

NEW PHÂN DẠNG CHI TIẾT BÀI TẬP **MÔN TOÁN 11**



- ◆ Bám sát theo chương trình mới
- ◆ Lời giải chi tiết các câu khó
- ◆ Phân tích bình luận mở rộng câu hỏi
- ◆ Hướng đến nhiều mức năng lực khác nhau



Cao Thanh Phúc
☎ 0789 36 39 36
📍 48, Nguyễn Phúc Chu
Tân Bình, Hồ Chí Minh

Mục lục

Chương 1.	HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC	1
Bài 1.	GÓC LƯỢNG GIÁC	1
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	1
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	2
	☞ Dạng toán 1. Đổi đơn vị giữa độ và radian. Độ dài cung tròn	2
	☞ Dạng toán 2. Số đo của góc lượng giác. Hệ thức Chasles	3
	☞ Dạng toán 3. Biểu diễn góc lượng giác trên đường tròn lượng giác	4
	☞ Dạng toán 4. Vận dụng thực tiễn	4
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN	4
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	5
Bài 2.	GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC	8
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	8
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	10
	☞ Dạng toán 1. Tính các giá trị lượng giác của một góc lượng giác	10
	☞ Dạng toán 2. Tính giá trị của biểu thức M liên quan đến các giá trị lượng giác	10
	☞ Dạng toán 3. Rút gọn biểu thức, chứng minh đẳng thức	11
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN	11
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	13
Bài 3.	CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC	15
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	15
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	16
	☞ Dạng toán 1. Sử dụng công thức cộng, công thức nhân đôi	16
	☞ Dạng toán 2. Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng	16
	☞ Dạng toán 3. Sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích	16
	☞ Dạng toán 4. Các bài toán chứng minh, rút gọn	17
	☞ Dạng toán 5. Vận dụng thực tiễn	17
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN	18
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	19

Bài 4. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ	22
A KIẾN THỨC CẦN NHỚ	22
B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	23
Dạng toán 1. Tìm tập xác định của hàm số lượng giác	23
Dạng toán 2. Tính chẵn lẻ của hàm số	24
Dạng toán 3. Tìm giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất	24
C BÀI TẬP TỰ LUYỆN	25
D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	25
Bài 5. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN	28
A KIẾN THỨC CẦN NHỚ	28
B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	30
Dạng toán 1. Giải các phương trình lượng giác cơ bản	30
Dạng toán 2. Giải các phương trình lượng giác dạng mở rộng	31
Dạng toán 3. Vận dụng thực tiễn	31
C BÀI TẬP TỰ LUYỆN	32
D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	33
Chương 2. Dãy số. Cấp số cộng và cấp số nhân	35
Bài 1. Dãy số	35
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	35
B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	36
Dạng toán 1. Tìm các số hạng của dãy số cho bởi công thức tổng quát	36
Dạng toán 2. Tìm các số hạng của dãy số cho bởi công thức truy hồi	36
Dạng toán 3. Dự đoán và chứng minh công thức tổng quát của dãy số bằng phương pháp quy nạp (đọc thêm)	37
Dạng toán 4. Xét sự tăng giảm của dãy số	37
Dạng toán 5. Xét tính bị chặn của dãy số	38
Dạng toán 6. Vận dụng thực tiễn	38
C BÀI TẬP TỰ LUYỆN	39
D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	40
Bài 2. Cấp số cộng	43
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	43

B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	44
✎	Dạng toán 1. Chứng minh dãy số là một cấp số cộng	44
✎	Dạng toán 2. Công sai, số hạng đầu và số hạng tổng quát của cấp số cộng	44
✎	Dạng toán 3. Tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng	45
✎	Dạng toán 4. Tính chất của cấp số cộng	45
✎	Dạng toán 5. Vận dụng, thực tiễn	46
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN	46
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	47
Bài 3.	CẤP SỐ NHÂN	50
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	50
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	51
✎	Dạng toán 1. Chứng minh dãy số là một cấp số nhân	51
✎	Dạng toán 2. Công bội, số hạng đầu, số hạng tổng quát	51
✎	Dạng toán 3. Tính tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân	51
✎	Dạng toán 4. Tính chất của cấp số nhân	52
✎	Dạng toán 5. Vận dụng, thực tiễn	52
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN	53
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	54
Chương 3.	GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC	57
Bài 1.	GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ	57
A	TÓM TẮT LÝ THUYẾT	57
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	59
✎	Dạng toán 1. Khử vô định dạng $\frac{\infty}{\infty}$	59
✎	Dạng toán 2. Khử vô định dạng $\infty - \infty$	60
✎	Dạng toán 3. Một số quy tắc tính giới hạn vô cực	60
✎	Dạng toán 4. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn	61
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN	62
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	63
Bài 2.	GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ	66
A	TÓM TẮT LÝ THUYẾT	66
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	68

	Dạng toán 1. Giới hạn của hàm số khi $x \rightarrow x_0$. Khử dạng vô định $\frac{0}{0}$	68
	Dạng toán 2. Giới hạn của hàm số khi $x \rightarrow \pm\infty$. Khử dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}; \infty - \infty; 0 \cdot \infty$	69
	Dạng toán 3. Giới hạn một bên. Sự tồn tại giới hạn	69
	Dạng toán 4. Vận dụng thực tiễn	70
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN	70
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	72
Bài 3.	HÀM SỐ LIÊN TỤC	74
A	TÓM TẮT LÝ THUYẾT	74
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	75
	Dạng toán 1. Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm	75
	Dạng toán 2. Xét tính liên tục của hàm số trên miền xác định	76
	Dạng toán 3. Tìm giá trị của tham số để hàm số liên tục - gián đoạn tại điểm cho trước	76
	Dạng toán 4. Chứng minh phương trình có nghiệm	76
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN	77
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	78
Chương 4.	ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG. QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN	81
Bài 1.	ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN	81
A	KIẾN THỨC CẦN NHỚ	81
B	PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	84
	Dạng toán 1. Các quan hệ cơ bản	84
	Dạng toán 2. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng	85
	Dạng toán 3. Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng	86
	Dạng toán 4. Chứng minh ba điểm thẳng hàng	87
	Dạng toán 5. Vận dụng thực tiễn	88
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN	88
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	89
Bài 2.	HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG	93
A	KIẾN THỨC CẦN NHỚ	93
B	PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	94

	✎ Dạng toán 1. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng.....	94
	✎ Dạng toán 2. Chứng minh hai đường thẳng song song.....	94
	✎ Dạng toán 3. Xác định giao tuyến d của hai mặt phẳng cắt nhau.....	95
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	95
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	96
Bài 3.	ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG	99
A	KIẾN THỨC CẦN NHỚ.....	99
B	PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	100
	✎ Dạng toán 1. Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng... ..	100
	✎ Dạng toán 2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng cắt nhau.....	101
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	102
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	103
Bài 4.	HAI MẶT PHẪNG SONG SONG	105
A	KIẾN THỨC CẦN NHỚ.....	105
B	PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	107
	✎ Dạng toán 1. Chứng minh hai mặt phẳng song song.....	107
	✎ Dạng toán 2. Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng... ..	107
	✎ Dạng toán 3. Định lý Thales.....	108
	✎ Dạng toán 4. Hình hộp, hình lăng trụ.....	109
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	109
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	109
Bài 5.	PHÉP CHIẾU PHẪNG SONG SONG	112
A	KIẾN THỨC CẦN NHỚ.....	112
B	PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	113
	✎ Dạng toán 1. Xác định ảnh của một hình qua phép chiếu song song.....	113
	✎ Dạng toán 2. Vẽ hình biểu diễn của một số hình khối đơn giản.....	113
C	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	113
Chương 5.	CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM	115
Bài 1.	SỐ TRUNG BÌNH VÀ MÔT CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM	115
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	115

B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	117
	Dạng toán 1. Nhận dạng mẫu số liệu ghép nhóm.....	117
	Dạng toán 2. Ghép nhóm mẫu số liệu.....	117
	Dạng toán 3. Tính số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm.....	117
	Dạng toán 4. Tính một của mẫu số liệu ghép nhóm.....	118
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	118
Bài 2.	TRUNG VỊ VÀ TỨ PHÂN VỊ CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM	121
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	121
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	122
	Dạng toán 1. Tính trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm.....	122
	Dạng toán 2. Tìm tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm.....	122
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	123
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	124
Chương 6.	HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT	126
Bài 1.	PHÉP TÍNH LŨY THỪA	126
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	126
B	CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP.....	127
	Dạng toán 1. Tính giá trị biểu thức.....	127
	Dạng toán 2. Rút gọn biểu thức liên quan đến lũy thừa.....	128
	Dạng toán 3. So sánh hai lũy thừa.....	128
	Dạng toán 4. Vận dụng, thực tiễn.....	128
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	129
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN.....	131
Bài 2.	PHÉP TÍNH LÔGARIT	134
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	134
B	CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP.....	135
	Dạng toán 1. Tính toán biểu thức chứa lôgarit.....	135
	Dạng toán 2. Phân tích một logarit theo hai logarit cho trước.....	135
	Dạng toán 3. Vận dụng, thực tiễn.....	135
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	136
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	137

Bài 3. HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LÔGARIT	140
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	140
B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP.....	141
Dạng toán 1. Tìm tập xác định.....	141
Dạng toán 2. Đồ thị hàm số.....	141
Dạng toán 3. Vận dụng. Thực tiễn.....	142
C BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	142
D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	144
Bài 4. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT	148
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	148
B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP.....	150
Dạng toán 1. Giải các phương trình mũ và logarit đơn giản.....	150
Dạng toán 2. Giải các bất phương trình mũ và lôgarit đơn giản.....	150
Dạng toán 3. Vận dụng, thực tiễn.....	151
C BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	151
D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	153
Chương 7. ĐẠO HÀM	156
Bài 1. ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM	156
A KIẾN THỨC CẦN NHỚ.....	156
B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	157
Dạng toán 1. Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại một điểm.....	157
Dạng toán 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm cho trước.....	158
Dạng toán 3. Ý nghĩa vật lý của đạo hàm.....	158
C BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	158
D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	159
Bài 2. QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM	161
A KIẾN THỨC CẦN NHỚ.....	161
B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	162
Dạng toán 1. Tính đạo hàm của hàm đa thức.....	162
Dạng toán 2. Tính đạo hàm của hàm chứa căn thức.....	162
Dạng toán 3. Tính đạo hàm của hàm lượng giác.....	163

	Dạng toán 4. Tính đạo hàm của hàm số mũ, hàm số lôgarit.....	163
	Dạng toán 5. Tính đạo hàm dạng tích hoặc thương.....	164
	Dạng toán 6. Viết phương trình tiếp tuyến.....	165
	Dạng toán 7. Các bài toán vận dụng, thực tiễn.....	165
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	166
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	167
Bài 3.	ĐẠO HÀM CẤP HAI	171
A	KIẾN THỨC CẦN NHỚ.....	171
B	PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	171
	Dạng toán 1. Tính đạo hàm cấp hai.....	171
	Dạng toán 2. Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp 2.....	172
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	172
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	172
Chương 8.	QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN	174
Bài 1.	HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC	174
A	KIẾN THỨC CẦN NHỚ.....	174
B	PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	175
	Dạng toán 1. Xác định góc giữa hai đường thẳng.....	175
	Dạng toán 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc.....	176
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	176
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	178
Bài 2.	ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG	181
A	KIẾN THỨC CẦN NHỚ.....	181
B	PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	183
	Dạng toán 1. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng...183	
	Dạng toán 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc.....	184
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	185
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	186
Bài 3.	PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG	188
A	KIẾN THỨC CẦN NHỚ.....	188

B	PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	189
	☞ Dạng toán 1. Xác định hình chiếu của điểm (đường) lên mặt phẳng (P).....	189
	☞ Dạng toán 2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.....	189
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	190
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	190
Bài 4.	HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC	193
A	KIẾN THỨC CẦN NHỚ.....	193
B	PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	196
	☞ Dạng toán 1. Xác định góc giữa hai mặt phẳng.....	196
	☞ Dạng toán 2. Tính số đo của góc nhị diện.....	197
	☞ Dạng toán 3. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc.....	198
	☞ Dạng toán 4. Tổng hợp tính toán.....	198
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	199
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	201
Bài 5.	KHOẢNG CÁCH	205
A	KIẾN THỨC CẦN NHỚ.....	205
B	PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	206
	☞ Dạng toán 1. Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng.....	206
	☞ Dạng toán 2. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.....	207
	☞ Dạng toán 3. Khoảng cách giữa đường và mặt phẳng song song. Khoảng cách giữa hai mặt song song.....	208
	☞ Dạng toán 4. Đoạn vuông góc chung. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.....	209
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	210
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	211
Bài 6.	THỂ TÍCH	215
A	KIẾN THỨC CẦN NHỚ.....	215
B	PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	216
	☞ Dạng toán 1. Tính thể tích khối lăng trụ.....	216
	☞ Dạng toán 2. Tính thể tích khối chóp.....	217
	☞ Dạng toán 3. Tính thể tích khối chóp cắt đều.....	218
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	219

D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	220
Chương 9.	CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT	226
Bài 1.	CÔNG THỨC CỘNG XÁC SUẤT	226
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	226
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	227
	📁 Dạng toán 1. Biến cố hợp, biến cố giao, biến cố xung khắc.....	227
	📁 Dạng toán 2. Công thức cộng xác suất của hai biến cố xung khắc.....	227
	📁 Dạng toán 3. Công thức cộng xác suất của hai biến cố bất kì.....	228
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	229
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	231
Bài 2.	CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT	234
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	234
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	234
	📁 Dạng toán 1. Biến cố độc lập.....	234
	📁 Dạng toán 2. Công thức nhân xác suất của hai biến cố độc lập.....	234
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	235
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	236

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§1. GÓC LƯỢNG GIÁC

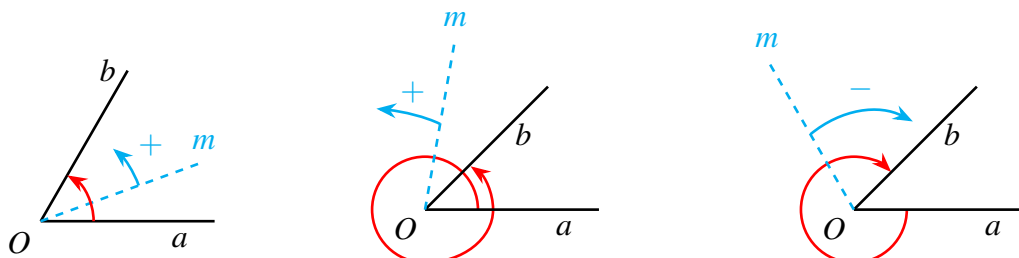
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 GÓC LƯỢNG GIÁC

Góc lượng giác và số đo của góc lượng giác: Trong mặt phẳng, cho hai tia Oa, Ob . Xét tia Om cùng nằm trong mặt phẳng này.

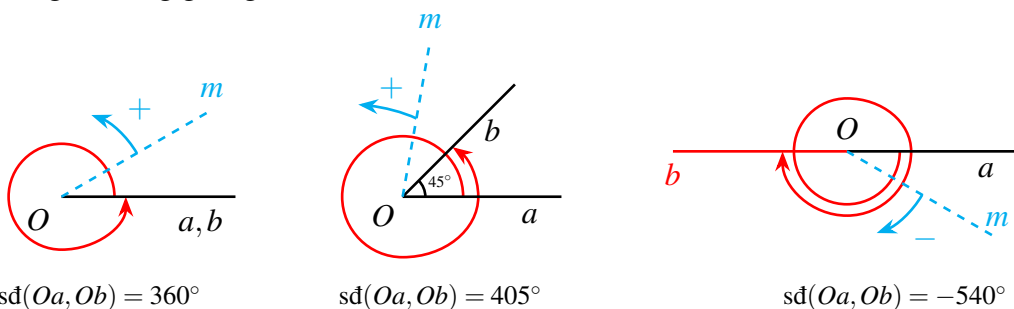
Ghi nhớ 1:

- Nếu tia Om quay quanh điểm O , theo một chiều nhất định từ Oa đến Ob , thì ta nói nó quét một góc lượng giác với tia đầu Oa , tia cuối Ob và kí hiệu là (Oa, Ob) .



Ghi nhớ 2:

- Khi tia Om quay một góc α° , ta nói số đo của góc lượng giác (Oa, Ob) bằng α° , kí hiệu $sđ(Oa, Ob) = \alpha^\circ$ hoặc $(Oa, Ob) = \alpha^\circ$.
- Mỗi góc lượng giác gốc O được xác định bởi tia đầu Oa , tia cuối Ob và số đo α° của nó.



- Số đo của các góc lượng giác có cùng tia đầu Oa và tia cuối Ob sai khác nhau một bội nguyên của 360° nên có công thức tổng quát là

$$sđ(Oa, Ob) = \alpha^\circ + k360^\circ, \text{ với } k \in \mathbb{Z}$$

Hệ thức Chasles: Với ba tia Oa, Ob, Oc bất kì, ta có

$$\text{sđ}(Oa, Ob) + \text{sđ}(Ob, Oc) = \text{sđ}(Oa, Oc) + k360^\circ \quad \text{với } k \in \mathbb{Z}.$$

2 ĐƠN VỊ ĐO GÓC VÀ ĐỘ DÀI CUNG TRÒN

Đơn vị đo góc và cung tròn

- Đơn vị độ ($^\circ$): Chia đường tròn thành 360 cung tròn bằng nhau thì góc ở tâm chắn bởi cung đó sẽ có số đo là 1° .
- Đơn vị radian (rad): Trên đường tròn, nếu một cung tròn có độ dài bằng bán kính thì ta nói cung đó có số đo là 1 rad. Khi đó, góc ở tâm chắn cung đó cũng có số đo 1 rad.

! Khi viết số đo một góc theo đơn vị rad, ta thường không viết chữ rad sau số đo. Chẳng hạn góc $\frac{\pi}{2}$ ta hiểu là góc $\frac{\pi}{2}$ rad.

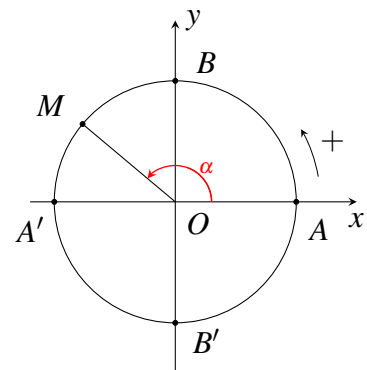
- Mối liên hệ giữa độ và radian: Độ dài đường tròn là $2\pi R$ nên có số đo là 2π rad tương ứng với 360° . Suy ra

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \quad \text{và} \quad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$$

Độ dài cung tròn: Một cung của đường tròn bán kính R có số đo α rad thì sẽ có độ dài là $l = R\alpha$.

3 ĐƯỜNG TRÒN LƯỢNG GIÁC

- Trong mặt phẳng tọa độ, đường tròn tâm O bán kính 1, cùng với gốc $A(1;0)$ và chiều quay dương (như quy ước) gọi là đường tròn lượng giác.
- Cho góc lượng giác số đo α . Trên đường tròn lượng giác, tồn tại duy nhất điểm M sao cho góc lượng giác (OA, OM) bằng α (hình bên). Khi đó, M gọi là điểm biểu diễn của góc có số đo α trên đường tròn lượng giác.



B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Đổi đơn vị giữa độ và radian. Độ dài cung tròn

☒ Sử dụng công thức chuyển đổi giữa số đo độ và số đo radian:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$$

☒ Xét đường tròn có bán kính R .

• Cung tròn có số đo α ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$) thì có độ dài là $l = R\alpha$.

• Cung tròn có số đo a° ($0 \leq a \leq 360$) thì có độ dài là $l = \frac{\pi a}{180} R$.

≡ Ví dụ 1. Đổi số đo của các góc sau ra radian.

- a) 72° ; b) 600° ; c) $-37^\circ 45' 30''$.

≡ Ví dụ 2. Đổi số đo của các góc sau ra độ.

- a) $\frac{5\pi}{18}$; b) $\frac{3\pi}{5}$; c) -4 .

≡ Ví dụ 3. Một đường tròn có bán kính 36 m. Tìm độ dài của cung, biết số đo tương ứng

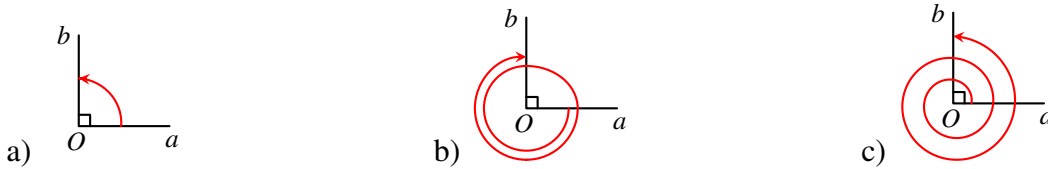
- a) $\frac{3\pi}{4}$ b) 51° c) $\frac{1}{3}$

≡ Ví dụ 4. Một hải lí là độ dài cung tròn xích đạo có số đo $\left(\frac{1}{60}\right)^\circ = 1'$. Biết độ dài xích đạo là 40.000 km, hỏi một hải lí dài bao nhiêu km?

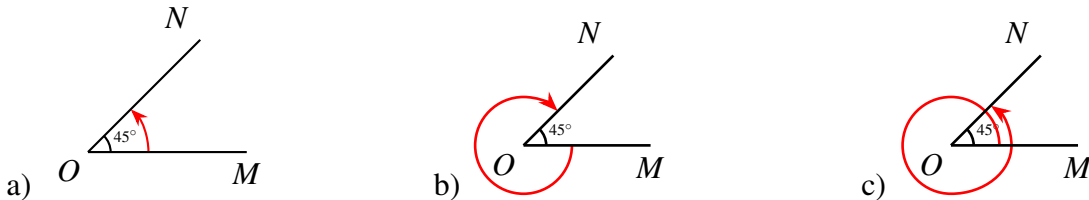
DT 2 Số đo của góc lượng giác. Hệ thức Chasles

- Khi xác định số đo của góc lượng giác, ta cần chú ý đến chiều quay (chiều dương ngược kim đồng hồ, chiều âm cùng kim đồng hồ). Từ đó xác định chính xác số đo của góc lượng giác (Oa, Ob) .
- Giả sử α° là một số đo của góc lượng giác (Oa, Ob) . Suy ra số đo các góc lượng giác có cùng tia đầu Oa , tia cuối Ob có dạng $\alpha^\circ + k \cdot 360^\circ$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hệ thức Chasles: $\text{sđ}(Ob, Oc) = \text{sđ}(Oa, Oc) - \text{sđ}(Oa, Ob) + k360^\circ$ với $k \in \mathbb{Z}$.

≡ Ví dụ 5. Xác định số đo của góc lượng giác (Oa, Ob) được biểu diễn trong hình bên dưới.

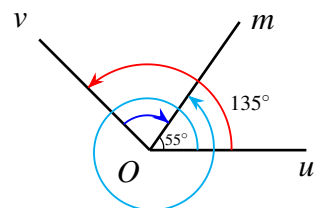


≡ Ví dụ 6. Cho $\widehat{MON} = 45^\circ$. Xác định số đo của các góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên dưới và viết công thức tổng quát của số đo góc lượng giác (OM, ON) .



≡ Ví dụ 7.

Xác định số đo các góc lượng giác (Ou, Ov) , (Ov, Om) và (Ou, Om) được minh họa ở hình bên.



Ví dụ 8. Hãy biểu diễn trên mặt phẳng góc lượng giác trong mỗi trường hợp sau:

- a) Góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou , tia cuối Ov và có số đo 510° ;
 b) Góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou , tia cuối Ov và có số đo $-\frac{7\pi}{6}$.

Ví dụ 9. Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo là $\frac{3\pi}{4}$, góc lượng giác (Ou, Ow) có số đo là $\frac{5\pi}{4}$.
 Tìm số đo các góc lượng giác (Ov, Ow) .

DT

3

Biểu diễn góc lượng giác trên đường tròn lượng giác

Chọn gốc $A(1;0)$ làm điểm đầu. Để biểu diễn góc lượng giác có số đo α trên đường tròn lượng giác ta cần chọn điểm cuối M trên đường tròn lượng giác sao cho $(OA, OM) = \alpha$.

! Nếu $|\alpha| > 2\pi$ ta phân tích $\alpha = \beta + k2\pi$, với $-\pi < \beta < \pi$. Khi đó, ta chỉ cần xác định điểm cuối M trên đường tròn lượng giác sao cho $(OA, OM) = \beta$.

Ví dụ 10. Biểu diễn các góc (cung) lượng giác trên đường tròn lượng giác có số đo sau

- a) $\frac{\pi}{4}$; b) $-\frac{11\pi}{2}$; c) 120° ; d) -765° .

Ví dụ 11. Trên đường tròn lượng giác, biểu diễn các góc lượng giác có số đo sau (với k là số nguyên tùy ý).

- a) $x_1 = k\pi$; b) $x_2 = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

DT

4

Vận dụng thực tiễn

Ví dụ 12. Kim phút và kim giờ của đồng hồ lớn Bưu điện Hà Nội theo thứ tự dài 1,75 mét và 1,26 mét. Hỏi trong 15 phút, mũi kim phút và kim giờ vạch được cung tròn có độ dài bằng bao nhiêu mét?

Ví dụ 13. Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A , vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất, bán kính 9000 km. Biết rằng vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong 2 h.

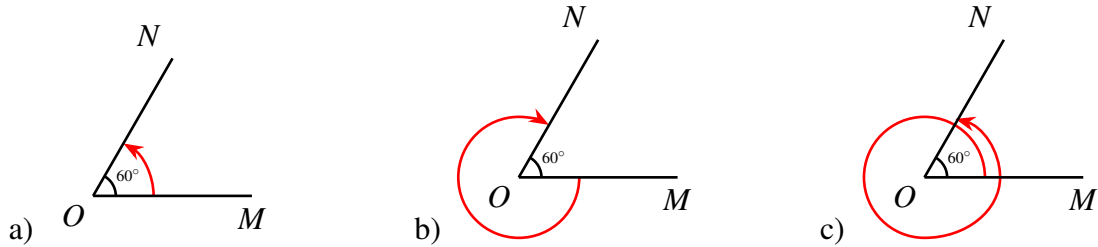
- a) Hãy tính quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau: 1 h; 3 h; 5 h.
 b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường 200000 km sau bao nhiêu giờ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Tính độ dài cung tròn trong các trường hợp sau

- a) Đường tròn có bán kính $R = 5$ và cung có số đo 72° .
 b) Đường tròn có bán kính $R = 18$ và cung có số đo 150° .

2 Cho $\widehat{MON} = 60^\circ$. Xác định số đo của các góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên dưới và viết công thức tổng quát của số đo góc lượng giác (OM, ON) .



- 3) Biểu diễn góc lượng giác trên đường tròn lượng giác có số đo như sau:
- a) $\frac{9\pi}{4}$. b) -765° . c) $x = k\pi$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- 4) Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo $-\frac{\pi}{7}$. Trong các số $-\frac{29\pi}{7}; -\frac{22}{7}; \frac{6\pi}{7}; \frac{41\pi}{7}$, những số nào là số đo của một góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc đã cho?
- 5) Hai góc lượng giác có số đo $\frac{39\pi}{7}$ và $\frac{m\pi}{9}$ (m là số nguyên) có thể cùng tia đầu, tia cuối được không?
- 6) Cho một góc lượng giác (Ox, Ou) có số đo -270° và một góc lượng giác (Ox, Ov) có số đo 135° . Tính số đo của các góc lượng giác (Ou, Ov) .
- 7) Biểu diễn các cung lượng giác có số đo $x = \frac{k\pi}{2}$ với k là số nguyên tùy ý.
- 8) Bánh xe có đường kính (tính cả lốp) là 55 cm. Nếu xe chạy với vận tốc 40 km/h thì trong một giây bánh xe quay được bao nhiêu vòng?

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Đổi số đo của góc 108° sang đơn vị radian.

- A. $\frac{3\pi}{2}$. B. $\frac{\pi}{10}$. C. $\frac{3\pi}{5}$. D. $\frac{\pi}{4}$.

Câu 2. Đổi số đo của góc $\frac{\pi}{12}$ rad sang đơn vị độ.

- A. 6° . B. 15° . C. 10° . D. 5° .

Câu 3. Trên đường tròn cung có số đo 1 rad là?

- A. Cung có độ dài bằng nửa đường kính. B. Cung có độ dài bằng đường kính.
C. Cung có độ dài bằng 1. D. Cung tương ứng với góc ở tâm 60° .

Câu 4. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $1 \text{ rad} = 60^\circ$. B. $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$. C. $1 \text{ rad} = 1^\circ$. D. $1 \text{ rad} = 180^\circ$.

Câu 5. Một cung tròn có độ dài bằng 2 lần bán kính. Số đo radian của cung tròn đó là

- A. 3. B. 4. C. 1. D. 2.

Câu 6. Đổi số đo của góc 70° sang đơn vị radian.

- A. $\frac{7}{18}$. B. $\frac{7\pi}{18}$. C. $\frac{70}{\pi}$. D. $\frac{7}{18\pi}$.

Câu 7. Đổi số đo của góc $-\frac{3\pi}{16}$ rad sang đơn vị độ, phút, giây.

- A. $-33^\circ 45'$. B. $-32^\circ 55'$. C. $33^\circ 45'$. D. $-29^\circ 30'$.

Câu 8. Đổi số đo của góc -5 rad sang đơn vị độ, phút, giây.

- A. -286° . B. $286^\circ 28' 44''$. C. $-286^\circ 44' 28''$. D. $-286^\circ 28' 44''$.

Câu 9. Đổi số đo của góc $45^\circ 32'$ sang đơn vị radian với độ chính xác đến hàng phần nghìn.

- A. 0,794. B. 0,7947. C. 0,795. D. 0,7948.

Câu 10. Tính độ dài ℓ của cung trên đường tròn có bán kính bằng 20 cm và số đo $\frac{\pi}{16}$.

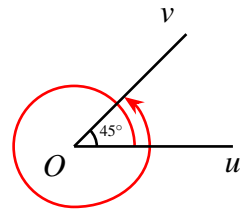
- A. $\ell = 2,94$ cm. B. $\ell = 3,39$ cm. C. $\ell = 1,49$ cm. D. $\ell = 3,93$ cm.

Câu 11. Tính độ dài của cung trên đường tròn có số đo 1,5 và bán kính bằng 20 cm.

- A. 40 cm. B. 60 cm. C. 30 cm. D. 20 cm.

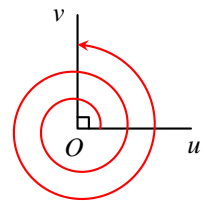
Câu 12. Xác định số đo của góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên.

- A. 405° . B. 385° . C. -405° . D. 45° .



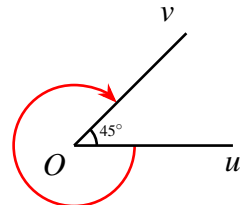
Câu 13. Xác định số đo của góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên.

- A. 450° . B. -450° . C. 810° . D. 90° .



Câu 14. Xác định số đo của góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên.

- A. 45° . B. -315° . C. 315° . D. 405° .

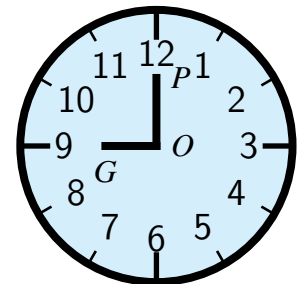


Câu 15. Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo là $-\frac{\pi}{4}$, góc lượng giác (Ou, Ow) có số đo là $\frac{3\pi}{4}$. Tìm số đo của các góc lượng giác (Ov, Ow) .

- A. $\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. C. $\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 16. Một chiếc đồng hồ, có kim chỉ giờ OG chỉ số 9 và kim phút OP chỉ số 12. Số đo các góc lượng giác (OG, OP) là

- A. $-270^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$. B. $-90^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
C. $90^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$. D. $270^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.



Câu 17. Trên đường tròn lượng giác có điểm gốc là A. Điểm M thuộc đường tròn sao cho góc lượng giác (OA, OM) có số đo 45° . Gọi N là điểm đối xứng với M qua trục Ox. Số đo các góc lượng giác (OA, ON) là

- A. $135^\circ + k360^\circ$. B. -45° .
C. 315° . D. $-45^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 18. Trên đường tròn lượng giác gốc A , cung lượng giác nào có các điểm biểu diễn tạo thành tam giác đều?

A. $\frac{k\pi}{3}$.

B. $k\pi$.

C. $\frac{k2\pi}{3}$.

D. $\frac{k\pi}{2}$.

Câu 19. Bánh xe đạp của người đi xe đạp quay được 2 vòng trong 5 giây. Hỏi trong 2 giây, bánh xe quay được 1 góc bao nhiêu độ.

A. $\frac{5}{8}\pi$.

B. $\frac{8}{5}\pi$.

C. $\frac{5}{3}\pi$.

D. $\frac{3}{5}\pi$.

Câu 20. Trên đường tròn lượng giác gốc A , cung lượng giác nào có các điểm biểu diễn tạo thành hình vuông?

A. $\frac{k2\pi}{3}$.

B. $\frac{k\pi}{2}$.

C. $\frac{k\pi}{3}$.

D. $k\pi$.

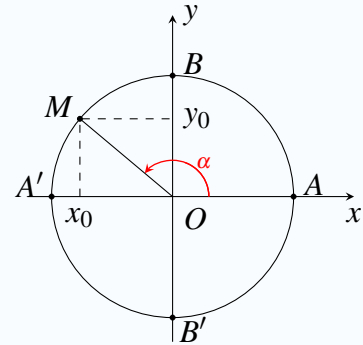
§2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

Ghi nhớ 1: Giả sử $M(x_0; y_0)$ trên đường tròn lượng giác biểu diễn cho góc lượng giác có số đo α .

- ① Tung độ y_0 của điểm M gọi là sin của α và kí hiệu là $\sin \alpha$, hay $\sin \alpha = y_0$.
- ② Hoành độ x_0 của điểm M gọi là cosin của α và kí hiệu là $\cos \alpha$, hay $\cos \alpha = x_0$.
- ③ Nếu $x_0 \neq 0$ thì tỉ số $\frac{y_0}{x_0} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ gọi là tang của góc α , kí hiệu $\tan \alpha$. Nghĩa là $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, với $\cos \alpha \neq 0$.
- ④ Nếu $y_0 \neq 0$ thì tỉ số $\frac{x_0}{y_0} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ gọi là cotang của góc α , kí hiệu $\cot \alpha$. Nghĩa là $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, với $\sin \alpha \neq 0$.



Ghi nhớ 2: Ta có các kết quả sau được suy ra từ định nghĩa

- ① Vì $-1 \leq x_0; y_0 \leq 1$ nên

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1; \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1.$$

- ② $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$ xác định với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$. Hơn nữa, $\forall k \in \mathbb{Z}$ ta có

$$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha; \quad \cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha.$$

- ③ $\tan \alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$; $\cot \alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$ và

$$\tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha; \quad \cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha.$$

2 HỆ THỨC CƠ BẢN GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

Đối với các giá trị lượng giác, ta có các hằng đẳng thức sau:

$$\textcircled{1} \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

$$\textcircled{2} \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \text{ với } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

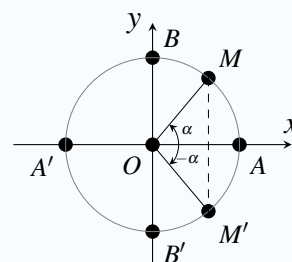
$$\textcircled{3} \quad 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \text{ với } \alpha \neq k\pi.$$

$$\textcircled{4} \quad \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \text{ với } \alpha \neq \frac{k\pi}{2}.$$

3 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC GÓC CÓ LIÊN QUAN ĐẶC BIỆT

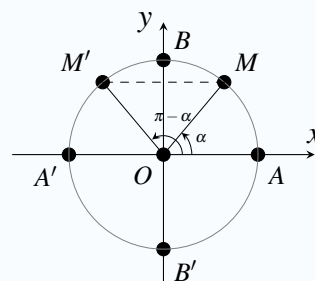
Góc đối nhau: α và $-\alpha$ tương ứng với hai điểm "đại diện" là điểm M và điểm M' . Muốn so sánh sin, ta so sánh tung độ; muốn so sánh cos, ta so sánh hoành độ. Hình vẽ bên, hai điểm M và M' đối xứng nhau qua trục hoành nên ta có kết quả sau:

- $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
- $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
- $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$
- $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$



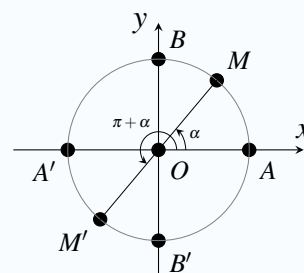
Góc bù nhau: α và $\pi - \alpha$ Hình vẽ bên, hai điểm M và M' đối xứng nhau qua trục tung nên ta có kết quả sau:

- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$
- $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$
- $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$



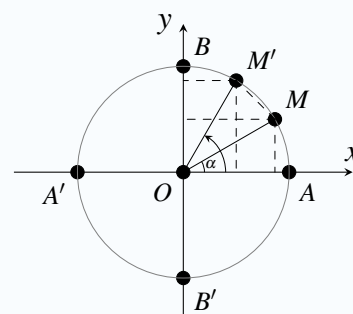
Góc hơn kém π : α và $\alpha + \pi$ Hình vẽ bên, hai điểm M và M' đối xứng nhau qua gốc O nên ta có kết quả sau:

- $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$
- $\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$
- $\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha$
- $\cot(\alpha + \pi) = \cot \alpha$



Góc phụ nhau: α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$ Hình vẽ bên, hai điểm M và M' có hoành độ và tung độ ngược nhau nên ta có kết quả sau:

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$
- $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$



DT

1

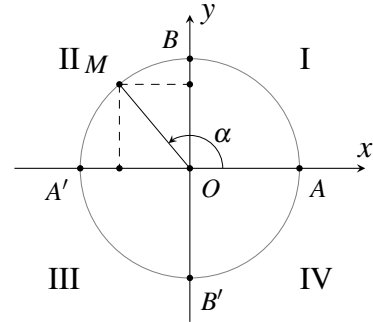
Tính các giá trị lượng giác của một góc lượng giác

Phương pháp: Sử dụng nhóm công thức liên hệ giữa các giá trị lượng giác để tính toán.

Chú ý:

Nếu đề bài có giới hạn miền của góc α , thì ta cần xem trên miền đó, các tỉ số lượng giác tương ứng sẽ mang dấu như thế nào. Cụ thể:

Giá trị lượng giác	Góc phần tư			
	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-



Ví dụ 1. Tính các giá trị lượng giác của góc $\alpha = \frac{2017\pi}{3}$.

Ví dụ 2. Tính các giá trị lượng giác (nếu có) của mỗi góc lượng giác sau

- a) $\frac{\pi}{3} + k2\pi$. b) $-\frac{3\pi}{4} + k2\pi$. c) $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

Ví dụ 3. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α , biết

- a) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$; b) $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.
c) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. d) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Ví dụ 4. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α , biết

- a) $\tan \alpha = 2$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; b) $\tan \alpha = \sqrt{3}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;
c) $\sin \alpha = 0,8$ và $\tan \alpha < 0$. d) $\cos \alpha = 0,8$ và $\tan \alpha + \cot \alpha > 0$.

DT

2

Tính giá trị của biểu thức M liên quan đến các giá trị lượng giác

Hướng 1:

- Từ tỉ số lượng giác đã cho, ta tính toán các giá trị lượng giác có trong biểu thức M .
- Thay tất cả giá trị vừa tìm được vào M , suy ra kết quả.

Hướng 2:

- Biến đổi biểu thức M về tỉ số lượng giác đã cho.
- Thay kết quả vào M , suy ra kết quả.

Ví dụ 5. Cho $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của biểu thức $M = 3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha$.

≡ Ví dụ 7. Cho $\cot \alpha = 3$. Tính giá trị biểu thức $M = \frac{2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{5 \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}$.

≡ **Ví dụ 9.** Tính giá trị của biểu thức $B = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \dots + \cos 180^\circ$.

$$B(t) = 80 + 7 \sin \frac{\pi t}{12}$$

a) 6 giờ sáng; b) 10 giờ 30 phút sáng;
c) 12 giờ trưa; d) 8 giờ tối.

Rút gọn biểu thức, chứng minh đẳng thức

$$\text{b) } B = \frac{2 \sin^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha};$$

$$\text{d) } D = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha};$$

b) $\cos(A+B) + \cos C = 0$.

d) $\tan(A - B + C) = -\tan 2B.$

1 Cho $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\sin \alpha$ và $\tan \alpha$.

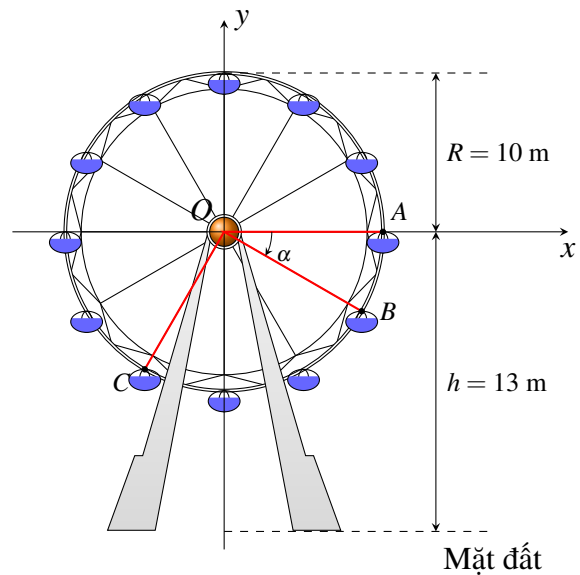
2 Cho $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α .

3 Cho $\tan \alpha = 3$ và $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α .

4 Cho tam giác ABC , chứng minh rằng $\sin(A + B + 2C) = -\sin C$.

- 5 Trong Hình bên, vị trí cabin mà Bình và Cường ngồi trên vòng quay được đánh dấu với điểm B và C .

- a) Chứng minh rằng chiều cao từ điểm B đến mặt đất bằng $(13 + 10\sin \alpha)$ mét với α là số đo của một góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB . Tính độ cao của điểm B so với mặt đất khi $\alpha = -30^\circ$.
- b) Khi điểm B cách mặt đất 4 m thì điểm C cách mặt đất bao nhiêu mét? Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



- 6 Rút gọn các biểu thức sau: (không còn căn thức)

a) $A = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} - \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$;

b) $B = \sqrt{1 - \cot^2 x \cdot \sin^2 x} + 1$.

- 7 Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \dots + \sin^2 170^\circ + \sin^2 180^\circ$.

b) $B = \tan 10^\circ \cdot \tan 20^\circ \dots \tan 80^\circ$.

c) $C = \cot 20^\circ + \cot 40^\circ + \dots + \cot 140^\circ + \cot 160^\circ$.

- 8 Rút gọn các biểu thức sau:

a) $E = \frac{1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \cos^2 \alpha$;

b) $F = 2(\sin^4 x + \cos^4 x) + 4\sin^2 x \cos^2 x$.

- 9 Rút gọn các biểu thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa).

a) $A = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x)$;

b) $B = \sqrt{2} - \frac{1}{\sin(x + 2013\pi)} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}}$ với $\pi < x < 2\pi$.

- 10 Cho $\tan \alpha = 3$. Tính giá trị biểu thức $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3\cos^3 \alpha + 2\sin \alpha}$.

- 11 Chứng minh các hệ thức sau

a) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$;

b) $1 - \cot^4 \alpha = \frac{2}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{\sin^4 \alpha}$;

c) $\frac{1 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = 1 + 2\tan^2 \alpha$;

d) $2(1 - \sin \alpha)(1 + \cos \alpha) = (1 - \sin \alpha + \cos \alpha)^2$.

- 12 Chứng minh các hệ thức sau

$$a) \frac{1 + \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{1 - \sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha} = \frac{2}{3 \cos^2 \alpha};$$

$$b) \frac{\sin^2 \alpha (1 + \cos \alpha)}{\cos^2 \alpha (1 + \sin \alpha)} = \frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + \cot \alpha};$$

$$c) \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\cot \beta - \cot \alpha} = \tan \alpha \tan \beta;$$

$$d) \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cot^2 \alpha - \tan^2 \alpha} = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha.$$

13 Chứng minh các hệ thức sau

$$a) \frac{1 - 4 \sin^2 x \cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} = (\sin x - \cos x)^2;$$

$$b) \frac{\sin^2 x - \cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^4 x} = \tan^4 x.$$

14 Chứng minh các hệ thức sau không phụ thuộc vào x .

$$a) A = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x + 2}{\sin^4 x + \cos^4 x + 1};$$

$$b) B = \frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} - \frac{2 + 2 \cot^2 x}{(\tan x - 1)(\cot^2 x + 1)}.$$

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho α thuộc góc phần tư thứ nhất của đường tròn lượng giác. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây.

- A. $\sin \alpha > 0$. B. $\cos \alpha < 0$. C. $\tan \alpha < 0$. D. $\cot \alpha < 0$.

Câu 2. Cho α thuộc góc phần tư thứ hai của đường tròn lượng giác. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây.

- A. $\sin \alpha > 0$; $\cos \alpha > 0$. B. $\sin \alpha < 0$; $\cos \alpha < 0$.
C. $\sin \alpha > 0$; $\cos \alpha < 0$. D. $\sin \alpha < 0$; $\cos \alpha > 0$.

Câu 3. Cho α thuộc góc phần tư thứ ba của đường tròn lượng giác. Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. $\sin \alpha > 0$. B. $\cos \alpha < 0$. C. $\tan \alpha > 0$. D. $\cot \alpha > 0$.

Câu 4. Cho α thuộc góc phần tư thứ tư của đường tròn lượng giác. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\sin \alpha > 0$. B. $\cos \alpha > 0$. C. $\tan \alpha > 0$. D. $\cot \alpha > 0$.

Câu 5. Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\sin(\alpha + \pi) > 0$. B. $\sin \alpha < 0$. C. $\cos(\alpha + \pi) < 0$. D. $\cos \alpha < 0$.

Câu 6. Tính giá trị của $\cot \frac{89\pi}{6}$.

- A. $\cot \frac{89\pi}{6} = \sqrt{3}$. B. $\cot \frac{89\pi}{6} = -\sqrt{3}$. C. $\cot \frac{89\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\cot \frac{89\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 7. Tính giá trị biểu thức $P = \tan 10^\circ \cdot \tan 20^\circ \cdot \tan 30^\circ \dots \tan 80^\circ$.

- A. $P = 0$. B. $P = 1$. C. $P = 4$. D. $P = 8$.

Câu 8. Tính giá trị biểu thức $P = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 89^\circ$.

- A. $P = 0$. B. $P = 1$. C. $P = 2$. D. $P = 3$.

Câu 9. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\sin 60^\circ < \sin 150^\circ$. B. $\cos 30^\circ < \cos 60^\circ$. C. $\tan 45^\circ < \tan 60^\circ$. D. $\cot 60^\circ > \cot 240^\circ$.

Câu 10. Với mọi số thực α , ta có $\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right)$ bằng

- A. $-\sin \alpha$. B. $\cos \alpha$. C. $\sin \alpha$. D. $-\cos \alpha$.

Câu 11. Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ thì $\tan(2017\pi + \alpha)$ bằng

- A. $-\tan \alpha$. B. $\cot \alpha$. C. $\tan \alpha$. D. $-\cot \alpha$.

Câu 12. Đơn giản biểu thức $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\alpha - \pi)$, ta được

- A. $A = \cos \alpha + \sin \alpha$. B. $A = 2 \sin \alpha$. C. $A = \sin \alpha \cos \alpha$. D. $A = 0$.

Câu 13. Biết A, B, C là các góc của tam giác ABC , mệnh đề nào sau đây đúng.

- A. $\sin(A + C) = -\sin B$. B. $\cos(A + C) = -\cos B$.
C. $\tan(A + C) = \tan B$. D. $\cot(A + C) = \cot B$.

Câu 14. Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\cos \alpha$.

- A. $\cos \alpha = \frac{1}{13}$. B. $\cos \alpha = \frac{5}{13}$. C. $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$. D. $\cos \alpha = -\frac{1}{13}$.

Câu 15. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\tan \alpha$.

- A. $\tan \alpha = -\frac{3}{\sqrt{5}}$. B. $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. C. $\tan \alpha = -\frac{4}{\sqrt{5}}$. D. $\tan \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Câu 16. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\tan \alpha$.

- A. $\tan \alpha = -\frac{12}{5}$. B. $\tan \alpha = \frac{5}{12}$. C. $\tan \alpha = -\frac{5}{12}$. D. $\tan \alpha = \frac{12}{5}$.

Câu 17. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ và $\frac{2017\pi}{2} < \alpha < \frac{2019\pi}{2}$. Tính $\sin \alpha$.

- A. $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$. B. $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. C. $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$. D. $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

Câu 18. Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $P = \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$.

- A. $P = -3$. B. $P = \frac{3}{7}$. C. $P = \frac{12}{25}$. D. $P = -\frac{12}{25}$.

Câu 19. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 2$. Tính $P = \frac{3 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}{5 \cos \alpha + 7 \sin \alpha}$.

- A. $P = -\frac{4}{9}$. B. $P = \frac{4}{9}$. C. $P = -\frac{4}{19}$. D. $P = \frac{4}{19}$.

Câu 20. Cho góc α thỏa mãn $\cot \alpha = \frac{1}{3}$. Tính $P = \frac{3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha}{2 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}$.

- A. $P = -\frac{15}{13}$. B. $P = \frac{15}{13}$. C. $P = -13$. D. $P = 13$.

§3. CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Công thức cộng:

$$\textcircled{1} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

$$\textcircled{2} \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$$

$$\textcircled{3} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

$$\textcircled{4} \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

$$\textcircled{5} \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

$$\textcircled{6} \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.$$

2 Công thức nhân đôi:

$$\textcircled{1} \sin 2a = 2 \sin a \cos a.$$

$$\textcircled{2} \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a.$$

$$\textcircled{3} \cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a.$$

$$\textcircled{4} \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

3 Công thức hạ bậc:

$$\textcircled{1} \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}.$$

$$\textcircled{2} \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}.$$

$$\textcircled{3} \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}.$$

4 Công thức biến đổi tích thành tổng:

$$\textcircled{1} \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)], \quad \textcircled{2} \sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)].$$

$$\textcircled{3} \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)], \quad \textcircled{4} \cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)].$$

5 Công thức biến đổi tổng thành tích:

$$\textcircled{1} \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}.$$

$$\textcircled{2} \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}.$$

$$\textcircled{3} \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}.$$

$$\textcircled{4} \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}.$$

Ví dụ 1. Hãy tính

a) $\sin 75^\circ$

b) $\sin 15^\circ$

c) $\tan \frac{7\pi}{12}$.

d) $\cot \frac{5\pi}{8}$.

e) $\cos 795^\circ$.

f) $\sin 18^\circ$.

Ví dụ 2. Cho $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $\cos \alpha$, $\tan \alpha$; $\cos 2\alpha$ và $\sin \left(\alpha + \frac{19\pi}{4} \right)$.

Ví dụ 3. Cho $\tan \alpha = -2$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\cos \alpha$, $\cos \left(\alpha - \frac{3\pi}{4} \right)$ và $\tan \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)$.

Ví dụ 4. Cho $\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$, với $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right)$, $\cos \left(2\alpha - \frac{\pi}{4} \right)$.

Ví dụ 5. Hãy tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = \cos 45^\circ \cos 15^\circ$.

b) $B = \cos 75^\circ \sin 15^\circ$.

c) $C = \sin 75^\circ \sin 15^\circ$.

d) $D = \sin \frac{11\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}$.

Ví dụ 6. Biến đổi các biểu thức sau đây thành một tổng:

a) $\cos 5a \sin 3a$.

b) $2 \cos(a+b) \cos(a-b)$.

c) $\sin(a-b) \cos(b-a)$.

d) $4 \cos x \cos 2x \cos 3x$.

Ví dụ 7. Chứng minh $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$.

Ví dụ 8. Tính giá trị biểu thức lượng giác sau

a) $C = \frac{\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15}}{\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{15}}$.

b) $D = \sin \frac{\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9}$.

Ví dụ 9. Biến đổi các biểu thức sau đây thành một tích.

a) $A = \sin a + \sin 3a + \sin 5a$.

b) $B = 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

Ví dụ 10. Chứng minh

a) $\sin 65^\circ + \sin 55^\circ = \sqrt{3} \cos 5^\circ$.

b) $\cos 12^\circ - \cos 48^\circ = \sin 18^\circ$.

c) $\sin 20^\circ - \sin 100^\circ + \sin 140^\circ = 0$.

d) $\tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ = 4$.

DT**4****Các bài toán chứng minh, rút gọn****Ví dụ 11.** Rút gọn các biểu thức:

a) $A = \frac{\sqrt{2} \cos a - 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} + a \right)}{-\sqrt{2} \sin a + 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + a \right)}$.

b) $B = (\tan a - \tan b) \cot(a - b) - \tan a \tan b$.

Ví dụ 12. Chứng minh các biểu thức sau

a) $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$.

b) $\frac{\sin \alpha + \sin \beta \cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha - \sin \beta \sin(\alpha + \beta)} = \tan(\alpha + \beta)$.

Ví dụ 13. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x .

a) $A = \cos^2 \alpha + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha \right)$;

b) $B = \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(\alpha + \frac{3\pi}{4} \right)$.

Ví dụ 14. Chứng minh các đẳng thức sau trong điều kiện có nghĩa của biểu thức

a) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha$

b) $\frac{1 - \cos \alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha} = \cot \alpha$

c) $\frac{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha}{2(1 - \cos \alpha)} = \cos^2 \frac{\alpha}{2}$.

d) $\frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} \cdot \cot x = 1$

Ví dụ 15. Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có

a) $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$;

b) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C)$.

DT**5****Vận dụng thực tiễn**

Ví dụ 16. Một thiết bị trễ kỹ thuật số lặp lại tín hiệu đầu vào bằng cách lặp lại tín hiệu đó trong một khoảng thời gian cố định sau khi nhận được tín hiệu. Nếu một thiết bị như vậy nhận được nốt thuần $f_1(t) = 5 \sin t$ và phát lại được nốt thuần $f_2(t) = 5 \cos t$ thì âm kết hợp là $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, trong đó t là biến thời gian. Chứng tỏ rằng âm kết hợp viết được dưới dạng $f(t) = k \sin(t + \varphi)$, tức là âm kết hợp là một sóng âm hình sin. Hãy xác định biên độ âm k và pha ban đầu φ ($-\pi \leq \varphi \leq \pi$) của sóng âm.

Ví dụ 17. Trong Vật lý, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là

biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động. Xét hai dao động điều hoà có phương trình:

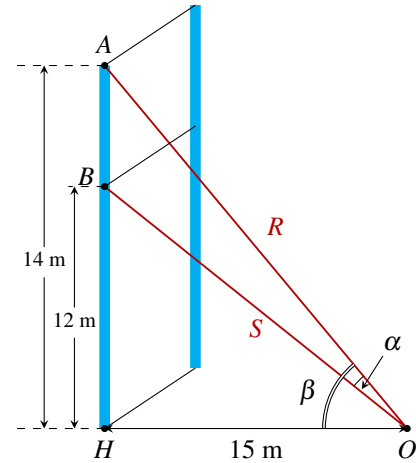
$$\begin{aligned}x_1(t) &= 2 \cos \left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6} \right) \text{ (cm)}, \\x_2(t) &= 2 \cos \left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3} \right) \text{ (cm)}.\end{aligned}$$

Tìm dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

≡ Ví dụ 18.

Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất 14 m. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất 12 m. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột 15 m (Hình bên).

- Tính $\tan \alpha$, ở đó α là góc giữa hai sợi cáp trên.
- Tìm góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).



C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Tính

- $\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right)$, biết $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
- $\tan \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)$, biết $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.
- $\cos(a+b)$, $\sin(a-b)$, biết $\sin a = \frac{4}{5}$, $0^\circ < a < 90^\circ$ và $\sin b = \frac{2}{3}$, $90^\circ < b < 180^\circ$.

2 Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, với $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right)$. Tính giá trị của $\sin 2\alpha$ và $\tan 2\alpha$.

3 Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2}{5}$. Tính $\sin 2\alpha$.

4 Chứng minh các đẳng thức sau

$$\text{a) } \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4\alpha}{4};$$

$$\text{b) } \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha.$$

5 Chứng minh các đẳng thức sau

$$\text{a) } 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \cos 2\alpha;$$

$$\text{b) } \sin \alpha (1 + \cos 2\alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha;$$

$$\text{c) } \frac{1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha} = \tan \alpha;$$

$$\text{d) } \tan \alpha - \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{2}{\tan 2\alpha}.$$

6 Chứng minh các đẳng thức sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos a + \sin a &= \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - a \right) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + a \right). \\ \text{b) } \cos a - \sin a &= \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + a \right) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - a \right). \end{aligned}$$

7 Rút gọn biểu thức sau

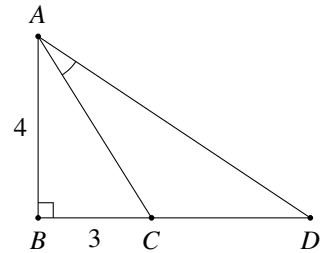
$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{\cos a + 2 \cos 2a + \cos 3a}{\sin a + \sin 2a + \sin 3a}; & \text{b) } B &= \frac{\cos \left(a + \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(a - \frac{\pi}{3} \right)}{\cot a - \cot \frac{a}{2}}. \end{aligned}$$

8 Chứng minh rằng $\frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \cot^2 \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)$, với điều kiện biểu thức có nghĩa.

9 Chứng minh các đẳng thức sau

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} + a \right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} - a \right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2a; \\ \text{b) } \cos^2 \alpha + \cos^2 \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha \right) &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

10 Tam giác ABC vuông tại B và có hai cạnh góc vuông là $AB = 4$, $BC = 3$. Vẽ điểm D nằm trên tia đối của tia CB thỏa mãn $\widehat{CAD} = 30^\circ$. Tính $\tan \widehat{BAD}$, từ đó tính độ dài cạnh CD (làm tròn đến hàng phần chục).



11 Dao động của một vật là tổng hợp của hai dao động điều hòa cùng phương, có phương trình lần lượt là $x_1 = 6 \cos 100\pi t$ (mm) và $x_2 = 6 \sin 100\pi t$ (mm), (t tính bằng giây). Tính li độ của vật tại thời điểm $t = 0,25$ giây.

12 Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos A + \cos B + \cos C &= 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \\ \text{b) } \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C &= 1 + 2 \cos A \cos B \cos C. \\ \text{c) } \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} &= 1; \\ \text{d) } \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} &= \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $\cos(a - b) = \sin a \sin b + \cos a \cos b$.
 B. $\cos(a + b) = \sin a \sin b - \cos a \cos b$.
 C. $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.
 D. $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Câu 2. Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

- A. $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin \left(a - \frac{\pi}{4} \right)$.
 B. $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin \left(a + \frac{\pi}{4} \right)$.

C. $\sin a + \cos a = -\sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$.

D. $\sin a + \cos a = -\sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 3. Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Tính $P = \sin 2(\alpha + \pi)$.

A. $P = -\frac{24}{25}$.

B. $P = \frac{24}{25}$.

C. $P = -\frac{12}{25}$.

D. $P = \frac{12}{25}$.

Câu 4. Biết $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$.

A. $P = -\frac{3}{5}$.

B. $P = \frac{3}{5}$.

C. $P = \frac{-4 - 3\sqrt{3}}{10}$.

D. $P = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{10}$.

Câu 5. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $P = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$.

A. $P = \frac{3 + \sqrt{21}}{8}$.

B. $P = \frac{3 - \sqrt{21}}{8}$.

C. $P = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{7}}{8}$.

D. $P = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{7}}{8}$.

Câu 6. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $P = \tan 2\alpha$.

A. $P = -\frac{120}{119}$.

B. $P = -\frac{119}{120}$.

C. $P = \frac{120}{119}$.

D. $P = \frac{119}{120}$.

Câu 7. Cho góc α thỏa mãn $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ và $\sin \alpha = \frac{2}{3}$. Tính $P = \frac{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$.

A. $P = -\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

B. $P = \frac{3}{2}$.

C. $P = -\frac{3}{2}$.

D. $P = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

Câu 8. Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Tính $P = \cos 4\alpha$.

A. $P = \frac{527}{625}$.

B. $P = -\frac{527}{625}$.

C. $P = \frac{524}{625}$.

D. $P = -\frac{524}{625}$.

Câu 9. Cho góc α thỏa mãn $\cot \alpha = 15$. Tính $P = \sin 2\alpha$.

A. $P = \frac{11}{113}$.

B. $P = \frac{13}{113}$.

C. $P = \frac{15}{113}$.

D. $P = \frac{17}{113}$.

Câu 10. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ và $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$. Tính $P = \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}$.

A. $P = \sqrt{5}$.

B. $P = -\sqrt{5}$.

C. $P = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

D. $P = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 11. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -2$. Tính $P = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 4\alpha + 1}$.

A. $P = \frac{10}{9}$.

B. $P = \frac{9}{10}$.

C. $P = -\frac{10}{9}$.

D. $P = -\frac{9}{10}$.

Câu 12. Cho góc α thỏa mãn $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$. Tính $P = \sin \alpha - \cos \alpha$.

A. $P = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

B. $P = -\frac{3}{\sqrt{5}}$.

C. $P = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

D. $P = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Câu 13. Cho góc α thỏa mãn $\cos 2\alpha = -\frac{2}{3}$. Tính $P = (1 + 3\sin^2 \alpha)(1 - 4\cos^2 \alpha)$.

A. $P = 12$.

B. $P = \frac{21}{2}$.

C. $P = 6$.

D. $P = 21$.

Câu 14. Biết $\sin a = \frac{5}{13}$; $\cos b = \frac{3}{5}$; $\frac{\pi}{2} < a < \pi$; $0 < b < \frac{\pi}{2}$. Hãy tính $\sin(a + b)$.

A. $\frac{56}{65}$.

B. $\frac{63}{65}$.

C. $-\frac{33}{65}$.

D. 0.

Câu 15. Cho hai góc nhọn $a; b$ thỏa $\cos a = \frac{1}{3}; \cos b = \frac{1}{4}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \cos(a+b) \cdot \cos(a-b)$.

- A. $-\frac{113}{144}$. B. $-\frac{115}{144}$. C. $-\frac{117}{144}$. D. $-\frac{119}{144}$.

Câu 16. Cho $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ và thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{1}{7}, \tan \beta = \frac{3}{4}$. Góc $\alpha + \beta$ có giá trị bằng

- A. $\frac{\pi}{3}$. B. $\frac{\pi}{4}$. C. $\frac{\pi}{6}$. D. $\frac{\pi}{2}$.

Câu 17. Cho $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$ thỏa mãn $\cot x = \frac{3}{4}, \cot y = \frac{1}{7}$. Tổng $x + y$ bằng

- A. $\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{3\pi}{4}$. C. $\frac{\pi}{3}$. D. π .

Câu 18. Nếu $\tan \alpha$ và $\tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$ ($q \neq 1$) thì $\tan(\alpha + \beta)$ bằng

- A. $\frac{p}{q-1}$. B. $-\frac{p}{q-1}$. C. $\frac{2p}{1-q}$. D. $-\frac{2p}{1-q}$.

Câu 19. Cho hai dao động điều hòa cùng phương có phương trình lần lượt là $x_1 = 5\cos(100\pi t + \pi)$ (cm) và $x_2 = 5\cos(100\pi t - \pi/2)$ (cm). Phương trình dao động tổng hợp của hai dao động trên là

- A. $x = 5\sqrt{2}\cos\left(100\pi t + \frac{3\pi}{4}\right)$ (cm). B. $x = 5\sqrt{2}\cos\left(100\pi t - \frac{3\pi}{4}\right)$ (cm).
C. $x = 10\cos\left(100\pi t - \frac{3\pi}{4}\right)$ (cm). D. $x = 10\cos\left(100\pi t + \frac{3\pi}{4}\right)$ (cm).

Câu 20. Một vật thực hiện đồng thời hai dao động điều hòa cùng phương, cùng tần số theo các phương trình: $x_1 = 2\cos\left(5\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ (cm); $x_2 = 2\cos(5\pi t)$ (cm). Biên độ của dao động tổng hợp của hai dao động trên là

- A. 2. B. 4. C. $2\sqrt{2}$. D. $\sqrt{2}$.

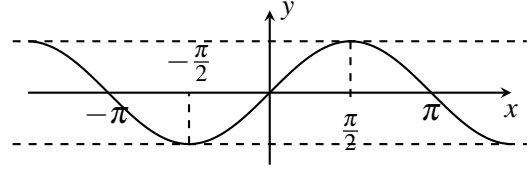
—HẾT—

§4. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

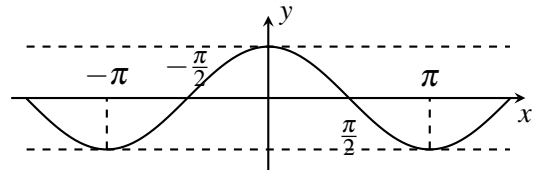
1 Hàm số $y = \sin x$

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị: $[-1; 1]$, tức là $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.
- Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$, nghĩa là $\sin(x + k2\pi) = \sin x$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.



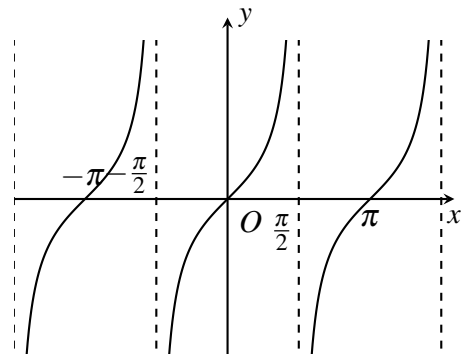
2 Hàm số $y = \cos x$

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị: $[-1; 1]$, tức là $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn nên đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng.
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$, nghĩa là $\cos(x + k2\pi) = \cos x$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.



3 Hàm số $y = \tan x$

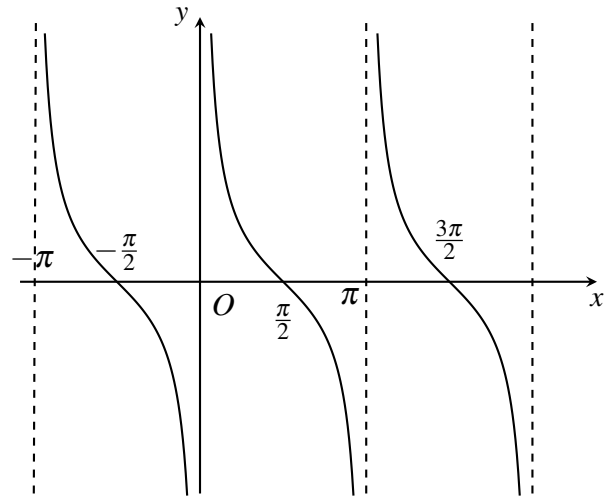
- Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- Tập giá trị: $\mathbb{R}$; Là hàm số lẻ.
- Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$, nghĩa là $\tan(x + k\pi) = \tan x$, với $k \in \mathbb{Z}$.



- Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

4 Hàm số $y = \cot x$

- Điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- Tập giá trị: $\mathbb{R}$.
- Là hàm số lẻ.
- Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$, nghĩa là $\cot(x + k\pi) = \cot x$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

**B****PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN****DT****1****Tìm tập xác định của hàm số lượng giác**

Ta chú ý một số điều kiện sau:

- $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ xác định $\Leftrightarrow g(x) \neq 0$.
- $y = \sqrt[n]{f(x)}$ xác định $\Leftrightarrow f(x) \geq 0$, trong đó $n \in \mathbb{N}^*$.
- $y = \tan[u(x)]$ xác định $\Leftrightarrow u(x)$ xác định và $u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $y = \cot[u(x)]$ xác định $\Leftrightarrow u(x)$ xác định và $u(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

≡ Ví dụ 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau đây:

- | | | |
|---|---|---|
| a) $y = \frac{2\sin x + 3}{\cos x}$ | b) $y = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$ | c) $y = \frac{2 + 3\cos 2x}{\sin x}$ |
| d) $y = \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x}$ | e) $y = \frac{\sin x - 3}{\cos x + 1}$ | f) $y = \frac{2\sin x + 3}{\cos x + 2}$ |
| g) $y = \frac{2\sin x + 3}{\sin x - 1}$ | h) $y = \frac{2\sin x - 3}{2\sin x + 3}$ | i) $y = \sin \frac{x-1}{x+2}$ |
| j) $y = \sqrt{3 - 2\cos x}$ | k) $y = \frac{\sqrt{\cos x + 2}}{1 + \cos x}$ | l) $y = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$ |

≡ Ví dụ 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau đây:

- | | | |
|----------------------|-----------------------------|---|
| a) $y = 2\tan x + 3$ | b) $y = 2\tan 2x - 4\sin x$ | c) $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ |
|----------------------|-----------------------------|---|

≡ Ví dụ 3. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số sau có tập xác định $\mathbb{R}$.

- | | | |
|----------------------------|-----------------------------|--|
| a) $y = \sqrt{m - \cos x}$ | b) $y = \sqrt{2\sin x - m}$ | c) $y = \frac{\sin x - 1}{\cos x + m}$ |
|----------------------------|-----------------------------|--|

≡ Ví dụ 4. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \sqrt{\cos^2 x - (2+m)\cos x + 2m}$ có tập xác định $\mathbb{R}$.

2

Tính chẵn lẻ của hàm số

Ta thực hiện các bước sau:

- ① Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số – Tập $\mathcal{D}$ phải đối xứng.
- ② Tính $f(-x)$ (chỗ nào có biến x , ta thay bởi $-x$) và thu gọn kết quả. Khi đó
 - Nếu $f(-x) = f(x)$: hàm số đã cho là hàm chẵn.
 - Nếu $f(-x) = -f(x)$: hàm số đã cho là hàm lẻ.
 - Nếu không rơi vào 2 trường hợp trên, ta kết luận hàm số không chẵn, không lẻ.

GHI NHỚ

- ① Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ. ② Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.
- ③ Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ. ④ Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ.

≡ Ví dụ 5. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $f(x) = |x| \sin x$.

b) $f(x) = \tan |x|$.

≡ Ví dụ 6. Xét tính chẵn lẻ của hàm số

a) $f(x) = \sin^2 2x + \cos 3x$.

b) $f(x) = \sqrt{2 + \sin x} + \sqrt{2 - \sin x}$.

≡ Ví dụ 7. Xét tính chẵn lẻ của hàm số

a) $f(x) = \sin\left(2x + \frac{9\pi}{2}\right)$.

b) $f(x) = \tan x + \cot x$.

3

Tìm giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất

Ta thường dùng một trong 3 phương pháp sau:

☒ Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản

① $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R};$

② $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R};$

③ $0 \leq \sin^2 x, \cos^2 x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R};$

④ $0 \leq |\sin x|, |\cos x| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}.$

☒ Sử dụng điều kiện có nghiệm

① $\sin x = f(m)$ có nghiệm khi $-1 \leq f(m) \leq 1$.

② $\cos x = f(m)$ có nghiệm khi $-1 \leq f(m) \leq 1$.

③ $a \sin x + b \cos x = c$ có nghiệm khi $a^2 + b^2 \geq c^2$.

☒ Sử dụng bảng biến thiên: Lập bảng biến thiên của hàm số, từ đó, kết luận.

≡ Ví dụ 8. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau

a) $y = 2\sin x + 3$

b) $y = \frac{1 - 2\sin^2 x}{3}$

c) $y = \sqrt{2 + \cos x} - 1$

d) $y = 4 \sin x \cos x + 1$;

e) $y = 4 - 3 \sin^2 2x$.

f) $y = (3 - \sin x)^2 + 1$

Ví dụ 9. Tìm x để hàm số $y = (\sin x + 3)^2 - 1$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ví dụ 10. Tìm x để hàm số $y = 1 - 3\sqrt{1 - \cos^2 x}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ví dụ 11. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số sau

a) $y = \sqrt{3} \sin x + \cos x$

b) $y = \sin 2x - \cos 2x$

c) $y = 3 \sin x + 4 \cos x$

Ví dụ 12. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số sau

a) $y = 2\sin^2 x - 3 \sin x + 1$

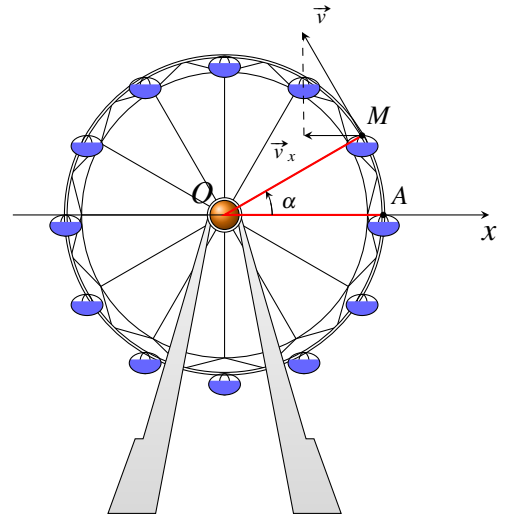
b) $y = 2\cos^2 x + 3 \cos x - 2$

c) $y = \cos 2x - \sin x + 3$

Ví dụ 13.

Khi đu quay hoạt động, vận tốc theo phương ngang của một cabin M phụ thuộc vào góc lượng giác $\alpha = (Ox, OM)$ theo hàm số $v_x = 0,3 \sin \alpha$ (m/s) (Hình bên).

- a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của v_x
 b) Dựa vào đồ thị của hàm số $\sin$, hãy cho biết trong vòng quay đầu tiên ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$), góc α ở trong các khoảng nào thì v_x tăng.



C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \cot \left(3x - \frac{\pi}{4} \right).$

b) $y = \frac{\sin x}{\cos 2x - 1}.$

c) $y = \sqrt{\frac{2 + \sin x}{1 - \cos x}}.$

d) $y = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}.$

2 Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau

a) $y = 3 - 2 \sin 2x$

b) $y = 5 - 3 \cos 4x.$

c) $y = 3 - 2|\sin 2x|.$

d) $y = 3 \sin^2 2x - 4$

3 Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 2 - 4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x.$

4 Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 4 \sin^2 x - 4 \sin x + 3.$

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tập giá trị của hàm số $y = \cos x$ là tập hợp nào sau đây?

A. $\mathbb{R}.$

B. $(-\infty; 0].$

C. $[0; +\infty].$

D. $[-1; 1].$

Câu 2. Tập giá trị của hàm số $y = \sin 2x$ là

A. $[-2; 2].$

B. $[0; 2].$

C. $[-1; 1].$

D. $[0; 1].$

Câu 3. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số $y = \sin x$ là hàm số chẵn. B. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.
C. Hàm số $y = \tan x$ là hàm số chẵn. D. Hàm số $y = \cot x$ là hàm số chẵn.

Câu 4. Tìm hàm số lẻ trong các hàm số sau:

- A. $y = \sin^2 x$. B. $y = x \cos 2x$. C. $y = x \sin x$. D. $y = \cos x$.

Câu 5. Mệnh đề nào dưới đây sai?

- A. Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ π . B. Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ π .
C. Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ π . D. Hàm số $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kỳ π .

Câu 6. Hàm số $y = \sin 2x$ có chu kỳ tuần hoàn là

- A. $T = 2\pi$. B. $T = \frac{\pi}{2}$. C. $T = \pi$. D. $T = 4\pi$.

Câu 7. Hàm số nào trong các hàm số dưới đây là hàm số chẵn?

- A. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. B. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. C. $y = \sin 2x$. D. $y = \tan x - \sin 2x$.

Câu 8. Tìm tập xác định của hàm số $y = \cot x$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 9. Điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{1 - 3\cos x}{\sin x}$ là

- A. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. C. $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. D. $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 10. Với ký hiệu $k \in \mathbb{Z}$, điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{2\sin x + 1}{1 - \cos x}$ là

- A. $x \neq k2\pi$. B. $x \neq k\pi$. C. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. D. $x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Câu 11. Với ký hiệu $k \in \mathbb{Z}$, điều kiện xác định của hàm số $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ là

- A. $x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$. B. $x \neq \frac{5\pi}{12} + k\pi$. C. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. D. $x \neq \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$.

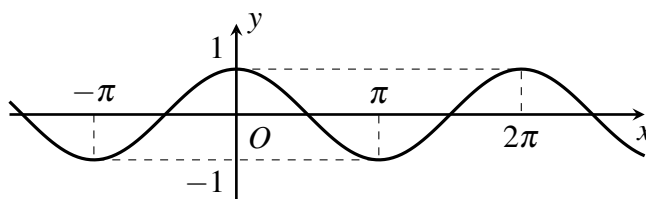
Câu 12. Tìm điều kiện xác định của hàm số $y = \tan x + \cot x$.

- A. $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. C. $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. D. $x \in \mathbb{R}$.

Câu 13. Tập xác định của hàm số $y = \frac{2\cos 3x - 1}{\cos x + 1}$ là

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.
C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 14. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A,B,C,D. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



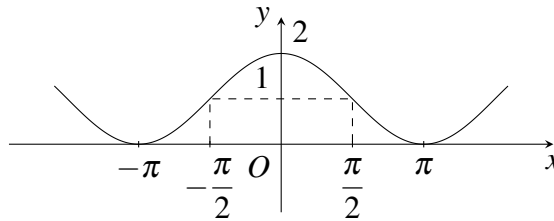
A. $y = 1 + \sin x$.

B. $y = 1 - \sin x$.

C. $y = \sin x$.

D. $y = \cos x$.

Câu 15. Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D. Hỏi đó là hàm số nào?



A. $y = \cos x + 1$.

B. $y = 2 - \sin x$.

C. $y = 2 \cos x$.

D. $y = \cos^2 x + 1$.

Câu 16. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 1 + 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $\min y = -2, \max y = 4$.

B. $\min y = 2, \max y = 4$.

C. $\min y = -2, \max y = 3$.

D. $\min y = -1, \max y = 4$.

Câu 17. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 3 - 2 \cos^2 3x$.

A. $\min y = 1, \max y = 2$.

B. $\min y = 1, \max y = 3$.

C. $\min y = 2, \max y = 3$.

D. $\min y = -1, \max y = 3$.

Câu 18. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \sqrt{2 \sin x + 3}$.

A. $\max y = \sqrt{5}, \min y = 1$.

B. $\max y = \sqrt{5}, \min y = 2\sqrt{5}$.

C. $\max y = \sqrt{5}, \min y = 2$.

D. $\max y = \sqrt{5}, \min y = 3$.

Câu 19. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \frac{4}{1 + 2 \sin^2 x}$.

A. $\min y = \frac{4}{3}, \max y = 4$.

B. $\min y = \frac{4}{3}, \max y = 3$.

C. $\min y = \frac{4}{3}, \max y = 2$.

D. $\min y = \frac{1}{2}, \max y = 4$.

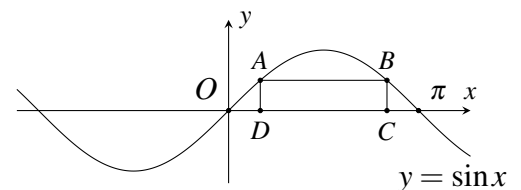
Câu 20. Cho hai điểm A, B thuộc đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0; \pi]$, các điểm C, D thuộc trục Ox thỏa mãn ABCD là hình chữ nhật và $CD = \frac{2\pi}{3}$. Tính độ dài đoạn BC.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 1.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



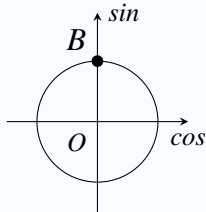
—HẾT—

§5. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

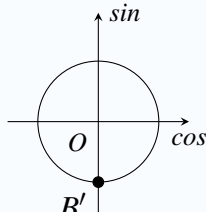
A // KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 Phương trình $\sin x = a$.

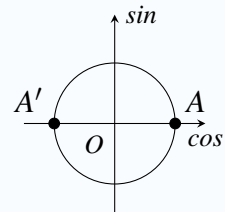
☑ Trường hợp $a \in \{-1; 0; 1\}$.



$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$



$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$$



$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$$

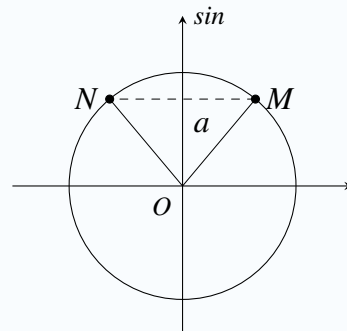
☑ Trường hợp $a \in \left\{ \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$. Ta bấm máy **SHIFT** **sin** **a** để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng.

① Công thức theo đơn vị rad:

$$\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

② Công thức theo đơn vị độ:

$$\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - \beta^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$



☑ Trường hợp $a \in [-1; 1]$ nhưng khác các số ở trên.

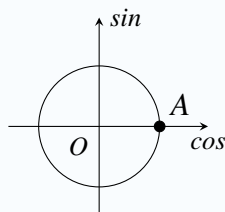
$$\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin a + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

☑ Công thức mở rộng cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$

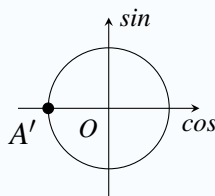
$$\sin[f(x)] = \sin[g(x)] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

2 Phương trình $\cos x = a$.

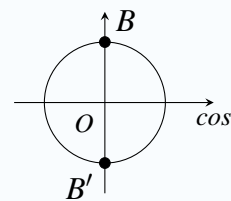
☑ Trường hợp $a \in \{-1; 0; 1\}$.



$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$$



$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$$



$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

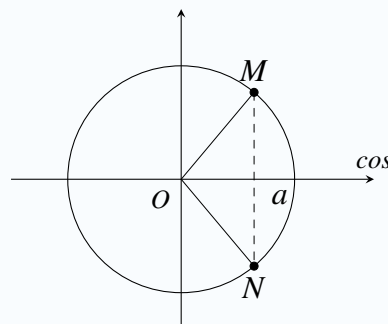
- ☑ Trường hợp $a \in \left\{ \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$. Ta bấm máy **SHIFT** **cos** **a** để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng.

① Công thức theo đơn vị rad:

$$\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

② Công thức theo đơn vị độ:

$$\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k360^\circ \\ x = -\beta^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$



- ☑ Trường hợp $a \in [-1; 1]$ nhưng khác các số ở trên.

$$\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arccos a + k2\pi \\ x = -\arccos a + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

- ☑ Công thức mở rộng cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$

$$\cos[f(x)] = \cos[g(x)] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = -g(x) + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

3 Phương trình $\tan x = a$.

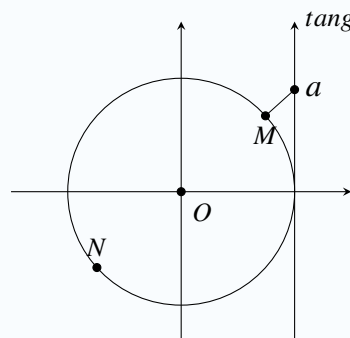
- ☑ Trường hợp $a \in \left\{ 0; \pm \frac{\sqrt{3}}{3}; \pm 1; \pm \sqrt{3} \right\}$. Ta bấm máy **SHIFT** **tan** **a** để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng.

① Công thức theo đơn vị rad:

$$\tan x = a \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

② Công thức theo đơn vị độ:

$$\tan x = a \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$



- ☑ Trường hợp a khác các số ở trên thì

$$\tan x = a \Leftrightarrow x = \arctan a + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

4 Phương trình $\cot x = a$.

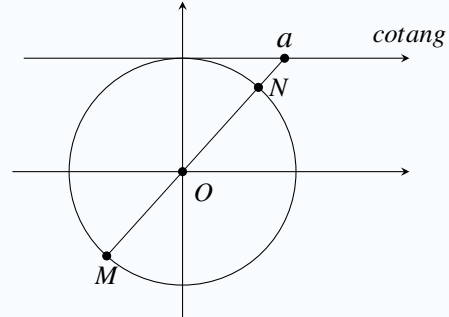
- ☑ Trường hợp $a \in \left\{ \pm \frac{\sqrt{3}}{3}; \pm 1; \pm \sqrt{3} \right\}$. Ta bấm máy **SHIFT** **tan** $\left[\frac{1}{a} \right]$ để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng. Riêng $a = 0$ thì $\alpha = \frac{\pi}{2}$

① Công thức theo đơn vị rad:

$$\cot x = a \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

② Công thức theo đơn vị độ:

$$\cot x = a \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$



- ☑ Trường hợp a khác các số ở trên thì

$$\cot x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} a + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Giải các phương trình lượng giác cơ bản

- Nhận dạng (biến đổi) về đúng loại phương trình cơ bản, xem số a quy đổi về góc "đẹp" hay xấu;
- Chọn và ráp công thức nghiệm.

≡ **Ví dụ 1.** Giải các phương trình sau:

a) $\sin 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $2 \sin \left(\frac{\pi}{5} - x \right) = 1$

c) $2 \sin (x - 45^\circ) - 1 = 0$

d) $\cos \left(x - \frac{2\pi}{3} \right) = 1$

e) $\sqrt{2} \cos 2x - 1 = 0$

f) $3 \cos x - 1 = 0$.

≡ **Ví dụ 2.** Giải các phương trình sau:

a) $\tan 3x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\sqrt{3} \tan \left(\frac{\pi}{6} - x \right) = 1$

c) $\tan (x - 45^\circ) - 1 = 0$

d) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$

e) $\sqrt{3} \cot x - 1 = 0$

f) $\sin x + 4 \cos x = 2 + \sin 2x$.

≡ **Ví dụ 3.** Tìm nghiệm của các phương trình lượng giác sau trên khoảng cho trước

a) $\sqrt{3} \tan x - 3 = 0$ trên $(0, 3\pi)$.

b) $\sqrt{2} \sin(x - 1) = -1$ trên $\left(-\frac{7\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

c) $2 \cos \left(3x - \frac{\pi}{3} \right) - 1 = 0$ trên $(-\pi, \pi)$.

d) $\tan(3x + 2) - \sqrt{3} = 0$ trên $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

DT**2****Giải các phương trình lượng giác dạng mở rộng**

- Biến đổi về một trong các cấu trúc sau

① $\sin u = \sin v$

② $\cos u = \cos v$

③ $\tan u = \tan v$

④ $\cot u = \cot v$

- Chú ý các công thức biến đổi lượng giác sau:

① $-\sin x = \sin(-x).$

② $-\cos x = \cos(\pi - x).$

③ $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$

④ $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$

≡ Ví dụ 4. Giải các phương trình sau:

a) $\sin 3x = \sin 2x$

b) $\sin 2x - \sin x = 0$

c) $\sin 5x + \sin x = 0$

d) $\cos 2x - \cos x = 0$

e) $\cos 8x + \cos x = 0$

f) $\cos 4x - \sin x = 0$

≡ Ví dụ 5. (B.2013). Giải phương trình $\sin 5x + 2\cos^2 x = 1$ **DT****3****Vận dụng thực tiễn****≡ Ví dụ 6.** Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số

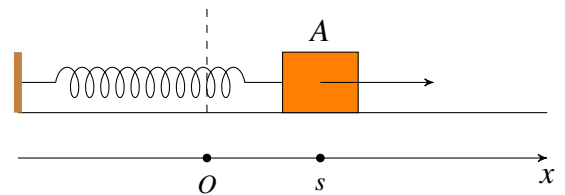
$$d(t) = 3 \sin \left[\frac{\pi}{182}(t - 80) \right] + 12 \text{ với } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365.$$

- Thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm?
- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất?
- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

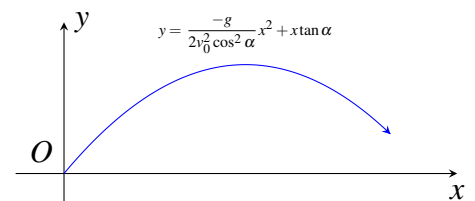
≡ Ví dụ 7.

Trong Hình bên, khi được kéo ra khỏi vị trí cân bằng ở điểm O và buông tay, lực đàn hồi của lò xo khiến vật A gắn ở đầu của lò xo dao động quanh O . Toạ độ s (cm) của A trên trục Ox vào thời điểm t (giây) sau khi buông tay được xác định bởi công thức $s = 10 \sin \left(10t + \frac{\pi}{2} \right)$.

Vào các thời điểm nào thì $s = -5\sqrt{3}$ cm?

**≡ Ví dụ 8.**

Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu $v_0 = 500$ m/s hợp với phương ngang một góc α . Trong Vật lí, ta biết rằng, nếu bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất thì quỹ đạo của quả đạn tuân theo phương trình $y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$, ở đó $g = 9,8$ m/s² là gia tốc trọng trường.



- Tính theo góc bắn α tầm xa mà quả đạn đạt tới (tức là khoảng cách từ vị trí bắn đến điểm quả đạn chạm đất).

b) Tìm góc bắn α để quả đạn trúng mục tiêu cách vị trí đặt khẩu pháo 22000 m.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Giải phương trình $3 - \sqrt{3} \tan \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = 0$ với $\frac{-\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3}$.

2 Giải phương trình $\tan(x + 30^\circ) + 1 = 0$ với $-90^\circ < x < 360^\circ$.

3 Giải các phương trình sau:

a) $\cos 3x = \sin 2x$	b) $\cos 3x - 2 \cos \frac{\pi}{4} = 0$	c) $\cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2}$
d) $\cos(2x + 30^\circ) = \frac{1}{2}$	e) $2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = 0$	f) $2 \cos(2x - 60^\circ) - 1 = 0$
g) $\cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) + 2 = 0$	h) $\cos \left(\frac{x}{3} - 30^\circ \right) = 1$	i) $\sin^2 2x = \frac{1}{4}$

4 Giải các phương trình sau:

a) $\tan x = \sqrt{3}$.	b) $\cot \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = 1$.
c) $\tan(x + 48^\circ) = \tan 25^\circ$.	d) $\tan \left(x + \frac{3\pi}{4} \right) = \tan \frac{\pi}{7}$.

5 Giải phương trình $\tan \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + \tan \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = 0$.

6 Giải phương trình $\left(\cot \frac{x}{3} - 1 \right) \left(\cot \frac{x}{2} + 1 \right) = 0$.

7 Giải phương trình $\frac{\sin 2x + 2 \cos x - \sin x - 1}{\sqrt{3} + \tan x} = 0$.

8 Nhiệt độ ngoài trời ở một thành phố vào các thời điểm khác nhau trong ngày có thể được mô phỏng bởi công thức

$$h(t) = 29 + 3 \sin \left[\frac{\pi}{12}(t - 9) \right]$$

với h tính bằng độ C và t là thời gian trong ngày tính bằng giờ. Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là bao nhiêu độ C và vào lúc mấy giờ?

9 Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu có độ lớn v_0 không đổi. Tìm góc bắn α để quả đạn pháo bay xa nhất, bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất.

10 Độ sâu h (m) của mực nước ở một cảng biển vào thời điểm t (giờ) sau khi thủy triều lên lần đầu tiên trong ngày được tính xấp xỉ bởi công thức $h(t) = 0,8 \cos 0,5t + 4$.

a) Độ sâu của nước vào thời điểm $t = 2$ là bao nhiêu mét?

b) Một con tàu cần mực nước sâu tối thiểu 3,6 m để có thể di chuyển ra vào cảng an toàn. Dựa vào đồ thị của hàm số cosin, hãy cho biết trong vòng 12 tiếng sau khi thủy triều lên lần đầu tiên, ở những thời điểm t nào tàu có thể hạ thủy. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**Câu 1.** Phương trình nào sau đây vô nghiệm?

- A. $\sin x = \frac{1}{2}$. B. $\tan x = \sqrt{3}$. C. $\sin x = 3$. D. $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Câu 2. Nghiệm của phương trình $\sin x = -1$ là

- A. $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 3. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{9} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.
C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

Câu 4. Nghiệm của phương trình $2\sin x + 1 = 0$ là

- A. $x = \frac{11\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi$. B. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{-7\pi}{6} + k2\pi$.
C. $x = \frac{-\pi}{6} + k\pi$ và $x = \frac{7\pi}{6} + k\pi$. D. $x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$.

Câu 5. Tập nghiệm của phương trình $\sin 2x = 1$ là

- A. $\left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $\left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. C. $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. D. $\left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 6. Phương trình $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ có tập nghiệm là

- A. $\left\{ x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $\left\{ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$.
C. $\left\{ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $\left\{ x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 7. Tập nghiệm của phương trình $\cos 2x = -1$ là

- A. $-k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $\left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
C. $\left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $\{90^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 8. Phương trình $2\cos x - 1 = 0$ có nghiệm là

- A. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 9. Số nghiệm của phương trình $2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$ trong khoảng $(0; \pi)$ là

- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 10. Phương trình $\sin x - \cos x = 1$ có một nghiệm là

- A. $-\frac{\pi}{2}$. B. $\frac{\pi}{4}$. C. $\frac{2\pi}{3}$. D. π .

Câu 11. Nghiệm của phương trình $\sin^4 x - \cos^4 x = 0$ là

- A. $x = \pi + k2\pi$. B. $x = k\pi$. C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. D. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

Câu 12. Xét trên $(-\pi; \pi)$, phương trình $\sin x = \frac{2}{3}$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 13. Cho phương trình $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Gọi n là số các nghiệm của phương trình trong đoạn $[0; 3\pi]$ thì giá trị của n là

- A. $n = 8$. B. $n = 5$. C. $n = 6$. D. $n = 2$.

Câu 14. Tính tổng các nghiệm $x \in [0; 2018\pi]$ của phương trình $\sin 2x = 1$.

- A. $S = \frac{4071315\pi}{2}$. B. $S = \frac{4071315\pi}{4}$. C. $S = \frac{8141621\pi}{2}$. D. $S = \frac{8141621\pi}{4}$.

Câu 15. Tìm số nghiệm thuộc khoảng $(-\pi; \pi)$ của phương trình $\cos x + \sin 2x = 0$

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 16. Phương trình $\sin 5x - \sin x = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[-2018\pi; 2018\pi]$?

- A. 16145. B. 20181. C. 20179. D. 16144.

Câu 17. Đồ thị của các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ cắt nhau tại bao nhiêu điểm có hoành độ thuộc đoạn $\left[-2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$?

- A. 5. B. 6. C. 4. D. 7.

Câu 18. Với giá trị của tham số m thì phương trình $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2m = 0$ vô nghiệm?

- A. $\begin{cases} m < -\frac{1}{2} \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}$. B. $\begin{cases} m \leq -\frac{1}{2} \\ m \geq \frac{1}{2} \end{cases}$. C. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}$.

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos^2 \pi x = m^2 - 9$ có nghiệm.

- A. 5. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 20. Cho vận tốc v (cm/s) của một con lắc đơn theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức $v = -3 \sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right)$. Xác định các thời điểm t mà tại đó vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất.

- A. $t = \frac{5\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}$. B. $t = \frac{7\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}$.
C. $t = \frac{8\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}$. D. $t = \frac{4\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}$.

—HẾT—

DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

§1. DÃY SỐ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 ĐỊNH NGHĨA DÃY SỐ

⚙️ **Định nghĩa dãy số:** Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số). Kí hiệu $u = u(n)$.

⚠️ Ta thường viết u_n thay cho $u(n)$ và kí hiệu dãy số $u = u(n)$ bởi (u_n) . Do đó dãy số (u_n) được viết dưới dạng khai triển $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$, trong đó

- u_1 là số hạng đầu;
- u_n là số hạng thứ n và là số hạng tổng quát của dãy số.

⚙️ **Định nghĩa dãy số hữu hạn:**

- Mỗi hàm số u xác định trên tập $M = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ với $m \in \mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số hữu hạn.
- Dạng khai triển của nó là $u_1, u_2, u_3, \dots, u_m$, trong đó u_1 là số hạng đầu, u_m là số hạng cuối.

2 CÁCH CHO MỘT DÃY SỐ

Ta thường gặp một trong các cách sau đây:

- ① Liệt kê các số hạng (chỉ dùng cho các dãy hữu hạn và có ít số hạng);
- ② Dãy số cho bằng công thức của số hạng tổng quát;
- ③ Dãy số cho bằng phương pháp mô tả;
- ④ Dãy số cho bằng phương pháp truy hồi, nghĩa là
 - Cho số hạng đầu (hay vài số hạng đầu).
 - Cho hệ thức truy hồi, tức là hệ thức biểu thị số hạng thứ n qua số hạng (hay vài số hạng) đứng trước nó.

3 DÃY SỐ TĂNG, DÃY SỐ GIẢM

- ① Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu ta có $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- ② Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu ta có $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

4 DÃY SỐ BỊ CHẶN

- ① Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- ② Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho $u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- ③ Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số m, M sao cho $m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Tìm các số hạng của dãy số cho bởi công thức tổng quát

Ví dụ 1. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{n}{3^n - 1}$. Tìm ba số hạng đầu tiên của dãy số.

Ví dụ 2. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = \frac{n^2 + 3n + 7}{n + 1}$.

- a) Viết năm số hạng đầu của dãy.
- b) Dãy số có bao nhiêu số hạng nhận giá trị nguyên?

Ví dụ 3. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{2n + 1}{n + 2}$.

- a) Viết năm số hạng đầu của dãy số.
- b) Tìm số hạng thứ 100 và 200.
- c) Số $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ mấy?
- d) Dãy số có bao nhiêu số hạng là số nguyên?

DT 2 Tìm các số hạng của dãy số cho bởi công thức truy hồi

Ví dụ 4. Cho dãy số (u_n) , biết $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$ với $n \geq 0$. Tìm ba số hạng đầu tiên của dãy số.

Ví dụ 5. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 1, (n \geq 2) \end{cases}$.

- a) Hãy viết dạng khai triển của dãy số trên.
- b) Tính u_8 .

Ví dụ 6. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, (n \geq 3) \end{cases}$ (dãy số Phi-bô-na-xi).

- a) Hãy viết dạng khai triển của dãy số trên.
b) Tính u_7 .

DT**3**

Dự đoán và chứng minh công thức tổng quát của dãy số bằng phương pháp quy nạp (đọc thêm)

Ví dụ 7. Cho dãy số (u_n) có $u_1 = 3$ và $u_{n+1} = u_n + 5$ với mọi $n \geq 1$.

- a) Tìm 5 số hạng đầu của dãy số trên.
b) Dự đoán công thức và chứng minh quy nạp công thức tổng quát của dãy số trên.

Ví dụ 8. Cho dãy số (u_n) biết: $u_1 = 10$, $u_{n+1} = 2u_n$, với mọi $n \geq 1$.

- a) Tính u_2, u_3, u_4, u_5 .
b) Dùng quy nạp để chứng minh $u_n = 10 \cdot 2^{n-1}$, $\forall n \geq 1$.

Ví dụ 9. Cho dãy số (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 3 \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$$

- a) Viết năm số hạng đầu của dãy.
b) Chứng minh rằng $u_n = 2^{n+1} - 3$.

Ví dụ 10. Người ta nuôi cấy 5 con vi khuẩn ecoli trong môi trường nhân tạo. Cứ 30 phút thì vi khuẩn ecoli sẽ nhân đôi 1 lần.

- a) Tính số lượng vi khuẩn thu được sau 1, 2, 3 lần nhân đôi.
b) Dự đoán công thức tính số lượng vi khuẩn sau n giờ và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp.

DT**4**

Xét sự tăng giảm của dãy số

Phương pháp 1: Xét dấu của hiệu số $u_{n+1} - u_n$.

- Nếu $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Phương pháp 2: Nếu $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta có thể so sánh thương $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ với 1.

- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Nếu $u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta có thể so sánh thương $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ với 1.

- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Ví dụ 11. Xét tính tăng giảm của dãy số sau (u_n) với

- a) $u_n = n^2$. b) $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$. c) $u_n = \frac{4^n - 1}{4^n + 5}$.
d) $u_n = \frac{n}{3^n}$. e) $u_n = (-1)^n$. f) $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+3}$.

Ví dụ 12. Anh Thanh vừa được tuyển dụng vào một công ty công nghệ, được cam kết lương năm đầu sẽ là 200 triệu đồng và lương mỗi năm tiếp theo sẽ được tăng thêm 25 triệu đồng. Gọi s_n (triệu đồng) là lương vào năm thứ n mà anh Thanh làm việc cho công ty đó. Khi đó ta có:

$$s_1 = 200, s_n = s_{n-1} + 25 \text{ với } n \geq 2.$$

- a) Tính lương của anh Thanh vào năm thứ 5 làm việc cho công ty.
b) Chứng minh (s_n) là dãy số tăng. Giải thích ý nghĩa thực tế của kết quả này.

DT 5 Xét tính bị chặn của dãy số

- Để chứng minh dãy số (u_n) bị chặn trên bởi M , ta chứng minh $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Để chứng minh dãy số (u_n) bị chặn dưới bởi m , ta chứng minh $u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Để chứng minh dãy số bị chặn ta chứng minh nó bị chặn trên và bị chặn dưới.
- Nếu dãy số (u_n) tăng thì bị chặn dưới bởi u_1 ; dãy số (u_n) giảm thì bị chặn trên bởi u_1 .

Ví dụ 13. Xét tính bị chặn của các dãy số (u_n) sau, với

- a) $u_n = \frac{1}{2^n}$. b) $u_n = 2 \sin n^2$ c) $u_n = \frac{3n-1}{3n+1}$.
d) $u_n = \frac{n^2+1}{2n^2-3}$. e) $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$. f) $u_n = \frac{2n-1}{\sqrt{n^2+2}}$.

Ví dụ 14. Chứng minh rằng dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = \frac{8n+3}{3n+5}$ là một dãy số bị chặn.

Ví dụ 15. Chứng minh rằng dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3n}{n^2+9}$ bị chặn trên bởi $\frac{1}{2}$.

Ví dụ 16. Xét tính bị chặn của dãy (u_n) được cho bởi

- a) $u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$. b) $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$.

DT 6 Vận dụng thực tiễn

Ví dụ 17. Biết rằng năm 2016, dân số của Việt Nam là 93,422 triệu người. Tỷ lệ tăng dân số hàng năm của Việt Nam là 1,07% thì số dân P_n (triệu người) của Việt Nam sau n năm, kể từ năm 2016, được tính bằng công thức $P_n = 93,422(1 + 0,0107)^n$. Hỏi nếu tăng trưởng theo quy luật như vậy thì vào năm 2026, dân số Việt Nam khoảng bao nhiêu triệu người?

Ví dụ 18. Chị Hương vay trả góp một khoản tiền 100 triệu đồng và đồng ý trả dần 2 triệu đồng mỗi tháng với lãi suất 0,8% số tiền còn lại của mỗi tháng.

Gọi $A_n (n \in \mathbb{N})$ là số tiền còn nợ (triệu đồng) của chị Hương sau n tháng.

- Tìm lần lượt $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ để tính số tiền còn nợ của chị Hương sau 6 tháng.
- Dự đoán hệ thức truy hồi đối với dãy số (A_n) .

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- 1 Tìm 4 số hạng đầu tiên của các dãy số (u_n) biết số hạng tổng quát:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } u_n = \frac{1+n}{\sqrt{n^2+1}}. & \text{b) } u_n = \frac{2^n-1}{2^n+1}. & \text{c) } u_n = (-1)^n \sqrt{4^n}. \\ \text{d) } u_n = \frac{1+(-1)^n}{n}. & \text{e) } u_n = \sin^2 \frac{n\pi}{4} + \cos \frac{2n\pi}{3}. & \end{array}$$

- 2 Cho dãy số (u_n) với số hạng tổng quát $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$.

- Tìm 4 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) .
- Số $\frac{105}{54}$ là số hạng thứ mấy của dãy số (u_n) ?

- 3 Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n-1}{3n+1}$. Hãy viết dạng khai triển của dãy số. Tính u_{50} và u_{99} .

- 4 Viết năm số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) và dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n theo n của các dãy số (u_n) sau

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}, \forall n \geq 1. \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3, \forall n \geq 1. \end{cases} \end{array}$$

- 5 Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) , biết

$$\begin{array}{ll} \text{a) } u_n = n^3 - 2n + 1. & \text{b) } u_n = \frac{1}{n} - 2. \\ \text{c) } u_n = \frac{\sqrt{2}}{3^n}. & \text{d) } u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \end{array}$$

- 6 Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào bị chặn trên, bị chặn dưới và bị chặn?

$$\begin{array}{ll} \text{a) } u_n = n^2 + 5. & \text{b) } u_n = \frac{3n+1}{2n+5}. \\ \text{c) } u_n = (-1)^n \cos \frac{\pi}{2n}. & \text{d) } u_n = \frac{n^2+2n}{n^2+n+1}. \end{array}$$

- 7 Việt Nam là quốc gia nằm ở phía Đông bán đảo Đông Dương thuộc khu vực Đông Nam Á. Với dân số ước tính 93,7 triệu dân vào đầu năm 2018, tỉ lệ tăng dân số hàng năm là 1,2%. Giả sử tỉ lệ tăng dân số từ năm 2018 đến năm 2030 không thay đổi thì dân số nước ta đầu năm 2030 khoảng bao nhiêu?

- 8 Ông An gửi tiết kiệm 100 triệu đồng kì hạn 1 tháng với lãi suất 6% một năm theo hình thức tính lãi kép. Số tiền (triệu đồng) của ông An thu được sau n tháng được cho bởi công thức

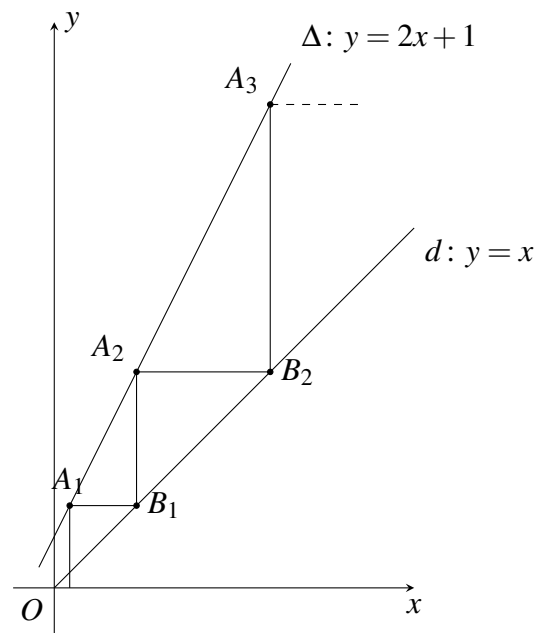
$$A_n = 100 \left(1 + \frac{0,06}{12} \right)^n.$$

- a) Tìm số tiền ông An nhận được sau tháng thứ nhất, sau tháng thứ hai.
b) Tìm số tiền ông An nhận được sau 1 năm.

- 9 Chị Mai gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép như sau: Lần đầu chị gửi 100 triệu đồng. Sau đó, cứ hết 1 tháng chị lại gửi thêm vào ngân hàng 6 triệu đồng. Biết lãi suất của ngân hàng là 0,5% một tháng. Gọi P_n (triệu đồng) là số tiền chị có trong ngân hàng sau n tháng.

- a) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng.
b) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 3 tháng.
c) Dự đoán hệ thức truy hồi đối với dãy P_n .

- 10 Trong mặt phẳng tọa độ, cho đường thẳng $\Delta: y = 2x + 1$. Trên Δ lấy điểm A_1 có hoành độ bằng $\frac{1}{3}$. Qua A_1 kẻ một đường thẳng song song với trục hoành cắt đường thẳng $d: y = x$ tại điểm B_1 ; gọi A_2 là giao điểm của Δ với đường thẳng đi qua B_1 và song song với trục tung. Với điểm A_2 , lại thực hiện các bước tương tự như đã làm với điểm A_1 ta sẽ được điểm A_3 . Với điểm A_3 , lại làm như thế ta được điểm A_4 . Cứ tiếp tục mãi quá trình trên, ta sẽ được một dãy vô hạn các điểm $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$ nằm trên Δ (hình bên). Với mỗi số nguyên dương n , gọi u_n là hoành độ của điểm A_n . Hãy cho dãy số (u_n) bằng hệ thức truy hồi.



D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = (-1)^n \cdot 2n$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $u_3 = -6$. B. $u_2 = 4$. C. $u_4 = -8$. D. $u_1 = -2$.

Câu 2. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{n}{3^n - 1}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

- A. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{16}$. B. $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}$. C. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{3}{26}$. D. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}$.

Câu 3. Cho các dãy số sau, dãy số nào là dãy tăng?

- A. $1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{4}$. B. $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}$. C. $-1; 3; 5; 3$. D. $2; 4; 6; 8$.

Câu 4. Cho dãy số (u_n) với $u_n = (2017 + n)^n$. Số hạng đầu tiên của dãy là

- A. 2018. B. 2018^2 . C. 1. D. 2017.

Câu 5. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2n + 1$. Tìm u_5 .

A. 11.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Câu 6. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2} \end{cases}$ với $n \geq 1$. Tìm số hạng thứ hai của dãy số (u_n) .

A. $u_2 = 2$.B. $u_2 = \sqrt{10}$.C. $u_2 = 10$.D. $u_2 = \sqrt{2}$.

Câu 7. Dãy (u_n) gồm có 5 phần tử cho bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2, \forall n \geq 1. \end{cases}$ Phần tử thứ 5 của dãy bằng

A. 7.

B. 5.

C. 9.

D. 3.

Câu 8. Cho dãy số (u_n) có $u_1 = 2$, $u_2 = 3$ và $u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$. Tìm số hạng thứ tư của dãy số đó.

A. $u_4 = 19$.B. $u_4 = 17$.C. $u_4 = 13$.D. $u_4 = 14$.

Câu 9. Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \forall n \geq 3. \end{cases}$ Tìm số hạng thứ 7 của dãy.

A. $u_7 = 13$.B. $u_7 = 21$.C. $u_7 = 17$.D. $u_7 = 7$.

Câu 10. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3n-4}{2n+5}$. Số $\frac{14}{17}$ là số hạng thứ bao nhiêu của dãy?

A. 4.

B. 7.

C. 5.

D. 6.

Câu 11. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{n+1}{2n+1}$. Số $\frac{8}{15}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. 7.

B. 6.

C. 5.

D. 8.

Câu 12. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = 2^n$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $u_{n+2} = 2^2$.B. $u_{n+2} = 2^n + 2$.C. $u_{n+2} = 2 \cdot 2^n$.D. $u_{n+2} = 4 \cdot 2^n$.

Câu 13. Trong các dãy số (u_n) sau đây, hãy chọn dãy số giảm.

A. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.B. $u_n = \sin n$.C. $u_n = \frac{n^2+1}{n}$.D. $(-1)^n (2^n + 1)$.

Câu 14. Dãy số nào có công thức số hạng tổng quát dưới đây là dãy số tăng?

A. $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.B. $u_n = (-3)^n$.C. $u_n = 2020 - 3n$.D. $u_n = 2018 + 2n$.

Câu 15. Cho dãy số (u_n) , với $u_n = \sin \frac{\pi}{n+1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Dãy số (u_n) không tăng không giảm.B. Dãy số (u_n) là một dãy số tăng.C. Số hạng thứ $n+1$ của dãy là $u_{n+1} = \sin \frac{\pi}{n+1}$.D. Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.

Câu 16. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào là dãy số bị chặn?

A. $u_n = \frac{n}{n+1}$.B. $u_n = \sqrt{n^2+1}$.C. $u_n = 2^n + 1$.D. $u_n = n + \frac{1}{n}$.

Câu 17. Cho dãy (u_n) là: $0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots$. Số hạng tổng quát (u_n) là

A. $\frac{n+1}{n}$.B. $\frac{n-1}{n}$.C. $\frac{n}{n+1}$.D. $\frac{n^2-n}{n+1}$.

Câu 18. Cho dãy số có các số hạng đầu là: $-2; 0; 2; 4; 6; \dots$. Số hạng tổng quát của dãy số này là công thức nào dưới đây?

- A. $u_n = -2(n+1)$. B. $u_n = -2n$. C. $u_n = 2n - 4$. D. $u_n = n - 2$.

Câu 19. Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

- A. $u_n = 2^n$. B. $u_n = 2^{n+1}$. C. $u_n = 2$. D. $u_n = n^{n-1}$.

Câu 20. Một vi sinh đặc biệt X có cách sinh sản vô tính kì lạ, sau một giờ thì đẻ một lần, đặc biệt sống được tới giờ thứ n (với n là số nguyên dương) thì ngay lập tức thời điểm đó nó đẻ một lần ra 2^n con X khác, tuy nhiên do chu kì của con X ngắn nên ngay sau khi đẻ xong lần thứ 2, nó lập tức chết. Hỏi rằng, nếu tại thời điểm ban đầu có đúng 1 con thì sau 5 giờ có bao nhiêu con sinh vật X đang sống?

- A. 256. B. 96. C. 336. D. 32.

—HẾT—

§2. CẤP SỐ CỘNG

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Định nghĩa

Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d . Nghĩa là

$$u_{n+1} = u_n + d \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

- Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.
- Đặc biệt khi $d = 0$ thì cấp số cộng là một dãy số không đổi (tất cả các số hạng đều bằng nhau).

2 Số hạng tổng quát

Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định theo công thức

$$u_n = u_1 + (n - 1)d$$

3 Tính chất của ba số hạng liên tiếp

Gọi u_{k-1}, u_k, u_{k+1} là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng thì

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} \text{ với } k \geq 2$$

4 Tổng n số hạng đầu của một cấp số cộng

Cho (u_n) là một cấp số cộng với số hạng đầu là u_1 và công sai d . Đặt

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

Khi đó:

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n(u_2 + u_{n-1})}{2} = \frac{n(u_3 + u_{n-2})}{2} = \cdots$$

hoặc

$$S_n = \frac{n}{2}(2u_1 + (n - 1)d)$$

DT

1

Chứng minh dãy số là một cấp số cộng

Ta cần chứng minh $u_{n+1} - u_n = d$, với d là một số không đổi (công sai).

Ví dụ 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số cộng? Vì sao?

- a) $10, -2, -14, -26, -38$; b) $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 2, \frac{11}{4}, \frac{7}{2}$;
c) $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$; d) $1, 4, 7, 10, 13$.

Ví dụ 2. Viết 5 số hạng đầu của mỗi dãy (u_n) sau và xem nó có phải là một cấp số cộng hay không? Nếu dãy là một cấp số cộng, hãy tìm công sai.

- a) $u_n = 3n + 2$ b) $u_n = 3^n - 1$
c) $u_n = (n + 2)^2 - n^2$ d) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3 - u_n, \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$

Ví dụ 3. Chứng minh các dãy số sau là một cấp số cộng. Xác định công sai và số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

- a) Dãy số (u_n) với $u_n = 19n - 5$. b) Dãy số (u_n) với $u_n = -3n + 1$.

DT

2

Công sai, số hạng đầu và số hạng tổng quát của cấp số cộng

Ví dụ 4. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 4$ và công sai $d = 3$.

- a) Viết công thức số hạng tổng quát u_n .
b) Số 832 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng trên?
c) Số 2024 có là số hạng nào của cấp số cộng trên không?

Ví dụ 5. Viết sáu số xen giữa hai số 3 và 24 để được cấp số cộng có tám số hạng. Tìm cấp số cộng đó.

Ví dụ 6. Tìm số hạng đầu, công sai và số hạng tổng quát của cấp số cộng, biết

- a) $\begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59. \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5. \end{cases}$
c) $\begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4. \end{cases}$ d) $\begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75. \end{cases}$
e) $\begin{cases} u_1 + u_5 = \frac{5}{3} \\ u_3 \cdot u_4 = \frac{65}{72}. \end{cases}$ f) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 35. \end{cases}$

3

Tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng

Tổng của n số hạng đầu tiên: Đặt $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$. Khi đó

- $S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n(u_2 + u_{n-1})}{2} = \frac{n(u_3 + u_{n-2})}{2} = \dots$

- Vì $u_n = u_1 + (n-1)d$ nên công thức trên có thể viết lại là $S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$.

≡ **Ví dụ 7.** Cho một cấp số công (u_n) có $S_6 = 18$ và $S_{10} = 110$. Tính S_{20} .

≡ Ví dụ 8. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_3 + u_{28} = 100$. Hãy tính tổng của 30 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

Ví dụ 9. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết

$$\text{a) } \begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \\ S_3 = 21. \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} S_3 = 12 \\ S_5 = 35. \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} S_5 = 5 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot u_4 \cdot u_5 = 45. \end{cases}$$

≡ **Ví dụ 10.** Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng, biết $\begin{cases} S_4 = 20 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = \frac{25}{24} \end{cases}$ và cấp số cộng có công sai là một số nguyên âm.

≡ Ví dụ 11. Tính các tổng sau

a) $S = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1)$. b) $S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$.

DT

4

Tính chất của cấp số cộng

① Nếu $a; b; c$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì $a + c = 2b$.

② Lưu ý:

- Nếu cho ba số liên tiếp của một cấp số cộng, ta có thể xem ba số đó là

$$a-d; \quad a; \quad a+d$$

- Nếu cho bốn số liên tiếp của một cấp số công, ta có thể xem ba số đó là

$$a-3d; \quad a-d; \quad a+d; \quad a+3d.$$

≡ Ví dụ 12. Tìm ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng bằng 27 và tổng các bình phương của chúng là 293.

≡ Ví dụ 13. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 10 và tổng bình phương của chúng bằng 30.

Ví dụ 14. Ba góc của một tam giác vuông lập thành một cấp số công. Tìm ba góc đó.

Ví dụ 15. Cho a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng. Chứng minh rằng

- $a^2 + 2bc = c^2 + 2ab.$
- $2(a + b + c)^3 = 9[a^2(b + c) + b^2(a + c) + c^2(a + b)].$
- $b^2 + bc + c^2, a^2 + ac + c^2, a^2 + ab + b^2$ cũng là một cấp số cộng.

DT

5

Vận dụng, thực tiễn

Ví dụ 16. Một người trồng 3003 cây theo một hình tam giác như sau: “Hàng thứ nhất có một cây, hàng thứ hai có 2 cây, hàng thứ ba có 3 cây, ...”. Hỏi có bao nhiêu hàng cây được trồng như thế?

Ví dụ 17. Bạn A muốn mua món quà tặng mẹ và chị nhân ngày Quốc tế phụ nữ 8/3. Do đó A quyết định tiết kiệm từ ngày 1/1 của năm đó với ngày đầu là 500 đồng/ngày, ngày sau cao hơn ngày trước 500 đồng. Hỏi đúng đến ngày 8/3 bạn A có đủ tiền để mua quà cho mẹ và chị không? Giả sử rằng món quà A dự định mua khoảng 800 ngàn đồng và từ ngày 1/1 đến ngày 8/3 có số ngày ít nhất là 67 ngày.

Ví dụ 18. Một gia đình cần khoan một cái giếng để lấy nước. Họ thuê một đội khoan giếng nước. Biết giá của mét khoan đầu tiên là 80000 đồng, kể từ mét khoan thứ hai giá của mỗi mét khoan tăng thêm 5000 đồng so với giá của mét khoan trước đó. Biết cần phải khoan sâu xuống 50m mới có nước. Hỏi phải trả bao nhiêu tiền để khoan cái giếng đó?

Ví dụ 19. Anh Nam được nhận vào làm việc ở một công ty về công nghệ với mức lương khởi điểm là 100 triệu đồng một năm. Công ty sẽ tăng thêm lương cho anh Nam mỗi năm là 20 triệu đồng. Tính tổng số tiền lương mà anh Nam nhận được sau 10 năm làm việc cho công ty đó.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 9$, công sai $d = -2$. Viết ba số hạng đầu của cấp số cộng đó.
- Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 3$. Hãy viết năm số hạng đầu của cấp số cộng này.
- Cho dãy số (u_n) với $u_n = 5n - 1$. Chứng minh rằng (u_n) là một cấp số cộng. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của nó.
- Cho dãy số (u_n) với $u_n = -2n + 3$. Chứng minh rằng (u_n) là một cấp số cộng. Xác định số hạng đầu và công sai của cấp số cộng này.
- Tìm năm số hạng đầu và số hạng thứ 100 của cấp số cộng $(u_n) : 10, 5, \dots$
- Số hạng thứ 10 của một cấp số cộng (u_n) bằng 48 và số hạng thứ 18 bằng 88. Tìm số hạng thứ 100 của cấp số cộng đó.
- Cần lấy tổng của bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng $2, 5, 8, \dots$ để được kết quả bằng 345?
- Một nhà thi đấu có 20 hàng ghế dành cho khán giả. Hàng thứ nhất có 20 ghế, hàng thứ hai có 21 ghế, hàng thứ ba có 22 ghế, ... Cứ như thế, số ghế ở hàng sau nhiều hơn số ghế ở hàng trước là 1 ghế. Trong một giải thi đấu, ban tổ chức đã bán được hết số vé phát ra và số tiền thu được từ bán vé là 70 800 000 đồng. Tính giá tiền của mỗi vé (đơn vị: đồng), biết số vé bán ra bằng số ghế dành cho khán giả của nhà thi đấu và các vé là đồng giá.

- $$x_n = 75 + 5(n - 1).$$

14 Ở một loài thực vật lưỡng bội, tính trạng chiều cao cây do hai gene không alen là A và B cùng quy định theo kiểu tương tác cộng gộp. Trong kiểu gene nếu cứ thêm một alen trội A hay B thì chiều cao cây tăng thêm 5 cm. Khi trưởng thành, cây thấp nhất của loài này với kiểu gene aabb có chiều cao 100 cm. Hỏi cây cao nhất với kiểu gene AABB có chiều cao bao nhiêu?

D // **BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

Câu 4. Cho cấp số cộng có $u_1 = 1$ và công sai $d = -4$. Giá trị của số hạng thứ 17 bằng bao nhiêu?

- A. $u_{17} = -63$. B. $u_{17} = 65$. C. $u_{17} = -85$. D. $u_{17} = -75$.

Câu 5. Tìm giá trị của x, y sao cho dãy số $-2, x, 4, y$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

- A. $x = 2, y = 8$. B. $x = 1, y = 7$. C. $x = 2, y = 10$. D. $x = -6, y = 2$.

Câu 6. Cấp số cộng (u_n) có $u_6 = 12, u_{10} = 24$. Tìm số hạng đầu u_1 .

- A. $u_1 = 3$. B. $u_1 = 2$. C. $u_1 = 5$. D. $u_1 = -3$.

Câu 7. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 123$ và $u_3 - u_{15} = 84$. Số hạng u_{17} bằng

- A. 235. B. 242. C. 4. D. 11.

Câu 8. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng biết
$$\begin{cases} u_2 + u_5 - u_7 = 1 \\ u_1 + u_6 = 16. \end{cases}$$

- A. $u_1 = \frac{171}{17}, d = -\frac{14}{17}$. B. $u_1 = -\frac{14}{17}, d = \frac{171}{17}$.
C. $u_1 = 2, d = 3$. D. $u_1 = 3, d = 2$.

Câu 9. Cho 9, $x, -1, y$ là 4 số lập thành cấp số cộng, khi đó giá trị của x, y là

- A. $\begin{cases} x = 4 \\ y = -6 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 2 \\ y = -6 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases}$.

Câu 10. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_4 = 7u_1 \\ S_5 = 75 \end{cases}$. Tìm số hạng thứ hai của cấp số cộng này.

- A. $u_2 = 9$. B. $u_2 = 6$. C. $u_2 = 3$. D. $u_2 = 12$.

Câu 11. Cho hai số -3 và 23 . Xen kẽ giữa hai số đã cho n số hạng để tất cả các số đó tạo thành cấp số cộng có công sai $d = 2$. Tìm n .

- A. $n = 14$. B. $n = 15$. C. $n = 13$. D. $n = 12$.

Câu 12. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 3$ và công sai $d = -2$. Tính $S_{2017} = u_1 + u_2 + \dots + u_{2017}$.

- A. $S_{2017} = -4060211$. B. $S_{2017} = -4060221$. C. $S_{2017} = 4072323$. D. $S_{2017} = 4073232$.

Câu 13. Tính tổng $S = 1 + 5 + 9 + \dots + 397$ ta được kết quả

- A. 19298. B. 19090. C. 19920. D. 19900.

Câu 14. Một cấp số cộng có 15 số hạng. Biết tổng của 15 số hạng đó bằng 120 và công sai bằng -4 . Tìm số hạng đầu.

- A. $u_1 = -20$. B. $u_1 = 36$. C. $u_1 = 540$. D. $u_1 = 64$.

Câu 15. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2, d = 9$. Khi đó số 2018 là số hạng thứ mấy trong dãy?

- A. 223. B. 225. C. 224. D. 226.

Câu 16. Cho dãy số (u_n) , biết: $u_1 = 3, u_{n+1} = u_n + 4$ với $n \geq 1$. Tìm u_{1000} .

- A. 3900. B. 4000. C. 3999. D. 4200.

Câu 17. Tính số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n) , biết
$$\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 7. \end{cases}$$

- A. $u_1 = -36, d = 13$. B. $u_1 = 36, d = 13$.
C. $u_1 = 36, d = -13$. D. $u_1 = -36, d = -13$.

Câu 18. Người ta trồng 1275 cây theo hình tam giác như sau: Hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ 2 có 2 cây, hàng thứ 3 có 3 cây, ... hàng thứ k có k cây ($k \geq 1$). Hỏi có bao nhiêu hàng?

- A. 51. B. 52. C. 53. D. 50.

Câu 19. Bé An luyện tập khiêu vũ cho buổi dạ hội cuối khóa. Bé bắt đầu luyện tập trong 1 giờ vào ngày đầu tiên. Mỗi ngày tiếp theo, bé tăng thêm 5 phút luyện tập so với ngày trước đó. Hỏi sau một tuần, tổng thời gian bé An đã luyện tập là bao nhiêu phút?

- A. 505 phút. B. 450 phút. C. 525 phút. D. 425 phút.

Câu 20. Chu vi của một đa giác là 158 cm, số đo các cạnh của nó lập thành một cấp số cộng với công sai $d = 3$ cm. Biết cạnh lớn nhất là 44 cm. Số các cạnh của đa giác đó là bao nhiêu?

- A. 4. B. 6. C. 5. D. 3.

Câu 21. Bác Bình muốn trồng cây cà phê trên một ngọn đồi như sau: Từ trên đỉnh đồi trồng hàng thứ nhất 2 cây; đi xuống hàng thứ hai 5 cây; đi xuống hàng thứ ba 8 cây; ...; đi xuống hàng cuối cùng dưới chân đồi trồng 26 cây. Theo cách trồng như trên bác bình trồng được bao nhiêu cây cà phê?

- A. 224 cây. B. 112 cây. C. 126 cây. D. 121 cây.

Câu 22. Một công ty trả lương cho anh A mức lương là 4,5 triệu đồng/quý và kể từ quý làm việc thứ 2 thì mức lương sẽ tăng thêm 0,3 triệu đồng mỗi quý. Hỏi tổng số tiền sau 3 năm làm việc anh A nhận được là bao nhiêu?

- A. 56 triệu. B. 72 triệu. C. 74,3 triệu. D. 73,8 triệu.

Câu 23. Ông X vay của công ty A một khoản tiền 72 triệu đồng và ông này trả nợ cho công ty A như sau: Ở quý thứ nhất ông trả 3 triệu đồng và kể từ quý thứ 2 mức trả sẽ tăng thêm 0,2 triệu đồng mỗi quý. Hỏi sau bao lâu thì ông X trả hết nợ?

- A. 5 năm. B. 6 năm. C. 3 năm. D. 4 năm.

Câu 24. Một đa giác có n cạnh và có chu vi bằng 158 cm. Biết số đo các cạnh của đa giác lập thành một cấp số cộng và công sai $d = 3$ cm và cạnh lớn nhất có độ dài là 44 cm. Đa giác có số cạnh n bằng

- A. $n = 5$. B. $n = 7$. C. $n = 6$. D. $n = 4$.

Câu 25. Tính tổng tất các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 2(m+2)x^2 + 2m + 3 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

- A. $\frac{14}{9}$. B. $\frac{10}{9}$. C. $\frac{12}{9}$. D. $\frac{8}{9}$.

—HẾT—

§3. CẤP SỐ NHÂN

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Định nghĩa

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q . Nghĩa là

$$u_{n+1} = u_n q \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

- Số q được gọi là công bội của cấp số nhân.
- Khi $q = 0$ cấp số nhân có dạng $u_1, 0, 0, \dots, 0, \dots$
- Khi $q = 1$ cấp số nhân có dạng $u_1, u_1, u_1, \dots, u_1, \dots$
- Khi $u_1 = 0$ thì với mọi q cấp số nhân có dạng $0, 0, 0, \dots, 0, \dots$

2 Số hạng tổng quát

Nếu một cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \text{ với } n \geq 2.$$

3 Tính chất của ba số hạng liên tiếp

Giả sử u_{k-1}, u_k, u_{k+1} là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân thì

$$u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1} \text{ với } k \geq 2$$

4 Tổng của n số hạng đầu của một cấp số nhân

Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Khi đó

- Nếu $q \neq 1$ thì

$$S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

- Nếu $q = 1$ thì

$$S_n = nu_1$$

Ví dụ 1. Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số nhân? Xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân.

a) Dãy số (u_n) với $u_n = (-3)^{2n+1}$.

b) Dãy số (u_n) với $u_n = n \cdot 5^{2n-1}$.

Ví dụ 2. Chứng minh các dãy số sau là cấp số nhân. Hãy tìm công bội và số hạng đầu của cấp số nhân đó.

a) Dãy (u_n) với $u_n = (-1)^n \cdot 3^{2n}$.

b) Dãy (v_n) với $v_n = \frac{5}{3^n}$.

Ví dụ 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$, $u_{n+1} = 5 \cdot u_n + 8$, với $n > 1$. Chứng minh (v_n) với $v_n = u_n + 2$ là cấp số nhân.

Ví dụ 4. Cho cấp số nhân (u_n) với công bội dương, biết $u_1 = 3$ và $u_5 = 48$.

a) Tính u_8 .

b) Hỏi số 1536 là số hạng thứ mấy?

Ví dụ 5. Giữa các số 160 và 5 hãy chèn 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân. Tìm 4 số đó.

Ví dụ 6. Tìm số hạng đầu u_1 , công bội q và số hạng tổng quát u_n của cấp số nhân (u_n) biết

a) $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1 + u_6 = 165 \\ u_3 + u_4 = 60. \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144. \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 351. \end{cases}$

Ví dụ 7. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_n = 12 \cdot 2^{n-1}$.

a) Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q .

b) Tính tổng của 10 số hạng đầu tiên.

c) Tính tổng $S' = u_3 + u_4 + \dots + u_{12}$.

Ví dụ 8. Tìm công bội của một cấp số nhân có số hạng đầu là 7, số hạng cuối là 448 và tổng số các số hạng là 889.

Ví dụ 9. Tìm số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng công bội là 3, tổng số các số hạng là 728 và số hạng cuối là 486.

Ví dụ 10. Tính tổng sau: $A = 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{512}$.

Ví dụ 11. Cho n là số tự nhiên ≥ 2 , tính tổng sau: $S_n = \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2^2 + \frac{1}{2^2}\right)^2 + \dots + \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)^2$.

DT

4

Tính chất của cấp số nhân

Ví dụ 12. Tìm a để ba số $a - 2$; $a - 4$; $a + 2$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân.

Ví dụ 13. Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân biết tổng của chúng là 19 và tích là 216.

Ví dụ 14. Tìm các số dương a và b sao cho $a, a + 2b, 2a + b$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng và $(b + 1)^2, ab + 5, (a + 1)^2$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

Ví dụ 15. Chứng minh rằng nếu 3 số $\frac{2}{y-x}, \frac{1}{y}, \frac{2}{y-z}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì 3 số x, y, z lập thành một cấp số nhân.

Ví dụ 16. Cho ba số tạo thành một cấp số cộng có tổng 21. Nếu thêm 2, 3, 9 lần lượt vào số thứ nhất, số thứ hai, số thứ ba tạo thành một cấp số nhân. Tìm 3 số đó.

Ví dụ 17. Ba số khác nhau có tổng bằng 114 có thể coi là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân hoặc coi là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ 25 của 1 cấp số cộng. Tìm các số đó.

DT

5

Vận dụng, thực tiễn

Ví dụ 18. Tìm 4 góc của một tứ giác, biết rằng các góc đó lập thành một cấp số nhân và góc cuối gấp 9 lần góc thứ hai.

Ví dụ 19. Độ dài các cạnh của $\triangle ABC$ lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ có hai góc không quá 60° .

Ví dụ 20. Một khu rừng có trữ lượng gỗ là $4 \cdot 10^5$ mét khối. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây ở khu rừng đó là 4% mỗi năm. Hỏi sau 5 năm, khu rừng đó sẽ có khoảng bao nhiêu mét khối gỗ?

Ví dụ 21. Một người gửi ngân hàng 150 triệu đồng theo thể thức lãi kép, lãi suất 0,58% một tháng (kể từ tháng thứ 2, tiền lãi được tính theo phần trăm của tổng tiền lãi tháng trước đó và tiền gốc của tháng trước đó). Sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có 180 triệu đồng?

Ví dụ 22. Một cửa hàng kinh doanh, ban đầu bán mặt hàng A với giá 100 (đơn vị nghìn đồng). Sau đó, cửa hàng tăng giá mặt hàng A lên 10%. Nhưng sau một thời gian, cửa hàng lại tiếp tục tăng giá mặt hàng đó lên 10%. Hỏi giá của mặt hàng A của cửa hàng sau hai lần tăng giá là bao nhiêu?

Ví dụ 23. Tỷ lệ tăng dân số của tỉnh M là 1,2%. Biết rằng số dân của tỉnh M hiện nay là 2 triệu người. Nếu lấy kết quả chính xác đến hàng nghìn thì sau 9 năm nữa số dân của tỉnh M sẽ là bao nhiêu?

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- 1 Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số nhân?
 - a) Dãy số (x_n) , với $x_n = n^2$.
 - b) Dãy số (y_n) , với $y_n = \sqrt{5}^{2n-3}$.
 - c) Dãy số (z_n) , với $z_n = \frac{2}{n}$.
 - d) Dãy số (w_n) , với $w_n = \frac{3^n + 1}{3^{n+1}}$.
- 2 Trong các dãy số sau đây nào là cấp số nhân? Hãy xác định công bội của cấp số nhân đó.
 - a) 1; 4; 16; 64; 256.
 - b) 2; -2; 3; -3; 4; -4.
 - c) $-1; \frac{1}{3}; -\frac{1}{9}; \frac{1}{27}; -\frac{1}{81}$.
- 3 Biết ba số $-\frac{1}{5}; b; -\frac{1}{125}$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tìm b .
- 4 Giữa các số 160 và 5, hãy chèn vào 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân và tìm cấp số nhân đó.
- 5 Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân trong các trường hợp sau:
 - a) $\begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240. \end{cases}$
 - b) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325. \end{cases}$
 - c) $\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = -42 \\ u_3 + u_5 = 20. \end{cases}$
 - d) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 15 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 85. \end{cases}$
- 6 Cho ba số khác nhau lập thành cấp số cộng, bình phương của các số đó lập thành cấp số nhân. Tìm các số đó.
- 7 Tìm công bội của tất cả các cấp số nhân sao cho tổng bốn số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó bằng 15 và tổng các bình phương của chúng bằng 85.
- 8 Tìm 4 số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng tổng 3 số hạng đầu là $\frac{148}{9}$, đồng thời, theo thứ tự, chúng là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng.
- 9 Cho 3 số có tổng bằng 28 lập thành cấp số nhân. Tìm cấp số nhân đó biết nếu số thứ nhất giảm 4 thì ta được 3 số lập thành cấp số cộng.
- 10 Tìm số đo bốn góc của một tứ giác, biết số đo các góc đó lập thành một cấp số nhân có số hạng cuối gấp tám lần số hạng đầu tiên.
- 11 Số đo ba kích thước của hình hộp chữ nhật lập thành một cấp số nhân. Biết thể tích của khối hộp là 125 cm^3 và diện tích toàn phần là 175 cm^2 . Tính tổng số đo ba kích thước của hình hộp chữ nhật đó.
- 12 Một người muốn có 100 triệu sau 18 tháng phải gửi mỗi tháng vào ngân hàng bao nhiêu tiền, biết lãi suất 0,6%/ tháng (lãi kép)?
- 13 Năm 2020, một hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là 900.000.000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó, năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần

nghìn)?

- 14** Tế bào E. Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại nhân đôi một lần. Nếu lúc đầu có 10^{12} tế bào thì sau 3 giờ sẽ phân chia thành bao nhiêu tế bào?
- 15** Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng theo cách: Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích bề mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích đế tháp. Biết diện tích đế tháp là 12288m^2 , tính diện tích mặt trên cùng.
- 16** Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng theo hình thức như sau: Hàng tháng từ đầu mỗi tháng người đó sẽ gửi cố định số tiền 5 triệu đồng với lãi suất $0,6\%$ trên tháng. Biết rằng lãi suất không thay đổi trong quá trình gửi, thì sau 10 năm số tiền mà người đó nhận được cả vốn lẫn lãi khoảng bao nhiêu?
- 17** Ông An vay ngân hàng 1 tỉ đồng với lãi suất $12\%/năm$. Ông đã trả nợ theo cách: Bắt đầu từ tháng thứ nhất sau khi vay, cuối mỗi tháng ông trả ngân hàng cùng số tiền là a (đồng) và đã trả hết nợ sau đúng 2 năm kể từ ngày vay. Hỏi số tiền mỗi tháng mà ông An phải trả là bao nhiêu đồng (làm tròn kết quả đến hàng nghìn)?

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong các dãy số hữu hạn sau, dãy số nào là cấp số nhân?

- A. 2; 4; 8; 16; 32; 63. B. 1; -2; 4; -8; 16; -32.
C. 1; 3; 9; 27; 54; 162. D. 4; 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{16}$.

Câu 2. Trong các dãy (u_n) cho bởi số hạng tổng quát dưới đây, dãy nào là một cấp số nhân có công bội bằng 2?

- A. $u_n = 2n + 3$. B. $u_n = 2^n$. C. $u_n = 2^n + 3$. D. $u_n = n + 2$.

Câu 3. Tìm công bội của cấp số nhân (u_n) biết số hạng tổng quát $u_n = 3^{2n}$.

- A. $q = 9$. B. $q = 2$. C. $q = 3$. D. $q = 6$.

Câu 4. Dãy số nào sau đây **không** phải là một cấp số nhân?

- A. $(u_n) : 1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \frac{1}{16}$. B. $u_n = 2^n + 2$.
C. $u_n = 2^n + 2^{n+1}$. D. $(u_n) : 7; 7; 7; 7; 7; \dots$

Câu 5. Cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$, $q = 2$. Tìm u_2 .

- A. $u_2 = 6$. B. $u_2 = 5$. C. $u_2 = -6$. D. $u_2 = 1$.

Câu 6. Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_1 = 3$ và công bội $q = -2$. Tìm số hạng thứ bảy của cấp số nhân đó.

- A. $u_7 = 192$. B. $u_7 = -9$. C. $u_7 = -192$. D. $u_7 = 384$.

Câu 7. Cho cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 = 2$, $q = \frac{1}{3}$. Tìm u_{10} .

- A. $\frac{2}{3^8}$. B. $\frac{2}{3^{10}}$. C. $\frac{3}{2^9}$. D. $\frac{2}{3^9}$.

Câu 8. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 = -3$ và công bội $q = -2$.

- A. $S_{10} = -1023$. B. $S_{10} = 1025$. C. $S_{10} = -1025$. D. $S_{10} = 1023$.

Câu 9. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_5 = 15$ và $u_8 = -1875$. Công bội của cấp số nhân là

- A. $q = 3$. B. $q = -3$. C. $q = -5$. D. $q = 5$.

Câu 10. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_{10} = 8u_7 \\ u_1 + u_4 = 144 \end{cases}$. Tính công bội q của cấp số nhân (u_n) .

- A. $q = 2$. B. $q = -3$. C. $q = 3$. D. $q = -2$.

Câu 11. Cho cấp số nhân (u_n) : $u_1 = 1, q = 2$. Hỏi 2048 là số hạng thứ mấy?

- A. 12. B. 9. C. 11. D. 10.

Câu 12. Cho cấp số nhân với $u_1 = 3, q = -2$. Số 192 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân?

- A. u_5 . B. u_6 . C. u_7 . D. u_8 .

Câu 13. Xác định x để 3 số $2x - 1; 2x; 2x + 3$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

- A. $x = -\frac{3}{4}$. B. $x = -\frac{4}{3}$. C. $x = \frac{3}{4}$. D. $x = \frac{4}{3}$.

Câu 14. Cho tam giác ABC có ba góc A, B, C theo thứ tự lập thành một cấp số nhân với công bội $q = 2$. Tính số đo góc A .

- A. $\frac{\pi}{2}$. B. $\frac{\pi}{7}$. C. $\frac{2\pi}{7}$. D. $\frac{4\pi}{7}$.

Câu 15. Ba số thực a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Tính giá trị biểu thức $D = ac - 5b$ biết rằng $abc = -27$.

- A. $D = -6$. B. $D = -24$. C. $D = 6$. D. $D = 24$.

Câu 16. Cho các số $x + 6y; 5x + 2y; 8x + y$ theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng, đồng thời các số $x - 1; y + 2; x - 3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Khi đó $x + 2y$ bằng

- A. 10. B. -10. C. 14. D. -14.

Câu 17. Ba cạnh của một tam giác vuông lập thành cấp số nhân. Tính tỉ số cạnh góc vuông nhỏ chia cho cạnh huyền.

- A. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Câu 18. Dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \end{cases}$ với $n \geq 1$. Tính tổng $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{10}$.

- A. $S = \frac{5}{2}$. B. $S = \frac{1023}{2048}$. C. $S = 2$. D. $\frac{1023}{512}$.

Câu 19. Trong một cấp số nhân gồm các số hạng dương, hiệu của số hạng thứ năm và số hạng thứ tư là 576, hiệu của số hạng thứ hai và số hạng đầu tiên là 9. Tìm tổng S_3 của 3 số hạng đầu của cấp số nhân này.

- A. $S_3 = 21$. B. $S_3 = -63$. C. $S_3 = 63$. D. $S_3 = -21$.

Câu 20. Giá trị của tổng $S = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2018}$ bằng

- A. $S = \frac{3^{2019} - 1}{2}$. B. $S = \frac{3^{2018} - 1}{2}$. C. $S = \frac{3^{2020} - 1}{2}$. D. $S = \frac{3^{2018} - 1}{2}$.

Câu 21. Cho cấp số nhân (u_n) có hạng đầu $u_1 = 2$ và tổng của 8 số hạng đầu tiên $S_8 = 6560$. Tìm công bội q của cấp số nhân đã cho.

- A. $q = 3$. B. $q = -3$. C. $q = \frac{1}{3}$. D. $q = \pm 3$.

Câu 22. Ba số lập thành một cấp số nhân. Nếu số hạng thứ hai cộng thêm 2 ta được một cấp số cộng. Sau đó cộng thêm 9 với số hạng thứ ba ta lại được một cấp số nhân. Tính tổng ba số đó.

- A. $-\frac{16}{25}$. B. $\frac{52}{25}$. C. $\frac{4}{25}$. D. $\frac{64}{25}$.

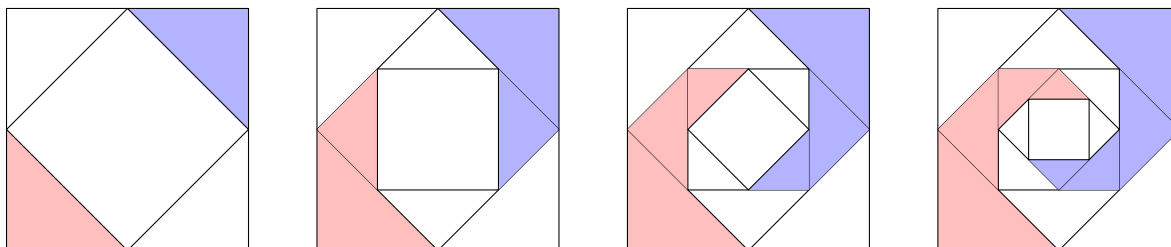
Câu 23. Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng với kỳ hạn 3 tháng, lãi suất 2% một quý theo hình thức lãi kép. Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kỳ hạn và lãi suất như trước đó. Tổng số tiền người đó nhận được sau 1 năm kể từ khi bắt đầu gửi tiền gần với kết quả nào sau đây?

- A. 212 triệu. B. 210 triệu. C. 216 triệu. D. 220 triệu.

Câu 24. Ông A mua một chiếc ô tô trị giá 1 tỷ đồng, do chưa đủ tiền nên ông chọn mua bằng hình thức trả góp hàng tháng (số tiền trả góp mỗi tháng như nhau) với lãi suất 12%/năm và trả trước 500 triệu đồng. Hỏi mỗi tháng ông phải trả số tiền gần nhất với số tiền nào dưới đây để sau đúng 2 năm kể từ lúc mua xe, ông trả hết nợ, biết kỳ trả nợ đầu tiên sau ngày mua ô tô đúng một tháng và chỉ tính lãi hàng tháng trên số dư nợ thực tế của tháng đó?

- A. 23.573.000 đồng. B. 23.537.000 đồng. C. 23.703.000 đồng. D. 24.443.000 đồng.

Câu 25. Một thợ thủ công muốn vẽ trang trí một hình vuông kích thước $4\text{m} \times 4\text{m}$ bằng cách vẽ một hình vuông mới với các đỉnh là trung điểm các cạnh của hình vuông ban đầu, và tô kín màu lên hai tam giác đối diện (như hình vẽ). Quá trình vẽ và tô theo quy luật đó được lặp lại 5 lần. Tính số tiền nước sơn để người thợ đó hoàn thành trang trí hình vuông trên? Biết tiền nước sơn 1m^2 là 60000 đồng.



- A. 575000 đồng. B. 387500 đồng. C. 465000 đồng. D. 232500 đồng.

—HẾT—

GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC

§1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A // TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

⚙ **Định nghĩa 1:** Dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Kí hiệu

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

⚙ **Định nghĩa 2:** Dãy số (u_n) có giới hạn là a nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - a) = 0$. Kí hiệu

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$$

⚠ Ta có thể viết $\lim u_n = a$ thay cho cách viết $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ (không cần viết chỉ số $n \rightarrow +\infty$)

⚙ **Một vài giới hạn đặc biệt:** (có thể xem như công thức)

- $\lim \frac{1}{n} = 0$;
- $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$;
- $\lim \frac{1}{q^n} = 0$, với $|q| > 1$;
- $\lim \frac{1}{n^k} = 0$, với $k \in \mathbb{N}^*$;
- $\lim C = C, \forall C \in \mathbb{R}$;
- $\lim q^n = 0$, nếu $|q| < 1$.

2 ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

⚙ Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì ta có:

- $\lim (u_n \pm v_n) = a \pm b$;
- $\lim \left(\frac{u_n}{v_n} \right) = \frac{a}{b}$, với $b \neq 0$;
- $\lim |u_n| = |a|$;
- $\lim (u_n \cdot v_n) = a \cdot b$;
- $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$, với $a \geq 0$;
- $\lim (k \cdot u_n) = k \cdot a$ ($k \in \mathbb{R}$).

⚙ **Định lý "kẹp giữa":**

- Nếu $0 \leq |u_n| \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.
- Nếu $w_n \leq u_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $\lim w_n = \lim v_n = a$ thì $\lim u_n = a$.

3 TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

- Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q thỏa mãn $|q| < 1$ được gọi là *cấp số nhân lùi vô hạn*.
- Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) , ta có tổng của cấp số nhân lùi vô hạn đó là

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \frac{u_1}{1 - q}, (|q| < 1)$$

4 GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA DÃY SỐ

- Định nghĩa 1:** Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Kí hiệu

$$\lim u_n = +\infty$$

- Định nghĩa 2:** Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu $\lim(-u_n) = +\infty$. Kí hiệu

$$\lim u_n = -\infty$$

- Một số giới hạn đặc biệt:**

$$\textcircled{1} \lim n^k = +\infty, \text{ với } k \in \mathbb{N}^*. \quad \textcircled{2} \lim q^n = +\infty, \text{ với } q > 1.$$

- Một số quy tắc tính giới hạn vô cực:**

- ① Quy tắc tìm giới hạn của tích $u_n \cdot v_n$

$\lim u_n = L$	$\lim v_n = \infty$	$\lim [u_n \cdot v_n]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$L > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$-\infty$	$+\infty$

- ② Quy tắc tìm giới hạn của thương $\frac{u_n}{v_n}$

$\lim u_n = L$	$\lim v_n$	Dấu của v_n	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	+	$+\infty$
$L > 0$	0	-	$-\infty$
$L < 0$	0	+	$-\infty$
$L < 0$	0	-	$+\infty$

DT

1

Khử vô định dạng $\frac{\infty}{\infty}$ Xét giới hạn: $\lim \frac{u_n}{v_n}$. **Phương pháp giải:**

- Đặt nhân tử n^k có tính "quyết định ∞ " ở tử và mẫu.
- Khử bỏ n^k , đưa giới hạn về dạng xác định được.
- Áp dụng định lý về giới hạn hữu hạn để tính kết quả.

 **Chú ý:** Trong trường hợp hàm mũ, ta đặt đại lượng "quyết định ∞ " có dạng a^n . **Ví dụ 1.** Tính các giới hạn sau

a) $\lim \frac{2n^2 + 3n - 1}{2 - 3n^2}$

b) $\lim \frac{3n^3 + 2n^2 + n}{n^3 + 4}$

c) $\lim \frac{n^2 + 1}{2n^4 + n + 1}$

d) $\lim \left(\frac{n+1}{n^2+2n} - \frac{1}{n-1} \right)$

e) $\lim \left(\frac{2n^2+3n}{n+1} - \frac{2n^3-3}{n^2-1} \right)$

f) $\lim n \left(1 - \frac{n^2+3}{n^2-1} \right)$

g) $\lim \frac{(2n+3)(1-3n)}{2n^2-n+5}$

h) $\lim \frac{n^4-2n^2}{(n+1)(2+n)(n^2+1)}$

i) $\lim \frac{(2n^4+1)(n+2)^2}{(2n+1)^2(2-n)^4}$

 **Ví dụ 2.** Tính các giới hạn sau

a) $\lim \frac{1+3^n}{4+3^n}$

b) $\lim \frac{4 \cdot 3^n + 7^{n+1}}{2 \cdot 5^n + 7^n}$

c) $\lim \frac{4^{n+1} + 6^{n+2}}{5^n + 8^n}$

 **Ví dụ 3.** Tính các giới hạn sau

a) $\lim \frac{2n-1}{\sqrt{4n^2+1}+3n}$

b) $\lim \frac{\sqrt{4n^2+3n-1}}{\sqrt{3n^2+1}-\sqrt{2n+1}}$

c) $\lim \frac{\sqrt{4n^4+1}}{\sqrt{n^4+4n+1}+n^2}$

d) $\lim \frac{\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1}+n}$

e) $\lim \frac{\sqrt[3]{8n^3+n^2-1}+n-4}{2n-3}$

f) $\lim \frac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}+n^2}$

 **Ví dụ 4.** Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$

b) $\lim \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \right]$

c) $\lim \left(\frac{2+4+8+\dots+2^n}{3 \cdot 2^n - 1} \right)$

d) $\lim \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} \dots \frac{1}{n(n+1)} \right)$

 **Ví dụ 5.** Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 10$ và $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3$, với mọi $n \geq 1$.a) Chứng minh dãy (v_n) xác định bởi $v_n = u_n - \frac{15}{4}$ là một cấp số nhân.b) Tính $\lim u_n$.

Xét các giới hạn dạng: $\lim (\sqrt{u_n} - v_n)$ hoặc $\lim (\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})$.

Phương pháp giải:

- Nhân thêm lượng liên hợp:

$$\textcircled{1} \lim (\sqrt{u_n} - v_n) = \lim \frac{(\sqrt{u_n} - v_n)(\sqrt{u_n} + v_n)}{\sqrt{u_n} + v_n} = \lim \frac{u_n - v_n^2}{\sqrt{u_n} + v_n}$$

$$\textcircled{2} \lim (\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}) = \lim \frac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n})}{\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n}} = \lim \frac{u_n - v_n}{\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n}}$$

- Biến đổi biểu thức cần tính giới hạn về Dạng 1 (phân thức, đặt n^k)

Chú ý: Đôi khi, ta còn sử dụng liên hợp bậc ba để giải các bài toán tính giới hạn của những dãy số mà công thức tổng quát của nó có chứa ẩn trong dấu căn bậc ba.

$$\sqrt[3]{A} - B = \frac{(\sqrt[3]{A} - B)(\sqrt[3]{A}^2 + \sqrt[3]{A} \cdot B + B^2)}{\sqrt[3]{A}^2 + \sqrt[3]{A} \cdot B + B^2} = \frac{A - B^3}{\sqrt[3]{A}^2 + \sqrt[3]{A} \cdot B + B^2}$$

Ví dụ 6. Tính các giới hạn sau

- a) $\lim (\sqrt{n^2 + 2n} - n)$ b) $\lim (2n - \sqrt{4n^2 + n})$ c) $\lim (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 2})$
 d) $\lim n(\sqrt{n^2 + 2} - n)$ e) $\lim (\sqrt{n^2 + 2n} - n - 1)$ f) $\lim \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 + 4}}$.

Ví dụ 7. Tính các giới hạn sau

- a) $\lim (\sqrt[3]{n^3 + 2} - n)$ b) $\lim (\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt{n^2 + 1})$ c) $\lim (\sqrt[3]{n^3 + 2} - \sqrt{n^2 + n})$

- ① Quy tắc tìm giới hạn của tích $u_n \cdot v_n$

$\lim u_n = L$	$\lim v_n = \infty$	$\lim [u_n \cdot v_n]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$L > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$-\infty$	$+\infty$

- ② Quy tắc tìm giới hạn của thương $\frac{u_n}{v_n}$

$\lim u_n = L$	$\lim v_n$	Dấu của v_n	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	+	$+\infty$
$L > 0$	0	-	$-\infty$
$L < 0$	0	+	$-\infty$
$L < 0$	0	-	$+\infty$

Ví dụ 8. Tính các giới hạn sau:

- a) $\lim (2n^3 + 2n - 1)$ b) $\lim (n - 2n^3)$ c) $\lim \sqrt{n^2 + 2n + 7}$
 d) $\lim (\sqrt{n^2 - 3n} - \sqrt{n + 2})$ e) $\lim (1 - \sqrt{1 + 3n^2})$ f) $\lim (3^n - 2 \cdot 5^n)$

Ví dụ 9. Tính các giới hạn sau

- a) $\lim \frac{2^n + 5^{n+1}}{1 + 5^n}$ b) $\lim \frac{1 + 2 \cdot 3^n - 7^n}{5^n - 2 \cdot 6^n}$ c) $\lim \frac{1 - 2 \cdot 3^n + 7^n}{2^n(3^{n+1} - 5)}$

Ví dụ 10. Tính các giới hạn sau:

- a) $\lim \frac{2n^4 + n^2 - 3}{3n^3 - 2n^2 + 1}$ b) $\lim \frac{2n^3 + n + 4}{5n - n^2}$ c) $\lim \frac{(3n - 1)(n - 2)}{2n - 1}$
 d) $\lim \frac{2n + 5}{\sqrt{n^2 + 1} - n}$ e) $\lim \frac{2n + 5}{\sqrt{n + 1} - \sqrt{n}}$ f) $\lim \frac{(3n - 1)^4(n - 2)}{(1 - 2n)^2}$

DT 4 Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

- ⚙ Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q thỏa mãn $|q| < 1$ được gọi là *cấp số nhân lùi vô hạn*.
 ⚙ Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) , Xét $S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$. Khi đó, ta có công thức tính

$$S = \frac{u_1}{1 - q}$$

Ví dụ 11. Tính các tổng sau:

- a) $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$ b) $S = 16 - 8 + 4 - 2 + \dots$

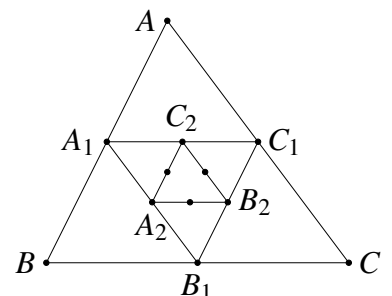
Ví dụ 12. Hãy biểu diễn các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số.

- a) $A = 0,353535\dots$ b) $B = 5,231231\dots$

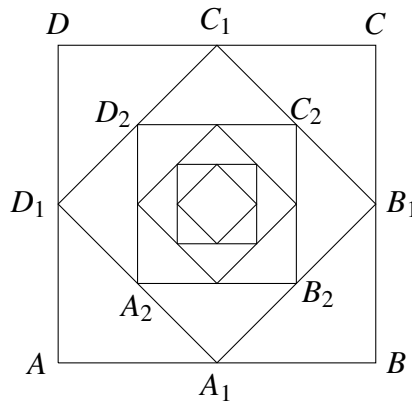
Ví dụ 13. Một bệnh nhân hàng ngày phải uống một viên thuốc 150 mg. Sau ngày đầu, trước mỗi lần uống, hàm lượng thuốc cũ trong cơ thể vẫn còn 5%. Tính lượng thuốc có trong cơ thể sau khi uống viên thuốc của ngày thứ 5. Ước tính lượng thuốc trong cơ thể nếu bệnh nhân sử dụng thuốc trong một thời gian dài.

Ví dụ 14.

Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác ABC được gọi là *tam giác trung bình* của tam giác ABC . Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \dots$ sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác giác đều cạnh bằng 3 và với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n , kí hiệu S_n tương ứng là diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$. Tính tổng $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$.



Ví dụ 15. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có các đỉnh là trung điểm của các cạnh của hình vuông $ABCD$, hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ có các đỉnh là trung điểm của các cạnh của hình vuông $A_1B_1C_1D_1$, hình vuông $A_3B_3C_3D_3$ có các đỉnh là trung điểm của các cạnh của hình vuông $A_2B_2C_2D_2$,..., hình vuông $A_nB_nC_nD_n$ có các đỉnh là trung điểm của các cạnh của hình vuông $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}$,... (quá trình chia nhỏ này được lặp lại vô hạn)



Gọi $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ lần lượt là diện tích hình vuông $A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2, A_3B_3C_3D_3, \dots, A_nB_nC_nD_n, \dots$. Tính tổng $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n + \dots$

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Cho hai dãy số $(u_n), (v_n)$ với $u_n = 3 + \frac{1}{n}; v_n = 5 - \frac{2}{n^2}$. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim u_n, \lim v_n$.

b) $\lim (u_n + v_n), \lim (u_n - v_n), \lim (u_n \cdot v_n), \lim \frac{u_n}{v_n}$.

2 Tính các giới hạn sau

a) $\lim \frac{3n+2}{2n+3}$.

b) $\lim \frac{4n^2-1}{2n^2+n}$.

c) $\lim \frac{\sqrt{n^2+2n}-3}{n+2}$.

d) $\lim \frac{\sqrt{n^2+2n}-n-1}{\sqrt{n^2+n}+n}$.

3 Tính các giới hạn sau

a) $\lim \frac{7 \cdot 5^n - 2 \cdot 7^n}{5^n - 5 \cdot 7^n}$.

b) $\lim \frac{4^{n+1} + 6^{n+2}}{5^n + 8^n}$.

4 Tính các giới hạn sau

a) $\lim (\sqrt{n^2+2n}-n)$.

b) $\lim (\sqrt{n^3+2n}-n^2)$.

c) $\lim (\sqrt{n^2+3n+2}-n+1)$.

d) $\lim (\sqrt{n^2+2n+3}-1+n)$.

5 Tính các giới hạn sau

a) $\lim \frac{\sin 10n + \cos 10n}{n^2+1}$.

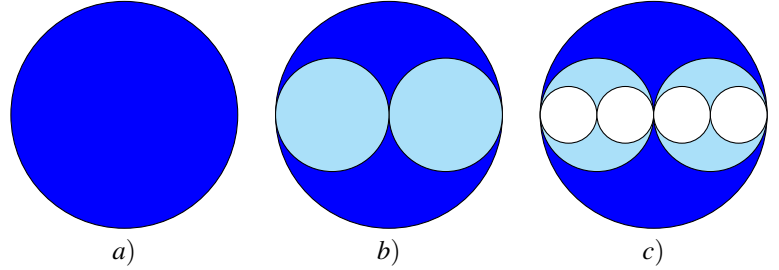
b) $\lim \frac{1 - \sin n\pi}{n+1}$.

- 6 Tính tổng của các cấp số nhân lùi vô hạn sau

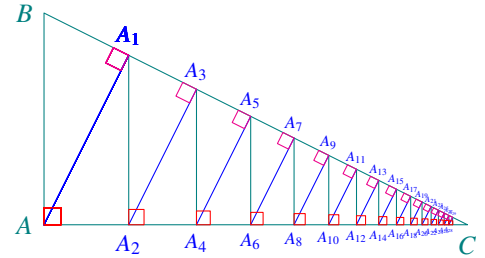
a) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \dots$ b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \dots$

- 7 Viết số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,444\dots$ dưới dạng một phân số.

- 8 Từ tờ giấy, cắt một hình tròn bán kính R (cm) như Hình a. Tiếp theo, cắt hai hình tròn bán kính $\frac{R}{2}$ rồi chồng lên hình tròn đầu tiên như Hình b. Tiếp theo, cắt bốn hình tròn bán kính $\frac{R}{4}$ rồi chồng lên các hình trước như Hình c. Cứ thế tiếp tục mãi. Tính tổng diện tích của các hình tròn.



- 9 Cho tam giác vuông ABC vuông tại A , có $AB = h$ và góc B bằng α (Hình vẽ bên). Từ A kẻ $AA_1 \perp BC$, từ A_1 kẻ $A_1A_2 \perp AC$, sau đó lại kẻ $A_2A_3 \perp BC$. Tiếp tục quá trình trên, ta được đường gấp khúc vô hạn $AA_1A_2A_3\dots$. Tính độ dài đường gấp khúc này theo h và α .



D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$ bằng

- A. ∞ . B. $+\infty$. C. 1. D. 0.

Câu 2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n$ bằng

- A. $-\infty$. B. 2. C. $+\infty$. D. 0.

Câu 3. Cho dãy số (u_n) có $\lim u_n = 2$. Tính giới hạn $\lim \frac{3u_n - 1}{2u_n + 5}$.

- A. $\frac{5}{9}$. B. $-\frac{1}{5}$. C. $+\infty$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 4. Cho dãy số $(u_n), (v_n)$ thỏa $\lim u_n = 2, \lim v_n = 1$. Tính $\lim (2u_n - 3v_n)$.

- A. 3. B. 7. C. 2. D. 1.

Câu 5. Nếu $\lim u_n = L$ (với $u_n \geq -9$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$) thì $\lim \sqrt{u_n + 9}$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. $L + 9$. B. $\sqrt{L + 9}$. C. $\sqrt{L} + 3$. D. $L + 3$.

Câu 6. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = (-0,99)^n$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A. $\lim u_n = +\infty$. B. $\lim u_n = 0$.
C. Không tồn tại $\lim u_n$. D. $\lim u_n = -\infty$.

Câu 7. Giá trị của giới hạn $\lim \left(4 + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)$ bằng

- A. 1. B. 3. C. 4. D. 2.

Câu 8. Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3}{4n^2 - 2n + 1}$ là

- A. $-\frac{3}{4}$. B. $-\infty$. C. 0. D. -1 .

Câu 9. Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 2n^2}{n^3 + 3n - 1}$ bằng

- A. 2. B. 1. C. $\frac{2}{3}$. D. 0.

Câu 10. Tính giới hạn $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 5}{2n^2 + 1}$.

- A. $L = \frac{3}{2}$. B. $L = \frac{1}{2}$. C. $L = 2$. D. $L = 1$.

Câu 11. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{4n^2 + n + 2}{an^2 + 5}$. Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 2, giá trị của a là

- A. $a = -4$. B. $a = 4$. C. $a = 3$. D. $a = 2$.

Câu 12. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

- A. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 2n^3}{2n^2 - 1}$. B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3}{-2n^3 - 4}$. C. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 3n^3}{-2n^2 - 1}$. D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n^4}{-2n^4 + n^2}$.

Câu 13. Dãy số nào sau đây có giới hạn là $+\infty$?

- A. $u_n = \frac{1 + n^2}{5n + 5}$. B. $u_n = \frac{n^2 - 2}{5n + 5n^3}$. C. $u_n = \frac{n^2 - 2n}{5n + 5n^2}$. D. $u_n = \frac{1 + 2n}{5n + 5n^2}$.

Câu 14. Dãy số nào sau đây có giới hạn là $-\infty$?

- A. $u_n = \frac{1 + 2n}{5n + 5n^2}$. B. $u_n = \frac{n^3 + 2n - 1}{-n + 2n^3}$. C. $u_n = \frac{2n^2 - 3n^4}{n^2 + 2n^3}$. D. $u_n = \frac{n^2 - 2n}{5n + 1}$.

Câu 15. Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - n + 1} - n)$ là

- A. $-\frac{1}{2}$. B. 0. C. 1. D. $-\infty$.

Câu 16. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{an + 4}{5n + 3}$ trong đó a là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn bằng 2, giá trị của a là

- A. $a = 10$. B. $a = 8$. C. $a = 6$. D. $a = 4$.

Câu 17. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n + b}{5n + 3}$ trong đó b là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn, giá trị của b là

- A. b là một số thực tùy ý. B. $b = 2$.
C. không tồn tại b . D. $b = 5$.

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 3an^4}{(1 - a)n^4 + 2n + 1} > 0$.

- A. $a \leq 0; a \geq 1$. B. $0 < a < 1$. C. $a < 0; a > 1$. D. $0 \leq a < 1$.

Câu 19. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(-10; 10)$ để $L = \lim_{n \rightarrow \infty} (5n - 3(a^2 - 2)n^3) = -\infty$?

- A. 19. B. 3. C. 5. D. 10.

Câu 20. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,5111\ldots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính tổng $T = a + b$.

- A. 17. B. 68. C. 133. D. 137.

Câu 21. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $A = 0,353535 \dots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính $T = ab$.

- A. 3456. B. 3465. C. 3645. D. 3546.

Câu 22. Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn bằng 2, tổng của ba số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng $\frac{9}{4}$. Số hạng đầu u_1 của cấp số nhân đó là

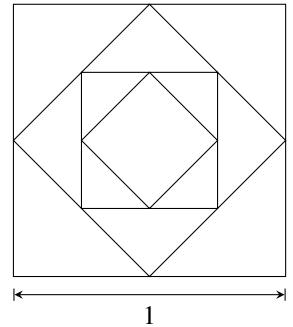
- A. $u_1 = 3$. B. $u_1 = 4$. C. $u_1 = \frac{9}{2}$. D. $u_1 = 5$.

Câu 23. Tính tổng $S = 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^{n-3}} + \dots$.

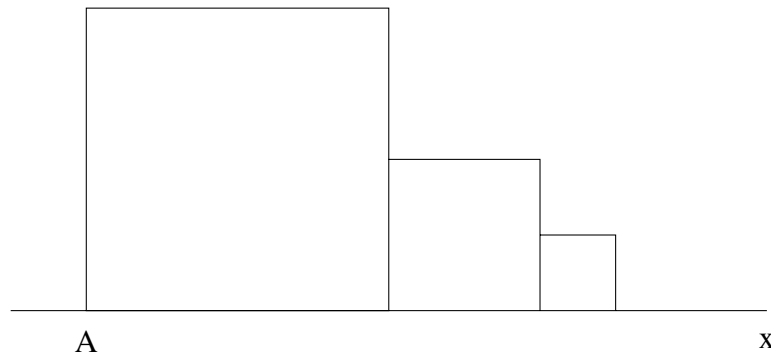
- A. $S = \frac{27}{2}$. B. $S = 14$. C. $S = 16$. D. $S = 15$.

Câu 24. Từ hình vuông có độ dài cạnh bằng 1, người ta nối các trung điểm của cạnh hình vuông để tạo ra hình vuông mới như hình bên. Tiếp tục quá trình này đến vô hạn. Tính tổng diện tích của tất cả các hình vuông được tạo thành.

- A. $\frac{5}{2}$. B. $\frac{3}{2}$. C. 2. D. 1.



Câu 25. Người ta xếp các hình vuông kề với nhau như trong hình dưới đây, mỗi hình vuông có độ dài cạnh bằng nửa độ dài cạnh của hình vuông trước nó. Nếu hình vuông đầu tiên có cạnh dài 10 cm thì trên tia Ax cần có một đoạn thẳng dài bao nhiêu xentimet để có thể xếp được tất cả các hình vuông đó?



- A. 20. B. 15. C. 22. D. 18.

—HẾT—

§2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa: Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$. Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ hay } f(x) \rightarrow L \text{ khi } x \rightarrow x_0$$

Nhận xét: $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ với c là hằng số.

Định lí về giới hạn hữu hạn:

a) Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$. Khi đó:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M;$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M;$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M;$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \text{ (nếu } M \neq 0 \text{)}.$$

b) Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

Giới hạn một bên:

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(x_0; b)$. Số L được gọi là giới hạn bên phải của hàm số $y = f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$. Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L.$$

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; x_0)$. Số L được gọi là giới hạn bên trái của hàm số $y = f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$. Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L.$$

Điều kiện để tồn tại giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

2 GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

Định nghĩa:

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; +\infty)$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$. Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L.$$

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(-\infty; a)$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \rightarrow -\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \rightarrow -\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$. Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L.$$

⚙ Chú ý:

- Với c, k là hằng số và k nguyên dương, ta luôn có:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} c = c$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} c = c$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x^k} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{c}{x^k} = 0.$$

- Định lí về giới hạn hữu hạn của hàm số khi $x \rightarrow x_0$ vẫn còn đúng khi $x \rightarrow +\infty$ hoặc $x \rightarrow -\infty$.

3 GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA HÀM SỐ

- Định nghĩa :** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; +\infty)$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là $-\infty$ khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow -\infty$. Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

- Nhận xét:** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (-f(x)) = -\infty.$

⚙ Một vài giới hạn đặc biệt:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$, với k nguyên dương.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ -\infty & \text{nếu } k \text{ lẻ.} \end{cases}$

⚙ Một vài quy tắc về giới hạn vô cực:

- Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x) \cdot g(x)$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$L > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$-\infty$	$+\infty$

- Quy tắc tìm giới hạn của thương $\frac{f(x)}{g(x)}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	$+$	$+\infty$
$L > 0$	0	$-$	$-\infty$
$L < 0$	0	$+$	$-\infty$
$L < 0$	0	$-$	$+\infty$

Các quy tắc trên vẫn đúng khi thay $x \rightarrow x_0$ bởi $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$ hoặc $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$.

Xét giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

 **Phương pháp giải:** Thay x_0 vào $\frac{f(x)}{g(x)}$ để kiểm tra, sẽ có một trong các trường hợp:

① Tử số $f(x_0) = a$ và mẫu số $g(x_0) = b \neq 0$, ta suy ra luôn kết quả

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{a}{b}.$$

② Cả tử số và mẫu số đều bằng 0 hay $f(x_0) = g(x_0) = 0$, ta xem đây là dạng vô định $\frac{0}{0}$. Khử dạng vô định này bằng cách phân tích nhân tử $x - x_0$.

Phân tích $f(x) = (x - x_0) \cdot f_1(x)$ và $g(x) = (x - x_0) \cdot g_1(x)$. Khi đó

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)f_1(x)}{(x - x_0)g_1(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \quad (1)$$

Ta tiếp tục tính giới hạn (1).

③ Tử số $f(x_0) \neq 0$ và mẫu số $g(x_0) = 0$. Ta áp dụng các định lý liên quan đến giới hạn vô cực để tìm kết quả.

 **Một số cách phân tích nhân tử thường dùng:**

- Nếu $f(x) = ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Nếu $f(x)$ là một đa thức bậc ba, bậc bốn,...ta có thể dùng phương pháp chia đa thức.
- Nếu $f(x)$ là biểu thức chứa căn, ta dùng cách nhân lượng liên hợp.

 **Ví dụ 1.** Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x}{4}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} + 1}{x^2 + 2}$.

 **Ví dụ 2.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 4x}$.

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{1 - 2x}$.

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 + x - 6}$.

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{3x^2 - 5x + 2}$.

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^3 - x - 6}$.

f) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 - 3x - 7}{x^3 + 1}$.

 **Ví dụ 3.** Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{2x - 2}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x+2} - 2}$.

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 - \sqrt{5 - x^2}}{x + 1}$.

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{4x+1}}{x^2 + 3x}$.

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 3x - 1} - 3}$.

f) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{\sqrt{x+5} - 2}$.

DT**2****Giới hạn của hàm số khi $x \rightarrow \pm\infty$. Khử dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}; \infty - \infty; 0 \cdot \infty$** **≡ Ví dụ 4.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x - 2}{3x + 1}$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x + 10}{x^3 + 3x - 3}$.

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^3 + 3}{2x^6 - 7}$.

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(\frac{2x^2}{x+1} - 1 \right)$.

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3x}{(x+1)(2x^2 - 3)}$.

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^2(2x+1)^2}{(2x^3+1)(x-2)^3}$.

≡ Ví dụ 5. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 5}}{5x - 1}$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2x}}{2x + 3}$.

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3}{\sqrt{4x^2 + 2x + x}}$.

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 7x + 1}}{3|x| - 7}$.

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2 + 2x}{8x^2 - x + 5}}$.

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt[3]{8x^3 + x^2 + 1}}$.

≡ Ví dụ 6. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 2x})$.

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} + x)$.

≡ Ví dụ 7. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x} - x)$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x} - \sqrt{x^2 + x})$.

≡ Ví dụ 8. Tính giới hạn của các hàm số sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^5 - x^4 + 4x^3 - 3)$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^5 - x^4 + 4x^3 - 3)$.

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 - x^2 + 4x + 2)$.

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 - x^2 + 4x + 2)$.

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x)$.

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - \sqrt{x^2 + x})$.

≡ Ví dụ 9. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 2x + 3}{x + 1}$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x + 10}{x^2 + 3x - 3}$.

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 + 5x^2 + 7}{x^3 - 15x}$.

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sqrt{x+1}}{2x - 7}$.

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + x} - x}$.

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + x} + x}$.

DT**3****Giới hạn một bên. Sự tồn tại giới hạn**

Phương pháp tính $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ hoàn toàn tương tự như bài toán tính $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

⚠ Lưu ý: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$.

≡ Ví dụ 10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{khi } x < 1 \\ x & \text{khi } x \geq 1. \end{cases}$ Tìm các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (nếu có).

≡ Ví dụ 11. Tính giới hạn của các hàm số sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2 - 2x + 6};$

b) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-x^2 + 5}{x - 3};$

c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x^2 + \sqrt{3-x}}{x-3};$

d) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{|x^2 - 4|}{x + 2}.$

DT

4

Vận dụng thực tiễn

≡ Ví dụ 12. Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(t) = \frac{50t}{t+4}$ ($t \geq 0$) bộ phận mỗi ngày sau t ngày đào tạo. Tính $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

≡ Ví dụ 13. Một cái hồ đang chứa 200 m³ nước mặn với nồng độ muối 10 kg/m³. Người ta ngọt hóa nước trong hồ bằng cách bơm nước ngọt vào hồ với vận tốc 2 m³/phút.

- Viết biểu thức $C(t)$ biểu thị nồng độ muối trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm.
- Tìm giới hạn $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t)$ và giải thích ý nghĩa.

≡ Ví dụ 14. Trong Thuyết tương đối của Einstein, khối lượng của vật chuyển động với vận tốc v cho bởi công thức

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

trong đó m_0 là khối lượng của vật khi nó đứng yên, c là vận tốc ánh sáng. Chuyện gì xảy ra với khối lượng của vật khi vận tốc của vật gần với vận tốc ánh sáng?

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < 0 \\ 1 & \text{khi } x > 0. \end{cases}$

- Tìm các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.
- Có tồn tại $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?

2

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{khi } x \leq -1 \\ x^2 + 2 & \text{khi } x > -1. \end{cases}$

Tìm các giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ (nếu có).

3 Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 - x - 5}{7x^2 + 5x - 2}.$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 - x^2}{x + 2}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3}.$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4}.$

4 Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 1}{2x}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{x^2 - 4}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{2x^3 - 3x^2}.$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x + 7} - x - 2}{x^3 - 4x + 3}.$

5 Tính các giới hạn một bên:

a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 2}{x - 1}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 - x + 1}{4 - x}.$

6 Cho hàm số $g(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|x - 2|}$. Tìm $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$.

7 Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 2x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 2} - x).$

8 Trong hồ có chứa 6000 lít nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối là 30 gam/lít vào hồ với tốc độ 15 lít/phút.

a) Chứng tỏ rằng nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm là $C(t) = \frac{30t}{400 + t}$ (gam/lít).

b) Nồng độ muối trong hồ như thế nào nếu $t \rightarrow +\infty$.

9 Cho hàm số $H(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < 0 \\ 1 & \text{nếu } t \geq 0 \end{cases}$ (hàm Heaviside, thường được dùng để mô tả việc chuyển trạng thái tắt/mở của dòng điện tại thời điểm $t = 0$). Tính $\lim_{t \rightarrow 0^+} H(t)$ và $\lim_{t \rightarrow 0^-} H(t)$.

10 Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số $C(x) = 50000 + 105x$.

a) Tính chi phí trung bình $\bar{C}(x)$ để sản xuất một sản phẩm.

b) Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{C}(x)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

11 Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 + 3ax - 4a}{x - 1} & \text{khi } x < 1 \\ 2bx + 1 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Biết rằng a, b là các số thực thỏa mãn hàm số $f(x)$ có giới hạn tại $x = 1$.

a) Tìm mối quan hệ giữa a và b .

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2$.

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$. Tìm khẳng định **sai**?

- A. $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + 3] = 6$.
 B. $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{f(x) + 1} = 2$.
 C. $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) - 2x] = -1$.
 D. $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) - x^2] = 1$.

Câu 2. Biết $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -2$. Tìm khẳng định **đúng**?

- A. $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + 2g(x)] = -1$.
 B. $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + 2g(x)] = 1$.
 C. $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + 2g(x)] = 5$.
 D. $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + 2g(x)] = -6$.

Câu 3. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 7x + 11)$ có kết quả là

- A. 37. B. 38. C. 39. D. 40.

Câu 4. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3}{x^3 + 2}$ là

- A. 1. B. -2. C. 2. D. $-\frac{3}{2}$.

Câu 5. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3x^2 + 1} - x}{x - 1}$ là

- A. $-\frac{3}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 6. Kết quả của $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 15}{x - 2}$ là

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. $-\frac{15}{2}$. D. 1.

Câu 7. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2 - x|}{2x^2 - 5x + 2}$ là

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. $-\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{1-x}} & \text{với } x < 1 \\ \sqrt{3x^2 + 1} & \text{với } x \geq 1 \end{cases}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ là

- A. $+\infty$. B. 2. C. 4. D. $-\infty$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{1 - x} & \text{với } x < 1 \\ \sqrt{2x - 2} & \text{với } x \geq 1 \end{cases}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ là

- A. $+\infty$. B. -1. C. 0. D. 1.

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{với } x > 3 \\ 1 & \text{với } x = 3 \\ 3 - 2x^2 & \text{với } x < 3 \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

- A. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 6$.
 B. Không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.
 C. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 6$.
 D. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -15$.

Câu 11. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$ là

A. 0.

B. $+\infty$.

C. 3.

D. Không xác định.

Câu 12. Biết rằng $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{2x^3 + 6\sqrt{3}}{3 - x^2} = a\sqrt{3} + b$. Tính $a^2 + b^2$.

A. 10.

B. 25.

C. 5.

D. 13.

Câu 13. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - x^3 + 1)$ là

A. 1.

B. $-\infty$.

C. 0.

D. $+\infty$.

Câu 14. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (|x|^3 + 2x^2 + 3|x|)$ là

A. 0.

B. $+\infty$.

C. 1.

D. $-\infty$.

Câu 15. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1 + 2x^2} - x)$ là

A. 0.

B. $+\infty$.C. $\sqrt{2} - 1$.D. $-\infty$.

Câu 16. Biết rằng $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{5x^2 + 2x} + x\sqrt{5}) = a\sqrt{5} + b$. Tính $S = 5a + b$.

A. $S = 1$.B. $S = -1$.C. $S = 5$.D. $S = -5$.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

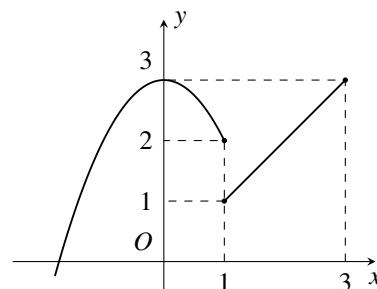
Tính $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$.

A. 5.

B. 4.

C. 2.

D. 0.



Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

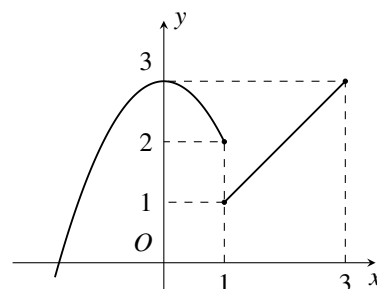
Tính $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

A. 5.

B. 4.

C. 2.

D. 0.



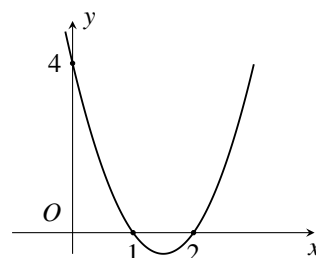
Câu 19. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên.

Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{3x^2 + 1}$.

A. $\frac{1}{3}$.B. $\frac{2}{3}$.

C. 2.

D. 1.



Câu 20. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1}$. Biết rằng $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0$. Tính $m + n$.

A. $m + n = 0$.B. $m + n = 1$.C. $m + n = -1$.D. $m + n = 3$.

—HẾT—

§3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

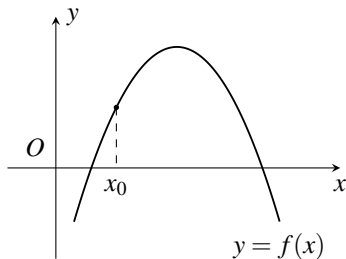
1 HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục** tại x_0 nếu

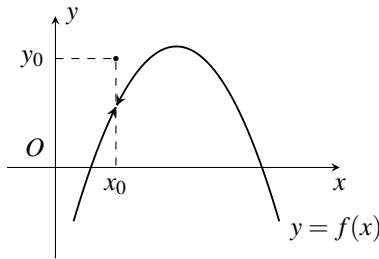
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

! Nếu hàm số không liên tục tại x_0 thì ta nói hàm số đó **gián đoạn** tại x_0 .

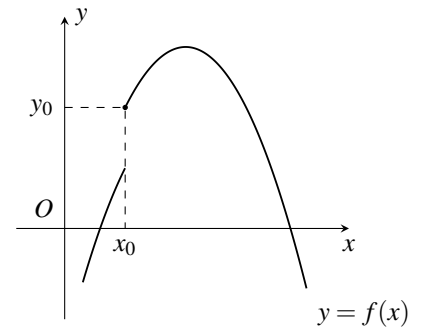
Minh họa đồ thị:



Hàm số liên tục tại x_0



Hàm số gián đoạn tại x_0



Hàm số gián đoạn tại x_0

2 HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG

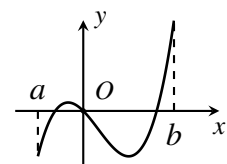
Định nghĩa: Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên một khoảng** nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

Chú ý:

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên đoạn** $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.
- Khái niệm hàm số **liên tục trên nửa khoảng** như $[a; b)$, $[a; +\infty)$, ... được định nghĩa một cách tương tự như liên tục trên đoạn.



- Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng** là một “đường liền” trên khoảng đó. Hình bên là đồ thị của một hàm số liên tục trên $(a; b)$.
- Hàm số đa thức và các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.
- Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) và các hàm số $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sqrt{x}$ liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.



3 MỘT SỐ ĐỊNH LÝ CƠ BẢN

 **Định lý 1.** Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0 . Khi đó

- Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại x_0 .
- Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

 **Định lý 2.** Sự tồn tại nghiệm của phương trình trên một khoảng

- Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$, thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.
- Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(a; b)$.

B

PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D . Để xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 \in D$, ta thực hiện các bước sau:

 Bước 1. Tính $f(x_0)$.

 Bước 2. Tìm $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

 Bước 3. So sánh và rút ra kết luận.

- Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ thì hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm x_0 .
- Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ thì hàm số $f(x)$ không liên tục (gián đoạn) tại điểm x_0 .

 **Ví dụ 1.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 4x - 7 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

 **Ví dụ 2.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ -2 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$.

 **Ví dụ 3.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{2x - 3}}{2 - x} & \text{nếu } x \neq 2 \\ -1 & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

 **Ví dụ 4.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{nếu } x > 0 \\ x & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 0$.

Ví dụ 5. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} & \text{nếu } x > 5 \\ (x-5)^2 + 3 & \text{nếu } x \leq 5 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 5$.

DT 2 Xét tính liên tục của hàm số trên miền xác định

-  Hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$.
-  Hàm phân thức hữu tỉ, hàm lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

Ví dụ 6. Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ -3 & \text{khi } x = -1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{(x-1)^2} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$.

Ví dụ 7. Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & \text{khi } x \geq 2 \\ 6x + 1 & \text{khi } x < 2. \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 5 & \text{khi } x > 1 \\ 3 & \text{khi } x = 1 \\ 2x + 1 & \text{khi } x < 1. \end{cases}$

Ví dụ 8. Tìm các giá trị của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{nếu } x \leq a \\ x^2 & \text{nếu } x > a \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

DT 3 Tìm giá trị của tham số để hàm số liên tục - gián đoạn tại điểm cho trước.

Ví dụ 9. Tìm tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - m & \text{khi } x \neq 2 \\ x + m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 2$.

Ví dụ 10. Tìm tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ m^2 + 5m & \text{khi } x = -1 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = -1$.

Ví dụ 11. Tìm tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x+5}-3}{x^2-1} & \text{khi } x > 1 \\ 2m+3 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ gián đoạn tại $x_0 = 1$.

DT 4 Chứng minh phương trình có nghiệm

-  Để chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên D , ta chứng minh hàm số $y = f(x)$ liên tục trên D và có hai số $a, b \in D$ sao cho $f(a) \cdot f(b) < 0$.
-  Để chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có k nghiệm trên D , ta chứng minh hàm số $y = f(x)$ liên tục trên D và tồn tại k khoảng rời nhau $(a_i; a_{i+1})$ ($i = 1, 2, \dots, k$) nằm trong D sao cho $f(a_i) \cdot f(a_{i+1}) < 0$.

Ví dụ 12. Chứng minh rằng phương trình $2x^4 - 2x^3 - 3 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$.

Ví dụ 13. Chứng minh rằng phương trình $6x^3 + 3x^2 - 31x + 10 = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Xét tính liên tục của hàm số:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ 1 - x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ tại điểm $x = 0$.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{khi } x \geq 1 \\ x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ tại điểm $x = 1$.

2 Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{khi } x \neq -2 \\ a & \text{khi } x = -2 \end{cases}$ Tìm a để hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

3 Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x^2-4} & \text{khi } x \neq 2 \\ 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$

4 Một bãi đậu xe ô-tô đưa ra giá $C(x)$ (đồng) khi thời gian đậu xe là x (giờ) như sau:

$$C(x) = \begin{cases} 60.000 & \text{khi } 0 < x \leq 2 \\ 100.000 & \text{khi } 2 < x \leq 4 \\ 200.000 & \text{khi } 4 < x \leq 24 \end{cases}$$

Xét tính liên tục của hàm số $C(x)$.

5 Lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một đơn vị khối lượng ở khoảng cách r tính từ tâm của nó là $F(r) = \begin{cases} \frac{GM}{R^3} & \text{khi } 0 < r \leq R \\ \frac{GM}{r^2} & \text{khi } r \geq R \end{cases}$, trong đó M là khối lượng, R là bán kính của Trái Đất, G là hằng số hấp dẫn. Hàm số $F(r)$ có liên tục trên $(0; +\infty)$ không?

6 Chứng minh rằng phương trình $x^4 - x^3 - 2x^2 - 15x - 25 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm và ít nhất một nghiệm dương.

7 Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 4x^2 - 2 = 0$ có ba nghiệm trong khoảng $(-4; 1)$.

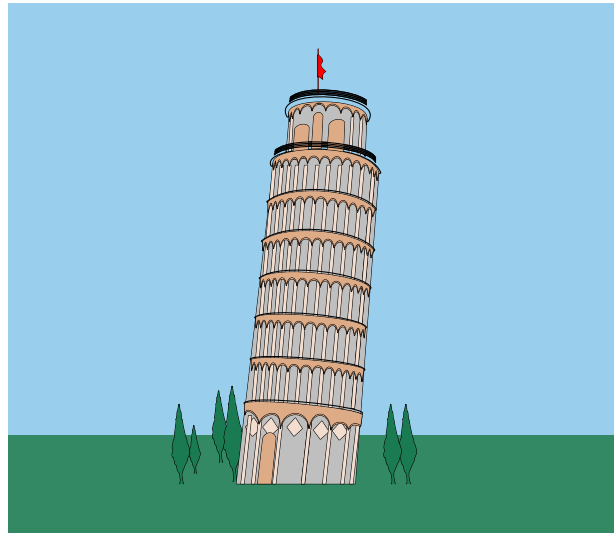
8 Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 5x^3 + 4x - 1 = 0$ có đúng năm nghiệm.

9 Chứng minh rằng phương trình $x + 1 + \cos x = 0$ có nghiệm.

10 Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{nếu } x < 2 \\ 4 & \text{nếu } x = 2 \\ -3x + b & \text{nếu } x > 2 \end{cases}$

- a) Với $a = 0, b = 1$, xét tính liên tục của hàm số tại $x = 2$.
- b) Với giá trị nào của a, b thì hàm số liên tục tại $x = 2$?
- c) Với giá trị nào của a, b thì hàm số liên tục trên tập xác định?

11 Từ độ cao 55,8 m của tháp nghiêng Pisa nước Ý, người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất hình bên dưới. Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó chạm đất n lần. Tính $\lim S_n$.

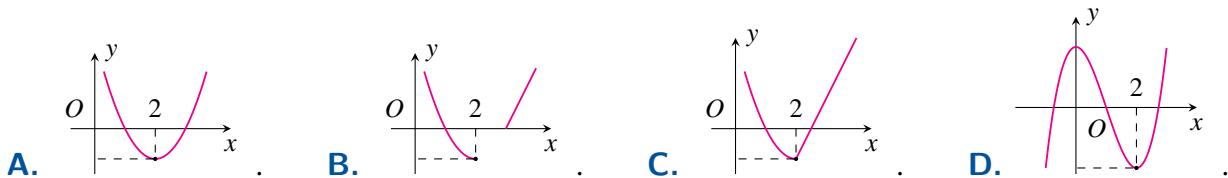


D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$. Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 nếu

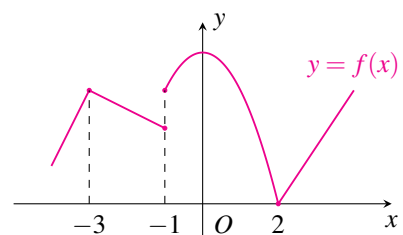
- A. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$. B. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$. C. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. D. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Câu 2. Trong bốn đồ thị sau, có một đồ thị không liên tục tại điểm $x = 2$. Hỏi đó là đồ thị nào?



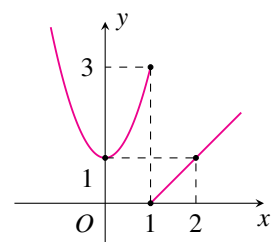
Câu 3. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. Hàm số liên tục tại $x = -3$. B. Hàm số liên tục tại $x = -1$.
C. Hàm số liên tục tại $x = 0$. D. Hàm số liên tục tại $x = 2$.



Câu 4. Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị dưới đây gián đoạn tại điểm có hoành độ bằng bao nhiêu?

- A. $x = 1$. B. $x = 0$.
C. $x = 2$. D. $x = 3$.



Câu 5. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số liên tục tại $x = 1$. Biết $f(1) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow 1} [2f(x) - g(x)] = 3$. Tính $g(1)$.

A. $g(1) = -2$.

B. $g(1) = 2$.

C. $g(1) = -1$.

D. $g(1) = 1$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = \frac{x-2}{x^2-3x+2}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.B. $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(2; +\infty)$.C. $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.D. $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 7. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ gián đoạn tại $x = 1$.B. Hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ liên tục trên $(0; 2)$.C. Hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.D. Hàm số $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2+3x-4}{x+4}$ với $x \neq -4$. Để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = -4$ thì ta cần bổ sung giá trị $f(-4)$ bằng bao nhiêu?

A. 5.

B. -5.

C. 3.

D. 0.

Câu 9. Hàm số nào dưới đây gián đoạn tại điểm $x = 1$?

A. $y = \frac{x-1}{x^2+x+1}$.

B. $y = \frac{x^2-x+1}{x+1}$.

C. $y = (x-1)(x^2+x+1)$.

D. $y = \frac{x^2+2}{x-1}$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Với giá trị nào của tham số m thì hàm số đã cho liên tục tại điểm $x = 2$?

A. $m = 1$.

B. $m = 3$.

C. $m = -1$.

D. $m = -3$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ m & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$, với m tham số thực. Tìm m để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

A. $m = -2$.

B. $m = 1$.

C. $m = -1$.

D. $m = 2$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x^2-4}-2}{x-2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ a & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$. Tìm a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 2$.

A. 2.

B. 4.

C. 6.

D. 8.

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2+m & \text{khi } x \geq 2 \\ 3x-1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$ (m là tham số). Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = 2$.

A. $m = 0$.

B. $m = 2$.

C. $m = 1$.

D. $m = 3$.

Câu 14. Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 2x+a & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

A. 1.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{15}{4}$.

D. $-\frac{15}{4}$.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ n & \text{khi } x = 1 \\ mx + 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Biết hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$. Giá trị của m, n là

- A. $n = m = 1$. B. $n = 1, m = 0$. C. $n = -1, m = 0$. D. $n = 0, m = 1$.

Câu 16. Tìm P để hàm số $y = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ 6Px - 3 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

- A. $P = \frac{1}{3}$. B. $P = \frac{5}{6}$. C. $P = \frac{1}{6}$. D. $P = \frac{1}{2}$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 2a - \frac{5}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tìm giá trị thực của tham số a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

- A. $a = \frac{3}{4}$. B. $a = -\frac{3}{4}$. C. $a = \frac{4}{3}$. D. $a = -\frac{4}{3}$.

Câu 18. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

- A. $m = 3$. B. $m = 1$. C. $m = \frac{3}{4}$. D. $m = \frac{1}{2}$.

Câu 19. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} & \text{khi } x < -1 \\ mx + 2 & \text{khi } x \geq -1 \end{cases}$ liên tục tại $x = -1$.

- A. $m = \frac{5}{2}$. B. $m = \frac{3}{2}$. C. $m = -\frac{3}{2}$. D. $m = -\frac{5}{2}$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 1} & \text{nếu } x > 1 \\ ax + 2 & \text{nếu } x \leq 1 \end{cases}$. Giá trị của a để hàm số liên tục tại $x = 1$ thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(-4; -2)$. B. $(-2; 0)$. C. $(2; 4)$. D. $(0; 2)$.

—HẾT—

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG. QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

§1. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN

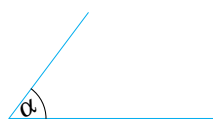
A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

⚙ **Mặt phẳng:** Để biểu diễn mặt phẳng, người ta dùng hình bình hành hay một miền góc



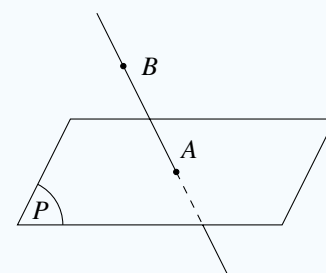
Kí hiệu (P) hoặc $mp(P)$



Kí hiệu (α) hoặc $mp(\alpha)$

⚙ **Điểm thuộc mặt phẳng:** Cho điểm A, B và mặt phẳng (α) .

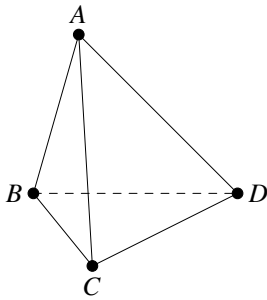
- ① Khi A thuộc mặt phẳng (α) , ta kí hiệu $A \in (\alpha)$.
 - ② Khi B không thuộc mặt phẳng (α) , ta kí hiệu $B \notin (\alpha)$.
- ⚠ **Dấu hiệu nhận biết** $A \in (\alpha)$ là điểm A thuộc một đường thẳng nằm trong (α)



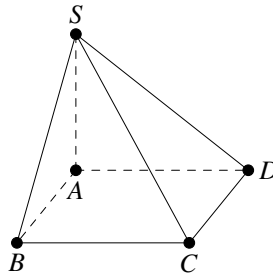
⚙ **Biểu diễn hình không gian lên một mặt phẳng:**

- ① Dùng nét vẽ liền để biểu diễn cho những đường trông thấy và dùng nét đứt đoạn (---) để biểu diễn cho những đường bị che khuất.
- ① Quan hệ thuộc, song song được giữ nguyên, nghĩa là
 - Nếu hình thực tế điểm A thuộc đường thẳng Δ thì hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ đó.
 - Nếu hình thực tế hai đường thẳng song song thì hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ đó.

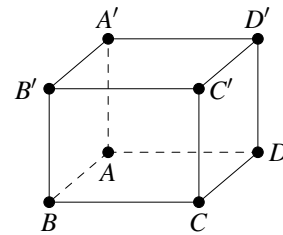
Hình biểu diễn của các mô hình không gian thường gặp:



Hình tứ diện



Hình chóp tứ giác đáy hình bình hành



Hình lập phương, hộp chữ nhật

2 CÁC TÍNH CHẤT THỪA NHẬN

Xét trong không gian, ta thừa nhận các tính chất sau:

- ⚙ **Tính chất 1:** Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.
- ⚙ **Tính chất 2:** Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.
- ⚙ **Tính chất 3:** Tồn tại 4 điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

Một mặt phẳng hoàn toàn xác định nếu biết ba điểm không thẳng hàng thuộc mặt phẳng đó. Ta kí hiệu mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C là (ABC) . Nếu có nhiều điểm cùng thuộc một mặt phẳng thì ta nói những điểm đó *đồng phẳng*. Nếu *không* có mặt phẳng nào chứa các điểm đó thì ta nói những điểm đó *không đồng phẳng*.

- ⚙ **Tính chất 4:** Nếu một đường thẳng có hai điểm thuộc một mặt phẳng thì tất cả các điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

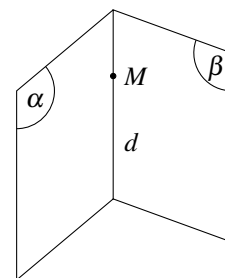
Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α) .

- ① Khi d nằm trong (α) , ta kí hiệu $d \subset (\alpha)$ hoặc $(P) \supset d$. (không được viết $d \in (\alpha)$ nhé!!!)
- ② Khi d không nằm trong (α) , ta kí hiệu $d \not\subset (\alpha)$.

⚠ **Dấu hiệu nhận biết $d \subset (\alpha)$ là trên d có hai điểm phân biệt thuộc (α)**

- ⚙ **Tính chất 5:** Nếu hai mặt phẳng phân biệt có điểm chung thì các điểm chung của hai mặt phẳng là một đường thẳng đi qua điểm chung đó.

Đường thẳng chung d (nếu có) của hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng đó và kí hiệu là $d = (P) \cap (Q)$.



⚙️ **Tính chất 6:** Trên mỗi mặt phẳng các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

3 CÁCH XÁC ĐỊNH MỘT MẶT PHẪNG

Ba cách xác định một mặt phẳng

- Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng của mặt phẳng, kí hiệu (ABC) .
- Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua một đường thẳng d và một điểm A không thuộc d , kí hiệu (A, d) .
- Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua hai đường thẳng a, b cắt nhau, kí hiệu (a, b) .

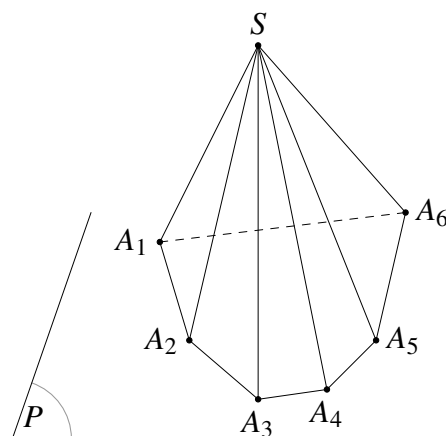
4 HÌNH CHÓP VÀ HÌNH TỨ DIỆN

⚙️ **Hình chóp:**

✓ **Định nghĩa:** Cho đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ và cho điểm S nằm ngoài mặt phẳng chứa đa giác đó. Nối S với các đỉnh $A_1, A_2, \dots, A_n$ ta được n miền đa giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_{n-1}A_n$. Hình gồm n tam giác đó và đa giác $A_1A_2A_3 \dots A_n$ được gọi là hình chóp $S.A_1A_2A_3 \dots A_n$.

✓ **Các tên gọi:**

- Điểm S gọi là đỉnh của hình chóp.
- Đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ gọi là mặt đáy của hình chóp.
- Các đoạn thẳng $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ gọi là các cạnh đáy của hình chóp.
- Các đoạn thẳng $SA_1, SA_2, \dots, SA_n$ gọi là các cạnh bên của hình chóp.
- Các miền tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_{n-1}A_n$ gọi là các mặt bên của hình chóp.

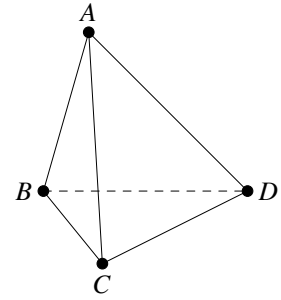


⚙️ **Hình tứ diện:**

✓ **Định nghĩa:** Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ACD, ABD, BCD được gọi là hình tứ diện và được kí hiệu là $ABCD$.

☑ **Chú ý:**

- Hai cạnh không có đỉnh chung gọi là hai cạnh đối diện, đỉnh không nằm trên một mặt được gọi là đỉnh đối diện với mặt đó.
- Hình chóp tam giác còn được gọi là hình tứ diện.
- Hình tứ diện có bốn mặt là những tam giác đều hay có tất cả các cạnh bằng nhau được gọi là hình tứ diện đều.



Hình tứ diện

B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Các quan hệ cơ bản

- ① Chứng minh điểm A thuộc (α) : Ta chứng tỏ điểm A thuộc đường thẳng Δ nằm trong α , nghĩa là

$$\begin{cases} A \in \Delta \\ \Delta \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow A \in (\alpha).$$

- ② Chứng minh đường thẳng d nằm trong (α) : Ta chứng tỏ d có hai điểm phân biệt cùng thuộc (α) , nghĩa là

$$\begin{cases} A \in (\alpha) \\ B \in (\alpha) \\ A, B \in d \end{cases} \Rightarrow d \subset (\alpha).$$

- ③ Chứng minh A là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (β) : Ta thường sử dụng một trong hai cách sau

$$\begin{cases} A \in (\alpha) \\ A \in (\beta) \end{cases} \Rightarrow A \in (\alpha) \cap (\beta).$$

hoặc

$$\begin{cases} d \subset (\alpha) \\ \Delta \subset (\beta) \\ d \cap \Delta = A \end{cases} \Rightarrow A \in (\alpha) \cap (\beta).$$

≡ Ví dụ 1. Cho tam giác ABC và điểm S không thuộc mặt phẳng (ABC) . Lấy D, E là các điểm lần lượt thuộc các cạnh SA, SB (D, E khác S).

- Đường thẳng DE có nằm trong mặt phẳng (SAB) không?
- Giả sử DE cắt AB tại F . Chứng minh rằng F là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (CDE) .

≡ Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi O là giao điểm của AC và BD . Lấy M, N lần lượt thuộc các cạnh SA, SC .

- Chứng minh rằng đường thẳng MN nằm trong mặt phẳng (SAC) .
- Chứng minh rằng O là điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) .

≡ Ví dụ 3. Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm cạnh CD . Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, CDA .

a) Chứng minh rằng các điểm M, N thuộc mặt phẳng (ABI) .

b) Gọi G là giao điểm của AM và BN . Chứng minh rằng $\frac{GM}{GA} = \frac{GN}{GB} = \frac{1}{3}$.

DT**2****Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng**

Cho hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau. Để xác định giao tuyến của chúng, ta đi tìm hai điểm chung phân biệt. Cụ thể, ta thường gặp một trong ba trường hợp sau:

- ① Hai mặt phẳng (α) và (β) có sẵn hai điểm chung phân biệt: Khi đó giao tuyến là đường thẳng qua hai điểm chung đó.
- ② Hai mặt phẳng (α) và (β) thấy trước một điểm chung A :
 - A là điểm chung thứ nhất hay $A \in (\alpha) \cap (\beta)$.
 - Ta tìm điểm chung thứ 2: Trong (α) tìm một đường thẳng d_1 , trong (β) tìm một đường thẳng d_2 sao cho chúng có thể cắt nhau (đồng phẳng). Gọi $B = d_1 \cap d_2$, suy ra $B \in (\alpha) \cap (\beta)$. Vậy $AB = (\alpha) \cap (\beta)$.
- ③ Hai mặt phẳng (α) và (β) chưa thấy điểm chung: Ta mở rộng mặt phẳng để tìm điểm chung tương tự như cách tìm điểm chung ở mục số ②.

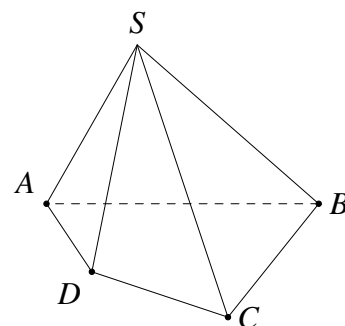
Ví dụ 4.

Cho tứ giác $ABCD$ sao cho các cạnh đối không song song với nhau. Lấy một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định giao tuyến của

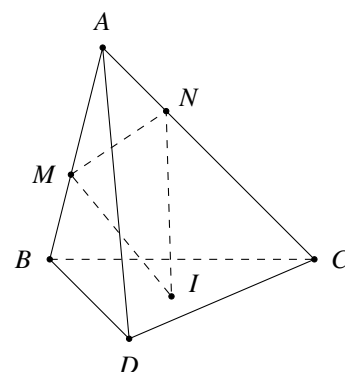
a) Mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SBD) .

b) Mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SCD) .

c) Mặt phẳng (SAD) và mặt phẳng (SBC) .

**Ví dụ 5.**

Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm M thuộc cạnh AB , N thuộc cạnh AC sao cho MN cắt BC . Gọi I là điểm bên trong tam giác BCD . Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNI) với các mặt phẳng (ABC) , (BCD) , (ABD) , (ACD) .



Ví dụ 6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm các cạnh AD, BC .

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và mặt phẳng (JAD) .

b) Lấy điểm M thuộc cạnh AB , N thuộc cạnh AC sao cho M, N không là trung điểm. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (IBC) và mặt phẳng (DMN) .

- ### ≡ Ví dụ 8.

- ≡ **Ví dụ 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, P lần lượt là trung điểm của SA, BC . N là điểm trên cạnh SB sao cho $BN = \frac{1}{4}BS$. Xác định giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt phẳng

- a) $(ABCD)$. b) (SAD) . c) (SCD) .

Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

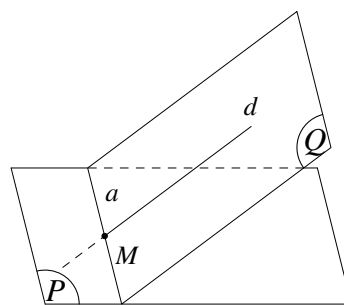
① Nếu đường thẳng a dễ tìm, nghĩa là có sẵn $a \subset (P)$ và a cắt được d . Khi đó

- Gọi $M = d \cap a$ thì $\begin{cases} M \in d \\ M \in a \subset (P) \end{cases}$.

- Vậy $M = d \cap (P)$.

② Nếu đường thẳng a khó tìm, ta thực hiện các bước sau:

- Tìm một mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và để tìm giao tuyến với (P) ;
- Tìm $(Q) \cap (P) = a$.
- Tìm $M = d \cap a$, suy ra $M = d \cap (P)$.



≡ Ví dụ 10. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC . K là điểm nằm trên BD sao cho $KD < KB$.

- Tìm giao điểm của CD với mặt phẳng (MNK) .
- Tìm giao điểm của AD với mặt phẳng (MNK) .

≡ Ví dụ 11. Cho tứ diện $ABCD$, trên cạnh AC và AD lấy hai điểm M, N sao cho $AC = 3AM$ và

$AN = \frac{2}{3}AD$. Gọi O là điểm bên trong tam giác (BCD) .

- Tìm giao điểm của BC với (OMN) .
- Tìm giao điểm của BD với (OMN) .

≡ Ví dụ 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC .

- Tìm giao điểm I của đường thẳng AM và mặt phẳng (SBD) . Chứng minh $IA = 2IM$.
- Tìm giao điểm E của đường thẳng SD và mặt phẳng (ABM) .
- Gọi N là một điểm tùy ý trên cạnh AB . Tìm giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) .

≡ Ví dụ 13. Cho tứ giác $ABCD$ và một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Trên đoạn AB lấy một điểm M , trên đoạn SC lấy một điểm N (M, N không trùng với các đầu mút).

- Tìm giao điểm của đường thẳng AN với mặt phẳng (SBD) .
- Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (SBD) .

DT

4

Chứng minh ba điểm thẳng hàng

! Muốn chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng, ta chứng minh ba điểm đó lần lượt thuộc hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) , nghĩa là chúng cùng nằm trên một đường giao tuyến.

- Ta có $A = a \cap b$, mà $a \subset (\alpha)$, $b \subset (\beta)$ nên

$$A \in (\alpha) \cap (\beta) \quad (1)$$

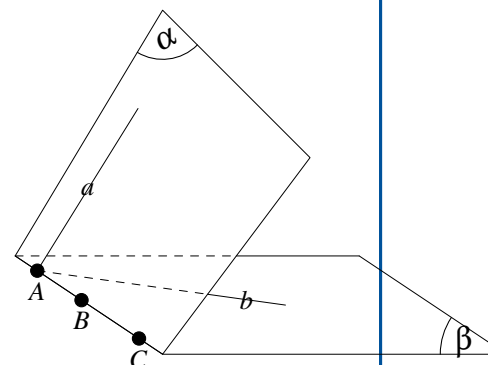
- Tương tự ta cũng tìm xem B và C tương ứng là giao của cặp đường thẳng nào nằm trong (α) và (β) . Từ đó, suy ra

$$B \in (\alpha) \cap (\beta) \quad (2)$$

và

$$C \in (\alpha) \cap (\beta) \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra A, B, C cùng thuộc đường giao tuyến nên chúng thẳng hàng.



≡ Ví dụ 14. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD , Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD .

- Tìm giao tuyến của (AND) và (ABP) .
- Gọi $I = AG \cap MP$, $J = CM \cap AN$. Chứng minh D, I, J thẳng hàng.

≡ Ví dụ 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của AC và BD ; M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD ; P thuộc đoạn SC và không là trung điểm của SC .

- Tìm giao điểm E của đường thẳng SO và mặt phẳng (MNP) .
- Tìm giao điểm Q của đường thẳng SA và mặt phẳng (MNP) .
- Gọi I, J, K lần lượt là giao điểm của QM và AB , QP và AC , QN và AD . Chứng minh rằng I, J, K

thẳng hàng.

DT

5

Vận dụng thực tiễn

Ví dụ 16. Giải thích tại sao ghế bốn chân có thể bị khập khiễng còn ghế ba chân thì không.

Ví dụ 17. Giải thích tại sao chân máy ảnh có thể đặt ở hầu hết các loại hình mà vẫn đứng vững.

Ví dụ 18. Hãy giải thích tại sao phần giao nhau giữa 2 vách tường nhà luôn là 1 đường thẳng

Ví dụ 19. Hãy giải thích vì sao khi gấp đôi một tờ giấy thì nếp gấp luôn là 1 đường thẳng

C

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Cho tứ diện $ABCD$. Trên AB, AC lấy 2 điểm M, N sao cho MN không song song BC . Gọi O là một điểm trong tam giác BCD .

- Tìm giao tuyến của (OMN) và (BCD) .
- Tìm giao điểm của DC, BD với (OMN) .

2 Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD . M, N, P lần lượt là các điểm trên SA, SB, SD .

- Tìm giao điểm I của SO với mặt phẳng (MNP) .
- Tìm giao điểm Q của SC với mặt phẳng (MNP) .

3 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AB song song với CD . O là giao điểm của hai đường chéo, M thuộc SB .

- Xác định giao tuyến của các cặp mặt phẳng: (SAC) và (SBD) ; (SAD) và (SBC) .
- Tìm giao điểm $SO \cap (MCD)$; $SA \cap (MCD)$.

4 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, SC .

- Tìm $I = AN \cap (SBD)$.
- Tìm $K = MN \cap (SBD)$.
- Tính tỉ số $\frac{KM}{KN}$.
- Chứng minh B, I, K thẳng hàng. Tính $\frac{IB}{IK}$.

5 Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm bất kỳ thuộc SB , N thuộc miền trong tam giác $S\Delta SCD$.

- Tìm giao điểm của MN và mặt phẳng $(ABCD)$
- Tìm $SC \cap (AMN)$ và $SD \cap (AMN)$
- Tìm $SA \cap (CMN)$

6 Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm AB , K là trọng tâm của tam giác ACD .

- Xác định giao tuyến của (AKM) và (BCD) .
- Tìm giao điểm H của MK và mp (BCD) . Chứng minh K là trọng tâm của tam giác ABH .

c) Trên BC lấy điểm N . Tìm giao điểm P, Q của CD, AD với $\text{mp}(MNK)$.

7 Cho tứ giác $ABCD$ và $S \notin (ABCD)$. Gọi I, J là hai điểm trên AD và SB , AD cắt BC tại O và OJ cắt SC tại M .

- Tìm giao điểm $K = IJ \cap (SAC)$.
- Xác định giao điểm $L = DJ \cap (SAC)$.
- Chứng minh A, K, L, M thẳng hàng.

8 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ và hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAD , M là trung điểm của SB .

- Tìm giao điểm N của MG và mặt phẳng $(ABCD)$.
- Chứng minh ba điểm C, D, N thẳng hàng và D là trung điểm của CN .

9 Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M là trung điểm của SC .

- Xác định giao tuyến của (ABM) và (SCD) .
- Gọi N là trung điểm của BO . Xác định giao điểm I của (AMN) với SD . Chứng minh $\frac{SI}{ID} = \frac{2}{3}$.

10 Cho tứ diện $SABC$. Gọi I, H lần lượt là trung điểm của SA, AB . Trên cạnh SC lấy điểm K sao cho $CK = 3SK$.

- Tìm giao điểm F của BC với mặt phẳng (IHK) . Tính tỉ số $\frac{FB}{FC}$.
- Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng IH . Tìm giao điểm của KM và mặt phẳng (ABC) .

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho tứ giác $ABCD$. Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng chứa tất cả các đỉnh của tứ giác $ABCD$?

- A. 1. B. 3. C. 0. D. 2.

Câu 2. Hình chóp tam giác có số cạnh là

- A. 6. B. 4. C. 5. D. 3.

Câu 3. Hình chóp lục giác có bao nhiêu mặt?

- A. 10. B. 6. C. 8. D. 7.

Câu 4. Các yếu tố nào sau đây xác định một mặt phẳng duy nhất?

- A. Một điểm và một đường thẳng. B. Hai đường thẳng cắt nhau.
C. Bốn điểm phân biệt. D. Ba điểm phân biệt.

Câu 5. Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.
B. Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung khác nữa.
C. Nếu ba điểm phân biệt cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt thì chúng thẳng hàng.
D. Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.

Câu 6. Cho 5 điểm A, B, C, D, E trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tạo bởi 3 trong 5 điểm đã cho?

A. 10.

B. 14.

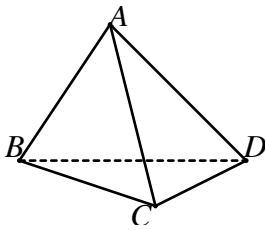
C. 12.

D. 8.

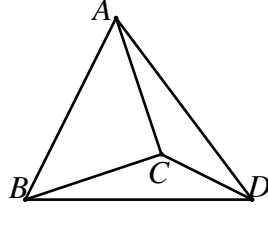
Câu 7. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. Qua 3 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.
- B. Qua 4 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.
- C. Qua 2 điểm phân biệt có duy nhất một mặt phẳng.
- D. Qua 3 điểm không thẳng hàng có duy nhất một mặt phẳng.

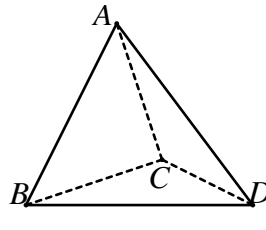
Câu 8. Cho các hình vẽ sau:



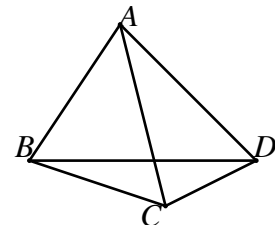
Hình (1)



Hình (2)



Hình (3)



Hình (4)

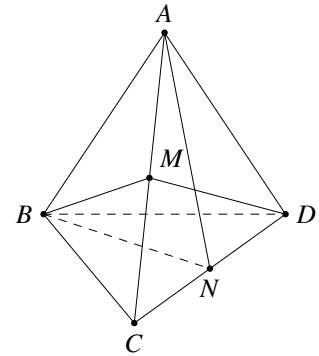
Trong các hình trên, những hình nào biểu diễn cho tứ diện?

- A. Hình (1) và hình (2).
- B. Hình (1), hình (2) và hình (3).
- C. Hình (1) và hình (3).
- D. Hình (1), hình (3) và hình (4).

Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, CD .

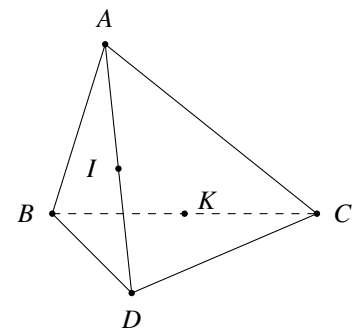
Giao tuyến của hai mặt phẳng (MBD) và (ABN) là

- A. đường thẳng BG (G là trọng tâm tam giác ACD).
- B. đường thẳng AH (H là trực tâm tam giác ACD).
- C. đường thẳng MN .
- D. đường thẳng AM .



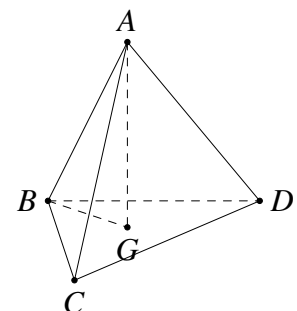
Câu 10. Cho 4 điểm không đồng phẳng A, B, C, D . Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AD và BC . Giao tuyến của (IBC) và (KAD) là

- A. IK .
- B. DK .
- C. AK .
- D. BC .



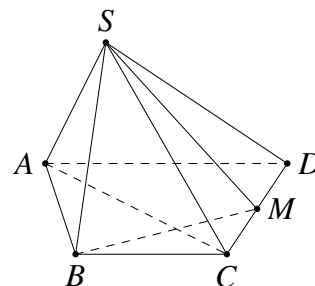
Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD . Giao tuyến của mặt phẳng (ACD) và (GAB) là

- A. AH (H là hình chiếu của B trên CD).
- B. AM (M là trung điểm của AB).
- C. AK (K là hình chiếu của C trên BD).
- D. AN (N là trung điểm của CD).



Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Gọi M là trung điểm CD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) là

- A. SJ (J là giao điểm của AM và BD).
- B. SI (I là giao điểm của AC và BM).
- C. SO (O là giao điểm của AC và BD).
- D. SP (P là giao điểm của AB và CD).

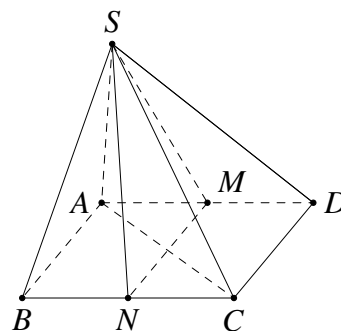


Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Khẳng định nào sau đây sai?

- A. Hình chóp $S.ABCD$ có 4 mặt bên.
- B. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SO (O là giao điểm của AC và BD).
- C. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là đường trung bình của $ABCD$.
- D. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là SI (I là giao điểm của AD và BC).

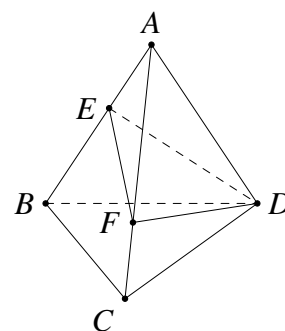
Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC . Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) là

- A. SG (G là trung điểm AB).
- B. SD .
- C. SO (O là tâm hình bình hành $ABCD$).
- D. SF (F là trung điểm CD).



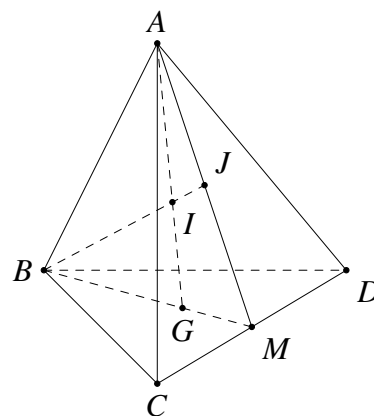
Câu 15. Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α) chứa tam giác BCD . Lấy E, F là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AB, AC . Khi EF và BC cắt nhau tại I thì I không phải là điểm chung của hai mặt phẳng nào sau đây?

- A. (BCD) và (ABC) .
- B. (BCD) và (ABD) .
- C. (BCD) và (AEF) .
- D. (BCD) và (DEF) .



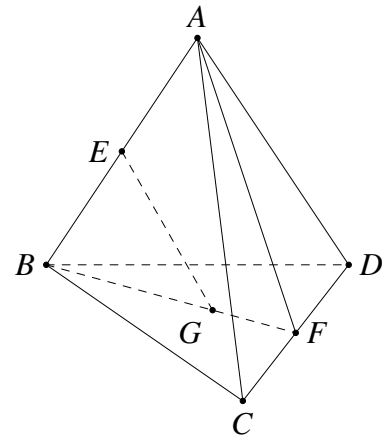
Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD , M là trung điểm CD , I là điểm ở trên đoạn thẳng AG , BI cắt mặt phẳng (ACD) tại J . Khẳng định nào sau đây sai?

- A. J là trung điểm của AM .
- B. $AM = (ACD) \cap (ABG)$.
- C. A, J, M thẳng hàng.
- D. $DJ = (ACD) \cap (BDJ)$.



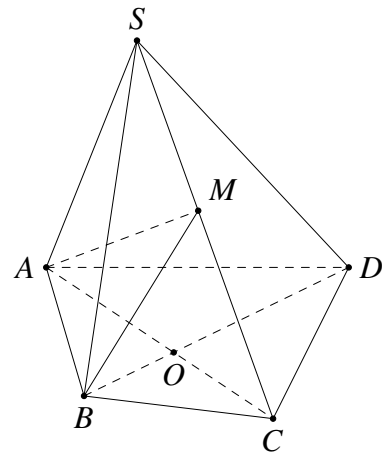
Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD ; G là trọng tâm tam giác BCD . Giao điểm của đường thẳng EG và mặt phẳng (ACD) là

- A. Giao điểm của đường thẳng EG và CD .
- B. Giao điểm của đường thẳng EG và AC .
- C. Giao điểm của đường thẳng EG và AF .
- D. Điểm F .



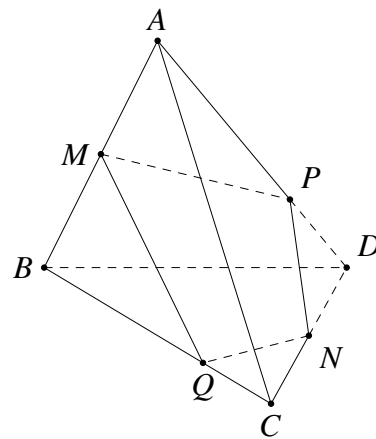
Câu 18. Cho tứ giác $ABCD$ có AC và BD giao nhau tại O và một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Trên đoạn SC lấy một điểm M không trùng với S và C . Giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (ABM) là

- A. Giao điểm của SD và BK (với $K = SO \cap AM$).
- B. Giao điểm của SD và AB .
- C. Giao điểm của SD và MK (với $K = SO \cap AM$).
- D. Giao điểm của SD và AM .



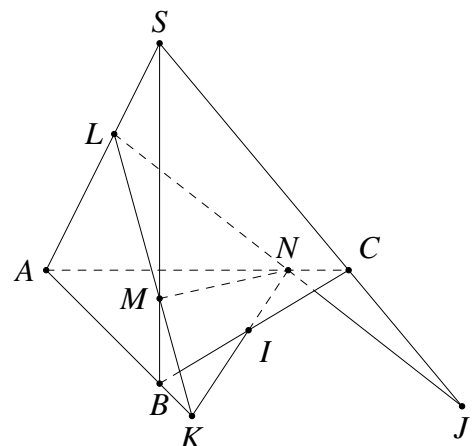
Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Mặt phẳng (α) qua MN cắt AD, BC lần lượt tại P và Q . Biết MP cắt NQ tại I . Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

- A. I, B, D .
- B. I, A, C .
- C. I, C, D .
- D. I, A, B .



Câu 20. Cho tứ diện $SABC$. Gọi L, M, N lần lượt là các điểm trên các cạnh SA, SB và AC sao cho LM không song song với AB, LN không song song với SC . Mặt phẳng (LMN) cắt các cạnh AB, BC, SC lần lượt tại K, I, J . Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

- A. M, K, J .
- B. N, I, J .
- C. K, I, J .
- D. M, I, J .



§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

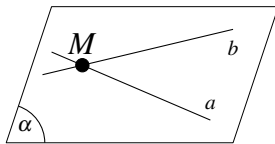
A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

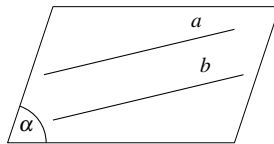
Trong không gian, cho hai đường thẳng a và b .

⚙️ Các trường hợp có thể xảy ra:

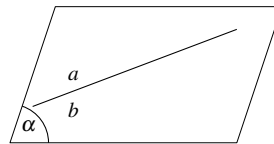
- Nếu a và b đồng phẳng (cùng thuộc một mặt phẳng) thì chúng có các khả năng: cắt nhau; song song nhau hoặc trùng nhau.
- Nếu a và b không đồng phẳng (không tồn tại mặt phẳng chứa được cả a và b) thì ta nói a và b chéo nhau.



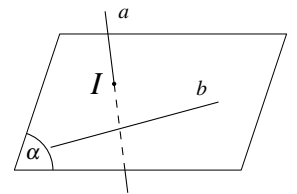
- * a cắt b
- * Kí hiệu $a \cap b = M$



- * a song song b
- * Kí hiệu $a \parallel b$



- * a trùng b
- * Kí hiệu $a \equiv b$



- * a chéo b
- * a, b không điểm chung

⚙️ Chú ý:

Cho hai đường thẳng a và b phân biệt.

- Khi kiểm tra hai đường thẳng a và b **song song** hay **cắt nhau** thì trước tiên chúng phải đồng phẳng (cùng thuộc một mặt phẳng nào đó);
- Khi a và b không có điểm chung thì chúng có thể song song hoặc chéo nhau. Vấn đề này các bạn hay bị nhầm lẫn, cần chú ý.

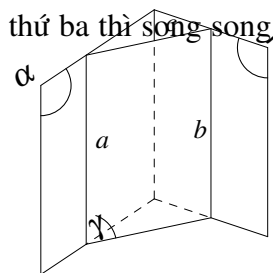
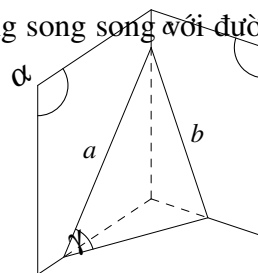
2 CÁC ĐỊNH LÝ VÀ HỆ QUẢ CẦN NHỚ

⚙️ **Định lý 1:** Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

⚙️ **Định lý 2:** Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

⚙️ **Định lý 3:** Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến đó hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.

⚠️ **Hệ quả:** Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.



DT

1

Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng a và b phân biệt. Xét vị trí tương đối của a với b , ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Kiểm tra xem hai đường thẳng a và b có đồng phẳng không?

- Nếu a và b không đồng phẳng thì a và b chéo nhau.
- Nếu a và b đồng phẳng chuyển sang bước 2.

Bước 2: Kiểm tra xem a và b có điểm chung hay không?

- Nếu a và b không có điểm chung thì $a \parallel b$.
- Nếu a và b có một điểm chung thì a và b cắt nhau.

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau

- a) AB và CD . b) SA và SC . c) SA và BC .

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau

- a) MN và BC . b) AN và CD . c) MN và CD .

DT

2

Chứng minh hai đường thẳng song song

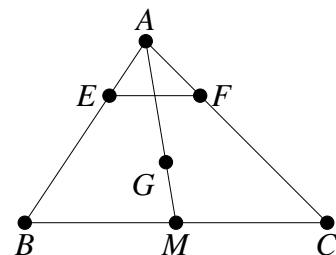
Phương pháp thường dùng:

① Sử dụng các kết quả của hình học phẳng như:

- Cặp cạnh đối hình bình hành thì song song nhau;...
- Đường trung bình của tam giác thì song song và bằng nửa cạnh đáy.

② Sử dụng tỉ lệ (Định lý Talet) (hình vẽ bên)

- Nếu $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$ thì $EF \parallel BC$.
- Chú ý tỉ lệ trọng tâm: $AG = \frac{2}{3}AM$.



Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$ có I, J lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và ABD . Chứng minh rằng $IJ \parallel CD$.

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AB là đáy lớn và $AB = 2CD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và SB . Chứng minh rằng $NC \parallel MD$.

Ví dụ 5. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD . Trên cạnh AC lấy điểm K . Gọi M là giao điểm của BK và AI , N là giao điểm của DK và AJ . Chứng minh rằng $MN \parallel BD$.

Ví dụ 6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC, BD .

- Chứng minh $MPNQ$ là hình bình hành.
- Chứng minh ba đoạn thẳng MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm G của mỗi đoạn.

Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm BC, CD, SB, SD .

- Chứng minh rằng $MN \parallel PQ$.
- Gọi I là trọng tâm của tam giác ABC , J thuộc SA sao cho $\frac{JS}{JA} = \frac{1}{2}$. Chứng minh $IJ \parallel SM$.

DT**3****Xác định giao tuyến d của hai mặt phẳng cắt nhau**

Ta thực hiện một trong hai cách sau đây:

- ✓ **Cách 1:** Tìm hai điểm chung phân biệt (đã xét ở bài học trước)
- ✓ **Cách 2:** Tìm 1 điểm chung. Sau đó nếu hai mặt phẳng có cặp đường thẳng song song nhau thì giao tuyến d sẽ đi qua điểm chung và song song (hoặc trùng) với một trong hai đường thẳng đó.

Ví dụ 8. Cho tứ diện $ABCD$. Trên AB, AC lần lượt lấy M, N sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (DBC) và (DMN) .

Ví dụ 9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BD ; G là trọng tâm tam giác ABC . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (MNG) .

Ví dụ 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SA . Điểm E, F lần lượt là trung điểm của AB và BC .

- Tìm $(SAB) \cap (SCD)$.
- Tìm $(MBC) \cap (SAD)$.
- Tìm $(MEF) \cap (SAC)$.
- Tìm $AD \cap (MEF)$.
- Tìm $SD \cap (MEF)$.

C**BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

- Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD . Chứng minh
 - $MN \parallel AD$ và $MN \parallel BC$;
 - $MO \parallel SC$ và $NO \parallel SB$.
- Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD . Gọi I, J, G lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, SAD và AOD . Chứng minh
 - $IJ \parallel MN$;
 - $IJ \parallel BD$ và $GJ \parallel SO$.
- Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SA và SB .

- a) Chứng minh $EF \parallel CD$. b) Tìm $I = AF \cap (SCD)$. c) Chứng minh $SI \parallel AB \parallel CD$.

4 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB . Gọi P là một điểm trên cạnh BC . Tìm giao tuyến của

- a) (SBC) và (SAD) ; b) (SAB) và (SCD) ; c) (MNP) và $(ABCD)$.

5 Cho tứ diện $SABC$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và AB , G là một điểm trên cạnh AC . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau

- a) (SAC) và (EFC) ; b) (SAC) và (EFG) .

6 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD , N là trung điểm SG . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ABN) và (SCD) .

7 Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, BC và Q là một điểm nằm trên cạnh AD ($QA \neq QD$) và P là giao điểm của CD với mặt phẳng (MNQ) . Chứng minh rằng $PQ \parallel MN$ và $PQ \parallel AC$.

8 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AD là đáy lớn và $AD = 2BC$. Gọi M, N, P lần lượt thuộc các đoạn SA, AD, BC sao cho $MA = 2MS, NA = 2ND, PC = 2PB$.

- a) Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau: (SAD) và (SBC) , (SAC) và (SBD) .
b) Xác định giao điểm Q của SB với (MNP) .
c) Gọi K là trung điểm của SD . Chứng minh $CK = (MQK) \cap (SCD)$.

9 Cho hình chóp $S.ABCD$ có O là tâm của hình bình hành $ABCD$, điểm M thuộc cạnh SA sao cho $SM = 2MA$, N là trung điểm của AD .

- a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (SAD) và (MBC) .
b) Tìm giao điểm I của SB và (CMN) , giao điểm J của SA và (ICD) .
c) Chứng minh ba đường thẳng ID, JC, SO cắt nhau tại E . Tính tỉ số $\frac{SE}{SO}$.

10 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA ; gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SM, SN, SP, SQ .

- a) Chứng minh rằng bốn điểm I, J, K, L đồng phẳng và tứ giác $IJKL$ là hình bình hành.
b) Chứng minh rằng $IK \parallel BC$.
c) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng $(IJKL)$ và (SBC) .

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Hai đường thẳng không có điểm chung thì

- A. chéo nhau. B. song song.
C. cắt nhau. D. chéo nhau hoặc song song.

Câu 2. Hai đường thẳng phân biệt không song song thì

- A. chéo nhau. B. có điểm chung.
C. cắt nhau hoặc chéo nhau. D. không có điểm chung.

Câu 3. Cho hai đường thẳng phân biệt không có điểm chung cùng nằm trong một mặt phẳng thì hai đường thẳng đó

- A. trùng nhau. B. chéo nhau. C. song song. D. cắt nhau.

Câu 4. Chọn khẳng định sai

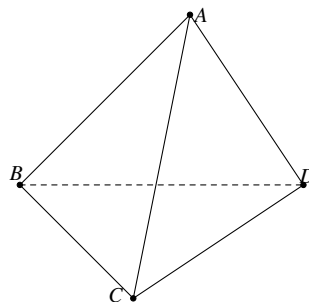
- A. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
 B. Nếu hai đường thẳng chéo nhau thì chúng không đồng phẳng.
 C. Hai đường thẳng song song thì không đồng phẳng và không có điểm chung.
 D. Hai đường thẳng cắt nhau thì đồng phẳng và có một điểm chung.

Câu 5. Cho đường thẳng a cắt mặt phẳng (P) tại điểm A . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Mọi đường thẳng nằm trong (P) đều chéo với a .
 B. Mọi đường thẳng nằm trong (P) đều cắt a .
 C. Mọi đường thẳng nằm trong (P) hoặc chéo với a , hoặc cắt a .
 D. Mọi đường thẳng nằm trong (P) đều không cắt a .

Câu 6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N là hai điểm phân biệt nằm trên đường thẳng AB , M' và N' là hai điểm phân biệt nằm trên đường thẳng CD . Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

- A. Hai đường thẳng MM' và NN' có thể cắt nhau.
 B. Hai đường thẳng MM' và NN' có thể song song với nhau.
 C. Hai đường thẳng MM' và NN' hoặc cắt nhau hoặc song song với nhau.
 D. Hai đường thẳng MM' và NN' chéo nhau.



Câu 7. Cho tứ diện $ABCD$, lấy M, N lần lượt là trung điểm của CD, AB . Khi đó, xác định vị trí tương đối giữa hai đường thẳng BC và MN .

- A. Chéo nhau. B. Có hai điểm chung.
 C. Song song. D. Cắt nhau.

Câu 8. Cho tứ diện $MNPQ$. Mệnh đề nào trong các mệnh đề dưới đây là đúng?

- A. $MN \parallel PQ$. B. MN cắt PQ .
 C. MN và PQ đồng phẳng. D. MN và PQ chéo nhau.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SC sao cho $SM = 3MC$, N là giao điểm của SD và (MAB) . Khi đó tứ giác $ABMN$ là hình gì?

- A. Tứ giác không có cặp cạnh nào song song. B. Hình vuông.
 C. Hình thang. D. Hình bình hành.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $AB \parallel CD$. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (ASB) và (SCD) . Khẳng định nào sau đây là đúng?

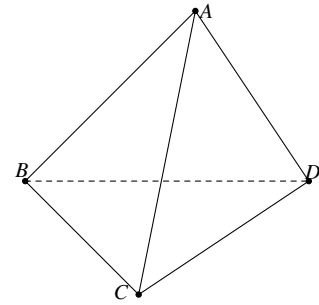
- A. $d \parallel AB$. B. d cắt AB . C. d cắt AD . D. d cắt CD .

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi G, E lần lượt là trọng tâm các tam giác SAD và SCD . Lấy M, N lần lượt là trung điểm AB, BC . Khi đó ta có:

- A. GE và MN trùng nhau. B. GE và MN chéo nhau.
 C. GE và MN song song với nhau. D. GE cắt BC .

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$ có P, Q lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và BCD . Xác định giao tuyến của mặt phẳng (ABQ) và mặt phẳng (CDP) .

- A. Giao tuyến là đường thẳng đi qua trung điểm hai cạnh AB và CD .
- B. Giao tuyến là đường thẳng đi qua trung điểm hai cạnh AB và AD .
- C. Giao tuyến là đường thẳng PQ .
- D. Giao tuyến là đường thẳng QA .



Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J theo thứ tự là trung điểm của AD và AC , G là trọng tâm tam giác BCD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD) là đường thẳng

- A. qua J và song song với BD .
- B. qua G và song song với BC .
- C. qua I và song song với AB .
- D. qua G và song song với CD .

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD . Gọi (ACI) lần lượt là trung điểm của AD và BC và G là trọng tâm của tam giác SAB . Giao tuyến của (SAB) và (IJG) là

- A. đường thẳng qua S và song song với AB .
- B. đường thẳng qua G và song song với DC .
- C. SC .
- D. đường thẳng qua G và cắt BC .

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm SA, SB, SC, SD . Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào không song song với IJ ?

- A. DC .
- B. AB .
- C. AD .
- D. EF .

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. d qua S và song song với DC .
- B. d qua S và song song với BD .
- C. d qua S và song song với BC .
- D. d qua S và song song với AB .

Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng AB . P, Q là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng CD . Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng MP, NQ .

- A. $MP \parallel NQ$.
- B. MP cắt NQ .
- C. MP trùng NQ .
- D. MP, NQ chéo nhau.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AB đáy nhỏ CD . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB . Gọi P là giao điểm của SC và (AND) . Gọi I là giao điểm của AN và DP . Hỏi tứ giác $SABI$ là hình gì?

- A. Hình bình hành.
- B. Hình thoi.
- C. Hình vuông.
- D. Hình chữ nhật.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD . Gọi I là một điểm trên cạnh B . Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (IMN) là hình gì?

- A. Tam giác MNQ .
- B. Tam giác MNI .
- C. Hình thang $MNIJ$.
- D. Hình bình hành $MNIJ$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I là trung điểm SA . Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (IBC) là

- A. Tam giác IBC .
- B. Tứ giác $IBCD$.
- C. Hình thang $IGBC$ (G là trung điểm SB).
- D. Hình thang $IBCJ$ (J là trung điểm SD).

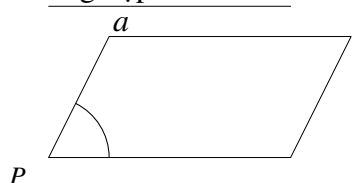
—HẾT—

§3. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

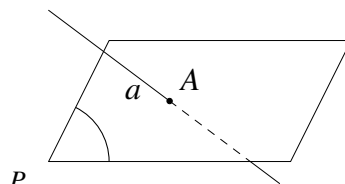
1 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) . Căn cứ vào số điểm chung của đường thẳng và mặt phẳng, ta có ba trường hợp sau:



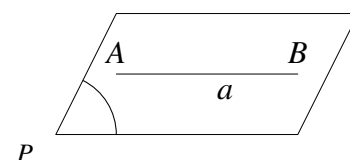
* a và (P) không có điểm chung.

* a song song (P) . Kí hiệu $a \parallel (P)$.



* a và (P) có đúng 1 điểm chung.

* a cắt (P) . Kí hiệu $a \cap (P) = A$.



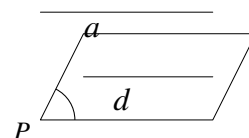
* a và (P) có vô số điểm chung.

* a nằm trong (P) . Kí hiệu $a \subset (P)$.

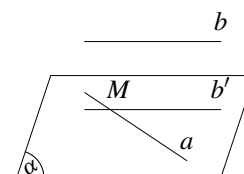
2 CÁC ĐỊNH LÝ VÀ HỆ QUẢ CẦN NHỚ

Định lý 1: Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng nào đó trong (P) thì a song song với (P) , hay

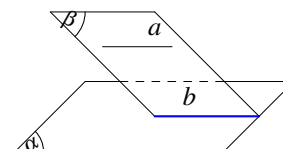
$$a \not\subset (P) \text{ và } \begin{cases} a \parallel d \\ d \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \parallel (P)$$



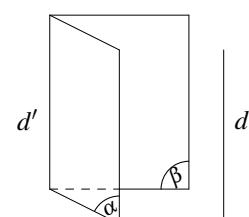
Định lý 2: Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.



Định lý 3: Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) . Nếu mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a .



⚠️ Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.



DT

1

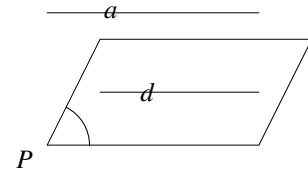
Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

Phương pháp giải: Để chứng minh đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) , ta cần chứng tỏ các ý sau đây

- a không nằm trên (P) ;
- a song song với một đường thẳng b nằm trong (P) . Suy ra $a \parallel (P)$.

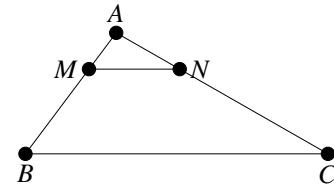
Tóm lại

$$\begin{cases} a \not\subset (P) \\ a \parallel b \\ b \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \parallel (P)$$



Chú ý: Việc chứng minh $a \parallel b$, ta thường đi đến việc xét các yếu tố song song đã biết trong hình học phẳng như

- ① Cặp cạnh đối của hình bình hành;
- ② Đường trung bình trong tam giác;
- ③ Tỷ lệ $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow MN \parallel BC$ (hình bên). Đặc biệt cần chú ý tỷ lệ trọng tâm của tam giác.



Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD và BCD . Chứng minh rằng MN song song với các mặt phẳng (ABC) và (ABD) .

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD , điểm I nằm trên cạnh BC sao cho $BI = 2IC$. Chứng minh rằng IG song song (ACD) .

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy M nằm trên cạnh AD sao cho $AD = 3AM$. Gọi G, N lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và ABC .

- a) Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD) .
- b) Chứng minh MN song song (SCD) và NG song song (SAC) .

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD .

- a) Chứng minh MN song song với các mặt phẳng (SBC) và (SAD) .
- b) Gọi E là trung điểm của SA . Chứng minh SB và SC đều song song với mặt phẳng (MNE) .

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi G là trọng tâm tam giác SAD và E là điểm trên cạnh DC sao cho $DC = 3DE$, I là trung điểm AD .

- a) Chứng minh OI song song với các mặt phẳng (SAB) và (SCD) .
- b) Tìm giao điểm P của IE và (SBC) . Chứng minh $GE \parallel (SBC)$.

⚙️ Các phương pháp đã học ở hai bài trước:

- ① Tìm hai điểm chung phân biệt. Khi đó giao tuyến là đường thẳng đi qua hai điểm chung đó.
- ② Nếu hai mặt phẳng lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

⚙️ Ta xét thêm một trong hai cách sau:

- ① Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) và mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a .

$$\text{hay} \quad \begin{cases} a \parallel (\alpha) \\ a \subset (\beta) \\ M \in (\alpha) \cap (\beta) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (\beta) = Mx \parallel a$$

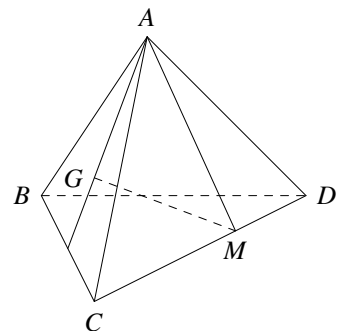
- ② Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.

$$\text{hay} \quad \begin{cases} a \parallel (\alpha) \\ a \parallel (\beta) \\ M \in (\alpha) \cap (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = Mx \parallel a.$$

≡ Ví dụ 6.

Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm $\triangle ABC$, $M \in CD$ với $MC = 2MD$.

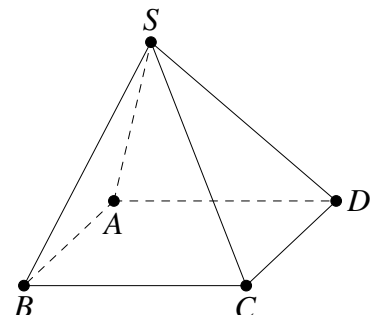
- a) Chứng minh MG song song với (ABD) .
- b) Tìm giao tuyến của (ABD) với (BGM) .



≡ Ví dụ 7.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BC và CD .

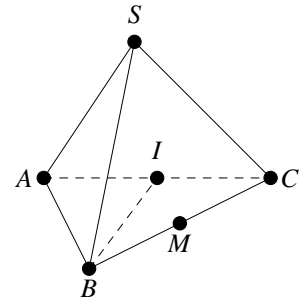
- a) Tìm giao tuyến của (SIK) và (SAC) , (SIK) và (SBD) .
- b) Gọi M là trung điểm của SB . Chứng minh $SD \parallel (ACM)$.
- c) Tìm giao điểm F của DM và (SIK) . Tính tỉ số $\frac{MF}{MD}$.



≡ Ví dụ 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, đáy lớn AD . Gọi I là trung điểm của SB . Gọi (P) là mặt phẳng qua I , song song với SD và AC . Tìm giao tuyến của (P) với các mặt (SBD) và $(ABCD)$.

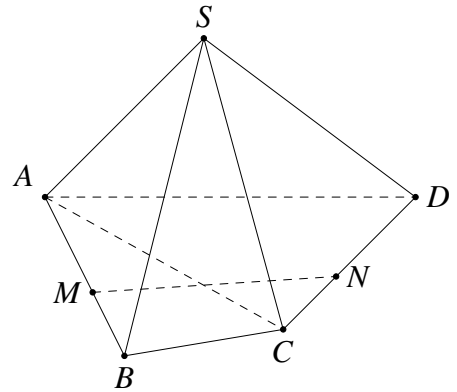
≡ Ví dụ 9.

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, I lần lượt là trung điểm của BC, AC . Mặt phẳng (P) đi qua điểm M , song song với BI và SC . Xác định trên hình vẽ các giao điểm H, K, N của (P) với các cạnh AC, SA, SB . Tứ giác $MNKH$ là hình gì?



Ví dụ 10.

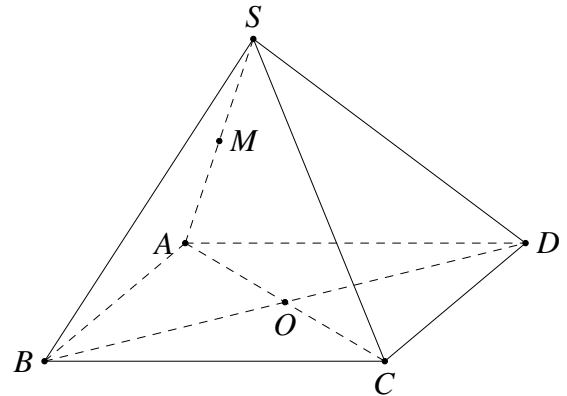
Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N thuộc cạnh AB, CD . Gọi (α) là mặt phẳng qua MN và song song với SA . Tìm giao tuyến của (α) với các mặt của hình chóp.



Ví dụ 11.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, O là giao điểm của AC và BD , M là trung điểm của SA .

- Chứng minh $OM \parallel (SCD)$.
- Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M , đồng thời song song với SC và AD . Tìm giao tuyến của mặt phẳng (α) với các mặt của hình chóp $S.ABCD$. Hình tạo bởi các giao tuyến là hình gì?



Ví dụ 12. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M thuộc cạnh AB . Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M , song song với đường thẳng BC và AD . Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của (α) với các cạnh AC, CD và DB .

- Chứng minh $MNPQ$ là hình bình hành.
- Trong trường hợp nào thì $MNPQ$ là hình thoi.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác ABD . Trên đoạn BC lấy điểm M sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh rằng đường thẳng MG song song với mặt phẳng (ACD) .
- Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SD, CD, BC .
 - Chứng minh đường thẳng OM song song với các mặt phẳng $(SAB), (SBC)$.
 - Chứng minh đường thẳng SP song song với mặt phẳng (OMN) .

- 3** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang đáy lớn AB , với $AB = 2CD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , I là trung điểm của SA , G là trọng tâm của tam giác SBC và E là một điểm trên cạnh SD sao cho $3SE = 2SD$. Chứng minh:
- a) $DI \parallel (SBC)$. b) $GO \parallel (SCD)$. c) $SB \parallel (ACE)$.
- 4** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD , M là một điểm trên đoạn IJ . Gọi (P) là mặt phẳng qua M và song song với AB và CD .
- a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và (ICD) .
- b) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (P) với các mặt của tứ diện. Hình tạo bởi các giao tuyến là hình gì?
- 5** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi K và J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và SBC .
- a) Chứng minh $KJ \parallel (SAB)$.
- b) Gọi (P) là mặt phẳng chứa KJ và song song với AD . Xác định giao tuyến của mặt phẳng (P) với các mặt của hình chóp. Hình tạo bởi các giao tuyến là hình gì?
- 6** Cho tứ diện $ABCD$. Lấy điểm M trên cạnh AB sao cho $AM = 2MB$. Gọi G là trọng tâm $\triangle BCD$ và I là trung điểm CD , H là điểm đối xứng của G qua I .
- a) Chứng minh $GD \parallel (MCH)$.
- b) Tìm giao điểm K của MG với (ACD) . Tính tỉ số $\frac{GK}{GM}$.
- 7** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , M là trung điểm của SA . Gọi (P) là mặt phẳng qua O , song song với BM và SD . Tìm giao tuyến của (P) và (SAD) .

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong không gian cho mặt phẳng (α) và A không thuộc (α) . Qua điểm A có thể dựng được bao nhiêu đường thẳng song song với (α) ?

- A. Duy nhất. B. Vô số. C. 2. D. 4.

Câu 2. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O không nằm trong Δ . Qua điểm O cho trước, có bao nhiêu mặt phẳng song song với đường thẳng Δ ?

- A. Vô số. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 3. Có bao nhiêu mặt phẳng song song với cả hai đường thẳng chéo nhau?

- A. Vô số. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 4. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α) . Giả sử $a \parallel (\alpha), b \subset (\alpha)$. Khi đó

- A. $a \parallel b$. B. a, b chéo nhau.
C. a, b cắt nhau. D. $a \parallel b$ hoặc a, b chéo nhau.

Câu 5. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α) . Giả sử $a \parallel b$ và $b \parallel (\alpha)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. $a \parallel (\alpha)$. B. $a \subset (\alpha)$.
C. $a \parallel (\alpha)$ hoặc $a \subset (\alpha)$. D. a cắt (α) .

Câu 6. Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và đường thẳng b không thuộc (α) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Nếu $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$.
 B. Nếu $b \parallel a$ thì $b \parallel (\alpha)$.
 C. Nếu b cắt (α) và (β) chứa b thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng cắt cả a và b .
 D. Nếu b cắt (α) thì b cắt a .

Câu 7. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Có duy nhất một mặt phẳng song song với a và b .
 B. Có vô số đường thẳng song song với a và cắt b .
 C. Có duy nhất một mặt phẳng qua a và song song với b .
 D. Có duy nhất một mặt phẳng qua điểm M , song song với a và b (với M là điểm cho trước).

Câu 8. Cho $d \parallel (\alpha)$, mặt phẳng (β) qua d cắt (α) theo giao tuyến d' . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. d cắt d' . B. $d \parallel d'$. C. d và d' chéo nhau. D. $d \equiv d'$.

Câu 9. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC . Khẳng định nào sau đây đúng?

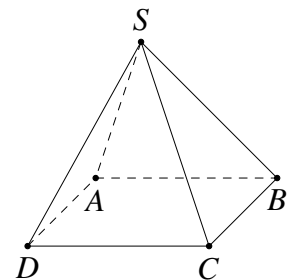
- A. $MN \parallel (ABCD)$. B. $MN \parallel (SAB)$. C. $MN \parallel (SCD)$. D. $MN \parallel (SBC)$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M và N là hai điểm trên SA, SB sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{1}{3}$. Vị trí tương đối giữa MN và $(ABCD)$ là

- A. MN và $(ABCD)$ chéo nhau. B. MN song song $(ABCD)$.
 C. MN nằm trong $(ABCD)$. D. MN cắt $(ABCD)$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) .

- A. Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng BD .
 B. Là đường thẳng đi qua đỉnh S và tâm O của đáy.
 C. Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng BC .
 D. Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng AB .



Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$ có I, J lần lượt là trung điểm của BC, BD . Giao tuyến của mặt phẳng (AIJ) và (ACD) là

- A. đường thẳng d đi qua A và song song với BC . B. đường thẳng d đi qua A và song song với BD .
 C. đường thẳng d đi qua A và song song với CD . D. đường thẳng AB .

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD , Q thuộc cạnh AB sao cho $AQ = 2QB$, P là trung điểm của AB , M là trung điểm của BD . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $Q \in (CDP)$. B. QG cắt (BCD) . C. $MP \parallel (BCD)$. D. $GQ \parallel (BCD)$.

Câu 14. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O, O_1 lần lượt là tâm của $ABCD, ABEF$; M là trung điểm của CD . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $OO_1 \parallel (BEC)$. B. $OO_1 \parallel (EFM)$. C. MO_1 cắt (BEC) . D. $OO_1 \parallel (AFD)$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng đi qua trung điểm M của cạnh AB và song song với BD, SA là hình gì?

- A. Ngũ giác. B. Hình thang. C. Tam giác. D. Hình bình hành.

—HẾT—

§4. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI MẶT PHẪNG

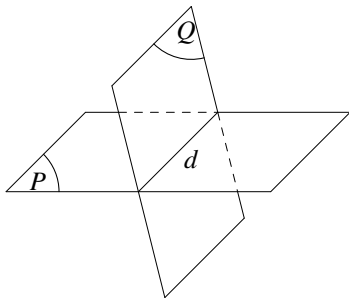
Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) . Các trường hợp có thể xảy ra:

⚙ **Trường hợp 1:** (P) và (Q) trùng nhau.

⚙ **Trường hợp 2:** (P) và (Q) có một điểm chung. Khi đó chúng sẽ có điểm chung khác nữa. Tập hợp tất cả các điểm chung đó gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) (**Hình 1**).

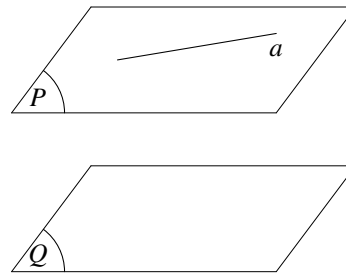
⚙ **Trường hợp 3:** (P) và (Q) không có điểm chung. Khi đó ta nói (P) song song (Q) (**Hình 2**).

- Kí hiệu $(P) \parallel (Q)$;
- Khi $(P) \parallel (Q)$ và $a \subset (P)$ thì $a \parallel (Q)$.



Hình 1.

$(P), (Q)$ cắt nhau: $(P) \cap (Q) = d$



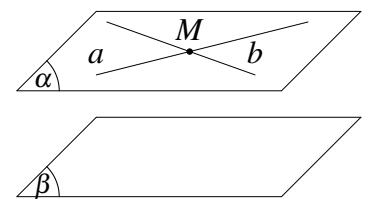
Hình 2.

$(P), (Q)$ không có điểm chung: $(P) \parallel (Q)$

2 CÁC ĐỊNH LÝ CƠ BẢN

⚙ **Định lý 1:**

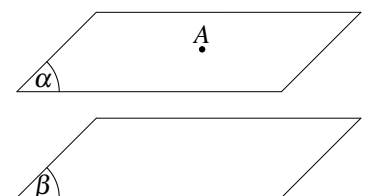
Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β) .



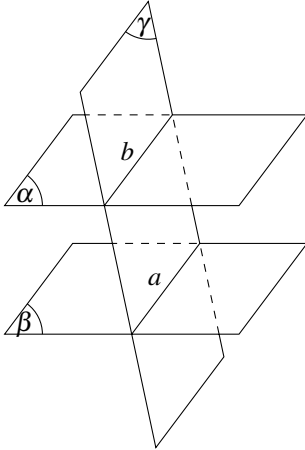
- ⚠ **Muốn chứng minh hai mặt phẳng song song, ta phải chứng minh có hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng này lần lượt song song với mặt phẳng kia.**
- Muốn chứng minh đường thẳng $a \parallel (Q)$, ta chứng minh đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) và $(P) \parallel (Q)$.

⚙ **Định lý 2:**

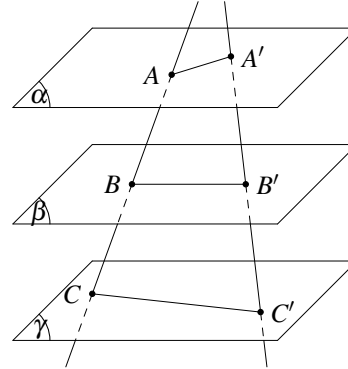
Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.



Định lý 3: Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.



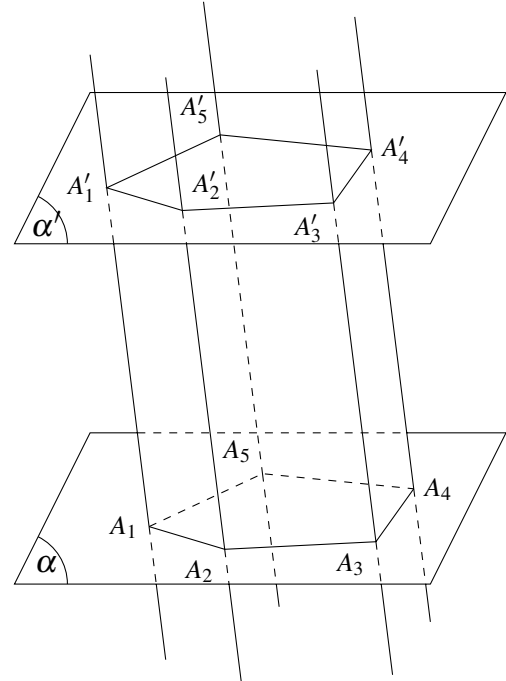
Định lý 4: (Định lý Thales) Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.



3 HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH HỘP

Định nghĩa: Cho hai mặt phẳng $(\alpha) \parallel (\alpha')$. Trong (α) cho đa giác lồi $A_1A_2 \dots A_n$. Qua các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ ta dựng các đường song song với nhau và cắt (α') tại $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$. Hình tạo thành bởi hai đa giác $A_1A_2 \dots A_n, A'_1A'_2 \dots A'_n$ cùng với các hình bình hành $A_1A_2A'_2A'_1, A_2A_3A'_3A'_2, \dots, A_nA_1A'_1A'_n$ được gọi là *hình lăng trụ* và được ký hiệu bởi $A_1A_2 \dots A_n.A'_1A'_2 \dots A'_n$.

- Hai đa giác $A_1A_2 \dots A_n, A'_1A'_2 \dots A'_n$ được gọi là hai *mặt đáy* (bằng nhau) của hình lăng trụ.
- Các đoạn thẳng $A_1A'_1, A_2A'_2, \dots, A_nA'_n$ gọi là các *cạnh bên* của hình lăng trụ.
- Các hình bình hành $A_1A_2A'_2A'_1, A_2A_3A'_3A'_2, \dots, A_nA_1A'_1A'_n$ gọi là các *mặt bên* của hình lăng trụ.
- Các đỉnh của hai đa giác đáy gọi là các *đỉnh* của hình lăng trụ.



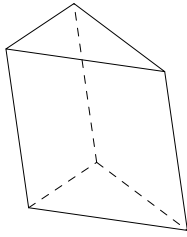
Tính chất:

- Các cạnh bên của hình lăng trụ thì song song và bằng nhau.
- Các mặt bên của hình lăng trụ đều là hình bình hành.
- Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau.

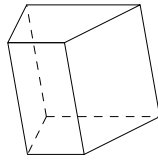
Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành gọi là *hình hộp*.

- Các mặt của hình hộp là hình bình hành.
- Hai mặt phẳng lần lượt chứa hai mặt đối diện của hình hộp thì song song nhau.

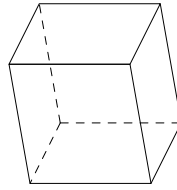
⚙️ Minh họa vài mô hình thường gặp:



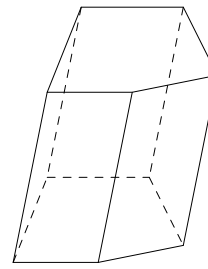
* Lăng trụ tam giác



* Lăng trụ tứ giác



* Hình hộp



* Lăng trụ ngũ giác

B

PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

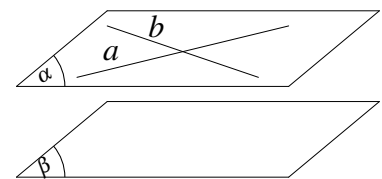
1

Chứng minh hai mặt phẳng song song

⚙️ Phương pháp:

Chứng minh trên mặt phẳng này có hai đường thẳng cắt nhau cùng song song với mặt phẳng còn lại.

$$\begin{cases} a \text{ cắt } b \\ a \subset (\alpha), b \subset (\alpha) \\ a \parallel (\beta), b \parallel (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta).$$



⚙️ Chú ý: Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song nhau.

≡ Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SD và SB .

- Chứng minh rằng $(MNP) \parallel (ABCD)$.
- Chứng minh rằng $(OMN) \parallel (SBC)$.

≡ Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang mà $AD \parallel BC$ và $AD = 2BC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và AD . Chứng minh: $(BMN) \parallel (SCD)$.

≡ Ví dụ 3. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ có chung cạnh AB và không đồng phẳng. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm AB, CD, EF . Chứng minh

- $(ADF) \parallel (BCE)$.
- $(DIK) \parallel (JBE)$.

≡ Ví dụ 4. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABC, ACC', A'B'C'$. Chứng minh rằng $(IJK) \parallel (BCC'B')$ và $(A'JK) \parallel (AIB')$.

≡ Ví dụ 5. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD và AF tại M' và N' .

- Chứng minh rằng $(ADF) \parallel (BCE)$.
- Chứng minh rằng $(CDF) \parallel (MM'N'N)$.

DT

2

Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

Để chứng minh a song song (P) , ta thường sử dụng một trong hai cách sau

⚙️ Cách 1: (Đã xét ở bài học trước) Ta cần chứng tỏ các ý sau:

- a không nằm trên (P) ;
- a song song với một đường thẳng b nằm trong (P) . Suy ra $a \parallel (P)$ hay

$$\begin{cases} a \not\subset (P) \\ a \parallel b \\ b \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \parallel (P)$$

Cách 2: Ta chứng minh đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (Q) và $(Q) \parallel (P)$ thì $a \parallel (P)$.

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, ABC, SBD . Gọi M là một điểm thuộc đường thẳng G_2G_3 . Chứng minh $G_1M \parallel (SBC)$.

Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD .

- Chứng minh hai mặt phẳng (OMN) và (SBC) song song với nhau.
- Gọi I là trung điểm của SD , J là một điểm trên $(ABCD)$ và cách đều AB, CD . Chứng minh IJ song song với (SAB) .

DT

3

Định lý Thales

Định lý Thales: Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Ví dụ 8. Cho ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ đôi một song song với nhau. Đường thẳng a cắt các mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ lần lượt tại A, B, C sao cho $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$ và đường thẳng b cắt các mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ lần lượt tại A', B', C' . Tính tỉ số $\frac{A'B'}{B'C'}$.

Ví dụ 9. Cho ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ đôi một song song với nhau. Đường thẳng a cắt các mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ lần lượt tại A, B, C sao cho $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{3}$ và đường thẳng b cắt các mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ lần lượt tại D, E, F . Tính tỉ số $\frac{ED}{DF}$.

Ví dụ 10. Cho hình tứ diện $S.ABC$. Trên cạnh SA lấy các điểm A_1, A_2 sao cho $2AA_1 = 2A_1A_2 = A_2S$. Gọi (P) và (Q) là hai mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC) và lần lượt đi qua A_1, A_2 . Mặt phẳng (P) cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại B_1, C_1 . Mặt phẳng (Q) cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại B_2, C_2 . Chứng minh $2BB_1 = 2B_1B_2 = B_2S$ và $2CC_1 = 2C_1C_2 = C_2S$.

Ví dụ 11. Một kệ để đồ bằng gỗ có mâm tầng dưới $(ABCD)$ và mâm tầng trên $(EFGH)$ song song với nhau. Bác thợ mộc đo được $AE = 80$ cm, $CG = 90$ cm và muốn đóng thêm một mâm tầng giữa $(IJKL)$ song song với hai mâm tầng trên và dưới sao cho khoảng cách $EI = 36$ cm (tham khảo hình vẽ). Hãy giúp bác thợ mộc tính độ dài GK để đặt mâm tầng giữa cho kệ để đồ đúng vị trí.

Ví dụ 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 9, SB = 12, SC = 15$. Trên cạnh SA lấy các điểm M, N sao cho $SM = 4, MN = 3, NA = 2$. Vẽ hai mặt phẳng song song với (ABC) lần lượt đi qua M, N , cắt SB theo thứ tự M', N' và cắt SC theo thứ tự M'', N'' . Tính độ dài các đoạn thẳng $SM', M'N', M''N'', N''C$.

≡ Ví dụ 13. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và một mặt phẳng (α) cắt các mặt của hình hộp theo các giao tuyến MN, NP, PQ, QR, RS, SM như hình vẽ. Chứng minh các cặp cạnh đối của lục giác $MNPQRS$ song song nhau.

≡ Ví dụ 14. Cho hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$ với đáy là hình thang $AB \parallel CD$. Một mặt phẳng song song với mặt phẳng $(AA'B'B)$ cắt các cạnh $AD, BC, B'C', A'D'$ lần lượt tại E, F, M, H . Hỏi hình tạo bởi các điểm E, F, M, H, D, D', C', C là hình gì?

≡ Ví dụ 15. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm trên cạnh AA', BB', CC' sao cho: $\frac{AM}{MA'} = \frac{BN}{NB'} = \frac{CP}{PC'} = \frac{1}{2}$. Hỏi hình tạo bởi các điểm M, N, P, A', B', C' là hình gì?

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD . Chứng minh hai mặt phẳng (MNO) và (SBC) song song.
- Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang có $AB \parallel CD$ và $AB = 2CD$, I là giao điểm của AC và BD . Gọi M là trung điểm của SD , E là trung điểm đoạn CM và G là điểm đối xứng của E qua M , SE cắt CD tại K . Chứng minh $(IKE) \parallel (ADG)$.
- Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ADB . Chứng minh $(G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$.
- Cho hình chóp $SABC$ có G là trọng tâm tam giác ABC . Trên đoạn SA lấy hai điểm M, N sao cho $SM = MN = NA$.
 - Chứng minh rằng $GM \parallel (SBC)$.
 - Gọi D là điểm đối xứng với A qua G . Chứng minh rằng $(MCD) \parallel (NBG)$.
- Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Một mặt phẳng song song với mặt đáy $(ABCD)$ của hình hộp và cắt các cạnh AA', BB', CC', DD' lần lượt tại M, N, M', N' . Chứng minh rằng $ABCD.MNM'N'$ là hình hộp.

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) . Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua d và song song với (α) ?

- A. 1. B. 0. C. 2. D. Vô số.

Câu 2. Trong các điều kiện sau, điều kiện nào kết luận mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β) ?

- A. $(\alpha) \parallel (\gamma)$ và $(\beta) \parallel (\gamma)$ (với (γ) là mặt phẳng nào đó).
 B. $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt thuộc (β) .
 C. $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt cùng song song với (β) .
 D. $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng cắt nhau thuộc (β) .

Câu 3. Cho các mệnh đề sau:

- ① Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.
- ② Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.
- ③ Bất kì đường thẳng nào cắt một trong hai mặt phẳng song song thì nó cũng cắt mặt phẳng còn lại.

Số mệnh đề **sai** là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 4. Trong các mệnh đề sau. Mệnh đề **sai** là

- A. Hai mặt phẳng song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này đều song song với mặt phẳng kia.
- B. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- C. Một mặt phẳng cắt hai mặt phẳng song song cho trước theo hai giao tuyến thì hai giao tuyến song song với nhau.
- D. Hai mặt phẳng song song thì không có điểm chung.

Câu 5. Cho mặt phẳng (R) cắt hai mặt phẳng song song (P) và (Q) theo hai giao tuyến a và b . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. a và b vuông góc nhau.
- B. a và b chéo nhau.
- C. a và b cắt nhau.
- D. a và b song song.

Câu 6. Cho đường thẳng a thuộc mặt phẳng (P) và đường thẳng b thuộc mặt phẳng (Q) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a \parallel (Q)$ và $b \parallel (P)$.
- B. a và b chéo nhau.
- C. $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a \parallel b$.
- D. $a \parallel b \Rightarrow (P) \parallel (Q)$.

Câu 7. Hình lăng trụ tam giác có tất cả bao nhiêu cạnh?

- A. 6. B. 9. C. 12. D. 3.

Câu 8. Đặc điểm nào sau đây là đúng với hình lăng trụ?

- A. Đáy của hình lăng trụ là hình bình hành.
- B. Hình lăng trụ có tất cả các mặt song song với nhau.
- C. Hình lăng trụ có tất cả các mặt bên là hình bình hành.
- D. Hình lăng trụ có tất cả các mặt là hình bình hành.

Câu 9. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(AB'D')$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

- A. (BCA') . B. (BDA') . C. (BDC') . D. $(A'C'C)$.

Câu 10. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không thuộc cùng một mặt phẳng, có cạnh chung AB . Kết quả nào sau đây đúng?

- A. $BC \parallel (AEF)$. B. $FD \parallel (BEF)$. C. $(CEF) \parallel (ABD)$. D. $(AFD) \parallel (BCE)$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $(AB \parallel CD)$ và $AB = 2CD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm SB và AB . Mặt phẳng nào song song với mặt phẳng (SAD) ?

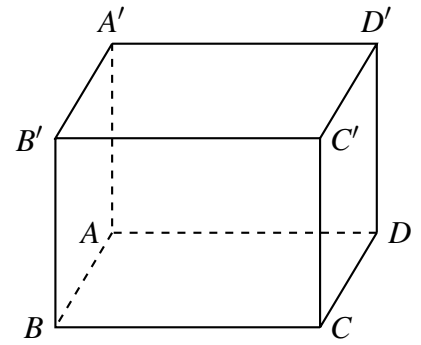
- A. (SJC) . B. (ICB) . C. (IJB) . D. (IJC) .

Câu 12. Trong mặt phẳng (P) cho hình bình hành $ABCD$, qua A, B, C, D lần lượt vẽ bốn đường thẳng a, b, c, d đôi một song song với nhau và không nằm trên (P) . Mặt phẳng song song với mặt phẳng (b, c) là

- A. (a, b) . B. (a, c) . C. (a, d) . D. (d, b) .

Câu 13. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$. B. $(ABB'A') \parallel (CDD'C')$.
C. $(AA'D'D) \parallel (BCC'B')$. D. $(BDD'B') \parallel (ACC'A')$.



Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình bình hành. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD . Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A. $A'C' \parallel BD$. B. $A'B' \parallel (SAD)$. C. $(A'C'D') \parallel (ABC)$. D. $A'B' \parallel (SBD)$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SD . Mặt phẳng (OMN) song song với mặt phẳng nào sau đây?

- A. $(ABCD)$. B. (SCD) . C. (SBC) . D. (SAB) .

—HẾT—

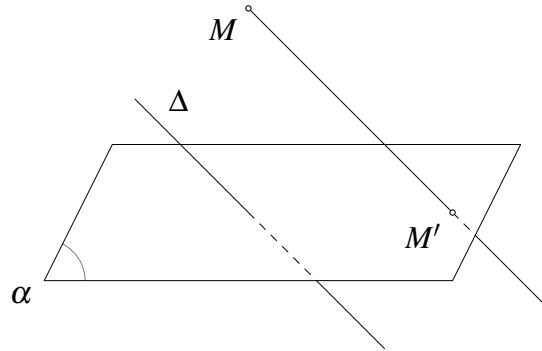
§5. PHÉP CHIẾU PHẪNG SONG SONG

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 ĐỊNH NGHĨA

Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ cắt (α) . Với mỗi điểm M trong không gian ta xác định điểm M' như sau:

- Nếu M thuộc Δ thì M' là giao điểm của Δ và (α) .
- Nếu M không thuộc Δ thì M' là giao điểm của (α) và đường thẳng qua M song song Δ .
- Điểm M' gọi là hình chiếu song song của M trên (α) theo phương Δ .
- Phép đặt tương ứng mỗi điểm M với hình chiếu M' của nó được gọi là **phép chiếu song song** lên (α) theo phương Δ .
- Mặt phẳng (α) gọi là mặt phẳng chiếu; phương Δ gọi là **phương chiếu**.



2 TÍNH CHẤT

Phép chiếu song song có các tính chất sau:

- ① Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng.
- ② Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
- ③ Biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.
- ④ Giữ nguyên tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng cùng nằm trên một đường thẳng hoặc nằm trên hai đường thẳng song song.

3 HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH KHÔNG GIAN

- ① Hình biểu diễn của hình trong không gian là hình chiếu song song của hình đó trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.
- ② Hình biểu diễn của một hình không gian (trong trường hợp hình phẳng nằm trong mặt phẳng không song song với phương chiếu) có các tính chất sau:
 - Hình biểu diễn của một tam giác là một tam giác.
 - Hình biểu diễn của hình chữ nhật, hình vuông, hình thoi, hình bình hành là hình bình hành.
 - Hình biểu diễn của hình thang $ABCD$ với $AB \parallel CD$ là một hình thang $A'B'C'D'$ với $A'B' \parallel C'D'$ thoả mãn $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$.
 - Hình biểu diễn của hình tròn là hình elip.

B

PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Xác định ảnh của một hình qua phép chiếu song song

Ví dụ 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

- Xác định ảnh của các điểm A', B', C', D' qua phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương AA' .
- Xác định ảnh của tam giác $A'C'D'$ qua phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương $A'B$.

Ví dụ 2. Phép chiếu song song biến hình bình hành $ABCD$ thành hình bình hành $A'B'C'D'$. Chứng minh rằng phép chiếu đó biến tâm của hình bình hành $ABCD$ thành tâm của hình bình hành $A'B'C'D'$.

Ví dụ 3. Phép chiếu song song biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng phép chiếu đó biến đường trung bình của tam giác ABC thành đường trung bình của tam giác $A'B'C'$.

DT

2

Vẽ hình biểu diễn của một số hình khối đơn giản

Ví dụ 4. Vẽ hình biểu diễn của các hình sau

- Hình lục giác đều.
- Hình vuông nội tiếp trong hình tròn.

Ví dụ 5. Vẽ hình biểu diễn của hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ với AB song song CD ; $AB = 2$ cm, $CD = 6$ cm.

Ví dụ 6. Vẽ hình biểu diễn của các hình sau

- Hình lăng trụ có đáy là tam giác đều.
- Hình lăng trụ có đáy là lục giác đều.
- Hình hộp.
- Hình chóp tam giác $S.ABC$ đặt trên một hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$.

C

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC, B'C'$. Hình chiếu của $\Delta B'DM$ qua phép chiếu song song trên $(A'B'C'D')$ theo phương chiếu AA' là

- A. $\Delta B'A'M'$. B. $\Delta C'D'M'$. C. $\Delta DMM'$. D. $\Delta B'D'M'$.

Câu 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC, B'C'$. Hình chiếu của $\Delta D'CM$ qua phép chiếu song song trên $(A'B'C'D')$ theo phương chiếu BB' là

- A. $\Delta B'CM'$. B. $\Delta C'D'M'$. C. $\Delta DMM'$. D. $\Delta B'D'M'$.

Câu 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của các cạnh $AD, A'D'$; N, N' lần lượt là trung điểm của các cạnh $CD, C'D'$; P là trung điểm của DD' . Hình chiếu của ΔMNP qua phép chiếu song song trên $(A'B'C'D')$ theo phương chiếu BB' là

- A. $\Delta B'N'M'$. B. $\Delta D'M'N'$. C. $\Delta PM'N'$. D. $\Delta PD'M'$.

Câu 4. Trong các mệnh đề sau, có bao nhiêu mệnh đề đúng?

- a) Một đường thẳng có thể song song với hình chiếu của nó.
b) Một đường thẳng có thể trùng với hình chiếu của nó.
c) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.
d) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể trùng nhau.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 5. Trong các mệnh đề sau, có bao nhiêu mệnh đề đúng?

- a) Phép chiếu song song biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
b) Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng cắt nhau.
c) Phép chiếu song song biến tam giác đều thành tam giác cân.
d) Phép chiếu song song biến hình vuông thành hình bình hành.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 6. Hình chiếu của tứ diện $ABCD$ lên một mặt phẳng (P) theo phương chiếu AB (AB không song song với (P)) là

- A. hình tam giác. B. hình tứ giác. C. đoạn thẳng. D. hình thang.

Câu 7. Hình nào dưới đây **không phải** là hình biểu diễn của một tứ diện?



Câu 8. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC, B'C'$ và I là giao điểm của đường thẳng $A'M$ và $(A'B'C')$. Tìm hình chiếu song song của I trên $(A'B'C')$ theo phương BB' .

- A. Trung điểm của đoạn thẳng $A'M'$. B. Trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.
C. Điểm A' . D. Điểm M' .

Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BC , trên cạnh BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$. Mặt phẳng (MNP) cắt mặt phẳng (ACD) theo giao tuyến d . Tìm hình chiếu song song của đường thẳng d trên (BCD) theo phương AD .

- A. Đường thẳng DN . B. Đường thẳng CD . C. Đường thẳng BD . D. Điểm M .

Câu 10. Cho tứ diện $ABCD$ và M là điểm bất kì thuộc miền trong của tam giác BCD . Gọi B', C', D' lần lượt là hình chiếu song song của M theo các phương AB, AC, AD lên các mặt $(ACD), (ABD), (ABC)$. Tính $\frac{MB'}{AB} + \frac{MC'}{AC} + \frac{MD'}{AD}$.

- A. 1. B. $\frac{1}{9}$. C. $\frac{1}{3}$. D. 3.

—HẾT—

CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

§1. SỐ TRUNG BÌNH VÀ MÔT CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

Định nghĩa: Mẫu số liệu ghép nhóm thường được trình bày dưới dạng bảng tần số ghép nhóm có dạng như sau:

Nhóm	$[u_1; u_2)$	$[u_1; u_2)$	$\dots$	$[u_k; u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	$\dots$	n_k

Chú ý:

- Bảng trên gồm k nhóm $[u_j; u_{j+1})$ với $1 \leq j \leq k$, mỗi nhóm gồm một số giá trị được ghép theo một tiêu chí xác định. Trong một số trường hợp, nhóm số liệu cuối cùng có thể lấy đầu mút bên phải.
- Cỡ mẫu $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.
- Giá trị chính giữa mỗi nhóm được dùng làm giá trị đại diện cho nhóm ấy. Ví dụ nhóm $[u_1; u_2)$ có giá trị đại diện là $\frac{1}{2}(u_1 + u_2)$.
- Hiệu $u_{j+1} - u_j$ được gọi là độ dài của nhóm $[u_j; u_{j+1})$. Ta thường phân chia các nhóm có độ dài L bằng nhau và $L > \frac{R}{k}$, với R là khoảng biến thiên, k là số nhóm.

Một số quy tắc ghép nhóm của mẫu số liệu: Mỗi mẫu số liệu có thể được ghép nhóm theo nhiều cách khác nhau nhưng thường tuân theo một số quy tắc sau:

- Sử dụng từ $k = 5$ đến $k = 20$ nhóm. Cỡ mẫu càng lớn thì cần càng nhiều nhóm số liệu. Các nhóm có cùng độ dài bằng L thoả mãn $R < k \cdot L$, trong đó R là khoảng biến thiên, k là số nhóm.
- Giá trị nhỏ nhất của mẫu thuộc vào nhóm $[u_1; u_2)$ và càng gần u_1 càng tốt. Giá trị lớn nhất của mẫu thuộc nhóm $[u_k; u_{k+1})$ và càng gần u_{k+1} càng tốt.

2 SỐ TRUNG BÌNH

Cho mẫu số liệu ghép nhóm (**BẢNG 1**)

Nhóm	$[u_1; u_2)$	...	$[u_i; u_{i+1})$	...	$[u_k; u_{k+1})$
Tần số	n_1	...	n_i	...	n_k

Công thức tính:

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm kí hiệu là $\bar{x}$ và

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + \dots + n_kx_k}{n}$$

trong đó, $n = n_1 + \dots + n_k$ là cỡ mẫu và $x_i = \frac{u_i + u_{i+1}}{2}$ (với $i = 1, \dots, k$) là giá trị đại diện của nhóm $[u_i; u_{i+1})$.

 **Chú ý:** Đối với số liệu rời rạc, người ta thường cho các nhóm dưới dạng $k_1 - k_2$, trong đó $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Nhóm $k_1 - k_2$ được hiểu là nhóm gồm các giá trị $k_1, k_1 + 1, \dots, k_2$. Khi đó, ta cần hiệu chỉnh mẫu số liệu ghép nhóm để đưa về dạng Bảng 1 trước khi thực hiện tính toán các số đặc trưng bằng cách hiệu chỉnh nhóm $k_1 - k_2$ với $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ thành nhóm $[k_1 - 0,5; k_2 + 0,5)$. Chẳng hạn, với dữ liệu ghép nhóm điểm thi môn Toán trong bảng

Điểm thi	1 – 4	5 – 7	8 – 10
Số học sinh	5	20	10

sau khi hiệu chỉnh người ta được bảng:

Điểm thi	$[0,5; 4,5)$	$[4,5; 7,5)$	$[7,5; 10,5)$
Số học sinh	5	20	10

 **Ý nghĩa:** Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho số trung bình của mẫu số liệu gốc, nó cho biết vị trí trung tâm của mẫu số liệu và có thể dùng đại diện cho mẫu số liệu.

3 MỐT

 **Công thức tính:** Để tìm một của mẫu số liệu ghép nhóm (**BẢNG 1**), ta thực hiện theo các bước:

• **Bước 1:** Xác định nhóm có tần số lớn nhất (gọi là nhóm chứa một), giả sử là nhóm $m : [u_m; u_{m+1})$.

• **Bước 2:** Một được xác định là $M_0 = u_m + \frac{n_m - n_{m-1}}{(n_m - n_{m-1}) + (n_m - n_{m+1})} \cdot h$

Trong đó, n_m là tần số nhóm m (quy ước $n_0 = n_{k+1} = 0$) và h là độ dài của nhóm.

 **Chú ý:** Người ta chỉ định nghĩa một cho mẫu ghép nhóm có độ dài các nhóm bằng nhau. Một mẫu có thể không có một hoặc có nhiều hơn một một.

 **Ý nghĩa:** Một của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho một của mẫu số liệu gốc, nó được dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu.

B

PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Nhận dạng mẫu số liệu ghép nhóm

Ví dụ 1. Mẫu số liệu sau cho biết phân bố theo độ tuổi của dân số Việt Nam năm 2019.

Độ tuổi	Dưới 15 tuổi	Từ 15 đến dưới 65 tuổi	Từ 65 tuổi trở lên
Số người	23 371 882	65 420 451	7 416 651

- a) Mẫu số liệu đã cho có là mẫu số liệu ghép nhóm hay không?
 b) Nêu các nhóm và tần số tương ứng. Dân số Việt Nam năm 2019 là bao nhiêu?

Ví dụ 2. Mẫu số liệu sau cho biết kết quả kiểm tra môn Toán của lớp 11A năm 2022.

Điểm số	[3;5)	[5;7)	[7;9)	[9;11)
Số học sinh	5	18	10	7

- a) Mẫu số liệu đã cho có là mẫu số liệu ghép nhóm hay không?
 b) Nêu các nhóm và tần số tương ứng. Số học sinh của lớp 11A là bao nhiêu?

DT

2

Ghép nhóm mẫu số liệu

Ví dụ 3. Bảng thống kê sau cho biết thời gian chạy (phút) của 30 vận động viên (VĐV) trong một giải chạy Marathon.

Thời gian	129	130	133	134	135	136	138	141	142	143	144	145
Số VĐV	1	2	1	1	1	2	3	3	4	5	2	5

Hãy chuyển mẫu số liệu trên sang mẫu số liệu ghép nhóm gồm sáu nhóm có độ dài bằng nhau và bằng 3. Xác định giá trị đại diện của mỗi nhóm.

Ví dụ 4. Cân nặng (kg) của 35 người trưởng thành tại một khu dân cư được cho như sau:

43 51 47 62 48 40 50 62 53 56 40 48
 56 53 50 42 55 52 48 46 45 54 52 50
 47 44 54 55 60 63 58 55 60 58 53.

Chuyển mẫu số liệu trên thành dạng ghép nhóm, các nhóm có độ dài bằng nhau, trong đó có nhóm [40;45). Xác định giá trị đại diện của mỗi nhóm.

DT

3

Tính số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm

Ví dụ 5. Anh Văn ghi lại cự li 30 lần ném lao của mình ở bảng sau (đơn vị: mét):

72,1	72,9	70,2	70,9	72,2	71,5	72,5	69,3	72,3	69,7
72,3	71,5	71,2	69,8	72,3	71,1	69,5	72,2	71,9	73,1
71,6	71,3	72,2	71,8	70,8	72,2	72,2	72,9	72,7	70,7

- a) Tính cự li trung bình của mỗi lần ném.
- b) Tổng hợp lại kết quả ném của anh Văn vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Cự li (m)	[69,2; 70)	[70; 70,8)	[70,8; 71,6)	[71,6; 72,4)	[72,4; 73,2)
Số lần	?	?	?	?	?

- c) Hãy ước lượng cự li trung bình mỗi lần ném từ bảng tần số ghép nhóm trên.
- d) Khả năng anh Văn ném được khoảng bao nhiêu mét là cao nhất?

Ví dụ 6. Tìm cân nặng trung bình của học sinh lớp 11D cho trong bảng sau:

Cân nặng	[40,5; 45,5)	[45,5; 50,5)	[50,5; 55,5)	[55,5; 60,5)	[60,5; 65,5)	[65,5; 70,5)
Số học sinh	10	7	16	4	2	3

Ví dụ 7. Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả cam ở mỗi lô hàng A và B được cho ở bảng sau:

Cân nặng (g)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)
Số quả cam ở lô hàng A	2	6	12	4	1
Số quả cam ở lô hàng B	1	3	7	10	4

- a) Hãy ước lượng cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô hàng A và lô hàng B.
- b) Nếu so sánh theo số trung bình thì cam ở lô hàng nào nặng hơn?

DT

4

Tính một của mẫu số liệu ghép nhóm

Ví dụ 8. Bảng số liệu ghép nhóm sau cho biết chiều cao (cm) của 50 học sinh lớp 11A.

Khoảng chiều cao (cm)	[145; 150)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)
Số học sinh	7	14	10	10	9

Tính một của mẫu số liệu ghép nhóm này. Có thể kết luận gì từ giá trị tính được?

Ví dụ 9. Kết quả kiểm tra môn Toán của lớp 11D như sau

5 6 7 5 6 9 10 8 5 5 4 5 4 5 7 4 5 8 9 10
5 3 5 6 5 7 5 8 4 9 5 6 5 6 8 8 7 9 7 9

- a) Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu trên có bốn nhóm ứng với bốn nửa khoảng $[3; 5)$, $[5; 7)$, $[7; 9)$, $[9; 11)$.
- b) Một của bảng số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

C

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- 1** Một trường trung học phổ thông chọn 36 học sinh nam của khối 11, đo chiều cao của các bạn học sinh đó và thu được mẫu số liệu sau (đơn vị: centimét):

160 161 161 162 162 162 163 163 163 164 164 164
164 165 165 165 165 165 166 166 166 166 167 167
168 168 168 168 169 169 170 171 171 172 172 174

Lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu trên có 5 nhóm ứng với 5 nửa khoảng:

$$[160; 163), [163; 169), [166; 169), [169; 172), [172; 175).$$

- 2 Số sản phẩm một công nhân làm được trong một ngày được cho như sau:

18 25 39 12 54 27 46 25 19 8 36 22
20 19 17 44 5 18 23 28 25 34 46 27 16

Hãy chuyển mẫu số liệu sang dạng ghép nhóm với sáu nhóm có độ dài bằng nhau.

- 3 Mẫu số liệu sau ghi lại cân nặng của 30 bạn học sinh (đơn vị: kilôgam):

17 40 39 40,5 42 51 41,5 39 41 30
40 42 40,5 39,5 41 40,5 37 39,5 40 41
38,5 39,5 40 41 39 40,5 40 38,5 39,5 41,5

Hãy chuyển mẫu số liệu trên sang dạng ghép nhóm với 8 nhóm có độ dài bằng nhau.

- 4 Người ta đếm số xe ô tô đi qua một trạm thu phí mỗi phút trong khoảng thời gian từ 9 giờ đến 9 giờ 30 phút sáng. Kết quả được ghi lại ở bảng sau:

15	16	13	21	17	23	15	21	6	11	12	23	19	25	11
25	7	29	10	28	29	24	6	11	23	11	21	9	27	15

a) Tính số xe trung bình đi qua trạm thu phí trong mỗi phút.

b) Tổng hợp lại số liệu trên vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Số xe	[6; 10]	[11; 15]	[16; 20]	[21; 25]	[26; 30]
Số lần	?	?	?	?	?

c) Hãy ước lượng trung bình số xe đi qua trạm thu phí trong mỗi phút từ bảng tần số ghép nhóm trên.

- 5 Một thư viện thống kê số lượng sách được mượn mỗi ngày trong ba tháng ở bảng sau:

Số sách	[16; 20]	[21; 25]	[26; 30]	[31; 35]	[36; 40]	[41; 45]	[46; 50]
Số ngày	3	6	15	27	22	14	5

Hãy ước lượng số trung bình và một của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

- 6 Quãng đường (km) từ nhà đến nơi làm việc của 40 công nhân một nhà máy được ghi lại như sau:

5 3 10 20 25 11 13 7 12 31 19 10 12 17 18
11 32 17 16 2 7 9 7 8 3 5 12 15 18 3
12 14 2 9 6 15 15 7 6 12

a) Ghép nhóm dãy số liệu trên thành các khoảng có độ rộng bằng nhau, khoảng đầu tiên là $[0; 5)$. Tìm giá trị đại diện cho mỗi nhóm.

b) Tính số trung bình của mẫu số liệu không ghép nhóm và mẫu số liệu ghép nhóm. Giá trị nào chính xác hơn?

c) Xác định nhóm chứa một của mẫu số liệu ghép nhóm thu được.

- 7 Một công ty xây dựng khảo sát khách hàng xem họ có nhu cầu mua nhà ở mức giá nào. Kết quả khảo sát được ghi lại ở bảng sau

Mức giá (triệu đồng/m²)	[10; 14)	[14; 18)	[18; 22)	[22; 26)	[26; 30)
Số khách hàng	54	78	120	45	12

- a) Tìm một của mẫu số liệu ghép nhóm trên.
b) Công ty nên xây nhà ở mức giá nào để nhiều người có nhu cầu mua nhất?

- 8 Số cuộc gọi điện thoại một người thực hiện mỗi ngày trong 30 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên được thống kê trong bảng sau:

Số cuộc gọi	[3; 5]	[6; 8]	[9; 11]	[12; 14]	[15; 17]
Số ngày	5	13	7	3	2

- a) Tìm một của mẫu số liệu ghép nhóm trên.
b) Hãy dự đoán xem khả năng người đó thực hiện bao nhiêu cuộc gọi mỗi ngày là cao nhất.

§2. TRUNG VỊ VÀ TỨ PHÂN VỊ CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

Cho mẫu số liệu ghép nhóm

Nhóm	$[u_1; u_2)$	...	$[u_m; u_{m+1})$	...	$[u_k; u_{k+1})$
Tần số	n_1	...	n_m	...	n_k

1 Trung vị M_e của mẫu số liệu ghép nhóm

⚙ Công thức tính:

- ① Gọi n là cỡ mẫu.
- ② Giả sử nhóm $[u_m; u_{m+1})$ chứa trung vị;
- ③ n_m là tần số của nhóm chứa trung vị;
- ④ $C = n_1 + n_2 + \dots + n_{m-1}$.

Khi đó

$$M_e = u_m + \frac{\frac{n}{2} - C}{n_m} \cdot (u_{m+1} - u_m)$$

⚙ Ý nghĩa: Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho trung vị của mẫu số liệu gốc, nó chia mẫu số liệu thành hai phần, mỗi phần chứa 50% giá trị.

2 Tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

⚙ Tứ phân vị thứ hai Q_2 : Cũng chính là **trung vị** của mẫu số liệu ghép nhóm.

⚙ Tứ phân vị thứ nhất Q_1 : Các bước tìm Q_1 như sau

- Giả sử nhóm $[u_m; u_{m+1})$ chứa tứ phân vị thứ nhất và n_m là tần số của nhóm tứ phân vị thứ nhất;
- $C = n_1 + n_2 + \dots + n_{m-1}$.

Khi đó

$$Q_1 = u_m + \frac{\frac{n}{4} - C}{n_m} \cdot (u_{m+1} - u_m)$$

⚙ Tứ phân vị thứ ba Q_3 : Các bước tìm Q_3 như sau

- Giả sử nhóm $[u_j; u_{j+1})$ chứa tứ phân vị thứ ba và n_j là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ ba;
- $C = n_1 + n_2 + \dots + n_{j-1}$.

Khi đó

$$Q_3 = u_j + \frac{\frac{3n}{4} - C}{n_j} \cdot (u_{j+1} - u_j)$$

CHÚ Ý

Các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho các tứ phân vị của mẫu số liệu gốc, chúng chia mẫu số liệu gồm 4 phần, mỗi phần chứa 25% giá trị.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Tính trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Ví dụ 1. Thời gian (phút) truy cập internet mỗi buổi tối của một số học sinh được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[9,5; 12,5)	[12,5; 15,5)	[15,5; 18,5)	[18,5; 21,5)	[21,5; 24,5)
Số học sinh	3	12	15	24	2

Tính trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm này.

Ví dụ 2. Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả bơ ở một lô hàng cho trong bảng sau:

Cân nặng (g)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)
Số quả bơ	1	7	12	3	2

Hãy tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

DT 2 Tìm tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Ví dụ 3. Thời gian (phút) truy cập internet mỗi buổi tối của một số học sinh được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[9,5; 12,5)	[12,5; 15,5)	[15,5; 18,5)	[18,5; 21,5)	[21,5; 24,5)
Số học sinh	3	12	15	24	2

Tìm tứ phân vị thứ nhất Q_1 và tứ phân vị thứ ba Q_3 của mẫu số liệu ghép nhóm.

Ví dụ 4. Bảng bên cho biết tần số ghép nhóm số liệu thống kê cân nặng của 40 học sinh lớp 11A trong một trường trung học phổ thông (đơn vị: kilôgam). Xác định tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm.

Nhóm	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80)	[80; 90)
Tần số	2	10	16	8	2	2

Ví dụ 5. Thời gian luyện tập trong một ngày (tính theo giờ) của một số vận động viên được ghi lại ở bảng sau:

Thời gian luyện tập (giờ)	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)
Số vận động viên	3	8	12	12	4

- Hãy xác định các tứ phân vị của mẫu số liệu đã cho.
- Huấn luyện viên muốn xác định nhóm gồm 25% các vận động viên có số giờ luyện tập cao nhất. Hỏi huấn luyện viên nên chọn các vận động viên có thời gian luyện tập từ bao nhiêu giờ trở lên vào nhóm này?

Ví dụ 6. Một phòng khám thống kê số bệnh nhân đến khám bệnh mỗi ngày trong tháng 4 năm 2022 ở bảng sau:

Số bệnh nhân	[1; 10]	[11; 20]	[21; 30]	[31; 40]	[41; 50]
Số ngày	7	8	7	6	2

- a) Hãy ước lượng các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.
- b) Quản lý phòng khám cho rằng có khoảng 25% số ngày khám có nhiều hơn 35 bệnh nhân đến khám. Nhận định trên có hợp lý không?

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- 1) Bảng bên cho ta bảng tần số ghép nhóm số liệu thống kê chiều cao của 40 mẫu cây ở một vườn thực vật (đơn vị: centimét). Xác định trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Nhóm	Tần số
[30; 40)	4
[40; 50)	10
[50; 60)	14
[60; 70)	6
[70; 80)	4
[80; 90)	2
	$n = 40$

- 2) Mẫu số liệu dưới đây ghi lại tốc độ của 40 ô tô khi đi qua một trạm đo tốc độ (đơn vị: km/h):

48,5 43 50 55 45 60 53 55,5 44 65
 51 62,5 41 44,5 57 57 68 49 46,5 53,5
 61 49,5 54 62 59 56 47 50 60 61
 49,5 52,5 57 47 60 55 45 47,5 48 61,5

- a) Lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu trên có sáu nhóm ứng với sáu nửa khoảng:

[40; 45), [45; 50), [50; 55), [55; 60), [60; 65), [65; 70).

- b) Xác định số trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

- 3) Trong tuần lễ bảo vệ môi trường, các học sinh khối 11 tiến hành thu nhặt vỏ chai nhựa để tái chế. Nhà trường thống kê kết quả thu nhặt vỏ chai của học sinh khối 11 ở bảng sau:

Số vỏ chai nhựa	[11; 15]	[16; 29]	[21; 25]	[26; 30]	[31; 35]
Số học sinh	53	82	48	39	18

Hãy tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

- 4) Trong một hội thao, thời gian chạy 200 m của một nhóm các vận động viên được ghi lại ở bảng sau:

Thời gian (giây)	[21; 21,5)	[21,5; 22)	[22; 22,5)	[22,5; 23)	[23; 23,5)
Số vận động viên	5	12	32	45	30

Dựa vào bảng số liệu trên, ban tổ chức muốn chọn ra khoảng 50% số vận động viên chạy nhanh nhất để tiếp tục thi vòng 2. Ban tổ chức nên chọn các vận động viên có thời gian chạy không quá bao nhiêu giây?

- 5 Một hãng xe ô tô thống kê lại số lần gặp sự cố về động cơ của 100 chiếc xe cùng loại sau 2 năm sử dụng đầu tiên ở bảng sau:

Số lần gặp sự cố	[1; 2]	[3; 4]	[5; 6]	[7; 8]	[9; 10]
Số xe	17	33	25	20	5

- a) Hãy ước lượng các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.
- b) Một người cho rằng có trên 25% xe của hãng gặp không ít hơn 4 sự cố về động cơ trong 2 năm sử dụng đầu tiên. Nhận định trên có hợp lí không?

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho bảng phân bố tần số ghép lớp sau

Chiều cao của 40 học sinh nam ở một trường THPT

Lớp chiều cao (cm)	[160; 163]	[164; 167]	[168; 171]	[172; 175]	Cộng
Tần số	9	20	7	4	40

Giá trị đại diện c_3 của lớp chiều cao thứ 3 là

- A. $c_3 = 168$. B. $c_3 = 169,5$. C. $c_3 = 7$. D. $c_3 = 171$.

Câu 2. Độ dài của 60 lá dương xỉ trưởng thành được cho bằng bảng phân bố tần số ghép lớp như sau.

Số TT	Lớp của độ dài (cm)	Tần số
1	[10; 20)	8
2	[20; 30)	18
3	[30; 40)	24
4	[40; 50)	10
	Cộng	60

Hỏi số lá có chiều dài từ 30 cm đến 50 cm chiếm bao nhiêu phần trăm?

- A. 50%. B. 56%. C. 56,7%. D. 57%.

Câu 3. Bảng xếp loại học lực của học sinh lớp 11A2 trường THPT Bắc Thăng Long năm học 2012 – 2013 được cho như sau

Học lực	Kém	Yếu	Trung Bình	Khá	Giỏi	Tổng
Điểm	[0; 3)	[3; 5)	[5; 6,5)	[6,5; 8)	[8; 10)	
Số học sinh	3	12	13	11	6	45

Xác định số trung bình $\bar{x}$ điểm của 45 học sinh nói trên

- A. $\bar{x} = 5,8$. B. $\bar{x} = 5,5$. C. $\bar{x} = 6,0$. D. $\bar{x} = 5$.

Thống kê điểm trung bình môn Toán của một số học sinh lớp 11 được cho ở bảng sau:

Khoảng điểm	[6,5; 7)	[7; 7,5)	[7,5; 8)	[8; 8,5)	[8,5; 9)	[9; 9,5)	[9,5; 10)
Tần số	8	10	16	24	13	7	4

Từ bảng số liệu ghép nhóm này, trả lời các câu hỏi sau:

Câu 4. Bảng số liệu trên có cỡ mẫu (kích thước mẫu) là bao nhiêu?

- A. 24. B. 82. C. 7. D. 10.

Câu 5. Nhóm chứa một của mẫu số liệu này là

- A. $[9,5; 10)$. B. $[6,5; 7)$. C. $[8,5; 9)$. D. $[8; 8,5)$.

Câu 6. Số trung bình của mẫu số liệu trên gần nhất với kết quả nào sau đây?

- A. 7,34. B. 8,12. C. 8,30. D. 8,45.

Câu 7. Trung vị của mẫu số liệu trên thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A. 8,15. B. 8,43. C. 8,30. D. 8,21.

Câu 8. Một của mẫu số liệu trên có giá trị gần nhất với kết quả nào dưới đây?

- A. 7,34. B. 8,12. C. 8,30. D. 8,21.

Câu 9. Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu trên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau đây?

- A. 7. B. 7,95. C. 7,58. D. 8,21.

Câu 10. Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu trên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau đây?

- A. 8,53. B. 7,95. C. 7,58. D. 8,63.

—HẾT—

HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

§1. PHÉP TÍNH LŨY THỪA

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Lũy thừa với số mũ nguyên

- ✓ Lũy thừa với số mũ nguyên dương: Cho $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$, khi đó: $a^n = \underbrace{a.a.a\dots a}_n$ n thừa số.
- ✓ Lũy thừa với số mũ nguyên âm: Cho $a \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$, khi đó: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
- ✓ Với $a \neq 0$, ta quy ước $a^0 = 1$; 0^0 và 0^{-n} ($n \in \mathbb{N}^*$) không có nghĩa.

2 Căn bậc n

- ✓ **Định nghĩa:** Cho số thực a và số nguyên dương n ($n \geq 2$). Số b được gọi là *căn bậc n* của số a nếu $b^n = a$.

CHÚ Ý

- ① Với n lẻ và $a \in \mathbb{R}$: Có duy nhất một căn bậc n của a , ký hiệu là $\sqrt[n]{a}$.
- ② Với n chẵn, ta xét ba trường hợp sau:
 - $a < 0$: Không tồn tại căn bậc n của a ;
 - $a = 0$: Có một căn bậc n của a là số 0;
 - $a > 0$: Có hai căn bậc n của a là hai số đối nhau, kí hiệu giá trị dương là $\sqrt[n]{a}$, còn giá trị âm là $-\sqrt[n]{a}$.

✓ Tính chất:

$$\textcircled{1} \sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ |a| & \text{nếu } n \text{ chẵn;} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab};$$

$$\textcircled{4} (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m};$$

$$\textcircled{3} \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}};$$

$$\textcircled{5} \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

(Ở mỗi công thức trên, ta giả sử các biểu thức xuất hiện trong đó có nghĩa).

3 Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Cho $a > 0$ và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$; trong đó $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Khi đó: $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

4 Công thức biến đổi lũy thừa cần nhớ

Cho cơ số $a, b > 0$ và hai số thực m, n . Khi đó, ta có:

① $a^0 = 1; a^1 = a.$	② $a^{-1} = \frac{1}{a}; a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$	③ $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}; \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$
④ $a^{m+n} = a^m \cdot a^n.$	⑤ $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}.$	⑥ $a^{m \cdot n} = (a^m)^n = (a^n)^m.$
⑦ $(ab)^n = a^n \cdot b^n.$	⑧ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$	⑨ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}.$

5 So sánh hai lũy thừa cùng cơ số

Cho cơ số $a > 0$ và hai số thực x, y . Khi đó, ta có:

- ① Nếu $a > 1$ thì $a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$. ② Nếu $0 < a < 1$ thì $a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$.

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

DT 1 Tính giá trị biểu thức

≡ Ví dụ 1. Tính

a) $25^{\frac{3}{2}}.$	b) $32^{-\frac{2}{5}}.$	c) $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}.$
d) $\sqrt[3]{-27}.$	e) $\sqrt[5]{9} \cdot \sqrt[5]{27}.$	f) $\frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}}.$

≡ Ví dụ 2. Tính

a) $A = (\sqrt{2})^{86} - 2^{43}.$	b) $B = \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}.$
c) $C = \left(\frac{3}{7}\right)^{-1} - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{-1}.$	d) $D = \frac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{1+\sqrt{5}}}.$
e) $E = \left(\frac{1}{625}\right)^{-\frac{1}{4}} + 16^{\frac{3}{4}} - 2^{-2} \cdot 64^{\frac{1}{3}}.$	f) $F = 64^{\frac{1}{2}} \cdot 64^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{64} + 4^{2+2\sqrt[3]{5}} : 16^{\sqrt[3]{5}}.$

≡ Ví dụ 3. Biết rằng $3^x = 2$. Tính giá trị của biểu thức:

a) $A = 3^{2x-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} + 9^{x+1}$.

b) $B = 81^x + \sqrt[4]{3^x} \cdot \sqrt[4]{27^x}$

DT

2

Rút gọn biểu thức liên quan đến lũy thừa

≡ Ví dụ 4. Viết mỗi biểu thức sau dưới dạng một lũy thừa ($a > 0$)

a) $\sqrt[4]{2^{-3}}$;

b) $\frac{1}{\sqrt[5]{2^3}}$;

c) $(\sqrt[5]{3})^4$;

d) $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$;

e) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a^3} : (\sqrt[6]{a})^5$;

f) $a^{\frac{1}{3}} : a^{-\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}}$.

≡ Ví dụ 5. Viết các biểu thức sau về dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ

a) $A = a^{\frac{1}{6}} \sqrt[3]{a}$, với $a > 0$.

b) $B = a^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{a}$, với $a > 0$.

c) $C = \frac{\sqrt[3]{a^2 \sqrt{a}}}{a^3}$, với $a > 0$.

d) $D = \frac{a^{\sqrt{7}+1} a^{2-\sqrt{7}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}}$ với $a > 0$.

DT

3

So sánh hai lũy thừa

≡ Ví dụ 6. Cho $a > 0$ và $a \neq 1$. Hãy so sánh cơ số a với 1, biết rằng

a) $a^{\frac{3}{4}} > a^{\frac{5}{6}}$.

b) $a^{\frac{11}{6}} < a^{\frac{15}{8}}$.

c) $\sqrt[15]{a^7} > \sqrt[5]{a^2}$.

DT

4

Vận dụng, thực tiễn

≡ Ví dụ 7. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = (7 + 4\sqrt{3})^{2020} (4\sqrt{3} - 7)^{2019}$.

b) $B = \frac{(4 + 2\sqrt{3})^{2018} \cdot (1 - \sqrt{3})^{2017}}{(1 + \sqrt{3})^{2019}}$.

≡ Ví dụ 8. Cho $4^x + 4^{-x} = 14$. Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{2 + 2^x + 2^{-x}}{7 - 2^x - 2^{-x}}$.

≡ Ví dụ 9. Rút gọn các biểu thức sau (với $a, b > 0$ và $a, b \neq 1$):

a) $A = \frac{a^{\frac{1}{3}} \sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}} \sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$.

b) $B = \frac{a - 3a^{\frac{1}{3}} + 2}{\sqrt[3]{a} - 1} + \frac{\sqrt{a} - a^{\frac{5}{6}} + \sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{a}}$.

≡ Ví dụ 10. Cho $x > 0, y > 0$ và số thực a thỏa $a = \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}}$. Chứng minh rằng $a^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}$.

≡ Ví dụ 11. Cường độ ánh sáng tại độ sâu h (m) dưới một mặt hồ được tính bằng công thức $I_h =$

$I_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h}{4}}$, trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt hồ đó.

- a) Cường độ ánh sáng tại độ sâu 1 m bằng bao nhiêu phần trăm so với cường độ ánh sáng tại mặt hồ?
- b) Cường độ ánh sáng tại độ sâu 3 m gấp bao nhiêu lần cường độ ánh sáng tại độ sâu 6 m?

≡ Ví dụ 12. Để dự báo dân số của một quốc gia, người ta sử dụng công thức $S = A(2,71)^{nr}$; trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Năm 2017, dân số Việt Nam là 93 671 600 người (Tổng cục Thống kê, Niên giám thống kê 2017, Nhà xuất bản Thống kê, Tr.79). Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi là 0,81%, dự báo dân số Việt Nam năm 2035 là bao nhiêu người (kết quả làm tròn đến chữ số hàng trăm)?

≡ Ví dụ 13. Một chất phóng xạ có chu kì bán rã là 25 năm, tức là cứ sau 25 năm, khối lượng của chất phóng xạ đó giảm đi một nửa. Giả sử lúc đầu có 10 g chất phóng xạ đó. Viết công thức tính khối lượng của chất đó còn lại sau t năm và tính khối lượng của chất đó còn lại sau 120 năm (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn theo đơn vị gam).

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Tính giá trị của các biểu thức sau:

- a) $\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt[4]{5}$; b) $\frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}$; c) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{24}}$;
- d) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$; e) $\sqrt[4]{3\sqrt[3]{3}}$; f) $(-\sqrt[6]{4})^3$.

2 Tính giá trị của biểu thức

- a) $A = 4^4 \cdot 8^{11} \cdot 2^{2017}$. b) $B = 3^{1-\sqrt{2}} \cdot 3^{2+\sqrt{2}} \cdot 9^{\frac{1}{2}}$
- c) $C = 2018^{\sin^2 \alpha} \cdot 2018^{\cos^2 \alpha}$ d) $D = \frac{6^{2+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{1+\sqrt{5}}}$.

3 Viết các biểu thức sau về dạng lũy thừa của số mũ hữu tỉ

- a) $A = a^{\frac{8}{3}} : \sqrt[3]{a^4}$ b) $B = a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[4]{a}$
- c) $C = \frac{a^2 a^{\frac{5}{2}} \sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[6]{a^5}} \quad (a > 0)$ d) $D = \frac{7^{5+2020\sqrt{5}} \cdot 7^{5-2020\sqrt{5}}}{(7^{\sqrt{3}-2})^{\sqrt{3}+2}}$.

4 Cho a là số thực dương. Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $(a^{\sqrt{6}})^{\sqrt{24}}$. b) $a^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1}$.
- c) $a^{-\sqrt{3}} : a^{(\sqrt{3}-1)^2}$. d) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[12]{a^5}$.

5 Cho $a > 0, b > 0$. Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $A = \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}\right) \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}}\right)$; b) $B = \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right) \left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$.

6 Biết rằng $5^{2x} = 3$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{5^{3x} + 5^{-3x}}{5^x + 5^{-x}}$.

7 Biết rằng $3^\alpha + 3^{-\alpha} = 3$. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $3^{\frac{\alpha}{2}} + 3^{\frac{-\alpha}{2}}$;

b) $3^{2\alpha} + 3^{-2\alpha}$.

8 Biết rằng $4^x = 25^y = 10$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

9 Cho $9^x + 9^{-x} = 23$. Tính giá trị biểu thức $A = \frac{5 + 3^x + 3^{-x}}{1 - 3^x - 3^{-x}}$.

10 Với $0 < a$ và $a \neq 1$, hãy tìm a để

a) $(a-1)^{-\frac{2}{3}} < (a-1)^{-\frac{1}{3}}$

b) $(a-1)^{-2} > (a-1)^{\sqrt{2}}$

11 Xác định các giá trị của số thực a thỏa mãn

a) $a^{\frac{1}{2}} > a^{\sqrt{3}}$;

b) $a^{-\frac{3}{2}} < a^{\frac{2}{3}}$;

c) $(\sqrt{2})^a > (\sqrt{3})^a$.

12 Cho $a > 0, b > 0$. Rút gọn mỗi biểu thức sau

a) $A = \frac{(\sqrt[4]{a^3 b^2})^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12} b^6}}}$;

b) $B = \left[\frac{a-b}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} \right] : \left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}} \right) ..$

13 Nếu một khoản tiền gốc P được gửi ngân hàng với lãi suất hằng năm r (r được biểu thị dưới dạng số thập phân), được tính lãi n lần trong một năm, thì tổng số tiền A nhận được (cả vốn lẫn lãi) sau N kì gửi cho bởi công thức sau:

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n} \right)^N.$$

Hỏi nếu bác An gửi tiết kiệm số tiền 120 triệu đồng theo kì hạn 6 tháng với lãi suất không đổi là 5% một năm, thì số tiền thu được (cả vốn lẫn lãi) của bác An sau 2 năm là bao nhiêu?

14 Định luật thứ ba của Kepler nói rằng bình phương của chu kì quỹ đạo p (tính bằng năm Trái Đất) của một hành tinh chuyển động xung quanh Mặt Trời (theo quỹ đạo là một đường elip với Mặt Trời nằm ở một tiêu điểm) bằng lập phương của bán trục lớn d (tính bằng đơn vị thiên văn AU).

a) Tính p theo d .

b) Nếu Sao Thổ có chu kì quỹ đạo là 29,46 năm Trái Đất, hãy tính bán trục lớn quỹ đạo của Sao Thổ đến Mặt Trời (kết quả tính theo đơn vị thiên văn và làm tròn đến hàng phần trăm).

15 Khoảng cách từ một hành tinh đến Mặt Trời có thể xấp xỉ bằng một hàm số của độ dài năm của hành tinh đó. Công thức của hàm số đó là $d = \sqrt[3]{6t^2}$, trong đó d là khoảng cách từ hành tinh đó đến Mặt Trời (tính bằng triệu dặm) và t là độ dài năm của hành tinh đó (tính bằng số ngày Trái Đất).

(Theo Algebra 2, NXB MacGraw-Hill, 2008).

a) Nếu độ dài của một năm trên Sao Hỏa là 687 ngày Trái Đất thì khoảng cách từ Sao Hỏa

đến Mặt Trời là bao nhiêu?

b) Tính khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời (coi một năm trên Trái Đất có 365 ngày).

16 Tại một vùng biển, giả sử cường độ ánh sáng I thay đổi theo độ sâu theo công thức $I = I_0 \cdot 10^{-0,3d}$, trong đó d là độ sâu (tính bằng mét) so với mặt hồ, I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt hồ.

a) Tại độ sâu 1 m, cường độ ánh sáng gấp bao nhiêu lần I_0 ?

b) Cường độ ánh sáng tại độ sâu 2 m gấp bao nhiêu lần so với tại độ sâu 10 m? Làm tròn kết quả đến hai chữ số thập phân.

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

Câu 1. Cho a là số thực dương. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $a^{x+y} = a^x + a^y$. B. $(a^x)^y = a^{xy}$. C. $(a^x)^y = a^x \cdot a^y$. D. $a^{x-y} = a^x - a^y$.

Câu 2. Cho a, b là các số thực dương khác 1 và x, y là các số thực. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $a^x a^y = a^{x+y}$. B. $\frac{a^x}{a^y} = a^{\frac{x}{y}}$. C. $a^x b^y = (ab)^{x+y}$. D. $(a^x)^y = a^{x+y}$.

Câu 3. Tìm số nhỏ hơn 1 trong các số sau đây

- A. $(0,7)^{2017}$. B. $(0,7)^{-2017}$. C. $(1,7)^{2017}$. D. $(2,7)^{2017}$.

Câu 4. Cho $(0,25\pi)^\alpha > (0,25\pi)^\beta$. Kết luận nào sau đây đúng?

- A. $\alpha \cdot \beta = 1$. B. $\alpha > \beta$. C. $\alpha + \beta = 0$. D. $\alpha < \beta$.

Câu 5. Tính giá trị biểu thức $A = \frac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{1+\sqrt{5}}}$.

- A. 1. B. $6^{-\sqrt{5}}$. C. 18. D. 9.

Câu 6. Giả sử a là số thực dương. Biểu thức $\sqrt{a^3/a}$ được viết dưới dạng a^α . Khi đó giá trị α bằng bao nhiêu?

- A. $\alpha = \frac{2}{3}$. B. $\alpha = \frac{11}{6}$. C. $\alpha = \frac{1}{6}$. D. $\alpha = \frac{5}{3}$.

Câu 7. Giả sử x là số thực dương. Biểu thức $P = x\sqrt[5]{x}$ được viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là

- A. $x^{\frac{11}{10}}$. B. $x^{\frac{6}{5}}$. C. $x^{\frac{1}{5}}$. D. $x^{\frac{4}{5}}$.

Câu 8. Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}$ với $x > 0$.

- A. $P = x^{\frac{1}{8}}$. B. $P = x^2$. C. $P = \sqrt{x}$. D. $P = x^{\frac{2}{3}}$.

Câu 9. Rút gọn biểu thức $Q = b^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{b}$, với $b > 0$.

- A. $Q = b^2$. B. $Q = b^{\frac{5}{9}}$. C. $Q = b^{-\frac{4}{3}}$. D. $Q = b^{\frac{4}{3}}$.

Câu 10. Rút gọn biểu thức $Q = \frac{b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[5]{b}}$, với $b > 0$.

- A. $Q = b^{\frac{1}{15}}$. B. $Q = b^{-\frac{2}{15}}$. C. $Q = b^{\frac{2}{15}}$. D. $Q = b^{\frac{5}{3}}$.

Câu 11. Hãy viết biểu thức $L = \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{7}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ.

- A. $7^{\frac{1}{2}}$. B. $7^{\frac{1}{18}}$. C. $7^{\frac{4}{9}}$. D. $7^{\frac{1}{27}}$.

Câu 12. Biến đổi $\sqrt[3]{x^5} \cdot \sqrt[4]{x}$, ($x > 0$) thành dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ ta được

A. $x^{\frac{20}{3}}$.

B. $x^{\frac{23}{12}}$.

C. $x^{\frac{21}{12}}$.

D. $x^{\frac{12}{5}}$.

Câu 13. Viết biểu thức $A = \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} : a^{\frac{11}{6}}$ ($a > 0$) dưới dạng số mũ lũy thừa hữu tỉ.

A. $A = a^{-\frac{23}{24}}$.

B. $A = a^{\frac{21}{24}}$.

C. $A = a^{\frac{23}{24}}$.

D. $A = a^{-\frac{1}{12}}$.

Câu 14. Cho $a^{2b} = 5$. Tính $2.a^{6b}$.

A. 120.

B. 250.

C. 15.

D. 125.

Câu 15. Cho hai số dương a và b thỏa mãn $a^{\frac{1}{2}} = 3$, $b^{\frac{1}{3}} = 2$. Tính giá trị của tổng $S = a + b$.

A. 5.

B. 13.

C. 17.

D. 31.

Câu 16. Giá trị của biểu thức $P = (7 + 4\sqrt{3})^{2017} (7 - 4\sqrt{3})^{2016}$ bằng

A. 1.

B. $7 - 4\sqrt{3}$.

C. $7 + 4\sqrt{3}$.

D. $(7 + 4\sqrt{3})^{2016}$.

Câu 17. Giá trị của biểu thức $P = (9 + 4\sqrt{5})^{2017} (9 - 4\sqrt{5})^{2016}$ bằng

A. $9 + 4\sqrt{5}$.

B. 1.

C. $(9 - 4\sqrt{5})^{2016}$.

D. $9 - 4\sqrt{5}$.

Câu 18. Giá trị của biểu thức $P = (1 + \sqrt{3})^{2016} (3 - \sqrt{3})^{2016}$ bằng

A. 12^{1008} .

B. 4^{1008} .

C. $(1 + \sqrt{3})^{1008}$.

D. $(3 - \sqrt{3})^{1008}$.

Câu 19. Biết $2^x + 2^{-x} = m$ với $m \geq 2$. Tính giá trị của biểu thức $M = 4^x + 4^{-x}$.

A. $M = m - 2$.

B. $M = m^2 + 2$.

C. $M = m^2 - 2$.

D. $M = m + 2$.

Câu 20. Nếu $(a - 2)^{-\frac{1}{4}} \leq (a - 2)^{-\frac{1}{3}}$ thì khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a > 3$.

B. $a < 3$.

C. $2 < a < 3$.

D. $a > 2$.

Câu 21. Cho $a > 1 > b > 0$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a^2 < b^2$.

B. $a^{-\sqrt{3}} < b^{-\sqrt{3}}$.

C. $b^{-2} > b^{-e}$.

D. $a^{-2} < a^{-3}$.

Câu 22. Cho $(a + 1)^{-\frac{2}{3}} < (a + 1)^{-\frac{1}{3}}$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. $a > 0$.

B. $-1 < a < 0$.

C. $a \geq -1$.

D. $a \geq 0$.

Câu 23. Cho hàm số $f(a) = \frac{a^{\frac{2}{3}} (\sqrt[3]{a^{-2}} - \sqrt[3]{a})}{a^{\frac{1}{8}} (\sqrt[8]{a^3} - \sqrt[8]{a^{-1}})}$ với $a > 0, a \neq 1$. Tính giá trị $M = f(2019^{2020})$.

A. $2019^{1010} + 1$.

B. $2019^{2020} + 1$.

C. $-2019^{1010} - 1$.

D. 2019^{1010} .

Câu 24. Định luật thứ ba của Kepler về quỹ đạo chuyển động cho biết cách ước tính khoảng thời gian P (tính theo năm Trái Đất) mà một hành tinh cần để hoàn thành một quỹ đạo quay quanh Mặt Trời.

Khoảng thời gian đó được xác định bởi hàm số $P = d^{\frac{3}{2}}$, trong đó d là khoảng cách từ hành tinh đó đến Mặt Trời tính theo đơn vị thiên văn AU (1AU là khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời, tức là 1AU khoảng 93000000 dặm) (Nguồn: R.I.Charles et al., Algebra 2, Pearson).

Hỏi Sao Hỏa quay quanh Mặt Trời thì mất bao nhiêu năm Trái Đất (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn)? Biết khoảng cách từ Sao Hỏa đến Mặt Trời là 1,52 AU.

A. 1,233 (năm Trái Đất).

B. 2,311 (năm Trái Đất).

C. 1,804 (năm Trái Đất).

D. 1,874 (năm Trái Đất).

Câu 25. Tại một xí nghiệp, công thức $P(t) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$ được dùng để tính giá trị còn lại (tính theo triệu đồng) của một chiếc máy sau thời gian t (tính theo năm) kể từ khi đưa vào sử dụng. Hỏi sau 1 năm đưa vào sử dụng, giá trị còn lại của máy bằng bao nhiêu phần trăm so với ban đầu?

A. 83,37%.**B.** 79,37%.**C.** 75,37%.**D.** 85,37%.

—HẾT—

§2. PHÉP TÍNH LÔGARIT

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Định nghĩa và tính chất

Định nghĩa: Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$.

$$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b.$$

Tính chất: Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$, ta có tính chất sau:

- | | |
|-----------------------|-------------------------------|
| ① $\log_a 1 = 0.$ | ② $\log_a a = 1.$ |
| ③ $a^{\log_a b} = b.$ | ④ $\log_a a^\alpha = \alpha.$ |

2 Các công thức lôgarit cần nhớ

Cho các số dương $a, b, b_1, b_2, \dots, b_n$ với $a \neq 1$, ta có các quy tắc sau:

Công thức biến đổi tích thương:

- | | |
|---|--|
| ① $\log_a (b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2;$ | ② $\log_a \left(\frac{b_1}{b_2} \right) = \log_a b_1 - \log_a b_2.$ |
|---|--|

Ghi nhớ: Lô ga của một tích thành một tổng; Lô ga của một thương thành một hiệu.

Công thức biến đổi số mũ:

- | | |
|------------------------------------|--|
| ① $\log_a b^m = m \cdot \log_a b.$ | ② $\log_a \left(\frac{1}{b} \right) = -\log_a b.$ |
|------------------------------------|--|

Ghi nhớ: Với điều kiện $b \neq 0$ thì $\log_a b^{2n} = 2n \cdot \log_a |b|.$

Công thức đổi cơ số:

- | |
|---|
| ① $\log_a b = \frac{1}{\log_b a},$ với $b \neq 1$ |
| ② $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},$ với $a, b, c > 0$ và $a \neq 1, c \neq 1$ |
| ③ $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c,$ với $a, b, c > 0$ và $a \neq 1, b \neq 1$ |

3 Lôgarit thập phân và lôgarit tự nhiên

Lôgarit thập phân: Lôgarit cơ số 10 gọi là lôgarit thập phân.

✓ $\log_{10} N, (N > 0)$ được viết là $\log N$ hay $\lg N.$

Lôgarit tự nhiên: Lôgarit cơ số e gọi là lôgarit tự nhiên.

✓ $\log_e N, (N > 0)$ được viết là $\ln N.$

B

CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

DT

1

Tinh toán biểu thức chứa lôgarit

≡ Ví dụ 1. Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy tính:

- a) $\log_3 \sqrt[3]{9}$; b) $\log_{\sqrt{2}} 8$; c) $9^{\log_3 12}$;
 d) $2^{\log_4 9}$; e) $\log_2 5 \cdot \log_5 64$; f) $\log \sqrt{1000}$.

≡ Ví dụ 2. Với a là số thực dương và $a \neq 1$. Tính

- a) $\log_a \sqrt[3]{a}$. b) $\log_a (a \sqrt[3]{a \sqrt{a}})$; c) $\log_a \frac{1}{a^3}$;
 d) $\log_{\frac{a}{3}} \left(\frac{a^2}{9} \right)$; e) $\log_{a \sqrt{a}} a \sqrt[3]{a}$; f) $\log_{a^2} \sqrt[4]{a^3}$.

≡ Ví dụ 3. Tính giá trị của các biểu thức sau:

- a) $\log_3 \frac{9}{10} + \log_3 30$; b) $\log_5 75 - \log_5 3$;
 c) $\log_3 \frac{5}{9} - 2 \log_3 \sqrt{5}$; d) $4 \log_{12} 2 + 2 \log_{12} 3$;
 e) $2 \log_5 2 - \log_5 4 \sqrt{10} + \log_5 \sqrt{2}$; f) $\log_3 \sqrt{3} - \log_3 \sqrt[3]{9} + 2 \log_3 \sqrt[4]{27}$.

≡ Ví dụ 4. Cho $\log_2 x = \frac{1}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{\log_2 (4x) + \log_2 \frac{x}{2}}{x^2 - \log_{\sqrt{2}} x}$.

≡ Ví dụ 5. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $\sqrt{ab^3} = 27$. Tính giá trị của $\log_3 a + 6 \log_3 b$.

DT

2

Phân tích một lôgarit theo hai lôgarit cho trước

≡ Ví dụ 6. Cho $a = \log_2 5$, $b = \log_2 9$. Tính $\log_2 \frac{40}{3}$ theo a và b .

≡ Ví dụ 7. Cho $\log_3 2 = a$, $\log_3 5 = b$. Tính $\log_6 20$ theo a và b .

≡ Ví dụ 8. Đặt $a = \log_3 5$; $b = \log_4 5$. Hãy biểu diễn $\log_{15} 20$ theo a và b .

DT

3

Vận dụng, thực tiễn

≡ Ví dụ 9. Cho $\log_a b = 4$. Tính:

- a) $\log_a (a^{\frac{1}{2}} b^5)$; b) $\log_a \left(\frac{a \sqrt{b}}{b \sqrt[3]{a}} \right)$;
 c) $\log_{a^3 b^2} (a^2 b^3)$; d) $\log_{a \sqrt[3]{b}} (\sqrt[4]{a \sqrt{b}})$.

Ví dụ 10. Cho $a > 0$, $b > 0$ thỏa mãn $a^2 + 9b^2 = 10ab$. Chứng minh

$$\log \frac{a+3b}{4} = \frac{\log a + \log b}{2}.$$

Ví dụ 11. Trong hóa học, độ pH của một dung dịch được tính theo công thức $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$, trong đó $[\text{H}^+]$ là nồng độ H^+ (ion hydro) tính bằng mol/L. Các dung dịch có pH bé hơn 7 thì có tính acid, có pH lớn hơn 7 thì có tính kiềm, có pH bằng 7 thì trung tính.

- Tính độ pH của dung dịch có nồng độ H^+ là 0,0001 mol/L. Dung dịch này có tính acid, hay kiềm hay trung tính?
- Dung dịch A có nồng độ H^+ gấp đôi nồng độ H^+ của dung dịch B.
Độ pH của dung dịch nào lớn hơn và lớn hơn bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn.

Ví dụ 12. Để đặc trưng cho độ to nhỏ của âm, người ta đưa ra khái niệm mức cường độ của âm. Một đơn vị thường dùng để đo mức cường độ của âm là đêxinben (viết tắt là dB). Khi đó mức cường độ L của âm được tính theo công thức: $L(I) = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$ trong đó, I là cường độ của âm tại thời điểm đang xét, I_0 cường độ âm ở ngưỡng nghe ($I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$). Một cuộc trò chuyện bình thường trong lớp học có mức cường độ âm trung bình là 68 dB. Hãy tính cường độ âm tương ứng ra đơn vị W/m^2 .

Ví dụ 13. Độ lớn M của một trận động đất theo thang Richter được tính theo công thức $M = \log \frac{A}{A_0}$, trong đó A là biên độ lớn nhất ghi được bởi máy đo địa chấn, A_0 là biên độ tiêu chuẩn được sử dụng để hiệu chỉnh độ lệch gây ra bởi khoảng cách của máy đo địa chấn so với tâm chấn ($A_0 = 1 \mu\text{m}$).

- Tính độ lớn của trận động đất có biên độ A bằng
 - $10^{5,1} A_0$;
 - $65\,000 A_0$.
- Một trận động đất tại địa điểm N có biên độ lớn nhất gấp ba lần biên độ lớn nhất của trận động đất tại địa điểm P . So sánh độ lớn của hai trận động đất.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Tính:

- $\log_{0,5} 0,25$;
- $8^{\log_2 5}$;
- $\left(\frac{1}{10} \right)^{\log 81}$;
- $5^{\log_2 16}$.
- $\log_4 25 + \log_2 1,6$
- $\log_2 \sqrt{2\sqrt{32}}$
- $\log_a \left(a^3 \sqrt{a\sqrt{a}} \right)$
- $\log_{a\sqrt{a}} a^3 \sqrt{a}$.

2 Cho $\log_a b = 2$. Tính

- $\log_a (a^2 b^3)$;
- $\log_a \frac{a\sqrt{a}}{b^3 \sqrt{b}}$;
- $\log_a (2b) + \log_a \left(\frac{b^2}{2} \right)$;
- $\log_{ab} (a^2 b^3)$.

3 Biết $\log_2 3 \approx 1,585$. Hãy tính

- $\log_2 48$;
- $\log_4 27$.

- 4 a) Cho $1 \neq a, b > 0$ thỏa mãn $\log_a b = 3$. Tính $T = \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}$.
- b) Cho $\log_a b = 2; \log_a c = 3$. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_a (ab^3c^5)$.
- c) Cho $\log_a x = 2, \log_b x = 3$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{\frac{a}{b^2}} x$.
- d) Cho $\log_a c = 3, \log_b c = 4$ với a, b, c là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{ab} c$.

5 Đặt $a = \log_3 5, b = \log_4 5$. Hãy biểu diễn $\log_{15} 10$ theo a và b .

6 Biết $\log_2 3 = a; \log_2 5 = b$. Tính $\log_5 360$ theo a và b .

7 Đặt $\log_2 3 = a, \log_3 15 = b$. Biểu thị $\log_{30} 18$ theo a và b .

8 Chứng minh rằng

a) $\log_a (x + \sqrt{x^2 - 1}) + \log_a (x - \sqrt{x^2 - 1}) = 0;$

b) $\ln(1 + e^{2x}) = 2x + \ln(1 + e^{-2x}).$

9 Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 = 14ab$. Chứng minh rằng

$$\log_2(a + b) = \frac{1}{2}(4 + \log_2 a + \log_2 b).$$

10 Với mọi số thực dương a và b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 8ab$. Chứng minh rằng

$$\log(a + b) = \frac{1}{2}(1 + \log a + \log b).$$

11 a) Nước cất có nồng độ H^+ là 10^{-7} mol/L. Tính nồng độ pH của nước cất.

b) Một dung dịch có nồng độ H^+ gấp 20 lần nồng độ H^+ của nước cất. Tính pH của dung dịch đó.

12 Trong nuôi trồng thủy sản, độ pH của môi trường nước sẽ ảnh hưởng đến sức khỏe và sự phát triển của thủy sản. Độ pH thích hợp cho nước trong đầm nuôi tôm sú là từ 7,2 đến 8,8 và tốt nhất là trong khoảng từ 7,8 đến 8,5. Phân tích nồng độ $[H^+]$ (mol L⁻¹) trong một đầm nuôi tôm sú, ta thu được $[H^+] = 8 \cdot 10^{-8}$ (Nguồn: <https://nongnghiep.farmvina.com>).

Hỏi độ pH của đầm đó có thích hợp cho tôm sú phát triển không? Biết $pH = -\log[H^+]$.

13 Cường độ một trận động đất M (Richte) được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở Nhật Bản có cường độ đo được 6 độ Richter. Hỏi trận động đất ở San Francisco có biên độ gấp bao nhiêu lần biên độ trận động đất ở Nhật Bản.

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho a là số thực dương khác 1. Khẳng định nào dưới đây là sai?

- A. $\log_a 2 \cdot \log_2 a = 1$. B. $\log_a 1 = 0$. C. $\log_a a = 1$. D. $\log_a 2 = \frac{1}{\log_a 2}$.

Câu 2. Cho các số thực $a, b > 1$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $\log_a \frac{a}{b} = \log_b a$.
C. $\log_a \frac{a}{b} = \log_a b$.

B. $\log_a \frac{a}{b} = 1 + \log_a b$.
D. $\log_a \frac{a}{b} = 1 - \log_a b$.

Câu 3. Cho a là số thực dương tùy ý khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_2 a = \log_a 2$. B. $\log_2 a = \frac{1}{\log_2 a}$. C. $\log_2 a = \frac{1}{\log_a 2}$. D. $\log_2 a = -\log_a 2$.

Câu 4. Với a, b, c là các số thực dương khác 1, mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề sai?

A. $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$. B. $\log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c b}$. C. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$. D. $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$.

Câu 5. Cho $a, b > 0$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $\ln \frac{a}{b} = \ln a + \ln \frac{1}{b}$. B. $\ln \frac{a}{b} = \ln b - \ln a$. C. $\ln \frac{a}{b} = \frac{\ln a}{\ln b}$. D. $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln \frac{1}{b}$.

Câu 6. Giá trị của biểu thức $A = 4^{\log_2 7}$ bằng

A. 14. B. 28. C. 2. D. 49.

Câu 7. Biết $\log_6 a = 2$. Tính $I = \log_a 6$.

A. $I = 36$. B. $I = \frac{1}{2}$. C. $I = 64$. D. $I = \frac{1}{4}$.

Câu 8. Tính giá trị của biểu thức $I = a \cdot \log_2 \sqrt{8}$.

A. $I = \frac{2}{3}$. B. $I = \frac{3a}{2}$. C. $I = \frac{2a}{3}$. D. $I = \frac{3}{2}$.

Câu 9. Tính giá trị của biểu thức $N = \log_a \sqrt{a\sqrt{a}}$ với $0 < a \neq 1$.

A. $N = \frac{-3}{4}$. B. $N = \frac{4}{3}$. C. $N = \frac{3}{2}$. D. $N = \frac{3}{4}$.

Câu 10. Biểu thức $\log_2 \left(2 \sin \frac{\pi}{12} \right) + \log_2 \left(\cos \frac{\pi}{12} \right)$ có giá trị bằng

A. -2. B. -1. C. 1. D. $\log_2 \sqrt{3} - 1$.

Câu 11. Biết $\log_2 x = a$, tính theo a giá trị của biểu thức $P = \log_2 (4x^2)$.

A. $P = 2 + a$. B. $P = 4 + 2a$. C. $P = 4 + a$. D. $P = 2 + 2a$.

Câu 12. Cho $\log_c a = 2$ và $\log_c b = 4$. Tính $P = \log_a b^4$.

A. $P = 8$. B. $P = \frac{1}{32}$. C. $P = \frac{1}{8}$. D. $P = 32$.

Câu 13. Cho $\log_a b = 5$, $\log_a c = -3$. Giá trị biểu thức $\log_a \left(\frac{a^4 \sqrt[3]{b}}{c^2} \right)$ là

A. $-\frac{1}{3}$. B. -40. C. 40. D. $\frac{35}{3}$.

Câu 14. Cho a, b là hai số thực dương, khác 1. Đặt $\log_a b = 2$, tính giá trị của $P = \log_{a^2} b - \log_{\sqrt{b}} a^3$.

A. $\frac{13}{4}$. B. -4. C. $\frac{1}{4}$. D. -2.

Câu 15. Cho $\log_a x = -1$ và $\log_a y = 4$. Tính giá trị của $P = \log_a (x^2 y^3)$.

A. $P = -14$. B. $P = 3$. C. $P = 10$. D. $P = 65$.

Câu 16. (TN – 2021) Với mọi a, b thỏa mãn $\log_2 a^3 + \log_2 b = 6$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a^3 b = 64$. B. $a^3 b = 36$. C. $a^3 + b = 64$. D. $a^3 + b = 36$.

Câu 17. Nếu $a = \log_{30} 3$ và $b = \log_{30} 5$ thì

- A. $\log_{30} 1350 = a + 2b + 1$. B. $\log_{30} 1350 = 2a + b + 1$.
C. $\log_{30} 1350 = a + 2b + 2$. D. $\log_{30} 1350 = 2a + b + 2$.

Câu 18. Cho $\log_2 7 = a$, $\log_3 7 = b$. Tính $\log_6 7$ theo a và b .

- A. $\frac{1}{a+b}$. B. $a^2 + b^2$. C. $a + b$. D. $\frac{ab}{a+b}$.

Câu 19. Cho $a = \log_3 15$, $b = \log_3 10$. Tính $\log_{\sqrt{3}} 50$ theo a và b .

- A. $\log_{\sqrt{3}} 50 = 2(a + b - 1)$. B. $\log_{\sqrt{3}} 50 = 4(a + b + 1)$.
C. $\log_{\sqrt{3}} 50 = a + b - 1$. D. $\log_{\sqrt{3}} 50 = 3(a + b + 1)$.

Câu 20. Cho $\log_2 6 = a$; $\log_2 7 = b$. Tính $\log_3 7$ theo a và b .

- A. $\log_3 7 = \frac{b}{a-1}$. B. $\log_3 7 = \frac{a}{b-1}$. C. $\log_3 7 = \frac{b}{1-a}$. D. $\log_3 7 = \frac{a}{1-b}$.

Câu 21. Đặt $a = \log_{12} 6$, $b = \log_{12} 7$. Hãy biểu diễn $\log_2 7$ theo a và b .

- A. $\frac{b}{a+1}$. B. $\frac{b}{1-a}$. C. $\frac{a}{b-1}$. D. $\frac{a}{b+1}$.

Câu 22. Đặt $a = \ln 2$; $b = \ln 5$. Hãy biểu diễn $I = \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \dots + \ln \frac{98}{99} + \ln \frac{99}{100}$ theo a và b .

- A. $I = -2(a + b)$. B. $I = 2(a + b)$. C. $I = -2(a - b)$. D. $I = 2(a - b)$.

Câu 23. Tính giá trị của biểu thức $P = \log(\tan 1^\circ) + \log(\tan 2^\circ) + \log(\tan 3^\circ) + \dots + \log(\tan 89^\circ)$.

- A. $P = 2$. B. $P = 0$. C. $P = 1$. D. $P = \frac{1}{2}$.

Câu 24. Cho x, y là các số dương lớn hơn 1 thỏa mãn $x^2 + 9y^2 = 6xy$. Tính $M = \frac{1 + \log_{12} x + \log_{12} y}{2 \log_{12}(x + 3y)}$.

- A. $M = \frac{1}{4}$. B. $M = \frac{1}{2}$. C. $M = \frac{1}{3}$. D. $M = 1$.

Câu 25. Để đặc trưng đo độ to nhỏ của âm, người ta đưa ra khái niệm mức cường độ âm. Một đơn vị thường dùng để đo mức cường độ âm là đề xin ben (dB). Khi đó, mức cường độ âm L của âm được tính theo công thức $L(I) = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$, trong đó I là cường độ âm tại thời điểm đang xét, I_0 là cường độ âm ở ngưỡng nghe ($I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$). Hai cây đàn ghi ta giống nhau, cùng hoà tấu một bản nhạc. Mỗi cây đàn phát ra âm có mức cường độ âm trung bình là 60 dB. Hỏi mức cường độ âm tổng cộng do hai chiếc đàn cùng phát ra là bao nhiêu?

- A. 63 dB. B. 58 dB. C. 120 dB. D. 70 dB.

–HẾT–

§3. HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LÔGARIT

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

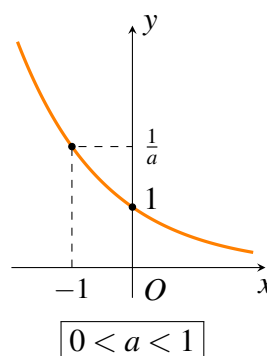
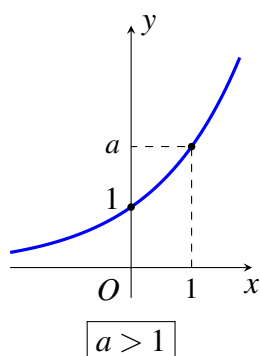
1 Hàm số mũ

Dạng: $y = a^x$, trong đó $0 < a \neq 1$.

- ① Tập xác định của hàm số $y = a^x$ là $\mathbb{R}$;
- ① Tập giá trị của hàm số $y = a^x$ là $(0; +\infty)$.

Đồ thị hàm số $y = a^x$:

- ① Khi $a > 1$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- ② Khi $0 < a < 1$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- ③ Đồ thị luôn qua $(0; 1)$ và luôn nằm phía trên trục hoành.



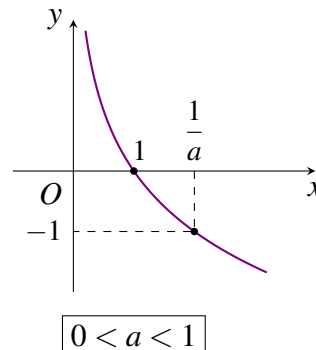
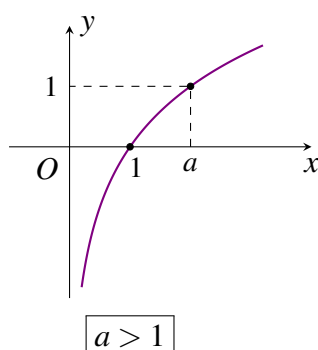
2 Hàm số lôgarit

Dạng: $y = \log_a x$, trong đó $0 < a \neq 1$ và $x > 0$.

- ① Tập xác định của hàm số $y = \log_a x$ là $(0; +\infty)$;
- ① Tập giá trị của hàm số $y = \log_a x$ là $\mathbb{R}$.

Đồ thị hàm số $y = \log_a x$:

- ① Khi $a > 1$ thì hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$
- ② Khi $0 < a < 1$ thì hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.
- ③ Đồ thị luôn qua $(1; 0)$ và luôn nằm bên phải trục tung.



B

CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

DT

1

Tìm tập xác định

⚙ Đối với hàm số $y = a^{u(x)}$: Ta chỉ cần tìm điều kiện để $u(x)$ có nghĩa.

⚙ Đối với hàm số $y = \log_a u(x)$: Ta tìm điều kiện để $u(x) > 0$.

Với hàm số $y = \log_a b^{2n}$, ta chỉ cần điều kiện $b \neq 0$.

≡ **Ví dụ 1.** Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của các hàm số sau:

- a) $y = \log_2 x$; b) $y = \log_3(x-2)$; c) $y = \log_{\frac{1}{3}}(4-2x)$;
 d) $y = \log_3(x^2 - x - 2)$; e) $y = \ln(x^2 + 3x + 2)$; f) $y = \log_5 \frac{x-3}{x+2}$.

≡ **Ví dụ 2.** Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của các hàm số sau:

- a) $y = \log_3 x^2$; b) $y = \log_3(4-x^2)^4$; c) $y = \frac{1}{\log_3 x}$;
 d) $y = \frac{1}{\log_3(x-1)}$; e) $y = \log|\sin x|$; f) $y = \ln(1 - \cos x)$.

DT

2

Đồ thị hàm số

Để vẽ đồ thị hàm mũ $y = a^x$ hoặc hàm lôgarit $y = \log_a x$, ta làm như sau:

- ① Lập bảng giá trị của hàm số cần vẽ;
- ② Căn cứ vào cơ số và hình dáng đồ thị, ta vẽ đường cong qua các điểm đã cho.

≡ **Ví dụ 3.** Vẽ đồ thị của các hàm số mũ sau:

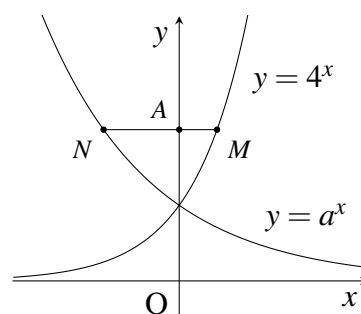
- a) $y = 2^x$; b) $y = (\sqrt{3})^x$; c) $y = e^x$; d) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.
 e) $y = \log_2 x$; f) $y = \log_{\sqrt{3}} x$; g) $y = \ln x$; h) $y = \log_{\frac{2}{3}} x$.

≡ **Ví dụ 4.** Dựa vào đồ thị hàm số, cho biết với giá trị nào của x thì đồ thị hàm số $y = 0,5^x$:

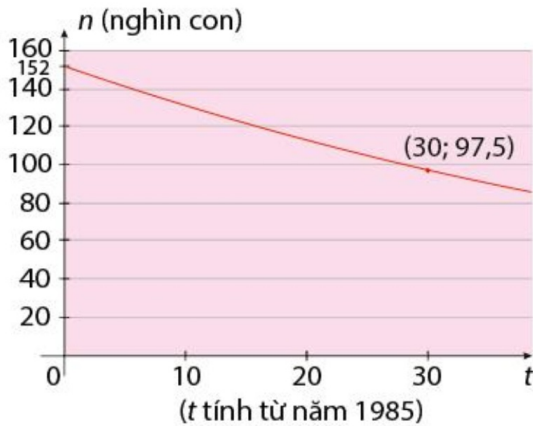
- a) Nằm phía trên đường thẳng $y = 1$; b) Nằm phía trên đường thẳng $y = 4$;

≡ **Ví dụ 5.**

Cho số thực a dương, khác 1. Biết rằng bất kỳ đường thẳng nào song song với trục Ox mà cắt các đường $y = 4^x$, $y = a^x$, trục tung lần lượt tại M , N , A thì $AN = 2AM$ (hình vẽ bên). Tính a .



Ví dụ 6. Đồ thị Hình bên dưới cho thấy số lượng hươu cao cổ trên thế giới suy giảm nghiêm trọng trong 30 năm qua (từ năm 1985 đến 2015) (nguồn: <https://tuoitre.vn/huou-cao-co-sap-vao-danh-sach-loai-gap-nguy-hiem-20190428162017473.htm>).



Giả sử rằng số lượng hươu ở đây giảm theo hàm số $n(t) = C \cdot a^t$.

- Tìm số lượng hươu vào năm 1985.
- Tìm hàm số biểu diễn số lượng hươu sau t năm kể từ năm 1985.
- Dự đoán số lượng hươu vào năm 2025.

Ví dụ 7. Các nhà khoa học xác định được chu kỳ bán rã của ^{14}C là 5730 năm, tức là sau 5730 năm thì số nguyên tử ^{14}C giảm đi một nửa.

- Gọi m_0 là khối lượng của ^{14}C tại thời điểm $t = 0$. Viết công thức tính khối lượng $m(t)$ của ^{14}C tại thời điểm t (năm).
- Một cây còn sống có lượng ^{14}C trong cây được duy trì không đổi. Nhưng nếu cây chết thì lượng ^{14}C trong cây phân rã theo chu kỳ bán rã của nó. Các nhà khảo cổ đã tìm thấy một mẫu gỗ cổ được xác định chết cách đây 2000 năm. Tính tỉ lệ phần trăm lượng ^{14}C còn lại trong mẫu gỗ cổ đó so với lúc còn sinh trưởng (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số

- $y = (\sqrt{2})^x$;
- $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$;
- $y = \log_{\sqrt{3}} x$;
- $y = -\log_2 x$.

2 So sánh các cặp số sau

- $1,04^{1,7}$ và $1,04^2$.
- $\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{2}{5}}$ và $\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{3}{5}}$.
- $1,2^{0,3}$ và $0,9^{1,8}$.
- $\left(\frac{1}{3}\right)^{-0,4}$ và $3^{-0,2}$.

3 So sánh các cặp số sau

a) $2\log_{0,6} 5$ và $3\log_{0,6}(2\sqrt[3]{3})$.

b) $6\log_5 2$ và $2\log_5 6$.

c) $\frac{1}{2}\log_2 121$ và $2\log_2 2\sqrt{3}$.

d) $2\log_3 7$ và $6\log_9 4$.

4 Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \log(x-1)$;

b) $y = \log_{\frac{2}{3}}(2020-x)$;

c) $y = \log(2x-x^2)$;

d) $y = \log_2 \frac{3-x}{2x}$;

e) $y = \ln(x-2)^2 + \log(x+1)$;

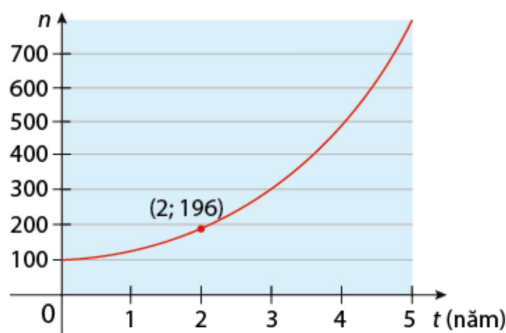
f) $y = \log_2 |x^2 - 4|$.

5 Dựa vào đồ thị hàm số, cho biết với giá trị nào của x thì đồ thị hàm số $y = \log_3 x$:

a) Nằm phía trên đường thẳng $y = 1$;

b) Nằm phía dưới trục hoành.

6 Lúc đầu trong ao có một số con ếch. Người ta ghi nhận số lượng ếch trong 5 năm đầu như Hình bên dưới.



Giả sử số lượng ếch tăng theo hàm số $n(t) = C \cdot a^t$.

a) Tính số lượng ếch lúc ban đầu.

b) Tìm hàm số biểu diễn số lượng ếch sau t năm kể từ khi chúng xuất hiện trong ao.

c) Dự đoán số lượng ếch sau 15 năm.

7 Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 - 2mx + 4)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

8 Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = f(x) = \ln(x^2 - 2mx + m + 2)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

9 Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hàm số $y = \log_{a^2-2a+1} x$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

10 Chu kỳ bán rã của đồng vị phóng xạ Radi 226 là khoảng 1600 năm. Giả sử khối lượng m (tính bằng gam) còn lại sau t năm của một lượng Radi 226 được cho bởi công thức:

$$m = 25 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}$$

a) Khối lượng ban đầu (khi $t = 0$) của lượng Radi 226 đó là bao nhiêu?

b) Sau 2500 năm khối lượng của lượng Radi 226 đó là bao nhiêu?

- 11 Sau khi bệnh nhân uống một liều thuốc, lượng thuốc còn lại trong cơ thể giảm dần và được tính theo công thức $D(t) = D_0 \cdot a^t$ (mg), trong đó D_0 và a là các hằng số dương, t là thời gian tính bằng giờ kể từ thời điểm uống thuốc.

- a) Tại sao có thể khẳng định rằng $0 < a < 1$.
 b) Biết rằng bệnh nhân đã uống 100 mg thuốc và sau 1 giờ thì lượng thuốc trong cơ thể còn 80 mg. Hãy xác định giá trị của D_0 và a .
 c) Sau 5 giờ, lượng thuốc đã giảm đi bao nhiêu phần trăm so với lượng thuốc ban đầu?

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. (THPTQG 2021 – Mã đề 101). Tập xác định của hàm số $y = 9^x$

- A. $\mathbb{R}$. B. $[0; +\infty)$. C. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. D. $(0; +\infty)$.

Câu 2. Tập xác định của hàm số $y = \log_3 x$ là

- A. $[0; +\infty)$. B. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. C. $\mathbb{R}$. D. $(0; +\infty)$.

Câu 3. Hàm số nào trong các hàm số sau đây có tập xác định là $\mathbb{R}$?

- A. $y = \log_2 x$. B. $y = \frac{2x-1}{x+1}$.
 C. $y = \tan x$. D. $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$.

Câu 4. Tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \log_{2018}(2x-1)$ là

- A. $\mathcal{D} = (0; +\infty)$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. C. $\mathcal{D} = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. D. $\mathcal{D} = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Câu 5. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_2 \sqrt{6-x}$.

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{6\}$. B. $D = (-\infty; 6)$. C. $D = (6; +\infty)$. D. $D = (-\infty; 6]$.

Câu 6. Tập xác định của hàm số $y = \ln|4-x^2|$ là

- A. $\mathbb{R} \setminus [-2; 2]$. B. $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$. C. $\mathbb{R}$. D. $(-2; 2)$.

Câu 7. Hàm số $y = \log_5(4x-x^2)$ có tập xác định là

- A. $\mathcal{D} = (0; +\infty)$. B. $\mathcal{D} = (0; 4)$.
 C. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. D. $\mathcal{D} = (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$.

Câu 8. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \log(x^2 + 2x + 3)$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; -1\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
 C. $\mathcal{D} = \emptyset$. D. $\mathcal{D} = (-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$.

Câu 9. Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{x+1}}{\ln(5-x)}$ là

- A. $\mathbb{R} \setminus \{4\}$. B. $[-1; 5) \setminus \{4\}$. C. $(-1; 5)$. D. $[-1; 5]$.

Câu 10. Hàm số nào trong các hàm số sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = 9^x$. B. $y = \log_{0,9} x$. C. $y = \log_9 x$. D. $y = (0,9)^x$.

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị của a thỏa mãn $(a-1)^{-\frac{2}{3}} < (a-1)^{-\frac{1}{3}}$.

- A. $0 < a < 1$. B. $a > 1$. C. $1 < a < 2$. D. $a > 2$.

Câu 12. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = \left(\frac{3}{\pi}\right)^x$. B. $y = \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{e}\right)^x$.

C. $y = \log_7(x^4 + 5)$.

D. $y = \left(\frac{\sqrt{2018} - \sqrt{2015}}{10^{-1}} \right)^x$.

Câu 13. Cho các số thực a, b thỏa mãn $0 < a < 1 < b$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\log_a b < 0$. B. $(0,5)^a < (0,5)^b$. C. $\ln a > \ln b$. D. $2^a > 2^b$.

Câu 14. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề sai?

A. Nếu $0 < a < b$ thì $\ln a < \ln b$. B. Nếu $0 < a < b$ thì $\log_{\frac{\pi}{4}} a < \log_{\frac{\pi}{4}} b$.
 C. Nếu $0 < a < b$ thì $\log_{\frac{e}{2}} a < \log_{\frac{e}{2}} b$. D. Nếu $0 < a < b$ thì $\log a < \log b$.

Câu 15. Cho hai đồ thị $(C_1): y = 2^x$ và $(C_2): y = 3^{-x}$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm thuộc (C_1) và (C_2) . Biết M và N đối xứng nhau qua $I\left(0; \frac{5}{2}\right)$. Tính độ dài đoạn MN .

A. $MN = 2$. B. $MN = \sqrt{5}$. C. $MN = \frac{5}{2}$. D. $MN = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 16. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \pi^{\cos x}, x \in \mathbb{R}$.

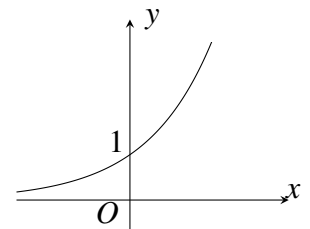
A. $M = \pi, m = \frac{1}{\pi}$. B. $M = \sqrt{\pi}, m = 1$. C. $M = \pi, m = 1$. D. $M = \pi, m = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị của a để hàm số $y = (2020 - a)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $a < 2019$. B. $a < 2020$. C. $2019 < a < 2020$. D. $0 < a < 1$.

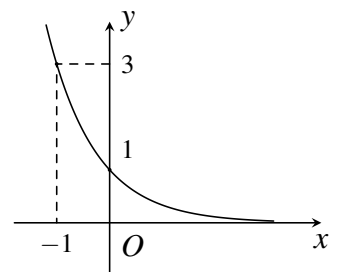
Câu 18. Đồ thị sau đây là của hàm số nào?

A. $y = 2^x$. B. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.
 C. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. D. $y = \log_2 x$.



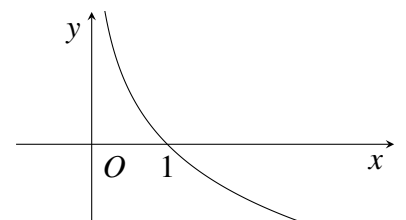
Câu 19. Đồ thị có trong hình vẽ bên là của hàm số nào dưới đây?

A. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. B. $y = (\sqrt{2})^x$.
 C. $y = (\sqrt{3})^x$. D. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.



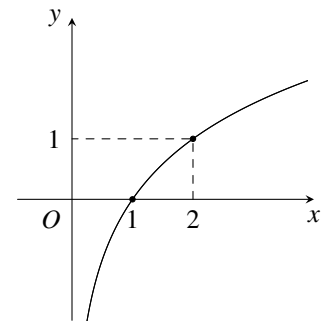
Câu 20. Đồ thị hàm số như hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. B. $y = 2^x$.
 C. $y = \log_2 x$. D. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.



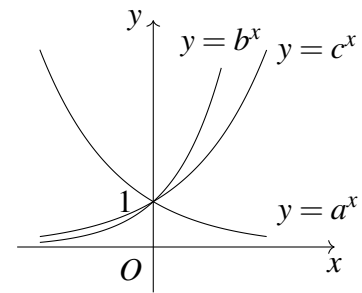
Câu 21. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- A. $y = \frac{x-1}{x}$. B. $y = \sqrt{x-1}$. C. $y = \ln x$. D. $y = \log_2 x$.



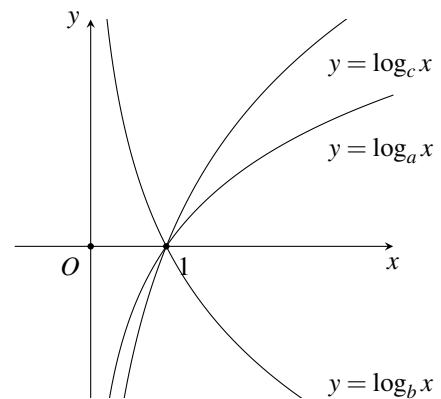
Câu 22. Cho a, b, c là các số thực dương, khác 1. Đồ thị các hàm số $y = a^x, y = b^x, y = c^x$ được cho trong hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $1 < a < c < b$. B. $a < 1 < c < b$.
C. $a < 1 < b < c$. D. $1 < a < b < c$.



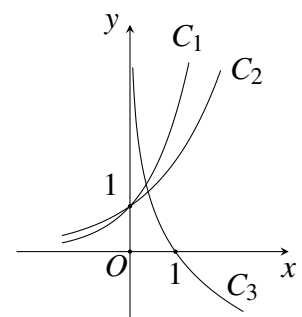
Câu 23. Cho a, b, c là các số thực dương khác 1. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \log_a x, y = \log_b x, y = \log_c x$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $a < b < c$. B. $b < c < a$.
C. $b < a < c$. D. $c < a < b$.



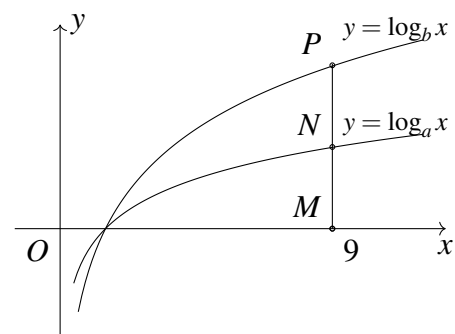
Câu 24. Cho ba hàm số $y = a^x, y = b^x, y = \log_c x$ lần lượt có đồ thị $(C_1), (C_2), (C_3)$ như hình bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a > b > c$. B. $b > a > c$. C. $c > b > a$. D. $c > a > b$.



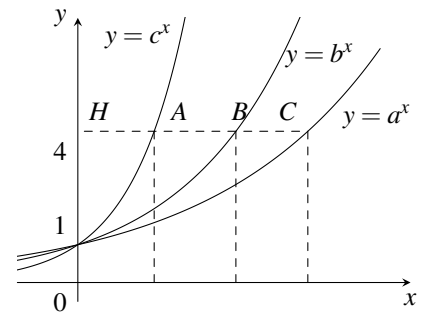
Câu 25. Cho hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị lần lượt là (C) và (C') (như hình vẽ bên). Đường thẳng $x = 9$ cắt trục hoành và các đồ thị (C) và (C') lần lượt tại M, N và P . Biết rằng $MN = NP$, hãy xác định biểu thức liên hệ giữa a và b

- A. $a = b^2$. B. $a = 9b$.
C. $a = 3b$. D. $a = b + 3$.



Câu 26. Trong hình vẽ bên các đường cong $(C_1): y = a^x$, $(C_2): y = b^x$, $(C_3): y = c^x$ và đường thẳng $y = 4$ cắt các đường cong (C_1) , (C_2) , (C_3) lần lượt tại các điểm A, B, C, D sao cho $HA = AB = BC$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $ac^2 = b^3$. B. $a + 3c = 4b$.
C. $ac^3 = b^4$. D. $a + 2c = 3b$.



Câu 27. Cho hàm số $f(x) = \frac{2^x}{2^x + 2}$. Khi đó tổng $f(0) + f\left(\frac{1}{10}\right) + \dots + f\left(\frac{19}{10}\right)$ có giá trị bằng

- A. $\frac{59}{6}$. B. 10. C. $\frac{19}{2}$. D. $\frac{28}{3}$.

Câu 28. Số lượng của một loại vi khuẩn X trong phòng thí nghiệm được tính theo công thức $x(t) = x(0) \cdot 2^t$, trong đó $x(0)$ là số lượng vi khuẩn X ban đầu, $x(t)$ là số lượng vi khuẩn X sau t (phút). Biết sau 2 phút thì số lượng vi khuẩn X là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc bắt đầu, số lượng vi khuẩn X là 10 triệu con?

- A. 5 phút. B. 8 phút. C. 7 phút. D. 6 phút.

Câu 29. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đối xứng với đồ thị của hàm số $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) qua điểm $(1; 1)$. Giá trị của biểu thức $f\left(2 + \log_a \frac{1}{2018}\right)$ bằng

- A. -2016. B. -2020. C. 2016. D. 2020.

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = \log_2 \frac{mx}{2-x}$, ($m > 0$). Với mọi số thực $a, b \in (0; 2)$ thỏa mãn $a + b = 2$ ta luôn có $f(a) + f(b) = 3$ khi và chỉ khi

- A. $m = 3$. B. $m = 8$. C. $m = 2\sqrt{2}$. D. $m = 9$.

—HẾT—

§4. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

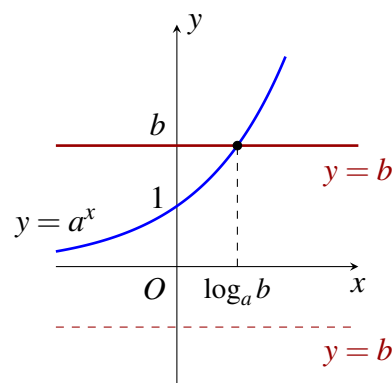
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Công thức nghiệm của phương trình mũ

- ✓ Dạng $a^x = b$ (1), với $a > 0$ và $a \neq 1$.
- ✓ Về mặt đồ thị, nghiệm của (1) là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = a^x$ với đường thẳng $y = b$ (nằm ngang).

Từ hình vẽ, ta có các kết quả sau:

- ① $b > 0$ (1) có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.
- ② $b \leq 0$ (1) vô nghiệm.



GHI NHỚ

Với $a > 0$ và $a \neq 1$, $b > 0$, ta có các công thức sau đây:

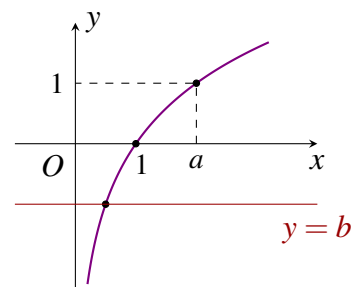
- ① $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$
- ② $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

2 Công thức nghiệm của phương trình lôgarit

- ✓ Dạng $\log_a x = b$ (2), với $a > 0$ và $a \neq 1$.
- ✓ Về mặt đồ thị, nghiệm của (2) là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = \log_a x$ với đường thẳng $y = b$ (nằm ngang).

Từ hình vẽ, ta có các kết quả sau:

- ① Với mọi b , (2) luôn có nghiệm duy nhất.
- ② $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$.



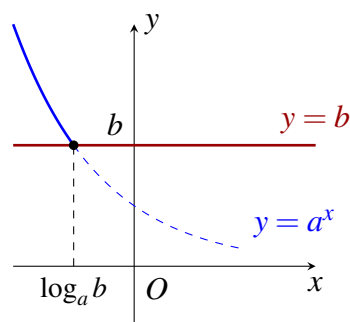
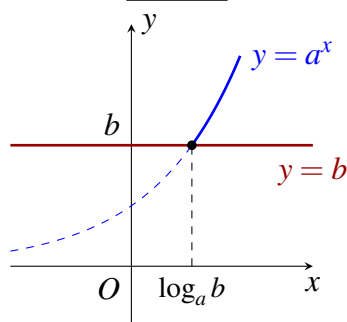
GHI NHỚ

Với $a > 0$ và $a \neq 1$, b bất kì, ta có các công thức sau đây:

- ① $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$.
- ② $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \text{ (hoặc } g(x) > 0) \\ f(x) = g(x) \end{cases}$.

3 Công thức nghiệm của bất phương trình mũ

Minh họa dạng $a^x > b$, với $a > 0$ và $a \neq 1$.

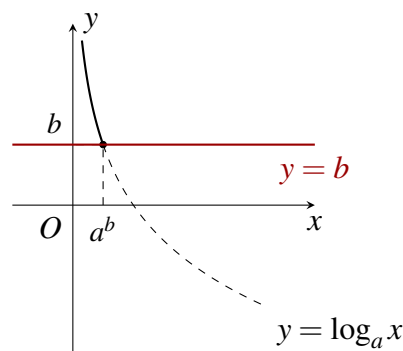
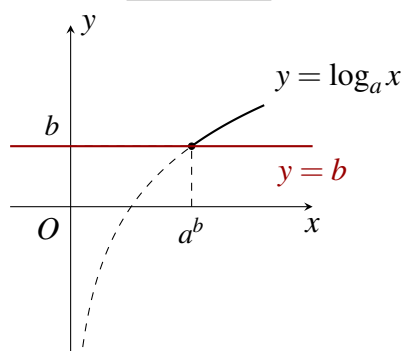


- Nếu $b \leq 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$.
- Nếu $b > 0$, ta có hai trường hợp:

- ① Với $a > 1$ thì $a^x > b \Leftrightarrow x > \log_a b$ (Hình bên trái).
- ② Với $0 < a < 1$ thì $a^x > b \Leftrightarrow x < \log_a b$ (Hình bên phải).

4 Công thức nghiệm của bất phương trình lôgarit

Minh họa dạng $\log_a x > b$, với $a > 0$ và $a \neq 1$.



- Điều kiện xác định là $x > 0$.
- Ta có hai trường hợp:

- ① Với $a > 1$ thì $\log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b$ (Hình bên trái).
- ② Với $0 < a < 1$ thì $\log_a x > b \Leftrightarrow 0 < x < a^b$ (Hình bên phải).

⚠ Các trường hợp $a^x \geq b$, $a^x < b$, $a^x \leq b$, $\log_a x \geq b$, $\log_a x < b$, $\log_a x \leq b$... ta suy luận tương tự.

- Cơ sở $a > 1$: Ta so sánh "cùng chiều";
- Cơ sở $0 < a < 1$: Ta so sánh "nghịch chiều".

CHÚ Ý

Khi giải phương trình hoặc bất phương trình logarit, ta cần chú ý đặt điều kiện để các biểu thức logarit có nghĩa trước khi biến đổi (nếu không chắc phép biến đổi đó là phép biến đổi tương đương)

Ví dụ 1. Giải các phương trình mũ sau:

a) $2^x = 3$;

b) $2^{x-1} = 32$;

c) $5^{x^2-5x-6} = 1$;

d) $4^{2x+5} = 2^{2-x}$;

e) $3^{x-4} = \left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1}$;

f) $(0,4)^{8-2x^2} = (6,25)^{3x}$;

g) $\left(\frac{1}{25}\right)^{x-1} = 125^{2x}$;

h) $2^x \cdot 3^{x-1} \cdot 5^{x-2} = 12$;

i) $2^x \cdot 15^{x+1} = 3^{x+3}$.

Ví dụ 2. Giải các phương trình lôgarit sau:

a) $\log(x-1) = 2$

b) $\log_2(x^2 - 19x + 2) = 9$

c) $\log_{0,25}(x^2 + 3x) = -1$

d) $\log_2(x^2 - 4x + 3) = \log_2(4x - 4)$

e) $2\log_2 x = \log_2(2-x)$

f) $\ln x + \ln(3x-2) = 0$

g) $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$

h) $\log_2 x + \log_2(x+2) = 3$

i) $\log_3(2x+1) - \log_3(x-1) = 1$.

j) $\log_2(x^2 - 3) - \log_2(6x - 10) + 1 = 0$

k) $2\log_4 x + \log_2(x-3) = 2$

l) $\log_3(x^2 + 4x) + \log_{\frac{1}{3}}(2x+3) = 0$

Ví dụ 3. Giải các bất phương trình mũ sau:

a) $3^{x-1} > 1$;

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 2$;

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} < 8$

d) $(0,125)^{x^2} > \left(\frac{1}{8}\right)^{5x-6}$

e) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-12} \geq \left(\frac{4}{3}\right)^x$

f) $4^x > 2^{x+8}$;

g) $3^{2x+1} > \left(\frac{1}{3}\right)^{-3x^2}$;

h) $\left(\frac{1}{2}\right)^{9x^2-17x+11} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{7-5x}$;

Ví dụ 4. Giải các bất phương trình lôgarit sau:

a) $\log x \geq 1$

b) $\log_2(3x-1) > 3$

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geq \log_{\frac{1}{2}} 4$

d) $\log_4(x+7) > \log_2(x+1)$

e) $\log_2(x^2 - x - 2) \leq 2\log_2(3 - x)$

f) $2\log_2(x - 1) > \log_2(5 - x) + 1$

DT 3 Vận dụng, thực tiễn

≡ Ví dụ 5. Áp suất khí quyển p lên một vật giảm khi độ cao tăng dần. Giả sử áp suất này (tính bằng milimét thủy ngân) được biểu diễn theo độ cao h (tính bằng kilômét) so với mực nước biển bằng công thức $p(h) = 760 \cdot e^{-0,145h}$.

- a) Một máy bay đang chịu áp suất khí quyển 320 mmHg. Tìm độ cao của máy bay đó.
b) Một người đứng trên đỉnh của một ngọn núi và chịu áp suất khí quyển 667 mmHg. Tìm chiều cao của ngọn núi này.

≡ Ví dụ 6. Đồng vị phóng xạ Uranium-235 (thường được sử dụng trong điện hạt nhân) có chu kỳ bán rã là $T = 703800000$ năm. Theo đó, nếu ban đầu có 100 gam Uranium-235 thì sau t năm, do bị phân rã, lượng Uranium-235 còn lại được tính bởi công thức $M = 100 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ (g). Sau thời gian bao lâu thì lượng Uranium-235 còn lại bằng 90% so với ban đầu?

≡ Ví dụ 7. Người ta dùng thuốc để khử khuẩn cho một thùng nước. Biết rằng nếu lúc đầu mỗi mililit nước chứa P_0 vi khuẩn thì sau t giờ (kể từ khi cho thuốc vào thùng), số lượng vi khuẩn trong mỗi mililit nước là $P = P_0 \cdot 10^{-\alpha t}$, với α là một hằng số dương nào đó. Biết rằng ban đầu mỗi mililit nước có 9000 vi khuẩn và sau 2 giờ, số lượng vi khuẩn trong mỗi mililit nước là 6000. Sau thời gian bao lâu thì số lượng vi khuẩn trong mỗi mililit nước trong thùng ít hơn hoặc bằng 1000?

≡ Ví dụ 8. Giả sử giá trị còn lại V (triệu đồng) của một chiếc ô tô nào đó sau t năm được cho bằng công thức $V(t) = 730 \cdot (0,82)^t$.

- a) Theo mô hình này, khi nào chiếc xe có giá trị 500 triệu đồng?
b) Theo mô hình này, khi nào chiếc xe có giá trị 200 triệu đồng? (Kết quả của câu a và câu b được tính tròn năm).

≡ Ví dụ 9. Ông A gửi vào ngân hàng 300 triệu đồng theo thể thức lãi kép với lãi suất 10%/năm. Trong quá trình gửi lãi suất không đổi và ông A không rút tiền ra. Hỏi sau ít nhất mấy năm thì ông A rút được số tiền cả vốn và lãi đủ 500 triệu đồng?

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Giải các phương trình mũ sau:

a) $2^{2x-1} = \frac{1}{8}$

b) $e^{3x^2+x-2} = 1$

c) $9^{x+1} = 27^{2x+1}$

d) $2^{x+1} + 5 \cdot 2^x - 2^{x+2} = 21$

e) $2 \cdot 5^{x+1} - 5^x = 2^{x+1} + 2^{x+3}$

f) $27^{\frac{x-2}{x-1}} = \frac{\sqrt{3}^{7x}}{243}$

2 Giải các phương trình lôgarit sau:

a) $\log_3 x = 2$

b) $\log_3(2x - 1) = 2$

c) $\log_5(3x^2 - 2x + 1) = \log_5(x + 1)$

d) $\log x = \log(x + 3) - \log(x - 1)$.

e) $\log_2(x+1) = 1 + \log_2(x-1)$

f) $\log_{\sqrt{2}}(2x-2) + \log_2(x-3)^2 = 2$

3 Giải các bất phương trình mũ sau:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^x < 1$

b) $2^{x^2-2x} > 8$

c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-2x} \geq \frac{1}{125}$

d) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{x^2+1} \geq (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{3x-1}$.

e) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} > \left(\frac{3}{5}\right)^{2x-1}$

f) $5^{x-1} \geq 5^{x^2-x-9}$

4 Giải các bất phương trình lôgarit sau:

a) $\log_5(3x+2) > 1$;

b) $\log_{\frac{1}{4}}(4x-2) \geq -1$;

c) $\log_{\frac{2}{3}}(3x) > \log_{\frac{2}{3}}(2x+7)$

d) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$;

e) $\log_{2-\sqrt{3}}(2x-5) \geq \log_{2-\sqrt{3}}(x-1)$;

f) $\log_2(4x+8) - \log_2 x \leq 3$.

5 Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_3(x+4) < 2$;

b) $\log_{\frac{1}{2}} x \geq 4$;

c) $\log_{0,25}(x-1) \leq -1$;

d) $\log_5(x^2-24x) \geq 2$;

e) $2\log_{\frac{1}{4}}(x+1) \geq \log_{\frac{1}{4}}(3x+7)$;

f) $2\log_3(x+1) \leq 1 + \log_3(x+7)$.

6 Độ pH của một dung dịch được tính theo công thức $\text{pH} = -\log x$, trong đó x là nồng độ ion H^+ của dung dịch đó tính bằng mol/L. Biết rằng độ pH của dung dịch A lớn hơn độ pH của dung dịch B là 0,7. Dung dịch B có nồng độ ion H^+ gấp bao nhiêu lần nồng độ ion H^+ của dung dịch A?

7 Người ta nuôi cấy vi khuẩn *Bacillus subtilis* trong nồi lên men và thu được số liệu sau: Lúc ban đầu, số tế bào/1 ml dịch nuôi là $2 \cdot 10^2$. Sau 13 giờ, số tế bào/1 ml dịch nuôi là $3,33 \cdot 10^9$. Biết vi khuẩn *Bacillus subtilis* sinh trưởng trong điều kiện hoàn toàn tối ưu và sinh sản theo hình thức tự nhân đôi. Hỏi sau bao nhiêu phút, vi khuẩn *Bacillus subtilis* tự nhân đôi một lần (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

8 Sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bằng công thức $m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ trong đó m_0 là khối lượng chất phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$), $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t , T là chu kỳ bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa số nguyên tử của chất phóng xạ biến thành chất khác). Với $T = 1000$ năm, hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm khối lượng chất phóng xạ còn lại nhỏ hơn $\frac{1}{6}$ khối lượng chất phóng xạ ban đầu?

9 Dân số thành phố Hà Nội năm 2022 khoảng 8,4 triệu người. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm của Hà Nội không đổi và bằng $r = 1,04\%$. Biết rằng sau t năm dân số Hà Nội (tính từ mốc năm 2022) ước tính theo công thức: $S = A \cdot e^{rt}$, trong đó A là dân số năm lấy làm mốc. Hỏi từ năm nào trở đi, dân số của Hà Nội vượt quá 10 triệu người?

- 10** [Đề minh họa BDG 2019-1020] Để quảng bá cho sản phẩm A, một công ty dự định tổ chức quảng cáo theo hình thức quảng cáo trên truyền hình. Nghiên cứu của công ty cho thấy: Nếu sau n quảng cáo được phát thì tỉ lệ người xem quảng cáo đó mua sản phẩm A tuân theo công thức: $P(n) = \frac{1}{1 + 49 \cdot e^{-0,015n}}$. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu lần quảng cáo để tỉ lệ người xem mua sản phẩm đạt trên 30%?

- 11** Cent âm nhạc là một đơn vị trong thang lôgarit của cao độ hoặc khoảng tương đối. Một quãng tám bằng 1200 cent. Công thức xác định chênh lệch khoảng thời gian (tính bằng cent) giữa hai nốt nhạc có tần số a và b là

$$n = 1200 \cdot \log_2 \frac{a}{b}.$$

(Theo Algebra 2, NXB MacGraw-Hill, 2008)

- a) Tìm khoảng thời gian tính bằng cent khi tần số thay đổi từ 443 Hz về 415 Hz.
b) Giả sử khoảng thời gian là 55 cent và tần số đầu là 225 Hz, hãy tìm tần số cuối cùng.

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Phương trình $2^{2x+1} = 32$ có nghiệm là

- A. $x = \frac{5}{2}$. B. $x = 2$. C. $x = \frac{3}{2}$. D. $x = 3$.

Câu 2. Tích tất cả các nghiệm của phương trình $2^{x^2+x} = 4$ bằng

- A. 2. B. 3. C. -2. D. -1.

Câu 3. Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = 2^{-x} + 3$ và đường thẳng $y = 11$ là

- A. $(-3; 11)$. B. $(4; 11)$. C. $(-4; 11)$. D. $(3; 11)$.

Câu 4. Biết rằng phương trình $2^{x^2-4x+2} = 2^{x-4}$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2 . Tính giá trị biểu thức $S = x_1^4 + x_2^4$.

- A. $S = 17$. B. $S = 257$. C. $S = 97$. D. $S = 92$.

Câu 5. Tìm nghiệm của phương trình $5^{2018x} = \sqrt{5}^{2018}$.

- A. $x = 1 - \log_5 2$. B. $x = -\log_5 2$. C. $x = \frac{1}{2}$. D. $x = 2$.

Câu 6. Tìm nghiệm của phương trình $9^{\sqrt{x-1}} = e^{\ln 81}$.

- A. $x = 5$. B. $x = 4$. C. $x = 6$. D. $x = 17$.

Câu 7. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x-6}$

- A. $S = \{-1\}$. B. $S = \{1\}$. C. $S = \{-3\}$. D. $S = \{3\}$.

Câu 8. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $5^x - 1 - m = 0$ có nghiệm.

- A. $m > 0$. B. $m > -1$. C. $m < 0$. D. $m < -1$.

Câu 9. Nghiệm của phương trình $\log_2 x = 3$ là

- A. 9. B. 6. C. 8. D. 5.

Câu 10. Tìm nghiệm của phương trình $\log_{64}(x+1) = \frac{1}{2}$.

- A. -1. B. 4. C. 7. D. $-\frac{1}{2}$.

Câu 11. Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2 - 1) = 3$ là

- A. $\{-3; 3\}$. B. $\{-3\}$. C. $\{3\}$. D. $\{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$.

Câu 12. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \log_2(x^2 + 3x)$ và đường thẳng $y = 2$ là

- A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 13. Số nghiệm của phương trình $\log_3(x^2 - 6) = \log_3(x - 2) + 1$ là

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

Câu 14. Giải phương trình $\log_4(x + 1) + \log_4(x - 3) = 3$.

- A. $x = 1 \pm 2\sqrt{17}$. B. $x = 1 + 2\sqrt{17}$. C. $x = 5$. D. $x = 33$.

Câu 15. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 8$.

- A. $S = (-3; +\infty)$. B. $S = (-\infty; 3)$. C. $S = (-\infty; -3)$. D. $S = (3; +\infty)$.

Câu 16. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x} < 2^{x+6}$ là

- A. $(0; 6)$. B. $(-\infty; 6)$. C. $(0; 64)$. D. $(6; +\infty)$.

Câu 17. Bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+4x} > \frac{1}{32}$ có tập nghiệm là $S = (a; b)$. Khi đó giá trị $b - a$ là

- A. 4. B. 2. C. 6. D. 8.

Câu 18. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $(\sqrt{2})^{x^2-2x} \leq (\sqrt{2})^3$ là

- A. 3. B. 2. C. 5. D. 4.

Câu 19. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,3}(3x - 2) \geq 0$ là

- A. $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$. B. $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$. C. $\left[\frac{2}{3}; 1\right]$. D. $(2; +\infty)$.

Câu 20. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5}(x - 3) < \log_{0,5}(x^2 - 4x + 3)$ là

- A. $(3; +\infty)$. B. $\mathbb{R}$. C. $\emptyset$. D. $(2; 3)$.

Câu 21. Tập nghiệm của bất phương trình $\log(2x - 1) \leq \log x$ là

- A. $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. B. $(-\infty; 1]$. C. $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. D. $(0; 1]$.

Câu 22. Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 7) > 0$ là

- A. $S = (-\infty; 2)$. B. $S = (2; 3)$.
C. $S = (3; +\infty)$. D. $S = (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.

Câu 23. Tìm tất cả giá trị của tham số m để bất phương trình $3^x + 1 \geq m$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

- A. $m < 0$. B. $m \leq 1$. C. $m \leq 0$. D. $m > 1$.

Câu 24. Ông An gửi tiền vào ngân hàng với thể thức lãi kép theo công thức $T_n = A(1 + r)^n$, trong đó A là số tiền gửi ban đầu, r là lãi suất, n là số kỳ hạn, T_n là số tiền cả gốc lẫn lãi sau n kỳ hạn gửi. Nếu ông An gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 6,5%/năm và không rút tiền gốc lẫn lãi định kỳ thì sau bao nhiêu năm ông ấy nhận được số tiền ít nhất là 250 triệu đồng.

- A. 3. B. 10. C. 15. D. 8.

Câu 25. Một người gửi tiết kiệm với lãi suất 0,7%/tháng và lãi hàng tháng được nhập vào vốn, hỏi sau bao nhiêu tháng người đó thu được gấp đôi số tiền ban đầu?

- A. 96. B. 97. C. 99. D. 100.

Câu 26. Anh Nam muốn mua một ngôi nhà trị giá 500 triệu đồng sau 3 năm nữa. Biết rằng lãi suất hàng năm vẫn không đổi là 8% một năm. Vậy ngay từ bây giờ số tiền ít nhất anh Nam phải gửi tiết kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép để có đủ tiền mua nhà (kết quả làm tròn đến hàng triệu) là

- A. 397 triệu đồng. B. 396 triệu đồng. C. 395 triệu đồng. D. 394 triệu đồng.

Câu 27. Một người sử dụng xe máy có giá trị ban đầu là 40 triệu đồng. Sau mỗi năm, giá trị xe giảm 10% so với năm trước đó. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì giá trị xe nhỏ hơn 12 triệu đồng?

- A. 9. B. 10. C. 11. D. 12.

Câu 28. (QG.2020 lần 1 – Mã đề 103). Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 900 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019, năm nào dưới đây là năm đầu tiên tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1700 ha?

- A. Năm 2029. B. Năm 2051. C. Năm 2030. D. Năm 2050.

Câu 29. Nếu tỉ lệ lạm phát trung bình hàng năm là 4% thì chi phí C cho việc mua một loại hàng hoá hoặc sử dụng một dịch vụ nào đó sẽ được mô hình hoá bằng công thức:

$$C(t) = P(1 + 0,04)^t,$$

trong đó t là thời gian (tính bằng năm) kể từ thời điểm hiện tại và P là chi phí hiện tại cho hàng hoá hoặc dịch vụ đó.

Giả sử hiện tại chi phí cho mỗi lần thay dầu ô tô là 800 nghìn đồng. Hãy ước tính chi phí cho mỗi lần thay dầu ô tô sau 5 năm nữa (kết quả tính theo đơn vị nghìn đồng và làm tròn đến hàng đơn vị).

- A. Khoảng 1 triệu 100 nghìn đồng. B. Khoảng 900 nghìn đồng.
C. Khoảng 973 nghìn đồng. D. Khoảng 873 nghìn đồng.

Câu 30. Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là 78.685.800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7%. Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = A \cdot e^{Nr}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là số dân sau N năm và r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Nếu dân số vẫn tăng với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 120 triệu người?

- A. 2020. B. 2026. C. 2022. D. 2025.

—HẾT—

Chương 7

ĐẠO HÀM

§1. ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 Định nghĩa đạo hàm tại một điểm

⚙ **Định nghĩa:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Xét giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

(1). Nếu giới hạn (1) **hữu hạn** thì kết quả đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 .
Kí hiệu $f'(x_0)$ hay $y'(x_0)$. Tức là

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (2)$$

⚙ **Lưu ý:**

- Đại lượng $\Delta x = x - x_0$ được gọi là số gia của biến tại x_0 .
- Đại lượng $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ được gọi là số gia tương ứng của hàm số.

Khi đó công thức (2) được viết thành

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (3)$$

CHÚ Ý

Muốn tính đạo hàm tại một điểm cho trước, ta chọn một trong hai công thức (2) hoặc (3).

2 Đạo hàm trên một khoảng

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm x trên khoảng đó. Kí hiệu y' hoặc $f'(x)$

3 Ý nghĩa vật lý của đạo hàm

⚙ **Vận tốc tức thời:** Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = f(t)$, với $f(t)$ là hàm số có đạo hàm. Khi đó, vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t_0 là đạo hàm của hàm số $s = f(t)$ tại t_0 . Nghĩa là

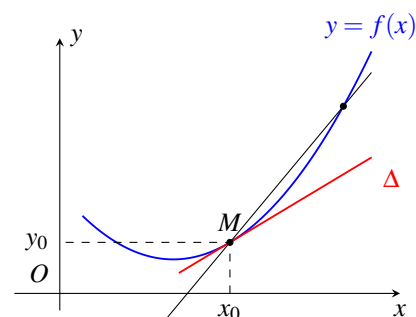
$$v(t_0) = s'(t_0) = f'(t_0).$$

⚙️ **Cường độ tức thời:** Điện lượng Q truyền trong dây dẫn xác định bởi phương trình $Q = f(t)$, với $f(t)$ là hàm số có đạo hàm. Khi đó, cường độ tức thời của dòng điện tại thời điểm t_0 là đạo hàm của hàm số $Q = f(t)$ tại t_0 . Nghĩa là $I(t_0) = Q'(t_0) = f'(t_0)$.

4 Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$ và có đạo hàm tại $x_0 \in (a; b)$. Gọi $(\mathcal{C})$ là đồ thị của hàm số đó. Ta có hai kết quả sau:

- ① $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến Δ của đồ thị $(\mathcal{C})$ tại điểm $M(x_0; y_0)$.
- ② Phương trình tiếp tuyến Δ : $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.
 - $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm;
 - $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến.



5 Quan hệ giữa sự tồn tại đạo hàm và tính liên tục

⚙️ **Định lý:** Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

⚙️ **Chú ý:**

- Chiều đảo lại **không đúng**. Tức là, hàm số liên tục tại x_0 có thể không có đạo hàm tại x_0 .
- Hàm số không liên tục tại x_0 thì không có đạo hàm tại điểm đó.

B

PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại một điểm

Chọn một trong hai cách:

✓ **Cách 1:**

- Tính $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$;
- Nếu giới hạn này hữu hạn và có kết quả là a , thì ta kết luận $f'(x_0) = a$.

✓ **Cách 2:**

- Tính $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ và tính giới hạn $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$;
- Nếu giới hạn này hữu hạn và có kết quả là a , thì ta kết luận $f'(x_0) = a$.

≡ **Ví dụ 1.** Tính đạo hàm của hàm số $y = -x^2 + 3x - 2$ tại điểm $x_0 = 2$.

≡ **Ví dụ 2.** Tính đạo hàm của các hàm số sau tại các điểm đã chỉ ra:

a) $f(x) = x^3$ tại $x = 3$;

b) $f(x) = 2x^2 + x + 1$ tại $x = 2$;

c) $f(x) = x^3 - 2x + 1$ tại $x = 1$;

d) $f(x) = \sqrt{x}$ tại $x = 4$;

e) $f(x) = \sqrt{2x+1}$ tại $x = 1$;

f) $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ tại $x = 3$.

Ví dụ 3. Tính đạo hàm (nếu tồn tại) của hàm số $y = |x-1|x^2$ tại điểm $x_0 = 1$.

Ví dụ 4. Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x = 1$.

DT

2

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm cho trước

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = (2x+1)^2$.

a) Bằng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm $x_0 = -1$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(-1; 1)$.

Ví dụ 6. Cho hàm số $y = x^3$.

a) Bằng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm x_0 bất kì ($x_0 \in \mathbb{R}$).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(-2; -8)$.

Ví dụ 7. Cho hàm số $y = \sqrt{x}$.

a) Bằng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm $x_0 > 0$ bất kì.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng 4.

DT

3

Ý nghĩa vật lý của đạo hàm

✓ Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = s(t)$, trong đó s là quãng đường đi được trong thời gian t . Lúc đó, vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 là $v(t_0) = s'(t_0)$.

✓ Ý nghĩa tổng quát: Đạo hàm của một hàm số chính là đặc trưng cho tốc độ thay đổi của hàm số theo biến số của nó.

Ví dụ 8. Một vật rơi tự do theo phương trình $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$ là gia tốc trọng trường. Tìm vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t_0 = 5 \text{ s}$.

Ví dụ 9. Một viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với tốc độ ban đầu $v_0 = 196 \text{ m/s}$ (bỏ qua sức cản không khí). Tính vận tốc tức thời của viên đạn tại thời điểm $t_0 = 10 \text{ s}$. Biết gia tốc trọng trường là $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$.

C

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Tính đạo hàm của các hàm số sau bằng định nghĩa

a) $y = x^2 + 3x - 2$ tại $x_0 = 1$.

b) $y = x^3 - 2x + 1$. Tính $y'(1)$.

c) $f(x) = x^3 + x - 2$. Tính $f'(-2)$.

d) $f(x) = \sqrt{2x+7}$. Tính $f'(1)$.

e) $y = \sqrt{3-2x}$. Tính $y(-3)$.

g) $y = -\frac{3}{x}$ tại $x_0 = 2$.

f) $y = \sqrt{x^2+5}$. Tính $y'(2)$.

h) $y = \frac{2x+1}{x-1}$. Tính $y'(2)$.

2 Chứng minh rằng hàm số $y = |x|$ không tồn tại đạo hàm tại điểm $x = 0$.

3 Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{nếu } x \geq 0 \\ 1-2x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.

4 Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm M có hoành độ $x_0 = 1$.

5 Tìm tọa độ điểm M trên đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$, biết hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M bằng 3.

6 Một vật chuyển động có quãng đường được xác định bởi phương trình $s(t) = 2t^2 + 5t + 2$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời tại thời điểm $t = 4$.

7 Sau mùa lũ, tại địa phương A, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh đường ruột kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ n được xác định bởi công thức $D(n) = 45n^2 - n^3$. Hỏi tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tức thời tại thời điểm $n = 10$ là bao nhiêu?

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tính số gia của hàm số $y = x^2 + 2$ tại điểm $x_0 = 2$ ứng với số gia $\Delta x = 1$.

- A. $\Delta y = 13$. B. $\Delta y = 9$.
C. $\Delta y = 5$. D. $\Delta y = 2$.

Câu 2. Tính số gia của hàm số $y = x^3 + x^2 + 1$ tại điểm x_0 ứng với số gia $\Delta x = 1$.

- A. $\Delta y = 3x_0^2 + 5x_0 + 3$.
B. $\Delta y = 2x_0^3 + 3x_0^2 + 5x_0 + 2$.
C. $\Delta y = 3x_0^2 + 5x_0 + 2$.
D. $\Delta y = 3x_0^2 - 5x_0 + 2$.

Câu 3. Tính số gia của hàm số $y = \frac{x^2}{2}$ tại điểm $x_0 = -1$ ứng với số gia Δx .

- A. $\Delta y = \frac{1}{2}(\Delta x)^2 - \Delta x$.
B. $\Delta y = \frac{1}{2}[(\Delta x)^2 - \Delta x]$.
C. $\Delta y = \frac{1}{2}[(\Delta x)^2 + \Delta x]$.
D. $\Delta y = \frac{1}{2}(\Delta x)^2 + \Delta x$.

Câu 4. Tính số gia của hàm số $y = x^2 - 4x + 1$ tại điểm x_0 ứng với số gia Δx .

- A. $\Delta y = \Delta x(\Delta x + 2x_0 - 4)$.
B. $\Delta y = 2x_0 + \Delta x$.
C. $\Delta y = \Delta x(2x_0 - 4\Delta x)$.

D. $\Delta y = 2x_0 - 4\Delta x$.

Câu 5. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào có $f'(-3) = 7$?

- A. $f(x) = \frac{1-2x}{x+4}$. B. $f(x) = \sqrt{x^2+40}$.
C. $f(x) = x^2 - x + 8$. D. $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$.

Câu 6. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{2x-1}$ tại điểm $x_0 = 1$ là

- A. 2. B. -2. C. -1. D. 1.

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = (m^3 - 3m^2 + m)x + 2017$. Tìm m để $f'(2) = 3$.

- A. $m = -1$. B. $m = 1$.
C. $m = 3$. D. $m = 0$.

Câu 8. Đạo hàm của hàm số $f(x) = 3x - 1$ tại $x_0 = 1$ là

- A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 9. Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $f(x) = -x^3$ tại điểm $M(-2; 8)$ là

- A. 12. B. -12.
C. 192. D. -192.

Câu 10. Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = \frac{1}{x}$ tại điểm có hoành độ bằng -1.

- A. $y = -x - 2$. B. $y = x - 2$.
C. $y = -x + 1$. D. $y = -x - 1$.

Câu 11. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3$ tại điểm $(-1; -1)$.

- A. $y = -3x - 4$. B. $y = -1$.
C. $y = 3x - 2$. D. $y = 3x + 2$.

Câu 12. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = \frac{1}{x}$ tại điểm có hoành độ bằng -1 .

- A. $x + y + 2 = 0$. B. $y = x + 2$.
C. $y = x - 2$. D. $y = -x + 2$.

Câu 13. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3$ tại điểm có tung độ bằng 8 .

- A. $y = 8$. B. $y = -12x + 16$.
C. $y = 12x - 24$. D. $y = 12x - 16$.

Câu 14. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = \frac{1}{x}$ biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{4}$.

- A. $x + 4y - 1 = 0, x + 4y + 1 = 0$.
B. $x + 4y - 4 = 0, x + 4y + 4 = 0$.
C. $y = -\frac{1}{4}x - 4, y = -\frac{1}{4}x + 4$.
D. $y = -\frac{1}{4}x$.

Câu 15. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 2$ giây.

- A. 2 m/s . B. 3 m/s .
C. 4 m/s . D. 5 m/s .

Câu 16. Một vật rơi tự do theo phương trình $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$ là gia tốc trọng

trường. Tìm vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 5\text{s}$.

- A. 49 m/s . B. $122,5 \text{ m/s}$.
C. 50 m/s . D. 123 m/s .

Câu 17. Một viên đạn được bắn lên cao theo phương trình $s(t) = 196t - 4,9t^2$ trong đó $t > 0$, t tính bằng giây kể từ thời điểm viên đạn được bắn lên cao và $s(t)$ là khoảng cách của viên đạn so với mặt đất được tính bằng mét. Tại thời điểm vận tốc của viên đạn bằng 0 thì viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét?

- A. 1690 m . B. 1069 m .
C. 1906 m . D. 1960 m .

Câu 18. Một chất điểm chuyển động có phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 9t + 2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Hỏi tại thời điểm nào thì vận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất?

- A. $t = 1 \text{ s}$. B. $t = 2 \text{ s}$.
C. $t = 3 \text{ s}$. D. $t = 6 \text{ s}$.

Câu 19. Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t) = 8t + 3t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng mét/giây. Tìm gia tốc của chất điểm tại thời điểm mà vận tốc chuyển động là 11 mét/giây .

- A. 6 m/s^2 . B. 11 m/s^2 .
C. 14 m/s^2 . D. 20 m/s^2 .

Câu 20. Một vật rơi tự do theo phương trình $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ là gia tốc trọng trường. Tìm vận tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian từ t ($t = 5\text{s}$) đến $t + \Delta t$ với $\Delta t = 0,001\text{s}$

- A. $v_{tb} = 49 \text{ m/s}$. B. $v_{tb} = 49,49 \text{ m/s}$.
C. $v_{tb} = 49,005 \text{ m/s}$. D. $v_{tb} = 49,245 \text{ m/s}$.

—HẾT—

§2. QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 Quy tắc tính đạo hàm của tổng hiệu, tích thương

Giả sử $u = u(x)$, $v = v(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Ta có các quy tắc sau:

$$\textcircled{1} (u + v)' = u' + v'$$

$$\textcircled{4} \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}, \text{ với } v \neq 0.$$

$$\textcircled{2} (u - v)' = u' - v'$$

$$\textcircled{5} (k \cdot u)' = k \cdot u', \text{ với } k \text{ là hằng số.}$$

$$\textcircled{3} (u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

$$\textcircled{6} \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}, \text{ với } v \neq 0.$$

2 Đạo hàm của hàm hợp

Cho hàm số $y = f(u)$, với $u = u(x)$. Ta có công thức sau:

$$[f(u)]' = f'(u) \cdot u'_x$$

3 Bảng đạo hàm của một số hàm số sơ cấp cơ bản và hàm hợp

STT	Đạo hàm của một số hàm sơ cấp cơ bản	Đạo hàm của hàm hợp tương ứng, với $u = u(x)$
$\textcircled{1}$	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
$\textcircled{2}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$\textcircled{3}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\textcircled{4}$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$
$\textcircled{5}$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$
$\textcircled{6}$	$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$\textcircled{7}$	$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$\textcircled{8}$	$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u' \cdot e^u$
$\textcircled{9}$	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$
$\textcircled{10}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$\textcircled{11}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$

DT

1

Tính đạo hàm của hàm đa thức

✔ Công thức sử dụng: Với $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$\triangleright (x^n)' = nx^{n-1}$$

$$\rightarrow \text{Hàm hợp: } (u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$$

≡ Ví dụ 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^5$;

b) $y = 2x^4$;

c) $y = \frac{1}{3}x^3 + \sqrt{3}$;

d) $y = x^3 + x^2 - 6$;

e) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$;

f) $y = x^5(3 - 2x^4)$.

≡ Ví dụ 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (2x - 3)^2$;

b) $y = (x^2 + x)^8$;

c) $y = (x^2 - 5x^4)^6$.

≡ Ví dụ 3. Giải phương trình $f'(x) = 0$, với

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$;

b) $f(x) = x^3 + 3x^2$;

c) $f(x) = -x^4 + 6x^2 - 3$;

d) $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + 3x^2 - 4x + 4$.

≡ Ví dụ 4. Cho hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$. Giải bất phương trình $f'(x) > 0$.

≡ Ví dụ 5. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{x} + x$. Giải bất phương trình $f'(x) \leq 0$.

DT

2

Tính đạo hàm của hàm chứa căn thức

✔ Công thức sử dụng: Với $x > 0$, ta có:

$$\triangleright (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\rightarrow \text{Hàm hợp: } (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

≡ Ví dụ 6. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^2 + 2\sqrt{x}$;

b) $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{3}$;

c) $y = x\sqrt{x}$.

≡ Ví dụ 7. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 7}$;

b) $y = \sqrt{4 - x^2}$;

c) $y = \sqrt{2x^2(2 - x^2)}$.

≡ Ví dụ 8. Giải phương trình $f'(x) = 0$ với

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 7}$;

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$;

c) $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

DT**3****Tính đạo hàm của hàm lượng giác**

✓ Công thức sử dụng:

$$\triangleright (\sin x)' = \cos x.$$

$$\rightarrow \text{Hàm hợp: } (\sin u)' = u' \cdot \cos u.$$

$$\triangleright (\cos x)' = -\sin x.$$

$$\rightarrow \text{Hàm hợp: } (\cos u)' = -u' \cdot \sin u.$$

$$\triangleright (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$\rightarrow \text{Hàm hợp: } (\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}.$$

$$\triangleright (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$\rightarrow \text{Hàm hợp: } (\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}.$$

≡ Ví dụ 9. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sin x + x;$

b) $y = \sin x + 3 \cos x;$

c) $y = \tan x - \sqrt{3} \cot x;$

d) $y = \sin(2x);$

e) $y = \sin^2 x;$

f) $y = \cos^2 4x;$

≡ Ví dụ 10. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right);$

b) $y = \tan 5x;$

c) $y = \cos 3x + \tan(x^2 + 2x).$

d) $y = \sin 2x - \cot\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$

e) $y = \sqrt{1 + \sin 2x};$

f) $y = \sqrt{1 + 2 \tan x}.$

DT**4****Tính đạo hàm của hàm số mũ, hàm số lôgarit**

✓ Công thức sử dụng:

$$\triangleright (e^x)' = e^x.$$

$$\rightarrow \text{Hàm hợp: } (e^u)' = u' \cdot e^u.$$

$$\triangleright (a^x)' = a^x \cdot \ln a.$$

$$\rightarrow \text{Hàm hợp: } (a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a.$$

$$\triangleright (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$\rightarrow \text{Hàm hợp: } (\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

$$\triangleright (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

$$\rightarrow \text{Hàm hợp: } (\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}.$$

≡ Ví dụ 11. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 10^x$

b) $y = \log_5 x$

c) $y = \ln(1 + x^2)$

d) $y = e^{2x+1}$

e) $y = \log_2(x + e^x).$

f) $y = \log_8(x^2 - 3x - 4)$

≡ Ví dụ 12. Cho hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Tính $f'(1)$.

✓ Các quy tắc cần nhớ:

- ① $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$
- ② $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$, với $v \neq 0$.
- ③ $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$, với $v \neq 0$.

✓ Công thức giải nhanh:

$$\textcircled{1} \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}.$$

$$\textcircled{2} \left(\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}x^2 + 2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{(a_2x^2+b_2x+c_2)^2}$$

- Định thức trên tử số, ta nhân theo chiều "dấu huyền" trừ cho "dấu sắc".
- Nghĩa là: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$.

≡ Ví dụ 13. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{2x+1}{x+1}$

b) $y = \frac{2x-1}{4x-3}$

c) $y = \frac{5x}{1-4x}$

d) $y = \frac{x^2-3x+7}{2x-5}$

e) $y = \frac{2x-5}{x^2+x+2}$

f) $y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$

≡ Ví dụ 14. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^2\sqrt{x}$.

b) $y = (x-1)\sqrt{3x+2}$.

c) $y = x\sqrt{1-x^2}$

d) $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

e) $y = \frac{\sqrt{4+x^2}}{x}$.

f) $y = \frac{1+\sqrt{x+3}}{x-1}$

≡ Ví dụ 15. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x \cdot \cos x$.

b) $y = (2-x^2) \cdot \sin 3x$.

c) $y = x \cdot \cot 2x$.

d) $y = \frac{x}{\cos x}$.

e) $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$.

f) $y = \frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\sin x + \cos x}$.

≡ Ví dụ 16. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = xe^x$;

b) $y = \frac{\ln^2 x}{x}$;

c) $y = \frac{x+1}{4^x}$;

d) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$;

e) $y = (x^2 + 4x + 3)e^{2x}$;

f) $y = (x+1)\log_2(x^2-4)$.

DT**6****Viết phương trình tiếp tuyến****1 Đề bài cho trước $(x_0; y_0)$:**

- ① Tính $f'(x_0)$.
- ② Thay vào công thức $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$, thu gọn kết quả về dạng $y = Ax + B$.

2 Đề bài chưa cho đầy đủ $(x_0; y_0)$, ta thường gặp các loại sau:

- ① Cho biết trước x_0 hoặc y_0 . Ta chỉ việc thay giá trị đó vào hàm số $y = f(x)$, sẽ tính được đại lượng còn lại.
- ② Cho trước 1 điều kiện giải. Ta chỉ việc giải điều kiện đó, tìm x_0 .
 - Nếu đề bài cho biết hệ số góc của tiếp tuyến $k = a$, ta giải $f'(x) = a$ tìm nghiệm x_0 . Đề bài thường cho hệ số góc tiếp tuyến dưới các dạng sau:

$$+ \text{ Tiếp tuyến } d \parallel \Delta: y = ax + b \Rightarrow k = a$$

$$+ \text{ Tiếp tuyến } d \perp \Delta: y = ax + b \Rightarrow k = -\frac{1}{a}$$

- Nếu đề bài cho tiếp điểm là giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$, ta giải $f(x) = g(x)$ để tìm nghiệm x_0 .

≡ Ví dụ 17. Cho đường cong $(C): y = f(x) = \frac{x^2}{2} - 4x + 1$.

- a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = -2$.
- b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = -3$.
- c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) , biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = 1$.

≡ Ví dụ 18. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $(C): y = f(x) = x(x^2 + x - 1) + 1$ tại điểm có tung độ bằng -1 .

≡ Ví dụ 19. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta: 3x + y = 2$.

≡ Ví dụ 20. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = \frac{x-1}{x+2}$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $\Delta: 3x + y - 2 = 0$.

DT**7****Các bài toán vận dụng, thực tiễn**

≡ Ví dụ 21. Năm 2010, dân số ở một tỉnh D là 1 038 229 người. Tính đến năm 2015, dân số tỉnh đó là 1 153 600 người. Cho biết dân số của tỉnh D được ước tính theo công thức $S(N) = Ae^{Nr}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm được làm tròn đến hàng phần nghìn). Tốc độ gia tăng dân số (người/năm) vào thời điểm sau N năm kể từ năm 2010 được xác định bởi hàm số $S'(N)$. Tính tốc độ gia tăng dân số của tỉnh D vào năm 2023 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị người/năm), biết tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi.

Ví dụ 22. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t + 2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 5$ (s).

Ví dụ 23. Nếu số lượng sản phẩm sản xuất được của một nhà máy là x (đơn vị: trăm sản phẩm) thì lợi nhuận sinh ra là $P(x) = -200x^2 + 12800x - 74000$ (nghìn đồng). Tính tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 1200 sản phẩm.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = -\frac{3x^2}{2} + \frac{2}{x} + \frac{x^3}{3}$;

b) $y = (x+1)^2(x^2-1)$;

c) $y = \frac{x^2-2x}{x^2+x+1}$;

d) $y = \frac{1-2x}{x+1}$;

e) $y = xe^{2x+1}$;

f) $y = (2x+3)3^{2x+1}$;

g) $y = x \ln^2 x$;

h) $y = \log_2(x^2+1)$.

2 Cho hàm số $f(x) = 3x^3 - 4\sqrt{x}$. Tính $f(4)$, $f'(4)$, $f(a^2)$, $f'(a^2)$ (a là hằng số khác 0).

3 Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = \frac{x}{\sin x - \cos x}$;

b) $y = \frac{\sin x}{x}$;

c) $y = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$;

d) $y = \cos(2\sin x)$.

4 Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ và $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + x^2$. Tính $f'(0) - g'(1)$.

5 Cho hàm số $f(x) = 4\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. Chứng minh rằng $|f'(x)| \leq 8$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tìm x để $f'(x) = 8$.

6 Biết y là hàm số của x thỏa mãn phương trình $xy = 1 + \ln y$. Tính $y'(0)$.

7 Giải phương trình $f'(x) = 0$, biết $f(x)$ được cho bởi công thức sau:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$;

b) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$;

c) $f(x) = \frac{x^2+3x+3}{x+1}$;

d) $f(x) = (x-1)\sqrt{2x+1}$;

e) $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x$;

f) $f(x) = \sin^2 x - x$.

8 Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 6x - 8$. Giải bất phương trình $y' \leq 0$.

9 Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (m+6)x + 1$. Tìm tham số m sao cho $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

10 Cho hàm số $y = 3mx^3 - 2x^2 + (3-m)x$. Tìm tham số m để phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

- D //** **BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

D. $(uv)' = u'v + uv'$.

– TOÁN 11 – Biên soạn: Cao Thanh Phúc

$(-\infty; +\infty)$ là

- A. $y' = 3x^3$. B. $y' = 4x^4$.
C. $y' = 3x^4$. D. $y' = 4x^3$.

Câu 3. Đạo hàm của hàm số $y = 5x^3 - x^2 - 1$ là

- A. $15x^2 - 2x$. B. $15x^2 - 2$.
C. $15x^2 - 2x - 1$. D. $-2x$.

Câu 4. Hàm số $y = \sin x$ có đạo hàm là

- A. $y' = \frac{1}{\cos x}$. B. $y' = \cos x$.
C. $y' = -\cos x$. D. $y' = -\sin x$.

Câu 5. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin 2x$

- A. $y' = -\cos 2x$. B. $y' = -2\cos 2x$.
C. $y' = \cos 2x$. D. $y' = 2\cos 2x$.

Câu 6. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2018^x$.

- A. $y' = x \cdot 2018^{x-1}$.
B. $y' = \frac{2018^x}{\ln 2018}$.
C. $y' = 2018^x \cdot \ln 2018$.
D. $y' = 2018^x$.

Câu 7. Đạo hàm của hàm số $f(x) = \log_2 x$ là

- A. $x \ln 2$. B. $\frac{\ln 2}{x}$. C. $\frac{1}{x \ln 2}$. D. $\frac{x}{\ln 2}$.

Câu 8. Đạo hàm của hàm số $y = \log_3(4x + 1)$ là

- A. $y' = \frac{4}{(4x+1)\ln 3}$. B. $y' = \frac{1}{(4x+1)\ln 3}$.
C. $y' = \frac{\ln 3}{4x+1}$. D. $y' = \frac{4\ln 3}{4x+1}$.

Câu 9. Cho hàm số $y = \ln x$. Tính đạo hàm của hàm số trên khoảng $(0; +\infty)$.

- A. $y' = \frac{1}{x \ln 10}$. B. $y' = x$.
C. $y' = \frac{1}{x}$. D. $y' = -\frac{1}{x}$.

Câu 10. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = e^{2x-3}$.

- A. $f'(x) = 2 \cdot e^{x-3}$.
B. $f'(x) = e^{2x-3}$.
C. $f'(x) = -2 \cdot e^{2x-3}$.
D. $f'(x) = 2 \cdot e^{2x-3}$.

Câu 11. Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 5x}$ là

- A. $y' = \frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x}}$. B. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2-5x}}$.
C. $y' = \frac{2x-5}{\sqrt{x^2-5x}}$. D. $y' = -\frac{2x-5}{\sqrt{x^2-5x}}$.

Câu 12. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x-1}{x+2}$

- A. $y' = \frac{-5}{(x+2)^2}$. B. $y' = \frac{2}{(x+2)^2}$.
C. $y' = \frac{3}{(x+2)^2}$. D. $y' = \frac{5}{(x+2)^2}$.

Câu 13. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2+2x-3}{x+2}$.

- A. $y' = 1 + \frac{3}{(x+2)^2}$. B. $y' = \frac{x^2+6x+7}{(x+2)^2}$.
C. $y' = \frac{x^2+4x+5}{(x+2)^2}$. D. $y' = \frac{x^2+8x+1}{(x+2)^2}$.

Câu 14. Đạo hàm của hàm số $y = (x^3 - 2x^2)^2$ bằng

- A. $6x^5 + 16x^3$.
B. $6x^5 - 20x^4 + 4x^3$.
C. $6x^5 - 20x^4 + 16x^3$.
D. $6x^5 - 20x^4 - 16x^3$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = \log_3(2x+1)$. Tính giá trị của $f'(0)$.

- A. $2 \ln 3$. B. $\frac{2}{\ln 3}$. C. 0. D. 2.

Câu 16. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ tại điểm $x = -1$.

- A. $f'(-1) = 1$. B. $f'(-1) = -\frac{1}{2}$.
C. $f'(-1) = -2$. D. $f'(-1) = 0$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$. Tính giá trị biểu thức $P = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) - f'\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

- A. $P = \frac{4}{3}$. B. $P = \frac{4}{9}$.
C. $P = \frac{x-3}{x+4}$. D. $P = \frac{8}{3}$.

Câu 18. Cho hàm số $y = 3x^3 + x^2 + 1$, có đạo hàm là y' . Để $y' \leq 0$ thì x nhận các giá trị thuộc tập nào sau đây?

- A. $\left[-\frac{2}{9}; 0\right]$.
B. $\left[-\frac{9}{2}; 0\right]$.

- C. $\left(-\infty; -\frac{9}{2}\right] \cup [0; +\infty)$.
 D. $\left(-\infty; -\frac{2}{9}\right] \cup [0; +\infty)$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. Tìm x để $f'(x) > 0$.

- A. $x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$.
 B. $x \in \mathbb{R}$.
 C. $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$.
 D. $x \in (-1; 1)$.

Câu 20. Cho hai hàm số $f(x) = 3x^3 - 3x^2 + 6x - 1$ và $g(x) = x^3 + x^2 - 2$. Bất phương trình $f''(x) - f'(x) + g'(x) - 8 \geq 0$ có tập nghiệm là

- A. $\left(1; \frac{10}{3}\right)$.
 B. $(-\infty; 1] \cup \left[\frac{10}{3}; +\infty\right)$.
 C. $\left[1; \frac{10}{3}\right]$.
 D. $(-\infty; 1) \cup \left(\frac{10}{3}; +\infty\right)$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x) = \ln(3x - x^2)$. Tìm tập nghiệm S của phương trình $f'(x) = 0$.

- A. $S = \emptyset$.
 B. $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.
 C. $S = \{0; 3\}$.
 D. $S = (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{-5x^2 + 14x - 9}$. Tập hợp các giá trị của x để $f'(x) < 0$ là

- A. $\left(\frac{7}{5}; \frac{9}{5}\right)$. B. $\left(\frac{7}{5}; +\infty\right)$.
 C. $\left(-\infty; \frac{7}{5}\right)$. D. $\left(1; \frac{7}{5}\right)$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. Tập nghiệm S của bất phương trình $f'(x) \geq f(x)$ có bao nhiêu giá trị nguyên?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 24. Cho hàm số $y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right)$. Giải phương trình $y' = 0$.

- A. $x = \frac{\pi}{3} - k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 25. Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-2}{2x-1}$ tại điểm có hoành độ 2 là

- A. $\frac{3}{2}$. B. -1 . C. $\frac{1}{9}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 26. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -2x^4 + x^2 + 3$ tại điểm $M(1; 2)$ là

- A. $y = -6x + 8$. B. $y = -6x + 6$.
 C. $y = -6x - 6$. D. $y = -6x - 8$.

Câu 27. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$.

- A. $y = -x - 7$. B. $y = 7x - 14$.
 C. $y = 7x - 7$. D. $y = -x + 9$.

Câu 28. Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 + 2x^2 + 2$ tại điểm có tung độ bằng 2 là

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 1.

Câu 29. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

- A. $y = -2x + 1$. B. $y = 2x + 1$.
 C. $y = 3x - 2$. D. $y = -3x - 2$.

Câu 30. Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 8x + 1$ song song với đường thẳng $(d): y = x + 28$ là

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Câu 31. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x^2$ song song với đường thẳng $y = x$?

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Câu 32. Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ vuông góc với đường thẳng $x - 3y + 1 = 0$ có phương trình là

- A. $x - 3y + 3 = 0$. B. $3x - y - 3 = 0$.
 C. $3x + y - 3 = 0$. D. $3x + y - 1 = 0$.

Câu 33. Cho đường cong (C) có phương trình $y = \frac{2x+1}{x+1}$. Tìm phương trình tiếp tuyến của đường cong (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y = -4x + 3$.

- A. $y = \frac{1}{4}x - \frac{7}{4}$.
 B. $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$ và $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$.
 C. $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$ và $y = \frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$.
 D. $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$.

Câu 34. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^2 + 20t$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 8$ giây bằng bao nhiêu?

- A. 152 m/s. B. 40 m/s.
C. 22 m/s. D. 12 m/s.

Câu 35. Một chất điểm chuyển động có phương trình $s = 2t^2 + 3t$ (t tính bằng giây, s tính bằng mét). Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t_0 = 2$ (giây) bằng

- A. 11 (m/s). B. 9 (m/s).
C. 22 (m/s). D. 19 (m/s).

Câu 36. Nếu số lượng sản phẩm sản xuất được của một nhà máy là x (đơn vị: trăm sản phẩm) thì lợi nhuận sinh ra là $P(x) = -200x^2 + 12800x - 74000$ (nghìn đồng). Tính tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 2000 sản phẩm.

- A. 12000. B. -67200.
C. -787200. D. 4800.

Câu 37. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-2018)$ tại điểm $x = 0$.

- A. $f'(0) = 0$. B. $f'(0) = -2018!$.
C. $f'(0) = 2018!$. D. $f'(0) = 2018$.

Câu 38. Cho hàm số $f(x) = (2018 + x)(2017 + 2x)(2016 + 3x)\cdots(1 + 2018x)$. Tính $f'(1)$.

- A. $1009 \cdot 2019^{2018}$. B. $2018 \cdot 1009^{2019}$.
C. $2018 \cdot 2019^{1009}$. D. $2019 \cdot 2018^{1009}$.

Câu 39. Cho hàm số $f(x) = \ln \frac{2018x}{x+1}$. Tính tổng $S = f'(1) + f'(2) + \cdots + f'(2018)$.

- A. $S = \ln 2018$. B. $S = 1$.
C. $S = 2018$. D. $S = \frac{2018}{2019}$.

Câu 40. Tính tổng $S = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \cdots + 2018 \cdot 2^{2017}$.

- A. $S = 2017 \cdot 2^{2018} + 1$.
B. $S = 2018 \cdot 2^{2018} + 1$.
C. $S = 2019 \cdot 2^{2018} + 1$.
D. $S = 2017 \cdot 2^{2018}$.

§3. ĐẠO HÀM CẤP HAI

A // KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 Định nghĩa

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại mỗi điểm $x \in (a; b)$. Khi đó hệ thức $y' = f'(x)$ xác định một hàm số mới trên khoảng $(a; b)$. Nếu hàm số $y' = f'(x)$ lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y' là đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$.

- Kí hiệu y'' hoặc $f''(x)$
- Công thức tính $f''(x) = [f'(x)]'$.

2 Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Một chuyển động có phương trình $s = f(t)$ thì đạo hàm cấp hai (nếu có) của hàm số $f(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động. Ta có

$$a(t) = f''(t)$$

B // PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Tính đạo hàm cấp hai

≡ Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x) = x^2 + 2x - 1$.

- Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số.
- Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại điểm $x_0 = 0, x_0 = 1$.

≡ Ví dụ 2. Cho hàm số $h(x) = \ln x, x > 0$.

- Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số.
- Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại $x_0 = \sqrt{2}$.

≡ Ví dụ 3. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

- | | | |
|--------------------------|-----------------------|------------------------|
| a) $y = \sin x$. | b) $y = \tan x$. | c) $y = (x^2 + 1)^3$. |
| d) $y = \frac{x}{x-2}$. | e) $y = x^2 e^{-x}$. | f) $y = \ln(2x + 3)$. |

≡ Ví dụ 4. Cho hàm số $f(x) = xe^{x^2} + \ln(x+1)$. Tính $f'(0)$ và $f''(0)$.

≡ Ví dụ 5. Cho hàm số $h(x) = 5(x+1)^3 + 4(x+1)$. Giải phương trình $h''(x) = 0$.

≡ Ví dụ 6. Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$. Chứng minh rằng: $y^3 \cdot y'' + 1 = 0$.

Ví dụ 7. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 4$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng mét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 3$ (s).

Ví dụ 8. Phương trình chuyển động của một hạt được cho bởi công thức $s(t) = 10 + 0,5 \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right)$, trong đó s tính bằng centimet, t tính bằng giây. Gia tốc của hạt tại thời điểm $t = 5$ giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Cho hàm số $g(x) = \cos x$.

a) Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số.

b) Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

2 Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = -3x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 2x$.

b) $y = \frac{4}{5}x^5 - 3x^2 - x + 4$.

c) $y = -\frac{1}{x}$.

d) $y = \frac{1}{x-3}$.

e) $y = x \cdot \sin x$.

f) $y = e^x \cdot \sin x$.

3 Cho hàm số $f(x) = x^2 - 4x$. Giải phương trình $f'(x) = f''(x)$.

4 Cho hàm số $f(x) = \sin^3 x + x^2$. Tính giá trị $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

5 Cho hàm số $y = -2 + \frac{5}{x}$. Chứng minh rằng: $\frac{2y'}{x} + y'' = 0$.

6 Cho $y = \frac{x-3}{x+4}$. Chứng minh rằng: $2(y')^2 = (y-1)y''$.

7 Cho hàm số $y = x \cos x$. Chứng minh rằng: $x \cdot y - 2(y' - \cos x) + x \cdot y'' = 0$.

8 Cho hàm số $y = \sin^2 x$. Chứng minh rằng: $2y + y' \tan x + y'' - 2 = 0$.

9 Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2 - 9t$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm vận tốc bị triệt tiêu là

10 Một chất điểm có phương trình chuyển động $s(t) = 6 \sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng centimet. Tính gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{6}$ (s).

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $y = 3x$. Khi đó, y'' bằng bao nhiêu?

A. 3.

B. $3x$.C. $\frac{3}{2}x^2$.

D. 0.

Câu 2. Cho $f(x) = (x + 10)^6$. Tính $f''(2)$.A. $f''(2) = 827440$.B. $f''(2) = 622080$.C. $f''(2) = 0$.D. $f''(2) = 413720$.**Câu 3.** Cho $f(x) = \cos 3x$. Tính $f''(0)$.A. $f''(0) = -9$.B. $f''(0) = 0$.C. $f''(0) = 9$.D. $f''(0) = 1$.**Câu 4.** Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số $y = 5 \sin x - 3 \cos x$.A. $y'' = 5 \cos x + 3 \sin x$.B. $y'' = 5 \sin x + 3 \cos x$.C. $y'' = -5 \sin x - 3 \cos x$.D. $y'' = -5 \sin x + 3 \cos x$.**Câu 5.** Cho hàm số $y = 5 - \frac{3}{x}$. Tính giá trị biểu thức $M = xy'' + 2y'$.A. $M = 0$.B. $M = 1$.C. $M = 4$.D. $M = 10$.**Câu 6.** Cho hàm số $y = \cos 2x$ có đạo hàm là y' và y'' . Mệnh đề nào sau đây đúng?A. $y + y'' = 0$.B. $4y'' - y = 0$.C. $y'' + 4y = 0$.D. $y + 2y' = 0$.**Câu 7.** Cho hai hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$ và $g(x) = 3 + 10x - 7x^2$. Nghiệm của phương trình $f''(x) + g'(x) = 0$ làA. $x = 1; x = \frac{1}{6}$.B. $x = -1; x = \frac{1}{6}$.C. $x = -1; x = -\frac{1}{6}$.D. $x = 1; x = -\frac{1}{6}$.**Câu 8.** Một chất điểm chuyển động thẳng với phương trình $s(t) = t^3 - t^2 + 5t$ (s tính theo m , t tính theo s). Tính giá trị gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 1s$?A. $a(3) = 5m/s^2$.B. $a(3) = 6m/s^2$.C. $a(3) = 0m/s^2$.D. $a(3) = 4m/s^2$.**Câu 9.** Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = t^3 + 4t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm mà vận tốc của chuyển động bằng $11 m/s$ làA. $12 m/s^2$.B. $16 m/s^2$.C. $14 m/s^2$.D. $18 m/s^2$.**Câu 10.** Một chất điểm có phương trình chuyển động $s(t) = 3 \sin \left(t + \frac{\pi}{3} \right)$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng centimet. Tính gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{2}$ (s).A. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.B. $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$.C. $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$.D. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

—HẾT—

Chương 8

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

§1. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

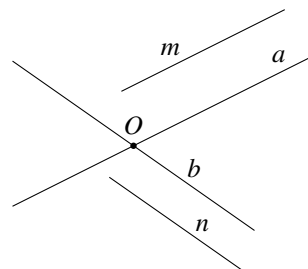
A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 Góc giữa hai đường thẳng

⚙ Định nghĩa:

Góc giữa hai đường thẳng m và n trong không gian, kí hiệu (m, n) , là góc giữa hai đường thẳng a và b cùng đi qua một điểm và tương ứng song song với m và n . Ta tóm tắt cách dựng như sau:

- ① Chọn điểm O . Qua O , kẻ $a \parallel m$ và $b \parallel n$;
- ② Góc giữa m và n bằng góc giữa a và b .



⚙ Chú ý:

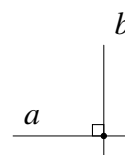
- ① Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng a, b thì $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.
- ② Nếu hai đường thẳng a, b song song hoặc trùng nhau thì $\varphi = 0^\circ$.

2 Hai đường thẳng vuông góc

⚙ Định nghĩa:

Hai đường thẳng được gọi là vuông góc nếu góc tạo bởi giữa chúng bằng 90° .

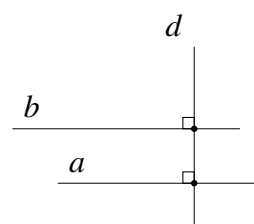
$$a \perp b \Leftrightarrow (a, b) = 90^\circ.$$



⚙ Định lý:

Nếu một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó sẽ vuông góc với đường còn lại.

$$\begin{cases} a \parallel b \\ d \perp a \end{cases} \Rightarrow d \perp b.$$



⚠ Hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể chéo nhau hoặc cắt nhau.

DT

1

Xác định góc giữa hai đường thẳng

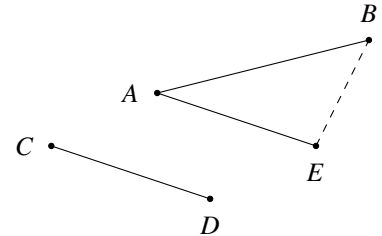
Trong không gian, giả sử cần xác định góc giữa hai đường thẳng AB và CD . Ta có thể thực hiện các bước như sau:

- ① Chọn gốc A , dựng $AE \parallel CD$;
- ② Kết luận góc giữa AB và CD bằng góc giữa AB và AE .
- ③ Xác định góc giữa AB và AE . Có thể dùng hệ quả định lý cô-sin:

$$\cos A = \frac{AB^2 + AE^2 - BE^2}{2AB \cdot AE}$$



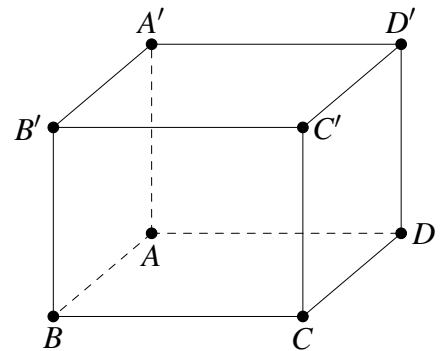
Ta có thể chọn điểm gốc khác điểm A , ưu tiên cho điểm dễ dựng hình.



Ví dụ 1.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a . Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau đây:

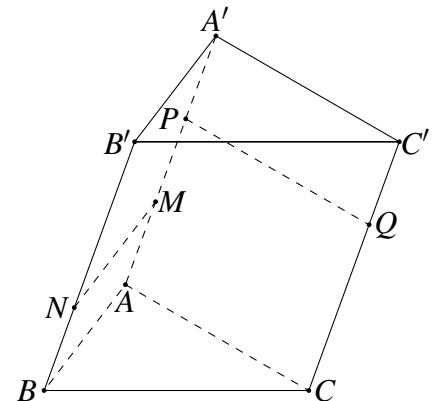
- a) AB và $A'D'$.
- b) AD và $A'C'$.
- c) BC' và $B'D'$.



Ví dụ 2.

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tam giác ABC cân tại A và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Các điểm M, N lần lượt thuộc hai đoạn thẳng AA' và BB' thỏa mãn $MN \parallel AB$, các điểm P, Q lần lượt thuộc hai đoạn thẳng AA' và CC' (P khác M) thỏa mãn $PQ \parallel AC$ (hình bên dưới). Tính số đo các góc sau

- a) (AB, AC) .
- b) $(AB, B'C')$.
- c) (MN, PQ) .



Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a\sqrt{2}$ và $BC = 2a$. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và SB .

Ví dụ 4. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD , biết $AB = CD = a$, $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD .

DT

Để chứng minh hai đường thẳng $\triangle$ và $\triangle'$ vuông góc với nhau ta có thể sử dụng tính chất vuông góc trong mặt phẳng, cụ thể:

- Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $\widehat{BAC} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^\circ$.
- Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
- Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi trung tuyến xuất phát từ A có độ dài bằng nửa cạnh BC .
- Nếu tam giác ABC cân tại A thì đường trung tuyến xuất phát từ A cũng là đường cao của tam giác.

Ngoài ra, chúng ta cũng sử dụng tính chất: Nếu $d \perp \triangle$ và $\triangle' \parallel d$ thì $\triangle'$ cũng vuông góc với đường thẳng $\triangle$.

≡ Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 60^\circ$, $\widehat{BSC} = 90^\circ$, $\widehat{CSA} = 120^\circ$. Cho H là trung điểm AC . Chứng minh rằng

- a) $SH \perp AC$. b) $AB \perp BC$.

≡ Ví dụ 6. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD, AC = BD, AD = BC$.

- a) Chứng minh rằng đoạn nối các trung điểm của các cặp cạnh đối thì vuông góc với hai cạnh đó.
- b) Chứng minh rằng hai đoạn nối các trung điểm của các cặp cạnh đối thì vuông góc với nhau

Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$. Lấy M, N và P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SB và SC . Chứng minh rằng AM vuông góc với NP .

≡ Ví dụ 8. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Lấy M là trung điểm của cạnh BC . Chứng minh rằng AM vuông góc với $B'C'$.

≡ Ví dụ 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = x$ và tất cả các cạnh còn lại đều bằng 1. Chứng minh rằng $SA \perp SC$.

≡ Ví dụ 10. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . Trên cạnh $B'C'$ lấy điểm P sao cho $C'P = x$ ($0 < x < a$). Trên cạnh $C'D'$ lấy điểm Q sao cho $C'Q = x$. Chứng minh rằng MN vuông góc với PQ .

C // **BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

- 1 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, tam giác SAD là tam giác đều và M là trung điểm của cạnh AD . Tính góc giữa hai đường thẳng BC và SA ; BC và SM .
- 2 Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng nhau và góc $A'AD$ bằng 120° . Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau: $A'C'$ và BD ; AD và BB' ; $A'D$ và BB' .
- 3 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và $SA = SB = SC = SD$. Chứng minh rằng $SO \perp AB$ và $SO \perp AD$.
- 4 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có M, N lần lượt là trung điểm $BC, C'D'$. Chứng minh rằng $AM \perp B'N$.

b) Tính tang của góc giữa hai đường thẳng SN và BC .

- 16** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng nhau và góc $A'AD$ bằng 120° . Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau: $A'C'$ và BD ; AD và BB' ; $A'D$ và BB' .
- 17** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a , gọi M là trung điểm của AB , N là điểm trên cạnh $B'C'$ sao cho $B'N = 2C'N$. Tính $\cos$ của góc tạo bởi hai đường thẳng DM và AN .

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
- B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.
- D. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Câu 2. Trong không gian cho đường thẳng a và điểm M . Có bao nhiêu đường thẳng qua M , cắt a và vuông góc với a ?

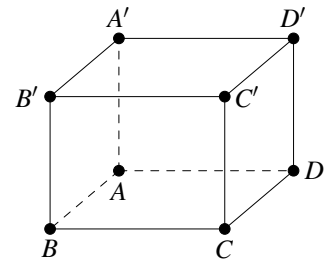
- A. Vô số.
- B. 2.
- C. Có 1 hoặc vô số.
- D. 1.

Câu 3. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O . Qua O có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với Δ ?

- A. 2.
- B. 1.
- C. 3.
- D. Vô số.

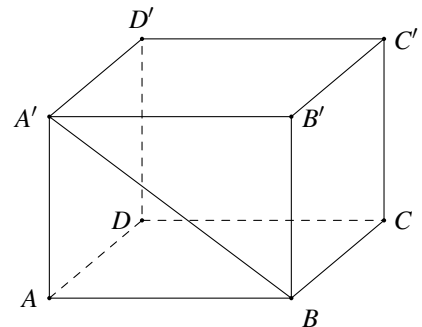
Câu 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng AC và $B'D'$ bằng

- A. 90° .
- B. 60° .
- C. 30° .
- D. 45° .



Câu 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng BA' và CD bằng

- A. 45° .
- B. 30° .
- C. 60° .
- D. 90° .

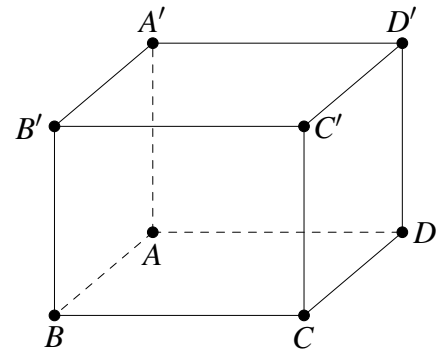


Câu 6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa AC và DA' là

- A. 120° .
- B. 45° .
- C. 60° .
- D. 90° .

Câu 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng

A. 90° . B. 60° . C. 30° . D. 45° .

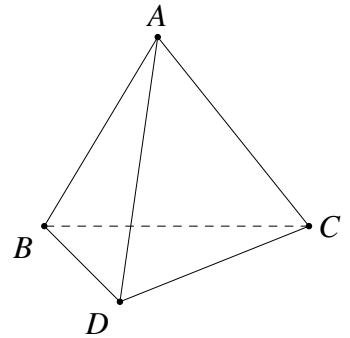


Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = a, SB = 2a, SC = 3a, \widehat{ASB} = \widehat{BSC} = 60^\circ, \widehat{CSA} = 90^\circ$. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng SA và BC . Tính $\cos \alpha$.

- A. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{7}$. B. $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{7}$. C. $\cos \alpha = 0$. D. $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.

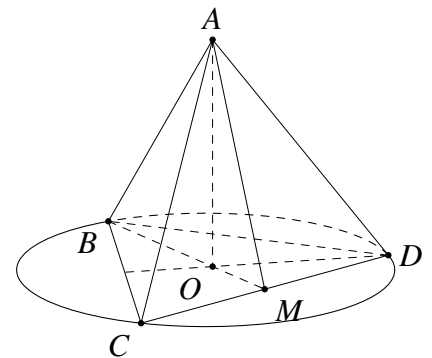
Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

- A. 60° . B. 30° . C. 90° . D. 45° .



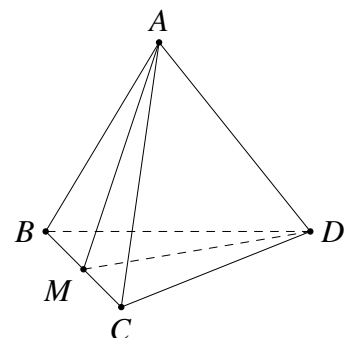
Câu 10. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD . Góc giữa AO và CD bằng bao nhiêu?

- A. 0° . B. 90° . C. 30° . D. 60° .



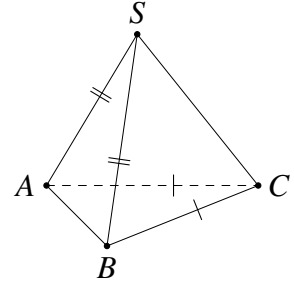
Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a , M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó $\cos(AB, DM)$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{1}{2}$.



Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB$ và $CA = CB$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng chéo nhau SC và AB .

- A. 90° . B. 30° . C. 45° . D. 60° .



Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$ và $\widehat{SAC} = \widehat{SAB}$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng chéo nhau SA và BC .

- A. 30° . B. 45° . C. 90° . D. 60° .

Câu 14. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = \frac{3}{2}AD$, $\widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 60^\circ$, $CD = AD$. Gọi φ là góc giữa AB và CD . Chọn khẳng định đúng.

- A. $\cos \varphi = \frac{3}{4}$. B. $\varphi = 60^\circ$. C. $\varphi = 30^\circ$. D. $\cos \varphi = \frac{1}{4}$.

Câu 15. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD . Góc (IE, JF) bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = a, BD = 3a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Biết AC vuông góc với BD . Tính MN .

- A. $MN = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. B. $MN = \frac{a\sqrt{10}}{2}$. C. $MN = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. D. $MN = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC . Tính góc giữa IJ và CD .

- A. 90° . B. 45° . C. 30° . D. 60° .

Câu 18. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD . Mặt phẳng (P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q . Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

- A. Hình thang. B. Hình bình hành.
C. Hình chữ nhật. D. Tứ giác không phải hình thang.

Câu 19. Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BC' và $C'A$. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

- A. Hình bình hành. B. Hình chữ nhật. C. Hình vuông. D. Hình thang.

Câu 20. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD , $AB = 4, CD = 6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC = 2BM$. Mặt phẳng (P) đi qua M song song với AB và CD . Diện tích thiết diện của P với tứ diện là

- A. 5. B. 6. C. $\frac{17}{3}$. D. $\frac{16}{3}$.

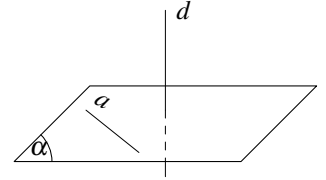
—HẾT—

§2. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 Định nghĩa

Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu d vuông góc với mọi đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) . Khi đó ta còn nói (α) vuông góc d và kí hiệu $d \perp (\alpha)$ hoặc $(\alpha) \perp d$.

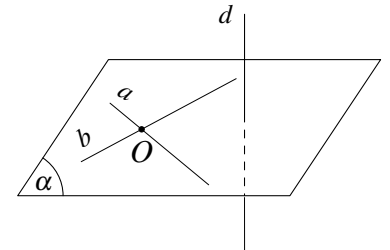


2 Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng ấy.

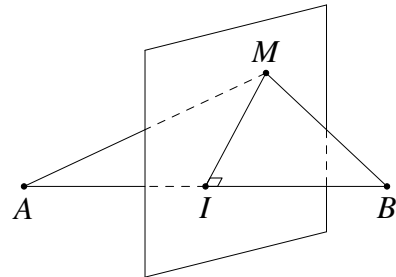
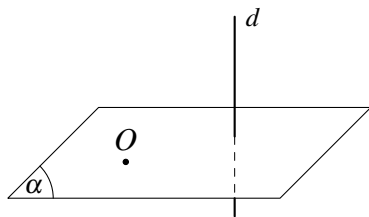


Tóm tắt định lí:
$$\begin{cases} a, b \subset (\alpha) \\ a \cap b = \emptyset \\ d \perp a \\ d \perp b \end{cases} \Rightarrow d \perp (\alpha).$$



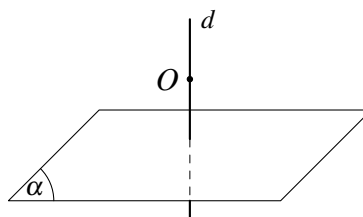
3 Tính chất

Tính chất 1: Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.



Chú ý: Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là mặt phẳng đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB .

Tính chất 2: Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.



4 Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng

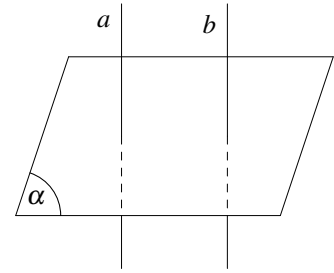
Tính chất 3:

- a) Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.



Tóm tắt:

$$\begin{cases} a \parallel b \\ (\alpha) \perp a \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \perp b.$$



- b) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.



Tóm tắt:

$$\begin{cases} a \perp (\alpha) \\ b \perp (\alpha) \\ a \neq b \end{cases} \Rightarrow a \parallel b.$$

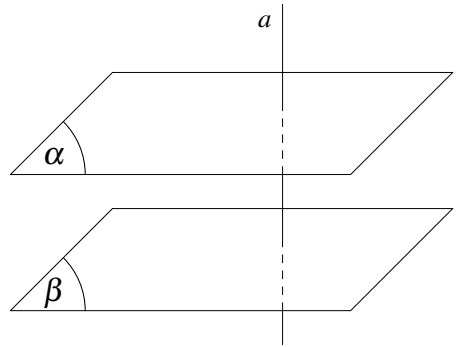
Tính chất 4:

- a) Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.



Tóm tắt:

$$\begin{cases} (\alpha) \parallel (\beta) \\ a \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp (\beta).$$



- b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.



Tóm tắt:

$$\begin{cases} (\alpha) \perp a \\ (\beta) \perp a \\ (\alpha) \neq (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta).$$

Tính chất 5:

- a) Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng (α) thì cũng vuông góc với a .



Tóm tắt:

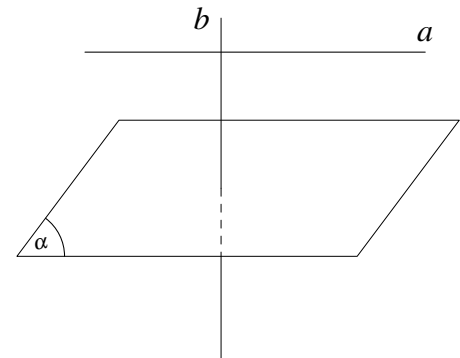
$$\begin{cases} a \parallel (\alpha) \\ b \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow b \perp a.$$

- b) Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì chúng song song với nhau.



Tóm tắt:

$$\begin{cases} a \not\subset (\alpha) \\ a \perp b \\ (\alpha) \perp b \end{cases} \Rightarrow a \parallel (\alpha).$$



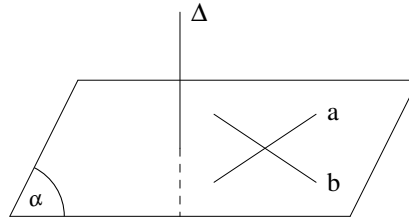
Một trong hai cách thường dùng:

- ① Chứng minh Δ vuông góc với hai đường thẳng a, b cắt nhau thuộc (α) .



Tóm tắt:

$$\begin{cases} a \text{ cắt } b \\ \Delta \perp a \\ \Delta \perp b \end{cases} \Rightarrow \Delta \perp (\alpha)$$

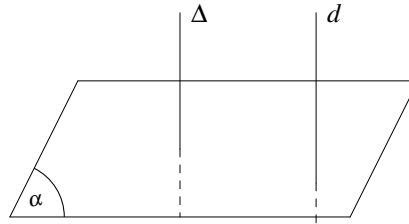


- ② Chứng minh Δ song song với đường thẳng d , trong đó d vuông góc với (α) .



Tóm tắt:

$$\begin{cases} \Delta \parallel d \\ d \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow \Delta \perp (\alpha)$$



Khi giải toán, ta chú ý đến các "quan hệ" vuông góc thường gặp sau:

- ① Đường trung tuyến trong tam giác cân (hạ từ đỉnh cân), trong tam giác đều thì vuông góc với cạnh đáy.
- ② Đường chéo hình thoi, đường chéo hình vuông thì vuông góc nhau.
- ③ Xét trong tam giác, ta có thể kiểm tra quan hệ vuông góc của hai cạnh bằng cách thử định lý Pytago.
- ④ Trong không gian, khi đề bài cho giả thiết " SA vuông với đáy", ta có thể suy ra SA vuông với các đường nằm trong mặt đáy.

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và các cạnh bên bằng nhau. Gọi I là giao điểm của AC và BD . Chứng minh

a) $SI \perp (ABCD)$.

b) $AC \perp (SBD)$.

c) $BD \perp (SAC)$.

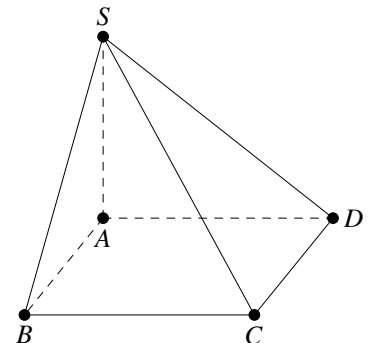
Ví dụ 2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O ; SA vuông góc với $(ABCD)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SD . Chứng minh

a) $BC \perp (SAB)$; $CD \perp (SAD)$.

b) $AH \perp (SBC)$; $AK \perp (SCD)$.

c) $SC \perp (AHK)$.

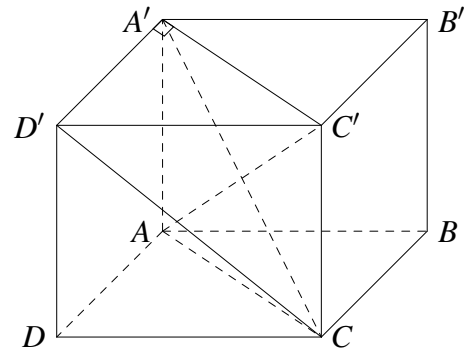


Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC và DBC là các tam giác đều cạnh a , $AD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi I là trung điểm BC . Chứng minh rằng $AI \perp (BCD)$.

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ với đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$, $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm BC, SI . Chứng minh rằng $AK \perp (SBC)$.

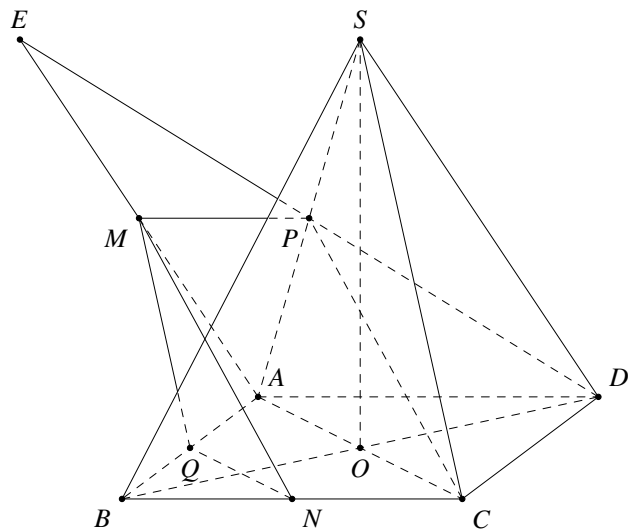
Ví dụ 5.

Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, các cạnh bên vuông góc với mặt đáy. $\triangle ACD$ vuông tại A , $AC = AA'$. Chứng minh rằng $AC' \perp (A'D'C)$.



Ví dụ 6.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi E là điểm đối xứng của điểm D qua trung điểm P của SA . Gọi M, N, Q lần lượt là trung điểm của AE, BC, AB . Chứng minh $BD \perp (MNQ)$.



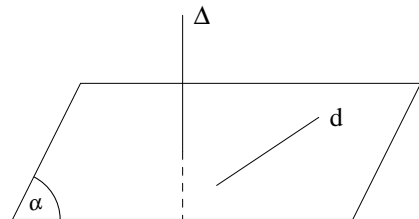
DT

2

Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Chứng minh đường thẳng Δ vuông góc với d , ta có thể chứng minh Δ vuông góc với mặt phẳng (α) chứa d , nghĩa là

$$\begin{cases} \Delta \perp (\alpha) \\ d \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow \Delta \perp d.$$



Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$ và $\widehat{SAC} = \widehat{SAB}$. Gọi M là trung điểm BC . Chứng minh $BC \perp SA$.

Ví dụ 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc $(ABCD)$.

- Chứng minh các mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông.
- Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SD . Chứng minh $AH \perp SC$ và $BH \perp SD$.

C // BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- 1 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng $2a$, $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{3}$.
 - a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$. Tính SO theo a .
 - b) Chứng minh rằng $AC \perp SD$.
 - c) Gọi I, K lần lượt là trung điểm của SB và SD . Chứng minh rằng $SC \perp IK$.
- 2 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , SA vuông góc với đáy. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên SB, SC, SD .
 - a) Chứng minh rằng $BC \perp (SAB)$, $CD \perp (SAD)$.
 - b) Chứng minh rằng (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn BD .
 - c) Chứng minh rằng AH, AK cùng vuông góc với SC . Từ đó suy ra ba đường thẳng AH, AI, AK cùng chứa trong một mặt phẳng.
 - d) Chứng minh rằng (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn HK . Từ đó suy ra $HK \perp AI$.
- 3 Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Mặt bên SAB là tam giác đều, SCD là tam giác vuông cân đỉnh S . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD .
 - a) Chứng minh $SM \perp (SCD)$, $SD \perp MC$.
 - b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên MN . Chứng minh $SH \perp BN$. Tính SH .
- 4 Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , cạnh bên bằng $2a$. Biết hình chiếu của A' lên (ABC) là trung điểm H của AB . Gọi H' là trung điểm của $A'B'$, M là điểm thuộc cạnh $B'C'$ sao cho $B'C' = 4B'M$.
 - a) Chứng minh $B'C' \perp (BMH')$.
 - b) Tứ giác $CHH'C'$ là hình gì? Tại sao? Tính CH' .
- 5 Cho hình tròn tâm O , đường kính AB nằm trong mặt phẳng (P) . Trên đường vuông góc với (P) tại A lấy điểm S , trên đường tròn (O) lấy điểm C , kẻ AI vuông góc SC và AK vuông góc SB .
 - a) Chứng minh rằng các mặt bên tứ diện $SABC$ là các tam giác vuông.
 - b) Chứng minh $AI \perp IK$ và $IK \perp SB$.
- 6 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Gọi H là trung điểm của cạnh AB và $SH \perp (ABCD)$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD . Chứng minh
 - a) $AC \perp (SHK)$.
 - b) $CK \perp SD$.
- 7 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B ; $AD = 2a$, $AB = BC = a$; SA vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SD, SA . Chứng minh rằng
 - a) Tam giác SCD vuông.
 - b) Tứ giác $BCMN$ là hình chữ nhật.
- 8 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $BB', CD, A'D'$. Chứng minh $MP \perp C'N$.

9 Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên CC' vuông góc với đáy và $CC' = a$.

- Gọi I là trung điểm của BC . Chứng minh $AI \perp BC'$.
- Gọi M là trung điểm của BB' . Chứng minh $BC' \perp AM$.
- Gọi K là điểm trên đoạn $A'B'$ sao cho $B'K = \frac{a}{4}$ và J là trung điểm của $B'C'$. Chứng minh $AM \perp MK$ và $AM \perp KJ$.

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Qua điểm O cho trước, có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với đường thẳng Δ cho trước?

- A. 3. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 2. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P) , trong đó $a \perp (P)$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề dưới đây.

- A. Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$. B. Nếu $b \perp (P)$ thì $a \parallel b$.
C. Nếu $a \perp b$ thì $b \parallel (P)$. D. Nếu $b \subset (P)$ thì $b \perp a$.

Câu 3. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.
- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.
- Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau.
- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song.

Câu 4. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- Đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó.
- Có vô số mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với đường thẳng cho trước.
- Có vô số đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với mặt phẳng cho trước.
- Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng ấy.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O . Biết rằng $SA = SC, SB = SD$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $CD \perp (SBD)$. B. $AB \perp (SAC)$. C. $SO \perp (ABCD)$. D. $CD \perp AC$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $AB \perp (SAD)$. B. $AB \perp (SAC)$. C. $AB \perp (SCD)$. D. $AB \perp (SBC)$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ vuông tại A có cạnh $SB \perp (ABC)$. AC vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

- A. (SBC) . B. (SAB) . C. (SBC) . D. (ABC) .

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là hình chiếu của A lên SD . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $AM \perp (SBC)$. B. $AM \perp (SCD)$. C. $AM \perp CD$. D. $AM \perp SD$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Mặt phẳng nào dưới đây vuông góc với mặt đường thẳng BD ?

- A. (SAC) . B. (SCD) . C. (SAB) . D. (SBD) .

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác SAB . Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

- A. $AH \perp BC$. B. $AH \perp AC$. C. $AH \perp SC$. D. $SA \perp BC$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại C . Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và SB . Khẳng định nào dưới đây **sai**?

- A. $CH \perp AK$. B. $AK \perp SB$. C. $CH \perp SB$. D. $CH \perp SA$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{BSC} = 120^\circ$, $\widehat{CSA} = 60^\circ$, $\widehat{ASB} = 90^\circ$ và $SA = SB = SC$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) , khi đó

- A. I là trung điểm của AC . B. I là trọng tâm của tam giác ABC .
C. I là trung điểm của AB . D. I là trung điểm của BC .

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H là trực tâm của tam giác BCD và AH vuông góc với mặt phẳng đáy. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $AB \perp CD$. B. $AB = CD$. C. $AC = BD$. D. $CD \perp BD$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi AE, AF lần lượt là đường cao của tam giác SAB và tam giác SAD . Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $SC \perp (AEF)$. B. $SC \perp (AED)$. C. $SC \perp (AFB)$. D. $SC \perp (AEC)$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , có $AD = CD = a$, $AB = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$, E là trung điểm của AB . Chỉ ra mệnh đề **sai** trong các mệnh đề dưới đây.

- A. $CE \perp (SAB)$. B. $CE \perp (SDC)$.
C. $CB \perp (SAC)$. D. Tam giác SDC vuông tại D .

—HẾT—

§3. PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

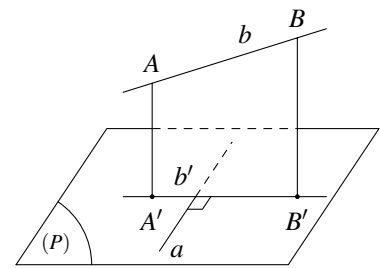
1 Phép chiếu vuông góc

Phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương Δ vuông góc với (P) được gọi là *phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P)* .

- Vì phép chiếu vuông góc lên một mặt phẳng là một trường hợp đặc biệt của phép chiếu song song nên nó có mọi tính chất của phép chiếu song song.
- Phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P) còn được gọi đơn giản là phép chiếu lên mặt phẳng (P) . Hình chiếu vuông góc $\mathcal{H}'$ của hình $\mathcal{H}$ trên mặt phẳng (P) còn được gọi là *hình chiếu* của $\mathcal{H}$ trên mặt phẳng (P) .

2 Định lý ba đường vuông góc

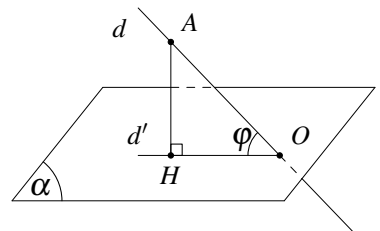
Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và b là đường thẳng không thuộc (α) đồng thời không vuông góc với (α) . Gọi b' là hình chiếu vuông góc của b trên (α) . Khi đó a vuông góc với b khi và chỉ khi a vuông góc với b' .



3 Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α) .

- Trường hợp $d \perp (\alpha)$ thì góc giữa đường thẳng d và (α) bằng 90° .
- Trường hợp d không vuông góc với (α) thì góc giữa d và (α) bằng góc giữa d và hình chiếu d' của nó trên (α) .



! Nếu φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) thì ta luôn có $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.

B

PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Xác định hình chiếu của điểm (đường) lên mặt phẳng (P)

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$. Gọi O là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) .

- Chứng minh rằng O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- Xác định hình chiếu của đường thẳng SA trên mặt phẳng (ABC) .
- Chứng minh rằng nếu $AO \perp BC$ thì $SA \perp BC$.
- Xác định hình chiếu của các tam giác SBC , SCA , SAB trên mặt phẳng (ABC) .

DT

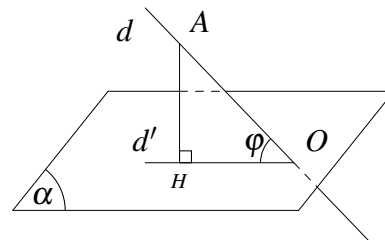
2

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) cắt nhau.

- ⚙ Nếu $d \perp (P)$ thì $(d, (P)) = 90^\circ$.
- ⚙ Nếu d không vuông (P) thì để xác định góc giữa d và (P) , ta thường làm như sau
 - Xác định giao điểm O của d và (P) .
 - Lấy một điểm A trên d (A khác O). Xác định hình chiếu vuông góc (vuông góc) H của A lên (P) . Lúc đó $(d, (P)) = (d, d') = \widehat{AOH}$.

⚠ $0^\circ \leq (d, (P)) \leq 90^\circ$.



Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a , $SA = a\sqrt{6}$ và SA vuông góc $(ABCD)$. Hãy xác định các góc giữa

- SB và $(ABCD)$.
- SC và $(ABCD)$.
- SO và $(ABCD)$.
- SC và (SAB) .
- SB và (SAC) .
- BD và (SAC) .

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA = 2a$ và vuông góc với đáy.

- Tính góc giữa SC với (ABC) .
- Tính góc giữa SC và mặt phẳng (SAB) .

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , tâm O , SO vuông góc $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, BC . Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính góc giữa MN và (SBD) .

Ví dụ 5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $AA' = a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ trùng với trung điểm của $B'D'$. Tính góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

Ví dụ 6. Một chiếc cột cao 3 m được dựng vuông góc với mặt đất phẳng. Dưới ánh nắng mặt trời, bóng của cột trên mặt đất dài 5 m. Tính góc giữa đường thẳng chứa tia nắng mặt trời và mặt đất (tính gần đúng theo đơn vị độ, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

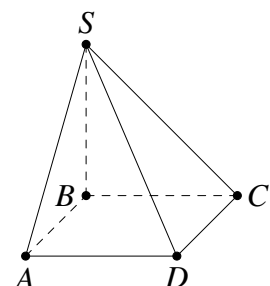
C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- 1 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{2}$.
 - a) Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.
 - b) Tính tang góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) .
- 2 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA = 2a$ và SA vuông góc với đáy. Tính góc giữa
 - a) SC và (ABC) .
 - b) SC và (SAB) .
- 3 Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng a . Tính cosin của góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) .
- 4 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $BC = a$, $SA = SB = SC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa SA và (ABC) .
- 5 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy. Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) .
- 6 Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của B' xuống mặt đáy trùng với giao điểm hai đường chéo của đáy và cạnh bên $BB' = a$. Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy.
- 7 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và các cạnh đều bằng a .
 - a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.
 - b) Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) .
 - c) Gọi M là trung điểm của cạnh SC và α là góc giữa đường thẳng OM và mặt phẳng (SBC) . Tính $\sin \alpha$.
- 8 Một con diều được thả với dây căng, tạo với mặt đất một góc 60° . Đoạn dây diều (từ đầu ở mặt đất đến đầu ở con diều) dài 10m. Hỏi hình chiếu vuông góc trên mặt đất của con diều cách đầu dây diều trên mặt đất bao nhiêu cen-ti-mét (lấy giá trị nguyên gần đúng)?

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SB \perp (ABCD)$ (xem hình bên), góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc nào sau đây?

- A. $\widehat{SDB}$. B. $\widehat{DSB}$. C. $\widehat{SDC}$. D. $\widehat{SDA}$.



Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với $(ABCD)$. Góc giữa cạnh SC và mặt (SAD) là góc nào sau đây?

- A. $\widehat{SCD}$. B. $\widehat{CSA}$. C. $\widehat{CSD}$. D. $\widehat{SCA}$.

Câu 3. Cho hình thoi $ABCD$ có tâm O . Lấy điểm S không thuộc $(ABCD)$ sao cho $SO \perp (ABCD)$. Góc giữa SC và $(ABCD)$ là.

- A. $\widehat{SCO}$. B. $\widehat{ACB}$. C. $\widehat{SCD}$. D. $\widehat{SCB}$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

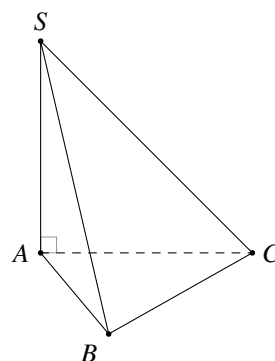
- A. 45° . B. 60° . C. 90° . D. 30° .

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SB và mặt đáy là góc giữa hai đường thẳng nào dưới đây?

- A. SB và BC . B. SB và SC . C. SB và AB . D. SA và SB .

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa cạnh bên SB và mặt đáy bằng

- A. 90° . B. 60° . C. 45° . D. 30° .



Câu 7. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng

- A. 60° . B. 45° . C. 30° . D. 90° .

Câu 8. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính góc φ của đường thẳng AA' với mặt phẳng $(ABCD)$.

- A. $\varphi = 45^\circ$. B. $\varphi = 90^\circ$. C. $\varphi = 60^\circ$. D. $\varphi = 0^\circ$.

Câu 9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

- A. 30° . B. 90° . C. 60° . D. 45° .

Câu 10. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi φ là góc giữa đường thẳng AC' với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính $\cos \varphi$.

- A. $\cos \varphi = \frac{1}{3}$. B. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$. C. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{6}}{2}$. D. $\cos \varphi = \frac{1}{2}$.

Câu 11. Cho hình chóp tứ giác đều $SABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi φ là góc giữa cạnh bên với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính $\cos \varphi$.

- A. $\cos \varphi = \sqrt{2}$. B. $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$. C. $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$. D. $\cos \varphi = \frac{1}{2}$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng a , SO vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA và BC . Tính góc giữa đường thẳng MN với mặt phẳng $(ABCD)$, biết $MN = \frac{a\sqrt{10}}{2}$.

- A. 45° . B. 60° . C. 90° . D. 30° .

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc H của S trên mặt đáy trùng với trọng tâm tam giác ABC và $SH = \frac{a}{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC và SC . Gọi α là góc giữa đường thẳng MN với mặt đáy ($ABCD$). Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\tan \alpha = \frac{3}{4}$. B. $\tan \alpha = 1$. C. $\tan \alpha = \frac{2}{3}$. D. $\tan \alpha = \frac{4}{3}$.

Câu 14. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , cạnh bằng $2a$. Trên đường thẳng qua O và vuông góc với mặt phẳng ($ABCD$) lấy điểm S . Biết góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng ($ABCD$) bằng 45° . Độ dài cạnh SO bằng

- A. $SO = a\sqrt{3}$. B. $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $SO = a\sqrt{2}$. D. $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc giữa SC và mặt đáy ($ABCD$) bằng 45° . Gọi φ là góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC). Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$. B. $\varphi = 60^\circ$. C. $\tan \varphi = \sqrt{5}$. D. $\varphi = 45^\circ$.

Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$ đều. Gọi α là góc giữa AB và mặt phẳng (BCD). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- A. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\cos \alpha = 0$. C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$. D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và $B, AB = BC = a, AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy. Tính góc giữa đường thẳng SC với mặt phẳng (SAD).

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 18. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh $a, \widehat{BAD} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của B' xuống mặt đáy trùng với giao điểm hai đường chéo của đáy và cạnh bên $BB' = a$. Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy.

- A. 30° . B. 90° . C. 45° . D. 60° .

Câu 19. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2\sqrt{2}, AA' = 4$. Tính góc giữa đường thẳng $A'C$ với mặt phẳng ($AA'B'B$).

- A. 90° . B. 45° . C. 30° . D. 60° .

Câu 20. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi α là góc giữa AC' và mặt phẳng ($A'BCD'$). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- A. $\alpha = 30^\circ$. B. $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$. C. $\alpha = 45^\circ$. D. $\tan \alpha = \sqrt{2}$.

—HẾT—

§4. HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

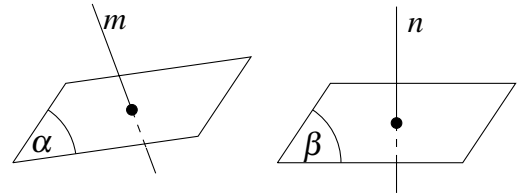
A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 Định nghĩa góc giữa hai mặt phẳng

⚙ **Định nghĩa:**

- Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.
- Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng thì

$$0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$$



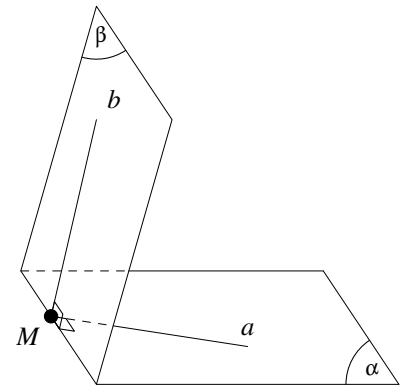
⚙ **Chú ý:**

- Hai mặt phẳng song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng bằng 0° .
- Muốn xác định góc giữa hai mặt phẳng, ta tìm hai đường thẳng lần lượt vuông góc hai mặt phẳng. Khi đó, việc xác định góc giữa hai mặt phẳng được chuyển về bài toán xác định góc giữa hai đường thẳng (đã xét ở **Bài 2. Hai đường thẳng vuông góc**).

2 Cách xác định góc của hai mặt phẳng cắt nhau

Cho hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau. Muốn xác định góc giữa chúng, ta thực hiện theo các bước sau:

- Tìm giao tuyến c của (α) và (β) .
- Tìm hai đường thẳng a, b lần lượt thuộc hai mặt phẳng và cùng vuông góc với c tại một điểm.
- Góc giữa (α) và (β) là góc giữa a và b .



3 Hai mặt phẳng vuông góc

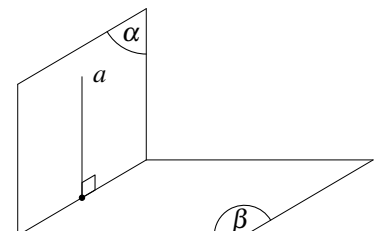
⚙ **Định nghĩa:** Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa hai mặt phẳng đó là góc vuông.

⚙ **Cách chứng minh:** Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc với nhau là mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.



Tóm tắt:

$$\begin{cases} a \subset (\alpha) \\ a \perp (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$$



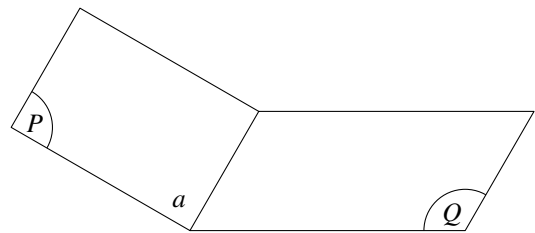
Các tính chất:

- ① Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và *vuông góc với giao tuyến* thì vuông góc với mặt phẳng kia.
- ② Cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau. Nếu từ một điểm thuộc mặt phẳng (α) ta dựng một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (β) thì đường thẳng này nằm trong mặt phẳng (α) .
- ③ Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với một mặt phẳng thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng đó.

4 Góc nhị diện

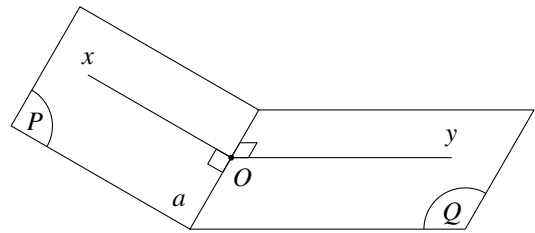
Định nghĩa:

Hình gồm hai nửa mặt phẳng (P) , (Q) có chung bờ a được gọi là một **góc nhị diện**, kí hiệu là $[P, a, Q]$. Đường thẳng a và các nửa mặt phẳng (P) , (Q) tương ứng được gọi là các mặt phẳng của góc nhị diện đó.



Góc phẳng nhị diện:

Từ một điểm O bất kì thuộc cạnh a của góc nhị diện $[P, a, Q]$, vẽ các tia Ox , Oy tương ứng thuộc (P) , (Q) và vuông góc với a . Góc xOy được gọi là một **góc phẳng của góc nhị diện** $[P, a, Q]$ (gọi tắt là **góc phẳng nhị diện**). Số đo của góc xOy không phụ thuộc vào vị trí của O trên a , được gọi là số đo của góc nhị diện $[P, a, Q]$.



Chú ý:

- ① Số đo của góc phẳng nhị diện được gọi là số đo góc nhị diện và có thể nhận từ 0° đến 180° . Góc nhị diện được gọi là vuông, nhọn, tù nếu nó có số đo tương ứng bằng, nhỏ hơn, lớn hơn 90° .
- ② Đối với hai điểm M , N không thuộc đường thẳng a , ta kí hiệu $[M, a, N]$ là góc nhị diện có cạnh a và các mặt phẳng tương ứng chứa M , N .
- ③ Hai mặt phẳng cắt nhau tạo thành bốn góc nhị diện. Nếu một trong bốn góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông thì các góc nhị diện còn lại cũng là góc nhị diện vuông.

5 Một số hình lăng trụ đặc biệt

 **Hình lăng trụ đứng:** là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với đáy. Độ dài cạnh bên được gọi là chiều cao của hình lăng trụ đứng.

- Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy.
- Hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... được gọi là hình lăng trụ đứng tam giác, hình lăng trụ đứng tứ giác, hình lăng trụ đứng ngũ giác, ...

⚙ **Hình lăng trụ đều:** là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

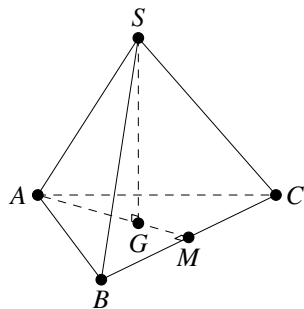
- Các mặt bên của hình lăng trụ đều là những hình chữ nhật bằng nhau và vuông góc với mặt đáy.
- Ta có các loại lăng trụ đều như hình lăng trụ tam giác đều, hình lăng trụ tứ giác đều, hình lăng trụ ngũ giác đều ...

⚙ **Hình hộp đứng:** là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.

- *Đặc biệt 1:* Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật. Tất cả 6 mặt của hình hộp chữ nhật đều là hình chữ nhật.
- *Đặc biệt 2:* Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau. Tất cả 6 mặt của hình lập phương đều là hình vuông.

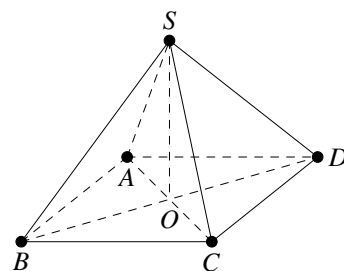
6 Hình chóp đều. Hình chóp cắt đều

⚙ **Hình chóp đều:** Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu nó có đáy là một đa giác đều có chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy.



* Chóp tam giác đều

* $SG \perp (ABC)$

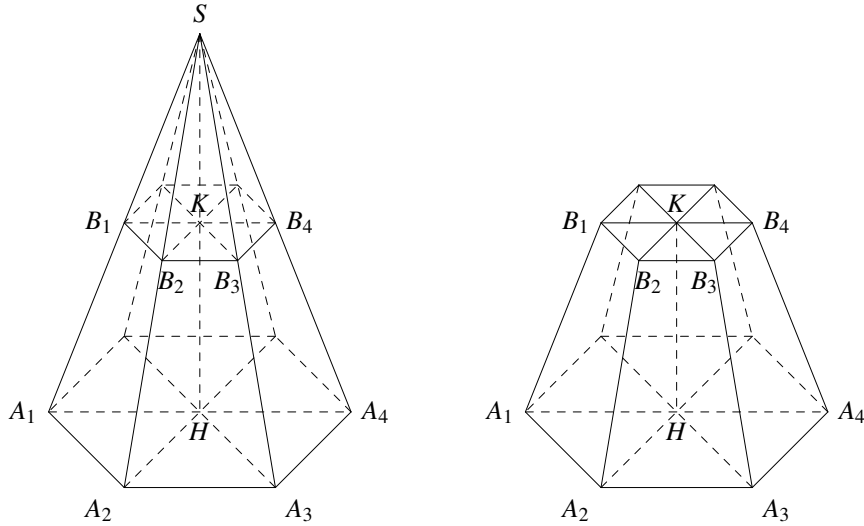


* Chóp tứ giác đều

* $SO \perp (ABCD)$

Các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau. Các mặt bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau; Các cạnh bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.

⚙ **Hình chóp cắt đều:**

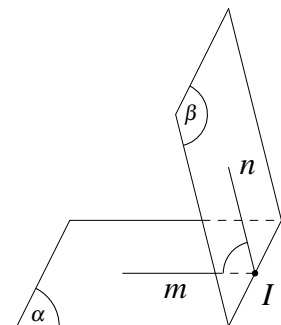


- Hình gồm các đa giác đều $A_1A_2 \dots A_n$, $B_1B_2 \dots B_n$ và các hình thang cân $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, $\dots$, $A_nA_1B_1B_n$ được tạo thành như trên được gọi là một *hình chóp cắt đều* (nói đơn giản là hình chóp cắt được tạo thành từ hình chóp đều $S.A_1A_2 \dots A_n$ sau khi cắt đi chóp đều $S.B_1B_2 \dots B_n$), kí hiệu là $A_1A_2 \dots A_n.B_1B_2 \dots B_n$.
- Các đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ và $B_1B_2 \dots B_n$ được gọi là hai *mặt đáy*, các hình thang $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, $\dots$, $A_nA_1B_1B_n$ được gọi là các *mặt bên* của hình chóp cắt. Các đoạn thẳng A_1B_1 , A_2B_2 , $\dots$, A_nB_n được gọi là các *cạnh bên*; các cạnh của mặt đáy được gọi là các *cạnh đáy* của hình chóp cắt.
- Đoạn thẳng HK nối hai tâm của đáy được gọi là *đường cao* của hình chóp cắt đều. Độ dài của đường cao được gọi là *chiều cao* của hình chóp cắt.

B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Xác định góc giữa hai mặt phẳng

- Cách 1: Dùng định nghĩa:** Góc giữa (α) và (β) bằng góc giữa hai đường thẳng a và b lần lượt vuông góc với chúng.
- Cách 2: Dựng hai đường trong hai mặt lần lượt vuông góc với giao tuyến.** Các bước thực hiện:
 - Dựng giao tuyến $c = (\alpha) \cap (\beta)$.
 - Dựng $m \perp c$ và $n \perp c$ tại I , với $m \in (\alpha)$ và $n \in (\beta)$.
 - Góc cần tìm là $(m; n)$.



① Từ chân đường cao H , kẻ $HI \perp BC$.

- Nếu ΔHBC cân tại H hoặc đều thì I là trung điểm của BC .
- Nếu ΔHAB vuông tại B (hoặc C) thì I trùng B (hoặc C).

a) (*SAC*) và (*SAD*).

b) (SAB) và (SAD) .

a) (SBC) và $(ABCD)$.

b) (SAD) và $(ABCD)$.

c) (SBD) và $(ABCD)$.

d) (SAB) và (SCD) .

a) Khi $SA = a$, hãy tính góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$, (SBD) với $(ABCD)$.

b) Đặt $x = SA$. Tìm x để góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng 60° .

Ví dụ 5. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$.

a) Tính góc giữa (SCD) với $(ABCD)$.

b) Tính góc giữa (SCD) với (SBC) .

DT

2

Tính số đo của góc nhị diện

a) $[B, SA, C];$

b) $[S, DA, B]$.

a) Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$.

b) Tính cosin của số đo góc nhị diện $[A', BD, C']$.

Ví dụ 9. Cánh cửa có dạng hình chữ nhật $BCMN$ và khung cửa có dạng hình chữ nhật $ABCD$, ở đó $AB = BN$. Góc mở cửa là góc nhị diện $[A, BC, N]$. Biết chiều rộng BN của cửa là 1,2 m. Khi góc mở cửa có số đo bằng 60° thì khoảng cách giữa A và N bằng bao nhiêu?

DT

3

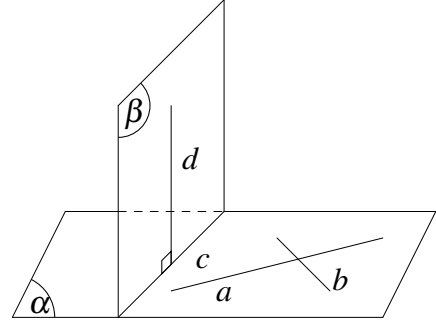
Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

✓ **Phương pháp:** Chứng minh mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

⚠ **Sơ đồ trình bày:**

$$\text{Ta có } \begin{cases} d \perp a \text{ (giải thích)} \\ d \perp b \text{ (giải thích)} \end{cases} \Rightarrow d \perp (\alpha).$$

Mà $d \subset (\beta)$ nên $(\beta) \perp (\alpha)$.



✓ **Lưu ý:**

Nếu dựng được góc giữa (α) và (β) . Khi đó, muốn chứng minh (α) vuông góc (β) , ta chỉ cần chứng minh góc đó bằng 90° .

Ví dụ 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$.

- Chứng minh $(SAB) \perp (SBC)$; $(SAC) \perp (SBD)$; $(SAD) \perp (SCD)$.
- Gọi M, N lần lượt là trung điểm SB, SD . Chứng minh $(AMN) \perp (SAC)$
- Gọi I là trung điểm AD và H là giao điểm của AC và BD . Chứng minh $(SHI) \perp (SAD)$
- Gọi BE, DF là 2 đường cao của ΔSBD . Chứng minh $(ACF) \perp (SBC)$; $(AEF) \perp (SAC)$

Ví dụ 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A . Gọi G là trọng tâm ΔABC , M là trung điểm BC và $SG \perp (ABC)$. Chứng minh $(SAM) \perp (ABC)$

Ví dụ 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , cạnh bằng a , góc BAD bằng 60° . Kẻ OH vuông góc với SC tại H . Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Chứng minh rằng

- $(SBD) \perp (SAC)$;
- $(SBC) \perp (BDH)$;
- $(SBC) \perp (SCD)$;

Ví dụ 13. Cho hình vuông $ABCD$ và tam giác đều SAB cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc nhau. Gọi I và F lần lượt là trung điểm AB và AD . Chứng minh rằng $(SID) \perp (SFC)$.

DT

4

Tổng hợp tính toán

Ví dụ 14. Cho hình lăng trụ đứng lục giác đều có cạnh đáy bằng a , cạnh bên $2a$.

- Tính diện tích xung quanh của lăng trụ.
- Tính diện tích toàn phần của lăng trụ.

Ví dụ 15. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a và có $\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 60^\circ$. Tính tổng diện tích các mặt của hình hộp.

Ví dụ 16. Cho hình chóp cắt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$, đáy lớn $ABCD$ có cạnh bằng $2a$, đáy nhỏ $A'B'C'D'$ có cạnh bằng a và cạnh bên bằng $2a$. Tính đường cao của hình chóp cắt và đường cao của mặt bên.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A , $SA \perp (ABC)$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của B trên các đường thẳng SA và SC . Chứng minh rằng:
 - $(SAC) \perp (SAB)$.
 - $(SAC) \perp (BHK)$.
- Cho tứ diện $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B và SA vuông góc với (ABC) .
 - Chứng minh (SBC) vuông góc với (SAB) .
 - Gọi AH và AK lần lượt là các đường cao của hai tam giác SAB và SAC . Chứng minh (SBC) vuông góc với (AHK) .
- Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O với $AB = a$, $AC = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$, $SO \perp (ABCD)$, $SB = a$. Chứng minh rằng $(SAB) \perp (SAD)$.
- Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình thoi tâm O . Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy $(ABCD)$.
 - Chứng minh $SO \perp (ABCD)$
 - Chứng minh $(SAC) \perp (SBD)$
 - Kẻ $OK \perp BC$. Chứng minh $BC \perp (SOK)$.
 - Chứng minh $(SBC) \perp (SOK)$
 - Kẻ $OH \perp SK$. Chứng minh $OH \perp (SBC)$.
- Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , $(SAB) \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính cosin của số đo góc nhị diện $[S, BD, C]$ và góc nhị diện $[B, SC, D]$.
- Một máy nước nóng sử dụng năng lượng mặt trời như ở Hình bên dưới có các ống hấp nhiệt chân không dài 1,8 m được đặt trên sân thượng của một toà nhà. Khi tia nắng mặt trời chiếu vuông góc với sân thượng, bóng nắng của các ống hấp nhiệt chân không trên mặt sân dài 1,2 m. Các ống hấp nhiệt chân không đó tạo với mặt sân thượng một góc bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?
 
- Cánh cửa có dạng hình chữ nhật $BCMN$ và khung cửa có dạng hình chữ nhật $ABCD$, ở đó $AB = BN$. Góc mở cửa là góc nhị diện $[A, BC, N]$. Biết chiều rộng BN của cửa là 1,2 m. Khi góc mở cửa có số đo bằng 60° thì khoảng cách giữa A và N bằng bao nhiêu?
- Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông, AC cắt BD tại O , $SO \perp (ABCD)$. Tất cả các cạnh của hình chóp bằng a .
 - Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) .
 - Gọi α là số đo của góc nhị diện $[S, CD, A]$. Tính $\cos \alpha$.

c) Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) , β là số đo của góc nhị diện $[A, d, D]$. Tính $\cos \beta$.

d) (*) Gọi γ là số đo của góc nhị diện $[B, SC, D]$. Tính $\cos \gamma$.

9 Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính số đo góc giữa mặt bên và mặt đáy.

10 Cho hình chóp đều $S.ABC$, đáy có cạnh bằng a , cạnh bên bằng b .

a) Tính sin của góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy.

b) Tính tang của góc giữa mặt phẳng chứa mặt đáy và mặt phẳng chứa mặt bên.

11 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi H, M lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và AB .

a) Tính cosin của góc giữa đường thẳng SC và mặt đáy $(ABCD)$.

b) Chứng minh rằng $(SMD) \perp (SHC)$.

12 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ). Tính sin của góc giữa hai mặt phẳng (BDA') và $(ABCD)$.

13 Cho hình chóp cụt đều $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng h , các đáy là các tam giác đều $ABC, A'B'C'$ có cạnh tương ứng là a, a' ($a > a'$). Tính độ dài các cạnh bên của hình chóp cụt.

14 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a .

a) Tính độ dài đường chéo của hình lập phương.

b) Chứng minh rằng $(ACC'A') \perp (BDD'B')$.

c) Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Chứng minh rằng $\widehat{COC'}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[C, BD, C']$. Tính (gần đúng) số đo của các góc nhị diện $[C, BD, C], [A, BD, C']$.

15 Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Chứng minh rằng $(BDD'B') \perp (ABCD)$.

b) Xác định hình chiếu của AC' trên mặt phẳng $(ABCD)$.

c) Cho $AB = a, BC = b, CC' = c$. Tính AC' .

16 Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và $B, AA' = 2a, AD = 2a, AB = BC = a$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng AC' .

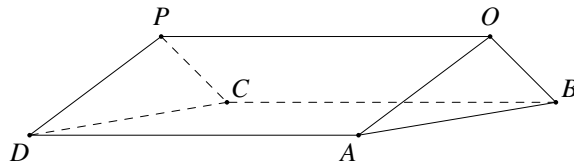
b) Tính tổng diện tích các mặt của hình lăng trụ.

17 Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi. Cho biết $AB = BD = a, A'C = 2a$.

a) Tính độ dài AA' .

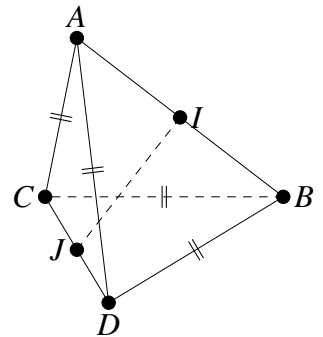
b) Tính tổng diện tích các mặt của hình hộp.

- 18 Cho hình chóp cắt tứ giác đều có cạnh đáy lớn bằng $2a$, cạnh đáy nhỏ và đường nối tâm hai đáy bằng a . Tính độ dài cạnh bên và đường cao của mỗi mặt bên.
- 19 Hai mái nhà trong hình bên là hai hình chữ nhật ($AOPD$ và $BOPC$). Giả sử $AB = 4,8$ m, $OA = 2,8$ m, $OB = 4$ m.



- a) Tính (gần đúng) số đo của góc nhị diện tạo bởi hai nửa mặt phẳng tương ứng chứa hai mái nhà.
- b) Chứng minh rằng mặt phẳng (OAB) vuông góc với mặt đất phẳng. Lưu ý: Đường giao giữa hai mái (đường nóc) song song với mặt đất.
- c) Điểm A ở độ cao (so với mặt đất) hơn điểm B là $0,5$ m. Tính (gần đúng) góc giữa mái nhà (chứa OB) so với mặt đất.
- 20 Độ dốc của mái nhà, mặt sân, con đường thẳng là tang của góc tạo bởi mái nhà mặt sân, con đường thẳng đó với mặt phẳng nằm ngang. Độ dốc của đường thẳng dành cho người khuyết tật được quy định là không quá $\frac{1}{12}$. Hỏi theo đó, góc tạo bởi đường dành cho người khuyết tật và mặt phẳng nằm ngang không vượt quá bao nhiêu độ? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

- 21 Cho hai tam giác ACD, BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD .



- a) Tính AB, IJ theo a và x .
- b) Tìm x để hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc nhau.

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong khẳng định sau về lăng trụ đều, khẳng định nào **sai**?

- A. Đáy là đa giác đều.
 B. Các mặt bên là những hình chữ nhật nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.
 C. Các mặt bên là những hình vuông.
 D. Các cạnh bên là những đường cao.

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Nếu hình hộp có bốn đường chéo bằng nhau thì nó là hình lập phương.
 B. Nếu hình hộp có sáu mặt bằng nhau thì nó là hình lập phương.
 C. Nếu hình hộp có hai mặt là hình vuông thì nó là hình lập phương.
 D. Nếu hình hộp có ba mặt chung một đỉnh là hình vuông thì nó là hình lập phương.

Câu 3. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hình lăng trụ đứng có đáy là một đa giác đều là hình lăng trụ đều.

- B. Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ đều.
- C. Hình lăng trụ tứ giác đều là hình lập phương.
- D. Hình lăng trụ có đáy là một đa giác đều là hình lăng trụ đều.

Câu 4. Khẳng định nào sau đây **sai** khi nói về hình chóp tứ giác đều?

- A. Các cạnh bên bằng nhau.
- B. Các mặt bên là những tam giác đều.
- C. Các cạnh đáy bằng nhau.
- D. Mặt đáy là hình vuông.

Câu 5. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , chiều cao của lăng trụ là cạnh

- A. BB' .
- B. AC' .
- C. AB .
- D. AB' .

Câu 6. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.
- B. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.
- C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau.
- D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Câu 7. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.
- B. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
- C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Câu 8. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì

- A. Song song với nhau.
- B. Trùng nhau.
- C. Không song song với nhau.
- D. Hoặc song song với nhau hoặc cắt nhau theo giao tuyến vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

Câu 9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ bằng bao nhiêu?

- A. 60° .
- B. 0° .
- C. 45° .
- D. 90° .

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$, gọi I là trung điểm BC . Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc nào sau đây?

- A. $\widehat{SCA}$.
- B. $\widehat{SBA}$.
- C. $\widehat{SIA}$.
- D. $\widehat{SCB}$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của AC . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $(SBC) \perp (SAC)$.
- B. $(SBM) \perp (SAC)$.
- C. $BM \perp AC$.
- D. $(SAB) \perp (SBC)$.

Câu 12. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có O là giao điểm của AC và BD , cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $(SAC) \perp (ABCD)$.
- B. $(SBC) \perp (SAC)$.
- C. $(SAC) \perp (SCD)$.
- D. $(SAD) \perp (SBD)$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm cạnh AB . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. $(SBC) \perp (SAB)$.
- B. $(SAB) \perp (ABCD)$.
- C. $(SBD) \perp (ABCD)$.
- D. $(SHC) \perp (ABCD)$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi I là hình chiếu của A trên BC , α là góc giữa đường thẳng SI và mặt phẳng (ABC) , β là số đo của góc nhị diện $[S, BC, A]$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\alpha = 90^\circ - \beta$.

B. $\alpha = 180^\circ - \beta$.

C. $\alpha = 90^\circ + \beta$.

D. $\alpha = \beta$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB \perp BC$, $SA = AB = 3a$, $BC = 4a$. Gọi α là số đo của các góc nhị diện $[A, BC, S]$. Tính $\cos \alpha$.

A. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.

B. $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.

C. $\cos \alpha = \frac{1}{5}$.

D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB \perp BC$, $SA = AB = 3a$, $BC = 4a$. Gọi α là số đo của các góc nhị diện $[B, SA, C]$. Tính $\cos \alpha$.

A. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.

B. $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.

C. $\cos \alpha = \frac{1}{5}$.

D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}$.

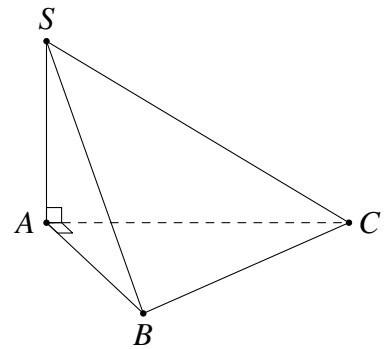
Câu 17. Hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy và $SA = \frac{a}{2}$, tam giác ABC vuông tại A , $AC = a\sqrt{3}$, $AB = a$. Tính góc giữa (SBC) với (ABC) .

A. 45° .

B. 30° .

C. 90° .

D. 60° .



Câu 18. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}$, $OA = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) .

A. 45° .

B. 90° .

C. 60° .

D. 30° .

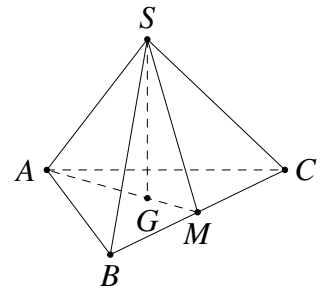
Câu 19. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $AB = a$, $SA = 2a$. Gọi φ là góc giữa mặt bên và mặt đáy. Tính $\cos \varphi$.

A. $\frac{\sqrt{5}}{15}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



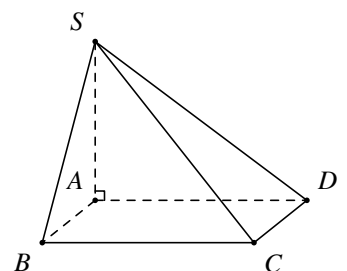
Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$, $SA = AB$. Góc giữa (SBC) và $(ABCD)$ có số đo bằng

A. 30° .

B. 60° .

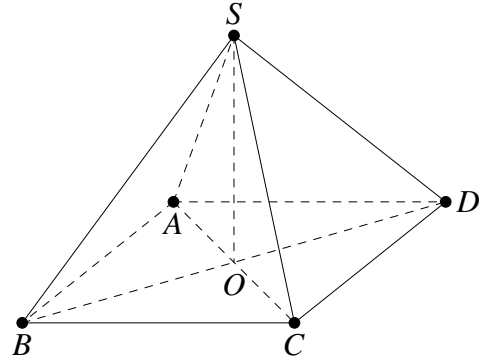
C. 90° .

D. 45° .



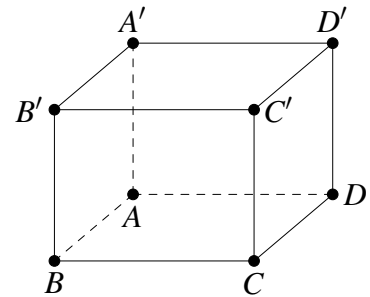
Câu 21. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\tan \varphi = \sqrt{2}$.
C. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\tan \varphi = \sqrt{6}$.



Câu 22. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi O' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và α là góc giữa hai mặt phẳng $(O'AB)$ và $(ABCD)$. Góc α thỏa mãn

- A. $\sin \alpha = \frac{1}{2}$. B. $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. C. $\tan \alpha = 2$. D. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.



Câu 23. Trong hình chóp tam giác đều có góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° , tang của góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $2\sqrt{3}$.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $AD = a$, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc α tạo bởi hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ có số đo bằng

- A. $\alpha = 90^\circ$. B. $\alpha = 30^\circ$. C. $\alpha = 45^\circ$. D. $\alpha = 60^\circ$.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên $SA = x$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) tạo với nhau một góc 60° .

- A. $x = \frac{3a}{2}$. B. $x = a$. C. $x = 2a$. D. $x = \frac{a}{2}$.

—HẾT—

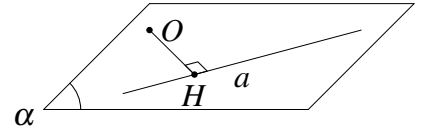
§5. KHOẢNG CÁCH

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cho điểm O và một đường thẳng a . Trong (O, a) gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên a . Khi đó

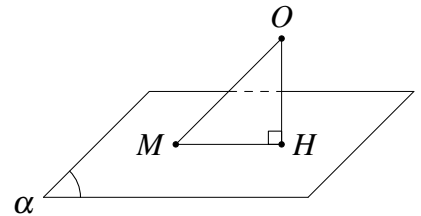
- Độ dài đoạn OH được gọi là khoảng cách từ điểm O đến a .
- Kí hiệu $d(O, a) = OH$.



2 Khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng

Cho mặt phẳng (α) và một điểm O , gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên mặt phẳng (α) . Khi đó

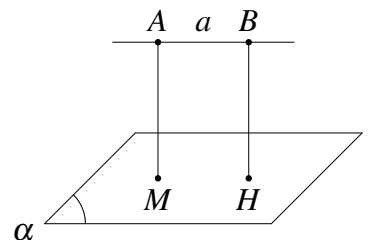
- Độ dài đoạn OH được gọi là khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α) . Kí hiệu $d(O, (\alpha)) = OH$.
- Ta luôn có $OH \leq OM, \forall M \in (\alpha)$.



3 Khoảng cách từ một đường thẳng tới một mặt phẳng song song

Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) . Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) là khoảng cách từ một điểm bất kì của a đến mặt phẳng (α) .

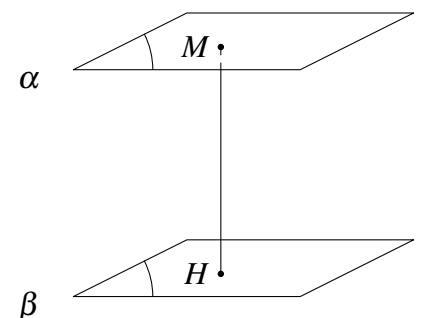
- Kí hiệu $d(a, (\alpha))$.
- Nhận xét: $d(a, (\alpha)) = d(A, (\alpha)) = d(B, (\alpha))$, với $A, B \in a$.



4 Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Cho hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau, khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia được gọi là khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β) .

- Kí hiệu $d((\alpha), (\beta))$.
- Nhận xét $d((\alpha), (\beta)) = d(M, (\beta))$, với $M \in (\alpha)$.

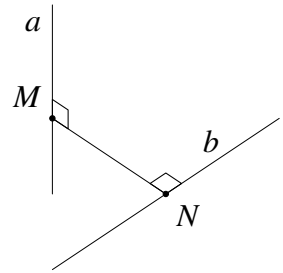


5 Đường thẳng vuông góc chung và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

☀ Đường vuông góc chung: Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a, b và cùng vuông góc với mỗi đường thẳng ấy được gọi là đường vuông góc chung của a và b .

☀ Khoảng cách giữa hai đường chéo nhau:

- Nếu đường thẳng vuông góc chung Δ cắt hai đường chéo nhau a, b lần lượt tại M, N thì độ dài đoạn MN gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b .
- Kí hiệu $d(a, b)$. Theo hình bên thì $d(a, b) = MN$.



B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng

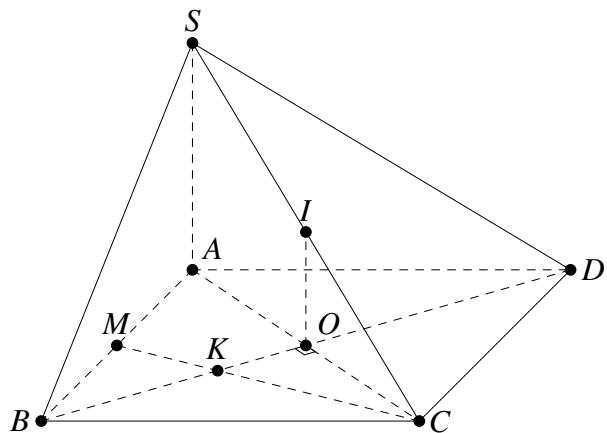
Để tính khoảng cách từ điểm O tới đường thẳng d , ta thực hiện các bước sau:

- Trong mặt phẳng $(O; d)$, hạ $OH \perp d$ tại H .
- Suy ra $d(O, d) = OH$.

≡ Ví dụ 1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tâm O , $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi I, M theo thứ tự là trung điểm của SC, AB .

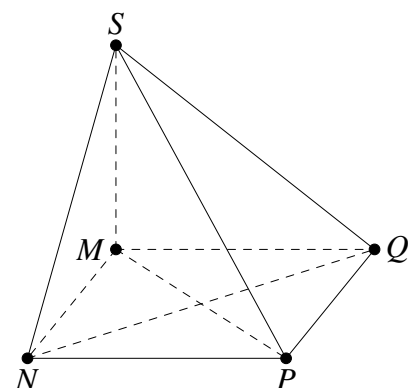
- Chứng minh $OI \perp (ABCD)$.
- Tính khoảng cách từ I đến CM , từ đó suy ra khoảng cách từ S tới CM .



≡ Ví dụ 2.

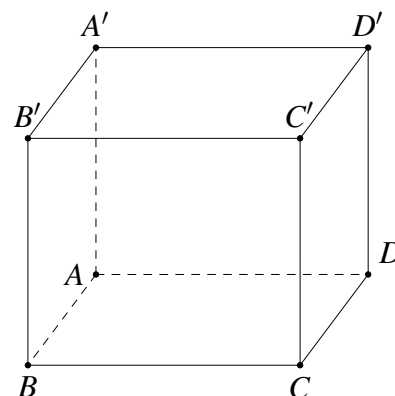
Cho hình chóp $S.MNPQ$ có đáy là hình thoi cạnh a , SM vuông góc với mặt phẳng $(MNPQ)$, $SM = a\sqrt{3}$ và góc $\widehat{MNP} = 60^\circ$.

- Chứng minh rằng $NQ \perp SP$.
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và PQ .
- Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên (SPQ) . Tính độ dài MH .



≡ Ví dụ 3.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Chứng minh rằng khoảng cách từ điểm B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' đều bằng nhau. Tính khoảng cách đó.



DT

2

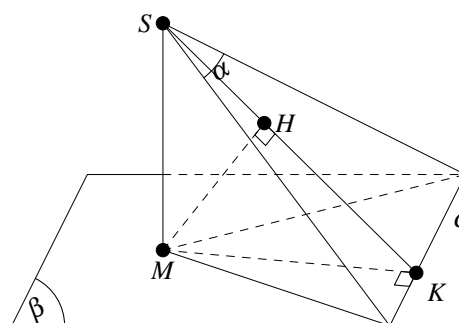
Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Dựng khoảng cách từ M đến (α) , ta chú ý hai trường hợp đặc biệt sau:

⚙ **Trường hợp 1:** Nếu M là hình chiếu vuông góc của một điểm $S \in (\alpha)$ xuống (β) . Khi đó khoảng cách từ M đến (α) được dựng như sau:

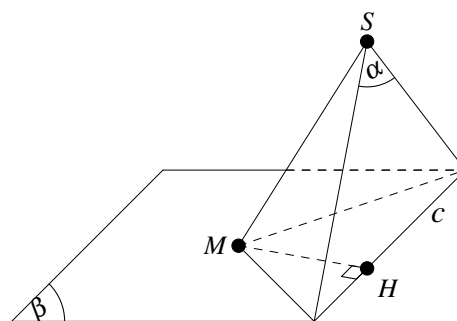
- Bước 1. Dựng MK vuông góc với giao tuyến c tại K ;
- Bước 2. Dựng SK .
- Bước 3. Dựng $MH \perp SK$ tại H . Suy ra

$$d(M, (\alpha)) = MH.$$



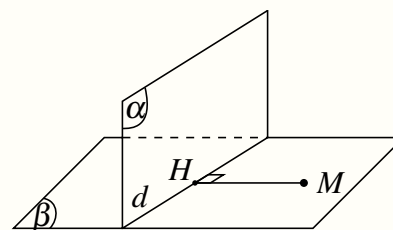
⚙ **Trường hợp 2:** Nếu $M \in (\beta)$ mà $(\alpha) \perp (\beta)$ thì khoảng cách từ M đến (α) được dựng như sau:

- Kẻ MH vuông góc với giao tuyến c tại H
- Suy ra $d(M, (\alpha)) = MH$.



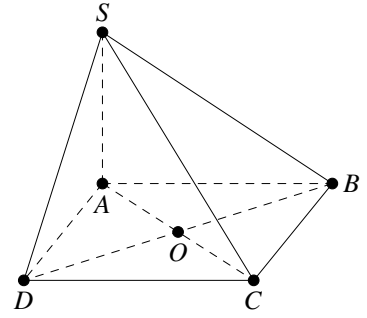
Trường hợp tổng quát, ta làm như sau:

- Dựng mặt phẳng (β) chứa điểm M và $(\beta) \perp (\alpha)$
- Xác định giao tuyến d của (β) và (α) .
- Kẻ $MH \perp d$ tại H thì $MH \perp (\alpha)$. Suy ra $d(M, (\alpha)) = MH$.



≡ Ví dụ 4.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , $AB = a\sqrt{2}$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$.



- Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAD) .
- Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) .
- Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .
- Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SDC) .
- Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) .

≡ Ví dụ 5. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , $AB = 2a$, $SA = 4a$. Tính

- Khoảng cách từ O đến (SAB) .
- Khoảng cách từ C đến (SAB) .

≡ Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$, tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) .

DT

3

Khoảng cách giữa đường và mặt phẳng song song. Khoảng cách giữa hai mặt song song

- ✓ Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) : Để tính khoảng cách giữa d và (α) ta thực hiện
 - Chọn điểm A trên d sao cho khoảng cách từ A tới (α) được xác định dễ nhất.
 - Kết luận $d(d; (\alpha)) = d(A, (\alpha))$.
- ✓ Cho hai mặt phẳng song song $(\alpha), (\beta)$: Để tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng ta thực hiện các bước
 - Chọn điểm A trên (α) sao cho khoảng cách từ A tới (β) được xác định dễ nhất.
 - Kết luận $d((\beta); (\alpha)) = d(A, (\beta))$.

≡ Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$.

- Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) ;
- Tính khoảng cách từ điểm AD đến mặt phẳng (SBC) .

≡ Ví dụ 8. Cho một hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$, đáy là các hình thoi có cạnh bằng a , $\widehat{BAD} = 120^\circ$, $AA' = h$. Tính các khoảng cách giữa $A'C'$ và $(ABCD)$, AA' và $(BDD'B')$.

≡ Ví dụ 9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính theo a :

- Khoảng cách giữa đường thẳng DD' và $(AA'C'C)$.
- Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AA'D'D)$ và $(BB'C'C)$.

≡ Ví dụ 10. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A có $BC = 2a$, $AB = a\sqrt{3}$.

a) Tính khoảng cách từ AA' tới mặt phẳng $(BCC'B')$.

b) Chứng minh rằng $AB \perp (ACC'A')$ và tính khoảng cách từ A' đến mặt phẳng (ABC') .

DT**4**

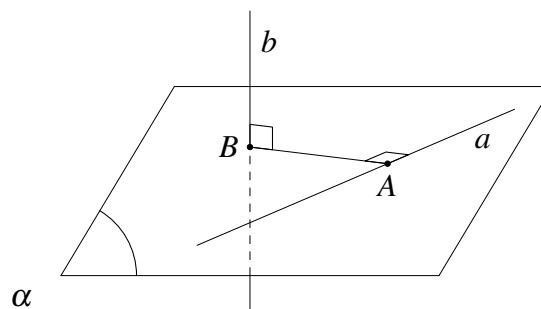
Đoạn vuông góc chung. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Dựng đoạn vuông góc chung:

⚙ Trường hợp 1:

Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau và $a \perp b$.

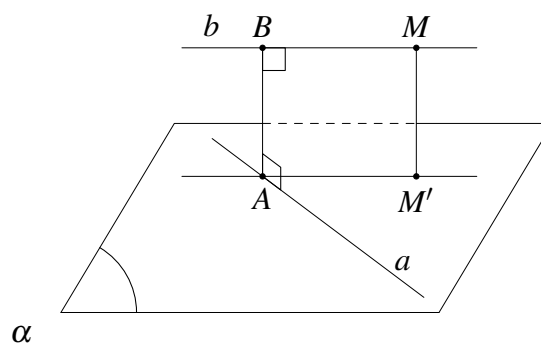
- Ta dựng mặt phẳng (α) chứa a và vuông góc với b tại B .
- Trong (α) dựng $BA \perp a$ tại A , ta được độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b .



⚙ Trường hợp 2:

Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau nhưng không vuông góc với nhau.

- Ta dựng mặt phẳng (α) chứa a và song song với b .
- Lấy một điểm M tùy ý trên b và dựng MM' vuông góc với (α) tại M' .
- Từ M' dựng b' song song với b cắt a tại A .
- Từ A dựng AB song song với MM' cắt b tại B , độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b .



⚠ Nhận xét:

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó chứa đường thẳng còn lại.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

≡ Ví dụ 11. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC vuông góc với nhau đôi một và $OA = OB = OC = a$. Gọi I là trung điểm của BC . Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của

a) OA và BC .

b) AI và OC .

≡ Ví dụ 12. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AB = a$, $AC = 2a$; cạnh bên $AA' = 2a$. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng BC' và AA' .

Ví dụ 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a , SA vuông góc với đáy và $SA = a$. M là trung điểm của SB . Tính khoảng cách giữa các đường thẳng

- a) SC và BD . b) AC và SD . c) SD và AM .

Ví dụ 14. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và $B'C'$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và $B'D'$.

Ví dụ 15. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng $\sqrt{11}$. Gọi I là trung điểm của cạnh CD . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BI .

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- 1 Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B và $AB = a$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) .
- 2 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) theo a , biết $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.
- 3 Một chiếc máy bay cất cánh từ một điểm thuộc mặt đất phẳng nằm ngang. Trong 3 phút đầu máy bay bay với vận tốc 500 km/h và theo đường thẳng tạo với mặt đất một góc 15° . Hỏi sau 2 phút, máy bay ở độ cao bao nhiêu kilômét (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)?
- 4 Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , M là trung điểm của SC .
 - a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) .
 - b) Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAG) .
- 5 Trên một mái nhà nghiêng 30° so với mặt phẳng nằm ngang, người tô dựng một chiếc cột vuông góc với mái nhà. Hỏi chiếc cột tạo với mặt phẳng nằm ngang một góc bao nhiêu độ? Vì sao?
- 6 Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a , góc A bằng 60° , góc giữa AC' và $(ABCD)$ bằng 60° .
 - a) Tính đường cao của hình hộp đó.
 - b) Tìm đường vuông góc chung của $A'C$ và BB' . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng đó.
- 7 Cho chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. Gọi G là trọng tâm giác ABC . Dựng và tính đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng SA và BC .
- 8 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = 3a$.
 - a) Chứng minh rằng $BC \perp (SAB)$.
 - b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SC và AB .
- 9 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và DC' .

- 10** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính theo a khoảng cách
- Giữa hai đường thẳng AB và $C'D'$.
 - Giữa đường thẳng AC và mặt phẳng $(A'B'C'D')$.
 - Từ điểm A đến đường thẳng $B'D'$.
 - Giữa hai đường thẳng AC và $B'D'$.
- 11** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh bằng a , $SA \perp (ABC)$ và $SA = 2a$. Tính theo a khoảng cách
- Từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) .
 - Từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) .
 - Giữa hai đường thẳng AB và SC .
- 12** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , góc ABC bằng 60° , biết tam giác SBC đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Tính theo a khoảng cách
- Từ điểm S đến mặt phẳng (ABC) .
 - Từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) .
 - Giữa hai đường thẳng AB và SC .
- 13** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = a\sqrt{2}, AA' = a\sqrt{3}$. Tính theo a khoảng cách
- Từ điểm A đến mặt phẳng $(BDD'B')$.
 - Giữa hai đường thẳng BD và CD' .
- 14** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và $AB = AC = AA' = a$. Tính theo a khoảng cách
- Từ điểm A đến đường thẳng $B'C'$.
 - Giữa hai đường thẳng BC và AB' .

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- Khoảng cách giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song song với nhau là khoảng cách từ một điểm thuộc mặt phẳng tới đường thẳng.
- Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng là khoảng cách từ điểm đó tới một điểm bất kì của đường thẳng.
- Khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng là khoảng cách từ điểm đó tới một điểm bất kì của mặt phẳng.
- Khoảng cách giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song song với nhau là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng tới mặt phẳng.

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song với nó đồng thời chứa đường thẳng kia.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

Câu 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD

và $A'C'$ bằng

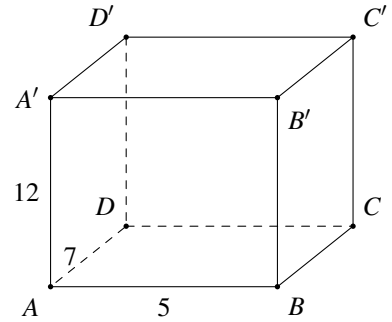
- A. a . B. $a\sqrt{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $a\sqrt{3}$.

Câu 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và $A'B'$.

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $a\sqrt{2}$. D. $2a$.

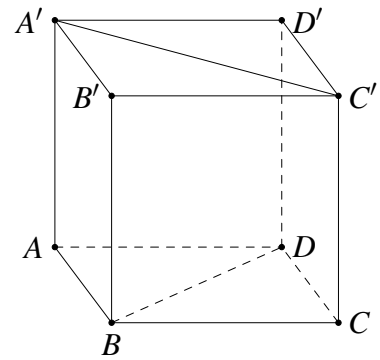
Câu 5. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước 5; 7; 12 (xem hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ bằng

- A. 7. B. 12. C. $\sqrt{74}$. D. 5.



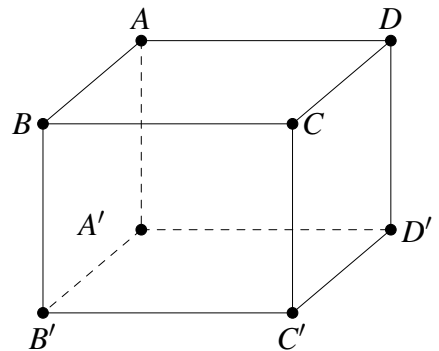
Câu 6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a như hình vẽ bên. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. B. $\sqrt{2}a$.
C. a . D. $\sqrt{3}a$.



Câu 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và $A'C'$ bằng

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $a\sqrt{2}$. C. $a\sqrt{3}$. D. a .



Câu 8. Cho hình chóp $A.BCD$ có $AC \perp (BCD)$ và BCD là tam giác đều cạnh bằng a , biết $AC = a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ A đến đường thẳng BD bằng

- A. $\frac{a\sqrt{11}}{2}$. B. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{4a\sqrt{5}}{3}$. D. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 9. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC' bằng

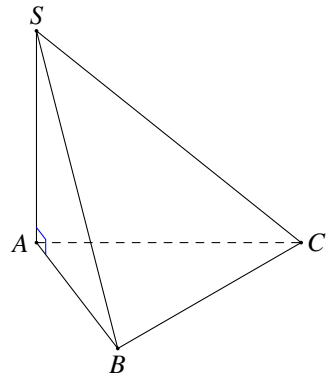
- A. $\frac{a\sqrt{7}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{14}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{7}}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{14}}{2}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC) . Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBC)

- A. $d = a$. B. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $d = \frac{a\sqrt{15}}{5}$. D. $d = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = a$ và tam giác ABC đều cạnh a (tham khảo hình bên). Tính theo a khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) .

- A. a . B. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{21}a}{7}$.



Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I , $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$; H là trung điểm của AI . Biết SH vuông góc với đáy và tam giác SAC vuông tại S . Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) .

- A. $d = \frac{a\sqrt{15}}{5}$. B. $d = a\sqrt{15}$. C. $d = \frac{a\sqrt{15}}{15}$. D. $d = \frac{3a\sqrt{15}}{5}$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O , SA vuông góc với mặt đáy. Hỏi mệnh đề nào sau đây là sai?

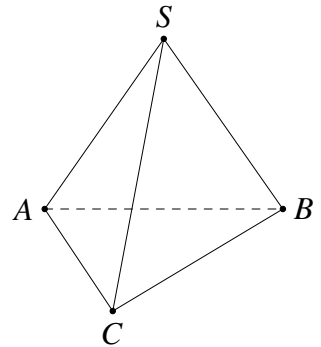
- A. $d(C, (SAB)) = d(C, (SAD))$. B. $d(A, (SBD)) = d(B, (SAC))$.
C. $d(B, (SCD)) = 2d(O, (SCD))$. D. $d(S, (ABCD)) = SA$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) .

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{a}{2}$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) .

- A. $a\sqrt{6}$. B. $a\sqrt{3}$.
C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $2a\sqrt{3}$.



Câu 16. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC .

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. a . C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 17. Cho hình chóp đều $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh là $2a$, cạnh bên bằng $3a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{14}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{14}}{2}$. C. $a\sqrt{14}$. D. $\frac{a\sqrt{14}}{4}$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt đáy. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC .

- A. $\frac{a\sqrt{22}}{11}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{11}}{22}$. D. $\frac{a\sqrt{4}}{3}$.

Câu 19. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh đáy bằng 2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD .

- A. $\sqrt{2}$. B. $\sqrt{3}$. C. 1. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với đường chéo $AC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là

- A. $a\sqrt{2}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. D. $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC bằng

- A. $a\sqrt{11}$. B. $\frac{a\sqrt{10}}{5}$. C. $\frac{2a\sqrt{11}}{3}$. D. $a\sqrt{3}$.

Câu 22. Cho tứ diện $OABC$ có OA , OB , OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = a$, $OB = OC = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. C. a . D. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a , SO vuông góc với mặt phẳng $ABCD$ và $SO = a$. Khoảng cách giữa SC và AB bằng

- A. $\frac{2a\sqrt{5}}{15}$. B. $\frac{2a\sqrt{3}}{15}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{15}$. D. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông có chiều cao $AB = a$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Tính khoảng cách giữa IJ và (SAD) .

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{a}{2}$.

Câu 25. Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a . Gọi M , N , P là trung điểm của các cạnh AD , CD , $A'D'$. Tính khoảng cách giữa CC' và mặt phẳng (MNP) .

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. D. $a\sqrt{2}$.

—HẾT—

§6. THỂ TÍCH

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

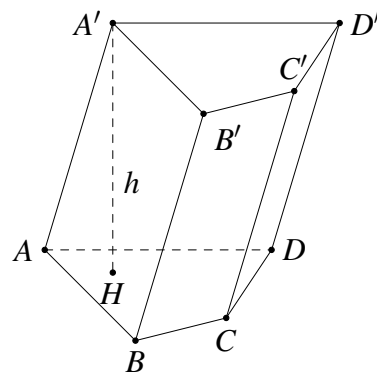
1 Thể tích khối lăng trụ

Thể tích khối lăng trụ bằng diện tích đáy nhân với đường cao của lăng trụ.

$$V = S_{\text{đáy}} \cdot h$$

Trong đó

- ① $S_{\text{đáy}}$ là diện tích đáy của khối lăng trụ;
- ② h là chiều cao của khối lăng trụ.



Hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$

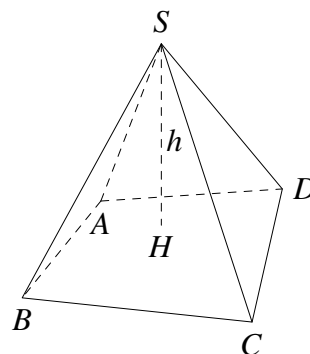
2 Thể tích khối chóp

Ta có thể tích khối chóp bằng một phần ba diện tích đáy nhân với đường cao hình chóp.

$$V_{\text{chóp}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{đáy}} \cdot h$$

Trong đó

- ① $S_{\text{đáy}} = S_{ABCD}$ là diện tích mặt đáy của khối chóp.
- ② $h = SH$ là chiều cao của khối chóp.



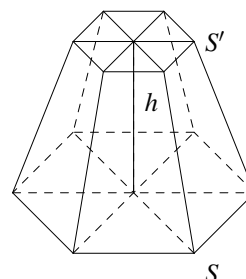
3 Thể tích khối chóp cắt đều

Thể tích của khối chóp cắt đều được tính theo công thức

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (S + S' + \sqrt{S \cdot S'})$$

Trong đó

- ① S là diện tích đáy lớn của khối chóp cắt đều.
- ① S' là diện tích đáy bé của khối chóp cắt đều.
- ② $h = SH$ là chiều cao của khối chóp cắt đều.



✓ Phương pháp:

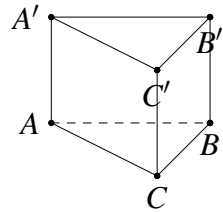
- Tính diện tích đáy $S_{\text{đáy}}$ và độ dài đường cao h của khối lăng trụ;
- Thay vào công thức $V = S_{\text{đáy}} \cdot h$.

✓ Các trường hợp đặc biệt:

- ① Thể tích V của khối hộp chữ nhật có ba kích thước lần lượt a, b, c là $V = a \cdot b \cdot c$.
- ② Thể tích V của khối hộp lập phương có cạnh bằng a là $V = a^3$.

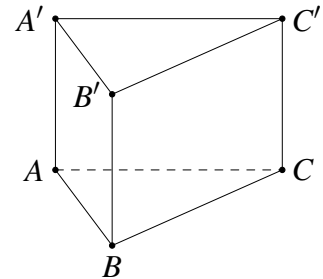
≡ Ví dụ 1.

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a$, tam giác ABC đều và có cạnh bằng a . Tính thể tích của khối lăng trụ đã cho.



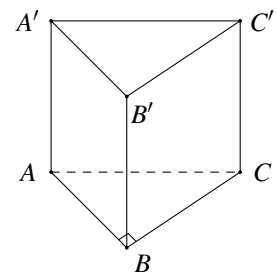
≡ Ví dụ 2.

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC đều cạnh bằng a và chu vi của mặt bên $ABB'A'$ bằng $6a$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.



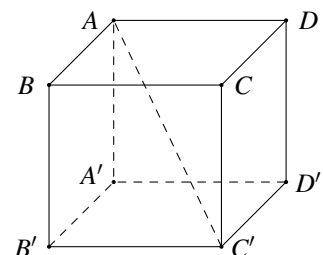
≡ Ví dụ 3.

Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.



≡ Ví dụ 4.

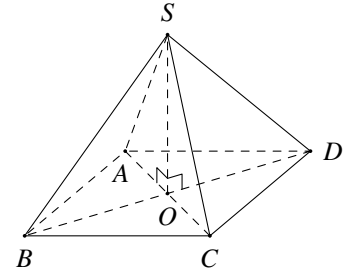
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $AC' = a\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.



A 3D diagram of a rectangular prism. The vertices are labeled as follows: A (bottom-left-front), B (bottom-right-back), C (bottom-right-front), D (bottom-left-back), A' (top-left-front), B' (top-right-back), C' (top-right-front), and D' (top-left-back). A dashed line segment connects vertex A to vertex C' .

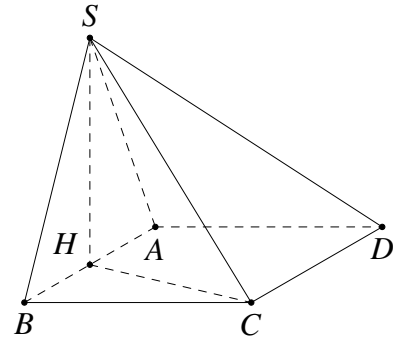
≡ Ví dụ 10.

Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.



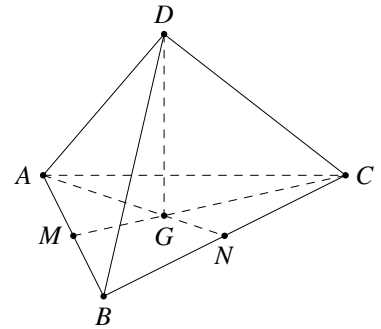
≡ Ví dụ 11.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a, AD = a$. Hình chiếu của S lên đáy là trung điểm H của cạnh AB , góc tạo bởi SC và đáy là 45° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.



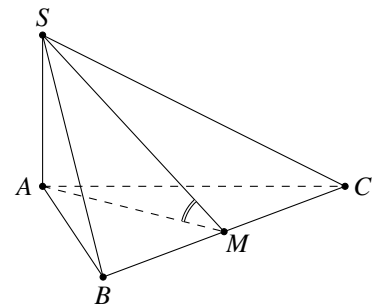
≡ Ví dụ 12.

Tính thể tích khối tứ diện đều cạnh bằng $2a$.



≡ Ví dụ 13.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC) . Biết góc tạo với hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° , tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.



DT

3

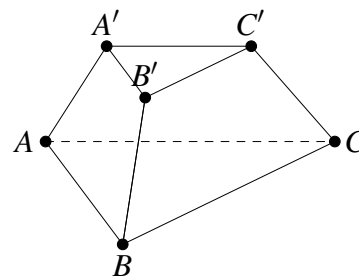
Tính thể tích khối chóp cụt đều

✓ Phương pháp:

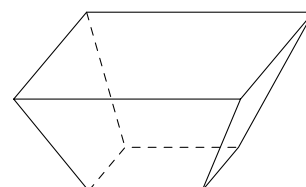
- Tính diện tích hai đáy (lớn, bé) S, S' và độ dài đường cao h của khối chóp cụt đều;
- Thay vào công thức $V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (S + S' + \sqrt{S \cdot S'})$.

Ví dụ 14.

Tính thể tích của khối chóp cắt tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng $3a$, $AB = 4a$, $A'B' = a$.

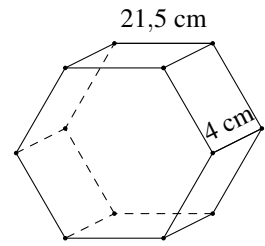
**Ví dụ 15.**

Tính thể tích một cái sọt đựng đồ có dạng hình chóp cắt tứ giác đều, đáy lớn có cạnh bằng 80 cm, đáy nhỏ có cạnh bằng 40 cm và cạnh bên bằng 80 cm.

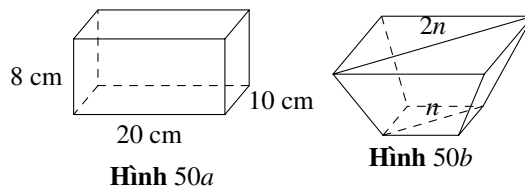
**C BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

- 1 Tính thể tích hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ biết $AB = 3a$, $AC = 5a$, $AA' = 2a$.
- 2 Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có đường chéo $AC' = \sqrt{6}$.
- 3 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$. Biết SA vuông góc với đáy và $SC = a\sqrt{5}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.
- 4 Cho khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng $2a$. Tính thể tích của khối chóp đã cho.
- 5 Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa cạnh bên và đáy bằng 30° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.
- 6 Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$ và cạnh bên bằng $3a$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.
- 7 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 45° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.
- 8 Diện tích ba mặt của hình hộp chữ nhật lần lượt là 15 cm^2 , 24 cm^2 , 40 cm^2 . Tính thể tích của khối hộp đó.
- 9 Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a , cạnh $AA' = a$ và hình chiếu vuông góc H của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của BC . Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.
- 10 Cho hình chóp cắt đều $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy lớn $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$, đáy nhỏ $A'B'C'D'$ là hình vuông cạnh bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, các cạnh bên bằng nhau và bằng a . Tính theo a thể tích khối chóp cắt $ABCD.A'B'C'D'$.

- 11 Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy tam giác ABC vuông cân tại B , $BA = BC = a$, $A'B$ tạo với đáy (ABC) một góc 60° . Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.
- 12 Cho lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có diện tích mặt bên ABB_1A_1 bằng 4; khoảng cách giữa cạnh CC_1 và mặt phẳng (ABB_1A_1) bằng 7. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$.
- 13 Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AC = a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Đường chéo BC' của mặt bên $(BB'C'C)$ tạo với mặt phẳng $(AA'C'C)$ một góc 30° . Tính thể tích của khối lăng trụ theo a .
- 14 Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt phẳng (ABC) bằng 45° . Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.
- 15 Người ta cần đổ bê tông để làm những viên gạch có dạng khối lăng trụ lục giác đều với chiều cao là 4 cm và cạnh lục giác dài 21,5 cm. Tính thể tích bê tông theo đơn vị centimet khối để làm một viên gạch như thế (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



- 16 Một chì neo câu cá có dạng khối chóp cụt tứ giác đều được làm hoàn toàn bằng chì có khối lượng 137 mg. Biết cạnh đáy nhỏ và cạnh đáy lớn của khối chóp cụt đều dài lần lượt 1 và 3 cm, khối lượng riêng của chì bằng $11,3 \text{ g/cm}^3$. Tính chiều cao của chì neo câu cá đó theo đơn vị cen-ti-mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).
- 17 Một chiếc khay đựng đầy nước có dạng hình hộp chữ nhật với kích thước: chiều dài 20 cm, chiều rộng 10 cm, chiều cao 8 cm (Hình 50a). Để san bớt nước cho đầy, người ta đổ nước từ chiếc khay thứ nhất đó sang chiếc khay thứ hai có dạng hình chóp cụt tứ giác đều với đáy khay là hình vuông nhỏ có đường chéo dài n cm, miệng khay là hình vuông lớn có đường chéo dài $2n$ (cm) (Hình 50b). Sau khi đổ, mực nước ở khay thứ hai cao bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của khay đó và lượng nước trong khay thứ nhất giảm đi $\frac{1}{4}$ so với ban đầu. Tính thể tích của chiếc khay thứ hai theo đơn vị cen-ti-mét khối.



- 18 Người ta cắt bỏ bốn hình vuông cùng kích thước ở bốn góc của một tấm tôn hình vuông có cạnh 1 m để gò lại thành một chiếc thùng có dạng hình hộp chữ nhật không nắp. Hỏi cạnh của các hình vuông cần bỏ đi có độ dài bằng bao nhiêu để thùng hình hộp nhận được có thể tích lớn nhất?

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1 Thể tích khối chóp

Câu 1. (TN-2021). Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 3a^2$ và chiều cao $h = a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

- A. $\frac{3}{2}a^3$. B. $3a^3$. C. $\frac{1}{3}a^3$. D. a^3 .

Câu 2. Một khối chóp có diện tích đáy là 10 cm^2 và chiều cao là 6 cm . Thể tích của khối chóp đó là

- A. 20 cm^3 . B. 60 cm^3 . C. 30 cm^3 . D. 10 cm^3 .

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

- A. $\frac{a^3}{3}$. B. a^3 . C. $\frac{a^3}{6}$. D. $\frac{a^3}{2}$.

Câu 4. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a , $SA = a\sqrt{3}$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{a^3}{2}$. B. $\frac{a^3}{4}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 5. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy, thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $\frac{2}{3}a^3$. Tính theo a cạnh của hình vuông $ABCD$.

- A. a . B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $a\sqrt{2}$. D. $2a$.

Câu 6. Cho tứ diện $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = a, OB = b, OC = c$. Tính thể tích khối tứ diện $O.ABC$.

- A. $\frac{abc}{3}$. B. $\frac{abc}{4}$. C. $\frac{abc}{6}$. D. $\frac{abc}{2}$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a và thể tích bằng $3a^3$. Tính chiều cao h của khối chóp $S.ABC$.

- A. $h = 12\sqrt{3}a$. B. $h = 6\sqrt{3}a$. C. $h = 4\sqrt{3}a$. D. $h = 2\sqrt{3}a$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$ và mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a . Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{9}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{9}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{27}$.

Câu 9. Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa cạnh bên và đáy bằng 30° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{18}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{36}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

Câu 10. Thể tích của khối tứ diện đều có cạnh bằng 3 .

- A. $\sqrt{2}$. B. $\frac{9\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$. D. $2\sqrt{2}$.

Câu 11. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = 3a, AC = 5a$. Biết SA vuông góc với đáy và SC tạo với mặt đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

- A. $V = 20\sqrt{3}a^3$. B. $V = 60\sqrt{3}a^3$. C. $V = 25\sqrt{3}a^3$. D. $V = 75\sqrt{3}a^3$.

Câu 12. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại A . Biết $BC = 3a, AB = a$ và góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 45° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a .

- A. $V_{S.ABC} = \frac{4a^3}{9}$. B. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. C. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. D. $V_{S.ABC} = \frac{2a^3}{9}$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{3}$, mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

- A. $\frac{9a^3\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a^3}{2}$. C. $\frac{3a^3}{2}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 14. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = 3a$, $BC = 5a$, $SA = 2a\sqrt{3}$, $\widehat{SAC} = 30^\circ$ và mặt phẳng (SAC) vuông góc mặt đáy.

- A. $V = 3a^3\sqrt{2}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $V = a^3\sqrt{3}$. D. $V = 2a^3\sqrt{3}$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy, góc tạo bởi (SBC) với đáy bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. B. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{8}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết $SC = a\sqrt{3}$.

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a^3}{3}$. D. a^3 .

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $BC = a$. Hình chiếu H của S trên mặt phẳng (ABC) thuộc cạnh AB sao cho $AH = 2HB$, góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng 45° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{26}}{36}$. B. $\frac{a^3\sqrt{26}}{24}$. C. $\frac{a^3\sqrt{13}}{36}$. D. $\frac{a^3\sqrt{26}}{72}$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là vuông cạnh a , hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm của cạnh AD , cạnh bên SB hợp với đáy một góc 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{2}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{6}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{5}}{4}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{5}}{6\sqrt{3}}$.

Câu 19. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , cạnh bên hợp với đáy một góc 30° . Thể tích khối chóp bằng

- A. $a^3\sqrt{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 20. Kim tự tháp Kê-ốp ở Ai Cập được xây dựng vào khoảng 2500 năm trước Công nguyên. Kim tự tháp này có hình dạng là một khối chóp tứ giác đều có chiều cao 147 m, cạnh đáy dài 230 m. Tính thể tích của Kim tự tháp.

- A. 2 592 100 m³. B. 2 592 009 m³. C. 7 776 300 m³. D. 3 888 150 m³.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích V và M là trọng tâm tam giác SAB . Tính thể tích khối chóp $M.ABCD$.

- A. $\frac{V}{3}$. B. $\frac{2V}{3}$. C. $\frac{V}{2}$. D. $2V$.

Câu 22. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có diện tích đáy bằng $2\sqrt{3}$ và diện tích một mặt bên bằng 4. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{4}{3}$. B. $\frac{\sqrt{22}}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{2\sqrt{22}}{3}$.

Câu 23. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp trong nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$, biết SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, (SBC) hợp với đáy $(ABCD)$ một góc 45° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

- A. $\frac{3R^3}{4}$. B. $3R^3$. C. $\frac{3R^3}{6}$. D. $\frac{3R^3}{2}$.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 3a$, hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

C. $\sqrt{3}a^3$.

D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$.

2 Thể tích khối lăng trụ**Câu 25.** Thể tích khối lập phương cạnh $2a$ bằng

A. $8a^3$.

B. $2a^3$.

C. $6a^3$.

D. a^3 .

Câu 26. Tính thể tích V của khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 3$, $AD = 4$ và $AA' = 5$.

A. $V = 10$.

B. $V = 12$.

C. $V = 20$.

D. $V = 60$.

Câu 27. Nếu tăng chiều dài hai cạnh đáy của khối hộp chữ nhật lên 10 lần thì thể tích tăng lên bao nhiêu lần?

A. 100.

B. 20.

C. 10.

D. 1000.

Câu 28. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 6. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Thể tích khối chóp $O.A'B'C'D'$ là

A. $\frac{3}{2}$.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Câu 29. Cho hình lăng trụ đứng có diện tích đáy là $\sqrt{3}a^2$, độ dài cạnh bên là $a\sqrt{2}$. Khi đó thể tích của khối lăng trụ bằng

A. $\sqrt{2}a^3$.

B. $\sqrt{6}a^3$.

C. $\frac{\sqrt{6}a^3}{3}$.

D. $\sqrt{3}a^3$.

Câu 30. Cho khối lăng trụ có diện tích đáy bằng $a^2\sqrt{3}$, khoảng cách giữa hai đáy của lăng trụ bằng $a\sqrt{6}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ.

A. $V = \sqrt{2}a^3$.

B. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

C. $V = 3\sqrt{2}a^3$.

D. $V = \frac{3\sqrt{2}a^3}{4}$.

Câu 31. Cho khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a . Thể tích của khối lăng trụ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 32. Cho $(\mathcal{H})$ là khối lăng trụ đứng tam giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau. Biết thể tích của $(\mathcal{H})$ bằng $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Tính độ dài các cạnh của khối lăng trụ $(\mathcal{H})$.

A. $\sqrt[3]{3}$.

B. $\sqrt[3]{\frac{16}{3}}$.

C. 1.

D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 33. Cho khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$ và mỗi mặt bên đều có diện tích bằng $4a^2$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $a^3\sqrt{6}$.

B. $\frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$.

C. $2a^3\sqrt{6}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 34. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $A'C$ tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{a^3}{4}$.

B. $\frac{3a^3}{8}$.

C. $\frac{3a^3}{2}$.

D. $\frac{3a^3}{4}$.

Câu 35. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B , $AC = a\sqrt{2}$, biết góc giữa $(A'BC)$ và đáy bằng 60° . Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 36. Thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $AC' = 3a$ bằng

- A. $3\sqrt{3}a^3$. B. $9a^3$. C. $\sqrt{3}a^3$. D. $3a^3$.

Câu 37. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2$ cm, $AD = 3$ cm, $AC' = 7$ cm. Thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

- A. 24 cm^3 . B. 42 cm^3 . C. 12 cm^3 . D. 36 cm^3 .

Câu 38. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AC = 2a$, tam giác $A'AC$ vuông cân tại A. Thể tích khối hộp đã cho bằng

- A. $2\sqrt{3}a^3$. B. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. C. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{2}$. D. $\sqrt{3}a^3$.

Câu 39. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = a$, đường chéo $A'C$ tạo với mặt đáy ($ABCD$) một góc α thỏa $\cot \alpha = \sqrt{5}$. Thể tích khối hộp đã cho bằng

- A. $2a^3$. B. $\sqrt{5}a^3$. C. $\frac{2a^3}{3}$. D. $\frac{a^3}{\sqrt{5}}$.

Câu 40. Tổng diện tích các mặt của một hình lập phương bằng 150. Thể tích của khối lập phương đó là

- A. 125. B. 625. C. 25. D. 145.

Câu 41. Gọi V là thể tích của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, V_1 là thể tích của tứ diện $A'ABD$. Hệ thức nào sau đây là đúng?

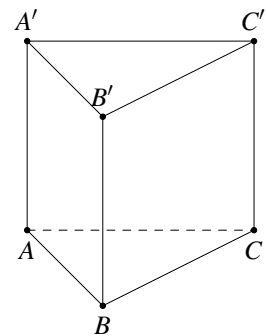
- A. $V = 6V_1$. B. $V = 4V_1$. C. $V = 3V_1$. D. $V = 2V_1$.

Câu 42. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C, $AB = 2a$, $AC = a$, $BC' = 2a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$. B. $4a^3$. C. $\frac{4a^3}{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

Câu 43. Một lăng trụ đứng tam giác có các cạnh đáy là 11 cm, 12 cm, 13 cm và diện tích xung quanh bằng 144 cm^2 (tham khảo hình vẽ bên). Thể tích khối lăng trụ đó là

- A. $18\sqrt{105} \text{ cm}^3$. B. $12\sqrt{105} \text{ cm}^3$.
C. $6\sqrt{105} \text{ cm}^3$. D. $24\sqrt{105} \text{ cm}^3$.



Câu 44. (Tốt nghiệp THPT – 2022, Mã đề 101). Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = 2a$. Góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng 30° . Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $3a^3$. B. a^3 . C. $12\sqrt{2}a^3$. D. $4\sqrt{2}a^3$.

Câu 45. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, đường thẳng DB' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ góc 30° . Tính thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$

- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. B. $a^3\sqrt{3}$. C. $8a^3\sqrt{2}$. D. a^3 .

Câu 46. Cho hình hộp chữ nhật có diện tích ba mặt cùng xuất phát từ cùng một đỉnh là 10 cm^2 , 20 cm^2 , 32 cm^2 . Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

- A. 40 cm^3 . B. 64 cm^3 . C. 80 cm^3 . D. 160 cm^3 .

Câu 47. Cho hình hộp chữ nhật có đường chéo $d = \sqrt{21}$. Độ dài ba kích thước của hình hộp chữ nhật lập thành một cấp số nhân có công bội $q = 2$. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

- A. 6. B. 8. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{8}{3}$.

Câu 48. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = a\sqrt{3}$. Biết rằng mặt phẳng $(A'BC)$ hợp với mặt đáy $(ABCD)$ một góc 60° , đường thẳng $A'C$ hợp với mặt đáy $(ABCD)$ một góc 30° . Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

- A. a^3 . B. $a^3\sqrt{2}$. C. $2a^3\sqrt{6}$. D. $\frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 49. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{6}$. Tính thể tích khối lăng trụ.

- A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{28}$. B. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$. C. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. D. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.

Câu 50. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $AA'B'D'$ là tứ diện đều cạnh a , khi đó thể tích của khối hộp đã cho là

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. B. $V = a^3\sqrt{3}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. D. $V = a^3\sqrt{2}$.

—HẾT—

CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

§1. CÔNG THỨC CỘNG XÁC SUẤT

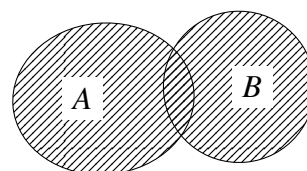
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 PHÉP TOÁN TRÊN CÁC BIẾN CỐ

Cho hai biến cố A và B . Khi đó A, B là các tập con của không gian mẫu Ω .

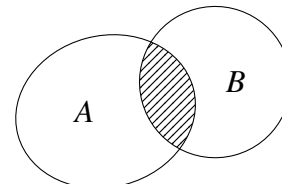
⚙ **Biến cố hợp:** Biến cố: “ A hoặc B xảy ra” được gọi là biến cố hợp của A và B .

- Ký hiệu là $A \cup B$.
- Biến cố hợp $A \cup B$ là tập con của không gian mẫu Ω .



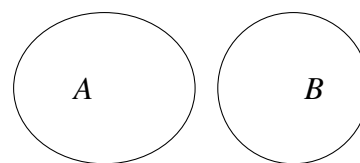
⚙ **Biến cố giao:** Biến cố: “Cả A và B đều xảy ra” được gọi là biến cố giao của A và B .

- Ký hiệu là $A \cap B$ hoặc AB ;
- Biến cố giao $A \cap B$ là tập con của không gian mẫu Ω .



⚙ **Biến cố xung khắc:** Biến cố A và biến cố B được gọi là xung khắc nếu A và B không đồng thời xảy ra. Hai biến cố A và B xung khắc khi và chỉ khi $A \cap B = \emptyset$.

⚠ Hai biến cố A và B là xung khắc khi và chỉ khi nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra.



2 CÔNG THỨC CỘNG XÁC SUẤT

⚙ **Công thức cộng xác suất:** Cho hai biến cố A và B . Khi đó

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

⚙ **Đặt biệt:** Nếu hai biến cố A và B là xung khắc ($A \cap B = \emptyset$) thì

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

⚠ Cho biến cố A và biến cố đối $\bar{A}$. Ta có $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Ví dụ 1. Một tổ trong lớp 11B có 4 học sinh nữ là Hương, Hồng, Dung, Phương và 5 học sinh nam là Sơn, Tùng, Hoàng, Tiến, Hải. Trong giờ học, giáo viên chọn ngẫu nhiên một học sinh trong tổ đó lên bảng để kiểm tra bài. Xét các biến cố sau:

- ① A: “Học sinh đó là một bạn nữ”; ② B: “Học sinh đó có tên bắt đầu là chữ cái H”.

- a) Mô tả không gian mẫu.
b) Xác định các biến cố A, B và $M = A \cup B$.

Ví dụ 2. Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 5”, B là biến cố “Tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 6”. Gọi C là biến cố “Có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 1 chấm”. Hãy viết tập hợp mô tả các biến cố giao $A \cap C$ và $B \cap C$.

Ví dụ 3. Một hộp có 5 viên bi xanh, 4 viên bi đỏ và 2 viên bi vàng. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ hộp. Hãy xác định các cặp biến cố xung khắc trong các biến cố sau:

- A: “Hai viên bi lấy ra cùng màu xanh”; C: “Hai viên bi lấy ra cùng màu”;
B: “Hai viên bi lấy ra cùng màu đỏ”; D: “Hai viên bi lấy ra khác màu”.

Ví dụ 4. Thực hiện hai thí nghiệm. Gọi T_1 và T_2 lần lượt là các biến cố “Thí nghiệm thứ nhất thành công” và “Thí nghiệm thứ hai thành công”. Hãy biểu diễn các biến cố sau theo hai biến cố T_1 và T_2 .

- a) A: “Có ít nhất một trong hai thí nghiệm thành công”.
b) B: “Có đúng một trong hai thí nghiệm thành công”.

- ✓ Nếu hai biến cố A và B là xung khắc ($A \cap B = \emptyset$) thì

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- ✓ Cho biến cố A và $\bar{A}$ là biến cố đối của A. Khi đó, ta có

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Ví dụ 5. Một hộp chứa 20 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 20. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 thẻ từ hộp. Tính xác suất của các biến cố:

- a) “Tổng các số ghi trên 2 thẻ lấy ra nhỏ hơn 4 hoặc lớn hơn 37”;
b) “Tích các số ghi trên 2 thẻ lấy ra chia hết cho 6”.

Ví dụ 6. Một hộp chứa 4 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ và 3 viên bi vàng có cùng kích thước và khối lượng. Chọn ra ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp. Tính xác suất của các biến cố:

- “Cả 4 viên bi lấy ra đều có cùng màu”;
- “Có ít nhất 3 viên bi xanh trong 4 viên bi lấy ra”.

Ví dụ 7. Trong một căn phòng có 36 người, trong đó có 25 người họ Nguyễn và 11 người họ Trần. Chọn ngẫu nhiên hai người trong phòng đó. Tính xác suất để hai người được chọn có cùng họ.

Ví dụ 8. Một hộp chứa 10 quả bóng xanh và 10 quả bóng đỏ có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 5 quả bóng từ hộp. Tính xác suất của biến cố “có ít nhất 3 quả bóng xanh trong 5 quả bóng lấy ra”.

Ví dụ 9. Một lớp có 41 học sinh trong đó có 15 bạn nam và 26 bạn nữ. Cô giáo chủ nhiệm chọn ngẫu nhiên ra bốn bạn đi trực ban.

- Tính xác suất để cả bốn bạn đó đều là nữ.
- Tính xác suất để có ít nhất một bạn nam.

Ví dụ 10. Có hai hòm đựng thẻ, mỗi hòm đựng 10 thẻ đánh số từ 1 đến 10. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hòm một thẻ. Tính xác suất để trong hai thẻ lấy ra

- có ít nhất một thẻ đánh số 1.
- tổng hai số ghi trên hai thẻ khác 19.

DT

3

Công thức cộng xác suất của hai biến cố bất kì

Cho hai biến cố A và B . Khi đó

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ví dụ 11. Tung một đồng xu cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp.

- Viết các kết quả thuận lợi của không gian mẫu Ω và hai biến cố

A : “Có ít nhất một lần xuất hiện mặt sấp”;

B : “Có ít nhất một lần xuất hiện mặt ngửa”.

- Viết các kết quả thuận lợi của mỗi biến cố $A \cup B, A \cap B$.

- Tính $P(A), P(B), P(A \cup B), P(A \cap B)$.

Ví dụ 12. Một hộp đựng 25 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 25. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong hộp. Xét các biến cố P : “Số ghi trên tấm thẻ là số chia hết cho 4”; Q : “Số ghi trên tấm thẻ là số chia hết cho 6”.

- Mô tả không gian mẫu.
- Xác định các biến cố P, Q và $S = P \cap Q$.
- Tính xác suất của biến cố $P \cup Q$.

Ví dụ 13. Lớp 11A có 44 học sinh trong đó có 14 học sinh đạt điểm tổng kết môn Hóa học loại giỏi và 15 học sinh đạt điểm tổng kết môn Vật lý loại giỏi. Biết rằng khi chọn một học sinh của lớp đạt điểm tổng kết môn Hóa học hoặc Vật lý loại giỏi có xác suất là 0,5. Số học sinh đạt điểm tổng kết giỏi cả hai môn Hóa học và Vật lý là

Ví dụ 14. Gieo ngẫu nhiên 3 con xúc xắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất của biến cố A : “Tích số chấm xuất hiện trên mỗi con xúc xắc chia hết cho 15”.

Ví dụ 15. Trong một công ty có 40 nhân viên, trong đó có 19 người thích chơi bóng bàn, 20 người thích chơi cầu lông, 8 người không thích chơi cả cầu lông và bóng bàn. Chọn ngẫu nhiên một nhân viên trong công ty đó. Tính xác suất để người đó

- Thích chơi ít nhất một trong hai môn bóng bàn và cầu lông.
- Thích chơi cầu lông và không thích chơi bóng bàn.
- Thích chơi bóng bàn và không thích chơi cầu lông.
- Thích chơi đúng một trong hai môn.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 5”, B là biến cố “Tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 6”.
 - Hãy viết tập hợp mô tả các biến cố trên.
 - Hãy liệt kê các kết quả của phép thử làm cho cả hai biến cố A và B cùng xảy ra.
- Tung một đồng xu cân đối và đồng chất ba lần liên tiếp. Xét các biến cố:

A : “Đồng xu xuất hiện mặt sấp (S) ở lần tung thứ nhất”.

B : “Đồng xu xuất hiện mặt ngửa (N) ở lần tung thứ nhất”.

Hai biến cố trên có xung khắc hay không? Vì sao?
- Hai xạ thủ X, Y mỗi người bắn một viên đạn vào một mục tiêu. Xét các biến cố A : “Xạ thủ X bắn trúng”; B : “Xạ thủ Y bắn trúng”. Nêu nội dung của các biến cố $AB, A \cup B, \overline{AB}, \overline{A}B, \overline{A}\overline{B}, \overline{AB} \cup \overline{A}\overline{B}$.
- Trong một hộp có 8 viên bi xanh và 6 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi trong hộp. Gọi A là biến cố: “Cả hai viên bi có màu xanh”; B là biến cố: “có một viên bi màu xanh và một viên bi màu đỏ”.
 - Tính $P(A)$ và $P(B)$.
 - Tính xác suất để trong hai viên bi lấy ra có ít nhất một viên bi màu xanh.
- Trong bình đựng có 10 viên bi, trong đó có 4 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất để trong 3 viên bi lấy được 1 hoặc 2 viên bi đỏ.
- Một hộp chứa 40 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 40. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời hai thẻ từ hộp. Tính xác suất của các biến cố:
 - “Tổng các số ghi trên 2 thẻ lấy ra nhỏ hơn 4 hoặc lớn hơn 76”.
 - “Tích các số ghi trên 2 thẻ lấy ra chia hết cho 10”.
- Xếp ngẫu nhiên 6 người A, B, C, D, E, F vào một cái bàn dài có 6 chỗ ngồi. Tính xác suất để
 - hai người A và B ngồi cạnh nhau.
 - hai người A và B không ngồi cạnh nhau.

- 8 Chọn ngẫu nhiên hai người từ một nhóm 9 nhà toán học tham dự hội thảo, trong nhóm có 5 nhà toán học nam và 4 nhà toán học nữ. Tính xác suất để hai người được chọn có cùng giới tính.
- 9 Một hộp đựng 4 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ và 6 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên hai viên bi. Tính xác suất để chọn được hai viên bi cùng màu.
- 10 Mai, Lan và 5 bạn cùng lớp xếp thành một hàng ngang theo thứ tự ngẫu nhiên. Tính xác suất của biến cố “Có ít nhất một trong hai bạn Mai và Lan đứng ở đầu hàng”.
- 11 Hai đội A và B thi đấu trận chung kết bóng chuyền nữ chào mừng ngày 20 - 11 (trận chung kết tối đa 5 hiệp). Đội nào thắng 3 hiệp trước thì thắng trận. Xác suất để đội A thắng mỗi hiệp là 0,4 (không có hòa). Tính xác suất P để đội A thắng trận.
- 12 Một lớp có 40 học sinh, trong đó có 34 em thích ăn chuối, 22 em thích ăn cam và 2 em không thích ăn cả hai loại quả đó. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp. Tính xác suất để em đó:
 - a) Thích ăn ít nhất một trong hai loại quả chuối hoặc cam.
 - b) Thích ăn cả hai loại quả chuối và cam.
- 13 Một nhóm có 50 người được phỏng vấn họ đã mua cành đào hay cây quất vào dịp Tết vừa qua, trong đó có 31 người mua cành đào, 12 người mua cây quất và 5 người mua cả cành đào và cây quất. Chọn ngẫu nhiên một người. Tính xác suất để người đó:
 - a) Mua cành đào hoặc cây quất.
 - b) Mua cành đào và không mua cây quất.
 - c) Không mua cành đào và không mua cây quất.
 - d) Mua cây quất và không mua cành đào.
- 14 Một nhóm 30 bệnh nhân có 24 người điều trị bệnh X, có 12 người điều trị cả bệnh X và bệnh Y, có 26 người điều trị ít nhất một trong hai bệnh X hoặc Y. Chọn ngẫu nhiên một bệnh nhân. Tính xác suất để người đó:
 - a) Điều trị bệnh Y.
 - b) Điều trị bệnh Y và không điều trị bệnh X.
 - c) Không điều trị cả hai bệnh X và Y.
- 15 Một nhà xuất bản phát hành hai cuốn sách A và B. Thống kê cho thấy có 50% người mua sách A; 70% người mua sách B; 30% người mua cả sách A và sách B. Chọn ngẫu nhiên một người mua. Tính xác suất để:
 - a) Người mua đó mua ít nhất một trong hai sách A hoặc B;
 - b) Người mua đó không mua cả sách A và sách B.
- 16 Một dãy phố gồm 40 gia đình, trong đó 23 gia đình có điện thoại thông minh, 18 gia đình có laptop và 26 gia đình có ít nhất một trong hai thiết bị này. Chọn ngẫu nhiên một gia đình trong dãy phố. Tính xác suất để gia đình đó:
 - a) Có điện thoại thông minh và laptop.
 - b) Có điện thoại thông minh nhưng không có laptop.

c) Không có cả điện thoại thông minh và laptop.

- 17** Tại các trường trung học phổ thông của một tỉnh, thống kê cho thấy có 63% giáo viên môn Toán tham khảo bộ sách giáo khoa A, 56% giáo viên môn Toán tham khảo bộ sách giáo khoa B và 28,5% giáo viên môn Toán tham khảo cả hai bộ sách giáo khoa A và B. Tính tỉ lệ giáo viên môn Toán các trường trung học phổ thông của tỉnh đó không tham khảo cả hai bộ sách giáo khoa A và B.

D // **BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

Câu 1. Cho hai biến cố A và B . Biến cố " A hoặc B xảy ra" được gọi là

- A.** Biến cố giao của A và B .
B. Biến cố đối của A .
C. Biến cố hợp của A và B .
D. Biến cố đối của B .

Câu 2. Cho hai biến cố A và B . Biến cố " Cả A và B đều xảy ra" được gọi là

- A.** Biến cố giao của A và B .
B. Biến cố đối của A .
C. Biến cố hợp của A và B .
D. Biến cố đối của B .

Câu 3. Nếu A và B là hai biến cố xung khắc thì $P(A \cup B)$ bằng

- A.** $P(A) \cdot P(B)$. **B.** $P(A) - P(B)$. **C.** $P(A) + P(A \cap B)$. **D.** $P(A) + P(B)$.

Câu 4. Nếu A và B là hai biến cố của cùng một phép thử thì $P(A \cup B)$ bằng

- A.** $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
B. $P(A) - P(B) - P(A \cap B)$.
C. $P(A) \cdot P(B) - P(A \cap B)$.
D. $P(A) \cdot P(B) + P(A \cap B)$.

Câu 5. Một hộp có 10 viên bi màu hồng và 14 viên bi màu vàng, các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy ngẫu nhiên hai viên bi. Xét các biến cố:

P : "Hai viên bi được lấy ra có màu hồng";

Q : "Hai viên bi được lấy ra có màu vàng".

Khi đó, biến cố hợp của hai biến cố P và Q là:

- A.** "Hai viên bi được lấy ra chỉ có màu hồng". **B.** "Hai viên bi được lấy ra có cùng màu".
C. "Hai viên bi được lấy ra chỉ có màu vàng". **D.** "Hai viên bi được lấy ra có màu khác nhau".

Câu 6. Gieo 2 con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố “Tích số chấm xuất hiện là số lẻ”. Biến cố nào sau đây xung khắc với biến cố A ?

- A.** “Xuất hiện hai mặt có cùng số chấm”.
- B.** “Tổng số chấm xuất hiện là số lẻ”.
- C.** “Xuất hiện ít nhất một mặt có số chấm là số lẻ”.
- D.** “Xuất hiện hai mặt có số chấm khác nhau”.

Câu 7. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên từ 1 đến 20 . Xét các biến cố A : "Số được chọn chia hết cho 3"; B : "Số được chọn chia hết cho 4 ". Khi đó biến cố $A \cap B$ là

- A.** $\{3; 4; 12\}$. **B.** $\{3; 4; 6; 8; 9; 12; 15; 16; 18; 20\}$.
C. $\{12\}$. **D.** $\{3; 6; 9; 12; 15; 18\}$.

Câu 8. Một hộp có 30 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 30 . Lấy ngẫu nhiên một tấm thẻ từ hộp. Xét các biến cố sau:

P : "Số ghi trên thẻ được lấy là số chia hết cho 2"

Q : "Số ghi trên thẻ được lấy là số chia hết cho 4 "

Biến cố $P \cap Q$ là

- A. "Số ghi trên thẻ được lấy là số chia hết cho 8".
- B. "Số ghi trên thẻ được lấy là số chia hết cho 2".
- C. "Số ghi trên thẻ được lấy là số chia hết cho 6".
- D. "Số ghi trên thẻ được lấy là số chia hết cho 4".

Câu 9. Cho $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$. Biết A, B là hai biến cố xung khắc, thì $P(B)$ bằng

- A. $\frac{1}{8}$.
- B. $\frac{1}{4}$.
- C. $\frac{3}{4}$.
- D. $\frac{1}{3}$.

Câu 10. Cho A là một biến cố liên quan phép thử T . Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A. $P(A) = 0 \Leftrightarrow A = \Omega$.
- B. $P(A)$ là số nhỏ hơn 1.
- C. $P(A)$ là số lớn hơn 0.
- D. $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

Câu 11. Trên giá sách có 4 quyển sách toán, 3 quyển sách lý, 2 quyển sách hóa. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách. Tính xác suất để 3 quyển lấy ra có ít nhất 1 quyển là môn toán.

- A. $\frac{2}{7}$.
- B. $\frac{1}{21}$.
- C. $\frac{37}{42}$.
- D. $\frac{5}{42}$.

Câu 12. Một tổ có 7 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 người. Tính xác suất sao cho 2 người được chọn có ít nhất một nữ.

- A. $\frac{2}{15}$.
- B. $\frac{7}{15}$.
- C. $\frac{8}{15}$.
- D. $\frac{1}{15}$.

Câu 13. Lấy ra ngẫu nhiên 2 quả bóng từ một hộp chứa 5 quả bóng xanh và 4 quả bóng đỏ có kích thước và khối lượng như nhau. Xác suất của biến cố "Hai bóng lấy ra có cùng màu" là

- A. $\frac{1}{9}$.
- B. $\frac{2}{9}$.
- C. $\frac{4}{9}$.
- D. $\frac{5}{9}$.

Câu 14. Một hộp chứa sáu quả cầu trắng và bốn quả cầu đen. Lấy ngẫu nhiên đồng thời bốn quả. Tính xác suất sao cho có ít nhất một quả màu trắng?

- A. $\frac{209}{210}$.
- B. $\frac{8}{105}$.
- C. $\frac{1}{21}$.
- D. $\frac{1}{210}$.

Câu 15. Gieo một con súc xắc cân đối và đồng chất hai lần. Xác suất để ít nhất một lần xuất hiện mặt sáu chấm là

- A. $\frac{6}{36}$.
- B. $\frac{8}{36}$.
- C. $\frac{12}{36}$.
- D. $\frac{11}{36}$.

Câu 16. Một lô hàng có 20 sản phẩm, trong đó 4 phế phẩm. Lấy tùy ý 6 sản phẩm từ lô hàng đó. Hãy tính xác suất để trong 6 sản phẩm lấy ra có không quá 1 phế phẩm.

- A. $\frac{637}{969}$.
- B. $\frac{7}{9}$.
- C. $\frac{91}{285}$.
- D. $\frac{91}{323}$.

Câu 17. Trong nhóm 60 học sinh có 30 học sinh thích học Toán, 25 học sinh thích học Lý và 10 học sinh thích cả Toán và Lý. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh từ nhóm này. Xác suất để được học sinh này thích học ít nhất là một môn Toán hoặc Lý?

- A. $\frac{1}{2}$.
- B. $\frac{4}{5}$.
- C. $\frac{3}{4}$.
- D. $\frac{2}{3}$.

Câu 18. Một lớp học gồm 50 bạn, trong đó có 20 bạn thích chơi bóng đá, 28 bạn thích chơi bóng rổ và 8 bạn thích chơi cả hai môn. Gặp ngẫu nhiên 1 học sinh trong lớp. Xác suất của biến cố "Bạn được gặp thích chơi bóng đá hoặc bóng rổ" là

- A. 0,16.
- B. 0,96.
- C. 0,48.
- D. 0,8.

Câu 19. Một hộp đựng 10 viên bi đỏ được đánh số từ 1 đến 10 và 15 viên bi xanh được đánh số từ 1 đến 15. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ trong hộp. Gọi

A là biến cố "Viên bi lấy ra có màu đỏ", B là biến cố "Viên bi lấy ra ghi số chẵn". Xác suất của biến cố $A \cup B$ là

A. 0,4.

B. 0,88.

C. 0,48.

D. 0,68.

Câu 20. Có 12 người xếp thành một hàng dọc (vị trí của mỗi người trong hàng là cố định). Chọn ngẫu nhiên 3 người trong hàng. Tính xác suất để 3 người được chọn không có 2 người đứng nào cạnh nhau.

A. $\frac{6}{11}$.

B. $\frac{55}{126}$.

C. $\frac{21}{55}$.

D. $\frac{7}{110}$.

—HẾT—

§2. CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 BIẾN CỐ ĐỘC LẬP

Định nghĩa: Cho hai biến cố A và B . Hai biến cố A và B được gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố kia.

Chú ý: Nếu A, B là hai biến cố độc lập thì mỗi cặp biến cố sau cũng độc lập: A và $\bar{B}$; $\bar{A}$ và B ; $\bar{A}$ và $\bar{B}$.

2 CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT

Nếu hai biến cố A và B là độc lập thì

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

! Nếu $P(AB) \neq P(A) \cdot P(B)$ thì A và B không độc lập.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Biến cố độc lập

Ví dụ 1. Gieo hai đồng xu cân đối. Xét các biến cố A : “Cả hai đồng xu đều ra mặt sấp”, B : “Có ít nhất một đồng xu ra mặt sấp”. Hỏi A và B có độc lập hay không?

Ví dụ 2. Một hộp đựng 4 viên bi màu đỏ và 5 viên bi màu xanh, có cùng kích thước và khối lượng.

- a) Bạn Minh lấy ngẫu nhiên một viên bi, ghi lại màu của viên bi được lấy ra rồi trả lại viên bi vào hộp. Tiếp theo, bạn Hùng lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp đó. Xét hai biến cố sau:
 A : “Minh lấy được viên bi màu đỏ”;
 B : “Hùng lấy được viên bi màu xanh”.
 Chứng tỏ rằng hai biến cố A và B độc lập.

- b) Bạn Sơn lấy ngẫu nhiên một viên bi và không trả lại vào hộp. Tiếp theo, bạn Tùng lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp đó. Xét hai biến cố sau:
 C : “Sơn lấy được viên bi màu đỏ”;
 D : “Tùng lấy được viên bi màu xanh”.
 Chứng tỏ rằng hai biến cố C và D không độc lập.

DT 2 Công thức nhân xác suất của hai biến cố độc lập

Ví dụ 3. Cho hai biến cố độc lập A và B cùng liên quan đến một phép thử thỏa mãn $P(A) = 0,2$ và $P(B) = 0,3$. Tính xác suất của các biến cố: $\bar{A}$, $\bar{B}$, AB , $\bar{A}\bar{B}$, $A\bar{B}$ và $\bar{A}B$.

Ví dụ 4. Hai bệnh nhân cùng nhiễm một loại virus. Xác suất biến chứng nặng của bệnh nhân thứ nhất và bệnh nhân thứ hai lần lượt là 0,2 và 0,25; khả năng bị biến chứng nặng của hai bệnh nhân là

độc lập. Tính xác suất của các biến cố:

- a) M : “Bệnh nhân thứ nhất và bệnh nhân thứ hai đều bị biến chứng nặng”;
- b) N : “Bệnh nhân thứ nhất không bị biến chứng nặng và bệnh nhân thứ hai bị biến chứng nặng”;
- c) Q : “Bệnh nhân thứ nhất bị biến chứng nặng và bệnh nhân thứ hai không bị biến chứng nặng”;
- d) R : “Bệnh nhân thứ nhất và bệnh nhân thứ hai đều không bị biến chứng nặng”;
- e) S : “Có ít nhất một trong hai bệnh nhân bị biến chứng nặng”.

≡ Ví dụ 5. Có hai hộp chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất chứa 7 quả cầu màu đỏ và 5 quả cầu màu xanh; hộp thứ hai chứa 6 quả cầu màu đỏ và 4 quả cầu màu xanh. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp 1 quả cầu. Tính xác suất sao cho hai quả cầu lấy ra cùng màu đỏ.

≡ Ví dụ 6. Một phần mềm chuyển đổi ngôn ngữ có xác suất dịch chính xác một câu Tiếng Anh sang Tiếng Việt là 0,8. Hỏi nếu phần mềm đó dịch một văn bản 100 câu từ Tiếng Anh sang Tiếng Việt thì xác suất dịch sai hai câu là bao nhiêu?

≡ Ví dụ 7. Hai bạn An và Bình cùng tập ném bóng rổ một cách độc lập ở hai nửa sân khác nhau. Xác suất bạn An và bạn Bình ném bóng vào rổ lần lượt là 0,6 và 0,9. Trong cùng một lần ném, tính xác suất có ít nhất một bạn ném bóng vào rổ.

≡ Ví dụ 8. Hai bạn An và Bình không quen biết nhau và đều học xa nhà. Xác suất để bạn An về thăm nhà vào ngày Chủ nhật là 0,2 và của bạn Bình là 0,25. Dùng sơ đồ hình cây để tính xác suất vào ngày Chủ nhật mà

- a) cả hai bạn đều về thăm nhà.
- b) có ít nhất một bạn về thăm nhà.
- c) cả hai bạn đều không về thăm nhà.
- d) Chỉ có bạn An về thăm nhà.
- e) có đúng một bạn về thăm nhà.

≡ Ví dụ 9. Ở lúa, hạt gạo đục là tính trạng trội hoàn toàn so với hạt gạo trong. Cho cây lúa có hạt gạo đục thuần chủng thụ phấn với cây lúa có hạt gạo trong được F1 toàn hạt gạo đục. Tiếp tục cho các cây lúa F1 thụ phấn với nhau và thu được các hạt gạo mới. Lần lượt chọn ra ngẫu nhiên 2 hạt gạo mới, tính xác suất của biến cố “Có đúng 1 hạt gạo đục trong 2 hạt gạo được lấy ra”.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- 1 Có hai chuồng nuôi thỏ. Chuồng I có 5 con thỏ đen và 10 con thỏ trắng. Chuồng II có 3 con thỏ trắng và 7 con thỏ đen. Từ mỗi chuồng bắt ngẫu nhiên ra một con thỏ. Xét hai biến cố sau:
 A : “Bắt được con thỏ trắng từ chuồng I”;
 B : “Bắt được con thỏ đen từ chuồng II”.
 Chứng tỏ rằng hai biến cố A và B độc lập.
- 2 Có hai chuồng nuôi gà. Chuồng I có 9 con gà mái và 3 con gà trống. Chuồng II có 3 con gà mái và 6 con gà trống. Bắt ngẫu nhiên một con gà của chuồng I để đem bán rồi dồn các con gà còn lại của chuồng I vào chuồng II. Sau đó bắt ngẫu nhiên một con gà của chuồng II. Xét hai biến cố sau:
 E : “Bắt được con gà trống từ chuồng I”;
 F : “Bắt được con gà mái từ chuồng II”.
 Chứng tỏ rằng hai biến cố E và F không độc lập.
- 3 Cho $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,5$; $P(A \cup B) = 0,6$. Hỏi A và B có độc lập hay không?

- 4** Gieo hai con xúc xắc cân đối. Xét các biến cố:
 A : “Có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 5 chấm”;
 B : “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 7”.
 Chứng tỏ rằng A và B không độc lập.
- 5** Có 3 hộp I, II, III. Mỗi hộp chứa ba tấm thẻ đánh số 1, 2, 3. Từ mỗi hộp rút ngẫu nhiên một tấm thẻ. Xét các biến cố sau:
 A : “Tổng các số ghi trên ba tấm thẻ là 6”;
 B : “Ba tấm thẻ có ghi số bằng nhau”.
 a) Tính $P(A), P(B)$.
 b) Hỏi A, B có độc lập không?
- 6** Cho A và B là hai biến cố độc lập với nhau.
 a) Biết $P(A) = 0,4$ và $P(\bar{A}B) = 0,3$. Tính xác suất của các biến cố B và $A \cup B$.
 b) Biết $P(\bar{A}B) = 0,4$ và $P(A \cup B) = 0,9$. Tính xác suất của các biến cố A, B và AB .
- 7** Cho A, B là hai biến cố độc lập và $P(AB) = 0,1$; $P(\bar{A}\bar{B}) = 0,4$. Tìm $P(A \cup \bar{B})$.
- 8** Một đề thi trắc nghiệm gồm 50 câu, mỗi câu có 4 phương án trả lời trong đó chỉ có 1 phương án đúng, mỗi câu trả lời đúng được 0,2 điểm. Một thí sinh làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên 1 trong 4 phương án của câu. Tính xác suất để thí sinh đó được 6 điểm.
- 9** Hai đội A và B thi đấu trận chung kết bóng chuyền nữ chào mừng ngày 20 - 11 (trận chung kết tối đa 5 hiệp). Đội nào thắng 3 hiệp trước thì thắng trận. Xác suất để đội A thắng mỗi hiệp là 0,4 (không có hòa). Tính xác suất P để đội A thắng trận.

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho A và B là hai biến cố độc lập. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hai biến cố A và $\bar{B}$ không độc lập. B. Hai biến cố $\bar{A}$ và $\bar{B}$ không độc lập.
 C. Hai biến cố $\bar{A}$ và B độc lập. D. Hai biến cố A và $A \cup B$ độc lập.

Câu 2. Cho A và B là hai biến cố độc lập. Biết $P(A) = 0,4$ và $P(B) = 0,5$. Xác suất của biến cố $A \cup B$ là

- A. 0,9. B. 0,7. C. 0,5. D. 0,2.

Câu 3. Cho A và B là hai biến cố độc lập. Biết $P(A) = 0,4$ và $P(AB) = 0,2$. Xác suất của biến cố B là

- A. 0,5. B. 0,6. C. 0,7. D. 0,8.

Câu 4. Cho A và B là hai biến cố độc lập. Biết $P(A) = 0,4$ và $P(AB) = 0,2$. Xác suất của biến cố $A \cup B$ là

- A. 0,6. B. 0,7. C. 0,8. D. 0,9.

Câu 5. Hai người độc lập nhau ném bóng vào rổ. Mỗi người ném vào rổ của mình một quả bóng. Biết rằng xác suất ném bóng trúng vào rổ của từng người tương ứng là $\frac{1}{5}$ và $\frac{2}{7}$. Gọi A là biến cố: “Cả hai cùng ném bóng trúng vào rổ”. Khi đó, xác suất của biến cố A là bao nhiêu?

- A. $P(A) = \frac{1}{25}$. B. $P(A) = \frac{4}{49}$. C. $P(A) = \frac{12}{35}$. D. $P(A) = \frac{2}{35}$.

Câu 6. Xác suất thực hiện thành công một thí nghiệm là 0,7. Thực hiện thí nghiệm đó 2 lần liên tiếp

một cách độc lập với nhau. Xác suất của biến cố "Cả 2 lần thí nghiệm đều thành công" là

- A. 0,7. B. 0,21. C. 0,49. D. 1,4.

Câu 7. Trong phòng làm việc có hai máy tính hoạt động độc lập với nhau, khả năng hoạt động tốt trong ngày của hai máy này tương ứng là 0,75 và 0,85. Xác suất để cả hai máy hoạt động không tốt trong ngày là

- A. 0,0675. B. 0,0375. C. 0,0575. D. 0,0475.

Câu 8. Xác suất thực hiện thành công một thí nghiệm là 0,7. Thực hiện thí nghiệm đó 2 lần liên tiếp một cách độc lập với nhau. Xác suất của biến cố "Lần thứ nhất thí nghiệm thất bại, lần thứ hai thí nghiệm thành công" là:

- A. 0,21. B. 0,09. C. 1. D. 0,42.

Câu 9. Ba xạ thủ A_1, A_2, A_3 độc lập với nhau cùng nổ súng bắn vào mục tiêu. Biết rằng xác suất bắn trúng mục tiêu của A_1, A_2, A_3 tương ứng là 0,7; 0,6 và 0,5. Tính xác suất để có ít nhất một xạ thủ bắn trúng.

- A. 0,45. B. 0,21. C. 0,94. D. 0,75.

Câu 10. Có hai hộp chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất chứa 7 quả cầu màu đỏ và 5 quả cầu màu xanh; hộp thứ hai chứa 6 quả cầu màu đỏ và 4 quả cầu màu xanh. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp 1 quả cầu. Xác suất sao cho hai quả cầu lấy ra cùng màu đỏ bằng

- A. $\frac{7}{20}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{3}{20}$. D. $\frac{2}{5}$.

—HẾT—