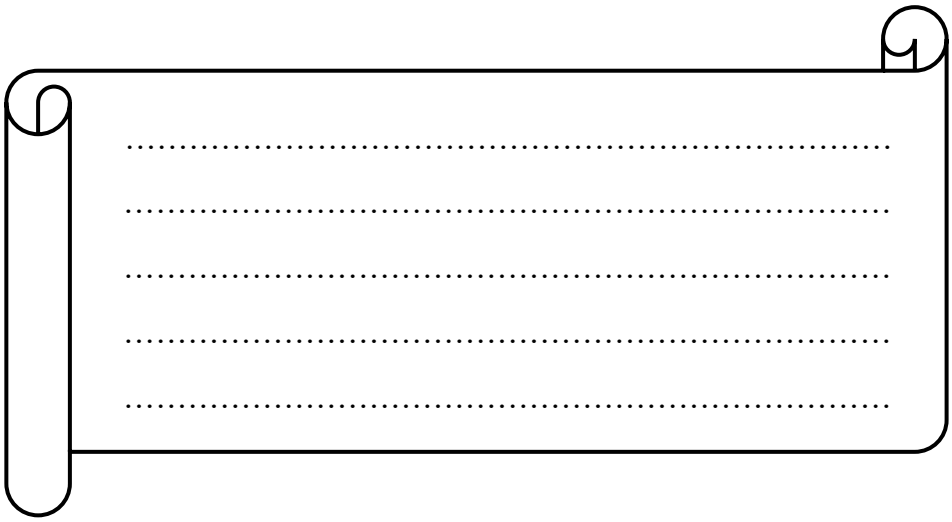
NẮM TRỌN CHUYÊN ĐỀ MŨ - LOGARIT TÍCH PHÂN

(Dùng cho học sinh 11,12 và luyện thi Đại học năm 2021)



LỜI NÓI ĐẦU

Các em học sinh, quý thầy cô và bạn đọc thân mến !

Kỳ thi THPT Quốc Gia là một trong những kỳ thi quan trọng nhất đối với mỗi chúng ta. Để có thể tham dự và đạt được kết quả cao nhất thì việc trang bị đầy đủ kiến thức và kĩ năng cần thiết là một điều vô cùng quan trọng. Thấu hiểu được điều đó, chúng tôi đã cùng nhau tiến hành biên soạn bộ sách **" Nắm trọn các chuyên đề môn Toán 2021 "** giúp các em học sinh ôn luyện và hoàn thiện những kiến thức trọng tâm phục vụ kỳ thi, làm tài liệu giảng dạy và tham khảo cho quý thầy cô trước sự thay đổi về phương pháp dạy học và kiểm tra của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Bộ sách chúng tôi biên soạn gồm 4 quyển:

- **Quyển 1:** Nắm chọn chuyên đề Hàm số
- **Quyển 2:** Nắm trọn chuyên đề Mũ – Logarit và Tích phân
- **Quyển 3:** Hình học không gian
- **Quyển 4:** Hình học Oxyz và Số phức

Trong mỗi cuốn sách, chúng tôi trình bày một cách rõ ràng và khoa học – tạo sự thuận lợi nhất cho các em học tập và tham khảo. Đầu tiên là tóm tắt toàn bộ lý thuyết và phương pháp giải các dạng toán. Tiếp theo là hệ thống các ví dụ minh họa đa dạng, tiếp cận xu hướng ra đề của kỳ thi THPT Quốc Gia các năm gần đây bao gồm 4 mức độ: Nhận biết, Thông hiểu, Vận dụng và Vận dụng cao. Cuối cùng là phần bài tập rèn luyện từ cơ bản đến nâng cao để các em hoàn thiện kiến thức, rèn tư duy và rèn luyện tốc độ làm bài. Tất cả các bài tập trong sách chúng tôi đều tiến hành giải chi tiết 100% để các em tiện lợi cho việc so sánh đáp án và tra cứu thông tin.

Để có thể biên soạn đầy đủ và hoàn thiện bộ sách này, nhóm tác giả có sưu tầm, tham khảo một số bài toán trích từ đề thi của các Sở, trường Chuyên trên các nước và một số bài toán của các thầy/cô trên toàn quốc. Chân thành cảm ơn quý thầy cô đã sáng tạo ra các bài toán hay và các phương pháp giải toán hiệu quả nhất.

Mặc dù nhóm tác giả đã tiến hành biên soạn và phản biện kĩ lưỡng nhất nhưng vẫn không tránh khỏi sai sót. Chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến phản hồi và đóng góp từ quý thầy cô, các em học sinh và bạn đọc để cuốn sách trở nên hoàn thiện hơn. Mọi ý kiến đóng góp, quý vị vui lòng gửi về địa chỉ:

- **Gmail:** Blearningtuduytoanhoc4.0@gmail.com
- **Fanpage: 2003 – ÔN THI THPT QUỐC GIA**

Cuối cùng, nhóm tác giả xin gửi lời chúc sức khỏe đến quý thầy cô, các em học sinh và quý bạn đọc. Chúc quý vị có thể khai thác hiệu quả nhất các kiến thức khi cầm trên tay cuốn sách này !

Trân trọng./

NHÓM TÁC GIẢ

MỤC LỤC

A. PHẦN I: MŨ VÀ LOGARIT	Trang
CHỦ ĐỀ 1: MỞ ĐẦU VỀ LŨY THỪA.....	1
Dạng 1: Tính, rút gọn, so sánh các số liên quan đến lũy thừa	2
CHỦ ĐỀ 2: MŨ - LOGARIT.....	14
Dạng 1: Biến đổi mũ - logarit.....	15
CHỦ ĐỀ 3: HÀM SỐ LŨY THỪA, MŨ VÀ LOGARIT.....	31
Dạng 1: Bài tập về hàm số lũy thừa, hàm số mũ và hàm số logarit	37
CHỦ ĐỀ 4: PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT.....	44
Dạng 1: Bài tập về phương trình mũ, phương trình logarit số 01.....	58
Dạng 2: Bài tập về phương trình mũ, phương trình logarit số 02.....	78
Dạng 3: Bài tập về phương trình mũ, phương trình logarit chứa tham số 01.....	122
Dạng 4: Bài tập về phương trình mũ, phương trình logarit chứa tham số 02.....	148
CHỦ ĐỀ 5: BPT MŨ, BPT LOGARIT.....	172
Dạng 1: Biện luận nghiệm của phương trình mũ - logarit.....	183
Dạng toán tìm GTLN và GTNN của hàm số mũ – logarit.....	211
Dạng toán liên quan đến hàm đặc trưng.....	232
Dạng toán tìm cặp số nguyên thỏa mãn điều kiện.....	259
Dạng toán lãi suất.....	268
Dạng toán thực tế liên quan đến sự tang trưởng.....	290
Dạng toán thường xuất hiện trong đề thi của Bộ.....	307
B. PHẦN II: NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN.....	318
CHỦ ĐỀ 1: NGUYÊN HÀM.....	319
Dạng 1: Phương pháp tính nguyên hàm.....	325
CHỦ ĐỀ 2: TÍCH PHÂN.....	346
Dạng 1: Phương pháp tính tích phân.....	353
Dạng 2: Tích phân cho bởi nhiều hàm.....	370
Dạng 3: Tích phân hàm ẩn phần 1.....	378
Dạng 3: Tích phân hàm ẩn phần 2.....	403
Dạng 4: Ứng dụng tích phân tính diện tích, thể tích.....	417
Dạng 5: Tích phân trong đề thi của Bộ.....	432

PHẦN I

MŨ VÀ LOGARIT

CHỦ ĐỀ 1: LŨY THỪA

LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

- Cho n là một số nguyên dương. Với a là một số thực tùy ý, lũy thừa bậc n của a là tích của n thừa số a $\quad a^n = \underbrace{a.a.....a}_{n}$ (n thừa số)
- Ta gọi a là cơ số, n là số mũ của lũy thừa a^n.
- Với $a \neq 0, n = 0$ hoặc n là một số nguyên âm thì lũy thừa bậc n của a là số a^n xác định bởi $a^0 = 1; a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.
- Chú ý rằng: 0^0 và 0^{-n} không có nghĩa
- Cho $a > 0$ và số hữu tỉ $r = \dfrac{m}{n}$; trong đó $m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{R}, n \geq 2$. Khi đó $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

2. Một số tính chất của lũy thừa

- Với $a, b \neq 0$ và $m, n \in \mathbb{Z}$, ta có:

$\oplus$ $a^m.a^n = a^{n+m}$; $\quad \oplus$ $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; $\quad \oplus$ $\left(a^m\right)^n = a^{m.n}$;

$\oplus$ $\left(a.b\right)^m = a^m.b^m$ $\quad \oplus$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$; $\quad \oplus$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^m$;

$\oplus$ $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$; $\quad \oplus$ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\left(a > 0, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*\right)$

- Với $a > 1$ thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m > n$. Còn với $0 < a < 1$ thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m < n$.
- Với mọi $0 < a < b$, ta có $a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0$; $\quad a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0$.

3. Căn bậc n

- Định nghĩa: cho số thực b và số nguyên dương $n\left(n \geq 2\right)$. Số a được gọi căn bậc n của số b nếu $a^n = b$.
- Một số chú ý quan trọng
  - Nếu n lẻ và $a \in \mathbb{R}$ thì có duy nhất một căn bậc n, được kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$.
  - Nếu n chẵn thì có các trường hợp sau:
    - Với $a < 0$ thì không tồn tại căn bậc n của a.
    - Với $a = 0$ thì có một căn bậc n của a là số 0.
    - Với $a > 0$ thì có hai căn bậc n là $\pm\sqrt[n]{a}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

DẠNG 1: TÍNH, RÚT GỌN, SO SÁNH CÁC SỐ LIÊN QUAN ĐẾN LŨY THỪA

Câu 1: Cho a, b là các số thực dương. Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3.b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}.b^6}}}$ được kết quả là

A. ab^2. **B.** a^2b. **C.** ab. **D.** a^2b^2.

Câu 2: Biểu thức $T=\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a}}$ với $a>0$. Viết biểu thức T dưới dạng luỹ thừa với số mũ hữu tỉ là:

A. $a^{\frac{3}{5}}$. **B.** $a^{\frac{2}{15}}$. **C.** $a^{\frac{1}{3}}$. **D.** $a^{\frac{4}{15}}$.

Câu 3: Cho a là số thực dương, khác 1. Khi đó $\sqrt[4]{a^{\frac{2}{3}}}$ bằng

A. $a^{\frac{8}{3}}$. **B.** $\sqrt[6]{a}$. **C.** $\sqrt[3]{a^2}$. **D.** $a^{\frac{3}{8}}$.

Câu 4: Cho $0<a\neq 1$. Giá trị của biểu thức $P=\log_a\left(a.\sqrt[3]{a^2}\right)$ là

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** 3. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Câu 5: Rút gọn biểu thức $P=x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}$ với $x>0$.

A. $P=\sqrt{x}$. **B.** $P=x^{\frac{1}{8}}$. **C.** $P=x^{\frac{2}{9}}$. **D.** $P=x^2$.

Câu 6: Tính giá trị của biểu thức $A=\dfrac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}}.3^{1+\sqrt{5}}}$.

A. 1. **B.** $6^{-\sqrt{5}}$. **C.** 18. **D.** 9.

Câu 7: Rút gọn biểu thức $P=x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[4]{x}$, với x là số thực dương.

A. $P=x^{\frac{1}{12}}$. **B.** $P=x^{\frac{7}{12}}$. **C.** $P=x^{\frac{2}{3}}$. **D.** $P=x^{\frac{2}{7}}$.

Câu 8: Cho $x>0$, $y>0$. Viết biểu thức $x^{\frac{4}{5}}.\sqrt[6]{x^5\sqrt{x}}$ về dạng x^m và biểu thức $y^{\frac{4}{5}}:\sqrt[6]{y^5\sqrt{y}}$ về dạng y^n. Tính $m-n$.

A. $\dfrac{11}{6}$. **B.** $-\dfrac{8}{5}$. **C.** $-\dfrac{11}{6}$. **D.** $\dfrac{8}{5}$.

Câu 9: Cho $a>0$, $b>0$ và x, y là các số thực bất kỳ. Đẳng thức nào sau đúng?

A. $(a+b)^x=a^x+b^x$. **B.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=a^x.b^{-x}$. **C.** $a^{x+y}=a^x+a^y$. **D.** $a^xb^y=(ab)^{xy}$.

Câu 10: Rút gọn biểu thức $P=x^{\frac{3}{2}}.\sqrt[5]{x}$?

A. $x^{\frac{4}{7}}$. **B.** $x^{\frac{3}{10}}$. **C.** $x^{\frac{17}{10}}$. **D.** $x^{\frac{13}{2}}$.

Câu 11: Cho $a>0$, $b>0$ và biểu thức $T=2(a+b)^{-1}.(ab)^{\frac{1}{2}}.\left[1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$. Khi đó:

A. $T=\frac{2}{3}$. **B.** $T=\frac{1}{2}$. **C.** $T=1$. **D.** $T=\frac{1}{3}$.

Câu 12: Cho hàm số $f(a)=\frac{a^{-\frac{1}{3}}\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a^4}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(\sqrt[8]{a^3}-\sqrt[8]{a^{-1}}\right)}$ với $a>0, a\neq 1$. Tính giá trị $M=f\left(2017^{2016}\right)$

A. $M=2017^{1008}-1$ **B.** $M=-2017^{1008}-1$ **C.** $M=2017^{2016}-1$ **D.** $M=1-2017^{2016}$

Câu 13: Rút gọn biểu thức $P=\frac{a^{\sqrt{3}+1}.a^{2-\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}$ với $a>0$

A. $P=a$ **B.** $P=a^3$ **C.** $P=a^4$ **D.** $P=a^5$

Câu 14: Cho hai số thực dương a,b. Rút gọn biểu thức $A=\frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}+b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}$ ta thu được $A=a^m.b^n$. Tích của $m.n$ là

A. $\frac{1}{8}$ **B.** $\frac{1}{21}$ **C.** $\frac{1}{9}$ **D.** $\frac{1}{18}$

Câu 15: Cho biểu thức $\sqrt[5]{8\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}=2^{\frac{m}{n}}$, trong đó $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Gọi $P=m^2+n^2$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $P\in(330;340)$. **B.** $P\in(350;360)$. **C.** $P\in(260;370)$. **D.** $P\in(340;350)$.

Câu 16: Rút gọn biểu thức $A=\frac{\sqrt[3]{a^7}.a^{\frac{11}{3}}}{a^4.\sqrt[7]{a^{-5}}}$ với $a>0$ ta được kết quả $A=a^{\frac{m}{n}}$ trong đó $m,n\in N^*$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m^2-n^2=312$. **B.** $m^2+n^2=543$. **C.** $m^2-n^2=-312$. **D.** $m^2+n^2=409$.

Câu 17: Cho $4^x+4^{-x}=2$ và biểu thức $A=\frac{4-2^x-2^{-x}}{1+2^x+2^{-x}}=\frac{a}{b}$. Tích $a.b$ có giá trị bằng:

A. 6. **B.** -10. **C.** -8. **D.** 8.

Câu 18: Cho a là số thực dương. Đơn giản biểu thức $P=\frac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{-1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{-1}{4}}\right)}$.

A. $P=a(a+1)$. **B.** $P=a-1$. **C.** $P=a$. **D.** $P=a+1$.

Câu 19: Cho biểu thức $P=\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x^3\sqrt{x}}}$, với $x>0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P=x^{\frac{1}{2}}$ **B.** $P=x^{\frac{7}{12}}$ **C.** $P=x^{\frac{5}{8}}$ **D.** $P=x^{\frac{7}{24}}$

Câu 20: Tích $(2017)!\left(1+\frac{1}{1}\right)^1\left(1+\frac{1}{2}\right)^2...\left(1+\frac{1}{2017}\right)^{2017}$ được viết dưới dạng a^b, khi đó $(a,\ b)$ là cặp nào trong các cặp sau?

A. $(2018;\ 2017)$. **B.** $(2019;\ 2018)$. **C.** $(2015;\ 2014)$. **D.** $(2016;\ 2015)$.

Câu 21: Cho $f(x)=5^{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}}$. Biết rằng: $f(1).f(2)...f(2020)=5^{\frac{m}{n}}$ với m,n là các số nguyên dương và phân số $\frac{m}{n}$ tối giản. Tính $m-n^2$

A. $m-n^2=2021$. **B.** $m-n^2=-1$. **C.** $m-n^2=1$. **D.** $m-n^2=2020$.

Câu 22: Cho $m>0$, $a=m\sqrt{m}$, $y=\frac{\sqrt[3]{m}}{a^2.\sqrt[4]{m}}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $y=\frac{1}{\sqrt[18]{a^{35}}}$. **B.** $y=\frac{1}{a^2}$. **C.** $y=\frac{1}{\sqrt[9]{a^{34}}}$. **D.** $y=\frac{1}{\sqrt[6]{a^{11}}}$.

Câu 23: Biểu thức $C=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}}$ với $x>0$ được viết dưới dạng lũy thừa số mũ hữu tỉ là

A. $x^{\frac{3}{16}}$. **B.** $x^{\frac{7}{8}}$. **C.** $x^{\frac{15}{16}}$. **D.** $x^{\frac{31}{32}}$.

Câu 24: Rút gọn biểu thức $A=\frac{\sqrt[3]{a^5}.a^{\frac{7}{3}}}{a^4.\sqrt[7]{a^{-2}}}$ với $a>0$ ta được kết quả $A=a^{\frac{m}{n}}$, trong đó m, $n\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m^2-n^2=25$. **B.** $m^2+n^2=43$. **C.** $3m^2-2n=2$. **D.** $2m^2+n=15$.

Câu 25: Cho a,b là hai số thực dương. Thu gọn biểu thức $\frac{a^{\frac{7}{6}}.b^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt[6]{ab^2}}$, kết quả nào sau đây là đúng?

A. $\sqrt[3]{\frac{a^4}{b}}$. **B.** ab. **C.** $\frac{b}{a}$. **D.** $\frac{a}{b}$.

Câu 26: Cho biểu thức $P=\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}}$. Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau là đúng?

A. $P=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{8}}$. **B.** $P=\left(\frac{2}{3}\right)^{18}$. **C.** $P=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{18}}$. **D.** $P=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Câu 27: Cho a là số dương khác 1. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a^{-2019}=a^{2019}$. **B.** $a^{-2019}=-\left(\frac{1}{a}\right)^{2019}$. **C.** $a^{-2019}=\left(\frac{1}{a}\right)^{2019}$. **D.** $a^{-2019}=-a^{2019}$.

Câu 28: Cho a, b là các số thực dương. Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3.b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}.b^6}}}$ được kết quả là

A. ab. **B.** a^2b^2. **C.** ab^2. **D.** a^2b.

Câu 29: Cho biểu thức $P=x^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}$ với $x>0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P=x$ **B.** $P=x^{\frac{11}{6}}$ **C.** $P=x^{\frac{7}{6}}$ **D.** $P=x^{\frac{5}{6}}$

Câu 30: Cho a là số thực dương. Viết và rút gọn biểu thức $a^{\frac{3}{2018}}.\sqrt[2018]{a}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ. Tìm số mũ của biểu thức rút gọn đó.

A. $\dfrac{2}{1009}$. **B.** $\dfrac{1}{1009}$. **C.** $\dfrac{3}{1009}$. **D.** $\dfrac{3}{2018^2}$.

Câu 31: Cho số thực $a>1$ và các số thực α, β. Kết luận nào sau đây đúng?

A. $a^\alpha>1,\forall\alpha\in\mathbb{R}$. **B.** $a^\alpha>a^\beta\Leftrightarrow\alpha>\beta$. **C.** $\dfrac{1}{a^\alpha}<0,\forall\alpha\in\mathbb{R}$. **D.** $a^\alpha<1,\forall\alpha\in\mathbb{R}$.

Câu 32: Cho $\pi^\alpha>\pi^\beta$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. $\alpha.\beta=1$. **B.** $\alpha>\beta$. **C.** $\alpha<\beta$. **D.** $\alpha+\beta=0$.

Câu 33: Với các số thực a, b bất kì, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\left(3^a\right)^b=3^{a+b}$. **B.** $\left(3^a\right)^b=3^{ab}$. **C.** $\left(3^a\right)^b=3^{a-b}$. **D.** $\left(3^a\right)^b=3^{a^b}$.

Câu 34: Cho a,b là các số thực thỏa điều kiện $\left(\dfrac{3}{4}\right)^a>\left(\dfrac{4}{5}\right)^a$ và $b^{\frac{5}{4}}>b^{\frac{4}{3}}$.Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau?

A. $a>0$ và $b>1$. **B.** $a>0$ và $0<b<1$.
C. $a<0$ và $0<b<1$. **D.** $a<0$ và $b>1$.

Câu 35: Cho a thuộc khoảng $\left(0;\dfrac{2}{e}\right)$, α và β là những số thực tuỳ ý. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\left(a^\alpha\right)^b=a^{\alpha.\beta}$. **B.** $a^\alpha>a^\beta\Leftrightarrow a<\beta$. **C.** $a^\alpha.a^\beta=a^{\alpha+\beta}$. **D.** $a^\alpha>a^\beta\Leftrightarrow\alpha>\beta$.

Câu 36: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017}>\left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}$. **B.** $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018}>\left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$.

C. $2^{\sqrt{2}+1}>2^{\sqrt{3}}$. **D.** $\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}<\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2017}$.

Câu 37: Cho các số thực $a;b$ thỏa mãn $0<a<1<b$. Tìm khẳng định đúng:

A. $\ln a>\ln b$. **B.** $(0,5)^a<(0,5)^b$. **C.** $\log_a b<0$. **D.** $2^a>2^b$.

Câu 38: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(\sqrt{5}+2)^{-2017}<(\sqrt{5}+2)^{-2018}$. **B.** $(\sqrt{5}+2)^{2018}>(\sqrt{5}+2)^{2019}$.

C. $(\sqrt{5}-2)^{2018}>(\sqrt{5}-2)^{2019}$. **D.** $(\sqrt{5}-2)^{2018}<(\sqrt{5}-2)^{2019}$.

Câu 39: Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{3}} > \left(\frac{5}{8}\right)^{\sqrt{3}}$. **B.** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\pi} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-\pi}$. **C.** $3^{-\sqrt{2}} < \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$. **D.** $\left(\frac{1}{4}\right)^{-50} < \left(\sqrt{2}\right)^{100}$.

Câu 40: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$. **B.** $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2019} < \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}$.

C. $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017} > \left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}$. **D.** $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018} > \left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$.

Câu 41: Cho $P = \sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}} + \sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}$ và $Q = 2\sqrt{\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right)^3}$, với x, y là các số thực khác 0. So sánh P và Q ta có

A. $P<Q$. **B.** $P=Q$. **C.** $P=-Q$. **D.** $P>Q$.

Câu 42: Tìm tập tất cả các giá trị của a để $\sqrt[21]{a^5} > \sqrt[7]{a^2}$?

A. $a>0$. **B.** $0<a<1$. **C.** $a>1$. **D.** $\frac{5}{21}<a<\frac{2}{7}$.

Câu 43: Tìm khẳng định đúng.

A. $\left(2-\sqrt{3}\right)^{2016} > \left(2-\sqrt{3}\right)^{2017}$. **B.** $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2016} > \left(2+\sqrt{3}\right)^{2017}$.

C. $-\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2016} > -\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2017}$. **D.** $\left(2-\sqrt{3}\right)^{-2016} > \left(2-\sqrt{3}\right)^{-2017}$.

Câu 44: Cho $a>1$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng.

A. $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a} > 1$ **B.** $\frac{1}{a^{2017}} < \frac{1}{a^{2018}}$ **C.** $a^{-\sqrt{3}} > \frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$ **D.** $a^{\frac{1}{3}} > \sqrt{a}$

Câu 45: Cho biết $(x-2)^{-\frac{1}{3}} > (x-2)^{-\frac{1}{6}}$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2<x<3$. **B.** $0<x<1$. **C.** $x>2$. **D.** $x>1$.

Câu 46: Cho $U = 2.2019^{2020}$, $V = 2019^{2020}$, $W = 2018.2019^{2019}$, $X = 5.2019^{2019}$ và $Y = 2019^{2019}$. Số nào trong các số dưới đây là số bé nhất?

A. $X-Y$. **B.** $U-V$. **C.** $V-W$. **D.** $W-X$.

Câu 47: Tìm tất cả các số thực m sao cho $\frac{4^a}{4^a+m}+\frac{4^b}{4^b+m}=1$ với mọi $a+b=1$.

A. $m=\pm 2$. **B.** $m=4$. **C.** $m=2$. **D.** $m=8$.

Câu 48: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2-6x+1=0$ với $x_1>x_2$. Tính giá trị của biểu thức $P = {x_1}^{2017}.{x_2}^{2018}$

A. $P=1$ **B.** $P=3+2\sqrt{2}$ **C.** $P=3-2\sqrt{2}$ **D.** $P=\left(3-2\sqrt{2}\right)^{17}$

Câu 49: Rút gọn biểu thức $P = \left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\right)^{2017} \cdot \left(3-\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\right)^{2018}$.

A. $P=1$. **B.** $P=\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}$. **C.** $P=\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$. **D.** $P=\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\right)^{4035}$.

Câu 50: Tính giá trị của biểu thức $P=\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2018}.\left(7-4\sqrt{3}\right)^{2017}$

A. 1. **B.** $7-4\sqrt{3}$. **C.** $7+4\sqrt{3}$. **D.** $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2017}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.D	3.B	4.C	5.A	6.C	7.B	8.A	9.B	10..C
11.C	12.B	13.D	14.C	15.D	16.A	17.A	18.C	19.C	20.A
21.B	22.A	23..D	24.D	25.D	26.D	27.C	28.A	29.A	30.A
31.B	32.B	33.B	34.C	35.D	36.B	37.B	38.C	39.B	40.D
41.A	42.B	43.A	44.C	45.A	46.C	47.A	48.C	49.C	50.C

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **Chọn C**

Ta có: $P=\dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3.b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}.b^6}}}=\dfrac{a^3.b^2}{\sqrt[6]{\left(a^2.b\right)^6}}=a.b$.

Câu 2: **Chọn D**

Ta có $T=\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a}}=\sqrt[5]{a.a^{\frac{1}{3}}}=\sqrt[5]{a^{\frac{4}{3}}}=a^{\frac{4}{15}}$.

Câu 3: **Chọn B**

Ta có $\sqrt[4]{a^{\frac{2}{3}}}=a^{\frac{2}{3.4}}=a^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{a}$.

Câu 4: **Chọn C**

Ta có: $P=\log_a\left(a.\sqrt[3]{a^2}\right)=\log_a\left(a.a^{\frac{2}{3}}\right)=\log_a a^{\frac{5}{3}}=\dfrac{5}{3}$.

Câu 5: **Chọn A**

Với $x>0$, ta có $P=x^{\frac{1}{3}}.x^{\frac{1}{6}}=x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$.

Câu 6: **Chọn C**

Ta có $A=\dfrac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}}.3^{1+\sqrt{5}}}=\dfrac{2^{3+\sqrt{5}}.3^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}}.3^{1+\sqrt{5}}}=2^{3+\sqrt{5}-2-\sqrt{5}}.3^{3+\sqrt{5}-1-\sqrt{5}}=2.3^2=18$.

Câu 7: **Chọn B**

$P=x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[4]{x}=x^{\frac{1}{3}}.x^{\frac{1}{4}}=x^{\frac{7}{12}}$.

Câu 8: **Chọn B**

Với $x>0$, $y>0$, ta có

$x^{\frac{4}{5}}.\sqrt[6]{x^5\sqrt{x}}=x^{\frac{4}{5}}.\left(x^5.x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{6}}=x^{\frac{4}{5}}.x^{\frac{5}{6}}.x^{\frac{1}{12}}=x^{\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{1}{12}}\Rightarrow m=\dfrac{4}{5}+\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{12}$.

$y^{\frac{4}{5}}:\sqrt[6]{y^5\sqrt{y}}\ \ y=x+1$. Do đó $m-n=\dfrac{11}{6}$.

Câu 9: Chọn B

Ta có $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\dfrac{a^x}{b^x}=a^x.b^{-x}$.

Câu 10: Chọn C

Với $x>0$ thì $P=x^{\frac{3}{2}}.\sqrt[5]{x}=x^{\frac{3}{2}}.x^{\frac{1}{5}}=x^{\frac{3}{2}+\frac{1}{5}}=x^{\frac{17}{10}}$.

Câu 11: Chọn C

Do $a>0$, $b>0$ ta có:

$$T=2\left(a+b\right)^{-1}.\left(ab\right)^{\frac{1}{2}}.\left[1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}.\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}-2+\frac{b}{a}\right)}=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}.\sqrt{1+\frac{1}{4}.\frac{\left(a-b\right)^2}{ab}}$$

$$=\frac{1}{a+b}\sqrt{4ab+a^2-2ab+b^2}=\frac{\sqrt{\left(a+b\right)^2}}{a+b}=1.$$

Câu 12: Chọn B

$$f\left(a\right)=\frac{a^{-\frac{1}{3}}\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a^4}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(\sqrt[8]{a^3}-\sqrt[8]{a^{-1}}\right)}=\frac{1-a}{\sqrt{a}-1}=-1-\sqrt{a}\ \text{ nên }\ M=f\left(2017^{2016}\right)=-1-\sqrt{2017^{2016}}=-1-2017^{1008}$$

Câu 13: Chọn D

Ta có $P=\dfrac{a^{\sqrt{3}+1}.a^{2-\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}=\dfrac{a^3}{a^{2-4}}=a^5$

Câu 14: Chọn C

$$A=\frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}+b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}}\left(b^{\frac{1}{6}}+a^{\frac{1}{6}}\right)}{a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}}=a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}}\ \Rightarrow m=\frac{1}{3},\ n=\frac{1}{3}\Rightarrow m.n=\frac{1}{9}.$$

Câu 15: Chọn D

Ta có $\sqrt[5]{8\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[5]{2^3\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}=2^{\frac{3}{5}}.2^{\frac{1}{10}}.2^{\frac{1}{30}}=2^{\frac{3}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}}=2^{\frac{11}{15}}$

$$\Rightarrow\frac{m}{n}=\frac{11}{15}\Rightarrow\begin{cases}m=11\\n=15\end{cases}\Rightarrow P=m^2+n^2=11^2+15^2=346.$$

Câu 16: Chọn A

Ta có: $A=\dfrac{\sqrt[3]{a^7}.a^{\frac{11}{3}}}{a^4.\sqrt[7]{a^{-5}}}=\dfrac{a^{\frac{7}{3}}.a^{\frac{11}{3}}}{a^4.a^{\frac{-5}{7}}}=\dfrac{a^6}{a^{\frac{23}{7}}}=a^{\frac{19}{7}}$

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Mà $A=a^{\frac{m}{n}}, m,n\in N^*$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản $\Rightarrow m=19, n=7\Rightarrow m^2-n^2=312$

Câu 17: Chọn A

Ta có: $4^x+4^{-x}=2\Leftrightarrow\left(2^x\right)^2+\left(2^{-x}\right)^2+2.2^x.2^{-x}=4\Leftrightarrow\left(2^x+2^{-x}\right)^2=4\Leftrightarrow 2^x+2^{-x}=2$

Ta có: $A=\frac{4-2^x-2^{-x}}{1+2^x+2^{-x}}=\frac{4-\left(2^x+2^{-x}\right)}{1+\left(2^x+2^{-x}\right)}=\frac{4-2}{1+2}=\frac{2}{3}=\frac{a}{b}$.

Suy ra: $\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}\Rightarrow a.b=2.3=6$.

Câu 18: Chọn C

$$P=\frac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{-1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{-1}{4}}\right)}=\frac{a^{\frac{4}{3}}.a^{\frac{-1}{3}}+a^{\frac{4}{3}}a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{4}}.a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{4}}.a^{\frac{-1}{4}}}=\frac{a+a^2}{a+1}=\frac{a\left(a+1\right)}{a+1}=a.$$

Câu 19: Chọn C

Ta có : $P=\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x^3\sqrt{x}}}=[x(x^3.x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}]^{\frac{1}{3}}=[x(x^{\frac{7}{2}})^{\frac{1}{4}}]^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{3}}.x^{\frac{7}{24}}=x^{\frac{5}{8}}$

Câu 20: Chọn A

Ta có $(2017)!\left(1+\frac{1}{1}\right)^1\left(1+\frac{1}{2}\right)^2...\left(1+\frac{1}{2017}\right)^{2017}=(2017)!\left(\frac{2}{1}\right)^1\left(\frac{3}{2}\right)^2...\left(\frac{2017}{2016}\right)^{2016}\left(\frac{2018}{2017}\right)^{2017}$

$=(2017)!\frac{1}{1}.\frac{1}{2}.\frac{1}{3}...\frac{1}{2016}.\frac{2018^{2017}}{2017}=2018^{2017}$. Vậy $a=2018;\ b=2017$.

Câu 21: Chọn B

Ta có: $f(x)=5^{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}}=5^{\sqrt{\frac{x^2(x+1)^2+x^2+(x+1)^2}{x^2(x+1)^2}}}=5^{\frac{x^2+x+1}{x(x+1)}}=5^{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}$.

Do đó: $f(1).f(2)...f(2020)=5^{\frac{m}{n}}\Leftrightarrow 5^{\sum\limits_{x=1}^{2020}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)}=5^{\frac{m}{n}}\Leftrightarrow\sum\limits_{x=1}^{2020}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{m}{n}$.

$\Leftrightarrow 2021-\frac{1}{2021}=\frac{4084440}{2021}=\frac{m}{n}\Rightarrow m=4084440=2021^2-1, n=2021$.

Vậy: $m-n^2=\left(2021^2-1\right)-2021^2=-1$.

Câu 22: Chọn A

$a=m\sqrt{m}=m^{\frac{3}{2}}\Rightarrow a^{\frac{1}{18}}=m^{\frac{3}{2}.\frac{1}{18}}=m^{\frac{1}{12}}$, $y=\frac{\sqrt[3]{m}}{a^2.\sqrt[4]{m}}=\frac{m^{\frac{1}{13}}}{a^2.m^{\frac{1}{4}}}=\frac{m^{\frac{1}{12}}}{a^2}=\frac{a^{\frac{1}{18}}}{a^2}=\frac{1}{\sqrt[18]{a^{35}}}$.

Câu 23: Chọn D

Với $x>0$ ta có $C^2=x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}\Leftrightarrow C^4=x^2.x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\Leftrightarrow C^8=x^4.x^2.x\sqrt{x\sqrt{x}}$

$\Leftrightarrow C^{16}=x^8.x^4.x^2.x\sqrt{x}\Leftrightarrow C^{32}=x^{16}.x^8.x^4.x^2.x\Leftrightarrow C^{32}=x^{31}\Leftrightarrow C=x^{\frac{31}{32}}$.

Câu 24: Chọn D

Ta có: $A=\dfrac{\sqrt[3]{a^5}.a^{\frac{7}{3}}}{a^4.\sqrt[7]{a^{-2}}}=\dfrac{a^{\frac{5}{3}}.a^{\frac{7}{3}}}{a^4.a^{\frac{-2}{7}}}=a^{\frac{5}{3}+\frac{7}{3}-4+\frac{2}{7}}=a^{\frac{2}{7}}\Rightarrow\begin{cases}m=2\\n=7\end{cases}\Rightarrow 2m^2+n=15.$

Câu 25: Chọn D

Ta có: $\dfrac{a^{\frac{7}{6}}.b^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt[6]{ab^2}}=\dfrac{a^{\frac{7}{6}}.b^{\frac{-2}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}.b^{\frac{1}{3}}}=a^1.b^{-1}=\dfrac{a}{b}.$

Câu 26: Chọn D

Ta có: $P=\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}}}=\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}}=\sqrt[3]{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}.\frac{1}{3}+1}}=\sqrt[3]{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}.$

Câu 27: Chọn C

Ta có: $a^{-2019}=\dfrac{1}{a^{2019}}=\left(\dfrac{1}{a}\right)^{2019}.$

Câu 28: Chọn A

Ta có: $P=\dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3.b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}.b^6}}}=\dfrac{a^3.b^2}{\sqrt[6]{\left(a^2.b\right)^6}}=ab.$

Câu 29: Chọn A

$P=x^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=x$

Câu 30: Chọn A

$a^{\frac{3}{2018}}.\sqrt[2018]{a}=a^{\frac{3}{2018}}.a^{\frac{1}{2018}}=a^{\frac{4}{2018}}=a^{\frac{2}{1009}}$. Vậy số mũ của biểu thức rút gọn bằng $\dfrac{2}{1009}$.

Câu 31: Chọn B

Với $a>1$ và $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Ta có: $a^{\alpha}>a^{\beta}\Leftrightarrow\alpha>\beta$.

Câu 32: Chọn B

Vì $\pi\approx 3,14>0$ nên $\pi^{\alpha}>\pi^{\beta}\Leftrightarrow\alpha>\beta.$

Câu 33: Chọn B

Câu 34: Chọn C

Vì $\left(\dfrac{3}{4}\right)^a>\left(\dfrac{4}{5}\right)^a\Rightarrow a<0.$

Và $b^{\frac{5}{4}}>b^{\frac{4}{3}}\Rightarrow 0<b<1.$

Câu 35: Chọn D

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

$a \in \left(0;\frac{2}{e}\right) \Rightarrow$ Hàm số $y = a^x$ nghịch biến.Do đó $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$.

Vậy đáp án **sai** là **D**.

Câu 36: Chọn B

+) $\begin{cases} 0 < \sqrt{2} - 1 < 1 \\ 2017 < 2018 \end{cases} \Rightarrow \left(\sqrt{2}-1\right)^{2017} > \left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}$ nên **A** đúng.

+) $\begin{cases} 0 < \sqrt{3} - 1 < 1 \\ 2018 > 2017 \end{cases} \Rightarrow \left(\sqrt{3}-1\right)^{2018} < \left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$ nên **B** sai.

+) $\begin{cases} 2 > 1 \\ \sqrt{2}+1 > \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow 2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$ nên **C** đúng.

+) $\begin{cases} 0 < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \\ 2018 > 2017 \end{cases} \Rightarrow \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018} < \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2017}$ nên **D** đúng.

Câu 37: Chọn B

Do cơ số $e \in (1;+\infty)$ và $0 < a < b$ nên ta có $\ln a < \ln b$. Đáp án A sai.

Do cơ số $0,5 \in (0;1)$ và $0 < a < b$ nên ta có $(0,5)^a > (0,5)^b$. Đáp án B sai.

Do cơ số $a \in (0;1)$ và $b > 1$ nên ta có $\log_a b < \log_a 1 \Leftrightarrow \log_a b < 0$. Đáp án C đúng.

Do cơ số $2 \in (1;+\infty)$ và $a < b$ nên ta có $2^a < 2^b$. Đáp án D sai.

Câu 38: Chọn C

$\begin{cases} 0 < \sqrt{5} - 2 < 1 \\ 2018 < 2019 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{5}-2)^{2018} > (\sqrt{5}-2)^{2019} \Rightarrow C$ đúng.

$\begin{cases} \sqrt{5}+2 > 1 \\ -2017 > -2018 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{5}+2)^{-2017} > (\sqrt{5}+2)^{-2018} \Rightarrow A$ sai

$\begin{cases} \sqrt{5}+2 > 1 \\ 2018 < 2019 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{5}+2)^{2018} < (\sqrt{5}+2)^{2019} \Rightarrow B$ sai

$\begin{cases} 0 < \sqrt{5} - 2 < 1 \\ 2018 < 2019 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{5}-2)^{2018} > (\sqrt{5}-2)^{2019} \Rightarrow D$ sai.

Câu 39: Chọn B

Ta có:

$\left(\frac{3}{7}\right) < \left(\frac{5}{8}\right) \Rightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{3}} < \left(\frac{5}{8}\right)^{\sqrt{3}}$. Phương án **A** sai.

$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-\pi} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-\pi}$. Phương án **B** đúng.

$3<5\Rightarrow 3^{-\sqrt{2}}>5^{-\sqrt{2}}\Rightarrow 3^{-\sqrt{2}}>\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$. Phương án **C** sai.

$\left(\frac{1}{4}\right)^{-50}<\left(\sqrt{2}\right)^{100}\Rightarrow\left(2^{-2}\right)^{-50}<\left(2\right)^{100}\Rightarrow 2^{100}<2^{100}$. Phương án **D** sai.

Câu 40: Chọn D

A đúng vì $2>1$ và $\sqrt{2}+1>\sqrt{3}$ nên $2^{\sqrt{2}+1}>2^{\sqrt{3}}$.

B đúng vì $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)<1$ và $2019>2018$ nên $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2019}<\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}$.

C đúng vì $\left(\sqrt{2}-1\right)<1$ và $2017<2018$ nên $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017}>\left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}$.

D sai vì $\sqrt{3}-1<1$ và $2017<2018$ nên $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018}<\left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$.

Câu 41: Chọn A

Ta có x^2, y^2, $\sqrt[3]{x^4y^2}$, $\sqrt[3]{x^2y^4}$ là những số thực dương.

$Q=2\sqrt{\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right)^3}=2\sqrt{x^2+3\sqrt[3]{x^4y^2}+3\sqrt[3]{x^2y^4}+y^2}$

$=\sqrt{x^2+3\sqrt[3]{x^4y^2}+3\sqrt[3]{x^2y^4}+y^2}+\sqrt{x^2+3\sqrt[3]{x^4y^2}+3\sqrt[3]{x^2y^4}+y^2}\quad>\sqrt{x^2+3\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{3\sqrt[3]{x^2y^4}+y^2}$

$>\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{\sqrt[3]{x^2y^4}+y^2}=P$

Vậy $P<Q$.

Câu 42: Chọn B

$\sqrt[7]{a^2}=\sqrt[21]{a^6}$. Ta có $\sqrt[21]{a^5}>\sqrt[7]{a^2}\Leftrightarrow\sqrt[21]{a^5}>\sqrt[21]{a^6}$ mà $5<6$ vậy $0<a<1$.

Câu 43: Chọn A

Có $0<2-\sqrt{3}<1\Rightarrow\left(2-\sqrt{3}\right)^{2016}>\left(2-\sqrt{3}\right)^{2017}$.

Câu 44: Chọn C

Ta có : $a^{-\sqrt{3}}>\frac{1}{a^{\sqrt{5}}}\Leftrightarrow\frac{1}{a^{\sqrt{3}}}>\frac{1}{a^{\sqrt{5}}}\Leftrightarrow a^{\sqrt{3}}<a^{\sqrt{5}}$ luôn đúng với $a>1$.

Câu 45: Chọn A

Điều kiện: $x-2>0\Leftrightarrow x>2$.

Ta có $-\frac{1}{3}<-\frac{1}{6}$ nên $\left(x-2\right)^{-\frac{1}{3}}>\left(x-2\right)^{-\frac{1}{6}}\Leftrightarrow x-2<1\Leftrightarrow x<3$. Vậy $2<x<3$.

Câu 46: Chọn C

Ta có: $X-Y=4.2019^{2019}$.

$U-V=2019^{2020}=2019.2019^{2019}$.

$V-W=2019.2019^{2019}-2018.2019^{2019}=2019^{2019}$.

$W-X=2013.2019^{2019}$.

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Vậy trong các số trên, số nhỏ nhất là $V-W$.

Câu 47: Chọn A

Ta có $a+b=1\Leftrightarrow b=1-a$. Thay vào $\frac{4^a}{4^a+m}+\frac{4^b}{4^b+m}=1$ ta được

$$\frac{4^a}{4^a+m}+\frac{4^{1-a}}{4^{1-a}+m}=1\Leftrightarrow\frac{4+m.4^a+4+m.4^{1-a}}{4+m.4^a+m.4^{1-a}+m^2}=1\Leftrightarrow m^2=4\Leftrightarrow m=\pm 2.$$

Câu 48: Chọn C

Ta có $P=x_1{}^{2017}.x_2{}^{2018}=\left(x_1.x_2\right)^{2017}.x_2$. Theo định lý viet: $\begin{cases}x_1+x_2=6\\x_1.x_2=1\end{cases}\Rightarrow P=x_2$

Ta có $x^2-6x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=3+2\sqrt{2}\\x_2=3-2\sqrt{2}\end{array}\right.\Rightarrow P=3-2\sqrt{2}$.

Câu 49: Chọn C

Đặt $x=\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$ ta có

$$x^3=9+\sqrt{80}+3.\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\right)^2.\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}+3.\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}.\left(\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right)^2+9-\sqrt{80}$$

$$=18+3.\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}.\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\left(.\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right)$$

$$=18+3x.\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}.\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=18+3x\Rightarrow x=3\Rightarrow 3-\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}=\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$$

Ta có $P=\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\right)^{2017}\cdot\left(3-\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\right)^{2018}=\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\right)^{2017}\cdot\left(\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right)^{2018}$

$$=\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}.\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right)^{2017}\cdot\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=\left(\sqrt[3]{1}\right)^{2017}\cdot\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$$

Câu 50: Chọn C

Ta có $P=\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2018}.\left(7-4\sqrt{3}\right)^{2017}=\left[\left(7+4\sqrt{3}\right).\left(7-4\sqrt{3}\right)\right]^{2017}\left(7+4\sqrt{3}\right)=$

$=1^{2017}\left(7+4\sqrt{3}\right)=7+4\sqrt{3}$.

CHỦ ĐỀ 2: LOGARIT

LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

- Cho hai số dương a,b với $a\neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^{\alpha}=b$ được gọi là **logarit cơ số** a **của** b và được kí hiệu là $\log_a b$. Ta viết như sau: $\alpha=\log_a b\Leftrightarrow a^{\alpha}=b.$
- Một số chú ý:

  Không có logarit của số 0 và số âm vì $a^{\alpha}>0,\forall a$.

  Cơ số của logarit phải dương và khác 1 $(a\neq 1)$.

  Một số công thức logarit theo định nghĩa:

  $\oplus$ $\log_a 1=0;$ $\oplus$ $\log_a a=1;$

  $\oplus$ $\log_a a^b=1,\forall b\in\mathbb{R}$ $\oplus$ $a^{\log_a b}=a,\forall b\in\mathbb{R},b>0$

2. Các tính chất của logarit

- **So sánh hai logarit cùng cơ số**

  Cho số dương $a\neq 1$ và các số dương b,c

  - Khi $a>0$ thì $\log_a b>\log_a c\Leftrightarrow b>c$
  - Khi $0<a<1$ thì $\log_a b>\log_a c\Leftrightarrow b<c$
  - Ta có $\log_a b=\log_a c\Leftrightarrow b=c$
- **Logarit của một tích:** $\log_a\left(b.c\right)=\log_a b+\log_a c$
- **Logarit của một thương:**
  - $\log_a\dfrac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$
  - Đặc biệt: với $a,b>0,a\neq 1$ thì $\log_a\dfrac{1}{b}=-\log_a b$.
- **Logarit của một lũy thừa**
  - $\log_a b^{\alpha}=\alpha.\log_a b$
  - Đặc biệt: $\log_a\sqrt[n]{b}=\dfrac{1}{n}\log_a b$
- **Công thức đổi cơ số**
  - $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$
  - Đặt biệt: $\log_a c=\dfrac{1}{\log_c a}$ và $\log_{a^{\alpha}} b=\dfrac{1}{\alpha}.\log_a b\left(\alpha\neq 0\right)$

3. Logarit tự nhiên và logarit thập phân

- **Logarit tự nhiên** (hay còn được gọi là **logarit Nepe**) là logarit cơ số e, được viết là: $\log_e b=\ln b$
- **Logarit thập phân** là **logarit cơ số** 10**,** được viết là: $\log_{10} b=\log b=\lg b$.

DẠNG 1: BIẾN ĐỔI MŨ – LOGARIT

Câu 1: Cho các số thực dương a, b, x thỏa mãn $\log_3 x = 4\log_3 a + 7\log_3 b$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $x = 4a + 7b$. **B.** $x = 4a - 7b$. **C.** $x = a^4 b^7$. **D.** $x = a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{7}}$.

Câu 2: Cho $a > 1, a \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\log_2\left(\log_4 x\right) = \log_4\left(\log_2 x\right) + a$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_2 x = 4^a$. **B.** $\log_2 x = a + 1$. **C.** $\log_2 x = 2^{a+1}$. **D.** $\log_2 x = 4^{a+1}$.

Câu 3: Cho $\log_a bc = x, \log_b ca = y$ và $\log_c ab = \dfrac{mx + ny + 2}{pxy - 1}$, với m, n, p là các số nguyên. Tính $S = m + 2n + 3p$

A. $S = 6$. **B.** $S = 9$. **C.** $S = 0$. **D.** $S = 3$.

Câu 4: Cho hai số thực dương a, b và $a \neq 1$ thỏa mãn $\log_2 a = \dfrac{b}{4}, \log_a b = \dfrac{16}{b}$. Tính ab?

A. $ab = 256$. **B.** $ab = 16$. **C.** $ab = 32$. **D.** $ab = 64$.

Câu 5: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_9 x = \log_{12} y = \log_{16}\left(x + y\right)$. Tính $\dfrac{y}{x}$?

A. $\dfrac{y}{x} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\dfrac{y}{x} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\dfrac{y}{x} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{y}{x} = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

Câu 6: Cho $\log_a\left(bc\right) = 2, \log_b\left(ca\right) = 3$. Tính $S = \log_c\left(ab\right)$.

A. $S = \dfrac{7}{5}$. **B.** $S = \dfrac{7}{6}$. **C.** $S = \dfrac{5}{7}$. **D.** $S = \dfrac{6}{7}$.

Câu 7: Gọi a là số nguyên dương lớn nhất thỏa mãn $3\log_3\left(1 + \sqrt{a} + \sqrt[3]{a}\right) > 2\log_2 \sqrt{a}$. Tìm phần nguyên của $P = \log_2\left(2018a\right)$.

A. 14. **B.** 22. **C.** 19. **D.** 16.

Câu 8: Cho các số thực dương a, b khác 1 và số thực dương x thỏa mãn $\log_a\left(\log_b x\right) = \log_b\left(\log_a x\right)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\log_a x = b^{\log_{\frac{b}{a}}\left(\log_a b\right)}$. **B.** $\log_a x = a^{\log_{\frac{b}{a}}\left(\log_a b\right)}$. **C.** $\log_a x = b^{\log_{\frac{a}{b}}\left(\log_a b\right)}$. **D.** $\log_a x = a^{\log_{\frac{a}{b}}\left(\log_a b\right)}$.

Câu 9: Cho các số thực dương x, y, z, t, a, b, c thỏa mãn $\dfrac{\ln x}{a} = \dfrac{\ln y}{b} = \dfrac{\ln z}{c} = \ln t$ và $x.y = z^2.t^2$. Tính $S = a + b - 2c$

A. $S = 4$. **B.** $S = \dfrac{1}{2}$. **C.** $S = -2$. **D.** $S = 2$.

Câu 10: Cho $0 < a \neq 1$ tìm số tự nhiên n thỏa mãn $\log_a 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{a}} 2019 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{a}} 2019 + ... + n^2 \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 1008.2017^2 \log_a 2019$

A. $n = 2016$. **B.** $n = 2019$. **C.** $n = 2017$. **D.** $n = 2020$.

Câu 11: Cho Xét số nguyên dương a và số thực $b > 0$ thỏa mãn $\log_2\left(\log_{2^a}\left(\log_{2^b}\left(2^{a+b}\right)\right)\right) = 0$. Tìm số a

biết rằng $\log_2\left(\frac{a+b}{ab}\right)\in[2016;2017]$.

A. $a=2016$. **B.** $a=2017$. **C.** $a=2027$. **D.** $a=2026$.

Câu 12: Cho các số thực dương a,x,y,z thỏa mãn $4z\ge y^2, a>1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\log_a^2(xy)+\log_a\left(x^3y^3+x^2z\right)+\sqrt{4z-y^2}$.

A. -4. **B.** $-\frac{25}{16}$. **C.** $-\frac{25}{4}$. **D.** $-\frac{9}{4}$.

Câu 13: Với a là số dương tùy ý, $\ln(5a)-\ln(3a)$ bằng:

A. $\frac{\ln(5a)}{\ln(3a)}$. **B.** $\ln(2a)$. **C.** $\ln\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{\ln 5}{\ln 3}$

Câu 14: Với a là số thực dương tùy ý, $\ln(5a)+\ln\left(\frac{3}{a}\right)$ bằng:

A. $\frac{\ln(5a)}{\ln(3a)}$. **B.** $\ln 15$. **C.** $\ln\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{\ln 5}{\ln 3}$

Câu 15: Cho ba số thực dương a,b,c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân và $a+b+c=64$. Giá trị của biểu thức $P=3\log_2(ab+bc+ca)-\log_2(abc)$ bằng:

A. 18. **B.** 6. **C.** 24. **D.** 8

Câu 16: Cho 3 số $2017+\log_2 a;\ 2018+\log_3 a;\ 2019+\log_4 a$; theo thứ tự lập thành cấp số cộng.
Công sai của cấp số cộng này bằng:

A. 1. **B.** 12. **C.** 9. **D.** 20.

Câu 17: cho các số thực dương a,b,c lớn hơn 1, đặt $x=\log_a b+\log_b a, y=\log_b c+\log_c b$ và $z=\log_c a+\log_a c$. Giá trị của biểu thức $x^2+y^2+z^2-xyz$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 18: Cho x,y là hai số thực dương thỏa mãn $\log_x+\log_y\ge\log\left(x+2y^3\right)$. Giá trị nhỏ nhất của: $\log_2 x-\log_3 y$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 19: Cho hai số thực a,b phân biệt thỏa mãn $\log_3\left(3^{a+1}-1\right)=2a+\log_{\frac{1}{3}}2$ và $\log_3\left(3^{b+1}-1\right)=2b+\log_{\frac{1}{3}}2$. Tính tổng $S=27^a+27^b$.

A. $S=\frac{27}{2}$. **B.** $S=45$. **C.** $S=204$. **D.** $S=180$.

Câu 20: Tìm số tự nhiên n thoả mãn $\frac{1}{\log_3 x}+\frac{1}{\log_{3^2} x}+\cdots+\frac{1}{\log_{3^n} x}=\frac{120}{\log_3 x}$ với $0<x\ne 1$

A. $n=15$. **B.** $n=20$. **C.** $n=12$. **D.** $n=10$.

Câu 21: Với mỗi số thực dương x, khi viết x dưới dạng thập phân thì số các chữ số đứng trước dấu phẩy của x là $\left[\log x\right]+1$. Cho biết $\log 2=0,30103$. Hỏi số 2^{2017} khi viết trong hệ thập phân ta được một số có bao nhiêu chữ số? (Kí hiệu $\left[x\right]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x).

A. 607. **B.** 606. **C.** 609. **D.** 608.

Câu 22: Tập hợp các số thực x để hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{1-\log_m^2\left(nx\right)}$ $\left(m>1,n>0\right)$ xác định là một đoạn có độ dài bằng $L=\dfrac{1}{2016}$. Giá trị của $\log_{2016}\dfrac{m^2-1}{mn}$ là?

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 23: Cho x,y,z là ba số thực dương thỏa mãn $2\log_x\left(2y\right)=2\log_{2x}\left(4z\right)=\log_{2x^4}\left(8yz\right)=2$. Giá trị của xy^5z được viết dưới dạng $2^{-\frac{p}{q}}$ trong đó p,q là các số nguyên dương và $\dfrac{p}{q}$ là phân số tối giản. Giá trị của biểu thức $p+q$ bằng?

A. 49. **B.** 48. **C.** 50. **D.** 52.

Câu 24: Cho dãy số $\left(u_n\right)$ thỏa mãn $\log u_5-2\log u_2=2\left(1+\sqrt{\log u_5-2\log u_2+1}\right)$ và $u_n=3u_{n-1}$, với mọi $n\ge 2$. Giá trị lớn nhất của n để $u_n<10^{100}$ là

A. 225. **B.** 226. **C.** 224. **D.** 227.

Câu 25: Xét hàm số $f\left(t\right)=\dfrac{9^t}{9^t+m^2}$ với m là số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị m sao cho $f\left(x\right)+f\left(y\right)=1$ với mọi số thực x,y thỏa mãn $e^{x+y}\le e\left(x+y\right)$. Tìm số phần tử của S.

A. 1. **B.** Vô số. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 26: Giả sử x,y,z là các số thực thỏa mãn $\log_2\left[\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2 x\right)\right]=\log_3\left[\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_3 y\right)\right]=\log_5\left[\log_{\frac{1}{5}}\left(\log_5 z\right)\right]=a>1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $z<x<y$. **B.** $x<y<z$. **C.** $y<z<x$. **D.** $z<y<x$.

Câu 27: Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $xyz=10^{81}$ và $\left(\log_{10}x\right).\left(\log_{10}yz\right)+\left(\log_{10}y\right)\left(\log_{10}z\right)=468$. Tính giá trị của biểu thức $S=\sqrt{\left(\log_{10}x\right)^2+\left(\log_{10}y\right)^2+\left(\log_{10}z\right)^2}$.

A. 75. **B.** 936. **C.** 625. **D.** 25.

Câu 28: Cho hai số thực dương $x,y\ne 1$ thỏa mãn $\log_x y=\log_y x$ và $\log_x\left(x-y\right)=\log_y\left(x+y\right)$. Tính giá trị biểu thức $S=x^4-x^2+1$.

A. $S=2$. **B.** $S=3$. **C.** $S=4$. **D.** $S=5$.

Câu 29: Có tất cả bao nhiêu bộ ba số thực $\left(x;y;z\right)$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện dưới đây $2^{\sqrt[3]{x^2}}.4^{\sqrt[3]{y^2}}.16^{\sqrt[3]{z^2}}=128$ và $\left(xy^2+z^4\right)^2=4+\left(xy^2-z^4\right)^2$.

A. 8. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 30: Cho $a>0;b>0$ thỏa mãn $\log_{2a+2b+1}\left(4a^2+b^2+1\right)+\log_{4ab+1}\left(2a+2b+1\right)=2$. Giá trị của biểu thức $a+2b$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 5. **C.** 4. **D.** $\frac{15}{4}$.

Câu 31: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(a;b)$ thỏa mãn $\log_a b+6\log_b a=5$ và $2\le a;b\le 2005$.

A. 54. **B.** 43. **C.** 53. **D.** 44.

Câu 32: Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $3\log_x(3y)=3\log_{3x}(9z)=\log_{3x^4}(27yz)\neq 0$. Biết $xy^4z=3^{-\frac{a}{b}}$ với a,b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Giá trị của biểu thức $a+b$ bằng

A. 54. **B.** 43. **C.** 53. **D.** 36.

Câu 33: Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $\log_{\sqrt{x}}(2y)=\log_{\sqrt{2x}}(4z)=\log_{2x^4}(8yz)\neq 0$. Giá trị của biểu thức $\log x+5\log y+\log z$ bằng

A. $-\frac{35\log 2}{6}$. **B.** $-\frac{35\log 2}{12}$. **C.** $-\frac{43\log 2}{6}$. **D.** $-\frac{43\log 2}{12}$.

Câu 34: Gọi S là tập hợp tất cả các cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn $0<x\le 1,0<y\le 1$. Chọn ngẫu nhiên một phần tử $(x;y)$ thuộc S. Xác suất để phần tử chọn ra thỏa mãn $\left[\log_2\left(\frac{1}{x}\right)\right]$ và $\left[\log_5\left(\frac{1}{y}\right)\right]$ đều là các số nguyên chẵn bằng

A. $\frac{5}{36}$. **B.** $\frac{5}{9}$. **C.** $\frac{2}{9}$. **D.** $\frac{5}{12}$.

Câu 35: Cho các số thực dương a,b thỏa mãn: $\log^2 a+(4\sin b+2)\log a+4\sin b+5=0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $a+b$ bằng:

A. $\frac{1}{1000}+\frac{\pi}{2}$. **B.** $\frac{1}{1000}+\frac{3\pi}{2}$. **C.** $10+\frac{3\pi}{2}$. **D.** $\frac{1}{10}+\frac{\pi}{2}$.

Câu 36: Cho các số thực dương a,b thỏa mãn: $16^a-(2\sin b+1)2^{2a+1}+4\sin b+5=0$. Giá trị của biểu thức $a+b$ bằng:

A. $\log_3 4+\frac{\pi}{2}$. **B.** $\log_4 3+\frac{3\pi}{2}$. **C.** $\log_3 4+\frac{3\pi}{2}$. **D.** $\log_4 3+\frac{\pi}{2}$.

Câu 37: Có hai cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời $\log_{225}x+\log_{64}y=4$ và $\log_x 225-\log_y 64=1$ là $(x_1;y_1)$ và $(x_2;y_2)$. Giá trị biểu thức $\log_{30}(x_1y_1x_2y_2)$ bằng:

A. 12. **B.** 15. **C.** 8. **D.** 36.

Câu 38: Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1=a$ và công bội $q=b$. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(a;b)$ sao cho $\log_8 u_1+\log_8 u_2+...+\log_8 u_{12}=2006$.

A. 46. **B.** 91. **C.** 45. **D.** 90.

Câu 39: Tìm tập hợp tất cả các số thực m để tồn tại duy nhất cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời $\log_{x^2+y^2+2}\left(4x+4y-6+m^2\right)=1$ và $x^2+y^2+2x-4y+1=0$.

A. $\{\pm 5\}$. **B.** $\{\pm 7,\pm 5,\pm 1\}$. **C.** $\{\pm 5,\pm 1\}$. **D.** $\{\pm 1\}$.

Câu 40: Giá trị của tham số thực m để tồn tại duy nhất một cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $\log_{2019}(x+y)\le 0$ và $x+y+\sqrt{2xy+m}\ge 1$ là

A. $m=\dfrac{-1}{2}$. **B.** $m=0$. **C.** $m=2$. **D.** $m=\dfrac{-1}{3}$.

Câu 41: Cho hàm số $f(x)=\log_2\dfrac{mx}{2-x}$ với m là số thực dương. Tìm giá trị thực của m, biết rằng với mọi số thực $a,b\in(0;2)$ thỏa mãn $a+b=2$ ta luôn có $f(a)+f(b)=3$.

A. $m=3$. **B.** $m=8$. **C.** $m=2\sqrt{2}$. **D.** $m=9$.

Câu 42: Với mỗi cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn $\log_2(2x+y)=\log_4\left(x^2+xy+7y^2\right)$ có bao nhiêu số thực z thỏa mãn $\log_3(3x+y)=\log_9\left(3x^2+4xy+zy^2\right)$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.D	3.A	4.A	5.A	6.A	7.B	8.A	9.D	10.A
11.C	12.B	13.C	14.B	15.A	16.A	17.D	18.C	19.D	20.A
21.D	22.A	23.A	24.A	25.C	26.C	27.A	28.A	29.B	30.D
31.A	32.D	33.C	34.B	35.A	36.D	37.A	38.A	39.C	40.A
41.C	42.A								

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **Chọn C**

Ta có: $\log_3 x = 4\log_3 a + 7\log_3 b \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 a^4 + \log_3 b^7 \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3\left(a^4b^7\right) \Leftrightarrow x = a^4b^7$.

Câu 2: **Chọn D**

Đặt $t = \log_2 x \Rightarrow \log_4 x = \frac{1}{2}t$. Ta có: $\log_2\left(\frac{1}{2}t\right) = \log_4 t + a \Leftrightarrow \log_2 t = 2a + 2 \Leftrightarrow t = 4^{a+1}$.

Vậy: $\log_2 x = 4^{a+1}$.

Câu 3: **Chọn A**

Ta có $\begin{cases} x = \log_a bc \\ y = \log_b ca \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\log_c bc}{\log_c a} \\ y = \dfrac{\log_c ca}{\log_c b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\log_c a - \log_c b = 1 \\ \log_c a - y\log_c b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_c a = \dfrac{y+1}{xy-1} \\ \log_c b = \dfrac{x+1}{xy-1} \end{cases}$.

Mặt khác, $\log_c ab = \log_c a + \log_c b = \dfrac{x+y+2}{xy-1}$. Do đó $\begin{cases} m = 1 \\ n = 1 \\ p = 1 \end{cases} \Rightarrow S = m + 2n + 3p = 6$.

Câu 4: **Chọn A**

Ta có: $\log_2 a.\log_a b = \frac{b}{4}.\frac{16}{b} \Leftrightarrow \log_2 b = 4 \Leftrightarrow b = 2^4 \Leftrightarrow b = 16$

$\Rightarrow \log_2 a = 4 \Leftrightarrow a = 16 \Rightarrow a.b = 16^2 \Leftrightarrow ab = 256$.

Câu 5: **Chọn A**

Đặt $\log_9 x = \log_{12} y = \log_{16}\left(x+y\right) = t$. Khi đó, ta có hệ sau :

$$\begin{cases} x = 9^t \\ y = 12^t \\ x + y = 16^t \end{cases} \Rightarrow 9^t + 12^t = 16^t \quad (1)$$

Xét phương trình (1) chia hai vế cho $9^t > 0$ ta được:

$1 + \left(\frac{4}{3}\right)^t = \left(\frac{4}{3}\right)^{2t} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{2t} - \left(\frac{4}{3}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{4}{3}\right)^t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}(N) \\ \left(\frac{3}{4}\right)^t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}(L) \end{array}\right.$. Ta có $\frac{y}{x} = \frac{12^t}{9^t} = \left(\frac{4}{3}\right)^t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Câu 6: Chọn A

Đặt $x=\log_c a, y=\log_c b$.

Ta có $\log_a(bc)=2 \Leftrightarrow \log_a b+\log_a c=2 \Leftrightarrow \dfrac{\log_c b}{\log_c a}+\dfrac{1}{\log_c a}=2 \Rightarrow \dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{x}=2$.

$\log_b(ca)=3 \Leftrightarrow \log_b c+\log_b a=3 \Leftrightarrow \dfrac{\log_c a}{\log_c b}+\dfrac{1}{\log_c b}=3 \Rightarrow \dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{y}=3$.

Do đó ta có hệ $\begin{cases}\dfrac{y+1}{x}=2\\ \dfrac{x+1}{y}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y+1=2x\\ x+1=3y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{4}{5}\\ y=\dfrac{3}{5}\end{cases}$.

Thay vào $S=\log_c(ab)=\log_c a+\log_c b=\dfrac{7}{5}$.

Câu 7: Chọn B

Đặt $2\log_2\sqrt{a}=t \Leftrightarrow \sqrt{a}=2^{\frac{t}{2}} \Leftrightarrow a=2^t$. Khi đó bất phương trình trở thành

$3\log_3\left(1+2^{\frac{t}{2}}+2^{\frac{t}{3}}\right)>t \Leftrightarrow 1+2^{\frac{t}{2}}+2^{\frac{t}{3}}>3^{\frac{t}{3}} \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^t+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}\right)^t+\left(\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}\right)^t>1 \quad (1)$.

Xét hàm số $f(t)=\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^t+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}\right)^t+\left(\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}\right)^t, t\in\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^t\ln\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}\right)^t\ln\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}+\left(\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}\right)^t\ln\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}<0, \forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số là hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Nhận thấy $f(12)=1$ nên ta có:

$(1) \Leftrightarrow f(t)>f(12) \Leftrightarrow t<12 \Rightarrow 2\log_2\sqrt{a}<12 \Leftrightarrow \sqrt{a}<2^6 \Leftrightarrow a<2^{12}$.

Do đó số a nguyên dương lớn nhất là $2^{12}-1$.

Suy ra $P=\log_2\left[2018\left(2^{12}-1\right)\right]\approx 22,9783$. Vậy phần nguyên của P là 22.

Câu 8: Chọn A

Ta có $\log_a(\log_b x)=\log_b(\log_a x)=k \Leftrightarrow \begin{cases}\log_b x=a^k\\ \log_a x=b^k\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=b^{a^k}\\ x=a^{b^k}\end{cases} \Rightarrow b^{a^k}=a^{b^k}=a^k\log_a b \Leftrightarrow \left(\dfrac{b}{a}\right)^k=\log_a b \Leftrightarrow k=\log_{\frac{b}{a}}(\log_a b) \Rightarrow \log_a x=b^{\log_{\frac{b}{a}}(\log_a b)}$

Câu 9: Chọn D

Ta có: $\begin{cases}\ln x=\ln t^a \Leftrightarrow x=t^a\\ \ln y=\ln t^b \Leftrightarrow y=t^b\\ \ln z=\ln t^c \Leftrightarrow z=t^c\end{cases}$

Do đó $xy=z^2t^2 \Leftrightarrow t^at^b=\left(t^ct\right)^2 \Leftrightarrow t^{a+b}=t^{2(c+1)} \Leftrightarrow a+b=2(c+1) \Rightarrow S=2$

Câu 10: Chọn A

$\log_a 2019 + 2^3 \log_a 2019 + 3^3 \log_a 2019 + ... + n^3 \log_a 2019 = 1008^2.2017^2 \log_a 2019$

$\Leftrightarrow \left(1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3\right)\log_a 2019 = 1008^2.2017^2 \log_a 2019$

$\Leftrightarrow \left(1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3\right) = 1008^2.2017^2 \Leftrightarrow \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 1008^2.2017^2 \Leftrightarrow n = 2016$

Câu 11: Chọn C

$\log_2\left(\log_{2^a}\left(\log_{2^b}\left(2^{a+b}\right)\right)\right) = 0 \Leftrightarrow \log_{2^a}\left(\log_{2^b}\left(2^{a+b}\right)\right) = 1 \Leftrightarrow \log_{2^b}\left(2^{a+b}\right) = 2^a \Leftrightarrow 2^{a+b} = \left(2^b\right)^{2^a}$

$\Leftrightarrow 2^{a+b} = 2^{b.2^a} \Leftrightarrow a + b = b.2^a$. Do đó :

$\log_2\left(\frac{a+b}{ab}\right) \in [2016;2017] \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{a+b}{ab}\right) \in [2016;2017] \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{b.2^a}{ab}\right) \in [2016;2017]$

$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{b.2^a}{ab}\right) \in [2016;2017] \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{2^a}{a}\right) \in [2016;2017]$

Câu 12: Chọn B

Ta có: $4z \ge y^2 \Leftrightarrow z \ge \frac{y^2}{4} \Rightarrow x^3y^3 + x^2z \ge x^3y^3 + \frac{x^2y^2}{4} \ge 2\sqrt{x^3y^3.\frac{x^2y^2}{4}} = (xy)^{\frac{5}{2}}$.

Do đó $S \ge \log_a^2(xy) + \log_a(xy)^{\frac{5}{2}} \ge \log_a^2(xy) + \frac{5}{2}\log_a(xy) = \left(\log_a(xy) + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} \ge -\frac{25}{16}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} 4z = y^2 \\ x^3y^3 = \frac{x^2y^2}{4} \\ \log_a(xy) = -\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4z = y^2 \\ xy = \frac{1}{4} \\ \log_a\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{4} \end{cases}$.

Do đó với $\begin{cases} z = 1 \\ y = 2 \\ x = \frac{1}{8} \\ a = 4^{\frac{4}{5}} \end{cases}$ thì $S = -\frac{25}{16}$. Vậy $MinS = -\frac{25}{16}$.

Câu 13: Chọn C

Ta có $\ln(5a) - \ln(3a) = \ln\frac{5a}{3a} = \ln\frac{5}{3}$.

Câu 14: Chọn B

$\ln(5a) + \ln\left(\frac{3}{a}\right) = \ln\left(5a.\frac{3}{a}\right) = \ln 15$.

Câu 15: Chọn A

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Ta có $\begin{cases} ac = b^2 \\ abc = b^3 \\ ab + bc + ca = b(a+c) + ca = b(64-b) + b^2 = 64b \end{cases}$.

Do đó $P = 3\log_2(64b) - \log_2 b^3 = 3\log_2 64 = 3.6 = 18$.

Câu 16: Chọn A

Do 3 số $2017 + \log_2 a;\ 2018 + \log_3 a;\ 2019 + \log_4 a$; theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Suy ra

$2017 + \log_2 a + 2019 + \log_4 a = 2(2018 + \log_3 a)$

$\Leftrightarrow \log_2 a + \frac{1}{2}\log_2 a = 2\log_3 a \Leftrightarrow 3\log_2 a = 4\log_3 a \Leftrightarrow \log_2 a(3 - 4\log_3 2) = 0 \Leftrightarrow a = 1.$

Vậy công sai $d = \log_3 a - \log_2 a + 1 = 1$.

Câu 17: Chọn D

Ta có: $xyz = (\log_c b + \log_b c)(\log_a c + \log_c a)(\log_b a + \log_a b)$

$= (\log_a b)^2 + (\log_a c)^2 + (\log_b c)^2 + (\log_c b)^2 + (\log_c a)^2 + (\log_b a)^2 + 2 \quad (1)$

$x^2 + y^2 + z^2 = (\log_c b + \log_b c)^2 + (\log_a c + \log_c a)^2 + (\log_b a + \log_a b)^2$

$= (\log_a b)^2 + (\log_a c)^2 + (\log_b c)^2 + (\log_c b)^2 + (\log_c a)^2 + (\log_b a)^2 + 6 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $x^2 + y^2 + z^2 - xyz = 4$.

Câu 18: Chọn C

Ta có $\log_x + \log_y \ge \log(x + 2y^3) \Leftrightarrow \log(xy) \ge \log(x + 2y^3) \Leftrightarrow xy \ge x + 2y^3$

$\Leftrightarrow x(y-1) \ge 2y^3 > 0 \Rightarrow y - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{2y^3}{y-1} \Rightarrow \frac{x}{y} \ge \frac{2y^2}{y-1} - 2y + 2 + \frac{2}{y-1} - 2(y-1) + \frac{2}{y-1} + 4$

$\ge 2\sqrt{2(y-1).\frac{2}{y-1}} + 4 = 8 \Rightarrow \log_2 x - \log_2 y = \log_2 \frac{x}{y} \ge \log_{2^8} = 3$.

Câu 19: Chọn D

$\log_3(3^{a+1} - 1) = 2a + \log_{\frac{1}{3}} 2 \Leftrightarrow \log_3 2(3^{a+1} - 1) = 2a \Leftrightarrow 2(3^{a+1} - 1) = 3^{2a} \Leftrightarrow 3^{2a} - 6.3^a + 2 = 0$.

Tương tự: $3^{2b} - 6.3^b + 2 = 0$.

Suy ra 3^a và 3^b là hai nghiệm phân biệt (vì a, b phân biệt) của phương trình: $X^2 - 6X + 2 = 0$.

Khi đó $S = 27^a + 27^b = X_1^3 + X_2^3 = (X_1 + X_2)^3 - 3X_1X_2(X_1 + X_2)$, với $X_1 + X_2 = 6,\ X_1.X_2 = 2$.

Vậy $S = 6^3 - 3.2.6 = 180$.

Câu 20: Chọn A

Do $0 < x \ne 1$ nên ta có:

$\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_{3^2} x} + \cdots + \frac{1}{\log_{3^n} x} = \log_x(3.3^2....3^n) = \log_x 3^{1+2+\cdots+n} = \frac{n.(n+1)}{2} \cdot \log_x 3$

Vậy ta có: $\frac{n.(n+1)}{2} = 120 \Leftrightarrow n = 15$

Câu 21: Chọn D

Số các chữ số của 2^{2017} là

$\left[\log\left(2^{2017}\right)\right]+1=\left[2017\times\log 2\right]+1=\left[2017\times 0,30103\right]+1=\left[607,17751\right]+1=608$.

Câu 22: Chọn A

Hàm số $f(x)=\sqrt{1-\log_m^2(nx)}$ $(m>1,n>0)$ xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases}x>0\\1-\log_m^2(nx)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\-1\le\log_m(nx)\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\\frac{1}{m}\le nx\le m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\\frac{1}{mn}\le x\le\frac{m}{n}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{1}{mn}\le x\le\frac{m}{n}.$$

$\Rightarrow L=\frac{m}{n}-\frac{1}{mn}=\frac{m^2-1}{mn}=\frac{1}{2016}$

Do đó $\log_{2016}\frac{m^2-1}{mn}=\log_{2016}\frac{1}{2016}=-1$.

Câu 23: Chọn A

Ta có

$$2\log_x(2y)=2\log_{2x}(4z)=\log_{2x^4}(8yz)=2\Leftrightarrow\begin{cases}2y=x\\4z=2x\\8yz=4x^8\end{cases}\Rightarrow 4x^8=2x^2\Leftrightarrow x=2^{-\frac{1}{6}}\Rightarrow y=z=2^{-\frac{7}{6}}$$

Ta được: $xy^5z=2^{-\frac{43}{6}}\Rightarrow\begin{cases}p=43\\q=6\end{cases}$. Vậy $p+q=49$.

Câu 24: Chọn A

Đặt $t=\sqrt{\log u_5-2\log u_2+1},t\ge 0$.

Thế vào phương trình $\log u_5-2\log u_2=2\left(1+\sqrt{\log u_5-2\log u_2+1}\right)$ ta có

$t^2-1=2(t+1)\Leftrightarrow t^2-2t-3=0\Leftrightarrow t=3(t\ge 0)$.

Do $t=3$ nên $\sqrt{\log u_5-2\log u_2+1}=3\Leftrightarrow\log\frac{10u_5}{u_2^2}=9\Leftrightarrow\frac{10u_1.3^4}{u_1^2.3^2}=10^9\Leftrightarrow u_1=\frac{9}{10^8}$.

$u_n<10^{100}\Leftrightarrow\frac{9}{10^8}.3^{n-1}<10^{100}\Leftrightarrow 3^{n+1}<10^{108}\Leftrightarrow n<108\log_3 10-1\approx 225,357$.

Câu 25: Chọn C

Dựa vào việc khảo sát hàm số $f(t)=e^{t-1}-t,t\in\mathbb{R}$. Ta thấy $e^{t-1}\ge t,t\in\mathbb{R}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t=1$. Do đó $e^{x+y-1}\le x+y\Leftrightarrow e^{x+y-1}=x+y\Leftrightarrow x+y=1$.

Khi đó $f(x)+f(y)=1\Leftrightarrow f(x)+f(1-x)=1\Leftrightarrow\frac{9^x}{9^x+m^2}+\frac{9^{1-x}}{9^{1-x}+m^2}=1$

$\Leftrightarrow 9^x\left(\frac{m^4}{4}-1\right)=0\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{3}\Rightarrow S\left\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\right\}$.

Câu 26: Chọn D.

$$\log_2\left[\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2 x\right)\right]=\log_3\left[\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_3 y\right)\right]=\log_5\left[\log_{\frac{1}{5}}\left(\log_5 z\right)\right]=p>0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2 x\right)=2^a\\ \log_{\frac{1}{3}}\left(\log_3 y\right)=3^a\\ \log_{\frac{1}{5}}\left(\log_5 z\right)=5^a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log x=2^{-2a}\\ \log y=3^{-3a}\\ \log_5 z=5^{-5a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2^{2^{-2a}}\\ y=3^{3^{-3a}}\\ z=5^{5^{-5a}}\end{cases}$$

Với $x\ge 2, a>1$, xét hàm số $y=x^{x^{-x^a}}\Rightarrow \ln y=x^{-x^p}\ln x\Rightarrow \ln\left(\ln y\right)=\ln\left(\ln x\right)-x^p\ln x$.

Lấy đạo hàm hai vế, ta được:

$$\frac{\frac{y'}{y}}{\ln y}=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}-x^{a-1}-ax^{a-1}\ln x=\frac{1}{x\ln x}-x^{a-1}\left(1+a\ln x\right)<\frac{1}{x\ln x}-1-\ln x$$

$$=\frac{1-x\ln x-x\left(\ln x\right)^2}{x\ln x}<0,\forall x>2,a>1\Rightarrow y'<0,\forall x>2,\mathrm{a}>1.$$

Do đó $y(2)>y(3)>y(5)\Rightarrow x>y>z..$

Câu 27: Chọn A

Đặt $\begin{cases}a=\log_{10}x\\ b=\log_{10}y\\ c=\log_{10}z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=10^a\\ y=10^b\\ z=10^c\end{cases}\Rightarrow xyz=10^{a+b+c}$.

Theo bài ta có: $\begin{cases}xyz=10^{81}\\ \left(\log_{10}x\right).\left(\log_{10}yz\right)+\left(\log_{10}y\right)\left(\log_{10}z\right)=468\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b+c=81\\ ab+ac+bc=468\end{cases}\quad(1)$.

Vậy thay (1) vào ta có $S=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{\left(a+b+c\right)^2-2\left(ab+bc+ac\right)}=\sqrt{81^2-2.468}=75$.

Câu 28: Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases}x,y\ne 1\\ x>y>0\end{cases}$. Ta có:

$$\log_x y=\log_y x\Leftrightarrow\log_x y=\frac{1}{\log_x y}\Leftrightarrow\left(\log_x y\right)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_x y=1\ (\mathrm{L})\\ \log_x y=-1\ (\mathrm{TM})\end{array}\right.\Leftrightarrow y=x^{-1}\Leftrightarrow y=\frac{1}{x}.$$

Ta có: $\log_x\left(x-y\right)=\log_y\left(x+y\right)\Leftrightarrow\log_x\left(x-\frac{1}{x}\right)=-\log_x\left(x+\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow\log_x\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)=0$

$\Leftrightarrow x^2-\frac{1}{x^2}=1\Leftrightarrow x^4-x^2-1=0$. Vậy $S=x^4-x^2+1=1+1=2$.

Câu 29: Chọn B

Ta có $2^{\sqrt[3]{x^2}}.4^{\sqrt[3]{y^2}}.16^{\sqrt[3]{z^2}}=128\Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{y^2}+4\sqrt[3]{z^2}}=2^7\Leftrightarrow\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{y^2}+4\sqrt[3]{z^2}=7$.

Từ điều kiện thứ hai suy ra

$x^2y^4+2xy^2z^4+z^8=4+x^2y^4-2xy^2z^4+z^8\Leftrightarrow xy^2z^4=1$.

Mặt khác theo bất đẳng thức AM- GM cho 7 số thực dương ta có

$\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{y^2}+4\sqrt[3]{z^2}\ge 7\sqrt[7]{\sqrt[3]{x^2}.\left(\sqrt[3]{y^2}\right)^2.\left(\sqrt[3]{z^2}\right)^4}=7\sqrt[7]{\sqrt[3]{x^2y^4z^8}}=7\sqrt[7]{\sqrt[3]{\left(xy^2z^4\right)^2}}=7$.

Do đó dấu bằng phải xảy ra, tức $\begin{cases}\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{z^2}\\ xy^2z^4=1\end{cases}\Leftrightarrow x=1;y,z\in\{-1;1\}$.

Vậy có tất cả 4 bộ số thỏa mãn.

Câu 30: Chọn D

Ta có $a>0;b>0$, suy ra

$4a^2+b^2+1\ge 4ab+1\Rightarrow \log_{2a+2b+1}\left(4a^2+b^2+1\right)\ge\log_{2a+2b+1}\left(4ab+1\right)$

$\Rightarrow 2=\log_{2a+2b+1}\left(4a^2+b^2+1\right)+\log_{4ab+1}\left(2a+2b+1\right)\ge\log_{2a+2b+1}\left(4ab+1\right)+\log_{4ab+1}\left(2a+2b+1\right)$

Mà $\log_{2a+2b+1}\left(4ab+1\right)+\log_{4ab+1}\left(2a+2b+1\right)=\log_{2a+2b+1}\left(4ab+1\right)+\dfrac{1}{\log_{2a+2b+1}\left(4ab+1\right)}\ge 2$

Khi đó: $\log_{2a+2b+1}\left(4a^2+b^2+1\right)+\log_{4ab+1}\left(2a+2b+1\right)=2$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\log_{2a+2b+1}\left(4ab+1\right)=1\\ 2a=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+2b+1=4ab+1\\ 2a=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3}{4}\\ b=\dfrac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow a+2b=\dfrac{15}{4}$.

Câu 31: Chọn A

$\log_a b+6\log_b a=5\Leftrightarrow\log_a b+\dfrac{6}{\log_a b}=5\Leftrightarrow\log_a^2 b-5\log_a b+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_a b=2\\ \log_a b=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=a^2\\ b=a^3\end{array}\right.$

Trường hợp 1: $b=a^2$

$2\le b\le 2005\Leftrightarrow 2\le a^2\le 2005\Leftrightarrow\sqrt{2}\le a\le\sqrt{2005}$

Vì $a;b\in\mathbb{N}^*$ nên $a\in\{2;3;4;...;44\}$. Do đó có 43 cặp số $(a;b)$.

Trường hợp 2: $b=a^3$

$2\le b\le 2005\Leftrightarrow 2\le a^3\le 2005\Leftrightarrow\sqrt[3]{2}\le a\le\sqrt[3]{2005}$

Vì $a;b\in\mathbb{N}^*$ nên $a\in\{2;3;4;...;12\}$. Do đó có 11 cặp số $(a;b)$.

Vậy có 54 cặp số $(a;b)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 32: Chọn D

Đặt $3\log_x(3y)=3\log_{3x}(9z)=\log_{3x^4}(27yz)=t$

$\Rightarrow\begin{cases}3y=x^{\frac{t}{3}}\\ 9z=(3x)^{\frac{t}{3}}=3^{\frac{t}{3}}.x^{\frac{t}{3}}\\ 27yz=\left(3x^4\right)^t=3^t.x^{4t}\end{cases}\Rightarrow 3y.9z.27yz=3^{\frac{4t}{3}}.x^{\frac{14t}{3}}\Leftrightarrow(yz)^2=3^{\frac{4t-18}{3}}.x^{\frac{14t}{3}}\Leftrightarrow yz=3^{\frac{2t-9}{3}}.x^{\frac{7t}{3}}\ (1)$

Lại có $xy^3=x.3^{-3}.x^t=3^{-3}.x^{t+1}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra: $xy^4z=x^{\frac{10t+3}{3}}.3^{\frac{2t-18}{3}}$

Vì $xy^4z=3^{-\frac{a}{b}}$ nên $\dfrac{10t+3}{3}=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{3}{10}$ nên $\dfrac{2t-18}{3}=-\dfrac{31}{5}$. Vậy $\dfrac{a}{b}=\dfrac{31}{5}\Rightarrow a+b=36$

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Câu 33: Chọn C

Đặt $\log x = a \neq 0, \log y = b, \log z = c$

Khi đó

$\log_{\sqrt{x}}(2y) = \log_{\sqrt{2x}}(4z) = \log_{2x^4}(8yz)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2.\dfrac{\log 2 + b}{a} = 2.\dfrac{2\log 2 + c}{\log 2 + a} \\ 2.\dfrac{\log 2 + b}{a} = \dfrac{3\log 2 + b + c}{\log 2 + 4a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log^2 2 + (a+b)\log 2 + ab = 2a\log 2 + ac & (1) \\ 2\log^2 2 + (8a+2b)\log 2 + 8ab = 3a\log 2 + ab + ac & (2) \end{cases}$$

(2) – 2.(1) ta được:

$6a\log 2 + 6ab = -a\log 2 + ab - ac \Leftrightarrow 7a\log 2 = -5ab - ac$

$\Leftrightarrow 5b + c = -7\log 2 \Leftrightarrow 5\log y + \log z = -7\log 2$

(2) – (1) ta được:

$\log^2 2 + (6a+b)\log 2 + 6ab = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log 2 = -6a \\ \log 2 = -b \end{array}\right.$. Do đó $\log x = a = -\dfrac{1}{6}\log 2$

Vậy $\log x + 5\log y + \log z = -\dfrac{1}{6}\log 2 - 7\log 2 = -\dfrac{43\log 2}{6}$.

Câu 34: Chọn B

Với $0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1$ suy ra $\log_2\left(\dfrac{1}{x}\right) \geq 0 \Rightarrow \left[\log_2\left(\dfrac{1}{x}\right)\right] \geq 0; \left[\log_5\left(\dfrac{1}{y}\right)\right] \geq 0$.

Khi đó

$\left[\log_2\left(\dfrac{1}{x}\right)\right] = 2k\left(k \geq 0, k \in \mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow 2k \leq \log_2\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq 2k+1 \Leftrightarrow 2^{2k} \leq \dfrac{1}{x} < 2^{2k+1} \Leftrightarrow 2^{-2k-1} < x \leq 2^{-2k}$

Vậy $x \in \left(2^{-2k-1}; 2^{-2k}\right], k = 0,1,....$ độ dài của tập này bằng

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(2^{-2k} - 2^{-2k-1}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-2k-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + ... = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

Tương tự $\left[\log_5\left(\dfrac{1}{y}\right)\right] = 2k\left(k \geq 0, k \in \mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow 2k \leq \log_5\left(\dfrac{1}{y}\right) \leq 2k+1$

$\Leftrightarrow 5^{2k} \leq \dfrac{1}{y} < 5^{2k+1} \Leftrightarrow 5^{-2k-1} < y \leq 5^{-2k}$

Vậy $y \in \left(5^{-2k-1}; 5^{-2k}\right], k = 0,1,....$ độ dài của tập này bằng $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(5^{-2k} - 5^{-2k-1}\right)$

$= \sum_{k=0}^{+\infty} 4.5^{-2k-1} = 4\left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{125} + \dfrac{1}{3125} + ...\right) = 4.\dfrac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \dfrac{5}{6}$. Vậy xác suất cần tìm bằng $\dfrac{2}{3}.\dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{9}$.

Câu 35: Chọn A

Đẳng thức đã cho tương đương với:

$(\log^2 a+2(2\sin b+1)\log a+(2\sin b+1)^2)+(4\sin b+5-(2\sin b+1)^2)=0$

$\Leftrightarrow (\log a+2\sin b+1)^2+4(1-\sin^2 b)=0$

$\Leftrightarrow (\log a+2\sin b+1)^2+4\cos^2 b=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\log a+2\sin b+1=0\\ \cos b=0\end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin b=1\\ \log a+3=0\end{cases}\\ \begin{cases}\sin b=-1\\ \log a-1=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=\dfrac{1}{1000}\\ b=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{cases}\\ \begin{cases}a=10\\ b=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow (a+b)_{\min}=\frac{1}{1000}+\frac{\pi}{2}$$

Câu 36: Chọn D

Đẳng thức đã cho tương đương với:

$\left(4^a-(2\sin b+1)\right)^2+\left(4\sin b+5-(2\sin b+1)^2\right)=0 \Leftrightarrow \left(4^a-(2\sin b+1)\right)^2+4\left(1-\sin^2 b\right)=0$

$\left(4^a-(2\sin b+1)\right)^2+4\cos^2 b=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos b=0\\ 4^a-2\sin b-1=0\end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4^a-3=0\\ \sin b=1\end{cases}\\ \begin{cases}4^a+1=0\\ \sin b=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}a=\log_4 3\\ b=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{cases}. \text{ Vậy } (a+b)_{\min}=\log_4 3+\frac{\pi}{2}$$

Câu 37: Chọn A

Theo bài ra: $\log_x 225-\log_y 64=1$. Đặt $\begin{cases}X=\log_{225} x\\ Y=\log_{64} y\end{cases}$ ta được hệ:

$$\begin{cases}X+Y=4\\ \dfrac{1}{X}-\dfrac{1}{Y}=1\end{cases} \Rightarrow \frac{1}{X}-\frac{1}{4-X}=1 \Leftrightarrow 4-2X=X(4-X) \Leftrightarrow X^2-6X+4=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}X=3+\sqrt{5} & \Rightarrow Y=1-\sqrt{5}\\ X=3-\sqrt{5} & \Rightarrow Y=1+\sqrt{5}\end{array}\right.$$

Với $\begin{cases}X=3+\sqrt{5}\\ Y=1-\sqrt{5}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=225^{3+\sqrt{5}}\\ y_1=64^{1-\sqrt{5}}\end{cases}$ Với $\begin{cases}X=3-\sqrt{5}\\ Y=1+\sqrt{5}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_2=225^{3-\sqrt{5}}\\ y_2=64^{1+\sqrt{5}}\end{cases}$

Khi đó: $\log_{30}\left(x_1y_1x_2y_2\right)=\log_{30}\left(225^6.64^2\right)=12$

Câu 38: Chọn A

Có $u_n=b^{n-1}u_1=b^{u-1}a$, vậy ta có:

$\log_8 u_1+\log_8 u_2+...+\log_8 u_{12}=\log_8(a)+\log_8(ab)+...+\log_8\left(ab^{11}\right)$

$=\log_8\left(a.ab.ab^2...ab^{11}\right)=\log_8\left(a^{12}b^{66}\right)$.

Và $\log_8\left(a^{12}b^{66}\right)=2006 \Leftrightarrow a^{12}b^{66}=8^{2006} \Leftrightarrow \left(a^2b^{11}\right)^6=\left(2^{1003}\right)^6 \Leftrightarrow a^2b^{11}=2^{1003}$.

Vì vậy: $a=2^x$, $b=2^y\left(x,y\in\mathbb{Z}^+\right)$ và

$2^{2x}b^{11y}=2^{1003}\Leftrightarrow 2x+11y=1003\Leftrightarrow y=\dfrac{1003-2x}{11}=91-\dfrac{2(z-1)}{11}$.

Do đó: $x-1=11k\Leftrightarrow x=11k+1\Leftrightarrow y=92-2k$.

Do x, $y\in\mathbb{Z}^+$ nên $k\in\{0,\ldots,45\}$. Vậy có 46 cặp số nguyên dương $(a;b)$ thỏa mãn.

Câu 39: Chọn C

Theo đề bài ta có: $\begin{cases}x^2+y^2+2x-4y+1=0\\4x+4y-6+m^2=x^2+y^2+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1)^2+(y-2)^2=4\quad(1)\\(x-2)^2+(y-2)^2=m^2\quad(2)\end{cases}$

Phương trình (1) là phương trình đường tròn (C_1) có tâm $I_1(-1;2)$, bán kính $R_1=2$

và phương trình (2) là phương trình đường tròn (C_2) có tâm $I_2(2;2)$ và bán kính $R_2=|m|$

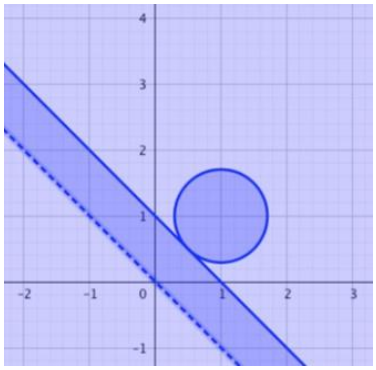
Cặp số thực $(x;y)$ tồn tại duy nhất khi và chỉ khi (C_1), (C_2) tiếp xúc ngoài hoặc tiếp xúc trong ($R_1=R_2$) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}I_1I_2=R_1+R_2\\\begin{cases}I_1I_2=|R_1-R_2|\\R_1\neq R_2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3=|m|+2\\\begin{cases}3=||m|-2|\\|m|\neq 2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\pm1\\m=\pm5\end{array}\right.$.

Câu 40: Chọn A

$\begin{cases}\log_{2019}(x+y)\le 0\\x+y+\sqrt{2xy+m}\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x+y\le 1\\\sqrt{2xy+m}\ge 1-(x+y)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x+y\le 1\\2xy+m\ge(1-(x+y))^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}0<x+y\le 1\\x^2+y^2-2x-2y+1-m\le 0\end{cases}$

Theo đề $\Leftrightarrow\begin{cases}x+y>0\\x+y-1\le 0\\(x-1)^2+(y-1)^2\le m+1\end{cases}$



$YCBT\Leftrightarrow d(I;d)=R\Leftrightarrow\dfrac{|1+1-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{m+1}\Leftrightarrow m=\dfrac{-1}{2}$

Câu 41: Chọn C

Ta có: $f(x)=\log_2\dfrac{mx}{2-x}=\log_2 m+\log_2\dfrac{x}{2-x}$

Do đó $f(a)+f(b)=f(a)+f(2-a)=\log_2 m+\log_2\dfrac{a}{2-a}+\log_2 m+\log_2\dfrac{2-a}{a}=2\log_2 m$

Theo giả thiết ta có: $f(a)+f(b)=3$ nên $2\log_2 m=3\Leftrightarrow m=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$.

Câu 42: Chọn A

Ta có: $\begin{cases}\log_2(2x+y)=\log_4(x^2+xy+7y^2)\\\log_3(3x+y)=\log_9(3x^2+4xy+zy^2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y>0,3x+y>0\\\log_2(2x+y)^2=\log_2(x^2+xy+7y^2)\\\log_3(3x+y)^2=\log_3(3x^2+4xy+zy^2)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y>0, 3x+y>0 \\ (2x+y)^2 = x^2+xy+7y^2 \\ (3x+y)^2 = 3x^2+4xy+zy^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y>0, 3x+y>0 \\ 3x^2+3xy-6y^2=0 \\ z=\dfrac{6x^2+2xy+y^2}{y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y}=1; \dfrac{x}{y}=-2 \\ z=9; z=21 \end{cases}.$$

CHỦ ĐỀ 3: HÀM SỐ LŨY THỪA, MŨ VÀ LOGARIT

LÝ THUYẾT

I. HÀM SỐ LŨY THỪA

1. Định nghĩa

- Hàm số $y=x^{\alpha}$ với $\alpha\in\mathbb{R}$ được gọi là hàm số lũy thừa.

2. Tập xác định

Tập xác định của hàm số $y=x^{\alpha}$ là:

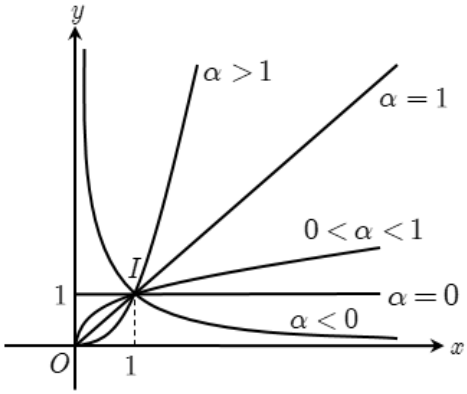
- $D=\mathbb{R}$ nếu α là số nguyên dương
- $D=\mathbb{R}$ nếu α là số nguyên âm hoặc bằng 0
- $D=\mathbb{R}$ nếu α không nguyên

3. Đạo hàm của hàm lũy thừa

- Hàm số $y=x^{\alpha}$ với $\alpha\in\mathbb{R}$ có đạo hàm với mọi $x>0$ và $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha.x^{\alpha-1}$
- Đạo hàm của hàm hợp $\left[u^{\alpha}\left(x\right)\right]'=\alpha.u^{\alpha-1}\left(x\right).u\left(x\right)$

4. Tính chất và đồ thị của hàm lũy thừa

- Đồ thị hàm số $y=x^{\alpha}$ với $(a<0)$ nhận Ox làm tiệm cận ngang, nhận Oy làm tiệm cận đứng. Khi $a>0$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận.



- Đồ thị của hàm số lũy thừa $y=x^{\alpha}$ luôn đi qua điểm $I(1;1)$.
- **Lưu ý**: Khi khảo sát hàm số lũy thừa với số mũ cụ thể, ta phải xét hàm số đó trên toàn bộ tập xác định của nó. Chẳng hạn: $y=x^{3}$, $y=x^{-2}$, $y=x^{\pi}$.

II. HÀM SỐ MŨ

1. Định nghĩa

- Hàm số $y=a^{x}$ với $a>0,a\neq 1$ được gọi là hàm số mũ với cơ số a

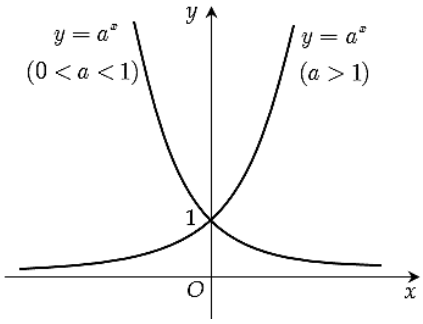
2. Tập xác định và tập giá trị

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}$
- Tập giá trị: $T=\left(0;+\infty\right)$

3. Tính đơn điệu và đồ thị

- Khi $a>1$ thì hàm số $y=a^{x}$ đồng biến, khi đó ta có $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f\left(x\right)>g\left(x\right)$

- Khi $0<a<1$ thì hàm số $y=a^x$ nghịch biến, khi đó ta có $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)<g(x)$



Đồ thị nhận Ox là tiệm cận ngang, luôn đi qua điểm $(0;1)$ và $(1;a)$, nằm về phía trên trục hoành $(y=a^x>0,\ \forall x\in\mathbb{R})$.

4. Đạo hàm

$\oplus\ \left(a^x\right)'=a^x.\ln a$ $\oplus\ \left(a^u\right)'=u'.a^u.\ln a$

$\oplus\ \left(\sqrt[n]{u}\right)'=\dfrac{u'}{n.\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ $\oplus\ \left(e^x\right)'=e^x$ $\oplus\ \left(e^u\right)'=u.e^u$

III. HÀM SỐ LOGARIT

1. Định nghĩa

- Hàm số dạng $y=\log_a x,\left(a>0;a\neq 1\right)$ được gọi là hàm số logarit cơ số a.

2. Tập xác định và tập giá trị

- Tập xác định: $D=\left(0;+\infty\right)$
- Tập giá trị: $T=\mathbb{R}$.

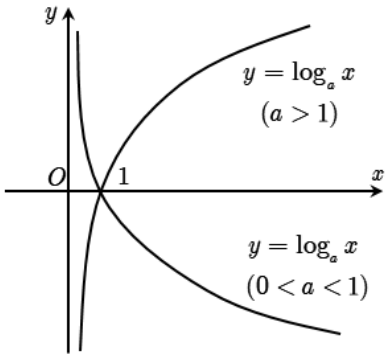
3. Tính đơn điệu và đồ thị

- Khi $a>0$ thì hàm số $y=\log_a x$ đồng biến trên D, khi đó nếu:

$$\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow f(x)>g(x).$$

- Khi $0<a<1$ thì hàm số $y=\log_a x$ nghịch biến trên D, khi đó nếu:

$$\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow f(x)<g(x).$$



4. Đạo hàm

$\oplus\ \left(\log_a|x|\right)'=\dfrac{1}{x.\ln a}\Rightarrow\left(\log_a|u|\right)'=\dfrac{u'}{u.\ln a}$ $\oplus\ \left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}\left(x>0\right)\Rightarrow\left(\ln|u|\right)'=\dfrac{u'}{u}$

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1: Tìm tập hợp giá trị của m để hàm số $y=\left(m^2-3m+1\right)^x$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

A. $\left(0;\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2};3\right)$.

B. $\left(-\infty;\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)\setminus\{0;3\}$.

C. $(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$.

D. $(0;3)$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ khi và chỉ khi $0<m^2-3m+1<1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-3m+1>0\\ m^2-3m<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>\frac{3+\sqrt{5}}{2}\\ m<\frac{3-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\\ 0<m<3\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{3+\sqrt{5}}{2}<m<3\\ 0<m<\frac{3-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$$

VÍ DỤ 2: Cho hàm số $y=\frac{e^x}{\cos x}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $y''-2y=2y'\tan x$.

B. $y''=-2y'\tan x$.

C. $y''=2y'\tan x$.

D. $y''+2y=2y'\tan x$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=\frac{e^x(\cos x+\sin x)}{\cos^2 x}=y+y\tan x$

Đạo hàm cấp hai: $y''=y'+y'.\tan x+\left(1+\tan^2 x\right)=2\frac{e^x}{\cos x}+2\frac{e^x}{\cos x}\tan x+2\frac{e^x}{\cos x}\tan^2 x$

$=2y+2y\tan x+2y\tan^2 x\Rightarrow y''-2y=2(y+y\tan x)\tan x=2y'.\tan x$

VÍ DỤ 3: Cho hàm số $y=\frac{1}{(x-m)\ln\left(x^2-2(3m-1)x+9m^2\right)}$. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-10;10)$ để hàm số xác định trên khoảng $(2;+\infty)$?

A. 12.

B. 18.

C. 11.

D. 8.

Lời giải

Chọn A

Hàm số đã cho xác định trên khoảng $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}x-m\neq 0\\ x^2-2(3m-1)x+9m^2>0,\ \forall x\in(2;+\infty)\\ x^2-2(3m-1)x+9m^2\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq 2\\ x^2-2(3m-1)x+9m^2>0,\ \forall x\in(2;+\infty)\\ x^2-2(3m-1)x+9m^2\neq 1\end{cases}$$

Với $\begin{cases} m \le 2 \\ g(x) = x^2 - 2(3m-1)x + 9m^2 > 0, \forall x \in (2;+\infty) \end{cases}$. (*)

Xét $\Delta' = (3m-1)^2 - 9m^2 = 1 - 6m$.

Trường hợp 1: $\begin{cases} m \le 2 \\ \Delta' = 1 - 6m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{6} < m \le 2$. Khi đó $g(x) > 0, \forall x \in (2;+\infty)$.

Trường hợp 2: $\begin{cases} m \le 2 \\ \Delta' = 1 - 6m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{6}$.

Ta có $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3m - 1 = -\frac{1}{2} \notin (2;+\infty)$. Khi đó $g(x) > 0, \forall x \in (2;+\infty)$.

Trường hợp 3: $\begin{cases} m \le 2 \\ \Delta' = 1 - 6m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{1}{6}$. Gọi $x_1; x_2 (x_1 < x_2)$ là các nghiệm của phương trình $g(x) = 0$.

Khi đó $g(x) > 0, \forall x \in (2;+\infty) \Leftrightarrow x_1 < x_2 \le 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 1.g(2) \ge 0 \\ \frac{x_1 + x_2}{2} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{6} \\ 9m^2 - 12m + 8 \ge 0 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{1}{6}$.

Kết hợp cả 3 trường hợp ta có các giá trị m thỏa (*) là $m \le 2$.

Với $\begin{cases} m \le 2 \\ x^2 - 2(3m-1)x + 9m^2 \ne 1, \forall x \in (2;+\infty) \end{cases}$. (**)

Ta có $g'(x) = 2x - 2(3m-1) = 0 \Leftrightarrow x = 3m - 1$.

Nếu $2 \le 3m - 1 \Leftrightarrow 1 \le m$ ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$		2		$3m-1$		$+\infty$
y'				$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$			$6m-1$	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó (**) $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le m \le 2 \\ 1 < 6m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le m \le 2$.

Nếu $2 > 3m - 1 \Leftrightarrow m < 1$ ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$3m-1$		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$			
y	$+\infty$	$\searrow$	$6m-1$	$\nearrow$	$9m^2-12m+8$		$+\infty$

Khi đó (**) $\Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ 1 \le 9m^2 - 12m + 8 \end{cases} \Leftrightarrow m < 1$.

Do đó $\begin{cases} m \le 2 \\ x^2 - 2(3m-1)x + 9m^2 \ne 1, \forall x \in (2;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m \le 2$.

Hàm số đã cho xác định trên khoảng $(2;+\infty) \Leftrightarrow m \le 2$.

Vậy $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in (-10;10) \Rightarrow m \in \{-9,-8,...,2\} \\ m \le 2 \end{cases}$. Suy ra có 12 giá trị nguyên của m thỏa đề bài.

VÍ DỤ 4: Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{m\ln x^2 - 2\ln x + 3 + m}$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$. Gọi $a \in S$, $b \in S$ lần lượt là số nguyên dương nhỏ nhất và số nguyên âm lớn nhất. Tính $P = 2a + 3b$.

A. $P = -10$. **B.** $P = 4$. **C.** $P = 10$. **D.** $P = -4$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > 0$.

Để hàm số xác định trên khoảng $(0;+\infty)$ thi phương trình $m\ln x^2 - 2\ln x + 3 + m = 0$ vô nghiệm với mọi $x \in (0;+\infty)$.

Trường hợp 1: $m = 0$ thì phương trình trở thành $-2\ln x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$.

Vậy $m = 0$ không thỏa mãn.

Trường hợp 2: $m \ne 0$ đặt $t = \ln x$, khi đó $x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow t \in \mathbb{R}$.

Phương trình $m\ln x^2 - 2\ln x + 3 + m = 0$ trở thành $mt^2 - 2t + 3 + m = 0$

Để phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = (-2)^2 - 4m(3+m) < 0$

$\Leftrightarrow -4m^2 - 12m + 4 < 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; \dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$.

Do đó $a = 1; b = -4 \Rightarrow P = 2a + 3b = 2 - 12 = -10$.

VÍ DỤ 5: Với các số thực dương a, b để đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{a+bx} - \sqrt{2}}{x-2}$ có đúng một đường tiệm cận, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \log_{(a+1)} \dfrac{b}{2}$.

A. -2. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Do a, $b > 0$ nên hàm số luôn có tập xác định $D = \left(-\dfrac{a}{b}; +\infty\right] \setminus \{2\}$.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 0$.

Mà $y=\dfrac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{2}}{x-2}=\dfrac{a+bx-2}{(x-2)\left(\sqrt{a+bx}+\sqrt{2}\right)}$, đặt $f(x)=a+bx-2$.

Để đồ thị hàm số trên có đúng một đường tiệm cận thì $f(2)=0\Leftrightarrow a+2b=2$.

Đặt $a+1=x$, $\dfrac{b}{2}=y$ ta suy ra $x+4y=3\Rightarrow P=\log_x y$, (do $a>0$ nên $x>1$).

Lại có $3=\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}+4y\geq 3.\sqrt[3]{x^2y}\Leftrightarrow x^2y\leq 1\Leftrightarrow y\leq\dfrac{1}{x^2}$.

Vậy $P=\log_x y\leq\log_x\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=-2$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=\dfrac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

DẠNG 1: BÀI TẬP HÀM SỐ LŨY THỪA – MŨ - LOGARIT

Câu 1: Tập xác định của hàm số $y=(x-1)^{-4}$ là

A. $[1;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Câu 2: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\log_{2019}(4-x^2)+(2x-3)^{-2019}$.

A. $D=\left[-2;\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};2\right]$. **B.** $D=\left(-2;\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};2\right)$.

C. $D=\left(\frac{3}{2};2\right)$. **D.** $D=(-2;2)$.

Câu 3: Tập xác định của hàm số $y=(-x^2+3x+4)^{\frac{1}{3}}+\sqrt{2-x}$ là

A. $(-1;2]$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(-\infty;2]$ **D.** $[-1;2]$

Câu 4: Tập xác định của hàm số $y=(x-1)^{\frac{1}{5}}$ là

A. $(1;+\infty)$. **B.** $[1;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Câu 5: Tìm tập xác định D của hàm số $y=(x^2-3x-4)^{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;4\}$. **B.** $D=(-\infty;-1]\cup[4;+\infty)$.

C. $D=\mathbb{R}$. **D.** $D=(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$.

Câu 6: Tìm tập xác định D của hàm số $y=(4-x^2)^{\frac{1}{5}}$.

A. $D=[-2;2]$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{\pm 2\}$. **C.** $D=(-2;2)$. **D.** $D=(-\infty;+\infty)$.

Câu 7: Tập xác định của hàm số $y=(3x-5)^{\frac{1}{3}}$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{5}{3}\right\}$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$. **D.** $\left[\frac{5}{3};+\infty\right)$.

Câu 8: Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $f(x)=(2x^2+mx+2)^{\frac{3}{2}}$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$?

A. 5. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 9: Cho biết phương trình $\log_9 x+\sqrt{\log_9 x+4}=26$ có nghiệm dạng $x=3^n$, với n là số tự nhiên. Tổng tất cả các chữ số của n bằng

A. 9. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 3.

Câu 10: Tập xác định của hàm số $y=(x+3)^{\frac{3}{2}}-\sqrt[4]{5-x}$ là

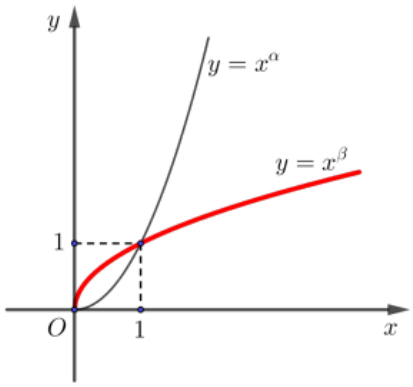
A. $D=(-3;5]$. **B.** $D=(-3;+\infty]\setminus\{5\}$.

C. $D=(-3;5)$. **D.** $D=(-3;+\infty)$.

Câu 11: Đạo hàm của hàm số $y=\frac{1}{5}e^{4x}$ là

A. $y'=-\frac{4}{5}e^{4x}$. **B.** $y'=\frac{1}{20}e^{4x}$. **C.** $y'=\frac{4}{5}e^{4x}$. **D.** $y'=-\frac{1}{20}e^{4x}$.

Câu 12: Cho các số thực α và β. Đồ thị các hàm số $y=x^{\alpha}$, $y=x^{\beta}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ như hình vẽ bên, trong đó đường đậm hơn là đồ thị của hàm số $y=x^{\beta}$.



Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $0<\beta<\alpha<1$. **B.** $\alpha<0<\beta<1$. **C.** $0<\beta<1<\alpha$. **D.** $\beta<0<1<\alpha$.

Câu 13: Với giá trị nào của x thì biểu thức: $f(x)=\log_5(x^3-x^2-2x)$ xác định?

A. $x\in(-1;0)\cup(2;+\infty)$. **B.** $x\in(0;2)\cup(4;+\infty)$.

C. $x\in(0;1)$. **D.** $x\in(1;+\infty)$.

Câu 14: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019;2019)$ để hàm số sau có tập xác định là $D=\mathbb{R}$.

$$y=x+m+\sqrt{x^2+2(m+1)x+m^2+2m+4}+\log_2\left(x-m+\sqrt{2x^2+1}\right)$$

A. 2020. **B.** 2021. **C.** 2018. **D.** 2019.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)=\ln(e^x+m)$. Có bao nhiêu số thực dương m để $f'(a)+f'(b)=1$ với mọi số thực a,b thỏa mãn $a+b=1$

A. 1. **B.** 2. **C.** Vô số. **D.** 0.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)=\ln 2019-\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$. Tính tổng $S=f'(1)+f'(3)+...+f'(2019)$.

A. $S=\frac{4035}{2019}$. **B.** $S=2021$. **C.** $S=\frac{2019}{2021}$. **D.** $S=\frac{2020}{2021}$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)=\ln(2x-5)$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x)<1$ là

A. $\left(\frac{7}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{7}{2};+\infty\right)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{5}{2}\right)\cup(3;+\infty)$

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ sau

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hỏi hàm số $g(x)=f(1-x)+x.\mathrm{e}^{-x}$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;3)$.

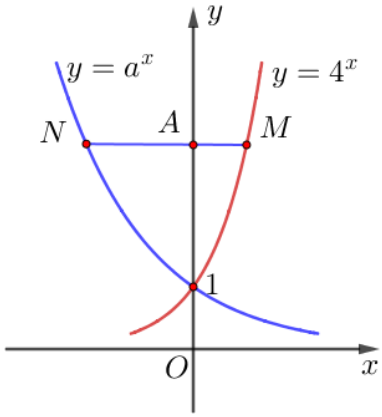
Câu 19: Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=\ln(x^2+1)-mx+1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $(-\infty;-1]$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $[-1;1]$. **D.** $(-1;1)$.

Câu 20: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{2}\ln(x^2+4)-mx+3$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $m\geq\frac{1}{4}$. **B.** $m\geq 4$. **C.** $m\leq\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{4}\leq m<4$.

Câu 21: Cho số thực a dương khác 1. Biết rằng bất kì đường thẳng nào song song với trục Ox mà cắt các đồ thị $y=4^x$ và $y=a^x$, trục tung lần lượt tại M, N, A thì $AN=2AM$. Giá trị của a bằng



A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.B	3.A	4.A	5.D	6.C	7.C	8.C	9..C	10.A
11.C	12.C	13.A	14.D	15.A	16.D	17.A	18.A	19.A	20.A
21.A									

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **Chọn D**

Điều kiện xác định: $x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$.

Câu 2: **Chọn B**

Điều kiện có nghĩa của hàm số là $\begin{cases}4-x^2>0\\2x-3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<x<2\\x\neq\dfrac{3}{2}\end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\left(-2;\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3}{2};2\right)$

Câu 3: **Chọn A**

Hàm số xác định khi $\begin{cases}-x^2+3x+4>0\\2-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<4\\x\leq 2\end{cases}\Leftrightarrow -1<x\leq 2$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(-1;2]$

Câu 4: **Chọn A**

Vì $\dfrac{1}{5}\notin\mathbb{Z}$ nên điều kiện xác định của hàm số là $x-1>0\Leftrightarrow x>1$.

Vậy tập xác định của hàm số là $(1;+\infty)$.

Câu 5: **Chọn D**

Hàm số xác định khi $x^2-3x-4>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\x>4\end{array}\right.$.

Vậy tập xác định D của hàm số là: $D=(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$.

Câu 6: **Chọn C**

Điều kiện xác định của hàm số $y=\left(4-x^2\right)^{\frac{1}{5}}$ là: $4-x^2>0\Leftrightarrow -2<x<2$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(-2;2)$.

Câu 7: **Chọn C**

Vì hàm số $y=(3x-5)^{\frac{1}{3}}$ có số mũ không nguyên nên hàm số xác định khi $3x-5>0\Leftrightarrow x>\dfrac{5}{3}$.

Vậy tập xác định của hàm số $y=(3x-5)^{\frac{1}{3}}$ là $\left(\dfrac{5}{3};+\infty\right)$.

Câu 8: **Chọn C**

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Hàm số $f(x)=\left(2x^2+mx+2\right)^{\frac{3}{2}}$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow 2x^2+mx+2>0, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta<0 \Leftrightarrow m^2-16<0 \Leftrightarrow -4<m<4$. Vì m nguyên nên $m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$.

Vậy có tất cả 7 giá trị m thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 9: Chọn C

Ta có: $\log_9 x+\sqrt{\log_9 x+4}=26\ (1)$

Đặt $t=\sqrt{\log_9 x+4}$ với $t\geq 0$. Ta có $\log_9 x=t^2-4$.

Phương trình (1) trở thành: $t^2-4+t=26 \Leftrightarrow t^2+t-30=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=5\ (\text{TM}) \\ t=-6\ (\text{L}) \end{array}\right.$.

Với $t=5 \Rightarrow \log_9 x=21 \Leftrightarrow x=9^{21} \Leftrightarrow x=3^{42} \Rightarrow n=42$.

Vậy tổng tất cả các chữ số của n là $4+2=6$.

Câu 10: Chọn A

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x+3>0 \\ 5-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3<x\leq 5$.

Câu 11: Chọn C

Ta có $y=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{4x} \Rightarrow y'=\frac{1}{5}\left(\mathrm{e}^{4x}\right)'=\frac{1}{5}(4x)'\,\mathrm{e}^{4x}=\frac{4}{5}\mathrm{e}^{4x}$. Vậy $y'=\frac{4}{5}\mathrm{e}^{4x}$.

Câu 12: Chọn C

Theo đặc điểm đồ thị hàm số lũy thừa.

Câu 13: Chọn A

Biểu thức $f(x)=\log_5\left(x^3-x^2-2x\right)$ xác định $\Leftrightarrow x^3-x^2-2x>0$

$\Leftrightarrow x(x+1)(x-2)>0 \Leftrightarrow x\in(-1;0)\cup(2;+\infty)$.

Câu 14: Chọn D

Hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì $\begin{cases} x^2+2(m+1)x+m^2+2m+4\geq 0 \\ x-m+\sqrt{2x^2+1}>0 \end{cases}$ luôn đúng với mọi

Tập các định: $x\in\mathbb{R}$

Ta có: $x^2+2(m+1)x+m^2+2m+4=\left[x+(m+1)\right]^2+3>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Ta có: $x-m+\sqrt{2x^2+1}>0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x+\sqrt{2x^2+1}>m, \forall x\in\mathbb{R}$.

Xét hàm số $f(x)=x+\sqrt{2x^2+1}$ với $x\in\mathbb{R}$ có $f'(x)=1+\frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1}{\sqrt{2}}$.

x	$-\infty$		$\frac{-1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy để $x+\sqrt{2x^2+1}>m, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}>m$.

Kết hợp điều kiện $\begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m\in(-2019;2019) \end{cases} \Rightarrow m\in\{-2018,-2017,-2016,...,-1,0\}$.

Kết luận: có 2019 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 15: Chọn A

Với $m>0$ thì hàm số xác định trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(x)=\frac{e^x}{e^x+m}$

$$\Rightarrow f'(a)+f'(b)=\frac{e^a}{e^a+m}+\frac{e^b}{e^b+m}=\frac{2e^{a+b}+m(e^a+e^b)}{e^{a+b}+m(e^a+e^b)+m^2}=\frac{2e+m(e^a+e^b)}{e+m(e^a+e^b)+m^2}.$$

Mà $f'(a)+f'(b)=1 \Leftrightarrow \frac{2e+m(e^a+e^b)}{e+m(e^a+e^b)+m^2}=1 \Leftrightarrow m^2=e \Leftrightarrow m=\sqrt{e}$.

Câu 16: Chọn D

Ta có: $f(x)=\ln 2019-\left[\ln(x+2)-\ln x\right]=\ln x-\ln(x+2)+\ln 2019 \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}$

Xét $S=f'(1)+f'(3)+...+f'(2019)$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{1+2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3+2}+...+\frac{1}{2017}-\frac{1}{2017+2}+\frac{1}{2019}-\frac{1}{2019+2}=1-\frac{1}{2021}=\frac{2020}{2021}.$$

Câu 17: Chọn A

Xét hàm số $f'(x)=\frac{2}{2x-5}$, $\forall x\in\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$

$f'(x)<1 \Leftrightarrow \frac{2}{2x-5}<1 \Leftrightarrow \frac{-2x+7}{2x-5}<0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{7}{2};+\infty\right)$. Kết hợp điều kiện ta được tập nghiệm bất phương trình là $\left(\frac{7}{2};+\infty\right)$.

Câu 18: Chọn A

Ta có: $g(x)=f(1-x)+x.\mathrm{e}^{-x}$. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Cho $g'(x)=-f'(1-x)+(1-x)e^{-x}$.

Ta thấy với $x\in(-2;-1)$ thì $f'(1-x)<0$ và $1-x>0$. Suy ra $g'(x)>0;\forall x\in(-2;-1)$.

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trong khoảng $(-2;-1)$.

Câu 19: Chọn A

Hàm số $y=\ln(x^2+1)-mx+1$ có tập xác định $\mathbb{R}$. Ta có: $y'=\frac{2x}{x^2+1}-m$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ thì $y'=\frac{2x}{x^2+1}-m\geq 0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow m\leq\frac{2x}{x^2+1}, \forall x\in\mathbb{R}$.

Xét hàm số $g(x)=\frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow g'(x)=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$.

Phương trình $g'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x^2+2}{x^2+1}=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↘	-1	↗	1	↘	0

Từ bảng biến thiên ta suy ra $m \le -1$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Câu 20: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+4)-mx+3$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $m \ge \dfrac{1}{4}$. **B.** $m \ge 4$. **C.** $m \le \dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{4} \le m < 4$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+4)-mx+3$ có tập xác định $D=(-\infty;+\infty)$. Ta có $y'=\dfrac{x}{x^2+4}-m$.

Khi đó hàm số $y=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+4)-mx+3$ nghịch biến trên $(-\infty;+\infty) \Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in (-\infty;+\infty)$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{x^2+4}-m \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{x}{x^2+4} \le m, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \ge \max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)$ với $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$ ta có: $f'(x)=\dfrac{4-x^2}{(x^2+4)^2} \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	0	-	
f(x)	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0

Từ bảng biến thiên ta suy ra: $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=f(2)=\dfrac{1}{4}$. Suy ra các giá trị của tham số m cần tìm là: $m \ge \dfrac{1}{4}$.

Câu 21: **Chọn A**

Vì $AN=2AM$ nên $M(x_1;4^{x_1})$, $N(-2x_1;a^{-2x_1})$.

Ta có $4^{x_1}=a^{-2x_1} \Leftrightarrow 4=\dfrac{1}{a^2} \Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$.

CHỦ ĐỀ 4: PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LOGARIT

LÝ THUYẾT

1. Phương trình mũ cơ bản $a^x = b,\ (a>0,\ a\neq 1)$.

- Nếu $b>0$ thì phương trình $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$.
- Nếu $b\le 0$ thì phương trình $a^x = b$ vô nghiệm.

2. Phương trình đưa về cùng cơ số

➢ **Cách giải:**

Sử dụng tính chất $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)\ (0<a\neq 1)$.

3. Phương pháp đặt ẩn phụ: với $0<a\neq 1$, $f\left[a^{g(x)}\right]=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^{g(x)} > 0 \\ f(t) = 0 \end{cases}$.

- **Dạng 1:** Phương trình có dạng: $m.a^{2f(x)} + n.a^{f(x)} + p = 0\ (1)$
  - Đặt $t = a^{f(x)}, t>0$ đưa phương trình (1) về dạng phương trình bậc 2: $mt^2 + nt + p = 0$.
  - Giải phương trình tìm nghiệm t và kiểm tra điều kiện $t>0$.
  - Sau đó thế vào phương trình $t = a^{f(x)}$ tìm nghiệm x.
- **Dạng 2:** $m.a^{f(x)} + n.b^{f(x)} + p = 0$, trong đó $a.b = 1$. Đặt $t = a^{f(x)}, t>0$. suy ra $b^{f(x)} = \frac{1}{t}$.
- **Dạng 3:** $m.a^{2f(x)} + n.(a.b)^{f(x)} + p.b^{2f(x)} = 0$. Chia hai vế cho $b^{2f(x)}$ và đặt $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = t > 0$.

4. Phương pháp logarit hóa.

- **Dạng 1:** $a^{g(x)} = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) = \log_a f(x) \end{cases}$ với $0<a\neq 1$.
- **Dạng 2:** $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).\log_a b$.

5. Phương pháp hàm số

❖ **Định nghĩa**

- Hàm số f được gọi là đồng biến trên K khi và chỉ khi $\forall u,v\in(a;b); u<v \Rightarrow f(u)<f(v)$.
- Hàm số f được gọi là nghịch biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi $\forall u,v\in(a;b); u<v \Rightarrow f(u)>f(v)$.

❖ Định lí, tính chất

- **Định lí.** Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$.

  Nếu $f'(x)\ge 0\ (f'(x)\le 0)\forall x\in(a;b)$ và $f'(x)=0$ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến *(nghịch biến)* trên khoảng $(a;b)$.
  - **Tính chất 1.** Nếu hàm số f đồng biến (hoặc nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$ thì phương trình $f(x)=0$ có nhiều nhất một nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

- **Tính chất 2.** Nếu phương trình $f'(x)=0$ có một nghiệm trên khoảng $(a;b)$ thì phương trình $f(x)=0$ có nhiều nhất hai nghiệm trên khoảng $(a;b)$.
- **Tính chất 3.** Nếu hàm số f đồng biến (hoặc nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$ thì $\forall u,v\in(a;b);\ f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$.
- **Tính chất 4.** Nếu hàm số f liên tục, đồng biến trên khoảng $(a;b)$ và hàm số g liên tục, nghịch biến *(hoặc hàm hằng)* trên khoảng $(a;b)$ phương trình $f(x)=g(x)$ có nhiều nhất một nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

❖ **Nhận xét**

- Khi bài toán yêu cầu giải phương trình $f(x)=0$, ta có thể chứng minh $f(x)$ đơn điệu bằng cách khảo sát hàm số, sau đó tìm nghiệm và chứng minh nghiệm đó duy nhất.
- Ta cũng có thể thực hiện các phép biến đổi tương đương đưa về phương trình dạng $f(u)=f(v)$ (trong đó $u=u(x),v=v(x)$) hoặc $f(x)=g(x)$ và sử dụng các tính chất đã nêu trên.
- Khi bài toán yêu cầu giải phương trình $f(x)=m$ thì số nghiệm của phương trình sẽ là số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=m$.

6. Phương pháp đánh giá

- **Quy tắc 1.** Giải phương trình $f(x)=g(x)$.
  - **Bước 1:** Xác định $x=x_0$ là một nghiệm của phương trình.
  - **Bước 2:** Chứng minh với mọi $\begin{cases}x>x_0\\x<x_0\end{cases}$ thì phương trình vô nghiệm.
  - Kết luận $x=x_0$ là nghiệm duy nhất.
- **Quy tắc 2.** Giải phương trình $f(x)=g(x)$.
  - Xét trên tập xác định D ta có $\begin{cases}f(x)\le m,\forall x\in D\\g(x)\ge m,\forall x\in D\end{cases}\Leftrightarrow f(x)\le m\le g(x),\forall x\in D$.
  - Phương trình thỏa mãn khi $f(x)=g(x)=m$.
  - Áp dụng tương tự với bài toán bất phương trình $f(x)\ge g(x)$.
- **Quy tắc 3.** Sử dụng tính chất của hàm số lượng giác.
  - Ta có: $\sin x\in[-1;1];\cos x\in[-1;1]$.
  - Điều kiện để hàm số lượng giác $a\cos x+b\sin x=c$ có nghiệm là $a^2+b^2\ge c^2$.
  - Giá trị lượng giác của góc (cung) có liên quan đặc biệt.
- **Quy tắc 4.** Sử dụng tính chất của hàm số mũ, hàm trị tuyệt đối, điều kiện có nghiệm của phương trình bậc 2 …

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1. Giải các phương trình sau:

a) $3^{x^2-4x+5}=9$.

b) $3^{x^2-3x+8}=9^{2x-1}$.

c) $2^{\left|\frac{28}{3}x+4\right|}=16^{x^2-1}$.

d) $2^{8-x^2}.5^{8-x^2}=0,001.\left(10^5\right)^{1-x}$.

e) $2^x+2^{x+1}=3^x+3^{x+1}$.

f) $12.3^x+3.15^x-5^{x+1}=20$.

Lời giải

a) Ta có: $3^{x^2-4x+5}=9\Leftrightarrow x^2-4x+5=2\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$. Vậy $S=\{1;3\}$.

b) Ta có: $3^{x^2-3x+8}=9^{2x-1}\Leftrightarrow 3^{x^2-3x+8}=3^{4x-2}\Leftrightarrow x^2-3x+8=4x-2\Leftrightarrow x^2-7x+10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\\x=2\end{array}\right.$

Vậy $S=\{2;5\}$.

c) $2^{\left|\frac{28}{3}x+4\right|}=16^{x^2-1}\Leftrightarrow\left|\frac{28}{3}x+4\right|=4\left(x^2-1\right)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\le -1\vee x\ge 1\\\left[\begin{array}{l}7x+3=3x^2-3\\7x+3=-3x^2+3\end{array}\right.\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\le -1\vee x\ge 1\\\left[\begin{array}{l}x=3\vee x=-\frac{2}{3}\\x=0\vee x=-\frac{7}{3}\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-\frac{7}{3}\end{array}\right.$. Vậy $S=\left\{-\frac{7}{3};3\right\}$.

d) $\left(2.5\right)^{8-x^2}=10^{-3}.10^{5-5x}\Leftrightarrow 10^{8-x^2}=10^{2-5x}\Leftrightarrow 8-x^2=2-5x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=6\end{array}\right.$. Vậy $S=\{-1;6\}$.

e) $2^x+2^{x+1}=3^x+3^{x+1}\Leftrightarrow 3.2^x=4.3^x\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{3}{4}\Leftrightarrow x=\log_{\frac{3}{2}}\frac{3}{4}$. Vậy $S=\left\{\log_{\frac{3}{2}}\frac{3}{4}\right\}$.

f) $12.3^x+3.15^x-5^{x+1}=20\Leftrightarrow 3.3^x\left(5^x+4\right)-5\left(5^x+4\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(5^x+4\right)\left(3^{x+1}-5\right)=0\Leftrightarrow x=\log_3 5-1$. Vậy $S=\{\log_3 5-1\}$.

VÍ DỤ 2. Giải phương trình sau

a) $3^{x^2-4x+5}=9$.

b) $4.4^x-9.2^{x+1}+8=0$.

c) $9^x-5.3^x+6=0$.

d) $9^{\frac{x}{2}}+9.\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2x+2}-4=0$.

e) $9^{x^2+x-1}-10.3^{x^2+x-2}+1=0$.

f) $\left(7+4\sqrt{3}\right)^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x=6$.

Lời giải

a) Đặt $t=3^x$ $(t>0)$, khi đó phương trình $9^x-5.3^x+6=0$ tương đương với

$t^2-5t+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\log_3 2\\x=1\end{array}\right.$. Vậy $S=\{\log_3 2;1\}$.

b) Đặt $t=2^x, t>0$ khi đó phương trình $4.4^x-9.2^{x+1}+8=0$ tương đương với

$$4t^2-18t+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4\\t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=2\\x_2=-1\end{array}\right.$$. Vậy $S=\{2;-1\}$.

c) $9^x-5.3^x+6=0\Leftrightarrow\dfrac{3}{3^x}=2+\left(\dfrac{1}{9}\right)^x\Leftrightarrow 3.\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x}$

Đặt $t=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$, $t>0$. Phương trình trở thành $3t=2+t^2\Leftrightarrow t^2-3t+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=2\end{array}\right.$

Với $t=1$, ta được $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=1\Leftrightarrow x=0$

Với $t=2$, ta được $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=2\Leftrightarrow x=\log_{\frac{1}{3}}2=-\log_3 2$

Vậy $S=\{-\log_3 2;0\}$.

d) $9^{\frac{x}{2}}+9.\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2x+2}-4=0\Leftrightarrow 3^x+9.\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}-4=0\Leftrightarrow 3^x+3.\left(\dfrac{1}{3}\right)^x-4=0$

$\Leftrightarrow 3^x+3.\dfrac{1}{3^x}-4=0\Leftrightarrow 3^{2x}-4.3^x+3=0$

Đặt $t=3^x, t>0$. Phương trình trở thành $t^2-4t+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=3\end{array}\right.$

Với $t=1$, ta được $3^x=1\Leftrightarrow x=0$

Với $t=3$, ta được $3^x=3\Leftrightarrow x=1$

Vậy phương trình có nghiệm $x=0$, $x=1$.

e) Đặt $t=3^{x^2+x-1}$ $(t>0)$, khi đó phương trình $9^{x^2+x-1}-10.3^{x^2+x-2}+1=0$ tương đương với

$$3t^2-10t+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^{x^2+x-1}=3\\3^{x^2+x-1}=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=1\\x=0\\x=-1\end{array}\right.$$. Vậy $S=\{-1;1;0;2\}$.

f) Đặt $t=\left(2+\sqrt{3}\right)^x, t>0$. Khi đó phương trình $\left(7+4\sqrt{3}\right)^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x=6$ tương đương với

$$t^2+t-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=-3\ (loai)\end{array}\right.$$. Với $t=2\Leftrightarrow\left(2+\sqrt{3}\right)^x=2\Leftrightarrow x=\log_{(2+\sqrt{3})}2$

Vậy $S=\left\{\log_{(2+\sqrt{3})}2\right\}$.

VÍ DỤ 3. Giải các phương trình sau:

a) $6.4^x-13.6^x+6.9^x=0.$

b) $3^{3+3x}+3^{3-3x}+3^{4+x}+3^{4-x}=10^3.$

c) $9^{\sin^2 x}+9^{\cos^2 x}=6.$

d) $2^{x^2+4}=2^{2\left(x^2+1\right)}+\sqrt{2^{2\left(x^2+2\right)}-2^{x^2+3}+1}.$

Lời giải

a) $6.4^x-13.6^x+6.9^x=0\Leftrightarrow 6\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-13\left(\frac{3}{2}\right)^x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{3}{2}\\\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{2}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$

b) $3^{3+3x}+3^{3-3x}+3^{4+x}+3^{4-x}=10^3\Leftrightarrow 27.3^{3x}+\frac{27}{3^{3x}}+81.3^x+\frac{81}{3^x}=10$

$\Leftrightarrow 27.\left(3^{3x}+\frac{1}{3^{3x}}\right)+81.\left(3^x+\frac{1}{3^x}\right)=10^3\ (1).$ Đặt $t=3^x+\frac{1}{3^x}\overset{Côsi}{\geq}2\sqrt{3^x.\frac{1}{3^x}}=2$

$\Rightarrow t^3=\left(3^x+\frac{1}{3^x}\right)^3=3^{3x}+3.3^{2x}.\frac{1}{3^x}+3.3^x.\frac{1}{3^{2x}}+\frac{1}{3^{3x}}\Leftrightarrow 3^{3x}+\frac{1}{3^{3x}}=t^3-3t$

Khi đó: $(1)\Leftrightarrow 27\left(t^3-3t\right)+81t=10^3\Leftrightarrow t^3=\frac{10^3}{27}\Leftrightarrow t=\frac{10}{3}>2\ \ (\mathrm{N})$

Với $t=\frac{10}{3}\Rightarrow 3^x+\frac{1}{3^x}=\frac{10}{3}\ (2)$

Đặt $y=3^x>0$. Khi đó $(2)\Leftrightarrow y+\frac{1}{y}=\frac{10}{3}\Leftrightarrow 3y^2-10y+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=3\ \ (N)\\y=\frac{1}{3}\ \ (N)\end{array}\right.$

Với $y=3\Rightarrow 3^x=3\Leftrightarrow x=1$; Với $y=\frac{1}{3}\Rightarrow 3^x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=-1$. Vậy $S=\{-1;1\}$.

c) $9^{\sin^2 x}+9^{\cos^2 x}=6\Leftrightarrow 9^{1-\cos^2 x}+9^{\cos^2 x}=6\Leftrightarrow\frac{9}{9^{\cos^2 x}}+9^{\cos^2 x}-6=0\ (1)$

Đặt $t=9^{\cos^2 x},\left(1\leq t\leq 9\right)$. Khi đó: $(1)\Leftrightarrow\frac{9}{t}+t-6=0\Leftrightarrow t^2-6t+9=0\Leftrightarrow t=3$

Với $t=3\Rightarrow 9^{\cos^2 x}=3\Leftrightarrow 3^{2\cos^2 x}=3^1\Leftrightarrow 2\cos^2 x-1=0\Leftrightarrow\cos 2x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

d) $2^{x^2+4}=2^{2\left(x^2+1\right)}+\sqrt{2^{2\left(x^2+2\right)}-2^{x^2+3}+1}\Leftrightarrow 8.2^{x^2+1}=2^{2\left(x^2+1\right)}+\sqrt{4.2^{2\left(x^2+1\right)}-4.2^{x^2+1}+1}$

Đặt $t=2^{x^2+1}\left(t\geq 2\right)$, phương trình trên tương đương với

$8t=t^2+\sqrt{4t^2-4t+1}\Leftrightarrow t^2-6t-1=0\Leftrightarrow t=3+\sqrt{10}$ (vì $t\geq 2$).

Từ đó suy ra $2^{x^2+1}=3+\sqrt{10}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\sqrt{\log_2\frac{3+\sqrt{10}}{2}}\\x_2=-\sqrt{\log_2\frac{3+\sqrt{10}}{2}}\end{array}\right.$

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

VÍ DỤ 4. Giải các phương trình sau:

a) $3^{5^x}=5^{3^x}$ b) $3^x.2^{x^2}=1$

c) $5^x.8^{\frac{x-1}{x}}=500$ d) $2^{x^2-4}=7^{x-2}$

Lời giải

a) $3^{5^x}=5^{3^x}\Leftrightarrow\log_3\left(3^{5^x}\right)=\log_3\left(5^{3^x}\right)\Leftrightarrow 5^x=3^x\log_3 5\Leftrightarrow\left(\frac{5}{3}\right)^x=\log_3 5\Leftrightarrow x=\log_{\left(\frac{5}{3}\right)}\left(\log_3 5\right)$

Phương trình có một nghiệm $x=\log_{\left(\frac{5}{3}\right)}\left(\log_3 5\right)$.

b) $3^x.2^{x^2}=1\Leftrightarrow\log_2\left(3^x.2^{x^2}\right)=\log_2 1\Leftrightarrow\log_2 3^x+\log_2 2^{x^2}=0\Leftrightarrow x\log_2 3+x^2=0$

$\Leftrightarrow x\left(\log_2 3+x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-\log_2 3\end{array}\right.$. Phương trình có hai nghiệm: $x=0$, $x=-\log_2 3$.

c) $5^x.8^{\frac{x-1}{x}}=500\Leftrightarrow 5^x.2^{3\frac{x-1}{x}}=5^3.2^2\Leftrightarrow 5^{x-3}.2^{\frac{x-3}{x}}=1\Leftrightarrow\log_2\left(5^{x-3}.2^{\frac{x-3}{x}}\right)=0$

$\Leftrightarrow\log_2 5^{x-3}+\log_2 2^{\frac{x-3}{x}}=0\Leftrightarrow\left(x-3\right)\log_2 5+\frac{x-3}{x}\log_2 2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-\log_5 2\end{array}\right.$

Phương trình có hai nghiệm: $x=3$, $x=-\log_5 2$.

d) $2^{x^2-4}=7^{x-2}\Leftrightarrow\log_2 2^{x^2-4}=\log_2 7^{x-2}\Leftrightarrow\left(x^2-4\right)\log_2 2=\left(x-2\right)\log_2 7$

$\Leftrightarrow\left(x-2\right)\left(x+2-\log_2 7\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=\log_2 7-2\end{array}\right.$

Phương trình có hai nghiệm: $x=2$, $x=\log_2 7-2$.

VÍ DỤ 5. Giải các phương trình sau:

a) Giải phương trình $3^x+4^x=5^x$.

b) Gọi S là tập hợp mọi nghiệm thực của phương trình $2^{x^2-3x+2}-2^{x^2-x-2}=2x-4$. Số phần tử của S là.

c) Tìm tập hợp các giá trị của m để phương trình $6^x+\left(3-m\right).2^x-m=0$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;1\right)$.

Lời giải

a) $3^x+4^x=5^x\Leftrightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x=1\Leftrightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1=0\ (1)$

Xét hàm số $f\left(x\right)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Ta có: $f'\left(x\right)=\left(\frac{3}{5}\right)^x\ln\frac{3}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^x\ln\frac{4}{5}<0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ hàm số $f\left(x\right)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)=0$ có tối đa một nghiệm trên tập số thực

Mà $f(2)=0 \Rightarrow$ phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x=2$.

b) $2^{x^2-3x+2}-2^{x^2-x-2}=2x-4 \quad (1) \Leftrightarrow 2^{x^2-3x+2}+x^2-3x+2=2^{x^2-x-2}+x^2-x-2$

Xét hàm số $f(u)=2^u+u$

Ta có: $f'(u)=2^u.\ln 2+1>0, \forall u\in\mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số $f(u)=2^u+u$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó $(1) \Leftrightarrow f(x^2-3x+2)=f(x^2-x-2) \Leftrightarrow x^2-3x+2=x^2-x-2 \Leftrightarrow x=2$

Vậy S có 1 phần tử.

c) $6^x+(3-m).2^x-m=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{6^x+3.2^x}{2^x+1}$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{6^x+3.2^x}{2^x+1}, \forall x\in(0;1)$ có $f'(x)=\dfrac{12^x.\ln 3+6^x.\ln 6+3.2^x.\ln 2}{(2^x+1)^2}>0, \forall x\in(0;1)$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;1)$. Ta có bảng biến thiên:

x	0		1
y'		+	
y	2	↗	4

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình có nghiệm khi $2<m<4$. Vậy $m\in(2;4)$.

VÍ DỤ 6. Giải các phương trình sau:

a) Giải phương trình $3^{x+1}+4^{x+1}=3^{2x+1}-4^{2x+1}$.

b) Giải phương trình $2^{x^2+1}=2-\sqrt{x}$.

c) Cho a,b là các số thực thỏa mãn $a>0$ và $a\neq 1$, biết phương trình $a^x-\dfrac{1}{a^x}=2\cos(bx)$ có 7 nghiệm phân biệt. Tìm số nghiệm thực phân biệt của phương trình:

$$a^{2x}-2a^x(\cos bx+2)+1=0.$$

Lời giải

a) $3^{x+1}+4^{x+1}=3^{2x+1}+4^{2x+1} \Leftrightarrow 3^{x+1}-3^{2x+1}=4^{2x+1}-4^{x+1} \quad (1)$

Nhận xét $x=0$ là nghiệm của phương trình (1)

Với $x>0$, ta có: $x+1<2x+1 \Rightarrow \begin{cases} 3^{x+1}<3^{2x+1} \Leftrightarrow 3^{x+1}-3^{2x+1}<0 \\ 4^{x+1}<4^{2x+1} \Leftrightarrow 4^{2x+1}-4^{x+1}>0 \end{cases}$ do đó $\text{VT}<0<\text{VP}$ nên phương trình (1) vô nghiệm

Với $x<0$, ta có: $x+1>2x+1 \Rightarrow \begin{cases} 3^{x+1}>3^{2x+1} \Leftrightarrow 3^{x+1}-3^{2x+1}>0 \\ 4^{x+1}>4^{2x+1} \Leftrightarrow 4^{2x+1}-4^{x+1}<0 \end{cases}$ do đó $VT>0>VP$ nên phương trình (1) vô nghiệm. Vậy $x=0$ là nghiệm duy nhất.

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

b) Điều kiện xác định: $x \ge 0$

$x^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2+1 \ge 1 \Leftrightarrow 2^{x^2+1} \ge 2$ hay $\text{VT} \ge 2$

$\sqrt{x} \ge 0 \Leftrightarrow -\sqrt{x} \le 0 \Leftrightarrow 2-\sqrt{x} \le 2$ hay $\text{VP} \le 2$

Suy ra $\text{VT} \ge 2 \ge \text{VP}$, do đó phương trình có nghiệm khi $\begin{cases} \text{VT}=2 \\ \text{VP}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2+1}=2 \\ 2-\sqrt{x}=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$

Vậy $x=0$ là nghiệm duy nhất.

c) Ta có $a^{2x}-2a^x\left(\cos bx+2\right)+1=0 \Leftrightarrow a^x-2+\dfrac{1}{a^x}=2\left(\cos 2\dfrac{bx}{2}+1\right)$

$$\Leftrightarrow \left(a^{\frac{x}{2}}-\frac{1}{a^{\frac{x}{2}}}\right)^2=4\cos^2\frac{bx}{2} \Leftrightarrow \left(a^{\frac{x}{2}}-\frac{1}{a^{\frac{x}{2}}}\right)^2=4\cos^2\frac{bx}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^{\frac{x}{2}}-\dfrac{1}{a^{\frac{x}{2}}}=2\cos\dfrac{bx}{2} \quad (1) \\ a^{\frac{x}{2}}-\dfrac{1}{a^{\frac{x}{2}}}=-2\cos\dfrac{bx}{2} \quad (2) \end{array}\right.$$

Nếu phương trình (1) và phương trình (2) có nghiệm chung là x_0 thì $2\cos\dfrac{bx_0}{2}=-2\cos\dfrac{bx_0}{2}$

$$\Rightarrow \cos\frac{bx_0}{2}=0 \Rightarrow a^{\frac{x_0}{2}}-\frac{1}{a^{\frac{x_0}{2}}}=0 \Rightarrow x_0=0 \Rightarrow \cos\frac{bx_0}{2}=1 \text{ (Vô lí)}$$

Do đó phương trình (1) và phương trình (2) không có nghiệm chung

Mặt khác theo giả thiết phương trình (1) và phương trình (2) đều có 7 nghiệm phân biệt

Vậy phương trình đã cho có 14 nghiệm phân biệt.

PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

LÝ THUYẾT

1. Phương trình logarit có dạng $\log_a x = b \ (a > 0, a \neq 1)$.

- Nếu $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$.

2. Phương trình đưa về cùng cơ số

- Cho $0 < a \neq 1$. Khi đó:
  - $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \ (g(x) > 0) \\ f(x) = g(x) \end{cases}$.
  - $\log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = a^{g(x)}$ (mũ hóa).

3. Phương pháp đặt ẩn phụ:

- Phương trình có dạng $P\left(\log_a f(x)\right) = 0$ với $0 < a \neq 1$

$$P\left(\log_a f(x)\right) = 0 \xrightarrow{Đặt\ t = \log_a f(x)} P(t) = 0$$

4. Phương pháp đánh giá

- **Quy tắc 1.** Giải phương trình $f(x) = g(x)$.
  - **Bước 1:** Xác định $x = x_0$ là một nghiệm của phương trình.
  - **Bước 2:** Chứng minh với mọi $\begin{cases} x > x_0 \\ x < x_0 \end{cases}$ thì phương trình vô nghiệm.
  - Kết luận $x = x_0$ là nghiệm duy nhất.
- **Quy tắc 2.** Giải phương trình $f(x) = g(x)$.
  - Xét trên tập xác định D ta có $\begin{cases} f(x) \le m, \forall x \in D \\ g(x) \ge m, \forall x \in D \end{cases} \Leftrightarrow f(x) \le m \le g(x), \forall x \in D$.
  - Phương trình thỏa mãn khi $f(x) = g(x) = m$.
  - Áp dụng tương tự với bài toán bất phương trình $f(x) \ge g(x)$.
- **Quy tắc 3.** Sử dụng tính chất của hàm số lượng giác.
  - Ta có: $\sin x \in [-1;1]; \cos x \in [-1;1]$.
  - Điều kiện để hàm số lượng giác $a\cos x + b\sin x = c$ có nghiệm là $a^2 + b^2 \ge c^2$.
  - Giá trị lượng giác của góc (cung) có liên quan đặc biệt.
- **Quy tắc 4.** Sử dụng tính chất của hàm số mũ, hàm trị tuyệt đối, điều kiện có nghiệm của phương trình bậc 2 …

❖ Ngoài ra, chúng ta có thể sử dụng phương pháp hàm số như dạng bài tập phương trình mũ. Việc sử dụng linh hoạt các phương pháp sẽ giúp các em tối ưu hơn trong việc giải toán.

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1. Giải các phương trình sau:

a) $\ln\left(x^2-1\right)=\ln x$

b) $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=11$.

c) $\log_{\sqrt{3}} x.\log_3 x.\log_9 x=8$.

d) $\log_2\left(x^2-1\right)=1+\log_2 x$.

e) $\log_2 x^2=2\log_2\left(3x+4\right)$.

f) $\log_2\left(x-1\right)+\log_2\left(x+1\right)=3$.

Lời giải

a) Điều kiện: $\begin{cases}x>0\\x^2-1>0\end{cases}\Leftrightarrow x>1$

Với $x>1$: $\ln\left(x^2-1\right)=\ln x\Leftrightarrow \ln\dfrac{x^2-1}{x}=0\Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{x}=1\Leftrightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\ (loai)\end{array}\right.$

b) Điều kiện: $x>0$.

$\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=11\Leftrightarrow \log_2 x+\dfrac{1}{2}\log_2 x+\dfrac{1}{3}\log_2 x=11$

$\Leftrightarrow \dfrac{11}{6}\log_2 x=11\Leftrightarrow \log_2 x=6\Leftrightarrow x=64.$

c) Điều kiện: $x>0$.

$\log_{\sqrt{3}} x.\log_3 x.\log_9 x=8\Leftrightarrow 2\log_3 x.\log_3 x.\dfrac{1}{2}\log_3 x=8\Leftrightarrow \left(\log_3 x\right)^3=8\Leftrightarrow \log_3 x=2\Leftrightarrow x=9.$

d) Điều kiện: $0<x<1$.

$\log_2\left(x^2-1\right)=1+\log_2 x\Leftrightarrow \log_2\left(x^2-1\right)=\log_2 2x\Leftrightarrow x^2-1=2x\Leftrightarrow x^2-2x-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1+\sqrt{2}\\x=1-\sqrt{2}\end{array}\right.$

Vậy $S=\left\{1+\sqrt{2};1-\sqrt{2}\right\}$.

e) Điều kiện: $x>-\dfrac{4}{3}, x\neq 0$.

$\log_2 x^2=2\log_2\left(3x+4\right)\Leftrightarrow x^2=\left(3x+4\right)^2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3x+4\\x=-3x-4\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2\\x=-1\end{array}\right.$

So sánh điều kiện ta có phương trình có một nghiệm $x=-1$.

f) Điều kiện: $x>1$.

Ta có: $\log_2\left(x-1\right)+\log_2\left(x+1\right)=3\Leftrightarrow \log_2\left(x^2-1\right)=3\Leftrightarrow x^2-1=8\Leftrightarrow x^2=9\Rightarrow x=3.$

Vậy $S=\left\{3\right\}$.

VÍ DỤ 2. Giải các phương trình sau:

a) $\log_3^2 x-2\log_3 x-7=0$ b) $2\log_2 x+3\log_x 2=7$.

c) $\log_2^2(4x)-\log_{\sqrt{2}}(2x)=5$.

d) Tìm tất cả các giá trị của tham m để phương trình $\log_2^2(2x)-2m\log_2(x)+m-1=0$ có tích hai nghiệm của phương trình bằng 16.

Lời giải

a) Điều kiện: $x>0$. Đặt $\log_3 x=t,(t\in\mathbb{R})\Leftrightarrow x=3^t$

Phương trình $\log_3^2 x-2\log_3 x-7=0$ trở thành $t^2-2t-7=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1-2\sqrt{2}\\t=1+2\sqrt{2}\end{array}\right.$

Với $t=1-2\sqrt{2}\Rightarrow\log_3 x=1-2\sqrt{2}\Leftrightarrow x=3^{1-2\sqrt{2}}$

Với $t=1+2\sqrt{2}\Rightarrow\log_3 x=1+2\sqrt{2}\Leftrightarrow x=3^{1+2\sqrt{2}}$

b) Điều kiện: $\left\{\begin{array}{l}x>0\\x\neq 1\end{array}\right.$. Đặt $\log_2 x=t,t\in\mathbb{R}$.

Phương trình $2\log_2 x+3\log_x 2=7$ trở thành: $2t+3.\frac{1}{t}=7\Leftrightarrow 2t^2-7t+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=\frac{1}{2}\end{array}\right.$

Với $t=3\Rightarrow\log_2 x=3\Leftrightarrow x=8$

Với $t=\frac{1}{2}\Rightarrow\log_2 x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$

c) Điều kiện: $x>0$. Ta có: $\log_2^2(4x)-\log_{\sqrt{2}}(2x)=5\Leftrightarrow(1+\log_2(2x))^2-2\log_2(2x)-5=0$

$\Leftrightarrow\log_2^2(2x)=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2(2x)=2\\\log_2(2x)=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=\frac{1}{8}\end{array}\right.$. Vậy $S=\left\{2;\frac{1}{8}\right\}$.

d) Điều kiện xác định: $x>0$

Đặt $t=\log_2 x$. Phương trình trở thành $(1+t)^2-2mt+m-1=0\Leftrightarrow t^2+2(1-m)t+m=0\ (1)$

Phương trình đã cho có 2 nghiệm $x_1;x_2$ khi phương trình (1) có 2 nghiệm $t_1;t_2$.

Khi đó $\Delta'>0\Leftrightarrow m^2-3m+1>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<\frac{3-\sqrt{5}}{2}\\m>\frac{3+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$.

Theo giả thiết $x_1x_2=16\Rightarrow\log_2 x_1x_2=\log_2 16\Rightarrow t_1+t_2=4\Rightarrow-\frac{2(1-m)}{1}=4\Rightarrow m=3\ (thoa\ man)$.

VÍ DỤ 3. Giải các phương trình sau:

a) Giải phương trình $\log_3 x+\log_4(x+1)=2$.

b) Tìm số nghiệm của phương trình $\log_3\left(9-\sqrt{x-1}\right)=\log_2\left(x^2-2x+5\right)$.

c) Tìm số nghiệm của phương trình $\log_2\left(\sqrt{x-2}+4\right)\le\log_3\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}+8\right)$.

d) Có tất cả bao nhiêu cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $\begin{cases}3^{\left|x^2-2x-3\right|-\log_3 5}=5^{-(y+4)}\\4|y|-|y-1|+(y+3)^2\le 8\end{cases}$

Lời giải

a) Nhận xét $x=3$ là nghiệm của phương trình

Với $x>3$, ta có $\begin{cases}\log_3 x>1\\\log_4(x+1)>1\end{cases}\Rightarrow\log_3 x+\log_4(x+1)>2$ hay $VT>VP$ nên phương trình vô nghiệm

Với $x<3$, ta có $\begin{cases}\log_3 x<1\\\log_4(x+1)<1\end{cases}\Rightarrow\log_3 x+\log_4(x+1)<2$ hay $VT<VP$ nên phương trình vô nghiệm. Vậy $x=3$ là nghiệm duy nhất.

b) Điều kiện xác định: $\begin{cases}x-1\ge 0\\9-\sqrt{x-1}>0\\x^2-2x+5>0\ (\text{TM})\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\x<82\end{cases}\Leftrightarrow 1\le x<82$

$\text{VT}=\log_3\left(9-\sqrt{x-1}\right)\le\log_3 9=2$

$\text{VP}=\log_2\left(x^2-2x+5\right)=\log_2\left[(x-1)^2+4\right]\ge\log_2 4=2$

Suy ra $\text{VT}\le 2\le\text{VP}$. Do đó phương trình có nghiệm khi $\begin{cases}\text{VT}=2\\\text{VP}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x-1}=0\\x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$

Vậy $x=1$ là nghiệm duy nhất.

c) Điều kiện xác định: $\begin{cases}x-2\ge 0\\x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 2$. $\text{VT}=\log_2\left(\sqrt{x-2}+4\right)\ge\log_2(4)=2$

Ta có $x\ge 2\Leftrightarrow x-1\ge 1\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{x-1}}\le 1\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{x-1}}+8\le 9$

$\text{VP}=\log_3\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}+8\right)\le\log_3 9=2$

Suy ra $\text{VT}\ge 2\ge\text{VP}$. Do đó phương trình có nghiệm khi $\begin{cases}\text{VT}=2\\\text{VP}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x-2}=0\\\frac{1}{\sqrt{x-1}}=1\end{cases}\Leftrightarrow x=2$

Vậy $x=2$ là nghiệm duy nhất.

d) Ta có: $\begin{cases} 3^{\left|x^2-2x-3\right|-\log_3 5}=5^{-(y+4)} & (1) \\ 4|y|-|y-1|+(y+3)^2\le 8 & (2) \end{cases}$

Biến đổi phương trình (1) ta được $3^{\left|x^2-2x-3\right|}=5^{-y-3}$

Do $\left|x^2-2x-3\right|\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow 3^{\left|x^2-2x-3\right|}\ge 1,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow 5^{-y-3}\ge 1\Leftrightarrow -y-3\ge 0\Leftrightarrow y\le -3$

Với $y\le -3$, ta có bất phương trình $(2)\Leftrightarrow -4y+y-1+(y+3)^2\le 8\Leftrightarrow y^2+3y\le 0\Leftrightarrow y\ge -3$

$\Rightarrow y=-3\Rightarrow \left|x^2-2x-3\right|=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Vậy có hai cặp $(x;y)$ thỏa mãn $(3;-3),(-1;-3)$.

VÍ DỤ 4. Giải các phương trình sau:

e) Tìm số nghiệm của phương trình $\log_3\left(9-\sqrt{x-1}\right)=\log_2\left(x^2-2x+5\right)$. Biết phương trình $\log_5 x=\log_7(x+2)$ có nghiệm duy nhất $x=a$, tính giá trị $\log_5\left(7a^2\right)$.

f) Tìm số nghiệm của phương trình biểu thức $x+2.3^{\log_2 x}=3$.

g) Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $x^3-3x+2+\log_3 m=0$ có hai nghiệm phân biệt?

h) Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $\sqrt{\log_2^2 x-\log_2 x-3}=m\left(\log_2 x-3\right)$ có nghiệm thuộc $[32;+\infty)$.

i)

Lời giải

a) $\log_5 x=\log_7(x+2)\Leftrightarrow\begin{cases}\log_5 x=t\\ \log_7(x+2)=t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5^t\\ x+2=7^t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5^t & (1)\\ 5^t+2=7^t & (2)\end{cases}$

Ta có $(2)\Leftrightarrow\left(\frac{5}{7}\right)^t+2.\left(\frac{1}{7}\right)^t=1$. Xét hàm số $f(t)=\left(\frac{5}{7}\right)^t+2.\left(\frac{1}{7}\right)^t,\forall t\in\mathbb{R}$

$f'(t)=\left(\frac{5}{7}\right)^t\ln\frac{5}{7}+2.\left(\frac{1}{7}\right)^t\ln\frac{1}{7}<0,\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Mà $f(t)=1\Leftrightarrow f(t)=f(1)$ nên $t=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (2)

Từ (1) ta có $x=5$

Do đó $\log_5\left(7a^2\right)=\log_5 7+\log_5 a^2=\log_5 7+2\log_5 a=\log_5 7+2\log_5 5=2+\log_5 7$.

b) Điều kiện xác định: $x>0$

Ta có: $x+2.3^{\log_2 x}=3\Leftrightarrow 2.3^{\log_2 x}=3-x$. Xét hàm số $f(x)=2.3^{\log_2 x},\ \forall x\in(0;+\infty)$

$f'(x)=\frac{2}{x}.3^{\log_2 x}.\log_2 3>0,\forall x\in(0;+\infty)\Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ (1)

Xét hàm số $g(x)=3-x,\ \forall x\in(0;+\infty)$

$g'(x)=-1<0,\forall x\in(0;+\infty)\Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ (2)

Từ (1) và $(2)\Rightarrow$ phương trình $f(x)=g(x)$ có nhiều nhất một nghiệm

Mà $f(1)=g(1)$ nên $x=1$ là nghiệm duy nhất.

c) Điều kiện xác định: $m>0$

Ta có: $x^3-3x+2+\log_3 m=0\Leftrightarrow -x^3+3x-2=\log_3 m$

Xét hàm số $f(x)=-x^3+3x-2$ có $f'(x)=-3x^2+3,\ f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì hai đồ thị $y=-x^3+3x+2$ và $y=\log_3 m$ phải cắt nhau tại 2 điểm.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\left[\begin{array}{l}\log_3 m=-4\\\log_3 m=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3^{-4}\\m=3^0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{1}{81}\\m=1\end{array}\right.$. Vậy $m\in\left\{\dfrac{1}{81};1\right\}$.

d) Đặt $\log_2 x=t$ vì $x\geq 32\Rightarrow t\geq 5$

Ta có phương trình: $\sqrt{t^2-t-3}=m(t-3)\Leftrightarrow m=\dfrac{\sqrt{t^2-t-3}}{t-3}$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{\sqrt{t^2-t-3}}{t-3},\forall t\in[5;+\infty)$ có $f'(t)=\dfrac{-5t+9}{2(t-3)^2\sqrt{t^2-t-3}}<0,\forall t\in[5;+\infty)$

Ta có bảng biến thiên:

t	5		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	$\sqrt{3}$	$\searrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình có nghiệm khi $1<m\leq\sqrt{3}$.

BÀI TẬP PHƯƠNG TRÌNH MŨ – LOGARIT SỐ 01

Câu 1: Cho a, b là các số dương. Tìm x biết $\log_3 x = 4\log_3 a + 7\log_3 b$.

A. $x = a^4b^7$. **B.** $x = a^7b^4$. **C.** $x = a^{\frac{1}{4}}b^7$. **D.** $x = a^4b^{\frac{1}{7}}$.

Câu 2: Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $\log_x 2 - \log_{16} x = 0$. Khi đó tích $x_1.x_2$ bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 3: Bất phương trình $\left(3+2\sqrt{2}\right)^{x^2-3} < \left(3-2\sqrt{2}\right)^{-2x}$ có nghiệm là:

A. $-1 < x < 3$. **B.** $-3 < x < 1$. **C.** $\left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 3 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} x < -3 \\ x > 1 \end{array}\right.$.

Câu 4: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2(x+1) + \log_2 x = 1$.

A. -1. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 5: Số nghiệm của phương trình $\log_3(2x+1) + \log_3(x-3) = 2$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 6: Nghiệm của phương trình $2^{7x-1} = 8^{2x-1}$ là:

A. $x = 2$ **B.** $x = 1$. **C.** $x = -2$. **D.** $x = -3$.

Câu 7: Tìm tập nghiệm S của phương trình: $\log_3(2x+1) - \log_3(x-1) = 1$.

A. $S = \{3\}$. **B.** $S = \{1\}$. **C.** $S = \{2\}$. **D.** $S = \{4\}$.

Câu 8: Ba số $a + \log_2 3$; $a + \log_4 3$; $a + \log_8 3$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Công bội của cấp số nhân này bằng

A. 1. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 9: Tìm số nghiệm của phương trình $9^{\sqrt{x^2+1}} = 3^{2-4x}$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 10: Biết tập nghiệm của bất phương trình $3^{2-\sqrt{x^2+5x-6}} \geq \frac{1}{3^x}$ là một đoạn $[a;b]$ ta có $a+b$ bằng:

A. $a+b=11$. **B.** $a+b=9$. **C.** $a+b=12$. **D.** $a+b=10$.

Câu 11: Số nghiệm của phương trình $\log_2(x+2) + \log_4(x-5)^2 + \log_{\frac{1}{2}} 8 = 0$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 12: Tập hợp các số thực m để phương trình $\ln(3x - mx + 1) = \ln(-x^2 + 4x - 3)$ có nghiệm là nửa khoảng $[a;b)$. Tổng của $a+b$ bằng

A. $\frac{10}{3}$. **B.** 4. **C.** $\frac{22}{3}$. **D.** 7.

Câu 13: Cho phương trình $\log_3^2 x - 2\log_{\sqrt{3}} x - 2\log_{\frac{1}{3}} x - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_3 x_1 + \log_{27} x_2$ biết $x_1 < x_2$.

A. $P=0$. **B.** $P=\frac{8}{3}$. **C.** $P=\frac{1}{3}$. **D.** $P=1$.

Câu 14: Cho số dương a thỏa mãn đẳng thức $\log_2 a+\log_3 a+\log_5 a=\log_2 a.\log_3 a.\log_5 a$, số các giá trị của a là

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 15: Biết rằng phương trình $\log_3\left(3^{x+1}-1\right)=2x+\log_{\frac{1}{3}}2$ có hai nghiệm là x_1 và x_2. Tính tổng $S=27^{x_1}+27^{x_2}$.

A. $S=252$. **B.** $S=9$. **C.** $S=180$. **D.** $S=45$.

Câu 16: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}(x+3)+\frac{1}{4}\log_9(x-1)^8=\log_3(4x)$ là

A. 3. **B.** –3. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** 2.

Câu 17: Tích các nghiệm của phương trình $\log_x(125x).\log_{25}^2 x=1$ là:

A. 630. **B.** $\frac{1}{125}$. **C.** $\frac{630}{625}$. **D.** $\frac{7}{125}$.

Câu 18: Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1)=\log_2(mx-8)$ có hai nghiệm thực phân biệt là:

A. Vô số. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 19: Cho $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Biết $\log\sin x+\log\cos x=-1$ và $\log(\sin x+\cos x)=\frac{1}{2}(\log n-1)$. Giá trị của n là

A. 11. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 15.

Câu 20: Cho hai số thực a, b thỏa mãn $\log_{100}a=\log_{40}b=\log_{16}\frac{a-4b}{12}$. Giá trị của $\frac{a}{b}$ bằng

A. 6. **B.** 12. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 21: Phương trình $4^x-m.2^{x+1}+2m=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $x_1+x_2=3$ khi

A. $m=4$. **B.** $m=3$. **C.** $m=2$. **D.** $m=1$.

Câu 22: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $9.3^{2x}-m\left(4\sqrt[4]{x^2+2x+1}+3m+3\right).3^x+1=0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.

A. Vô số. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 23: Giả sử phương trình $\log_2^2 x-(m+2)\log_2 x+2m=0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1+x_2=6$. Giá trị của biểu thức $|x_1-x_2|$ là

A. 3. **B.** 8. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 24: Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[0;2019]$ của tham số m để phương trình $4^x-(m+2018)2^x+(2019+3m)=0$ có hai nghiệm trái dấu?

A. 2016 **B.** 2019. **C.** 2013 **D.** 2018.

Câu 25: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $4^x-(m+3).2^{x+1}+m+9=0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** Vô số.

Câu 26: Cho phương trình $4^x-2^{x+2}+m-2=0$ với m là tham số. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $0\le x_1<x_2$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 27: Giả sử phương trình $\log_2^2(2x)-3\log_2 x-2=0$ có một nghiệm dạng $x=2^{\frac{a+\sqrt{b}}{c}}$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}^+$ và $b<20$. Tính tổng $a+b+c^2$.

A. 10. **B.** 11. **C.** 18. **D.** 27.

Câu 28: Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $\log^2|\cos x|-m\log\cos^2 x-m^2+4=0$ vô nghiệm.

A. $m\in(\sqrt{2};2)$. **B.** $m\in(-\sqrt{2};\sqrt{2})$. **C.** $m\in(-\sqrt{2};2)$. **D.** $m\in(-2;\sqrt{2})$.

Câu 29: Cho phương trình $\log_2^2 x-2\log_2 x-\sqrt{m+\log_2 x}=m\,(*)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2019;2019]$ để phương trình có nghiệm?

A. 2021. **B.** 2019. **C.** 4038. **D.** 2020.

Câu 30: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x-m.4^{x-1}+5m^2-44=0$ có hai nghiệm đối nhau. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 31: Cho phương trình $9^x-2(2m+1)3^x+3(4m-1)=0$ có hai nghiệm thực x_1,x_2 thỏa mãn $(x_1+2)(x_2+2)=12$. Giá trị của m thuộc khoảng

A. $(9;+\infty)$. **B.** $(3;9)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(1;3)$.

Câu 32: Cho phương trình $(m-5).3^x+(2m-2).2^x.\sqrt{3^x}+(1-m).4^x=0$, tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt là khoảng $(a;b)$. Tính $S=a+b$.

A. $S=4$. **B.** $S=5$. **C.** $S=6$. **D.** $S=8$.

Câu 33: Tìm số giá trị nguyên của tham số $m\in(-10;10)$ để phương trình $\left(\sqrt{10}+1\right)^{x^2}+m\left(\sqrt{10}-1\right)^{x^2}=2.3^{x^2+1}$ có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 14. **B.** 15. **C.** 13. **D.** 16.

Câu 34: Phương trình $\left(1+\sqrt{2}\right)^x+(1-2a)\left(\sqrt{2}-1\right)^x-4=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1-x_2=\log_{1+\sqrt{2}}3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a\in\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$. **B.** $a\in\left(-\frac{3}{2};0\right)$. **C.** $a\in\left(0;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $a\in\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Câu 35: Trên đoạn $[0;2019]$ có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $9^x-2(m+2).3^x+3m-2=0$ có hai nghiệm trái dấu?

A. 2010. **B.** 2019. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 36: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2-\log_{\frac{1}{2}}x+m=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

A. $m\in\left(0;\frac{1}{4}\right]$. **B.** $m\in(-\infty;0]$. **C.** $\left[\frac{1}{4};+\infty\right)$. **D.** $m\in\left(-\infty;\frac{1}{4}\right]$

Câu 37: Cho phương trình $\log_3{}^2x-4\log_3x+m-3=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1<x_2$ thỏa mãn $x_2-81x_1<0$.

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

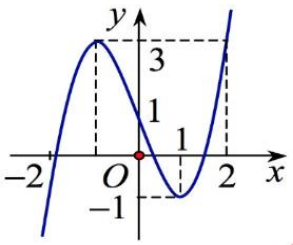
Câu 38: Cho phương trình $\log_3{}^2x-4\log_3x+m-3=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1<x_2$ thỏa mãn $x_2-81x_1<0$.

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 39: Cho phương trình $4^{x+1}-(8m+5)2^x+2m+1=0$ (m là tham số) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2=-1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $m\in(1;3)$. **B.** $m\in(-5;-3)$. **C.** $m\in(-3;0)$. **D.** $m\in(0;1)$.

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $8f\left(e^x\right)=m^2-1$ có hai nghiệm thực phân biệt là



A. 5. **B.** 4.
C. 7. **D.** 6.

Câu 41: Phương trình $\left(2+\sqrt{3}\right)^x+(1-2a).\left(2-\sqrt{3}\right)^x-4=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1-x_2=\log_{2+\sqrt{3}}3$. Khi đó a thuộc khoảng

A. $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Câu 42: Biết rằng tập hợp các giá trị của m để phương trình $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2}-(m+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}-2m=0$ có nghiệm là $\left[-a+2\sqrt{b};0\right]$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $b-a$.

A. 1. **B.** -11. **C.** -1. **D.** 11.

Câu 43: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để phương trình $m.3^{x^2-3x+2}+3^{4-x^2}=3^{6-3x}+m$ (1) có đúng 3 nghiệm phân biệt.

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.C	3.A	4.D	5.B	6.C	7.D	8.D	9.B	10.A
11.A	12.D	13.A	14.D	15.C	16.C	17.B	18.D	19.B	20.A
21.A	22.C	23.C	24.B	25.A	26.A	27.A	28.C	29.A	30.B
31.D	32.D	33.D	34.B	35.D	36.D	37.C	38.C	39.D	40.A
41.D	42.A	43.C							

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **Chọn A**

Ta có $\log_3 x = 4\log_3 a + 7\log_3 b \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 a^4 + \log_3 b^7 \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3\left(a^4b^7\right) \Leftrightarrow x = a^4b^7$.

Câu 2: **Chọn C**

Điều kiện: $0 < x \neq 1$.

$\log_x 2 - \log_{16} x = 0 \Leftrightarrow \log_x 2 - \log_{2^4} x = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_2 x} - \dfrac{1}{4}\log_2 x = 0$

$\Leftrightarrow (\log_2 x)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x = 2\\ \log_2 x = -2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 4\\ x = \dfrac{1}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x_1 = 4\\ x_2 = \dfrac{1}{4}\end{array}\right.$.

Vậy tích $x_1.x_2 = 4.\dfrac{1}{4} = 1$.

Câu 3: **Chọn A**

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Nhận xét: $\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right) = 1 \Rightarrow \left(3-2\sqrt{2}\right) = \dfrac{1}{3+2\sqrt{2}} = \left(3+2\sqrt{2}\right)^{-1}$.

Phương trình: $\left(3+2\sqrt{2}\right)^{x^2-3} < \left(3-2\sqrt{2}\right)^{-2x} \Leftrightarrow \left(3+2\sqrt{2}\right)^{x^2-3} < \left(3+2\sqrt{2}\right)^{2x}$.

$\Leftrightarrow x^2 - 3 < 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$.

Câu 4: **Chọn D**

Điều kiện: $x > 0$.

$\log_2(x+1) + \log_2 x = 1 \Leftrightarrow \log_2(x^2+x) = 1 \Leftrightarrow x^2 + x = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 1\\ x = -2\end{array}\right.$.

So điều kiện nhận $x = 1$. Vậy tổng tất cả các nghiệm là 1.

Câu 5: **Chọn B**

Điều kiện xác định của phương trình là $x > 3$.

Với điều kiện đó, ta có

$\log_3(2x+1) + \log_3(x-3) = 2 \Leftrightarrow \log_3(2x+1)(x-3) = 2 \Leftrightarrow (2x+1)(x-3) = 3^2$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 4\\ x = -\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện của phương trình, suy ra phương trình có một nghiệm duy nhất $x = 4$.

Câu 6: **Chọn C**

Ta có: $2^{7x-1} = 8^{2x-1} \Leftrightarrow 2^{7x-1} = 2^{3(2x-1)} \Leftrightarrow 7x - 1 = 3(2x-1) \Leftrightarrow x = -2$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=-2$.

Câu 7: Chọn D

$$\log_3(2x+1)-\log_3(x-1)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ \log_3\dfrac{2x+1}{x-1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ \dfrac{2x+1}{x-1}=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

Câu 8: Chọn D

Do các số $a+\log_2 3$; $a+\log_4 3$; $a+\log_8 3$ theo thứ tự là cấp số nhân nên

$$(a+\log_4 3)^2=(a+\log_2 3)(a+\log_8 3)$$

$$\Leftrightarrow a^2+2a\log_4 3+\log_4^2 3=a^2+a\log_2 3+a\log_8 3+\log_2 3.\log_8 3$$

$$\Leftrightarrow a\log_2 3+\frac{1}{4}\log_2^2 3=\frac{4}{3}a\log_2 3+\frac{1}{3}\log_2^2 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3}a=-\frac{1}{12}\log_2 3 \Leftrightarrow a=-\frac{1}{4}\log_2 3.$$

Suy ra công bội của cấp số nhân là: $\dfrac{-\frac{1}{4}\log_2 3+\log_4 3}{-\frac{1}{4}\log_2 3+\log_2 3}=\dfrac{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{-\frac{1}{4}+1}=\dfrac{1}{3}.$

Câu 9: Chọn B

$$9^{\sqrt{x^2+1}}=3^{2-4x} \Leftrightarrow 9^{\sqrt{x^2+1}}=9^{1-2x} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=1-2x \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x\ge 0 \\ x^2+1=1-4x+4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le\dfrac{1}{2} \\ 3x^2-4x=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{4}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

Câu 10: Chọn A

Điều kiện: $x^2+5x-6\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1 \vee x\le -6$

Ta có: $3^{2-\sqrt{x^2+5x-6}}\ge\dfrac{1}{3^x} \Leftrightarrow 3^{2-\sqrt{x^2+5x-6}}\ge 3^{-x} \Leftrightarrow 2-\sqrt{x^2+5x-6}\ge -x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+5x-6}\le x+2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x-6\ge 0 \\ x+2\ge 0 \\ x^2+5x-6\le x^2+4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -6\vee x\ge 1 \\ x\ge -2 \\ x\le 10 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[1;10]$$

Vậy $a+b=11$

Câu 11: Chọn A Điều kiện: $\begin{cases} x>-2 \\ x\ne 5 \end{cases}$.

Ta có: $\log_2(x+2)+\log_4(x-5)^2+\log_{\frac{1}{2}}8=0 \Leftrightarrow \log_2\left((x+2)|x-5|\right)=3.$

$$\Leftrightarrow (x+2)|x-5|=8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+2)(x-5)=8 \\ x>5 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+2)(x-5)=-8 \\ x<5 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-3x-18=0\\x>5\end{cases}\\\begin{cases}x^2-3x-2=0\\x<5\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=6\\x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}\end{array}\right.\cdot$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Câu 12: Chọn D

Phương trình $\ln\left(3x-mx+1\right)=\ln\left(-x^2+4x-3\right) \Leftrightarrow \begin{cases}-x^2+4x-3>0\\3x-mx+1=-x^2+4x-3\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}1<x<3\\x^2-x+4=mx\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1<x<3\\m=\dfrac{x^2-x+4}{x}\left(*\right)\end{cases}\cdot$$

Xét hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-x+4}{x}$ với $1<x<3$.

Khi đó $f'\left(x\right)=\dfrac{x^2-4}{x^2}$; $f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-x+4}{x}$ trên khoảng $\left(1;3\right)$

x	1		2		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	↘	3	↗	$\dfrac{10}{3}$

Nhận xét: Phương trình ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $\left(*\right)$ có nghiệm trên khoảng $\left(1;3\right)$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $\left(*\right)$ có nghiệm trên khoảng $\left(1;3\right)$ khi và chỉ khi $3\le m<4$ hay $m\in\left[3;4\right)$. Do đó $a=3$, $b=4$.

Vậy $a+b=7$.

Câu 13: Chọn A

Điều kiện $x>0$.

$\log_3^2 x-2\log_{\sqrt{3}} x-2\log_{\frac{1}{3}} x-3=0 \Leftrightarrow \log_3^2 x-4\log_3 x+2\log_3 x-3=0 \Leftrightarrow \log_3^2 x-2\log_3 x-3=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x=-1\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}\\\log_3 x=3\Leftrightarrow x=27\end{array}\right.\cdot$$

Do $x_1<x_2$ nên $x_1=\dfrac{1}{3}$ và $x_2=27$.

Vậy $P=\log_3 x_1+\log_{27} x_2=\log_3\frac{1}{3}+\log_{27}27=0$.

Câu 14: Chọn D

$\log_2 a+\log_3 a+\log_5 a=\log_2 a.\log_3 a.\log_5 a\Leftrightarrow \log_2 a\left(1+\log_3 2+\log_5 2\right)=\left(\log_2 a\right)^3.\log_3 2.\log_5 2$

$\Leftrightarrow \log_2 a\left[1+\log_3 2+\log_5 2-\log_3 2.\log_5 2\left(\log_2 a\right)^2\right]=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 a=0\\ \left(\log_2 a\right)^2=\dfrac{1+\log_3 2+\log_5 2}{\log_3 2.\log_5 2}\end{array}\right.\left(\alpha=\sqrt{\dfrac{1+\log_3 2+\log_5 2}{\log_3 2.\log_5 2}}\ \text{do}\ \log_3 2>0,\ \log_5 2>0\right)$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\ (\text{TM})\\ a=2^{\alpha}\ (\text{TM})\\ a=2^{-\alpha}\ (\text{TM})\end{array}\right.$.

Câu 15: Chọn C

Điều kiện xác định: $3^{x+1}-1>0\Leftrightarrow x>-1$.

Phương trình đã cho tương đương với $\log_3\left(3^{x+1}-1\right)=2x-\log_3 2$

$\Leftrightarrow \log_3\left(3^{x+1}-1\right)+\log_3 2=2x\Leftrightarrow 2\left(3^{x+1}-1\right)=3^{2x}$

$\Leftrightarrow 3^{2x}-6.3^x+2=0\ \ (1)$

Do x_1,x_2 cũng là hai nghiệm của phương trình (1) nên theo Viet, ta có: $\begin{cases}3^{x_1}+3^{x_2}=6\\ 3^{x_1}.3^{x_2}=2\end{cases}$.

Ta có: $S=27^{x_1}+27^{x_2}=\left(3^{x_1}+3^{x_2}\right)^3-3.3^{x_1}.3^{x_2}.\left(3^{x_1}+3^{x_2}\right)=6^3-3.2.6=180$.

Câu 16: Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases}x\neq 1\\ x>0\end{cases}$.

Ta có: $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}\left(x+3\right)+\frac{1}{4}\log_9\left(x-1\right)^8=\log_3\left(4x\right)$

$\Leftrightarrow \log_3\left(x+3\right)+\log_3\left|x-1\right|=\log_3\left(4x\right)\Leftrightarrow \log_3\left[\left(x+3\right).\left|x-1\right|\right]=\log_3\left(4x\right)$

$\Leftrightarrow \left(x+3\right).\left|x-1\right|=4x\ \ (1)$.

Nếu $0<x<1$ thì phương trình (1) trở thành

$\left(x+3\right).\left(1-x\right)=4x\Leftrightarrow -x^2-6x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3+2\sqrt{3}\,(tm)\\ x=-3-2\sqrt{3}\,(l)\end{array}\right.$.

Nếu $x>1$ thì phương trình (1) trở thành

$\left(x+3\right).\left(x-1\right)=4x\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3(tm)\\ x=-1(l)\end{array}\right.$.

Phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=\left\{-3+2\sqrt{3};3\right\}$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình là $2\sqrt{3}$.

Câu 17: Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$. Ta có:

$$\log_x(125x).\log_{25}^2 x=1 \Leftrightarrow \left(\log_x 125+\log_x x\right)\left(\log_{5^2} x\right)^2-1=0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{\log_5 x}+1\right).\frac{1}{4}\log_5^2 x-1=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\log_5^2 x+\frac{3}{4}\log_5 x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5 x=1 \\ \log_5 x=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5\,(\text{tmdk}) \\ x=5^{-4}=\frac{1}{625}\,(\text{tmdk}) \end{array}\right.$$

Vậy tích các nghiệm là: $5.\frac{1}{625}=\frac{1}{125}$.

Câu 18: Chọn D

$$\log_{\sqrt{2}}(x-1)=\log_2(mx-8) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ mx-8>0 \\ (x-1)^2=mx-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ (x-1)^2=mx-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ m=\dfrac{x^2-2x+9}{x} \end{cases}$$

Xét hàm số $y=\frac{x^2-2x+9}{x}$ trên $(1;+\infty)$, ta có $y'=\frac{x^2-9}{x^2}$. Giải $y'=0 \Leftrightarrow x=\pm 3$

Bảng biến thiên

x	1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	8	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Để thỏa mãn yêu cầu thì $4<m<8$ nên các giá trị nguyên của tham số m là $5,6,7$.

Câu 19: Chọn B

Ta có $\log\sin x+\log\cos x=-1 \Leftrightarrow \log(\sin x\cos x)=-1 \Leftrightarrow \sin x\cos x=\frac{1}{10}$.

Ta có $\log(\sin x+\cos x)=\frac{1}{2}(\log n-1)$

$$\Leftrightarrow 2\log(\sin x+\cos x)=\log n-\log 10 \Leftrightarrow \log(\sin x+\cos x)^2=\log\frac{n}{10}$$

$$\Leftrightarrow \log(1+2\sin x\cos x)=\log\frac{n}{10} \Leftrightarrow n=10\left(1+2\cdot\frac{1}{10}\right) \Leftrightarrow n=12.$$

Câu 20: Chọn A

Điều kiện: a, $b>0$ và $a-4b>0$

Đặt $\log_{100} a=\log_{40} b=\log_{16}\frac{a-4b}{12}=t \Rightarrow \begin{cases} a=100^t \\ b=40^t \\ a-4b=12.16^t \end{cases}$

Suy ra $100^t-4.40^t-12.16^t=0\Leftrightarrow\left(\frac{5}{2}\right)^{2t}-4.\left(\frac{5}{2}\right)^t-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{5}{2}\right)^t=6\\\left(\frac{5}{2}\right)^t=-2\,(l)\end{array}\right.$.

Vậy $\frac{a}{b}=\left(\frac{5}{2}\right)^t=6$.

Câu 21: Chọn A

Ta có phương trình: $4^x-m.2^{x+1}+2m=0$

Đặt: $2^x=t>0$, phương trình trở thành: $t^2-2mt+2m=0$

Để phương trình có hai nghiệm thì phương trình có hai nghiệm phân biệt dương

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\S>0\\P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-2m>0\\2m>0\end{cases}\Leftrightarrow m>2$

Khi đó phương trình có hai nghiệm t_1,t_2 thỏa mãn:

$t_1.t_2=2m\Leftrightarrow 2^{x_1+x_2}=2m\Leftrightarrow 8=2m\Leftrightarrow m=4$

Vậy $m=4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 22: Chọn C

Ta có $9.3^{2x}-m\left(4\sqrt[4]{x^2+2x+1}+3m+3\right).3^x+1=0\Leftrightarrow 3^{x+1}+\frac{1}{3^{x+1}}-\frac{m}{3}\left(4\sqrt{|x+1|}+3m+3\right)=0\,(1)$

Đặt $t=x+1$, phương trình thành $3^t+\frac{1}{3^t}-\frac{m}{3}\left(4\sqrt{|t|}+3m+3\right)=0\quad(2)$.

Bài toán trở thành tìm số giá trị nguyên của m để phương trình (2) có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.

Nhận xét: Nếu t_0 là một nghiệm của phương trình (2) thì $-t_0$ cũng là một nghiệm của phương trình (2). Do đó điều kiện cần để phương trình (2) có đúng 3 nghiệm thực phân biệt là phương trình (2) có nghiệm $t=0$.

Với $t=0$ thay vào phương trình ta có $-m^2-m+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-2\end{array}\right.$.

Thử lại:

Với $m=-2$ phương trình thành $3^t+\frac{1}{3^t}+\frac{2}{3}\left(4\sqrt{|t|}-3\right)=0$

Ta có $3^t+\frac{1}{3^t}\geq 2$, $\forall t\in\mathbb{R}$ và $\frac{2}{3}\left(4\sqrt{|t|}-3\right)\geq -2,\forall t\in\mathbb{R}$ suy ra $3^t+\frac{1}{3^t}+\frac{2}{3}\left(4\sqrt{|t|}-3\right)\geq 0,\forall t\in\mathbb{R}$.

Dấu bằng xảy ra khi $t=0$, hay phương trình (2) có nghiệm duy nhất $t=0$ nên loại $m=-2$.

Với $m=1$ phương trình (2) thành $3^t+\frac{1}{3^t}-\frac{1}{3}\left(4\sqrt{|t|}+6\right)=0\quad(3)$

Dễ thấy phương trình (3) có 3 nghiệm $t=-1,t=0,t=1$.

Ta chứng minh phương trình (3) chỉ có 3 nghiệm $t=-1,t=0,t=1$. Vì t là nghiệm thì $-t$ cũng là nghiệm phương trình (3) nên ta chỉ xét phương trình (3) trên $[0;+\infty)$.

Trên tập $[0;+\infty)$, $(3)\Leftrightarrow 3^t+\frac{1}{3^t}-\frac{1}{3}\left(4\sqrt{t}+6\right)=0$.

Xét hàm $f(t)=3^t+\frac{1}{3^t}-\frac{1}{3}\left(4\sqrt{t}+6\right)$ trên $[0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=3^t\ln 3-3^{-t}.\ln 3-\frac{2}{3\sqrt{t}}$, $f''(t)=3^t\ln^2 3+3^{-t}.\ln^2 3+\frac{1}{3.\left(\sqrt{t}\right)^3}>0,\forall t>0$.

Suy ra $f'(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)\Rightarrow f'(t)=0$ có tối đa 1 nghiệm $t>0\Rightarrow f(t)=0$ có tối đa 2 nghiệm $t\in[0;+\infty)$. Suy ra trên $[0;+\infty)$, phương trình (3) có 2 nghiệm $t=0,\text{t}=1$.

Do đó trên tập $\mathbb{R}$, phương trình (3) có đúng 3 nghiệm $t=-1,t=0,t=1$. Vậy chọn $m=1$.

Câu 23: Chọn C

Điều kiện: $x>0$. Đặt $t=\log_2 x$.

Khi đó phương trình đã cho có dạng: $t^2-(m+2)t+2m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x=2\\\log_2 x=m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=2^m\end{array}\right.$.

Do $x_1+x_2=6\Leftrightarrow 4+2^m=6\Leftrightarrow m=1$. Vậy $|x_1-x_2|=|4-2^1|=2$.

Câu 24: Chọn B

Ta có $4^x+(m-1)2^x+(4+3m)=0\ (1)$.

Đặt $t=2^x$, $t>0$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2+(m-1)t+4+3m=0\ (2)$

Phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu khi và chỉ khi phương trình (2) có 2 nghiệm t_1,t_2 thỏa

$$0<t_1<1<t_2\Leftrightarrow\begin{cases}af(1)<0\\af(0)>0\end{cases}\Leftrightarrow -1<m<2013$$

Vì $m\in\mathbb{Z},m\in[0;2019]$ suy ra $m\in\{0;1;2;...;2012\}$

Câu 25: Chọn A

Đặt: $t=2^x\ (x>0\Rightarrow t>1)$, phương trình đã cho trở thành: $t^2-2(m+3)t+m+9=0$.

Bài toán trở thành: Tìm các giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $t^2-2(m+3)t+m+9=0$ có hai nghiệm phân biệt t_1,t_2 thỏa mãn $1<t_1<t_2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=m^2+5m>0\\(t_1-1)(t_2-1)>0\\\frac{S}{2}=m+3>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=m^2+5m>0\\t_1t_2-(t_1+t_2)+1>0(*)\\\frac{S}{2}=m+3>1\end{cases}$$

Phương trình: $t^2-2(m+3)t+m+9=0$ có hai nghiệm phân biệt t_1,t_2 nên theo Viet ta có:

$$\begin{cases}t_1+t_2=2(m+3)\\t_1.t_2=m+9\end{cases}$$

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Thay vào hệ $(*)$ ta được $\begin{cases} m^2+5m>0 \\ -m+4>0 \\ m+3>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-5 \\ m>0 \end{array}\right. \\ m<4 \\ m>-2 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m<4$

Vì $m\in\mathbb{Z}, 0<m<4 \Rightarrow m\in\{1;2;3\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 26: Chọn A

$4^x-2^{x+2}+m-2=0 \Leftrightarrow 4^x-4.2^x+m-2=0(1)$. Đặt $t=2^x\,(t>0)$

$(1)\Leftrightarrow t^2-4t+m-2=0\,(2)$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $0\le x_1<x_2 \Leftrightarrow 2^0\le 2^{x_1}<2^{x_2} \Leftrightarrow 1\le t_1<t_2$

Thì phương trình (2) thỏa: $0\le t_1-1<t_2-1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ t_1+t_2>2 \\ (t_1-1)(t_2-1)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16-4(m-2)>0 \\ 4>2 \\ t_1t_2-(t_1+t_2)+1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<6 \\ m\ge 5 \end{cases}$. Vậy $m=5$ thỏa yêu cầu.

Câu 27: Chọn A

Điều kiện $x>0$.

Ta có:

$\log_2{}^2(2x)-3\log_2 x-2=0 \Leftrightarrow (1+\log_2 x)^2-3\log_2 x-2=0$

$\Leftrightarrow \log_2{}^2 x-\log_2 x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \log_2 x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \\ x=2^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \end{array}\right.$.

Vậy: $a=1;b=5;c=2 \Rightarrow a+b+c^2=10$.

Câu 28: Chọn C

Ta có: $\log^2|\cos x|-m\log\cos^2 x-m^2+4=0 \Leftrightarrow \log^2|\cos x|-2m\log|\cos x|-m^2+4=0$

Đặt $\log|\cos x|=t$. Điều kiện: $t\le 0$

Khi đó phương trình trở thành: $t^2-2mt-m^2+4=0, t\le 0$.

Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi phương trình vô nghiệm hoặc có các nghiệm đều dương.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$\left[\begin{array}{l} \Delta'<0 \\ \begin{cases} \Delta'\ge 0 \\ t_1+t_2>0 \\ t_1.t_2>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2-1.(-m^2+4)<0 \\ \begin{cases} m^2-1.(-m^2+4)\ge 0 \\ \dfrac{2m}{1}>0 \\ \dfrac{-m^2+4}{1}>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m^2-4<0 \\ \begin{cases} 2m^2-4\ge 0 \\ 2m>0 \\ -m^2+4>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{2}<m<\sqrt{2} \\ \begin{cases} m\ge\sqrt{2} \\ -2<m<2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow -\sqrt{2}<m<2$

Câu 29: Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ m+\log_2 x \ge 0 \end{cases}$.

$\log_2^2 x-2\log_2 x-\sqrt{m+\log_2 x}=m \Leftrightarrow 4\log_2^2 x-8\log_2 x-4\sqrt{m+\log_2 x}=4m$

$\Leftrightarrow 4\log_2^2 x-4\log_2 x+1=4\sqrt{m+\log_2 x}+4\left(m+\log_2 x\right)+1$

$\Leftrightarrow \left(2\log_2 x-1\right)^2=\left(2\sqrt{m+\log_2 x}+1\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{m+\log_2 x}+1=2\log_2 x-1 \\ 2\sqrt{m+\log_2 x}+1=-2\log_2 x+1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{m+\log_2 x}=\log_2 x-1 \\ \sqrt{m+\log_2 x}=-\log_2 x \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $\sqrt{m+\log_2 x}=-\log_2 x \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \le 0 \\ m+\log_2 x=\log_2^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x\le 1 \\ \log_2^2 x-\log_2 x-m=0(1) \end{cases}$

Đặt: $t=\log_2 x\left(t\le 0\right)$, phương trình (1) trở thành: $t^2-t-m=0\Leftrightarrow t^2-t=m(2)$

Đặt: $g(t)=t^2-t(t\in(-\infty;0]$.Bài toán trở thành: Tìm giá trị của tham số m để phương trình (2) có ít nhất 1 nghiệm $t\le 0$

Ta có: $g(t)=t^2-t\Rightarrow g'(t)=2t-1<0\forall t\le 0$

Ta có bảng biến thiên:

t	$-\infty$		0
$g'(t)$		$-$	
$g(t)$	$+\infty$	$\searrow$	0

Dựa vào BBT, suy ra: để phương trình (2) có ít nhất 1 nghiệm $t\le 0$ thì $m\ge 0$

Trường hợp 2: $\sqrt{m+\log_2 x}=\log_2 x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x\ge 1 \\ m+\log_2 x=\log_2^2 x-2\log_2 x+1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x\ge 1 \\ \log_2^2 x-3\log_2 x+1-m=0(3) \end{cases}$

Đặt: $t=\log_2 x\left(t\ge 1\right)$, phương trình (1) trở thành: $t^2-3t+1-m=0\Leftrightarrow m=t^2-3t+1(4)$

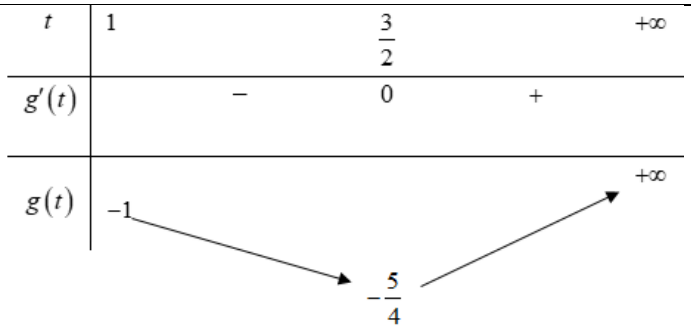
Đặt: $g(t)=t^2-t+1, t\in[1;+\infty)$. Ta có: $g(t)=t^2-3t+1\Rightarrow g'(t)=2t-3$

$g'(t)=0\Leftrightarrow 2t-3=0\Leftrightarrow t=\dfrac{3}{2}\in[1;+\infty)$

Bài toán trở thành: Tìm giá trị của tham số m để phương trình (4) có ít nhất 1 nghiệm $t\ge 1$

Ta có bảng biến thiên:

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN



Dựa vào BBT, suy ra: để phương trình (4) có ít nhất 1 nghiệm $t \ge 1$ thì $m \ge -\frac{5}{4}$

Kết hợp và, $m \in [-2019;2019] \Rightarrow m \in \{-1;0;1;2;...;2019\}$

Vậy có tất cả 2021 giá trị của m thỏa mãn ycbt

Câu 30: Chọn B

$16^x - m.4^{x-1} + 5m^2 - 44 = 0 \Leftrightarrow \left(4^x\right)^2 - \frac{m}{4}.4^x + 5m^2 - 44 = 0$

$\Leftrightarrow 4\left(4^x\right)^2 - m.4^x + 20m^2 - 176 = 0$, (1).

Đặt $t = 4^x$ điều kiện $t > 0$ từ (1) ta có $4t^2 - m.t + 20m^2 - 176 = 0$, $(*)$.

Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm đối nhau $x_1; x_2$ thì $x_1 + x_2 = 0$ khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm dương $t_1; t_2$ thỏa mãn $t_1.t_2 = 1$. Nhưng vì phương trình $(*)$ có $\frac{c}{a} = -\frac{176}{4} = -44 < 0$ nên không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 31: Chọn D

Đặt $t = 3^x$, $t > 0$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 2(2m+1)t + 3(4m-1) = 0$

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực x_1, x_2 khi và chỉ khi phương trình có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 8m + 4 > 0 \\ 2(2m+1) > 0 \\ 3(4m-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne 1 \\ m > -\frac{1}{2} \\ m > \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne 1 \\ m > \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Khi đó phương trình có hai nghiệm là $t = 4m-1$ và $t = 3$.

Với $t = 4m-1$ thì $3^{x_1} = 4m-1 \Leftrightarrow x_1 = \log_3(4m-1)$.

Với $t = 3$ thì $3^{x_2} = 3 \Leftrightarrow x_2 = 1$.

Ta có $(x_1+2)(x_2+2) = 12 \Leftrightarrow x_1 = 2 \Leftrightarrow \log_3(4m-1) = 2 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m = \frac{5}{2}$ nên m thuộc khoảng $(1;3)$.

Câu 32: Chọn D

Ta có $(m-5).3^x + (2m-2).2^x.\sqrt{3^x} + (1-m).4^x = 0$ (1)

$\Leftrightarrow (m-5).\left(\frac{3}{4}\right)^x+(2m-2).\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x+1-m=0$. Đặt $t=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$, điều kiện $t>0$.

Khi đó phương trình trở thành: $(m-5)t^2+(2m-2)t+1-m=0,(2)$.

Do đó để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta>0 \\ P>0 \\ S>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 5 \\ \left[\begin{array}{l} m>3 \\ m<1 \end{array}\right. \\ 1<m<5 \end{cases} \Leftrightarrow 3<m<5 \Leftrightarrow m\in(3;5)$.

Vậy $a=3$, $b=5$ nên $a+b=8$.

Câu 33: Chọn D

$\left(\sqrt{10}+1\right)^{x^2}+m\left(\sqrt{10}-1\right)^{x^2}=2.3^{x^2+1} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{x^2}+m\left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^{x^2}=6$ (1)

Đặt $t=\left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{x^2}$, $t>0 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^{x^2}=\frac{1}{t}$; (1) $\Leftrightarrow t+m.\frac{1}{t}=6 \Leftrightarrow t^2-6t+m=0$ (2)

Để (1) có đúng hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có một nghiệm lớn hơn 1.

(2) $\Leftrightarrow m=-t^2+6t$. Xét hàm số $f(t)=-t^2+6t$ trên khoảng $(1;+\infty)$, ta có:

$f'(t)=-2t+6$; $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=3$.

Bảng biến thiên:

t	1		3		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	5	↗	9	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $m<5$ hoặc $m=9$ là giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do $m\in(-10;10)$ nên $m=\{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;9\}$.

Suy ra có 15 giá trị m cần tìm.

Câu 34: Chọn B

Vì $\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)=1$. Đặt $t=\left(1+\sqrt{2}\right)^x\ (t>0) \Rightarrow \left(\sqrt{2}-1\right)^x=\frac{1}{t}$

Phương trình trở thành: $t+\frac{1-2a}{t}-4=0 \Leftrightarrow t^2-4t+1-2t=0\ (1)$.

Để phương trình ban đầu có 2 nghiệm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm dương t_1, t_2.

$\begin{cases}\Delta' = 2a+3>0\\ t_1+t_2 = 4>0\\ t_1t_2 = 1-2a>0\end{cases} \Leftrightarrow \frac{-3}{2}<a<\frac{1}{2}.$

Và thỏa mãn $x_1-x_2=\log_{1+\sqrt{2}}3 \Leftrightarrow \left(1+\sqrt{2}\right)^{x_1-x_2}=3 \Leftrightarrow \frac{t_1}{t_2}=3 \Leftrightarrow t_1=3t_2$.

$\begin{cases}t_1=3t_2\\ t_1+t_2=4\\ t_1t_2=1-2a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t_1=3\\ t_2=1\\ t_1t_2=1-2a=1.3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t_1=3\\ t_2=1\\ a=-1\end{cases}$

Vậy với $a=-1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 35: Chọn D

Đặt $t=3^x$, $t>0$ ta có phương trình: $t^2-2(m+2).t+3m-2=0$ (1).

Yêu cầu bài toán tương đương với tìm số số nguyên $m\in[0;2019]$ để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa $0<t_1<1<t_2$.

Hay phương trình (1) có: $\begin{cases}\Delta' = (m+2)^2-3m+2>0\\ S=2(m+2)>0\\ P=3m-2>0\\ (t_1-1)(t_2-1)<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2+m+6>0\\ m>-2\\ m>\frac{2}{3}\\ t_1t_2-(t_1+t_2)+1<0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}m>\frac{2}{3}\\ 3m-2-2(m+2)+1<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>\frac{2}{3}\\ m<5\end{cases}$. Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{1;2;3;4\}$.

Vậy có 4 giá trị của m thỏa đề bài.

Câu 36: Chọn D

ĐKXĐ: $x>0$.

Cách 1: Ta có: $4\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2-\log_{\frac{1}{2}}x+m=0(*) \Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right)^2+\log_2 x+m=0$

$\Leftrightarrow \log_{2^2}x+\log_2 x+m=0 \Leftrightarrow m=-\log_{2^2}x-\log_2 x$.

Đặt $\log_2 x=t$, với $x\in(0;1)$ thì $t<0$. Phương trình đã cho trở $m=-t^2-t(**)$.

Để phương trình $(*)$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1) \Leftrightarrow$ phương trình (**) có nghiệm $t<0$.

Xét $f(t)=-t^2-t$ với $t<0$. Ta có $f'(t)=-2t-1$ và $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0
$f'(t)$	$+$	0	$-$
$f(t)$	$-\infty$ ↗	$\frac{1}{4}$	↘ 0

Vậy để phương trình (**) có nghiệm $t<0$ thì $m\le\frac{1}{4}$ hay $m\in\left(-\infty;\frac{1}{4}\right]$.

Cách 2: Ta có:

$4\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2-\log_{\frac{1}{2}}x+m=0(*)\Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right)^2+\log_2 x+m=0\Leftrightarrow \log_2{}^2 x+\log_2 x+m=0$

Đặt $\log_2 x=t$,với $x\in(0;1)$ thì $t<0$. Phương trình đã cho trở $t^2+t+m=0$ (**).

Để phương trình $(*)$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)\Leftrightarrow$ phương trình (**) có nghiệm $t<0\Leftrightarrow\Delta=1-4m\ge 0\Leftrightarrow m\le\frac{1}{4}$.

Vì khi $\Delta\ge 0$ phương trình (**) có nghiệm $t_1;t_2$ thì theo Định lí Viet $t_1+t_2=-1$ nên luôn có ít nhất một nghiệm âm.

Vậy $m\in\left(-\infty;\frac{1}{4}\right]$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

Câu 37: Chọn C

Xét phương trình: $\log_3{}^2 x-4\log_3 x+m-3=0\ \ (1)$. Điều kiện: $x>0$.

Đặt $t=\log_3 x$ phương trình (1) trở thành: $t^2-4t+m-3=0\ (2)$.

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khi phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow\Delta'>0\Leftrightarrow 4-m+3>0\Leftrightarrow m<7\ (i)$.

Gọi $x_1<x_2$ là 2 nghiệm của phương trình (1) thì phương trình (2) có 2 nghiệm tương ứng là $t_1=\log_3 x_1;t_2=\log_3 x_2$. Vì $x_1<x_2$ nên $t_1<t_2$.

Mặt khác, $x_2-81x_1<0\Leftrightarrow 0<x_2<81x_1\Leftrightarrow\log_3 x_2<4+\log_3 x_1$

$\Leftrightarrow t_2<4+t_1\Leftrightarrow 0<t_2-t_1<4\Leftrightarrow(t_2-t_1)^2<16\Leftrightarrow(t_2+t_1)^2-4t_1t_2<16$.

$\Leftrightarrow 4^2-4(m-3)<16\Leftrightarrow m>3\ \ (ii)$.

Từ (i) và (ii) suy ra $3<m<7$ và $m\in\mathbb{Z}$ nên có 3 số nguyên thỏa mãn.

Câu 38: Chọn C

Xét phương trình: $\log_3{}^2 x-4\log_3 x+m-3=0\ \ (1)$. Điều kiện: $x>0$.

Đặt $t=\log_3 x$ phương trình (1) trở thành: $t^2-4t+m-3=0\ (2)$.

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khi phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow\Delta'>0\Leftrightarrow 4-m+3>0\Leftrightarrow m<7\ (i)$.

Gọi $x_1 < x_2$ là 2 nghiệm của phương trình (1) thì phương trình (2) có 2 nghiệm tương ứng là $t_1 = \log_3 x_1 ; t_2 = \log_3 x_2$. Vì $x_1 < x_2$ nên $t_1 < t_2$.

Mặt khác, $x_2 - 81x_1 < 0 \Leftrightarrow 0 < x_2 < 81x_1 \Leftrightarrow \log_3 x_2 < 4 + \log_3 x_1$

$\Leftrightarrow t_2 < 4 + t_1 \Leftrightarrow 0 < t_2 - t_1 < 4 \Leftrightarrow (t_2 - t_1)^2 < 16 \Leftrightarrow (t_2 + t_1)^2 - 4t_1 t_2 < 16$.

$\Leftrightarrow 4^2 - 4(m-3) < 16 \Leftrightarrow m > 3 \ (ii)$.

Từ (i) và (ii) suy ra $3 < m < 7$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên có 3 số nguyên thỏa mãn.

Câu 39: Chọn D

$4^{x+1} - (8m+5)2^x + 2m + 1 = 0 \ (*)$

Đặt $t = 2^x$, điều kiện $t > 0$, phương trình $(*)$ trở thành

$$4t^2 - (8m+5)t + 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow (4t-1)(t-2m-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{1}{4} \\ t_2 = 2m+1. \end{array}\right.$$

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} 2m+1 > 0 \\ 2m+1 \neq \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{2} \\ m \neq -\dfrac{3}{8}. \end{cases} \ (**)$

Lại có $x_1 x_2 = -1 \Leftrightarrow \log_2 t_1 \cdot \log_2 t_2 = -1 \Leftrightarrow \log_2 \dfrac{1}{4} \cdot \log_2 (2m+1) = -1 \Leftrightarrow \log_2 (2m+1) = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2m + 1 = \sqrt{2} \Leftrightarrow m = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Câu 40: Chọn A

Đặt $t = e^x \ (t > 0)$.

Phương trình $8f(e^x) = m^2 - 1$ trở thành $8f(t) = m^2 - 1$ hay $f(t) = \dfrac{m^2-1}{8}$.

Nhận thấy với mỗi giá trị $t > 0$ cho một giá trị $x = \ln t$.

Để phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt thì phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt $t > 0$.

Khi đó $-1 < \dfrac{m^2-1}{8} < 1 \Leftrightarrow -7 < m^2 < 9 \Leftrightarrow -3 < m < 3$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2;-1;0;1;2\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Câu 41: Chọn D

Đặt $\left(2+\sqrt{3}\right)^x = t$, $t > 0$ khi đó $\left(2-\sqrt{3}\right)^x = \dfrac{1}{t}$.

Nhận xét: Với cách đặt đó thì $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x_1}=t_1$, $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x_2}=t_2$ nên từ $x_1-x_2=\log_{2+\sqrt{3}}3$, ta có $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x_1-x_2}=3$ hay $\frac{t_1}{t_2}=3\Leftrightarrow t_1=3t_2$.

Vậy bài toán đã cho tương đương với bài toán tìm a để phương trình $t+\left(1-2a\right).\frac{1}{t}-4=0\left(*\right)$ có hai nghiệm dương t_1,t_2 thỏa mãn nghiệm này gấp 3 lần nghiệm kia.

Ta thấy: $\left(*\right)\Leftrightarrow t^2-4t+1-2a=0$.

Phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt khi $\begin{cases}\Delta'>0\\P>0\\S>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4-\left(1-2a\right)>0\\1-2a>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>\frac{-3}{2}\\a<\frac{1}{2}\end{cases}\left(**\right)$.

Cách 1: Nhận xét rằng phương trình ẩn t có tổng hai nghiệm bằng 4 mà nghiệm này gấp 3 nghiệm kia nên phương trình phải có 1 nghiệm băng 1 và 1 nghiệm bằng 3, từ đó $1-2a=3\Leftrightarrow a=-1$.

Cách 2: Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases}t_1+t_2=4\\t_1t_2=1-2a\end{cases}$.

Phương trình $\left(*\right)$ có nghiệm này gấp 3 lần nghiệm kia khi $\left[\begin{array}{l}t_1=3t_2\\t_2=3t_1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left(t_1-3t_2\right).\left(t_2-3t_1\right)=0\Leftrightarrow-3\left(t_1^{\,2}+t_2^{\,2}\right)+10t_1.t_2=0$

$\Leftrightarrow-3\left(t_1+t_2\right)^2+6t_1t_2+10t_1.t_2=0\Leftrightarrow-48+16\left(1-2a\right)=0\Leftrightarrow a=-1$ thỏa mãn điều kiện $\left(**\right)$.

Giá trị này của a thuộc đáp án **D.**

Cách 3. Dựa vào điều kiện có 2 nghiệm dương loại đáp án A, suy luận nếu *a* thuộc đáp án B, C thì cũng thuộc đáp án **D.** Vậy chọn đáp **D.**

Câu 42: Chọn A

Xét phương trình $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2}-\left(m+1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}-2m=0\ \left(1\right)$.

Đặt $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}=t$, vì $x^2\ge0\Rightarrow0<\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}\le1\Rightarrow t\in\left(0;1\right]$.

Phương trình $\left(1\right)$ trở thành $t^2-\left(m+1\right)t-2m=0\Leftrightarrow m=\frac{t^2-t}{t+2}\ \left(2\right)$.

Phương trình $\left(1\right)$ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $\left(2\right)$ có nghiệm $t\in\left(0;1\right]$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=\frac{t^2-t}{t+2}$, $t\in\left(0;1\right]$.

$f'\left(t\right)=\frac{t^2+4t-2}{\left(t+2\right)^2}$; $f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t^2+4t-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2-\sqrt{6}\notin\left(0;1\right]\\t=-2+\sqrt{6}\in\left(0;1\right]\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

t	0		$-2+\sqrt{6}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	0	↘	$-5+2\sqrt{6}$	↗	0

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow m\in\left[-5+2\sqrt{6};0\right]$

Suy ra $-a+2\sqrt{b}=-5+2\sqrt{6}\Rightarrow a=5, b=6$. Vậy $b-a=6-5=1$.

Câu 43: Chọn C

Đặt $3^{4-x^2}=v>0,\ 3^{6-3x}=u>0$ phương trình trở thành $m\frac{u}{v}+v=u+m\Leftrightarrow m\left(\frac{u-v}{v}\right)=(u-v)$

$\Leftrightarrow (u-v)(m-v)=0\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} v=u \\ v=m \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 3^{6-3x}=3^{4-x^2}\quad (I) \\ 3^{4-x^2}=m\quad (II) \end{array}\right.$

Giải (I): $3^{6-3x}=3^{4-x^2}\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Để phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt thì phương trình (II) xảy ra các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Phương trình (II) có 2 nghiệm phân biệt trong đó một nghiệm $x=1$ và một nghiệm $x\neq 2$. Với $x=1$ ta có $m=3^{4-1^2}=27$. Khi đó $3^{4-x^2}=27\ \Leftrightarrow 4-x^2=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1\neq 2 \end{array}\right.$.

Vậy $m=27$ là một giá trị cần tìm.

Trường hợp 2: Phương trình (II) có 2 nghiệm phân biệt trong đó một nghiệm $x=2$ và một nghiệm $x\neq 1$. Với $x=2$ ta có $m=3^{4-2^2}=1$. Khi đó $3^{4-x^2}=1\Leftrightarrow 4-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2\neq 1 \end{array}\right.$.

Vậy $m=1$ là một giá trị cần tìm.

Trường hợp 3: Phương trình (II) có đúng 1 nghiệm x khác $1;2$

Từ $3^{4-x^2}=m\Leftrightarrow x^2=4-\log_3 m\geq 0$ để có một nghiệm thì nghiệm đó là $x=0\Rightarrow 4-\log_3 m=0$ $\Leftrightarrow m=81$, đồng thời $x=0$ thỏa mãn khác $1;2$ nên $m=81$ là một giá trị cần tìm.

Vậy có ba giá trị $m=1;\ m=27;\ m=81$ thỏa mãn bài toán.

BÀI TẬP PHƯƠNG TRÌNH MŨ – LOGARIT SỐ 02

Câu 1: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2^x.5^{x^2-2x}=1$. Khi đó tổng x_1+x_2 bằng

A. $2-\log_5 2$. **B.** $-2+\log_5 2$. **C.** $2+\log_5 2$. **D.** $2-\log_2 5$.

Câu 2: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $3^{x^2-2}=5^{x+1}$ là

A. 1. **B.** $2-\log_3 5$. **C.** $P=-\log_3 45$. **D.** $P=\log_3 5$.

Câu 3: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $3^{x^2-2}=5^{x+1}$ là

A. 1. **B.** $2-\log_3 5$. **C.** $P=-\log_3 45$. **D.** $P=\log_3 5$.

Câu 4: Tính tích các nghiệm thực của phương trình $2^{x^2-1}=3^{2x+3}$.

A. $-3\log_2 3$. **B.** $-\log_2 54$. **C.** -1. **D.** $1-\log_2 3$.

Câu 5: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3\left(7-3^x\right)=2-x$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 7. **D.** 3.

Câu 6: Cho hai số thực a, b phân biệt thỏa mãn $\log_3\left(7-3^a\right)=2-a$ và $\log_3\left(7-3^b\right)=2-b$. Giá trị biểu thức 9^a+9^b bằng

A. 67. **B.** 18. **C.** 31. **D.** 82.

Câu 7: Tổng các nghiệm của phương trình $\log_2\left(17.2^x-8\right)=2x$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 3

Câu 8: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_5\left(25^x-3.5^x+15\right)=x+1$ bằng

A. $\dfrac{1-\log_3 5}{\log_3 5}$. **B.** $\dfrac{1+\log_3 5}{\log_3 5}$. **C.** 8. **D.** $\dfrac{1+\log_5 3}{\log_5 3}$.

Câu 9: Cho a, b là các số dương thỏa mãn $\log_9 a=\log_{16} b=\log_{12}\dfrac{5b-a}{2}$. Giá trị của $\dfrac{a}{b}$ bằng

A. $\dfrac{a}{b}=-1+\sqrt{6}$. **B.** $\dfrac{a}{b}=\dfrac{7+2\sqrt{6}}{25}$. **C.** $\dfrac{a}{b}=\dfrac{1+\sqrt{6}}{5}$. **D.** $\dfrac{a}{b}=7-2\sqrt{6}$.

Câu 10: Tính tổng T tất cả các nghiệm của phương trình $\log_5\left(25-5^x\right)+x-3=0$.

A. $T=1$. **B.** $T=3$. **C.** $T=25$. **D.** $T=2$.

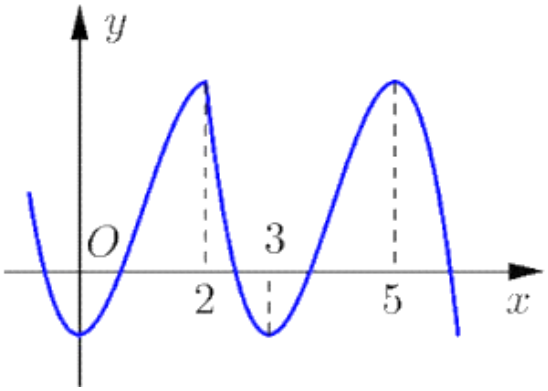
Câu 11: Số nghiệm của phương trình $2^{x^3+2x^2-3x}.3^{x-1}=1$ là:

B. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 12: Xác định m để phương trình $2\log_{\left(m^2+2\right)}\left(x-1\right)=\log_{\left(m^2+2\right)}\left(mx^2+1\right)$ có nghiệm

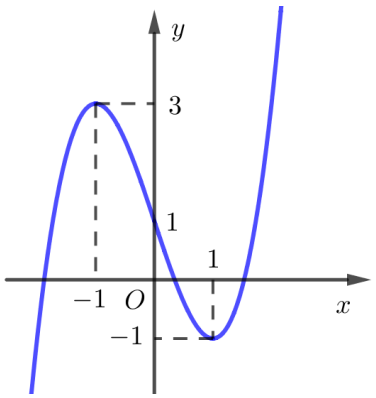
A. $m<1$. **B.** $-1<m<1$. **C.** $m>1$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m>1\\m<-1\end{array}\right.$.

Câu 13: Cho số thực m và hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình có $f\left(2^x+2^{-x}\right)=m$ nhiều nhất bao nhiêu nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-1;2\right]$?



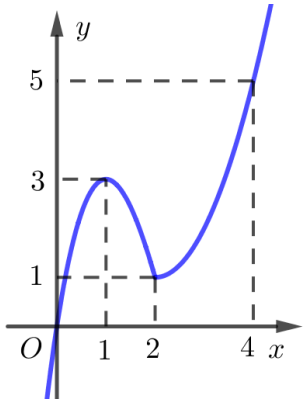
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sin x)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ là



A. $[-1;3)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-1;3)$. **D.** $[-1;1)$.

Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $f\left[4\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)\right]=m$ có nghiệm.



A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 16: Biết x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ là hai nghiệm của phương trình $\log_3\left(\sqrt{x^2-3x+2}+2\right)+5^{x^2-3x+1}=2$ và $x_1+2x_2=\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{b}\right)$ với a,b là hai số nguyên dương. Tính $a-2b$?

A. 5. **B.** –1. **C.** 1. **D.** 9.

Câu 17: Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình $2^x+3=m\sqrt{4^x+1}$ có hai nghiệm thực phân biệt là $\left(a;\sqrt{b}\right)$. Tính $S=2a+3b$

A. $S=29$. **B.** $S=28$. **C.** $S=32$. **D.** $S=36$.

Câu 18: Phương trình $\log_2\dfrac{x^2+3x+2}{3x^2-5x+8}=x^2-4x+3$ có nghiệm các nghiệm $x_1;x_2$. Hãy tính giá trị của biểu thức $A=x_1^2+x_2^2-3x_1x_2$

A. 31 **B.** –31. **C.** 1 **D.** –1.

Câu 19: Cho phương trình $5^x+m=\log_5(x-m)$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên trong khoảng $(-20;20)$ để phương trình có nghiệm.

A. 15. **B.** 14. **C.** 19. **D.** 17.

Câu 20: Tính tích tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_2\left(\dfrac{2x^2+1}{2x}\right)+2^{\left(x+\frac{1}{2x}\right)}=5$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

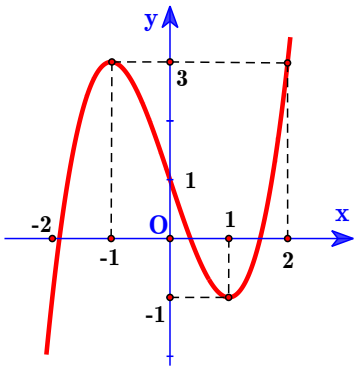
Câu 21: Tìm m để phương trình $\log_2{}^2x-\log_2x^2+3=m$ có nghiệm $x\in[1;8]$.

A. $6\le m\le 9$. **B.** $2\le m\le 3$. **C.** $2\le m\le 6$. **D.** $3\le m\le 6$.

Câu 22: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $9^{\sqrt{4x-x^2}}-4.3^{\sqrt{4x-x^2}}+2m-1=0$ có nghiệm?

A. 27. **B.** 25. **C.** 23. **D.** 24.

Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Số các giá trị nguyên của tham số m không vượt quá 5 để phương trình $f(\pi^x)-\dfrac{m^2-1}{8}=0$ có hai nghiệm phân biệt là

A. 5. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 6.

Câu 24: Cho phương trình $5^x+m=\log_5(x-m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-20;20)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 20. **B.** 21. **C.** 9. **D.** 19.

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Câu 25: Cho $0 \le x \le 2020$ và $\log_2(2x+2)+x-3y=8^y$ .Có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ nguyên thỏa mãn các điều kiện trên?

A. 2019. **B.** 2018. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 26: Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $15x.5^x = 5^{x+1}+27x+23$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** –1.

Câu 27: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $x+3=me^x$ có 2 nghiệm phân biệt?

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** Vô số.

Câu 28: Phương trình $\log_3 \dfrac{2x-1}{(x-1)^2} = 3x^2-8x+5$ có hai nghiệm là a và $\dfrac{a}{b}$. Giá trị của b là

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 29: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $x+3=me^x$ có 2 nghiệm phân biệt?

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** Vô số.

Câu 30: Có bao nhiêu số nguyên $a \in (-200;200)$ để phương trình $e^x+e^{x+a} = \ln(1+x)-\ln(x+a+1)$ có nghiệm thực duy nhất.

A. 399. **B.** 199. **C.** 200. **D.** 398.

Câu 31: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019;2019]$ để phương trình $2019^x+\dfrac{2x-1}{x+1}+\dfrac{mx-2m-1}{x-2}=0$. Có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.

A. 4038. **B.** 2019. **C.** 2017. **D.** 4039.

Câu 32: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tồn tại các số thực x, y thỏa mãn đồng thời $e^{3x+5y-10}-e^{x+3y-9}=1-2x-2y$ và $\log_5^2(3x+2y+4)-(m+6)\log_5(x+5)+m^2+9=0$.

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 33: Nghiệm dương của phương trình $\log_2\left(\sqrt{2x^2-3x}+1\right)+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-2x^2+3x}=2$ có dạng $\dfrac{a+\sqrt{b}}{c}(a,b,c\in\mathbb{N})$. Giá trị của $a+b+c$ bằng:

A. 20. **B.** 23. **C.** 24. **D.** 42.

Câu 34: Cho a,b là các số dương lớn hơn 1, thay đổi thỏa mãn $a+b=2019$ để phương trình $5\log_a x.\log_b x-4\log_a x-3\log_b x-2019=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2. Biết giá trị lớn nhất của $\ln(x_1x_2)$ bằng $\dfrac{3}{5}\ln\left(\dfrac{m}{7}\right)+\dfrac{4}{5}\ln\left(\dfrac{n}{7}\right)$, với m,n là các số nguyên dương. Tính $S=m+2n$.

A. 22209. **B.** 20190. **C.** 2019. **D.** 14133.

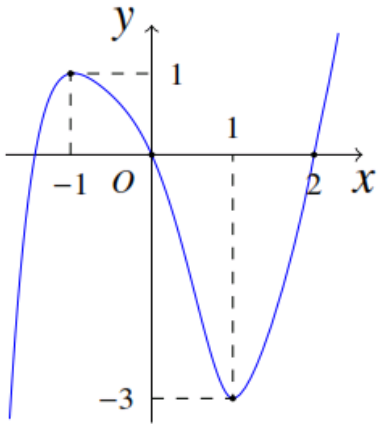
Câu 35: Xét các số thực dương x,y thỏa mãn $2019^{2(x^2-y+1)}=\dfrac{2x+y}{(x+1)^2}$. Giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=2y-x$ bằng

A. $P_{\min}=\dfrac{1}{4}$. **B.** $P_{\min}=\dfrac{1}{2}$. **C.** $P_{\min}=\dfrac{7}{8}$. **D.** $P_{\min}=\dfrac{15}{8}$.

Câu 36: Tìm số nghiệm của phương trình $\left(|x|-1\right)^2 e^{(|x|-1)} - \log 2 = 0$.

A. 3. **B.** 4 **C.** 0 **D.** 2

Câu 37: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thực của phương trình $f\left(2+f\left(e^x\right)\right)=1$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 38: Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $a\neq 1, \log_3 a + b = 0, \log_a b = \frac{1}{c}, \ln\frac{b}{c} = c - b$. Tổng $S = a+b+c$ nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{3}{2};2\right)$. **B.** $\left(\frac{6}{5};\frac{3}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{5}{2};3\right)$. **D.** $\left(3;\frac{7}{2}\right)$.

Câu 39: Tìm các giá trị m để phương trình $3^{\sin x+\sqrt{5}\cos x-|m|+5} = \log_{\sin x+\sqrt{5}\cos x+10}\left(|m|+5\right)$ có nghiệm.

A. $\sqrt{6}\le m\le\sqrt{6}$. **B.** $-5\le m\le 5$. **C.** $5-\sqrt{6}\le m\le 5+\sqrt{6}$. **D.** $-\sqrt{6}\le m\le 5$.

Câu 40: Cho hai số thực x,y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}}\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3)+y(y-3)+xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{x+2y+3}{x+y+6}$.

A. $\frac{43+3\sqrt{249}}{94}$. **B.** $\frac{37-\sqrt{249}}{94}$. **C.** $\frac{69-\sqrt{249}}{94}$. **D.** $\frac{69+\sqrt{249}}{94}$.

Câu 41: Tìm tham số m để tổng các nghiệm của phương trình sau đạt giá trị nhỏ nhất: $1+\left[2x^2-m(m+1)x-2\right].2^{1+mx-x^2} = \left(x^2-mx-1\right).2^{mx(1-m)} + x^2 - m^2x.$

A. 0. **B.** 2. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 42: Cho phương trình $m\ln^2(x+1)-(x+2-m)\ln(x+1)-x-2=0\ (1)$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thoả mãn $0<x_1<2<4<x_2$ là khoảng $(a;+\infty)$. Khi đó a thuộc khoảng

A. $(3,8;3,9)$. **B.** $(3,6;3,7)$. **C.** $(3,7;3,8)$. **D.** $(3,5;3,6)$.

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Câu 43: Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}}+\left(x^3-9x^2+24x+m\right).3^{x-3}=3^x+1$ có ba nghiệm phân biệt bằng

A. 45. **B.** 38. **C.** 34. **D.** 27.

Câu 44: Cho phương trình $2^{(x-1)^2}.\log_2\left(x^2-2x+3\right)=4^{|x-m|}\log_2\left(2|x-m|+2\right)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên đoạn $[-2019;2019]$ để phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt.

A. 4036. **B.** 4034. **C.** 4038. **D.** 4040.

Câu 45: Xét các số thực dương x,y thỏa mãn $\log_3\dfrac{1-y}{x+3xy}=3xy+x+3y-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=x+y$.

A. $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}-4}{3}$. **B.** $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}+4}{3}$. **C.** $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}+4}{9}$. **D.** $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}-4}{9}$.

Câu 46: Phương trình $\log_3\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}=3x^2-8x+5$ có hai nghiệm là a và $\dfrac{a}{b}$. Giá trị của b là

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 47: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để bất phương trình $\log_3\dfrac{2x^2+x+m+1}{x^2+x+1}\geq 2x^2+4x+5-2m$ có nghiệm. Số phần tử của tập hợp S bằng

A. 20. **B.** 10. **C.** 15. **D.** 5.

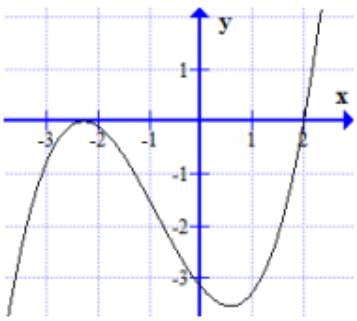
Câu 48: Cho hàm số $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+e^x-e^{-x}$. Hỏi phương trình $f\left(3^x\right)+f(2x-1)=0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 49: Có bao nhiêu số nguyên $a\in(-2019;2019)$ để phương trình $\dfrac{1}{\ln(x+5)}+\dfrac{1}{3^x-1}=x+a$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 0. **B.** 2022. **C.** 2014. **D.** 2015.

Câu 50: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để bất phương trình $\left[x\left(m-2^{f(\sin x)}\right)+2.2^{f(\sin x)}+m^2-3\right].\left(2^{f(x)}-1\right)\geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Số tập con của tập hợp S là



A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 51: Có bao nhiêu số nguyên $a\in(-2019;2019)$ để phương trình $\frac{1}{\ln(x+5)}+\frac{1}{3^x-1}=x+a$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 0. **B.** 2022. **C.** 2014. **D.** 2015.

Câu 52: Số nghiệm của phương trình $50^x+2^{x+5}=3.7^x$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 53: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ với $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên thuộc đoạn $[-10;10]$ của tham số m để bất phương trình $f\left(\sqrt{1-x^2}\right)+\frac{2}{3}x^3-x^2+\frac{8}{3}-f(m)\le 0$ có nghiệm. Số phần tử của tập hợp S bằng

A. 9. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 11.

Câu 54: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
y'		$-$		0		$+$		0	$-$
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{15}{13}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\frac{15}{13}$	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị lớn nhất của m để phương trình: $e^{2f^3(x)-\frac{13}{2}f^2(x)+7f(x)+\frac{3}{2}}=m$ có nghiệm trên đoạn $[0;2]$.

A. e^5. **B.** $e^{\frac{15}{13}}$. **C.** e^3. **D.** e^4.

Câu 55: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tồn tại các số thực x,y thỏa mãn đồng thời $e^{3x+5y-10}-e^{x+3y-9}=1-2x-2y$ và $\log_5^2(3x+2y+4)-(m+6)\log_5(x+5)+m^2+9=0$

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 56: Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2^{x^2+4x+5-m^2}=\log_{x^2+4x+6}(m^2+1)$ có đúng 1 nghiệm là

A. 1. **B.** 0. **C.** -2. **D.** 4.

Câu 57: Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\frac{1}{2}\log_2\frac{2x^2-4x+6}{|x-m|+1}+x^2=2(x+|x-m|)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 58: Tìm số giá trị nguyên của m thuộc $[-20;20]$ để phương trình $\log_2(x^2+m+x\sqrt{x^2+4})=(2m-9)x-1+(1-2m)\sqrt{x^2+4}$ có nghiệm?

A. 12. **B.** 23. **C.** 25. **D.** 10.

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Câu 59: Cho hai số dương $x;y$ thỏa $\log_2\left(4x+y+2xy+2\right)^{y+2}=8-\left(2x-2\right)\left(y+2\right)$. Giá trị nhỏ nhất của $P=2x+y$ là số có dạng $M=a\sqrt{b}+c$ với $a,b\in\mathbb{N},a>2$. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=17$. **B.** $S=7$. **C.** $S=19$. **D.** $S=3$.

Câu 60: Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $(m+1).16^x-2(2m-3).4^x+6m+5=0$ có hai nghiệm trái dấu là

A. 4. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 61: Biết rằng phương trình $\log_2\left(\left|2x-1\right|+m\right)=1+\log_3\left(m+4x-4x^2-1\right)$ có nghiệm thực duy nhất. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m\in(0;1)$. **B.** $m\in(1;3)$. **C.** $m\in(3;6)$. **D.** $m\in(6;9)$.

Câu 62: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x\log_3\left(x+1\right)=\log_9\left[9\left(x+1\right)^{2m}\right]$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $m\in(-1;0)$. **B.** $m\in(-2;0)$. **C.** $m\in(-1;+\infty)$. **D.** $m\in[-1;0)$.

Câu 63: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để phương trình $2^{\cos x-2+\sqrt[3]{m-3\cos x}}+\left(\cos^3x+6\sin^2x+9\cos x+m-6\right)2^{\cos x-2}=2^{\cos x+1}+1$ có nghiệm thực. Khi đó tổng của hai phần tử lớn nhất và nhỏ nhất của tập S bằng

A. 28. **B.** 21. **C.** 24. **D.** 4.

Câu 64: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2\log_2x^4+\sqrt{2\log_2x^8}-2m+2018=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1;2]$. Số phần tử của S là

A. 7. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 6.

Câu 65: Cho hàm số $f(x)=3^{x-4}+(x+1).2^{7-x}-6x+3$. Giả sử $m_0=\frac{a}{b}(a,b\in\mathbb{Z},\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) là giá trị nhỏ nhất của tham số thực m sao cho phương trình $f\left(7-4\sqrt{6x-9x^2}\right)+2m-1=0$ có số nghiệm nhiều nhất. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b^2$.

A. $P=11$. **B.** $P=7$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=9$.

Câu 66: Số giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019;2]$ để phương trình $(x-1)\left[\log_3\left(4x+1\right)+\log_5\left(2x+1\right)\right]=2x-m$ có đúng hai nghiệm thực là

A. 2. **B.** 2022. **C.** 1. **D.** 2021.

Câu 67: Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $3^{x^2+2x+1-2\left|x-m\right|}=\log_{x^2+2x+3}\left(2\left|x-m\right|+2\right)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là

A. 3. **B.** -2. **C.** -3. **D.** 2.

Câu 68: Cho $x,y>0$ thỏa mãn $\log\left(\frac{x+3y}{xy}\right)=xy-x-3y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^2}{1+3y}+\frac{9y^2}{1+x}$?

A. 10. **B.** $\frac{71}{7}$. **C.** $\frac{72}{7}$. **D.** $\frac{73}{7}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.AA	2.C	3.C	4.B	5.A	6.C	7.D	8.B	9.D	10.B
11.D	12.B	13.B	14.D	15.D	16.B	17.D	18.C	19.C	20.D
21.C	22.B	23.A	24.D	25.D	26.B	27.A	28.D	29.A	30.B
31.C	32.B	33.C	34.A	35.D	36.B	37.B	38.B	39.C	40.D
41.C	42.C	43.D	44.C	45.A	46.D	47.B	48.D	49.D	50.C
51.D	52.D	53.D	54.D	55.C	56.B	57.B	58.B	59.D	60.D
61.D	62.C	63.A	64.A	65.D	66.B	67.C	68.C		

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **Chọn A**

$2^x.5^{x^2-2x}=1\Leftrightarrow\log_5\left(2^x.5^{x^2-2x}\right)=0\Leftrightarrow x\log_5 2+x^2-2x=0\Leftrightarrow x\left(\log_5 2+x-2\right)=0$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=0\\x_2=2-\log_5 2\end{array}\right.$.

Câu 2: **Chọn C**

$3^{x^2-2}=5^{x+1}\Leftrightarrow x^2-2=(x+1)\log_3 5\Leftrightarrow x^2-x\log_3 5-2-\log_3 5=0$.

Ta có $\Delta=\log_3^2 5+4\log_3 5+8=\left(\log_3 5+2\right)^2+4>0\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Theo Vi-ét, ta có $x_1x_2=-2-\log_3 5=-\log_3 3^2-\log_3 5=-\log_3 45$.

Câu 3: **Chọn C**

$3^{x^2-2}=5^{x+1}\Leftrightarrow x^2-2=(x+1)\log_3 5\Leftrightarrow x^2-x\log_3 5-2-\log_3 5=0$.

Ta có $\Delta=\log_3^2 5+4\log_3 5+8=\left(\log_3 5+2\right)^2+4>0\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Theo Vi-ét, ta có $x_1x_2=-2-\log_3 5=-\log_3 3^2-\log_3 5=-\log_3 45$.

Câu 4: **Chọn B**

Ta có: $2^{x^2-1}=3^{2x+3}$

$\Leftrightarrow x^2-1=\log_2 3^{2x+3}\Leftrightarrow x^2-1=(2x+3)\log_2 3$

$\Leftrightarrow x^2-1=2x\log_2 3+3\log_2 3\Leftrightarrow x^2-2x\log_2 3-1-3\log_2 3=0$ (*)

Phương trình có hệ số $a=1,c=-\left(1+3\log_2 3\right)<0\Rightarrow a.c<0$, do đó phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2. Theo vi-et: $x_1.x_2=-1-3\log_2 3=-\log_2 2-\log_2 3^3=-\log_2 54$.

Câu 5: **Chọn A**

Ta có $\log_3\left(7-3^x\right)=2-x\Leftrightarrow 7-3^x=3^{2-x}\Leftrightarrow 7-3^x=\dfrac{9}{3^x}$.

Đặt $t=3^x\left(t>0\right)$. Phương trình trở thành $7-t=\dfrac{9}{t}\Leftrightarrow -t^2+7t-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}\ (tm)\\ t=\dfrac{7-\sqrt{13}}{2}\ (tm)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^x=\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}\\ 3^x=\dfrac{7-\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\log_3\left(\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}\right)\\ x=\log_3\left(\dfrac{7-\sqrt{13}}{2}\right)\end{array}\right.$.

Tổng các nghiệm của phương trình $\log_3\left(\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}\right)+\log_3\left(\dfrac{7-\sqrt{13}}{2}\right)=2$.

Câu 6: **Chọn C**

Từ giả thiết ta có $a,\ b$ là hai nghiệm phân biệt của phương trình

$\log_3(7-3^x)=2-x\Leftrightarrow 7-3^x=3^{2-x}\Leftrightarrow 3^{2x}-7.3^x+9=0$

Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases}3^a+3^b=7\\ 3^a.3^b=9\end{cases}$.

Do đó: $9^a+9^b=(3^a+3^b)^2-2.3^a.3^b=7^2-2.9=31$.

Câu 7: **Chọn D**

ĐKXĐ: $17.2^x-8>0$.

Khi đó $\log_2\left(17.2^x-8\right)=2x\Leftrightarrow 17.2^x-8=2^{2x}\Leftrightarrow\left(2^x\right)^2-17.2^x+8=0$.

Đặt $2^x=t\left(t>0\right)$. Khi đó phương trình trở thành $t^2-17t+8=0$. Phương trình có hai nghiệm t_1; t_2 thỏa mãn $t_1.t_2=8\Rightarrow 2^{x_1}.2^{x_2}=8\Leftrightarrow 2^{x_1+x_2}=2^3\Leftrightarrow x_1+x_2=3$.

Câu 8: **Chọn B**

$\log_5\left(25^x-3.5^x+15\right)=x+1\Leftrightarrow 25^x-3.5^x+15=5^{x+1}$

$\Leftrightarrow 25^x-8.5^x+15=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5^x=3\\ 5^x=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\log_5 3\\ x=1\end{array}\right.$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình là $1+\log_5 3=\dfrac{1+\log_3 5}{\log_3 5}$.

Câu 9: **Chọn D**

$\log_9 a=\log_{16} b=\log_{12}\dfrac{5b-a}{2}=t$. Khi đó $\begin{cases}a=9^t\\ b=16^t\\ \dfrac{5b-a}{2}=12^t\end{cases}\Rightarrow\dfrac{a}{b}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2t}$.

Ta có: $5.16^t-9^t=2.12^t\Leftrightarrow 5-\left(\dfrac{9}{16}\right)^t=2.\left(\dfrac{12}{16}\right)^t\Leftrightarrow-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2t}-2.\left(\dfrac{3}{4}\right)^t+5=0$.

Suy ra $\left(\frac{3}{4}\right)^t = -1+\sqrt{6} \Rightarrow \frac{a}{b} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2t} = 7-2\sqrt{6}$.

Câu 10: Chọn B

Ta có: $\log_5\left(25-5^x\right)+x-3=0 \Leftrightarrow \log_5\left(25-5^x\right)=3-x$

$\Leftrightarrow 25-5^x = 5^{3-x} \Leftrightarrow 25-5^x = \frac{5^3}{5^x} \Leftrightarrow 25.5^x - 5^{2x} = 125. \ (1)$

Đặt $5^x = t$ với $t>0$. Phương trình (1) trở thành:

$25t - t^2 = 125 \Leftrightarrow t^2 - 25t + 125 = 0. \ (2)$

Phương trình (2) có $\begin{cases}\Delta = 25^2 - 4.125 = 125 > 0\\ S = 25 > 0, P = 125 > 0\end{cases}$ nên phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 dương thỏa mãn $t_1 + t_2 = 25$ và $t_1.t_2 = 125$.

Khi đó, phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn: $5^{x_1} = t_1, 5^{x_2} = t_2$.

Ta có $5^{x_1+x_2} = 5^{x_1}.5^{x_2} = t_1.t_2 = 125 \Rightarrow x_1 + x_2 = 3$.

Vậy $T = 3$.

Câu 11: Chọn D

Nhận xét $x=1$ không là nghiệm pt.

$\Leftrightarrow \log_2\left(2^{(x-1)\left(x^2+3x\right)}.3^{x-1}\right) = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+3x\right)+(x-1)\log_2 3 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\\ x^2+3x+\log_2 3 = 0 \ (1)\end{array}\right.$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khác 1 vì $\begin{cases}\Delta = 9-4\log_2 3 > 0\\ 4+\log_2 3 \neq 0\end{cases}$.

Do đó phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

Nhận xét $x=1$ không là nghiệm pt.

Câu 12: Chọn B

Ta có $0 < m^2+2 \neq 1 \ \forall m \in \mathbb{R}$.

Phương trình $2\log_{\left(m^2+2\right)}(x-1) = \log_{\left(m^2+2\right)}\left(mx^2+1\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0\\ \log_{\left(m^2+2\right)}(x-1)^2 = \log_{\left(m^2+2\right)}\left(mx^2+1\right)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1\\ (x-1)^2 = mx^2+1\end{cases} \Leftrightarrow m = 1-\frac{2}{x}$ với $x \in (1;+\infty)$.

Yêu cầu bài toán trở thành định m để phương trình $m = 1-\frac{2}{x}$ có nghiệm trên khoảng $(1;+\infty)$.

Xét hàm số $f(x) = 1-\frac{2}{x}$ trên khoảng $(1;+\infty)$.

Ta có $f'(x) = \frac{2}{x^2} > 0 \ \forall x \in (1;+\infty)$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -1, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

Bảng biến thiên

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	-1 ↗	1

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình có nghiệm khi $-1<m<1$.

Câu 13: Chọn B

Đặt $t=t(x)=2^x+2^{-x}$ với $x\in[-1;2]$.

Hàm số $t=t(x)$ liên tục trên $[-1;2]$ có $t'(x)=2^x\ln 2-2^{-x}\ln 2$ và $t'(x)=0$ $\Leftrightarrow 2^x\ln 2-2^{-x}\ln 2=0\Leftrightarrow 2^x=2^{-x}\Leftrightarrow x=0$.

Bảng biến thiên:

x	-1	0	2
$t'(x)$	$-$	0	$+$
$t(x)$	$\frac{5}{2}$ ↘	2 ↗	$\frac{17}{4}$

Nhận xét: Dựa vào bảng biến thiên với mỗi $t\in\left(2;\frac{5}{2}\right]$ có 2 giá trị của x thỏa mãn $t=2^x+2^{-x}$ và với mỗi $t\in\{2\}\cup\left(\frac{5}{2};\frac{17}{4}\right]$ có duy nhất 1 giá trị x thỏa mãn $t=2^x+2^{-x}$.

Xét phương trình $f(t)=m$ với $t\in\left[2;\frac{17}{4}\right]$.

Dựa vào đồ thị phương trình $f\left(2^x+2^{-x}\right)=m$ có số nghiệm nhiều nhất khi và chỉ khi phương trình $f(t)=m$ có 2 nghiệm t_1, t_2 trong đó có: $t_1\in\left(2;\frac{5}{2}\right]$ và $t_2\in\left(\frac{5}{2};\frac{17}{4}\right]$.

Vậy phương trình $f\left(2^x+2^{-x}\right)=m$ có nhiều nhất 3 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$.

Câu 14: Chọn D

Đặt $t=\sin x$, do $x\in(0;\pi)$ nên $t\in(0;1]$.

Khi đó phương trình trở thành: $f(t)=m, t\in(0;1]$. Đồ thị $f(t)$ trên $(0;1]$ như hình vẽ.

Từ đồ thị ta có: Phương trình $f(\sin x)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$

$\Leftrightarrow$ phương trình $f(t)=m$ có nghiệm trên nửa khoảng $(0;1]\Leftrightarrow m\in[-1;1)$.

Câu 15: Chọn D

Đặt $t=4\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)=4\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\right)=4-3\sin^2 2x\Rightarrow t\in[1;4]$.

Do đó phương trình $f\left[4\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)\right]=m$ có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $f(t)=m$ có nghiệm trên đoạn $[1;4]$.

Dựa vào đồ thị đã cho ta thấy: phương trình $f(t)=m$ có nghiệm t với $t\in[1;4]\Leftrightarrow 1\le m\le 5$.

Vậy $m\in\{1;2;3;4;5\}$.

Câu 16: Chọn B

Điều kiện xác định của phương trình: $x^2-3x+2\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 2\\x\le 1\end{array}\right.$.

Đặt $t=\sqrt{x^2-3x+2}$ với $t\ge 0$. Phương trình đã cho trở thành $\log_3(t+2)+5^{t^2-1}-2=0$.

Xét hàm số $f(t)=\log_3(t+2)+5^{t^2-1}-2$.

Ta có: $f'(t)=\frac{1}{(t+2)\ln 3}+2t.5^{t^2-1}\ln 5>0,\forall t\ge 0$.

Suy ra $f(t)$ luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$. Mà $f(0)=\log_3 2-\frac{9}{5}<0$

Do đó phương trình $f(t)=0$ có đúng 1 nghiệm trên khoảng $(0;+\infty)$.

Xét $t=1$ ta có $\log_3(1+2)+5^{1^2-1}-2=0$

Suy ra $t=1$ là nghiệm duy nhất.

$$t=1\Leftrightarrow\sqrt{x^2-3x+2}=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\\x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\Rightarrow x_1+2x_2=\frac{1}{2}\left(9+\sqrt{5}\right).$$

Suy ra $a=9,b=5$. Vậy $a-2b=-1$.

Câu 17: Chọn D

Ta có $2^x+3=m\sqrt{4^x+1}\Leftrightarrow m=\frac{2^x+3}{\sqrt{4^x+1}}$.

Xét hàm số $f(x)=\frac{2^x+3}{\sqrt{4^x+1}}$ trên $\mathbb{R}\Rightarrow f'(x)=\frac{\left(1-3.2^x\right).2^x\ln 2}{\left(4^x+1\right)\sqrt{4^x+1}}=0\Leftrightarrow x=\log_2\frac{1}{3}$.

Ta có bảng biến thiên

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

x	$-\infty$		$\log_2\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	3	↗	$\sqrt{10}$	↘	1

Từ bản biến thiên suy ra $m\in\left(3;\sqrt{10}\right)$. Do đó $\begin{cases}a=3\\b=10\end{cases}\Rightarrow S=2.3+3.10=36$.

Câu 18: Chọn C

Ta có : $3x^2-5x+8>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên đk của phương trình là: $x^2+3x+2>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-2\\x>-1\end{array}\right.$

$\log_2\dfrac{x^2+3x+2}{3x^2-5x+8}=x^2-4x+3$

$\Leftrightarrow\log_2\left(x^2+3x+2\right)-\log_2\left(3x^2-5x+8\right)=\dfrac{1}{2}\left[\left(3x^2-5x+8\right)-\left(x^2+3x+2\right)\right].$

$\Leftrightarrow\log_2\left(x^2+3x+2\right)+\dfrac{1}{2}\left(x^2+3x+2\right)=\log_2\left(3x^2-5x+8\right)+\dfrac{1}{2}\left(3x^2-5x+8\right).$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+\dfrac{1}{2}t,(t>0);\ f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+\dfrac{1}{2}>0\ \forall t>0$.

Nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên tập $(0;+\infty)$.

Mà phương trình có dạng: $f\left(x^2+3x+2\right)=f\left(3x^2-5x+8\right)$.

Vậy phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$\left(3x^2-5x+8\right)=\left(x^2+3x+2\right)\Leftrightarrow 2x^2-8x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.(t/m).$

Vậy $A=x_1^2+x_2^2-3x_1x_2=\left(x_1+x_2\right)^2-5x_1.x_2=1$.

Câu 19: Chọn C

Đặt $5^x+m=\log_5\left(x-m\right)=t$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}5^x+m=t\\\log_5\left(x-m\right)=t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5^x+m=t\\x-m=5^t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5^x+m=t\\5^t+m=x\end{cases}.$

Trừ hai vế ta được: $5^x-5^t=t-x\Leftrightarrow 5^x+x=5^t+t\Leftrightarrow f\left(x\right)=f\left(t\right)$.

Với $f\left(x\right)=5^x+x\Rightarrow f'\left(x\right)=5^x.\ln 5+1>0\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Phương trình $f\left(x\right)=f\left(t\right)$ có nghiệm duy nhất $x=t$.

Với $x=t$ ta có $5^x+m=x\Leftrightarrow 5^x-x=-m.$ Xét hàm số $g\left(x\right)=5^x-x$.

$g'\left(x\right)=5^x.\ln 5-1\Rightarrow g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 5^x=\dfrac{1}{\ln 5}\Leftrightarrow x=\log_5\dfrac{1}{\ln 5}$.

x	$-\infty$		$\log_5 \frac{1}{\ln 5}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{\ln 5} - \log_5 \frac{1}{\ln 5}$	$\nearrow$	$+\infty$

$\Rightarrow$ với $-m > \frac{1}{\ln 5} - \log_5 \frac{1}{\ln 5} \Leftrightarrow m < -\frac{1}{\ln 5} + \log_5 \frac{1}{\ln 5}$.

Do m là số nguyên và $m \in (-20;20)$ nên $m \in \{-19;-18;...;-1\}$.

Vậy có 19 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Câu 20: Chọn D

Điều kiện $x > 0$. Đặt $t = x + \frac{1}{2x}$, $\left(t \ge \sqrt{2}\right)$.

Phương trình trở thành: $\log_2 t + 2^t = 5$ (1). Xét $f(t) = \log_2 t + 2^t$ với $t \ge \sqrt{2}$.

Ta có $f(2) = 5$ nên $x = 2$ là một nghiệm của phương trình (1).

$f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 2^t \ln 2 > 0 \ \ \forall t \ge \sqrt{2} \Rightarrow f(t)$ luôn đồng biến trên khoảng $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y = f(t)$ cắt đường thẳng $y = 5$ nhiều nhất tại 1 điểm.

Vậy $t = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình (1).

Với $t = 2$: $x + \frac{1}{2x} = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0$ (2).

Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt và tích tất cả các nghiệm thực của phương trình là $\frac{1}{2}$.

Câu 21: Chọn C

Ta có: $\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 3 = m \Leftrightarrow \log_2^2 x - 2\log_2 x + 3 = m$ (1).

Đặt $t = \log_2 x$, $x \in [1;8] \Rightarrow t \in [0;3]$. Phương trình (1) trở thành $t^2 - 2t + 3 = m$ (2).

Phương trình (1) có nghiệm $x \in [1;8]$ khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $t \in [0;3]$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 2t + 3$ với $t \in [0;3]$.

Ta có bảng biến thiên:

t	0		1		3
$f(t)$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	6

Vậy phương trình (1) có nghiệm $x \in [1;8] \Leftrightarrow f(1) \le m \le f(3) \Leftrightarrow 2 \le m \le 6$.

Câu 22: Chọn B

ĐKXĐ: $x \in [0;4]$. Đặt $t = \sqrt{4x - x^2}$ với $x \in [0;4]$ thì $t \in [0;2]$

Đặt $u = 3^t$ với $t \in [0;2]$ thì $u \in [1;9]$

Khi đó, tìm m để phương trình $u^2-4u+2m-1=0$ có nghiệm thuộc đoạn $[1;9]$.

$\Leftrightarrow 2m=-u^2+4u+1$, với $u\in[1;9]$. Xét hàm số $f(u)=-u^2+4u+1$.

$f'(u)=-2u+4=0\Leftrightarrow u=2$. Ta có, $f(1)=4$, $f(2)=5$, $f(9)=-44$.

Do đó, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-44\le 2m\le 5\Leftrightarrow -22\le m\le \frac{5}{2}$.

Vậy có 25 số nguyên của tham số m.

Câu 23: Chọn A

Để phương trình $\pi^x=k$ có 1 nghiệm thì $k>0$.

Do đó để $f(\pi^x)-\frac{m^2-1}{8}=0\Leftrightarrow f(\pi^x)=\frac{m^2-1}{8}$ có 2 nghiệm thì đường thẳng $y=\frac{m^2-1}{8}$ phải cắt đồ thị $y=f(x)$ tại 2 điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn 0.

Dựa vào đồ thị ta thấy $-1<\frac{m^2-1}{8}<1\Leftrightarrow -7<m^2<9\Leftrightarrow 0\le m^2<9\Leftrightarrow m\in(-3;3)$.

Mà $m<5; m\in\mathbb{Z}$. Vậy $m\in\{-2;-1;0;1;2\}$. Có tất cả 5 giá trị.

Câu 24: Chọn D

Ta có $5^x+m=\log_5(x-m)$ $(*)$. Đặt $t=5^x+m$.

Suy ra $(*)\Leftrightarrow t=\log_5(x-m)\Leftrightarrow x-m=5^t\Leftrightarrow x=5^t+m$.

Ta có hệ $\begin{cases}t=5^x+m\\ x=5^t+m\end{cases}\Rightarrow t-x=5^x-5^t\Leftrightarrow x+5^x=t+5^t$.

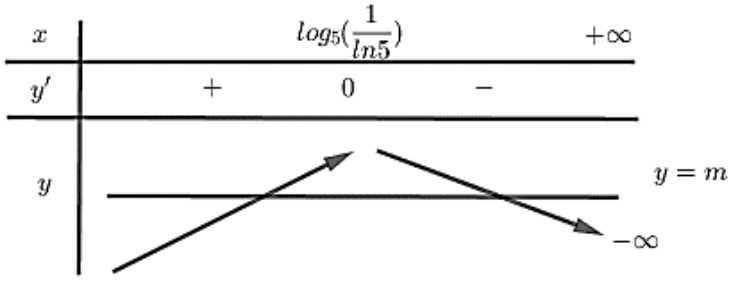
Xét hàm số $f(u)=u+5^u$ có $f'(u)=1+5^u.\ln 5>0$, $\forall u$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$(1)\Leftrightarrow x=t$. Khi đó ta được $x=5^x+m\Leftrightarrow x-5^x=m$.

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x-5^x$ và đường thẳng $y=m$ song song hoặc trùng trục hoành.

Xét $y=x-5^x$ có $y'=1-5^x\ln 5$. Suy ra $y'=0\Leftrightarrow x=\log_5\left(\frac{1}{\ln 5}\right)$.

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m\le f\left(\log_5\left(\frac{1}{\ln 5}\right)\right)\in(-1;0)$

Vì $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in (-20;20) \end{cases}$ nên $m \in \{-19;-18;...;-1\}$. Vậy có 19 giá trị nguyên của m thỏa bài toán.

Câu 25: Chọn D

Do $0 \le x \le 2020$ nên $\log_2(2x+2)$ luôn có nghĩa.

Ta có $\log_2(2x+2)+x-3y=8^y \Leftrightarrow \log_2(x+1)+x+1=3y-2^{3y}$

$\Leftrightarrow \log_2(x+1)+2^{\log_2(x+1)}=3y+2^{3y}$ (1). Xét hàm số $f(t)=t+2^t$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$ và $f'(t)=1+2^t\ln 2 \Rightarrow f'(t)>0 \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó $(1) \Leftrightarrow \log_2(x+1)=3y \Leftrightarrow x+1=2^{3y}$

$\Leftrightarrow y=\log_8(x+1)$.

Ta có $0 \le x \le 2020$ nên $1 \le x+1 \le 2021$ suy ra $0 \le \log_8(x+1) \le \log_8 2021$.

Lại có $\log_8 2021 \approx 3,66$ nên nếu $y \in \mathbb{Z}$ thì $y \in \{0;1;2;3\}$.

Vậy có 4 cặp số $(x;y)$ nguyên thỏa yêu cầu bài toán là các cặp $(0;0)$, $(7;1)$, $(63;2)$, $(511;3)$.

Câu 26: Chọn B

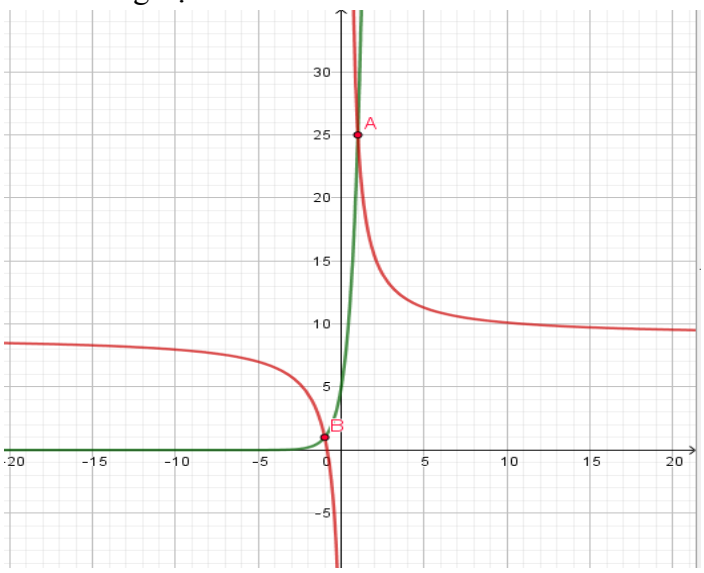
Ta thấy $x=\dfrac{1}{3}$ không là nghiệm của phương trình, do đó

$15x.5^x=5^{x+1}+27x+23 \Leftrightarrow 5^{x+1}=\dfrac{27x+23}{3x-1}$

Xét hai hàm số $f(x)=5^{x+1}$ và $g(x)=\dfrac{27x+23}{3x-1}$ trên tập $D=\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$

Ta có $f'(x)=5^{x+1}.\ln 5>0, \forall x \ne \dfrac{1}{3}$ và $g'(x)=\dfrac{-96}{(3x-1)^2}<0, \forall x \ne \dfrac{1}{3}$.

Do vậy hàm số $f(x)$ là hàm đồng biến và $g(x)$ là hàm nghịch biến trên từng khoảng xác định nên phương trình có tối đa 02 nghiệm.



Nhận thấy $x=\pm 1$ là hai nghiệm của phương trình tren.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là 0.

Câu 27: Chọn A

Ta có $x+3=me^x \Leftrightarrow me^x-x-3=0$.

Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = me^x - x - 3$ cắt trục Ox tại 2 điểm phân biệt. Ta có $y' = me^x - 1$.

Nếu $m \le 0$ thì $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên đồ thị hàm số $y = me^x - x - 3$ không thể cắt trục Ox tại 2 điểm phân biệt.

Nếu $m > 0$ thì $y' = 0 \Leftrightarrow x = -\ln m$. Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\ln m$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\ln m - 2$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra $\ln m - 2 < 0 \Leftrightarrow m < e^2$. Vậy $0 < m < e^2$. Do đó các giá trị nguyên của m là 1, 2, …,7.

Nhận xét: Những bài toán về số nghiệm của phương trình phụ thuộc vào tham số m ta thường tìm cách cô lập m rồi khảo sát hàm số, tuy nhiên với bài toán này, nếu làm vậy thì gặp khó khăn trong việc khảo sát hàm số nhận được. Do đó ta xét vị trí tương đối của đồ thị một hàm khác với trục hoành. Bài toán này cần đến các kĩ năng khảo sát hàm số, giải phương trình mũ và bất phương trình logarit.

Câu 28: Chọn D

Điều kiện $\begin{cases} 2x-1>0 \\ x-1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{2} \\ x \ne 1 \end{cases}$. Ta có: $\log_3 \dfrac{2x-1}{(x-1)^2} = 3x^2 - 8x + 5$.

$\Leftrightarrow \log_3 \dfrac{2x-1}{(x-1)^2} - 1 = 3x^2 - 8x + 4 \Leftrightarrow \log_3 \dfrac{2x-1}{3(x-1)^2} = 3(x-1)^2 - (2x-1)$.

$\Leftrightarrow \log_3 (2x-1) + (2x-1) = \log_3 \left(3(x-1)^2\right) + 3(x-1)^2 \quad (1)$.

Xét hàm số: $f(t) = \log_3 (t) + t$ với $t > 0$ có $f'(t) = \dfrac{1}{t.\ln 3} + 1 > 0 \quad \forall t > 0$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Phương trình $(1) \Leftrightarrow f(2x-1) = f\left(3(x-1)^2\right)$.

$\Leftrightarrow 2x - 1 = 3(x-1)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0$ hay $\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$.

Vậy hai nghiệm của phương trình là 2 và $\dfrac{2}{3}$ suy ra $b = 3$.

Câu 29: Chọn A

Ta có: $x + 3 = me^x \Leftrightarrow me^x - x - 3 = 0$. Đặt $f(x) = me^x - x - 3 \Rightarrow f'(x) = me^x - 1$.

Nếu $m \le 0$ thì $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có tối đa một nghiệm.

Ta xét với $m > 0$, khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\ln m$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\ln m$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln m-2$	$\nearrow$	$+\infty$

Để phương trình $x+3=me^x$ có 2 nghiệm phân biệt $\ln m-2<0\Leftrightarrow 0<m<e^2$.

Từ đó suy ra $m\in\{1;2;3;4;5;6;7\}$.

Câu 30: Chọn B

Vì $e^x+e^{x+a}>0,\forall x$ nên $\ln(1+x)>\ln(1+x+a)\Leftrightarrow 1+x>1+x+a\Leftrightarrow a<0.$

Điều kiện của phương trình là $\begin{cases}1+x>0\\1+x+a>0\end{cases}\Leftrightarrow x>-1-a,\forall a<0.$

Phương trình tương đương với: $e^x+e^{x+1}-\ln(x+1)+\ln(x+a+1)=0.$

Xét hàm số $f(x)=e^x+e^{x+a}-\ln(x+1)+\ln(x+a+1).$

Ta có

$$f'(x)=e^x+e^{x+a}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+a+1}=e^x+e^{x+a}-\frac{a}{(x+1)(x+a+1)}>0\ \ \forall a<0,\forall x>-a-1.$$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $(-1-a;+\infty)$ với $\forall a<0$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-(a+1)^+}f(x)=-\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-1-a$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$\Rightarrow f(x)=0$ luôn có một nghiệm thực duy nhất với mọi $a<0$.

Vì $a\in(-200;200)$ nên có 199 số a nguyên thỏa mãn.

Câu 31: Chọn C

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}.$

Ta có

$$2019^x+\frac{2x-1}{x+1}+\frac{mx-2m-1}{x-2}=0\Leftrightarrow 2019^x+\frac{2x-1}{x+1}+\frac{m(x-2)-1}{x-2}=0$$

$$\Leftrightarrow 2019^x+\frac{2x-1}{x+1}-\frac{1}{x-2}=-m.\quad (*)$$

Đặt $f(x)=2019^x+\frac{2x-1}{x+1}-\frac{1}{x-2}.$

Khi đó $f'(x)=2019^x\ln 2019+\frac{3}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x-2)^2}>0\ \ \forall x\in D.$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	2 ↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗ $+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình (*) có 3 nghiệm thực phân biệt thì $-m>2\Rightarrow m<-2$.

Mà $m\in[-2019;2019]$ và $m\in\mathbb{Z}$ nên có 2017 giá trị m thỏa mãn.

Câu 32: Chọn B

$e^{3x+5y-10}-e^{x+3y-9}=1-2x-2y$

$\Leftrightarrow e^{3x+5y-10}-e^{x+3y-9}=(x+3y-9)-(3x+5y-10)$

$\Leftrightarrow e^{3x+5y-10}+3x+5y-10=e^{x+3y-9}+x+3y-9$. Xét hàm số $f(t)=e^t+t,\ t\in\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t)=e^t+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$. Suy ra hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó phương trình $f(t)=0$ có nghiệm là duy nhất. Tức là:

$3x+5y-10=x+3y-9\Leftrightarrow 2y=1-2x$.

Thay vào phương trình thứ 2, ta được:

$\log_5^2(3x+2y+4)-(m+6)\log_5(x+5)+m^2+9=0$

$\Leftrightarrow \log_5^2(x+5)-(m+6)\log_5(x+5)+m^2+9=0\ (1)$.

Đặt $\log_5(x+5)=t\ (t\in\mathbb{R},\ x>-5)$. Khi đó phương trình trở thành $t^2-(m+6)t+m^2+9=0$.

Tồn tại x, y thỏa mãn yêu cầu bài toán khi và chỉ khi phương trình có nghiệm, tức là:

$\Delta=(m+6)^2-4(m^2+9)\ge 0\Leftrightarrow -3m^2+12m\ge 0\Leftrightarrow 0\le m\le 4$.

Vậy có 5 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 33: Chọn C

Điều kiện: $2x^2-3x\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le 0\\ x\ge\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$.

Ta có: $\log_2\left(\sqrt{2x^2-3x}+1\right)+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-2x^2+3x}=2$

$\Leftrightarrow \log_2\left(\sqrt{2x^2-3x}+1\right)+2^{2x^2-3x-1}=2$

$\Leftrightarrow \log_2\left(\sqrt{2x^2-3x}+1\right)=2-2^{2x^2-3x-1}$ (*)

Đặt $t=\sqrt{2x^2-3x};t\ge 0$. Khi đó phương trình trở thành: $\log_2(t+1)=2-2^{t^2-1}\ (1)$.

Nhận thấy rằng phương trình là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=\log_2(t+1)$ luôn đồng biến trên $[0;+\infty)$ và $y=2-2^{t^2-1}$ luôn nghịch biến trên $[0;+\infty)$.

Do đó phương trình (1) có nghiệm duy nhất $t=1$.

Từ đó ta có phương trình: $\sqrt{2x^2-3x}=1\Leftrightarrow 2x^2-3x-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3+\sqrt{17}}{4} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{17}}{4}\end{array}\right.$.

Vậy $a=3;b=17;c=4$. $a+b+c=24$.

Câu 34: Chọn A

Điều kiện: $x>0$.

Ta có $5\log_a x.\log_b x-4\log_a x-3\log_b x-2019=0\Leftrightarrow 5\dfrac{\ln x}{\ln a}.\dfrac{\ln x}{\ln b}-4\dfrac{\ln x}{\ln a}-3\dfrac{\ln x}{\ln b}-2019=0.$

Đặt $t=\ln x$. Ta được phương trình: $\dfrac{5t^2}{\ln a.\ln b}-\left(\dfrac{3\ln a+4\ln b}{\ln a.\ln b}\right)t-2019=0$

Do $a,b>1\Rightarrow \ln a.\ln b>0$. Vậy luôn có hai nghiệm phân biệt t_1,t_2. Suy ra phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2.

Mặt khác ta có: $t_1+t_2=\dfrac{3\ln a+4\ln b}{5}=\dfrac{3\ln a+4\ln(2019-a)}{5}$.

$\Rightarrow \ln(x_1.x_2)=\ln x_1+\ln x_2=t_1+t_2=\dfrac{3\ln a+4\ln(2019-a)}{5}$

Vì $a>1$, $b>1$ và $a+b=2019$ nên $a\in(1;2018)$.

Xét hàm số $f(u)=\dfrac{3\ln u+4\ln(2019-u)}{5}$ trên $(1;2018)$.

Ta có $f'(u)=\dfrac{6057-7u}{5u(2019-u)}\Rightarrow f'(u)=0\Leftrightarrow u=\dfrac{6057}{7}$

Bảng biến thiên:

u	1		$\dfrac{6057}{7}$		2018
$f'(u)$		$+$	0	$-$	
$f(u)$		↗	$\dfrac{3}{5}\ln\dfrac{6057}{7}+\dfrac{4}{5}\ln\dfrac{8076}{7}$	↘	

Vậy giá trị lớn nhất của $\ln(x_1x_2)$ bằng $\dfrac{3}{5}\ln\dfrac{6057}{7}+\dfrac{4}{5}\ln\dfrac{8076}{7}$.

Do đó $m=6075, n=8076$ hay $S=m+2n=22209$.

Câu 35: Chọn D

Ta có: $2019^{2\left(x^2-y+1\right)}=\dfrac{2x+y}{(x+1)^2}\Leftrightarrow(x+1)^2.2019^{2\left(x^2+1\right)}=(2x+y).2019^{2y}$

$\Leftrightarrow(x+1)^2.2019^{2(x+1)^2-4x}=(2x+y).2019^{2y}\Leftrightarrow(x+1)^2.2019^{2(x+1)^2}=(2x+y).2019^{2(2x+y)}.$

Đặt $u=(x+1)^2, v=2x+y, (u>0, v>0)$, khi đó trở thành $u.2019^{2u}=v.2019^{2v}$.

Xét hàm đặc trưng $f(t)=t.2019^{2t}, (t>0)$, ta có

$f'(t)=2019^{2t}+2t.2019^{2t}.\ln 2019>0, \forall t\in(0:+\infty)\Rightarrow$ Hàm $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Phương trình $(2)\Leftrightarrow f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v\Leftrightarrow(x+1)^2=2x+y\Leftrightarrow y=x^2+1$.

Vậy $P=2y-x=2x^2-x+2$. Do P là hàm bậc hai có hệ số $a=2>0$ nên

$\min P=P\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=P\left(\dfrac{1}{4}\right)=2.\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{4}+2=\dfrac{15}{8}$.

Câu 36: Chọn B

$(|x|-1)^2 e^{(|x|-1)}-\log 2=0\Leftrightarrow(|x|-1)^2 e^{(|x|-1)}=\log 2, (1)$

Đặt $t=|x|-1$, điều kiện $t\ge -1$ khi đó phương trình trở thành $t^2e^t=\log 2, (2)$

Đặt $f(t)=t^2e^t$, $f'(t)=\left(t^2\right)'e^t+t^2\left(e^t\right)'=\left(t^2+2t\right)e^t$.

Ta có $f'(t)=0\Leftrightarrow\left(t^2+2t\right)e^t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=-2\end{array}\right.$, ($t=-2$ loại vì $t\ge -1$).

Giải phương trình: $f'(t)>0\Leftrightarrow\left(t^2+2t\right)e^t>0\Leftrightarrow t^2+2t>0\Leftrightarrow t\in(0;+\infty)$,

Mà $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}t^2e^t=+\infty$

Từ đó thu được bảng biến thiên của hàm số $y=f(t)=t^2e^t$ trên $[-1;+\infty)$ như sau:

t	-1		0		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{1}{e}$	↘	0	↗	$+\infty$

$y=\log 2$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $-1<t_1<t_2$. Ứng với mỗi nghiệm này cho ta được hai nghiệm x nên phương trình (1) có 4 nghiệm.

Câu 37: Chọn B

Ta có: $f\left(2+f\left(e^x\right)\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2+f\left(e^x\right)=-1\\2+f\left(e^x\right)=a\ ,\left(2<a<3\right)\end{array}\right.$

$2+f\left(e^x\right)=-1\Leftrightarrow f\left(e^x\right)=-3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}e^x=1\\e^x=b<-1\left(VN\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=0$

$2+f\left(e^x\right)=a\Leftrightarrow f\left(e^x\right)=a-2,\left(0<a-2<1\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}e^x=c<-1\\e^x=d<0\\e^x=t>2\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\ln t$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt

Câu 38: Chọn B

Ta có $\ln\frac{b}{c}=c-b\Leftrightarrow\ln b+b=\ln c+c(*)$.

Xét hàm số $f(t)=\ln t+t,\left(t>0\right)\Rightarrow f'\left(t\right)=\frac{1}{t}+1>0,\forall t>0$

$\Rightarrow f\left(t\right)$ là hàm số đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$. Phương trình có dạng $f(b)=f\left(c\right)$

Do đó ta được $b=c$. Lại có $\log_3 a+b=0\Leftrightarrow a=3^{-b}$.

Thay vào $\log_a b=\frac{1}{c}$ ta được: $\log_{3^{-b}} b=\frac{1}{b}\Leftrightarrow\frac{-1}{b}\log_3 b=\frac{1}{b}\Leftrightarrow b=\frac{1}{3}$.

Vậy $b=c=\frac{1}{3},a=3^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. Suy ra $S=a+b+c=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{2}{3}\in\left(\frac{6}{5};\frac{3}{2}\right)$.

Câu 39: Chọn C

Ta có:

$3^{\sin x+\sqrt{5}\cos x-|m|+5}=\log_{\sin x+\sqrt{5}\cos x+10}\left(|m|+5\right)\Leftrightarrow\frac{3^{\sin x+\sqrt{5}\cos x+10}}{3^{|m|+5}}=\frac{\ln\left(|m|+5\right)}{\ln\left(\sin x+\sqrt{5}\cos x+10\right)}$

$\Leftrightarrow 3^{\sin x+\sqrt{5}\cos x+10}.\ln\left(\sin x+\sqrt{5}\cos x+10\right)=3^{|m|+5}.\ln\left(|m|+5\right)$

Xét $f\left(t\right)=\ln\left(t\right).3^t,\forall t\ge 5$ có $f'\left(t\right)=\frac{1}{t}3^t+\ln\left(t\right)3^t\ln\left(3\right)>0,\forall t\ge 5$

Vậy hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến.

$f\left(\sin x+\sqrt{5}\cos x+10\right)=f\left(|m|+5\right)\Leftrightarrow\sin x+\sqrt{5}\cos x+10=|m|+5\Leftrightarrow\sin x+\sqrt{5}\cos x+5=|m|$

Mà $-\sqrt{6}\le\sin x+\sqrt{5}\cos x\le\sqrt{6}$

Vậy để phương trình có nghiệm ta phải có $5-\sqrt{6}\le m\le 5+\sqrt{6}$

Câu 40: Chọn D

Điều kiện $\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}>0\Leftrightarrow x+y>0.$

$\log_{\sqrt{3}}\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x\left(x-3\right)+y\left(y-3\right)+xy$

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

$\Leftrightarrow 2\log_3(x+y)-2\log_3(x^2+y^2+xy+2)=x^2+y^2+xy-3x-3y$

$\Leftrightarrow 2\log_3(x+y)+2-2\log_3(x^2+y^2+xy+2)=x^2+y^2+xy+2-3x-3y$

$\Leftrightarrow 2\log_3(3x+3y)+(3x+3y)=2\log_3(x^2+y^2+xy+2)+x^2+y^2+xy+2$

Xét hàm đặc trưng $f(t)=2\log_3 t+t,\ t\in(0;+\infty)$, ta có $f'(t)=\dfrac{2}{t.\ln 3}+1>0,\forall t\in(0;+\infty)$.

Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Phương trình $\Leftrightarrow f(3x+3y)=f(x^2+y^2+xy+2)\Leftrightarrow x^2+y^2+xy+2=3x+3y$

Đặt $\begin{cases}x=a+b\\y=a-b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{x+y}{2},\\b=\dfrac{x-y}{2}.\end{cases}$ Khi đó $P=\dfrac{3a-b+3}{2a+6}$ và (2) là: $3(a-1)^2+b^2=1.$

Đặt $\begin{cases}\sqrt{3}(a-1)=\cos t,\\ b\ =\sin t,\end{cases}\left(t\in[0;2\pi]\right)$, khi đó

$P=\dfrac{3\cos t-\sqrt{3}\sin t+6\sqrt{3}}{2\cos t+8\sqrt{3}}\Leftrightarrow(2P-3).\cos t+\sqrt{3}\sin t=6\sqrt{3}-8\sqrt{3}P$

Do phương trình luôn có nghiệm t nên ta có

$(2P-3)^2+3\ge\left(6\sqrt{3}-8\sqrt{3}P\right)^2\Leftrightarrow 47P^2-69P+24\le 0\Leftrightarrow\dfrac{69-\sqrt{249}}{94}\le P\le\dfrac{69+\sqrt{249}}{94}.$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{69+\sqrt{249}}{94}$.

Câu 41: Chọn C

$1+\left[2x^2-m(m+1)x-2\right].2^{1+mx-x^2}=(x^2-mx-1).2^{mx(1-m)}+x^2-m^2x$

$\Leftrightarrow\left[(x^2-mx-1)+(x^2-m^2x-1)\right].2^{-(x^2-mx-1)}=(x^2-mx-1).2^{(x^2-m^2x-1)-(x^2-mx-1)}+(x^2-m^2x-1).$

Đặt $a=(x^2-mx-1),\ b=(x^2-m^2x-1)$ thì phương trình trên trở thành

$(a+b).2^{-a}=a.2^{b-a}+b\Leftrightarrow a+b=a.2^b+b.2^a\Leftrightarrow a(2^b-1)+b(2^a-1)=0$.

Nếu $a=0$ hoặc $b=0$ thì phương trình thỏa mãn.

Nếu $a\ne 0$ và $b\ne 0$ thì phương trình tương đương $\dfrac{2^b-1}{b}+\dfrac{2^a-1}{a}=0$.

Nhận xét:

Với $a>0$ thì $2^a>1$, tức là $2^a-1>0$ nên $\dfrac{2^a-1}{a}>0$.

Với $a<0$ thì $2^a<1$, tức là $2^a-1<0$ nên $\dfrac{2^a-1}{a}>0$.

Suy ra $\dfrac{2^a-1}{a}>0,\forall a\ne 0$.

Tương tự: $\dfrac{2^b-1}{b}>0,\forall b\ne 0$.

Nên $\frac{2^b-1}{b}+\frac{2^a-1}{a}>0, \forall a\neq 0, b\neq 0$. Suy ra phương trình vô nghiệm.

Do đó: $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}\right.$.

Tức là phương trình đã cho tương đương $\left[\begin{array}{l} x^2-mx-1=0 \\ x^2-m^2x-1=0 \end{array}\right.$.

Hai phương trình $x^2-mx-1=0$ và $x^2-m^2x-1=0$ có ít nhất 1 nghiệm trùng nhau khi $m=0$ hoặc $m=1$.

Nếu $m=0$ thì hai phương trình đều là $x^2-1=0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm và tổng hai nghiệm đó là $T_1=0$.

Nếu $m=1$ thì hai phương trình đều là $x^2-x-1=0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm và tổng hai nghiệm đó là $T_2=1$.

Khi $m\neq 0$ và $m\neq 1$ thì hai phương trình $x^2-mx-1=0$ và $x^2-m^2x-1=0$ không có nghiệm nào trùng nhau.

Phương trình bậc hai $x^2-mx-1=0$ có $a.c<0$ nên có hai nghiệm phân biệt và tổng hai nghiệm đó là $x_1+x_2=m$.

Phương trình bậc hai $x^2-m^2x-1=0$ có $a.c<0$ nên có hai nghiệm phân biệt và tổng hai nghiệm đó là $x_3+x_4=m^2$.

Suy ra phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt và tổng của chúng là $T_3=x_1+x_2+x_3+x_4=m+m^2=\left(m+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\geq -\frac{1}{4}$.

$T_3=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}$, nên $\min T_3=-\frac{1}{4}$.

So sánh $T_1, T_2, \min T_3$ thì được giá trị nhỏ nhất của tổng các nghiệm của phương trình đã cho là $-\frac{1}{4}$ và đạt tại $m=-\frac{1}{2}$.

Câu 42: Chọn C

Điều kiện: $x>-1$.

Vì $x=0$ không thỏa mãn phương trình nên ta có

$$(1)\Leftrightarrow \left[m\ln(x+1)-x-2\right]\left[\ln(x+1)+1\right]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ln(x+1)=x+2 \\ \ln(x+1)=-1 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\frac{x+2}{\ln(x+1)}, (2) \\ x=\frac{1}{e}-1 \end{array}\right.$$

Do nghiệm $x=\frac{1}{e}-1<0$ nên phương trình (1) có hai nghiệm thoả mãn $0<x_1<2<4<x_2$ khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt sao cho $0<x_1<2<4<x_2$.

Xét hàm số $f(x)=\frac{x+2}{\ln(x+1)}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ ta có $f'(x)=\frac{\ln(x+1)-\frac{x+2}{x+1}}{\ln^2(x+1)}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow \ln(x+1)-\frac{x+2}{x+1}=0, (3)$.

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Xét hàm số $h(x)=\ln(x+1)-\dfrac{x+2}{x+1}$ có $h'(x)=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}>0$, $\forall x>0$ nên $h(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ do đó phương trình $f'(x)=0$ có không quá một nghiệm.

Mà $f'(2).f'(4)<0$ và $f'(x)$ là hàm số liên tục trên $[2;4]$ suy ra phương trình (3) có duy nhất một nghiệm $x_0\in(2;4)$. Từ đó ta có bảng biến thiên

x	0	2	x_0	4	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ $\dfrac{4}{\ln 3}$	$\nearrow$	$\searrow$ $\dfrac{6}{\ln 5}$	$\nearrow$ $+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thoả mãn $0<x_1<2<4<x_2$ khi và chỉ khi $m>\dfrac{6}{\ln 5}\Leftrightarrow m\in\left(\dfrac{6}{\ln 5};+\infty\right)$. Vậy $a=\dfrac{6}{\ln 5}\in(3,7;3,8)$.

Câu 43: Chọn D

Phương trình tương đương với

$3^{\sqrt[3]{m-3x}}+\left(x^3-9x^2+24x+m\right)=27+3^{3-x}\Leftrightarrow 3^{\sqrt[3]{m-3x}}+m-3x=3^{3-x}+(3-x)^3$

Xét hàm đặc trưng: $f(t)=3^t+t^3\Rightarrow f'(t)=3^t\ln 3+3t^2>0\ \forall t\in\mathbb{R}$.

$3^{\sqrt[3]{m-3x}}+m-3x=3^{3-x}+(3-x)^3\Leftrightarrow\sqrt[3]{m-3x}=3-x\Leftrightarrow m=(3-x)^3+3x$

$\Leftrightarrow m=-x^3+9x^2-24x+27$.

Đặt $g(x)=-x^3+9x^2-24x+27\Rightarrow g'(x)=-3x^2+18x-24=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=4\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0 $+$	0	$-$
$g(x)$	$+\infty$ $\searrow$	7 $\nearrow$	11 $\searrow$	$-\infty$

Để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì $7<m<11\Rightarrow m\in\{8;9;10\}$. Vậy tổng các giá trị m bằng 27.

Câu 44: Chọn C

Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$.

$2^{(x-1)^2}.\log_2\left(x^2-2x+3\right)=4^{|x-m|}\log_2\left(2|x-m|+2\right)$

$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2}.\log_2\left[(x-1)^2+2\right]=2^{2|x-m|}\log_2\left(2|x-m|+2\right)$

Xét hàm số $y=2^t.\log_2(t+2)$ với $t\geq 0$.

Hàm số $y=2^t.\log_2(t+2)$ xác định và liên tục trên $[0;+\infty)$.

Ta có $y'=2^t.\log_2(t+2).\ln 2+\dfrac{2^t}{(t+2)\ln 2}>0,\ \forall t\ge 0$.

Vậy hàm số $y=2^t.\log_2(t+2)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Từ $(1)\Leftrightarrow f\left((x-1)^2\right)=f\left(2|x-m|\right)\Leftrightarrow (x-1)^2=2|x-m|\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-1)^2=2(x-m)\\-(x-1)^2=2(x-m)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}2m=-x^2+4x-1 & (1)\\ 2m=x^2+1 & (2)\end{array}\right.$ $(*)$.

Xét phương trình $2m=-x^2+4x-1$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)=-x^2+4x-1$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$

Phương trình $2m=-x^2+4x-1$ có 2 nghiệm phân biệt khi $2m<3\Leftrightarrow m<\dfrac{3}{2}$

Phương trình $2m=-x^2+4x-1$ có 1 nghiệm khi $2m=3\Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2}$.

Phương trình $2m=-x^2+4x-1$ vô nghiệm khi $2m>3\Leftrightarrow m>\dfrac{3}{2}$.

Xét phương trình $2m=x^2+1$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)=x^2+1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Phương trình $2m=x^2+1$ có 2 nghiệm phân biệt khi $2m>1\Leftrightarrow m>\dfrac{1}{2}$.

Phương trình $2m=x^2+1$ có 1 nghiệm khi $2m=1\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$.

Phương trình $2m=x^2+1$ vô nghiệm khi $2m<1\Leftrightarrow m<\dfrac{1}{2}$.

Khi $m=\frac{3}{2}$: phương trình $2m=-x^2+4x-1$ có nghiệm $x=2$, phương trình $2m=x^2+1$ có 2 nghiệm phân biệt $x=\pm\sqrt{2}$. Vậy $(*)$ có 3 nghiệm phân biệt, suy ra loại $m=\frac{3}{2}$.

Khi $m=\frac{1}{2}$: phương trình $2m=-x^2+4x-1$ có 2 nghiệm phân biệt $x=2\pm\sqrt{2}$, phương trình $2m=x^2+1$ có nghiệm $x=0$. Vậy $(*)$ có 3 nghiệm phân biệt, suy ra loại $m=\frac{3}{2}$.

Xét phương trình $-x^2+4x-1=x^2+1\Leftrightarrow -2x^2+4x-2=0\Leftrightarrow x=1$ suy ra không tồn tại m để phương trình (1) và (2) có cùng tập nghiệm gồm 2 phần tử. Vậy không tồn tại m để $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (*)$ có 2 nghiệm phân biệt.

Trường hợp 1: (1) có 2 nghiệm phân biệt và (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m<\frac{3}{2} \\ m<\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m<\frac{1}{2}$.

Trường hợp 2: (2) có 2 nghiệm phân biệt và (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m>\frac{1}{2} \\ m>\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m>\frac{3}{2}$.

Trường hợp 3: (1) có nghiệm $x=2$ và (2) có nghiệm $x=0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} m=\frac{3}{2} \\ m=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing$.

Kết hợp với điều kiện m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ ta có $m\in\left[-2019;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};2019\right]$.

Vì m nguyên nên nên ta có 4038 giá trị của m.

Câu 45: Chọn A

Để $\frac{1-y}{x+3xy}>0$ mà từ giả thiết $x,y>0$ suy ra $1-y>0\Leftrightarrow y<1$. Vậy ĐKXĐ: $x>0;0<y<1$.

Ta có: $\log_3\frac{1-y}{x+3xy}=3xy+x+3y-4 \Leftrightarrow \frac{1-y}{x+3xy}=3^{3xy+x+3y-4}\Leftrightarrow \frac{3(1-y)}{x+3xy}=3^{3xy+x+3y-3}$

$\Leftrightarrow \frac{3(1-y)}{x+3xy}=\frac{3^{3xy+x}}{3^{3-3y}}\Leftrightarrow (3-3y).3^{3-3y}=(3xy+x).3^{3xy+x}(*)$

Xét $f(t)=t.3^t$ với $t>0$. Ta có $f'(t)=3^t+t.3^t.\ln 3>0$ với $\forall t>0$, suy ra $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Từ (*) ta có $f(3-3y)=f(3xy+x)$ với $3-3y>0, 3xy+x>0$ nên $3-3y=3xy+x\Leftrightarrow y=\frac{3-x}{3(x+1)}$.

Ta có $P=x+y=x+\frac{3-x}{3(x+1)}=(x+1)+\left(\frac{3-x}{3(x+1)}+\frac{1}{3}\right)-\frac{4}{3}$

$$P=\left(x+1\right)+\frac{4}{3\left(x+1\right)}-\frac{4}{3}\ge 2\sqrt{\left(x+1\right).\frac{4}{3\left(x+1\right)}}-\frac{4}{3}=\frac{4\sqrt{3}-4}{3}.$$

Vậy $P_{\min}=\frac{4\sqrt{3}-4}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=\frac{4}{3\left(x+1\right)}\\ y=\frac{3-x}{3\left(x+1\right)}\\ x>0;0<y<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{2\sqrt{3}-3}{3}\\ y=\frac{2\sqrt{3}-1}{3}\end{cases}.$

Câu 46: Chọn D

Điều kiện $\begin{cases}2x-1>0\\ x-1\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{1}{2}\\ x\ne 1\end{cases}$. Ta có: $\log_3\frac{2x-1}{\left(x-1\right)^2}=3x^2-8x+5$.

$\Leftrightarrow\log_3\frac{2x-1}{\left(x-1\right)^2}-1=3x^2-8x+4\Leftrightarrow\log_3\frac{2x-1}{3\left(x-1\right)^2}=3\left(x-1\right)^2-\left(2x-1\right).$

$\Leftrightarrow\log_3\left(2x-1\right)+\left(2x-1\right)=\log_3\left(3\left(x-1\right)^2\right)+3\left(x-1\right)^2\ \left(1\right).$

Xét hàm số: $f\left(t\right)=\log_3\left(t\right)+t$ với $t>0$ có $f'\left(t\right)=\frac{1}{t.\ln 3}+1>0\ \ \forall t>0$.

Suy ra hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$.

Phương trình $\left(1\right)\Leftrightarrow f\left(2x-1\right)=f\left(3\left(x-1\right)^2\right)$.

$\Leftrightarrow 2x-1=3\left(x-1\right)^2\Leftrightarrow 3x^2-8x+4=0$ hay $\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=\frac{2}{3}\end{array}\right.$.

Vậy hai nghiệm của phương trình là 2 và $\frac{2}{3}$ suy ra $b=3$.

Câu 47: Chọn B

Điều kiện xác định: $\frac{2x^2+x+m+1}{x^2+x+1}>0\Leftrightarrow 2x^2+x+m+1>0$.

Khi đó:

$\log_3\frac{2x^2+x+m+1}{x^2+x+1}\ge 2x^2+4x+5-2m\Leftrightarrow\log_3\frac{2x^2+x+m+1}{x^2+x+1}-1\ge 2x^2+4x+4-2m$

$\Leftrightarrow\log_3\frac{2x^2+x+m+1}{3\left(x^2+x+1\right)}\ge 2x^2+4x+4-2m$

$\Leftrightarrow\log_3\left(2x^2+x+m+1\right)-\log_3 3\left(x^2+x+1\right)\ge -2\left(2x^2+x+m+1\right)+6\left(x^2+x+1\right)$

$\Leftrightarrow\log_3\left(2x^2+x+m+1\right)+2\left(2x^2+x+m+1\right)\ge\log_3 3\left(x^2+x+1\right)+6\left(x^2+x+1\right).$

Xét hàm số $f\left(t\right)=\log_3 t+2t$ với $t>0$.

Ta có: $f'\left(t\right)=\frac{1}{t.\ln 3}+2>0,\forall t>0$. Suy ra hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Do đó tương đương với $f\left(2x^2+x+m+1\right)\ge f\left(3\left(x^2+x+1\right)\right)\Leftrightarrow 2x^2+x+m+1\ge 3\left(x^2+x+1\right)$

$\Leftrightarrow x^2+2x+2\le m$.

Bất phương trình $x^2+2x+2\le m$ có nghiệm $\Leftrightarrow m\ge \min g\left(x\right)$ với $g\left(x\right)=x^2+2x+2$.

Xét hàm số $g\left(x\right)=x^2+2x+2$ với $x\in\mathbb{R}$ có $g'\left(x\right)=2x+2$.

$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 2x+2=0\Leftrightarrow x=-1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $\min g\left(x\right)=1$. Do đó $m\ge 1$.

Vì $m\in\left[-10;10\right]$ nên tập $S=\left\{1;2;...;10\right\}$. Vậy S có 10 phần tử.

Câu 48: Chọn D

Điều kiện: Ta có $\sqrt{x^2+1}+x>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f\left(-x\right)=\ln\left(\sqrt{\left(-x\right)^2+1}-x\right)+e^{-x}-e^{x}$ $=-\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+e^{-x}-e^{x}$

$=-\left(\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+e^{x}-e^{-x}\right)=-f\left(x\right)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra $f\left(x\right)$ là hàm số lẻ.

Mà $f'\left(x\right)=\dfrac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+1}{\sqrt{x^2+1}+x}+e^{x}+e^{-x}=\dfrac{\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}+x}+e^{x}+e^{-x}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}+e^{x}+e^{-x}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Suy ra $f\left(x\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f\left(3^x\right)+f\left(2x-1\right)=0\Leftrightarrow f\left(3^x\right)=-f\left(2x-1\right)\Leftrightarrow f\left(3^x\right)=f\left(1-2x\right)\Leftrightarrow 3^x=1-2x$.

Điều kiện: Ta có $\sqrt{x^2+1}+x>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f\left(-x\right)=\ln\left(\sqrt{\left(-x\right)^2+1}-x\right)+e^{-x}-e^{x}$ $=-\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+e^{-x}-e^{x}$

$=-\left(\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+e^{x}-e^{-x}\right)=-f\left(x\right)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra $f\left(x\right)$ là hàm số lẻ.

Mà $f'\left(x\right)=\dfrac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+1}{\sqrt{x^2+1}+x}+e^{x}+e^{-x}=\dfrac{\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}+x}+e^{x}+e^{-x}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}+e^{x}+e^{-x}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $f\left(x\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f\left(3^x\right)+f\left(2x-1\right)=0 \Leftrightarrow f\left(3^x\right)=-f\left(2x-1\right) \Leftrightarrow f\left(3^x\right)=f\left(1-2x\right) \Leftrightarrow 3^x=1-2x$.

Xét hàm số $g\left(x\right)=3^x$. Hàm số $g\left(x\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, hàm số $h\left(x\right)=1-2x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ và $y=h\left(x\right)$ có nhiều nhất một điểm chung. Vì $g\left(0\right)=h\left(0\right)$ suy ra phương trình $3^x=1-2x$ có một nghiệm duy nhất $x=0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0$.

Câu 49: Chọn D

Ta có $\frac{1}{\ln\left(x+5\right)}+\frac{1}{3^x-1}=x+a \Leftrightarrow \frac{1}{\ln\left(x+5\right)}+\frac{1}{3^x-1}-x=a$

Điều kiện xác định $\begin{cases}\ln\left(x+5\right)\neq 0\\ x+5>0\\ 3^x-1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq -4\\ x>-5\\ x\neq 0\end{cases}$.

Đặt hàm số $f(x)=\frac{1}{\ln(x+5)}+\frac{1}{3^x-1}-x$ có TXĐ $D=\left(-5;-4\right)\cup\left(-4;0\right)\cup\left(0;+\infty\right)$

Suy ra $f'(x)=\frac{-1}{\left(x+5\right)\ln^2\left(x+5\right)}-\frac{3^x\ln 3}{\left(3^x-1\right)^2}-1<0$ nên $f(x)$ nghịch biến trên từng khoảng xác định

Tính: $\lim\limits_{x\to -5^+} f(x)=\frac{1}{3^{-5}-1}+5=5-\frac{243}{242}$; $\lim\limits_{x\to -4^-} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$

Bảng biến thiên

x	-5		-4		0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	‖	$-$	‖	$-$
$f(x)$	‖	$5-\frac{243}{242}$ ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ $-\infty$

Phương trình $f(x)=a$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $a\geq 5-\frac{243}{242}$

Do $\begin{cases}a\in\mathbb{Z}\\ a\in\left(-2019;2019\right)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a\in\mathbb{Z}\\ a\in\left[4;2018\right]\end{cases}$. Vậy có $2018-4+1=2015$ giá trị của a.

Câu 50: Chọn C

Nhận xét phương trình $2^{f(x)}-1=0$ có một nghiệm đơn $x=2$ nên biểu thức sẽ đổi dấu khi đi qua điểm $x=2$. Do đó để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì phương trình $x\left(m-2^{f(\sin x)}\right)+2.2^{f(\sin x)}+m^2-3=0$ phải có một nghiệm $x=2 \Rightarrow m^2+2m-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-3\end{array}\right.$.

Thử lại với $m=1$ ta có:

$\left[x\left(1-2^{f(\sin x)}\right)+2.2^{f(\sin x)}-2\right]\left(2^{f(x)}-1\right)\ge 0 \Leftrightarrow (x-2)\left(1-2^{f(\sin x)}\right)\left(2^{f(x)}-1\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow 2^{f(\sin x)}\le 1 \Leftrightarrow f(\sin x)\le 0 \Leftrightarrow \sin x\le 2$ luôn đúng với mọi $x\in\mathbb{R} \Rightarrow m=1$ thỏa mãn ycbt.

Thử lại với $m=-3$ ta có:

$\left[x\left(-3-2^{f(\sin x)}\right)+2.2^{f(\sin x)}+6\right]\left(2^{f(x)}-1\right)\ge 0 \Leftrightarrow -(x-2)\left(3+2^{f(\sin x)}\right)\left(2^{f(x)}-1\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow 3+2^{f(\sin x)}\le 0 \Rightarrow m=-3$ không thỏa mãn ycbt.

Vậy $S=\{1\}$. Số tập con của S là 2 đó là $\{1\}$ và $\varnothing$.

Câu 51: Chọn D

Phương trình $\frac{1}{\ln(x+5)}+\frac{1}{3^x-1}=x+a \Leftrightarrow \frac{1}{\ln(x+5)}+\frac{1}{3^x-1}-x=a$

Đặt hàm số $f(x)=\frac{1}{\ln(x+5)}+\frac{1}{3^x-1}-x$ có tập xác định $D=(-5;-4)\cup(-4;0)\cup(0;\infty)$

Ta có : $f'(x)=\frac{-1}{(x+5)\ln^2(x+5)}-\frac{3^x\ln 3}{(3^x-1)^2}-1<0$

$\Rightarrow$ $f(x)$ nghịch biến trên các khoảng của tập xác định

Các giới hạn: $\lim\limits_{x\to -5^+}f(x)=\frac{1}{3^{-5}-1}+5=5-\frac{243}{242}$; $\lim\limits_{x\to -4^-}f(x)=-\infty;\lim\limits_{x\to -4^+}f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-\infty;\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=-\infty$

Bảng biến thiên

x	-5		-4		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$5-\frac{243}{242}$	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	$-\infty$

Phương trình $f(x)=a$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $a\ge 5-\frac{243}{242}$

Do $\begin{cases}a\in\mathbb{Z}\\ a\in(-2019;2019)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\in\mathbb{Z}\\ a\in[4;2018]\end{cases}$. Vậy có $2018-4+1=2015$ giá trị của a.

Câu 52: Chọn D

Phương trình $50^x+2^{x+5}=3.7^x \Leftrightarrow 50^x+2^{x+5}-3.7^x=0$.

Xét hàm số $f(x)=50^x+2^{x+5}-3.7^x$

$f'(x)=50^x\ln 50+2^{x+5}\ln 2-3.7^x\ln 7$

$f''(x)=50^x\left(\ln 50\right)^2+2^{x+5}\left(\ln 2\right)^2-3.7^x\left(\ln 7\right)^2$

Khi $x\ge 0$ thì $f''(x)=7^x\left(\left(\frac{50}{7}\right)^x\left(\ln 50\right)^2-3\left(\ln 7\right)^2\right)+2^{x+5}\left(\ln 2\right)^2$

$f''(x)\ge 7^x\left(\left(\frac{50}{7}\right)^0\left(\ln 50\right)^2-3\left(\ln 7\right)^2\right)+2^{x+5}\left(\ln 2\right)^2>0$

Khi $x<0$ thì $f''(x)=7^x\left(\left(\frac{2}{7}\right)^x 32\left(\ln 2\right)^2-3\left(\ln 7\right)^2\right)+50^x\left(\ln 50\right)^2$

$f''(x)>7^x\left(\left(\frac{2}{7}\right)^0 32\left(\ln 2\right)^2-3\left(\ln 7\right)^2\right)+50^x\left(\ln 50\right)^2>0$

Suy ra $f''(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Nên $f'(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

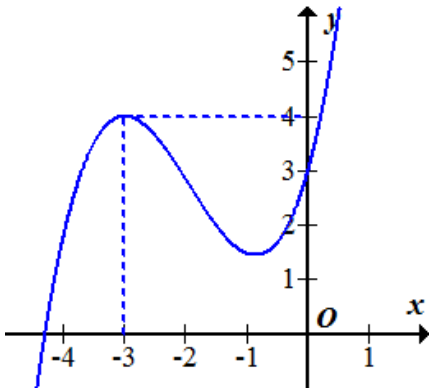
Mà $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=0$ nên $f'(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ nên $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$

Suy ra phương trình $f(x)=0$ vô nghiệm.

Câu 53: Chọn D

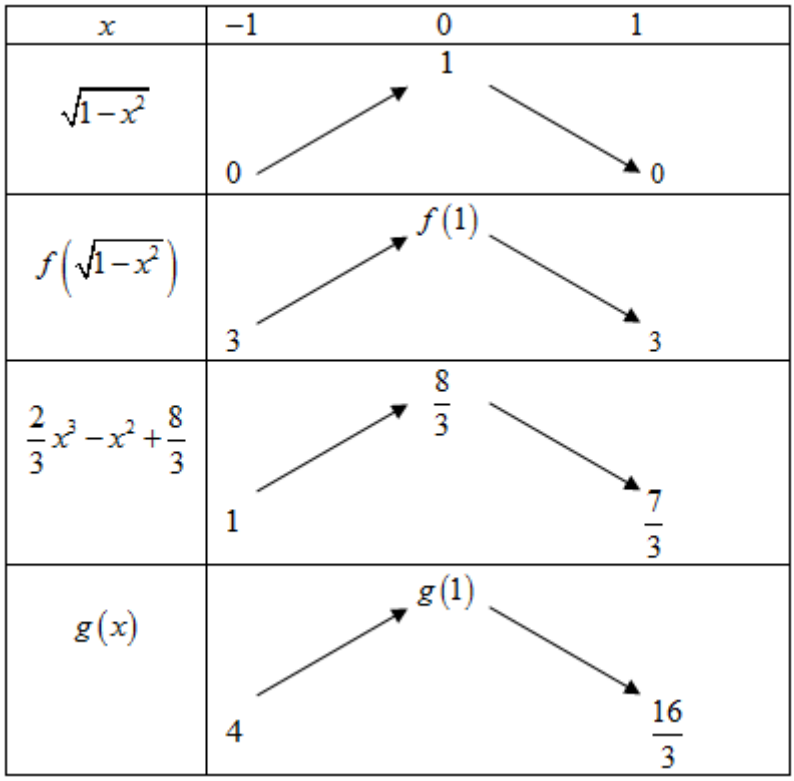


Điều kiện $x\in\left[-1;1\right]$.

Khi đó $f\left(\sqrt{1-x^2}\right)+\frac{2}{3}x^3-x^2+\frac{8}{3}-f(m)\le 0\Leftrightarrow f\left(\sqrt{1-x^2}\right)+\frac{2}{3}x^3-x^2+\frac{8}{3}\le f(m)$.

Đặt $g(x)=f\left(\sqrt{1-x^2}\right)+\frac{2}{3}x^3-x^2+\frac{8}{3}$. Ta có bảng sau:

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN



Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm khi $f(m)\ge 4$. Vì m nguyên thuộc đoạn $[-10;10]$ nên $m\in\{-3;1;2;...;10\}$. Do đó S có 11 phần tử.

Câu 54: Chọn D

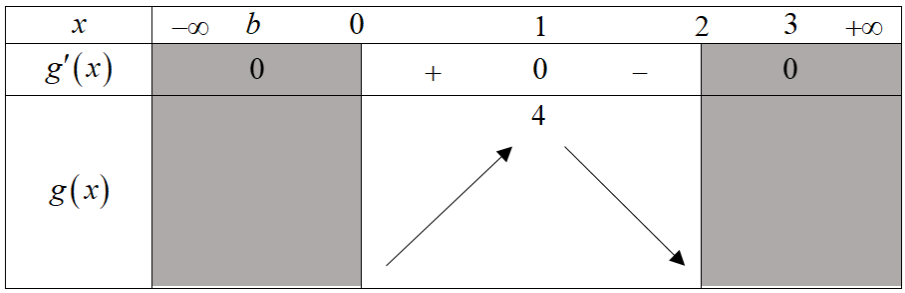
Ta có: $e^{2f^3(x)-\frac{13}{2}f^2(x)+7f(x)+\frac{3}{2}}=m\Leftrightarrow 2f^3(x)-\frac{13}{2}f^2(x)+7f(x)+\frac{3}{2}=\ln m$.

Đặt $g(x)=2f^3(x)-\frac{13}{2}f^2(x)+7f(x)+\frac{3}{2}$.

$g'(x)=f'(x)\left[6f^2(x)-13f(x)+7\right]$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\ f(x)=1\\ f(x)=\frac{7}{6}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1;x=3\\ x=1;x=a>3\\ x=b<0\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên trên đoạn $[0;2]$:



Giá trị lớn nhất của m để phương trình có nghiệm trên đoạn $[0;2]$ là: $\ln m=4\Leftrightarrow m=e^4$.

Câu 55: Chọn C

Ta có

$e^{3x+5y-10}-e^{x+3y-9}=1-2x-2y \Leftrightarrow e^{3x+5y-10}-e^{x+3y-9}=(x+3y-9)-(3x+5y-10)$

$\Leftrightarrow e^{3x+5y-10}+(3x+5y-10)=e^{x+3y-9}+(x+3y-9)\ (1)$

Do hàm số $f(t)=e^t+t$ đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$ nên

$(1)\Leftrightarrow 3x+5y-10=x+3y-9\Leftrightarrow 2x+2y=1$

Khi đó phương trình $\log_5^2(3x+2y+4)-(m+6)\log_5(x+5)+m^2+9=0$

$\Leftrightarrow \log_5^2(x+5)-(m+6)\log_5(x+5)+m^2+9=0$, đặt $t=\log_5(x+5), t\in\mathbb{R}$.

Phương trình đã cho trở thành $t^2-(m+6)t+m^2+9=0\ (2)$

(2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta=(m+6)^2-4(m^2+9)=-3m^2+12m\geq 0$

$\Leftrightarrow 0\leq m\leq 4$.

Vậy số giá trị nguyên dương của tham số m thỏa mãn là 4 giá trị.

Câu 56: Chọn B

Ta có $2^{x^2+4x+5-m^2}=\log_{x^2+4x+6}(m^2+1)\Leftrightarrow 2^{x^2+4x+6-(m^2+1)}=\log_{x^2+4x+6}(m^2+1)$.

Đặt $\begin{cases}a=x^2+4x+6\\ b=m^2+1\end{cases}$, ta có $a\geq 2; b\geq 1$, phương trình đã cho trở thành $2^{a-b}=\log_a b$.

Nếu $a>b$ thì $\begin{cases}2^{a-b}>1\\ \log_a b<1\end{cases}$ không thỏa mãn.

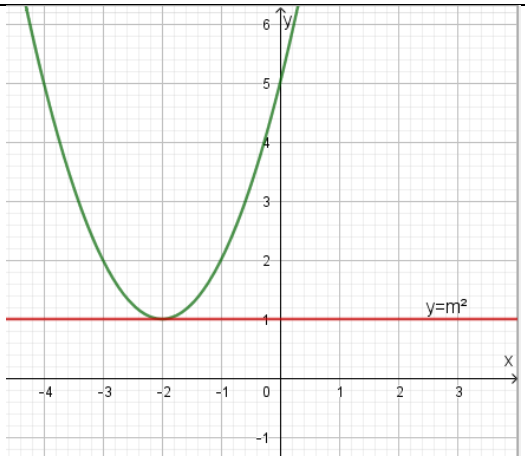
Nếu $a<b$ thì $\begin{cases}2^{a-b}<1\\ \log_a b>1\end{cases}$ không thỏa mãn.

Do đó $a=b$, khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$x^2+4x+6=m^2+1\Leftrightarrow x^2+4x+5=m^2$$

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của parabol $y=x^2+4x+5$ và đường thẳng $y=m^2$

Ta có hình ảnh minh họa sau



Dựa vào đồ thị, phương trình đã cho có đúng 1 nghiệm khi và chỉ khi $m^2=1\Leftrightarrow m=\pm 1$.

Vậy tổng các giá trị của tham số m là 0.

Câu 57: Chọn B

Điều kiện: $\dfrac{2x^2-4x+6}{|x-m|+1}>0\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}$.

Phương trình: $\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{2x^2-4x+6}{|x-m|+1}+x^2=2\left(x+|x-m|\right)\ (*)$

$\Leftrightarrow \log_2\dfrac{2x^2-4x+6}{|x-m|+1}+2x^2=4\left(x+|x-m|\right)$

$\Leftrightarrow \log_2\left(2x^2-4x+6\right)-\log_2\left(|x-m|+1\right)+2x^2-4x=4|x-m|$

$\Leftrightarrow \log_2\left(2x^2-4x+6\right)+\left(2x^2-4x+6\right)=\log_2\left(|x-m|+1\right)+2+\left(4|x-m|+4\right)$

$\Leftrightarrow \log_2\left(2x^2-4x+6\right)+\left(2x^2-4x+6\right)=\log_2\left(4|x-m|+4\right)+\left(4|x-m|+4\right)\ (1)$

Xét hàm $f(t)=\log_2 t+t$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

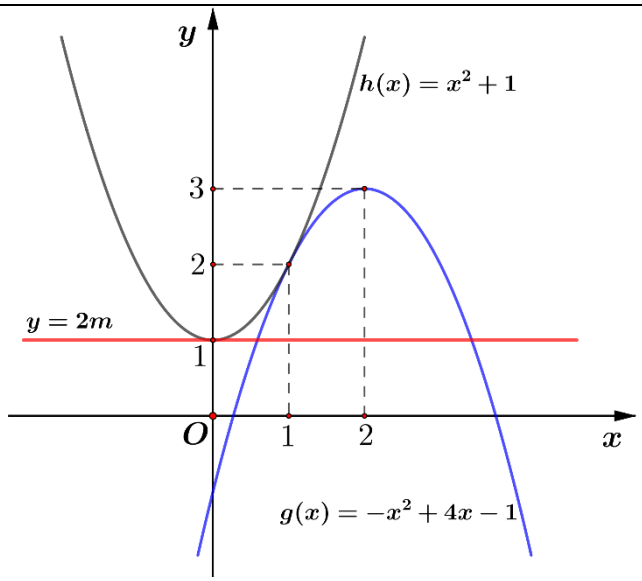
có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0,\forall t>0$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Khi đó $(1)\Leftrightarrow f\left(2x^2-4x+6\right)=f\left(4|x+m|+4\right)\Leftrightarrow 2x^2-4x+6=4|x-m|+4$

$\Leftrightarrow 2|x-m|=x^2-2x+1$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-2m=x^2-2x+1\\2x-2m=-\left(x^2-2x+1\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2m=-x^2+4x-1\\2m=x^2+1\end{array}\right.\ (2)$

Vẽ đồ thị hai hàm số $g(x)=-x^2+4x-1$ và $h(x)=x^2+1$ trên cùng hệ trục tọa độ Oxy



Để phương trình $(*)$ có đúng ba nghiệm phân biệt thì (2) phải có đúng ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ đường thẳng $y=2m$ và hai đồ thị trên có đúng ba điểm chung phân biệt.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m=1 \\ 2m=2 \\ 2m=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{1}{2} \\ m=1 \\ m=\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$. Vậy tổng tất cả các giá trị của m bằng 3.

Câu 58: Chọn B

Điều kiện xác định: $x^2+m+x\sqrt{x^2+4}>0$.

$$\log_2\left(x^2+m+x\sqrt{x^2+4}\right)=(2m-9)x-1+(1-2m)\sqrt{x^2+4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(x\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)+m\right)=2mx-9x-1+\sqrt{x^2+4}-2m\sqrt{x^2+4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{4x}{\sqrt{x^2+4}-x}+m\right)=2mx-9x-1+\sqrt{x^2+4}-2m\sqrt{x^2+4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{4x+m\sqrt{x^2+4}-mx}{\sqrt{x^2+4}-x}\right)=2mx-9x-1+\sqrt{x^2+4}-2m\sqrt{x^2+4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(4x+m\sqrt{x^2+4}-mx\right)+\left(8x+2m\sqrt{x^2+4}-2mx\right)+1=\log_2\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)+\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(8x+2m\sqrt{x^2+4}-2mx\right)+\left(8x+2m\sqrt{x^2+4}-2mx\right)=\log_2\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)+\left(\sqrt{x^2+4}-x\right) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t,\ t\in(0;+\infty)$.

$f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0,\ \forall t\in(0;+\infty)$ nên hàm số luôn đồng biến trên TXĐ.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow 8x+2m\sqrt{x^2+4}-2mx=\sqrt{x^2+4}-x$

$\Leftrightarrow 2m\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)=\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)-8x \Leftrightarrow 2m=1-\dfrac{8x}{\sqrt{x^2+4}-x} \Leftrightarrow 2m=1-\dfrac{8x\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)}{4}$

$\Leftrightarrow 2m=1-2x\left(\sqrt{x^2+4}+x\right) \Leftrightarrow x\sqrt{x^2+4}+x^2=\dfrac{1-2m}{2}$.

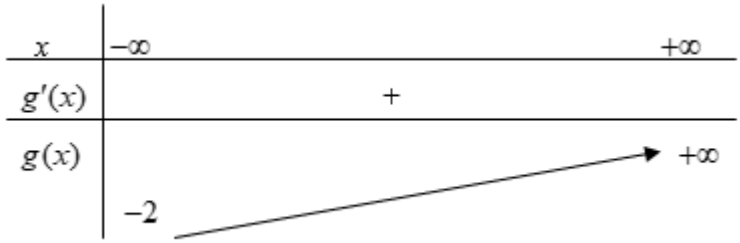
Xét hàm số $g(x)=x\sqrt{x^2+4}+x^2$ với $x\in(-\infty;+\infty)$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)^2}{\sqrt{x^2+4}}\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)\right].=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}-x}\right].=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{-\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}-1}=-2$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}+1\right)\right]=+\infty$.

Ta có bảng biến thiên của $g(x)$



Để phương trình có nghiệm thì $\dfrac{1-2m}{2}>-2\Leftrightarrow m<\dfrac{5}{2}$.

Do m nguyên thuộc $[-20;20]$ nên số giá trị m là 23.

Câu 59: Chọn D

Với hai số dương $x;y$ thỏa $\log_2\left(4x+y+2xy+2\right)^{y+2}=8-(2x-2)(y+2)$

Ta có $(y+2)\log_2(4x+y+2xy+2)=8-(2x-2)(y+2)$

$\Leftrightarrow (y+2)\log_2(2x+1)(y+2)=8-(2x+1)(y+2)+3(y+2)$

$\Leftrightarrow \log_2(2x+1)+\log_2(y+2)=\dfrac{8}{y+2}-(2x+1)+3$

$\Leftrightarrow \log_2(2x+1)+(2x+1)=\log_2\left(\dfrac{8}{y+2}\right)+\dfrac{8}{y+2}$.

Xét hàm đặc trưng $f(t)=\log_2 t+t$ trên $(0;+\infty)$ có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0,\forall t>0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

$$f(2x+1)=f\left(\frac{8}{y+2}\right)\Rightarrow 2x+1=\frac{8}{y+2}\Leftrightarrow y=\frac{8}{2x+1}-2.$$

$$P=2x+y=2x+\frac{8}{2x+1}-2=(2x+1)+\left(\frac{8}{2x+1}\right)-3\overset{AM-GM}{\geq}4\sqrt{2}-3.$$

Dấu bằng xảy ra khi $2x+1=\dfrac{8}{2x+1}\Leftrightarrow(2x+1)^2=8\Leftrightarrow x=\dfrac{-1+2\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $S=a+b+c=3$.

Câu 60: Chọn D

Cách 1.

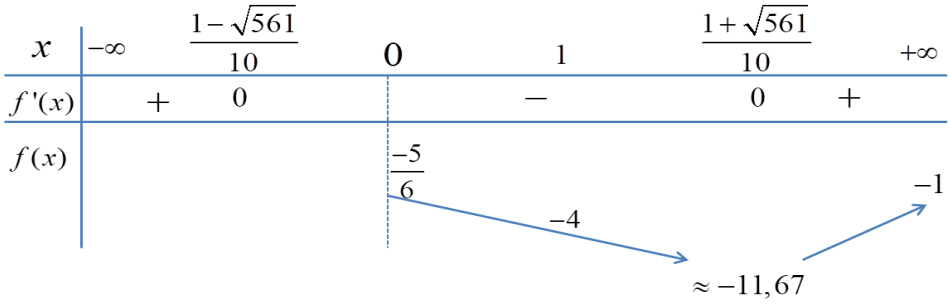
Đặt $t=4^x, t>0$, phương trình đã cho trở thành:

$$(m+1)t^2-2(2m-3)t+6m+5=0\Leftrightarrow m=-\frac{t^2+6t+5}{t^2-4t+6}.$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1,x_2 trái dấu khi phương trình có hai nghiệm t_1,t_2 thỏa mãn: $0<t_1<1<t_2$.

Đặt $f(t)=-\dfrac{t^2+6t+5}{t^2-4t+6}\Rightarrow f'(t)=\dfrac{10t^2-2t-56}{(t^2-4t+6)^2}$. Suy ra $f'(t)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{561}}{10}$

Ta có bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên, ta có phương trình có hai nghiệm t_1,t_2 thỏa mãn: $0<t_1<1<t_2$ khi $-4<m<-1$.

Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán là $m=-3$ và $m=-2$.

Cách 2:

Đặt $t=4^x, t>0$, phương trình đã cho trở thành: $(m+1)t^2-2(2m-3)t+6m+5=0$.

Đặt $f(x)=(m+1)t^2-2(2m-3)t+6m+5$.

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 trái dấu khi phương trình có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0<t_1<1<t_2$.

Điều đó xảy ra khi: $\begin{cases}(m+1)f(1)<0\\(m+1)f(0)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m+1)(3m+12)<0\\(m+1)(6m+5)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4<m<-1\\\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>-\dfrac{5}{6}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow -4<m<-1.$

Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán là $m=-3$ và $m=-2$.

Câu 61: Chọn D

Ta có:

$\log_2\left(|2x-1|+m\right)=\log_3\left[3\left(m+4x-4x^2-1\right)\right]\Leftrightarrow\log_2\left(|2x-1|+m\right)=\log_3\left[3\left(m-(2x-1)^2\right)\right].$

Nếu $2x_0-1$ là nghiệm của phương trình thì $-\left(2x_0-1\right)$ cũng là nghiệm của phương trình.

Vậy để phương trình có nghiệm duy nhất thì $2x_0-1=-\left(2x_0-1\right)\Leftrightarrow x_0=\dfrac{1}{2}$.

Với $x_0=\dfrac{1}{2}$ thay vào phương trình ta có: $\log_2 m=\log_3 3m=t$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m=2^t\\3m=3^t\end{cases}\Rightarrow 3.2^t=3^t\Leftrightarrow\left(\dfrac{3}{2}\right)^t=3\Leftrightarrow t=\log_{\frac{3}{2}}3\Rightarrow m=2^{\log_{\frac{3}{2}}3}\approx 6{,}54.$

Câu 62: Chọn C

Điều kiện: $x>-1$.

Nhận thấy với $x=0$ thì phương trình đã cho trở thành $0=1$, nên $x=0$ không là nghiệm của phương trình với mọi m.

Xét $-1<x\neq 0$ ta có:

$x\log_3\left(x+1\right)=\log_9\left[9\left(x+1\right)^{2m}\right]\Leftrightarrow\log_3\left(x+1\right)^x=\log_3\left[3\left(x+1\right)^m\right]$

$\Leftrightarrow\left(x+1\right)^{x-m}=3\Leftrightarrow x-m=\dfrac{\ln 3}{\ln\left(x+1\right)}\Leftrightarrow m=x-\dfrac{\ln 3}{\ln\left(x+1\right)}$

Đặt $f\left(x\right)=x-\dfrac{\ln 3}{\ln\left(x+1\right)}$ với $-1<x\neq 0$

$\Rightarrow f'\left(x\right)=1+\dfrac{\ln 3}{\left(x+1\right)\ln^2\left(x+1\right)}>0,\ \forall x\in\left(-1;+\infty\right)\setminus\left\{0\right\}.$

Ta lập được bảng biến thiên:

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$ $+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên thì phương trình $m=x-\dfrac{\ln 3}{\ln\left(x+1\right)}$ có hai nghiệm thực phân biệt khi $m\in\left(-1;+\infty\right)$.

Câu 63: Chọn A

Phương trình đã cho tương đương với phương trình sau

$2^{\cos x-2+\sqrt[3]{m-3\cos x}}+\left(\cos^3 x-6\cos^2 x+9\cos x+m\right)2^{\cos x-2}=2^{\cos x+1}+1$.

$\Leftrightarrow 2^{\cos x-2+\sqrt[3]{m-3\cos x}}+\left[\left(\cos x-2\right)^3+8+m-3\cos x\right]2^{\cos x-2}=2^{\cos x+1}+1$.

$\Leftrightarrow 2^{\cos x-2+\sqrt[3]{m-3\cos x}}+\left[\left(\cos x-2\right)^3+m-3\cos x\right]2^{\cos x-2}=1$.

Đặt $\cos x-2=a$ và $\sqrt[3]{m-3\cos x}=b$.

Ta có phương trình: $2^{a+b}+\left(a^3+b^3\right)2^a=1\ (1)$.

Nhận thấy $a+b=0$ thỏa mãn phương trình (1).

Nếu $a+b>0$ thì $2^{a+b}>2^0=1$ và $\left(a^3+b^3\right)2^a>0$ nên phương trình (1) vô nghiệm.

Nếu $a+b<0$ thì $2^{a+b}<1$ và $\left(a^3+b^3\right)2^a<0$ nên phương trình (1) cũng vô nghiệm.

Vậy $a+b=0$ suy ra $\sqrt[3]{m-3\cos x}=2-\cos x \Leftrightarrow -\cos^3 x+6\cos^2 x-9\cos x+8=m$.

Đặt $\cos x=t$ với điều kiện $t\in[-1;1]$, suy ra $f(t)=-t^3+6t^2-9t+8=m$.

Dễ thấy $\min\limits_{t\in[-1;1]} f(t)=4$ và $\max\limits_{t\in[-1;1]} f(t)=24$ nên phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m\in[4;24]$. Suy ra $S=\{4;5;...;24\}$ nên tổng của hai phần tử lớn nhất và nhỏ nhất của S bằng 28.

Cách khác: Ta có $2^{\cos x-2+\sqrt[3]{m-3\cos x}}+\left[\left(\cos x-2\right)^3+m-3\cos x\right]2^{\cos x-2}=1$.

$\Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m-3\cos x}}+\left(\sqrt[3]{m-3\cos x}\right)^3=2^{2-\cos x}+\left(2-\cos x\right)^3$.

Xét hàm số đặc trưng $f(u)=2^u+u^3$, đây là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó ta cũng suy ra được $\sqrt[3]{m-3\cos x}=2-\cos x$.

Câu 64: Chọn A

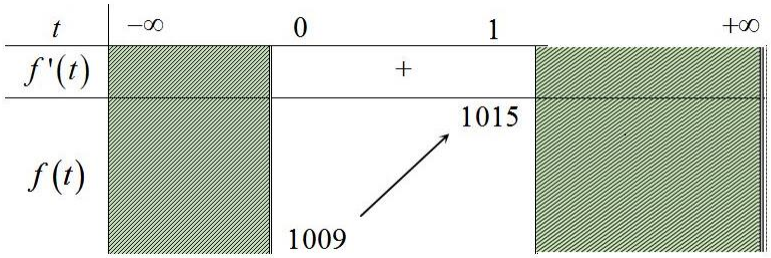
Điều kiện: $x\neq 0$. Ta có: $2\log_2 x^4+\sqrt{2\log_2 x^8}+2018=2m$.

Đặt $t=\sqrt{\log_2 x}$. Vì $x\in[1;2]\Rightarrow\sqrt{\log_2 x}\in[0;1]$.

$\Rightarrow f(t)=4t^2+2t+1009=m$ có nghiệm thuộc $[1;2]$

$f'(t)=8t+2>0,\ \forall t\in[0;1]$

Bảng biến thiên:



$\Rightarrow 1009\le m\le 1015\Rightarrow S=\{1009;1010;1011;1012;1013;1014;1015\}$.

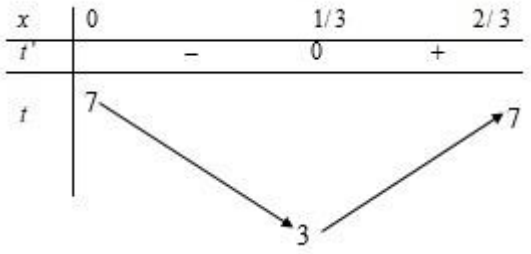
Số phần tử của S là: 7.

Câu 65: Chọn D

Đặt $t=7-4\sqrt{6x-9x^2}\ (1)$ thì $f(t)=1-2m\ (2)$.

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

$t' = \dfrac{-4(6-18x)}{2\sqrt{6x-9x^2}} \Rightarrow t' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}.$



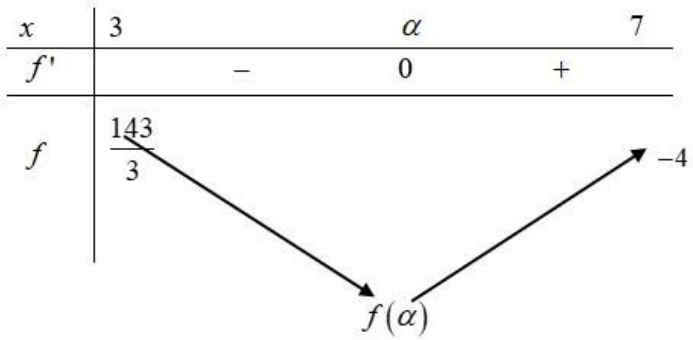
Từ bảng biến thiên suy ra nếu $t \in (3;7]$ thì phương trình có 2 nghiệm x.

Xét hàm số $f(x) = 3^{x-4} + (x+1).2^{7-x} - 6x + 3$

$f'(x) = 3^{x-4}\ln 3 + 2^{7-x} - (x+1)2^{7-x}\ln 2 - 6$

$f''(x) = 3^{x-4}\ln^2 3 + (2^{7-x}\ln 2)[(x+1)\ln 2 - 2] > 0 \forall x \in (3;7]$

Do đó hàm số $f'(x)$ đồng biến trên $(3;7)$. Mặt khác, $f'(6).f'(7) < 0$ nên phương trình $f'(x) = 0$ có một nghiệm $x = \alpha \in (6;7)$.



Vậy, phương trình $f(t) = 1 - 2m$ có nhiều nghiệm nhất khi

$f(\alpha) < 1 - 2m \le -4 \Leftrightarrow \dfrac{5}{2} \le m < \dfrac{1 - f(\alpha)}{2}$. Kết luận, GTNN của m là $\dfrac{5}{2} \Rightarrow a = 5, b = 2.$

Câu 66: Chọn B

Điều kiện: $x > \dfrac{-1}{4}$.

Trường hợp 1: $m = 2$, phương trình đã cho trở thành:

$$(x-1)[\log_3(4x+1) + \log_5(2x+1) - 2] = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \\ \log_3(4x+1) + \log_5(2x+1) - 2 = 0 \ (1) \end{bmatrix}$$

Xét hàm số $f(x) = \log_3(4x+1) + \log_5(2x+1) - 2$ là hàm đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{-1}{4}; +\infty\right)$.

Khi đó, nếu x_0 là nghiệm của phương trình (1) thì x_0 là nghiệm duy nhất.

Ta có: $f(0) = -2$; $f(1) > 0$, suy ra $f(0)f(1) < 0$.

Theo hệ quả của định lý trung gian, tồn tại $x_0 \in (0;1)$ sao cho $f(x_0) = 0$.

Do vậy: $m=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $m<2$, dẫn đến $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho.

Phương trình đã cho trở thành:

$$\log_3(4x+1)+\log_5(2x+1)-\frac{2x-m}{x-1}=0$$

Xét hàm số $g(x)=\log_3(4x+1)+\log_5(2x+1)-\frac{2x-m}{x-1}$, có tập xác định: $D=\left(-\frac{1}{4};\,1\right)\cup(1;\,+\infty)$

Đạo hàm: $g'(x)=\frac{4}{(4x+1)\ln 3}+\frac{2}{(2x+1)\ln 5}+\frac{2-m}{(x-1)^2}>0,\forall x\in D$.

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ / $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra: phương trình $g(x)=0$ có đúng hai nghiệm $x_1\in\left(\frac{-1}{4};\,1\right)$;

$x_2\in(1;\,+\infty)$ với mọi $m<2$.

Vậy với mọi giá trị nguyên của tham số $m\in[-2019\,;\,2]$ thì phương trình đã cho luôn có hai nghiệm thực phân biệt.

Có 2022 giá trị nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 67: Chọn C

Ta có

$$3^{x^2+2x+1-2|x-m|}=\log_{x^2+2x+3}\left(2|x-m|+2\right)\Leftrightarrow\frac{3^{x^2+2x+3}}{3^{2|x-m|+2}}=\frac{\ln\left(2|x-m|+2\right)}{\ln\left(x^2+2x+3\right)}$$

$$\Leftrightarrow\ln\left(x^2+2x+3\right).3^{x^2+2x+3}=\ln\left(2|x-m|+2\right).3^{2|x-m|+2}$$

Xét $f(t)=\ln(t).3^t,\forall t\ge 2$ có $f'(t)=\frac{1}{t}3^t+\ln(t)3^t\ln(3)>0,\forall t\ge 2$

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến.

$$f\left(x^2+2x+3\right)=f\left(2|x-m|+2\right)\Leftrightarrow x^2+2x+3=2|x-m|+2\Leftrightarrow x^2+2x+1=2|x-m|$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=-1-2m\ \ (1)\\ x^2+4x=-1+2m\ \ (2)\end{array}\right.$$

Điều kiện cần để phương trình có 3 nghiệm là:

Trường hợp 1: (1) có nghiệm kép $\Rightarrow m=\dfrac{-1}{2}$ thử lại ta thấy thỏa mãn

Trường hợp 2: (2) có nghiệm kép $\Rightarrow m=\dfrac{-3}{2}$ thử lại ta thấy thỏa mãn

Trường hợp 3: (1) và (2) có nghiệm chung $\Rightarrow x=m$. Thế (1) vào ta có $m=-1$

Ta có $\dfrac{-1}{2}+\dfrac{-3}{2}+(-1)=-3$

Câu 68: Chọn C

Ta có $\log\left(\dfrac{x+3y}{xy}\right)=xy-x-3y \Leftrightarrow \log(x+3y)-\log(xy)=xy-(x+3y)$.

$\Leftrightarrow \log(x+3y)+(x+3y)=\log(xy)+xy\ (1)$.

Xét hàm số $f(t)=\log t+t,\ t>0$ có $f'(t)=\dfrac{1}{t.\ln 10}+1>0,\forall t>0.$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Phương trình (1) tương đương $f(x+3y)=f(xy)\Leftrightarrow x+3y=xy$.

Theo bất đẳng thức Schwarz ta có $P=\dfrac{x^2}{1+3y}+\dfrac{9y^2}{1+x}=\dfrac{x^2}{1+3y}+\dfrac{(3y)^2}{1+x}\geq\dfrac{(x+3y)^2}{2+(x+3y)}\ (2)$.

Theo bất đẳng thức Cô-si cho 2 số dương ta có

$xy=x+3y\geq 2\sqrt{x.3y}\Leftrightarrow (xy)^2-12xy\geq 0\Leftrightarrow xy(xy-12)\geq 0$.

Vì $xy>0$ nên $xy\geq 12\Rightarrow x+3y\geq 12$. Đặt $u=x+3y\Rightarrow u\geq 12$.

Từ (2) ta có $P\geq f(u)=\dfrac{u^2}{u+2}$, $u\geq 12$

$f'(u)=\dfrac{u^2+4u}{(u+2)^2}\Rightarrow f'(u)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=0\\u=-4\end{array}\right.\Rightarrow \text{Min } f(u)=f(12)=\dfrac{72}{7}$.

Vậy $P\geq\dfrac{72}{7}\Rightarrow \text{Min } P=\dfrac{72}{7}$ khi

$u=12\Rightarrow\begin{cases}x+3y=12\\\dfrac{x}{1+3y}=\dfrac{3y}{1+x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3y+12\\(-3y+12)^2-3y+12=3y+9y^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\y=2\end{cases}$.

PHƯƠNG TRÌNH MŨ – LOGARIT CHỨA THAM SỐ 01

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x+(4m-1)2^x+3m^2-1=0$ có hai nghiệm thực x_1,x_2 thỏa mãn $x_1+x_2=1$

A. $m=-1$. **B.** $m=\pm 1$. **C.** $m=1$. **D.** $m=0$.

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x-m\log_3 x+1=0$ có hai nghiệm thực x_1,x_2 thỏa mãn $x_1x_2=81$

A. $m=4$. **B.** $m=-3$. **C.** $m=-4$. **D.** $m=3$.

Câu 3: Cho phương trình $(m+1)\log_2^2 x+2\log_2 x+(m-2)=0$. Tìm tập hợp các giá trị m để phương trình có hai nghiệm thực x_1,x_2 thỏa mãn $0<x_1<1<x_2$

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Câu 4: Hỏi có bao nhiêu số nguyên $m\in(-2018;2018)$ để phương trình $4^x-2(m+1)2^x+3m-8=0$ có hai nghiệm trái dấu?

A. 2025. **B.** 2008. **C.** 2005. **D.** 6.

Câu 5: Tìm tất cả các tham số thực m là để bất phương trình $\log_2\left(4^x+2^{x+1}\right)\le m+x$ có nghiệm

A. $m\ge 4$. **B.** $m\ge 1$. **C.** $m\ge 2\ln 2$. **D.** $m\le 4$.

Câu 6: Cho phương trình $(m-1)\log_3^2 x+(2016-m)\log_3 x^2+m-2017=0$. Có tất cả bao nhiêu số nguyên m để phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $0<x_1<1<x_2$?

A. 2013. **B.** 2018. **C.** 2014. **D.** 2015

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x-6^x-9^x=m\left(3^x.2^{x+1}-9^x\right)$ có 2 nghiệm thực phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1+x_2>\dfrac{\log 5}{\log 2-\log 3}$?

A. $m>6$. **B.** $1<m<5$. **C.** $-\dfrac{1}{2}<m<6$. **D.** $1<m<6$

Câu 8: Gọi S là tập các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_2^2 x+(m+1)\log_2 x-8=0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1x_2^2=1$. Tính tổng các phần tử của S.

A. -2. **B.** 4. **C.** -1. **D.** -3.

Câu 9: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $4^{x+1}+4^{1-x}=(m+1)\left(2^{2+x}-2^{2-x}\right)+16-8m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;1]$.

A. 5. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 10: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $\log_2^2 2x-2(m+1)\log_2 x-2<0$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

A. $(0;+\infty)$. **B.** $\left(-\dfrac{3}{4};0\right)$. **C.** $\left(-\dfrac{3}{4};+\infty\right)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Câu 11: Tìm tất cả các giá trị thực của m để bất phương trình $\log_2^2 x-2\log_2 x+3m-2<0$ có nghiệm.

A. $m<1$. **B.** $m\le 1$. **C.** $m<0$ **D.** $m<\dfrac{2}{3}$.

Câu 12: Biết phương trình $a\log^2 x+b\log x+5=0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1.x_2=10^{2018}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng.

A. $b=-2018a$. **B.** $a=2018b$. **C.** $b=2018a$ **D.** $a=-2018b$.

Câu 13: Xét các số nguyên dương a và b sao cho phương trình $a\ln^2 x+b\ln x+6=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 và phương trình $6\log^2 x+b\log x+a=0$ có hai nghiệm phân biệt x_3,x_4 sao cho $x_1x_2>x_3x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=2a+3b$.

A. 33. **B.** 30. **C.** 24. **D.** 35.

Câu 14: Tìm tập hợp giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_2^2 x+2\log_2 x+m=0$ có hai nghiệm thực x_1,x_2 thoả mãn $0<x_1<4<x_2$.

A. $m<0$. **B.** $m<-4$. **C.** $m<-8$. **D.** $-8<m<-4$.

Câu 15: Tìm tập hợp giá trị thực của tham số m để phương trình $\log^2 x-2(m+1)\log x+4=0$ có hai nghiệm thục $0<x_1<10<x_2$

A. $m>-1$. **B.** $m<-3$. **C.** $m>\dfrac{3}{2}$. **D.** $m>3$.

Câu 16: Xét các số nguyên dương a và b sao cho phương trình $a.100^x-b.10^x+5=0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1,x_2 và phương trình $e^{2x}-be^x+5a=0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_3,x_4 thỏa mãn $x_3+x_4>10(x_1+x_2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=a+b$.

A. 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 13.

Câu 17: Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x-m\log_3 x+2m-7=0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1x_2=81$.

A. $m=-4$. **B.** $m=4$. **C.** $m=44$. **D.** $m=9$.

Câu 18: Cho phương trình $4\log_9^2 x+m\log_{\frac{1}{3}} x+\dfrac{1}{6}\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x+m-3=0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1x_2=\dfrac{1}{9}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $1<m<2$. **B.** $-3<m<-1$. **C.** $2<m<3$. **D.** $-1<m<1$.

Câu 19: Cho phương trình $\log_2^2 x-4\log_2 x-m^2-2m+3=0$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình có hai nghiệm thực phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=68$. Tính tổng các phần tử của S.

A. -1. **B.** -2. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 20: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $(m+1)16^x-(2m-3)2^{2x+1}+6m+5=0$ có hai nghiệm trái dấu.

A. $-\dfrac{3}{2}<m<-1$. **B.** $-4<m<-1$. **C.** $-\dfrac{6}{5}<m<-1$. **D.** $-1<m<\dfrac{3}{2}$.

Câu 21: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $3^{x-2}+m.3^{-x+2}-18=0$ có hai nghiệm thực phân biệt $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1+x_2>6$:

A. 70. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 71.

Câu 22: Cho phương trình $\left(3+\sqrt{5}\right)^x+m\left(3-\sqrt{5}\right)^x=3.2^x$. Gọi S là tập hợp giá trị thực của m để phương trình có hai nghiệm thực phân biệt. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S\subset(0;3)$. **B.** $S=(0;2)$. **C.** $S=(0;3)$. **D.** $S\subset(0;2)$.

Câu 23: Cho hai số nguyên dương a,b và phương trình $9^x - b(3e)^x + a.e^{2x} = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + x_2 \geq 10$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + b$

A. 5 **B.** 7 **C.** 16 **D.** 12

Câu 24: Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - m.2^{x+1} + m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 - x_2 = 4$

A. $m = \sqrt{17}$. **B.** $m = \frac{17}{15}$. **C.** $m = \frac{5}{3}$. **D.** $m = \frac{9}{7}$.

Câu 25: Cho phương trình $\log_a^2(x-1) - 4\log_a(x-1) - 4(2+m^2) = 0$ với $0 < a \neq 1, m \in \mathbb{R}$. Tìm giá trị thực của a để phương trình có hai nghiệm thực phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1.x_2 = x_1 + x_2 + 15$.

A. $a = 2$. **B.** $a = 4$. **C.** $a = \sqrt[4]{15}$. **D.** $a = \sqrt[4]{17}$.

Câu 26: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $6^{2x+1} - 5.6^x + m = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt.

A. $0 < m < \frac{25}{4}$. **B.** $0 < m < \frac{25}{24}$. **C.** $0 < m < \frac{5}{6}$. **D.** $0 < m < \frac{5}{4}$.

Câu 27: Xét các số nguyên dương a,b sao cho phương trình $a\ln^2 x + b\ln x + 10 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 và phương trình $10\log^2 x + b\log x + a = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_3, x_4 thoả mãn $x_1x_2 > x_3x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 2a + 3b$

A. 55. **B.** 46. **C.** 43. **D.** 53.

Câu 28: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $e^{2x} - 10e^x + m = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

A. 10. **B.** 24. **C.** 8. **D.** 23.

Câu 29: Cho phương trình $8^x - 3m.4^x + 3(m^2-1)2^x + 3m - 29 = 0$ .Tập hợp tất cả các giá trị thực của m để phương trình có ba nghiệm phân biệt là khoảng $(a;b)$. Tính $S = a + 3b$.

A. $S = 30$. **B.** $S = 3 + 3\sqrt[3]{31}$ **C.** $S = 10$. **D.** $S = 9 + \sqrt[3]{31}$.

Câu 30: Cho phương trình $\log^2(x+1) + (2m-9)\log(x+1) - m^2 - 1 = 0$ .Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thoả mãn $x_1x_2 + x_1 + x_2 = 999$.

A. $m = 0$. **B.** $m = 6$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = 12$.

Câu 31: Tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình $27^x - m3^{2x+1} + (m^2-1)3^{x+1} - (m^2-1) = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt là khoảng $(a;b)$. Tính $S = a + b$.

A. $S = 2$. **B.** $S = 1 + \sqrt{3}$. **C.** $S = 2 + \sqrt{2}$. **D.** $S = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Câu 32: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $8^x - m2^{2x+1} + (2m^2-1)2^x + m - m^3 = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt là khoảng $(a;b)$. Tính $S = ab$.

A. $S = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $S = \frac{4}{3}$. **C.** $S = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $S = \frac{2}{3}$.

Câu 33: Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình $(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = 2m - 1$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $(2;+\infty)$. **B.** $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Câu 34: Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình $\left(7-3\sqrt{5}\right)^{x^2}+m\left(7+3\sqrt{5}\right)^{x^2}=2^{x^2-1}$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt.

A. $\left(-\infty;\frac{1}{16}\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left\{0;\frac{1}{16}\right\}$.

C. $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{16}\right]$. **D.** $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left\{\frac{1}{16}\right\}$.

Câu 35: Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình $\left(\sqrt{10}+1\right)^{\log_3 x}-\left(\sqrt{10}-1\right)^{\log_3 x}=mx$ có nghiệm dương.

A. $(0;3)$. **B.** $(-\infty;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0)$ **D.** $(3;+\infty)$.

Câu 36: Có bao nhiêu số nguyên dương của m để phương trình $16^x-2.12^x+(m-2)9^x=0$ có nghiệm dương

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 37: Có bao nhiêu số nguyên của m để phương trình $9^x+3^x+6=m(3^x+1)$ có nghiệm thực phân biệt

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 38: Với m,n là các số thực không âm thay đổi thỏa mãn phương trình $\ln^2 x-(m+1)\ln+n=0$ có nghiệm x_1.Phương trình $\ln^2 x-(n+1)\ln x+m=0$ có nghiệm x_2.Giá trị nhỏ nhất của $2x_1+{x_2}^2$ bằng.

A. 3. **B.** $2e+1$. **C.** $2e+e^2$. **D.** e^2+1.

Câu 39: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $4^x+2^x+27=3^m\left(2^x+1\right)$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 40: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log^2|\cos x|-m\log\cos^2 x-m^2+4=0$ vô nghiệm là

A. $\left(-\sqrt{2};\sqrt{6}-1\right)$. **B.** $(-\sqrt{2};\sqrt{2}]$. **C.** $\left(-\sqrt{2};2\right)$. **D.** $\left(-\sqrt{2};\sqrt{6}+1\right)$.

Câu 41: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $4^x-m.2^{x+1}+2m^2-5=0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. 1. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 42: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình

$9.9^{x^2-2x}-(2m+1)15^{x^2-2x+1}+(4m-2)5^{2x^2-4x+2}=0$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt.

A. $\left(\frac{1}{2};1\right)$ **B.** $\left(-\infty;\frac{3-\sqrt{6}}{2}\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{6}}{2};+\infty\right)$

C. $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$ **D.** $\left(\frac{3-\sqrt{6}}{2};\frac{3+\sqrt{6}}{2}\right)$

Câu 43: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2018;2018]$ để phương trình

$m.9^{x^2-2x}-(2m+1)6^{x^2-2x+1}+m.4^{2x^2-4x+2}=0$ có nghiệm thuộc khoảng (0;2).

A. 2012 **B.** 2013 **C.** 2010 **D.** 2011

Câu 44: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - m.2^{x+1} + 3m - 3 = 0$ có hai nghiệm thực trái dấu.

A. $(-\infty;2)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(0;2)$.

Câu 45: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $9^x - m.3^{x+1} + 3m^2 - 75 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 5. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 19.

Câu 46: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $9^x - 2m.6^x + m.4^x = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 2$

A. $\left\{\frac{9}{4}\right\}$. **B.** $\left\{\frac{3}{2}\right\}$. **C.** $\{1\}$. **D.** $\left\{\frac{9}{8}\right\}$.

Câu 47: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $25^x - m.5^x + 2m - 5 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

A. $(0;2)$. **B.** $\left(\frac{5}{2};4\right)$. **C.** $\left(\frac{5}{2};5\right]$. **D.** $\left(\frac{5}{2};4\right]$.

Câu 48: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $9^{1-x} + 2(m-1)3^{1-x} + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(1;2)$.

Câu 49: Tập hợp tất cả các giá trị thực của m để phương trình $16^x - m.4^x + 25 - m^2$ có hai nghiệm thực phân biệt là.

A. $(0;5)$. **B.** $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2};5\right)$. **C.** $\left(2\sqrt{5};5\right)$. **D.** $(-5;0)$.

Câu 50: Với m,n là các số nguyên dương sao cho phương trình $\ln^2 x - (m+1)\ln x + n = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2; phương trình $\ln^2 x - (n+1)\ln x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 x_2 = (x_3 x_4)^2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2m + 3n$ bằng

A. 51. **B.** 46. **C.** 48. **D.** 53.

Câu 51: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\ln^2 x - m\ln x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $1 < x_1 x_2 < 81$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 52: Với m,n là các số nguyên dương khác 1. Gọi P là tích các nghiệm của phương trình $2018\log_m x.\log_n x = 2017\log_m x + 2018\log_n x + 2019$. Khi P nguyên và đạt giá trị nhỏ nhất thì

A. $m.n = 2^{2020}$. **B.** $m.n = 2^{2017}$. **C.** $m.n = 2^{2019}$. **D.** $m.n = 2^{2018}$.

Câu 53: Biết rằng $a.\log_2^2 x + b\log_2 x + c = 0$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1;2]$. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)}$ bằng

A. 2. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 54: Gọi $(a;b)$ là tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình $2e^{2x} - 8e^x - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;\ln 5)$. Giá trị của biểu thức $a+b$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** –6. **D.** –14.

Câu 55: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4\log_{25}^2 x - m\log_5 \frac{x}{5} - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2 - 50\sqrt{x_1x_2} + 625 \le 0$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 56: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc đoạn $[0;2020]$ sao cho với mỗi giá trị a luôn tồn tại số thực x để 3 số $5^{x+1} + 5^{1-x}, \frac{a}{2}$ và $25^x + 25^{-x}$ theo thứ tự đó lập thành 1 cấp số cộng?

A. 2007. **B.** 2009. **C.** 2010. **D.** 2008.

Câu 57: Phương trình $\left(2+\sqrt{3}\right)^x + (1-2a)\left(2-\sqrt{3}\right)^x - 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - x_2 = \log_{2+\sqrt{3}} 3$. Khi đó a thuộc khoảng

A. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Câu 58: Cho phương trình $m\ln^2(x+1) - (x+2-m)\ln(x+1) - x - 2 = 0$ (1). Tập hợp tất cả giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$ là khoảng $(a;+\infty)$. Khi đó, a thuộc khoảng:

A. $(3,8;3,9)$ **B.** $(3,7;3,8)$. **C.** $(3,6;3,7)$. **D.** $(3,5;3,6)$.

Câu 59: Cho các số thực a,b,c thay đổi sao cho phương trình $\ln^4 x + a\ln^3 x + b\ln^2 x + c\ln x + 4 = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm thực. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $20a^2 + 20b^2 + 5c^2$ bằng:

A. 64 **B.** 48. **C.** 32. **D.** 24.

Câu 60: Bất phương trình $\log_2^2 x - (2m+5)\log_2 x + m^2 + 5m + 4 < 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [2;4)$ khi và chỉ khi

A. $m \in [0;1)$. **B.** $m \in [-2;0)$. **C.** $m \in (0;1]$. **D.** $m \in (-2;0]$.

Câu 61: Tính tổng T của các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $e^x + (m^2 - m)e^{-x} = 2m$ có đúng hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn $\frac{1}{\log e}$.

A. $T = 28$. **B.** $T = 20$. **C.** $T = 21$. **D.** $T = 27$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.A	3.C	4.A	5.B	6.D	7.D	8.A	9.B	10.C
11.A	12.A	13.A	14.C	15.C	16.B	17.B	18.B	19.B	20.B
21.D	22.A	23.B	24.B	25.A	26.B	27.A	28.C	29.B	30.C
31.D	32.A	33.B	34.B	35.B	36.B	37.A	38.A	39.A	40.C
41.A	42.A	43.B	44.C	45.B	46.A	47.B	48.C	49.C	50.A
51.C	52.C	53.C	54.D	55.B	56.B	57.D	58.B	59.A	60.B
61.D									

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **Chọn C**

Đặt $2^x = t, t > 0$.

Để phương trình $4^x + (4m-1)2^x + 3m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 1$ thì phương trình $t^2 + (4\text{m}-1)t + 3m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm t_1, t_2 dương thỏa mãn $t_1.t_2 = 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 8m + 5 > 0 \\ 4m - 1 > 0 \\ 3m^2 - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$$

Câu 2: **Chọn A**

Đặt $\log_3 x = t$, để phương trình $\log_3^2 x - m\log_3 x + 1 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 = 81$ thì phương trình $t^2 - mt + 1 = 0$ có hai nghiệm t_1, t_2 thực thỏa mãn $t_1 + t_2 = 4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 \geq 0 \\ m = 4 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4$$

Câu 3: **Chọn C**

Đặt $\log_2 x = t$, Phương trình có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $0 < x_1 < 1 < x_2$ thì phương trình $(m+1)t^2 + 2t + (m-2) = 0$ có hai nghiệm t_1, t_2 thực thỏa mãn $t_1 < 0 < t_2$

$\Leftrightarrow (m+1)(m-2) < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 2$

Câu 4: **ChọnA**

Đặt $2^x = t$. Để phương trình $4^x - 2(m+1)2^x + 3m - 8 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 trái dấu thì phương trình $g(t) = t^2 - 2(m+1)t + 3m - 8 = 0$ có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 < 1 < t_2$

$\Leftrightarrow ag(1) < 0 \Leftrightarrow m - 9 < 0 \Leftrightarrow m < 9$

Do số nguyên $m \in (-2018; 2018)$ và $m < 9$ nên có 2025 số nguyên thỏa mãn.

Câu 5: **Chọn B**

Bất phương trình $\log_2(4^x + 2^{x+1}) \leq m + x \Leftrightarrow 4^x + 2^{x+1} \leq 2^{m+x} \Leftrightarrow 4^x - 2^x(2^m - 2) \leq 0 (2)$

Đặt $t = 2^x$

Để bất phương trình $\log_2(4^x + 2^{x+1}) \leq m + x\,(1)$ có nghiệm thì bất phương trình $t^2 - (2^m - 2)t \leq 0$ có nghiệm $t > 0 \Leftrightarrow m \geq 1$.

Câu 6: **Chọn D**

Ta có $(m-1)\log_3^2 x+(2016-m)\log_3 x^2+m-2017=0$

$\Leftrightarrow (m-1)\log_3^2 x+2(2016-m)\log_3 x+m-2017=0\ (1)$

Đặt $t=\log_3 x$. Phương trình (1) thành: $(m-1)t^2+2(2016-m)t+m-2017=0\ (2)$.

Có $0<x_1<1<x_2\Leftrightarrow \log_3 x_1<\log_3 1<\log_3 x_2\Rightarrow t_1<0<t_2$.

Để phương trình (1) có 2 nghiệm thực phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $0<x_1<1<x_2$ thì (2) có 2 nghiệm phân biệt t_1,t_2 thỏa mãn $t_1<0<t_2\Leftrightarrow \dfrac{m-2017}{m-1}<0\Rightarrow 1<m<2017$. Mà m nguyên nên $m\in\{2;3;...;2016\}$. Vậy có tất cả 2015 giá trị m thảo mãn.

Câu 7: Chọn D

Ta có $4^x-6^x-9^x=m\left(3^x.2^{x+1}-9^x\right)(1)\Leftrightarrow 4^x-(1+2m)6^x+(m-1)9^x=0$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x}-(1+2m)\left(\dfrac{2}{3}\right)^x+(m-1)=0$

Đặt $t=\left(\dfrac{2}{3}\right)^x>0$ phương trình (1) thành: $t^2-(1+2m)t+(m-1)=0(2)$.

Để phương trình (1) có 2 nghiệm thực phân biệt x_1,x_2 thì phương trình (2) có 2 nghiệm t dương điều kiện là $\begin{cases}\Delta=(1+2m)^2-4(m-1)>0\\(1+2m)>0\\(m-1)>0\end{cases}\Leftrightarrow m>1.$

Khi đó phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt $t_1=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x_1},t_2=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x_2}$.

Theo viet $t_1.t_2=m-1$.

Mà phải có $t_1.t_2=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x_1}.\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x_2}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x_1+x_2}<\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{\log 5}{\log 2-\log 3}}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}}5}=5\Rightarrow m-1<5\Rightarrow m<6$

Kết hợp điều kiện có $1<m<6$.

Câu 8: Chọn A

Xét $\log_2^2 x+(m+1)\log_2 x-8=0\ (1)$

Đặt $t=\log_2 x$ thì phương trình trở thành: $t^2+(m+1)t-8=0\ (2)$

Để (1) có 2 nghiệm thỏa mãn $x_1x_2^2=1\ \Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm t_1,t_2 thỏa mãn $t_1+2t_2=0\Leftrightarrow t_1=-2t_2$.

Vì phương trình (2) có $P=-8<0$ nên phương tình luôn có 2 nghiệm t_1,t_2 trái dấu

Khi đó, áp dụng định lí Viet cho (2) thì: $t_1.t_2=-8\Leftrightarrow -2t_2.t_2=-8\Leftrightarrow t_2^2=4\Leftrightarrow t_2=\pm 2$

Trường hợp 1: Xét $t_2=2$ là nghiệm của $(2)\Rightarrow 4+2(m+1)-8=0\Leftrightarrow m=1$

Trường hợp 2: Xét $t_2 = -2$ là nghiệm của $(2) \Rightarrow 4-2(m+1)-8=0 \Leftrightarrow m=-3$

Vậy tổng các giá trị m thỏa mãn là -2.

Câu 9: Chọn B

Ta có: $4^{x+1}+4^{1-x}=(m+1)\left(2^{2+x}-2^{2-x}\right)+16-8m \quad (1)$

$\Leftrightarrow 4^{x+1}+4^{1-x}=m\left(2^{2+x}-2^{2-x}-8\right)+2^{2+x}-2^{2-x}+16$

$\Leftrightarrow m=\dfrac{4^{x+1}+4^{1-x}-2^{2+x}+2^{2-x}-16}{2^{2+x}-2^{2-x}-8}=\dfrac{4^x+4^{-x}-2^x+2^{-x}-4}{2^x-2^{-x}-2}$

Đặt $t=2^x-2^{-x} \Rightarrow m=\dfrac{t^2+2-t-4}{t-2} \Leftrightarrow m=f(t)=t+1$

Ta có: $t'=2^x.\ln 2+2^{-x}.\ln 2$

Vì $t'(x)>0$ nên t là hàm đồng biến nghĩa là: $x\in[0;1] \Rightarrow t\in\left[0;\dfrac{3}{2}\right] \Rightarrow f(t)\in\left[1;\dfrac{5}{2}\right]$.

Để phương trình (1) có nghiệm $x\in[0;1]$ thì đường thẳng $y=m$ phải cắt đồ thị $y=f(t)$

$\Leftrightarrow m\in\left[1;\dfrac{5}{2}\right]$. Vì m là số nguyên nên có 2 giá trị của m là: $m\in\{1;2\}$.

Câu 10: Chọn C

Ta có: $\log_2^2 2x-2(m+1)\log_2 x-2<0$

$\Leftrightarrow (1+\log_2 x)^2-2(m+1)\log_2 x-2<0 \Leftrightarrow \log_2^2 x-2m\log_2 x-1<0 \quad (1)$

Đặt $t=\log_2 x$. Với $x\in\left(\sqrt{2};+\infty\right)$ thì $t\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Khi đó: (1) trở thành $t^2-2mt-1<0 \Leftrightarrow m>\dfrac{t^2-1}{2t} \quad (2)$

Xét hàm $f(t)=\dfrac{t^2+1}{2t} \Rightarrow f'(t)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2t^2}>0 \forall t\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$

Nên $f(t)$ là hàm đồng biến khi $t\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$, khi đó $f(t)\in\left(-\dfrac{3}{4};+\infty\right)$

Để (1) có nghiệm $x\in\left(\sqrt{2};+\infty\right)$ thì (2) có nghiệm $t\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right) \Leftrightarrow m\in\left(-\dfrac{3}{4};+\infty\right)$.

Câu 11: Chọn A

Điều kiện $x>0$.

Đặt $t=\log_2 x$. Bất phương trình trở thành $t^2-2t-2<-3m$.

Xét hàm số $f(t)=t^2-2t-2$. Để bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\min f(t)<-3m$

$\Leftrightarrow -3<-3m \Leftrightarrow m<1$

Câu 12: Chọn A

Điều kiện $x>0$. Đặt $t=\log x$. Phương trình trở thành $at^2+bt+5=0$.

Áp dụng định lý Vi-ét ta có

$t_1+t_2=-\dfrac{b}{a} \Rightarrow \log x_1+\log x_2=-\dfrac{b}{a} \Leftrightarrow \log(x_1x_2)=-\dfrac{b}{a} \Leftrightarrow x_1x_2=10^{-\frac{b}{a}}$.

$10^{2018}=10^{-\frac{b}{a}}\Leftrightarrow -\frac{b}{a}=2018\Leftrightarrow b=-2018a$.

Câu 13: Chọn A

Điều kiện: $x>0$. Đặt $t=\ln x;\ u=\log x$, khi đó

$a\ln^2 x+b\ln x+6=0\Leftrightarrow at^2+bt+6=0\ (1)$ và $6\log^2 x+b\log x+a=0\Leftrightarrow 6u^2+bu+a=0\ (2)$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 và (2) có hai nghiệm phân biệt x_3,x_4 thì $b^2-24a>0\Leftrightarrow b^2>24a\ (*)$

Khi đó giả sử phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt t_1,t_2; phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt u_1,u_2, ta có $x_1.x_2=e^{t_1+t_2}$ và $x_3.x_4=10^{u_1+u_2}$

Theo giả thiết ta có $x_1x_2>x_3x_4\Leftrightarrow e^{t_1+t_2}>10^{u_1+u_2}\Rightarrow t_1+t_2>(u_1+u_2)\ln 10$

$\Rightarrow -\frac{b}{a}>-\frac{b}{6}\ln 10\Rightarrow a>\frac{6}{\ln 10}\Rightarrow a\geq 3$.

Kết hợp với $(*)$ suy ra $b^2>72\Rightarrow b\geq 9$ (do b nguyên dương)

Do đó $S=2a+3b\geq 33$. Vậy $\min S=33$.

Câu 14: Chọn C

Điều kiện: $x>0$. Đặt $t=\log_2 x$, PT $\Leftrightarrow g(t)=t^2+2t+m=0\ (2)$

Phương trình $\log_2^2 x+2\log_2 x+m=0$ có hai nghiệm thực x_1,x_2 thoả mãn $0<x_1<4<x_2$ khi

Phương trình (2) hai nghiệm thực t_1,t_2 thoả mãn $t_1<2<t_2$

$\Leftrightarrow g(2)<0\Leftrightarrow 8+m<0\Leftrightarrow m<-8$.

Câu 15: Chọn C

Điều kiện: $x>0$. Đặt $t=\log_2 x$, PT $\Leftrightarrow g(t)=t^2-2(m+1)t+4=0\ (2)$

Phương trình $\log^2 x-2(m+1)\log x+4=0$ có hai nghiệm thực x_1,x_2 thoả mãn $0<x_1<10<x_2$ khi phương trình (2) hai nghiệm thực t_1,t_2 thoả mãn

$t_1<1<t_2\ \Leftrightarrow g(1)<0\Leftrightarrow 3-2m<0\Leftrightarrow m>\frac{3}{2}$.

Câu 16: Chọn B

Phương trình $a.100^x-b.10^x+5=0\Leftrightarrow at^2-bt+5=0\ (t=10^x>0)\ (1)$

$e^{2x}-be^x+5a=0\Leftrightarrow s^2-bs+5a=0\ (s=e^x>0)\ (2)$

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta_1=b^2-20a>0\\ \frac{b}{a}>0;\frac{5}{a}>0\\ \Delta_2=b^2-20a>0\\ b>0;5a>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2-20a>0\\ a>0\\ b>0\end{cases}$.

Điều kiện $x_3+x_4>10(x_1+x_2)\Leftrightarrow e^{x_3+x_4}>e^{10(x_1+x_2)}\Leftrightarrow e^{x_3}.e^{x_4}>10^{10(x_1+x_2).\log e}$

$\Leftrightarrow e^{x_3}.e^{x_4}>\left[10^{x_1}.10^{x_2}\right]^{10\log e}\Leftrightarrow 5a>\left(\frac{5}{a}\right)^{10\log e}$

$\Leftrightarrow a^{10\log e+1}>5^{10\log e-1}\Leftrightarrow (10\log e+1)\log_5 a>10\log e-1\Leftrightarrow \log_5 a>\dfrac{10\log e-1}{10\log e+1}\Leftrightarrow a>5^{\frac{10\log e-1}{10\log e+1}}$.

Giá trị a nguyên nhỏ nhất thỏa mãn bất phương trình là: $a=3$.

Với $a=3$, ta có $b^2>20a=60$. Số nguyên dương b nhỏ nhất thỏa mãn là: $b=8$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $a+b$ là 11.

Câu 17: Chọn B

Điều kiện: $x>0$. Đặt $t=\log_3 x$, phương trình trở thành: $t^2-mt+2m-7=0$ (1).

Ta có: $x_1.x_2=81\Leftrightarrow \log_3 x_1+\log_3 x_2=4$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1.x_2=81$

$\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm t_1,t_2 thỏa mãn $t_1+t_2=4$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=m^2-4(2m-7)>0\\ m=4\end{cases}\Leftrightarrow m=4$.

Câu 18: Chọn B

Điều kiện $x>0$. Phương trình đã cho tương đương với

$4\left(\dfrac{1}{2}\log_3 x\right)^2-m\log_3 x+\dfrac{1}{6}.(-2)\log_3 x+m-3=0\Leftrightarrow \log_3^2 x-\left(m+\dfrac{1}{3}\right)\log_3 x+m-3=0$

$\Leftrightarrow t^2-\left(m+\dfrac{1}{3}\right)t+m-3=0$ (1). Ta có: $x_1x_2=\dfrac{1}{9}\Leftrightarrow \log_3 x_1+\log_3 x_2=-2$

Nên phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt thỏa mãn $x_1x_2=\dfrac{1}{9}$

$\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt t_1,t_2 thỏa mãn $t_1+t_2=-2$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=\left(m+\dfrac{1}{3}\right)^2-4(m-3)>0\\ m+\dfrac{1}{3}=-2\end{cases}\Leftrightarrow m=-\dfrac{7}{3}\in(-3;-1)$.

Câu 19: Chọn B

Điều kiện xác định $x>0$.

Đặt $\log_2 x=t$, ta có phương trình $t^2-4t+(1-m)(m+3)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1-m\\ t=m+3\end{array}\right.$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt x_1,x_2 khi và chỉ khi $1-m\neq m+3\Leftrightarrow m\neq -1$.

Ta có $\log_2 x_1=1-m\Leftrightarrow x_1=2^{1-m}$ và $\log_2 x_2=m+3\Leftrightarrow x_2=2^{m+3}$.

Từ đó $x_1^2+x_2^2=68\Leftrightarrow \left(2^{1-m}\right)^2+\left(2^{m+3}\right)^2=68\Leftrightarrow \dfrac{4}{4^m}+64.4^m=68$

$\Leftrightarrow 16.\left(4^m\right)^2-17.4^m+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4^m=1\\ 4^m=\dfrac{1}{16}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=0\\ m=-2\end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Như vậy $S=\{-2;0\}$. Tổng các các phần tử của S bằng -2.

Câu 20: Chọn B

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Ta có $(m+1)16^x-(2m-3)2^{2x+1}+6m+5=0\Leftrightarrow(m+1)16^x-2(2m-3)4^x+6m+5=0$

Đặt $4^x=t>0$ ta có phương trình $(m+1)t^2-2(2m-3)t+6m+5=0\ (*)$

Giả sử phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu $x_1<0<x_2\Rightarrow 4^{x_1}<1<4^{x_2}$. Khi đó, phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $t_1<1<t_2$.

Đặt $f(t)=(m+1)t^2-2(2m-3)t+6m+5$.

Điều kiện để phương trình $(*)$ có hai nghiệm $0<t_1<1<t_2$ là

$$\begin{cases}(m+1)f(0)>0\\(m+1)f(1)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m+1)\left[(m+1).0^2-2(2m-3).0+6m+5\right]>0\\(m+1)\left[(m+1).1^2-2(2m-3).1+6m+5\right]<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(m+1)(6m+5)>0\\(m+1)(3m+12)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m+1)(6m+5)>0\\(m+1)(3m+12)<0\end{cases}\Leftrightarrow -4<m<-1.$$

Câu 21: Chọn D

Ta có $3^{x-2}+m.3^{-x+2}-18=0\Leftrightarrow 3^{x-2}+\dfrac{m}{3^{x-2}}-18=0\Leftrightarrow 3^{2(x-2)}-18.3^{x-2}+m=0\ (1)$

Đặt $t=3^{x-2}$, $t>0$ ta được phương trình: $t^2-18t+m=0\ (2)$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1+x_2>6$ khi phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt $t_1;t_2$ thỏa mãn $t_1.t_2>9$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\S>0\\P>9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}81-m>0\\S=18>0\\m>9\end{cases}\Leftrightarrow 9<m<81$$

$m\in\mathbb{N}\Rightarrow m\in\{10,11,12,...,80\}\Rightarrow$ có 71 số nguyên thỏa yêu cầu.

Câu 22: Chọn A

Ta có $\left(3+\sqrt{5}\right)^x+m\left(3-\sqrt{5}\right)^x=3.2^x\Leftrightarrow\left(3+\sqrt{5}\right)^{2x}-3.\left(3+\sqrt{5}\right)^x2^x+m2^{2x}=0$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2x}-3.\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x+m=0\ (1)$$

Đặt $t=\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x$, $t>0$ ta được phương trình: $t^2-3.t+m=0\ (2)$

Phương trình (1) có hai nghiệm thực phân biệt khi phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\S>0\\P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9-4m>0\\S=3>0\\m>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<\frac{9}{4}\Rightarrow S=\left(0;\frac{9}{4}\right)\Rightarrow S\subset(0;3)$$

Câu 23: Chọn B

Ta có $9^x-b(3e)^x+a.e^{2x}=0\Leftrightarrow 3^{2x}-b3^x.e^x+a.e^{2x}=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{3}{e}\right)^{2x}-b\left(\dfrac{3}{e}\right)^x+a=0\ (1)$

Đặt $t=\left(\frac{3}{e}\right)^x, t>0$ ta được phương trình $t^2-bt+a=0\ (2)$

Phương trình (1) có hai nghiệm thực phân biệt $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1+x_2\geq 10$ khi phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt $t_1;t_2$ thỏa mãn $t_1.t_2\geq\left(\frac{3}{e}\right)^{10}$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\S>0\\P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2-4a>0\\b>0\\a\geq\left(\frac{3}{e}\right)^{10}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b>2\left(\frac{3}{e}\right)^5\\a\geq\left(\frac{3}{e}\right)^{10}\end{cases}.$$ Vì $a,b\in\mathbb{Z}^+$ nên $\begin{cases}a\geq 3\\b\geq 4\end{cases}\Rightarrow S=a+b\geq 7$

$\Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=a+b$ là 7

Câu 24: Chọn B

Ta có $4^x-m.2^{x+1}+m^2-1=0\Leftrightarrow 2^{2x}-2m.2^x+m^2-1=0\ (1)$

Đặt $t=2^x, t>0$ ta được phương trình $t^2-2m.t+m^2-1=0\ (2)$

Phương trình (1) có hai nghiệm thực phân biệt $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1-x_2=4$ khi phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt $t_1;t_2$ thỏa mãn $t_1=16t_2$.

Phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt $t_1;t_2\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\S>0\\P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=1>0\\2m>0\\m^2-1>0\end{cases}\Leftrightarrow m>1$

Ta có $\begin{cases}t_1+t_2=2m\\t_1=16t_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}17t_2=2m\\t_1=16t_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_2=\frac{2m}{17}\\t_1=\frac{32m}{17}\end{cases}$

Ta có $t_1.t_2=m^2-1\Leftrightarrow\frac{64m^2}{289}=m^2-1\Leftrightarrow 225m^2=289\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\frac{17}{15}(n)\\m=-\frac{17}{15}(l)\end{array}\right.$. Vậy $m=\frac{17}{15}$

Câu 25: Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases}x>0\\1\neq a>0\end{cases}$. Ta có $\log_a^2(x-1)-4\log_a(x-1)-4\left(2+m^2\right)=0\ (1)$

Đặt $t=\log_a(x-1)$. Ta được phương trình $t^2-4t-4\left(2+m^2\right)=0\ \ (2)$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1.x_2=x_1+x_2+15$ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $t_1;t_2$ thỏa mãn $t_1+t_2=\log_a 16$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\S=\log_a 16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=4\left(m^2+3\right)>0\ \forall m\\\log_a 16=4\end{cases}\Leftrightarrow a=2$$

Câu 26: Chọn B

Ta có: $6^{2x+1}-5.6^x+m=0\Leftrightarrow 6.6^{2x}-5.6^x+m=0$.

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Đặt $t=6^x$, phương trình trở thành $6t^2-5.6t+m=0$ (1).

Để phương trình có hai nghiệm âm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt thoả $0<t_1<t_2<1$. Để ý tổng hai nghiệm của phương trình (1) nếu có là $t_1+t_2=\frac{5}{6}<1$. Suy ra điều kiện để phương trình (1) có hai nghiệm thoả điều kiện bài toán là:

$$\begin{cases}\Delta=25-24m>0\\ t_1.t_2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\frac{25}{24}\\ \frac{m}{6}>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<\frac{25}{24}$$

Câu 27: Chọn A

Điều kiện để mỗi phương trình có hai nghiệm thực phân biệt là $b^2>40a$

Khi đó $-\frac{b}{a}=\ln x_1+\ln x_2=\ln\left(x_1x_2\right)\to x_1x_2=e^{-\frac{b}{a}}$

Và $-\frac{b}{10}=\log x_3+\log x_4=\log\left(x_3x_4\right)\Rightarrow x_3x_4=10^{-\frac{b}{10}}$

Do đó ta có bpt $e^{-\frac{b}{a}}>10^{-\frac{b}{10}}\Leftrightarrow-\frac{b}{a}>-\frac{b}{10}\ln 10\Leftrightarrow a>\frac{10}{\ln 10}\approx 4,342$.

Suy ra $a\ge 5\to b^2>200\Rightarrow S\ge 10+45=55$

Vậy phương trình có 6 nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{11\pi}{4};\frac{7\pi}{2}\right]$.

Câu 28: Chọn C

Đặt $t=e^x$ ($t>0$), phương trình trở thành $t^2-10t+m=0$ (1).

Với $x_1<0<x_2\Rightarrow t_1<1<t_2$.

Để phương trình (1) có hai nghiệm thoả điều kiện đó thì:

$$\begin{cases}af(0)>0\\ af(1)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ m-9<0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<9$$

Câu 29: Chọn B

Đặt $t=2^x$, phương trình trở thành $t^3-3mt^2+3\left(m^2-1\right)t+3m-29=0$

Xét hàm số $y=t^3-3mt^2+3\left(m^2-1\right)t+3m-29$, $y'=3t^2-6mt+3\left(m^2-1\right)$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=m-1\\ t=m+1\end{array}\right.$$

Để $y=0$ có ba nghiệm phân biệt ta phải có điều kiện sau:

$$\begin{cases}y_{CD}.y_{CT}<0\\ x_{CD}>0\\ y(0)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y(m-1)y(m+1)<0\\ m-1>0\\ 3m-29>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1<m<\frac{29}{3}\\ \left(m^3-27\right)\left(m^3-31\right)<0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow 3<m<\sqrt[3]{31}$

Vậy $S=3+\sqrt[3]{31}$

Câu 30: Chọn C

Ta có: $9-2m=\log\left(x_1+1\right)+\log\left(x_2+1\right)=\log\left(x_1x_2+x_1+x_2+1\right)=\log 1000=3$

Suy ra $m=3$.

Thay vào phương trình thử lại ta được:

$$\log^2(x+1)-3\log(x+1)-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log(x+1)=5\\ \log(x+1)=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=99999\\ x=-\dfrac{99}{100}\end{array}\right.$$ thoả điều kiện bài toán.

Câu 31: Chọn D

$27^x-m3^{2x+1}+(m^2-1)3^{x+1}-(m^2-1)=0 \Leftrightarrow 3^{3x}-3m3^{2x}+3(m^2-1)3^x-(m^2-1)=0(*)$

Đặt $3^x=t(t>0)$.

Phương trình (*) có dạng $\Leftrightarrow t^3-3mt^2+3(m^2-1)t-(m^2-1)=0(**)$.

Phương trình (*) có ba nghiệm thực khi và chỉ khi phương trình (**) có ba nghiệm thực phân biệt lớn hơn 0.

Xét hàm số $f(t)=t^3-3mt^2+3(m^2-1)t-(m^2-1)$, $f'(t)=3t^2-6mt+3(m^2-1)$.

Ta có $f'(t)=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m và $t_1=m-1, t_2=m+1$ là hai nghiệm của phương trình.

Yêu cầu của bài toán tương đương với $\left\{\begin{array}{l}f(t_1)>0\\ f(t_2)<0\\ t_1>0\\ f(0)<0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}(m^2-3)(m-1)>0\\ (m^2-2m-1)(m+1)<0\\ m-1>0\\ -m^2+1<0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}<m<1+\sqrt{2}$.

Vậy

Câu 32: Chọn A

$8^x-m2^{2x+1}+(2m^2-1)2^x+m-m^3=0 \Leftrightarrow 8^x-2m2^{2x}+(2m^2-1)2^x+m-m^3=0(*)$.

Đặt $2^x=t(t>0)$.

Phương trình (*) có dạng $\Leftrightarrow t^3-2mt^2+(2m^2-1)t+m-m^3=0(**)$.

Phương trình (*) có ba nghiệm thực khi và chỉ khi phương trình (**) có ba nghiệm thực phân biệt lớn hơn 0.

$$t^3-2mt^2+(2m^2-1)t+m-m^3=0 \Leftrightarrow (t-m)(t^2-mt+m^2-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=m(1)\\ t^2-mt+m^2-1=0(2)\end{array}\right.$$

Yêu cầu bài toán tương đương với: $m>0$ và phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt khác m.

Hay $\left\{\begin{array}{l}m^2-m^2+m^2-1\neq 0\\ \Delta>0\\ S>0\\ P>0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}m\neq\pm1\\ -\dfrac{2}{\sqrt{3}}<m<\dfrac{2}{\sqrt{3}}\\ m>0\\ m^2-1>0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}m\neq\pm1\\ -\dfrac{2}{\sqrt{3}}<m<\dfrac{2}{\sqrt{3}}\\ m>0\\ \left[\begin{array}{l}m<-1\\ m>1\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow 1<m<\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Vậy để phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt thì $m\in\left(1;\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Câu 33: Chọn B

Đặt $t=\left(2+\sqrt{3}\right)^x \Rightarrow \left(2-\sqrt{3}\right)^x=\frac{1}{t}$ (Điều kiện: $t>0$).

Ta được phương trình: $t+\frac{1}{t}=2m-1 \quad (1)$. Xét hàm số $f(t)=t+\frac{1}{t}$ với $t>0$

$f'(t)=1-\frac{1}{t^2}=\frac{t^2-1}{t^2}$; $f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \ (nhan) \\ t=-1 \ (loai) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 2m-1>2 \Leftrightarrow m>\frac{3}{2}$.

Câu 34: Chọn B

Ta có: $\left(7-3\sqrt{5}\right)^{x^2}+m\left(7+3\sqrt{5}\right)^{x^2}=2^{x^2-1} \Leftrightarrow \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2}+m\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2}=\frac{1}{2}$.

Đặt: $t=\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2} \ (t\geq 1)$ phương trình trở thành :

$$\frac{1}{t}+mt=\frac{1}{2} \Leftrightarrow mt^2-\frac{1}{2}t+1=0 (1)$$

Với $t=1$ có duy nhất $x=0$; với $t>1$ có hai giá trị của x.

Yêu cầu bài toán tương đương với (1) :

$m=0 \Rightarrow t=2$ (thỏa mãn)

Phương trình có nghiệm kép lớn hơn $1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \Delta=\left(\frac{1}{2}\right)^2-4m=0 \\ t_0=\frac{1}{4m}>1 \end{array}\right. \Leftrightarrow m=\frac{1}{16}$.

Phương trình có hai nghiệm thỏa mãn

$t_1<1<t_2 \Leftrightarrow af(1)<0 \Leftrightarrow 1\left(m-\frac{1}{2}+1\right)<0 \Leftrightarrow m<-\frac{1}{2}$

Câu 35: Chọn B

Với $x>0$ thì $x=3^{\log_3 x}$. Khi đó:

$$\left(\sqrt{10}+1\right)^{\log_3 x}-\left(\sqrt{10}-1\right)^{\log_3 x}=mx \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{\log_3 x}-\left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^{\log_3 x}=m$$

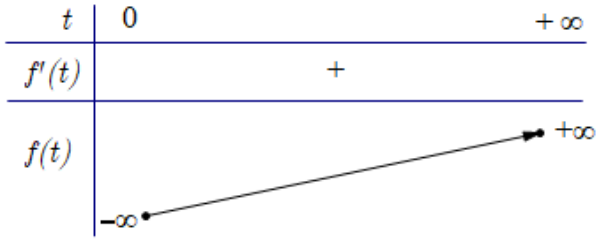
Đặt $t=\left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{\log_3 x} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^{\log_3 x}=\frac{1}{t}$ (Điều kiện: $t>0$). Ta được phương trình:

$$t-\frac{1}{t}=m\ (1).$$

Xét hàm số: $f(t)=t-\frac{1}{t}$ với $t>0$.

$f'(t)=1+\frac{1}{t^2}>0,\forall t>0$.

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y=m$ luôn cắt đồ thị hàm số $f(t)=t-\frac{1}{t}$ với $t>0$

$\Rightarrow$ Phương trình (1) luôn có nghiệm $t>0$ với mọi m $\Rightarrow$ Phương trình đã cho luôn có nghiệm dương với mọi m.

Câu 36: Chọn B

$16^x-2.12^x+(m-2)9^x=0\Leftrightarrow\left(\frac{4}{3}\right)^{2x}-2\left(\frac{4}{3}\right)^x+m-2=0$

Đặt $t=\left(\frac{4}{3}\right)^x, x>0\Rightarrow t>1$

Xét hàm số $y=t^2-2t+m-2, t>1\Rightarrow y'=2t-2>0$.

Hàm số luôn đồng biến nên $y>y(1)\Rightarrow y>m-3$.

Vậy phương trình có nghiệm dương $0>m-3\Leftrightarrow m<3\Rightarrow m=1\vee m=2$

Câu 37: Chọn A

$9^x+3^x+6=m(3^x+1)\Leftrightarrow\frac{9^x+3^x+6}{(3^x+1)}=m$. Xét hàm số $y=\frac{t^2+t+6}{t+1}, t=3^x>0$

Phương trình trình $9^x+3^x+6=m(3^x+1)$ có nghiệm thực phân biệt khi vào chỉ khi phương trình $\frac{t^2+t+6}{t+1}=m$ có 2 nghiệm dương phân biệt

$y'=\frac{t^2+2t-5}{(t+1)^2}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1+\sqrt{6}\\t=-1-\sqrt{6}\end{array}\right.$

x	0	$-1+\sqrt{6}$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$ 0 $+$	
$f(x)$		6 ↘ $-1+2\sqrt{6}$ ↗	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta có phương trình $9^x+3^x+6=m(3^x+1)$ có nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $-1+2\sqrt{6}<m<6$. Vậy $m=4\vee m=5$

Câu 38: Chọn A

Điều kiện để hai phương trình có nghiệm là $\Delta_1=(m+1)^2-4n\ge 0;\Delta_2=(n+1)^2-4m\ge 0$. Khi đó theo công thức nghiệm phương trình bậc hai ta có:

$$\begin{cases}\ln x_1=\dfrac{m+1\pm\sqrt{(m+1)^2-4n}}{2}\ge\dfrac{m+1-\sqrt{(m+1)^2-4n}}{2}\ge\dfrac{m+1-\sqrt{(m+1)^2}}{2}=0\\ \ln x_2=\dfrac{n+1\pm\sqrt{(n+1)^2-4m}}{2}\ge\dfrac{n+1-\sqrt{(m+1)^2-4n}}{2}\ge\dfrac{m+1-\sqrt{(m+1)^2}}{2}=0\end{cases},\forall m,n\ge 0$$

Do đó $2x_1+{x_2}^2\ge 2e^0+\left(e^0\right)^2=3$. Dấu bằng đạt $m=1=0$ và $x_1=x_2=1$.

Câu 39: Chọn A

Đặt $t=2^x\,(t>0)$,phương trình trở thành:

$$t^2+t+27=3^m(t+1)\Leftrightarrow t^2+\left(1-3^m\right)t+27-3^m=0$$

Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi phương trình cuối có hai nghiệm dương, tức là $\begin{cases}\Delta=\left(1-3^m\right)^2-4\left(27-3^m\right)>0\\ S=3^m-1>0\\ P=27-3^m>0\end{cases}\Leftrightarrow 6\sqrt{3}-1<3^m<27\Leftrightarrow\log_3\left(6\sqrt{3}-1\right)<m<3$.

Câu 40: Chọn C

Ta có: $\log^2|\cos x|-m\log\cos^2 x-m^2+4=0\Leftrightarrow\log^2|\cos x|-2m\log|\cos x|-m^2+4=0\ (1)$.

Đặt $t=\log|\cos x|.\Rightarrow t\in(-\infty;0]$ (1) trở thành: $t^2-2mt-m^2+4=0\ (2)$

Phương trình (1) vô nghiệm khi phương trình (2) xảy ra các trường hợp sau:

Trường hợp 1: phương trình (2) vô nghiệm, tức là $\Delta'=2m^2-4<0\Leftrightarrow m\in\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)(3)$

Trường hợp 2: phương trình (2) có 2 nghiệm $0<t_1\le t_2$ tức là:

$$\begin{cases}\Delta'\ge 0\\ a.f(0)>0\\ S>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m\ge\sqrt{2}\\ m\le-\sqrt{2}\end{array}\right.\\ -2<m<2\Leftrightarrow\sqrt{2}\le m<2\ (4)\\ m>0\end{cases}$$

Kết hợp $(3);(4)$ ta được $m\in\left(-\sqrt{2};2\right)$

Câu 41: Chọn A

Ta có: $4^x-m.2^{x+1}+2m^2-5=0\ (1)$. Đặt $t=2^x\Rightarrow t>0$

$(1)\Leftrightarrow t^2-2mt+2m^2-5=0\ (2)$.

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khi phương trình (2) có 2 nghiệm thỏa $0<t_1<t_2$ tức là:

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ a.f(0)>0\\ S>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2+5>0\\ 2m^2-5>0\\ m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\sqrt{5}<m<\sqrt{5}\\ \left[\begin{array}{l}m>\dfrac{\sqrt{10}}{2}\\ m<\dfrac{-\sqrt{10}}{2}\end{array}\right.\\ m>0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{10}}{2}<m<\sqrt{5}.$$ Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=2$.

Câu 42: Chọn A

Phương trình đã cho tương đương: $3^{2(x^2-2x+1)}-(2m+1)15^{x^2-2x+1}+(4m-2)5^{2(x^2-2x+1)}=0$

$\Leftrightarrow(\frac{3}{5})^{2(x^2-2x+1)}-(2m+1)(\frac{3}{5})^{x^2-2x+1}+4m-2=0\ (1)$. Đặt $t=\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2-2x+1}, 0<t\le 1.$

Khi đó phương trình trở thành: $t^2-(2m+1)t+4m-2=0\ (2)$

Ứng với một giá trị $t, 0<t<1$ ta tìm được hai giá trị của x.

Ta cần tìm m để (2) có một nghiệm $t, 0<t<1$.

Ta có $\Delta=(2m-3)^2\Rightarrow\Delta\ge 0$

Nếu $\Delta=0\Leftrightarrow m=\frac{3}{2}$, khi đó phương trình (2) có nghiệm $t=2(L)$.

Nếu $\Delta>0\Leftrightarrow m\ne\frac{3}{2}$, khi đó để phương trình (2) có nghiệm $0<t_1<1<t_2$ thì:

$$\begin{cases}af(0)>0\\ af(1)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4m-2>0\\ 2m-2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>\frac{1}{2}\\ m<1\end{cases}\Leftrightarrow m\in(\frac{1}{2};1).$$

Câu 43: Chọn B

Phương trình đã cho tương đương: $(\frac{3}{2})^{2(x^2-2x)}-(2m+1)(\frac{3}{2})^{x^2-2x}+m=0\ (1)$.

Vì x thuộc khoảng (0;2) nên: $-1\le x^2-2x<0$. Đặt $t=\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-2x}\ (\frac{2}{3}\le t<1).$

Khi đó phương trình trở thành: $t^2-(2m+1)t+m=0\ (2)$.

Phương trình (1) có nghiệm thuộc khoảng (0;2) khi phương trình (2) có nghiệm thuộc $t\in[\frac{2}{3};1).$

Vì $t\in[\frac{2}{3};1)$ nên $(2)\Leftrightarrow m(t^2-2t+1)-t=0\Leftrightarrow m=\frac{t}{(t-1)^2}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{t}{(t-1)^2}\ \ t\in[\frac{2}{3};1)\Rightarrow f'(t)=-\frac{1}{(t-1)^2}.\frac{2t+1}{t-1}>0,\forall t\in[\frac{2}{3};1)$.

Suy ra hàm số $f(t)=\frac{t}{(t-1)^2}$ đồng biến trên $(\frac{2}{3};1)\Rightarrow f(t)\ge f(\frac{2}{3})\Leftrightarrow f(t)\ge 6$.

Từ đó suy ra $m\ge 6$. Vậy có 2013 giá trị của tham số.

Câu 44: Chọn C

Xét phương trình $4^x - m.2^{x+1} + 3m - 3 = 0$ (1). Đặt $2^x = t$, điều kiện $t > 0$.

Khi đó phương trình theo t có dạng $t^2 - 2mt + 3m - 3 = 0$ (2)

Để phương trình (1) có hai nghiệm thực trái dấu thì phương trình (2) phải có hai nghiệm $t_1; t_2$ thỏa mãn $0 < t_1 < 1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 3 > 0 \\ 2m > 0 \\ 3m - 3 > 0 \\ t_1.t_2 - (t_1 + t_2) + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ 3m - 3 - 2m + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (1;2)$$

Vậy $m \in (1;2)$.

Câu 45: Chọn B

Xét phương trình $9^x - m.3^{x+1} + 3m^2 - 75 = 0$ (1)

Đặt $3^x = t$, điều kiện $t > 0$.

Khi đó phương trình theo t có dạng $t^2 - 3mt + 3m^2 - 75 = 0$ (2)

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì phương trình (2) phải có hai nghiệm $t_1; t_2$ thỏa mãn $0 < t_1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 - 4(3m^2 - 75) > 0 \\ 3m > 0 \\ 3m^2 - 75 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m^2 + 300 > 0 \\ m > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m < -5 \\ m > 5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-10;10) \\ m > 5 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (5;10)$$

Do m nguyên và $m \in (5;10)$ nên $S = \{6;7;8;9\}$. Vậy S có 4 phần tử.

Câu 46: Chọn A

Ta có: $9^x - 2m.6^x + m.4^x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 2m.\left(\frac{3}{2}\right)^x + m = 0$ (1).

Đặt $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t > 0$, phương trình trở thành $t^2 - 2m.t + m = 0$ (1).

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $0 < t_1 < 1 < t_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m > 0 \\ 2m > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow m > 0. \\ m > 0 \end{cases}$$

Áp dụng định lí Vi-et ta có: $\left(\frac{3}{2}\right)^{x_1}.\left(\frac{3}{2}\right)^{x_2} = m \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x_1+x_2} = m$

Theo đề bài ta có: $x_1 + x_2 = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x_1+x_2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}$

Thử lại ta được $m = \frac{9}{4}$ thỏa mãn.

Câu 47: Chọn B

Đặt $5^x = t > 0$, phương trình trở thành $t^2 - m.t + 2m - 5 = 0$ (1).

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $0 < t_1 < 1 < t_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(1) < 0 \\ f(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 4 < 0 \\ 2m - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m > \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{2} < m < 4.$$ Vậy $m \in \left(\frac{5}{2}; 4\right)$.

Câu 48: Chọn C

$9^{1-x} + 2(m-1)3^{1-x} + 1 = 0 \Leftrightarrow 9 + 6(m-1).3^x + 9^x = 0$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9(m-1)^2 - 9 > 0 \\ -6(m-1) > 0 \\ 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m > 0 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 2 \end{array}\right. \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0$$

Câu 49: Chọn C

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4(25 - m^2) > 0 \\ S = m > 0 \\ P = 25 - m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m^2 - 100 > 0 \\ m > 0 \\ -5 < m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -2\sqrt{5} \\ m > 2\sqrt{5} \end{array}\right. \\ m > 0 \\ -5 < m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow 2\sqrt{5} < m < 5$$

Câu 50: Chọn A

Ta có phương trình $\ln^2 x - (m+1)\ln x + n = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Delta > 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 4n > 0 (1)$

phương trình $\ln^2 x - (n+1)\ln x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Delta > 0 \Leftrightarrow (n+1)^2 - 4m > 0 (2)$

Khi đó $x_1 x_2 = (x_3 x_4)^2 \Leftrightarrow \ln x_1 + \ln x_2 = 2(\ln x_3 + \ln x_4) \Leftrightarrow m + 1 = 2(n+1) \Leftrightarrow m = 2n + 1$ nên $P = 2m + 3n = 7n + 2$

Từ $(1), (2) \Leftrightarrow \begin{cases} n^2 + n + 1 > 0 \\ n^2 - 6n - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n > 3 + 2\sqrt{3} \\ n < 3 - 2\sqrt{3} \end{array}\right. \xrightarrow{n>0, n\in\mathbb{Z}} n \geq 7$

Do đó $P \geq 51$. Vậy $P_{\min} = 51$

Câu 51: Chọn C

Ta có phương trình $\ln^2 x - m\ln x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m + 56 = (m-4)^2 + 40 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$

Khi đó $1 < x_1 x_2 < 81 \Leftrightarrow 0 < \ln(x_1 x_2) < \ln 81 \Leftrightarrow 0 < \ln x_1 + \ln x_2 < \ln 81 \Leftrightarrow 0 < m < \ln 81 \approx 4,4$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2; 3; 4\}$. Vậy có 4 giá trị cần tìm

Câu 52: Chọn C

Ta có: $2018\log_m x.\log_n x = 2017\log_m x + 2018\log_n x + 2019$

$\Leftrightarrow 2018\log_m x.\log_n m.\log_m x = 2017\log_m x + 2018.\log_n m.\log_m x + 2019$

$\Leftrightarrow 2018.\log_n m.\left(\log_m x\right)^2 - \left(2017 + 2018.\log_n m\right).\log_m x + 2019 = 0$

Gọi $x_1; x_2$ lần lượt là 2 nghiệm của phương trình ta có:

$$\log_m x_1 + \log_m x_2 = \frac{2017 + 2018.\log_n m}{2018\log_n m} \Leftrightarrow \log_m\left(x_1.x_2\right) = \frac{2017}{2018.\log_n m} + 1$$

$$\Leftrightarrow \log_m\left(x_1.x_2\right) = \frac{2017}{2018}.\log_m n + \log_m m \Leftrightarrow \log_m\left(x_1.x_2\right) = \log_m\left(n^{\frac{2017}{2018}}.m\right) \Rightarrow x_1.x_2 = n^{\frac{2017}{2018}}.m$$

Để $x_1.x_2$ nguyên và nhỏ nhất và m,n nguyên nhỏ nhất khác $1 \Rightarrow n^{\frac{2017}{2018}}; m$ nguyên và nhỏ nhất khác $1 \Rightarrow n = 2^{2018}$ và $m = 2 \Rightarrow m.n = 2^{2019}$

Câu 53: Chọn C

Đặt $t = \log_2 x, x \in [1;2] \to t \in [0;1]$

Phương trình đã cho trở thành: $a.t^2 + bt + c = 0$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0;1]$ nếu:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ a.f(0) \geq 0 \\ a.f(1) \leq 0 \\ 0 \leq \dfrac{S}{2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 4.a.c > 0 \\ ac \geq 0 \\ a(a+b+c) \geq 0 \\ 0 \leq -\dfrac{b}{a} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 4a.c > 0 \\ \dfrac{c}{a} \geq 0 \\ 1 + \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a} \geq 0 \\ -2 \leq \dfrac{b}{a} \leq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Do $\begin{cases} \dfrac{c}{a} \geq 0 \\ 1 + \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{b}{a} \geq -1 \ (2)$. Từ (1) và $(2) \Rightarrow -1 \leq \dfrac{b}{a} \leq 0$

Mà $P = \dfrac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)} = \dfrac{\left(1-\dfrac{b}{a}\right)\left(2-\dfrac{b}{a}\right)}{1-\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}} \leq \dfrac{\left(1-\dfrac{b}{a}\right)\left(2-\dfrac{b}{a}\right)}{1-\dfrac{b}{a}}$

Đặt $u = \dfrac{b}{a} \to u \in [-1;0] \Rightarrow P \leq \dfrac{(1-u)(2-u)}{1-u} = 2-u \Rightarrow P \leq 3$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} u = -1 \\ \dfrac{c}{a} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{b}{a} = -1 \\ \dfrac{c}{a} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = 0 \end{cases}$

Câu 54: Chọn D

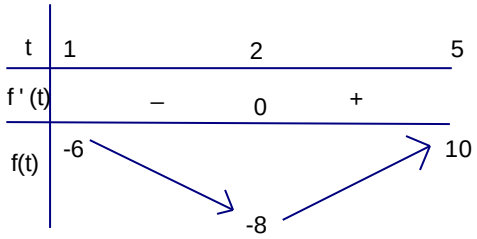
Xét phương trình $2e^{2x} - 8e^x - m = 0, (1)$. Đặt $t = e^x, x \in (0;\ln 5) \Rightarrow t \in (1;5)$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow 2t^2 - 8t - m = 0 \Leftrightarrow m = 2t^2 - 8t, (2)$.

Xét hàm số $f(t) = 2t^2 - 8t, t \in (1;5)$.

Ta có $f'(t)=4t-8; f'(t)=0 \Leftrightarrow 4t-8=0 \Leftrightarrow t=2$.

Bảng biến thiên



Phương trình (1) có hai nghiệm thuộc khoảng $(0;\ln 5)$ khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm thuộc khoảng $(1;5)$. Dựa vào BBT ta thấy $m \in (-8;-6)$.

Câu 55: Chọn B

Xét phương trình $4\log_{25}^2 x - m\log_5 \frac{x}{5} - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\log_{25}^2 x - m\log_5 x + m - 1, (x>0)$. Đặt $t = \log_5 x$

Phương trình đã cho trở thành $4t^2 - mt + m - 1 = 0, (*)$. Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 16(m-1) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 16m + 16 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 8-4\sqrt{3} \\ m > 8+4\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Ta có $t_1 = \log_5 x_1 \Rightarrow x_1 = 5^{t_1}; t_2 = \log_5 x_2 \Rightarrow x_2 = 5^{t_2}$. Khi đó $x_1.x_2 = 5^{t_1+t_2} = 5^{\frac{m}{4}}$.

Theo đề ra ta có

$x_1x_2 - 50\sqrt{x_1x_2} + 625 \le 0 \Leftrightarrow 5^{\frac{m}{4}} - 50\sqrt{5^{\frac{m}{4}}} + 625 \le 0 \Leftrightarrow \sqrt{5^{\frac{m}{4}}} = 25 \Leftrightarrow 5^{\frac{m}{4}} = 5^4 \Leftrightarrow m = 16 (TM)$

Câu 56: Chọn B

Vì 3 số $5^{x+1} + 5^{1-x}, \frac{a}{2}$ và $25^x + 25^{-x}$ theo thứ tự đó lập thành 1 cấp số cộng nên:

$$\Rightarrow \frac{5^{x+1} + 5^{1-x} + 25^x + 25^{-x}}{2} = \frac{a}{2} \Leftrightarrow 5.5^x + \frac{5}{5^x} + 5^{2x} + \frac{1}{5^{2x}} = a \Leftrightarrow 5\left(5^x + \frac{1}{5^x}\right) + \left(5^x + \frac{1}{5^x}\right)^2 - 2 = a (*)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có nghiệm.

Đặt $t = 5^x + \frac{1}{5^x}$, $t \ge 2$, phương trình $(*)$ trở thành: $t^2 + 5t - 2 = a$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + 5t - 2$ với $t \ge 2$ có $f'(t) = 2t + 5$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-5}{2}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$\frac{-5}{2}$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$			12	$+\infty$

Dựa vào bảng xét dấu phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow a \geq 12$. Mà $a \in [0;2020]$ nên $a \in [12;2020]$

Vậy số giá trị nguyên của a là $2020-12+1=2009$.

Câu 57: Chọn D

Ta có: $\left(2+\sqrt{3}\right)^x+(1-2a)\left(2-\sqrt{3}\right)^x-4=0 \Leftrightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^x+(1-2a)\dfrac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^x}-4=0\ (*)$

Và $x_1-x_2=\log_{2+\sqrt{3}}3 \Leftrightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^{x_1-x_2}=3 \Leftrightarrow \dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)^{x_1}}{\left(2+\sqrt{3}\right)^{x_2}}=3 \Leftrightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^{x_1}=3\left(2+\sqrt{3}\right)^{x_2}$.

Đặt $t=\left(2+\sqrt{3}\right)^x$, $t \geq 0$.

Phương trình $(*)$ trở thành: $t+(1-2a)\dfrac{1}{t}-4=0 \Leftrightarrow t^2-4t+(1-2a)=0, t>0\ (1)$.

Ta lại có: $\Leftrightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^{x_1}=3\left(2+\sqrt{3}\right)^{x_2} \Rightarrow t_1=3t_2$.

YCBT trở thành Phương trình (1) có 2 nghiệm dương phân biệt thỏa mãn $t_1=3t_2$.

Phương trình (1) có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4(1-2a)>0\\ 4>0\\ 1-2a>0\end{cases} \Leftrightarrow -2<a<\dfrac{1}{2}.(*)$

Áp dụng hệ thức vi-et cho (1) ta được: $\begin{cases}t_1+t_2=4\\ t_1t_2=1-2a\\ t_1=3t_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t_1=3\\ t_2=1\\ t_1t_2=1-2a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t_1=3\\ t_2=1\\ 1.3=1-2a\end{cases} \Leftrightarrow a=-1$.

Ta thấy $a=-1$ thỏa mãn điều kiện $(*)$.

Câu 58: Chọn B

Với điều kiện $x>-1$, ta biến đổi phương trình (1) tương đương với:

$$\left[\ln(x+1)+1\right].\left[m\ln(x+1)-(x+2)\right]=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\ln(x+1)+1=0 & (a)\\ m\ln(x+1)-(x+2)=0 & (b)\end{bmatrix}$$

Phương trình $(a) \Leftrightarrow \ln(x+1)=-1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{e}-1<0$ (loại).

Phương trình $(b) \Leftrightarrow m\ln(x+1)=x+2$. Vì $m=0$ không thỏa mãn phương trình nên:

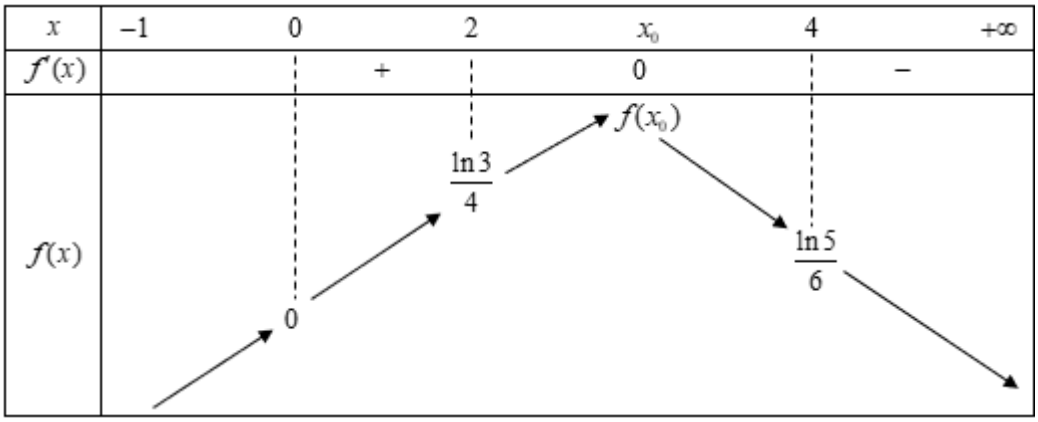
$$(b) \Leftrightarrow \frac{\ln(x+1)}{x+2}=\frac{1}{m}\ (*)$$

Khi đó, YCBT trở thành phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $0<x_1<2<4<x_2$

Đặt $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x+2}$, $x>-1$. Khi đó: $f'(x)=\dfrac{\dfrac{x+2}{x+1}-\ln(x+1)}{(x+2)^2}$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{x+1}=\ln(x+1)$

Vì vế trái là hàm nghịch biến và vế phải là hàm đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$ nên phương trình có tối đa 1 nghiệm. Mặt khác, $f'(2)>0,\ f'(3)<0$ nên phương trình $f'(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x_0\in(2;3)$.

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta suy ra phương trình (*) **có** hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $0<x_1<2<4<x_2$ khi và chỉ khi $f(0)<\dfrac{1}{m}<f(4)\Leftrightarrow 0<\dfrac{1}{m}<\dfrac{\ln 5}{6}\Leftrightarrow m>\dfrac{6}{\ln 5}\approx 3{,}72$.

Vậy $a\approx 3{,}72\in(3{,}7;3{,}8)$.

Câu 59: Chọn A

Với điều kiện $x>0$ và đặt ẩn phụ $\ln x=t,\ t\in\mathbb{R}$, phương trình đã cho trở thành:

$t^4+at^3+bt^2+ct+4=0$ (*)

Vì phương trình đã cho luôn có ít nhất một nghiệm thực nên phương trình (*) cũng có ít nhất một nghiệm thực. Giả sử t_0 là một nghiệm của phương trình (*). Khi đó:

$t_0{}^4+at_0{}^3+bt_0{}^2+ct_0+4=0\Leftrightarrow at_0{}^3+bt_0{}^2+ct_0=-\left(t_0{}^4+4\right)$

Áp dụng bất đẳng thức bunhiacopski, ta được:

$$\left(4a^2+4b^2+c^2\right)\left(\frac{t_0^6}{4}+\frac{t_0^4}{4}+t_0^2\right)\geq\left(at_0{}^3+bt_0{}^2+ct_0\right)^2=\left(t_0{}^4+4\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 4a^2+4b^2+c^2\geq\frac{\left(t_0{}^4+4\right)^2}{\frac{t_0^6}{4}+\frac{t_0^4}{4}+t_0^2}=\frac{4\left(t_0{}^4+4\right)^2}{t_0^6+t_0^4+4t_0^2}$$

Do đó: $P=20a^2+20b^2+5c^2=5\left(4a^2+4b^2+c^2\right)\geq\dfrac{20\left(t_0{}^4+4\right)^2}{t_0^6+t_0^4+4t_0^2}$

Đặt $t_0^2=u,\ u>0$ thì $P\geq 20.\dfrac{\left(u^2+4\right)^2}{u^3+u^2+4u}=20.f(u)$

Ta có: $f'(u)=\dfrac{4u\left(u^2+4\right)\left(u^3+u^2+4u\right)-\left(u^2+4\right)^2\left(3u^2+2u+4\right)}{\left(u^3+u^2+4u\right)^2}=\dfrac{\left(u^2+2u+4\right)\left(u^2+4\right)(u-2)}{\left(u^3+u^2+4u\right)^2}$

$f'(u)=0\Leftrightarrow u=2$. Bảng biến thiên:

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

u	0		2		$+\infty$
$f'(u)$		$-$	0	$+$	
$f(u)$	$+\infty$	↘	$\frac{16}{5}$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $f(u)\ge\frac{16}{5}$. Vậy $P\ge 20.f(u)\ge 20.\frac{16}{5}=64.$

Câu 60: Chọn B

Đặt $t=\log_2 x$, $x\in[2;4)\Leftrightarrow t\in[1;2)$

Bất phương trình đã cho trở thành $t^2-(2m+5)t+m^2+5m+4<0\Leftrightarrow m+1<t<m+4\quad(1)$

Vậy bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in[2;4)$ khi và chỉ khi (1) nghiệm đúng với mọi $t\in[1;2)\Leftrightarrow m+1<1<2\le m+4\Leftrightarrow m\in[-2;0)$.

Câu 61: Chọn D

Đặt $t=e^x$, $x<\frac{1}{\log e}\Leftrightarrow 0<t<10$

Phương trình đã cho trở thành $f(t)=t^2-2mt+m^2-m=0\quad(1)$

Phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn $\frac{1}{\log e}$ khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;10)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=m>0\\ 1.f(0)=m^2-m>0\\ 1.f(10)=m^2-21m+100>0\\ 0<\frac{S}{2}=m<10\end{cases}\Leftrightarrow m\in\left(1;\frac{21-\sqrt{41}}{2}\right).$$

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên ta có $m\in\{2;3;4;5;6;7\}$. Vậy $T=27$.

PHƯƠNG TRÌNH MŨ – LOGARIT CHỨA THAM SỐ 02

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $9^x-8.3^x+m-4=0$ có 2 nghiệm phân biệt?

A. 17. **B.** 16. **C.** 15. **D.** 14.

Câu 2: Gọi m_0 là giá trị thực nhỏ nhất của tham số m sao cho phương trình $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}^2(x-2)-(m-5)\log_{\frac{1}{2}}(x-2)+m-1=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(2;4)$. Hỏi mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $m_0\in\left(-5;-\frac{5}{2}\right)$. **B.** $m_0\in\left(-1;\frac{4}{3}\right)$. **C.** $m_0\in\left(2;\frac{10}{3}\right)$. **D.** $m_0\in(4;6)$.

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $9^x+(1-3m).3^x-2-6m>0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

A. $m<\frac{1}{3}$. **B.** Không tồn tại m. **C.** $m\neq 2$. **D.** $m\le -\frac{1}{3}$.

Câu 4: Cho phương trình $\log_5^3 x-(3m-3)\log_5^2 x+(9m-16)\log_5 x-6m+12=0$ (m là tham số thực). Giá trị $m=\frac{a}{b}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1+x_2+x_3=\frac{151}{5}$. Khi đó $a+b$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(3;5)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(7;10)$. **D.** $(5;7)$.

Câu 5: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất cặp $(x;y)$ thỏa mãn các điều kiện $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4)=1$ và $x^2+y^2+2x-2y+2-m=0$. Tổng các giá trị của S bằng

A. 33. **B.** 24. **C.** 15. **D.** 5.

Câu 6: Biết m_0 là giá trị duy nhất của tham số m để phương trình $2^{x^2}\cdot 3^{mx-1}=6$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1+x_2=\log_2 81$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $m_0\in(-7;-2)$. **B.** $m_0\in(-2;5)$. **C.** $m_0\in(6;7)$. **D.** $m_0\in(5;6)$.

Câu 7: Phương trình $4^x-m.2^{x+1}+2m=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1+x_2=3$ khi:

A. $m=4$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=3$.

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\log_3^2 3x+\log_3 x+m-1=0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;1)$.

A. $m>\frac{9}{4}$. **B.** $0<m<\frac{1}{4}$. **C.** $0<m<\frac{9}{4}$. **D.** $m>-\frac{9}{4}$.

Câu 9: Cho phương trình $\log_3^2 x+\sqrt{\log_3^2 x+1}-2m-3=0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$ là

A. $(-1;1)$. **B.** $[-1;1]$. **C.** $[-1;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 10: Cho phương trình $4\log_2^2\sqrt{x}+(m-3)\log_2 x+2-m=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $[1;8]$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 11: Tìm các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_{0,02}\left(\log_2\left(3^x+1\right)\right)>\log_{0,02} m$ có nghiệm với mọi $x\in(-\infty;0)$.

A. $m>9$. **B.** $m<2$. **C.** $0<m<1$. **D.** $m\geq 1$.

Câu 12: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4^x-3.2^{x+1}+m=0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1+x_2<2$.

A. $m<9$. **B.** $0<m<4$. **C.** $0<m<2$. **D.** $m>0$.

Câu 13: Có bao nhiêu giá trị nguyên của x trong đoạn $[-2020;2020]$ thỏa mãn bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^x.3>3^x.\sqrt{3}$.

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 2021. **D.** 2022.

Câu 14: Cho phương trình $m16^{\log_2 x}-2(m-1)x^{\log_2 4}-2=0\ (1)$. Tập hợp các giá trị của tham số m thuộc đoạn $[-1;2]$ để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

A. $(-1;2)$. **B.** $[-1;0)$. **C.** $[1;2)$. **D.** $[-1;0]$.

Câu 15: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_{2+\sqrt{3}}\left(x^2+mx+m-1\right)+\log_{2-\sqrt{3}} x=0$ có nghiệm duy nhất.

A. $m>-5$. **B.** $m<-2$. **C.** $m>-3$. **D.** $m<1$

Câu 16: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2^{2x-1}-m.2^x+2m-2=0$ có hai nghiệm thực phân biệt trong đoạn $[1;2]$.

A. $m\in(2;3]$. **B.** $m\in(2;3)$. **C.** $m\in[2;4]$. **D.** $m\in[2;3)$.

Câu 17: Với giá trị nào của tham số m để phương trình $9^x-2m.3^x+2m+3=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1+x_2-3=0$

A. $m=\frac{3}{2}$. **B.** $m=12$. **C.** $m=0$. **D.** $m=\frac{13}{2}$.

Câu 18: Biết phương trình $\ln^2 x-(m+2)\ln x+2m=0$ có hai nghiệm phân biệt, với m là tham số. Khi đó tổng các nghiệm của phương trình bằng:

A. e^2+m. **B.** $2+m$. **C.** $e+e^m$. **D.** e^2+e^m.

Câu 19: Tìm m để phương trình $\log_2^2 x-\log_2 x^2+3-2m=0$ có nghiệm $x\in[1;8]$

A. $2\leq m\leq 3$. **B.** $1\leq m\leq\frac{3}{2}$. **C.** $2\leq m\leq 6$. **D.** $1\leq m\leq 3$.

Câu 20: Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-10;10]$ để bất phương trình $4^x+2^x-m\geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in[1;2]$

A. 17. **B.** 0. **C.** 21. **D.** 5.

Câu 21: Giá trị thực của tham số m để phương trình $9^x-2(2m+1).3^x+3(4m-1)=0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1+2)(x_2+2)=12$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(3;9)$. **B.** $(9;+\infty)$. **C.** $\left(\frac{1}{4};3\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{2};2\right)$

Câu 22: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất cặp $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4)=1$ và $x^2+y^2+2x-2y+2-m=0$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 33. **B.** 24. **C.** 15. **D.** 5.

Câu 23: Cho phương trình $m.2^{x^2-5x+6}+2^{1-x^2}=2.2^{6-5x}+m$ với m là tham số thực. Có tất cả bao nhiêu giá trị của m để phương trình có đúng ba nghiệm phân biệt.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 24: Cho phương trình $e^{m.\sin x-\cos x}-e^{2(1-\cos x)}=2-\cos x-m.\sin x$ với m là tham số thực. Tìm số giá trị nguyên của $m\in[-2019;2020)$ để phương trình có nghiệm.

A. 0. **B.** 3. **C.** 2019. **D.** 4037.

Câu 25: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{|x^2-4x+3|}=m^4-m^2+1$ có 4 nghiệm phân biệt?

A. $0<|m|<1$. **B.** $|m|<1$. **C.** $m>-1$. **D.** $m<0$.

Câu 26: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-10;10)$ để phương trình $\frac{1}{2}x^2-\ln x-m=0$ có nghiệm?

A. 18. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 12.

Câu 27: Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x-2^{x+2}+5+m=0$ có nghiệm duy nhất thuộc khoảng $(0;2]$.

A. -13. **B.** -15. **C.** -12. **D.** -14.

Câu 28: Tìm tập hợp tất cả giá trị của tham số m để phương trình $\log^2_{\sqrt{3}}(x-1)-m.\log_3(x-1)^2+1=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(2;+\infty)$.

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 29: Cho phương trình $\log_3{}^2x+(3m-1)\log_{\frac{1}{3}}x-6m-2=0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[\frac{1}{9};3\right]$ là

A. $(-1;0)$. **B.** $[-1;0]$. **C.** $(-1;0]$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 30: Cho phương trình $e^{3x}-(m-3)e^{2x}-2e^{x}+2m-6=0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0;\ln 3]$ là

A. $(4;6)\setminus\{3+\sqrt{2}\}$. **B.** $[4;6]\setminus\{3+\sqrt{2}\}$. **C.** $[4;6]$. **D.** $(6;+\infty)$.

Câu 31: Cho phương trình $\log_3^2 x-(m+5)\log_3 x+2m+6=0$ (với m là tham số). Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1;81]$:

A. 81. **B.** 80. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 32: Cho phương trình $4^{x}-(2m-5).2^{x}+m^2-5m=0$ (1) (với m là tham số). Tổng tất cả các giá trị nguyên của m thuộc $[-19;19]$ để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thuộc $(-2;4]$ là

A. 121. **B.** 9. **C.** 175. **D.** 4.

Câu 33: Tổng tất cả các giá trị của tham số m để $25^{x}-(m+1).5^{x}+m=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=4$ bằng

A. $\frac{626}{25}$. **B.** 0. **C.** $\frac{26}{25}$. **D.** $\frac{26}{5}$.

Câu 34: Với giá trị nào của m thì phương trình: $\log_3^2 x-(m+2).\log_3 x+3m-1=0$ có hai ngiệm x_1,x_2 thỏa mãn $x_1.x_2=27$?

A. $m=1$. **B.** $m=\frac{28}{3}$. **C.** $m=\frac{4}{3}$. **D.** $m=25$.

Câu 35: Số các giá trị nguyên của m để phương trình $4^{1+x}+4^{1-x}=(m+1)\left(2^{2+x}-2^{2-x}\right)+16-8m$ có nghiệm trên đoạn $[0;1]$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** vô số.

Câu 36: Cho phương trình $(m-1)\log_{\frac{1}{3}}^2(x+1)^2+4(m-5)\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{x+1}+4m-4=0$ (1). Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên âm để phương trình (1) có nghiệm thực trong đoạn $\left[-\frac{2}{3};2\right]$?

A. 6. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 37: Cho phương trình $9^{x}-(m+2)3^{x}+2m+9=0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1;2]$ là

A. $\left[\frac{72}{7};12\right]$. **B.** $\left(8;\frac{72}{7}\right]$. **C.** $(8;+\infty)$. **D.** $(8;12]$.

Câu 38: Cho phương trình $3\log_{\frac{1}{2}}^2(2x)-(4+m)\log_2 x+4+m=0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[\frac{1}{32};1\right]$ là

A. $[-7;-4)$. **B.** $(-7;-4]$. **C.** $(-\infty;-4)$. **D.** $[-12;-4]$.

Câu 39: Cho phương trình $\log_3^2 x+\sqrt{\log_3^2 x+1}-2m-1=0\ (*)$,($m$ là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $(*)$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left[1;3^{\sqrt{15}}\right]$.

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 40: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3^{2x}+(-2m-1).3^x+6m-6=0$ có hai nghiệm thực phân biệt trong đoạn $[1;3]$.

A. 12. **B.** 13. **C.** 14. **D.** 15.

Câu 41: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $\log_3^2 x-3\log_3 x+2m-7=0$ có hai nghiệm thực phân biệt $x_1;x_2$ thỏa mãn $(x_1-3)(x_2-3)=-9$.

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 42: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-20;20)$ để phương trình $2^{x-1}=\log_4(x+2m)+m$ có nghiệm?

A. 19. **B.** 18. **C.** 20. **D.** 17.

Câu 43: Cho phương trình $\log_2^2 x-(m+1)\log_2 x+m=0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1;8]$ là

A. $(0;3)$. **B.** $[0;3]$. **C.** $[0;3]\setminus\{1\}$. **D.** $[0;3]\setminus\{2\}$.

Câu 44: Cho phương trình $\log_3^2 x-(2m+3)\log_3 x+m^2+3m+2=0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1;9]$ là

A. $(-1;1)$. **B.** $[-1;1]$. **C.** $[-2;2]$. **D.** $(-2;2)$.

Câu 45: Cho bất phương trình $25^x+15^x-2.9^x\le m.3^x\left(5^x-3^x\right)$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x thuộc đoạn $[0;1]$ là

A. $m\le\frac{11}{2}$. **B.** $m>\frac{11}{2}$. **C.** $m<\frac{11}{3}$. **D.** $m\ge\frac{11}{3}$.

Câu 46: Tìm m để phương trình: $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}^2(x-4)-(2m+1)\log_{\frac{1}{2}}(x-4)+m+2=0(1)$ có 2 nghiệm $x_{1,}x_2$ thuộc khoảng $(4;6)$

A. $m\le\frac{1}{2}$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m<-\frac{1}{2}\\ m>1\end{array}\right.$. **C.** $m<\frac{1}{3}$. **D.** $m\ge\frac{11}{3}$.

Câu 47: Cho phương trình $4\log^2_9(3x)+(\mathrm{m}-1)\log_3(9x)-\mathrm{m}+2=0$(m tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc $\left[\frac{1}{3};9\right]$.

A. 2 **B. 3** **C.** 4 **D.** 5

Câu 48: Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\log_3^2 x-\log_3 x^2-m+2=0$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1;27]$.

A. $m \in (1;2]$. **B.** $m \in [1;2]$. **C.** $m \in (1;2)$. **D.** $m \in (1;+\infty)$.

Câu 49: Tìm m để phương trình $\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 3 = m$ có nghiệm $x \in [1;\ 8]$.

A. $2 \le m \le 6$. **B.** $2 \le m \le 3$. **C.** $3 \le m \le 6$. **D.** $6 \le m \le 9$.

Câu 50: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4^{x+1} - 2^{x+2} + m = 0$ có nghiệm.

A. $m \le 0$. **B.** $m \ge 0$. **C.** $m \le 1$. **D.** $m \ge 1$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1C	2A	3D	4C	5B	6A	7A	8C	9B	10C
11D	12B	13C	14B	15D	16A	17B	18D	19D	20A
21C	22B	23C	24D	25A	26B	27B	28C	29C	30B
31D	32A	33A	34A	35C	36D	37B	38A	39C	40A
41D	42A	43C	44B	45D	46B	47B	48A	49A	50C

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **Chọn C**

Xét phương trình $9^x - 8.3^x + m - 4 = 0\,(1)$

Đặt $t = 3^x\,(t > 0)$, phương trình (1) trở thành: $t^2 - 8.t + m - 4 = 0 \Leftrightarrow -m = t^2 - 8t - 4\,(2)$

Ứng với mỗi $t > 0$ sẽ có 1 giá trị x.

Phương trình (1) có 2 nghiệm x phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 8t - 4$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có: $f'(t) = 2t - 8$. Cho $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$

Bảng biến thiên:

t	0		4		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	-4	↘	-20	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có: Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow -20 < -m < -4 \Leftrightarrow 4 < m < 20$, mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{5;6;7;...;19\}$

Vậy có 15 giá trị nguyên của tham số m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2: **Chọn A**

Xét phương trình $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}^2(x-2) - (m-5)\log_{\frac{1}{2}}(x-2) + m - 1 = 0\,(1)$

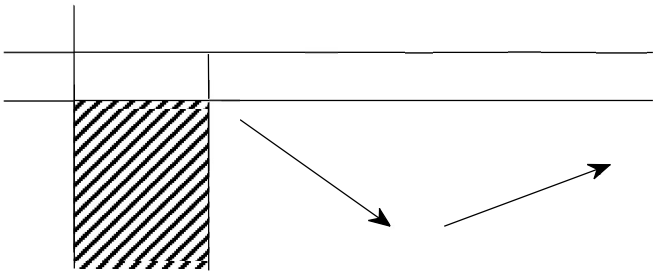
Đặt $t = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$, do $2 < x < 4 \Rightarrow 0 < x - 2 < 2 \Rightarrow t > -1$.

Phương trình trở thành $(m-1)t^2 - (m-5)t + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1}\,(2)$

Phương trình (1) có nghiệm thuộc khoảng $(2;4) \Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm thuộc khoảng $(-1;+\infty)$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1}$ với $t > -1$. Ta có: $f'(t) = \dfrac{4t^2 - 4}{(t^2 - t + 1)^2}$. Cho $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình (1) có nghiệm thuộc khoảng $(2;4)$

$\Leftrightarrow -3 \le m < \frac{7}{3}$. Suy ra $m_0 = -3 \in \left(-5;-\frac{5}{2}\right)$.

Câu 3: **Chọn C**

Ta có $9^x + (1-3m).3^x - 2 - 6m > 0 \Leftrightarrow (3^x + 2)(3^x - 3m - 1) > 0 \Leftrightarrow 3^x - 3m - 1 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{3^x - 1}{3}$, vì

$3^x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Xét hàm số $g(x) = \frac{3^x - 1}{3}$ trên $\mathbb{R}$.

$g'(x) = \frac{3^x \ln 3}{3} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số $g(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\frac{1}{3}$

Do đó $9^x + (1-3m).3^x - 2 - 6m > 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R} \Leftrightarrow m < \frac{3^x - 1}{3}$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow m \le -\frac{1}{3}$

Câu 4: **Chọn C**

Ta có: $\log_5^3 x - (3m-3)\log_5^2 x + (9m-16)\log_5 x - 6m + 12 = 0$ $(*)$. Điều kiện $x > 0$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow (\log_5 x - 1)(\log_5 x - 2)(\log_5 x - 3m + 6) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5 x = 1 \\ \log_5 x = 2 \\ \log_5 x = 3m - 6 \end{array}\right.$.

Ta có $\log_5 x = 1 \Leftrightarrow x = 5$; $\log_5 x = 2 \Leftrightarrow x = 25$.

Do đó $(*)$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{151}{5}$.

$\Leftrightarrow \log_5 x = 3m - 6$ có nghiệm $x = \frac{151}{5} - 5 - 25 = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5^{3m-6} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 3m - 6 = -1 \Leftrightarrow m = \frac{5}{3}$.

Suy ra $a = 5; b = 3 \Rightarrow a + b = 8 \in (7;10)$.

Câu 5: **Chọn B**

Điều kiện: $4x + 4y - 4 > 0$

Ta có $\begin{cases} \log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4) = 1 \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất $(x;y)$.

Với $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0$ là phương trình đường tròn tâm $A(2;2)$, bán kính $R_1 = \sqrt{2}$.

Với $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0$ là phương trình đường tròn tâm $B(-1;1)$, bán kính $R_2 = \sqrt{m}$ với $m > 0$.

Hai đường tròn có điểm chung duy nhất khi xảy ra các trường hợp sau:

Hai đường tròn tiếp xúc ngoài $AB = R_1 + R_2 \Leftrightarrow \sqrt{m} + \sqrt{2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow m = (\sqrt{10} - \sqrt{2})^2$.

Hai đường tròn tiếp xúc trong $AB = |R_1 - R_2| \Leftrightarrow \sqrt{m} - \sqrt{2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow m = (\sqrt{10} + \sqrt{2})^2$.

Vậy tổng các giá trị của tham số $m = (\sqrt{10} - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{10} + \sqrt{2})^2 = 24$.

Câu 6: Chọn A

Ta có $2^{x^2} \cdot 3^{mx-1} = 6 \Leftrightarrow 2^{x^2-1} \cdot 3^{mx-2} = 1$

Lấy logarit cơ số 2 của hai vế của phương trình ta có:

$x^2 - 1 + (mx - 2)\log_2 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + m\log_2 3.x - 2\log_2 3 - 1 = 0$.

Phương trinh có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 + x_2 = \log_2 81$ khi và chỉ khi

$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 = \log_2 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 \cdot \log_2^2 3 + 8\log_2 3 + 4 > 0 \\ -m\log_2 3 = \log_2 81 \end{cases} \Leftrightarrow m = -4$. Vậy $m_0 \in (-7;-2)$.

Câu 7: Chọn A

Đặt $t = 2^x, t > 0$, phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2mt + 2m = 0 (1)$

Để phương trình $4^x - m.2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì phương trình (1) phải có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-m)^2 - 2m > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 2 \end{array}\right. \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$ Ta có: $x_1 + x_2 = 3 \Leftrightarrow \log_2 t_1 + \log_2 t_2 = 3 \Leftrightarrow \log_2 t_1.t_2 = 3 \Leftrightarrow t_1.t_2 = 8 \Leftrightarrow 2m = 8 \Leftrightarrow m = 4$.

Câu 8: ChọnC

Ta có: $\log_3^2 3x + \log_3 x + m - 1 = 0 \Leftrightarrow (\log_3 x + 1)^2 + \log_3 x + m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \log_3^2 x + 2\log_3 x + 1 + \log_3 x + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x + 3\log_3 x + m = 0 (1)$

Đặt $t = \log_3 x$ với $x \in (0;1)$ thì $t < 0$

Phương trình (1) trở thành $t^2 + 3t + m = 0 (2)$. Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;1)$ thì phương trình (2) có hai nghiệm âm phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 4m > 0 \\ -\dfrac{3}{2} < 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{9}{4} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \dfrac{9}{4}$.

Câu 9: Chọn B

Ta có: $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 3 = 0$ (1). Điều kiện $x > 0$. Đặt $t = \sqrt{\log_3^2 x + 1} (t \geq 1)$

Ta có $t^2 - 1 + t - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 2m - 4 = 0$ (2)

Với $x \in \left[1; 3^{\sqrt{3}}\right] \Leftrightarrow 0 \leq \log_3 x \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow 1 \leq t = \sqrt{\log_3^2 x + 1} \leq 2$.

Để (1) có nghiệm thuộc đoạ $\left[1; 3^{\sqrt{3}}\right]$ khi và chỉ khi $t^2 + t - 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t = 2m + 4$ (2) có nghiệm thuộc đoạn $[1;2]$.

Xét $f(t) = t^2 + t$ với $\forall t \in [1;2]$. Hàm số $f(t)$ đồng biến trên đoạn $[1;2]$

Ta có $f(1) = 2, f(2) = 6$. Phương trình (2) có nghiệm thuộc đoạn $[1;2]$ khi và chỉ khi

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

$\begin{cases} f(1) \le 2m+4 \\ f(2) \ge 2m+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le 2m+4 \\ 6 \ge 2m+4 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le m \le 1$

Vậy với $-1 \le m \le 1$ thì phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$.

Câu 10: Chọn C

Điều kiện: $x > 0$.

Ta có $4\log_2^2 \sqrt{x} + (m-3)\log_2 x + 2 - m = 0 \Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right)^2 + (m-3)\log_2 x + 2 - m = 0$

$\Leftrightarrow \log_2^2 x + (m-3)\log_2 x + 2 - m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = 2-m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ \log_2 x = 2-m \ (1) \end{array}\right.$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $[1;8]$ khi và chỉ khi (1) có một nghiệm thuộc đoạn $[1;8]\setminus\{2\}$ tức $\begin{cases} 0 \le 2-m \le 3 \\ 2-m \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le m \le 2 \\ m \ne 1 \end{cases}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 11: Chọn D

Ta có: $\log_{0,02}\left(\log_2\left(3^x+1\right)\right) > \log_{0,02} m$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Điều kiện tham số m: $m > 0$

Ta có: $\log_{0,02}\left(\log_2\left(3^x+1\right)\right) > \log_{0,02} m \Leftrightarrow \log_2\left(3^x+1\right) < m$

Xét hàm số $f(x) = \log_2\left(3^x+1\right)$, $\forall x \in (-\infty;0)$ có $f'(x) = \frac{3^x.\ln 3}{\left(3^x+1\right)\ln 2} > 0$, $\forall x \in (-\infty;0)$

Bảng biến thiên $f(x)$

x	$-\infty$		0
f'		$+$	
f	0	$\nearrow$	1

Khi đó với yêu cầu bài toán thì $m \ge 1$.

Câu 12: Chọn B

Đặt $t = 2^x$, $(t > 0)$. Phương trình trở thành $t^2 - 6t + m = 0$ (1).

Yêu cầu bài toán trở thành: Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm t_1, t_2 dương thỏa mãn $\log_2 t_1 + \log_2 t_2 < 2 \Leftrightarrow t_1 t_2 < 4$. Ta được $\begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \\ P < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 9-m \ge 0 \\ 6 > 0 \\ m > 0 \\ m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 4$.

Câu 13: Chọn C

Bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^x .3 > 3^x.\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{3^x} > \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < \frac{1}{4}$

Vì x nguyên và thuộc đoạn $\left[-2020;2020\right]$ nên $x\in\left\{-2020;-2019;...;-1;0\right\}$.

Vậy có tất cả 2021 giá trị thỏa mãn.

Câu 14: Chọn B

Điều kiện: $x>0$

Với $x>0$ ta có $x^{\log_2 4}=4^{\log_2 x}$ do đó phương trình đã cho tương đương với phương trình $m.16^{\log_2 x}-2\left(m-1\right)4^{\log_2 x}-2=0$.

Đặt $t=4^{\log_2 x}\ \left(t>0\right)$

Khi đó phương trình $\left(1\right)$ trở thành $mt^2-2\left(m-1\right)t-2=0\ \left(*\right)$.

Phương trình $\left(1\right)$ có 2 nghiệm x phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $\left(*\right)$ có 2 nghiệm $t>0$ phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ \Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ m^2+1>0,\forall m\\ \dfrac{2\left(m-1\right)}{m}>0\\ \dfrac{-2}{m}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ \left[\begin{array}{l}m<0\\ m>1\end{array}\right.\\ m<0\end{cases}\Leftrightarrow m<0$$

Mà m thuộc $\left[-1;2\right]$ do đó các giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán thuộc $\left[-1;0\right)$.

Câu 15: Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases}x>0\\ x^2+mx+m-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \left(x+m-1\right).\left(x+1\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x>1-m\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\ m\geq 1\end{cases}\\ \begin{cases}x>1-m\\ m<1\end{cases}\end{array}\right.$.

Có: $\log_{2+\sqrt{3}}\left(x^2+mx+m-1\right)+\log_{2-\sqrt{3}}x=0\Leftrightarrow\log_{2+\sqrt{3}}\left(x^2+mx+m-1\right)+\log_{2+\sqrt{3}}\dfrac{1}{x}=0$.

$\Leftrightarrow\dfrac{x^2+mx+m-1}{x}=1\Leftrightarrow m=\dfrac{1+x-x^2}{x+1}$. Đặt $f\left(x\right)=\dfrac{1+x-x^2}{x+1}$.

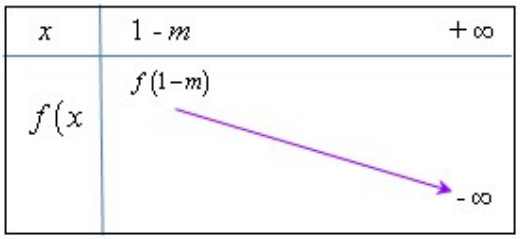
$\Rightarrow f'\left(x\right)=-\dfrac{x\left(x+2\right)}{\left(x+1\right)^2}<0$ với $x>0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=-\infty$.

Trường hợp 1: $x>0\ \left(m\geq 1\right)$

x	0	$+\infty$
$f(x$	1	$-\infty$

Để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất thì: $\begin{cases}m\geq 1\\ m<f(0)=1\end{cases}$ (Vô nghiệm).

Trường hợp 2: $x>1-m\ \left(m<1\right)$



Để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất thì:

$$\begin{cases} m<1 \\ m<f(1-m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ m<\dfrac{m^2-m-1}{m-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ \dfrac{1-m}{m-2}<0 \end{cases} \Leftrightarrow m<1.$$

Vậy tất cả các giá trị thực của tham số m cần tìm là: $m<1$.

Câu 16: Chọn A

$2^{2x-1}-m.2^x+2m-2=0 \Leftrightarrow 2^{2x}-2m.2^x+4m-4=0$.

Đặt $t=2^x$, $t>0$. Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$t^2-2mt+4m-4=0 \Leftrightarrow (t-2)(t-2m+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=2m-2 \quad (**) \end{array}\right. \quad (*).$$

Yêu cầu bài toán tương đương với $(**)$ phải có một nghiệm thuộc $(2;4]$

$\Leftrightarrow 2<2m-2\le 4 \Leftrightarrow 2<m\le 3$.

Câu 17: Chọn B

Ta có: $9^x-2m.3^x+2m+3=0$ (1).

Đặt $t=3^x$ $(t>0)$, khi đó phương trình (1) trở thành: $t^2-2m.t+2m+3=0$ (2) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm $t_1;t_2$ dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ S>0 \\ P>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-2m-3>0 \\ 2m>0 \\ 2m+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow m>3$.

Theo định lý Viet ta có $\begin{cases} t_1+t_2=2m \\ t_1.t_2=2m+3 \end{cases}$

Với $t=3^x$ ta có: $\begin{cases} t_1=3^{x_1} \\ t_2=3^{x_2} \end{cases} \Rightarrow t_1.t_2=3^{x_1}.3^{x_2} \Leftrightarrow 2m+3=3^{x_1+x_2} \Leftrightarrow 27=2m+3 \Leftrightarrow m=12$ (thỏa mãn).

Câu 18: Chọn D

Điều kiện: $x>0$.

Đặt $t=\ln x$, phương trình đã cho trở thành: $t^2-(m+2)t+2m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=m,(m\ne 2) \end{array}\right.$.

Với $t=2\Rightarrow \ln x=2\Rightarrow x=e^2$.

Với $t=m\Rightarrow \ln x=m\Rightarrow x=e^m$.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình bằng e^2+e^m.

Câu 19: Chọn D

Điều kiện: $x>0$

$\log_2^2 x-\log_2 x^2+3-2m=0\Leftrightarrow \log_2^2-2\log_2 x+3=2m$ (1)

Đặt $\log_2 x=t, x\in[1;8]\Rightarrow t\in[0;3]$. Khi đó phương trình (1) trở thành:

$t^2-2t+3=2m$ với $t\in[0;3]$. Xét $f(t)=t^2-2t+3$ có $f'(t)=2t-2; f'(t)=0\Leftrightarrow t=1$.

Bảng biến thiên

t	0		1		3
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	3	↘	2	↗	6

Để phương trình có nghiệm $x\in[1;8]$ thì $2\le 2m\le 6\Leftrightarrow 1\le m\le 3$.

Câu 20: Chọn A

Đặt $2^x=t, t>0$. Bất phương trình trở thành: $t^2+t-m\ge 0\Leftrightarrow t^2+t\ge m$ ($1\,x\in[1;2]\Rightarrow t\in[2;4]$.

Xét $f(t)=t^2+t$ với $t\in[2;4]$.

$f'(t)=2t+1; f'(t)=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{2}\notin[2;4]$.

$f(2)=6; f(4)=20\Rightarrow \min\limits_{[2;4]}(f)=6$.

$(1)\Leftrightarrow m\le f(t)$, với $t\in[2;4]$.

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in[1;2]\Leftrightarrow m\le \min\limits_{[2;4]} f(t)\Leftrightarrow m\le 6$.

Vì $m\in[-10;10]\Rightarrow$ có 17 giá trị cần tìm.

Câu 21: Chọn C

Xét phương trình $9^x-2(2m+1).3^x+3(4m-1)=0$ (1)

Đặt $t=3^x, t>0$, khi đó phương trình đã cho trở thành

$t^2-2(2m+1)t+3(4m-1)=0$ (2)

Để phương trình (1) có 2 nghiệm thực thì phương trình (2) có hai nghiệm dương

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=(2m+1)^2-3(4m-1)>0\\ t_1+t_2=\dfrac{2(2m+1)}{2}>0\\ t_1t_2=\dfrac{3(4m-1)}{2}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\in\mathbb{R}\\ m>-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow m>\dfrac{1}{4}\ (*)\\ m>\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

Phương trình có 2 nghiệm $\begin{bmatrix}t_1=2m+1+2(m-1)=4m-1\\ t_2=2m+1-2(m-1)=3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_1=\log_3(4m-1)\\ x_2=1\end{bmatrix}$

Theo bài ra ta có: $(x_1+2)(x_2+2)=12\Leftrightarrow[\log_3(4m-1)+2]\cdot 3=12\Leftrightarrow \log_3(4m-1)+2=4$

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

$\Leftrightarrow \log_3(4m-1)=2 \Leftrightarrow 4m-1=9 \Leftrightarrow 4m=10 \Leftrightarrow m=\frac{5}{2}(tm)$. Vậy $m=\frac{5}{2}$

Câu 22: Chọn B

Điều kiện: $x+y-1>0$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2-4x-4y+6=0 \\ x^2+y^2+2x-2y+2-m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2+(y-2)^2=2 \\ (x+1)^2+(y-1)^2=m \end{cases} (*)$.

Trường hợp 1: $m\le 0$. Khi đó $(*)$ vô nghiệm.

Trường hợp 2: $m>0$

Trong mặt phẳng Oxy, xét hai đường tròn có phương trình:

$(C_1):(x-2)^2+(y-2)^2=2, (C_2):(x+1)^2+(y-1)^2=m(m>0)$

(C_1) có tâm $I_1(2;2)$, bán kính $R=\sqrt{2}$, (C_2) có tâm $I_2(-1;1)$ có bán kính $R=\sqrt{m}$

$(*)$ có nghiệm duy nhất khi (C_1) tiếp xúc với (C_2), xảy ra khi

$$\left[\begin{array}{l} I_1I_2=R_1+R_2 \\ I_1I_2=|R_1-R_2| \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{10}=\sqrt{2}+\sqrt{m} \\ \sqrt{10}=\sqrt{2}-\sqrt{m} \\ \sqrt{10}=\sqrt{m}-\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{m}=\sqrt{10}-\sqrt{2} \\ \sqrt{m}=\sqrt{10}+\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=12-4\sqrt{5} \\ m=12+4\sqrt{5} \end{array}\right.$$

Phương trình đường thẳng I_1I_2 là: $x-3y+4=0$.

Tọa độ giao điểm của I_1I_2 và đường tròn (C_1) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-3y+4=0 \\ (x-2)^2+(y-2)^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{10+3\sqrt{5}}{5} \\ y=\frac{10+\sqrt{5}}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{10-3\sqrt{5}}{5} \\ y=\frac{10-\sqrt{5}}{5} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow M_1\left(\frac{10+3\sqrt{5}}{5};\frac{10+\sqrt{5}}{5}\right); M_2\left(\frac{10-3\sqrt{5}}{5};\frac{10-\sqrt{5}}{5}\right)$$

Với $m=12+4\sqrt{5}$, ta có $M_1=(C_1)\cap(C_2)$. Tọa độ của M_1 thỏa mãn điều kiện $x+y-1>0$

Với $m=12-4\sqrt{5}$, ta có $M_2=(C_1)\cap(C_2)$. Tọa độ của M_2 thỏa mãn điều kiện $x+y-1>0$

Vậy $m=12+4\sqrt{5}$ hoặc $m=12-4\sqrt{5}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 23: Chọn C

Ta có $m.2^{x^2-5x+6}+2^{1-x^2}=2.2^{6-5x}+m \Leftrightarrow m.2^{x^2-5x+6}+2^{1-x^2}=2^{7-5x}+m$

$\Leftrightarrow m\left(2^{x^2-5x+6}-1\right)+2^{1-x^2}\left(1-2^{x^2-5x+6}\right)=0 \Leftrightarrow \left(2^{x^2-5x+6}-1\right)\left(m-2^{1-x^2}\right)=0.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x^2-5x+6}-1=0 \\ 2^{1-x^2}=m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \\ 2^{1-x^2}=m\ (*) \end{array}\right.$$

Yêu cầu bài toán tương đương với

Trường hợp 1: Phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $(x=0)$, suy ra $m=2$.

Trường hợp 2: Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm là 2 và nghiệm còn lại khác 3, khi đó $m=2^{-3}$.

Trường hợp 3: Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm là 3 và nghiệm còn lại khác 2, khi đó $m=2^{-8}$. Vậy có tất cả ba giá trị m thỏa mãn.

Câu 24: Chọn D

Phương trình $\Leftrightarrow e^{m\sin x-\cos x}+m\sin x-\cos x=e^{2-2\cos x}+2-2\cos x.\ (*)$

Xét hàm số $f(t)=e^t+t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=e^t+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó: $f(m\sin x-\cos x)=f(2-2\cos x)$

$\Leftrightarrow m\sin x-\cos x=2-2\cos x \Leftrightarrow m\sin x+\cos x=2$

Suy ra phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m^2+1\ge 4\Leftrightarrow m^2\ge 3\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge\sqrt{3} \\ m\le-\sqrt{3}\end{array}\right.$.

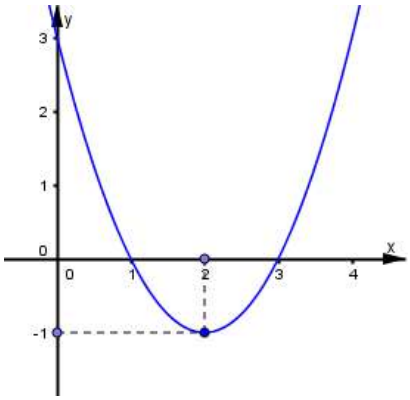
Vậy có 4037 giá trị nguyên của m thoả mãn.

Câu 25: Chọn A

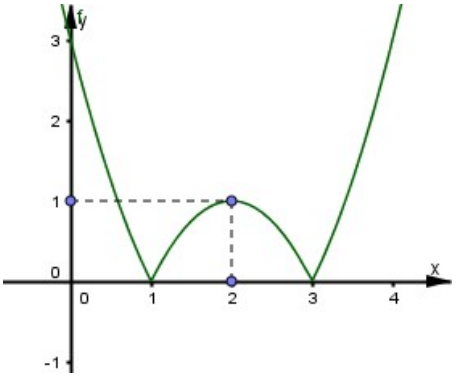
Vì $m^4-m^2+1>0,\forall m$ nên phương trình tương đương với

$|x^2-4x+3|=\log_{\frac{1}{5}}(m^4-m^2+1)$ (1)

Vẽ đồ thị hàm số bậc hai $y=x^2-4x+3$



Từ đó suy ra đồ thị hàm số $y=|x^2-4x+3|$



Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0<\log_{\frac{1}{5}}(m^4-m^2+1)<1\Leftrightarrow\frac{1}{5}<m^4-m^2+1<1\Leftrightarrow 0<|m|<1$.

Câu 26: Chọn B

Điều kiện xác định $x>0$

Ta có: $\frac{1}{2}x^2-\ln x-m=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}x^2-\ln x=m$

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x, x>0$ có $f'(x)=x-\frac{1}{x}$

Giải phương tình $f'(x)=0\Leftrightarrow x-\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow x^2-1=0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x=1$

Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình có nghiệm khi $m\ge\frac{1}{2}$.

Mà $m\in\mathbb{Z}, m\in(-10;10)\Rightarrow m\in\{1;2;3...;9\}$. Có 9 giá trị của m

Câu 27: Chọn B

Xét phương trình $4^x-2^{x+2}+5+m=0$, $x\in(0;2]$. Đặt $t=2^x>0$.

Phương trình trở thành: $t^2-4t+5+m=0$, $t\in(1;4]\Leftrightarrow -t^2+4t-5=m$, $t\in(1;4]$ $(*)$

Xét hàm số $f(t)=-t^2+4t-5$ với $t\in(1;4]\Rightarrow f'(t)=-2t+4=0\Leftrightarrow t=2$.

Ta có bảng biến thiên:

t	1		2		4
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5

Dựa vào bảng biến thiên và $(*)$, yêu cầu đề bài $\Leftrightarrow m\in[-5;-2]\cup\{-1\}$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-5;-4;-3;-2;-1\}$. Vậy tổng: $S=-15$.

Câu 28: Chọn C

Xét trên khoảng $(2;+\infty)$ có:

$\log^2_{\sqrt{3}}(x-1)-m.\log_3(x-1)^2+1=0\Leftrightarrow 4\log^2_3(x-1)-2m.\log_3(x-1)+1=0$ $(*)$

Với $x\in(2;+\infty)\Rightarrow\log_3(x-1)\in(0;+\infty)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ PT$(*)$ có hai nghiệm $\log_3(x-1)$ dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=4>0 \\ \Delta'=m^2-4>0 \\ S=\dfrac{m}{2}>0 \\ P=\dfrac{1}{4}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right. \\ m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m>2 \text{. Vậy } m\in(2;+\infty).$$

Câu 29: Chọn C

Điều kiện: $x>0$.

$\log_{3^2} x+(3m-1)\log_{\frac{1}{3}} x-6m-2=0 \Leftrightarrow \log_{3^2} x-(3m-1)\log_3 x-6m-2=0$

$\Leftrightarrow \log_{3^2} x-(3m+1)\log_3 x+2\log_3 x-6m-2=0 \Leftrightarrow (\log_3 x+2)(\log_3 x-3m-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x=-2 \\ \log_3 x=3m+1 \end{array}\right.$

Ta có: $x\in\left[\dfrac{1}{9};3\right] \Leftrightarrow \log_3 x\in[-2;1]$.

Vậy để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[\dfrac{1}{9};3\right]$ khi và chỉ khi $-2<3m+1\le 1 \Leftrightarrow -1<m\le 0$.

Câu 30: Chọn B

Ta có $e^{3x}-(m-3)e^{2x}-2e^x+2m-6=0 \Leftrightarrow (e^{3x}-2e^x)-\left[(m-3)e^{2x}-2(m-3)\right]=0$

$\Leftrightarrow (e^{2x}-2)(e^x-m+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} e^{2x}=2 \\ e^x-m+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}\ln 2 \\ e^x=m-3 \end{array}\right.$

Ta có: $x\in[0;\ln 3] \Leftrightarrow e^x\in[1;3]$.

Vậy để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0;\ln 3]$ khi và chỉ khi $\begin{cases} 1\le m-3\le 3 \\ m-3\ne\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\le m\le 6 \\ m\ne 3+\sqrt{2} \end{cases}$.

Câu 31: Chọn D

Đặt $\log_3 x=t$, phương trình đã cho trở thành

$t^2-(m+5).t+2m+6=0 \Leftrightarrow t^2-\left(2+(m+3)\right).t+2.(m+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=m+3 \end{array}\right.$

Với $t=2 \Rightarrow \log_3 x=2 \Leftrightarrow x=9\in[1;81]$.

Nhận thấy $x\in[1;81]\setminus\{9\} \Leftrightarrow \log_3 x\in[0;4]\setminus\{2\}$, nên phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1;81]$ khi và chỉ khi

$m+3\in[0;4]\setminus\{2\} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le m+3\le 4 \\ m+3\ne 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\le m\le 1 \\ m\ne -1 \end{cases}$

Mà $m\in\mathbb{Z}$, suy ra $m\in\{-3;-2;0;1\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thuộc $[1;81]$.

Câu 32: Chọn A

Đặt $2^x = t, t > 0$. Phương trình (1) trở thành

$$t^2 - (2m-5)t + m^2 - 5m = 0 \Leftrightarrow t^2 - \left[m + (m-5)\right]t + m(m-5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = m \\ t = m-5 \end{array}\right. (2)$$

Nhận xét, với mỗi $t > 0$ sẽ cho 1 giá trị x và ngược lại mỗi giá trị x cho 1 giá trị $t > 0$.

Để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt thuộc $(-2;4] \Leftrightarrow$ Phương trình (2) có 2 nghiệm

$t \in \left(2^{-2}; 2^4\right] \Leftrightarrow \begin{cases} m - 5 > \dfrac{1}{4} \\ m \le 16 \end{cases} \Leftrightarrow 5{,}25 < m \le 16$; mà $m \in \mathbb{Z} \cap [-19;19]$ nên suy ra

$m \in \{6;7;8;9;11;12;13;14;15;16\}$. Tổng các giá trị là $\sum_{X=6}^{16} X = 121$.

Câu 33: Chọn A

Ta có $25^x - (m+1).5^x + m = 0$ (1). $\Leftrightarrow (5^x - 1).(5^x - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^x = 1 \\ 5^x = m \end{array}\right.$.

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì $m > 0$ và $m \neq 1$.

Khi đó hai nghiệm x_1, x_2 của (1) là: $\left[\begin{array}{l} 5^{x_1} = 1 \\ 5^{x_2} = m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = \log_5 m \end{array}\right.$.

Theo bài ra ta có: $x_1^2 + x_2^2 = 4 \Leftrightarrow 0^2 + \left(\log_5 m\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5 m = 2 \\ \log_5 m = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 25 \\ m = \dfrac{1}{25} \end{array}\right.$.

Tổng tất cả các giá trị của tham số m là: $25 + \dfrac{1}{25} = \dfrac{626}{25}$.

Câu 34: Chọn A

Điều kiện: $x > 0$. Giả sử phương trình có hai nghiệm x_1, x_2.

Theo Viet, ta có: $\log_3 x_1 + \log_3 x_2 = m + 2 \Leftrightarrow \log_3\left(x_1.x_2\right) = m + 2 \Leftrightarrow \log_3 27 = m + 2$

$\Leftrightarrow 3 = m + 2 \Leftrightarrow m = 1$.

Thử lại với $m = 1$ ta có: $\log_3^2 x - 3.\log_3 x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 9 \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Câu 35: Chọn C

Ta có $4^{1+x} + 4^{1-x} = (m+1)\left(2^{2+x} - 2^{2-x}\right) + 16 - 8m \Leftrightarrow 4^x + \dfrac{1}{4^x} = (m+1)\left(2^x - \dfrac{1}{2^x}\right) + 4 - 2m$.

Đặt $t = 2^x - \dfrac{1}{2^x}$, $t \in \left[0; \dfrac{3}{2}\right]$, $t^2 = 4^x + \dfrac{1}{4^x} - 2$.

Phương trình viết lại:

$$t^2 + 2 = (m+1)t + 4 - 2m \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = mt - 2m \Leftrightarrow (t-2)(t+1-m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \notin \left[0; \dfrac{3}{2}\right] \\ t = m - 1 \end{array}\right.$$

Do đó để phương trình có nghiệm $x \in [0;1]$ thì $m - 1 \in \left[0; \dfrac{3}{2}\right] \Leftrightarrow m \in \left[1; \dfrac{5}{2}\right]$, có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 36: Chọn D

Trên đoạn $\left[-\frac{2}{3};2\right]$ thì phương trình luôn xác định.

Với m nguyên âm ta có $m\neq 1$, do đó

$(1)\Leftrightarrow 4(m-1)\log_{\frac{1}{3}}^2(x+1)-4(m-5)\log_{\frac{1}{3}}(x+1)+4m-4=0$

$\Leftrightarrow (m-1)\log_{\frac{1}{3}}^2(x+1)-(m-5)\log_{\frac{1}{3}}(x+1)+m-1=0$

Đặt $t=\log_{\frac{1}{3}}(x+1)$, với $x\in\left[-\frac{2}{3};2\right]$ thì $-1\le t\le 1$.

Ta có phương trình: $(m-1)t^2-(m-5)t+m-1=0\Leftrightarrow m(t^2-t+1)=t^2-5t+1$

$\Leftrightarrow m=\frac{t^2-5t+1}{t^2-t+1}\ (2)$

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2-5t+1}{t^2-t+1}$ với $-1\le t\le 1$.

Ta có $f'(t)=\frac{4t^2-4}{(t^2-t+1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-1\end{array}\right.$.

$f(-1)=\frac{7}{3}$, $f(1)=-3$

Do đó $\min\limits_{[-1;1]}f(t)=-3$ và $\max\limits_{[-1;1]}f(t)=\frac{7}{3}$.

Phương trình đã cho có nghiệm thực trong đoạn $\left[-\frac{2}{3};2\right]$ khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $t\in[-1;1]\Leftrightarrow\min\limits_{[-1;1]}f(t)\le m\le\max\limits_{[-1;1]}f(t)\Leftrightarrow -3\le m\le\frac{7}{3}$.

Như vậy, các giá trị nguyên âm m để phương trình (1) có nghiệm thực trong đoạn $\left[-\frac{2}{3};2\right]$ là $\{-3;-2;-1\}$.

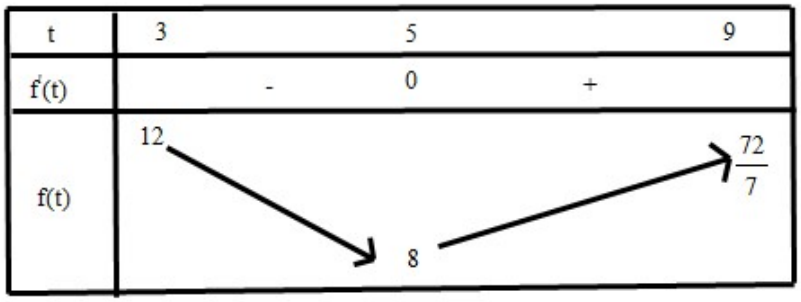
Câu 37: Chọn B

Đặt $t=3^x$. Do $x\in[1;2]\Rightarrow t\in[3;9]$

Phương trình trên trở thành $t^2-(m+2)t+2m+9=0\Leftrightarrow m=\frac{t^2-2t+9}{t-2}$

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2-2t+9}{t-2}$ có $f'(t)=\frac{t^2-4t-5}{(t-2)^2}\Rightarrow f'(t)=0\Rightarrow t^2-4t-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=5\\t=-1\end{array}\right.$

Bảng biến thiên



Yêu cầu bài toán nghĩa là tìm m để phương trình $m=\dfrac{t^2-2t+9}{t-2}$ có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[3;9\right]$. Từ bảng biến thiên ta có $m\in\left(8;\dfrac{72}{7}\right]$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 38: Chọn A

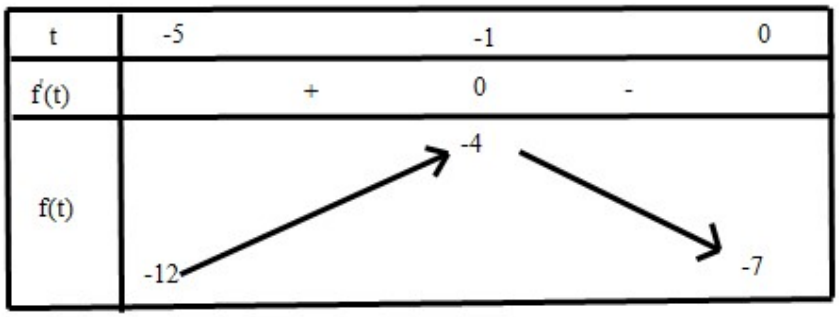
Phương trình $3\log_{\frac{1}{2}}^2(2x)-(4+m)\log_2 x+4+m=0\Leftrightarrow 3\log_2^2 x+(2-m)\log_2 x+7+m=0$

Đặt $t=\log_2 x$. Do $x\in\left[\dfrac{1}{32};1\right]\Rightarrow t\in\left[-5;0\right]$

Phương trình trên trở thành $3t^2+(2-m)t+m+7=0\Leftrightarrow m=\dfrac{3t^2+2t+7}{t-1}$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{3t^2+2t+7}{t-1}$ có $f'(t)=\dfrac{3t^2-6t-9}{(t-1)^2}\Rightarrow f'(t)=0\Rightarrow 3t^2-6t-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=-1\end{array}\right.$

Bảng biến thiên



Yêu cầu bài toán nghĩa là tìm m để phương trình $m=\dfrac{3t^2+2t+7}{t-1}$ có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-5;0\right]$. Từ bảng biến thiên ta có $m\in\left[-7;4\right)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 39: Chọn C

$\log_3^2 x+\sqrt{\log_3^2 x+1}-2m-1=0\ (*)$

Điều kiện: $x>0$. Đặt $t=\sqrt{\log_3^2 x+1}\geq 1$,

ta có $t^2+t-2m-2=0\Leftrightarrow t^2+t=2m+2\quad(1)$ với $x\in\left[1;3^{\sqrt{15}}\right]\Rightarrow t\in\left[1;4\right]$

Vậy phương trình $(*)$ có nghiệm thuộc $\left[1;3^{\sqrt{15}}\right]\Leftrightarrow(1)$ có nghiệm thuộc $\left[1;4\right]$.

Đặt $f(t)=t^2+t$.

Ta có bảng biến thiên sau

t	1		4
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	2	↗	20

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $2 \le 2m+2 \le 20 \Leftrightarrow 0 \le m \le 9$

Vậy $m \in \{1;2;...8;9\}$

Câu 40: Chọn A

Đặt $t = 3^x$, $t > 0$, với $x \in [1;3] \Rightarrow t \in [3;27]$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$t^2 + (-2m-1)t + 6m - 6 = 0 \Leftrightarrow (t-3)(t-2m+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = 2m-2 \end{array}\right.$$

Yêu cầu bài toán ta có

$\Leftrightarrow 3 < 2m-2 \le 27 \Leftrightarrow \dfrac{5}{2} < m \le \dfrac{29}{2}$. Vậy $m \in \{3;4;...13;14\}$

Câu 41: Chọn D

$\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2m - 7 = 0\ (1)$. Điều kiện: $x > 0$

Đặt $t = \log_3 x \Leftrightarrow x = 3^t$ thì phương trình tương đương $t^2 - 3t + 2m - 7 = 0 (2)$

(1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 9 - 4(2m-7) > 0 \Leftrightarrow 8m < 37 \Leftrightarrow m < \dfrac{37}{8}$.

Giả sử (2) có 2 nghiệm $t_1 = \log_3 x_1, t_2 = \log_3 x_2$ khi đó $x_1 x_2 = 3^{(t_1+t_2)} = 27$.

Suy ra $(x_1 - 3)(x_2 - 3) = -9 \Leftrightarrow x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2) = -9 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 12$.

Vậy x_1, x_2 là 2 nghiệm phương trình $x^2 - 12x + 27 = 0 \Leftrightarrow x = 9 \vee x = 3$

Với $x = 9$ suy ra $\log_3^2 9 - 3\log_3 9 + 2m - 7 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{9}{2}$ (thỏa).

Với $x = 3$ suy ra $\log_3^2 3 - 3\log_3 3 + 2m - 7 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{9}{2}$ (thỏa).

Vậy $m = \dfrac{9}{2}$.

Câu 42: Chọn A

Điều kiện: $x + 2m > 0$. Ta có $2^{x-1} = \log_4(x+2m) + m \Leftrightarrow 2^x = \log_2(x+2m) + 2m$

Đặt $t = \log_2(x+2m)$ ta có $\begin{cases} 2^x = t + 2m \\ 2^t = x + 2m \end{cases} \Rightarrow 2^x + x = 2^t + t \quad (1)$

Do hàm số $f(u) = 2^u + u$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên ta có $(1) \Leftrightarrow t = x$.

Khi đó $2^x = x + 2m \Leftrightarrow 2m = 2^x - x$ (thỏa điều kiện).

Xét hàm số $g(x) = 2^x - x \Rightarrow g'(x) = 2^x \ln 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\log_2(\ln 2)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\log_2(\ln 2)$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(-\log_2(\ln 2))$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $2m \ge g\left(-\log_2(\ln 2)\right) \Leftrightarrow m \ge \dfrac{g\left(-\log_2(\ln 2)\right)}{2}$

$\approx 0,457$. Vậy $m \in \{1;2;...;19\}$.

Câu 43: Chọn C

Phương trình: $\log_2^2 x-(m+1)\log_2 x+m=0 \Leftrightarrow (\log_2 x-1)(\log_2 x-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x=1\\ \log_2 x=m\end{array}\right.$.

Ta có: $\log_2 x-1=0 \Leftrightarrow x=2$ (thỏa mãn).

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m\ne 1 \\ m\in[0;3] \end{cases}$ (do $x\in[1;8] \Rightarrow m=\log_2 x\in[0;3]$)

Câu 44: Chọn B

Phương trình:

$\log_3^2 x-(2m+3)\log_3 x+m^2+3m+2=0 \Leftrightarrow (\log_3 x-m-1)(\log_3 x-m-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x=m+1\\ \log_3 x=m+2\end{array}\right.$

Do $x\in[1;9] \Rightarrow \log_3 x\in[0;2]$ nên yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m+1\ne m+2 \\ m+1\in[0;3] \\ m+2\in[0;3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\in[-1;2] \\ m\in[-2;1] \end{cases}$

$\Leftrightarrow m\in[-1;1]$

Câu 45: Chọn D

Chia hai vế của bất phương trình cho 3^{2x} ($3^x>0$), ta được $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{2x}+(1-m)\left(\dfrac{5}{3}\right)^{x}+m-2\le 0$

Đặt $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{x}=t$.

Với $x\in[0;1] \Rightarrow t\in\left[1;\dfrac{5}{3}\right]$, ta có bất phương trình bậc hai $t^2+(1-m)t+m-2\le 0$

Bài toán trở thành tìm m để bất phương trình: $t^2+(1-m)t+m-2\le 0$, $\forall t\in\left[1;\dfrac{5}{3}\right]$

$t^2+(1-m)t+m-2\le 0,\forall t\in\left[1;\dfrac{5}{3}\right] \Leftrightarrow (t-1)(t+2-m)\le 0,\forall t\in\left[1;\dfrac{5}{3}\right] (*)$

Vì $t-1\ge 0,\forall t\in\left[1;\dfrac{5}{3}\right]$, nên $(*) \Leftrightarrow t+2-m\le 0,\forall t\in\left[1;\dfrac{5}{3}\right] \Leftrightarrow \dfrac{5}{3}+2-m\le 0 \Leftrightarrow m\ge \dfrac{11}{3}$

Câu 46: Chọn B

Đặt: $t=\log_{\frac{1}{2}}\left(x-4\right)$

Điều kiện: $4<x<6\Leftrightarrow 0<x-4<2\Leftrightarrow t=\log_{\frac{1}{2}}\left(x-4\right)>\log_{\frac{1}{2}}2=-1$

$\left(1\right)\Leftrightarrow f\left(t\right)=\left(m-1\right).t^2-\left(2m+1\right).t+m+2=0\left(2\right)$

(1) có 2 nghiệm thỏa mãn: $4<x_1<x_2<6\Leftrightarrow\left(2\right)$ có 2 nghiệm t_1,t_2 thỏa $-1<t_1<t_2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ af\left(-1\right)>0\\ \dfrac{S}{2}+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=9>0\\ \left(m-1\right)\left(4m+2\right)>0\\ \dfrac{4m-1}{2m-2}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<-\dfrac{1}{2}\vee m>1\\ m<\dfrac{1}{4}\vee m>1\end{cases}\Leftrightarrow m<-\frac{1}{2}\vee m>1$$

Vậy: $m<-\dfrac{1}{2}\vee m>1$

Câu 47: Chọn B

$4\log^2_9(3x)+(\mathrm{m}-1)\log_3(9x)-\mathrm{m}+2=0\Leftrightarrow(\log_3x+1)^2+(m-1)(\log_3x+2)-m+2=0$

$\Leftrightarrow\log^2_3x+2\log_3x+1+m\log_3x-\log_3x+2m-2-m+2=0$

$\Leftrightarrow\log^2_3x+m\log_3x+\log_3x+m=0\Leftrightarrow(\log_3x+1)(\log_3x+m)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_3x=-1\\ \log_3x=-m\end{array}\right.$

Với $\log_3x=-1\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}(\mathrm{tm})$

Với $\log_3x=-m\Leftrightarrow x=3^{-m}(*)$

Để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc $\left[\dfrac{1}{3};9\right]$ thì pt (*) có 1 nghiệm thuộc $\left[\dfrac{1}{3};9\right]$

và khác $\dfrac{1}{3}$ hay $\dfrac{1}{3}<3^{-m}\le9\Leftrightarrow3^{-1}<3^{-m}\le3^2\Leftrightarrow-2\le m<1$ do $m\in Z\Rightarrow m=\{-2;-1;0\}$

Câu 48: Chọn A

Điều kiện: $x>0$. Ta có: $\log^2_3x-\log_3x^2-m+2=0\Leftrightarrow\log^2_3x-2\log_3x-m+2=0\ \ \left(1\right)$

Đặt: $\log_3x=t$.

Phương trình $\left(1\right)$ trở thành: $t^2-2t=m-2\ \ \left(2\right)$

Phương trình $m\in\left[0;2018\right]$ có $m+\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\ge\sqrt[4]{\mathrm{e}^{2x}+1}$ nghiệm phân biệt $x\in\mathbb{R}$ 2016 pt 2017 có 2018 nghiệm phân biệt 2019 đồ thị hàm số $D=\mathbb{R}$ và $\Leftrightarrow m\ge\sqrt[4]{e^{2x}+1}-e^{\frac{x}{2}}$ có $x\in\mathbb{R}$ giao điểm phân biệt với $e^{\frac{x}{2}}=t>0$.

Xét hàm số $m\ge\sqrt[4]{t^4+1}-t=f\left(t\right)$ trên $t>0$

Có $\Leftrightarrow m\ge\max\limits_{[0;+\infty)}f\left(t\right);\left(*\right)$.

Bảng biến thiên

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

t	0		1		3
y'		$-$	0	$+$	
y	0	↘	-1	↗	3

Dựa vào BBT, ycbt $f'(t)=\dfrac{t^3}{\sqrt[4]{\left(t^4+1\right)^3}}-1$. -

Câu 49: Điều kiện: $x>0$.

Ta có: $\log_2^2 x-\log_2 x^2+3=m\Leftrightarrow \log_2^2 x-2\log_2 x+3=m$

Đặt $\log_2 x=$ t $(x\in[1;8]\Rightarrow t\in[0;\ 3])$. Phương trình trở thành: $t^2-2t+3=m$

Xét hàm số $f(t)=t^2-2t+3$, với $t\in[0;\ 3]$.

$f'(t)=2t-2$, $f'(t)=0\Leftrightarrow 2t-2=0\Leftrightarrow t=1$.

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(t)$				$-$	0	$+$			
$f(t)$				↘	3	↗	6		
					2				

Để phương trình $\log_2^2 x-\log_2 x^2+3=m$ có nghiệm $x\in[1;\ 8]$ thì phương trình: $t^2-2t+3=m$ có nghiệm $t\in[0;\ 3]$. Do đó đồ thị hàm số $y=f(t)$ phải cắt đường thẳng $y=m$.

Từ bảng biến thiên ta thấy $2\le m\le 6$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 50: **Chọn C**

Ta có $4^{x+1}-2^{x+2}+m=0\Leftrightarrow\left(2^{x+1}\right)^2-2.2^{x+1}+m=0$. (1)

Đặt $2^{x+1}=t>0$. Phương trình (1) trở thành $t^2-2t+m=0.(2)$

Để phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $t>0$.

Ycbt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $\left[\begin{array}{l}0<t_1\le t_2\\ t_1\le 0<t_2\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\Delta'\ge 0,P>0,S>0\\ P\le 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<m\le 1\\ m\le 0\end{array}\right.\Leftrightarrow m\le 1.$

CHỦ ĐỀ 5: BPT MŨ, BPT LOGARIT

LÝ THUYẾT

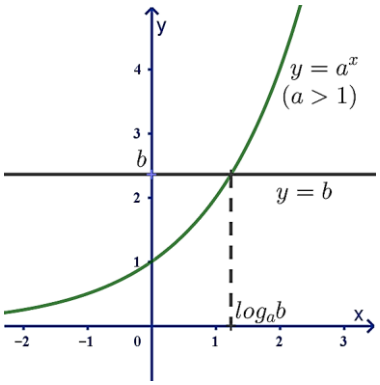
1. Định nghĩa:

- Bất phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x > b$ (hoặc $a^x \ge b, a^x < b, a^x \le b$) với $a > 0, a \ne 1$.

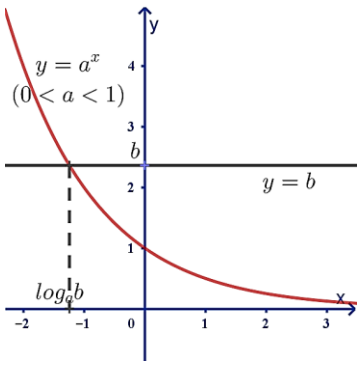
2. Định lí, quy tắc:

Ta xét bất phương trình dạng $a^x > b$.

- Nếu $b \le 0$ thì bất phương trình vô nghiệm.
- Nếu $b > 0$ thì bất phương trình tương đương với . $a^x > a^{\log_a b}$..
  - Với $a > 1$ thì nghiệm của bất phương trình là $x > \log_a b$ (Hình 1).
  - Với $0 < a < 1$ thì nghiệm của bất phương trình là $x < \log_a b$ (hình 2).



Hình 1.



Hình 2.

- **Kết luận:** Tập nghiệm của bất phương trình $a^x > b$ được cho bởi bảng sau:

$a^x > b$	Tập nghiệm	
	$a > 1$	$0 < a < 1$
$b \le 0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$b > 0$	$(\log_a b; +\infty)$	$(-\infty; \log_a b)$

3. Phương pháp đưa về cùng cơ số

- Nếu gặp bất phương trình $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ thì xét hai trường hợp:
  - **Trường hợp 1:** Nếu $a > 1$ thì bất phương trình $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.
  - **Trường hợp 2:** Nếu $0 < a < 1$ thì bất phương trình $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.

4. Phương pháp đặt ẩn phụ

- Ta thường gặp các dạng: $m.a^{2f(x)} + n.a^{f(x)} + p > 0, (1)$.
  - Đặt $t = a^{f(x)}$, $t > 0$ đưa pt (1) về dạng phương trình bậc 2: $mt^2 + nt + p > 0$.
  - Giải bất phương trình tìm nghiệm t và kiểm tra điều kiện $t > 0$ sau đó tìm nghiệm x.
  - $m.a^{f(x)} + n.b^{f(x)} + p > 0$, trong đó $a.b = 1$. Đặt $t = a^{f(x)}$, $t > 0$, suy ra $b^{f(x)} = \frac{1}{t}$.
  - $m.a^{2f(x)} + n.(a.b)^{f(x)} + p.b^{2f(x)} > 0$. Chia hai vế cho $b^{2f(x)}$ và đặt $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = t > 0$.

5. Phương pháp hàm số, đánh giá

- **Định nghĩa**
  - Hàm số f được gọi là đồng biến trên K khi và chỉ khi $\forall u,v\in(a;b);u<v\Rightarrow f(u)<f(v)$.
  - Hàm số f được gọi là nghịch biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi $\forall u,v\in(a;b);u<v\Rightarrow f(u)>f(v)$
- **Định lí, quy tắc:**
  - **Tính chất 1.** Nếu hàm số f đồng biến trên khoảng $(a;b)$ thì $\forall u,v\in(a;b);\ f(u)>f(v)\Leftrightarrow u>v$
  - Nếu hàm số f nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ thì $\forall u,v\in(a;b);\ f(u)>f(v)\Leftrightarrow u<v$.
  - **Tính chất 2.** Nếu hàm số f đồng biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\min\limits_{[a;b]}f(x)=f(a)$ và $\max\limits_{[a;b]}f(x)=f(b)$
  - Nếu hàm số f nghịch biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\min\limits_{[a;b]}f(x)=f(b)$ và $\max\limits_{[a;b]}f(x)=f(a)$.
- **Nhận xét**
  - Khi bài toán yêu tìm tham số m để bất phương trình $m\ge f(x)$ (hoặc $m\le f(x)$) **có nghiệm đúng** với mọi $x\in D$ thì $m\ge\max\limits_{D}f(x)$ (hoặc $m\le\min\limits_{D}f(x)$) .
  - Khi bài toán yêu tìm tham số m để bất phương trình $m\ge f(x)$ (hoặc $m\le f(x)$) **có nghiệm** với mọi $x\in D$ thì $m\le\max\limits_{D}f(x)$ (hoặc $m\ge\min\limits_{D}f(x)$) .

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1. Giải các bất phương trình sau:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 32.$ b) $\left(\frac{1}{9}\right)^x > 3^{\frac{2x}{x+1}}.$ c) $\left(\frac{5}{7}\right)^{x^2-x+1} > \left(\frac{5}{7}\right)^{2x-1}.$

d) $2^x + 2^{x+1} \le 3^x + 3^{x-1}.$ e) $\frac{3^x}{3^x - 2} < 3.$ f) $11^{\sqrt{x+6}} \ge 11^x.$

Lời giải

a) Ta có: $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 32 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} \Leftrightarrow x < -5$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -5)$.

b) Điều kiện: $x \ne -1$

$$\left(\frac{1}{9}\right)^x > 3^{\frac{2x}{x+1}} \Leftrightarrow 3^{-2x} > 3^{\frac{2x}{x+1}} \Leftrightarrow -2x > \frac{2x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{2x}{x+1} + 2x < 0 \Leftrightarrow 2x\left(\frac{1}{x+1} + 1\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x(x+2)}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ -1 < x < 0 \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -2) \cup (-1; 0)$.

c) Ta có: $\left(\frac{5}{7}\right)^{x^2-x+1} > \left(\frac{5}{7}\right)^{2x-1} \Leftrightarrow x^2 - x + 1 < 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (1; 2)$.

d) Ta có: $2^x + 2^{x+1} \le 3^x + 3^{x-1} \Leftrightarrow 3.2^x \le \frac{4}{3}.3^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x \ge \frac{9}{4} \Leftrightarrow x \ge 2$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (1; 2)$.

e) $\frac{3^x}{3^x - 2} < 3 \Leftrightarrow \frac{3^x - 3}{3^x - 2} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x > 3 \\ 3^x < 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < \log_3 2 \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; \log_3 2) \cup (1; +\infty)$.

f) Ta có: $11^{\sqrt{x+6}} \ge 11^x$ $11^{\sqrt{x+6}} \ge 11^x \Leftrightarrow \sqrt{x+6} \ge x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x < 0 \\ x + 6 \ge 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \ge 0 \\ x + 6 \ge x^2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -6 \le x < 0 \\ \left\{\begin{array}{l} x \ge 0 \\ -2 \le x \le 3 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow -6 \le x \le 3$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-6; 3]$.

VÍ DỤ 2. Giải các bất phương trình sau:

a) $16^x-4^x-6\le 0$. b) $4^x-3.2^x+2>0$ c) $\frac{1}{3^x+5}\le\frac{1}{3^{x+1}-1}$

d) $2^x+4.5^x-4<10^x$. e) $2^{\sqrt{x}}-2^{1-\sqrt{x}}<1$

f) Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình: $9^x+(m-1).3^x+m>0$ nghiệm đúng $\forall x>1$.

Lời giải

a) Đặt $t=4^x$ $(t>0)$, khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$t^2-t-6\le 0\Leftrightarrow -2\le t\le 3\Leftrightarrow 0<t\le 3\Leftrightarrow x\le\log_4 3$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là . $S=(-\infty;\log_4 3]$.

b) Ta có: $4^x-3.2^x+2>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x>2\\2^x<1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>1\\x<0\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$.

c) Đặt $t=3^x$ $(t>0)$, khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1}{t+5}\le\frac{1}{3t-1}\Leftrightarrow\begin{cases}3t-1>0\\3t-1\le t+5\end{cases}\Leftrightarrow\frac{1}{3}<t\le 3\Leftrightarrow -1<x\le 1.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-1;1]$.

d) Ta có: $2^x+4.5^x-4<10^x\Leftrightarrow 2^x-10^x+4.5^x-4<0\Leftrightarrow 2^x(1-5^x)-4(1-5^x)<0$

$$\Leftrightarrow(1-5^x)(2^x-4)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1-5^x<0\\2^x-4>0\end{cases}\\\begin{cases}1-5^x>0\\2^x-4<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}5^x>1\\2^x>4\end{cases}\\\begin{cases}5^x<1\\2^x<4\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>2\\x<0\end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$.

e) Điều kiện: $x\ge 0$

Ta có: $2^{\sqrt{x}}-2^{1-\sqrt{x}}<1\Leftrightarrow 2^{\sqrt{x}}-\frac{2}{2^{\sqrt{x}}}<1$ (2). Đặt $t=2^{\sqrt{x}}$. Do $x\ge 0\Rightarrow t\ge 1$

$$(2)\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge 1\\t-\frac{2}{t}<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge 1\\t^2-t-2<0\end{cases}\Leftrightarrow 1\le t<2\Leftrightarrow 1\le 2^{\sqrt{x}}<2\Leftrightarrow 0\le x<1$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=[0;1)$.

f) Đặt $\log_x 3-\log_{\frac{x}{3}}3<0\Leftrightarrow\frac{-1}{\log_3 x.(\log_3 x-1)}<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_3 x<0\\\log_3 x>1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<1\\x>3\end{array}\right.$ bất phương trình đã cho thành: $t^2+(m-1).t+m>0$ nghiệm đúng $\forall t\ge 3\Leftrightarrow\frac{t^2-t}{t+1}>-m$ nghiệm đúng $\forall t>3$

Xét hàm số $g(t)=t-2+\dfrac{2}{t+1},\forall t>3, g'(t)=1-\dfrac{2}{(t+1)^2}>0,\forall t>3$.

Hàm số đồng biến trên $[3;+\infty)$ và $g(3)=\dfrac{3}{2}$. Yêu cầu bài toán tương đương $-m\le\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow m\ge-\dfrac{3}{2}$.

VÍ DỤ 3.

a) Giải bất phương trình $3.2^x+7.5^x>49.10^x-2$

b) Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $m.4^x+(m-1).2^{x+2}+m-1>0$ nghiệm đúng với mọi $\forall x\in\mathbb{R}$.

c) Cho bất phương trình $4^x-2018m.2^{x-1}+3-1009m\le 0$. Tìm giá trị nguyên dương nhỏ nhất của tham số m để bất phương trình đã cho có nghiệm là?

Lời giải

a) Ta có $3.2^x+7.5^x>49.10^x-2\Leftrightarrow\dfrac{3.2^x+7.5^x+2}{10^x}>49\Leftrightarrow 3.\left(\dfrac{1}{5}\right)^x+7.\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+2.\left(\dfrac{1}{10}\right)^x>49$

Xét hàm số $f(x)=3.\left(\dfrac{1}{5}\right)^x+7.\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+2.\left(\dfrac{1}{10}\right)^x,\forall x\in\mathbb{R}$

Mặt khác: $f'(x)=3.\left(\dfrac{1}{5}\right)^x.\ln\left(\dfrac{1}{5}\right)+7.\left(\dfrac{1}{2}\right)^x.\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)+2.\left(\dfrac{1}{10}\right)^x.\ln\left(\dfrac{1}{10}\right)<0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Mặt khác $f(-1)=49\Rightarrow f(x)>f(-1)\Leftrightarrow x<-1$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x<-1$.

b) Ta có: $m.4^x+(m-1).2^{x+2}+m-1>0\Leftrightarrow m>\dfrac{4.2^x+1}{4^x+4.2^x+1}\ (1)$

Đặt $2^x=t,t>0\Rightarrow$ Bất phương trình $(1)\Leftrightarrow m>\dfrac{4t+1}{t^2+4t+1}$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{4t+1}{t^2+4t+1},\forall t\in(0;+\infty)$ có $f'(t)=\dfrac{-4t^2-2t}{(t^2+4t+1)^2}<0,\forall t\in(0;+\infty)\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Ta có bảng biến thiên

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	1 ↘	0

Từ đó ta có $0<f(t)<1,\forall t\in(0;+\infty)$

Để (1) nghiệm đúng với mọi x thuộc tập $\mathbb{R}$ thì $m\ge 1$.

c) Đặt $t=2^x\ (t>0)$

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Khi đó bất phương trình trở thành $t^2-1009mt+3-1009m\le 0\Leftrightarrow 1009m\ge \dfrac{t^2+3}{t+1}$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+3}{t+1},\forall t\in(0;+\infty)$ có $f'(t)=\dfrac{t^2+2t-3}{(t+1)^2}$,

Giải phương trình: $f'(t)=0\Leftrightarrow t^2+2t-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-3<0\ (\text{L}) \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$			$-$		
$f(t)$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Bất phương trình có nghiệm khi $1009m\ge \min\limits_{(0;+\infty)} f(t)=2\Leftrightarrow m\ge \dfrac{2}{1009}$

Vậy $m=1$ là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa yêu cầu bài toán.

BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

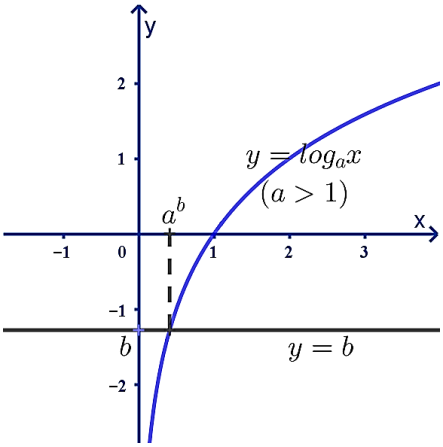
LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa:

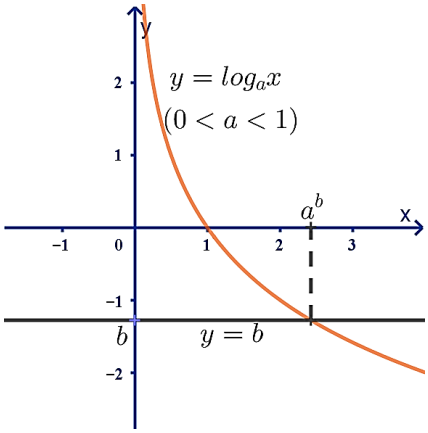
- Bất phương trình lôgarit đơn giản có dạng $\log_a x > b$ (hoặc $\log_a x \ge b, \log_a x < b, \log_a x \le b$) với $a > 0, a \ne 1$.

2. Định lí, quy tắc:

- Ta xét bất phương trình dạng $\log_a x > b$.
  - Nếu $a > 1$ thì $\log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b$ (Hình 1).
  - Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a x > b \Leftrightarrow 0 < x < a^b$ (Hình 2).



Hình 1.



Hình 2.

- **Kết luận**: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_a x > b$ được cho bởi bảng sau:

$\log_a x > b$	Tập nghiệm	
	$a > 1$	$0 < a < 1$
	$x > a^b$	$0 < x < a^b$

3. Phương pháp đưa về cùng cơ số

- Nếu gặp bất phương trình $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ thì xét hai trường hợp:
  - **Trường hợp 1.** Nếu $a > 1$ thì bất phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$.
  - **Trường hợp 2.** Nếu $0 < a < 1$ thì bất phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$.

4. Phương pháp đặt ẩn phụ

- Nếu gặp bất phương trình $m.\log_a^2 f(x) + n\log_a f(x) + p > 0, (1)$
  - Đặt $t = \log_a f(x)$, đưa (1) về dạng $mt^2 + nt + p > 0$; giải tìm t từ đó tìm nghiệm x.

5. Ngoài ra, chúng ta còn có thể sử dụng linh hoạt các quy tắc về hàm số, phương pháp đánh giá đã nêu ở bài phương trình mũ, phương trình logarit và bất phương trình mũ. Việc sử dụng đa dạng các phương pháp sẽ giúp các em tối ưu hóa các bài toán trở nên đơn giản và dễ dàng hơn.

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1. Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_{0,4}(5x+2)>\log_{0,4}(3x+6)$.

b) $1+\log_2(x-2)>\log_2(x^2-3x+2)$.

c) $2\log_2\sqrt{x+1}\le 2-\log_2(x-2)$.

d) $\log_2(x^2-x-2)\ge\log_{0,5}(x-1)+1$.

e) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2(2x-1))>0$.

Lời giải

a) Điều kiện: $x>-\frac{2}{5}$.

Ta có: $\log_{0,4}(5x+2)>\log_{0,4}(3x+6)\Leftrightarrow 5x+2<3x+6.\Leftrightarrow 2x<4\Leftrightarrow x<2$

Kết hợp với điều kiện, ta có tập nghiệm của bất phương trình là: $S=\left(-\frac{2}{5};2\right)$.

b) Ta có: $1+\log_2(x-2)>\log_2(x^2-3x+2)\Leftrightarrow\begin{cases}\log_2(x^2-3x+2)-\log_2(x-2)<1\\x>2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\log_2(x-1)<1\\x>2\end{cases}\Leftrightarrow 2<x<3$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=(2;3)$.

c) Ta có: $2\log_2\sqrt{x+1}\le 2-\log_2(x-2)\Leftrightarrow\begin{cases}x+1>0\\x-2>0\\\log_2(x+1)+\log_2(x-2)\le 2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x>2\\(x+1)(x-2)\le 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>2\\x^2-x-6\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>2\\-2\le x\le 3\end{cases}\Leftrightarrow 2<x\le 3$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=(2;3]$.

d) Điều kiện : $x>2$

$\log_2(x^2-x-2)\ge\log_{0,5}(x-1)+1\Leftrightarrow\log_2\left[(x^2-x-2)(x-1)\right]\ge 1$

$\Leftrightarrow(x^2-x-2)(x-1)-2\ge 0\Leftrightarrow x^3-2x^2-x\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}1-\sqrt{2}\le x\le 0\\x\ge 1+\sqrt{2}\end{cases}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=\left[1-\sqrt{2};0\right]\cup\left[1+\sqrt{2};+\infty\right)$.

e) Điều kiện: $\begin{cases}2x-1>0\\\log_2(2x-1)>0\end{cases}\Leftrightarrow x>1$.

Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2(2x-1))>0\Leftrightarrow\log_{\frac{1}{2}}(\log_2(2x-1))>\log_{\frac{1}{2}}1$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\log_2(2x-1)<1\\\log_2(2x-1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<2x-1<2\\2x-1>1\end{cases}\Leftrightarrow 1<x<\frac{3}{2}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=\left(1;\frac{3}{2}\right)$.

VÍ DỤ 2. Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_{0,2}^2 x-5\log_{0,2} x<-6$.

b) $\log_x 3-\log_{\frac{x}{3}} 3<0$.

c) $2^{\log_2^2 x}-10x^{\log_2\frac{1}{x}}+3>0$.

Lời giải

a) Điều kiện: $x>0$

$\log_{0,2}^2-5\log_{0,2} x<-6\Leftrightarrow 2<\log_{0,2} x<3\Leftrightarrow \frac{1}{125}<x<\frac{1}{25}$

b) Điều kiện : $x>0;x\neq 1;x\neq 3$

$\log_x 3-\log_{\frac{x}{3}} 3<0\Leftrightarrow \frac{-1}{\log_3 x.\left(\log_3 x-1\right)}<0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x<0\\ \log_3 x>1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<x<1\\ x>3\end{array}\right.$

c) Điều kiện: $x>0$ (*). Đặt $u=\log_2 x\Rightarrow x=2^u$.

Bất phương trình đã cho trở thành $2^{u^2}-10\left(2^u\right)^{-u}+3>0\Leftrightarrow 2^{u^2}-\frac{10}{2^{u^2}}+3>0$ (1)

Đặt $t=2^{u^2}$, $t\geq 1$. $(1)\Rightarrow t^2+3t-10>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t<-5\ \text{(l)}\\ t>2\end{array}\right.\Leftrightarrow 2^{u^2}>2\Leftrightarrow u^2>1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u>1\\ u<1\end{array}\right.$

Với $u>1\Rightarrow \log_2 x>1\Rightarrow x>2$

Với $u<-1\Rightarrow \log_2 x<-1\Rightarrow x<\frac{1}{2}$

Kết hợp điều kiện (*), ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là $x>2$ hoặc $0<x<\frac{1}{2}$.

VÍ DỤ 3.

a) Tìm số nghiệm của phương trình $\log_2\left(\sqrt{x-2}+4\right)\leq \log_3\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}+8\right)$.

b) Có tất cả bao nhiêu cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện

$$\begin{cases}3^{\left|x^2-2x-3\right|-\log_3 5}=5^{-(y+4)}\\ 4|y|-|y-1|+(y+3)^2\leq 8\end{cases}$$

c) Có bao nhiêu số nguyên dương m trong đoạn $[-2018;2018]$ sao cho bất phương trình $(10x)^{m+\frac{\log x}{10}}\geq 10^{\frac{11}{10}\log x}$ đúng với mọi $x\in(1;100)$.

Lời giải

a) Điều kiện xác định: $\begin{cases}x-2\geq 0\\ x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow x\geq 2$

$\text{VT}=\log_2\left(\sqrt{x-2}+4\right)\geq \log_2(4)=2$.

Ta có $x \ge 2 \Leftrightarrow x-1 \ge 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-1}} \le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-1}}+8 \le 9$

$\text{VP} = \log_3\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}+8\right) \le \log_3 9 = 2$

Suy ra $\text{VT} \ge 2 \ge \text{VP}$. Do đó phương trình có nghiệm khi $\begin{cases}\text{VT}=2\\ \text{VP}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x-2}=0\\ \frac{1}{\sqrt{x-1}}=1\end{cases} \Leftrightarrow x=2$

Vậy $x=2$ là nghiệm duy nhất.

b) $\begin{cases}3^{\left|x^2-2x-3\right|-\log_3 5} = 5^{-(y+4)} & (1)\\ 4|y|-|y-1|+(y+3)^2 \le 8 & (2)\end{cases}$

Biến đổi phương trình (1) ta được $3^{\left|x^2-2x-3\right|} = 5^{-y-3}$

Do $\left|x^2-2x-3\right| \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 3^{\left|x^2-2x-3\right|} \ge 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 5^{-y-3} \ge 1 \Leftrightarrow -y-3 \ge 0 \Leftrightarrow y \le -3$

Với $y \le -3$, ta có bất phương trình $(2) \Leftrightarrow -4y+y-1+(y+3)^2 \le 8 \Leftrightarrow y^2+3y \le 0 \Leftrightarrow y \ge -3$

$\Rightarrow y=-3 \Rightarrow \left|x^2-2x-3\right|=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=3\end{array}\right.$.

Vậy có hai cặp $(x;y)$ thỏa mãn $(3;-3),(-1;-3)$.

c) $(10x)^{m+\frac{\log x}{10}} \ge 10^{\frac{11}{10}\log x} \Leftrightarrow \left(m+\frac{\log x}{10}\right)(\log x+1) \ge \frac{11}{10}\log x$

$\Leftrightarrow (\log x+10m)(\log x+1)-11\log x \ge 0 \Leftrightarrow 10m(\log x+1)+\log^2 x-10\log x \ge 0$

Do $x \in (1;100) \Rightarrow \log x \in (0;2)$ $10m(\log x+1)+\log^2 x-10\log x \ge 0 \Leftrightarrow 10m \ge \frac{10\log x-\log^2 x}{\log x+1}$

Đặt $t=\log x$, $t \in (0;2)$. Xét hàm số $f(t)=\frac{10t-t^2}{t+1}, \forall t \in (0;2)$

Đạo hàm: $f'(t)=\frac{10-2t-t^2}{(t+1)^2} > 0 \ \forall t \in (0;2) \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó $f(0) < f(t) < f(2) \Leftrightarrow 0 < f(t) < \frac{16}{3}$

Để $10m \ge \frac{10\log x-\log^2 x}{\log x+1}$ đúng với mọi $x \in (1;100)$ thì $10m \ge \frac{16}{3} \Rightarrow m \ge \frac{8}{15}$

Do đó $m \in \left[\frac{8}{15};2018\right]$ hay có 2018 số thỏa mãn.

BIỆN LUẬN NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH MŨ – LOGARIT

Câu 1: Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để phương trình $\log\left(x^2+mx+1\right)=\log\left(x+m\right)$ có hai nghiệm thực phân biệt

A. 18. **B.** 19. **C.** 17. **D.** 16.

Câu 2: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $1+\log_6\left(x^2+1\right)=\log_6\left(mx^2+2x+m\right)$ có nghiệm thực

A. 0. **B.** 3. **C.** Vô số. **D.** 2.

Câu 3: Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để phương trình $\dfrac{\log_5(mx)}{\log_5(x+1)}=2$ có hai nghiệm thực phân biệt

A. 22. **B.** 3. **C.** 15. **D.** 23.

Câu 4: Có bao nhiêu số nguyên không âm m để phương trình $\ln\left(2x^2+mx+m\right)=2\ln\left(x+2\right)$ có hai nghiệm phân biệt là

A. 3. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 5: Tập tất cả các giá trị thực của m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}\left(x+m+1\right)=\log_2\left(m^2-4x+4mx\right)$ có đúng một nghiệm thực là

A. $\left(\dfrac{-2\sqrt{3}}{3};\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ **B.** $\left[\dfrac{-2\sqrt{3}}{3};\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left\{4\pm2\sqrt{2}\right\}$

C. $\left(\dfrac{-2\sqrt{3}}{3};\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right]\cup\left\{4+2\sqrt{2}\right\}$ **D.** $\left(\dfrac{-2\sqrt{3}}{3};\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right]\cup\left\{4\pm2\sqrt{2}\right\}$

Câu 6: Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên m nằm trong đoạn $[-2017;2017]$ để phương trình $\log\left(mx\right)=2\log\left(x+1\right)$ có nghiệm duy nhất.

A. 2017 **B.** 4014 **C.** 2018 **D.** 4015

Câu 7: Cho phương trình $2\log_{9+4\sqrt{5}}\left(2x^2-x-4m^2+2m\right)+\log_{\sqrt{5}-2}\sqrt{x^2+mx-2m^2}=0$. Tìm tập hợp giá trị thực của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt x_1; x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2>1$.

A. $(-\infty;0)\cup\left(\dfrac{2}{5};+\infty\right)$. **B.** $(-1;0)\cup\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(0;\dfrac{2}{5}\right)$. **D.** $\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 8: Có bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình $\log_2\left(64x+m\right)-6=\log_3\left(x\right)$ có nghiệm thực.

A. 10. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 8.

Câu 9: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\log_5\left(5x+m\right)=\log_3\left(x\right)$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. 23. **B.** Vô số. **C.** 21. **D.** 22.

Câu 10: Có bao nhiêu số nguyên $m<2018$ để phương trình $\log_6(2018x+m)=\log_4(1009x)$ có nghiệm thực?

A. 2019. **B.** 2018. **C.** 2017. **D.** 2020.

Câu 11: Có tất cả bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\log(m-x)=3\log\left(4-\sqrt{2x-3}\right)$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. 6. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 12: Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho $10m\in\mathbb{Z}$ và phương trình $2\log_{mx-5}\left(2x^2-5x+4\right)=\log_{\sqrt{mx-5}}\left(x^2+2x-6\right)$ có nghiệm thực duy nhất. Tìm số phần tử của S.

A. 15. **B.** 14. **C.** 13. **D.** 16.

Câu 13: Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_{1+\sqrt{2}}(x+m-1)+\log_{\sqrt{2}-1}\left(x^2-mx+2m-1\right)=0$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\setminus\{1\}$. **B.** $(0;+\infty)\setminus\{1\}$. **C.** $\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup\{1\}$. **D.** $\left(0;\frac{1}{2}\right]$.

Câu 14: Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-2018;2018)$ để phương trình $\log_2(mx)=3\log_2(x+1)$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt?

A. 2011. **B.** 2012. **C.** 4028. **D.** 2017.

Câu 15: Tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_{3+2\sqrt{2}}(x+m-1)+\log_{3-2\sqrt{2}}\left(x^2-mx+2m-1\right)=0$ có nghiệm duy nhất là

A. $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\setminus\{1\}$. **B.** $(0;+\infty)\setminus\{1\}$. **C.** $\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup\{1\}$. **D.** $\left(0;\frac{1}{2}\right]$.

Câu 16: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $2\log_{mx-1}(x^2+1)=\log_{\sqrt{mx-1}}(2x^2-3x+3)$ có nghiệm duy nhất.

A. 3. **B.** 1. **C.** Vô số. **D.** 2.

Câu 17: Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để phương trình $2\log_{mx-1}(x^2+1)=\log_{\sqrt{mx-1}}(2x^2-3x+3)$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. 18. **B.** 17. **C.** 19. **D.** 16.

Câu 18: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\frac{\ln(mx-8)}{\ln(x-1)}=2$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. 7. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 19: Có bao nhiêu số m nguyên để phương trình $\log_5(6x+m)=\log_2(x+1)$ có hai nghiệm thực phân biệt?

A. 3. **B.** 1. **C.** Vô số. **D.** 2.

Câu 20: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\ln(x+2)=\ln(x^3-2x+m)$ có ba nghiệm thực phân biệt?

A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 5

Câu 21: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(mx-6x^3)+2\log_{\frac{1}{2}}(-14x^2+29x-2)=0$ có nghiệm duy nhất

A. 18 **B.** Vô số **C.** 23 **D.** 22

Câu 22: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\ln\left(x-\frac{1}{x}\right)=\ln(mx-6)$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. 9. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 23: Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để phương trình $\log_2(x)=\log_3(x^2+m)$ có nghiệm thực duy nhất.

A. 18. **B.** 20. **C.** 1. **D.** 19.

Câu 24: Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để phương trình $\log_2(mx)=\log_2(x^3+8)$ có nghiệm thực duy nhất.

A. 18. **B.** 20. **C.** 12. **D.** 19.

Câu 25: Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để phương trình $\log_2(mx)=\log_2\ x^3+8$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. 18 **B.** 20 **C.** 12 **D.** 19

Câu 26: Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để phương trình $\log_3\left|x^2+mx\right|=\log_5\ x^2+mx+2$ có bốn nghiệm thực phân biệt.

A. 5 **B.** 7 **C.** 32 **D.** 34

Câu 27: Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để phương trình $\log_3\left|x^2+mx\right|=\log_5\ x^2+mx+2$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. 5 **B.** 7 **C.** 3 **D.** 9

Câu 28: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\log_2(mx)=\log_2\left(x^3+3x+2\right)$ có nghiệm thuộc $(0;+\infty)$.

A. $(3+2\sqrt{2};+\infty)$. **B.** $[6;+\infty)$. **C.** $(6;+\infty)$. **D.** $\left[3+2\sqrt{2};+\infty\right)$.

Câu 29: Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để phương trình $\log_{3+2\sqrt{2}}(x+m-1)+\log_{3-2\sqrt{2}}\left(mx+x^2\right)=0$ có nghiệm duy nhất.

A. 18. **B.** 19. **C.** 21. **D.** 20.

Câu 30: Biết rằng phương trình $\log_2(|2x-1|+m)=1+\log_3\left(m+4x-4x^2\right)$ có nghiệm duy nhất. Mệnh đề nào đúng?

A. $m\in(0;1)$. **B.** $m\in(1;3)$. **C.** $m\in(3;6)$. **D.** $m\in(6;9)$.

Câu 31: Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để phương trình $\log_2 x+\log_3(m-x)=2$ có nghiệm thực

A. 24. **B.** 14. **C.** 23. **D.** 15.

Câu 32: Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để phương trình $\log_2 x+\log_3\left(m-x^3\right)=2$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. 12. **B.** 11. **C.** 13. **D.** 10.

Câu 33: Cho phương trình $3\log_{27}\left[2x^2-(m+3)x+1-m\right]+\log_{\frac{1}{3}}\left[x^2-x+1-3m\right]=0$. Số các giá trị nguyên của m sao cho phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $|x_1-x_2|<15$ là:

A. 14. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 13.

Câu 34: Tập hợp tất cả các giá trị thực của m để phương trình $\log_2(2\sin x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(\cos 2x+m)=0$ có nghiệm là

A. $\left[\frac{-5}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left[\frac{-1}{2};2\right]$. **C.** $\left(\frac{-1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(\frac{-1}{2};2\right]$.

Câu 35: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $3^{x^2-4x+m+1}+3^{x-m+1}=3\left(3^{x^2-3x}+1\right)$ có ba nghiệm thực phân biệt, đồng thời tích của ba nghiệm đó nhỏ hơn 27?

A. 7. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 9.

Câu 36: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m\in\mathbb{Z}$ thỏa phương trình $\log_{mx-5}\left(x^2-6x+12\right)=\log_{\sqrt{mx-5}}\sqrt{x+2}$ có nghiệm duy nhất. Tìm số phần tử của S.

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 37: Cho phương trình $2^x=\sqrt{m.2^x.\cos(\pi x)-4}$. Phương trình có đúng một nghiệm thực khi và chỉ khi $m=m_0$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m_0<-5$. **B.** $m_0>0$. **C.** $m_0\in[-5;-1)$. **D.** $m_0\in[-1;0)$.

Câu 38: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $9.3^{2x}-m\left(4\sqrt[4]{x^2+2x+1}+3m+3\right).3^x+1=0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt?

A. Vô số. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 39: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a sao cho phương trình $9^x+9=a3^x\cos(\pi x)$ có nghiệm thực duy nhất.

A. $a=-6$ **B.** $a=3$ **C.** $a=-3$ **D.** $a=6$

Câu 40: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a sao cho phương trình $10^x+10^{2-x}=a\cos(\pi x)-2$ có nghiệm thực duy nhất.

A. $a=-20$. **B.** $a=18$. **C.** $a=-22$. **D.** $a=22$.

Câu 41: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tồn tại hai số thực x, y thỏa mãn đồng thời $e^{3x+5y-10}-e^{x+3y-9}=1-2x-2y$ và $\log_5^2(3x+2y+4)-(m+6)\log_5(x+5)+m^2+9=0$?

A. 6. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 42: Cho phương trình $e^{3m}+e^{m}=2\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+x\sqrt{1-x^2}\right)$. Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm.

A. $\left(0;\frac{1}{2}\ln 2\right)$. **B.** $\left[\frac{1}{2}\ln 2;+\infty\right)$. **C.** $\left(0;\frac{1}{e}\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\ln 2\right]$.

Câu 43: Cho phương trình $2^{x^3+x^2-2x+m}-2^{x^2+x}+x^3-3x+m=0$. Tập tất cả các giá trị thực của m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt có dạng $(a;b)$. Tổng $a+2b$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** –2 **D.** 2.

Câu 44: Có bao nhiêu số nguyên $a\in(-200;200)$ để phương trình $\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{x+a}=\ln(1+x)-\ln(x+a+1)$ có nghiệm thực duy nhất.

A. 399. **B.** 199. **C.** 200. **D.** 398.

Câu 45: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\log_2\frac{3x^2+3x+m+1}{2x^2-x+1}=x^2-5x+2-m$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

A. 3. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 46: Phương trình $5^{2x+\sqrt{1-2x}}-m.5^{1-\sqrt{1-2x}}=4.5^{x}$ có nghiệm khi và chỉ khi $m\in[a;b]$. Giá trị biểu thức $b-a$ bằng

A. $\frac{9}{5}$. **B.** 9. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** 1.

Câu 47: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(a;b)$ thỏa mãn $0<a,b\le 100$ sao cho đồ thị của hai hàm số $y=\frac{1}{a^x}+\frac{1}{b}$ và $y=\frac{1}{b^x}+\frac{1}{a}$ cắt nhau tại đúng hai điểm phân biệt

A. 9704 **B.** 9702. **C.** 9698. **D.** 9700.

Câu 48: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình sau có ba nghiệm thực phân biệt: $(mx+9).\log_3\left[\left(x^2+1\right).(mx+9)\right]=9-\left(x^2-1\right)(mx+9)$?

A. 8 **B.** 10. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 49: Có bao nhiêu số nguyên $m\in -20;20$ để phương trình $\frac{2}{3^x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=m$ có ba nghiệm thực phân biệt?

A. 19. **B.** 20. **C.** 21. **D.** 18.

Câu 50: Biết rằng có duy nhất một số thực x thoả mãn bất phương trình $\log_a 11+\log_{\frac{1}{7}}\left(\sqrt{x^2+ax+10}+4\right).\log_a\left(x^2+ax+12\right)\ge 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a\in(6;9)$. **B.** $a\in(0;3)$. **C.** $a\in(3;6)$. **D.** $a\in(9;+\infty)$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn A

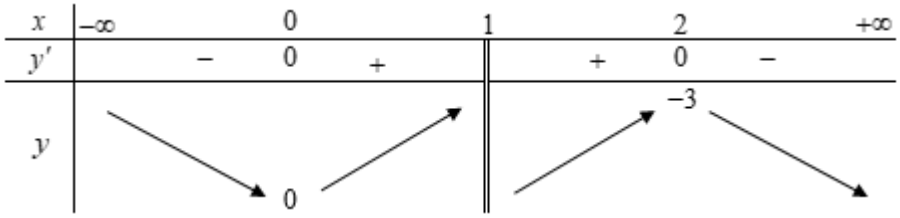
Ta có: $\log\left(x^2+mx+1\right)=\log\left(x+m\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x+m>0\\x^2+mx+1=x+m\left(*\right)\end{cases}$

$\left(*\right)\Leftrightarrow m\left(x-1\right)=-x^2+x-1$. Với $x=1\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

Với $x\neq1,\left(*\right)\Leftrightarrow m=-x-\dfrac{1}{x-1}$

Xét $f\left(x\right)=-x-\dfrac{1}{x-1}$; $f'\left(x\right)=-1+\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Bảng biến thiên



Để phương trình $\log\left(x^2+mx+1\right)=\log\left(x+m\right)$ có hai nghiệm thực phân biệt thì

$$\begin{cases}x>-m\\\left[\begin{array}{l}m>1\\m<-3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>x+\dfrac{1}{x-1}\\\left[\begin{array}{l}m>1\\m<-3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<1\\\left[\begin{array}{l}m>1\\m<-3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-1\\\left[\begin{array}{l}m>1\\m<-3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m>1$$

Vậy có 18 giá trị của $m\in\left(-20;20\right)$ để phương trình $\log\left(x^2+mx+1\right)=\log\left(x+m\right)$ có hai nghiệm thực phân biệt

Câu 2: Chọn B

Ta có : $1+\log_6\left(x^2+1\right)=\log_6\left(mx^2+2x+m\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+1>0\\6\left(x^2+1\right)=mx^2+2x+m\left(*\right)\end{cases}$

$\left(*\right)\Leftrightarrow\left(6-m\right)x^2-2x+6-m=0$

Với $m=6\Rightarrow x=0$

Với $m\neq6\Rightarrow$ phương trình có nghiệm khi $\Delta=1-\left(6-m\right)^2\geq0\Leftrightarrow5\leq m\leq7$

Vậy có 3 giá trị của m

Câu 3: Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases}x>-1\\mx>0\\x\neq0\end{cases}$. Ta có: $\dfrac{\log_5\left(mx\right)}{\log_5\left(x+1\right)}=2\Rightarrow mx=x^2+2x+1\left(*\right)$

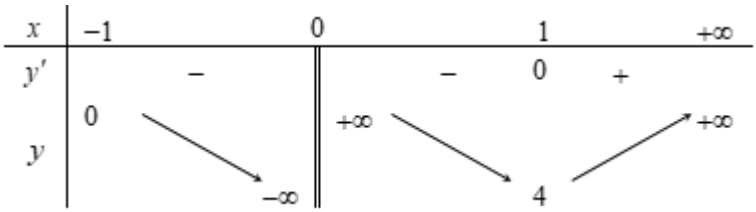
Với $x=0\Rightarrow$ phương trình (*) vô nghiệm

Với $x\neq0\Rightarrow m=\dfrac{x^2+2x+1}{x}$

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Đặt $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x}$, $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$; $f'(x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$

Bảng biến thiên



Để phương trình $\dfrac{\log_5(mx)}{\log_5(x+1)}=2$ có hai nghiệm thực phân biệt thì $m>4$

Vậy có 15 số nguyên $m\in(-20;20)$.

Câu 4: **Chọn D.**

$$PT\Leftrightarrow\begin{cases}x>-2\\\ln\left(2x^2+mx+m\right)=\ln(x+2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-2\\f(x)=x^2+(m-4)x+(m-4)=0\end{cases}\quad(2).$$

Để phương trình (2) đã cho có hai nghiệm thực lớn hơn -2 khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\Delta>0\\f(-2)>0\\S>-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m-4)^2-4(m-4)>0\\4-(m-4)>0\\-(m-4)>-2\end{cases}\Leftrightarrow m<4.$$ Vì $\Rightarrow m\in\{0;1;2;3\}$.

Câu 5: **Chọn C.**

Ta có: $\log_{\sqrt{2}}(x+m+1)=\log_2\left(m^2-4x+4mx\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x>-m-1\\(x+m+1)^2=m^2-4x+4mx\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>-m-1\\g(x)=x^2-(2m-6)x+1+2m=0\end{cases}\quad(2)$$

Để phương trình (2) đã cho có một nghiệm thực lớn hơn $-m-1$ khi và chỉ

Trường hợp 1: Phương trình (2) có hai nghiệm thoả $x_1\le-m-1<x_2$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(-m-1)=0\\S=2m-6>2(-m-1)\end{cases}\\f(-m-1)<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3m^2-4<0\\\begin{cases}3m^2-4=0\\m>1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow m\in\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3};\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$$

Trường hợp 2: Phương trình (2) nghiệm kép thoả $x_{1,2}>-m-1$

$$\begin{cases}\Delta=4m^2-32m+32=0\\m-3>-m-1\end{cases}\Leftrightarrow m=4+2\sqrt{2}.$$ Vậy $m\in\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3};\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]\cup\left\{4+2\sqrt{2}\right\}$

Câu 6: **Chọn C.**

Ta có: $\log(mx)=2\log(x+1)\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\mx=(x+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\f(x)=x^2+(2-m)x+1=0\end{cases}\quad(2)$

Để phương trình (2) đã cho có một nghiệm thực lớn hơn -1 khi và chỉ

(2) có hai nghiệm thoả $x_1 \le -1 < x_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(-1)=0 \\ S=m-2>-2 \end{cases} \\ f(-1)<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<0 \\ \begin{cases} m=0 \Leftrightarrow m<0 \\ m>0 \end{cases} \end{array}\right.$

(2) nghiệm kép thoả $x_{1,2} > -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2-4m=0 \\ \dfrac{m-2}{2} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow m=4$

Vậy $m \in [-2017;-1] \cup \{4\}$, có 2018 số nguyên thoả.

Câu 7: Chọn A.

Ta có $2\log_{9+4\sqrt{5}}\left(2x^2-x-4m^2+2m\right)+\log_{\sqrt{\sqrt{5}-2}}\sqrt{x^2+mx-2m^2}=0$

$\Leftrightarrow 2\log_{\left(\sqrt{5}+2\right)^2}\left(2x^2-x-4m^2+2m\right)+\log_{\left(\sqrt{5}+2\right)^{-\frac{1}{2}}}\sqrt{x^2+mx-2m^2}=0$

$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{5}+2}\left(2x^2-x-4m^2+2m\right)=\log_{\sqrt{5}+2}\left(x^2+mx-2m^2\right)$

$\Leftrightarrow 2x^2-x-4m^2+2m=x^2+mx-2m^2 \Leftrightarrow x^2-(m+1)x-2m^2+2m=0$.

Điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (m+1)^2-4\left(-2m^2+2m\right)>0$

$\Leftrightarrow 9m^2-6m+1>0 \Leftrightarrow (3m-1)^2>0 \Leftrightarrow m \ne \dfrac{1}{3}$. Theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=m+1 \\ x_1.x_2=2m-2m^2 \end{cases}$.

Theo bài ra ta có:

$x_1^2+x_2^2>1 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2>1 \Leftrightarrow (m+1)^2-2\left(2m-2m^2\right)>1 \Leftrightarrow 5m^2-2m>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>\dfrac{2}{5} \\ m<0 \end{array}\right.$.

Câu 8: Chọn A.

Ta có $\log_2(64x+m)-6=\log_3(x) \Leftrightarrow \log_2(64x+m)=\log_3(x)+6$

$\Leftrightarrow \log_2(64x+m)=\log_3(729x)=t \Rightarrow \begin{cases} 64x+m=2^t & (1) \\ 729x=3^t & (2) \end{cases}$

Từ (2) ta có $x=\dfrac{3^t}{729}=3^{t-6}$ thay vào (1) ta được : $64.3^{t-6}+m=2^t \Leftrightarrow 2^t-64.3^{t-6}=m$

Khảo sát hàm số $f(t)=2^t-64.3^{t-6}$ ta suy ra điều kiện để phương trình có nghiệm là:

$0 \le m \le \dfrac{32}{3}=10,(6) \Rightarrow m=\{1;2;...;10\}$ (do m nguyên dương)

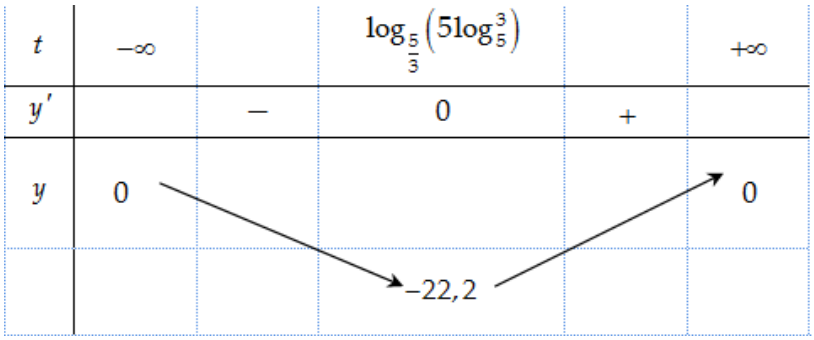
Suy ra có 10 giá trị nguyên dương của tham số m thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 9: Chọn D.

Ta có $\log_5(5x+m)=\log_3(x)=t \Rightarrow \begin{cases} 5x+m=5^t & (1) \\ x=3^t & (2) \end{cases}$

Thay (2) vào (1) ta được : $5.3^t+m=5^t \Leftrightarrow 5^t-5.3^t=m$

Khảo sát hàm số $f(t=)5^t-5.3^t$ ta được BBT:



suy ra điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt là : $-22,2\le m<0$

Suy ra có 22 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 10: Chọn D

Có $\log_6(2018x+m)=\log_4(1009x)=t\Leftrightarrow\begin{cases}1009x=4^t\\2018x+m=6^t\end{cases}\Rightarrow m+2.4^t=6^t$.

Khi đó $m=-2.4^t+6^t\ge\min\limits_{\mathbb{R}}f(t)=f\left(\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{2\ln 4}{\ln 6}\right)\right)\approx-2,0136$.

Vậy $m\in\{-2;-1;....;2017\}$ có tất cả 2020 số nguyên thỏa mãn.

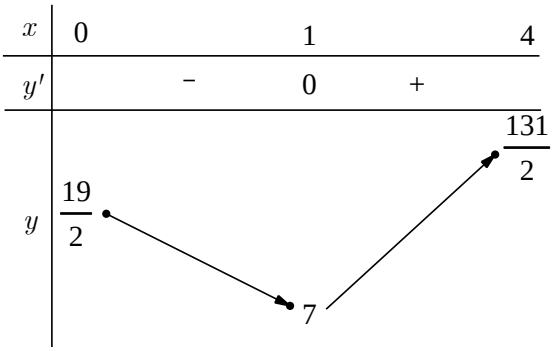
Câu 11: Chọn B

Phương trình tương đương với $\begin{cases}4-\sqrt{2x-3}>0\\m-x=\left(4-\sqrt{2x-3}\right)^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{3}{2}\le x<\frac{19}{2}\\m=x+\left(4-\sqrt{2x-3}\right)^3\end{cases}(*)$

Đặt $t=4-\sqrt{2x-3},(0<t\le 4)\Rightarrow x=\frac{t^2-8t+19}{2}$. Khi đó $(*)$ thành $m=\frac{2t^3+t^2-8t+19}{2}$

Xét hàm $f(t)=\frac{2t^3+t^2-8t+19}{2}$ với $0<t\le 4$ có $f'(t)=3t^2+t-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-\frac{4}{3}\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta thấy $(*)$ có hai nghiệm khi $7<m<\frac{19}{2}$, mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{8;9\}$.

Vậy có hai giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 12: Chọn A

Ta có:

$2\log_{mx-5}\left(2x^2-5x+4\right)=\log_{\sqrt{mx-5}}\left(x^2+2x-6\right)\Leftrightarrow\log_{\sqrt{mx-5}}\left(2x^2-5x+4\right)=\log_{\sqrt{mx-5}}\left(x^2+2x-6\right)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0<mx-5\neq 1\\2x^2-5x+4>0\\2x^2-5x+4=x^2+2x-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<mx-5\neq 1\\2x^2-5x+4>0\\x^2-7x+10=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<10mx-50\neq 10\\\left[\begin{array}{l}x=2\\x=5\end{array}\right.\end{cases}$$

Trường hợp 1: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=5$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}10m.2-50\le 0\\10m.2-50=10\end{array}\right.\\0<10m.5-50\neq 10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}10m\le 25\\10m=30\end{array}\right.\\10<10m\neq 12\end{cases}$$. Suy ra $10m\in\{11;13;14;..;25;30\}$.

Trường hợp 1: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}10m.5-50\le 0\\10m.5-50=10\end{array}\right.\\0<10m.2-50\neq 10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}10m\le 10\\10m=12\end{array}\right.\\25<10m\neq 30\end{cases}$$. Suy ra không có m.

Vậy tập S có 15 phần tử.

Câu 13: Chọn A.

Điều kiện: $\begin{cases}x+m-1>0\\x^2-mx+2m-1>0\end{cases}$

Khi đó phương trình đã cho tương đương với $\log_{1+\sqrt{2}}\left(x+m-1\right)=\log_{\sqrt{2}+1}\left(x^2-mx+2m-1\right)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+m-1>0\\x+m-1=x^2-mx+2m-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1-m\\x^2-mx-x+m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1-m\\(x-m)(x-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1-m\\\left[\begin{array}{l}x=m\\x=1\end{array}\right.\end{cases}$$

Để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thì $\begin{cases}m\neq 1\\m+m-1>0\\1+m-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>\dfrac{1}{2}\\m\neq 1\end{cases}$.

Câu 14: Chọn A.

Điều kiện: $\begin{cases}mx>0\\x+1>0\end{cases}$

Phương trình $\log_2\left(mx\right)=3\log_2\left(x+1\right)\Leftrightarrow\log_2\left(mx\right)=\log_2\left(x+1\right)^3\Leftrightarrow\begin{cases}x+1>0\\mx=\left(x+1\right)^3\end{cases}$ (*)

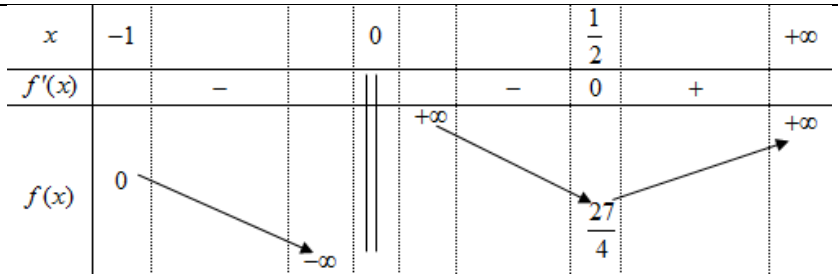
Vì $x\neq 0$ nên (*) $\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1,x\neq 0\\m=x^2+3x+3+\dfrac{1}{x}\end{cases}$

Xét hàm số $f(x)=x^2+3x+3+\dfrac{1}{x}$ trên $\left(-1;+\infty\right)\setminus\{0\}$.

Ta có: $f'(x)=2x+3-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{\left(x+1\right)^2\left(2x-1\right)}{x^2}$

Bảng biến thiên:

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN



Để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm thì $m > \dfrac{27}{4}$

Vì m nguyên nên $m \ge 7$. Mà $m \in (-2018; 2018)$ nên $7 \le m < 2018$

$\Rightarrow$ có 2011 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 15: Chọn C.

Điều kiện: $\begin{cases} x+m-1>0 \\ x^2-mx+2m-1>0 \end{cases}$

Khi đó phương trình đã cho tương đương với $\log_{3+3\sqrt{2}}(x+m-1) = \log_{3+2\sqrt{2}}(x^2-mx+2m-1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+m-1>0 \\ x+m-1 = x^2-mx+2m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1-m \\ x^2-mx-x+m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1-m \\ (x-m)(x-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1-m \\ \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=1 \end{array}\right. \end{cases}$$

Để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất thì:

Khả năng 1: $m=1$. Khi đó phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$

Khả năng 2: $\begin{cases} m>1-m \\ 1\le 1-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>\dfrac{1}{2} \\ m\le 0 \end{cases} \Rightarrow m \in \varnothing$

Khả năng 3: $\begin{cases} 1>1-m \\ m\le 1-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ m\le \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right]$

Vậy với $m \cup \left(0;\dfrac{1}{2}\right] \cup \{1\}$ thì phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Câu 16: Chọn B

Điều kiện xác định: $x \in \mathbb{R}$

Ta có: $2\log_{mx-1}(x^2+1) = \log_{\sqrt{mx-1}}(2x^2-3x+3)$ (*)

$$\Leftrightarrow 2\log_{mx-1}(x^2+1) = 2\log_{mx-1}(2x^2-3x+3) \Leftrightarrow \log_{mx-1}(x^2+1) = \log_{mx-1}(2x^2-3x+3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-3x+3 = x^2+1 \\ mx-1>0 \\ mx-1\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2=0 \\ mx-1>0 \\ mx-1\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx-1\ne 1 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right. \\ mx-1>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ mx-1>0 \\ mx-1\ne 1 \end{cases} \text{ hoặc } \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ mx-1>0 \\ mx-1\ne 1 \end{cases}.$$

Phương trình (*) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} m-1>0 \\ m-1\neq 1 \\ \left[\begin{array}{l} 2m-1\le 0 \\ 2m-1=1 \end{array}\right. \end{cases}$ hoặc $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1\le 0 \\ 2m-1\neq 1 \\ \left[\begin{array}{l} m-1\le 0 \\ m-1=1 \end{array}\right. \end{cases}$

Giải ra ta được: $\left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}<m<1 \\ m=2 \end{array}\right.$

Vậy: Có 1 giá trị m nguyên là m = 2 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 17: Chọn B

Điều kiện xác định: $x\in \mathrm{IR}$

Ta có: $2\log_{mx-1}(x^2+1)=\log_{\sqrt{mx-1}}(2x^2-3x+3)$ (**)

$\Leftrightarrow 2\log_{mx-1}(x^2+1)=2\log_{mx-1}(2x^2-3x+3) \Leftrightarrow \log_{mx-1}(x^2+1)=\log_{mx-1}(2x^2-3x+3)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-3x+3=x^2+1 \\ mx-1>0 \\ mx-1\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2=0 \\ mx-1>0 \\ mx-1\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx-1\neq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right. \\ mx-1>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ mx-1>0 \\ mx-1\neq 1 \end{cases}$ hoặc $\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ mx-1>0 \\ mx-1\neq 1 \end{cases}$.

Phương trình (**) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m-1>0 \\ m-1\neq 1 \\ 2m-1>0 \\ 2m-1\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ m\neq 2 \\ m>\frac{1}{2} \\ m\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ m\neq 2 \end{cases}$.

Từ đó: Tập hợp các giá trị nguyên $m\in(-20;20)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $\{3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;13;14;15;16;17;18;19\}$.

Câu 18: Chọn B

Ta có: $\frac{\ln(mx-8)}{\ln(x-1)}=2$ (***). Điều kiện: $\begin{cases} x-1>0 \\ mx-8>0 \\ \ln(x-1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ mx-8>0 \\ x\neq 2 \end{cases}$.

Với điều kiện đó:

Phương trình (***) $\Leftrightarrow \ln(mx-8)=2\ln(x-1) \Leftrightarrow \ln(mx-8)=\ln(x-1)^2 \Leftrightarrow (x-1)^2=mx-8$

$\Leftrightarrow x^2-(m+2)x+9=0$ (3).

Phương trình (***) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi PT (3) có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ khác 2 thỏa $1<x_1<x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)^2 - 4.9 > 0 \\ 1-m-2+9>0 \\ \dfrac{m+2}{2} > 1 \\ 4-2m-4+9 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>4 \\ m<-8 \end{array}\right. \\ m<8 \\ m>0 \\ m \neq \dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4<m<8 \\ m \neq \dfrac{9}{2} \end{cases}.$$

Vậy: Tập hợp giá trị nguyên m thỏa mãn ycbt là: $\{5;6;7\}$.

Câu 19: Chọn C

Ta có: $\log_5(6x+m) = \log_2(x+1) = t \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+m = 5^t \\ x+1 = 2^t \end{cases} \Rightarrow 5^t - 6.2^t = m-6 \ (1)$

Để phương trình có hai nghiệm thực phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt hay đồ thị hàm số $y = 5^t - 6.2^t$ cắt đường thẳng $y = m-6$ tại hai điểm phân biệt

Xét hàm số $y = 5^t - 6.2^t$ có $y' = 5^t \ln 5 - 6.2^t \ln 2 = 0 \Leftrightarrow t = \log_{\frac{5}{2}}\left(\dfrac{6\ln 2}{\ln 5}\right) = t_0$

Ta có bảng biến thiên

t	$-\infty$		t_0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		0 ↘	$y(t_0)$	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{t\to+\infty}\left(5^t - 6.2^t\right) = \lim\limits_{t\to+\infty} 5^t\left(1-6.\left(\dfrac{2}{5}\right)^t\right) = +\infty$; $\lim\limits_{t\to-\infty}\left(5^t - 6.2^t\right) = \lim\limits_{t\to+\infty} 2^t\left(\left(\dfrac{5}{2}\right)^t - 6\right) = 0$

Như vậy đề phương trình có 2 nghiệm khi và chỉ khi $y(t_0) < m-6 < 0$

Câu 20: Chọn A

Ta có: $\ln(x+2) = \ln(x^3 - 2x + m) \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x^3 - 3x - 2 = -m \ (*) \end{cases}$

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x - 2 \quad , x \in (-2;+\infty) \Rightarrow y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$		
y	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗		$+\infty$

Từ bảng biến thiên: phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt khi $-m\in(-4;0)$ hay $m\in(0;4)$

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 21: Chọn B

$$\log_{\sqrt{2}}\left(mx-6x^3\right)+2\log_{\frac{1}{2}}\left(-14x^2+29x-2\right)=0\Leftrightarrow\log_2\left(mx-6x^3\right)=\log_2\left(-14x^2+29x-2\right)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-14x^2+29x-2>0\\ mx-6x^3=-14x^2+29x-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left(\frac{1}{14};2\right)\\ \frac{6x^3-14x^2+29x-2}{x}=m\ (*)\end{cases}$$

Xét hàm số: $y=\frac{6x^3-14x^2+29x-2}{x}$ trên $\left(\frac{1}{14};2\right)$

Ta có: $y'=12x-14+\frac{2}{x^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{-1}{3}\\ x=\frac{1}{2}\\ x=1\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$\frac{1}{14}$		$\frac{1}{2}$		1		2
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$\frac{3}{98}$	↗	$\frac{39}{2}$	↘	19	↗	24

Từ bảng biến thiên: Phương trình (*) có nghiệm duy nhất $m\in\left(\frac{3}{98};19\right)\cup\left(\frac{39}{2};24\right)$

Vậy có 22 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 22: Chọn C

Ta có $\ln\left(x-\frac{1}{x}\right)=\ln\left(mx-6\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x-\frac{1}{x}>0\\ x-\frac{1}{x}=mx-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-1;0)\cup(1+\infty)\\ m=1-\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x}\end{cases}$.

Xét hàm số $f(x)=1-\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x}$ trên tập $D=(-1;0)\cup(1+\infty)$.

Ta có $f'(x)=\frac{2}{x^3}-\frac{6}{x^2}$. Do đó $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2}{x^3}-\frac{6}{x^2}=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$.

Lập bảng biến thiên suy ra $1<m<10$.

Câu 23: Chọn B

Giả sử $\log_2(x)=\log_3(x^2+m)=t$. Khi đó $\begin{cases}x=2^t\\x^2+m=3^t\end{cases}\Rightarrow 4^t+m=3^t\Rightarrow 3^t-4^t=m$.

Xét hàm số $f(t)=3^t-4^t$.

Ta có $f'(t)=3^t.\ln 3-4^t.\ln 4$.

Do đó $f'(t)=0\Leftrightarrow 3^t.\ln 3-4^t.\ln 4=0\Leftrightarrow\left(\frac{3}{4}\right)^t=\frac{\ln 4}{\ln 3}\Leftrightarrow t=t_0=\log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{\ln 4}{\ln 3}\right)$.

Lập bảng biến thiên suy ra phương trình có nghiệm khi $m\le f(t_0)$.

Do $m\in(-20;20)$ nên có 20 số nguyên thỏa bài toán.

Câu 24: Chọn D

Ta có $\log_2(mx)=\log_2(x^3+8)\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+8>0\\x^3+8=mx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-2\\x\neq 0\\x^2+\frac{8}{x}=m\end{cases}$.

Xét hàm số $f(x)=x^2+\frac{8}{x}$ trên tập $D=(-2;0)\cup(0;+\infty)$.

Ta có $f'(x)=2x-\frac{8}{x^2}$. Do đó $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-\frac{8}{x^2}=0\Leftrightarrow x=2$.

Lập bảng biến thiên suy ra $m<0$.

Do $m\in(-20;20)$ nên có 19 số nguyên thỏa bài toán.

Câu 25: Chọn A

Điều kiện: $x>-2$. Phương trình đã cho trở thành: $mx=x^3+8(*)$

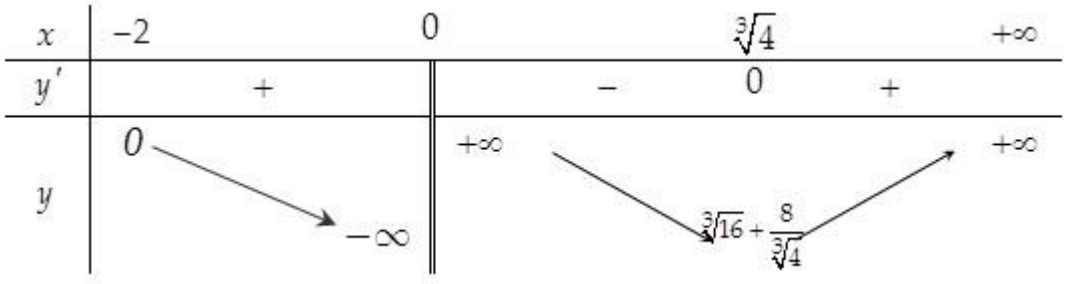
Trường hợp 1. Nếu $x=0$ thì (*) trở thành $0=8$ (vô lí).

Trường hợp 2. Nếu $x\neq 0$ thì (*) trở thành $m=x^2+\frac{8}{x}$.

Xét hàm số $y=x^2+\frac{8}{x}, x\in(-2;+\infty)\setminus\{0\}$.

Ta có $y'=2x-\frac{8}{x^2}; y'=0\Leftrightarrow 2x^3-8=0\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{4}$.

Bảng biến thiên



Căn cứ vào bảng biến thiên và $m\in(-20;20)$, ta suy ra $m\in\left(\sqrt[3]{16}+\frac{8}{\sqrt[3]{4}};20\right)$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{8;9;10;...;19\}$.

Câu 26: Chọn A

Ta đặt $\log_3\left|x^2+mx\right|=\log_5\left(x^2+mx+2\right)=t$. Suy ra $\begin{cases}\left|x^2+mx\right|=3^t\,(1)\\ x^2+mx+2=5^t\,(2)\end{cases}$. Thay (2) vào (1) ta được: $\left|5^t-2\right|=3^t\Leftrightarrow\begin{bmatrix}t=1\\ t=0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x^2+mx+1=0\,(3)\\ x^2+mx-3=0\,(4)\end{bmatrix}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt, (4) có hai nghiệm phân biệt và không có nghiệm chung $\Leftrightarrow m^2-4>0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}m>2\\ m<-2\end{bmatrix}$. Kết hợp $m\in(-20;20)$ và m là số nguyên nên ta có 34 giá trị m.

Câu 27: Chọn B

Ta đặt $\log_3\left|x^2+mx\right|=\log_5\left(x^2+mx+2\right)=t$. Suy ra $\begin{cases}\left|x^2+mx\right|=3^t\,(1)\\ x^2+mx+2=5^t\,(2)\end{cases}$. Thay (2) vào (1) ta được: $\left|5^t-2\right|=3^t\Leftrightarrow\begin{bmatrix}t=1\\ t=0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x^2+mx+1=0\,(3)\\ x^2+mx-3=0\,(4)\end{bmatrix}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (3) vô nghiệm (do phương trình (4) luôn có hai nghiệm phân biệt) $\Leftrightarrow m^2-4<0\Leftrightarrow m\in(-2;2)$. Kết hợp $m\in(-20;20)$ và m là số nguyên nên ta có 3 giá trị m.

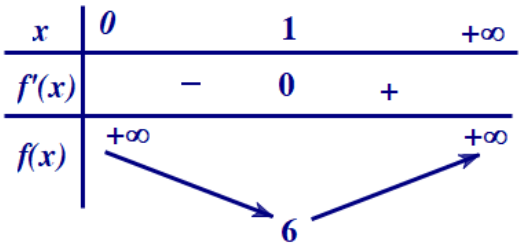
Câu 28: Chọn B.

Xét trên $(0;+\infty)$, ta có

$$\log_2(mx)=\log_2\left(x^3+3x+2\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x^3+3x+2>0\\ mx=x^3+3x+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ m=\dfrac{x^3+3x+2}{x}\end{cases}(2)$$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^3+3x+2}{x}$ trên $(0;+\infty)$ có $f'(x)=\dfrac{2\left(x^3-1\right)}{x^2}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình (2) có nghiệm trên $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $m>6$.

Câu 29: Chọn A.

$\log_{3+2\sqrt{2}}(x+m-1)+\log_{3-2\sqrt{2}}\left(mx+x^2\right)=0 \Leftrightarrow \log_{3+2\sqrt{2}}(x+m-1)-\log_{3+2\sqrt{2}}\left(mx+x^2\right)=0$

$\Leftrightarrow \log_{3+2\sqrt{2}}(x+m-1)=\log_{3+2\sqrt{2}}\left(mx+x^2\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x+m-1>0 \\ x+m-1=mx+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+m-1>0 \\ x^2+(m-1)x+1-m=0 \quad (1) \end{cases}$

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi một trong các trường hợp sau xảy ra:

Trường hợp 1: (1) nghiệm kép x_0 thỏa $x_0>1-m \Leftrightarrow \begin{cases} x_0>1-m \\ \Delta=(m-1)(m+3)=0 : \text{Không tồn tại } m. \\ x_0=-\dfrac{m-1}{2} \end{cases}$

Trường hợp 2: (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa

$$x_1 \le 1-m<x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)(m+3)>0 \\ \dfrac{1-m-\sqrt{(m-1)(m+3)}}{2} \le 1-m<\dfrac{1-m+\sqrt{(m-1)(m+3)}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m<-3 \\ \dfrac{1-m-\sqrt{(1-m)(-m-3)}}{2} \le 1-m<\dfrac{1-m+\sqrt{(1-m)(-m-3)}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} m>1 \\ \dfrac{-(m-1)-\sqrt{(m-1)(m+3)}}{2} \le -(m-1)<\dfrac{-(m-1)+\sqrt{(m-1)(m+3)}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m<-3 \\ \sqrt{1-m}-\sqrt{-m-3} \le 2\sqrt{1-m}<\sqrt{1-m}+\sqrt{-m-3} \end{cases} \\ \begin{cases} m>1 \\ -\sqrt{m-1}-\sqrt{m+3} \le -2\sqrt{m-1}<-\sqrt{m-1}+\sqrt{m+3} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m<-3 \\ -\sqrt{-m-3} \le \sqrt{1-m}<\sqrt{-m-3} \end{cases} \\ \begin{cases} m>1 \\ -\sqrt{m+3} \le -\sqrt{m-1}<\sqrt{m+3} \end{cases} \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow m>1$ nên $\begin{cases} m>1 \\ m\in(-20;20) \end{cases} \Leftrightarrow 1<m<20$. Vậy có 18 giá trị của m thỏa đề bài.

Câu 30: Chọn D.

$\log_2(|2x-1|+m)=1+\log_3\left(m+4x-4x^2\right) \Leftrightarrow \log_2(|2x-1|+m)=1+\log_3\left[(m+1)-|2x-1|^2\right] (1)$

Nhận xét: Nếu x_0 là nghiệm của (1) thì $1-x_0$ cũng là nghiệm.

Điều kiện cần: Giả sử phương trình (1) có nghiệm duy nhất x_0 thì do $1-x_0$ cũng là nghiệm của (1) nên suy ra $1-x_0=x_0 \Leftrightarrow x_0=\frac{1}{2}$.

Thay $x_0=\frac{1}{2}$ vào (1) ta được $\log_2 m=1+\log_3(m+1) \Leftrightarrow \log_2 m-\log_3(m+1)=1$ (2)

Xét hàm số $f(m)=\log_2 m-\log_3(m+1)$ với $m>0$.

$f'(m)=\frac{1}{m\ln 2}-\frac{1}{(m+1)\ln 3}>0,\ \forall m>0 \Rightarrow$ Hàm số $f(m)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Mặt khác, $m=8$ thỏa (2) nên đây là nghiệm duy nhất của (2).

Điều kiện đủ:

Thay $m=8$ vào phương trình đã cho ta được $\log_2(|2x-1|+8)=1+\log_3\left(9-|2x-1|^2\right)$ (3)

Đặt $t=\log_2(|2x-1|+8) \Leftrightarrow |2x-1|+8=2^t \Leftrightarrow |2x-1|=2^t-8$.. Điều kiện $t\geq \log_2 8=3$.

Phương trình (3) trở thành

$t=1+\log_3\left[9-\left(2^t-8\right)^2\right] \Leftrightarrow 3^{t-1}=9-\left(2^t-8\right)^2 \Leftrightarrow 3^{t-1}+\left(2^t-8\right)^2=9$ (4)

Ta thấy $t=3$ thỏa (4)

Hàm số $g(t)=3^{t-1}+\left(2^t-8\right)^2$ đồng biến trên $[3;+\infty)$.

Suy ra $t=3$ là nghiệm duy nhất của (4).

Do đó, $(3) \Leftrightarrow \log_2(|2x-1|+8)=3 \Leftrightarrow |2x-1|+8=8 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$. Vậy $m=8$ thỏa đề bài.

Câu 31: Chọn D

Đặt $t=\log_2 x \Leftrightarrow x=2^t$.

Phương trình trở thành: $t+\log_3\left(m-2^t\right)=2 \Leftrightarrow m-2^t=3^{2-t} \Leftrightarrow m=2^t+3^{2-t}$.

Xét hàm số: $f(t)=2^t+3^{2-t}$ có: $f'(t)=2^t.\ln 2-3^{2-t}.\ln 3$.

Nên $f'(t)=2^t.\ln 2-3^{2-t}.\ln 3=0 \Leftrightarrow 2^t.\ln 2=3^{2-t}.\ln 3 \Leftrightarrow 6^t=\frac{9\ln 3}{\ln 2} \Leftrightarrow t=t_0=\log_6\left(\frac{9\ln 3}{\ln 2}\right)$.

Ta có bảng biến thiên:

t	$-\infty$		t_0		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(t_0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $f(t)=2^t+3^{2-t}$ suy ra phương trình $m=2^t+3^{2-t}$ có nghiệm khi và chi $m\ge f(t_0)$.

Mà m nguyên, $m\in(-20;20)$ nên $5\le m\le 19\Leftrightarrow m\in\{5;6;7;...19\}$.

Câu 32: Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để phương trình $\log_2 x+\log_3(m-x^3)=2$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. 12. **B.** 20. **C.** 13. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\log_2 x\Leftrightarrow x=2^t$.

Phương trình trở thành: $t+\log_3(m-2^{3t})=2\Leftrightarrow m-8^t=3^{2-t}\Leftrightarrow m=8^t+3^{2-t}$.

Xét hàm số: $f(t)=8^t+3^{2-t}$ có: $f'(t)=8^t.\ln 8-3^{2-t}.\ln 3$.

Nên $f'(t)=8^t.\ln 8-3^{2-t}.\ln 3=0\Leftrightarrow 8^t.\ln 8=3^{2-t}.\ln 3\Leftrightarrow 24^t=\dfrac{9\ln 3}{\ln 8}\Leftrightarrow t=t_0=\log_{24}\left(\dfrac{3\ln 3}{\ln 2}\right)$.

Ta có bảng biến thiên:

t	$-\infty$	t_0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$+\infty$ ↘	$f(t_0)$	↗ $+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $f(t)=8^t+3^{2-t}$ suy ra phương trình $m=8^t+3^{2-t}$ có hai nghiệm thực phân biệt khi và chi $m>f(t_0)$.

Mà m nguyên, $m\in(-20;20)$ nên $1\le m\le 19\Leftrightarrow m\in\{1;2;3;...19\}$.

Câu 33: **Chọn A**

Ta có: $3\log_{27}\left[2x^2-(m+3)x+1-m\right]+\log_{\frac{1}{3}}\left[x^2-x+1-3m\right]=0$

$\Leftrightarrow \log_3\left[2x^2-(m+3)x+1-m\right]-\log_3\left[x^2-x+1-3m\right]=0$

$\Leftrightarrow \log_3\left[2x^2-(m+3)x+1-m\right]=\log_3\left[x^2-x+1-3m\right]$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-(m+3)x+1-m=x^2-x+1-3m\\ x^2-x+1-3m>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-(m+2)x+2m=0\\ x^2-x+1-3m>0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=m \end{array}\right. \\ x^2-x+1-3m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=m \end{array}\right. \\ 4^2-2+1-3m>0 \\ m^2-m+1-3m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=m \end{array}\right. \\ m<5 \\ \left[\begin{array}{l} m>2+\sqrt{3} \\ m<2-\sqrt{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=m \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 2+\sqrt{3}<m<5 \\ m<2-\sqrt{3} \end{array}\right. \end{cases}.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} |x_1-x_2|<15 \\ m\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m-2|<15 \\ m\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -15<m-2<15 \\ m\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -13<m<17 \\ m\neq 2 \end{cases}.$

Kết hợp điều kiện ta có: $\left[\begin{array}{l} -13<m<2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3}<m<5 \end{array}\right.$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-12;...;0;4\}$.

Câu 34: Chọn D

Ta có: $\log_2(2\sin x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(\cos 2x+m)=0 \Leftrightarrow \log_2(2\sin x-1)-\log_2(\cos 2x+m)=0$

$$\Leftrightarrow \log_2(2\sin x-1)=\log_2(\cos 2x+m) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x-1=\cos 2x+m \\ 2\sin x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x+\sin x-1=\dfrac{m}{2} \\ \sin x>\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Đặt $\sin x=t\in[-1;1]$, hệ trên trở thành $\begin{cases} t^2+t-1=\dfrac{m}{2} \quad (1) \\ t>\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Yêu cầu bài toán tương đương với (1) phải có nghiệm thuộc $\left(\frac{1}{2};1\right]$

Xét hàm $y=t^2+t-1, t\in\left(\frac{1}{2};1\right]$

t	$\frac{1}{2}$		1
y'		$+$	
y	$\frac{-1}{4}$	$\nearrow$	1

Từ đây ta suy ra $\frac{-1}{4}<\frac{m}{2}\le 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{2}<m\le 2$.

Câu 35: Chọn A

Đặt $u=3^{x-m+1}; v=3^{x^2-3x}$, phương trình đã cho trở thành

$\frac{9v}{u}+u=3(v+1)\Leftrightarrow 9v-3uv+u^2-3u=0\Leftrightarrow (u-3)(u-3v)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=3 \\ u=3v \end{array}\right.$

Nếu $u=3$ thì $3^{x-m+1}=3\Leftrightarrow x=m$

Nếu $u=3v$ thì $3^{x-m+1}=3^{x^2-3x+1}\Leftrightarrow x^2-4x+m=0$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \Delta'>0 \\ m^2<27 \\ m^2-4m+m\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4-m>0 \\ m^2<27 \\ m\neq 0, m\neq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -3\sqrt{3}<m<4 \\ m\neq 0, m\neq 3 \end{array}\right.$. Vậy có 7 giá trị nguyên của m.

Câu 36: Chọn A

$\log_{mx-5}\left(x^2-6x+12\right)=\log_{\sqrt{mx-5}}\sqrt{x+2}\Leftrightarrow \log_{mx-5}\left(x^2-6x+12\right)=\log_{mx-5}(x+2)$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2-6x+12=x+2 \\ mx-5>0 \\ x+2>0 \\ mx-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2-7x+10=0 \\ mx-5>0 \\ x>-2 \\ mx-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=2 \end{array}\right. \\ mx-5>0 \\ mx-5 \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $x=5$ nhận, $x=2$ loại khi:

$\left\{\begin{array}{l} 5m-5>0 \\ 5m-5\neq 1 \\ \left[\begin{array}{l} 2m-5\leq 0 \\ 2m-5=1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m>1 \\ \left[\begin{array}{l} m\leq \frac{5}{2} \\ m=3 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow m\in\{2;3\}$

Trường hợp 2: $x=5$ loại, $x=2$ nhận khi:

$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 5m-5\leq 0 \\ 5m-5=1 \end{array}\right. \\ 2m-5>0 \\ 2m-5\neq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m\leq 1 \\ m>\frac{5}{2} \\ 2m-5\neq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow m\in\phi$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m.

Câu 37: Chọn C

Ta có $2^x=\sqrt{m.2^x.\cos(\pi x)-4}\Leftrightarrow 2^{2x}=m.2^x.\cos(\pi x)-4\,(1)$.

Giả sử phương trình có nghiệm x_0, khi đó $2-x_0$ cũng là nghiệm của phương trình.

Để phương trình có đúng một nghiệm thì

Điều kiện cần: $x_0=2-x_0\Leftrightarrow x_0=1$ thay vào (1) ta được $m=-4$.

Điều kiện đủ: với $m=-4$, phương trình trở thành:

$2^x=\sqrt{(-4).2^x.\cos(\pi x)-4}\Leftrightarrow 2^{2x}=(-4).2^x.\cos(\pi x)-4$

$\Leftrightarrow 2^x+\frac{4}{2^x}=-4.\cos(\pi x)(2)$. Ta có $2^x+\frac{4}{2^x}\ge 2.2=4$, $-4.\cos(\pi x)\le 4$.

Do đó phương trình (2) có nghiệm duy nhất $x=1$. Vậy $m=-4$ thỏa mãn.

Câu 38: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $9.3^{2x}-m\left(4\sqrt[4]{x^2+2x+1}+3m+3\right).3^x+1=0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt?

A. Vô số. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $9.3^{2x}-m\left(4\sqrt[4]{x^2+2x+1}+3m+3\right).3^x+1=0$

$\Leftrightarrow 9.3^x+\frac{1}{3^x}=m\left(4\sqrt[4]{(x+1)^2}+3m+3\right)(*)$.

Điều kiện cần:

Ta thấy giả sử x_0 là một nghiệm của phương trình $(*)$ thì $-x_0-2$ cũng l à nghiệm.

Do đó số nghiệm của phương trình $(*)$ là số chẵn nếu $x_0\ne -x_0-2$.

Để phương trình $(*)$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt thì $x_0=-x_0-2\Leftrightarrow x_0=-1$.

Thay vào $(*)$ ta có: $3m^2+3m=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-2\end{array}\right.$.

Điều kiện đủ:

Trường hợp 1: $m=1$, phương trình $(*)$ trở thành $9.3^x+\frac{1}{3^x}=4\sqrt[4]{(x+1)^2}+6$

$\Leftrightarrow 9.3^x+\frac{1}{3^x}-4\sqrt[4]{(x+1)^2}-6=0$

Đặt $f(x)=9.3^x+\frac{1}{3^x}-4\sqrt[4]{(x+1)^2}-6=\begin{cases}9.3^x+\frac{1}{3^x}-4\sqrt{x+1}-6, x\ge -1\\9.3^x+\frac{1}{3^x}-4\sqrt{-x-1}-6, x<-1\end{cases}$.

Nếu $x<-1$ thì $f(x)=9.3^x+\frac{1}{3^x}-4\sqrt{-x-1}-6=0\Rightarrow f'(x)=9.3^x.\ln 3-\frac{1}{3^x}.\ln 3+\frac{4}{\sqrt{-x-1}}$.

Và $f''(x)=9.3^x.(\ln 3)^2+\frac{1}{3^x}.(\ln 3)^2+\frac{4}{\sqrt{(-x-1)^3}}>0,\forall x\in(-\infty;-1)$.

$\Rightarrow f'(x)$ có tối đa 1 nghiệm và $f(x)$ có tối đa hai nghiệm trên $(-\infty;-1)$.

Mà $f(-2)=f(-1)=0$ suy ra $x=-2;x=-1(L)$ hay $x=-2$ nghiệm của phương trình.

Nếu $x\ge -1$ thì $f(x)=9.3^x+\frac{1}{3^x}-4\sqrt{x+1}-6$, có: $f'(x)=9.3^x.\ln 3-3^{-x}.\ln 3-\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ và

$f''(x)=9.3^x.(\ln 3)^2+3^{-x}.(\ln 3)^2+\frac{1}{\sqrt{(x+1)^3}}>0,\forall x\in[-1;+\infty)\Rightarrow f'(x)$ có tối đa 1 nghiệm và

$f(x)$ có tối đa hai nghiệm trên $[-1;+\infty)$.

Mà $f(0)=f(-1)=0$ suy ra $x=0;x=-1$ là hai nghiệm của phương trình.

Do đó với $m=1$ phương trình đã cho chỉ có 3 nghiệm là $x=0;x=-1;x=-2$.

Trường hợp 2: $m=-2$, phương trình $(*)$ trở thành $9.3^x+\frac{1}{3^x}=-8\sqrt[4]{(x+1)^2}+6$

$\Leftrightarrow 9.3^x+\frac{1}{3^x}+8\sqrt[4]{(x+1)^2}=6$.

Do đó phương trình có đúng 1 nghiệm $x=-1\Rightarrow m=-2$ không thỏa mãn.

Vậy $m=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 39: Chọn D

Ta có, $3^x>0,\forall x$. Chia 2 vế cho 3^x, ta được phương trình: $3^x+3^{2-x}=a\cos(\pi x)$ $(*)$.

Điều kiện cần:

Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình $(*)$ thì $2-x_0$ cũng là nghiệm của phương trình $(*)$. Suy ra $x_0=2-x_0\Leftrightarrow x_0=1$.

Thay $x_0=1$ vào phương trình, ta được $6=a\cos(\pi)\Leftrightarrow a=-6$.

Điều kiện đủ:

Thử lại, với $a=-6$, ta có phương trình $3^x+3^{2-x}=-6.\cos(\pi x)$.

Xét hàm số $f(x)=3^x+3^{2-x}$. Ta có $f'(x)=3^x.\ln 3-3^{2-x}.\ln 3$. Cho $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Lại có $f''(x)=3^x.\ln^2 3+3^{2-x}.\ln^2 3>0,\forall x$. Nên $x=1$ là cực tiểu của hàm số $f(x)$.

Suy ra $\min f(x)=f(1)=6$.

Xét hàm số $g(x)=-6\cos(\pi x)$

Ta có $-6\le g(x)\le 6$. Suy ra, $\max g(x)=6$.

Vì $\min f(x)=6$ và $\max g(x)=6$ nên phương trình $f(x)=g(x)$ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $f(x)=g(x)=6\Leftrightarrow x=1$.

Do đó phương trình $3^x+3^{2-x}=-6.\cos(\pi x)$ có nghiệm duy nhất $x=1$.

Vậy để phương trình $3^x+3^{2-x}=a\cos(\pi x)$ có nghiệm duy nhất thì $a=-6$.

Câu 40: Chọn C

Ta có: $10^x+10^{2-x}+2=a\cos(\pi x)$ $(*)$.

Điều kiện cần:

Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình $(*)$ thì $2-x_0$ cũng là nghiệm của phương trình $(*)$. Suy ra $x_0=2-x_0\Leftrightarrow x_0=1$.

Thay $x_0=1$ vào phương trình, ta được $22=a\cos(\pi)\Leftrightarrow a=-22$.

Điều kiện đủ:

Thử lại, với $a=-22$, ta có phương trình $3^x+3^{2-x}+2=-22.\cos(\pi x)$.

Xét hàm số $f(x)=10^x+10^{2-x}+2$. Ta có $f'(x)=10^x.\ln 10-10^{2-x}.\ln 10$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Lại có $f''(x)=10^x.\ln^2 10+10^{2-x}.\ln^2 10>0,\forall x$. Nên $x=1$ là cực tiểu của hàm số $f(x)$.

Suy ra $\min f(x)=f(1)=22.$

Xét hàm số $g(x)=-22\cos(\pi x)$

Ta có $-22\le g(x)\le 22.$ Suy ra, $\max g(x)=22.$

Vì $\min f(x)=22$ và $\max g(x)=22$ nên phương trình $f(x)=g(x)$ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $f(x)=g(x)=22\Leftrightarrow x=1.$

Do đó phương trình $10^x+10^{2-x}+2=-22\cos(\pi x)$ có nghiệm duy nhất $x=1.$

Vậy để phương trình $10^x+10^{2-x}=a\cos(\pi x)-2$ có nghiệm duy nhất thì $a=-22$.

Câu 41: Chọn D

$e^{3x+5y-10}-e^{x+3y-9}=1-2x-2y\Leftrightarrow e^{3x+5y-10}+3x+5y-10=e^{x+3y-9}+x+3y-9$

Xét hàm đặc trưng $f(t)=e^t+t$ có $f'(t)=e^t+1>0$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Từ đó suy ra $3x+5y-10=x+3y-9\Leftrightarrow 1-2x=2y$.

Thế vào phương trình: $\log_5^2(3x+2y+4)-(m+6)\log_5(x+5)+m^2+9=0$

$\Rightarrow \log_5^2(x+5)-(m+6)\log_5(x+5)+m^2+9=0$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow (m+6)^2-4(m^2+9)\ge 0\Leftrightarrow -3m^2+12m\ge 0\Leftrightarrow m\in[0;4]$.

Mà m nguyên dương nên $m\in\{1;2;3;4\}$ (có bốn giá trị).

Câu 42: Chọn D

Điều kiện: $x\in[-1;1]$

Ta có $e^{3m}+e^m=2\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+x\sqrt{1-x^2}\right)=\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left(2+2x\sqrt{1-x^2}\right)$

$=\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left[\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2+1\right]=\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^3+\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)$ (*)

Xét hàm $h(t)=t^3+t\to h'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên từ phương trình (*) ta được:

$h\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)=h(e^m)\to x+\sqrt{1-x^2}=e^m$ (**)

Xét $f(x)=x+\sqrt{1-x^2},x\in[-1;1]$ ta có $f'(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}};f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\in[-1;1].$

Phương trình đã cho có nghiệm khi phương trình (**) có nghiệm

$\Leftrightarrow 0<e^m\le f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\Leftrightarrow m\le\ln\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}\ln 2$.

Câu 43: Chọn D

PT $\Leftrightarrow 2^{x^3+x^2-2x+m}-2^{x^2+x}+x^3-3x+m=0\Leftrightarrow 2^{x^3+x^2-2x+m}+\left(x^3+x^2-2x+m\right)=2^{x^2+x}+\left(x^2+x\right)$ (1)

Xét hàm số $f(t)=2^t+t$ với $t\in\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=2^t.\ln 2+1>0\,\forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phương trình (1) có dạng $f\left(x^3+x^2-2x+m\right)=f\left(x^2+x\right)$

Suy ra $x^3+x^2-2x+m=x^2+x\Leftrightarrow m=-x^3+3x$ (2)

Bài toán trở thành tìm tập các giá trị của m để phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)=-x^3+3x$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $m\in(-2;2)$ hay $a=-2;b=2$. Vậy $a+2b=2$.

Câu 44: Có bao nhiêu số nguyên $a\in(-200;200)$ để phương trình $\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{x+a}=\ln(1+x)-\ln(x+a+1)$ có nghiệm thực duy nhất.

A. 399. **B.** 199. **C.** 200. **D.** 398.

Lời giải

Chọn B

Xét $f(x)=e^x+e^{x+a}\Rightarrow f'(x)=e^x+e^{x+a}>0,\ \forall x$.

$g(x)=\ln(1+x)-\ln(1+x+a)\Rightarrow g'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+a+1}=\dfrac{a}{(x+1)(x+a+1)}$.

Nếu $a\geq 0$ thì $\begin{cases}f(x)>0\\ g(x)\leq 0\end{cases}$ nên $f(x)=g(x)$ vô nghiệm.

Nếu $a<0$ thì $f'(x)>0$ và $g'(x)<0$

Ta có bảng biến thiên:



Dựa vào BBT, phương trình $f(x)=g(x)$ luôn có nghiệm duy nhất.

Do $a\in(-200;0)$ và $a\in\mathbb{Z}$ nên $a\in\{-199;-198;...;-1\}$.

Vậy có 199 số a.

Câu 45: **Chọn C**

Điều kiện: $3x^2+3x+m+1>0$

Ta có: $\log_2\dfrac{3x^2+3x+m+1}{2x^2-x+1}=x^2-5x+2-m$

$\log_2 \dfrac{3x^2+3x+m+1}{2x^2-x+1} = x^2-5x+2-m$

$\Leftrightarrow \log_2\left(3x^2+3x+m+1\right)+\left(3x^2+3x+m+1\right)=\log_2\left[2\left(2x^2-x+1\right)\right]+2\left(2x^2-x+1\right)$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t, t>0$ ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0, \forall t>0$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

Do đó ta có : $3x^2+3x+m+1=2\left(2x^2-x+1\right)\Leftrightarrow m=x^2-5x+1$.

Xét hàm số $f(x)=x^2-5x+1$

Ta có : $f'(x)=2x-5=0\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$\dfrac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$	$-\dfrac{21}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$
			-3				

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -\dfrac{21}{4}<m<-3$. Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-5;-4\}$.

Câu 46: Chọn A

Điều kiện: $x\le\dfrac{1}{2}$.

Ta có: $5^{2x+\sqrt{1-2x}}-m.5^{1-\sqrt{1-2x}}=4.5^x\Leftrightarrow 5^{x+\sqrt{1-2x}}-m.5^{1-x-\sqrt{1-2x}}=4$

$\Leftrightarrow 5^{x+\sqrt{1-2x}}-m.\dfrac{5}{5^{x+\sqrt{1-2x}}}=4$ (*). Đặt $t=5^{x+\sqrt{1-2x}}, t\in(0;5]$

Phương trình (*) trở thành: $t-\dfrac{5m}{t}=4\Leftrightarrow t^2-4t=5m, t\in(0;5]$

Xét hàm số $f(t)=t^2-4t, t\in(0;5]$. Ta có: $f'(t)=2t-4=0\Leftrightarrow t=2$

Bảng biến thiên

t	0		2		5
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	5

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(t)$, ta có yêu cầu bài toán

$\Leftrightarrow -4\le 5m\le 5\Leftrightarrow -\dfrac{4}{5}\le m\le 1\Leftrightarrow m\in\left[-\dfrac{4}{5};1\right]\Rightarrow b-a=1-\left(-\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{9}{5}$.

Câu 47: Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm, ta có: $\dfrac{1}{a^x}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{b^x}+\dfrac{1}{a}\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{a^x}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{b^x}-\dfrac{1}{a}=0$

Để hai đồ thị cắt nhau tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{a^x}\ln\left(\frac{1}{a}\right)-\frac{1}{b^x}\ln\left(\frac{1}{b}\right)=0$ có 1 nghiệm

Ta có: $\frac{1}{a^x}\ln\left(\frac{1}{a}\right)-\frac{1}{b^x}\ln\left(\frac{1}{b}\right)=0\Leftrightarrow\left(\frac{b}{a}\right)^x=\frac{\ln\left(\frac{1}{b}\right)}{\ln\left(\frac{1}{a}\right)}=\log_{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{b}\right)=\log_a b\Leftrightarrow x=\log_{\left(\frac{b}{a}\right)}\left[\log_a b\right]$

Để x tồn tại $\Leftrightarrow\begin{cases}b>0\\a\neq1\\a>0\\\log_a b>0\\\frac{b}{a}>0\\\frac{b}{a}\neq1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq1\\b>1\\b\neq a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>1\\b>1\\b\neq a\end{cases}$

Vậy về cơ bản $a;b$ được chọn từ $\{2;3;....;100\}$.

Vậy số cặp $(a;b)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài là $A_{99}^2=9702$

Câu 48: Chọn A

Điều kiện xác định: $mx+9>0$

Ta có: $(mx+9).\log_3\left[\left(x^2+1\right).(mx+9)\right]=9-\left(x^2-1\right)(mx+9)$

Đặt: $u=mx+9$. Điều kiện: $u>0$

Ta có: $u.\log_3\left[\left(x^2+1\right)u\right]=9-\left(x^2-1\right).u$

Vì $u>0$ nên chia hai vế cho u, ta được: $\log_3\left[\left(x^2+1\right)u\right]=\frac{9}{u}-\left(x^2-1\right)$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)u=3^{\frac{9}{u}-\left(x^2-1\right)}\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)u=\frac{3^{\frac{9}{u}}}{3^{x^2-1}}\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)u=\frac{3^{\frac{9}{u}}}{3^{\left(x^2+1\right)-2}}\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)u=\frac{3^{\frac{9}{u}}}{3^{\left(x^2+1\right)}.3^{-2}}$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)u=\frac{9.3^{\frac{9}{u}}}{3^{\left(x^2+1\right)}}\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)3^{\left(x^2+1\right)}=\frac{9}{u}.3^{\frac{9}{u}}$$

Ta có: $f(a)=a.3^a\Rightarrow f'(a)=3^a+a.3^a\ln3=3^a(1+a\ln3)>0\forall a>0$ do $a=x^2+1=\frac{9}{u}$

Vậy phương trình có nghiệm

$$\Leftrightarrow x^2+1=\frac{9}{u}=\frac{9}{mx+9}\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)(mx+9)=9\Leftrightarrow mx^3+9x^2+mx=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c}x=0\\g(x)=mx^2+9x+m=0\end{array}\right.$$

Để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì $g(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0

Vậy ta có: $\begin{cases}\Delta=81-4m^2>0\Leftrightarrow\frac{-9}{2}<m<\frac{9}{2}\\g(0)=m\neq0\end{cases}$

Vậy các giá trị nguyên m cần tìm là $\{-4;-3;-2;-1;1;2;3;4\}$

Câu 49: Chọn A

Điều kiện: $x\neq1;x\neq2$.

Xét hàm số $f\ x\ =\frac{2}{3^x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}$ trên $\mathbb{R}\setminus\ 1;2\ .$

$f'\ x\ =-\frac{2\ln 3}{3^x}-\frac{1}{x-1^{\ 2}}-\frac{1}{x-2^{\ 2}}\ \Rightarrow f'\ x\ <0,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\ 1;2$

Lập bảng biến thiên suy ra $m>0\xrightarrow{m\in\ -20;20}m\in\ 0;20\ \Rightarrow m\in\ 1;2;3;...;19\ .$

Vậy, có 19 giá trị thỏa mãn.

Câu 50: Chọn B

Xét phương trình : $\log_a 11+\log_{\frac{1}{7}}\left(\sqrt{x^2+ax+10}+4\right).\log_a\left(x^2+ax+12\right)\ge 0\ (1)$

Điều kiện : $\begin{cases}0<a\ne 1\\ x^2+ax+10\ge 0\end{cases}$. Với điều kiện đó, ta có phương trình (1) tương đương:

$$\frac{\log_a 11.\log_a 7-\log_a\left(\sqrt{x^2+ax+10}+4\right).\log_a\left(x^2+ax+12\right)}{\log_a 7}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\ln 11.\ln 7-\ln\left(\sqrt{x^2+ax+10}+4\right).\ln\left(x^2+ax+12\right)}{\ln a.\ln a.\log_a 7}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\ln(3+4).\ln\left(3^2+2\right)-\ln\left(\sqrt{x^2+ax+10}+4\right).\ln\left(\left(\sqrt{x^2+ax+10}\right)^2+2\right)}{\ln a.\ln 7}\ge 0\quad(*)$$

Xét hàm số: $f(t)=\ln(t+4).\ln\left(t^2+2\right)\Rightarrow f'(t)=\frac{1}{t+4}\ln\left(t^2+2\right)+\ln(t+4).\frac{2t}{t^2+2}>0,\forall t>0$

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

Trường hợp 1: Nếu $a>1$ thì $\ln a>0$, ta có:

$$(*)\Leftrightarrow\ln(3+4).\ln\left(3^2+2\right)-\ln\left(\sqrt{x^2+ax+10}+4\right).\ln\left(\left(\sqrt{x^2+ax+10}\right)^2+2\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow f(3)\ge f\left(\sqrt{x^2+ax+10}\right)\Leftrightarrow 3\ge\sqrt{x^2+ax+10}\Leftrightarrow 9\ge x^2+ax+10\Leftrightarrow x^2+ax+1\le 0$$

Bất phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow\Delta=a^2-4=0\Leftrightarrow a=2(\text{vì }a>1)$

Trường hợp 2: Nếu $0<a<1$ thì $\ln a<0$, ta có:

$$(*)\Leftrightarrow\ln(3+4).\ln\left(3^2+2\right)-\ln\left(\sqrt{x^2+ax+10}+4\right).\ln\left(\left(\sqrt{x^2+ax+10}\right)^2+2\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow f(3)\le f\left(\sqrt{x^2+ax+10}\right)\Leftrightarrow 3\le\sqrt{x^2+ax+10}\Leftrightarrow 9\le x^2+ax+10\Leftrightarrow x^2+ax+1\ge 0$$

Khi đó bất phương trình không thể có nghiệm duy nhất. Vậy $a=2$.

GTLN-GTNN CỦA HÀM SỐ MŨ VÀ LOGARIT

Câu 1: Cho $a>1,b>1$. Tính $S=\log_a\sqrt{ab}$, khi biểu thức $P=\log_a^2 b+8\log_b a$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $S=6\sqrt[3]{2}$. **B.** $S=\dfrac{1+\sqrt[3]{4}}{2}$. **C.** $S=\sqrt[3]{4}$. **D.** $S=2\left(1+\sqrt[3]{4}\right)$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{9^x}{9^x+m^2}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho $f(a)+f(b)=1$ với mọi số thực a,b thỏa mãn $e^{a+b}\le e^2(a+b-1)$. Tính tích các phần tử của S.

A. 81. **B.** -3. **C.** 3. **D.** -9.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=\log_3\dfrac{m^2x}{1-x}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho $f(a)+f(b)=3$ với mọi số thực a,b thỏa mãn $e^{a+b}\le e(a+b)$. Tính tích các phần tử của S.

A. 27. **B.** $3\sqrt{3}$. **C.** $-3\sqrt{3}$. **D.** -27.

Câu 4: Cho hai số thực $b>a>1$. Tính $S=\log_a\sqrt[3]{ab}$, khi biểu thức $P=\dfrac{\log_a b}{\log_a^2\left(\dfrac{a}{b}\right)}+\log_a\sqrt{ab}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $S=4$. **B.** $S=\dfrac{11}{4}$. **C.** $S=\dfrac{4}{3}$. **D.** $S=3$.

Câu 5: Cho hai số thực $a>1,b>1$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\dfrac{1}{\log_{ab}a}+\dfrac{1}{\log_{\sqrt[4]{ab}}b}$ là $\dfrac{m}{n}$ với m,n là các số nguyên dương và $\dfrac{m}{n}$ tối giản. Tính $P=2m+3n$.

A. $P=30$. **B.** $P=42$. **C.** $P=24$. **D.** $P=35$.

Câu 6: Cho các số thực x,y,z không âm thỏa mãn $0<(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2\le 2$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức là $\dfrac{a}{b}$, với a,b là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ là tối giản. Tính $S=2a+3b$.

A. $S=13$. **B.** $S=42$. **C.** $S=54$. **D.** $S=71$.

Câu 7: Số thực a nhỏ nhất để bất đẳng thức $\ln(1+x)\ge x-ax^2$ luôn đúng với mọi số thực dương x là $\dfrac{m}{n}$, với m,n là các số nguyên dương và $\dfrac{m}{n}$ tối giản.Tính $T=2m+3n$.

A. $T=5$. **B.** $T=8$. **C.** $T=7$. **D.** $T=11$.

Câu 8: Cho x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn $0<4^{\frac{x}{3}}+4^{\frac{y}{3}}+4^{\frac{z}{3}}-\dfrac{1}{108}(x+y+z)^4$ là $\dfrac{a}{b}$, với a,b là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ là tối giản. Tính $S=2a+3b$.

A. $S=13$. **B.** $S=42$. **C.** $S=54$. **D.** $S=71$.

Câu 9: Cho các số thực $a;b;c$ thuộc đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $\log_2^3 a+\log_2^3 b+\log_2^3 c\le 1$. Tính giá trị biểu thức $S=a+b+c$ khi biểu thức $P=a^3+b^3+c^3-3.\left(\log_2 a^a+\log_2 b^b+\log_2 c^c\right)$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $S=5$. **B.** $S=3.2^{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}$. **C.** $S=6$. **D.** $S=4$.

Câu 10: Cho các số thực $a,b\in(1;2]$ thỏa mãn $a<b$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2\log_a\left(b^2+4b-4\right)+\log_{\frac{b}{a}}^2 a$ là $m+3\sqrt[3]{n}$ với m,n là các số nguyên dương. Tính $S=m+n$.

A. $S=9$. **B.** $S=18$. **C.** $S=54$. **D.** $S=15$.

Câu 11: Xét các số thực a,b thỏa mãn $b>a>1$, biết $P=\log_{\frac{a}{b}}^2 b^4+\log_b\sqrt{a}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng M khi $b=a^m$. Tính $T=M+m$.

A. $T=\frac{7}{2}$. **B.** $T=\frac{37}{10}$. **C.** $T=\frac{17}{2}$. **D.** $T=\frac{35}{2}$.

Câu 12: Cho hai số thực số thực a,b thỏa mãn $a\ge b>1$. Biết rằng $P=\frac{1}{\log_{ab}a}+\sqrt{\log_a\frac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất khi có số thực k sao cho $b=a^k$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $0<k<\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}<k<1$. **C.** $-1<k<-\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{1}{2}<k<0$.

Câu 13: Xét hai số thực số thực a,b thay đổi thỏa mãn $b>a>1$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\log_a^3\left(\frac{a^2}{b^2}\right)+\log_{\sqrt[3]{b^2}}\left(\frac{b}{a}\right)$.

A. $\frac{23+16\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{23-16\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{23+8\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{23-8\sqrt{2}}{2}$.

Câu 14: Cho các số thực $a;b;c$ thuộc đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $\log_2^3 a+\log_2^3 b+\log_2^3 c\le 2$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a^3+b^3+c^3-3.\left(\log_2 a^a+\log_2 b^b+\log_2 c^c\right)$

A. 3. **B.** 6. **C.** $3\sqrt[3]{4}$. **D.** 5.

Câu 15: Cho hàm số $f(t)=\frac{4^t}{4^t+m}$ (với $m>0$ là tham số thực). Biết $f(x)+f(y)=1$ với mọi số thực dương $x;y$ thỏa mãn $(x+y)^{\frac{1}{2}}\ge\frac{1}{2}.(x+y)+\frac{1}{2}$. Tìm GTNN của hàm số $f(t)$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};1\right]$

A. $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]}f(t)=\frac{3}{4}$. **B.** $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]}f(t)=\frac{1}{2}$. **C.** $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]}f(t)=\frac{1}{4}$. **D.** $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]}f(t)=\frac{5}{4}$.

Câu 16: Cho hai số thực x, y phân biệt thỏa mãn $x,y\in(0;2018)$. Đặt $S=\frac{1}{y-x}\left(\ln\frac{y}{2018-y}-\ln\frac{x}{2018-x}\right)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S\ge\frac{2}{1009}$. **B.** $S\le\frac{2}{1009}$. **C.** $S\ge\frac{4}{1009}$. **D.** $S\le\frac{4}{1009}$.

Câu 17: Cho a, b, c, d là các số thực không âm và có tổng bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(1+a^2+b^2+a^2b^2\right)\left(1+c^2+d^2+c^2d^2\right)$.

A. 2. **B.** $4\ln\frac{17}{16}$. **C.** $\left(\frac{17}{16}\right)^4$. **D.** $\ln\frac{17}{16}$.

Câu 18: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\ln\left(a^2+b^2\right)\ge a^2+b^2-1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\log_2\left(a+1\right)+\log_2 b$.

A. $\frac{3}{2}\log_2 3+2$. **B.** $\frac{2}{3}\log_2 3+2$. **C.** $\frac{3}{2}\log_2 3-2$. **D.** $2\log_2 3-2$.

Câu 19: Số thực a nhỏ nhất để bất đẳng thức $\ln(x+1)\le x-\frac{x}{2}+ax^3$ đúng với mọi số thực dương x là $\frac{m}{n}$ với m,n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ tối giản. Tính $S=2m+3n.$

A. $S=8.$ **B.** $S=20.$ **C.** $S=11.$ **D.** $S=34.$

Câu 20: Cho các số thức $x,y,z\in\left[1;2\right]$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=3^x+3^y+3^z-\frac{3}{5}\left(x+y+z\right)^2$.

A. 5. **B.** 15. **C.** 8. **D.** 6.

Câu 21: Cho hàm số $f(t)=\frac{16^t}{16^t+m^2}$. Gọi S là tập hợp tất cả các số thực m sao cho $f(a)+f(b)=1$ với mọi số thực a,b thỏa mãn $e^{a+b}\le e^2\left(a+b-1\right)$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 4.

Câu 22: Cho hai số thực $a\ge b>1$. Biết rằng biểu thức $T=\frac{2}{\log_{ab}a}+\sqrt{\log_a\frac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất là M khi có số thực m sao cho $b=a^m$. Tính $P=M+m$.

A. $P=\frac{81}{16}$. **B.** $P=\frac{23}{8}$. **C.** $P=\frac{19}{8}$. **D.** $P=\frac{49}{16}$.

Câu 23: Cho hai số thực a,b thay đổi thỏa mãn $\frac{1}{4}<b<a<1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_a\left(b-\frac{1}{4}\right)-\log_{\frac{a}{b}}\sqrt{b}$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{7}{2}$.

Câu 24: Xét các số thực $a,b,c\in\left(1;2\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\log_{bc}\left(2a^2+8a-8\right)+\log_{ca}\left(4b^2+16b-16\right)+\log_{ab}\left(c^2+4c-4\right)$.

A. $\log_3\frac{289}{2}+\log_{\frac{9}{4}}8$. **B.** $\frac{11}{2}$. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 25: Xét các số thực a,b thỏa mãn $a>b>1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=\log^2_{\frac{a}{b}}\left(a^2\right)+3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)$.

A. $P_{\min}=19$. **B.** $P_{\min}=13$. **C.** $P_{\min}=14$. **D.** $P_{\min}=15$.

Câu 26: Cho hai số thực a,b thay đổi thỏa mãn $\frac{1}{6}<b<a<1$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $P=\frac{1}{8}\log_a^3\left(\frac{6b-1}{9}\right)+4\log_{\frac{b}{a}}^3 a$

A. $m=9$. **B.** $m=12$. **C.** $m=\frac{23}{2}$. **D.** $m=\frac{25}{2}$.

Câu 27: Cho hai số thực x,y thỏa mãn $3^{x^2+y^2-2}.\log_2(x-y)=\frac{1}{2}\left[1+\log_2(1-xy)\right]$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2\left(x^3+y^3\right)-3xy$ bằng

A. $\frac{13}{2}$. **B.** $\frac{17}{2}$. **C.** 3. **D.** 7.

Câu 28: Gọi S là tập hợp các cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn $x\in[-1;1]$ và $\ln(x-y)^x-2017x=\ln(x-y)^y-2017y+e^{2018}$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P=e^{2018x}(y+1)-2018x^2$ với $(x;y)\in S$ đạt tại $(x_0;y_0)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng:

A. $x_0\in(-1;0)$. **B.** $x_0=-1$. **C.** $x_0=1$. **D.** $x_0\in[0;1)$.

Câu 29: Cho hai số thực dương x,y thay đổi thõa mãn $x^2-4y^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\log_2(x+2y).\log_2(2x-4y)$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{9}$.

Câu 30: Cho hai số thực a,b thay đổi thỏa mãn $a>b>1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\log_a\left(\frac{a}{b}\right)^2+3\log_b\left(\frac{b}{a}\right)$.

A. 5. **B.** $5-\sqrt{6}$. **C.** $5-2\sqrt{6}$. **D.** $4-\sqrt{6}$

Câu 31: Cho các số nguyên dương a,b thỏa mãn $b<4$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{4^a b^{2a}}{\left(4^a-b^a\right)^3}+\frac{7.4^{a-2}}{b^a}$ là $\frac{m}{n}$ với m,n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ tối giản. Tính $S=m+n$.

A. 43. **B.** 33. **C.** 23. **D.** 13

Câu 32: Cho các số thực $x_1,x_2,...,x_n$ thuộc khoảng $\left(\frac{1}{4};1\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\log_{x_1}\left(x_2-\frac{1}{4}\right)+\log_{x_2}\left(x_3-\frac{1}{4}\right)+...+\log_{x_n}\left(x_1-\frac{1}{4}\right)$.

A. $2n$. **B.** n. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 33: Cho các số thực a,b thỏa mãn $a^3>b>1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{\log_{\frac{a^3}{b}}(ab).\log_b a}{3\left(\log_a b-1\right)^2+8}$

A. $e^{\frac{1}{8}}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $e^{\frac{1}{4}}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Câu 34: Cho hai số thực a,b lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\log_a\left(\frac{a^2+4b^2}{4}\right)+\frac{1}{4\log_{ab}b}$.

A. $\frac{5}{4}$. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $\frac{13}{4}$. **D.** $\frac{7}{4}$.

Câu 35: Cho hai số thực a,b thay đổi thỏa mãn $\frac{1}{3}<b<1$. Biết biểu thức $P=\log_a\left(\frac{3b-1}{4a^3}\right)+12\log_{\frac{b}{a}}^2 a$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng M khi $a=b^m$. Tính $T=M+m$

A. $T=15$. **B.** $T=12$. **C.** $T=\frac{37}{3}$. **D.** $\frac{28}{3}$.

Câu 36: Cho hai số thực a,b thay đổi thoả mãn $a>b>1$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\left(\log_a b^2\right)^2+6\left(\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2$ là $m+\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{p}$ với m,n,p là các số nguyên. Tính $T=m+n+p$.

A. $T=-1$. **B.** $T=0$. **C.** $T=-14$. **D.** $T=6$.

Câu 37: Cho các số thực $a>1>b>0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\log_{a^2}\left(a^2b\right)+\log_{\sqrt{b}}a^3$.

A. $1-2\sqrt{3}$. **B.** $1-2\sqrt{2}$. **C.** $1+2\sqrt{3}$. **D.** $1+2\sqrt{2}$.

Câu 38: Cho các số thực $a,b,c\ge 1$ thỏa mãn $a+b+c=5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\log_3 a+2\log_9 b+3\log_{27}c$.

A. $\log_3 5$. **B.** 1. **C.** $\log_3 15$. **D.** $\log_3 5-1$.

Câu 39: Cho các số thực dương x,y,z bất kì thoả mãn $xyz=10$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{\log^2 x+1}+\sqrt{\log^2 y+4}+\sqrt{\log^2 z+4}$

A. $\sqrt{29}$. **B.** $\sqrt{23}$. **C.** $\sqrt{26}$. **D.** $\sqrt{27}$.

Câu 40: Cho hai số thực dương a,b nhỏ hơn 1.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_a\left(\frac{4ab}{a+4b}\right)+\log_b(ab)$.

A. $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{5+\sqrt{2}}{2}$.

Câu 41: Với các số thực dương x,y,z đôi một phân biệt thỏa mãn $x,y,z\ne 1$ và $xyz=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_x\frac{y}{z}+\log_y\frac{z}{x}+\log_z\frac{x}{y}+2\left(\log_{\frac{x}{y}}z+\log_{\frac{y}{z}}x+\log_{\frac{z}{x}}y\right)$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** 9. **C.** 6. **D.** $6\sqrt{2}$.

Câu 42: Cho hai số thực dương a,b thỏa mãn $\frac{1}{2}\log_2 a=\log_2\frac{2}{b}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4a^3+b^3-4\log_2\left(4a^3+b^3\right)$

A. -4. **B.** $4\log_2 6$.

C. $\frac{4}{\ln 2}-4\log_2\left(\frac{4}{\ln 2}\right)$. **D.** $4\left(1-\log_2 3\right)$.

Câu 43: Cho các số thực a,b thay đổi thỏa mãn $a>\frac{1}{3}, b>1$. Khi biểu thức $\log_{3a} b+\log_b\left(a^4-9a^2+81\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất thì tổng $a+b$ bằng

A. $3+3\sqrt{2}$. **B.** $9+2^{\sqrt{3}}$. **C.** $3+9^{\sqrt{2}}$. **D.** $2+9\sqrt{2}$.

Câu 44: Gọi $a_1,a_2,a_3,...,a_{20}$ là các số thực thuộc khoảng $\left(\frac{1}{4};1\right)$ và M là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_{\sqrt{a_1}}\left(a_2-\frac{1}{4}\right)^3+\log_{\sqrt{a_2}}\left(a_3-\frac{1}{4}\right)^3+...+\log_{\sqrt{a_{19}}}\left(a_{20}-\frac{1}{4}\right)^3+\log_{\sqrt{a_{20}}}\left(a_1-\frac{1}{4}\right)^3$. Vậy M thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(235;245)$. **B.** $(225;235)$. **C.** $(245;255)$. **D.** $(215;225)$.

Câu 45: Cho các số thực a,b,c thuộc khoảng $\left(\frac{1}{3};1\right)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_{\sqrt{a}}\left(\frac{3}{4}b-\frac{1}{4}\right)^2+\log_{\sqrt{b}}\left(\frac{3}{4}c-\frac{1}{4}\right)^2+\log_{\sqrt{c}}\left(\frac{3}{4}a-\frac{1}{4}\right)^2$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(0;10)$. **B.** $(10;15)$. **C.** $(15;30)$. **D.** $(30;40)$.

Câu 46: Cho ba số thực x,y,z không âm thỏa mãn $2^x+4^y+8^z=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}$.

A. $\frac{1}{12}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $1-\log_4 3$

Câu 47: Cho các số thực dương x,y thỏa mãn $2^x+2^y=4$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thứco $P=\left(2x^2+y\right)\left(2y^2+x\right)+9xy$.

A. $P_{\max}=\frac{27}{2}$. **B.** $P_{\max}=18$. **C.** $P_{\max}=27$. **D.** $P_{\max}=12$

Câu 48: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2(4x+16)+x-3y-8^y=-2$. Gọi $(x_o;y_o)$ là cặp $(x;y)$ khi biểu thức $P=x^2+3x+1+8^y$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của $x_o^3+3y_o$ bằng

A. 9. **B.** 7. **C.** –7. **D.** –9.

Câu 49: Cho hai số thực $a>1, b>1$ và biết phương trình $a^{x^2}.b^{x+1}=1$ có nghiệm thực. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_a ab+\frac{4}{\log_a b}$ bằng

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 10.

Câu 50: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $3(3^y+y)=x+\log_{\sqrt[3]{3}} x-3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=y^2-\log_9 x$ bằng

A. $-\frac{7}{16}$. **B.** $\frac{7}{16}$. **C.** $\frac{9}{16}$. **D.** $-\frac{9}{16}$.

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.D	3.C	4.C	5.A	6.C	7.B	8.D	9.D	10.D
11.B	12.B	13.B	14.D	15.B	16.A	17.C	18.C	19.C	20.D
21.B	22.A	23.C	24.D	25.D	26.B	27.A	28.A	29.D	30.C
31.A	32.A	33.B	34.B	35.D	36.C	37.A	38.B	39.C	40.C
41.D	42.D	43.C	44.A	45.D	46.C	47.B	48.C	49.A	50.D

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **Chọn B**

Ta có $P=\log_a^2 b+8\log_b a=\log_a^2 b+\dfrac{8}{\log_a b}=\log_a^2 b+\dfrac{4}{\log_a b}+\dfrac{4}{\log_a b}$

$\geq 3\sqrt[3]{\log_a^2 b.\dfrac{4}{\log_a b}.\dfrac{4}{\log_a b}}=3\sqrt[3]{16}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \log_a^2 b=\dfrac{4}{\log_a b}\Leftrightarrow \log_a b=\sqrt[3]{4}$.

$\Rightarrow S=\log_a\sqrt{ab}=\dfrac{1}{2}\left(1+\log_a b\right)=\dfrac{1+\sqrt[3]{4}}{2}$.

Câu 2: **Chọn D**

Ta có: $e^{a+b}\leq e^2\left(a+b-1\right)\Leftrightarrow e^{a+b-2}-\left(a+b-2\right)\leq 1 \quad (1)$

Xét hàm số: $f\left(t\right)=e^t-t\Rightarrow f'\left(t\right)=e^t-1=0\Leftrightarrow t=0$

$f'\left(t\right)>0\Leftrightarrow t>0; f'\left(t\right)<0\Leftrightarrow t<0\Rightarrow \min f\left(t\right)=f\left(0\right)=1$

$\Rightarrow f\left(t\right)\geq f\left(0\right),\forall t\Leftrightarrow e^t-t\geq 1\Leftrightarrow e^{a+b-2}-\left(a+b-2\right)\geq 1 \quad (2)$

Từ $(1),(2)\Rightarrow\begin{cases}e^{a+b-2}-\left(a+b-2\right)=1\\ a+b-2=0\end{cases}\Rightarrow a+b=2$

Ta có: $1=f\left(a\right)+f\left(b\right)=\dfrac{9^a}{9^a+m^2}+\dfrac{9^b}{9^b+m^2}=\dfrac{2.9^{a+b}+m^2\left(9^a+9^b\right)}{\left(9^a+m^2\right)\left(9^b+m^2\right)}$

$\Rightarrow 2.9^{a+b}+m^2\left(9^a+9^b\right)=9^{a+b}+m^2\left(9^a+9^b\right)+m^4$

$\Leftrightarrow m^4=9^{a+b}\Leftrightarrow m^4=81\Leftrightarrow m=\pm\sqrt[4]{81}=\pm 3$

Do đó tích các phần tử của S bằng –9.

Câu 3: **Chọn C**

Ta có: $e^{a+b}\leq e\left(a+b\right)\Leftrightarrow e^{a+b}-e\left(a+b\right)\leq 0 \quad (1)$

Xét hàm số: $f\left(t\right)=e^t-et\Rightarrow f'\left(t\right)=e^t-e=0\Leftrightarrow t=1$

$f'\left(t\right)>0\Leftrightarrow t>1; f'\left(t\right)<0\Leftrightarrow t<1\Rightarrow \min f\left(t\right)=f\left(1\right)=0$

$\Rightarrow f\left(t\right)\geq f\left(1\right),\forall t\Leftrightarrow e^t-t\geq 0\Rightarrow e^{a+b}-\left(a+b\right)\geq 0 \quad (2)$

Từ $(1),(2)\Rightarrow\begin{cases}e^{a+b}-\left(a+b\right)=0\\ a+b=1\end{cases}$

$\Rightarrow f\left(a\right)+f\left(b\right)=f\left(a\right)+f\left(1-a\right)=\log_3\dfrac{m^2a}{1-a}+\log_3\dfrac{m^2\left(1-a\right)}{1-(1-a)}=\log_3 m^4\Leftrightarrow m^4=27\Leftrightarrow m=\pm\sqrt[4]{27}$

Do đó tích các phần tử thuộc S là $-\sqrt{27}=-3\sqrt{3}$.

Câu 4: **Chọn C**

Ta có $P=\dfrac{\log_a b}{\left(1-\log_a b\right)^2}+\dfrac{1+\log_a b}{2}=f\left(t\right)=\dfrac{t}{\left(1-t\right)^2}+\dfrac{1+t}{2}$. Với $t=\log_a b>1,\forall b>a>1.$

Do đó $f\left(t\right)\ge\min\limits_{(1;+\infty)}f\left(t\right)=f\left(3\right)=\dfrac{11}{4}$. Dấu bằng đạt tại $\log_a b=3\Rightarrow S=\dfrac{1+\log_a b}{3}=\dfrac{4}{3}$.

Câu 5: **Chọn A**

Ta có $S=\dfrac{1}{\log_{ab}a}+\dfrac{1}{\log_{\sqrt[4]{ab}}b}=\left(1+\log_a b\right)+\dfrac{1}{4}\left(1+\log_b a\right)=\dfrac{5}{4}+\left(\log_a b+\dfrac{1}{4}\log_b a\right)$

$\ge\dfrac{5}{4}+2\sqrt{\log_a b.\dfrac{1}{4}\log_b a}=\dfrac{5}{4}+1=\dfrac{9}{4}$. Vậy $m=9,n=4\Rightarrow P=2.9+3.4=30.$

Câu 6: **Chọn C**

Từ giả thiết ta có $2\ge 2x^2\Rightarrow x\le 1;$ tương tự ta có $0\le z,y,x\le 1$

Và $2\left(x^2+y^2+z^2\right)\le 2\left(x^2+y^2+z^2\right)+2\left(xy+yz+zx\right)\le 2\Rightarrow x^2+y^2+z^2\le 1$

Ta có $x^4+y^4+z^4\le x^2+y^2+z^2\Rightarrow\ln\left(x^4+y^4+z^4\right)\le\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)\le 0$

Xét hàm số $f\left(t\right)=4^t-3t-1$, ta có: $f'\left(t\right)=4^t\ln 4-3;f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=\log_4\dfrac{3}{\ln 4}\in\left[0;1\right]$

Bảng biến thiên

t	0		$\log_4\frac{3}{\ln 4}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$f\left(\log_4\frac{3}{\ln 4}\right)$	↗	0

Suy ra $f\left(t\right)\le\underset{[0;1]}{Max}\left\{f\left(0\right);f\left(1\right);f\left(\log_4\dfrac{3}{\ln 4}\right)\right\}=f\left(0\right)=f\left(1\right)=0$

Vậy ta có $4^t\le 3t+1$

Áp dụng ta có $4^x+4^y+4^z\le 3\left(x+y+z\right)+3$.

Từ đó suy ra $P\le 3\left(z+y+z\right)+3-\dfrac{3}{4}\left(x+y+z\right)\le\dfrac{21}{4}\Rightarrow S=2a+3b=54$. **Chọn C**

Câu 7: **Chọn B**

Từ điều kiện ta có $a\ge\dfrac{x-\ln\left(1+x\right)}{x^2},\ \forall x>0$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x-\ln\left(1+x\right)}{x^2}$. Ta có $f'\left(x\right)=\dfrac{2\ln\left(1+x\right)-x-\dfrac{x}{1+x}}{x^3}$

Xét $g\left(x\right)=2\ln\left(1+x\right)-x-\dfrac{x}{x+1}$, ta có $g'\left(x\right)=\dfrac{2}{x+1}-1-\dfrac{1}{\left(x+1\right)^2}=\dfrac{-x^2}{\left(x+1\right)^2}<0,\forall x>0$

Do đó $g(x)<g(0)=0,\forall x>0$. Suy ra $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}<0,\forall x>0$

Do đó lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có giá trị cần tìm là $a\ge\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $T=2.1+3.2=8$.

Câu 8: **Chọn D**

Từ giả thiết ta có $2x^2\le 2\left(x^2+y^2+z^2\right)\le(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2\le 18\Rightarrow x\in[0;3]$.

Một cách tương tự ta có $y,z\in[0;3]$.Do đó ta có $4^{\frac{x}{3}}\le x+1,4^{\frac{y}{3}}\le y+1,4^{\frac{z}{3}}\le z+1,\forall x,y,z\in[0;3]$

Vì vậy $P\le x+y+z+3-\dfrac{1}{108}(x+y+z)^4$.

Đặt $t=x+y+z\in[0;9]$, ta có $P\le f(t)=t+3-\dfrac{1}{108}t^4\le\underset{[0;9]}{Max}\,f(t)=f(3)=\dfrac{21}{4}$.

Dấu bằng đạt tại $(x;y;z)=(3;0;0);(0;3;0);(0;0;3)$. Vậy $S=2.21+3.4=54$.

Câu 9: Cho các số thực $a;b;c$ thuộc đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $\log_2^3 a+\log_2^3 b+\log_2^3 c\le 1$. Tính giá trị biểu thức $S=a+b+c$ khi biểu thức $P=a^3+b^3+c^3-3.\left(\log_2 a^a+\log_2 b^b+\log_2 c^c\right)$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $S=5$. **B.** $S=3.2^{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}$. **C.** $S=6$. **D.** $S=4$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $P=a^3+b^3+c^3-3.\left(\log_2 a^a+\log_2 b^b+\log_2 c^c\right)$

$=a^3+b^3+c^3-3.\left(a.\log_2 a+b.\log_2 b+c.\log_2 c\right)$.

Đặt $\begin{cases}\log_2 a=x\Rightarrow a=2^x\\ \log_2 b=y\Rightarrow b=2^y\\ \log_2 c=z\Rightarrow c=2^z\end{cases}\Rightarrow P=\left(2^x\right)^3+\left(2^y\right)^3+\left(2^z\right)^3-3.\left(x.2^x+y.2^y+z.2^z\right)$ và $x^3+y^3+z^3\le 1$.

Với $a;b;c\in[1;2]\Rightarrow x;y;z\in[0;1]$.

Dễ dàng chứng minh được $2^x\le x+1,\forall x\in[0;1]$, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\end{array}\right.$.

Ta có: $\left(2^x-x\right)^3\le 1\Rightarrow\left(2^x\right)^3\le 3.\left(2^x\right)^2.x-3.2^x.x^2+x^3+1$

$\Rightarrow\left(2^x\right)^3-3x.\left(2^x\right)^2\le 3x.2^x\left(2^x-x-1\right)+x^3+1\le x^3+1.$

Từ đó suy ra: $P\le\left(x^3+1\right)+\left(y^3+1\right)+\left(z^3+1\right)\le 4$.

Dấu bằng xảy ra khi trong 3 số $x;y;z$ có một số bằng 1 và hai số còn lại bằng 0.

Giả sử $x=1;y=z=0$ thì $\begin{cases}a=2^1=2\\ b=2^0=1\\ c=2^0=1\end{cases}\Rightarrow S=a+b+c=2+1+1=4$.

Câu 10: Chọn D

Ta có: $\log_{\frac{b}{a}}^2 a=\dfrac{1}{\log_a^2 \dfrac{b}{a}}=\dfrac{1}{\left(\log_a b-1\right)^2}$.

Với mọi $a,b\in(1;2]$ ta có $b^2+4b-4\ge b^3$ vì tương đương với $(b-1)(b^2-4)\le 0$.

Dấu bằng đạt tại $b=2$.

Khi đó $\log_a\left(b^2+4b-4\right)\ge\log_a b^3$.

Đặt $x=\log_a b(x>1)$, ta có: $P\ge 6x+\dfrac{1}{(x-1)^2}=3(x-1)+3(x-1)+\dfrac{1}{(x-1)^2}+6$.

$\ge 6+3\sqrt[3]{3(x-1).3(x-1).\dfrac{1}{(x-1)^2}}=6+3\sqrt[3]{9}$.

Dấu bằng đạt tại $3(x-1)=\dfrac{1}{(x-1)^2}\Leftrightarrow(x-1)^3=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow x=1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\Leftrightarrow\log_a b=1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Do đó $m=6,n=9\Rightarrow S=m+n=15$.

Câu 11: Chọn B

Ta có: $P=\left(\dfrac{4\log_a b}{1-\log_a b}\right)^2+\log_b\sqrt{a}$. Đặt $x=\log_a b(0<x<1)$, ta có: $y=\dfrac{16x^2}{(1-x)^2}+\dfrac{1}{2}x$.

$y'=\dfrac{-65x^3+3x^2-3x+1}{2(1-x)^3x^2}$; $y'=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{5}\Rightarrow y_{\min}=y\left(\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{7}{2}$.

Do đó $M=\dfrac{7}{2},m=\dfrac{1}{5}\Rightarrow T=M+m=\dfrac{37}{10}$.

Câu 12: Chọn B

Ta có: $P=\dfrac{1}{\log_{ab}a}+\sqrt{\log_a\dfrac{a}{b}}=\log_a(ab)+\sqrt{\log_a a-\log_a b}=1+\log_a b+\sqrt{1-\log_a b}$.

$P=\dfrac{1}{\log_{ab}a}+\sqrt{\log_a\dfrac{a}{b}}=-\left(\sqrt{1-\log_a b}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}\le\dfrac{9}{4}$.

Dấu bằng đạt tại $\sqrt{1-\log_a b}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\log_a b=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow b=a^{\frac{3}{4}}\Rightarrow k=\dfrac{3}{4}$. Vậy $\dfrac{1}{2}<k<1$.

Câu 13: Chọn B

Ta có: $P=\log_a^3\left(\dfrac{a^2}{b^2}\right)+\log_{\sqrt[3]{b^2}}\left(\dfrac{b}{a}\right)=\left[2\log_a\left(\dfrac{a}{b}\right)\right]^3+\dfrac{3}{2}\log_b\left(\dfrac{b}{a}\right)=8(1-\log_a b)^3+\dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{1}{\log_a b}\right)$.

Đặt $x=\log_a b(x>1)$, ta có: $P=f(x)=8(1-x)^3+\dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$.

$f'(x)=\dfrac{3}{2x^2}-24(1-x)^2$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left(x-x^2\right)^2=\dfrac{1}{16}\Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\in(1;+\infty)$.

Suy ra $P_{\max}=\max\limits_{(1;+\infty)}f(x)=f\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{23-16\sqrt{2}}{2}$.

Câu 14: Chọn D

Ta có: $P=a^3+b^3+c^3-3.\left(\log_2 a^a+\log_2 b^b+\log_2 c^c\right)$

$=a^3+b^3+c^3-3.\left(a.\log_2 a+b.\log_2 b+c.\log_2 c\right)$.

Đặt $\begin{cases}\log_2 a=x\Rightarrow a=2^x\\ \log_2 b=y\Rightarrow b=2^y\\ \log_2 c=z\Rightarrow c=2^z\end{cases}\Rightarrow P=\left(2^x\right)^3+\left(2^y\right)^3+\left(2^z\right)^3-3.\left(x.2^x+y.2^y+z.2^z\right)$ và $x^3+y^3+z^3\le 2.$

Với $a;b;c\in\left[1;2\right]\Rightarrow x;y;z\in\left[0;1\right]$.

Dễ dàng chứng minh được $2^x\le x+1,\forall x\in\left[0;1\right]$, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\end{array}\right.$.

Ta có: $\left(2^x-x\right)^3\le 1\Rightarrow\left(2^x\right)^3\le 3.\left(2^x\right)^2.x-3.2^x.x^2+x^3+1$

$\Rightarrow\left(2^x\right)^3-3x.\left(2^x\right)^2\le 3x.2^x\left(2^x-x-1\right)+x^3+1\le x^3+1.$

Từ đó suy ra: $P\le\left(x^3+1\right)+\left(y^3+1\right)+\left(z^3+1\right)\Leftrightarrow P\le\left(x^3+y^3+z^3\right)+3\Leftrightarrow P\le 5.$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a^3+b^3+c^3-3.\left(\log_2 a^a+\log_2 b^b+\log_2 c^c\right)$ bằng 5 khi trong 3 số $x;y;z$ có hai số bằng 1 và số còn lại bằng $0\Rightarrow$ hai trong 3 số $a;b;c$ bằng 2 và số còn lại bằng 1.

Câu 15: Chọn B

Từ điều kiện bài toán ta có: $\left(x+y\right)^{\frac{1}{2}}\ge\frac{1}{2}.\left(x+y\right)+\frac{1}{2}\Leftrightarrow x+y=1.$

Khi đó $1=f\left(x\right)+f\left(1-x\right)=\frac{4^x}{4^x+m}+\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+m}=\frac{8+m.\left(4^x+4^{1-x}\right)}{4+m.\left(4^x+4^{1-x}\right)+m^2}\Leftrightarrow m=2>0.$

$\Rightarrow f\left(t\right)=\frac{1}{1+\frac{2}{4^t}}\Rightarrow\min\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]}f\left(t\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$

Câu 16: Chọn A

Đặt $f\left(t\right)=\ln\left(\frac{t}{2018-t}\right)$. Theo định lí Lagrange ta có

$S=\frac{1}{y-x}\left(\ln\frac{y}{2018-y}-\ln\frac{x}{2018-x}\right)=\frac{f\left(y\right)-f\left(x\right)}{y-x}=f'\left(u\right)=\frac{2018}{u\left(2018-u\right)}$

$\ge\frac{2018}{\left(\frac{u+2018-u}{2}\right)}=\frac{2}{1009}$. Với u là số nằm giữa x và y.

Câu 17: Chọn C

Ta có

$P=\left(1+a^2+b^2+a^2b^2\right)\left(1+c^2+d^2+c^2d^2\right)=\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)\left(1+d^2\right)$

$\Rightarrow\ln P=\ln\left(1+a^2\right)+\ln\left(1+b^2\right)+\ln\left(1+c^2\right)+\ln\left(1+d^2\right).$

Ta chứng minh được bất đẳng thức: $\ln\left(1+t^2\right)\ge\frac{8}{17}t-\frac{2}{17}+\ln\frac{17}{16},\forall t\in\left[0;1\right]\ (*)$.

Áp dụng $(*)$ ta có:

$\ln\left(1+a^2\right)+\ln\left(1+b^2\right)+\ln\left(1+c^2\right)+\ln\left(1+d^2\right)\ge\frac{8}{17}\left(a+b+c+d\right)-\frac{8}{17}+4\ln\frac{17}{16}$

$\Leftrightarrow\ln P\ge4\ln\frac{17}{16}\Leftrightarrow P\ge\left(\frac{17}{16}\right)^4$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=\frac{1}{4}$.

Vậy $\min P=\left(\frac{17}{16}\right)^4$.

Câu 18: Chọn C

Từ điều kiện ta có $a^2+b^2=1\Rightarrow b=\sqrt{1-a^2}$.

Do đó $P=\log_2\left(a+1\right)+\log_2\sqrt{1-a^2}=\log_2\left(\left(a+1\right)\sqrt{1-a^2}\right)<\log_2\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{3}{2}\log_2 3-2$.

Câu 19: Chọn C

Ta có $\ln(x+1)\le x-\frac{x^2}{2}+ax^3,\forall x>0\Leftrightarrow a\ge\frac{\ln(x+1)-x+\frac{x^2}{2}}{x^3},\forall x>0.$

Đặt $f(x)=\frac{\ln(x+1)-x+\frac{x^2}{2}}{x^3}\Rightarrow f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x+1}-1+x\right)x^3-3x^2\left(\ln(x+1)-x+\frac{x^2}{2}\right)}{x^6}$

$=\frac{-3\ln(x+1)+2x-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{x+1}}{x^4}.$

Đặt $g(x)=-3\ln(x+1)+2x-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{x+1}\Rightarrow g'(x)=\frac{-3}{x+1}+2-x+\frac{1}{\left(x+1\right)^2}=\frac{-x^3}{\left(x+1\right)^2}<0,\forall x>0.$

$\Rightarrow g(x)<g(0)=0\Rightarrow f'(x)=\frac{g(x)}{x^4}<0,\forall x>0\Rightarrow a=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(x+1)-x+\frac{x^2}{2}}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x+1}-1+x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{-1}{\left(x+1\right)^2}+1}{6x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{2}{\left(x+1\right)^2}}{6}=\frac{1}{3}.$

$\Rightarrow S=2a+3b=2\Rightarrow S=2m+3n=2.1+3.3=11.$

Câu 20: Chọn D

Ta có $3^x\le6x-3,\forall x\in\left[1;2\right]$, dấu bằng xảy ra khi $x\in\left\{1;2\right\}$.

Ta có $3^x+3^y+3^z\le6\left(x+y+z\right)-9.$

Do đó $S\le6\left(x+y+z\right)-9-\frac{3}{5}\left(x+y+z\right)^2\le6.$ Dấu bằng xảy ra tại $\left(x;y;z\right)=\left(2;2;1\right)$ và các hoán vị của nó.

Câu 21: Chọn B

Ta có $e^{a+b}\le e^2\left(a+b-1\right)\Leftrightarrow e^{a+b-2}-\left(a+b-2\right)\le1$

Xét $f(t)=e^t-t$, ta chứng minh $f(t)=e^t-t\ge 1,\forall t$. Thật vậy, ta có $f'(t)=e^t-1=0\Leftrightarrow t=0$.

Vì $f'(t)>0,\forall t>0$ và $f'(t)<0,\forall t<0$ nên $f(t)\ge f(0)=1,\forall t$ hay $e^{a+b-2}-\left(a+b-2\right)\ge 1$

Suy ra $\begin{cases}e^{a+b-2}-\left(a+b-2\right)=1\\ a+b-2=0\end{cases}\Rightarrow a+b=2.$

Ta có $1=f(a)+f(b)=\dfrac{16^a}{16^a+m^2}+\dfrac{16^b}{16^b+m^2}=\dfrac{2.16^{a+b}+m^2\left(16^a+16^b\right)}{\left(16^a+m^2\right)\left(16^b+m^2\right)}$

$\Rightarrow 2.16^{a+b}+m^2\left(16^a+16^b\right)=16^{a+b}+m^2\left(16^a+16^b\right)+m^4$

$\Leftrightarrow m^4=16^{a+b}\Leftrightarrow m^4=16^2\Leftrightarrow m=\pm 4.$

Câu 22: Chọn A

Ta có : $T=\dfrac{2}{\log_{ab}a}+\sqrt{\log_a\dfrac{a}{b}}=2.\log_a(ab)+\sqrt{\log_a\dfrac{a}{b}}=2+2\log_a b+\sqrt{1-\log_a b}$.

Đặt $t=\log_a b, t\in(0;1]$.

Xét hàm số $f(t)=2+2t+\sqrt{1-t}, t\in(0;1]\Rightarrow f'(t)=2-\dfrac{1}{2\sqrt{1-t}}$.

$f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{15}{16}\in(0;1]$.

Lập bảng biến thiên ta có : $\underset{(0;1]}{Max}\,f(t)=f\left(\dfrac{15}{16}\right)=\dfrac{33}{8}$ khi $t=\dfrac{15}{16}$.

Suy ra $M=\dfrac{33}{8}, m=t=\log_a b=\dfrac{15}{16}$. Vậy $P=M+m=\dfrac{81}{16}$.

Câu 23: Chọn C

Ta có : $\log_{\frac{a}{b}}\sqrt{b}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\log_a b}{1-\log_a b}$

Và $\left(b-\dfrac{1}{2}\right)^2\ge 0\Rightarrow b-\dfrac{1}{4}\le b^2$, do đó $\log_a\left(b-\dfrac{1}{4}\right)\ge\log_a b^2=2\log_a b$

Vì vậy đặt $x=\log_a b(x>1)$ với mọi $0<b<a<1$ ta có

$P\ge 2\log_a b-\dfrac{1}{2}\dfrac{\log_a b}{1-\log_a b}=f(x)=2x-\dfrac{x}{2(1-x)}$.

Ta có : $f'(x)=2-\dfrac{1}{2(x-1)^2}; f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}\in(1;+\infty)$.

Suy ra $\min\limits_{(1;+\infty)}f(x)=f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{9}{2}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}b-\dfrac{1}{4}=b^2\\ \log_a b=\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\dfrac{1}{2}\\ a=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}\end{cases}$.

Câu 24: Chọn D

Với mọi $x\in(1;2]$, ta có $x^2+4x-4\ge x^3$ vì tương đương $(x-1)(x^2-4)\le 0$.

Áp dụng, ta có:

$P \ge \log_{bc} 2a^3 + \log_{ca} 4b^3 + \log_{ab} c^3 = \log_{bc} 2 + \log_{ca} 4 + 3\left(\log_{bc} a + \log_{ca} b + \log_{ab} c\right)$.

Mặt khác $\log_{bc} 2 + \log_{ca} 4 = \dfrac{1}{\log_2 bc} + \dfrac{1}{\log_4 ca} \ge \dfrac{1}{\log_2 (2.2)} + \dfrac{1}{\log_4 (2.2)} = \dfrac{3}{2}, \forall a,b,c \in (1;2]$ và

$\log_{bc} a + \log_{ca} b + \log_{ab} c = \dfrac{\ln a}{\ln b + \ln c} + \dfrac{\ln b}{\ln a + \ln c} + \dfrac{\ln c}{\ln a + \ln b} \ge \dfrac{3}{2}$.

Do đó $P \ge \dfrac{3}{2} + 3\dfrac{3}{2} = 6$. Dấu bằng đạt tại $a = b = c = 2$.

Câu 25: Chọn D

Ta có $P = \dfrac{4}{\left[\log_a \left(\dfrac{a}{b}\right)\right]^2} + 3\left(\log_b a - 1\right) = \dfrac{4}{\left(1 - \log_a b\right)^2} + \dfrac{3}{\log_a b} - 3$.

Đặt $x = \log_a b \left(0 < x < 1\right)$, khi đó:

$P = f(x) = \dfrac{4}{(1-x)^2} + \dfrac{3}{x} - 3$ có $f'(x) = -\dfrac{3}{x^2} - \dfrac{8}{(1-x)^3} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3} \in (0;1)$.

Ta có bảng biến thiên:

x	0		$\frac{1}{3}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	15	↗	

Suy ra $P_{\min} = 15$. Dấu bằng xảy ra khi $x = \log_a b = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{a}$.

Câu 26: Chọn B

Ta có: $4\log_{\frac{b}{a}}^3 a = \dfrac{4}{\left(\log_a \dfrac{b}{a}\right)^3} = \dfrac{4}{\left(\log_a b - 1\right)^3}$.

$\begin{cases} (3b-1)^2 \ge 0 \Rightarrow \dfrac{6b-1}{9} \le b^2 \\ 0 < b < a < 1 \end{cases} \Rightarrow \log_a^3 \left(\dfrac{6b-1}{9}\right) \ge \log_a^3 b^2 = 8\log_a^3 b$.

Đặt $x = \log_a b \left(x > 1\right)$ ta có: $P \ge f(x) = x^3 + \dfrac{4}{(x-1)^3}$, $f'(x) = 3x^2 - \dfrac{12}{(x-1)^4} = 0 \Leftrightarrow x = 2 \in (1;+\infty)$

Bảng biến thiên

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	12	↗	

Suy ra $P_{\min} = 12$. Dấu bằng xảy ra khi $x = \log_a b = 2 \Leftrightarrow b = a^2$.

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Câu 27: Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases} x-y>0 \\ 1-xy>0 \end{cases}$.

Ta có $3^{x^2+y^2-2}.\log_2(x-y)=\frac{1}{2}\left[1+\log_2(1-xy)\right]$

$\Leftrightarrow 3^{x^2+y^2-2}.\log_2\left[x^2+y^2-2+(2-2xy)\right]=\log_2(2-2xy)\Leftrightarrow x^2+y^2-2=0\Leftrightarrow x^2+y^2=2$

Vì nếu $x^2+y^2>2\Rightarrow VT>3^0\log_2(2-2xy)=VP$ và $x^2+y^2<2\Rightarrow VT<3^0\log_2(2-2xy)=VP$.

Vậy có $(x+y)^2-2xy=2\Leftrightarrow xy=\frac{(x+y)^2-2}{2}<1\Rightarrow -2<x+y<2$.

Xét $P=2(x+y)^3-6xy(x+y)-3xy$.

Đặt $t=x+y\in(-2;2)$ thì $P=f(t)=2t^3-3(t^2-2)t-\frac{3(t^2-2)}{2}=-t^3-\frac{3}{2}t^2+6t+3$.

Ta có $f'(t)=-3t^2-3t+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=1\in(-2;2) \\ t=-2\notin(-2;2) \end{array}\right.$. Ta có $\max\limits_{(-2;2)}f(t)=f(1)=\frac{13}{2}$.

Dấu bằng xảy ra tại $x+y=1\Rightarrow\begin{cases} x+y=1 \\ xy=\frac{-1}{2} \\ x-y>0 \\ 1-xy>0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ y=\frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Câu 28: Chọn A

Điều kiện: $x-y>0$. Ta có $\ln(x-y)^x-2017x=\ln(x-y)^y-2017y+e^{2018}$

$\Leftrightarrow(x-y)\ln(x-y)-2017(x-y)=e^{2018}\Leftrightarrow\ln(x-y)-2017-\frac{e^{2018}}{x-y}=0(1)$

Xét $f(t)=\ln t-2017-\frac{e^{2018}}{t}$ ta có $f'(t)=\frac{1}{t}+\frac{e^{2018}}{t^2}>0,\forall t>0$.

Suy ra phương trình $(1)\Leftrightarrow x-y=e^{2018}\Leftrightarrow y=x-e^{2018}$.

Do đó $P=e^{2018x}(y+1)-2018x^2=g(x)$.

$g'(x)=e^{2018x}\left(2019+2018x-2018.e^{2018}\right)-4036x$

$g''(x)=2018e^{2018x}\left(2019+2018x-2018.e^{2018}\right)-4036<0,\forall x\in[-1;1]$

Suy ra $g'(x)$ nghịch biến trên $[-1;1]$ mà $g'(-1).g'(0)<0$

Nên ta có $\exists x_0\in(-1;0)$ sao cho $g'(x_0)=0\Rightarrow\max\limits_{[-1;1]}g(x)=g(x_0)$.

Câu 29: Chọn D

Theo giả thiết ta có $x^2-4y^2=1\Leftrightarrow(x-2y)(x+2y)=1\Rightarrow x-2y=\frac{1}{x+2y}$.

Khi đó $P=\log_2(x+2y).\log_2\frac{2}{x+2y}=\log_2(x+2y).\left[1-\log_2(x+2y)\right]$

$$=-\left[\log_2(x+2y)-\frac{1}{2}\right]^2+\frac{1}{4}\le\frac{1}{4}.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y=\dfrac{1}{x+2y}\\ \log_2(x+2y)=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y=\sqrt{2}\\ x-2y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\\ y=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\end{cases}.$

Câu 30: Chọn C

Biến đổi và sử dụng AM-GM ta có:

$$P=2\log_a\left(\frac{a}{b}\right)+3\log_b\left(\frac{b}{a}\right)=2\left(1-\log_a b\right)+3\left(1-\log_b a\right)$$
$$=5-\left(3\log_b a+2\log_a b\right)\le 5-2\sqrt{3\log_b a.2\log_a b}=5-2\sqrt{6}.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow 3\log_a b=2\log_b a\Leftrightarrow\log_a b=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Câu 31: Chọn A

Biến đổi biểu thức và đặt $x=\left(\frac{4}{b}\right)^a\left(x>1\right)$.

Ta có: $P=\dfrac{4^a b^{2a}}{\left(4^a-b^a\right)^3}+\dfrac{7.4^{a-2}}{b^a}=\dfrac{\left(\frac{4}{b}\right)^a}{\left(\left(\frac{4}{b}\right)^a-1\right)^3}+\dfrac{7}{16}\left(\dfrac{4}{b}\right)^a=f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^3}+\dfrac{7}{16}x\ge\min_{(1;+\infty)}=f(3)=\dfrac{27}{16}$

Câu 32: Chọn A

Ta có: $\left(x_k-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0\Rightarrow {x_k}^2\ge x_k-\frac{1}{4},\forall x_k\in\left(\frac{1}{4};1\right)$ do đó với cơ số $0<x_k<1$ ta có:

$$P\ge\log_{x_1}x_2^2+\log_{x_2}x_3^2+...+\log_{x_n}x_1^2=2\left(\log_{x_1}x_2+\log_{x_2}x_3+...+\log_{x_n}x_1\right)$$
$$\ge 2n\sqrt[n]{\log_{x_1}x_2.\log_{x_2}x_3...\log_{x_n}x_1}=2n$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x_1=x_2=...=x_n=\frac{1}{2}$.

Câu 33: Chọn B

Ta có $P=\dfrac{\log_a(ab)}{\log_a b.\log_a\frac{a^3}{b}\left(3\left(\log_a b-1\right)^2+8\right)}=\dfrac{\log_a b+1}{\log_a b\left(3-\log_a b\right)\left(3\left(\log_a b-1\right)^2+8\right)}$.

Đặt $x=\log_a b,\left(0<x<3\right)$ ta có $P=f(x)=\dfrac{x+1}{x(3-x)\left(3x^2-6x+11\right)}$

Suy ra $\ln f(x)=\ln(x+1)-\ln x-\ln(3-x)-\ln(3x^2-6x+11)$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{3-x}-\frac{6(x-1)}{3x^2-6x+11}=\frac{(x-1)(9x^3-9x^2-25x+33)}{x(x+1)(3-x)(3x^2-6x+11)}$$

Do đó $f'(x)=0\Leftrightarrow(x-1)(9x^3-9x^2-25x+33)=0\Leftrightarrow x=1\in(0;3)$.

Suy ra $P_{\min}=\min\limits_{(0;3)}f(x)=f(1)=\frac{1}{8}$.

Câu 34: Chọn B

Ta có $S=\log_a\left(\frac{a^2+4b^2}{4}\right)+\frac{1}{4\log_{ab}b}\geq\log_a(ab)+\frac{1}{4}\log_b(ab)$

$$=\frac{5}{4}+\log_a b+\frac{1}{4}\log_b a\geq\frac{5}{4}+2\sqrt{\log_a b.\frac{1}{4}\log_b a}=\frac{9}{4}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=4b^2\\ \log_a b=\frac{1}{4}\log_b a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\ b=2\end{cases}$

Câu 35: Chọn D

Ta có $(2b-1)^2(b+1)\geq 0\Rightarrow 3b-1\leq 4b^3\Rightarrow\frac{3b-1}{4a^3}\leq\frac{b^3}{a^3}$.

Đặt $x=\log_a b,(x>1)$ với mọi $0<b<a<1$.

$$P\geq\log_a\frac{b^3}{a^3}+12\left(\frac{1}{\log_a\frac{b}{a}}\right)^2=3\log_a b-3+\frac{12}{(\log_a b-1)}=3x-3+\frac{12}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{3}{2}(x-1)+\frac{3}{2}(x-1)+\frac{12}{(x-1)^2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{3}{2}(x-1)\frac{3}{2}(x-1)\frac{12}{(x-1)^2}}=9.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{3}{2}(x-1)=\frac{12}{(x-1)^2}\Leftrightarrow x=3\Leftrightarrow\log_a b=3\Leftrightarrow b=a^3\Leftrightarrow a=b^{\frac{1}{3}}$.

Vậy $M=9;m=\frac{1}{3}\Rightarrow T=\frac{28}{3}$

Câu 36: Chọn C

Ta có biến đổi đưa về cơ số là a như sau: $\log_a b^2=2\log_a b$ và

$$\log_{\frac{\sqrt{5}}{a}}\sqrt{\frac{b}{a}}=\frac{1}{2}\log_{\frac{\sqrt{6}}{a}}\frac{b}{a}=\frac{1}{2}\frac{\log_a\frac{b}{a}}{\log_a\frac{\sqrt{b}}{a}}=\frac{\log_a b-1}{2\left(\frac{1}{2}\log_a b-1\right)}=\frac{\log_a b-1}{\log_a b-2}$$

Đặt $t=\log_a b(0<t<1)$ với mọi $a>b>1$

Vậy $m=2,n=16,p=-32\Rightarrow T=-14$.

Câu 37: Chọn A

Ta có $P=\frac{1}{2}\log_a\left(a^2b\right)+6\log_b a=\frac{\log_a b+2}{2}+\frac{6}{\log_a b}=1+\left(\frac{1}{2}\log_a b+\frac{6}{\log_a b}\right)$.

Với $a>1>b>0\Rightarrow\log_a b<0$ do đó

$P=1-\left(\left(\frac{-1}{2}\log_a b\right)+\left(-\frac{6}{\log_a b}\right)\right)\le 1-2\sqrt{\left(\frac{-1}{2}\log_a b\right)\left(-\frac{6}{\log_a b}\right)}=1-2\sqrt{3}$.

Câu 38: Chọn B

Ta có: $P=\log_3 a+2\log_9 b+3\log_{27} c=\log_3 a+\log_3 b+\log_3 c=\log_3\left(abc\right)$

Theo nguyên tắc Diricle ta có,

$\left(a-1\right)\left(b-1\right)\ge 0\Leftrightarrow ab\ge a+b-1\Rightarrow abc\ge c\left(a+b-1\right)=ac+bc-c$

$\ge a+c-1+b+c-1-c=a+b+c-2=3\Rightarrow P=\log_3\left(abc\right)\ge\log_3 3=1$

Câu 39: Chọn C

Để ý y,z đối xứng; sử dụng bất đẳng thức

$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{m^2+n^2}\ge\sqrt{(a+m)^2+(b+n)^2}$.

Ta có $P\ge\sqrt{\log^2 x+1}+\sqrt{(\log y+\log z)^2+(2+2)^2}$

$=\sqrt{\log^2 x+1}+\sqrt{\log^2(yz)+16}=\sqrt{\log^2 x+1}+\sqrt{\log^2\left(\frac{10}{x}\right)+16}$

$=\sqrt{\log^2 x+1}+\sqrt{(1-\log x)^2+16}\ge\sqrt{(\log x+1-\log x)^2+(1+4)^2}=\sqrt{26}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\frac{\log x}{1-\log x}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\log x=\frac{1}{5}\Leftrightarrow x=\sqrt[5]{10},y=z=\sqrt[5]{100}$.

Câu 40: Chọn C

Ta có: $\frac{4ab}{a+4b}\le\frac{4ab}{2\sqrt{a.4b}}=\sqrt{ab}$. Vì $0<a<1$ nên $\log_a\left(\frac{4ab}{a+4b}\right)\ge\log_a\sqrt{ab}=\frac{1+\log_a b}{2}$.

Khi đó: $P=\log_a\left(\frac{4ab}{a+4b}\right)+\log_b\left(ab\right)\ge\frac{1+\log_a b}{2}+1+\log_b a\Rightarrow P\ge\frac{3}{2}+\left(\frac{1}{2}\log_a b+\log_b a\right)$

Suy ra $P\ge\frac{3}{2}+2\sqrt{\frac{1}{2}\log_a b.\log_b a}=\frac{3}{2}+\sqrt{2}=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases}a=4b\\\frac{1}{2}\log_a b=\log_b a\end{cases}$.

Câu 41: Chọn D

Ta có: $P=\log_x\frac{y}{z}+\log_y\frac{z}{x}+\log_z\frac{x}{y}+2\left(\log_{\frac{x}{y}}z+\log_{\frac{y}{z}}x+\log_{\frac{z}{x}}y\right)$

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Suy ra $P=\log_x\frac{y}{z}+\log_y\frac{z}{x}+\log_z\frac{x}{y}+2\left(\frac{1}{\log_z\frac{x}{y}}+\frac{1}{\log_x\frac{y}{z}}+\frac{1}{\log_y\frac{z}{x}}\right)$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$\log_x\frac{y}{z}+\frac{2}{\log_x\frac{y}{z}}\ge 2\sqrt{2}$; $\log_y\frac{z}{x}+\frac{2}{\log_y\frac{z}{x}}\ge 2\sqrt{2}$; $\log_z\frac{x}{y}+\frac{2}{\log_z\frac{x}{y}}\ge 2\sqrt{2}$.

Suy ra $P\ge 6\sqrt{2}$. Vậy $P_{\min}=6\sqrt{2}$.

Câu 42: Chọn D

Ta có: $\frac{1}{2}\log_2 a=\log_2\frac{2}{b}\Leftrightarrow\log_2\sqrt{a}=\log_2\frac{2}{b}\Leftrightarrow\sqrt{a}=\frac{2}{b}\Leftrightarrow ab^2=4$.

Khi đó theo AM-GM ta có: $4a^3+b^3=4a^3+\frac{b^3}{2}+\frac{b^3}{2}\ge 3\sqrt[3]{4a^3.\frac{b^3}{2}.\frac{b^3}{2}}=3ab^2=12$.

Do đó đặt $t=4a^3+b^3$ có $P=f(t)=t-4\log_2 t\ge\min\limits_{[12;+\infty)}f(t)=f(12)=4-4\log_2 3$.

Câu 43: Chọn C

Ta có $a^4+81\ge 2\sqrt{a^4.81}=18a^2\Rightarrow a^4-9a^2+81\ge 9a^2$.

Khi đó theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\log_{3a}b+\log_b\left(a^4-9a^2+81\right)\ge\log_{3a}b+\log_b\left(9a^2\right)$$
$$=\log_{3a}b+2\log_b(3a)\ge 2\sqrt{\log_{3a}b.2\log_b(3a)}=2\sqrt{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}a^4=81\\ \log_{3a}b=2\log_b 3a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\ b=9^{\sqrt{2}}\end{cases}$ (nhận).

Câu 44: Chọn A

Ta có $P=6\left(\log_{a_1}\left(a_2-\frac{1}{4}\right)+\log_{a_2}\left(a_3-\frac{1}{4}\right)+...+\log a_{19}\left(a_{20}-\frac{1}{4}\right)+\log a_{20}\left(a_1-\frac{1}{4}\right)\right)$.

Do $a_i\in\left(\frac{1}{4};1\right),i=\overline{1,20}$ suy ra hàm số $y=\log_{a_i}x$ nghịch biến.

Có $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=x^2-x+\frac{1}{4}\ge 0\Leftrightarrow x-\frac{1}{4}\le x^2$. Suy ra

$P\ge 6\left(\log_{a_1}{a_2}^2+\log_{a_2}{a_3}^2+...+\log_{a_{20}}{a_1}^2\right)=12\left(\log_{a_1}a_2+\log_{a_2}a_3+...+\log_{a_{20}}a_1\right)$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 20 số thì $\sqrt[20]{\log_{a_1}a_2.\log_{a_2}a_3...\log_{a_{20}}a_1}=\sqrt[20]{\log_{a_1}a_1}=1$.

Suy ra $P\ge 12.20=240.$

Dấu "=" xảy ra khi $a_i=\frac{1}{2}$, $i=\overline{1,20}$.

Mẹo trắc nghiệm: vì vai trò $a_1,a_2,a_3,...,a_{20}$ như nhau nên P đạt min khi $a_1=a_2=a_3=...=a_{20}$, khi đó $P=20\log_{\sqrt{a_1}}\left(a_1-\frac{1}{4}\right)^3=f(a_1)=120\log_{a_1}\left(a_1-\frac{1}{4}\right)\ge\min\limits_{\left(\frac{1}{4};1\right)}f\left(\frac{1}{2}\right)=240$.

Câu 45: Chọn D

Ta có $P=4\left(\log_a\left(\frac{3}{4}b-\frac{1}{4}\right)+\log_b\left(\frac{3}{4}c-\frac{1}{4}\right)+\log_c\left(\frac{3}{4}a-\frac{1}{4}\right)\right)$.

Với mọi số thực $x\in\left(\frac{1}{3};1\right)$ ta có $4x^3\ge 3x-1\Leftrightarrow(2x-1)^2(x+1)\ge 0$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=\frac{1}{2}$.

Vậy với a,b,c thuộc khoảng $\left(\frac{1}{3};1\right)$ ta có $\begin{cases}\log_a\left(\frac{3}{4}b-\frac{1}{4}\right)\ge\log_a b^3=3\log_a b\\ \log_b\left(\frac{3}{4}c-\frac{1}{4}\right)\ge\log_b c^3=3\log_b c\\ \log_c\left(\frac{3}{4}a-\frac{1}{4}\right)\ge\log_c a^3=3\log_c a\end{cases}$.

Nên $P\ge 12\left(\log_a b+\log_b c+\log_c a\right)\ge 12.3\sqrt[3]{\log_a b.\log_b c.\log_c a}=36$.

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Mẹo trắc nghiệm: biểu thức đối xứng 3 biến nên biểu thức sẽ đạt min khi $a=b=c$ khi đó

$$P=3\log_{\sqrt{a}}\left(\frac{3}{4}a-\frac{1}{4}\right)^2=f(a)=12\log_a\left(\frac{3}{4}a-\frac{1}{4}\right)\ge\min_{\left(\frac{1}{3};1\right)}f(a)=f\left(\frac{1}{2}\right)=36.$$

Câu 46: Chọn C

Với $a,b,c\ge 1$ ta có $(a-1)(b-1)\ge 0\Rightarrow ab\ge a+b-1$.

Do đó $abc\ge(a+b-1)c=ac+bc-c\ge(a+c-1)+(b+c-1)-c=a+b+c-2$.

Áp dụng ta có: $2^x.4^y.8^z\ge 2^x+4^y+8^z-2=2\Rightarrow x+2y+3z\ge 1\Rightarrow S=\frac{x+2y+3z}{6}\ge\frac{1}{6}$.

Câu 47: Chọn B

Ta có $4=2^x+2^y\ge 2\sqrt{2^x.2^y}=2.2^{\frac{x+y}{2}}\Leftrightarrow 2\le 2^{\frac{x+y}{2}}\Leftrightarrow 1\le\frac{x+y}{2}\Leftrightarrow x+y\le 2\Leftrightarrow y\le 2-x\Rightarrow x\in(0;2)$.

Khi đó $P\le f(x)=\left(2x^2+2-x\right)\left(2(2-x)^2+x\right)+9x(2-x)$.

Sử dụng máy tính chức năng mode 7 ta có: $\max_{(0;2)}f(x)=f(1)=18\Rightarrow P_{\max}=18$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=1$.

Câu 48: Chọn C

Ta có $\log_2(4x+16)+x-3y-8^y=-2\Leftrightarrow\log_2(x+4)+2^{\log_2(x+4)}=3y+2^{3y}\ (1)$

Xét hàm số $f(t)=t+2^t$.

Ta có $f'(t)=1+2^t\ln 2>0,\forall t\in\mathbb{R}$. suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ $(1)\Rightarrow 3y=\log_2(x+4)\Leftrightarrow 8^y=x+4$.

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Thay $8^y = x+4$ vào $P = x^2+3x+1+8^y = x^2+3x+1+x+4 = x^2+4x+5$.

Khi đó $P_{\min} = 1 \Leftrightarrow x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = \frac{1}{3}$. Ta có $x_o^3 + 3y_o = -2^3 + 3.\frac{1}{3} = -7.$

Câu 49: Chọn A

Từ giả thiết: $a^{x^2}.b^{x+1} = 1 \Rightarrow \log_a a^{x^2} + \log_a b^{x+1} = 0 \Rightarrow x^2 + (x+1)\log_a b = 0$

$\Rightarrow x^2 + x.\log_a b + \log_a b = 0$ (*); Đặt $t = \log_a b$

Phương trình (*) có nghiệm thực, nên: $t^2 - 4t \ge 0 \Leftrightarrow t \in (-\infty;0] \cup [4;+\infty)$

Mặt khác: $b = a^t > 1 \Rightarrow t > 0$; Vậy: $t \in [4;+\infty]$

Xét $P = \log_a ab + \frac{4}{\log_a b} = 1 + \log_a b + \frac{4}{\log_a b} = 1 + t + \frac{4}{t}$

Xét $f(t) = 1 + t + \frac{4}{t} \Rightarrow f'(t) = 1 - \frac{4}{t^2} > 0$ với $\forall t \in [4;+\infty)$

Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[4;+\infty)$; $\min\limits_{[4;+\infty)} f(t) = f(4) = 6$ đạt tại $t = 4$

Câu 50: Chọn D

Ta có $3(3^y + y) = x + \log_{\sqrt[3]{3}} x - 3. \Leftrightarrow 3^{y+1} + 3(y+1) = 3^{\log_3 x} + 3\log_3 x \quad (1)$

Xét hàm số $f(t) = 3^t + 3t$

Ta có $f'(t) = 3^t \ln 3 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ $(1) \Rightarrow y + 1 = \log_3 x \Leftrightarrow x = 3^{y+1}$.

Thay $x = 3^{y+1}$ vào biểu thức $P = y^2 - \log_9 x = y^2 - \log_9 3^{y+1} = y^2 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$

Khi đó $P_{\min} = -\frac{9}{16} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$

DẠNG TOÁN HÀM ĐẶC TRƯNG MŨ – LOGA

Câu 1. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $1\le x\le 2020$ và $x+x^2-9^y=3^y$.

A. 2020. **B.** 1010. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 2. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x,y\in[5;37]$ và $\sqrt{x}=y^2+2y-x+2+\sqrt{y^2+2y+2}$.

A. 32. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 33.

Câu 3. Có bao nhiêu số nguyên dương x thỏa mãn $2.2^x+x+\sin^2 y=2^{\cos^2 y}$.

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 4. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le x\le 2020$ và $3^{x+1}+x+1=3^y+y$

A. 2020. **B.** 2021. **C.** 2022. **D.** 2023.

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m nhỏ hơn 2018 để phương trình $\log_2\left(m+\sqrt{m+2^x}\right)=2x$ có nghiệm thực?

A. 2017. **B.** 2018. **C.** 2016. **D.** 2015.

Câu 6. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le y\le 100$ và $x^6+6x^4y+12x^2y^2-19y^3+3x^2-3y=0$.

A. 10. **B.** 100. **C.** 20. **D.** 21.

Câu 7. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x,y\in[3;48]$ và $(x-2)\sqrt{y+2}=\sqrt{y+1}\sqrt{x^2-4x+5}$ (1).

A. 46. **B.** 6. **C.** 45. **D.** 5.

Câu 8. Có bao nhiêu số nguyên dương x thỏa mãn $\log_2(\frac{x+1}{2})+x=4^{\sin^4 y+\cos^4 y}-\sin^2 2y$.

A. Vô số. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 9. Cho số thực x,y thỏa mãn $2^{x^2}-2^y=y-x^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x-2y$.

A. $P=\frac{1}{4}$. **B.** $P=\frac{3}{4}$. **C.** $P=\frac{1}{3}$. **D.** $P=\frac{1}{8}$.

Câu 10. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $0\le x,\ y\le 1$ trong đó x,y không đồng thời bằng 0 hoặc 1 và $\log_3\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)+(x+1)(y+1)-2=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P với $P=2x+y$.

A. 2. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 0.

Câu 11. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le x\le 2020$ và $3\left(9^y+2y\right)=x+\log_3(x+1)^3-2$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 12. Cho $f(x)=2020^x-2020^{-x}$. Gọi m_0 là số lớn nhất trong số nguyên m thỏa $f(m+1)+f\left(\frac{m}{2020}-2020\right)<0$. Giá trị của m_0 là

A. $m_0=2018$. **B.** $m_0=2019$. **C.** $m_0=2020$. **D.** $m_0=2021$.

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Câu 13. Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $9x^3+\left(2-y\sqrt{3xy-5}\right)x+\sqrt{3xy-5}=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^3+y^3+6xy+3\left(3x^2+1\right)\left(x+y-2\right)$.

A. $\frac{4\sqrt{6}+36}{9}$. **B.** $\frac{36+296\sqrt{15}}{9}$. **C.** $\frac{36-296\sqrt{15}}{9}$. **D.** $\frac{-4\sqrt{6}+36}{9}$.

Câu 14. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn bất đẳng thức $\log\frac{x+1}{3y+1}\le 9y^4+6y^3-x^2y^2-2y^2x\ (1)$. Biết $y\le 1000$, hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn bất đẳng thức (1).

A. 1501100. **B.** 1501300. **C.** 1501400. **D.** 1501500.

Câu 15. Cho 2 số thực x, y không âm thỏa mãn : $2^{x+\frac{1}{x}}=\log_2\left[14-\left(y-2\right)\sqrt{y+1}\right]$. Giá trị của biểu thức $P=\left|1-2\left(x+y\right)\right|$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 16. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\log_2(2x+2)+x-3y=8^y$ (*). Biết $0\le x\le 2018$, số cặp x, y nguyên thỏa mãn đẳng thức (*) là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 17. Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $2\left(2^{a^2+b^2+c^2}-1\right)+(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=4^{a+b+c}$. Đặt $P=\frac{3a+2b+c}{a+b+c}$ và gọi S là tập hợp gồm những giá trị nguyên của P. Số phần tử của tập S là

A. Vô số. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 18. Phương trình $\log\ x+1\ =2$ có nghiệm là.

A. 11. **B.** 9. **C.** 101. **D.** 99.

Câu 19. Cho $2^a=3,\ 3^b=4,\ 4^c=5,\ 5^d=6$. Tính 2^{abcd}.

A. $\log_2 6$. **B.** $\log_6 2$. **C.** 2. **D.** 6.

Câu 20. Cho x, y, z là ba số thực khác 0 thỏa mãn $2^x=5^y=10^{-z}$. Tính $P=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.

A. -2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 21. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_4 x=\log_6 y=\log_9\left(x+y\right)$. Giá trị của tỉ số $\frac{x}{y}$ bằng

A. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$. **D.** $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Câu 22. Cho x, y, a, b là các số dương thỏa mãn $a>b>1$ và $a^{x+1}=b^{2y}=\frac{a}{b}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+y$ là

A. -2. **B.** $\frac{-13}{4}$. **C.** 4. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 23. Cho biết a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $2018^a=2019^b=2020^c$. Hãy tính giá trị của biểu thức $P=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}$.

A. $\log_{2018} 2019$. **B.** $\log_{2018} 2019+\log_{2019} 2020$.

C. $\log_{2018} 2020$. **D.** $\log_{2018} 2019.2020$.

Câu 24. Cho x, y dương thỏa mãn: $\log_3(x^2+2y)=1+\log_3 4$. Giá trị lớn nhất của $P=\sqrt{xy}$ thuộc khoảng nào

A. $(-1;1)$. **B.** $\left(\frac{1}{2};3\right)$. **C.** $(5;10)$. **D.** $(-2;0)$

Câu 25. Cho $a,b,c>1$ và các số thực dương x,y,z thỏa mãn $a^x=b^y=c^{\frac{z}{2}}=\sqrt{abc}$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-z^2$.

A. -2. **B.** 3. **C.** -1. **D.** 1.

Câu 26. Cho $x>0; y>0$ và $2020^{2019(x^2-y+4)}=\frac{4x+y}{(x+2)^2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=y-2x$?

A. $\min P=4$. **B.** $\min P=2$. **C.** $\min P=1$. **D.** $\min P=3$.

Câu 27. Cho $x>y\geq 0$ thỏa mãn $3^{x+y+2xy-2}=\frac{2(1-xy)}{x+y}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+5y$ là

A. 2. **B.** $\frac{9}{5}$. **C.** 4. **D.** $\frac{50-8\sqrt{5}}{4\sqrt{5}+1}$.

Câu 28. Xét các số thực a, b thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{3}<b<a<1$. Tim giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_a\left(\frac{3b-1}{4}\right)+12\log^2_{\frac{b}{a}} a-3$.

A. $\min P=13$. **B.** $\min P=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **C.** $\min P=\sqrt[3]{2}$. **D.** $\min P=9$.

Câu 29. Xét các số thực dương a,b,c,x,y,z thỏa mãn $a>1,b>1,c>1$ và $a^x=b^y=c^z=\sqrt[3]{abc}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y+z$ thuộc tập hợp nào dưới đây ?

A. $(2;4)$. **B.** $(4;6)$. **C.** $(6;8)$. **D.** $(8;10)$.

Câu 30. Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a>1$, $b>1$ và $a^x=b^y=\sqrt[4]{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+4y$ là $P_{\min}=\frac{m}{n}$ với $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản và $n\in\mathbb{N}$, khi đó giá trị của biểu thức $T=m^2+n$ có giá trị bằng bao nhiêu?

A. 79. **B.** 25. **C.** 34. **D.** 85.

Câu 31. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x>-1, y>-3$ và $\log_2(y+3)(x+1)+\frac{xy+3x+y+2}{x+1}=0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+3y+10$ thuộc tập nào dưới đây:

A. $[1;3)$. **B.** $[3;4)$. **C.** $[4;5)$. **D.** $[5;6)$.

Câu 32. Cho hai số thực dương a,b thỏa mãn $1>a>b>0,25$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_a\left(b-\frac{1}{4}\right)-\log_{\frac{a}{b}}\sqrt{b}$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $(0;1)$. **B.** $\left(4;\frac{11}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{5}{2};4\right)$. **D.** $\left(1;\frac{5}{2}\right)$.

Câu 33. Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn $xy\le 4y-1$. Giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{6(2x+y)}{x}+\ln\frac{x+2y}{y}$ là $a+\ln b$. Giá trị của tích $a.b$ là

A. 45. **B.** 81. **C.** 108. **D.** 115.

Câu 34. Xét các số thực dương a,b,x,y thỏa mãn $1<a\le b\le a^3$ và $a^x=b^y=\sqrt[3]{ab}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x+3y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $[1;2)$. **B.** $[2;3)$. **C.** $[3;4)$. **D.** $[4;5)$.

Câu 35. Cho hai số thực a,b thỏa mãn $\log_2 a+\log_3 b=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{\log_3 a}+\sqrt{\log_2 b}$ bằng.

A. $\sqrt{\log_2 3}+\sqrt{\log_3 2}$. **B.** $\sqrt{\log_2 3+\log_3 2}$.

C. $\frac{1}{2}\log_2 3+\log_3 2$. **D.** $\frac{2}{\sqrt{\log_2 3+\log_3 2}}$.

Câu 36. Cho các số thực dương x,y thỏa mãn $\log_{16} x=\log_{20} y=\log_{25}\frac{2x-y}{3}$. Tính giá trị $T=\frac{y}{x}$.

A. $T=\frac{2}{3}$. **B.** $T=\frac{3}{2}$. **C.** $T=-\frac{2}{3}$. **D.** $T=-\frac{3}{2}$.

Câu 37. Cho p và q là các số thực dương sao cho: $\log_9 p=\log_{12} q=\log_{16}(p+q)$. Tìm giá trị của $\frac{q}{p}$

A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{8}{5}$ **C.** $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$ **D.** $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$

Câu 38. Cho $x,\ y$ là hai số nguyên không âm thỏa mãn $\log_2(x+y)=\log_3(x-y)$. Hỏi tổng $x+y$ là bao nhiêu?

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 7.

Câu 39. Cho số thực $1\le x\le 8$. Gọi giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{\log_2\frac{x}{128}}{\log_2 x+1}-\log_{\sqrt{2}} x$ lần lượt là a,b. Tính ab.

A. $ab=5$. **B.** $ab=35$. **C.** $ab=-7$. **D.** $ab=35$.

Câu 40. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y), x\le 2020$ và thỏa mãn phương trình $\log_2 x+\log_2(x-y)=1+4\log_4 y$

A. 2020. **B.** 1010. **C.** 2019. **D.** 1011.

Câu 41. Biết $x_1,x_2\ (x_1<x_2)$ là hai nghiệm của phương trình $\log_2\left(\frac{4x^2-4x+1}{x}\right)=6x-4x^2$ và $2x_1-x_2=\frac{3}{4}\left(a-\sqrt{b}\right),\ (a,b\in\mathbb{N})$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$

A. $P=-4$. **B.** $P=6$. **C.** $P=-6$. **D.** $P=4$.

Câu 42. Cho phương trình $2\log_3(\cot x)=\log_2(\cos x)$. Phương trình này có bao nhiêu nghiệm trên khoảng $(0;2020\pi)$

A. 2020 **B.** 2019 **C.** 1009 **D.** 1010

Câu 43. Có bao nhiêu giá trị nguyên của y thỏa mãn $5^x=\log_5(x+y)+y$. Biết rằng $|y|\le 2020$.

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 7.

Câu 44. Cho bất phương trình $\log 10x+\log^2 x+3\ge m\log 100x$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m nguyên dương để bất phương trình có nghiệm thuộc $[1;+\infty)$.

A. 1. **B.** 3. **C.** vô số . **D.** 2 .

Câu 45. Cho x,y là các số thực thỏa mãn $\log_3(x+y)=\log_4(x^2+y^2)$. Tập giá trị của biểu thức $P=x^3+y^3$ có chứa bao nhiêu giá trị nguyên.

A. 4. **B.** 5. **C.** 9. **D.** Vô số.

Câu 46. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực dương y thỏa mãn $2^{x^2+y^2}=2.2^{y-x}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 47. Tìm m để phương trình $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}^2(x-2)^2+4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x-2}\right)+4m-4=0$ có nghiệm trên $\left[\frac{5}{2};4\right]$

A. $-3<m\le\frac{7}{3}$. **B.** $m\in\mathbb{R}$. **C.** $m\in\{1\}$. **D.** $-3\le m\le\frac{7}{3}$.

Câu 48. Phương trình $2\log_3(\cot x)=\log_2(\cos x)$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0;2020\pi)$?

A. 2020 nghiệm. **B.** 1010 nghiệm. **C.** 2018 nghiệm. **D.** 1009 nghiệm.

Câu 49. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_4(x+y+3)=\log_5\left(x^2+y^2+2x+4y+5\right)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Câu 50. Cho x,y thỏa mãn $2^{2x-y+1}+3^{2x-y+1}-5^{2x-y+1}=5^{-2x+y+1}-2^{-2x+y+1}-3^{-2x+y+1}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2x^2-y^2-2x+3y+1$.

A. 2. **B.** -2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 51. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3\left(x+\sqrt{2}y\right)=\log_2\left(x^2+y^2\right)$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Câu 52. Có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ thuộc đoạn $[1;2020]$ thỏa mãn y là số nguyên và $x+\ln x=y+e^y$?

A. 2021. **B.** 2020. **C.** 7. **D.** 6.

Câu 53. Cho hai số thực dương x,y thỏa mãn $x>\frac{1}{10}$ và $\log x+\log y+1\ge\log(x+y)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=x+3y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $\left[\frac{5}{3};2\right)$. **B.** $\left[0;\frac{4}{3}\right]$. **C.** $\left[\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)$. **D.** $\left[\frac{4}{3};2\right]$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1D	2C	3D	4B	5A	6D	7B	8B	9D	10B	11D	12A	13B	14D	15C
16C	17D	18D	19D	20C	21A	22D	23B	24B	25C	26D	27A	28D	29A	30D
31B	32B	33B	34B	35B	36A	37D	38A	39B	40B	41B	42D	43A	44A	45A
46B	47D	48B	49B	50D	51B	52C	53B							

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. **Chọn D**

Ta có: $x+x^2-9^y=3^y \Leftrightarrow x+x^2=3^y+\left(3^y\right)^2$ (1). Xét hàm $f(t)=t+t^2$, $(t>0)$.

Ta có: $f'(t)=1+2t>0, \forall t>0 \Rightarrow f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Vì vậy, (1) $\Leftrightarrow f(x)=f\left(3^y\right) \Leftrightarrow x=3^y$.

Theo giả thiết, $1\le x\le 2020 \Leftrightarrow 1\le 3^y\le 2020 \Leftrightarrow 0\le y\le \log_3 2020$.

Vì y nguyên nên $y\in\{0;1;2;3;4;5;6\} \Rightarrow x\in\{1;3;9;27;81;243;729\}$.

Vậy có 7 cặp $(x;y)$ thỏa mãn.

Câu 2. **Chọn C**

Ta có: $\sqrt{x}=y^2+2y-x+2+\sqrt{y^2+2y+2} \Leftrightarrow x+\sqrt{x}=y^2+2y+2+\sqrt{y^2+2y+2}$. (2)

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ ta có:

$f'(t)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{t}}>0, \forall t>0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

$(2) \Leftrightarrow f(x)=f\left(y^2+2y+2\right) \Leftrightarrow x=y^2+2y+2$.

Do $x, y\in[5;37]$ nên $5\le y^2+2y+2\le 37 \Leftrightarrow 4\le (y+1)^2\le 36 \Leftrightarrow 2\le y+1\le 6 \Leftrightarrow 1\le y\le 5$.

Do $y\in\mathbb{Z}$ và $y\in[5;37]$ nên $y=5$, với mỗi giá trị y cho ta 1 giá trị $x=37\in[5;37]$ thoả đề bài.

Vậy có 1 cặp số nguyên $(x;y)$ thoả bài toán.

Câu 3. **Chọn D**

Có $2.2^x+x+\sin^2 y=2^{\cos^2 y} \Leftrightarrow 2^{x+1}+x+1=2^{\cos^2 y}+\cos^2 x$ (3).

Đặt $f(t)=2^t+t \Rightarrow f'(t)=2^t.\ln 2+1>0, \forall t>0 \Rightarrow$ Hàm số $y=f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Vì vậy phương trình (3) $\Leftrightarrow f(x+1)=f\left(\cos^2 x\right) \Leftrightarrow x+1=\cos^2 x \Leftrightarrow x=-\sin^2 x \Rightarrow x\le 0$.

Mà x là số nguyên dương. Vậy không có giá trị nào của x thỏa mãn.

Câu 4. **Chọn B**

Ta có: $3^{x+1}+x+1=3^{y}+y \Leftrightarrow f(x+1)=f(y)$

Xét hàm số $f(t)=3^{t}+t \Rightarrow f'(t)=3^{t}.\ln 3+1>0, \forall t \in R$

Do đó $f(x+1)=f(y) \Leftrightarrow x+1=y \Rightarrow x=y-1$

Vì $0 \le x \le 2020 \Leftrightarrow 0 \le y-1 \le 2020 \Leftrightarrow 1 \le y \le 2021$

Mà $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{1;2;3;...;2021\}$

Vậy có 2021 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5. **Chọn A**

Phương trình đã cho tương đương với phương trình :

$$m+\sqrt{m+2^{x}}=2^{2x} \Leftrightarrow \left(m+2^{x}\right)+\sqrt{m+2^{x}}=2^{2x}+2^{x} \ (1)$$

Ta có $\sqrt{m+2^{x}} \ge 0$, $2^{x}>0$. Xét hàm đặc trưng $f(t)=t^{2}+t$ trên $[0;+\infty)$.

$$f'(t)=2t+1 \ge 0, \forall t \in [0;+\infty)$$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên khoảng $[0;+\infty)$ do đó $(1) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{m+2^{x}}\right)=f\left(2^{x}\right) \Leftrightarrow \sqrt{m+2^{x}}=2^{x}$

$\Leftrightarrow m=2^{2x}-2^{x}$.

Đặt $a=2^{x}$, $a>0$. Ta có $\Leftrightarrow m=g(a)=a^{2}-a$.

a	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g(a)$	0 ↘	$-\frac{1}{4}$	↗ $+\infty$

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow m \ge -\frac{1}{4}$ mà m nguyên dương nhỏ hơn 2018 nên $m \in \{1;2;3;...;2017\}$. Vậy có 2017 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6. **Chọn D**

Ta có $x^{6}+6x^{4}y+12x^{2}y^{2}-19y^{3}+3x^{2}-3y=0 \Leftrightarrow x^{6}+6x^{4}y+12x^{2}y^{2}+8y^{3}-27y^{3}+3x^{2}-3y=0$

$\Leftrightarrow x^{6}+6x^{4}y+12x^{2}y^{2}+8y^{3}+3x^{2}+6y=27y^{3}+9y$

$\Leftrightarrow (x^{2}+2y)^{3}+3(x^{2}+2y)=(3y)^{3}+3.3y \quad (2)$

Xét hàm $f(t)=t^{3}+3t$. Ta có $f'(t)=3t^{2}+3>0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vì vậy, $(2) \Leftrightarrow f(x^{2}+2y)=f(3y) \Leftrightarrow x^{2}+2y=3y \Leftrightarrow x^{2}=y$.

Theo giả thiết: $0 \le y \le 100 \Leftrightarrow 0 \le x^2 \le 100 \Leftrightarrow -10 \le x \le 10$.

Vì x nguyên nên $x \in \{-10;-9;-8;...0...8;9;10\}$. Với mỗi x xác định duy nhất giá trị $y = x^2$.

Vậy có 21 cặp $(x;y)$ thỏa mãn bài toán.

Câu 7. **Chọn B**

$(1) \Leftrightarrow (x-2)\sqrt{(y+1)+1} = \sqrt{y+1}\sqrt{(x-2)^2+1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{(y+1)+1}}{\sqrt{y+1}} = \dfrac{\sqrt{(x-2)^2+1}}{x-2} \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{(y+1)+1}{y+1}} = \sqrt{\dfrac{(x-2)^2+1}{(x-2)^2}}$ (2).

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{\dfrac{t+1}{t}}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ ta có:

$f'(t) = -\dfrac{1}{2t^2\sqrt{1+\frac{1}{t}}} < 0, \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

$(2) \Leftrightarrow f(y+1) = f((x-2)^2) \Leftrightarrow y+1 = (x-2)^2 \Leftrightarrow y = (x-2)^2 - 1$

Do $x, y \in [3;48]$ nên $3 \le (x-2)^2 - 1 \le 48 \Leftrightarrow 4 \le (x-2)^2 \le 49 \Leftrightarrow 2 \le x-2 \le 7 \Leftrightarrow 4 \le x \le 9$.

Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{4;5;6;7;8;9\}$, với mỗi giá trị x cho ta 1 giá trị y thoả mãn đề bài.

Vậy có 6 cặp số nguyên $(x;y)$ thoả đề bài.

Câu 8. **Chọn B**

Ta có: $\log_2(\dfrac{x+1}{2}) + x = 4^{\sin^4 y + \cos^4 y} - \sin^2 2y \Leftrightarrow \log_2(x+1) + x - 1 = 4^{\sin^4 y + \cos^4 y} - \sin^2 2y$

$\Leftrightarrow \log_2(x+1) + x + 1 = 2^{2(\sin^4 y + \cos^4 y)} - 4\sin^2 y.\cos^2 y + 2$

$\Leftrightarrow \log_2(x+1) + x + 1 = 2^{2(\sin^4 y + \cos^4 y)} - 4\sin^2 y.\cos^2 y + 2(\sin^2 y + \cos^2 y)^2$

$\Leftrightarrow \log_2(x+1) + x + 1 = 2^{2(\sin^4 y + \cos^4 y)} + 2(\sin^4 y + \cos^4 y)$ (2).

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t \Rightarrow f'(t) = 2^t.\ln 2 + 1 > 0, \forall t > 0$.

$\Rightarrow$ hàm số $y = f(t)$ đồng biến $(0;+\infty)$.

Vì vậy $(2) \Leftrightarrow f(\log_2(x+1)) = f(2(\sin^4 y + \cos^4 y)) \Leftrightarrow x+1 = 2^{2(\sin^4 y + \cos^4 y)}$.

Ta có: $\sin^4 y + \cos^4 y = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2y \in \left[\dfrac{1}{2};1\right]$ nên $1 \le 2(\sin^4 y + \cos^4 y) \le 2$

$\Rightarrow 2 \le x+1 \le 4 \Leftrightarrow 1 \le x \le 3$. Mà x là số nguyên dương $\Rightarrow x \in \{1,2,3\}$.

Vậy có 3 giá trị x thỏa mãn.

Câu 9. **Chọn D**

Ta có: $2^{x^2} - 2^y = y - x^2 \Leftrightarrow 2^{x^2} + x^2 = 2^y + y \Leftrightarrow f(x^2) = f(y)$, với $f(t) = 2^t + t$.

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t \Rightarrow f'(t) = 2^t.\ln 2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó $f\left(x^2\right)=f\left(y\right)\Leftrightarrow x^2=y$. $P=x-2y=x-2x^2\le\frac{1}{8}$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{8}$ đạt được khi $x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{1}{16}$.

Câu 10. Chọn B

Từ điều kiện đề bài và $\frac{x+y}{1-xy}>0;1-xy\ne0\Rightarrow x+y>0;1-xy>0$. Khi đó

$\log_3\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)+\left(x+1\right).\left(y+1\right)-2=0\Leftrightarrow\log_3\left(x+y\right)+\left(x+y\right)=\log_3\left(1-xy\right)+\left(1-xy\right)\quad(1)$.

Xét hàm số $g\left(t\right)=\log_3 t+t$, $\left(t>0\right)$ có $g'\left(t\right)=\frac{1}{t.\ln3}+1>0$, $\forall t>0$.

Suy ra $g\left(t\right)$ là hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Vậy phương trình $(1)\Leftrightarrow x+y=1-xy\Rightarrow y=\frac{1-x}{1+x}\Rightarrow P=2x+\frac{1-x}{1+x}$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=2x+\frac{1-x}{x+1}$ với $x\in[0;1]$. Ta có $f'\left(x\right)=2+\frac{-2}{\left(x+1\right)^2}$.

$f'\left(x\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$ và $f\left(0\right)=1;f\left(1\right)=2\Rightarrow\min\limits_{[0;1]}f(x)=1$.

Câu 11. Chọn D

Ta có: $3\left(9^y+2y\right)=x+\log_3\left(x+1\right)^3-2$

$\Leftrightarrow3.9^y+6y=x+3\log_3\left(x+1\right)-2\Leftrightarrow3^{2y+1}+3\left(2y+1\right)=\left(x+1\right)+3\log_3\left(x+1\right)\quad(*)$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=3^t+3t$. Ta có: $f'\left(t\right)=3^t.\ln3+3>0$, $\forall t$.

Suy ra hàm số $f\left(t\right)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow f\left(2y+1\right)=f\left(\log_3\left(x+1\right)\right)\Leftrightarrow2y+1=\log_3\left(x+1\right)\Leftrightarrow x=3^{2y+1}-1$.

Vì $0\le x\le2020$ nên $0\le3^{2y+1}-1\le2020\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\le y\le\frac{\log_3 2021-1}{2}$

Do y nguyên nên $y\in\{0;1;2\}$.

$\Rightarrow(x;y)\in\{(2;0);(26;1);(242;2)\}$ do đó có 3 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn.

Câu 12. Chọn A

Ta có $f\left(-x\right)=2020^{-x}-2020^x$.

$-f\left(x\right)=-\left(2020^x-2020^{-x}\right)\Leftrightarrow f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$ nên $f\left(x\right)$ là hàm số lẻ vậy nên.

$f\left(m+1\right)+f\left(\frac{m}{2020}-2020\right)<0\Leftrightarrow f\left(m+1\right)<f\left(-\frac{m}{2020}+2020\right)$. (*)

Lại có $f\left(x\right)=2020^x-2020^{-x}$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Nên $(*)\Leftrightarrow m+1<\frac{-m}{2020}+2020\Leftrightarrow m<\frac{2019.2020}{2021}$. Vậy $m_0=2018$.

Câu 13. Chọn B

$9x^3+\left(2-y\sqrt{3xy-5}\right)x+\sqrt{3xy-5}=0 \Leftrightarrow 27x^3+6x-3xy\sqrt{3xy-5}+3\sqrt{3xy-5}=0$

$\Leftrightarrow (3x)^3+2(3x)=\left(\sqrt{3xy-5}\right)^3+2\sqrt{3xy-5}\ (*)$.

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t$ có $f'(t)=3t^2+2>0\ \forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó

$(*)\Leftrightarrow f(3x)=f\left(\sqrt{3xy-5}\right)\Leftrightarrow 3x=\sqrt{3xy-5}\Rightarrow x\geq 0$ và $9x^2=3xy-5$.

Với $x=0$ không thỏa mãn.

Với $x>0$ thì $P=x^3+y^3+6xy+3\left(3x^2+1\right)(x+y-2)=x^3+y^3+6xy+\left(9x^2+3\right)(x+y-2)$

$=x^3+y^3+6xy+(3xy-2)(x+y-2)=x^3+y^3+3x^2y+3xy^2-2(x+y)+4$

$=(x+y)^3-2(x+y)+4$.

Mà $x+y=x+\dfrac{9x^2+5}{3x}=4x+\dfrac{5}{3x}\geq\dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$. Đặt $t=x+y$ thì $t\geq\dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.

Xét hàm số $g(t)=t^3-2t+4$ với $t\geq\dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$. Khi đó $g'(t)=3t^2-2>0,\forall t\geq\dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.

Do đó $g(t)\geq g\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{36+296\sqrt{15}}{9}$. Vậy $\min P=\dfrac{36+296\sqrt{15}}{9}$.

Câu 14. Chọn D

Ta có : $\log\dfrac{x+1}{3y+1}\leq 9y^4+6y^3-x^2y^2-2y^2x$

$\Leftrightarrow\log\dfrac{xy+y}{3y^2+y}\leq\left(9y^4+6y^3+y^2\right)-\left(x^2y^2+2xy.y+y^2\right)$

$\Leftrightarrow\log(xy+y)-\log\left(3y^2+y\right)\leq\left(3y^2+y\right)^2-(xy+y)^2$

$\Leftrightarrow\log(xy+y)+(xy+y)^2\leq\log\left(3y^2+y\right)+\left(3y^2+y\right)^2\ (*)$

Xét hàm $f(t)=\log t+t^2$ với $t\in(0;+\infty)$

$f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 10}+2t>0\ \forall t\in(0;+\infty)$. Suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến trên $t\in(0;+\infty)$.

$(*)\Leftrightarrow f(xy+y)\leq f\left(3y^2+y\right)\Leftrightarrow xy+y\leq 3y^2+y\Leftrightarrow x\leq 3y$.

Vì $y\leq 2020$ nên ta có các trường hợp sau

$y=1\Rightarrow x\in\{1;2;3\}$

$y=2\Rightarrow x\in\{1;2;3;4;5;6\}$

.....

$y=1000\Rightarrow x\in\{1;2;.....;3000\}$

Vậy số cặp nghiệm thỏa mãn điều kiện đề bài là: $3+6+9+...+3000=1501500$.

Câu 15. Chọn C

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có : $2^{x+\frac{1}{x}} \ge 2^{2\sqrt{x.\frac{1}{x}}} = 4, \forall x > 0 \quad (1)$

Mặt khác ta có: $14-(y-2)\sqrt{y+1} = 14-(y+1)\sqrt{y+1}+3\sqrt{y+1}$.

Đặt $t = \sqrt{y+1} \ge 1$. Xét hàm : $f(t) = -t^3+3t+14,\ t \ge 1$ có $f'(t) = -3t^2+3;\ f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Bảng biến thiên

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	16 ↘	$-\infty$

$\Rightarrow f(t) \le 16 \Rightarrow \log_2\left[14-(y-2)\sqrt{y+1}\right] \le \log_2 16 = 4 \quad (2)$

Từ $(1),(2)$ ta có dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{x} \\ t = \sqrt{1+y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$. Vậy: $P = \left|1-2(x+y)\right| = 1$.

Câu 16. Chọn C

Ta có $\log_2(2x+2)+x-3y = 8^y \Leftrightarrow 2^{\log_2(x+1)}+\log_2(x+1) = 2^{3y}+3y \ (1)$

Xét hàm số $f(t) = 2^t+t$ có $f'(t) = 2^t\ln 2+1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow f\left(\log_2(x+1)\right) = f(3y) \Leftrightarrow \log_2(x+1) = 3y \Leftrightarrow x = 2^{3y}-1$

Với $0 \le x \le 2018 \Leftrightarrow 1 \le 8^y \le 2019 \Leftrightarrow 0 \le y \le \log_8 2019 \approx 3.7$.

Vì $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{0;1;2;3\}$. Rõ ràng với y nguyên thì x nguyên.

Vậy có 4 cặp số x, y nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 17. Chọn D

Ta có: $2\left(2^{a^2+b^2+c^2}-1\right)+(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2 = 4^{a+b+c}$

$\Leftrightarrow 2^{a^2+b^2+c^2+1}+a^2+b^2+c^2+1 = 2^{2a+2b+2c}+(2a+2b+2c)$

Xét hàm $f(t) = 2^t+t$ trên $\mathbb{R}$

Ta có, $f'(t) = 2^t\ln 2+1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó, phương trình đã cho có dạng $f\left(a^2+b^2+c^2+1\right) = f(2a+2b+2c)$.

Suy ra: $2a+2b+2c = a^2+b^2+c^2+1 \Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2 = 2 \ (*)$

Ta lại có, $P = \dfrac{3a+2b+c}{a+b+c} \Leftrightarrow (P-3)a+(P-2)b+(P-1)c = 0 \ (**)$

Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ lấy $M(a;b;c)$.

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Theo (*) ta có M thuộc mặt cầu tâm $I(1;1;1)$,bán kính $R=\sqrt{2}$.

Theo (**) thì M thuộc mặt phẳng (α) có phương trình $(P-3)x+(P-2)y+(P-1)z=0$.

Tồn tại bộ $(a;b;c)$ khi và chỉ khi tồn tại M (mặt cầu và mặt phẳng có điểm chung).

Suy ra $d\left(I;(\alpha)\right)\le R$ hay $\dfrac{|3P-6|}{\sqrt{(P-3)^2+(P-2)^2+(P-1)^2}}\le\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow(3P-6)^2\le 2.\left[(P-3)^2+(P-2)^2+(P-1)^2\right]$

$\Leftrightarrow 3P^2-12P+8\le 0\Leftrightarrow\dfrac{6-2\sqrt{3}}{3}\le P\le\dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}$. Vậy $S=\{1;2;3\}$.

Câu 18. Chọn D

Điều kiện $x+1>0\Leftrightarrow x>-1$.

Ta có $\log\ x+1\ =2\Leftrightarrow x+1=10^2\Leftrightarrow x=99$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\ 99\ $.

Câu 19. Chọn D

Ta có $2^a=3\Rightarrow a=\log_2 3$.

Tương tự $b=\log_3 4, c=\log_4 5, d=\log_5 6$

$\Rightarrow abcd=\log_2 3.\log_3 4.\log_4 5.\log_5 6=\log_2 6\Rightarrow P=2^{\log_2 6}=6$

Câu 20. Chọn C

Đặt $2^x=5^y=10^{-z}=t\ \ (t>0)$

$$\Rightarrow\begin{cases}2=t^{\frac{1}{x}}\\5=t^{\frac{1}{y}}\\10=t^{\frac{-1}{z}}\end{cases}\Rightarrow t^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=t^{-\frac{1}{z}}\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0.$$

Câu 21. Chọn A

Đặt $\log_4 x=\log_6 y=\log_9(x+y)=t\Rightarrow\begin{cases}x=4^t\\y=6^t\\x+y=9^t\end{cases}$.

Mà $4^t.9^t=(6^t)^2\Rightarrow x(x+y)=y^2\Leftrightarrow x^2+xy-y^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{y}=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\ (l)\\\dfrac{x}{y}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\ (t/m)\end{array}\right.$.

Câu 22. Chọn D

Ta có: $\begin{cases} a^{x+1}=\dfrac{a}{b} \\ b^{2y}=\dfrac{a}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\log_a b \\ y=\dfrac{1}{2}\left(-1+\log_b a\right) \end{cases} \Rightarrow y=\dfrac{-x-1}{2x} \Rightarrow 2xy=-x-1.$

Khi đó $P=x^2+y^2+y=\left(x+y\right)^2-2xy+y=\left(x+y+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\ge\dfrac{3}{4}.$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x+y=-\dfrac{1}{2} \\ 2xy=-x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y=\dfrac{-\sqrt{2}-1}{2} \end{cases}.$

Câu 23. Chọn B

Đặt $2018^a=2019^b=2020^c=k \Rightarrow \begin{cases} a=\log_{2018} k \\ b=\log_{2019} k \\ c=\log_{2020} k \end{cases}$

Từ đó suy ra $P=\dfrac{\log_{2018} k}{\log_{2019} k}+\dfrac{\log_{2019} k}{\log_{2020} k}=\log_{2018} 2019+\log_{2019} 2020.$

Câu 24. Chọn B

$\log_3(x^2+2y)=1+\log_3 4=\log_3 3+\log_3 4=\log_3 12 \Rightarrow x^2+2y=12$

Ta có: $16=x^2+4+2y\ge 2\sqrt{x^2.4}+2y\ge 4x+2y\ge 2\sqrt{4x.2y}=2\sqrt{8}\sqrt{xy}$

$\Rightarrow P=\sqrt{xy}\le\sqrt{8}.$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x^2=4, x>0, y>0 \\ 4x=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$. Vậy $MinP=\sqrt{8}$.

Câu 25. Chọn C

Đặt $a^x=b^y=c^{\frac{z}{2}}=\sqrt{abc}=t\ \left(t>0\right)$

$\Rightarrow \begin{cases} a=t^{\frac{1}{x}} \\ b=t^{\frac{1}{y}} \\ c=t^{\frac{2}{z}} \\ abc=t^2 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{z}=2 \Rightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2-\dfrac{2}{z}.$

$P=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-z^2=2-\dfrac{2}{z}-z^2=2-\left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z}+z^2\right).$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si cho ba số dương $\dfrac{1}{z};\dfrac{1}{z};z^2$ ta có: $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z}+z^2\ge 3 \Rightarrow P\le -1.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{z}=z^2 \Leftrightarrow z=1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng -1.

Câu 26. Chọn D

Ta có $2020^{2019(x^2-y+4)}=\dfrac{4x+y}{(x+2)^2}\Leftrightarrow 2020^{2019\left[(x+2)^2-(4x+y)\right]}=\dfrac{4x+y}{(x+2)^2}\Leftrightarrow \dfrac{2020^{2019(x+2)^2}}{2020^{2019(4x+y)}}=\dfrac{4x+y}{(x+2)^2}$

$\Leftrightarrow 2020^{2019(x+2)^2}(x+2)^2=2020^{2019(4x+y)}(4x+y)(1)$.

Xét hàm số $f(t)=2020^{2019t}t$ với $t>0$.

Ta có $f'(t)=2020^{2019t}+2020^{2019t}t\ln 2020^{2019}>0\forall t>0$.

Khi đó $(1)\Leftrightarrow (x+2)^2=4x+y\Leftrightarrow y=x^2+4$.

Nên $P=y-2x=x^2+4-2x=(x-1)^2+3\geq 3$. $\min P=3$ khi $\begin{cases}x=1\\y=5\end{cases}$.

Câu 27. Chọn A

Điều kiện $1-xy>0$.

Ta có: $3^{x+y+2xy-2}=\dfrac{2(1-xy)}{x+y}\Leftrightarrow x+y+2xy-2=\log_3\dfrac{2(1-xy)}{x+y}$.

$\Leftrightarrow \log_3\left[2(1-xy)\right]+2(1-xy)=\log_3(x+y)+(x+y)(*)$.

Xét hàm $f(t)=t+\log_3 t$ với $t>0\Rightarrow f'(t)=1+\dfrac{1}{t\ln 3}>0$.

$(*)\Leftrightarrow f\left(2(1-xy)\right)=f(x+y)\Leftrightarrow 2(1-xy)=x+y\Leftrightarrow y=\dfrac{2-x}{2x+1}$.

Khi đó $1-xy>0\Leftrightarrow \dfrac{x^2+1}{2x+1}>0$ (luôn đúng).

Ta có $P=x+5y=x+5\dfrac{2-x}{2x+1}$. Đặt $f(x)=x+5\dfrac{2-x}{2x+1}\Rightarrow f'(x)=1-\dfrac{25}{(2x+1)^2}$.

$f'(x)=0\Rightarrow x=2$.

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	2	↗	

Vậy $P_{Min}=2$ đạt được khi $\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}$.

Câu 28. Chọn D

Ta có $(2b-1)^2(b+1)\geq 0\Rightarrow 3b-1\leq 4b^3$ và từ điều kiện bài toán suy ra $\log_a b>1$.

Từ đó suy ra

$$P\geq 3\log_a b+\frac{12}{(\log_a b-1)^2}-3=\frac{3\log_a b\cdot(\log_a b-3)^2}{(\log_a b-1)^2}+9\geq 9$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $b=\dfrac{1}{2}$, $a=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Vậy $\min P=9$.

Câu 29. Chọn A

Ta có: $a,b,c>1$ và $x,y,z>0$ nên $a^x;b^y;c^z;\sqrt[3]{abc}>1$

Do đó: $a^x=b^y=c^z=\sqrt[3]{abc}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{3}\left(1+\log_a b+\log_a c\right)\\ y=\frac{1}{3}\left(\log_b a+1+\log_b c\right)\\ z=\frac{1}{3}\left(\log_c a+\log_c b+1\right)\end{cases}$.

Khi đó, ta có:

$P=x+y+z=\frac{1}{3}\left(1+\log_a b+\log_a c+\log_b a+1+\log_b c+\log_c a+\log_c b+1\right)$

$=\frac{1}{3}.\left(3+\log_a b+\log_a c+\log_b a+\log_b c+\log_c a+\log_c b\right)$

$=\frac{1}{3}.\left(3+\log_a b+\log_b c+\log_c a+\log_a c+\log_c b+\log_b a\right)$

Mặt khác $a,b,c>1$ nên $\log_a b,\log_b c,\log_c a,\log_a c,\log_c b,\log_b a>0$

Suy ra: $P\ge\frac{1}{3}\left(3+3\sqrt[3]{\log_a b.\log_b c.\log_c a}+3\sqrt[3]{\log_a c.\log_c b.\log_b a}\right)=3$.

Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases}\log_a b=\log_b c=\log_c a\\ \log_a c=\log_c b=\log_b a\\ a^x=b^y=c^z=\sqrt[3]{abc}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_a b=\log_b c=\log_c a\\ \frac{1}{\log_c a}=\frac{1}{\log_b c}=\frac{1}{\log_a b}\\ a^x=b^y=c^z=\sqrt[3]{abc}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=c\\ x=y=z=1\end{cases}$.

Vậy $\min P=3\in(2;4)$.

Câu 30. Chọn D

Theo bài ra ta có: $a^x=b^y=\sqrt[4]{ab}\Leftrightarrow\begin{cases}a^x=a^{\frac{1}{4}}.b^{\frac{1}{4}}\\ b^y=a^{\frac{1}{4}}.b^{\frac{1}{4}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^{x-\frac{1}{4}}=b^{\frac{1}{4}}\\ b^{y-\frac{1}{4}}=a^{\frac{1}{4}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\log_a b\\ y-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.\log_b a\end{cases}$.

Do đó: $P=x+4y=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\log_a b+1+\log_b a=\frac{5}{4}+\frac{1}{4}\log_a b+\log_b a$.

Đặt $t=\log_a b$. Vì a, $b>1$ nên $\log_a b>\log_a 1=0$. Suy ra: $t=\log_a b>0$.

Khi đó $P=\frac{5}{4}+\frac{1}{4}t+\frac{1}{t}\ge\frac{5}{4}+2\sqrt{\frac{1}{4}t.\frac{1}{t}}=\frac{5}{4}+1=\frac{9}{4}$.

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{9}{4}$ khi $\frac{1}{4}t+\frac{1}{t}\Leftrightarrow t=2$ hay $\log_a b=2\Leftrightarrow b=a^2$.

Suy ra: $a^x=a^{2y}=\sqrt[4]{a^3}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{3}{4}\\ y=\frac{3}{8}\end{cases}$.

Khi đó: $m=9,\ n=4\Rightarrow T=85$.

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Câu 31. Chọn B

Với điều kiện: $x>-1, y>-3 \Rightarrow x+1>0, y+3>0$. Ta có:

$\log_2(y+3)(x+1)+\dfrac{xy+3x+y+2}{x+1}=0 \Leftrightarrow \log_2(y+3)+\log_2(x+1)+(y+3)-\dfrac{1}{x+1}=0$.

$\Leftrightarrow \log_2(y+3)+(y+3)=\log_2\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+1}$ (1).

Xét hàm số: $f(t)=\log_2 t+t\ (t>0)$, $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0, \forall t>0$. Suy ra $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Do đó: $(1) \Leftrightarrow y+3=\dfrac{1}{x+1}$.

Khi đó: $P=x+3y+10=x+3(\dfrac{1}{x+1}-3)+10=x+1+\dfrac{3}{x+1}\geq 2\sqrt{3}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x+1+\dfrac{3}{x+1} \Leftrightarrow 3=(x+1)^2 \Leftrightarrow x=\sqrt{3}-1$, (vì $x>-1$).

Vậy: $\min P=2\sqrt{3}$.

Câu 32. Chọn B

Đặt $\log_b a=t$.

Với điều kiện: $1>a>b>\dfrac{1}{4}$ khi đó: $0=\log_b 1<\log_b a<\log_b b=1 \Rightarrow t\in(0;1)$

Ta có: $b^2-b+\dfrac{1}{4}\geq 0 \Leftrightarrow b-\dfrac{1}{4}\leq b^2 \Rightarrow \log_a\left(b-\dfrac{1}{4}\right)\geq \log_a b^2 \Rightarrow \log_a\left(b-\dfrac{1}{4}\right)\geq\dfrac{2}{t}$.

$\log_{\frac{a}{b}}\sqrt{b}=\dfrac{1}{2(\log_b a-1)}=\dfrac{1}{2(t-1)}$. Do đó $P=\log_a\left(b-\dfrac{1}{4}\right)-\log_{\frac{a}{b}}\sqrt{b}\geq\dfrac{2}{t}+\dfrac{1}{2(1-t)}$.

Xét hàm $f(t)=\dfrac{2}{t}+\dfrac{1}{2(1-t)}$ với $t\in(0;1)$ có $f'(t)=-\dfrac{2}{t^2}+\dfrac{1}{2(1-t)^2}$.

Với $t\in(0;1)$ ta có: $f'(t)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3}$.

Do: $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t)=\lim\limits_{t\to 0^+}\left(\dfrac{2}{t}+\dfrac{1}{2(1-t)}\right)=+\infty$; $\lim\limits_{t\to 1^-} f(t)=\lim\limits_{t\to 1^-}\left(\dfrac{2}{t}+\dfrac{1}{2(1-t)}\right)=+\infty$.

Lập BBT của hàm số $f(t)=\dfrac{2}{t}+\dfrac{1}{2(1-t)}$ với $t\in(0;1)$ ta có:

x	0		$\frac{2}{3}$		1
$f'(t)$	‖	-	0	+	‖
$f(t)$	$+\infty$	↘	$\frac{9}{2}$	↗	$+\infty$

Dựa vào BBT ta tìm được $Min\, f(t)=\dfrac{9}{2}$ tại $t=\dfrac{2}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{9}{2}$.

Câu 33. Chọn B

Ta có: $xy \le 4y-1 \Leftrightarrow 4y \ge xy+1 \ge 2\sqrt{xy} \Rightarrow 4y \ge 2\sqrt{xy}$ nên: $\sqrt{\frac{x}{y}} \le 2 \Leftrightarrow \frac{x}{y} \le 4$.

Xét $P = \frac{6(2x+y)}{x} + \ln\frac{x+2y}{y} = 12 + 6.\frac{y}{x} + \ln\left(\frac{x}{y}+2\right)$.

Đặt $t = \frac{x}{y}$, $0 < t \le 4$. Suy ra : $P = f(t) = 12 + \frac{6}{t} + \ln(t+2)$.

Ta có: $f'(t) = -\frac{6}{t^2} + \frac{1}{t+2} = \frac{t^2-6t-12}{t^2.(t+2)} = \frac{(t-3)^2-21}{t^2.(t+2)}$.

Với $0 < t \le 4$ thì $-3 < t-3 \le 1 \Rightarrow 0 \le (t-3)^2 < 9$ nên $(t-3)^2 - 21 < 0, \forall t \in (0;4]$.

Do đó: $f'(t) < 0$. Hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $(0;4]$.

Suy ra: $f(t) \ge f(4), \forall t \in (0;4]$. Hay $P \ge f(4) = 12 + \frac{6}{4} + \ln 6 \Leftrightarrow P \ge \frac{27}{2} + \ln 6$.

Vậy $P_{\min} = \frac{27}{2} + \ln 6$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{x}{y} = 4 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

Khi đó : $a = \frac{27}{2}; b = 6$ nên $ab = 81$.

Câu 34. Chọn B

Ta có $a^x = \sqrt[3]{ab} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}(1+\log_a b)$, $b^y = \sqrt[3]{ab} \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}(1+\log_b a)$.

$P = x+3y = \frac{1}{3}(1+\log_a b) + 1 + \log_b a = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\log_a b + \frac{1}{\log_a b}$.

Đặt $\log_a b = t$, do $1 < a \le b \le a^3 \Rightarrow 1 \le \log_a b \le 3 \Rightarrow t \in [1;3] \Rightarrow P = \frac{4}{3} + \frac{t}{3} + \frac{1}{t}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{4}{3} + \frac{t}{3} + \frac{1}{t}$; với $t \in [1;3]$.

$f'(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{t^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{3} \\ t = -\sqrt{3} \end{array}\right.$. Do $t \in [1;3] \Rightarrow t = \sqrt{3}$.

$f(1) = f(3) = \frac{8}{3}$; $f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{4+2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \max\limits_{[1;3]} f(t) = \frac{8}{3}$. Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{8}{3}$.

Câu 35. Chọn B

Biến đổi yêu cầu của bài toán ta được:

$P = \sqrt{\log_3 a} + \sqrt{\log_2 b} = \sqrt{\frac{\log_2 a}{\log_2 3}} + \sqrt{\frac{\log_3 b}{\log_3 2}} = \sqrt{\frac{\log_2 a}{\log_2 3}} + \sqrt{\frac{1-\log_2 a}{\log_3 2}}$

Xét hàm số $f\ t = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\log_2 3}} + \sqrt{\log_2 3}.\sqrt{1-t} \Rightarrow f'\ t = \frac{1}{2\sqrt{t}\sqrt{\log_2 3}} - \frac{\sqrt{\log_2 3}}{2\sqrt{1-t}}$.

Ta có $f'\ t = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-t} = \log_2 3\sqrt{t} \Leftrightarrow 1-t = t.\log_2^2 3 \Leftrightarrow t = \frac{1}{1+\log_2^2 3}$.

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

$\Rightarrow f\ t\ \geq f\left(\frac{1}{1+\log_2^2 3}\right)=\sqrt{\log_2 3+\log_3 2}\Rightarrow \min P=\sqrt{\log_2 3+\log_3 2}$.

Câu 36. Chọn A

Đặt $\log_{16} x=\log_{20} y=\log_{25}\frac{2x-y}{3}=t\ (t>0)\Rightarrow\begin{cases}x=16^t\\ y=20^t\\ \frac{2x-y}{3}=25^t\end{cases}$

$\Rightarrow\frac{2.16^t-20^t}{3}=25^t\Leftrightarrow 2.16^t-20^t=3.25^t\Leftrightarrow 3.\left(\frac{5}{4}\right)^{2t}+\left(\frac{5}{4}\right)^t-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{5}{4}\right)^t=\frac{2}{3}\ (N)\\ \left(\frac{5}{4}\right)^t=-1\ (L)\end{array}\right.$.

Vậy $\frac{y}{x}=\left(\frac{20}{16}\right)^t=\left(\frac{5}{4}\right)^t=\frac{2}{3}$.

Câu 37. Chọn D

Đặt: $t=\log_9 p=\log_{12} q=\log_{16}(p+q)\ (t>0)$ ta có $\begin{cases}p=9^t\\ q=12^t\\ p+q=16^t\end{cases}$.

Từ đó suy ra $9^t+12^t=16^t\Leftrightarrow 1+\left(\frac{4}{3}\right)^t=\left(\frac{4}{3}\right)^{2t}$.

Đặt $x=\left(\frac{4}{3}\right)^t=\frac{q}{p}>0$ phương trình trở thành: $x^2-x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$.

Do $x>0$ nên suy ra $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Vậy $\frac{q}{p}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Câu 38. Chọn A

Điều kiện: $x>y\geq 0$. Đặt: $\log_2(x+y)=\log_3(x-y)=t$

$\Rightarrow\begin{cases}x+y=2^t\\ x-y=3^t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{2^t+3^t}{2}\\ y=\frac{2^t-3^t}{2}\end{cases}$

Ta có $y\geq 0\Rightarrow\frac{2^t-3^t}{2}\geq 0\Leftrightarrow 2^t\geq 3^t\Leftrightarrow t\leq 0$

Khi đó $\begin{cases}0<2^t\le 1\\ 0<3^t\le 1\end{cases}\Leftrightarrow 0<2^t+3^t\le 2\Leftrightarrow 0<\dfrac{2^t+3^t}{2}\le 1\Leftrightarrow 0<x\le 1;\ x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=1$

Với $x=1\Rightarrow t=0\Rightarrow y=0$. Vậy $x+y=1$.

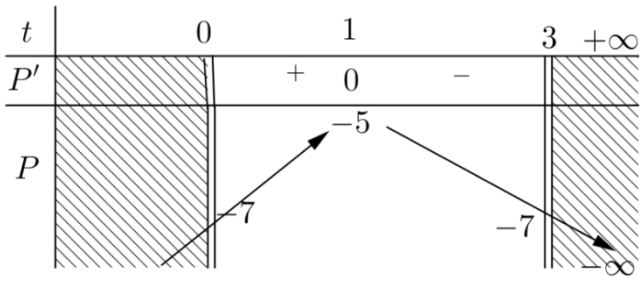
Câu 39. Chọn B

$$P=\frac{\log_2\dfrac{x}{128}}{\log_2 x+1}-\log_{\sqrt{2}}x=\frac{l\log_2 x-\log_2 128}{\log_2 x+1}-2\log_2 x=\frac{\log_2 x-7}{\log_2 x+1}-2\log_2 x.$$

Đặt $t=\log_2 x\ (0\le t\le 3)$. Ta có: $P=\dfrac{t-7}{t+1}-2t$ trên $[0;3]$.

$$P'=\frac{8}{(t+1)^2}-2,\ P'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-3\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:



Giá trị lớn nhất của biểu thức là $b=-5$, Giá trị lớn nhất của biểu thức là $a=-7$.Khi đó $ab=35$.

Câu 40. Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases}x>0\\ y>0\\ x-y>0\end{cases}$.

Ta có

$$\log_2 x+\log_2(x-y)=1+2\log_2 y\ \Leftrightarrow\log_2 x(x-y)=1+\log_2 y^2\ \Leftrightarrow\log_2 x(x-y)=\log_2 2y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-xy=2y^2\Leftrightarrow(x-2y)(x+y)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2y\\ x=-y(L)\end{array}\right.$$

Xét $x=2y$, mà $x\le 2020\Rightarrow 2y\le 2020\Leftrightarrow y\le 1010$, kết hợp điều kiện ta có $y\in\{1;2;....1010\}$.

Vậy có 1010 giá trị của y, tương ứng với có 1010 cặp số $(x;y)$ thỏa mãn bài toán.

Câu 41. Chọn B

Điều kiện $\begin{cases}x>0\\ x\ne\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

Ta có $\log_2\left(\dfrac{4x^2-4x+1}{x}\right)=6x-4x^2\Leftrightarrow\log_2(4x^2-4x+1)-\log_2 x=6x-4x^2$

$$\Leftrightarrow\log_2(4x^2-4x+1)+(4x^2-4x+1)=\log_2 x+(2x+1)$$

$\Leftrightarrow \log_2(2x-1)^2+(2x-1)^2=\log_2(2x)+2x \quad (*)$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0,\forall t\in(0;+\infty)\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

$$(*)\Leftrightarrow (2x-1)^2=2x\Leftrightarrow 4x^2-6x+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{4} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}\end{array}\right.$$

Do $x_1<x_2\Rightarrow x_1=\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}, x_2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}\Rightarrow 2x_1-x_2=2\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}\right)-\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}\right)=\dfrac{3-3\sqrt{5}}{4}=\dfrac{3}{4}\left(1-\sqrt{5}\right)$

Vậy $a=1,b=5\Rightarrow P=a+b=6$.

Câu 42. Chọn D

Điều kiện $\sin x>0,\cos x>0$.

Đặt $u=2\log_3(\cot x)=\log_2(\cos x)$ ta có $\begin{cases}\cot^2 x=3^u\\ \cos x=2^u\end{cases}$

Vì $\cot^2 x=\dfrac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}$ nên suy ra $\dfrac{\left(2^u\right)^2}{1-\left(2^u\right)^2}=3^u\Leftrightarrow\left(2^u\right)^2=3^u.\left(1-\left(2^u\right)^2\right)\Leftrightarrow\left(\dfrac{4}{3}\right)^u+4^u-1=0$ (1)

Xét hàm số $f(u)=\left(\dfrac{4}{3}\right)^u+4^u-1$ ta có: $f'(u)=\left(\dfrac{4}{3}\right)^u\ln\left(\dfrac{4}{3}\right)+4^u\ln 4>0,\forall u\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên phương trình $f(u)=0$ có nhiều nhất một nghiệm.

Dễ thấy $f(-1)=0$ suy ra phương trình (1) có nghiệm duy nhất $u=-1$

$u=-1\Rightarrow\cos x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$.

Đối chiếu điều kiện suy ra nghiệm là $x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$. Mà $x\in(0;2020\pi)$ nên $-\dfrac{1}{6}<k<\dfrac{6059}{6}$ ta chọn $k\in\{0;1;2...;1009\}$

Khi đó số nghiệm của phương trình thuộc khoảng $(0;2020\pi)$ là 1010.

Câu 43. Chọn A

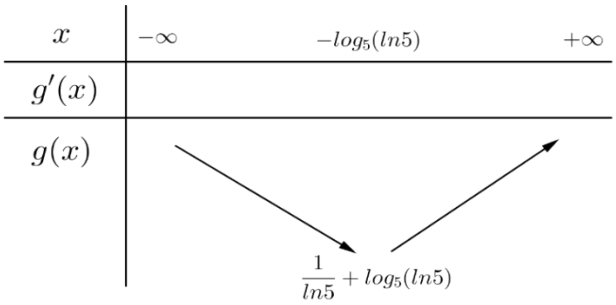
Điều kiện $x+y>0$. Đặt $\log_5(x+y)=t\Leftrightarrow x+y=5^t$

Khi đó: $\begin{cases}5^x=t+y\\ 5^t=x+y\end{cases}\Leftrightarrow 5^t+t=5^x+x$

Xét hàm số $f(u)=5^u+u\Rightarrow f'(u)=5^u.\ln 5+1>0\Rightarrow$ hàm số đồng biến với $\forall u\in\mathbb{R}$

Ta có: $f(t)=f(x)\Rightarrow t=x$. Khi đó: $5^x=x+y\Leftrightarrow y=5^x-x$

Đặt $g(x)=5^x-x\Rightarrow g'(x)=5^x.\ln 5-1=0\Leftrightarrow x=-\log_5(\ln 5)$



Để phương trình có nghiệm thì $y\ge\dfrac{1}{\ln 5}+\log_5(\ln 5)\approx 0,917$

Mà $|y|\le 2020$ nên có đúng 2020 giá trị nguyên của y thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 44. Chọn A

Tập xác định: $D=[1;+\infty)$.

$$\log 10x+\log^2 x+3\ge m\log 100x\Leftrightarrow m\le\frac{\log 10x+\log^2 x+3}{\log 100x}=\frac{\log x+\log^2 x+4}{\log x+2}.$$

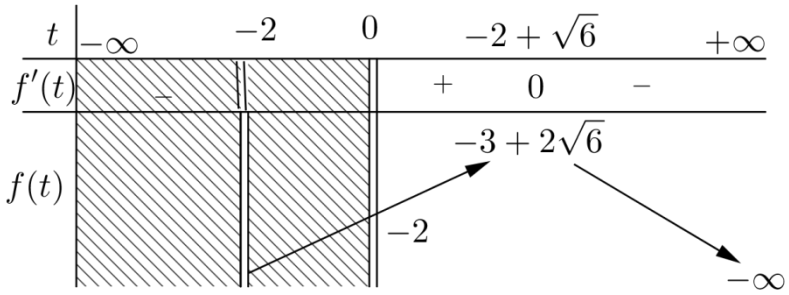
Đặt $t=\log x\ x\ge 1\Rightarrow t\ge 0$, bất phương trình trở thành: $m\le\dfrac{t^2+t+4}{t+2}\ (2)$.

Để bất phương trình ban đầu có nghiệm $[1;+\infty)$ thì bất phương trình (2) có nghiệm $[0;+\infty)$.

Xét $f(t)=\dfrac{t^2+t+4}{t+2}$ trên $[0;+\infty)$.

Trên $[0;+\infty)$ ta có: $f'(t)=\dfrac{t^2+4t-2}{(t+2)^2}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2+\sqrt{6}(tm)\\x=-2-\sqrt{6}(l)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



Bất phương trình (2) có nghiệm $[0;+\infty)\Leftrightarrow m\le\max\limits_{[0;+\infty)}f(t)\Leftrightarrow m\le -3+2\sqrt{6}$

Mà m nguyên nên $m=\{1\}$. Vậy có 1 giá trị nguyên dương thỏa mãn.

Câu 45. Chọn A

Điều kiện $x+y>0;x^2+y^2\ne 0$.

Ta đặt: $\log_3(x+y)=\log_4(x^2+y^2)=t$. Ta có $\begin{cases}x+y=3^t\\x^2+y^2=4^t\end{cases}(1)$

Vì $(x+y)^2 \le 2(x^2+y^2) \Rightarrow (3^t)^2 \le 2.4^t \Rightarrow t \le \log_{\frac{9}{4}} 2 \approx 0,85$.

Ta có $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy \Rightarrow xy=\dfrac{9^t-4^t}{2}$.

Khi đó, $P=x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=27^t-3.3^t.\dfrac{9^t-4^t}{2}=-\dfrac{1}{2}.27^t+\dfrac{3}{2}.12^t=f(t)$.

Xét $f(t)=-\dfrac{1}{2}.27^t+\dfrac{3}{2}.12^t$ với $t \le \log_{\frac{9}{4}} 2$, có $f'(t)=-\dfrac{1}{2}.27^t.\ln 27+\dfrac{3}{2}.12^t.\ln 12$,

$f'(t)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}.27^t.\ln 27=\dfrac{3}{2}.12^t.\ln 12 \Leftrightarrow \left(\dfrac{27}{12}\right)^t=3.\dfrac{\ln 12}{\ln 27} \Leftrightarrow t=\log_{\frac{27}{12}}\left(3.\dfrac{\ln 12}{\ln 27}\right) \approx 1,006(L)$.

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		$\log_{\frac{9}{4}} 2$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	0	↗	$f(\log_{9/4} 2) \approx 4,18$

Gọi T là tập giá trị của P. Từ BBT ta có $\begin{cases} T=(0;4] \\ P \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \{1;2;3;4\} \in T$ nên suy ra tập giá trị của P có chứa 4 giá trị nguyên.

Câu 46. Chọn B

Ta có: $2^{x^2+y^2}=2.2^{y-x} \Leftrightarrow 2^{x^2+y^2}=2^{y-x+1} \Leftrightarrow x^2+y^2=y-x+1 \Leftrightarrow y^2-y=-x^2-x+1\,(*)$

Cách1:

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ tìm $x \in \mathbb{Z}$ để phương trình (*) có nghiệm y dương

Xét hàm số $f(y)=y^2-y$ trên $(0,+\infty)$

$f'(y)=2y-1; f'(y)=0 \Leftrightarrow 2y-1=0 \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2}$

Bảng biến thiên :

y	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(y)$		$-$	0	$+$	
$f(y)$	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

Phương trình (*) có nghiệm y dương $\Leftrightarrow -x^2-x+1 \ge -\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{-1-\sqrt{6}}{2} \le x \le \dfrac{-1+\sqrt{6}}{2}$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-1;0\}$.

Vậy có 2 số nguyên x để phương trình $(*)$ có nghiệm thực y dương.

Cách2:

Yêu cầu của bài toán được thỏa

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{Z};\ y>0 \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{Z};\ y>0 \\ y=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} \end{cases} \vee \begin{cases} x\in\mathbb{Z};\ y>0 \\ y=\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{3}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} \end{cases}$$

TH1: $\begin{cases} x\in\mathbb{Z};\ y>0 \\ y=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{Z};\ \frac{-1-\sqrt{6}}{2}\le x\le\frac{-1+\sqrt{6}}{2} \\ y=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} \end{cases}$ ta chọn $x\in\{-1;0\}$.

TH2: $\begin{cases} x\in\mathbb{Z};\ y>0 \\ y=\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{3}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{Z};\ \frac{-1-\sqrt{6}}{2}\le x\le\frac{-1+\sqrt{6}}{2} \\ y=\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{3}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2};y>0 \end{cases}$, không tồn tại $x\in\mathbb{Z}$ để $y>0$.

Vậy có 2 số nguyên x để phương trình $(*)$ có nghiệm thực y dương.

Câu 47. Chọn D

Đặt $t=\log_{\frac{1}{2}}(x-2)$. Do $x\in\left[\frac{5}{2};4\right]$ nên $t\in[-1;1]$

Ta có phương trình

$4(m-1)t^2-4(m-5)t+4m-4=0\Leftrightarrow(m-1)t^2-(m-5)t+m-1=0$

$\Leftrightarrow m\left(t^2-t+1\right)=t^2-5t+1\Leftrightarrow m=\frac{t^2-5t+1}{t^2-t+1}\Leftrightarrow m=f(t)$

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2-5t+1}{t^2-t+1}$ với $t\in[-1;1]$

$f'(t)=\frac{4t^2-4}{\left(t^2-t+1\right)^2}=\frac{-4\left(1-t^2\right)}{\left(t^2-t+1\right)^2}\le 0\ \forall t\in[-1;1]\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên đoạn $[-1;1]$

Phương trình có nghiệm khi đường thẳng $y=m$ có điểm chung với đồ thị hàm số

$y=f(t)$ trên đoạn $[-1;1]\Leftrightarrow f(1)\le m\le f(-1)\Leftrightarrow -3\le m\le\frac{7}{3}$

Câu 48. Chọn B

Đk: $\begin{cases}\sin x>0\\ \cos x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k2\pi<x<\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$.

Với điều kiện trên ta có: $2\log_3(\cot x)=\log_2(\cos x)\Leftrightarrow\log_3(\cot x)^2=\log_2(\cos x)$

$\Leftrightarrow\log_3\cos^2 x-\log_3\sin^2 x=\log_2(\cos x)\Leftrightarrow\log_3\cos^2 x-\log_3(1-\cos^2 x)=\log_2(\cos x)$

Đặt $t=\log_2\cos x\Rightarrow\cos x=2^t$.

Phương trình trở thành $\Leftrightarrow\log_3\dfrac{2^{2t}}{1-2^{2t}}=t\Leftrightarrow 4^t=3^t-12^t$ hay $\left(\dfrac{4}{3}\right)^t+4^t=1$

Hàm số $f(t)=\left(\dfrac{4}{3}\right)^t+4^t$ có $f'(t)=\left(\dfrac{4}{3}\right)^t.\ln\dfrac{4}{3}+4^t.\ln 4>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

Mặt khác $f(-1)=1$ nên $t=-1$ là nghiệm của phương trình.

Do đó phương trình có nghiệm duy nhất $t=-1$.

$$\log_2\cos x=-1\Leftrightarrow\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+k.2\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})\\ x=-\dfrac{\pi}{3}+k.2\pi\ \ (loai\ do\ \sin x>0)\end{array}\right.$$

$x\in(0;2020\pi)\Leftrightarrow-\dfrac{1}{6}<k<\dfrac{6059}{6}$.

Vậy trong khoảng $(0;2020\pi)$ thì phương trình có 1010 nghiệm.

Câu 49. **Chọn B**

<u>Cách 1</u>:

Ta có

$$\log_4(x+y+3)=\log_5(x^2+y^2+2x+4y+5)\Leftrightarrow\log_4[(x+1)+(y+2)]=\log_5\left[(x+1)^2+(y+2)^2\right]$$

Đặt $X=x+1;\ Y=y+2$. Khi đó ta có $\log_4(X+Y)=\log_5(X^2+Y^2)$

Đặt $t=\log_4(X+Y)=\log_5(X^2+Y^2)$. Suy ra ta có hệ phương trình $\begin{cases}X+Y=4^t\\ X^2+Y^2=5^t\end{cases}$

Theo bất đẳng thức $B.C.S$ ta có $(X+Y)^2\le 2(X^2+Y^2)\Leftrightarrow 16^t\le 2.5^t\Leftrightarrow t\le\log_{\frac{16}{5}}2$.

Mặt khác $X^2=5^t-Y^2\le 5^t\le 5^{\log_{\frac{16}{5}}2}\Leftrightarrow -5^{\frac{1}{2}\log_{\frac{16}{5}}2}\le X\le 5^{\frac{1}{2}\log_{\frac{16}{5}}2}$ vì $X\in\mathbb{Z}\Rightarrow X\in\{-1,0,1\}$

Tương tự ta có $-5^{\frac{1}{2}\log_{\frac{16}{5}}2}\le Y\le 5^{\frac{1}{2}\log_{\frac{16}{5}}2}$.

<u>TH1</u>: $X=0$ ta có $\log_4 Y=\log_5 Y^2$ nghiệm là $Y=1$. Do đó $x=y=-1$.

<u>TH2</u>: $X=-1$ ta có $\log_4(Y-1)=\log_5(1+Y^2)$

Xét hàm số $f(Y)=\log_4(Y-1)-\log_5(1+Y^2)$ với $-5^{\frac{1}{2}\log_{\frac{16}{5}}2}\le Y\le 5^{\frac{1}{2}\log_{\frac{16}{5}}2}$, ta lấy đạo hàm và lập bảng biến thiên chứng minh được $\max\limits_{\left(-5^{\frac{1}{2}\log_{\frac{16}{5}}2}\le Y\le 5^{\frac{1}{2}\log_{\frac{16}{5}}2}\right)} f(Y)\approx -0,93<0$ nên không tồn tại Y.

TH3: $X=1$ ta có $\log_4(Y+1)=\log_5\left(1+Y^2\right)$ ta lập bảng biến thiên và chứng minh phương trình có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm $Y=0$ và một nghiệm còn lại thỏa $-5^{\frac{1}{2}\log_{\frac{16}{5}}2}\le Y\le 5^{\frac{1}{2}\log_{\frac{16}{5}}2}$.

Vậy có 2 giá trị $X\in\mathbb{Z}$ thỏa mãn là $\left[\begin{array}{l}X=0\\X=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=0\end{array}\right.$

Cách 2: (Biểu diễn miền trên đồ thị)

Ta có

$\log_4(x+y+3)=\log_5\left(x^2+y^2+2x+4y+5\right)\Leftrightarrow\log_4\left[(x+1)+(y+2)\right]=\log_5\left[(x+1)^2+(y+2)^2\right]$

Đặt $X=x+1;\ Y=y+2$. Khi đó ta có $\log_4(X+Y)=\log_5\left(X^2+Y^2\right)$

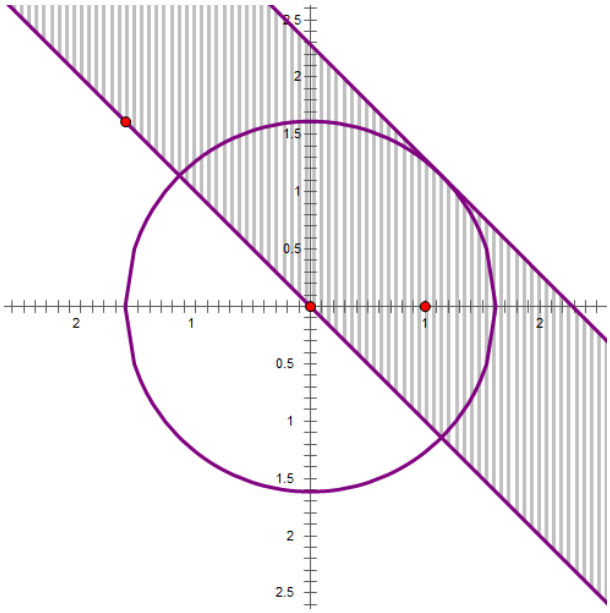
Đặt $t=\log_4(X+Y)=\log_5\left(X^2+Y^2\right)$.

Suy ra ta có hệ phương trình $\begin{cases}X+Y=4^t\\X^2+Y^2=5^t\end{cases}$

Theo bất đẳng thức $B.C.S$ ta có $(X+Y)^2\le 2\left(X^2+Y^2\right)\Leftrightarrow 16^t\le 2.5^t\Leftrightarrow t\le\log_{\frac{16}{5}}2$.

Khi đó ta có $\begin{cases}0<X+Y=4^t\le 4^{\log_{\frac{16}{5}}2}\\0<X^2+Y^2=5^t\le 5^{\log_{\frac{16}{5}}2}\end{cases}$

Minh họa bằng hình vẽ:



Vậy có 2 giá trị $X\in\mathbb{Z}$ thỏa mãn là $\left[\begin{array}{l}X=0\\X=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=0\end{array}\right.$.

Câu 50. Chọn D

Phương trình tương đương $2^{2x-y+1}+2^{-2x+y+1}+3^{2x-y+1}+3^{-2x+y+1}=5^{2x-y+1}+5^{-2x+y+1}$

Đặt $2x-y=a$, phương trình trở thành

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

$2\left(2^a+2^{-a}\right)+3\left(3^a+3^{-a}\right)=5\left(5^a+5^{-a}\right)$

Nhận thấy nếu a là nghiệm thì $-a$ cũng là nghiệm nên chỉ cần xét $a\ge 0$.

Xét hàm số $f(x)=x^t+x^{-t}, x>1$ với số thực t dương tùy ý.

Ta có: $f'(x)=tx^{t-1}\left(1-x^{-2t}\right)$, do $x>1$ nên $1-x^{-2t}>0$ suy ra hàm số này đồng biến trên $(1;+\infty)$

Do đó, ta được bất đẳng thức sau: $2^a+2^{-a}\le 3^a+3^{-a}\le 5^a+5^{-a}, \forall a\ge 0$ và dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi $a=0$.

Suy ra $2\left(2^a+2^{-a}\right)+3\left(3^a+3^{-a}\right)\le 5\left(5^a+5^{-a}\right)$

Đẳng thức phải xảy ra nên $a=0$ hay $2x-y=0\Leftrightarrow 2x=y$.

Khi đó $P=2x^2-y^2-2x+3y+1=-2x^2+4x+1=-2(x-1)^2+3\le 3$

Dấu "=" xảy ra khi $x=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 3 khi $x=1$.

Câu 51. Chọn B

Điều kiện $x+\sqrt{2}y>0; x^2+y^2\ne 0$. Đặt $\log_3\left(x+\sqrt{2}y\right)=\log_2\left(x^2+y^2\right)=t$

Khi đó $\begin{cases}x+\sqrt{2}y=3^t\\ x^2+y^2=2^t\end{cases}$

Vì $\left(x+\sqrt{2}y\right)^2\le 3\left(x^2+y^2\right)\Rightarrow 9^t\le 3.2^t\Leftrightarrow\left(\frac{9}{2}\right)^t\le 3\Leftrightarrow t\le\log_{\frac{9}{2}}3$.

Như vậy $x^2+y^2=2^t\Rightarrow x^2\le 2^t\le 2^{\log_{\frac{9}{2}}3}\approx 1,65$. Vì x nguyên nên $x^2\in\{0;1\}$.

Với $x=0$ ta có hệ $\begin{cases}y=\dfrac{3^t}{\sqrt{2}}\\ y^2=2^t\end{cases}$. Suy ra $\dfrac{9^t}{2}=2^t\Leftrightarrow\left(\dfrac{9}{2}\right)^t=2\Leftrightarrow t=\log_{\frac{9}{2}}2\Rightarrow y=\dfrac{3^{\log_{\frac{9}{2}}2}}{\sqrt{2}}\approx 1,17$.

Với $x=1$ ta có phương trình $\log_3\left(1+\sqrt{2}y\right)=\log_2\left(1+y^2\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=0\\ y\approx 0,7686\end{array}\right.$.

Với $x=-1$ ta có phương trình $\log_3\left(\sqrt{2}y-1\right)-\log_2\left(1+y^2\right)=0$.

Xét hàm số $f(y)=\log_3\left(\sqrt{2}y-1\right)-\log_2\left(1+y^2\right)$. Lập bảng biến thiên, ta chứng minh được $\max f(y)\approx f(1,369)\approx -1,583<0$ nên phương trình vô nghiệm.

Do đó ta chọn được $x\in\{0;1\}$. Vậy có 2 giá trị x thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 52. Chọn C

Xét hàm số $f(t)=t+e^t\Rightarrow f'(t)=1+e^t>0,\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ (1).

$x+\ln x=y+e^y\Leftrightarrow f(\ln x)=f(y)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\ln x=y\Leftrightarrow x=e^y$

Để $1\le x\le 2020$ thì $1\le e^y\le 2020\Leftrightarrow 0\le y\le\ln 2020$.

Mà y nguyên và $y\in[1;2020]$ nên $y\in\{1;2;3;4;5;6;7\}$.

Với mỗi giá trị $y\in\{1;2;3;4;5;6;7\}$ ta có 1 giá trị x tương ứng thuộc đoạn $[1;2020]$.

Vậy có 7 cặp số $(x;y)$ thỏa mãn.

Câu 53. Chọn B

Điều kiện $\begin{cases}x>0\\y>0\end{cases}$. Với điều kiện trên ta có: $\log(10xy)\ge\log(x+y)\Leftrightarrow 10xy\ge x+y$

$\Leftrightarrow y(10x-1)\ge x>0\Rightarrow y\ge\dfrac{x}{10x-1}\left(do\ x>\dfrac{1}{10}\right)$

Do đó: $S=x+3y\ge f(x)=x+\dfrac{3x}{10x-1}$; $f'(x)=1-\dfrac{3}{(10x-1)^2}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow(10x-1)^2=3\Leftrightarrow 10x-1=\sqrt{3}\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{3}+1}{10}\ \left(do\ x>\dfrac{1}{10}\right)$.

Lập bảng biến thiên ta có $\min\limits_{\left(\frac{1}{10};+\infty\right)}f(x)=f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{10}\right)=\dfrac{2+\sqrt{3}}{5}$.

$S=x+3y\ge f(x)=x+\dfrac{3x}{10x-1}\ge\min\limits_{\left(\frac{1}{10};+\infty\right)}f(x)=f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{10}\right)=\dfrac{2+\sqrt{3}}{5}\in\left[0;\dfrac{4}{3}\right]$.

BÀI TẬP LIÊN QUAN ĐẾN TÌM CẶP SỐ NGUYÊN THỎA MÃN

Câu 1. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $1\le y\le 10$ và $2^{(x-1)^2}.\log_2\left(x^2-2x+3\right)=4^y.\log_2\left(2y+2\right)$?

A. 9. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 2. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $1\le x\le 10^6$ và $\log\left(10x^2-20x+20\right)=10^{y^2}+y^2-x^2+2x-1$.

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 3. Gọi S là tập hợp các điểm $M(x;y)$, với $x;y$ là các số nguyên thỏa mãn $\begin{cases}3\le x\le 2020\\ \log_2(x-2)+2x=y+4\left(2^{y-1}+1\right)\end{cases}$. Hỏi có bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh là 3 điểm thuộc S?

A. 165. **B.** 120. **C.** 220. **D.** 55.

Câu 4. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $-20\le x\le 20,-20\le y\le 20$ và $2^{x+5}+3x+12=2^{y+1}+3y$?

A. 41. **B.** 40. **C.** 37. **D.** 32.

Câu 5. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $1\le x\le 2020$ và $\log_2(2x)+5x=10.2^y+y+2$?

A. 31. **B.** 11. **C.** 2020. **D.** 21.

Câu 6. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $1<x\le 100$ và $\log\dfrac{10y^2-20y}{x-1}=x-y^2+2y$?

A. 19. **B.** 17. **C.** 20. **D.** 18.

Câu 7. Số giá trị x nguyên thỏa mãn $\log_2^3(y-1)-x^3+\log_2(y-1)^3=3x$ và $2\le y\le 17$ là:

A. 0. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 8. Cho các số x,y,a thoả mãn $1\le x\le 2048, y\ge 1, a\in\mathbb{N}$ và $x^2+xy+\log_2\left(x+y-1\right)^{x+1}=x\left(2^a+a\right)-y+2^a+a+1$. Có bao nhiêu giá trị của $a\le 100$ để luôn có 2048 cặp số nguyên $(x;y)$?

A. 11. **B.** 10. **C.** 89. **D.** 90.

Câu 9. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $1\le y\le 2018$ và $\log_5\left(\dfrac{3^{x+1}-1}{y+1}\right)=y+2-3^{x+1}$?

A. 10. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 10. Cho các số x, y, a thỏa mãn $1\le x\le 8$, $y\ge 1$, $a\in\mathbb{N}$ và $\log_2\left(2^a+y+1\right)+2^a+y+1=x+2^x\ (*)$. Có bao nhiêu giá trị của $a\in[0;100]$ để không tồn tại cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa $(*)$?

A. 0. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 93.

Câu 11. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn $2x+y>0,-20\le x\le 20$ và $\log_2\left(x+2y\right)+2x^2+2y^2+5xy-2x-y=0$?

A. 9. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 11.

Câu 12. Gọi $(x;y)$ là cặp số nguyên dương thỏa mãn $1<y<2020$ và $\log_3\left(\frac{4^x+1}{y}\right)=y^2-2y+1-16^x$. Gọi $y_{\min}$ và $y_{\max}$ lần lượt là nghiệm ứng với giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của y. Tính giá trị của $T=y_{\min}+y_{\max}$.

A. $T=103$. **B.** $T=3010$. **C.** $T=1030$. **D.** $T=301$.

Câu 13. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $4^x+2x=y+\log_2 y$ và $1\le y\le 1024$?

A. 5. **B.** 6. **C.** 1024. **D.** 1023.

Câu 14. Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $\log_3\left(\frac{2a+5}{a+b}\right)=a+3b-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=a^2+3b^2$

A. $\frac{5}{4}$. **B.** 1. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{25}{4}$.

Câu 15. Cho tập hợp X là tập hợp các điểm $M(x;y)$ với $x;y$ là các số nguyên thỏa mãn $3\le x\le 2020$ và $\log_2(x-2)+2x=y+4\left(2^{y-1}+1\right)$. Hỏi có bao nhiêu tam giác có cả ba đỉnh là các điểm thuộc tập X?

A. 120. **B.** 165. **C.** 220. **D.** 55.

Câu 16. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le x\le 2020$ và $\log_5(25x+25)+x=2y+5^y$

A. 2019. **B.** 3. **C.** 2020. **D.** 4.

Câu 17. Cho x,y là các số thực thỏa mãn $\sqrt{\log_2 x}+x=y+2^{y^2}$ và $0<x<2020$. Số các giá trị nguyên dương của y là

A. 4. **B.** 3. **C.** 10. **D.** 9.

Câu 18. Có bao nhiêu cặp các số nguyên $(x;y)$ với $y<8$ thỏa mãn $\log_2\left(x^2-6x+9\right)-\log_2 y+x^2+8=6x+2y$?

A. 6. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 19. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn $20\le x\le 2020$ và $\frac{19^{-x-3}}{x^2+2x+2021}=\frac{361^{y-2}}{4y^2-4y+2020}$?

A. 1009. **B.** 1000. **C.** 2000. **D.** 2001.

Câu 20. Có bao nhiêu cặp số $(x;y),x\in\mathbb{Z}$ thỏa mãn $1\le y\le e^7$ và $e^{\ln^2 y-x^2-2x-1}=\frac{x^2+2x+2}{\ln^2 y+1}$

A. 1. **B.** 2. **C.** 16. **D.** 15.

Câu 21. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $3\le x\le 2020$ và $\log_2(x-2)+2x=y+4\left(2^{y-1}+1\right)$?

A. 11. **B.** 2020. **C.** 10. **D.** 2019.

Câu 22. Cho x,y là các số nguyên dương thỏa $x\le 10$ và $2x+\log_2(x-3)=5+y+2^y$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=x+y$.

A. 6. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 12.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.D	3.A	4.C	5.B	6.D	7.D	8.D	9.D	10.D
11.C	12.C	13.B	14.D	15.B	16.B	17.B	18.C	19.B	20.D
21.A	22.C								

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. **Chọn D**

Ta có $2^{(x-1)^2}.\log_2\left(x^2-2x+3\right)=4^y.\log_2\left(2y+2\right)$

$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2}.\log_2\left[\left(x-1\right)^2+2\right]=2^{2y}.\log_2\left(2y+2\right)\ (1).$

Xét hàm số $f\left(t\right)=2^t.\log_2\left(t+2\right),\ t\ge 0.$

Vì $f'\left(t\right)=2^t.\ln 2.\log_2\left(t+2\right)+\dfrac{2^t}{\left(t+2\right)\ln 2}>0,\ \forall t\ge 0$ nên hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\left[0;+\infty\right).$

Khi đó $\left(1\right)\Leftrightarrow f\left[\left(x-1\right)^2\right]=f\left(2y\right)\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2=2y.$

Mà $1\le y\le 10\Rightarrow 2\le\left(x-1\right)^2\le 20\Rightarrow\left[\begin{array}{l}1+\sqrt{2}\le x\le 1+\sqrt{20}\\1-\sqrt{20}\le x\le 1-\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Mặt khác $x\in Z\Rightarrow x\in\left\{-3;-2;-1;3;4;5\right\}$. Vì $x-1$ phải chẵn nên x lẻ.

Vậy có 4 cặp số nguyên $\left(x;y\right)$ thỏa đề bài.

Câu 2. **Chọn D**

Điều kiện: $10x^2-20x+20>0$, luôn đúng $\forall x\in\mathbb{R}.$

Ta có $\log\left(10x^2-20x+20\right)=10^{y^2}+y^2-x^2+2x-1$

$\Leftrightarrow\left(x^2-2x+1\right)+\log\left[10\left(x^2-2x+2\right)\right]=10^{y^2}+y^2\Leftrightarrow\left(x^2-2x+2\right)+\log\left(x^2-2x+2\right)=10^{y^2}+y^2$

$\Leftrightarrow 10^{\log\left(x^2-2x+2\right)}+\log\left(x^2-2x+2\right)=10^{y^2}+y^2$ (1). Xét hàm số $f\left(t\right)=10^t+t$ trên $\mathbb{R}.$

Ta có $f'\left(t\right)=10^t.\ln 10+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}.$ Do đó $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}.$

Khi đó $(1)\Leftrightarrow f\left[\log\left(x^2-2x+2\right)\right]=f\left(y^2\right)\Leftrightarrow\log\left(x^2-2x+2\right)=y^2$

$\Leftrightarrow x^2-2x+2=10^{y^2}\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2+1=10^{y^2}.$

Vì $1\le x\le 10^6$ nên $1\le\left(x-1\right)^2+1=10^{y^2}\le\left(10^6-1\right)^2+1\Rightarrow 0\le y^2\le\log\left[\left(10^6-1\right)^2+1\right].$

Vì $y\in\mathbb{Z}^+$ nên $y\in\left\{1;2;3\right\}.$

Với $y=1\Rightarrow x^2-2x+2=10\Leftrightarrow x^2-2x-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\ (\text{ktm})\\x=4\ (\text{tm})\end{array}\right.$.

Với $y=2\Rightarrow x^2-2x+2=10^4\Leftrightarrow x^2-2x-9998=0$ (không có x nguyên nào thỏa mãn).

Với $y=3\Rightarrow x^2-2x+2=10^9\Rightarrow x^2-2x-999999998=0$ (không có x nguyên nào thỏa mãn).

Vậy có một cặp nguyên dương $\left(x;y\right)=\left(4;1\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3. **Chọn A**

Ta có $\log_2(2x-4)+2x-4=y+1+2^{y+1}$.

Đặt $\log_2(2x-4)=t\Rightarrow 2x-4=2^t$ khi đó ta có $t+2^t=(y+1)+2^{y+1}\ (1)$.

Hàm $y=f(t)=t+2^t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên

$(1)\Leftrightarrow t=y+1\Rightarrow y=\log_2(2x-4)-1\Leftrightarrow y=\log_2(x-2)$.

Hàm số $y=\log_2(x-2)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Suy ra với $3\le x\le 2020\Rightarrow 0\le y\le \log_2 2018\Rightarrow$ có 11 số nguyên y thoả mãn hay 11 điểm M.

Do các điểm này nằm trên đường cong $y=\log_2(x-2)$ nên không có 3 điểm nào thẳng hàng.

Vậy số tam giác nhận 3 trong 11 điểm này làm đỉnh là $C_{11}^3=165$.

Câu 4. **Chọn C**

Ta có: $2^{x+5}+3x+12=2^{y+1}+3y\Leftrightarrow 2^{x+5}+3(x+5)=2^{y+1}+3(y+1)$.

Xét hàm số $f(t)=2^t+3t$, $f(t)=2^t+3t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $x+5=y+1\Leftrightarrow y=x+4$.

Kết hợp với điều kiện $-20\le x\le 20;-20\le y\le 20$ suy ra x nguyên thuộc $[-20;16]$ thỏa đề.

Vậy có 37 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa đề.

Câu 5. **Chọn B**

Ta có: $\log_2(2x)+5x=10.2^y+y+2\Leftrightarrow \log_2 x+5x+1=\log_2 2^{y+1}+5.2^{y+1}+1$.

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+5t+1$, $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Suy ra $x=2^{y+1}$.

Từ $1\le x\le 2020$ suy ra $1\le 2^{y+1}\le 2020\Leftrightarrow \frac{1}{2}\le 2^y\le 1010\Leftrightarrow -1\le y\le \log_2 1010\approx 9{,}98$.

Có 11 giá trị nguyên của y thỏa đề. Vậy có 11 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa đề.

Câu 6. **Chọn D**

Với $1<x\le 100$, ta có:

$$\log\frac{10y^2-20y}{x-1}=x-y^2+2y\Leftrightarrow \log(x-1)+x-1=\log(y^2-2y)+y^2-2y\ \ (1)$$

Xét hàm số $f(u)=\log u+u$, ta có $f'(u)=\frac{1}{u\ln 10}+1>0$, $\forall u>0$

$\Rightarrow$ $f(u)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên $(1)\Leftrightarrow x-1=y^2-2y\Leftrightarrow x=(y-1)^2$.

$$1<x\le 100\Rightarrow 1<(y-1)^2\le 100\Leftrightarrow 1<|y-1|\le 10\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-9\le y<0\\2<y\le 11\end{array}\right.$$

Vì $y\in\mathbb{Z}$ nên có 18 giá trị của y và cũng có 18 giá trị của x.

Câu 7. **Chọn D**

Với $2\le y\le 17$ ta có

$$\log_2^3(y-1)-x^3+\log_2(y-1)^3=3x\Leftrightarrow \log_2^3(y-1)+3\log_2(y-1)=x^3+3x\ \ (1).$$

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t$ có $f'(t)=3t^2+3>0\forall t\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)=t^3+3t$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $(1)\Leftrightarrow \log_2(y-1)=x \Leftrightarrow y=x^2+1$.

Do $2\le y\le 17\Rightarrow 2\le x^2+1\le 17 \Leftrightarrow 1\le x^2\le 16$.

Vì x nhận các giá trị nguyên nên có 8 giá trị cần tìm là $S=\{\pm1;\pm2;\pm3;\pm4\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên của x cần tìm.

Câu 8. **Chọn D**

Ta có: $x^2+xy+\log_2(x+y-1)^{x+1}=x(2^a+a)-y+2^a+a+1\,(1)$

$\Leftrightarrow (x+1)(x+y-1)+(x+1)\log_2(x+y-1)=(x+1)(2^a+a)$

$\Leftrightarrow 2^{\log_2(x+y-1)}+\log_2(x+y-1)=2^a+a$ (do $x+1\ge 2,\forall x\ge 1$) $(*)$.

Xét hàm số $f(t)=2^t+t\,(t\ge 0)$.

Vì $f'(t)=2^t.\ln 2+1>0,\forall t\ge 0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

$(*)\Leftrightarrow \log_2(x+y-1)=a\Leftrightarrow x+y-1=2^a\Leftrightarrow x=2^a-y+1$.

Mà $1\le x\le 2048$ nên suy ra: $1\le 2^a-y+1\le 2048\Leftrightarrow 2^a-2047\le y\le 2^a$.

Do $y\ge 1$, mỗi giá trị của y có một giá trị của x và $[2^a-2047;2^a]$ có 2048 số nguyên nên để có 2048 cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn (1) thì $2^a-2047\ge 1\Leftrightarrow a\ge 11$.

Mà $a\le 100, a\in\mathbb{N}$ nên $a\in\{11;12;...;100\}$.

Vậy có 90 giá trị của a thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9. **Chọn D**

Điều kiện $\begin{cases}1\le y\le 2018\\ \dfrac{3^{x+1}-1}{y+1}>0\end{cases}\Rightarrow x>-1$.

Ta có $\log_5\left(\dfrac{3^{x+1}-1}{y+1}\right)=y+2-3^{x+1}\Leftrightarrow \log_5(3^{x+1}-1)-\log_5(y+1)=y+1+1-3^{x+1}$

$\Leftrightarrow \log_5(3^{x+1}-1)+(3^{x+1}-1)=\log_5(y+1)+(y+1)$ (1).

Xét hàm số $f(t)=\log_5 t+t$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 5}+1>0$ với mọi $t\in(0;+\infty)$ nên hàm số $f(t)=\log_5 t+t$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Từ (1) ta có $f(3^{x+1}-1)=f(y+1)\Leftrightarrow 3^{x+1}-1=y+1\Leftrightarrow y=3^{x+1}-2$.

Vì $1\le y\le 2018\Leftrightarrow 1\le 3^{x+1}-2\le 2018\Leftrightarrow 3\le 3^{x+1}\le 2020\Leftrightarrow 1\le x+1\le \log_3 2020$

$\Leftrightarrow 0\le x\le \log_3 2020-1$.

Vì x nguyên nên $x\in\{0;1;2;3;4;5\}$. Vậy có 6 cặp $(x;y)$ thỏa bài toán.

Câu 10. **Chọn D**

Có $(*)\Leftrightarrow y+2^a+1+\log_2(y+2^a+1)=2^x+\log_2(2^x)$.

Xét hàm số $f(x)=x+\log_2 x$ có $f'(x)=1+\dfrac{1}{x\ln 2}>0,\forall x>0$.

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Khi đó $f(2^a+y+1)=f(2^x)\Leftrightarrow 2^a+y+1=2^x$.

Ta lại có $1\le x\le 8\Rightarrow 1\le 2^a+y+1\le 256\Rightarrow -2^a\le y\le 255-2^a$.

Với mỗi giá trị nguyên $y\ge 1$ ta có duy nhất một giá trị nguyên x.

Do đó ycbt $\Leftrightarrow -2^a\le y\le 255-2^a$ không chứa giá trị nguyên $y\ge 1$.

Hay $255-2^a<1\Leftrightarrow a\ge 8$. Vậy có 93 giá trị nguyên của $a\in[0;100]$ thỏa ycbt.

Câu 11. Chọn C

Điều kiện: $x+2y>0$. Do: $2x+y>0$ nên ta có:

$$\log_2(x+2y)+2x^2+2y^2+5xy-2x-y=0$$
$$\Leftrightarrow \log_2\frac{(2x+y)(x+2y)}{2x+y}+2x^2+2y^2+5xy-2x-y=0$$
$$\Leftrightarrow \log_2(2x^2+2y^2+5xy)-\log_2(2x+y)+2x^2+2y^2+5xy-2x-y=0$$
$$\Leftrightarrow \log_2(2x^2+2y^2+5xy)+2x^2+2y^2+5xy=\log_2(2x+y)+2x+y \qquad (1)$$

Xét hàm số: $f(t)=\log_2 t+t$, ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0,\forall t\in(0;+\infty)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Do đó: $(1)\Leftrightarrow f(2x^2+2y^2+5xy)=f(2x+y)\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+5xy=2x+y$

$\Leftrightarrow (2x+y)(x+2y-1)=0\Leftrightarrow x=1-2y$ vì $2x+y>0$ nên $y<\dfrac{2}{3}$, (2).

Do $-20\le x\le 20$ suy ra $\dfrac{-19}{2}\le y\le\dfrac{21}{2}$, (3).

Từ $(2),(3)$ và $y\in\mathbb{Z}$ nên $y\in\{-9;-8;...;0\}$. Vậy có 10 cặp số nguyên $(x;y)$.

Câu 12. Chọn C

Ta có: $\log_3\left(\dfrac{4^x+1}{y}\right)=y^2-2y+1-16^x\Leftrightarrow \log_3(4^x+1)-\log_3 y=(y-1)^2-16^x$

$\Leftrightarrow \log_3(4^x+1)+(4^x)^2=\log_3 y+(y-1)^2$ $(*)$. Đặt $t=4^x+1\Leftrightarrow 4^x=t-1$ $(t>1)$.

$(*)\Leftrightarrow \log_3 t+(t-1)^2=\log_3 y+(y-1)^2$ $(**)$

Đặt: $f(u)=\log_3 u+(u-1)^2$ $(u>1)$. Ta có: $f'(u)=\dfrac{1}{u.\ln 3}+2.(u-1)>0$ khi $u>1$.

Suy ra hàm số $y=f(u)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Khi đó: $(**)\Leftrightarrow t=y\Leftrightarrow 4^x+1=y$.

Vì $1<y<2020$, nên ta có $1<4^x+1<2020\Leftrightarrow 0<4^x<2019\Leftrightarrow x<\log_4 2019\approx 5,49$

Vì $x\in Z^+\Rightarrow x=\{1;2;3;4;5\}\Rightarrow\begin{cases}x_{\min}=1\\x_{\max}=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_{\min}=5\\y_{\max}=1025\end{cases}$.

Vậy $T=y_{\min}+y_{\max}=5+1025=1030$.

Câu 13. Chọn B

Với điều kiện $y>0$, ta có $4^x+2x=y+\log_2 y \Leftrightarrow 2^{2x}+2x=2^{\log_2 y}+\log_2 y$ (*).

Xét hàm số $f(t)=2^t+t,\ t\in\mathbb{R}$.

Ta thấy $f'(t)=2^t\ln 2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow f(t)=2^t+t$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó (*) $\Leftrightarrow f(2x)=f(\log_2 y)\Leftrightarrow 2x=\log_2 y\Leftrightarrow y=4^x$.

Vì $1\le y\le 1024$ nên $1\le 4^x\le 1024\Leftrightarrow 0\le x\le 5$.

Vậy có 6 cặp số nguyên thỏa mãn là $(0;1)$, $(1;4)$, $(2;16)$, $(3;64)$, $(4;256)$, $(5;1024)$.

Câu 14. Chọn D

$\log_3\left(\frac{2a+5}{a+b}\right)=a+3b-4\Leftrightarrow\log_3\left(\frac{2a+5}{3a+3b}\right)=(3a+3b)-(2a+5)$

$\Leftrightarrow\log_3(2a+5)+(2a+5)=\log_3(3a+3b)+(3a+3b)$ (1)

Xét hàm số $f(x)=\log_3 x+x$ có $f'(x)=\frac{1}{x\ln 3}+1>0,\forall x>0$ nên hàm số $f(x)=\log_3 x+x$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Do đó

(1) $\Leftrightarrow f(2a+5)=f(3a+3b)\Leftrightarrow 2a+5=3a+3b\Leftrightarrow a=5-3b$ thay vào T, ta được:

$T=a^2+3b^2=(5-3b)^2+3b^2=12b^2-30b+25\ge\frac{25}{4}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức T là $\frac{25}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b=\frac{5}{4}$ và $a=\frac{5}{4}$.

Câu 15. Chọn B

Ta có: $\log_2(x-2)+2x=y+4(2^{y-1}+1)$

$\Leftrightarrow\log_2(x-2)+2x-4=y+2^{y+1}\Leftrightarrow\log_2(2x-4)+2x-4=y+1+2^{y+1}(*)$.

Đặt $\log_2(2x-4)=t\Rightarrow 2x-4=2^t$, khi đó ta có $(*)\Leftrightarrow t+2^t=(y+1)+2^{y+1}(1)$.

Hàm $y=f(t)=t+2^t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $(1)\Leftrightarrow t=y+1\Rightarrow y=\log_2(2x-4)-1$.

Với $3\le x\le 2020\Rightarrow 1\le t\le\log_2 4036\Rightarrow 1\le 1+y\le\log_2 4036$ mà $y\in\mathbb{Z}\Rightarrow y\in\{0;1;...;10\}$ vậy có 11 số nguyên y hay 11 điểm M.

Do các điểm này nằm trên đường cong $y=\log_2(2x-4)-1$ nên không có 3 điểm nào thẳng hàng.

Vậy số tam giác nhận 3 trong 11 điểm này làm đỉnh là $C_{11}^3=165$.

Câu 16. Chọn B

Đặt $t=\log_5(25x+25)(2\le t\le 2+\log_5 2021)\Leftrightarrow 25x+25=5^t\Leftrightarrow x=5^{t-2}-2$.

Theo bài ra: $\log_5(25x+25)+x=2y+5^y\Leftrightarrow(t-2)+5^{t-2}=2y+5^{2y}$ (*)

Hàm $f(u)=u+5^u$ đồng biến nên $(*)\Leftrightarrow t-2=2y\Leftrightarrow t=2y+2$.

Mà $2\le t\le 2+\log_5 2021\Rightarrow 2\le 2y+2\le 2+\log_5 2021\Leftrightarrow 0\le y\le\frac{1}{2}\log_5 2021$

Mặt khác $y\in Z\Rightarrow y\in\{0;1;2\}$. Vậy có 3 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa đề bài.

Câu 17. Chọn B

Điều kiện: $x\ge 1$. Vì $x\ge 1$ và y dương nên ta có:

$\sqrt{\log_2 x}+x=y+2^{y^2}\Leftrightarrow\sqrt{\log_2 x}+2^{\log_2 x}=y+2^{y^2}\Leftrightarrow\sqrt{\log_2 x}+2^{\log_2 x}=\sqrt{y^2}+2^{y^2}(*)$.

Xét hàm số: $f(t)=\sqrt{t}+2^t, t\ge 0$.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}+2^t\ln 2>0, \forall t>0$. Nên $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó: $(*)\Leftrightarrow f(\log_2 x)=f(y^2)\Leftrightarrow \log_2 x=y^2$.

Vì $1\le x<2020$ nên $0\le \log_2 x<\log_2 2020\Leftrightarrow 0\le y^2<\log_2 2020$. Suy ra: $0\le y<\sqrt{\log_2 2020}$

Vậy có 3 giá trị nguyên dương của y thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\{1;2;3\}$.

Câu 18. Chọn C

Điều kiện: $x\ne 3; y>0$. Ta có: $\log_2(x^2-6x+9)-\log_2 y+x^2+8=6x+2y$

$\Leftrightarrow \log_2(x^2-6x+9)+x^2-6x+9=\log_2(2y)+2y \quad (*)$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0$, $\forall t>0$ nên là hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Nên PT $(*)\Leftrightarrow f(u)=f(v)$ với $u=x^2-6x+9; v=2y\Leftrightarrow u=v\Leftrightarrow x^2-6x+9=2y$.

Khi đó $y<8\Rightarrow x^2-6x+9<16\Leftrightarrow x^2-6x-7<0\Leftrightarrow -1<x<7$

Với $x\in\mathbb{Z}, x\ne 3\Rightarrow x\in\{0;1;2;4;5;6\}$

Với $x=0\Rightarrow y=\dfrac{9}{2}$ (Không tm) Với $x=1\Rightarrow y=2$ (Thỏa mãn)

Với $x=2\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}$ (Không tm) Với $x=4\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}$ (Không tm)

Với $x=5\Rightarrow y=2$ (Thỏa mãn) Với $x=6\Rightarrow y=\dfrac{9}{2}$ (Không tm)

Vậy có 2 cặp $(x;y)$ thỏa mãn x,y là những số nguyên và $y<8$.

Câu 19. Chọn B

Ta có: $\dfrac{19^{-x-3}}{x^2+2x+2021}=\dfrac{361^{y-2}}{4y^2-12y+2026}\Leftrightarrow \dfrac{19^{-x-3}}{(x+2)^2+2017}=\dfrac{19^{2y-4}}{(3-2y)^2+2017}$.

$\Leftrightarrow \dfrac{19^{3-2y}}{(x+2)^2+2017}=\dfrac{19^{x+2}}{(3-2y)^2+2017}\Leftrightarrow 19^{x+2}.\left[(x+2)^2+2017\right]=19^{3-2y}.\left[(3-2y)^2+2017\right]$

Xét hàm số: $f(t)=19^t.(t^2+2017)$ với $t\ge 0$ có $f'(t)=2t.19^t+19^t.\ln 19.(t^2+2017)>0;\ \forall t\ge 0$

Suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến trên $[0;+\infty)$

Mặt khác $f(x+2)=f(3-2y)\Rightarrow x+2=3-2y\Leftrightarrow x=1-2y$.

Ta có $20\le x\le 2020\Rightarrow 20\le -2y+1\le 2020\Leftrightarrow \dfrac{-2019}{2}\le y\le \dfrac{-19}{2}$.

Do $y\in\mathbb{Z}$ nên $y\in\{-1009;-1008;...;-10\}$, với mỗi giá trị y cho ta 1 giá trị x thoả đề.

Vậy có 1000 cặp số nguyên $(x;y)$ thoả yêu cầu bài toán.

Câu 20. Chọn D

Xét phương trình: $e^{\ln^2 y-x^2-2x-1}=\dfrac{x^2+2x+2}{\ln^2 y+1}$ (1) ta có:

$(1)\Leftrightarrow e^{\ln^2 y-x^2-2x-1}=\dfrac{x^2+2x+2}{\ln^2 y+1}\Leftrightarrow \dfrac{e^{\ln^2 y}}{e^{(x+1)^2}}=\dfrac{(x+1)^2+1}{\ln^2 y+1}\Leftrightarrow e^{\ln^2 y}(\ln^2 y+1)=\left((x+1)^2+1\right)e^{(x+1)^2}(2).$

Xét hàm số: $f(t)=e^t(t+1), t\in[0;+\infty)$, ta có: $f'(t)=e^t(t+1)+e^t=e^t(t+2)>0,\forall t\in[0;+\infty)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Do đó từ (2) ta có: $f\left(\ln^2 y\right)=f\left((x+1)^2\right)\Leftrightarrow \ln^2 y=(x+1)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\ln y=x+1\\ \ln y=-x-1.\end{array}\right.$

Khi $\ln y=x+1\Leftrightarrow y=e^{x+1}$. Do $1\le y\le e^7$ nên $1\le e^{x+1}\le e^7\Leftrightarrow 0\le x+1\le 7\Leftrightarrow -1\le x\le 6$.

Hơn nữa $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{-1;0;1;2;3;4;5;6\}$ (*).

Khi $\ln y=-x-1\Leftrightarrow y=e^{-x-1}$. Do $1\le y\le e^7$ nên $1\le e^{-x-1}\le e^7\Leftrightarrow 0\le -x-1\le 7\Leftrightarrow -8\le x\le -1$.

Hơn nữa $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1\}$ (**).

Ứng với mỗi giá trị x cho ta một giá trị y thoả đề.

Vậy từ (*) và (**) có 15 cặp số $(x;y), x\in\mathbb{Z}$ thoả mãn.

Câu 21. Chọn A

Điều kiện: $x>2$.

Ta có $\log_2(x-2)+2x=y+4\left(2^{y-1}+1\right)\Leftrightarrow \log_2(2x-4)+2x-4=y+1+2^{y+1}(*)$.

Xét hàm số $f(t)=t+2^t$ xác định trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(t)=1+2^t\ln 2>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $(*)\Leftrightarrow f\left(\log_2(2x-4)\right)=f(y+1)\Leftrightarrow \log_2(2x-4)=y+1\Leftrightarrow x=\dfrac{2^{y+1}+4}{2}\Leftrightarrow x=2^y+2$.

Vì $3\le x\le 2020\Leftrightarrow 3\le 2^y+2\le 2020\Leftrightarrow 0\le y\le \log_2 2018$.

Do y nguyên nên $y\in\{0;1;...;10\}\Rightarrow (x;y)\in\left\{\left(2^i+2;i\right)\mid 0\le i\le 10\right\}$

Vậy có 11 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn.

Câu 22. Chọn C

Từ giả thiết suy ra $3<x\le 10$. Đẳng thức $2x+\log_2(x-3)=5+y+2^y$

$\Leftrightarrow (2x-6)+1+\log_2(x-3)=y+2^y\Leftrightarrow (2x-6)+\log_2(2x-6)=y+2^y\quad(1)$

Xét hàm số $f(t)=t+2^t$ có đạo hàm $f'(t)=1+2^t.\ln 2>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó $(1)\Leftrightarrow f\left(\log_2(2x-6)\right)=f(y)\Leftrightarrow y=\log_2(2x-6)\Leftrightarrow 2x-6=2^y\Leftrightarrow x=2^{y-1}+3$.

Theo giả thiết $x\le 10\Rightarrow 2^{y-1}+3\le 10\Rightarrow y\le 1+\log_2 7\approx 3{,}8$.

Do y nguyên dương nên ta có $y\le 3$.

Khi đó $T=x+y=2^{y-1}+3+y\le 2^{3-1}+3+3=10$. Vậy $\max T=10$ khi $y=3, x=7$.

BÀI TOÁN LÃI KÉP

LÝ THUYẾT

1. Bài toán theo hình thức lãi kép, gửi a đồng, lãi suất r một kì theo hình thức lãi kép. Tính số tiền thu về sau n kì

- Công thức tính nhanh: $A_n = a(1+r)^n$

2. Bài toán theo hình thức lãi kép, đầu mỗi kì gửi a đồng, lãi suất r một kì. Tính số tiền thu được sau n kì (gồm cả gốc và lãi)

- Công thức tính nhanh $A_n = a(1+r)\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$

3. Bài toán theo hình thức lãi kép, vay A đồng, lãi suất r, trả nợ đều đặn mỗi kì số tiền m đồng. Hỏi sau bao nhiêu kì thì trả hết số nợ gồm cả gốc và lãi

- Công thức tính nhanh $m = \dfrac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$

4. Bài toán theo hình thức lãi kép, gửi a đồng vào tài khoản tiết kiệm, lãi suất r /kì. Sau đúng một kì rút ra m đồng và các kì sau cũng vậy. Hỏi số tiền còn lại trong tài khoản sau n?

- Công thức tính nhanh $A_n = a(1+r)^n - m\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$

❖ **Lưu ý:** Trên đây là một số công thức tổng quát. Trong quá trình giải toán, các em cần biến đổi linh hoạt các đại lượng mà bài toán yêu cầu dựa trên công thức giải nhanh. Đồng thời kết hợp nhuần nhuyễn các bài toán trong trường hợp đề bài phức tạp.

❖ Việc chứng minh các công thức trên được tác giả trình bày thông qua bài tập rèn luyện. Ở mỗi bài giải chi tiết, tác giả sẽ làm theo cách tự luận để suy ra vấn đề, việc đưa ra công thức giải nhanh chỉ nhằm mục đích cho người đọc tham khảo, người đọc nên làm và hiểu theo cách tự luận sẽ thấy được cái hay của bài toán về lãi kép.

BÀI TOÁN LÃI KÉP

Câu 1: Ông A gửi vào ngân hàng số tiền 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép với lãi suất 6%/năm. Hỏi sau 5 năm tổng tất cả số tiền ông A thu về là bao nhiêu? Giả sử lãi suất không thay đổi và kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân.

A. $148,58$ (triệu đồng). **B.** $133,82$ (triệu đồng).

C. $126,25$ (triệu đồng). **D.** $141,85$ (triệu đồng).

Câu 2: Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền lớn hơn 100 triệu đồng bao gồm gốc và lãi? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

A. 14 năm. **B.** 12 năm. **C.** 11 năm. **D.** 13 năm.

Câu 3: Đầu năm 2016 ông A thành lập một công ty. Tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong năm 2016 là 1 tỷ đồng. Biết rằng sau mỗi năm thì tổng số tiền dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm đó tăng thêm 15% so với năm trước đó. Hỏi năm nào dưới đây là năm đầu tiên mà tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm lớn hơn 2 tỷ đồng?

A. Năm 2023. **B.** Năm 2020. **C.** Năm 2021. **D.** Năm 2022.

Câu 4: Một người gửi vào ngân hàng 50 triệu đồng với lãi suất 4% /tháng, sau mỗi tháng tiền lãi được nhập vào vốn. Hỏi sau một năm người đó rút tiền thì tổng số tiền người đó nhận được là bao nhiêu?

A. $50.(1,004)^{12}$ (triệu đồng). **B.** $50.\ 1+12\times 0,04\ ^{12}$ (triệu đồng).

C. $50.\ 1+0,04\ ^{12}$ (triệu đồng). **D.** $50\times 1,004$ (triệu đồng).

Câu 5: Một người gửi số tiền m triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6%/ năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng, thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Sau 5 năm số tiền người này nhận được là 500 triệu đồng. Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra. Tính số tiền m.

.

A. $m=\dfrac{500}{1,06^{5}}$ (triệu đồng). **B.** $m=\dfrac{500}{1,06}$ (triệu đồng).

C. $m=\dfrac{500}{1,006^{5}}$ (triệu đồng). **D.** $m=\dfrac{500}{1+5\times 0,06}$ (triệu đồng).

Câu 6: Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7%/ năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng, thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau 5 năm người đó mới rút lãi thì số tiền lãi người đó nhận được là? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

A. $20,128$ triệu đồng. **B.** $70,128$ triệu đồng.

C. $17,5$ triệu đồng. **D.** $67,5$ triệu đồng.

Câu 7: Đầu năm 2016, ông A thành lập một công ty. Tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong năm 2016 là 1 tỷ đồng. Biết rằng cứ sau mỗi năm thì tổng số tiền dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm đó tăng thêm 15% so với năm trước. Hỏi tổng số tiền ông A trả lương cho nhân viên trong cả năm 2020 là bao nhiêu? Kết quả làm tròn 2 chữ số thập phân.

A. 2,01 tỷ đồng. **B.** 1,52 tỷ đồng. **C.** 2,31 tỷ đồng. **D.** 1,75 tỷ đồng.

Câu 8: Đầu năm 2017, ông A thành lập một công ty. Tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong năm 2017 là 1 tỷ đồng. Biết rằng cứ sau mỗi năm thì tổng số tiền dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm đó tăng thêm 20% so với năm trước. Hỏi năm nào dưới đây là năm đầu tiên tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm lớn hơn 5 tỷ đồng?

A. Năm 2025. **B.** Năm 2026. **C.** Năm 2027. **D.** Năm 2024.

Câu 9: Một người đi làm với mức lương khởi điểm 7 triệu đồng một tháng. Cứ sau 3 năm mức lương tăng thêm 7% so với năm trước. Hỏi sau đúng 36 năm, mức lương một tháng của người này là bao nhiêu? Kết quả làm tròn 2 chữ số thập phân.

A. 15,77 triệu đồng. **B.** 14,73 triệu đồng. **C.** 21,97 triệu đồng. **D.** 16,87 triệu đồng.

Câu 10: Một người đi làm với mức lương khởi điểm là 7 triệu đồng một tháng. Cứ sau 3 năm mức lương được tăng thêm 7% so với năm trước. Hỏi sau đúng 36 năm, tổng số tiền lương người này nhận được là bao nhiêu? Làm tròn đến hai chữ số thập phân.

A. 3024 triệu đồng. **B.** 3235,68 triệu đồng.
C. 4507,89 triệu đồng. **D.** 3977,47 triệu đồng.

Câu 11: Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 6,1%/năm. Biết rằng nếu **không** rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền ban đầu và lãi) ít nhất gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất **không** thay đổi và người đó **không** rút tiền ra?

A. 12 năm. **B.** 11 năm **C.** 10 năm. **D.** 13 năm.

Câu 12: Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 6,6%/năm. Biết rằng nếu **không** rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền ban đầu và lãi) ít nhất gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất **không** thay đổi và người đó **không** rút tiền ra?

A. 12 năm. **B.** 11 năm **C.** 10 năm. **D.** 13 năm.

Câu 13: Tổng số tiền ông A dùng để trả tiền thuê mặt bằng công ty năm 2016 là 300 triệu đồng. Biết rằng cứ sau mỗi năm thì tổng số tiền dùng trả tiền thuê mặt bằng công ty trong cả năm đó tăng 10% so với năm trước. Tổng số tiền ông A dùng để trả tiền thuê mặt bằng công ty trong năm 2018 là

A. 330 triệu đồng. **B.** 363 triệu đồng. **C.** 399,3 triệu đồng. **D.** 360 triệu đồng.

Câu 14: Ở địa phương X, người ta tính toán thấy rằng: nếu diện tích khai thác rừng hàng năm không đổi như hiện nay thì sau 50 năm nữa diện tích rừng sẽ hết, nhưng trên thực tế thì diện tích khai thác rừng tăng trung bình hàng năm là 6%/năm. Hỏi sau bao nhiêu năm nữa diện tích rừng sẽ bị khai thác hết? Giả thiết trong quá trình khai thác, rừng không được trồng thêm, diện tích rừng tự sinh ra và mất đi (do không khai thác) là không đáng kể.

A. 23. **B.** 24. **C.** 22. **D.** 21.

Câu 15: Theo một bài báo được công bố trên tạp chí Nature, trung bình làm cha ở 30 tuổi sẽ có 55 đột biến cho con cái của mình. Đột biến này tăng theo độ tuổi. Cứ tăng 1 tuổi, số lượng đột biến sẽ tăng thêm 12% so với số lượng đột biến ở trước đó. Hỏi sau đúng 50 năm, tức ở độ tuổi 80 lượng đột biến là bao nhiêu?

A. 17802. **B.** 15895. **C.** 14450. **D.** 16184.

Câu 16: Một người đi làm với mức lương khởi điểm 10 triệu đồng một tháng. Cứ sau 3 tháng lương của anh ta lại tăng thêm 12% so với tháng trước đó. Hỏi sau đúng 36 tháng làm việc, người này lĩnh được tất cả bao nhiêu tiền lương? Làm tròn đến triệu đồng.

A. 723 triệu đồng. **B.** 724 triệu đồng.

C. 725 triệu đồng. **D.** 726 triệu đồng.

Câu 17: Một người đi làm với mức lương khởi điểm m triệu đồng một tháng. Cứ sau 6 tháng lương của anh ta lại tăng thêm 10%. Hỏi sau đúng 36 tháng tổng lương người này lĩnh được là 500 triệu đồng. Tính số tiền m.

A. $m=\dfrac{25}{3\left[(1,1)^6-1\right]}$ (triệu đồng). **B.** $m=\dfrac{25}{3\left[(1,1)^7-1\right]}$ (triệu đồng).

C. $m=\dfrac{25}{3\left[(1,1)^5-1\right]}$ (triệu đồng). **D.** $m=\dfrac{50}{(1,1)^6-1}$ (triệu đồng).

Câu 18: Một sinh viên A trong thời gian 4 năm học đại họcđã vay ngân hàng mỗi năm 10 triệu đồngvới lãi suất 3% năm (thủ tục vay một năm một lần vào thời gian đầu năm học). khi ra trường A thất nghiệp nên chưa trả được tiền cho ngân hàng do vậy phải chịu lãi suất 8% / năm cho tổng số tiền vay gồm gốc và lãi của 4 năm học. sau một năm thất nghiệp, sinh viên A cũng tìm được việc làm và bắt đầu trả nợ dần. Tổng số tiền mà sinh viên A nợ ngân hàng sau 4 năm học đại học và một năm thất nghiệp gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 43.091.358 đồng. **B.** 48.621.980 đồng. **C.** 46.538.667 đồng. **D.** 45.188.656 đồng.

Câu 19: Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 7,5%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) ít nhất gấp ba lần số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

A. 15 năm. **B.** 14 năm. **C.** 17 năm. **D.** 16 năm.

Câu 20: Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 7,5%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) ít nhất gấp sáu lần số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

A. 23 năm. **B.** 25 năm. **C.** 26 năm. **D.** 24 năm.

Câu 21: Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 6,1%/năm. Biết rằng nếu **không** rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp

theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được số tiền lãi ít nhất bằng số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất **không** thay đổi và người đó **không** rút tiền ra?

A. 12 năm. **B.** 11 năm. **C.** 10 năm. **D.** 13 năm.

Câu 22: Theo hình thức lãi kép, đầu mỗi tháng một người gửi đều đặn vào ngân hàng cùng một số tiền 10 triệu đồng, lãi suất theo kì hạn 1 tháng là $0,5\%$ thì sau 2 năm số tiền người này thu về (cả gốc và lãi) là?

A. $255,591$ (triệu đồng). **B.** $254,320$ (triệu đồng).

C. $254,591$ (triệu đồng). **D.** $255,320$ (triệu đồng).

Câu 23: Theo hình thức lãi kép, đầu mỗi tháng một người gửi đều đặn vào ngân hàng cùng một số tiền m (triệu đồng), lãi suất theo kì hạn 1 tháng là $0,5\%$ thì sau 2 năm số tiền người này thu về (cả gốc và lãi) là 100 (triệu đồng). Tính số tiền m.

A. $m=\dfrac{100}{201\left[(1,005)^{24}-1\right]}$ (triệu đồng). **B.** $m=\dfrac{100}{201\left[(1,005)^{25}-1\right]}$ (triệu đồng).

C. $m=\dfrac{1}{2\left[(1,005)^{24}-1\right]}$ (triệu đồng). **D.** $m=\dfrac{1}{2\left[(1,005)^{25}-1\right]}$ (triệu đồng).

Câu 24: Theo hình thức lãi kép, đầu mỗi tháng một người gửi đều đặn vào ngân hàng cùng một số tiền 10 (triệu đồng), lãi suất theo kì hạn 1 tháng là 1%. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng thì số tiền người này thu về (cả gốc và lãi) ít nhất là 200 triệu đồng?

A. 11 tháng. **B.** 12 tháng. **C.** 18 tháng. **D.** 19 tháng.

Câu 25: Liên tục trong 20 năm,một người lao động luôn gửi vào một ngân hàng đúng 5.000.000 đồng vào một ngày cố định của tháng với lãi suất khôngđổi 0,65%/ tháng (nếu không rút tiền ra,lãi được nhập vào vốn để tính lãi cho kì tiếp theo).Hỏi sau 20 năm người đó có được số tiền (cả gốc và lãi) gần nhất số tiền nào dưới đây?

A. 2.850.000.000 đồng **B.** 2.900.000.000 đồng

C. 2.950.000.000 đồng. **D.** 3.000.000.000 đồng.

Câu 26: Trong thời gian liên tục 25 năm, một người lao động luôn gửi đúng 4.000.000 đồng vào một ngày cố định của tháng ở ngân hàng A với lãi suất không thay đổi trong suốt thời gian gửi tiền là 0,6%/ tháng. Gọi A đồng là số tiền người đó có được (cả gốc và lãi) sau 25 năm. Hỏi mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $3.350.000.000<A<3.400.000.000$. **B.** $3.400.000.000<A<3.450.000.000$.

C. $3.450.000.000<A<3.500.000.000$. **D.** $3.500.000.000<A<3.550.000.000$.

Câu 27: Một người gửi bảo hiểm cho con từ lúc con tròn 6 tuổi, hằng tháng anh ta đều đặn gửi vào tài khoản bảo hiểm của con triệu đồng với lãi suất 0,5% một tháng. Trong quá trình đó, người ta không rút tiền ra và giả sử lãi suất không thay đổi. Nếu muốn số tiền (cả gốc và lãi) rút ra lớn hơn 100 triệu đồng cũng là lúc con tròn 18 tuổi thì hằng tháng phải gửi vào tài khoản bảo hiểm tối thiểu khoảng bao nhiêu tiền? Làm tròn đến nghìn đồng.

A. 474 nghìn đồng. **B.** 437 nghìn đồng. **C.** 480 nghìn đồng. **D.** 440 nghìn đồng.

Câu 28: Liên tục trong 25 năm,một người lao động luôn gửi vào một ngân hàng đúng 4.000.000 đồng vào một ngày cố định của tháng với lãi suất khôngđổi 0,6%/ tháng. Hỏi sau 25 năm người đó có được số tiền (cả gốc và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A. 3.350.000.000 đồng. **B.** 3.400.000.000 đồng.
C. 3.450.000.000 đồng. **D.** 3.500.000.000 đồng.

Câu 29: Một người tham gia chương trinh bảo hiểm An sinh xã hội cúa công ty bảo hiểm *A* với thể lệ như sau: Cứ đến tháng 9 hàng năm người đó đóng vào công ty 12 triệu đồng với lãi suất hàng năm không đổi 6%/năm. Hỏi sau đúng 18 năm kế từ ngày đóng lần đầu, người đó thu về tổng tất cả bao nhiêu tiền (cả gốc và lãi)? Kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân.

A. 429,43triệu đồng. **B.** 293,32 triệu đồng. **C.** 412,23triệu đồng. **D.** 393,12 triệu đồng.

Câu 30: Tổng số tiền công ty A phải trả cho thuê mặt bằng trong giai đoạn 10 năm hoạt động đầu tiên là 5 tỷ đồng. Biết rằng trong giai đoạn này, số tiền phải trá thuê mặt bằng năm sau luôn tăng thêm 10% so với tiền thuê mặt bằng cúa năm trước đó. Vậy số tiền công ty A phải trả cho thuê mặt bàng trong năm đầu tiên **gần nhất với** số tiền nào dưới đây?

A. 269,816 triệu đồng. **B.** 311,720 triệu đồng. **C.** 313,727 triệu đồng. **D.** 270,106 triệu đồng.

Câu 31: Với mức tiêu thụ thức ăn của trang trại A **không** đổi như dự định thì lượng thức ăn dự trữ đủ cho 100 ngày. Nhưng thực tế, kể từ ngày thứ hai trở đi lượng tiêu thụ thức ăn của trang trại tăng thêm 4% so với ngày trước đó. Hỏi lượng thức ăn dự trừ của trang trại A đủ dùng cho tối thiểu bao nhiêu ngày?

A. 39 ngày. **B.** 40 ngày. **C.** 41 ngày. **D.** 42 ngày.

Câu 32: Tổng số tiền công ty A phải trả cho thuê mặt bằng trong giai đoạn 10 năm hoạt động đầu tiên là 5 tỷ đồng. Biết rằng trong giai đoạn này, số tiền phải trả thuê mặt bằng năm sau luôn tăng thêm 10% so với tiền thuê mặt bằng của năm trước đó. Vậy số tiền công ty A phải trả cho thuê mặt bằng trong năm thứ 10 gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A. 736,127 triệu đồng. **B.** 742,323 triệu đồng.
C. 733,260 triệu đồng. **D.** 739,751 triệu đồng.

Câu 33: Một người mới đi làm muốn gửi tiết kiệm tại ngân hàng đến khi đủ số tiền để mua xe máy. Mỗi tháng anh ta gửi đều đặn một số tiền vào ngân hàng để tiết kiệm, gửi trong 15 tháng theo hình thức lãi kép (tức là nếu đến kỳ hạn lãi mà không rút tiền thì lãi được cộng vào làm vốn). Giả sử anh ta cần 21 triệu đồng vừa đủ mua xe máy, lãi suất ngân hàng theo tháng là 0,75%. Hỏi mỗi tháng anh ta phải gửi vào ngân hàng số tiền là bao nhiêu?

A. 1 318 078 đồng. **B.** 1 327 964 đồng. **C.** 1 608 063 đồng. **D.** 1 322 000 đồng.

Câu 34: Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng, với lãi suất 1%/tháng. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết nợ sau đúng 3 tháng kể từ ngày vay. Hỏi, theo cách đó, số tiền m mà ông A sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

A. $m=\dfrac{100.(1,01)^3}{3}$ (triệu đồng). **B.** $m=\dfrac{(1,01)^3}{(1,01)^3-1}$ (triệu đồng).

C. $m=\dfrac{100\times 1,03}{3}$ (triệu đồng). **D.** $m=\dfrac{120.(1,12)^3}{(1,12)^3-1}$ (triệu đồng).

Câu 35: Một ngân hàng có chính sách hỗ trợ cho sinh viên nghèo vay vốn với lãi suất thấp. Sinh viên Nguyễn Văn Nam được ngân hàng đó cho vay mỗi tháng 1 triệu đồng trong thời gian 4 năm đại học với lãi suất 4,5%/ theo hình thức mỗi tháng lấy tiền mỗi lần vào đầu tháng, sau khi học xong 4 năm thì bắt đầu trả nợ. Giả sử sinh viên Nam sau khi ra trường có việc làm và có thể trả nợ ngay sau tháng đầu tiên đi làm. Hỏi nếu sinh viên Nam trả nợ mỗi tháng 3 triệu đồng thì ít nhất sau bao nhiêu tháng thì Nam trả hết nợ cho ngân hàng? (Giả thiết sau khi Nam ra trường ngân hàng vẫn áp dụng lãi suất 0,5% một tháng).

A. 19 (tháng). **B.** 20 (tháng). **C.** 18 (tháng). **D.** 21 (tháng).

Câu 36: Theo hình thức lãi kép, một người vay ngân hàng số tiền 500 triệu đồng, lãi suất theo kì hạn 1 tháng là 1%. Người này trả nợ đều đặn cho ngân hàng mỗi tháng cùng một số tiền là 10 triệu đồng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng thì người này trả hết nợ bao gồm cả gốc lẫn lãi?

A. 68 (tháng). **B.** 72 (tháng). **C.** 69 (tháng). **D.** 70 (tháng).

Câu 37: Theo hình thức lãi kép, một người vay ngân hàng với số tiền là A triệu đồng, lãi suất theo kì hạn 1 tháng là 1%. Người này trả nợ đều đặn cho ngân hàng mỗi tháng cùng một số tiền là 10 triệu đồng thì sau đúng 5 năm người này trả hết nợ cả gốc và lãi cho ngân hàng. Tính số tiền vay A?

A. $A=\dfrac{1000\left[(1,01)^{60}-1\right]}{(1,01)^{60}}$ (triệu đồng). **B.** $A=\dfrac{1100\left[(1,01)^{60}-1\right]}{(1,01)^{60}}$ (triệu đồng).

C. $A=\dfrac{1010\left[(1,01)^{60}-1\right]}{(1,01)^{60}}$ (triệu đồng). **D.** $A=\dfrac{1001\left[(1,01)^{60}-1\right]}{(1,01)^{60}}$ (triệu đồng).

Câu 38: Ông A gửi tiết kiệm vào ngân hàng 20 triệu đồng kỳ hạn 1 năm với lãi suất 6%/năm theo hình thức lãi kép. Sau đúng 1 năm, ông A gửi thêm 30 triệu đồng với kỳ hạn và lãi suất như lần gửi trước. Hỏi sau đúng 5 năm kể từ khi gửi lần đầu, ông A nhận được bao nhiêu tiền cả gốc lẫn lãi (lấy gần đúng đến hàng nghìn)?

A. 51.518.000 đồng. **B.** 64.639.000 đồng. **C.** 51.334.000 đồng. **D.** 66.911.000 đồng.

Câu 39: Ông A vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất 1%/ tháng. Ông ta muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi tháng là như nhau và ông A trả hết nợ sau đúng 5 năm kể từ ngày vay. Biết rằng mỗi tháng ngân hàng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó. Hỏi số tiền mỗi tháng ông ta cần trả cho ngân hàng gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A. 2,22 triệu đồng. **B.** 3,03 triệu đồng. **C.** 2,25 triệu đồng. **D.** 2,20 triệu đồng.

Câu 40: Ông A vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất 1%/ tháng. Ông ta muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi tháng là như nhau và sau đúng một năm kể từ ngày vay ông A còn nợ ngân hàng số tiền 50 triệu đồng. Biết rằng mỗi tháng ngân hàng chỉ tính lãi

trên số dư nợ thực tế của tháng đó. Hỏi số tiền mỗi tháng ông ta cần trả cho ngân hàng gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A. $4,95$ triệu đồng. **B.** $4,42$ triệu đồng. **C.** $4,5$ triệu đồng. **D.** $4,94$ triệu đồng.

Câu 41: Một người muốn có đủ 100 triệu đồng sau 24 tháng bằng cách cứ ngày mùng 1 hàng tháng gửi vào ngân hàng cùng một số tiền a đồng với lãi suất $0,6\%/$ tháng, tính theo thể thức lãi kép. Giả định rằng trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người này không rút tiền ra, số tiền a gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $3.886.000$ đồng. **B.** $3.910.000$ đồng. **C.** $3.863.000$ đồng. **D.** $4.142.000$ đồng.

Câu 42: Ông A muốn tích lũy lương hưu của mình trong một năm theo một trong hai cách sau: Cách một mỗi tháng ông gửi ngân hàng 5 triệu đồng với lãi suất 6%/năm, biết hàng tháng ông không rút tiền lãi và số tiền lãi đó được cộng vào tiền gốc để tính lãi cho tháng tiếp theo. Cách hai: mỗi tháng ông góp vốn 5 triệu đồng cho một cá nhân (gọi là chủ phường) và ông nhận lãi trực tiếp 200.000 đồng cho mỗi lần góp vốn. Em hãy giúp ông A so sánh số tiền lãi của đúng một năm theo hai cách trên và chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau ?

A. Số tiền lãi cách một ít hơn cách hai là 700.000 đồng.

B. Số tiền lãi cách hai nhiều hơn cách một là 400.000 đồng.

C. Số tiền lãi cách một nhiều hơn cách hai là 700.000 đồng.

D. Số tiền lãi cách một nhiều hơn cách hai là 400.000 đồng.

Câu 43: Bạn Nam vừa trúng tuyển đại học, vì hoàn cảnh gia đình khó khăn nên được ngân hàng cho vay vốn trong 4 năm học đại học, mỗi năm 1 triệu đồng vào đầu mỗi năm học để nạp học phí với lãi suất $7,8\%$/năm (mỗi lần vay cách nhau đúng 1 năm). Sau khi tốt nghiệp đại học đúng một tháng, hàng tháng Nam phải trả góp cho ngân hàng số tiền là m đồng/tháng với lãi suất $0,7\%$/tháng trong vòng 4 năm. Số tiền m mỗi tháng Nam cần trả cho ngân hàng gần nhất với số nào sau đây (ngân hàng tính lãi trên số dư nợ thực tế).

A. $1.468.000$ (đồng). **B.** $1.398.000$ (đồng).

C. $1.191.000$ (đồng). **D.** $1.027.000$ (đồng).

Câu 44: Ba anh em An, Bình và Cường cùng vay tiền ở một ngân hàng với lãi suất $0,7\%$ /tháng với tổng số tiền vay của cả ba người là 1 tỷ đồng. Biết rằng mỗi tháng ba người đều trả cho ngân hàng số tiền như nhau để trừ vào tiền gốc và lãi. Để trả hết gốc và lãi cho ngân hàng thì An cần 10 tháng, Bình cần 15 tháng và Cường cần 25 tháng. Số tiền trả đều đặn cho ngân hàng mỗi tháng của mỗi người gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A. 21422000 đồng. **B.** 21900000 đồng. **C.** 21400000 đồng. **D.** 210900000 đồng.

Câu 45: Một người gửi vào ngân hàng số tiền 30 triệu đồng, lãi suất 0,48%/tháng. Sau đúng một tháng kể từ ngày gửi người này gửi đều đặn thêm vào 1 triệu đồng; hai lần liên tiếp cách nhau đúng một tháng. Giả định lãi suất không thay đổi và người này không rút tiền ra, số tiền lãi của tháng trước được cộng vào vốn và tính lãi cho tháng kế tiếp. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng người này thu về số tiền cả gốc lẫn lãi ít nhất là 50 triệu đồng.

A. 17. **B.** 19. **C.** 18. **D.** 20.

Câu 46: Sau khi tốt nghiệp đại học, anh Nam thực hiện một dự án khởi nghiệp. Anh vay vốn từ ngân hàng 200 triệu đồng với lãi suất 0,6% một tháng. Phương án trả nợ của Nam là sau đúng một tháng kể

từ thời điểm vay anh bắt đầu trả nợ, hai lần liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền trả của mỗi lần là như nhau và hoàn thành sau đúng 5 năm kể từ khi vay. Tuy nhiên, sau khi dự án có hiệu quả và trả nợ được 12 tháng theo phương án cũ, anh Nam muốn rút ngắn thời gian nợ nên từ tháng tiếp theo, mỗi tháng anh trả nợ cho ngân hàng 9 triệu đồng. Biết rằng ngân hàng chỉ tính tiền lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng từ thời điểm vay anh Nam trả hết nợ?

A. 32 tháng. **B.** 31 tháng. **C.** 29 tháng. **D.** 30 tháng.

Câu 47: Anh X muốn mua một chiếc xe Yamaha Exciter 150 giá $47.000.000$ đồng của cửa hàng Phú Tài nhưng vì chưa đủ tiền nên quyết định mua theo hình thức sau: trả trước 25 triệu đồng và trả góp trong 12 tháng, với lãi suất $0,6\%/$ tháng. Hỏi mỗi tháng anh X phải trả cho cửa hàng số tiền là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng đơn vị).

A. 1.948.927 đồng. **B.** 1.948.926 đồng. **C.** 2.014.545 đồng. **D.** 2.014.546 đồng.

Câu 48: Một người gửi 100 triệu đồng vào tài khoản tiết kiệm ngân hàng với lãi suất $0,6\%/$ tháng cứ đều đặn sau mỗi tháng kể từ ngày gửi người đó rút ra 500 nghìn đồng. Hỏi sau đúng 36 lần rút tiền, số tiền còn lại trong tài khoản của người đó gần nhất với phương án nào dưới đây? (Biết lãi suất không thay đổi).

A. 104 triệu đồng. **B.** 106 triệu đồng. **C.** 102 triệu đồng. **D.** 108 triệu đồng.

Câu 49: Bạn H trúng tuyển vào trường Đại Học Ngoại Thương nhưng vì lý do không đủ tiền đóng học phí nên H quyết định vay ngân hàng trong 4 năm, mỗi năm vay 4 triệu đồng để nộp học phí với lãi suất $3\%/$ năm. Ngay sau khi tốt nghiệp đại học bạn H thực hiện trả góp hàng tháng cho ngân hàng số tiền (không đổi) với lãi suất theo cách tính mới là $0,25\%/$ tháng, trong vòng 5 năm. Tính số tiền mà bạn H phải trả cho ngân hàng? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

A. 323.582 đồng. **B.** 398.402 đồng. **C.** 309.718 đồng. **D.** 312.518 đồng.

Câu 50: Ông Nam vay ngân hàng 500 triệu đồng để mở của hàng điện dân dụng với lãi suất $0,8\%/$ tháng theo thoả thuận như sau: Sau đúng 6 tháng từ ngày vay ông Nam bắt đầu trả nợ, hai lần trả nợ liên tiếp cách nhau 1 tháng với số tiền trả mỗi tháng là 10 triệu đồng. Biết rằng mỗi tháng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó. Hỏi kể từ ngày vay, sau thời gian bao lâu ông Nam trả hết nợ cho ngân hàng?

A. 74 tháng. **B.** 68 tháng. **C.** 69 tháng. **D.** 75 tháng.

BẢNG ĐÁP ÁN

1..B	2.B	3.C	4.C	5.A	6.A	7.D	8.B	9.A	10.C
11.A	12.B	13.B	14.B	15.B	16.B	17.A	18.C	19.D	20.B
21.A	22.A	23.A	24.D	25.B	26.A	27.A	28.B	29.D	30.C
31.D	32.D	33.A	34.B	35.B	36.D	37.A	38.B	39.C	40.D
41.C	42.B	43.C	44.A	45.C	46.A	47.A	48.A	49.C	50.A

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **Chọn B**

Số tiền thu được sau 5 năm là $T_n = 100.(1+0,06)^5 \approx 133,82$ triệu đồng.

Công thức tính: Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi kép $r(\%)$/ kì hạn thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn $(n \in \mathbb{N}^*)$ là $T_n = A.(1+r)^n$.

Câu 2: **Chọn B**

Số tiền thu được sau n năm là $T_n = 50.(1+0,06)^n$ triệu đồng.

Để $T_n \geq 100$ thì $50.(1+0,06)^n \geq 100 \Leftrightarrow 1,06^n \geq 2 \Leftrightarrow n \geq \log_{1,06} 2 \Leftrightarrow n \geq 11,89...$

Vậy sau ít nhất 12 năm thì người đó nhận được số tiền lớn hơn 100 triệu đồng.

Câu 3: **Chọn C**

Tổng số tiền trả lương cho nhân viên trong năm n $(n \geq 2017)$ là $T_n = 1.(1+15\%)^{n-2016}$ tỷ đồng.

Để $T_n \geq 2$ thì $1.(1+15\%)^{n-2016} > 2 \Leftrightarrow n-2016 > \log_{1+15\%} 2 \Leftrightarrow n > 2020,959...$

Vậy năm đầu tiên mà tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm lớn hơn 2 tỷ đồng là năm 2021.

Câu 4: **Chọn C**

Áp dụng công thức lãi kép số tiền người đó nhận được sau n tháng là: $A \times (1+r)^n$.

Vậy sau một năm (tức là sau 12 tháng) gửi tiền vào ngân hàng, người đó nhận được số tiền là**:** $50 \times (1+0,04)^{12}$ (triệu đồng).

Câu 5: **Chọn A**

Áp dụng công thức lãi kép số tiền người đó nhận được sau n năm là: $A_n = A \times (1+r)^n$ .Vậy sau 5 năm gửi tiền vào ngân hàng, người đó nhận được số tiền là 500 triệu, nên ta có:

$$500 = m \times (1+0,06)^5 \Leftrightarrow m = \frac{500}{(1+0,06)^5} = \frac{500}{(1,06)^5}.$$

Câu 6: **Chọn A**

Áp dụng công thức lãi kép số tiền người đó nhận được sau n năm là: $A_n = A \times (1+r)^n$.

Sau 5 năm gửi tiền vào ngân hàng, người đó nhận được số tiền là:

$A_n = 50 \times (1+0,07)^5 \approx 70,128$ (triệu đồng).

Vậy sau 5 năm gửi tiền vào ngân hàng, người đó nhận được số tiền lãi là:

$70,128-50=20,128$ (triệu đồng).

Câu 7: **Chọn D**

Tổng số tiền ông A trả lương cho nhân viên trong cả năm 2020 là $A.(1+r)^n=1.1,15^{2020-2016}\approx 1,75$ tỷ đồng.

Câu 8: **Chọn B**

Tổng số tiền ông A trả lương cho nhân viên trong cả năm thứ x là

$A.(1+r)^x=1.1,2^x>5\Leftrightarrow x>\log_{1,2}5\approx 8,8$. Vậy $x=9$ năm cần tìm là 2026.

Câu 9: **Chọn A**

Mức lương một tháng của người này sau n năm là: $A.(1+r)^{\frac{n}{3}}=7.1,07^{\frac{36}{3}}\approx 15,77$

Câu 10: **Chọn C**

Tổng số tiền lương người này nhận trong 3 năm đầu là: $7.3.12=252$ triệu đồng.

Vậy sau đúng 36 năm, tổng số lương người này nhận được là:

$$S=252+252(1+0,07)^1+252(1+0,07)^2+...+252(1+0,07)^{11}=252.\frac{(1+0,07)^{12}-1}{0,07}\approx 4507,89.$$

Câu 11: **Chọn A**

Số tiền gửi ban đầu là A thì số tiền người đó thu về (cả gốc và lãi) sau n năm là $A(1+0,061)^n$

Ta n cần nhỏ nhất sao cho $A(1+0,061)^n\geq 2A\Leftrightarrow(1,061)^n\geq 2\Leftrightarrow n\geq\log_{1,061}2\approx 11,7062.$

Vậy sau ít nhất 12 năm người đó thu được (cả số tiền ban đầu và lãi) ít nhất gấp đôi số tiền gửi ban đầu.

Câu 12: **Chọn B**

Số tiền gửi ban đầu là A thì số tiền người đó thu về (cả gốc và lãi) sau n năm là $A(1+0,066)^n$

Ta n cần nhỏ nhất sao cho $A(1+0,066)^n\geq 2A\Leftrightarrow(1,066)^n\geq 2\Leftrightarrow n\geq\log_{1,066}2\approx 10,8451.$

Vậy sau ít nhất 12 năm người đó thu được (cả số tiền ban đầu và lãi) ít nhất gấp đôi số tiền gửi ban đầu.

Câu 13: **Chọn B**

Gọi N là số tiền mà ông A dùng để trả tiền thuê mặt bằng công ty năm 2016

$\Rightarrow N=300$ triệu đồng.

Vậy số tiền mà ông A cần trả năm 2018 là: $N(1+10\%)^2=300(1+0,1)^2=363$ (triệu đồng).

Câu 14: **Chọn B**

Gọi S là diện tích khai thác rừng hàng năm không đổi như hiện nay của địa phương X

$\Rightarrow$ tổng diện tích rừng của địa phương là: $50S$

Nhưng trên thực tế thì diện tích khai thác rừng tăng trung bình hàng năm là 6%/năm, nên diện tích rừng khai thác năm thứ n là: $S(1+6\%)^{n-1}=S(1+0,06)^{n-1}$.

Vậy tổng diện tích rừng bị khai thác sau n năm là:

$$S+S(1+0.06)+S(1+0,06)^2+...+S(1+0,06)^{n-1}=S\frac{(1+0,06)^n-1}{0,06}.$$

Sau n năm rừng bị khai thác hết thì $S\dfrac{(1+0,06)^n-1}{0,06}=50S\Leftrightarrow 1,06^n=4\Leftrightarrow n=\log_{1,06}4\approx 23,79$

Vậy sau 24 năm thì rừng bị khai thác hết

Câu 15: Chọn B

Gọi A là số lượng đột biến mà trung bình làm cha ở tuổi 30 gây ra cho con cái của mình $\Rightarrow A=55$ (đột biến).

Gọi r là tốc độ tăng đột biến $\Rightarrow r=12\%$.

Sau n năm số lượng đột biến là: $A(1+r)^n$

Vậy sau 50 năm thì số lượng đột biến là: $55(1+12\%)^{50}\approx 15895$.

Câu16. Chọn B

Ta cần tìm n sao cho $75(1+0,054)^n>100\Leftrightarrow n>\log_{1,054}\dfrac{4}{3}\approx 5,47$

Câu 17. Chọn A

Số tiền lãi người này nhận được sau 5 năm là: $50(1+0,07)^5-50\approx 20,128$

Câu18. Chọn B

Tổng số tiền thu được sau n năm là

$$S=20(1+0,06)^n+20(1+0,06)^{n-1}+....+20(1+0,06)=20(1+0,06)\frac{(1+0,06)^n-1}{0,06}$$

Vậy $20(1+0,06)\dfrac{(1+0,06)^n-1}{0,06}>400\Rightarrow n>12,993$

Câu 16: Chọn B

Tổng số tiền lương người này nhận được cho 3 tháng làm việc đầu tiên là 30 triệu đồng.

Tổng số tiền lương người này nhận được sau 36 tháng làm việc là

$$30+30(1+0,12)^1+30(1+0,12)^2+...+30(1+0,12)^{11}=30\frac{(1+0,12)^{12}-1}{0,12}\approx 724$$ triệu đồng.

Câu 17: Chọn A

Tổng số tiền lương người này nhận được cho 6 tháng làm việc đầu tiên là $6m$.

Tổng số tiền lương người này nhận được sau đúng 36 tháng là

$$6m+6m(1+0,1)^1+6m(1+0,1)^2+...+6m(1+0,1)^5=6m\frac{(1+0,1)^6-1}{0,1}=500.$$

Do đó $m=\dfrac{25}{3\left[(1,1)^6-1\right]}$ triệu đồng.

Câu 18: Chọn C

Tổng số tiền A (gồm cả gốc và lãi) nợ ngân hàng sau 4 năm học là

$$A=10(1+0,03)^4+10(1+0,03)^3+10(1+0,03)^2+10(1+0,03)$$

$$=10(1,03)\frac{(1,03)^4-1}{1,03-1}=\frac{1030\left((1,03)^4-1\right)}{3}$$

Tổng số tiền nợ sau 1 năm ra trường là $A(1+0,08)^1=\dfrac{1030\left((1,03)^4-1\right)}{3}(1+0,08)\approx 46,538667$.

Câu 19: Chọn D

Gọi a là số tiền gửi ban đầu, n là số năm gửi. Số tiền người đó thu về (cả gốc lẫn lãi) sau n năm là $a(1+0,075)^n$. Ta cần tìm n nhỏ nhất sao cho:

$a(1+0,075)^n\ge 3a\Leftrightarrow(1,075)^n\ge 3\Leftrightarrow n\ge \log_{1,075}3\approx 15,1908$.

Vậy sau ít nhất 16 năm thì người này sẽ thu về số tiền cả gốc lẫn lãi ít nhất gấp ba lần số tiền gửi ban đầu.

Câu 20: Chọn B

Gọi a là số tiền gửi ban đầu, n là số năm gửi. Số tiền người đó thu về (cả gốc lẫn lãi) sau n năm là $a(1+0,075)^n$. Ta cần tìm n nhỏ nhất sao cho:

$a(1+0,075)^n\ge 6a\Leftrightarrow(1,075)^n\ge 6\Leftrightarrow n\ge \log_{1,075}6\approx 24,775$.

Vậy sau ít nhất 25 năm thì người này sẽ thu về số tiền cả gốc lẫn lãi ít nhất gấp sáu lần số tiền gửi ban đầu.

Câu 21: Chọn A

Gọi a là số tiền gửi ban đầu, n là số năm gửi. Số tiền người đó thu về (cả gốc lẫn lãi) sau n năm là $a(1+0,061)^n$ và số tiền lãi người đó thu về là $a(1+0,061)^n-a$. Ta cần tìm n nhỏ nhất sao cho:

$a(1+0,061)^n-a\ge a\Leftrightarrow(1,061)^n\ge 2\Leftrightarrow n\ge \log_{1,061}2\approx 11,7062$.

Vậy sau ít nhất 12 năm thì người này sẽ thu về số tiền lãi ít nhất bằng số tiền gửi ban đầu.

Câu 22: Chọn A

Tổng số tiền người này thu về là:

$10(1+0,005)^{24}+10(1+0,005)^{23}+.....+10(1+0,005)^1$

$=10(1+0,005).\dfrac{(1+0,005)^{24}-1}{0,005}\approx 255,591.$

Câu 23: Chọn A

Số tiền người này thu về sau 2 năm là:

$$m(1+0,005)^{24}+m(1+0,005)^{23}+.....+m(1+0,005)^1=m(1+0,005).\frac{(1+0,005)^{24}-1}{0,005}.$$

Theo bài ra ta có

$$m(1+0,005).\frac{(1+0,005)^{24}-1}{0,005}=100\Leftrightarrow m=\frac{100.0,005}{1,005.\left[(1+0,005)^{24}-1\right]}=\frac{100}{201.\left[(1,005)^{24}-1\right]}.$$

Câu 24: Chọn D

Số tiền người này thu về sau n tháng là

$$10(1+0,01)^n+10(1+0,01)^{n-1}+.....+10(1+0,01)^1=10(1+0,01).\frac{(1+0,01)^n-1}{0,01}.$$

Theo bài ra ta có

$10(1+0,01).\dfrac{(1+0,01)^n-1}{0,01}=200\Leftrightarrow(1+0,01)^n-1=\dfrac{200.0,01}{10.1,01}=\dfrac{20}{101}\Leftrightarrow(1,01)^n=\dfrac{121}{101}$

$\Leftrightarrow n=\log_{1,01}\left(\dfrac{121}{101}\right)\approx 18,1572.$

Vậy sau ít nhất 19 tháng thì số tiền người này thu về (cả gốc và lãi) ít nhất là 200 triệu đồng.

Câu 25: Chọn B

Số tiền thu được sau 20.12=240 tháng là:

$P_n=P_0(1+r)+P_0(1+r)^2+P_0(1+r)^3+...+P_0(1+r)^{240}=P_0(1+r)(\dfrac{(1+r)^{240}-1}{r})=2891,6$ (tr)

Tổng quát: $P_n=\dfrac{P_0}{r}((1+r)^n-1)(1+r)$

Trong đó P_n: số tiền thu được sau n năm; P_0 là số tiền gửi ban đầu;r là lãi suất không đổi.

Tính ra $=2891,6$ triệu

Câu 26: Chọn A

Số tiền thu được sau 25.12=300 tháng là:

$P_n=\dfrac{P_0}{r}((1+r)^n-1)(1+r)=\dfrac{4}{0,006}((1+0,006)^{300}-1)(1+0,006)=3364,866655(tr)$

Câu 27: Chọn A

Số tiền nhận được sau 12 năm=12x12=144 tháng đóng bảo hiểm cho con là:

$P_n=m(1+0,005)+m(1+0,005)^2+m(1+0,005)^3+...+m(1+0,005)^{144}>100$

$\Leftrightarrow m(1+0,005)(\dfrac{(1+0,005)^{144}-1}{0,005})>100\Leftrightarrow m>0,474(tr)$

Câu 28: Chọn B

Số tiền thu được sau 25.12=300 tháng là:

$P_n=\dfrac{P_0}{r}((1+r)^n-1)(1+r)=\dfrac{4}{0,006}((1+0,006)^{300}-1)(1+0,006)=3364,866655(tr)$

Câu 29: Chọn D

Số tiền có sau một năm người đó đóng là: $a\ 1+r$ triệu đồng

Số tiền có sau hai năm người đó đóng là: $\left[a\ 1+r\ +a\right].\ 1+r\ =a.\dfrac{1+r\ ^2-1}{r}\ 1+r$ triệu đồng

Số tiền có sau ba năm người đó đóng là: $a.\dfrac{1+r\ ^3-1}{r}\ 1+r$ triệu đồng.

Số tiền có sau n năm người đó đóng là: $a.\dfrac{1+r\ ^n-1}{r}\ 1+r$ triệu đồng.

Vậy sau 18 năm, người đó thu về tổng tất cả là: $A=\dfrac{12}{0,06}(1+0,06)\left[0,06^{18}-1\right]\simeq 393,12$ triệu đồng.

Câu 30: Chọn C

Gọi số tiền công ty A phải trả cho thuê mặt bằng trong năm đầu tiên là a thì:

Số tiền công ty A phải trả cho thuê mặt bằng trong năm thứ 2 là: $a\ 1+r$ triệu đồng.

Số tiền công ty A phải trả cho thuê mặt bằng trong năm thứ 3: $a\ 1+r^{2}$ triệu đồng.

Số tiền công ty A phải trả cho thuê mặt bădng trong năm thứ 4: $a\ 1+r^{3}$ triệu đồng.

Số tiền công ty A phải trả cho thuê mặt bằng trong năm thứ 10: $a\ 1+r^{10}$ triệu đồng.

Tổng số tiền công ty A phải trả cho thuê mặt bằng trong 10 năm là:

$$a\ 1+r^{10}+a\ 1+r^{9}+...+a\ 1+r\ +a=a.\frac{1+r^{10}-1}{r}$$ triệu đồng.

Theo bài ra ta có $5000=a.\frac{1+0,1^{10}-1}{0,1}\Leftrightarrow a\simeq 313727$ triệu đồng.

Câu 31: Chọn D

Gọi lượng thức ăn dự trữ đủ cho 100 ngày là a, thì số lượng tiêu thụ thức ăn của trang trại trong ngày đầu tiên là $\frac{a}{100}$

Số lượng tiêu thụ thức ăn của trang trại trong ngày thứ 2 là: $\frac{a}{100}\ 1+0,04$

Số lượng tiêu thụ thức ăn của trang trại trong ngày thứ 3 là: $\frac{a}{100}\ 1+0,04^{2}$

Số lượng tiêu thụ thức ăn của trang trại trong ngày thứ 4 là: $\frac{a}{100}\ 1+0,04^{3}$

Số lượng tiêu thụ thức ăn của trang trại trong ngày thứ n là: $\frac{a}{100}\ 1+0,04^{n-1}$

Tổng số lượng tiêu thụ thức ăn của trang trại trong n ngày là: $\frac{a}{100}.\frac{1+0,04^{n}-1}{0,04}$

Theo bài ra ta có: $a=\frac{a}{100}.\frac{1+0,04^{n}-1}{0,04}\Leftrightarrow n=\log_{1.04}\ 100.(0.04)+1\ \simeq 41,035$

Vậy lượng thức ăn dự trừ của trang trại A đủ dùng cho tối thiểu 42 ngày.

Câu 32: Chọn D

Số tiền phải trả cho thuê mặt bằng trong năm đầu tiên là a.

Số tiền phải trả cho thuê mặt bằng trong năm thứ 2 là $a+0,1a=1,1a$.

Số tiền phải trả cho thuê mặt bằng trong năm thứ 3 là $1,1a+0,1\times 1,1a=\left(1,1\right)^{2}a$.

Tương tự, ta có số tiền phải trả cho thuê mặt bằng trong năm thứ 10 là $\left(1,1\right)^{9}a$.

Do đó tổng số tiền mà công ty phải trả cho thuê mặt bằng trong 10 năm đầu tiên là $a+1,1a+\left(1,1\right)^{2}a+...+\left(1,1\right)^{9}a=a.\frac{\left(1,1\right)^{10}-1}{0,1}=5.10^{9}\Rightarrow a=\frac{5.10^{8}}{\left(1,1\right)^{10}-1}$.

Vậy số tiền mà công ty A phải trả cho thuê mặt bằng trong năm thứ 10 là

$$(1,1)^9 \times a = 739751794,9 .$$

Câu 33: Chọn A

Gọi A là số tiền mỗi tháng người đó gửi vào ngân hàng, r là lãi suất theo tháng.

Cuối tháng thứ nhất, người đó sẽ nhận được với số tiền là $A.(1+r)$.

Đầu tháng thứ hai, người đó sẽ nhận được với số tiền là $A+A.(1+r)$.

Cuối tháng thứ hai, người đó sẽ nhận được với số tiền là

$A+A.(1+r)+\left[A+A(1+r)\right]r = A(1+r)+A(1+r)^2$.

Tiếp tục như vậy, cuối tháng thứ *n*, người đó sẽ nhận được với số tiền là:

$$B = A(1+r)+A(1+r)^2+...+A(1+r)^n = \frac{A(1+r)\left[(1+r)^n-1\right]}{r}.$$

Vậy số tiền mỗi tháng mà người đó gửi vào ngân hàng là:

$$A = \frac{Br}{(1+r)\left[(1+r)^n-1\right]} = \frac{21\times10^6\times0,0075}{1,0075\left(1,0075^{15}-1\right)} \approx 1318018,617$$

Câu 34: Chọn B

Xét bài toán: Vay trả góp, lãi suất dư nợ thực tế.

Gọi m là số tiền mà ông A phải trả hàng tháng sau khi vay ngân hàng một tháng, r là lãi suất mỗi tháng, số tiền ông A nợ ngân hàng làB.

Sau một tháng kể từ ngày vay ông A còn nợ ngân hàng số tiền là:

$B+B.r-m = B.(1+r)-m$.

Sau hai tháng kể từ ngày vay ông A còn nợ ngân hàng số tiền là:

$B.(1+r)-m+\left[B.(1+r)-m\right]r-m = B.(1+r)^2-\left[m+m(1+r)\right]$.

Cứ tiếp tục như vậy ta có công thức tổng quát.

Sau tháng thứ *n*, kể từ ngày vay Ông A còn nợ ngân hàng số tiền là:

$$B.(1+r)^n-\left[m+(1+r)m+(1+r)^2m+...+(1+r)^{n-1}m\right] = B.(1+r)^n-m\frac{(1+r)^n-1}{r}.$$

Câu 35: Chọn B

Tổng số tiền Nam phải trả sau 4 năm đại học là

$$A = a(1+r)^{48}+a(1+r)^{47}+...+a(1+r) = a(1+r).\frac{(1+r)^{48}-1}{r} \approx 54,368 \text{ (triệu đồng).}$$

Trong đó $a=1, r=0,005$;

Sau khi ra trường:

Số tiền trả tháng là $m=3$ (triệu đồng); lãi suất lúc này vẫn là $r=0,005$.

Số tiền Nam còn phải trả sau tháng thứ nhất là $A_1 = A(1+r)-m$.

Số tiền Nam còn phải trả sau tháng thứ hai là $A_2 = A_1(1+r)-m = A(1+r)^2-m-m(1+r)$.

Số tiền Nam còn phải trả sau tháng thứ n là

$$A_n = A(1+r)^n - m - m(1+r) - ... - m(1+r)^{n-1} = A(1+r)^n - m\frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Sau tháng thứ n hết nợ nên $A_n = 0,$ vì vậy

$$A(1+r)^n - m\frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0 \Leftrightarrow (1+r)^n = \frac{m}{m - Ar} \Leftrightarrow n = \log_{1+r}\frac{m}{m - Ar}$$

Thay số với $m = 3, r = 0,005, A = 54,368$ ta được $n \approx 19,044.$

Vậy sau ít nhất 20 tháng thì Nam trả hết nợ cho ngân hàng.

Câu 36: Chọn D

Số tiền còn phải trả sau tháng thứ nhất là $A_1 = 500(1+0,01) - 10.$

Số tiền còn phải trả sau tháng thứ hai là $A_2 = A_1(1+0,01) - 10 = 500(1+0,01)^2 - 10 - 10(1+0,01).$

Số tiền còn phải trả sau tháng thứ n là

$$A_n = 500(1+0,01)^n - \left[10 + 10(1+0,01) + ... + 10(1+0,01)^{n-1}\right] = 500(1+0,01)^n - 10\frac{(1+0,01)^n - 1}{0,01}.$$

Sau tháng thứ n hết nợ nên $A_n = 0,$ vì vậy

$$500(1+0,01)^n - 10\frac{(1+0,01)^n - 1}{0,01} = 0 \Leftrightarrow \frac{(1+0,01)^n - 1}{(1+0,01)^n} = \frac{500 \times 0,01}{10}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{(1+0,01)^n} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (1+0,01)^n = 2 \Leftrightarrow n = \log_{1,01} 2 \approx 69,66.$$

Vậy sau ít nhất 70 tháng thì người đó trả hết nợ cho ngân hàng.

Câu 37: Chọn A

Số tiền còn phải trả sau tháng thứ nhất là $A_1 = A(1+0,01) - 10.$

Số tiền còn phải trả sau tháng thứ hai là $A_2 = A_1(1+0,01) - 10 = A(1+0,01)^2 - 10 - 10(1+0,01).$

Số tiền còn phải trả sau tháng thứ n là

$$A_n = A(1+0,01)^n - \left[10 + 10(1+0,01) + ... + 10(1+0,01)^{n-1}\right] = A(1+0,01)^n - 10\frac{(1+0,01)^n - 1}{0,01}.$$

Sau tháng thứ 60 hết nợ nên $A_{60} = 0,$ vì vậy

$$A(1+0,01)^{60} - 10\frac{(1+0,01)^{60} - 1}{0,01} = 0 \Leftrightarrow A(1+0,01)^{60} = 1000\left[(1+0,01)^{60} - 1\right]$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1000\left[(1,01)^{60} - 1\right]}{(1,01)^{60}}.$$

Câu 38: Chọn B

Áp dụng công thức lãi kép, ta có:

Sau năm thứ nhất, số tiền trong tài khoản ông A là:

$20\ 1+0,06\ +30 = 51,2$ triệu đồng (do người đó gửi thêm vào 30 triệu).

Sau năm thứ 5 số tiền có trong tài khoản của ông A là:

$51,2\ 1+0.06\ ^4 = 64,638820$ triệu đồng.

Vậy sau đúng 5 năm ông A nhận được số tiền cả gốc lẫn lãi (lấy gần đúng đến hàng nghìn) là: $64.639.000$ đồng.

Câu 39: Chọn C

Ta có: $A=100$ triệu đồng, $r=1\%$. Gọi số tiền ông A phải trả hàng tháng là X.

Sau n tháng thì ông A còn nợ số tiền là: $S_n = A(1+r)^n - X\dfrac{(1+r)^n-1}{r}$.

Để sau đúng 5 năm tức 60 tháng trả hết nợ thì $S_{60}=0$

nên $X=\dfrac{A(1+r)^{60}.r}{(1+r)^{60}-1}\approx 2,2245$ triệu đồng.

Vậy số tiền mỗi tháng ông A cần trả cho ngân hàng gần $2,225$ triệu đồng.

Câu 40: Chọn D

Gọi m, r, T_n, a lần lượt là số tiền vay ngân hàng, lãi suất hàng tháng, tổng số tiền vay còn lại sau n tháng, số tiền trả đều đặn mỗi tháng.

Sau khi hết tháng thứ nhất $n=1$ thì còn lại: $T_1 = m\ r+1\ -a.$

Sau khi hết tháng thứ hai $n=2$ thì còn lại: $T_2 = \left[m\ r+1\ -a\right]\ r+1\ -a$

$= m\ r+1\ ^2 - a\ r+1\ -a = m\ r+1\ ^2 - a\ r+2\ = m\ r+1\ ^2 - \dfrac{a}{r}\left[\ r+1\ ^2-1\right].$

Sau khi hết tháng thứ ba $n=3$ thì còn: $T_3 = \left[m\ r+1\ ^2 - \dfrac{a}{r}\left[\ r+1\ ^2-1\right]\right]\ r+1\ -a$

$= m\ r+1\ ^3 - \dfrac{a}{r}\left[\ r+1\ ^3-1\right].$

Bằng phương pháp quy nạp ta có kết quả:

Sau khi hết tháng thứ n thì còn lại: $T_n = m\ r+1\ ^n - \dfrac{a}{r}\left[\ r+1\ ^n-1\right].$

Áp dụng công thức trên, ta có:

$T_{12} = 50 = 100(0,01+1)^{12} - \dfrac{a}{0,01}\left[(0,01+1)^{12}-1\right]\approx 4,94$ triệu đồng.

Vậy số tiền mỗi tháng ông A cần trả cho ngân hàng gần $4,94$ triệu đồng.

Câu 41: Chọn C

Số tiền cả gốc và lãi người này thu về sau 24 tháng là:

$a\ 1+0,6\%\ ^{24} + a\ 1+0,6\%\ ^{23} + \ldots + a\ 1+0,6\%\ ^{1} = 100.$

$\Leftrightarrow a\ 1+0,6\%\ \dfrac{1+0,6\%\ -1}{0,6\%} = 100 \Leftrightarrow a = \dfrac{100\times 0,6\%}{1+0,6\%\ \times\ 1+0,6\%\ -1}\approx 3,8631.$

Vậy hàng tháng người đó cần gửi vào ngân hàng cùng một số tiền $a=3.863.000$ đồng.

Câu 42: Chọn B

Cách gửi thứ nhất có lãi suất $0,5\%$/tháng.

Tổng số tiền thu về sau một năm theo cách gửi thứ nhất là

$5\ 1+0,5\%\ ^{12} + 5\ 1+0,5\%\ ^{11} + \ldots + 5\ 1+0,5\%\ ^{1}$

$= 5\ 1+0,5\% \ .\dfrac{1+0,5\%^{12}-1}{0,5\%} \approx 61,986$ (triệu đồng).

Theo cách gửi thứ hai thì sau một năm thu về số tiền

$T = 5\times 12 + 0,2\times 12 = 63,4$ (triệu đồng).

Do đó số tiền lãi của cách hai nhiều hơn cách một khoảng 400.000 đồng.

Câu 43: Chọn C

Tổng số tiền Nam nợ ngân hàng sau đúng 4 năm học đại học là

$A = 10\ 1+7,8\%^{4} + 10\ 1+7,8\%^{3} + 10\ 1+7,8\%^{2} + 10\ 1+7,8\%$ (triệu đồng)

Sau khi tốt nghiệp ra trường:

Số tiền còn nợ ngân hàng sau tháng thứ nhất là: $A_1 = A\ 1+0,7\% - m$.

Số tiền còn nợ ngân hàng sau tháng thứ hai là

$A_2 = A_1\ 1+0,7\% - m = A\ 1+0,7\%^{2} - \left[m + m\ 1+0,7\%\right];$

Số tiền còn nợ ngân hàng sau tháng thứ ba là

$A_3 = A_2\ 1+0,7\% - m = A\ 1+0,7\%^{3} - \left[m + m\ 1+0,7\% + m\ 1+0,7\%^{2}\right];$

…

Số tiền còn nợ ngân hàng sau tháng thứ 48 (4 năm) là

$A_{48} = A\ 1+0,7\%^{48} - \left[m + m\ 1+0,7\% + m\ 1+0,7\%^{2} + \ldots + m\ 1+0,7\%^{47}\right]$

$= A\ 1+0,7\%^{48} - m\dfrac{1+0,7\%^{48}-1}{0,7\%}.$

Vì sau đúng 4 năm ra trường trả hết nợ nên $A_{48} = 0 \Leftrightarrow A\ 1+0,7\%^{48} - m\dfrac{1+0,7\%^{48}-1}{0,7\%} = 0$

$\Leftrightarrow m = \dfrac{A\times 0,7\%\times\ 1+0,7\%^{48}}{1+0,7\%^{48}-1} \approx 1,191$

Vậy số tiền m mỗi tháng Nam cần trả cho ngân hàng là $m = 1.191.000$ (đồng).

Câu 44: Chọn A

Gọi số tiền vay của mỗi người lần lượt là a, b, c ta có: $a+b+c = 10^9$ đồng. gọi m là số tiền trả đều đặn hàng tháng của mỗi người.

An sau đúng 10 tháng trả hết nợ nên $a = \dfrac{m\left[(1+r)^n - 1\right]}{r(1+r)^n} = \dfrac{m\left[(1,007)^{10} - 1\right]}{0,007(1,007)^{10}}$

Bình sau đúng 15 tháng trả hết nợ nên $b = \dfrac{m\left[(1+r)^n - 1\right]}{r(1+r)^n} = \dfrac{m\left[(1,007)^{15} - 1\right]}{0,007(1,007)^{15}}$

Cường sau đúng 25 tháng trả hết nợ nên $c = \dfrac{m\left[(1+r)^n - 1\right]}{r(1+r)^n} = \dfrac{m\left[(1,007)^{25} - 1\right]}{0,007(1,007)^{25}}$

Vậy $\frac{m\left[(1,007)^{10}-1\right]}{0,007(1,007)^{10}}+\frac{m\left[(1,007)^{15}-1\right]}{0,007(1,007)^{15}}+\frac{m\left[(1,007)^{25}-1\right]}{0,007(1,007)^{25}}=10^9 \Rightarrow m\approx 2,14227.10^7$ đồng

Câu 45: Chọn C

Tổng số tiền người này nhận được sau đúng n tháng kể từ ngày gửi là:

$A_n=30.(1+0,0048)^n+1.(1+0,0048)^{n-1}+1.(1+0,0048)^{n-2}+\cdots+1.(1+0,0048)^1$

$=30.(1+0,0048)^n+1,0048.\frac{(1,0048)^{n-1}-1}{0,0048}=(1,0048)^n.\left(30+\frac{1}{1,0048}\right)-\frac{1,0048}{0.0048}\geq 50$

$\Leftrightarrow (1,0048)^n\geq\frac{50+\frac{1,0048}{0,0048}}{30+\frac{1}{0,0048}}\Leftrightarrow n\geq\log_{1,0048}\frac{50+\frac{1,0048}{0,0048}}{30+\frac{1}{0,0048}}\approx 17,634$

Vậy sau ít nhất 18 tháng người này thu về ít nhất 50 triệu đồng.

Câu 46: Chọn A

Theo dự định số tiền cần trả hàng tháng bằng

$m=A_i\times\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n-1}=200\times 0,006\times\frac{(1,006)^{60}}{(1,006)^{60}-1}=\frac{6}{5}\times\frac{(1,006)^{60}}{(1,006)^{60}-1}$

Số tiền còn nợ ngân hàng sau 12 tháng là

$A_{12}=A.(1+i)^{12}-\left[m+m(1+i)+\cdots+m(1+i)^{11}\right]=A.(1+i)^{12}-m\cdot\frac{(1+i)^{12}-1}{i}=165,53$ triệu đồng

Gọi n là số tháng tính từ thời điểm hết 12 tháng đến lúc trả hết nợ có

$A_{12}.(1+i)^n-\left[9+9.(1+i)+\cdots+9.(1+i)^{n-1}\right]=0\Leftrightarrow A_{12}.(1+i)^n-9\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}=0$

$\Leftrightarrow (1,006)^n(1500-A_{12})=1500\Leftrightarrow n=\log_{1,006}\frac{1500}{1500-A_{12}}\approx 19,55$

Vậy anh Nam cần ít nhất $12+20=32$ tháng để trả hết nợ.

Câu 47: Chọn A

Đặt $\begin{cases}A=47tr-25tr=22tr\\ r=0,006\end{cases}$ và gọi X là số tiền trả mỗi tháng cho cửa hàng, ta có:

Số tiền còn nợ sau tháng thứ 1 trả: $T_1=A+rA-X=A(1+r)-X$

Tháng thứ 2: $T_2=T_1+rT_1-X=T_1(1+r)-X=A(1+r)^2-X\left(1+(r+1)\right)$

……

Tháng thứ 12: $T_{12}=A(1+r)^{12}-X\left(1+(r+1)+(r+1)^2+...+(r+1)^{11}\right)$

Trở góp xong, nên: $T_{12}=0\Leftrightarrow X\approx 1,948927$ (triệu đồng)

Câu 48: Chọn A

Đặt $\begin{cases}A=100\\ r=0,006\\ X=0,5\end{cases}$, ta có:

Số tiền còn lại sau tháng thứ 1: $T_1 = A + rA - X = A(1+r) - X$

Tháng thứ 2: $T_2 = T_1 + rT_1 - X = T_1(1+r) - X = A(1+r)^2 - X\left(1+(r+1)\right)$

Tháng thứ 3: $T_3 = T_2 + rT_2 - X = T_2(1+r) - X = A(1+r)^3 - X\left(1+(r+1)+(r+1)^2\right)$

……

Tháng 36: $T_{36} = T_{35} + rT_{35} - X = T_{35}(1+r) - X = A(1+r)^{36} - X\left(1+(r+1)+(r+1)^2+...+(r+1)^{35}\right)$

Vậy sau đúng 36 tháng: $T_{36} = A(1+r)^{36} - X\left(1+(r+1)+(r+1)^2+...+(r+1)^{35}\right) \approx 104,005$ triệu.

Câu 49: Chọn C

Tổng tiền H nợ sau 4 năm: $A = 4(1+0,03)^4 + 4(1+0,03)^3 + 4(1+0,03)^2 + 4(1+0,03)^1$.

Gọi X là số tiền H trả mỗi tháng sau khi tốt nghiệp và $r = 0,25\%$.

Số tiền còn lại sau 1 tháng trả nợ: $T_1 = A + rA - X = A(1+r) - X$

Sau 60 tháng: $T_{60} = A(1+r)^{60} - X\left(1+(r+1)+(r+1)^2+...+(r+1)^{59}\right)$.

Trả hết nợ, nên: $T_{60} = 0 \Leftrightarrow X \approx 0,3097$ (triệu đồng).

$100.(1,01)^3 - m.\dfrac{\left[1,01^3-1\right]}{0,01} = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{(1,01)^3}{(1,01)^3-1}$ (triệu đồng).

Câu 50: Chọn A

Sau đúng 6 tháng từ ngày vay ông Nam thì số tiền ông nợ ngân hàng là $500.1,008 = 504$ triệu

Áp dụng CT $a = \dfrac{A.r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$ ta có: $1000000 = \dfrac{504.10^6.0,8\%(1+0,08\%)^n}{(1+0,8\%)^n - 1}$

Suy ra: $n = 63$. Vậy sau 69 tháng anh Nam trả hết số tiền trên

Giải thích công thức

Gọi a là số tiền trả hàng tháng.

Cuối tháng 1, nợ: $A(1+r)$.

Trả a đồng nên còn nợ: $A(1+r) - a$.

Cuối tháng 2, nợ: $\left[A(1+r)-a\right](1+r) = A(1+r)^2 - a(1+r)$.

Trả a đồng nên còn nợ: $A(1+r)^2 - a(1+r) - a$.

Cuối tháng 3, nợ: $\left[A(1+r)^2 - a(1+r) - a\right](1+r) = A(1+r)^3 - a(1+r)^2 - a(1+r)$.

Trả a đồng nên còn nợ: $A(1+r)^3 - a(1+r)^2 - a(1+r) - a$.

.

Cuối tháng n, nợ: $(1+r)^n - a(1+r)^{n-1} - a(1+r)^{n-2} - ... - a(1+r)$.

Trả a đồng nên còn nợ: $A(1+r)^n - a(1+r)^{n-1} - a(1+r)^{n-2} - ... - a(1+r) - a$

Trả hết nợ khi

$A(1+r)^n - a(1+r)^{n-1} - a(1+r)^{n-2} - ... - a(1+r) - a = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{A.r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$

.

DẠNG TOÁN THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN TĂNG TRƯỞNG

Câu 1. Dân số thế giới được ước tính theo công thức $P_n = P_0.e^{nr}$, trong đó P_0 là dân số của năm lấy làm mốc, P_n là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Biết rằng năm 2001 dân số Việt Nam là 76.685.800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7%. Hỏi cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 115 triệu người.

A. 2023. **B.** 2025. **C.** 2027. **D.** 2020.

Câu 2. Theo dự báo với mức tiêu thụ dầu không đổi như hiện nay thì trữ lượng dầu của một nước sẽ hết sau 50 năm nữa. Nhưng do nhu cầu thực tế nên mức tiêu thụ dầu tăng lên 5% mỗi năm. Giả sử N là số năm tiêu thụ hết số dầu dự trữ đúng với nhu cầu thực tế trên. Tìm giá trị N.

A. 26. **B.** 24. **C.** 25. **D.** 27.

Câu 3. Một điện thoại đang nạp pin, dung lượng pin nạp được tính theo công thức $Q(t) = Q_0.\left(1 - e^{-t\sqrt{2}}\right)$ với t là khoảng thời gian tính bằng giờ và Q_0 là dung lượng nạp tối đa (pin đầy). Hãy tính thời gian nạp pin của điện thoại tính từ lúc cạn hết pin cho đến khi điện thoại đạt được 90% dung lượng pin tối đa (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).

A. $t \approx 1{,}65$ giờ. **B.** $t \approx 1{,}61$ giờ. **C.** $t \approx 1{,}63$ giờ. **D.** $t \approx 1{,}50$ giờ.

Câu 4. Trong năm đầu tiên đi làm, anh A được nhận lương là 10 triệu đồng mỗi tháng. Cứ hết một năm, anh A lại được tăng lương, mỗi tháng của năm sau tăng 10% so với mỗi tháng của năm trước. Mỗi khi lĩnh lương, anh A đều cất đi phần lương tăng so với năm ngay trước để tiết kiệm mua ô tô. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì anh A mua được ô tô giá 500 triệu, biết rằng anh A được gia đình hỗ trợ 50% giá trị chiếc xe?

A. 11. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 13.

Câu 5. Một nghiên cứu cho thấy một nhóm học sinh được xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ nhớ được bao nhiêu % mỗi tháng. Sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh tính theo công thức $M(t) = 75 - 20\ln(t+1), t \geq 0$ (đơn vị %). Hỏi sau khoảng bao lâu thì tỉ số học sinh nhớ được danh sách đó là dưới 10%.

A. Sau khoảng 25 tháng. **B.** Sau khoảng 24 tháng.

C. Sau khoảng 22 tháng. **D.** Sau khoảng 23 tháng.

Câu 6. Khi nuôi một loại virus trong một dưỡng chất đặc biệt sau một khoảng thời gian, người ta nhận thấy số lượng virus có thể được ước lượng theo công thức $m(t) = m_0.2^{kt}$, trong đó m_0 là số lượng virus (đơn vị "con") được nuôi tại thời điểm ban đầu; k là hệ số đặc trưng của dưỡng chất đã sử dụng để nuôi virus; t là khoảng thời gian nuôi virus (tính bằng phút). Biết rằng sau 2 phút, từ một lượng virus nhất định đã sinh sôi thành đàn 112 con, và sau 5 phút ta có tổng cộng 7168 con virus. Hỏi sau 10 phút trong dưỡng chất này, tổng số virus có được là bao nhiêu con?

A. 7340032 con. **B.** 874496 con. **C.** 2007040 con. **D.** 4014080 con.

Câu 7. Áp suất không khí P (đo bằng milimet thủy ngân, kí hiệu mmHg) là một đại lượng được tính theo công thức $P = P_0 e^{xi}$ trong đó x là độ cao (đo bằng mét, so với mực nước biển), $P_0 = 760\text{mmHg}$ là áp suất ở mực nước biển, i là hệ số suy giảm. Biết rằng, ở độ cao 1000 m thì áp suất của không khí là 672,72 mmHg. Hỏi áp suất của không khí ở độ cao 15 km gần nhất với số nào trong các số sau?

A. 121. **B.** 122. **C.** 123. **D.** 124.

Câu 8. Sự tăng trưởng của loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = Ae^{r.t}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng $(r > 0)$, t là thời gian tăng trưởng. Biết số vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Thời gian để số vi khuẩn tăng gấp đôi số vi khuẩn ban đầu gần nhất với kết quả nào trong các kết quả sau

A. 2 giờ 5 phút. **B.** 3 giờ 15 phút. **C.** 4 giờ 10 phút. **D.** 3 giờ 9 phút.

Câu 9. Với mức tiêu thụ thức ăn của trang trại A không đổi như dự định thì lượng thức ăn dự trữ sẽ đủ cho 100 ngày. Nhưng thực tế, mức tiêu thụ thức ăn tăng thêm 4% mỗi ngày (ngày sau tăng 4% so với ngày trước đó). Hỏi thực tế lượng thức ăn dự trữ đó chỉ đủ dùng cho bao nhiêu ngày?

A. 42. **B.** 40. **C.** 39. **D.** 41.

Câu 10. Ông An có 200 triệu đồng gửi ngân hàng với kì hạn 1 tháng với lãi suất $0{,}6\%/1$ tháng được trả vào cuối kì. Sau mỗi kì hạn, ông đến tất toán cả lãi và gốc, rút ra 4 triệu đồng để tiêu dùng, số tiền còn lại ông gửi vào ngân hàng theo phương thức trên (phương thức giao dịch và lãi luất không thay đổi trong suốt quá trình ông gửi). Sau đúng 1 năm (đúng 12 kì hạn) kể từ ngày gửi, ông An tất toán và rút toàn bộ số tiền nói trên ở ngân hàng, số tiền đó là bao nhiêu? (làm tròn đến nghìn đồng)

A. 169234 (nghìn đồng). **B.** 165288 (nghìn đồng).

C. 169269 (nghìn đồng). **D.** 165269 (nghìn đồng).

Câu 11. Gọi $N(t)$ là số phần trăm cacbon 14 còn lại trong một bộ phận của một cây sinh trưởng từ t năm trước đây thì ta có công thức $N(t) = 100.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{A}}(\%)$ với A là hằng số. Biết rằng một mẫu gỗ có tuổi khoảng 3754 năm thì lượng cacbon 14 còn lại là 65%. Phân tích mẫu gỗ từ một công trình kiến trúc cổ, người ta thấy lượng cacbon 14 còn lại trong mẫu gỗ là 79%. Hãy xác định tuổi của mẫu gỗ được lấy từ công trình đó.

A. 2057. **B.** 2020. **C.** 2135. **D.** 2054.

Câu 12. Để đảm bảo điều kiện sinh sống của người dân tại thành phố X, một nhóm các nhà khoa học cho biết với các điều kiện y tế, giáo dục, cơ sở hạ tầng,… của thành phố thì chỉ nên có tối đa 50000 người dân sinh sống. Các nhà khoa học cũng chỉ ra rằng dân số được ước tính theo công thức $S = A.e^{ni}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, i là tỉ lệ tăng dân số hằng năm. Biết rằng vào đầu năm 2017, thành phố X có 40000 người và tỉ lệ tăng dân số là 1,2%. Hỏi trong năm nào thì dân số thành phố bắt đầu vượt ngưỡng cho phép, biết rằng số liệu chỉ được lấy vào đầu mỗi năm và giả thiết tỉ lệ tăng dân số không thay đổi?

A. 2034. **B.** 2035. **C.** 2036. **D.** 2037.

Câu 13. Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn trong phòng thí nghiệm được tính theo công thức $S(t) = S_0.e^{r.t}$. Trong đó S_0 là số lượng vi khuẩn ban đầu, $S(t)$ là số lượng vi khuẩn có sau t (phút), r là tỷ lệ tăng trưởng $(r > 0)$, t (tính theo phút) là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu có 500 con và sau 5 giờ có 1500 con. Hỏi sau bao nhiêu giờ kể từ lúc ban đầu có 500 con để số lượng vi khuẩn đạt 121500 con?

A. 35 (giờ). **B.** 25 (giờ). **C.** 45 (giờ). **D.** 15 (giờ).

Câu 14. Khối lượng chất đã bị phân rã sau thời gian t được xác định bởi công thức $\Delta m = m_0.\left(1-2^{-\frac{t}{T}}\right)$, trong đó: m_0 là khối lượng chất phóng xạ ban đầu; T là chu kỳ bán rã. Một chất phóng xạ có chu kỳ bán rã là 20 phút. Ban đầu một mẫu chất đó có khối lượng là $2 gram$. Hỏi sau 1 giờ 40 phút, lượng chất còn lại bao nhiêu phần trăm so với ban đầu?

A. $19,37\%$. **B.** $3,125\%$. **C.** $6,25\%$. **D.** $87,05\%$.

Câu 15. Ông Nam gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn một năm, với công thức $C = A(1+r)^n$, lãi suất $r = 12\%$ một năm. Trong đó C là số tiền nhận được (cả gốc lẫn lãi) sau thời gian n năm. Tìm n nguyên dương nhỏ nhất để sau n năm ông Nam nhận được số tiền lãi hơn 40 triệu đồng. (Giả sử rằng lãi suất hằng năm không thay đổi).

A. 5. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 16. Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t) = s(0)2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc bắt đầu, số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con?

A. 48 phút. **B.** 19 phút. **C.** 7 phút. **D.** 12 phút.

Câu 17. Công ty bất động sản Hoàng Thổ đang đầu tư xây dựng và kinh doanh khu nghỉ dưỡng. Công ty dự định tổ chức quảng bá theo hình thức quảng cáo trên truyền hình. Nghiên cứu của công ty cho thấy: nếu cứ sau n lần phát quảng cáo thì tỉ lệ người xem quảng cáo đó tới khu nghỉ dưỡng tuân theo công thức $P(n) = \dfrac{1}{1+65.3^{-0.13n}}$. Hỏi ít nhất cần bao nhiêu lần phát quảng cáo để tỉ lệ người xem tới khu nghỉ dưỡng đạt trên 50%?

A. 30. **B.** 29. **C.** 39. **D.** 31.

Câu 18. Các loài cây xanh trong quá trình quang hợp sẽ nhận được một lượng nhỏ cacbon 14 (một đồng vị của cacbon). Khi một bộ phận của cái cây nào đó bị chết thì hiện tượng quang hợp cũng ngưng và nó sẽ không nhận thêm cacbon 14 nữa. Lượng cacbon 14 của bộ phận đó sẽ phân hủy một cách chậm chạp, chuyển hóa thành nitơ 14. Biết rằng nếu gọi $P(t)$ là số phần trăm cacbon 14 còn lại trong một bộ phận của cái cây sinh trưởng từ t năm trước đây thì $P(t)$ được tính theo công thức $P(t) = 100.(0,5)^{\frac{t}{5750}}(\%)$. Phân tích một mẩu gỗ từ một công trình kiến trúc cổ, người ta thấy lượng cacbon 14 còn lại trong mẩu gỗ đó là 60%. Niên đại của công trình kiến trúc đó gần với số nào sau đây nhất? (Giả sử khoảng thời gian từ lúc thu hoạch gỗ đến khi xây dựng công trình đó là không đáng kể).

A. 4238. **B.** 8243. **C.** 3248. **D.** 2483.

Câu 19. Anh Bảo gửi 27 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép, kỳ hạn là một quý, với lãi suất $1,85\%$ một quý. Hỏi thời gian nhanh nhất là bao lâu để anh Bảo có được ít nhất 36 triệu đồng tính cả vốn lẫn lãi?

A. 19 quý. **B.** 15 quý. **C.** 16 quý. **D.** 20 quý.

Câu 20. Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng theo thể thức lãi kép, với lãi suất 1,85% trên một quý. Hỏi sau tối thiểu bao nhiêu quý, người đó nhận được ít nhất 72 triệu đồng (cả vốn ban đầu và lãi), nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền và lãi suất không thay đổi?

A. 20 quý. **B.** 19 quý. **C.** 14 quý. **D.** 15 quý.

Câu 21. Quan tâm tới vấn đề cải thiện việc làm của huyện A thuộc tỉnh miền núi địa đầu Tổ quốc, Sở Lao động - Thương binh và Xã hội tiến hành tạo điều kiện tạo việc làm cho những người ở độ tuổi lao động dưới hai hình thức lao động theo hợp tác xã tại địa phương hoặc tìm kiếm việc làm ở các khu công nghiệp lớn ở trong nước. Cho thấy sau n năm mức độ việc làm có thu nhập ổn định cho người dân tăng theo công thức $A_n = \dfrac{1}{1+39.\pi^{-0,25n}}$. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm , đơn vị huyện A có tỉ lệ lao động có thu nhập ổn định trong huyện là trên 65% ?

A. 13. **B.** 15. **C.** 20. **D.** 25.

Câu 22. Số lượng loài vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t) = s(0).5^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu , $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 2 phút thì số lượng vi khuẩn A là 400 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 250 triệu con?

A. 4 phút. **B.** 7 phút. **C.** 8 phút. **D.** 6 phút.

Câu 23. Cho biết chu kì bán rã của chất phóng xạ Radi ${}^{226}Ra$ là 1602 năm (tức là một lượng ${}^{226}Ra$ sau 1602 năm phân hủy thì chỉ còn lại một nửa). Sự phân hủy được tính theo công thức $S = A.\mathrm{e}^{rt}$ trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hàng năm $(r<0)$, t là thời gian phân hủy, S là lượng còn lại sau thời gian phân hủy. Hỏi 5 gam ${}^{226}Ra$ sau 4000 năm phân hủy sẽ còn lại bao nhiêu gam (làm tròn đến 3 chữ số thập phân)?

A. $0,886$ gam. **B.** $1,023$ gam. **C.** $0,795$ gam. **D.** $0,923$ gam.

Câu 24. Giả sử vào cuối năm thì một đơn vị tiền tệ mất 10% giá trị so với đầu năm. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho sau n năm, đơn vị tiền tệ đó sẽ mất đi ít nhất 90% giá trị của nó?

A. 16. **B.** 18. **C.** 20. **D.** 22.

Câu 25. Cho biết chu kì bán rã của chất phóng xạ Plutônium Pu^{239} là 24360 năm (tức là lượng ${}^{239}Pu$ sau 24360 năm phân hủy chỉ còn lại một nửa). Sự phân hủy được tính bởi công thức $S = Ae^{rt}$, trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hàng năm $(r<0)$, t (năm) là thời gian phân hủy, S là lượng còn lại sau thời gian phân hủy t. Hỏi 15 gam ${}^{239}Pu$ sau bao nhiêu năm phân hủy sẽ còn lại 2 gam? (làm tròn đến chữ số hàng đơn vị)

A. 70812 năm. **B.** 70698 năm. **C.** 70947 năm. **D.** 71960 năm.

Câu 26. Anh An gửi 27 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép theo kỳ hạn 1 quý với lãi suất là 1,85% một quý. Hỏi thời gian ít nhất mà anh An có được 36 triệu cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu?

A. 16 năm. **B.** 15 quý. **C.** 4 năm. **D.** 15 năm.

Câu 27. Một người thả 1 lá bèo vào một cái ao, sau 20 ngày thì bèo sinh sôi phủ kín mặt ao. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu ngày thì bèo phủ được $\dfrac{1}{20}$ mặt ao biết rằng sau mỗi ngày thì lượng bèo tăng gấp 4 lần lượng bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi?

A. 18 (ngày).. **B.** 1 (ngày). **C.** 16 (ngày). **D.** 19 (ngày).

Câu 28. Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là $85.412.439$ người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là $0,8\%$. Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = A.e^{Nr}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là số dân sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm). Nếu dân số vẫn tăng với tỉ lệ như vậy thì bắt đầu từ năm nào dưới dây dân số nước ta trên 100 triệu người?

A. 2023. **B.** 2020. **C.** 2022. **D.** 2021.

Câu 29. Cường độ một trận động đất được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$ độ Richter, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất

ở San Francisco có cường độ đo được 8 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở Nhật Bản có cường độ đo được 6 độ Richer. Hỏi trận động đất ở San Francisco có biên độ gấp bao nhiêu lần biên độ trận động đất ở Nhật Bản?

A. 1000 lần. **B.** 10 lần. **C.** 2 lần. **D.** 100 lần.

Câu 30. Giả sử số lượng một bầy ruồi tại thời điểm t được tính theo công thức là $N(t)=N_o.e^{kt}$, trong đó N_o là số lượng bầy ruồi tại thời điểm $t=0$ và k là hằng số tăng trưởng của bầy ruồi. Biết số lượng bầy ruồi tăng lên gấp đôi sau 9 ngày và biết $N_0=100$ con. Hỏi sau bao nhiêu ngày bầy ruồi có 800 con?

A. 27. **B.** 25. **C.** 28. **D.** 26.

Câu 31. Anh Nam vay tiền ngân hàng 1 tỷ đồng theo phương thức trả góp với lãi suất $0,5\%/$ tháng. Sau mỗi tháng anh Nam trả 30 triệu đồng, chịu lãi số tiền chưa trả. Hỏi sau bao nhiêu tháng anh Nam trả hết nợ?

A. 35 tháng. **B.** 36 tháng. **C.** 37 tháng. **D.** 38 tháng.

Câu 32. Một hộ nông dân được ngân hàng cho vay mỗi năm 10 triệu đồng theo diện chính sách để đầu tư trồng cây ăn quả (được vay trong 4 năm đầu theo thủ tục vay một năm 1 lần vào thời điểm đầu năm dương lịch). Trong 4 năm đầu, khi vườn cây chưa cho thu hoạch thì ngân hàng tính lãi suất bằng 3%/năm. Bắt đầu từ năm thứ 5 đã có thu hoạch từ vườn cây nên ngân hàng dừng cho vay và tính lãi 8%/năm. Tính tổng số tiền hộ nông dân đó nợ ngân hàng sau 5 năm?

A. 46188667 đồng. **B.** 43091358 đồng. **C.** 46538667 đồng. **D.** 48621980 đồng.

Câu 33. Số lượng của một loại vi khuẩn X trong phòng thí nghiệm được tính theo công thức $P(t)=P_0.2^t$, trong đó P_0 là số lượng vi khuẩn ban đầu, $P(t)$ là số lượng vi khuẩn X sau t phút. Biết sau 2 phút thì số lượng vi khuẩn X là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn X là 10 triệu con

A. 5 phút. **B.** 8 phút. **C.** 7 phút. **D.** 6 phút.

Câu 34. Một công ty khai thác thủy lợi cho biết đã kết thúc đợt xả nước đẩy mặn xuống sông Trà Vinh. Giúp người dân Trà Vinh đảm bào nước sinh hoạt, phục vụ nông nghiệp. Một đợt xả nước x ngày có công suất $86400\sqrt{800-x^2}\left(m^3/ngay\right)$. Để xả $100000000\,m^3$ nước cần ít nhất mấy đợt xả?

A. 1 đợt. **B.** 2 đợt. **C.** 3 đợt. **D.** 4 đợt.

Câu 35. Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất $0,5\%/$ tháng và ông ta rút đều đặn mỗi tháng một triệu đồng kể từ sau ngày gửi một tháng cho đến khi hết tiền (tháng cuối cùng có thể không còn đủ một triệu đồng). Hỏi sau bao nhiêu tháng ông ta rút hết tiền?

A. 139. **B.** 140. **C.** 100. **D.** 138.

Câu 36. Chu kì bán rã của chất phóng xạ Plutolium ^{239}Pu là 24360 năm (tức là một lượng chất ^{239}Pu sau 24360 năm phân hủy còn một nửa). Sự phân hủy này được tính theo công thức $S=Ae^{-rt}$, trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hàng năm, t là thời gian phân hủy, S là lượng còn lại sau thời gian phân hủy t. Hỏi 20 gam ^{239}Pu sau ít nhất bao nhiêu năm thì phân hủy còn 4 gam?

A. 56563 năm. **B.** 56562 năm. **C.** 56561 năm. **D.** 56564 năm.

Câu 37. Trong môi trường nuôi cấy ổn định người ta nhận thấy rằng: cứ sau đúng 5 ngày số lượng loài của vi khuẩn A tăng lên gấp đôi, còn sau đúng 10 ngày số lượng loài của vi khuẩn B tăng lên gấp ba. Giả sử ban đầu có 100 con vi khuẩn A và 200 con vi khuẩn B, hỏi sau bao nhiêu ngày

nuôi cấy trong môi trường đó thì số lượng loài vi khuẩn A vượt quá số lượng loại vi khuẩn B, biết rằng tốc độ tăng trưởng của mỗi loài ở mọi thời điểm là như nhau?

A. 26 (ngày). **B.** 23 (ngày). **C.** 25 (ngày). **D.** 24 (ngày).

Câu 38. Cho áp suất không khí P (đo bằng milimet thuỷ ngân, kí hiệu là mmHg) suy giảm mũ so với độ cao x (đo bằng mét), tức P giảm theo công thức $P = P_0 e^{xi}$ trong đó $P_0 = 760 mmHg$ là áp suất ở mực nước biển $(x = 0)$, i là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao $1000m$ thì áp suất của không khí là $672,71 mmHg$. Hỏi áp suất không khí ở độ cao $3580m$ gần với số nào sau đây nhất?

A. $491 mmHg$. **B.** $490 mmHg$. **C.** $492 mmHg$. **D.** $493 mmHg$.

Câu 39. Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S_n = S_0.e^{r.n}$, trong đó S_0 là dân số của năm lấy làm mốc, S_n là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Tính đến đầu năm 2011, dân số toàn tỉnh Bình Phước đạt gần 905300 người, mức tăng dân số là $1,37\%$ mỗi năm. Tỉnh thực hiện tốt chủ trương 100% trẻ em đúng độ tuổi vào lớp 1. Hỏi đến năm học 2024 – 2025 ngành giáo dục của tỉnh cần chuẩn bị ít nhất bao nhiêu phòng học cho học sinh lớp 1, mỗi phòng chỉ dành cho 35 học sinh? Giả sử trong năm sinh của lứa học sinh vào lớp 1 đó toàn tỉnh có 2400 người chết, số trẻ tử vong trước 6 tuổi không đáng kể.

A. 458. **B.** 462. **C.** 459. **D.** 461.

Câu 40. Trong năm đầu tiên đi làm, anh A được nhận lương là 10 triệu đồng mỗi tháng. Cứ hết một năm, anh A lại được tăng lương, mỗi tháng năm sau tăng 12% so với mỗi tháng năm trước. Mỗi khi lĩnh lương anh A đều cất đi phần lương tăng so với năm ngay trước để tiết kiệm mua ô tô. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì anh A mua được ô tô giá 500 triệu biết rằng anh A được gia đình hỗ trợ 32% giá trị chiếc xe?

A. 11. **B.** 13. **C.** 10. **D.** 12.

Câu 41. Ông Trung vay ngân hàng 800 triệu đồng theo hình thức trả góp hàng tháng trong 60 tháng. Lãi suất ngân hàng cố định $0,5\%$/tháng. Mỗi tháng ông Trung trả (lần đầu tiên phải trả là 1 tháng sau khi vay và hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng) số tiền gốc là số tiền vay ban đầu chia cho 60 và số tiền lãi sinh ra từ số tiền gốc còn nợ ngân hàng. Tổng số tiền lãi mà ông Trung phải trả trong toàn bộ quá trình trả nợ là bao nhiêu?

A. 118.000.000 đồng. **B.** 126.066.666 đồng.

C. 122.000.000 đồng. **D.** 135.500.000 đồng.

Câu 42. Các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm virus corona kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3$ với $(0 \le t \le 25)$. Nếu coi $f(t)$ là một hàm xác định trên đoạn $[0;25]$ thì hàm $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t. Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất?

A. 15. **B.** 20. **C.** 10. **D.** 5.

Câu 43. Theo kế hoạch, với mức tiêu thu thức ăn chăn nuôi của trang trại X không đổi theo dự định thì lượng thức ăn dự trữ sẽ đủ dùng trong 365 ngày. Thực tế, 50 ngày đầu mức tiêu thụ thức ăn với ngày sau tăng 5% so với ngày trước, những ngày tiếp theo mức tiêu thụ thức ăn ngày sau tăng 10% so với ngày trước. Hỏi thực tế lượng thức ăn dự trữ đó đủ dùng trong bao nhiêu ngày?

A. 9. **B.** 60. **C.** 8. **D.** 59.

Câu 44. Áp suất không khí P theo công thức $P=P_0.\mathrm{e}^{kx}\ (\mathrm{mmHg})$, trong đó x là độ cao, $P_0=760\ (\mathrm{mmHg})$ là áp suất không khí ở mức nước biển $(x=0)$, k là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao 1000 m thì áp suất không khí là $672{,}71\ (\mathrm{mmHg})$. Tính áp suất của không khí ở độ cao 4000 m.

A. $466{,}52\ (\mathrm{mmHg})$. **B.** $530{,}23\ (\mathrm{mmHg})$. **C.** $530{,}73\ (\mathrm{mmHg})$. **D.** $545{,}01\ (\mathrm{mmHg})$.

Câu 45. Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $S=A.\mathrm{e}^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng, t là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Hỏi số con vi khuẩn sau 10 giờ?

A. 800. **B.** 900. **C.** 950. **D.** 1000.

Câu 46. Một cửa hàng bán lẻ bán 2500 cái tivi mỗi năm. Chi phí gửi trong kho là 10USD một cái một năm. Để đặt hàng nhà sản xuất thì mỗi lần chi phí cố định là 20USD, cộng thêm 9USD mỗi chiếc. Biết rằng số lượng tivi trung bình gửi trong kho bằng một nửa số tivi của mỗi lần đặt hàng. Như vậy cửa hàng nên đặt hàng nhà sản xuất bao nhiêu lần mỗi năm và mỗi lần đặt bao nhiêu cái để chi phí hàng tồn kho là thấp nhất ?

A. 20 lần mỗi năm và 90 cái mỗi lần. **B.** 25 lần mỗi năm và 110 cái mỗi lần.
C. 25 lần mỗi năm và 120 cái mỗi lần. **D.** 25 lần mỗi năm và 100 cái mỗi lần.

Câu 47. Một công ty thời trang vừa tung ra thị trường một mẫu quần áo mới và họ tổ chức quảng cáo trên truyền hình mỗi ngày. Một nghiên cứu của một thị trường uy tín cho thấy, nếu sau t lần quảng cáo được phát trên truyền hình thì số phần trăm người xem mua sản phẩm này là: $P=\dfrac{100}{1+49.\mathrm{e}^{-0{,}015t}}(\%)$. Hỏi cần phát quảng cáo trên truyền hình tối thiểu bao nhiêu lần để số người mua sản phẩm đạt hơn 80%?

A. 356 lần. **B.** 348 lần. **C.** 352 lần. **D.** 344 lần.

Câu 48. Ông An gửi 250 triệu đồng ở ngân hàng theo hình thức lãi kép với lãi suất $9{,}2\%$/năm. Hỏi sau bao nhiêu năm ông An có số tiền ít nhất là 650 triệu đồng (giả sử lãi suất hàng năm không đổi)?

A. 11. **B.** 10. **C.** 18. **D.** 19.

Câu 49. Gọi $I(t)$ là số ca bị nhiễm bệnh Covid-19 ở quốc gia X sau t ngày khảo sát. Khi đó ta có công thức $I(t)=A.\mathrm{e}^{r_0(t-1)}$ với A là số ca bị nhiễm trong ngày khảo sát đầu tiên, r_0 là hệ số lây nhiễm. Biết rằng ngày đầu tiên khảo sát có 500 ca bị nhiễm bệnh và ngày thứ 10 khảo sát có 1000 ca bị nhiễm bệnh. Hỏi ngày thứ 20 số ca nhiễm bệnh gần nhất với số nào dưới đây, biết rằng trong suốt quá trình khảo sát hệ số lây nhiễm là không đổi?

A. 2000. **B.** 2160. **C.** 2340. **D.** 2520.

Câu 50. Áp suất không khí P (đo bằng milimet thủy ngân, kí hiệu mmHg) theo công thức $P=P_0.e^{kx}\ (\mathrm{mmHg})$,trong đó x là độ cao (đo bằng mét), $P_0=760\ (\mathrm{mmHg})$ là áp suất không khí ở mức nước biển $(x=0)$, k là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao 1000 m thì áp suất không khí là $672{,}71\ (\mathrm{mmHg})$. Tính áp suất của không khí ở độ cao 3000 m.

A. $527{,}06\ (\mathrm{mmHg})$. **B.** $530{,}23\ (\mathrm{mmHg})$. **C.** $530{,}73\ (\mathrm{mmHg})$. **D.** $545{,}01\ (\mathrm{mmHg})$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.A	3.C	4.D	5.A	6.A	7.B	8.D	9.D	10.C
11.D	12.C	13.B	14.B	15.D	16.C	17.A	18.A	19.C	20.A
21.B	22.D	23.A	24.D	25.A	26.C	27.A	28.D	29.D	30.A
31.C	32.C	33.D	34.C	35.A	36.A	37.C	38.A	39.B	40.B
41.C	42.A	43.D	44.A	45.B	46.D	47.C	48.A	49.B	50.A

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. **Chọn B**

Theo bài ra ta xét phương trình:

$$P_n = 115.10^6 \Leftrightarrow P_0.e^{nr} = 115.10^6 \Leftrightarrow \ln P_0 + nr = \ln\left(115.10^6\right)$$

Suy ra $n = \dfrac{\ln\left(115.10^6\right) - \ln P_0}{r} \approx 23,8$.

Như vậy đến năm 2025 dân số nước ta sẽ ở mức 115 triệu người.

Câu 2. **Chọn A**

Gọi mức tiêu thụ dầu không đổi hằng năm như hiện nay là A

Khi đó lượng dầu tiêu thụ sau 50 năm là $50A$

Gọi u_n là số lượng dầu tiêu thụ vào năm thứ N

Theo đề ta có: $\begin{cases} u_{n+1} = 1,05.u_n \\ u_1 = A \end{cases}$

Vì N là số năm tiêu thụ hết dầu dự trữ đúng với nhu cầu thực tế trên nên ta có:

$$u_1 + u_2 + ... + u_N = 50A \Leftrightarrow A.\frac{1-1,05^N}{1-1,05} = 50A \Leftrightarrow \frac{1,05^N - 1}{0,05} = 50 \Leftrightarrow 1,05^N = 3,5$$

$$\Leftrightarrow N = \log_{1,05} 3,5 \Leftrightarrow N \approx 25,68 .$$

Câu 3. **Chọn C**

Theo bài ta có

$$Q_0.\left(1 - e^{-t\sqrt{2}}\right) = 0,9.Q_0 \Leftrightarrow 1 - e^{-t\sqrt{2}} = 0,9 \Leftrightarrow e^{-t\sqrt{2}} = 0,1 \Leftrightarrow t = -\frac{\ln(0,1)}{\sqrt{2}} \approx 1,63 .$$

Vậy sau khoảng thời gian $t \approx 1,63$ giờ thì dung lượng pin của điện thoại tính từ lúc cạn hết pin sẽ nạp được 90% dung lượng pin tối đa.

Câu 4. **Chọn D**

Số tiền anh A cần tiết kiệm là $500 - 500.0,5 = 250$ (triệu).

Gọi số tiền mà anh A nhận được ở mỗi tháng trong năm thứ n là u_n (triệu).

Ta có $u_n = 10.\left(1 + 0,1\right)^{n-1} = 10.\left(1,1\right)^{n-1}$ (triệu).

Số tiền mà anh A tiết kiệm được sau n năm là:

$$12.\left[\left(u_2 - u_1\right) + \left(u_3 - u_2\right) + ... + \left(u_{n-1} - u_{n-2}\right) + \left(u_n - u_{n-1}\right)\right] = 12.\left(u_n - u_1\right)$$

$=12.\left[10.(1,1)^{n-1}-10\right]=120.\left[(1,1)^{n-1}-1\right].$

Để anh A mua được ô tô thì: $120.\left[(1,1)^{n-1}-1\right]\geq 250\Leftrightarrow(1,1)^{n-1}\geq\frac{37}{12}\Leftrightarrow n\geq\log_{1,1}\frac{37}{12}+1\approx 12,814$

Vậy sau 13 năm thì anh A sẽ tiết kiệm đủ tiền để mua ô tô.

Câu 5. **Chọn A**

Ta có: $75-20\ln(t+1)\leq 10\Leftrightarrow\ln(t+1)\geq 3,25\Leftrightarrow t\geq e^{3,25}-1(\approx 24,79)$.

Khoảng 25 tháng thì số học sinh nhớ được danh sách đó là dưới 10%.

Câu 6. **Chọn A**

Theo công thức $m(t)=m_0.2^{kt}$ ta có: $\begin{cases}112=m(2)=m_0.2^{2k}\\7168=m(5)=m_0.2^{5k}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m_0=7\\k=2\end{cases}$

Vậy sau 10 phút trong dưỡng chất này, tổng số virus có được là: $m(10)=7.2^{2.10}=7340032$ con.

Câu 7. **Chọn B**

Do ở độ cao 1000 m, áp suất của không khí là 672,72 mmHg nên ta có:

$$672,72=760e^{1000i}\Leftrightarrow i=\frac{1}{1000}\ln\frac{672,72}{760}$$

Khi ở độ cao 15 km tức là 15000 m thì áp suất của không khí:

$$P=760\mathrm{e}^{15000\times\frac{1}{1000}\ln\frac{672,72}{760}}\approx 121,93399$$

Vậy, áp suất của không khí ở độ cao 15 km gần nhất với số 122.

Câu 8. **Chọn D**

Vì sau 5h có 300 con vi khuẩn, nên suy ra $300=100.\mathrm{e}^{5r}\Leftrightarrow r=\frac{\ln 3}{5}$.

Để vi khuẩn tăng gấp đôi thì ta có phương trình:

$200=100.\mathrm{e}^{\frac{1}{5}\ln 3.t}\Leftrightarrow\mathrm{e}^{\frac{1}{5}\ln 3.t}=2\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{5}.t}=2\Leftrightarrow t=5\log_3 2\Leftrightarrow t\approx 3,15$

Vậy thời gian để số vi khuẩn tăng gấp đôi số vi khuẩn ban đầu là 3 giờ 9 phút.

Câu 9. **Chọn D**

Giả sử lượng thức ăn ngày đầu tiên là m. Tổng số thức ăn trong kho dự trữ là $100m$.

Thực tế: Ngày đầu tiên dùng hết m thức ăn.

Ngày thứ 2 dùng hết $m(1+4\%)$ thức ăn.

Ngày thứ 3 dùng hết $m(1+4\%)^2$ thức ăn.

……

Ngày thứ n dùng hết $m(1+4\%)^{n-1}$ thức ăn. Giả sử ngày thứ n ta dùng hết thức ăn.

Ta có phương trình sau: $m+m(1+4\%)+m(1+4\%)^2+...+m(1+4\%)^{n-1}=100m$

$$\Leftrightarrow 1+(1+4\%)+(1+4\%)^2+...+(1+4\%)^{n-1}=100\Leftrightarrow\frac{(1+4\%)^n-1}{(1+4\%)-1}=100$$

$\Leftrightarrow (1+4\%)^n = 5 \Leftrightarrow n = \log_{1,04} 5 \approx 41,04 \longrightarrow$ đủ cho 41 ngày.

Câu 10. Chọn C.

Nếu cuối mỗi kì hạn, ông An không rút ra 4 triệu thì số tiền ông có được sau 1 năm là $A = 200000.(1+0,6\%)^{12}$ nghìn đồng

Đầu tháng thứ 2 ông An rút về 4 triệu đồng, nếu để nguyên số tiền đó để gửi thì đến hết tháng thứ 12 ngân hàng phải trả cả gốc và lãi cho ông ứng với 4 triệu đồng đó là $B_1 = 4000.(1+0,6\%)^{11} = 4000.R^{11}$ (nghìn đồng) nên đến hết tháng thứ 12, số tiền giả định là A không còn được lấy nguyên vẹn mà bị trừ đi số tiền B_1

Tương tự, với 4 triệu đồng ông rút ở tháng thứ 3, 4,., 11 sẽ bị trừ đi tương ứng là:

$B_2 = 4000.R^{10}, B_3 = 4000.R^9, ..., B_{11} = 4000.R^1$

Do vậy, số tiền ông An nhận được khi tất toán ở lần cuối cùng là:

$A - (B_2 + B_3 + ... + B_{11}) = 200000.R^{12} - 4000(R^{11} + R^{10} + ... + R)$

$= 200000.R^{12} - 4000.R.\dfrac{1-R^{11}}{1-R} \approx 169269$ (nghìn đồng).

Câu 11. Chọn D

Theo bài ta có $65 = 100.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{3754}{A}} \Leftrightarrow 0,65 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{3754}{A}} \Leftrightarrow \dfrac{3754}{A} = \log_{\frac{1}{2}} 0,65 \Leftrightarrow A = \dfrac{3754}{\log_{\frac{1}{2}} 0,65}$

Do mẫu gỗ còn 79% lượng Cacbon 14 nên ta có: $79 = 100.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{A}} \Leftrightarrow 0,79 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{A}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{t}{A} = \log_{\frac{1}{2}} 0,79 \Leftrightarrow t = A.\log_{\frac{1}{2}} 0,79 = \dfrac{3754}{\log_{\frac{1}{2}} 0,65}.\log_{\frac{1}{2}} 0,79 \approx 2054$.

Câu 12. Chọn C

Theo bài ra ta có: $40000.e^{0,012n} \le 50000 \Leftrightarrow e^{0,012n} \le \dfrac{5}{4} \Leftrightarrow 0,012n \le \ln\dfrac{5}{4} \Leftrightarrow n \le 18,595$.

Suy ra sau 19 năm thì dân số vượt ngưỡng cho phép.

Vậy trong năm 2036 dân số thành phố sẽ vượt ngưỡng cho phép.

Câu 13. Chọn B

Ta có : $S_0 = 500$ (con) ; 5 giờ $= 300$ phút.

Sau 5 giờ số vi khuẩn là : $S(300) = 500.e^{300r} \Leftrightarrow 1500 = 500.e^{300r} \Leftrightarrow r = \dfrac{\ln 3}{300}$

Vậy khoảng thời gian t kể từ lúc bắt đầu có 500 con vi khuẩn đến khi số lượng vi khuẩn đạt 121500 con thỏa mãn $121500 = 500.e^{r.t}$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{\ln 243}{r} = \dfrac{300\ln 243}{\ln 3} = 1500$ (phút) $= 25$ (giờ).

Câu 14. Chọn C

Đổi 1 giờ 40 phút $= 100$ phút.

Lượng chất đã phân rã là: $\Delta m = m_0.\left(1-2^{-\frac{t}{T}}\right) = 2.\left(1-2^{-\frac{100}{20}}\right) = 1,9375 gram.$

Phần trăm khối lượng chất còn lại là: $\frac{2-1,9375}{2}.100\% = 3,125\%.$

Câu 15. Chọn D

Từ công thức $C = A(1+r)^n$ với $A = 100$, $r = 0,12$ và n nguyên dương.

Ta có: Số tiền thu được cả gốc lẫn lãi sau n năm là $C = 100.(1+0,12)^n$.

Số tiền lãi thu được sau n năm là $L = 100.(1+0,12)^n - 100$.

Để số tiền lãi nhận được hơn 40 triệu đồng thì:

$L > 40 \Leftrightarrow 100(1+0,12)^n - 100 > 40 \Leftrightarrow 1,12^n > \frac{7}{5} \Leftrightarrow n > \log_{1,12}\frac{7}{5} \approx 2,97$.

Vậy số nguyên dương nhỏ nhất cần tìm là $n = 3$.

Câu 16. Chọn C

Theo công thức, tại thời điểm $t = 3$ phút, ta có

$s(3) = s(0)2^3 = 625000 \Rightarrow s(0) = 78125$ con.

Gọi t (phút) là thời điểm mà số lượng vi khuẩn là 10 triệu con, ta có: $s(t) = s(0)2^t \Rightarrow 10\,000\,000 = 78125.2^t \Leftrightarrow 2^t = 128 \Rightarrow t = 7$.

Câu 17. Chọn A

Để để tỉ lệ người xem tới khu nghỉ dưỡng đạt trên 50%

$\Leftrightarrow P(n) = \frac{1}{1+65.3^{-0,13n}} > 50\% \Leftrightarrow 1+65.3^{-0,13n} < 2$

$\Leftrightarrow -0,13n < \log_3\frac{1}{65} \Leftrightarrow n > \frac{\log_3 65}{0.13} \approx 29,23$

Vậy cần ít nhất 30 lần phát quảng cáo để tỉ lệ người xem tới khu nghỉ dưỡng đạt trên 50%.

Câu 18. Chọn A

Theo đầu bài ta có phương trình: $P(t) = 60 \Leftrightarrow 60 = 100.(0,5)^{\frac{t}{5750}} \Leftrightarrow (0,5)^{\frac{t}{5750}} = \frac{60}{100} = 0,6$

$\Leftrightarrow t = 5750.\frac{\ln 0,6}{\ln 0,5} \approx 4237,55$.

Vậy tuổi của công trình đó khoảng 4238 năm.

Câu 19. Chọn C

Câu 20. Chọn A

Câu 21. Chọn B

Câu 22. Chọn D

Câu 23. Chọn A

Câu 24. Chọn D

Câu 25. Chọn A

Câu 26. Chọn C

Câu 27. Chọn A.

Câu 28. Chọn D

Câu 29. Chọn D

Nhận thấy ở San Francisco trận động đất có cường độ là: $M_1 = \log A_1 - \log A_0 = \log \frac{A_1}{A_0} = 8$

Ở Nhật Bản trận động đất có cường độ là: $M_2 = \log \frac{A_2}{A_0} = 6$

Khi đó: $8-6 = \log \frac{A_1}{A_0} - \log \frac{A_2}{A_0} = \log \frac{A_1}{A_2} \Leftrightarrow 2 = \log \frac{A_1}{A_2} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = 10^2 = 100.$

Câu 30. Chọn A

Ta có: $2N_0 = N_0.\mathrm{e}^{9k} \Leftrightarrow k = \frac{\ln 2}{9}$

Để được 800 con ruồi, ta có: $800 = 100.\mathrm{e}^{t.\frac{\ln 2}{9}} \Leftrightarrow t = \frac{\ln 8}{\ln 2}.9 = 27$ ngày.

Câu 31. Chọn C

Gọi a là số tiền vay, r là lãi suất, m là số tiền hàng tháng trả.

Số tiền nợ sau tháng thứ nhất là: $N_1 = a(1+r) - m$.

Số tiền nợ sau tháng thứ hai là:

$N_2 = N_1(1+r) - m = a(1+r)^2 - m\left[(1+r)+1\right]$

Số tiền nợ sau tháng thứ ba là:

$N_3 = N_2(1+r) - m = a(1+r)^3 - m\left[(1+r)^2 + (1+r) + 1\right]$

....

Số tiền nợ sau n tháng là: $N_n = a(1+r)^n - m\left[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \ldots + 1\right]$

$= a(1+r)^n - \frac{m}{r}\left[(1+r)^n - 1\right] = \left(a - \frac{m}{r}\right)(1+r)^n + \frac{m}{r}.$

$N_n = 0 \Leftrightarrow (1+r)^n = \frac{\frac{m}{r}}{\frac{m}{r} - a} \Leftrightarrow (1+r)^n = \frac{m}{m-ra}.$

Sau n tháng anh Nam trả hết nợ khi và chỉ khi $N_n = 0 \Leftrightarrow (1+0,005)^n = \frac{30.10^6}{30.10^6 - 0,005.10^9}.$

$\Leftrightarrow (1,005)^n = \frac{6}{5} \Leftrightarrow n = \log_{1,005}\left(\frac{6}{5}\right) \simeq 36,6.$

Vậy sau 37 tháng thì anh Nam trả hết nợ.

Câu 32. Chọn C

Số tiền nợ sau năm thứ nhất là: $10.(1+3\%)$.

Số tiền nợ sau năm thứ 2 là: $\left[10.(1+3\%)+10\right](1+3\%) = 10\left[(1+3\%)^2 + (1+3\%)\right]$.

Số tiền nợ sau năm thứ 3 là: $10\left[(1+3\%)^3 + (1+3\%)^2 + (1+3\%)\right]$.

Số tiền nợ sau năm thứ 4 là: $10\left[(1+3\%)^4+(1+3\%)^3+(1+3\%)^2+(1+3\%)\right]$.

Số tiền nợ sau năm thứ 5 là: $10\left[(1+3\%)^4+(1+3\%)^3+(1+3\%)^2+(1+3\%)\right].(1+8\%)$.

Vậy $S=46,538667$ (triệu đồng).

Câu 33. Chọn D.

Sau 2 phút số lượng vi khuẩn 625000 con tức là: $625000=P_0.2^2 \Leftrightarrow P_0=\dfrac{625000}{4}=156250$.

Số lượng vi khuẩn là 10 triệu con $\Leftrightarrow 10000000=156250.2^t \Leftrightarrow 2^t=64 \Leftrightarrow t=6$.

Câu 34. Chọn C

Số đợt xả nhỏ nhất khi và chỉ khi lượng nước xả một đợt lớn nhất.

Lượng nước xả trong x ngày là $86400.x.\sqrt{800-x^2}\left(m^3\right)$.

Xét hàm số $f(x)=86400x\sqrt{800-x^2}\left(m^3\right)$, $x\in\left(0;20\sqrt{2}\right]$.

Ta có $86400x\sqrt{800-x^2}\le 86400.\dfrac{x^2+800-x^2}{2}=34560000$.

Vậy $Maxf(x)=34560000m^3$ đạt được khi $x=\sqrt{800-x^2} \Leftrightarrow x=20$.

$\dfrac{100000000}{34560000}\simeq 2,9$.

Vậy cần xả 3 đợt mỗi đợt 20 ngày.

Câu 35. Chọn A

Gọi số tiền lúc đầu người đó gửi là A (triệu đồng), lãi suất gửi ngân hàng một tháng là r, S_n là số tiền còn lại sau n tháng.

Sau 1 tháng kể từ ngày gửi tiền, số tiền còn lại của người đó là:

$S_1=A(1+r)-1$.

Sau 2 tháng kể từ ngày gửi tiền, số tiền còn lại của người đó là:

$S_2=\left[A(1+r)-1\right](1+r)-1=A(1+r)^2-(1+r)-1$.

…

Sau n tháng kể từ ngày gửi tiền, số tiền còn lại của người đó là:

$$S_n=A(1+r)^n-(1+r)^{n-1}-(1+r)^{n-2}-\cdots-(1+r)-1=A(1+r)^n-\frac{(1+r)^n-1}{r}.$$

Giả sử sau n tháng người đó rút hết tiền. Khi đó ta có $S_n=0 \Leftrightarrow A(1+r)^n-\dfrac{(1+r)^n-1}{r}=0$

$\Leftrightarrow (1+r)^n(Ar-1)+1=0 \Leftrightarrow n=\log_{(1+r)}\dfrac{1}{1-Ar} \Leftrightarrow n=-\log_{(1+r)}(1-Ar)$.

Với $A=100$ triệu đồng, $r=0,005$ ta có $n\approx 138,9757216$. Chọn A.

Câu 36. Chọn A

Vì ^{239}Pu có chu kì bán rã là 24360 năm nên với 20 gam ^{239}Pu ta có:

$10=20.\mathrm{e}^{-r.24360} \Leftrightarrow -r.24360=\ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow r=\frac{\ln 2}{24360}$.

Theo bài ra ta có phương trình $4=20.\mathrm{e}^{-rt} \Leftrightarrow -rt=\ln\frac{1}{5} \Leftrightarrow rt=\ln 5 \Leftrightarrow t=\frac{\ln 5}{r}$.

Suy ra $t\approx 56562,2$.

Vậy sau ít nhất 56563 năm thì 20 gam ^{239}Pu sẽ phân hủy còn 4 gam.

Câu 37. Chọn C

Giả sử sau x ngày nuôi cấy thì số lượng vi khuẩn hai loài bằng nhau. Điều kiện $x>0$.

Ở ngày thứ x số lượng vi khuẩn của loài A là: $100.2^{\frac{x}{5}}$ con vi khuẩn.

Ở ngày thứ x số lượng vi khuẩn của loài B là: $200.3^{\frac{x}{10}}$ con vi khuẩn.

Khi đó ta có bất phương trình $100.2^{\frac{x}{5}}>200.3^{\frac{x}{10}} \Leftrightarrow \frac{2^{\frac{x}{5}}}{3^{\frac{x}{10}}}>2 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{x}{10}}>2 \Leftrightarrow x>10.\log_{\frac{4}{3}}2$.

Câu 38. Chọn A

Áp dụng công thức $P=P_0\mathrm{e}^{xi}$

Ở độ cao $1000m$, ta có : $P_0=760mmHg, x=1000m, P=672,71mmHg$, từ giả thiết này ta tìm được hệ số suy giảm i. Ta có $672,71=760\mathrm{e}^{1000\times i} \Leftrightarrow 1000i=\ln\frac{672,71}{760} \Leftrightarrow i\approx -0,000$

Khi đó ở độ cao $3580m$, áp suất của không khí là: $P=760\mathrm{e}^{-0,00012\times 3580}\approx 49112$.

Câu 39. Chọn B

Chỉ những em sinh năm 2018 mới đủ tuổi đi học (6 tuổi) vào lớp 1 năm học 2024 – 2025.

Áp dụng công thức lãi kép để tính dân số năm 2017 và 2018.

Dân số năm 2018 là: $S_8=S_0\mathrm{e}^{r.n}=905300.\mathrm{e}^{1,37\%.8}\approx 1010162$.

Dân số năm 2017 là: $S_7=S_0\mathrm{e}^{r.n}=905300.\mathrm{e}^{1,37\%.7}\approx 996418$.

Số trẻ vào lớp 1 trong năm học 2024 – 2025 là: $1010162-996418+2400=16144$.

Số phòng học cần chuẩn bị là: $16144:35\approx 461,26$.

Vậy số phòng học cần là 462 phòng.

Câu 40. Chọn B

Số tiền anh A cần tiết kiệm là $500-500.0,32=340$ (triệu).

Gọi số tiền mà anh A nhận được ở mỗi tháng trong năm đầu tiên là

$$u_1=10 \text{ (triệu).}$$

Thì số tiền mà anh A nhận được ở mỗi tháng trong năm thứ hai là

$$u_2=u_1.(1+0,12)=u_1.1,12 \text{ (triệu).}$$

Số tiền mà anh A nhận được ở mỗi tháng trong năm thứ ba là

$$u_3=u_1.(1+0,12)^2=u_1.(1,12)^2 \text{ (triệu).}$$

…

Số tiền mà anh A nhận được ở mỗi tháng trong năm thứ n là

$$u_n=u_1.(1+0,12)^{n-1}=u_1.(1,12)^{n-1} \text{ (triệu).}$$

Vậy số tiền mà anh A tiết kiệm được sau n năm là

$$12.\left(u_2-u_1+u_3-u_2+\cdots+u_{n-1}-u_{n-2}+u_n-u_{n-1}\right)=12.\left(u_n-u_1\right)=12.\left[u_1.(1{,}12)^{n-1}-u_1\right].$$

Cho $12.\left[u_1.(1{,}12)^{n-1}-u_1\right]\ge 340 \Leftrightarrow (1{,}12)^{n-1}\ge \dfrac{23}{6} \Leftrightarrow n\ge \log_{1,12}\dfrac{23}{6}+1\approx 12.86$.

Vậy sau ít nhất 13 năm thì anh A sẽ tiết kiệm đủ tiền để mua ô tô.

Câu 41. Chọn C

Gọi $T=800$ triệu là số tiền vay, $A=\dfrac{T}{60}$ là số tiền gốc phải trả hàng tháng, $r=0{,}5\%$ là lãi suất.

Ta có bảng mô tả sau:

Tháng	Trả gốc	Trả lãi	Dư nợ
1	A	rT	$T-A$
2	A	$r(T-A)$	$T-2A$
3	A	$r(T-2A)$	$T-3A$
…			
60	A	$r(T-59A)$	$T-60A=0$

Tổng số tiền lãi mà ông Trung phải trả là:

$$S=rT+r(T-A)+r(T-2A)+...+r(T-59A)=r\left[60T-(1+2+...+59)A\right]$$

$$=r\left[60T-\frac{59.60}{2}A\right]=r\left[60T-\frac{59}{2}T\right]=\frac{61rT}{2}=122 \text{ (triệu).}$$

Câu 42. Chọn A

Từ giả thiết suy ra tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t là: $f'(t)=90t-3t^2$.

Xét hàm $f'(t)=90t-3t^2$ với $0\le t\le 25$.

Ta có: $f''(t)=90-6t=0\Leftrightarrow t=15$.

Bảng biến thiên:

t	0		15		25
f''		+	0	−	
f'	0	↗	675	↘	375

Từ bảng biến thiên ta có ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất là ngày thứ 15.

Câu 43. Chọn D

Gọi lượng thức ăn tiêu thụ mỗi ngày theo kế hoạch của trang trại X là x

Vậy lượng thức ăn dự trữ của trang tại X là $365x$

Lượng thức ăn tiêu thụ trong 50 ngày đầu là:

$$x+x.1{,}05+x.1{,}05^2+...+x.1{,}05^{49}=x\left(1+1{,}05+\ldots+1{,}05^{49}\right)=x.\frac{\left(1-1{,}05^{50}\right)}{1-1{,}05}$$

Lượng thức ăn tiêu thụ trong những ngày tiếp theo là: (đặt $x.1{,}05^{49}=B$: lượng thức ăn tiêu thụ ngày thứ 50)

$$B.1,1+B.1,1^2+...+B.1,1^n=B.1,1\left(1+1,1+\ldots+1,1^{n-1}\right)=\frac{B.1,1.\left(1-1,1^n\right)}{1-1,1}=x\frac{1,05^{49}.1,1.\left(1-1,1^n\right)}{1-1,1}$$

Ta có: $x.\frac{\left(1-1,05^{50}\right)}{1-1,05}+x\frac{1,05^{49}.1,1.\left(1-1,1^n\right)}{1-1,1}=365x$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(1-1,05^{50}\right)}{1-1,05}+\frac{1,05^{49}.1,1.\left(1-1,1^n\right)}{1-1,1}=365\Leftrightarrow n=8,72$$

Vậy lượng thức ăn dự trữ đủ dùng trong $50+8=58$ ngày

Câu 44. Chọn A

Ở độ cao 1000 m áp suất không khí là $672,71$ (mmHg).

Nên ta có $672,71=760\text{e}^{1000k}\Leftrightarrow\text{e}^{1000k}=\frac{672,71}{760}\Leftrightarrow k=\frac{1}{1000}\ln\frac{672,71}{760}$.

Áp suất ở độ cao 4000 m là $P=760\text{e}^{4000k}=760\text{e}^{4000.\frac{1}{1000}\ln\frac{672,71}{760}}\approx466,52\ (\text{mmHg})$.

Câu 45. Chọn B

Trước tiên, ta tìm tỉ lệ tăng trưởng mỗi giờ của loại vi khuẩn này.

Từ giả thiết ta có: $300=100.\text{e}^{5r}\Leftrightarrow r=\frac{\ln300-\ln100}{5}=\frac{\ln3}{5}$.

Sau 10 giờ, từ 100 con vi khuẩn sẽ có $100.\text{e}^{10.\frac{\ln3}{5}}=900$ con.

Câu 46. Gọi x là số tivi mỗi lần đặt hàng thì $x\in[1;2500]$

Khi đó, số lượng tivi trung bình gửi trong kho sẽ là $\frac{x}{2}$. Do đó, chi phí gửi hàng trong khi mỗi năm sẽ là $10.\frac{x}{2}=5x$.

Số lần đặt hàng mỗi năm sẽ là $\frac{2500}{x}$.

Do đó chi phí đặt hàng mỗi năm sẽ là $(20+9x).\frac{2500}{x}=\frac{50000}{x}+22500$

Suy ra, chi phí hàng tồn kho là $C(x)=5x+\frac{50000}{x}+22500$

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của $C(x)$ với $x\in[1;2500]$.

Ta có: $C'(x)=5-\frac{50000}{x^2},C'(x)=0\Leftrightarrow x^2=100^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=100(tm)\\x=-100(ktm)\end{array}\right.$

Do $C''(x)=\frac{100000}{x^3}>0,\forall x\in[1;2500]$ nên $\min\limits_{x\in[1;2500]}C(x)=C(100)=23500$

Khi đó số lần đặt hàng mỗi năm sẽ là $\frac{2500}{100}=25$ lần.

Vậy để chi phí hàng tồn kho là nhỏ nhất thì cửa hàng cần đặt hàng 25 lần mỗi năm và 100 cái mỗi lần.

Câu 47. Chọn C

Để số người mua sản phẩm đạt hơn 80% thì $P>80 \Leftrightarrow \dfrac{100}{1+49.\mathrm{e}^{-0,015t}}>80$

$\Leftrightarrow 1+49.\mathrm{e}^{-0,015t}<\dfrac{100}{80} \Leftrightarrow 49.\mathrm{e}^{-0,015t}<\dfrac{10}{8}-1$

$\Leftrightarrow 49.\mathrm{e}^{-0,015t}<\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0,015t}<\dfrac{1}{196} \Leftrightarrow -0,015t<\ln\dfrac{1}{196} \Leftrightarrow t>\dfrac{1}{0,015}\ln 196\approx 351,8743$

Vậy số lần quảng cáo tối thiểu là 352 lần.

Câu 48. Chọn A

Gọi S là số tiền gửi ban đầu.

Áp dụng công thức lãi kép sau n năm $(n\in\mathbb{N})$ thì số tiền thu được là: $S_n=S(1+0,092)^n$

Theo đề ta có: $250(1+0,092)^n\geq 650 \Leftrightarrow (1,092)^n\geq\dfrac{13}{5} \Leftrightarrow n\geq \log_{1,092}\left(\dfrac{13}{5}\right)\approx 10,8567$.

Vì $n\in\mathbb{N}$ nên ta chọn $n=11$.

Câu 49. Chọn B.

Theo giả thiết ta có $I(1)=A=500$.

Ngày thứ 10 có 1000 ca nên $I(10)=A.\mathrm{e}^{9r_0} \Leftrightarrow 1000=500.\mathrm{e}^{9r_0} \Leftrightarrow r_0=\dfrac{\ln 2}{9}$.

Vậy ngày thứ 20 số ca nhiễm bệnh là $I(20)=500.\mathrm{e}^{\frac{19\ln 2}{9}}\approx 2160$.

Câu 50. Chọn A

Ở độ cao 1000 m áp suất không khí là $672,71\ (\mathrm{mmHg})$.

Nên ta có: $672,71=760e^{1000k} \Leftrightarrow e^{1000k}=\dfrac{672,71}{760} \Leftrightarrow k=\dfrac{1}{1000}\ln\dfrac{672,71}{760}$.

Áp suất ở độ cao 3000 m là $P=760e^{3000k}=760e^{3000.\frac{1}{1000}\ln\frac{672,71}{760}}\approx 527,06\ (\mathrm{mmHg})$.

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

DẠNG TOÁN HAY XUẤT HIỆN TRONG ĐỀ THI CỦA BỘ

Câu 1: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn $\log_4\left(x^2+y\right)\ge\log_3\left(x+y\right)$?

A. 59. **B.** 58. **C.** 116. **D.** 115.

Câu 2: Biết rằng có vô số bộ $(x;y)$ thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases}x+my=n-1\\2x+ny=4-n\end{cases}$ với m và n là tham số thực. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x^2+y^2-2mx+ny$ bằng

A. 1 **B.** $\frac{11}{4}$ **C.** $-\frac{3}{2}$ **D.** $-\frac{9}{4}$

Câu 3: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để **không** tồn tại bộ số thực (x,y) nào thỏa mãn đồng thời các hệ thức $x^2+(y-2)^2\le 9$ và $\log_{x^2+y^2+1}(2mx+2y+m-2)\ge 1$. Số phần tử của S là:

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** Vô số.

Câu 4: Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x+y.4^{x+y-1}\ge 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+4x+6y$ bằng

A. $\frac{33}{4}$. **B.** $\frac{65}{8}$. **C.** $\frac{49}{8}$. **D.** $\frac{57}{8}$.

Câu 5: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 242 số nguyên y thỏa mãn $\log_4\left(x^2+y\right)\ge\log_3\left(x+y\right)$?

A. 55. **B.** 28. **C.** 29. **D.** 56.

Câu 6: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(m;n)$ sao cho $m+n\le 14$ và ứng với mỗi cặp $(m;n)$ tồn tại đúng 3 số thực $a\in(-1;1)$ thỏa mãn $2a^m=n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$?

A. 11. **B.** 14. **C.** 12. **D.** 13.

Câu 7: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\log_2(4^x+2^{x+4}+100-m)=x+m$ có hai nghiệm thực phân biệt?

A. 95. **B.** 99. **C.** 122. **D.** 94.

Câu 8: Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-20;20]$ để phương trình $\log_{|x-m|}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\log_{\frac{|x+m|}{9}}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ có đúng ba nghiệm thực. Số phần tử của tập S là:

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 28.

Câu 9: Xét các số thực x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{4y}{2x+y+1}$ gần nhất với số nào dưới đây?

A. -2. **B.** -4. **C.** -5. **D.** -3.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=2^x-2^{\frac{1}{x}}+\ln x$ với $x>0$. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x-2)+f(2x-m)=0$ có hai nghiệm phân biệt có tổng nhỏ hơn 10. Số phần tử của tập S là:

A. 11. **B.** 12. **C.** 14. **D.** vô số.

Câu 11: Cho phương trình $4^{x^2}-m.2^{x^2+1}-3m+1=0$. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt. Số phần tử của tập S là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 12: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị tham số nguyên của $m\in[-30;30]$ để phương trình $(x-2)\log(x-m)+(x^2-mx+m-3)\log(x-1)=0$ có hai nghiệm thực phân biệt?

A. 31. **B.** 32. **C.** 59. **D.** 3.

Câu 13: Cho số thực dương $x\le 2021$ và số nguyên y thỏa mãn: $\log_3(x^3+1)-1-3^{y^2}=0$. Hỏi có tất cả bao nhiêu bộ số $(x;y)$ thỏa mãn bài toán?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Câu 14: Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để có đúng 4 bộ số thực $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời hai hệ thức $\log_3^2(26x+53).\log_3\dfrac{x^2+y^2+2x+4y+5}{729}+8\log_3 m=0$ và $(x-12)^2+(y+2)^2=196$. Số phần tử của tập S là:

A. 80 **B.** 79 **C.** 81 **D.** 77

Câu 15: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $(x^2-2x+m)(2^{m-2x-x^2}-1)+(m-2x-x^2)(3^{x^2-2x+m}-1)=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt. Tổng giá trị tất cả các phần tử của tập S bằng

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.C	3.A	4.B	5.D	6.A	7.D	8.C	9.D	10.A
11.B	12A	13.C	14.B	15.A					

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **Chọn C**

Điều kiện: $x+y>0$ và $x^2+y>0$. Khi đó

$\log_4\left(x^2+y\right)\ge\log_3\left(x+y\right)\Leftrightarrow x^2+y\ge 4^{\log_3(x+y)}\Leftrightarrow x^2+y\ge\left(x+y\right)^{\log_3 4}$

$\Leftrightarrow x^2-x\ge\left(x+y\right)^{\log_3 4}-\left(x+y\right)\ (1)$

Đặt $t=x+y$ thì (1) được viết lại là $x^2-x\ge t^{\log_3 4}-t\ (2)$

Với mỗi x nguyên cho trước có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn bất phương trình (1) tương đương với bất phương trình (2) có không quá 728 nghiệm t.

Nhận thấy $f(t)=t^{\log_3 4}-t$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ nên nếu $x^2-x>729^{\log_3 4}-729=3367$ thì sẽ có ít nhất 729 nghiệm nguyên $t\ge 1$.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với $x^2-x\le 3367\Leftrightarrow -57\le x\le 58$ (do x nguyên).

Vậy có tất cả $58+58=116$ số nguyên x thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 2: **Chọn C**

Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn có vô số nghiệm khi $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{m}{n}=\frac{n-1}{4-n}\Leftrightarrow\begin{cases}m=1\\n=2\end{cases}$

Khi đó: $x+my=n-1\Leftrightarrow x+y=1\Rightarrow y=1-x$

Ta có: $T=x^2+y^2-2mx+ny=x^2+y^2-2x+2y$

$=x^2+(1-x)^2-2x+2(1-x)=2x^2-6x+3=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{2}\ge-\frac{3}{2}$

Câu 3: **Chọn A**

Miền biểu diễn $x^2+\left(y-2\right)^2\le 9$ là hình tròn (C) có tâm $I(0,2)$ và bán kính $R=3$

$\log_{x^2+y^2+1}\left(2mx+2y+m-2\right)\ge 1\Leftrightarrow 2mx+2y+m-2\ge x^2+y^2+1$

$\Leftrightarrow\left(x-m\right)^2+\left(y-1\right)^2\le m^2+m-2$.

Miền biểu diễn $\left(x-m\right)^2+\left(y-1\right)^2\le m^2+m-2$ là hình tròn (C') có tâm $I'(m,1)$ và bán kính $R'=\sqrt{m^2+m-2}$

Để tồn tại bộ số thực (x,y) thỏa mãn bài toán thì:

$$\left[\begin{array}{l}m^2+m-2<0\\II'>R+R'\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<m<1\\\sqrt{m^2+1}>3+\sqrt{m^2+m-2}\ (VN)\end{array}\right.\Rightarrow m\in\{-1;0\}.$$

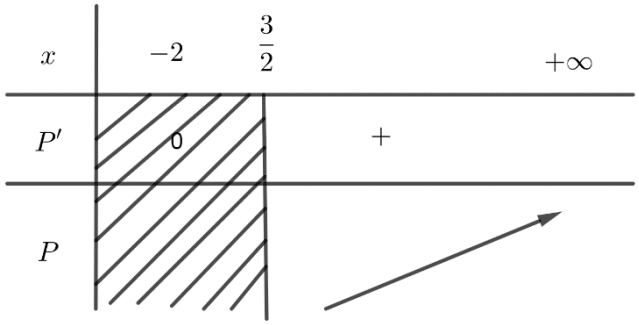
Câu 4: **Chọn B**

$2x+y.4^{x+y-1}\ge 3\Leftrightarrow y.4^{x+y-1}\ge 3-2x\ (*)$. Theo giả thiết $\begin{cases}x\ge 0\\y\ge 0\end{cases}$.

Ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $y=0\overset{(*)}{\Leftrightarrow}3-2x\le 0\Leftrightarrow x\ge \frac{3}{2}.$

Khi đó $P=x^2+4x\ \left(x\ge\frac{3}{2}\right);\ P'=2x+4;\ P'=0\Leftrightarrow x=-2\notin\left[\frac{3}{2};+\infty\right).$



Dựa vào bảng biến thiên suy ra giá trị nhỏ nhất của $P=x^2+4x\ \left(x\ge\frac{3}{2}\right)$ đạt được tại $x=\frac{3}{2}.$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+4x=\left(\frac{3}{2}\right)^2+4.\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{33}{4}.$

Trường hợp 2: $y>0\overset{(*)}{\Leftrightarrow}4^{x+y-1}\ge\frac{3-2x}{y}\Leftrightarrow x+y-1\ge\log_4\left(\frac{3-2x}{y}\right)=\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{3-2x}{y}\right)$

$\Leftrightarrow 2x+2y-2\ge\log_2(3-2x)-\log_2 y\Leftrightarrow 2y+\log_2(2y)\ge(3-2x)+\log_2(3-2x)\ \ (**)$

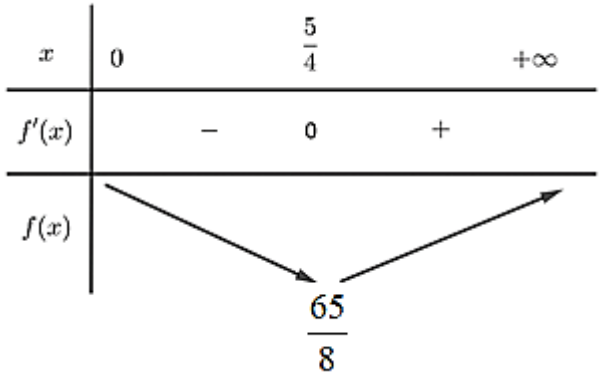
Xét hàm số $f(t)=t+\log_2 t$ với $t>0$. Ta có $f'(t)=1+\frac{1}{t\ln 2}>0,\ \forall t>0.$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến $\forall t>0.$

$$(**)\Leftrightarrow f(2y)\ge f(3-2x)\Leftrightarrow 2y\ge 3-2x\Leftrightarrow\begin{cases}6y\ge 9-6x\\ y^2\ge\dfrac{9-12x+4x^2}{4}\end{cases}.$$

Ta có $P=x^2+y^2+4x+6y\ge x^2+\frac{9-12x+4x^2}{4}+4x+9-6x\Leftrightarrow P\ge\frac{8x^2-20x+45}{4}.$

Đặt $f(x)=\frac{8x^2-20x+45}{4}\ (x\ge 0).\ f'(x)=\frac{16x-20}{4};\ f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{5}{4}.$



Khi đó giá trị nhỏ nhất của $f(x)=\dfrac{8x^2-20x+45}{4}$ $(x\ge 0)$ đạt được tại $x=\dfrac{5}{4}$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P\ge \dfrac{8.\left(\dfrac{5}{4}\right)^2-20.\left(\dfrac{5}{4}\right)+45}{4}=\dfrac{65}{8}$.

Kết hợp hai trường hợp ta có giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+4x+6y$ bằng $\dfrac{65}{8}$.

Câu 5: **Chọn D**

Điều kiện $x+y>0$ và $x^2+y>0$. Khi đó

$\log_4\left(x^2+y\right)\ge\log_3\left(x+y\right)\Leftrightarrow x^2+y\ge 4^{\log_3(x+y)}\Leftrightarrow x^2+y\ge\left(x+y\right)^{\log_3 4}$

$\Leftrightarrow x^2-x>\left(x+y\right)^{\log_3 4}-\left(x+y\right)$ (1)

Đặt $t=x+y$ thì (1) được viết lại là $x^2-x>t^{\log_3 4}-t$ (2)

Với mỗi x nguyên cho trước có không quá 242 số nguyên y thỏa mãn bất phương trình (1)

Tương đương với bất phương trình (2) có không quá 242 nghiệm t.

Nhận thấy $f(t)=t^{\log_3 4}-t$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ nên nếu $x^2-x>243^{\log_3 4}-243=781$ thì sẽ có ít nhất 243 nghiệm nguyên $t\ge 1$.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với $x^2-x\le 781\Leftrightarrow -27\le x\le 28$ (do x nguyên).

Vậy có tất cả $28+28=56$ số nguyên x thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 6: **Chọn A**

Đặt $f(a)=2a^m-n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$ (1) với $a\in(-1;1)$.

Ta có: $f(a)=2a^m-n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\Rightarrow f'(a)=2ma^{m-1}-\dfrac{n}{\sqrt{a^2+1}}$.

$f'(a)=0\Leftrightarrow 2ma^{m-1}-\dfrac{n}{\sqrt{a^2+1}}=0\Leftrightarrow a^{m-1}\sqrt{a^2+1}=\dfrac{n}{2m}$ phải có một nghiệm $a_0<1$.

Suy ra $\dfrac{n}{2m}<2\Leftrightarrow\dfrac{n}{m}<4$ suy ra a_0 là nghiệm duy nhất.

Ta có bảng biến thiên:

a	0		a_0		1
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	0	$\searrow$	$f(a_0)$	$\nearrow$	$f(1)$

Ta thấy $a=0$ là nghiệm của phương trình $f(a)=0$.

Nếu $m=1$ suy ra để có nghiệm duy nhất thì $\dfrac{n}{2m}>1\Leftrightarrow n>2$ (loại).

Nếu m lẻ thì ta có a là một nghiệm thì $-a$ cũng là nghiệm, do đó phương trình (1) có đủ 3 nghiệm.

Nếu m chẵn thì phương trình chỉ có tối đa 2 nghiệm (vì không có nghiệm âm).

Suy ra m lẻ.

Để có một nghiệm dương thuộc khoảng $(0;1)$ thì theo bảng biến, ta phải có:

$f(1)>0 \Leftrightarrow n\ln\left(1+\sqrt{2}\right)<2 \Leftrightarrow n<2,269$.

Suy ra $n\in\{1;2\}$ và $m\in\{3;5;7;9;11;13\}$, do $m+n\le 14$ nên

Suy ra có 11 cặp $(m;n)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 7: Chọn D

Ta có: $\log_2(4^x+2^{x+4}+100-m)=x+m \Leftrightarrow 4^x+2^{x+4}+100-m=2^{x+m}(1)$.

Đặt $2^x=t(t>0)$. $(1)\Leftrightarrow t^2+(16-2^m)t+100-m=0(2)$.

Để phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt thì phương trình (2) phải có hai nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=\left(16-2^m\right)^2-4(100-m)>0\\2^m-16>0\\100-m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(16-2^m\right)^2-400+4m>0\\m>4\\m<100\end{cases}.$$

Từ hai phương trình cuối do m nguyên $\Rightarrow 5\le m\le 99$.

Xét $f(m)=\left(16-2^m\right)^2-400+4m>0(*)$.

Với $m=5\Rightarrow$ không thỏa mãn (*).

Với $m=5\Rightarrow f(m)=1928>0\Rightarrow m=6$ thỏa mãn.

Mà $f(m)$ là hàm tăng trong $[6;99]\Rightarrow 6\le m\le 99\Rightarrow$ có 94 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 8: Chọn C

Nhận thấy: $\sqrt{x^2+1}+x>0$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_{|x-m|}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\log_{\frac{|x+m|}{9}}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)=-\log_{\frac{|x+m|}{9}}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

$\Leftrightarrow \log_{|x-m|}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\log_{\frac{9}{|x+m|}}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\Leftrightarrow |x-m|=\frac{9}{|x+m|}\ (*)$

Suy ra: $\left|x^2-m^2\right|=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-m^2=9\\x^2-m^2=-9\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\sqrt{m^2+9}\\x=\pm\sqrt{m^2-9}\end{array}\right.$

Ta sẽ xét hai trường hợp có cơ số loga bằng 1 khi nào:

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Khi $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x-m|=1\\|x+m|=9\end{cases}\\\begin{cases}|x-m|=9\\|x+m|=1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=m\pm 1\\x=-m\pm 9\end{cases}\\\begin{cases}x=m\pm 9\\x=-m\pm 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=\pm 5\\m=\pm 4\end{array}\right.$

Để phương trình có ba nghiệm thực phân biệt thì xảy ra các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $m^2-9=0\Leftrightarrow m=\pm 3$. Khi đó nghiệm là $x=0;\ x=\pm\sqrt{m^2+9}=\pm 3\sqrt{2}$

Trường hợp 2: Khi $\left[\begin{array}{l}m=\pm 5\\m=\pm 4\end{array}\right.$ luôn có một nghiệm vi phạm cơ số loga bằng 1 nên phương trình chỉ có 3 nghiệm phân biệt. Thỏa mãn bài toán.

Suy ra các giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn là: $m=\{\pm 4;\pm 5;\pm 3\}$ Có 6 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 9: **Chọn D**

Ta có $2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x\Leftrightarrow 2^{x^2+y^2-2x+1}\le x^2+y^2-2x+2$

$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2+y^2}-\left[\left(x-1\right)^2+y^2\right]-1\le 0$ (*). Đặt $t=\left(x-1\right)^2+y^2,\ t\ge 0.$

$(*)\Leftrightarrow 2^t-t-1\le 0$ (**). Xét hàm số $f\left(t\right)=2^t-t-1,\ t\ge 0.$

$f'\left(t\right)=2^t\ln 2-1>0;\ f'\left(t\right)=0\Rightarrow t=-\log_2\left(\ln 2\right),\ f\left(-\log_2\left(\ln 2\right)\right)<0.$

t	0		$-\log_2(\ln 2)$		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(t)$	0	↘	$f(-\log_2(\ln 2))$	↗	0	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $(**)\Leftrightarrow 0\le t\le 1\ \Leftrightarrow 0\le\left(x-1\right)^2+y^2\le 1$ là hình tròn tâm $I\left(1;0\right)$ bán kính $r=1.$

Ta lại có $P=\dfrac{4y}{2x+y+1}\Leftrightarrow 2Px+\left(P-4\right)y+P=0$ là phương trình đường thẳng $\left(d\right).$

Yêu cầu bài toán tương đương $d\left(I,\left(d\right)\right)\le r\Leftrightarrow\dfrac{|3P|}{\sqrt{4P^2+\left(P-4\right)^2}}\le 1$

$\Leftrightarrow 9P^2\le 5P^2-8P+16\Leftrightarrow 4P^2+8P-16\le 0\Leftrightarrow -1-\sqrt{5}\le P\le -1+\sqrt{6}.$

Suy ra $\min P=-1-\sqrt{5}\approx -3,23.$

Câu 10: **Chọn A**

Ta có: $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=2^{\frac{1}{x}}-2^x+\ln\dfrac{1}{x}=-\left(2^x-2^{\frac{1}{x}}+\ln x\right)=-f\left(x\right).$

Mà đạo hàm: $f'\left(x\right)=2^x\ln 2+\dfrac{1}{x^2}.2^{\frac{1}{x}}.\ln 2+\dfrac{1}{x}>0$ với $\forall x>0.$

Xét phương trình: $f(x-2)+f(2x-m)=0$ có điều kiện xác định là $\begin{cases} x>2 \\ x>\dfrac{m}{2} \end{cases}$ $(*)$.

Có $f(x-2)+f(2x-m)=0 \Leftrightarrow f(x-2)=-f(2x-m)=f\left(\dfrac{1}{2x-m}\right)$.

Vì hàm số $y=f(x)$ là hàm đơn điệu, nên có:

$$f(x-2)=f\left(\frac{1}{2x-m}\right)\Leftrightarrow x-2=\frac{1}{2x-m}>0\Leftrightarrow 2x^2-(m+4)x+2m-1=0\,(**).$$

Ở điều kiện $(*)$ chỉ cần: $x-2=\dfrac{1}{2x-m}>0\Leftrightarrow x>2$.

Ta có: $\Delta=(m+4)^2-8.(2m-1)=m^2-8m+24>0$ với $\forall m$.

Tổng hai nghiệm: $2+2<x_1+x_2<10\Leftrightarrow 4<x_1+x_2=\dfrac{m+4}{2}<10\Leftrightarrow 4<m<16$.

Tập các giá trị m nguyên thỏa mãn là: $S=\{5;6;...;15\}$.

Vậy có 11 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Câu 11: Chọn B

Đặt $t=2^{x^2}\geq 1$. Phương trình trở thành: $f(t)=t^2-2mt-3m+1=0\,(1)$

Để có 4 nghiệm x phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

Cách 1:

Khi đó phải có: $t_2>t_1>1\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2+3m-1>0 \\ f(1)=1-5m+1>0 \\ t_2+t_1=2m+1>1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2+3m-1>0 \\ m<\dfrac{5}{2} \\ m>1 \end{cases}\Leftrightarrow VN$

Cách 2: $(1)\Leftrightarrow \dfrac{t^2+1}{2t+3}=m\,(2)$, xét $g(t)=\dfrac{t^2+1}{2t+3}$, $g'(t)=\dfrac{2t^2+6t-2}{(2t+3)^2}>0,\forall t>1$.

Bảng biến thiên

t	1		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	
$g(t)$	$\dfrac{2}{5}$	$\nearrow$	$+\infty$

Theo bảng biến thiên ta thấy không tồn tại m để (2) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

Câu 12: Chọn A

Điều kiện $\begin{cases} x>m \\ x>1 \end{cases}$ $(*)$

Phương trình: $(x-2)\log(x-m)+(x^2-mx+m-3)\log(x-1)=0$

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

$\Leftrightarrow (x-2)\log(x-m)+\left[(x-2)+\left(x^2-(m+1)x+m-1\right)\right]\log(x-1)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left[\log(x-m)+\log(x-1)\right]+\left(x^2-(m+1)x+m-1\right)\log(x-1)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)\log\left[x^2-(m+1)x+m\right]+\left(x^2-(m+1)x+m-1\right)\log(x-1)=0 \quad (1)$

Nhận thấy khi: $\left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ x^2-(m+1)x+m-1=0 \end{array}\right. \Rightarrow$ thỏa $\text{pt}(1)$

Với $\begin{cases} x-2\neq 0 \\ x^2-(m+1)x+m-1\neq 0 \end{cases}$; ta chia hai vế của (1) cho $(x-2)\left(x^2-(m+1)x+m-1\right)$ sẽ được:

$\dfrac{\log\left(x^2-(m+1)x+m\right)}{x^2-(m+1)x+m-1}+\dfrac{\log(x-1)}{x-2}=0 \ (2)$. Dễ thấy: $\dfrac{\log x}{x-1}>0, \forall x>0, x\neq 1$

Khi đó $\dfrac{\log\left(x^2-(m+1)x+m\right)}{x^2-(m+1)x+m-1}+\dfrac{\log(x-1)}{x-2}>0 \Rightarrow \text{pt}(2)$ vô nghiệm.

Vậy $\text{pt}(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ x^2-(m+1)x+m-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ f(x)=x^2-(m+1)x+m-1=0 \quad (3) \end{array}\right.$

Phương trình (3) có $\Delta=(m+1)^2-4(m-1)=m^2-2m+5>0, \forall m$

Lại có: $f(1)=-1; f(m)=-1 \Rightarrow (3)$ luôn có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn: $x_1<1; m<x_2 \Rightarrow pt(3)$ luôn chỉ có một nghiệm thỏa mãn điều kiện $(*)$

Để phương trình ban đầu có hai nghiệm thì $x=2$ không là nghiệm của $\text{pt}(3)$ đồng thời phải thỏa mãn điều kiện $(*)$ tức là: $\begin{cases} f(2)\neq 0 \\ 2>m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ m<2 \end{cases} \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}; m\in[-30;30]} m=\{-30;-29;...;-1;0\}$

Vậy có 31 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 13: Chọn C

Từ giả thiết suy ra $1+3^{y^2}=\log_3(x^3+1)\leq \log_3(2021^3+1)\approx 20,78$ và $1+3^{y^2}=\log_3(x^3+1)\in Z$ suy ra: $2\leq 3^{y^2}+1=\log_3(x^3+1)\leq 20 \Rightarrow \log_3 1\leq y^2\leq \log_3 19 \Rightarrow 0\leq y^2\leq 2$

Vì $y^2\in\mathbb{R} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y^2=0 \Rightarrow \begin{cases} 1+3^{y^2}=\log_3(x^3+1)=2 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \\ y^2=1 \Rightarrow \begin{cases} 1+3^{y^2}=\log_3(x^3+1)=4 \\ y=\pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt[3]{80} \\ y=\pm 1 \end{cases} \end{array}\right.$

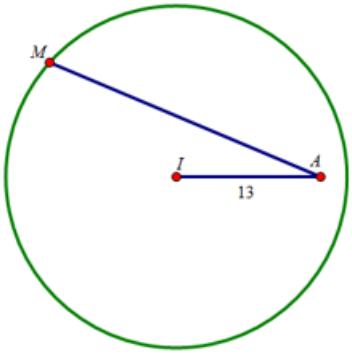
Suy ra có tất cả ba bộ số $(x;y)$ thỏa mãn bài toán.

Câu 14: Chọn B

Gọi $M(x;y)$. Nhận thấy M nằm trên đường tròn (C) có tâm $I(12;-2)$ và bán kính $R=14$.

Ta biến đổi: $x^2+y^2+2x+4y+5=(x+1)^2+(y+2)^2=AM^2$; trong đó điểm $A(-1;-2)$.

Dễ dàng xác định được: $1\leq AM\leq 27$ như hình vẽ bên dưới



Ta cũng để ý rằng từ: $26x+53=26x+53-196+(x-12)^2+(y+2)^2=(x+1)^2+(y+2)^2=AM^2$

Suy ra:

$$\log_3^2(26x+53).\log_3\frac{x^2+y^2+2x+4y+5}{729}+8\log_3 m=0\Leftrightarrow\log_3^2\left(AM^2\right).\log_3\frac{AM^2}{729}+8\log_3 m=0$$

$$\Leftrightarrow\log_3^2\left(AM^2\right).\left(\log_3 AM^2-6\right)+8\log_3 m=0\,(*)$$

Đặt $t=\log_3 AM^2, ĐK:\log_3 1^2\le t\le\log_3 27^2\Leftrightarrow 0\le t\le 6$.

Để ý khi $\left[\begin{array}{l}t=0\\t=6\end{array}\right.$ luôn cho ta duy nhất một bộ số $(x;y)$ và khi $0<t<6$ cho ta hai bộ số $(x;y)$.

(*) trở thành $t^2(t-6)=-8\log_3 m\Leftrightarrow f(t)=t^3-6t^2=-8\log_3 m\ (**)$

Ta dễ dàng thành lập bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		4	6	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-32	↗	$+\infty$

$-8\log_3 m$ nằm giữa -32 và 0; đường ngang $-8\log_3 m$ cắt đồ thị tại 2.

Nhận thấy: $-32<-8\log_3 m<0\Leftrightarrow 1<m<81$ thì phương trình (**) có hai nghiệm $t\in(0;6)$ tương ứng với 4 bộ số thực $(x;y)$. Suy ra có 79 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 15: Chọn A

Với $\left[\begin{array}{l}x^2-2x+m=0\\m-2x-x^2=0\end{array}\right.\Rightarrow$ thỏa mãn phương trình;

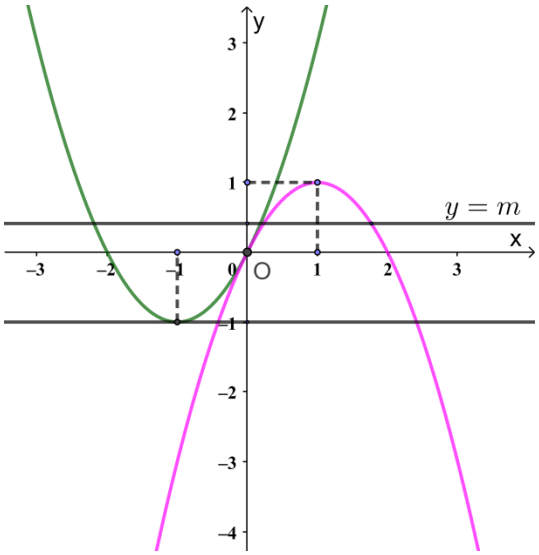
Với $\left\{\begin{array}{l}x^2-2x+m\neq 0\\m-2x-x^2\neq 0\end{array}\right.$, chia hai vế của phương trình cho $(x^2-2x+m)(m-2x-x^2)=0$, ta được: $\dfrac{3^{m-2x-x^2}-1}{m-2x-x^2}+\dfrac{2^{x^2-2x+m}-1}{x^2-2x+m}=0\quad(*)$

Nhận thấy hàm số $f(x)=\dfrac{a^x-1}{x}>0$ với $a>1$ và $x\neq 0$.

Suy ra: $\frac{3^{m-2x-x^2}-1}{m-2x-x^2}+\frac{2^{x^2-2x+m}-1}{x^2-2x+m}>0\Rightarrow$ phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho tương đương với $\begin{bmatrix}x^2-2x+m=0\\ m-2x-x^2=0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}m=-x^2+2x\\ m=x^2+2x\end{bmatrix}$.

Ta vẽ đồ thị hai hàm số $y=x^2+2x$ và $y=-x^2+2x$ trên cùng hệ trục tọa độ và lưu ý rằng hai đồ thị này tiếp xúc nhau tại điểm $(0;0)$.



Dựa vào đồ thị ta nhận thấy để phương trình đã cho có đúng 3 nghiệm thực x thì $m=\ 0;\pm1$

$\Rightarrow$ tổng các phần tử của tập S bằng 0.

PHẦN II

NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN

NGUYÊN HÀM

LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

- Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K. Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x)=f(x)$ với mọi x thuộc K.
- Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ ký hiệu là $\int f(x)=F(x)+C$.
- **Chú ý:** Mọi hàm số liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

2. Tính chất

- Nếu f,g là hai hàm số liên tục trên K thì $\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$.
- $\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x$ (với $k\neq 0$) $\Rightarrow\int[k.f(x)+l.g(x)]\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x+l\int g(x)\mathrm{d}x$
- $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=f(x)+C$

3. Công thức đổi biến số: $\boxed{\int f[u(x)]u'(x)\mathrm{d}x=F[u(x)]+C}$

4. Công thức nguyên hàm từng phần: $\boxed{\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u}$

5. Bảng nguyên hàm và vi phân

Hàm số sơ cấp	Hàm hợp $u=u(x)$	Thường gặp
$\int\mathrm{d}x=x+C$	$\int\mathrm{d}u=u+C$	Vi phân $\frac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b)=\mathrm{d}x$
$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq-1)$	$\int u^{\alpha}\mathrm{d}u=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq-1)$	$\int(ax+b)^{\alpha}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\alpha+1}(ax+b)^{\alpha+1}+C$
$\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln\lvert x\rvert+C\ (x\neq0)$	$\int\frac{\mathrm{d}u}{u}=\ln\lvert u\rvert+C\ (u(x)\neq0)$	$\int\frac{\mathrm{d}x}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert+C\ (a\neq0)$
$\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$	$\int\cos u\mathrm{d}u=\sin u+C$	$\int\cos(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$
$\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$	$\int\sin u\mathrm{d}u=-\cos u+C$	$\int\sin(ax+b)\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$
$\int\frac{1}{\cos^2x}\mathrm{d}x=\tan x+C$	$\int\frac{1}{\cos^2u}\mathrm{d}u=\tan u+C$	$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(ax+b)}=\frac{1}{a}\tan(ax+b)+C$
$\int\frac{1}{\sin^2x}\mathrm{d}x=-\cot x+C$ Với $x\neq k\pi$	$\int\frac{1}{\sin^2u}\mathrm{d}u=-\cot u+C$ Với $u(x)\neq k\pi$	$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(ax+b)}=\frac{-1}{a}\cot(ax+b)+C$
$\int e^x\mathrm{d}x=e^x+C$	$\int e^u\mathrm{d}u=e^u+C$	$\int e^{ax+b}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}e^{ax+b}+C$
$\int a^x\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C\ (0<a\neq1)$	$\int a^u\mathrm{d}u=\frac{a^u}{\ln a}+C\ (0<a\neq1)$	$\int a^{px+q}\mathrm{d}x=\frac{1}{p.\ln a}a^{px+q}+C\ (0<a\neq1)$

❖ **Một số nguyên tắc tính nguyên hàm cơ bản**

- Tích của đa thức hoặc lũy thừa $\xrightarrow{PP}$ khai triển.
- Tích các hàm mũ $\xrightarrow{PP}$ khai triển theo công thức mũ.
- Bậc chẵn của $\sin$ hoặc $cos \xrightarrow{PP}$ hạ bậc: $\sin^2 a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos2a$; $cos^2 a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2a$
- Chứa tích các căn thức của $x \xrightarrow{PP}$ chuyển về lũy thừa.

❖ **Phương pháp đổi biến số**

- Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f\left[u(x)\right].u'(x)dx = F\left[u(x)\right] + C$
- Giả sử ta cần tìm họ nguyên hàm $I = \int f(x)dx$, trong đó ta có thể phân tích hàm số đã cho $f(x) = g\left[u(x)\right].u'(x)$ thì ta thực hiện phép đổi biến đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x)dx$. Khi đó, ta thấy $I = \int g(t)dt = G(t) + C = G\left[u(x)\right] + C$.
- **Chú ý:** Sau khi ta tìm được họ nguyên hàm theo t thì ta phải thay $t = u(x)$.

❖ **Phương pháp tính nguyên hàm, tích phân của hàm số hữu tỷ** $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$.

- Nếu bậc của tử số $P(x) \geq$ bậc của mẫu số $Q(x) \xrightarrow{PP}$ Chia đa thức.
- Nếu bậc của tử số $P(x) \leq$ bậc của mẫu số $Q(x) \xrightarrow{PP}$ phân tích mẫu $Q(x)$ thành tích số, rồi sử dụng phương pháp chia để đưa về công thức nguyên hàm số.
- Nếu mẫu không phân tích được thành tích số $\xrightarrow{PP}$ thêm bớt để đổi biến hoặc lượng giác hóa bằng cách đặt $X = a\tan t$, nếu mẫu đưa được về dạng $X^2 + a^2$.

❖ **Nguyên hàm từng phần**

- Cho hai hàm số u và v liên tục trên $\left[a;b\right]$ và có đạo hàm liên tục trên $\left[a;b\right]$. Khi đó ta có được $\int udv = uv - \int vdu \quad (*)$
- Để tính nguyên hàm $\int udv = uv - \int vdu$ bằng phương pháp từng phần ta làm như sau:
- **Bước 1:** Chọn u, v sao cho $f(x)dx = udv$ (Chú ý: $dv = v'(x)dx$ và)
  - Tính $v = \int dv$ và $du = u'dx$.
- **Bước 2:** Thay vào công thức $(*)$ và tính $\int vdu$.
  - Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int vdu$ dễ tính hơn $\int udv$.

➢ Mẹo nhớ: "**Nhất lô, nhì đa, tam lượng, tứ mũ**"

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\sin 3x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x).e^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x).e^x$ là

A. $3\cos 3x-\sin 3x+C$.
B. $-3\cos 3x-\cos 3x+C$.
C. $3\sin 3x-\cos 3x+C$.
D. $3\cos 3x-\cos 3x+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\sin 3x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x).e^x$ suy ra $f(x).e^x=(\sin 3x)'=3\cos 3x$.

Xét $I=\int f'(x).e^x\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=e^x\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=e^x\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$.

Khi đó ta có $I=\int f'(x).e^x\mathrm{d}x=f(x).e^x-\int f(x).e^x\mathrm{d}x=3\cos 3x-\sin 3x+C$.

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết x^2-3x+1 là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x).e^{2x}$ là

A. $\dfrac{4x-11e^{2x}}{2}+C$.
B. $2x-2e^{2x}+C$.
C. $\dfrac{4x-5e^x}{2}+C$.
D. $\dfrac{4x-5e^{2x}}{2}+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có x^2-3x+1 là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$ suy ra $\dfrac{f(x)}{x}=(x^2-3x+1)'=2x-3$.

Suy ra $f(x)=2x^2-3x$ suy ra $f'(x)=4x-3$. Xét $I=\int(4x-3).e^{2x}\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=4x-3\\ \mathrm{d}v=e^{2x}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=4\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{1}{2}e^{2x}\end{cases}$.

Khi đó ta có:

$$I=\int(4x-3).e^{2x}\mathrm{d}x=\frac{(4x-3).e^{2x}}{2}-2\int e^{2x}\mathrm{d}x=\frac{(4x-3).e^{2x}}{2}-e^{2x}+C=\frac{4x-5e^{2x}}{2}+C.$$

VÍ DỤ 3. Tìm $\int\sin 5x.\cos x\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{1}{5}\cos 5x+\mathrm{C}$.
B. $-\dfrac{1}{8}\cos 4x-\dfrac{1}{12}\cos 6x+C$.
C. $-\dfrac{1}{5}\cos 5x+C$.
D. $\dfrac{1}{8}\cos 4x+\dfrac{1}{12}\cos 6x+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có : $\int\sin 5x.\cos x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int(\sin 6x+\sin 4x)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 6x}{6}-\frac{1}{4}\cos 4x\right)+C=-\frac{1}{12}\cos 6x-\frac{1}{8}\cos 4x+C$.

VÍ DỤ 4. Cho $\int\frac{(x-1)^{2017}}{(x+1)^{2019}}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}.\frac{(x-1)^{b}}{(x+1)^{c}}+C$ với a, b, c là các số nguyên. Giá trị $a+b+c$ bằng

A. 4.2018. **B.** 2.2018. **C.** 3.2018. **D.** 5.2018.

Lời giải

Chọn A

$I=\int\frac{(x-1)^{2017}}{(x+1)^{2019}}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2017}.\frac{1}{(x+1)^{2}}\mathrm{d}x$. Đặt $t=\frac{x-1}{x+1}\Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{2}{(x+1)^{2}}\mathrm{d}x$.

Khi đó $I=\int t^{2017}\frac{\mathrm{d}t}{2}=\frac{1}{2}.\frac{t^{2018}}{2018}+C=\frac{1}{2.2018}.\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2018}+C$

$=\frac{1}{2.2018}.\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2018}+C=\frac{1}{2.2018}.\frac{(x-1)^{2018}}{(x+1)^{2018}}+C$.

Suy ra $a=2.2018$, $b=2018$, $c=2018$ nên $a+b+c=4.2018$.

VÍ DỤ 5. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x-2}$, thỏa mãn $F(3)=1$ và $F(1)=2$, giá trị của $F(0)+F(4)$ bằng

A. $2\ln 2+3$. **B.** $2\ln 2+2$. **C.** $2\ln 2+4$. **D.** $2\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Ta có: $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x-2}\mathrm{d}x=\begin{cases}\ln(x-2)+C_1 & \text{khi } x>2\\ \ln(2-x)+C_2 & \text{khi } x<2\end{cases}$.

Do $\begin{cases}F(3)=1\\F(1)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=1\\C_2=2\end{cases}$. Khi đó $F(x)=\begin{cases}\ln(x-2)+1 & \text{khi } x>2\\ \ln(2-x)+2 & \text{khi } x<2\end{cases}$.

Vậy $F(0)+F(4)=(\ln 2+2)+(\ln 2+1)=2\ln 2+3$.

VÍ DỤ 6. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{e^{x}+1}$ và $F(0)=-\ln 2e$. Tập nghiệm S của phương trình $F(x)+\ln(e^{x}+1)=2$ là:

A. $S=\{3\}$. **B.** $S=\{2;3\}$. **C.** $S=\{-2;3\}$. **D.** $S=\{-3;3\}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $I=\int f(x)dx=\int\frac{1}{e^x+1}dx=\int\frac{e^x}{e^x(e^x+1)}dx$.

Đặt $t=e^x\Rightarrow dt=e^xdx$. $I=\int\frac{dt}{t(t+1)}=\int(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1})dt=\ln t-\ln(t+1)+C=\ln e^x-\ln(e^x+1)+C.$

Khi đó: $F(x)=\ln e^x-\ln(e^x+1)+C,\ F(0)=-\ln 2e\Leftrightarrow-\ln 2+C=-\ln 2-1\Leftrightarrow C=-1$

Do đó: $F(x)=\ln e^x-\ln(e^x+1)-1.$

$F(x)+\ln\left(e^x+1\right)=2\Leftrightarrow\ln e^x-\ln(e^x+1)-1+\ln\left(e^x+1\right)=2\Leftrightarrow\ln e^x=3\Leftrightarrow x=3.$

VÍ DỤ 7. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)+2xf(x)=2xe^{-x^2},\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=1$. Tất cả các nguyên hàm của $x.f(x)e^{x^2}$ là

A. $\left(x^2+1\right)^2+C$. **B.** $\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^2e^{-x^2}+C$. **C.** $\left(x^2+1\right)^2e^{-x^2}+C$. **D.** $\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^2+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)+2xf(x)=2xe^{-x^2}\Leftrightarrow e^{x^2}\left(f'(x)+2xf(x)\right)=e^{x^2}.2xe^{-x^2}\Leftrightarrow\left(e^{x^2}f(x)\right)'=2x$

$\Rightarrow e^{x^2}f(x)=\int 2xdx=x^2+C.$

Vì $f(0)=1\Leftrightarrow C=1\Rightarrow f(x)=\left(x^2+1\right)e^{-x^2}$.

Vậy $\int xf(x)e^{x^2}dx=\int x\left(x^2+1\right)dx=\frac{1}{2}\int\left(x^2+1\right)d\left(x^2+1\right)=\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^2+C$.

VÍ DỤ 8. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ của hàm số $f(x)=x^2e^{ax}\ (a\neq 0)$, sao cho $F\left(\frac{1}{a}\right)=F(0)+1.$ Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $0<a\leq 1.$ **B.** $a<-2.$ **C.** $a\geq 3.$ **D.** $1<a<2.$

Lời giải

Chọn A

$F(x)=\int x^2e^{ax}dx$. Đặt $\begin{cases}u=x^2\\dv=e^{ax}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2xdx\\v=\frac{1}{a}e^{ax}\end{cases}$.

$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{a}x^2e^{ax}-\frac{2}{a}\int xe^{ax}dx=\frac{1}{a}x^2e^{ax}-\frac{2}{a}.A\ (1)$

Xét $A=\int xe^{ax}dx$. Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=e^{ax}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=\frac{1}{a}e^{ax}\end{cases}\Rightarrow A=\frac{1}{a}xe^{ax}-\frac{1}{a}\int e^{ax}dx\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $F(x)=\frac{1}{a}x^2\mathrm{e}^{ax}-\frac{2}{a^2}xe^{ax}+\frac{2}{a^2}\int \mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}x^2\mathrm{e}^{ax}-\frac{2}{a^2}x\mathrm{e}^{ax}+\frac{2}{a^3}\mathrm{e}^{ax}+C$.

Mà $F\left(\frac{1}{a}\right)=F(0)+1\Rightarrow \frac{1}{a^3}\mathrm{e}-\frac{2}{a^3}\mathrm{e}+\frac{2}{a^3}\mathrm{e}+C=\frac{2}{a^3}+1+C$

$\Rightarrow a^3=\mathrm{e}-2\Rightarrow a=\sqrt[3]{\mathrm{e}-2}\Rightarrow 0<a\le 1.$

VÍ DỤ 9. Cho $I=\int_1^2\frac{x+\ln x}{(x+1)^2}dx=\frac{a}{b}\ln 2-\frac{1}{c}$ với a,b,c là các số nguyên dương và các phân số là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $S=\frac{a+b}{c}$.

A. $S=\frac{5}{6}$. **B.** $S=\frac{1}{3}$. **C.** $S=\frac{2}{3}$. **D.** $S=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $I=\int_1^2\frac{x+\ln x}{(x+1)^2}dx=\int_1^2\frac{x}{(x+1)^2}dx+\int_1^2\frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$.

Xét $I_1=\int_1^2\frac{x}{(x+1)^2}dx$. Đặt $t=x+1\Rightarrow dt=dx$.

$I_1=\int_2^3\frac{t-1}{t^2}dt=\int_2^3\frac{1}{t}dt-\int_2^3\frac{1}{t^2}dt=\ln|t|\Big|_2^3+\frac{1}{t}\Big|_2^3=\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{6}$.

Xét $I_2=\int_1^2\frac{\ln x}{(x+1)^2}dx=-\frac{1}{x+1}\ln x\Big|_1^2+\int_1^2\frac{1}{x(x+1)}dx=-\frac{1}{3}\ln 2+\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$.

$I_2=-\frac{1}{3}\ln 2+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Big|_1^2=-\frac{1}{3}\ln 2+\ln\frac{4}{3}$. Do đó $I=\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\ln 2+\ln\frac{4}{3}=\frac{2}{3}\ln 2-\frac{1}{6}$.

$\Rightarrow S=\frac{a+b}{c}=\frac{2+3}{6}=\frac{5}{6}$.

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM

Câu 1: Tìm nguyên hàm của hàm số $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+3x-1}{x^2+2x+1}$.

A. $F(x)=1+\dfrac{2}{(x+1)^2}+C$.

B. $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{2}{x+1}+C$.

C. $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+x-\dfrac{2}{x+1}+C$.

D. $F(x)=1-\dfrac{2}{(x+1)^2}+C$.

Câu 2: Tính $\int \sin 3x\,dx$.

A. $-\dfrac{1}{3}\cos 3x+C$.

B. $-\cos 3x+C$.

C. $\cos 3x+C$.

D. $\dfrac{1}{3}\cos 3x+C$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f'(x)=2x+1$. Giá trị $f(2)-f(1)$ bằng

A. 4.

B. -2.

C. 2.

D. 0.

Câu 4: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{3x+2}$ là

A. $\dfrac{2}{3}(3x+2)\sqrt{3x+2}+C$.

B. $\dfrac{1}{3}(3x+2)\sqrt{3x+2}+C$.

C. $\dfrac{2}{9}(3x+2)\sqrt{3x+2}+C$.

D. $\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{\sqrt{3x+2}}+C$.

Câu 5: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x}+\sin x$ là

A. $\ln|x|+\cos x+C$.

B. $\ln|x|-\cos x+C$.

C. $\ln x-\cos x+C$.

D. $\dfrac{1}{x^2}-\cos x+C$.

Câu 6: Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=ax+\dfrac{b}{x^2}(x\neq 0)$, biết rằng $F(-1)=1, F(1)=4, f(1)=0$.

A. $F(x)=\dfrac{3x^2}{2}+\dfrac{3}{4x}-\dfrac{7}{4}$.

B. $F(x)=\dfrac{3x^2}{4}-\dfrac{3}{2x}-\dfrac{7}{4}$.

C. $F(x)=\dfrac{3x^2}{4}+\dfrac{3}{2x}+\dfrac{7}{4}$.

D. $F(x)=\dfrac{3x^2}{2}-\dfrac{3}{2x}-\dfrac{1}{2}$.

Câu 7: Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=2019^x(4-x^2)(x^2-3x+2)$. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $F(x)$ là

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 5.

Câu 8: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x+1)(x+2)$.

A. $\int f(x)dx=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3}{2}x^2+2x+C$.

B. $\int f(x)dx=2x+3+C$.

C. $\int f(x)dx=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2}{3}x^2+2x+C$.

D. $\int f(x)dx=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{2}{3}x^2+2x+C$.

Câu 9: Tìm họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x+1$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}(3x+1)^2+C.$ **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=(3x+1)^2+C.$

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}(3x+1)^2+C.$ **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(3x+1)^2+C.$

Câu 10: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\frac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ thỏa mãn $F(\mathrm{e}+1)=4$. Tìm $F(x)$.

A. $2\ln(x-1)+2$. **B.** $\ln(x-1)+3$. **C.** $4\ln(x-1)$. **D.** $\ln(x-1)-3$.

Câu 11: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\frac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ thỏa mãn $F(e+1)=4$. Tìm $F(x)$.

A. $2\ln(x-1)+2$. **B.** $\ln(x-1)+3$. **C.** $4\ln(x-1)$. **D.** $\ln(x-1)-3$.

Câu 12: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{2x-1}$. Biết $F(1)=2$. Giá trị của $F(2)$ là

A. $F(2)=\frac{1}{2}\ln 3-2$. **B.** $F(2)=\ln 3+2$. **C.** $F(2)=2\ln 3-2$. **D.** $F(2)=\frac{1}{2}\ln 3+2$.

Câu 13: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+\frac{x}{2}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=x^3+\frac{x^2}{2}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=x^3+\frac{x^2}{2}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=x^3+\frac{x^2}{4}+C$.

Câu 14: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+\frac{x}{2}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=x^3+\frac{x^2}{2}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=x^3+\frac{x^2}{2}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=x^3+\frac{x^2}{4}+C$.

Câu 15: Nguyên hàm của $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x}}$ là

A. $\frac{-\sqrt{x}}{2}+C$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{x}}+C$. **C.** $\frac{-2}{\sqrt{x}}+C$. **D.** $\frac{\sqrt{x}}{2}+C$.

Câu 16: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=2\sin x.\cos 2x$ là

A. $-\frac{1}{3}\cos 3x+\cos x+C$. **B.** $\frac{1}{3}\cos 3x+\cos x+C$.

C. $\frac{1}{3}\cos 3x-\cos x+C$. **D.** $-\cos 3x+\cos x+C$.

Câu 17: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+\sin 2x$ là:

A. $x^2-\frac{1}{2}\cos 2x+c$. **B.** $x^2+\frac{1}{2}\cos 2x+c$. **C.** $x^2-2\cos 2x+c$. **D.** $x^2-2\cos 2x+c$.

Câu 18: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và: $f'(x)=2\mathrm{e}^{2x}+1,\ \forall x, f(0)=2$. Hàm $f(x)$ là

A. $y=2\mathrm{e}^{x}+2x$. **B.** $y=2\mathrm{e}^{x}+2$. **C.** $y=\mathrm{e}^{2x}+x+2$. **D.** $y=\mathrm{e}^{2x}+x+1$.

Câu 19: Hàm số nào dưới đây là họ nguyên hàm của hàm số $y=\cos 2x$?

A. $y=\sin 2x+C$. **B.** $y=\frac{1}{2}\cos 2x+C$.

C. $y=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)^2+C$. **D.** $y=2\sin 2x+C$.

Câu 20: Cho $\int f(x)\mathrm{d}x=3x^2-4x+C$. Tìm $\int f(e^x)\mathrm{d}x$

A. $\int f(e^x)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}e^{2x}-4e^x+C$. **B.** $\int f(e^x)\mathrm{d}x=3e^{2x}-4e^x+C$.

C. $\int f(e^x)\mathrm{d}x=6e^x+4x+C$. **D.** $\int f(e^x)\mathrm{d}x=6e^x-4x+C$.

Câu 21: Tìm nguyên $F(x)$ của hàm số $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)$?

A. $F(x)=\frac{x^4}{4}-6x^3+\frac{11}{2}x^2-6x+C$. **B.** $F(x)=x^4+6x^3+11x^2+6x+C$.

C. $F(x)=\frac{x^4}{4}+2x^3+\frac{11}{2}x^2+6x+C$. **D.** $F(x)=x^3+6x^2+11x^2+6x+C$.

Câu 22: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x.\cos x+\frac{1}{x+1}$ là

A. $F(x)=\frac{1}{4}\cos 2x+\ln|x+1|+C$. **B.** $F(x)=-4\cos 2x+\ln|x+1|+C$.

C. $F(x)=-\frac{1}{4}\cos 2x+\ln(x+1)+C$. **D.** $F(x)=-\frac{1}{4}\cos 2x+\ln|x+1|+C$.

Câu 23: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x-\sin 2x$ là

A. $x^2+\frac{1}{2}\cos 2x+C$. **B.** $\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x+C$. **C.** $\frac{x^2}{2}+\cos 2x+C$. **D.** $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x+C$.

Câu 24: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x\left(2017-\frac{2018e^{-x}}{x^5}\right)$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=2017e^x-\frac{2018}{x^4}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=2017e^x+\frac{2018}{x^4}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=2017e^x+\frac{504,5}{x^4}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=2017e^x-\frac{504,5}{x^4}+C$.

Câu 25: Hàm số $F(x)=x^3+\sin x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $f(x)=3x^2-\cos x$. **B.** $f(x)=\frac{x^4}{4}-\cos x$.

C. $f(x)=3x^2+\cos x$. **D.** $f(x)=\frac{x^4}{4}-\cos x$.

Câu 26: Hàm số $F(x)=x^3+\sin x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $f(x)=3x^2-\cos x$. **B.** $f(x)=\frac{x^4}{4}-\cos x$.

C. $f(x)=3x^2+\cos x$. **D.** $f(x)=\frac{x^4}{4}-\cos x$.

Câu 27: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x+1$ là

A. $\cos x+C$. **B.** $\cos x+x+C$. **C.** $-\cos x+C$. **D.** $-\cos x+x+C$.

Câu 28: Hàm số $y=f(x)$ có một nguyên hàm là $F(x)=\mathrm{e}^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)+1}{\mathrm{e}^{x}}$

A. $\int\dfrac{f(x)+1}{\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}+C$.

B. $\int\dfrac{f(x)+1}{\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}+C$.

C. $\int\dfrac{f(x)+1}{\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}+C$.

D. $\int\dfrac{f(x)+1}{\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}+C$.

Câu 29: Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\dfrac{1}{x}$ trên $(-\infty;0)$ thỏa mãn $F(-2)=0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $F(x)=\ln\left(\dfrac{-x}{2}\right)\ \forall x\in(-\infty;0)$

B. $F(x)=\ln|x|+C\ \forall x\in(-\infty;0)$ với C là một số thực bất kì.

C. $F(x)=\ln|x|+\ln 2\ \forall x\in(-\infty;0)$.

D. $F(x)=\ln(-x)+C\ \forall x\in(-\infty;0)$ với C là một số thực bất kì.

Câu 30: Cho hàm số $f(x)=2x^{2}e^{x^{3}+2}+2xe^{2x}$, ta có $\int f(x)dx=me^{x^{3}+2}+nxe^{2x}-pe^{2x}+C$. Giá trị của biểu thức $m+n+p$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** 2. **C.** $\dfrac{13}{6}$. **D.** $\dfrac{7}{6}$.

Câu 31: Cho biết $\int\dfrac{2x-13}{(x+1)(x-2)}\mathrm{d}x=a\ln|x+1|+b\ln|x-2|+C$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+2b=8$. **B.** $a+b=8$. **C.** $2a-b=8$. **D.** $a-b=8$.

Câu 32: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{x-1}{x^{2}}$.

A. $F(x)=-\ln|x|+\dfrac{1}{x}+C$.

B. $F(x)=\ln|x|-\dfrac{1}{x}+C$.

C. $F(x)=\ln|x|+\dfrac{1}{x}+C$.

D. $F(x)=-\ln|x|-\dfrac{1}{x}+C$.

Câu 33: Biết hàm số $y=f(x)$ có $f'(x)=3x^{2}+2x+m$, $f(2)=1$ và đồ thị của hàm số $y=f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -5. Hàm số $f(x)$ là:

A. $x^{3}+2x^{2}-5x-5$. **B.** $2x^{3}+x^{2}-7x-5$. **C.** $x^{3}+x^{2}-3x-5$. **D.** $x^{3}+x^{2}+4x-5$.

Câu 34: Cho biết $\int\dfrac{4x+11}{x^{2}+5x+6}\mathrm{d}x=a\ln|x+2|+b\ln|x+3|+C$. Tính giá trị biểu thức: $P=a^{2}+ab+b^{2}$.

A. 12. **B.** 13. **C.** 14. **D.** 15.

Câu 35: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)^{2}}$ là

A. $\frac{2}{e^x+1}+C$. **B.** $\frac{-2}{e^x+1}+C$. **C.** $\frac{-1}{e^x+1}+C$. **D.** $\frac{1}{e^x+1}+C$.

Câu 36: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x+2x$ thỏa mãn $F(0)=\frac{3}{2}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $F(x)=e^x+x^2+\frac{5}{2}$. **B.** $F(x)=e^x+x^2-\frac{1}{2}$.

C. $F(x)=e^x+x^2+\frac{3}{2}$. **D.** $F(x)=e^x+x^2+\frac{1}{2}$.

Câu 37: Hàm số $f(x)=e^{-x}+2x-5$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $y=-e^{-x}+\frac{1}{2}x^2-5x+1$. **B.** $y=e^{-x}+x^2-5x$.

C. $y=-e^{-x}+2$. **D.** $y=-e^{-x}+x^2-5x+3$.

Câu 38: Cho biết $\int\frac{1}{x^3-x}dx=a\ln|(x-1)(x+1)|+b\ln|x|+C$. Tính giá trị biểu thức: $P=2a+b$.

A. 0. **B.** -1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 1.

Câu 39: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^x$, thỏa mãn $F(0)=\frac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T=F(0)+F(1)+...+F(2018)+F(2019)$.

A. $T=1009.\frac{2^{2019}+1}{\ln 2}$. **B.** $T=2^{2019.2020}$. **C.** $T=\frac{2^{2019}-1}{\ln 2}$. **D.** $T=\frac{2^{2020}-1}{\ln 2}$.

Câu 40: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x$, thỏa mãn $F(0)=2020$. Tính giá trị biểu thức $T=F(0)+F(1)+...+F(2018)+F(2019)$.

A. $T=\frac{e^{2020}-1}{e-1}+2019.2020$. **B.** $T=\frac{e^{2019}-1}{e-1}+2018.2019$.

C. $T=\frac{e^{2020}-1}{e-1}+2020^2$. **D.** $T=\frac{e^{2019}-1}{e-1}+2019^2$.

Câu 41: Cho hàm số $y=\cos 4x$ có một nguyên hàm là $F(x)$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\int F(x)dx=-\frac{\cos 4x}{4}+2x+C$. **B.** $\int F(x)dx=-4\cos 4x+2x+C$.

C. $\int F(x)dx=-\cos 4x+2x+C$. **D.** $\int F(x)dx=-\frac{\cos 4x}{16}+2x+C$.

Câu 42: Cho $\int\frac{1}{x^2-1}dx=a\ln|x-1|+b\ln|x+1|+C$, với a, b là các số hữu tỷ. Khi đó $a-b$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -1.

Câu 43: Cho hàm số $F(x)=(ax^2+bx-c)e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(2018x^2-3x+1)e^{2x}$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Tính $T=a+2b+4c$.

A. $T=1011$. **B.** $T=-3035$. **C.** $T=1007$. **D.** $T=-5053$.

Câu 44: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $f(0)=2017$, $f(2)=2018$. Tính $S=f(3)-f(-1)$.

A. $S=\ln 4035$. **B.** $S=4$. **C.** $S=\ln 2$. **D.** $S=1$.

Câu 45: Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$. Biết rằng giá trị lớn nhất của $F(x)$ trên khoảng $(0;\pi)$ là $\sqrt{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}-4$. **B.** $F\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$. **D.** $F\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=3-\sqrt{3}$.

Câu 46: Biết luôn có hai số a và b để $F(x)=\dfrac{ax+b}{x+4}(4a-b\neq 0)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $2f^2(x)=(F(x)-1)f'(x)$. Khẳng định nào dưới đây đúng và đầy đủ nhất?

A. $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$. **B.** $a=1$, $b=4$. **C.** $a=1, b=-1$. **D.** $a=1, b\in\mathbb{R}\setminus\{4\}$.

Câu 47: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 2x$ và $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$. Tính $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

A. $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$. **B.** $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{5}{4}$. **C.** $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0$. **D.** $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{4}$.

Câu 48: Biết rằng $x\mathrm{e}^x$ là một nguyên hàm của $f(-x)$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)\mathrm{e}^x$ thỏa mãn $F(0)=1$, giá trị của $F(-1)$ bằng

A. $\dfrac{7}{2}$. **B.** $\dfrac{5-\mathrm{e}}{2}$. **C.** $\dfrac{7-\mathrm{e}}{2}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Câu 49: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{x^2}(x^3-4x)$. Hàm số $F(x^2+x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 6. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 50: Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, nhận giá trị dương trên khoảng $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=1$, $f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1}$ với mọi $x>0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $4<f(5)<5$. **B.** $1<f(5)<2$. **C.** $3<f(5)<4$. **D.** $2<f(5)<3$.

Câu 51: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f'(x)+\dfrac{f(x)}{x}=x^2$ và $f(1)=-1$. Giá trị của $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ bằng

A. $\dfrac{1}{96}$. **B.** $\dfrac{1}{64}$. **C.** $\dfrac{1}{48}$. **D.** $\dfrac{1}{24}$.

Câu 52: Biết $F(x)=(ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(2x^2-5x+2)\mathrm{e}^{-x}$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị biểu thức $f(F(0))$ bằng:

A. $\dfrac{-1}{\mathrm{e}}$. **B.** $3\mathrm{e}$. **C.** $20\mathrm{e}^2$. **D.** $9\mathrm{e}$.

Câu 53: Cho hai hàm số $F(x)=(x^2+ax+b)e^x$, $f(x)=(x^2+3x+4)e^x$. Biết a,b là các số thực để $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Tính $S=a+b$.

A. $S=-6$. **B.** $S=12$. **C.** $S=6$. **D.** $S=4$.

Câu 54: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $F(1)=\dfrac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $S=F(1)+F(2)+F(3)+\ ...\ +F(2019)$ bằng

A. $\dfrac{2019}{2020}$. **B.** $\dfrac{2019.2021}{2020}$. **C.** $2018\dfrac{1}{2020}$. **D.** $-\dfrac{2019}{2020}$.

Câu 55: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=3$ và $x(4-f'(x))=f(x)-1$ với mọi $x>0$. Tính $f(2)$.

A. 6. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 56: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f'(x)-2f(x)=0$. Tính $f(-1)$ biết rằng $f(1)=1$.

A. e^{-4}. **B.** e^3. **C.** e^4. **D.** e^{-2}.

Câu 57: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ thoả mãn $f'(x)=\dfrac{3x-1}{x+2}$, $f(0)=1$ và $f(-4)=2$. Giá trị của biểu thức $f(2)+f(-3)$ bằng

A. 12. **B.** $\ln 2$. **C.** $10+\ln 2$. **D.** $3-20\ln 2$.

Câu 58: Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x-\cos x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y=F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. Vô số điểm. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

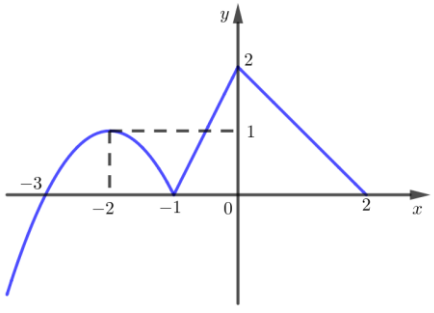
Câu 59: **3** Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos x+\dfrac{1}{2}x^2-1$. Hỏi đồ thị của hàm số $y=F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. Vô số điểm. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 60: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $(f'(x))^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=1$. Giá trị của $(f(1))^2$ là

A. 10. **B.** 8. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{9}{2}$.

Câu 61: Cho hàm số $f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên $[-3;2]$ như hình vẽ.



Biết $f(-3)=0$, giá trị của $f(-1)+f(1)$ bằng

A. $\frac{23}{6}$. **B.** $\frac{31}{6}$. **C.** $\frac{35}{3}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Câu 62: Cho hàm số $f(x)\neq 0$; $f'(x)=(2x+1).f^2(x)$ và $f(1)=-0,5$. Biết tổng $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)=\frac{a}{b}$; $(a\in\mathbb{Z};b\in\mathbb{N})$ với $\frac{a}{b}$ tối giản. Chọn khẳng định đúng.

A. $\frac{a}{b}<-1$. **B.** $a-b=1$. **C.** $b-a=4035$. **D.** $a+b=-1$.

Câu 63: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;4]$ thỏa mãn $f''(x)f(x)+\frac{[f(x)]^2}{\sqrt{(2x+1)^3}}=[f'(x)]^2$ và $f(x)>0$ với mọi $x\in[0;4]$. Biết rằng $f'(0)=f(0)=1$, giá trị của $f(4)$ bằng

A. e^2. **B.** $2e$. **C.** e^3. **D.** e^2+1.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.A	3.A	4.C	5.B	6.C	7.C	8.A	9.C	10.B
11.B	12.D	13.D	14.D	15.C	16.A	17.A	18.D	19.C	20.D
21.C	22.D	23.D	24.C	25.C	26.C	27.D	28.C	29.A	30.C
31.D	32.C	33.C	34.B	35.C	36.D	37.C	38.A	39.D	40.A
41.D	42.A	43.B	44.D	45.A	46.D	47.D	48.A	49.B	50.C
51.A	52.D	53.D	54.C	55.C	56.A	57.A	58.C	59.D	60.B
61.B	62.C	63.A							

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **Chọn B**

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x-1}{x^2+2x+1}=\frac{x^3+3x^2+3x+1-2}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^3-2}{(x+1)^2}=x+1-\frac{2}{(x+1)^2}$$

$$F(x)=\frac{x^2}{2}+x+\frac{2}{x+1}+C.$$

Câu 2: **Chọn A**

Áp dụng công thức $\int \sin(ax+b)\,dx=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$, ta có $\int \sin 3x\,dx=-\frac{1}{3}\cos 3x+C$.

Câu 3: **Chọn A**

Ta có $f'(x)=2x+1 \Rightarrow \int f'(x)dx=\int(2x+1)dx=x^2+x+C$

$\Rightarrow \exists C_1\in\mathbb{R}: f(x)=x^2+x+C_1 \Rightarrow f(2)-f(1)=2^2+2+C_1-(1^2+1+C_1)=4$

Câu 4: **Chọn C**

Ta có: $\int f(x)dx=\int\left(\sqrt{3x+2}\right)dx=\int(3x+2)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{(3x+2)^{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}}.\frac{1}{3}+C=\frac{2}{9}(3x+2)\sqrt{3x+2}+C.$

Câu 5: **Chọn B**

Câu 6: **Chọn C**

Ta có: $F(x)=\int\left(ax+\frac{b}{x^2}\right)dx=\frac{ax^2}{2}-\frac{b}{x}+c.$

Từ: $F(-1)=1, F(1)=4, f(1)=0 \Rightarrow \begin{cases}\frac{a}{2}+b+c=1\\ \frac{a}{2}-b+c=4\\ a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\ b=-\frac{3}{2}\\ c=\frac{7}{4}\end{cases}.$

Vậy $F(x)=\frac{3x^2}{4}+\frac{3}{2x}+\frac{7}{4}.$

Câu 7: **Chọn C**

Do hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=2019^x\left(4-x^2\right)\left(x^2-3x+2\right)$

$\Rightarrow F'(x)=2019^x\left(4-x^2\right)\left(x^2-3x+2\right)=2019^x\left(x-2\right)^2\left(x+2\right)\left(1-x\right)$

$F'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Do $x=-2$, $x=1$ là nghiệm bội 1, còn $x=2$ là nghiệm bội 2 nên hàm số $F(x)$ có hai điểm cực trị.

Câu 8: Chọn A

Ta có: $f\left(x\right)=\left(x+1\right)\left(x+2\right)=x^2+3x+2$.

Khi đó: $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(x^2+3x+2\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+2x+C$.

Câu 9: Chọn C

Ta có: $\int(3x+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int(3x+1)\mathrm{d}(3x+1)=\frac{1}{3}\frac{(3x+1)^2}{2}+C=\frac{1}{6}(3x+1)^2+C.$

Câu 10: Chọn B

Ta có $F\left(x\right)=\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}=\int\frac{\mathrm{d}\left(x-1\right)}{x-1}=\ln\left|x-1\right|+C=\ln\left(x-1\right)+C$,.

Mà $F\left(\mathrm{e}+1\right)=4\Rightarrow\ln\left(e+1-1\right)+C=4\Rightarrow C=3$. Vậy $F\left(x\right)=\ln\left(x-1\right)+3$.

Câu 11: Chọn B

Ta có $F\left(x\right)=\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x=\ln\left|x-1\right|+C=\ln\left(x-1\right)+C$ do $x\in\left(1;+\infty\right)$.

Mà $F\left(e+1\right)=4\Rightarrow\ln\left(e\right)+C=4\Rightarrow C=3$. Vậy $F\left(x\right)=\ln\left(x-1\right)+3$.

Câu 12: Chọn D

$\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2x-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|2x-1\right|+C\ \left(C\in\mathbb{R}\right)$.

$F\left(1\right)=2\Rightarrow C=2$. Vậy với $x>\frac{1}{2}$ thì $F\left(x\right)=\frac{1}{2}\ln\left(2x-1\right)+2$.

Do đó, $F\left(2\right)=\frac{1}{2}\ln3+2$.

Câu 13: Chọn D

Ta có: $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(3x^2+\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=x^3+\frac{x^2}{4}+C$.

Câu 14: Chọn D

Ta có: $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(3x^2+\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=x^3+\frac{x^2}{4}+C$.

Câu 15: Chọn C

$\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int x^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}+C=\frac{-2}{\sqrt{x}}+C$.

Câu 16: Chọn A

Ta có $f(x)=2\sin x.\cos 2x=\sin(-x)+\sin 3x=-\sin x+\sin 3x$.

$\Rightarrow \int f(x)\mathrm{d}x=\int(-\sin x+\sin 3x)\mathrm{d}x=-\int \sin x\mathrm{d}x+\int \sin 3x\mathrm{d}x=\cos x-\frac{1}{3}\cos 3x+C$.

Câu 17: Chọn A

$\int f(x)\mathrm{d}x=\int(2x+\sin 2x)\mathrm{d}x=2\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x+c=x^2-\frac{1}{2}\cos 2x+c$.

Câu 18: Chọn D

Ta có: $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int(2\mathrm{e}^{2x}+1)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{2x}+x+C$. Suy ra $f(x)=\mathrm{e}^{2x}+x+C$.

Theo bài ra ta có: $f(0)=2\Rightarrow 1+C=2\Leftrightarrow C=1$. Vậy: $f(x)=\mathrm{e}^{2x}+x+1$.

Câu 19: Chọn C

$\int \cos 2x dx=\frac{1}{2}\sin 2x+C'=\frac{1}{2}.2\sin x\cos x+C'=\frac{1}{2}.(1+2\sin x\cos x)+C'-\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}.(\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x)+C=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)^2+C$

Câu 20: Chọn D

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=3x^2-4x+C\Rightarrow f(x)=6x-4\Rightarrow f(e^x)=6e^x-4$.

Vậy $\int f(e^x)\mathrm{d}x=\int(6e^x-4)\mathrm{d}x=6e^x-4x+C$.

Câu 21: Chọn C

Ta có: $f(x)=x^3+6x^2+11x+6\Rightarrow F(x)=\int(x^3+6x^2+11x+6)dx=\frac{x^4}{4}+2x^3+\frac{11}{2}x^2+6x+C$.

Câu 22: Chọn D

Ta có $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{x+1}$. $F(x)=\int\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\cos 2x+\ln|x+1|+C$.

Câu 23: Chọn D

$\int(x-\sin 2x)dx=\int x.dx-\int \sin 2x.dx=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x+C$.

Câu 24: Chọn C

$\int f(x)\mathrm{d}x=\int e^x\left(2017-\frac{2018e^{-x}}{x^5}\right)\mathrm{d}x=\int\left(2017e^x-\frac{2018}{x^5}\right)\mathrm{d}x=2017e^x+\frac{504,5}{x^4}+C$

Câu 25: Chọn C

Ta có $F'(x)=3x^2+\cos x$.

Câu 26: Chọn C

Ta có $F'(x)=3x^2+\cos x$.

Câu 27: Chọn D

$\int(\sin x+1)\mathrm{d}x=-\cos x+x+C$.

Câu 28: Chọn C

Ta có: $f(x)=F'(x)=(\mathrm{e}^{2x})'=2\mathrm{e}^{2x}$

Suy ra: $\int \frac{f(x)+1}{e^x}dx = \int \frac{2e^{2x}+1}{e^x}dx = \int \left(2e^x + e^{-x}\right)dx = 2e^x - e^{-x} + C$.

Câu 29: Chọn A

Ta có $F(x) = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C = \ln(-x) + C$ với $\forall x \in (-\infty;0)$.

Lại có $F(-2) = 0 \Leftrightarrow \ln 2 + C = 0 \Leftrightarrow C = -\ln 2$. Do đó $F(x) = \ln(-x) - \ln 2 = \ln\left(\frac{-x}{2}\right)$.

Vậy $F(x) = \ln\left(\frac{-x}{2}\right)$ $\forall x \in (-\infty;0)$.

Câu 30: Chọn C

Vì $\int f(x)dx = me^{x^3+2} + nxe^{2x} - pe^{2x} + C$ nên $\left(me^{x^3+2} + nxe^{2x} - pe^{2x} + C\right)' = f(x)$

Suy ra $3mx^2e^{x^3+2} + 2nxe^{2x} + (n-2p)e^{2x} = 2x^2e^{x^3+2} + 2xe^{2x}$ đồng nhất 2 biểu thức ta được hệ phương trình sau: $\begin{cases} 3m = 2 \\ 2n = 2 \\ n - 2p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ n = 1 \\ p = \frac{1}{2} \end{cases}$. Suy ra: $m + n + p = \frac{13}{6}$.

Câu 31: Chọn D

Ta có: $\frac{2x-13}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{(A+B)x + (-2A+B)}{(x+1)(x-2)}$

$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 2 \\ -2A + B = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 5 \\ B = -3 \end{cases}$.

Khi đó: $\int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)}dx = \int \left(\frac{5}{x+1} - \frac{3}{x-2}\right)dx = 5\ln|x+1| - 3\ln|x-2| + C$.

Suy ra $a = 5; b = -3$ nên $a - b = 8$.

Câu 32: Chọn C

Ta có $f(x) = \frac{x-1}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ nên $F(x) = \ln|x| + \frac{1}{x} + C$.

Câu 33: Chọn C

Theo lý thuyết ta có: $\int f'(x)dx = f(x) + C$.

Ta có: $\int f'(x)dx = \int (3x^2 + 2x + m)dx = x^3 + x^2 + mx + C$.

Khi đó $f(x)$ có dạng: $f(x) = x^3 + x^2 + mx + C_1$

Theo đề ta có: $\begin{cases} f(2) = 1 \\ f(0) = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^3 + 2^2 + 2m + C_1 = 1 \\ C_1 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ C_1 = -5 \end{cases}$.

Vậy hàm số $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 5$.

Câu 34: Chọn B

Ta có: $\frac{4x+11}{x^2+5x+6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)} = \frac{(A+B)x + (3A+2B)}{(x+2)(x+3)}$

$\Rightarrow \begin{cases} A+B=4 \\ 3A+2B=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=1 \end{cases}$.

Khi đó: $\int \frac{4x+11}{x^2+5x+6}\mathrm{dx} = \int\left(\frac{3}{x+2}+\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{dx} = 3\ln|x+2|+\ln|x+3|+C$.

Suy ra $a=3; b=1$ nên $P=a^2+ab+b^2=13$.

Câu 35: Chọn C

Ta có $\int \frac{\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^x+1)}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2} = \frac{-1}{\mathrm{e}^x+1}+C$.

Câu 36: Chọn D

Cách 1: Xét đáp án D, ta có: $\begin{cases} F(0)=\frac{3}{2} \\ F'(x)=e^x+2x=f(x) \end{cases}$.

Cách 2: Ta có $\int\left(e^x+2x\right)dx = e^x+x^2+C$.

$F(x)$ là 1 nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x+2x$ suy ra $F(x)$ có dạng e^x+x^2+C

Theo đề bài $F(0)=\frac{3}{2} \Leftrightarrow e^0+0^2+C=\frac{3}{2} \Leftrightarrow C=\frac{1}{2}$. Vậy $F(x)=e^x+x^2+\frac{1}{2}$.

Câu 37: Chọn C

Ta có $f'(x)=-\mathrm{e}^{-x}+2$ nên $f(x)=\mathrm{e}^{-x}+2x-5$ là một nguyên hàm của hàm số $y=-\mathrm{e}^{-x}+2$.

Câu 38: Chọn A

Ta có: $\frac{1}{x^3-x} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{D}{x+1} = \frac{A\left(x^2-1\right)+Bx\left(x+1\right)+Dx\left(x-1\right)}{x^3-x}$

$= \frac{\left(A+B+D\right)x^2+\left(B-D\right)x-A}{x^3-x} \Rightarrow \begin{cases} A+B+D=0 \\ B-D=0 \\ -A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=\frac{1}{2} \\ D=\frac{1}{2} \end{cases}$.

Khi đó: $\int \frac{1}{x^3-x}\mathrm{dx} = \int\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{2(x+1)}\right)\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\ln\left|(x-1)(x+1)\right|-\ln|x|+C$.

Suy ra $a=\frac{1}{2}; b=-1$ nên $P=2a+b=0$.

Câu 39: Chọn D

Ta có $\int f(x)\mathrm{dx} = \int 2^x\mathrm{dx} = \frac{2^x}{\ln 2}+C$

$F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^x$, ta có $F(x)=\frac{2^x}{\ln 2}+C$ mà $F(0)=\frac{1}{\ln 2}$

$\Rightarrow C=0 \Rightarrow F(x)=\frac{2^x}{\ln 2}$.

$T=F(0)+F(1)+\ldots+F(2018)+F(2019)$

$=\frac{1}{\ln 2}\left(1+2+2^2+...+2^{2018}+2^{2019}\right)=\frac{1}{\ln 2}.\frac{2^{2020}-1}{2-1}=\frac{2^{2020}-1}{\ln 2}$

Câu 40: Chọn A

Ta có $\int f(x)dx=\int e^x dx=e^x+C$

$F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x$, ta có $F(x)=e^x+C$ mà $F(0)=2020$

$\Rightarrow C=2019\Rightarrow F(x)=e^x+2019$.

$T=F(0)+F(1)+...+F(2018)+F(2019)=1+e+e^2+...+e^{2018}+e^{2019}+2019.2020$

$=\frac{e^{2020}-1}{e-1}++2019.2020$.

Câu 41: Chọn D

Ta có $F(x)=\int\cos 4xdx=\frac{1}{4}\sin 4x+C$.

Từ $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$ suy ra $C=2$.

Ta được $F(x)=\frac{1}{4}\sin 4x+2$. Suy ra $\int F(x)dx=\int\left(\frac{1}{4}\sin 4x+2\right)dx=-\frac{\cos 4x}{16}+2x+C$.

Câu 42: Chọn A

Ta có: $\int\frac{1}{x^2-1}dx=\int\frac{1}{(x-1)(x+1)}dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+C$.

$\Rightarrow a=\frac{1}{2};\ b=\frac{-1}{2}\Rightarrow a-b=1$.

Câu 43: Chọn B

$F'(x)=(2ax+b)e^{2x}+2(ax^2+bx-c)e^{2x}=\left[2ax^2+(2b+2a)x+b-2c\right]e^{2x}$

Ta có: $\left[2ax^2+(2b+2a)x+b-2c\right]e^{2x}=(2018x^2-3x+1)e^{2x}\Rightarrow\begin{cases}2a=2018\\2(a+b)=-3\\b-2c=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1009\\b=\frac{-2021}{2}\\c=\frac{-2023}{4}\end{cases}$

Vậy $T=-3035$

Câu 44: Chọn D

Trên khoảng $(1;+\infty)$: $\int f'(x)dx=\int\frac{1}{x-1}dx=\ln(x-1)+C_1\Rightarrow f(x)=\ln(x-1)+C_1$.

Mà $f(2)=2018\Rightarrow C_1=2018$.

Trên khoảng $(-\infty;1)$ $\int f'(x)dx=\int\frac{1}{x-1}dx=\ln(1-x)+C_2\Rightarrow f(x)=\ln(1-x)+C_2$.

Mà $f(0)=2017\Rightarrow C_2=2017$.

Vậy $f(x)=\begin{cases}\ln(x-1)+2018 & \text{khi } x>1\\\ln(1-x)+2017 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Suy ra $f(3)-f(-1)=1$.

Câu 45: Chọn A

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm "TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"
B LEARN

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{2\cos x-1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=2\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$

$=2\int\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin^2 x}-\int\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=-\frac{2}{\sin x}+\cot x+C$

Do $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$ nên hàm số $F(x)$ có công thức dạng $F(x)=-\frac{2}{\sin x}+\cot x+C$ với mọi $x\in(0;\pi)$.

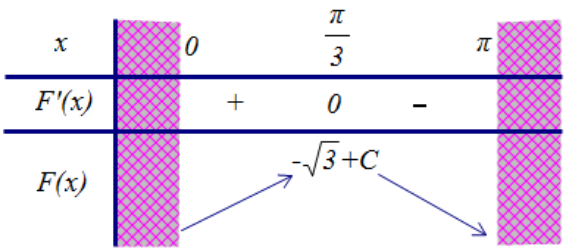
Xét hàm số $F(x)=-\frac{2}{\sin x}+\cot x+C$ xác định và liên tục trên $(0;\pi)$.

$F'(x)=f(x)=\frac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$

Xét $F'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2\cos x-1}{\sin^2 x}=0\Leftrightarrow\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Trên khoảng $(0;\pi)$, phương trình $F'(x)=0$ có một nghiệm $x=\frac{\pi}{3}$

Bảng biến thiên:



$\max\limits_{(0;\pi)}F(x)=F\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}+C$. Theo đề bài ta có, $-\sqrt{3}+C=\sqrt{3}\Leftrightarrow C=2\sqrt{3}$.

Do đó, $F(x)=-\frac{2}{\sin x}+\cot x+2\sqrt{3}$. Khi đó, $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}-4$.

Câu 46: Chọn D

Do $4a-b\neq0$ nên $F(x)\neq C\ \forall x\in\mathbb{R}$. Vì luôn có hai số a và b để $F(x)=\frac{ax+b}{x+4}(4a-b\neq0)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên $f(x)$ không phải là hàm hằng.

Từ giả thiết $2f^2(x)=(F(x)-1)f'(x)\Leftrightarrow\frac{2f(x)}{F(x)-1}=\frac{f'(x)}{f(x)}$

Lấy nguyên hàm hai vế với vi phân $\mathrm{d}x$ ta được: $\int\frac{2f(x)}{F(x)-1}\mathrm{d}x=\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x\Leftrightarrow2\ln|F(x)-1|=\ln|f(x)|+C$ với C là hằng số.

$2\ln|F(x)-1|+\ln e^C=\ln|f(x)|\Leftrightarrow|f(x)|=e^C.(F(x)-1)^2=e^C.\left(\frac{(a-1)x+b-4}{x+4}\right)^2$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=e^{C}.\left(\dfrac{(a-1)x+b-4}{x+4}\right)^{2} \\ f(x)=-e^{C}.\left(\dfrac{(a-1)x+b-4}{x+4}\right)^{2} \end{array}\right.$$

Trường hợp 1. $f(x)=e^{C}.\left(\dfrac{(a-1)x+b-4}{x+4}\right)^{2}$. Ta có $F'(x)=f(x)\Rightarrow f(x)=\dfrac{4a-b}{(x+4)^{2}}$.

Đồng nhất hệ số ta có:

$$e^{C}.\left((a-1)x+b-4\right)^{2}=4a-b\,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases} a=1 \\ e^{C}.(b-4)^{2}=4-b \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a=1 \\ b=4 \\ b=\dfrac{4e^{C}-1}{e^{C}} \end{array}\right.$$

Loại $b=4$ do điều kiện $4a-b\neq 0$. Do đó $(a;b)=\left(1;\dfrac{4e^{C}-1}{e^{C}}\right)$.

Trường hợp 2. $f(x)=-e^{C}.\left(\dfrac{(a-1)x+b-4}{x+4}\right)^{2}$. Ta có $F'(x)=f(x)\Rightarrow f(x)=\dfrac{4a-b}{(x+4)^{2}}$.

Đồng nhất hệ số ta có:

$$-e^{C}.\left((a-1)x+b-4\right)^{2}=4a-b\,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases} a=1 \\ -e^{C}.(b-4)^{2}=4-b \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a=1 \\ b=4 \\ b=\dfrac{4e^{C}+1}{e^{C}} \end{array}\right.$$

Loại $b=4$ do điều kiện $4a-b\neq 0$. Do đó $(a;b)=\left(1;\dfrac{4e^{C}+1}{e^{C}}\right)$.

Câu 47: Chọn D

Ta có $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x\mathrm{d}x=F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=1-F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Mà $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\cos 2x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=-\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{2}-\cos\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{4}$. Do đó $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$.

Câu 48: Chọn A

Ta có $f(-x)=\left(x\mathrm{e}^{x}\right)'=\mathrm{e}^{x}+x\mathrm{e}^{x}$, $\forall x\in(-\infty;+\infty)$.

Do đó $f(-x)=\mathrm{e}^{-(-x)}-(-x)\mathrm{e}^{-(-x)}$, $\forall x\in(-\infty;+\infty)$.

Suy ra $f(x)=\mathrm{e}^{-x}(1-x)$, $\forall x\in(-\infty;+\infty)$.

Nên $f'(x)=\left[\mathrm{e}^{-x}(1-x)\right]'=\mathrm{e}^{-x}(x-2)\Rightarrow f'(x)\mathrm{e}^{x}=\mathrm{e}^{-x}(x-2).\mathrm{e}^{x}=x-2$.

Bởi vậy $F(x)=\int(x-2)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(x-2)^{2}+C$.

Từ đó $F(0)=\frac{1}{2}(0-2)^2+C=C+2;\ F(0)=1\Rightarrow C=-1$.

Vậy $F(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2-1\Rightarrow F(-1)=\frac{1}{2}(-1-2)^2-1=\frac{7}{2}$.

Câu 49: Chọn B

$F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{x^2}(x^3-4x)\Rightarrow F'(x)=f(x)=e^{x^2}(x^3-4x)$.

$$F'(x)=0\Leftrightarrow e^{x^2}(x^3-4x)=0\Leftrightarrow x^3-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\\x=2\end{array}\right.$$

$$F'(x^2+x)=(2x+1).F'(x^2+x);\ (2x+1).F'(x^2+x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+1=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}\\x^2+x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\end{array}\right.\\x^2+x=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right.\\x^2+x=-2\ (ptvn)\end{array}\right.$$

Vậy, phương trình $F'(x^2+x)=0$ có 5 nghiệm phân biệt. Do đó, hàm số $F(x^2+x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 50: Chọn C

Ta có $\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\Leftrightarrow\ln f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C$. Vì $f(1)=1\Rightarrow C+\frac{4}{3}=0\Leftrightarrow C=-\frac{4}{3}$.

$\Rightarrow\ln f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{4}{3}\Leftrightarrow f(x)=e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{4}{3}}\Rightarrow f(5)=e^{\frac{4}{3}}\approx 3{,}8$. Vậy $3<f(5)<4$.

Câu 51: Chọn A

Ta có $f'(x)+\frac{f(x)}{x}=x^2\Leftrightarrow xf'(x)+f(x)=x^3\Leftrightarrow\left[xf(x)\right]'=x^3\Rightarrow xf(x)=\int x^3dx=\frac{x^4}{4}+C$.

$f(1)=-1\Rightarrow C=-\frac{5}{4}$. Khi đó $f(x)=\frac{x^4-5}{4x}\Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{96}$.

Câu 52: Chọn D

Tính $\left(F(x)\right)'=\left(\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}\right)'=\left[-ax^2+(2a-b)x+b-c\right]e^{-x}=\left(2x^2-5x+2\right)e^{-x}$.

Suy ra $\left\{\begin{array}{l}a=-2\\2a-b=-5\\b-c=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=-2\\b=1\\c=-1\end{array}\right.$ nên $F(x)=\left(-2x^2+x-1\right)e^{-x}$.

Tính $F(0)=-1$ suy ra $f\left(F(0)\right)=f(-1)=9e$.

Câu 53: Chọn D

Nhận xét: Bài này sẽ chặt chẽ hơn nếu thêm điều kiện $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Từ giả thiết ta có $F'(x)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \left(2x+a\right)\mathrm{e}^{x}+\left(x^{2}+ax+b\right)\mathrm{e}^{x}=\left(x^{2}+3x+4\right)\mathrm{e}^{x},\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^{2}+\left(2+a\right)x+a+b=x^{2}+3x+4,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Đồng nhất hai vế ta có $\begin{cases}a+2=3\\a+b=4\end{cases}$. Suy ra $S=a+b=4$.

Câu 54: Chọn C

Ta có: $F\left(x\right)=\int\frac{2x+1}{x^{4}+2x^{3}+x^{2}}\mathrm{d}x=\int\frac{2x+1}{x^{2}\left(x+1\right)^{2}}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x^{2}}-\frac{1}{\left(x+1\right)^{2}}\right)\mathrm{d}x.$

Suy ra: $F\left(x\right)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+c$ mà $F\left(1\right)=\frac{1}{2}$ nên $c=1$. Hay $F\left(x\right)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+1.$

Ta có: $S=F\left(1\right)+F\left(2\right)+F\left(3\right)+\ ...\ +F\left(2019\right)$

$S=\left(-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+1\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+1\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+1\right)+\ ...\ +\left(-\frac{1}{2019}+\frac{1}{2020}+1\right)$

$S=-1+\frac{1}{2020}+2019.1=2018+\frac{1}{2020}=2018\frac{1}{2020}.$

Câu 55: Chọn C

Ta có: $x(4-f'(x))=f(x)-1\Leftrightarrow f(x)+xf'(x)=4x+1\Leftrightarrow\left(xf(x)\right)'=4x+1$

$\Rightarrow xf(x)=\int\left(xf(x)\right)'\mathrm{d}x=\int\left(4x+1\right)\mathrm{d}x=2x^{2}+x+C.$

Với $x=1$ thì $1f(1)=3+C\Leftrightarrow 3=3+C\Leftrightarrow C=0.$

Do đó $xf(x)=2x^{2}+x$. Vậy $2f(2)=2.2^{2}+2$ hay $f(2)=5.$

Câu 56: Chọn A

Vì $f\left(x\right)>0$, nên ta có: $f'\left(x\right)-2f\left(x\right)=0\Leftrightarrow\frac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}=2\Rightarrow\int\frac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}\mathrm{d}x=\int 2\mathrm{d}x.$

$\Leftrightarrow\exists C\in\mathbb{R}:\ln\left|f\left(x\right)\right|=2x+C\Rightarrow\ln f\left(x\right)=2x+C.$

Cho $x=1\ \Rightarrow\ln f\left(1\right)=2+C\ \Leftrightarrow\ln 1=2+C\ \Leftrightarrow C=-2$

Do đó: $\ln f\left(x\right)=2x-2\Leftrightarrow f\left(x\right)=e^{2x-2}\ \Rightarrow f\left(-1\right)=e^{-4}$. Do đó: $S=a+b+c=-\frac{9}{2}.$

Câu 57: Chọn A

Ta có: $f\left(x\right)=\int f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\frac{3x-1}{x+2}\mathrm{d}x=\int\left(3-\frac{7}{x+2}\right)\mathrm{d}x=3x-7\ln\left|x+2\right|+C,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-2\right\}.$

Xét trên khoảng $\left(-2;+\infty\right)$ ta có: $f\left(0\right)=1\Leftrightarrow-7\ln 2+C=1\Rightarrow C=1+7\ln 2.$

Do đó, $f\left(x\right)=3x-7\ln\left|x+2\right|+1+7\ln 2$, với mọi $x\in\left(-2;+\infty\right).$

Suy ra $f\left(2\right)=7-7\ln 4+7\ln 2=7-7\ln 2.$

Xét trên khoảng $\left(-\infty;-2\right)$ ta có: $f\left(-4\right)=2\Leftrightarrow-12-7\ln 2+C=2\Rightarrow C=14+7\ln 2.$

Do đó, $f\left(x\right)=3x-7\ln\left|x+2\right|+14+7\ln 2$, với mọi $x\in\left(-\infty;-2\right)$. Suy ra $f\left(-3\right)=5+7\ln 2.$

Vậy $f\left(2\right)+f\left(-3\right)=7+7\ln 2+5-7\ln 2=12.$

Câu 58: Chọn C

Vì $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x-\cos x}{x^2}$ nên suy ra: $F'(x)=f(x)=\dfrac{x-\cos x}{x^2}$.

Ta có: $F'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x-\cos x}{x^2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-\cos x=0 \\ x\in[-1;1]\setminus\{0\} \end{cases}$ (1).

Xét hàm số $g(x)=x-\cos x$ trên $[-1;1]$, ta có: $g'(x)=1+\sin x\geq 0, \forall x\in[-1;1]$. Suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến trên $[-1;1]$. Vậy phương trình $g(x)=x-\cos x=0$ có nhiều nhất một nghiệm trên $[-1;1]$ (2).

Mặt khác ta có: hàm số $g(x)=x-\cos x$ liên tục trên $(0;1)$ và $g(0)=0-\cos(0)=-1<0$, $g(1)=1-\cos(1)>0$ nên $g(0).g(1)<0$. Suy ra $\exists x_0\in(0;1)$ sao cho $g(x_0)=0$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra: phương trình $F'(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x_0\neq 0$. Đồng thời vì x_0 là nghiệm bội lẻ nên $F'(x)$ đổi qua $x=x_0$.

Vậy đồ thị hàm số $y=F(x)$ có 1 điểm cực trị.

Câu 59: Chọn D

Ta có $F'(x)=f(x)=\cos x+\dfrac{1}{2}x^2-1$.

$f'(x)=-\sin x+x$; $f''(x)=-\cos x+1\geq 0 \ \forall x\in R$.

Suy ra hàm số $f'(x)$ đồng biến trên R, từ đó dẫn đến phương trình $f'(x)=0$ có nhiều nhất một nghiệm.

Mặt khác $f'(0)=0$ suy ra $x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f'(x)=0$.

Do hàm số $f'(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;0);(0;+\infty)$ và vô nghiệm trên mỗi khoảng này nên dấu của $f'(x)$ không đổi trên mỗi khoảng trên.

Mà $f'(-1)<0$; $f'(1)>0$ suy ra $f'(x)<0 \ \forall x\in(-\infty;0)$ và $f'(x)>0 \ \forall x\in(0;+\infty)$.

Vậy hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Mà $f(0)=0$ nên phương trình $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=0$ hay phương trình $F'(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=0$.

Vậy đồ thị của hàm số $y=F(x)$ có duy nhất một điểm cực trị.

Câu 60: Chọn B

Ta có $\left(f(x).f'(x)\right)'=\left(f'(x)\right)^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x, \forall x\in\mathbb{R}.$

$\Rightarrow f(x).f'(x)=3x^5+6x^2+C, \forall x\in\mathbb{R}.$

Lại có $f(0)=f'(0)=1$ nên $C=1$ do đó $f(x).f'(x)=3x^5+6x^2+1, \forall x\in\mathbb{R}.$

$\left(\left(f(x)\right)^2\right)'=2f(x).f'(x)=6x^5+12x^2+2, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \left(f(x)\right)^2=x^6+4x^3+2x+C_1, \forall x\in\mathbb{R}.$

Mà $f(0)=1$ nên $C_1=1$. Vậy $\left(f(1)\right)^2=1^6+4.1^3+2.1+1=8.$

Câu 61: Chọn B

Cách 1: Giải bằng phương pháp tự luận

Ta xác định biểu thức của hàm số $y=f'(x)$. Từ hình vẽ ta thấy trên $[-3,2]$ đồ thị gồm 3 nhánh:

Nhánh parabol $y=a_1x^2+b_1x+c_1$ xác định trên $[-3,-1]$ đi qua 3 điểm $(-3,0)$, $(-2,1)$ và $(-1,0)$.

Nhánh đường thẳng $y=a_2x+b_2$ xác định trên $[-1,0]$ đi qua 2 điểm $(-1,0)$ và $(0,2)$.

Nhánh đường thẳng $y=a_3x+b_3$ xác định trên $[0,2]$ đi qua 2 điểm $(0,2)$ và $(2,0)$.

Từ đây, giải các hệ phương trình tương ứng ta suy ra biểu thức của $f'(x)$ là:

$$f'(x)=\begin{cases}-x^2-4x-3 & \text{khi } -3\le x\le -1\\ 2x+2 & \text{khi } -1\le x\le 0\\ -x+2 & \text{khi } 0\le x\le 2\end{cases}.$$

$f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$, do đó biểu thức của $f(x)$ có dạng:

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^3}{3}-2x^2-3x+C_1 & \text{khi } -3\le x\le -1\\ x^2+2x+C_2 & \text{khi } -1\le x\le 0\\ -\dfrac{x^2}{2}+2x+C_3 & \text{khi } 0\le x\le 2\end{cases}.$$

Vì $f(-3)=0$ nên ta có: $-\dfrac{(-3)^3}{3}-2(-3)^2-3(-3)+C_1=0\Leftrightarrow C_1=0$.

Do f liên tục tại $x=-1$ nên ta có: $\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)$, suy ra:

$$-\frac{(-1)^3}{3}-2(-1)^2-3(-1)=(-1)^2+2(-1)+C_2\Leftrightarrow C_2=\frac{7}{3}.$$

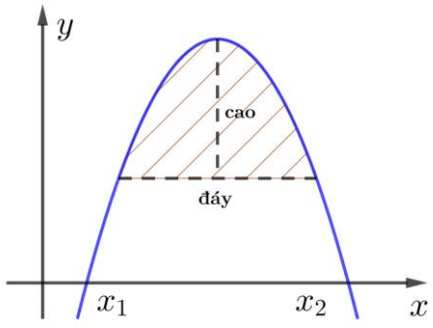
Tương tự, f liên tục tại $x=0$ nên ta có:

$$0^2+2.0+\frac{7}{3}=-\frac{0^2}{2}+2.0+C_3\Leftrightarrow C_3=\frac{7}{3}.$$

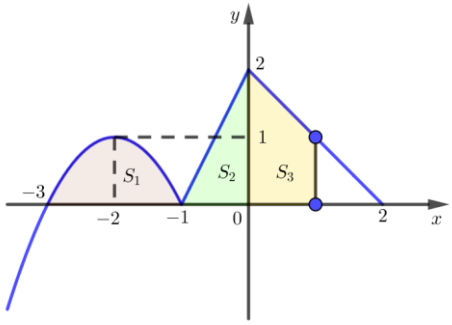
Vậy: $f(-1)+f(1)=\left[(-1)^2+2(-1)+\dfrac{7}{3}\right]+\left[-\dfrac{1^2}{2}+2.1+\dfrac{7}{3}\right]=\dfrac{31}{6}$.

Cách 2: Giải nhanh bằng phương pháp đánh giá diện tích trên đồ thị

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi một parabol và một đường thẳng có phương song song với trục Ox được cho bởi công thức: $S=\dfrac{2}{3}$day.cao



Áp dụng công thức này ta giải nhanh bài toán này như sau:



Nhánh parabol $y=ax^2+bx+c$ qua 3 điểm $(-3,0)$, $(-2,1)$ và $(-1,0)$ nên ta tính ra được hệ số $a=1$.

Ta có: $f(-1)+f(1)=\left[f(-1)-f(-3)\right]+\left[f(1)-f(-3)\right]=S_1+(S_1+S_2+S_3)$.

Với: $S_1=\frac{2}{3}2.1=\frac{4}{3}$, $S_2=\frac{1}{2}1.2=1$, $S_3=\frac{1}{2}(1+2).1=\frac{3}{2}$. Suy ra: $f(-1)+f(1)=\frac{31}{6}$.

Câu 62: Chọn C

Ta có: $f'(x)=(2x+1).f^2(x)\Rightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+1\ \ (do\ f(x)\neq 0)$

Lấy nguyên hàm 2 vế ta được:

$$\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int(2x+1)\mathrm{d}x\Leftrightarrow-\frac{1}{f(x)}=x^2+x+C\Leftrightarrow f(x)=\frac{-1}{x^2+x+C}$$

Mà $f(1)=-0,5\Rightarrow C=0$, do đó $f(x)=\frac{-1}{x^2+x}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$

Nên

$$f(2017)+f(2016)+...+f(1)=\frac{1}{2018}-\frac{1}{2017}+\frac{1}{2017}-\frac{1}{2016}+...+\frac{1}{2}-1=\frac{1}{2018}-1=-\frac{2017}{2018}$$

Suy ra $a=-2017;\ b=2018$ nên $b-a=4035$.

Câu 63: Chọn A

Ta có: $f''(x)f(x)+\frac{\left[f(x)\right]^2}{\sqrt{(2x+1)^3}}=\left[f'(x)\right]^2\Leftrightarrow f''(x)f(x)-\left[f'(x)\right]^2=-\frac{\left[f(x)\right]^2}{\sqrt{(2x+1)^3}}$

$$\Leftrightarrow\frac{f''(x)f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^2}=-\frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}\Leftrightarrow\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=-\frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=-\int\frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}dx\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=-\int(2x+1)^{-\frac{3}{2}}dx\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}+C_1.$$

Thay $x=0$ ta được: $C_1=0$.

$$\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{2x+1}}\Leftrightarrow\ln\left[f(x)\right]=\sqrt{2x+1}+C_2$$

Thay $x=0$ ta được $C_2=-1.\Rightarrow\ln\left[f(x)\right]=\sqrt{2x+1}-1$

Thay $x=4$ ta được $\ln\left[f(4)\right]=2\Rightarrow f(4)=e^2$.

TÍCH PHÂN

LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

- **Định nghĩa:** $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$. *Chú ý:* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(y)dy = ...$

2. Tính chất

$\oplus \int_a^a f(x)dx = 0$

$\oplus \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

$\oplus \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \ (a<b<c)$

$\oplus \int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx \ (k \in \mathbb{R})$

$\oplus \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

3. Bảng nguyên hàm và vi phân

Hàm số sơ cấp	Hàm hợp $u = u(x)$	Thường gặp
$\int dx = x + C$	$\int du = u + C$	Vi phân $\frac{1}{a}d(ax+b) = dx$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1)$	$\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1)$	$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\alpha+1}(ax+b)^{\alpha+1} + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C \ (x \neq 0)$	$\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C \ (u(x) \neq 0)$	$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C \ (a \neq 0)$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$	$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u du = -\cos u + C$	$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u}du = \tan u + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$ Với $x \neq k\pi$	$\int \frac{1}{\sin^2 u}du = -\cot u + C$ Với $u(x) \neq k\pi$	$\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = \frac{-1}{a}\cot(ax+b) + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u du = e^u + C$	$\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ (0 < a \neq 1)$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \ (0 < a \neq 1)$	$\int a^{px+q}dx = \frac{1}{p.\ln a}a^{px+q} + C \ (0 < a \neq 1)$

4. Phương pháp đổi biến số

- **Dạng 1:** Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$. Giả sử hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $\alpha \le u(x) \le \beta$. Giả sử có thể viết $f(x) = g(u(x))u'(x), x \in [a;b]$, với g liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]$. Khi đó, ta có :

$$I=\int_a^b f(x)dx=\int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du.$$

- **Dạng 2:** Cho hàm số f liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[a;b]$. Giả sử hàm số $x=\varphi(t)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]^{(*)}$ sao cho $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$ và $a\le\varphi(t)\le b$ với mọi $t\in[\alpha;\beta]$. Khi đó:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Một số phương pháp đổi biến: Nếu biểu thức dưới dấu tích phân có dạng

⊕ $\sqrt{a^2-x^2}$: đặt $x=|a|\sin t;\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

⊕ $\sqrt{x^2-a^2}$: đặt $x=\frac{|a|}{\sin t};\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$

⊕ $\sqrt{x^2+a^2}$: $x=|a|\tan t;\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

⊕ $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$: đặt $x=a.\cos 2t$

5. Phương pháp từng phần

- Nếu $u=u(x)$ và $v=v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì :

$$\int_a^b udv=uv|_a^b-\int_a^b vdu$$

- **Các dạng cơ bản:** Giả sử cần tính $I=\int_a^b P(x).Q(x)dx$

Dạng hàm	$P(x)$: đa thức $Q(x)$ là $\sin kx$ hoặc $\cos kx$	$P(x)$: đa thức $Q(x)$ là e^{kx}	$P(x)$: đa thức $Q(x)$ là $\ln(ax+b)$	$P(x)$: đa thức $Q(x)$ là $\frac{1}{\sin^2 x}$
Cách đặt	$u=P(x)$ dv là phần còn lại	$u=P(x)$ dv là phần còn lại	$u=\ln(ax+b)$ $dv=P(x)dx$	$u=P(x)$ dv là phần còn lại

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0)=3$ và $f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2, \forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int\limits_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{-4}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{-10}{3}$.

Lời giải

Chọn D.

Thay $x=0$ ta được $f(0)+f(2)=2\Rightarrow f(2)=2-f(0)=2-3=-1$

Ta có: $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 f(2-x)\mathrm{d}x$

Từ hệ thức đề ra: $\int\limits_0^2\left(f(x)+f(2-x)\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\left(x^2-2x+2\right)\mathrm{d}x=\frac{8}{3}\Rightarrow\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$.

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta lại có:

$\int\limits_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)\big|_0^2-\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2.(-1)-\frac{4}{3}=-\frac{10}{3}$.

VÍ DỤ 2: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x+m & \text{khi } x\ge 0\\ 2x\sqrt{3+x^2} & \text{khi } x<0\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=a\mathrm{e}+b\sqrt{3}+c$, $(a,b,c\in Q)$. Tổng $a+b+3c$ bằng

A. 15. **B.** -10. **C.** -19. **D.** -17.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\mathrm{e}^x+m\right)=m+1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(2x\sqrt{3+x^2}\right)=0$ và $f(0)=m+1$.

Vì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục tại $x=0$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$ hay $m+1=0\Leftrightarrow m=-1$.

Khi đó $\int\limits_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^0 2x\sqrt{3+x^2}\mathrm{d}x+\int\limits_0^1\left(\mathrm{e}^x-1\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^0\sqrt{3+x^2}\mathrm{d}\left(3+x^2\right)+\int\limits_0^1\left(\mathrm{e}^x-1\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{2}{3}\left(3+x^2\right)\sqrt{3+x^2}\Big|_{-1}^0+\left(\mathrm{e}^x-x\right)\Big|_0^1=\mathrm{e}+2\sqrt{3}-\frac{22}{3}$.

Suy ra $a=1$, $b=2$, $c=-\frac{22}{3}$.

Vậy tổng $a+b+3c=-19$.

VÍ DỤ 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2$ và $\int_0^2 f(3x+1)\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\int_0^7 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=16$. **B.** $I=18$. **C.** $I=8$. **D.** $I=20$.

Lời giải

Chọn D

$A=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2$, $B=\int_0^2 f(3x+1)\mathrm{d}x=6$ đặt $t=3x+1\Rightarrow dt=3dx$.

Đổi cận : $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\ x=2\Rightarrow t=7\end{cases}$

Ta có: $B=\frac{1}{3}\int_1^7 f(t)\mathrm{d}t=6\Rightarrow\int_1^7 f(t)\mathrm{d}t=18\Rightarrow\int_1^7 f(x)\mathrm{d}x=18$.

Vậy $I=\int_0^7 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^7 f(x)\mathrm{d}x=20$.

VÍ DỤ 4: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin x-\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx=\frac{-11}{3}\ln 2+b\ln 3+c\,(b,c\in Q)$. Tính $\frac{b}{c}$?

A. $\frac{22}{3}$. **B.** $\frac{22\pi}{3}$. **C.** $\frac{22}{3\pi}$. **D.** $\frac{22\pi}{13}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt: $\frac{3\sin x-\cos x}{2\sin x+3\cos x}=\frac{m(2\sin x+3\cos x)+n(2\cos x-3\sin x)}{2\sin x+3\cos x}$

$=\frac{(2m-3n)\sin x+(3m+2n)\cos x}{2\sin x+3\cos x}$

Đồng nhất hệ số ta có: $\begin{cases}2m-3n=3\\ 3m+2n=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\frac{3}{13}\\ n=-\frac{11}{13}\end{cases}$.

Nên: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin x-\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{3}{13}(2\sin x+3\cos x)-\frac{11}{13}(2\cos x-3\sin x)}{2\sin x+3\cos x}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{3}{13}-\frac{11}{13}.\frac{2\cos x-3\sin x}{2\sin x+3\cos x}\right]dx=\frac{3}{13}(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{11}{13}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos x-3\sin x}{2\sin x+3\cos x}dx$

$$=\frac{3\pi}{26}-\frac{11}{13}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\left(2\sin x+3\cos x\right)}{2\sin x+3\cos x}dx=\frac{3\pi}{26}-\frac{11}{13}\ln\left|2\sin x+3\cos x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$=\frac{3\pi}{26}-\frac{11}{13}\ln 2+\frac{11}{13}\ln 3$. Do đó: $\begin{cases}b=\frac{11}{13}\\ c=\frac{3\pi}{26}\end{cases}\Rightarrow\frac{b}{c}=\frac{11}{13}.\frac{26}{3\pi}=\frac{22}{3\pi}$.

VÍ DỤ 5: Khẳng định nào sau đây đúng về kết quả $\int_1^{\mathrm{e}}x^3\ln x dx=\frac{3\mathrm{e}^a+1}{b}$?

A. $a.b=64$. **B.** $a.b=46$. **C.** $a-b=12$. **D.** $a-b=4$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ \mathrm{d}v=x^3\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\ v=\frac{1}{4}x^4\end{cases}$. Áp dụng tích phân từng phần ta tính được:

$$\int_1^{\mathrm{e}}x^3\ln x dx=\frac{1}{4}x^4\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{4}x^3\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^4}{4}-\frac{1}{16}x^4\Big|_1^{\mathrm{e}}=\frac{3\mathrm{e}^4+1}{16}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\ b=16\end{cases}\Rightarrow a.b=64.$$

VÍ DỤ 6: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;2\right]$ và thoả mãn $f\left(2\right)=16,\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=4$

Tính tích phân $I=\int_0^1 x.f'\left(2x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=12$. **B.** $I=7$. **C.** $I=13$. **D.** $I=20$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=2x\Rightarrow dt=2dx$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$ và $x=1\Rightarrow t=2$.

Vậy $I=\frac{1}{4}\int_0^2 tf'\left(t\right)\mathrm{d}t$. Đặt $\begin{cases}u=t\\ dv=f'\left(t\right)\mathrm{d}t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}t\\ v=f\left(t\right)\end{cases}$, khi đó $4I=\left[tf\left(t\right)\right]\Big|_0^2-\int_0^2 f\left(t\right)\mathrm{d}t$

$=2f\left(2\right)-\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=32-4=28\Rightarrow I=7$.

VÍ DỤ 7: Tính tích phân $I=\int_0^{e-1}x\ln\left(x+1\right)dx$ ta được kết quả có dạng $\frac{ae^2+b}{c}$, trong đó $a, b, c\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T=a^2+2b-3c$.

A. 17. **B.** 10. **C.** −17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn C

Xét $I=\int_0^{e-1} x\ln(x+1)dx$

Đặt $\begin{cases}u=\ln(x+1)\\ dv=xdx\end{cases}$, khi đó ta chọn được $\begin{cases}du=\dfrac{1}{x+1}dx\\ v=\dfrac{x^2-1}{2}\end{cases}$.

Suy ra $I=\int_0^{e-1} x\ln(x+1)dx=\dfrac{x^2-1}{2}\ln(x+1)\Big|_0^{e-1}-\int_0^{e-1}\dfrac{x-1}{2}dx=\dfrac{e^2-2e}{2}-\dfrac{x^2-2x}{4}\Big|_0^{e-1}$

$=\dfrac{e^2-2e}{2}-\dfrac{e^2-4e+3}{4}=\dfrac{e^2-3}{4}$.

Do đó $a=1, b=-3, c=4$. Vậy ta có $T=a^2+2b-3c=1^2+2(-3)-3.4=-17$.

VÍ DỤ 8: Biết $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{x}{\cos^2 x}\mathrm{dx}=\dfrac{\sqrt{3}}{a}\pi-\ln b$, với a,b là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức $T=a^2+b$?

A. $T=9$. **B.** $T=13$. **C.** $T=7$. **D.** $T=11$.

Lời giải

Chọn D

Ta giải: $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{x}{\cos^2 x}\mathrm{dx}$. Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=\dfrac{dx}{\cos^2 x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=\tan x\end{cases}$.

Suy ra: $I=x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x\mathrm{dx}=x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\mathrm{d}\cos x}{\cos x}=x\tan x+\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$

$=\left(\dfrac{\pi}{3}.\tan\dfrac{\pi}{3}+\ln\left|\cos\dfrac{\pi}{3}\right|\right)-0.\tan 0+\ln|\cos 0|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi-\ln 2=\dfrac{\sqrt{3}}{a}\pi-\ln b$

$\Rightarrow\begin{cases}a=3\\ b=2\end{cases}\Rightarrow a^2+b=11$

VÍ DỤ 9: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $A=\int_0^2(x-1)f'(x)\mathrm{dx}=9$ và $f(2)+f(0)=3$.

Tính $I=\int_0^2 f(x)\mathrm{dx}$

A. $I=12$. **B.** $I=-12$. **C.** $I=-6$. **D.** $I=6$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u = x-1 \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$.

Ta có: $A = \int_0^2 (x-1) f'(x)\mathrm{d}x = (x-1) f(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = f(2) + f(0) - \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Với $A = 9$ và $f(2) + f(0) = 3$ nên $I = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = -6$.

VÍ DỤ 10: Nghiệm dương a của phương trình $\int_1^a (2x-1)\ln x\mathrm{d}x = (a^2 - a)\ln a - 9$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(1;3)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(5;7)$. **D.** $(7;10)$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $u = \ln x$ và $\mathrm{d}v = (2x-1)\mathrm{d}x$, ta có $\mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$ và $v = x^2 - x$.

Khi đó, đặt $I = \int_1^a (2x-1)\ln x\mathrm{d}x = (x^2 - x)\ln x\Big|_1^a - \int_1^a (x^2 - x)\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$.

$= (a^2 - a)\ln a - \int_1^a (x-1)\mathrm{d}x = (a^2 - a)\ln a - \left(\dfrac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^a$

$= (a^2 - a)\ln a - \left(\dfrac{a^2}{2} - \dfrac{1}{2} - a + 1\right) = (a^2 - a)\ln a - \left(\dfrac{a^2}{2} - a + \dfrac{1}{2}\right)$.

Theo giả thiết: $I = (a^2 - a)\ln a - 9 \Rightarrow \dfrac{a^2}{2} - a + \dfrac{1}{2} = 9 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 17 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 - 3\sqrt{2} \\ a = 1 + 3\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Do $a > 0$ nên $a = 1 + 3\sqrt{2}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

Câu 1: Cho n là số nguyên dương khác 0, hãy tính tích phân $I=\int_0^1\left(1-x^2\right)^n x\mathrm{d}x$ theo n.

A. $I=\frac{1}{2n+2}$. **B.** $I=\frac{1}{2n}$. **C.** $I=\frac{1}{2n-1}$. **D.** $I=\frac{1}{2n+1}$.

Câu 2: Cho hàm $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^{2017} f(x)\mathrm{d}x=1$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(2017x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{1}{2017}$. **B.** $I=0$. **C.** $I=2017$. **D.** $I=1$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(x^3+3x\right)=x+1,\forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int_0^4 f(x)dx$ bằng:

A. $\frac{25}{4}$. **B.** 88. **C.** 25. **D.** $\frac{7}{4}$.

Câu 4: Biết $\int_0^1\frac{x+2}{x^2+4x+7}\mathrm{d}x=a\ln\sqrt{12}+b\ln\sqrt{7}$, với a, b là các số nguyên, khi đó a^3+b^3 bằng

A. -9. **B.** 0. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 5: Cho tích phân $\int_0^1\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x=\frac{a}{b}\pi-\frac{m}{n}$, với $a,b,n,m\in\mathbb{N}^*$, các phân số $\frac{a}{b},\frac{m}{n}$ tối giản. Tính a^b+m^n.

A. 3. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 2.

Câu 6: Cho $I=\int_0^3\frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\frac{a}{d}+b\ln 2+c\ln d$, với a,b,c,d là các số nguyên và $\frac{a}{d}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a+b+c+d$ bằng

A. 16. **B.** 4. **C.** 28. **D.** -2.

Câu 7: Cho $I=\int_3^8\frac{1}{x+x\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ với a,b,c,d là các số nguyên dương và $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ tối giản. Giá trị của $abc-d$ bằng

A. -6. **B.** 18. **C.** 0. **D.** -3.

Câu 8: Cho $\int_0^1\frac{\sqrt{3x+1}}{x-5}\mathrm{d}x=a+b\ln 5+c\ln 3$ với a,b,c là các số hữu tỷ. Giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng:

A. 6. **B.** -4. **C.** 14. **D.** -2.

Câu 9: Cho $\int_0^2\frac{x}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x=a\ln 3+b\pi$ với a, b là các số thực. Giá trị của a^2+3b^2 bằng

A. $\frac{7}{27}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{5}{18}$. **D.** $\frac{35}{144}$.

Câu 10: Biết $\int\limits_0^3 x\ln\left(x^2+16\right)\mathrm{d}x = a\ln 5+b\ln 2+\dfrac{c}{2}$, trong đó a,b,c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c$

A. $T=-2$. **B.** $T=16$. **C.** $T=2$. **D.** $T=-16$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và $a>0$. Giả sử với mọi $x\in[0;a]$ ta có $f(x)>0$ và $f(x).f(a-x)=1$. Tính $I=\int\limits_0^a \dfrac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$.

A. $I=\dfrac{a}{3}$. **B.** $I=\dfrac{a}{2}$. **C.** $I=2a$. **D.** $I=a\ln(a+1)$.

Câu 12: Cho $I=\int\limits_0^1 x\ln\left(2+x^2\right)\mathrm{d}x = a\ln 3+b\ln 2+c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 13: Cho $\int\limits_1^e \dfrac{2\ln x+1}{x(\ln x+2)^2}\mathrm{d}x = \ln\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}$ với a, b, c là các số nguyên dương, biết $\dfrac{a}{b};\dfrac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính giá trị $a+b+c+d$?

A. 18. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 17.

Câu 14: Biết rằng $\int\limits_{-2}^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{x+5\sqrt{x+3}+9} = a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. -10. **B.** 10. **C.** 5. **D.** -5.

Câu 15: Cho tích phân $I=\int\limits_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\sqrt{14-x^2-\dfrac{1}{x^2}}.\mathrm{d}x = \dfrac{a.\pi}{b}+c\sqrt{3}+d$, trong đó $(a,b,c,d\in\mathbb{Z}$, $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính tổng $S=a+b+c+d$.

A. $S=3$. **B.** $S=7$. **C.** $S=2$. **D.** $S=11$.

Câu 16: Giả sử tích phân $\int\limits_1^2 \dfrac{x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = a+b\ln 3+c\ln 2$ trong đó a, b, c là các số hữu tỉ. Tính tổng $S=a^2+b^2+c^2$.

A. $\dfrac{77}{36}$. **B.** $\dfrac{73}{36}$. **C.** $\dfrac{67}{36}$. **D.** $\dfrac{1}{64}$.

Câu 17: Cho $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\dfrac{x}{x^3+1}}dx = \dfrac{1}{a}\ln\left(\dfrac{b}{c}+\sqrt{d}\right)$, với a,b,c,d là các số nguyên dương và $\dfrac{b}{c}$ tối giản. Giá trị của $a+b+c+d$ bằng

A. 12. **B.** 10. **C.** 18. **D.** 15.

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2)=-2$; $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=1$. Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^3 f'\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=-5$. **B.** $I=0$. **C.** $I=-18$. **D.** $I=-10$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2x)=3f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết rằng $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$. Tính tích phân $I=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=5$. **B.** $I=6$. **C.** $I=3$. **D.** $I=2$.

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $\int_0^1 x.f(x)\mathrm{d}x=2019$. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x.f(\cos x)\mathrm{d}x$ là

A. 2019. **B.** 4038. **C.** –2019. **D.** –4038.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(mx)=nf(x)+p$, $\forall x\in\mathbb{R}\,(m\neq 0)$. Biết rằng $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=q\ \ (q\neq 0)$. Tính tích phân $I=\int_1^m f(x)\mathrm{d}x$.

A. nmq. **B.** $nmq+mp-q$. **C.** $mp-q$. **D.** $-nmp-nq$.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2x)=5f(x)+x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết rằng $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2$. Tính tích phân $I=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=11$. **B.** $I=15$. **C.** $I=19$. **D.** $I=14$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{1}{3}} f(x)\mathrm{d}x=1$, $\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} f(2x)\mathrm{d}x=13$. Tính tích phân $I=\int_0^1 x^2 f(x^3)\mathrm{d}x$.

A. $I=6$. **B.** $I=8$. **C.** $I=7$. **D.** $I=9$.

Câu 24: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(3x)=f(x)-2x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=5$. Giá trị $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 10. **C.** 7. **D.** 12.

Câu 25: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x-2 & khi\ x\le 1\\ \dfrac{\ln x}{x} & khi\ x>1\end{cases}$. Biết tích phân $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=a+\dfrac{1}{b}\ln^2 2$ trong đó $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị $S=a+b$.

A. $S=3$. **B.** $S=5$. **C.** $S=-3$. **D.** $S=1$.

Câu 26: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x-2 & khi\ x\le 1\\ \dfrac{\ln x}{x} & khi\ x>1\end{cases}$. Biết tích phân $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=a+\dfrac{1}{b}\ln^2 2$ trong đó $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị $S=a+b$.

A. $S=3$. **B.** $S=5$. **C.** $S=-3$. **D.** $S=1$.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_0^{\ln 2} f(e^x+1)\mathrm{d}x = 5$ và $\int_2^3 \frac{(2x-3)f(x)}{x-1}\mathrm{d}x = 3$. Tính $I = \int_2^3 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=2$. **B.** $I=4$. **C.** $I=-2$. **D.** $I=8$.

Câu 28: **D3-2.2-3]**Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2x)=4f(x)-x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết rằng $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$. Tính tích phân $I=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=9$. **B.** $I=6$. **C.** $I=5$. **D.** $I=8$.

Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $g(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\frac{x}{x+f^2(x)}$. Biết rằng $\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x = 1$ và $2g(2)-g(1)=2$. Tích phân $\int_1^2 \frac{x^2}{x+f^2(x)}\mathrm{d}x$ bằng

A. $1,5$. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)$ với $f(0)=f(1)=1$. Biết rằng $\int_0^1 e^x\left[f(x)+f'(x)\right]\mathrm{d}x = ae+b$, $a,b\in\mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $a^{2019}+b^{2019}$ bằng

A. $2^{2018}+1$. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $2^{2018}-1$.

Câu 31: Cho hàm số $y=f\ x$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0)=0$ Biết $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{9}{2}$ và $\int_0^1 f'(x)\cos\frac{\pi x}{2}\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{6}{\pi}$. **B.** $\frac{2}{\pi}$. **C.** $\frac{4}{\pi}$. **D.** $\frac{1}{\pi}$.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=4$, $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x = 36$ và $\int_0^1 x.f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{5}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 4. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 33: **6.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;3]$ thỏa mãn $f(3)=6$ $\int_0^3 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x = 2$ và $\int_0^3 x^2.f(x)\mathrm{d}x = \frac{154}{3}$. Tích phân $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{53}{5}$. **B.** $\frac{117}{20}$. **C.** $\frac{153}{5}$. **D.** $\frac{13}{5}$.

Câu 34: **7.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=2$, $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x = 8$ và $\int_0^1 x^3.f(x)\mathrm{d}x = 10$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{2}{285}$. **B.** $\frac{194}{95}$. **C.** $\frac{116}{57}$. **D.** $\frac{584}{285}$.

Câu 35: Cho $F(x)=\frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Biết $f(\mathrm{e})=\frac{1}{2\mathrm{e}^2}$, tính tích phân $I=\int_1^e\left(f'(x)\ln x+\frac{\mathrm{e}^{\ln x}}{x}\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=\mathrm{e}-\frac{1}{2}$. **B.** $I=\mathrm{e}+\frac{1}{2}$. **C.** $I=e$. **D.** $I=\frac{1}{2}-\mathrm{e}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.A	3.A	4.B	5.D	6.B	7.A	8.D	9.C	10.D
11.B	12.C	13.C	14.A	15.A	16.B	17.B	18.D	19.A	20.B
21.B	22.C	23.D	24.C	25.D	26.D	27.B	28.B	29.B	30.C
31.A	32.B	33.B	34.C	35.A					

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **Chọn A**

Với $n\in\mathbb{N}^*$, khi đó: Đặt $t=1-x^2\Rightarrow \mathrm{d}t=-2x\mathrm{d}x\Rightarrow x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mathrm{d}t$

Đổi cận: $x=0\to t=1; x=1\to t=0$

Khi đó $I=-\frac{1}{2}\int\limits_1^0 t^n\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^n\mathrm{d}t=\frac{1}{2}.\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{2n+2}$

Cách 2: Ta có $\mathrm{d}\left(1-x^2\right)=-2x\mathrm{d}x\to-\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(1-x^2\right)=x\mathrm{d}x$

$I=\int\limits_0^1\left(1-x^2\right)^n x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(1-x^2\right)^n\mathrm{d}\left(1-x^2\right)=-\frac{1}{2}.\frac{\left(1-x^2\right)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{2n+2}$

Câu 2: **Chọn A**

Đặt $t=2017x\Rightarrow \mathrm{d}t=2017\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{2017}\mathrm{d}t$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$; $x=1\Rightarrow t=2017$

Vậy $I=\int\limits_0^{2017} f\left(t\right).\frac{1}{2017}\mathrm{d}t=\frac{1}{2017}\int\limits_0^{2017} f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2017}.$

Câu 3: **Chọn A**

Đặt $x=t^3+3t$. Khi đó: $dx=\left(3t^2+3\right)dt$.

Với $x=0\Rightarrow t=0$; $x=4\Rightarrow t=1$.

Vậy: $\int\limits_0^4 f\left(x\right)dx=\int\limits_0^1 f\left(t^3+3t\right)\left(3t^2+3\right)dt=\int\limits_0^1\left(t+1\right)\left(3t^2+3\right)dt=\frac{25}{4}$.

Câu 4: **Chọn B**

Đặt $t=x^2+4x+7\Rightarrow \mathrm{d}t=\left(2x+4\right)\mathrm{d}x\Rightarrow\left(x+2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=7$; $x=1\Rightarrow t=12$.

$\int\limits_0^1\frac{x+2}{x^2+4x+7}\mathrm{d}x=\int\limits_7^{12}\frac{1}{2t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln\left|t\right|\Big|_7^{12}=\frac{1}{2}\ln 12-\frac{1}{2}\ln 7=\ln\sqrt{12}-\ln\sqrt{7}\Rightarrow a=1;\ b=-1$.

Vậy $a^3+b^3=0$.

Câu 5: **Chọn D**

Đặt $x=\cos 2t$. Ta có $\mathrm{d}x=-2\sin 2t\ \mathrm{d}t, 0=\cos\left(2.\frac{\pi}{4}\right)$ và $1=\cos 0$.

Ta có $\frac{1-\cos 2t}{1+\cos 2t}=\frac{1-1+2\sin^2 t}{1+2\cos^2 t-1}=\tan^2 t$.

Vậy $\int_0^1\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^0\sqrt{\tan^2 t}\left(-2\sin 2t\right)\mathrm{d}t$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left|\tan t\right|\sin 2t\ \mathrm{d}t=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 t\ \mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-\cos 2t\right)\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}t-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2t\ \mathrm{d}t$

$=2t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}-1$

$\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{1}{2},\frac{m}{n}=\frac{1}{1}$. Vì các phân số $\frac{a}{b},\frac{m}{n}$ tối giản nên ta suy ra $a=1,b=2,m=1,n=1$.

Do đó $a^b+m^n=1^2+1^1=2$.

Câu 6: Chọn B

Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow x=t^2-1\Rightarrow\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$

Đổi cận: $x=0\to t=1;\ \ x=3\to t=2$

$$I=\int_1^2\frac{t^2-1}{4+2t}.2t\,\mathrm{d}t=\int_1^2\left(t^2-2t+3-\frac{6}{t+2}\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{t^3}{3}-t^2+3t-6\ln\left|t+2\right|\right)\Big|_1^2=\frac{7}{3}-12\ln 2+6\ln 3.$$

Suy ra $a=7,b=-12,c=6,d=3$. Do đó $a+b+c+d=4$.

Câu 7: Chọn A

Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow t^2=x+1\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Khi $x=3\Rightarrow t=2$; Khi $x=8\Rightarrow t=3$.

Khi đó $I=\int_2^3\frac{1}{t^2-1+\left(t^2-1\right)t}.2t\mathrm{d}t=\int_2^3\frac{2t}{\left(t^2-1\right)\left(t+1\right)}\mathrm{d}t=\int_2^3\frac{2t}{\left(t-1\right)\left(t+1\right)^2}\mathrm{d}t$

$=\int_2^3\frac{\left(t+1\right)+\left(t-1\right)}{\left(t-1\right)\left(t+1\right)^2}\mathrm{d}t=\int_2^3\left(\frac{\left(t+1\right)}{\left(t-1\right)\left(t+1\right)^2}+\frac{\left(t-1\right)}{\left(t-1\right)\left(t+1\right)^2}\right)\mathrm{d}t$

$=\int_2^3\left(\frac{1}{\left(t-1\right)\left(t+1\right)}+\frac{1}{\left(t+1\right)^2}\right)\mathrm{d}t=\int_2^3\left(\frac{1}{2}.\frac{\left(t+1\right)-\left(t-1\right)}{\left(t-1\right)\left(t+1\right)}+\frac{1}{\left(t+1\right)^2}\right)\mathrm{d}t$

$=\int_2^3\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)+\frac{1}{\left(t+1\right)^2}\right]\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{2}\left(\ln\left|t-1\right|-\ln\left|t+1\right|\right)-\frac{1}{t+1}\right]\Big|_2^3$

$=\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\frac{1}{t+1}\right]\Big|_2^3=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)$

$=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}+\frac{1}{12}\ \Rightarrow a=3,\ b=2,\ c=1,\ d=12$.

Vậy $abc-d=3.2.1-12=-6$.

Câu 8: Chọn D

Đặt $t=\sqrt{3x+1}$. Ta có $t^2=3x+1\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=3\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{2t}{3}\mathrm{d}t$.

Ta có $x-5=\dfrac{t^2-1}{3}-5=\dfrac{t^2-16}{3}$.

Khi $x=0$ thì $t=1$, $x=1$ thì $t=2$ nên ta có:

$$\int_0^1\frac{\sqrt{3x+1}}{x-5}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{t}{\frac{t^2-16}{3}}\cdot\frac{2t}{3}\mathrm{d}t=2\int_1^2\frac{t^2}{t^2-16}\mathrm{d}t=2\int_1^2\left(1+\frac{2}{t-4}-\frac{2}{t+4}\right)\mathrm{d}t.$$

$$=\left[2\left(t+2\ln|t-4|-2\ln|t+4|\right)\right]\Big|_1^2=\left(4+4\ln2-4\ln6\right)-\left(2+4\ln3-4\ln5\right).$$

$$=2+4\ln2-4\ln3+4\ln5-4\ln6=2+4\ln2-4\ln3+4\ln5-4\ln(2.3).$$

$$=2+4\ln2-4\ln3+4\ln5-4\ln2-4\ln3=2+4\ln5-8\ln3.$$

Suy ra $a+b+c=2+4-8=-2$.

Câu 9: Chọn C

Ta có: $\displaystyle\int_0^2\frac{x}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x=\int_0^2\left(\frac{x+1}{x^2+2x+4}-\frac{1}{x^2+2x+4}\right)\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{x+1}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x-\int_0^2\frac{1}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x$.

Tính $\displaystyle I_1=\int_0^2\frac{x+1}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+4\right)\Big|_0^2=\frac{1}{2}\left(\ln12-\ln4\right)=\frac{1}{2}\ln3$.

Tính $\displaystyle I_2=\int_0^2\frac{1}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{1}{(x+1)^2+3}\mathrm{d}x$.

Đặt $x+1=\sqrt{3}\tan u\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2u}\mathrm{d}u$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow u=\dfrac{\pi}{6}$ và $x=2\Rightarrow u=\dfrac{\pi}{3}$.

Suy ra $\displaystyle I_2=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}}{\cos^2u}\cdot\frac{1}{3\left(1+\tan^2u\right)}\mathrm{d}u=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}u=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

Vậy $\displaystyle\int_0^2\frac{x}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x=I_1-I_2=\frac{1}{2}\ln3-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$. Suy ra $a^2+3b^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+3.\left(\dfrac{1}{6\sqrt{3}}\right)^2=\dfrac{5}{18}$.

Câu 10: Chọn D

Đặt $t=x^2+16\Rightarrow \mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x\Rightarrow x\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{2}$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=16;x=3\Rightarrow t=25$.

$$I=\int_0^3x\ln\left(x^2+16\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{16}^{25}\ln t\mathrm{d}t.\ \text{Đặt}\ \begin{cases}u=\ln t\\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{t}\mathrm{d}t\\ v=t\end{cases}.$$

$$I=\frac{1}{2}\int_{16}^{25}\ln t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(t\ln t\right)\Big|_{16}^{25}-\frac{1}{2}\int_{16}^{25}\mathrm{d}t=25\ln5-32\ln2-\frac{9}{2}.$$

Vậy $T=a+b+c=25-32-9=-16$.

Cách 2.

Đặt $\begin{cases} u=\ln\left(x^2+16\right) \\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{2x}{x^2+16}\mathrm{d}x \\ v=\dfrac{x^2}{2}+8=\dfrac{x^2+16}{2} \end{cases}$.

$$I=\int_0^3 x\ln\left(x^2+16\right)\mathrm{d}x=\frac{x^2+16}{2}.\ln\left(x^2+16\right)\Big|_0^3-\int_0^3 x\,\mathrm{d}x=25\ln 5-32\ln 2-\frac{9}{2}$$

Vậy $T=a+b+c=25-32-9=-16$.

Câu 11: Chọn B

Từ giả thiết: $f\left(x\right)>0$ và $f\left(x\right).f\left(a-x\right)=1$, ta suy ra: $f\left(a-x\right)=\dfrac{1}{f\left(x\right)}$.

Đặt $x=a-t\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$; Với $x=0\Rightarrow t=a,\ x=a\Rightarrow t=0$.

Khi đó: $I=\displaystyle\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{1+f\left(x\right)}=\int_a^0\frac{-\mathrm{d}t}{1+f\left(a-t\right)}=\int_0^a\frac{\mathrm{d}t}{1+\dfrac{1}{f\left(t\right)}}=\int_0^a\frac{f\left(t\right)\mathrm{d}t}{1+f\left(t\right)}=\int_0^a\frac{f\left(x\right)\mathrm{d}x}{1+f\left(x\right)}$.

Suy ra $2I=\displaystyle\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{1+f\left(x\right)}+\int_0^a\frac{f\left(x\right)\mathrm{d}x}{1+f\left(x\right)}=\int_0^a\frac{\left(1+f\left(x\right)\right)\mathrm{d}x}{1+f\left(x\right)}=\int_0^a\mathrm{d}x=a$. Vậy $I=\dfrac{a}{2}$.

Câu 12: Chọn C

Đặt $\begin{cases} u=\ln\left(2+x^2\right) \\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{2x}{2+x^2}\mathrm{d}x \\ v=\dfrac{x^2}{2} \end{cases}$.

Khi đó, $I=\displaystyle\int_0^1 x\ln\left(2+x^2\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}\ln\left(2+x^2\right)\right]\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}.\frac{2x}{2+x^2}\mathrm{d}x$

$=\left[\dfrac{x^2}{2}\ln\left(2+x^2\right)\right]\Big|_0^1-\displaystyle\int_0^1\frac{x^3}{2+x^2}\mathrm{d}x\ \ (1)$.

Xét $I_1=\displaystyle\int_0^1\frac{x^3}{2+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x-\frac{2x}{x^2+2}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{2x}{x^2+2}\mathrm{d}x$

$=\dfrac{x^2}{2}\Big|_0^1-\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}\left(x^2+2\right)}{x^2+2}=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1-\ln\left(x^2+2\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\ln 3+\ln 2$.

Thay vào (1), suy ra $I=\dfrac{1}{2}\ln 3-\dfrac{1}{2}+\ln 3-\ln 2=\dfrac{3}{2}\ln 3-\ln 2-\dfrac{1}{2}$. Vậy $\begin{cases} a=\dfrac{3}{2} \\ b=-1 \\ c=-\dfrac{1}{2} \end{cases}\Rightarrow a+b+c=0$

Câu 13: Chọn C

Đặt $t=\ln x\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$. Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=0;\ x=\mathrm{e}\Rightarrow t=1$. Khi đó:

$$I=\int_1^e \frac{2\ln x+1}{x(\ln x+2)^2}\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{2t+1}{(t+2)^2}\mathrm{d}t=\int_0^1\left(\frac{-3}{(t+2)^2}+\frac{2}{t+2}\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{3}{t+2}+2\ln|t+2|\right)\Big|_0^1=\ln\frac{9}{4}-\frac{1}{2}.$$

Vậy $a+b+c+d=9+4+1+2=16$.

Câu 14: Chọn A

Đặt $t=\sqrt{x+3}$. Ta có $t^2=x+3\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=-2\Rightarrow t=1,\ x=1\Rightarrow t=2$.

Khi đó $I=\int_{-2}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x+5\sqrt{x+3}+9}=\int_1^2\frac{2t\mathrm{d}t}{t^2-3+5t+9}=\int_1^2\frac{2t}{t^2+5t+6}\mathrm{d}t=\int_1^2\frac{2t}{(t+2)(t+3)}\mathrm{d}t$.

$$I=\int_1^2\left(-\frac{4}{t+2}+\frac{6}{t+3}\right)\mathrm{d}t=\left(-4\ln|t+2|+6\ln|t+3|\right)\Big|_1^2=-20\ln 2+4\ln 3+6\ln 5.$$

Do đó $a=-20, b=4, c=6$. Vậy $a+b+c=-20+4+6=-10$.

Câu 15: Chọn A

Ta có: $I=\int_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right).\sqrt{14-x^2-\frac{1}{x^2}}.\mathrm{d}x=\int_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right).\sqrt{16-\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}.\mathrm{d}x$

Đặt $x+\frac{1}{x}=4\sin t\Rightarrow\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=4\cos t\mathrm{d}t,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

Đổi cận: Với $x=1+\sqrt{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$; với $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}\Rightarrow t=\frac{\pi}{3}$.

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}4\cos t.\sqrt{16-(4\sin t)^2}\mathrm{d}t=16\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t\mathrm{d}t=8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=(8x+4\sin 2t)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{3}+2\sqrt{3}-4$$

Mà $I=\int_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right).\sqrt{14-x^2-\frac{1}{x^2}}.\mathrm{d}x=\frac{a.\pi}{b}+c\sqrt{3}+d\Rightarrow a=2,b=3,c=2,d=-4$.

Vậy $S=a+b+c+d=3$.

Câu 16: Chọn B

Ta có $\int_1^2\frac{x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{x+1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x-\int_1^2\frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{1}{(x+1)}\mathrm{d}x-\int_1^2\frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$

$=\ln|x+1|\Big|_1^2+\frac{1}{x+1}\Big|_1^2=-\frac{1}{6}+\ln 3-\ln 2$. Suy ra $a=-\frac{1}{6};\ b=1;\ c=-1$.

Vậy $S=a^2+b^2+c^2=\left(-\frac{1}{6}\right)^2+1^2+(-1)^2=\frac{73}{36}$.

Câu 17: Chọn B

Cách 1: Ta có

$I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{\frac{x}{x^3+1}}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{x^3(x^3+1)}}\mathrm{d}x$. Đặt $t=\sqrt{x^3+1}\Rightarrow t^2=x^3+1\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=3x^2\mathrm{d}x$

Đổi cận $x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{3}{2\sqrt{2}}$; $x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}$. Khi đó $I=\int_{\frac{3}{2\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}\frac{\frac{2}{3}t\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}}=\frac{2}{3}\int_{\frac{3}{2\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-1}}$

Đặt $y=\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1} \Rightarrow \mathrm{d}y=\dfrac{\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}}{2\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t \Rightarrow \dfrac{2\mathrm{d}y}{y}=\dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-1}}$

Đổi cận $t=\dfrac{3}{2\sqrt{2}} \Rightarrow y=\sqrt{\dfrac{3}{2\sqrt{2}}+1}+\sqrt{\dfrac{3}{2\sqrt{2}}-1}=\sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}+\sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2}}}=\sqrt[4]{8}$;

$t=\sqrt{2} \Rightarrow y=\sqrt{\sqrt{2}-1}+\sqrt{\sqrt{2}+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}=\sqrt{2\sqrt{2}+2}$

$I=\dfrac{2}{3}\displaystyle\int_{\sqrt[4]{8}}^{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}\dfrac{2\mathrm{d}y}{y}=\dfrac{4}{3}\ln|y|\Big|_{\sqrt[4]{8}}^{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}=\dfrac{4}{3}\ln\dfrac{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{\sqrt[4]{8}}=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{(2\sqrt{2}+2)^2}{8}=\dfrac{1}{3}\ln(\dfrac{3}{2}+\sqrt{2})$

Do đó $a+b+c+d=10$

Cách 2: Ta có $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{\dfrac{x}{x^3+1}}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^3\left(x^3+1\right)}}\mathrm{d}x.$

Đặt $t=x^3 \Rightarrow \mathrm{d}t=3x^2\mathrm{d}x.$ Đổi cận $x=\dfrac{1}{2} \Rightarrow t=\dfrac{1}{8}; x=1 \Rightarrow t=1.$

Khi đó $I=\displaystyle\int_{\frac{1}{8}}^{1}\dfrac{\frac{1}{3}\mathrm{d}t}{\sqrt{t(t+1)}}=\dfrac{1}{3}\int_{\frac{1}{8}}^{1}\dfrac{\mathrm{d}\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}=\dfrac{1}{3}\ln\left|t+\dfrac{1}{2}+\sqrt{\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}}\right|\Big|_{\frac{1}{8}}^{1}=\dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}\right).$

Vậy $a+b+c+d=3+3+2+2=10.$

Câu 18: Chọn D

Đặt $t=\sqrt{x+1} \Rightarrow t^2=x+1 \Rightarrow 2t\mathrm{d}t=x\mathrm{d}x.$

Đổi cận: $x=-1 \Rightarrow t=0;\ x=3 \Rightarrow t=2.$

Khi đó: $I=\displaystyle\int_{-1}^{3}f'\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}2t.f'\left(t\right)\mathrm{d}t=2t.f\left(t\right)\Big|_0^2-2\int_0^2 f\left(t\right)\mathrm{d}t=4f\left(2\right)-2\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$

$=-8-2=-10.$

Câu 19: Chọn A

Ta có: $3=3.1=3.\displaystyle\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 3f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 f\left(2x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_0^1 f\left(2x\right)\mathrm{d}\left(2x\right),\forall x\in\mathbb{R}.$

Đặt $2x=t \Rightarrow \mathrm{d}\left(2x\right)=\mathrm{d}t$, với $x=0 \Rightarrow t=0;\ x=1 \Rightarrow t=2.$

$\Leftrightarrow 3=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f\left(2x\right)\mathrm{d}\left(2x\right)=\dfrac{1}{2}\int_0^2 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x,\forall x\in\mathbb{R}.$

$\Leftrightarrow \displaystyle\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=6,\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=6,\forall x\in\mathbb{R}. \Leftrightarrow 1+\int_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=6,\forall x\in\mathbb{R}.$

$\Leftrightarrow \displaystyle\int_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=5,\forall x\in\mathbb{R}.$

Câu 20: Chọn B

Đặt $t=\cos x \Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1;\ x=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t=0.$

Ta có: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x.f\left(\cos x\right)\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x.\cos x.f\left(\cos x\right)\mathrm{d}x = -\int\limits_1^0 2t.f\left(t\right)\mathrm{d}t = 2\int\limits_0^1 t.f\left(t\right)\mathrm{d}t$

$= 2\int\limits_0^1 x.f\left(x\right)\mathrm{d}x = 4038.$

Câu 21: Chọn B

Ta có: $n = \frac{n}{q}.q = \frac{n}{q}.\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{n}{q}f\left(x\right)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{f\left(mx\right)-p}{q}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{f\left(mx\right)}{q}\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 \frac{p}{q}\mathrm{d}x, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow n = \frac{1}{mq}\int\limits_0^1 f\left(mx\right)\mathrm{d}\left(mx\right) - \frac{p}{q}x\Big|_0^1 = \frac{1}{mq}\int\limits_0^1 f\left(mx\right)\mathrm{d}\left(mx\right) - \frac{p}{q}, \forall x \in \mathbb{R}.$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^1 f\left(mx\right)\mathrm{d}\left(mx\right) = \left(n+\frac{p}{q}\right).mq, \forall x \in \mathbb{R}.$

Đặt $mx = t \Rightarrow \mathrm{d}\left(mx\right) = \mathrm{d}t$, với $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 1 \Rightarrow t = m$.

$\int\limits_0^1 f\left(mx\right)\mathrm{d}\left(mx\right) = \left(n+\frac{p}{q}\right).mq, \forall x \in \mathbb{R}.$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^m f\left(t\right)\mathrm{d}t = \int\limits_0^m f\left(x\right)\mathrm{d}x = \left(n+\frac{p}{q}\right).mq, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x + \int\limits_1^m f\left(x\right)\mathrm{d}x = \left(n+\frac{p}{q}\right).mq, \forall x \in \mathbb{R}.$

$\Leftrightarrow q + \int\limits_1^m f\left(x\right)\mathrm{d}x = \left(n+\frac{p}{q}\right).mq, \forall x \in \mathbb{R}. \Leftrightarrow \int\limits_1^m f\left(x\right)\mathrm{d}x = \left(n+\frac{p}{q}\right).mq - q = nmq + mp - q, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \int\limits_1^m f\left(x\right)\mathrm{d}x = nmq + mp - q, \forall x \in \mathbb{R}.$

Câu 22: Chọn C

Ta có: $f\left(2x\right) = 5f\left(x\right) + x \Rightarrow \int\limits_0^1 f\left(2x\right)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left[5f\left(x\right)+x\right]\mathrm{d}x = 5\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}x = 5.2 + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{21}{2}$

. Mặt khác $\int\limits_0^1 f\left(2x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f\left(2x\right)\mathrm{d}\left(2x\right) = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 f\left(t\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x.$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x = \frac{21}{2} \Rightarrow \int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x = 21.$

Do đó: $\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x = 21 - 2 = 19.$

Câu 23: Chọn D

Xét $\int\limits_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} f\left(2x\right)\mathrm{d}x = 13$, đặt $u = 2x \Rightarrow \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{1}{2}\mathrm{d}u = \mathrm{d}x.$

Đổi cận: $x = \frac{1}{6} \Rightarrow u = \frac{1}{3}$; $x = \frac{1}{2} \Rightarrow u = 1.$

Ta có $13 = \int\limits_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} f\left(2x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{3}}^1 f\left(u\right)\mathrm{d}u \Rightarrow \int\limits_{\frac{1}{3}}^1 f\left(u\right)\mathrm{d}u = 26.$

Xét $I=\int_0^1 x^2 f\left(x^3\right)\mathrm{d}x$, đặt $t=x^3\Rightarrow \mathrm{d}t=3x^2\mathrm{d}x\Rightarrow \frac{1}{3}\mathrm{d}t=x^2\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$; $x=1\Rightarrow t=1$. Vậy ta có:

$$I=\int_0^1 x^2 f\left(x^3\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{3}} f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{3}\int_{\frac{1}{3}}^1 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{3}} f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{3}\int_{\frac{1}{3}}^1 f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{3}.1+\frac{1}{3}.26=9$$

.

Câu 24: Chọn C

Cách 1: Ta có: $f(3x)=f(x)-2x\Rightarrow \int_0^1 f(3x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left[f(x)-2x\right]\mathrm{d}x$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(3x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 2x\mathrm{d}x\Leftrightarrow \int_0^1 f(3x)\mathrm{d}x=5-x^2\Big|_0^1\Leftrightarrow \int_0^1 f(3x)\mathrm{d}x=4$$

Mặt khác $\int_0^1 f(3x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1 f(3x)\mathrm{d}(3x)=\frac{1}{3}\int_0^3 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$

Từ và suy ra $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=3\int_0^1 f(3x)\mathrm{d}x=3.4=12$.

Do đó $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=12-5=7$.

Cách 2: Ta có $\int_0^1 f(3x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1 f(3x)\mathrm{d}(3x)=\frac{1}{3}\int_0^3 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

Khi đó $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=3\int_0^1 f(3x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=3\int_0^1\left[f(x)-2x\right]\mathrm{d}x$

$$\Leftrightarrow \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-3\int_0^1 2x\mathrm{d}x\Leftrightarrow \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=2.5-3x^2\Big|_0^1=10-3=7.$$

Câu 25: Chọn D

Ta có $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(2x-2)\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=-1+\frac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^2=-1+\frac{1}{2}\ln^2 2$

$\Rightarrow a=-1,b=2\Rightarrow S=a+b=-1+2=1$.

Câu 26: Chọn D

Ta có $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(2x-2)\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=-1+\frac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^2=-1+\frac{1}{2}\ln^2 2$

$\Rightarrow a=-1,b=2\Rightarrow S=a+b=-1+2=1$.

Câu 27: Chọn B

Đặt $t=\mathrm{e}^x+1\Rightarrow \mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t-1}$. Đổi cận $x=0\Rightarrow t=2; x=\ln 2\Rightarrow t=3$.

Do đó $\int_0^{\ln 2} f\left(\mathrm{e}^x+1\right)\mathrm{d}x=5\Rightarrow \int_2^3\frac{f(t)}{t-1}\mathrm{d}t=5\Rightarrow \int_2^3\frac{f(x)}{x-1}\mathrm{d}x=5$.

Ta có $\int\limits_2^3 \frac{(2x-3)f(x)}{x-1}\mathrm{d}x = \int\limits_2^3 \frac{(2x-2-1)f(x)}{x-1}\mathrm{d}x = \int\limits_2^3 \left[2f(x) - \frac{f(x)}{x-1}\right]\mathrm{d}x = 3$.

Suy ra $2I - \int\limits_2^3 \frac{f(x)}{x-1}\mathrm{d}x = 3 \Rightarrow 2I = 8 \Leftrightarrow I = 4$.

Câu 28: Chọn B

Ta có $K = \int\limits_0^1 f(2x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left[4f(x) - x\right]\mathrm{d}x = 4\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 x\mathrm{d}x = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$.

Đặt $t = 2x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\mathrm{d}x$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = 2$.

$K = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 f(t)\mathrm{d}t \Rightarrow \int\limits_0^2 f(t)\mathrm{d}t = 7 \Rightarrow \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 7$.

$\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow I = \int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 7 - 1 = 6$.

Câu 29: Chọn B

Vì $g(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{x}{x + f^2(x)}$ nên $g'(x) = \frac{x}{x + f^2(x)}$.

Đặt $I = \int\limits_1^2 \frac{x^2}{x + f^2(x)}\mathrm{d}x \Rightarrow I = \int\limits_1^2 xg'(x)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = g'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = g(x) \end{cases}$.

Khi đó $I = xg(x)\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 g(x)\mathrm{d}x = 2g(2) - g(1) - 1 = 1$.

Câu 30: Chọn C

Cách 1:

Ta có $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x\left[f(x) + f'(x)\right]\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left[\mathrm{e}^x f(x)\right]' \mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^x f(x)\right]\Big|_0^1 = \mathrm{e}.f(1) - f(0) = \mathrm{e} - 1$.

Theo đề bài $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x\left[f(x) + f'(x)\right]\mathrm{d}x = a\mathrm{e} + b$, a, $b \in \mathbb{R}$ suy ra $a = 1$, $b = -1$.

Do đó $a^{2019} + b^{2019} = 1^{2019} + (-1)^{2019} = 0$.

Cách 2:

Ta có $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x\left[f(x) + f'(x)\right]\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $u = f(x)$, $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$; ta có $\mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x$, $v = \mathrm{e}^x$.

Khi đó, $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^x f(x)\right]\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^x f(x)\right]\Big|_0^1$

$\Rightarrow \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x\left[f(x) + f'(x)\right]\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^x f(x)\right]\Big|_0^1 = \mathrm{e}.f(1) - f(0) = \mathrm{e} - 1$.

Theo đề bài $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x\left[f(x) + f'(x)\right]\mathrm{d}x = a\mathrm{e} + b$, a, $b \in \mathbb{R}$ suy ra $a = 1$, $b = -1$.

Do đó $a^{2019} + b^{2019} = 1^{2019} + (-1)^{2019} = 0$.

Câu 31: Chọn A

Ta có: $\int_0^1 f(x)\sin\frac{\pi}{2}xdx=-\frac{2}{\pi}f(x).\cos\frac{\pi}{2}x\Big|_0^1+\frac{2}{\pi}\int_0^1 f'(x).\cos\frac{\pi}{2}xdx=\frac{3}{2}$

$\int_0^1(f(x)-3\sin\frac{\pi}{2}x)^2dx=\int_0^1 f^2(x)dx-6\int_0^1 f(x)\sin\frac{\pi}{2}xdx+9\int_0^1\sin^2\frac{\pi}{2}xdx=0$

Từ đây ta suy ra $f(x)=3\sin\frac{\pi}{2}x\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 3\sin\frac{\pi}{2}xdx=\frac{6}{\pi}$.

Câu 32: Chọn B

Từ giả thiết: $\int_0^1 x.f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\Rightarrow\int_0^1 5x.f(x)\mathrm{d}x=1$. Tính: $I=\int_0^1 5x.f(x)\mathrm{d}x$.

Đặt: $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=5x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=\frac{5}{2}x^2\end{cases}$. Ta có: $I=\int_0^1 5x.f(x)\mathrm{d}x=\frac{5}{2}x^2.f(x)\Big|_0^1-\frac{5}{2}\int_0^1 x^2.f'(x)\mathrm{d}x$

$=\frac{5}{2}.f(1)-\frac{5}{2}\int_0^1 x^2.f'(x)\mathrm{d}x=10-\frac{5}{2}\int_0^1 x^2.f'(x)\mathrm{d}x$,

Mà: $I=\int_0^1 5x.f(x)\mathrm{d}x=1\Rightarrow 1=10-\frac{5}{2}\int_0^1 x^2.f'(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int_0^1 x^2.f'(x)\mathrm{d}x=\frac{18}{5}$

$\Leftrightarrow 10\int_0^1 x^2.f'(x)\mathrm{d}x=36\Leftrightarrow 10\int_0^1 x^2.f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x$,

$\Leftrightarrow\int_0^1\left[10x^2.f'(x)-\left[f'(x)\right]^2\right]\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int_0^1 f'(x)\left[10x^2-f'(x)\right]\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow 10x^2-f'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=10x^2\Rightarrow f(x)=\frac{10x^3}{3}+C$

Với $f(1)=4\Rightarrow 4=\frac{10.1}{3}+C\Rightarrow C=\frac{2}{3}$. Khi đó: $f(x)=\frac{10x^3}{3}+\frac{2}{3}$.

Vậy: $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{10x^3}{3}+\frac{2}{3}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{5x^4}{6}+\frac{2}{3}x\right)\Big|_0^1=\frac{3}{2}$.

Câu 33: Chọn B

Tính $I=\int_0^3 x^2.f(x)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=x^2\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=\frac{1}{3}x^3\end{cases}$.

Ta có $I=\frac{1}{3}x^3.f(x)\Big|_0^3-\frac{1}{3}\int_0^3 x^3f'(x)\mathrm{d}x=54-\frac{1}{3}\int_0^3 x^3f'(x)\mathrm{d}x$,.

Theo giả thiết: $\int_0^3 x^2.f(x)\mathrm{d}x=\frac{154}{3}\Rightarrow\frac{154}{3}=54-\frac{1}{3}\int_0^3 x^3f'(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int_0^3 x^3f'(x)\mathrm{d}x=8\Leftrightarrow\int_0^3 x^3f'(x)\mathrm{d}x=4\int_0^3\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int_0^3\left(x^3f'(x)-4\left[f'(x)\right]^2\right)\mathrm{d}x=0$

$\Leftrightarrow \int_0^3 f'(x)\left[x^3-4f'(x)\right]\mathrm{d}x=0 . \Rightarrow x^3-4f'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=\frac{x^3}{4} \Rightarrow f(x)=\frac{x^4}{16}+C .$

Với $f(3)=6 \Rightarrow C=\frac{15}{16}$. Khi đó: $f(x)=\frac{x^4}{16}+\frac{15}{16}$.

Vậy $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^3\left(\frac{1}{16}x^4+\frac{15}{16}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{80}x^5+\frac{15}{16}x\right)\Big|_0^3=\frac{117}{20}$.

Câu 34: Chọn C

Tính: $I=\int_0^1 x^3.f(x)\mathrm{d}x$. Đặt: $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=x^3\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=\frac{1}{4}x^4\end{cases}$.

Ta có: $I=\frac{1}{4}x^4.f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{4}\int_0^1 x^4f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\int_0^1 x^4f'(x)\mathrm{d}x,.$

Theo giả thiết: $\int_0^1 x^3.f(x)\mathrm{d}x=10 \Rightarrow \int_0^1 x^4f'(x)\mathrm{d}x=-38$

$\Leftrightarrow 8.\int_0^1 x^4f'(x)\mathrm{d}x=-38.8 \Leftrightarrow 8.\int_0^1 x^4f'(x)\mathrm{d}x=-38.\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int_0^1\left(8x^4f'(x)+38\left[f'(x)\right]^2\right)\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow \int_0^1 f'(x).\left[8x^4+38f'(x)\right]\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow 8x^4+38f'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-\frac{4}{19}x^4 \Rightarrow f(x)=-\frac{4}{95}x^5+C .$

Với $f(1)=2 \Rightarrow C=\frac{194}{95}$. Khi đó: $f(x)=-\frac{4}{95}x^5+\frac{194}{95}$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(-\frac{4}{95}x^5+\frac{194}{95}\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{2}{285}x^6+\frac{194}{95}x\right)\Big|_0^1=\frac{116}{57}$.

Câu 35: Chọn A

Xét $I=\int_1^e\left(f'(x).\ln x+\frac{\mathrm{e}^{\ln x}}{x}\right)\mathrm{d}x=\int_1^e f'(x).\ln x.\mathrm{d}x+\int_1^e\frac{\mathrm{e}^{\ln x}}{x}\mathrm{d}x$

$=\left[f(x).\ln x\right]\Big|_1^e-\int_1^e\frac{f(x)}{x}.\mathrm{d}x+\int_1^e\mathrm{e}^{\ln x}.\mathrm{d}(\ln x)$

$=\left(f(x).\ln x-\frac{1}{2x^2}+\mathrm{e}^{\ln x}\right)\Big|_1^e=f(\mathrm{e})-\frac{1}{2\mathrm{e}^2}+\mathrm{e}+\frac{1}{2}-1=\mathrm{e}-\frac{1}{2}$.

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

TÍCH PHÂN CHO BỞI NHIỀU HÀM

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}6x^2 & \text{khi } x\le 0\\ \left(a-a^2\right)x & khi\, x\ge 0\end{cases}$ và $I=\int_{-1}^{4}f(x)dx$. Hỏi có tất cả bao nhiêu số nguyên a để $I+46\ge 0$?

A. 7. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 2: Tính tích phân $I=\int_0^3 \max\left\{x^3;4x^2-3x\right\}dx$.

A. $\frac{117}{2}$. **B.** $\frac{707}{2}$. **C.** $\frac{275}{12}$. **D.** $\frac{119}{6}$.

Câu 3: Tính $I=\int_0^2 \min\{x;\sqrt[3]{2-x}\}dx$.

A. $I=2$. **B.** $I=\frac{3}{4}$. **C.** $I=1$. **D.** $I=\frac{5}{4}$.

Câu 4: (Đề tham khảo – 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $R\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{2x-1};f(0)=1$ và $f(1)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $4+\ln 15$. **B.** $2+\ln 15$ **C.** $3+\ln 15$. **D.** $\ln 15$.

Câu 5: (Toán học và tuổi trẻ - Số 6 – 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $R\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x-1};f(0)=2017$ và $f(2)=2018$. Tính $S=f(3)-f(-1)$

A. $S=1$. **B.** $S=\ln 2$. **C.** $S=\ln 4035$. **D.** $S=4$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x-2 & khi\, x\ge 4\\ \sqrt{x} & khi\, x\le 4\end{cases}$. Tính tích phân $I=\int_1^9 f(x)dx.$

A. $I=\frac{121}{6}$. **B.** $I=\frac{163}{6}$. **C.** $I=\frac{85}{6}$. **D.** $I=\frac{223}{6}$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sin x & khi\, x\ge \frac{\pi}{2}\\ \sin^2 x & khi\, x\le \frac{\pi}{2}\end{cases}$. Biết $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} f(x)dx=a+b\pi\left(a,b\in\mathbb{Q}\right)$. Tính $T=a+b.$

A. $T=\frac{11}{8}$. **B.** $T=\frac{3}{2}$. **C.** $T=\frac{15}{8}$. **D.** $T=\frac{7}{2}$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x+1 & khi\, x\ge 0\\ e^{2x} & khi\, x\le 0\end{cases}$. Tính tích phân $I=\int_{-1}^{2} f(x)dx.$

A. $I=\frac{3e^2-1}{2e^2}$. **B.** $I=\frac{7e^2+1}{2e^2}$. **C.** $I=\frac{9e^2-1}{2e^2}$. **D.** $I=\frac{11e^2-11}{2e^2}$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x^2 & khi\, 0\le x\le 1\\ 4-x & khi\, 1\le x\le 2\end{cases}$. Tính tích phân $I=\int_0^2 f(x)dx.$

A. $\frac{7}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 10: (Lục Ngạn – Bắc Giang – 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $R\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{3}{3x-1}; f(0)=1$ và $f\left(\frac{2}{3}\right)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $3+5\ln 2$. **B.** $-2+5\ln 2$. **C.** $4+5\ln 2$. **D.** $2+5\ln 2$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(0;+\infty)\setminus\{e\}$, thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x(\ln x-1)}, f(e^2)=3, f\left(\frac{1}{e^2}\right)=\ln 6$. Tính giá trị biểu thức $f\left(\frac{1}{e}\right)+f(e^3)$.

A. $3(\ln 2+1)$. **B.** $2\ln 2$. **C.** $3\ln 2+1$. **D.** $\ln 2+3$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2-1}$, $f(-3)+f(3)=0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2$. Tính giá trị của biểu thức $P=f(0)+f(4)$.

A. $P=\ln\frac{3}{5}+2$. **B.** $P=1+\ln\frac{3}{5}$. **C.** $P=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$. **D.** $P=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{x^2-1}$, $f(-2)+f(2)=0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2$. Tính $f(-3)+f(0)+f(4)$ được kết quả

A. $-1+\ln\frac{4}{5}$ **B.** $-1+\ln\frac{6}{5}$ **C.** $1+\ln\frac{4}{5}$ **D.** $1+\ln\frac{6}{5}$

Câu 14: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\frac{1}{1+\sin 2x}$ với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{-\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$, biết $F(0)=1$; $F(\pi)=0$. Tính $P=F\left(-\frac{\pi}{12}\right)-F\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

A. $P=2-\sqrt{3}$. **B.** $P=0$. **C.** Không tồn tại P. **D.** $P=1$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$, thỏa mãn $f'(x)=\frac{4}{x^2-4}, f(-3)=0, f(0)=1$ và $f(3)=2$. Tính giá trị biểu thức $P=f(-4)+f(-1)+f(4)$.

A. $P=3+\ln\frac{3}{25}$. **B.** $P=3+\ln 3$. **C.** $P=2+\ln\frac{5}{3}$. **D.** $P=2-\ln\frac{5}{3}$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$, thỏa mãn $f'(x)=\frac{4}{x^2+x-2}, f(-3)-f(3)=0, f(0)=\frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $f(-4)+f(-1)-f(4)$.

A. $1+\ln 80$. **B.** $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 2$. **C.** $1+\ln 2+\frac{1}{3}\ln\frac{4}{5}$. **D.** $1+\frac{1}{3}\ln\frac{8}{5}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.C	3.D	4.C	5.A	6.B	7.A	8.C	9.A	10.A
11.A	12.C	13.D	14.D	15.B	16.B				

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **Chọn C**

Ta có $I=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{4}f(x)dx=\int_{-1}^{0}6x^2dx+\int_{0}^{4}\left(a-a^2\right)xdx=2x^3\Big|_{-1}^{0}+\left(a-a^2\right)\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{4}=2+8a-8a^2$

Khi đó $I+46\ge 0\Leftrightarrow 2+8a-8a^2+46\ge 0\Leftrightarrow a^2-a-6\le 0$

$\Leftrightarrow -2\le a\le 3, a\in\mathbb{Z}\Rightarrow a\in\{-2;-1;0;1;2;3\}$

Vậy có 6 giá trị nguyên của a thỏa mãn.

Câu 2: **Chọn C**

Trên đoạn $\left[0;3\right]$:

Xét $x^3\ge 4x^2-3x\Leftrightarrow x^3-4x^2+3x\ge 0\Leftrightarrow x(x-1)(x-3)\ge 0\Rightarrow x\in[0;1]\text{do}\,x\in\left[0;3\right]$

Vậy $\begin{cases}x\in[0;1]\Rightarrow x^3\ge 4x^2-3x\\ x\in[1;3]\Rightarrow x^3\le 4x^2-3x\end{cases}\Rightarrow\max_{x\in[0;3]}\left\{x^3;4x^2-3x\right\}=\begin{cases}x^3 & \text{khi}\quad x\in[0;1]\\ 4x^2-3x & \text{khi}\quad x\in[1;3]\end{cases}.$

Khi đó $I=\int_{0}^{3}\max\left\{x^3;4x^2-3x\right\}dx=\int_{0}^{1}x^3dx+\int_{1}^{3}\left(4x^2-3x\right)dx=\frac{275}{12}$. Chọn đáp án C

Câu 3: **Chọn D**

Trên đoạn $\left[0;2\right]$:

Xét $x\ge\sqrt[3]{2-x}\Leftrightarrow x^3\ge 2-x\Leftrightarrow x^3+x-2\ge 0\Leftrightarrow(x-1)\left(x^2+x+2\right)\ge 0\xrightarrow{x\in[0;2]}x\in[1;2]$

Vậy $\begin{cases}x\in[0;1]\Rightarrow x\le\sqrt[3]{2-x}\\ x\in[1;2]\Rightarrow x\ge\sqrt[3]{2-x}\end{cases}\Rightarrow\min_{x\in[0;2]}\{x;\sqrt[3]{2-x}\}=\begin{cases}x\quad khi & x\in[0;1]\\ \sqrt[3]{2-x} & \text{khi}\quad x\in[1;2]\end{cases}.$

Khi đó $I=\int_{0}^{2}\min\{x;\sqrt[3]{2-x}\}\cdot dx=\int_{0}^{1}xdx+\int_{1}^{2}\sqrt[3]{2-x}dx\overset{\text{Castio}}{=}\frac{5}{4}$. Chọn đáp án D

Câu 4: **Chọn C**

Cách 1:

Từ $f'(x)=\frac{2}{2x-1}\Rightarrow f(x)=\int\frac{2dx}{2x-1}=\begin{cases}\ln|2x-1|+C_1\ \text{khi}\ x\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\\ \ln|2x-1|+C_2\ \text{khi}\ x\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\end{cases}.$

Ta có: $\begin{cases}f(0)=1\\ f(1)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0+C_1=1\\ 0+C_2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=1\\ C_2=2\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\ln|2x-1|+1\ \text{khi}\ x\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\\ \ln|2x-1|+2\ \text{khi}\ x\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\end{cases}.$

Khi đó: $f(-1)+f(3)=\ln 3+1+\ln 5+2=3+\ln 15$.

Cách 2:

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Ta có: $\begin{cases} f(0)-f(-1)=f(x)|_{-1}^{0}=\int_{-1}^{0}f'(x)dx=\int_{-1}^{0}\dfrac{2}{2x-1}dx=\ln|2x-1||_{-1}^{0}=\ln\dfrac{1}{3} \quad (1) \\ f(3)-f(1)=f(x)|_{1}^{3}=\int_{1}^{3}f'(x)dx=\int_{1}^{3}\dfrac{2}{2x-1}dx=\ln|2x-1||_{1}^{3}=\ln 5 \quad (2) \end{cases}$

Lấy $(2)-(1)$, ta được: $f(3)+f(-1)-f(0)-f(1)=\ln 15 \Rightarrow f(3)+f(-1)=3+\ln 15$.

Câu 5: **Chọn A**

Cách 1:

Từ $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}\Rightarrow f(x)=\int\dfrac{dx}{x-1}=\begin{cases}\ln|x-1|+C_1 \text{ khi } x\in(-\infty;1)\\ \ln|x-1|+C_2 \text{ khi } x\in(1;+\infty)\end{cases}$.

Ta có: $\begin{cases}f(0)=2017\\ f(2)=2018\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0+C_1=2017\\ 0+C_2=2018\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=2017\\ C_2=2018\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\ln|x-1|+2017 \text{ khi } x\in(-\infty;1)\\ \ln|x-1|+2018 \text{ khi } x\in(1;+\infty)\end{cases}$.

Khi đó: $f(3)-f(-1)=\ln 2+2018-(\ln 2+2017)=1$.

Cách 2:

Ta có: $\begin{cases} f(0)-f(-1)=f(x)|_{-1}^{0}=\int_{-1}^{0}f'(x)dx=\int_{-1}^{0}\dfrac{1}{x-1}dx=\ln|x-1||_{-1}^{0}=\ln\dfrac{1}{2} \quad (1) \\ f(3)-f(2)=f(x)|_{2}^{3}=\int_{2}^{3}f'(x)dx=\int_{2}^{3}\dfrac{1}{x-1}dx=\ln|x-1||_{2}^{3}=\ln 2 \quad (2) \end{cases}$

Lấy $(2)+(1)$, ta được: $f(3)+f(-1)+f(0)-f(2)=0\Rightarrow S=f(3)+f(-1)=f(2)-f(0)=1$

Câu 6: **Chọn B**

Ta có; $I=\int_{1}^{9}f(x)dx=\int_{1}^{4}f(x)dx+\int_{4}^{9}f(x)dx=\int_{1}^{4}\sqrt{x}dx+\int_{4}^{9}(x-2)dx=\dfrac{163}{6}$.

Câu 7: **Chọn A**

Ta có: $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}f(x)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin xdx$

$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\cos 2x}{2}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin xdx=\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\dfrac{5}{4}+\dfrac{1}{8}\pi=a+b\pi.$

Do $a,b\in\mathbb{Q}\Rightarrow a=\dfrac{5}{4};b=\dfrac{1}{8}\Rightarrow T=a+b=\dfrac{11}{8}$.

Câu 8: **Chọn C**

Ta có: $I=\int_{-1}^{2}f(x)dx=I=\int_{-1}^{0}f(x)dx+I=\int_{0}^{2}f(x)dx=\int_{-1}^{0}e^{2x}dx+I=\int_{0}^{2}(x+1)dx=\dfrac{9e^2-1}{2e^2}$.

Câu 9: **Chọn A**

Ta có: $I=\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx=\int_{0}^{1}3x^2dx+\int_{1}^{2}(4-x)dx=x^3|_{0}^{1}+\left(4x-\dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_{1}^{2}=1+\dfrac{5}{2}=\dfrac{7}{2}$.

Câu 10: **Chọn A**

Cách 1: Từ $f'(x)=\frac{3}{3x-1}\Rightarrow f(x)=\int\frac{3dx}{3x-1}=\begin{cases}\ln|3x-1|+C_1 \text{ khi } x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\\ \ln|3x-1|+C_2 \text{ khi } x\in\left(\frac{1}{3};+\infty\right)\end{cases}$.

Ta có: $\begin{cases}f(0)=1\\ f\left(\frac{2}{3}\right)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0+C_1=1\\ 0+C_2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=1\\ C_2=2\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\ln|3x-1|+1 \text{ khi } x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\\ \ln|3x-1|+2 \text{ khi } x\in\left(\frac{1}{3};+\infty\right)\end{cases}$.

Khi đó: $f(-1)+f(3)=\ln 4+1+\ln 8+2=3+\ln 32=3+5\ln 2$.

Cách 2: Ta có: $\begin{cases}f(0)-f(-1)=f(x)|_{-1}^{0}=\int\limits_{-1}^{0}f'(x)dx=\int\limits_{-1}^{0}\frac{3}{3x-1}dx=\ln|3x-1||_{-1}^{0}=\ln\frac{1}{4} \quad (1)\\ f(3)-f\left(\frac{2}{3}\right)=f(x)|_{\frac{2}{3}}^{3}=\int\limits_{\frac{2}{3}}^{3}f'(x)dx=\int\limits_{\frac{2}{3}}^{3}\frac{2}{2x-1}dx=\ln|3x-1||_{\frac{2}{3}}^{3}=\ln 8 \quad (2)\end{cases}$

Lấy $(2)-(1)$, ta được: $f(3)+f(-1)-f(0)-f\left(\frac{2}{3}\right)=\ln 32\Rightarrow f(-1)+f(3)=3+5\ln 2$.

Câu 11: Chọn A

Ta có $f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{1}{x(\ln x-1)}dx=\int\frac{d(\ln x-1)}{\ln x-1}=\ln|\ln x-1|+C$

$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\ln(\ln x-1)+C_1 & khi\ x\in(e;+\infty)\\ \ln(1-\ln x)+C_2 & khi\ x\in(0;e)\end{cases}$

Ta có $\begin{cases}f(e^2)=3\\ f\left(\frac{1}{e^2}\right)=\ln 6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ln(\ln e^2-1)+C_1=3\\ \ln\left(1-\ln\frac{1}{e^2}\right)+C_2=\ln 6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=3\\ C_2=\ln 2\end{cases}$

Do đó $f(x)=\begin{cases}\ln(\ln x-1)+3 & khi\ x\in(e;+\infty)\\ \ln(1-\ln x)+\ln 2 & khi\ x\in(0;e)\end{cases}\Rightarrow f\left(\frac{1}{e}\right)+f(e^3)=3(\ln 2+1)$

Câu 12: Chọn C

Ta có $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(x-1)(x+1)}\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\ln|x-1|-\ln|x+1|\right)+C=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}+C_1, |x|>1\\ \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{x+1}+C_2, |x|<1\end{cases}$.

$f(-3)=\frac{1}{2}\ln 2+C_1$; $f(3)=-\frac{1}{2}\ln 2+C_1$, do đó $f(-3)+f(3)=0\Rightarrow C_1=0$.

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln 3+C_2$; $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\ln 3+C_2$, do đó $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2\Rightarrow C_2=1$.

$f(0)=C_2=1$; $f(4)=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$, do đó $f(0)+f(4)=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$.

Câu 13: Chọn D

Ta có $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{2}{x^2-1}\mathrm{d}x=\int\frac{2}{(x-1)(x+1)}\mathrm{d}x$

$=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\ln|x-1|-\ln|x+1|+C=\begin{cases}\ln\frac{x-1}{x+1}+C_1,|x|>1\\ \ln\frac{1-x}{x+1}+C_2,|x|<1\end{cases}$.

$f(-2)=\ln 3+C_1$; $f(2)=\ln\frac{1}{3}+C_1$, do đó $f(-2)+f(2)=0\Rightarrow C_1=0$.

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\ln 3+C_2$; $f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{1}{3}+C_2$, do đó $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2\Rightarrow C_2=1$.

Vậy $f(-3)+f(0)+f(4)=\ln 2+1+\ln\frac{3}{5}=\ln\frac{6}{5}+1$.

Câu 14: Chọn D

Cách 1:

Ta có $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{1+\sin 2x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x$

$=\int\frac{1}{2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{2}\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+C_1,x\in\left(-\frac{5\pi}{4};-\frac{\pi}{4}\right)+k2\pi\\ \frac{1}{2}\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+C_1,x\in\left(-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)+k2\pi\end{cases}$.

$\begin{cases}F(0)=1\\F(\pi)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}+C_2=1\\\frac{1}{2}+C_1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_2=\frac{1}{2}\\C_1=-\frac{1}{2}\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2},x\in\left(-\frac{5\pi}{4};-\frac{\pi}{4}\right)+k2\pi\\\frac{1}{2}\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2},x\in\left(-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)+k2\pi\end{cases}$

Khi đó $P=F\left(-\frac{\pi}{12}\right)-F\left(\frac{11\pi}{12}\right)=\left(\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\tan\frac{7\pi}{6}-\frac{1}{2}\right)=1$

Cách 2:

$\begin{cases}F(0)-F\left(-\frac{\pi}{12}\right)=F(x)\Big|_{-\frac{\pi}{12}}^{0}=\int\limits_{-\frac{\pi}{12}}^{0}\frac{dx}{1+\sin 2x}(1)\\F(\pi)-F\left(\frac{11\pi}{12}\right)=F(x)\Big|_{\frac{11\pi}{12}}^{\pi}=\int\limits_{\frac{11\pi}{12}}^{\pi}\frac{dx}{1+\sin 2x}(2)\end{cases}$

Lấy $(2)-(1)$ ta được $F\left(-\frac{\pi}{12}\right)-F\left(\frac{11\pi}{12}\right)+F(\pi)-F(0)=\int\limits_{\frac{11\pi}{12}}^{\pi}\frac{dx}{1+\sin 2x}-\int\limits_{-\frac{\pi}{12}}^{0}\frac{dx}{1+\sin 2x}$

$\xleftrightarrow{casio}F\left(-\frac{\pi}{12}\right)-F\left(\frac{11\pi}{12}\right)-1=0\Leftrightarrow F\left(-\frac{\pi}{12}\right)-F\left(\frac{11\pi}{12}\right)=1$.

Câu 15: Chọn B

Ta có $f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{4}{x^2-4}dx=\int\frac{4dx}{(x-2)(x+2)}=\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)+C_1 & khi\ x\in(2;+\infty)\\ \ln\left(\frac{2-x}{x+2}\right)+C_2 & khi\ x\in(-2;2)\\ \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)+C_3 & khi\ x\in(-\infty;-2)\end{cases}$$

Ta có $\begin{cases}f(3)=2\\ f(0)=1\\ f(-3)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ln\left(\frac{1}{5}\right)+C_1=2\\ C_2=1\\ \ln 5+C_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=2+\ln 5\\ C_2=1\\ C_3=-\ln 5\end{cases}$

Do đó $f(x)=\begin{cases}\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)+2+\ln 5 & khi\ x\in(2;+\infty)\\ \ln\left(\frac{2-x}{x+2}\right)+1 & khi\ x\in(-2;2)\\ \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)-\ln 5 & khi\ x\in(-\infty;-2)\end{cases}$

Suy ra $P=f(-4)+f(-1)+f(4)=3+\ln 3$.

Câu 16: Chọn B

Ta có $f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{dx}{x^2+x-2}=\int\frac{dx}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)+C_1 & khi\ x\in(1;+\infty)\\ \frac{1}{3}\ln\left(\frac{1-x}{x+2}\right)+C_2 & khi\ x\in(-2;1)\\ \frac{1}{3}\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)+C_3 & khi\ x\in(-\infty;-2)\end{cases}$$

Ta có $f(-3)-f(3)=0\Rightarrow\frac{1}{3}\ln 4+C_3-\left(\frac{1}{3}\ln\frac{2}{5}+C_1\right)=0\Leftrightarrow C_1=C_3+\frac{1}{3}\ln 10$

$f(0)=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2}+C_2=\frac{1}{3}\Leftrightarrow C_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 2$

Do đó $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)+C_3+\frac{1}{3}\ln 10 & khi\ x\in(1;+\infty)\\ \frac{1}{3}\ln\left(\frac{1-x}{x+2}\right)+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 2 & khi\ x\in(-2;1)\\ \frac{1}{3}\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)+C_3 & khi\ x\in(-\infty;-2)\end{cases}$

Suy ra $f(-4)+f(-1)-f(4)=\left(\frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}+C_3\right)+\left(\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 2\right)-\left(\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2}+C_1+\frac{1}{3}\ln 10\right)$.

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 2$.

CÁC CÔNG THỨC GIẢI NHANH TÍCH PHÂN HÀM ẨN

Lưu ý: Trên đây chỉ đưa ra công thức áp dụng mang tính chất tham khảo và công thức được chứng minh từ các ví dụ ở bài tập rèn luyện.

- **Dạng 1:** $f'(x).h(f(x))=g(x)$

  Lấy tích phân hai vế, ta được $\int f'(x).h[f(x)]=\int g(x)$

  Sử dụng phương pháp vi phân: $\int h[f(x)]d[f(x)]=\int g(x)$

- **Dạng 2:** $A.f(x)+B.u'f(u)+C.f(a+b-x)=g(x)$ với $\begin{cases}u(a)=a\\u(b)=b\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}u(a)=b\\u(b)=a\end{cases}$

  Khi đó: $\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{A+B+C}\int_a^b g(x)dx=\frac{1}{A-B+C}\int_a^b f(x)dx$

- **Dạng 3:** $A.f(ax+b)+B.f(-ax+c)$ (với $A^2\neq B^2$), khi đó $f(x)=\frac{A.g\left(\frac{x-b}{a}\right)-B.g\left(\frac{x-c}{-a}\right)}{A^2-B^2}$

  - **Hệ quả 1:** $A.f(x)+b.f(-x)=g(x)\Rightarrow f(x)=\frac{A.g(x)-B.g(-x)}{A^2+B^2}$.
  - **Hệ quả 2:** $A.f(x)+B.f(-x)=g(x)\Rightarrow f(x)=\frac{g(x)}{A+B}, g(x)$ là hàm chẵn.

- **Dạng 4:** Hàm ẩn cho dưới cận tích phân

  Áp dụng công thức $\left(\int_{v\,x}^{u\,x} f\ t\ dt\right)'=u'\ x\ f\ u\ x\ -v'\ x\ f\ v\ x$.

- **Dạng 5:** Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(u(x))=v(x)$ và $u(x)$ là một hàm đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

  Tính tích phân $\int_a^b f(x)dx$ thì ta đặt $t=u(x)\rightarrow\begin{cases}dt=u'(x)dx\\f(t)=v(x)\end{cases}\Rightarrow I=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$

- **Dạng 6:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $g(f(x))=x$ và $g(t)$ là một hàm đơn điệu trên $\mathbb{R}$. Tính tích phân $\int_a^b f(x)dx$ thì ta đặt $y=f(x)\rightarrow x=g(y)\Rightarrow dx=g'(y)dy$. Sau đó thực hiện đổi cận và đưa về tích phân cơ bản.

- **Dạng 7:** $f\ x\ .f\ a+b-x\ =k^2$ khi đó $I=\int_a^b\frac{dx}{k+f\ x}=\frac{b-a}{2k}$.

- **Dạng 8:** $f\ x\ =f\ a+b-x$ và $I=\int_a^b x.f\ x\ dx$ thì ta có: $\int_a^b f\ x\ dx=\frac{2I}{a+b}$

TÍCH PHÂN HÀM ẨN PHẦN 1

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$. Tính $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}dx$.

A. $I=\frac{3}{2}$. **B.** $I=1$. **C.** $I=\frac{1}{2}$. **D.** $I=-1$.

Câu 2: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $2f(x)+3f(1-x)=x\sqrt{1-x}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{1}f(x)dx$.

A. $I=-\frac{4}{15}$. **B.** $I=\frac{1}{15}$. **C.** $I=\frac{4}{75}$. **D.** $I=\frac{1}{25}$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x)+2018f(x)=2x\sin x$. Tính $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$.

A. $\frac{2}{2019}$. **B.** $\frac{2}{1009}$. **C.** $\frac{4}{2019}$. **D.** $\frac{1}{1009}$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x)+2018f(x)=e^x$. Tính giá trị của $I=\int\limits_{-1}^{1}f(x)dx$.

A. $I=\frac{e^2-1}{2019e}$. **B.** $I=\frac{e^2-1}{2018e}$. **C.** $I=0$. **D.** $I=\frac{e^2-1}{e}$.

Câu 5: Cho hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(2x)+f(1-2x)=12x^2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là

A. $y=2x+2$. **B.** $y=4x-6$. **C.** $y=2x-6$. **D.** $y=4x-2$.

Câu 6: Cho $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx=2018$ và $g(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $g(x)+g(-x)=1,\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$.

A. $I=2018$. **B.** $I=\frac{1009}{2}$. **C.** $I=4036$. **D.** $I=1008$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\sqrt{2+2\cos 2x},\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f(x)dx$.

A. $I=-6$. **B.** $I=0$. **C.** $I=-2$. **D.** $I=6$.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ và thỏa mãn $2f(x)+f(-x)=\cos x$. Tính $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$.

A. $I=-2$.. **B.** $I=\frac{2}{3}$. **C.** $I=\frac{3}{2}$.. **D.** $I=2$.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-2;2]$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(-x)=\dfrac{1}{4+x^2}$. Tính tích phân $I=\int_{-2}^{2} f(x)dx$.

A. $I=-\dfrac{\pi}{10}$. **B.** $I=-\dfrac{\pi}{20}$. **C.** $I=\dfrac{\pi}{20}$. **D.** $I=\dfrac{\pi}{10}$.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $x^2f(x)+f(1-x)=2x-x^4$. Tính tích phân $I=\int_{0}^{1} f(x)dx$.

A. $I=\dfrac{1}{2}$. **B.** $I=\dfrac{3}{5}$. **C.** $I=\dfrac{2}{3}$. **D.** $I=\dfrac{4}{3}$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$.

A. $\dfrac{\pi}{20}$. **B.** $\dfrac{\pi}{16}$. **C.** $\dfrac{\pi}{6}$. **D.** $\dfrac{\pi}{4}$.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_0^{x^2} f(t)dt=x\cos(\pi x)$. Giá trị của $f(4)$ là

A. $f(4)=1$. **B.** $f(4)=4$. **C.** $f(4)=\dfrac{1}{2}$. **D.** $f(4)=\dfrac{1}{4}$.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_0^{x^2} f(t)dt=e^{x^2}+x^4-1$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(4)$ là

A. $f(4)=e^4+4$. **B.** $f(4)=4e^4$. **C.** $f(4)=e^4+8$. **D.** $f(4)=1$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;+\infty)$ với $a>0$ và thỏa mãn $\int_a^x \dfrac{f(t)}{t^2}dt+6=2\sqrt{x}$ với $x>a$. Tính $f(4)$

A. $f(4)=2$. **B.** $f(4)=8$. **C.** $f(4)=4$. **D.** $f(4)=16$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)>0$, xác định và có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $g(x)=1+2018\int_0^x f(t)dt$ và $g(x)=f^2(x)$. Tính $\int_0^1 \sqrt{g(x)}dx$

A. $\dfrac{1011}{2}$. **B.** $\dfrac{1099}{2}$. **C.** $\dfrac{2019}{2}$. **D.** 505.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$ thỏa mãn $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2$ .Tính $I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\dfrac{f(x)}{x^2+1}dx$

A. $I=\dfrac{3}{2}$. **B.** $I=2$. **C.** $I=\dfrac{5}{2}$. **D.** $I=3$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^3+x)=x^2-1$. Tính $I=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$?

A. $I=-\frac{6}{5}$. **B.** $I=\frac{15}{16}$. **C.** $I=-\frac{6}{5}$. **D.** $I=-\frac{15}{16}$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^3+2x-2)=3x-1$. Tính $I=\int_1^{10} f(x)\mathrm{d}x$?

A. $I=\frac{45}{4}$. **B.** $I=\frac{9}{4}$. **C.** $I=\frac{135}{4}$. **D.** $I=\frac{5}{4}$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^3+1)=2x-1,\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$?

A. $I=-2$. **B.** $I=\frac{5}{2}$. **C.** $I=-4$. **D.** $I=6$.

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(x^3+3x+1)=3x+2,\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_1^5 xf'(x)dx$.

A. $I=\frac{5}{4}$. **B.** $I=\frac{17}{4}$. **C.** $I=\frac{33}{4}$. **D.** $I=-1761$.

Câu 21: . Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(x^4+x^2+x-1)=\frac{1}{x+1}$. Biết $I=\int_2^{21} f(x)dx=\frac{a}{b}-\ln\frac{c}{d}$ với $a,b,c,d\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính $T=a+b+c+d$.

A. $T=243$. **B.** $T=306$. **C.** $T=312$. **D.** $T=275$.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f\left(x-\frac{1}{x}+1\right)=\frac{1}{x}$. Biết $I=\int_1^{\frac{5}{2}} f(x)dx=\frac{a}{b}+\ln c$ với $a,b,c\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là các phân số tối giản. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=13$. **B.** $T=69$. **C.** $T=96$. **D.** $T=88$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f^3(x)+f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_0^2 f(x)dx$.

A. $I=2$. **B.** $I=\frac{3}{2}$. **C.** $I=\frac{1}{2}$. **D.** $I=\frac{5}{4}$.

Câu 24: Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2f^3(x)-3f^2(x)+6f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_0^5 f(x)dx$.

A. $I=\frac{5}{4}$. **B.** $I=\frac{5}{2}$. **C.** $I=\frac{5}{12}$. **D.** $I=\frac{5}{3}$.

Câu 25: Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x+f^3(x)+2f(x)=1,\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int_{-2}^1 f(x)dx$.

A. $I=\frac{7}{4}$. **B.** $I=\frac{7}{2}$. **C.** $I=\frac{7}{3}$. **D.** $I=\frac{5}{4}$.

Câu 26: Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2x+f^5(x)+f(x)-4=0,\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_1^2 f(x)dx$.

A. $I=\frac{3}{4}$. **B.** $I=\frac{1}{2}$. **C.** $I=\frac{5}{3}$. **D.** $I=\frac{4}{3}$.

Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $x-f^3(x)-f(x)+3=0$. Tính $I=\int_{-1}^{7} xf'(x)dx$.

A. $I=\frac{5}{4}$. **B.** $I=\frac{51}{4}$. **C.** $I=\frac{9}{4}$. **D.** $I=\frac{3}{4}$.

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[0;1]$ biết $f(x).f(1-x)=1$ với $\forall x\in[0;1]$. Tính giá trị của $I=\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+f(x)}$.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 29: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, ta có $f(x)>0$ và $f(x).f(2018-x)=1$. Giá trị của tích phân $I=\int_{0}^{2018}\frac{dx}{1+f(x)}$.

A. $I=2018$. **B.** $I=0$. **C.** $I=1009$. **D.** $I=4016$.

Câu 30: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên tập R, ta có $f(x)>0$ *và* $f(0).f(10-x)=9$. Giá trị của tích phân $I=\int_{-2}^{12}\frac{1}{3+f(x)}dx$.

A. $I=\frac{14}{3}$. **B.** $I=\frac{2}{3}$ **C.** $I=\frac{7}{6}$. **D.** $I=\frac{7}{3}$

Câu 31: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên tập R và thỏa mãn $f(4-x)=f(x)$. Biết $\int_{1}^{3} x.f(x)dx=5$.Tính tích phân $\int_{1}^{3} f(x)dx$.

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{11}{2}$.

Câu 32: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên tập R và thỏa mãn $f(x)-f(3-x)=0$. Biết $\int_{-1}^{4} x.f(x)dx=2$. Tính tích phân $\int_{-1}^{4} f(x)dx$.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{2}{9}; f'(x)=2x[f(x)]^2, \forall x\in\mathbb{R}$.. Giá trị của $f(1)$ là

A. $\frac{-35}{36}$. **B.** $\frac{-2}{3}$. **C.** $\frac{-19}{36}$. **D.** $\frac{-2}{5}$.

Câu 34: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{3}; f'(x)=x[f(x)]^2, \forall x\in\mathbb{R}$.. Giá trị của $f(1)$ là

A. $\frac{-11}{6}$. **B.** $\frac{-2}{3}$. **C.** $\frac{-2}{9}$. **D.** $\frac{-7}{6}$.

Câu 35: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{25}; f'(x)=4x^3\left[f(x)\right]^2, \forall x\in\mathbb{R}.$. Giá trị của $f(1)$ là

A. $\frac{-41}{400}$. **B.** $\frac{-1}{10}$. **C.** $\frac{-391}{400}$. **D.** $\frac{-1}{40}$.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{5}$ và $f'(x)=x^3\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng :

A. $-\frac{4}{35}$. **B.** $-\frac{71}{20}$. **C.** $-\frac{79}{20}$. **D.** $-\frac{4}{5}$.

Câu 37: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=-e^x.f^2(x), \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=\frac{1}{2}$. Tính giá trị của $f(\ln 2)$.

A. $f(\ln 2)=\frac{2}{9}$. **B.** $f(\ln 2)=-\frac{2}{9}$. **C.** $f(\ln 2)=\frac{2}{3}$. **D.** $f(\ln 2)=\frac{1}{3}$.

Câu 38: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C), xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=\left(x.f(x)\right)^2, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=1$ của đồ thị (C) là

A. $y=6x+30$. **B.** $y=-6x+30$. **C.** $y=36x-30$. **D.** $y=-36x+42$.

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[-1;1]$, thỏa mãn $f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f'(x)+2f(x)=0$. Biết $f(1)=1$ tính $f(-1)$.

A. $f(-1)=e^{-2}$. **B.** $f(-1)=e^3$. **C.** $f(-1)=e^4$. **D.** $f(-1)=3$.

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x).f(x)=x^4+x^2$. Biết $f(0)=2$. Tính $f^2(2)$.

A. $f^2(2)=\frac{313}{15}$. **B.** $f^2(2)=\frac{332}{15}$. **C.** $f^2(2)=\frac{324}{15}$. **D.** $f^2(2)=\frac{323}{15}$.

Câu 41: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $(0;+\infty)$, biết $f'(x)+(2x+4)f^2(x)=0, f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$, $f(2)=\frac{1}{15}$. Tính $f(1)+f(2)+f(3)$.

A. $\frac{7}{15}$. **B.** $\frac{11}{15}$. **C.** $\frac{11}{30}$. **D.** $\frac{7}{30}$.

Câu 42: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f^6(x).f'(x)=12x+13$ và $f(0)=2$. Khi đó phương trình $f(x)=3$ có bao nhiêu nghiệm

A. 2. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 1.

Câu 43: Cho hàm số $f(x)\neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)=(2x+3)f^2(x)$ và $f(0)=-\frac{1}{2}$. Biết rằng tổng $f(1)+f(2)+...+f(2017)+f(2018)=\frac{a}{b}$ với $a\in\mathbb{Z}$ và $b\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $\frac{a}{b}<-1$. **B.** $\frac{a}{b}>1$. **C.** $a+b=1010$. **D.** $b-a=3029$.

Câu 44: Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=1, f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1}$ với mọi $x>0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $4<f(5)<5$. **B.** $2<f(3)<3$. **C.** $3<f(5)<4$. **D.** $1<f(5)<2$.

Câu 45: Cho hàm số $f(x)$ xác định, có đạo hàm, liên tục và đồng biến trên $[1;4]$ thỏa mãn $x+2xf(x)=[f'(x)]^2, \forall x\in[1;4], f(1)=\frac{3}{2}$. Giá trị $f(4)$ bằng

A. $\frac{391}{18}$. **B.** $\frac{361}{18}$. **C.** $\frac{381}{18}$. **D.** $\frac{371}{18}$.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ không âm thỏa mãn điều kiện $f(x).f'(x)=2x\sqrt{f^2(x)+1}, f(0)=0$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[1;3]$ bằng

A. 22. **B.** $4\sqrt{11}+\sqrt{3}$. **C.** $20+\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{11}+\sqrt{3}$.

Câu 47: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và đồng biến trên R thỏa mãn $f(0)=1;\left(f'(x)\right)^2=e^x.f(x), \forall x\in R$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $e-2$. **B.** $e-1$. **C.** e^2-2. **D.** e^2-1.

Câu 48: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(x)=6x^2.f(x^3)-\frac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$

A. 2. **B.** 4. **C.** –1. **D.** 6.

Câu 49: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $4x.f(x^2)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$ .Tính $\int_0^1 f(x)dx$

A. $\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{6}$. **C.** $\frac{\pi}{20}$. **D.** $\frac{\pi}{16}$.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn $f(x)+f(2-x)=2x$. Tính $\int_0^2 f(x)dx$

A. –4. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** 2.

Câu 51: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1,2]$ và thỏa mãn $f(x)+2xf(x^2-2)+3f(1-x)=4x^3$ Tính giá trị tích phân $I=\int_{-1}^2 f(x)dx$.

A. $I=5$. **B.** $I=\frac{5}{2}$. **C.** $I=3$. **D.** $I=15$.

Câu 52: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1,2]$ và thỏa mãn $f(x)=\sqrt{x+2}+xf(3-x^2)$. Tính giá trị tích phân $I=\int_{-1}^2 f(x)dx$.

A. $I=\frac{14}{3}$. **B.** $I=\frac{28}{3}$. **C.** $I=\frac{4}{3}$. **D.** $I=2$.

Câu 53: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0,1]$ và thỏa mãn $f(x)+xf(1-x^2)+3f(1-x)=\dfrac{1}{x+1}$. Tính giá trị tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$.

A. $I=\dfrac{9}{2}\ln 2$. **B.** $I=\dfrac{2}{9}\ln 2$. **C.** $I=\dfrac{4}{3}$. **D.** $I=\dfrac{3}{2}$.

Câu 54: Cho hàm số $y=f(x)$ và thỏa mãn $f(x)-8x^3f(x^4)+\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}=0$. Tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{a-b\sqrt{2}}{c}$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{c};\dfrac{b}{c}$ tối giản. Tính $a+b+c$

A. 6. **B.** –4 **C.** 4. **D.** –10.

Câu 55: Cho hàm số liên tục trên đoạn $[-\ln 2;\ln 2]$ và thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\dfrac{1}{e^x+1}$. Biết $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)dx=a\ln 2+b\ln 3$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính giá trị của $P=a+b$

A. $P=\dfrac{1}{2}$. **B.** $P=-2$ **C.** $P=-1$. **D.** $P=2$.

Câu 56: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0)=0$ và $f(x)+f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x\cos x$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx$ bằng

A. $\dfrac{-\pi}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{\pi}{4}$. **D.** $-\dfrac{1}{4}$.

Câu 57: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(1+2x)+f(1-2x)=\dfrac{x^2}{x^2+1},\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int_{-1}^{3} f(x)dx$.

A. $I=2-\dfrac{\pi}{2}$. **B.** $I=1-\dfrac{\pi}{4}$. **C.** $I=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{8}$. **D.** $I=\dfrac{\pi}{4}$.

Câu 58: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và thỏa mãn $x^2f^2(x)+(2x-1)f(x)=xf'(x)-1$ với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và $f(1)=-2$. Tính $\int_1^2 f(x)dx$.

A. $-\dfrac{1}{2}-\ln 2$. **B.** $-\dfrac{3}{2}-\ln 2$. **C.** $-1-\dfrac{\ln 2}{2}$. **D.** $-\dfrac{3}{2}-\dfrac{\ln 2}{2}$.

Câu 59: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[4;8]$ và $f(0)\neq 0$ với $\forall x\in[4;8]$. Biết rằng $\int_4^8 \dfrac{[f'(x)]^2}{[f(x)]^4}dx=1$ và $f(4)=\dfrac{1}{4},f(8)=\dfrac{1}{2}$. Tính $f(6)$.

A. $\dfrac{5}{8}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{8}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.C	3.C	4.A	5.D	6.A	7.D	8.B	9.C	10.C
11.A	12.D	13.C	14.B	15.A	16.A	17.D	18.C	19.A	20.C
21.B	22.A	23.D	24.B	25.A	26.D	27.C	28.B	29.C	30.D
31.A	32.C	33.B	34.B	35.B	36.D	37.D	38.C	39.C	40.B
41.D	42.A	43.D	44.C	45.A	46.D	47.B	48.B	49.C	50.D
51.C	52.B	53.B	54.A	55.A	56.D	57.A	58.A	59.D	

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **Chọn A**

Đặt $t=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{t}$ khi đó trở thành: $f\left(\frac{1}{t}\right)+2f\left(t\right)=\frac{3}{t}\Rightarrow 2f\left(x\right)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{x}.$

Hay $4f\left(x\right)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{6}{x},$ kết hợp với điều kiện $f\left(x\right)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x.$

Suy ra: $3f\left(x\right)=\frac{6}{x}-3x\Rightarrow \frac{f\left(x\right)}{x}=\frac{2}{x^2}-1\Rightarrow I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(x\right)}{x}dx=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{2}{x^2}-1\right)dx=\left(\frac{-2}{x}-x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{3}{2}$

Câu 2: **Chọn C**

Cách 1: Áp dụng kết quả của dạng 3, ta có:

$2f\left(x\right)+3f\left(1-x\right)=x\sqrt{1-x}=g\left(x\right)\Rightarrow f\left(x\right)=\frac{2g\left(x\right)-3g\left(1-x\right)}{2^2-3^2}=\frac{2x\sqrt{1-x}-3\left(1-x\right)\sqrt{x}}{-5}.$

Suy ra: $I=\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=\int\limits_0^1\frac{2x\sqrt{1-x}-3\left(1-x\right)\sqrt{x}}{-5}dx\overset{casio}{=}0,05\left(3\right)=\frac{4}{75}$

Cách 2:

Với $2f\left(x\right)+3f\left(1-x\right)=x\sqrt{1-x}$ ta có $A=2;B=0;C=3.$

Suy ra: $\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=\frac{1}{2+3}\int\limits_0^1 x\sqrt{1-x}dx\overset{casio}{=}0,05\left(3\right)=\frac{4}{75}$

Cách 3:

Từ $2f\left(x\right)+3f\left(1-x\right)=x\sqrt{1-x}\Rightarrow 2\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx+3\int\limits_0^1 f\left(1-x\right)dx=\int\limits_0^1 x\sqrt{1-x}dx\overset{casio}{=}0,2\left(6\right)=\frac{4}{15}\left(*\right)$

Đặt $u=1-x\Rightarrow du=-dx;$ Với $x=0\Rightarrow u=1$ và $x=1\Rightarrow u=0.$

Suy ra $\int\limits_0^1 f\left(1-x\right)dx=\int\limits_0^1 f\left(u\right)du=\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx$ thay vào ta được:

$5\int\limits_0^2 f\left(x\right)dx=\frac{4}{15}\Leftrightarrow\int\limits_0^2 f\left(x\right)dx=\frac{4}{75}$

Câu 3: **Chọn C**

Cách 1:

Áp dụng hệ quả 2: $A.f(x)+B.f(-x)=g(x)\Rightarrow f(x)=\dfrac{g(x)}{A+B}, g(x)$ là hàm chẵn.

Ta có: $f(-x)+2018f(x)=2x\sin x\Rightarrow f(x)=\dfrac{2x\sin x}{2019}$

$\Rightarrow \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\dfrac{2}{2019}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx \overset{casio}{=} \dfrac{4}{2019}$.

Cách 2:

Với $f(-x)+2018f(x)=2x\sin x$ với $A=1;b=0;C=2018$.

Suy ra $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\dfrac{1}{1+2018}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin x dx \overset{casio}{=} \dfrac{4}{2019}$.

Câu 4: **Chọn D**

Cách 1:

Áp dụng hệ quả 1: $A.f(x)+b.f(-x)=g(x)\Rightarrow f(x)=\dfrac{A.g(x)-B.g(-x)}{A^2+B^2}$.

Ta có: $f(-x)+2018f(x)=e^x\Rightarrow f(x)=\dfrac{2018e^x-e^{-x}}{2018^2-1}$

$\Rightarrow I=\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx=\dfrac{1}{2019.2017}\int\limits_{-1}^{1}\left(2018e^x-e^{-x}\right)dx \overset{casio}{\approx} 1{,}164.10^{-4}\approx\dfrac{e^2-1}{2019e}$. Chọn A

Cách 2:

Với $f(-x)+2018f(x)=e^x$ ta có $A=1;B=0;C=2018.$

Suy ra $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx=\dfrac{1}{1+2018}\int\limits_{-1}^{1} e^x dx=\dfrac{1}{2019}e^x\Big|_{-1}^{1}=\dfrac{e^2-1}{2019e}$.

Câu 5: **Chọn D**

Áp dụng kết quả dạng 3, có $2f(2x)+f(1-2x)=12x^2=g(x)$

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{2g\left(\dfrac{x}{2}\right)-g\left(\dfrac{x-1}{-2}\right)}{2^2-1}=\dfrac{6x^2-3(x-1)^2}{3}=x^2+2x-1.$

Suy ra $\begin{cases} f(1)=2 \\ f'(1)=4 \end{cases}$. Khi đó, phương trình tiếp tuyến cần lập là: $y=4x-2$.

Câu 6: **Chọn A**

Áp dụng Hệ quả 2 :

$A.g(x)+B.g(-x)=h(x)\Rightarrow g(x)=\dfrac{h(x)}{A+B}$ với $h(x)$ là hàm số chẵn

Ta có: $g(x)+g(-x)=1=h(x)\Rightarrow g(x)=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

Kết hợp với điều kiện $f(x)$ là hàm số chẵn, ta có:

$I=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx=\dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{0}^{1} f(x)dx=2018$.

Chú ý: Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $[-a;a]$ thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

Câu 7: **Chọn D**

Cách 1:

Áp dụng hệ quả 2: $A.f(x)+B.f(-x)=g(x)\Rightarrow f(x)=\dfrac{g(x)}{A+B}$ với $g(x)$ là hàm số chẵn

Ta có: $f(x)+f(-x)=\sqrt{2+2\cos 2x}\Rightarrow f(x)=\dfrac{\sqrt{2+2\cos 2x}}{2}=|\cos x|$

$$\Rightarrow I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x|dx \overset{\text{Casio}}{=} 6$$

Cách 2:

Với $f(x)+f(-x)=\sqrt{2+2\cos 2x}$ ta có $A=1;B=0;C=1$.

$$\Rightarrow I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx=\frac{1}{1+1}\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2+2\cos 2x}dx=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x|dx \overset{\text{Casio}}{=} 6$$

Cách 3:

Từ $f(x)+f(-x)=\sqrt{2+2\cos 2x}$

$$\Rightarrow \int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx+\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)dx=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2+2\cos 2x}dx=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 2|\cos x|dx \overset{\text{Casio}}{=} 12 \qquad (*)$$

Đặt $u=1-x\Rightarrow du=-dx$. Với $x=-\dfrac{3\pi}{2}\to u=\dfrac{3\pi}{2}$; $x=\dfrac{3\pi}{2}\to u=-\dfrac{3\pi}{2}$

Suy ra $\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)dx=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(u)du=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx$

Thay vào , ta được: $2\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx=12\Leftrightarrow \int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx=6$.

Câu 8: **Chọn B**

Với $2f(x)+f(-x)=\cos x$ ta có $A=2;B=0;C=1$.

Suy ra: $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\dfrac{1}{2+1}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx=\dfrac{2}{3}$.

Câu 9: **Chọn C**

Với $2f(x)+3f(-x)=\dfrac{1}{4+x^2}$. ta có $A=2;B=0;C=3$.

Suy ra: $I=\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx.=\dfrac{1}{2+3}\int\limits_{-2}^{2} \dfrac{dx}{4+x^2}\approx 0,157\approx \dfrac{\pi}{20}$.

Câu 10: **Chọn C**

Đặt $t=1-x\Rightarrow x=1-t$.

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Khi đó $x^2f(x)+f(1-x)=2x-x^4 \Leftrightarrow (1-t)^2f(1-t)+f(t)=2(1-t)-(1-t)^4$

$\Leftrightarrow (t^2-2t+1)f(1-t)+f(t)=1+2t-6t^2+4t^3-t^4$

Hay $(x^2-2x+1)f(1-x)+f(x)=1+2x-6x^2+4x^3-x^4$ (*)

Từ điều kiện: $x^2f(x)+f(1-x)=2x-x^4 \Rightarrow f(1-x)=2x-x^4-x^2f(x)$ (**).

Thay vào ta được: $(x^2-2x+1)\left[2x-x^4-x^2f(x)\right]+f(x)=1+2x-6x^2+4x^3-x^4$

$\Leftrightarrow (1-x^2+2x^3-x^4)f(x)=x^6-2x^5+2x^3-2x^2+1$

$\Leftrightarrow (1-x^2+2x^3-x^4)f(x)=(1-x^2)(1-x^2+2x^3-x^4) \Rightarrow f(x)=(1-x^2).$

Suy ra: $I=\int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^1(1-x^2)dx=\dfrac{2}{3}.$

Câu 11: Chọn A

Ta có $2f\left(x\right)+3f\left(1-x\right)=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow \int_0^1 2f\left(x\right)+3f\left(1-x\right)dx=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx.$

Xét $\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$ đặt $x=\sin t$ khi đó $\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2tdt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos2t+1\right)dt=\frac{\pi}{4},(1).$

Xét $\int_0^1 2f\left(x\right)+3f\left(1-x\right)dx=2\int_0^1 f\left(x\right)dx+3\int_0^1 f\left(1-x\right)dx,(*).$

Đặt $1-x=t$ khi đó $\int_0^1 f\left(1-x\right)dx=\int_0^1 f\left(t\right)dt$. Do tích phân có tính chất bất biến nên $\int_0^1 f\left(t\right)dt=\int_0^1 f\left(x\right)dx$. Khi đó $(*)$ trở thành $\int_0^1 2f\left(x\right)+3f\left(1-x\right)dx=5\int_0^1 f\left(x\right)dx,(2).$

Từ $(1),(2)$ ta có $5\int_0^1 f\left(x\right)dx=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_0^1 f\left(x\right)dx=\frac{\pi}{20}.$

Câu 12: Chọn D

Áp dụng công thức $\left(\int\limits_{v(x)}^{u(x)} f\left(t\right)dt\right)'=u'\left(x\right)f\left(u\left(x\right)\right)-v'\left(x\right)f\left(v\left(x\right)\right).$

Ta có $\left(\int\limits_0^{x^2} f\left(t\right)dt\right)'=\left(x\cos(\pi x)\right)' \Leftrightarrow 2xf\left(x^2\right)=\cos(\pi x)-\pi x\sin(\pi x),(1).$

Thay $x=2$ vào (1) ta được $f\left(4\right)=\dfrac{1}{4}.$

Câu 13: Chọn C

Áp dụng công thức $\left(\int\limits_{v(x)}^{u(x)} f\left(t\right)dt\right)'=u'\left(x\right)f\left(u\left(x\right)\right)-v'\left(x\right)f\left(v\left(x\right)\right).$ Ta có

$\left(\int\limits_0^{x^2} f\left(t\right)dt\right)'=\left(e^{x^2}+x^4-1\right)' \Leftrightarrow 2xf\left(x^2\right)=2xe^{x^2}+4x^3,(1).$

Thay $x=2$ vào (1) ta được $f\left(4\right)=e^4+8.$

Câu 14: Chọn B

Áp dụng công thức: $\int\limits_a^{u(x)} f\left(t\right)dt=u'.f\left(u\right)$

$\int_a^x \frac{f(t)}{t^2}dt+6=2\sqrt{x} \Leftrightarrow \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}dt+6=\left(2\sqrt{x}\right)'$

$\frac{f(x)}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f(x)=x\sqrt{x}$. Vậy $f(4)=8.$

Câu 15: Chọn A

Áp dụng công thức: $\int_a^{u(x)} f(t)dt=u'.f(u)$

$g(x)=1+2018\int_0^x f(t)dt \Rightarrow g'(x)=2018f(x) \Leftrightarrow g'(x)=2018\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}=2018$

Suy ra: $\int \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}dx=\int 2018dx \Leftrightarrow 2\sqrt{g(x)}=2018x+C\ (*)$

Từ điều kiện: $g(x)=1+2018\int_0^x f(t)dt \Rightarrow g(0)=1$ thay vào $(*)$ ta có $C=2$

Do đó: $\sqrt{g(x)}=1009x+1$. Vậy $\int_0^1 \sqrt{g(x)}dx=\int_0^1 (1009x+1)dx=\frac{1011}{2}$

Câu 16: Chọn A

Đặt: $t=\frac{1}{x} \Rightarrow dt=-\frac{1}{x^2}dx$; $x=\frac{1}{2} \Rightarrow t=2, x=2 \Rightarrow t=\frac{1}{2}$,

$I=\int_2^{\frac{1}{2}} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t^2}+1}1.\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2+1}dt=\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+1}dx$

Do đó: $2I=\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x^2+1}dx+\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+1}dx=\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+1}dx=\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{x^2+\frac{1}{x^2}+2}{x^2+1}dx=\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx=3$

Vậy: $I=\frac{3}{2}$.

Câu 17: Chọn D

Đặt $t=x^3+x \Rightarrow \begin{cases} dt=(3x^2+1)dx \\ f(t)=x^2-1 \end{cases}$.

Đổi cận: $t=0 \Rightarrow x^3+x=0 \Leftrightarrow x=0$ và $t=2 \Rightarrow x^3+x=2 \Leftrightarrow x=1$.

Khi đó $I=\int_0^2 f(t)dt=\int_0^1 (x^2-1)(3x^2+1)dx \overset{\text{Casio}}{=} -\frac{16}{15}$.

Câu 18: Chọn C

Đặt $t=x^3+2x-2 \Rightarrow \begin{cases} dt=(3x^2+2)dx \\ f(t)=3x-1 \end{cases}$.

Đổi cận: $t=1 \Rightarrow x^3+2x-2=1 \Leftrightarrow x=1$ và $t=10 \Rightarrow x^3+2x-2=10 \Leftrightarrow x=2$.

Khi đó $I=\int\limits_{1}^{10}f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int\limits_{1}^{2}\left(3x-1\right)\left(3x^2+2\right)\mathrm{d}x\overset{\text{Casio}}{=}\dfrac{135}{4}$.

Câu 19: Chọn A

Đặt $t=x^3+1\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}t=3x^2\mathrm{d}x\\ f\left(t\right)=2x-1\end{cases}$.

Đổi cận: $t=0\Rightarrow x^3+1=0\Leftrightarrow x=-1$ và $t=2\Rightarrow x^3+1=2\Leftrightarrow x=1$.

Khi đó $I=\int\limits_{0}^{2}f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int\limits_{-1}^{1}\left(2x-1\right)3x^2\mathrm{d}x\overset{\text{Casio}}{=}-2$.

Câu 20: Chọn C

Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=f'\left(x\right)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=f\left(x\right)\end{cases}\Rightarrow I=xf\left(x\right)\Big|_1^5-\int\limits_{1}^{5}f\left(x\right)dx=5f\left(5\right)-f\left(1\right)-\int\limits_{1}^{5}f\left(t\right)dt$.

Đặt $t=x^3+3x+1\Rightarrow\begin{cases}dt=\left(3x^2+3\right)dx\\ f\left(t\right)=3x+2\end{cases}$.

Đổi cận: $t=1\Rightarrow x^3+3x+1=1\Leftrightarrow x=0;t=5\Rightarrow x^3+3x+1=5\Leftrightarrow x=1$.

Suy ra: $f\left(5\right)=3.1+2\ \left(x=1\right)$ và $f\left(1\right)=3.0+2\ \left(x=0\right)$.

Khi đó $I=5.5-2-\int\limits_{0}^{1}\left(3x+2\right)\left(3x^2+3\right)dx\overset{Casio}{=}\dfrac{33}{4}$.

Câu 21: Chọn B

Đặt $t=x^4+x^2+x-1\Rightarrow\begin{cases}dt=\left(4x^3+2x+1\right)dx\\ f\left(t\right)=\dfrac{1}{x+1}\end{cases}$.

Đổi cận: $t=2\Rightarrow x^4+x^2+x-1=2\Rightarrow x=1;t=21\Rightarrow x^4+x^2+x-1=21\Rightarrow x=2\left(x>0\right)$.

Ta có: $I=\int\limits_{2}^{21}f\left(x\right)dx=\int\limits_{2}^{21}f\left(t\right)dt=\int\limits_{1}^{2}\dfrac{1}{x+1}\left(4x^3+2x+1\right)dx=\int\limits_{1}^{2}\left(4x^2-4x+6-\dfrac{5}{x+1}\right)dx$.

$=\left(\dfrac{4x^3}{3}-2x^2+6x-5\ln\left|x+1\right|\right)\Big|_1^2=\dfrac{28}{3}-5\ln\dfrac{3}{2}=\dfrac{28}{3}-\ln\dfrac{243}{32}$.

Suy ra $a=28;b=3;c=243;d=32\Rightarrow T=306$.

Câu 22: Chọn B

Đặt $t=x-\dfrac{1}{x}+1\Rightarrow\begin{cases}dt=\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)dx\\ f\left(t\right)=\dfrac{1}{x}\end{cases}$.

Đổi cận: $t=1\Rightarrow x-\dfrac{1}{x}+1=1\Rightarrow x=1;t=\dfrac{5}{2}\Rightarrow x-\dfrac{1}{x}+1=\dfrac{5}{2}\Rightarrow x=2\left(x>0\right)$.

Ta có: $I=\int\limits_{1}^{\frac{5}{2}}f\left(x\right)dx=\int\limits_{1}^{\frac{5}{2}}f\left(t\right)dt=\int\limits_{1}^{2}\dfrac{1}{x}.\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)dx=\int\limits_{1}^{2}\dfrac{1}{x}.\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)dx=\int\limits_{1}^{2}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}dx$

$=\left(\ln|x|-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_1^2=\frac{3}{8}+\ln 2$. Suy ra $a=3;b=8;c=2\Rightarrow T=13$.

Câu 23: Chọn D

Đặt $y=f(x)\Rightarrow x=y^3+y\Rightarrow dx=(3y^2+1)dy$.

Đổi cận:

$x=0\Rightarrow y^3+y=0\Rightarrow y=0$;

$x=2\Rightarrow y^3+y=2\Rightarrow y=1$.

Khi đó $I=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 y(3y^2+1)dy=\int_0^1(3y^3+y)dy \overset{casio}{=}\frac{5}{4}$.

Câu 24: Chọn B

Đặt $y=f(x)\Rightarrow x=2y^3-3y^2+6y\Rightarrow dx=(6y^2-6y+6)dy$.

Đổi cận:

$x=0\Rightarrow 2y^3-3y^2+6y=0\Rightarrow y=0$;

$x=5\Rightarrow 2y^3-3y^2+6y=5\Rightarrow y=1$.

Khi đó $I=\int_0^5 f(x)dx=\int_0^1 y.6(y^2-y+1)dy=6\int_0^1(y^3-y^2+y)dy \overset{casio}{=}\frac{5}{2}$.

Câu 25: Chọn A

Đặt $y=f(x)\Rightarrow x=-y^3-2y+1\Rightarrow dx=(-3y^2-2)dy$.

Đổi cận:

$x=-2\Rightarrow -y^3-2y+1=-2\Rightarrow y=1$;

$x=1\Rightarrow -y^3-2y+1=1\Rightarrow y=0$.

Khi đó $I=\int_{-2}^1 f(x)dx=\int_1^0 y.(-3y^2-2)dy=\int_0^1(3y^3+2y)dy \overset{casio}{=}\frac{7}{4}$.

Câu 26: Chọn D

Đặt $y=f(x)\Rightarrow 2x=-y^5-y+4\Rightarrow 2dx=(-5y^4-1)dy$.

Đổi cận:

$x=1\Rightarrow -y^5-y+4=1\Rightarrow y=1$;

$x=2\Rightarrow -y^5-y+4=2\Rightarrow y=0$.

Khi đó $I=\int_1^2 f(x)dx=\int_1^0 y.(-5y^4-1)dy=\int_0^1(5y^5+y)dy \overset{casio}{=}\frac{4}{3}$.

Câu 27: Chọn C

Đặt: $\begin{cases}u=x\\dv=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=f(x)\end{cases}$

$\Rightarrow I=\int_{-1}^7 xf'(x)dx=xf(x)\Big|_{-1}^7-\int_{-1}^7 f(x)dx=7f(7)+f(-1)-\int_{-1}^7 f(x)dx$

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Từ $x-f^3(x)-f(x)+3=0 \Rightarrow \begin{cases} f^3(7)+f(7)-10=0 \\ f^3(-1)+f(-1)-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(7)=2 \\ f(-1)=1 \end{cases}$

Đặt $t=f(x) \Rightarrow x-t^3-t+3=0 \Leftrightarrow x=t^3+t-3 \Rightarrow dx=(3t^2+t)dt$

Đổi cận $\begin{cases} x=-1 \Rightarrow -1=t^3+t-3 \Leftrightarrow t=1 \\ x=7 \Rightarrow 7=t^3+t-3 \Leftrightarrow t=2 \end{cases}$

Khi đó $\int_{-1}^{7} f(x)dx=\int_{1}^{2}(3t^2+t)dx \overset{Casio}{=} \frac{51}{4}$. Suy ra $I=15-\int_{-1}^{7} f(x)dx=15-\frac{51}{4}=\frac{9}{4}$.

Câu 28: Chọn B

Cách 1: Dùng công thức tính nhanh dạng 7

Cách 2: Đặt: $t=1-x \Rightarrow dt=-dx; f(x)=\frac{1}{f(t)}$ và $x=0 \Rightarrow t=1; x=1 \Rightarrow t=0$

Khi đó $I=\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+f(x)}=\int_{0}^{1}\frac{dt}{1+\frac{1}{f(t)}}=\int_{0}^{1}\frac{f(t)dt}{1+f(t)}=\int_{0}^{1}\frac{f(x)dx}{1+f(x)}$

$\Rightarrow 2I=\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+f(x)}+\int_{0}^{1}\frac{f(x)dx}{1+f(x)}=\int_{0}^{1}dx=1 \Rightarrow I=\frac{1}{2}$.

Câu 29: Chọn C

Cách 1: Dùng công thức tính nhanh dạng 7

Khi đó: $I=\int_{0}^{2018}\frac{dx}{1+f(x)}=\frac{2018-0}{2.1}=1009$

Cách 2: Đặt: $t=1-x \Rightarrow dt=-dx; f(x)=\frac{1}{f(t)}$ và $x=0 \Rightarrow t=2018; x=2018 \Rightarrow t=0$

Khi đó $I=\int_{0}^{2018}\frac{dx}{1+f(x)}=\int_{0}^{2018}\frac{dt}{1+\frac{1}{f(t)}}=\int_{0}^{2018}\frac{f(t)dt}{1+f(t)}=\int_{0}^{2018}\frac{f(x)dx}{1+f(x)}$

$\Rightarrow 2I=\int_{0}^{2018}\frac{dx}{1+f(x)}+\int_{0}^{2018}\frac{f(x)dx}{1+f(x)}=\int_{0}^{2018}dx=2018 \Rightarrow I=1009$.

Câu 30: Chọn D

Dùng công thức tính nhanh dạng 7

Do đó: $I=\int_{-2}^{12}\frac{1}{3+f(x)}dx=\frac{12-(-2)}{2.3}=\frac{7}{3}$.

Câu 31: Chọn A

Cách 1: Sử dụng công thức giải nhanh dạng 8:

Do đó: $\int_{1}^{3} f(x)dx=\frac{2.5}{1+3}=\frac{5}{2}$.

Cách 2: Đặt $t=4-x \Rightarrow dt=-dx$ và $x=1 \Rightarrow t=3; x=3 \Rightarrow t=1$.

Khi đó: $5=\int_1^3 x.f(x)dx=\int_1^3 (4-t).f(4-t)dt=\int_1^3 (4-x).f(4-x)dx=\int_1^3 (4-x).f(x)dx$.

Suy ra: $10=\int_1^3 x.f(x)dx+\int_1^3 (4-x).f(x)dx=4\int_1^3 f(x)dx\Rightarrow\int_1^3 f(x)dx=\frac{5}{2}$.

Câu 32: Chọn C

Sử dụng công thức giải nhanh dạng 8:

Do đó: $\int_{-1}^4 f(x)dx=\frac{2.2}{-1+4}=\frac{4}{3}$.

Câu 33: Chọn B

Cách 1: Ta có: $f'(x)=2x\left[f(x)\right]^2\Rightarrow\frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=2x\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}dx=\int 2xdx\Leftrightarrow\frac{-1}{f(x)}=x^2+C$

$\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{x^2+C}\overset{f(2)=-\frac{2}{9}}{\Rightarrow}C=\frac{1}{2}$.Vậy $f(x)=-\frac{1}{x^2+\frac{1}{2}}\Rightarrow f(1)=-\frac{2}{3}$.

Cách 2:

$f'(x)=2x\left[f(x)\right]^2\Rightarrow\frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=2x\Rightarrow\int_1^2\frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}dx=\int_1^2 2xdx=3\Leftrightarrow-\frac{1}{f(x)}\Big|_1^2=3\Leftrightarrow f(1)=\frac{-2}{3}$.

Câu 34: Chọn B

Cách 1: Ta có: $f'(x)=x\left[f(x)\right]^2\Rightarrow\frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=x\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}dx=\int xdx\Leftrightarrow\frac{-1}{f(x)}=\frac{x^2}{2}+C$

$\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{\frac{x^2}{2}+C}\overset{f(2)=-\frac{1}{3}}{\Rightarrow}C=1$.Vậy $f(x)=-\frac{1}{x^2+1}\Rightarrow f(1)=-\frac{2}{3}$.

Cách 2: $f'(x)=x\left[f(x)\right]^2\Rightarrow\frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=x\Rightarrow\int_1^2\frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}dx=\int_1^2 xdx=\frac{3}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{f(x)}\Big|_1^2=3\Leftrightarrow f(1)=\frac{-2}{3}$.

Câu 35: Chọn B

Cách 1: Ta có: $f'(x)=4x^3\left[f(x)\right]^2\Rightarrow\frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=4x^3\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}dx=\int 4x^3dx\Leftrightarrow\frac{-1}{f(x)}=x^4+C$

$\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{x^4+C}\overset{f(2)=-\frac{1}{25}}{\Rightarrow}C=9$.Vậy $f(x)=-\frac{1}{x^2+9}\Rightarrow f(1)=-\frac{1}{10}$.

Cách 2:

$f'(x)=4x^3\left[f(x)\right]^2\Rightarrow\frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=4x^3\Rightarrow\int_1^2\frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}dx=\int_1^2 4x^3dx=15\Leftrightarrow-\frac{1}{f(x)}\Big|_1^2=3\Leftrightarrow f(1)=\frac{-1}{10}$.

Câu 36: Chọn D

Ta có $f'(x)=x^3\left[f(x)\right]^2\Rightarrow\frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=x^3$.

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Cách 1: Từ suy ra $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2}dx = \int x^3 dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = \frac{x^4}{4} + C$.

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{\frac{x^4}{4} + C} \xrightarrow{f(2)=-\frac{1}{5}} -\frac{1}{5} = -\frac{1}{4+C} \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{\frac{x^4}{4}+1} \Rightarrow f(1) = -\frac{4}{5}.$$

Cách 2: suy ra $\int_1^2 \frac{f'(x)}{[f(x)]^2}dx = \int_1^2 x^3 dx \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{f(x)}\right)\Big|_1^2 = \frac{15}{4} \Rightarrow f(1) = -\frac{4}{5}$.

Câu 37: Chọn D

Biến đổi

$$f'(x) = -e^x.f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -e^x \Rightarrow \int_0^{\ln 2} \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx = \int_0^{\ln 2} -e^x dx \Rightarrow -\frac{1}{f(x)}\Big|_1^{\ln 2} = -1 \Rightarrow f(\ln 2) = \frac{1}{3}$$

Câu 38: Chọn C

Biến đổi $\frac{f'(x)}{f^2(x)} = x^2 \Rightarrow \int_0^1 \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx = \int_0^1 x^2 dx \Rightarrow -\frac{1}{f(x)}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \Rightarrow f(1) = 6$.

Từ $f'(x) = \left(x.f(x)\right)^2 \Rightarrow f'(1) = \left(1.f(1)\right)^2 = 36$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 36(x-1)+6 \Leftrightarrow y = 36x - 30$.

Câu 39: Chọn C

Ta có $f'(x) + 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -2$

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int_{-1}^1 -2dx \Leftrightarrow \ln f(x)\Big|_{-1}^1 = -2x\Big|_{-1}^1 \Leftrightarrow \ln f(1) - \ln f(-1) = -4$$

$$\Leftrightarrow \ln f(-1) = 4 \Leftrightarrow f(-1) = e^4.$$

Câu 40: Chọn B

Ta có $f'(x).f(x) = x^4 + x^2 \Rightarrow \int_0^2 f'(x).f(x)dx = \int_0^2 (x^4+x^2)dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}f^2(x)\Big|_0^2 = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2$

$$\Leftrightarrow \frac{f^2(2)}{2} - \frac{f^2(0)}{2} = \frac{136}{15} \Leftrightarrow f^2(2) = \frac{332}{15}.$$

Câu 41: Chọn D

$$f'(x) + (2x+4)f^2(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -2x - 4$$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx = \int_{-1}^1 (-2x-4)dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = -x^2 - 4x + C \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x^2+4x-C}.$$

Với $f(2) = \frac{1}{15} \Rightarrow \frac{1}{15} = \frac{1}{12-C} \Rightarrow C = -3 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2+4x+3}$.

Khi đó $f(1)+f(2)+f(3)=\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}=\frac{7}{30}$

Câu 42: Chọn A

Từ $f^6(x).f'(x)=12x+13\Rightarrow\int f^6(x).f'(x)dx=\int(12x+3)dx$

$\Leftrightarrow\int f^6(x)df(x)=6x^2+13x+C\Leftrightarrow\frac{f^7(x)}{7}=6x^2+13x+C\xrightarrow{f(0)=2}C=\frac{2^7}{7}.$

Suy ra $f^7(x)=42x^2+91x+2^7$.

Do đó phương trình $f(x)=3\Leftrightarrow f^7(x)=2187\Rightarrow 42x^2+91x-2059=0\ (*)$.

Phương trình $(*)$ có $ac<0$ nên có hai nghiệm trái dấu.

Câu 43: Chọn B

Biến đổi: $f'(x)=(2x+3).f^2(x)\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+3\Leftrightarrow\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int(2x+3)dx$

$\Leftrightarrow-\frac{1}{f(x)}=x^2+3x+C\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{x^2+3x+C}\xrightarrow{f(0)=-\frac{1}{2}}C=2$

$\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{x^2+3x+2}=-\frac{1}{(x+1)(x+2)}.$

Khi đó:

$\Rightarrow\frac{a}{b}=f(1)+f(2)+...+f(2017)+f(2018)=-\left(\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+....+\frac{1}{2018.2019}+\frac{1}{2019.2020}\right)$

$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019}+\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}\right)=-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2020}\right)=-\frac{1009}{2020}.$

Với điều kiện a, b thỏa mãn bài toán, suy ra $a=-1009, b=2020\Rightarrow b-a=3029$.

Câu 44: Chọn C

Cách 1:

Ta có $f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\Leftrightarrow\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{3x+1}}.$

$\Leftrightarrow\int\frac{d(f(x))}{3f(x)}=\frac{1}{3}\int(3x+1)^{\frac{-1}{2}}d(3x+1)\Leftrightarrow\ln f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C\Leftrightarrow f(x)=e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C}.$

Khi đó $f(1)=1\Leftrightarrow e^{\frac{4}{3}+C}=1\Leftrightarrow C=-\frac{4}{3}\Rightarrow f(x)=e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{4}{3}}\Rightarrow f(5)=e^{\frac{4}{3}}\approx 3,79\in(3;4).$

Cách 2: Với điều kiện bài toán, ta có

$f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{3x+1}}$

$\Rightarrow\int_1^5\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int_1^5\frac{1}{\sqrt{3x+1}}dx\Leftrightarrow\int_1^5\frac{df(x)}{f(x)}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow\ln f(x)\Big|_1^5=\frac{4}{3}\Leftrightarrow\ln\frac{f(5)}{f(1)}=\frac{4}{3}$

$\Rightarrow f(5)=f(1).e^{\frac{4}{3}}\approx 3,79\in(3;4).$

Câu 45: Chọn A

Ta có: $x+2xf(x)=[f'(x)]^2 \Leftrightarrow x(1+2f(x))=[f'(x)]^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{[f'(x)]^2}{1+2f(x)}=x \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}=\sqrt{x} \Rightarrow \int\limits_1^4 \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}dx=\int\limits_1^4 \sqrt{x}dx$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+2f(x)}\Big|_1^4=\dfrac{14}{3} \Leftrightarrow \sqrt{1+2f(4)}-2=\dfrac{14}{3} \Leftrightarrow f(4)=\dfrac{391}{18}$

Chú ý: Nếu không nhìn được ra luôn $\int\limits_1^4 \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}dx=\sqrt{1+2f(x)}\Big|_1^4=\sqrt{1+2f(4)}-2$ thì ta có thể sử dụng kĩ thuật vi phân hoặc đổi biến .

Vi phân

$\int\limits_1^4 \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}dx=\int\limits_1^4 \dfrac{df(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}dx=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^4 \left(1+2f(x)\right)^{\frac{-1}{2}}d(1+2f(x))$

$=\sqrt{1+2f(x)}\Big|_1^4=\sqrt{1+2f(4)}-2$

Đổi biến: Đặt $t=\sqrt{1+2f(x)} \Rightarrow t^2=1+2f(x) \Leftrightarrow tdt=f'(x)dx$

Với $x=1 \Rightarrow t=\sqrt{1+2f(1)}=2;\ x=4 \Rightarrow t=\sqrt{1+2f(4)}$

Khi đó $I=\int\limits_2^{\sqrt{1+2f(4)}} \dfrac{tdt}{t}=t\Big|_2^{\sqrt{1+2f(4)}}=\sqrt{1+2f(4)}-2$

Câu 46: Chọn D

Ta có $f(x).f'(x)=2x\sqrt{f^2(x)+1} \Leftrightarrow \dfrac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}=2x$

$\Rightarrow \int \dfrac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}dx=\int 2xdx \Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)+1}=x^2+C$

Với $f(0)=0 \Rightarrow 1=C \Rightarrow \sqrt{f^2(x)+1}=x^2+1 \Leftrightarrow f^2(x)=x^4+2x^2=g(x)$

Ta có $g'(x)=4x^3+4x>0, \forall x\in[1;3]$

Suy ra $g(x)$ đồng biến trên $[1;3]$

Suy ra $g(1)\le g(x)=f^2(x)\le g(3) \Leftrightarrow 3\le f^2(x)\le 99 \overset{f(x)\ge 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{3}\le f(x)\le 3\sqrt{11}$

$\Rightarrow \min\limits_{[1;3]} f(x)=\sqrt{3}; \max\limits_{[1;3]} f(x)=3\sqrt{11}$.

Vậy tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[1;3]$ bằng $3\sqrt{11}+\sqrt{3}$

Câu 47: Chọn B

Ta có $\left(f'(x)\right)^2=e^x.f(x) \Leftrightarrow \dfrac{\left(f'(x)\right)^2}{f(x)}=e^x \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{\sqrt{x}}=\sqrt{e^x} \Leftrightarrow \int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{x}}dx=\int \sqrt{e^x}dx$

$\Leftrightarrow \int \left(f(x)\right)^{\frac{-1}{2}}df(x)=\int e^{\frac{x}{2}}dx \Leftrightarrow 2\sqrt{f(x)}=2e^{\frac{x}{2}}+C \overset{f())=1}{\rightarrow} C=0 \Rightarrow \sqrt{f(x)}=e^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow f(x)=e^x$

Suy ra $\int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^1 e^x dx=e^x\Big|_0^1=e-1$

Câu 48: Chọn B

$f(x)=6x^2.f(x^3)-\frac{6}{\sqrt{3x+1}}\Rightarrow I=\int_0^1 f(x)dx=2\int_0^1\left(3x^2.f(x^3)-\frac{3}{\sqrt{3x+1}}\right)dx=A-B$

Gọi $A=2\int_0^1 3x^2.f(x^3)dx$. Đặt $t=x^3\Rightarrow dt=3x^2dx$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0; x=1\Rightarrow t=1$

$A=2\int_0^1 f(t)dt=2\int_0^1 f(x)dx=2I$

$I=2I-B\Rightarrow I=B=6\int_0^1\frac{1}{\sqrt{3x+1}}dx=6\int_0^1(3x+1)^{-\frac{1}{2}}.\frac{1}{3}.d(3x+1)=2.2.\sqrt{3x+1}\Big|_0^1=4.$

Câu 49: Chọn C

$4x.f(x^2)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$

$\Leftrightarrow 2.\int_0^1 2x.f(x^2)dx+3\int_0^1 f(1-x)dx=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx\Leftrightarrow 2A+3B=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx(*)$ $A=\int_0^1 2x.f(x^2)dx$ Đặt

$t=x^2\Rightarrow dt=2xdx;\ x=0\Rightarrow t=0;\ x=1\Rightarrow t=1$ $A=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 f(x)dx$

$B=\int_0^1 f(1-x)dx$ Đặt $t=1-x\Rightarrow dt=-dx; x=0\Rightarrow t=1, x=1\Rightarrow t=0$ $B=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 f(x)dx$

$(*)\Leftrightarrow 2\int_0^1 f(x)dx+3\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx\Leftrightarrow 5.\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$

Đặt: $x=\sin t\Rightarrow dx=costdt, t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right); x=0\Rightarrow t=0, x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}.costdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+cos2t}{2}dt=\frac{1}{2}.\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$. Vậy $\int_0^1 f(x)dx=\frac{\pi}{20}$.

Câu 50: Chọn D

$f(x)+f(2-x)=2x\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 f(2-x)dx=\int_0^2 2xdx$

$\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)dx=-\int_0^2 f(2-x)dx+\int_0^2 2xdx$

Đặt: $t=2-x\Rightarrow dt=-dx$. Đổi biến: $x=0\Rightarrow t=2, x=2\Rightarrow t=0$

$\int_0^2 f(2-x)dx=\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2 f(x)dx$. Do đó: $2\int_0^2 f(x)dx=x^2\Big|_0^2=4$. Vậy: $\int_0^2 f(x)dx=2$

Câu 51: Chọn C

$f(x)+2xf(x^2-2)+3f(1-x)=4x^3$

$\Rightarrow\int_{-1}^2 f(x)dx+\int_{-1}^2 2x.f(x^2-2)dx+3\int_{-1}^2 f(1-x)=\int_{-1}^2 4x^3ds=15(*).$

Đặt $u=x^2-2\Rightarrow du=2xdx$; với $x=-1\Rightarrow u=-1; x=2\Rightarrow u=2$.

Khi đó $\int_{-1}^2 2x.f(x^2-2)dx=\int_{-1}^2 f(u)du=\int_{-1}^2 f(x)dx(1)$.

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Đặt $t=1-x\Rightarrow dt=-dx$; với $x=-1\Rightarrow t=2; x=2\Rightarrow t=-1$.

Khi đó $\int\limits_{-1}^{2} f(1-x)dx=\int\limits_{-1}^{2} f(t)dt=\int\limits_{-1}^{2} f(x)dx(2)$

Thay $(1),(2)$ vào $(*)$ ta được $5\int\limits_{-1}^{2} f(x)dx=15\Rightarrow\int\limits_{-1}^{2} f(x)dx=3$.

Câu 52: Chọn B

$f(x)-xf(3-x^2)=\sqrt{x+2}\Rightarrow\int\limits_{-1}^{2} f(x)dx-\int\limits_{-1}^{2} xf(3-x^2)dx=\int\limits_{-1}^{2}\sqrt{x+2}dx=\frac{14}{3}(*)$.

Đặt $u=3-x^2\Rightarrow du=-2xdx$; với $x=-1\Rightarrow u=2; x=2\Rightarrow u=-1$.

Khi đó $\int\limits_{-1}^{2} xf(1-x^2)dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{2} f(u)du=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{2} f(x)dx(2)$

Thay vào $(*)$ ta được $\int\limits_{-1}^{2} f(x)dx-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{2} f(x)dx=\frac{14}{3}\Leftrightarrow\int\limits_{-1}^{2} f(x)dx=\frac{28}{3}$.

Câu 53: Chọn B

$f(x)+xf(1-x^2)+3f(1-x)=\frac{1}{x+1}$

$\Rightarrow\int\limits_{0}^{1} f(x)dx+\int\limits_{0}^{1} xf(1-x^2)dx+3\int\limits_{0}^{1} f(1-x)dx=\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x+1}=\ln|x+1|\Big|_0^1=\ln 2(*)$

Đặt $u=1-x^2\Rightarrow du=-2xdx$; với $x=0\Rightarrow u=1; x=1\Rightarrow u=0$.

Khi đó $\int\limits_{0}^{1} 2xf(x^2-2)dx=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} f(u)du=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} f(x)dx(1)$.

Đặt $t=1-x\Rightarrow dt=-dx$; với $x=0\Rightarrow t=1; x=1\Rightarrow t=0$.

Khi đó $\int\limits_{0}^{1} f(1-x)dx=\int\limits_{0}^{1} f(t)dt=\int\limits_{0}^{1} f(x)dx(2)$.

Thay $(1),(2)$ vào $(*)$ ta được

$\int\limits_{0}^{1} f(x)dx+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} f(x)dx+3\int\limits_{0}^{1} f(x)dx=\ln 2\Rightarrow\frac{9}{2}\int\limits_{0}^{1} f(x)dx=\ln 2\Leftrightarrow\int\limits_{0}^{1} f(x)dx=\frac{2}{9}\ln 2$.

Câu 54: Chọn A

Cách 1: .

Biến đổi: $f(x)-8x^3f(x^4)+\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}=0\Leftrightarrow f(x)-2(4x^3)f(x^4)=-\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$ với

$A=1; B=-2; C=0$.

Áp dụng công thức ta có: $\int\limits_{0}^{1} f(x)dx=\frac{1}{1+(-2)}\int\limits_{0}^{1}-\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int\limits_{0}^{1}\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow t^2=x^2+1\Rightarrow tdt=xdx$; với $\left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow t=1 \\ x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Khi đó

$\int\limits_{0}^{1} f(x)dx=\int\limits_{0}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}xdx=\int\limits_{1}^{\sqrt{2}}\frac{t^2-1}{t}.tdt=\int\limits_{1}^{\sqrt{2}}(t^2-1).dt=\frac{t^3}{3}-t\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{3}\frac{a-b\sqrt{2}}{c}$.

Suy ra $a=2;b=1;c=3\Rightarrow a+b+c=6$.

Cách 2:

Từ $f(x)-8x^3f(x^4)+\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}=0\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx-2\int_0^1 4x^3f(x^4)dx+\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx=0\ (*)$.

Đặt $u=x^4\Rightarrow du=4x^3dx$; với $x=0\Rightarrow u=0;x=1\Rightarrow u=1$.

Khi đó $\int_0^1 4x^3f(x^4)dx=\int_0^1 f(u)du=\int_0^1 f(x)dx$ thay vào $(*)$, ta được:

$\int_0^1 f(x)dx-2\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow t^2=x^2+1\Rightarrow tdt=xdx$; với $\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow t=1\\x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Khi đó

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}xdx=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{t^2-1}{t}.tdt=\int_1^{\sqrt{2}}(t^2-1).dt=\frac{t^3}{3}-t\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{3}=\frac{a-b\sqrt{2}}{c}$.

Câu 55: Chọn A

Cách 1: Dùng công thức dạng 2

Từ $f(x)+f(-x)=\frac{1}{e^x+1}$. Ta có $A=1;B=1;C=0$.

Suy ra $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)dx=\frac{1}{1+1}\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{dx}{e^x+1}=\frac{1}{2}\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{dx}{e^x+1}$

Cách 2: Dùng công thức đổi biến số.

Từ $f(x)+f(-x)=\frac{1}{e^x+1}\Rightarrow\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)dx+\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x)dx=\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{1}{e^x+1}dx\ (*)$.

Đặt $u=-x\Rightarrow du=-dx$; Với $x=-\ln 2\Rightarrow u=\ln 2;\ x=\ln 2\Rightarrow u=-\ln 2$.

Suy ra $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x)dx=\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(u)du=\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)dx$ thay vào $(*)$, ta được:

$2\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)dx=\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{1}{e^x+1}dx\Rightarrow\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{1}{e^x+1}dx$.

Đặt $t=e^x\Rightarrow dt=e^xdx$; Với $x=-\ln 2\Rightarrow t=\frac{1}{2};x=\ln 2\Rightarrow t=2$.

Suy ra $\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{1}{e^x+1}dx=\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{e^x}{e^x(e^x+1)}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dt}{t(t+1)}=\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}=\ln 2$.

Khi đó $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)dx=\frac{1}{2}\ln 2=a\ln 2+b\ln 3\xrightarrow{a,b\in\mathbb{Q}}a=\frac{1}{2};b=0\Rightarrow P=\frac{1}{2}$.

Câu 56: Chọn D

Cách 1:

Với $f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x\cos x$ ta có $A=1;B=0;C=1$.

Suy ra $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = -\frac{1}{1+1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos x\,dx = -\frac{1}{4}$.

Cách 2:

Từ $f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x\cos x \Rightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos x dx = \frac{1}{2}\,(*)$

Đặt $u=\frac{\pi}{2}-x \Rightarrow du=-dx; x=0 \Rightarrow u=\frac{\pi}{2}; x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=0$.

Suy ra $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)du = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ thay vào $(*)$, ta được:

$2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \frac{1}{4}$ (1) Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=f(x) \end{cases}$;

$\Rightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx = xf(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx\,.\,(*)$

Từ điều kiện $f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x\cos x \Rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)=0 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f(0)=0 \end{cases} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ (2)

Thay $(1),(2)$ vào $(*)$, ta được $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx = \frac{-1}{4}$

Câu 57: Chọn A

Đặt $t=1+2x \Rightarrow 1-2x=2-t$ và $x=\frac{t-1}{2}$, khi đó điều kiện trở thành:

$$f(t)+f(2-t)=\frac{\left(\frac{t-1}{2}\right)^2}{\left(\frac{t-1}{2}\right)^2+1} \Rightarrow f(t)+f(2-t)=\frac{t^2-2t+1}{t^2-2t+5} \Rightarrow f(x)+f(2-x)=\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+5}(*).$$

Cách 1:

Với $f(x)+f(2-x)=\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+5}$, ta có $A=1; B=1$.

Suy ra: $\int\limits_{-1}^{3} f(x)dx = \frac{1}{x+1}\int\limits_{-1}^{3} \frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+5}dx \approx 0,429 = 2-\frac{\pi}{2}$.

Cách 2:

Từ $(*)$, ta có: $f(x)+f(2-x)=\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+5} \Rightarrow \int\limits_{-1}^{3} f(x)dx + \int\limits_{-1}^{3} f(2-x)dx = \int\limits_{-1}^{3} \frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+5}dx(**)$.

Đặt $u=2-x \Rightarrow du=-dx$, Với $x=-1 \Rightarrow u=3$ và $x=3 \Rightarrow u=-1$.

Suy ra $\int_{-1}^{3} f(2-x)dx = \int_{-1}^{3} f(u)du = \int_{-1}^{3} f(x)dx$ thay vào $(*)$, ta được:

$$2\int_{-1}^{3} f(x)dx = \int_{-1}^{3} \frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+5}dx \Rightarrow \int_{-1}^{3} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{3} \frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+5}dx \approx 0,429 = 2-\frac{\pi}{2}.$$

Câu 58: Chọn A

Biến đổi $x^2f^2(x)+2xf(x)+1 = f(x)+xf'(x) \Leftrightarrow \left(xf(x)+1\right)^2 = f(x)+xf'(x)(*)$.

Đặt $h(x) = xf(x)+1 \Rightarrow h'(x) = f(x)+x.f'(x)$, Khi đó $(*)$ có dạng:

$$h^2(x) = h'(x) \Rightarrow \frac{h'(x)}{h^2(x)} = 1 \Rightarrow \int \frac{h'(x)}{h^2(x)}dx = \int dx \Leftrightarrow \int \frac{dh(x)}{h^2(x)} = x+C \Leftrightarrow -\frac{1}{h(x)} = x+C.$$

$$\Rightarrow h(x) = -\frac{1}{x+C} \Rightarrow xf(x)+1 = -\frac{1}{x+C} \xrightarrow{f(1)=-2} -2+1 = -\frac{1}{1+C} \Rightarrow C = 0.$$

Khi đó $xf(x)+1 = -\frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$. Suy ra: $\int_{1}^{2} f(x)dx = \int_{1}^{2} -\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}dx = -\frac{1}{2}-\ln 2$.

Câu 59: Chọn D

Xét $\int_{4}^{8} \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx = \int_{4}^{8} \frac{df(x)}{f^2(x)} = -\frac{1}{f(8)}-\frac{1}{f(4)} = -(2-4) = 2$.

Gọi k là một hằng số thực, ta sẽ tìm k để $\int_{4}^{8} \left(\frac{f'(x)}{f^2(x)}+k\right)^2 dx = 0$

Ta có:

$$\int_{4}^{8} \left(\frac{f'(x)}{f^2(x)}+k\right)^2 dx = \int_{4}^{8} \frac{\left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^4}dx + 2k\int_{4}^{8} \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx + k^2\int_{4}^{8} dx = 1+4k+4k^2 = (2k+1)^2.$$

Suy ra $k = -\frac{1}{2}$ thì $\int_{4}^{8} \left(\frac{f'(x)}{f^2(x)}-\frac{1}{2}\right)^2 dx = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_{4}^{6} \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx = \frac{1}{2}\int_{4}^{6} dx$

$$\Leftrightarrow \int_{4}^{6} \frac{df(x)}{f^2(x)}dx = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(4)}-\frac{1}{f(6)} = 1 \Leftrightarrow 4-\frac{1}{f(6)} = 1 \Leftrightarrow f(6) = \frac{1}{3}.$$

Chú ý: $\int_{a}^{b} f(x)dx = 0$ không được phép suy ra $f(x) = 0$, nhưng $\int_{a}^{b} f^{2k}(x)dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$

TÍCH PHÂN HÀM ẨN PHẦN 2

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó tích phân $I=\int_a^b f(x)dx$ tương ứng với

A. $\int_a^b f(a+b-x)dx$. **B.** $\int_a^b f(a+b+x)dx$. **C.** $-\int_a^b f(a+b-x)dx$. **D.** $\int_a^b f(x-a+b)dx$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[0;3]$ và có tích phân $\int_0^3 f(x)dx=8$. Giá trị của tích phân $I=\int_0^3 f(3-x)dx$ tương ứng bằng

A. 11. **B.** –8 **C.** –11. **D.** 8.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+f(3-x)=x^2-3x+\frac{13}{2}$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $I=\int_{-1}^{4} f(x)dx$ tương ứng bằng

A. $\frac{27}{5}$. **B.** $\frac{30}{4}$. **C.** $\frac{31}{2}$. **D.** $\frac{95}{6}$

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(2-x)=g(x)$ với $\forall x\in[0;2]$. Biết rằng tích phân $\int_0^1 f(2x)dx=-3$. Giá trị của tích phân $\int_0^2 g(x)dx$ tương ứng bằng

A. –15. **B.** 6. **C.** –30. **D.** 12.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn hệ thức $f(x)-f(4-x)=g(x)$ với $x\in[1;3]$. Giá trị của tích phân $\int_1^3 g(x)dx$ tương ứng bằng

A. 4. **B.** 0. **C.** 1. **D.** –2.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f(x)-f(3-x)=g(x)$ và $f(x)+2f(3-x)=3x^2+1$ với $[1;2]$. Giá trị của tích phân $\int_1^2 g(x)dx$ tương ứng bằng

A. $\frac{16}{3}$. **B.** 9. **C.** $\frac{13}{2}$. **D.** $\frac{10}{3}$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R thỏa mãn $f(x)-f(3-x)-f(4-x)=4x^3+1$ với $\forall x\in[0;6]$. Giá trị của biểu thức $\int_1^2 f(4-x)dx+\int_1^3 f(3-x)dx$ tương ứng bằng

A. –98. **B.** –36. **C.** 42. **D.** –48.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(x)-f(3-x)-f(4-x)=2x$ với $\forall x\in[-6;6]$. Giá trị lớn nhất của tích phân $\int_a^{3-a} f(4-x)dx$ tương ứng bằng bao nhiêu? Với số thực $a\in[0;3]$

A. 12. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 10.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)-f(2-x)-f(3x^2-1)=3x^2-\frac{15}{4}$ với mọi $x\in[-10;10]$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_a^{2-a} f(3x^2-1)dx$ bằng bao nhiêu? Với số thực $a\in[1;6]$

A. $-\frac{15}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** –10. **D.** –6.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ tương ứng bằng

A. $\int_{0}^{a} f(x)dx$. **B.** $-\int_{-a}^{a} f(a-x)dx$. **C.** $\int_{-a}^{a} f(-x)dx$. **D.** $\int_{-a}^{a} f(2a-x)dx$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+3f(-x)=6x^2-1$. Giá trị của tích phân $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ tương ứng bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f(x)+4f(-x)=g(x)$ với $\forall x\in[-a;a]$. Biết giá trị của tích phân $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2$. Giá trị của tích phân $\int_{-a}^{a} g(x)dx$ tương ứng bằng

A. 9. **B.** $\frac{2}{7}$. **C.** 14. **D.** $\frac{7}{2}$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $5f(x)-2f(-x)=x^2\cos\pi x$ với $\forall x\in[-1;1]$; $f(1)+f(-1)=3$. Giá trị của tích phân $I=\int_{-1}^{1} xf'(x)dx=a+\frac{b}{c.\pi^2}$; với a,b,c là những số nguyên dương và phân số $\frac{b}{c}$ tối giản. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ tương ứng bằng

A. 11. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 12.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có giá trị dương trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x).f(a+b-x)=1$ với $\forall x\in[a;b]$. Giá trị của tích phân $I=\int_{a}^{b}\frac{dx}{1+f(x)}$ tương ứng bằng

A. $\frac{b-a}{2}$. **B.** 1. **C.** $b-a$. **D.** $\frac{b^2-a^2}{4}$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có giá trị dương trên R thỏa mãn $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=g(x)$ với $\forall x\in(0;+\infty)$. Giá trị của tích phân $I=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)dx}{x}$ tương ứng bằng

A. $I=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{a}}^{a} g(x)dx$. **B.** $I=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{a}}^{a} g(x)dx$. **C.** $I=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{a}}^{a} g(x)dx$. **D.** $I=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{g(x)dx}{x}$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có giá trị dương trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=xg(x)$ với $\forall x\in(0;+\infty)$. Biết rằng $\int_{\frac{1}{a}}^{a} g(x)dx=6$. Giá trị của tích phân $I=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)dx}{x}$ tương ứng bằng

A. 6. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 12.

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có giá trị dương trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=xg(x)$ với $\forall x\in(0;+\infty)$. Biết rằng $\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a} g(x)\mathrm{d}x=10$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{\sqrt{\frac{1}{a}}}^{\sqrt{a}} \frac{f(x^2)\mathrm{d}x}{x}$ tương ứng bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 11.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có giá trị dương trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=xg(x)$ với $\forall x\in(0;+\infty)$. Biết rằng $\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} f'(x)\ln x\mathrm{d}x=18$ và $\left(f(\mathrm{e})+f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\right)=5$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} g(x)\mathrm{d}x$ tương ứng bằng

A. -13. **B.** -39. **C.** 18. **D.** -6.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và thỏa mãn $f(2x-1)=3x^2+1$ với mọi $x\in(0;+\infty)$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ tương ứng bằng

A. 32. **B.** 4. **C.** 20. **D.** 18.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và thỏa mãn $f(x^3+3x+1)=6x+2$ với $\forall x\in(0;+\infty)$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$ tương ứng bằng

A. 22. **B.** $\frac{43}{2}$. **C.** $\frac{50}{3}$. **D.** $\frac{35}{2}$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ liên tục thỏa mãn $f(x)=f(1-x)$ với $\forall x\in(0;+\infty)$ và $\int\limits_{0}^{1} f(x)dx=-6$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{0}^{1}\left(2x^3-3x^2\right)f(x)dx$ tương ứng bằng

A. -3. **B.** 6. **C.** -12. **D.** 3.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ liên tục thỏa mãn $f(x)=f(2-x)$ với $\forall x\in(0;+\infty)$ và $\int\limits_{0}^{2} f(x)dx=12$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{0}^{2}\left(x^3-3x^2\right)f(x)dx$ tương ứng bằng

A. -12. **B.** -24. **C.** 6. **D.** -6.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và thỏa mãn: $\left(f(x)\right)^3+2f(x)=2x-1$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{-1}^{2} f(x)dx$ tương ứng bằng

A. $I=1$. **B.** $I=-1$. **C.** $I=0$. **D.** $I=2$.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và thỏa mãn: $(f(x))^5+3f(x)=x$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{0}^{4}\left(f(x)\right)^2dx$ tương ứng bằng

A. $I=\frac{12}{7}$. **B.** $I=-3$. **C.** $I=8$. **D.** $I=\frac{16}{3}$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x+1)+f(x+2)=e^x(x^2-1)$. Giá trị của tích phân $I=\int_1^3 f(x)dx$ tương ứng bằng

A. $I=0$. **B.** $I=2$. **C.** $I=-1$. **D.** $I=-3$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa hệ thức $f(x+1)+f(x+2)+...+f(x+2019)=3x^2+2x$. Giá trị của tích phân $I=\int_1^{2019} f(x)dx$ tương ứng bằng

A. $I=1$. **B.** $I=2$. **C.** $I=3$. **D.** $I=5$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(-2;+\infty)$ và thỏa mãn hệ thức điều kiện $\frac{1}{3}f(2x-1)+\frac{1}{2}f(3x+6)=x\ln(x+2)$. Giá trị của tích phân $I=\int_{-3}^{12} f(x)dx$ tương ứng bằng

A. $\frac{9}{4}$. **B.** 3. **C.** $\frac{10}{3}$. **D.** $\frac{27}{2}$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(x^2+1)+\frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}}=x+2$. Giá trị của tích phân $I=\int_1^{17} f(x)dx$ tương ứng bằng

A. $\frac{27}{2}$. **B.** 36. **C.** 72. **D.** 18.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1;+\infty)$ và thỏa mãn hệ thức điều kiện $f(x+1)+3f(3x+2)-4f(4x+1)-f(2^x)=\frac{3}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $I=\int_1^2 \frac{f(x)\mathrm{d}x}{x}$ tương ứng bằng

A. $\ln 2+\sqrt{3}-2\sqrt{2}$ **B.** $\left(2+6\sqrt{3}-8\sqrt{2}\right)\ln 2$.

C. $2+6\sqrt{3}-8\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{2}+4\sqrt{3}-1$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.D	3.D	4.C	5.B	6.A	7.A	8.B	9.B	10.C
11.D	12.C	13.B	14.A	15.D	16.C	17.A	18.B	19.C	20.B
21.D	22.B	23.C	24.A	25.C	26.B	27.D	28.C	29.B	

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. **Chọn A**

Đặt $t=a+b-x\Rightarrow dt=-dx$. Đổi cận $\begin{cases}x=a\Rightarrow t=b\\x=b\Rightarrow t=a\end{cases}$.

Suy ra: $I=\int_a^b f(x)dx=\int_b^a f(a+b-t)(-dt)=\int_a^b f(a+b-t)dt=\int_a^b f(a+b-x)dx$.

Câu 2. **Chọn D**

Cách 1: Trắc nghiệm: Hàm tự do một giả thiết nên ta chọn hàm luôn có dạng $f(x)=a$ là hằng số.

Suy ra: $\int_0^3 f(x)dx=8=\int_0^3 adx=3a\Rightarrow a=\frac{8}{3}\Rightarrow f(x)=\frac{8}{3}=f(3-x)$.

Suy ra: $I=\int_0^3 f(3-x)dx=\int_0^3\frac{8}{3}dx=8$.

Cách 2: Áp dụng công thức: $I=\int_0^3 f(3-x)dx=\int_0^3 f(x)dx=8$.

Cách 3: Với tích phân: $I=\int_0^3 f(3-x)dx$. Đặt: $t=3-x\Rightarrow dt=-dx;$ đổi cân: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=3\\x=3\Rightarrow t=0\end{cases}$

Suy ra: $I=\int_0^3 f(3-x)dx=\int_3^0 f(t)(-dt)=\int_0^3 f(t)dt=8$.

Câu 3. **Chọn D**

Từ giả thiết ta tích phân hai vế: $\int_{-1}^{4}\left[f(x)+f(3-x)\right]dx=\int_{-1}^{4}\left(x^2-3x+\frac{13}{2}\right)dx=\frac{95}{3}$

$\Leftrightarrow\int_{-1}^{4}f(x)dx+\int_{-1}^{4}f(3-x)dx=\frac{95}{3}\Leftrightarrow\int_{-1}^{4}f(x)dx+\int_{-1}^{4}f(x)dx=\frac{95}{3}$

$\Leftrightarrow 2\int_{-1}^{4}f(x)dx=\frac{95}{3}\Leftrightarrow\int_{-1}^{4}f(x)dx=\frac{95}{6}$.

Câu 4. **Chọn C**

Áp dụng công thức $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$. Suy ra $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 f(2-x)dx$.

Xử lý tích phân $\int_0^1 f(2x)dx=-3$.

Đặt $t=2x\Rightarrow dt=2dx\Rightarrow\int_0^1 f(2x)dx=-3=\int_0^2 f(t)\left(\frac{1}{2}dt\right)=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt$

$\Rightarrow\int_0^2 f(t)dt=-6=\int_0^2 f(x)dx$.

Từ giải thiết, ta lấy tích phân hai vế:

$\int_0^2\left[2f(x)+3f(2-x)\right]dx=\int_0^2 g(x)dx=2\int_0^2 f(x)dx+3\int_0^2 f(2-x)dx$

$\Leftrightarrow\int_0^2 g(x)dx=2\int_0^2 f(x)dx+3\int_0^2 f(x)dx=5\int_0^2 f(x)dx=5.(-6)=-30$.

Câu 5. **Chọn B**

Áp dụng công thức $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$. Suy ra $\int_1^3 f(x)dx=\int_1^3 f(4-x)dx$.

Từ giả thiết ta lấy tích phân 2 vế: $0=\int_1^3\left(f(x)-f(4-x)\right)dx=\int_1^3 g(x)dx$.

Câu 6. **Chọn A**

Áp dụng công thức $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$. Suy ra $\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 f(3-x)dx$.

Từ $f(x)+2f(3-x)=3x^2+1$ suy ra:

$\int_1^2\left(f(x)+2f(3-x)\right)dx=\int_1^2\left(3x^2+1\right)dx\Leftrightarrow 3\int_1^2 f(x)dx=8\Leftrightarrow\int_1^2 f(x)dx=\frac{8}{3}$.

Từ $3f(x)-f(3-x)=g(x)$ suy ra:

$\int_1^2\left(3f(x)-f(3-x)\right)dx=\int_1^2 g(x)dx\Leftrightarrow\int_1^2 g(x)dx=2\int_1^2 f(x)dx=\frac{16}{3}$.

Câu 7. **Chọn A**

Áp dụng công thức $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$, suy ra:

$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 f(3-x)dx;\int_1^3 f(x)dx=\int_1^3 f(4-x)dx$

Từ $f(x)-f(3-x)-f(4-x)=4x^3+1$

$\Rightarrow\int_1^2\left(f(x)-f(3-x)-f(4-x)\right)dx=\int_1^2\left(4x^3+1\right)dx=16$

$\Leftrightarrow\int_1^2 f(x)dx-\int_1^2 f(3-x)dx-\int_1^2 f(4-x)dx=16$

$\Leftrightarrow-\int_1^2 f(4-x)dx=16\Leftrightarrow\int_1^2 f(4-x)dx=-16\quad(1)$

Từ $f(x)-f(3-x)-f(4-x)=4x^3+1$

$\Rightarrow\int_1^3\left(f(x)-f(3-x)-f(4-x)\right)dx=\int_1^3\left(4x^3+1\right)dx=82$

$\Leftrightarrow\int_1^3 f(x)dx-\int_1^3 f(3-x)dx-\int_1^3 f(4-x)dx=82$

$\Leftrightarrow-\int_1^3 f(3-x)dx=82\Leftrightarrow\int_1^3 f(3-x)dx=-82\quad(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\int_1^2 f(4-x)dx+\int_1^3 f(3-x)dx=-16-82=-98$.

Câu 8. **Chọn B**

Áp dụng công thức $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$, suy ra: $\int_a^{3-a} f(x)dx=\int_a^{3-a} f(3-x)dx$.

Từ $f(x)-f(3-x)-f(4-x)=2x\Rightarrow\int_a^{3-a}\left(f(x)-f(3-x)-f(4-x)\right)dx=\int_a^{3-a}2xdx$

$\Leftrightarrow \int_a^{3-a} f(x)dx - \int_a^{3-a} f(3-x)dx - \int_a^{3-a} f(4-x)dx = \int_a^{3-a} 2xdx = -6a+9$

$\Leftrightarrow -\int_a^{3-a} f(4-x)dx = -6a+9 \Leftrightarrow \int_a^{3-a} f(4-x)dx = 6a-9 \le 6.3-9 = 9$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=3$.

Suy ra giá trị lớn nhất của tích phân $\int_a^{3-a} f(4-x)dx$ bằng 9 khi $a=3$.

Câu 9. Chọn B

Áp dụng công thức $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$. Suy ra $\int_a^{2-a} f(x)dx = \int_a^{2-a} f(2-x)dx$

Từ $f(x) - f(2-x) - f(3x^2-1) = 3x^2 - \frac{15}{4}$

$\Rightarrow \int_a^{2-a} \left(f(x) - f(2-x) - f(3x^2-1)\right)dx = \int_a^{2-a} \left(3x^2 - \frac{15}{4}\right)dx$

$\Leftrightarrow \int_a^{2-a} f(x)dx - \int_a^{2-a} f(2-x)dx - \int_a^{2-a} f(3x^2-1)dx = -2a^3 + 6a^2 - \frac{9}{2}a + \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \int_a^{2-a} f(3x^2-1)dx = 2a^3 - 6a^2 + \frac{9}{2}a - \frac{1}{2}$.

Khảo sát nhanh hàm số $h(a) = 2a^3 - 6a^2 + \frac{9}{2}a - \frac{1}{2}$ trên đoạn $a \in [1;6]$ ta được

Gí trị nhỏ nhất của hàm số $\min\limits_{a\in[1;6]} h(a) = h\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_a^{2-a} f(3x^2-1)dx$ là $-\frac{1}{2}$.

Câu 10. Chọn C

Áp dụng công thức $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$.

Suy ra $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{a} f(a+(-a)-x)dx = \int_{-a}^{a} f(-x)dx$.

Câu 11. Chọn D

Áp dụng công thức: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{a} f(-x)dx$. Suy ra $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(-x)dx$.

Từ giả thiết, ta lấy tích phân hai vế: $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x + 3f(-x)dx = \int_{-1}^{1} 6x^2 - 1 = 2$

$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1} f(x)dx + 3\int_{-1}^{1} f(-x)dx = 2 = \int_{-1}^{1} f(x)dx + 3\int_{-1}^{1} f(x)dx = 4\int_{-1}^{1} f(x)dx \Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{1}{2}$.

Câu 12. Chọn C

Áp dụng công thức: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{a} f(-x)dx$.

Từ giả thiết, ta lấy tích phân hai vế:

$\int_{-a}^{a} (3f(x) + 4f(-x))\mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} g(x)dx = 3\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x + 4\int_{-a}^{a} f(-x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow 3\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x+4\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a} g(x)dx=7\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=7.2=14.$

Câu 13. Chọn B

Với tích phân $I=\int_{-1}^{1} xf'(x)dx=a+\frac{b}{c.\pi^2}$, đặt: $\begin{cases}u=x\\dv=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=f(x)\end{cases}$.

Suy ra $I=\int_{-1}^{1} xf'(x)dx=xf(x)\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1} f(x)dx=f(1)+f(-1)-\int_{-1}^{1} f(x)dx=3-\int_{-1}^{1} f(x)dx \quad (1)$

Từ giả thiết, suy ra: $\int_{-1}^{1}\left(5f(x)-2f(-x)\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(x^2\cos\pi x\right)dx=\frac{-4}{\pi^2}$

$\Leftrightarrow\frac{-4}{\pi^2}=5\int_{-1}^{1} f(x)dx-2\int_{-1}^{1} f(-x)dx=3\int_{-1}^{1} f(x)dx\Rightarrow\int_{-1}^{1} f(x)dx=\frac{-4}{3\pi^2} \quad (2)$

Thay (2) vào (1) ta được: $I=3+\frac{4}{3\pi^2}=a+\frac{b}{c\pi^2}$

Suy ra $a=3, b=4, c=3$. Vậy $T=a+b+c=10$.

Câu 14. Chọn A

Cách 1:

Chọn hàm hằng số: $f(x)=f(a+b-x)=1$.

Suy ra: $I=\int_{a}^{b}\frac{dx}{1+1}=\frac{b-a}{2}$

Cách 2:

Với tích phân $I=\int_{a}^{b}\frac{dx}{1+f(x)}$, ta đặt: $t=a+b-x\Rightarrow dt=-dx$; đổi cận: $\begin{cases}x=a\Rightarrow t=b\\x=b\Rightarrow t=a\end{cases}$.

Suy ra: $I=\int_{a}^{b}\frac{dx}{1+f(x)}=\int_{b}^{a}\frac{-dt}{1+f(a+b-t)}=\int_{a}^{b}\frac{dt}{1+\frac{1}{f(t)}}=\int_{a}^{b}\frac{f(t)dt}{1+f(t)}=\int_{a}^{b}\frac{f(x)dx}{1+f(x)}$

Suy ra: $I+I=2I=\int_{a}^{b}\frac{dx}{1+f(x)}+\int_{a}^{b}\frac{f(x)dx}{1+f(x)}=\int_{a}^{b}dx=b-a\Rightarrow I=\frac{b-a}{2}$.

Câu 15. Chọn D

Với tích phân $I=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)dx}{x}$; ta đặt: $t=\frac{1}{x}\Rightarrow dt=-\frac{dx}{x^2}$; đổi cận: $\begin{cases}x=\frac{1}{a}\Rightarrow t=a\\x=a\Rightarrow t=\frac{1}{a}\end{cases}$.

Suy ra: $I=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)dx}{x}=\int_{a}^{\frac{1}{a}}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}dt\right)}{\frac{1}{t}}=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)dt}{t}=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)dx}{x}$.

Suy ra: $I+I=2I=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)dx}{x}+\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)dx}{x}=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)dx}{x}=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{g(x)}{x}dx$.

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{g(x)}{x}dx$.

Câu 16. Chọn C

Áp dụng công thức: $I=\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)dx}{x}=\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)dx}{x}$.

Từ giả thiết: $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=xg(x)\Rightarrow\frac{f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=g(x)$

$\Rightarrow\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)dx}{x}=\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}g(x)dx\Leftrightarrow\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)dx}{x}+\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)dx}{x}=\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}g(x)dx=2\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)dx}{x}$

$\Rightarrow\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)dx}{x}=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}g(x)dx=\frac{1}{2}.6=3$.

Câu 17. Chọn A

Áp dụng công thức $I=\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)\mathrm{d}x}{x}=\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}{x}$.

Từ giả thiết: $2f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=xg(x)\Rightarrow 2\frac{f(x)}{x}+3\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=g(x)$

$\Rightarrow\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\left(2\frac{f(x)}{x}+3\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}g(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow 2\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x+3\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}g(x)\mathrm{d}x=5\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\Rightarrow\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}g(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{5}.10=2$.

Xét tích phân $I=\int\limits_{\sqrt{\frac{1}{a}}}^{\sqrt{a}}\frac{f\left(x^2\right)\mathrm{d}x}{x}$. Đặt $t=x^2\Rightarrow\mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases}x=\sqrt{\frac{1}{a}}\Rightarrow t=\frac{1}{a}\\ x=\sqrt{a}\Rightarrow t=a\end{cases}$.

$\Rightarrow I=\int\limits_{\sqrt{\frac{1}{a}}}^{\sqrt{a}}\frac{f\left(x^2\right)\mathrm{d}x}{x}=\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(t)\frac{1}{2}\mathrm{d}t}{t}=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)\mathrm{d}x}{x}=1$.

Câu 18. Chọn B

Áp dụng công thức: $I=\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)\mathrm{d}x}{x}=\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}{x}$.

Từ giả thiết: $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=xg(x)\Rightarrow\frac{f(x)}{x}+2\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=g(x)$

$$\Rightarrow\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}\left(\frac{f(x)}{x}+2\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}g(x)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x+2\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}g(x)\mathrm{d}x=3\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\Rightarrow I=\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}g(x)\mathrm{d}x=3\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x.$$

Với tích phân: $\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}f'(x)\ln x\mathrm{d}x=18$. Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}\\ v=f(x)\end{cases}$.

Suy ra:

$$18=\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}f'(x)\ln x\mathrm{d}x=f(x)\ln x\Big|_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}-\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}\frac{f(x)\mathrm{d}x}{x}=f(\mathrm{e})+f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)-\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}\frac{f(x)\mathrm{d}x}{x}=5-\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}\frac{f(x)\mathrm{d}x}{x}$$

$\Leftrightarrow\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}\frac{f(x)\mathrm{d}x}{x}=-13$. Vậy $I=\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}g(x)\mathrm{d}x=3\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}\frac{f(x)\mathrm{d}x}{x}=-39$.

Câu 19. Chọn C

Dạng bài toán $\begin{cases}f(u(x))=v(x)\\ I=\int\limits_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x=?\end{cases}$

Xử lý tổng quát: $\begin{cases}x=u(t)\Rightarrow\mathrm{d}x=u'(t)\mathrm{d}t\\ f(x)=f(u(t))=v(t)\end{cases}\Rightarrow\int\limits_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{a'}^{b'}v(t)u'(t)\mathrm{d}t$

Với $I=\int\limits_{-1}^{3}f(x)\mathrm{d}x$. Đặt $x=2t-1\Rightarrow\mathrm{d}x=2\mathrm{d}t$

Đổi cận $\begin{cases}x=-1\\ x=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=0\\ t=2\end{cases}$. Suy ra $I=\int\limits_{-1}^{3}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{2}\left(3t^2+1\right).2\mathrm{d}t=20$

Ta có thể xử lý bằng phương trình hàm

Câu 20. Chọn B

Với $I=\int\limits_{1}^{5}f(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $x=t^3+3t+1\Rightarrow\mathrm{d}x=\left(3t^2+3\right)\mathrm{d}t;\ f(x)=f\left(t^3+3t+1\right)=6t+2$

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Đổi cận $\begin{cases} x=1 \\ x=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=1 \end{cases}$. Suy ra $I=\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 (6t+2)(3t^2+3)\mathrm{d}t=\frac{43}{2}$.

Câu 21. Chọn D

Cách 1: Trắc nghiệm

Ta chọn hàm hằng: $f(x)=f(1-x)=a=$ hằng số

Suy ra: $\int_0^1 f(x)dx=-6=\int_0^1 adx=a \Rightarrow f(x)=f(1-x)=-6$

Suy ra: $I=\int_0^1 (2x^3-3x^2)f(x)dx=\int_0^1 (2x^3-3x^2)(-6)dx=3$

Cách 2: Với tích phân $I=\int_0^1 (2x^3-3x^2)f(x)dx$.

Đặt $t=1-x\Rightarrow dt=-dx$. Đổi cận: $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=1 \\ x=1\Rightarrow t=0 \end{cases}$

Suy ra: $I=\int_0^1 (2x^3-3x^2)f(x)dx=\int_1^0 \left(2(1-t)^3-3(1-t)^2\right)f(1-t)(-dt)$

$=\int_0^1 (-2t^3+3t^2-1)f(t)dt$

$\Leftrightarrow I=\int_0^1 (2x^3-3x^2)f(x)dx=\int_0^1 (-2x^3+3x^2-1)f(x)dx$

$=\int_0^1 (-2x^3+3x^2)f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow I=\int_0^1 (2x^3-3x^2)f(x)dx=-I+6 \Leftrightarrow I=3.$

Câu 22. Chọn B

Cách 1: Trắc nghiệm

Ta chọn hàm hằng: $\Rightarrow f(x)=f(2-x)=a=$ hằng số

Suy ra: $\int_0^2 f(x)dx=12=\int_0^2 adx=2a \Rightarrow f(x)=f(2-x)=a=6$

Suy ra: $I=\int_0^2 (x^3-3x^2)f(x)dx=\int_0^2 (x^3-3x^2)(6)dx=-24$

Cách 2: Với tích phân $I=\int_0^2 (x^3-3x^2)f(x)dx$.

Đặt $t=2-x\Rightarrow dt=-dx$. Đổi cận: $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=2 \\ x=2\Rightarrow t=0 \end{cases}$

Suy ra: $I=\int_0^2 (x^3-3x^2)f(x)dx=\int_2^0 \left((2-t)^3-3(2-t)^2\right)f(2-t)(-dt)$

$=\int_0^2 (-t^3+3t^2-4)f(t)dt$

$\Leftrightarrow I=\int_0^2 (x^3-3x^2)f(x)dx=\int_0^2 (-x^3+3x^2-4)f(x)dx=\int_0^2 (-x^3+3x^2)f(x)dx-4\int_0^2 f(x)dx$

$\Leftrightarrow I=-I-4.12 \Rightarrow I=-24.$

Câu 23. Chọn C

Với dạng này ta có cách làm tổng quát sau:

Từ giả thiết vi phân hai vế sẽ được $\left(3\left(f(x)\right)^2+2\right)f'(x)dx=2dx$.

Suy ra $I=\int\limits_{-1}^{2}f(x)dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{2}f(x)\left(3\left(f(x)\right)^2+2\right)f'(x)dx$

Đặt $t=f(x)\Rightarrow dt=f'(x)dx$

Đổi cận:

$x=-1\Rightarrow\left(f(-1)\right)^3+2f(-1)=-3\Rightarrow f(-1)=t=-1$

$x=2\Rightarrow\left(f(2)\right)^3+2f(2)=3\Rightarrow f(2)=t=1$

Suy ra $I=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{2}f(x)\left(3\left(f(x)\right)^2+2\right)f'(x)dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}t(3t^2+2)dt=0$

Câu 24. Chọn A

Từ giả thiết vi phân hai vế sẽ được $\left(5\left(f(x)\right)^4+3\right)f'(x)dx=dx$.

Suy ra $I=\int\limits_{0}^{4}\left(f(x)\right)^2dx=\int\limits_{0}^{4}\left(f(x)\right)^2\left(5\left(f(x)\right)^4+3\right)f'(x)dx=\int\limits_{0}^{4}\left(5\left(f(x)\right)^6+3\left(f(x)\right)^2\right)f'(x)dx$.

Đặt $t=f(x)\Rightarrow dt=f'(x)dx$.

Đổi cận:

$x=0\Rightarrow\left(f(0)\right)^5+3f(0)=0\Rightarrow f(0)=t=0$.

$x=4\Rightarrow\left(f(4)\right)^5+3f(4)=4\Rightarrow f(4)=t=1$.

Suy ra $I=\int\limits_{0}^{4}\left(5\left(f(x)\right)^6+3\left(f(x)\right)^2\right)f'(x)dx=\int\limits_{0}^{1}(5t^6+3t^2)dt=\frac{12}{7}$.

Câu 25. Chọn C

Lấy tích phân hai vế từ 0 đến 1 ta được:

$\int_0^1 f\left(x+1\right)dx+\int_0^1 f\left(x+2\right)dx=\int_0^1 e^x\left(x^2-1\right)dx=-1\quad(1)$

Với tích phân $A=\int_0^1 f\left(x+1\right)dx$. Đặt $t=x+1\Rightarrow dt=dx$; đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\x=1\Rightarrow t=2\end{cases}$

Suy ra $A=\int_0^1 f\left(x+1\right)dx=\int_1^2 f\left(t\right)dt=\int_1^2 f\left(x\right)dx\quad(2)$

Với tích phân $B=\int_0^1 f\left(x+2\right)dx$. Đặt $t=x+2\Rightarrow dt=dx$; đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=2\\x=1\Rightarrow t=3\end{cases}$

Suy ra $B=\int_0^1 f\left(x+2\right)dx=\int_2^3 f\left(t\right)dt=\int_2^3 f\left(x\right)dx\quad(3)$

Thay A,B từ $(2);(3)$ vào (1) ta được

$\int_0^1 f\left(x+1\right)dx+\int_0^1 f\left(x+2\right)dx=-1=\int_1^2 f\left(x\right)dx+\int_2^3 f\left(x\right)dx=\int_1^3 f\left(x\right)dx$.

Câu 26. Chọn B

Lấy tích phân từ 0 đến 1 ta được:

$\int_0^1 f\left(x+1\right)dx+\int_0^1 f\left(x+2\right)dx+...+\int_0^1 f\left(x+2019\right)dx=\int_0^1\left(3x^2+2x\right)dx=2\quad(1)$

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Với tích phân: $\int_0^1 f(x+1)dx$. Đặt $t=x+1\Rightarrow dt=dx$; đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\ x=1\Rightarrow t=2\end{cases}$

Suy ra $\int_0^1 f(x+1)dx=\int_1^2 f(t)dt=\int_1^2 f(x)dx$

Với tích phân: $\int_0^1 f(x+2)dx$. Đặt $t=x+2\Rightarrow dt=dx$; đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=2\\ x=1\Rightarrow t=3\end{cases}$

Suy ra $\int_0^1 f(x+2)dx=\int_2^3 f(x)dx$

Tương tự ta có: $\int_0^1 f(x+3)dx=\int_3^4 f(x)dx;...;\int_0^1 f(x+2019)dx=\int_{2019}^{2020} f(x)dx$

Thay vào (1) ta được:

$\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+...+\int_{2019}^{2020} f(x)dx=2\Leftrightarrow\int_1^{2020} f(x)dx=2$.

Câu 27. Chọn D

Từ giả thiết:

$\frac{1}{3}f(2x-1)+\frac{1}{2}f(3x+6)=x\ln(x+2)\Leftrightarrow 2f(2x-1)+3f(3x+6)=6x\ln(x+2)$

Lấy tích phân hai vế cận từ -1 đến 2, ta được:

$$\int_{-1}^{2}2f(2x-1)dx+\int_{-1}^{2}3f(3x+6)dx=\int_{-1}^{2}6x\ln(x+2)dx=\frac{27}{2}. \qquad (1)$$

Với tích phân: $A=\int_{-1}^{2}2f(2x-1)dx$; đặt $t=2x-1\Rightarrow dt=2dx$; đổi cận: $\begin{cases}x=-1\Rightarrow t=-3\\ x=2\Rightarrow t=3\end{cases}$

Suy ra: $$A=\int_{-1}^{2}2f(2x-1)dx=\int_{-3}^{3}f(t)dt=\int_{-3}^{3}f(x)dx. \qquad (2)$$

Với tích phân: $B=\int_{-1}^{2}3f(3x+6)dx$; đặt $t=3x+6\Rightarrow dt=3dx$; đổi cận: $\begin{cases}x=-1\Rightarrow t=3\\ x=2\Rightarrow t=12\end{cases}$

Suy ra: $$B=\int_{-1}^{2}3f(3x+6)dx=\int_{3}^{12}f(t)dt=\int_{3}^{12}f(x)dx. \qquad (3)$$

Thay A và B từ (2), (3) vào (1), ta được:

$$\int_{-1}^{2}2f(2x-1)dx+\int_{-1}^{2}3f(3x+6)dx=\int_{-1}^{2}6x\ln(x+2)dx=\frac{27}{2}$$

$$\Leftrightarrow\int_{-3}^{3}f(x)dx+\int_{3}^{12}f(x)dx=\frac{27}{2}=\int_{-3}^{12}f(x)dx.$$

Câu 28. Chọn C

Ta có: $f(x^2+1)+\frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}}=x+2\Leftrightarrow xf(x^2+1)+\frac{f(\sqrt{x})}{4\sqrt{x}}=x^2+2x,\quad\forall x>0.$

Lấy tích phân hai vế cận từ 1 đến 4, ta được:

$$\int_1^4 xf(x^2+1)dx+\int_1^4\frac{f(\sqrt{x})}{4\sqrt{x}}dx=\int_1^4(x^2+2x)dx=36. \qquad (1)$$

Với tích phân: $A=\int_1^4 xf\left(x^2+1\right)dx$; đặt $t=x^2+1\Rightarrow dt=2xdx$; đổi cận: $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=2\\x=4\Rightarrow t=17\end{cases}$.

Suy ra: $A=\int_1^4 xf\left(x^2+1\right)dx=\int_2^{17} f(t)\left(\frac{1}{2}dt\right)=\frac{1}{2}\int_2^{17} f(x)dx$. (2)

Với tích phân: $B=\int_1^4 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{4\sqrt{x}}dx$; đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow dt=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$; đổi cận: $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=1\\x=4\Rightarrow t=2\end{cases}$.

Suy ra: $B=\int_1^4 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{4\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}\int_1^2 f(t)dt=\frac{1}{2}\int_1^2 f(x)dx$. (3)

Thay A và B từ (2), (3) vào (1), ta được:

$$\int_1^4 xf\left(x^2+1\right)dx+\int_1^4 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{4\sqrt{x}}dx=36\Leftrightarrow\frac{1}{2}\int_2^{17} f(x)dx+\frac{1}{2}\int_1^2 f(x)dx=36.$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\int_1^{17} f(x)dx=36\Leftrightarrow\int_1^{17} f(x)dx=72.$$

Câu 29. Chọn B

Từ giả thiết ta lấy tích phân hai vế cận từ $0\to1$, sẽ được

$$\int_0^1 f(x+1)\mathrm{d}x+\int_0^1 3f(3x+2)\mathrm{d}x-\int_0^1 4f(4x+1)\mathrm{d}x-\int_0^1 f\left(2^x\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{3\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}\ (1).$$

Với $\int_0^1 \frac{3\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}=\int_0^1 3\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}x$

$$=2\left[(x+2)\sqrt{x+2}-(x+1)\sqrt{x+1}\right]\Big|_0^1=2+6\sqrt{3}-8\sqrt{2}.$$

Dễ dàng dùng phương pháp đổi cận ta có

$$\int_0^1 f(x+1)\mathrm{d}x=\int_1^2 f(t)\mathrm{d}t=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x\quad(2)$$

$$\int_0^1 3f(3x+2)\mathrm{d}x=\int_2^5 f(t)\mathrm{d}t=\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x\quad(3)$$

$$\int_0^1 4f(4x+1)\mathrm{d}x=\int_1^5 f(t)\mathrm{d}t=\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x\quad(4)$$

$$\int_0^1 f\left(2^x\right)\mathrm{d}x=\int_1^2 \frac{f(t)\mathrm{d}t}{t\ln2}=\frac{1}{\ln2}\int_1^2 \frac{f(x)\mathrm{d}x}{x}\quad(5)$$

Thay (2), (3), (4), (5) vào (1) ta được:

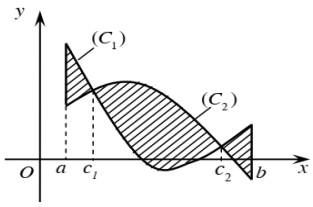
$$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x-\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{\ln2}\int_1^2 \frac{f(x)\mathrm{d}x}{x}=2+6\sqrt{3}-8\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow\int_1^2 \frac{f(x)\mathrm{d}x}{x}=\left(2+6\sqrt{3}-8\sqrt{2}\right)\ln2.$$

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍCH DIỆN TÍCH – THỂ TÍCH

1. Diện tích hình phẳng

- Diện tích hình phẳng $(H)\begin{cases} y=f(x),\ y=0 \\ x=a \\ x=b \end{cases}$ $\boxed{S=\int_a^b |f(x)|dx}$

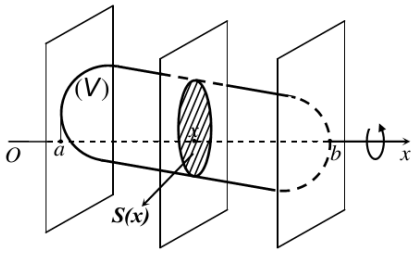


(2) Diện tích hình phẳng $(H)\begin{cases} (C_1): y=f_1(x) \\ (C_2): y=f_2(x) \\ x=a \\ x=b \end{cases}$ $\boxed{S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx}$

- **Chú ý:** Nếu trên đoạn $[a;b]$, hàm số $f(x)$ không đổi dấu thì: $\int_a^b |f(x)|dx=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$

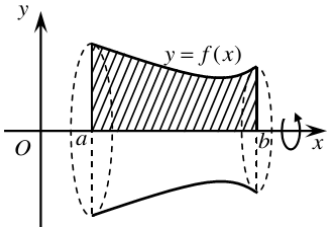
2. Thể tích vật thể và thể tích khối tròn xoay

- **Thể tích vật thể:** Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b; $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a\le x\le b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$.



$\boxed{V=\int_a^b S(x)dx}$

- **Thể tích khối tròn xoay:** được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ quanh trục Ox:



$\begin{cases} (C): y=f(x) \\ (Ox): y=0 \\ x=a \\ x=b \end{cases}$ $\boxed{V_x=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx}$

Câu 1: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\ x$ (liên tục trên đoạn $[a;b]$), trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b\ \ a<b$. Khi đó S được tính theo công thức nào sau đây?

A. $S=\int_a^b f\ x\,dx$. **B.** $S=\left|\int_a^b f\ x\,dx\right|$. **C.** $S=\int_a^b |f\ x|dx$. **D.** $S=\pi\int_a^b f^2\ x\,dx$.

Câu 2: Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=2$ bằng bao nhiêu?

A. $S=7$. **B.** $S=9$. **C.** $S=\frac{15}{4}$. **D.** $S=\frac{17}{4}$.

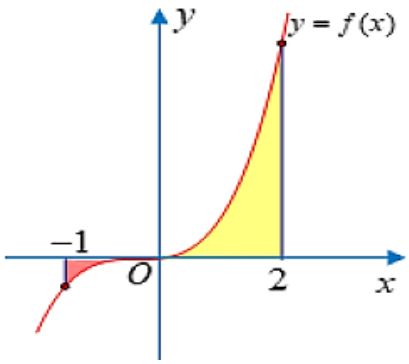
Câu 3: Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0, x=2$ bằng bao nhiêu?

A. $S=2$. **B.** $S=\frac{2}{3}$. **C.** $S=\frac{4}{3}$. **D.** $S=-\frac{2}{3}$.

Câu 4: Gọi S là diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $x=f\ y$ (liên tục trên $[a;b]$), trục tung Oy và hai đường thẳng $y=a, y=b(a<b)$. Khi đó, S được tính theo công thức nào sau đây?

A. $S=\int_a^b |f\ y|dx$. **B.** $S=\int_a^b |f\ y|dy$. **C.** $S=\int_a^b f^2\ y\ dx$. **D.** $S=\pi\int_a^b f^2\ y\ dy$.

Câu 5: Gọi S là diện tích hình phẳng H giới hạn bởi các đường $y=f\ x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1, x=2$ (như hình vẽ bên). Đặt $a=\int_{-1}^{0} f\ x\ dx, b=\int_0^2 f\ x\ dx$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S=b-a$. **B.** $S=b+a$. **C.** $S=-b+a$. **D.** $S=-b-a$.

Câu 6: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $x=y^2-y-2$, trục tung và hai đường thẳng $y=1, y=3$ bằng bao nhiêu?

A. $S=3$. **B.** $S=\frac{7}{6}$. **C.** $S=\frac{11}{6}$. **D.** $S=\frac{2}{3}$.

Câu 7: Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{x}{x+2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1$ và $x=1$ có giá trị bằng $2\ln\frac{a}{b}$ (với a, b là các số dương có ước chung lớn nhất bằng 1). Khi đó tổng $a+b$ bằng bao nhiêu?.

A. $a+b=6$. **B.** $a+b=7$. **C.** $a+b=8$. **D.** $a+b=9$.

Câu 8: Hình phẳng H được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f_1\ x$, $y=f_2\ x$ (liên tục trên $[a;b]$) và các đường thẳng $x=a, x=b$ $a<b$ .Khi đó diện tích S của hình H được xác định bởi công thức nào sau đây?

A. $S=\int_a^b \left|f_1\ x\ -f_2\ x\ \right|\mathrm{d}x$.
B. $S=\int_a^b \left[f_2\ x\ -f_1\ x\ \right]\mathrm{d}x$.
C. $S=\left|\int_a^b \left[f_1\ x\ -f_2\ x\ \right]\mathrm{d}x\right|$.
D. $S=\int_a^b \left|f_1\ x\ +f_2\ x\ \right|\mathrm{d}x$.

Câu 9: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2, y=1, x=0$ và $x=2$ bằng bao nhiêu?

A. 3. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 2.

Câu 10: Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=x^3-x$, $y=2x$ và các đường $x=-1$, $x=1$ được xác định bởi công thức nào sau đây?

A. $S=\left|\int_{-1}^{1} 3x-x^3\ dx\right|$.
B. $S=\int_{-1}^{1} 3x-x^3\ dx$.
C. $S=\int_{-1}^{0} x^3-3x\ dx+\int_{0}^{1} 3x-x^3\ dx$.
D. $S=\int_{-1}^{0} 3x-x^3\ dx+\int_{0}^{1} x^3-3x\ dx$.

Câu 11: Hãy viết công thức tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-1$, trục hoành và đường thẳng $x=2$?

A. $S=\int_{-1}^{2}\left|x^2-1\right|dx$. **B.** $S=\int_{-1}^{1}\left|x^2-1\right|dx$. **C.** $S=\left|\int_{-1}^{2} x^2-1\ dx\right|$ **D.** $S=\int_{1}^{2}\left|x^2-1\right|dx$

Câu 12: Cho S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2x-x^2$ và trục hoành. Tìm số nguyên lớn nhất không vượt quá S.

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 13: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^3, y=-x$ và $x=1$ là

A. 4. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** 1.

Câu 14: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và đồ thị hàm số $y=x-x^2$.

A. $\frac{37}{12}$. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $\frac{81}{12}$. **D.** 13.

Câu 15: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{x+1}{x-2}$ và các trục tọa độ. Biết $S=a+b\ln\frac{c}{2}$ với a,b,c là các số nguyên. Khi đó tổng $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

A. $a+b+c=4$. **B.** $a+b+c=5$. **C.** $a+b+c=-2$. **D.** $a+b+c=-3$.

Câu 16: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2x$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\ x$ trục tung, trục hoành và đường thẳng: $x=3$.

A. $S=\frac{7}{4}$. **B.** $S=\frac{9}{4}$. **C.** $S=\frac{11}{4}$. **D.** $S=\frac{13}{4}$.

Câu 17: Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-x^2-2x$, trục hoành bằng bao nhiêu?

A. $\frac{37}{12}$. **B.** $\frac{27}{12}$. **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** $\frac{8}{3}$.

Câu 18: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2$ và $y=x+2$ là

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{15}{2}$. **D.** $\frac{12}{2}$.

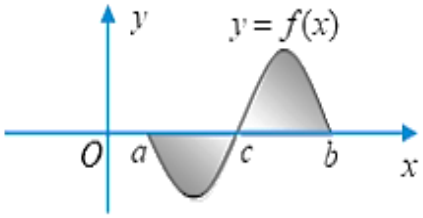
Câu 19: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^3$ và $y=x^5$ là

A. 0. **B.** -4. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** 2.

Câu 20: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=|\ln x|$ và $y=1$. Khi đó diện tích hình phẳng (H) là:

A. $e+\frac{3}{e}-2$. **B.** $e+\frac{4}{e}-3$. **C.** $2e+\frac{2}{e}-5$. **D.** $e+\frac{1}{e}-2$.

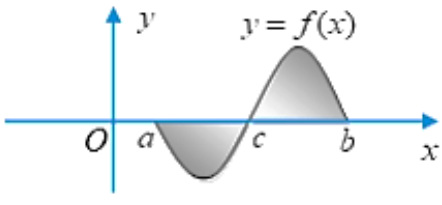
Câu 21: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x=a, x=b$ (như hình bên). Hỏi cách tính nào dưới đây đúng



A. $S=\int_a^b f(x)dx$. **B.** $S=\left|\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx\right|$.

C. $S=-\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$. **D.** $S=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

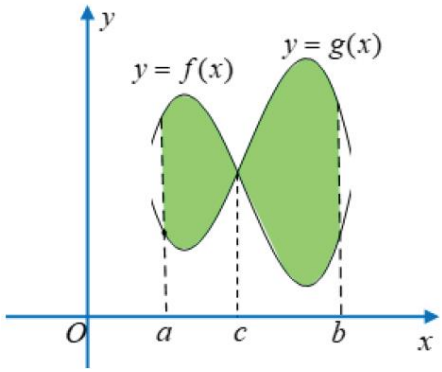
Câu 22: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x=a, x=b$ (như hình bên). Biết $\int_a^c f(x)dx=-3$, và $\int_c^b f(x)dx=5$. Hỏi S bằng bao nhiêu?



A. 3. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 2.

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Câu 23: Tìm công thức tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=f(x), y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a, x=b$ như hình dưới đây



A. $S=\int_a^c\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int_c^b\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int_a^c\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x+\int_c^b\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$

.C. $S=\left|\int_a^b\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x\right|$. **D.** $S=\left|\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x\right|$.

Câu 24: Tính tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi hai đồ thị của hai hàm số $y=3^x, y=4-x$ và trục tung.

A. $S=\frac{9}{2}+\frac{2}{\ln 3}$. **B.** $S=\frac{9}{2}+\frac{3}{\ln 3}$. **C.** $S=\frac{7}{2}-\frac{3}{\ln 3}$. **D.** $S=\frac{7}{2}-\frac{2}{\ln 3}$.

Câu 25: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x+\sin x, y=x$ và $x=0, x=2\pi$ bằng bao nhiêu?

A. 4. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 26: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x$, $y=x+\sin^2 x$, $x=0$, $x=\pi$.

A. $S=\pi$. **B.** $S=\pi-\frac{1}{2}$. **C.** $S=\pi-1$. **D.** $S=\frac{\pi}{2}$.

Câu 27: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=4-|x|$ và trục hoành.

A. $S=\frac{16}{3}$. **B.** $S=16$. **C.** $S=4$. **D.** $S=8$.

Câu 28: (Chuyên Vinh – Lần 1) gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^3$, $y=2-x$ và $y=0$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $S=\int_0^1 x^3dx+\int_1^2(x-2)dx$. **B.** $S=\left|\int_0^2(x^3+x-2)dx\right|$.

C. $S=\frac{1}{2}+\int_0^1 x^3dx$. **D.** $S=\int_0^1\left|x^3-(2-x)\right|dx$.

Câu 29: Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị của hai hàm số $y=\sqrt{2x}$, $y=4-x$ và trục hoành Ox được tính bởi công thức nào dưới đây?

A. $S=\int_0^4 \sqrt{2x}dx+\int_0^4 4-x\ dx$.

B. $S=\int_0^2 \sqrt{2x}dx+\int_2^4 4-x\ dx$.

C. $S=\int_0^4 \sqrt{2x}-4+x\ dx$.

D. $S=\int_0^2 4-x-\sqrt{2x}\ dx$.

Câu 30: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $C: y=\frac{1}{4}x^3-x$ và tiếp tuyến của đồ thị C tại điểm có hoành độ bằng -2.

A. $S=27$. **B.** $S=21$. **C.** $S=25$. **D.** $S=20$.

Câu 31: Cho hình phẳng T giới hạn bởi parabol $P: y=x^2-4x+5$ và hai tiếp tuyến tại các điểm $A\ 1;2$, $B\ 4;5$ của P. Khi đó diện tích S của T bằng bao nhiêu?

A. $\frac{9}{8}$. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{5}{4}$.

Câu 32: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=2\sqrt{ax}\ \ a>0$, trục hoành và đường thẳng $x=a$ bằng ka^2. Giá trị của tham số k bằng bao nhiêu?

A. $k=\frac{7}{3}$. **B.** $k=\frac{4}{3}$. **C.** $k=\frac{12}{5}$. **D.** $k=\frac{6}{5}$.

Câu 33: Cho số phức $z=m-2+\ m^2-1\ i$ với $m\in\mathbb{R}$. Gọi C là tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn C và trục hoành.

A. $S=1$. **B.** $S=\frac{32}{3}$. **C.** $S=\frac{4}{3}$. **D.** $S=\frac{8}{3}$.

Câu 34: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $2my=x^2$, $2mx=y^2$, $m>0$. Tìm giá trị của m để $S=3$.

A. $m=\frac{3}{2}$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=\frac{1}{2}$.

Câu 35: Biết hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2+x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-2; x=m\ \ m>0$ có diện tích bằng $\frac{29}{2}$. Khi đó giá trị m bằng bao nhiêu?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

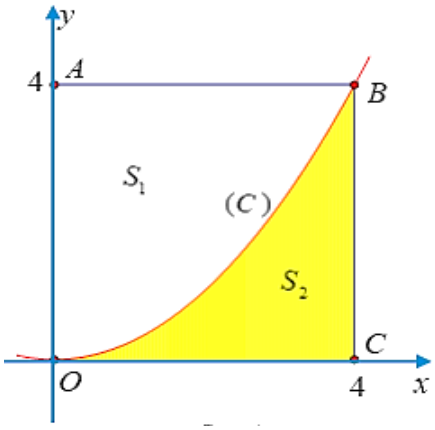
Câu 36: Biết hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2+x-2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1; x=m\ \ m>1$ có diện tích bằng $\frac{5}{12}$. Khi đó, giá trị của m gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau?

A. 1. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 4. **D.** $\frac{9}{2}$.

Câu 37: Diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $P: y=ax^2+bx+c$, trục hoành, $x=-1; x=2$ có giá trị bằng 15. Biết parabol P có $I\ 1;2$ là điểm cực tiểu. Khi đó, giá trị của $a+2b+3c$ bằng

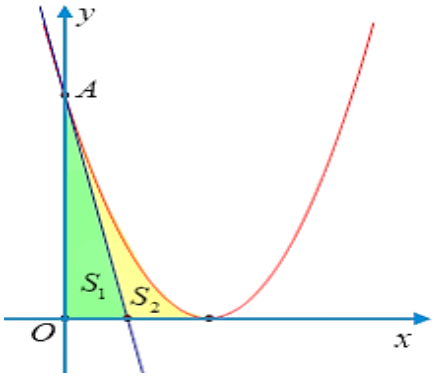
A. 6. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 38: Cho hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 và được chia thành hai phần bởi đường cong C có phương trình $y=\frac{1}{4}x^2$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của phần không tô màu và phần tô màu (hình vẽ). Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$



A. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{S_1}{S_2}=2$. **C.** $\frac{S_1}{S_2}=1$. **D.** $\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{2}$.

Câu 39: Gọi H là hình phẳng được giới hạn bởi $P: y=x^2-4x+4$, trục hoành và trục tung. Xác định k để đường thẳng d đi qua $A\ 0;4$ có hệ số góc k và chia H thành hai phần có diện tích S_1, S_2 bằng nhau (hình vẽ bên).



A. $k=-6$. **B.** $k=-.8$ **C.** $k=-4$. **D.** $k=-2$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.C	3.A	4.B	5.A	6.A	7.B.	8.A	9.D	10.C
11.A	12.D	13.B	14.A	15.B	16.C	17.A	18.B	19.C	20.D
21.C	22.C	23.A	24.D	25.A	26.D	27.B	28.C	29.B	30.A
31.B	32.B	33.C	34.A	35.C	36.A	37.A	38.B	39.A	

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **Chọn C**

Câu 2: **Chọn C**

$$S=\int_1^2\left|x^3\right|\mathrm{d}x=\int_1^2 x^3\mathrm{d}x=\left.\frac{x^4}{4}\right|_1^2=\frac{15}{4}.$$

Câu 3: **Chọn A**

$$S=\int_0^2\left|x^2-1\right|\mathrm{d}x=-\int_0^1 x^2-1\,\mathrm{d}x+\int_1^2 x^2-1\,\mathrm{d}x=2.$$

Câu 4: **Chọn B**

Câu 5: **Chọn A**

Ta có: $S=\int_{-1}^2\left|f\ x\ \right|dx=\int_{-1}^0\left|f\ x\ \right|dx+\int_0^2\left|f\ x\ \right|dx=-\int_{-1}^0 f\ x\ dx+\int_0^2 f\ x\ dx=b-a$

Câu 6: **Chọn A**

Ta có: $S=\int_1^3\left|y^2-y-2\right|dy=\int_1^2\left|y^2-y-2\right|dy+\int_2^3\left|y^2-y-2\right|dy$

$$=-\int_1^2 y^2-y-2\ dy+\int_2^3 y^2-y-2\ dy$$

$$=-\left(\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}-2y\right)\Big|_1^2+\left(\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}-2y\right)\Big|_2^3=\frac{7}{6}+\frac{11}{6}=3$$

Câu 7: **Chọn B**

Cách 1:

Ta có $S=\int_{-1}^1\left|\frac{x}{x+2}\right|\mathrm{d}x=-\int_{-1}^0\frac{x}{x+2}\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{x}{x+2}\mathrm{d}x.$

$$=-\int_{-1}^0\left(1-\frac{2}{x+2}\right)\mathrm{d}x+\int_0^1\left(1-\frac{2}{x+2}\right)\mathrm{d}x=-\left.\ x-2\ln\left|x+2\right|\right|_{-1}^0+\left.\ x-2\ln\left|x+2\right|\right|_0^1=2\ln\frac{4}{3}.$$

Suy ra $a=4,b=3\Rightarrow a+b=7$.

Cách 2: Sử dụng casio.

Ta có $S=\int_{-1}^1\left|\frac{x}{x+2}\right|\mathrm{d}x=2\ln\frac{a}{b}\Leftrightarrow\ln\frac{a}{b}=\frac{1}{2}\int_{-1}^1\left|\frac{x}{x+2}\right|\mathrm{d}x\Leftrightarrow\frac{a}{b}=e^{\frac{1}{2}\int_{-1}^1\left|\frac{x}{x+2}\right|\mathrm{d}x}=\frac{4}{3}.$

Suy ra $a=4,b=3\Rightarrow a+b=7$.

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Câu 8: Chọn A

Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng ta có $S=\int_a^b \left|f_1\ x\ -f_2\ x\ \right|\mathrm{d}x$.

Câu 9: Chọn D

Cách 1: Ta có $S=\int_0^2 \left|x^2-1\right|\mathrm{d}x \xrightarrow{casio} 2$.

Cách 2:

Ta có $S=\int_0^2 \left|x^2-1\right|\mathrm{d}x=-\int_0^1 \ x^2-1\ \mathrm{d}x+-\int_1^2 \ x^2-1\ \mathrm{d}x=-\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_0^1+\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_1^2=2$.

Câu 10: Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^3-x=2x\Leftrightarrow x^3-3x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Diện tích cần tìm $S=\int_{-1}^1 \left|x^3-x-2x\right|dx=\int_{-1}^1 \left|x^3-3x\right|dx=\int_{-1}^0 \ x^3-3x\ dx+\int_0^1 \ 3x-x^3\ dx$.

Câu 11: Chọn A

Xét phương trình $x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm 1$. Diện tích cần tìm $S=\int_{-1}^2 \left|x^2-1\right|dx$.

Chú ý ở bài này nếu cần tính ra kết quả mà không dùng máy tính thì ta làm như sau

$S=\int_{-1}^2 \left|x^2-1\right|dx=\int_{-1}^1 \left|x^2-1\right|dx+\int_1^2 \left|x^2-1\right|dx=-\int_{-1}^1 \ x^2-1\ dx+\int_1^2 \ x^2-1\ dx$.

Câu 12: Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm $2x-x^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Diện tích $S=\int_0^2 \left|2x-x^2\right|dx\approx 1,333333...$. Suy ra số nguyên lớn nhất không vượt quá S là 1.

Câu 13: Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3=-x\Leftrightarrow x(x^2+1)=0\Leftrightarrow x=0$.

Diện tích $S=\int_0^1 \left|x^3-\ -x\ \right|dx=\int_0^1 \left|x^3+x\right|dx=\frac{3}{4}$.

Câu 14: Chọn A

Xét phương trìnhhoành độ giao điểm: $x^3-x=x-x^2\Leftrightarrow x^3+x^2-2x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ =-2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow S=\int_{-2}^1 \left|x^3+x^2-2x\right|dx$

Cách 1:Dùng Casio $S=\int_{-2}^{1}\left|x^3+x^2-2x\right|dx=\frac{37}{12}$.

Cách 2:

$$S=\int_{-2}^{1}\left|x^3+x^2-2x\right|dx=\int_{-2}^{0}\left(x^3+x^2-2x\right)dx-\int_{0}^{1}\left(x^3+x^2-2x\right)dx$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{-2}^{0}-\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{0}^{1}=\frac{37}{12}.$$

Câu 15: Chọn B

Xét phương trìnhhoành độ giao điểm của $y=\frac{x+1}{x-2}$ và trục hoành $y=0$ là $\frac{x+1}{x-2}=0\Leftrightarrow x=-1.$

Suy ra,

$$S=\int_{-1}^{0}\left|\frac{x+1}{x-2}\right|dx=-\int_{-1}^{0}\frac{x+1}{x-2}dx=-\int_{-1}^{0}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)dx=-\left.\left(x+3\ln\left|x-2\right|\right)\right|_{-1}^{0}=-1-3\ln\frac{2}{3}=-1+3\ln\frac{3}{2}.$$

$\Rightarrow a=-1;b=c=3\Rightarrow a+b+c=5.$

Câu 16: Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-3x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$

Khi đó, dùng Casio ta được: $S=\int_{0}^{3}\left|x^3-3x^2+2x\right|dx=\frac{11}{4}$.

Câu 17: Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=0\\x=2\end{array}\right.$

Cách 1: Khi đó:

$$S=\int_{-1}^{2}\left|x^3-x^2-2x\right|dx=\int_{-1}^{0}\left(x^3-x^2-2x\right)dx-\int_{0}^{2}\left(x^3-x^2-2x\right)dx$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{-1}^{0}-\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{0}^{2}=\frac{37}{12}$$

Cách 2: Ta có:

$$S=\int_{-1}^{2}\left|x^3-x^2-2x\right|dx\approx 3,08(3)=\frac{37}{12}$$

Câu 18: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2$ và $y=x+2$ là

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{15}{2}$. **D.** $\frac{12}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2=2+x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$

Khi đó: $S=\int\limits_{-1}^{2}\left|x^2-2-x\right|dx=\dfrac{9}{2}$

Câu 19: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^3$ và $y=x^5$ là

A. 0. **B.** -4. **C.** $\dfrac{1}{6}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^3=x^5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\x=0\end{array}\right.$

Khi đó: $S=\int\limits_{-1}^{1}\left|x^3-x^5\right|dx=\dfrac{1}{6}$

Câu 20: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\left|\ln x\right|$ và $y=1$. Khi đó diện tích hình phẳng (H) là:

A. $e+\dfrac{3}{e}-2$. **B.** $e+\dfrac{4}{e}-3$. **C.** $2e+\dfrac{2}{e}-5$. **D.** $e+\dfrac{1}{e}-2$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm $\left|\ln x\right|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\ln x=1\\\ln x=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=e\\x=\dfrac{1}{e}\end{array}\right.$

Khi đó $S=\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e}\left|\left|\ln x\right|-1\right|dx\xrightarrow{\text{casio}}\approx1,086161245\approx e+\dfrac{1}{e}-2$

Câu 21: **Chọn C**

Dựa vào đồ thị trên hình vẽ ta có $S=-\int\limits_{a}^{c}f(x)dx+\int\limits_{c}^{b}f(x)dx$

Câu 22: **Chọn C**

Dựa vào đồ thị trên hình vẽ ta có $S=-\int\limits_{a}^{c}f(x)dx+\int\limits_{c}^{b}f(x)dx$ =3+5=8.

Câu 23: **Chọn A**

Dựa vào hình vẽ cho ta biết.

Trên $\left[a;c\right]$. $f(x)\geq g(x)$ hay $f(x)-g(x)\geq0$

Trên $\left[c;\mathrm{b}\right]$. $\mathrm{g}(x)\geq f(x)$ hay $g(x)-f(x)\geq0$

Do đó

$$S=\int_a^b\left|g(x)-f(x)\right|\mathrm{d}x=\int_a^c\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x+\int_c^b\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x=\int_a^c\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int_c^b\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$$

Câu 24: Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của $y=3^x, y=4-x$ là $3^x=4-x\Leftrightarrow x=1$

$$\Rightarrow S=\int_0^1\left|3^x-4+x\right|\mathrm{d}x=1,67952...=\frac{7}{2}-\frac{2}{\ln 3}$$

Câu 25: Chọn A

Cách 1

Ta có $S=\int_0^{2\pi}\left|(x+\sin x)-x\right|\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\left|\sin x\right|\mathrm{d}x\xrightarrow{Casio}4$

Chú ý. Ở bài toán này trước khi dùng Casio bấm tích phân thì bạn phải chuyển máy về chế độ Rad(Radian) bằng tổ hợp phím "SHIFT MODE 4". Khi đó màn hình hiện ra kí hiệu chữ R.

Cách 2

Ta có $S=\int_0^{2\pi}\left|(x+\sin x)-x\right|\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\left|\sin x\right|\mathrm{d}x$.

Mặt khác $\left|\sin x\right|=\begin{cases}\sin x \text{ khi } 0\le x\le\pi\\ -\sin x \text{ khi } \pi<x\le 2\pi\end{cases}$.

Do đó $\int_0^{2\pi}\left|\sin x\right|\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x-\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^{\pi}+\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}=4$.

Câu 26: Chọn D

Ta có $S=\int_0^{\pi}\left|x+\sin^2 x-x\right|dx=\int_0^{\pi}\sin^2 x dx=\frac{\pi}{2}$.

Câu 27: Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của $y=4-\left|x\right|$ và trục hoành là: $4-\left|x\right|=0\Leftrightarrow x=\pm 4$.

$$\Rightarrow S=\int_{-4}^{4}\left|4-\left|x\right|\right|dx=16.$$

Câu 28: Chọn C

Dựa vào hình vẽ ta xét các phương trình hoành độ giao điểm:

$x^3=0\Leftrightarrow x=0$

$2-x=0\Leftrightarrow x=2$

$x^3=2-x\Leftrightarrow x^3+x-2=0\Leftrightarrow x=1$

Khi đó, diện tích cần tìm là $S=\int_0^1 x^3dx+\int_1^2(2-x)dx=\frac{1}{2}+\int_0^1 x^3dx$.

Câu 29: Chọn B

Xét các phương trình hoành độ giao điểm sau:

$\sqrt{2x}=4-x\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 4\\x^2-10x+16=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2$

$4-x=0\Leftrightarrow x=0;\ \sqrt{2x}=0\Leftrightarrow x=0$

Suy ra diện tích cần tìm là $S=\int_0^2\sqrt{2x}dx+\int_2^4 4-x\ dx$.

Câu 30: Chọn A

Tiếp tuyến của đồ thị C tại điểm có hoành độ bằng -2 là $d:y=2x+4$.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{1}{4}x^3-x=2x+4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=4\end{array}\right.$.

Vậy diện tích $S=\int_{-2}^{4}\left|\frac{1}{4}x^3-x-\ 2x+4\ \right|dx=27$.

Câu 31: Chọn B

Ta có phương trình tiếp tuyến có dạng: $y=y'\ x_0\ \ x-x_0\ +y_0$.

$y'=2x-4\Rightarrow\begin{cases}y'\ 1\ =-2\\y'\ 4\ =4\end{cases}$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến tại $A\ 1;2$ và $B\ 4;5$ lần lượt là:

$y=-2\ x-1\ +2=-2x+4$ và $y=4\ x-4\ +5=4x-11$.

Phương trình hoành độ giao điểm của 2 tiếp tuyến: $-2x+4=4x-11\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$.

Khi đó ta có: $S=\int_1^{\frac{5}{2}}\left[\ x^2-4x+5\ -\ -2x+4\ \right]dx+\int_{\frac{5}{2}}^{4}\left[\ x^2-4x+5\ -\ 4x-11\ \right]dx=\frac{9}{4}$.

Câu 32: Chọn B

Ta có $S=\int_0^a 2\sqrt{ax}dx=2\sqrt{a}\int_0^a x^{\frac{1}{2}}dx=2\sqrt{a}.\frac{2}{3}.x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a=ka^2\Rightarrow k=\frac{4}{3}$.

Câu 33: Chọn C

Gọi $M\ x;y$ biểu diễn số phức $z=m-2+\ m^2-1\ i\Rightarrow\begin{cases}x=m-2\\y=m^2-1\end{cases}$.

$\Rightarrow y=\ x+2\ ^2-1=x^2+4x+3$. Vậy C có phương trình $C\ \ y=x^2+4x+3$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của C và trục hoành, ta được $x^2+4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-3\end{array}\right.$

$\Rightarrow S=\int_{-3}^{-1}\left|x^2+4x+3\right|dx=\frac{4}{3}$.

Câu 34: Chọn A

Ta có $2my = x^2 \Leftrightarrow y = \dfrac{x^2}{2m} > 0$ và $2mx = y^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{2mx}$ $do\, y > 0$

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x^2}{2m} = \sqrt{2mx} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \end{array}\right.$, suy ra

$S = \displaystyle\int_0^{2m} \left| \frac{x^2}{2m} - \sqrt{2mx} \right| dx = 3$.

Thử từng trường hợp của m ta thấy $m = \dfrac{3}{2}$ thỏa mãn yêu cầu.

Chú ý: Nếu bài toán này thay đổi câu hỏi " tìm giá trị gần m nhất" thì ta không có giá trị m để thay như cách trên, khi đó ta buộc phải tính tích phân của S như sau.

$S = \displaystyle\int_0^{2m} \left| \frac{x^2}{2m} - \sqrt{2mx} \right| dx = -\int_0^{2m} \left(\frac{x^2}{2m} - \sqrt{2mx} \right) dx = -\left(\frac{x^3}{6m} - \sqrt{2m}.\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right)\Big|_0^{2m} = \frac{4m^2}{3} = 3$

$\Leftrightarrow m = \pm\dfrac{3}{2} \xrightarrow{m>0} m = \dfrac{3}{2}$.

Câu 35: Chọn C

Cách 1: Ta có $x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right.$

Do đó: $S = \displaystyle\int_{-2}^{m} \left| x^2 + x \right| dx = \int_{-2}^{-1} x^2 + x \ dx - \int_{-1}^{0} x^2 + x \ dx + \int_{-1}^{m} x^2 + x \ dx$

$= \left(\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} \right)\Big|_{-2}^{-1} - \left(\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} \right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} \right)\Big|_{0}^{m} = 1 + \dfrac{m^3}{3} + \dfrac{m^2}{2}$

Khi đó $1 + \dfrac{m^3}{3} + \dfrac{m^2}{2} = \dfrac{29}{2} \Leftrightarrow 2m^3 + 3m^2 - 81 = 0 \Leftrightarrow \ m - 3 \ \ 2m^2 + 9m + 27 \ = 0 \Leftrightarrow m = 3$.

Cách 2: Sử dụng Casio để kiểm tra đáp số lần lượt với $m =; m = 2; m = 3$.

Câu 36: Chọn A

Ta có

$S = \displaystyle\int_1^m \left| x^2 + x - 2 \right| dx \xrightarrow{x^2+x-2 \ge 0, \forall x \in 1;m} = \int_1^m x^2 + x - 2 \ dx$

$= \left(\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x \right)\Big|_1^m = \dfrac{m^3}{3} + \dfrac{m^2}{2} - 2m + \dfrac{7}{6}$

Khi đó $\dfrac{m^3}{3} + \dfrac{m^2}{2} - 2m + \dfrac{7}{6} = \dfrac{5}{12} \Leftrightarrow 4m^3 + 6m^2 - 24m + 9 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{2}$.

Câu 37: Chọn A

Vì $I\ 1;2$ là điểm cực tiểu của $P \Rightarrow \begin{cases} y'\ 1 \ = 0 \\ y\ 1 \ = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ c = a + 2 \end{cases}$

Khi đó $P \ : y = ax^2 - 2ax + a + 2 \ge 2 > 0$ (do $I\ 1;2$ là điểm cực tiểu của P)

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Do đó $S=\int_{-2}^{1}\left|ax^2-2ax+a+2\right|dx=\left|\left(\frac{ax^3}{3}-ax^2+ax+2x\right)\right|_{-1}^{2}=3a+6$

Suy ra $S=15\Leftrightarrow 3a+6=\Leftrightarrow a=3\Rightarrow\begin{cases}b=-6\\c=5\end{cases}\Rightarrow a+2b+3c=6$.

Câu 38: Chọn B

Diện tích hình vuông $OABC: S_{OABC}=4.4=16$

Gọi $S_2=\int_0^4\frac{1}{4}x^2dx=\frac{16}{3}.\Rightarrow S_1=S_{OABC}-S_2=16-\frac{16}{3}=\frac{32}{3}$. Vậy: $\frac{S_1}{S_2}=2.$

Câu 39: Chọn A

Phương trình $d: y=kx+4$

Phương trình hoành độ giao điểm của d và trục hoành: $kx+4=0\Leftrightarrow k=-\frac{4}{k}$

Phương trình hoành độ giao điểm của P và trục hoành: $x^2-4x+4=0\Leftrightarrow x=2$

Diện tích của $H: S=\int_0^2\left|x^2-4x+4\right|dx=\frac{8}{3}$ Do đó: $S_1=S_2=\frac{4}{3}.$

Mà $S_1=\int_0^{-\frac{4}{k}}\left|kx+4\right|dx=\left|\left(\frac{k}{2}x^2+4x\right)\right|_0^{-\frac{k}{4}}=-\frac{8}{k}\Rightarrow-\frac{8}{k}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow k=-6$

NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN TRONG ĐỀ THI CỦA BỘ

Câu 1: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ và $F(2)=1$. Tính $F(3)$.

A. $F(3)=\ln 2-1$ **B.** $F(3)=\ln 2+1$ **C.** $F(3)=\dfrac{1}{2}$ **D.** $F(3)=\dfrac{7}{4}$

Câu 2: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sin x+\cos x$ thoả mãn $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$

A. $F(x)=\cos x-\sin x+3$ **B.** $F(x)=-\cos x+\sin x+3$

C. $F(x)=-\cos x+\sin x-1$ **D.** $F(x)=-\cos x+\sin x+1$

Câu 3: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{5x-2}$.

A. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{5x-2}=5\ln|5x-2|+C$ **B.** $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{5x-2}=\frac{1}{5}\ln|5x-2|+C$

C. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{5x-2}=\ln|5x-2|+C$ **D.** $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{5x-2}=-\frac{1}{2}\ln|5x-2|+C$

Câu 4: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2x-1}{(x+1)^2}$ trên khoảng $(-1;+\infty)$ là

A. $2\ln(x+1)+\dfrac{2}{x+1}+C$. **B.** $2\ln(x+1)+\dfrac{3}{x+1}+C$.

C. $2\ln(x+1)-\dfrac{2}{x+1}+C$. **D.** $2\ln(x+1)-\dfrac{3}{x+1}+C$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=3-5\sin x$ và $f(0)=10$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $f(x)=3x+5\cos x+5$ **B.** $f(x)=3x+5\cos x+2$

C. $f(x)=3x-5\cos x+15$ **D.** $f(x)=3x-5\cos x+2$

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\dfrac{2}{9}$ và $f'(x)=2x\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\dfrac{35}{36}$. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** $-\dfrac{19}{36}$. **D.** $-\dfrac{2}{15}$.

Câu 7: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{3x-1}{(x-1)^2}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ là

A. $3\ln(x-1)-\dfrac{2}{x-1}+C$. **B.** $3\ln(x-1)+\dfrac{1}{x-1}+C$.

C. $3\ln(x-1)-\dfrac{1}{x-1}+C$. **D.** $3\ln(x-1)+\dfrac{2}{x-1}+C$.

Câu 8: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2x+1}{(x+2)^2}$ trên khoảng $(-2;+\infty)$ là:

A. $2\ln(x+2)+\dfrac{1}{x+2}+C$. **B.** $2\ln(x+2)-\dfrac{1}{x+2}+C$.

C. $2\ln(x+2)-\dfrac{3}{x+2}+C$. **D.** $2\ln(x+2)+\dfrac{3}{x+2}+C$.

Câu 9: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{3x-2}{(x-2)^2}$ trên khoảng $(2;+\infty)$ là

A. $3\ln(x-2)+\dfrac{4}{x-2}+C$. **B.** $3\ln(x-2)+\dfrac{2}{x-2}+C$.

C. $3\ln(x-2)-\dfrac{2}{x-2}+C$. **D.** $3\ln(x-2)-\dfrac{4}{x-2}+C$.

Câu 10: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=4x(1+\ln x)$ là

A. $2x^2\ln x+3x^2$. **B.** $2x^2\ln x+x^2$. **C.** $2x^2\ln x+3x^2+C$. **D.** $2x^2\ln x+x^2+C$.

Câu 11: Cho $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x).e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x).e^{2x}$.

A. $\int f'(x).e^{2x}dx=2x^2-2x+C$ **B.** $\int f'(x).e^{2x}dx=-2x^2+2x+C$

C. $\int f'(x).e^{2x}dx=-x^2+x+C$ **D.** $\int f'(x).e^{2x}dx=-x^2+2x+C$

Câu 12: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x+2x$ thỏa mãn $F(0)=\dfrac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x)=2e^x+x^2-\dfrac{1}{2}$ **B.** $F(x)=e^x+x^2+\dfrac{5}{2}$ **C.** $F(x)=e^x+x^2+\dfrac{3}{2}$ **D.** $F(x)=e^x+x^2+\dfrac{1}{2}$

Câu 13: Cho $F(x)=\dfrac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

A. $\int f'(x)\ln x\,dx=-\left(\dfrac{\ln x}{x^2}+\dfrac{1}{2x^2}\right)+C$ **B.** $\int f'(x)\ln x\,dx=\dfrac{\ln x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}+C$

C. $\int f'(x)\ln x\,dx=-\left(\dfrac{\ln x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}\right)+C$ **D.** $\int f'(x)\ln x\,dx=\dfrac{\ln x}{x^2}+\dfrac{1}{2x^2}+C$

Câu 14: Cho $F(x)=(x-1)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.

A. $\int f'(x)e^{2x}\mathrm{d}x=(x-2)e^x+C$ **B.** $\int f'(x)e^{2x}\mathrm{d}x=\dfrac{2-x}{2}e^x+C$

C. $\int f'(x)e^{2x}\mathrm{d}x=(2-x)e^x+C$ **D.** $\int f'(x)e^{2x}\mathrm{d}x=(4-2x)e^x+C$

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;2]$, $f(1)=1$ và $f(2)=2$. Tính $I=\int_1^2 f'(x)dx$.

A. $I=1$. **B.** $I=-1$. **C.** $I=3$. **D.** $I=\dfrac{7}{2}$.

Câu 16: Biết $I=\int_3^4\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+x}=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$, với a,b,c là các số nguyên. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=6$. **B.** $S=2$. **C.** $S=-2$. **D.** $S=0$.

Câu 17: Cho $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = 5$. Tính $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x) + 2\sin x \right] \mathrm{d}x$.

A. $I = 7$ **B.** $I = 5 + \dfrac{\pi}{2}$ **C.** $I = 3$ **D.** $I = 5 + \pi$.

Câu 18: Cho $\int\limits_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_{-1}^{2} g(x)\mathrm{d}x = -1$. Tính $I = \int\limits_{-1}^{2} \left[x + 2f(x) - 3g(x) \right] \mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{11}{2}$ **B.** $I = \dfrac{17}{2}$ **C.** $I = \dfrac{5}{2}$ **D.** $I = \dfrac{7}{2}$

Câu 19: $\int\limits_0^1 e^{3x+1}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}\left(e^4 - e\right)$. **B.** $e^4 - e$. **C.** $\dfrac{1}{3}\left(e^4 + e\right)$. **D.** $e^3 - e$.

Câu 20: $\int\limits_1^2 \dfrac{dx}{3x-2}$ bằng

A. $2\ln 2$. **B.** $\dfrac{1}{3}\ln 2$. **C.** $\dfrac{2}{3}\ln 2$. **D.** $\ln 2$.

Câu 21: Cho $\int\limits_0^6 f(x)dx = 12$. Tính $I = \int\limits_0^2 f(3x)dx$.

A. $I = 36$ **B.** $I = 4$ **C.** $I = 6$ **D.** $I = 5$

Câu 22: Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \dfrac{1}{180}t^2 + \dfrac{11}{18}t\ (\mathrm{m/s})$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng $a\left(\mathrm{m/s^2}\right)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $22\ (\mathrm{m/s})$. **B.** $15\ (\mathrm{m/s})$. **C.** $10\ (\mathrm{m/s})$. **D.** $7\ (\mathrm{m/s})$.

Câu 23: Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \dfrac{1}{120}t^2 + \dfrac{58}{45}t\ (m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a\left(m/s^2\right)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $25(m/s)$. **B.** $36(m/s)$. **C.** $30(m/s)$. **D.** $21(m/s)$.

Câu 24: Cho $\int\limits_0^1 \dfrac{x\mathrm{d}x}{(x+2)^2} = a + b\ln 2 + c\ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a + b + c$ bằng

A. -2. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 1.

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: **nhóm admin luyện thi Đại học.**
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Câu 25: Tính tích phân $I=\int_0^{\pi}\cos^3 x.\sin x\mathrm{d}x$.

A. $I=-\frac{1}{4}\pi^4$ **B.** $I=-\pi^4$ **C.** $I=0$ **D.** $I=-\frac{1}{4}$

Câu 26: Tính tích phân $I=\int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}dx$ bằng cách đặt $u=x^2-1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I=2\int_0^3\sqrt{u}du$ **B.** $I=\int_1^2\sqrt{u}du$ **C.** $I=\int_0^3\sqrt{u}du$ **D.** $I=\frac{1}{2}\int_1^2\sqrt{u}du$

Câu 27: Cho $\int_0^4 f(x)dx=16$. Tính $I=\int_0^2 f(2x)dx$

A. $I=32$. **B.** $I=8$. **C.** $I=16$. **D.** $I=4$

Câu 28: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. Tính: $I=F(e)-F(1)$?

A. $I=\frac{1}{2}$ **B.** $I=\frac{1}{e}$ **C.** $I=1$ **D.** $I=e$

Câu 29: $\int_1^2 e^{3x-1}\mathrm{d}x$ bằng:

A. $\frac{1}{3}\left(e^5-e^2\right)$. **B.** $\frac{1}{3}e^5-e^2$. **C.** e^5-e^2. **D.** $\frac{1}{3}\left(e^5+e^2\right)$.

Câu 30: Cho $\int_5^{21}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+4}}=a\ln 3+b\ln 5+c\ln 7$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b=-2c$. **B.** $a+b=c$. **C.** $a-b=-c$. **D.** $a-b=-2c$.

Câu 31: Cho $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}=a+b\ln\frac{1+e}{2}$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S=a^3+b^3$.

A. $S=2$. **B.** $S=-2$. **C.** $S=0$. **D.** $S=1$.

Câu 32: Cho $\int_{16}^{55}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+9}}=a\ln 2+b\ln 5+c\ln 11$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a-b=-c$. **B.** $a+b=c$. **C.** $a+b=3c$. **D.** $a-b=-3c$.

Câu 33: Cho $\int_1^e(1+x\ln x)\mathrm{d}x=ae^2+be+c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b=c$. **B.** $a+b=-c$. **C.** $a-b=c$. **D.** $a-b=-c$.

Câu 34: Cho $\int_1^e(2+x\ln x)\mathrm{d}x=ae^2+be+c$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+b=-c$. **B.** $a+b=c$. **C.** $a-b=c$. **D.** $a-b=-c$.

Câu 35: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=7$ và $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{7}{5}$. **B.** 1. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** 4.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{5}$ và $f'(x)=x^3\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{4}{35}$. **B.** $-\frac{71}{20}$. **C.** $-\frac{79}{20}$. **D.** $-\frac{4}{5}$.

Câu 37: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(5)=1$ và $\int_0^1 xf(5x)\mathrm{d}x=1$, khi đó $\int_0^5 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 15. **B.** 23. **C.** $\frac{123}{5}$. **D.** -25.

Câu 38: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$, biết $f(6)=1$ và $\int_0^1 xf(6x)dx=1$. Khi đó $\int_0^6 x^2 f'(x)dx=?$

A. $\frac{107}{3}$ **B.** 34 **C.** 24 **D.** -36

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x)\mathrm{d}x=10$ và $2f(1)-f(0)=2$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-12$ **B.** $I=8$ **C.** $I=1$ **D.** $I=-8$

Câu 40: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f(x)+f(-x)=\sqrt{2+2\cos 2x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx.$

A. $I=-6$ **B.** $I=0$ **C.** $I=-2$ **D.** $I=6$

Câu 41: Biết $I=\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}-c$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=24$. **B.** $P=12$. **C.** $P=18$. **D.** $P=46$.

Câu 42: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{2x-1}$, $f(0)=1$ và $f(1)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $4+\ln 15$. **B.** $2+\ln 15$. **C.** $3+\ln 15$. **D.** $\ln 15$.

Câu 43: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{3}$ và $f'(x)=x\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng.

A. $-\frac{11}{6}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** $-\frac{2}{9}$. **D.** $-\frac{7}{6}$.

Câu 44: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{25}$ và $f'(x)=4x^3\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{41}{400}$. **B.** $-\frac{1}{10}$. **C.** $-\frac{391}{400}$. **D.** $-\frac{1}{40}$.

Câu 45: Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\cos^2 x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ bằng

A. $\frac{\pi^2+4}{16}$. **B.** $\frac{\pi^2+14\pi}{16}$. **C.** $\frac{\pi^2+16\pi+4}{16}$. **D.** $\frac{\pi^2+16\pi+16}{16}$.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(4)=1$ và $\int_0^1 xf(4x)\mathrm{d}x=1$, khi đó $\int_0^4 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{31}{2}$. **B.** -16. **C.** 8. **D.** 14.

Câu 47: Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\cos^2 x+3,\forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ bằng

A. $\frac{\pi^2+2}{8}$. **B.** $\frac{\pi^2+8\pi+8}{8}$. **C.** $\frac{\pi^2+8\pi+2}{8}$. **D.** $\frac{\pi^2+6\pi+8}{8}$.

Câu 48: Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\sin^2 x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{\pi^2+15\pi}{16}$. **B.** $\frac{\pi^2+16\pi-16}{16}$. **C.** $\frac{\pi^2+16\pi-4}{16}$. **D.** $\frac{\pi^2-4}{16}$.

Câu 49: Cho hàm số $y=f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\sin^2 x+3,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{\pi^2-2}{8}$. **B.** $\frac{\pi^2+8\pi-8}{8}$. **C.** $\frac{\pi^2+8\pi-2}{8}$. **D.** $\frac{3\pi^2+2\pi-3}{8}$.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$, biết $f(3)=1$ và $\int_0^1 xf(3x)dx=1$. Khi đó $\int_0^3 x^2 f'(x)dx=?$

A. 3 **B.** 7 **C.** –9 **D.** $\frac{25}{3}$

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.D	3.B	4.B	5.A	6.B	7.A	8.D	9.D	10.D
11.B	12.D	13.A	14.C	15.A	16.B	17.A	18.B	19.A	20.C
21.B	22.B	23.C	24.B	25.C.	26.C	27.B	28.A	29.A	30.A
31.C	32.A	33.C	34.C	35.A	36.D	37.D	38.D	39.D	40.D
41.D	42.C	43.B	44.B	45.C	46.B	47.C	48.C	49.C	50.B

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **Chọn B**

$F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x=\ln|x-1|+C$. $F(2)=1\Leftrightarrow\ln1+C=1\Leftrightarrow C=1$.

Vậy $F(x)=\ln|x-1|+1$. Suy ra $F(3)=\ln2+1$.

Câu 2: **Chọn D**

Có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int(\sin x+\cos x)\mathrm{d}x=-\cos x+\sin x+C$

Do $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}+C=2\Leftrightarrow1+C=2\Leftrightarrow C=1\Rightarrow F(x)=-\cos x+\sin x+1$.

Câu 3: **Chọn B**

Áp dụng công thức $\int\frac{\mathrm{d}x}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C\ (a\neq0)$ ta được $\int\frac{\mathrm{d}x}{5x-2}=\frac{1}{5}\ln|5x-2|+C$.

Câu 4: **Chọn B**

Ta có $\int\frac{2x-1}{(x+1)^2}dx=\int\frac{2(x+1)-3}{(x+1)^2}dx=\int\frac{2}{(x+1)}dx+\int\frac{-3}{(x+1)^2}dx=2\ln(x+1)+\frac{3}{x+1}+C$.

Câu 5: **Chọn A**

Ta có $f(x)=\int(3-5\sin x)dx=3x+5\cos x+C$

Theo giả thiết $f(0)=10$ nên $5+C=10\Rightarrow C=5$.

Vậy $f(x)=3x+5\cos x+5$.

Câu 6: **Chọn B**

Ta có $f'(x)=2x\left[f(x)\right]^2\overset{f(x)\neq0}{\Leftrightarrow}\frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=2x\Leftrightarrow\left[\frac{1}{f(x)}\right]'=-2x\Leftrightarrow\frac{1}{f(x)}=-x^2+C$.

Từ $f(2)=-\frac{2}{9}$ suy ra $C=-\frac{1}{2}$. Do đó $f(1)=\frac{1}{-1^2+\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\frac{2}{3}$.

Câu 7: **Chọn A**

Đặt $t=x-1$

$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{3(t+1)-1}{t^2}\mathrm{d}t=\int\frac{3t+2}{t^2}\mathrm{d}t=\int\frac{3}{t}\mathrm{d}t+\int\frac{2}{t^2}\mathrm{d}t=3\ln(x-1)-\frac{2}{x-1}+C$

Câu 8: Chọn D

Ta có: $\int \frac{2x+1}{(x+2)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{2(x+2)-3}{(x+2)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{2(x+2)}{(x+2)^2}\mathrm{d}x - \int \frac{3}{(x+2)^2}\mathrm{d}x$

$= 2\int \frac{\mathrm{d}(x+2)}{x+2} - \int 3(x+2)^{-2}\mathrm{d}(x+2) = 2\ln|x+2| + \frac{3}{x+2} + C = 2\ln(x+2) + \frac{3}{x+2} + C.$

Câu 9: Chọn D

Ta có $\int \frac{3x-2}{(x-2)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{3(x-2)+4}{(x-2)^2}\mathrm{d}x = \int \left[\frac{3}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2}\right]\mathrm{d}x = 3\ln(x-2) - \frac{4}{x-2} + C.$

Câu 10: Chọn D

Cách 1.

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int 4x(1+\ln x)\mathrm{d}x = \int 4x\mathrm{d}x + \int 4x\ln x\mathrm{d}x$. Tính $\int 4x\mathrm{d}x = 2x^2 + C_1$

Tính $\int 4x\ln x\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = 4x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = 2x^2 \end{cases}$

Suy ra $\int 4x\ln x\mathrm{d}x = 2x^2\ln x - \int 2x\mathrm{d}x = 2x^2\ln x - x^2 + C_2$

Do đó $I = 2x^2\ln x + x^2 + C$.

Cách 2.

Ta có $\left(2x^2\ln x + x^2\right)' = \left(2x^2\right)'.\ln x + 2x^2.(\ln x)' + \left(x^2\right)' = 4x.\ln x + 2x^2.\frac{1}{x} + 2x = 4x(1+\ln x).$

Do đó $2x^2\ln x + x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x(1+\ln x)$.

Hay $2x^2\ln x + x^2 + C$ là họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x(1+\ln x)$.

Câu 11: Chọn B

Ta có $f(x).e^{2x} = F'(x) = 2x \Rightarrow \left(f(x).e^{2x}\right)' = 2$ hay $f'(x)e^{2x} + 2f(x)e^{2x} = 2 \Rightarrow f'(x)e^{2x} + 4x = 2$

Suy ra $f'(x)e^{2x} = 2 - 4x$ nên $\int f'(x).e^{2x}dx = -2x^2 + 2x + C.$

Câu 12: Chọn D

Ta có $F(x) = \int (e^x + 2x)\mathrm{d}x = e^x + x^2 + C$

Theo bài ra ta có: $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}dx$.

Câu 13: Chọn A

Ta có: $\int \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2x^2}$. Chọn $I = 32$

Khi đó: $I = 8$. Đặt $I = 16$

Khi đó: $I = 4$

Câu 14: Chọn C

Theo đề bài ta có $\int f(x).e^{2x}\mathrm{d}x=(x-1)e^{x}+C$, suy ra $f(x).e^{2x}=\left[(x-1)e^{x}\right]'=e^{x}+(x-1).e^{x}$

$\Rightarrow f(x)=e^{-x}+(x-1).e^{-x}\Rightarrow f'(x)=(1-x).e^{-x}$

Suy ra $\int f'(x)e^{2x}\mathrm{d}x=\int(1-x)e^{x}\mathrm{d}x=\int(1-x)\mathrm{d}(e^{x})=e^{x}(1-x)+\int e^{x}\mathrm{d}x=e^{x}(2-x)+C$.

Câu 15: Chọn A

Ta có $I=\int_{1}^{2}f'(x)dx=f(x)\Big|_{1}^{2}=f(2)-f(1)=2-1=1.$

Câu 16: Chọn B

Ta có: $\frac{1}{x^2+x}=\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}.$

Khi đó: $I=\int_{3}^{4}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x}=\int_{3}^{4}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\left(\ln x-\ln(x+1)\right)\Big|_{3}^{4}=(\ln 4-\ln 5)-(\ln 3-\ln 4)$

$=4\ln 2-\ln 3-\ln 5.$

Suy ra: $a=4,b=-1,c=-1$. Vậy $S=2.$

Câu 17: Chọn A

Ta có $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)+2\sin x\right]\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx+2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx$

$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x-2\cos x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=5-2(0-1)=7.$

Câu 18: Chọn B

Ta có: $I=\int_{-1}^{2}\left[x+2f(x)-3g(x)\right]\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2}+2\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x-3\int_{-1}^{2}g(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}+2.2-3(-1)=\frac{17}{2}.$

Câu 19: Chọn A

Ta có: $\int_{0}^{1}e^{3x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}e^{3x+1}\Big|_{0}^{1}=\frac{e^4-e}{3}.$

Câu 20: Chọn C

Ta có $\int_{1}^{2}\frac{dx}{3x-2}=\frac{1}{3}\ln\left|3x-2\right|\Big|_{1}^{2}=\frac{1}{3}(\ln 4-\ln 1)=\frac{2}{3}\ln 2.$

Câu 21: Chọn B

Ta có: $I=\int_{0}^{2}f(3x)dx=\frac{1}{3}\int_{0}^{2}f(3x)d3x=\frac{1}{3}\int_{0}^{6}f(t)dt=\frac{1}{3}.12=4.$

Câu 22: Chọn B

Từ đề bài, ta suy ra: tính từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi bị chất điểm B bắt kịp thì A đi được 15 giây, B đi được 10 giây.

Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng $v_B(t)=\int a\mathrm{d}t=at+C$, lại có $v_B(0)=0$ nên $v_B(t)=at$

Từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi bị chất điểm B bắt kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được là bằng nhau. Do đó

$$\int_0^{15}\left(\frac{1}{180}t^2+\frac{11}{18}t\right)\mathrm{d}t=\int_0^{10}at\mathrm{d}t\Leftrightarrow 75=50a\Leftrightarrow a=\frac{3}{2}.$$

Từ đó, vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(10)=\frac{3}{2}.10=15\,(\mathrm{m/s})$.

Câu 23: Chọn C

Thời điểm chất điểm B đuổi kịp chất điểm A thì chất điểm B đi được 15 giây, chất điểm A đi được 18 giây.

Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng $v_B(t)=\int a\mathrm{d}t=at+C$ mà $v_B(0)=0$ nên $v_B(t)=at$.

Do từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi chất điểm B đuổi kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được bằng nhau. Do đó

$$\int_0^{18}\left(\frac{1}{120}t^2+\frac{58}{45}\right)\mathrm{d}t=\int_0^{15}at\mathrm{d}t\Leftrightarrow 225=a.\frac{225}{2}\Leftrightarrow a=2$$

Vậy, vận tốc của chất điểm B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(t)=2.15=30(m/s)$.

Câu 24: Chọn B

$$\int_0^1\frac{x\mathrm{d}x}{(x+2)^2}=\int_0^1\frac{(x+2)-2}{(x+2)^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x+2}-\int_0^1\frac{2\mathrm{d}x}{(x+2)^2}$$

$$=\ln(x+2)\Big|_0^1-2.\frac{(x+2)^{-1}}{-1}\Big|_0^1=\ln 3-\ln 2+\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}-\ln 2+\ln 3.$$

Vậy $a=-\frac{1}{3};b=-1;c=1\Rightarrow 3a+b+c=-1$.

Câu 25: Chọn C

Ta có: $I=\int_0^{\pi}\cos^3 x.\sin x dx$. Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin x dx\Leftrightarrow -dt=\sin x dx$

Đổi cận: Với $x=0\Rightarrow t=1$; với $x=\pi\Rightarrow t=-1$.

Vậy $I=-\int_1^{-1}t^3dt=\int_{-1}^1 t^3dt=\frac{t^4}{4}\Big|_{-1}^1=\frac{1^4}{4}-\frac{(-1)^4}{4}=0$.

Câu 26: Chọn C

Ta có: $I=\int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}dx$

đặt $u=x^2-1\Rightarrow du=2xdx$. Đổi cận $x=1\Rightarrow u=0;x=2\Rightarrow u=3$ nên $I=\int_0^3\sqrt{u}du$

Câu 27: Chọn B

Đặt $t=2x\Rightarrow \frac{dt}{2}=dx$. Đổi cận $x=0\Rightarrow t=2;\ x=2\Rightarrow t=4$

Khi đó ta có $I=\int_0^2 f(2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^4 f(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)dx=8$

Câu 28: Chọn A

Cách 1.

Vì $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ nên $I=F(e)-F(1)=\int_1^e f(x)\mathrm{d}x=\int_1^e \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int_1^e \ln x\mathrm{d}(\ln x)=\left.\frac{\ln^2 x}{2}\right|_1^e=\frac{1}{2}$.

Câu 29: Chọn A

Ta có: $\int_1^2 e^{3x-1}\mathrm{d}x=\left.\frac{1}{3}e^{3x-1}\right|_1^2=\frac{1}{3}\left(e^5-e^2\right)$.

Câu 30: Chọn A

Đặt $t=\sqrt{x+4}\Rightarrow t^2=x+4\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Đổi cận:

x	5	21
t	3	5

$$\int_5^{21}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+4}}=\int_3^5\frac{2t\mathrm{d}t}{\left(t^2-4\right)t}=\int_3^5\frac{2\mathrm{d}t}{(t-2)(t+2)}=2\int_3^5\left(\frac{1}{4(t-2)}-\frac{1}{4(t+2)}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\left(\frac{1}{2}\ln|t-2|-\frac{1}{2}\ln|t+2|\right)\Big|_3^5=\frac{1}{2}\ln 3+\frac{1}{2}\ln 5-\frac{1}{2}\ln 7.$$

Câu 31: Chọn C

Cách 1. Đặt $t=e^x\Rightarrow \mathrm{d}t=e^x\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1; x=1\Rightarrow t=e$

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}=\int_0^1\frac{e^x\mathrm{d}x}{e^x\left(e^x+1\right)}=\int_1^e\frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}=\int_1^e\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\left(\ln|t|-\ln|t+1|\right)\Big|_1^e=\left(1-\ln(1+e)\right)-(-\ln 2)$$

$$=1+\ln\frac{2}{1+e}=1-\ln\frac{1+e}{2}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}\Rightarrow S=a^3+b^3=0.$$

Cách 2. $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}=\int_0^1\frac{\left(e^x+1\right)-e^x}{e^x+1}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{\mathrm{d}\left(e^x+1\right)}{e^x+1}=\left.x\right|_0^1-\left.\ln\left|e^x+1\right|\right|_0^1=1-\ln\frac{1+e}{2}$.

Suy ra $a=1$ và $b=-1$. Vậy $S=a^3+b^3=0$.

Câu 32: Chọn A

Đặt $t=\sqrt{x+9}\Rightarrow t^2=x+9\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Đổi cận:

x	16	55
t	5	8

$$\int_{16}^{55}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+9}}=\int_{5}^{8}\frac{2t\mathrm{d}t}{\left(t^2-9\right)t}=2\int_{5}^{8}\frac{\mathrm{d}t}{t^2-9}=\frac{1}{3}\left(\int_{5}^{8}\frac{\mathrm{d}t}{t-3}-\int_{5}^{8}\frac{\mathrm{d}t}{t+3}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\ln|x-3|-\ln|x+3|\right)\Big|_{5}^{8}=\frac{2}{3}\ln 2+\frac{1}{3}\ln 5-\frac{1}{3}\ln 11.$$

Vậy $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{3}$, $c=-\frac{1}{3}$. Mệnh đề $a-b=-c$ đúng.

Câu 33: Chọn C

Ta có $\int_{1}^{\mathrm{e}}\left(1+x\ln x\right)\mathrm{d}x=\int_{1}^{\mathrm{e}}1.\mathrm{d}x+\int_{1}^{\mathrm{e}}x\ln x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}-1+\int_{1}^{\mathrm{e}}x\ln x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\Rightarrow \mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=x.\mathrm{d}x\Rightarrow v=\frac{x^2}{2}\end{cases}$

Khi đó $\int_{1}^{\mathrm{e}}x\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_{1}^{\mathrm{e}}-\frac{1}{2}\int_{1}^{\mathrm{e}}x\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2}{2}-\frac{1}{4}x^2\Big|_{1}^{\mathrm{e}}=\frac{\mathrm{e}^2}{2}-\frac{\mathrm{e}^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{\mathrm{e}^2}{4}+\frac{1}{4}$.

Suy ra $\int_{1}^{\mathrm{e}}\left(1+x\ln x\right)\mathrm{d}x=\mathrm{e}-1+\frac{\mathrm{e}^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{\mathrm{e}^2}{4}+\mathrm{e}-\frac{3}{4}$ nên $a=\frac{1}{4}$, $b=1$, $c=-\frac{3}{4}$.

Vậy $a-b=c$.

Câu 34: Chọn C

Ta có $\int_{1}^{e}\left(2+x\ln x\right)\mathrm{d}x=\int_{1}^{e}2\mathrm{d}x+\int_{1}^{e}x\ln x\mathrm{d}x=2x\Big|_{1}^{e}+I=2e-2+I$ với $I=\int_{1}^{e}x\ln x\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\ v=\frac{x^2}{2}\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_{1}^{e}-\int_{1}^{e}\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_{1}^{e}-\frac{x^2}{4}\Big|_{1}^{e}=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}\left(e^2-1\right)=\frac{e^2+1}{4}$$

$$\Rightarrow\int_{1}^{e}\left(2+x\ln x\right)\mathrm{d}x=2e-2+\frac{e^2+1}{4}=\frac{1}{4}e^2+2e-\frac{7}{4}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\ b=2\\ c=-\frac{7}{4}\end{cases}\Rightarrow a-b=c$$

Câu 35: Chọn A

Cách 1: Tính: $\int_{0}^{1}x^2f\left(x\right)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=f\left(x\right)\\ \mathrm{d}v=x^2\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'\left(x\right)\mathrm{d}x\\ v=\frac{x^3}{3}\end{cases}$.

Ta có: $\int\limits_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{x^3 f(x)}{3}\Big|_0^1 - \dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x$

$= \dfrac{1.f(1)-0.f(0)}{3} - \dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x.$

Mà $\int\limits_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow -\dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \int\limits_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x = -1.$

Ta có $\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = 7.$

$\int\limits_0^1 x^6\mathrm{d}x = \dfrac{x^7}{7}\Big|_0^1 = \dfrac{1}{7} \Rightarrow \int\limits_0^1 49x^6\mathrm{d}x = \dfrac{1}{7}.49 = 7.$

$\int\limits_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x = -1 \Rightarrow \int\limits_0^1 14x^3.f'(x)\mathrm{d}x = -14.$

Cộng hai vế và suy ra $\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x + \int\limits_0^1 49x^6\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 14x^3.f'(x)\mathrm{d}x = 7+7-14 = 0.$

$\Rightarrow \int\limits_0^1 \left\{\left[f'(x)\right]^2 + 14x^3 f'(x) + 49x^6\right\}\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \int\limits_0^1 \left[f'(x)+7x^3\right]^2 \mathrm{d}x = 0.$

Do $\left[f'(x)+7x^3\right]^2 \ge 0 \Rightarrow \int\limits_0^1 \left[f'(x)+7x^3\right]^2 \mathrm{d}x \ge 0$. Mà $\int\limits_0^1 \left[f'(x)+7x^3\right]^2 \mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f'(x) = -7x^3.$

$f(x) = -\dfrac{7x^4}{4} + C$. Mà $f(1) = 0 \Rightarrow -\dfrac{7}{4} + C = 0 \Rightarrow C = \dfrac{7}{4}$. Do đó $f(x) = -\dfrac{7x^4}{4} + \dfrac{7}{4}.$

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(-\dfrac{7x^4}{4} + \dfrac{7}{4}\right)\mathrm{d}x = \left(-\dfrac{7x^5}{20} + \dfrac{7}{4}x\right)\Big|_0^1 = \dfrac{7}{5}.$

Cách 2: Tương tự như trên ta có: $\int\limits_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x = -1$

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz, ta có:

$$7 = 7\left(\int\limits_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le 7\left(\int\limits_0^1 (x^3)^2\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x\right) = 7\cdot\frac{1}{7}\cdot\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $f'(x) = ax^3$, với $a \in \mathbb{R}$.

Ta có $\int\limits_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x = -1 \Rightarrow \int\limits_0^1 x^3.ax^3\mathrm{d}x = -1 \Rightarrow \dfrac{ax^7}{7}\Big|_0^1 = -1 \Rightarrow a = -7.$

Suy ra $f'(x) = -7x^3 \Rightarrow f(x) = -\dfrac{7x^4}{4} + C$, mà $f(1) = 0$ nên $C = \dfrac{7}{4}$

Do đó $f(x) = \dfrac{7}{4}\left(1-x^4\right)\ \forall x \in \mathbb{R}.$

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(-\dfrac{7x^4}{4} + \dfrac{7}{4}\right)\mathrm{d}x = \left(-\dfrac{7x^5}{20} + \dfrac{7}{4}x\right)\Big|_0^1 = \dfrac{7}{5}.$

Chú ý: Chứng minh bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.

Khi đó, ta có $\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)$.

Chứng minh:

Trước hết ta có tính chất:

Nếu hàm số $h(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x \ge 0$

Xét tam thức bậc hai $\left[\lambda f(x)+g(x)\right]^2 = \lambda^2 f^2(x)+2\lambda f(x)g(x)+g^2(x)\ge 0$, với mọi $\lambda\in\mathbb{R}$

Lấy tích phân hai vế trên đoạn $[a;b]$ ta được

$$\lambda^2\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2\lambda\int_a^b f(x)\mathrm{g}(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\ge 0, \text{ với mọi } \lambda\in\mathbb{R}\ \ (*)$$

Coi $(*)$ là tam thức bậc hai theo biến λ nên ta có $\Delta'\le 0$

$$\Leftrightarrow\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^2-\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)$$

Câu 36: Chọn D

Ta có: $f'(x)=x^3\left[f(x)\right]^2\Rightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=x^3\Rightarrow\int_1^2\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int_1^2 x^3\mathrm{d}x$

$$\Leftrightarrow\left(-\frac{1}{f(x)}\right)\Bigg|_1^2=\frac{15}{4}\Leftrightarrow-\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(1)}=\frac{15}{4}\Leftrightarrow f(1)=-\frac{4}{5}.$$

Câu 37: Chọn D

Cách 1:

$$\int_0^5 x^2 f'(x)\mathrm{d}x=x^2f(x)\Big|_0^5-\int_0^5 2xf(x)\mathrm{d}x=25.1-2\int_0^1 5tf(5t)\mathrm{d}(5t)=25-50.1=-25.$$

Cách 2:

Ta có: $1=\int_0^1 xf(5x)\mathrm{d}x$. Đặt $t=5x\Rightarrow\mathrm{d}t=5\mathrm{d}x\Rightarrow\frac{1}{5}\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$

$$\Rightarrow 1=\int_0^5\frac{1}{5}t.f(t).\frac{1}{5}\mathrm{d}t\Leftrightarrow 1=\frac{1}{25}\int_0^5 t.f(t)\mathrm{d}t\Leftrightarrow\int_0^5 t.f(t)\mathrm{d}t=25\Rightarrow\int_0^5 x.f(x)\mathrm{d}x=25$$

Đặt $I=\int_0^5 x^2.f'(x)\mathrm{d}x$. Đặt: $\begin{cases}u=x^2\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$

$$\Rightarrow I=x^2.f(x)\Big|_0^5-2\int_0^5 xf(x)\mathrm{d}x=25.f(5)-2.25=-25$$

Câu 38: Chọn D

Ta có: $I=\int_0^1 xf(6x)dx=1$. Đặt $t=6x\Rightarrow dt=6dx\Rightarrow dx=\frac{dt}{6}$.Đổi cận:

x	0	1
t	0	6

Từ $t=6x\Rightarrow x=\dfrac{t}{6}$

Từ đó ta có: $I=\int\limits_0^6\dfrac{t}{6}f(t)\dfrac{dt}{6}=1\Rightarrow\dfrac{1}{36}\int\limits_0^6tf(t)dt=1\Rightarrow\int\limits_0^6tf(t)dt=36\Rightarrow\int\limits_0^6xf(x)dx=36$

$J=\int\limits_0^6x^2f'(x)dx$. Đặt $\begin{cases}u=x^2\\dv=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2xdx\\v=f(x)\end{cases}$

Suy ra: $J=\int\limits_0^6x^2f'(x)dx=x^2f(x)\Big|_0^6-2\int\limits_0^6xf(x)dx)=36.f(6)-2.36=-36$

Câu 39: Chọn D

Đặt $\begin{cases}u=x+1\\\mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\v=f(x)\end{cases}$. Khi đó $I=(x+1)f(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1f(x)\mathrm{d}x$

Suy ra $10=2f(1)-f(0)-\int\limits_0^1f(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\int\limits_0^1f(x)\mathrm{d}x=-10+2=-8$. Vậy $\int\limits_0^1f(x)\mathrm{d}x=-8$.

Câu 40: Chọn D

Đặt $x=-t$. Khi đó $\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^0f(x)dx=\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^0f(-t)d(-t)=-\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^0f(-t)dt=\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}}f(-x)dx$

Ta có: $I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f(x)d(x)=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^0f(x)d(x)+\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}}f(x)d(x)=\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}}f(-x)d(x)+\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}}f(x)d(x)$

Hay $I=\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}}\left(f(-x)+f(x)\right)d(x)=\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2+2\cos2x}d(x)=\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2(1+\cos2x)}d(x)$

$\Leftrightarrow I=\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{4\cos^2x}d(x)=2\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}}|\cos x|d(x)=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xd(x)-2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}\cos xd(x)$

Vậy $I=2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=6.$

Câu 41: Chọn D

Ta có: $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\neq0,\ \forall x\in[1;2]$ nên:

$I=\int\limits_1^2\dfrac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}=\int\limits_1^2\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}$

$$=\int_1^2\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)dx}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)}=\int_1^2\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)dx}{\sqrt{x(x+1)}}$$

$$=\int_1^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx=\left(2\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}\right)\Big|_1^2=4\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2=\sqrt{32}-\sqrt{12}-2.$$

Mà $I=\sqrt{a}-\sqrt{b}-c$ nên $\begin{cases}a=32\\b=12\\c=2\end{cases}$. Suy ra: $P=a+b+c=32+12+2=46$.

Câu 42: Chọn C

Ta có: $f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{2}{2x-1}dx=\ln|2x-1|+C$, với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Xét trên $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. Ta có $f(0)=1$, suy ra $C=1$.

Do đó, $f(x)=\ln|2x-1|+1$, với mọi $x\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. Suy ra $f(-1)=1+\ln 3$.

Xét trên $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. Ta có $f(1)=2$, suy ra $C=2$.

Do đó, $f(x)=\ln|2x-1|+2$, với mọi $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. Suy ra $f(3)=2+\ln 5$.

Vậy $f(-1)+f(3)=3+\ln 3+\ln 5=3+\ln 15$.

Câu 43: Chọn B

Ta có $f'(x)=x\left[f(x)\right]^2\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=x$.

Do đó $\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int xdx\Leftrightarrow-\int d\left(\frac{1}{f(x)}\right)=\int xdx\Leftrightarrow-\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{2}x^2+C\Leftrightarrow f(x)=-\frac{1}{\frac{1}{2}x^2+C}$

Theo giả thiết $f(2)=-\frac{1}{3}\Rightarrow C=1\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{\frac{1}{2}x^2+1}$

Từ đó suy ra $f(1)=-\frac{2}{3}$.

Câu 44: Chọn B

Ta có $f'(x)=4x^3\left[f(x)\right]^2\Rightarrow-\frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=-4x^3\Rightarrow\left[\frac{1}{f(x)}\right]'=-4x^3\Rightarrow\frac{1}{f(x)}=-x^4+C$

Do $f(2)=-\frac{1}{25}$, nên ta có $C=-9$. Do đó $f(x)=-\frac{1}{x^4+9}\Rightarrow f(1)=-\frac{1}{10}$.

Câu 45: Chọn C

Ta có $f(x)=\int f'(x)dx=\int\left(2\cos^2x+1\right)dx=\int(\cos 2x+2)dx=\frac{1}{2}\sin 2x+2x+C$

$f(0)=4 \Leftrightarrow C=4$.

Vậy $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{2}\sin 2x+2x+4\right)dx=\left(-\frac{1}{4}\cos 2x+x^2+4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2+16\pi+4}{16}$.

Câu 46: Chọn B

Cách 1: $\int\limits_0^4 x^2 f'(x)\mathrm{d}x=x^2 f(x)\Big|_0^4-\int\limits_0^4 2xf(x)\mathrm{d}x=16.1-2\int\limits_0^1 4tf(4t)\mathrm{d}(4t)=16-2.16.1=-16$.

Cách 2: Đặt $t=4x\Rightarrow \mathrm{d}t=4\mathrm{d}x$. Đổi cận:

Khi đó: $\int\limits_0^1 xf(4x)\mathrm{d}x=\frac{1}{16}\int\limits_0^4 tf(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{16}\int\limits_0^4 xf(x)\mathrm{d}x$.

Xét: $I=\int\limits_0^4 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$: Đặt $\begin{cases}u=x^2\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=2xdx\\ v=\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)\end{cases}$.

$\Rightarrow I=x^2 f(x)\Big|_0^4-2\int\limits_0^4 xf(x)\mathrm{d}x=4^2.f(4)-2.16=-16$.

Câu 47: Chọn C

Ta có $f'(x)=2\cos^2 x+3=4+\cos 2x\Rightarrow f(x)=4x+\frac{1}{2}\sin 2x+C$

Ta lại có: $f(0)=4\Rightarrow C=4$

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(4x+\frac{1}{2}\sin 2x+4\right)dx=\left(2x^2-\frac{1}{4}\cos 2x+4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2+8\pi+2}{8}$.

Câu 48: Chọn C

Ta có $f(x)=\int\left(2\sin^2 x+1\right)\mathrm{d}x=\int(2-\cos 2x)\mathrm{d}x=2x-\frac{\sin 2x}{2}+C$.

Vì $f(0)=4\Rightarrow C=4$ hay $f(x)=2x-\frac{1}{2}\sin 2x+4$.

Khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left[2x-\frac{1}{2}\sin 2x+4\right]\mathrm{d}x=\left(x^2+\frac{1}{4}\cos 2x+4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{4}+\pi=\frac{\pi^2+16\pi-4}{16}$.

Câu 49: Chọn C

$f'(x)=2\sin^2 x+3=4-\cos 2x$.

Có $\int(4-\cos 2x)\mathrm{d}x=4x-\frac{1}{2}\sin 2x+C$ suy ra $f(x)=4x-\frac{1}{2}\sin 2x+C$.

Do $f(0)=4$ nên $C=4\Rightarrow f(x)=4x-\frac{1}{2}\sin 2x+4$.

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(4x-\frac{1}{2}\sin 2x+4\right)\mathrm{d}x=\left(2x^2+\frac{1}{4}\cos 2x+4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2+8\pi-2}{8}$.

Câu 50: Chọn B

Ta có: $I=\int_0^1 xf(3x)dx=1$. Đặt $t=3x\Rightarrow dt=3dx\Rightarrow dx=\frac{dt}{3}$.Đổi cận:

x	0	1
t	0	3

Từ $t=3x\Rightarrow x=\frac{1}{3}$

Từ đó ta có: $I=\int_0^3 \frac{t}{3}f(t)\frac{dt}{3}=1\Rightarrow\frac{1}{9}\int_0^3 tf(t)dt=1\Rightarrow\int_0^3 tf(t)dt=9\Rightarrow\int_0^3 xf(x)dx=9$

$J=\int_0^3 x^2f'(x)dx$. Đặt $\begin{cases}u=x^2\\dv=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2xdx\\v=f(x)\end{cases}$

Suy ra: $J=\int_0^3 x^2f'(x)dx=x^2f(x)\Big|_0^3-2\int_0^3 xf(x)dx)=9.f(3)-2.9=-9$