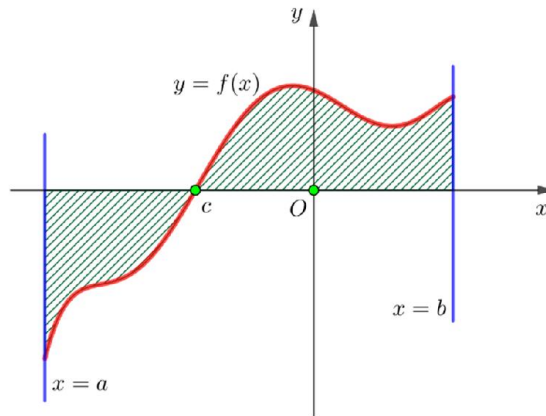


MỨC ĐỘ NHẬN BIẾT

- Câu 1.** (Liên trường Quỳnh Lưu - Hoàng Mai - Nghệ An - 2021) Cho $\int_0^6 f(x) dx = 10$ và $\int_0^4 f(x) dx = 7$ thì $\int_4^6 f(x) dx$ bằng:
- A. -17 . B. 17 . C. 3 . D. -3 .
- Câu 2.** (Liên trường Quỳnh Lưu - Hoàng Mai - Nghệ An - 2021) Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5x^4 - 6x^2 + 1$ là
- A. $\frac{x^4}{4} + 2x^3 - 2x + C$. B. $x^5 - 2x^3 + x + C$.
C. $20x^5 - 12x^3 + x + C$. D. $20x^3 - 12x + C$.
- Câu 3.** (Liên trường Quỳnh Lưu - Hoàng Mai - Nghệ An - 2021) $\int_{-3}^0 \frac{1}{1-x} dx$ bằng
- A. $2\ln 2$. B. $-2\ln 2$. C. $2\ln 2 - 1$. D. $\ln 2$.
- Câu 4.** Tính tích phân $I = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$
- A. $I = \frac{1}{e}$ B. $I = \frac{1}{e} + 1$ C. $I = 1$ D. $I = e$
- Câu 5.** (Liên trường huyện Quảng Xương - Thanh Hóa - 2021) Giả sử f là hàm liên tục trên khoảng K và a, b, c là ba số bất kì trên khoảng K . Khẳng định nào sau đây sai?
- A. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$. B. $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx, c \in (a, b)$.
C. $\int_a^b f(x) dx = 1$. D. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.
- Câu 6.** (Chuyên Thoại Ngọc Hầu - An Giang - 2021) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = (1-2x)^5$ là:
- A. $(1-2x)^6 + C$. B. $-\frac{1}{2}(1-2x)^6 + C$. C. $-\frac{1}{12}(1-2x)^6 + C$. D. $5(1-2x)^6 + C$.
- Câu 7.** (Chuyên Thoại Ngọc Hầu - An Giang - 2021) Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 5$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2\sin x] dx$
- A. $I = 5 + \frac{\pi}{2}$. B. $I = 7$. C. $I = 5 + \pi$. D. $I = 3$.
- Câu 8.** (Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2021) Biết $\int_1^8 f(x) dx = -2$; $\int_1^4 f(x) dx = 3$; $\int_1^4 g(x) dx = 7$. Mệnh đề nào sau đây sai?
- A. $\int_4^8 f(x) dx + \int_1^4 g(x) dx = 8$. B. $\int_1^4 [f(x) + g(x)] dx = 10$.

C. $\int_4^8 f(x) dx = -5$. D. $\int_1^4 [4f(x) - 2g(x)] dx = -2$.

Câu 9. (Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2021) Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ trong hình dưới đây (phần gạch sọc) có diện tích S bằng



A. $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$. B. $\int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$.
C. $-\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$. D. $-\int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$.

Câu 10. (Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2021) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ là

A. $\frac{1}{2}e^x + C$. B. $\frac{1}{2}e^{2x} + C$. C. $2e^{2x} + C$. D. $2e^x + C$.

Câu 11. (Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - 2021) Cho hàm số $f(x)$ có $f(2) = 2$, $f(3) = 5$; hàm số $f'(x)$ liên tục trên $[2; 3]$. Khi đó $\int_2^3 f'(x) dx$ bằng

A. 3. B. 10. C. -3. D. 7.

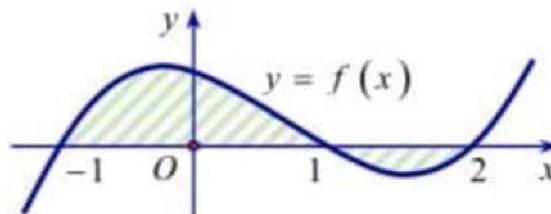
Câu 12. (Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - 2021) Họ tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$ là

A. $2 \sin 2x + C$. B. $-\frac{1}{2} \sin 2x + C$. C. $\frac{1}{2} \sin 2x + C$. D. $-2 \sin 2x + C$.

Câu 13. (Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - 2021) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{4x-3}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là

A. $2 \ln(4x-3) + C$. B. $\frac{1}{2} \ln(4x-3) + C$. C. $\frac{1}{4} \ln(4x-3) + C$. D. $4 \ln(4x-3) + C$.

Câu 14. (Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - 2021) Gọi S là diện tích miền hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ dưới đây, với $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.



Công thức tính S là

A. $S = -\int_{-1}^2 f(x) dx$. B. $S = \left| \int_{-1}^2 f(x) dx \right|$.

C. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$.

D. $S = \int_{-1}^2 f(x) dx$.

Câu 15. (Chuyên KHTN - 2021) $\int (2x + \cos x) dx$ bằng:

A. $2x^2 - \sin x + C$.

B. $2x^2 + \sin x + C$.

C. $x^2 - \sin x + C$.

D. $x^2 + \sin x + C$.

Câu 16. (Chuyên KHTN - 2021) Cho $\int_1^3 f(x) dx = -2$ và $\int_3^5 f(x) dx = 5$. Tính tích phân $\int_1^5 f(x) dx$

A. 7.

B. 3.

C. -7.

D. -10.

Câu 17. (Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - 2021) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $y = e^x + \cos x$ là

A. $-e^x - \sin x + C$.

B. $e^x - \sin x + C$.

C. $e^x + \sin x + C$.

D. $-e^x + \sin x + C$.

Câu 18. (Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - 2021) Biết $\int_0^3 f(x) dx = 2$ và $\int_0^4 f(x) dx = 3$. Giá trị

$\int_3^4 f(x) dx$ bằng

A. -1.

B. 5.

C. -5.

D. 1.

Câu 19. (Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - 2021) Gọi (D) là hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y = \frac{x}{4}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$. Thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục Ox được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $\pi \int_1^4 \frac{x}{16} dx$.

B. $\pi \int_1^4 \frac{x}{4} dx$.

C. $\pi \int_1^4 \left(\frac{x}{4}\right)^2 dx$.

D. $\pi \int_1^4 \frac{x^2}{4} dx$.

Câu 20. (Chuyên Quốc Học Huế - 2021) Thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 1$; $x = 4$ quanh trục hoành được tính bởi công thức nào dưới đây?

A. $V = \pi^2 \int_1^4 x dx$.

B. $V = \pi \int_1^4 \sqrt{x} dx$.

C. $V = \pi \int_1^4 x dx$.

D. $V = \int_1^4 |\sqrt{x}| dx$.

Câu 21. (Chuyên Quốc Học Huế - 2021) Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x+4}$ trên $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{4}{5}\right\}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{\ln 5} \ln |5x+4| + C$.

B. $\int f(x) dx = \ln |5x+4| + C$.

C. $\int f(x) dx = \frac{1}{5} \ln |5x+4| + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{5} \ln (5x+4) + C$.

Câu 22. (Chuyên Quang Trung - Bình Phước - 2021) Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ với mọi hằng số $k \in \mathbb{R}$.

B. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

C. $\int f'(x) dx = f(x) + C$ với mọi hàm $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

D. $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$

Câu 23. (Chuyên Quang Trung - Bình Phước - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $[a, b]$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Chọn phương án đúng nhất.

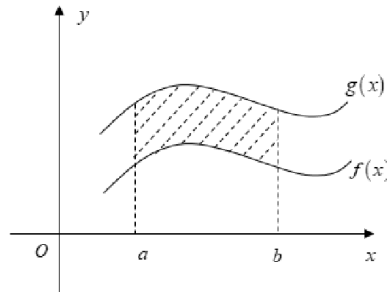
A. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

B. $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$

C. $\int_a^b f(x)dx = F(b) + F(a)$

D. $\int_a^b f(x)dx = F^2(b) - F^2(a)$

Câu 24. (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội- 2021) Cho hình (H) được giới hạn như hình vẽ



Diện tích của hình (H) được tính bởi công thức nào dưới đây?

A. $\int_a^b [g(x) - f(x)]dx$. B. $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$.

C. $\int_a^b f(x)dx$. D. $\int_a^b g(x)dx$.

Câu 25. (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội- 2021) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^2 f(x)dx = -1$ và $\int_1^2 f(x)dx = 4$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. 5. B. -3. C. -5. D. 3.

Câu 26. (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội- 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;3]$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $[-2;3]$ và $F(3) = -2; F(-2) = -4$. Tính $I = 2 \int_{-2}^3 f(x)dx$.

A. 2. B. 4. C. -4. D. -2

Câu 27. (Chuyên Lê Quý Đôn - Điện Biên - 2021) Cho $I = \int_0^2 f(x)dx = 3$. Khi đó $J = \int_0^2 [4f(x) - 3]dx$ bằng:

A. 6. B. 8. C. 4. D. 2.

Câu 28. (Chuyên Lê Quý Đôn - Điện Biên - 2021) Kết quả $\int x^3 dx$ bằng

A. $3x^2 + C$. B. $\frac{1}{4}x^4 + C$. C. $\frac{1}{4}x^4$. D. $4x^4 + C$.

Câu 29. (Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - 2021) Biết $F(x) = \cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_0^\pi [3f(x) + 2]dx$ bằng

A. 2 . B. 2π . C. $2\pi - 6$. D. -4 .

Câu 30. (Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - 2021) Biết $\int_1^3 f(x)dx = 5$ và $\int_1^3 g(x)dx = -7$. Giá trị của

$\int_1^3 [3f(x) - 2g(x)]dx$ bằng

A. 29 B. -29 C. 1 D. -31

Câu 31. (Chuyên ĐHSPT Hà Nội - 2021) Biết $I = \int_1^2 f(x) dx = 2$. Giá trị của $\int_1^2 [f(x) + 2x] dx$ bằng

- A.** 1. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 32. (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An - 2021) Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 3x$ là

- A.** $-\frac{1}{3}\cos 3x+C.$ **B.** $-\cos 3x+C.$ **C.** $\cos 3x+C.$ **D.** $\frac{1}{3}\cos 3x+C.$

Câu 33. (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An - 2021) Biết $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}$ và $\int_0^1 g(x)dx = \frac{4}{3}$. Khi đó

$$\int_0^1 (g(x) - f(x)) dx \text{ bằng}$$

- A.** $\frac{5}{3}$. **B.** $-\frac{5}{3}$. **C.** -1 . **D.** 1 .

Câu 34. (THPT Quế Võ 1 - Bắc Ninh - 2021) Mệnh đề nào sau đây đúng.

- A.** $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C.$ **B.** $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \cot x + C.$
- C.** $\int \cos x dx = -\sin x + C.$ **D.** $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C.$

Câu 35. (THPT Quế Võ 1 - Bắc Ninh - 2021) Khẳng định nào sau đây đúng với mọi hàm f, g liên tục trên K và a, b là các số bất kỳ thuộc K ?

- $$\begin{aligned} \text{A. } \int_a^b [f(x) \cdot g(x)] dx &= \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx. \\ \text{B. } \int_a^b [f(x) + 2g(x)] dx &= \int_a^b f(x) dx + 2 \int_a^b g(x) dx. \\ \text{C. } \int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} dx &= \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}. \\ \text{D. } \int_a^b [f^2(x)] dx &= \left[\int_a^b f(x) dx \right]^2. \end{aligned}$$

Câu 36. (THPT Quế Võ 1 - Bắc Ninh - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$\text{có } \int_0^1 f(x) dx = 2, \int_1^3 f(x) dx = 6 \text{ Tính } \int_0^3 f(x) dx.$$

- A.** $I = 12$. **B.** $I = 8$. **C.** $I = 6$. **D.** $I = 4$.

Câu 37. (THPT Quốc Oai - Hà Nội - 2021) Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A.** $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx.$
- B.** $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ với mọi hằng số $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$
- C.** $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$
- D.** $\int f(x).g(x) dx = \int f(x) dx. \int g(x) dx.$

Câu 38. (THPT Quốc Oai - Hà Nội - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = f(x)$. Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

- A. $\int_a^b f(x) dx = F(a) + F(b)$.
 B. $\int_a^b f(x) dx = F^2(b) - F^2(a)$.
 C. $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.
 D. $\int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b)$.

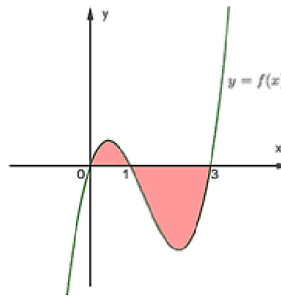
Câu 39. (THPT Quảng Xương 1-Thành Hóa - 2021) Cho C là một hằng số. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. $\int e^x dx = e^x - C$.
 B. $\int \sin x dx = \cos x + C$.
 C. $\int 2x dx = x^2 + C$.
 D. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

Câu 40. (THPT Quảng Xương 1-Thành Hóa - 2021) Nếu $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^3 f(x) dx = -4$ thì $\int_1^3 f(x) dx$ bằng

- A. 6.
 B. -6.
 C. 2.
 D. -2.

Câu 41. (THPT Quảng Xương 1-Thành Hóa - 2021) Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$. Diện tích S của hình phẳng (phần tô đậm trong hình vẽ) là



- A. $S = -\int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx$.
 B. $S = \int_0^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx$.
 C. $S = \int_0^3 f(x) dx$.
 D. $S = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx$.

Câu 42. (THPT PTNK Cơ sở 2 - TP.HCM - 2021) Hàm số $F(x) = 5x^3 + 4x^2 - 7x + 120$ là nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

- A. $f(x) = 5x^2 + 4x - 7$.
 B. $f(x) = 15x^2 + 8x - 7$.
 C. $f(x) = 5x^2 + 4x + 7$.
 D. $f(x) = \frac{5x^2}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{7x^2}{2}$.

Câu 43. (THPT PTNK Cơ sở 2 - TP.HCM - 2021) Một nguyên hàm của hàm số $y = \cos 2x$ là

- A. $2 \sin 2x$.
 B. $-2 \sin 2x$.
 C. $\frac{1}{2} \sin 2x$.
 D. $-\frac{1}{2} \sin 2x$.

Câu 44. (THPT Phan Đình Phùng - Quảng Bình - 2021) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^{2021}$ trên $\mathbb{R}$.

- A. $\int f(x) dx = \frac{x^{2022}}{2022}$.
 B. $\int f(x) dx = 2021x^{2020} + C$.
 C. $\int f(x) dx = \frac{x^{2022}}{2022} + C$.
 D. $\int f(x) dx = \frac{x^{2021}}{2021} + C$.

- Câu 45. (THPT Phan Đình Phùng - Quảng Bình - 2021)** Nếu $\int_0^1 f(x)dx = 4$ và $\int_0^1 g(x)dx = 3$ thì $\int_0^1 [2f(x) + 3g(x)]dx$ bằng
- A. 7. B. 13. C. 17. D. 11.
- Câu 46. (THPT Nguyễn Tất Thành - Hà Nội - 2021)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 2]$. Biết $\int_0^2 f(x)dx = 5$ và $\int_1^2 f(t)dt = 3$. Tính $I = \int_0^1 f(x)dx$.
- A. $I = 3$. B. $I = 2$. C. $I = 5$. D. $I = 1$.
- Câu 47. (THPT Nguyễn Tất Thành - Hà Nội - 2021)** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3x-2}$ trên khoảng $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$. Tìm $F(x)$, biết $F(1) = 5$.
- A. $F(x) = \ln(3x-2) + 5$. B. $F(x) = 3\ln(3x-2) + 5$.
 C. $F(x) = \frac{-3}{(3x-2)^2} + 8$. D. $F(x) = \frac{1}{3}\ln(3x-2) + 5$.
- Câu 48. (THPT Nguyễn Tất Thành - Hà Nội - 2021)** Cho biết $\int_0^1 f(x)dx = 2$ và $\int_0^1 g(x)dx = 3$. Tính $I = \int_0^1 [4f(x) - g(x)]dx$?
- A. $I = 3$. B. $I = 1$. C. $I = 11$. D. $I = 5$.
- Câu 49. (THPT Nguyễn Đức Cảnh - Thái Bình - 2021)** Biết $\int_0^3 f(x)dx = \frac{5}{3}$ và $\int_0^4 f(t)dt = \frac{3}{5}$. Tính $\int_3^4 f(u)du$
- A. $\frac{14}{15}$. B. $-\frac{16}{15}$. C. $-\frac{17}{15}$. D. $\frac{16}{15}$.
- Câu 50. (THPT Nguyễn Đức Cảnh - Thái Bình - 2021)** Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $f(x) = \sqrt{2x+1}$, Ox , $x = 0$, $x = 1$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức?
- A. $V = \pi \int_0^1 \sqrt{2x+1}dx$. B. $V = \int_0^1 (2x+1)dx$. C. $V = \pi \int_0^1 (2x+1)dx$. D. $V = \int_0^1 \sqrt{2x+1}dx$.
- Câu 51. (THPT Nguyễn Đức Cảnh - Thái Bình - 2021)** Nếu $\int_0^2 f(x)dx = 6$ thì $\int_0^2 3f(x)dx$ bằng
- A. 3. B. 6. C. 8. D. 18.
- Câu 52. (THPT Mai Anh Tuấn - Thanh Hóa - 2021)** Khẳng định nào sau đây là đúng
- A. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = -\cot x + C$. B. $\int a^x dx = a^x \cdot \ln a + C$.
 C. $\int e^x dx = \frac{1}{e^{-x}} + C$. D. $\int \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{x^2} + C$.

Câu 53. (THPT Mai Anh Tuấn - Thanh Hóa - 2021) Tính tích phân $\int_{-1}^2 (-x^3 + 2) dx$ bằng

A. $-\frac{9}{4}$. B. $\frac{9}{4}$. C. $\frac{7}{4}$. D. $-\frac{7}{4}$.

Câu 54. (THPT Mai Anh Tuấn - Thanh Hóa - 2021) Biết $\int_0^2 f(x) dx = 4$. Tính tích phân $I = \int_0^2 [2x + f(x)] dx$ bằng

A. $I = 6$. B. $I = 12$. C. $I = 8$. D. $I = 4$.

Câu 55. (THPT Mai Anh Tuấn - Thanh Hóa - 2021) Cho hàm số $f(x) = x + 1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ?

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{2}x^2 + x + C$. B. $\int f(x) dx = 2x^2 + x + C$.
C. $\int f(x) dx = x^2 + x + C$. D. $\int f(x) dx = x^2 + C$.

Câu 56. (THPT Hậu Lộc 4 - Thanh Hóa - 2021) Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 - 1$ là

A. $x^3 - x + C$. B. $6x + C$. C. $x^3 + C$. D. $\frac{x^3}{3} + x + C$.

Câu 57. (THPT Hậu Lộc 4 - Thanh Hóa - 2021) Biết $\int_1^5 f(x) dx = 4$. Giá trị của $\int_1^5 3f(x) dx$ bằng.

A. 7. B. $\frac{4}{3}$. C. 64. D. 12.

Câu 58. (THPT Đồng Quan - Hà Nội - 2021) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ là

A. $\frac{1}{2} \ln^2 x + C$. B. $\ln^2 x + C$. C. $\ln(\ln x) + C$. D. $\frac{1}{2} \ln^2 x + \ln x + C$.

Câu 59. (THPT Đồng Quan - Hà Nội - 2021) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2(\cos 2x + x)$ là

A. $-\frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} x^2 + C$. B. $-\sin 2x + x^2 + C$.
C. $\frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} x^2 + C$. D. $\sin 2x + x^2 + C$.

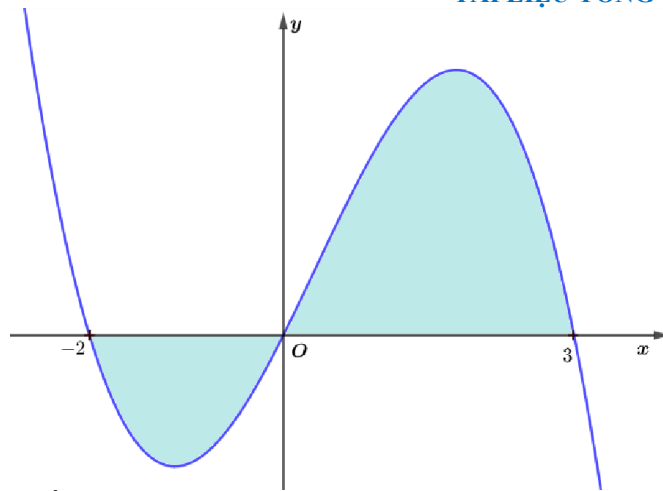
Câu 60. (THPT Đồng Quan - Hà Nội - 2021) Cho $\int_0^1 f(x) dx = -3$; $\int_1^0 g(x) dx = 2$, khi đó $\int_0^1 (f(x) + 2g(x)) dx$ bằng bao nhiêu?

A. 5. B. -7. C. 1. D. -1.

Câu 61. (THPT Lê Lợi - Thanh Hóa - 2021) Nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - x$ là

A. $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C$. B. $2x - 1 + C$. C. $x^2 + x + C$. D. $\frac{x^3}{3} - x + C$.

Câu 62. (THPT Lê Lợi - Thanh Hóa - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Diện tích hình phẳng (phần tô đậm) được tính theo công thức nào sau đây?

- A. $S = \int_{-2}^3 f(x)dx.$ B. $S = \int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^3 f(x)dx.$
 C. $S = -\int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^3 f(x)dx.$ D. $S = \int_{-2}^0 f(x)dx - \int_0^3 f(x)dx.$

Câu 63. (THPT Lê Lợi - Thanh Hóa - 2021) Cho các hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có

$$\int_{-1}^5 f(x)dx = -1; \int_{-1}^5 g(x)dx = 3. \text{ Tính } \int_{-1}^5 [f(x) + 2g(x)]dx.$$

- A. 2. B. -1. C. 1. D. 5.

Câu 64. (Sở Vĩnh Phúc - 2021) Tìm họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $y = \frac{x}{x+1}.$

- A. $x - \ln(x+1) + C.$ B. $x - \ln|x+1| + C.$ C. $x + \ln(x+1) + C.$ D. $x + \ln|x+1| + C.$

Câu 65. (Sở Lào Cai - 2021) Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. $\left(\int f(x)dx\right)' = -f'(x).$ B. $\left(\int f(x)dx\right)' = f'(x).$
 C. $\left(\int f(x)dx\right)' = -f(x).$ D. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$

Câu 66. (Sở Lào Cai - 2021) Cho $\int_1^2 f(x)dx = -1$, khi đó $\int_1^2 3f(x)dx$ bằng

- A. 2. B. -1. C. -4. D. -3.

Câu 67. (Sở Lào Cai - 2021) Tích phân $\int_0^1 e^x dx$ bằng:

- A. e. B. $e^2 - 1.$ C. $\frac{e-1}{2}.$ D. e-1.

Câu 68. (Sở Lào Cai - 2021) Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$ là:

- A. $\cot x + C.$ B. $-\tan x + C.$ C. $-\cot x + C.$ D. $\tan x + C.$

Câu 69. (Sở Hà Tĩnh - 2021) Biết $\int_1^5 f(x)dx = 4$. Giá trị của $\int_1^5 [2x - 3f(x)]dx$ bằng

- A. 13. B. -2. C. 6. D. 12.

Câu 70. (Sở Hà Tĩnh - 2021) $\int (-2x + x^3)dx$ bằng

- A. $\frac{1}{4}x^4 + C$. B. $\frac{1}{4}x^4 - x^2 + C$. C. $3x^2 - 2 + C$. D. $4x^4 + x^2 + C$.

Câu 71. (Sở Yên Bái - 2021) Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $\int 0 dx = C$ (C là hằng số). B. $\int dx = x + C$ (C là hằng số).
C. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ (C là hằng số). D. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ (C là hằng số).

Câu 72. (Sở Tuyên Quang - 2021) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ là

- A. $F(x) = \ln|2x+1| + C$. B. $F(x) = 2\ln|2x+1| + C$.
C. $F(x) = \frac{1}{2}\ln(2x+1) + C$. D. $F(x) = \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C$.

Câu 73. (Sở Tuyên Quang - 2021) Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^1 g(x) dx = 5$. Khi đó $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx$ bằng:

- A. 1 B. -3 C. -8 D. 12

Câu 74. (Sở Tuyên Quang - 2021) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + \sin x$ là

- A. $2x^2 + \cos x + C$. B. $2x^2 - \cos x + C$. C. $x^2 - \cos x + C$. D. $x^2 + \cos x + C$.

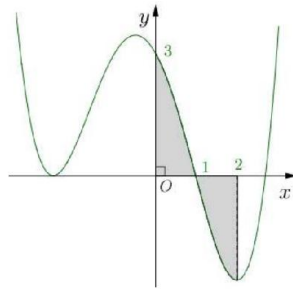
Câu 75. (THPT Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2021) Họ nguyên hàm của hàm số là?

- A. B. C. D.

Câu 76. (THPT Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2021) Cho $\int_1^2 [3f(x) + 2x] dx = 12$. Khi đó $\int_1^2 f(x) dx$ bằng

- A. B. C. D.

Câu 77. (THPT Nguyễn Công Trứ - Hà Tĩnh - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị (C) là đường cong như hình vẽ bên.



Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), trục Ox và hai đường thẳng $x=0, x=2$ (phần tô đen) là

- A. $S = -\int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$. B. $S = \int_0^2 f(x) dx$.
C. $S = \int_0^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$. D. $S = \left| \int_0^2 f(x) dx \right|$.

Câu 78. (THPT Nguyễn Công Trứ - Hà Tĩnh - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$. B. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.
 C. $\int_a^b [f(x) \cdot g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx$. D. $\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$.

Câu 79. (THPT Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2021) Biết $F(x) = \cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2f(x) dx$ bằng

A. -1. B. 3. C. $\sqrt{3}$. D. 1.

Câu 80. (THPT Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2021) Biết $\int_2^3 f(x) dx = 3$, giá trị của $\int_2^3 (f(x) + 3) dx$ bằng

A. 6. B. 3. C. 9. D. 5.

Câu 81. (THPT Lương Thế Vinh - 2021) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 4$ và $y = x - 4$ xác định bởi công thức

A. $\int_0^2 (x - x^2) dx$. B. $\int_0^1 (x^2 - x) dx$. C. $\int_0^1 (x - x^2) dx$. D. $\int_0^2 (x^2 - x) dx$.

Câu 82. (THPT Lương Thế Vinh - 2021) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^x$ là.

A. $3^x \log 3 + C$. B. $3^x \ln 3 + C$. C. $\frac{3^x}{\ln 3} + C$. D. $\frac{3^x}{\log 3} + C$.

Câu 83. (THPT Hoàng Hoa Thám - Đà Nẵng - 2021) Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và số thực k tùy ý. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \forall c \in (a; b)$. B. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.
 C. $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$. D. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.

Câu 84. (THPT Đào Duy Từ - Hà Nội - 2021) Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + 2x + 3$ là

A. $\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + C$. B. $2x + 2 + C$. C. $x^3 + x^2 + C$. D. $x^3 + 2x^2 + 3x + C$.

Câu 85. (THPT Đào Duy Từ - Hà Nội - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1; 2]$, $f(1) = 1$ và $f(2) = 2$. Khi đó, $I = \int_1^2 f'(x) dx$ bằng

A. $I = 1$. B. $I = -1$. C. $I = \frac{7}{2}$. D. $I = 3$.

Câu 86. (THPT Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2021) Thể tích của khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = \cos x$, đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ và trục Ox khi quay quanh trục hoành là

A. $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$. B. $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$. C. $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$. D. $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$.

Câu 87. (THPT Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2021) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2$ là

A. $x^4 + x^3 + C$. B. $\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C$. C. $\frac{x^4}{4} + x^3 + C$. D. $3x^2 + 6x + C$.

Câu 88. (THPT Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2021) Cho $\int_0^2 f(x)dx = 2$ và $\int_0^2 g(x)dx = 3$. Tích phân

$$\int_0^2 [2f(x) - g(x)]dx$$

A. 5. B. 7. C. -1. D. 1.

Câu 89. (THPT Chu Văn An - Thái Nguyên - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục và không âm trên $[a; b]$. Thể tích của vật thể tròn xoay sinh bởi miền (D) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ quay quanh Ox là

A. $V = \int_a^b f^2(x)dx$. B. $V = \int_a^b |f(x)|dx$. C. $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$. D. $V = \pi \int_a^b f(x)dx$.

Câu 90. (THPT Chu Văn An - Thái Nguyên - 2021) Nếu $\int_{-2}^0 f(x)dx = -6$ và $\int_0^2 g(x)dx = 2$ thì

$$\int_{-2}^2 f(x)dx \text{ bằng}$$

A. 8. B. -12. C. -8. D. -4.

Câu 91. (THPT Ba Đình - Thanh Hóa - 2021) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3$ là

A. $\int x^3 dx = \frac{x^3}{3} + C$. B. $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$. C. $\int x^3 dx = \frac{x^2}{2} + C$. D. $\int x^3 dx = 4x^4 + C$.

Câu 92. (THPT Ba Đình - Thanh Hóa - 2021) Biết $\int_1^8 f(x)dx = 3$, giá trị $\int_1^8 5f(x)dx$ bằng

A. 3. B. 8. C. 15. D. 6.

Câu 93. (THPT Ba Đình - Thanh Hóa - 2021) Cho $I = \int_0^4 x\sqrt{2x+1}dx$ và $u = \sqrt{2x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây sai:

A. $I = \frac{1}{2} \int_1^3 x^2(x^2 - 1)dx$. B. $I = \frac{1}{2} \int_1^3 u^2(u^2 - 1)du$.

C. $I = \frac{1}{2} \left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} \right) \Big|_1^3$. D. $I = \int_1^3 u^2(u^2 - 1)du$.

Câu 94. (THPT Nguyễn Công Trứ - Hà Tĩnh - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và a là số dương. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\int_a^a f(x)dx = 1$. B. $\int_a^a f(x)dx = 0$. C. $\int_a^a f(x)dx = a^2$. D. $\int_a^a f(x)dx = 2a$.

Câu 95. (THPT Nguyễn Công Trứ - Hà Tĩnh - 2021) Nguyên hàm của hàm số $y = e^{-2x+1}$ là

A. $2e^{-2x+1} + C$. B. $-2e^{-2x+1} + C$. C. $\frac{1}{2}e^{-2x+1} + C$. D. $-\frac{1}{2}e^{-2x+1} + C$.

Câu 96. (THPT Nguyễn Công Trứ - Hà Tĩnh - 2021) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2021^x \ln 2021 - \cos x$ và $f(0) = 2$. Phát biểu nào sau đúng?

A. $f(x) = \frac{2021^x}{\ln 2021} - \sin x + 1.$

B. $f(x) = 2021^x - \sin x + 1.$

C. $f(x) = 2021^x + \sin x + 1.$

D. $f(x) = \frac{2021^x}{\ln 2021} + \sin x + 1.$

Câu 97. (THPT Nguyễn Công Trứ - Hà Tĩnh - 2021) Tìm nguyên hàm của $\int 5x^6 dx$.

A. $\frac{5}{6}x^7 + C.$

B. $\frac{5}{7}x^7 + C.$

C. $\frac{6}{5}x^7 + C.$

D. $x^7 + C.$

Câu 98. (Trung Tâm Thanh Trường - 2021) Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $\int f(x)g(x)dx = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx.$

B. $\int 2f(x)dx = 2 \int f(x)dx.$

C. $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

D. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

Câu 99. (Trung Tâm Thanh Trường - 2021) Nếu $\int_0^2 f(x)dx = 5$, $\int_0^2 g(x)dx = 2$ thì $\int_0^2 [f(x) + 2g(x)]dx$ bằng

A. 3.

B. 9.

C. 7.

D. 1.

Câu 100. (Trung Tâm Thanh Trường - 2021) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2(x + e^x)$ là

A. $xe^{2x} + C.$

B. $x^2 + 2e^x + C.$

C. $x^2 + e^2 + C.$

D. $x^2 + e^{2x} + C.$

Câu 101. (THPT Triệu Sơn - Thanh Hóa - 2021) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 - 1$ là.

A. $6x + C.$

B. $3x^2 - x + C.$

C. $x^3 - x + C.$

D. $x^3 + C.$

Câu 102. (THPT Triệu Sơn - Thanh Hóa - 2021) Biết $\int_1^3 f(x)dx = -4$ khi đó $\int_1^3 2f(x)dx$ bằng

A. 2.

B. -2.

C. 8.

D. -8.

Câu 103. (THPT Triệu Sơn - Thanh Hóa - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a; x = b$ được tính theo công thức

A. $S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|.$

B. $S = \int_a^b f(x)dx.$

C. $\int_a^b |f(x)|dx.$

D. $\int_a^b |f(x)|dx.$

Câu 104. (THPT Triệu Sơn - Thanh Hóa - 2021) Cho $\int f(x)dx = 6x^2 - 2\sin 2x + C$, khi đó $f(x)$ bằng

A. $12x - 4\cos 2x.$

B. $2x^3 - \cos 2x.$

C. $12 - 2\cos 2x.$

D. $6x - 4\cos 2x.$

Câu 105. (THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2021) Nếu $\int_{-1}^3 f(x)dx = 3$ và $\int_3^5 f(x)dx = 2$ thì $\int_{-1}^5 f(x)dx$ bằng

A. -5.

B. 5.

C. -1.

D. 1.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.B	3.A	4.A	5.C	6.C	7.B	8.A	9.C	10.B
11.A	12.C	13.B	14.C	15.D	16.B	17.C	18.D	19.C	20.C
21.C	22.A	23.A	24.A	25.C	26.B	27.A	28.B	29.C	30.A
31.B	32.A	33.D	34.D	35.B	36.B	37.D	38.C	39.B	40.B
41.B	42.B	43.C	44.C	45.C	46.B	47.D	48.D	49.B	50.C
51.D	52.C	53.B	54.C	55.A	56.A	57.D	58.A	59.D	60.B

61.C	62.C	63.D	64.B	65.D	66.D	67.D	68.A	69.D	70.B
71.D	72.D	73.C	74.C	75.B	76.A	77.C	78.C	79.A	80.A
81.C	82.C	83.A	84.A	85.A	86.D	87.C	88.D	89.C	90.D
91.B	92.C	93.D	94.B	95.D	96.B	97.B	98.A	99.B	100.B
101.C	102.D	103.D	104.A	105.B					

Nguyễn Bảo Vương

MỨC ĐỘ NHẬN BIẾT

- Câu 1.** (Liên trường Quỳnh Lưu - Hoàng Mai - Nghệ An - 2021) Cho $\int_0^6 f(x) dx = 10$ và $\int_0^4 f(x) dx = 7$ thì $\int_4^6 f(x) dx$ bằng:
- A. -17. B. 17. C. 3. D. -3.

Lời giải

Chọn C

$$\int_4^6 f(x) dx = \int_0^6 f(x) dx - \int_0^4 f(x) dx = 10 - 7 = 3.$$

- Câu 2.** (Liên trường Quỳnh Lưu - Hoàng Mai - Nghệ An - 2021) Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5x^4 - 6x^2 + 1$ là
- A. $\frac{x^4}{4} + 2x^3 - 2x + C$. B. $x^5 - 2x^3 + x + C$.
C. $20x^5 - 12x^3 + x + C$. D. $20x^3 - 12x + C$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \int (5x^4 - 6x^2 + 1) dx = x^5 - 2x^3 + x + C.$$

- Câu 3.** (Liên trường Quỳnh Lưu - Hoàng Mai - Nghệ An - 2021) $\int_{-3}^0 \frac{1}{1-x} dx$ bằng
- A. $2 \ln 2$. B. $-2 \ln 2$. C. $2 \ln 2 - 1$. D. $\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \int_{-3}^0 \frac{1}{1-x} dx = - \int_{-3}^0 \frac{1}{1-x} d(1-x) = - \ln|1-x| \Big|_{-3}^0 = -(\ln 1 - \ln 4) = 2 \ln 2.$$

- Câu 4.** Tính tích phân $I = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$
- A. $I = \frac{1}{e}$ B. $I = \frac{1}{e} + 1$ C. $I = 1$ D. $I = e$

Lời giải

Chọn A

$$I = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left(\ln|x| + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^e = \frac{1}{e}.$$

Lời giải

Chọn A

- Câu 5.** (Liên trường huyện Quảng Xương - Thanh Hóa - 2021) Giả sử f là hàm liên tục trên khoảng K và a, b, c là ba số bất kì trên khoảng K . Khẳng định nào sau đây sai?
- A. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$. B. $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx, c \in (a, b)$.

C. $\int_a^b f(x) dx = 1.$ **D.** $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx.$

Lời giải

Chọn C

Câu 6. (Chuyên Thoại Ngọc Hầu - An Giang - 2021) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = (1-2x)^5$ là:

A. $(1-2x)^6 + C.$ **B.** $-\frac{1}{2}(1-2x)^6 + C.$ **C.** $-\frac{1}{12}(1-2x)^6 + C.$ **D.** $5(1-2x)^6 + C.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int f(x) dx = \int (1-2x)^5 dx = \int -\frac{1}{2}(1-2x)^5 d(1-2x) = -\frac{1}{12}(1-2x)^6 + C.$

Câu 7. (Chuyên Thoại Ngọc Hầu - An Giang - 2021) Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 5.$ Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx$

A. $I = 5 + \frac{\pi}{2}.$ **B.** $I = 7.$ **C.** $I = 5 + \pi.$ **D.** $I = 3.$

Lời giải

Chọn B

♦Ta có

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx = I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x dx = 5 - 2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 5 - 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) = 7.$$

Câu 8. (Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2021) Biết $\int_1^8 f(x) dx = -2$; $\int_1^4 f(x) dx = 3$; $\int_1^4 g(x) dx = 7.$

Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\int_4^8 f(x) dx + \int_1^4 g(x) dx = 8.$ **B.** $\int_1^4 [f(x) + g(x)] dx = 10.$

C. $\int_4^8 f(x) dx = -5.$ **D.** $\int_1^4 [4f(x) - 2g(x)] dx = -2.$

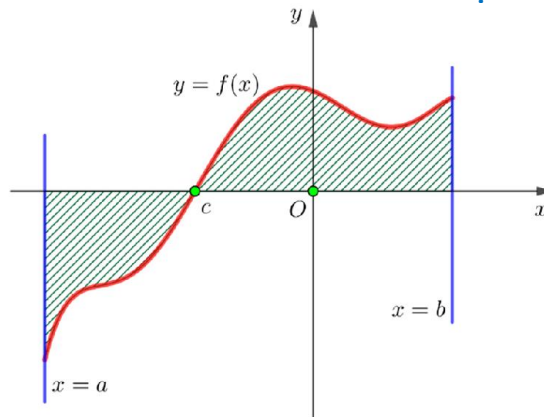
Lời giải

Chọn A

Mệnh đề ở phương án A là sai vì:

$$\int_4^8 f(x) dx + \int_1^4 g(x) dx = \int_1^8 f(x) dx - \int_1^4 f(x) dx + \int_1^4 g(x) dx = -2 - 3 + 7 = 2.$$

Câu 9. (Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2021) Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ trong hình dưới đây (phần gạch sọc) có diện tích S bằng



- A. $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.
 B. $\int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$.
 C. $-\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.
 D. $-\int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$.

Lời giải

Chọn C

$$S = \int_a^c (0 - f(x)) dx + \int_c^b (f(x) - 0) dx = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Câu 10. (Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2021) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ là

- A. $\frac{1}{2}e^x + C$.
 B. $\frac{1}{2}e^{2x} + C$.
 C. $2e^{2x} + C$.
 D. $2e^x + C$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C.$$

Câu 11. (Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - 2021) Cho hàm số $f(x)$ có $f(2) = 2$, $f(3) = 5$; hàm số $f'(x)$ liên tục trên $[2; 3]$. Khi đó $\int_2^3 f'(x) dx$ bằng

- A. 3.
 B. 10.
 C. -3.
 D. 7.

Lời giải

Chọn A

$$\int_2^3 f'(x) dx = f(x) \Big|_2^3 = f(3) - f(2) = 5 - 2 = 3.$$

Câu 12. (Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - 2021) Họ tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$ là

- A. $2 \sin 2x + C$.
 B. $-\frac{1}{2} \sin 2x + C$.
 C. $\frac{1}{2} \sin 2x + C$.
 D. $-2 \sin 2x + C$.

Lời giải

Chọn C

$$\int f(x) dx = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int \cos 2x d(2x) = \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

Câu 13. (Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - 2021) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{4x-3}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là

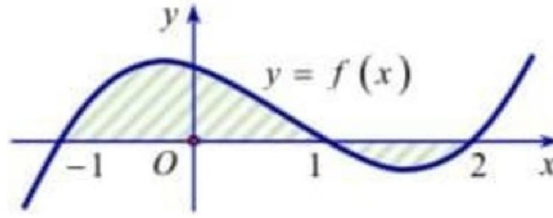
- A. $2 \ln(4x-3) + C$.
 B. $\frac{1}{2} \ln(4x-3) + C$.
 C. $\frac{1}{4} \ln(4x-3) + C$.
 D. $4 \ln(4x-3) + C$.

Lời giải

Chọn B

♦ Ta có $\int f(x) dx = \int \frac{2}{4x-3} dx = 2 \cdot \frac{1}{4} \ln|4x-3| + C = \frac{1}{2} \ln(4x-3) + C$.

Câu 14. (Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - 2021) Gọi S là diện tích miền hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ dưới đây, với $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.



Công thức tính S là

A. $S = -\int_{-1}^2 f(x) dx$. **B.** $S = \left| \int_{-1}^2 f(x) dx \right|$.

C. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$. **D.** $S = \int_{-1}^2 f(x) dx$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$.

Câu 15. (Chuyên KHTN - 2021) $\int (2x + \cos x) dx$ bằng:

A. $2x^2 - \sin x + C$. **B.** $2x^2 + \sin x + C$. **C.** $x^2 - \sin x + C$. **D.** $x^2 + \sin x + C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int (2x + \cos x) dx = x^2 + \sin x + C$.

Câu 16. (Chuyên KHTN - 2021) Cho $\int_1^3 f(x) dx = -2$ và $\int_3^5 f(x) dx = 5$. Tính tích phân $\int_1^5 f(x) dx$

A. 7. **B.** 3. **C.** -7. **D.** -10.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_1^5 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx = 3$.

Câu 17. (Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - 2021) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $y = e^x + \cos x$ là

A. $-e^x - \sin x + C$. **B.** $e^x - \sin x + C$. **C.** $e^x + \sin x + C$. **D.** $-e^x + \sin x + C$.

Lời giải

Chọn C

♦ Ta có $\int (e^x + \cos x) dx = e^x + \sin x + C$

Câu 18. (Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - 2021) Biết $\int_0^3 f(x) dx = 2$ và $\int_0^4 f(x) dx = 3$. Giá trị

$\int_3^4 f(x) dx$ bằng

A. -1. **B.** 5. **C.** -5. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

$$\diamond \int_3^4 f(x)dx = \int_0^4 f(x)dx - \int_0^3 f(x)dx = 3 - 2 = 1$$

Câu 19. (Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - 2021) Gọi (D) là hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y = \frac{x}{4}, y = 0, x = 1, x = 4$. Thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục Ox được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $\pi \int_1^4 \frac{x}{16} dx$. B. $\pi \int_1^4 \frac{x}{4} dx$. C. $\pi \int_1^4 \left(\frac{x}{4}\right)^2 dx$. D. $\pi \int_1^4 \frac{x^2}{4} dx$.

Lời giải

Chọn C

♦ Thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục Ox được tính theo công thức

$$V = \pi \int_1^4 \left(\frac{x}{4}\right)^2 dx.$$

Câu 20. (Chuyên Quốc Học Huế - 2021) Thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 1; x = 4$ quanh trục hoành được tính bởi công thức nào dưới đây?

A. $V = \pi^2 \int_1^4 x dx$. B. $V = \pi \int_1^4 \sqrt{x} dx$. C. $V = \pi \int_1^4 x dx$. D. $V = \int_1^4 |\sqrt{x}| dx$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức SGK ta có $V = \pi \int_1^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_1^4 x dx$.

Câu 21. (Chuyên Quốc Học Huế - 2021) Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x+4}$ trên $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{4}{5}\right\}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{\ln 5} \ln |5x+4| + C$. B. $\int f(x) dx = \ln |5x+4| + C$.
C. $\int f(x) dx = \frac{1}{5} \ln |5x+4| + C$. D. $\int f(x) dx = \frac{1}{5} \ln (5x+4) + C$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C$ ta có $\int f(x) dx = \frac{1}{5} \ln |5x+4| + C$.

Câu 22. (Chuyên Quang Trung - Bình Phước - 2021) Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ với mọi hằng số $k \in \mathbb{R}$.
B. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
C. $\int f'(x) dx = f(x) + C$ với mọi hàm $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.
D. $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$

Lời giải

Chọn A

A sai Vì k phải là hằng số khác 0

Câu 23. (Chuyên Quang Trung - Bình Phước - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $[a, b]$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Chọn phương án đúng nhất.

A. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

B. $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$

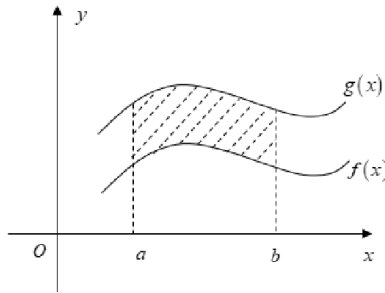
C. $\int_a^b f(x)dx = F(b) + F(a)$

D. $\int_a^b f(x)dx = F^2(b) - F^2(a)$

Lời giải

Chọn A

Câu 24. (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội- 2021) Cho hình (H) được giới hạn như hình vẽ



Diện tích của hình (H) được tính bởi công thức nào dưới đây?

A. $\int_a^b [g(x) - f(x)]dx$. **B.** $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$.

C. $\int_a^b f(x)dx$. **D.** $\int_a^b g(x)dx$.

Lời giải

Chọn A

Diện tích của hình (H) là: $S = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$.

Câu 25. (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội- 2021) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^2 f(x)dx = -1$ và

$\int_1^2 f(x)dx = 4$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. 5. **B.** -3. **C.** -5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = -1 - 4 = -5$.

Câu 26. (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội- 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;3]$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $[-2;3]$ và $F(3) = -2; F(-2) = -4$. Tính $I = 2 \int_{-2}^3 f(x)dx$.

A. 2. **B.** 4. **C.** -4. **D.** -2

Lời giải

Chọn B

Ta có: $I = 2 \int_{-2}^3 f(x)dx = 2[F(3) - F(-2)] = 2[-2 - (-4)] = 4$

Câu 27. (Chuyên Lê Quý Đôn - Điện Biên - 2021) Cho $I = \int_0^2 f(x)dx = 3$. Khi đó $J = \int_0^2 [4f(x) - 3]dx$

bằng:

A. 6. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $J = \int_0^2 [4f(x) - 3]dx = \int_0^2 4f(x)dx - \int_0^2 3dx = 4.3 - 3x|_0^2 = 12 - 3.2 + 3.0 = 6$.

Câu 28. (Chuyên Lê Quý Đôn - Điện Biên - 2021) Kết quả $\int x^3 dx$ bằng

- A. $3x^2 + C$. B. $\frac{1}{4}x^4 + C$. C. $\frac{1}{4}x^4$. D. $4x^4 + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$.

Câu 29. (Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - 2021) Biết $F(x) = \cos x$ là một nguyên hàm của hàm số

$f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_0^{\pi} [3f(x) + 2] dx$ bằng

- A. 2. B. 2π . C. $2\pi - 6$. D. -4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_0^{\pi} [3f(x) + 2] dx = 3 \int_0^{\pi} f(x) dx + 2 \int_0^{\pi} dx = 3 \cos x \Big|_0^{\pi} + 2x \Big|_0^{\pi} = -6 + 2\pi$.

Câu 30. (Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - 2021) Biết $\int_1^3 f(x) dx = 5$ và $\int_1^3 g(x) dx = -7$. Giá trị của

$\int_1^3 [3f(x) - 2g(x)] dx$ bằng

- A. 29 B. -29 C. 1 D. -31

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$\int_1^3 [3f(x) - 2g(x)] dx = 3 \int_1^3 f(x) dx - 2 \int_1^3 g(x) dx = 3 \cdot 5 - 2 \cdot (-7) = 15 + 14 = 29$.

Câu 31. (Chuyên ĐHSPT Hà Nội - 2021) Biết $I = \int_1^2 f(x) dx = 2$. Giá trị của $\int_1^2 [f(x) + 2x] dx$ bằng

- A. 1. B. 5. C. 4. D. 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_1^2 [f(x) + 2x] dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_1^2 2x dx = 2 + 3 = 5$.

Câu 32. (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An - 2021) Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 3x$ là

- A. $-\frac{1}{3} \cos 3x + C$. B. $-\cos 3x + C$. C. $\cos 3x + C$. D. $\frac{1}{3} \cos 3x + C$.

Lời giải

Chọn A

$\int \sin 3x dx = -\frac{1}{3} \cos 3x + C$.

Câu 33. (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An - 2021) Biết $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3}$ và $\int_0^1 g(x) dx = \frac{4}{3}$. Khi đó

$\int_0^1 (g(x) - f(x)) dx$ bằng

A. $\frac{5}{3}$.

B. $-\frac{5}{3}$.

C. -1 .

D. 1 .

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \int_0^1 (g(x) - f(x)) dx = \int_0^1 g(x) dx - \int_0^1 f(x) dx = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1.$$

Câu 34. (THPT Quốc Võ 1 - Bắc Ninh - 2021) Mệnh đề nào sau đây đúng.

A. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$. B. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \cot x + C$.

C. $\int \cos x dx = -\sin x + C$.

D. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$.

Lời giải

Chọn D

Vì $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ nên loại đáp án A.

Vì $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$ nên loại đáp án B.

Vì $\int \cos x dx = \sin x + C$ nên loại đáp án C.

Câu 35. (THPT Quốc Võ 1 - Bắc Ninh - 2021) Khẳng định nào sau đây đúng với mọi hàm f, g liên tục trên K và a, b là các số bất kỳ thuộc K ?

A. $\int_a^b [f(x) \cdot g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx$.

B. $\int_a^b [f(x) + 2g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + 2 \int_a^b g(x) dx$.

C. $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} dx = \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$.

D. $\int_a^b [f^2(x)] dx = \left[\int_a^b f(x) dx \right]^2$.

Lời giải

Chọn B

$$\int_a^b [f(x) + 2g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + 2 \int_a^b g(x) dx \text{ chỉ có tính chất tổng của 2 tích phân.}$$

Câu 36. (THPT Quốc Võ 1 - Bắc Ninh - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$\text{có } \int_0^1 f(x) dx = 2, \int_1^3 f(x) dx = 6 \text{ Tính } \int_0^3 f(x) dx.$$

A. $I = 12$.

B. $I = 8$.

C. $I = 6$.

D. $I = 4$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = 2 + 6 = 8$$

Câu 37. (THPT Quốc Oai - Hà Nội - 2021) Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$.
- B. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ với mọi hằng số $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- C. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$.
- D. $\int f(x) \cdot g(x) dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$.**

Lời giải

Chọn D

Câu 38. (THPT Quốc Oai - Hà Nội - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = f(x)$. Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

- A. $\int_a^b f(x) dx = F(a) + F(b)$.
- B. $\int_a^b f(x) dx = F^2(b) - F^2(a)$.
- C. $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.**
- D. $\int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b)$.

Lời giải

Chọn C

Câu 39. (THPT Quảng Xương 1-Thành Hóa - 2021) Cho C là một hằng số. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. $\int e^x dx = e^x - C$.
- B. $\int \sin x dx = \cos x + C$.
- C. $\int 2x dx = x^2 + C$.
- D. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

Lời giải

Chọn BTa có: $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

Câu 40. (THPT Quảng Xương 1-Thành Hóa - 2021) Nếu $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^3 f(x) dx = -4$ thì $\int_1^3 f(x) dx$

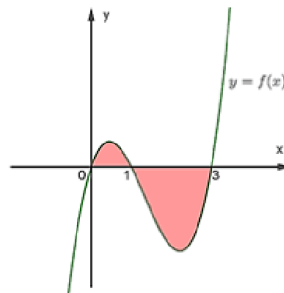
bằng

- A. 6.
- B. -6.
- C. 2.
- D. -2.

Lời giải

Chọn BTa có $\int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx \Rightarrow \int_1^3 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx = -4 - 2 = -6$.

Câu 41. (THPT Quảng Xương 1-Thành Hóa - 2021) Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$. Diện tích S của hình phẳng (phần tô đậm trong hình vẽ) là



- A. $S = -\int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx$.
- B. $S = \int_0^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx$.
- C. $S = \int_0^3 f(x) dx$.
- D. $S = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx$.

Lời giải

Chọn B

$$S = \int_0^3 |f(x)| dx = S = \int_0^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx$$

Câu 42. (THPT PTNK Cơ sở 2 - TP.HCM - 2021) Hàm số $F(x) = 5x^3 + 4x^2 - 7x + 120$ là nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f(x) = 5x^2 + 4x - 7$. **B.** $f(x) = 15x^2 + 8x - 7$.

C. $f(x) = 5x^2 + 4x + 7$. **D.** $f(x) = \frac{5x^2}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{7x^2}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ nên

$$f(x) = [F(x)]' = (5x^3 + 4x^2 - 7x + 120)' = 15x^2 + 8x - 7.$$

Câu 43. (THPT PTNK Cơ sở 2 - TP.HCM - 2021) Một nguyên hàm của hàm số $y = \cos 2x$ là

A. $2 \sin 2x$. **B.** $-2 \sin 2x$. **C.** $\frac{1}{2} \sin 2x$. **D.** $-\frac{1}{2} \sin 2x$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$

Câu 44. (THPT Phan Đình Phùng - Quảng Bình - 2021) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^{2021}$ trên $\mathbb{R}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{x^{2022}}{2022}$. **B.** $\int f(x) dx = 2021x^{2020} + C$.

C. $\int f(x) dx = \frac{x^{2022}}{2022} + C$. **D.** $\int f(x) dx = \frac{x^{2021}}{2021} + C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int f(x) dx = \int x^{2021} dx = \frac{x^{2022}}{2022} + C$.

Câu 45. (THPT Phan Đình Phùng - Quảng Bình - 2021) Nếu $\int_0^1 f(x) dx = 4$ và $\int_0^1 g(x) dx = 3$ thì

$\int_0^1 [2f(x) + 3g(x)] dx$ bằng

A. 7. **B.** 13. **C.** 17. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int_0^1 [2f(x) + 3g(x)] dx \Leftrightarrow 2 \int_0^1 f(x) dx + 3 \int_0^1 g(x) dx = 2.4 + 3.3 = 17$.

Câu 46. (THPT Nguyễn Tất Thành - Hà Nội - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 2]$. Biết

$\int_0^2 f(x) dx = 5$ và $\int_1^2 f(t) dt = 3$. Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. $I = 3$. **B.** $I = 2$. **C.** $I = 5$. **D.** $I = 1$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx - \int_1^2 f(t) dt = 2.$$

Câu 47. (THPT Nguyễn Tất Thành - Hà Nội - 2021) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3x-2}$ trên khoảng $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$. Tìm $F(x)$, biết $F(1) = 5$.

A. $F(x) = \ln(3x-2) + 5$.

B. $F(x) = 3\ln(3x-2) + 5$.

C. $F(x) = \frac{-3}{(3x-2)^2} + 8$. **D.** $F(x) = \frac{1}{3}\ln(3x-2) + 5$.

Lời giải**Chọn D**

$$\text{Ta có: } F(x) = \int \frac{1}{3x-2} dx = \frac{1}{3} \ln|3x-2| + C.$$

$$\text{Theo bài, } F(1) = 5 \Leftrightarrow C = 5.$$

$$\text{Vậy } F(x) = \frac{1}{3} \ln|3x-2| + 5.$$

Câu 48. (THPT Nguyễn Tất Thành - Hà Nội - 2021) Cho biết $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^1 g(x) dx = 3$. Tính

$$I = \int_0^1 [4f(x) - g(x)] dx?$$

A. $I=3$.

B. $I=1$.

C. $I=11$.

D. $I=5$.

Lời giải**Chọn D**

$$\text{Ta có } I = \int_0^1 [4f(x) - g(x)] dx = 4 \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 g(x) dx = 4 \cdot 2 - 3 = 5.$$

Câu 49. (THPT Nguyễn Đức Cảnh - Thái Bình - 2021) Biết $\int_0^3 f(x) dx = \frac{5}{3}$ và $\int_0^4 f(t) dt = \frac{3}{5}$. Tính

$$\int_3^4 f(u) du$$

A. $\frac{14}{15}$.

B. $-\frac{16}{15}$.

C. $-\frac{17}{15}$.

D. $\frac{16}{15}$.

Lời giải**Chọn B**

$$\text{Ta có } \int_3^4 f(u) du = \int_0^4 f(u) du - \int_0^3 f(u) du = \frac{-16}{15}.$$

Câu 50. (THPT Nguyễn Đức Cảnh - Thái Bình - 2021) Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $f(x) = \sqrt{2x+1}$, Ox , $x=0$, $x=1$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức?

A. $V = \pi \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx$. **B.** $V = \int_0^1 (2x+1) dx$. **C.** $V = \pi \int_0^1 (2x+1) dx$. **D.** $V = \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx$.

Lời giải**Chọn C**

Ta có $V = \pi \int_0^1 (\sqrt{2x+1})^2 dx = \pi \int_0^1 (2x+1) dx$.

Câu 51. (THPT Nguyễn Đức Cảnh - Thái Bình - 2021) Nếu $\int_0^2 f(x) dx = 6$ thì $\int_0^2 3f(x) dx$ bằng

- A. 3. B. 6. C. 8. **D. 18.**

Lời giải

Chọn D

Vì $\int_0^2 f(x) dx = 6$ nên $\int_0^2 3f(x) dx = 3.6 = 18$.

Câu 52. (THPT Mai Anh Tuấn - Thanh Hóa - 2021) Khẳng định nào sau đây là đúng

A. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = -\cot x + C$. B. $\int a^x dx = a^x \cdot \ln a + C$.

C. $\int e^x dx = \frac{1}{e^{-x}} + C$. **D.** $\int \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{x^2} + C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$.

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

$\int e^x dx = e^x + C = \frac{1}{e^{-x}} + C$.

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

Câu 53. (THPT Mai Anh Tuấn - Thanh Hóa - 2021) Tính tích phân $\int_{-1}^2 (-x^3 + 2) dx$ bằng

- A. $-\frac{9}{4}$. **B. $\frac{9}{4}$.** C. $\frac{7}{4}$. D. $-\frac{7}{4}$.

Lời giải

Chọn B

$\int_{-1}^2 (-x^3 + 2) dx = \left(-\frac{x^4}{4} + 2x \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{9}{4}$.

Câu 54. (THPT Mai Anh Tuấn - Thanh Hóa - 2021) Biết $\int_0^2 f(x) dx = 4$. Tính tích phân

$I = \int_0^2 [2x + f(x)] dx$ bằng

- A. $I = 6$. B. $I = 12$. **C. $I = 8$.** D. $I = 4$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $I = \int_0^2 [2x + f(x)] dx = \int_0^2 2x dx + \int_0^2 f(x) dx = x^2 \Big|_0^2 + \int_0^2 f(x) dx = 4 + 4 = 8$.

Câu 55. (THPT Mai Anh Tuấn - Thanh Hóa - 2021) Cho hàm số $f(x) = x+1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{2}x^2 + x + C$. B. $\int f(x) dx = 2x^2 + x + C$.

C. $\int f(x)dx = x^2 + x + C$.

D. $\int f(x)dx = x^2 + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int f(x)dx = \int (x+1)dx = \frac{1}{2}x^2 + x + C$

Do đó chọn phương án **A**.

Câu 56. (THPT Hậu Lộc 4 - Thanh Hóa - 2021) Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 - 1$ là.

A. $x^3 - x + C$.

B. $6x + C$.

C. $x^3 + C$.

D. $\frac{x^3}{3} + x + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int f(x)dx = \int (3x^2 - 1)dx = x^3 - x + C$.

Câu 57. (THPT Hậu Lộc 4 - Thanh Hóa - 2021) Biết $\int_1^5 f(x)dx = 4$. Giá trị của $\int_1^5 3f(x)dx$ bằng.

A. 7.

B. $\frac{4}{3}$.

C. 64.

D. 12.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_1^5 3f(x)dx = 3 \int_1^5 f(x)dx = 12$.

Câu 58. (THPT Đồng Quan - Hà Nội - 2021) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ là

A. $\frac{1}{2}\ln^2 x + C$.

B. $\ln^2 x + C$.

C. $\ln(\ln x) + C$.

D. $\frac{1}{2}\ln^2 x + \ln x + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \ln x d(\ln x) = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$.

Câu 59. (THPT Đồng Quan - Hà Nội - 2021) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2(\cos 2x + x)$ là

A. $-\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}x^2 + C$.

B. $-\sin 2x + x^2 + C$.

C. $\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}x^2 + C$.

D. $\sin 2x + x^2 + C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $F(x) = 2\left(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}x^2\right) + C = \sin 2x + x^2 + C$

Câu 60. (THPT Đồng Quan - Hà Nội - 2021) Cho $\int_0^1 f(x)dx = -3$; $\int_1^0 g(x)dx = 2$, khi đó

$\int_0^1 (f(x) + 2g(x))dx$ bằng bao nhiêu?

A. 5.

B. -7.

C. 1.

D. -1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_0^1 (f(x) + 2g(x))dx = \int_0^1 f(x)dx + 2\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 f(x)dx - 2\int_1^0 g(x)dx = -3 - 2.2 = -7$

Câu 61. (THPT Lê Lợi - Thanh Hóa - 2021) Nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - x$ là

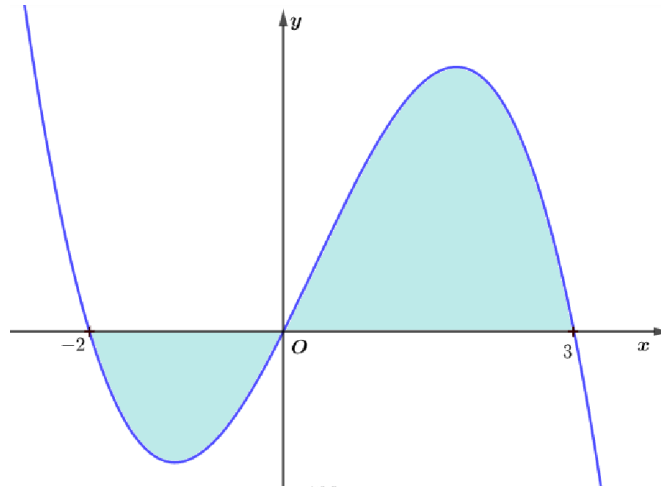
- A. $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C$. B. $2x - 1 + C$. C. $x^2 + x + C$. D. $\frac{x^3}{3} - x + C$.

Lời giải

Chọn C

$$\int (x^2 - x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C.$$

Câu 62. (THPT Lê Lợi - Thanh Hóa - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Diện tích hình phẳng (phần tô đậm) được tính theo công thức nào sau đây?

- A. $S = \int_{-2}^3 f(x)dx$. B. $S = \int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^3 f(x)dx$.
C. $S = -\int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^3 f(x)dx$. D. $S = \int_{-2}^0 f(x)dx - \int_0^3 f(x)dx$.

Lời giải

Chọn C

Diện tích hình phẳng cần tính $S = \int_{-2}^3 |f(x)|dx = \int_{-2}^0 |f(x)|dx + \int_0^3 |f(x)|dx = -\int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^3 f(x)dx$.

(Do $f(x) < 0, \forall x \in (-2; 0)$ và $f(x) \geq 0, \forall x \in [0; 3]$)

Câu 63. (THPT Lê Lợi - Thanh Hóa - 2021) Cho các hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có

$\int_{-1}^5 f(x)dx = -1; \int_{-1}^5 g(x)dx = 3$. Tính $\int_{-1}^5 [f(x) + 2g(x)]dx$.

- A. 2. B. -1. C. 1. D. 5.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_{-1}^5 [f(x) + 2g(x)]dx = \int_{-1}^5 f(x)dx + 2\int_{-1}^5 g(x)dx = -1 + 2.3 = 5$.

Câu 64. (Sở Vĩnh Phúc - 2021) Tìm họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $y = \frac{x}{x+1}$.

- A. $x - \ln(x+1) + C$. B. $x - \ln|x+1| + C$. C. $x + \ln(x+1) + C$. D. $x + \ln|x+1| + C$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\int \frac{x}{x+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = x - \ln|x+1| + C.$

Câu 65. (Sở Lào Cai - 2021) Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $\left(\int f(x) dx\right)' = -f'(x).$

B. $\left(\int f(x) dx\right)' = f'(x).$

C. $\left(\int f(x) dx\right)' = -f(x).$

D. $\left(\int f(x) dx\right)' = f(x).$

Lời giải**Chọn D.**

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Ta có $\left(\int f(x) dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x).$

Câu 66. (Sở Lào Cai - 2021) Cho $\int_1^2 f(x) dx = -1$, khi đó $\int_1^2 3f(x) dx$ bằng

A. 2.

B. -1.

C. -4.

D. -3.

Lời giải**Chọn D**

$$\int_1^2 3f(x) dx = 3 \int_1^2 f(x) dx = 3 \cdot (-1) = -3.$$

Câu 67. (Sở Lào Cai - 2021) Tích phân $\int_0^1 e^x dx$ bằng:

A. e.

B. $e^2 - 1.$

C. $\frac{e-1}{2}.$

D. e-1.

Lời giải**Chọn D**

$$\int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e - 1.$$

Câu 68. (Sở Lào Cai - 2021) Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$ là:

A. $\cot x + C.$

B. $-\tan x + C.$

C. $-\cot x + C.$

D. $\tan x + C.$

Lời giải**Chọn A.**

Ta có $\int -\frac{1}{\sin^2 x} dx = \cot x + C.$

Câu 69. (Sở Hà Tĩnh - 2021) Biết $\int_1^5 f(x) dx = 4$. Giá trị của $\int_1^5 [2x - 3f(x)] dx$ bằng

A. 13.

B. -2.

C. 6.

D. 12.

Lời giải**Chọn D**

$$\int_1^5 [2x - 3f(x)] dx = \int_1^5 2x dx - 3 \int_1^5 f(x) dx = x^2 \Big|_1^5 - 3 \cdot 4 = 24 - 12 = 12.$$

Câu 70. (Sở Hà Tĩnh - 2021) $\int (-2x + x^3) dx$ bằng

A. $\frac{1}{4}x^4 + C.$

B. $\frac{1}{4}x^4 - x^2 + C.$

C. $3x^2 - 2 + C.$

D. $4x^4 + x^2 + C.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int (-2x + x^3) dx = -\int 2x dx + \int x^3 dx = -2 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + C = -x^2 + \frac{x^4}{4} + C$.

Câu 71. (Sở Yên Bái - 2021) Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int 0 dx = C$ (C là hằng số).

B. $\int dx = x + C$ (C là hằng số).

C. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ (C là hằng số).

D. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ (C là hằng số).

Lời giải

Chọn D

$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ (C là hằng số) **Sai** vì thiếu điều kiện $\alpha \neq -1$.

Câu 72. (Sở Tuyên Quang - 2021) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ là

A. $F(x) = \ln|2x+1| + C$. **B.** $F(x) = 2\ln|2x+1| + C$.

C. $F(x) = \frac{1}{2}\ln(2x+1) + C$.

D. $F(x) = \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int f(x) dx = \int \frac{1}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + C$.

Câu 73. (Sở Tuyên Quang - 2021) Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^1 g(x) dx = 5$. Khi đó $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx$

bằng:

A. 1

B. -3

C. -8

D. 12

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx = \int_0^1 f(x) dx - 2 \int_0^1 g(x) dx = 2 - 2 \cdot 5 = -8$

Câu 74. (Sở Tuyên Quang - 2021) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + \sin x$ là

A. $2x^2 + \cos x + C$.

B. $2x^2 - \cos x + C$.

C. $x^2 - \cos x + C$.

D. $x^2 + \cos x + C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int (2x + \sin x) dx = \int 2x dx + \int \sin x dx = x^2 - \cos x + C$.

Câu 75. (THPT Thanh Chương 1- Nghệ An - 2021) Họ nguyên hàm của hàm số là?

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

Câu 76. (THPT Thanh Chương 1- Nghệ An - 2021) Cho $\int_1^2 [3f(x) + 2x] dx = 12$. Khi đó $\int_1^2 f(x) dx$ bằng

A.

B.

C.

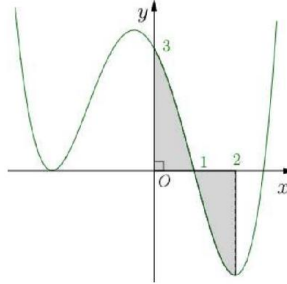
D.

Lời giải

Chọn A

♦ Ta có

Câu 77. (THPT Nguyễn Công Trứ - Hà Tĩnh - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị (C) là đường cong như hình vẽ bên.



Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), trục Ox và hai đường thẳng $x=0, x=2$ (phần tô đen) là

A. $S = -\int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$.

B. $S = \int_0^2 f(x)dx$.

C. $S = \int_0^1 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx$.

D. $S = \left| \int_0^2 f(x)dx \right|$.

Lời giải

Chọn C♦ Ta có: $S = \int_0^1 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx$

Câu 78. (THPT Nguyễn Công Trứ - Hà Tĩnh - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

B. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

C. $\int_a^b [f(x) \cdot g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$.

D. $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$.

Lời giải

Chọn C

Câu 79. (THPT Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2021) Biết $F(x) = \cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$

trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2f(x)dx$ bằng

A. -1 .

B. 3 .

C. $\sqrt{3}$.

D. 1 .

Lời giải

Chọn A

Vì $F(x) = \cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên $f(x) = -\sin x$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2f(x)dx = -2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = 2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -1.$$

- Câu 80. (THPT Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2021)** Biết $\int_2^3 f(x)dx = 3$. giá trị của $\int_2^3 (f(x) + 3)dx$ bằng
- A.** 6. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 5.
- Lời giải**

Chọn A

$$\text{Ta có } \int_2^3 (f(x) + 3)dx = \int_2^3 f(x)dx + 3 \int_2^3 dx = 3 + 3x \Big|_2^3 = 6.$$

- Câu 81. (THPT Lương Thế Vinh - 2021)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 4$ và $y = x - 4$ xác định bởi công thức
- A.** $\int_0^2 (x - x^2)dx$. **B.** $\int_0^1 (x^2 - x)dx$. **C.** $\int_0^1 (x - x^2)dx$. **D.** $\int_0^2 (x^2 - x)dx$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị: } x^2 - 4 = x - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Diện tích của hình phẳng là: } S = \int_0^1 |x^2 - x|dx = \int_0^1 (x - x^2)dx.$$

- Câu 82. (THPT Lương Thế Vinh - 2021)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^x$ là.

A. $3^x \log 3 + C$. **B.** $3^x \ln 3 + C$. **C.** $\frac{3^x}{\ln 3} + C$. **D.** $\frac{3^x}{\log 3} + C$.

Lời giải

Chọn C

Theo công thức nguyên hàm cơ bản chọn **C**.

- Câu 83. (THPT Hoàng Hoa Thám - Đà Nẵng - 2021)** Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và số thực k tùy ý. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \forall c \in (a; b)$. **B.** $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

C. $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$. **D.** $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

Lời giải

Chọn A

♦ Mệnh đề A sai. Vì: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \forall c \in (a; b)$.

- Câu 84. (THPT Đào Duy Từ - Hà Nội - 2021)** Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + 2x + 3$ là

A. $\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + C$. **B.** $2x + 2 + C$. **C.** $x^3 + x^2 + C$. **D.** $x^3 + 2x^2 + 3x + C$.

Lời giải

Chọn A

- Câu 85. (THPT Đào Duy Từ - Hà Nội - 2021)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1; 2]$,

$f(1) = 1$ và $f(2) = 2$. Khi đó, $I = \int_1^2 f'(x)dx$ bằng

A. $I = 1$. **B.** $I = -1$. **C.** $I = \frac{7}{2}$. **D.** $I = 3$.

Lời giải

Chọn A

♦ Ta có: $I = \int_1^2 f'(x) dx = f(x) \Big|_1^2 = f(2) - f(1) = 2 - 1 = 1.$

Câu 86. (THPT Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2021) Thể tích của khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = \cos x$, đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ và trục Ox khi quay quanh trục hoành là

A. $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$. B. $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$. C. $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$. D. $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào công thức tính thể tích khối tròn xoay quay quanh trục Ox , ta được $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$.

Câu 87. (THPT Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2021) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2$ là

A. $x^4 + x^3 + C$. B. $\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C$. C. $\frac{x^4}{4} + x^3 + C$. D. $3x^2 + 6x + C$.

Lời giải

Chọn C

♦ Áp dụng công thức nguyên hàm: $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ và các tính chất nguyên hàm.

♦ Ta có: $\int (x^3 + 3x^2) dx = \frac{x^4}{4} + x^3 + C$.

Câu 88. (THPT Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2021) Cho $\int_0^2 f(x) dx = 2$ và $\int_0^2 g(x) dx = 3$. Tích phân

$\int_0^2 [2f(x) - g(x)] dx$

A. 5. B. 7. C. -1. D. 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_0^2 [2f(x) - g(x)] dx = 2 \cdot \int_0^2 f(x) dx - \int_0^2 g(x) dx = 2 \cdot 2 - 3 = 1$.

Câu 89. (THPT Chu Văn An - Thái Nguyên - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục và không âm trên $[a; b]$. Thể tích của vật thể tròn xoay sinh bởi miền (D) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ quay quanh Ox là

A. $V = \int_a^b f^2(x) dx$. B. $V = \int_a^b |f(x)| dx$. C. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. D. $V = \pi \int_a^b f(x) dx$.

Lời giải

Chọn C

Câu 90. (THPT Chu Văn An - Thái Nguyên - 2021) Nếu $\int_{-2}^0 f(x) dx = -6$ và $\int_0^2 g(x) dx = 2$ thì

$\int_{-2}^2 f(x) dx$ bằng

A. 8. B. -12. C. -8. D. -4.

Lời giải

Chọn D

♦ Ta có $\int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = -6 + 2 = -4$.

Câu 91. (THPT Ba Đình - Thanh Hóa - 2021) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3$ là

A. $\int x^3 dx = \frac{x^3}{3} + C$. B. $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$. C. $\int x^3 dx = \frac{x^2}{2} + C$. D. $\int x^3 dx = 4x^4 + C$.

Lời giải

Chọn B

Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3$ là $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$.

Câu 92. (THPT Ba Đình - Thanh Hóa - 2021) Biết $\int_1^8 f(x) dx = 3$, giá trị $\int_1^8 5f(x) dx$ bằng

A. 3. B. 8. C. 15. D. 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int_1^8 5f(x) dx = 5 \int_1^8 f(x) dx = 15$.

Câu 93. (THPT Ba Đình - Thanh Hóa - 2021) Cho $I = \int_0^4 x\sqrt{2x+1} dx$ và $u = \sqrt{2x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây sai:

A. $I = \frac{1}{2} \int_1^3 x^2(x^2-1) dx$. B. $I = \frac{1}{2} \int_1^3 u^2(u^2-1) du$.
C. $I = \frac{1}{2} \left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} \right) \Big|_1^3$. D. $I = \int_1^3 u^2(u^2-1) du$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\sqrt{2x+1} = u \Rightarrow 2x+1 = u^2 \Rightarrow 2dx = 2udu \Rightarrow dx = udu$.

Khi đó $I = \int_0^4 x\sqrt{2x+1} dx = \int_1^3 \frac{u^2-1}{2} \cdot u \cdot udu = \frac{1}{2} \int_1^3 u^2(u^2-1) du \Rightarrow A, B$ đúng.

Đề ý $I = \frac{1}{2} \int_1^3 u^2(u^2-1) du = \frac{1}{2} \int_1^3 x^2(x^2-1) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} \right) \Big|_1^3 \Rightarrow C$ đúng.

Do đó $I = \int_1^3 u^2(u^2-1) du$ sai $\Rightarrow D$ sai.

Câu 94. (THPT Nguyễn Công Trứ - Hà Tĩnh - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và a là số dương. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\int_a^a f(x) dx = 1$. B. $\int_a^a f(x) dx = 0$. C. $\int_a^a f(x) dx = a^2$. D. $\int_a^a f(x) dx = 2a$.

Lời giải

Chọn B

♦ Ta có khẳng định đúng là $\int_a^a f(x) dx = 0$.

Câu 95. (THPT Nguyễn Công Trứ - Hà Tĩnh - 2021) Nguyên hàm của hàm số $y = e^{-2x+1}$ là

A. $2e^{-2x+1} + C.$

B. $-2e^{-2x+1} + C.$

C. $\frac{1}{2}e^{-2x+1} + C.$

D. $-\frac{1}{2}e^{-2x+1} + C.$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \int e^{-2x+1} dx = -\frac{1}{2} \int e^{-2x+1} d(-2x+1) = -\frac{1}{2} e^{-2x+1} + C.$$

Câu 96. (THPT Nguyễn Công Trứ - Hà Tĩnh - 2021) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2021^x \ln 2021 - \cos x$ và $f(0) = 2$. Phát biểu nào sau đúng?

A. $f(x) = \frac{2021^x}{\ln 2021} - \sin x + 1.$

B. $f(x) = 2021^x - \sin x + 1.$

C. $f(x) = 2021^x + \sin x + 1.$

D. $f(x) = \frac{2021^x}{\ln 2021} + \sin x + 1.$

Lời giải

Chọn B

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (2021^x \ln 2021 - \cos x) dx = 2021^x - \sin x + C.$$

$$f(0) = 2 \Rightarrow 2021^0 - \sin 0 + C = 2 \Leftrightarrow C = 1.$$

Câu 97. (THPT Nguyễn Công Trứ - Hà Tĩnh - 2021) Tìm nguyên hàm của $\int 5x^6 dx$.

A. $\frac{5}{6}x^7 + C.$

B. $\frac{5}{7}x^7 + C.$

C. $\frac{6}{5}x^7 + C.$

D. $x^7 + C.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \int 5x^6 dx = \frac{5}{7}x^7 + C.$$

Câu 98. (Trung Tâm Thanh Trường - 2021) Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $\int f(x)g(x)dx = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx.$

B. $\int 2f(x)dx = 2 \int f(x)dx.$

C. $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

D. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

Lời giải

Chọn A.

Mệnh đề câu A sai.

Câu 99. (Trung Tâm Thanh Trường - 2021) Nếu $\int_0^2 f(x)dx = 5$, $\int_0^2 g(x)dx = 2$ thì $\int_0^2 [f(x) + 2g(x)]dx$ bằng

A. 3.

B. 9.

C. 7.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int_0^2 [f(x) + 2g(x)]dx = \int_0^2 f(x)dx + 2 \int_0^2 g(x)dx = 5 + 4 = 9.$$

Câu 100. (Trung Tâm Thanh Trường - 2021) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2(x + e^x)$ là

A. $xe^{2x} + C.$

B. $x^2 + 2e^x + C.$

C. $x^2 + e^2 + C.$

D. $x^2 + e^{2x} + C.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int 2(x + e^x)dx = \int 2xdx + \int 2e^x dx = x^2 + 2e^x + C$.

Câu 101. (THPT Triệu Sơn - Thanh Hóa - 2021) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 - 1$ là.

- A. $6x + C$. B. $3x^2 - x + C$. C. $x^3 - x + C$. D. $x^3 + C$.

Lời giải

Chọn C

♦ Ta có $\int f(x)dx = \int (3x^2 - 1)dx = x^3 - x + C$.

Câu 102. (THPT Triệu Sơn - Thanh Hóa - 2021) Biết $\int_1^3 f(x)dx = -4$ khi đó $\int_1^3 2f(x)dx$ bằng

- A. 2. B. -2. C. 8. D. -8.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_1^3 2f(x)dx = 2\int_1^3 f(x)dx = -8$.

Câu 103. (THPT Triệu Sơn - Thanh Hóa - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a; x = b$ được tính theo công thức

- A. $S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$. B. $S = \int_a^b f(x)dx$. C. $\int_a^b |f(x)|dx$. D. $\int_a^b |f(x)|dx$.

Lời giải

Chọn D

Công thức tổng quát tính diện tích hình phẳng bằng tích phân.

Câu 104. (THPT Triệu Sơn - Thanh Hóa - 2021) Cho $\int f(x)dx = 6x^2 - 2\sin 2x + C$, khi đó $f(x)$ bằng

- A. $12x - 4\cos 2x$. B. $2x^3 - \cos 2x$. C. $12 - 2\cos 2x$. D. $6x - 4\cos 2x$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $(6x^2 - 2\sin 2x + C)' = 12x - 4\cos 2x$.

Câu 105. (THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2021) Nếu $\int_{-1}^3 f(x)dx = 3$ và $\int_3^5 f(x)dx = 2$ thì $\int_{-1}^5 f(x)dx$ bằng

- A. -5. B. 5. C. -1. D. 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_{-1}^5 f(x)dx = \int_{-1}^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx = 5$

MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU

Câu 1. (Liên trường Quỳnh Lưu - Hoàng Mai - Nghệ An - 2021) Tính $I = \int_0^a 25^x dx$ theo số thực a .

- A. $a \cdot 25^{a-1}$. B. $(25^a - 1) \cdot \ln 25$. C. $\frac{25}{a+1} (25^a - 1)$. D. $\frac{1}{\ln 25} (25^a - 1)$.

Câu 2. (Liên trường Quỳnh Lưu - Hoàng Mai - Nghệ An - 2021) Tính tích phân $I = \int_0^1 x(1+x^2)^4 dx$.

- A. $\frac{32}{10}$. B. $-\frac{31}{10}$. C. $-\frac{30}{10}$. D. $\frac{31}{10}$.

Câu 3. (Liên trường huyện Quảng Xương - Thanh Hóa - 2021) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x(e^x - 1)$ là

- A. $2e^x(x-1) - x^2 + C$ B. $2e^x(x-1) - 4x^2 + C$
C. $2e^x(x-1) - x^2$ D. $2e^x(x-1) - 4x^2$

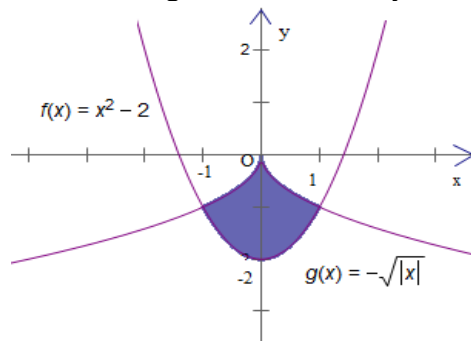
Câu 4. (Liên trường huyện Quảng Xương - Thanh Hóa - 2021) Cho $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} = a + b \ln \frac{e+1}{2}$, với a, b là

- các số nguyên. Tính $S = a^3 + b^3$.
A. $S = 0$. B. $S = -2$. C. $S = 1$. D. $S = 2$.

Câu 5. (Liên trường huyện Quảng Xương - Thanh Hóa - 2021) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x(1 + e^{-x})$.

- A. $\int f(x) dx = e^x + C$. B. $\int f(x) dx = e^{-x} + C$.
C. $\int f(x) dx = e^x + x + C$. D. $\int f(x) dx = e^x + e^{-x} + C$.

Câu 6. (Liên trường huyện Quảng Xương - Thanh Hóa - 2021) Diện tích phần hình phẳng tô đậm trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



- A. $2 \int_0^1 (-x^2 + 2 + \sqrt{|x|}) dx$. B. $2 \int_0^1 (-x^2 + 2 - \sqrt{|x|}) dx$.
C. $2 \int_0^1 (x^2 - 2 - \sqrt{|x|}) dx$. D. $2 \int_0^1 (x^2 - 2 + \sqrt{|x|}) dx$.

- Câu 7. (Liên trường huyện Quảng Xương - Thanh Hóa - 2021)** Cho $\int_0^1 f(x) dx = 1$. Với $I = \int_0^1 [e^x - f(x)] dx = e + a$. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $a = 2$. B. $a = -1$. C. $a = -2$. D. $a = 1$.
- Câu 8. (Chuyên Thoại Ngọc Hầu - An Giang - 2021)** Bể tích nước xây bơm nước vào bể nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 3at^2 + bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^3$, sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$. Tính thể tích của nước trong bể sau khi bơm được 20 giây:
- A. $8400m^3$. B. $600m^3$. C. $2200m^3$. D. $4200m^3$.
- Câu 9. (Chuyên Thoại Ngọc Hầu - An Giang - 2021)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5 \sin x$ và $f(0) = 10$. Tìm hàm số $f(x)$.
- A. $f(x) = 3x - 5 \cos x + 15$. B. $f(x) = 3x - 5 \cos x + 2$.
C. $f(x) = 3x + 5 \cos x + 5$. D. $f(x) = 3x + 5 \cos x + 2$.
- Câu 10. (Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2021)** Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x - x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V vật thể tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay quanh trục Ox .
- A. $V = \frac{4}{3}\pi$. B. $V = \frac{16}{15}$. C. $V = \frac{4}{3}$. D. $V = \frac{16}{15}\pi$.
- Câu 11. (Chuyên KHTN - 2021)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^3 xf(x) dx = 2$. Tích phân $\int_0^1 xf(3x) dx$ bằng
- A. $\frac{2}{3}$. B. 18. C. $\frac{2}{9}$. D. 6.
- Câu 12. (Chuyên KHTN - 2021)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \ln x$ trên khoảng $(0; +\infty)$ là
- A. $x \ln x + x + C$. B. $\frac{\ln^2 x}{2} + C$. C. $\frac{1}{x} + C$. D. $x \ln x - x + C$.
- Câu 13. (Chuyên KHTN - 2021)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2 + x$ và đồ thị của hàm số $y = 2x + 2$ bằng
- A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{53}{6}$. D. $\frac{9}{2}$.
- Câu 14. (Chuyên KHTN - 2021)** Họ nguyên hàm $\int x \cos x dx$ là
- A. $\cos x - x \sin x + C$. B. $-\cos x - x \sin x + C$.
C. $\cos x + x \sin x + C$. D. $-\cos x + x \sin x + C$.
- Câu 15. (Chuyên KHTN - 2021)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y = x + 3$ và parabol $y = 2x^2 - x - 1$ bằng:
- A. $\frac{13}{6}$. B. $\frac{9}{2}$. C. 9. D. $\frac{13}{3}$.
- Câu 16. (Chuyên KHTN - 2021)** Tính nguyên hàm $\int \tan^2 2x dx$

- A. $\tan 2x - x + C$. B. $\frac{1}{2} \tan 2x - x + C$. C. $\frac{1}{2} \tan 2x + x + C$. D. $\tan 2x + x + C$.

Câu 17. (Chuyên KHTN - 2021) Tìm nguyên hàm $\int (2x-1) \ln x dx$

- A. $(x^2 - x) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C$. B. $(x - x^2) \ln x + \frac{x^2}{2} - x + C$.
C. $(x^2 - x) \ln x + \frac{x^2}{2} + x + C$. D. $(x^2 - x) \ln x - \frac{x^2}{2} + x + C$.

Câu 18. (Chuyên KHTN - 2021) Tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x = 2$ và đồ thị $y = x^2$ khi quay xung quanh trục Ox .

- A. $\frac{4\pi}{5}$. B. $\frac{5\pi}{6}$. C. $\frac{32\pi}{5}$. D. $\frac{\pi}{6}$.

Câu 19. (Chuyên KHTN - 2021) Tính nguyên hàm $\int x^2 (2x^3 - 1)^2 dx$.

- A. $\frac{(2x^3 - 1)^3}{18} + C$. B. $\frac{(2x^3 - 1)^3}{3} + C$. C. $\frac{(2x^3 - 1)^3}{6} + C$. D. $\frac{(2x^3 - 1)^3}{9} + C$

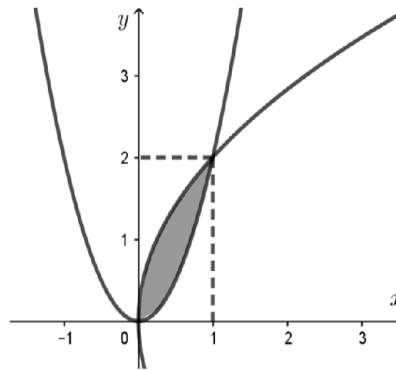
Câu 20. (Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - 2021) Cho tích phân $\int_0^1 x \sqrt{3x^2 + 1} dx$, nếu đặt $u = \sqrt{3x^2 + 1}$ thì $\int_0^1 x \sqrt{3x^2 + 1} dx$ bằng

- A. $\frac{1}{3} \int_1^2 u^2 du$. B. $\frac{1}{3} \int_1^2 u du$. C. $\frac{2}{3} \int_1^2 u^2 du$. D. $\frac{1}{3} \int_0^1 u^2 du$.

Câu 21. (Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - 2021) Cho $\int_1^2 [4f(x) - 2x] dx = 1$. Khi đó $\int_1^2 f(x) dx$ bằng

- A. 1. B. -3. C. -1. D. 3.

Câu 22. (Chuyên Quốc Học Huế - 2021) Tính diện tích của hình phẳng (được tô đậm) giới hạn bởi hai đường $y = 2x^2$, $y^2 = 4x$.



- A. $S = \frac{2\pi}{3}$. B. $S = \frac{4\pi}{3}$. C. $S = \frac{4}{3}$. D. $S = \frac{2}{3}$.

Câu 23. (Chuyên Quốc Học Huế - 2021) Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 + \cos x} \sin x dx$. Nếu đặt $t = 2 + \cos x$ thì kết quả nào sau đây đúng?

- A. $I = 2 \int_3^2 \sqrt{t} dt$. B. $I = \int_2^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{t} dt$. C. $I = \int_3^2 \sqrt{t} dt$. D. $I = \int_2^3 \sqrt{t} dt$.

Câu 24. (Chuyên Quang Trung - Bình Phước - 2021) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x(x-1)(2x-1)$.

A. $(x^2 - x)^2 + C$ B. $x^4 - x^3 + x^2 + C$ C. $x^4 + x^3 + x^2 + C$ D. $x^4 + x^3 - 2x^2 + C$

Câu 25. (Chuyên Quang Trung - Bình Phước - 2021) Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x.e^x$ biết $F(1) = 0$.

A. $x.e^x - e^x$. B. $x.e^x + e^x - 1$. C. $x.e^x - e$. D. $x.e^x - x + 1 - e$.

Câu 26. (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội- 2021) Tìm số thực m để hàm số $F(x) = mx^3 + (3m+2)x^2 - 4x + 3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 10x - 4$

A. $m = 2$. B. $m = 1$. C. $m = 0$. D. $m = -1$.

Câu 27. (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội- 2021) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{3x+1}$ là

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{4}(3x+1)\sqrt[3]{3x+1} + C$. B. $\int f(x)dx = (3x+1)\sqrt[3]{3x+1} + C$.
C. $\int f(x)dx = \sqrt[3]{3x+1} + C$. D. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}\sqrt[3]{3x+1} + C$

Câu 28. (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội- 2021) Cho tích phân $\int_0^e (3x^2 - 2x)dx = me^3 + ne^2$ với $m, n \in \mathbb{Z}$, khi đó $|m - n|$ bằng bao nhiêu?

A. 5. B. 3. C. 2. D. 0.

Câu 29. (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội- 2021) Cho $\int_2^3 \frac{x+8}{x^2+x-2} dx = a \ln 2 + b \ln 5$ với a, b là các số nguyên.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+b=3$. B. $a-b=5$. C. $a-2b=11$. D. $a+2b=11$.

Câu 30. (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội- 2021) Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=0, x=1, y=xe^x; y=0$ là

A. $\frac{\pi}{4}(e^2 - 1)$. B. $\frac{1}{4}(e^2 + 1)$. C. $\frac{1}{4}(e^2 - 1)$. D. $\frac{\pi}{4}(e^2 + 1)$.

Câu 31. (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội- 2021) Biết $\int_0^2 xf(2x)dx = 4$. Giá trị của $\int_0^4 xf(x)dx$ bằng

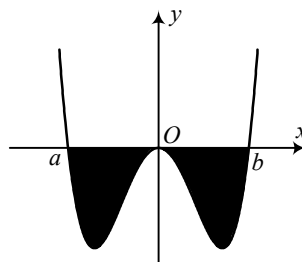
A. 16. B. 1. C. 8. D. 2.

Câu 32. (Chuyên Lê Quý Đôn - Điện Biên - 2021) Với a, b là các tham số thực. Giá trị tích phân

$\int_0^b (3x^2 - 2ax - 1)dx$ bằng

A. $3b^2 - 2ab - 1$. B. $b^3 + b^2a + b$. C. $b^3 - a^2b - b$. D. $b^3 - ab^2 - b$.

Câu 33. (Chuyên Lê Quý Đôn - Điện Biên - 2021) Hình vẽ bên biểu diễn trục hoành cắt đồ thị $y = f(x)$ tại ba điểm có hoành độ $0, a, b (a < 0 < b)$. Gọi S là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$ và trục hoành, khẳng định nào sau đây là **sai**?



A. $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$

B. $S = -\int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx.$

C. $S = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx.$

D. $S = \left| \int_a^0 f(x) dx \right| + \left| \int_0^b f(x) dx \right|.$

Câu 34. (Chuyên Lê Quý Đôn - Điện Biên - 2021) Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}.$

B. $V = \frac{\pi e^2}{2}.$

C. $V = \frac{e^2 - 1}{2}.$

D. $V = \frac{\pi(e^2 + 1)}{2}.$

Câu 35. (Chuyên Lê Quý Đôn - Điện Biên - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai $f''(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f(0) = f(1) = 1; f'(0) = 2021$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int_0^1 (1-x) f''(x) dx = -2021.$

B. $\int_0^1 (1-x) f''(x) dx = 2021.$

C. $\int_0^1 (1-x) f''(x) dx = 1.$

D. $\int_0^1 (1-x) f''(x) dx = -1.$

Câu 36. (Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - 2021) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$ và hai trục tọa độ bằng

A. $\frac{11}{4}.$

B. $\frac{1}{2}.$

C. $\frac{11\pi}{4}.$

D. $\frac{\pi}{2}.$

Câu 37. (Chuyên ĐHSPT Hà Nội - 2021) Diện tích hình phẳng thuộc góc phần tư thứ hai, giới hạn bởi parabol $y = 2 - x^2$, đường thẳng $y = -x$ và trục Oy bằng:

A. $\frac{7}{6}.$

B. $\frac{5}{6}.$

C. $\frac{11}{6}.$

D. $\frac{9}{2}.$

Câu 38. (Chuyên ĐHSPT Hà Nội - 2021) $\int (2x+5)^9 dx$ bằng

A. $\frac{1}{10}(2x+5)^{10} + C.$

B. $18(2x+5)^8 + C.$

C. $9(2x+5)^8 + C.$

D. $\frac{1}{20}(2x+5)^{10} + C.$

Câu 39. (Chuyên ĐHSPT Hà Nội - 2021) Biết $f(x)$ là hàm số liên tục trên $[0; 3]$ và có $\int_0^1 f(3x) dx = 3$. Giá trị của biểu thức $\int_0^3 f(x) dx$ bằng:

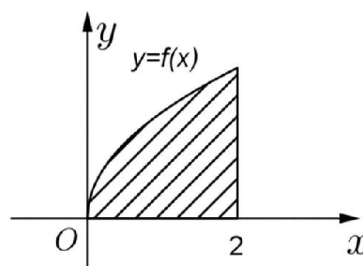
A. 9.

B. 1.

C. 3.

D. $\frac{1}{3}.$

Câu 40. (Chuyên ĐHTT Vĩnh - Nghệ An - 2021) Giả sử $f(x)$ là hàm liên tục trên $[0; +\infty)$ và diện tích phần hình phẳng được kẻ dọc ở hình bên bằng 3. Tích phân $\int_0^1 f(2x) dx$ bằng:

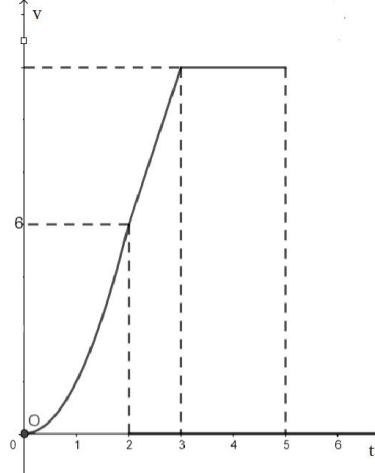


- A. $\frac{4}{3}$. B. 3. C. 2. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 41. (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An - 2021) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^{2x-1}$ là

- A. $\frac{9^x}{3} + C$. B. $\frac{9^x}{6} + C$. C. $\frac{9^x}{6\ln 3} + C$. D. $\frac{9^x}{3\ln 3} + C$.

Câu 42. (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An - 2021) Một chiếc xe đua F_1 đạt vận tốc lớn nhất là 360km/h . Đồ thị bên hiển thị vận tốc v của xe trong 5 giây đầu tiên kể từ lúc xuất phát. Đồ thị trong 2 giây đầu là một phần của parabol đỉnh tại gốc tọa độ O , giây tiếp theo là đoạn thẳng và sau đúng ba giây thì xe đạt vận tốc lớn nhất. Biết rằng mỗi đơn vị trục hoành biểu thị 1 giây, mỗi đơn vị trục tung biểu thị 10m/s và trong 5 giây đầu xe chuyển động theo đường thẳng. Hỏi trong 5 giây đó sẽ đã đi được quãng đường là bao nhiêu.

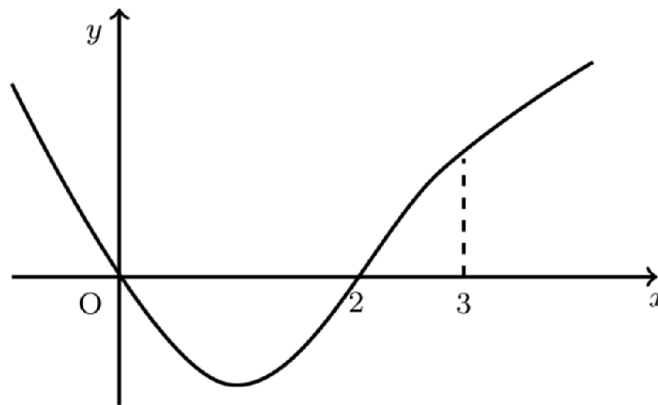


- A. 400 (mét). B. 340 (mét). C. 420 (mét). D. 320 (mét).

Câu 43. (THPT Quế Võ 1 - Bắc Ninh - 2021) Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \ln x$ tại giao điểm của đồ thị đó với trục Ox . Diện tích của hình tam giác tạo bởi hai trục tọa độ và đường thẳng d được xác định bởi tích phân

- A. $\int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx$. B. $\int_0^1 (1-x) dx$. C. $\int_0^1 (x-1) dx$. D. $\int_0^1 \ln x dx$.

Câu 44. (THPT Quế Võ 1 - Bắc Ninh - 2021) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ được cho bởi hình vẽ bên dưới.

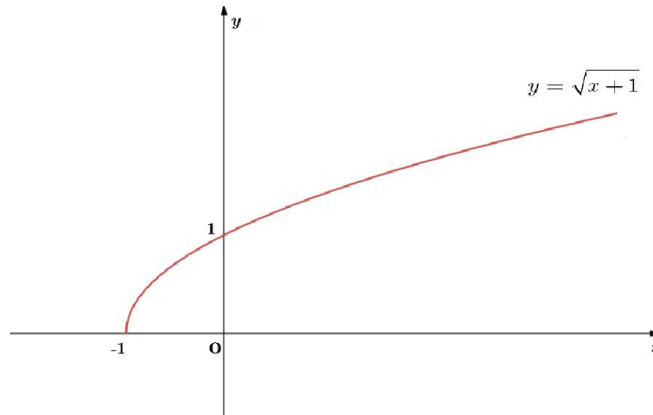


Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0; 3]$ là

- A. $f(2)$. B. Không xác định được. C. $f(0)$. D. $f(3)$.

- Câu 45. (THPT Quốc Oai - Hà Nội - 2021)** Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 10 \text{ (m/s)}$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng tính đến thời điểm dừng bánh là
A. 16 m . **B.** 55 m . **C.** 25 m . **D.** 50 m .
- Câu 46. (THPT Quốc Oai - Hà Nội - 2021)** Cho $F(x) = (ax^2 + bx - c)e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2020x^2 + 2022x - 1)e^{2x}$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Tính $T = a - 2b + 4c$.
A. $T = 1004$ **B.** $T = 1018$. **C.** $T = 1012$. **D.** $T = -2012$.
- Câu 47. (THPT Quốc Oai - Hà Nội - 2021)** Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x(x-1)(2x-1)$ là
A. $x^4 + x^3 + x^2 + C$. **B.** $x^4 + x^3 - 2x^2 + C$. **C.** $(x^2 - x)^2 + C$. **D.** $x^4 - x^3 + x^2 + C$.
- Câu 48. (THPT PTNK Cơ sở 2 - TP.HCM - 2021)** Tích phân $\int_0^1 xe^{x^2} dx$ bằng
A. $\frac{1}{2}(e-1)$. **B.** $(e+1)$. **C.** $2e$. **D.** $2e-1$.
- Câu 49. (THPT Phan Đình Phùng - Quảng Bình - 2021)** Khi đổi biến $x = \sqrt{3} \tan t$, tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 3}$ trở thành tích phân nào?
A. $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}}{3} dt$. **B.** $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{t} dt$. **C.** $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}}{3} dt$. **D.** $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{3} dt$.
- Câu 50. (THPT Phan Đình Phùng - Quảng Bình - 2021)** Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(H): y = \frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng
A. $S = \ln 2 + 1$. **B.** $S = 2 \ln 2 + 1$. **C.** $S = \ln 2 - 1$. **D.** $S = 2 \ln 2 - 1$.
- Câu 51. (THPT Nguyễn Tất Thành - Hà Nội - 2021)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^3 f(x) dx = 20$. Tính tích phân $I = \int_0^1 (x+1)f(x^2 + 2x) dx$.
A. $I = 20$. **B.** $I = 10$. **C.** $I = 40$. **D.** $I = 30$.
- Câu 52. (THPT Nguyễn Tất Thành - Hà Nội - 2021)** Cho biết $\int_1^4 \frac{\ln^2 x}{x} dx = \frac{a}{b} \ln^3 2$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a + b$.
A. 4 . **B.** 5 . **C.** 11 . **D.** 9 .
- Câu 53. (THPT Nguyễn Tất Thành - Hà Nội - 2021)** Cho biết $\int_0^1 xe^{-x} dx = a + \frac{b}{e}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $a^2 + b^2$.
A. 7 . **B.** 5 . **C.** 3 . **D.** 4 .
- Câu 54. (THPT Nguyễn Tất Thành - Hà Nội - 2021)** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi các đường $y = \sin x, y = 0, x = 0$ và $x = \pi$. Quay hình phẳng (H) quanh trục Ox ta được một vật thể tròn xoay có thể tích bằng
A. π . **B.** π^2 . **C.** $\frac{\pi^2}{2}$. **D.** $\frac{\pi}{2}$.

Câu 55. (THPT Nguyễn Tất Thành - Hà Nội - 2021) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x+1}$ và hai trục tọa độ Ox , Oy . Tính diện tích S của hình phẳng (H) .



- A. $S = \frac{3}{2}$. B. $S = \frac{1}{3}$. C. $S = 1$. D. $S = \frac{2}{3}$.

Câu 56. (THPT Nguyễn Đức Cảnh - Thái Bình - 2021) Cho tích phân $I = \int_0^{\pi} x^2 \cos x dx$ và $u = x^2, dv = \cos x dx$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $I = x^2 \sin x \Big|_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} x \sin x dx$. B. $I = x^2 \sin x \Big|_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} x \sin x dx$.
C. $I = x^2 \sin x \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{3} \int_0^{\pi} x^3 \sin x dx$. D. $I = x^2 \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x \sin x dx$.

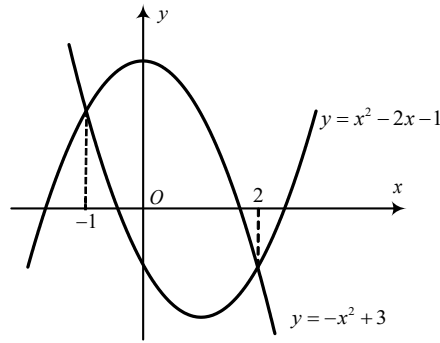
Câu 57. (THPT Nguyễn Đức Cảnh - Thái Bình - 2021) Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x^2 + 3x + 1, y = x^3 + 1$ được tính bởi công thức nào dưới đây

- A. $S = \int_{-1}^0 (2x^2 + 3x - x^3) dx + \int_0^3 (x^3 - 2x^2 - 3x) dx$.
B. $S = \int_{-1}^3 (x^3 - 2x^2 - 3x) dx$.
C. $S = \pi \int_{-1}^3 (x^3 - 2x^2 - 3x)^2 dx$.
D. $S = \int_{-1}^0 (x^3 - 2x^2 - 3x) dx + \int_0^3 (2x^2 + 3x - x^3) dx$.

Câu 58. (THPT Mai Anh Tuấn - Thanh Hóa - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 9]$ thỏa mãn $\int_0^9 f(x) dx = 8, \int_4^7 f(x) dx = 3$. Khi đó giá trị của $P = \int_0^4 f(x) dx + \int_7^9 f(x) dx$ là

- A. $P = 11$. B. $P = 5$. C. $P = 20$. D. $P = 9$.

Câu 59. (THPT Hậu Lộc 4 - Thanh Hóa - 2021) Diện tích phần hình phẳng gạch sọc trong hình vẽ được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$. B. $\int_{-1}^2 (-2x + 2) dx$.
 C. $\int_{-1}^2 (2x - 2) dx$. D. $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx$.

Câu 60. (THPT Hậu Lộc 4 - Thanh Hóa - 2021) Cho tích phân $I = \int_{-4}^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{5-x}} = a - b \ln 2, a, b \in \mathbb{Z}$. Khi

đó $E = ab$ bằng

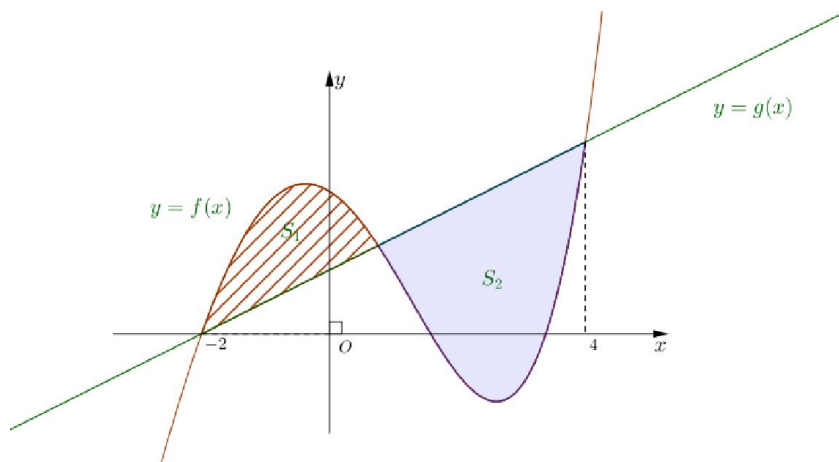
A. $E = 6$. B. $E = 28$. C. $E = 8$. D. $E = 30$.

Câu 61. (THPT Hậu Lộc 4 - Thanh Hóa - 2021) Cho hình (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y = -x^2 + 2x$, trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng (H) quay quanh trục Ox .

A. $\frac{16\pi}{15}$. B. $\frac{4\pi}{3}$. C. $\frac{496\pi}{15}$. D. $\frac{32\pi}{15}$.

Câu 62. (THPT Đồng Quan - Hà Nội - 2021) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong và hàm số $y = g(x)$ có đồ thị là đường thẳng. Gọi S_1 là diện tích miền phẳng được gạch sọc, S_2 là diện tích miền phẳng được tô đậm, $S_1 \neq S_2$ (hình vẽ). Tích phân

$\int_{-2}^4 (f(x) - g(x)) dx$ bằng



A. $S_1 + S_2$. B. $-S_1 - S_2$. C. $S_1 - S_2$. D. $S_2 - S_1$.

Câu 63. (THPT Lê Lợi - Thanh Hóa - 2021) Cho $I = \int_1^2 4x\sqrt{x^2-1} dx$ và $u = x^2 - 1$. Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau?

A. $I = 2 \int_1^2 \sqrt{u} du$. B. $I = 2 \int_0^3 \sqrt{u} du$. C. $I = \frac{4}{3} u \sqrt{u} \Big|_0^3$. D. $I = \frac{4}{3} \sqrt{27}$.

Câu 64. (Sở Vĩnh Phúc - 2021) Tìm họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $y = e^x + 2x$.

A. $e^x + x^2 + C$. B. $e^x + 2 + C$. C. $\frac{1}{x+1} e^{x+1} + x^2 + C$. D. $e^x + 2x^2 + C$.

Câu 65. (Sở Vĩnh Phúc - 2021) Cho hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị $(P): y = 2x - x^2$ và trục Ox . Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi cho D quay quanh trục Ox .

A. $V = \frac{19\pi}{15}$. B. $V = \frac{13\pi}{15}$. C. $V = \frac{17\pi}{15}$. D. $V = \frac{16\pi}{15}$.

Câu 66. (Sở Vĩnh Phúc - 2021) Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 2021$, trục hoành, $x = -2$, $x = 4$. Mệnh đề nào sau đây đúng.

A. $S = \int_{-2}^4 (x^2 - 2021)^2 dx$. B. $S = \int_{-2}^4 (x^2 - 2021) dx$.
C. $S = \int_{-2}^4 |x^2 - 2021| dx$. D. $S = \int_{-2}^4 |x^2 - 2021| dx$.

Câu 67. (Sở Vĩnh Phúc - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_1^{2021} f(x) dx = 4$. Tính

$I = \int_0^{1010} f(2x+1) dx$.
A. $I = 8$. B. $I = 2$. C. $I = 1$. D. $I = 4$.

Câu 68. (Sở Lào Cai - 2021) Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx = -8$. Tính tích phân $\int_0^1 g(x) dx$?

A. -6 . B. -3 . C. 5 . D. -5 .

Câu 69. (Sở Hà Tĩnh - 2021) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$ trên khoảng $(-1; +\infty)$ là

A. $2 \ln(x+1) - \frac{1}{x+1} + C$. B. $2 \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} + C$.
C. $2 \ln(x+1) + \frac{2}{x+1} + C$. D. $2 \ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + C$.

Câu 70. (Sở Hà Tĩnh - 2021) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0) = 4$ và $f'(x) = e^x - x, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó

$\int_0^1 f(x) dx$ bằng
A. $\frac{6e+23}{6}$. B. $\frac{6e+17}{6}$. C. $\frac{6e+11}{6}$. D. $\frac{6e+23}{3}$.

Câu 71. (Sở Hà Tĩnh - 2021) Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Tính

$I = \int_0^3 [2x + f(x)] dx$.
A. $I = 36$. B. $I = 9$. C. $I = \frac{117}{4}$. D. $I = \frac{23}{4}$.

- Câu 72. (Sở Tuyên Quang - 2021)** Cho $I = \int_0^1 x^3 \sqrt[3]{1-x^4} dx$. Đặt $t = \sqrt[3]{1-x^4}$ thì I bằng
- A. $-\int_0^1 t^3 \sqrt{t} dt$. B. $\int_0^1 \frac{3}{4} t^3 dt$. C. $\int_0^1 t^3 dt$. D. $-\int_0^1 \frac{3}{4} t^3 dt$.
- Câu 73. (Sở Yên Bái - 2021)** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = x^2 - 4x + 6$ và $y = -x^2 - 2x + 6$.
- A. $\frac{5}{3}$. B. $\frac{4}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.
- Câu 74. (Sở Yên Bái - 2021)** Nếu $\int_1^2 f(x) dx = 5$; $\int_1^2 (2f(x) + g(x)) dx = 13$ thì $\int_1^2 g(x) dx$ bằng
- A. -3 . B. 3 . C. -23 . D. 23 .
- Câu 75. (THPT Thanh Chương 1- Nghệ An - 2021)** $\int (x+1) \sin x dx$ bằng.
- A. . B. .
C. . D. .
- Câu 76. (THPT Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2021)** Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 6x + 7$ và đường thẳng $y = 3 - x$.
- A. $S = 3$. B. $S = \frac{9}{2}$. C. $S = \frac{33\pi}{5}$. D. $S = 60$.
- Câu 77. (THPT Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2021)** Cho $\int x\sqrt{x} dx$ bằng
- A. $\frac{1}{3} x^3 \sqrt{x} + C$. B. $\frac{1}{2} x^2 \sqrt{x} + C$. C. $\frac{5}{2} x^2 \sqrt{x} + C$. D. $\frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + C$.
- Câu 78. (THPT Lương Thế Vinh - 2021)** Với biến đổi $u = \ln x$, tích phân $\int_e^3 \frac{1}{x \ln x} dx$ trở thành
- A. $\int_e^3 \frac{1}{u} du$. B. $\int_0^{\ln 3} \frac{1}{u} du$. C. $\int_1^e \frac{1}{u} du$. D. $\int_1^{\ln 3} \frac{1}{u} du$.
- Câu 79. (THPT Lương Thế Vinh - 2021)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1; 2]$, $f(2) = 1$ và $f(4) = 2021$. Giá trị $I = \int_1^2 f'(2x) dx$ bằng
- A. -2018 . B. 1010 . C. -1008 . D. 2018 .
- Câu 80. (THPT Hoàng Hoa Thám - Đà Nẵng - 2021)** Cho tích phân $I = \int_1^e x \ln^2 x dx$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $I = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x \Big|_1^e + \int_1^e x \ln^2 x dx$. B. $I = x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - 2 \int_1^e x \ln x dx$.
C. $I = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - \int_1^e x \ln x dx$. D. $I = x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - 2 \int_1^e \ln x dx$.
- Câu 81. (THPT Đào Duy Từ - Hà Nội - 2021)** Cho tích phân $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1-\ln x}}{x} dx$. Đặt $u = \sqrt{1-\ln x}$. Khi đó I bằng

A. $I = 2 \int_0^1 u^2 du$. B. $I = -2 \int_0^1 u^2 du$. C. $I = \int_1^0 \frac{u^2}{2} du$. D. $I = - \int_1^0 u^2 du$.

Câu 82. (THPT Đào Duy Từ - Hà Nội - 2021) Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 5x + 4$ và trục Ox . Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình (H) quanh trục Ox bằng:

A. $\frac{9}{2}$. B. $\frac{81}{10}$. C. $\frac{81\pi}{10}$. D. $\frac{9\pi}{2}$.

Câu 83. (THPT Đào Duy Từ - Hà Nội - 2021) Biết $\int_0^2 f(x) dx = 2020$ khi đó $\int_0^4 f\left(\frac{x}{2}\right) dx$ bằng

A. 2020. B. 1010. C. -2020. D. 4040.

Câu 84. (THPT Chu Văn An - Thái Nguyên - 2021) Họ nguyên hàm $\int \left(\frac{x^2 + 2x + 3}{x+1} \right) dx$ bằng

A. $\frac{x^2}{2} + x + 2 \ln|x+1| + C$. B. $\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{(x+1)^2} + C$.
C. $\frac{x^2}{2} + x - 2 \ln|x+1| + C$. D. $x^2 + x + 2 \ln(x+1) + C$.

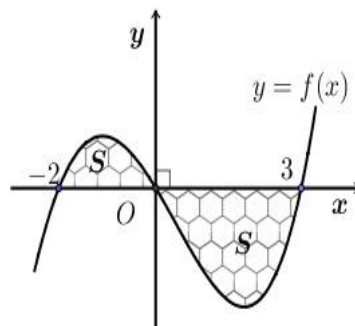
Câu 85. (THPT Chu Văn An - Thái Nguyên - 2021) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2 - x^2, y = -x$ bằng:

A. 9. B. $\frac{9}{2}$. C. 18. D. $\frac{9}{4}$.

Câu 86. (THPT Ba Đình - Thanh Hóa - 2021) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$ và $y = x + 2$ là

A. $S = 9$. B. $S = \frac{9}{4}$. C. $S = \frac{9}{2}$. D. $S = \frac{8}{9}$.

Câu 87. (Trung Tâm Thanh Trường - 2021) Hình phẳng S gồm hai phần được đánh dấu trong hình vẽ bên. Diện tích hình S được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $S = - \int_{-2}^0 f(x) dx - \int_0^3 f(x) dx$. B. $S = - \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx$.
C. $S = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx$. D. $S = \int_{-2}^0 f(x) dx - \int_0^3 f(x) dx$.

Câu 88. (Trung Tâm Thanh Trường - 2021) Xét $\int_0^1 (1-2x)^{20} dx$, nếu đặt $u = 1-2x$ thì $\int_0^1 (1-2x)^{20} dx$ bằng

A. $2 \int_{-1}^1 u^{20} du$. B. $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 u^{20} du$. C. $-\frac{1}{2} \int_{-1}^1 u^{20} du$. D. $\int_{-1}^1 u^{20} du$.

Câu 89. (Trung Tâm Thanh Trường - 2021) Biết $F(x) = a \sin x + b \cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin x + 8 \cos x$, tính giá trị $T = a + b$.

- A. $T = 6$. B. $T = 4$. C. $T = -6$. D. $T = 10$.

Câu 90. (THPT Triệu Sơn - Thanh Hóa - 2021) Biết $\int_{-1}^1 f(x) dx = 6$, tích phân $\int_0^1 f(2x-1) dx$ bằng

- A. 3. B. 6. C. 12. D. 2.

Câu 91. (THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2021) Cho hàm số $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $\int f(x) dx = 2x + \frac{1}{x} + C$. B. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$.
C. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x^3} + C$. D. $\int f(x) dx = 2x - \frac{2}{x^3} + C$.

Câu 92. (THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2021) Cho hàm số $f(x) = \tan^2 2x$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \tan 2x + C$. B. $\int f(x) dx = \frac{\tan^3 2x}{3} + C$.
C. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \tan 2x - x + C$. D. $\int f(x) dx = \tan 2x - x + C$.

Câu 93. (THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2021) Cho $\int_a^3 x^{-2} dx = 4$. Giá trị của tham số a thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(1; 2)$. B. $(-1; 0)$. C. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. D. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Câu 94. (THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2021) Biết $\int_1^3 f(x) dx = 4$. Giá trị của $\int_1^3 [5f(x) - 1] dx$ bằng

- A. -22. B. 22. C. 18. D. 20.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.D	3.A	4.A	5.C	6.B	7.C	8.A	9.C	10.D
11.C	12.D	13.D	14.C	15.D	16.B	17.D	18.C	19.A	20.A
21.A	22.D	23.D	24.A	25.A	26.B	27.A	28.C	29.C	30.A
31.A	32.D	33.C	34.A	35.A	36.A	37.A	38.D	39.A	40.D
41.C	42.D	43.B	44.D	45.D	46.C	47.C	48.A	49.C	50.D
51.B	52.C	53.B	54.C	55.D	56.A	57.D	58.B	59.A	60.C
61.A	62.C	63.A	64.A	65.D	66.D	67.B	68.C	69.D	70.C
71.A	72.B	73.C	74.B	75.C	76.C	77.D	78.D	79.B	80.C
81.A	82.C	83.D	84.A	85.B	86.C	87.D	88.B	89.A	90.A
91.B	92.C	93.C	94.C						

MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU

Câu 1. (Liên trường Quỳnh Lưu - Hoàng Mai - Nghệ An - 2021) Tính $I = \int_0^a 25^x dx$ theo số thực a .

- A. $a \cdot 25^{a-1}$. B. $(25^a - 1) \cdot \ln 25$. C. $\frac{25}{a+1}(25^a - 1)$. D. $\frac{1}{\ln 25}(25^a - 1)$.

Lời giải

Chọn D

♦ Có $I = \int_0^a 25^x dx = \frac{1}{\ln 25} 25^x \Big|_0^a = \frac{1}{\ln 25} (25^a - 25^0) = \frac{1}{\ln 25} (25^a - 1)$.

Câu 2. (Liên trường Quỳnh Lưu - Hoàng Mai - Nghệ An - 2021) Tính tích phân $I = \int_0^1 x(1+x^2)^4 dx$.

- A. $\frac{32}{10}$. B. $-\frac{31}{10}$. C. $-\frac{30}{10}$. D. $\frac{31}{10}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $1+x^2 = t \Rightarrow 2x dx = dt$. Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \rightarrow t=1 \\ x=1 \rightarrow t=2 \end{cases}$.

Suy ra $I = \int_1^2 \frac{1}{2} t^4 dt = \frac{t^5}{10} \Big|_1^2 = \frac{32}{10} - \frac{1}{10} = \frac{31}{10}$.

Câu 3. (Liên trường huyện Quảng Xương - Thanh Hóa - 2021) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x(e^x - 1)$ là

- A. $2e^x(x-1) - x^2 + C$ B. $2e^x(x-1) - 4x^2 + C$
C. $2e^x(x-1) - x^2$ D. $2e^x(x-1) - 4x^2$

Lời giải

Chọn A

♦ Ta có $\int 2x(e^x - 1) dx = \int 2xe^x dx - \int 2x dx = \int 2xe^x dx - x^2$.

♦ Xét $\int 2xe^x dx = \int 2x de^x = 2x \cdot e^x - \int 2e^x dx = 2x \cdot e^x - 2e^x = 2e^x(x-1)$.

♦ $\int 2x(e^x - 1) dx = 2e^x(x-1) - x^2 + C$.

Câu 4. (Liên trường huyện Quảng Xương - Thanh Hóa - 2021) Cho $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} = a + b \ln \frac{e+1}{2}$, với a, b là

các số nguyên. Tính $S = a^3 + b^3$.

- A. $S = 0$. B. $S = -2$. C. $S = 1$. D. $S = 2$.

Lời giải

Chọn A

♦ Ta có $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} = \int_0^1 \left(1 - \frac{e^x}{e^x + 1} \right) dx = x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1}$

$= 1 - \ln |e^x + 1| \Big|_0^1 = 1 - \ln \frac{e+1}{2}$.

♦ Suy ra $a = 1, b = -1$. Vậy $S = a^3 + b^3 = 0$.

Câu 5. (Liên trường huyện Quảng Xương - Thanh Hóa - 2021) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x(1 + e^{-x})$.

A. $\int f(x) dx = e^x + C$. **B.** $\int f(x) dx = e^{-x} + C$.

C. $\int f(x) dx = e^x + x + C$.

D. $\int f(x) dx = e^x + e^{-x} + C$.

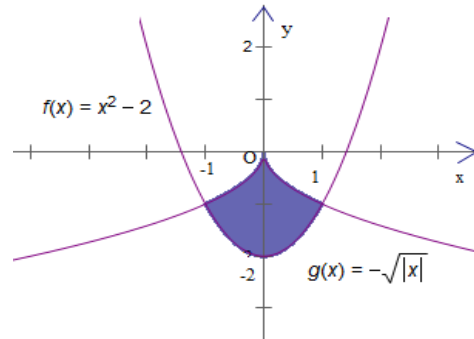
Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(x) = e^x(1 + e^{-x}) = e^x + 1$.

Suy ra $\int f(x) dx = \int (e^x + 1) dx = e^x + x + C$.

Câu 6. (Liên trường huyện Quảng Xương - Thanh Hóa - 2021) Diện tích phần hình phẳng tô đậm trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $2 \int_0^1 (-x^2 + 2 + \sqrt{|x|}) dx$.

B. $2 \int_0^1 (-x^2 + 2 - \sqrt{|x|}) dx$.

C. $2 \int_0^1 (x^2 - 2 - \sqrt{|x|}) dx$. **D.** $2 \int_0^1 (x^2 - 2 + \sqrt{|x|}) dx$.

Lời giải

Chọn B

♦ Dựa vào hình vẽ ta có: $S = \int_{-1}^0 [-\sqrt{|x|} - (x^2 - 2)] dx + \int_0^1 [-\sqrt{|x|} - (x^2 - 2)] dx$
 $= 2 \int_0^1 (-x^2 - \sqrt{|x|} + 2) dx$.

Câu 7. (Liên trường huyện Quảng Xương - Thanh Hóa - 2021) Cho $\int_0^1 f(x) dx = 1$. Với

$I = \int_0^1 [e^x - f(x)] dx = e + a$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a = 2$.

B. $a = -1$.

C. $a = -2$.

D. $a = 1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $I = \int_0^1 [e^x - f(x)] dx = \int_0^1 e^x dx - \int_0^1 f(x) dx = e^x \Big|_0^1 - 1 = e - 2$.

Vậy $a = -2$.

Câu 8. (Chuyên Thoại Ngọc Hầu - An Giang - 2021) Bác thợ xây bơm nước vào bể nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 3at^2 + bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^3$, sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$. Tính thể tích của nước trong bể sau khi bơm được 20 giây:

A. $8400m^3$.

B. $600m^3$.

C. $2200m^3$.

D. $4200m^3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $h(t) = \int (3at^2 + bt) dt = at^3 + \frac{b}{2}t^2 + C$

$$\text{Từ gt} \Rightarrow \begin{cases} h(0) = 0 \\ h(5) = 150 \\ h(10) = 1100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 0 \\ 125a + \frac{25}{2}b = 150 \\ 1000a + 50b = 1100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ C = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow h(t) = t^3 + t^2$$

Vậy thể tích của nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là $h(20) = 8400 m^3$.

Câu 9. (Chuyên Thoại Ngọc Hầu - An Giang - 2021) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5 \sin x$ và $f(0) = 10$. Tìm hàm số $f(x)$.

A. $f(x) = 3x - 5 \cos x + 15$.

B. $f(x) = 3x - 5 \cos x + 2$.

C. $f(x) = 3x + 5 \cos x + 5$.

D. $f(x) = 3x + 5 \cos x + 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) = \int f'(x) dx = \int (3 - 5 \sin x) dx = 3x + 5 \cos x + C$.

Mà $f(0) = 10 \Leftrightarrow 3 \cdot 0 + 5 \cos 0 + C = 10 \Leftrightarrow C = 5$.

Vậy $f(x) = 3x + 5 \cos x + 5$.

Câu 10. (Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2021) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x - x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V vật thể tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay quanh trục Ox .

A. $V = \frac{4}{3} \pi$.

B. $V = \frac{16}{15}$.

C. $V = \frac{4}{3}$.

D. $V = \frac{16}{15} \pi$.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình: $2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Suy ra: $V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx = \pi \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \frac{16}{15} \pi$.

Câu 11. (Chuyên KHTN - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^3 xf(x) dx = 2$. Tích

phân $\int_0^1 xf(3x) dx$ bằng

A. $\frac{2}{3}$.

B. 18.

C. $\frac{2}{9}$.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

♦ Đặt: $t = 3x \Rightarrow x = \frac{t}{3} \Rightarrow dx = \frac{1}{3} dt$

♦ Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = 3$.

♦ Khi đó: $\int_0^1 xf(3x) dx = \frac{1}{9} \int_0^3 tf(t) dt = \frac{2}{9}$

Câu 12. (Chuyên KHTN - 2021) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \ln x$ trên khoảng $(0; +\infty)$ là

- A. $x \ln x + x + C$. B. $\frac{\ln^2 x}{2} + C$. C. $\frac{1}{x} + C$. D. $x \ln x - x + C$.

Lời giải

Chọn D

♦ Ta tìm $I = \int f(x) dx = \int \ln x dx$, $x \in (0; +\infty)$.

♦ Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x \end{cases}$.

♦ Khi đó: $I = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$.

Câu 13. (Chuyên KHTN - 2021) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2 + x$ và đồ thị của hàm số $y = 2x + 2$ bằng

- A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{53}{6}$. D. $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^2 + x = 2x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng cần tính là: $S = \int_{-1}^2 |x^2 - x - 2| dx = \frac{9}{2}$.

Câu 14. (Chuyên KHTN - 2021) Họ nguyên hàm $\int x \cos x dx$ là

- A. $\cos x - x \sin x + C$. B. $-\cos x - x \sin x + C$.
C. $\cos x + x \sin x + C$. D. $-\cos x + x \sin x + C$.

Lời giải

Chọn C

♦ Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$.

♦ Ta có: $I = \int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$.

Câu 15. (Chuyên KHTN - 2021) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y = x + 3$ và parabol $y = 2x^2 - x - 1$ bằng:

- A. $\frac{13}{6}$. B. $\frac{9}{2}$. C. 9. D. $\frac{13}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm giữa đường thẳng $y = x + 3$ và parabol $y = 2x^2 - x - 1$ là

$$x + 3 = 2x^2 - x - 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y = x + 3$ và parabol $y = 2x^2 - x - 1$ là

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 |(2x^2 - x - 1) - (x + 3)| dx \\ &= \int_{-1}^2 |2x^2 - 2x - 4| dx \end{aligned}$$

Ta có $2x^2 - 2x - 4 < 0, \forall x \in (-1; 2)$ nên

$$S = \int_{-1}^2 |2x^2 - 2x - 4| dx = - \int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx = - \left(\frac{2x^3}{3} - x^2 - 4x \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{13}{3}.$$

Câu 16. (Chuyên KHTN - 2021) Tính nguyên hàm $\int \tan^2 2x dx$

- A. $\tan 2x - x + C$. B. $\frac{1}{2} \tan 2x - x + C$. C. $\frac{1}{2} \tan 2x + x + C$. D. $\tan 2x + x + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int \tan^2 2x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 2x} - 1 \right) dx = \frac{1}{2} \tan 2x - x + C$.

Câu 17. (Chuyên KHTN - 2021) Tìm nguyên hàm $\int (2x-1) \ln x dx$

- A. $(x^2 - x) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C$. B. $(x - x^2) \ln x + \frac{x^2}{2} - x + C$.
C. $(x^2 - x) \ln x + \frac{x^2}{2} + x + C$. D. $(x^2 - x) \ln x - \frac{x^2}{2} + x + C$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = (2x-1) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x^2 - x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int (2x-1) \ln x dx = (x^2 - x) \ln x - \int (x-1) dx = (x^2 - x) \ln x - \frac{x^2}{2} + x + C.$$

Câu 18. (Chuyên KHTN - 2021) Tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x = 2$ và đồ thị $y = x^2$ khi quay xung quanh trục Ox .

- A. $\frac{4\pi}{5}$. B. $\frac{5\pi}{6}$. C. $\frac{32\pi}{5}$. D. $\frac{\pi}{6}$.

Lời giải

Chọn C

$y = x^2$ có điểm chung với Ox tại điểm có hoành độ $x = 0$.

$$V = \pi \int_0^2 x^4 dx = \pi \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{32\pi}{5}.$$

Câu 19. (Chuyên KHTN - 2021) Tính nguyên hàm $\int x^2 (2x^3 - 1)^2 dx$.

- A. $\frac{(2x^3 - 1)^3}{18} + C$. B. $\frac{(2x^3 - 1)^3}{3} + C$. C. $\frac{(2x^3 - 1)^3}{6} + C$. D. $\frac{(2x^3 - 1)^3}{9} + C$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int x^2 (2x^3 - 1)^2 dx &= \int x^2 (2x^3 - 1)^2 \frac{d(2x^3 - 1)}{6x^2} = \frac{1}{6} \int (2x^3 - 1)^2 d(2x^3 - 1) \\ &= \frac{1}{6} \frac{(2x^3 - 1)^3}{3} + C = \frac{(2x^3 - 1)^3}{18} + C. \end{aligned}$$

Câu 20. (Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - 2021) Cho tích phân $\int_0^1 x\sqrt{3x^2+1}dx$, nếu đặt

$u = \sqrt{3x^2+1}$ thì $\int_0^1 x\sqrt{3x^2+1}dx$ bằng

- A.** $\frac{1}{3}\int_1^2 u^2 du$. **B.** $\frac{1}{3}\int_1^2 u du$. **C.** $\frac{2}{3}\int_1^2 u^2 du$. **D.** $\frac{1}{3}\int_0^1 u^2 du$.

Lời giải

Chọn A

♦ $u = \sqrt{3x^2+1} \Rightarrow du = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}} dx$.

♦ Với $x=0 \Rightarrow u=1$, với $x=1 \Rightarrow u=2$.

Suy ra $\int_0^1 x\sqrt{3x^2+1}dx = \frac{1}{3}\int_1^2 u^2 du$.

Câu 21. (Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - 2021) Cho $\int_1^2 [4f(x)-2x]dx = 1$. Khi đó $\int_1^2 f(x)dx$ bằng

- A.** 1. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 3.

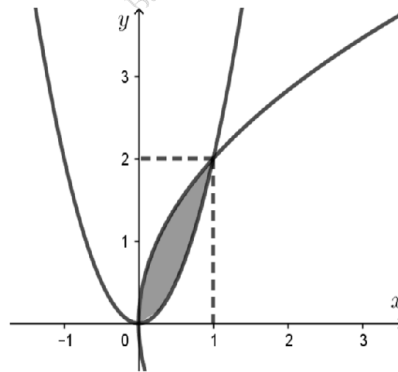
Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int_1^2 [4f(x)-2x]dx = 1 \Leftrightarrow \int_1^2 4f(x)dx - \int_1^2 2xdx = 1$

$\Leftrightarrow \int_1^2 4f(x)dx - x^2 \Big|_1^2 = 1 \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)dx = 1$

Câu 22. (Chuyên Quốc Học Huế - 2021) Tính diện tích của hình phẳng (được tô đậm) giới hạn bởi hai đường $y = 2x^2$, $y^2 = 4x$.



- A.** $S = \frac{2\pi}{3}$. **B.** $S = \frac{4\pi}{3}$. **C.** $S = \frac{4}{3}$. **D.** $S = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Theo hình vẽ ta có $y^2 = 4x \Leftrightarrow y = 2\sqrt{x}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y = 2x^2$, $y = 2\sqrt{x}$

$2x^2 = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 0 \\ \sqrt{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

Dựa vào đồ thị, diện tích của hình phẳng cần tính là

$S = \int_0^1 (2\sqrt{x} - 2x^2) dx = \left(\frac{4}{3}x\sqrt{x} - \frac{2}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$.

Câu 23. (Chuyên Quốc Học Huế - 2021) Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 + \cos x} \sin x dx$. Nếu đặt $t = 2 + \cos x$ thì kết quả nào sau đây đúng?

- A. $I = 2 \int_3^2 \sqrt{t} dt.$ B. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{t} dt.$ C. $I = \int_3^2 \sqrt{t} dt.$ D. $I = \int_2^3 \sqrt{t} dt.$

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = 2 + \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 3, x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 2$

Khi đó $I = -\int_3^2 \sqrt{t} dt = \int_2^3 \sqrt{t} dt.$

Câu 24. (Chuyên Quang Trung - Bình Phước - 2021) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x(x-1)(2x-1)$.

- A. $(x^2 - x)^2 + C$ B. $x^4 - x^3 + x^2 + C$ C. $x^4 + x^3 + x^2 + C$ D. $x^4 + x^3 - 2x^2 + C$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int 2x(x-1)(2x-1)dx = \int (4x^3 - 6x^2 + 2x)dx = x^4 - 2x^3 + x^2 + C = (x^2 - x)^2 + C.$

Câu 25. (Chuyên Quang Trung - Bình Phước - 2021) Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x.e^x$ biết $F(1) = 0$.

- A. $x.e^x - e^x.$ B. $x.e^x + e^x - 1.$ C. $x.e^x - e.$ D. $x.e^x - x + 1 - e.$

Lời giải

Chọn A

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

Khi đó $F(x)$ có dạng $F(x) = \int x e^x dx = \int x d(e^x) = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$

Do $F(1) = 0$ nên $C = 0$.

Vậy $F(x) = x e^x - e^x.$

Câu 26. (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội- 2021) Tìm số thực m để hàm số $F(x) = mx^3 + (3m+2)x^2 - 4x + 3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 10x - 4$

- A. $m = 2.$ B. $m = 1.$ C. $m = 0.$ D. $m = -1.$

Lời giải

Chọn B

$F(x) = mx^3 + (3m+2)x^2 - 4x + 3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 10x - 4$ nên:

$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow 3mx^2 + 2(3m+2)x - 4 = 3x^2 + 10x - 4 \Rightarrow m = 1.$

Câu 27. (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội- 2021) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{3x+1}$ là

- A. $\int f(x)dx = \frac{1}{4}(3x+1)\sqrt[3]{3x+1} + C.$ B. $\int f(x)dx = (3x+1)\sqrt[3]{3x+1} + C.$
C. $\int f(x)dx = \sqrt[3]{3x+1} + C.$ D. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}\sqrt[3]{3x+1} + C$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $I = \int \sqrt[3]{3x+1} dx = \int (3x+1)^{\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x+1)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{1}{4} (3x+1) \sqrt[3]{3x+1} + C$

Câu 28. (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội- 2021) Cho tích phân $\int_0^e (3x^2 - 2x) dx = me^3 + ne^2$ với $m, n \in \mathbb{Z}$, khi

đó $|m-n|$ bằng bao nhiêu?

A. 5.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_0^e (3x^2 - 2x) dx = e^3 - e^2$

Suy ra $m = 1, n = -1$

Vậy $|m-n| = 2$.

Câu 29. (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội- 2021) Cho $\int_2^3 \frac{x+8}{x^2+x-2} dx = a \ln 2 + b \ln 5$ với a, b là các số nguyên.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+b=3$.

B. $a-b=5$.

C. $a-2b=11$.

D. $a+2b=11$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int_2^3 \frac{x+8}{x^2+x-2} dx = \int_2^3 \left(\frac{3}{x-1} + \frac{-2}{x+2} \right) dx = (3 \ln|x-1| - 2 \ln|x+2|) \Big|_2^3 = 7 \ln 2 - 2 \ln 5$.

Suy ra giá trị là: $a = 7, b = -2$.

Câu 30. (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội- 2021) Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=0, x=1, y=xe^x; y=0$ là

A. $\frac{\pi}{4}(e^2-1)$.

B. $\frac{1}{4}(e^2+1)$.

C. $\frac{1}{4}(e^2-1)$.

D. $\frac{\pi}{4}(e^2+1)$.

Lời giải

Chọn A

Hình phẳng $(H): \begin{cases} y = xe^x, y = 0 \\ x = 0, x = 1 \end{cases}$.

Thể tích khối tròn xoay khi quay (H) quanh Ox là

$V = \pi \int_0^1 x^2 e^{2x} dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{4} e^{2x} (2x^2 - 2x + 1) \right]_0^1 = \pi \cdot \left(\frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{4} (e^2 - 1)$.

Câu 31. (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội- 2021) Biết $\int_0^2 xf(2x) dx = 4$. Giá trị của $\int_0^4 xf'(x) dx$ bằng

A. 16.

B. 1.

C. 8.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

♦ Đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx$.

Với $x = 0$ thì $t = 0$

Với $x = 2$ thì $t = 4$.

♦ Ta có $4 = \int_0^2 xf(2x) dx = \int_0^4 \frac{t}{2} \cdot f(t) \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{4} \int_0^4 tf(t) dt \Rightarrow \int_0^4 tf(t) dt = 16$. Vậy $\int_0^4 xf'(x) dx = 16$.

Câu 32. (Chuyên Lê Quý Đôn - Điện Biên - 2021) Với a, b là các tham số thực. Giá trị tích phân

$$\int_0^b (3x^2 - 2ax - 1) dx \text{ bằng}$$

A. $3b^2 - 2ab - 1$.

B. $b^3 + b^2a + b$.

C. $b^3 - a^2b - b$.

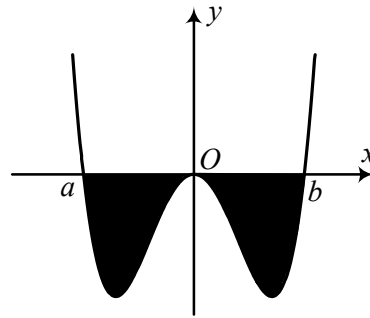
D. $b^3 - ab^2 - b$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int_0^b (3x^2 - 2ax - 1) dx = (x^3 - ax^2 - x) \Big|_0^b = b^3 - b^2a - b$.

Câu 33. (Chuyên Lê Quý Đôn - Điện Biên - 2021) Hình vẽ bên biểu diễn trục hoành cắt đồ thị $y = f(x)$ tại ba điểm có hoành độ $0, a, b$ ($a < 0 < b$). Gọi S là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$ và trục hoành, khẳng định nào sau đây là **sai**?



A. $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$.

B. $S = -\int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx$.

C. $S = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx$.

D. $S = \left| \int_a^0 f(x) dx \right| + \left| \int_0^b f(x) dx \right|$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $S = \int_a^0 (-f(x)) dx + \int_0^b (-f(x)) dx = -\int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx$.

Câu 34. (Chuyên Lê Quý Đôn - Điện Biên - 2021) Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$.

B. $V = \frac{\pi e^2}{2}$.

C. $V = \frac{e^2 - 1}{2}$.

D. $V = \frac{\pi(e^2 + 1)}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là:

$$V = \pi \int_0^1 (e^x)^2 dx = \pi \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{\pi}{2} \cdot e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}.$$

Câu 35. (Chuyên Lê Quý Đôn - Điện Biên - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai $f''(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f(0) = f(1) = 1; f'(0) = 2021$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int_0^1 (1-x) f''(x) dx = -2021$.

B. $\int_0^1 (1-x) f''(x) dx = 2021$.

C. $\int_0^1 (1-x) f''(x) dx = 1$. D. $\int_0^1 (1-x) f''(x) dx = -1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_0^1 (1-x) f''(x) dx = \int_0^1 (1-x) df'(x) = (1-x) f'(x) \Big|_0^1 + \int_0^1 f'(x) dx$
 $= -f'(0) + f(1) - f(0) = -2021$.

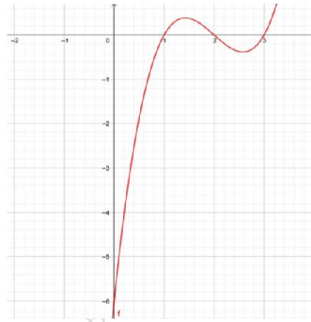
Vậy $\int_0^1 (1-x) f''(x) dx = -2021$.

Câu 36. (Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - 2021) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$ và hai trục tọa độ bằng

A. $\frac{11}{4}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{11\pi}{4}$. D. $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $(x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{cases}$

Khi đó diện tích hình phẳng cần tìm bằng

$$\begin{aligned} \int_0^3 |(x-1)(x^2 - 5x + 6)| dx &= \int_0^3 |x^3 - 6x^2 + 11x - 6| dx \\ &= \int_0^1 |x^3 - 6x^2 + 11x - 6| dx + \int_1^2 |x^3 - 6x^2 + 11x - 6| dx + \int_2^3 |x^3 - 6x^2 + 11x - 6| dx \\ &= \int_0^1 (-x^3 + 6x^2 - 11x + 6) dx + \int_1^2 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) dx + \int_2^3 (-x^3 + 6x^2 - 11x + 6) dx \\ &= \left(-\frac{x^4}{4} + 2x^3 - \frac{11x^2}{2} + 6x \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11x^2}{2} - 6x \right) \Big|_1^2 + \left(-\frac{x^4}{4} + 2x^3 - \frac{11x^2}{2} + 6x \right) \Big|_2^3 \\ &= \frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{11}{4}. \end{aligned}$$

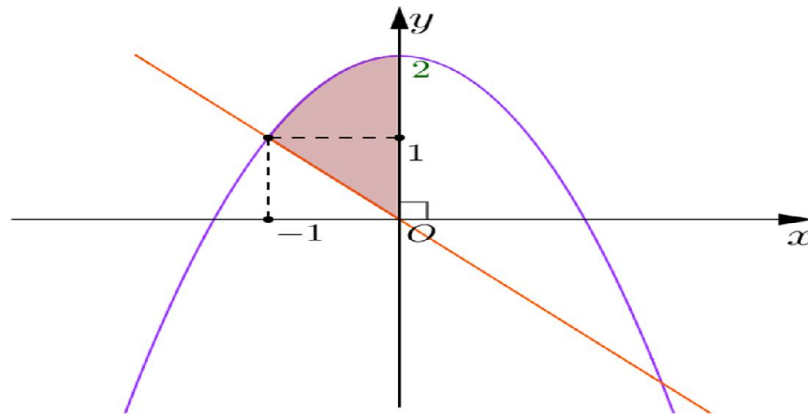
Vậy ta chọn phương án A.

Câu 37. (Chuyên ĐHSP Hà Nội - 2021) Diện tích hình phẳng thuộc góc phần tư thứ hai, giới hạn bởi parabol $y = 2 - x^2$, đường thẳng $y = -x$ và trục Oy bằng:

A. $\frac{7}{6}$. B. $\frac{5}{6}$. C. $\frac{11}{6}$. D. $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Xét phương trình hoành độ giao điểm $2 - x^2 = -x \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Diện tích hình phẳng cần tính là: $S = \int_{-1}^0 (2 - x^2) dx - \int_{-1}^0 (-x) dx = \frac{7}{6}$.

Câu 38. (Chuyên ĐHSP Hà Nội - 2021) $\int (2x+5)^9 dx$ bằng

- A. $\frac{1}{10}(2x+5)^{10} + C$. B. $18(2x+5)^8 + C$. C. $9(2x+5)^8 + C$. D. $\frac{1}{20}(2x+5)^{10} + C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int (2x+5)^9 dx = \frac{1}{2} \int (2x+5)^9 d(2x+5) = \frac{1}{20} (2x+5)^{10} + C$.

Câu 39. (Chuyên ĐHSP Hà Nội - 2021) Biết $f(x)$ là hàm số liên tục trên $[0; 3]$ và có $\int_0^1 f(3x) dx = 3$. Giá

trị của biểu thức $\int_0^3 f(x) dx$ bằng:

A. 9.

B. 1.

C. 3.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

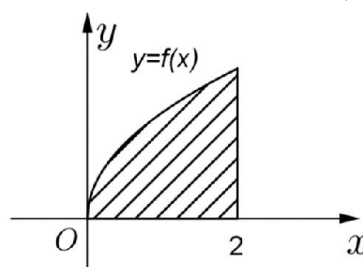
Chọn A

Đặt $3x = t \Rightarrow 3dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{3}$

Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=1 \Rightarrow t=3 \end{cases} \Rightarrow I = \int_0^1 f(3x) dx = \frac{1}{3} \int_0^3 f(t) dt$

Mà $\int_0^1 f(3x) dx = 3 \Rightarrow \int_0^3 f(t) dt = 9 \Rightarrow \int_0^3 f(x) dx = 9$.

Câu 40. (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An - 2021) Giả sử $f(x)$ là hàm liên tục trên $[0; +\infty)$ và diện tích phần hình phẳng được kẻ dọc ở hình bên bằng 3. Tích phân $\int_0^1 f(2x) dx$ bằng:



A. $\frac{4}{3}$.

B. 3.

C. 2.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Vì diện tích phần hình phẳng được kẻ dọc ở hình trên bằng 3 nên ta có: $\int_0^2 f(x) dx = 3$.

Đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$; Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = 2$.

$$\text{Do đó: } \int_0^1 f(2x) dx = \int_0^2 f(t) \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx = \frac{3}{2}.$$

Câu 41. (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An - 2021) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^{2x-1}$ là

A. $\frac{9^x}{3} + C$.

B. $\frac{9^x}{6} + C$.

C. $\frac{9^x}{6 \ln 3} + C$.

D. $\frac{9^x}{3 \ln 3} + C$.

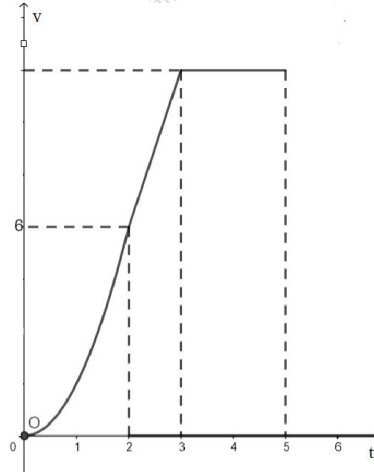
Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f(x) = 3^{2x-1} = \frac{9^x}{3}.$$

$$\text{Khi đó } \int f(x) dx = \frac{1}{3} \int 9^x dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{9^x}{\ln 9} + C = \frac{9^x}{6 \ln 3} + C.$$

Câu 42. (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An - 2021) Một chiếc xe đua F_1 đạt vận tốc lớn nhất là 360 km/h . Đồ thị bên hiển thị vận tốc v của xe trong 5 giây đầu tiên kể từ lúc xuất phát. Đồ thị trong 2 giây đầu là một phần của parabol đỉnh tại gốc tọa độ O , giây tiếp theo là đoạn thẳng và sau đúng ba giây thì xe đạt vận tốc lớn nhất. Biết rằng mỗi đơn vị trục hoành biểu thị 1 giây, mỗi đơn vị trục tung biểu thị 10 m/s và trong 5 giây đầu xe chuyển động theo đường thẳng. Hỏi trong 5 giây đó sẽ đã đi được quãng đường là bao nhiêu.



A. 400 (mét).

B. 340 (mét).

C. 420 (mét).

D. 320 (mét).

Lời giải

Chọn D

Đổi $360 \text{ km/h} = 100 \text{ m/s}$

Quan sát đồ thị hàm số ta thấy điểm $A(2; 60)$, $B(3; 100)$ thuộc đồ thị hàm số.

Phương trình vận tốc khi xe chuyển động theo Parabol là $y = 15x^2$.

Phương trình vận tốc khi xe chuyển động theo đường thẳng là $y = 40x - 20$.

Quãng đường xe chuyển động được trong 5 giây đầu là

$$S = \int_0^2 15x^2 dx + \int_2^3 (40x - 20) dx + \int_3^5 100 dx = 320.$$

Câu 43. (THPT Quế Võ 1 - Bắc Ninh - 2021) Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \ln x$ tại giao điểm của đồ thị đó với trục Ox . Diện tích của hình tam giác tạo bởi hai trục tọa độ và đường thẳng d được xác định bởi tích phân

A. $\int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx.$

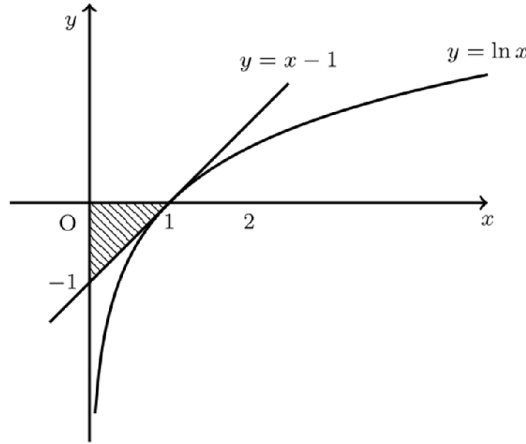
B. $\int_0^1 (1-x) dx.$

C. $\int_0^1 (x-1) dx.$

D. $\int_0^1 \ln x dx.$

Lời giải

Chọn B

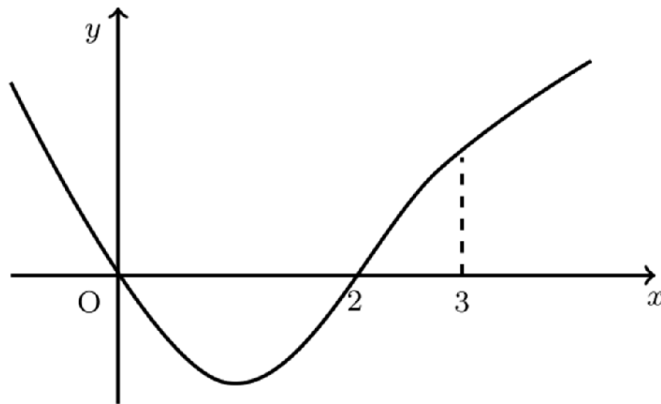


Phương trình hoành độ giao điểm của $y = \ln x$ và Ox là $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Phương trình tiếp tuyến d tại $x = 1$ là $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = x - 1$.

Diện tích của tam giác tạo bởi hai trục tọa độ và đường thẳng d là $S = \int_0^1 (1-x) dx$.

Câu 44. (THPT Quế Võ 1 - Bắc Ninh - 2021) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ được cho bởi hình vẽ bên dưới.



Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0; 3]$ là

A. $f(2).$

B. Không xác định được.

C. $f(0).$

D. $f(3).$

Lời giải

Chọn D

BBT

x	0	2	3
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$f(0)$	$f(2)$	$f(3)$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0; 3]$ là $f(0)$ hoặc $f(3)$.

Ta có

$$S_1 = \int_0^2 |f'(x)| dx = -\int_0^2 f'(x) dx = f(0) - f(2)$$

$$S_2 = \int_2^3 |f'(x)| dx = \int_2^3 f'(x) dx = f(3) - f(2)$$

Dựa theo hình vẽ thì $S_1 > S_2 \Leftrightarrow f(0) - f(2) > f(3) - f(2) \Leftrightarrow f(0) > f(3)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là $f(3)$.

- Câu 45. (THPT Quốc Oai - Hà Nội - 2021)** Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 10 \text{ (m/s)}$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Quãng đường ô tô đi chuyển được trong 8 giây cuối cùng tính đến thời điểm dừng bánh là
- A. 16 m . B. 55 m . C. 25 m . D. 50 m .

Lời giải

Chọn D

Khi ô tô dừng bánh, ta có: $v = 0 \Leftrightarrow -2t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 5$.

Do đó, ta có quãng đường xe đi được trong 8 giây cuối cùng (3 giây đi với vận tốc 10 m/s , 5 giây sau khi đạp phanh) là:

$$S = 3 \cdot 10 + \int_0^5 (-2t + 10) dt = 30 + (-t^2 + 10t) \Big|_0^5 = 30 - 5^2 + 10 \cdot 5 = 55 \text{ (m)}.$$

- Câu 46. (THPT Quốc Oai - Hà Nội - 2021)** Cho $F(x) = (ax^2 + bx - c)e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2020x^2 + 2022x - 1)e^{2x}$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Tính $T = a - 2b + 4c$.
- A. $T = 1004$ B. $T = 1018$. C. $T = 1012$. D. $T = -2012$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $F'(x) = f(x)$. Mà $F'(x) = [2ax^2 + (2a + 2b)x + (b - 2c)]e^{2x}$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} 2a = 2020 \\ 2a + 2b = 2022 \\ b - 2c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1010 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Vậy $T = a - 2b + 4c = 1012$.

- Câu 47. (THPT Quốc Oai - Hà Nội - 2021)** Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x(x-1)(2x-1)$ là
- A. $x^4 + x^3 + x^2 + C$. B. $x^4 + x^3 - 2x^2 + C$. C. $(x^2 - x)^2 + C$. D. $x^4 - x^3 + x^2 + C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(x) = 2x(x-1)(2x-1) = (2x^2 - 2x)(2x-1) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$.

$$\Rightarrow \int f(x) dx = \int (4x^3 - 6x^2 + 2x) dx = x^4 - 2x^3 + x^2 + C = (x^2 - x)^2 + C.$$

Câu 48. (THPT PTNK Cơ sở 2 - TP.HCM - 2021) Tích phân $\int_0^1 x e^{x^2} dx$ bằng

A. $\frac{1}{2}(e-1)$.

B. $(e+1)$.

C. $2e$.

D. $2e-1$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1 (Đổi biến): Đặt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx \Rightarrow \frac{1}{2} dt = x dx$

Đổi cận: $\begin{matrix} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=1 \Rightarrow t=1 \end{matrix}$. Khi đó $\int_0^1 x e^{x^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} e^t dt = \frac{1}{2} e^t \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$

Cách 2 (Vi phân): $\int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$

Cách 3: Dùng casio bấm $\int_0^1 x e^{x^2} dx$, sau đó đối chiếu với 4 đáp án.

Câu 49. (THPT Phan Đình Phùng - Quảng Bình - 2021) Khi đổi biến $x = \sqrt{3} \tan t$, tích phân

$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 3}$ trở thành tích phân nào?

A. $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}}{3} dt$.

B. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{t} dt$.

C. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}}{3} dt$.

D. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{3} dt$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $x = \sqrt{3} \tan t \Rightarrow dx = \sqrt{3} (\tan^2 t + 1) dt$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$

$$x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$$

Khi đó: $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}}{3} dt$.

Câu 50. (THPT Phan Đình Phùng - Quảng Bình - 2021) Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(H): y = \frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

A. $S = \ln 2 + 1$.

B. $S = 2 \ln 2 + 1$.

C. $S = \ln 2 - 1$.

D. $S = 2 \ln 2 - 1$.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số cắt trục Ox tại $(1; 0)$, cắt trục Oy tại $(0; -1)$. Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \left| \int_0^1 \frac{x-1}{x+1} dx \right| = \left| \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{x+1} \right) dx \right| = \left| 1 - 2 \ln |x+1| \Big|_0^1 \right| = 2 \ln 2 - 1.$$

Câu 51. (THPT Nguyễn Tất Thành - Hà Nội - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$\int_0^3 f(x) dx = 20. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^1 (x+1) f(x^2+2x) dx.$$

A. $I = 20$.

B. $I = 10$.

C. $I = 40$.

D. $I = 30$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } x^2 + 2x = t \Rightarrow dt = 2(x+1) dx.$$

Khi $x = 0$ thì $t = 0$, và khi $x = 1$ thì $t = 3$.

$$\text{Do đó, } I = \int_0^1 (x+1) f(x^2+2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^3 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^3 f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10.$$

Vậy $I = 10$.

Câu 52. (THPT Nguyễn Tất Thành - Hà Nội - 2021) Cho biết $\int_1^4 \frac{\ln^2 x}{x} dx = \frac{a}{b} \ln^3 2$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b$.

A. 4.

B. 5.

C. 11.

D. 9.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \int_1^4 \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int_1^4 \ln^2 x d(\ln x) = \left. \frac{\ln^3 x}{3} \right|_1^4 = \frac{\ln^3 4}{3} = \frac{8}{3} \ln^3 2.$$

Vậy $a = 8, b = 3 \Rightarrow a+b = 11$.

Câu 53. (THPT Nguyễn Tất Thành - Hà Nội - 2021) Cho biết $\int_0^1 x e^{-x} dx = a + \frac{b}{e}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính

$$a^2 + b^2.$$

A. 7.

B. 5.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Xét $u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = e^{-x} dx$, chọn $v = e^{-x}$.

$$\text{Khi đó } \int_0^1 x e^{-x} dx = x e^{-x} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-x} dx = e^{-1} + e^{-x} \Big|_0^1 = e^{-1} + (e^{-1} - e^0) = \frac{2}{e} - 1.$$

Suy ra $a = -1, b = 2$. Vậy $a^2 + b^2 = 5$.

Câu 54. (THPT Nguyễn Tất Thành - Hà Nội - 2021) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi các đường $y = \sin x, y = 0, x = 0$ và $x = \pi$. Quay hình phẳng (H) quanh trục Ox ta được một vật thể tròn xoay có thể tích bằng

A. π .

B. π^2 .

C. $\frac{\pi^2}{2}$.

D. $\frac{\pi}{2}$.

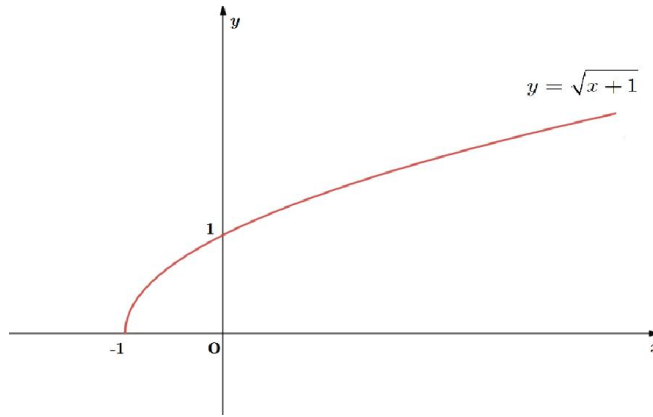
Lời giải

Chọn C

Khối tròn xoay được sinh ra có thể tích là:

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

Câu 55. (THPT Nguyễn Tất Thành - Hà Nội - 2021) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x+1}$ và hai trục tọa độ Ox , Oy . Tính diện tích S của hình phẳng (H) .



A. $S = \frac{3}{2}$.

B. $S = \frac{1}{3}$.

C. $S = 1$.

D. $S = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $S = \int_{-1}^0 \sqrt{x+1} dx$.

Đặt $t = \sqrt{x+1}$; $x = -1 \Rightarrow t = 0$; $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = t^2 - 1 \Rightarrow dx = 2t dt$.

Suy ra $S = \int_{-1}^0 \sqrt{x+1} dx = \int_0^1 t \cdot 2t dt = \frac{2}{3} t^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$.

Câu 56. (THPT Nguyễn Đức Cảnh - Thái Bình - 2021) Cho tích phân $I = \int_0^{\pi} x^2 \cos x dx$ và

$u = x^2, dv = \cos x dx$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $I = x^2 \sin x \Big|_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} x \sin x dx$.

B. $I = x^2 \sin x \Big|_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} x \sin x dx$.

C. $I = x^2 \sin x \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{3} \int_0^{\pi} x^3 \sin x dx$.

D. $I = x^2 \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x \sin x dx$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = \sin x \end{cases}$.

Do đó $I = \int_0^{\pi} x^2 \cos x dx = x^2 \sin x \Big|_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} x \sin x dx$.

Câu 57. (THPT Nguyễn Đức Cảnh - Thái Bình - 2021) Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x^2 + 3x + 1, y = x^3 + 1$ được tính bởi công thức nào dưới đây

A. $S = \int_{-1}^0 (2x^2 + 3x - x^3) dx + \int_0^3 (x^3 - 2x^2 - 3x) dx$.

B. $S = \int_{-1}^3 (x^3 - 2x^2 - 3x) dx$.

C. $S = \pi \int_{-1}^3 (x^3 - 2x^2 - 3x)^2 dx$.

D. $S = \int_{-1}^0 (x^3 - 2x^2 - 3x) dx + \int_0^3 (2x^2 + 3x - x^3) dx.$

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $2x^2 + 3x + 1 = x^3 + 1$

$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 3x = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1. \\ x = 0 \end{cases}$

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	0	3	$+\infty$			
x^3-2x^2-3x		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Khi đó $S = \int_{-1}^0 |x^3 - 2x^2 - 3x| dx + \int_0^3 |x^3 - 2x^2 - 3x| dx$

$S = \int_{-1}^0 (x^3 - 2x^2 - 3x) dx + \int_0^3 (2x^2 + 3x - x^3) dx$

Câu 58. (THPT Mai Anh Tuấn - Thanh Hóa - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 9]$ thỏa

mãn $\int_0^9 f(x) dx = 8, \int_4^7 f(x) dx = 3$. Khi đó giá trị của $P = \int_0^4 f(x) dx + \int_7^9 f(x) dx$ là

A. $P = 11.$

B. $P = 5.$

C. $P = 20.$

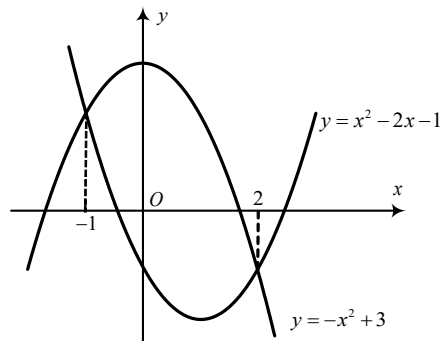
D. $P = 9.$

Lời giải

Chọn B

$P = \int_0^4 f(x) dx + \int_7^9 f(x) dx = \int_0^9 f(x) dx - \int_4^7 f(x) dx = 8 - 3 = 5.$

Câu 59. (THPT Hậu Lộc 4 - Thanh Hóa - 2021) Diện tích phần hình phẳng gạch sọc trong hình vẽ được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx.$

B. $\int_{-1}^2 (-2x + 2) dx.$

C. $\int_{-1}^2 (2x - 2) dx.$

D. $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx.$

Lời giải

Chọn A

Diện tích hình phẳng là: $S = \int_{-1}^2 (-x^2 + 3 - x^2 + 2x + 1) dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx.$

Câu 60. (THPT Hậu Lộc 4 - Thanh Hóa - 2021) Cho tích phân $I = \int_{-4}^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{5-x}} = a - b \ln 2, a, b \in \mathbb{Z}$. Khi

đó $E = ab$ bằng

A. $E = 6$.

B. $E = 28$.

C. $E = 8$.

D. $E = 30$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\sqrt{5-x} = t (t \geq 0)$, khi đó $t^2 = 5-x \Rightarrow dx = -2tdt$

Với $x = -4 \Rightarrow t = 3; x = 4 \Rightarrow t = 1$

$$\Rightarrow I = \int_3^1 \frac{-2tdt}{1+t} = 2 \int_1^3 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = 2.2 - 2 \ln|1+t| \Big|_1^3$$

$$\Rightarrow I = 4 - 2 \ln 2 \Rightarrow ab = 8$$

Câu 61. (THPT Hậu Lộc 4 - Thanh Hóa - 2021) Cho hình (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y = -x^2 + 2x$, trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng (H) quay quanh trục Ox .

A. $\frac{16\pi}{15}$.

B. $\frac{4\pi}{3}$.

C. $\frac{496\pi}{15}$.

D. $\frac{32\pi}{15}$.

Lời giải

Chọn A

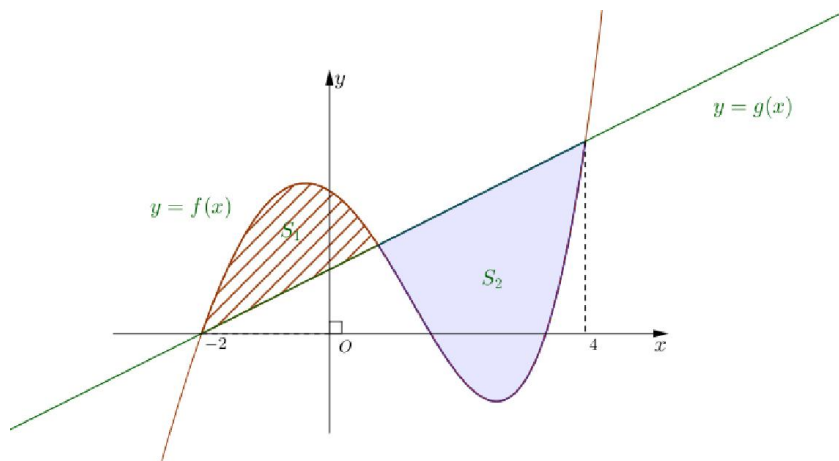
Hoành độ giao điểm của đường thẳng trên với trục Ox là $x = 0; x = 2$.

Khi đó thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng (H) quay quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_0^2 (-x^2 + 2x)^2 dx = \pi \int_0^2 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx = \pi \left(\frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{4}{3}x^3 \right) \Big|_0^2 = \frac{16\pi}{15}.$$

Câu 62. (THPT Đồng Quan - Hà Nội - 2021) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong và hàm số $y = g(x)$ có đồ thị là đường thẳng. Gọi S_1 là diện tích miền phẳng được gạch sọc, S_2 là diện tích miền phẳng được tô đậm, $S_1 \neq S_2$ (hình vẽ). Tích phân

$$\int_{-2}^4 (f(x) - g(x)) dx \text{ bằng}$$



A. $S_1 + S_2$.

B. $-S_1 - S_2$.

C. $S_1 - S_2$.

D. $S_2 - S_1$.

Lời giải

Chọn C

C.

Phương trình hoành độ giao điểm giữa 2 đồ thị $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = a \quad (-2 < a < 4) \\ x = 4 \end{cases}$.

Ta có $\int_{-2}^4 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-2}^a (f(x) - g(x)) dx + \int_a^4 (f(x) - g(x)) dx = S_1 - S_2$.

Câu 63. (THPT Lê Lợi - Thanh Hóa - 2021) Cho $I = \int_1^2 4x\sqrt{x^2 - 1} dx$ và $u = x^2 - 1$. Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau?

A. $I = 2 \int_1^2 \sqrt{u} du$. **B.** $I = 2 \int_0^3 \sqrt{u} du$. **C.** $I = \frac{4}{3} u\sqrt{u} \Big|_0^3$. **D.** $I = \frac{4}{3} \sqrt{27}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $u = x^2 - 1 \Rightarrow du = 2x dx$.

Đổi cận $x = 1 \Rightarrow u = 0$; $x = 2 \Rightarrow u = 3$

Khi đó $I = \int_1^2 4x\sqrt{x^2 - 1} dx = 2 \int_0^3 \sqrt{u} du = \frac{4}{3} u\sqrt{u} \Big|_0^3 = \frac{4}{3} \sqrt{27}$.

Câu 64. (Sở Vĩnh Phúc - 2021) Tìm họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $y = e^x + 2x$.

A. $e^x + x^2 + C$. **B.** $e^x + 2 + C$. **C.** $\frac{1}{x+1} e^{x+1} + x^2 + C$. **D.** $e^x + 2x^2 + C$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\int (e^x + 2x) dx = e^x + 2 \cdot \frac{x^2}{2} + C = e^x + x^2 + C$.

Câu 65. (Sở Vĩnh Phúc - 2021) Cho hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị $(P): y = 2x - x^2$ và trục Ox . Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi cho D quay quanh trục Ox .

A. $V = \frac{19\pi}{15}$. **B.** $V = \frac{13\pi}{15}$. **C.** $V = \frac{17\pi}{15}$. **D.** $V = \frac{16\pi}{15}$.

Lời giải

Chọn D.

Phương trình hoành độ giao điểm: $2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Do đó $V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \frac{16}{15} \pi$.

Câu 66. (Sở Vĩnh Phúc - 2021) Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 2021$, trục hoành, $x = -2$, $x = 4$. Mệnh đề nào sau đây đúng.

A. $S = \int_{-2}^4 (x^2 - 2021)^2 dx$. **B.** $S = \int_{-2}^4 (x^2 - 2021) dx$.
C. $S = \int_{-2}^4 |x^2 - 2021| dx$. **D.** $S = \int_{-2}^4 x^2 - 2021 dx$.

Lời giải

Chọn D

S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 2021$, trục hoành, $x = -2$, $x = 4$ thì diện tích hình phẳng là $S = \int_{-2}^4 |x^2 - 2021| dx$.

Câu 67. (Sở Vĩnh Phúc - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_1^{2021} f(x) dx = 4$. Tính

$$I = \int_0^{1010} f(2x+1) dx.$$

A. $I = 8$.

B. $I = 2$.

C. $I = 1$.

D. $I = 4$.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Đặt } t = 2x + 1 \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt.$$

$$\text{Đổi cận } x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 1010 \Rightarrow t = 2021$$

$$I = \int_0^{1010} f(2x+1) dx = \frac{1}{2} \int_1^{2021} f(t) dt = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2.$$

Câu 68. (Sở Lào Cai - 2021) Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx = -8$. Tính tích phân $\int_0^1 g(x) dx$?

A. -6 .

B. -3 .

C. 5 .

D. -5 .

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx = -8$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx - 2 \int_0^1 g(x) dx = -8$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2 \int_0^1 g(x) dx = -8$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 g(x) dx = 5.$$

Câu 69. (Sở Hà Tĩnh - 2021) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$ trên khoảng $(-1; +\infty)$ là

A. $2 \ln(x+1) - \frac{1}{x+1} + C$. B. $2 \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} + C$.

C. $2 \ln(x+1) + \frac{2}{x+1} + C$. D. $2 \ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + C$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2} = \frac{2x+2-3}{(x+1)^2} = \frac{2}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2} \Rightarrow \int f(x) dx = 2 \ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + C.$$

Câu 70. (Sở Hà Tĩnh - 2021) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0) = 4$ và $f'(x) = e^x - x, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{6e+23}{6}$.

B. $\frac{6e+17}{6}$.

C. $\frac{6e+11}{6}$.

D. $\frac{6e+23}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int f'(x)dx = \int (e^x - x)dx = e^x - \frac{x^2}{2} + C$ mà $f(0) = 4 \Rightarrow C = 3 \Rightarrow f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} + 3$

Khi đó $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(e^x - \frac{x^2}{2} + 3 \right) dx = \left(e^x - \frac{x^3}{6} + 3x \right) \Big|_0^1 = \frac{6e+11}{6}$

Câu 71. (Sở Hà Tĩnh - 2021) Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Tính

$I = \int_0^3 [2x + f(x)] dx$.

A. $I = 36$.

B. $I = 9$.

C. $I = \frac{117}{4}$.

D. $I = \frac{23}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $I = \int_0^3 [2x + f(x)] dx = \int_0^3 2x dx + \int_0^3 f(x) dx = (x^2 + x^3) \Big|_0^3 = 36$.

Câu 72. (Sở Tuyên Quang - 2021) Cho $I = \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^4} dx$. Đặt $t = \sqrt{1-x^4}$ thì I bằng

A. $-\int_0^1 t^3 \sqrt{t} dt$.

B. $\int_0^1 \frac{3}{4} t^3 dt$.

C. $\int_0^1 t^3 dt$.

D. $-\int_0^1 \frac{3}{4} t^3 dt$.

Lời giải

Chọn B

Với $t = \sqrt{1-x^4} \Rightarrow t^3 = 1-x^4 \Rightarrow 3t^2 dt = -4x^3 dx \Rightarrow x^3 dx = -\frac{3}{4} t^2 dt$.

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1$ và $x=1 \Rightarrow t=0$.

Vậy $I = -\int_1^0 \frac{3}{4} t^3 dt = \int_0^1 \frac{3}{4} t^3 dt$.

Câu 73. (Sở Yên Bái - 2021) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = x^2 - 4x + 6$ và $y = -x^2 - 2x + 6$.

A. $\frac{5}{3}$.

B. $\frac{4}{3}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình: $x^2 - 4x + 6 = -x^2 - 2x + 6 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị là:

$S = \int_0^1 |2x^2 - 2x| dx = \left| \int_0^1 (2x^2 - 2x) dx \right| = \left| \left(\frac{2x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_0^1 \right| = \left| \frac{2}{3} - 1 \right| = \frac{1}{3}$.

Câu 74. (Sở Yên Bái - 2021) Nếu $\int_1^2 f(x) dx = 5$; $\int_1^2 (2f(x) + g(x)) dx = 13$ thì $\int_1^2 g(x) dx$ bằng

A. -3 .

B. **3**.

C. -23 .

D. 23 .

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_1^2 (2f(x) + g(x))dx &= 13 \Leftrightarrow \int_1^2 2f(x)dx + \int_1^2 g(x)dx = 13 \Leftrightarrow \int_1^2 g(x)dx = 13 - 2 \int_1^2 f(x)dx. \\ \Rightarrow \int_1^2 g(x)dx &= 13 - 2.5 = 3. \end{aligned}$$

Câu 75. (THPT Thanh Chương 1- Nghệ An - 2021)

bằng.

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn C

♦ Đặt

♦ Khi đó

Câu 76. (THPT Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2021) Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 6x + 7$ và đường thẳng $y = 3 - x$.

A. $S = 3$.

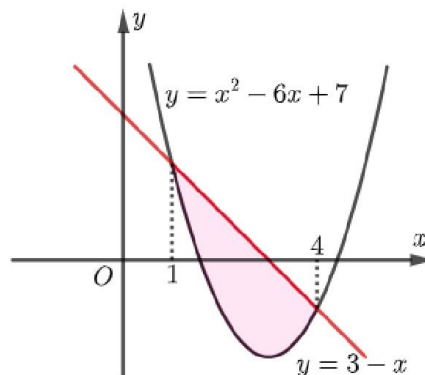
B. $S = \frac{9}{2}$.

C. $S = \frac{33\pi}{5}$.

D. $S = 60$.

Lời giải

Chọn C



$$\text{Xét phương trình hoành độ giao điểm: } x^2 - 6x + 7 = 3 - x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Diện tích S là:

$$S = \int_1^4 [(3-x) - (x^2 - 6x + 7)] dx = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 5 \cdot \frac{x^2}{2} - 4x \right) \Big|_1^4 = \frac{9}{2} \text{ (đvdt)}.$$

Câu 77. (THPT Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2021) Cho $\int x\sqrt{x}dx$ bằng

A. $\frac{1}{3}x^3\sqrt{x} + C$.

B. $\frac{1}{2}x^2\sqrt{x} + C$.

C. $\frac{5}{2}x^2\sqrt{x} + C$.

D. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } \sqrt{x} = t \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2tdt = dx$$

$$\text{Ta có } \int x\sqrt{x}dx = \int t^2 \cdot t \cdot 2tdt = 2 \int t^4 dt = \frac{2}{5}t^5 + C = \frac{2}{5}(\sqrt{x})^5 + C = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C.$$

Câu 78. (THPT Lương Thế Vinh - 2021) Với biến đổi $u = \ln x$, tích phân $\int_e^3 \frac{1}{x \ln x} dx$ trở thành

A. $\int_e^3 \frac{1}{u} du.$

B. $\int_0^{\ln 3} \frac{1}{u} du.$

C. $\int_1^{e^3} \frac{1}{u} du.$

D. $\int_1^{\ln 3} \frac{1}{u} du.$

Lời giải

Chọn D

Với $u = \ln x$ ta có $du = \frac{1}{x} dx$.

Đổi cận: $x = e \Rightarrow u = 1$, $x = 3 \Rightarrow u = \ln 3$.

Vậy $\int_e^3 \frac{1}{x \ln x} dx = \int_1^{\ln 3} \frac{1}{u} du.$

Câu 79. (THPT Lương Thế Vinh - 2021) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1; 2]$, $f(2) = 1$ và $f(4) = 2021$. Giá trị $I = \int_1^2 f'(2x) dx$ bằng

A. -2018.

B. 1010.

C. -1008.

D. 2018.

Lời giải

Chọn B

Đặt $2x = t \Rightarrow 2dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt$.

Khi đó: Với $x = 1 \Rightarrow t = 2$; với $x = 2 \Rightarrow t = 4$.

Ta có $I = \frac{1}{2} \int_2^4 f'(t) dt = \frac{1}{2} f(t) \Big|_2^4 = \frac{1}{2} [f(4) - f(2)] = \frac{1}{2} (2021 - 1) = 1010.$

Câu 80. (THPT Hoàng Hoa Thám - Đà Nẵng - 2021) Cho tích phân $I = \int_1^e x \ln^2 x dx$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x \Big|_1^e + \int_1^e x \ln^2 x dx.$

B. $I = x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - 2 \int_1^e x \ln x dx.$

C. $I = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - \int_1^e x \ln x dx.$

D. $I = x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - 2 \int_1^e \ln x dx.$

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases} \Rightarrow I = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - \int_1^e x \ln x dx.$

Câu 81. (THPT Đào Duy Từ - Hà Nội - 2021) Cho tích phân $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1 - \ln x}}{x} dx$. Đặt $u = \sqrt{1 - \ln x}$. Khi đó

I bằng

A. $I = 2 \int_0^1 u^2 du.$

B. $I = -2 \int_0^1 u^2 du.$

C. $I = \int_1^0 \frac{u^2}{2} du.$

D. $I = -\int_1^0 u^2 du.$

Lời giải

Chọn A

Đặt $u = \sqrt{1 - \ln x} \Rightarrow u^2 = 1 - \ln x \Rightarrow 2udu = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{dx}{x} = -2udu.$

Đổi cận $x = 1 \Rightarrow u = 1$

$x = e \Rightarrow u = 0.$

$$\Rightarrow I = \int_1^e \frac{\sqrt{1-\ln x}}{x} dx = -\int_1^0 u \cdot 2u du = -\int_1^0 2u^2 du = 2 \int_0^1 u^2 du.$$

Câu 82. (THPT Đào Duy Từ - Hà Nội - 2021) Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 5x + 4$ và trục Ox . Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình (H) quanh trục Ox bằng:

- A. $\frac{9}{2}$. B. $\frac{81}{10}$. C. $\frac{81\pi}{10}$. D. $\frac{9\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2 - 5x + 4$ và trục Ox là nghiệm phương trình:

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình (H) quanh trục Ox bằng:

$$\pi \int_1^4 (x^2 - 5x + 4)^2 dx = \pi \int_1^4 (x^2 - 5x + 4)^2 dx = \frac{81\pi}{10}.$$

Câu 83. (THPT Đào Duy Từ - Hà Nội - 2021) Biết $\int_0^2 f(x) dx = 2020$ khi đó $\int_0^4 f\left(\frac{x}{2}\right) dx$ bằng

A. 2020. B. 1010. C. -2020. D. 4040.

Lời giải

Chọn D

♦ Đặt $t = \frac{x}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2} dx$.

♦ Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 4 \Rightarrow t = 2$.

♦ Ta có: $\int_0^4 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = 2 \cdot \int_0^2 f(t) dt = 2 \cdot 2020 = 4040$.

Câu 84. (THPT Chu Văn An - Thái Nguyên - 2021) Họ nguyên hàm $\int \left(\frac{x^2 + 2x + 3}{x+1} \right) dx$ bằng

- A. $\frac{x^2}{2} + x + 2 \ln|x+1| + C$. B. $\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{(x+1)^2} + C$.
- C. $\frac{x^2}{2} + x - 2 \ln|x+1| + C$. D. $x^2 + x + 2 \ln(x+1) + C$.

Lời giải

Chọn A

$$\int \left(\frac{x^2 + 2x + 3}{x+1} \right) dx = \int \left(x+1 + \frac{2}{x+1} \right) dx = \frac{x^2}{2} + x + 2 \ln|x+1| + C$$

Câu 85. (THPT Chu Văn An - Thái Nguyên - 2021) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2 - x^2$, $y = -x$ bằng:

- A. 9. B. $\frac{9}{2}$. C. 18. D. $\frac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm $2 - x^2 = -x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = 2 - x^2$, $y = -x$ là: $S = \int_{-1}^2 |x^2 - x - 2| = \frac{9}{2} (dvt)$.

Câu 86. (THPT Ba Đình - Thanh Hóa - 2021) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$ và $y = x + 2$ là

- A. $S = 9$. B. $S = \frac{9}{4}$. C. $S = \frac{9}{2}$. D. $S = \frac{8}{9}$.

Lời giải

Chọn C

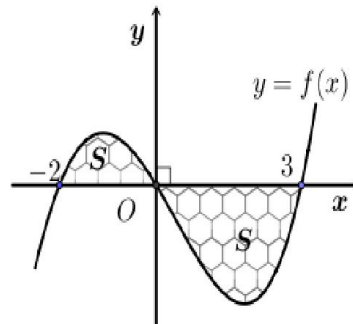
♦ Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $y = x + 2$ là

$$x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

♦ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$ và $y = x + 2$ là:

$$S = \int_{-1}^2 |x^2 - x - 2| dx = \left| \int_{-1}^2 (x^2 - x - 2) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_{-1}^2 \right| = \frac{9}{2}.$$

Câu 87. (Trung Tâm Thanh Trường - 2021) Hình phẳng S gồm hai phần được đánh dấu trong hình vẽ bên. Diện tích hình S được tính theo công thức nào dưới đây?



- A. $S = -\int_{-2}^0 f(x) dx - \int_0^3 f(x) dx$. B. $S = -\int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx$.
- C. $S = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx$. D. $S = \int_{-2}^0 f(x) dx - \int_0^3 f(x) dx$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $S = \int_{-2}^0 f(x) dx - \int_0^3 f(x) dx$.

Câu 88. (Trung Tâm Thanh Trường - 2021) Xét $\int_0^1 (1-2x)^{20} dx$, nếu đặt $u = 1-2x$ thì $\int_0^1 (1-2x)^{20} dx$ bằng

- A. $2 \int_{-1}^1 u^{20} du$. B. $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 u^{20} du$. C. $-\frac{1}{2} \int_{-1}^1 u^{20} du$. D. $\int_{-1}^1 u^{20} du$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $u = 1 - 2x \Rightarrow du = -2dx$. Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow u = 1 \\ x = 1 \Rightarrow u = -1 \end{cases}$.

Khi đó $\int_0^1 (1-2x)^{20} dx = -\frac{1}{2} \int_1^{-1} u^{20} du = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u^{20} du$.

Câu 89. (Trung Tâm Thanh Trường -2021) Biết $F(x) = a \sin x + b \cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin x + 8 \cos x$, tính giá trị $T = a + b$.

A. $T = 6$.

B. $T = 4$.

C. $T = -6$.

D. $T = 10$.

Lời giải

Chọn A

Do $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ nên ta có:

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow a \cos x - b \sin x = 2 \sin x + 8 \cos x, \forall x \Rightarrow a = 8, b = -2.$$

Vậy $a + b = 6$.

Câu 90. (THPT Triệu Sơn - Thanh Hóa - 2021) Biết $\int_{-1}^1 f(x) dx = 6$, tích phân $\int_0^1 f(2x-1) dx$ bằng

A. 3.

B. 6.

C. 12.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int_0^1 f(2x-1) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x-1) d(2x-1) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) dt = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3.$$

Câu 91. (THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2021) Cho hàm số $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\int f(x) dx = 2x + \frac{1}{x} + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$.

C. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x^3} + C$.

D. $\int f(x) dx = 2x - \frac{2}{x^3} + C$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C.$$

Câu 92. (THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2021) Cho hàm số $f(x) = \tan^2 2x$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \tan 2x + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{\tan^3 2x}{3} + C$.

C. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \tan 2x - x + C$.

D. $\int f(x) dx = \tan 2x - x + C$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int (\tan^2 2x) dx = \int [(\tan^2 2x + 1) - 1] dx = \frac{1}{2} \tan 2x - x + C.$$

Câu 93. (THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2021) Cho $\int_a^3 x^{-2} dx = 4$. Giá trị của tham số a thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(1; 2)$.

B. $(-1; 0)$.

C. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

D. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \int_a^3 x^{-2} dx = -x^{-1} \Big|_a^3 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{a} = 4 \Rightarrow a = \frac{3}{13} \in \left(0; \frac{1}{2}\right).$$

Câu 94. (THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2021) Biết $\int_1^3 f(x) dx = 4$. Giá trị của $\int_1^3 [5f(x) - 1] dx$ bằng

A. -22.

B. 22.

C. 18.

D. 20.

Lời giải

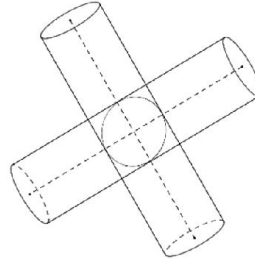
Chọn C

Xét: $\int_1^3 [5f(x) - 1] dx = 5 \int_1^3 f(x) dx - \int_1^3 1 dx = 18$.

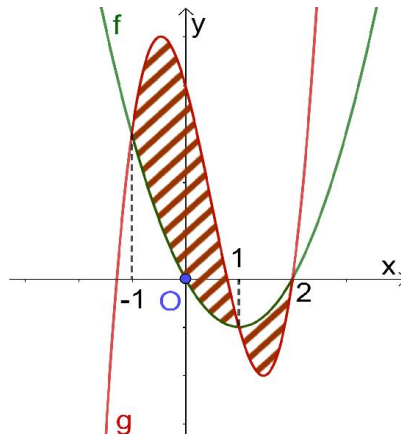
Nguyễn Bảo Vương

MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

- Câu 1.** (Liên trường Quỳnh Lưu - Hoàng Mai - Nghệ An - 2021) Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$, đường thẳng $y = x - 1$ và các đường thẳng $x = m$, $x = 2m$ ($m > 1$). Giá trị của m sao cho $S = \ln 3$ là
- A. $m = 2$. B. $m = 3$. C. $m = 5$. D. $m = 4$.
- Câu 2.** (Liên trường Quỳnh Lưu - Hoàng Mai - Nghệ An - 2021) Người ta dùng máy đào hầm (TBM) để đào hai đường hầm hình trụ tròn xoay đường kính $12m$, mỗi đường hầm đều có chiều dài bằng $20m$, có hai trục cắt nhau và vuông góc với nhau. Tính thể tích khối đất đào được.



- A. $3987.89m^3$. B. $3619.11m^3$. C. $4523.89m^3$. D. $3371.89m^3$.
- Câu 3.** (Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2021) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(3) = 21$, $\int_0^3 f(x) dx = 9$. Tính tích phân $I = \int_0^1 x \cdot f'(3x) dx$.
- A. $I = 15$. B. $I = 6$. C. $I = 12$. D. $I = 9$.
- Câu 4.** (Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có một nguyên hàm là hàm số $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$. Khi đó $\int_1^2 f(x^2) dx$ bằng:
- A. $\frac{2}{3}$. B. $-\frac{4}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $-\frac{2}{3}$.
- Câu 5.** (Chuyên KHTN - 2021) Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 4$ và $g(x) = mx^2 + nx$ có đồ thị trong hình bên dưới.



Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số trên (phần gạch chéo trong hình vẽ) bằng

- A. $\frac{9}{4}$. B. $\frac{37}{12}$. C. $\frac{37}{6}$. D. $\frac{9}{2}$.

Câu 6. (Chuyên KHTN - 2021) Biết rằng $\int_1^2 \frac{x^3-1}{x^2+x} dx = a + b \ln 3 + c \ln 2$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Tính

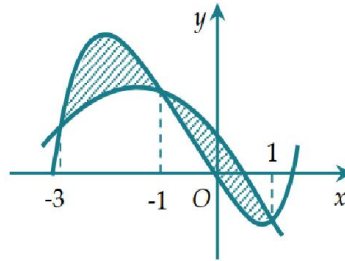
- $2a + 3b - 4c$
A. -19. B. 19. C. 5. D. -5.

Câu 7. (Chuyên KHTN - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ và thỏa mãn

$$2f(x) + xf\left(\frac{1}{x}\right) = x \text{ với mọi } x > 0 \text{ Tính } \int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) dx.$$

- A. $\frac{7}{12}$. B. $\frac{7}{4}$. C. $\frac{9}{4}$. D. $\frac{3}{4}$.

Câu 8. (Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - 2021) Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2}$ và $g(x) = dx^2 + ex + 1$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là -3; -1; 1 (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng



- A. 5. B. $\frac{9}{2}$. C. 4. D. 8.

Câu 9. (Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - 2021) Cho $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2} dx = a \ln 3 + b \ln 2 + \frac{c}{3}$,

với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Giá trị $a^2 + b^2 + c^2$ bằng

- A. 11. B. 1. C. 9. D. 3.

Câu 10. (Chuyên Quốc Học Huế - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(x) = f(5-x), \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Biết } \int_2^3 f(x) dx = 2. \text{ Tính } I = \int_2^3 xf(x) dx$$

- A. $I = 20$. B. $I = 10$. C. $I = 15$. D. $I = 5$.

Câu 11. (Chuyên Quang Trung - Bình Phước - 2021) $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số

$$y = (x-1)\sqrt{x^2-2x-3}. \text{ Biết } F(-2) = F(4) - 1 = \frac{5\sqrt{5}}{3} \text{ và } F(-3) + F(5) = a\sqrt{3} + b; a, b \in \mathbb{N}. \text{ Giá}$$

trị $a+b$ bằng

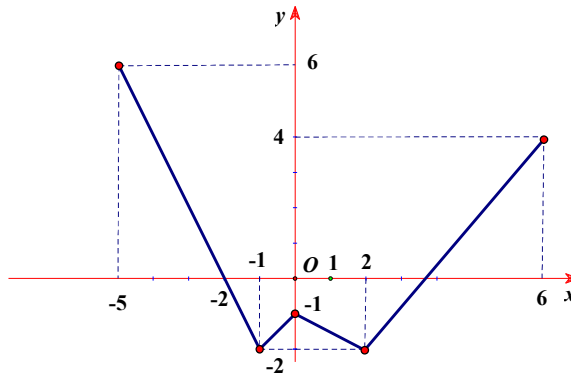
- A. 17. B. 9. C. 12. D. 18.

Câu 12. (Chuyên Quang Trung - Bình Phước - 2021) Cho $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{1 - \sin^2 x} = \frac{\pi}{a} - \ln b + \ln \sqrt{2}; a, b \in \mathbb{N}^*$. Giá

trị $a+3b$ bằng

- A. 10. B. 8. C. 12. D. 4.

Câu 13. (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội- 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-5; 6]$ có đồ thị như hình vẽ. Giá trị của $\int_{-5}^0 f(x) dx$ bằng.



- A. $\frac{25}{2}$. B. $\frac{19}{2}$. C. $\frac{11}{2}$. D. $\frac{13}{2}$.

Câu 14. (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội- 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-1; 1]$, thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f'(x) + 2f(x) = 0$. Biết $f(1) = 1$. Tính $f(-1)$

- A. e^{-2} . B. e^{-4} . C. e^2 . D. e^4 .

Câu 15. (Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - 2021) Cho $F(x) = \frac{x^3}{3}$ là một nguyên hàm của $\frac{f(x)}{x}$. Biết

$f(x)$ có đạo hàm và xác định với mọi $x \neq 0$. Tính $\int f'(x)e^x dx$.

- A. $3x^2e^x - 6xe^x + e^x + C$. B. $x^2e^x - 6xe^x + 6e^x + C$.
C. $3x^2 + 6xe^x + 6e^x + C$. D. $3x^2e^x - 6xe^x + 6e^x + C$.

Câu 16. (Chuyên ĐHSPT Hà Nội - 2021) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x(x+3)}}$ trên

$(0; +\infty)$ thỏa mãn $F(1) = \ln 3$. Giá trị của $e^{F(2021)} - e^{F(2020)}$ thuộc khoảng nào?

- A. $\left(0; \frac{1}{10}\right)$. B. $\left(\frac{1}{10}; \frac{1}{5}\right)$. C. $\left(\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right)$. D. $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 17. (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An - 2021) Giả sử $f(x)$ là một hàm số có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Biết rằng $G(x) = x^3$ là một nguyên hàm của $g(x) = e^{-2x}f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Họ tất cả các nguyên hàm của $e^{-2x}f'(x)$ là

- A. $-2x^3 + 3x^2 + C$. B. $x^3 + 3x^2 + C$. C. $2x^3 + 3x^2 + C$. D. $-x^3 + 3x^2 + C$.

Câu 18. (THPT Quế Võ 1 - Bắc Ninh - 2021) Cho $\int_0^{2021} f(x) dx = 2$. Tính tích phân

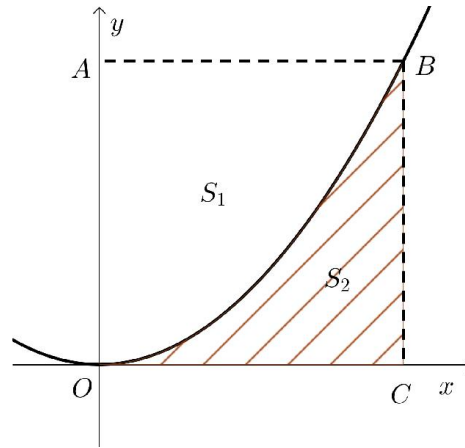
$$I = \int_0^{\sqrt{e^{2021}-1}} \frac{x}{x^2+1} \cdot f\left[\ln(x^2+1)\right] dx.$$

- A. $I = 2$. B. $I = 1$. C. $I = 5$. D. $I = 4$.

Câu 19. (THPT Quốc Oai - Hà Nội - 2021) Đường cong (C) có phương trình $y = \frac{1}{4}x^2$ chia hình vuông

$OABC$ có cạnh bằng 4 thành hai phần. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của phần không tô đậm và

tô đậm như hình vẽ bên dưới. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



- A. 3. B. $\frac{1}{2}$. C. 2. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 20. (THPT Quốc Oai - Hà Nội - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = 5$,

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f(2x) dx = 10. \text{ Tích phân } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(\sin x) dx \text{ bằng}$$

- A. $I = 5$. B. $I = 20$. C. $I = 15$. D. $I = 25$.

Câu 21. (THPT Quảng Xương 1-Thanh Hóa - 2021) Cho tích phân $I = \int_1^2 \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x+1} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- A. $b + c < 0$ B. $c > 0$ C. $a < 0$ D. $a + b + c > 0$

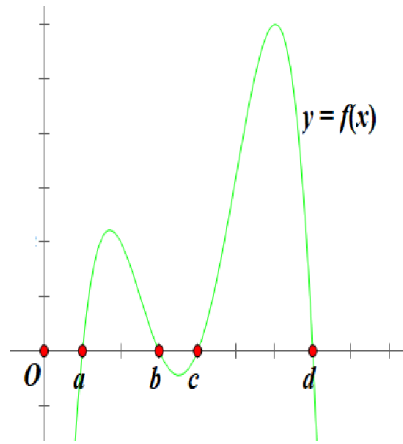
Câu 22. (THPT PTNK Cơ sở 2 - TP.HCM - 2021) Biết rằng $I = \int_2^3 \frac{x}{(x-1)(x+2)} dx = a \ln 5 + b \ln 2$ với a, b là các số hữu tỉ. Giá trị của tổng $a + b$ là

- A. $\frac{1}{3}$. B. -1 . C. $-\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 23. (THPT PTNK Cơ sở 2 - TP.HCM - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, $f(1) = e^3$. Biết $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm thực phân biệt.

- A. $m \geq e^4$. B. $0 < m < e^4$. C. $1 < m < e^4$. D. $m > e^4$.

Câu 24. (THPT Nguyễn Tất Thành - Hà Nội - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Đặt $I_1 = \int_a^b f(x)dx$; $I_2 = \int_a^c f(x)dx$; $I_3 = \int_a^d f(x)dx$; $I_4 = \int_c^d f(x)dx$.

Phát biểu nào dưới đây đúng?

- A. $I_1 < I_2 < I_3 < I_4$ B. $I_2 < I_1 < I_4 < I_3$
 C. $I_2 < I_1 < I_3 < I_4$ D. $I_1 < I_2 < I_4 < I_3$

Câu 25. (THPT Nguyễn Tất Thành - Hà Nội - 2021) Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0)=1, f(1)=2$; $g(0)=-2, g(1)=4$ và $\int_0^1 f'(x)g(x)dx = 7$. Tính

$$I = \int_0^1 f(x)g'(x)dx.$$

- A. $I = -3$. B. $I = 17$. C. $I = 3$. D. $I = -17$.

Câu 26. (THPT Nguyễn Đức Cảnh - Thái Bình - 2021) Cho hàm số $y = \frac{x-m^2}{x+1}$ (với m là tham số khác 0) có đồ thị là (C). Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị và hai trục tọa độ. Có bao nhiêu giá trị thực của m thỏa mãn $S=1$?

- A. 4. B. 2. C. 1. D. 0.

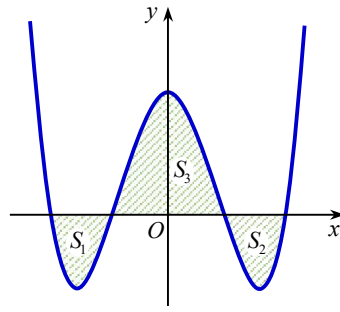
Câu 27. (THPT Nguyễn Đức Cảnh - Thái Bình - 2021) Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f(x) = \frac{1}{x} + \int_1^2 xf(x)dx, \forall x \in (0; +\infty)$. Tính tích phân $\int_1^e f(x)dx$.

- A. $\frac{5-2e}{3}$. B. $3-2e$. C. $2+2e$. D. $1-2e$.

Câu 28. (THPT Nguyễn Đức Cảnh - Thái Bình - 2021) Cho biết $\int_1^2 \frac{3x+1}{3x^2+x\ln x}dx = \ln\left(a + \frac{\ln b}{c}\right)$ với a, b, c là các số nguyên dương và $c \leq 4$, tổng $a+b+c$ bằng

- A. 5. B. 6. C. 7. D. 9.

Câu 29. (THPT Mai Anh Tuấn - Thanh Hóa - 2021) Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + m$. Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và Ox có phần phía trên trục hoành là S_1 , phần dưới trục hoành là S_2 và S_3 thỏa $S_1 + S_2 = S_3$. Khi đó $m = \frac{a}{b}$ (a, b là các số nguyên, $b > 0$, $\frac{a}{b}$ tối giản). Giá trị của biểu thức $S = a - b$ là



- A. 2. B. 7. C. 9. D. 11.

Câu 30. (THPT Mai Anh Tuấn - Thanh Hóa - 2021) Cho $\int_0^1 \frac{(x^2 + x)e^x}{x + e^{-x}} dx = a.e + b \ln(e + c)$ với

$a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $P = a + 2b - c$

- A. $P = -2$. B. $P = 0$. C. $P = -1$. D. $P = 1$.

Câu 31. (THPT Đồng Quan - Hà Nội - 2021) Cho $\int_0^1 \frac{x}{(x+3)^2} dx = a + b \ln 3 + c \ln 4$ với a, b, c là các số

hữu tỉ. Giá trị của $a + b + c$ bằng

- A. $-\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{4}$. C. $\frac{4}{5}$. D. $\frac{1}{5}$.

Câu 32. (THPT Đồng Quan - Hà Nội - 2021) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$\int_0^3 x.f'(2x-4)dx = 8; f(2) = 2. \text{ Tính } I = \int_{-2}^1 f(2x)dx.$$

- A. $I = 5$. B. $I = 10$. C. $I = -5$. D. $I = -10$.

Câu 33. (THPT Đồng Quan - Hà Nội - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục và dương trên $(0; +\infty)$, thỏa

$$\text{mãn } 3xf'(x) = x^2 f''(x) + 2f^2(x), \forall x > 0 \text{ và } f(1) = \frac{1}{2}. \text{ Giá trị của tích phân } \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx$$

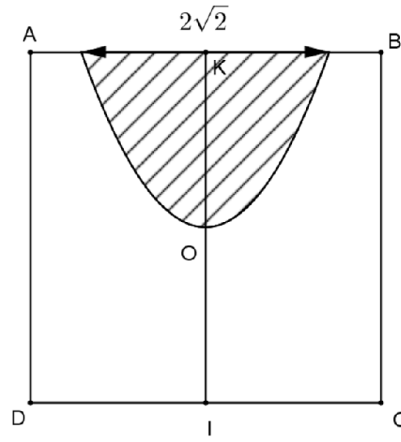
- A. $\ln \frac{5}{2}$. B. $\frac{1}{4} \ln \frac{5}{2}$. C. $\frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}$. D. $\frac{1}{3} \ln \frac{5}{2}$.

Câu 34. (THPT Lê Lợi - Thanh Hóa - 2021) Biết rằng tích phân $\int_0^1 (2x+3)e^x dx = ae+ b; (a, b \in \mathbb{Z})$.

Tính giá trị biểu thức $P = 2a + b$.

- A. 5. B. 2. C. 3. D. 7.

Câu 35. (THPT Lê Lợi - Thanh Hóa - 2021) Ông An có một mảnh đất nhỏ hình vuông cạnh bằng $4m$ ở trước sân. Ông muốn trồng hoa và cỏ để trang trí mảnh vườn của mình như sau: Ông sẽ trồng hoa trên phần diện tích có dạng Parabol (P) nhận trục đối xứng KI của hình vuông làm trục đối xứng của (P) và đỉnh của (P) là trung điểm của KI như hình vẽ, phần cỏ sẽ trồng ở phần còn lại của hình vuông. Biết rằng loại hoa ông muốn trồng có giá 200000 đồng/ $1m^2$, cỏ có giá 50000 đồng/ $1m^2$. Hỏi số tiền ông An bỏ ra để làm mảnh vườn là bao nhiêu (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)?



- A. 1365685,4 đ. B. 2634314,6 đ. C. 138642,5 đ. D. Đáp án khác.

Câu 36. (Sở Vĩnh Phúc - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Biết } f(0) = 0, \text{ tính } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f'(x) dx.$$

- A. $I = -\frac{1}{4}$. B. $I = \frac{1}{4}$. C. $I = \frac{\pi}{4}$. D. $I = -\frac{\pi}{4}$.

Câu 37. (Sở Vĩnh Phúc - 2021) Biết diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3^{-x}$, $y = \frac{x}{3}$, $x = 0$

$$\text{là } S = \frac{m}{3 \ln 3} - \frac{n}{6}. \text{ Tính tổng } m + n.$$

- A. $m + n = 4$. B. $m + n = 2$. C. $m + n = 1$. D. $m + n = 3$.

Câu 38. (Sở Lào Cai - 2021) Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m thỏa mãn: $\int_0^m |3x^2 - 2x| dx = m - 10$?

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

Câu 39. (Sở Hà Tĩnh - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$2021f(x) - f(-x) = x \sin x, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Giá trị của tích phân } I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \text{ bằng}$$

- A. $\frac{1}{1010}$. B. $\frac{2}{2019}$. C. $\frac{1}{2020}$. D. $\frac{3}{2022}$.

Câu 40. (Sở Yên Bái - 2021) Biết $\int_0^2 \frac{x+5}{x^2+4x+3} dx = a \ln 5 + b \ln 3$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $P = a.b$.

- A. $P = -3$. B. $P = -6$. C. $P = 6$. D. $P = 3$.

Câu 41. (Sở Yên Bái - 2021) Biết a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+x\sqrt{x+1}}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - c. \text{ Tính giá trị biểu thức } P = a + b + c.$$

- A. $P = 18$. B. $P = 46$. C. $P = 24$. D. $P = 12$.

Câu 42. (Sở Yên Bái - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục và là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$I = \int_0^3 f(x) dx = 6. \text{ Tính tích phân } J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(3 \sin x) dx.$$

A. $J = -4$.

B. $J = 4$.

C. $J = 0$.

D. $J = 6$.

Câu 43. (THPT Nguyễn Công Trứ - Hà Tĩnh - 2021) Biết $\int_{\ln 3}^{\ln 6} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3} = 3 \ln a - \ln b$ với a, b là các

số nguyên dương. Tính $P = ab$.

A. 20.

B. -10.

C. 15.

D. 10.

Câu 44. (THPT Thanh Chương 1- Nghệ An - 2021) Biết rằng , với ;

; là các số hữu tỷ. Giá trị của bằng:

A. .

B. .

C. .

D. .

Câu 45. (THPT Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn

$$f(x^2 + 1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}} = \frac{\ln x}{x}. \text{ Biết } \int_1^{17} f(x) dx = a \ln 4 - b \text{ với } a, b \in \mathbb{R}. \text{ Giá trị của } a + 2b \text{ bằng}$$

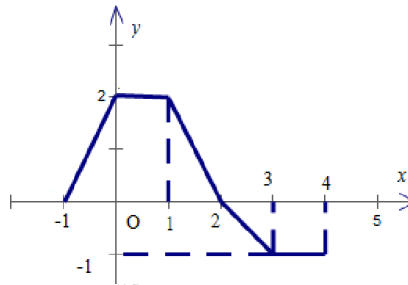
A. 16.

B. 12.

C. 8.

D. 20.

Câu 46. (THPT Lương Thế Vinh - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ với $-1 \leq x \leq 4$ có đồ thị các đoạn thẳng như hình bên.



Tích phân $I = \int_{-1}^4 f(x) dx$ bằng

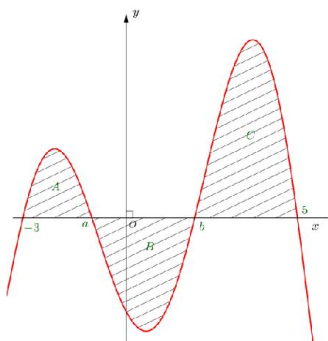
A. 4.

B. 1.

C. 5,5.

D. 2,5.

Câu 47. (THPT Hoàng Hoa Thám - Đà Nẵng - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị trên $[-3; 5]$ như hình bên.



Biết các miền A, B, C có diện tích lần lượt là $S_A = 188, S_B = \frac{1377}{4}, S_C = \frac{2673}{4}$. Khi đó

$$\int_{-3}^5 [f(x) + 1] dx \text{ bằng}$$

A. 520.

B. $\frac{2417}{2}$.

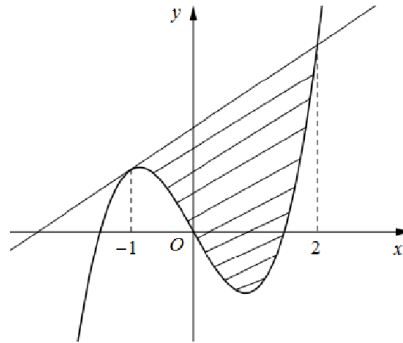
C. -504.

D. $\frac{2401}{2}$.

- Câu 48. (THPT Đào Duy Từ - Hà Nội - 2021)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$. Biết $\frac{1}{x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $y = f'(x) \ln x$ và $f(2) = \frac{1}{\ln 2}$. Khi đó, $\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx$ bằng
- A. $-\frac{7}{4}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{7}{4}$.

- Câu 49. (THPT Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2021)** Cho tích phân $\int_1^3 xf(x)dx = 2$. Tính tích phân $I = \int_0^2 x^2 f(\sqrt{x^3+1})dx$?
- A. 3. B. $\frac{2}{3}$. C. 1. D. $\frac{4}{3}$.

- Câu 50. (THPT Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2021)** Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ có đồ thị (C) . Biết rằng tiếp tuyến d của (C) tại điểm có hoành độ -1 cắt (C) tại điểm B có hoành độ bằng 2 (xem hình vẽ). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi d và (C) (phần gạch chéo trong hình) bằng

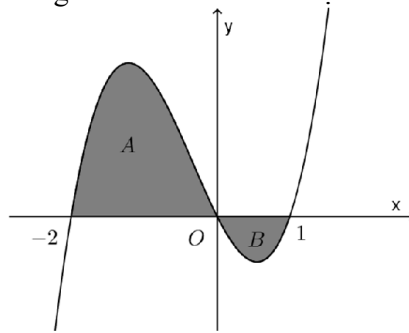


- A. $\frac{25}{4}$. B. $\frac{13}{2}$. C. $\frac{27}{4}$. D. $\frac{11}{2}$.
- Câu 51. (THPT Chu Văn An - Thái Nguyên - 2021)** Ông An có một mảnh vườn hình Elip có độ dài trục lớn bằng $16m$ và độ dài trục bé bằng $10m$. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng $8m$ và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng. Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/ m^2 . Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn.)
- A. 7.826.000 đồng. B. 7.862.000 đồng. C. 7.128.000 đồng. D. 7.653.000 đồng.
- Câu 52. (THPT Chu Văn An - Thái Nguyên - 2021)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$. Biết $f(1) = 1$ và $f(x) = xf'(x) + \ln x; \forall x \in (0; +\infty)$. Giá trị của $f(e)$ bằng:
- A. 1. B. 2. C. e . D. $\frac{1}{e}$.

- Câu 53. (THPT Chu Văn An - Thái Nguyên - 2021)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 4]$ và thỏa mãn $f(x) = \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x}$. Tính $I = \int_3^4 f(x)dx$?
- A. $S = 2 \ln^2 2$. B. $S = \ln^2 2$. C. $S = 2 \ln 2$ D. $S = 3 + 2 \ln^2 2$.

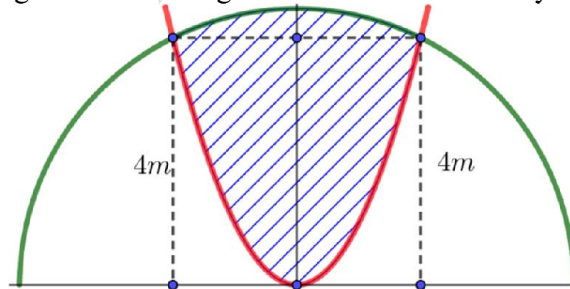
- Câu 54. (THPT Ba Đình - Thanh Hóa - 2021)** Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6} dx = a \ln \frac{4}{c} + b$, với $a, b \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{N}^*$. Tính tổng $S = a + b + c$.
- A. $S = 1$. B. $S = 0$. C. $S = 4$. D. $S = 3$.

- Câu 55. (THPT Triệu Sơn - Thanh Hóa - 2021)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ và gọi A ; B là hai hình phẳng được gạch trong hình bên dưới lần lượt có diện tích bằng 14 và 5.

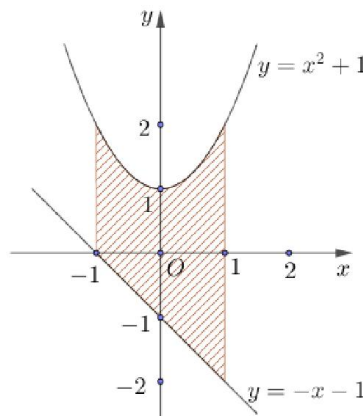


Giá trị của $I = \int_{-1}^0 f(3x+1) dx$ bằng:

- A. 9. B. $\frac{19}{3}$. C. 27. D. 3.
- Câu 56. (THPT Triệu Sơn - Thanh Hóa - 2021)** Một khuôn viên dạng nửa hình tròn, trên đó người thiết kế phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm và có trục đối xứng vuông góc với đường kính của nửa hình tròn, hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô màu) và cách nhau một khoảng bằng 4m. Phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ, chi phí để trồng hoa và cỏ Nhật Bản tương ứng là 150.000 đồng/m² và 100.000 đồng/m². Hỏi số tiền cần để trồng hoa và trồng cỏ Nhật Bản trong khuôn viên đó gần nhất với số nào sau đây?



- A. 3.739.000 (đồng). B. 1.948.000 (đồng). C. 3.926.000 (đồng). D. 4.115.000 (đồng).
- Câu 57. (THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2021)** Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = x^2 + 1$; $y = -x - 1$ và hai đường thẳng $x = -1$; $x = 1$.



Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) quanh trục Ox bằng

A. $\frac{176\pi}{15}$.

B. $\frac{14\pi}{3}$.

C. $\frac{21\pi}{5}$.

D. $\frac{16\pi}{15}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.D	3.B	4.C	5.C	6.B	7.D	8.C	9.D	10.D
11.D	12.A	13.D	14.D	15.D	16.A	17.C	18.B	19.C	20.D
21.D	22.C	23.D	24.B	25.C	26.B	27.B	28.C	29.D	30.A
31.B	32.D	33.C	34.D	35.A	36.A	37.D	38.A	39.A	40.A
41.B	42.B	43.D	44.A	45.D	46.D	47.A	48.D	49.D	50.C
51.D	52.B	53.A	54.C	55.D	56.A	57.C			

Nguyễn Bảo Vương

MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

- Câu 1.** (Liên trường Quỳnh Lưu - Hoàng Mai - Nghệ An - 2021) Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$, đường thẳng $y = x - 1$ và các đường thẳng $x = m$, $x = 2m$ ($m > 1$). Giá trị của m sao cho $S = \ln 3$ là
- A.** $m = 2$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = 5$. **D.** $m = 4$.

Lời giải**Chọn A**

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số:

$$\frac{x^2 - 2x}{x - 1} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - 2x = (x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Phương trình vô nghiệm, suy ra hai đồ thị hàm số không có giao điểm.

Như vậy diện tích hình phẳng cần tính là:

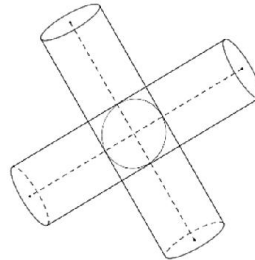
$$\begin{aligned} S &= \int_m^{2m} \left| \frac{x^2 - 2x}{x - 1} - (x - 1) \right| dx = \int_m^{2m} \left| \frac{-1}{x - 1} \right| dx = \int_m^{2m} \left| \frac{1}{x - 1} \right| dx. \\ &= \left| \int_m^{2m} \frac{1}{x - 1} d(x - 1) \right| = \left| \ln |x - 1| \right|_m^{2m} = \left| \ln |x - 1| \right|_m^{2m} = \left| \ln \left(\frac{2m - 1}{m - 1} \right) \right| \quad (\text{do } m > 1). \end{aligned}$$

$$\text{Theo đề bài } S = \ln 3 \Rightarrow \left| \ln \left(\frac{2m - 1}{m - 1} \right) \right| = \ln 3 \Rightarrow \ln \left(\frac{2m - 1}{m - 1} \right) = 3 \text{ hoặc } \ln \left(\frac{2m - 1}{m - 1} \right) = -\ln 3.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \frac{2m - 1}{m - 1} = 3 \\ \frac{2m - 1}{m - 1} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 = 3(m - 1) \\ 3(2m - 1) = m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{2}{5} \text{ (KTM)} \end{cases}.$$

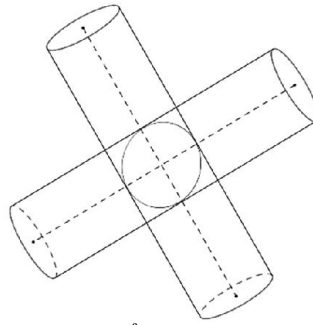
Vậy $m = 2$.

- Câu 2.** (Liên trường Quỳnh Lưu - Hoàng Mai - Nghệ An - 2021) Người ta dùng máy đào hầm (TBM) để đào hai đường hầm hình trụ tròn xoay đường kính $12m$, mỗi đường hầm đều có chiều dài bằng $20m$, có hai trục cắt nhau và vuông góc với nhau. Tính thể tích khối đất đào được.



- A.** $3987.89m^3$. **B.** $3619.11m^3$. **C.** $4523.89m^3$. **D.** $3371.89m^3$

Lời giải**Chọn D**



Cắt thiết diện của hai hình trụ theo một mặt phẳng theo phương vuông góc với với khối trụ ta được một hình vuông có cạnh bằng $2\sqrt{36-x^2}$

Khi đó ta có thể tích khối đất được đào là $V = 2\pi R^2 h - \pi \int_{-6}^6 4(36-x^2)dx = 3371.89$.

Câu 3. (Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2021) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(3) = 21$, $\int_0^3 f(x)dx = 9$. Tính tích phân $I = \int_0^1 x.f'(3x)dx$.

A. $I = 15$.

B. $I = 6$.

C. $I = 12$.

D. $I = 9$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $I = \int_0^1 x.f'(3x)dx = \frac{1}{9} \int_0^1 3x.f'(3x)d(3x) = \frac{1}{9} \int_0^3 x.f'(x)dx$.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$.

Suy ra $\int_0^3 x.f'(x)dx = x.f(x)\Big|_0^3 - \int_0^3 f(x)dx = 3f(3) - 9 = 3.21 - 9 = 54$.

Vậy $I = 6$.

Câu 4. (Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có một nguyên hàm là hàm số $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$. Khi đó $\int_1^2 f(x^2)dx$ bằng:

A. $\frac{2}{3}$.

B. $-\frac{4}{3}$.

C. $\frac{4}{3}$.

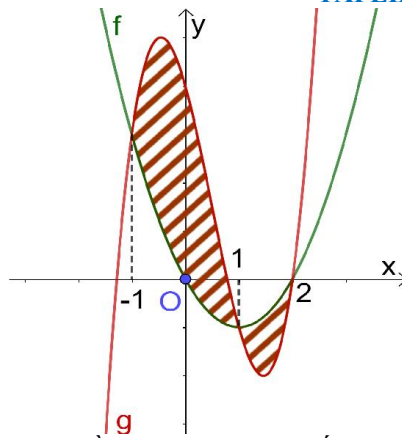
D. $-\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(x) = g'(x) = x + 1 \Rightarrow \int_1^2 f(x^2)dx = \int_1^2 (x^2 - 1)dx = \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Big|_1^2 = \frac{4}{3}$.

Câu 5. (Chuyên KHTN - 2021) Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 4$ và $g(x) = mx^2 + nx$ có đồ thị trong hình bên dưới.



Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số trên (phần gạch chéo trong hình vẽ) bằng

A. $\frac{9}{4}$.

B. $\frac{37}{12}$.

C. $\frac{37}{6}$.

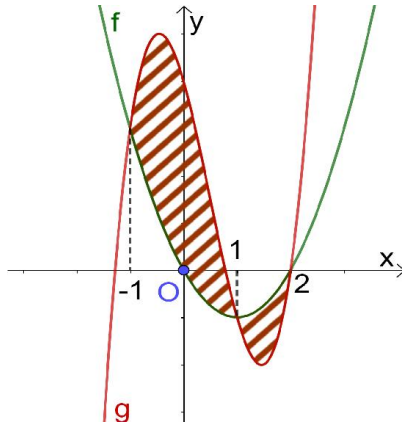
D. $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + cx + 4 = mx^2 + nx \Leftrightarrow ax^3 + (b-m)x^2 + (c-n)x + 4 = 0$$



Đặt $h(x) = ax^3 + (b-m)x^2 + (c-n)x + 4$

Vì $h(x) = 0$ có 3 nghiệm $x = 2, x = -1, x = 1$ nên $h(x) = a(x+1)(x-1)(x-2) = a(x^2-1)(x-2)$

Mà ta có $h(0) = 2a = 4 \Rightarrow a = 2$.

Suy ra $h(x) = 2(x^2-1)(x-2)$.

Vậy diện tích hình phẳng là $S = \int_{-1}^2 |h(x)| dx = \int_{-1}^2 |2(x^2-1)(x-2)| dx = \frac{37}{6}$.

Câu 6. (Chuyên KHTN - 2021) Biết rằng $\int_1^2 \frac{x^3-1}{x^2+x} dx = a + b \ln 3 + c \ln 2$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Tính

$2a + 3b - 4c$

A. -19.

B. 19.

C. 5.

D. -5.

Lời giải

Chọn B

♦ Ta có: $\int_1^2 \frac{x^3-1}{x^2+x} dx = \int_1^2 \left(x-1 + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x} \right) dx$

$= \left(\frac{x^2}{2} - x + 2 \ln|x+1| - \ln|x| \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} + 2 \ln 3 - 3 \ln 2$.

♦ Suy ra: $a = \frac{1}{2}; b = 2; c = -3$.

♦ Vậy $2a + 3b - 4c = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 2 - 4 \cdot (-3) = 19$.

Câu 7. (Chuyên KHTN - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ và thỏa mãn

$$2f(x) + xf\left(\frac{1}{x}\right) = x \text{ với mọi } x > 0 \text{ Tính } \int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) dx.$$

A. $\frac{7}{12}$.

B. $\frac{7}{4}$.

C. $\frac{9}{4}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn D

♦ Ta có $2f(x) + xf\left(\frac{1}{x}\right) = x$ (1)

♦ Đặt $\frac{1}{x} = t \Rightarrow x = \frac{1}{t}$ khi đó điều kiện đề bài cho trở thành

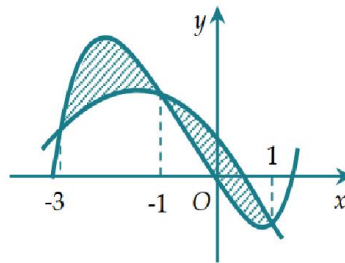
$$2f\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{t}f(t) = \frac{1}{t} \Leftrightarrow 2t \cdot f\left(\frac{1}{t}\right) + f(t) = 1 \quad (2)$$

♦ Từ (1) và (2) ta có:
$$\begin{cases} 4f(t) + 2t \cdot f\left(\frac{1}{t}\right) = 2x \\ f(t) + 2t \cdot f\left(\frac{1}{t}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(t) = \frac{1-2t}{-3}.$$

♦ Lấy tích phân cận từ $\frac{1}{2}$ đến 2 ta được: $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1-2x}{-3} dx = \frac{3}{4}.$

Câu 8. (Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - 2021) Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2}$ và

$g(x) = dx^2 + ex + 1$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là -3 ; -1 ; 1 (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. 5.

B. $\frac{9}{2}$.

C. 4.

D. 8.

Lời giải

Chọn C

♦ Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là

$$ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2} = dx^2 + ex + 1 \Leftrightarrow ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - \frac{3}{2} = 0. (*)$$

♦ Do đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -3 ; -1 ; 1 nên phương trình (*) có ba nghiệm $x = -3$; $x = -1$; $x = 1$. Khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -27a + 9(b-d) - 3(c-e) - \frac{3}{2} = 0 \\ -a + (b-d) - (c-e) - \frac{3}{2} = 0 \\ a + (b-d) + (c-e) - \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-d = \frac{3}{2} \\ a = \frac{1}{2} \\ c-e = \frac{-1}{2} \end{cases}.$$

Suy ra $f(x) - g(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

♦ Vậy hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số đã cho có diện tích là:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^{-1} (f(x) - g(x)) dx + \int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) dx \\ &= \int_{-3}^{-1} \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \right) dx - \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \right) dx \\ &= 2 + 2 = 4. \end{aligned}$$

Câu 9. (Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - 2021) Cho $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2} dx = a \ln 3 + b \ln 2 + \frac{c}{3}$,

với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Giá trị $a^2 + b^2 + c^2$ bằng

A. 11.

B. 1.

C. 9.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

$$\text{♦ Đặt } u = \ln x + 2 \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ \ln x = u - 2 \end{cases}.$$

♦ Đổi cận: Khi $x = 1 \Rightarrow u = 2$; Khi $x = e \Rightarrow u = 3$;

$$\text{♦ Ta có: } I = \int_2^3 \frac{u-2}{u^2} du = \int_2^3 \left(\frac{1}{u} - \frac{2}{u^2} \right) du = \left(\ln|u| + \frac{2}{u} \right) \Big|_2^3 = \ln 3 + \frac{2}{3} - \ln 2 - 1 = \ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{3}.$$

♦ Suy ra $a = 1, b = -1, c = -1$.

♦ Vậy giá trị $a^2 + b^2 + c^2 = 1 + 1 + 1 = 3$.

Câu 10. (Chuyên Quốc Học Huế - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(x) = f(5-x), \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Biết } \int_2^3 f(x) dx = 2. \text{ Tính } I = \int_2^3 xf(x) dx$$

A. $I = 20$.

B. $I = 10$.

C. $I = 15$.

D. $I = 5$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{♦ Đặt } t = 5 - x \Rightarrow \begin{cases} dt = -dx \\ x = 5 - t \end{cases}.$$

♦ Khi đó :

$$\begin{aligned} I &= \int_2^3 xf(x) dx = - \int_3^2 (5-t) f(5-t) dt = \int_2^3 (5-t) f(5-t) dt \\ &= \int_2^3 5f(5-t) dt - \int_2^3 tf(5-t) dt = 5 \int_2^3 f(t) dt - \int_2^3 tf(t) dt \quad (\forall f(x) = f(5-x), \forall x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

♦ Khi đó $I = 5.2 - I \Leftrightarrow 2I = 10 \Leftrightarrow I = 5$.

Câu 11. (Chuyên Quang Trung - Bình Phước - 2021) $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số

$$y = (x-1)\sqrt{x^2 - 2x - 3}. \text{ Biết } F(-2) = F(4) - 1 = \frac{5\sqrt{5}}{3} \text{ và } F(-3) + F(5) = a\sqrt{3} + b; a, b \in \mathbb{N}. \text{ Giá}$$

trị $a+b$ bằng

A. 17.

B. 9.

C. 12.

D. 18.

Lời giải

Chọn D

Theo đề, $F(x)$ có dạng

$$F(x) = \int (x-1)\sqrt{x^2 - 2x - 3} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{x^2 - 2x - 3} d(x^2 - 2x - 3) = \frac{1}{3} \sqrt{x^2 - 2x - 3}^3 + C$$

$$F(4) - 1 = \frac{5\sqrt{5}}{3} + C = \frac{5\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow C = 1.$$

$$\text{Suy ra: } F(-3) = 8\sqrt{13} + 1; F(5) = 8\sqrt{13} + 1$$

$$\text{Do đó: } F(-3) + F(5) = 16\sqrt{3} + 2$$

$$\text{Đồng nhất } a, b \text{ ta được } a = 16; b = 2$$

$$\text{Vậy } a + b = 18.$$

Câu 12. (Chuyên Quang Trung - Bình Phước - 2021) Cho $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{1 - \sin^2 x} = \frac{\pi}{a} - \ln b + \ln \sqrt{2}; a, b \in \mathbb{N}^*. \text{ Giá}$

trị $a+3b$ bằng

A. 10.

B. 8.

C. 12.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{1 - \sin^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x d(\tan x) = u$$

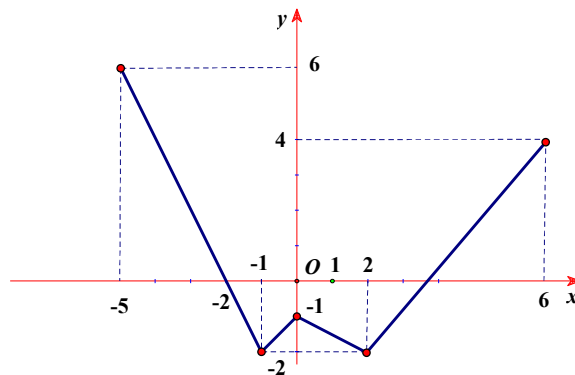
$$= x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \frac{\pi}{4} + \ln |\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \ln 2 + \ln \sqrt{2} = \frac{\pi}{4} - \ln b + \ln \sqrt{2}$$

$$\text{Đồng nhất hệ số ta được } a = 4; b = 2.$$

$$\text{Vậy } a + 3b = 4 + 3 \cdot 2 = 10.$$

Câu 13. (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội- 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-5; 6]$ có đồ thị

như hình vẽ. Giá trị của $\int_{-5}^0 f(x) dx$ bằng.



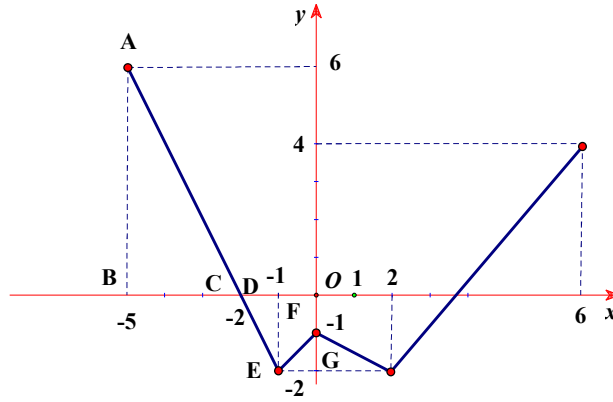
A. $\frac{25}{2}$.

B. $\frac{19}{2}$.

C. $\frac{11}{2}$.

D. $\frac{13}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 9.$$

$$S_{DEF} = \frac{1}{2} DF \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1.$$

$$S_{FEGO} = \frac{1}{2} (GO + EF) DO = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

Khi đó

$$\int_{-5}^0 f(x) dx = \int_{-5}^{-2} f(x) dx - \int_{-2}^{-1} f(x) dx - \int_{-1}^0 f(x) dx = S_{ABC} - S_{DEF} - S_{FEGO} = 9 - 1 - \frac{3}{2} = \frac{13}{2}.$$

- Câu 14. (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội- 2021)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-1; 1]$, thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f'(x) + 2f(x) = 0$. Biết $f(1) = 1$. Tính $f(-1)$
- A.** e^{-2} . **B.** e^{-4} . **C.** e^2 . **D.** e^4 .

Lời giải**Chọn D**+ Ta có : Vì $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên

$$f'(x) + 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -2 \Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = -2 \int_{-1}^1 dx \Leftrightarrow \ln(f(x)) \Big|_{-1}^1 = -2x \Big|_{-1}^1$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{f(1)}{f(-1)} = -4 \Leftrightarrow f(-1) = e^4.$$

Vậy $f(-1) = e^4$

- Câu 15. (Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - 2021)** Cho $F(x) = \frac{x^3}{3}$ là một nguyên hàm của $\frac{f(x)}{x}$. Biết

 $f(x)$ có đạo hàm và xác định với mọi $x \neq 0$. Tính $\int f'(x) e^x dx$.

- A.** $3x^2 e^x - 6x e^x + e^x + C$. **B.** $x^2 e^x - 6x e^x + 6e^x + C$.
C. $3x^2 + 6x e^x + 6e^x + C$. **D.** $3x^2 e^x - 6x e^x + 6e^x + C$.

Lời giải**Chọn D**

$$\text{Theo bài, } F(x) = \int \frac{f(x)}{x} dx \Leftrightarrow F'(x) = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó, } \int f'(x) e^x dx &= 3 \int x^2 e^x dx = 3x^2 e^x - 6 \int x e^x dx = 3x^2 e^x - 6x e^x + 6 \int e^x dx \\ &= 3x^2 e^x - 6x e^x + 6e^x + C. \end{aligned}$$

Vậy $\int f'(x)e^x dx = 3x^2e^x - 6xe^x + 6e^x + C$.

Câu 16. (Chuyên ĐHSPT Hà Nội - 2021) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x(x+3)}}$ trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $F(1) = \ln 3$. Giá trị của $e^{F(2021)} - e^{F(2020)}$ thuộc khoảng nào?

- A. $\left(0; \frac{1}{10}\right)$. B. $\left(\frac{1}{10}; \frac{1}{5}\right)$. C. $\left(\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right)$. D. $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $F(x) = \int \frac{1}{2\sqrt{x(x+3)}} dx$

Đặt $t = \sqrt{x} + \sqrt{x+3} \Rightarrow dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+3}}{\sqrt{x(x+3)}} dx \Rightarrow \frac{dt}{t} = \frac{1}{2\sqrt{x(x+3)}} dx$.

$\Rightarrow F(x) = \ln|\sqrt{x} + \sqrt{x+3}| + C$.

Mà $F(1) = 3 \Rightarrow C = 0$. Do đó $\Rightarrow F(x) = \ln|\sqrt{x} + \sqrt{x+3}|$.

Vậy $e^{F(2021)} - e^{F(2020)} = \sqrt{2021} + \sqrt{2024} - \sqrt{2020} - \sqrt{2023} \approx 0,0222$.

Câu 17. (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An - 2021) Giả sử $f(x)$ là một hàm số có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng $G(x) = x^3$ là một nguyên hàm của $g(x) = e^{-2x}f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Họ tất cả các nguyên hàm của $e^{-2x}f'(x)$ là

- A. $-2x^3 + 3x^2 + C$. B. $x^3 + 3x^2 + C$. C. $2x^3 + 3x^2 + C$. D. $-x^3 + 3x^2 + C$.

Lời giải

Chọn C

$G(x) = x^3$ là một nguyên hàm của $g(x) = e^{-2x}f(x)$ trên $\mathbb{R}$, nên $e^{-2x}f(x) = 3x^2$.

Xét $I = \int e^{-2x}f'(x)dx$.

Đặt $u = e^{-2x} \Rightarrow du = -2e^{-2x}dx$ và $dv = f'(x)dx \Rightarrow v = f(x)$.

Khi đó: $I = e^{-2x}f(x) + 2 \int e^{-2x}f(x)dx = 3x^2 + 2x^3 + C$.

Vậy $I = 2x^3 + 3x^2 + C$.

Câu 18. (THPT Quốc Võ 1 - Bắc Ninh - 2021) Cho $\int_0^{2021} f(x)dx = 2$. Tính tích phân

$I = \int_0^{\sqrt{e^{2021}-1}} \frac{x}{x^2+1} \cdot f[\ln(x^2+1)]dx$.

- A. $I = 2$. B. $I = 1$. C. $I = 5$. D. $I = 4$.

Lời giải

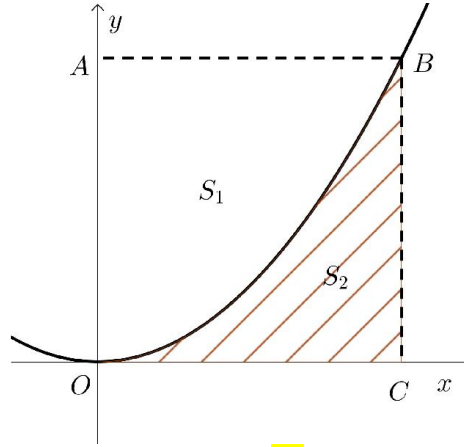
Chọn B

Đặt $t = \ln(x^2+1) \Rightarrow dt = \frac{2x}{x^2+1}dx$

Với $x=0$ thì $t=0$ và $x=\sqrt{e^{2021}-1}$ thì $t=2021$.

Khi đó, $I = \int_0^{\sqrt{e^{2021}-1}} \frac{x}{x^2+1} \cdot f[\ln(x^2+1)]dx = \frac{1}{2} \int_0^{2021} f(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^{2021} f(x)dx = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$.

- Câu 19. (THPT Quốc Oai - Hà Nội - 2021)** Đường cong (C) có phương trình $y = \frac{1}{4}x^2$ chia hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 thành hai phần. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của phần không tô đậm và tô đậm như hình vẽ bên dưới. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



A. 3.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 2.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn CDiện tích hình vuông $OABC$: $S = 4 \cdot 4 = 16$

$$S_2 = \int_0^4 \left(\frac{1}{4}x^2 \right) dx = \frac{1}{12}x^3 \Big|_0^4 = \frac{16}{3}$$

$$S_1 = S - S_2 = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$$

$$\text{Tỉ số } \frac{S_1}{S_2} = \frac{32}{3} : \frac{16}{3} = 2$$

- Câu 20. (THPT Quốc Oai - Hà Nội - 2021)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = 5$,

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f(2x) dx = 10. \text{ Tích phân } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(\sin x) dx \text{ bằng}$$

A. $I = 5$.B. $I = 20$.C. $I = 15$.D. $I = 25$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f(2x) dx = 10$$

$$\text{Đặt } 2x = t \Rightarrow 2dx = dt \Rightarrow \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt = 10 \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = 20.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = 25.$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(\sin x) dx$$

$$\text{Đặt } \sin x = t \Rightarrow \cos x dx = dt \Rightarrow I = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx = 25.$$

Câu 21. (THPT Quảng Xương 1-Thanh Hóa - 2021) Cho tích phân $I = \int_1^2 \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x+1} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- A.** $b + c < 0$ **B.** $c > 0$ **C.** $a < 0$ **D.** $a + b + c > 0$

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có } I &= \int_1^2 \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x+1} dx = \int_1^2 \left(x^2 - 4x + 6 - \frac{6}{x+1} \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x - 6 \ln|x+1| \right) \Big|_1^2 \\ &= \left(\frac{20}{3} - 6 \ln 3 \right) - \left(\frac{13}{3} - 6 \ln 2 \right) = \frac{7}{3} + 6 \ln 2 - 6 \ln 3. \end{aligned}$$

$$\text{Theo đó thì } a = \frac{7}{3}; b = 6; c = -6 \Rightarrow a + b + c > 0.$$

Câu 22. (THPT PTNK Cơ sở 2 - TP.HCM - 2021) Biết rằng $I = \int_2^3 \frac{x}{(x-1)(x+2)} dx = a \ln 5 + b \ln 2$ với a, b là các số hữu tỉ. Giá trị của tổng $a + b$ là

- A.** $\frac{1}{3}$. **B.** -1 . **C.** $-\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{x}{(x-1)(x+2)} &= \frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{3(x+2)}. \\ I &= \int_2^3 \frac{x}{(x-1)(x+2)} dx = \int_2^3 \left(\frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{3(x+2)} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} \int_2^3 \frac{1}{x-1} dx + \frac{2}{3} \int_2^3 \frac{1}{x+2} dx = \frac{1}{3} \ln|x-1| \Big|_2^3 + \frac{2}{3} \ln|x+2| \Big|_2^3 \\ &= \frac{1}{3} (\ln 2 - \ln 1) + \frac{2}{3} (\ln 5 - \ln 4) = \frac{2}{3} \ln 5 - \ln 2. \\ \text{Suy ra } a &= \frac{2}{3}, b = -1. \text{ Vậy } a + b = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Câu 23. (THPT PTNK Cơ sở 2 - TP.HCM - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, $f(1) = e^3$. Biết $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm thực phân biệt.

- A.** $m \geq e^{\frac{3}{4}}$. **B.** $0 < m < e^{\frac{3}{4}}$. **C.** $1 < m < e^{\frac{3}{4}}$. **D.** $m > e^{\frac{3}{4}}$.

Lời giải

Chọn D

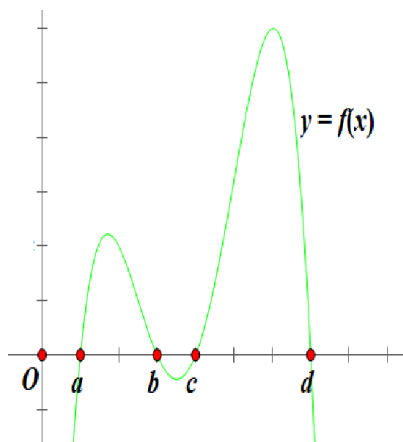
Ta có $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2x+1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int (2x+1) dx \Rightarrow \ln f(x) = x^2 + x + C$

$f(1) = e^3 \Rightarrow \ln e^3 = 2 + C \Rightarrow C = 1$. Do đó $f(x) = e^{x^2+x+1}$.

Phương trình $f(x) = m \Leftrightarrow e^{x^2+x+1} = m \Leftrightarrow x^2 + x + 1 - \ln m = 0 \quad (m > 0)$.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = 1 - 4(1 - \ln m) > 0 \Leftrightarrow \ln m > \frac{3}{4} \Leftrightarrow m > e^{\frac{3}{4}}$.

Câu 24. (THPT Nguyễn Tất Thành - Hà Nội - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Đặt $I_1 = \int_a^b f(x) dx$; $I_2 = \int_a^c f(x) dx$; $I_3 = \int_a^d f(x) dx$; $I_4 = \int_c^d f(x) dx$.

Phát biểu nào dưới đây đúng?

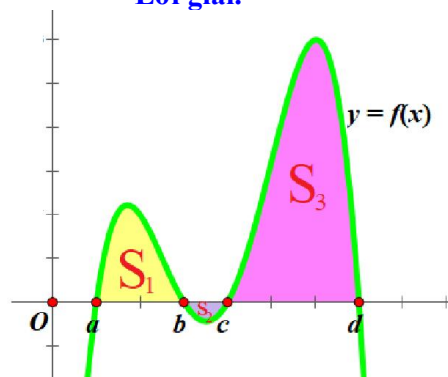
A. $I_1 < I_2 < I_3 < I_4$

B. $I_2 < I_1 < I_4 < I_3$

C. $I_2 < I_1 < I_3 < I_4$

D. $I_1 < I_2 < I_4 < I_3$

Lời giải.



Chọn B

Gọi S_1 ; S_2 ; S_3 là diện tích các phần được tô màu như hình vẽ trên. Ta có:

$$I_1 = \int_a^b f(x) dx = S_1.$$

$$I_2 = \int_a^c f(x) dx = S_1 - S_2.$$

$$I_3 = \int_a^d f(x) dx = S_1 + S_3 - S_2.$$

$$I_4 = \int_c^d f(x) dx = S_3.$$

Vậy: $I_1 = \int_a^b f(x)dx$; $I_2 = \int_a^c f(x)dx$; $I_3 = \int_a^d f(x)dx$; $I_4 = \int_c^d f(x)dx$.

Câu 25. (THPT Nguyễn Tất Thành - Hà Nội - 2021) Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0)=1, f(1)=2$; $g(0)=-2, g(1)=4$ và $\int_0^1 f'(x)g(x)dx = 7$. Tính

$$I = \int_0^1 f(x)g'(x)dx.$$

A. $I = -3$.

B. $I = 17$.

C. $I = 3$.

D. $I = -17$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_0^1 f'(x)g(x)dx + \int_0^1 f(x)g'(x)dx = \int_0^1 [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]dx$

$$= \int_0^1 [f(x)g(x)]' dx = f(x)g(x) \Big|_0^1 = f(1)g(1) - f(0)g(0) = 2 \cdot 4 - 1 \cdot (-2) = 10. \text{ Suy ra}$$

$$I = \int_0^1 f(x)g'(x)dx = 10 - 7 = 3.$$

Câu 26. (THPT Nguyễn Đức Cảnh - Thái Bình - 2021) Cho hàm số $y = \frac{x-m^2}{x+1}$ (với m là tham số khác 0) có đồ thị là (C) . Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị và hai trục tọa độ. Có bao nhiêu giá trị thực của m thỏa mãn $S=1$?

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(C) \cap Ox = A(m^2; 0), (C) \cap Oy = B(0; -m^2)$.

Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị và hai trục tọa độ là:

$$S = \int_0^{m^2} \left| \frac{x-m^2}{x+1} \right| dx = - \int_0^{m^2} \frac{x-m^2}{x+1} dx = \int_0^{m^2} \left(\frac{m^2+1}{x+1} - 1 \right) dx$$

$$= \left((m^2+1) \ln|x+1| - x \right) \Big|_0^{m^2} = (m^2+1) \ln|m^2+1| - m^2.$$

Để $S=1$ thì $(m^2+1) \ln|m^2+1| - m^2 = 1 \Leftrightarrow \ln(m^2+1) = 1 \Leftrightarrow m^2+1 = e \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{e-1}$.

Câu 27. (THPT Nguyễn Đức Cảnh - Thái Bình - 2021) Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f(x) = \frac{1}{x} + \int_1^2 xf(x)dx, \forall x \in (0; +\infty)$. Tính tích phân $\int_1^e f(x)dx$.

A. $\frac{5-2e}{3}$.

B. $3-2e$.

C. $2+2e$.

D. $1-2e$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $C = \int_1^2 xf(x)dx \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} + C \\ f(x) = \frac{1}{x} + \int_1^2 x \left(\frac{1}{x} + C \right) dx \end{cases} (*)$

$$\Rightarrow C = x + C \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 \Leftrightarrow C = (2+2C) - \left(1 + \frac{C}{2} \right) \Leftrightarrow C = -2$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} - 2 \Rightarrow \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - 2 \right) dx = \ln x - 2x \Big|_1^e = (\ln e - 2e) - (\ln 1 - 2) = 3 - 2e.$$

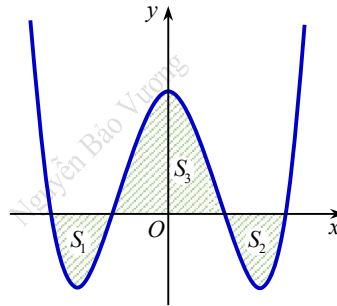
- Câu 28.** (THPT Nguyễn Đức Cảnh - Thái Bình - 2021) Cho biết $\int_1^2 \frac{3x+1}{3x^2+x \ln x} dx = \ln \left(a + \frac{\ln b}{c} \right)$ với a, b, c là các số nguyên dương và $c \leq 4$, tổng $a+b+c$ bằng
- A.** 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{3x+1}{3x^2+x \ln x} dx &= \int_1^2 \frac{3+\frac{1}{x}}{3x+\ln x} dx = \int_1^2 \frac{1}{3x+\ln x} d(3x+\ln x) = \left(\ln |3x+\ln x| \right) \Big|_1^2 \\ &= \ln(6+\ln 2) - \ln 3 = \ln \left(2 + \frac{\ln 3}{2} \right). \\ \Rightarrow a=2, b=3, c=2 &\Rightarrow a+b+c=7. \end{aligned}$$

- Câu 29. (THPT Mai Anh Tuấn - Thanh Hóa - 2021)** Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + m$. Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và Ox có phần phía trên trục hoành là S_1 , phần dưới trục hoành x là S_2 và S_3 thỏa $S_1 + S_2 = S_3$. Khi đó $m = \frac{a}{b}$ (a, b là các số nguyên, $b > 0$, $\frac{a}{b}$ tối giản). Giá trị của biểu thức $S = a - b$ là



- A.** 2. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 11.
Lời giải

Chọn D

Gọi m, n, p, q ($m < n < 0 < p < q$) là hoành độ các giao điểm của đồ thị với Ox .
Do đồ thị hàm số nhận Oy làm trục đối xứng nên

$$S_1 + S_2 = S_3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} S_3 = S_2 \Leftrightarrow \int_0^p (x^4 - 4x^2 + m) dx = \int_p^q (x^4 - 4x^2 + m) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^q (x^4 - 4x^2 + m) dx = 0 \Leftrightarrow \frac{q^5}{5} - \frac{4q^3}{3} + mq = 0 \Leftrightarrow \frac{q^4}{5} - \frac{4q^2}{3} + m = 0 \quad (1)$$

Mặt khác $q^4 - 4q^2 + m = 0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $m = \frac{20}{9}$. Vậy $a = 20, b = 9 \Rightarrow a - b = 11$

- Câu 30. (THPT Mai Anh Tuấn - Thanh Hóa - 2021)** Cho $\int_0^1 \frac{(x^2 + x)e^x}{x + e^{-x}} dx = a.e + b \ln(e + c)$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $P = a + 2b - c$
- A.** $P = -2$. **B.** $P = 0$. **C.** $P = -1$. **D.** $P = 1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$\int_0^1 \frac{(x^2+x)e^x}{x+e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{(x^2+x)e^x}{x+\frac{1}{e^x}} dx = \int_0^1 \frac{x \cdot e^x (x+1)e^x}{x \cdot e^x + 1} dx$$

$$\text{Đặt } u = xe^x + 1 \Rightarrow du = (e^x + xe^x) dx = (x+1)e^x dx$$

Khi đó

$$\int_0^1 \frac{(x^2+x)e^x}{x+e^{-x}} dx = \int_1^{e+1} \frac{u-1}{u} du = \int_1^{e+1} \left(1 - \frac{1}{u}\right) du = \left(u - \ln|u|\right) \Big|_1^{e+1} = e - \ln(e+1)$$

$$\text{Suy ra } a=1, b=-1, c=1 \Rightarrow P = a+2b-c = 1-2-1 = -2$$

Câu 31. (THPT Đồng Quan - Hà Nội - 2021) Cho $\int_0^1 \frac{x}{(x+3)^2} dx = a + b \ln 3 + c \ln 4$ với a, b, c là các số

hữu tỉ. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. $-\frac{1}{2}$.

B. $-\frac{1}{4}$.

C. $\frac{4}{5}$.

D. $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int_0^1 \frac{x}{(x+3)^2} dx = \int_0^1 \frac{(x+3)-3}{(x+3)^2} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{x+3} - \frac{3}{(x+3)^2} \right) dx = \left(\ln|x+3| + \frac{3}{x+3} \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{4} - \ln 3 + \ln 4$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{4}; b = -1; c = 1.$$

$$\text{Vậy } a+b+c = -\frac{1}{4}.$$

Câu 32. (THPT Đồng Quan - Hà Nội - 2021) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$\int_0^3 x \cdot f'(2x-4) dx = 8; f(2) = 2. \text{ Tính } I = \int_{-2}^1 f(2x) dx.$$

A. $I = 5$.

B. $I = 10$.

C. $I = -5$.

D. $I = -10$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét } \int_0^3 x \cdot f'(2x-4) dx = 8 \quad (*)$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(2x-4) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} f(2x-4) \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{2} x f(2x-4) \Big|_0^3 - \frac{1}{2} \int_0^3 f(2x-4) dx = 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} f(2) - \frac{1}{2} \int_0^3 f(2x-4) dx = 8$$

$$\Leftrightarrow \int_0^3 f(2x-4) dx = -10.$$

$$\text{Đặt } 2t = 2x-4 \Rightarrow dt = dx$$

x	0	3
-----	-----	-----

t	-2	1
-----	------	-----

Suy ra: $\int_{-2}^1 f(2t) dt = -10.$

Câu 33. (THPT Đồng Quan - Hà Nội - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục và dương trên $(0; +\infty)$, thỏa mãn $3xf(x) = x^2 f'(x) + 2f^2(x), \forall x > 0$ và $f(1) = \frac{1}{2}$. Giá trị của tích phân $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx$

A. $\ln \frac{5}{2}.$

B. $\frac{1}{4} \ln \frac{5}{2}.$

C. $\frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}.$

D. $\frac{1}{3} \ln \frac{5}{2}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $3xf(x) = x^2 f'(x) + 2f^2(x), \forall x > 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 f(x) - x^3 f'(x) = 2xf^2(x)$

$\Leftrightarrow \frac{3x^2 f(x) - x^3 f'(x)}{f^2(x)} = 2x \Rightarrow \left(\frac{x^3}{f(x)} \right)' = 2x \Rightarrow \frac{x^3}{f(x)} = x^2 + C.$

Thay $x = 0$ ta được $\frac{1}{f(1)} = 1 + C \Leftrightarrow 2 = 1 + C \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1} \Rightarrow \frac{f(x)}{x^2} = \frac{x}{x^2 + 1}.$

Khi đó $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx = \int_1^2 \frac{x}{x^2 + 1} dx.$ Đặt $t = x^2 + 1 \Rightarrow dx = 2x dx \Leftrightarrow x dx = \frac{1}{2} dt.$

Đổi cận $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 2 \\ x = 2 \Rightarrow t = 5 \end{cases} \Rightarrow \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_2^5 \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} (\ln |t|) \Big|_2^5 = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}.$

Câu 34. (THPT Lê Lợi - Thanh Hóa - 2021) Biết rằng tích phân $\int_0^1 (2x+3)e^x dx = ae+b; (a, b \in \mathbb{Z}).$

Tính giá trị biểu thức $P = 2a + b.$

A. 5.

B. 2.

C. 3.

D. 7.

Lời giải

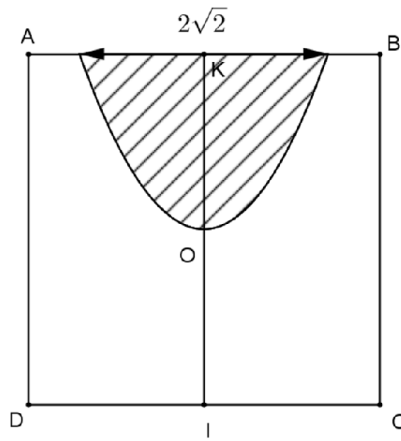
Chọn D

Đặt $\begin{cases} u = 2x+3 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = e^x \end{cases}$

$\Rightarrow \int_0^1 (2x+3)e^x dx = (2x+3)e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 2e^x dx = (2x+3)e^x \Big|_0^1 - 2e^x \Big|_0^1 = 3e + 1$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow P = 2a + b = 7.$

Câu 35. (THPT Lê Lợi - Thanh Hóa - 2021) Ông An có một mảnh đất nhỏ hình vuông cạnh bằng $4m$ ở trước sân. Ông muốn trồng hoa và cỏ để trang trí mảnh vườn của mình như sau: Ông sẽ trồng hoa trên phần diện tích có dạng Parabol (P) nhận trục đối xứng KI của hình vuông làm trục đối xứng của (P) và đỉnh của (P) là trung điểm của KI như hình vẽ, phần cỏ sẽ trồng ở phần còn lại của hình vuông. Biết rằng loại hoa ông muốn trồng có giá $200\,000$ đồng/ $1m^2$, cỏ có giá $50\,000$ đồng/ $1m^2$. Hỏi số tiền ông An bỏ ra để làm mảnh vườn là bao nhiêu (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)?



A. 1365685,4 đ.

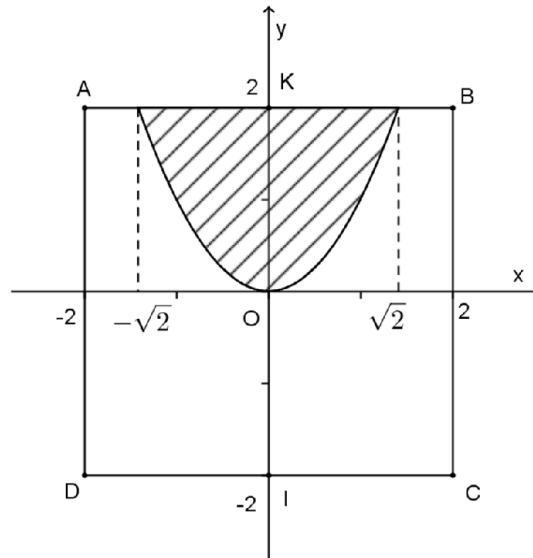
B. 2634314,6 đ.

C. 138642,5 đ.

D. Đáp án khác.

Lời giải

Chọn A



Xét hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Phương trình của (P) là $y = x^2$; phương trình của AB là $y = 2$

$$\Rightarrow \text{Diện tích phần trồng hoa là: } S_1 = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2 - x^2) dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Diện tích phần trồng cỏ là: } S_2 = S_{ABCD} - S_1 = 4^2 - \frac{8\sqrt{2}}{3} = \frac{48 - 8\sqrt{2}}{3}.$$

Vậy số tiền ông An bỏ ra để làm mảnh vườn là: $200\,000 \cdot S_1 + 50\,000 \cdot S_2 \approx 1365685,4$ đồng.

Câu 36. (Sở Vĩnh Phúc - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Biết } f(0) = 0, \text{ tính } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f'(x) dx.$$

A. $I = -\frac{1}{4}.$

B. $I = \frac{1}{4}.$

C. $I = \frac{\pi}{4}.$

D. $I = -\frac{\pi}{4}.$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Do } f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f(0) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\text{Ta có } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) d\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

$$\text{Do } f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x \Rightarrow 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Khi đó } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f'(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d(f(x)) = x \cdot f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{\pi}{2} f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}.$$

Câu 37. (Sở Vĩnh Phúc - 2021) Biết diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3^{-x}$, $y = \frac{x}{3}$, $x = 0$

là $S = \frac{m}{3 \ln 3} - \frac{n}{6}$. Tính tổng $m + n$.

A. $m + n = 4$.

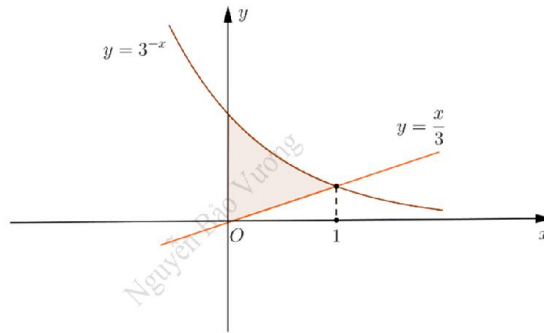
B. $m + n = 2$.

C. $m + n = 1$.

D. $m + n = 3$.

Lời giải

Chọn D



Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai hàm số $y = 3^{-x}$, $y = \frac{x}{3}$

$$\Rightarrow 3^{-x} = \frac{x}{3} \Leftrightarrow 3 \cdot 3^{-x} = x \Leftrightarrow 3^{1-x} = x$$

Nhận thấy $x = 1$ là 1 nghiệm

$$\text{Với } x > 1 \Rightarrow 1 - x < 0 \Rightarrow 3^{1-x} < 3^0 \Rightarrow 3^{1-x} < 1 \Rightarrow VT < 1 < VP$$

$$\text{Với } x < 1 \Rightarrow 1 - x > 0 \Rightarrow 3^{1-x} > 3^0 \Rightarrow 3^{1-x} > 1 \Rightarrow VP < 1 < VT$$

$\Rightarrow x = 1$ là nghiệm duy nhất.

$$\Rightarrow S = \int_0^1 \left(3^{-x} - \left(\frac{x}{3} \right) \right) dx = -\frac{3^{-x}}{\ln 3} - \frac{1}{6} x^2 \Big|_0^1 = \left(-\frac{3^{-1}}{\ln 3} - \frac{1}{6} \right) - \left(-\frac{1}{\ln 3} \right) = -\frac{1}{3 \ln 3} + \frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3 \ln 3} - \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow m = 2; n = 1$$

$$\Rightarrow m + n = 3$$

Câu 38. (Sở Lào Cai - 2021) Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m thỏa mãn: $\int_0^m |3x^2 - 2x| dx = m - 10$?

A. 1.

B. 2.

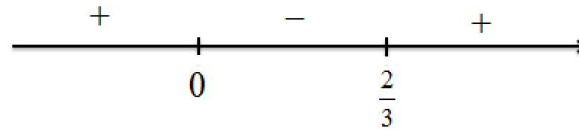
C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } I = \int_0^m |3x^2 - 2x| dx = m - 10; f(x) = 3x^2 - 2x. \text{ Dấu của } f(x):$$



Xét các trường hợp sau:

+) Nếu $m < 0$: $I = \int_0^m (3x^2 - 2x) dx = (x^3 - x^2) \Big|_0^m = m^3 - m^2 = m - 10$.

$\Rightarrow m^3 - m^2 - m + 10 = 0 \Leftrightarrow m = -2$ (thỏa mãn).

+) Nếu $0 \leq m < \frac{2}{3}$: $I = -\int_0^m (3x^2 - 2x) dx = -(x^3 - x^2) \Big|_0^m = -m^3 + m^2 = m - 10$.

$\Rightarrow m^3 - m^2 + m - 10 = 0 \Leftrightarrow m \approx 2,36$ (loại).

+) Nếu $m \geq \frac{2}{3}$: $I = -\int_0^{\frac{2}{3}} (3x^2 - 2x) dx + \int_{\frac{2}{3}}^m (3x^2 - 2x) dx = \frac{4}{27} + (x^3 - x^2) \Big|_{\frac{2}{3}}^m$

$= m^3 - m^2 + \frac{8}{27} = m - 10 \Rightarrow m^3 - m^2 - m + \frac{278}{27} = 0 \Leftrightarrow m \approx -2,02$ (loại).

Vậy có 1 giá trị thực của tham số m thỏa mãn bài toán.

Câu 39. (Sở Hà Tĩnh - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$2021f(x) - f(-x) = x \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ bằng

A. $\frac{1}{1010}$.

B. $\frac{2}{2019}$.

C. $\frac{1}{2020}$.

D. $\frac{3}{2022}$.

Lời giải

Chọn A

Vì $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $2021f(x) - f(-x) = x \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$ (1) nên ta cũng có

$2021f(-x) - f(x) = (-x) \sin(-x), \forall x \in \mathbb{R}$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} 2021f(x) - f(-x) = x \sin x \\ -f(x) + 2021f(-x) = x \sin x \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2020} x \sin x$

$I = \frac{1}{2020} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = \frac{1}{2020} \left(-x \cos x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \right) = \frac{1}{2020} \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1010}$.

Câu 40. (Sở Yên Bái - 2021) Biết $\int_0^2 \frac{x+5}{x^2+4x+3} dx = a \ln 5 + b \ln 3$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $P = a.b$.

A. $P = -3$.

B. $P = -6$.

C. $P = 6$.

D. $P = 3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_0^2 \frac{x+5}{x^2+4x+3} dx = \int_0^2 \frac{2(x+3) - (x+1)}{(x+1)(x+3)} dx = 2 \int_0^2 \frac{2}{x+1} dx - \int_0^2 \frac{1}{x+3} dx = 2 \ln(x+1) \Big|_0^2 - \ln(x+3) \Big|_0^2$

$= 2 \ln 3 - \ln 5 + \ln 3 = -\ln 5 + 3 \ln 3$

Khi đó $a = -1; b = 3 \Rightarrow P = a.b = -3$.

Câu 41. (Sở Yên Bái - 2021) Biết a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+x\sqrt{x+1}}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - c. \text{ Tính giá trị biểu thức } P = a + b + c.$$

A. $P = 18$.

B. $P = 46$.

C. $P = 24$.

D. $P = 12$.

Lời giải

Chọn B

$$\int_1^2 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+x\sqrt{x+1}}} dx = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = \int_1^2 \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})^2} dx$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x+1} + \sqrt{x} \Rightarrow dt = \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx \Leftrightarrow 2dt = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}} dx$$

$$\text{Khi đó } I = \int_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \frac{2}{t^2} dt = \left(\frac{-2}{t} \right) \Big|_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = -2\sqrt{3} + 4\sqrt{2} - 2 = \sqrt{32} - \sqrt{12} - 2$$

$$\text{Do đó } a = 32, b = 12, c = 2 \Rightarrow P = a + b + c = 32 + 12 + 2 = 46.$$

Câu 42. (Sở Yên Bái - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục và là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$I = \int_0^3 f(x) dx = 6. \text{ Tính tích phân } J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(3 \sin x) dx.$$

A. $J = -4$.

B. $J = 4$.

C. $J = 0$.

D. $J = 6$.

Lời giải

Chọn B

$$J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(3 \sin x) dx. \text{ Đặt } t = 3 \sin x \Rightarrow dt = 3 \cos x dx.$$

Đổi cận:

$$+ x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow t = -3$$

$$+ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 3.$$

$$J = \int_{-3}^3 \frac{f(t)}{3} dt = \frac{2}{3} \int_0^3 f(t) dt = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4.$$

Câu 43. (THPT Nguyễn Công Trứ - Hà Tĩnh - 2021) Biết $\int_{\ln 3}^{\ln 6} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3} = 3 \ln a - \ln b$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $P = ab$.

A. 20.

B. -10.

C. 15.

D. 10.

Lời giải

Chọn D

$$\diamond \text{ Có } \int_{\ln 3}^{\ln 6} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3} = \int_{\ln 3}^{\ln 6} \frac{e^x dx}{(e^x)^2 + 2 - 3e^x} = \int_{\ln 3}^{\ln 6} \frac{e^x dx}{(e^x - 2)(e^x - 1)} = \int_{\ln 3}^{\ln 6} e^x \left[\frac{1}{(e^x - 2)} - \frac{1}{(e^x - 1)} \right] dx$$

$$\diamond \int_{\ln 3}^{\ln 6} \left[\frac{e^x}{(e^x - 2)} - \frac{e^x}{(e^x - 1)} \right] dx = \ln \left| \frac{e^x - 2}{(e^x - 1)} \right| \Big|_{\ln 3}^{\ln 6} = \ln \frac{8}{5} = 3 \ln 2 - \ln 5 \Rightarrow a = 2, b = 5$$

$$\text{Vậy } P = ab = 10$$

Câu 44. (THPT Thanh Chương 1- Nghệ An - 2021) Biết rằng

, với ;

- ; là các số hữu tỷ. Giá trị của bằng:
- A. . B. . C. . D. .

Lời giải

Chọn A

Xét

Đặt

Với

Do đó ; ; . Khi đó .

Câu 45. (THPT Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn

$f(x^2 + 1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}} = \frac{\ln x}{x}$. Biết $\int_1^{17} f(x)dx = a \ln 4 - b$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Giá trị của $a + 2b$ bằng

- A. 16. B. 12. C. 8. D. 20.

Lời giải

Chọn D

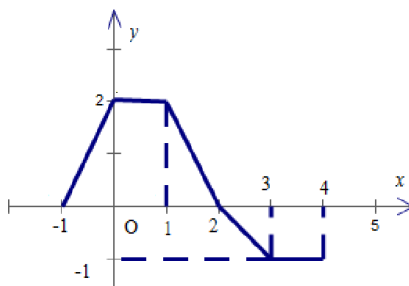
Ta có: $f(x^2 + 1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}} = \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow 2xf(x^2 + 1) + \frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = 2\ln x$

$$\Leftrightarrow \int_1^4 2xf(x^2 + 1)dx + \int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}dx = 2 \int_1^4 \ln x dx \Leftrightarrow \int_2^{17} f(u)du + \int_1^2 f(v)dv = 2(x \ln x - x) \Big|_1^4$$

$$\Leftrightarrow \int_1^{17} f(x)dx = 8 \ln 4 - 6.$$

Vậy $a + 2b = 8 + 2.6 = 20$.

Câu 46. (THPT Lương Thế Vinh - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ với $-1 \leq x \leq 4$ có đồ thị các đoạn thẳng như hình bên.

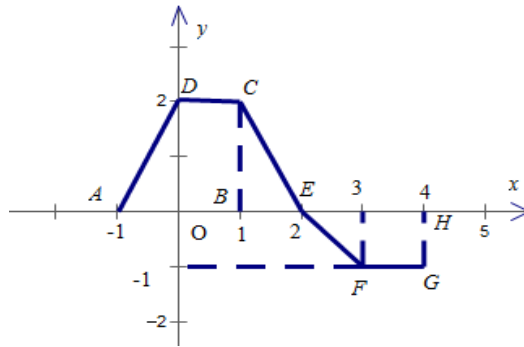


Tích phân $I = \int_{-1}^4 f(x)dx$ bằng

- A. 4. B. 1. C. 5,5. D. 2,5.

Lời giải

Chọn D



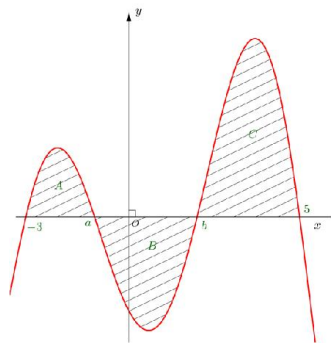
Ta có: $I = \int_{-1}^4 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx$.

Trong đó: $\int_{-1}^1 f(x) dx = S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (1+2) \cdot 2 = 3$.

$\int_1^2 f(x) dx = S_{BCE} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$; $\int_2^4 f(x) dx = -S_{EFGH} = -\frac{1}{2} \cdot (1+2) \cdot 1 = -\frac{3}{2}$.

Vậy $I = \int_{-1}^4 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = 3 + 1 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$.

Câu 47. (THPT Hoàng Hoa Thám - Đà Nẵng - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị trên $[-3; 5]$ như hình bên.



Biết các miền A, B, C có diện tích lần lượt là $S_A = 188, S_B = \frac{1377}{4}, S_C = \frac{2673}{4}$. Khi đó

$\int_{-3}^5 [f(x) + 1] dx$ bằng

A. 520.

B. $\frac{2417}{2}$.

C. -504.

D. $\frac{2401}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \int_{-3}^5 [f(x) + 1] dx &= \int_{-3}^5 f(x) dx + \int_{-3}^5 1 dx = \int_{-3}^a f(x) dx + \int_a^b f(x) dx + \int_b^5 f(x) dx + 8 = S_A - S_B + S_C + 8 \\ &= 188 - \frac{1377}{4} + \frac{2673}{4} + 8 = 520 \end{aligned}$$

Câu 48. (THPT Đào Duy Từ - Hà Nội - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$. Biết $\frac{1}{x^2}$ là một

nguyên hàm của hàm số $y = f'(x) \ln x$ và $f(2) = \frac{1}{\ln 2}$. Khi đó, $\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx$ bằng

A. $-\frac{7}{4}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{7}{4}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = \frac{1}{x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \ln x \end{cases} \text{ ta có}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx &= \ln x \cdot f(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 f'(x) \cdot \ln x dx = \ln 2 \cdot f(2) - \ln 1 \cdot f(1) - \frac{1}{x^2} \Big|_1^2 \\ &= \ln 2 \cdot \frac{1}{\ln 2} - \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

Câu 49. (THPT Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2021) Cho tích phân $\int_1^3 xf(x)dx = 2$. Tính tích phân

$$I = \int_0^2 x^2 f(\sqrt{x^3+1}) dx ?$$

- A. 3. B. $\frac{2}{3}$. C. 1. **D. $\frac{4}{3}$.**

Lời giải

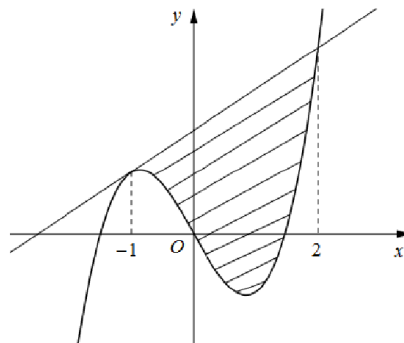
Chọn D

$$\diamond \text{ Đặt } t = \sqrt{x^3+1} \Leftrightarrow t^2 = x^3+1 \Rightarrow 2t dt = 3x^2 dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{2t}{3} dt.$$

$$\text{Đổi cận: } x=0 \Rightarrow t=1; x=2 \Rightarrow t=3.$$

$$\diamond \text{ Khi đó } I = \int_1^3 \frac{2t}{3} f(t) dt = \frac{2}{3} \int_1^3 t f(t) dt = \frac{4}{3}.$$

Câu 50. (THPT Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2021) Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ có đồ thị (C) . Biết rằng tiếp tuyến d của (C) tại điểm có hoành độ -1 cắt (C) tại điểm B có hoành độ bằng 2 (xem hình vẽ). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi d và (C) (phần gạch chéo trong hình) bằng



- A. $\frac{25}{4}$. B. $\frac{13}{2}$. **C. $\frac{27}{4}$.** D. $\frac{11}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\diamond \text{ Giả sử } (C): y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \text{ và } d: y = g(x)$$

$$\text{Khi đó phương trình hoành độ giao điểm của } d \text{ và } (C) \text{ là: } f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$$

$\diamond$ Dễ thấy đa thức $f(x) - g(x)$ là đa thức bậc ba có hệ số lũy thừa lớn nhất bằng 1 và có nghiệm kép $x = -1$ và nghiệm đơn $x = 2$. Do đó $f(x) - g(x) = (x+1)^2(x-2)$.

♦ Diện tích hình phẳng là $S = \int_{-1}^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-1}^2 (g(x) - f(x)) dx = \int_{-1}^2 -(x+1)^2(x-2) dx = \frac{27}{4}$.

- Câu 51. (THPT Chu Văn An - Thái Nguyên - 2021)** Ông An có một mảnh vườn hình Elip có độ dài trục lớn bằng $16m$ và độ dài trục bé bằng $10m$. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng $8m$ và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng. Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/ m^2 . Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn.)
A. 7.826.000 đồng. **B.** 7.862.000 đồng. **C.** 7.128.000 đồng. **D.** 7.653.000 đồng.

Lời giải

Chọn D

Giả sử elip có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > 0, b > 0$.

Theo đề bài, ta có $2a = 16 \Rightarrow a = 8$ và $2b = 10 \Rightarrow b = 5$.

Vậy phương trình của elip: $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{8}\sqrt{64-x^2} (E_1) \\ y = \frac{5}{8}\sqrt{64-x^2} (E_2) \end{cases}$.

Khi đó dải vườn được giới hạn bởi các đường $(E_1), (E_2), x = 4; x = -4$ và diện tích của dải vườn là

$$S = 2 \int_{-4}^4 \frac{5}{8} \sqrt{64-x^2} dx = \frac{5}{2} \int_0^4 \sqrt{64-x^2} dx.$$

Tính S bằng cách đổi biến $x = 8 \sin t$, ta được $S = 80 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$

Vậy số tiền $T = 80 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \cdot 100000 = 7652891,82$. Vậy chọn **D**.

- Câu 52. (THPT Chu Văn An - Thái Nguyên - 2021)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$. Biết $f(1) = 1$ và $f(x) = xf'(x) + \ln x; \forall x \in (0; +\infty)$. Giá trị của $f(e)$ bằng:

- A.** 1. **B.** 2. **C.** e . **D.** $\frac{1}{e}$.

Lời giải

Chọn B

$$f(x) = xf'(x) + \ln x; \forall x \in (0; +\infty).$$

Chia 2 vế cho $-\frac{1}{x^2}$ ta có:

$$\frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2} \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = \frac{-\ln x}{x^2} \Rightarrow \int_1^e \left(\frac{f(x)}{x} \right)' dx = \int_1^e -\frac{\ln x}{x^2} dx$$

Suy ra $\frac{f(e)}{e} - f(1) = \int_1^e -\frac{\ln x}{x^2} dx$. Bấm máy tích phân và thay $f(1) = 1$; ta tính được $f(e) = 2$.

Vậy chọn **B**.

- Câu 53. (THPT Chu Văn An - Thái Nguyên - 2021)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 4]$ và thỏa

mãn $f(x) = \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x}$. Tính

$$I = \int_3^4 f(x) dx ?$$

- A.** $S = 2 \ln^2 2$. **B.** $S = \ln^2 2$. **C.** $S = 2 \ln 2$ **D.** $S = 3 + 2 \ln^2 2$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int_1^4 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx$$

$$\Rightarrow I = \int_1^4 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx = \int_1^4 \left(\frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x} \right) dx - \int_1^3 f(x) dx$$

$$\text{Đặt } 2\sqrt{x}-1=t \Rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Đổi cận

$$x=1 \Rightarrow t=1$$

$$x=4 \Rightarrow t=3$$

$$I = \int_1^3 f(t) dt + \frac{1}{2} (\ln x)^2 \Big|_1^4 - \int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx + \frac{1}{2} (\ln x)^2 \Big|_1^4 - \int_1^3 f(x) dx = 2 \ln^2 2.$$

Câu 54. (THPT Ba Đình - Thanh Hóa - 2021) Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6} dx = a \ln \frac{4}{c} + b$, với

$a, b \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{N}^*$. Tính tổng $S = a + b + c$.

A. $S = 1$.

B. $S = 0$.

C. $S = 4$.

D. $S = 3$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Xét tích phân } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6} dx.$$

$$\text{Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx.$$

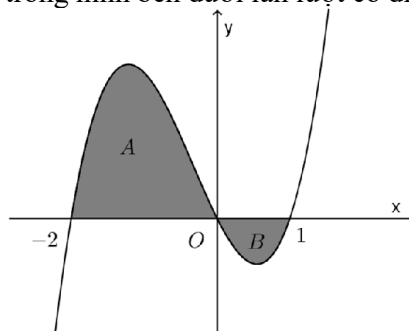
Đổi cận:

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	0	1

$$\text{Ta có: } I = \int_0^1 \frac{1}{t^2 - 5t + 6} dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2} \right) dt = \ln \left| \frac{t-3}{t-2} \right| \Big|_0^1 = \ln \frac{4}{3}.$$

$$\text{Vậy } a=1, b=0, c=3 \Rightarrow S = a + b + c = 4.$$

Câu 55. (THPT Triệu Sơn - Thanh Hóa - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ và gọi A ; B là hai hình phẳng được gạch trong hình bên dưới lần lượt có diện tích bằng 14 và 5.



$$\text{Giá trị của } I = \int_{-1}^0 f(3x+1) dx \text{ bằng:}$$

A. 9.

B. $\frac{19}{3}$.

C. 27.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét } I = \int_{-1}^0 f(3x+1) dx$$

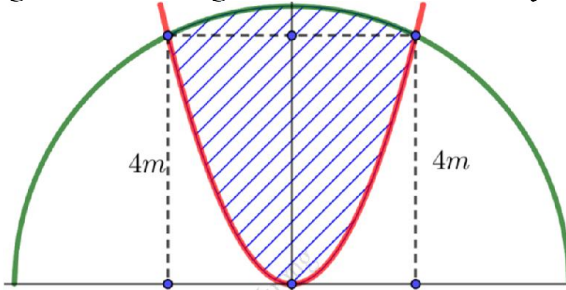
$$\text{Đặt } 3x+1=t \Rightarrow dx = \frac{1}{3} dt$$

$$\text{Với } x=-1 \Rightarrow t=-2$$

$$x=0 \Rightarrow t=1$$

$$\Rightarrow I = \int_{-2}^1 f(t) \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int_{-2}^1 f(x) dx = \frac{1}{3} \left[\int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx \right] = \frac{1}{3} (S_A - S_B) = 3.$$

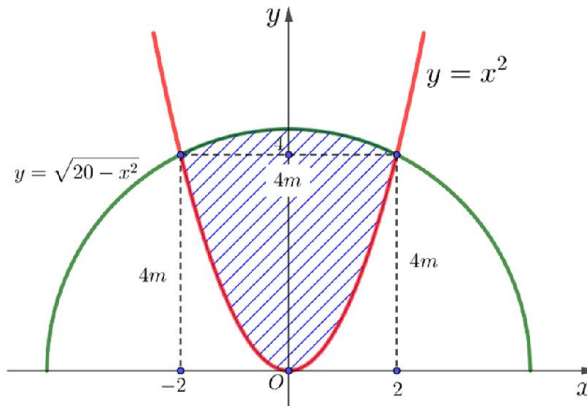
Câu 56. (THPT Triệu Sơn - Thanh Hóa - 2021) Một khuôn viên dạng nửa hình tròn, trên đó người thiết kế phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm và có trục đối xứng vuông góc với đường kính của nửa hình tròn, hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô màu) và cách nhau một khoảng bằng 4m. Phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ, chi phí để trồng hoa và cỏ Nhật Bản tương ứng là 150.000 đồng/m² và 100.000 đồng/m². Hỏi số tiền cần để trồng hoa và trồng cỏ Nhật Bản trong khuôn viên đó gần nhất với số nào sau đây?



A. 3.739.000 (đồng). **B.** 1.948.000 (đồng). **C.** 3.926.000 (đồng). **D.** 4.115.000 (đồng).

Lời giải**Chọn A**

Kết hợp vào hệ trục tọa độ, ta được:



Gọi parabol là $(P): y = ax^2$. Do $F(2;4) \in (P)$ nên $(P): y = x^2$.

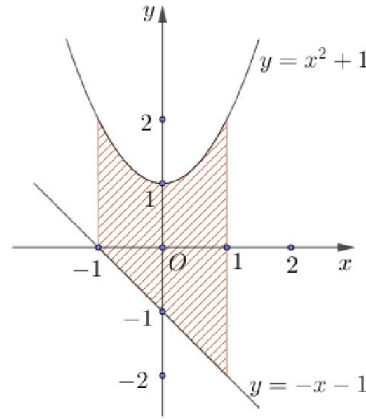
Gọi đường tròn có tâm ở gốc tọa độ là $(C): x^2 + y^2 = R^2$. Do $F(2;4) \in (C)$ nên nửa đường tròn trên là $y = \sqrt{20 - x^2}$.

$$\text{Đặt } S_1 \text{ là diện tích phần tô đậm. Khi đó: } S_1 = 2 \cdot \int_0^2 (\sqrt{20 - x^2} - x^2) dx = 20 \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + \frac{8}{3}.$$

$$\text{Đặt } S_2 \text{ là diện tích phần không tô đậm. Khi đó: } S_2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot R^2 - S_1 = 10\pi - 20 \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) - \frac{8}{3}.$$

Vậy: Số tiền cần để trồng hoa và cỏ Nhật Bản là: $T = 150000 \cdot S_1 + 100000 \cdot S_2 \approx 3738574$ (đồng).

Câu 57. (THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2021) Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = x^2 + 1$; $y = -x - 1$ và hai đường thẳng $x = -1$; $x = 1$.



Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) quanh trục Ox bằng

A. $\frac{176\pi}{15}$.

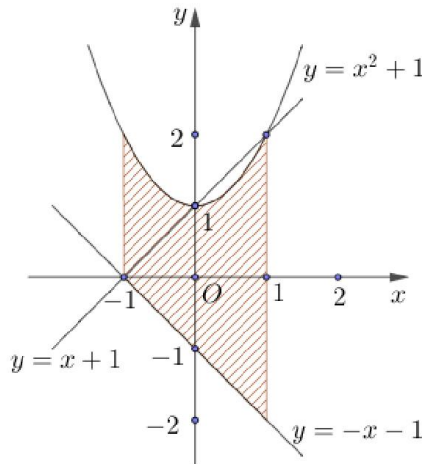
B. $\frac{14\pi}{3}$.

C. $\frac{21\pi}{5}$.

D. $\frac{16\pi}{15}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi $y = x^2 + 1$, $y = 0$; $x = -1$, $x = 0$. Khi quay (H_1) quanh trục Ox thì khối tròn xoay được tạo thành có thể tích $V_1 = \pi \int_{-1}^0 (x^2 + 1)^2 dx = \frac{28\pi}{15}$.

Gọi (H_2) là hình phẳng được giới hạn bởi $y = -x - 1$, $y = 0$; $x = 0$, $x = 1$. Khi quay (H_2) quanh trục Ox thì khối tròn xoay được tạo thành có thể tích $V_2 = \pi \int_0^1 (-x - 1)^2 dx = \frac{7\pi}{3}$.

Vậy thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) quanh trục Ox là

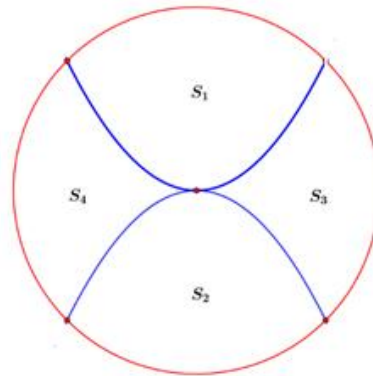
$$V = V_1 + V_2 = \frac{21\pi}{5}.$$

MỨC ĐỘ VẬN DỤNG CAO

Câu 1. (Liên trường Quỳnh Lưu - Hoàng Mai - Nghệ An - 2021) Giả sử hàm số f có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(2) = 2$ và $f(2-x) + x^2 f''(x) = 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị tích phân $\int_0^2 x f'(x) dx$ bằng:

- A. 0. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. 1.

Câu 2. (Liên trường huyện Quảng Xương - Thanh Hóa - 2021) Sân trường có một bồn hoa hình tròn tâm O . Một nhóm học sinh lớp 12 được giao thiết kế bồn hoa, nhóm này định bồn hoa thành bốn phần bởi 2 đường parabol có cùng đỉnh O và đối xứng với nhau qua tâm O (như hình vẽ).



Hai đường parabol cắt đường tròn tại 4 điểm A, B, C, D tạo thành một hình vuông có cạnh bằng $4m$. Phần diện tích S_1, S_2 dùng để trồng hoa, phần diện tích S_3, S_4 dùng để trồng cỏ. Biết kinh phí trồng hoa là 150.000 đồng/ m^2 , kinh phí trồng cỏ là 100.000 đồng/ m^2 . Hỏi nhà trường cần bao nhiêu tiền để trồng bồn hoa đó? (số tiền làm tròn đến hàng chục nghìn)

- A. 3.270.000 đồng B. 5.790.000 đồng. C. 3.000.000 đồng. D 6.060.000 đồng.

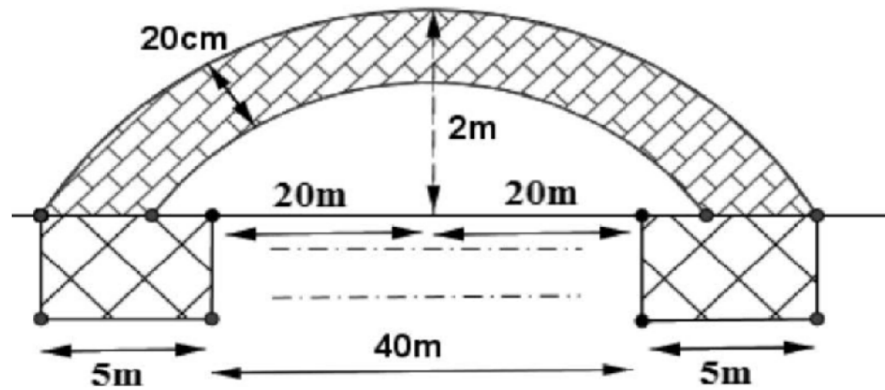
Câu 3. (Chuyên Thoại Ngọc Hầu - An Giang - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $f(0) = \sqrt{3}$ và $f(x) \cdot f'(x) = \cos x \sqrt{1 + f^2(x)}$, $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$.

- A. $m = \frac{\sqrt{5}}{2}, M = \sqrt{3}$. B. $m = \frac{5}{2}, M = 3$.
C. $m = \sqrt{3}, M = 2\sqrt{2}$. D. $m = \frac{\sqrt{21}}{2}, M = 2\sqrt{2}$.

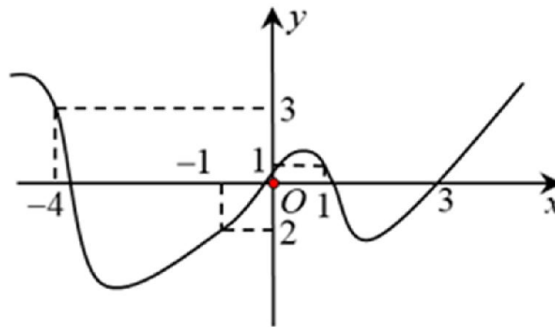
Câu 4. (Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2021) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 0; f'(1) = 1$ và $10f(x) - 5xf'(x) + x^2 f''(x) = 0$ với mọi $x \in [0; 1]$. Khi đó tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

- A. $-\frac{1}{15}$. B. $-\frac{2}{5}$. C. $-\frac{1}{10}$. D. $-\frac{1}{17}$.

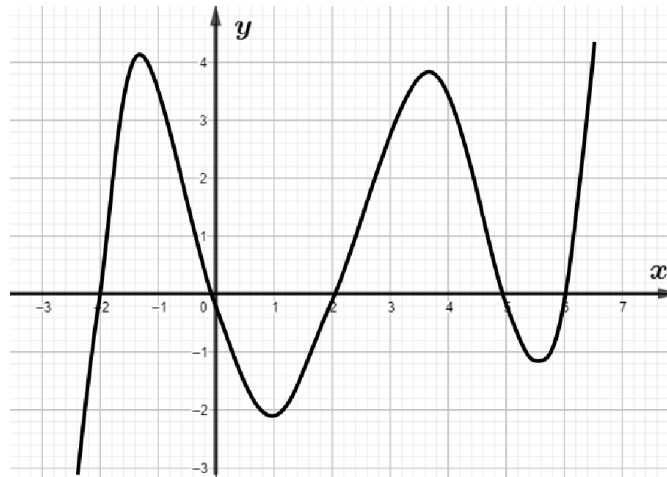
- Câu 5. (Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - 2021)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0) = 3$ và $f(x) + f(2-x) = x^2 - 2x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Tích phân $\int_0^2 x.f'(x)dx$ bằng
- A. $\frac{-10}{3}$. B. $\frac{-5}{3}$. C. $\frac{-11}{3}$. D. $\frac{-7}{3}$.
- Câu 6. (Chuyên KHTN - 2021)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $xf'(x) + (x+1)f(x) = e^{-x}$ với mọi x . Tính $f'(0)$.
- A. 1. B. -1. C. e . D. $\frac{1}{e}$.
- Câu 7. (Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - 2021)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;3]$ thỏa mãn $f(1) = 2$ và $f(x) - (x+1)f'(x) = 2xf^2(x), \forall x \in [1;3]$. Giá trị của $\int_1^3 f(x)dx$ bằng
- A. $1 + \ln 3$. B. $\frac{2}{3} - \ln 3$. C. $\frac{2}{3} + \ln 3$. D. $1 - \ln 3$.
- Câu 8. (Chuyên Quốc Học Huế - 2021)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f'(x) = f(x) + e^x \cdot \cos 2021x$ và $f(0) = 0$. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm có hoành độ thuộc đoạn $[-1;1]$?
- A. 3 B. 1 C. 1287 D. 4043
- Câu 9. (Chuyên Quang Trung - Bình Phước - 2021)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $xf'(x) = e^x - 1, \forall x \in \mathbb{R}, f(1) = 0$. Giá trị $\int_0^1 xf'(x)dx$ bằng
- A. $-\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.
- Câu 10. (Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - 2021)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $(-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \setminus \{0\}$, thỏa mãn $f(1) = 0$ và $f'(x) + x(e^{f(x)} + 2) + \frac{x}{e^{f(x)}} = 0$. Giá trị của $f\left(\frac{1}{2}\right)$ bằng
- A. $\ln 7$. B. $\ln 5$. C. $\ln 6$. D. $\ln 3$.
- Câu 11. (Chuyên ĐHSPT Hà Nội - 2021)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f^3(x) + 3f(x) = \sin(2x^3 - 3x^2 + x), \forall x \in \mathbb{R}$. Tích phân $I = \int_0^1 f(x)dx$ thuộc khoảng nào?
- A. $(-3; -2)$. B. $(-2; -1)$. C. $(-1; 1)$. D. $(1; 2)$.
- Câu 12. (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An - 2021)** Giả sử $f(x)$ là hàm có đạo hàm liên tục trên $(0; \pi)$ và $f'(x) \sin x = x + f(x) \cos x, \forall x \in (0; \pi)$. Biết $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{12}(a + b \ln 2 + c\pi\sqrt{3})$, với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a + b + c$ bằng
- A. -1. B. 1. C. 11. D. -11.
- Câu 13. (THPT Quế Võ 1 - Bắc Ninh - 2021)** Thành phố định xây cây cầu bắc ngang con sông dài 500m, biết rằng người ta định xây cầu có 10 nhịp cầu hình dạng parabol, mỗi nhịp cách nhau 40m, biết 2 bên đầu cầu và giữa mỗi nhịp nối người ta xây 1 chân trụ rộng 5m. Bề dày và bề rộng của nhịp cầu không đòi là 20cm (mặt cắt của một nhịp cầu được mô phỏng như hình vẽ). Hỏi lượng bê tông để xây các nhịp cầu là bao nhiêu (làm tròn đến hàng đơn vị).

A. $50m^3$.B. $20m^3$.C. $100m^3$.D. $40m^3$.

Câu 14. (THPT Quốc Oai - Hà Nội - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(3x) - 3x$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng

A. $f(-3) + 3$.B. $f(1) - 1$.C. $f(-1) + 3$.D. $f(3) - 3$.

Câu 15. (THPT Quốc Oai - Hà Nội - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số nghiệm thuộc đoạn $[-2; 6]$ của phương trình $f(x) = f(0)$ là

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Câu 16. (THPT Quảng Xương 1 - Thanh Hóa - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm xác định trên $(0; +\infty)$. Biết rằng $f(x) > 0$ với mọi $x \in (0; +\infty)$ thỏa mãn $f(x)(\ln f(x) - 1) + x(f'(x) - 2f(x)) = 0$ và $\ln(f(2)) - \ln(f(1)) = 1$. Giá trị của tích phân $\int_1^2 xf(x)dx$ nằm trong khoảng nào dưới đây:

A. (0;6).

B. (6;12).

C. (12;18).

D. (18;24).

Câu 17. (THPT Phan Đình Phùng - Quảng Bình - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Giá trị của tích phân

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f'(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{\pi}{4}$.

C. $-\frac{1}{4}$.

D. $-\frac{\pi}{4}$.

Câu 18. (THPT Nguyễn Tất Thành - Hà Nội - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + f(1-x) = x^2(1-x)^2; \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$.

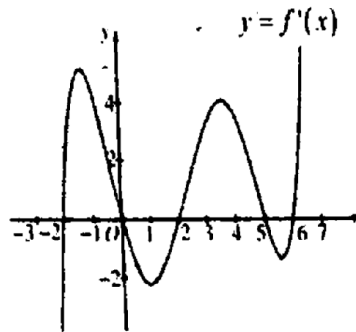
A. $\frac{1}{30}$.

B. $\frac{1}{60}$.

C. $\frac{1}{45}$.

D. $\frac{1}{15}$.

Câu 19. (THPT Nguyễn Đức Cảnh - Thái Bình - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên



Đặt $M = \max_{[-2;6]} f(x)$; $m = \min_{[-2;6]} f(x)$. Tính giá trị $S = M + m$?

A. $S = f(0) + f(2)$.

B. $S = f(5) + f(6)$.

C. $S = f(5) + f(-2)$.

D. $S = f(0) + f(-2)$.

Câu 20. (THPT Hậu Lộc 4 - Thanh Hóa - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;3]$, biết $f(1) = 1$ và $f(x) \cdot f'(x) + x - 4 = (x-2)f'(x) + f(x)$ với $\forall x \in [1;3]$. Biết

$\int_1^3 f(x) dx = -\frac{a}{b} + 2\sqrt{c}$ (với a, b, c là các số nguyên dương, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Khi đó, tổng $a + b + c$ bằng

A. 10.

B. 19.

C. 17.

D. 53.

Câu 21. (THPT Lê Lợi - Thanh Hóa - 2021) Biết rằng $y = f(x)$ là hàm số liên tục và khác $\pm x$ với mọi $x \in (0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 2; f(2) = 6$. Có tích phân $\int_1^2 \frac{xf'(x) - f(x)}{f^2(x) - x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{a}{b}$; trong đó

a, b là các số nguyên dương sao cho phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Giá trị của biểu thức $a^2 + b^3$ bằng

A. 5.

B. 10.

C. 17.

D. 34.

Câu 22. (Sở Lào Cai - 2021) Hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị (C_1) đi qua điểm $A(1;0)$; hàm số bậc hai $y = g(x)$ có đồ thị (C_2) đi qua điểm $B(1;-4)$. $(C_1), (C_2)$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-1; 2; 3$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $(C_1), (C_2)$?

A. $\frac{115}{3}$.

B. $\frac{32}{3}$.

C. $\frac{71}{6}$.

D. $\frac{112}{3}$.

Câu 23. (Sở Tuyên Quang - 2021) Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2$ và $f'(x) = \frac{4\cos 2x}{\sin^2 2x}$, $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Khi đó $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$ bằng

A. $\frac{\pi}{3} - \ln 2$.

B. $-\ln 3$.

C. $\frac{\pi}{6}$.

D. $\frac{\pi}{2} - \ln 3$.

Câu 24. (Sở Yên Bái - 2021) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1) = \frac{3}{5}$,

$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{4}{9}$ và $\int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{37}{180}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $-\frac{14}{15}$.

B. $\frac{1}{15}$.

C. $\frac{14}{15}$.

D. $-\frac{1}{15}$.

Câu 25. (THPT Nguyễn Công Trứ - Hà Tĩnh - 2021) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn

$[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 1$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 9$

và $\int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{1}{2}$. Tích phân $\int_0^1 xf(x) dx$ bằng

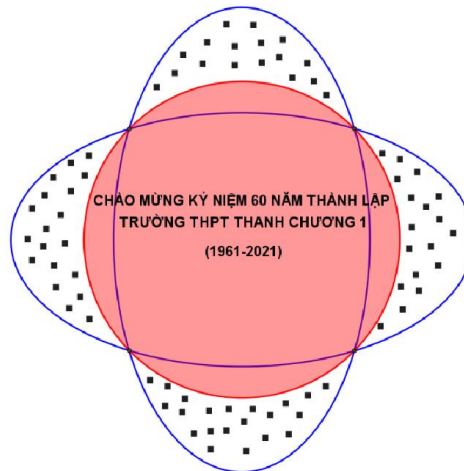
A. $\frac{6}{5}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{8}{7}$.

D. $\frac{5}{2}$.

Câu 26. (THPT Thanh Chương 1- Nghệ An - 2021) Hướng tới kỉ niệm 60 năm thành lập trường THPT Thanh Chương 1. Khối 12K57 thiết kế bồn hoa gồm hai Elip bằng nhau có độ dài trục lớn bằng 8m và độ dài trục nhỏ bằng 4m đặt chồng lên nhau sao cho trục lớn của Elip này trùng với trục nhỏ của Elip kia và ngược lại (như hình vẽ).



Phần diện tích nằm trong đường tròn đi qua 4 giao điểm của hai Elip dùng để trồng cỏ, phần diện tích bốn cánh hoa nằm giữa hình tròn và Elip dùng để trồng hoa. Biết kinh phí để trồng hoa là 300.000 đồng, kinh phí để trồng cỏ là 200.000 đồng. Tổng số tiền dùng để trồng hoa và trồng cỏ cho bồn hoa gần với số nào nhất trong các số sau:

A. 6.200.000 đồng.

B. 8.200.000 đồng.

C. 8.600.000 đồng.

D. 9.100.000 đồng.

Câu 27. (THPT Lương Thế Vinh - 2021) Cho a, b, c là các số thực và $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ thỏa mãn

$$f'(t) = f'(t+5) = 2 \text{ với } t \text{ là hằng số. Giá trị } \int_t^{t+5} f'(x) dx \text{ bằng}$$

- A. $-\frac{105}{2}$. B. $\frac{134}{3}$. C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{19}{4}$.

Câu 28. (THPT Hoàng Hoa Thám - Đà Nẵng - 2021) Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, biết $f(x) > 0, \forall x \in [1; 4]$ và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 4]$, thỏa mãn $f(1) = 1$ và

$$[2f(x) + xf'(x)]^2 = \frac{f(x)}{x} \text{ với mọi } x \in [1; 4]. \text{ Khi đó } \int_1^4 f(x) dx \text{ bằng}$$

- A. 1. B. $2 \ln 2$. C. $2 \ln 2 - 2$. D. -2 .

Câu 29. (THPT Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn

$$xf'(x) = f(x) + x^3 \ln x, \forall x > 0 \text{ và } f(1) = \frac{3}{4}. \text{ Tính } f(2)$$

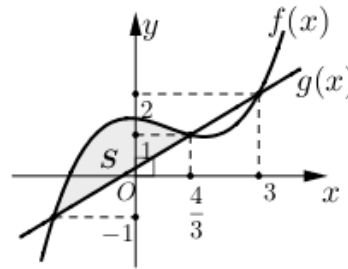
- A. $2 \ln 2 + 1$. B. $4 \ln 2 + 1$. C. $2 \ln 2$. D. $4 \ln 2$

Câu 30. (THPT Ba Đình - Thanh Hóa - 2021) Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $[0; 2]$. Biết $f(0) = 1$ và $f(x)f(2-x) = e^{2x^2-4x}$ với mọi $x \in [0; 2]$. Tính tích phân

$$I = \int_0^2 \frac{(x^3 - 3x^2)f'(x)}{f(x)} dx.$$

- A. $I = -\frac{32}{5}$. B. $I = -\frac{16}{3}$. C. $I = -\frac{16}{5}$. D. $I = -\frac{14}{3}$.

Câu 31. (Trung Tâm Thanh Trường - 2021) Cho $f(x), g(x)$ lần lượt là các hàm đa thức bậc ba và bậc nhất có đồ thị như hình vẽ.



Biết diện tích hình S (được tô màu) bằng $\frac{250}{81}$. Tính $\int_0^2 f(x) dx$.

- A. $\frac{7}{3}$. B. $\frac{38}{15}$. C. $\frac{8}{3}$. D. $\frac{34}{15}$.

Câu 32. (THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2021) Giả sử $\int_3^5 x^2 \ln(x+1) dx = \frac{a \ln 3 + b \ln 2}{3} - \frac{c}{9}$ với $a, b, c \in \mathbb{N}^*$.

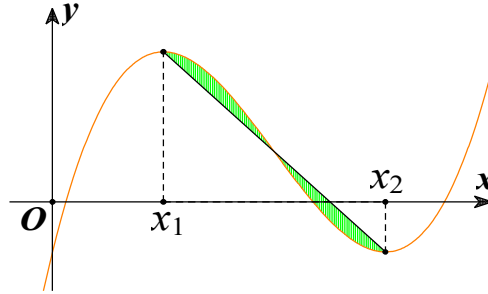
Giá trị của biểu thức $b+c-a$ bằng

- A. -2 . B. 24 . C. -4 . D. 4 .

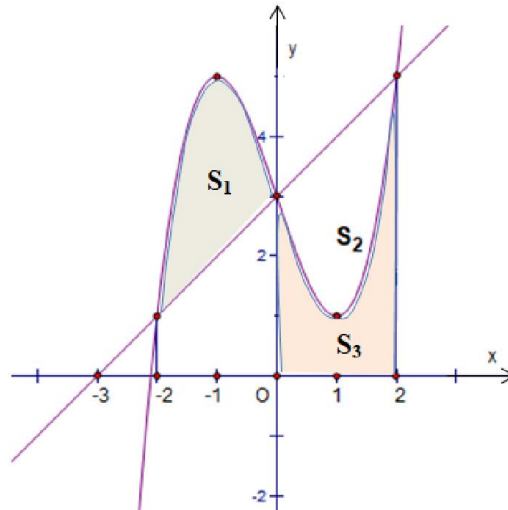
Câu 33. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} e^x + m & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x\sqrt{3+x^2} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tích phân $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$ bằng

- A. $I = e + 2\sqrt{3} - 22$. B. $I = e + 2\sqrt{3} + \frac{22}{3}$. C. $I = e - 2\sqrt{3} - \frac{22}{3}$. D. $I = e + 2\sqrt{3} - \frac{22}{3}$.

- Câu 34.** Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị (C) là đường cong trong hình bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = -3$. Gọi d là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị (C) . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và d (phần được tô đậm trong hình) bằng

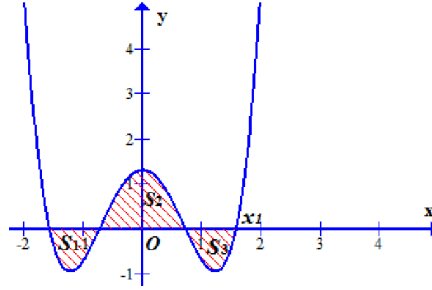


- A. 1. B. 2. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{1}{2}$.
- Câu 35.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 1, & x \geq 5 \\ 2x - 6, & x < 5 \end{cases}$. Tích phân $\int_0^{\ln 2} f(3e^x + 1) \cdot e^x dx$ bằng
- A. $\frac{77}{3}$. B. $\frac{77}{9}$. C. $\frac{68}{3}$. D. $\frac{77}{6}$.
- Câu 36.** Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và đường thẳng $d: g(x) = mx + n$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích của các phần giới hạn như hình bên. Nếu $S_1 = 4$ thì tỷ số $\frac{S_2}{S_3}$ bằng.



- A. $\frac{3}{2}$. B. 1. C. 2. D. $\frac{1}{2}$.
- Câu 37.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) = \begin{cases} x + m, & x \geq 0 \\ e^{2x}, & x < 0 \end{cases}$ (m là hằng số). Biết $\int_{-1}^2 f(x) dx = a + \frac{b}{e^2}$ trong đó a, b là các số hữu tỉ. Tính $a + b$.
- A. 4. B. 3. C. 0. D. 1.

Câu 38. Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + m$ có đồ thị (C_m) , với m là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ



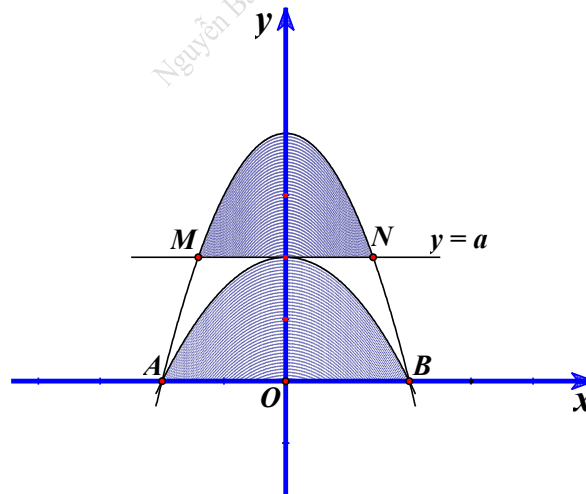
Gọi S_1, S_2, S_3 là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Giá trị của m để $S_1 + S_3 = S_2$ là

- A. $\frac{5}{4}$. B. $-\frac{5}{4}$. C. $\frac{5}{2}$. D. $-\frac{5}{2}$.

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x) = 1, y = g(x) = |x|$. Giá trị $I = \int_{-1}^2 \min\{f(x); g(x)\} dx$

- A. 1. B. $\frac{3}{2}$. C. 2. D. $\frac{5}{2}$.

Câu 40. Cho parabol $(P_1): y = -x^2 + 4$ cắt trục hoành tại hai điểm A, B và đường thẳng $d: y = a$ ($0 < a < 4$). Xét parabol (P_2) đi qua A, B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y = a$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d . S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành. Biết $S_1 = S_2$ (tham khảo hình vẽ bên).



Tính $T = a^3 - 8a^2 + 48a$.

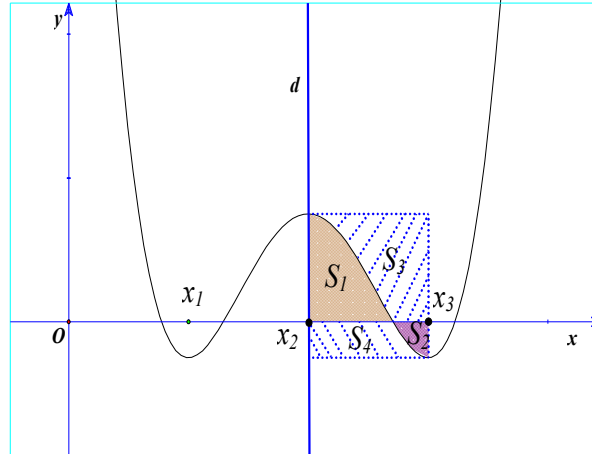
- A. $T = 99$. B. $T = 64$. C. $T = 32$. D. $T = 72$.

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 - m & (x \geq 0) \\ 2 \cos x - 3 & (x < 0) \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Giá trị $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f|2 \cos x - 1| \sin x dx$

- A. $-\frac{2}{3}$. B. 0. C. $\frac{1}{3}$. D. $-\frac{1}{3}$.

Câu 42. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Biết hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_3 = x_1 + 2, f(x_1) + f(x_3) + \frac{2}{3}f(x_2) = 0$ và (C) nhận đường

thẳng $d: x = x_2$ làm trục đối xứng. Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 là diện tích của các miền hình phẳng được đánh dấu như hình bên. Tỉ số $\frac{S_1 + S_2}{S_3 + S_4}$ gần kết quả nào nhất



0,55.

C. 0,65.

D. 0,70.

A. 0,60.

B.

Câu 43. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-4 & \text{khi } x \geq 4 \\ \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x & \text{khi } x < 4 \end{cases}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\sin^2 x + 3) \sin 2x dx$ bằng

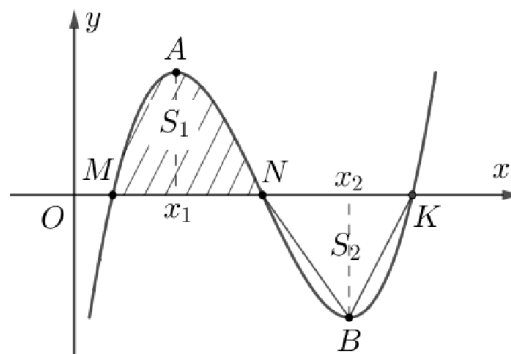
A. $\frac{28}{3}$.

B. 8.

C. $\frac{341}{48}$.

D. $\frac{341}{96}$.

Câu 44. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) trong hình bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa $f(x_1) + f(x_2) = 0$. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị (C); M, N, K là giao điểm của (C) với trục hoành; S là diện tích của hình phẳng được gạch trong hình, S_2 là diện tích tam giác NBK. Biết tứ giác MAKB nội tiếp đường tròn, khi đó tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



A. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

C. $\frac{5\sqrt{3}}{6}$.

D. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 45. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 2 & \text{khi } x \geq 0 \\ 3x^2 - x + 2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(3-4\cos x) \sin x dx$ bằng

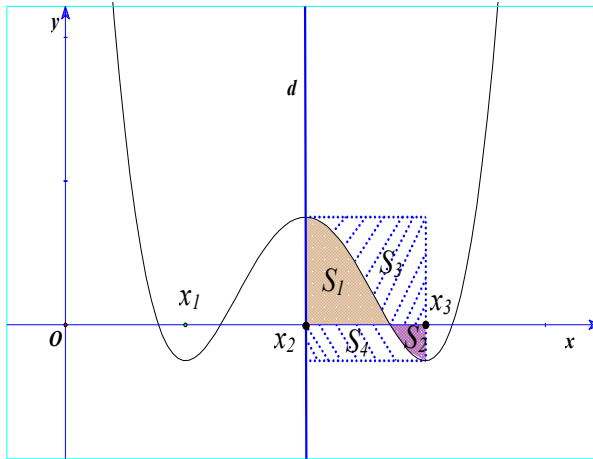
A. $\frac{37}{24}$.

B. $\frac{37}{6}$.

C. 6.

D. 12.

Câu 46. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Biết hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_3 = x_1 + 2$, $f(x_1) + f(x_3) + \frac{2}{3}f(x_2) = 0$ và (C) nhận đường thẳng $d: x = x_2$ làm trục đối xứng. Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 là diện tích của các miền hình phẳng được đánh dấu như hình bên. Tỉ số $\frac{S_1 + S_2}{S_3 + S_4}$ gần kết quả nào nhất



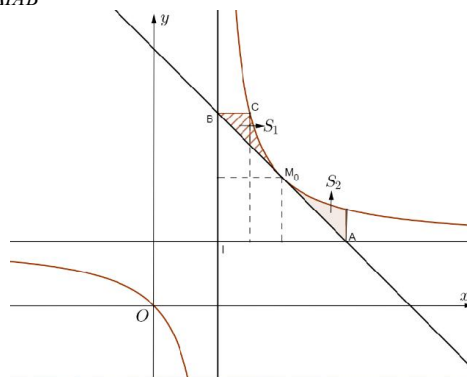
- A. 0,60. B. 0,55. C. 0,65. D. 0,70.

Câu 47. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{khi } x \geq 2 \\ x^3 - x^2 - 8x + 10 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Biết hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 2$. Tính

$$I = \int_0^4 f(x) dx$$

- A. 3. B. 0. C. -2. D. 4.

Câu 48. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị (C) . Gọi giao điểm của hai đường tiệm cận là I . Điểm $M_0(x_0; y_0)$ di động trên (C) , tiếp tuyến tại đó cắt hai tiệm cận lần lượt tại A, B và $S_{\triangle IAB} = 2$. Tìm giá trị IM_0^2 sao cho $\frac{S_1 + S_2}{S_{\triangle IAB}} = 1$ (với S_1, S_2 là 2 hình phẳng minh họa bên dưới)

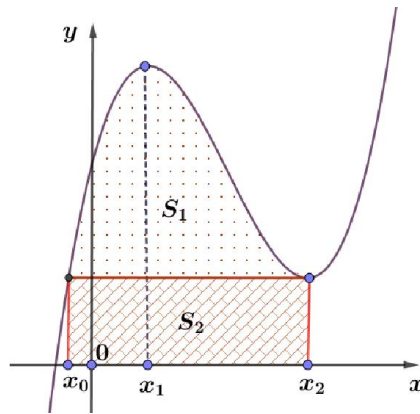


- A. 2. B. $\frac{41}{20}$. C. $\frac{169}{60}$. D. $\frac{189}{60}$.

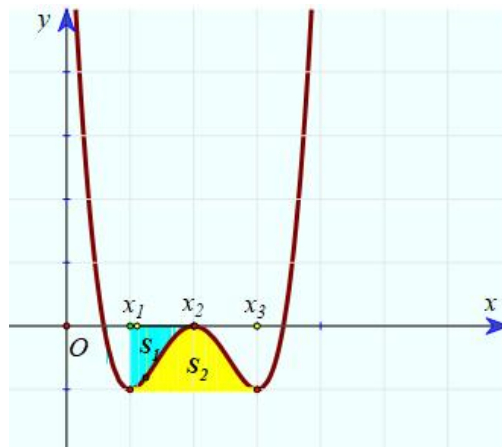
Câu 49. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{khi } x \leq 2 \\ x + 5 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$. Tính $I = \int_0^{\sqrt{e^4-1}} \frac{x}{x^2+1} \cdot f[\ln(x^2+1)] dx$.

- A. (-2;3). B. (3;-2). C. (2;-1). D. (-1;2).

- Câu 50.** Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên dưới. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hai điểm cực trị thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) - 3f(x_2) = 0$. Đường thẳng song song với trục Ox và qua điểm cực tiểu cắt đồ thị hàm số tại điểm thứ hai có hoành độ x_0 và $x_1 = x_0 + 1$. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ (S_1 và S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch ở hình bên dưới).



- A. $\frac{27}{8}$. B. $\frac{5}{8}$. C. $\frac{3}{8}$. D. $\frac{3}{5}$.
- Câu 51.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{khi } x \leq 0 \\ x^2+4x-2 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Tích phân $I = \int_0^{\pi} \sin 2x \cdot f(\cos x) dx$ bằng
- A. $I = \frac{9}{2}$. B. $I = -\frac{9}{2}$. C. $I = -\frac{7}{6}$. D. $I = \frac{7}{6}$.
- Câu 52.** Cho hàm số bậc bốn trùng phương $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại ba điểm x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$) thỏa mãn $x_1 + x_3 = 4$. Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



- A. $\frac{2}{5}$. B. $\frac{7}{16}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{7}{15}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.A	3.D	4.D	5.A	6.B	7.C	8.C	9.A	10.A
11.C	12.A	13.D	14.A	15.A	16.D	17.C	18.B	19.C	20.B
21.C	22.C	23.B	24.C	25.C	26.C	27.A	28.B	29.D	30.C
31.D	32.B	33.D	34.D	35.B	36.B	37.A	38.A	39.C	40.B
41.A	42.A	43.D	44.D	45.A	46.A	47.D	48.B	49.A	50.A
51.A	52.B								

MỨC ĐỘ VẬN DỤNG CAO

Câu 1. (Liên trường Quỳnh Lưu - Hoàng Mai - Nghệ An - 2021) Giả sử hàm số f có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(2) = 2$ và $f(2-x) + x^2 f''(x) = 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị tích phân $\int_0^2 x f'(x) dx$ bằng:

- A. 0. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(2-x) + x^2 f''(x) = 2x \Rightarrow f(2) = 0$

$$\text{Lại có: } \int_0^2 f(2-x) dx + \int_0^2 x^2 f''(x) dx = \int_0^2 2x dx = x^2 \Big|_0^2 = 4$$

$$\text{Xét } I_1 = \int_0^2 f(2-x) dx$$

$$\text{Đặt } 2-x=t \Rightarrow dx = -dt$$

$$\text{Với } x=0 \Rightarrow t=2$$

$$x=2 \Rightarrow t=0$$

$$\Rightarrow I_1 = -\int_2^0 f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt = \int_0^2 f(x) dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_1 = (xf(x)) \Big|_0^2 - \int_0^2 xf'(x) dx = f(2) - \int_0^2 xf'(x) dx = -\int_0^2 xf'(x) dx$$

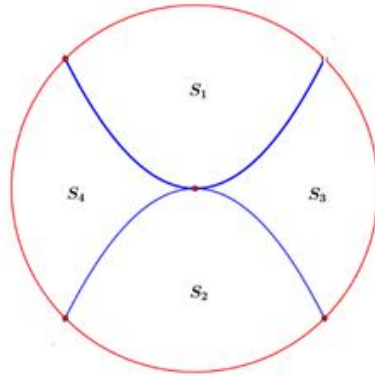
$$\text{Xét } I_2 = \int_0^2 x^2 f''(x) dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^2 \\ dv = f''(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = f'(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_2 = (x^2 f'(x)) \Big|_0^2 - \int_0^2 2xf'(x) dx = 4f'(2) - 2 \int_0^2 xf'(x) dx = 8 - 2 \int_0^2 xf'(x) dx$$

$$\text{Vậy } -\int_0^2 xf'(x)dx + 8 - 2\int_0^2 xf'(x)dx = 4 \Rightarrow \int_0^2 xf'(x)dx = \frac{4}{3}.$$

Câu 2. (Liên trường huyện Quảng Xương - Thanh Hóa - 2021) Sân trường có một bồn hoa hình tròn tâm O . Một nhóm học sinh lớp 12 được giao thiết kế bồn hoa, nhóm này định bồn hoa thành bốn phần bởi 2 đường parabol có cùng đỉnh O và đối xứng với nhau qua tâm O (như hình vẽ).

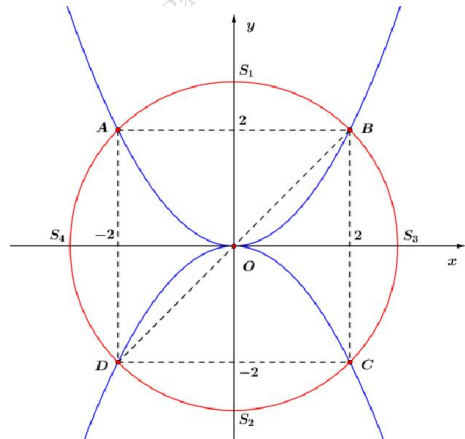


Hai đường parabol cắt đường tròn tại 4 điểm A, B, C, D tạo thành một hình vuông có cạnh bằng $4m$. Phần diện tích S_1, S_2 dùng để trồng hoa, phần diện tích S_3, S_4 dùng để trồng cỏ. Biết kinh phí trồng hoa là 150.000 đồng/ m^2 , kinh phí trồng cỏ là 100.000 đồng/ m^2 . Hỏi nhà trường cần bao nhiêu tiền để trồng bồn hoa đó? (số tiền làm tròn đến hàng chục nghìn)

A. 3.270.000 đồng **B.** 5.790.000 đồng. **C.** 3.000.000 đồng. **D.** 6.060.000 đồng.

Lời giải

Chọn A



♦ Ta có: vì $ABCD$ là hình vuông cạnh 4 nên $BD = BC\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$; $OB = 2\sqrt{2}$ và $A(-2; 2), B(2; 2)$

♦ Phương trình đường tròn tâm O có bán kính $OB = 2\sqrt{2}$ là $(C): x^2 + y^2 = 8 \Rightarrow y = \sqrt{8 - x^2}$

♦ Parabol đi qua hai điểm $A(-2; 2), B(2; 2)$ và đỉnh ngay gốc tọa độ nên suy ra $(P): y = \frac{x^2}{2}$

Từ đồ thị ta có được S_1 là diện tích giới hạn bởi hai đồ thị $y = \sqrt{8 - x^2}$ và $(P): y = \frac{x^2}{2}$ cùng với hai đường thẳng $x = -2; x = 2$

Từ đó suy ra $S_1 = \int_{-2}^2 \left(\sqrt{8 - x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \int_{-2}^2 \sqrt{8 - x^2} dx - \frac{8}{3}$; Đặt $x = 2\sqrt{2} \sin t \Rightarrow dx = 2\sqrt{2} \cos t dt$

$$\text{Suy ra } S_1 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{8-8\sin^2 t} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \cos t \, dt - \frac{8}{3} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 8\cos^2 t \, dt - \frac{8}{3} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 8\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right) dt - \frac{8}{3} = 2\pi + \frac{4}{3}$$

$$\text{Mặt khác: } S_1 = S_2; S_3 = S_4 \text{ nên suy ra } \begin{cases} S_1 + S_2 = 2S_1 = 2\left(2\pi + \frac{4}{3}\right) = 4\pi + \frac{8}{3} (m^2) \\ S_3 + S_4 = S_{(C)} - (S_1 + S_2) = 8\pi - 2\left(2\pi + \frac{4}{3}\right) = 4\pi - \frac{8}{3} (m^2) \end{cases}$$

$$\text{Vậy tổng số tiền để trồng bồn hoa là: } \left(4\pi + \frac{8}{3}\right) \cdot 150000 + \left(4\pi - \frac{8}{3}\right) \cdot 100000 = 3274926 \text{ đồng.}$$

Câu 3. (Chuyên Thoại Ngọc Hầu - An Giang - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $f(0) = \sqrt{3}$ và $f(x) \cdot f'(x) = \cos x \sqrt{1+f^2(x)}$, $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$.

A. $m = \frac{\sqrt{5}}{2}, M = \sqrt{3}$. **B.** $m = \frac{5}{2}, M = 3$.

C. $m = \sqrt{3}, M = 2\sqrt{2}$. **D.** $m = \frac{\sqrt{21}}{2}, M = 2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$f(x) \cdot f'(x) = \cos x \sqrt{1+f^2(x)} \Leftrightarrow \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \cos x$$

$$\Rightarrow \int \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} dx = \int \cos x dx = \sin x + C_1 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1+f^2(x)} \Rightarrow t^2 = 1+f^2(x) \Rightarrow t dt = f(x) \cdot f'(x) dx.$$

$$\text{Suy ra } \int \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} dx = \int \frac{t dt}{t} = \int dt = t + C_2 = \sqrt{1+f^2(x)} + C_2 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \sqrt{1+f^2(x)} = \sin x + C. \text{ Thay } x=0 \text{ vào ta có: } \sqrt{1+3} = C \Rightarrow C=2$$

$$\text{Hay } \sqrt{1+f^2(x)} = \sin x + 2.$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) = (\sin x + 2)^2 - 1 = \sin^2 x + 4\sin x + 3$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{\sin^2 x + 4\sin x + 3}$$

$$\text{Đặt } t = \sin x. \text{ Với } x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right].$$

$$\text{Ta đi xét hàm số } g(t) = \sqrt{t^2 + 4t + 3}, t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right].$$

$$g'(t) = \frac{t+2}{\sqrt{t^2 + 4t + 3}} > 0, \forall t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \text{ do đó } g(t) \text{ đồng biến trên } \left[\frac{1}{2}; 1\right].$$

$$\min_{\left[\frac{1}{2}; 1\right]} g(t) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{21}}{2} = \min_{\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = m$$

$$\max_{\left[\frac{1}{2}; 1\right]} g(t) = g(1) = 2\sqrt{2} = \max_{\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = M$$

Câu 4. (Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2021) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 0; f'(1) = 1$ và $10f(x) - 5xf'(x) + x^2 f''(x) = 0$ với mọi $x \in [0; 1]$.

Khi đó tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $-\frac{1}{15}$. B. $-\frac{2}{5}$. C. $-\frac{1}{10}$. **D. $-\frac{1}{17}$.**

Lời giải

Chọn D

Ta có: $10f(x) - 5xf'(x) + x^2 f''(x) = 0$ với mọi $x \in [0; 1]$.

$$\Leftrightarrow \int_0^1 10f(x) dx - \int_0^1 5xf'(x) dx + \int_0^1 x^2 f''(x) dx = 0$$

Đặt $I = \int_0^1 f(x) dx$, theo phương pháp tích phân từng phần, ta được:

$$\begin{cases} \int_0^1 xf'(x) dx = xf(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = -I \\ \int_0^1 x^2 f''(x) dx = x^2 f'(x) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 xf'(x) dx = 1 - 2(-I) = 1 + 2I \end{cases}$$

$$\Rightarrow 10I - 5(-I) + 1 + 2I = 0 \Leftrightarrow I = -\frac{1}{17}$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = -\frac{1}{17}.$$

Câu 5. (Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - 2021) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên R và thỏa mãn $f(0) = 3$ và $f(x) + f(2-x) = x^2 - 2x + 2, \forall x \in R$. Tích phân $\int_0^2 x.f'(x) dx$ bằng

A. $-\frac{10}{3}$. B. $-\frac{5}{3}$. C. $-\frac{11}{3}$. **D. $-\frac{7}{3}$.**

Lời giải

Chọn A

♦ Ta có: $I = \int_0^2 x.f'(x) dx$, ta sử dụng phương pháp từng phần

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow I = \int_0^2 x.f'(x) dx = 2f(2) - \int_0^2 f(x) dx$$

$$f(x) + f(2-x) = x^2 - 2x + 2 \text{ thế } x=0 \text{ vào ta có: } f(0) + f(2) = 2 \Rightarrow f(2) = -1 \quad (1)$$

♦ Từ đó ta tích phân 2 vế từ 0 đến 2

$$\Rightarrow \int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 f(2-x)dx = \int_0^2 (x^2 - 2x + 2)dx = \frac{8}{3}.$$

♦ Mặt khác ta lại có: $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 f(2-x)dx$

Nên suy ra $\int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 f(2-x)dx = 2\int_0^2 f(x)dx = \frac{8}{3} \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx = \frac{4}{3}$ (2)

♦ Từ (1) và (2) suy ra $I = \int_0^2 x \cdot f'(x)dx = 2f(2) - \int_0^2 f(x)dx = -2 - \frac{4}{3} = -\frac{10}{3}$

Câu 6. (Chuyên KHTN - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $xf'(x) + (x+1)f(x) = e^{-x}$ với mọi x . Tính $f'(0)$.

A. 1.

B. -1.

C. e .

D. $\frac{1}{e}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $xf'(x) + (x+1)f(x) = e^{-x} \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) + xf(x) = e^{-x}$

$$\Leftrightarrow xe^x f'(x) + (x+1)e^x f(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow xe^x f'(x) + (xe^x)' f(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow (xe^x f(x))' = 1$$

$$\Leftrightarrow xe^x f(x) = \int dx = x + C \quad (*)$$

Với $x = 0$

+) Thay vào biểu thức ban đầu ta có: $0 \cdot f'(0) + (0+1)f(0) = e^{-0} = 1 \Leftrightarrow f(0) = 1$.

+) Thay vào (*), ta có: $C = 0$.

Khi đó: $xe^x f(x) = x \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

Suy ra: $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} = -1$.

Câu 7. (Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 3]$ thỏa mãn $f(1) = 2$ và $f(x) - (x+1)f'(x) = 2xf^2(x), \forall x \in [1; 3]$. Giá trị của $\int_1^3 f(x)dx$ bằng

A. $1 + \ln 3$.

B. $\frac{2}{3} - \ln 3$.

C. $\frac{2}{3} + \ln 3$.

D. $1 - \ln 3$.

Lời giải

Chọn C

♦ Xét $f(x) \neq 0$: $f(x) - (x+1)f'(x) = 2xf^2(x) \Leftrightarrow \frac{f(x) - (x+1)f'(x)}{f^2(x)} = 2x \Leftrightarrow \left[\frac{x+1}{f(x)} \right]' = 2x$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{f(x)} = \int 2x dx \Leftrightarrow \frac{x+1}{f(x)} = x^2 + C$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \frac{x+1}{f(x)} = x^2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x+1}{x^2}$$

Xét: $f(x) = 0 \Rightarrow x = -1$ thỏa mãn điều kiện bài toán. Vậy: $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$

$$\diamond \int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 \frac{x+1}{x^2} dx = \int_1^3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \left(\ln x - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^3 = \left(\ln 3 - \frac{1}{3} \right) - (\ln 1 - 1) = \ln 3 + \frac{2}{3}$$

Câu 8. (Chuyên Quốc Học Huế - 2021) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f'(x) = f(x) + e^x \cdot \cos 2021x$ và $f(0) = 0$. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm có hoành độ thuộc đoạn $[-1; 1]$?

A. 3

B. 1

C. 1287

D. 4043

Lời giải

Chọn C

Ta có phương trình trên tương đương với

$$\Rightarrow f'(x) = f(x) + e^x \cdot \cos 2021x \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = e^x \cdot \cos 2021x$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} f'(x) + (-e^{-x}) f(x) = \cos 2021x$$

Đến đây ta nguyên hàm hai vế thu được:

$$\Rightarrow (e^{-x} f(x))' = \cos 2021x \Leftrightarrow e^{-x} f(x) = \int \cos 2021x dx = \frac{\sin 2021x}{2021} + C$$

$$\text{Mà } f(0) = 0 \text{ nên } C = 0 \text{ suy ra } e^{-x} f(x) = \frac{\sin 2021x}{2021} \Rightarrow f(x) = \frac{e^x \cdot \sin 2021x}{2021}$$

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành là

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x \cdot \sin 2021x}{2021} = 0 \Leftrightarrow \sin 2021x = 0 \Leftrightarrow 2021x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2021}, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Vì } x \in [-1; 1] \text{ nên } -1 \leq \frac{k\pi}{2021} \leq 1 \Rightarrow \frac{-2021}{\pi} \leq k \leq \frac{2021}{\pi}$$

Mà do $k \in \mathbb{Z}$ nên suy ra $k \in \{-643; -642; \dots; 643\}$ như vậy ta kết luận đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 1287 điểm có hoành độ thuộc đoạn $[-1; 1]$

Câu 9. (Chuyên Quang Trung - Bình Phước - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên

$$\mathbb{R}, xf'(x) = e^x - 1, \forall x \in \mathbb{R}, f(1) = 0. \text{ Giá trị } \int_0^1 xf'(x) dx \text{ bằng}$$

A. $-\frac{1}{4}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\diamond \text{ Tính } \int_0^1 xf'(x) dx :$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x f(x) dx &= \frac{x^2}{2} \cdot f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \cdot f'(x) dx = \frac{1}{2} f(1) - \frac{1}{2} f(0) \cdot 0 - \frac{1}{2} \int_0^1 x (e^x - 1) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 x (e^x - 1) dx = -\frac{1}{2} \left(x e^x - e^x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 \\ &= -\frac{1}{2} \left[\left(e - e - \frac{1}{2} \right) + e^0 \right] = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Câu 10. (Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $(-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \setminus \{0\}$, thỏa mãn $f(1) = 0$ và $f'(x) + x(e^{f(x)} + 2) + \frac{x}{e^{f(x)}} = 0$. Giá trị của $f\left(\frac{1}{2}\right)$ bằng

A. $\ln 7$.

B. $\ln 5$.

C. $\ln 6$.

D. $\ln 3$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} f'(x) + x + \frac{x}{e^{f(x)}} = 0 &\Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)} + xe^{f(x)}(e^{f(x)} + 2) + x = 0 \\ &\Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)} + x(e^{f(x)} + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{-f'(x)e^{f(x)}}{(e^{f(x)} + 1)^2} = x \\ &\Leftrightarrow \int \frac{-f'(x)e^{f(x)}}{(e^{f(x)} + 1)^2} dx = \int x dx \Leftrightarrow \int \frac{-d[e^{f(x)}]}{(e^{f(x)} + 1)^2} = \int x dx \Leftrightarrow \frac{1}{e^{f(x)} + 1} = \frac{x^2}{2} + C, (1) \\ \text{Trong (1) cho } x=1 &\Rightarrow \frac{1}{e^{f(1)} + 1} = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = 0. \text{ Suy ra } \frac{1}{e^{f(x)} + 1} = \frac{x^2}{2}, (2) \\ \text{Trong (2) cho } x=\frac{1}{2} &\Rightarrow \frac{1}{e^{f\left(\frac{1}{2}\right)} + 1} = \frac{1}{8} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 7. \end{aligned}$$

Câu 11. (Chuyên ĐHSPT Hà Nội - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f^3(x) + 3f(x) = \sin(2x^3 - 3x^2 + x), \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tích phân } I = \int_0^1 f(x) dx \text{ thuộc khoảng nào?}$$

A. $(-3; -2)$.

B. $(-2; -1)$.

C. $(-1; 1)$.

D. $(1; 2)$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Cách 1. Từ giả thiết ta có } f^3(1-x) + 3f(1-x) &= \sin[2(1-x)^3 - 3(1-x)^2 + (1-x)] \\ &\Leftrightarrow f^3(1-x) + 3f(1-x) = \sin(-2x^3 + 3x^2 - x) = -\sin(2x^3 - 3x^2 + x) \\ &\Leftrightarrow f^3(1-x) + 3f(1-x) = -[f^3(x) + 3f(x)] \\ &\Leftrightarrow [f^3(1-x) + f^3(x)] + 3[f(1-x) + f(x)] = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow [f(1-x) + f(x)] \cdot [f^2(1-x) - f(1-x) \cdot f(x) + f^2(x) + 3] = 0$$

$$\Leftrightarrow f(1-x) = -f(x).$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^1 f(x) dx = -\int_0^1 f(1-x) dx \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = 1-x \Rightarrow dt = -dx. \text{ Đổi cận } \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(1-x) dx = -\int_1^0 f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx = I \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $I = -I \Leftrightarrow I = 0$. Vậy $I \in (-1; 1)$.

Cách 2. Do $-1 \leq \sin(2x^3 - 3x^2 + x) \leq 1$ nên $-1 \leq f^3(x) + 3f(x) \leq 1 \Rightarrow -4 < f^3(x) + 3f(x) < 4$.

$$+ \text{ Từ } f^3(x) + 3f(x) > -4 \Leftrightarrow f^3(x) + 3f(x) + 4 > 0 \Leftrightarrow [f(x) + 1][f^2(x) - f(x) + 4] > 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) + 1 > 0 \Leftrightarrow f(x) > -1.$$

$$+ \text{ Từ } f^3(x) + 3f(x) < 4 \Leftrightarrow f^3(x) + 3f(x) - 4 < 0 \Leftrightarrow [f(x) - 1][f^2(x) + f(x) + 4] < 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) - 1 < 0 \Leftrightarrow f(x) < 1.$$

$$\text{Suy ra } -1 < f(x) < 1 \Rightarrow \int_0^1 (-1) dx < \int_0^1 f(x) dx < \int_0^1 1 dx \Rightarrow -1 < \int_0^1 f(x) dx < 1. \text{ Vậy } I \in (-1; 1).$$

Câu 12. (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An - 2021) Giả sử $f(x)$ là hàm có đạo hàm liên tục trên $(0; \pi)$ và $f'(x) \sin x = x + f(x) \cos x, \forall x \in (0; \pi)$. Biết $f(\frac{\pi}{2}) = 1, f(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{12}(a + b \ln 2 + c\pi\sqrt{3})$, với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a + b + c$ bằng

A. -1.

B. 1.

C. 11.

D. -11.

Lời giải

Chọn A

$$f'(x) \sin x = x + f(x) \cos x \Leftrightarrow f'(x) \sin x - f(x) \cos x = x$$

$$\text{Ta có: } \Leftrightarrow \frac{f'(x) \sin x - f(x) \cos x}{\sin^2 x} = \frac{x}{\sin^2 x} \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{\sin x} \right]' = \frac{x}{\sin^2 x}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{\sin x} = \int \frac{x}{\sin^2 x} dx = -x \cot x + \int \cot x dx = -x \cot x + \ln |\sin x| + C.$$

$$\text{Hay } \frac{f(x)}{\sin x} = -x \cot x + \ln |\sin x| + C.$$

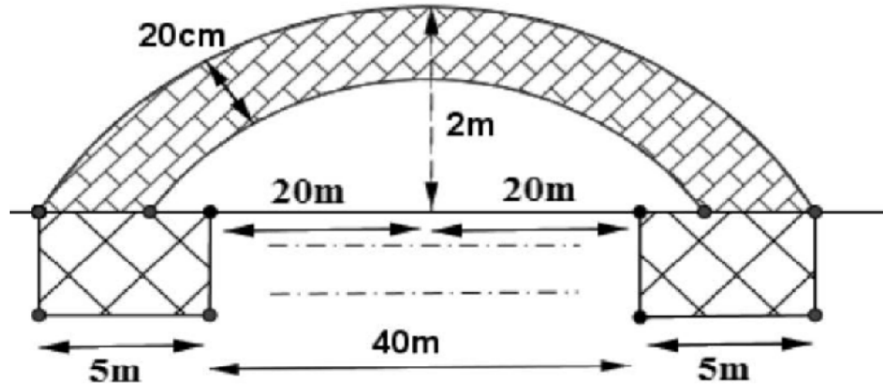
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2} \cot \frac{\pi}{2} + \ln \left| \sin \frac{\pi}{2} \right| + C \Leftrightarrow C = 1.$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{\sin x} = -x \cot x + \ln |\sin x| + 1.$$

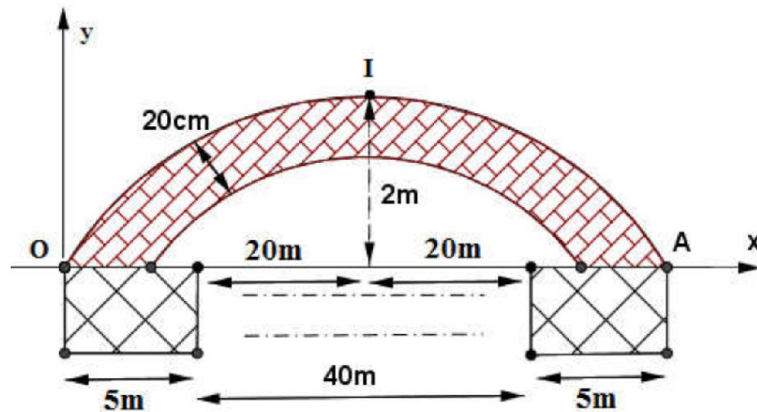
$$\text{Do đó } \Rightarrow \frac{f(\frac{\pi}{6})}{\sin \frac{\pi}{6}} = -\frac{\pi}{6} \cot \frac{\pi}{6} + \ln \left| \sin \frac{\pi}{6} \right| + 1 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{12} (6 - 6 \ln 2 - \pi\sqrt{3}).$$

$$\Rightarrow a = 6, b = -6, c = -1. \quad a + b + c = -1.$$

- Câu 13. (THPT Quế Võ 1 - Bắc Ninh - 2021)** Thành phố định xây cây cầu bắc ngang con sông dài 500m, biết rằng người ta định xây cầu có 10 nhịp cầu hình dạng parabol, mỗi nhịp cách nhau 40m, biết 2 bên đầu cầu và giữa mỗi nhịp nối người ta xây 1 chân trụ rộng 5m. Bề dày và bề rộng của nhịp cầu không đổi là 20cm (mặt cắt của một nhịp cầu được mô phỏng như hình vẽ). Hỏi lượng bê tông để xây các nhịp cầu là bao nhiêu (làm tròn đến hàng đơn vị).

A. $50m^3$.B. $20m^3$.C. $100m^3$.D. $40m^3$.

Lời giải

**Chọn D**

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ với gốc $O(0;0)$ là chân cầu (điểm tiếp xúc Parabol trên), đỉnh $I(25;2)$, điểm $A(50;0)$ (điểm tiếp xúc Parabol trên với chân đế).

Gọi Parabol trên có phương trình $(P_1): y_1 = ax^2 + bx$ (do (P) đi qua O).

$\Rightarrow$ Phương trình parabol dưới $(P_2): y_2 = ax^2 + bx - \frac{20}{100} = ax^2 + bx - \frac{1}{5}$.

Ta có (P_1) đi qua $I(25;2)$ và $A(50;0) \Rightarrow (P_1): y_1 = -\frac{2}{625}x^2 + \frac{4}{25}x \Rightarrow y_2 = -\frac{2}{625}x^2 + \frac{4}{25}x - \frac{1}{5}$

Khi đó diện tích mỗi nhịp cầu là $S = 2S_1$ với S_1 là phần giới hạn bởi $y_1; y_2$ trong khoảng $(0;25)$

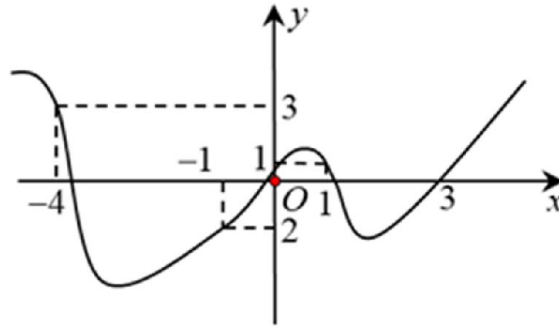
$$S = 2 \left(\int_0^{0,2} \left(-\frac{2}{625}x^2 + \frac{4}{25}x \right) dx + \int_{0,2}^{25} \frac{1}{5} dx \right) \approx 9,9m^2.$$

Vì bề dày nhịp cầu không đổi nên coi thể tích là tích diện tích và bề dày

$$V = S \cdot 0,2 \approx 9,9 \cdot 0,2 \approx 1,98m^3 \Rightarrow \text{số lượng bê tông cần cho mỗi nhịp cầu} \approx 2m^3.$$

Vậy 10 nhịp cầu 2 bên cần $\approx 40m^3$ bê tông.

- Câu 14. (THPT Quốc Oai - Hà Nội - 2021)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(3x) - 3x$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng



A. $f(-3)+3$.

B. $f(1)-1$.

C. $f(-1)+3$.

D. $f(3)-3$.

Lời giải

Chọn A.

$$g'(x) = 3f'(3x) - 3 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(3x) = 1 \quad (1)$$

Số nghiệm của (1) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(3x)$ và $y = 1$

$$f'(3x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 0 \\ 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta có bảng biến thiên

x	-1	0	$\frac{1}{3}$	1
$g'(x)$	-	0	+	0
$g(x)$	$f(-3)+3$		$f(1)-1$	

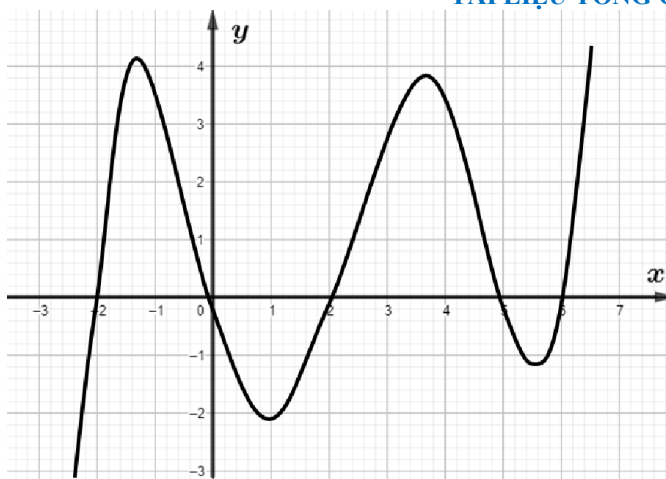
Dựa vào đồ thị ta có

$$\int_{-1}^0 -g'(x)dx > \int_0^{\frac{1}{3}} g'(x)dx \Leftrightarrow -g(0) + g(-1) > g\left(\frac{1}{3}\right) - g(0)$$

$$\Leftrightarrow g(-1) > g\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow f(-3)+3 > f(1)-1$$

Giá trị lớn nhất của $y = g(x)$ trên $[-1;1]$ là $f(-3)+3$.

Câu 15. (THPT Quốc Oai - Hà Nội - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số nghiệm thuộc đoạn $[-2; 6]$ của phương trình $f(x) = f(0)$ là

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Xét } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \\ x = 5 \\ x = 6 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên trên đoạn $[-2; 6]$:

x	-2	0	2	5	6
y'	0	+	0	-	0
y	$f(-2)$	$f(0)$	$f(2)$	$f(5)$	$f(6)$

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f'(x); y = 0; x = 0; x = 2$.

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f'(x); y = 0; x = 2; x = 5$.

Gọi S_3 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f'(x); y = 0; x = 5; x = 6$.

$$\text{Khi đó } S_1 = -\int_0^2 f'(x) dx = f(0) - f(2)$$

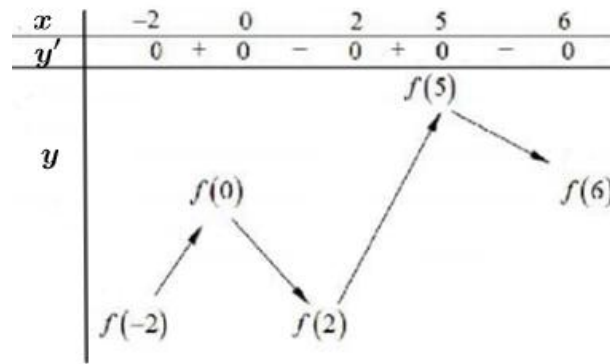
$$S_2 = \int_2^5 f'(x) dx = f(5) - f(2)$$

$$S_3 = -\int_5^6 f'(x) dx = f(5) - f(6)$$

$$\text{Từ đồ thị ta thấy } S_2 > S_1 \Leftrightarrow f(5) - f(2) > f(0) - f(2) \Rightarrow f(5) > f(0)$$

$$S_1 + S_3 < S_2 \Leftrightarrow f(0) - f(2) + f(5) - f(6) < f(5) - f(2) \Rightarrow f(6) > f(0).$$

Khi đó ta có bảng biến thiên trên đoạn $[-2; 6]$ như sau:



Vậy phương trình $f(x) = f(0)$ có 2 nghiệm thuộc đoạn $[-2; 6]$.

Câu 16. (THPT Quảng Xương 1 - Thanh Hóa - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm xác định trên $(0; +\infty)$. Biết rằng $f(x) > 0$ với mọi $x \in (0; +\infty)$ thỏa mãn $f(x)(\ln f(x) - 1) + x(f'(x) - 2f(x)) = 0$ và $\ln(f(2)) - \ln(f(1)) = 1$. Giá trị của tích phân $\int_1^2 xf(x)dx$ nằm trong khoảng nào dưới đây:

- A. $(0; 6)$. B. $(6; 12)$. C. $(12; 18)$. D. $(18; 24)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f(x)(\ln f(x) - 1) + x(f'(x) - 2f(x)) = 0$

Do $f(x) > 0$ với mọi $x \in (0; +\infty)$ nên ta chia 2 về phương trình đó cho $f(x)$

$$\Leftrightarrow \ln f(x) - 1 + x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} - 2x = 0 \Leftrightarrow \ln f(x) + x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} = 2x + 1$$

$\Leftrightarrow (x \ln f(x))' = 2x + 1$. Đến đây ta nguyên hàm 2 vế thì phương trình trở thành

$$\Rightarrow x \ln f(x) = x^2 + x + C (*)$$

Thế $x = 1$ vào ta thu được $\ln f(1) = 2 + C$

Thế $x = 2$ vào ta thu được $2 \ln f(2) = 6 + C$

Lấy 2 phương trình trên trừ nhau ta thu được: $2 \ln f(2) - \ln f(1) = 4$

Mà đề cho $\ln(f(2)) - \ln(f(1)) = 1$ nên ta dễ dàng giải hệ phương trình ra được nghiệm là:

$$\begin{cases} \ln f(2) = 3 \\ \ln f(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(2) = e^3 \\ f(1) = e^2 \end{cases}. \text{Thế vào phương trình (*) suy ra được } C = 0 \text{ nên ta có được}$$

$$\Rightarrow x \ln f(x) = x^2 + x \Leftrightarrow \ln f(x) = x + 1 \Leftrightarrow f(x) = e^{x+1}$$

$$\text{Nhu vậy } \int_1^2 xf(x)dx = \int_1^2 xe^{x+1}dx = \int_2^3 (x-1)e^x dx = e^3 \approx 20,085 \in (18; 24)$$

Câu 17. (THPT Phan Đình Phùng - Quảng Bình - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Giá trị của tích phân

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f'(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{\pi}{4}$.

C. $-\frac{1}{4}$.

D. $-\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Thay $x = \frac{\pi}{2}$ vào đẳng thức $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f(0) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

$$\text{Xét } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f'(x) dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = x \cdot f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos x dx$$

$$\Leftrightarrow 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx \Leftrightarrow 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy } I = -\frac{1}{4}.$$

Câu 18. (THPT Nguyễn Tất Thành - Hà Nội - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(x) + f(1-x) = x^2(1-x)^2; \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính } I = \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $\frac{1}{30}$.

B. $\frac{1}{60}$.

C. $\frac{1}{45}$.

D. $\frac{1}{15}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } t = 1 - x \Rightarrow dt = -dx.$$

Đổi cận:

x	0	1
t	1	0

$$\text{Khi đó ta có: } \int_0^1 f(1-x) dx = \int_1^0 f(t) dt = - \int_0^1 f(x) dx \Rightarrow \int_0^1 [f(x) + f(1-x)] dx = 2 \int_0^1 f(x) dx.$$

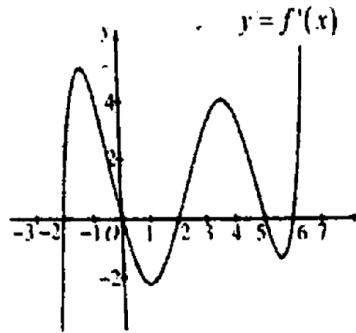
$$\Rightarrow \int_0^1 [f(x) + f(1-x)] dx = \int_0^1 x^2(1-x)^2 dx$$

$$\Rightarrow 2 \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2) dx = \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{30}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{60}.$$

Vậy $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{60}$.

Câu 19. (THPT Nguyễn Đức Cảnh - Thái Bình - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên



Đặt $M = \max_{[-2;6]} f(x)$; $m = \min_{[-2;6]} f(x)$. Tính giá trị $S = M + m$?

- A. $S = f(0) + f(2)$. B. $S = f(5) + f(6)$.
 C. $S = f(5) + f(-2)$. D. $S = f(0) + f(-2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có BBT

x	$-\infty$	-2		0		2		5		6		$+\infty$
y'		0	+	0	-	0	+	0	-	0		
y												

A graph of a function $f(x)$ on the interval $[-2, 6]$. The x-axis has tick marks at -2 , 0 , 2 , 5 , and 6 . The y-axis is labeled y . The function is represented by a piecewise linear path connecting points labeled $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(5)$, and $f(6)$. Arrows indicate the direction of the path: from $f(-2)$ to $f(0)$, from $f(0)$ to $f(2)$, from $f(2)$ to $f(5)$, and from $f(5)$ to $f(6)$. Vertical dashed lines are drawn at $x = -2$ and $x = 6$. The function has local maxima at $x = 0$ and $x = 5$, and local minima at $x = 2$ and $x = 6$.

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn (H_1) gồm các đường: $y = f'(x)$; $y = 0$; $x = -2$; $x = 0$.

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn (H_2) gồm các đường: $y = f'(x)$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 2$.

Gọi S_3 là diện tích hình phẳng giới hạn (H_3) gồm các đường: $y = f'(x)$; $y = 0$; $x = 2$; $x = 5$.

Gọi S_4 là diện tích hình phẳng giới hạn (H_4) gồm các đường: $y = f'(x)$; $y = 0$; $x = 5$; $x = 6$.

Ta có: $S_1 > S_2 \Leftrightarrow \int_{-2}^0 f'(x) dx > \int_0^2 f'(x) dx \Leftrightarrow f(0) - f(-2) > f(2) - f(0) \Leftrightarrow f(-2) < f(2)$.

$S_2 < S_3 \Leftrightarrow \int_0^2 -f'(x) dx < \int_2^5 f'(x) dx \Leftrightarrow f(0) - f(2) < f(5) - f(2) \Leftrightarrow f(0) < f(5)$

$S_3 > S_4 \Leftrightarrow \int_2^5 f'(x) dx > \int_5^6 -f'(x) dx \Leftrightarrow f(5) - f(2) > f(5) - f(6) \Leftrightarrow f(2) < f(6)$

Suy ra: $\begin{cases} M = \max_{[-2;6]} f(x) = f(5) \\ m = \min_{[-2;6]} f(x) = f(-2) \end{cases} \Rightarrow T = M + m = f(5) + f(-2)$.

Câu 20. (THPT Hậu Lộc 4 - Thanh Hóa - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1; 3]$, biết $f(1) = 1$ và $f(x).f'(x) + x - 4 = (x - 2)f'(x) + f(x)$ với $\forall x \in [1; 3]$. Biết

$\int_1^3 f(x) dx = -\frac{a}{b} + 2\sqrt{c}$ (với a, b, c là các số nguyên dương, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Khi đó, tổng $a+b+c$ bằng

A. 10.

B. 19.

C. 17.

D. 53.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f(x) \cdot f'(x) + x - 4 = (x-2)f'(x) + f(x)$

$$\Rightarrow \int f(x) f'(x) dx + \int (x-4) dx = \int [(x-2)f'(x) + f(x)] dx$$

$$\Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} + \frac{x^2}{2} - 4x = (x-2)f(x) + C.$$

Theo bài, $f(1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 4 = -1 + C \Leftrightarrow C = -2.$

Khi đó, $\frac{f^2(x)}{2} + \frac{x^2}{2} - 4x = (x-2)f(x) - 2 \Leftrightarrow [f(x) - (x-2)]^2 = 4x \Leftrightarrow f(x) = 2\sqrt{x} + x - 2$

$$\Rightarrow \int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 (2\sqrt{x} + x - 2) dx = \left(\frac{4}{3}\sqrt{x^3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_1^3 = -\frac{4}{3} + 4\sqrt{3}.$$

Do đó, $a = 4, b = 3, c = 12.$

Vậy $a+b+c = 4+3+12 = 19.$

Câu 21. (THPT Lê Lợi - Thanh Hóa - 2021) Biết rằng $y = f(x)$ là hàm số liên tục và khác $\pm x$ với mọi

$x \in (0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 2; f(2) = 6$. Có tích phân $\int_1^2 \frac{xf'(x) - f(x)}{f^2(x) - x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{a}{b}$; trong đó

a, b là các số nguyên dương sao cho phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Giá trị của biểu thức $a^2 + b^3$ bằng

A. 5.

B. 10.

C. 17.

D. 34.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_1^2 \frac{xf'(x) - f(x)}{f^2(x) - x^2} dx = \int_1^2 \frac{1}{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 - 1} d\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\frac{f(x)}{x} - 1}{\frac{f(x)}{x} + 1} \right| \Big|_1^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} \Rightarrow a = 3; b = 2$$

Khi đó $a^2 + b^3 = 17.$

Câu 22. (Sở Lào Cai - 2021) Hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị (C_1) đi qua điểm $A(1; 0)$; hàm số bậc hai $y = g(x)$ có đồ thị (C_2) đi qua điểm $B(1; -4)$. $(C_1), (C_2)$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-1; 2; 3$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $(C_1), (C_2)$?

A. $\frac{115}{3}.$ B. $\frac{32}{3}.$ C. $\frac{71}{6}.$ D. $\frac{112}{3}.$

Lời giải

Chọn C

Vì $(C_1), (C_2)$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-1; 2; 3$ nên đa thức bậc ba $f(x) - g(x)$ có ba nghiệm $-1; 2; 3$. Do đó, $f(x) - g(x) = a(x+1)(x-2)(x-3)$, với $a \neq 0$.

Mặt khác vì (C_1) đi qua điểm $A(1; 0)$; (C_2) đi qua điểm $B(1; -4)$ nên $f(1) = 0, g(1) = -4$. Do đó, $f(1) - g(1) = 4$

Suy ra $a(1+1)(1-2)(1-3) = 4$ hay $a = 1$.

Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $(C_1), (C_2)$ là

$$\int_{-1}^2 |(x+1)(x-2)(x-3)| dx + \int_2^3 |(x+1)(x-2)(x-3)| dx = \frac{71}{6} \text{ (đvdt)}.$$

Câu 23. (Sở Tuyên Quang - 2021) Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2$ và $f'(x) = \frac{4\cos 2x}{\sin^2 2x}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Khi đó $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$ bằng

A. $\frac{\pi}{3} - \ln 2$.

B. $-\ln 3$.

C. $\frac{\pi}{6}$.

D. $\frac{\pi}{2} - \ln 3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{4\cos 2x}{\sin^2 2x} dx$.

Đặt $\sin 2x = t \Rightarrow 2\cos 2x dx = dt$.

Suy ra $f(x) = \int \frac{2dt}{t^2} = -\frac{2}{t} + C = -\frac{2}{\sin 2x} + C \xrightarrow{f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2} C = 0$.

Như vậy $f(x) = -\frac{2}{\sin 2x} \Rightarrow \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} -\frac{2}{\sin 2x} dx = I$.

$$\text{Xét } I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{-2}{\sin 2x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{-2\sin 2x}{\sin^2 2x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{-2\sin 2x}{1 - \cos^2 2x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{-2\sin 2x}{(1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)} dx.$$

$$\text{Đặt } \cos 2x = a \Rightarrow -2\sin 2x dx = da. \text{ Đổi cận: } \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{-1}{2}} \frac{da}{(1-a)(1+a)} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{-1}{2}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a+1} - \frac{1}{a-1} \right) da = \frac{1}{2} \left[\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{-1}{2}} \frac{d(a+1)}{a+1} - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{-1}{2}} \frac{d(a-1)}{a-1} \right].$$

$$= \frac{1}{2} \left(\ln|a+1| \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{-1}{2}} - \ln|a-1| \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{-1}{2}} \right) = -\ln 3.$$

Phương pháp trắc nghiệm: Dùng máy tính Casio bấm kết quả của tích phân I , sau đó thử 4 đáp án, đáp án nào trùng khớp chính là kết quả cần tính.

Câu 24. (Sở Yên Bái - 2021) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1) = \frac{3}{5}$,

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{4}{9} \text{ và } \int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{37}{180}. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $-\frac{14}{15}$.

B. $\frac{1}{15}$.

C. $\frac{14}{15}$.

D. $-\frac{1}{15}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ v' = x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = f'(x) \\ v = \frac{x^4}{4} \end{cases}, \text{ suy ra:}$$

$$\frac{37}{180} = \int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{x^4}{4} f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{4} \int_0^1 x^4 f'(x) dx \Leftrightarrow \frac{37}{180} = \frac{1}{4} f(1) - \frac{1}{4} \int_0^1 x^4 f'(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 x^4 f'(x) dx = -\frac{2}{9}.$$

$$\text{Mặt khác ta có: } \int_0^1 4x^8 dx = \frac{4}{9} x^9 \Big|_0^1 = \frac{4}{9}.$$

$$\text{Suy ra: } \int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 4 \int_0^1 x^4 f'(x) dx + \int_0^1 4x^8 dx = \frac{4}{9} - \frac{8}{9} + \frac{4}{9} = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x) + 2x^4]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = -2x^4 \Rightarrow f(x) = -\frac{2}{5} x^5 + C.$$

$$\text{Mặt khác } f(1) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{3}{5} = -\frac{2}{5} + C \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = -\frac{2}{5} x^5 + 1.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(-\frac{2}{5} x^5 + 1 \right) dx = \frac{14}{15}.$$

Câu 25. (THPT Nguyễn Công Trứ - Hà Tĩnh - 2021) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn

$$[0;1] \text{ thỏa mãn } f(1) = 1, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 9$$

$$\text{và } \int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{1}{2}. \text{ Tích phân } \int_0^1 xf(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{6}{5}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{8}{7}$.

D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 9 \quad (1)$$

$$\text{Tính } \int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^3 \cdot dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{x^4}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \int_0^1 x^3 f'(x) dx = \left(\frac{x^4}{4} \cdot f(x) \right) \Big|_0^1 - \frac{1}{4} \int_0^1 x^4 \cdot f''(x) dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \int_0^1 x^4 \cdot f''(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^4 \cdot f''(x) dx = -1 \Rightarrow 18 \int_0^1 x^4 \cdot f''(x) dx = -18 \quad (2)$$

$$\text{- Lại có: } \int_0^1 x^8 dx = \frac{x^9}{9} \Big|_0^1 = \frac{1}{9} \Rightarrow 81 \int_0^1 x^8 dx = 9 \quad (3)$$

- Cộng vế với vế các đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:

$$\int_0^1 \left[\left[f'(x) \right]^2 + 18x^4 \cdot f'(x) + 81x^8 \right] dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[f'(x) + 9x^4 \right]^2 dx = 0 \Leftrightarrow \pi \cdot \int_0^1 \left[f'(x) + 9x^4 \right]^2 dx = 0 \text{ Ha}$$

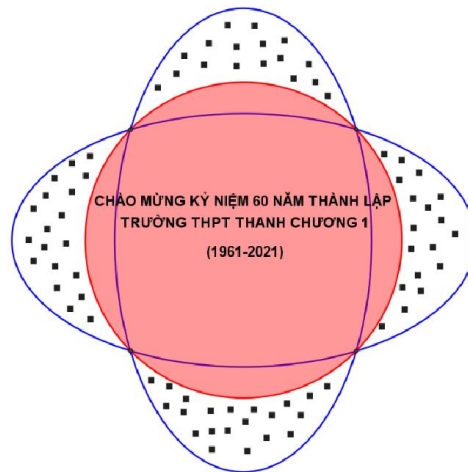
y thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x) + 9x^4$, trục hoành Ox , các đường thẳng $x=0$, $x=1$ khi quay quanh Ox bằng

$$0 \Rightarrow f'(x) + 9x^4 = 0 \Rightarrow f'(x) = -9x^4 \Rightarrow f(x) = \int f'(x) \cdot dx = -\frac{9}{5}x^5 + C.$$

$$\text{Lại do } f(1) = 1 \Rightarrow C = \frac{14}{5} \Rightarrow f(x) = -\frac{9}{5}x^5 + \frac{14}{5}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 x \left(-\frac{9}{5}x^5 + \frac{14}{5} \right) dx = \int_0^1 \left(-\frac{9}{5}x^6 + \frac{14}{5}x \right) dx = \left(-\frac{9}{35}x^7 + \frac{7}{5}x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{7}.$$

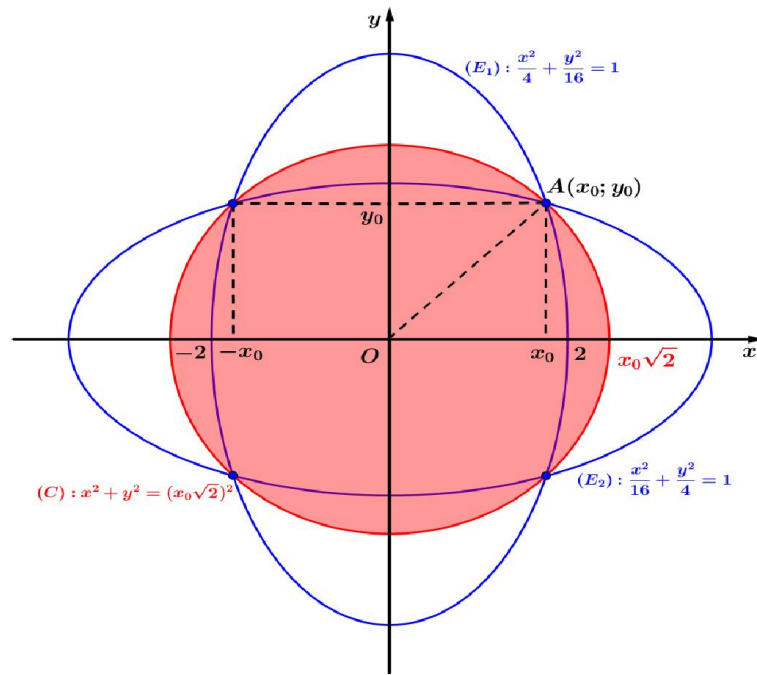
Câu 26. (THPT Thanh Chương 1- Nghệ An - 2021) Hướng tới kỉ niệm 60 năm thành lập trường THPT Thanh Chương 1. Khối 12K57 thiết kế bồn hoa gồm hai Elip bằng nhau có độ dài trục lớn bằng 8m và độ dài trục nhỏ bằng 4m đặt chồng lên nhau sao cho trục lớn của Elip này trùng với trục nhỏ của Elip kia và ngược lại (như hình vẽ).



Phần diện tích nằm trong đường tròn đi qua 4 giao điểm của hai Elip dùng để trồng cỏ, phần diện tích bốn cánh hoa nằm giữa hình tròn và Elip dùng để trồng hoa. Biết kinh phí để trồng hoa là 300.000 đồng, kinh phí để trồng cỏ là 200.000 đồng. Tổng số tiền dùng để trồng hoa và trồng cỏ cho bồn hoa gần với số nào nhất trong các số sau:

- A. 6.200.000 đồng. B. 8.200.000 đồng. C. 8.600.000 đồng. D. 9.100.000 đồng.

Lời giải



- ♦ Ta có: độ dài trục lớn bằng 8m và độ dài trục nhỏ bằng 4m, ta có hình vẽ như trên:
- ♦ Tiếp theo ta sẽ thiết lập phương trình nửa bên trên trục hoành của cả hai Elip trên

2 phương trình đó là:

Gọi $A(x_0; y_0)$ là một trong hai giao điểm của hai đồ thị hàm số

Từ đó, hoành độ của điểm $A(x_0; y_0)$ chính là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm giữa hai đồ thị hàm số (E_1) và (E_2) .

Suy ra bán kính của đường tròn đi qua 4 giao điểm của 2 Elip trên là $x_0\sqrt{2}$.

Phương trình nửa bên trên của đường tròn là:

Diện tích hình tròn đó là:

Từ đó ta tính được kinh phí trồng cỏ là: đồng.

Ta có diện tích giới hạn bởi hai đường , là:

Diện tích phần hình giới hạn bởi hai đồ thị cùng với trục hoành đó là

Từ đó ta suy ra diện tích dùng để trồng hoa là:

Như vậy giá tiền trồng hoa là:

Vậy tổng giá tiền dùng để trồng hoa và trồng cỏ cho bồn hoa bằng

(đồng).

Câu 27. (THPT Lương Thế Vinh - 2021) Cho a, b, c là các số thực và $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ thỏa mãn

$f'(t) = f'(t+5) = 2$ với t là hằng số. Giá trị $\int_t^{t+5} f'(x) dx$ bằng

A. $-\frac{105}{2}$.

B. $\frac{134}{3}$.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{19}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. Vì $f'(t) = f'(t+5) = 2$ nên t và $t+5$ là hai nghiệm của phương trình $f'(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2ax + b - 2 = 0$.

Theo Viet ta có
$$\begin{cases} t+t+5 = -\frac{2a}{3} \\ t(t+5) = \frac{b-2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2}(2t+5) \\ b = 3(t^2+5t)+2 \end{cases}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} I &= \int_t^{t+5} f'(x) dx = f(t+5) - f(t) = \left[(t+5)^3 - t^3 \right] + a \left[(t+5)^2 - t^2 \right] + b \left[(t+5) - t \right] \\ &= \left[(t+5-t)^3 + 3t(t+5)(t+5-t) \right] + a.5.(2t+5) + 5b \\ &= 125 + 15(t^2+5t) - \frac{15}{2}(2t+5)^2 + 5 \left[3(t^2+5t) + 2 \right] \\ &= 135 + 30(t^2+5t) - \frac{15}{2}(4t^2+20t+25) = -\frac{105}{2}. \end{aligned}$$

Câu 28. (THPT Hoàng Hoa Thám - Đà Nẵng - 2021) Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, biết $f(x) > 0, \forall x \in [1; 4]$ và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 4]$, thỏa mãn $f(1) = 1$ và $[2f(x) + xf'(x)]^2 = \frac{f(x)}{x}$ với mọi $x \in [1; 4]$. Khi đó $\int_1^4 f(x) dx$ bằng

- A. 1. B. $2 \ln 2$. C. $2 \ln 2 - 2$. D. -2 .

Lời giải

Chọn B

$$\bullet \text{ Ta có } [2f(x) + x.f'(x)]^2 = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow 2f(x) + x.f'(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{f(x)} + \frac{x.f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow [2x.\sqrt{f(x)}]' = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\bullet \text{ Suy ra } \int [2x.\sqrt{f(x)}]' dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \Leftrightarrow 2x.\sqrt{f(x)} = 2\sqrt{x} + C.$$

$$\bullet \text{ Thế } x=1, \text{ ta được } 2.\sqrt{f(1)} = 2\sqrt{1} + C \Leftrightarrow C = 0.$$

$$\text{Suy ra } 2x.\sqrt{f(x)} = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow x^2.f(x) = x \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x}.$$

$$\bullet \text{ Ta có } \int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_1^4 = 2 \ln 2.$$

Câu 29. (THPT Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn

$$xf'(x) = f(x) + x^3 \ln x, \forall x > 0 \text{ và } f(1) = \frac{3}{4}. \text{ Tính } f(2)$$

- A. $2 \ln 2 + 1$. B. $4 \ln 2 + 1$. C. $2 \ln 2$ D. $4 \ln 2$

Lời giải

Chọn D

$$xf'(x) = f(x) + x^3 \ln x \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \ln x \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = \ln x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \int x \ln x dx$$

$$\text{Mà } \int x \ln x dx = \int \ln x . d\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

$$\text{Suy ra } f(x) = \frac{1}{2}x^3 \ln x - \frac{1}{4}x^3 + Cx, \text{ mà } f(1) = \frac{3}{4} = C - \frac{1}{4} \Rightarrow C = 1.$$

$$\text{Vậy } f(x) = \frac{1}{2}x^3 \ln x - \frac{1}{4}x^3 + x. \text{ Khi đó } f(2) = 4 \ln 2.$$

Câu 30. (THPT Ba Đình - Thanh Hóa - 2021) Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $[0; 2]$. Biết $f(0) = 1$ và $f(x)f(2-x) = e^{2x^2-4x}$ với mọi $x \in [0; 2]$. Tính tích phân

$$I = \int_0^2 \frac{(x^3 - 3x^2)f'(x)}{f(x)} dx.$$

- A. $I = -\frac{32}{5}$. B. $I = -\frac{16}{3}$. C. $I = -\frac{16}{5}$. D. $I = -\frac{14}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết, ta có $f(x) \cdot f(2-x) = e^{2x^2-4x}$ và $f(x)$ nhận giá trị dương nên

$$\ln[f(x) \cdot f(2-x)] = \ln e^{2x^2-4x} \Leftrightarrow \ln f(x) + \ln f(2-x) = 2x^2 - 4x.$$

Mặt khác, với $x=0$, ta có: $f(0) \cdot f(2) = 1$ và $f(0) = 1$ nên $f(2) = 1$

$$\text{Xét } I = \int_0^2 \frac{(x^2 - 3x^2)f'(x)}{f(x)} dx, \text{ ta có } I = \int_0^2 (x^2 - 3x^2) \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^3 - 3x^2 \\ dv = \frac{f'(x)}{f(x)} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (3x^2 - 6x) dx \\ v = \ln f(x) \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } I = \left[(x^3 - 3x^2) \ln f(x) \right]_0^2 - \int_0^2 (3x^2 - 6x) \ln f(x) dx = - \int_0^2 (3x^2 - 6x) \ln f(x) dx \quad (1).$$

Đổi biến $x = 2 - t \Rightarrow dx = -dt$. Khi $x = 0 \Rightarrow t = 2$ và $x = 2 \Rightarrow t = 0$

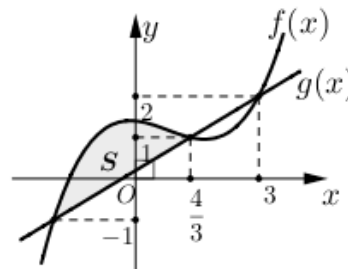
Khi đó:

$$I = - \int_2^0 (3t^2 - 6t) \ln f(2-t) (-dt) = - \int_0^2 (3t^2 - 6t) \ln f(2-t) dt = - \int_0^2 (3x^2 - 6x) \ln f(2-x) dx \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta cộng vế theo vế, ta được } 2I = - \int_0^2 (3x^2 - 6x) [\ln f(x) + \ln f(2-x)] dx$$

$$\text{Hay } I = - \frac{1}{2} \int_0^2 (3x^2 - 6x) (2x^2 - 4x) dx = - \frac{1}{2} \int_0^2 (6x^4 - 24x^3 - 24x^2) dx = - \frac{1}{2} \left(\frac{6}{5} x^5 - 6x^4 - 8x^3 \right) \Big|_0^2 = - \frac{16}{5}$$

Câu 31. (Trung Tâm Thanh Trường - 2021) Cho $f(x), g(x)$ lần lượt là các hàm đa thức bậc ba và bậc nhất có đồ thị như hình vẽ.



Biết diện tích hình S (được tô màu) bằng $\frac{250}{81}$. Tính $\int_0^2 f(x) dx$.

A. $\frac{7}{3}$.

B. $\frac{38}{15}$.

C. $\frac{8}{3}$.

D. $\frac{34}{15}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g(x)$ là hàm số bậc nhất đi qua $A\left(\frac{4}{3}; 1\right)$ và $B(3; 2)$ nên $g(x) = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

Với $y = -1 \Rightarrow \frac{3}{5}x + \frac{1}{5} = -1 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow C(-2; -1)$ là giao điểm của $f(x)$ và $g(x)$.

Do đó $f(x) - g(x) = a(x+2)\left(x - \frac{4}{3}\right)(x-3)$.

Lại có $S = \int_{-2}^{\frac{4}{3}} [f(x) - g(x)] dx \Leftrightarrow \frac{250}{81} = \int_{-2}^{\frac{4}{3}} a(x+2)\left(x - \frac{4}{3}\right)(x-3) dx \Leftrightarrow a = \frac{3}{20}$.

Suy ra $f(x) - g(x) = \frac{3}{20}(x+2)\left(x - \frac{4}{3}\right)(x-3) \Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{20}(x+2)\left(x - \frac{4}{3}\right)(x-3) + \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

Vậy $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \left[\frac{3}{20}(x+2)\left(x - \frac{4}{3}\right)(x-3) + \frac{3}{5}x + \frac{1}{5} \right] dx = \frac{34}{15}$.

Câu 32. (THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2021) Giả sử $\int_3^5 x^2 \ln(x+1) dx = \frac{a \ln 3 + b \ln 2}{3} - \frac{c}{9}$ với $a, b, c \in \mathbb{N}^*$.

Giá trị của biểu thức $b+c-a$ bằng

A. -2.

B. 24.

C. -4.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$I = \int_3^5 x^2 \ln(x+1) dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+1} dx \\ v = \frac{1}{3} x^3 \end{cases}, \text{ suy ra}$$

$$I = \int_3^5 x^2 \ln(x+1) dx = \left. \frac{x^3 \ln(x+1)}{3} \right|_3^5 - \frac{1}{3} \int_3^5 \frac{x^3}{x+1} dx$$

$$= \frac{125 \ln 6 - 27 \ln 4}{3} - \frac{1}{3} \int_3^5 \left(x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \frac{125 \ln 6 - 27 \ln 4}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln|x+1| \right) \Big|_3^5$$

$$= \frac{126 \ln 6 - 28 \ln 4}{3} - \frac{80}{9}$$

$$= \frac{126 \ln 3 + 70 \ln 2}{3} - \frac{80}{9} = \frac{a \ln 3 + b \ln 2}{3} - \frac{c}{9} \Rightarrow \begin{cases} a = 126 \\ b = 70 \\ c = 80 \end{cases} \Rightarrow b + c - a = 24.$$

Câu 33. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} e^x + m & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x\sqrt{3+x^2} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tích phân $I = \int_{-1}^1 f(x)dx$ bằng

- A. $I = e + 2\sqrt{3} - 22$. B. $I = e + 2\sqrt{3} + \frac{22}{3}$. C. $I = e - 2\sqrt{3} - \frac{22}{3}$. **D. $I = e + 2\sqrt{3} - \frac{22}{3}$.**

Lời giải

Chọn D

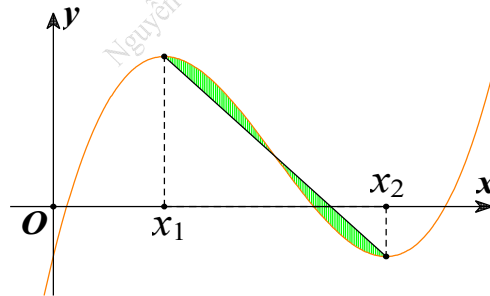
Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + m) = m + 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x\sqrt{3+x^2}) = 0$ và $f(0) = m + 1$.

Vì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục tại $x = 0$.

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$ hay $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \int_{-1}^1 f(x)dx &= \int_{-1}^0 2x\sqrt{3+x^2}dx + \int_0^1 (e^x - 1)dx = \int_{-1}^0 \sqrt{3+x^2}d(3+x^2) + \int_0^1 (e^x - 1)dx \\ &= \frac{2}{3}(3+x^2)\sqrt{3+x^2} \Big|_{-1}^0 + (e^x - x) \Big|_0^1 = e + 2\sqrt{3} - \frac{22}{3}. \end{aligned}$$

Câu 34. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị (C) là đường cong trong hình bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = -3$. Gọi d là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị (C) . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và d (phần được tô đậm trong hình) bằng

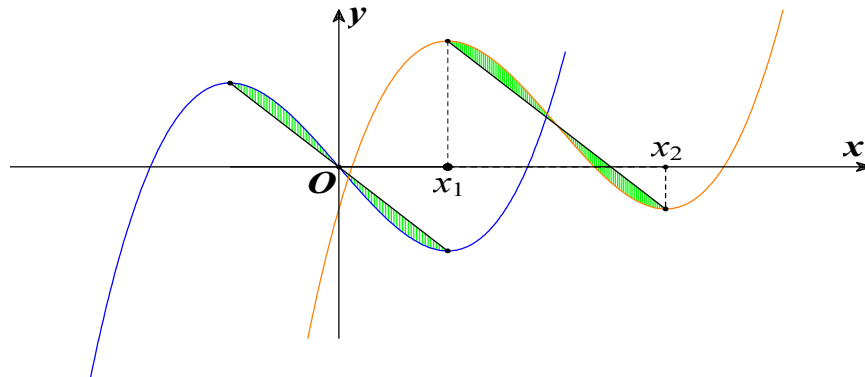


- A. 1. B. 2. C. $\frac{1}{4}$. **D. $\frac{1}{2}$.**

Lời giải

Chọn D

Tính tiền điểm uốn về gốc tọa độ, ta được đồ thị mới như hình vẽ



Vì $f(x)$ là hàm bậc ba, nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng nên $f(x) = ax^3 + cx$.

Chọn $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, khi đó $f(x) = x^3 - 3x$.

Ta lại có $f(x) = \frac{1}{3}x(3x^2 - 3) - 2x$, suy ra $d: y = -2x$.

$$\text{Diện tích hình phẳng cần tìm là } S = 2 \int_{-1}^0 \frac{1}{3}x(3x^2 - 3)dx = \frac{1}{2}.$$

Câu 35. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 1, & x \geq 5 \\ 2x - 6, & x < 5 \end{cases}$. Tích phân $\int_0^{\ln 2} f(3e^x + 1) \cdot e^x dx$ bằng

A. $\frac{77}{3}$.

B. $\frac{77}{9}$.

C. $\frac{68}{3}$.

D. $\frac{77}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = f(5) = 4$ nên hàm số liên tục tại $x = 5$.

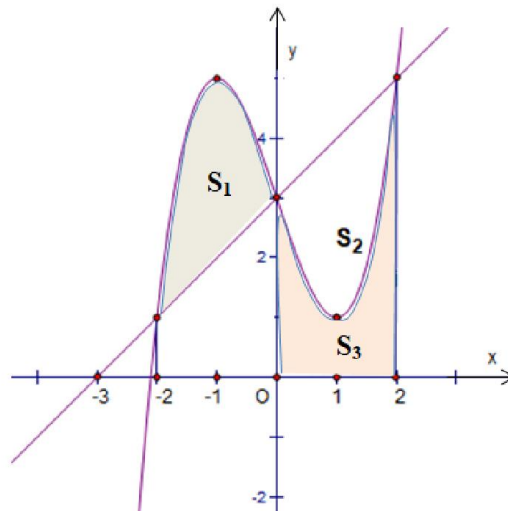
Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Đặt } t = 3e^x + 1 \Rightarrow e^x dx = \frac{1}{3} dt$$

$$\text{Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 4; x = \ln 2 \Rightarrow t = 7$$

$$\text{Khi đó } I = \frac{1}{3} \int_4^7 f(t) dt = \frac{1}{3} \int_4^7 f(x) dx = \frac{1}{3} \left(\int_4^5 (2x - 6) dx + \int_5^7 (x^2 - 4x - 1) dx \right) = \frac{77}{9}.$$

Câu 36. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và đường thẳng $d: g(x) = mx + n$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích của các phần giới hạn như hình bên. Nếu $S_1 = 4$ thì tỷ số $\frac{S_2}{S_3}$ bằng.



A. $\frac{3}{2}$.

B. 1.

C. 2.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải:

Chọn B

• Dựa vào đồ thị như hình vẽ, ta có: $f(x) - g(x) = k \cdot x(x+2)(x-2)$.

$$g(x) = x + 3$$

$$S_1 = S_2 = \int_{-2}^0 kx(x+2)(x-2)dx = 4k$$

$$S_2 + S_3 = \frac{(|g(0)| + |g(2)|) \cdot 2}{2} = \frac{(3+5) \cdot 2}{2} = 8$$

Vì $S_1 = 4 \Rightarrow S_2 = 4 \Rightarrow S_3 = 8 - 4 = 4$. Vậy $\frac{S_2}{S_3} = 1$.

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) = \begin{cases} x+m, & x \geq 0 \\ e^{2x}, & x < 0 \end{cases}$ (m là hằng số). Biết

$$\int_{-1}^2 f(x)dx = a + \frac{b}{e^2} \text{ trong đó } a, b \text{ là các số hữu tỉ. Tính } a+b.$$

A. 4.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

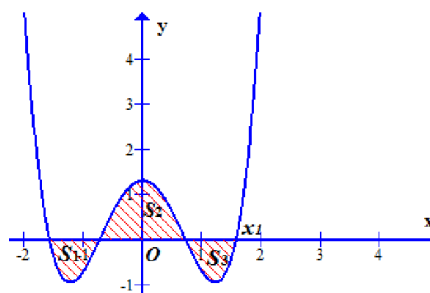
Do hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục tại $x=0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow m=1$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó ta có } \int_{-1}^2 f(x)dx &= \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx = \int_{-1}^0 e^{2x}dx + \int_0^2 (x+1)dx \\ &= \frac{e^{2x}}{2} \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^2 = \frac{1}{2} - \frac{e^{-2}}{2} + 4 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2e^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } a = \frac{9}{2}; b = -\frac{1}{2}.$$

Vậy $a+b=4$.

Câu 38. Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + m$ có đồ thị (C_m) , với m là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ



Gọi S_1, S_2, S_3 là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Giá trị của m để $S_1 + S_3 = S_2$ là

A. $\frac{5}{4}$.

B. $-\frac{5}{4}$.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $-\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi x_1 là nghiệm dương lớn nhất của phương trình $x^4 - 3x^2 + m = 0$, ta có $m = -x_1^4 + 3x_1^2$ (1).

Vì $S_1 + S_3 = S_2$ và $S_1 = S_3$ nên $S_2 = 2S_3$ hay $\int_0^{x_1} f(x)dx = 0$.

$$\text{Mà } \int_0^{x_1} f(x) dx = \int_0^{x_1} (x^4 - 3x^2 + m) dx = \left(\frac{x^5}{5} - x^3 + mx \right) \Big|_0^{x_1} = \frac{x_1^5}{5} - x_1^3 + mx_1 = x_1 \left(\frac{x_1^4}{5} - x_1^2 + m \right).$$

$$\text{Do đó, } x_1 \left(\frac{x_1^4}{5} - x_1^2 + m \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_1^4}{5} - x_1^2 + m = 0 \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2), ta có phương trình } \frac{x_1^4}{5} - x_1^2 - x_1^4 + 3x_1^2 = 0 \Leftrightarrow -4x_1^4 + 10x_1^2 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Vậy } m = -x_1^4 + 3x_1^2 = \frac{5}{4}.$$

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x) = 1$, $y = g(x) = |x|$. Giá trị $I = \int_{-1}^2 \min\{f(x); g(x)\} dx$

A. 1.

B. $\frac{3}{2}$.

C. 2.

D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Xét bất phương trình } |x| > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases}.$$

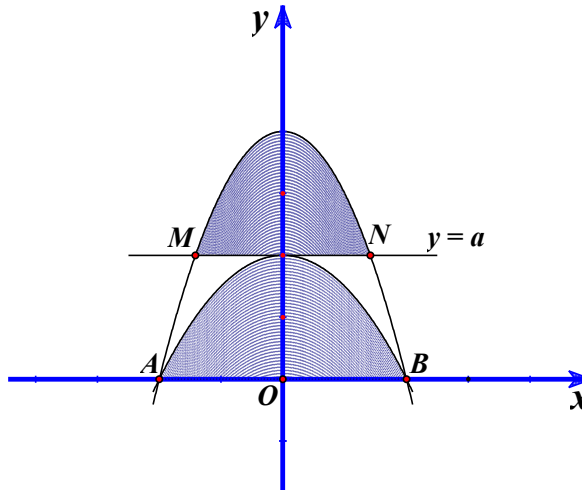
$$\text{Vậy } \min\{1; |x|\} = 1 \text{ khi } 1 < x \text{ hoặc } x < -1$$

$$\min\{1; |x|\} = |x| \text{ khi } -1 < x < 1$$

$$\text{Xét } I = \int_{-1}^2 \min\{f(x); g(x)\} dx = \int_{-1}^2 \min\{1; |x|\} dx = \int_{-1}^1 \min\{1; |x|\} dx + \int_1^2 \min\{1; |x|\} dx$$

$$I = \int_{-1}^1 |x| dx + \int_1^2 dx = \int_{-1}^0 -x dx + \int_0^1 x dx + \int_1^2 dx = \left. -\frac{x^2}{2} \right|_{-1}^0 + \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 + x \Big|_1^2 = 2.$$

Câu 40. Cho parabol $(P_1): y = -x^2 + 4$ cắt trục hoành tại hai điểm A, B và đường thẳng $d: y = a$ ($0 < a < 4$). Xét parabol (P_2) đi qua A, B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y = a$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d . S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành. Biết $S_1 = S_2$ (tham khảo hình vẽ bên).



$$\text{Tính } T = a^3 - 8a^2 + 48a.$$

A. $T = 99$.

B. $T = 64$.

C. $T = 32$.

D. $T = 72$.

Lời giải

Chọn B

- Gọi A, B là các giao điểm của (P_1) và trục $Ox \Rightarrow A(-2;0), B(2;0) \Rightarrow AB = 4$.
- Gọi M, N là giao điểm của (P_1) và đường thẳng $d \Rightarrow M(-\sqrt{4-a}; a), N(\sqrt{4-a}; a)$
 $\Rightarrow MN = 2\sqrt{4-a}$.
- Nhận thấy: (P_2) là parabol có phương trình $y = -\frac{a}{4}x^2 + a$.
- Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng ta được:

$$S_1 = 2 \int_a^4 \sqrt{4-y} \cdot dy = -\frac{4}{3} \left((4-y)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_a^4 = \frac{4}{3} (4-a) \sqrt{4-a}$$

$$S_2 = 2 \int_0^2 \left(-\frac{a}{4}x^2 + a \right) \cdot dx = 2 \left(-\frac{ax^3}{12} + ax \right) \Big|_0^2 = \frac{8a}{3}$$
- Theo giả thiết: $S_1 = S_2 \Rightarrow \frac{4}{3} (4-a) \sqrt{4-a} = \frac{8a}{3} \Leftrightarrow (4-a)^3 = 4a^2 \Leftrightarrow a^3 - 8a^2 + 48a = 64$.

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 - m & (x \geq 0) \\ 2 \cos x - 3 & (x < 0) \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Giá trị $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f|2 \cos x - 1| \sin x dx$

A. $-\frac{2}{3}$

B. 0.

C. $\frac{1}{3}$

D. $-\frac{1}{3}$

Lời giải

Chọn A

Hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ suy ra

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - m) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2 \cos x - 3) \Rightarrow m = 1$$

Xét bất phương trình $2 \cos x - 1 > 0$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

$$\Leftrightarrow 2 \cos x > 1 \Leftrightarrow \cos x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\pi}{3}$$

Vậy $2 \cos x - 1 > 0$ khi $0 < x < \frac{\pi}{3}$,

$$2 \cos x - 1 < 0 \text{ khi } \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f|2 \cos x - 1| \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f|2 \cos x - 1| \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f|2 \cos x - 1| \sin x dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(2 \cos x - 1) \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(1 - 2 \cos x) \sin x dx$$

$$\text{Xét } I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(2 \cos x - 1) \sin x dx$$

$$\text{Xét } t = 2 \cos x - 1 \Rightarrow dt = -2 \sin x dx \Rightarrow \frac{-dt}{2} = \sin x dx$$

x	0	$\frac{\pi}{3}$
t	1	0

$$\text{Suy ra } I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(2\cos x - 1) \sin x dx = \int_1^0 f(t) \frac{-dt}{2} = \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - 1) dx = \frac{x^3}{6} - \frac{x}{2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Xét } I_2 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(1 - 2\cos x) \sin x dx$$

$$\text{Xét } t = 1 - 2\cos x \Rightarrow dt = 2\sin x dx \Rightarrow \frac{dt}{2} = \sin x dx$$

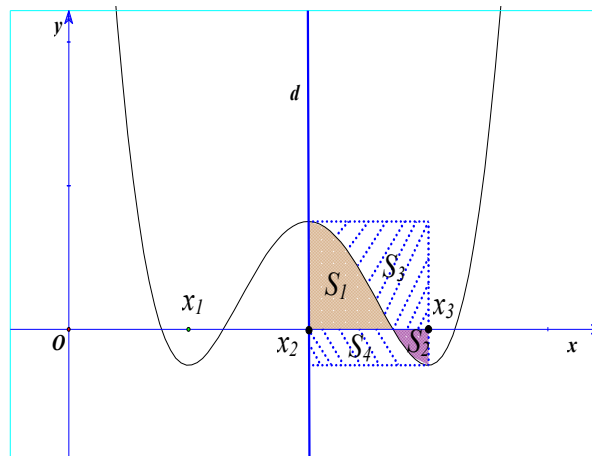
x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
t	0	1

$$\text{Suy ra } I_2 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(2\cos x - 1) \sin x dx = \int_0^1 f(t) \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - 1) dx = \frac{x^3}{6} - \frac{x}{2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Suy ra } I = I_1 + I_2 = -\frac{2}{3}.$$

- Câu 42.** Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Biết hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_3 = x_1 + 2$, $f(x_1) + f(x_3) + \frac{2}{3}f(x_2) = 0$ và (C) nhận đường thẳng $d: x = x_2$ làm trục đối xứng. Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 là diện tích của các miền hình phẳng được đánh dấu như hình bên. Tỉ số $\frac{S_1 + S_2}{S_3 + S_4}$ gần kết quả nào nhất



A. 0,60.

B. 0,55.

C. 0,65.

D. 0,70.

Lời giải

Chọn A

Nhận thấy kết quả bài toán không đổi khi ta tịnh tiến đồ thị (C) sang bên trái sao cho đường thẳng $d: x = x_2$ trùng với trục tung khi đó (C) là đồ thị của hàm trùng phương $y = g(x)$ có ba điểm cực trị $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$. Suy ra $y = g(x) = k(x^4 - 2x^2) + c$ ($k > 0$)

$$\text{Lại có } f(x_1) + f(x_3) + \frac{2}{3}f(x_2) = 0 \Rightarrow -2k + 2c + \frac{2}{3}c = 0 \Leftrightarrow c = \frac{3}{4}k$$

$$\text{Suy ra: } y = g(x) = k(x^4 - 2x^2) + \frac{3}{4}k$$

$$\text{Khi đó: } S_1 + S_2 = k \int_0^1 x^4 - 2x^2 + \frac{3}{4} dx = \frac{28\sqrt{2} - 17}{60} k.$$

$$\text{Ta lại có: } g(0) - g(1) = k \Rightarrow S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = k \cdot 1 = k.$$

$$\text{Suy ra } S_3 + S_4 = k - \frac{28\sqrt{2} - 17}{60} k = \frac{77 - 28\sqrt{2}}{60} k \Rightarrow \frac{S_1 + S_2}{S_3 + S_4} = \frac{28\sqrt{2} - 17}{77 - 28\sqrt{2}} \approx 0,604$$

Câu 43. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{khi } x \geq 4 \\ \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x & \text{khi } x < 4 \end{cases}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\sin^2 x + 3) \sin 2x dx$ bằng

A. $\frac{28}{3}$.

B. 8.

C. $\frac{341}{48}$.

D. $\frac{341}{96}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (2x - 4) = 4; \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{1}{4}x^3 - x^2 + x \right) = 4; f(4) = 4$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = f(4)$$

Nên hàm số đã cho liên tục tại $x = 4$

$$\text{Xét } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\sin^2 x + 3) \sin 2x dx$$

$$\text{Đặt } 2\sin^2 x + 3 = t \Rightarrow \sin 2x dx = \frac{1}{2} dt$$

$$\text{Với } x = 0 \Rightarrow t = 3$$

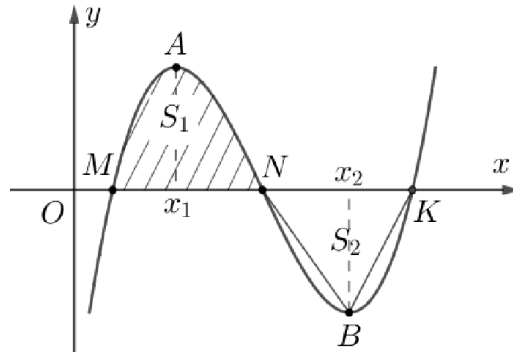
$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 5$$

$$\Rightarrow I = \int_3^5 f(t) \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int_3^5 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_3^4 \left(\frac{1}{4}t^3 - t^2 + t \right) dt + \frac{1}{2} \int_4^5 (2t - 4) dt = \frac{341}{96}.$$

Câu 44. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) trong hình bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa $f(x_1) + f(x_2) = 0$. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị (C) ; M, N, K là giao điểm của (C) với trục hoành; S là diện tích của hình phẳng được gạch

trong hình, S_2 là diện tích tam giác NBK . Biết tứ giác $MAKB$ nội tiếp đường tròn, khi đó tỉ số

$\frac{S_1}{S_2}$ bằng



A. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

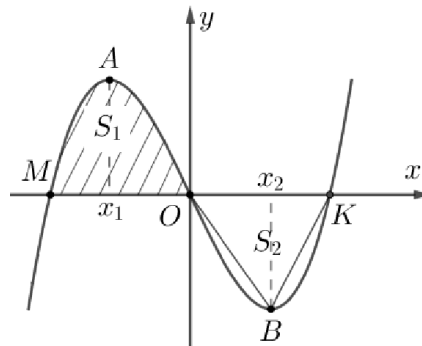
C. $\frac{5\sqrt{3}}{6}$.

D. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Kết quả bài toán không thay đổi khi ta tịnh tiến đồ thị đồ thị (C) sang trái sao cho điểm uốn trùng với gốc tọa độ O. (như hình dưới)



Do $f(x)$ là hàm số bậc ba, nhận gốc tọa độ là tâm đối xứng ($O \equiv N$).

Đặt $x_1 = -a$, $x_2 = a$, với $a > 0 \Rightarrow f'(x) = k(x^2 - a^2)$ với $k > 0$

$$\Rightarrow f(x) = k\left(\frac{1}{3}x^3 - a^2x\right) \Rightarrow x_M = -a\sqrt{3}, x_K = a\sqrt{3}$$

Có $MAKB$ nội tiếp đường tròn tâm O $\Rightarrow OA = OM = a\sqrt{3}$

$$\text{Có } f(x_1) = \sqrt{OA^2 - x_1^2} \Leftrightarrow f(-a) = a\sqrt{2} \Leftrightarrow k\left(-\frac{1}{3}a^3 + a^3\right) = a\sqrt{2} \Leftrightarrow k = \frac{3\sqrt{2}}{2a^2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3\sqrt{2}}{2a^2}\left(\frac{1}{3}x^3 - a^2x\right)$$

$$S_1 = \int_{-a\sqrt{3}}^0 f(x)dx = \frac{3\sqrt{2}}{2a^2}\left(\frac{1}{12}x^4 - \frac{a^2}{2}x^2\right)\Bigg|_{-a\sqrt{3}}^0 = \frac{9\sqrt{2}}{8}a^2$$

$$S_2 = S_{\Delta AMO} = \frac{1}{2} f(-a) \cdot MO = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{2} a^2$$

$$\text{Vậy } \frac{S_1}{S_2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

- Câu 45.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 2 & \text{khi } x \geq 0 \\ 3x^2 - x + 2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(3 - 4\cos x) \sin x dx$ bằng
- A. $\frac{37}{24}$. B. $\frac{37}{6}$. C. 6. D. 12.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x} + 2) = 2; \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x^2 - x + 2) = 2; f(0) = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

Nên hàm số đã cho liên tục tại $x = 0$

$$\text{Xét } I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(3 - 4\cos x) \sin x dx$$

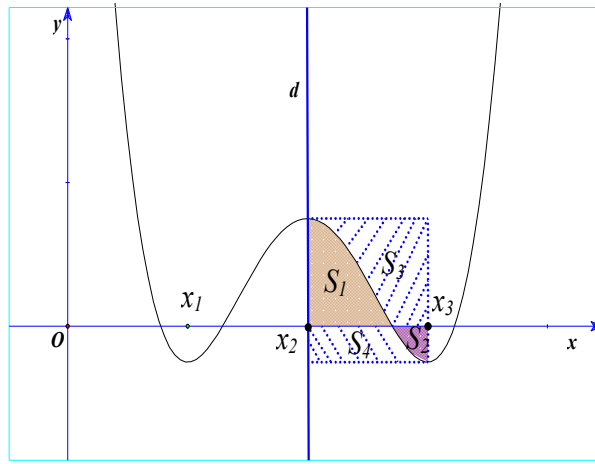
$$\text{Đặt } 3 - 4\cos x = t \Rightarrow \sin x dx = \frac{1}{4} dt$$

$$\text{Với } x = 0 \Rightarrow t = -1$$

$$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = 1$$

$$\Rightarrow I = \int_{-1}^1 f(t) \frac{1}{4} dt = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 f(t) dt = \frac{1}{4} \int_{-1}^0 (3t^2 - t + 2) dt + \frac{1}{4} \int_0^1 (\sqrt{t} + 2) dt = \frac{37}{24}.$$

- Câu 46.** Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Biết hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_3 = x_1 + 2$, $f(x_1) + f(x_3) + \frac{2}{3}f(x_2) = 0$ và (C) nhận đường thẳng $d: x = x_2$ làm trục đối xứng. Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 là diện tích của các miền hình phẳng được đánh dấu như hình bên. Tỉ số $\frac{S_1 + S_2}{S_3 + S_4}$ gần kết quả nào nhất

**A. 0,60.****B. 0,55.****C. 0,65.****D. 0,70.****Lời giải****Chọn A**

Nhận thấy kết quả bài toán không đổi khi ta tịnh tiến đồ thị (C) sang bên trái sao cho đường thẳng $d: x = x_2$ trùng với trục tung khi đó (C) là đồ thị của hàm trùng phương $y = g(x)$ có ba điểm cực trị $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$. Suy ra $y = g(x) = k(x^4 - 2x^2) + c$ ($k > 0$)

$$\text{Lại có } f(x_1) + f(x_3) + \frac{2}{3}f(x_2) = 0 \Rightarrow -2k + 2c + \frac{2}{3}c = 0 \Leftrightarrow c = \frac{3}{4}k$$

$$\text{Suy ra: } y = g(x) = k(x^4 - 2x^2) + \frac{3}{4}k$$

$$\text{Khi đó: } S_1 + S_2 = k \int_0^1 |x^4 - 2x^2 + \frac{3}{4}| dx = \frac{28\sqrt{2} - 17}{60} k.$$

$$\text{Ta lại có: } g(0) - g(1) = k \Rightarrow S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = k \cdot 1 = k.$$

$$\text{Suy ra } S_3 + S_4 = k - \frac{28\sqrt{2} - 17}{60} k = \frac{77 - 28\sqrt{2}}{60} k \Rightarrow \frac{S_1 + S_2}{S_3 + S_4} = \frac{28\sqrt{2} - 17}{77 - 28\sqrt{2}} \approx 0,604$$

Câu 47. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{khi } x \geq 2 \\ x^3 - x^2 - 8x + 10 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Biết hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 2$. Tính

$$I = \int_0^4 f(x) dx$$

A. 3.**B. 0.****C. -2.****D. 4.****Lời giải****Chọn D**

• Hàm số có đạo hàm tại $\Leftrightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Leftrightarrow 4 + 2a + b = -2 \Leftrightarrow 2a + b = -6$. (1)

$$\bullet \text{ Có } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - x^2 - 8x + 10 - 4 - 2a - b}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)^2(x+3)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} [(x-2)(x+3)] = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + ax + b - 4 - 2a - b}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2+a)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+a+2) = a+4.$$

Hàm số có đạo hàm tại $x = 2$ nên hàm số liên tục tại $x = 2$

$$\text{suy ra } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \Leftrightarrow a + 4 = 0 \Leftrightarrow a = -4. \quad (2)$$

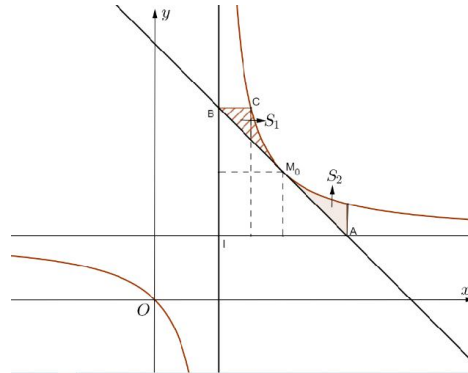
Từ (1) và (2), suy ra $a = -4$ và $b = 2$.

$$\text{Khi đó } f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 2 & \text{khi } x \geq 2 \\ x^3 - x^2 - 8x + 10 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^4 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx \\ &= \int_0^2 (x^3 - x^2 - 8x + 10) dx + \int_2^4 (x^2 - 4x + 2) dx \\ &= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 10x \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 2x \right) \Big|_2^4 = \frac{16}{3} - \frac{4}{3} = 4 \end{aligned}$$

Vậy $I = 4$.

Câu 48. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị (C) . Gọi giao điểm của hai đường tiệm cận là I . Điểm $M_0(x_0; y_0)$ di động trên (C) , tiếp tuyến tại đó cắt hai tiệm cận lần lượt tại A, B và $S_{\Delta IAB} = 2$. Tìm giá trị IM_0^2 sao cho $\frac{S_1 + S_2}{S_{\Delta IAB}} = 1$ (với S_1, S_2 là 2 hình phẳng minh họa bên dưới)



A. 2.

B. $\frac{41}{20}$.

C. $\frac{169}{60}$.

D. $\frac{189}{60}$.

Lời giải

Chọn B

Nhận thấy kết quả bài toán không thay đổi khi ta tịnh tiến đồ thị (C) theo $\overrightarrow{IO}$. Khi đó hai tiệm cận của (C) là hai trục tọa độ.

$$\text{Và hàm số của đồ thị } (C) \text{ trở thành: } y = \frac{\alpha}{x} \quad (\alpha > 0) \Rightarrow y' = -\frac{\alpha}{x^2}.$$

$$\text{Gọi } d \text{ là tiếp tuyến tại } M_0(x_0; y_0) \Rightarrow d: y = -\frac{\alpha}{x_0^2}(x - x_0) + \frac{\alpha}{x_0} = -\frac{\alpha}{x_0^2}x + \frac{2\alpha}{x_0}$$

$$\text{Suy ra: } Ox \cap d = A(2x_0; 0) \text{ và } Oy \cap d = B\left(0; \frac{2\alpha}{x_0}\right)$$

$$\Rightarrow S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = 2\alpha \Rightarrow 2\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\Rightarrow (c) y = \frac{1}{x}, d: y = -\frac{1}{x_0^2}x + \frac{2}{x_0}, B\left(0; \frac{2}{x_0}\right), C\left(\frac{x_0}{2}; \frac{2}{x_0}\right)$$

Và

$$\Rightarrow S_1 = \frac{1}{2} x_0 \left(\frac{2}{x_0} - \frac{1}{x_0} \right) - \int_{\frac{x_0}{2}}^{x_0} \left(\frac{2}{x_0} - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{3}{x_0^2} - \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \int_{x_0}^{2x_0} \left(\frac{1}{x} \right) dx - \frac{1}{2} (2x_0 - x_0) \frac{1}{x_0} = \frac{3}{4x_0^2} - \frac{1}{2}$$

$$\text{Theo giả thiết } \frac{S_1 + S_2}{S_{\Delta IAB}} = 1 \Rightarrow S_1 + S_2 = S_{\Delta IAB} \Rightarrow \frac{3}{x_0^2} + \frac{3}{4x_0^2} - 1 = 2 \Rightarrow x_0^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow y_0^2 = \frac{4}{5}$$

$$\text{Vậy } IM_0^2 = x_0^2 + y_0^2 = \frac{41}{20}.$$

Câu 49. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{khi } x \leq 2 \\ x + 5 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$. Tính $I = \int_0^{\sqrt{e^4-1}} \frac{x}{x^2+1} \cdot f[\ln(x^2+1)] dx$.

A. $(-2; 3)$.

B. $(3; -2)$.

C. $(2; -1)$.

D. $(-1; 2)$.

Lời giải

Chọn A

□ Với $x < 2$, ta có $f(x) = x^2 + 2x - 1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(-\infty; 2)$.

□ Với $x > 2$, ta có $f(x) = x + 5$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(2; +\infty)$.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 2x - 1) = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 5) = 7; f(2) = 7.$$

Do đó $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$ nên hàm số liên tục tại $x = 2$.

Khi đó hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Đặt } t = \ln(x^2 + 1) \longrightarrow dt = \frac{2x dx}{x^2 + 1} \Rightarrow \frac{x dx}{x^2 + 1} = \frac{dt}{2}.$$

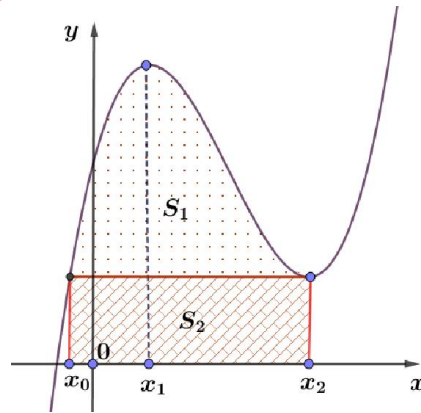
Đổi cận:

Với $x = 0$ ta có $t = 0$

Với $x = \sqrt{e^4 - 1}$ ta có $t = 4$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } I &= \frac{1}{2} \int_0^4 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^2 (x^2 + 2x - 1) dx + \int_2^4 (x + 5) dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x^3}{3} + x^2 - x \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{x^2}{2} + 5x \right) \Big|_2^4 \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{14}{3} + 16 \right) = \frac{31}{3}. \end{aligned}$$

Câu 50. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên dưới. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hai điểm cực trị thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) - 3f(x_2) = 0$. Đường thẳng song song với trục Ox và qua điểm cực tiểu cắt đồ thị hàm số tại điểm thứ hai có hoành độ x_0 và $x_1 = x_0 + 1$. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ (S_1 và S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch ở hình bên dưới).



A. $\frac{27}{8}$.

B. $\frac{5}{8}$.

C. $\frac{3}{8}$.

D. $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn A

+) Gọi $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, với $a > 0 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

+) Theo giả thiết ta có $f'(x_1) = f'(x_2) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3a(x - x_1)(x - x_2) = 3a(x - x_1)(x - x_1 - 2)$

$$\Rightarrow f'(x) = 3a(x - x_1)^2 - 6a(x - x_1).$$

$$\Rightarrow f(x) = \int f'(x) dx = a(x - x_1)^3 - 3a(x - x_1)^2 + C.$$

+) Ta có $f(x_1) - 3f(x_2) = 0 \Rightarrow f(x_1) - 3f(x_1 + 2) = 0$

$$\Leftrightarrow C - 3(8a - 12a + C) = 0 \Leftrightarrow -2C + 12a = 0 \Leftrightarrow C = 6a.$$

$$\text{Do đó } f(x) = a(x - x_1)^3 - 3a(x - x_1)^2 + 6a.$$

+) S_2 là diện tích hình chữ nhật có cạnh bằng 3 và $f(x_2) = 8a - 12a + 6a = 2a$

+) S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = x_0 = x_1 - 1$, $x = x_2 = x_1 + 2$, $y = f(x_2) = 2a$ và $f(x) = a(x - x_1)^3 - 3a(x - x_1)^2 + 6a$ nên suy ra

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{x_1-1}^{x_1+2} [f(x) - 2a] dx = \int_{x_1-1}^{x_1+2} [a(x - x_1)^3 - 3a(x - x_1)^2 + 4a] dx \\ &= \left[\frac{a(x - x_1)^4}{4} - 3a \frac{(x - x_1)^3}{3} + 4ax \right]_{x_1-1}^{x_1+2} = \frac{27a}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{S_1}{S_2} = \frac{27}{8}.$$

Câu 51. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{khi } x \leq 0 \\ x^2+4x-2 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Tích phân $I = \int_0^{\pi} \sin 2x \cdot f(\cos x) dx$ bằng

A. $I = \frac{9}{2}$.

B. $I = -\frac{9}{2}$.

C. $I = -\frac{7}{6}$.

D. $I = \frac{7}{6}$.

Lời giải

Chọn A

Do $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = -2$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 0$.

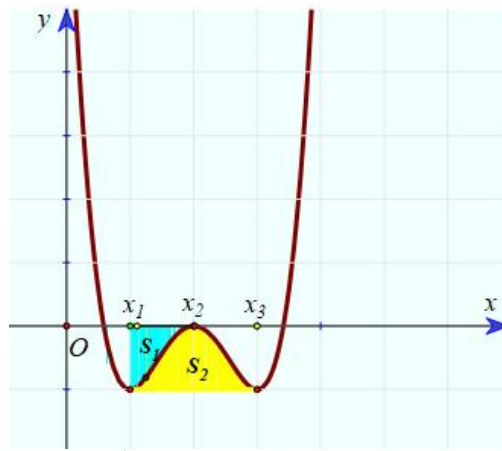
Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = \pi \Rightarrow t = -1$.

Ta có:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin 2x \cdot f(\cos x) dx &= \int_0^\pi 2 \sin x \cdot \cos x \cdot f(\cos x) dx = - \int_1^{-1} 2t \cdot f(t) dt = 2 \int_{-1}^1 t \cdot f(t) dt \\ &= 2 \int_{-1}^0 x \cdot f(x) dx + 2 \int_0^1 x \cdot f(x) dx = 2 \int_0^1 x(x^2 + 4x - 2) dx + 2 \int_{-1}^0 x(2x - 2) dx \\ &= 2 \left(\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_0^1 + 4 \cdot \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 = \frac{7}{6} + \frac{10}{3} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Câu 52. Cho hàm số bậc bốn trùng phương $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại ba điểm x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$) thỏa mãn $x_1 + x_3 = 4$. Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



A. $\frac{2}{5}$.

B. $\frac{7}{16}$.

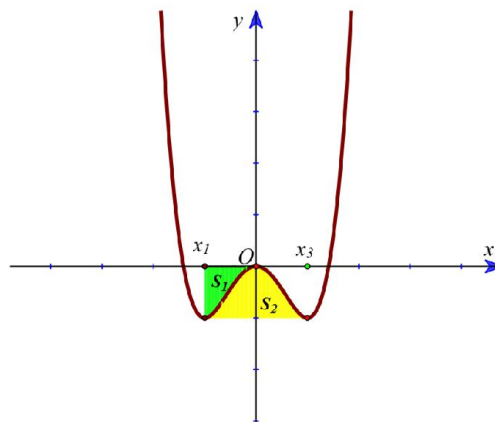
C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{7}{15}$.

Lời giải

Chọn B

Rõ ràng kết quả bài toán không đổi khi ta tịnh tiến đồ thị sang trái sao cho $x_2 = 0$.



Gọi $g(x) = ax^4 + bx^2 + c$, ta có hàm số $g(x)$ là chẵn và có 3 điểm cực trị tương ứng là $-2; 0; 2$ là các nghiệm của phương trình $4ax^3 + 2bx = 0$.

Dựa vào đồ thị $g(x)$, ta có $g(0) = 0$. Từ đó suy ra $g(x) = a(x^4 - 8x^2)$ với $a > 0$.

Do tính đối xứng của hàm trùng phương nên diện tích hình chữ nhật bằng

$$2S_1 + S_2 = |g(2)| \cdot 4 = 64a$$

Ta có S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $g(x)$, trục hoành, đường thẳng

$$x = -2, x = 0. S_1 = \int_{-2}^0 |g(x)| dx = a \int_{-2}^0 |x^4 - 8x^2| dx = \frac{224a}{15}. \text{ Suy ra } S_2 = 64a - 2 \cdot \frac{224a}{15} = \frac{512a}{15}.$$

$$\text{Vậy } \frac{S_1}{S_2} = \frac{224}{512} = \frac{7}{16}.$$

Nguyễn Bảo Vương