



**Lưu ý:** - Thí sinh làm **MỖI** câu trên **MỘT** tờ giấy làm bài riêng biệt và ghi rõ **SỐ CÂU** ở dòng đầu tiên của trang thứ nhất (kể cả câu không làm được, nếu có);  
- Thí sinh **không** được sử dụng tài liệu, Giám thị **không** giải thích gì thêm.

**Câu 1. (4 điểm)**

Cho dãy số  $(x_n)$  xác định như sau:  $x_0 = 34$  và  $x_n = \frac{x_{n-1}^3 + 26x_{n-1} + 16}{x_{n-1}^2 - x_{n-1} + 34}$  với mọi  $n \geq 1$ .

Với mỗi  $n \geq 0$ , đặt  $y_n = \frac{1}{x_0^2 + 30} + \frac{1}{x_1^2 + 30} + \dots + \frac{1}{x_n^2 + 30}$ . Chứng minh rằng dãy số  $(y_n)$  có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

**Câu 2. (3 điểm)**

Ký hiệu  $\mathbb{R}$  là tập các số thực. Tìm tất cả các hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sao cho với mọi  $x, y \in \mathbb{R}$ , ta có  $f(2x + f(y)) + f(x) - y = f(3f(x))$ .

**Câu 3. (4 điểm)**

Xét số nguyên  $n \geq 3$ . Ký hiệu  $1 = a_1 < \dots < a_k = n - 1$  là tất cả các số nguyên dương không vượt quá  $n$  và nguyên tố cùng nhau với  $n$ . Đặt  $f(n)$  là ước chung lớn nhất của các số  $a_1^3 - 1, \dots, a_k^3 - 1$ . Tìm tất cả các số nguyên  $n$  sao cho  $f(n) = 2$ .

**Câu 4. (5 điểm)**

Cho tam giác nhọn không cân  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Các tia  $AO, BO, CO$  theo thứ tự cắt  $BC, CA, AB$  tại  $X, Y, Z$ . Đường thẳng  $XZ$  cắt  $AC$  tại  $E$ ; đường thẳng  $XY$  cắt  $AB$  tại  $F$ . Các đường thẳng  $BE, CF$  cắt nhau tại  $Q$ . Các tiếp tuyến tại  $B$  và  $C$  của đường tròn  $(O)$  cắt nhau tại  $P$ .

a) Chứng minh rằng các điểm  $A, O, Q$  thẳng hàng.

b) Giả sử  $PQ, EF$  cắt nhau tại  $T$ . Chứng minh rằng  $T$  là trung điểm của  $EF$ .

**Câu 5. (4 điểm)**

Một chuyên gia ẩm thực cần đưa ra đánh giá về  $n$  nhà hàng trong thành phố, trong đó  $n$  là một số nguyên dương. Mỗi cặp nhà hàng được vị chuyên gia so sánh với nhau theo hai tiêu chí: *độ ngon của món ăn* và *chất lượng phục vụ*. Với một số cặp nhà hàng, vị chuyên gia không thể quyết định nhà hàng nào tốt hơn nhà hàng còn lại trong một tiêu chí nào đó, nhưng điều này không xảy ra đồng thời ở cả hai tiêu chí. Ngoài ra, nếu vị chuyên gia cho rằng nhà hàng  $A$  tốt hơn nhà hàng  $B$  ở một

tiêu chí nào đó, và đồng thời cho rằng nhà hàng  $B$  tốt hơn nhà hàng  $C$  trong cùng tiêu chí đó, thì ông ta cũng đánh giá rằng nhà hàng  $A$  tốt hơn nhà hàng  $C$  trong tiêu chí ấy.

Chứng minh rằng tồn tại một nhà hàng  $R$  sao cho mọi nhà hàng khác đều bị vị chuyên gia đánh giá kém hơn nhà hàng  $R$  trong ít nhất một tiêu chí.

----- HẾT -----

**Họ tên thí sinh:** ..... **SBD:** .....

**Tên trường:** ..... **Tên tỉnh/TP:** .....



**ĐÁP ÁN CHÍNH THỨC**

Môn: **TOÁN** - Khối: **11**  
Đáp án gồm 07 trang, 05 câu

| Câu 1  | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Điểm |
|--------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Đề bài | Cho dãy số $(x_n)$ xác định như sau: $x_0 = 34$ và $x_n = \frac{x_{n-1}^3 + 26x_{n-1} + 16}{x_{n-1}^2 - x_{n-1} + 34}$ với mọi $n \geq 1$ . Với mỗi $n \geq 0$ , đặt $y_n = \frac{1}{x_0^2 + 30} + \frac{1}{x_1^2 + 30} + \dots + \frac{1}{x_n^2 + 30}$ . Chứng minh rằng dãy số $(y_n)$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó. | 4    |
|        | Chú ý rằng công thức xác định $x_n$ có thể được viết lại thành<br>$x_n - 4 = \frac{x_{n-1}^3 + 26x_{n-1} + 16}{x_{n-1}^2 - x_{n-1} + 34} - 4 = \frac{x_{n-1}^3 - 4x_{n-1}^2 + 30x_{n-1} - 120}{x_{n-1}^2 - x_{n-1} + 34}$ $= \frac{(x_{n-1} - 4)(x_{n-1}^2 + 30)}{(x_{n-1}^2 + 30) - (x_{n-1} - 4)}.$                            | 1    |
|        | Bằng quy nạp, ta có ngay $x_n > 4$ với mọi $n$ . Hơn nữa,<br>$\frac{1}{x_n - 4} = \frac{1}{x_{n-1} - 4} - \frac{1}{x_{n-1}^2 + 30}.$                                                                                                                                                                                             | 1    |
|        | Từ đó, một mặt, ta có $\frac{1}{x_{n-1} - 4} > \frac{1}{x_n - 4}$ nên $x_{n-1} < x_n$ , hay $(x_n)$ là dãy tăng. Hơn nữa ta phải có $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ . (Nếu giới hạn của dãy này là hữu hạn thì chuyển hệ thức trên qua giới hạn ta có ngay điều vô lý.)                                             | 1    |
|        | Mặt khác, công thức trên đây dẫn đến<br>$y_n = \frac{1}{x_0 - 4} - \frac{1}{x_{n+1} - 4}.$ <p>Từ đó, ta suy ra dãy <math>(y_n)</math> có giới hạn và <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \frac{1}{x_0 - 4} = \frac{1}{30}</math>.</p>                                                                                       | 1    |

| Câu 2  | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Điểm |
|--------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Đề bài | <p>Ký hiệu <math>\mathbb{R}</math> là tập các số thực. Tìm tất cả các hàm số <math>f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}</math> sao cho với mọi <math>x, y \in \mathbb{R}</math>, ta có</p> $f(2x + f(y)) + f(x) - y = f(3f(x)).$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 3    |
|        | <p>Giả sử tồn tại hàm số <math>f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}</math> thỏa mãn yêu cầu bài toán.<br/>         Ký hiệu <math>P(x_0, y_0)</math> là kết quả thu được khi thay <math>x = x_0; y = y_0</math> trong điều kiện đã cho.<br/>         Giả sử <math>f(a) = f(b)</math>. So sánh <math>P(x, a)</math> và <math>P(x, b)</math> ta có <math>a = b</math>, hay <math>f</math> là đơn ánh.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 0.5  |
|        | <p><math>P(x, f(x)): f(2x + f(f(x))) = f(3f(x)), \forall x \in \mathbb{R}</math>.<br/>         Mà <math>f</math> là đơn ánh nên ta suy ra <math>f(f(x)) + 2x = 3f(x), \forall x \in \mathbb{R}</math>, hay</p> $f(f(x)) = 3f(x) - 2x, \forall x \in \mathbb{R} \quad (*)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 1    |
|        | <p><math>P(x, 0): f(2x + f(0)) + f(x) = f(3f(x))</math>.<br/>         So sánh với <math>P(x, y)</math> ta được</p> $f(2x + f(y)) - y = f(2x + f(0)), \forall x \in \mathbb{R} \quad (**)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 1    |
|        | <p>Thế <math>x = 0</math> vào (**), ta có <math>f(f(y)) - y = f(f(0)), \forall y \in \mathbb{R}</math>.<br/>         Kết hợp điều này với (*), ta thu được <math>3f(y) - 3y = f(f(0)), \forall y \in \mathbb{R}</math>.<br/>         Như vậy, <math>f(y) = y + c, \forall y \in \mathbb{R}</math>, trong đó <math>c = f(f(0)) / 3</math>. Thay vào phương trình hàm ban đầu, ta thấy <math>f(x) = x + c</math> là một nghiệm hàm khi và chỉ khi</p> $2x + y + c + c + x + c - y = 3(x + c) + c,$ <p>với mọi số thực <math>x, y</math>, nghĩa là khi và chỉ khi <math>c = 0</math>.<br/>         Vậy, bài toán có nghiệm hàm duy nhất là <math>f(x) = x</math> với mọi <math>x</math>.</p> | 0.5  |

| Câu 3  | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Điểm |
|--------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Đề bài | Xét số nguyên $n \geq 3$ . Ký hiệu $1 = a_1 < \dots < a_k = n-1$ là tất cả các số nguyên dương không vượt quá $n$ và nguyên tố cùng nhau với $n$ . Đặt $f(n)$ là ước chung lớn nhất của các số $a_1^3 - 1, \dots, a_k^3 - 1$ . Tìm tất cả các số nguyên $n$ sao cho $f(n) = 2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 4    |
|        | Gọi các số dạng $a_i^3 - 1$ là số đặc biệt. Chú ý rằng nếu $n$ là số lẻ thì $2^3 - 1 = 7$ là đặc biệt nên $f(n) \mid 7$ , chứng tỏ $f(n) \neq 2$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 0.5  |
|        | Với $n = 4; n = 6$ , thử trực tiếp ta thấy không thỏa mãn<br>Xét $n$ là số chẵn $\geq 8$ .<br>Đặt $n = 2^k m$ , với $m$ lẻ và $k \geq 1$ . Chú ý rằng khi này mỗi $a_i$ là số lẻ, kéo theo $2 \mid f(n)$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 0.5  |
|        | <ul style="list-style-type: none"> <li>Xét <math>m = 1</math>. Khi này <math>k \geq 3</math>. Chú ý rằng <math>3^3 - 1 = 26</math> và <math>5^3 - 1 = 124</math> là các số đặc biệt và <math>\gcd(26, 124) = 2</math>. Từ đó suy ra <math>f(n) \mid 2</math> và do đó <math>f(n) = 2</math>.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 0.5  |
|        | <ul style="list-style-type: none"> <li>Xét <math>m = 3</math>. Khi này <math>k \geq 2</math>. Chú ý rằng <math>5^3 - 1 = 124 = 4 \cdot 31</math>, <math>7^3 - 1 = 342 = 2 \cdot 9 \cdot 19</math> là các số đặc biệt và <math>\gcd(124, 342) = 2</math>. Suy ra <math>f(n) = 2</math>.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0.5  |
|        | <ul style="list-style-type: none"> <li>Xét <math>m \geq 5</math>. Dễ thấy mỗi số <math>m-4, m-2, m+2, m+4</math> là số lẻ và nguyên tố cùng nhau với <math>m</math> nên chúng nguyên tố với <math>2^k m</math>. Hơn nữa hiển nhiên chúng nhỏ hơn <math>2m \leq 2^k m</math>.<br/>Do đó <math>(m-4)^3 - 1, (m-2)^3 - 1, (m+2)^3 - 1, (m+4)^3 - 1</math> là các số đặc biệt. Vì <math>f(n)</math> là ước của mỗi số này nên<br/><math>f(n) \mid ((m+4)^3 - 1) + ((m-4)^3 - 1) - ((m+2)^3 - 1) - ((m-2)^3 - 1) = 72m</math>.<br/>Để ý một trong hai số <math>m+2, m+4</math> không chia 3 dư 1, nên một trong hai số <math>(m+2)^3 - 1, (m+4)^3 - 1</math> không chia hết cho 3, chứng tỏ <math>3 \nmid f(n)</math>. Tương tự, chú ý rằng <math>(m+2)^2 \equiv (m+4)^2 \equiv 1 \pmod{4}</math>, kéo theo <math>(m+2)^3 - 1 \equiv (m+2) - 1 = m+1, (m+4)^3 - 1 \equiv m+4 - 1 = m+3 \pmod{4}</math> và một trong hai số <math>m+1, m+3</math> không chia hết cho 4 vì thế <math>4 \nmid f(n)</math>.<br/>Từ đó suy ra <math>f(n) \mid 2m</math>.</li> </ul> | 1    |
|        | Giả sử $f(n)$ có một ước nguyên tố $p$ lẻ nào đó.<br>Khi đó $p \mid m$ . Khi này từ $p \mid m$ và $p \mid f(n) \mid (m+2)^3 - 1$ ta có $p \mid 7$ , kéo theo $p = 7$ . Tương tự, từ $p \mid m$ và $p \mid (m-2)^3 - 1$ ta có $p \mid 9$ , kéo theo $p = 3$ , mâu thuẫn.<br>Suy ra: $f(n)$ không thể có ước nguyên tố lẻ. Vì thế $f(n) \mid 2$ và do đó $f(n) = 2$<br>Vậy, các số $n$ cần tìm là tất cả các số chẵn $\geq 8$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 1    |

| Câu 4         | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Điểm     |
|---------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>Đề bài</b> | <p>Cho tam giác nhọn <math>ABC</math> nội tiếp đường tròn <math>(O)</math>. Các tia <math>AO, BO, CO</math> theo thứ tự cắt <math>BC, CA, AB</math> tại <math>X, Y, Z</math>. Đường thẳng <math>XZ</math> cắt <math>AC</math> tại <math>E</math>; đường thẳng <math>XY</math> cắt <math>AB</math> tại <math>F</math>. Các đường thẳng <math>BE, CF</math> cắt nhau tại <math>Q</math>. Các tiếp tuyến tại <math>B</math> và <math>C</math> của đường tròn <math>(O)</math> cắt nhau tại <math>P</math>.</p> <p>a) Chứng minh rằng các điểm <math>A, O, Q</math> thẳng hàng.</p> <p>b) Giả sử <math>PQ, EF</math> cắt nhau tại <math>T</math>. Chứng minh rằng <math>T</math> là trung điểm của <math>EF</math>.</p> | <b>5</b> |
| <b>4.a</b>    | <div data-bbox="325 517 1302 1554" data-label="Image"> </div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |          |
|               | <p>Đặt <math>BE \cap AO = \{Q'\}</math>, <math>CF \cap O = \{Q''\}</math>.<br/>Ta có <math>(AX, OQ') = B(AX, OQ'') = (AC, YE) = -1</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 1.5      |
|               | <p>Tương tự <math>(AX, OQ'') = -1</math>. Vì thế <math>Q' \equiv Q'' \equiv Q</math>. Vậy <math>Q</math> nằm trên <math>AO</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 0.5      |

| Câu 4 | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Điểm |
|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 4.b   | <p>Gọi <math>AA'</math>, <math>CC'</math> là các đường cao kẻ từ <math>A</math> và <math>C</math> của tam giác <math>ABC</math> và <math>H</math> là trực tâm. Các đường tròn đường kính <math>BH</math>, <math>CH</math> cắt lại <math>(O)</math> tương ứng tại <math>K, L</math>.</p> <p>Bằng cách xét trục đẳng phương của các đường tròn <math>(BA'C')</math>, <math>(O)</math>, <math>(AA'C)</math> ta có <math>BK</math>, <math>A'C'</math>, <math>AC</math> đồng quy tại một điểm <math>S</math>. Suy ra <math>B(HK, AC) = -1</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0.5  |
|       | <p>Do <math>B(OE, CA) = -1 = B(HK, AC)</math> và phép đối xứng qua phân giác <math>\angle ABC</math> bảo toàn tỉ số kép nên ta thu được <math>BK</math>, <math>BE</math> đẳng giác trong <math>\angle ABC</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 0.5  |
|       | <p>Chú ý rằng <math>T</math> là trung điểm của <math>EF</math></p> $\Leftrightarrow S_{PQE} = S_{PQF} \Leftrightarrow PQ \cdot EQ \cdot \sin \angle PQE = PQ \cdot FQ \cdot \sin \angle PQF.$ <p>Vậy ta chỉ cần chứng minh</p> $\frac{QE}{QF} = \frac{\sin \angle PQF}{\sin \angle PQE}. \quad (*)$ <p>Một mặt, ta có <math>\angle BKA = \angle BCE</math> và <math>\angle KBA = \angle EBC</math> nên <math>\angle KAB = \angle BEC</math><br/> Tương tự <math>\angle LAC = \angle BFC</math>. Suy ra</p> $\begin{aligned} \frac{QE}{QF} &= \frac{QE}{QA} \cdot \frac{QA}{QF} = \frac{\sin \angle QAE}{\sin \angle QEA} \cdot \frac{\sin \angle QFA}{\sin \angle QAF} \\ &= \frac{\cos \angle ABC}{\cos \angle ACB} \cdot \frac{\sin \angle LAC}{\sin \angle KAB} = \frac{BH}{CH} \cdot \frac{CL}{BK} = \frac{\sin \angle LHC}{\sin \angle KHB}. \end{aligned}$ | 1    |
|       | <p>Mặt khác, tiếp tuyến tại <math>C</math> đẳng giác với đường thẳng qua <math>C</math> song song với <math>AB</math> nên <math>\angle QCP = \angle (CL, AB) = \angle (HL, HC) = \angle LHC</math>. Tương tự <math>\angle QBP = \angle KHB</math>.</p> <p>Do đó <math>\frac{\sin \angle PQF}{\sin \angle PQE} = \frac{\sin \angle CQP}{\sin \angle BQP} = \frac{PC \cdot \frac{\sin \angle QCP}{PQ}}{PB \cdot \frac{\sin \angle QBP}{PQ}} = \frac{\sin \angle LHC}{\sin \angle KHB}.</math></p> <p>Vậy <math>(*)</math> được chứng minh và bài toán được giải quyết.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 1    |

| Câu 5  | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Điểm |
|--------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Đề bài | <p>Một chuyên gia ẩm thực cần đưa ra đánh giá về <math>n</math> nhà hàng trong thành phố, trong đó <math>n</math> là một số nguyên dương. Mỗi cặp nhà hàng được vị chuyên gia so sánh với nhau theo hai tiêu chí: <i>độ ngon của món ăn</i> và <i>chất lượng phục vụ</i>. Với một số cặp nhà hàng, vị chuyên gia không thể quyết định nhà hàng nào tốt hơn nhà hàng còn lại trong một tiêu chí nào đó, nhưng điều này không xảy ra đồng thời ở cả hai tiêu chí. Ngoài ra, nếu vị chuyên gia cho rằng nhà hàng <math>A</math> tốt hơn nhà hàng <math>B</math> ở một tiêu chí nào đó, và đồng thời cho rằng nhà hàng <math>B</math> tốt hơn nhà hàng <math>C</math> trong cùng tiêu chí đó, thì ông ta cũng đánh giá rằng <math>A</math> tốt hơn <math>C</math> trong tiêu chí ấy.</p> <p>Chứng minh rằng tồn tại một nhà hàng <math>R</math> sao cho mọi nhà hàng khác đều bị vị chuyên gia đánh giá kém hơn <math>R</math> trong ít nhất một tiêu chí.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 4    |
|        | <p>Ta nói nhà hàng <math>A</math> là <i>nổi trội</i> trong tập các nhà hàng <math>S</math> nếu <math>A</math> tốt hơn ít nhất một tiêu chí so với mọi nhà hàng khác trong <math>S \setminus \{A\}</math>. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo số nhà hàng rằng trong mọi tập nhà hàng không rỗng luôn tồn tại ít nhất một nhà hàng nổi trội.</p> <p>Nếu chỉ có một nhà hàng thì hiển nhiên nó là nổi trội. Giả sử mệnh đề đúng với mọi tập không rỗng có <math>&lt; n</math> nhà hàng. Ta sẽ chứng minh nó đúng với <math>n</math> nhà hàng.</p> <p>Ký hiệu tập <math>n \geq 2</math> nhà hàng là <math>\mathcal{R}</math>. Chọn một nhà hàng <math>A \in \mathcal{R}</math> tùy ý. Theo giả thiết quy nạp, trong tập <math>\mathcal{R} \setminus \{A\}</math> tồn tại một nhà hàng nổi trội, gọi là <math>B</math>.</p> <p>Ký hiệu <math>\mathcal{O}_B</math> là tập các nhà hàng trong <math>\mathcal{R} \setminus \{A\}</math> có chất lượng phục vụ kém hơn <math>B</math>, và <math>\mathcal{P}_B</math> là tập các nhà hàng trong <math>\mathcal{R} \setminus \{A\}</math> có món ăn kém hơn <math>B</math>.</p> <p>Hiển nhiên <math>\mathcal{O}_B \cup \mathcal{P}_B = \mathcal{R} \setminus \{A, B\}</math>.</p> <p>Giữa <math>A</math> và <math>B</math> có các khả năng sau:</p> | 0.5  |
|        | <p><b><u>Trường hợp 1:</u></b></p> <p><math>B</math> tốt hơn <math>A</math> trong một tiêu chí nào đó. Khi này <math>B</math> là nhà hàng nổi trội trong <math>\mathcal{R}</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 0.5  |
|        | <p><b><u>Trường hợp 2:</u></b></p> <p><math>A</math> tốt hơn <math>B</math> trong cả hai tiêu chí. Khi này <math>A</math> cũng có chất lượng phục vụ tốt hơn mọi nhà hàng trong <math>\mathcal{O}_B</math> và có chất lượng món ăn tốt hơn mọi nhà hàng trong <math>\mathcal{P}_B</math>. Do đó <math>A</math> là nhà hàng nổi trội trong <math>\mathcal{R}</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 1    |
|        | <p><b><u>Trường hợp 3:</u></b></p> <p><math>A</math> tốt hơn <math>B</math> trong đúng một tiêu chí. Không mất tính tổng quát, giả sử <math>A</math> có chất lượng phục vụ tốt hơn <math>B</math>. Khi đó <math>A</math> cũng có chất lượng phục vụ tốt hơn mọi nhà hàng trong <math>\mathcal{O}_B</math>.</p> <p>Theo giả thiết quy nạp, trong tập <math>\mathcal{P}_B \cup \{A\}</math> tồn tại một nhà hàng nổi trội, gọi là <math>C</math>.</p> <p>Nếu <math>C = A</math> thì <math>A</math> có chất lượng phục vụ tốt hơn mọi nhà hàng trong <math>\mathcal{O}_B \cup \{B\}</math>, và <math>A</math> nổi trội trong <math>\mathcal{P}_B \cup \{A\}</math>. Do đó <math>A</math> nổi trội trong <math>\mathcal{O}_B \cup \{B\} \cup \mathcal{P}_B \cup \{A\} = \mathcal{R}</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 1    |

| Câu 5 | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Điểm |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|       | <p>Giả sử <math>C \neq A</math>. Khi đó <math>C</math> tốt hơn <math>A</math> trong một tiêu chí nào đó. Nếu <math>C</math> có chất lượng món ăn tốt hơn <math>A</math> thì suy ra <math>B</math> cũng có chất lượng món ăn tốt hơn <math>A</math>, mâu thuẫn với giả thiết. Vì vậy <math>C</math> phải có chất lượng phục vụ tốt hơn <math>A</math>. Khi đó <math>C</math> có chất lượng phục vụ tốt hơn mọi nhà hàng trong <math>\{A, B\} \cup \mathcal{O}_B</math>. Hơn nữa, theo giả thiết <math>C</math> nổi trội trong <math>\mathcal{P}_B \cup \{A\}</math>, nên <math>C</math> nổi trội trong <math>\{A, B\} \cup \mathcal{O}_B \cup \mathcal{P}_B = \mathcal{R}</math>. Điều này hoàn tất bước quy nạp, và do đó bài toán được giải quyết.</p> | 1    |