = -1$, khi đó $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1\right).$

Câu 10. Mỗi ngày bác Hương đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị km) của bác Hương trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau :

Quãng đường (km)	[2,7; 3,0)	[3,0; 3,3)	[3,3; 3,6)	[3,6; 3,9)	[3,9; 4,2)
Số ngày	4	6	8	4	3

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

A. 0,9.

B. 0,975

C. 0,5

D. 0,575

- Câu 11:** Cho hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{6 - 2(m+1)\cos^2 x + m(\sin x - \cos x)^2}}$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số đã cho xác định trên R là $m \in (a; b)$. Tính $a^2 - b^2$.
- A. -7. B. 25. C. 11. D. 7.

Lời giải :

Chọn D

Hàm số xác định trên $R \Leftrightarrow 6 - 2(m+1)\cos^2 x + m(\sin x - \cos x)^2 > 0$ với $\forall x \in R$

$$\Leftrightarrow m \sin 2x + (m+1)\cos 2x < 5 \text{ với } \forall x \in R \Leftrightarrow \max_{x \in R} (m \sin 2x + (m+1)\cos 2x) < 5.$$

$$\Leftrightarrow m^2 + (m+1)^2 < 25 \Leftrightarrow m^2 + m - 12 < 0 \Leftrightarrow m \in (-4; 3).$$

Suy ra $a = -4; b = 3 \Rightarrow a^2 - b^2 = 7$.

Câu 12. Tính tổng các nghiệm thực của phương trình $\log_5(2.5^x - 1) + 1 = 2x$

- A. 6. B. 1. C. 0. D. $\log_5 3$.

Cách giải: Đk: $2.5^x - 1 > 0$

$$\log_5(2.5^x - 1) + 1 = 2x \Leftrightarrow (2.5^x - 1)5 = 5^{2x} \Leftrightarrow 5^{2x} - 10.5^x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5^{x_1} = 5 + 2\sqrt{5} \\ 5^{x_2} = 5 - 2\sqrt{5} \end{cases}$$

$$5^{x_1} \cdot 5^{x_2} = 5^{x_1 + x_2} = (5 + 2\sqrt{5})(5 - 2\sqrt{5}) = 5$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = 1$$

Chọn B

Câu 13. Bạn A thả quả bóng cao su từ độ cao 10m theo phương thẳng đứng. Mỗi khi chạm đất nó lại nảy lên theo phương thẳng đứng có độ cao bằng $\frac{3}{4}$ độ cao trước đó. Tính tổng quãng đường bóng đi được đến khi bóng dừng hẳn.

- A. 40 m. B. 70 m. C. 50 m. D. 80 m.

Lời giải

Chọn B

Các quãng đường khi bóng đi xuống tạo thành một cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = 10$ và $q = \frac{3}{4}$.

$$\text{Tổng các quãng đường khi bóng đi xuống là } S = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{10}{1 - \frac{3}{4}} = 40.$$

$$\text{Tổng quãng đường bóng đi được đến khi bóng dừng hẳn } 2S - 10 = 70.$$

Câu 14. Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh có tên gọi khác nhau, gồm 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ thành một hàng ngang (trong đó có một học sinh nam tên Dũng và một học sinh nữ tên Lan). Xác suất để giữa hai học sinh nữ liên tiếp có đúng hai học sinh nam và Dũng luôn đứng cạnh Lan bằng

- A. $\frac{1}{210}$. B. $\frac{1}{2520}$. C. $\frac{1}{840}$. D. $\frac{1}{1260}$.

Lời giải

Xếp 10 học sinh thành hàng có: $10!$ (cách) $\Rightarrow n(\Omega) = 10!$

Gọi A “Giữa hai học sinh nữ liên tiếp có đúng hai học sinh nam và Dũng luôn đứng cạnh Lan”

TH1: Xếp Lan đứng đầu hàng (hoặc cuối hàng).

+ Xếp ba bạn nữ còn lại có: $3!$ (cách), (bốn bạn nữ tạo ra các vách ngăn).

+ Xếp Dũng đứng cạnh Lan có: 1 (cách).

+ Xếp 5 bạn nam còn lại vào 5 vị trí xen kẽ giữa 2 bạn nữ sao cho giữa hai nữ có hai nam có: $5!$ (cách)

$\Rightarrow$ Có: $2.3!.5! = 1440$ (cách).

TH2: Xếp Lan không đứng đầu hàng (hoặc cuối hàng).

+ Xếp bốn bạn nữ thành hàng sao cho Lan đứng thứ 2 (hoặc thứ 3) có: $2.3!$ (cách).

+ Xếp Dũng đứng cạnh Lan có: 2 (cách).

+ Xếp 5 bạn nam còn lại vào 5 vị trí xen kẽ giữa 2 bạn nữ sao cho giữa hai nữ có hai nam có: $5!$ (cách)

$\Rightarrow$ Có: $2.3!.2.5! = 2880$ (cách).

$\Rightarrow n(A) = 1440 + 2880 = 4320 \Rightarrow P(A) = \frac{4320}{10!} = \frac{1}{840}$

Câu 15. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 4x + m + 2 + 3\sqrt{x^2 - 4x}}{\sqrt{x^2 - 4x} + 2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-4; -1)$?

A. 17.

B. 18.

C. 58.

D. 57.

Lời giải:

Chọn A

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 4x}$. Khi $x \in (-4; -1)$, ta có $t \in (\sqrt{5}; 4\sqrt{2})$.

Ta có $\left(\sqrt{x^2 - 4x}\right)' = \frac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x}} < 0, \forall x \in (-4; -1)$.

Do đó hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - 4x + m + 2 + 3\sqrt{x^2 - 4x}}{\sqrt{x^2 - 4x} + 2}$ nghịch biến trên khoảng $(-4; -1)$

$\Leftrightarrow$ Hàm số $y = g(t) = \frac{t^2 + 3t + m + 2}{t + 2}$ đồng biến trên khoảng $(\sqrt{5}; 4\sqrt{2})$

$\Leftrightarrow g'(t) = \frac{t^2 + 4t + 4 - m}{(t + 2)^2} \geq 0, \forall t \in (\sqrt{5}; 4\sqrt{2})$

$\Leftrightarrow t^2 + 4t + 4 - m \geq 0, \forall t \in (\sqrt{5}; 4\sqrt{2}) \Leftrightarrow m \leq t^2 + 4t + 4, \forall t \in (\sqrt{5}; 4\sqrt{2})$

$\Leftrightarrow m \leq 9 + 4\sqrt{5} \approx 17,9$.

Vậy có 17 giá trị nguyên dương của m .

Câu 16. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 6\text{ cm}$, $BC = BB' = 2\text{ cm}$. Điểm E là trung điểm cạnh BC . Một tứ diện đều $MNPQ$ có hai đỉnh M và N nằm trên đường thẳng EC' , hai đỉnh P và Q nằm trên đường thẳng đi qua điểm B' và cắt đường thẳng AD tại điểm F . Khoảng cách DF bằng

A. 3 cm

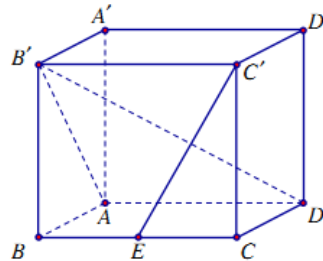
B. 2 cm

C. 6 cm

D. 1 cm

Lời giải

Chọn B



Do tứ diện $MNPQ$ đều nên ta có $MN \perp PQ$ hay $EC' \perp B'F$.

Ta có: $\overrightarrow{B'F} = \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BA'} + k\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BA'} + k\overrightarrow{B'C'}$.

Và $\overrightarrow{EC'} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CC'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B'C'} - \overrightarrow{B'B}$.

Khi đó $\overrightarrow{EC'} \cdot \overrightarrow{B'F} = -B'B^2 + \frac{k}{2}B'C'^2 = -4 + \frac{k}{2} \cdot 4 = 0 \Rightarrow k = 2$.

Vậy $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AD}$ suy ra D là trung điểm của AF . Do đó $DF = BC = 2\text{ cm}$.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;3;-1)$, $B(2;3;2)$, $C(-1;0;2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxz) để $S = |\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MC}| + |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất.

A. $M\left(-1;0;\frac{7}{3}\right)$.

B. $M(0;3;0)$.

C. $M\left(1;0;\frac{7}{3}\right)$.

D. $M\left(-\frac{1}{2};0;2\right)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , suy ra $G(1;2;1)$.

Gọi $H(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{HA} - 4\overrightarrow{HC} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2-x=4(-1-x) \\ 3-y=4(0-y) \\ -1-z=4(2-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow H(-2;-1;3).$$

Nhận thấy G và H nằm về hai phía đối với mặt phẳng (Oxz) ; $HG = \sqrt{22}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S &= |\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MC}| + |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| \\ &= |\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA} - 4\overrightarrow{MH} - 4\overrightarrow{HC}| + |\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}| = |-3\overrightarrow{MH}| + |3\overrightarrow{MG}| \\ &= 3(MH + MG) \geq 3GH = 3\sqrt{22}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi H, M, G thẳng hàng theo thứ tự.

Lại do $M \in (Oxz)$ nên S đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của đường thẳng GH với mặt phẳng (Oxz) .

Vậy $M\left(-1;0;\frac{7}{3}\right)$.

Câu 18. Có bao nhiêu giá trị nguyên của y để tồn tại đúng 5 số nguyên x thỏa mãn bất phương trình $3^{\log(x^2-x+3)} < (x+y)^{\log 3}$

A. 5.

B. 7.

C. 6.

D. 10.

Lời giải:

Chọn A.

ĐK: $x+y > 0$

$$3^{\log(x^2-x+3)} < (x+y)^{\log 3} \Leftrightarrow \log(x^2-x+3) \cdot \log 3 < \log 3 \cdot \log(x+y)$$

$$\Leftrightarrow \log(x^2-x+3) < \log(x+y)$$

$$\Leftrightarrow x^2-x+3 < x+y \Leftrightarrow x^2-2x+3-y < 0$$

$$-\sqrt{y-2} < x-1 < \sqrt{y-2}$$

Để tồn tại đúng 5 giá trị nguyên của x thì $2 < \sqrt{y-2} \leq 3 \Leftrightarrow 6 < y \leq 11$.

Vậy có 5 giá trị của y .

Câu 19. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng φ , với $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

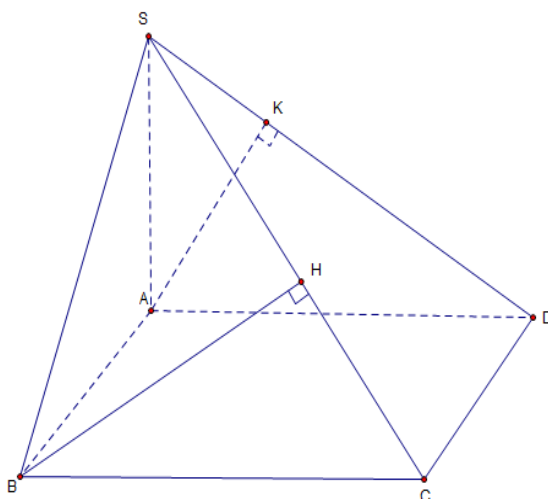
B. $a^3\sqrt{2}$.

C. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

D. $\frac{2a^3}{3}$.

Lời giải :

Chọn A



$$\text{Theo giả thiết } \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Đặt $AD = BC = x > 0$, dựng $AK \perp SD$ tại K , $BH \perp SC$ tại H

$$\text{Ta có: } \begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AK \quad (1)$$

Mặt khác $AK \perp SD \quad (2)$. Từ (1) và (2) $\Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK = d_{(A,(SCD))}$.

$$\text{Do } AB \parallel (SCD) \Rightarrow d_{(A,(SCD))} = d_{(B,(SCD))} = AK = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

$$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow BH = \frac{BS \cdot BC}{\sqrt{BS^2 + BC^2}} = \frac{a\sqrt{2}x}{\sqrt{2a^2 + x^2}}$$

Khi đó:

$$\sin \varphi = \frac{d_{(B,(SCD))}}{BH} = \frac{\frac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}}}{\frac{a\sqrt{2}x}{\sqrt{2a^2 + x^2}}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2 + x^2} = 3\sqrt{2a^2 + x^2} \Leftrightarrow x = a\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot a^2 \sqrt{2} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}.$$

Câu 20. Từ các chữ số 0,1,2,3,4,5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên x , biết rằng $x \neq 0$, x chia hết cho 6 và $x < 3 \cdot 10^7$.

A. 139967.

B. 139968.

C. 138037.

D. 267400.

Lời giải:

Chọn A

Ta có: $x < 3 \cdot 10^7 = 30.000.000$ nên x có tối đa 8 chữ số.

Để dễ đếm, nếu x có các chữ số nhỏ hơn 8, ta chèn các chữ số 0 vào bên trái của x cho đủ 8 chữ số, như thế ta xem x là 1 số có 8 chữ số lấy từ 0,1,2,3,4,5.

x chia hết cho 6 nên x là số chẵn và chia hết cho 3.

Đặt $x = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8}$. Trước tiên ta đếm từ a_1 đến a_6 và a_8 là chữ số chẵn, chừa lại a_7 để đếm sau.

Có 3 cách chọn a_1 (do $a_1 < 3$), có 3 cách chọn a_8 (do $a_8 \in \{0; 2; 4\}$), có 6 cách chọn a_2 , có 6 cách chọn a_3 , có 6 cách chọn a_4 , có 6 cách chọn a_5 , có 6 cách chọn a_6 .

Xét tổng $a_1 + a_2 + \dots + a_6 + a_8$. Ta có 3 trường hợp:

Trường hợp 1: $a_1 + a_2 + \dots + a_6 + a_8$ chia hết cho 3, ta chọn a_7 là 0 hoặc 3.

Trường hợp 2: $a_1 + a_2 + \dots + a_6 + a_8$ chia cho 3 dư 1, ta chọn a_7 là 2 hoặc 5.

Trường hợp 3: $a_1 + a_2 + \dots + a_6 + a_8$ chia cho 3 dư 2, ta chọn a_7 là 1 hoặc 4.

Như vậy a_7 luôn có 2 cách chọn.

Vậy có tất cả: $3 \cdot 3 \cdot 6^5 \cdot 2 = 139968$ số, do $x \neq 0$ nên còn: $139968 - 1 = 139967$ số.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 21 đến câu 26. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng (Đ) hoặc sai (S).

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O , các đỉnh $B(m;0;0)$, $D(0;m;0)$, $A'(0;0;n)$ với $m, n > 0$ và $m+n=4$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC' .

a) Tọa độ của điểm C là $C(m;m;n)$.

b) Khi $m=2; n=4$ thì khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng $(A'BD)$ là $d=\frac{4}{3}$.

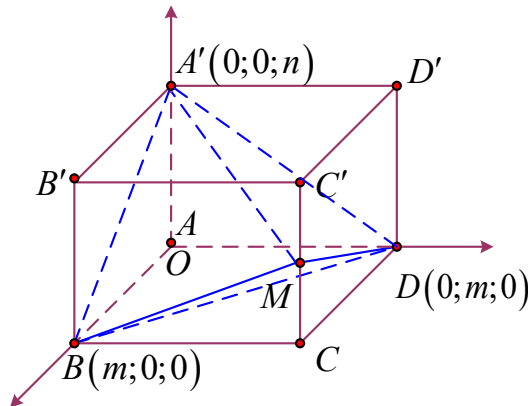
c) Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\frac{3}{2}$ lần khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng $(A'BD)$.

d) Thể tích tứ diện $BDA'M$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{64}{27}$.

Lời giải

a) Tọa độ của điểm C là $C(m;m;0)$.

Chọn SAI.



$$d(C; (A'BD)) = d(A; (A'BD)) = h$$

b) Ta có $\Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} = \frac{9}{16}$
 $\Rightarrow h = \frac{4}{3}$.

Chọn ĐÚNG.

c) Gọi I là trung điểm của BD , gọi K là giao điểm của $A'C$ và $C'C$. Suy ra $C'C \cap (A'BD) = K$. Ta có $MK = \frac{3}{2}CK \Rightarrow d(M; (A'BD)) = \frac{3}{2}d(C; (A'BD))$

Chọn ĐÚNG.

d) Ta chia khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ thành các hình chóp có thể tích $V_{M.BCD} = V_1$, $V_{B.B'C'A'} = V_2$, $V_{A'.BCM} = V_3$, $V_{A'.MDC'} = V_4$, $V_{D.A'D'C'} = V_5$, $V_{A'.ABD} = V_6$ và $V_{BDA'M} = V_7$. Khi đó, ta có:

$$V = V_{ABCD.A'B'C'D'} = m^2 \cdot n = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7. \quad \text{Trong đó} \quad V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{2} m^2 = \frac{1}{12} V;$$

$$V_2 = \frac{1}{3} n \cdot \frac{1}{2} m^2 = \frac{1}{6} V; \quad V_3 = \frac{1}{3} m \cdot \frac{1}{4} m \cdot n = \frac{1}{12} V; \quad V_4 = \frac{1}{12} V; \quad V_5 = \frac{1}{6} V; \quad V_6 = \frac{1}{6} V.$$

$$\text{Suy ra } V_{BDA'M} = V_7 = V - (V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6) = V - \frac{3}{4} V = \frac{1}{4} V = \frac{1}{4} m^2 n;$$

$$\text{do } m + n = 4 \Rightarrow n = 4 - m \Rightarrow$$

$$V_{BDA'M} = V_7 = \frac{1}{4} m^2 (4 - m) = \frac{1}{4} (4m^2 - m^3).$$

Xét hàm số $V_7 = \frac{1}{4} (4m^2 - m^3)$ xác định và liên tục trên $[0; 4]$:

$$(V_7)' = 2m - \frac{3}{4} m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \in [0; 4] \\ m = \frac{8}{3} \in [0; 4] \end{cases}, \quad V_7(0) = 0, \quad V_7\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{64}{27}, \quad V_7(4) = 0. \quad \text{Vậy } \max_{[0; 4]} V_7 = \frac{64}{27}.$$

Chọn ĐÚNG.

Câu 2. Giá đóng cửa của một cổ phiếu là giá của cổ phiếu đó cuối một phiên giao dịch. Bảng sau thống kê giá đóng cửa (đơn vị: nghìn đồng) của hai mã cổ phiếu A và B trong 50 ngày giao dịch liên tiếp.

Giá đóng cửa	[120;122)	[122;124)	[124;126)	[126;128)	[128;130)
Cổ phiếu A	8	9	12	10	11
Cổ phiếu B	16	4	3	6	21

a) Xét mẫu số liệu của cổ phiếu A ta có phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là 7,5216

b) Xét mẫu số liệu của cổ phiếu B ta có số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là 115,28.

c) Xét mẫu số liệu của cổ phiếu B ta có độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là $\sqrt{15,4096}$

d) Người ta có thể dùng phương sai và độ lệch chuẩn để so sánh mức độ rủi ro của các loại cổ phiếu có giá trị trung bình gần bằng nhau. Cổ phiếu nào có phương sai, độ lệch chuẩn cao hơn thì được coi là có độ rủi ro lớn hơn. Theo quan điểm trên, thì cổ phiếu A có độ rủi ro thấp hơn cổ phiếu B .

Lời giải

Ta có bảng thống kê giá đóng cửa theo giá trị đại diện:

Giá đóng cửa	[120; 122)	[122; 124)	[124; 126)	[126; 128)	[128; 130)
Giá trị đại diện	121	123	125	127	129
Cổ phiếu A	8	9	12	10	11
Cổ phiếu B	16	4	3	6	21

a) Xét mẫu số liệu của cổ phiếu A :

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\bar{x}_1 = \frac{8.121 + 9.123 + 12.125 + 10.127 + 11.129}{50} = 125,28.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S_1^2 = \frac{1}{50} (8.121^2 + 9.123^2 + 12.125^2 + 10.127^2 + 11.129^2) - (125,28)^2 = 7,5216$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là $S_1 = \sqrt{S_1^2} = \sqrt{7,5216}$.

Chọn ĐÚNG.

b) Xét mẫu số liệu của cổ phiếu B :

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\bar{x}_2 = \frac{16.121 + 4.123 + 3.125 + 6.127 + 21.129}{50} = 125,28.$$

Chọn SAI.

c) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S_2^2 = \frac{1}{50} (16.121^2 + 4.123^2 + 3.125^2 + 6.127^2 + 21.129^2) - (125,48)^2 = 12,4096.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là $S_2 = \sqrt{S_2^2} = \sqrt{12,4096}$.

Chọn SAI.

d) Theo kết quả tính toán ở phần c) ta có:

Phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm của cổ phiếu A : lần lượt là:

$$S_1^2 = 7,5216, S_1 = \sqrt{S_1^2} = \sqrt{7,5216}.$$

Phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm của cổ phiếu B : lần lượt là:

$$S_2^2 = 12,4096, S_2 = \sqrt{S_2^2} = \sqrt{12,4096}.$$

Dễ thấy $S_1 < S_2$ vậy nếu đánh giá độ rủi ro theo phương sai và độ lệch chuẩn thì cổ phiếu A có độ rủi ro thấp hơn cổ phiếu B .

Chọn ĐÚNG.

Câu 3. Cho phương trình $\frac{\cos x \cdot \cos 2x - m \cdot \cos x + \cos 2x - m}{\sin x} = 0$ với m là tham số.

a) Điều kiện xác định của phương trình là $x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

b) Với $m = 1$, phương trình đã cho có 2 nghiệm thuộc $[0; 2\pi]$

c) Khi $m = \frac{1}{2}$ các nghiệm của phương trình được biểu diễn trên đường tròn lượng giác là một đa giác. Diện tích đa giác đó bằng $\sqrt{3}$.

d) Có hai giá trị m để $4m$ nguyên và phương trình có đúng 2 nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.

Lời giải

Câu 6	a)	b)	c)	d)
	Đ	S	Đ	Đ

a) Điều kiện: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$

b) Với $m=1$, ta có:

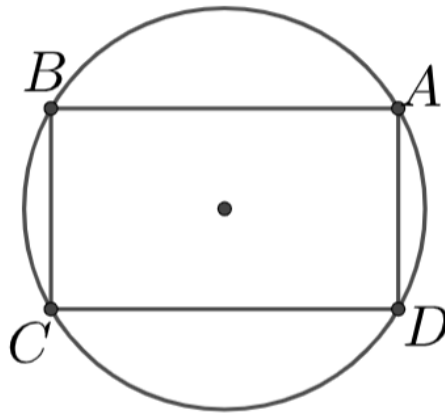
$$\frac{\cos x \cdot \cos 2x - \cos x + \cos 2x - 1}{\sin x} = 0 \Leftrightarrow \frac{(\cos x + 1)(\cos 2x - 1)}{\sin^2 x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2\sin^2 x = 1 \\ \cos x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0(l) \\ \cos x = -1(l) \end{cases}$$

Vậy phương trình vô nghiệm trên $[0; 2\pi]$.

c) Với $m = \frac{1}{2}$, Ta có $\frac{(\cos x + 1)(\cos 2x - \frac{1}{2})}{\sin x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \text{ (loại)} \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \text{ (2)} \end{cases}$.

Ta có: $\cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + l\pi \end{cases}$



Khi đó, các điểm biểu diễn của nghiệm là A, B, C, D

Diện tích $S_{ABCD} = AB \cdot BC = \sqrt{3} \cdot 1 = \sqrt{3}$.

d) Với $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$: không có nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.

Với $\cos 2x = m$, đặt $2x = t \Rightarrow t \in \left[0; \frac{4\pi}{3}\right]$

Trên $\left[0; \frac{4\pi}{3}\right]$, phương trình $\cos t = m$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0; \frac{4\pi}{3}\right]$ khi

$$-1 < m \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -4 < 4m \leq -2 \text{ nên } 4m \in \{-3; -2\}$$

Vậy. **d) đúng.**

Câu 4. Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là một tam giác vuông cân tại B , $AB = AA' = 2a$, M là trung điểm cạnh BC .

a) Khoảng cách từ điểm C đến $mp(ABB'A')$ bằng $2a$.

b) Khoảng cách từ điểm A đến $mp(A'BC)$ bằng $a\sqrt{5}$.

c) Khoảng cách từ điểm B đến $mp(ACB')$ bằng $\sqrt{2}a$.

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$ bằng $\frac{3a}{2}$.

Lời giải

a) Vì $CB \perp AB, CB \perp BB' \Rightarrow CB \perp (ABB'A') \Rightarrow d(C, (ABB'A')) = CB = 2a$.

Chọn ĐÚNG.

b)

Vì $ABB'A'$ là hình vuông, gọi

$$O = AB' \cap A'B \Rightarrow AO \perp A'B \quad (1)$$

Theo chứng minh trên có

$$CB \perp (ABB'A') \Rightarrow CB \perp AO \quad (2).$$

Từ

$$(1), (2) \Rightarrow AO \perp (A'BC) \Rightarrow d(A, (A'BC)) = AO = a\sqrt{2}.$$

Chọn SAI.

c) Gọi D là trung điểm cạnh AC , kẻ $BK \perp B'D$ (3)

$$\text{Vì } \begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AC \perp (BDB') \Rightarrow AC \perp BK \quad (4).$$

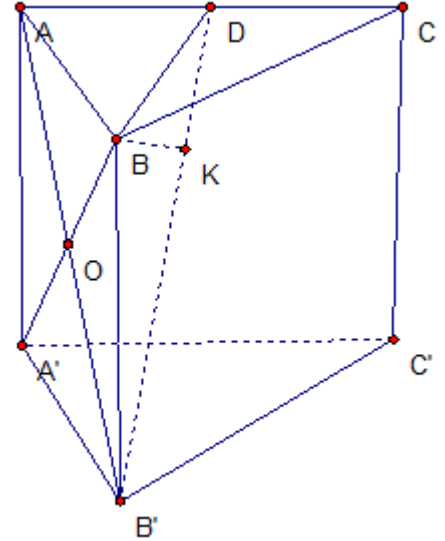
$$\text{Từ } (3), (4) \Rightarrow BK \perp (B'AC) \Rightarrow d(B, (B'AC)) = BK.$$

Xét trong tam giác

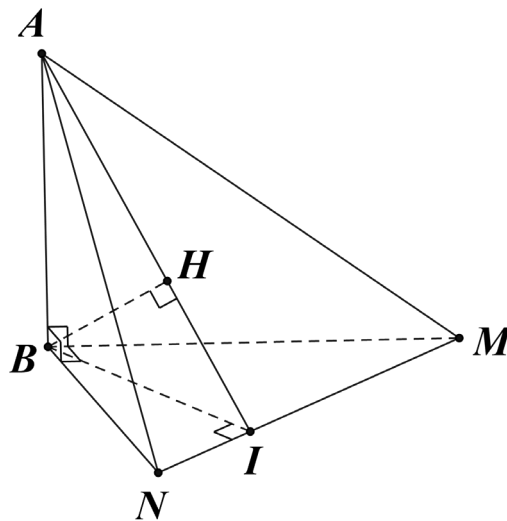
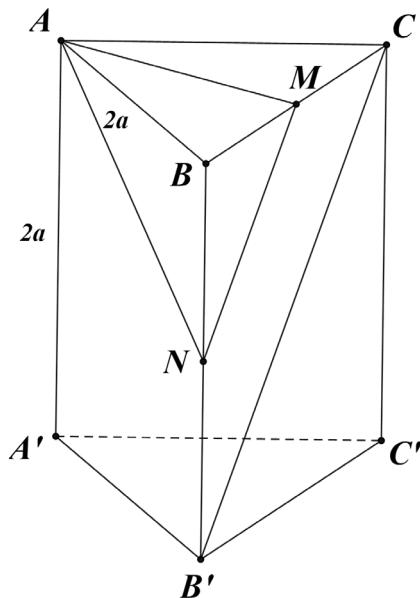
$$B'DB, \frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BD^2} + \frac{1}{BB'^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{3}{4a^2}$$

$$\Rightarrow BK = d(B, (ACB')) = \frac{2\sqrt{3}a}{3}.$$

Chọn SAI.



d)



Gọi N là trung điểm $BB' \Rightarrow MN \parallel B'C \Rightarrow B'C \parallel (AMN)$.

Khi đó $d(AM, B'C) = d(B'C, (AMN)) = d(C, (AMN))$.

Ta có $BC \cap (AMN) = M$ và $MB = MC$ nên $d(C, (ABM)) = d(B, (ABM))$.

Gọi h là khoảng cách từ B đến mặt phẳng (ABM) . Tứ diện $BAMN$ có BA, BM, BN đôi một

vuông góc nên: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BN^2}$

$$AB = 2a = BC.$$

$$BN = \frac{1}{2}BB' = \frac{1}{2}AA' = \frac{2a}{2} = a.$$

$$BM = \frac{1}{2}BC = a.$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{h^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow h^2 = \frac{4a^2}{9} \Rightarrow h = \frac{2a}{3}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$ bằng $\frac{2a}{3}$.

Chọn SAI.

Câu 5. Một bài thi trắc nghiệm gồm 12 câu hỏi, mỗi câu hỏi cho 5 câu trả lời trong đó chỉ có 1 câu trả lời đúng. Giả sử mỗi câu trả lời đúng được 4 điểm và mỗi câu trả lời sai bị trừ 1 điểm. Một học sinh kém làm bài bằng cách chọn hù họa 1 câu trả lời.

a) Học sinh đó làm đúng 6 câu và sai 6 câu thì được 12 điểm.

b) Xác suất để học sinh đó được 13 điểm là $\frac{4^7}{5^{12}}$.

c) Xác suất để học sinh đó được 3 điểm là $\frac{4^9}{5^{12}} \cdot C_{12}^3$.

d) Xác suất để học sinh đó được điểm âm là $\frac{65}{8} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{12}$.

Lời giải

a) Học sinh đó làm đúng 6 câu và sai 6 câu nên được $6 \cdot 4 - 6 \cdot 1 = 18$ điểm.

Chọn SAI.

b) Gọi x là số câu đúng. Học sinh đó được 13 điểm khi $4x - (12 - x) = 13 \Rightarrow x = 5$ hay học sinh đó làm đúng 5 câu và sai 7 câu.

Vậy xác suất để học sinh đó được 13 điểm là $\left(\frac{1}{5}\right)^5 \cdot C_{12}^5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^7 = \frac{4^7}{5^{12}} \cdot C_{12}^5$.

Chọn SAI.

c) Gọi x là số câu đúng. Học sinh đó được 3 điểm khi $4x - (12 - x) = 3 \Rightarrow x = 3$ hay học sinh đó làm đúng 3 câu và sai 9 câu.

Vậy xác suất để học sinh đó được 3 điểm là $\left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot C_{12}^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^9 = \frac{4^9}{5^{12}} \cdot C_{12}^3$.

Chọn ĐÚNG.

d) Gọi x là số câu đúng. Học sinh đó được điểm âm khi $4x - (12 - x) < 0$

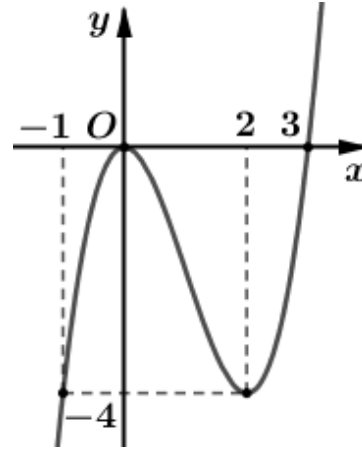
$\Rightarrow x < \frac{12}{5} \Rightarrow x = 0; 1; 2$ hay học sinh đó làm 0 câu đúng, hoặc 1 câu đúng, hoặc 2 câu đúng.

Vậy xác suất để học sinh đó được điểm âm là

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{12} + \frac{1}{5} \cdot C_{12}^1 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{11} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot C_{12}^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{10} = \left(\frac{4}{5}\right)^{12} + 3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{12} + \frac{33}{8} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{12} = \frac{65}{8} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{12}.$$

Chọn ĐÚNG.

Câu 6. Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Các khẳng định sau đây đúng hay sai?



a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

b) Hàm số $g(x) = f(x) + 2025$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.

c) Hàm số $g(x) = f(|x + 2|)$ có 3 điểm cực trị.

d) Phương trình $|f(x) + 4| = m^2 - 3m + 2$ có 4 nghiệm phân biệt khi $m \in \left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}; 1\right) \cup \left(2; \frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right)$.

Lời giải

a) Dựa vào đồ thị hàm số, hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Chọn ĐÚNG.

b) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$. Vậy hàm số $g(x) = f(x) + 2025$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Chọn SAI.

c) Do số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ bằng số điểm cực trị của hàm số $f(|x + m|)$ nên số điểm cực trị của hàm số $f(|x + 2|)$ bằng số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$.

Mà $SDCT\{f(|x|)\} = 2a + 1$ với a là số điểm cực trị dương của hàm số $f(x)$ nên hàm số $f(|x|)$ có 3 điểm cực trị.

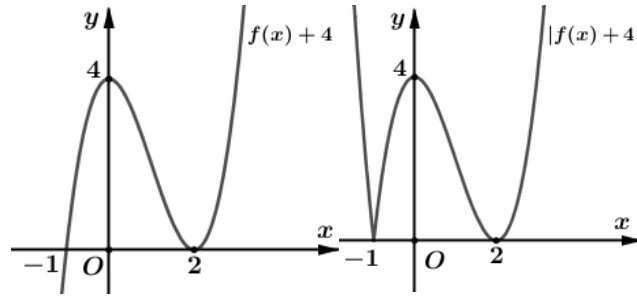
Vậy hàm số $g(x) = f(|x + 2|)$ có 3 điểm cực trị.

Chọn ĐÚNG.

d) Xét hàm số $g(x) = |f(x) + 4|$.

Đồ thị hàm số $g(x) = |f(x) + 4|$ có được bằng cách:

- Tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x)$ lên trên 4 đơn vị ta được $f(x)+4$.
- Lấy đối xứng phần phía dưới Ox của đồ thị hàm số $f(x)+4$ qua Ox , ta được đồ thị hàm số $g(x)=|f(x)+4|$.



Phương trình $|f(x)+4|=m^2-3m+2$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y=m^2-3m+2$ cắt đồ thị hàm số $g(x)=|f(x)+4|$ tại 4 điểm phân biệt. Từ đồ thị hàm số $g(x)=|f(x)+4|$, ta suy ra phương trình $|f(x)+4|=m^2-3m+2$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m^2-3m+2 < 4$

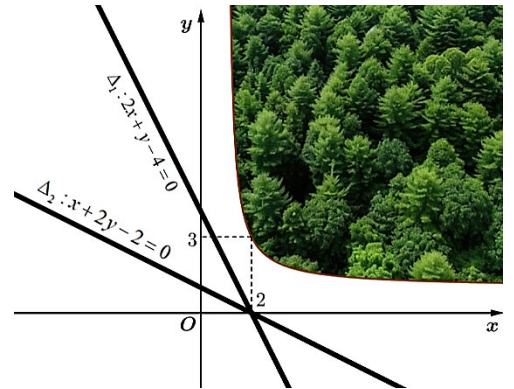
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-3m+2 > 0 \\ m^2-3m+2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty) \\ m \in \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}; \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}; 1\right) \cup \left(2; \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right).$$

Chọn ĐÚNG.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 32 đến câu 37.

Câu 1 Mảnh đất vườn của nhà anh Điệp có một phần ranh giới cũng là một phần đường cong (C): $y = \frac{x+a}{x+b}$, bao quanh nó là sông nước. Với hệ trục tọa độ Oxy thích hợp, đơn vị trên mỗi trục là 10 mét

thì đường cong (C) đi qua điểm $(2; 3)$ và có đường tiệm cận đứng $x=1$. Hàng ngày anh Điệp phải dùng thuyền máy để vận chuyển trái cây từ khu vườn của mình đến hai tuyến đường $\Delta_1: 2x+y-4=0$ và $\Delta_2: x+2y-2=0$ cho những người lái buôn từ nơi khác đến. Anh Điệp cần xác định một vị trí $M(x_0; y_0)$ thuộc khu vườn của mình để tổng các khoảng cách từ vị trí M đó đến hai tuyến đường Δ_1, Δ_2 là bé nhất. Hỏi khoảng cách từ vị trí được chọn làm gốc tọa độ đến điểm M là bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng phần chục)?



Hướng dẫn giải

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-b=1 \Rightarrow b=-1$.

Khi đó đồ thị hàm số $y = \frac{x+a}{x-1}$ qua $(2; 3) \Rightarrow 3 = \frac{2+a}{2-1} \Rightarrow a=1$; hàm số là $y = \frac{x+1}{x-1}$ (C).

Gọi $M\left(x_0; \frac{x_0+1}{x_0-1}\right) \in (C)$, $x_0 > 1$. Tổng khoảng cách từ M đến hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 là

$$d = d(M, \Delta_1) + d(M, \Delta_2) = \frac{\left|2x_0 + \frac{x_0+1}{x_0-1} - 4\right|}{\sqrt{5}} + \frac{\left|x_0 + 2 \cdot \frac{x_0+1}{x_0-1} - 2\right|}{\sqrt{5}};$$

$$\sqrt{5d} = \left| \frac{2x_0^2 - 5x_0 + 5}{x_0 - 1} \right| + \left| \frac{x_0^2 - x_0 + 4}{x_0 - 1} \right| = \frac{2x_0^2 - 5x_0 + 5}{x_0 - 1} + \frac{x_0^2 - x_0 + 4}{x_0 - 1} \quad (\text{vì } \begin{cases} 2x_0^2 - 5x_0 + 5 > 0 \\ x_0 - 1 > 0 \\ x_0^2 - x_0 + 4 > 0 \end{cases}, \forall x_0 > 1).$$

$$\text{Đặt } \sqrt{5d} = \frac{3x_0^2 - 6x_0 + 9}{x_0 - 1} = g(x) \text{ với } x > 1.$$

$$\text{Ta có: } g'(x) = \frac{3x_0^2 - 6x_0 - 3}{(x_0 - 1)^2}; \quad g'(x) = 0 \Rightarrow 3x_0^2 - 6x_0 - 3 = 0 \Rightarrow x_0 = 1 + \sqrt{2} > 1.$$

$$\text{Ta có: } \min_{(1; +\infty)} g(x) = g(1 + \sqrt{2}) = 6\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{5d} \geq 6\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{d \geq \frac{6\sqrt{10}}{5}}.$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi } x_0 = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow M(1 + \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}).$$

$$\text{Khoảng cách } OM \text{ trên thực tế là } 10 \times \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2 + (1 + \sqrt{2})^2} = 10 \times (1 + \sqrt{2})\sqrt{2} \approx \boxed{34,1} \text{ mét.}$$

Câu 2. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho nhà máy B . Hai nhà máy thỏa thuận rằng: Hàng tháng nhà máy A cung cấp cho nhà máy B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x) = 45 - 0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng bao gồm:

- Chi phí cố định: 100 triệu đồng.
- Cho phí cho mỗi tấn sản phẩm làm ra: 30 triệu đồng.

Hỏi nhà máy A cần bán cho nhà máy B bao nhiêu tấn sản phẩm mỗi tháng để lợi nhuận thu được là lớn nhất? (Làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Đáp số: 70,7

Hướng dẫn giải

Số tiền mà nhà máy A thu được từ việc bán x tấn sản phẩm ($0 \leq x \leq 100$) cho nhà máy B là:

$$R(x) = x \cdot P(x) = x(45 - 0,001x^2) = 45x - 0,001x^3 \text{ (triệu đồng)}.$$

Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ (triệu đồng).

Lợi nhuận (triệu đồng) mà nhà máy A thu được là:

$$P(x) = R(x) - C(x) = 45x - 0,001x^3 - (100 + 30x) = -0,001x^3 + 15x - 100$$

Xét hàm số $P(x) = -0,001x^3 + 15x - 100$ với ($0 \leq x \leq 100$) ta có:

$$P'(x) = -0,003x^2 + 15; \quad P'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 5000 \Rightarrow x = 50\sqrt{2}.$$

$$\text{Ta có } P(0) = -100; \quad P(50\sqrt{2}) = 500\sqrt{2} - 100 \approx 607; \quad P(100) = 400.$$

Vậy nhà máy A thu được lợi nhuận lớn nhất khi bán khoảng $\boxed{50\sqrt{2} \approx 70,7}$ tấn sản phẩm cho nhà máy B mỗi tháng.

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(4;1;5), B(3;0;1), C(-1;2;0)$ và điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - 5\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$ lớn nhất. Tính $P = a - 2b + 4c$.

Lời giải

$$+ \text{Đặt } Q = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - 5\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}.$$

$$\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right)^2 = MA^2 + MB^2 - 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}(MA^2 + MB^2 - AB^2).$$

$$\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right)^2 = MB^2 + MC^2 - 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} \Rightarrow 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = MB^2 + MC^2 - BC^2.$$

$$\left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}\right)^2 = MC^2 + MA^2 - 2\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} \Rightarrow \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}(MC^2 + MA^2 - AC^2).$$

$$\Rightarrow Q = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - 5\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$$

$$= \frac{1}{2}(MA^2 + MB^2 - AB^2) + MB^2 + MC^2 - BC^2 - \frac{5}{2}(MC^2 + MA^2 - AC^2)$$

$$= -2MA^2 + \frac{3}{2}MB^2 - \frac{3}{2}MC^2 - \frac{1}{2}AB^2 - BC^2 + \frac{5}{2}AC^2.$$

$-\frac{1}{2}AB^2 - BC^2 + \frac{5}{2}AC^2$ không đổi nên Q lớn nhất khi $T = -2MA^2 + \frac{3}{2}MB^2 - \frac{3}{2}MC^2$ đạt giá trị lớn nhất.

$$+ T = -2MA^2 + \frac{3}{2}MB^2 - \frac{3}{2}MC^2.$$

$$\text{Gọi } E \text{ là điểm thỏa mãn } -2\overrightarrow{EA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{EB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{EC} = \vec{0}.$$

$$\Leftrightarrow -4\overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{EB} - 3\overrightarrow{EC} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{EA} = 3\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{EA} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CB}.$$

$$\Rightarrow E\left(1; \frac{5}{2}; \frac{17}{4}\right).$$

$$T = -2MA^2 + \frac{3}{2}MB^2 - \frac{3}{2}MC^2 = -2\left(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB}\right)^2 - \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EC}\right)^2$$

$$= -2ME^2 - 2EA^2 + \frac{3}{2}EB^2 - \frac{3}{2}EC^2 \leq -2EA^2 + \frac{3}{2}EB^2 - \frac{3}{2}EC^2.$$

Vì $-2EA^2 + \frac{3}{2}EB^2 - \frac{3}{2}EC^2$ không đổi nên T đạt giá trị lớn nhất khi $ME = 0 \Rightarrow M \equiv E$.

$$\Rightarrow M\left(1; \frac{5}{2}; \frac{17}{4}\right).$$

$$P = a - 2b + 4c = 1 - 2 \cdot \frac{5}{2} + 4 \cdot \frac{17}{4} = 13.$$

Câu 4 . Cho hai số thực $a, b > 1$ sao cho luôn tồn tại số thực x ($0 < x \neq 1$) thỏa mãn $a^{\log_b x} = b^{\log_a x^2}$.
 Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \ln^2 a + \ln^2 b - \ln(ab)$. (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục)

Lời giải

Có $1 < a, b, 0 < x \neq 1$.

$$\text{Có } a^{\log_b x} = b^{\log_a x^2} \Leftrightarrow a^{\log_b a \cdot \log_a x} = b^{2 \log_a x} \Leftrightarrow a^{\log_a x \cdot \log_b a} = b^{2 \log_a x}.$$

$$\Leftrightarrow x^{\log_b a} = x^{2 \log_a b} \Leftrightarrow \log_b a = 2 \log_a b \Leftrightarrow \log_b a = 2 \frac{1}{\log_b a}.$$

$$\Leftrightarrow (\log_b a)^2 = 2 \Leftrightarrow \log_b a = \sqrt{2} \text{ (do } 1 < a, b, \text{ nên } \log_b a > 0) \Leftrightarrow a = b^{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Có } P = \ln^2 a + \ln^2 b - \ln(ab) = (\ln b^{\sqrt{2}})^2 + \ln^2 b - \ln(b^{\sqrt{2}} b).$$

$$= 2 \ln^2 b + \ln^2 b - (\sqrt{2} + 1) \ln b = 3 \ln^2 b - (\sqrt{2} + 1) \ln b.$$

Đặt $t = \ln b, t > 0$ (do $b > 1$).

Xét hàm số $y = f(t) = 3t^2 - (\sqrt{2} + 1)t$, với $t > 0$.

$$\text{Có } f'(t) = 6t - (\sqrt{2} + 1), f'(t) = 0 \Leftrightarrow 6t - (\sqrt{2} + 1) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{2} + 1}{6} > 0$$

Bảng biến thiên

t	0	$\frac{\sqrt{2}+1}{6}$	$+\infty$
$f'(t)$	—	0	+
$f(t)$	0	$-\frac{(3+2\sqrt{2})}{12}$	$+\infty$

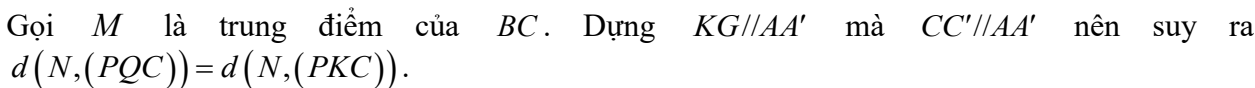
Dựa vào bảng biến thiên có $\min P = \min_{(0; +\infty)} f(t) = -\frac{3+2\sqrt{2}}{12} \approx -0,5$ khi $t = \frac{\sqrt{2}+1}{6}$.

Vậy đáp số: - 0,5

Câu 5 : Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , cạnh bên $AA' = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm G của tam giác ABC . Gọi P, Q, N lần lượt là trung điểm của AB, CC' và $A'G$. Tính khoảng cách từ N đến mặt phẳng (PQC) khi $a = 2$ (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải



$$\text{Lại có } \frac{A'K}{MK} = \frac{AG}{GM} = 2 \Rightarrow \frac{d(A', (PKC))}{d(M, (PKC))} = \frac{A'K}{MK} = 2 \Rightarrow d(A', (PKC)) = 2d(M, (PKC)).$$

$$\text{Ta có } \frac{d(M, (PKC))}{d(H, (PKC))} = \frac{MG}{HG} = \frac{A'M}{A'K} = \frac{3}{2} \Rightarrow d(M, (PKC)) = \frac{3}{2} d(H, (PKC)).$$

Dựng $HI \perp PC$ và $MJ \perp PC$.

$$\text{C6 } A'G = \sqrt{AA'^2 - AG^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{3} - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Tam giác $A'GM$ có $A'G \parallel KH$ nên $\frac{KH}{A'G} = \frac{MK}{MA'} \Rightarrow KH = A'G \cdot \frac{MK}{MA'} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{9}$.

Tam giác MGC vuông tại M và $MJ \perp MC \Rightarrow \frac{1}{MJ^2} = \frac{1}{MG^2} + \frac{1}{MC^2} \Rightarrow MJ = \frac{1}{4}a$.

Lại có $\frac{HI}{MJ} = \frac{HG}{MG} = \frac{2}{3} \Rightarrow HI = \frac{a}{6}$.

$$\frac{1}{d(H, (PKC))^2} = \frac{1}{HI^2} + \frac{1}{KH^2} \Rightarrow d(H, (PKC)) = \frac{a\sqrt{7}}{21}.$$

$$d(N, (PKC)) = \frac{3}{2}d(H, (PKC)) = \frac{a\sqrt{7}}{14}.$$

Khi a= 2 . Đs : 0,38

Câu 6 . Bạn Hoa chọn ngẫu nhiên 3 số phân biệt trong tập hợp $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ và sắp xếp chúng theo thứ tự giảm dần để tạo thành một số gồm ba chữ số. Bạn Bình chọn ngẫu nhiên 3 số phân biệt trong tập hợp $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ và sắp xếp chúng theo thứ tự giảm dần để tạo thành một số gồm ba chữ số. Tìm xác suất sao cho số của Hoa lớn hơn số của Bình (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Đáp án: 0,66

Xét hai trường hợp

Trường hợp 1: Hoa chọn được số 9.

Trong trường hợp này số của Hoa chắc chắn lớn hơn số của Bình.

Xác suất Hoa chọn được số 9 là $\frac{C_8^2}{C_9^3} = \frac{1}{3}$.

Trường hợp 2. Hoa không chọn được số 9.

Xác suất để Hoa không chọn được số 9 là $\frac{C_8^3}{C_9^3} = \frac{2}{3}$.

Trong trường hợp này Hoa chọn số cùng tập với Bình nên xác suất Hoa chọn được số lớn hơn cũng bằng xác suất Bình chọn được số lớn hơn.

Ta tính xác suất để 2 bạn chọn được cùng số:

- Số cách chọn của hai bạn là: $C_8^3 \cdot C_8^3$
- Số cách để Hoa chọn được ba số bất kỳ là C_8^3 ; Ứng với mỗi cách chọn của Hoa thì Bình chỉ có một cách chọn để giống Hoa nên số cách hai người chọn được số giống nhau là C_8^3

Vậy, xác suất để 2 bạn chọn được cùng số là $\frac{C_8^3}{C_8^3 \cdot C_8^3} = \frac{3!}{8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{1}{56}$ nên xác suất để Hoa chọn

được số lớn hơn là: $\frac{1 - \frac{1}{56}}{2} = \frac{55}{112}$.

Do đó xác suất trong trường hợp này là $\frac{2}{3} \cdot \frac{55}{112} = \frac{55}{168}$.

Vậy, xác suất cần tìm là $\frac{1}{3} + \frac{55}{168} = \frac{37}{56}$.

*****HẾT*****

Xem thêm: ĐỀ THI HSG TOÁN 12
<https://toanmath.com/de-thi-hsg-toan-12>