

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi có 04 trang)

Môn thi: **Toán**
Thời gian làm bài: **180 phút**
Ngày thi: 15/01/2026

Mã đề: 121

Phần I: Trắc nghiệm

1. Trắc nghiệm nhiều lựa chọn (6.0 điểm): Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ ghi một phương án.

Câu 1. Nhân dịp khai trương, một cửa hàng kinh doanh bán đồng giá các sản phẩm áo, mũ và túi xách. Biết rằng mỗi áo bán đồng giá x nghìn đồng, mỗi mũ bán đồng giá y nghìn đồng và mỗi túi xách bán đồng giá z nghìn đồng. Tại cửa hàng này trong dịp khai trương, Lan mua 2 chiếc áo, 1 mũ, 3 túi xách hết 1450 nghìn đồng; Cúc mua 1 chiếc áo, 2 mũ, 1 túi xách hết 1050 nghìn đồng; Huệ mua 3 chiếc áo, 2 túi xách hết 1100 nghìn đồng. Tổng số tiền (nghìn đồng) khi mua một áo, một mũ và một túi xách bằng

- A. 750. B. 850. C. 700. D. 800.

Câu 2. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm $I(3;5)$ có hai cạnh $DC: x+3y-6=0$, $BC: 2x-5y-1=0$. Đường thẳng AD có phương trình là

- A. $2x-5y-39=0$. B. $3x-9y+39=0$. C. $2x-5y+39=0$. D. $3x+5y+39=0$.

Câu 3. Biết tổng $S = \log_5 \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \log_5 \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \log_5 \left(1 - \frac{1}{2025^2}\right) = \log_5 \frac{a}{b}$ với a, b là những số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó giá trị của $(2a-b)$ bằng

- A. 2. B. 2024. C. 1. D. 2025.

Câu 4. Chi phí để nhà máy A sản xuất x sản phẩm trong một tuần được cho bởi công thức $C(x) = 100 + 30x$ (triệu đồng). Gọi $\overline{C}(x)$ là chi phí trung bình (triệu đồng) để nhà máy A sản xuất một sản phẩm trong một tuần. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \overline{C}(x)$.

- A. 100. B. 30. C. 0. D. $+\infty$.

Câu 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $3\overline{AO} = (\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA'})$. B. $3\overline{AO} = 2(\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA'})$.
C. $4\overline{AO} = (\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA'})$. D. $2\overline{AO} = (\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA'})$.

Câu 6. Hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^5$ với $x \neq 0$ bằng

- A. 40. B. 16. C. 10. D. 24.

Câu 7. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng $d: 4x-3y+3=0$. Đường tròn tâm $I(1;-1)$ cắt d tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 8$ có phương trình là

- A. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 16$. B. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 16$.
C. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 20$. D. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 20$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là

- A. $\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$. B. $(-2; 11; 1)$. C. $\left(\frac{11}{3}; -2; 1\right)$. D. $\left(\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của AB . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SE và BC bằng

- A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Câu 10. Cho hàm số $y = ax^3 + cx + d$ ($a \neq 0$) có $\min_{(-\infty; 0]} f(x) = f(-2)$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng

- A. $8a + d$. B. $2a + d$. C. $d - 16a$. D. $d - 11a$.

Câu 11. Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Biết đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $M(0; 1)$ và có một điểm cực trị là $A(-2; 0)$. Tính giá trị biểu thức $T = 4a + b + c$.

- A. $\frac{41}{4}$. B. 23. C. 22. D. $\frac{37}{4}$.

Câu 12. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Gọi $M(x_0; y_0; z_0)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $|\overline{MB} + \overline{MC}|$ nhỏ nhất. Giá trị $2x_0 - 3y_0 + z_0$ bằng

- A. 5. B. -11. C. -5. D. 2.

2. Trắc nghiệm đúng, sai (6.0 điểm): Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh ghi Đúng (Đ) hoặc Sai (S).

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = 9^x - 8.3^x$.

a) Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = 9^x \ln 9 - 8.3^x \ln 3$.

b) Phương trình $f'(x) = 0$ có tập nghiệm là $S = \{0; \log_3 4\}$.

c) $f(\log_3 4) = -16$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên $[0; 1]$ bằng -16 .

Câu 2. Một công ty trong một đợt quảng cáo và bán hàng khuyến mãi hàng hóa (một sản phẩm mới của công ty) cần thuê xe để chở 140 người và 9 tấn hàng. Nơi thuê chỉ có hai loại xe A và B. Trong đó xe loại A có 10 chiếc, xe loại B có 9 chiếc. Một chiếc xe loại A cho thuê với giá 4 triệu đồng, loại B có giá 3 triệu đồng. Biết rằng xe A chỉ chở tối đa 20 người và 0,6 tấn hàng; xe B chở tối đa 10 người và 1,5 tấn hàng. Gọi x, y lần lượt là số xe loại A và loại B mà công ty thuê.

a) Số tiền thuê xe là: $T = 4x + 3y$ (triệu đồng).

b) Hệ bất phương trình thỏa mãn yêu cầu bài toán là
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 2x + y \leq 14 \\ 2x + 5y \geq 30 \end{cases}.$$

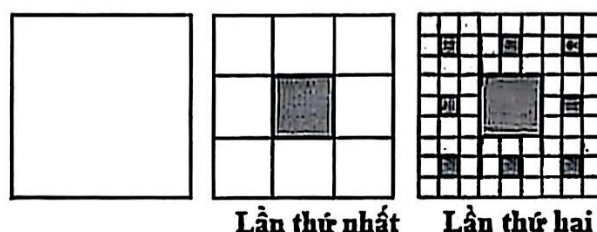
c) Miền nghiệm của hệ bất phương trình thỏa mãn yêu cầu bài toán là một miền tứ giác.

d) Số tiền thuê xe thấp nhất là 32 triệu đồng khi thuê 4 xe A và 5 xe B.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0), B(6;0;0), D(0;6;0), A'(0;0;6)$. Gọi P là trung điểm $C'D'$, K là điểm thuộc mặt phẳng (Oyz) .

- Trọng tâm của tam giác PCD có tọa độ là $(9;6;2)$.
- Góc giữa hai vector $\overrightarrow{AP}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng 60° .
- Thể tích khối chóp tứ giác $A.A'B'C'D'$ bằng 72.
- Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|\overrightarrow{KP} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD}|$ bằng 3.

Câu 4. Một robot vẽ hoa văn trang trí trên một tấm nhựa hình vuông có diện tích $1 m^2$ theo nguyên lý tự lặp: lần thứ nhất, chia hình vuông thành 9 hình vuông bằng nhau và vẽ hoa văn hình vuông ở chính giữa; ở mỗi lần tiếp theo, chỉ với các hình vuông chưa vẽ hoa văn, mỗi hình vuông tiếp tục chia thành 9 hình vuông bằng nhau và vẽ hoa văn ở hình vuông trung tâm (hình minh họa bên dưới). Quy trình trên được thực hiện liên tiếp n lần ($n \in \mathbb{N}^*$).



- Diện tích phần đã được robot vẽ hoa văn trang trí ở lần thứ nhất là $\frac{1}{9}$.
- Diện tích phần chưa được robot vẽ hoa văn trang trí ở lần thứ hai là $\frac{8}{81}$.
- Diện tích phần đã được robot vẽ hoa văn trang trí ở lần thứ ba là $\frac{217}{729}$.
- Công thức tính tổng diện tích đã được robot vẽ hoa văn trang trí ở lần thứ n là $\frac{1}{9} \left(1 - \left(\frac{8}{9} \right)^n \right)$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = \frac{x-1}{x+4}$ và $g(x) = x \ln x$.

- Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $f(x)$ nằm trên đường thẳng $y = -4x$.
- Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.
- Trên khoảng $(0; +\infty)$, phương trình $(x+4)f'(x) - g(x) = 0$ có duy nhất một nghiệm.
- Trên khoảng $(0; +\infty)$, nghiệm phương trình $(x+4)f'(x) - g(x) = 0$ luôn lớn hơn 2.

Câu 6. Cho hàm số $y = x + 2 + \frac{1}{x-1}$ có đồ thị (C) .

- Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(0;1)$ và $(1;2)$.
- Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (C) . Khi đó, diện tích tam giác OAB bằng 1 (với O là gốc tọa độ).
- Tổng khoảng cách từ một điểm bất kì trên đồ thị (C) đến hai đường tiệm cận có giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{2}$.
- Với $a \neq -2$, từ điểm $M(a;0)$ ta luôn vẽ được hai tiếp tuyến đến đồ thị (C) .

PHẦN II: Tự luận

Câu 1. (2.0 điểm) Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $AB = 1, AC = 2, \widehat{BAC} = 120^\circ$ và $SA \perp (ABC)$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh SB, SC và α là góc tạo bởi đường thẳng SA với mặt phẳng (AMN) sao cho $\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Câu 2. (2.0 điểm) Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa ($1 \leq x \leq 18$). Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí: $C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500$. Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi $B(x)$ là số tiền bán được và $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa. Hộ làm nghề dệt này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày bao nhiêu mét vải lụa để thu được lợi nhuận tối đa? Hãy tính lợi nhuận tối đa đó (đơn vị nghìn đồng).

Câu 3. (2.0 điểm) Hai bạn An và Bình tranh chức vô địch trong một cuộc thi cờ tướng. Khi chơi một ván cờ, xác suất thắng của An là 0,35 và xác suất thắng của Bình là 0,65. Mỗi ván cờ không có hòa cờ. Người giành chiến thắng là người đầu tiên thắng được 5 ván cờ. Tại thời điểm bạn An đã thắng 4 ván và bạn Bình mới thắng 3 ván thì xác suất để bạn An giành chiến thắng bằng bao nhiêu?

Câu 4. (1.0 điểm) Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn c là số nhỏ nhất và $\begin{cases} a^2 + c^2 > 0 \\ b^2 + c^2 > 0 \end{cases}$. Tìm

giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a^2 + c^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \sqrt{a + b + c}$.

Câu 5. (1.0 điểm) Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $B(3; -4; 0)$ và $C(6; 0; 0)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc miền trong tam giác OBC sao cho tổng khoảng cách từ M đến các đỉnh của tam giác OBC đạt giá trị nhỏ nhất (với O là gốc tọa độ).

.....HẾT.....

(Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay)

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

Giám thị 1:..... Ký tên:..... Giám thị 2: Ký tên:.....

ĐỀ THI CHỌN HSG LỚP 12 KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THPT CẤP TỈNH
TỈNH LÂM ĐỒNG **NĂM HỌC 2025 – 2026**

ĐỀ+ĐÁP ÁN THAM KHẢO
(Đề thi có 18 trang)

Môn thi: Toán
Thời gian làm bài: 180 phút
Ngày thi: 15/01/2026

Mã đề 121

Phần I: Trắc nghiệm

1. Trắc nghiệm nhiều lựa chọn (6.0 điểm): Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ ghi một phương án.

Câu 1. Nhân dịp khai trương, một cửa hàng kinh doanh bán đồng giá các sản phẩm áo, mũ và túi xách. Biết rằng mỗi áo bán đồng giá x nghìn đồng, mỗi mũ bán đồng giá y nghìn đồng và mỗi túi xách bán đồng giá z nghìn đồng. Tại cửa hàng này trong dịp khai trương, Lan mua 2 chiếc áo, 1 mũ, 3 túi xách hết 1450 nghìn đồng; Cúc mua 1 chiếc áo, 2 mũ, 1 túi xách hết 1050 nghìn đồng; Huệ mua 3 chiếc áo, 2 túi xách hết 1100 nghìn đồng. Tổng số tiền (nghìn đồng) khi mua một áo, một mũ và một túi xách bằng

- A. 750. B. 850. C. 700. D. 800.

Lời giải.

Theo đề bài, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 1450 & (1) \\ x + 2y + z = 1050 & (2) \\ 3x + 2z = 1100 & (3) \end{cases}$$

Lấy $(2) + (3) - (1)$, ta được phương trình: $2x + y = 700$ (4).

Thay (4) vào (1), ta được phương trình $700 + 3z = 1450 \Leftrightarrow 3z = 750 \Leftrightarrow z = 250$ (nhận).

Thay $z = 250$ vào (1), (2), ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 2y + 250 = 1050 \\ 3x + 500 = 1100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 800 \\ 3x = 600 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 200 \\ y = 300 \end{cases} \quad (\text{nhận})$$

Vậy $x + y + z = 200 + 300 + 250 = 750$.

Chọn đáp án **A**□

Câu 2. Cho hình bình hành $ABCD$ với tâm $I(3; 5)$ có hai cạnh $DC : x + 3y - 6 = 0, BC : 2x - 5y - 1 = 0$. Đường thẳng AD có phương trình là

- A. $2x - 5y - 39 = 0$. B. $3x - 9y + 39 = 0$. C. $2x - 5y + 39 = 0$. D. $3x + 5y + 39 = 0$.

Lời giải.

Do C là giao điểm của BC và CD nên tọa độ $(x_C; y_C)$ của điểm C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 3y - 6 = 0 \\ 2x - 5y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 6 \\ 2x - 5y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy $C(3; 1)$. Do tứ giác $ABCD$ là hình bình hành với tâm $I(3; 5)$ là trung điểm của AC nên tọa độ $(x_A; y_A)$ của điểm A thỏa mãn hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_A + x_C = 2x_I \\ y_A + y_C = 2y_I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A + 3 = 6 \\ y_A + 1 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 3 \\ y_A = 9 \end{cases}$$

Vậy $A(3; 9)$.

Do tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $AD \parallel BC$. Vậy đường thẳng AD nhận vecto pháp tuyến $(2; -5)$ của BC làm vecto pháp tuyến.

Đường thẳng AD đi qua $A(3; 9)$ và nhận vecto $(2; -5)$ làm vecto pháp tuyến nên đường thẳng AD có phương trình tổng quát là:

$$2(x - 3) - 5(y - 9) = 0 \Leftrightarrow 2x - 5y + 39 = 0$$

Chọn đáp án **C**□

Câu 3. Biết tổng $S = \log_5 \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \log_5 \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \log_5 \left(1 - \frac{1}{2025^2}\right) = \log_5 \frac{a}{b}$ với a, b là những số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó giá trị của $(2a - b)$ bằng

A. 2.

B. 2024.

C. 1.

D. 2025.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} S &= \log_5 \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \log_5 \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) + \log_5 \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) + \dots + \log_5 \left(1 - \frac{1}{2025^2}\right) \\ &= \log_5 \left(\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \right) + \log_5 \left(\left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \right) \\ &\quad + \log_5 \left(\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \right) + \dots + \log_5 \left(\left(1 - \frac{1}{2025}\right) \left(1 + \frac{1}{2025}\right) \right) \\ &= \log_5 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \right) + \log_5 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \right) + \log_5 \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \right) + \dots + \log_5 \left(\frac{2024}{2025} \cdot \frac{2026}{2025} \right) \\ &= \log_5 \left(\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{2024}{2025} \right) \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \dots \frac{2026}{2025} \right) \right) \\ &= \log_5 \left(\frac{1}{2025} \cdot \frac{2026}{2} \right) = \log_5 \frac{1013}{2025} \end{aligned}$$

Vậy $a = 1013; b = 2025$. Do đó $2a - b = 2026 - 2025 = 1$.

Chọn đáp án **C**□

Câu 4. Chi phí để nhà máy A sản xuất x sản phẩm trong một tuần được cho bởi công thức $C(x) = 100 + 30x$ (triệu đồng). Gọi $\overline{C}(x)$ là chi phí trung bình (triệu đồng) để nhà máy A sản xuất một sản phẩm trong một tuần. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \overline{C}(x)$.

A. 100.

B. 30.

C. 0.

D. $+\infty$.

Lời giải.

Từ đề bài, có: $\overline{C}(x) = \frac{100 + 30x}{x} = 30 + \frac{100}{x}$. Khi đó ta được:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \overline{C}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(30 + \frac{100}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 30 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{100}{x} = 30.$$

Chọn đáp án **B**□

Câu 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào sau đây là đúng?

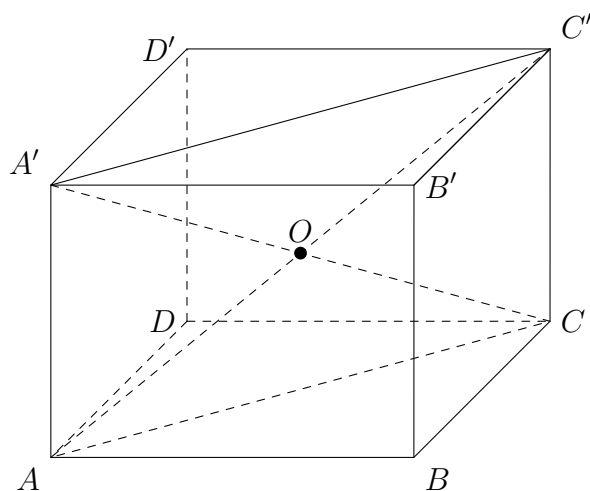
A. $3\overrightarrow{AO} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} \right).$

B. $3\overrightarrow{AO} = 2 \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} \right).$

C. $4\overrightarrow{AO} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} \right).$

D. $2\overrightarrow{AO} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} \right).$

Lời giải.



Ta có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'} = 2\overrightarrow{AO}$$

Vậy $2\overrightarrow{AO} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.

Chọn đáp án **(D)**□

Câu 6. Hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^5$ với $x \neq 0$ bằng

A. 40.

B. 16.

C. 10.

D. 24.

Lời giải.

Ta có:

$$\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^5 = \sum_{k=0}^5 C_5^k \cdot (x^2)^{5-k} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^5 C_5^k \cdot 2^k \cdot x^{10-3k}$$

Xét phương trình $10 - 3k = 4 \Leftrightarrow k = 2$. Vậy hệ số đứng trước x^4 là $C_5^2 \cdot 2^2 = 40$.

Chọn đáp án **(A)**□

Câu 7. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng $d : 4x - 3y + 3 = 0$. Đường tròn tâm $I(1; -1)$ cắt d tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 8$ có phương trình là

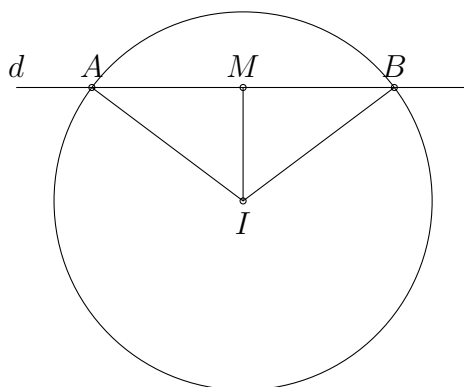
A. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 16$.

B. $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 16$.

C. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 20$.

D. $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 20$.

Lời giải.



Khoảng cách từ $I(1; -1)$ đến $d : 4x - 3y + 3 = 0$ là:

$$d(I, d) = \frac{|4 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) + 3|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

Gọi M là trung điểm của AB . Khi đó ta được $IM \perp AB$ và $AM = \frac{AB}{2} = 4$. Khi đó, áp dụng định lý Pythagore vào tam giác MIA vuông tại M , ta có:

$$IA^2 = IM^2 + MA^2 = 2^2 + 4^2 = 20 \Rightarrow IA = \sqrt{20}$$

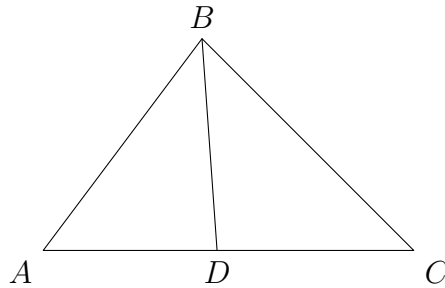
Vậy đường tròn tâm $I(1; -1)$ cắt d tại A và B sao cho $AB = 8$ có độ dài bán kính là $\sqrt{20}$. Do đó, đường tròn này có phương trình $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 20$.

Chọn đáp án **(D)**□

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-4; 7; 5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là

- A. $\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$. B. $(-2; 11; 1)$. C. $\left(\frac{11}{3}; -2; 1\right)$. D. $\left(\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Lời giải.



Gọi D là chân đường phân giác trong góc B . Theo đề bài, ta có:

$$AB = \sqrt{(2 - 1)^2 + (-1 - 2)^2 + (3 - (-1))^2} = \sqrt{26}$$

$$BC = \sqrt{(-4 - 2)^2 + (7 - (-1))^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{104}$$

Theo tính chất đường phân giác, ta có:

$$\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{104}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{DC + AD} = \frac{1}{2 + 1} = \frac{1}{3}$$

Vậy ta được $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Mặt khác, ta tính được $\overrightarrow{AC}(-5; 5; 6)$. Vậy ta được $\overrightarrow{AD}\left(\frac{-5}{3}; \frac{5}{3}; 2\right)$. Gọi $(x_D; y_D; z_D)$ là tọa độ của điểm D . Khi đó ta được:

$$\begin{cases} x_D - 1 = -\frac{5}{3} \\ y_D - 2 = \frac{5}{3} \\ z_D + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = -\frac{2}{3} \\ y_D = \frac{11}{3} \\ z_D = 1 \end{cases}$$

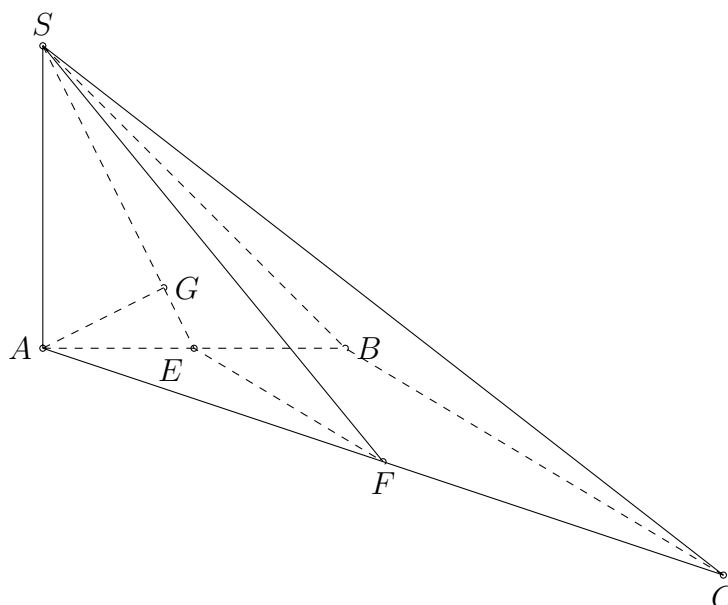
Vậy $D\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$

Chọn đáp án **(A)**□

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của AB . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SE và BC bằng

- A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.



Gọi F là trung điểm AC và G là hình chiếu của A lên SE . Khi đó ta được $EF // BC \Rightarrow BC // (SEF)$. Mặt khác, ta có:
$$\begin{cases} AG \perp SE \\ AG \perp EF \text{ (do } EF \perp AB \text{ và } AB \perp AS \text{ nên } EF \perp (SAB)) \end{cases}$$
. Khi đó ta được $AG \perp (SEF)$ nên $d(A, (SEF)) = AG$.

Ta có:

$$d(SE, BC) = d(BC, (SEF)) = d(B, (SEF)) = d(A, SEF) = AG$$

Trong tam giác SAE vuông tại A , đường cao AG , ta có:

$$\frac{1}{AG^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{9}{2a^2}$$

Vậy $AG = \frac{2a^2}{9} \Rightarrow AG = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án **(D)**□

Câu 10. Cho hàm số $y = ax^3 + cx + d$ ($a \neq 0$) có $\min_{(-\infty; 0)} = f(-2)$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng

- A.** $8a + d$. **B.** $2a + d$. **C.** $d - 16a$. **D.** $d - 11a$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = f(x) = ax^3 + cx + d$ trên $\mathbb{R}$, ta được $f'(x) = 3ax^2 + c, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do $\min_{(-\infty; 0)} f(x) = f(-2)$ nên -2 là một nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$. Do đó, phương trình bậc hai $3ax^2 + c = 0$ có nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $x_1 + x_2 = 0$. Khi đó, giả sử $x_1 = -2$, khi đó, ta được $x_2 = 2$. Vậy hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị là $x = \pm 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		$f(-2)$		$f(2)$		$-\infty$

Từ bảng biến thiên, ta được $\max_{[1;3]} f(x) = f(2) = 8a + 2c + d$.

Mặt khác, cũng do $x = -2$ là một nghiệm của phương trình $3ax^2 + c = 0$ nên ta được $12a + c = 0 \Rightarrow c = -12a$.

Vậy $f(2) = 8a + 2c + d = 8a + 2(-12a) + d = d - 16a$.

Chọn đáp án **C**□

Câu 11. Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Biết đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $M(0; 1)$ và có một điểm cực trị là $A(-2; 0)$. Tính giá trị của biểu thức $T = 4a + b + c$.

- A. $\frac{41}{4}$. B. 23. C. 22. D. $\frac{37}{4}$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Khi đó, do đồ thị của hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm $M(0; 1)$ và có một điểm cực trị là $A(-2; 0)$ nên:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(-2) = 0 \\ f'(-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ -8 + 4a - 2b + c = 0 \\ 12 - 4a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ 4a - 2b = 7 \\ -4a + b = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = 5 \\ a = \frac{17}{4} \end{cases}$$

Vậy $4a + b + c = 4 \cdot \frac{17}{4} + 5 + 1 = 23$.

Chọn đáp án **B**□

Câu 12. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $B(2; -1; 3), C(-4; 7; 5)$. Gọi $M(x_0; y_0; z_0)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất. Giá trị $2x_0 - 3y_0 + z_0$ bằng

- A. 5. B. -11. C. -5. D. 2.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của BC . Khi đó tọa độ của I là $(-1; 3; 4)$.

Ta có:

$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{MI}$$

Do M nằm trong mặt phẳng (Oxy) nên $z_0 = 0$. Vậy ta cần tìm x_0 và y_0 để $|2\overrightarrow{MI}| = 2MI$ nhỏ nhất.

Ta có: $MI = \sqrt{(-1 - x_0)^2 + (3 - y_0)^2 + 4^2} \geq \sqrt{4^2} = 4$. Dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi $x_0 = -1$ và $y_0 = 3$. Khi đó $2x_0 - 3y_0 + z_0 = 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 3 + 0 = -11$.

Chọn đáp án **B**□

2. Trắc nghiệm đúng, sai (6,0 điểm): Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh ghi **Đúng (Đ)** hoặc **Sai (S)**.

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = 9^x - 8 \cdot 3^x$.

- a) Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = 9^x \ln 9 - 8 \cdot 3^x \cdot \ln 3$..
b) Phương trình $f'(x) = 0$ có tập nghiệm là $S = \{0; \log_3 4\}$..
c) $f(\log_3 4) = -16$..
d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên $[0; 1]$ bằng -16 ..

Lời giải.

- Xét hàm số $f(x) = 9^x - 8 \cdot 3^x$ trên $\mathbb{R}$, ta có: $f'(x) = 9^x \ln 9 - 8 \cdot 3^x \cdot \ln 3, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy a) đúng.

- Xét phương trình:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow 9^x \cdot \ln 9 - 8 \cdot 3^x \cdot \ln 3 &= 0 \\
 \Leftrightarrow 9^x \cdot 2 \ln 3 - 8 \cdot 3^x \cdot \ln 3 &= 0 \\
 \Leftrightarrow 2 \cdot 9^x - 8 \cdot 3^x &= 0 \\
 \Leftrightarrow 2 \cdot 3^x (3^x - 4) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 0 \\ 3^x - 4 = 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow 3^x = 4 \Leftrightarrow x = \log_3 4
 \end{aligned}$$

Vậy b) sai.

- Ta có: $f(\log_3 4) = 9^{\log_3 4} - 8 \cdot 3^{\log_3 4} = 3^{2 \log_3 4} - 8 \cdot 3^{\log_3 4} = 4^2 - 8 \cdot 4 = -16$. Vậy c) đúng.
- Với $x \in [0; 1]$, ta có:

$$f'(x) = 2 \ln 3 \cdot 3^x (3^x - 4) < 0, \forall x \in [0; 1]$$

Vậy hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $[0; 1]$. Do đó, giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên $[0; 1]$ là $f(1) = 9 - 8 \cdot 3 = -15$. Vậy d) sai.

Chọn đáp án

a đúng	b sai	c đúng	d sai
--------	-------	--------	-------

 □

Câu 2. Một công ty trong một đợt quảng cáo và bán hàng khuyến mãi hàng hóa (một sản phẩm mới của công ty) cần thuê xe để chở 140 người và 9 tấn hàng. Nơi thuê chỉ có hai loại xe A và B. Trong đó xe loại A có 10 chiếc, xe loại B có 9 chiếc. Một chiếc xe loại A cho thuê với giá 4 triệu đồng, loại B có giá 3 triệu đồng. Biết rằng xe A chỉ chở tối đa 20 người và 0,6 tấn hàng; xe B chở tối đa 10 người và 1,5 tấn hàng. Gọi x, y lần lượt là số xe loại A và loại B mà công ty thuê.

a) Số tiền thuê xe là $T = 4x + 3y$ (triệu đồng).

b) Hệ bất phương trình thỏa mãn yêu cầu bài toán là
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 2x + y \leq 14 \\ 2x + 5y \geq 30 \end{cases}.$$

c) Miền nghiệm của hệ bất phương trình thỏa mãn yêu cầu bài toán là một miền tứ giác.

d) Số tiền thuê xe thấp nhất là 32 triệu đồng khi thuê 4 xe A và 5 xe B.

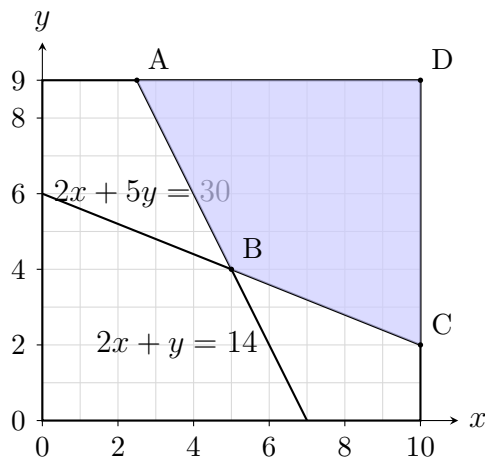
Lời giải.

- Số tiền thuê xe là $T = 4x + 3y$ (triệu đồng). Vậy a) đúng.
- Hệ bất phương trình thỏa mãn bài toán là:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 20x + 10y \geq 140 \\ 0,6x + 1,5y \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 2x + y \geq 14 \\ 2x + 5y \geq 30 \end{cases}$$

Vậy b) sai.

•



Ta thấy miền nghiệm của hệ bất phương trình thỏa mãn bài toán là miền tứ giác. Vậy c) đúng.

- Các đỉnh của tứ giác có tọa độ là $A\left(\frac{5}{2}; 9\right)$, $B(5; 4)$, $C(10; 2)$, $D(10; 9)$. Đặt $f(x, y) = 4x + 3y$.

Ta có:

$$f\left(\frac{5}{2}; 9\right) = 4 \cdot \frac{5}{2} + 3 \cdot 9 = 37$$

$$f(5, 4) = 4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 32$$

$$f(10, 2) = 4 \cdot 10 + 3 \cdot 2 = 46$$

$$f(10, 9) = 4 \cdot 10 + 3 \cdot 9 = 67$$

Vậy, từ các trường hợp, ta được T đạt giá trị nhỏ nhất là 32 khi và chỉ khi $x = 5$ và $y = 4$.
Vậy d) sai.

Chọn đáp án

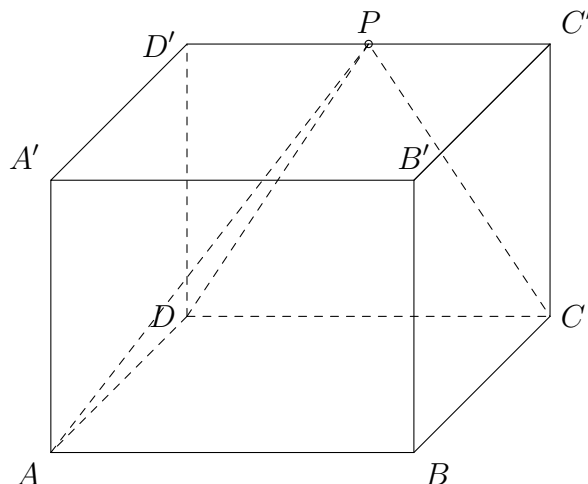
a đúng	b sai	c đúng	d sai
--------	-------	--------	-------

 □

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(6; 0; 0)$, $D(0; 6; 0)$, $A'(0; 0; 6)$. Gọi P là trung điểm $C'D'$. K là điểm thuộc mặt phẳng (Oyz) .

- Trọng tâm của tam giác PCD có tọa độ là $(9; 6; 2)$.
- Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AP}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng 60° .
- Thể tích khối chóp tứ giác $A.A'B'C'D'$ bằng 72.
- Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|\overrightarrow{KP} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD}|$ bằng 3.

Lời giải.



- Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'D'} &= \overrightarrow{AD} = (0; 6; 0) \Rightarrow D'(0; 6; 6) \\ \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AD} = (0; 6; 0) \Rightarrow C(6; 6; 0) \\ \overrightarrow{A'C'} &= \overrightarrow{AC} = (6; 6; 0) \Rightarrow C'(6; 6; 6)\end{aligned}$$

Vậy tọa độ đỉnh P là $(3; 6; 6)$. Do đó tọa độ trọng tâm của tam giác PCD là $(3; 6; 2)$. Do đó a) sai.

- Ta có: $\overrightarrow{AP} = (3; 6; 6); \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = (0; 6; 0)$. Vậy ta được:

$$\cos(\overrightarrow{AP}; \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{3 \cdot 0 + 6 \cdot 6 + 6 \cdot 0}{\sqrt{3^2 + 6^2 + 6^2} \cdot \sqrt{0^2 + 6^2 + 0^2}} = \frac{36}{54} = \frac{2}{3}$$

Vậy góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AP}$ và $\overrightarrow{BC}$ khác 60° . Do đó b) sai.

- Ta có: $V_{A.A'B'C'D'} = \frac{1}{3}V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{3} \cdot 6^3 = 72$. Vậy c) đúng.
- Do K thuộc (Oyz) nên hoành độ của K là 0. Đặt $K(0; y_K; z_K)$ là tọa độ của điểm K . Gọi T là trọng tâm của tam giác PCD . Khi đó ta được $T(3; 6; 2)$. Ta có:

$$|\overrightarrow{KP} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD}| = |3\overrightarrow{KT}| = 3KT$$

Mặt khác, ta có:

$$3KT = 3\sqrt{(3-0)^2 + (6-y_K)^2 + (2-z_K)^2} \geq 3 \cdot 3 = 9$$

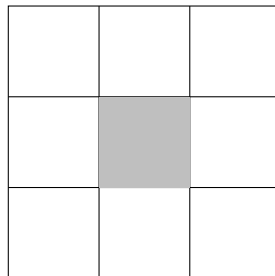
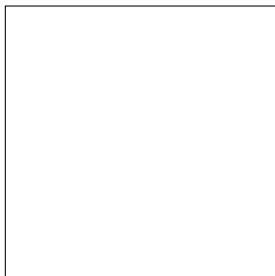
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $y_K = 6$ và $z_K = 2$ hay $K(0; 6; 2)$. Vậy d) sai.

Chọn đáp án

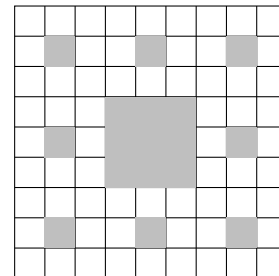
a sai	b sai	c đúng	d sai
-------	-------	--------	-------

 □

Câu 4. Một robot vẽ hoa văn trang trí trên một tấm nhựa hình vuông có diện tích $1m^2$ theo nguyên lý tự lặp: lần thứ nhất, chia hình vuông thành 9 hình vuông bằng nhau và vẽ hoa văn hình vuông ở chính giữa; ở mỗi lần tiếp theo, chỉ với các hình vuông chưa vẽ hoa văn, mỗi hình vuông tiếp tục chia thành 9 hình vuông bằng nhau và vẽ hoa văn ở hình vuông trung tâm (*hình minh họa bên dưới*). Quy trình trên được thực hiện liên tiếp n lần ($n \in \mathbb{N}^*$).



Lần thứ nhất



Lần thứ hai

- Diện tích phần đã được robot vẽ hoa văn trang trí ở lần thứ nhất là $\frac{1}{9}$.
- Diện tích phần chưa được robot vẽ hoa văn trang trí ở lần thứ hai là $\frac{8}{81}$.
- Diện tích phần đã được robot vẽ hoa văn trang trí ở lần thứ ba là $\frac{217}{729}$.

- d) Công thức tính tổng diện tích đã được robot vẽ hoa văn trang trí ở lần thứ n là $\frac{1}{9} \left(1 - \left(\frac{8}{9} \right)^n \right)$.

Lời giải.

Với mỗi số tự nhiên n , gọi u_n là diện tích phần đã được robot tô hoa văn trang trí ở lần thứ n , ta có:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{9} \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{9}(1 - u_n) = \frac{8}{9}u_n + \frac{1}{9}; n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

- Ta có $u_1 = \frac{1}{9}$. Vậy a) đúng.
- Ta có $u_2 = \frac{8}{9}u_1 + \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{17}{81} \Rightarrow 1 - u_2 = \frac{64}{81}$. Vậy diện tích phần chưa được robot vẽ hoa văn ở lần thứ hai là $\frac{64}{81}$. Do đó b) sai.
- Ta có: $u_3 = \frac{8}{9}u_2 + \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \cdot \frac{17}{81} + \frac{1}{9} = \frac{217}{729}$. Vậy c) đúng.
- Từ cách xây dựng dãy số (u_n) , ta được:

$$u_{n+1} - 1 = \frac{8}{9}(u_n - 1); n = 1, 2, 3, \dots$$

Với mỗi số nguyên dương n , đặt $v_n = u_n - 1$, khi đó ta được: $\begin{cases} v_1 = -\frac{8}{9} \\ v_{n+1} = \frac{8}{9}v_n; n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$.

Vậy (v_n) là cấp số nhân. Do đó ta được: $v_n = \left(\frac{8}{9} \right)^{n-1} v_1 = -\left(\frac{8}{9} \right)^n$; $n = 1, 2, 3, \dots$. Do đó ta được $u_n = v_n + 1 = 1 - \left(\frac{8}{9} \right)^n$; $n = 1, 2, 3, \dots$. Vậy d) sai.

Chọn đáp án

a đúng	b sai	c đúng	d sai
--------	-------	--------	-------

 $\square$

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = \frac{x-1}{x+4}$ và $g(x) = x \ln x$.

- Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $f(x)$ nằm trên đường thẳng $y = -4x$.
- Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.
- Trên khoảng $(0; +\infty)$, phương trình $(x+4)f'(x) - g(x) = 0$ có duy nhất một nghiệm.
- Trên khoảng $(0; +\infty)$, nghiệm phương trình $(x+4)f'(x) - g(x) = 0$ luôn lớn hơn 2.

Lời giải.

- Ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+4} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x+4} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{x-1}{x+4} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{x-1}{x+4} = +\infty \end{aligned}$$

Vậy hàm số $y = f(x)$ nhận đường thẳng $x = -4$ làm tiệm cận đứng và nhận đường thẳng $y = 1$ làm tiệm cận ngang. Do đó nhận điểm $I(-4; 1)$ là tâm.

Mặt khác, điểm $I(-4; 1)$ không nằm trên đường thẳng $y = -4x$ nên a) sai.

- Xét hàm số $y = f(x)$ trên $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$ và hàm số $y = g(x)$ trên $(0; +\infty)$, ta có:

$$f'(x) = \frac{5}{(x+4)^2}, \forall x \neq -4; g(x) = \ln x + 1, \forall x > 0$$

Xét phương trình $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$.

Bảng biến thiên:

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		$-e^{-1}$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy $g(x)$ không đồng biến trên $(0; +\infty)$. Do đó b) sai.

- Xét phương trình:

$$\begin{aligned} (x+4)f'(x) - g(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+4) \cdot \frac{5}{(x+4)^2} - x \ln x &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{5}{x+4} - x \ln x &= 0 \end{aligned}$$

Xét hàm số $h(x) = \frac{5}{x+4} - x \ln x$ trên $(0; +\infty)$, ta có:

$$h'(x) = \frac{-5}{(x+4)^2} - \ln x - 1, \Rightarrow h''(x) = \frac{10}{(x+4)^3} - \frac{1}{x} = \frac{-x^3 - 12x^2 - 38x - 64}{x(x+4)^3} < 0, \forall x > 0$$

Vậy $h'(x)$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$. Do đó phương trình $h'(x) = 0$ có không quá một nghiệm trên $(0; +\infty)$. Mặt khác, ta có $h'(1) = -\frac{6}{5} < 0$ và $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) > 0$. Do đó, theo định lý giá trị trung gian, phương trình $h'(x) = 0$ có duy nhất một nghiệm trong $(0; 1)$ và cũng có duy nhất một nghiệm trong $(0; +\infty)$.

Gọi a là nghiệm duy nhất của phương trình $h'(x) = 0$. Ta có bảng biến thiên:

x	0	a	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	$\frac{5}{4}$	$f(a)$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên và chú ý $h(1) = 1 > 0$. Ta được phương trình $(x+4)f'(x) - g(x) = 0$ có nghiệm duy nhất trên $(0; +\infty)$. Vậy c) đúng.

- Ta có $h(2) = \frac{5}{6} - \ln 2 - 1 = -\frac{1}{6} - \ln 2 < 0$. Từ đây, đối chiếu với bảng biến thiên thu được, ta được d) sai.

Chọn đáp án

a sai	b sai	c đúng	d sai
-------	-------	--------	-------

 $\square$

Câu 6. Cho hàm số $y = x + 2 + \frac{1}{x-1}$ có đồ thị (C) .

- Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(0; 1)$ và $(1; 2)$.
- Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (C) . Khi đó, diện tích tam giác OAB bằng 1 (với O là gốc tọa độ).
- Tổng khoảng cách từ một điểm bất kì trên đồ thị (C) đến hai đường tiệm cận có giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{2}$.
- Với $a \neq -2$, từ điểm $M(a; 0)$ ta luôn vẽ được hai tiếp tuyến đến đồ thị (C) .

Lời giải.

- Xét hàm số $y = x + 2 + \frac{1}{x-1}$ trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, ta có:

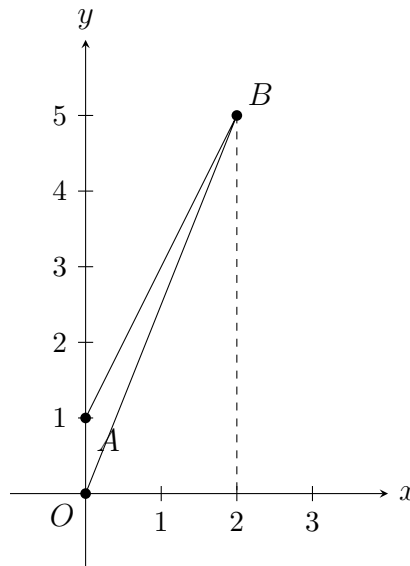
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}, \forall x \neq 1$$

Do $f'(x) < 0$ với mọi $0 < x < 1$ và $1 < x < 2$ nên hàm số nghịch biến trên $(0; 1)$ và $(1; 2)$.
Vậy a) đúng.

- Xét phương trình:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{(x-1)^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \text{ hoặc } x = 0 \end{aligned}$$

Vậy ta được hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (C) là $A(0; 1)$ và $B(2; 5)$.



Ta có $S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot d(B, OA) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot d(B, Oy) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$. Vậy b) đúng.

- Ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x + 2 + \frac{1}{x-1} \right) &= +\infty; \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(x + 2 + \frac{1}{x-1} \right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 2 + \frac{1}{x-1} - x - 2 \right) &= 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + 2 + \frac{1}{x-1} - x - 2 \right) = 0 \end{aligned}$$

Vậy đồ thị (C) nhận đường thẳng (d_1) có phương trình $x = 1$ là tiệm cận đứng và nhận đường thẳng (d_2) có phương trình $x - y + 2 = 0$ là tiệm cận xiên.

Xét điểm $M(x, y) \in (C)$ bất kì, ta có:

$$d(M, d_1) + d(M, d_2) = |x - 1| + \frac{|x - y + 2|}{\sqrt{2}}$$

Thay $y = x + 2 + \frac{1}{x - 1}$, ta được:

$$\begin{aligned} d(M, d_1) + d(M, d_2) &= |x - 1| + \frac{\left| x - x - 2 - \frac{1}{x - 1} + 2 \right|}{\sqrt{2}} \\ &= |x - 1| + \frac{1}{\sqrt{2}|x - 1|} \\ &\geq 2 \cdot \sqrt{|x - 1| \cdot \frac{1}{\sqrt{2}|x - 1|}} = \sqrt{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Dấu " $=$ " xảy ra tại $(x - 1)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ hay $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} + 1$. Vậy c) sai.

- Ta biết rằng phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm (x_0, y_0) bất kì trên đồ thị (C) có dạng:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Để tiếp tuyến này đi qua $M(a; 0)$ thì:

$$\begin{aligned} &f'(x_0)(a - x_0) + f(x_0) = 0 \\ \Leftrightarrow &\left(1 - \frac{1}{(x_0 - 1)^2}\right)(a - x_0) + \left(x_0 + 2 + \frac{1}{x_0 - 1}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow &[(x_0 - 1)^2 - 1](a - x_0) + (x_0 + 2)(x_0 - 1)^2 + (x_0 - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow &(x_0^2 - 2x_0)(a - x_0) + (x_0 + 2)(x_0^2 - 2x_0 + 1) + (x_0 - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow &(a + 2)x_0^2 - 2(a + 1)x_0 + 1 = 0 \end{aligned}$$

Số tiếp tuyến kẻ được từ M đến (C) bằng số nghiệm của phương trình:

$$(a + 2)x^2 - 2(a + 1)x + 1 = 0$$

Xét $\Delta' = (a + 1)^2 - (a + 2) = a^2 + a - 1$. Tuy nhiên không phải lúc nào Δ' cũng không âm. Chẳng hạn với $a = 0$, ta được $\Delta = -1 < 0$. Tức từ $M(0; 0)$ không kẻ được tiếp tuyến tới (C) . Vậy d) sai.

Chọn đáp án

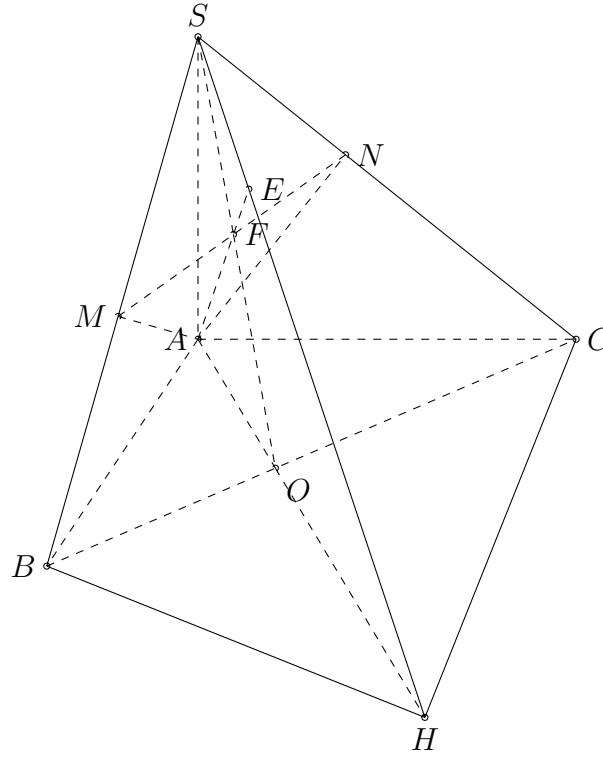
a đúng	b đúng	c sai	d sai
--------	--------	-------	-------

 $\square$

Phần II: Tự luận

Câu 1. (2,0 điểm) Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $AB = 1, AC = 2, \widehat{BAC} = 120^\circ$ và $SA \perp (ABC)$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các cạnh SB, SC và α là góc tạo bởi đường thẳng SA với mặt phẳng (AMN) sao cho $\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải.



Ta có:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos BAC} = \sqrt{1^2 + 2^2 - 2.1.2.\cos 120^\circ} = \sqrt{7}$$

Dựng điểm H trên mặt phẳng (ABC) sao cho $\widehat{HBA} = \widehat{HCA} = 90^\circ$. Gọi O là giao điểm của AH và BC . Khi đó ta có tứ giác $ABHC$ nội tiếp. Do đó $\widehat{BHC} = 180^\circ - \widehat{BAC} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Ta có:

$$\cos ACB = \frac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2CA.CB} = \frac{2^2 + \sqrt{7}^2 - 1^2}{2.2.\sqrt{7}} = \frac{5}{2\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$$

Do $\widehat{ACB}$ và $\widehat{BCH}$ là hai góc nhọn phụ nhau nên $\cos ACB = \sin BCH = \frac{5\sqrt{7}}{14}$.

Áp dụng định lý Sin cho tam giác BCH , ta có:

$$\frac{BH}{\sin BCH} = \frac{BC}{\sin BHC} \Rightarrow BH = BC \cdot \frac{\sin BCH}{\sin BHC} = \sqrt{7} \cdot \frac{\frac{5\sqrt{7}}{14}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

Vậy theo định lý Pythagore, ta được:

$$AH^2 = AB^2 + BH^2 = 1^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{84}{9} \Rightarrow AH = \frac{2\sqrt{21}}{3}$$

Gọi O là giao điểm của AH và BC ; F là giao điểm của SO và MN ; E là giao điểm của AF và SH .

Ta có:

$$\begin{cases} AM \perp SB \\ \begin{cases} BH \perp AB \\ BH \perp SA \end{cases} \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SAB) \Rightarrow BH \perp AM \Rightarrow AM \perp (SBH) \Rightarrow AM \perp SH$$

Hoàn toàn tương tự, ta được $AN \perp SH$ nên $SH \perp (AMN)$.

Do $E \in SH$ nên $SE \perp AMN$. Vậy $SE \perp EA$. Khi đó ta được $(SA, (AMN)) = (SA, EA) = \widehat{SAE} = \alpha$.

Trong tam giác SAH vuông tại A có AE là đường cao, ta có: $AE \cdot SH = AS \cdot AH \Rightarrow AE = \frac{AS \cdot AH}{SH} = \frac{AS \cdot \frac{2\sqrt{21}}{3}}{\sqrt{SA^2 + AH^2}} = \frac{AS \cdot \frac{2\sqrt{21}}{3}}{\sqrt{SA^2 + \frac{28}{3}}}$.

Ta có: $\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2\sqrt{7}}{7}$. Khi đó ta được:

$$\frac{\frac{2\sqrt{21}}{3}}{\sqrt{SA^2 + \frac{28}{3}}} = \frac{AE}{AS} = \cos \alpha = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{2\sqrt{21}}{3}}{\sqrt{SA^2 + \frac{28}{3}}} &= \frac{2\sqrt{7}}{7} \\ \Leftrightarrow \frac{\frac{2\sqrt{21}}{3} \cdot 7}{\sqrt{SA^2 + \frac{28}{3}}} &= 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{SA^2 + \frac{28}{3}} &= \frac{7\sqrt{3}}{3} \\ \Leftrightarrow SA^2 + \frac{28}{3} &= \frac{49}{3} \\ \Leftrightarrow SA^2 &= 7 \Leftrightarrow SA = \sqrt{7} \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin BAC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vậy ta được:

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{21}}{6}$$

Câu 2. (2,0 điểm) Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa ($1 \leq x \leq 18$). Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí: $C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500$. Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi $B(x)$ là số tiền bán được và $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa. Hộ làm nghề dệt này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày bao nhiêu mét vải lụa để được lợi nhuận tối đa? Hãy tính lợi nhuận tối đa đó (đơn vị nghìn đồng).

Lời giải.

Theo đề bài, với $1 \leq x \leq 18$, ta có $C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500$; $B(x) = 220x$ (nghìn đồng). Vậy ta được $L(x) = B(x) - C(x) = 220x - (x^3 - 3x^2 - 20x + 500) = -x^3 + 3x^2 + 240x - 500$ (nghìn đồng).

Xét hàm số $L(x) = -x^3 + 3x^2 + 240x - 500$ trên $[1; 18]$, ta có $L'(x) = -3x^2 + 6x + 240$ với mọi $x \in [1; 18]$.

Xét phương trình:

$$L'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 80 = 0 \Leftrightarrow x = -8 \text{ (loại) hoặc } x = 10 \text{ (nhận)}$$

Bảng biến thiên:

x	1	10	18
$L'(x)$	+	0	-
$L(x)$	-258	1200	-1040

Từ bảng biến thiên, ta thấy giá trị lớn nhất của $L(x)$ là 1200 khi $x = 10$. Vậy hộ làm nghề dệt này cần sản xuất 10 mét vải lụa tơ tằm để thu được lợi nhuận cao nhất là 1200 (nghìn đồng).

Câu 3. (2,0 điểm) Hai bạn An và Bình tranh chức vô địch trong một cuộc thi cờ tướng. Khi chơi một ván cờ, xác suất thắng của An là 0,35 và xác suất thắng của Bình là 0,65. Mỗi ván cờ không có hòa cờ. Người giành chiến thắng là người đầu tiên thắng được 5 ván cờ. Tại thời điểm bạn An đã thắng 4 ván và bạn Bình mới thắng 3 ván thì xác suất để bạn An giành chiến thắng là bao nhiêu?

Lời giải.

Ta có hai khả năng xảy ra trường hợp An giành chiến thắng.

- Khả năng 1: An thắng ngay ván thứ tư. Xác suất để điều này xảy ra là 0,35.
- Khả năng 2: Bình thắng ván tiếp theo và An thắng ván sau đó. Xác suất để điều này xảy ra là $0,65 \cdot 0,35 = 0,2275$.

Vậy xác suất để An giành chiến thắng là $0,35 + 0,2275 = 0,5775$.

Câu 4. (1,0 điểm) Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn c là số nhỏ nhất và $\begin{cases} a^2 + c^2 > 0 \\ b^2 + c^2 > 0 \end{cases}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a^2 + c^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \sqrt{a + b + c}$.

Lời giải.

Với $a \geq c; b \geq c$, ta có:

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 &\leq a^2 + ac \leq a^2 + ac + \frac{1}{4}c^2 = \left(a + \frac{c}{2}\right)^2 \\ b^2 + c^2 &\leq b^2 + bc \leq b^2 + bc + \frac{1}{4}c^2 = \left(b + \frac{c}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Vậy ta được:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{a^2 + c^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \sqrt{a + b + c} \\
 &\geq \frac{1}{\left(a + \frac{c}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(b + \frac{c}{2}\right)^2} + \sqrt{a + b + c} \\
 &\geq \frac{4}{\left(a + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{c}{2}\right)^2} + \sqrt{a + b + c} \\
 &\geq \frac{8}{(a + b + c)^2} + \sqrt{a + b + c} \\
 &= \frac{8}{(a + b + c)^2} + \frac{1}{4}\sqrt{a + b + c} + \frac{1}{4}\sqrt{a + b + c} + \frac{1}{4}\sqrt{a + b + c} + \frac{1}{4}\sqrt{a + b + c} \\
 &\geq 5\sqrt[5]{\frac{8}{4^4}} = \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

Vậy $P \geq \frac{5}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $c = 0$ và $a = b = 2$.

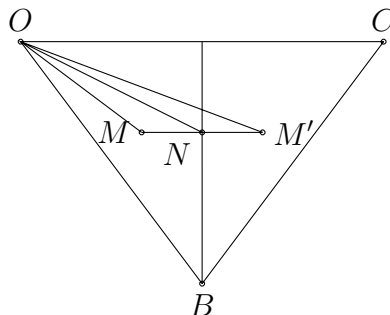
Câu 5. (1,0 điểm) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $B(3; -4; 0)$ và $C(6; 0; 0)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc miền trong tam giác OBC sao cho tổng các khoảng cách từ điểm M đến các đỉnh của tam giác OBC đạt giá trị nhỏ nhất (với O là gốc tọa độ).

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}
 |\vec{OB}| &= \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2} = 5 \\
 |\vec{OC}| &= \sqrt{6^2 + 0^2 + 0^2} = 6 \\
 |\vec{BC}| &= \sqrt{(6 - 3)^2 + (0 - (-4))^2 + 0^2} = 5
 \end{aligned}$$

Vậy $OC > OB = BC$. Do $(OBC) \equiv (Oxy)$ nên ta xét điểm M thuộc miền trong tam giác OBC thì cũng nằm trong mặt phẳng Oxy . Lúc này, ta xét tọa độ tương ứng của các đỉnh O, B, C, M trong mặt phẳng Oxy tương ứng với bộ số gồm hoành độ và tung độ của chính điểm đó trong không gian $Oxyz$.



Do $BO = BC$ nên B nằm trên đường trung trực của OC . Đường thẳng này đi qua $B(3, -4)$ và nhận $\vec{OC}(6, 0)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình $6(x - 3) + 0(y + 4) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$. Với mỗi điểm M nằm trong tam giác OBC cân tại B . Gọi M' là điểm đối xứng với M qua đường thẳng $x = 3$ và N là giao điểm của MM' với đường thẳng $x = 3$. Do đó N là trung điểm MM' .

Ta biết rằng với hai vecto $\vec{a}, \vec{b}$ bất kì trong mặt phẳng, ta luôn có bất đẳng thức $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} |\vec{2ON}| &= |\vec{OM} + \vec{OM'}| \leq |\vec{OM}| + |\vec{OM'}| \Rightarrow 2ON \leq OM + OM' \\ |\vec{2CN}| &= |\vec{CM} + \vec{CM'}| \leq |\vec{CM}| + |\vec{CM'}| \Rightarrow 2CN \leq CM + CM' \\ |\vec{2BN}| &= |\vec{BM} + \vec{BM'}| \leq |\vec{BM}| + |\vec{BM'}| \Rightarrow 2BN \leq BM + BM' \end{aligned}$$

Từ các bất đẳng thức vừa thu được và tính chất đối xứng trục, ta được:

$$2(NO + NC + NB) \leq MO + MC + MB + M'O + M'C + M'B = 2(MO + MC + MB)$$

Vậy ta được $MO + MC + MB \geq NO + NC + NB$ với mọi M bất kì và N là hình chiếu của M trên đường thẳng $x = 3$.

Do đó, để tìm điểm M thỏa mãn bài toán, ta chỉ cần xét điểm M trên đường thẳng $x = 3$ hay $M(3; y_M)$.

Ta có:

$$\begin{aligned} MO &= \sqrt{3^2 + y_M^2} = \sqrt{9 + y_M^2} \\ MC &= \sqrt{(6-3)^2 + (0-y_M)^2} = \sqrt{9 + y_M^2} \\ MB &= \sqrt{(3-3)^2 + (-4-y_M)^2} = \sqrt{(y_M+4)^2} = |y_M+4| = y_M+4 \end{aligned}$$

do M thuộc miền trong tam giác OBC nên $-4 \leq y_M \leq 0$.

Vậy ta được:

$$MO + MC + MB = 2\sqrt{y_M^2 + 9} + y_M + 4 = f(y_M)$$

Xét hàm số $f(x) = 2\sqrt{x^2 + 9} + x + 4$ trên $[-4; 0]$, ta có: $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 9}} + 1, \forall x \in [-4; 0]$. Xét phương trình:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 9}} + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 9} &= -2x \\ \Leftrightarrow x^2 + 9 &= 4x^2 \\ \Leftrightarrow x^2 = 3 &\Leftrightarrow x = \sqrt{3} \text{ (loại) hoặc } x = -\sqrt{3} \text{ (nhận)} \end{aligned}$$

Bảng biến thiên:

x	-4	$-\sqrt{3}$	0
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	10	$3\sqrt{3} + 4$	10

Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là $3\sqrt{3} + 4$ khi và chỉ khi $x = -\sqrt{3}$. Vậy điểm M thỏa yêu cầu bài toán có tọa độ là $(3; -\sqrt{3})$ trong mặt phẳng Oxy hay $(3; -\sqrt{3}; 0)$ trong không gian $Oxyz$.