

1. PHƯƠNG PHÁP LŨY THỪA

$$\text{Bài toán 1.} \begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}} - \sqrt{x-\sqrt{y}} = 2 & (1) \\ \sqrt{x^2-y} + \sqrt{x^2+y} = 4 & (2) \end{cases}$$

Giải:

Điều kiện : $\begin{cases} x \geq y \geq 0 \\ x \geq \sqrt{y} \end{cases}$. Nhận xét : Vế trái của phương trình (1) không âm.

Bình phương 2 vế từng phương trình ta được

$$\begin{cases} x - \sqrt{x^2 - y} = 2 \\ x^2 + \sqrt{x^4 - y^2} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - y} = x - 2 & (3) \\ \sqrt{x^4 - y^2} = 8 - x^2 & (4) \end{cases}$$

Điều kiện : $0 \leq x \leq 2\sqrt{2}$

Phương trình (3) $\Leftrightarrow x^2 - y = 4 - 4x + x^2 \Leftrightarrow y = 4x - 4$

Phương trình (4) $\Leftrightarrow x^4 - y^2 = 64 - 16x^2 + x^4$

$$\Rightarrow x^4 - (4x - 4)^2 = 64 - 16x^2 + x^4 \Leftrightarrow 32x - 80 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow y = 6$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $\left(\frac{5}{2}; 6\right)$

$$\text{Bài toán 3.} \begin{cases} x - \sqrt{1+y} = \frac{5}{2} & (1) \\ y + 2(x-3)\sqrt{x+1} = -\frac{3}{4} & (2) \end{cases}$$

Giải:

Điều kiện : $\begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq -1 \end{cases}$

$$\text{Phương trình (2)} \Leftrightarrow 2x + 2\sqrt{x^2 - 4y^2} = 4 \quad \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2 - x \quad (3)$$

Điều kiện tương đương : $x \leq 2$. Phương trình (3) $\Leftrightarrow x^2 - 4y^2 = 4 - 4x + x^2$.

$$\Leftrightarrow y^2 = x - 1 \Leftrightarrow x = y^2 + 1, x \geq 1 \quad (4)$$

Thế (4) vào phương trình (3) ta được :

$$(y^2 + 1)^3 + 2y^3 + (y^2 + 1)y(y^2 - y + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow y^6 + y^5 + 2y^4 + 4y^3 + 2y^2 + y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+1)^2(y^4 - y^3 + 3y^2 - y + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \Rightarrow x = 2 \\ y^4 - y^3 + 3y^2 - y + 1 = 0 \end{cases}$$

Xét phương trình : $y^4 - y^3 + 3y^2 - y + 1 = 0 \quad (*)$

Nếu $y = 0 \Rightarrow x = 1$, không thỏa hệ.

$$\text{Xét } y \neq 0 : \text{phương trình } (*) \Leftrightarrow y^2 + \frac{1}{y^2} - \left(y + \frac{1}{y}\right) + 3 = 0$$

Đặt $t = y + \frac{1}{y}, |t| \geq 2$. Phương trình trên trở thành : $t^2 - t + 1 = 0$, vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(-1; 2)$

Bài toán 5. $\begin{cases} \sqrt{x+y} + x - y = 0 & (1) \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{3x+2y} = -1 & (2) \end{cases}$

Giải:

Điều kiện : $\begin{cases} x \geq -y \\ 3x + 2y \geq 0 \end{cases}$. Phương trình (2) $\Leftrightarrow \sqrt{x+y} + 1 = \sqrt{3x+2y}$.

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+y} = 2x + y - 1 \quad (3) \text{ .Điều kiện : } 2x + y \geq 1.$$

Thế (3) vào phương trình (1) ta được :

$$4x - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 4x - 1 \quad (4)$$

Thế (4) vào phương trình (3) ta được :

$$2\sqrt{5x-1} = 6x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{5} \\ 5x-1 = 9x^2 - 6x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{5} \\ 9x^2 - 11x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{9}, \text{loại} \\ x = 1 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là (1;3)

Bài toán 6.
$$\begin{cases} x - \sqrt{1+y} = \frac{5}{2} & (1) \\ y + 2(x-3)\sqrt{x+1} = -\frac{3}{4} & (2) \end{cases}$$

Giải:

Điều kiện : $\begin{cases} y \geq -1 \\ x \geq -1 \end{cases}$. Phương trình (1) $\Leftrightarrow 2x - 2\sqrt{1+y} = 5$.

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{1+y} = 2x-5 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ 4(y+1) = 4x^2 - 20x + 25 \quad (3) \end{cases}$$

$$\text{Phương trình (2)} \Leftrightarrow 4y + 4 + 8(x-3)\sqrt{1+x} = 1 \quad (4)$$

Thế (3) vào phương trình (4) ta được :

$$4x^2 - 20x + 24 + 8(x-3)\sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow 4(x-3)(x-2) + 8(x-3)\sqrt{x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(x-3)(x-2+2\sqrt{x+1}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \Rightarrow y = -\frac{3}{4} \\ 2\sqrt{x+1} = 2-x, \text{loại vì } x \geq \frac{5}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $\left(3; -\frac{3}{4}\right)$

Bài toán 50. $\begin{cases} x^3 - y^3 = 9 \\ x^2 + 2y^2 = x - 4y \end{cases}$
--

Giải: Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 9 + y^3 & (1) \\ 3x^2 - 3x = -6y^2 - 12y & (2) \end{cases}$

Lấy phương trình (1) trừ phương trình (2) ta được :

$$x^3 - 3x^2 + 3x = y^3 + 6y^2 + 12y + 9 \Leftrightarrow (x-1)^3 = (y+2)^3$$

$$\Leftrightarrow x-1 = y+2 \Leftrightarrow y = x-3 \quad (3)$$

Thế Phương trình (3) vào Phương trình (1) ta được

$$x^3 = 9 + (x-3)^3 \Leftrightarrow -9x^2 + 27x - 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=-2 \\ x=2 \Rightarrow y=-1 \end{cases}$$

Hệ phương trình có 2 nghiệm $(1; -2), (2; -1)$

Bài toán 66. $\begin{cases} (x^2 + xy + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 185 & (1) \\ (x^2 - xy + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 65 & (2) \end{cases}$

Giải: Lấy phương trình (1) cộng với phương trình (2) ta được :

$$2(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 250 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + y^2})^3 = 125 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 5 \quad (3)$$

Thế Phương trình (3) vào Phương trình (1) ta được

$$5(25 + xy) = 185 \Leftrightarrow xy = 12. \text{ Khi đó ta có hệ phương trình :}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = 5 \\ xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + \left(\frac{12}{x}\right)^2} = 5 \\ y = \frac{12}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 25x^2 + 144 = 0 \\ y = \frac{12}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 16 \\ x^2 = 9 \\ y = \frac{12}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \Rightarrow y = 3 \\ x = 3 \Rightarrow y = 4 \\ x = -4 \Rightarrow y = -3 \\ x = -3 \Rightarrow y = -4 \end{cases}$$

Hệ phương trình có 4 nghiệm $(4;3), (3;4), (-3;-4), (-4;-3)$

Bài toán 67. $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}} + \sqrt{x-\sqrt{y}} = 2 & (1) \\ \sqrt{y+\sqrt{x}} - \sqrt{y-\sqrt{x}} = 1 & (2) \end{cases}$
--

Giải: Điều kiện :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \geq \sqrt{y} \\ y \geq \sqrt{x} \end{cases}$$

Vì : $\sqrt{x} + \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow (y + \sqrt{x}) - (y - \sqrt{x}) \geq 0$

Suy ra, vế trái của (2) dương. Bình phương 2 vế 2 phương trình của hệ ta được :

$$\begin{cases} 2x + 2\sqrt{x^2 - y} = 4 \\ 2y + \sqrt{y^2 - x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - y} = 2 - x & (3) \\ 2\sqrt{y^2 - x} = 1 - 2y & (4) \end{cases}$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - y = 4 - 4x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ y + 4 = 4x \end{cases}$$

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ 4(y^2 - x) = 1 - 4y + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ 3y^2 - 4x + 4y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ 3y^2 + 3y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ y = \frac{-3 \pm \sqrt{69}}{6}, \text{loại} \end{cases}$$

Hệ phương trình vô nghiệm

Bài toán 76. $\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 1 & (1) \\ \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2-y^2} = 1 & (2) \end{cases}$
--

Giải:

Do phương trình(1) $\Rightarrow x+y > x-y \Leftrightarrow y > -y \Rightarrow y > 0$

Điều kiện : $x \geq y > 0$

Bình phương 2 vế từng phương trình ta được

$$\begin{cases} 2x + 2\sqrt{x^2 - y^2} = 1 \\ 2x^2 + 2\sqrt{x^4 - y^4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x^2 - y^2} = 1 - 2x \\ 2\sqrt{x^4 - y^4} = 1 - 2x^2 \end{cases} \quad (3)$$

Điều kiện : $0 < x \leq \frac{1}{2}$. Phương trình (2) $\Leftrightarrow 4(x^2 - y^2) = 1 - 4x + 4x^2$

$$\Leftrightarrow 4y^2 = 4x - 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{4x-1}{4} \quad (4)$$

Thế (4) vào phương trình(3) ta được :

$$2\sqrt{x^4 - \left(\frac{4x-1}{4}\right)^2} = 1 - 2x^2$$

$$\Leftrightarrow 4\left(x^4 - \frac{16x^2 - 8x + 1}{16}\right) = 1 - 4x^2 + 4x^4 \quad \Leftrightarrow 8x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{8}$$

$$\text{Suy ra } y^2 = \frac{3}{8} \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $\left(\frac{5}{8}; \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$

Bài toán 82(THTT).. $\begin{cases} x^2(1+y^2) = 2 & (1) \\ x^2y^2 + xy = 3x^2 - 1 & (2) \end{cases}$

Giải: Phương trình(1) $\Leftrightarrow x^2y^2 = 2 - x(3)$

Thế (3) vào (phương trình(2) ta được :

$$2 - x^2 + xy = 3x^2 - 1 \Leftrightarrow 4x^2 - xy - 3 = 0. \text{ Ta có } x = 0, \text{ loại.}$$

Xét $x \neq 0$: $y = \frac{4x^2 - 3}{x}$. Thế $y = \frac{4x^2 - 3}{x}$ vào (1) ta được :

$$x^2 \left[1 + \left(\frac{4x^2 - 3}{x} \right)^2 \right] = 2 \Leftrightarrow x^2 + (4x^2 - 3)^2 = 2 \Leftrightarrow 16x^4 - 23x^2 + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = \frac{7}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = -1 \Rightarrow y = -1 \\ x = \frac{\sqrt{7}}{4} \Rightarrow y = -\frac{5}{\sqrt{7}} \\ x = -\frac{\sqrt{7}}{4} \Rightarrow y = \frac{5}{\sqrt{7}} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm $(1;1), (-1;-1), \left(\frac{\sqrt{7}}{4}; -\frac{5}{\sqrt{7}}\right), \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}; \frac{5}{\sqrt{7}}\right)$

Bài toán 83(THTT).. $\begin{cases} 2x^3 - 9y^3 = (x - y)(2xy + 3) & (1) \\ x^2 - xy + y^2 = 3 & (2) \end{cases}$

Giải: Thế phương trình(2) vào phương trình (1) ta được :

$$2x^3 - 9y^3 = (x - y)(2xy + x^2 - xy + y^2)$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 9y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3 \Leftrightarrow x^3 = 8y^3 \quad (3)$$

Ta có $y = 0$ thì $x = 0$, không thỏa (2), loại

$$\text{Xét } y \neq 0 : \text{ phương trình(3)} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^3 = 8 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = 2 \Leftrightarrow x = 2y.$$

Thế $x = 2y$ vào phương trình(2) ta được :

$$(2y)^2 - 2y^2 + y^2 = 3 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 2 \\ y = -1 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm $(1; 2), (-1; -2)$.

Bài toán 95. $\begin{cases} \sqrt{3}(x - y) = 2\sqrt{xy} & (1) \\ 2x - y^2 = 8 & (2) \end{cases}$
--

Giải: Điều kiện : $x \geq y \geq 0$

Bình phương 2 vế của phương trình (1) ta được :

$$3(x - y)^2 = 4xy \Leftrightarrow 3x^2 - 10xy + 3y^2 = 0 \quad (3)$$

TH 1 : $y = 0 \Rightarrow x = 0$: không thỏa hệ phương trình.

TH 2 : $y \neq 0$: phương trình (3) $\Leftrightarrow 3\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 10\frac{x}{y} + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = 3 \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ y = 3x \end{cases}$$

• $x = 3y$: phương trình (2) $\Leftrightarrow -y^2 + 6y - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \Rightarrow x = 12 \\ y = 2 \Rightarrow x = 6 \end{cases}$

• $y = 3x$: phương trình (2) $\Leftrightarrow -9x^2 + 2x - 8 = 0$, vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm $(12; 4), (6; 2)$.

Bài toán 96. $\begin{cases} 2(\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}) = y & (1) \\ x^2 - y^2 = 9 & (2) \end{cases}$

Giải: Điều kiện : $x \geq \pm y$. Bình phương 2 vế của phương trình (1) ta được :

$$4(2x - 2\sqrt{x^2 - y^2}) = y^2 \quad (3)$$

Thế phương trình (2) vào phương trình (3) ta được : $8x - 24 = y^2 \quad (4)$.

Điều kiện : $x \geq 3$. Thế (4) vào phương trình (1) ta được :

$$4(2x - 2\sqrt{x^2 - 8x + 24}) = 8x - 24 \Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 - 8x + 24} = x - 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 8x + 24} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \Rightarrow y = \pm 4 \\ x = 3 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 3 nghiệm : $(5; -4), (3; 0), (5; 4)$.

Bài toán 97. $\begin{cases} x + \sqrt{y^2 - x^2} = 12 - y & (1) \\ x\sqrt{y^2 - x^2} = 12 & (2) \end{cases}$

Giải: Điều kiện : $y^2 \geq x^2$. Bình phương 2 vế của phương trình (1) ta được :

$$y^2 + 2x\sqrt{y^2 - x^2} = 144 - 24y + y^2 \Leftrightarrow x\sqrt{y^2 - x^2} = 72 - 12y \quad (3)$$

Thế (3) vào phương trình (2) ta được : $12 = 72 - 12y \Leftrightarrow y = 5$

Bình phương 2 vế của phương trình (2) ta được :

$$\Leftrightarrow x^2(y^2 - x^2) = 144 \Leftrightarrow x^2(25 - x^2) = 144 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 16 \\ x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 4; x = \pm 3$$

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm : $(3; 5), (-3; 5), (4; 5), (-4; 5)$.

Bài toán 98. $\begin{cases} x^2(y+1)(y+x+1) = 3x^2 - 4x + 1 & (1) \\ xy + x + 1 = x^2 & (2) \end{cases}$

Giải: Điều kiện : $xy + x + 1 \geq 0$

TH 1 : $x = 0$: không thỏa phương trình (2).

TH 2 : $x \neq 0$: phương trình (2) $\Leftrightarrow y + 1 = \frac{x^2 - 1}{x} \quad (3)$

Thế (3) vào phương trình (2) ta được :

$$x^2 \left(\frac{x^2-1}{x} \right) \left(x + \frac{x^2-1}{x} \right) = 3x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow (x^2-1)(2x^2-1) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$\Leftrightarrow x(2x^3 - 6x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=-1 \\ x=-2 \Rightarrow y=-\frac{5}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm $(1; -1), \left(-2; -\frac{5}{2}\right)$.

Bài toán 99.
$$\begin{cases} x + \frac{3x-y}{x^2+y^2} = 3 \\ y - \frac{x+3y}{x^2+y^2} = 0 \end{cases}$$

Giải: Điều kiện : $x^2 + y^2 \neq 0$

$$\text{Hệ phương trình} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 + y^2) + 3x - y = 3(x^2 + y^2) & (1) \\ y(x^2 + y^2) - x - 3y = 0 & (2) \end{cases}$$

Xét $x=0$: hệ phương trình trở thành :

$$\begin{cases} 3y^2 + y = 0 \\ y^3 - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0, \text{ loại.}$$

Xét $y=0$: hệ phương trình trở thành :

$$\begin{cases} x^3 + 3x - 3x^2 = 0 \\ -x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0, \text{ loại}$$

Xét $x, y \neq 0$: Hệ phương trình

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy(x^2 + y^2) + 3xy - y^2 = 3y(x^2 + y^2) & (3) \\ xy(x^2 + y^2) - x^2 - 3xy = 0 & (4) \end{cases}$$

Cộng phương trình (3) và phương trình (4) lại với nhau ta được :

$$2xy(x^2 + y^2) - y^2 - x^2 = 3y(x^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow (2xy - 3y - 1)(x^2 + y^2) = 0 \Leftrightarrow 2xy - 3y - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3y+1}{2y} \quad (5)$$

Thế (5) vào phương trình (2) ta được :

$$\Leftrightarrow y \left[\left(\frac{3y+1}{2y} \right)^2 + y^2 \right] - \frac{3y+1}{2y} - 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow 4y^3 + 9y^2 + 6y + 1 - 2(3y+1) - 12y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4y^3 - 3y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = 1$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất (1;1).

Bài toán 104(HSGHCM 2013-2014).

$$\begin{cases} 16x^2 + 4xy + y^2 = 12 & (1) \\ 8x^2 + 4xy - 28x - 5y = -18 & (2) \end{cases}$$

Giải: Hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 16x^2 + 4xy + y^2 = 12 & (1) \\ 16x^2 + 8xy - 56x - 10y = -36 & (2) \end{cases}$$

Cộng phương trình (1) và phương trình (2) lại với nhau ta được :

$$32x^2 + 2(6y - 28)x + y^2 - 10y + 24 = 0$$

Xem x là ẩn của phương trình, y là tham số.

$$\Delta = (2y - 4)^2. \text{ Phương trình có nghiệm : } \begin{cases} x = \frac{6-y}{4} \\ x = \frac{4-y}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 4x \\ y = 4 - 4x \end{cases}$$

• $y = 6 - 4x$: Phương trình (1) $\Leftrightarrow 16x^2 + 4x(6 - 4x) + (6 - 4x)^2 - 12 = 0$

$$\Leftrightarrow 16x^2 - 24x + 24 = 0, \text{ vô nghiệm.}$$

• $y = 4 - 4x$: Phương trình (1) $\Leftrightarrow 16x^2 + 4x(4 - 4x) + (4 - 4x)^2 - 12 = 0$

$$\Leftrightarrow 16x^2 - 16x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Bài toán 107.
$$\begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 = 1 \\ x^3y - x^2 + xy = -1 \end{cases}$$

Giải : Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2y(x - y) = x^4 - 1 & (1) \\ xy(x^2 + 1) = x^2 - 1 & (2) \end{cases} \quad (I)$

Ta thấy nếu $x = 0$ thì không thỏa hệ phương trình. Vậy $x \neq 0$

TH 1: $y = 0$: Hệ phương trình (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 1 = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1$

TH 2: $x = 1$: Hệ phương trình (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} y(1 - y) = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0$

Vậy $(1; 0)$ là một nghiệm của hệ phương trình.

TH 3: $x = -1$: Hệ phương trình (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} y(-1 - y) = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0$

Vậy $(-1; 0)$ là một nghiệm của hệ phương trình.

TH 4: $\begin{cases} x \neq \pm 1 \\ y \neq 0 \end{cases}$: Lấy phương trình (1) chia cho phương trình (2), vế theo vế, ta được :

$$(2) x \left(\frac{x - y}{x^2 + 1} \right) = x^2 + 1 \Rightarrow xy = -(x^4 + x^2 + 1) \quad (3)$$

Thế (3) vào phương trình 2) ta được :

$$x^2 - 1 = -(x^4 + x^2 + 1)(x^2 + 1) \Leftrightarrow x^2 - 1 = -(x^6 + 2x^4 + 2x^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow x^6 + 2x^4 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^4 + 2x^2 + 3) = 0, \text{ vô nghiệm.}$$

Hệ phương trình đã cho có nghiệm : $(-1;0), (1;0)$.

<u>Bài toán 111.</u> $\begin{cases} 8x^3y^3 + 27 = \frac{7}{2}y^3 \\ 4x^2y + 6x = y^2 \end{cases}$

Giải : Dễ thấy $y = 0$ không thỏa hệ phương trình. Vậy $y \neq 0$.

$$\text{Hệ phương trình} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^3 + \frac{27}{y^3} = \frac{7}{2} \\ 4\frac{x^2}{y} + 6\frac{x}{y^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x)^3 + \left(\frac{3}{y}\right)^3 = \frac{7}{2} \\ 2\frac{x}{y}\left(2x + \frac{3}{y}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(2x + \frac{3}{y}\right)\left(4x^2 + \frac{9}{y^2} - \frac{6x}{y}\right) = \frac{7}{2} & (1) \\ 2\frac{x}{y}\left(2x + \frac{3}{y}\right) = 1 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ phương trình (2)} \Rightarrow x \neq 0. \text{ Phương trình (2)} \Leftrightarrow 2x + \frac{3}{y} = \frac{y}{2x} \quad (3)$$

Thế (3) vào phương trình (1) ta được :

$$\frac{y}{2x}\left(4x^2 + \frac{9}{y^2} - \frac{6x}{y}\right) = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{y}{2x}\left(4x^2 + \frac{9}{y^2} - \frac{6x}{y}\right) = \frac{7}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{2x} = \frac{\frac{7}{2}}{4x^2 + \frac{9}{y^2} - \frac{6x}{y}} \Leftrightarrow 7x = y\left(4x^2 + \frac{9}{y^2} - \frac{6x}{y}\right)$$

$$\Leftrightarrow 7x = 4x^2y + \frac{9}{y} - 6x \Leftrightarrow 4(xy)^2 - 13xy + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1 \\ xy = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ xy = \frac{9}{4x} \end{cases}$$

$$\bullet y = \frac{1}{x}: \text{Phương trình (3)} \Leftrightarrow 5x = \frac{9}{2x^2} \Leftrightarrow 10x^3 = 9 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{9}{10}} \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{10}{9}}$$

$$\bullet y = \frac{9}{4x}: (3) \Leftrightarrow \frac{10}{3}x = \frac{9}{8x^2} \Leftrightarrow x^3 = \frac{27}{80} \Leftrightarrow x = \frac{3}{\sqrt[3]{80}} \Rightarrow y = \frac{3\sqrt[3]{80}}{4}$$

Hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm : $\left(\sqrt[3]{\frac{9}{10}}; \sqrt[3]{\frac{10}{9}}\right), \left(\frac{3}{\sqrt[3]{80}}; \frac{3\sqrt[3]{80}}{4}\right)$.

Bài toán 114. $\begin{cases} 2x^3 - 9y^3 = (x-y)(2xy+3) & (1) \\ x^2 + y^2 - xy = 3 & (2) \end{cases}$

Giải : Thế phương trình (2) vào phương trình (1) ta được :

$$2x^3 - 9y^3 = (x-y)(x^2 + y^2 + xy)$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 9y^3 = x^3 - y^3 \Leftrightarrow x^3 = 8y^3 \Leftrightarrow x = 2y$$

Thế : **$x = 2y$** vào phương trình (2) ta được :

$$3y^2 = 3 \Leftrightarrow y = \pm 1 \Rightarrow x = \pm 2$$

Hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm : $(2;1), (-2;-1)$.

Bài toán 151.

$$\begin{cases} (x-3)(x+4) = y(y-7) & (1) \\ \frac{y^2}{\sqrt{x-1}} = \frac{x-1}{\sqrt{2-y}} & (2) \end{cases}$$

Giải: Điều kiện : $\begin{cases} x-1 > 0 \\ 2-y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ y < 2 \end{cases}$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow y^2 - 7y - x^2 - x + 12 = 0 \quad (3)$$

Xem phương trình (3) là phương trình theo ẩn y, còn x là tham số.

$$\Delta = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2. \text{ Nghiệm là: } \begin{cases} y = x + 4 \\ y = 3 - x \end{cases}$$

• $y = x + 4$, thế vào phương trình 2) ta được : $\frac{(x+4)^2}{\sqrt{x-1}} = \frac{x-1}{\sqrt{-x-2}}$, loại

• $y = 3 - x$, thế vào phương trình (2) ta được :

$$\frac{(3-x)^2}{\sqrt{x-1}} = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow 9 - 6x + x^2 = x - 1 \Leftrightarrow 10 - 7x + x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \Rightarrow y = -2 \\ x = 2 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

Hệ phương trình có 2 nghiệm : $(5; -2); (2; 1)$

Bài toán 181.
$$\begin{cases} x^2 - y(x + y) + 1 = 0 & (1) \\ (x^2 + 1)(x + y - 2) + y = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải : Ta có :
$$\begin{cases} x^2 - y(x + y) + 1 = 0 \\ (x^2 + 1)(x + y - 2) + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = y(x + y) \\ (x^2 + 1)(x + y - 2) + y = 0 \end{cases}$$

• $y = 0$ không thỏa hệ

• Xét $y \neq 0$. Chia 2 vế của phương trình (2) cho y, ta được :

$$\begin{cases} x^2 + 1 = y(x + y) \\ (x + y)^2 - 2(x + y) + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = y(x + y) \\ (x + y - 1)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = y(x + y) \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = y \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 1 - x \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x = 0 \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = -1 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

Hệ phương trình có 2 nghiệm : $(0; 1); (-1; 2)$

Bài toán 182. $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2y + 3} + 2y - 3 = 0 \\ 2(2y^3 + x^3) + 3y(x+1)^2 + 6x(x+1) + 2 = 0 \end{cases}$
--

Giải : Điều kiện : $x^2 + 2y + 3 \geq 0$

$$\text{Hệ phương trình} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2y + 3} + 2y - 3 = 3 - 2y & (1) \\ 2(2y^3 + x^3) + 3y(x+1)^2 + 6x(x+1) + 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (1) ta có : $3 - 2y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq \frac{3}{2}$

• $y = 0$ không thỏa hệ

• Xét $y \neq 0$. Chia 2 vế của phương trình (2) cho y^3 , ta được :

$$\Leftrightarrow 2\frac{x^3}{y^3} + 4 + 3\frac{x^2}{y^2} + 6\frac{x}{y^2} + \frac{3}{y^2} + 6\frac{x^2}{y^3} + 6\frac{x}{y^3} + \frac{2}{y^3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{x^3}{y^3} + 6\frac{x^2}{y^3} + 6\frac{x}{y^3} + \frac{2}{y^3} + 3\frac{x^2}{y^2} + 6\frac{x}{y^2} + \frac{3}{y^2} + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{x^3}{y^3} + 3\frac{x^2}{y^3} + 3\frac{x}{y^3} + \frac{1}{y^3}\right) + 3\left(\frac{x^2}{y^2} + 2\frac{x}{y^2} + \frac{1}{y^2}\right) + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{x+1}{y}\right)^3 + 3\left(\frac{x+1}{y}\right)^2 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \frac{x+1}{y} = -2 \Leftrightarrow x = -2y - 1$$

Thế vào phương trình (1), ta được : $\sqrt{4y^2 + 6y + 4} = 3 - 2y$

$$\Leftrightarrow 4y^2 + 6y + 4 = (3 - 2y)^2 \quad \Leftrightarrow 18y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{5}{18} \Rightarrow x = -\frac{14}{9}, \text{ thỏa điều kiện ban đầu.}$$

Hệ phương trình có nghiệm : $\left(-\frac{14}{9}; \frac{5}{18}\right)$

Bài toán 188. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 & (1) \\ x^2 - xy - 2y^2 = -x + 2y & (2) \end{cases}$
--

Giải : Phương trình (2) $\Leftrightarrow x^2 + (1-y)x - 2y^2 - 2y = 0$

Xem đây là phương trình theo ẩn x, còn y là tham số.

$$\Delta = (3y+1)^2. \text{ Nghiệm là: } \begin{cases} x = 2y \\ x = -y-1 \end{cases}$$

• $x = 2y$, thay $x = 2y$ vào phương trình (1) ta được :

$$7y^2 = 7 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 2 \\ y = -1 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

• $x = -y-1$, thay vào phương trình (1) ta được :

$$(-y-1)^2 + (-y-1)y + y^2 = 7 \Leftrightarrow y^2 + y - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \Rightarrow x = 2 \\ y = 2 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm : $(2;1); (-2;-1); (2;-3); (-3;2)$

Bài toán 197.
$$\begin{cases} \sqrt{2x^2 + xy + x + 1} + \sqrt{y^2 + x + 3y} = x + y + 2 & (1) \\ 4x^2 + y^2 - 4xy - 6x + 3y + 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải : Điều kiện :
$$\begin{cases} 2x^2 + xy + x + 1 \geq 0 \\ x + 3y + y^2 \geq 0 \end{cases}$$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow y^2 + (3-4x)y + 4x^2 - 6x + 2 = 0 \quad (3)$

Xem phương trình (3) là phương trình theo ẩn y, còn x là tham số.

$$\Delta = 1. \text{ Nghiệm là: } \begin{cases} y = \frac{4x-3+1}{2} = 2x-2 \\ y = \frac{4x-3-1}{2} = 2x-1 \end{cases}$$

• $y = 2x-2$, thế $y = 2x-2$ vào phương trình (1) ta có phương trình :

$$\sqrt{4x^2 - x + 1} + \sqrt{4x^2 - x - 2} = 3x \quad (4) \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{4x^2 - x + 1} - \sqrt{4x^2 - x - 2}} = 3x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{4x^2-x+1}-\sqrt{4x^2-x-2}}-x=0 \quad \Leftrightarrow \sqrt{4x^2-x+1}-\sqrt{4x^2-x-2}=\frac{1}{x} \quad (5)$$

Do $4x^2-x+1 > 4x^2-x-2, \forall x \in \mathbb{R}$ nên từ phương trình trên ta có : $x > 0$.

Cộng phương trình(4) và phương trình(5), vế theo vế, ta được :

$$2\sqrt{4x^2-x+1}=3x+\frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow 4(4x^2-x+1)=\left(3x+\frac{1}{x}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 7x^4-4x^3-2x^2-1=0 \quad \Leftrightarrow (x-1)(7x^3+3x^2+x+1)=0 \quad \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=0, \text{ thỏa phương trình}$$

• $y=2x-1$,thế $y=2x-1$ vào phương trình (1) ta có phương trình :

$$\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{4x^2+3x-2}=3x+1 \quad (6)$$

$$\text{Điều kiện : } \begin{cases} 4x^2+3x-2 \geq 0 \\ 3x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{-3+\sqrt{41}}{8} > 0$$

$$\text{Vì } x=1 \text{ không thỏa phương trình nên } x \neq 1. \quad (6) \Leftrightarrow \frac{-3x+3}{\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{4x^2+3x-2}}=3x+1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2+1}-\sqrt{4x^2+3x-2}=\frac{-3x+3}{3x+1} \quad \Leftrightarrow \sqrt{4x^2+1}-\sqrt{4x^2+3x-2}=-1+\frac{4}{3x+1} \quad (7)$$

Cộng phương trình(6) và phương trình(7), vế theo vế, ta được :

$$2\sqrt{4x^2+1}=3x+\frac{4}{3x+1} \quad \Leftrightarrow 4(4x^2+1)=\left(3x+\frac{4}{3x+1}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 16x^2+4=9x^2+\frac{16}{(3x+1)^2}+\frac{24x}{3x+1} \quad \Leftrightarrow (7x^2+4)(3x+1)^2=16+24x(3x+1)$$

$$\Leftrightarrow 63x^4+42x^3-29x^2-12=0 \quad \Leftrightarrow \left(x-\frac{2}{3}\right)(63x^3+84x^2+27x+18)=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{2}{3} \Rightarrow y=\frac{1}{3}, \text{ thỏa phương trình. Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm } (1;0); \left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$$

