

Mục lục

Chương 1.	LƯỢNG GIÁC	1
Bài 1.	MỘT SỐ LÝ THUYẾT QUAN TRỌNG	1
A	Các công thức thường gặp.....	1
B	HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ.....	4
Bài 2.	MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP THƯỜNG GẶP	6
📁	Dạng toán 1. Phương trình lượng giác $\sin x = a$	6
📁	Dạng toán 2. Phương trình lượng giác $\cos x = a$	6
📁	Dạng toán 3. Phương trình lượng giác $\tan x = a$	7
📁	Dạng toán 4. Phương trình lượng giác $\cot x = a$	7
Chương 2.	DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG. CẤP SỐ NHÂN	9
Bài 1.	MỘT SỐ LÝ THUYẾT CƠ BẢN	9
A	CẤP SỐ CỘNG.....	9
B	CẤP SỐ NHÂN.....	10
Chương 3.	GIỚI HẠN HÀM SỐ	12
Bài 1.	GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ	12
Bài 2.	GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ	14
Bài 3.	HÀM SỐ LIÊN TỤC	16
Chương 4.	HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT	18
Bài 1.	MỘT SỐ KIẾN THỨC QUAN TRỌNG	18
A	Lũy thừa.....	18
B	Hàm số mũ.....	19
C	Logarit.....	20
D	Phương trình mũ và phương trình logarit.....	20
📁	Dạng toán 1. Phương trình mũ và phương trình logarit cơ bản.....	20
📁	Dạng toán 2. Phương pháp đưa về cùng cơ số.....	21
📁	Dạng toán 3. Phương pháp đặt ẩn phụ.....	21
📁	Dạng toán 4. Phương pháp mũ hóa và logarit hóa.....	21
📁	Dạng toán 1. Bất phương trình mũ và bất phương trình logarit cơ bản.....	22

	✎ Dạng toán 2. Đưa về cùng cơ số để giải bất phương trình.....	22
	✎ Dạng toán 3. Đặt ẩn phụ.....	23
E	Một số dạng toán thực tế hay gặp.....	23
	✎ Dạng toán 1. Bài toán lãi đơn.....	23
	✎ Dạng toán 2. Bài toán lãi kép.....	23
	✎ Dạng toán 3. Tiền gửi vào hàng tháng.....	24
	✎ Dạng toán 4. Gửi tiền vào ngân hàng và rút lãi hàng tháng.....	24
	✎ Dạng toán 5. Vay vốn trả góp.....	24
	✎ Dạng toán 6. Tăng lương.....	24
	✎ Dạng toán 7. Lãi kép liên tục.....	25
	✎ Dạng toán 1. Bài toán tăng trưởng dân số.....	25
	✎ Dạng toán 2. Bài toán tăng trưởng quần thể, số lượng loài sinh vật.....	25
Chương 5.	ĐẠO HÀM	26
	Bài 1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ ĐẠO HÀM	26
	Bài 2. CÁC CÔNG THỨC QUAN TRỌNG	28
Chương 6.	ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ	30
	Bài 1. SỰ ĐỒNG BIẾN NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ	30
	✎ Dạng toán 1. Tìm khoảng đơn điệu, cực trị của hàm số cho trước.....	32
	✎ Dạng toán 2. Dạng 2: Tìm tham số m để hàm số đơn điệu trên một khoảng cho trước.....	32
	✎ Dạng toán 3. Dạng toán hàm số bậc ba đơn điệu chứa tham số m	32
	Bài 2. CỰC TRỊ HÀM SỐ	34
A	Một số khái niệm cơ bản.....	34
B	Một số dạng bài liên quan đến cực trị.....	36
	✎ Dạng toán 1. Tìm điều kiện để hàm số có cực trị thỏa mãn đề bài.....	36
	✎ Dạng toán 2. Tìm điều kiện để hàm số có 2 cực trị cùng dấu, trái dấu.....	37
	✎ Dạng toán 3. Tìm điều kiện để hàm số có cực trị nằm cùng, khác phía so với đường thẳng cho trước.....	38
	✎ Dạng toán 4. Bài toán liên quan phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị hoặc khoảng cách.....	39
	✎ Dạng toán 5. Dạng dành cho các kì thi ĐGNL - Hàm bậc bốn trùng phương.....	40
	Bài 3. GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT - GIÁ TRỊ LỚN NHẤT	42
A	Một số khái niệm cơ bản.....	42

B	Phương pháp tìm GTLN - GTNN.....	42
Bài 4.	ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ	44
A	Đường tiệm cận ngang.....	44
B	Đường tiệm cận đứng.....	44
C	Đường tiệm cận xiên.....	45
	📁 Dạng toán 1. Bài toán tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.....	45
	📁 Dạng toán 2. Bài toán tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.....	45
Bài 5.	Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số	47
A	Sơ đồ khảo sát hàm số.....	47
B	Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số đa thức bậc ba.....	47
C	KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ PHÂN THỨC HỮU TỈ.....	48
Bài 6.	Ứng dụng đạo hàm để giải quyết một số vấn đề liên quan đến thực tiễn	51
A	TỐC ĐỘ THAY ĐỔI CỦA MỘT ĐẠI LƯỢNG.....	51
B	MỘT VÀI BÀI TOÁN TỐI ƯU HÓA ĐƠN GIẢN.....	51
Chương 7.	NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN	53
Bài 1.	Nguyên hàm	53
A	Nguyên hàm của một hàm số.....	53
B	Tính chất cơ bản của nguyên hàm.....	54
C	Nguyên hàm của một số hàm số thường gặp.....	54
	📁 Dạng toán 1. Tìm nguyên hàm của hàm số lũy thừa.....	55
	📁 Dạng toán 2. Nguyên hàm của hàm số lượng giác.....	56
	📁 Dạng toán 3. Nguyên hàm của hàm số mũ.....	56
Bài 2.	Tích phân	57
A	Khái niệm tích phân.....	57
B	Tính chất của tích phân.....	58
	📁 Dạng toán 1. Tích phân của các hàm số cơ bản. Tính chất của tích phân.....	58
	📁 Dạng toán 2. Tích phân của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối.....	58
	📁 Dạng toán 3. Tích phân của hàm số cho bởi nhiều công thức.....	59
	📁 Dạng toán 4. Ứng dụng tích phân giải bài toán thực tế.....	59
Bài 3.	Ứng dụng hình học của tích phân	61

A	Ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng.....	61
B	Ứng dụng tích phân để tính thể tích vật thể.....	61
📁	Dạng toán 1. Ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng.....	63
📁	Dạng toán 2. Ứng dụng tích phân để tính thể tích khối tròn xoay.....	64

Chương 8. VECTO VÀ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN 66

Bài 1. Véc-tơ trong không gian 66

A	Véc-tơ trong không gian.....	66
B	Tổng và hiệu của véc-tơ trong không gian.....	67
C	Tích của một số với một véc-tơ trong không gian.....	68
D	Tích vô hướng của hai véc-tơ.....	68

Bài 2. Hệ tọa độ trong không gian 70

A	Hệ tọa độ trong không gian.....	70
B	Tọa độ điểm và tọa độ véc-tơ trong không gian.....	70
C	Hình thành khái niệm tọa độ của véc-tơ trong không gian.....	70

Bài 3. Biểu thức tọa độ của các phép toán véc-tơ 72

A	Biểu thức tọa độ phép cộng hai véc-tơ, phép trừ hai véc-tơ, phép nhân một số với một véc-tơ.....	72
B	Biểu thức tọa độ tích vô hướng.....	72
C	Ứng dụng tích vô hướng.....	73

Bài 4. Phương trình mặt phẳng 74

A	Véc-tơ pháp tuyến và cặp véc-tơ chỉ phương mặt phẳng.....	74
B	Phương trình tổng quát của mặt phẳng.....	74
C	Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng.....	75
D	Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc với nhau.....	75
E	Điều kiện để hai mặt phẳng song song với nhau.....	75
F	Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.....	76
📁	Dạng toán 1. Viết phương trình mặt phẳng khi có vectơ pháp tuyến và một điểm thuộc mặt phẳng.....	76
📁	Dạng toán 2. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và có một cặp vectơ chỉ phương.....	76
📁	Dạng toán 3. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.....	77
📁	Dạng toán 4. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng theo đoạn chắn.....	77

Bài 5. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG 78

A	Vecto chỉ phương của đường thẳng.....	78
B	Phương trình tham số của đường thẳng.....	78
C	Phương trình chính tắc của đường thẳng.....	78
D	Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm.....	78
E	Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng.....	79
F	Góc.....	80
G	Dạng bài tập.....	81
	📁 Dạng toán 1. Xác định các yếu tố cơ bản của đường thẳng trong không gian. Vị trí tương đối trong không gian.....	81
	📁 Dạng toán 2. Viết phương trình đường thẳng đi qua một điểm và có một vectơ chỉ phương.....	81
	📁 Dạng toán 3. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm.....	81
	📁 Dạng toán 4. Viết phương trình đường thẳng là giao tuyến của hai mặt phẳng.....	82
	📁 Dạng toán 5. Góc và khoảng cách trong không gian.....	82
Bài 6.	PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU	84
	📁 Dạng toán 1. Nhận dạng phương trình và tìm tâm, bán kính của mặt cầu.....	85
	📁 Dạng toán 2. Viết phương trình mặt cầu biết tâm I và đi qua điểm A	86
	📁 Dạng toán 3. Viết phương trình mặt cầu nhận đoạn thẳng AB làm đường kính.....	86
	📁 Dạng toán 4. Viết phương trình mặt cầu đi qua 4 điểm không đồng phẳng (Ngoại tiếp tứ diện $ABCD$).....	86
	📁 Dạng toán 5. Viết phương trình mặt cầu có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) hoặc đường thẳng Δ	86
	📁 Dạng toán 6. Dạng 6: Viết phương trình mặt cầu có tâm $I \in d$ và thỏa mãn các điều kiện tiếp xúc/cắt.....	86
Chương 9.	TỔ HỢP - XÁC SUẤT	87
Bài 1.	ĐẠI SỐ TỔ HỢP	87
A	QUY TẮC ĐẾM CƠ BẢN.....	87
B	GIẢI THỪA.....	87
C	HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP - TỔ HỢP.....	88
Bài 2.	XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ	89
A	CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN.....	89
B	ĐỊNH NGHĨA CỔ ĐIỂN CỦA XÁC SUẤT.....	89

Chương 10. THỐNG KÊ	91
Bài 1. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM VÀ PHÂN TÁN CHO MẪU SỐ LIỆU KHÔNG GHÉP NHÓM	91
Bài 2. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG CHO MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM	94
Chương 11. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÍNH NHANH	96
Bài 1. CÔNG THỨC TÍNH NHANH HÌNH HỌC PHẪNG VÀ KHÔNG GIAN	96
Bài 2. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI NHANH TOÁN HÀM HỢP (VD - VDC)	99
A PHƯƠNG PHÁP GHÉP TRỰC.....	99
B PHƯƠNG PHÁP SƠ ĐỒ V.....	100
C PHƯƠNG PHÁP ĐƯỜNG XOẮN ỐC SÊN (ỐC SÊN LƯỢNG GIÁC).....	101
Bài 3. TỔNG HỢP KỸ THUẬT GIẢI NHANH VÀ MẸO BẮM MÁY TÍNH CASIO	103
A CÁC MẸO GIẢI NHANH VÀ THỦ THUẬT HÀM SỐ.....	103
B MẸO GIẢI TOÁN MŨ VÀ LOGARIT.....	104
C CÔNG THỨC GIẢI NHANH VÀ CASIO NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN..	104
D CÔNG THỨC GIẢI NHANH HÌNH HỌC TỌA ĐỘ O_{xyz}	105

Chương 1

LƯỢNG GIÁC

§1. MỘT SỐ LÝ THUYẾT QUAN TRỌNG

A // Các công thức thường gặp

1. ĐƠN VỊ ĐO GÓC VÀ ĐỘ DÀI CUNG TRÒN

⚙ Đơn vị đo góc và cung tròn

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \quad \text{và} \quad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ$$

⚙ Độ dài cung tròn: Một cung của đường tròn bán kính R có số đo α rad thì sẽ có độ dài là $l = R\alpha$.

2. QUAN HỆ GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

⚙ Công thức lượng giác cơ bản: Đối với các giá trị lượng giác, ta có các hằng đẳng thức sau

$$\textcircled{1} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

$$\textcircled{2} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \text{ với } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

$$\textcircled{3} 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \text{ với } \alpha \neq k\pi.$$

$$\textcircled{4} \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \text{ với } \alpha \neq \frac{k\pi}{2}.$$

⚙ Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt:

Góc đối nhau: α và $-\alpha$

$$\textcircled{1} \cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\textcircled{2} \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\textcircled{3} \tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\textcircled{4} \cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

Góc bù nhau: α và $\pi - \alpha$

$$\textcircled{1} \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\textcircled{2} \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\textcircled{3} \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\textcircled{4} \cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

Góc hơn kém π : α và $\alpha + \pi$

$$\textcircled{1} \cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$$

$$\textcircled{2} \sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$$

$$\textcircled{3} \tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha$$

$$\textcircled{4} \cot(\alpha + \pi) = \cot \alpha$$

Góc phụ nhau: α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$

$$\textcircled{1} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\textcircled{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\textcircled{3} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\textcircled{4} \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

3. Công thức cộng:

$$\textcircled{1} \sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

$$\textcircled{2} \sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$$

$$\textcircled{3} \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

$$\textcircled{4} \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

$$\textcircled{5} \tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

$$\textcircled{6} \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.$$

4. Công thức nhân đôi:

$$\textcircled{1} \sin 2a = 2 \sin a \cos a.$$

$$\textcircled{2} \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a.$$

$$\textcircled{3} \cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a.$$

$$\textcircled{4} \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

5. Công thức hạ bậc:

$$\textcircled{1} \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}.$$

$$\textcircled{2} \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}.$$

$$\textcircled{3} \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}.$$

6. Công thức biến đổi tích thành tổng:

$$\textcircled{1} \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)].$$

$$\textcircled{2} \sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a + b) - \cos(a - b)].$$

$$\textcircled{3} \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)].$$

$$\textcircled{4} \cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) - \sin(a - b)].$$

7. Công thức biến đổi tổng thành tích:

$$\textcircled{1} \quad \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}.$$

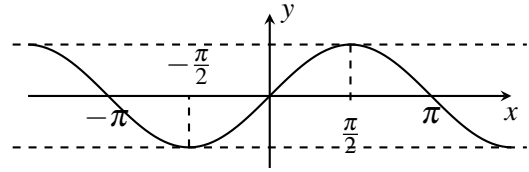
$$\textcircled{2} \quad \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}.$$

$$\textcircled{3} \quad \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}.$$

$$\textcircled{4} \quad \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}.$$

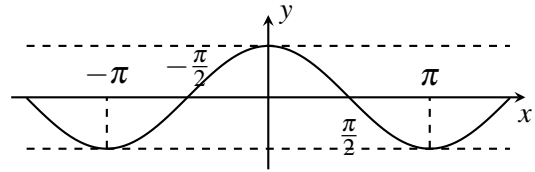
1. Hàm số $y = \sin x$

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị: $[-1; 1]$, tức là $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.
- Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$, nghĩa là $\sin(x + k2\pi) = \sin x$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.



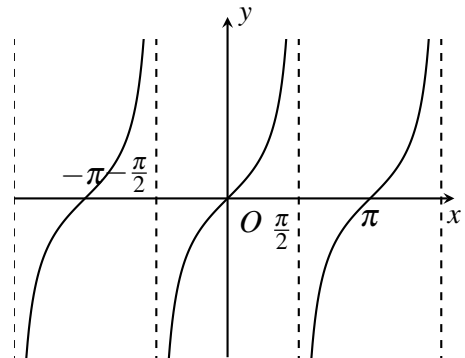
2. Hàm số $y = \cos x$

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị: $[-1; 1]$, tức là $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn nên đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng.
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$, nghĩa là $\cos(x + k2\pi) = \cos x$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.



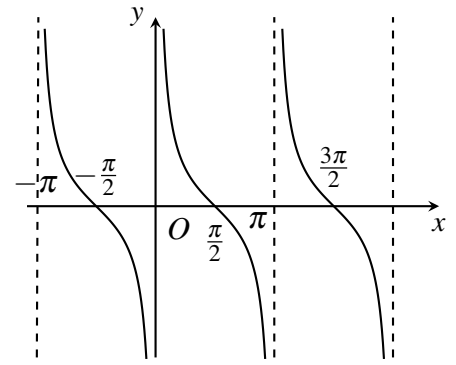
3. Hàm số $y = \tan x$

- Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- Tập giá trị: $\mathbb{R}$; Là hàm số lẻ.
- Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$, nghĩa là $\tan(x + k\pi) = \tan x$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.



4. Hàm số $y = \cot x$

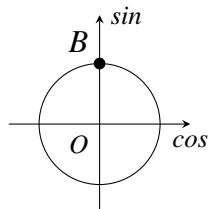
- Điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- Tập giá trị: $\mathbb{R}$.
- Là hàm số lẻ.
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \pi$, nghĩa là $\cot(x + k\pi) = \cot x$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.



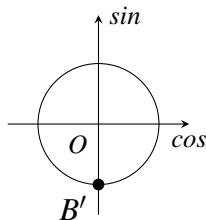
§2. MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP THƯỜNG GẶP

DT 1 Phương trình lượng giác $\sin x = a$.

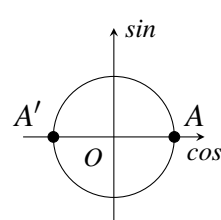
☑ Trường hợp $a \in \{-1; 0; 1\}$.



$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$



$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$$



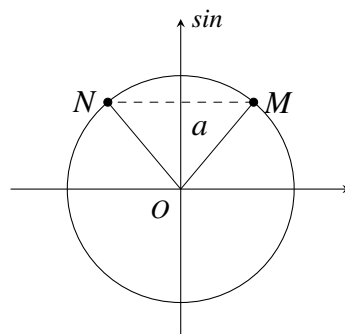
$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$$

☑ Trường hợp $a \in \left\{ \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$.

Ta bấm máy **SHIFT** **sin** **a** để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng.

① Công thức theo đơn vị rad:

$$\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$



② Công thức theo đơn vị độ:

$$\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - \beta^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

☑ Trường hợp $a \in [-1; 1]$ nhưng khác các số ở trên.

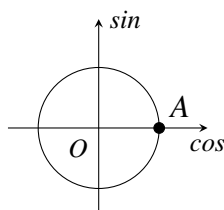
$$\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin a + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

☑ Công thức mở rộng cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$

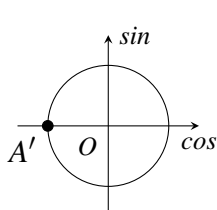
$$\sin[f(x)] = \sin[g(x)] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

DT 2 Phương trình lượng giác $\cos x = a$

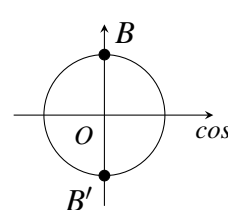
☑ Trường hợp $a \in \{-1; 0; 1\}$.



$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$$



$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$$



$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

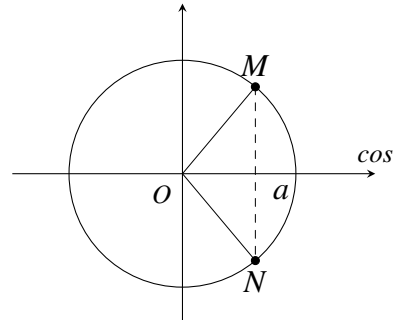
- ☑ Trường hợp $a \in \left\{ \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$. Ta bấm máy **SHIFT** **cos** **a** để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng.

① Công thức theo đơn vị rad:

$$\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

② Công thức theo đơn vị độ:

$$\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k360^\circ \\ x = -\beta^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$



- ☑ Trường hợp $a \in [-1; 1]$ nhưng khác các số ở trên.

$$\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arccos a + k2\pi \\ x = -\arccos a + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

- ☑ Công thức mở rộng cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$

$$\cos[f(x)] = \cos[g(x)] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = -g(x) + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

DT 3 Phương trình lượng giác $\tan x = a$

- ☑ Trường hợp $a \in \left\{ 0; \pm \frac{\sqrt{3}}{3}; \pm 1; \pm \sqrt{3} \right\}$. Ta bấm máy **SHIFT** **tan** **a** để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng.

① Công thức theo đơn vị rad:

$$\tan x = a \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

② Công thức theo đơn vị độ:

$$\tan x = a \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

- ☑ Trường hợp a khác các số ở trên thì

$$\tan x = a \Leftrightarrow x = \arctan a + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

DT 4 Phương trình lượng giác $\cot x = a$

- ☑ Trường hợp $a \in \left\{ \pm \frac{\sqrt{3}}{3}; \pm 1; \pm \sqrt{3} \right\}$. Ta bấm máy **SHIFT** **tan** **$\frac{1}{a}$** để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng. Riêng $a = 0$ thì $\alpha = \frac{\pi}{2}$

① Công thức theo đơn vị rad:

$$\cot x = a \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

② Công thức theo đơn vị độ:

$$\cot x = a \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

DẪY SỐ. CẤP SỐ CỘNG. CẤP SỐ NHÂN

§1. MỘT SỐ LÝ THUYẾT CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA DẪY SỐ

⚙️ **Định nghĩa dãy số:** Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số). Kí hiệu $u = u(n)$.

⚠️ Ta thường viết u_n thay cho $u(n)$ và kí hiệu dãy số $u = u(n)$ bởi (u_n) . Do đó dãy số (u_n) được viết dưới dạng khai triển $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$, trong đó

- u_1 là số hạng đầu;
- u_n là số hạng thứ n và là số hạng tổng quát của dãy số.

⚙️ **Định nghĩa dãy số hữu hạn:**

- Mỗi hàm số u xác định trên tập $M = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ với $m \in \mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số hữu hạn.
- Dạng khai triển của nó là $u_1, u_2, u_3, \dots, u_m$, trong đó u_1 là số hạng đầu, u_m là số hạng cuối.

2. DẪY SỐ TĂNG, DẪY SỐ GIẢM

- ① Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu ta có $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- ② Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu ta có $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

3. DẪY SỐ BỊ CHẶN

- ① Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- ② Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho $u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- ③ Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số m, M sao cho $m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

1. Định nghĩa

Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d . Nghĩa là $u_{n+1} = u_n + d$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

- Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.
- Đặc biệt khi $d = 0$ thì cấp số cộng là một dãy số không đổi (tất cả các số hạng đều bằng nhau).

2. Số hạng tổng quát

Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định theo công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$

3. Tính chất của ba số hạng liên tiếp

Gọi u_{k-1}, u_k, u_{k+1} là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng thì

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} \text{ với } k \geq 2$$

4. Tổng n số hạng đầu của một cấp số cộng

Cho (u_n) là một cấp số cộng với số hạng đầu là u_1 và công sai d . Đặt

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n(u_2 + u_{n-1})}{2} = \frac{n(u_3 + u_{n-2})}{2} = \dots$$

$$\text{hoặc } S_n = \frac{n}{2}(2u_1 + (n-1)d)$$

B CẤP SỐ NHÂN

1. Định nghĩa

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q . Nghĩa là $u_{n+1} = u_n q$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

- Số q được gọi là công bội của cấp số nhân.
- Khi $q = 0$ cấp số nhân có dạng $u_1, 0, 0, \dots, 0, \dots$
- Khi $q = 1$ cấp số nhân có dạng $u_1, u_1, u_1, \dots, u_1, \dots$
- Khi $u_1 = 0$ thì với mọi q cấp số nhân có dạng $0, 0, 0, \dots, 0, \dots$

2. Số hạng tổng quát

Nếu một cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$ với $n \geq 2$.

3. Tính chất của ba số hạng liên tiếp

Giả sử u_{k-1}, u_k, u_{k+1} là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân thì $u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}$ với $k \geq 2$

4. Tổng của n số hạng đầu của một cấp số nhân

Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Khi đó

- Nếu $q \neq 1$ thì $S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}$.
- Nếu $q = 1$ thì $S_n = nu_1$

Chương 3

GIỚI HẠN HÀM SỐ

§1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

1. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

⚙ **Định nghĩa 1:** Dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Kí hiệu

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

⚙ **Định nghĩa 2:** Dãy số (u_n) có giới hạn là a nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - a) = 0$. Kí hiệu

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$$

⚠ Ta có thể viết $\lim u_n = a$ thay cho cách viết $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ (không cần viết chỉ số $n \rightarrow +\infty$)

⚙ **Một vài giới hạn đặc biệt:** (có thể xem như công thức)

- $\lim \frac{1}{n} = 0$;
- $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$;
- $\lim \frac{1}{q^n} = 0$, với $|q| > 1$;
- $\lim \frac{1}{n^k} = 0$, với $k \in \mathbb{N}^*$;
- $\lim C = C, \forall C \in \mathbb{R}$;
- $\lim q^n = 0$, nếu $|q| < 1$.

2. ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

⚙ Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì ta có:

- $\lim (u_n \pm v_n) = a \pm b$;
- $\lim \left(\frac{u_n}{v_n} \right) = \frac{a}{b}$, với $b \neq 0$;
- $\lim |u_n| = |a|$;
- $\lim (u_n \cdot v_n) = a \cdot b$;
- $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$, với $a \geq 0$;
- $\lim (k \cdot u_n) = k \cdot a$ ($k \in \mathbb{R}$).

⚙ **Định lý "kẹp giữa":**

- Nếu $0 \leq |u_n| \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.
- Nếu $w_n \leq u_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $\lim w_n = \lim v_n = a$ thì $\lim u_n = a$.

3. TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

- Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q thỏa mãn $|q| < 1$ được gọi là *cấp số nhân lùi vô hạn*.
- Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) , ta có tổng của cấp số nhân lùi vô hạn đó là

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \frac{u_1}{1 - q}, (|q| < 1)$$

4. GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA DÃY SỐ

- Một số giới hạn đặc biệt:

① $\lim n^k = +\infty$, với $k \in \mathbb{N}^*$.

② $\lim q^n = +\infty$, với $q > 1$.

- Một số quy tắc tính giới hạn vô cực:

- ① Quy tắc tìm giới hạn của tích $u_n \cdot v_n$

$\lim u_n = L$	$\lim v_n = \infty$	$\lim [u_n \cdot v_n]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$L > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$-\infty$	$+\infty$

- ② Quy tắc tìm giới hạn của thương $\frac{u_n}{v_n}$

$\lim u_n = L$	$\lim v_n$	Dấu của v_n	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	+	$+\infty$
$L > 0$	0	-	$-\infty$
$L < 0$	0	+	$-\infty$
$L < 0$	0	-	$+\infty$

§2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

1. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

Nhận xét: $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ với c là hằng số.

Định lý về giới hạn hữu hạn:

a) Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$. Khi đó:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M;$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M;$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M;$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \text{ (nếu } M \neq 0 \text{)}.$$

b) Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

Giới hạn một bên:

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(x_0; b)$. Số L được gọi là giới hạn bên phải của hàm số $y = f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.
Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L.$$

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; x_0)$. Số L được gọi là giới hạn bên trái của hàm số $y = f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.
Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L.$$

Điều kiện để tồn tại giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

2. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

Định nghĩa:

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; +\infty)$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$. Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L.$$

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(-\infty; a)$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \rightarrow -\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \rightarrow -\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$. Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L.$$

Chú ý:

- Với c, k là hằng số và k nguyên dương, ta luôn có:

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} c = c$

② $\lim_{x \rightarrow -\infty} c = c$

③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x^k} = 0$

④ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{c}{x^k} = 0.$

- Định lí về giới hạn hữu hạn của hàm số khi $x \rightarrow x_0$ vẫn còn đúng khi $x \rightarrow +\infty$ hoặc $x \rightarrow -\infty$.

3. GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA HÀM SỐ

⚙ **Định nghĩa :** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; +\infty)$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là $-\infty$ khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow -\infty$. Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

⚙ **Nhận xét:** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (-f(x)) = -\infty$.

⚙ **Một vài giới hạn đặc biệt:**

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$, với k nguyên dương.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ -\infty & \text{nếu } k \text{ lẻ.} \end{cases}$

⚙ **Một vài quy tắc về giới hạn vô cực:**

- Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x) \cdot g(x)$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$L > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$-\infty$	$+\infty$

- Quy tắc tìm giới hạn của thương $\frac{f(x)}{g(x)}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	$+$	$+\infty$
$L > 0$	0	$-$	$-\infty$
$L < 0$	0	$+$	$-\infty$
$L < 0$	0	$-$	$+\infty$

Các quy tắc trên vẫn đúng khi thay $x \rightarrow x_0$ bởi $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$ hoặc $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$.

§3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

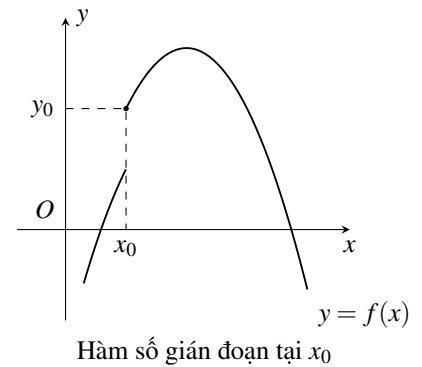
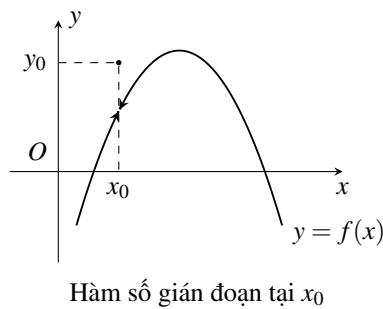
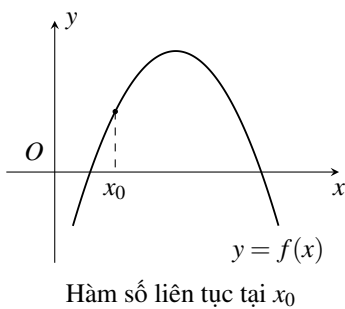
1. HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục** tại x_0 nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

! Nếu hàm số không liên tục tại x_0 thì ta nói hàm số đó **gián đoạn** tại x_0 .

Minh họa đồ thị:



2. HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG

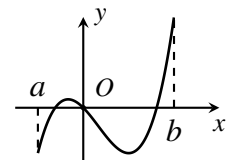
Định nghĩa: Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên một khoảng** nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

Chú ý:

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên đoạn** $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.
- Khái niệm hàm số **liên tục trên nửa khoảng** như $[a; b)$, $[a; +\infty)$,... được định nghĩa một cách tương tự như liên tục trên đoạn.



- Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một “đường liền” trên khoảng đó. Hình bên là đồ thị của một hàm số liên tục trên $(a; b)$.
- Hàm số đa thức và các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.
- Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) và các hàm số $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sqrt{x}$ liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.



3. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ CƠ BẢN

Định lý 1. Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0 . Khi đó

- Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại x_0 .
- Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

⚙ **Định lý 2.** Sự tồn tại nghiệm của phương trình trên một khoảng

- Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$, thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.
- Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(a; b)$.

HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

§1. MỘT SỐ KIẾN THỨC QUAN TRỌNG

A // Lũy thừa

1. Lũy thừa với số mũ nguyên

Cho n là một số nguyên dương.

Với a là một số thực tùy ý, lũy thừa bậc n của a là tích của n thừa số a :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ thừa số } a}.$$

Với $a \neq 0$ thì

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Ta gọi a là cơ số, n là số mũ. Và chú ý 0^0 và 0^{-n} không có nghĩa.

2. Một số tính chất của lũy thừa

Giả thiết rằng mỗi biểu thức được xét đều có nghĩa.

$$\textcircled{1} \quad a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$$

$$\textcircled{2} \quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta}$$

$$\textcircled{3} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$$

$$\textcircled{5} \quad (ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha$$

$$\textcircled{6} \quad \left(\frac{b}{a}\right)^{-\alpha} = \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha$$

Một số chú ý quan trọng

$$\textcircled{1} \quad \text{Nếu } a > 1 \text{ thì } a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Nếu } 0 < a < 1 \text{ thì } a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$$

$$\textcircled{3} \quad \text{Với } 0 < a < b \text{ thì } a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0$$

$$\textcircled{4} \quad \text{Với } 0 < a < b \text{ thì } a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0$$



- Các tính chất trên đúng trong trường hợp số mũ nguyên hoặc không nguyên.
- Khi xét lũy thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm thì cơ số a phải khác 0.

- Khi xét lũy thừa với số mũ không nguyên thì cơ số a phải dương.

3. Một số tính chất của căn bậc n

Với $a, b \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$* \sqrt[n]{a^{2n}} = |a|.$$

$$* \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{|a|} \cdot \sqrt[n]{|b|}, \forall ab \geq 0.$$

$$* \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}, \forall ab \geq 0, b \neq 0.$$

$$* \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m, \forall m \in \mathbb{Z}, a > 0.$$

$$* \text{Nếu } \frac{p}{n} = \frac{q}{m} \text{ thì } \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q}, \\ \forall m, n \in \mathbb{N}^*, \forall p, q \in \mathbb{Z}, a > 0.$$

$$* \sqrt[n+1]{a^{2n+1}} = a.$$

$$* \sqrt[n+1]{ab} = \sqrt[n+1]{a} \cdot \sqrt[n+1]{b}, \forall a, b.$$

$$* \sqrt[n+1]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n+1]{a}}{\sqrt[n+1]{b}}, \forall a \geq 0, b \neq 0.$$

$$* \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \forall m \in \mathbb{N}^*, a > 0.$$

$$* \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}, a > 0, m \in \mathbb{N}^*.$$

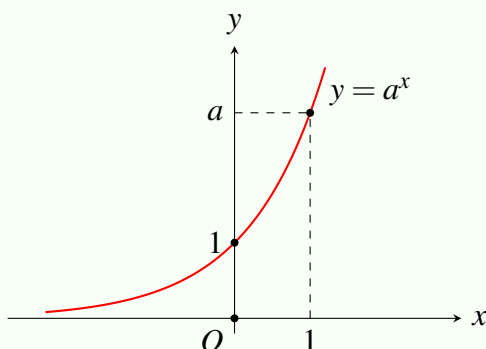
B // Hàm số mũ

Hàm số $y = a^x$ ($a > 1$)

- Tập xác định $\mathbb{R}$.
- Sự biến thiên
 - Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$
 - Tiệm cận: Ox là tiệm cận ngang.
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'		+		
y		0	1	a

- Đồ thị như hình sau

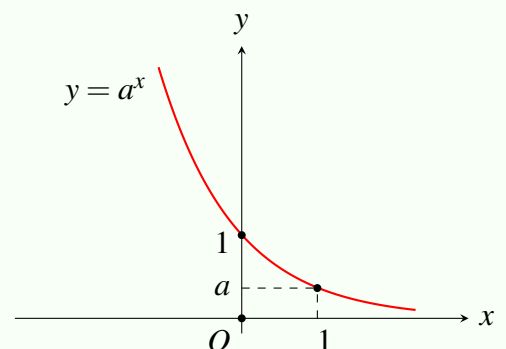


Hàm số $y = a^x$ ($0 < a < 1$)

- Tập xác định $\mathbb{R}$.
- Sự biến thiên
 - Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$
 - Tiệm cận: Ox là tiệm cận ngang.
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'		-		
y	$+\infty$	1	a	0

- Đồ thị như hình sau



C Logarit

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b và được kí hiệu là $\log_a b$.

$$\alpha = \log_a b \iff a^\alpha = b$$

Không có lôgarit của số âm và số 0.

Với các điều kiện thỏa mãn để biểu thức có nghĩa, ta có bảng công thức sau

$$* \log_a 1 = 0.$$

$$* \log_a a = 1.$$

$$* \log_a a^\alpha = \alpha.$$

$$* \log_{a^\alpha} a = \frac{1}{\alpha}.$$

$$* \log_a b^\alpha = \alpha \log_a b, b > 0.$$

$$* \log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} \log_a b.$$

$$* \log_{a^\beta} b^\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \log_a b.$$

$$* \log_a b + \log_a c = \log_a (bc).$$

$$* \log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}.$$

$$* \log_a b = \frac{1}{\log_b a}, a \neq 1, b > 0.$$

D Phương trình mũ và phương trình logarit

1. Phương trình mũ cơ bản

Phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x = b$ với $0 < a \neq 1$.

- Nếu $b > 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.
- Nếu $b \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Chú ý: Phương pháp giải phương trình mũ bằng cách đưa về cùng cơ số:

$$\text{Nếu } 0 < a \neq 1 \text{ thì } a^u = a^v \iff u = v.$$

2. Phương trình logarit

Phương trình lôgarit cơ bản có dạng $\log_a x = b$ với $0 < a \neq 1$.

Phương trình lôgarit cơ bản $\log_a x = b$ có nghiệm duy nhất $x = a^b$.

Chú ý. Phương pháp giải phương trình lôgarit bằng cách đưa về cùng cơ số:

$$\text{Nếu } u, v > 0 \text{ và } 0 < a \neq 1 \text{ thì } \log_a u = \log_a v \iff u = v.$$

DT

1

Phương trình mũ và phương trình logarit cơ bản

Phương trình mũ cơ bản $a^x = b$ ($a > 0, a \neq 1$).

- Nếu $b > 0$ thì phương trình $a^x = b \iff x = \log_a b$.

- Nếu $b \leq 0$ thì phương trình $a^x = b$ vô nghiệm.

Phương trình lôgarit có dạng $\log_a x = b$ ($a > 0, a \neq 1$).

- Nếu $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$.

DT 2 Phương pháp đưa về cùng cơ số

Sử dụng tính chất

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad (0 < a \neq 1).$$

Cho $0 < a \neq 1$. Khi đó:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

DT 3 Phương pháp đặt ẩn phụ

Đặt ẩn phụ giải phương trình mũ:

$$\alpha a^{2x} + \beta a^x + \gamma = 0.$$

Đặt $t = a^x$ ($t > 0$).

Đặt ẩn phụ giải phương trình lôgarit:

$$\alpha \log_a^2 x + \beta \log_a x + \gamma = 0.$$

Đặt $t = \log_a x$ ($x > 0$).

DT 4 Phương pháp mũ hóa và lôgarit hóa

1. Phương pháp lôgarit hoá:

- **Dạng 1:**

$$a^{g(x)} = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) = \log_a f(x), \end{cases} \quad \text{với } 0 < a \neq 1.$$

- **Dạng 2:**

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \log_a b.$$

2. Phương pháp mũ hoá:

$$\log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = a^{g(x)}.$$

3. Bất phương trình mũ

- Bất phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x > b$ (hoặc $a^x \geq b, a^x < b, a^x \leq b$) với $a > 0, a \neq 1$.
- Xét bất phương trình dạng $a^x > b$:
 - Nếu $b \leq 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$.
 - Nếu $b > 0$ thì bất phương trình tương đương với $a^x > a^{\log_a b}$.

- Với $a > 1$, nghiệm của bất phương trình là $x > \log_a b$.
- Với $0 < a < 1$, nghiệm của bất phương trình là $x < \log_a b$.

Chú ý: Các bất phương trình mũ cơ bản còn lại được giải tương tự.

- Nếu $a > 1$ thì $a^u > a^v \Leftrightarrow u > v$.
- Nếu $0 < a < 1$ thì $a^u > a^v \Leftrightarrow u < v$.

4. Bất phương trình logarit

- Bất phương trình lôgarit cơ bản có dạng $\log_a x > b$ (hoặc $\log_a x \geq b, \log_a x < b, \log_a x \leq b$) với $a > 0, a \neq 1$.
- Xét bất phương trình dạng $\log_a x > b$:
 - Với $a > 1$, nghiệm của bất phương trình là $x > a^b$.
 - Với $0 < a < 1$, nghiệm của bất phương trình là $0 < x < a^b$.

Chú ý: Các bất phương trình lôgarit cơ bản còn lại được giải tương tự.

- Nếu $a > 1$ thì $\log_a u > \log_a v \Leftrightarrow u > v$.
- Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a u > \log_a v \Leftrightarrow u < v$.

DT

1

Bất phương trình mũ và bất phương trình logarit cơ bản

Phương trình mũ cơ bản $a^x = b$ ($a > 0, a \neq 1$).

- Nếu $b > 0$ thì phương trình $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$.
- Nếu $b \leq 0$ thì phương trình $a^x = b$ vô nghiệm.

Phương trình lôgarit có dạng $\log_a x = b$ ($a > 0, a \neq 1$).

- Nếu $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$.

DT

2

Đưa về cùng cơ số để giải bất phương trình

Nếu gặp bất phương trình $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ thì xét hai trường hợp:

- **Trường hợp 1:** Nếu $a > 1$ thì bất phương trình

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x).$$

- **Trường hợp 2:** Nếu $0 < a < 1$ thì bất phương trình

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x).$$

DT**3****Đặt ẩn phụ**

Ta thường gặp các dạng:

$$ma^{2f(x)} + na^{f(x)} + p > 0 \quad (1)$$

- Đặt $t = a^{f(x)}$, $t > 0$ đưa bất phương trình (1) về dạng

$$mt^2 + nt + p > 0.$$

- Giải bất phương trình tìm nghiệm t và kiểm tra điều kiện $t > 0$, sau đó tìm nghiệm x .

Ta cũng thường gặp:

$$ma^{f(x)} + nb^{f(x)} + p > 0, \quad \text{trong đó } ab = 1.$$

Đặt $t = a^{f(x)}$, $t > 0$ suy ra

$$b^{f(x)} = \frac{1}{t}.$$

Hoặc:

$$ma^{2f(x)} + n(ab)^{f(x)} + pb^{2f(x)} > 0.$$

Chia hai vế cho $b^{2f(x)}$ và đặt

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = t > 0.$$

E**Một số dạng toán thực tế hay gặp****1. Bài toán lãi suất ngân hàng****DT****1****Bài toán lãi đơn****1. Mô hình bài toán**

Lãi đơn là số tiền lãi chỉ tính trên số tiền gốc mà không tính trên số tiền lãi do số tiền gốc sinh ra, tức là tiền lãi của kì hạn trước không được tính vào vốn để tính lãi cho kì hạn kế tiếp, cho dù đến kì hạn người gửi không đến rút tiền ra.

2. Công thức tính

Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi đơn $r\%$ /kì hạn thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn ($n \in \mathbb{N}^*$) là

$$S_n = A + nAr = A(1 + nr).$$

DT**2****Bài toán lãi kép****1. Mô hình bài toán**

Lãi kép là tiền lãi của kì hạn trước nếu người gửi không rút ra thì được tính vào vốn để tính lãi cho kì hạn sau.

2. Công thức tính

Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi kép $r\%$ /kì hạn thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn ($n \in \mathbb{N}^*$) là

$$S_n = A(1 + r)^n.$$

Các công thức liên quan

$$n = \log_{1+r} \left(\frac{S_n}{A} \right)$$

$$r\% = \sqrt[n]{\frac{S_n}{A}} - 1$$

$$A = \frac{S_n}{(1 + r)^n}.$$

DT

3

Tiền gửi vào hàng tháng

1. Định nghĩa

Tiền gửi hàng tháng là mỗi tháng gửi đúng cùng một số tiền vào một thời gian cố định.

2. Công thức tính

Đầu mỗi tháng khách hàng gửi vào ngân hàng số tiền A đồng với lãi kép $r\%/tháng$ thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n tháng ($n \in \mathbb{N}^*$) (nhận tiền cuối tháng, khi ngân hàng đã tính lãi) là

$$S_n = \frac{A}{r} [(1+r)^n - 1](1+r).$$

Các công thức liên quan

$$n = \log_{1+r} \left(\frac{rS_n}{A(1+r)} + 1 \right)$$

$$A = \frac{rS_n}{(1+r)[(1+r)^n - 1]}.$$

DT

4

Gửi tiền vào ngân hàng và rút lãi hàng tháng

Công thức tính

Gửi ngân hàng số tiền là A đồng với lãi suất $r\%/tháng$. Mỗi tháng vào ngày ngân hàng tính lãi, rút ra số tiền là X đồng. Tính số tiền còn lại sau n tháng là

$$S_n = A(1+r)^n - X \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

DT

5

Vay vốn trả góp

1. Định nghĩa

Vay vốn trả góp là vay ngân hàng số tiền là A đồng với lãi suất $r\%/tháng$. Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ cách nhau đúng một tháng, mỗi lần hoàn nợ số tiền là X đồng và trả hết tiền nợ sau đúng n tháng.

2. Công thức tính

Cách tính số tiền còn lại sau n tháng giống hoàn toàn công thức tính gửi ngân hàng và rút tiền hàng tháng nên ta có

$$S_n = A(1+r)^n - X \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Để sau đúng n tháng trả hết nợ thì $S_n = 0$, nên

$$A(1+r)^n - X \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0 \iff X = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}.$$

DT

6

Tăng lương

1. Định nghĩa

Bài toán tăng lương được mô tả như sau: Một người được lãnh lương khởi điểm là A đồng/tháng. Cứ sau n tháng thì lương người đó được tăng thêm $r\%/tháng$. Hỏi sau kn tháng người đó lãnh được tất cả số tiền là bao nhiêu?

2. Công thức tính

Tổng số tiền nhận được sau kn tháng là

$$S_{kn} = Ak \cdot \frac{(1+r)^k - 1}{r}.$$

DT**7****Lãi kép liên tục**

Gửi vào ngân hàng A đồng với lãi kép $r\%/năm$ thì số tiền nhận được cả vốn lẫn lãi sau n năm ($n \in \mathbb{N}^*$) là

$$S_n = A(1 + r)^n.$$

Giả sử ta chia mỗi năm thành m kì hạn để tính lãi và lãi suất mỗi kì hạn là $\frac{r}{m}\%$ thì số tiền thu được sau n năm là

$$S_n = A \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn}.$$

Khi tăng số kì hạn của mỗi năm lên vô cực, tức là $m \rightarrow +\infty$, gọi là hình thức lãi kép liên tục thì người ta chứng minh được số tiền nhận được cả gốc lẫn lãi là

$$S = Ae^{nr} \text{ (công thức tăng trưởng mũ)}$$

2. Một số bài toán thực tế về dân số**DT****1****Bài toán tăng trưởng dân số**

Công thức tính tăng trưởng dân số là

$$X_m = X_n(1 + r)^{m-n}, \quad m, n \in \mathbb{Z}^+, m \geq n.$$

Trong đó

- $r\%$ là tỉ lệ tăng dân số từ năm n đến năm m ;
- X_m là dân số năm m , X_n là dân số năm n .

Từ đó ta có công thức tính tỉ lệ tăng dân số là

$$r\% = \sqrt[m-n]{\frac{X_m}{X_n}} - 1.$$

DT**2****Bài toán tăng trưởng quần thể, số lượng loài sinh vật**

Ta thực hiện tương tự như với tăng trưởng dân số. Tuy nhiên có thể đề bài sẽ cho thay đổi về hàm số.

3. Một số bài toán thực tế khác

Ngoài một số bài toán đã cho ở trên. Ta có thể thấy một số bài toán được lấy mô hình từ Lí - Hóa liên quan đến mũ và logarit như: Bài toán cường độ âm, Bài toán phóng xạ - hóa thạch, Bài toán về độ pH,...Ngoài ra còn rất nhiều mô hình bài toán có sự ứng dụng cao của hàm số mũ và logarit.

Chương 5

ĐẠO HÀM

§1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ ĐẠO HÀM

1. Đạo hàm của một số tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và điểm $x_0 \in (a; b)$.

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 , kí hiệu bởi $f'(x_0)$ (hoặc $y'(x_0)$), tức là

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Chú ý:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

2. Đạo hàm của hàm số trên một khoảng

Chú ý: Nếu phương trình chuyển động của vật là $s = f(t)$ thì $v(t) = f'(t)$ là vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t .

3. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

a) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số

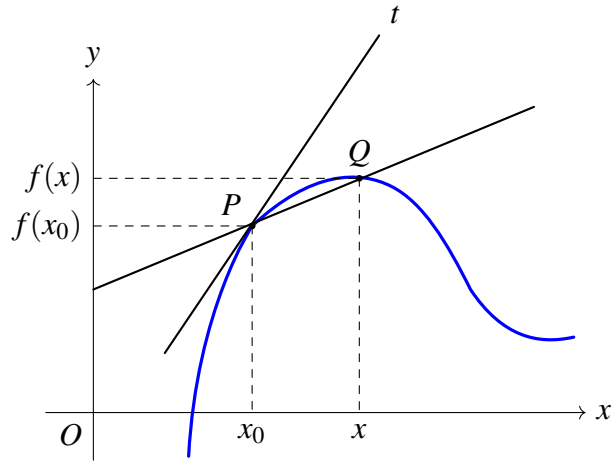
Hệ số góc của đường thẳng đi qua hai điểm $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$, với $x_1 \neq x_2$, là

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $P(x_0; f(x_0))$ là đường thẳng đi qua P với hệ số góc

$$k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Nếu giới hạn này tồn tại và hữu hạn thì $k = f'(x_0)$. Điểm P gọi là tiếp điểm.



Nhận xét: Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $P(x_0; f(x_0))$ là đạo hàm $f'(x_0)$.

b) Phương trình tiếp tuyến

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $P(x_0; y_0)$ là

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

trong đó $y_0 = f(x_0)$.

c) Ý nghĩa vật lý

Vận tốc tức thời tại thời điểm t_0 của chất điểm chuyển động với phương trình $s = s(t)$ là

$$v(t_0) = s'(t_0).$$

Cường độ tức thời tại thời điểm t_0 của một dòng điện với điện lượng $Q = Q(t)$ là

$$I(t_0) = Q'(t_0).$$

§2. CÁC CÔNG THỨC QUAN TRỌNG

1. Quy tắc tính đạo hàm

Cho $u = u(x)$, $v = v(x)$ và C là hằng số.

- **Tổng, hiệu:**

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

- **Tích:**

$$(uv)' = u'v + v'u \Rightarrow (C \cdot u)' = C \cdot u'.$$

- **Thương:**

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, (v \neq 0) \Rightarrow \left(\frac{C}{u}\right)' = -\frac{C \cdot u'}{u^2}.$$

- **Đạo hàm hàm hợp:**

Nếu $y = f(u)$ với $u = u(x)$ thì

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

2. Công thức đạo hàm nhanh hàm phân thức

- $y = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y' = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}.$

- $y = \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'} \Rightarrow y' = \left(\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{(a'x^2+b'x+c')^2}.$

Ở đó ta hiểu $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

3. Bảng công thức đạo hàm

Hàm sơ cấp	Hàm hợp
$(C)' = 0$ (C là hằng số)	
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ ($x \neq 0$)	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ ($u \neq 0$)
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ($x > 0$)	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$, ($u > 0$)
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$(\sin^n x)' = n \sin^{n-1} x \cdot \cos x$	$(\sin^n u)' = n u' \sin^{n-1} u \cdot \cos u$
$(\cos^n x)' = -n \cos^{n-1} x \cdot \sin x$	$(\cos^n u)' = -n u' \cos^{n-1} u \cdot \sin u$
$(\tan^n x)' = n \tan^{n-1} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan^n u)' = n u' \tan^{n-1} u \cdot \frac{1}{\cos^2 u}$
$(\cot^n x)' = -n \cot^{n-1} x \cdot \frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot^n u)' = -n u' \cot^{n-1} u \cdot \frac{1}{\sin^2 u}$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u' \cdot e^u$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^u)' = u' \cdot a^u \ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$)	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ ($u \neq 0$)
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ ($x \neq 0$)	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ ($u \neq 0$)

4. Đạo hàm cấp hai

1. Định nghĩa

$$f''(x) = [f'(x)]'.$$

2. Ý nghĩa cơ học

Gia tốc tức thời của chuyển động $s = f(t)$ tại thời điểm t_0 là

$$a(t_0) = f''(t_0).$$

3. Đạo hàm cấp cao

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]', \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2).$$

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

§1. SỰ ĐỒNG BIẾN NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

1. Một số khái niệm cơ bản

Ký hiệu K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng. Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên K , ta có:

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **đồng biến** (tăng) trên K nếu với mọi $x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2$ thì

$$f(x_1) < f(x_2).$$

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **nghịch biến** (giảm) trên K nếu với mọi $x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2$ thì

$$f(x_1) > f(x_2).$$

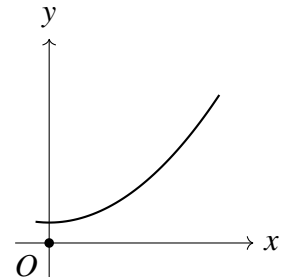
Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K được gọi chung là **đơn điệu** trên K .

Nhận xét.

- Hàm số $f(x)$ đồng biến trên K khi và chỉ khi

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0, \quad \forall x_1, x_2 \in K, x_1 \neq x_2.$$

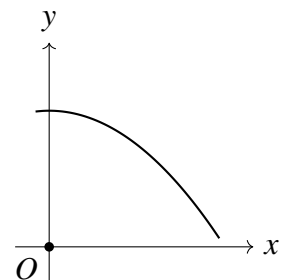
Khi đó đồ thị của hàm số **đi lên từ trái sang phải**.



- Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K khi và chỉ khi

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0, \quad \forall x_1, x_2 \in K, x_1 \neq x_2.$$

Khi đó đồ thị của hàm số **đi xuống từ trái sang phải**.



- Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in (a; b)$ thì hàm số $f(x)$ **nghịch biến** trên khoảng $(a; b)$.
- Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in (a; b)$ thì hàm số $f(x)$ **không đổi** trên khoảng $(a; b)$.
- Nếu hàm số $f(x)$ **đồng biến** trên khoảng $(a; b)$ thì

$$f'(x) \geq 0, \quad \forall x \in (a; b).$$

- Nếu hàm số $f(x)$ **nghịch biến** trên khoảng $(a; b)$ thì

$$f'(x) \leq 0, \forall x \in (a; b).$$

- Nếu thay đổi khoảng $(a; b)$ bằng một **đoạn** hoặc **nửa khoảng** thì phải bổ sung thêm giả thiết “hàm số $f(x)$ **liên tục** trên đoạn hoặc nửa khoảng đó”.

2. Quy tắc xét tính đơn điệu của hàm số

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên K .

- Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm $x \in K$ thì hàm số f **đồng biến** trên K .
- Nếu $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm $x \in K$ thì hàm số f **nghịch biến** trên K .

3. Một số kết quả giúp giải nhanh

⚙ **Hàm phân thức** $y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \left(x \neq -\frac{d}{c}\right)$

Đối với hàm phân thức hữu tỉ

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad \left(x \neq -\frac{d}{c}\right),$$

thì dấu “=” khi xét dấu đạo hàm y' **không xảy ra**.

⚙ **Hàm số bậc ba** $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Giả sử $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

- Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} a > 0, \\ \Delta \leq 0, \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} a = 0, \\ b = 0, \\ c > 0. \end{cases}$$

- Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$f'(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} a < 0, \\ \Delta \leq 0, \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} a = 0, \\ b = 0, \\ c < 0. \end{cases}$$

4. Một số dạng toán thường gặp

DT

1

Tìm khoảng đơn điệu, cực trị của hàm số cho trước

Để xét tính đồng biến, nghịch biến, cực trị của hàm số $y = f(x)$, ta có thể thực hiện các bước sau:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$.
- **Bước 2:** Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.
- **Bước 3:** Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- **Bước 4:** Căn cứ vào bảng biến thiên, nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến, cực trị của hàm số.

DT

2

Dạng 2: Tìm tham số m để hàm số đơn điệu trên một khoảng cho trước

- Xét hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$

Trong trường hợp hệ số a có chứa tham số thì ta kiểm tra thêm trường hợp $a = 0$.

- Xét hàm phân thức $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đạo hàm $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$, với $ad-bc \neq 0, c \neq 0$.

Hàm số đồng biến trên khoảng xác định của nó khi và chỉ khi: $y' > 0, \forall x \neq -\frac{d}{c} \Leftrightarrow ad-bc > 0$

Hàm số nghịch biến trên khoảng xác định của nó khi và chỉ khi: $y' < 0, \forall x \neq -\frac{d}{c} \Leftrightarrow ad-bc < 0$

- Xét hàm phân thức $y = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ có đạo hàm $y' = \frac{adx^2+2aex+be-dc}{(dx+e)^2}$, với $ad \neq 0$

Hàm số đồng biến trên khoảng xác định của nó khi và chỉ khi:

$$y' \geq 0, \forall x \neq -\frac{e}{d} \Leftrightarrow adx^2 + 2aex + be - dc \geq 0, \forall x \neq -\frac{e}{d}$$

Hàm số nghịch biến trên khoảng xác định của nó khi và chỉ khi:

$$y' \leq 0, \forall x \neq -\frac{e}{d} \Leftrightarrow adx^2 + 2aex + be - dc \leq 0, \forall x \neq -\frac{e}{d}$$

DT

3

Dạng toán hàm số bậc ba đơn điệu chứa tham số m

Với dạng toán tìm tham số m để hàm số bậc ba đơn điệu một chiều trên khoảng có độ dài bằng ℓ , ta giải như sau:

- **Bước 1.** Tính $y' = f'(x; m) = ax^2 + bx + c$.

- **Bước 2.** Hàm số đơn điệu trên $(x_1; x_2)$ khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Điều kiện tương đương là

$$\begin{cases} a \neq 0, \\ \Delta > 0. \end{cases} \quad (*)$$

- **Bước 3.** Hàm số đơn điệu trên khoảng có độ dài bằng ℓ khi và chỉ khi

$$|x_1 - x_2| = \ell \iff (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \ell^2 \iff S^2 - 4P = \ell^2. \quad (**)$$

- **Bước 4.** Giải (*) và giao với (**) để suy ra giá trị m cần tìm.

§2. CỰC TRỊ HÀM SỐ

A // Một số khái niệm cơ bản

1. Định nghĩa

Giả sử hàm số f xác định trên tập K và $x_0 \in K$. Ta nói:

- x_0 là **điểm cực tiểu** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a; b)$ chứa x_0 sao cho $(a; b) \subset K$ và

$$f(x) > f(x_0), \forall x \in (a; b) \setminus \{x_0\}.$$

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số f .

- x_0 là **điểm cực đại** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a; b)$ chứa x_0 sao cho $(a; b) \subset K$ và

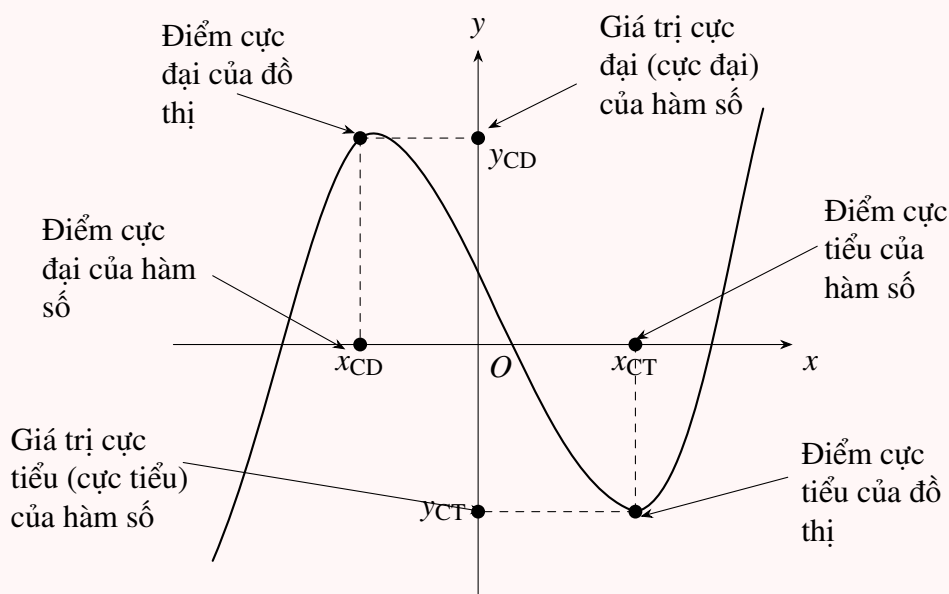
$$f(x) < f(x_0), \forall x \in (a; b) \setminus \{x_0\}.$$

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số f .

- Điểm cực đại và điểm cực tiểu gọi chung là **điểm cực trị** của hàm số và điểm cực trị phải là một điểm trong tập hợp K .
- Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu gọi chung là **giá trị cực trị** (hay **cực trị**) của hàm số.
- Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số thì điểm $(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực trị của đồ thị** hàm số f .

Nhận xét.

- Giá trị cực đại (cực tiểu) $f(x_0)$ nói chung không phải là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên tập $\mathcal{D}$; $f(x_0)$ chỉ là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên một khoảng $(a; b)$ nào đó chứa x_0 . Hay nói cách khác, khi x_0 là điểm cực đại (cực tiểu) thì tồn tại một khoảng $(a; b)$ chứa x_0 sao cho $f(x_0)$ là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên khoảng $(a; b)$.
- Hàm số f có thể đạt cực đại hoặc cực tiểu tại nhiều điểm trên tập K . Hàm số có thể không có cực trị trên một tập cho trước.



- Hàm số f có cực trị khi và chỉ khi y' đổi dấu.
- Hàm số f không có cực trị khi và chỉ khi y' không đổi dấu.
- Hàm số f chỉ có 1 cực trị khi và chỉ khi y' đổi dấu 1 lần.
- Hàm số f có 2 cực trị (cực đại và cực tiểu) khi và chỉ khi y' đổi dấu 2 lần.
- Hàm số f có 3 cực trị khi và chỉ khi y' đổi dấu 3 lần.
- Đối với một hàm số bất kỳ, hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại những điểm mà tại đó đạo hàm triệt tiêu hoặc đạo hàm không xác định.
- Cách gọi tên: cực trị, điểm cực trị của hàm số, điểm cực trị của đồ thị hàm số, ...

2. Điều kiện cần và đủ để hàm số có cực trị

Định lý 2.1. Giả sử hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 . Khi đó, nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì

$$f'(x_0) = 0.$$

Chú ý

- Đạo hàm $f'(x)$ có thể bằng 0 tại điểm x_0 nhưng hàm số f không đạt cực trị tại điểm x_0 .
- Hàm số có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm.
- Hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc tại đó hàm số không có đạo hàm.

Định lý 2.2. Giả sử hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0 . Khi đó, nếu hàm số f có đạo hàm tại điểm x_0 thì

$$f'(x_0) = 0.$$

Hơn nữa:

- Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là **điểm cực**

đại của hàm số $f(x)$.

- Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là **điểm cực tiểu** của hàm số $f(x)$.

Ta có quy tắc tìm cực trị sau (Quy tắc 1)

Để tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ ta thực hiện theo các bước sau:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.
- **Bước 2:** Tìm các điểm x_i ($i = 1, 2, \dots$) mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.
- **Bước 3:** Lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu của $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua x_i thì hàm số đạt cực trị tại x_i .

Định lý 2.3. Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$ với $h > 0$. Khi đó:

- Nếu $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại x_0 .
- Nếu $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại x_0 .

Ta có quy tắc tìm cực trị (Quy tắc 2)

Để tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ ta thực hiện theo các bước sau:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.
- **Bước 2:** Tìm các nghiệm x_i ($i = 1, 2, \dots$) của phương trình

$$f'(x) = 0.$$
- **Bước 3:** Tính $f''(x)$ và tính $f''(x_i)$.
 - Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_i .
 - Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_i .

B

Một số dạng bài liên quan đến cực trị

1. Bài toán cực trị của hàm số bậc ba

DT

1

Tìm điều kiện để hàm số có cực trị thỏa mãn đề bài

Cho hàm số

$$y = f(x; m) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Tìm tham số m để hàm số có cực đại, cực tiểu tại x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện K cho trước.

Phương pháp

- **Bước 1.** Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Đạo hàm:

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c = Ax^2 + Bx + C.$$

- **Bước 2.** Hàm số có cực trị (hay có hai cực trị phân biệt, tức là có cực đại và cực tiểu) khi và chỉ khi

$$y' = 0$$

có hai nghiệm phân biệt và y' đổi dấu qua hai nghiệm đó.

Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} A = 3a \neq 0, \\ \Delta_{y'} = B^2 - 4AC = 4b^2 - 12ac > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a \neq 0, \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases} \implies m \in \mathcal{D}_1.$$

- **Bước 3.** Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y' = 0$. Khi đó

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{B}{A} = -\frac{2b}{3a}, \\ P = x_1 x_2 = \frac{C}{A} = \frac{c}{3a}. \end{cases}$$

- **Bước 4.** Biến đổi điều kiện K về dạng theo tổng S và tích P . Từ đó giải ra tìm được $m \in \mathcal{D}_2$.

- **Bước 5.** Kết luận các giá trị m thỏa mãn

$$m \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2.$$

Chú ý

Hàm số bậc ba

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$

có đạo hàm

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c.$$

- Hàm số **không có cực trị** khi $b^2 - 3ac \leq 0$.
- Hàm số **có hai điểm cực trị** khi $b^2 - 3ac > 0$.

DT 2 Tìm điều kiện để hàm số có 2 cực trị cùng dấu, trái dấu

- Hàm số có hai điểm cực trị **trái dấu** khi và chỉ khi phương trình

$$y' = 0$$

có hai nghiệm phân biệt trái dấu, tức là

$$A \cdot C = 3ac < 0 \iff ac < 0.$$

- Hàm số có hai điểm cực trị **cùng dấu** khi và chỉ khi phương trình

$$y' = 0$$

có hai nghiệm phân biệt cùng dấu, tức là

$$\begin{cases} \Delta_{y'} > 0, \\ P = x_1 x_2 = \frac{C}{A} > 0. \end{cases}$$

- Hàm số có hai điểm cực trị **cùng dấu dương** khi và chỉ khi phương trình

$$y' = 0$$

có hai nghiệm dương phân biệt, tức là

$$\begin{cases} \Delta_{y'} > 0, \\ S = x_1 + x_2 = -\frac{B}{A} > 0, \\ P = x_1 x_2 = \frac{C}{A} > 0. \end{cases}$$

- Hàm số có hai điểm cực trị **cùng dấu âm** khi và chỉ khi phương trình

$$y' = 0$$

có hai nghiệm âm phân biệt, tức là

$$\begin{cases} \Delta_{y'} > 0, \\ S = x_1 + x_2 = -\frac{B}{A} < 0, \\ P = x_1 x_2 = \frac{C}{A} > 0. \end{cases}$$

DT

3

Tìm điều kiện để hàm số có cực trị nằm cùng, khác phía so với đường thẳng cho trước

(a) Vị trí tương đối của hai điểm với đường thẳng

Cho hai điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ và đường thẳng

$$\Delta: ax + by + c = 0.$$

- Nếu

$$(ax_A + by_A + c)(ax_B + by_B + c) < 0$$

thì hai điểm A, B nằm về **hai phía** so với đường thẳng Δ .

- Nếu

$$(ax_A + by_A + c)(ax_B + by_B + c) > 0$$

thì hai điểm A, B nằm **cùng phía** so với đường thẳng Δ .

(b) Một số trường hợp đặc biệt

- Các điểm cực trị của đồ thị nằm **cùng về một phía** đối với trục Oy khi và chỉ khi hàm số có hai điểm cực trị cùng dấu, tức là phương trình

$$y' = 0$$

có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.

- Các điểm cực trị của đồ thị nằm **về hai phía** đối với trục Oy khi và chỉ khi hàm số có hai điểm cực trị trái dấu, tức là phương trình

$$y' = 0$$

có hai nghiệm trái dấu.

- Các điểm cực trị của đồ thị nằm **cùng về một phía** đối với trục Ox khi và chỉ khi phương trình

$$y' = 0$$

có hai nghiệm phân biệt và

$$y_{CD} \cdot y_{CT} > 0.$$

Đặc biệt

- Các điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm **cùng về phía trên** đối với trục Ox khi và chỉ khi phương trình

$$y' = 0$$

có hai nghiệm phân biệt và

$$\begin{cases} y_{CD} \cdot y_{CT} > 0, \\ y_{CD} + y_{CT} > 0. \end{cases}$$

- Các điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm **cùng về phía dưới** đối với trục Ox khi và chỉ khi phương trình

$$y' = 0$$

có hai nghiệm phân biệt và

$$\begin{cases} y_{CD} \cdot y_{CT} > 0, \\ y_{CD} + y_{CT} < 0. \end{cases}$$

- Các điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm **về hai phía** đối với trục Ox khi và chỉ khi phương trình

$$y' = 0$$

có hai nghiệm phân biệt và

$$y_{CE} \cdot y_{CT} < 0.$$

- Hoặc các điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm về hai phía đối với trục Ox khi và chỉ khi đồ thị cắt trục Ox tại **ba điểm phân biệt** (khi nhằm được nghiệm), hay phương trình hoành độ giao điểm

$$f(x) = 0$$

có 3 nghiệm phân biệt.

DT

4

Bài toán liên quan phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị hoặc khoảng cách

(a) Phương trình đường thẳng qua các điểm cực trị

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba có thể viết dưới các dạng:

$$g(x) = \left(\frac{2c}{3} - \frac{2b^2}{9a} \right) x + d - \frac{bc}{9a},$$

hoặc

$$g(x) = y - \frac{y' \cdot y''}{18a},$$

hoặc

$$g(x) = y - \frac{y' \cdot y''}{3y'''}.$$

(b) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba là

$$AB = \sqrt{\frac{4e + 16e^3}{a}}, \quad \text{với} \quad e = \frac{b^2 - 3ac}{9a}.$$

DT

5

Dạng dành cho các kì thi ĐGNL - Hàm bậc bốn trùng phương

(a) Một số kết quả cần nhớ

- Hàm số có **một cực trị** khi và chỉ khi

$$ab \geq 0.$$

- Hàm số có **ba cực trị** khi và chỉ khi

$$ab < 0.$$

- Hàm số có đúng **một cực trị và cực trị là cực tiểu** khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a > 0, \\ b \geq 0. \end{cases}$$

- Hàm số có đúng **một cực trị và cực trị là cực đại** khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a < 0, \\ b \leq 0. \end{cases}$$

- Hàm số có **hai cực tiểu và một cực đại** khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a > 0, \\ b < 0. \end{cases}$$

- Hàm số có **một cực tiểu và hai cực đại** khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a < 0, \\ b > 0. \end{cases}$$

(b) Một số công thức tính nhanh

Giả sử đồ thị hàm số

$$y = ax^4 + bx^2 + c$$

có 3 điểm cực trị là

$$A(0; c), \quad B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right), \quad C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right),$$

tạo thành tam giác ABC thỏa mãn điều kiện $ab < 0$.

Đặt

$$\widehat{BAC} = \alpha$$

thì

$$\cot^2 \frac{\alpha}{2} = -\frac{b^3}{8a}.$$

STT	Dữ kiện	Công thức thỏa mãn $ab < 0$ và $c \neq 0$
1	Tam giác ABC vuông cân tại A	$b^3 = -8a$
2	Tam giác ABC đều	$b^3 = -24a$
3	Tam giác ABC có diện tích $S_{\Delta ABC} = S_0$	$32a^3(S_0)^2 + b^5 = 0$
4	Tam giác ABC có diện tích $\max S_0$	$S_0 = \sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}$
5	Tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp $r_{\Delta ABC} = r_0$	$r = \frac{b^2}{4 a \left(1 + \sqrt{1 - \frac{b^3}{8a}}\right)}$
6	Tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R_{\Delta ABC} = R$	$R = \frac{b^3 - 8a}{8 a b }$
7	Tam giác ABC có độ dài cạnh $BC = m_0$	$am_0^2 + 2b = 0$
8	Tam giác ABC có độ dài cạnh $AB = AC = n_0$	$16a^2n_0^4 - b^4 + 8ab = 0$
9	Tam giác ABC có cực trị $B, C \in Ox$	$b^2 = 4ac$
10	Tam giác ABC có 3 góc nhọn	$b(8a + b^3) > 0$
11	Tam giác ABC có trọng tâm O	$b^2 = 6ac$
12	Tam giác ABC có trục tâm O	$b^3 + 8a - 4ac = 0$
13	Tam giác ABC cùng điểm O tạo thành hình thoi	$b^2 = 2ac$
14	Tam giác ABC có O là tâm đường tròn nội tiếp	$b^3 - 8a - 4abc = 0$
15	Tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp	$b^3 - 8a - 8abc = 0$
16	Tam giác ABC có cạnh $BC = kAB = kAC$	$b^3k^2 - 8a(k^2 - 4) = 0$
17	Trục hoành chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau	$b^2 = 4\sqrt{2} ac $
18	Tam giác ABC có điểm cực trị cách đều trục hoành	$b^2 = 8ac$
19	Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC là	$x^2 + y^2 - \left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a} + c\right)y + c\left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}\right) = 0$

§3. GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT - GIÁ TRỊ LỚN NHẤT

A // Một số khái niệm cơ bản

1. Định nghĩa

a) Số M được gọi là *giá trị lớn nhất* của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathcal{D}$ nếu

$$\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in \mathcal{D}, \\ \exists x_0 \in \mathcal{D}, f(x_0) = M. \end{cases}$$

Kí hiệu: $M = \max_{x \in \mathcal{D}} f(x)$.

b) Số m được gọi là *giá trị nhỏ nhất* của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathcal{D}$ nếu

$$\begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in \mathcal{D}, \\ \exists x_0 \in \mathcal{D}, f(x_0) = m. \end{cases}$$

Kí hiệu: $m = \min_{x \in \mathcal{D}} f(x)$.

B // Phương pháp tìm GTLN - GTNN

a) *Tìm GTLN, GTNN của hàm số bằng cách khảo sát trực tiếp*

- Tính $f'(x)$ và tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{D}$ mà tại đó $f'(x) = 0$ hoặc hàm số không có đạo hàm.
- Lập bảng biến thiên và từ đó suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

b) *Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một đoạn*

- Hàm số đã cho $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$.
- Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ trên khoảng $(a; b)$, tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.
- Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)$.
- Khi đó:

$$\max_{x \in [a; b]} f(x) = \max\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)\}.$$

$$\min_{x \in [a; b]} f(x) = \min\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)\}.$$

c) *Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một khoảng*

- Tính đạo hàm $f'(x)$.
- Tìm tất cả các nghiệm $x_i \in (a; b)$ của phương trình $f'(x) = 0$ và tất cả các điểm $\alpha_i \in (a; b)$ làm cho $f'(x)$ không xác định.
- Tính

$$A = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \quad B = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \quad f(x_i), f(\alpha_i).$$

- So sánh các giá trị và kết luận

$$M = \max_{x \in (a;b)} f(x), \quad m = \min_{x \in (a;b)} f(x).$$

Lưu ý: Nếu giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) là A hoặc B thì ta kết luận hàm số không có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất). **Chú ý:**

- Nếu $y = f(x)$ đồng biến trên $[a; b]$ thì

$$\min_{x \in [a;b]} f(x) = f(a) \quad \text{và} \quad \max_{x \in [a;b]} f(x) = f(b).$$

- Nếu $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a; b]$ thì

$$\min_{x \in [a;b]} f(x) = f(b) \quad \text{và} \quad \max_{x \in [a;b]} f(x) = f(a).$$

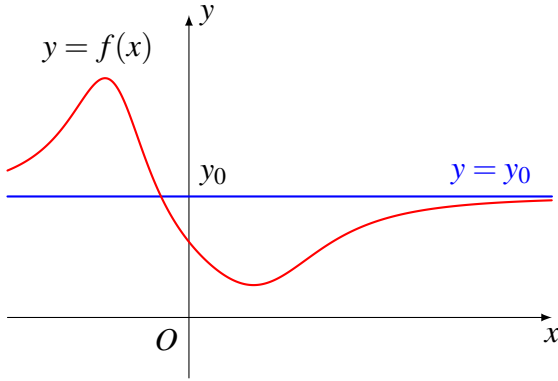
- Hàm số liên tục trên một khoảng *có thể* không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên khoảng đó.
- Ngoài phương pháp dùng đạo hàm, ta có thể dùng phương pháp MGT, BĐT, ...

§4. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

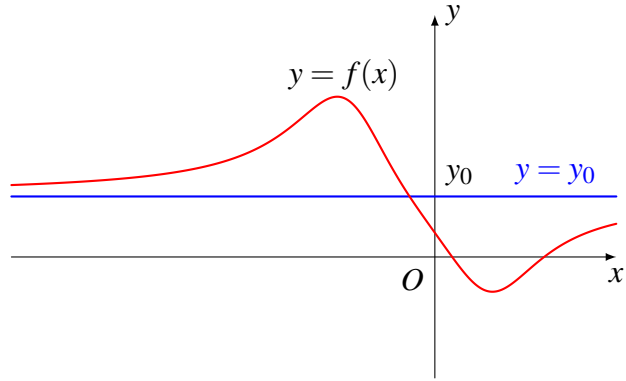
A // Đường tiệm cận ngang

Đường thẳng $y = y_0$ gọi là đường tiệm cận ngang (gọi tắt là tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0.$$



Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \rightarrow +\infty$).



Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \rightarrow -\infty$).

B // Đường tiệm cận đứng

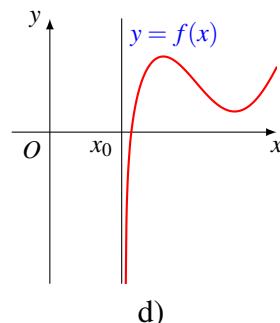
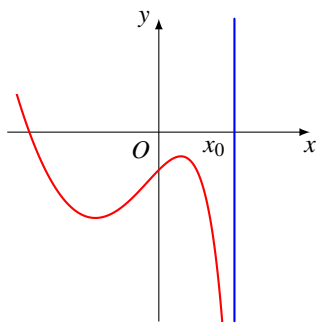
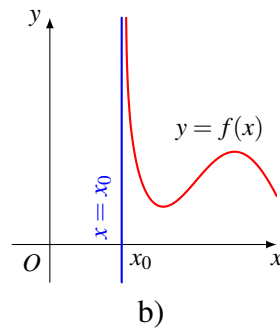
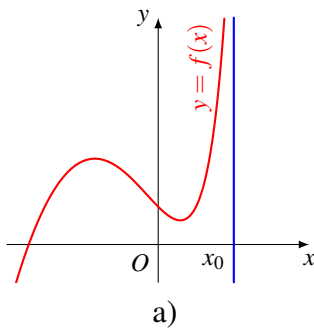
Đường thẳng $x = x_0$ gọi là đường tiệm cận đứng (gọi tắt là tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty.$$



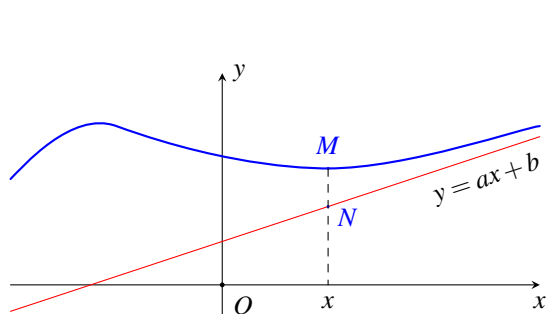
a) và c). Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \rightarrow x_0^-$).

b) và d). Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \rightarrow x_0^+$).

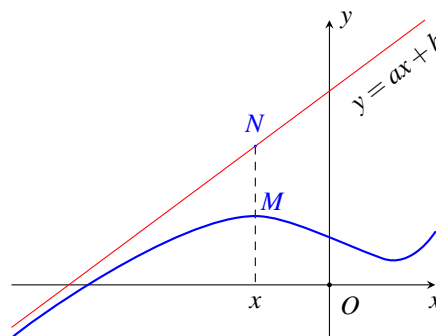
C Đường tiệm cận xiên

Đường thẳng $y = ax + b$, ($a \neq 0$) được gọi là **đường tiệm cận xiên** (gọi tắt là tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$



Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \rightarrow +\infty$)



Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \rightarrow -\infty$)

1. Một số dạng toán thường gặp

DT

1

Bài toán tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$. Để tìm đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số thì ta làm như sau:

- **Các bước tìm đường tiệm cận ngang:**

- **Bước 1:** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- **Bước 2:** Xem ở “vị trí” nào ra kết quả hữu hạn thì ta kết luận có tiệm cận ngang ở “vị trí” đó

- **Các bước tìm đường tiệm cận đứng:**

- **Bước 1:** Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là $x = x_0$
- **Bước 2:** Tính giới hạn một bên tại $x = x_0$.
Nếu xảy ra $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ thì ta kết luận $x = x_0$ là đường tiệm cận đứng.

- **Lưu ý:** Đồ thị hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ luôn có TCD: $x = -\frac{d}{c}$ và TCN: $y = \frac{a}{c}$

DT

2

Bài toán tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$. Để tìm đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số thì ta làm như sau:

- **Các bước tìm đường tiệm cận đứng:**

- **Bước 1:** Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là $x = x_0$
- **Bước 2:** Tính giới hạn một bên tại $x = x_0$.

Nếu xảy ra $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ thì ta kết luận $x = x_0$ là đường tiệm cận đứng.

- **Các bước tìm đường tiệm cận xiên:** ta xác định hệ số của a và b trong các trường hợp sau

- **Bước 1:** Tính $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$

- **Bước 2:** Tính $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$

- **Lưu ý:**

- Nếu $a = 0$ thì tiệm cận xiên chính là tiệm cận ngang

- Đối với hàm số phân thức $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ta có thể chia đa thức để biến đổi về dạng

$$f(x) = a'x + b' + \frac{e}{mx + n} \text{ với } e \neq 0$$

Suy ra $y = a'x + b'$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

§5. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A // Sơ đồ khảo sát hàm số

Sơ đồ khảo sát hàm số $y = f(x)$

- Tìm tập xác định của hàm số.
- Khảo sát sự biến thiên của hàm số
 - Tính đạo hàm y' . Tìm các điểm mà tại đó y' bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.
 - Tìm cực trị của hàm số.
 - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).
 - Lập bảng biến thiên của hàm số.
- Vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

CHÚ Ý

Khi vẽ đồ thị, nên xác định thêm một số điểm đặc biệt của đồ thị, chẳng hạn hãy tìm giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (khi có và việc tìm không quá phức tạp). Ngoài ra cần lưu ý đến tính đối xứng của đồ thị (đối xứng tâm, đối xứng trục).

B // Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số đa thức bậc ba

Ví dụ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.

- Tìm tập xác định của hàm số $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Sự biến thiên
 - Ta có $y' = -3x^2 + 6x$. Vậy $y' = 0$ khi $x = 0$ hoặc $x = 2$.
 - Trên khoảng $(0; 2)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến. Trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng đó.
 - Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, giá trị cực tiểu $y_{CT} = -4$. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$, giá trị cực đại $y_{CD} = 0$.
 - Giới hạn vô cực

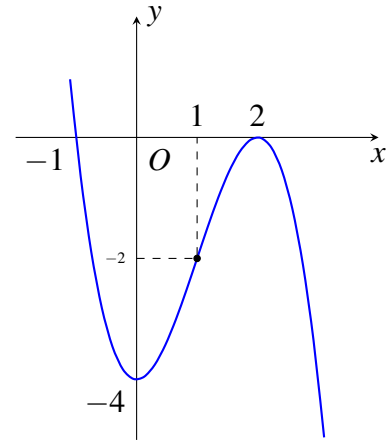
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3} \right) = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(-1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3} \right) = -\infty.$$
 - Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			-4		0		$-\infty$

c) Đồ thị

- Giao điểm của đồ thị với trục tung là điểm $(0; -4)$.
- Ta có $y = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow -(x-2)^2(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 2$. Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là các điểm $(-1; 0)$ và $(2; 0)$.
- Đồ thị của hàm số có tâm đối xứng là điểm $(1; -2)$.



CHÚ Ý

Đồ thị của hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$

- Có tâm đối xứng là điểm có hoành độ thỏa mãn $y'' = 0$ hay $x = -\frac{b}{3a}$.
- Không có tiệm cận.

C KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ PHÂN THỨC HỮU TỈ

Trong mục này, ta sử dụng sơ đồ tổng quát ở Mục 1 để khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của một số hàm phân thức hữu tỉ đơn giản.

1. Hàm số phân thức bậc nhất trên bậc nhất

Ví dụ 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$.

a) Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

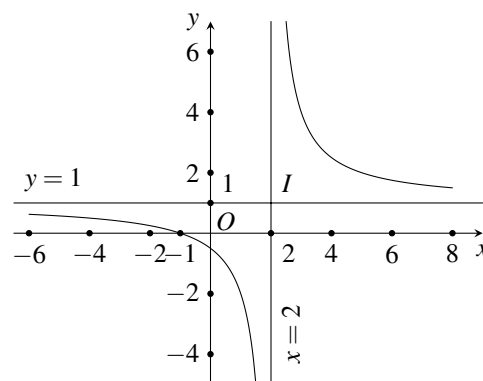
b) Sự biến thiên

- Ta có: $y' = -\frac{3}{(x-2)^2} < 0$ với mọi $x \neq 2$.
- Hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
- Hàm số không có cực trị.
- Tiệm cận $\lim_{x \rightarrow 2^-} y = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty$; Do đó, đồ thị của hàm số
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-2} = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-2} = 1$.
 có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	—		—
y	1 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 1	

c) Đồ thị

- Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$.
- Giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là điểm $(-1; 0)$.
- Đồ thị hàm số nhận giao điểm $(2; 1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm trục đối xứng.



Hình 1.30

CHÚ Ý

Đồ thị của hàm số phân thức $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$):

- Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm tâm đối xứng;
- Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

2. Hàm số phân thức bậc hai trên bậc nhất

Ví dụ 3. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$.

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.b) Sự biến thiên: Viết $y = x + 1 + \frac{1}{x-2}$.

- Ta có: $y' = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$. Vậy $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$.
- Trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên từng khoảng này. Trên các khoảng $(1; 2)$ và $(2; 3)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên từng khoảng này.
- Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ với $y_{CD} = 1$; hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$ với $y_{CT} = 5$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = +\infty.$$

• Tiệm cận

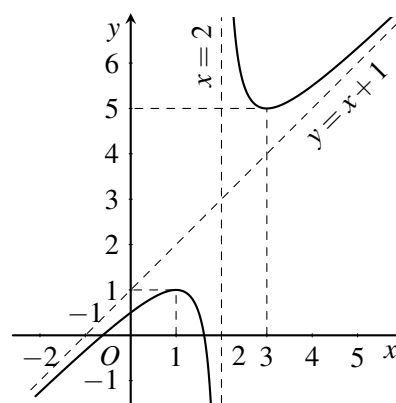
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} y = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(x + 1 + \frac{1}{x-2} \right) = -\infty; \lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(x + 1 + \frac{1}{x-2} \right) = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$, tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x + 1$.

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	1	$+\infty$	5	$+\infty$	



Hình 1.31

c) Đồ thị (H.1.31):

- Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.
- Ta có $y = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ hoặc $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là các điểm $\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; 0\right)$ và $\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; 0\right)$.
- Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(2; 3)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

CHÚ Ý

Đồ thị của hàm số phân thức $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$ ($a \neq 0, p \neq 0$, đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu):

- Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng;
- Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

§6. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN ĐẾN THỰC TIỄN

A // TỐC ĐỘ THAY ĐỔI CỦA MỘT ĐẠI LƯỢNG

Giả sử y là một hàm số của x và ta viết $y = f(x)$. Nếu x thay đổi từ x_1 đến x_2 , thì sự thay đổi của x là

$$\Delta x = x_2 - x_1,$$

và sự thay đổi tương ứng của y là

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1).$$

Tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ được gọi là tốc độ thay đổi trung bình của y đối với x trên đoạn $[x_1; x_2]$.

Giới hạn $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ được gọi là tốc độ thay đổi tức thời của y đối với x tại điểm $x = x_1$.

Như vậy, đạo hàm $f'(a)$ là tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng $y = f(x)$ đối với x tại điểm $x = a$. Dưới đây, chúng ta xem xét một số ứng dụng của ý tưởng này đối với vật lí, hoá học, sinh học và kinh tế:

- Nếu $s = s(t)$ là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì $v = s'(t)$ biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian). Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là gia tốc tức thời của vật:

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

- Nếu $C = C(t)$ là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm t , thì $C'(t)$ là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm t .
- Nếu $P = P(t)$ là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t , thì $P'(t)$ biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm t .
- Nếu $C = C(x)$ là hàm chi phí, tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì tốc độ thay đổi tức thời $C'(x)$ của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là chi phí biên.
- Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên $C'(x)$ xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo, tức là đơn vị hàng hoá thứ $x + 1$ (xem SGK Toán 11 tập hai, trang 87, bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống).

B // MỘT VÀI BÀI TOÁN TỐI ƯU HÓA ĐƠN GIẢN

Một trong những ứng dụng phổ biến nhất của đạo hàm là cung cấp một phương pháp tổng quát, hiệu quả để giải những bài toán tối ưu hoá. Trong mục này, chúng ta sẽ giải quyết những vấn đề thường gặp như tối đa hoá diện tích, khối lượng, lợi nhuận, cũng như tối thiểu hoá khoảng cách, thời gian, chi phí.

Khi giải những bài toán như vậy, khó khăn lớn nhất thường là việc chuyển đổi bài toán thực tế cho bằng lời thành bài toán tối ưu hoá toán học bằng cách thiết lập một hàm số phù hợp mà ta cần tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của nó, trên miền biến thiên phù hợp của biến số.

Quy trình giải một bài toán tối ưu hoá:

- **Bước 1.** Xác định đại lượng Q mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.

- **Bước 2.** Chọn một đại lượng thích hợp nào đó, kí hiệu là x , và biểu diễn các đại lượng khác ở **Bước 1** theo x . Khi đó, đại lượng Q sẽ là hàm số của một biến x . Tìm tập xác định của hàm số $Q = Q(x)$.
- **Bước 3.** Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $Q = Q(x)$ bằng các phương pháp đã biết và kết luận.

NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN

§1. NGUYÊN HÀM

A // Nguyên hàm của một hàm số

Cho hàm số $f(x)$ được xác định trên khoảng K (hoặc một đoạn, hay một nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là một **nguyên hàm** của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K .

CHÚ Ý

Trường hợp $K = [a; b]$ thì các đẳng thức $F'(a) = f(a)$ và $F'(b) = f(b)$ được hiểu là đạo hàm bên phải tại điểm $x = a$ và đạo hàm bên trái tại điểm $x = b$ của hàm số $F(x)$, tức là

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = f(a)$$

và

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} = f(b).$$

Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K . Khi đó:

- Với mỗi hằng số C , hàm số $F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K ;
- Nếu hàm số $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì tồn tại một hằng số C sao cho $G(x) = F(x) + C$ với mọi $x \in K$.

Như vậy, nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$ (C là hằng số). Ta gọi $F(x) + C$ ($C \in \mathbb{R}$) là **họ các nguyên hàm** của $f(x)$ trên K , kí hiệu bởi $\int f(x) dx$

CHÚ Ý

- Để tìm họ các nguyên hàm (gọi tắt là tìm nguyên hàm) của hàm số $f(x)$ trên K , ta chỉ cần tìm một nguyên hàm của $f(x)$ trên K và khi đó

$$\int f(x) dx = F(x) + C, C \text{ là hằng số.}$$

- Người ta chứng minh được rằng, nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng K thì $f(x)$ có nguyên hàm trên khoảng đó.
- Biểu thức $f(x) dx$ gọi là vi phân của nguyên hàm $F(x)$, kí hiệu là $dF(x)$. Vậy $dF(x) = F'(x) dx = f(x) dx$.

d) Khi tìm nguyên hàm của một hàm số mà không chỉ rõ tập K , ta hiểu là tìm nguyên hàm của hàm số đó trên tập xác định của nó.

B Tính chất cơ bản của nguyên hàm

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx \quad (k \neq 0).$$

Nguyên hàm của một tổng

- $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$
- $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx.$

C Nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

1. Nguyên hàm của hàm số lũy thừa

Hàm số $y = x^\alpha$, với $\alpha \in \mathbb{R}$, được gọi là *hàm số lũy thừa*.

Tập xác định của hàm số $y = x^\alpha$ phụ thuộc vào giá trị của α . Cụ thể:

- Với α nguyên dương, tập xác định là $\mathbb{R}$.
- Với α nguyên âm hoặc bằng 0, tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Với α không nguyên, tập xác định là $(0; +\infty)$.

Ở lớp 11, ta đã biết đạo hàm của các hàm số $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) và $y = \sqrt{x}$ là:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

hay $(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$ ($x > 0$). Tổng quát, người ta chứng minh được:

Hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) có đạo hàm với mọi $x > 0$ và

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

Nguyên hàm của hàm số lũy thừa

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$

2. Nguyên hàm của hàm số lượng giác

- $\int \cos x \, dx = \sin x + C;$
- $\int \sin x \, dx = -\cos x + C;$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C;$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = \cot x + C.$

3. Nguyên hàm của hàm số mũ

- $\int e^x \, dx = e^x + C;$
- $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1).$

Ta tổng kết lại nguyên hàm của một số hàm số thường gặp như sau

$\int 0 \, dx = C$	$\int 1 \, dx = x + C$
$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$	$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C$
$\int e^x \, dx = e^x + C$	$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$
$\int \cos x \, dx = \sin x + C$	$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$

4. Một số dạng toán thường gặp

DT 1 Tìm nguyên hàm của hàm số lũy thừa

Các công thức thường dùng:

$$\oplus \int 1 \, dx = x + C$$

$$\oplus \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$$

$$\oplus \int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$$

$$\oplus \int \frac{1}{x^2} \, dx = -\frac{1}{x} + C$$

Chú ý các công thức biến đổi lũy thừa:

$$\oplus \frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

$$\oplus \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

$$\oplus x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

$$\oplus \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}; \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

DT

2

Nguyên hàm của hàm số lượng giác

Các công thức thường dùng:

$$\oplus \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\oplus \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\oplus \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\oplus \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

Chú ý các công thức biến đổi lượng giác:

$$\oplus \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \oplus \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \quad \oplus \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

$$\oplus \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \oplus \sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad \oplus \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\oplus \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \oplus \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

DT

3

Nguyên hàm của hàm số mũ

Các công thức thường dùng:

$$\oplus \int e^x dx = e^x + C$$

$$\oplus \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Chú ý các công thức biến đổi lũy thừa:

$$\oplus a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\oplus \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\oplus (a^x)^y = a^{xy}$$

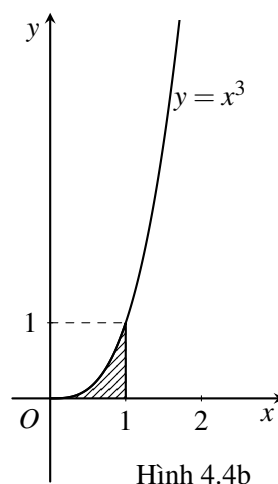
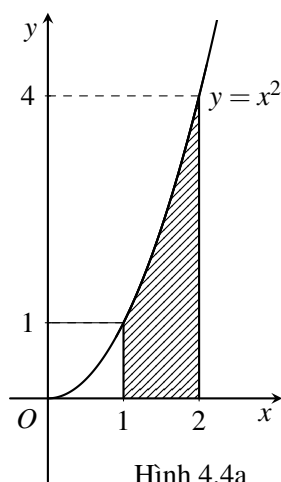
§2. TÍCH PHÂN

A Khái niệm tích phân

1. Diện tích hình thang cong

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$), trong đó $f(x)$ là hàm liên tục không âm trên đoạn $[a; b]$, gọi là một **hình thang cong**.

Những hình phẳng được tô màu dưới đây có phải là hình thang cong.



2. Định nghĩa tích phân

Định nghĩa 2.1. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ thì hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $\int_a^b f(x) dx$.



a) Hiệu $F(b) - F(a)$ thường được kí hiệu là $F(x)|_a^b$. Như vậy

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b$$

b) Ta gọi $\int_a^b$ là dấu tích phân, a là cận dưới, b là cận trên, $f(x)dx$ là biểu thức dưới dấu tích phân và $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân.

c) Tích phân không phụ thuộc vào cách kí hiệu biến

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du.$$

d) Trong trường hợp $a = b$ hoặc $a > b$, ta quy ước:

$$\int_a^a f(x)dx = 0; \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

B Tính chất của tích phân

Tính chất của tích phân

Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó, ta có

- a) $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$ (k là hằng số);
- b) $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;
- c) $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$;
- d) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ ($a < c < b$).

1. Một số dạng toán thường gặp

DT

1

Tích phân của các hàm số cơ bản. Tính chất của tích phân

Phương pháp: Các bước tính $\int_a^b f(x)dx$

- **Bước 1:** Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ (thường chọn $C = 0$)
- **Bước 2:** Sử dụng công thức $\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

DT

2

Tích phân của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối

Phương pháp: Ta thực hiện theo một trong hai cách sau:

Cách 1:

- Cho $f(x) = 0$ tìm nghiệm $\in [a; b]$ giả sử các nghiệm đó là $x_1; x_2; \dots, x_n \in [a; b]$
- Khi đó $I = \int_a^{x_1} |f(x)|dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|dx + \int_{x_2}^{x_3} |f(x)|dx + \dots + \int_{x_n}^b |f(x)|dx$
 $\Leftrightarrow I = \left| \int_a^{x_1} f(x)dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b f(x)dx \right|$
- Tính mỗi tích phân thành phần

Cách 2:

- Cho $f(x) = 0$ tìm nghiệm $\in [a; b]$.
- Xét dấu $f(x)$ trên $[a; b]$.
- Áp dụng công thức phá trị tuyệt đối $|A| = \begin{cases} A & \text{khi } A > 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$ để phá trị tuyệt đối trong $\int_a^b \dots$
- Tính mỗi tích phân thành phần

DT**3****Tích phân của hàm số cho bởi nhiều công thức****Phương pháp:** Có hai bài toán trong dạng này

Bài toán 1: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{khi } x \leq b \\ h(x) & \text{khi } x > b \end{cases}$ liên tục trên D . Tính $J = \int_a^c f(x) dx$. Xét $b \in [a; c]$.

- **Bước 1:** Kiểm tra hàm số $f(x)$ có liên tục tại $x = b$?
Tức là kiểm tra $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} h(x) = f(b)$
- **Bước 2:** Tách cận: $J = \int_a^c f(x) dx = \underbrace{\int_a^b g(x) dx}_{I_1} + \underbrace{\int_b^c h(x) dx}_{I_2}$.
- **Bước 3:** Tính các tích phân $I_1; I_2$ bằng các phương pháp đã học.

Bài toán 2: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} g(x; m) & \text{khi } x \leq b \\ h(x; m) & \text{khi } x > b \end{cases}$ liên tục trên D . Tính $J = \int_a^c f(x) dx$. Xét $b \in [a; c]$.

- **Bước 1:** Kiểm tra hàm số $f(x)$ có liên tục tại $x = b$?
Tức là kiểm tra: $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow b^-} g(x; m) = \lim_{x \rightarrow b^+} h(x; m) = f(b)$
- **Bước 2:** Tách cận: $J = \int_a^c f(x) dx = \underbrace{\int_a^b g(x) dx}_{I_1} + \underbrace{\int_b^c h(x) dx}_{I_2}$.
- **Bước 3:** Tính các tích phân $I_1; I_2$ bằng các phương pháp đã học.

DT**4****Ứng dụng tích phân giải bài toán thực tế****Bài toán 1: Bài toán chuyển động của một vật**

- Quãng đường vật di chuyển từ thời điểm $t = a$ đến $t = b$ ($a < b$) theo phương trình vận tốc $v(t)$ là: $s = \int_a^b v(t) dt$.
- Vận tốc của vật sau khoảng thời gian $\Delta t = t_2 - t_1$ theo phương trình gia tốc $a(t)$ là: $v = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dx$.

Bài toán 2: Ứng dụng tích phân tìm các đại lượng vật lý (công, điện lượng,...)

- **Định luật Hooke:** Lực kéo lò xo giãn thêm x mét là $f(x) = kx$ (k là độ cứng lò xo).
- Công cần để kéo dãn lò xo từ độ dài l_1 đến l_2 là: $A = \int_{l_1}^{l_2} f(x) dx$.
- Điện lượng chuyển qua tiết diện dây dẫn trong thời gian từ t_1 đến t_2 là: $Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt$.

Bài toán 3: Tính công của lực biến thiên: Nếu lực $F(x)$ thay đổi theo vị trí x , công A thực hiện từ $x = a$ đến $x = b$ là:

$$A = \int_a^b F(x) dx$$

Bài toán 4: Giá trị trung bình của hàm số: Giá trị trung bình của hàm $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ là:

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

§3. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

A // Ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng

1. Hình phẳng giới hạn bởi một đồ thị hàm số, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$

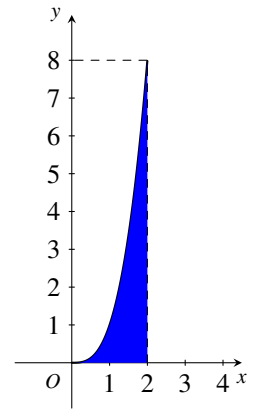
Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)$ liên tục, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$), được tính bằng công thức

$$S = \int_a^b |f(x)| dx.$$

≡ Ví dụ 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$.

Diện tích hình phẳng cần tính là

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 |x^3| dx = \int_0^2 x^3 dx \\ &= \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^2 = 4 - 0 = 4. \end{aligned}$$



2. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số và hai đường thẳng $x = a, x = b$

Diện tích S hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$, được tính bằng công thức

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

CHÚ Ý

Nếu hiệu $f(x) - g(x)$ không đổi dấu trên đoạn $[a; b]$ thì

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) - g(x) dx \right|.$$

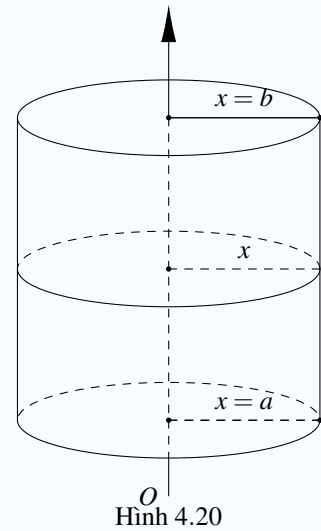
B // Ứng dụng tích phân để tính thể tích vật thể

1. Tính thể tích vật thể

Nhận biết công thức tính thể tích vật thể

Xét hình trụ có bán kính đáy R , có trục là trục hoành Ox , nằm giữa hai mặt phẳng $x = a$ và $x = b$ ($a < b$) (Hình 4.20).

- Tính thể tích V của hình trụ.
- Tính diện tích mặt cắt $S(x)$ khi cắt hình trụ bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ là x ($a \leq x \leq b$).
Từ đó tính $\int_a^b S(x) dx$ và so sánh với V .



Lời giải.

- Thể tích hình trụ là $V = \pi R^2 (b - a)$.
- Diện tích mặt cắt $S(x) = \pi R^2$. Khi đó

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b \pi R^2 dx = \pi R^2 x \Big|_a^b = \pi R^2 (b - a).$$

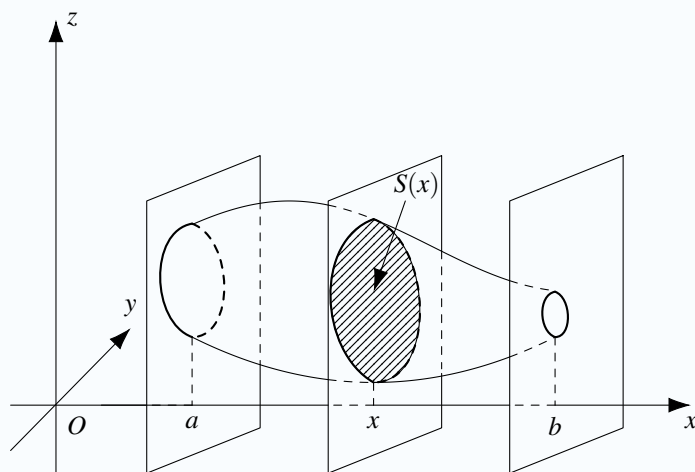
$$\text{Vậy } V = \int_a^b S(x) dx.$$



Công thức tính thể tích vật thể

Cho một vật thể trong không gian $Oxyz$. Gọi $\mathcal{B}$ là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm có hoành độ $x = a$, $x = b$. Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ là x cắt vật thể theo mặt cắt có diện tích là $S(x)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó thể tích V của phần vật thể $\mathcal{B}$ được tính bởi công thức

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

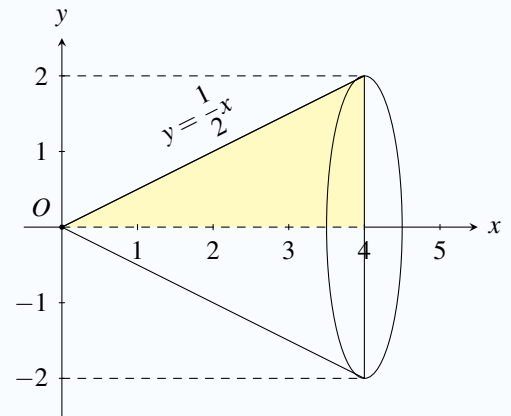


Hình 4.21

2. Tính thể tích khối tròn xoay

Nhận biết công thức tính thể tích của khối tròn xoay

Xét hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{2}x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 4$. Khi quay hình phẳng này xung quanh trục hoành Ox ta được khối nón có đỉnh là gốc O , trục là Ox và đáy là hình tròn bán kính bằng 2 (Hình 4.25).



Hình 4.25

- Tính thể tích V của khối nón.
- Chứng minh rằng khi cắt khối nón bởi mặt phẳng vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ bằng x ($0 \leq x \leq 4$) thì mặt cắt thu được là một hình tròn có bán kính là $f(x)$, do đó diện tích mặt cắt là $S(x) = \pi f^2(x)$.

Tính $\pi \int_0^4 f^2(x) dx$ và so sánh với V .

Lời giải.

- Thể tích V của khối nón là

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = \frac{16\pi}{3}.$$

- Ta tính được

$$\pi \int_0^4 f^2(x) dx = \pi \int_0^4 \frac{S(x)}{\pi} dx = \int_0^4 S(x) dx.$$

Theo công thức tính thể tích vật thể thì $V = \pi \int_0^4 f^2(x) dx$.

□

Công thức tính thể tích của khối tròn xoay

Cho hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $[a; b]$.

Khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ xung quanh trục hoành, ta được hình khối gọi là một **khối tròn xoay**.

Khi cắt khối tròn xoay đó bởi một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm $x \in [a; b]$ được một hình tròn có bán kính $f(x)$.

Thể tích của khối tròn xoay này là

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

DT

1

Ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng

Phương pháp:

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi một hàm số, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$

Diện tích hình phẳng giới hạn: $\begin{cases} y = f(x) \\ Ox \\ x = a; x = b \end{cases} \rightarrow S = \int_a^b |f(x)| dx.$

Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:

Bước 1: Giải $f(x) = 0$ tìm nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a; b)$ ($a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$).

Bước 2: Tính $S = \int_a^{x_1} |f(x)| dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx + \dots + \int_{x_n}^b |f(x)| dx$

$$= \left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b f(x) dx \right|$$

Chú ý: Ngoài cách trên, ta có thể dựa vào đồ thị để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số và hai đường thẳng $x = a, x = b$

Diện tích hình phẳng giới hạn: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a; x = b \end{cases} \rightarrow S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$

Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:

Bước 1: Giải $f(x) = g(x)$ tìm nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a; b)$ ($a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$).

Bước 2: Tính $S = \int_a^{x_1} |f(x) - g(x)| dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)| dx + \dots + \int_{x_n}^b |f(x) - g(x)| dx$

$$= \left| \int_a^{x_1} (f(x) - g(x)) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x)) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b (f(x) - g(x)) dx \right|$$

Chú ý: Ngoài cách trên, ta có thể dựa vào đồ thị để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

DT

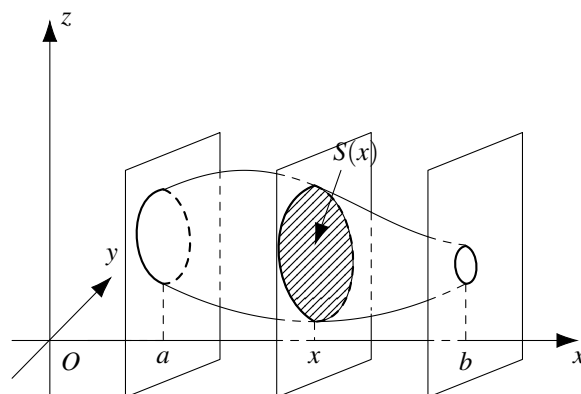
2

Ứng dụng tích phân để tính thể tích khối tròn xoay

Phương pháp:

Thể tích vật thể tính theo mặt cắt vuông góc trục hoành

Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b , $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x , ($a \leq x \leq b$).



Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định: $V = \int_a^b S(x)dx$.

Thể tích khối tròn xoay

Xoay miền hình phẳng giới hạn: $\begin{cases} y = f(x) \\ Ox; x = a; x = b \end{cases}$ quanh trục Ox .

- **Bước 1:** Giải $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = c; c \in [a; b]$.

- **Bước 2:** Tính $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$

VECTO VÀ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

§1. VEC-TƠ TRONG KHÔNG GIAN

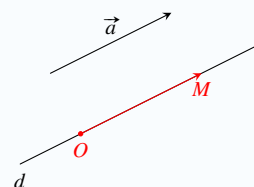
A // Véc-tơ trong không gian

- Véc-tơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.
- Độ dài của véc-tơ trong không gian là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của véc-tơ đó.

Tương tự như véc-tơ trong mặt phẳng, đối với véc-tơ trong không gian ta cũng có các kí hiệu và khái niệm sau

- véc-tơ có điểm đầu là A và điểm cuối là B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$.
- Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của véc-tơ thì véc-tơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$
- Độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$, độ dài của véc-tơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$.
-

Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một véc-tơ. Đường thẳng d là giá của véc-tơ $\vec{a}$. được gọi là giá của véc-tơ đó.



Tương tự như trường hợp của véc-tơ trong mặt phẳng, ta có các khái niệm sau đối với véc-tơ trong không gian

- Hai véc-tơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- Nếu hai véc-tơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.
- Hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.
- Nếu hai véc-tơ cùng bằng một véc-tơ thứ ba thì hai véc-tơ đó có bằng nhau.

CHÚ Ý

Tương tự như véc-tơ trong mặt phẳng, ta có tính chất và các quy ước sau đối với véc-tơ trong không gian

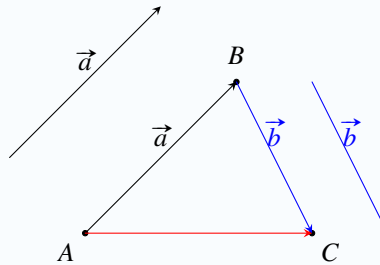
- Trong không gian, với mỗi điểm O và véc-tơ $\vec{a}$ cho trước, có duy nhất điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.

- Các véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ví dụ như $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$, ... gọi là các véc-tơ không.
- Ta quy ước véc-tơ không có độ dài là 0, cùng hướng (và vì vậy cùng phương) với mọi véc-tơ. Do đó, các véc-tơ không đều bằng nhau và được kí hiệu chung là $\vec{0}$.

B Tổng và hiệu của véc-tơ trong không gian

1. Tổng của hai véc-tơ trong không gian

Trong không gian, cho hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Véc $\overrightarrow{AC}$ được gọi là *tổng của hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$* , kí hiệu là $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.



Nhận xét. Quy tắc ba điểm và quy tắc hình bình hành trong mặt phẳng vẫn đúng trong không gian

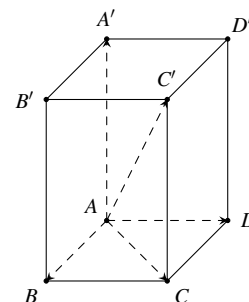
- Nếu A, B, C là ba điểm bất kì thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$;
- Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

CHÚ Ý

Tương tự như phép cộng véc-tơ trong mặt phẳng, phép cộng véc-tơ trong không gian có các tính chất sau

- Tính chất giao hoán: Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai véc-tơ bất kì thì $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- Tính chất kết hợp: Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ là ba véc-tơ bất kì thì $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
- Tính chất cộng với véc-tơ $\vec{0}$: Nếu $\vec{a}$ là một véc-tơ bất kì thì $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

2. Quy tắc hình hộp



Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

3. Hiệu của hai véc-tơ trong không gian

Trong không gian, véc-tơ có cùng độ dài và ngược hướng với véc-tơ $\vec{a}$ được gọi là véc-tơ đối của véc-tơ $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$.

CHÚ Ý

- Hai véc-tơ là đối nhau nếu và chỉ nếu tổng của chúng bằng $\vec{0}$.
- Véc-tơ $\overrightarrow{BA}$ là một véc-tơ đối của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$.
- Véc-tơ $\vec{0}$ được coi là véc-tơ đối của chính nó.

Tương tự như hiệu của hai véc-tơ trong mặt phẳng, ta có định nghĩa về hiệu của hai véc-tơ trong không gian.

Véc-tơ $\vec{a} + (-\vec{b})$ được gọi là hiệu của hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$. Trong không gian, phép lấy hiệu của hai véc-tơ được gọi là phép trừ véc-tơ.

Nhận xét. Với ba điểm O, A, B bất kì trong không gian, ta có $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$.

C Tích của một số với một véc-tơ trong không gian

Trong không gian, tích của một số thực $k \neq 0$ với một véc-tơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ là một véc-tơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau

- Cùng hướng với véc-tơ $\vec{a}$ nếu $k > 0$; ngược hướng với véc-tơ $\vec{a}$ nếu $k < 0$;
- Có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

Trong không gian, phép lấy tích của một số với một véc-tơ được gọi là phép nhân một số với một véc-tơ.

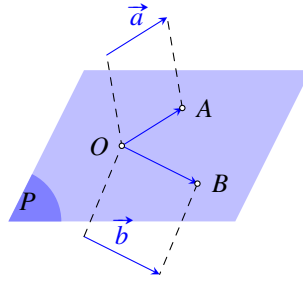
CHÚ Ý

- Quy ước $k\vec{a} = \vec{0}$ nếu $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.
- Nếu $k\vec{a} = \vec{0}$ thì $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.
- Trong không gian, điều kiện cần và đủ để hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương là có một số thực k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

D Tích vô hướng của hai véc-tơ

1. Góc giữa hai véc-tơ trong không gian

Trong không gian, cho hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O bất kì và gọi A, B là hai điểm sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Khi đó, góc $\widehat{AOB}$ ($0^\circ \leq \widehat{AOB} \leq 180^\circ$) được gọi là góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $(\vec{a}, \vec{b})$.

**CHÚ Ý**

- Để xác định góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ trong không gian ta có thể lấy điểm E sao cho $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}$, khi đó $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \widehat{BAE}$.
- Quy ước góc giữa một véc-tơ bất kì và $\vec{0}$ có thể nhận một giá trị tùy ý từ 0° đến 180° .

2. Tích vô hướng của hai véc-tơ trong không gian

Trong không gian, cho hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

CHÚ Ý

- Quy ước nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $\vec{b} = \vec{0}$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
- Cho hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Khi đó $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
- Với mọi véc-tơ $\vec{a}$, ta có $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.
- Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ là hai véc-tơ khác $\vec{0}$ thì $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

○ Nhận xét. Tích vô hướng của hai véc-tơ trong không gian cũng có các tính chất giống như các tính chất của tích vô hướng của hai véc-tơ trong mặt phẳng. Cụ thể, nếu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là các véc-tơ trong không gian và k là một số thực thì ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
- $k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$;
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

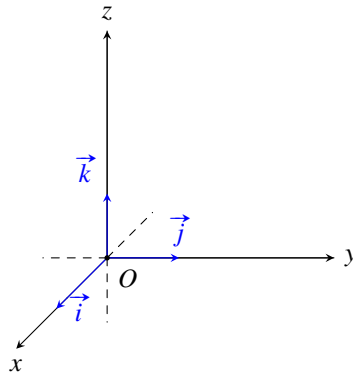
§2. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A // Hệ tọa độ trong không gian

Trong không gian, ba trục Ox , Oy , Oz đôi một vuông góc với nhau tại gốc O của mỗi trục. Gọi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt là các véc-tơ đơn vị trên các trục Ox , Oy , Oz .

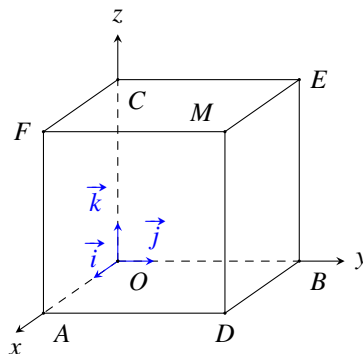
- Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục tọa độ Descartes vuông góc $Oxyz$, hay đơn giản là hệ tọa độ $Oxyz$.
- Điểm O được gọi là gốc tọa độ.
- Các mặt phẳng (Oxy) , (Oyz) , (Ozx) đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặt phẳng tọa độ.

Không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$.



B // Tọa độ điểm và tọa độ véc-tơ trong không gian

Trong không gian $Oxyz$, cho một điểm M tùy ý. Bộ ba số $(x; y; z)$ duy nhất sao cho $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ được gọi là tọa độ của điểm M đối với hệ tọa độ $Oxyz$. Khi đó, ta viết $M = (x; y; z)$ hoặc $M(x; y; z)$, trong đó x là **hoành độ**, y là **tung độ** và z là **cao độ** của M .



C // Hình thành khái niệm tọa độ của véc-tơ trong không gian

Trong không gian $Oxyz$, cho véc-tơ $\vec{a}$ tùy ý. Bộ ba số $(x; y; z)$ duy nhất sao cho $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ được gọi là tọa độ của véc-tơ $\vec{a}$ đối với hệ tọa độ $Oxyz$. Khi đó, ta viết $\vec{a} = (x; y; z)$ hoặc $\vec{a}(x; y; z)$.

Nhận xét.

- Tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{OM}$ cũng là tọa độ của điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.
- Trong không gian, cho hai véc-tơ $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$.

Khi đó, $\vec{a} = \vec{b}$ nếu và chỉ nếu
$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z'. \end{cases}$$

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ và $N(x_N; y_N; z_N)$. Khi đó

$$\overrightarrow{MN} = (x_N - x_M; y_N - y_M; z_N - z_M).$$

§3. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTO

A Biểu thức tọa độ phép cộng hai véc-tơ, phép trừ hai véc-tơ, phép nhân một số với một véc-tơ

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$. Ta có

- $\vec{a} + \vec{b} = (x + x'; y + y'; z + z')$;
- $\vec{a} - \vec{b} = (x - x'; y - y'; z - z')$;
- $k\vec{a} = (kx; ky; kz)$ với k là một số thực.

○ Nhận xét. Vectơ $\vec{a} = (x; y; z)$ cùng phương với vectơ $\vec{b} = (x'; y'; z') \neq \vec{0}$ khi và chỉ khi tồn tại số thực k sao cho
$$\begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \\ z = kz' \end{cases}$$

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm không thẳng hàng $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ và $C(x_C; y_C; z_C)$. Khi đó:

- Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là
$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right);$$
- Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là
$$\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right).$$

B Biểu thức tọa độ tích vô hướng

Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$ được xác định bởi công thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = xx' + yy' + zz'.$$

○ Nhận xét.

- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau nếu và chỉ nếu $xx' + yy' + zz' = 0$.
- Nếu $\vec{a} = (x; y; z)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- Nếu $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$ là hai vectơ khác $\vec{0}$ thì

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

CHÚ Ý

Nếu $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$ thì

$$AB = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Đặc biệt, khi B trùng O ta nhận được công thức $OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$.

C // Ứng dụng tích vô hướng

- Diện tích hình bình hành $ABCD$:

$$S = \left\| [\vec{AB}, \vec{AD}] \right\|.$$

- Diện tích tam giác ABC :

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left\| [\vec{AB}, \vec{AC}] \right\|.$$

- Ba véc-tơ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow$

$$[\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{w} = 0.$$

- Thể tích khối hộp có đáy là hình bình hành $ABCD$ và cạnh bên AA' :

$$V = \left| [\vec{AB}, \vec{AD}] \cdot \vec{AA'} \right|.$$

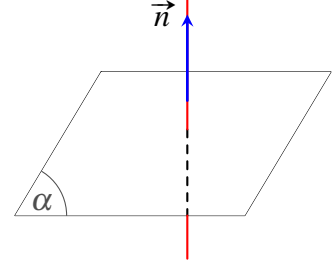
- Thể tích khối tứ diện $S.ABC$:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| [\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{SA} \right|.$$

§4. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

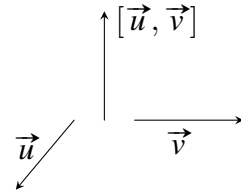
A // Véc-tơ pháp tuyến và cặp véc-tơ chỉ phương mặt phẳng

Véc-tơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ được gọi là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với mặt phẳng (α) .



- Mặt phẳng hoàn toàn xác định khi biết một điểm và một véc-tơ pháp tuyến của nó.
- Nếu $\vec{n}$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) thì $k\vec{n}$ (với $k \neq 0$) cũng là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) .

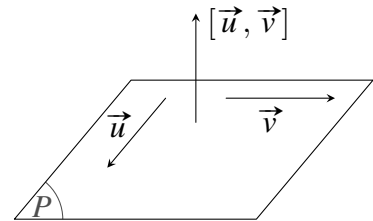
Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (a; b; c)$ và $\vec{v} = (a'; b'; c')$. Khi đó vectơ $\vec{n} = (bc' - b'c; ca' - c'a; ab' - a'b)$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, được gọi là tích có hướng của $\vec{u}$ và $\vec{v}$, ký hiệu là $[\vec{u}, \vec{v}]$.



- $[\vec{u}, \vec{v}] = \vec{0}$ khi và chỉ khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương.
- Với bốn số x, y, x', y' , ta ký hiệu $\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$. Khi đó, tích có hướng của $\vec{u} = (a; b; c)$ và $\vec{v} = (a'; b'; c')$ là

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right)$$

- Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{u}, \vec{v}$ được gọi là cặp véc-tơ chỉ phương của mặt phẳng (P) nếu chúng không cùng phương và có giá nằm trong hoặc song song với mặt phẳng (P) .
- Nếu $\vec{u}, \vec{v}$ là cặp véc-tơ chỉ phương của (P) thì $[\vec{u}, \vec{v}]$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P) .



B // Phương trình tổng quát của mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, mỗi mặt phẳng đều có phương trình dạng $Ax + By + Cz + D = 0$, trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0, được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng đó.

- Trong không gian $Oxyz$, mỗi phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ (các hệ số A, B, C, D không đồng thời bằng 0) xác định một mặt phẳng nhận $\vec{n} = (A; B; C)$ làm một véc-tơ pháp tuyến.

C // Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, nếu mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$ thì có phương trình là

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow Ax + By + Cz + D = 0,$$

với $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.

Trong không gian $Oxyz$, bài toán viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm M và biết cặp véc-tơ chỉ phương $\vec{u}, \vec{v}$ có thể thực hiện theo các bước như sau

- Tìm véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}]$.
- Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua M và biết véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}$.

Trong không gian $Oxyz$, bài toán viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C có thể thực hiện theo các bước sau

- Tìm các cặp véc-tơ chỉ phương $\vec{AB}, \vec{AC}$.
- Tìm véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{AB}, \vec{AC}]$.
- Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua A và biết véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}$.

D // Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc với nhau

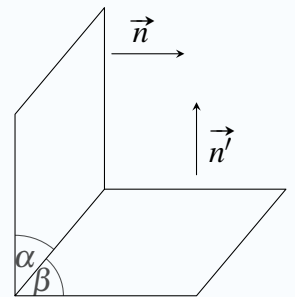
Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng

$$(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0, \quad (\beta): A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

với hai véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C), \vec{n}' = (A'; B'; C')$ tương ứng.

Khi đó

$$(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n}' \Leftrightarrow AA' + BB' + CC' = 0.$$



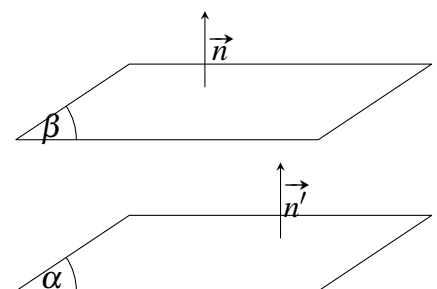
CHÚ Ý

Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng này có giá song song hoặc nằm trong mặt phẳng kia.

E // Điều kiện để hai mặt phẳng song song với nhau

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0, (\beta): A'x + B'y + C'z + D' = 0$, với các vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C), \vec{n}' = (A'; B'; C')$ tương ứng.

Khi đó $(\alpha) \parallel (\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}' = k\vec{n} \\ D' \neq kD \end{cases}$ với k là số thực.



CHÚ Ý

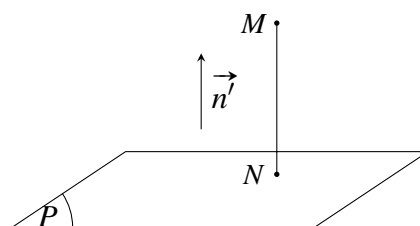
- Nếu hai mặt phẳng song song với nhau thì véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng này cũng là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng kia.
- Hai mặt phẳng (α) và (β) trùng nhau khi và chỉ khi tồn tại số k khác 0 sao cho

$$\begin{cases} A' = kA \\ B' = kB, \\ C' = kC \\ D' = kD. \end{cases}$$

F Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ là

$$d(M, (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$



1. Một số dạng toán thường gặp

DT

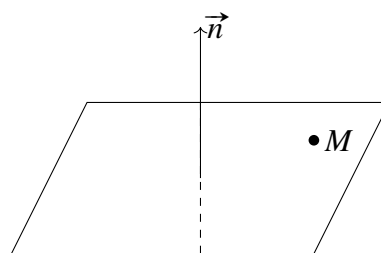
1

Viết phương trình mặt phẳng khi có vectơ pháp tuyến và một điểm thuộc mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$ là:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{với} \quad D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0.$$



DT

2

Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và có một cặp vectơ chỉ phương

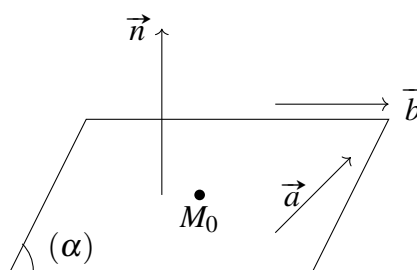
Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a}, \vec{b}$, ta thực hiện như sau:

Bước 1: Tìm một vectơ pháp tuyến

$$\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}].$$

Bước 2: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$



DT**3****Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng**

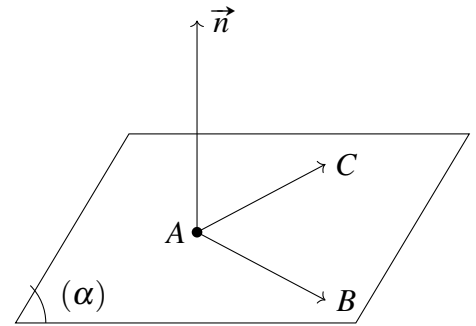
Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng thì ta thực hiện như sau:

Bước 1: Tìm cặp vectơ chỉ phương chẳng hạn $\vec{AB}, \vec{AC}$.

Bước 2: Tìm một vectơ pháp tuyến

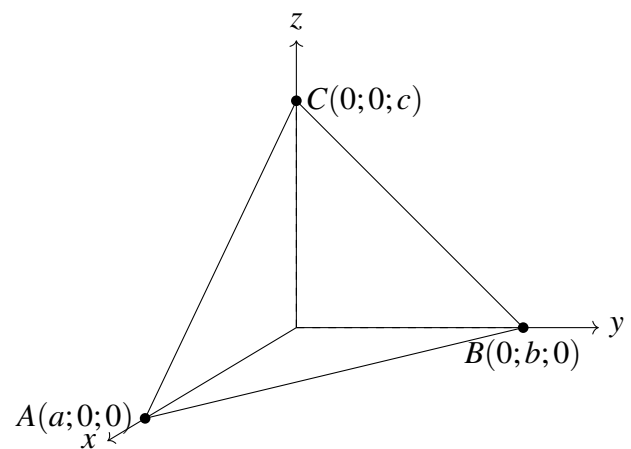
$$\vec{n} = [\vec{AB}, \vec{AC}].$$

Bước 3: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua A và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.

**DT****4****Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng theo đoạn chắn**

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ là:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$



§5. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A Vectơ chỉ phương của đường thẳng

Vectơ chỉ phương của đường thẳng: Vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ .

Chú ý:

- Đường thẳng hoàn toàn xác định khi biết một điểm mà nó đi qua và một vectơ chỉ phương.
- Nếu $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của Δ thì $k\vec{u}$ (với k là một số khác 0) cũng là một vectơ chỉ phương của Δ .

B Phương trình tham số của đường thẳng

Định nghĩa: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $A(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$.

Hệ phương trình

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

được gọi là phương trình tham số của đường thẳng Δ (t là tham số, $t \in \mathbb{R}$).

Chú ý: Cho mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát là $Ax + By + Cz + D = 0$. Khi đó:

- Với các số a, b, c không đồng thời bằng 0 thì hệ phương trình

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

xác định một đường thẳng đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (a; b; c)$.

- Từ phương trình tham số của đường thẳng, mỗi giá trị của tham số tương ứng với một điểm thuộc đường thẳng đó và ngược lại.

C Phương trình chính tắc của đường thẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $A(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ với a, b, c là các số khác 0.

Hệ phương trình:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

được gọi là phương trình chính tắc của đường thẳng Δ .

D Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm phân biệt $A_1(x_1; y_1; z_1)$ và $A_2(x_2; y_2; z_2)$.

Đường thẳng A_1A_2 có vectơ chỉ phương:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

- Đường thẳng A_1A_2 có phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

- Nếu $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2, z_1 \neq z_2$ thì phương trình chính tắc:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$, $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$.

Khi đó:

$$\Delta_1 \perp \Delta_2 \iff \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0 \iff a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

E // Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt đi qua $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$, $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$.

- $\Delta_1 \parallel \Delta_2 \iff \vec{u}_1$ cùng phương $\vec{u}_2$ và $A_1 \notin \Delta_2$.
- $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \iff \vec{u}_1$ cùng phương $\vec{u}_2$ và $A_1 \in \Delta_2$.
- Δ_1 và Δ_2 cắt nhau

$$\iff \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq \vec{0} \\ \overrightarrow{A_1A_2} \cdot [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = 0 \end{cases}$$

- Δ_1 và Δ_2 chéo nhau

$$\iff \overrightarrow{A_1A_2} \cdot [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq 0.$$

Chú ý:

Cho hai đường thẳng có phương trình tham số:

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = x_1 + a_1t \\ y = y_1 + b_1t \\ z = z_1 + c_1t \end{cases} \quad \Delta_2 : \begin{cases} x = x_2 + a_2s \\ y = y_2 + b_2s \\ z = z_2 + c_2s \end{cases}$$

Xét hệ:

$$\begin{cases} x_1 + a_1t = x_2 + a_2s \\ y_1 + b_1t = y_2 + b_2s \\ z_1 + c_1t = z_2 + c_2s \end{cases}$$

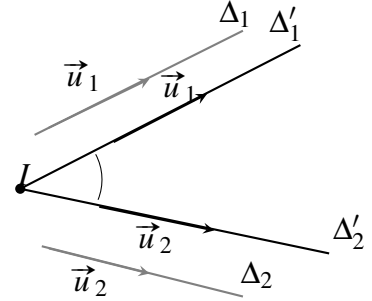
- $\Delta_1 \parallel \Delta_2 \iff$ hệ vô nghiệm.
- $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \iff$ hệ có vô số nghiệm.
- Δ_1 cắt $\Delta_2 \iff$ hệ có nghiệm duy nhất.
- Δ_1 và Δ_2 chéo nhau $\iff$ không cùng phương và hệ vô nghiệm.

F Góc

1. Góc giữa hai đường thẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 tương ứng có $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$ và $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ là hai vectơ chỉ phương. Khi đó, ta có:

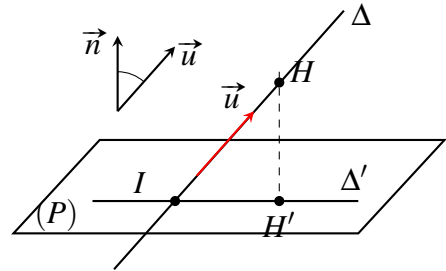
$$\begin{aligned}\cos(\Delta_1, \Delta_2) &= |\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)| = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} \\ &= \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.\end{aligned}$$



2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$. Khi đó, ta có:

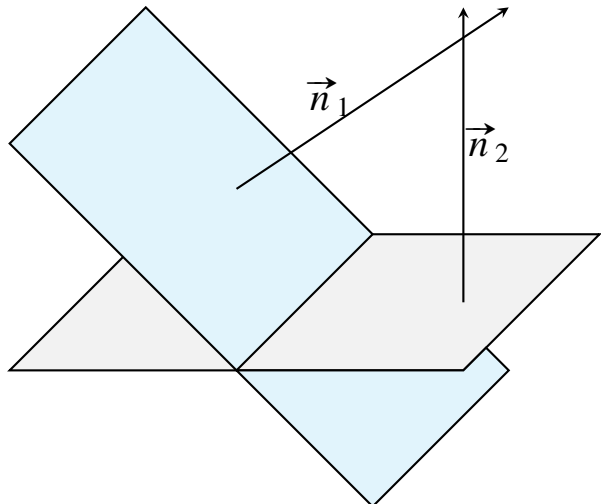
$$\begin{aligned}\sin(\Delta, (P)) &= |\cos(\vec{u}, \vec{n})| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \\ &= \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.\end{aligned}$$



3. Góc giữa hai mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$ có hai vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ và $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned}\cos((P_1), (P_2)) &= |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \\ &= \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.\end{aligned}$$



G

Dạng bài tập

DT**1**

Xác định các yếu tố cơ bản của đường thẳng trong không gian. Vị trí tương đối trong không gian

Phương pháp: Trong không gian $Oxyz$, vectơ $\vec{u} = (a; b; c) \neq \vec{0}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ thì vectơ $\vec{m} = k\vec{u}$ cũng là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ .

Phương trình tham số Δ :

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ (hệ số trước t).

Phương trình chính tắc Δ :

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ (hệ số ở mẫu).

Nhận xét:

- Với phương trình tham số lấy đúng thứ tự hệ số trước tham số t .
- Với phương trình chính tắc lấy hệ số dưới mẫu.
- Nếu giả thiết chưa đúng cấu trúc, ta phải sắp xếp lại rồi mới lấy hệ số.

DT**2**

Viết phương trình đường thẳng đi qua một điểm và có một vectơ chỉ phương

Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng Δ đi qua M và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a; b; c)$. Khi đó phương trình đường thẳng Δ :

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad \text{nếu } \{a; b; c\} \neq 0.$$

Chú ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra.

DT**3**

Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ qua hai điểm A và B .

- Chọn A hoặc B là điểm mà Δ đi qua.
- Nhận $\vec{AB}$ làm VTCP $\Rightarrow \vec{u} = \vec{AB}$.

Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra.

DT

4

Viết phương trình đường thẳng là giao tuyến của hai mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ .

Giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$ và $(\beta) : A'x + B'y + C'z + D' = 0$

- Cho 1 trong 3 ẩn $x; y; z = 0$ để tìm 2 ẩn còn lại.

•

$$x = 0 \longrightarrow \begin{cases} By + Cz + D = 0 \\ B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = ? \\ z = ? \end{cases} \Rightarrow M(0; ?; ?)$$

- Vectơ chỉ phương $\vec{u} = [\vec{n}_\alpha; \vec{n}_\beta]$.

Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra.

DT

5

Góc và khoảng cách trong không gian

- Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 tương ứng có $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$ và $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ là hai vectơ chỉ phương. Khi đó:

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)| = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

- Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$. Khi đó:

$$\sin(\Delta, (P)) = |\cos(\vec{u}, \vec{n})| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

- Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$ có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ và $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Khi đó:

$$\cos((P_1), (P_2)) = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

- Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$ có hai vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ và $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Khi đó:

$$\cos((P_1), (P_2)) = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

- Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A, y_A, z_A)$ và $B(x_B, y_B, z_B)$ là:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

- Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ đến mặt phẳng $(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

- Khoảng cách từ điểm M_1 đến đường thẳng Δ đi qua M_0 và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$:

$$d(M_1, \Delta) = \frac{\left| \overrightarrow{M_0 M_1} \cdot \vec{u} \right|}{|\vec{u}|}.$$

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau Δ và Δ' , trong đó Δ đi qua M_0 có vectơ chỉ phương $\vec{u}$, Δ' đi qua M'_0 có vectơ chỉ phương $\vec{u}'$:

$$d(\Delta, \Delta') = \frac{\left| \overrightarrow{M_0 M'_0} \cdot [\vec{u}, \vec{u}'] \right|}{|[\vec{u}, \vec{u}']|}.$$

§6. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

1. LÝ THUYẾT CƠ BẢN

1.1. 1. Định nghĩa mặt cầu

⚙ Tập hợp các điểm M trong không gian cách điểm I cố định một khoảng không đổi bằng R ($R > 0$) được gọi là mặt cầu tâm I , bán kính R . Ký hiệu là $S(I; R)$. $S(I; R) = \{M \mid IM = R\}$

1.2. 2. Phương trình chính tắc của mặt cầu

⚙ Mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R có phương trình: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$

- Trường hợp đặc biệt: Mặt cầu có tâm là gốc tọa độ $O(0; 0; 0)$ có phương trình:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

1.3. 3. Phương trình tổng quát của mặt cầu

⚙ Phương trình có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

- Điều kiện để là phương trình mặt cầu: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

- Khi đó, mặt cầu (S) có:

+ Tâm: $I(a; b; c)$ với $a = \frac{\text{hệ số của } x}{-2}$, $b = \frac{\text{hệ số của } y}{-2}$, $c = \frac{\text{hệ số của } z}{-2}$.

+ Bán kính: $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

2. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI

2.1. Vị trí tương đối giữa mặt cầu (S) và mặt phẳng (P)

Cho mặt cầu (S) tâm I , bán kính R và mặt phẳng (P) . Đặt $d = d(I, (P))$.

- ① $d > R \iff (P)$ và (S) không có điểm chung.
- ② $d = R \iff (P)$ tiếp xúc với (S) tại điểm H (H là hình chiếu vuông góc của I lên (P)). Khi đó (P) được gọi là **mặt phẳng tiếp diện**.
- ③ $d < R \iff (P)$ cắt (S) theo giao tuyến là một **đường tròn** (C) :

- Tâm của (C) là hình chiếu vuông góc H của I lên mặt phẳng (P) .

- Bán kính của đường tròn giao tuyến: $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{R^2 - [d(I, (P))]^2}$

- Khi $d = 0$ ($I \in (P)$), (P) cắt (S) theo **đường tròn lớn** có bán kính $r = R$.

2.2. Vị trí tương đối giữa mặt cầu (S) và đường thẳng Δ

Cho mặt cầu (S) tâm I, bán kính R và đường thẳng Δ . Đặt $d = d(I, \Delta)$.

- ① $d > R \iff \Delta$ không cắt mặt cầu (S).
- ② $d = R \iff \Delta$ tiếp xúc với (S) tại điểm H (Δ là **tiếp tuyến** của mặt cầu).
- ③ $d < R \iff \Delta$ cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B.

- Độ dài dây cung AB: $AB = 2\sqrt{R^2 - d^2} = 2\sqrt{R^2 - [d(I, \Delta)]^2}$

2.3. Vị trí tương đối giữa hai mặt cầu

Cho hai mặt cầu (S_1) tâm I_1 , bán kính R_1 và (S_2) tâm I_2 , bán kính R_2 ($R_1 \geq R_2$). Đặt $d = I_1I_2$.

Vị trí tương đối	Hệ thức khoảng cách	Số điểm chung
Ở ngoài nhau	$d > R_1 + R_2$	Không có
Tiếp xúc ngoài	$d = R_1 + R_2$	1 điểm chung
Cắt nhau	$R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$	Giao tuyến là đường tròn
Tiếp xúc trong	$d = R_1 - R_2 > 0$	1 điểm chung
Chứa trong nhau	$d < R_1 - R_2$	Không có
Đồng tâm	$d = 0$ ($I_1 \equiv I_2$)	Không có

2.4. Tập hợp các tiếp điểm kẻ từ một điểm ngoài mặt cầu

✱ Từ một điểm M nằm ngoài mặt cầu $(S(I; R))$, kẻ các tiếp tuyến đến (S). Tập hợp các tiếp điểm nằm trên một **đường tròn** nằm trong mặt phẳng vuông góc với đoạn IM.

- Độ dài đoạn tiếp tuyến: $MT = \sqrt{MI^2 - R^2}$.

- Bán kính đường tròn tập hợp tiếp điểm: $r = \frac{R \cdot MT}{MI} = \frac{R\sqrt{MI^2 - R^2}}{MI}$

3. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP

DT

1

Nhận dạng phương trình và tìm tâm, bán kính của mặt cầu

✱ **Phương pháp:**

- Đưa phương trình về dạng chuẩn có hệ số trước x^2, y^2, z^2 bằng 1.
- Xác định a, b, c, d bằng cách chia hệ số của x, y, z cho -2 .
- Tính giá trị biểu thức $a^2 + b^2 + c^2 - d$.
- Nếu $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$
 $\implies$ Là phương trình mặt cầu với tâm $I(a; b; c)$ và $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

DT

2

Viết phương trình mặt cầu biết tâm I và đi qua điểm A

Phương pháp: Bán kính $R = IA = \sqrt{(x_A - x_I)^2 + (y_A - y_I)^2 + (z_A - z_I)^2}$. Phương trình: $(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 + (z - z_I)^2 = R^2$.

DT

3

Viết phương trình mặt cầu nhận đoạn thẳng AB làm đường kính

Phương pháp:

- Tâm I là trung điểm của AB : $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.
- Bán kính: $R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}{2}$.

DT

4

Viết phương trình mặt cầu đi qua 4 điểm không đồng phẳng (Ngoại tiếp tứ diện $ABCD$)

Phương pháp:

- Gọi phương trình tổng quát: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (*).
- Thay tọa độ 4 điểm A, B, C, D vào (*), giải hệ phương trình 4 ẩn bậc nhất (a, b, c, d) .

DT

5

Viết phương trình mặt cầu có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) hoặc đường thẳng Δ

Tiếp xúc với mặt phẳng (P) : Bán kính $R = d(I, (P)) = \frac{|Ax_I + By_I + Cz_I + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Tiếp xúc với đường thẳng Δ ($M_0 \in \Delta$, VTCP $\vec{u}$): Bán kính $R = d(I, \Delta) = \frac{|[\vec{M_0I}, \vec{u}]|}{|\vec{u}|}$.

DT

6

Dạng 6: Viết phương trình mặt cầu có tâm $I \in d$ và thỏa mãn các điều kiện tiếp xúc/cắt

Phương pháp:

- Tham số hóa tọa độ tâm I theo phương trình đường thẳng d (theo 1 ẩn t).
- Thiết lập phương trình theo t dựa vào giả thiết:
 $R = d(I, (P)) = d(I, (Q))$ hoặc $R^2 = d^2(I, (P)) + r^2$.

§1. ĐẠI SỐ TỔ HỢP

A // QUY TẮC ĐẾM CƠ BẢN

1. QUY TẮC CỘNG

⚙ **Định nghĩa:** Một công việc có thể được thực hiện theo một trong k phương án độc lập với nhau:

- Phương án thứ 1 có n_1 cách thực hiện;
- Phương án thứ 2 có n_2 cách thực hiện;
- ...
- Phương án thứ k có n_k cách thực hiện.

Khi đó số cách thực hiện công việc là: $N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$

⚠ **Quy tắc cộng thực chất là quy tắc đếm số phần tử của hợp các tập hợp hữu hạn không giao nhau:** Nếu A và B là hai tập hợp hữu hạn không giao nhau ($A \cap B = \emptyset$) thì:

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

2. QUY TẮC NHÂN

⚙ **Định nghĩa:** Một công việc bao gồm k công đoạn nối tiếp nhau để hoàn thành:

- Công đoạn thứ 1 có n_1 cách thực hiện;
- Ứng với mỗi cách thực hiện công đoạn 1, có n_2 cách thực hiện công đoạn thứ 2;
- ...
- Ứng với mỗi cách thực hiện các công đoạn trước, có n_k cách thực hiện công đoạn thứ k .

Khi đó số cách hoàn thành công việc là: $N = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$

B // GIAI THỪA

⚙ **Định nghĩa:** Cho số tự nhiên $n \geq 1$. Tích của n số nguyên dương đầu tiên được gọi là n -giai thừa, ký hiệu là $n!$. Nghĩa là: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$

- **Quy ước:** $0! = 1$.
- $n! = n \cdot (n-1)! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)! \text{ với } n \geq 1$.

C HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP - TỔ HỢP

1. HOÁN VỊ

⚙ **Định nghĩa:** Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một hoán vị của n phần tử đó.

⚙ **Số hoán vị:** Số các hoán vị của n phần tử được ký hiệu là P_n và được tính bởi công thức:

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1$$

2. CHỈNH HỢP

⚙ **Định nghĩa:** Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 1$). Kết quả của việc lấy k ($1 \leq k \leq n$) phần tử khác nhau từ tập hợp A và **sắp xếp theo một thứ tự** được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử.

⚙ **Số chỉnh hợp:** Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử ($1 \leq k \leq n$) được ký hiệu là A_n^k và được

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)$$

tính theo công thức:

- Hoán vị là trường hợp đặc biệt của chỉnh hợp khi $k = n$: $P_n = A_n^n = n!$.
- Quy ước: $A_n^0 = 1$.

3. TỔ HỢP

⚙ **Định nghĩa:** Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi tập con gồm k phần tử ($0 \leq k \leq n$) lấy từ tập hợp A (**không phân biệt thứ tự**) được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử.

⚙ **Số tổ hợp:** Số các tổ hợp chập k của n phần tử ($0 \leq k \leq n$) được ký hiệu là C_n^k và được xác định

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_n^k}{k!}$$

theo công thức:

4. CÁC TÍNH CHẤT CỦA SỐ TỔ HỢP

① Tính chất đối xứng: $C_n^k = C_n^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n)$

② Công thức Pascal (hệ thức cộng tổ hợp): $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k \quad (1 \leq k < n)$

③ Quy ước và giá trị đặc biệt: $C_n^0 = C_n^n = 1; \quad C_n^1 = C_n^{n-1} = n$

§2. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

A CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

⚙ Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu:

- Phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử) là một hoạt động hay hành động mà kết quả của nó không thể biết trước, nhưng ta biết trước được tập hợp tất cả các kết quả có thể có. Ký hiệu là T .
- Không gian mẫu của phép thử là tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra, ký hiệu là Ω . Số phần tử của không gian mẫu ký hiệu là $n(\Omega)$ hoặc $|\Omega|$.

⚙ Biến cố:

- Biến cố A liên quan đến phép thử T là một tập con của không gian mẫu: $A \subset \Omega$. Số phần tử của biến cố ký hiệu là $n(A)$ hoặc $|A|$.
- Biến cố không thể (không bao giờ xảy ra): $\emptyset$.
- Biến cố chắc chắn (luôn luôn xảy ra): Ω .

⚙ Các mối quan hệ giữa các biến cố:

- **Biến cố đối:** Biến cố đối của A ký hiệu là $\bar{A}$, xảy ra khi và chỉ khi A không xảy ra. Khi đó: $\bar{A} = \Omega \setminus A$.
- **Biến cố hợp:** Biến cố " A hoặc B xảy ra", ký hiệu là $A \cup B$.
- **Biến cố giao:** Biến cố " A và B cùng xảy ra", ký hiệu là $A \cap B$ hoặc AB .
- **Hai biến cố xung khắc:** A và B xung khắc khi và chỉ khi chúng không đồng thời xảy ra: $A \cap B = \emptyset$.
- **Hai biến cố độc lập:** Hai biến cố A và B được gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.

B ĐỊNH NGHĨA CỔ ĐIỂN CỦA XÁC SUẤT

⚙ **Định nghĩa:** Giả sử một phép thử có không gian mẫu Ω gồm hữu hạn các kết quả đồng khả năng xuất hiện. Nếu A là một biến cố liên quan đến phép thử, thì xác suất của biến cố A , ký hiệu là

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$P(A)$, được xác định bởi:

- $n(A)$ là số kết quả thuận lợi cho biến cố A .
- $n(\Omega)$ là số kết quả có thể xảy ra của phép thử.

⚠ Tính chất cơ bản của xác suất:

- $0 \leq P(A) \leq 1$ với mọi biến cố A .
- $P(\emptyset) = 0$ và $P(\Omega) = 1$.

1. CÁC CÔNG THỨC TÍNH XÁC SUẤT

1.1. 1. Công thức xác suất của biến cố đối

- ① Xác suất của biến cố đối $\bar{A}$ liên hệ với xác suất của biến cố A qua công thức:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \iff P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

1.2. 2. Công thức cộng xác suất

- ① Trường hợp tổng quát (biến cố bất kỳ): Với hai biến cố A và B bất kỳ, ta có:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- ② Trường hợp hai biến cố xung khắc ($A \cap B = \emptyset$):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- Mở rộng: Nếu $A_1, A_2, \dots, A_k$ đôi một xung khắc thì:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k)$$

1.3. 3. Công thức nhân xác suất

- ① Áp dụng cho hai biến cố độc lập: Nếu A và B là hai biến cố độc lập với nhau thì:

$$P(A \cap B) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

- Mở rộng: Nếu $A_1, A_2, \dots, A_k$ là các biến cố độc lập toàn phần thì:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_k)$$

- Nếu A và B độc lập thì các cặp: (A và $\bar{B}$), ($\bar{A}$ và B), ($\bar{A}$ và $\bar{B}$) cũng độc lập.

1.4. 4. Công thức xác suất có điều kiện và công thức nhân tổng quát

- ① Xác suất có điều kiện: Cho hai biến cố A và B với $P(B) > 0$. Xác suất của biến cố A khi biến

cố B đã xảy ra được ký hiệu là $P(A|B)$ và được tính bởi:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- ② Công thức nhân tổng quát:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

1.5. 5. Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes (Nâng cao)

- ① Công thức xác suất toàn phần: Giả sử hệ các biến cố $B_1, B_2, \dots, B_n$ tạo thành một hệ đầy đủ các biến cố ($B_i \cap B_j = \emptyset$ với $i \neq j$ và $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$, $P(B_i) > 0$). Khi đó với mọi biến cố A :

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A|B_i) = P(B_1)P(A|B_1) + \dots + P(B_n)P(A|B_n)$$

- ② Công thức Bayes: Với $P(A) > 0$ và $k \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{P(A)} = \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A|B_i)}$$

§1. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM VÀ PHÂN TÁN CHO MẪU SỐ LIỆU KHÔNG GHÉP NHÓM

1. BẢNG PHÂN BỐ TẦN SỐ TỔNG QUÁT

⚙ **Bảng phân bố tần số:** Cho mẫu số liệu gồm k giá trị khác nhau $x_1, x_2, \dots, x_k$ với các tần số xuất hiện tương ứng là $m_1, m_2, \dots, m_k$. Ta có bảng phân bố tần số tổng quát như sau:

Giá trị (x)	x_1	x_2	$\dots$	x_k	Cộng
Tần số (m)	m_1	m_2	$\dots$	m_k	$n = \sum_{i=1}^k m_i$

- k : Số lượng các giá trị đôi một khác nhau trong mẫu số liệu.
- m_i : Tần số (số lần xuất hiện) của giá trị x_i ($i = 1, 2, \dots, k$).
- $n = m_1 + m_2 + \dots + m_k$: Kích thước mẫu (tổng số các quan sát).

2. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ MẪU SỐ LIỆU

- ⚙ **Mẫu số liệu:** Một mẫu số liệu kích thước n được cho dưới dạng dãy n giá trị: $x_1, x_2, \dots, x_n$.
- ⚙ **Mẫu số liệu sắp thứ tự:** Khi sắp xếp các giá trị theo thứ tự không giảm, ta được mẫu số liệu đã sắp thứ tự:

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$$

- ⚙ **Mẫu số liệu theo bảng tần số:** Nếu mẫu số liệu gồm các giá trị khác nhau $x_1, x_2, \dots, x_k$ với tần số tương ứng là $m_1, m_2, \dots, m_k$ thì kích thước mẫu là $n = m_1 + m_2 + \dots + m_k$.

3. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM

3.1. 1. Số trung bình

⚙ **Công thức tính:**

- Với mẫu số liệu $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- Với mẫu số liệu cho dưới dạng bảng tần số:

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_kx_k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k m_i x_i$$

Ý nghĩa: Số trung bình là giá trị đại diện cho toàn bộ mẫu số liệu khi các số liệu trong mẫu không có sự chênh lệch quá lớn (không có giá trị ngoại lệ/bất thường).

3.2. 2. Trung vị

Cách xác định: Sắp xếp mẫu số liệu kích thước n theo thứ tự không giảm: $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$.

- Nếu n là số lẻ ($n = 2k + 1$): $M_e = x_{k+1}$

- Nếu n là số chẵn ($n = 2k$): $M_e = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$

Ý nghĩa: Trung vị chia mẫu số liệu thành hai phần có số lượng phần tử bằng nhau (50% số liệu nhỏ hơn hoặc bằng M_e , 50% số liệu lớn hơn hoặc bằng M_e). Trung vị không bị ảnh hưởng bởi các giá trị bất thường (giá trị quá lớn hoặc quá nhỏ).

3.3. 3. Tứ phân vị

Cách xác định: Tứ phân vị gồm ba giá trị Q_1, Q_2, Q_3 chia mẫu số liệu đã sắp xếp thành 4 phần có kích thước xấp xỉ bằng nhau:

- Tứ phân vị thứ hai:** $Q_2 = M_e$ (Trung vị của cả mẫu).
- Tứ phân vị thứ nhất (Tứ phân vị dưới):** Q_1 là trung vị của nửa số liệu bên trái Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ).
- Tứ phân vị thứ ba (Tứ phân vị trên):** Q_3 là trung vị của nửa số liệu bên phải Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ).

Ý nghĩa:

- Q_1 : Khoảng 25% số liệu nhỏ hơn hoặc bằng Q_1 .
- Q_2 : Khoảng 50% số liệu nhỏ hơn hoặc bằng Q_2 .
- Q_3 : Khoảng 75% số liệu nhỏ hơn hoặc bằng Q_3 .

3.4. 4. Mốt

Định nghĩa: Mốt của mẫu số liệu, ký hiệu là M_o , là giá trị có tần số xuất hiện lớn nhất trong mẫu.

- Một mẫu có thể có 1 mốt, nhiều mốt hoặc không có mốt (khi tất cả các giá trị có tần số bằng nhau).

Ý nghĩa: Thể hiện giá trị có mức độ phổ biến nhất, hay xảy ra nhất trong tập dữ liệu (thường ứng dụng trong khảo sát nhu cầu thị trường, cỡ giày, kích thước áo,...).

4. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN

4.1. 1. Khoảng biến thiên

⚙️ **Công thức:** Ký hiệu là R , được tính bằng hiệu giữa giá trị lớn nhất ($x_{\max}$) và giá trị nhỏ nhất ($x_{\min}$): $R = x_{\max} - x_{\min}$

⚙️ **Ý nghĩa:** Đo độ rộng dải biến thiên của toàn bộ mẫu số liệu. R càng lớn thì mức độ phân tán của mẫu càng cao.

4.2. 2. Khoảng tứ phân vị

⚙️ **Công thức:** Ký hiệu là Δ_Q : $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$

⚙️ **Ý nghĩa:** Đo mức độ phân tán của 50% số liệu nằm ở chính giữa mẫu. Không bị ảnh hưởng bởi các giá trị bất thường (ngoại lệ).

4.3. 3. Phương sai

⚙️ **Công thức tính:** Ký hiệu là s^2 .

- Với mẫu số liệu $x_1, x_2, \dots, x_n$:
$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2$$
- Với mẫu số liệu cho theo bảng tần số:
$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k m_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k m_i x_i^2 - (\bar{x})^2$$

⚙️ **Ý nghĩa:** Đo mức độ phân tán (độ lệch) của các số liệu xung quanh giá trị trung bình $\bar{x}$. Phương sai càng lớn thì dữ liệu càng phân tán xa giá trị trung bình.

4.4. 4. Độ lệch chuẩn

⚙️ **Công thức:** Căn bậc hai số học của phương sai, ký hiệu là s : $s = \sqrt{s^2}$

⚙️ **Ý nghĩa:** Có cùng ý nghĩa với phương sai nhưng có cùng đơn vị đo với số liệu ban đầu (giúp việc so sánh và đánh giá trực quan hơn).

5. PHÁT HIỆN GIÁ TRỊ NGOẠI LỆ (GIÁ TRỊ BẤT THƯỜNG)

⚙️ **Định nghĩa:** Giá trị ngoại lệ (outlier) là giá trị quá lớn hoặc quá nhỏ so với đa số các giá trị trong mẫu số liệu.

⚙️ **Tiêu chí xác định:** Một giá trị x trong mẫu được coi là giá trị ngoại lệ nếu:

$$x < Q_1 - 1,5 \cdot \Delta_Q \quad \text{hoặc} \quad x > Q_3 + 1,5 \cdot \Delta_Q$$

⚠️ **Khi mẫu số liệu có giá trị ngoại lệ, ta nên dùng *trung vị* (M_e) và *khoảng tứ phân vị* (Δ_Q) thay cho *số trung bình* ($\bar{x}$) và *độ lệch chuẩn* (s) để đại diện cho mẫu.**

§2. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG CHO MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

1. BẢNG TẦN SỐ GHÉP NHÓM VÀ GIÁ TRỊ ĐẠI DIỆN

⚙ **Mẫu số liệu ghép nhóm:** Là mẫu số liệu được chia thành các nhóm liên tiếp dạng $[a_i; a_{i+1})$ với $a_i < a_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, k$).

⚙ **Giá trị đại diện:** Giá trị đại diện của nhóm $[a_i; a_{i+1})$ là trung điểm của nhóm đó:

$$c_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$$

⚙ **Độ dài của nhóm:** Độ dài của nhóm $[a_i; a_{i+1})$ là $l_i = a_{i+1} - a_i$.

1.1. Bảng phân bố tần số ghép nhóm tổng quát

Nhóm	$[a_1; a_2)$	$[a_2; a_3)$	...	$[a_k; a_{k+1})$
Tần số (m)	m_1	m_2	...	m_k
Giá trị đại diện (c)	$c_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}$	$c_2 = \frac{a_2 + a_3}{2}$	...	$c_k = \frac{a_k + a_{k+1}}{2}$

2. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM

2.1. Số trung bình

⚙ Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm được tính xấp xỉ bằng công thức:

$$\bar{x} = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2 + \dots + m_k c_k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k m_i c_i$$

2.2. Trung vị

⚙ Quy trình xác định:

- **Bước 1:** Tìm nhóm chứa trung vị, là nhóm $[a_p; a_{p+1})$ đầu tiên có tần số tích lũy $\geq \frac{n}{2}$
- **Bước 2:** Áp dụng công thức tính trung vị:

$$M_e = a_p + \left(\frac{\frac{n}{2} - (m_1 + m_2 + \dots + m_{p-1})}{m_p} \right) \cdot (a_{p+1} - a_p)$$

Trong đó: m_p là tần số của nhóm chứa trung vị; $m_1 + \dots + m_{p-1}$ là tần số tích lũy của nhóm trước đó (bằng 0 nếu $p = 1$).

2.3. Tứ phân vị

⚙ **Tứ phân vị thứ hai:** $Q_2 = M_e$.

⚙ **Tứ phân vị thứ nhất (Q_1):**

- Tìm nhóm $[a_p; a_{p+1})$ chứa Q_1 , là nhóm đầu tiên thỏa: $m_1 + \dots + m_p \geq \frac{n}{4}$.

$$Q_1 = a_p + \left(\frac{\frac{n}{4} - (m_1 + \dots + m_{p-1})}{m_p} \right) \cdot (a_{p+1} - a_p)$$

- Công thức:

⚙️ Tứ phân vị thứ ba (Q_3):

- Tìm nhóm $[a_q; a_{q+1})$ chứa Q_3 , là nhóm đầu tiên thỏa: $m_1 + \dots + m_q \geq \frac{3n}{4}$.

$$Q_3 = a_q + \left(\frac{\frac{3n}{4} - (m_1 + \dots + m_{q-1})}{m_q} \right) \cdot (a_{q+1} - a_q)$$

- Công thức:

2.4. Một

⚙️ Quy trình xác định:

- **Bước 1:** Nhóm chứa một $[a_j; a_{j+1})$ là nhóm có tần số m_j lớn nhất trong bảng ($m_j = \max\{m_1, m_2, \dots, m_k\}$).
- **Bước 2:** Công thức tính một:

$$M_o = a_j + \left(\frac{m_j - m_{j-1}}{(m_j - m_{j-1}) + (m_j - m_{j+1})} \right) \cdot (a_{j+1} - a_j)$$

⚠️ Quy ước: Nếu nhóm chứa một là nhóm đầu tiên ($j = 1$) thì coi $m_0 = 0$; nếu là nhóm cuối cùng ($j = k$) thì coi $m_{k+1} = 0$.

3. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN

3.1. 1. Khoảng biến thiên

- ⚙️ **Công thức:** Ký hiệu là R , bằng hiệu giữa đầu mút phải của nhóm cuối và đầu mút trái của nhóm đầu: $R = a_{k+1} - a_1$

3.2. Khoảng tứ phân vị

- ⚙️ **Công thức:** Ký hiệu là Δ_Q : $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$

3.3. Phương sai và Độ lệch chuẩn

- ⚙️ **Phương sai (s^2):** $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k m_i (c_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k m_i c_i^2 - (\bar{x})^2$

- ⚙️ **Độ lệch chuẩn (s):** $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k m_i c_i^2 - (\bar{x})^2}$

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÍNH NHANH

§1. CÔNG THỨC TÍNH NHANH HÌNH HỌC PHẪNG VÀ KHÔNG GIAN

1. CÔNG THỨC TÍNH NHANH HÌNH HỌC PHẪNG

1.1. Hệ thức lượng và Diện tích tam giác

Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh a, b, c , nửa chu vi $p = \frac{a+b+c}{2}$, bán kính đường tròn ngoại tiếp R , nội tiếp r .

⚙ Các công thức tính diện tích tam giác S :

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

⚙ Độ dài đường trung tuyến (Công thức Apollonius):

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$

⚙ Độ dài đường phân giác trong góc A (l_a):

$$l_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}$$

1.2. Các trường hợp tam giác và tứ giác đặc biệt

① Tam giác đều cạnh a :

- Chiều cao: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; Diện tích: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
- Bán kính đường tròn ngoại tiếp: $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; Nội tiếp: $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

② Tam giác vuông tại A (đường cao $AH = h$, trung tuyến $AM = m$):

- $S = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}ah$; $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \Rightarrow h = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$.
- Bán kính ngoại tiếp: $R = \frac{a}{2} = m$; Bán kính nội tiếp: $r = \frac{b+c-a}{2}$.

- ③ Tứ giác có hai đường chéo vuông góc ($d_1 \perp d_2$):

$$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$$

2. CÔNG THỨC TÍNH NHANH KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH

2.1. Thể tích các khối đa diện cơ bản

⚙️ **Khối chóp:** $V = \frac{1}{3} S_{\text{đáy}} \cdot h.$

⚙️ **Khối lăng trụ:** $V = S_{\text{đáy}} \cdot h.$

⚙️ **Khối hộp chữ nhật** (a, b, c): $V = abc$; Đường chéo: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$

⚙️ **Khối lập phương cạnh** a : $V = a^3$; Đường chéo: $d = a\sqrt{3}.$

2.2. Các khối chóp đặc biệt thường gặp

- ① **Khối tứ diện đều cạnh** a :

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}; \quad h = \frac{a\sqrt{6}}{3}; \quad R_{\text{ngoại tiếp}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}; \quad r_{\text{nội tiếp}} = \frac{a\sqrt{6}}{12}$$

- ② **Khối chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng** a , **cạnh bên bằng** b :

$$h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}; \quad V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{12} \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$$

- ③ **Khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng** a , **cạnh bên bằng** b :

$$h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}; \quad V = \frac{a^2}{3} \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}$$

- ④ **Khối tứ diện gần đều (các cặp cạnh đối bằng nhau từng đôi một** a, b, c):

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)}$$

- ⑤ **Khối tứ diện có ba cạnh đôi một vuông góc** $SA \perp SB \perp SC$ ($SA = a, SB = b, SC = c$):

$$V = \frac{1}{6} abc; \quad \frac{1}{h_S^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}; \quad R_{\text{ngoại tiếp}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}$$

2.3. 3. Tỷ số thể tích (Công thức Simson - Khối chóp tam giác)

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$

Cho chóp $S.ABC$. Trên các đoạn SA, SB, SC lấy lần lượt A', B', C' .

3. CÔNG THỨC TÍNH BÁN KÍNH MẶT CẦU NGOẠI TIẾP KHỐI ĐA DIỆN

3.1. Chóp có cạnh bên vuông góc với mặt đáy ($SA \perp (\text{đáy}), SA = h$)

$$R = \sqrt{R_{\text{đáy}}^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}$$

3.2. Chóp đều (đỉnh S , chiều cao h , cạnh bên b)

$$R = \frac{b^2}{2h} = \frac{h^2 + R_{\text{đáy}}^2}{2h}$$

3.3. Chóp có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy

$$R = \sqrt{R_{\text{đáy}}^2 + R_{\text{bên}}^2 - \left(\frac{GT}{2}\right)^2}$$

Trong đó: $R_{\text{bên}}$ là bán kính ngoại tiếp $\triangle SAB$, $GT = AB$ là độ dài giao tuyến của mặt bên và đáy.

3.4. Khối lăng trụ đứng có chiều cao h

$$R = \sqrt{R_{\text{đáy}}^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}$$

4. CÔNG THỨC TÍNH NHANH KHỐI TRÒN XOAY

Đại lượng	Khối nón	Khối trụ	Khối cầu
Hệ thức liên hệ	$l = \sqrt{r^2 + h^2}$	$l = h$	—
Diện tích xung quanh	$S_{xq} = \pi rl$	$S_{xq} = 2\pi rh$	$S = 4\pi R^2$
Diện tích toàn phần	$S_{tp} = \pi rl + \pi r^2$	$S_{tp} = 2\pi rh + 2\pi r^2$	—
Thể tích	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	$V = \pi r^2 h$	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

§2. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI NHANH TOÁN HÀM HỢP (VD - VDC)

A // PHƯƠNG PHÁP GHÉP TRỰC

1. Cơ sở lý thuyết và Thuật toán ghép trực

⚙ **Mục đích:** Khảo sát sự biến thiên và vẽ bảng biến thiên (BBT) của hàm hợp $y = f(u(x))$ trực tiếp từ BBT của hàm gốc $y = f(u)$.

⚙ **Quy trình 3 bước thực hiện:**

- **Bước 1 (Dòng x và u):** Tìm tập xác định và các điểm cực trị của hàm số lõi $u = u(x)$. Điền các giá trị cực trị này vào dòng của x . Từ đó xác định các khoảng tăng giảm và giá trị tương ứng của $u(x)$.
- **Bước 2 (Chèn điểm cực trị của $f(u)$):** Trên mỗi khoảng biến thiên của u , quan sát BBT của $y = f(u)$ để **chèn thêm các điểm cực trị** của hàm $f(u)$ theo đúng thứ tự tăng/giảm của u .
- **Bước 3 (Dòng $f(u)$):** Điền giá trị tương ứng $f(u)$ tại các điểm nút và các điểm cực trị vừa chèn, sau đó nối các mũi tên thể hiện chiều biến thiên.

2. Ví dụ minh họa Ghép trực

Bài toán: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới. Tìm số nghiệm thực của phương trình $f(x^2 - 2x) = 1$.

BBT của hàm số $y = f(x)$ gốc:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$			2		$+\infty$	
	$-\infty$			-2		

Lời giải (Ghép trực):

- Đặt $u(x) = x^2 - 2x \implies u'(x) = 2x - 2 = 0 \iff x = 1 \implies u(1) = -1$.
- Khi $x \rightarrow \pm\infty$ thì $u \rightarrow +\infty$.
- Trên khoảng $(+\infty; -1]$, u đi qua điểm cực trị 1.
- Trên khoảng $[-1; +\infty)$, u đi qua điểm cực trị 1.

Bảng ghép trực $y = f(u(x))$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$u = x^2 - 2x$	$+\infty \xrightarrow{1} -1 \xrightarrow{1} +\infty$		
$f(u)$	$+\infty \searrow -2 \nearrow 2 \searrow -2 \nearrow +\infty$		

Dựa vào bảng ghép trục, đường thẳng $y = 1$ (nằm giữa -2 và 2) cắt đồ thị hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ tại **4 điểm phân biệt**. Vậy phương trình có **4 nghiệm thực**.

B PHƯƠNG PHÁP SƠ ĐỒ V

1. Cơ sở lý thuyết Sơ đồ V

Mục đích: Dùng để giải nhanh bài toán tìm số điểm cực trị và số nghiệm của phương trình hàm hợp $y = f(u(x))$ với $u(x)$ là hàm đa thức bậc 2, bậc 3 hoặc hàm chứa trị tuyệt đối.

Các bước thực hiện:

- **Bước 1:** Vẽ khung sơ đồ dạng chữ V (hoặc W, N) mô phỏng hình dạng đồ thị hàm lồi $u(x)$ với các đỉnh là các điểm cực trị của $u(x)$.
- **Bước 2:** Xác định các điểm cực trị $x_1, x_2, \dots, x_k$ của hàm gốc $f(u)$ từ giả thiết.
- **Bước 3:** Kẻ các đường nằm ngang $u = x_i$ cắt sơ đồ V.
 - + Mỗi giao điểm (không tính điểm tiếp xúc đỉnh) là một điểm cực trị của hàm $f(u(x))$.
 - + Tổng số điểm cực trị của $y = f(u(x)) = (\text{Số điểm cực trị của } u(x)) + (\text{Số giao điểm đơn của các đường } u = x_i \text{ với đồ thị } u(x))$.

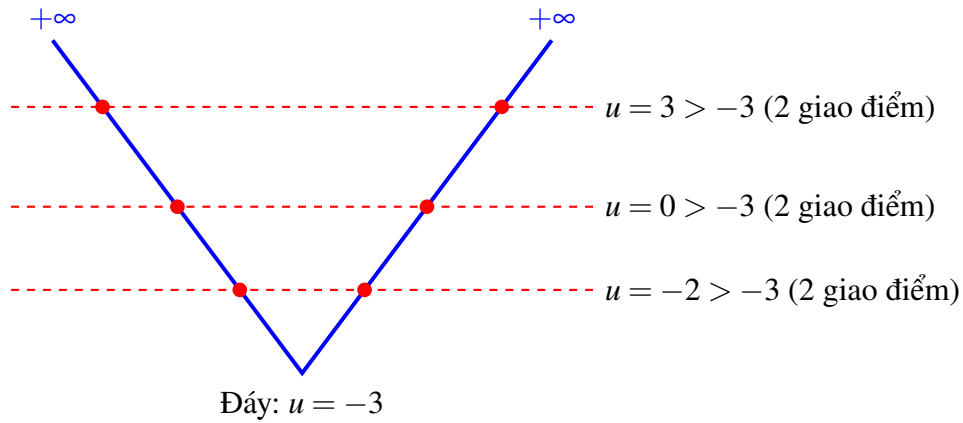
2. Ví dụ minh họa Sơ đồ V

Bài toán: Cho hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị là $x = -2; x = 0; x = 3$.

Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 - 4x + 1)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải (Sử dụng sơ đồ V):

- Hàm lồi $u(x) = x^2 - 4x + 1$ có đỉnh tại $x = 2 \implies u(2) = -3$. Đồ thị $u(x)$ có dạng chữ V có đáy tại -3 .
- Các đường cực trị của $f(u)$ là: $u = -2, u = 0, u = 3$.



- Số điểm cực trị của $u(x)$: 1 điểm (tại đáy $x = 2$).
- Số giao điểm của các đường $u = -2, u = 0, u = 3$ với sơ đồ V : $2 + 2 + 2 = 6$ điểm.
- Vậy tổng số điểm cực trị của $g(x)$ là: $1 + 6 = 7$ điểm cực trị.

C // PHƯƠNG PHÁP ĐƯỜNG XOẮN ỐC SÊN (ỐC SÊN LƯỢNG GIÁC)

1. Cơ sở lý thuyết Phương pháp Ốc sên

⚙ **Mục đích:** Đếm chính xác số nghiệm của phương trình lượng giác chứa hàm hợp dạng $f(\sin x) = m$ hoặc $f(\cos x) = m$ trên một đoạn $[\alpha; \beta]$ có độ dài lớn bản chất quét nhiều vòng tròn lượng giác.

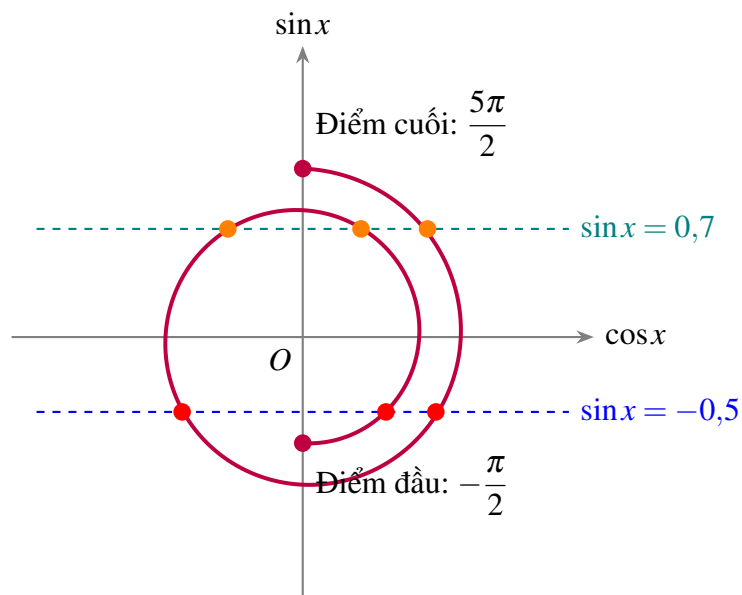
⚙ **Nguyên lý:**

- Biểu diễn cung góc lượng giác $x \in [\alpha; \beta]$ chạy liên tục quanh gốc tọa độ. Để các vòng quét không đè lên nhau, ta mở rộng bán kính sau mỗi vòng tạo thành một **đường xoắn ốc (spiral)**.
- Với mỗi giá trị $u = u_0 \in [-1; 1]$ (ví dụ $u = \sin x$ hoặc $\cos x$), dựng đường thẳng tương ứng vuông góc với trục lượng giác.
- **Số nghiệm** của phương trình chính là **số giao điểm** của đường dóng với đường xoắn ốc sên nằm trọn trong miền quét $[\alpha; \beta]$.

2. Ví dụ minh họa Phương pháp Ốc sên

Bài toán: Tìm số nghiệm của phương trình $f(\sin x) = 0$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$, biết phương trình $f(u) = 0$ có hai nghiệm là $u_1 = -0,5$ và $u_2 = 0,7$.

Lời giải (Vẽ đường xoắn ốc sên trên trục $\sin x$ đứng): Cung quét lượng giác xuất phát từ $-\frac{\pi}{2}$ đi qua $0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \rightarrow \pi \rightarrow \frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi \rightarrow \frac{5\pi}{2}$ (quét tròn 1,5 vòng quanh tâm):



Đếm số giao điểm:

- Đường $\sin x = -0,5$ cắt ốc sên tại **3 điểm** (màu đỏ).
- Đường $\sin x = 0,7$ cắt ốc sên tại **3 điểm** (màu cam).

$\Rightarrow$ Tổng số nghiệm trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ là: $3 + 3 = \mathbf{6}$ nghiệm.

§3. TỔNG HỢP KỸ THUẬT GIẢI NHANH VÀ MẸO BẮM MÁY TÍNH CASIO

A CÁC MẸO GIẢI NHANH VÀ THỦ THUẬT HÀM SỐ

1. CÔNG THỨC GIẢI NHANH CỰC TRỊ VÀ TIỆM CẬN

1.1. Đạo hàm nhanh hàm phân thức hữu tỉ

⚙️ **Hàm bậc nhất / bậc nhất:** $y = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

⚙️ **Hàm bậc hai / bậc nhất:** $y = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e} \Rightarrow y' = \frac{ad \cdot x^2 + 2ae \cdot x + (be-cd)}{(dx+e)^2}$

- **Mẹo nhớ hệ số tử số:** Định thức các ma trận cấp 2: $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} x^2 + 2 \begin{vmatrix} a & c \\ d & 0 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix}$.
- **Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị:** $y = \frac{(ax^2+bx+c)'}{(dx+e)'} = \frac{2ax+b}{d}$.

1.2. Cực trị hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$)

- ① Đồ thị có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow ab < 0$.
- ② Đồ thị có 1 điểm cực trị $\Leftrightarrow ab \geq 0$.
- ③ Đồ thị có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác đặc biệt:

- Tam giác vuông cân: $b^3 + 8a = 0$.
- Tam giác đều: $b^3 + 24a = 0$.
- Tam giác có góc ở đỉnh α : $b^3 + 8a \cdot \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0$.
- Diện tích tam giác cực trị: $S = \sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}$.

1.3. Đường thẳng qua 2 điểm cực trị của hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$y = \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)x + \left(d - \frac{bc}{9a}\right)$$

2. KỸ THUẬT CASIO HÀM SỐ

⚙️ **Tìm tiệm cận đứng/ngang bằng lệnh CALC:**

- **Tiệm cận ngang:** Nhập $f(x) \xrightarrow{\text{CALC}} x = 10^{10}$ (cho $+\infty$) hoặc $x = -10^{10}$ (cho $-\infty$).

- **Tiệm cận đứng:** Xét nghiệm mẫu $x = x_0 \xrightarrow{\text{CALC}} x = x_0 \pm 10^{-6}$. Nếu ra vô cùng lớn ($\pm\infty$) thì $x = x_0$ là TCD.

⚙ **Thử cực trị/đồng biến/ngịch biến bằng TABLE [Menu 8]:**

- Đặt $\text{Start} = a$, $\text{End} = b$, $\text{Step} = \frac{b-a}{29}$ hoặc $\frac{b-a}{44}$.
- Quan sát cột $f(x)$ xem tăng (đồng biến), giảm (ngịch biến) hoặc đổi chiều để tìm $x_{CT}, x_{CD}, \max, \min$.

B MỆO GIẢI TOÁN MŨ VÀ LOGARIT

1. KỸ THUẬT CHỌN SỐ VÀ CÔ LẬP CASIO

⚙ **Rút gọn biểu thức chứa nhiều biến a, b, c :**

- Gán các số nguyên tố không đặc biệt cho các biến (tránh số 0, 1, 2):

$$\text{Gán: } a = 3 \xrightarrow{\text{STO}} A, \quad b = 5 \xrightarrow{\text{STO}} B, \quad c = 7 \xrightarrow{\text{STO}} C$$

- Nhập: (Biểu thức đề bài) – (Từng đáp án) $\xrightarrow{\text{Bấm } =}$ Đáp án nào ra 0 là đúng.

⚙ **Tìm mối quan hệ x, y từ phương trình hàm đặc trưng bằng SOLVE:**

- Cho biểu thức liên hệ $f(x, y) = 0$.
- **Bước 1:** Gán $y = 100$ hoặc $y = 0,01$ (vào biến Y).
- **Bước 2:** Bấm máy giải phương trình theo X : $\text{SHIFT SOLVE} \rightarrow X$.
- **Bước 3:** Dịch số từ kết quả X theo $Y = 100$:
 - $X = 201 \implies x = 2y + 1$.
 - $X = 9999 \implies x = y^2 - 1$.
 - $X = 0,5 \implies x = \frac{y}{200}$.

C CÔNG THỨC GIẢI NHANH VÀ CASIO NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN

1. CÔNG THỨC TÍNH NHANH TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN (MÚA CỘT)

Cho tích phân $I = \int f(x)g(x)dx$. Kẻ bảng 2 cột: Cột 1 Đạo hàm (D), Cột 2 Nguyên hàm (I).

Dấu	Cột Đạo hàm (u)	Cột Nguyên hàm (dv)
(+)	$u(x)$	$v(x)$
(-)	$u'(x) \searrow$	$v_1(x) = \int v(x)dx$
(+)	$u''(x) \searrow$	$v_2(x) = \int v_1(x)dx$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$\int u \cdot v dx = (+)u \cdot v_1 - (-)u' \cdot v_2 + (+)u'' \cdot v_3 - \dots$$

2. THỦ THUẬT CASIO TÍCH PHÂN

2.1. Tìm hằng định nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$

☀ Theo định nghĩa: $F'(x) = f(x) \iff F'(x) - f(x) = 0$.

☀ Thao tác bấm: $\left. \frac{d}{dx}(F(x)) \right|_{x=x_0} - f(x_0) \xrightarrow{\text{Bấm}} 0$ (với x_0 thuộc TXĐ).

2.2. Tìm hệ số a, b, c trong tích phân: $I = a \ln 2 + b \ln 3 + c$

• **Bước 1:** Bấm tích phân đề bài cho và lưu vào A: $\int_a^b f(x) dx \xrightarrow{\text{STO}} A$.

• **Bước 2:** Biểu diễn $a \ln 2 + b \ln 3 = A \implies a = \frac{A - b \ln 3}{\ln 2}$.

• **Bước 3:** Dùng TABLE [Menu 8]: Nhập $f(x) = \frac{A - x \ln 3}{\ln 2}$ với $x \in [-10; 10]$, Step = 1. Chọn cặp số nguyên đẹp.

D CÔNG THỨC GIẢI NHANH HÌNH HỌC TỌA ĐỘ $Oxyz$

1. CÁC CÔNG THỨC TỌA ĐỘ GIẢI NHANH

☀ Hình chiếu của điểm $M(x_0; y_0; z_0)$:

• Lên các trục tọa độ: $Ox \rightarrow (x_0; 0; 0)$; $Oy \rightarrow (0; y_0; 0)$; $Oz \rightarrow (0; 0; z_0)$.

• Lên các mặt phẳng tọa độ: $(Oxy) \rightarrow (x_0; y_0; 0)$; $(Oyz) \rightarrow (0; y_0; z_0)$; $(Oxz) \rightarrow (x_0; 0; z_0)$.

☀ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau: Cho Δ_1 qua M_1 , VTCP $\vec{u}_1$ và Δ_2 qua M_2 ,

$$\text{VTCP } \vec{u}_2: d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}|}{|[\vec{u}_1, \vec{u}_2]|}$$

☀ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện vuông đỉnh O (OA, OB, OC đôi một vuông góc):

$$R = \frac{\sqrt{OA^2 + OB^2 + OC^2}}{2}$$

2. KỸ THUẬT CASIO VECTOR TRONG $Oxyz$ (MENU 5)

☀ Nhập Vector $\vec{u}_1 \rightarrow \text{VctA}$, Vector $\vec{u}_2 \rightarrow \text{VctB}$, Vector $\overrightarrow{M_1 M_2} \rightarrow \text{VctC}$.

☀ Tích có hướng $[\vec{u}_1, \vec{u}_2]$: Bấm $\text{VctA} \times \text{VctB}$.

☀ Tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$: Bấm $\text{VctA} \cdot \text{VctB}$ (chọn Dot Product trong mục OPTN).

☀ Khoảng cách chéo nhau trực tiếp: $\frac{\text{Abs}((\text{VctA} \times \text{VctB}) \cdot \text{VctC})}{\text{Abs}(\text{VctA} \times \text{VctB})}$.