

Bài toán 0.1. (Lim Olympic - Cà Mau TST - P1)

Cho hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục, khác hằng và thỏa mãn:

$$f(x^3) + 1 = (xf(x) + 2x^2 - 1)^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Xét dãy số thực (u_n) xác định bởi $u_1 = m \in \mathbb{R}$ và $u_{n+1} = f(u_n), \forall n \geq 1$.

- ① Chứng minh rằng tồn tại số thực $m > 1$ sao cho dãy (u_n) là dãy hằng.
- ② Giả sử f là đa thức khác hằng, hỏi có bao nhiêu số thực $m \in (-1, 3)$ để $u_{2027} = 1$?

Lời giải.

- ① Xét hàm số $g(x) = f(x) - x$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta cần chứng minh rằng tồn tại số thực $m > 1$ sao cho $g(x) = 0$. Từ giả thiết ta có:

$$f(x^3) + 1 = (xf(x) + 2x^2 - 1)^2 \geq 0 \iff f(x) \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dễ dàng chứng minh $f(1) \in \{0, -1\}$ nên ta suy ra $g(1) \leq -1 < 0$. Giả sử rằng $f(x) < x$ với mọi $x > 1$. Khi đó với mọi $x > 1$ ta cũng có $f(x^3) < x^3$ và:

$$(xf(x) + 2x^2 - 1)^2 = f(x^3) + 1 < x^3 + 1 \implies f(x) < \frac{\sqrt{x^3 + 1} - 2x^2 + 1}{x}.$$

Tuy nhiên với $x = 3$ ta thu được điều vô lí.

Do đó tồn tại một số thực dương $c > 1$ sao cho $f(c) \geq c$ hay $g(c) \geq 0$. Lại có f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên g cũng liên tục trên $\mathbb{R}$ và $g(1) \cdot g(c) \leq 0$. Do đó theo định lý giá trị trung gian, tồn tại một số thực $m \in (1, c)$ sao cho $g(m) = 0 \iff f(m) = m$. Vì $u_1 = m$ nên ta suy ra dãy (u_n) hằng.

- ② Giả sử f là một đa thức bậc $k \geq 1$. Khi đó nếu $k = 1$ thì ta có đa thức $u(x) = f(x^3) + 1$ có bậc là 3 trong khi đa thức $v(x) = (xf(x) + 2x^2 - 1)^2$ có bậc là 4, mâu thuẫn. Do đó $k \geq 2$ hay nói cách khác thì lúc này $u(x)$ có bậc là $3k$ trong khi $v(x)$ có bậc là $2k + 2$. Do đó $3k = 2k + 2$ hay $k = 2$.

Vậy $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$. Với $x = 0$, ta có:

$$f(0^3) + 1 = (0 + 2 - 1)^2 \iff f(0) = 0 \implies c = 0.$$

Do đó $f(x) = ax^2 + bx$ với $a \neq 0$. Thay vào đẳng thức ban đầu ta được:

$$ax^6 + bx^3 + 1 = [ax^3 + (b + 2)x^2 - 1]^2.$$

Khi đó đồng nhất hệ số của x^6 và x^5 ta được $a = 1$ và $b = -2$. Vậy $f(x) = x^2 - 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Từ đây, theo hệ thức truy hồi, ta có dãy (u_n) xác định bởi $u_1 = m \in (-1, 3)$ và với mọi $n \geq 1$, ta có:

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n \iff u_{n+1} - 1 = (u_n - 1)^2 - 2.$$

Đặt $v_n = u_n - 1$ thì khi đó ta có $v_1 = m - 1 \in (-2, 2)$ và:

$$v_{n+1} = v_n^2 - 2, \forall n \geq 1.$$

Đặt $v_1 = 2 \cos(\alpha)$ với $\alpha \in (0, \pi)$, khi đó bằng quy nạp ta dễ dàng chứng minh được rằng:

$$v_n = 2 \cos(2^{n-1} \alpha), \forall n \geq 1.$$

Ta có $u_{2027} = 1 \Leftrightarrow v_{2027} = 0$. Khi đó ta có:

$$\cos(2^{2026} \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{(2k+1)\pi}{2^{2027}}.$$

Vì $\alpha \in (0, \pi)$ nên ta suy ra:

$$0 < \frac{2k+1}{2^{2027}} < 1 \Leftrightarrow 0 < 2k+1 < 2^{2027}.$$

Vì k là số nguyên, $2k+1$ là các số lẻ dương nằm giữa 0 và 2^{2027} . Khi đó các giá trị của k thỏa mãn chạy từ $k=0$ đến $k=2^{2026}-1$. Do đó tổng cộng có đúng 2^{2026} giá trị nguyên của k thỏa mãn. Để ý rằng với mỗi giá trị k cho một góc $\alpha \in (0, \pi)$ duy nhất. Hàm $\cos \alpha$ nghịch biến trên $(0, \pi)$ nên mỗi α cho một giá trị v_1 duy nhất, tương ứng với một giá trị m duy nhất.

Vậy có tất cả 2^{2026} số thực m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 0.2. (Lim Olympic - Cà Mau TST - P2)

Với n nguyên dương, xét các số thực thay đổi $x_1; x_2; \dots; x_n \in [-1; 1]$.

Quy ước $x_0 = x_n$ và $x_{n+1} = x_1$. Ký hiệu $T = \max_{1 \leq k \leq n} \{x_k(x_{k-1} + x_{k+1})\}$ là số lớn nhất trong n số:

$$x_1(x_0 + x_2); x_2(x_1 + x_3); \dots; x_n(x_{n-1} + x_{n+1})$$

- 1 Khi $n = 2026$, tìm giá trị nhỏ nhất của T .
- 2 Khi $n = 2027$, chứng minh rằng $T \geq -\frac{1}{4}$ và tìm một bộ $x_1; x_2; \dots; x_n \in [-1; 1]$ để dấu bằng xảy ra.

Lời giải.

- 1 Với mọi k , do $|x_k| \leq 1$ và $|x_{k-1} + x_{k+1}| \leq 2$ nên $x_k(x_{k-1} + x_{k+1}) \geq -2$. Vì thế $T \geq -2$.

Mặt khác, chọn $x_k = (-1)^k$ với $1 \leq k \leq 2026$. Khi đó $x_{k-1} = x_{k+1} = -x_k$ với mọi k .

Suy ra $x_k(x_{k-1} + x_{k+1}) = x_k(-2x_k) = -2$ với mọi k , nên $T = -2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là **-2**

- 2 Nếu có $x_i = 0$ thì $x_i(x_{i-1} + x_{i+1}) = 0$, suy ra $T \geq 0 > -\frac{1}{4}$.

Vì vậy, ta chỉ cần xét trường hợp mọi x_i đều khác 0.

Để ý trong 2027 số $x_1, x_2, \dots, x_{2027}$ trên vòng tròn, tồn tại hai số x_i, x_{i+1} cùng dấu nhau.

Đặt $a = |x_i|$, $b = |x_{i+1}|$, khi đó $0 < a, b \leq 1$ và $x_i x_{i+1} = ab$.

Ta có $x_i(x_{i-1} + x_{i+1}) = x_i x_{i-1} + ab \geq -a + ab = -a(1-b)$.

Hơn thế nữa $x_{i+1}(x_i + x_{i+2}) = ab + x_{i+1} x_{i+2} \geq ab - b = -b(1-a)$.

Nếu $a \leq b$ thì $a(1-b) \leq b(1-b) \leq \frac{1}{4}$, do đó $x_i(x_{i-1} + x_{i+1}) \geq -\frac{1}{4}$.

Nếu $b \leq a$ thì $b(1-a) \leq a(1-a) \leq \frac{1}{4}$, do đó $x_{i+1}(x_i + x_{i+2}) \geq -\frac{1}{4}$.

Trong mọi trường hợp đều có ít nhất một trong 2027 biểu thức không nhỏ hơn $-\frac{1}{4}$ nên $T \geq -\frac{1}{4}$.

Dấu bằng đạt được khi chọn $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}$ và $x_k = (-1)^{k+1}$ với $3 \leq k \leq 2027$. Thật vậy, $x_1(x_{2027} + x_2) = x_2(x_1 + x_3) = -\frac{1}{4}$, còn các biểu thức khác bằng $-\frac{3}{2}$ hoặc -2 . Khi đó $T = -\frac{1}{4}$.

Bài toán 0.3. (Lim Olympic - Cà Mau TST - P3)

Với mỗi cặp số nguyên dương a và b , kí hiệu $f(a, b) = 11a + 6b + 8ab$.

- ① Chứng minh rằng với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$ và $m > 1$ là lũy thừa của 2, nếu:

$$f(a, b) \equiv f(c, d) \pmod{m} \quad \text{và} \quad f(b, a) \equiv f(d, c) \pmod{m}$$

thì $a - c$ và $b - d$ đều chia hết cho m .

Hỏi kết luận có còn đúng không nếu m có ước nguyên tố lẻ?

- ② Chứng minh rằng $k = 2$ là số tự nhiên nhỏ nhất sao cho $f(a, b) + k$ không là số chính phương $\forall a, b \in \mathbb{Z}^+$.

 Lời giải.

- ① Giả sử $m > 1$ là một lũy thừa của 2 và $f(a, b) \equiv f(c, d) \pmod{m}$, $f(b, a) \equiv f(d, c) \pmod{m}$.

Ta cần chứng minh $a \equiv c \pmod{m}$ và $b \equiv d \pmod{m}$. Đặt $P = a - c$, $Q = b - d$.

Vì $f(a, b) - f(b, a) = 5(a - b)$ nên từ $f(a, b) - f(b, a) \equiv f(c, d) - f(d, c) \pmod{m}$ hay

$$5(P - Q) \equiv 0 \pmod{m}$$

Do m là lũy thừa của 2 nên $\gcd(5, m) = 1$, suy ra $P \equiv Q \pmod{m}$.

Mặt khác $0 \equiv f(a, b) - f(c, d) = 11P + 6Q + 8(ab - cd) \pmod{m}$.

Ta có $ab - cd = a(b - d) + d(a - c) = aQ + dP$.

Từ $P \equiv Q \pmod{m}$, suy ra $ab - cd \equiv (a + d)P \pmod{m}$. Do đó $(17 + 8(a + d))P \equiv 0 \pmod{m}$.

Số $17 + 8(a + d)$ là số lẻ nên nguyên tố cùng nhau với m . Vì vậy $P \equiv 0 \pmod{m}$.

Kết hợp với $P \equiv Q \pmod{m}$ nên $P \equiv Q \equiv 0 \pmod{m}$.

Vậy $a \equiv c \pmod{m}$ và $b \equiv d \pmod{m}$.

- ② Bây giờ giả sử m có một ước nguyên tố lẻ p . Đặt $t = \frac{m}{p}$ và xét

$$a = 1, \quad d = \frac{p(p + 8t + 8) - 25}{8}, \quad b = d - t, \quad c = 1 + t.$$

Vì p lẻ nên $p^2 \equiv 1 \pmod{8}$, do đó b, d là các số nguyên. Hơn nữa,

$$b = d - t = (p - 1)t + p + \frac{p^2 - 25}{8} > 0,$$

Do đó a, b, c, d là các số nguyên dương.

Ta có $c = a + t$ và $d = b + t$. Do đó

$$f(c, d) - f(a, b) = t(17 + 8(a + b + t)) = t(25 + 8b + 8t) = tp(p + 8N) = m(p + 8N)$$

nên $f(c, d) \equiv f(a, b) \pmod{m}$. Tương tự $f(d, c) \equiv f(b, a) \pmod{m}$.

Tuy nhiên $c - a = t = \frac{m}{p}$ không chia hết cho m , nên $a \not\equiv c \pmod{m}$.

Vì vậy kết luận trên không còn đúng khi m có một ước nguyên tố lẻ.

- ③ Với $k = 0$ thì $f(1, 1) = 25$ là số chính phương.

Với $k = 1$ thì $f(2, 19) + 1 = 441$ là số chính phương.

Vì vậy $k \geq 2$, ta sẽ chứng minh $f(a, b) + 2$ không là số chính phương với mọi $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

Để ý $4f(a, b) + 33 = (4a + 3)(8b + 11)$.

Giả sử tồn tại $a, b \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $f(a, b) + 2 = x^2$.

Khi đó $(4a + 3)(8b + 11) = 4x^2 + 25 = (2x)^2 + 5^2$.

Vì $4a + 3 \equiv 3 \pmod{4}$ nên tồn tại ước nguyên tố p của $4a + 3$ sao cho $p \equiv 3 \pmod{4}$.

Ta có bổ đề quen thuộc sau, bạn đọc tự chứng minh bằng định lý Fermat nhỏ:

Bổ đề 0.1.

Cho $p \equiv 3 \pmod{4}$ là số nguyên tố và x, y là hai số nguyên thoả mãn $p \mid x^2 + y^2$.

Chứng minh rằng $p \mid x$ và $p \mid y$.

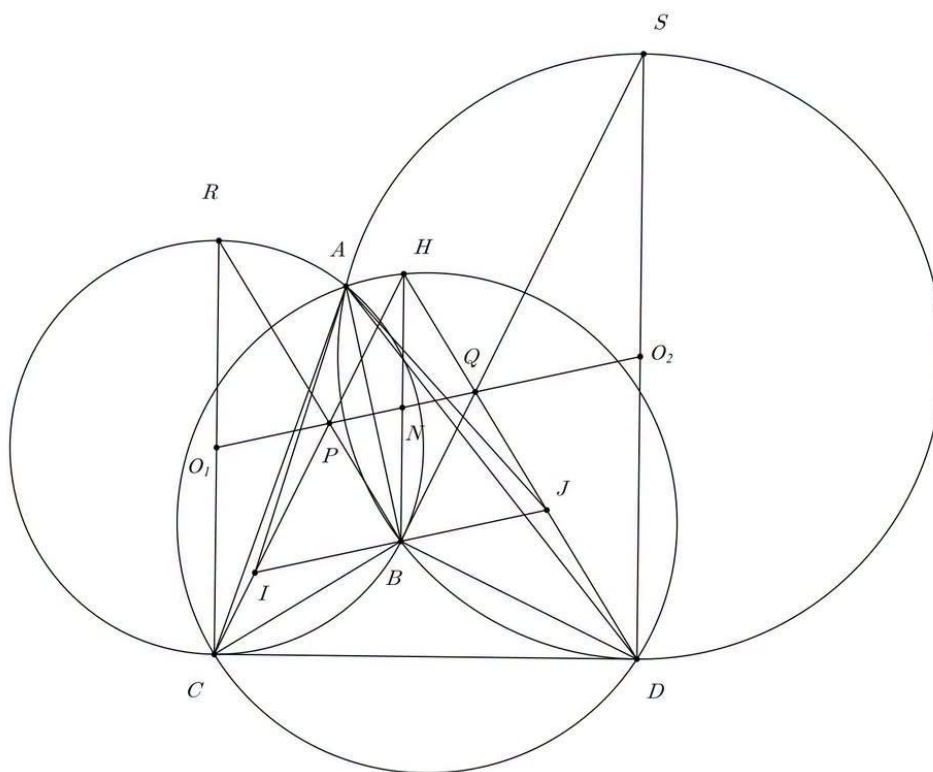
Khi đó $p \mid (2x)^2 + 5^2$ nên theo bổ đề quen thuộc ta có $p \mid 5$ hay $p = 5$, vô lí với $p \equiv 3 \pmod{4}$.

Do đó không tồn tại các số nguyên dương a, b thoả mãn $f(a, b) + 2$ là số chính phương.

Vì vậy số tự nhiên k nhỏ nhất thoả mãn yêu cầu là $k_{\min} = 2$

Bài toán 0.4. (Lim Olympic - Cà Mau TST - P4)

Cho hai đường tròn (O_1) , (O_2) có bán kính khác nhau và cắt nhau tại hai điểm A, B . Kẻ tiếp tuyến chung CD của hai đường tròn (gần B hơn) với $C \in (O_1)$; $D \in (O_2)$. Dựng điểm H sao cho tam giác HCD nhận B làm trực tâm. Kẻ đường kính CR của (O_1) và đường kính DS của (O_2) . Biết rằng BR cắt HC ở P và BS cắt HD ở Q . Dựng các điểm I, J sao cho các đoạn thẳng HI, HJ lần lượt nhận P, Q là trung điểm. Chứng minh rằng hai tam giác AIC và AJD có cùng bán kính đường tròn ngoại tiếp.



Lời giải.

Do $CB \perp HD$ và $CB \perp BR \Rightarrow BP \parallel HQ$ và $BQ \parallel HP \Rightarrow HPBQ$ là hình bình hành.

$\Rightarrow PQ$ cắt HB tại trung điểm N của mỗi đường. Mà O_1 là trung điểm RC , $RC \parallel HB \Rightarrow O_1, P, N$ thẳng hàng theo bổ đề hình thang $\Rightarrow O_1, O, P, N, Q, O_2$ thẳng hàng $\Rightarrow AB \perp PQ$.

Có PN là đường trung bình $\triangle BIH \Rightarrow PN \parallel BI$ và $BI = 2PN$, tương tự $BJ = 2NQ$ và $NQ \parallel BJ$.

$\Rightarrow B$ là trung điểm IJ và $IJ \parallel PQ$, $PQ \perp AB \Rightarrow AB$ là trung trực $IJ \Rightarrow AI = AJ$.

Ta có $\angle CAD = \angle BCD + \angle BDC = 180 - \angle CBD = \angle CHD$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $AHDC$ nội tiếp $\Rightarrow \angle ACI = \angle ADJ$.

$$\Rightarrow 2R_{(AIC)} = \frac{AI}{\sin \angle ACI} = \frac{AJ}{\sin \angle ADJ} = 2R_{(AJD)} \Rightarrow R_{(AIC)} = R_{(AJD)}.$$

CHỌN ĐTQG CÀ MAU 2026 – NGÀY 2

Bài toán 0.5. (Lim Olympic - Cà Mau TST - P5)

Trên mặt phẳng tọa độ giả lập cho một trò chơi điện tử, Bảo Long và Châu Mai cùng điều khiển một chiếc xe. Ban đầu, xe ở gốc tọa độ và hướng về chiều dương của trục Ox . Xe có thể đi theo một trong bốn hướng: lên, xuống, trái, phải. Hai bạn chơi luân phiên thực hiện các lượt đi như sau:

♦ Long cho xe đi thẳng theo hướng hiện tại với độ dài đường đi là số nguyên tùy ý từ 1 đến 10.

♦ Mai không di chuyển mà quay xe một góc 90° cùng chiều hoặc ngược chiều kim đồng hồ.

Biết rằng Long đi trước và thực hiện tổng cộng k lượt. Sau mỗi lượt của Long, hệ thống ghi nhận lại vị trí dừng xe. Nếu có một vị trí dừng nào trùng với vị trí được ghi nhận trước đó (kể cả gốc tọa độ) thì Mai thắng, nếu không thì Long thắng. Hãy xác định người có chiến thuật thắng nếu:

① $k = 20$.

② $k = 400$.

✍️ Lời giải.

① Để giải quyết bài toán, ta sẽ chỉ ra một chiến thuật cụ thể giúp Long luôn giành chiến thắng.

Thật vậy, trong $k = 20$ lượt đi của mình, Long sẽ thực hiện chính xác 10 lượt di chuyển theo phương ngang (trục Ox) và 10 lượt theo phương dọc (trục Oy). Điều kiện này hiển nhiên được thỏa mãn do xen kẽ giữa các lượt của Long là 19 lần Mai quay xe một góc 90° .

Gọi $P_0(0, 0)$ là vị trí ban đầu và $P_1, P_2, \dots, P_{20}$ là tọa độ của xe sau mỗi lượt đi tương ứng của Long. Ý tưởng cốt lõi của Long là tập trung kiểm soát hoàn toàn sự thay đổi tọa độ trên một trục, chẳng hạn trục Ox , nhằm đảm bảo chiếc xe không bao giờ quay lại một hoành độ đã từng đi qua.

Cụ thể, chiến thuật của Long được xây dựng như sau:

- ♦ Vào các lượt đi theo phương ngang (lượt lẻ: $1, 3, 5, \dots, 19$), Long sẽ quan sát hướng xe hiện tại: nếu xe đang hướng về chiều dương của Ox , Long quyết định đi thẳng 10 đơn vị; ngược lại, nếu xe hướng về chiều âm của Ox , Long đi thẳng 1 đơn vị.
- ♦ Đối với các lượt đi theo phương dọc (trục Oy), Long có thể chọn độ dài di chuyển tùy ý thỏa mãn luật chơi, chẳng hạn luôn chọn đi 1 đơn vị.

Ta sẽ chứng minh tính đúng đắn của chiến thuật này. Gọi $X_0 = 0$ và $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ lần lượt là tọa độ x của xe ngay sau các lượt di chuyển ngang. Dễ thấy, độ lệch tọa độ giữa X_{m-1} và X_m hoàn toàn phụ thuộc vào hướng xe:

♦ Nếu hướng dương: $X_m = X_{m-1} + 10 \equiv X_{m-1} - 1 \pmod{11}$.

♦ Nếu hướng âm: $X_m = X_{m-1} - 1 \equiv X_{m-1} - 1 \pmod{11}$.

Như vậy, với mọi nỗ lực quay xe của Mai, ta luôn thu được một hệ thức bất biến theo modulo 11:

$$X_m \equiv X_{m-1} - 1 \pmod{11}.$$

Xuất phát từ $X_0 = 0$, các giá trị tiếp theo khi đối chiếu trên modulo 11 sẽ tạo thành dãy:

$$X_1 \equiv 10, X_2 \equiv 9, X_3 \equiv 8, \dots, X_{10} \equiv 1 \pmod{11}.$$

Tập hợp 11 giá trị $\{X_0, X_1, \dots, X_{10}\}$ có số dư đôi một khác nhau khi chia cho 11, từ đó suy ra 11 giá trị này trên thực tế là hoàn toàn phân biệt.

Bây giờ, quan sát dãy tọa độ x của toàn bộ 21 điểm $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{20}$, ta thấy chúng có dạng:

$$X_0, X_1, X_1, X_2, X_2, \dots, X_{10}, X_{10}.$$

Điều kiện cần để hai điểm P_i và P_j trùng nhau là tọa độ x của chúng phải bằng nhau. Nhờ tính phân biệt của tập các hoành độ X_m vừa chứng minh, sự lặp lại tọa độ x duy nhất chỉ có thể xảy ra ở các cặp điểm liên tiếp mang dạng $P_{2m-1}(X_m, Y_{m-1})$ và $P_{2m}(X_m, Y_m)$.

Tuy nhiên, xét tung độ tương ứng, ta luôn có $Y_m = Y_{m-1} \pm l_{2m}$. Vì luật chơi quy định nghiêm ngặt độ dài $l \geq 1$, ta lập tức có $Y_m \neq Y_{m-1}$. Điều này dẫn đến $P_{2m-1} \neq P_{2m}$.

Từ các lập luận trên, ta kết luận không có bất kỳ hai điểm nào trong 21 điểm trùng nhau, đồng nghĩa Bảo Long chắc chắn giành chiến thắng.

- ② Ta sẽ chứng minh rằng Châu Mai luôn có chiến thuật giành chiến thắng bằng cách ép chiếc xe không thể thoát ra khỏi một miền hữu hạn. Khi số lượng vị trí được ghi nhận vượt quá số điểm nguyên trong miền đó, theo nguyên lý Dirichlet, xe buộc phải đi qua một vị trí ít nhất hai lần.

Cụ thể, chiến thuật của Mai được xây dựng dựa trên sự độc lập giữa hai trục tọa độ. Trước mỗi lượt đi của Long, Mai sử dụng quyền quay xe 90° của mình (chọn rẽ trái hoặc phải) để hướng chiếc xe vào chiều dương hoặc chiều âm của trục vuông góc mà Long sắp sửa đi tới. Gọi tọa độ hiện tại trên trục đó là z (z đóng vai trò là x hoặc y). Mai sẽ quan sát z và hành động như sau:

- ◇ Nếu $z \leq 0$, Mai hướng xe về phía chiều dương của trục.
- ◇ Nếu $z > 0$, Mai hướng xe về phía chiều âm của trục.

Ta sẽ chứng minh tính đúng đắn của chiến thuật này bằng cách chỉ ra mọi tọa độ z luôn bị giới hạn. Giả sử Long di chuyển một khoảng l (với $1 \leq l \leq 10$):

- ◇ Ban đầu $z_0 = 0$. Mai chọn chiều dương, sau khi Long đi khoảng l , tọa độ tiếp theo là $z_1 = l \implies z_1 \in [1, 10]$.
- ◇ Nếu vị trí hiện tại $z \in [1, 10]$ (tức $z > 0$): Mai chọn chiều âm. Tọa độ mới sẽ là $z' = z - l$. Vì $1 \leq z \leq 10$ và $1 \leq l \leq 10$, ta suy ra $z' \in [-9, 9]$.
- ◇ Nếu vị trí hiện tại $z \in [-9, 0]$ (tức $z \leq 0$): Mai chọn chiều dương. Tọa độ mới sẽ là $z' = z + l$. Vì $-9 \leq z \leq 0$ và $1 \leq l \leq 10$, ta có $z' \in [-8, 10]$.

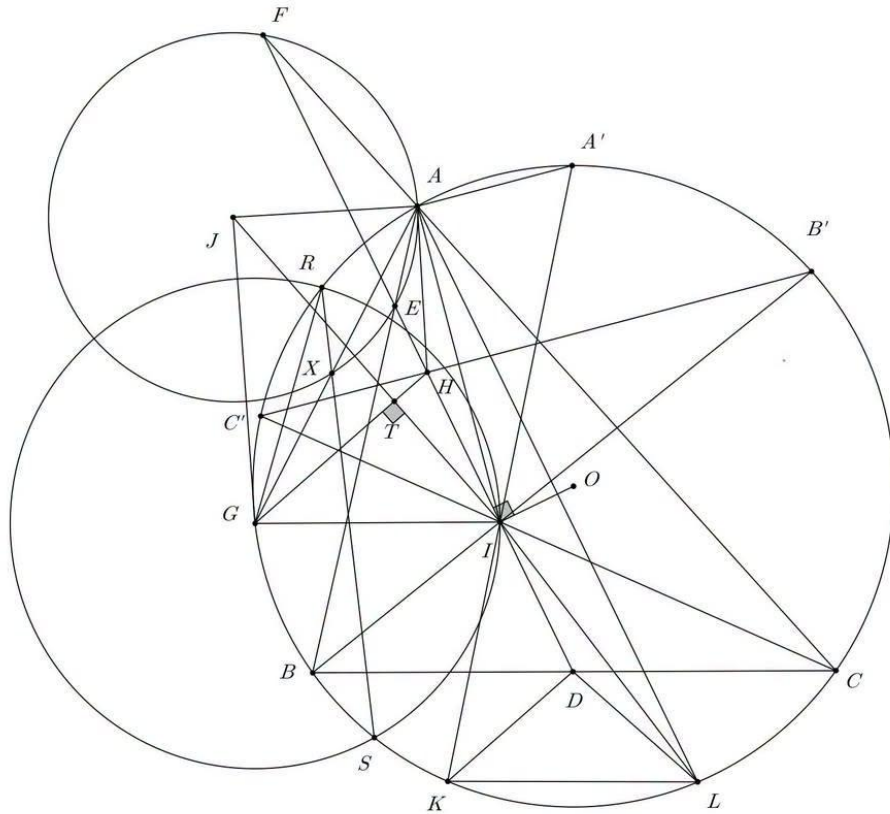
Quy nạp theo số bước di chuyển, ta khẳng định kể từ P_0 , tất cả các hoành độ x và tung độ y của xe luôn bị giam chặt trong đoạn số nguyên $[-9, 10]$. Số lượng giá trị nguyên trong đoạn $[-9, 10]$ là $10 - (-9) + 1 = 20$. Do cả x và y đều nhận tối đa 20 giá trị, số lượng vị trí phân biệt (x, y) tối đa mà xe có thể đi tới là $20 \times 20 = 400$ vị trí.

Trong trò chơi có $k = 400$ lượt đi, hệ thống sẽ ghi nhận tổng cộng 401 vị trí (bao gồm cả gốc tọa độ P_0 ban đầu). Theo nguyên lý Dirichlet, khi xếp 401 điểm vào 400 vị trí khả dĩ, chắc chắn phải tồn tại ít nhất hai điểm trùng nhau. Điều này đồng nghĩa với việc Châu Mai chắc chắn giành chiến thắng.

Bài toán 0.6. (Lim Olympic - Cà Mau TST - P6)

Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O) và có tâm đường tròn nội tiếp I . Kẻ phân giác BB', CC' của tam giác ABC , trong đó $B', C' \in (O)$. Gọi d là đường thẳng qua I , vuông góc OI . Giả sử d cắt các đoạn thẳng $AB, BC, B'C'$ lần lượt ở E, D, H và cắt tia đối của tia AC ở F . Trên (O) lấy điểm L sao cho AL song song với d . Gọi A' là trung điểm của cung lớn BC của (O) và $A'I$ cắt lại (O) tại K .

- 1 Chứng minh rằng $AH = HI = ID = DL = DK$.
- 2 Gọi J là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF . Lấy điểm G trên (O) sao cho HG vuông góc IJ và lấy các điểm R, S trên (O) sao cho $GI = GR = GS$. Giả sử rằng A, G nằm khác phía nhau so với đường thẳng RS . Chứng minh rằng AG, RS cắt nhau tại một điểm trên (J) .



Lời giải.

1 Cách 1.

- ◇ Theo tính chất quen ta có $C'I = C'A$ và $B'I = B'A$ nên $B'C'$ là trung trực AI nên $HA = HI$.
- ◇ Có $IH = ID$ theo định lý con bướm với dây cung $B'C', BC$ của (O) .
- ◇ Có $DL = AH$ do $HDLA$ là hình thang cân có chung trục đối xứng OI .

◇ Có $\angle IDL = 180^\circ - 2\angle DIL = 2(90^\circ - \angle ILD) = 2(90^\circ - \angle IAL) = 2\angle A'AL = 2\angle IKL$.
 $\Rightarrow D$ là tâm $(KIL) \Rightarrow DK = DL = DI$.

Kết hợp lại ta được $AH = HI = ID = DL = DK$.

Cách 2. Gọi Q là trung điểm cung BC nhỏ của (O) . AA' cắt ID tại N . KQ cắt ID tại P .

Áp dụng định lí con bướm tứ giác $AA'TK$ nội tiếp (O) suy ra: $IN = IP$. (*)

Áp dụng định lí con bướm cho tứ giác $B'C'BC$, ta có: $ID = IH$. (**)

Chú ý rằng: $B'C'$ là trung trực IA . Vậy ta thu được: $AH = IH = ID = DL = DK$ (tính chất cạnh huyền của tam giác vuông kết hợp (*) và (**)).

② Ta có $\angle AFH = \angle IAC - \angle AIH = \angle IAB - \angle HAI = \angle HAE$
 $\Rightarrow HA$ là tiếp tuyến của $(J) \Rightarrow HJ^2 = AH^2 + AJ^2 \Rightarrow HJ^2 - HI^2 = AJ^2$.

Gọi GH cắt IJ tại T . Do $HG \perp IJ \Rightarrow GJ^2 - GI^2 = TJ^2 - TI^2$
 và $HJ^2 - HI^2 = TJ^2 - TI^2 \Rightarrow GJ^2 - GI^2 = AJ^2 \Rightarrow GJ^2 - AJ^2 = GI^2 \Rightarrow \mathcal{P}_{G/(J)} = GI^2$.

Gọi RS cắt AG tại $X \Rightarrow \mathcal{P}_{X/(O)} = \mathcal{P}_{X/(G;GI)} \Rightarrow XA.XG = GI^2 - XG^2$.
 $\Rightarrow GI^2 = XG(XA + XG) = GX.GA \Rightarrow X$ nằm trên (J) .

Bài toán 0.7. (Lim Olympic - Cà Mau TST - P7)

Gọi một đa thức hệ số thực là monic nếu nó có hệ số của bậc cao nhất bằng 1.

- ① Xây dựng đa thức $f(x)$ có hệ số nguyên, bậc 29, monic, $2026 \mid f(0)$ sao cho: $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ mà $3 \mid f(n)$ thì đều có $3^{42} \mid f(n)$.
- ② Cho số nguyên dương $k > 1$ và số nguyên tố p lẻ. Chứng minh rằng $k + v_p(k!)$ là giá trị lớn nhất của số nguyên dương m sao cho tồn tại đa thức $f(x)$ hệ số nguyên bậc k , monic, $p \mid f(0)$ và thỏa mãn: $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ mà $p \mid f(n)$ thì đều có $p^m \mid f(n)$.

 **Lời giải.**

① Chọn $f(x) = \prod_{j=0}^{28} (x - 3j) = x(x - 3)(x - 6) \cdots (x - 84)$

Ta có $f(0) = 0$ và với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, ta có $f(n) \equiv n^{29} \pmod{3}$.

Do đó $3 \mid f(n) \Rightarrow 3 \mid n$, viết $n = 3a$. Khi đó

$$f(n) = \prod_{j=0}^{28} (3a - 3j) = 3^{29} a(a-1) \cdots (a-28) = 3^{29} \cdot 29! \cdot \frac{a(a-1) \cdots (a-28)}{29!}.$$

Theo công thức Legendre, ta có $v_3(29!) = 13$ nên $v_3(3^{29} \cdot 29!) = 29 + 13 = 42$. Suy ra

$$3 \mid f(n) \Rightarrow 3^{42} \mid f(n).$$

② Đặt $t = k + v_p(k!)$.

◇ Đầu tiên ta chứng minh $m = t$ thỏa mãn:

Xét $q(x) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - jp) = x(x - p)(x - 2p) \cdots (x - (k-1)p)$

Tương tự chứng minh ý 1 suy ra $p^t \mid q(n)$.

◇ Giờ ta chứng minh $m \leq t$:

Trước hết, ta chứng minh bổ đề quen thuộc sau:

Bổ đề 0.1.

Cho $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ là đa thức bậc r . Nếu $P(n) \in \mathbb{Z}$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$ thì $r!p_r$ là số nguyên với p_r là hệ số bậc cao nhất của $P(x)$.

Chứng minh. Đặt $Q(x) = P(x+1)$. Khi đó $Q(n) \in \mathbb{Z}$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

Từ khai triển Newton ta có:

$$Q(x) = a_0 + a_1 \binom{x}{1} + a_2 \binom{x}{2} + \cdots + a_r \binom{x}{r},$$

trong đó a_i là các số nguyên và $\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$.

Vì hệ số của x^r trong $\binom{x}{r}$ bằng $1/r!$, nên $p_r = [x^r]P(x) = [x^r]Q(x) = \frac{a_r}{r!}$.

Suy ra $r!p_r = a_r \in \mathbb{Z}$, từ đó có điều phải chứng minh cho bổ đề. □

Giả sử ngược lại tồn tại đa thức $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, monic, bậc k , thỏa mãn $p \mid f(0)$ và

$$p \mid f(n) \implies p^{t+1} \mid f(n)$$

với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

Xét đa thức $P(x) = \frac{f(px)}{p^{t+1}}$.

Với mọi $x \in \mathbb{Z}^+$, do $p \mid f(0)$ nên $f(px) \equiv f(0) \equiv 0 \pmod{p}$.

Theo giả thiết phản chứng, ta có $p^{t+1} \mid f(px)$ nên $P(x) \in \mathbb{Z}$ với mọi $x \in \mathbb{Z}^+$.

Vì f monic bậc k , hệ số cao nhất của P bằng $\frac{p^k}{p^{t+1}}$. Áp dụng bổ đề, ta có $k! \frac{p^k}{p^{t+1}} \in \mathbb{Z}$.

Mà $v_p(k!p^k) = v_p(k!) + k = t$ nên $v_p\left(\frac{k!p^k}{p^{t+1}}\right) = -1$, mâu thuẫn. Vậy $m \leq t$.

Vậy giá trị lớn nhất của m là $m_{\max} = k + v_p(k!)$