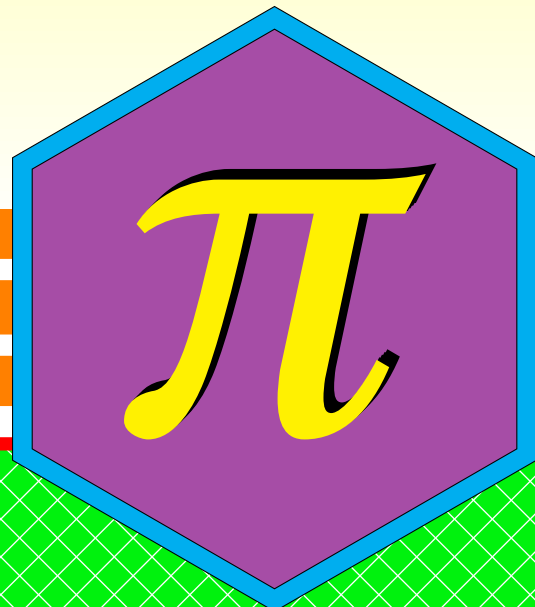




GV: Ngô Đức Tài

TÓM TẮT LÝ THUYẾT MÔN TOÁN

LỚP 11



NĂM HỌC 2026 - 2027

MỤC LỤC

3

CHƯƠNG 1

Phương trình lượng giác

- 1** Giá trị lượng giác của góc lượng giác 3
- 2** Công thức lượng giác 7
- 3** Hàm số lượng giác 8
- 4** Phương trình lượng giác cơ bản 10

12

CHƯƠNG 2

Dãy số. Cấp số cộng và cấp số nhân

- 1** Dãy số 12
- 2** Cấp số cộng và cấp số nhân 13

15

CHƯƠNG 3

Thống kê

- 1** Các đặc trưng của mẫu số liệu ghép nhóm 15

18

CHƯƠNG 4

Hình học không gian

- 1** Quan hệ song song trong không gian 18
- 2** Quan hệ vuông góc trong không gian 22
- 3** Góc và khoảng cách trong không gian 23
- 4** Thể tích của khối đa diện 36

CHƯƠNG 5

Giới hạn. Hàm số liên tục

- 1 Giới hạn của dãy số 43
- 2 Giới hạn của hàm số 44
- 3 Hàm số liên tục 48

50

CHƯƠNG 6

Hàm số mũ và hàm số logarit

- 1 Lũy thừa với số mũ thực 50
- 2 Logarit..... 52
- 3 Hàm số mũ và hàm số logarit..... 53
- 4 Bài toán lãi suất - tăng trưởng 53
- 5 Phương trình, bất phương trình mũ và logarit..... 54

56

CHƯƠNG 7

Đạo hàm và ứng dụng của đạo hàm

- 1 Đạo hàm..... 56

59

CHƯƠNG 8

Tổ hợp - Xác suất

- 1 Biến cố và định nghĩa cổ điển của xác suất 59
- 2 Xác suất có điều kiện 60

CHƯƠNG

1

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

BÀI 1. Giá trị lượng giác của góc lượng giác

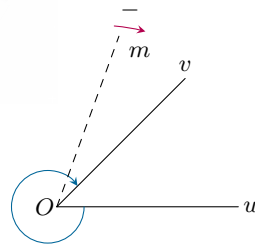
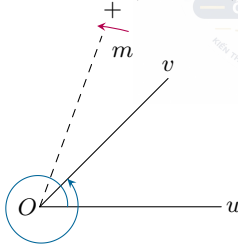
1. Góc lượng giác

Định nghĩa 1.1.

Cho hai tia Ou và Ov . Nếu một tia Om quay quanh gốc O của nó theo một chiều cố định bắt đầu từ vị trí Ou và dừng ở vị trí Ov thì ta nói tia Om quét một **góc lượng giác** có tia đầu Ou , tia cuối Ov và kí hiệu là (Ou, Ov) .

Quy ước: Chiều quay **ngược** với chiều kim đồng hồ là chiều **dương**, **cùng** với chiều quay của kim đồng hồ là chiều **âm**.

☆ Khi tia Om quay một góc a° , ta nói số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) bằng a° . Kí hiệu $(Ou, Ov) = a^\circ$.



☆ Có vô số góc lượng giác có tia đầu Ou và tia cuối Ov . Số đo của các góc lượng giác có cùng tia đầu và tia cuối sai khác nhau một bội nguyên của 360° , nghĩa là $(Ou, Ov) = a^\circ + k360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$), với a° là số đo của một góc lượng giác có tia đầu Ou và tia cuối Ov .

Định lý 1.2.

Với ba tia Ou, Ov, Ow bất kì, ta có

$$(Ou, Ov) + (Ov, Ow) = (Ou, Ow) + k360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

2. Đơn vị đo góc và độ dài cung tròn

Định nghĩa 1.3.

Trên đường tròn, lấy một cung tròn có độ dài bằng bán kính thì góc ở tâm chắn cung đó có số đo 1 radian, 1 radian còn viết tắt là 1 rad.

☆ Mọi liên hệ giữa độ và radian

$$\diamond a^\circ = a \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad}.$$

$$\diamond \alpha \text{ rad} = \left(\alpha \cdot \frac{180}{\pi} \right)^\circ.$$

! Khi viết số đo của một góc (hay cung) theo đơn vị radian, người ta thường **không** viết chữ rad sau số đo.

Bảng chuyển đổi các góc đặc biệt

Độ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Định lý 1.4.

Một cung của đường tròn bán kính R và có số đo α rad thì có độ dài

$$\ell = R\alpha.$$

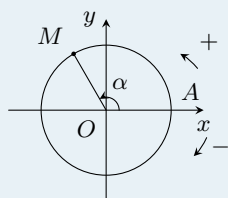
3. Giá trị lượng giác của góc lượng giác

3.1 Đường tròn lượng giác

Định nghĩa 1.5.

☆ **Đường tròn lượng giác** là đường tròn có tâm tại gốc tọa độ, bán kính bằng 1, được định hướng và lấy điểm $A(1; 0)$ làm điểm gốc của đường tròn.

☆ **Điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo α** (độ hoặc radian) là điểm M trên đường tròn lượng giác đó sao cho $(OA, OM) = \alpha$.



3.2 Các giá trị lượng giác của góc lượng giác

Định nghĩa 1.6.

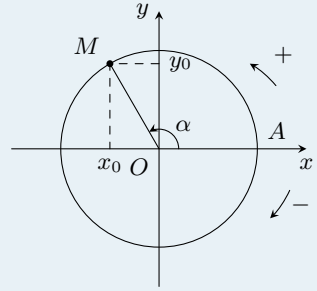
Trên đường tròn lượng giác, gọi M là điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo α . Khi đó

☆ Hoành độ x_0 của M được gọi là **côsin** của α , kí hiệu là $\cos \alpha$.

☆ Tung độ y_0 của M được gọi là **sin** của α , kí hiệu là $\sin \alpha$.

☆ Nếu $\cos \alpha \neq 0$, tỉ số $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ được gọi là **tan** của α , kí hiệu là $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

☆ Nếu $\sin \alpha \neq 0$, tỉ số $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ được gọi là **côtang** của α , kí hiệu là $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.



☆ Với mọi giá trị của α , ta có

◇ $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$.

◇ $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$.

◇ $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha \ (k \in \mathbb{Z})$.

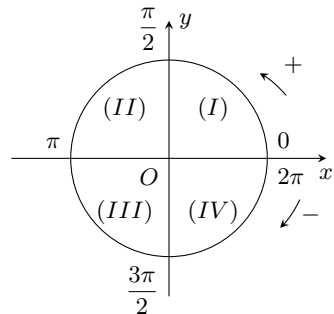
◇ $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha \ (k \in \mathbb{Z})$.

☆ $\tan \alpha$ xác định khi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

☆ $\cot \alpha$ xác định khi $\alpha \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

☆ **Dấu của các giá trị lượng giác**

	(I)	(II)	(III)	(IV)
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-
cot	+	-	+	-



3.3 Công thức lượng giác cơ bản

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$	$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$
$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$	$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$	$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

3.4 Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt

Hai cung đối nhau	Hai cung bù nhau
$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$
$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$
$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$	$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$
Hai cung hơn kém nhau π	Hai cung phụ nhau
$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$
$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$
$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$
$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$

Với mọi góc lượng giác α và số nguyên k , ta có

☆ $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha.$

☆ $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha.$

☆ $\tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha.$

☆ $\cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha.$

BÀI 2. Công thức lượng giác

1. Công thức cộng

$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$	$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$	$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$	$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

2. Công thức nhân đôi

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$	
$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$	$\tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

3. Công thức hạ bậc

$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$	$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$	$\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$
--	--	---

4. Công thức biến đổi tổng thành tích

$\cos \alpha + \cos \beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
$\cos \alpha - \cos \beta = -2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$
$\sin \alpha + \sin \beta = 2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
$\sin \alpha - \sin \beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$
$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)$
$\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)$

5. Công thức biến đổi tích thành tổng

$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)]$
$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)]$
$\sin \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta) - \cos (\alpha - \beta)]$

BÀI 3. Hàm số lượng giác

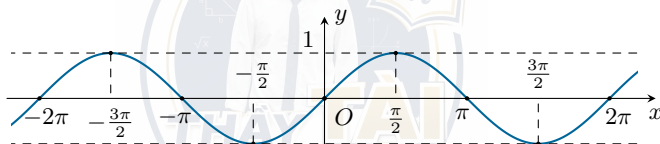
1. Sự biến thiên của hàm số lượng giác

	Hàm số $y = \sin x$	Hàm số $y = \cos x$
Tập xác định	$\mathcal{D} = \mathbb{R}$	$\mathcal{D} = \mathbb{R}$
Tập giá trị	$T = [-1; 1]$	$T = [-1; 1]$
Tính chẵn lẻ	Là hàm số lẻ	Là hàm số chẵn
Tính tuần hoàn	Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$. Hàm số $y = \sin(ax + b)$ có chu kỳ tuần hoàn $T = \frac{2\pi}{ a }$.	Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$. Hàm số $y = \cos(ax + b)$ có chu kỳ tuần hoàn $T = \frac{2\pi}{ a }$.
Sự biến thiên	Hàm số đồng biến trên $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$. Hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$.	Hàm số đồng biến trên $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$. Hàm số nghịch biến trên $(k2\pi; \pi + k2\pi)$.
	Hàm số $y = \tan x$	Hàm số $y = \cot x$
Tập xác định	$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

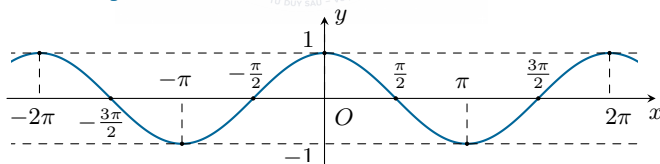
Tập giá trị	$T = \mathbb{R}$	$T = \mathbb{R}$
Tính chẵn lẻ	Là hàm số lẻ	Là hàm số lẻ
Tính tuần hoàn	Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$. Hàm số $y = \tan(ax + b)$ có chu kỳ tuần hoàn $T = \frac{\pi}{ a }$.	Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$. Hàm số $y = \cot(ax + b)$ có chu kỳ tuần hoàn $T = \frac{\pi}{ a }$.
Sự biến thiên	Hàm số đồng biến trên $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$.	Hàm số nghịch biến trên $(k\pi; \pi + k\pi)$.

2. Đồ thị hàm số

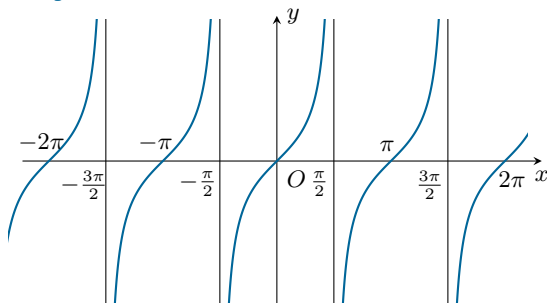
☆ Đồ thị hàm số $y = \sin x$



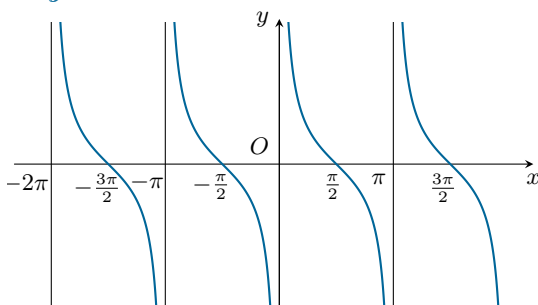
☆ Đồ thị hàm số $y = \cos x$



☆ Đồ thị hàm số $y = \tan x$



☆ Đồ thị hàm số $y = \cot x$



BÀI 4. Phương trình lượng giác cơ bản

1. Phương trình $\sin x = m$

☆ Điều kiện có nghiệm $-1 \leq m \leq 1$.

☆ Điều kiện xác định $x \in \mathbb{R}$.

☆ Công thức nghiệm

$$\diamond \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi. \end{cases}$$

$$\diamond \sin x = \sin a^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = a^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - a^\circ + k360^\circ. \end{cases}$$

☆ Một số trường hợp đặc biệt

$$\diamond \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi.$$

$$\diamond \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$$

$$\diamond \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi.$$

2. Phương trình $\cos x = m$

☆ Điều kiện có nghiệm $-1 \leq m \leq 1$.

☆ Điều kiện xác định $x \in \mathbb{R}$.

☆ Công thức nghiệm

$$\diamond \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi. \end{cases}$$

$$\diamond \cos x = \cos a^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = a^\circ + k360^\circ \\ x = -a^\circ + k360^\circ \end{cases}$$

☆ Một số trường hợp đặc biệt

$$\diamond \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

$$\diamond \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi.$$

$$\diamond \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi.$$

3. Phương trình $\tan x = m$

☆ Điều kiện có nghiệm $m \in \mathbb{R}$.

☆ Điều kiện xác định $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

☆ Công thức nghiệm

$$\diamond \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi.$$

$$\diamond \tan x = \tan a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ.$$

☆ Một số trường hợp đặc biệt

$$\diamond \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi. \quad \diamond \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

$$\diamond \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

4. Phương trình $\cot x = m$

☆ Điều kiện có nghiệm $m \in \mathbb{R}$.

☆ Điều kiện xác định $x \neq k\pi$.

☆ Công thức nghiệm

$$\diamond \cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi.$$

$$\diamond \cot x = \cot a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ.$$

☆ Một số trường hợp đặc biệt

$$\diamond \cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \quad \diamond \cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

$$\diamond \cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

BÀI 1. Dãy số

1. Định nghĩa dãy số

Định nghĩa 2.1.

- ☆ Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một **dãy số vô hạn** (gọi tắt là dãy số), kí hiệu là $u = u(n)$.
- ☆ Ta thường viết u_n thay cho $u(n)$ và kí hiệu dãy số $u = u(n)$ bởi (u_n) , do đó dãy số (u_n) được viết dưới dạng khái niệm $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$
- ☆ Số u_1 gọi là **số hạng đầu**, u_n gọi là **số hạng thứ n** và gọi là **số hạng tổng quát** của dãy số.

Định nghĩa 2.2.

- ☆ Mỗi hàm số u xác định trên tập $M = \{1; 2; 3; \dots; m\}$ với $m \in \mathbb{N}^*$ được gọi là một **dãy số hữu hạn**.
- ☆ Dạng khai triển của dãy số hữu hạn là $u_1, u_2, \dots, u_m$. Số u_1 gọi là **số hạng đầu** và số u_m gọi là **số hạng cuối**.

2. Các cách cho một dãy số

- ☆ Liệt kê các số hạng.
- ☆ Công thức số hạng tổng quát.
- ☆ Phương pháp mô tả.
- ☆ Phương pháp truy hồi.

3. Dãy số tăng, dãy số giảm và dãy số bị chặn

Định nghĩa 2.3.

- ☆ Dãy số (u_n) được gọi là **dãy số tăng** nếu $u_{n+1} > u_n$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- ☆ Dãy số (u_n) được gọi là **dãy số giảm** nếu $u_{n+1} < u_n$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

! Một dãy số có thể **không tăng không giảm**.

Định nghĩa 2.4.

- ☆ Dãy số (u_n) được gọi là **bị chặn trên** nếu tồn tại số M sao cho $u_n \leq M$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- ☆ Dãy số (u_n) được gọi là **bị chặn dưới** nếu tồn tại số m sao cho $u_n \geq m$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- ☆ Dãy số (u_n) được gọi là **bị chặn** nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, nghĩa là tồn tại m, M sao cho $m \leq u_n \leq M$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

BÀI 2. Cấp số cộng và cấp số nhân

1. Cấp số cộng

- ☆ **Định nghĩa:** Dãy số (u_n) được gọi là **cấp số cộng** nếu $u_{n+1} = u_n + d$, với $n \in \mathbb{N}^*$, $d \in \mathbb{R}$.

Trong đó, $d = u_{n+1} - u_n$ được gọi là **công sai**.

- ☆ **Số hạng tổng quát** $u_n = u_1 + (n - 1)d$, với $n \geq 2$.

- ☆ **Tính chất** $u_{k+1} + u_{k-1} = 2u_k$, với $k \geq 2$.

Khi đó điều kiện để ba số a, b, c lập thành một cấp số cộng theo đúng

thứ tự đó là $\frac{a+c}{2} = b$.

- ☆ **Tổng của n số hạng đầu** $S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$, với $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Cấp số nhân

- ☆ **Định nghĩa:** Dãy số (u_n) được gọi là **cấp số nhân** nếu $u_{n+1} = u_n \cdot q$, với $n \in \mathbb{N}^*$, $q \in \mathbb{R}$.

Trong đó, $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ được gọi là **công bội**.

- ☆ **Số hạng tổng quát** $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$, với $n \geq 2$.

☆ **Tính chất** $u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}$, với $k \geq 2$. Khi đó điều kiện để ba số a, b, c lập thành một cấp số nhân theo đúng thứ tự đó là $a \cdot c = b^2$.

☆ **Tổng của n số hạng đầu** $S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}$, với $q \neq 0$ và $n \in \mathbb{N}^*$.

☆ Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q với $|q| < 1$ được gọi là **cấp số nhân lùi vô hạn**.

☆ **Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn** là

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \frac{u_1}{1 - q}.$$



CHƯƠNG 3

THỐNG KÊ

BÀI 1. Các đặc trưng của mẫu số liệu ghép nhóm

1. Mẫu số liệu ghép nhóm

Định nghĩa 3.1.

Mẫu số liệu ghép nhóm là mẫu số liệu cho dưới dạng bảng tần số ghép nhóm. Mỗi nhóm số liệu là tập hợp gồm các giá trị của số liệu được ghép nhóm theo một tiêu chí xác định. Nhóm số liệu thường được cho dưới dạng $[a; b)$, trong đó a là đầu mút trái, b là đầu mút phải.

☆ Để chuyển mẫu số liệu không ghép nhóm sang mẫu số liệu ghép nhóm, ta làm như sau

- ◇ **Bước 1:** Chia miền giá trị của mẫu số liệu thành các nhóm.
- ◇ **Bước 2:** Đếm số giá trị của mẫu số liệu thuộc mỗi nhóm (tần số) và lập bảng thống kê cho mẫu số liệu ghép nhóm.

☆ Độ dài của nhóm $[a; b)$ là $b - a$.



☆ Không nên chia thành quá nhiều nhóm hoặc quá ít nhóm.

☆ Các nhóm không giao nhau, các nhóm nên có độ dài như nhau và tổng độ dài các nhóm lớn hơn khoảng biến thiên.

2. Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm

Xét mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở bảng sau

Nhóm	$[a_1; a_2)$	$[a_2; a_3)$	...	$[a_k; a_{k+1})$
Tần số	m_1	m_2	...	m_k
Giá trị đại diện	x_1	x_2	...	x_k



Giá trị đại diện của nhóm $[a_i; a_{i+1})$ là $x_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$.

2.1 Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm

☆ **Số trung bình** của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là $\bar{x}$, được tính theo công thức

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_kx_k}{n},$$

trong đó $n = m_1 + m_2 + \dots + m_k$.



Đối với số liệu rời rạc, người ta thường cho các nhóm dưới dạng $k_1 - k_2$, trong đó $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Nhóm $k_1 - k_2$ được hiểu là nhóm gồm các giá trị $k_1, k_1 + 1, \dots, k_2$. Khi đó, ta cần hiểu chỉnh lại mẫu số liệu ghép nhóm bằng cách chuyển nhóm $k_1 - k_2$ thành nhóm $[k_1 - 0,5; k_2 + 0,5)$.

☆ **Ý nghĩa:** Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ bằng số trung bình của mẫu số liệu gốc, nó cho biết vị trí trung tâm của mẫu số liệu và có thể dùng để đại diện cho mẫu số liệu.

2.2 Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm

☆ Để tính trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm, ta làm như sau

◇ **Bước 1:** Xác định nhóm chứa trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm. Giả sử đó là nhóm thứ p : $[a_p; a_{p+1})$.

◇ **Bước 2:** Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_e = a_p + \frac{\frac{n}{2} - (m_1 + \dots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p),$$

nếu $p = 1$, ta quy ước $m_1 + \dots + m_{p-1} = 0$.

☆ **Ý nghĩa:** Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ bằng trung vị của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đại diện cho mẫu số liệu. Nếu mẫu số liệu **có giá trị bất thường** thì ta dùng trung vị thay cho số trung bình để đại diện cho mẫu số liệu.



2.3 • Tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

- ☆ Để tính **tứ phân vị thứ nhất Q_1** của mẫu số liệu ghép nhóm, đầu tiên ta xác định nhóm chứa Q_1 , giả sử đó là nhóm thứ p : $[a_p; a_{p+1})$. Khi đó

$$Q_1 = a_p + \frac{\frac{n}{4} - (m_1 + \dots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p).$$

- ☆ Để tính **tứ phân vị thứ ba Q_3** của mẫu số liệu ghép nhóm, đầu tiên ta xác định nhóm chứa Q_3 , giả sử đó là nhóm thứ p : $[a_p; a_{p+1})$. Khi đó

$$Q_3 = a_p + \frac{\frac{3n}{4} - (m_1 + \dots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p).$$

- ☆ **Tứ phân vị thứ hai Q_2** chính là trung vị M_e .

- ☆ **Ý nghĩa:** Các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ bằng các tứ phân vị của mẫu số liệu gốc, chúng chia mẫu số liệu thành 4 phần, mỗi phần chứa 25% giá trị.

2.4 • Một của mẫu số liệu ghép nhóm

- ☆ Để tìm **một** của mẫu số liệu ghép nhóm, ta làm như sau

- ◇ **Bước 1:** Xác định nhóm có tần số lớn nhất (gọi là nhóm chứa một) của mẫu số liệu ghép nhóm, giả sử đó là nhóm j : $[a_j; a_{j+1})$.
- ◇ **Bước 2:** Một của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_o = a_j + \frac{m_j - m_{j-1}}{(m_j - m_{j-1}) + (m_j - m_{j+1})} \cdot (a_{j+1} - a_j).$$

- ☆ **Ý nghĩa:** Một của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ bằng một của mẫu số liệu gốc, nó được dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu.

CHƯƠNG 4

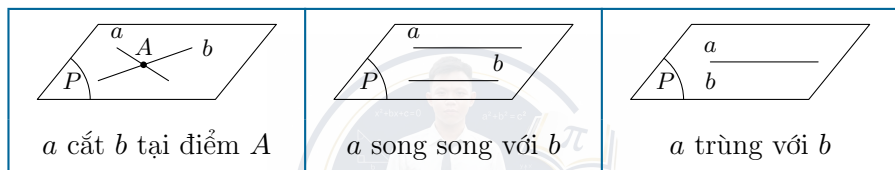
HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

BÀI 1. Quan hệ song song trong không gian

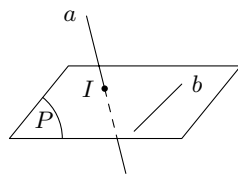
1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian

Cho hai đường thẳng a và b trong không gian. Khi đó, vị trí tương đối của hai đường thẳng a và b xảy ra một trong hai trường hợp sau

☆ **Trường hợp 1:** Nếu a và b đồng phẳng.



☆ **Trường hợp 2:** Nếu a và b không đồng phẳng hay a và b chéo nhau.



Định lý 4.1.

Nếu $\begin{cases} (\alpha) \cap (\beta) = a \\ (\alpha) \cap (\gamma) = b \\ (\beta) \cap (\gamma) = c \end{cases}$ thì $\begin{cases} a, b, c \text{ đồng quy} \\ a // b // c. \end{cases}$

Hệ quả 4.2.

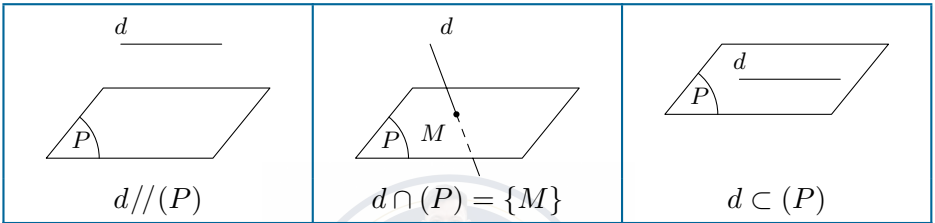
Nếu $\begin{cases} a \subset (\alpha) \\ b \subset (\beta) \\ a // b \\ (\alpha) \cap (\beta) = \Delta \end{cases}$ thì $\begin{cases} \Delta // a // b \\ \Delta \equiv a \\ \Delta \equiv b. \end{cases}$

Định lí 4.3.

Nếu $\begin{cases} d_1 // d_3 \\ d_2 // d_3 \end{cases}$ thì $\begin{cases} d_1 // d_2 \\ d_1 \equiv d_2. \end{cases}$

2. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α) . Khi đó, vị trí tương đối của đường thẳng d và mặt phẳng (α) xảy ra một trong ba trường hợp sau



Định lí 4.4.

Nếu $\begin{cases} d \not\subset (P) \\ d' \subset (P), d' // d \end{cases}$ thì $d // (P)$.

Định lí 4.5.

Nếu $\begin{cases} a // (\alpha) \\ a \subset (\beta), (\alpha) \cap (\beta) = b \end{cases}$ thì $a // b$.

Hệ quả 4.6.

Nếu $\begin{cases} (P) // d \\ (Q) // d \\ (P) \cap (Q) = \Delta \end{cases}$ thì $d // \Delta$.

3. Hai mặt phẳng song song

Định nghĩa 4.7.

Cho hai mặt phẳng (α) và (β) . Khi đó $(\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow (\alpha) \cap (\beta) = \emptyset$.

Định lí 4.8.

Nếu $\begin{cases} a // (\beta) \\ b // (\beta) \\ a \cap b = \{A\} \text{ và } a, b \subset (\alpha) \end{cases}$ thì $(\alpha) // (\beta)$.

Định lí 4.9.

Nếu $\begin{cases} (\alpha) // (\beta) \\ (\alpha) \cap (\gamma) = a \text{ thì } a // b. \\ (\beta) \cap (\gamma) = b \end{cases}$

Định lí 4.10.

Cho $(P) // (Q) // (R)$.

Nếu $\begin{cases} d \cap (P) = \{A\}, d \cap (Q) = \{B\}, d \cap (R) = \{C\} \\ d' \cap (P) = \{A'\}, d' \cap (Q) = \{B'\}, d' \cap (R) = \{C'\} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

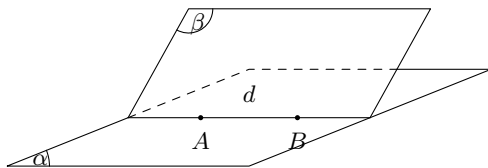
Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

Cách 1:

Tìm 2 điểm chung phân biệt của 2 mặt phẳng.

$\Rightarrow$ Giao tuyến là đường thẳng đi qua 2 điểm chung đó.

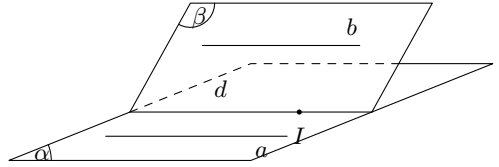
$$\begin{cases} A \in (\alpha) \cap (\beta) \\ B \in (\alpha) \cap (\beta) \\ A \neq B \end{cases} \\ \Rightarrow AB = (\alpha) \cap (\beta)$$



Cách 2:

$$\begin{cases} I \in (\alpha) \cap (\beta) \\ a \subset (\alpha), b \subset (\beta) \\ a // b \end{cases}$$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = \Delta$, Δ đi qua I và $\Delta // a // b$.

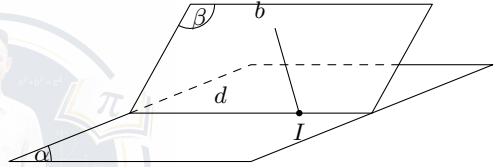


Tìm giao điểm của đường thẳng b và mặt phẳng (α)

Pp:

- **B1:** Chọn mặt phẳng phụ (β) chứa b sao cho giao tuyến của (α) và (β) dễ tìm.
- **B2:** Tìm giao tuyến d của (α) và (β) $((\alpha) \cap (\beta) = d)$.
- **B3:** Trong mặt phẳng (β) : $I = d \cap b$.

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in b \\ I \in d, d \subset (\alpha) \Rightarrow I \in (\alpha). \end{cases}$$

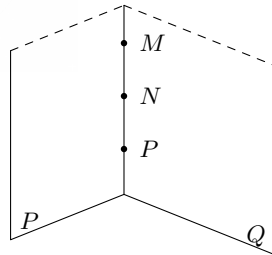


Chứng minh 3 điểm thẳng hàng – 3 đường thẳng đồng quy

Chứng minh 3 điểm M, N, P thẳng hàng

$$\begin{cases} M \in (P) \cap (Q) \\ N \in (P) \cap (Q) \\ P \in (P) \cap (Q) \end{cases}$$

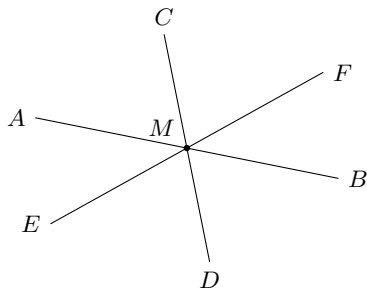
$\Rightarrow M, N, P$ thẳng hàng.



Chứng minh 3 đường thẳng AB, CD, EF đồng quy

Gọi $M = AB \cap CD$.

Chứng minh: E, M, F thẳng hàng.



BÀI 2. Quan hệ vuông góc trong không gian

1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Định nghĩa 4.11.

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α) . Khi đó $d \perp (\alpha) \Leftrightarrow \forall a \subset (\alpha), d \perp a$.

Định lý 4.12.

Nếu $\begin{cases} d \perp a \\ d \perp b \\ a \cap b = \{A\} \\ a, b \subset (\alpha) \end{cases}$ thì $d \perp (\alpha)$.

Định nghĩa 4.13.

Cho đoạn thẳng AB , gọi I là trung điểm của AB . Mặt phẳng (P) đi qua I và vuông góc với AB gọi là **mặt phẳng trung trực** của AB .

Tính chất 4.14.

$$\star \left. \begin{array}{l} d // d' \\ d \perp (P) \end{array} \right\} \Rightarrow d' \perp (P).$$

$$\star \left. \begin{array}{l} d \perp (P) \\ d' \perp (P) \end{array} \right\} \Rightarrow d // d'.$$

$$\star \left. \begin{array}{l} (P) // (Q) \\ d \perp (P) \end{array} \right\} \Rightarrow d \perp (Q).$$

$$\star \left. \begin{array}{l} d \perp (P) \\ d \perp (Q) \end{array} \right\} \Rightarrow (P) // (Q).$$

$$\star \left. \begin{array}{l} d // (P) \\ d' \perp (P) \end{array} \right\} \Rightarrow d \perp d'.$$

$$\star \left. \begin{array}{l} d \perp d' \\ (P) \perp d' \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d // (P) \\ d \subset (P). \end{array} \right.$$

2. Hai mặt phẳng vuông góc

Định lí 4.15.

Nếu $\left\{ \begin{array}{l} a \subset (\alpha) \\ a \perp (\beta) \end{array} \right.$ thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

Định lí 4.16.

$$\star \left. \begin{array}{l} (\alpha) \perp (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d \\ a \subset (\alpha), a \perp d \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (\beta). \quad \star \left. \begin{array}{l} (\alpha) \perp (\gamma) \\ (\beta) \perp (\gamma) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d \end{array} \right\} \Rightarrow d \perp (\gamma).$$

BÀI 3. Góc và khoảng cách trong không gian

1. Góc trong không gian

1.1. Góc giữa hai đường thẳng

Định nghĩa 4.17.

Góc giữa hai đường thẳng m và n , kí hiệu (m, n) , là góc giữa hai đường thẳng a và b đi qua một điểm và tương ứng song song với m và n .

Với hai đường thẳng a và b bất kì thì



$$\star 0^\circ \leq (a, b) \leq 90^\circ.$$

$$\star (a, b) = 0^\circ \text{ thì } \left[\begin{array}{l} a \equiv b \\ a // b. \end{array} \right.$$

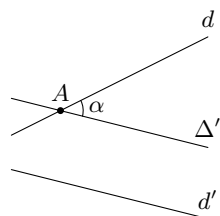
Cách xác định góc giữa hai đường thẳng d và d' trong không gian

☆ Cách 1: Sử dụng định nghĩa.

✦ **Bước 1:** Lấy một điểm A bất kỳ (thường $A \in d$ hoặc $A \in d'$). Qua A , dựng đường thẳng Δ và Δ' theo thứ tự song song với d và d' .

$$\Rightarrow (d, d') = (\Delta, \Delta').$$

✦ **Bước 2:** Tính góc giữa hai đường thẳng Δ và Δ' bằng tỉ số lượng giác trong tam giác vuông hoặc dùng định lý hàm số sin, cosin trong tam giác thường.



☆ **Cách 2:** Sử dụng tích vô hướng.

✦ **Bước 1:** Tìm hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ theo thứ tự là các vectơ chỉ phương của đường thẳng d và d' .

✦ **Bước 2:** Tính số đo góc α giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ thường sử dụng tích vô hướng của hai vectơ để tính góc.

✦ **Bước 3:** Khi đó, góc giữa hai đường thẳng d và d' bằng

⊙ Bằng góc α nếu $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.

⊙ Bằng góc $180^\circ - \alpha$ nếu $\alpha > 90^\circ$.

1.2 Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Định nghĩa 4.18.

☆ Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì $(a, (P)) = 90^\circ$.

☆ Nếu đường thẳng a không vuông góc mặt phẳng (P) thì $(a, (P)) = (a, a')$, với a' là hình chiếu của a trên mặt phẳng (P) .



Với đường thẳng a và mặt phẳng (P) bất kì thì

☆ $0^\circ \leq (a, (P)) \leq 90^\circ$.

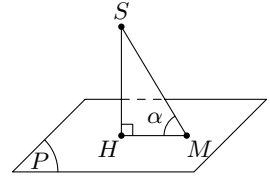
☆ $(a, (P)) = 0^\circ$ thì $a \subset (P)$.

Cách xác định góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P)

☆ **Cách 1:** Trực tiếp

◇ **Bước 1:** Tìm giao điểm M của đường thẳng d và mặt phẳng (P) .

◇ **Bước 2:** Lấy điểm $S \in d$ và dựng $SH \perp (P)$.
Khi đó



$$(d, (P)) = (d, HM) = \widehat{SMH} = \alpha.$$

◇ **Bước 3:** Tính số đo của góc $\widehat{SMH}$.

☆ **Cách 2:** Tính gián tiếp theo một trong hai hướng sau.

◇ **Hướng 1:** Chọn một đường thẳng $\Delta // d$ mà góc giữa Δ và (P) có thể tính được. Từ đó, ta có $(d, (P)) = (\Delta, (P))$.

◇ **Hướng 2:** Chọn một mặt phẳng $(Q) // (P)$ mà góc giữa d và (Q) có thể tính được. Từ đó, ta có $(d, (P)) = (d, (Q))$.

1.3 Góc giữa hai mặt phẳng

Định nghĩa 4.19.

Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) . Kẻ $a \perp (P)$ và $b \perp (Q)$. Khi đó

$$((P), (Q)) = (a, b).$$

Với hai mặt phẳng (P) và (Q) bất kì thì

☆ $0^\circ \leq ((P), (Q)) \leq 90^\circ.$

☆ $((P), (Q)) = 0^\circ$ thì $\begin{cases} (P) \equiv (Q) \\ (P) // (Q). \end{cases}$

Cách xác định góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q)

☆ **Cách 1:** Sử dụng định nghĩa.

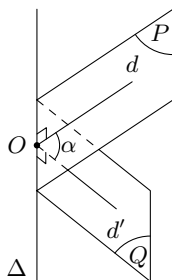
◇ **Bước 1:** Từ điểm O kẻ $OE \perp (P)$, $OF \perp (Q)$. Khi đó

$$((P), (Q)) = (OE, OF).$$

◇ **Bước 2:** Tính góc (OE, OF) .

☆ **Cách 2:** Dùng cho hai mặt phẳng cắt nhau.

- ♦ **Bước 1:** Tìm giao tuyến Δ của hai mặt phẳng (P) và (Q) .
- ♦ **Bước 2:** Từ một điểm O trên Δ , trong mặt phẳng (P) kẻ đường thẳng $d \perp \Delta$, trong mặt phẳng (Q) , kẻ đường thẳng $d' \perp \Delta$.
- ♦ **Bước 3:** Khi đó, $((P), (Q)) = (d, d') = \alpha$.



☆ **Cách 3:** Sử dụng hai mặt phẳng vuông góc.

- ♦ **Bước 1:** Tìm mặt phẳng (R) vuông góc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q) .
- ♦ **Bước 2:** Tìm giao tuyến $(R) \cap (P) = d$ và $(R) \cap (Q) = \Delta$.
- ♦ **Bước 3:** Khi đó $((P), (Q)) = (d, \Delta)$.

☆ **Cách 4:** Dùng diện tích của đa giác chiếu.

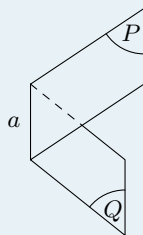
Gọi S là diện tích của đa giác $\mathcal{H}$ trong mặt phẳng (P) và S' là diện tích hình chiếu $\mathcal{H}'$ của $\mathcal{H}$ trên mặt phẳng (Q) và φ là góc giữa (P) và (Q) . Khi đó

$$S' = S \cdot \cos \varphi \quad \text{hay} \quad \cos \varphi = \frac{S'}{S}.$$

1.4. Góc nhị diện

Định nghĩa 4.20.

Hình gồm hai nửa mặt phẳng (P) , (Q) có chung bờ a được gọi là một **góc nhị diện**, kí hiệu là $[P, a, Q]$. Đường thẳng a gọi là cạnh và các nửa mặt phẳng (P) , (Q) gọi là các mặt của góc nhị diện đó.



☆ $0^\circ \leq [P, a, Q] \leq 180^\circ$.



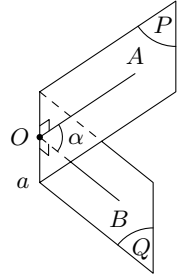
☆ Với $\begin{cases} M \in (P) \\ N \in (Q) \\ M, N \notin a \end{cases}$ thì $[P, a, Q] = [M, a, N]$.

Cách xác định góc nhị diện $[P, a, Q]$

☆ **Bước 1:** Từ một điểm O bất kì trên đường thẳng a , vẽ tia $OA \perp a$, $OA \subset (P)$ và $OB \perp a$, $OB \subset (Q)$. Khi đó

$$[P, a, Q] = \widehat{AOB}$$

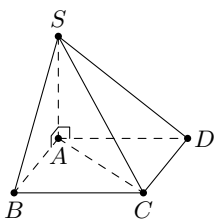
☆ **Bước 2:** Tính góc $\widehat{AOB}$.

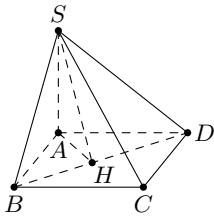


1.5 Cách xác định góc của một số hình chóp thường gặp

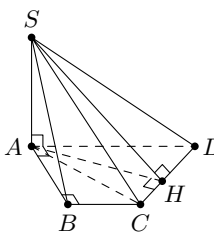
Hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$		
	$(SB, (ABC)) = \widehat{SBA}$	$(SC, (ABC)) = \widehat{SCA}$
	Nếu $\triangle ABC$ vuông tại B $((SBC), (ABC)) = \widehat{SBA}$	
	Nếu $\triangle ABC$ vuông tại C $((SBC), (ABC)) = \widehat{SCA}$	
	Nếu $\triangle ABC$ vuông tại A thì kẻ $AH \perp BC$, khi đó $((SBC), (ABC)) = \widehat{SHA}$.	
	Nếu $\triangle ABC$ đều thì gọi H là trung điểm BC , khi đó $((SBC), (ABC)) = \widehat{SHA}$.	
	$[S, BC, A] = ((SBC), (ABC))$	

Hình chóp $S.ABCD$, có $ABCD$ là hình chữ nhật (hình vuông), $SA \perp (ABCD)$

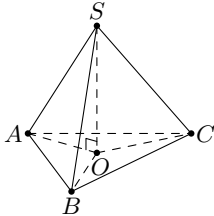
	$(SB, (ABCD)) = \widehat{SBA}$	$(SC, (ABCD)) = \widehat{SCA}$
	$(SD, (ABCD)) = \widehat{SDA}$	$(SB, (SAD)) = \widehat{BSA}$
	$(SC, (SAD)) = \widehat{DSC}$	$(SC, (SAB)) = \widehat{BSC}$
	$(SD, (SAB)) = \widehat{DSA}$	

	$[S, BC, A] = ((SBC), (ABCD)) = \widehat{SBA}$	
	$[S, CD, A] = ((SCD), (ABCD)) = \widehat{SDA}$	
	$[S, BD, A] = ((SBD), (ABCD)) = \widehat{SHA}$ Nếu $ABCD$ là hình vuông thì $H \equiv O$	

Hình chóp $S.ABCD$, có $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B , $SA \perp (ABCD)$

	$(SB, (ABCD)) = \widehat{SBA}$	$(SD, (ABCD)) = \widehat{SDA}$
	$(SC, (ABCD)) = \widehat{SCA}$	
	$[S, BC, A] = ((SBC), (ABCD)) = \widehat{SBA}$	
	$[S, CD, A] = ((SCD), (ABCD)) = \widehat{SHA}$ Nếu $AB = BC = \frac{AD}{2}$ thì $H \equiv C$	

Hình chóp tam giác đều $S.ABC$

	$(SA, (ABC)) = \widehat{SAO}$	$(SB, (ABC)) = \widehat{SBO}$
	$SC, (ABC)) = \widehat{SCO}$	$\widehat{SAO} = \widehat{SBO} = \widehat{SCO}$

	$[S, AB, C] = ((SAB), (ABC)) = \widehat{SMO}$
	$[S, BC, A] = ((SBC), (ABC)) = \widehat{SNO}$
	$[S, AC, B] = ((SAC), (ABC)) = \widehat{SPO}$
	$\widehat{SMO} = \widehat{SNO} = \widehat{SPO}$

Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$

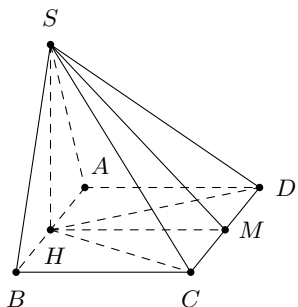
	$(SA, (ABCD)) = \widehat{SAO}$
	$(SB, (ABCD)) = \widehat{SBO}$
	$(SC, (ABCD)) = \widehat{SCO}$
	$(SD, (ABCD)) = \widehat{SDO}$
	$\widehat{SAO} = \widehat{SBO} = \widehat{SCO} = \widehat{SDO}$

	$[S, AB, O] = ((SAB), (ABCD)) = \widehat{SMO}$
	$[S, BC, O] = ((SBC), (ABCD)) = \widehat{SNO}$
	$[S, CD, O] = ((SCD), (ABCD)) = \widehat{SPO}$
	$[S, AD, O] = ((SAD), (ABCD)) = \widehat{SQO}$
	$\widehat{SMO} = \widehat{SNO} = \widehat{SPO} = \widehat{SQO}$

Hình chóp $S.ABC$ có mặt bên (SAB) vuông góc với đáy

	$(SA, (ABC)) = \widehat{SAH}$
	$(SB, (ABC)) = \widehat{SBH}$
	$(SC, (ABC)) = \widehat{SCH}$
	$((SAC), (ABC)) = \widehat{SMH}$
	$((SBC), (ABC)) = \widehat{SNH}$

Hình chóp $S.ABCD$ có mặt bên (SAB) vuông góc với đáy là hình chữ nhật



$$(SA, (ABCD)) = \widehat{SAH}$$

$$(SC, (ABCD)) = \widehat{SCH}$$

$$(SB, (ABCD)) = \widehat{SBH}$$

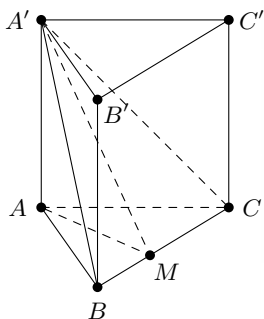
$$(SD, (ABCD)) = \widehat{SDH}$$

$$((SAD), (ABCD)) = \widehat{SAH}$$

$$((SBC), (ABCD)) = \widehat{SBH}$$

$$((SCD), (ABCD)) = \widehat{SMH}$$

Hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$



$$(A'B, (ABC)) = \widehat{A'BA}$$

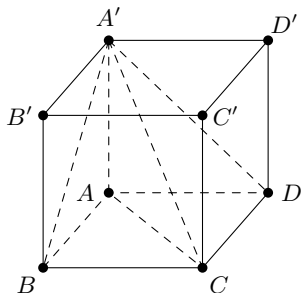
$$(A'C, (ABC)) = \widehat{A'CA}$$

$$[A', BC, A'] = ((A'BC), (ABC)) = \widehat{A'MA}$$

☆ Điểm M là hình chiếu của điểm A trên đoạn thẳng BC .

☆ Nếu $\triangle ABC$ cân tại A (hoặc đều) thì M là trung điểm của BC .

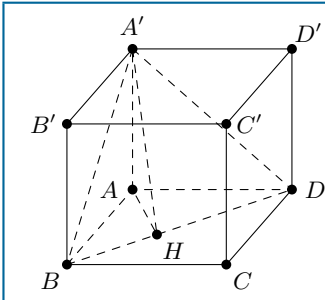
Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$



$$(A'B, (ABCD)) = \widehat{A'BA}$$

$$(A'C, (ABCD)) = \widehat{A'CA}$$

$$(A'D, (ABCD)) = \widehat{A'DA}$$



☆ $((A'BD), (ABCD)) = \widehat{A'HA}$, với H là hình chiếu của điểm A trên đoạn thẳng BD .

☆ Nếu $ABCD$ là hình vuông thì $H \equiv O$, với O là tâm của hình vuông $ABCD$.

2. Khoảng cách trong không gian

2.1. Khoảng cách từ một điểm tới mặt phẳng

Định nghĩa 4.21.

Cho điểm A và mặt phẳng (α) . Khi đó $d(A, (\alpha)) = AH$, với H là hình chiếu của A trên mặt phẳng (α) .

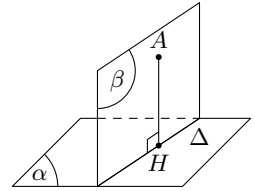
Cách xác định khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (α)

☆ **Bước 1:** Tìm mặt phẳng (β) đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (α) .

☆ **Bước 2:** Tìm giao tuyến $\Delta = (\alpha) \cap (\beta)$.

☆ **Bước 3:** Trong mặt phẳng (β) , kẻ $AH \perp \Delta$.
 $\Rightarrow OH \perp (\alpha) \Rightarrow d(A, (\alpha)) = AH$.

☆ **Bước 4:** Tính độ dài đoạn AH .



☆ Nếu đã có đường thẳng $d \perp (\alpha)$ thì kẻ $Ax \parallel d$ cắt (α) tại H .

☆ Nếu $AB \parallel (\alpha)$ thì $d(A, (\alpha)) = d(B, (\alpha))$.

☆ Nếu AB cắt (α) tại I thì $\frac{d(A, (\alpha))}{d(B, (\alpha))} = \frac{AI}{BI}$.

2.2. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

Định nghĩa 4.22.

Nếu $d \parallel (\alpha)$ thì $d(d, (\alpha)) = d(A, (\alpha))$, với mọi $A \in d$.

2.3 Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Định nghĩa 4.23.

Nếu $(\alpha) // (\beta)$ thì $d((\alpha), (\beta)) = d(A, (\beta))$, với mọi $A \in (\alpha)$.

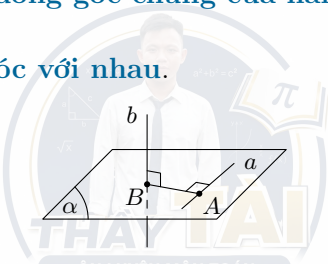
2.4 Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Định nghĩa 4.24.

Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b . Đường thẳng Δ cắt và vuông góc với hai đường thẳng a, b thì được gọi là **đường vuông góc chung** của a và b . Nếu Δ cắt a tại A và cắt b tại B thì AB gọi là **đoạn vuông góc chung** của a và b .

Cách xác định đoạn vuông góc chung của hai đường chéo nhau a và b

☆ Nếu a và b vuông góc với nhau.



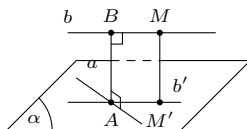
◇ **Bước 1:** Dựng mặt phẳng (α) chứa a và vuông góc với b tại B .

◇ **Bước 2:** Trong (α) , dựng $BA \perp a$ tại A .

$\Rightarrow AB$ là đoạn vuông góc chung của a và b .

☆ Nếu a và b không vuông góc với nhau.

Cách 1



◇ **Bước 1:** Dựng mặt phẳng (α) chứa a và song song với b .

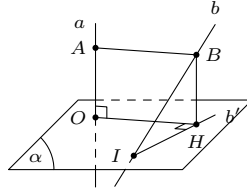
◇ **Bước 2:** Lấy điểm M tùy ý trên b dựng $MM' \perp (\alpha)$ tại M' .

◇ **Bước 3:** Từ M' dựng $b' // b$ cắt a tại A .

◇ **Bước 4:** Từ A dựng $AB // MM'$ cắt b tại B .

$\Rightarrow AB$ là đoạn vuông góc chung của a và b .

Cách 2



- ◇ **Bước 1:** Đặt mặt phẳng $(\alpha) \perp a$ tại O , (α) cắt b tại I .
- ◇ **Bước 2:** Đặt hình chiếu vuông góc b' của b lên (α) .
- ◇ **Bước 3:** Trong mặt phẳng (α) , vẽ $OH \perp b'$ tại H .
- ◇ **Bước 4:** Từ H dựng đường thẳng song song với a cắt b tại B .
- ◇ **Bước 5:** Từ B dựng đường thẳng song song với OH cắt a tại A .
 $\Rightarrow AB$ là đoạn vuông góc chung của a và b .

Định nghĩa 4.25.

Nếu hai đường thẳng chéo nhau a và b có đoạn vuông góc chung AB thì

$$d(a, b) = AB$$

Cách xác định khoảng cách giữa hai đường chéo nhau a và b

- ☆ **Cách 1:** Đặt đường vuông góc chung AB của hai đường thẳng chéo nhau a và b . Khi đó

$$d(a, b) = AB.$$

- ☆ **Cách 2:** Tìm mặt phẳng (α) chứa a và song song với b . Khi đó

$$d(a, b) = d(b, (\alpha)).$$

- ☆ **Cách 3:** Đặt hai mặt phẳng song song và lần lượt chứa hai đường thẳng a và b . Khi đó

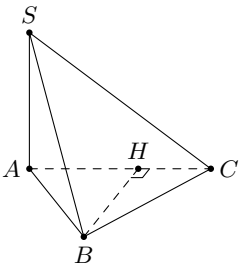
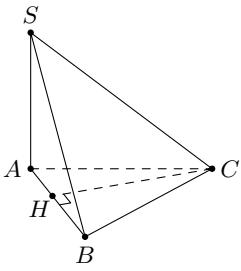
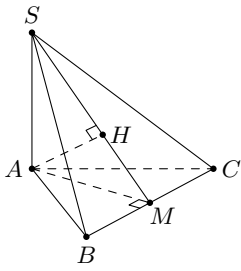
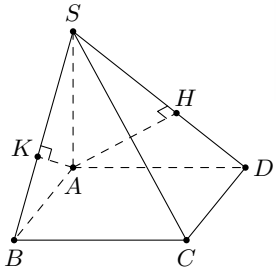
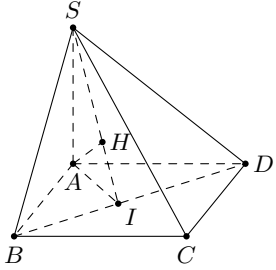
$$d(a, b) = d((\alpha), (\beta)).$$

- ☆ **Cách 4:** Tính khoảng cách dựa vào thể tích tứ diện

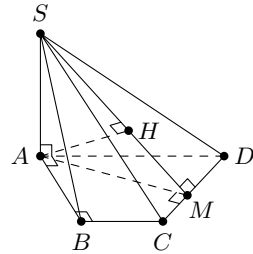
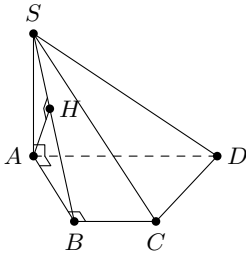
$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot AB \cdot CD \cdot d(AB, CD) \cdot \sin(\angle(AB, CD))$$

với AB, CD là hai cạnh đối nhau của một tứ diện.

2.5 Cách xác định khoảng cách trong một số hình chóp thường gặp

Hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$		
		
$d(B, (SAC)) = BH$	$d(C, (SAB)) = CH$	$d(A, (SBC)) = AH$
☆ Nếu $\triangle ABC$ vuông tại A thì $H \equiv A \Rightarrow \begin{cases} d(B, (SAC)) = AB \\ d(C, (SAB)) = CA. \end{cases}$ ☆ Nếu $\triangle ABC$ vuông tại C thì $H \equiv C \Rightarrow d(B, (SAC)) = BC.$ ☆ Nếu $\triangle ABC$ vuông tại B thì $H \equiv B \Rightarrow d(C, (SAC)) = BC.$		
Hình chóp $S.ABCD$, có $ABCD$ là hình chữ nhật (hình vuông), $SA \perp (ABCD)$		
	$d(A, (SCD)) = AH$	
	$d(B, (SCD)) = AH$	
	$d(A, (SBC)) = AK$	
	$d(D, (SBC)) = AK$	
	$d(A, (SBD)) = AH$	
	$d(C, (SBD)) = AH$	
	Nếu $ABCD$ là hình vuông thì $I \equiv O.$	

Hình chóp $S.ABCD$, có $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B ,
 $SA \perp (ABCD)$

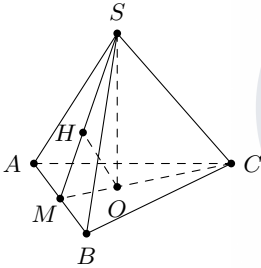


$$d(A, (SBC)) = d(D, (SBC)) = AH$$

$$d(A, (SCD)) = AH$$

Nếu $AD = 2AB = 2BC$ thì $M \equiv C$

Hình chóp tam giác đều $S.ABC$



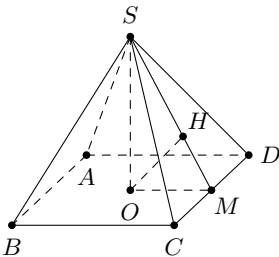
$$d(O, (SAB)) = OH$$

$$d(C, (SAB)) = 3d(O, (SAB))$$

$$d(O, (SAB)) = d(O, (SBC)) = d(O, (SAC))$$

$$d(A, (SBC)) = d(B, (SAC)) = d(C, (SAB))$$

Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$



$$d(O, (SCD)) = OH$$

$$d(A, (SCD)) = 2d(O, (SCD))$$

$$d(O, (SAB)) = d(O, (SBC)) = d(O, (SCD)) = d(O, (SAD))$$

BÀI 4. Thể tích của khối đa diện

1. Thể tích khối đa diện

- ☆ Thể tích V của khối chóp có diện tích đáy S và chiều cao h là

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h.$$

- ☆ Thể tích V của khối chóp cụt đều có diện tích đáy lớn S , diện tích đáy bé S' và chiều cao h là

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (S + S' + \sqrt{S \cdot S'}).$$

- ☆ Thể tích V của khối lăng trụ có diện tích đáy S và chiều cao h là

$$V = S \cdot h.$$

- ☆ Thể tích V của khối hộp chữ nhật có ba kích thước a, b, c là

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

- ☆ Thể tích V của khối lập phương có cạnh a là

$$V = a^3.$$

2. Phân biệt các khối đa diện cơ bản

2.1. Hình chóp

- ☆ **Hình chóp đều** là hình chóp có đáy là đa giác đều và chân đường cao trùng với tâm của các đa giác đáy.
- ☆ **Hình chóp tam giác đều** là hình chóp có đáy là tam giác đều và chân đường cao trùng với trọng tâm của đáy.
- ☆ **Hình chóp tứ giác đều** là hình chóp có đáy là hình vuông, chân đường cao trùng với giao điểm hai đường chéo hình vuông.
- ☆ **Tứ diện đều** là hình chóp tam giác đều nhưng có tất cả các cạnh bằng nhau.

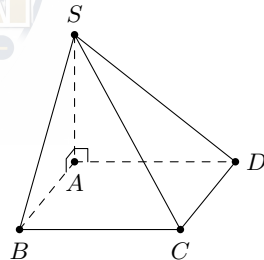
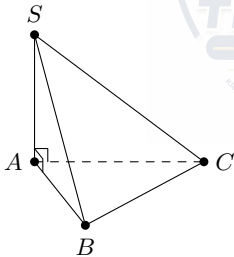
2.2. Hình lăng trụ

- ☆ **Lăng trụ đứng** là lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với đáy.

- ☆ **Lăng trụ đều** là lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.
- ☆ **Lăng trụ tam giác đều** là lăng trụ **đứng** và có đáy là **tam giác đều**.
- ☆ **Lăng trụ tứ giác đều** là lăng trụ **đứng**, có đáy là **hình vuông**.
- ☆ **Lăng trụ có đáy là tam giác đều** là lăng trụ **xiên**, có đáy là tam giác đều.
- ☆ **Lăng trụ có đáy là tứ giác đều** là lăng trụ **xiên**, có đáy là hình vuông.
- ☆ **Hình hộp** là lăng trụ **xiên** có đáy là hình bình hành.
- ☆ **Hình hộp đứng** là lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.
- ☆ **Hình hộp chữ nhật** là lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật.
- ☆ **Hình lập phương** là hình lăng trụ đứng có đáy và các mặt bên là hình vuông.

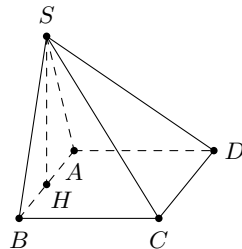
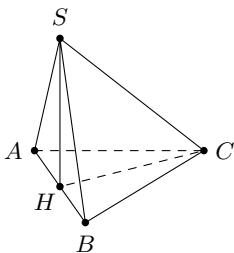
3. Một số hình chóp thường gặp

Hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy



☆ Chiều cao của hình chóp là SA .

Hình chóp có mặt bên vuông góc với đáy



☆ Chiều cao hình chóp là SH , với SH là đường cao của tam giác SAB .

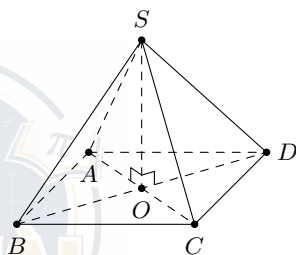
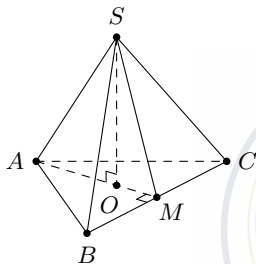
☆ Nếu $\triangle SAB$ đều thì H là trung điểm của AB và $SH = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$.

☆ Nếu $\triangle SAB$ vuông tại S thì $\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2}$.

☆ Nếu $\triangle SAB$ vuông cân tại S thì $SH = \frac{AB}{2}$.

☆ Nếu $\triangle SAB$ cân tại S thì $SH = \sqrt{SA^2 - \frac{AB^2}{4}}$.

Hình chóp đều



☆ Chiều cao hình chóp là SO , với O là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

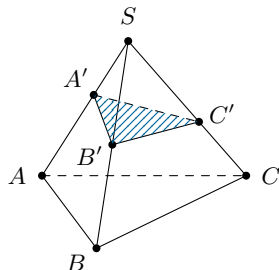
☆ Với hình chóp tam giác đều $S.ABC$ thì $SO = \sqrt{SA^2 - \frac{AB^2}{3}}$.

☆ Với hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ thì $SO = \sqrt{SA^2 - \frac{AB^2}{2}}$.

4. Tỷ số thể tích

☆ Cho hình chóp $S.ABC$, gọi A' , B' , C' lần lượt là các điểm thuộc các cạnh SA , SB , SC . Khi đó, ta có

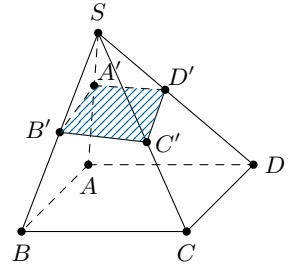
$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$



- ☆ Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi A', B', C', D' lần lượt là các điểm thuộc các cạnh SA, SB, SC, SD . Khi đó, ta có

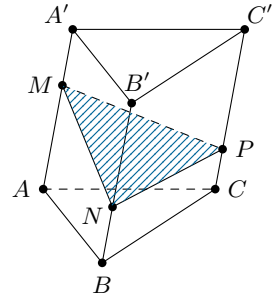
$$\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{abcd}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right)$$

với $\begin{cases} a = \frac{SA'}{SA}, b = \frac{SB'}{SB}, c = \frac{SC'}{SC}, d = \frac{SD'}{SD} \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}. \end{cases}$



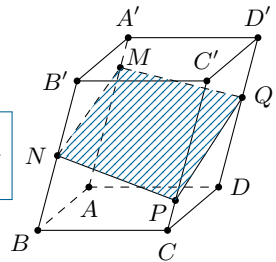
- ☆ Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$, một mặt phẳng (P) cắt 3 cạnh bên của lăng trụ tại M, N, P . Khi đó

$$\frac{V_{A'B'C'.MNP}}{V_{ABC.MNP}} = \frac{A'M + B'N + C'P}{AM + BN + CP}$$



- ☆ Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, một mặt phẳng (P) cắt 4 cạnh bên của lăng trụ tại M, N, P, Q . Khi đó

$$\frac{V_{A'B'C'D'.MNPQ}}{V_{ABCD.MNPQ}} = \frac{A'M + B'N + C'P + D'Q}{AM + BN + CP + DQ}$$



5. Một số công thức tính nhanh thể tích khối đa diện

- ☆ Thể tích của khối chóp $S.ABC$ có ba cạnh $SA \perp SB \perp SC$, $SA = a$, $SB = b$ và $SC = c$ là

$$V_{S.ABC} = \frac{abc}{6}.$$

- ☆ Thể tích của khối chóp $S.ABC$ có ba cạnh $SA \perp SB \perp SC$, $AB = a$, $BC = b$, $AC = c$ là

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2)}{2}}.$$

- ☆ Thể tích của khối chóp $S.ABC$ có ba mặt $(SAB) \perp (SBC) \perp (SAC)$, $S_{\Delta SAB} = S_1$, $S_{\Delta SBC} = S_2$, $S_{\Delta SAC} = S_3$ là

$$V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{2S_1 \cdot S_2 \cdot S_3}}{3}.$$

- ☆ Thể tích của khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $(SAB) \perp (SBC)$, $\widehat{BSC} = \alpha$ và $\widehat{ASB} = \beta$ là

$$V_{S.ABC} = \frac{SB^3 \cdot \sin 2\alpha \cdot \tan \beta}{12}$$

- ☆ Thể tích của khối chóp $S.ABC$ có các cạnh $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$, $\widehat{ASB} = \beta$, $\widehat{ASC} = \varphi$ và $((SAB), (SAC)) = \alpha$ là

$$V_{S.ABC} = \frac{abc}{6} \sin \alpha \sin \beta \sin \varphi.$$

- ☆ Thể tích của khối chóp $S.ABC$ có $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$, $\widehat{ASB} = \alpha$, $\widehat{BSC} = \beta$, $\widehat{CSA} = \varphi$ là

$$V_{S.ABC} = \frac{abc}{6} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \varphi + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \varphi}.$$

- ☆ Thể tích của khối chóp $S.ABC$ có $SA = a$, $S_{\Delta SAB} = S_1$, $S_{\Delta SAC} = S_2$, $((SAB), (SAC)) = \alpha$ là

$$V_{S.ABC} = \frac{2S_1 S_2 \sin \alpha}{3a}.$$

- ☆ Thể tích của tứ diện $ABCD$ có $AB = a$, $CD = b$, $d(AB, CD) = d$ và $(AB, CD) = \alpha$ là

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot a \cdot b \cdot d \cdot \sin \alpha.$$

- ☆ Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $AD = BC = c$ là

$$V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)}.$$

- ☆ Thể tích của khối tứ diện đều $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a là

$$V_{ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}.$$

- ☆ Thể tích của khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b là

$$V_{S.ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3b^2 - a^2}}{12}.$$

- ☆ Thể tích của khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và mặt bên tạo với mặt phẳng đáy góc α là

$$V_{S.ABC} = \frac{a^3 \tan \alpha}{24}.$$

- ☆ Thể tích của khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh bên bằng b và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy góc β là

$$V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{3}b^3 \cdot \sin \beta \cos^2 \beta}{4}.$$

- ☆ Thể tích của khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh đáy bằng a , cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy góc β là

$$V_{S.ABC} = \frac{a^3 \cdot \tan \beta}{12}.$$

- ☆ Thể tích của khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A song song với BC và vuông góc với (SBC) , góc giữa (P) với đáy là α là

$$V_{S.ABC} = \frac{a^3 \cot \alpha}{24}.$$

- ☆ Thể tích của khối chóp đều $S.ABCD$ có các cạnh bằng a là

$$V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$

- ☆ Thể tích của khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh đáy bằng a , và các cạnh bên bằng b là

$$V_{S.ABCD} = \frac{a^2\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{6}.$$

- ☆ Thể tích của khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , góc tạo bởi mặt bên và mặt phẳng đáy là α là

$$V_{S.ABCD} = \frac{a^3 \cdot \tan \alpha}{6}.$$

- ☆ Thể tích của khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng b , góc giữa mặt bên và mặt đáy là α là

$$V_{S.ABCD} = \frac{4b^3 \cdot \tan \alpha}{3\sqrt{(2 + \tan^2 \alpha)^3}}.$$

- ☆ Thể tích của khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng β là

$$V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6} \cdot \tan \alpha.$$

- ☆ Thể tích khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , $\widehat{SAB} = \alpha$, với $\alpha \in (45^\circ; 90^\circ)$ là

$$V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{\tan^2 \alpha - 1}}{6}.$$

GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC

BÀI 1. Giới hạn của dãy số

1. Giới hạn hữu hạn của dãy số

Định nghĩa 5.1.

Ta nói dãy số (u_n) **có giới hạn là 0** khi n dần tới dương vô cực, nếu $\forall \varepsilon > 0$ bé tùy ý, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $|u_n| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$, kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ hay $\lim u_n = 0$ hay $u_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Một số giới hạn cần nhớ

☆ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$, với $k \in \mathbb{N}^*$.

☆ $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$, với $|q| < 1$.

☆ Nếu $|u_n| \leq v_n, \forall n \geq 1$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

Định nghĩa 5.2.

Ta nói dãy số (u_n) **có giới hạn là số thực a** khi n dần tới dương vô cực nếu $\lim(u_n - a) = 0$, kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ hay $\lim u_n = a$ hay $u_n \rightarrow a$ khi $n \rightarrow +\infty$.

! Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim u_n = c$.

Định lí 5.3.

☆ Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì

◇ $\lim (u_n + v_n) = a + b$.

◇ $\lim (u_n - v_n) = a - b$.

◇ $\lim (u_n \cdot v_n) = a \cdot b$.

◇ $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$ (nếu $b \neq 0$).

☆ Nếu $u_n \geq 0, \forall n$ và $\lim u_n = a > 0$ thì $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

2. Giới hạn vô cực của dãy số

Định nghĩa 5.4.

☆ Dãy số (u_n) gọi là có giới hạn $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nếu $\forall M > 0$ bất kì thì $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $u_n > M, \forall n \geq n_0$, kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ hay $\lim u_n = +\infty$.

☆ Dãy số (u_n) gọi là có giới hạn $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nếu $\lim(-u_n) = +\infty$, kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ hay $\lim u_n = -\infty$.

Một số giới hạn cần nhớ

☆ $\lim n^k = +\infty$, với $k \in \mathbb{N}^*$. ☆ $\lim q^n = +\infty$, với $q > 1$.

Định lý 5.5.

☆ Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = +\infty$ (hoặc $\lim v_n = -\infty$) thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.

☆ Nếu $\lim u_n = a > 0$, $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0, \forall n$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.

☆ Nếu $\lim u_n = a > 0$ và $\lim v_n = +\infty$ thì $\lim u_n v_n = +\infty$.

BÀI 2. Giới hạn của hàm số

1. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm

Định nghĩa 5.6.

Giả sử $(a; b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$, có thể trừ điểm x_0 . Hàm số $y = f(x)$ có **giới hạn** là số L khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in (a; b)$, $x_n \neq 0$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0$.

! Nếu hàm số $y = f(x)$ xác định tại x_0 thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

 Tính chất 5.7.

☆ Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$ thì

$$\diamond \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M. \quad \diamond \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M. \quad \diamond \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \text{ với } M \neq 0.$$

☆ Nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in (a; b) \setminus x_0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

 Định nghĩa 5.8.

☆ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$. Ta nói số L là **giới hạn bên phải** của $f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì thỏa mãn $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$.

☆ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$. Ta nói số L là **giới hạn bên trái** của $f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì thỏa mãn $a < x_n < x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.

$$\star \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L.$$

2. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực

 Định nghĩa 5.9.

☆ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta nói $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.

☆ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; b)$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \rightarrow -\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < b$ và $x_n \rightarrow -\infty$, ta nói $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

☆ Các quy tắc tính giới hạn hữu hạn tại một điểm cũng đúng cho giới hạn hữu hạn tại vô cực.

! ☆ $\lim_{x \rightarrow +\infty} c = \lim_{x \rightarrow -\infty} c = c$, với $c \in \mathbb{R}$.

☆ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^k} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$, với $k \in \mathbb{N}^*$.

3. Giới hạn vô cực của hàm số tại một điểm

Định nghĩa 5.10.

☆ Giả sử khoảng $(a; b)$ chứa x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b) \setminus \{x_0\}$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn $+\infty$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in (a; b) \setminus \{x_0\}$, $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow +\infty$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

☆ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [-f(x)] = +\infty$.

Định nghĩa 5.11.

☆ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn $+\infty$ khi $x \rightarrow x_0$ về bên phải nếu với dãy số (x_n) bất kì thỏa mãn $x_0 < x_n < b$, $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow +\infty$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$.

☆ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn $+\infty$ khi $x \rightarrow x_0$ về bên trái nếu với dãy số (x_n) bất kì thỏa mãn $a < x_n < x_0$, $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow +\infty$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$.

☆ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$ được định nghĩa tương tự.

! $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty$ được định nghĩa tương tự như giới hạn của hàm số $f(x)$ tại vô cực.

Một số giới hạn đặc biệt

☆ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$, với k nguyên dương.

☆ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty$, k là **số chẵn**.

☆ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$, k là **số lẻ**.

☆ Quy tắc tìm giới hạn của tích $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

☆ Quy tắc tìm giới hạn của thương $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	$+$	$+\infty$
		$-$	$-\infty$
$L < 0$	0	$+$	$-\infty$
		$-$	$+\infty$

4. Tìm giới hạn bằng máy tính Casio

☆ **Bước 1:** Nhập hàm số $y = f(x)$ cần tính giới hạn vào máy tính.

☆ **Bước 2:** Tính giới hạn bằng chức năng của máy tính.

◇ Nếu $x \rightarrow +\infty$ ta ấn r 1 0 D 1 5.

◇ Nếu $x \rightarrow -\infty$ ta ấn r p 1 0 D 1 5.

◇ Nếu $x \rightarrow x_0^+$ (ví dụ $x_0 = 1$) ta ấn r 1 + 1 0 D p 1 0.

◇ Nếu $x \rightarrow x_0^-$ (ví dụ $x_0 = 1$) ta ấn r 1 p 1 0 D p 1 0.

◇ Nếu $x \rightarrow x_0$ thì ta có thể ấn theo cách của $x \rightarrow x_0^+$ hay $x \rightarrow x_0^-$ đều được.

☆ **Bước 3:** Đọc kết quả và tiến hành làm tròn.

◇ Nếu kết quả ra số đẹp thì đó chính là lim của hàm số. Còn nếu kết quả ra số xấu thì tiến hành làm tròn kết quả hoặc có thể tăng số mũ lên để ra số đẹp.

◇ Nếu kết quả ra số gần với 0 có dạng 4×10^{-20} (hoặc -4×10^{-20}) thì lim của hàm số bằng 0.

◇ Nếu kết quả ra số dương rất lớn có dạng 4×10^{20} thì kết quả của lim là $+\infty$.

◇ Nếu kết quả ra số âm rất nhỏ có dạng -4×10^{20} thì kết quả của lim là $-\infty$.

! Nếu ấn máy tính ra kết quả bằng **0** thì cần phải giảm số mũ xuống đến khi ra kết quả khác 0, ví dụ như 10^{10} hay 10^8 .

BÀI 3. Hàm số liên tục

1. Hàm số liên tục tại một điểm

Định nghĩa 5.12.

☆ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 . Hàm số $f(x)$ được gọi là **liên tục tại điểm** x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

☆ Hàm số $f(x)$ **không liên tục** tại x_0 được gọi là **gián đoạn** tại điểm đó.

Một hàm số gián đoạn tại x_0 nếu xảy ra các trường hợp sau

! ☆ Không tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, nghĩa là $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

☆ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

2. Hàm số liên tục trên một khoảng

Định nghĩa 5.13.

- ☆ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên khoảng** $(a; b)$ nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng này.
- ☆ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên đoạn** $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

- ☆ Các khái niệm hàm số liên tục trên nửa khoảng như $(a; b]$, $[a; +\infty)$, ... được định nghĩa theo cách tương tự.
- ☆ Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một đường liền trên khoảng đó.

Định lí 5.14.

- ☆ Hàm số đa thức và hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- ☆ Các hàm số $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sqrt{x}$ và hàm số phân thức hữu tỉ liên tục trên tập xác định của chúng.

3. Một số tính chất cơ bản

Định lí 5.15.

Giả sử hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục tại điểm x_0 . Khi đó

- ☆ Hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x)g(x)$ liên tục tại x_0 .
- ☆ Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

Định lí 5.16.

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.

HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

BÀI 1. Lũy thừa với số mũ thực

1. Định nghĩa

1.1. Lũy thừa với số mũ nguyên

Định nghĩa 6.1.

Cho n là số nguyên dương.

☆ Với a tùy ý, ta có $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ thừa số}}$, với a là **cơ số** và n là **số mũ**.

☆ Với a là số thực khác 0, ta có $a^0 = 1$ và $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

1.2. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Định nghĩa 6.2.

Cho số thực a và số nguyên dương n . Số b được gọi là **căn bậc n** của số a nếu $b^n = a$.

☆ Nếu n là số lẻ thì mỗi số thực a chỉ có một căn bậc n và kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$. Căn bậc 1 của số a chính là a .

☆ Nếu n là số chẵn thì mỗi số thực **dương** a có hai căn bậc n là hai số đối nhau, giá trị dương kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$ (gọi là **căn số học bậc n** của a), giá trị âm kí hiệu là $-\sqrt[n]{a}$.

Định nghĩa 6.3.

Cho số thực a dương và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$, trong đó m là một số nguyên và n là số nguyên dương. Lũy thừa của a với số mũ r , kí hiệu là a^r , xác định bởi công thức $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

1.3 Lũy thừa với số mũ thực

Định nghĩa 6.4.

Cho a là số thực dương và α là một số vô tỉ. Xét dãy số hữu tỉ (r_n) mà $\lim r_n = \alpha$. Giới hạn của dãy số (a^{r_n}) gọi là **lũy thừa của a với số mũ α** , kí hiệu a^α , nghĩa là $a^\alpha = \lim a^{r_n}$.

2 Tính chất

2.1 Tính chất của lũy thừa

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(ab)^m = a^m \cdot b^m$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	$\left(\frac{b}{a}\right)^{-m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$
$0 < a < b \xrightarrow{n>0} a^n < b^n$	$0 < a < b \xrightarrow{n \leq 0} a^n > b^n$	
$a^m > a^n \xrightarrow{a>1} m > n$	$a^m > a^n \xrightarrow{0 \leq a < 1} m < n$	
$\begin{cases} a > 1 \\ m > 0 \end{cases} \Rightarrow a^m > 1$	$\begin{cases} a > 1 \\ m < 0 \end{cases} \Rightarrow a^m < 1$	
$\begin{cases} 0 < a < 1 \\ m > 0 \end{cases} \Rightarrow a^m < 1$	$\begin{cases} 0 < a < 1 \\ m < 0 \end{cases} \Rightarrow a^m > 1$	

2.2 Tính chất của căn bậc n

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{khi } n \text{ lẻ} \\ a , & \text{khi } n \text{ chẵn} \end{cases}$	$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$	
$\begin{cases} n \text{ tự nhiên lẻ} \\ a < b \end{cases} \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$	$\begin{cases} n \text{ tự nhiên chẵn} \\ 0 < a < b \end{cases} \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$	

BÀI 2. Logarit

1. Khái niệm logarit

Định nghĩa 6.5.

Cho $a, b > 0$ và $a \neq 1$. Số thực α để $a^\alpha = b$ được gọi là **logarit cơ số a của b** và kí hiệu là $\log_a b$. Nghĩa là $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$.

2. Các quy tắc tính logarit

$\log_a 1 = 0$	$\log_a a = 1$	$a^{\log_a b} = b$	$\log_a (a^\alpha) = \alpha$
$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$		$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$	
$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$		$\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$	
$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$		$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$	
$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$		$\log_a b \cdot \log_b a = 1$	
$\log_a b > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a, b < 1 \\ 1 < a, b \end{cases}$		$\log_a b < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 < b \\ 0 < b < 1 < a \end{cases}$	
$\log_a b > \log_a c \xLeftrightarrow{a > 1} b > c > 0$		$\log_a b > \log_a c \xLeftrightarrow{0 < a < 1} 0 < b < c$	

3. Logarit thập phân và logarit tự nhiên

3.1. Logarit thập phân

☆ Logarit cơ số 10 của một số dương a gọi là logarit thập phân của a , kí hiệu là $\log a$ hoặc $\lg a$. Nghĩa là $\log a = \log_{10} a$.

3.2. Logarit tự nhiên

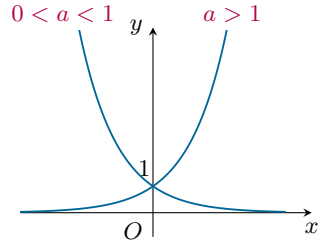
☆ Logarit cơ số e của số dương a gọi là logarit tự nhiên của a , kí hiệu là $\ln a$. Nghĩa là $\ln a = \log_e a$. Trong đó $e = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \approx 2,7183$.

BÀI 3. Hàm số mũ và hàm số logarit

1. Hàm số mũ $y = a^x$

- ☆ Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- ☆ Tập giá trị: $T = (0; +\infty)$.
- ☆ Hàm số $y = a^x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- ☆ Sự biến thiên

$0 < a < 1$	Nghịch biến trên $\mathbb{R}$
$a > 1$	Đồng biến trên $\mathbb{R}$

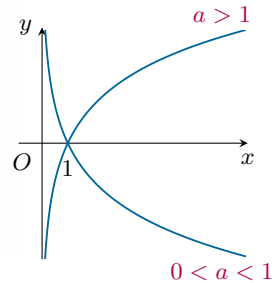


- ☆ Đồ thị luôn đi qua điểm $(0; 1)$, $(1; a)$.

2. Hàm số logarit $y = \log_a x$

- ☆ Tập xác định: $\mathcal{D} = (0; +\infty)$.
- ☆ Tập giá trị: $T = \mathbb{R}$.
- ☆ Hàm số $y = \log_a x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- ☆ Sự biến thiên

$0 < a < 1$	Nghịch biến trên $\mathcal{D}$
$a > 1$	Đồng biến trên $\mathcal{D}$



- ☆ Đồ thị luôn đi qua điểm $(1; 0)$, $(a; 1)$.

BÀI 4. Bài toán lãi suất - tăng trưởng

- ☆ Lãi đơn: $S_n = A(1 + nr\%)$, với A là số tiền gửi, $r\%$ là lãi suất, n là thời gian gửi và S_n là tổng số tiền nhận được.
- ☆ Lãi kép - Bài toán tiết kiệm: $S_n = A(1 + r\%)^n$, với A là số tiền gửi, $r\%$ là lãi suất, n là thời gian gửi và S_n là tổng số tiền nhận được.
- ☆ Lãi kép liên tục: $S_n = A \cdot e^{n \cdot r\%}$, với A là số tiền gửi, $r\%$ là lãi suất, n là thời gian gửi và S_n là tổng số tiền nhận được.

BÀI 5. Phương trình, bất phương trình mũ và logarit

1. Phương trình và bất phương trình mũ

1.1. Phương trình mũ

☆ Phương trình mũ cơ bản: $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$.

☆ Phương pháp đưa về cùng cơ số: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

1.2. Bất phương trình mũ

$a > 1$	$0 < a < 1$
$a^{f(x)} > b \Leftrightarrow f(x) > \log_a b$	$a^{f(x)} > b \Leftrightarrow f(x) < \log_a b$
$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$	$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

- ! ☆ Phương pháp giải bất phương trình mũ tương tự phương pháp giải phương trình mũ.
- ☆ Bất phương trình $a^x > 0$ có tập nghiệm là $S = \mathbb{R}$.

2. Phương trình và bất phương trình logarit

2.1. Phương trình logarit

☆ Phương trình logarit cơ bản $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^b. \end{cases}$

☆ Phương pháp đưa về cùng cơ số

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

2.2 Bất phương trình logarit

$a > 1$	$0 < a < 1$
$\log_a f(x) > b \Leftrightarrow f(x) > a^b$	$\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < a^b \end{cases}$
$\log_a f(x) > \log_a g(x)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$	$\log_a f(x) > \log_a g(x)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$

☆ Khi giải phương trình và bất phương trình logarit **phải tìm điều kiện xác định.**

☆ Phương pháp giải bất phương trình logarit tương tự phương pháp giải phương trình logarit.



ĐẠO HÀM VÀ ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM

Bài 1. Đạo hàm

1. Định nghĩa đạo hàm

Định nghĩa 7.1.

☆ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$ và điểm $x_0 \in (a; b)$. **Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 và kí hiệu $f'(x_0)$ là**

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

☆ Hàm số $y = f(x)$ có **đạo hàm trên khoảng $(a; b)$** nếu nó có đạo hàm $f'(x)$ tại mọi điểm x thuộc khoảng $(a; b)$, kí hiệu là $y' = f'(x)$.

☆ Đạo hàm của hàm số $y' = f'(x)$ được gọi là **đạo hàm cấp hai** của hàm số $y = f(x)$ tại x , kí hiệu là $y'' = f''(x)$.

2. Các quy tắc tính đạo hàm

2.1. Bảng đạo hàm các hàm thường gặp

Đạo hàm của hàm sơ cấp	Đạo hàm của hàm hợp
$(C)' = 0$, với $\forall C \in \mathbb{R}$	
$(x)' = 1$	
$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$	

$\left(\frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}\right)' = \frac{adx^2 + 2aex + be - cd}{(dx + e)^2}$	
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u' \cdot e^u$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

2.2 Quy tắc tính đạo hàm

$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$(k \cdot u)' = k \cdot u'$	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	$[f(u(x))]' = u'(x) \cdot f'(u(x))$	

3 Ý nghĩa của đạo hàm trong hình học và vật lí

3.1 Ý nghĩa vật lí của đạo hàm

☆ Một vật chuyển động có phương trình của quãng đường s theo thời gian t là $s = s(t)$. Khi đó

◇ Vận tốc tức thời của vật đó là $v(t) = s'(t)$.

◇ Gia tốc tức thời của vật đó là $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

☆ Điện lượng Q truyền trong dây dẫn là một hàm số theo thời gian t có dạng $Q = Q(t)$. Khi đó cường độ tức thời của dòng điện là $I(t) = Q'(t)$.

3.2 Ý nghĩa hình học của đạo hàm

☆ **Phương trình tiếp tuyến** của đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc (C) là $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$, với $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến.

☆ **Một số điều kiện thường dùng**

Điều kiện	Công thức
Tiếp tuyến có hệ số góc k	$f'(x_0) = k$
Tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = ax + b$	$f'(x_0) = a$
Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = ax + b$	$f'(x_0) = -\frac{1}{a}$

! Đối với bài toán viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) **đi qua điểm** $A(x_A; y_A)$ thì ta thay tọa độ điểm A vào công thức phương trình tiếp tuyến của (C) là $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$ để tìm x_0 .

3.3 Cách tính đạo hàm của hàm số tại một điểm bằng Casio

☆ Để tính đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 , ta làm như sau

- ◇ **Bước 1:** Ấn q y rồi nhập hàm số $f(x)$.
- ◇ **Bước 2:** Ở vị trí $x = \square$ nhập x_0 , rồi ấn =.

☆ Để giải phương trình $f'(x) = 0$ bằng máy tính casio 580, ta làm như sau

- ◇ **Bước 1:** Ấn q y rồi nhập hàm số $f(x)$.
- ◇ **Bước 2:** Ở vị trí $x = \square$ nhập x .
- ◇ **Bước 3:** Ấn q r = ta sẽ được nghiệm của phương trình.

! Phương pháp này chỉ có thể tìm ra một nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$, **không thể** tìm hết tất cả các nghiệm.

CHƯƠNG 8

TỔ HỢP - XÁC SUẤT

BÀI 1. Biến cố và định nghĩa cổ điển của xác suất

1. Biến cố

1.1. Định nghĩa

- ☆ **Phép thử ngẫu nhiên** là một thí nghiệm hay một hành động mà kết quả của nó không thể biết được trước khi phép thử được thực hiện.
- ☆ **Không gian mẫu** của phép thử là tập hợp tất cả các kết quả có thể khi thực hiện phép thử, kí hiệu là Ω .
- ☆ **Biến cố** E là một tập con của không gian mẫu Ω .
- ☆ **Kết quả thuận lợi** cho một biến cố E liên quan đến phép thử T là kết quả của phép thử T làm cho biến cố đó xảy ra.

1.2. Các biến cố thường gặp

1.3. Biến cố đối

Cho hai biến cố A và B . Khi đó

- ☆ **Biến cố đối** của biến cố A là biến cố “ A không xảy ra”, kí hiệu là $\overline{A}$.
- ☆ **Biến cố giao** của hai biến cố A và B là biến cố “ A và B cùng xảy ra”, kí hiệu là $A \cap B$ (hay AB).
- ☆ **Biến cố hợp** của hai biến cố A và B là biến cố “ A hoặc B xảy ra”, kí hiệu là $A \cup B$.
- ☆ Hai biến cố A và B được gọi là **xung khắc** với nhau nếu biến cố A xảy ra thì biến cố B không xảy ra và ngược lại. Khi đó $A \cap B = \emptyset$.
- ☆ Hai biến cố A và B được gọi là **độc lập** với nhau nếu sự xảy ra của A **không** làm ảnh hưởng đến việc xảy ra của B .

2. Định nghĩa cổ điển của xác suất

Định nghĩa 8.1.

Cho phép thử T có không gian mẫu là Ω . Giả sử các kết quả có thể của T là đồng khả năng. Nếu E là một biến cố liên quan đến phép thử T thì **xác suất** của E được cho bởi công thức

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)},$$

trong đó $n(\Omega)$ và $n(E)$ tương ứng là số phần tử của không gian mẫu Ω và biến cố E .

☆ Tính chất

$$\diamond P(\emptyset) = 0 \text{ và } P(\Omega) = 1.$$

$$\diamond 0 \leq P(A) \leq 1.$$

3. Các quy tắc tính xác suất

☆ Cho biến cố A . Xác suất của biến cố đối $\bar{A}$ của A là

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

☆ Cho hai biến cố A và B bất kì khi đó

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

☆ Nếu hai biến cố A và B **xung khắc** thì

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

! Hai biến cố AB và $A\bar{B}$ xung khắc với nhau khi đó

$$P(AB) + P(A\bar{B}) = P(AB \cup A\bar{B}) = P(A)$$

☆ Nếu hai biến cố A và B **độc lập** thì

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

BÀI 2. Xác suất có điều kiện

1. Định nghĩa xác suất có điều kiện

Định nghĩa 8.2.

Cho hai biến cố A và B . Xác suất của biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra được gọi là **xác suất của A với điều kiện B** , kí hiệu là $P(A | B)$. Nếu $P(B) > 0$ thì

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$



Với mỗi biến cố ngẫu nhiên A và B , trong đó $P(B) > 0$, ta có

$$P(\bar{A} | B) = 1 - P(A | B)$$

2 Công thức nhân xác suất

Định lí 8.3.

Cho hai biến cố A, B là biến cố bất kì. Khi đó

$$P(AB) = P(A | B) \cdot P(B) = P(B | A) \cdot P(A)$$



Cho hai biến cố A và B thỏa mãn $0 < P(A), P(B) < 1$. Khi đó, A và B **độc lập** khi và chỉ khi $P(A) = P(A | B)$ và $P(B) = P(B | A)$.

"Hỏi - Tư duy sâu - Hiểu"