

Câu 1 (1,0 điểm). Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{2x-1}{1-x}$.

Câu 2 (1,0 điểm). Tìm m để hàm số $y = x^3 - 2(m-1)x^2 + 12x - 3m$ đồng biến trên tập số thực.

Câu 3 (1,0 điểm)

a) Giải bất phương trình $5^{1+x^2} - 5^{1-x^2} \leq 24$.

b) Trong mặt phẳng (Oxy), tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z + 4i - 3| = 1$.

Câu 4 (1,0 điểm) Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - \sin x) \sin x dx$

Câu 5 (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu tâm $I(1; -2; 1)$

đồng thời tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$.

Câu 6 (1,0 điểm).

a) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $f(x) = \left(nx^2 - \frac{1}{x^3}\right)^{15}$ (với $x \neq 0$), biết rằng tổng tất cả các hệ số trong khai triển đã cho bằng 0.

b) Cho biết $\cos \alpha + \sqrt{2} \sin \alpha = \sqrt{2}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 7 (1,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , mặt bên SBC là tam giác vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Cho biết góc giữa SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30° .

a) Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

b) Xác định và tính theo a độ dài đoạn vuông góc chung của SA và CD .

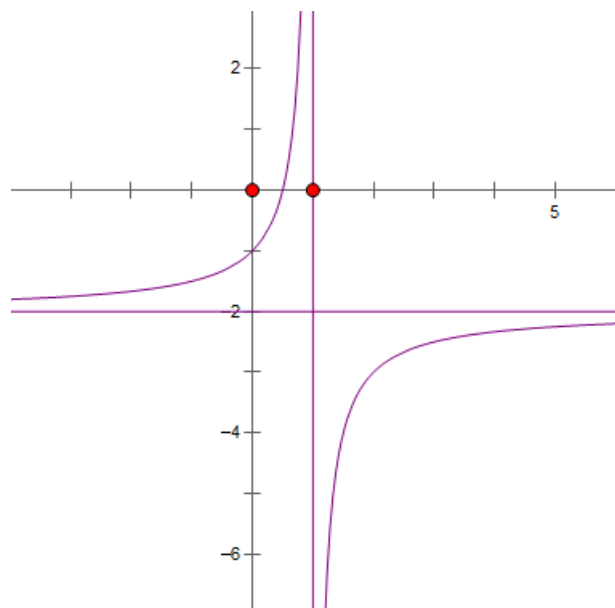
Câu 8 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $A(2;3)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $I(6;6)$ và tâm đường tròn nội tiếp tam giác $J(4;5)$. Viết phương trình BC .

Câu 9 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x+2y^2}} + \frac{1}{\sqrt{2x^2+y}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(x+y)(x+y+1)}} \\ \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2} + \sqrt{y^2-2} = 2\sqrt[4]{y(x^2-2)} \end{cases}$$

Câu 10 (1,0 điểm). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{2a+3} + \frac{1}{2b+3} + \frac{1}{2c+3} = \frac{9}{10}$. Tìm

giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{3a+2} + \frac{1}{3b+2} + \frac{1}{3c+2}$.

-----HẾT-----

Câu	Nội dung	Điểm																		
1	Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{2x-1}{1-x}$.	1,0đ																		
	TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ Sự biến thiên: $y' = \frac{1}{(1-x)^2} > 0, \forall x \neq 1$ Hàm số đồng biến trên hai $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.	0,25																		
	Giới hạn và tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$ nên $y = -2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ nên $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số	0,25																		
	Bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>+</td><td></td><td>+</td><td></td></tr><tr><td>y</td><td>-2</td><td></td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>-2</td></tr></table>	x	$-\infty$		1		$+\infty$	y'		+		+		y	-2		$+\infty$	$-\infty$	-2	0,25
	x	$-\infty$		1		$+\infty$														
y'		+		+																
y	-2		$+\infty$	$-\infty$	-2															
Đồ thị: 	0,25																			
2	Tìm m để hàm số $y = x^3 - 2(m-1)x^2 + 12x - 3m$ đồng biến trên tập số thực.	1,0đ																		
	$y' = 3x^2 - 4(m-1)x + 12$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$.	0,25																		
	Ycbt $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$	0,25																		
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ a > 0 \end{cases}$	0,25																		
	$\Leftrightarrow -2 \leq m \leq 4$	0,25																		

3	a) Giải bất phương trình $5^{1+x^2} - 5^{1-x^2} \leq 24$.	0,5đ
	Đặt $t = 5^{x^2} > 0$, khi đó bất phương trình đã cho trở thành $5t^2 - 24t - 5 \leq 0$	0,25
	$\Leftrightarrow -\frac{1}{5} \leq t = 5^{x^2} \leq 5 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-1; 1]$	0,25
	b) Trong mặt phẳng (Oxy), tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $ z + 4i - 3 = 1$.	0,5đ
	Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có: Đkbt $\Leftrightarrow (x-3) + (y+4)i = 1 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 = 1$	0,25
	Kết luận: Tập hợp điểm cần tìm là đường tròn (C): $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 1$	0,25
4	Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - \sin x) \sin x dx$	1,0đ
	$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x) dx = I_1 + I_2$	0,25
	$I_1 = x \cos x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 0 + \sin x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} = 1$	0,25
	$I_2 = \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x \right) \Big _0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$	0,25
	$I = I_1 + I_2 = 1 - \frac{\pi}{4}$.	0,25
5	Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu tâm $I(1; -2; 1)$ đồng thời tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$.	1,0đ
	Giả sử mặt cầu (S) cần tìm tiếp xúc với Δ tại $H \Rightarrow (1+t; t; 2+t)$	0,25
	$IH \perp \Delta \Rightarrow t = -1 \Rightarrow H(0; -1; 1)$	0,25
	$R = IH = \sqrt{2}$	0,25
	$(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 2$	0,25

6	a) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $f(x) = \left(nx^2 - \frac{1}{x^3}\right)^{15}$ (với $x \neq 0$), biết rằng tổng tất cả các hệ số trong khai triển đã cho bằng 0.	0,5đ
	$f(x) = \left(nx^2 - \frac{1}{x^3}\right)^{15} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k (nx^2)^{15-k} \left(-\frac{1}{x^3}\right)^k$ và $f(1) = 0 \Rightarrow n = 1$	0,25
	Số hạng không chứa x ứng với $30 - 2k = 3k \Leftrightarrow k = 6 \Rightarrow$ Số hạng cần tìm C_{15}^6	0,25
	b) Cho biết $\cos \alpha + \sqrt{2} \sin \alpha = \sqrt{2}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.	0,5đ
	$\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, ta có $\cos \alpha + \sqrt{2} \sin \alpha = \sqrt{2} \Leftrightarrow 3\sin^2 \alpha - 4\sin \alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{3}$.	0,25
	$\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $\cos \alpha + \sqrt{2} \sin \alpha = \sqrt{2} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}-4}{\sqrt{2}+4}$	0,25
7	Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , mặt bên SBC là tam giác vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Cho biết góc giữa SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30° . a) Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$. b) Xác định và tính theo a độ dài đoạn vuông góc chung của SA và CD .	1,0đ
	a) Kẻ $SH \perp BC$, chứng minh được $SH \perp (ABCD)$ và $\widehat{SBH} = 30^\circ$.	0,25
	Tính được $SH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ và $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$	0,25
	Chứng minh được SC là đoạn vuông góc chung của SA và CD .	0,25
	Tính được: $d(SA, CD) = \frac{a}{2}$	0,25
8	Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $A(2;3)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $I(6;6)$ và tâm đường tròn nội tiếp tam giác $J(4;5)$. Viết phương trình BC .	1,0đ
	Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình $(C): (x-6)^2 + (y-6)^2 = 25$	0,25
	Đường thẳng $AJ: x-y+1=0$ cắt (C) tại điểm thứ hai $D(9;10)$.	0,25
	Chứng minh được $DB = DC = DJ = 5\sqrt{2}$ Đường tròn ngoại tiếp tam giác JBC có phương trình $(C_2): (x-9)^2 + (y-10)^2 = 50$	0,25
	Tọa độ B, C thỏa mãn $\begin{cases} (x-6)^2 + (y-6)^2 = 25 \\ (x-9)^2 + (y-10)^2 = 50 \end{cases}$ $\Rightarrow 3x + 4y - 42 = 0$. Vậy $BC: 3x + 4y - 42 = 0$.	0,25

9	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x+2y^2}} + \frac{1}{\sqrt{2x^2+y}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(x+y)(x+y+1)}} \\ \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2} + \sqrt{y^2-2} = 2\sqrt[4]{y(x^2-2)} \end{cases}$	1,0đ
	Đặt $x+y=S, xy=P$, điều kiện $x \geq \sqrt{2}, y \geq \sqrt{2}, S^2 \geq 4P$. Ta có: $\frac{1}{\sqrt{x+2y^2}} + \frac{1}{\sqrt{2x^2+y}} \geq \frac{2}{\sqrt[4]{(x+2y^2)(2x^2+y)}} = \frac{2}{\sqrt[4]{4P^3+P+2S^3-6PS}}$	0,25
	Ta chứng minh $\frac{2}{\sqrt[4]{4P^3+P+2S^3-6PS}} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{S^2+S}}$ (*). Thật vậy $(*) \Leftrightarrow S^4+2S^3+S^2 \geq 4(4P^2+P+2S^3-6PS)$ $\Leftrightarrow (S^2-4P)[(S-3)^2+4(P-2)] \geq 0$ luôn đúng vì $S^2 \geq 4P$ và $P=xy \geq 2$.	0,25
	Đẳng thức ở (1) xảy ra $\Leftrightarrow x=y$. Với $y=x$, từ (2) ta có $(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{x^2-2})^2=0$	0,25
	$\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{x^2-2} \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow (x;y)=(2;2)$ thỏa mãn điều kiện.	0,25
10	Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{2a+3} + \frac{1}{2b+3} + \frac{1}{2c+3} = \frac{9}{10}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{3a+2} + \frac{1}{3b+2} + \frac{1}{3c+2}$.	1,0đ
	Ta chứng minh $\frac{1}{3a+2} \geq \frac{8}{3(2a+3)} - \frac{2}{5}$, thật vậy $\frac{1}{3a+2} \geq \frac{8}{3(2a+3)} - \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{(6a-1)^2}{15(3a+2)(2a+3)} \geq 0$	0,25
	Tương tự và cộng từng vế, ta có: $P = \frac{1}{3a+2} + \frac{1}{3b+2} + \frac{1}{3c+2} \geq \frac{8}{3} \left(\frac{1}{2a+3} + \frac{1}{2b+3} + \frac{1}{2c+3} \right) - \frac{6}{5} = \frac{6}{5}$	0,25
	Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{6}$	0,25
	Kết luận $\min P = \frac{6}{5}$ khi $a=b=c=\frac{1}{6}$	0,25