SỞ GD&ĐT THANH HÓA
CỤM CÁC TRƯỜNG LS, HR, QX1, DTNT, ĐS1, BS, HLK, YĐ1

Mã đề thi: 1101
(Đề gồm 06 trang)

ĐỀ GIAO LƯU HSG CỤM CÁC TRƯỜNG LẦN 2

MÔN: **TOÁN** Thời gian làm bài: 90 phút
Ngày thi: 12/11/2026

Họ và tên: ..... Số báo danh: .....

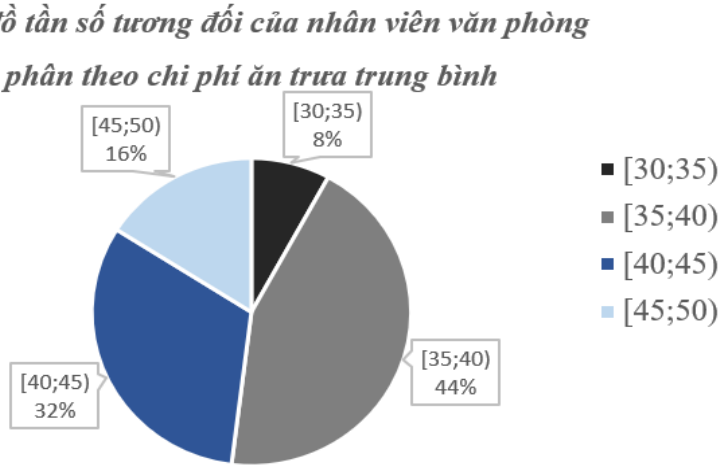
PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ Gọi I là điểm thuộc đường thẳng CC' sao cho $\overrightarrow{C'I}=\frac{1}{3}\overrightarrow{C'C}$, G điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=0$. Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{IG}$ qua các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là khẳng định đúng?

A. $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{4}\left(\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}-2\vec{a}\right)$ **B.** $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}\right)$.

C. $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c})$. **D.** $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{c}-2\vec{b})$.

Câu 2. Kết quả khảo sát 175 nhân viên văn phòng về chi phí trung bình cho mỗi suất ăn trưa của họ được tổng kết lại ở biểu đồ sau (đơn vị: nghìn đồng).



Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên thuộc khoảng nào?

A. $(6;7)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $(5;6)$. **D.** $(4;5)$.

Câu 3. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 3 và $BA'=BB'=BC'=3\sqrt{3}$. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác ABB', ACC', CBB'. Thể tích khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm G_1, G_2, G_3, A', B' và C' bằng bao nhiêu?

A. $\frac{20\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{10\sqrt{2}}{3}$. **C.** $20\sqrt{2}$. **D.** $\frac{40\sqrt{2}}{3}$.

Câu 4. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^4-4x^2+m\right|$ trên đoạn $[-2;1]$ bằng 2026. Tổng giá trị tuyệt đối tất các phần tử của S bằng bao nhiêu?

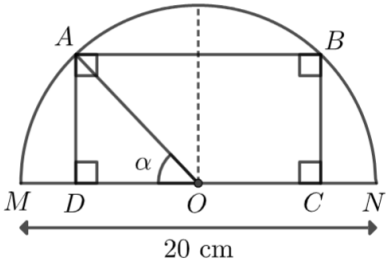
A. 4048. **B.** 4042. **C.** 2026. **D.** 4.

Câu 5. Trạm kiểm soát không lưu đang theo dõi hai máy bay. Giả sử trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đơn vị đo lấy theo kilômét, tại cùng một thời điểm theo dõi ban đầu: máy bay thứ nhất ở tọa độ $A(0;35;10)$, bay theo hướng vectơ $\overrightarrow{v_1}=(3;4;0)$ với tốc độ không đổi 900 (km/h) và máy bay thứ hai ở tọa độ $B(31;10;11)$, bay theo hướng $\overrightarrow{v_2}=(5;12;0)$ với tốc độ không đổi 910 (km/h). Biết rằng khoảng cách an

toàn tối thiểu giữa hai máy bay là 5 hải lý (khoảng 9.3 km). Nếu hai máy bay tiếp tục duy trì hướng và tốc độ bay như trên thì sau ít nhất bao nhiêu phút (kể từ thời điểm theo dõi ban đầu), hai máy bay vi phạm khoảng cách an toàn (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. 9,34. **B.** $3,57$. **C.** 4,15. **D.** $8,42$.

Câu 6. Cho điểm A di động trên nửa đường tròn tâm O, đường kính $MN = 20$ cm, $MOA = \alpha$ với $0 \le \alpha \le \pi$. Lấy điểm B thuộc nửa đường tròn và CD thuộc đường kính MN được xác định sao cho $ABCD$ là hình chữ nhật (tham khảo hình vẽ bên). Khi A di động từ trái sang phải thì góc $\alpha \in (a;b) \cup (c;d)$ làm cho diện tích của hình chữ nhật $ABCD$ giảm. Biết giá trị của biểu thức $a+b+c+d = \dfrac{m\pi}{n}$ với $\dfrac{m}{n}$ tối giản. Tính $\mathcal{D} = m+n$.



A. 24 **B.** 6 **C.** 8 **D.** 7

Câu 7. Xét hàm số $f(x) = \left| \dfrac{mx - 2\sqrt{x+4}}{2x+4} \right|$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu số nguyên m thỏa mãn điều kiện $0 < \min\limits_{[-1;1]} f(x) < 1$?

A. 4. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 8. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $2^{2u_1+1} + 2^{3-u_2} = \dfrac{8}{\log_3\left(\dfrac{1}{4}u_3^2 - 4u_1 + 4\right)}$ và $u_{n+1} = 2u_n$ với mọi $n \ge 1$.

Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. Giá trị nhỏ nhất của n để $S_n > 28^{10}$ bằng bao nhiêu?

A. 50. **B.** 51. **C.** 52. **D.** 49.

Câu 9. Trong không gian, cho các vec tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 1, |\vec{b} + \vec{c}| = 2, |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 3, |\vec{c}| = 4$ và $\vec{a} \perp \vec{b}$. Tính góc của $\vec{a}$ và $\vec{c}$?

A. 120^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 30^0.

Câu 10. Cho hai số thực x, y thoả mãn $(x-2)^2 + (y-2)^2 \le 8 - 2xy$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2(x+3y) + y^2(y+3x) - 3(x+1)(y+1) + 9 - 3xy$ có dạng $\dfrac{m - \sqrt{5^n}}{4}$, trong đó m, n là các số nguyên dương. Giá trị của biểu thức $m - 3n$ bằng bao nhiêu?

A. 2. **B.** 26. **C.** 8. **D.** 14.

Câu 11. Bạn Huy Hoàng đang nằm nghe nhạc trong phòng có chiều cao là $3,2m$ và phát hiện ra hai con nhện đang chăng tơ trong căn phòng của bạn Huy Hoàng và bạn Huy Hoàng băn khoăn là khoảng cách giữa hai con nhện là bao nhiêu khi đường thẳng đi qua 2 con nhện vuông góc với trần nhà, biết rằng hai con nhện luôn di chuyển trên hai đường thẳng khác nhau. Giả sử căn phòng là hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ với $ABCD$ là nền phòng thì con nhện thứ nhất di chuyển trên đường tơ nối tử đỉnh A đến trung điểm của CC', còn con nhện thứ hai di chuyển trên đường tơ nối từ D' đến tâm của mặt $ABB'A'$. Hỏi khoảng cách giữa hai con nhện mà bạn Huy Hoàng muốn tìm là bao nhiêu?

A. $2,4m$. **B.** $2m$. **C.** $1,6m$. **D.** $0,8m$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;1;1), B(1;2;3), C(-1;2;0)$. Điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn $\cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + \cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}) = 0$ và tồn tại số thực k sao cho

$\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}+k\left(3k+1\right)\overrightarrow{AC}$. Tổng $x+2y+3z-k$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{19}{3}$. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 13. Cho các số thực a, b, c và hàm số $f\left(x\right)$, biết rằng hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(x\right)+f\left(-x\right)=2c$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Đồng thời có bảng biến thiên như hình vẽ kèm theo. Xét các hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)+a$; $h\left(x\right)=x\left[f\left(x\right)+b\right]$. Nếu $g\left(x\right)$ là hàm số lẻ và $h\left(x\right)$ là hàm số chẵn thì phương trình $g\left(x\right).h\left(x\right)=x$ có bao nhiêu nghiệm?

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f\left(x\right)$	$-\infty$ ↗	$c+2$	↘ $c-2$	↗ $+\infty$

A. 7. **B.** 15. **C.** 5. **D.** 10.

Câu 14. Người ta muốn lát kín một bảng ô vuông kích thước 2×13(2 hàng 13 cột) bằng các tấm bìa kích thước 1×2 và 1×3 sao cho các tấm bìa không được chồng lên nhau hay phủ ra ngoài bảng. Có bao nhiêu cách lát nếu ta được phép xoay các tấm bìa nhưng cạnh dài của tất cả các tấm bìa đều phải song song với nhau?

A. 256. **B.** 60. **C.** 120. **D.** 257.

Câu 15. Cho hai số thực x,y thỏa mãn đồng thời các điều kiện $x^2+y^2\geq16$, $\log_{x^2+2y^2+1}\left(y^2+8x+1\right)\geq1$. Biết rằng tồn tại ít nhất một cặp số thực $\left(x;y\right)$ thỏa mãn $m\left(x+3\right)+3y=12$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán?

A. 5. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 16. Cho đa giác đều 2018 đỉnh. Gọi S là tập hợp các tam giác có đỉnh là đỉnh của đa giác. Chọn ngẫu nhiên một tam giác trong tập S. Tính xác suất để chọn tam giác có một góc lớn hơn 140 độ.

A. $\frac{231}{2017}$. **B.** $\frac{298}{2017}$. **C.** $\frac{295}{2017}$. **D.** $\frac{231}{2018}$.

Câu 17. Số nghiệm thuộc đoạn $\left[1;5\right]$ của phương trình $\sin\left(\pi\left(x^2+2x+2\right)\right)=1$ bằng bao nhiêu?

A. 32. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 30.

Câu 18. Biết rằng $b<0$, $a+b=5$ và $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-b+x}}{x+1}=-2$. Khẳng định nào dưới đây sai?

A. $a^2+b^2>10$. **B.** $8<a<13$. **C.** $b<-1$. **D.** $a-b>0$..

Câu 19. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho các điểm $B(2;-1;-3),C(-6;-1;3)$. Trong các tam giác ABC thoả mãn các đường trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau, điểm $A(x_0;y_0;0),y_0>0$, sao cho góc A lớn nhất. Giá trị của x_0+y_0 bằng bao nhiêu?

A. 12 **B.** 9. **C.** 18 **D.** 8

Câu 20. Cho mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian truy cập Internet mỗi buổi tối của một số học sinh như sau:

Thời gian (phút)	$[9,5;12,5)$	$[12,5;15,5)$	$[15,5;18,5)$	$[18,5;21,5)$	$[21,5;24,5)$
Số học sinh	3	12	15	24	2

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên gần nhất với giá trị nào dưới đây?

A. 24. **B.** 20,13. **C.** 19,37. **D.** 18,74.

PHẦN II. **Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho tập hợp $A=\{1;2;3;4;5;6;7;8\}$. B là tập tất cả các số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau lấy từ A có dạng $\overline{abcd}$. C là tập tất cả các số tự nhiên gồm 8 chữ số đôi một khác nhau lấy từ A.

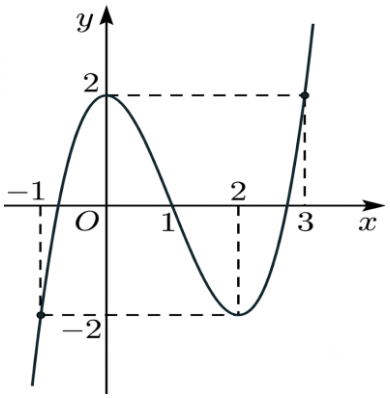
a) Chọn ngẫu nhiên một số thuộc B. Xác suất để số đó không có hai chữ số liên tiếp nào cùng chẵn bằng $\dfrac{1}{2}$.

b) Chọn ngẫu nhiên một số thuộc C. Xác suất để chọn được số chia hết cho 1111 là $\dfrac{1}{105}$.

c) Chọn thứ tự 2 số thuộc B. Xác suất để trong hai số đó có đúng một số có mặt chữ số 3 là $\dfrac{420}{1679}$.

d) Chọn ngẫu nhiên một số thuộc B. Xác suất để số lấy ra là số thoả mãn $a<b<c<d$ là $\dfrac{1}{34}$.

Câu 2. Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ thỏa mãn $f(0)=f(2)=\dfrac{1}{2}$ và hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



a) Hàm số $y=f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1;3]$ tại $x=2$.

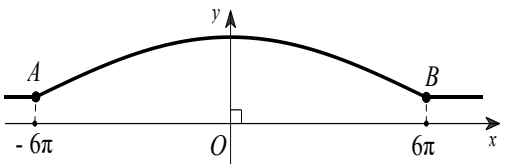
b) Hàm số $g(x)=\left|18f\left(1-\dfrac{x}{3}\right)-x^2\right|$ có 7 điểm cực trị.

c) Phương trình $f'(\sin x)=0$ có 10 nghiệm thuộc đoạn $[0;10\pi]$.

d) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 3. Một chiếc cầu bắc qua sông, mặt dưới gầm cầu có dạng cung AB biểu thị bởi đồ thị hàm số $y=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\cos\dfrac{x}{12}+2$ (1) với $x\in[-6\pi;6\pi]$ trong hệ trục toạ độ Oxy với đơn vị trục là mét (trục Ox mô tả mặt nước sông) như hình minh họa dưới đây:





a) Trên đoạn $[-6\pi;6\pi]$ đồ thị hàm số (1) có 5 điểm có tung độ nguyên.

b) Biết quy định chiều cao tối đa của các phương tiện giao thông hàng hóa qua lại dưới gầm cầu phải thấp hơn mặt dưới gầm ít nhất 0,8 mét. Một sà lan chở khối hàng hóa có hình dạng là một khối hộp chữ nhật với độ cao 5,2 mét so với mặt nước sông muốn đi qua gầm cầu. Bề rộng tối đa của khối hàng hóa để sà lan qua được gầm cầu đúng quy định là $12,56$ m (lấy số $\pi=3,14$).

c) Hàm số (1) là hàm số tuần hoàn với chu kì $T=\dfrac{\pi}{6}$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số (1) trên đoạn $[-6\pi;6\pi]$ là $\dfrac{6-8\sqrt{3}}{3}$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;3;5), B(-1;3;2), C(-2;1;3), D(5;7;4)$.

a) Khoảng cách từ A đến trục Oy bằng 3.

b) $\cos BAD = -\dfrac{1}{2\sqrt{10}}$.

c) Cho $M(a;b;c)$ là điểm di động trên mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $T = 4MA^2 + 5MB^2 - 6MC^2 + 2024MD^4$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $2a+3b+4c=31$.

d) Điểm $E(0,m,n)$ trên mặt phẳng (Oyz) thỏa mãn $|EB-EC| = \sqrt{6}$ thì $m+n<6$.

Câu 5. Tại một trường THPT, để khảo sát năng lực học môn toán của hai lớp 12E và 12F, giáo viên đã cho học sinh ở hai lớp làm bài kiểm tra khảo sát đầu năm, thống kê điểm của học sinh được cho trong bảng sau:

Lớp điểm thi	$[0;2)$	$[2;4)$	$[4;6)$	$[6;8)$	$[8;10)$
Số học sinh lớp 12E	3	6	12	24	5
Số học sinh lớp 12F	4	5	16	18	7

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Dựa vào điểm trung bình môn Toán ta đánh giá được lớp 12E học tốt môn Toán hơn lớp 12F.

b) Điểm thi có số học sinh đạt được nhiều nhất ở lớp 12E nhỏ hơn ở lớp 12F.

c) Dựa vào độ lệch chuẩn của mẫu số liệu thống kê ghép nhóm, ta thấy rằng lớp 12E học đều hơn lớp 12F.

d) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu thống kê điểm của lớp 12F nhỏ hơn $2,9$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm $O, AB = 4a$ và $BAD = 120°$. Gọi H là trung điểm của AO. Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH = a\sqrt{3}$.

a) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của ba cạnh CD, BC và SA. Khoảng cách giữa hai đường thẳng PN và SM bằng $\dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$.

b) Gọi α là số đo góc phẳng nhị diện $[S,CD,A]$, khi đó $\tan\alpha = \dfrac{3}{2}$.

c) Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $8a^3$.

d) Góc tạo bởi đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng góc BSH.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B. Biết rằng $AD = SA = SC = 2a$, $AB = BC = a$, $SCD = 90^0$. Gọi M là trung điểm SA, $\varphi = (SD,(MBD))$, $\sin\varphi = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ ($a,b \in \mathbb{N}$, $\dfrac{a}{b}$ tối giản). Tính $a+b$?

Câu 2. Cho x, y là hai số thực không âm và không đồng thời bằng 0 thỏa mãn:

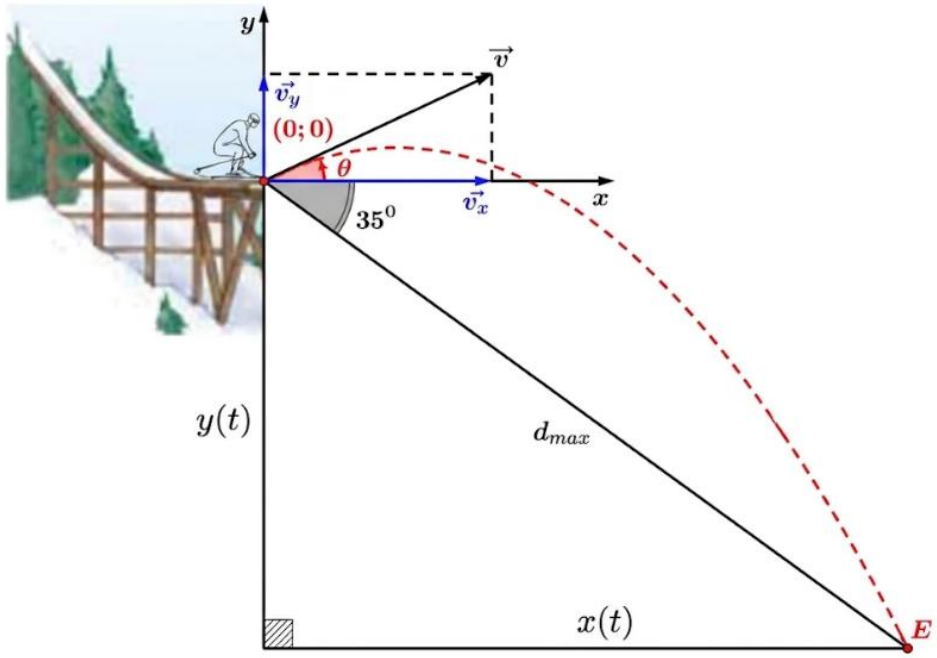
$$\log\left(\frac{x^2+y^2+25}{x+y}\right)^{x^2+y^2+10} = \frac{10x+10y-25}{x^2+y^2} + x^2 + y^2 + 9$$

Tính tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \dfrac{4x+5y-10}{x+y}$.

Câu 3. Cho một hình bát giác đều có 8 đỉnh. Người ta gắn ngẫu nhiên vào 8 đỉnh này 8 số tự nhiên $1,4,7,9,11,13,16,19$ (mỗi số gắn đúng một đỉnh). Chọn ngẫu nhiên một tam giác có 3 đỉnh lấy từ 8 đỉnh của bát giác đã cho. Gọi P là xác suất để chọn được một tam giác vuông với 3 số gắn trên 3 đỉnh

của tam giác đó (theo một thứ tự nào đó) lập thành một cấp số cộng. Biết $P=\frac{a}{b}$ ($a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $a+b$.

Câu 4. Một vận động viên trượt tuyết trượt xuống máng trượt và rời khỏi máng với vector vận tốc $\vec{v}$ tạo với phương ngang 1 góc θ có độ lớn $v=25m/s$ như hình vẽ. Biết rằng độ dốc d (tính từ điểm kết thúc của máng trượt đến điểm tiếp đất) hợp với phương ngang một góc 35°. Biết rằng hệ phương trình chuyển động theo thời gian t của vận động viên là: $\begin{cases} x(t)=v_x t \\ y(t)=v_y t-\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$ (1) với v_x, v_y lần lượt là các vector thành phần của vector vận tốc $\vec{v}$ khi chiếu lên trục Ox, Oy và hằng số gia tốc trọng trường g không đổi. Hỏi giá trị của θ (độ) phải bằng bao nhiêu để quãng đường tới điểm tiếp đất (d) là lớn nhất.



Câu 5. Hàm số $y=(x+1)(x+2)^2(x+3)^3...(x+2025)^{2025}$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm A, B lần lượt thuộc các tia Ox, Oy sao cho $OA.OB=4$. Điểm S thuộc mặt phẳng (Oxz) sao cho số đo của góc nhị diện $[S;OB;A]$ và $[S;AB;O]$ đều bằng 60^o. Gọi $S(a;0;c)$ với $a>0, c>0$. Khi thể tích khối chóp $S.OAB$ đạt giá trị lớn nhất, tính giá trị biểu thức $P=a^4+c^4$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

------ HẾT ------

MÔN TOÁN

Đề\câu	1101	1102	1103	1104
1	B	A	B	C
2	D	A	D	C
3	A	C	D	D
4	A	C	C	D
5	D	B	C	C
6	D	C	B	D
7	B	D	D	B
8	A	A	C	A
9	C	B	D	A
10	C	D	B	C
11	C	B	A	C
12	A	B	D	D
13	A	B	A	C
14	D	D	C	A
15	A	A	A	D
16	B	A	A	D
17	C	C	A	C
18	B	A	C	D
19	A	C	C	C
20	C	D	C	D
1	ĐĐSS	SSĐĐ	ĐĐSS	ĐSSS
2	SĐSS	ĐSSS	SSĐS	SSSĐ
3	SĐSS	SSSĐ	SSĐS	SSĐĐ
4	SSĐS	SSĐĐ	ĐĐSS	SĐĐS
5	ĐSĐS	SĐĐS	ĐSĐS	ĐSSĐ
6	ĐSĐS	SSSĐ	SĐSS	SĐSS
1	313	5,93	313	313
2	5	5	1518	1518
3	205	27,5	5,93	5
4	27,5	1518	5	205
5	1518	205	205	27,5
6	5,93	313	27,5	5,93

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^4-4x^2+m\right|$ trên đoạn $[-2;1]$ bằng 2026. Tổng giá trị tuyệt đối tất các phần tử của S bằng

A. 4. **B.** 2026. **C.** 4048. **D.** 4042.

Lời giải

Xét $u(x)=x^4-4x^2$ trên $[-2;1]$.

$u'(x)=4x^3-8x;\ u'(x)=0\Leftrightarrow x=0;\ x=-\sqrt{2};\ x=-\sqrt{2}\ (loai)$

$u(0)=0;\ u\left(-\sqrt{2}\right)=-4;\ u(-2)=0;\ u(1)=-3.$

Suy ra $\max_{[-2;1]}u(x)=0;\ \min_{[-2;1]}u(x)=-4$.

Do đó giá trị lớn nhất của $f(x)=\left|x^4-4x^2+m\right|$ trên đoạn $[-2;1]$ là $\max\{|m|;|m-4|\}$

TH1. $\begin{cases}|m|\ge|m-4|\\ |m|=2026\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|m|\ge|m-4|\\ \left[\begin{array}{l}m=2026\\ m=-2026\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m=2026.$

TH2. $\begin{cases}|m-4|\ge|m|\\ |m-4|=2026\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|m-4|\ge|m|\\ \left[\begin{array}{l}m=2030\\ m=-2022\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m=-2022.$

Vậy nên $S=\{2026;-2022\}$, tổng giá trị tuyệt đối tất các phần tử của S bằng 4048.

Câu 2. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ Gọi I là điểm thuộc đường thẳng CC' sao cho $\overrightarrow{C'I}=\frac{1}{3}\overrightarrow{C'C}$, G điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=0$. Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{IG}$ qua các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là khẳng định đúng?

A. $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}\right)$. **B.** $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c})$.

C. $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{c}-2\vec{b})$. **D.** $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{4}\left(\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}-2\vec{a}\right)$

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=\vec{0}$

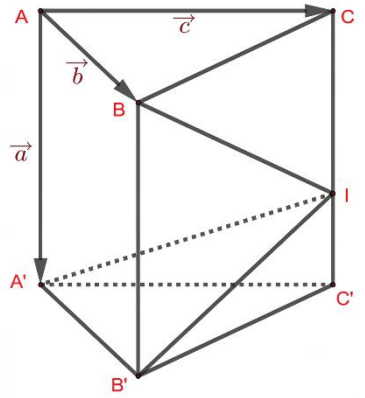
$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA'}+\overrightarrow{IB'}+\overrightarrow{IC'}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{IG}=\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{IC'}+\overrightarrow{C'A'}\right)+\left(\overrightarrow{IC'}+\overrightarrow{C'B'}\right)+\overrightarrow{IC'}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{IG}=\left(\overrightarrow{IC}+3\overrightarrow{IC'}\right)+2\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{C'A'}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{IG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CC'}+2\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)-\overrightarrow{AC}$

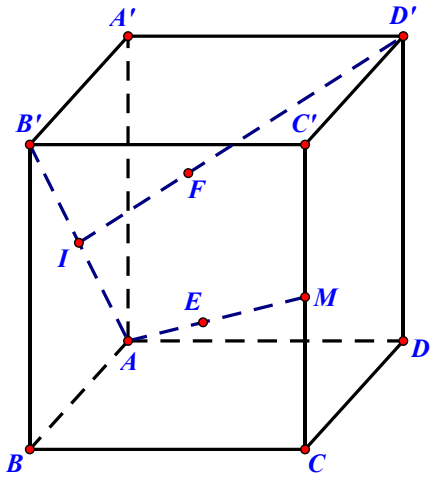
$\Leftrightarrow \overrightarrow{IG}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}\right)$



Câu 3. Bạn Huy Hoàng đang nằm nghe nhạc trong phòng có chiều cao là $3,2m$ và phát hiện ra hai con nhện đang chăng tơ trong căn phòng của bạn Huy Hoàng và bạn Huy Hoàng băn khoăn là khoảng cách giữa hai con nhện là bao nhiêu khi đường thẳng đi qua 2 con nhện vuông góc với trần nhà, biết rằng hai con nhện luôn di chuyển trên hai đường thẳng khác nhau. Giả sử căn phòng là hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ với $ABCD$ là nền phòng thì con nhện thứ nhất di chuyển trên đường tơ nối tử đỉnh A đến trung điểm của CC', còn con nhện thứ hai di chuyển trên đường tơ nối từ D' đến tâm của mặt $ABB'A'$. Hỏi khoảng cách giữa hai con nhện mà bạn Huy Hoàng muốn tìm là bao nhiêu?

A. $0,8m$. **B.** $1,6m$. **C.** $2,4m$. **D.** $2m$.

Lời giải



Gọi E là vị trí của con nhện thứ nhất và F là vị trí của con nhện thứ hai; I là tâm mặt $ABB'A'$ và M là trung điểm của CC'. Khi đó E,F lần lượt thuộc các đoạn $AM, D'I$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{D'F} = y\overrightarrow{D'I}\left(x,y \in [0;1]\right)$.

+) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$.

Suy ra $\overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD} + \frac{x}{2}\overrightarrow{AA'}$

+) $\overrightarrow{D'I} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{D'B'} + \overrightarrow{D'A}\right) = \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{D'A'} + \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{D'D}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$.

Suy ra $\overrightarrow{D'F} = y\overrightarrow{D'I} = \frac{y}{2}\overrightarrow{AB} - y\overrightarrow{AD} - \frac{y}{2}\overrightarrow{AA'}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'F} = \frac{y}{2}\overrightarrow{AB} + (1-y)\overrightarrow{AD} + \left(1 - \frac{y}{2}\right)\overrightarrow{AA'}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = \left(\frac{y}{2} - x\right)\overrightarrow{AB} + (1-y-x)\overrightarrow{AD} + \left(1 - \frac{y}{2} - \frac{x}{2}\right)\overrightarrow{AA'}$.

Khi đường thẳng đi qua hai con nhện vuông góc với trần nhà thì $\overrightarrow{EF}$ và $\overrightarrow{AA'}$ cùng phương

$$\begin{cases} \frac{y}{2} - x = 0 \\ 1 - y - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

$\Rightarrow \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} \Rightarrow EF = 1,6m$.

Vậy khoảng cách giữa hai con nhện mà An muốn tìm là $EF = 1,6m$.

Câu 4. Cho mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian truy cập Internet mỗi buổi tối của một số học sinh như sau:

Thời gian (phút)	$[9,5;12,5)$	$[12,5;15,5)$	$[15,5;18,5)$	$[18,5;21,5)$	$[21,5;24,5)$
Số học sinh	3	12	15	24	2

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên gần nhất với giá trị nào dưới đây?

A. $18,74$. **B.** $19,37$. **C.** $20,13$. **D.** 24.

Lời giải

Tần số lớn nhất là 24 nên nhóm chứa mốt là nhóm $[18,5;21,5)$.

Ta có $j=4;\ a_4=18,5;\ m_4=24;\ m_3=15;\ m_5=2;\ h=21,5-18,5=3$.

Do đó $M_o=a_j+\dfrac{m_j-m_{j-1}}{(m_j-m_{j-1})+(m_j-m_{j+1})}\cdot h$

$=18,5+\dfrac{24-15}{(24-15)+(24-2)}.3=\dfrac{1\,201}{62}\approx 19,37.$

Câu 5. Số nghiệm thuộc đoạn $[1;5]$ của phương trình $\sin\left(\pi\left(x^2+2x+2\right)\right)=1$ là

A. 15. **B.** 16. **C.** 32. **D.** 30.

Lời giải

Ta có $\sin\left(\pi\left(x^2+2x+2\right)\right)=1\Leftrightarrow \pi\left(x^2+2x+2\right)=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$

$\Rightarrow x^2+2x+2=\dfrac{1}{2}+2k\Leftrightarrow (x+1)^2=2k-\dfrac{1}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.

Do $x\in[1;5]\Rightarrow (x+1)^2\in[4;36]\Rightarrow 2k-\dfrac{1}{2}\in[4;36]\Rightarrow k\in\left[\dfrac{9}{4};\dfrac{73}{4}\right]$

Do $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k\in\{3,4,5,..,18\}\Rightarrow$ có 16 giá trị của k.

Khi đó phương trình có hai nghiệm $x_1=-1-\sqrt{2k-\dfrac{1}{2}}<0$ (loại) và $x_2=-1+\sqrt{2k-\dfrac{1}{2}}$

Mỗi giá trị của k cho 1 nghiệm $x_2=-1+\sqrt{2k-\dfrac{1}{2}}$. Do đó phương trình có 16 nghiệm thuộc đoạn $[1;5]$.

Câu 6. Biết rằng $b<0,\ a+b=5$ và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-b+x}}{x+1}=-2$. Khẳng định nào dưới đây sai?

A. $8<a<13$. **B.** $b<-1$. **C.** $a^2+b^2>10$. **D.** $a-b>0$..

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-b+x}}{x+1}=\dfrac{1-\sqrt{1-b}}{1}=-2\Leftrightarrow 1-\sqrt{1-b}=-2\Leftrightarrow b=-8$.

Mà $a+b=5\Leftrightarrow a+(-8)=5\Leftrightarrow a=13$.

Câu 7. Xét hàm số $f(x)=\left|\dfrac{mx-2\sqrt{x+4}}{2x+4}\right|$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu số nguyên m thỏa mãn điều kiện $0<\min\limits_{[-1;1]}f(x)<1$?

A. 4. **B.** 8. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{mx-2\sqrt{x+4}}{2x+4}$ liên tục trên $[-1;1]$ và $f(x)=|g(x)|$.

Ta có $g(0)=-1; g(1)=\dfrac{m-2\sqrt{5}}{6}; g(-1)=\dfrac{-m-2\sqrt{3}}{2}$.

- Nếu $\begin{bmatrix} g(-1)\ge 0 \\ g(1)\ge 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m\ge 2\sqrt{5} \\ m\le -2\sqrt{3} \end{bmatrix}$ thì $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=0$, không thỏa mãn bài toán.

- Nếu $\begin{cases} g(-1)<0 \\ g(1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow -2\sqrt{3}<m<2\sqrt{5}$

Mà m nguyên nên $m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{4m+\dfrac{2x+12}{\sqrt{x+4}}}{(2x+4)^2}$.

TH1: $m\ge 0$.

Khi đó $g'(x)>0\,\forall x\in[-1;1]$. Do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên $[-1;1]$.

Mà $g(0)=-1\Rightarrow g(1)>-1$. Do đó $-1<g(1)<0$. Vậy $0<\min\limits_{[-1;1]} f(x)<1$ hay $m\in\{0;1;2;3;4\}$ thỏa mãn bài toán.

TH2: $m<0$.

Xét hàm số $h(x)=\dfrac{2x+12}{\sqrt{x+4}}$ trên $[-1;1]$. Ta có $h'(x)=\dfrac{x+2}{(x+4)\sqrt{x+4}}>0\,\forall x\in[-1;1]$.

Khi đó dễ thấy $h(x)\in\left[\dfrac{10}{\sqrt{3}};\dfrac{14}{\sqrt{5}}\right]$.

* Khi $m=-1\Rightarrow 4m+h(x)>0\ \forall x\in[-1;1]\Rightarrow g'(x)>0\ \forall x\in[-1;1]$ hay hàm số $g(x)$ đồng biến trên $[-1;1]$. Khi đó $-1<g(1)<0$ nên $0<\min\limits_{[-1;1]} f(x)<1$. Vậy $m=-1$ thỏa mãn.

* Khi $m\in\{-3;-2\}\Rightarrow 4m+h(x)<0\ \forall x\in[-1;1]\Rightarrow g'(x)<0\ \forall x\in[-1;1]$ hay hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $[-1;1]$. Khi đó $g(-1)>g(0)\Rightarrow -1<g(-1)<0$ nên $0<\min\limits_{[-1;1]} f(x)<1$.

Vậy $m\in\{-3;-2\}$ thỏa mãn.

Do đó $m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$ hay có 8 giá trị nguyên của m.

Câu 8. Trong không gian, cho các vec tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=1,|\vec{b}+\vec{c}|=2,|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=3,|\vec{c}|=4$ và $\vec{a}\perp\vec{b}$. Tính góc của $\vec{a}$ và $\vec{c}$

A. 45^0. **B.** 30^0. **C.** 60^0. **D.** 120^0.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $|\vec{a}|+|\vec{b}+\vec{c}|=1+2=3=|\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})|\Rightarrow \vec{a}$ và $\vec{b}+\vec{c}$ cùng hướng

Do đó $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|.|\vec{b}+\vec{c}|=2.$

Mà $\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=0\Rightarrow \vec{a}.\vec{c}=2=|\vec{a}|.|\vec{c}|.\cos(\vec{a},\vec{c})=4.\cos(\vec{a},\vec{c})\Rightarrow \cos(\vec{a},\vec{c})=\dfrac{1}{2}$

Suy ra góc của $\vec{a}$ và $\vec{c}$ bằng 60^0.

Câu 9. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho các điểm $B(2;-1;-3), C(-6;-1;3)$. Trong các tam giác ABC thoả mãn các đường trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau, điểm $A(x_0;y_0;0), y_0>0$, sao cho góc A lớn nhất. Giá trị của x_0+y_0 là

A. 9. **B.** 18 **C.** 8 **D.** 12

Lời giải

Chọn D.

Đặt $a=BC, b=CA, c=AB$. M, N lần lượt là trung điểm của AC và AB. G là trọng tâm của tam giác ABC.

Ta có $BC^2=BG^2+CG^2=(2GM)^2+(2GN)^2=4GM^2+4GN^2$.

$\Rightarrow 5BC^2=5(BG^2+CG^2)=4GM^2+4GN^2+4BG^2+4CG^2=4BN^2+4CM^2=AB^2+AC^2$

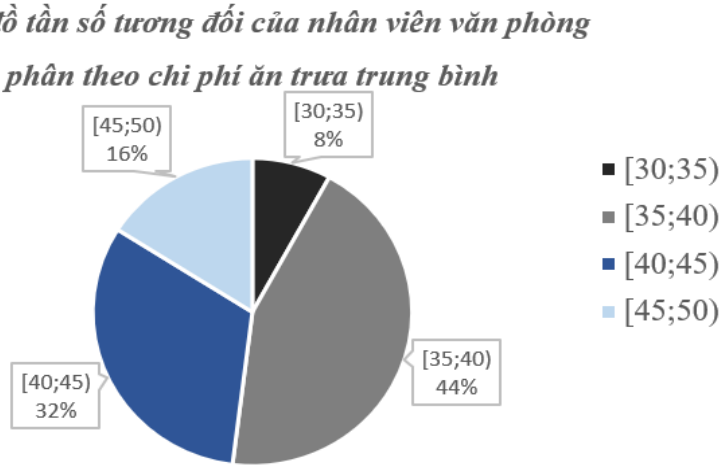
$\Rightarrow b^2+c^2=5a^2$

Áp dụng định lý hàm số cosin ta có:

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{5(b^2+c^2)-5a^2}{10bc}\Rightarrow \cos A=\dfrac{2}{5}\dfrac{b^2+c^2}{bc}\geq\dfrac{4}{5}$, dấu "="xảy ra khi $b=c$.

$\cos A>0\Rightarrow 0<A<\dfrac{\pi}{2}$. Hàm số $y=\cos x$ nghịch biến trên $(0;\dfrac{\pi}{2})$ nên A lớn nhất khi $\cos A$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow b=c\Leftrightarrow AB^2=AC^2\Leftrightarrow x_0=-2\Rightarrow AB^2=4^2+(y_0+1)^2+9$. Mặt khác $BC^2=100$. Khi A đạt giá trị lớn nhất thì $AB^2=AC^2$ nên $AB^2+AC^2=5BC^2\Leftrightarrow 2AB^2=5BC^2=500$. Giải ra ta được $y_0=14$. Vậy $x_0+y_0=12$

Câu 10. Kết quả khảo sát 175 nhân viên văn phòng về chi phí trung bình cho mỗi suất ăn trưa của họ được tổng kết lại ở biểu đồ sau (đơn vị: nghìn đồng).



Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên thuộc khoảng nào

A. $(3;4)$. **B.** $(4;5)$. **C.** $(5;6)$. **D.** $(6;7)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có cỡ mẫu $n=175$. Theo giả thiết suy ra bảng tần số

Nhóm	$[30;35)$	$[35;40)$	$[40;45)$	$[45;50)$
Giá trị đại diện	32,5	37,5	42,5	47,5
Tần số	14	77	56	28

Giá trị trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm trên là:

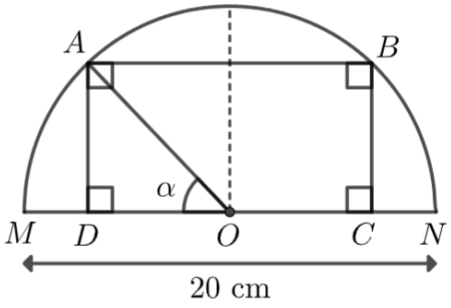
$\overline{x} = \dfrac{14.32,5 + 77.37,5 + 56.42,5 + 28.47,5}{175} = 40,3$.

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$s_x^2 = \dfrac{14.(40,3-32,5)^2 + 77.(40,3-37,5)^2 + 56.(40,3-42,5)^2 + 28.(40,3-47,5)^2}{175} = 18,16$.

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là: $s_x = \sqrt{s_x^2} \approx 4,26$.

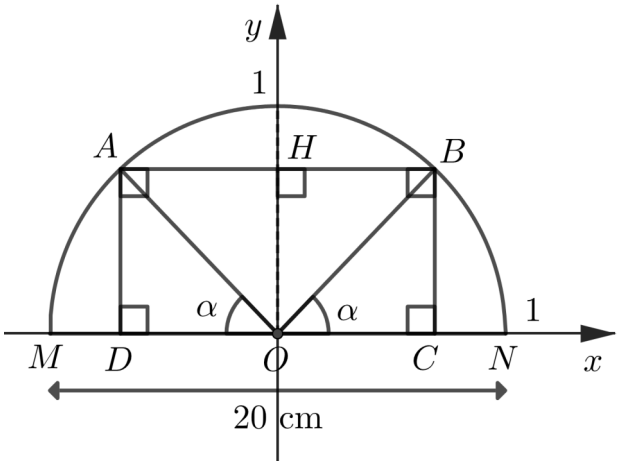
Câu 11. Cho điểm A di động trên nửa đường tròn tâm O, đường kính $MN = 20$ cm, $MOA = \alpha$ với $0 \le \alpha \le \pi$. Lấy điểm B thuộc nửa đường tròn và CD thuộc đường kính MN được xác định sao cho $ABCD$ là hình chữ nhật (tham khảo hình vẽ bên). Khi A di động từ trái sang phải thì góc $\alpha \in (a;b) \cup (c;d)$ làm cho diện tích của hình chữ nhật $ABCD$ giảm. Biết giá trị của biểu thức $a+b+c+d = \dfrac{m\pi}{n}$ với $\dfrac{m}{n}$ tối giản. Tính $\mathrm{D} = m+n$.



A. 24 **B.** 8 **C.** 6 **D.** 7

Lời giải

Chọn D



$ABCD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AB // MN$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên AB.

Dựng hệ trục toạ độ Oxy như hình vẽ, xét 1 đơn vị độ dài $= 10$ cm.

Ta có $OD // AH \Rightarrow HAO = AOD = \alpha$ (so le trong).

Tam giác OAB có $OA = OB = 1$ nên cân tại $O \Rightarrow HBO = HAO = \alpha$.

Mà $BH // OC \Rightarrow BOC = HBO = \alpha$.

Vì OH là trục đối xứng của hình chữ nhật $ABCD$ nên $S_{ABCD} = 2S_{OHBC} = 2OC.OH \ (1)$

Mà $OC = |x_B| = |\cos\alpha|$ và $OH = |y_B| = |\sin\alpha|$. Lại có $\alpha \in [0;\pi] \Rightarrow \sin\alpha \ge 0 \Rightarrow OH = \sin\alpha$.

Thay vào (1) ta được $S_{ABCD} = 2|\cos\alpha|.\sin\alpha = \begin{cases} -2\cos\alpha.\sin\alpha, \text{ khi } \cos\alpha < 0 \\ 2\cos\alpha.\sin\alpha, \text{ khi } \cos\alpha \ge 0 \end{cases}$

$\Rightarrow S_{ABCD}=\begin{cases}-\sin 2\alpha, \text{ khi } \dfrac{\pi}{2}<\alpha\le\pi \\ \sin 2\alpha, \text{ khi } 0\le\alpha<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$.

◆ Với $0\le\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ thì $0\le 2\alpha<\pi$.

Khi đó $S_{ABCD}=\sin 2\alpha$ giảm khi $\dfrac{\pi}{2}<2\alpha<\pi\Leftrightarrow\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

◆ Với $\dfrac{\pi}{2}\le\alpha<\pi$ thì $\pi\le 2\alpha<2\pi$.

Khi đó $S_{ABCD}=-\sin 2\alpha$ giảm khi $\sin 2\alpha$ tăng, lúc đó $\dfrac{3\pi}{2}<2\alpha<2\pi\Leftrightarrow\dfrac{3\pi}{4}<\alpha<\pi$.

Vậy $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3\pi}{4};\pi\right)$ làm cho diện tích của hình chữ nhật $ABCD$ giảm

$\Rightarrow a=\dfrac{\pi}{4},\ b=\dfrac{\pi}{2},\ c=\dfrac{3\pi}{4}$ và $d=\pi\Rightarrow a+b+c+d=\dfrac{5\pi}{2}\Rightarrow\begin{cases}m=5\\n=2\end{cases}$

Vậy $\mathrm{D}=m+n=7$.

Câu 12. Cho hai số thực x,y thỏa mãn đồng thời các điều kiện $x^2+y^2\ge 16$, $\log_{x^2+2y^2+1}\left(y^2+8x+1\right)\ge 1$. Biết rằng tồn tại ít nhất một cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn $m(x+3)+3y=12$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán?

A. 7. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 6.

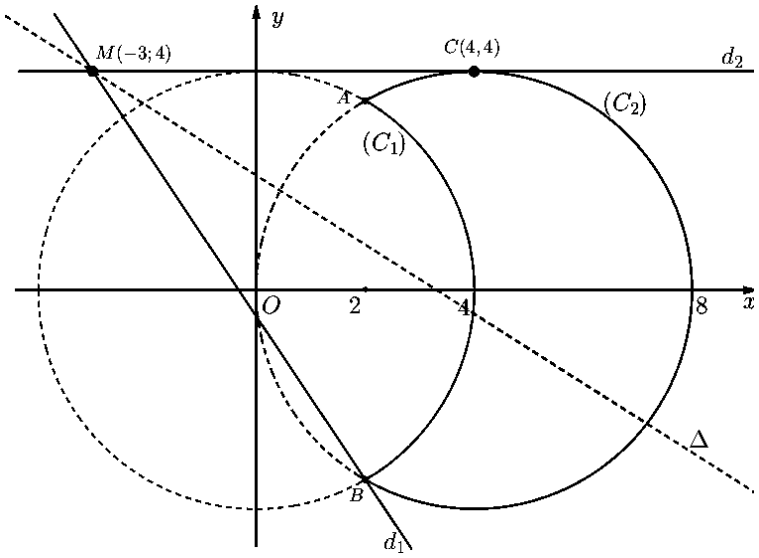
Lời giải

Chọn B

Ta có: $x^2+y^2\ge 16$ suy ra tập hợp các điểm có tọa độ $(x;y)$ nằm trên hay phía ngoài đường tròn $(C_1):x^2+y^2=16$.

Do $(x;y)=(0;0)$ không thỏa mãn điều kiện đề bài nên $x^2+2y^2+1>1$.

Khi đó $\log_{x^2+2y^2+1}\left(y^2+8x+1\right)\ge 1\Leftrightarrow x^2+2y^2+1\le y^2+8x+1\Leftrightarrow x^2+y^2-8x\le 0$ suy ra tập hợp các điểm có tọa độ $(x;y)$ nằm trong hoặc trên đường tròn $(C_2):x^2+y^2-8x=0$.



Nhận xét:

Đường tròn (C_1) cắt đường tròn (C_2) tại hai điểm phân biệt $A\left(2;2\sqrt{3}\right),B\left(2;-2\sqrt{3}\right)$.

Ta có: $m(x+3)+3y=12 \Leftrightarrow mx+3y+3m-12=0\ (\Delta)$

Đường thẳng $\Delta: mx+3y+3m-12=0$ luôn đi qua điểm cố định $M(-3;4)$ và có hệ số góc $k_\Delta=-\frac{m}{3}$.

Gọi d_1 là đường thẳng đi qua điểm M và B suy ra $\overrightarrow{MB}=\left(5;-2\sqrt{3}-4\right)$ nên hệ số góc của đường thẳng d_1: $k_{d_1}=\frac{-2\sqrt{3}-4}{5}$; d_2 là tiếp tuyến của đường tròn (C_2) đi qua $M(-3;4)$ và tiếp xúc với (C_2) tại điểm $C(4;4)$ nên hệ số góc của đường thẳng d_2: $k_{d_2}=0$.

Để tồn tại ít nhất một cặp $(x;y)$ thì $k_{d_1}\le k_\Delta\le k_{d_2} \Leftrightarrow \frac{-2\sqrt{3}-4}{5}\le\frac{-m}{3}\le 0$

$\Leftrightarrow 0\le m\le\frac{12+6\sqrt{3}}{5}\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{0;1;2;3;4\}$.

Câu 13. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $2^{2u_1+1}+2^{3-u_2}=\frac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2-4u_1+4\right)}$ và $u_{n+1}=2u_n$ với mọi $n\ge 1$.

Đặt $S_n=u_1+u_2+...+u_n$. Giá trị nhỏ nhất của n để $S_n>28^{10}$ là:

A. 49. **B.** 51. **C.** 50. **D.** 52.

Lời giải

Theo GT, $u_{n+1}=2u_n$ nên (u_n) là một CSN với công bội $q=2\Rightarrow u_n=u_1.2^{n-1}\Rightarrow\begin{cases}u_2=2u_1\\u_3=4u_1\end{cases}$

Xét $2^{2u_1+1}+2^{3-u_2}=2.4^{u_1}+\frac{8}{4^{u_1}}\ge 2\sqrt{2.4^{u_1}.\frac{8}{4^{u_1}}}=8$

Và $\frac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2-4u_1+4\right)}=\frac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2-u_3+4\right)}=\frac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}(u_3-2)^2+3\right)}\le\frac{8}{\log_3 3}=8$

Do đó dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}2.4^{u_1}=\frac{8}{4^{u_1}}\\u_3=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=\frac{1}{2}\\u_3=2\end{cases}$

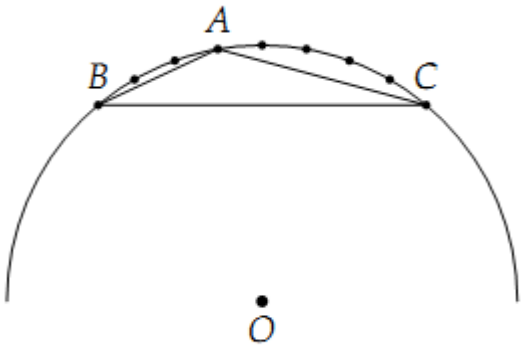
Khi đó $S_n=u_1.\frac{1-2^n}{1-2}=\frac{2^n-1}{2}>28^{10}\Leftrightarrow n>\log_2\left(2.28^{10}+1\right)\approx 49,07\Rightarrow n_{\min}=50$.

Câu 14. Cho đa giác đều 2018 đỉnh. Gọi S là tập hợp các tam giác có đỉnh là đỉnh của đa giác. Chọn ngẫu nhiên một tam giác trong tập S. Tính xác suất để chọn tam giác có một góc lớn hơn 140 độ.

A. $\frac{231}{2018}$. **B.** $\frac{298}{2017}$. **C.** $\frac{231}{2017}$. **D.** $\frac{295}{2017}$.

Lời giải

Số tam giác có đỉnh là đỉnh của đa giác đều là C_{2018}^3.



Hai đỉnh liên tiếp của đa giác đều 2018 đỉnh chắn một cung tròn (nhỏ) có số đo $\frac{360^o}{2018}=\frac{180^o}{1009}$.

Xét tam giác ABC có các đỉnh là các đỉnh của đa diện đều và $\hat{A}>140^o$. Khi đó ta có số đo góc A,B,C là bội của $\frac{90^o}{1009}$.

Ta có số cách chọn đỉnh A là 2018 cách.

Xét số cách chọn hai đỉnh B,C. Gọi $n.\frac{90^o}{1009}$ là tổng số đo của hai góc B,C với $n\ge 2$.

Do $\hat{A}>140^o$ nên $n.\frac{90^o}{1009}<40^o\Rightarrow 2\le n\le 448$.

Với mỗi phần tử xếp thành hàng ngang có $n-1$ khoảng cách trống ở giữa nên với mỗi số $n\in\{2;3;...;448\}$ có $n-1$ cặp B,C thỏa mãn yêu cầu.

Vậy số tam giác có một góc lớn hơn 140^o tạo thành từ ba đỉnh đã cho là $2018.(1+2+...+447)=2018.C_{448}^2$

Vậy xác suất để chọn được tam giác có một góc lớn hơn 140^o là $p=\frac{2018.C_{448}^2}{C_{2018}^3}=\frac{298}{2017}$.

Câu 15. Cho các số thực a, b, c và hàm số $f(x)$, biết rằng hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+f(-x)=2c$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Đồng thời có bảng biến thiên như hình vẽ kèm theo. Xét các hàm số $g(x)=f(x)+a$; $h(x)=x\left[f(x)+b\right]$. Nếu $g(x)$ là hàm số lẻ và $h(x)$ là hàm số chẵn thì phương trình $g(x).h(x)=x$ có bao nhiêu nghiệm?

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$c+2$	↘ $c-2$	↗ $+\infty$

A. 15. **B.** 7. **C.** 10. **D.** 5.

Lời giải

Đáp số: B

Ta có: $g(x)$, $h(x)$ xác định với $\forall x\in\mathbb{R}$.

Theo bài ra: $f(1)+f(-1)=2c$

$g(x)$ là hàm số lẻ nên: $g(-1)=-g(1)\Leftrightarrow f(-1)+a=-\left(f(1)+a\right)\Leftrightarrow f(1)+f(-1)=-2a$, suy ra $a=-c$

$h(x)$ là hàm số chẵn nên:

$h(-1)=h(1)\Leftrightarrow -1.\left[f(-1)+b\right]=1.\left[f(1)+b\right]\Leftrightarrow f(1)+f(-1)=-2b$, suy ra $b=-c$.

Vậy nên $g(x).h(x)=\left(f(x)-c\right).x\left(f(x)-c\right)=x\left(f(x)-c\right)^2$

Xét phương trình:

$$g(x).h(x)=x\Leftrightarrow x\left(f(x)-c\right)^2=x\Leftrightarrow x\left[\left(f(x)-c\right)^2-1\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f(x)=c+1\\f(x)=c-1\end{array}\right.$$

Dựa vào bảng biến thiên và $f(0)=c$

Phương trình $f(x)=c+1$ có 3 nghiệm khác 0.

Phương trình $f(x)=c-1$ có 3 nghiệm khác 0.

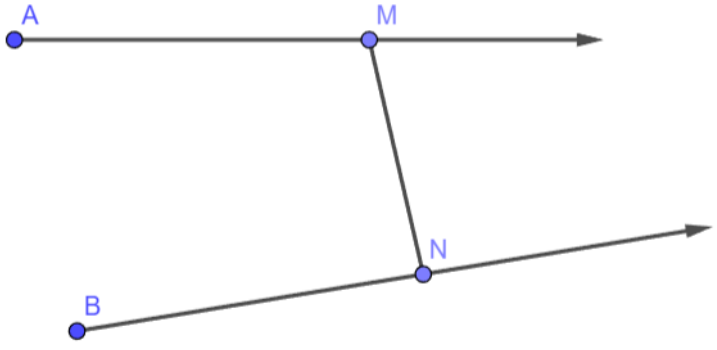
Vậy phương trình $g(x).h(x)=x$ có 7 nghiệm.

Câu 16. Trạm kiểm soát không lưu đang theo dõi hai máy bay. Giả sử trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đơn vị đo lấy theo kilômét, tại cùng một thời điểm theo dõi ban đầu: máy bay thứ nhất ở tọa độ $A(0;35;10)$, bay theo hướng vectơ $\overrightarrow{v_1}=(3;4;0)$ với tốc độ không đổi 900 (km/h) và máy bay thứ hai ở tọa độ $B(31;10;11)$, bay theo hướng $\overrightarrow{v_2}=(5;12;0)$ với tốc độ không đổi 910 (km/h). Biết rằng khoảng cách an toàn tối thiểu giữa hai máy bay là 5 hải lý (khoảng 9.3 km). Nếu hai máy bay tiếp tục duy trì hướng và tốc độ bay như trên thì sau ít nhất bao nhiêu phút (kể từ thời điểm theo dõi ban đầu), hai máy bay vi phạm khoảng cách an toàn (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. 4,15. **B.** 9,34. **C.** 8,42. **D.** 3,57.

Lời giải

Chọn C.



Máy bay 1:

$\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{v_1}\Leftrightarrow M=A+k\overrightarrow{v_1}$

$AM=v_1t\Rightarrow k\left|\overrightarrow{v_1}\right|=v_1t\Rightarrow k.5=900t\Rightarrow k=180t$

$\Rightarrow M=A+180\overrightarrow{v_1}t\Rightarrow M\left(540t;35+720t;10\right)$

Máy bay 2:

$\overrightarrow{BN}=k\overrightarrow{v_2}\Leftrightarrow N=B+k\overrightarrow{v_2}$

$BN = v_2 t \Rightarrow k\left|\overrightarrow{v_2}\right| = v_2 t \Rightarrow k.13 = 910t \Rightarrow k = 70t$

$\Rightarrow N = B + 70\overrightarrow{v_2}t \Rightarrow N\left(31+350t;10+840t;11\right)$

Ta có $MN = 9,3 \Rightarrow \sqrt{\left(31+350t-540t\right)^2 + \left(10+840t-35-720t\right)^2 + 1} = 9,3$

Suy ra $t = 0,14031$ giờ $\Rightarrow t = 8,42$ phút (thời gian lần đầu tiên)

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;1;1), B(1;2;3), C(-1;2;0)$. Điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn $\cos\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)+\cos\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}\right)=0$ và tồn tại số thực k sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + k\left(3k+1\right)\overrightarrow{AC}$. Tổng $x+2y+3z-k$ bằng

A. $\frac{19}{3}$. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải

Chọn **A**

$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + k\left(3k+1\right)\overrightarrow{AC} \Rightarrow A,B,C,M$ đồng phẳng.

$\overrightarrow{AM}\left(x-2;y-1;z-1\right), \overrightarrow{AB}\left(-1;1;2\right), \overrightarrow{AC}\left(-3;1;-1\right)$

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + k\left(3k+1\right)\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9k^2 - 4k + 2 \\ y = 3k^2 + 2k + 1 \\ z = -3k^2 + k + 1 \end{cases}$$

$\cos\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)+\cos\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}\right)=0 \Rightarrow \left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}\right)=180^\circ$

Do đó B,M,C thẳng hàng theo thứ tự đó.

$\overrightarrow{BM}\left(-9k^2-4k+1;3k^2+2k-1;-3k^2+k-2\right); \overrightarrow{BC}\left(-2;0;-3\right)$

$$B,M,C \text{ thẳng hàng } \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = n\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} -9k^2-4k+1 = -2n \\ 3k^2+2k-1 = 0 \\ -3k^2+k-2 = -3n \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} k = \frac{1}{3} \\ n = \frac{2}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} k = -1 \\ n = 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Mà M nằm trong đoạn BC nên $k = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{-1}{3}; y = 2; z = 1 \Rightarrow x+2y+3z-k = \frac{19}{3}$.

Câu 18. Cho hai số thực x,y thoả mãn $\left(x-2\right)^2+\left(y-2\right)^2 \le 8-2xy$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2\left(x+3y\right)+y^2\left(y+3x\right)-3\left(x+1\right)\left(y+1\right)+9-3xy$ có dạng $\frac{m-\sqrt{5^n}}{4}$, trong đó m,n là các số nguyên dương. Giá trị của biểu thức $m-3n$ bằng

A. 2. **B.** 8. **C.** 26. **D.** 14.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\left(x-2\right)^2+\left(y-2\right)^2 \le 8-2xy \Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-4y+4 \le 8-2xy$

$\Leftrightarrow \left(x+y\right)^2 - 4\left(x+y\right) \le 0 \Leftrightarrow 0 \le x+y \le 4$.

$P = x^3+y^3+3xy\left(x+y\right)-3xy-3\left(x+y\right)+6-3xy$

$=(x+y)\left[(x+y)^2-3xy\right]+3xy(x+y)-6xy+6-3(x+y)$

$=(x+y)^3-6xy-3(x+y)+6$.

Ta có: $xy\le\dfrac{(x+y)^2}{4}\Rightarrow -6xy\ge -\dfrac{3}{2}(x+y)^2\Rightarrow P\ge (x+y)^3-\dfrac{3}{2}(x+y)^2-3(x+y)+6$

Đặt: $t=x+y, 0\le t\le 4\Rightarrow P=f(t)=t^3-\dfrac{3}{2}t^2-3t+6\Rightarrow f'(t)=3t^2-3t-3=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}(l)\\ t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}(n)\end{array}\right.$.

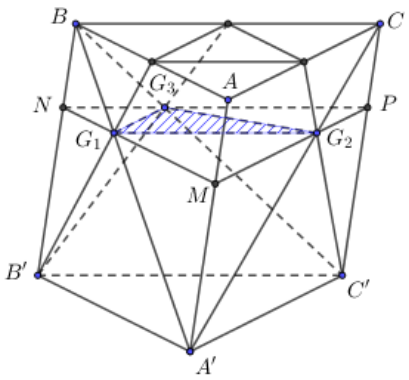
Lập BBT của $f(t)$ ta được

$\Rightarrow P_{\min}=f(t)_{\min}=f\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\dfrac{17-5\sqrt{5}}{4}=\dfrac{17-\sqrt{5}^3}{4}\Rightarrow m=17, n=3\Rightarrow m-3n=8$.

Câu 19. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 3 và $BA'=BB'=BC'=3\sqrt{3}$. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác ABB', ACC', CBB'. Thể tích khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm G_1, G_2, G_3, A', B' và C' bằng

A. $20\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{10\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{20\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{40\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải



+) Dễ thấy $\begin{cases} G_1G_3//A'C'//AC\\ G_1G_2//BC\end{cases}\Rightarrow (G_1G_2G_3)//(ABC)$

+) Qua G_1 kẻ đường thẳng song song với AB cắt AA', BB' lần lượt tại M, N; đường thẳng MG_2 cắt CC' tại P ta được lăng trụ $MNP.A'B'C'$.

+) Dễ thấy $NG_1=\dfrac{1}{3}NM$, $NG_3=\dfrac{1}{3}NP$, $PG_2=\dfrac{1}{3}PM$.

Từ đó suy ra $S_{MG_1G_2}=\dfrac{1}{2}MG_1.MG_2.\sin G_1MG_2$

$=\dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{2}{3}MN\right).\left(\dfrac{2}{3}MP\right).\sin G_1MG_2=\dfrac{4}{9}S_{MNP}$.

Đặt $V_0=V_{A'B'C'.MNP}=d\left(A';(MNP)\right).S_{MNP}$;

Khi đó $V_{A'.MG_1G_2}=\dfrac{1}{3}d\left(A';(MNP)\right).S_{MG_1G_2}=\dfrac{1}{3}d\left(A';(MNP)\right).\left(\dfrac{4}{9}S_{MNP}\right)=\dfrac{4}{27}V_0$;

Tương tự ta có: $V_{B'.NG_1G_2}=\frac{1}{27}V_0$; $V_{C'.PG_2G_3}=\frac{2}{27}V_0$;

Khi đó $V_{A'B'C'.G_1G_2G_3}=V_{A'B'C'.MNP}-\left(V_{A'.MG_1G_2}+V_{B'.NG_1G_2}+V_{C'.PG_2G_3}\right)$

$=V_0-\left(\frac{4}{27}V_0+\frac{1}{27}V_0+\frac{2}{27}V_0\right)=\frac{20}{27}V_0$

Lại có $V_0=\frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}=\frac{2}{3}.BG.S_{A'B'C'}$ (G là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$)

$V_0=\frac{2}{3}\sqrt{3a^2-\frac{a^2}{3}}.\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$.

Vậy $V_{A'B'C'G_1G_2G_3}=\frac{20\sqrt{2}a^3}{81}$. Thay $a=3\Rightarrow V_{A'B'C'G_1G_2G_3}=\frac{20\sqrt{2}.3^3}{81}=\frac{20\sqrt{2}}{3}$

Câu 20. Người ta muốn lát kín một bảng ô vuông kích thước 2×13(2 hàng 13 cột) bằng các tấm bìa kích thước 1×2 và 1×3 sao cho các tấm bìa không được chồng lên nhau hay phủ ra ngoài bảng. Có bao nhiêu cách lát nếu ta được phép xoay các tấm bìa nhưng cạnh dài của tất cả các tấm bìa đều phải song song với nhau.

A. 256. **B.** 120. **C.** 60. **D.** 257.

Lời giải:

TH1: Cả 2 hàng gồm 5 tấm bìa kích thước 1×2 và 1 tấm bìa kích thước 1×3: có số cách là $\left(C_6^1C_5^5\right)^2=36$

TH2: Cả 2 hàng gồm 2 tấm bìa kích thước 1×2 và 3 tấm bìa kích thước 1×3: có số cách là $\left(C_5^2C_3^3\right)^2=100$

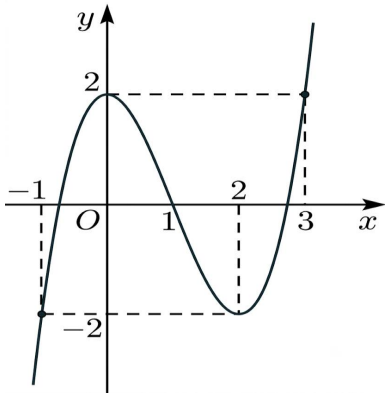
TH3: Cả 13 cột gồm 13 tấm bìa kích thước 1×2: có số cách là 1

TH4: Một hàng gồm 2 tấm bìa kích thước 1×2 và 3 tấm bìa kích thước 1×3, một hàng gồm 5 tấm bìa kích thước 1×2 và 1 tấm bìa kích thước 1×3: có số cách $2.\left(C_5^2C_3^3\right)\left(C_6^1C_5^5\right)=120$

Tổng có $36+100+1+120=257$ cách

PHẦN II. **Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f\left(x\right)$ thỏa mãn $f\left(0\right)=f\left(2\right)=\frac{1}{2}$ và hàm số $f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ



a) Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$.

b) Hàm số $y=f\left(x\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[1;3\right]$ tại $x=2$.

c) Phương trình $f'\left(\sin x\right)=0$ có 10 nghiệm thuộc đoạn $\left[0;10\pi\right]$.

d) Hàm số $g(x)=\left|18f\left(1-\frac{x}{3}\right)-x^2\right|$ có 7 điểm cực trị.

Lời giải

a) Chọn sai. Dựa vào đồ thị, suy ra $f'(x)=0$ có nghiệm đơn $x_2\in(2;+\infty)$ nên hàm số $y=f(x)$ có cực trị trong khoảng $(2;+\infty)$. Suy ra hàm số $y=f(x)$ không đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

b) Chọn sai. Ta có $f'(x)=0$ có một nghiệm đơn $x_2\in(1;3)$ và $f'(x)$ đổi dấu từ $(-)$ sang $(+)$ khi đi qua x_2, suy ra hàm số $y=f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1;3]$ tại $x=x_2\,(2<x_2<3)$.

c) Chọn sai. Từ đồ thị ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\ (-1<x_1<0)\\x=1\\x=x_2\ (2<x_2<3).\end{array}\right.$

Do đó $f'(\sin x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=x_1\\\sin x=1.\end{array}\right.$

Vì $\sin x=x_1$ có hai nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$, mà hàm số $y=\sin x$ tuần hoàn chu kỳ $T=2p$ nên $\sin x=x_1$ có 10 nghiệm thuộc đoạn $[0;10\pi]$.

Tương tự $\sin x=1$ có một nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$ nên $\sin x=1$ có 5 nghiệm thuộc đoạn $[0;10\pi]$.

Suy ra phương trình $f'(\sin x)=0$ có 15 nghiệm thuộc đoạn $[0;10\pi]$.

d) Chọn đúng. Ta có $g'(x)=\dfrac{\left(18f\left(1-\frac{x}{3}\right)-x^2\right)\left(-6f'\left(1-\frac{x}{3}\right)-2x\right)}{\left|18f\left(1-\frac{x}{3}\right)-x^2\right|}$.

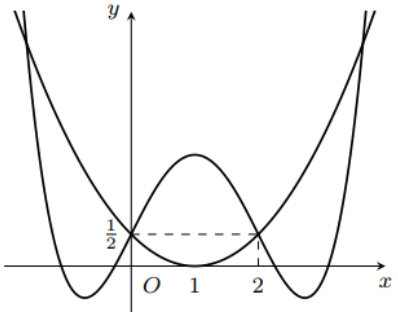
$\left(18f\left(1-\frac{x}{3}\right)-x^2\right)\left(-6f'\left(1-\frac{x}{3}\right)-2x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(1-\frac{x}{3}\right)=\frac{x^2}{18}\\f'\left(1-\frac{x}{3}\right)=-\frac{x}{3}.\end{array}\right.$

Đặt $t=1-\frac{x}{3}\Rightarrow x=3-3t$.

Khi đó $f\left(1-\frac{x}{3}\right)=\frac{x^2}{18}$ trở thành $f(t)=\frac{1}{2}(1-t)^2$.

Vẽ đồ thị hai hàm số $y=f(t)$ và $y=\frac{1}{2}(1-t)^2$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

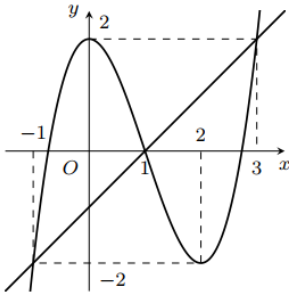
Ta có $f(0)=f(2)=\frac{1}{2}$



Dựa vào đồ thị suy ra $f(t)=\frac{1}{2}(1-t)^2$ có bốn nghiệm đơn phân biệt ẩn t.

Đặt $t=1-\frac{x}{3}$. Khi đó $f'\left(1-\frac{x}{3}\right)=-\frac{x}{3}$ trở thành $f'(t)=t-1$.

Vẽ đồ thị hai hàm số $y=f'(t)$ và $y=t-1$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ



Dựa vào đồ thị suy ra $f'(t)=t-1$ có ba nghiệm đơn phân biệt ẩn t.

Ứng với mỗi nghiệm t cho ta một nghiệm x.

Vậy hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;3;5), B(-1;3;2), C(-2;1;3), D(5;7;4)$.

a) Điểm $E(0,m,n)$ trên mặt phẳng (Oyz) thỏa mãn $|EB-EC|=\sqrt{6}$ thì $m+n<6$.

b) Khoảng cách từ A đến trục Oy bằng 3.

c) $\cos BAD=-\frac{1}{2\sqrt{10}}$.

d) Cho $M(a;b;c)$ là điểm di động trên mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $T=4MA^2+5MB^2-6MC^2+2024MD^4$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $2a+3b+4c=31$.

Lời giải

a) Dễ thấy B,C cùng phía so với mặt phẳng (Oyz) và đường thẳng BC không song song với (Oyz). Khi đó $|EB-EC|\le BC=\sqrt{6}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi 3 điểm B,C,E thẳng hàng và E nằm ngoài đoạn BC.

Ta có $\overrightarrow{BE}=(1;m-3;n-2)$; $\overrightarrow{BC}=(-1;-2;1)$

$\Rightarrow \frac{m-3}{-2}=\frac{n-2}{1}=-1\Rightarrow \begin{cases} m=5 \\ n=1 \end{cases} \Rightarrow m+n=6$. **Vậy a) sai.**

b) $d(A,Oy)=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$. **Vậy b) sai**

c) $\overrightarrow{AB}=(-3;0;-3), \overrightarrow{AD}=(3;4;-1)\Rightarrow \cos BAD=\frac{-9+3}{\sqrt{3^2+3^2}\sqrt{3^2+4^2+1^2}}=-\frac{1}{\sqrt{13}}$. **Vậy c) sai.**

d) Xét điểm E thỏa mãn: $4\overrightarrow{EA}+5\overrightarrow{EB}-6\overrightarrow{EC}=\vec{0}\Rightarrow E(5;7;4)\equiv D$.

Khi đó

$T=4MA^2+5MB^2-6MC^2+MD^4=4\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}\right)^2+5\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB}\right)^2-6\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}\right)^2+MD^4$

$=3MD^2+MD^4+2\left(4\overrightarrow{DA}+5\overrightarrow{DB}-6\overrightarrow{DC}\right)\overrightarrow{MD}+4DA^2+5DB^2-6DC^2$

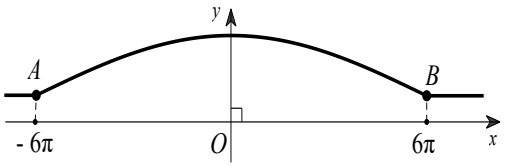
$=3MD^2+MD^4+4DA^2+5DB^2-6DC^2$

Suy ra T đạt giá trị nhỏ nhất khi MD nhỏ nhất, và MD nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của D trên mặt phẳng (Oxy).

Suy ra $M(5;7;0)$. Vậy $2a+3b+4c=2.5+3.7+4.0=31$. **Vậy d) đúng.**

Câu 3. Một chiếc cầu bắc qua sông, mặt dưới gầm cầu có dạng cung AB biểu thị bởi đồ thị hàm số $y=\frac{8\sqrt{3}}{3}\cos\frac{x}{12}+2$ (1) với $x\in[-6\pi;6\pi]$ trong hệ trục toạ độ Oxy với đơn vị trục là mét (trục Ox mô tả mặt nước sông) như hình minh họa dưới đây:





a) Giá trị nhỏ nhất của hàm số (1) trên đoạn $[-6\pi;6\pi]$ là $\frac{6-8\sqrt{3}}{3}$.

b) Trên đoạn $[-6\pi;6\pi]$ đồ thị hàm số (1) có 5 điểm có tung độ nguyên.

c) Hàm số (1) là hàm số tuần hoàn với chu kì $T=\frac{\pi}{6}$.

d) Biết quy định chiều cao tối đa của các phương tiện giao thông hàng hóa qua lại dưới gầm cầu phải thấp hơn mặt dưới gầm ít nhất 0,8 mét. Một sà lan chở khối hàng hóa có hình dạng là một khối hộp chữ nhật với độ cao 5,2 mét so với mặt nước sông muốn đi qua gầm cầu. Bề rộng tối đa của khối hàng hóa để sà lan qua được gầm cầu đúng quy định là $12,56$ m (lấy số $\pi=3,14$).

Lời giải

a) Sai b) Sai c) Sai d) Đúng

a) Chọn sai.

Vì $x\in[-6\pi;6\pi]\Rightarrow\frac{x}{12}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\cos\frac{x}{12}\in[0;1]\Rightarrow\min y=2$.

b) Chọn sai.

Ta có $x\in[-6\pi;6\pi]\Rightarrow\frac{x}{12}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\cos\frac{x}{12}\in[0;1]\Rightarrow\min y=2;\ \max y=2+\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

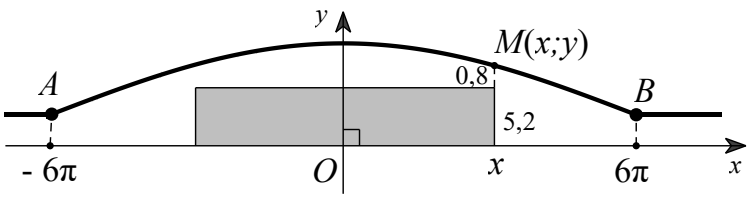
$2\le y\le 2+\frac{8\sqrt{3}}{3}\Rightarrow y\in\{2;3;4;5;6\}$ mỗi y có 02 giá trị x. Do đó trên đồ thị hàm số (1) có 10 điểm có tung độ nguyên.

c) Chọn sai.

Hàm số (1) là hàm số tuần hoàn với chu kì $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{12}}=24\pi$.

d) Chọn đúng.

Xét điểm $M(x;y)$ nằm trên cung AB, khoảng cách từ điểm M đến mặt nước tương ứng với giá trị tung độ y của điểm M.



Xét phương trình $y=\frac{8\sqrt{3}}{3}\cos\left(\frac{x}{12}\right)+2=5,2+0,8=6$. $\Leftrightarrow \cos\frac{x}{12}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{x}{12}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \frac{x}{12}=\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi\Rightarrow x=\pm 2\pi+k24\pi$

Vì $x\in[-6\pi;6\pi]\Rightarrow x=\pm 2\pi$ nên ta có $|x|=2\pi$.

Để sà lan có thể đi qua được gầm cầu đúng quy định thì bề rộng khối hàng là

$2|x|\le 4\pi=4\times 3,14=12,56$.

Vậy bề rộng tối đa của khối hàng là $12,56$ mét.

Câu 4. Tại một trường THPT, để khảo sát năng lực học môn toán của hai lớp 12E và 12F, giáo viên đã cho học sinh ở hai lớp làm bài kiểm tra khảo sát đầu năm, thống kê điểm của học sinh được cho trong bảng sau:

Lớp điểm thi	$[0;2)$	$[2;4)$	$[4;6)$	$[6;8)$	$[8;10)$
Số học sinh lớp 12E	3	6	12	24	5
Số học sinh lớp 12F	4	5	16	18	7

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Dựa vào điểm trung bình môn Toán ta đánh giá được lớp 12E học tốt môn Toán hơn lớp 12F.

b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu thống kê điểm của lớp 12F nhỏ hơn $2,9$.

c) Điểm thi có số học sinh đạt được nhiều nhất ở lớp 12E nhỏ hơn ở lớp 12F.

d) Dựa vào độ lệch chuẩn của mẫu số liệu thống kê ghép nhóm, ta thấy rằng lớp 12E học đều hơn lớp 12F.

Lời giải

a) Điểm trung bình môn toán của:

Lớp 12E: $\overline{x_1}=\frac{3.1+6.3+12.5+24.7+5.9}{50}=5,88$

Lớp 12F: $\overline{x_2}=\frac{4.1+5.3+16.5+18.7+7.9}{50}=5,76$.

Do đó, điểm trung bình môn toán của lớp 12E cao hơn điểm trung bình môn toán của lớp 12F. Vậy a) đúng.

b) Cỡ mẫu là $n=4+5+16+18+7=50$. Gọi $x_1,x_2,...,x_{50}$ là điểm của các học sinh lớp 12F và giả sử dãy số liệu gốc này sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là x_{13} nên nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là nhóm

$[4;6)$ và có $Q_1=4+\left[\frac{\frac{50}{4}-9}{16}\right].2=4,4375.$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là x_{39} nên nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là nhóm $[6;8)$

và có $Q_3=6+\left[\frac{\frac{50.3}{4}-25}{18}\right].2\approx 7,3889.$

Khoảng tứ phân vị $\Delta Q=Q_3-Q_1=2,95$. Do đó b) sai.

c) Ta có lớp 12E có: $M_o=6+\frac{24-12}{(24-12)+(24-5)}.2=6,774$

Lớp $12F$ có: $M_o = 6 + \dfrac{18-16}{18-16+18-7}.2 = 6,307$.

Vậy điểm thi có số học sinh đạt nhiều nhất ở lớp 12E lớn hơn ở lớp 12F suy ra SAI

d)

Lớp điểm thi	$[0;2)$	$[2;4)$	$[4;6)$	$[6;8)$	$[8;10)$
Giá trị đại diện	1	3	5	7	9
Số học sinh lớp 12E	3	6	12	24	5
Số học sinh lớp 12F	4	5	16	18	7

Ta có:

$$S_E{}^2 = \frac{3(1-5,88)^2 + 6(3-5,88)^2 + 12(5-5,88)^2 + 24(7-5,88)^2 + 5(9-5,88)^2}{50} \approx 4,19$$

$$\Rightarrow S_E \approx 2,05$$

$$S_F{}^2 = \frac{4(1-5,76)^2 + 5(3-5,76)^2 + 16(5-5,76)^2 + 18(7-5,76)^2 + 7(9-5,76)^2}{50} \approx 4,78$$

$$\Rightarrow S_F \approx 2,19$$

Vậy dựa vào độ lệch chuẩn lớp 12E học đồng đều hơn lớp 12F Suy ra ĐÚNG.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm $O, AB = 4a$ và $BAD = 120°$. Gọi H là trung điểm của AO. Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH = a\sqrt{3}$.

a) Góc tạo bởi đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng góc BSH.

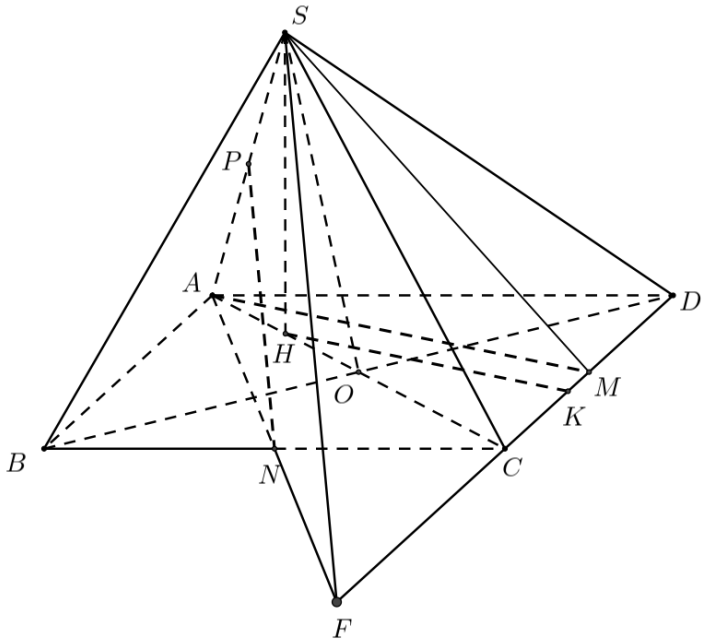
b) Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $8a^3$.

c) Gọi α là số đo góc phẳng nhị diện $[S,CD,A]$, khi đó $\tan\alpha = \dfrac{3}{2}$.

d) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của ba cạnh CD, BC và SA. Khoảng cách giữa hai đường thẳng PN và SM bằng $\dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$.

Lời giải

Chọn a) Sai | b) Đúng | c) Sai | d) Đúng.



a) Mệnh đề sai vì

Do $SH \perp (ABCD)$, $BO \subset (ABCD)$ nên $BO \perp SH$.

Ta có $\left.\begin{array}{l} BO \perp SH \\ BO \perp AC \\ SH, AC \subset (SAC) \end{array}\right\} \Rightarrow BO \perp (SAC)$.

Khi đó SO là hình chiếu của SB trên (SAC).

Góc tạo bởi đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng góc BSO.

b) Mệnh đề đúng, vì:

Ta có $S_{ABCD} = AB.AD.\sin BAD = 4a.4a.\sin 120° = 8a^2\sqrt{3}$.

Khi đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{1}{3}.8a^2\sqrt{3}.a\sqrt{3} = 8a^3$.

c) Mệnh đề sai, vì

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ kẻ $HK \perp CD$ tại K.

Do $SH \perp (ABCD)$, $CD \subset (ABCD)$ nên $CD \perp SH$.

Ta có $\left.\begin{array}{l} CD \perp SH \\ CD \perp HK \\ SH, HK \subset (SHK) \end{array}\right\} \Rightarrow CD \perp (SHK)$.

Suy ra $CD \perp SK$.

Góc phẳng nhị diện $[S, CD, A]$ là SKH.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ kẻ $AM \perp CD$ tại M.

Tam giác ACD có $AD = DC$ và $CAD = 60°$ nên tam giác ACD đều.
Do đó M là trung điểm CD.

Ta có $AM = \sqrt{AD^2 - DM^2} = \sqrt{(4a)^2 - (2a)^2} = 2a\sqrt{3}$.

Trong tam giác ACM có $AM // HK$ nên

$\frac{HK}{AM} = \frac{CH}{CA} = \frac{3}{4} \Rightarrow HK = \frac{3}{4}AM = \frac{3}{4}.2a\sqrt{3} = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông SHK có $\tan SKH = \tan\alpha = \frac{SH}{HK} = a\sqrt{3}.\frac{2}{3a\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$.

d) Mệnh đề đúng, vì

Gọi $AN \cap CD = F$. Suy ra $PN // SF$

Do đó

$$\mathrm{d}(PN, SM) = \mathrm{d}(PN, (SFD)) = \mathrm{d}(P, (SFD)) = \frac{1}{2}\mathrm{d}(A, (SFD)) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\mathrm{d}(H, (SFD))$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{SH\cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}\cdot\frac{3a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3a^2 + \frac{27a^2}{4}}} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}.$$

Câu 6. Cho tập hợp $A = \{1;2;3;4;5;6;7;8\}$. B là tập tất cả các số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau lấy từ A có dạng $\overline{abcd}$. C là tập tất cả các số tự nhiên gồm 8 chữ số đôi một khác nhau lấy từ A.

a) Chọn ngẫu nhiên một số thuộc B. Xác suất để số lấy ra là số thoả mãn $a<b<c<d$ là $\frac{1}{34}$.

b) Chọn thứ tự 2 số thuộc B. Xác suất để trong hai số đó có đúng một số có mặt chữ số 3 là $\frac{420}{1679}$.

c) Chọn ngẫu nhiên một số thuộc B. Xác suất để số đó không có hai chữ số liên tiếp nào cùng chẵn bằng $\frac{1}{2}$.

d) Chọn ngẫu nhiên một số thuộc C. Xác suất để chọn được số chia hết cho 1111 là $\frac{1}{105}$.

Lời giải

$n(B)=A_8^4=1680$

$n(C)=8!=40320$

a) X : "Số lấy ra thoả mãn $a<b<c<d$".

$n(\Omega)=1680$. Suy ra $n(X)=C_8^4=70$

Vậy $P(X)=\frac{n(X)}{n(\Omega)}=\frac{70}{1680}=\frac{1}{24}.\Rightarrow$ a sai.

b) Y : "Trong hai số đó có đúng một số có mặt chữ số 3".

$n(\Omega)=A_{1680}^2=2820720$.

Trong tập hợp B ta thấy:

Có tất cả $4.A_7^3=840$ số có mặt chữ số 3.

Có $A_7^4=840$ số không có mặt chữ số 3.

Gọi C là biến cố "trong 2 số vừa chọn có đúng một số có mặt chữ số 3"

Khi đó $n(Y)=840.840.2=1411200$

Vậy xác suất cần tìm là $P(Y)=\frac{n(Y)}{n(\Omega)}=\frac{1411200}{2820720}=\frac{840}{1679}$

Vậy b sai.

c) E : "Số được chọn không có hai chữ số liên tiếp nào cùng chẵn".

$n(\Omega)=1680$.

Nhận thấy rằng không thể có 3 chữ số chẵn hoặc 4 chữ số chẵn vì lúc đó luôn tồn tại hai chữ số chẵn nằm cạnh nhau. Do đó,

Trường hợp 1: Cả 4 chữ số đều lẻ có $4!=24$ số.

Trường hợp 2. Có 3 chữ số lẻ, 1 chữ số chẵn. Khi đó có $C_4^1.C_4^3.4!=384$

Trường hợp 3. Có 2 chữ số chẵn, 2 chữ số lẻ.

Chọn 2 chữ số lẻ, 2 chữ số chẵn từ X có $C_5^2.C_4^2$ cách.

Xếp thứ tự 2 chữ số lẻ có 2! cách.

Hai chữ số lẻ tạo thành 3 khoảng trống, xếp hai chữ số chẵn vào 3 khoảng trống và sắp thứ tự có $A_3^2=6$ cách.

$\Rightarrow$ trường hợp này có $C_4^2.C_4^2.2.6=432$ số.

Do đó, $n(E)=24+384+432=840$

Vậy $P(E)=\dfrac{n(E)}{n(\Omega)}=\dfrac{840}{1680}=\dfrac{1}{2}$.

Vậy c đúng.

d) F : "Số được chọn chia hết cho 1111".

Không gian mẫu: $n(\Omega)=8!$

Gọi số cần lập có dạng $P=\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$, $a_i \in A, a_i \neq a_j$ với $i \neq j$.

Nhận xét A có 8 phần tử và tổng các phần tử là 36 nên P chia hết cho 9, do $(9,11)=1$ nên P chia hết cho 9999.

$P=\overline{a_1a_2a_3a_4}.10^4+\overline{a_5a_6a_7a_8}=\overline{a_1a_2a_3a_4}.(9999+1)+\overline{a_5a_6a_7a_8}$

$=\overline{a_1a_2a_3a_4}.9999+\overline{a_1a_2a_3a_4}+\overline{a_5a_6a_7a_8}$

Do P chia hết cho 9999 nên $\overline{a_1a_2a_3a_4}+\overline{a_5a_6a_7a_8}$ chia hết cho 9999.

$a_i \in A$ nên $\overline{a_1a_2a_3a_4}+\overline{a_5a_6a_7a_8}<2.9999$, từ đó $\overline{a_1a_2a_3a_4}+\overline{a_5a_6a_7a_8}=9999$

Với mỗi cách chọn a_i sẽ có duy nhất cách chọn a_{i+4} sao cho $a_i+a_{i+4}=9$ với $i \in \{1,2,3,4\}$.

Chọn a_1 có 8 cách, chọn a_2 có 6 cách, chọn a_3 có 4 cách, chọn a_4 có 2 cách.

Suy ra $n(F)=8.6.4.2=384$.

Vậy $p(F)=\dfrac{384}{8!}=\dfrac{1}{105}$.

Vậy d đúng.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Hàm số $y=(x+1)(x+2)^2(x+3)^3...(x+2025)^{2025}$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

Lời giải

A. 1518

Đặt $f(x)=(x+1)(x+2)^2(x+3)^3...(x+2025)^{2025}$

Đặt $f_1'=(x+2)^2.(x+3)^3...(x+2025)^{2025}$

$f_2'=2(x+2)(x+1)(x+3)^3...(x+2025)^{2025}$

$f_3'=3(x+3)^2(x+1)(x+2)^2(x+4)^4...(x+2025)^{2025}$

…

$f_2'=2025(x+2025)(x+1)(x+2)^2(x+3)^3...(x+2024)^{2024}$

Suy ra $f'(x)=\sum_{k=1}^{2025} f_k'$

Dễ dàng thấy rằng, $x=-1$ không là nghiệm của $f'(x)$, còn $x=-2$ là nghiệm đơn, $x=-3$ là nghiệm bội 2, …, , $x=-2025$ là nghiệm bội 2024 của $f'(x)$. Vậy có 1012 nghiệm đơn và bội lẻ.

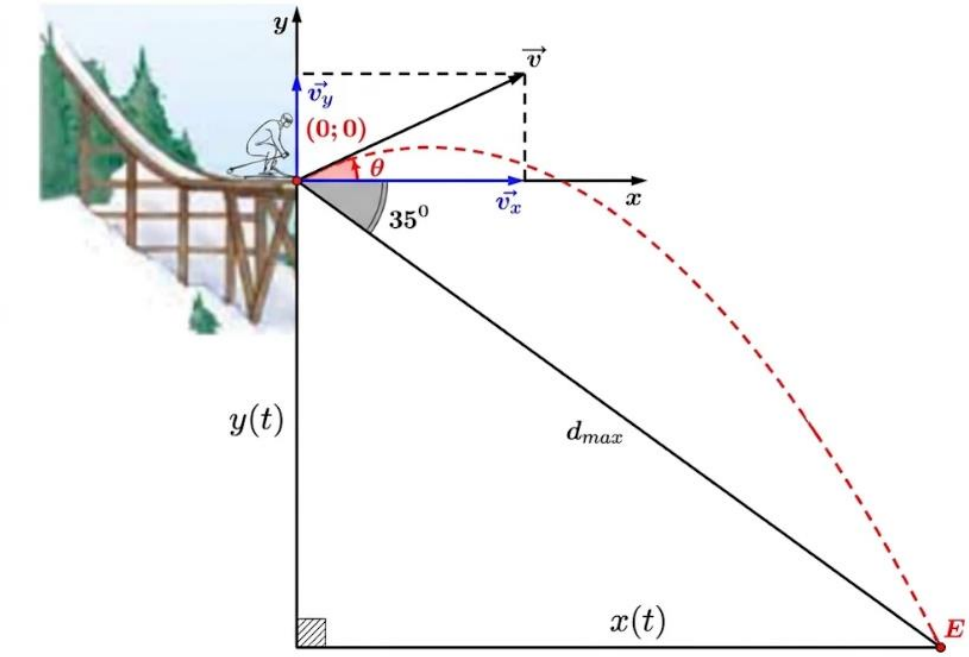
Mặt khác, nếu trên tập $\mathbb{R}\setminus\{-1;-2;-3;...;-2025\}$ thì

$f'(x)=f(x).\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{3}{x+3}+...+\dfrac{2025}{x+2025}\right)$

Đặt $h(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x+3}+...+\frac{2025}{x+2025}$ khi đó $h'(x)<0$ trên các khoảng xác định và thoả mãn $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=0,\ \lim\limits_{x\to-2025^-}h(x)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to-k+}h(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to-(k+1)^-}h(x)=+\infty\quad k=\overline{1,2024}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0,\ \lim\limits_{x\to-1^+}h(x)=+\infty$ nên $h(x)=0$ có 2024 nghiệm đơn.

Từ đó, suy ra $f'(x)$ có 3036 nghiệm đơn và bội lẻ. Do đó, hàm ban đầu có 1518 điểm cực tiểu.

Câu 2. Một vận động viên trượt tuyết trượt xuống máng trượt và rời khỏi máng với vector vận tốc $\vec{v}$ tạo với phương ngang 1 góc θ có độ lớn $v=25m/s$ như hình vẽ. Biết rằng độ dốc d (tính từ điểm kết thúc của máng trượt đến điểm tiếp đất) hợp với phương ngang một góc 35°. Biết rằng hệ phương trình chuyển động theo thời gian t của vận động viên là: $\begin{cases}x(t)=v_x t\\ y(t)=v_y t-\frac{1}{2}gt^2\end{cases}$ (1) với v_x, v_y lần lượt là các vector thành phần của vector vận tốc $\vec{v}$ khi chiếu lên trục Ox, Oy và hằng số gia tốc trọng trường g không đổi. Hỏi giá trị của θ (độ) phải bằng bao nhiêu để quãng đường tới điểm tiếp đất (d) là lớn nhất.



Lời giải

A. 27,5

Trước hết từ giả thiết đã cho ta suy ra: $\begin{cases}v_x=v\cos\theta\\ v_y=v\sin\theta\end{cases}$ và $\begin{cases}x(t)=d\cos35^\circ\\ y(t)=d\sin35^\circ\end{cases}$, kết hợp với phương trình (1) đã cho ta suy ra: $\begin{cases}d.\cos35^\circ=x(t)=v\cos\theta t & (2)\\ d.\sin35^\circ=y(t)=v\sin\theta t-\frac{1}{2}gt^2 & (3)\end{cases}$. Từ (2) ta suy ra:

$t=\dfrac{d\cos 35^\circ}{v\cos\theta}$ và thế vào (3) ta suy ra được phương trình sau:

$$v.\sin\theta.\frac{d\cos 35^\circ}{v\cos\theta}-\frac{1}{2}.g.\left(\frac{d\cos 35^\circ}{v\cos\theta}\right)^2=d.\sin 35^\circ$$

$$\Leftrightarrow v^2\sin 2\theta\cos 35^\circ-gd\cos^2 35^\circ=-2v^2\cos^2\theta\sin 35^\circ$$

Khi ấy ta thu được phương trình độ dài d là một hàm số theo θ như sau:

$d=f(\theta)=\dfrac{v^2\sin 2\theta\cos 35^\circ+2v^2\cos^2\theta\sin 35^\circ}{g\cos^2 35^\circ}=\dfrac{v^2}{g\cos 35^\circ}\left(\sin 2\theta+2\cos^2\theta\tan 35^\circ\right)$. Khảo sát hàm số trên, ta có: $f'(\theta)=\dfrac{v^2}{g\cos 35^\circ}\left(2\cos 2\theta-4\cos\theta\sin\theta\tan 35^\circ\right)$. Giải phương trình

$f'(\theta)=0$

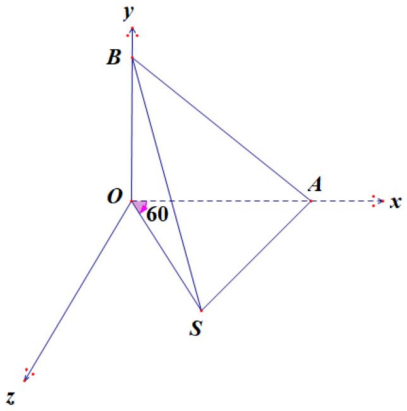
$$\Leftrightarrow 2\cos 2\theta=2\sin 2\theta\tan 35^\circ\Leftrightarrow\cot 2\theta=\tan\left(90^\circ-2\theta\right)=\tan 35^\circ\Leftrightarrow 90^\circ-2\theta=35^\circ$$

Vậy $d_{\max}=\max f(\theta)=f(\theta_0)$ với $\theta=\theta_0=45^\circ-\dfrac{35^\circ}{2}=27{,}5^\circ$ tức 27,5 (độ)

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm A,B lần lượt thuộc các tia Ox,Oy sao cho $OA.OB=4$. Điểm S thuộc mặt phẳng (Oxz) sao cho số đo của góc nhị diện $[S;OB;A]$ và $[S;AB;O]$ đều bằng 60^o. Gọi $S(a;0;c)$ với $a>0,c>0$. Khi thể tích khối chóp $S.OAB$ đạt giá trị lớn nhất, tính giá trị biểu thức $P=a^4+c^4$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

A. 5,93



Gọi $A(x;0;0),B(0;y;0),x>0,y>0$. Vì $OA.OB=4$ nên $xy=4$.

Vì $A\in Ox,B\in Oy,S\in(Oxz)\Rightarrow OB\perp(SOA)$.

Do đó $[S;OB;A]=SOA\Rightarrow SOA=60^o$.

Vì $S(a;0;c)\Rightarrow\tan 60^o=\dfrac{c}{a}\Rightarrow c=a\sqrt{3}$.

Ta có $V_{SOAB}=\dfrac{1}{3}OB.S_{SOA}=\dfrac{1}{3}OB.\dfrac{1}{2}OA.OS.\sin 60^o=\dfrac{\sqrt{3}}{3}OS=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{a^2+c^2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$.

Suy ra V_{SOAB} lớn nhất khi và chỉ khi a lớn nhất.

Lại có $[S;AB;O]=60^o\Rightarrow\cos 60^o=\cos\left(\vec{n}_{(SAB)};\vec{n}_{(OAB)}\right)$.

Mà $\vec{n}_{(OAB)}=(0;0;1);\vec{n}_{(SAB)}=\left[\overrightarrow{SA};\overrightarrow{SB}\right]=(yc;xc;(x-a)y)$.

Suy ra $\frac{1}{2}=\frac{|(x-a)y|}{\sqrt{(x^2+y^2)c^2+(x-a)^2y^2}}\Leftrightarrow(x^2+y^2)c^2=3(x-a)^2y^2$

Suy ra $\frac{1}{2}=\frac{|(x-a)y|}{\sqrt{(x^2+y^2)c^2+(x-a)^2y^2}}\Leftrightarrow(x^2+y^2)c^2=3(x-a)^2y^2$

$\Rightarrow(x^2+y^2)3a^2=3(x-a)^2y^2\Leftrightarrow(x^2+y^2)a^2=(xy-ay)^2\Leftrightarrow(x^2+y^2)a^2=(4-ay)^2$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+y^2}.a=4-ay\\ \sqrt{x^2+y^2}.a=ay-4\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=\frac{4}{\sqrt{x^2+y^2}+y}\\ a=\frac{4}{y-\sqrt{x^2+y^2}}(L\ do\ a>0)\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow a=\frac{4}{\sqrt{x^2+y^2}+y}=\frac{4}{\sqrt{\frac{16}{y^2}+y^2}+y}$$

Xét hàm số $f(y)=\sqrt{\frac{16}{y^2}+y^2}+y, y>0$. Ta có a lớn nhất khi $f(y)$ nhỏ nhất.

Ta có:

$$f'(y)=\frac{\frac{-16}{y^3}+y}{\sqrt{\frac{16}{y^2}+y^2}}+1=0\Leftrightarrow\frac{16}{y^3}-y=\sqrt{\frac{16}{y^2}+y^2}\Leftrightarrow\frac{16^2}{y^6}-\frac{48}{y^2}=0\left(0<y<2\right)\Leftrightarrow y=\frac{2}{\sqrt[4]{3}}$$ Suy ra

$Min\,f(y)=f\left(\frac{2}{\sqrt[4]{3}}\right)$.

Khi đó $P=a^4+c^4=10a^4\approx5,93$.

Câu 4. Cho x, y là hai số thực không âm và không đồng thời bằng 0 thỏa mãn:

$$\log\left(\frac{x^2+y^2+25}{x+y}\right)^{x^2+y^2+10}=\frac{10x+10y-25}{x^2+y^2}+x^2+y^2+9$$

Tính tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $Q=\frac{4x+5y-10}{x+y}$.

Lời giải

A. 5

Ta có:

$$\log\left(\frac{x^2+y^2+25}{x+y}\right)^{x^2+y^2+10}=\frac{10x+10y-25}{x^2+y^2}+x^2+y^2+9.$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+y^2+10\right)\log\left(\frac{x^2+y^2+25}{x+y}\right)=\frac{10x+10y-25}{x^2+y^2}+x^2+y^2+10-1.$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+y^2+10\right)[\log\left(x^2+y^2+25\right)-\log\left(x+y\right)-1]=\frac{10x+10y-25}{x^2+y^2}-1.$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+y^2+10\right)[\log\left(x^2+y^2+25\right)-\log\left(x+y\right)-\log\left(10x+10y\right)]=\frac{10x+10y-\left(x^2+y^2+25\right)}{x^2+y^2}.$$

Ta thấy với điều kiện của x, y đã cho thì $x^2+y^2>0, x^2+y^2+10>0$

+ Nếu $x^2+y^2+25>10x+10y$ thì $\begin{cases}\dfrac{10x+10y-\left(x^2+y^2+25\right)}{x^2+y^2}<0\\ \left(x^2+y^2+10\right)[\log\left(x^2+y^2+25\right)-\log\left(10x+10y\right)]>0\end{cases}$

$\Rightarrow$ vô lí.

+ Nếu $x^2+y^2+25<10x+10y$ thì $\begin{cases}\dfrac{10x+10y-\left(x^2+y^2+25\right)}{x^2+y^2}>0\\ \left(x^2+y^2+10\right)[\log\left(x^2+y^2+25\right)-\log\left(10x+10y\right)]<0\end{cases}$

$\Rightarrow$ vô lí

Do đó $x^2+y^2+25=10x+10y\Leftrightarrow\left(x-5\right)^2+\left(y-5\right)^2=25.$

$Q=\dfrac{4x+5y-10}{x+y}\Leftrightarrow\left(4-Q\right)x+\left(5-Q\right)y-10=0.$

Đường tròn $\left(C\right):\left(x-5\right)^2+\left(y-5\right)^2=25$ có tâm $I\left(5;5\right)$, bán kính $R=5.$

Tồn tại cặp $\left(x;y\right)$ khi và chỉ khi đường tròn $\left(C\right):\left(x-5\right)^2+\left(y-5\right)^2=25$ và đường thẳng $\Delta:\left(4-Q\right)x+\left(5-Q\right)y-10=0$ có giao điểm.

$\Leftrightarrow d_{(I,\Delta)}\le R\Leftrightarrow\dfrac{|5\left(4-Q\right)+5\left(5-Q\right)-10|}{\sqrt{\left(4-Q\right)^2+\left(5-Q\right)^2}}\le 5.\Leftrightarrow 1\le Q\le 4.$

+ Với $Q=1$ thì $\left(x;y\right)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases}\left(x-5\right)^2+\left(y-5\right)^2=25\\ 3x+4y-10=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}.$

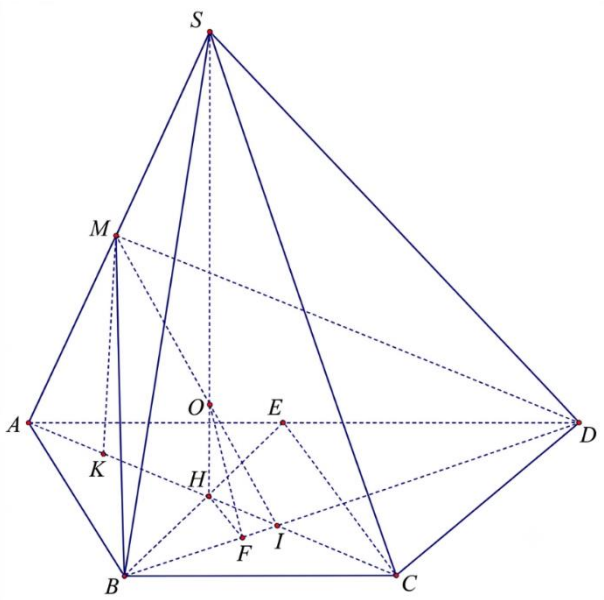
+ Với $Q=4$ thì $\left(x;y\right)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases}\left(x-5\right)^2+\left(y-5\right)^2=25\\ y-10=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\ y=10\end{cases}.$

Vậy tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của Q bằng 5.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B. Biết rằng $AD=SA=SC=2a$, $AB=BC=a$, $SCD=90^0$. Gọi M là trung điểm SA, $\varphi=(SD,(MBD))$, $\sin\varphi=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$, ($a,b\in\square$, $\dfrac{a}{b}$ tối giản). Tính $a+b$?

Lời giải

A. 313



Gọi H,K,E lần lượt là trung điểm của AC,AH,AD. Gọi $I=AC\cap BD;O=SH\cap MI$.

Ta chứng minh được $SH\perp(ABCD)$, I là trọng tâm ΔEBC và $ABCE$ là hình vuông.

Ta dễ dàng tính được các cạnh sau: $SH=a\frac{\sqrt{14}}{2}$, $SD=a\sqrt{6}, BH=a\frac{\sqrt{2}}{2}, IH=a\frac{\sqrt{2}}{6}$.

Trong $\Delta HIB\perp_H$, kẽ $HF\perp BI$. Khi đó $HF=\frac{HI.HB}{\sqrt{HI^2+HB^2}}=a\frac{\sqrt{5}}{10}$.

Ta có $\Delta IKM \square \Delta IHO$ suy ra $\frac{OH}{MK}=\frac{IH}{IK}=\frac{IH}{IH+HK}=\frac{a\frac{\sqrt{2}}{6}}{a\frac{\sqrt{2}}{6}+a\frac{\sqrt{2}}{4}}=\frac{2}{5}$.

Mặt khác, $MK=\frac{1}{2}SH$. Suy ra $OH=\frac{1}{5}SH=a\frac{\sqrt{14}}{10}$.

Ta có $d(S;(MBD))=4.d(H;(MBD))=4.\frac{HF.HO}{\sqrt{HF^2+HO^2}}=4.\frac{a\frac{\sqrt{5}}{10}.a\frac{\sqrt{14}}{10}}{\sqrt{\left(a\frac{\sqrt{5}}{10}\right)^2+\left(a\frac{\sqrt{14}}{10}\right)^2}}=\frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{95}}$.

Suy ra $\sin\varphi=\frac{d(S;(MBD))}{SD}=\frac{2a\sqrt{14}}{\sqrt{95}.a\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{28}{285}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$. Suy ra $a=28, b=285$.

Vậy $a+b=28+285=313$.

Câu 6. Cho một hình bát giác đều có 8 đỉnh. Người ta gắn ngẫu nhiên vào 8 đỉnh này 8 số tự nhiên $1,4,7,9,11,13,16,19$ (mỗi số gắn đúng một đỉnh). Chọn ngẫu nhiên một tam giác có 3 đỉnh lấy từ 8 đỉnh của bát giác đã cho. Gọi P là xác suất để chọn được một tam giác vuông với 3 số gắn trên 3 đỉnh của tam giác đó (theo một thứ tự nào đó) lập thành một cấp số cộng. Biết $P=\frac{a}{b}$ ($a,b\in\square$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $a+b$.

Lời giải

A. 205

1. Tính số tam giác vuông có thể chọn từ bát giác đều

Số cách chọn ngẫu nhiên một tam giác từ 8 đỉnh là: $n(\Omega_1) = C_8^3 = 56$.

Một tam giác có 3 đỉnh là các đỉnh của hình bát giác đều là tam giác vuông khi và chỉ khi có một cạnh là đường chéo đi qua tâm của hình bát giác đó (đường kính của đường tròn ngoại tiếp). Hình bát giác đều có $8:2=4$ đường chéo đi qua tâm.

Với mỗi đường chéo đi qua tâm, ta có $8-2=6$ cách chọn đỉnh còn lại để tạo thành một tam giác vuông.

Vậy số tam giác vuông là: $n_1 = 4\times 6 = 24$.

Xác suất chọn được tam giác vuông từ các đỉnh là: $P_1 = \dfrac{24}{56} = \dfrac{3}{7}$.

2. Tính số bộ 3 số lập thành cấp số cộng từ tập hợp cho trước

Tập hợp các số đã cho là: $S = \{1;4;7;9;11;13;16;19\}$. Số phần tử là 8.

Số cách chọn ngẫu nhiên 3 số từ tập S là: $n(\Omega_2) = C_8^3 = 56$.

Gọi 3 số là $\{x;y;z\}$ với $x<y<z$. Để chúng lập thành cấp số cộng thì $x+z=2y$.

Các bộ 3 số thỏa mãn là:

$\{1;4;7\}$ (công sai $d=3$).

$\{7;9;11\}$ (công sai $d=2$).

$\{9;11;13\}$ (công sai $d=2$).

$\{13;16;19\}$ (công sai $d=3$).

$\{1;7;13\}$ (công sai $d=6$).

$\{7;13;19\}$ (công sai $d=6$).

Vậy có $n_2 = 6$ bộ số thỏa mãn.

Xác suất để 3 số gắn trên 3 đỉnh được chọn lập thành cấp số cộng là: $P_2 = \dfrac{6}{56} = \dfrac{3}{28}$.

3. Tính xác suất P và giá trị $a+b$.

Vì việc gắn số vào các đỉnh là ngẫu nhiên và việc chọn tam giác cũng là ngẫu nhiên, hai biến cố "tam giác được chọn là tam giác vuông" và "3 số trên 3 đỉnh đó lập thành cấp số cộng" là độc lập với nhau.

Xác suất cần tìm là: $P = P_1 \times P_2 = \dfrac{3}{7}\times\dfrac{3}{28} = \dfrac{9}{196}$.

Ta thấy 9 và 196 là hai số nguyên tố cùng nhau, do đó phân số đã tối giản.

Suy ra $a=9$ và $b=196$.

Vậy $a+b=9+196=205$.

--------HẾT---------

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu;

- Giám thị không giải thích gì thêm.