MỤC LỤC

CHƯƠNG 3 QUAN HỆ VUÔNG GÓC 1

1 VEC - TƠ TRONG KHÔNG GIAN 1

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT 1

1 Các định nghĩa 1

2 Các quy tắc tính toán với véc-tơ 1

3 Một số hệ thức véc-tơ trọng tâm, cần nhớ 2

4 Điều kiện đồng phẳng của ba véc-tơ 2

5 Phân tích một véc-tơ theo ba véc-tơ không đồng phẳng 2

6 Tích vô hướng của hai véc-tơ 2

B Các dạng toán 3

Dạng 1. Xác định véc-tơ và các khái niệm có liên quan 3

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức véc-tơ 3

Dạng 3. Tìm điểm thỏa mãn đẳng thức véc-tơ 4

Dạng 4. Tích vô hướng của hai véc-tơ 6

Dạng 5. Chứng minh ba véc-tơ đồng phẳng 6

Dạng 6. Phân tích một véc-tơ theo 3 véc-tơ không đồng phẳng cho trước 7

Dạng 7. Ứng dụng véc-tơ chứng minh bài toán hình học 7

C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM 9

1 ĐÁP ÁN 17

2 HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC 19

A TÓM TẮT LÝ LÝ THUYẾT 19

1 Tích vô hướng của hai véc-tơ trong không gian 19

2 Góc giữa hai đường thẳng 19

B CÁC DẠNG TOÁN 20

Dạng 1. Xác định góc giữa hai véc-tơ 20
Dạng 2. Xác định góc giữa hai đường thẳng trong không gian 21
Dạng 3. Sử dụng tính chất vuông góc trong mặt phẳng. 22
Dạng 4. Hai đường thẳng song song cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba 23
C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM 24
1 ĐÁP ÁN 42
3 ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG 43
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT 43
1 Định nghĩa 43
2 Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng 43
3 Tính chất 43
4 Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng 44
5 Phép chiếu vuông góc và định lý ba đường vuông góc 45
B CÁC DẠNG TOÁN 45
Dạng 1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng 45
Dạng 2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng 47
Dạng 3. Xác định thiết diện của một khối đa diện cắt bởi mặt phẳng đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng cho trước 49
C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM 50
1 ĐÁP ÁN 83
4 HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC 85
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT 85
1 Định nghĩa góc giữa hai mặt phẳng 85
2 Cách xác định góc của hai mặt phẳng cắt nhau 85
3 Diện tích hình chiếu của một đa giác 85
4 Hai mặt phẳng vuông góc 85
5 Hình lăng trụ đứng, hình hộp chữ nhật, hình lập phương 86

6 Hình chóp đều và hình chóp cụt đều 86
B CÁC DẠNG TOÁN 86
Dạng 1. Tìm góc giữa hai mặt phẳng 86
Dạng 2. Tính diện tích hình chiếu của đa giác 88
Dạng 3. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc 88
Dạng 4. Thiết diện chứa một đường thẳng và vuông góc với một mặt phẳng 90
C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM 91
5 KHOẢNG CÁCH 125
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT 125
1 Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng 125
2 Khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng 125
3 Khoảng cách từ một đường thẳng tới một mặt phẳng song song 125
4 Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song 125
5 Đường thẳng vuông góc chung và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau 126
B CÁC DẠNG TOÁN 126
Dạng 1. Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng 126
Dạng 2. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng 127
Dạng 3. Khoảng cách giữa đường và mặt song song - Khoảng cách giữa hai mặt song song 128
Dạng 4. Đoạn vuông góc chung - Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau 130
C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM 132
1 ĐÁP ÁN 186
D ÔN TẬP CHƯƠNG III 187
1 ĐÁP ÁN 191

CHƯƠNG 3 QUAN HỆ VUÔNG GÓC

BÀI 1. VEC - TƠ TRONG KHÔNG GIAN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 CÁC ĐỊNH NGHĨA

① Véc-tơ là một đoạn thẳng có hướng (có phân biệt điểm đầu và điểm cuối).

② Véc-tơ - không là véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau. Ký hiệu $\vec{0}$.

③ Ký hiệu véc-tơ: $\overrightarrow{AB}$ (điểm đầu là A, điểm cuối là B) hay $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \ldots$

④ Độ dài của véc-tơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của véc-tơ đó.

Độ dài của $\overrightarrow{AB}$ ký hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$, độ dài của $\vec{a}$ ký hiệu là $|\vec{a}|$.

⑤ Giá của véc-tơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của véc-tơ đó.

⑥ Hai véc-tơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

⑦ Hai véc-tơ cùng phương thì cùng hướng hoặc ngược hướng.

⑧ Hai véc-tơ bằng nhau là hai véc-tơ cùng hướng và có cùng độ dài.

Tức là $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a},\ \vec{b} \text{ cùng hướng} \\ |\vec{a}| = |\vec{b}|. \end{cases}$

⑨ Hai véc-tơ đối nhau là hai véc-tơ ngược hướng nhưng vẫn có cùng độ dài.

⑩ Các phép toán cộng, trừ, nhân véc-tơ với một số được định nghĩa tương tự trong mặt phẳng.

2 CÁC QUY TẮC TÍNH TOÁN VỚI VÉC-TƠ

① Quy tắc ba điểm (với phép cộng): $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

② Quy tắc ba điểm (với phép trừ): $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$.

③ Quy tắc ba điểm (mở rộng): $\overrightarrow{AX_1} + \overrightarrow{X_1X_2} + \overrightarrow{X_2X_3} + \cdots + \overrightarrow{X_{n-1}X_n} + \overrightarrow{X_nB} = \overrightarrow{AB}$.

④ Quy tắc hình bình hành:

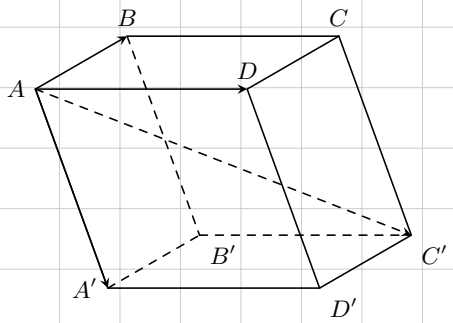
(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
(b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AE}$

trong đó $ABCD$ là hình bình hành và E là trung điểm của BD.

⑤ Quy tắc hình hộp:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$$

trong đó $ABCD.A'B'C'D'$ là một hình hộp.



3 MỘT SỐ HỆ THỨC VÉC-TƠ TRỌNG TÂM, CẦN NHỚ

① I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$ (với O là một điểm bất kỳ).

② G là trọng tâm của tam giác $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ (với O là một điểm bất kỳ, M là trung điểm cạnh BC).

③ G là trọng tâm của tứ diện $ABCD \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OG} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$ (với điểm O bất kỳ, A' là trọng tâm của $\triangle BCD$) $\Leftrightarrow \overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\vec{0}$ (với M,N là trung điểm 1 cặp cạnh đối diện).

④ $\vec{a}$ và $\vec{b}\neq\vec{0}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}: \vec{a}=k\cdot\vec{b}$.

⑤ $\vec{a}$ và $\vec{b}\neq\vec{0}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}^+: \vec{a}=k\cdot\vec{b}$.

⑥ $\vec{a}$ và $\vec{b}\neq\vec{0}$ ngược hướng $\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}^-: \vec{a}=k\cdot\vec{b}$.

⑦ Ba điểm A,B,C thẳng hàng $\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}: \overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{AC}$.

4 ĐIỀU KIỆN ĐỒNG PHẲNG CỦA BA VÉC-TƠ

Định nghĩa 1. Trong không gian, ba véc-tơ được gọi là đồng phẳng nếu giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng nào đó.

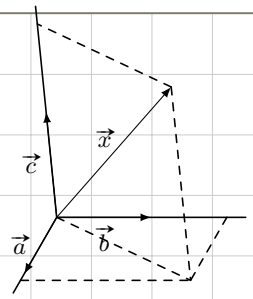
Hệ quả 1. Nếu có một mặt phẳng chứa véc-tơ này đồng thời song song với giá của hai véc-tơ kia thì ba véc-tơ đó đồng phẳng.

Định lí 1. *(**Điều kiện để ba véc-tơ đồng phẳng**) Trong không gian cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương và véc-tơ $\vec{c}$. Khi đó $\vec{a},\vec{b}$ và $\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi tồn tại cặp số $(m;n)$ sao cho $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ (cặp số $(m;n)$ nêu trên là duy nhất).*

⚠ *Bốn điểm phân biệt A,B,C,D đồng phẳng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AC}+n\overrightarrow{AD}$.*

5 PHÂN TÍCH MỘT VÉC-TƠ THEO BA VÉC-TƠ KHÔNG ĐỒNG PHẲNG

Định lí 2.
Cho ba véc-tơ $\vec{a},\vec{b}$ và $\vec{c}$ không đồng phẳng. Với mọi véc-tơ $\vec{x}$, ta đều tìm được duy nhất một bộ số $(m;n;p)$ sao cho $\vec{x}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$.



6 TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉC-TƠ

Định nghĩa 2.

① Nếu $\vec{a}\neq\vec{0}$ và $\vec{b}\neq\vec{0}$ thì $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})}$

② Nếu $\vec{a}=\vec{0}$ hoặc $\vec{b}=\vec{0}$ thì $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

③ Bình phương vô hướng của một véc-tơ: $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$.

⚠ *Một số ứng dụng của tích vô hướng*

① *Nếu $\vec{a}\neq\vec{0}$ và $\vec{b}\neq\vec{0}$ ta có $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.*

② *Công thức tính cô-sin của góc hợp bởi hai véc-tơ khác* $\vec{0}$: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

③ *Công thức tính độ dài của một đoạn thẳng:* $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$.

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định véc-tơ và các khái niệm có liên quan

Phương pháp giải:

— *Dựa vào định nghĩa của các khái niệm liên quan đến véc-tơ (xem mục 1)*

— *Dựa vào tính chất hình học của các hình hình học cụ thể.*

Ví dụ 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hãy xác định các véc-tơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và

a) cùng phương với $\overrightarrow{AB}$;

b) cùng phương $\overrightarrow{AA'}$.

✍**Lời giải.**

a) Các véc-tơ có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của hình hộp cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ là

$$\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{CD}; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{B'A'}; \overrightarrow{C'D'}; \overrightarrow{D'C'}$$

b) Các véc-tơ có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của hình hộp cùng phương với $\overrightarrow{AA'}$ là

$$\overrightarrow{AA'}; \overrightarrow{A'A}; \overrightarrow{BB'}; \overrightarrow{B'B}; \overrightarrow{CC'}; \overrightarrow{C'C}; \overrightarrow{DD'}; \overrightarrow{D'D}$$

.

□

Ví dụ 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O, O' lần lượt là các giao điểm của hai đường chéo của hai đáy. Hãy xác định các véc-tơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ sao cho

a) bằng $\overrightarrow{OO'}$.

b) bằng $\overrightarrow{AO}$.

✍**Lời giải.**

a) Ta có $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$.

b) Ta có Các véc-tơ thỏa mãn là: $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{A'O'} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{O'C'}$.

□

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức véc-tơ

Phương pháp giải:
Để chứng minh đẳng thức véc-tơ ta thường sử dụng:

— *Qui tắc cộng, qui tắc trừ ba điểm, qui tắc hình bình hành, quy tắc hình hộp.*

— *Tính chất trung điểm, trọng tâm tam giác, tích một số với một véc-tơ... Để biến đổi vế này thành vế kia.*

Ví dụ 1. Cho bốn điểm A, B, C, D bất kì trong không gian. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$

✍**Lời giải.**

$$Tac: \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD}$$
$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \vec{0} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$

□

Ví dụ 2. Cho tứ diện A, B, C, D. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD.

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$

b) Cho G là trung điểm của I, J. Chứng minh rằng: $4\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$, với mọi điểm M trong không gian.

✍**Lời giải.**

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$

Ta có $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ}$ và $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ}$

Suy ra $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ} = \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{CJ}\right)$
$= \vec{0} + \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right) + \vec{0} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

b) Cho G là trung điểm của I, J. Chứng minh rằng: $4\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$, với mọi điểm M trong không gian.

Tacó $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD} = 4\overrightarrow{MG}+2\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{GJ} = 4\overrightarrow{MG}+2\vec{0} = 4\overrightarrow{MG}$

(Vì I là trung điểm của AB, J là trung điểm của CD, G là trung điểm của IJ)

□

Dạng 3. Tìm điểm thỏa mãn đẳng thức véc-tơ

Phương pháp giải:
Dựa vào các yếu tố cố định như điểm và véc-tơ.

— ***Các bước thực hành giải toán:***

1. *Biến đổi đẳng thức véc-tơ cho trước về dạng: $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$.*
   Trong đó: Điểm O và véc-tơ $\vec{v}$ đã biết.
2. *Nếu muốn dựng điểm M, ta lấy O làm gốc dựng một véc-tơ bằng véc-tơ $\vec{v}$, khi đó điểm ngọn của véc-tơ này chính là M.*

— ***Ứng dụng tính chất tâm tỉ cự của hệ điểm***

Với các điểm $A_1, A_2, \cdots, A_n$ và các số $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ thỏa mãn điều kiện $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$.

Tồn tại duy nhất điểm M sao cho: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \vec{0}$.

Điểm M như vậy gọi là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ với các hệ số tương ứng là $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$.
Trong trường hợp $\alpha_i = \alpha_j$ $\forall i, j$ điểm M gọi là trọng tâm của hệ điểm $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$.

— ***Một số kết quả thường sử dụng***
Với A, B, C là các điểm cố định, $\vec{v}$ là véc-tơ đã biết.

① $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0} \Rightarrow M$ *là trung điểm* AB.

② *Nếu* A,B,C *không thẳng hàng thì* $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0} \Rightarrow M$ *là trọng tâm tam giác* ABC.

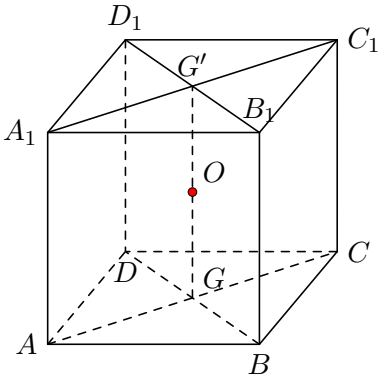
③ *Tập hợp điểm* M *thỏa mãn* $\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{MB}\right|$ *là mặt phẳng trung trực của* AB.

④ *Tập hợp điểm* M *thỏa mãn* $\left|\overrightarrow{MC}\right|=k\left|\overrightarrow{AB}\right|$ *là mặt cầu tâm* C *bán kính bằng* $k.AB$.

Ví dụ 1. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Xác định vị trí của điểm O sao cho:
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OD_1}=\vec{0}$.

✍Lời giải.

Gọi G,G' là giao điểm các đường chéo của $ABCD$ và $A_1B_1C_1D_1$. Khi đó ta có:
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OD_1}$
$=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{G'A_1}+$
$\overrightarrow{G'B_1}+\overrightarrow{G'C_1}+\overrightarrow{G'D_1}+4(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{G'O})$
$=4(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{G'O})=\vec{0}$
Suy ra O là trung điểm GG'.



□

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Xác định các điểm I,H,G thỏa mãn

① $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.

② $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$.

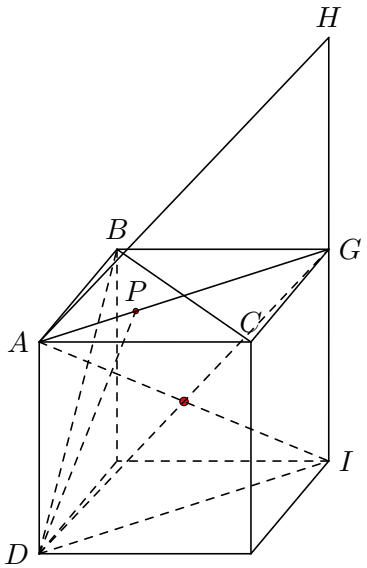
③ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

✍Lời giải.

① Ta có: $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.
Mà $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AD}$ với G là đỉnh còn lại của hình bình hành $ABGC$ vì $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
Vậy $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AD}$ với I là đỉnh còn lại của hình bình hành $AGID$.
Do đó AI là đường chéo của hình hộp có ba cạnh là AB,AC,AD.

② Ta có: $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$.
Mà $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DG}$.
Vậy $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{DG}$ nên F là đỉnh còn lại của hình bình hành $ADGH$.

③ Ta có: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=4\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{PD}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{PD}=4\overrightarrow{PG}$ với P là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow G$ là điểm nằm trên đoạn thẳng DP sao cho $PD=4PG$.
Điểm G thỏa mãn đẳng thức trên gọi là trọng tâm tứ diện.



□

Ví dụ 3. Trong không gian cho ba điểm A,B,C cố định không thẳng hàng, tìm tập hợp các điểm M sao cho: $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$.

✍Lời giải.

Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$, ta biến đổi đẳng thức về dạng:
$\left|3\overrightarrow{MG}\right| = \left|3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MG}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MG}\right| = \left|\overrightarrow{GA}\right|$
$\Rightarrow M$ thuộc mặt cầu tâm G, bán kính GA cố định. □

Dạng 4. Tích vô hướng của hai véc-tơ

Phương pháp giải:
dựa vào định nghĩa và tính chất của tích vô hướng (xem mục 6), các quy tắc tính toán véc-tơ (xem mục 2) và các hệ thức véc-tơ trọng tâm (xem mục 3) để giải toán.

Ví dụ 1. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Chứng minh rằng: $\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{4}(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2)$

Lời giải.
Ta có: $VP = \frac{1}{4}(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2) = \frac{1}{4}((\vec{a}+\vec{b})^2 - (\vec{a}-\vec{b})^2). = \frac{1}{4}(\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}.\vec{b} - (\vec{a}^2+\vec{b}^2-2\vec{a}.\vec{b})) =$
$\vec{a}.\vec{b} = VT$ □

Ví dụ 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{B'D'}$.

Lời giải.
Ta có: $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{B'D'} = 0$ (vì $AC \perp B'D' \Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{B'D'} = 0$) □

Ví dụ 3. Cho $|\vec{a}| = 2, \left|\vec{b}\right| = 3, (\vec{a},\vec{b}) = 120°$. Tính $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ và $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$

Lời giải.
Ta có: $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 = \left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2 = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + 2\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + 2|\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right). \Rightarrow \left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 =$
$2^2 + 3^2 + 2.2.3.\cos 120° = 7 \Rightarrow \left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \sqrt{7}.$
Ta có: $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 = \left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2 = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2|\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right). \Rightarrow \left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 =$
$2^2 + 3^2 - 2.2.3.\cos 120° = 19 \Rightarrow \left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \sqrt{19}$ □

Ví dụ 4. Cho $|\vec{a}| = 3, \left|\vec{b}\right| = 4, \vec{a}.\vec{b} = -6$. Tính góc hợp bởi hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lời giải.
Ta có $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|} = \dfrac{-6}{3.4} = -\dfrac{1}{2}.$
Vậy góc hợp bởi hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $120°$ □

Dạng 5. Chứng minh ba véc-tơ đồng phẳng

Phương pháp giải:
Để chứng minh ba véc-tơ đồng phẳng, ta có thể chứng minh bằng một trong hai cách:

- *Chứng minh các giá của ba véc-tơ cùng song song với một mặt phẳng.*
- *Dựa vào điều kiện để ba véc-tơ đồng phẳng : Nếu có $m,n \in \mathbb{R}$: $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ thì $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng.*

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng 3 véc-tơ $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Lời giải.
%

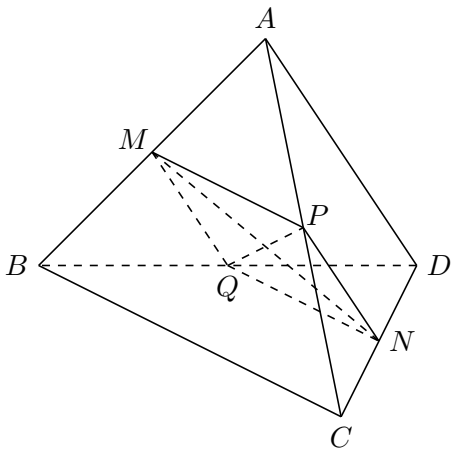
Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AC, BD.

Ta có $\begin{cases} PN \parallel MQ \\ PN = MQ = \dfrac{1}{2}AD \end{cases} \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Mặt khác $(MNPQ)$ chứa đường thẳng MN và song song với các đường thẳng AD và BC.

$\Rightarrow$ ba đường thẳng MN, AD, BC cùng song song với một mặt phẳng.

Do đó 3 véc-tơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.



□

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC. Lấy điểm S nằm ngoài mặt phẳng (ABC). Trên đoạn SA lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{MS} = -2\overrightarrow{MA}$ và trên đoạn BC lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{NB} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{NC}$. Chứng minh rằng ba véc-tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{SC}$ đồng phẳng.

✍Lời giải.

Ta có : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BN}$ (1)

Mặt khác : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CN} = -2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{NB}$ (2)

Cộng vế theo vế, ta được : $3\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{AB}$ hay $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SC} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Vậy :$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{SC}$ đồng phẳng. □

Dạng 6. Phân tích một véc-tơ theo 3 véc-tơ không đồng phẳng cho trước

Phương pháp giải:

Để phân tích một véc-tơ $\vec{x}$ theo ba véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng, ta tìm các số m, n, p sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$.

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm của CD, I là trung điểm của BM. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}$ và $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. hãy phân tích véc-tơ $\overrightarrow{AI}$ theo 3 véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

✍Lời giải.

Ta có $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}}{2} = \vec{a} + \dfrac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$.

Vậy $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\vec{a} + + \dfrac{1}{4}\vec{b} + \dfrac{1}{4}\vec{c}$. □

Dạng 7. Ứng dụng véc-tơ chứng minh bài toán hình học

Phương pháp giải:

- *Chọn 3 véc-tơ không đồng phẳng làm cơ sở.*
- *Biểu diễn các véc-tơ cần tính toán về hệ 3 véc-tơ cơ sở.*
- *Dựa vào hệ thức biểu diễn ở trên ta tìm mối quan hệ giữa các véc-tơ cần xét.*

Ví dụ 1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G là trọng tâm tam giác $A'BD$. Chứng minh rằng A, G, C' thẳng hàng.

✍Lời giải.

Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Khi đó $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

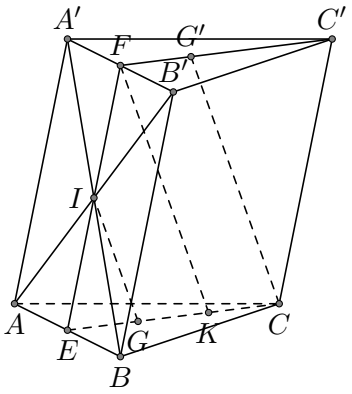
$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'G} = \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{A'D} + \overrightarrow{A'B}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

Suy ra $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC'}$ hay A,G,C' thẳng hàng. □

Ví dụ 2. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi G,G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và $A'B'C'$, I là giao điểm của hai đường thẳng AB' và $A'B$. Chứng minh rằng các đường thẳng GI và CG' song song với nhau.

✍Lời giải.

1. Phương pháp véc-tơ.



— Lấy trung điểm E,F (như hình vẽ).

— Ta có $\overrightarrow{CG'}=\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'G'}=\overrightarrow{CC'}+\frac{2}{3}\overrightarrow{C'F}$
$=\overrightarrow{CC'}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{A'F}-\overrightarrow{A'C'}\right)=-\overrightarrow{A'A}+\frac{1}{3}\overrightarrow{A'B'}-\frac{2}{3}\overrightarrow{A'C'}$, (1).

— Và $\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{EI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{A'A}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}\right)-\frac{1}{2}\overrightarrow{A'A}$
$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'}-\overrightarrow{A'C'}\right)-\frac{1}{2}\overrightarrow{A'A}=\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{A'A}+\frac{1}{3}\overrightarrow{A'B'}-\frac{2}{3}\overrightarrow{A'C'}\right)$
$=\frac{1}{2}\overrightarrow{CG'}$, (2)

— Suy ra $\overrightarrow{GI}$ và $\overrightarrow{CG'}$ cùng phương $\Rightarrow GI\parallel CG'$.

2. Phương pháp cổ điển.

— Lấy các trung điểm E,F,K.

— Chứng minh $EG'CK$ là hình bình hành $\Rightarrow CG'\parallel FK$, (1).

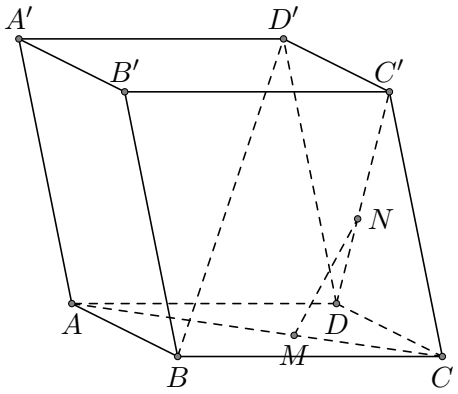
— Chứng minh GI là đường trung bình của $\triangle EFK$: suy ra $GI\parallel FK$, (2).

— Kết hợp (1) và (2) suy ra $GI\parallel CG'$.

□

Ví dụ 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$; các điểm M,N lần lượt thuộc các đường thẳng CA và DC' sao cho $\overrightarrow{MC}=m.\overrightarrow{MA},\overrightarrow{ND}=m.\overrightarrow{NC'}$. Xác định m để các đường thẳng MN và BD' song song với nhau. Khi ấy, tính MN biết $\widehat{ABC}=\widehat{ABB'}=\widehat{CBB'}=60^\circ$ và $BA=a,BB'=b,BC=c$.

✍Lời giải.



Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{BA},\vec{b}=\overrightarrow{BB'},\vec{c}=\overrightarrow{BC}$.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{MC}=m\overrightarrow{MA}\\ \overrightarrow{ND}=m\overrightarrow{NC'}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BM}=m\left(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BM}\right)\\ \overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BN}=m\left(\overrightarrow{BC'}-\overrightarrow{BN}\right)\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{BM}=-\frac{m}{1-m}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{1-m}\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{BN}=\frac{1}{1-m}\overrightarrow{BD}-\frac{m}{1-m}\overrightarrow{BC'}=\frac{1}{1-m}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)-\frac{m}{1-m}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}\right)\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BM} = -\dfrac{m}{1-m}\vec{a} + \dfrac{1}{1-m}\vec{c} \\ \overrightarrow{AN} = \dfrac{1}{1-m}\vec{a} - \dfrac{m}{1-m}\vec{b} + \vec{c} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = \frac{1+m}{1-m}\vec{a} - \frac{m}{1-m}\vec{b} - \frac{m}{1-m}\vec{c}$$

Ngoài ra $\overrightarrow{BD'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ nên để $MN \parallel BD'$ thì cần có $\overrightarrow{MN} = k.\overrightarrow{BD'} \Leftrightarrow \dfrac{1+m}{1-m} = -\dfrac{m}{1-m}$.

Giải hệ phương trình trên ta tìm được $m = -0,5$.

Với $m = -\dfrac{1}{2}$ ta có $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) \Rightarrow \overrightarrow{MN}^2 = \dfrac{1}{9}\left(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a}\,\vec{b} + 2\vec{b}\,\vec{c} + 2\vec{c}\,\vec{a}\right)$.

Do $\widehat{ABC} = \widehat{ABB'} = \widehat{CBB'} = 60^\circ$ nên $2\vec{a}\,\vec{b} + 2\vec{b}\,\vec{c} + 2\vec{c}\,\vec{a} = ab + bc + ca$.

Vậy $MN = \dfrac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}$. □

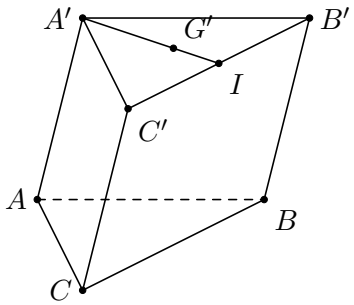
C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AA'}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Véc-tơ $\overrightarrow{AG'}$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}\left(\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}\right)$. **B.** $\dfrac{1}{3}\left(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$. **C.** $\dfrac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c}\right)$. **D.** $\dfrac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của $B'C'$.



Vì G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C' \Rightarrow \overrightarrow{A'G'} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{A'I}$.

Ta có $\overrightarrow{AG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'G'} = \overrightarrow{AA'} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{A'I}$

$= \overrightarrow{AA'} + \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'C'}\right)$

$= \overrightarrow{AA'} + \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

$= \dfrac{1}{3}\left(3\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{1}{3}\left(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$.

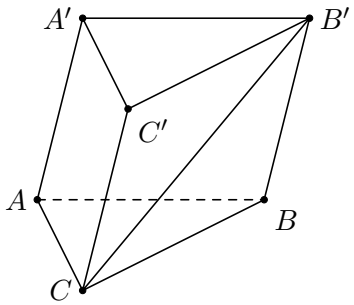
Chọn đáp án B □

Câu 2. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AA'}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$. Hãy biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{B'C}$ theo các véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

A. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$. **B.** $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.
C. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Lời giải.

Vì $BB'C'C$ là hình bình hành nên



$$\begin{aligned} \overrightarrow{B'C} &= \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'B} \\ &= \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AA'} \\ &= -\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \\ &= -\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\ &= -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 3. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của cạnh BB'. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \dfrac{1}{2}\vec{b}$. **B.** $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \dfrac{1}{2}\vec{a}$. **C.** $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \dfrac{1}{2}\vec{b}$.

Lời giải.

Vì M là trung điểm của $BB' \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BB'}$.

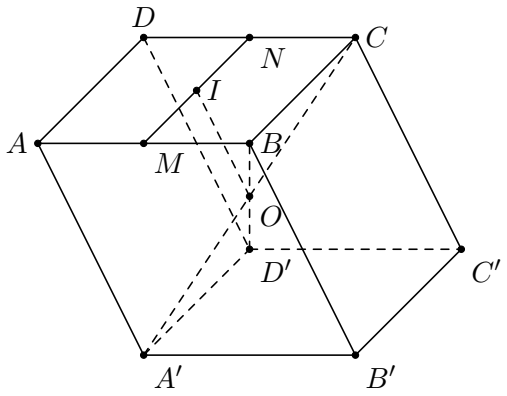
Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{BA} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = -\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = -\vec{a} + \vec{b} + \dfrac{1}{2}\vec{c}$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O. Gọi I là tâm của hình hình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CA'} = \vec{v}$, $\overrightarrow{BD'} = \vec{x}$, $\overrightarrow{DB'} = \vec{y}$. Khi đó

A. $2\overrightarrow{OI} = -\dfrac{1}{4}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$.
B. $2\overrightarrow{OI} = -\dfrac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$.
C. $2\overrightarrow{OI} = \dfrac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$.
D. $2\overrightarrow{OI} = \dfrac{1}{4}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$.

✍Lời giải.
Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.
Vì I là trung điểm của MN nên $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=2\overrightarrow{OI}$.
Kết hợp với $\begin{cases}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}\\ \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{ON}\end{cases}$
ta suy ra $2\overrightarrow{OI} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$
$= \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC'}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA'}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD'}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DB'}\right)$
$= -\dfrac{1}{4}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$.

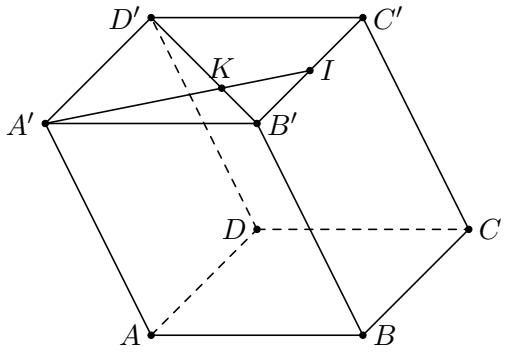


Chọn đáp án A □

Câu 5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$. Gọi I là trung điểm của $B'C'$, K là giao điểm của $A'I$ và $B'D'$. Mệnh đều nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{DK} = \dfrac{1}{3}\left(4\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}\right)$.
B. $\overrightarrow{DK} = \dfrac{1}{3}\left(4\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}\right)$.
C. $\overrightarrow{DK} = 4\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$.
D. $\overrightarrow{DK} = 4\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$.

✍Lời giải.
Vì I là trung điểm của $B'C' \Rightarrow \overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'C'}=2\overrightarrow{A'I}$.
Và K là giao điểm của $A'I, B'D'$ nên theo định lí Ta-lét ta có $\overrightarrow{A'K}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{A'I}$.
Ta có $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'K}=\overrightarrow{AA'}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{A'I}$
$= \overrightarrow{AA'}+\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'C'}\right) = \dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\vec{c}$.
Khi đó $\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AK}$
$= \left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)+\overrightarrow{AK}$
$= \vec{a}-\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\vec{c} = \dfrac{4}{3}\vec{a}-\dfrac{2}{3}\vec{b}+\vec{c}$.



Chọn đáp án A □

Câu 6. Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

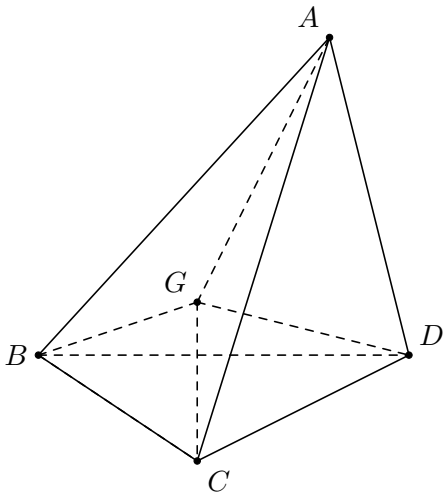
A. $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.
B. $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.
C. $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$.
D. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

✍Lời giải.
Vì G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Do đó

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4} \cdot 4\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DG}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right).$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{AO} + \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$$
$$= \overrightarrow{AO} + \frac{1}{4}\left(4\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$$
$$= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right).$$

Vậy $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$.

Suy ra mệnh đề $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$ sai.



Chọn đáp án (A) □

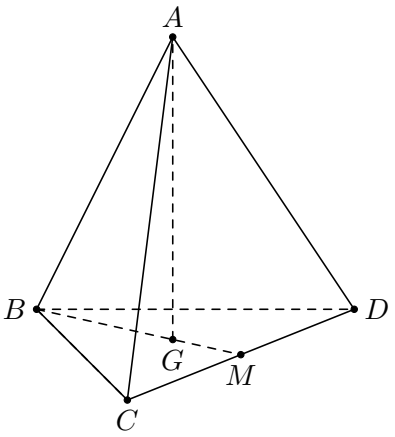
Câu 7. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$.
C. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$.
D. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$.

✍Lời giải.

Gọi M là trung điểm của CD suy ra $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$.

Ta có $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$
$$= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}\right)$$
$$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}\right)$$
$$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right).$$



Chọn đáp án (B) □

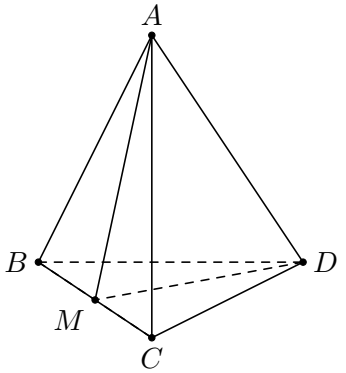
Câu 8. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Đẳng thức nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}\right)$.
B. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\left(-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$.
C. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}\right)$.
D. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}\right)$.

✍Lời giải.

Vì M là trung điểm của BC suy ra $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Ta có $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
$$= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$$
$$= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}\right).$$

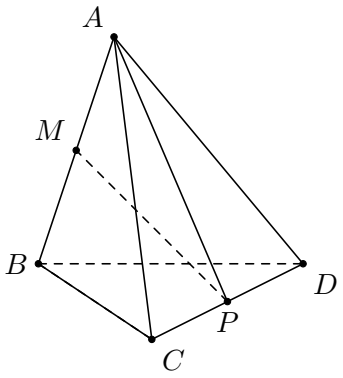


Chọn đáp án A ☐

Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}+\vec{b}\right)$.
B. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{d}+\vec{b}-\vec{c}\right)$.
C. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{b}-\vec{d}\right)$.
D. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}\right)$.

Lời giải.
Vì M, P lần lượt là trung điểm của AB, CD
nên $\begin{cases}2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AP}.\end{cases}$
Ta có $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AP}$
$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$
$=-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}$.

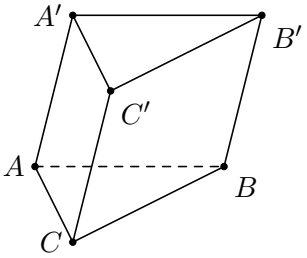


Chọn đáp án D ☐

Câu 10. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$.
B. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.
C. $\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.
D. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$.

Lời giải.
Ta có $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\vec{d}=\vec{c}-\vec{b}\Leftrightarrow\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.

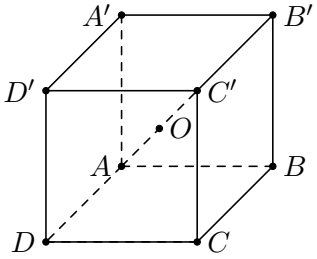


Chọn đáp án C ☐

Câu 11. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình lập phương.
Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.
B. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.
C. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.
D. $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

Lời giải.
Theo quy tắc hình hộp, ta có $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.
Mà O là trung điểm của AC'
nên $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.



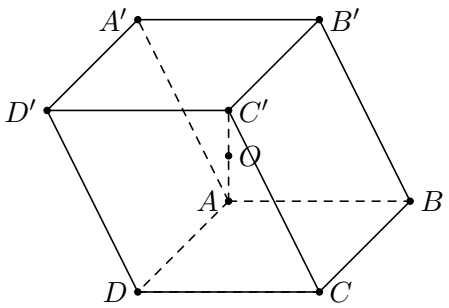
Chọn đáp án B ☐

Câu 12. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.
B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A}=\vec{0}$.
C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}$.
D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{D'O}+\overrightarrow{OC'}$.

Lời giải.

Dựa vào các phương án, ta thấy rằng:



— $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ đúng, vì theo quy tắc hình hộp ta có $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

— $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A} = \vec{0}$ đúng
vì $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{BC'} = -\overrightarrow{D'A} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A} = \vec{0}$.

— $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'}$ **sai**, vì $\begin{cases} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB'} \\ \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AD'} \end{cases}$
mà $\overrightarrow{AB'} \neq \overrightarrow{AD'} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} \neq \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'}$.

— $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'O} + \overrightarrow{OC'}$ đúng
vì $\begin{cases} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC'} \\ \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'O} + \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{AC'} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'O} + \overrightarrow{OC'}$.

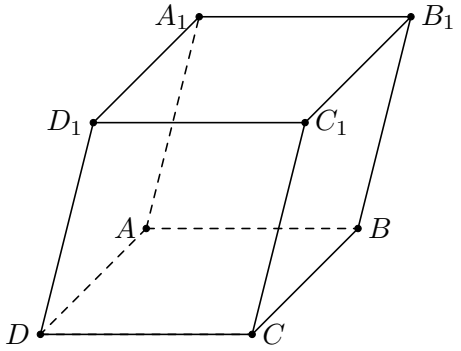
Chọn đáp án C □

Câu 13. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{B_1A_1}$.
B. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_1A_1} = \overrightarrow{DC}$.
C. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BD_1}$.
D. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BC}$.

✍Lời giải.

Dựa vào các phương án, ta thấy rằng:



— $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{B_1A_1}$ đúng,
vì $\begin{cases} \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1} \\ \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B_1A_1} \end{cases}$ suy ra $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{B_1A_1}$.

— $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_1A_1} = \overrightarrow{DC}$ đúng,
vì $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_1A_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}$
$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC}$.

— $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BD_1}$ đúng, vì $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1}$ (quy tắc hình hộp).

— $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BC}$ **sai**, vì $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{BD_1} \neq \overrightarrow{BC}$.

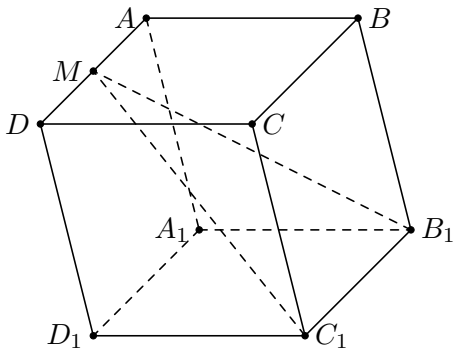
Chọn đáp án D □

Câu 14. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M là trung điểm của AD. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{B_1M} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1}$.
B. $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{C_1D_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.
C. $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1D_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.
D. $\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = 2\overrightarrow{B_1D}$.

✍Lời giải.

Dựa vào các phương án, ta thấy rằng:



— $\overrightarrow{B_1M} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1}$ **sai**
vì $\overrightarrow{B_1M} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BB_1} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}\right)$
$= \overrightarrow{BB_1} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1D_1}\right)$
$= \overrightarrow{BB_1} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1}\right)$
$= \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{B_1C_1}$.

— $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{C_1D_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$ đúng

vì $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{C_1C} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD}\right) = \overrightarrow{C_1C} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{C_1A_1} + \overrightarrow{C_1D_1}\right)$

$= \overrightarrow{C_1C} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{C_1D_1}\right) = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{C_1D_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}.$

— $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1D_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$ **sai**, vì $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{C_1D_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.

— $\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = 2\overrightarrow{B_1D}$ **sai**, vì $\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{A_1D_1} = \overrightarrow{BD_1}$.

Chọn đáp án B □

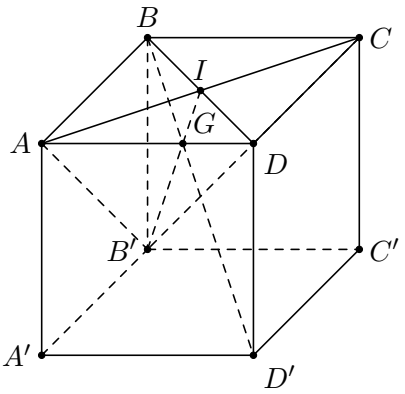
Câu 15. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm của tam giác $AB'C$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AC'} = 3\overrightarrow{AG}$. **B.** $\overrightarrow{AC'} = 4\overrightarrow{AG}$. **C.** $\overrightarrow{BD'} = 4\overrightarrow{BG}$. **D.** $\overrightarrow{BD'} = 3\overrightarrow{BG}$.

✍**Lời giải.**

Cách 1. Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$
$\Rightarrow I$ là trung điểm của BD.
Ta có $\triangle BIG \backsim \triangle D'B'G$
$\Rightarrow \frac{BG}{D'G} = \frac{BI}{D'B'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{BG}{BD'} = \frac{1}{3} \Rightarrow \overrightarrow{BD'} = 3\overrightarrow{BG}$.

Cách 2. Theo quy tắc hình hộp, ta có $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD'}$.
Do G là trọng tâm của tam giác $AB'C$
nên $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = 3\overrightarrow{BG} \Leftrightarrow \overrightarrow{BD'} = 3\overrightarrow{BG}$.



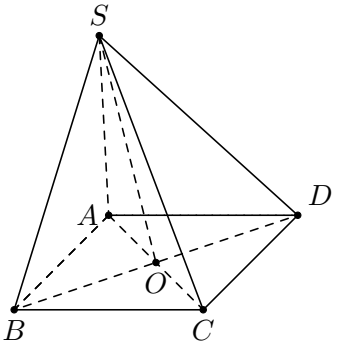
Chọn đáp án D □

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{SD} = \vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$. **B.** $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.
C. $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$. **D.** $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$.

✍**Lời giải.**

Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$.
Vì O là trung điểm của AC
nên $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{SO} = \vec{a} + \vec{c}$. (1)
Và O là trung điểm của BD
nên $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{SO} = \vec{b} + \vec{d}$. (2)
Từ (1) và (2), suy ra $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$.



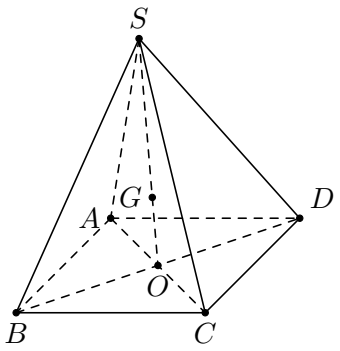
Chọn đáp án A □

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. G, S, O không thẳng hàng. **B.** $\overrightarrow{GS} = 4\overrightarrow{OG}$.
C. $\overrightarrow{GS} = 5\overrightarrow{OG}$. **D.** $\overrightarrow{GS} = 3\overrightarrow{OG}$.

✍**Lời giải.**

Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$ suy ra
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.
Ta có $\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}$
$=\overrightarrow{GS}+4\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.
$\Leftrightarrow \overrightarrow{GS}+4\overrightarrow{GO}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{GS}=4\overrightarrow{OG}$.
$\Rightarrow$ ba điểm G, S, O thẳng hàng.



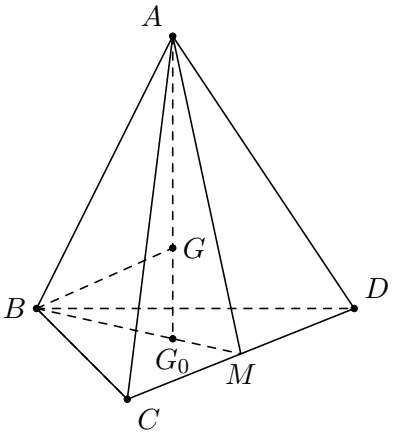
Chọn đáp án B □

Câu 18. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi G_0 là giao điểm của GA và mặt phẳng (BCD). Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{G_0G}$. **B**. $\overrightarrow{GA}=4\overrightarrow{G_0G}$. **C**. $\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{G_0G}$. **D**. $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{G_0G}$.

✍Lời giải.

Vì G_0 là giao điểm của đường thẳng AG với mặt phẳng (BCD) suy ra G_0 là trọng tâm của tam giác BCD.
$\Rightarrow \overrightarrow{G_0B}+\overrightarrow{G_0C}+\overrightarrow{G_0D}=\vec{0}$.
Theo bài ra, ta có
$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}$
$=\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GG_0}+\underbrace{\overrightarrow{G_0B}+\overrightarrow{G_0C}+\overrightarrow{G_0D}}_{\vec{0}}=\vec{0}$
$\Rightarrow \overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GG_0}=\vec{0}\Rightarrow \overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{G_0G}$.



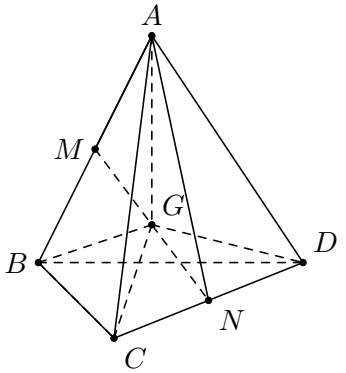
Chọn đáp án C □

Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm của MN. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$.
B. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GD}$.
C. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.
D. $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\vec{0}$.

✍Lời giải.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD
nên $\begin{cases}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GM}\\ \overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GN}.\end{cases}$
Mà G là trung điểm của MN
nên $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.
Khi đó $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$
$=4\overrightarrow{MG}+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)$
$=4\overrightarrow{MG}$.



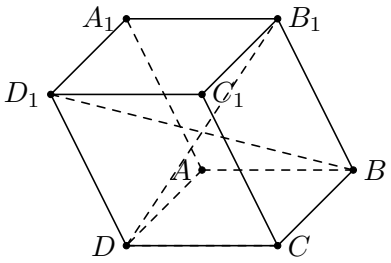
Chọn đáp án B □

Câu 20. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức véc-tơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}=k\overrightarrow{AC_1}$.

A. $k=4$. **B**. $k=1$. **C**. $k=0$. **D**. $k=2$.

✍Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}$
$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC_1}$
$=\overrightarrow{AC_1}\Rightarrow k=1.$



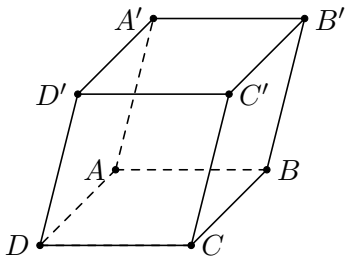
Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức véc-tơ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}+k\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{C'D}\right)=\vec{0}$.

A. $k=0$. **B**. $k=1$. **C**. $k=4$. **D**. $k=2$.

✍Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD'}=\overrightarrow{AD'}$
và $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{C'D}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC'}=\overrightarrow{C'B}=\overrightarrow{D'A}$.
Suy ra $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}+k\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{C'D}\right)=\overrightarrow{AD'}+k\overrightarrow{D'A}=\vec{0}$
$\Leftrightarrow(k-1)\overrightarrow{D'A}=\vec{0}\Leftrightarrow k=1.$



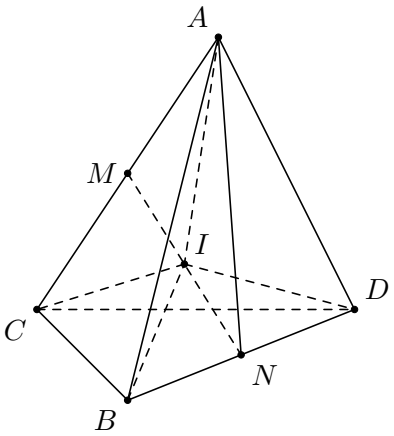
Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm của đoạn MN. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức véc-tơ $\overrightarrow{IA}+(2k-1)\overrightarrow{IB}+k\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

A. $k=2$. **B**. $k=4$. **C**. $k=1$. **D**. $k=0$.

✍Lời giải.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD
nên $\begin{cases}\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{IM}\\ \overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}=2\overrightarrow{IN}\end{cases}$.
Mặt khác $\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}=\vec{0}$ (I là trung điểm của MN).
Suy ra $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.
Ta có $\overrightarrow{IA}+(2k-1)\overrightarrow{IB}+k\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}$
$=\underbrace{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}}_{\vec{0}}+(2k-2)\overrightarrow{IB}+(k-1)\overrightarrow{IC}=\vec{0}.$
Suy ra $(k-1)\left(2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)=\vec{0}$.
Mà $2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\neq\vec{0}$ nên $k-1=0\Leftrightarrow k=1.$



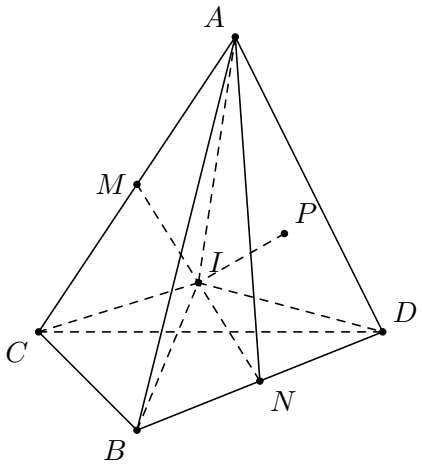
Chọn đáp án (C) □

Câu 23. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm của đoạn MN và P là một điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức véc-tơ $\overrightarrow{PI}=k\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}\right)$.

A. $k=4$. **B**. $k=\dfrac{1}{2}$. **C**. $k=\dfrac{1}{4}$. **D**. $k=2$.

✍Lời giải.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD
nên $\begin{cases}\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{IM}\\ \overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}=2\overrightarrow{IN}\end{cases}$.
Mặt khác $\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}=\vec{0}$ (I là trung điểm của MN).
Suy ra $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.
Khi đó $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$
$=4\overrightarrow{PI}+\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right)=4\overrightarrow{PI}$.
Mà $\overrightarrow{PI}=k\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}\right)$
nên suy ra $4k=1\Leftrightarrow k=\dfrac{1}{4}$.

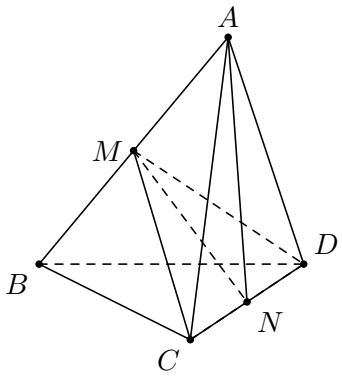


Chọn đáp án C ☐

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức véc-tơ $\overrightarrow{MN}=k\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$.

A. $k=\dfrac{1}{2}$. **B**. $k=\dfrac{1}{3}$. **C**. $k=3$. **D**. $k=2$.

Lời giải.
Ta có N là trung điểm của $CD\Rightarrow\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MN}$. (1)
Và M là trung điểm của AB suy ra $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)$
$=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}\right)$
$=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$.
Kết hợp giả thiết $\overrightarrow{MN}=k\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)\Rightarrow k=\dfrac{1}{2}$.



Chọn đáp án A ☐

Câu 25. Cho ba véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các véc-tơ $\vec{x}=2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{y}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{z}=-3\vec{b}-2\vec{c}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. Ba véc-tơ $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ đồng phẳng. **B**. Hai véc-tơ $\vec{x}$, $\vec{a}$ cùng phương.
C. Hai véc-tơ $\vec{x}$, $\vec{b}$ cùng phương. **D**. Ba véc-tơ $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ đôi một cùng phương.

Lời giải.
Giả sử, ba véc-tơ $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ đồng phẳng, khi đó $\vec{x}=m\vec{y}+n\vec{z}$.
Ta có $\begin{cases}m\vec{y}=m\vec{a}-m\vec{b}-m\vec{c}\\ n\vec{z}=-3n\vec{b}-2n\vec{c}\end{cases}\Rightarrow m\vec{y}+n\vec{z}=m\vec{a}-(m+3n)\vec{b}-(m+2n)\vec{c}$.

Khi đó $2\vec{a}+\vec{b}=m\vec{a}-(m+3n)\vec{b}-(m+2n)\vec{c}\Rightarrow\begin{cases}m=2\\ m+3n=-1\\ m+2n=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=2\\ n=-1.\end{cases}$

Vậy ba véc-tơ $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ đồng phẳng.
Chọn đáp án A ☐

Câu 26. Cho ba véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. Ba véc-tơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}$, $\vec{y}=2\vec{a}-3\vec{b}-6\vec{c}$, $\vec{z}=-\vec{a}+3\vec{b}+6\vec{c}$ đồng phẳng.
B. Ba véc-tơ $\vec{x}=\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c}$, $\vec{y}=3\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c}$, $\vec{z}=2\vec{a}-3\vec{b}-3\vec{c}$ đồng phẳng.
C. Ba véc-tơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{y}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{z}=-\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}$ đồng phẳng.
D. Ba véc-tơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$, $\vec{z}=-\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ đồng phẳng.

Lời giải.
Ba véc-tơ $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $\exists m,n$: $\vec{x}=m\vec{y}+n\vec{z}$.

— Với $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}$, $\vec{y}=2\vec{a}-3\vec{b}-6\vec{c}$, $\vec{z}=-\vec{a}+3\vec{b}+6\vec{c}$, ta có $\vec{x}=\dfrac{4}{3}\vec{y}+\dfrac{5}{3}\vec{z}$.

— Nếu $\vec{x}=\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c}$, $\vec{y}=3\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c}$, $\vec{z}=2\vec{a}-3\vec{b}-3\vec{c}$ đồng phẳng
thì $\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c}=m\left(3\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c}\right)+n\left(2\vec{a}-3\vec{b}-3\vec{c}\right)$

$$=(3m+2n)\vec{a}-3(m+n)\vec{b}+(2m-3n)\vec{c}\Rightarrow\begin{cases}3m+2n=1\\-3m-3n=-2\\2m-3n=4.\end{cases}$$

Hệ phương trình trên vô nghiệm. Vậy ba véc-tơ $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ không đồng phẳng.

— Nếu $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{y}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{z}=-\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}$ đồng phẳng
thì $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=m\left(2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}\right)+n\left(-\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}\right)$

$$=(2m-n)\vec{a}-3(m-n)\vec{b}+(m+3n)\vec{c}\Rightarrow\begin{cases}2m-n=1\\-3m+3n=1\\m+3n=1.\end{cases}$$

Hệ phương trình trên vô nghiệm. Vậy ba véc-tơ $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ không đồng phẳng.

— Nếu $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$, $\vec{z}=-\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ đồng phẳng
thì $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=m\left(2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}\right)+n\left(-\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}\right)$

$$=(2m-n)\vec{a}-(m+n)\vec{b}+(3m+2n)\vec{c}\Rightarrow\begin{cases}2m-n=1\\-m-n=1\\3m+2n=-1.\end{cases}$$

Hệ phương trình trên vô nghiệm. Vậy ba véc-tơ $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ không đồng phẳng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Cho ba véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Điều kiện nào dưới đây khẳng định ba véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng?

A. Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m+n+p=0$ và $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

B. Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m+n+p\neq 0$ và $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

C. Tồn tại ba số thực m, n, p sao cho $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

D. Giá của $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng quy.

✍Lời giải.

Dựa vào đáp án, ta thấy rằng:

— Xét $m=n=p=0$ ta luôn có $m+n+p=0$ và $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$ nhưng không thể suy ra được $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

— Nếu $m+n+p\neq 0$ thì chắc chắn có ít nhất một trong 3 số m, n, p khác 0.
Giả sử $m\neq 0$, ta có $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}=-\dfrac{n}{m}\cdot\vec{b}-\dfrac{p}{m}\cdot\vec{c}$.
Suy ra ba véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BD_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$ đồng phẳng.

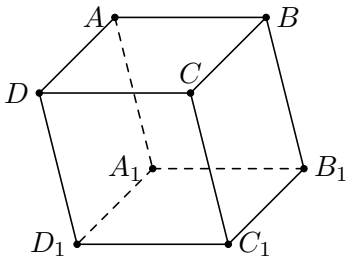
B. $\overrightarrow{CD_1}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$ đồng phẳng.

C. $\overrightarrow{CD_1}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A_1C}$ đồng phẳng.

D. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{C_1A}$ đồng phẳng.

✍Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{A_1C}+\overrightarrow{CD_1}$
suy ra $\overrightarrow{CD_1}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A_1C}$ đồng phẳng.



Chọn đáp án (C) □

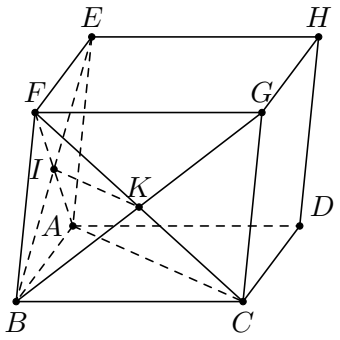
Câu 29. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi I là tâm của hình bình hành $ABEF$ và K là tâm của hình bình hành $BCGF$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.

B. $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.

C. $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.
D. $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{GC}$ đồng phẳng.

Lời giải.
Vì I, K lần lượt là trung điểm của AF và CF nên IK là đường trung bình của tam giác AFC
$\Rightarrow IK \parallel AC \Rightarrow IK \parallel (ABCD)$.
Mà $GF \parallel (ABCD)$ và $BD \subset (ABCD)$.
Suy ra ba véc-tơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.



Chọn đáp án B □

Câu 30. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định **sai**?
A. Ba véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.
B. Ba véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.
C. Ba véc-tơ $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.
D. Ba véc-tơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

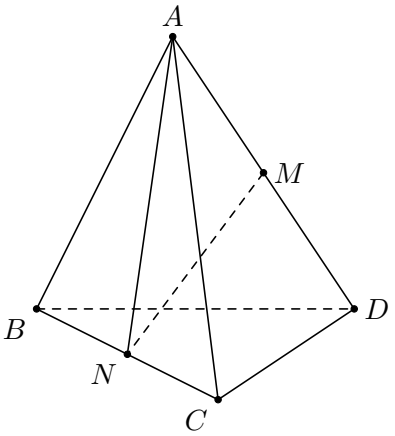
Lời giải.
Vì M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC suy ra $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$ và $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}\right)$.
Khi đó, dựa vào các phương án, ta thấy rằng:

— Ba véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng là kết quả đúng, vì $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

— Ba véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng là kết quả đúng, vì MN không nằm trong mặt phẳng (ABC).

— Ba véc-tơ $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng là kết quả sai, tương tự ta thấy AN không nằm trong mặt phẳng (MNC).

— Ba véc-tơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng là kết quả đúng, vì $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

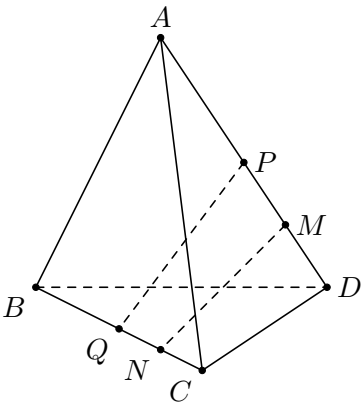


Chọn đáp án C □

Câu 31. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AD và BC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = 3MD$, $BN = 3NC$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AD và BC. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?
A. Ba véc-tơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.
B. Ba véc-tơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng.
C. Ba véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng.
D. Ba véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Lời giải.
Theo giả thiết ta có M, N lần lượt là trung điểm của PD, QC.
Khi đó dựa vào các phương án, ta thấy rằng:

— Ba véc-tơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng là kết quả **sai**
vì $\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BN} \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \\ 3\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MD} + 3\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{BN} \end{cases}$
Suy ra $4\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
$\Rightarrow \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.



— Ba véc-tơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng là kết quả đúng
vì $\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{DC}$
Suy ra $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{DC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

— Ba véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng là kết quả đúng, vì với cách biểu diễn $\overrightarrow{PQ}$ tương tự như trên, ta có $\overrightarrow{PQ} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$.

— Ba véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng là kết quả đúng, vì biểu diễn hoàn toàn giống phương án bên trên, ta được $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{DC}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N được xác định bởi $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$ (1); $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DB} + x\overrightarrow{DC}$ (2). Tìm x để các đường thẳng AD, BC, MN cùng song song với một mặt phẳng.

A. $x = -1$. **B.** $x = -2$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = 2$.

✍Lời giải.

Yêu cầu bài toán tương đương với tìm x để ba véc-tơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ đồng phẳng.
Hệ thức (1) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$.
Hệ thức (2) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + x\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = (1+x)\overrightarrow{AB} - x\overrightarrow{AD} + x\overrightarrow{BC}$.
Từ (1) và (2), suy ra $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = (2+x)\overrightarrow{AB} - x\overrightarrow{AD} + (x+3)\overrightarrow{BC}$.
Vậy ba véc-tơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ đồng phẳng khi $2 + x = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

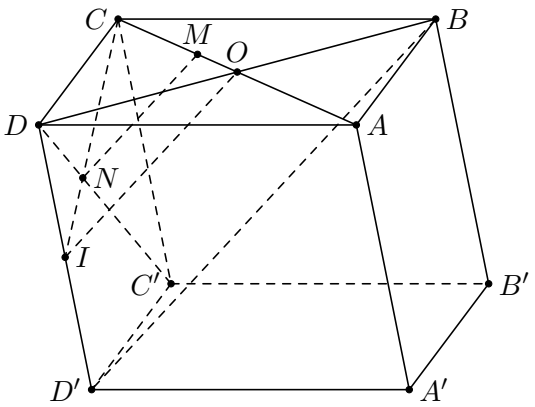
Chọn đáp án (B) □

Câu 33. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm trên cạnh AC sao cho $AC = 3MC$. Lấy điểm N trên đoạn $C'D$ sao cho $C'N = xC'D$. Với giá trị nào của x thì $MN \parallel BD'$.

A. $x = \dfrac{2}{3}$. **B.** $x = \dfrac{1}{3}$. **C.** $x = \dfrac{1}{4}$. **D.** $x = \dfrac{1}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi O là tâm của hình hình hành $ABCD$ và I là trung điểm của DD'.
Nối $C'D$ cắt CI tại $N' \Rightarrow N'$ là trọng tâm của tam giác CDD'.
Ta có OI là đường trung bình của tam giác BDD'.
Suy ra $OI \parallel BD'$.
Mặt khác $\dfrac{CN'}{CI} = \dfrac{CM}{CO}$ nên $MN' \parallel OI$.
Suy ra $MN' \parallel BD'$.
Theo bài ra ta có $MN \parallel BD'$
$\Rightarrow N \equiv N' \Rightarrow C'N = \dfrac{2}{3}C'D \Rightarrow x = \dfrac{2}{3}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABC$. Lấy các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các tia SA, SB, SC sao cho $\dfrac{SA}{SA'} = a$, $\dfrac{SB}{SB'} = b$, $\dfrac{SC}{SC'} = c$, trong đó a, b, c là các số thay đổi. Để mặt phẳng $(A'B'C')$ đi qua trọng tâm của tam giác ABC thì

A. $a + b + c = 3$. **B.** $a + b + c = 4$. **C.** $a + b + c = 2$. **D.** $a + b + c = 1$.

✍Lời giải.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.
Ta có $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
Khi đó $3\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=\vec{0}$.
Mà $\overrightarrow{SA}=a\overrightarrow{SA'}$, $\overrightarrow{SB}=b\overrightarrow{SB'}$, $\overrightarrow{SC}=c\overrightarrow{SC'}$.
Suy ra $3\overrightarrow{SG}=a\overrightarrow{SA'}+b\overrightarrow{SB'}+c\overrightarrow{SC'}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{SG}=\frac{a}{3}\overrightarrow{SA'}+\frac{b}{3}\overrightarrow{SB'}+\frac{c}{3}\overrightarrow{SC'}.$$

Vì $(A'B'C')$ đi qua trọng tâm tam giác ABC
nên $\overrightarrow{GA'}$, $\overrightarrow{GB'}$, $\overrightarrow{GC'}$ đồng phẳng.
Do đó, tồn tại ba số l, m, n sao cho $(l^2+m^2+n^2\neq 0)$ và
$l\overrightarrow{GA'}+m\overrightarrow{GB'}+n\overrightarrow{GC'}=\vec{0}$

$$\Leftrightarrow l\left(\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{SA'}\right)+m\left(\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{SB'}\right)+n\left(\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{SB'}\right)=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (l+m+n)\overrightarrow{SG}=l\overrightarrow{SA'}+m\overrightarrow{SB'}+n\overrightarrow{SC'}.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{SG}=\frac{l}{l+m+n}\overrightarrow{SA'}+\frac{m}{l+m+n}\overrightarrow{SB'}+\frac{n}{l+m+n}\overrightarrow{SC'}$$

$$=\frac{a}{3}\cdot\overrightarrow{SA'}+\frac{b}{3}\cdot\overrightarrow{SB'}+\frac{c}{3}\cdot\overrightarrow{SC'}.$$

Suy ra $\dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{3}+\dfrac{c}{3}=\dfrac{l}{l+m+n}+\dfrac{m}{l+m+n}+\dfrac{n}{l+m+n}=1\Rightarrow a+b+c=3$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 35. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Điểm M xác định bởi đẳng thức véc-tơ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng G.
B. M thuộc tia AG và $AM=3AG$.
C. G là trung điểm AM.
D. M là trung điểm AG.

✍Lời giải.
Do G là trọng tâm tam giác BCD nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$.
Kết hợp giả thiết, suy ra $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AG}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Cho tứ diện $ABCD$. Điểm N xác định bởi $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. N là trung điểm BD.
B. N là đỉnh của hình bình hành $BCDN$.
C. N là đỉnh của hình bình hành $CDBN$.
D. N trùng với A.

✍Lời giải.
Ta có $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{DC}$.
Đẳng thức chứng tỏ N là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CDBN$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm được xác định bởi đẳng thức véc-tơ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{MC'}+\overrightarrow{MD'}=\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M là tâm của mặt đáy $ABCD$.
B. M là tâm của mặt đáy $A'B'C'D'$.
C. M là trung điểm của đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt đáy.
D. Tập hợp điểm M là đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt đáy.

✍Lời giải.
Gọi $O=AC\cap BD$ và $O'=A'C'\cap B'D'$.
Khi đó $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{O'A'}+\overrightarrow{O'B'}+\overrightarrow{O'C'}+\overrightarrow{O'D'}=\vec{0}$.
Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD}\right)$

$$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+4\overrightarrow{MO}=\vec{0}+4\overrightarrow{MO}=4\overrightarrow{MO}.$$

Tương tự, ta cũng có $\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{MC'}+\overrightarrow{MD'}=4\overrightarrow{MO'}$.
Từ đó suy ra $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{MC'}+\overrightarrow{MD'}=\vec{0}$.
Suy ra $4\overrightarrow{MO}+4\overrightarrow{MO'}=\vec{0}\Leftrightarrow 4\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MO'}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MO'}=\vec{0}$.
Vậy điểm M cần tìm là trung điểm của OO'.
Chọn đáp án (C) □

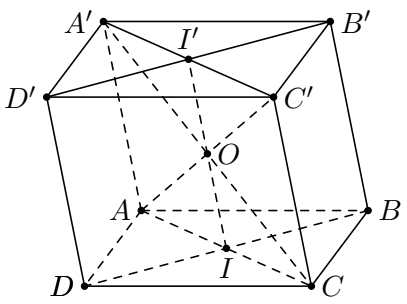
Câu 38. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Điểm M xác định bởi đẳng

thức véc-tơ $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm BB'.
B. M là tâm hình bình hành $BCC'B'$.
C. M là trung điểm CC'.
D. M là tâm hình bình hành $ABB'A'$.

Lời giải.

Gọi I, I' lần lượt là tâm các mặt đáy $ABCD$, $A'B'C'D'$. Suy ra O là trung điểm của II'.



Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

Theo giả thiết ta có $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\right)=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{IB}$.

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên từ đẳng thức $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{IB}$ suy ra M là trung điểm BB'.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Cho hình tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.
B. $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$.
C. $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.
D. $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

Lời giải.

Với mọi vị trí điểm O, ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OG}$, chọn $O\equiv A$, ta được

$$\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AG}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right).$$

Vậy mệnh đề **sai** là $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức véc-tơ $\overrightarrow{MN}=k\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$.

A. $k=3$.
B. $k=\dfrac{1}{2}$.
C. $k=2$.
D. $k=\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

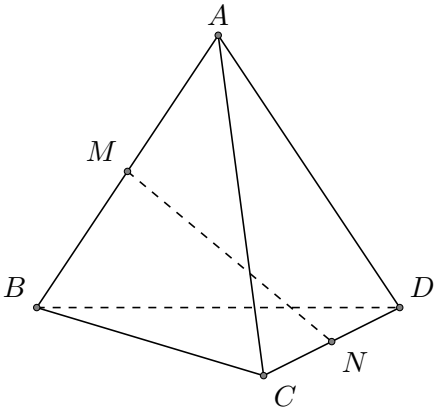
Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}\\ \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}.\end{cases}$

Suy ra $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+2\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{NC}$.

Mặt khác, do M, N là trung điểm của AB và CD nên $\begin{cases}\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}\\ \overrightarrow{ND}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}.\end{cases}$

Vậy $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{MN}\Rightarrow\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$.

Từ đó suy ra $k=\dfrac{1}{2}$.



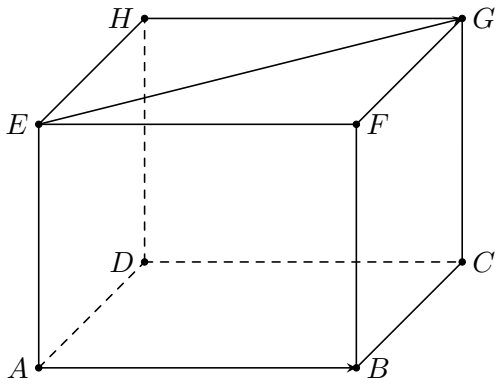
Chọn đáp án B □

Câu 41. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có các cạnh bằng a, khi đó $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EG}$ bằng

A. $a^2\sqrt{2}$.
B. $a^2\sqrt{3}$.
C. a^2.
D. $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EG} &= \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}\right)\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\\ &= \overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}\\ &= AB^2\\ &= a^2\end{aligned}$$



Chọn đáp án C □

Câu 42. Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N xác định bởi $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DB}+x\overrightarrow{DC}$. Tìm x để các véc-tơ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

A. $x=-1$. **B.** $x=-3$. **C.** $x=-2$. **D.** $x=2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DB}+x\overrightarrow{DC}\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+x\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right)\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{AC}-x\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

Suy ra $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}+(x+3)\overrightarrow{AC}-x\overrightarrow{AD}$.
Để $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng thì phải tồn tại các hệ số k, l thỏa

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{MN}=k\overrightarrow{AD}+l\overrightarrow{BC}\\ \Leftrightarrow\ &-\overrightarrow{AB}+(x+3)\overrightarrow{AC}-x\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AD}+l\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\\ \Leftrightarrow\ &-\overrightarrow{AB}+(x+3)\overrightarrow{AC}-x\overrightarrow{AD}=-l\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}+k\overrightarrow{AD}\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}-1=-l\\ x+3=l\\ -x=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}l=1\\ x=-2\\ k=2.\end{cases}\end{aligned}$$

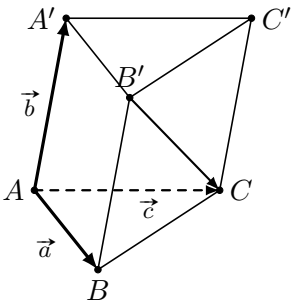
Vậy $x=-2$ thì ba véc-tơ đồng phẳng.
Chọn đáp án C □

Câu 43. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{B'C}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$. **B.** $\overrightarrow{B'C}=-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.
C. $\overrightarrow{B'C}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{B'C}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{B'C}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BB'}$
$=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})-\overrightarrow{AA'}$
$=\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}$.



Chọn đáp án A □

Câu 44. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chọn mệnh đề đúng.

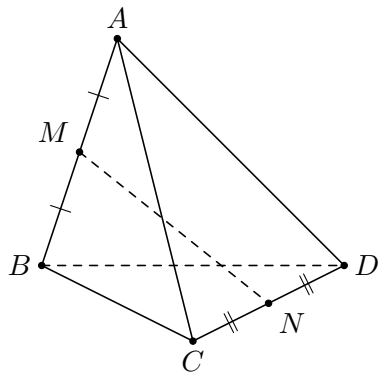
A. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$. **B.** $\overrightarrow{MN}=2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)$.
C. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right)$. **D.** $\overrightarrow{MN}=2\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$.

Lời giải.

Ta có

— $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$. (1)

— $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$. (2)



Cộng tương ứng hai vế của (1) và (2) ta được

$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{CN} = \vec{0}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\vec{0} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

Suy ra $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M là trung điểm của AD. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{B_1M} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1}$.

B. $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{C_1D_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.

C. $\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = 2\overrightarrow{B_1D}$.

D. $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1D_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.

✍Lời giải.

Ta có

$\overrightarrow{C_1A} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{C_1B_1}$

mà

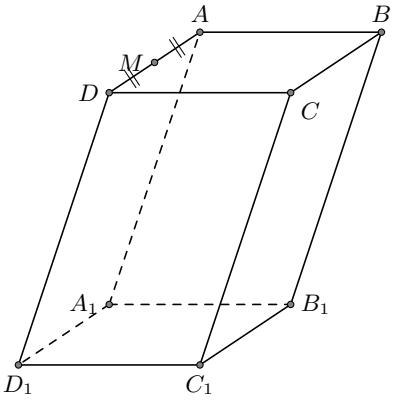
$\overrightarrow{C_1A} = \overrightarrow{C_1M} + \overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.

Suy ra

$\overrightarrow{C_1M} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{C_1B_1}$

hay

$\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{C_1D_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.



Chọn đáp án B □

Câu 46. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ với G là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Khi đó $\overrightarrow{AG}$ bằng

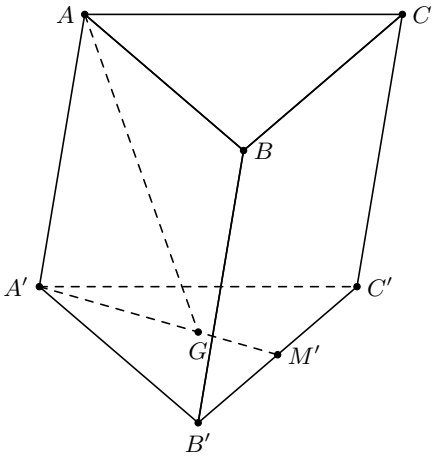
A. $\vec{a} + \frac{1}{2}\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$. **B.** $\vec{a} + \frac{1}{6}\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$. **C.** $\vec{a} + \frac{1}{3}\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$. **D.** $\vec{a} + \frac{1}{4}\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$.

✍Lời giải.

Vì G là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$ nên

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AB'}\right).$$

Suy ra
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(3\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right)\\ &= \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\\ &= \vec{a} + \frac{1}{3}\left(\vec{b} + \vec{c}\right).\end{aligned}$$



Chọn đáp án C □

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;-3)$. Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua Oy.

A. $M'(2;1;-3)$. **B.** $M'(2;-1;3)$. **C.** $M'(-2;-1;3)$. **D.** $M'(-2;-1;-3)$.

✍Lời giải.

Gọi I là giao điểm của $M'M$ với trục Oy do giả thiết suy ra $IM = IM'$ và $IM \perp Oy$. Giả sử tọa độ điểm $I(0;m;0)$ khi đó $\overrightarrow{IM} = (2;-1-m;-3)$. Ta có véc-tơ chỉ phương của Oy là $\vec{j}(0;1;0)$. Vì $IM \perp Oy$ suy ra

$\overrightarrow{IM} \cdot \vec{j} = 0 \Leftrightarrow -1 - m = 0 \Leftrightarrow m = -1$. Nên tọa độ điểm $I\,(0;-1;0)$ khi đó

$$\begin{cases} x_M + x_{M'} = 2x_I \\ y_M + y_{M'} = 2y_I \\ z_M + z_{M'} = 2z_I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + x_{M'} = 0 \\ -1 + y_{M'} = -2 \\ -3 + z_{M'} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = -2 \\ y_{M'} = -1 \\ z_{M'} = 3. \end{cases}$$

Do đó tọa độ điểm $M'\,(-2;-1;3)$.

Chọn đáp án C □

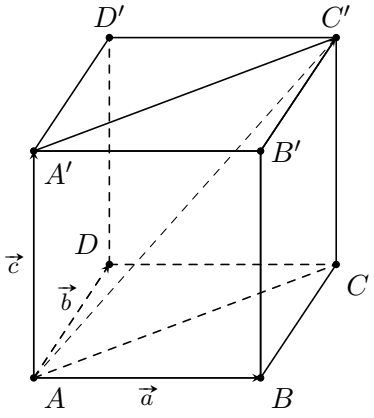
Câu 48. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Phân tích véc-tơ $\overrightarrow{AC'}$ theo $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

A. $\overrightarrow{AC'} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. **B.** $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$. **C.** $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

✍Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC'} &= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}. \end{aligned}$$



Chọn đáp án C □

Câu 49. Trong không gian cho các véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng thỏa mãn $(x-y)\vec{a} + (y-z)\vec{b} = (x+z-2)\vec{c}$. Tính $T = x + y + z$.

A. 2. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** 3. **D.** 1.

✍Lời giải.

Ta có $(x-y)\vec{a} + (y-z)\vec{b} - (x+z-2)\vec{c} = \vec{0}$. Do $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng nên mỗi véc-tơ được phân tích duy nhất qua ba véc-tơ nói trên.

Suy ra $\begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$

Vậy $T = 3$.

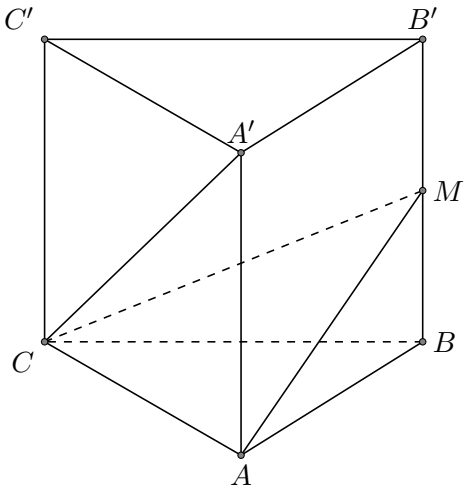
Chọn đáp án C □

Câu 50. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có M là trung điểm của BB'. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \dfrac{1}{2}\vec{b}$. **B.** $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \dfrac{1}{2}\vec{a}$. **C.** $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \dfrac{1}{2}\vec{b}$. **D.** $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{c}$.

✍Lời giải.

• $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB'}) - \overrightarrow{CA}$
$= \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{b} + \vec{c}) - \vec{a} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$.



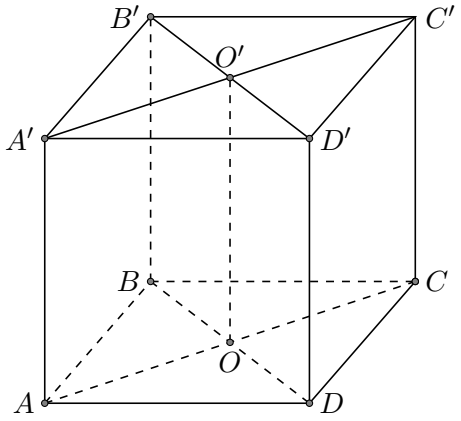
Chọn đáp án D □

Câu 51. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ và điểm S sao cho $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'}$. Tính độ dài đoạn OS theo a.

A. $OS = 6a$. **B**. $OS = 4a$. **C**. $OS = a$. **D**. $OS = 2a$.

Lời giải.

Gọi O' là tâm hình vuông $A'B'C'D'$
Ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'} = 4\overrightarrow{OO'}$
$\Rightarrow \overrightarrow{OS} = 4\overrightarrow{OO'} \Rightarrow OS = 4OO' = 4a$.

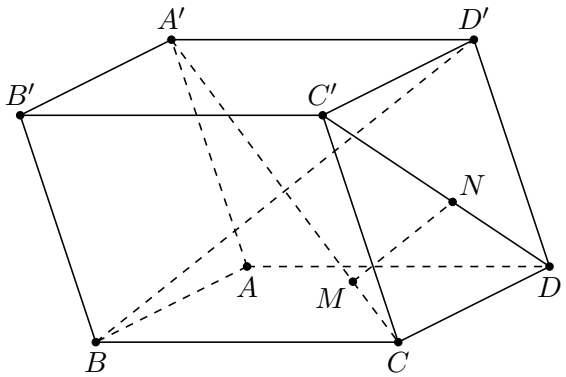


Chọn đáp án B □

Câu 52. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và các số thực k, l sao cho $\overrightarrow{MA'} = k\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC'} = l\overrightarrow{ND}$. Khi MN song song với BD' thì khẳng định nào sau đây đúng?

A. $k - l = -\frac{3}{2}$. **B**. $k + l = -3$. **C**. $k + l = -4$. **D**. $k + l = -2$.

Lời giải.



Đặt $\vec{x} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{y} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{z} = \overrightarrow{BB'}$. Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN} = \frac{1}{k-1}(\vec{x} - \vec{y} + \vec{z}) + \vec{x} + \frac{1}{1-l}(-\vec{x} + \vec{z}) =$
$\left(1 + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{l-1}\right)\vec{x} - \frac{1}{k-1}\vec{y} + \left(\frac{1}{k-1} + \frac{1}{1-l}\right)\vec{z}$; $\overrightarrow{BD'} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$.
Theo giả thiết $MN \parallel BD'$ suy ra $1 + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{l-1} = -\frac{1}{k-1} = \frac{1}{k-1} + \frac{1}{1-l} \Leftrightarrow k = -3, l = -1$.

Chọn đáp án C □

Câu 53. Cho hình tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

B. $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$.

C. $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

D. $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

✍Lời giải.

Với mọi vị trí điểm O, ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OG}$, chọn $O\equiv A$, ta được

$$\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AG}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right).$$

Vậy mệnh đề **sai** là $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 54. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức véc-tơ $\overrightarrow{MN}=k\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$.

A. $k=3$. **B.** $k=\dfrac{1}{2}$. **C.** $k=2$. **D.** $k=\dfrac{1}{3}$.

✍Lời giải.

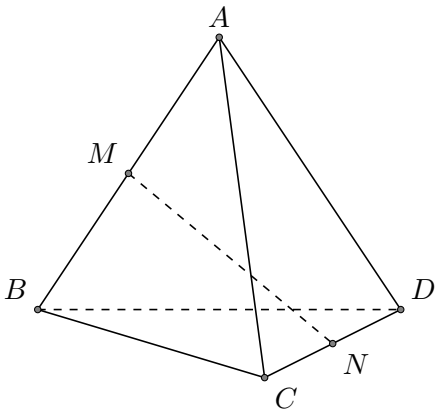
Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}\\ \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}.\end{cases}$

Suy ra $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+2\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{NC}$.

Mặt khác, do M, N là trung điểm của AB và CD nên $\begin{cases}\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}\\ \overrightarrow{ND}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}.\end{cases}$

Vậy $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{MN}\Rightarrow\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$.

Từ đó suy ra $k=\dfrac{1}{2}$.



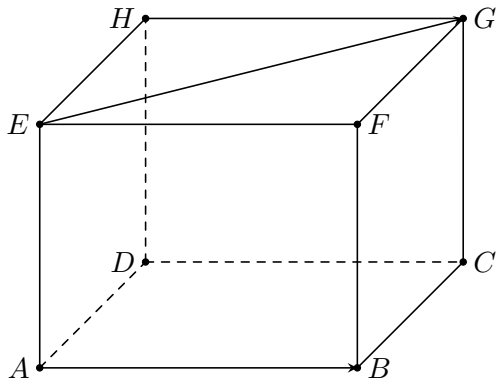
Chọn đáp án (B) □

Câu 55. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có các cạnh bằng a, khi đó $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EG}$ bằng

A. $a^2\sqrt{2}$. **B.** $a^2\sqrt{3}$. **C.** a^2. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

✍Lời giải.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EG}&=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}\right)\\&=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\\&=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}\\&=AB^2\\&=a^2\end{aligned}$$



Chọn đáp án (C) □

Câu 56. Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N xác định bởi $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DB}+x\overrightarrow{DC}$. Tìm x để các véc-tơ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

A. $x=-1$. **B.** $x=-3$. **C.** $x=-2$. **D.** $x=2$.

✍Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DB}+x\overrightarrow{DC}\\\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+x\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right)\\\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{AC}-x\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

Suy ra $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}+(x+3)\overrightarrow{AC}-x\overrightarrow{AD}$.
Để $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng thì phải tồn tại các hệ số k, l thỏa

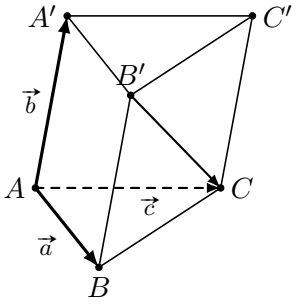
$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{MN}=k\overrightarrow{AD}+l\overrightarrow{BC}\\
\Leftrightarrow\ &-\overrightarrow{AB}+(x+3)\overrightarrow{AC}-x\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AD}+l\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\\
\Leftrightarrow\ &-\overrightarrow{AB}+(x+3)\overrightarrow{AC}-x\overrightarrow{AD}=-l\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}+k\overrightarrow{AD}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}-1=-l\\ x+3=l\\ -x=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}l=1\\ x=-2\\ k=2.\end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy $x=-2$ thì ba véc-tơ đồng phẳng.
Chọn đáp án C □

Câu 57. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{B'C}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$. **B.** $\overrightarrow{B'C}=-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.
C. $\overrightarrow{B'C}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{B'C}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.

Lời giải.
Ta có: $\begin{aligned}\overrightarrow{B'C}&=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BB'}\\&=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})-\overrightarrow{AA'}\\&=\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}.\end{aligned}$



Chọn đáp án A □

Câu 58. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chọn mệnh đề đúng.

A. $\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$. **B.** $\overrightarrow{MN}=2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)$.
C. $\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right)$. **D.** $\overrightarrow{MN}=2\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$.

Lời giải.
Ta có

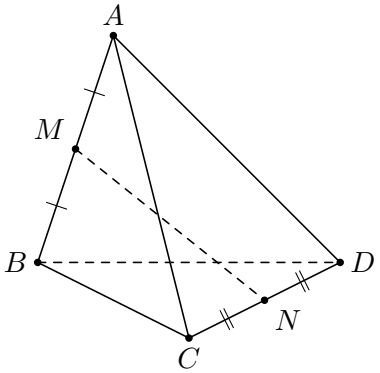
— $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}$. (1)

— $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$. (2)

Cộng tương ứng hai vế của (1) và (2) ta được

$2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\vec{0}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

Suy ra $\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$.



Chọn đáp án A □

Câu 59. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AA'}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AC}$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Véc-tơ $\overrightarrow{AG'}$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}\left(\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}\right)$. **B.** $\dfrac{1}{3}\left(3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$. **C.** $\dfrac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}\right)$. **D.** $\dfrac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của $B'C'$.

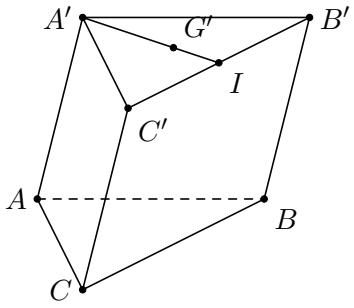
Vì G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C' \Rightarrow \overrightarrow{A'G'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A'I}$.

Ta có $\overrightarrow{AG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'G'} = \overrightarrow{AA'} + \frac{2}{3}\overrightarrow{A'I}$

$= \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'C'}\right)$

$= \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

$= \frac{1}{3}\left(3\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\left(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right).$



Chọn đáp án (B) □

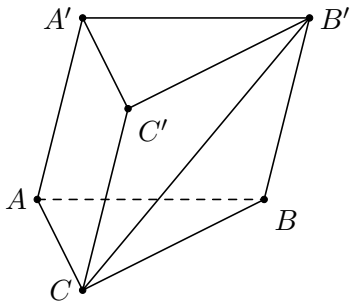
Câu 60. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AA'}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$. Hãy biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{B'C}$ theo các véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

A. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$. **B.** $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.
C. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

✍**Lời giải.**

Vì $BB'C'C$ là hình bình hành nên

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B'C} &= \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'B}\\ &= \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AA'}\\ &= -\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\\ &= -\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\\ &= -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}.\end{aligned}$$



Chọn đáp án (D) □

Câu 61. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của cạnh BB'. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$. **B.** $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$. **C.** $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

✍**Lời giải.**

Vì M là trung điểm của $BB' \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = -\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = -\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 62. Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$. **B.** $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$.
C. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$. **D.** $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

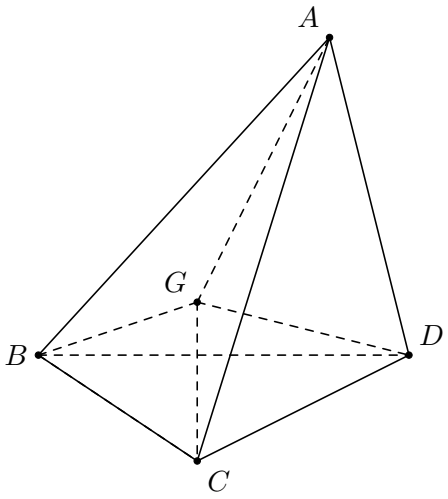
✍**Lời giải.**

Vì G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Do đó

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}\cdot 4\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DG}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right).$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{AO}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$$
$$= \overrightarrow{AO}+\frac{1}{4}\left(4\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$$
$$= \overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right).$$

Vậy $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

Suy ra mệnh đề $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$ sai.



Chọn đáp án (A) □

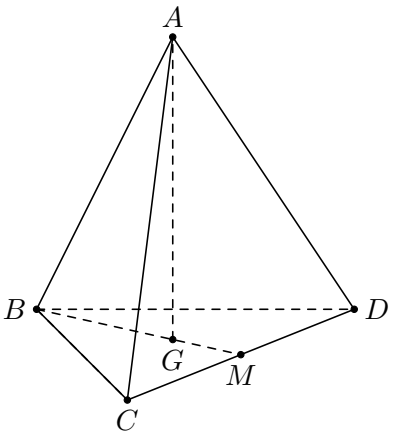
Câu 63. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AG} = \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.
B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.
C. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.
D. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

✍Lời giải.

Gọi M là trung điểm của CD suy ra $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$.

Ta có $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$
$$= \overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right)$$
$$= \overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right)$$
$$= \overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right).$$



Chọn đáp án (B) □

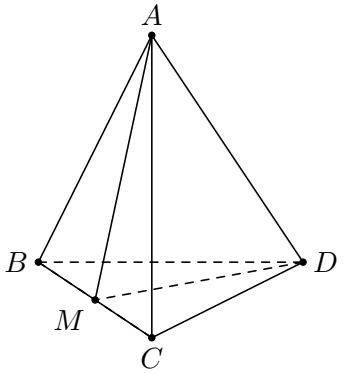
Câu 64. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Đẳng thức nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}\right)$.
B. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\left(-2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.
C. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\left(\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}\right)$.
D. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\left(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}\right)$.

✍Lời giải.

Vì M là trung điểm của BC suy ra $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Ta có $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
$$= \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$$
$$= \frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c} = \frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}\right).$$



Chọn đáp án (A) □

Câu 65. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

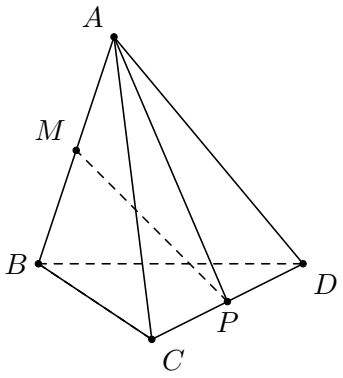
A. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}+\vec{b}\right)$.
B. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{d}+\vec{b}-\vec{c}\right)$.
C. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{b}-\vec{d}\right)$.
D. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}\right)$.

✍Lời giải.

Vì M, P lần lượt là trung điểm của AB, CD

nên $\begin{cases}2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AP}.\end{cases}$

Ta có $\begin{aligned}\overrightarrow{MP}&=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AP}\\&=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)\\&=-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}.\end{aligned}$



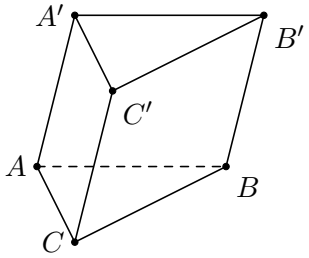
Chọn đáp án (D) □

Câu 66. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$.
B. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.
C. $\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.
D. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$.

✍Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\vec{d}=\vec{c}-\vec{b}\Leftrightarrow\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 67. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

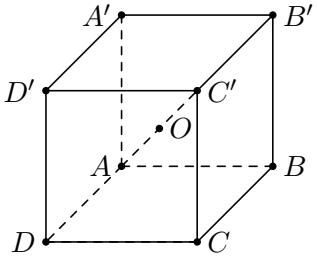
A. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.
B. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.
C. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.
D. $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

✍Lời giải.

Theo quy tắc hình hộp, ta có $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.

Mà O là trung điểm của AC'

nên $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.



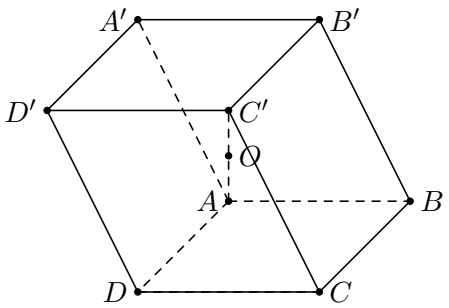
Chọn đáp án (B) □

Câu 68. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.
B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A}=\vec{0}$.
C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}$.
D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{D'O}+\overrightarrow{OC'}$.

✍Lời giải.

Dựa vào các phương án, ta thấy rằng:



— $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ đúng, vì theo quy tắc hình hộp ta có $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

— $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A} = \vec{0}$ đúng
vì $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{BC'} = -\overrightarrow{D'A} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A} = \vec{0}$.

— $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'}$ **sai**, vì $\begin{cases} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB'} \\ \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AD'} \end{cases}$
mà $\overrightarrow{AB'} \neq \overrightarrow{AD'} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} \neq \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'}$.

— $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'O} + \overrightarrow{OC'}$ đúng
vì $\begin{cases} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC'} \\ \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'O} + \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{AC'} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'O} + \overrightarrow{OC'}$.

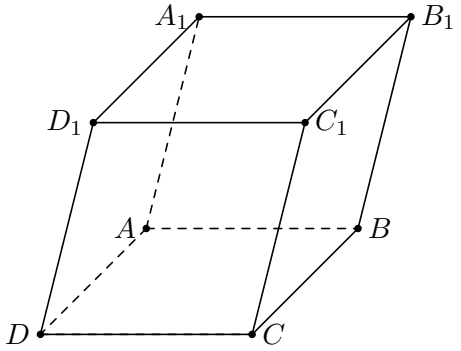
Chọn đáp án C □

Câu 69. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{B_1A_1}$.
B. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_1A_1} = \overrightarrow{DC}$.
C. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BD_1}$.
D. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BC}$.

✍Lời giải.

Dựa vào các phương án, ta thấy rằng:



— $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{B_1A_1}$ đúng,
vì $\begin{cases} \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1} \\ \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B_1A_1} \end{cases}$ suy ra $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{B_1A_1}$.

— $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_1A_1} = \overrightarrow{DC}$ đúng,
vì $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_1A_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}$
$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC}$.

— $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BD_1}$ đúng, vì $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1}$ (quy tắc hình hộp).

— $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BC}$ **sai**, vì $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{BD_1} \neq \overrightarrow{BC}$.

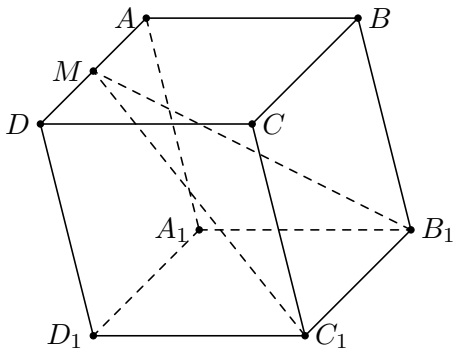
Chọn đáp án D □

Câu 70. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M là trung điểm của AD. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{B_1M} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1}$.
B. $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{C_1D_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.
C. $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1D_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.
D. $\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = 2\overrightarrow{B_1D}$.

✍Lời giải.

Dựa vào các phương án, ta thấy rằng:



— $\overrightarrow{B_1M} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1}$ **sai**
vì $\overrightarrow{B_1M} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BB_1} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}\right)$
$= \overrightarrow{BB_1} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1D_1}\right)$
$= \overrightarrow{BB_1} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1}\right)$
$= \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{B_1C_1}$.

— $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{C_1D_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$ đúng

vì $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{C_1C} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD}\right) = \overrightarrow{C_1C} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{C_1A_1} + \overrightarrow{C_1D_1}\right)$

$= \overrightarrow{C_1C} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{C_1D_1}\right) = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{C_1D_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.

— $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1D_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$ **sai**, vì $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{C_1D_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.

— $\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = 2\overrightarrow{B_1D}$ **sai**, vì $\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{A_1D_1} = \overrightarrow{BD_1}$.

Chọn đáp án B □

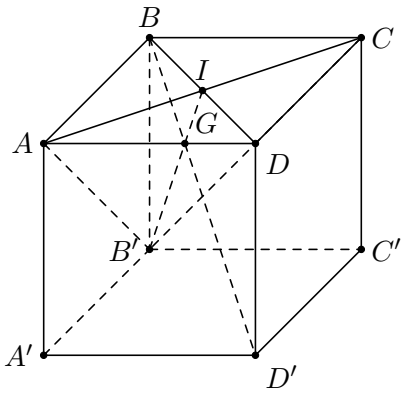
Câu 71. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm của tam giác $AB'C$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AC'} = 3\overrightarrow{AG}$. **B.** $\overrightarrow{AC'} = 4\overrightarrow{AG}$. **C.** $\overrightarrow{BD'} = 4\overrightarrow{BG}$. **D.** $\overrightarrow{BD'} = 3\overrightarrow{BG}$.

✍Lời giải.

Cách 1. Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$
$\Rightarrow I$ là trung điểm của BD.
Ta có $\triangle BIG \backsim \triangle D'B'G$
$\Rightarrow \frac{BG}{D'G} = \frac{BI}{D'B'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{BG}{BD'} = \frac{1}{3} \Rightarrow \overrightarrow{BD'} = 3\overrightarrow{BG}$.

Cách 2. Theo quy tắc hình hộp, ta có $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD'}$.
Do G là trọng tâm của tam giác $AB'C$
nên $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = 3\overrightarrow{BG} \Leftrightarrow \overrightarrow{BD'} = 3\overrightarrow{BG}$.



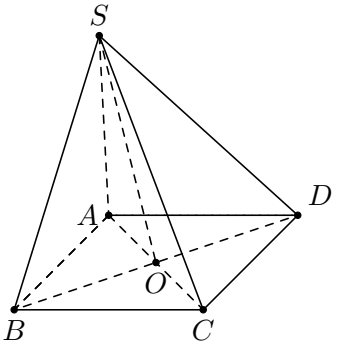
Chọn đáp án D □

Câu 72. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{SD} = \vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$. **B.** $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.
C. $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$. **D.** $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$.

✍Lời giải.

Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$.
Vì O là trung điểm của AC
nên $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{SO} = \vec{a} + \vec{c}$. (1)
Và O là trung điểm của BD
nên $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{SO} = \vec{b} + \vec{d}$. (2)
Từ (1) và (2), suy ra $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$.



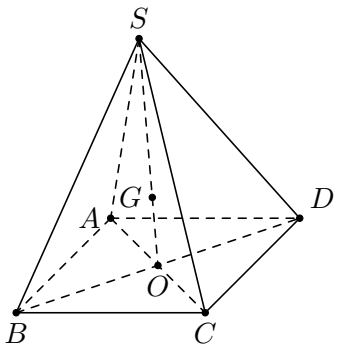
Chọn đáp án A □

Câu 73. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. G, S, O không thẳng hàng. **B.** $\overrightarrow{GS} = 4\overrightarrow{OG}$.
C. $\overrightarrow{GS} = 5\overrightarrow{OG}$. **D.** $\overrightarrow{GS} = 3\overrightarrow{OG}$.

✍Lời giải.

Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$ suy ra
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.
Ta có $\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}$
$=\overrightarrow{GS}+4\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.
$\Leftrightarrow \overrightarrow{GS}+4\overrightarrow{GO}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{GS}=4\overrightarrow{OG}$.
$\Rightarrow$ ba điểm G, S, O thẳng hàng.



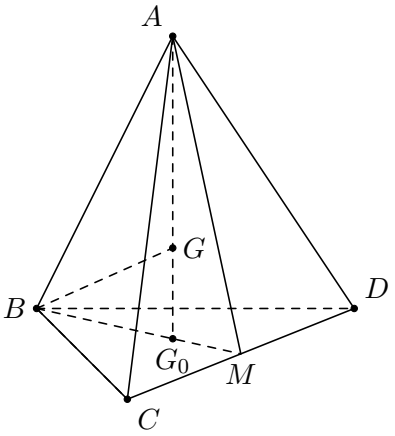
Chọn đáp án B □

Câu 74. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi G_0 là giao điểm của GA và mặt phẳng (BCD). Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{G_0G}$. **B**. $\overrightarrow{GA}=4\overrightarrow{G_0G}$. **C**. $\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{G_0G}$. **D**. $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{G_0G}$.

✍Lời giải.

Vì G_0 là giao điểm của đường thẳng AG với mặt phẳng (BCD) suy ra G_0 là trọng tâm của tam giác BCD.
$\Rightarrow \overrightarrow{G_0B}+\overrightarrow{G_0C}+\overrightarrow{G_0D}=\vec{0}$.
Theo bài ra, ta có
$$\begin{aligned}&\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\\&=\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GG_0}+\underbrace{\overrightarrow{G_0B}+\overrightarrow{G_0C}+\overrightarrow{G_0D}}_{\vec{0}}=\vec{0}\\&\Rightarrow \overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GG_0}=\vec{0}\Rightarrow \overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{G_0G}.\end{aligned}$$



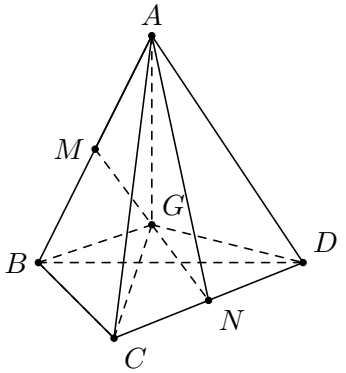
Chọn đáp án C □

Câu 75. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm của MN. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$.
B. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GD}$.
C. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.
D. $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\vec{0}$.

✍Lời giải.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD
nên $\begin{cases}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GM}\\ \overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GN}.\end{cases}$
Mà G là trung điểm của MN
nên $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.
Khi đó $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$
$$\begin{aligned}&=4\overrightarrow{MG}+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)\\&=4\overrightarrow{MG}.\end{aligned}$$



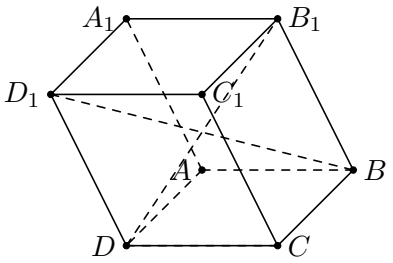
Chọn đáp án B □

Câu 76. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức véc-tơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}=k\overrightarrow{AC_1}$.

A. $k=4$. **B**. $k=1$. **C**. $k=0$. **D**. $k=2$.

✍Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}$
$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC_1}$
$=\overrightarrow{AC_1}\Rightarrow k=1.$



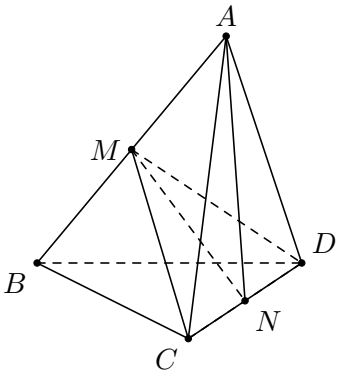
Chọn đáp án (B) □

Câu 77. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức véc-tơ $\overrightarrow{MN}=k\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$.

A. $k=\dfrac{1}{2}$. **B**. $k=\dfrac{1}{3}$. **C**. $k=3$. **D**. $k=2$.

✍Lời giải.

Ta có N là trung điểm của $CD\Rightarrow\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MN}$. (1)
Và M là trung điểm của AB suy ra $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)$
$=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}\right)$
$=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right).$
Kết hợp giả thiết $\overrightarrow{MN}=k\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)\Rightarrow k=\dfrac{1}{2}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 78. Cho ba véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các véc-tơ $\vec{x}=2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{y}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{z}=-3\vec{b}-2\vec{c}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. Ba véc-tơ $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ đồng phẳng. **B**. Hai véc-tơ $\vec{x}$, $\vec{a}$ cùng phương.
C. Hai véc-tơ $\vec{x}$, $\vec{b}$ cùng phương. **D**. Ba véc-tơ $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ đôi một cùng phương.

✍Lời giải.

Giả sử, ba véc-tơ $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ đồng phẳng, khi đó $\vec{x}=m\vec{y}+n\vec{z}$.
Ta có $\begin{cases}m\vec{y}=m\vec{a}-m\vec{b}-m\vec{c}\\ n\vec{z}=-3n\vec{b}-2n\vec{c}\end{cases}\Rightarrow m\vec{y}+n\vec{z}=m\vec{a}-(m+3n)\vec{b}-(m+2n)\vec{c}.$

Khi đó $2\vec{a}+\vec{b}=m\vec{a}-(m+3n)\vec{b}-(m+2n)\vec{c}\Rightarrow\begin{cases}m=2\\ m+3n=-1\\ m+2n=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=2\\ n=-1.\end{cases}$

Vậy ba véc-tơ $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ đồng phẳng.
Chọn đáp án (A) □

Câu 79. Cho ba véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. Ba véc-tơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}$, $\vec{y}=2\vec{a}-3\vec{b}-6\vec{c}$, $\vec{z}=-\vec{a}+3\vec{b}+6\vec{c}$ đồng phẳng.
B. Ba véc-tơ $\vec{x}=\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c}$, $\vec{y}=3\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c}$, $\vec{z}=2\vec{a}-3\vec{b}-3\vec{c}$ đồng phẳng.
C. Ba véc-tơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{y}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{z}=-\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}$ đồng phẳng.
D. Ba véc-tơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$, $\vec{z}=-\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ đồng phẳng.

✍Lời giải.

Ba véc-tơ $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $\exists m,n\colon\vec{x}=m\vec{y}+n\vec{z}$.

— Với $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}$, $\vec{y}=2\vec{a}-3\vec{b}-6\vec{c}$, $\vec{z}=-\vec{a}+3\vec{b}+6\vec{c}$, ta có $\vec{x}=\dfrac{4}{3}\vec{y}+\dfrac{5}{3}\vec{z}$.

— Nếu $\vec{x}=\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c}$, $\vec{y}=3\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c}$, $\vec{z}=2\vec{a}-3\vec{b}-3\vec{c}$ đồng phẳng
thì $\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c}=m\left(3\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c}\right)+n\left(2\vec{a}-3\vec{b}-3\vec{c}\right)$
$=(3m+2n)\vec{a}-3(m+n)\vec{b}+(2m-3n)\vec{c}\Rightarrow\begin{cases}3m+2n=1\\ -3m-3n=-2\\ 2m-3n=4.\end{cases}$

Hệ phương trình trên vô nghiệm. Vậy ba véc-tơ $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ không đồng phẳng.

— Nếu $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{y}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{z}=-\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}$ đồng phẳng
thì $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=m\left(2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}\right)+n\left(-\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}\right)$

$$=(2m-n)\vec{a}-3(m-n)\vec{b}+(m+3n)\vec{c}\Rightarrow\begin{cases}2m-n=1\\-3m+3n=1\\m+3n=1.\end{cases}$$

Hệ phương trình trên vô nghiệm. Vậy ba véc-tơ $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ không đồng phẳng.

— Nếu $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$, $\vec{z}=-\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ đồng phẳng
thì $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=m\left(2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}\right)+n\left(-\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}\right)$

$$=(2m-n)\vec{a}-(m+n)\vec{b}+(3m+2n)\vec{c}\Rightarrow\begin{cases}2m-n=1\\-m-n=1\\3m+2n=-1.\end{cases}$$

Hệ phương trình trên vô nghiệm. Vậy ba véc-tơ $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ không đồng phẳng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 80. Cho ba véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Điều kiện nào dưới đây khẳng định ba véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng?

A. Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m+n+p=0$ và $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

B. Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m+n+p\neq 0$ và $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

C. Tồn tại ba số thực m, n, p sao cho $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

D. Giá của $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng quy.

✍Lời giải.

Dựa vào đáp án, ta thấy rằng:

— Xét $m=n=p=0$ ta luôn có $m+n+p=0$ và $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$ nhưng không thể suy ra được $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

— Nếu $m+n+p\neq 0$ thì chắc chắn có ít nhất một trong 3 số m, n, p khác 0.
Giả sử $m\neq 0$, ta có $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}=-\dfrac{n}{m}\cdot\vec{b}-\dfrac{p}{m}\cdot\vec{c}$.
Suy ra ba véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 81. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BD_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$ đồng phẳng.

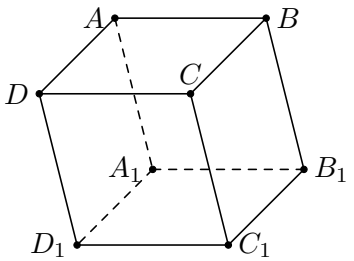
B. $\overrightarrow{CD_1}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$ đồng phẳng.

C. $\overrightarrow{CD_1}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A_1C}$ đồng phẳng.

D. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{C_1A}$ đồng phẳng.

✍Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{A_1C}+\overrightarrow{CD_1}$
suy ra $\overrightarrow{CD_1}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A_1C}$ đồng phẳng.



Chọn đáp án (C) □

Câu 82. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi I là tâm của hình bình hành $ABEF$ và K là tâm của hình bình hành $BCGF$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.

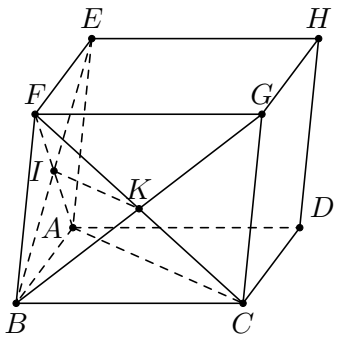
B. $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.

C. $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.

D. $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{GC}$ đồng phẳng.

✍Lời giải.

Vì I, K lần lượt là trung điểm của AF và CF
nên IK là đường trung bình của tam giác AFC
$\Rightarrow IK \parallel AC \Rightarrow IK \parallel (ABCD)$.
Mà $GF \parallel (ABCD)$ và $BD \subset (ABCD)$.
Suy ra ba véc-tơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.



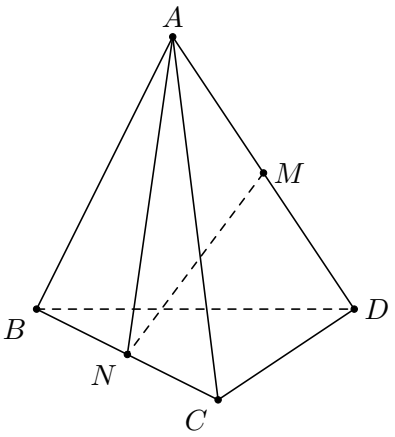
Chọn đáp án (B) □

Câu 83. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định **sai**?

A. Ba véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.
B. Ba véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.
C. Ba véc-tơ $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.
D. Ba véc-tơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

✍Lời giải.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC suy ra $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$ và $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}\right)$.
Khi đó, dựa vào các phương án, ta thấy rằng:



— Ba véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng là kết quả đúng, vì $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

— Ba véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng là kết quả đúng, vì MN không nằm trong mặt phẳng (ABC).

— Ba véc-tơ $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng là kết quả sai, tương tự ta thấy AN không nằm trong mặt phẳng (MNC).

— Ba véc-tơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng là kết quả đúng, vì $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

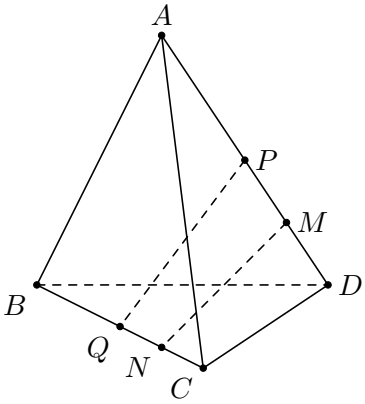
Chọn đáp án (C) □

Câu 84. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AD và BC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = 3MD$, $BN = 3NC$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AD và BC. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. Ba véc-tơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.
B. Ba véc-tơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng.
C. Ba véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng.
D. Ba véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

✍Lời giải.

Theo giả thiết ta có M, N lần lượt là trung điểm của PD, QC.
Khi đó dựa vào các phương án, ta thấy rằng:



— Ba véc-tơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng là kết quả **sai**
vì $\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BN} \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \\ 3\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MD} + 3\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{BN} \end{cases}$
Suy ra $4\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
$\Rightarrow \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.

— Ba véc-tơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng là kết quả đúng
vì $\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{DC}$
Suy ra $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{DC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

— Ba véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng là kết quả đúng, vì với cách biểu diễn $\overrightarrow{PQ}$ tương tự như trên, ta

có $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)$.

— Ba véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng là kết quả đúng, vì biểu diễn hoàn toàn giống phương án bên trên, ta được $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 85. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Điểm M xác định bởi đẳng thức véc-tơ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng G.
B. M thuộc tia AG và $AM=3AG$.
C. G là trung điểm AM.
D. M là trung điểm AG.

✍Lời giải.
Do G là trọng tâm tam giác BCD nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$.
Kết hợp giả thiết, suy ra $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AG}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 86. Cho tứ diện $ABCD$. Điểm N xác định bởi $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

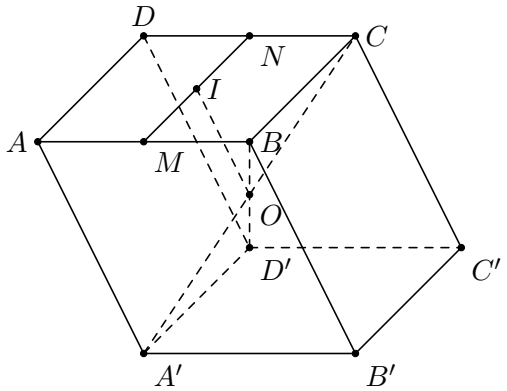
A. N là trung điểm BD.
B. N là đỉnh của hình bình hành $BCDN$.
C. N là đỉnh của hình bình hành $CDBN$.
D. N trùng với A.

✍Lời giải.
Ta có $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{DC}$.
Đẳng thức chứng tỏ N là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CDBN$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 87. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O. Gọi I là tâm của hình hình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'}=\vec{u}$, $\overrightarrow{CA'}=\vec{v}$, $\overrightarrow{BD'}=\vec{x}$, $\overrightarrow{DB'}=\vec{y}$. Khi đó

A. $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{4}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$.
B. $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$.
C. $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$.
D. $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{4}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$.

✍Lời giải.
Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB, CD.
Vì I là trung điểm của MN nên $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=2\overrightarrow{OI}$.
Kết hợp với $\begin{cases}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}\\ \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{ON}\end{cases}$
ta suy ra $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$
$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC'}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA'}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD'}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB'}\right)$
$=-\frac{1}{4}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$.



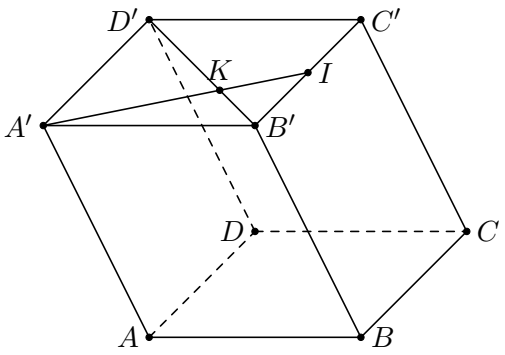
Chọn đáp án (A) □

Câu 88. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$. Gọi I là trung điểm của $B'C'$, K là giao điểm của $A'I$ và $B'D'$. Mệnh đều nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{3}\left(4\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}\right)$.
B. $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{3}\left(4\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}\right)$.
C. $\overrightarrow{DK}=4\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$.
D. $\overrightarrow{DK}=4\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$.

✍Lời giải.
Vì I là trung điểm của $B'C'\Rightarrow\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'C'}=2\overrightarrow{A'I}$.

Và K là giao điểm của $A'I, B'D'$ nên theo định lí Ta-lét ta có $\overrightarrow{A'K} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A'I}$.



Ta có $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'K} = \overrightarrow{AA'} + \frac{2}{3}\overrightarrow{A'I}$

$= \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'C'}\right) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}.$

Khi đó $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AK}$

$= \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{AK}$

$= \vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c} = \frac{4}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} + \vec{c}.$

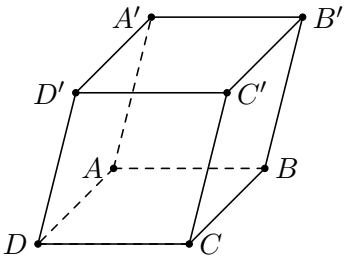
Chọn đáp án (A) □

Câu 89. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức véc-tơ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + k\left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D}\right) = \vec{0}$.

A. $k = 0$. **B**. $k = 1$. **C**. $k = 4$. **D**. $k = 2$.

✍Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD'} = \overrightarrow{AD'}$
và $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC'} = \overrightarrow{C'B} = \overrightarrow{D'A}$.
Suy ra $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + k\left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D}\right) = \overrightarrow{AD'} + k\overrightarrow{D'A} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow (k-1)\overrightarrow{D'A} = \vec{0} \Leftrightarrow k = 1$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 90. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm của đoạn MN. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức véc-tơ $\overrightarrow{IA} + (2k-1)\overrightarrow{IB} + k\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

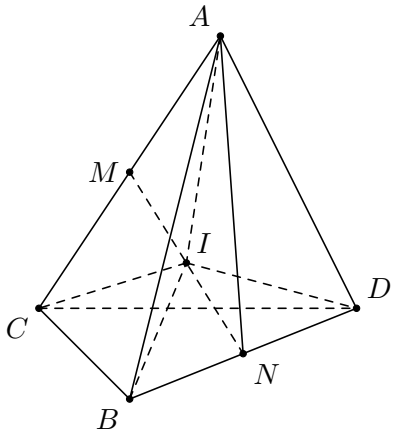
A. $k = 2$. **B**. $k = 4$. **C**. $k = 1$. **D**. $k = 0$.

✍Lời giải.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD
nên $\begin{cases} \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IM} \\ \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IN} \end{cases}$.
Mặt khác $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0}$ (I là trung điểm của MN).
Suy ra $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.
Ta có $\overrightarrow{IA} + (2k-1)\overrightarrow{IB} + k\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}$

$= \underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}}_{\vec{0}} + (2k-2)\overrightarrow{IB} + (k-1)\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$

Suy ra $(k-1)\left(2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right) = \vec{0}$.
Mà $2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} \neq \vec{0}$ nên $k - 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1$.



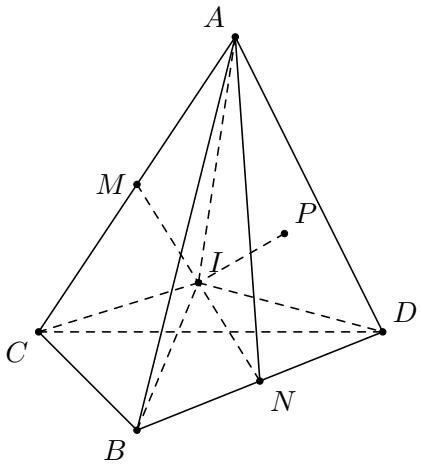
Chọn đáp án (C) □

Câu 91. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm của đoạn MN và P là một điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức véc-tơ $\overrightarrow{PI} = k\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}\right)$.

A. $k = 4$. **B**. $k = \frac{1}{2}$. **C**. $k = \frac{1}{4}$. **D**. $k = 2$.

✍Lời giải.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD
nên $\begin{cases}\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{IM}\\ \overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}=2\overrightarrow{IN}\end{cases}$.
Mặt khác $\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}=\vec{0}$ (I là trung điểm của MN).
Suy ra $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.
Khi đó $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$
$=4\overrightarrow{PI}+\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right)=4\overrightarrow{PI}$.
Mà $\overrightarrow{PI}=k\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}\right)$
nên suy ra $4k=1\Leftrightarrow k=\dfrac{1}{4}$.



Chọn đáp án C □

Câu 92. Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N được xác định bởi $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ (1); $\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DB}+x\overrightarrow{DC}$ (2). Tìm x để các đường thẳng AD, BC, MN cùng song song với một mặt phẳng.

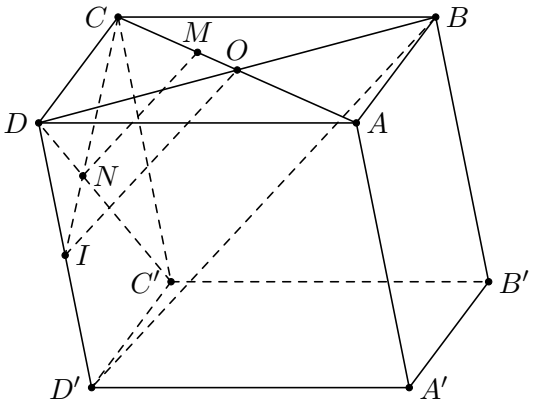
A. $x=-1$. **B**. $x=-2$. **C**. $x=1$. **D**. $x=2$.

Lời giải.
Yêu cầu bài toán tương đương với tìm x để ba véc-tơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ đồng phẳng.
Hệ thức (1) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-3\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}$.
Hệ thức (2) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+x\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AN}=(1+x)\overrightarrow{AB}-x\overrightarrow{AD}+x\overrightarrow{BC}$.
Từ (1) và (2), suy ra $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=(2+x)\overrightarrow{AB}-x\overrightarrow{AD}+(x+3)\overrightarrow{BC}$.
Vậy ba véc-tơ $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}$ đồng phẳng khi $2+x=0\Leftrightarrow x=-2$.
Chọn đáp án B □

Câu 93. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm trên cạnh AC sao cho $AC=3MC$. Lấy điểm N trên đoạn $C'D$ sao cho $C'N=xC'D$. Với giá trị nào của x thì $MN\parallel BD'$.

A. $x=\dfrac{2}{3}$. **B**. $x=\dfrac{1}{3}$. **C**. $x=\dfrac{1}{4}$. **D**. $x=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.
Gọi O là tâm của hình hình hành $ABCD$ và I là trung điểm của DD'.
Nối $C'D$ cắt CI tại $N'\Rightarrow N'$ là trọng tâm của tam giác CDD'.
Ta có OI là đường trung bình của tam giác BDD'.
Suy ra $OI\parallel BD'$.
Mặt khác $\dfrac{CN'}{CI}=\dfrac{CM}{CO}$ nên $MN'\parallel OI$.
Suy ra $MN'\parallel BD'$.
Theo bài ra ta có $MN\parallel BD'$
$\Rightarrow N\equiv N'\Rightarrow C'N=\dfrac{2}{3}C'D\Rightarrow x=\dfrac{2}{3}$.



Chọn đáp án A □

Câu 94. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm được xác định bởi đẳng thức véc-tơ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{MC'}+\overrightarrow{MD'}=\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M là tâm của mặt đáy $ABCD$.
B. M là tâm của mặt đáy $A'B'C'D'$.
C. M là trung điểm của đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt đáy.
D. Tập hợp điểm M là đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt đáy.

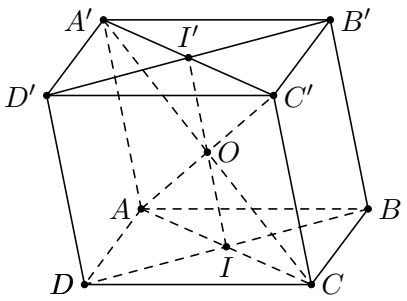
Lời giải.
Gọi $O=AC\cap BD$ và $O'=A'C'\cap B'D'$.
Khi đó $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{O'A'}+\overrightarrow{O'B'}+\overrightarrow{O'C'}+\overrightarrow{O'D'}=\vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD}\right)$
$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+4\overrightarrow{MO}=\vec{0}+4\overrightarrow{MO}=4\overrightarrow{MO}.$
Tương tự, ta cũng có $\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{MC'}+\overrightarrow{MD'}=4\overrightarrow{MO'}$.
Từ đó suy ra $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{MC'}+\overrightarrow{MD'}=\vec{0}$.
Suy ra $4\overrightarrow{MO}+4\overrightarrow{MO'}=\vec{0}\Leftrightarrow 4\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MO'}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MO'}=\vec{0}$.
Vậy điểm M cần tìm là trung điểm của OO'.
Chọn đáp án C □

Câu 95. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Điểm M xác định bởi đẳng thức véc-tơ $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm BB'.
B. M là tâm hình bình hành $BCC'B'$.
C. M là trung điểm CC'.
D. M là tâm hình bình hành $ABB'A'$.

Lời giải.
Gọi I, I' lần lượt là tâm các mặt đáy $ABCD$, $A'B'C'D'$. Suy ra O là trung điểm của II'.
Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.
Theo giả thiết ta có $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\right)$
$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{IB}$.
Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên từ đẳng thức $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{IB}$ suy ra M là trung điểm BB'.

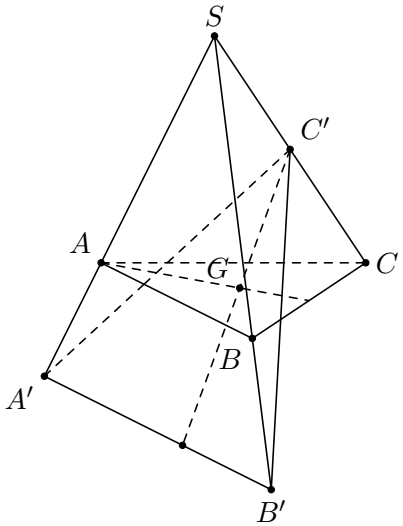


Chọn đáp án A □

Câu 96. Cho hình chóp $S.ABC$. Lấy các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các tia SA, SB, SC sao cho $\frac{SA}{SA'}=a$, $\frac{SB}{SB'}=b$, $\frac{SC}{SC'}=c$, trong đó a, b, c là các số thay đổi. Để mặt phẳng $(A'B'C')$ đi qua trọng tâm của tam giác ABC thì

A. $a+b+c=3$. **B**. $a+b+c=4$. **C**. $a+b+c=2$. **D**. $a+b+c=1$.

Lời giải.
Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.
Ta có $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
Khi đó $3\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=\vec{0}$.
Mà $\overrightarrow{SA}=a\overrightarrow{SA'}$, $\overrightarrow{SB}=b\overrightarrow{SB'}$, $\overrightarrow{SC}=c\overrightarrow{SC'}$.
Suy ra $3\overrightarrow{SG}=a\overrightarrow{SA'}+b\overrightarrow{SB'}+c\overrightarrow{SC'}$
$\Leftrightarrow\overrightarrow{SG}=\frac{a}{3}\overrightarrow{SA'}+\frac{b}{3}\overrightarrow{SB'}+\frac{c}{3}\overrightarrow{SC'}$.
Vì $(A'B'C')$ đi qua trọng tâm tam giác ABC
nên $\overrightarrow{GA'}$, $\overrightarrow{GB'}$, $\overrightarrow{GC'}$ đồng phẳng.
Do đó, tồn tại ba số l, m, n sao cho $(l^2+m^2+n^2\neq 0)$ và
$l\overrightarrow{GA'}+m\overrightarrow{GB'}+n\overrightarrow{GC'}=\vec{0}$
$\Leftrightarrow l\left(\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{SA'}\right)+m\left(\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{SB'}\right)+n\left(\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{SB'}\right)=\vec{0}$
$\Leftrightarrow(l+m+n)\overrightarrow{SG}=l\overrightarrow{SA'}+m\overrightarrow{SB'}+n\overrightarrow{SC'}$.
$\Rightarrow\overrightarrow{SG}=\frac{l}{l+m+n}\overrightarrow{SA'}+\frac{m}{l+m+n}\overrightarrow{SB'}+\frac{n}{l+m+n}\overrightarrow{SC'}$
$=\frac{a}{3}\cdot\overrightarrow{SA'}+\frac{b}{3}\cdot\overrightarrow{SB'}+\frac{c}{3}\cdot\overrightarrow{SC'}$.
Suy ra $\frac{a}{3}+\frac{b}{3}+\frac{c}{3}=\frac{l}{l+m+n}+\frac{m}{l+m+n}+\frac{n}{l+m+n}=1\Rightarrow a+b+c=3$.



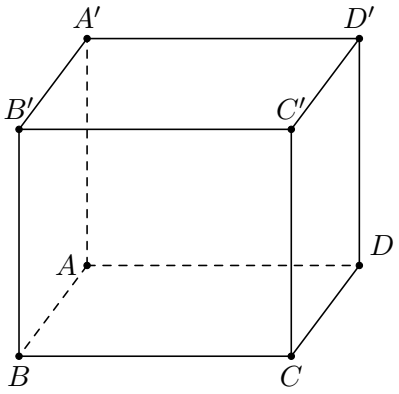
Chọn đáp án A □

Câu 97. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng.
B. Một đường cắt hai đường thẳng cắt nhau cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng.

C. Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một thì cùng nằm trong một mặt phẳng.
D. Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một và không nằm trong một mặt phẳng thì đồng quy.

✍Lời giải.



Mệnh đề "Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng" sai. Ví dụ Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có AA' cắt AB và $A'D'$ nhưng ba đường thẳng AA', AB và $A'D'$ không đồng phẳng.
Mệnh đề "Một đường cắt hai đường thẳng cắt nhau cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng" sai. Ví dụ: Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'B'$ cắt hai đường thẳng cắt nhau cho trước là AA' và $A'D'$ nhưng ba đường thẳng $AA', A'B'$ và $A'D'$ không đồng phẳng.
Mệnh đề "Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một thì cùng nằm trong một mặt phẳng" sai. Ví dụ: Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'B', AA', A'D'$ cắt nhau từng đôi một nhưng không cùng nằm trong một mặt phẳng.
Chọn đáp án (D) □

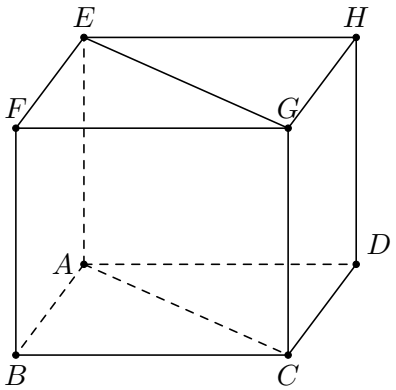
Câu 98. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a. Tính $P = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$.

A. $P = a^2$. **B**. $P = a^2\sqrt{2}$. **C**. $P = a^2\sqrt{3}$. **D**. $P = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

✍Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$.
Do đó

$$\begin{aligned} P &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= AB \cdot AC \cdot \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= a^2. \end{aligned}$$

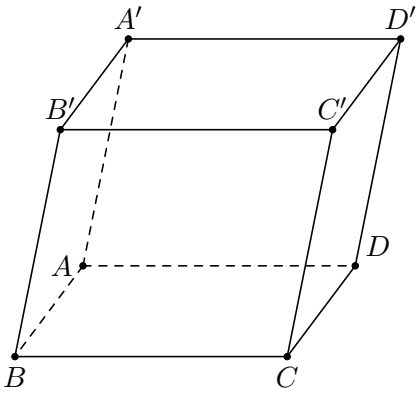


Chọn đáp án (A) □

Câu 99. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ với tâm O. Hãy chỉ ra đẳng thức **sai** trong các đẳng thức sau đây

A. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.
B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A} = \vec{0}$.
C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'}$.
D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'O} + \overrightarrow{OC'}$.

✍Lời giải.

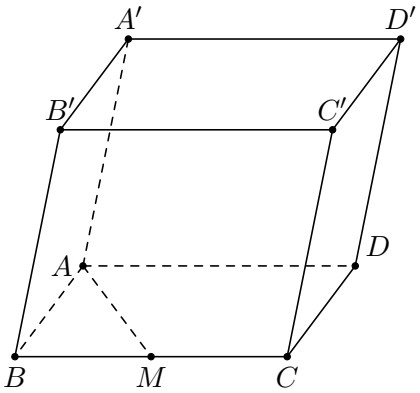


Theo qui tắc hình hộp thì $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.
Ta có $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{C'D'} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'A} = \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{C'A} = \vec{0}$.
Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'O} + \overrightarrow{OC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC'}$.
Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB'}$ (quy tắc hình bình hành) và $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AD'}$ nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} \neq \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 100. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{d}$. Trong các biểu thức vectơ sau đây, biểu thức nào là đúng?

A. $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.
B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.
C. $\vec{b} + \vec{d} - \vec{c} = \vec{0}$.
D. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$.

✍**Lời giải.**



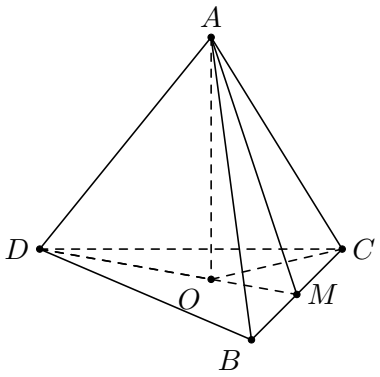
Gọi M là trung điểm BC khi đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM} \Rightarrow \vec{b} + \vec{c} = 2\overrightarrow{AM} \neq \vec{a}$.
Dựng hai điểm D, D' để $ABDC.A'B'D'C'$ là hình hộp.
Ta có $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = -\vec{d}$.
Mà $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD'} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{AD'} \neq -\vec{d} \neq \vec{d}$.
Ta có $\vec{b} + \vec{d} - \vec{c} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 101. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{a^2}{2}$.
B. $AB \perp CD$ hay $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.
C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.
D. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$.

✍**Lời giải.**

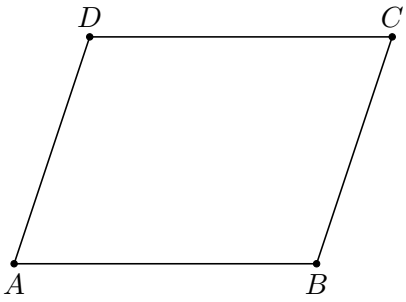
Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=a\cdot a\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{a^2}{2}$.
Gọi M là trung điểm CD và O là trọng tâm tam giác BCD.
Ta có $\begin{cases}AO\perp CD\\BM\perp CD\end{cases}\Rightarrow CD\perp AB$ hay $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.
Theo quy tắc ba điểm $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.



Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=a\cdot a\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{a^2}{2}\\\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}=-\left(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}\right)=-\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}\right)=-a\cdot a\cdot\cos 60^\circ=-\dfrac{a^2}{2}.\end{cases}$
Chọn đáp án (D) □

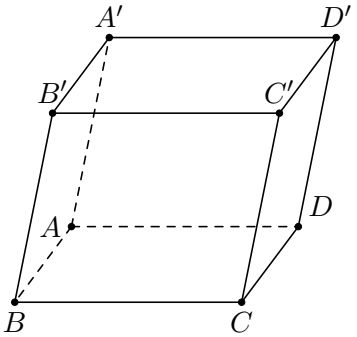
Câu 102. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. Cho hình chóp $S.ABCD$. Nếu có $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$ thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
B. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.
C. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$.
D. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.
✍Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}&\Leftrightarrow\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SD}\\&\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\end{aligned}$$



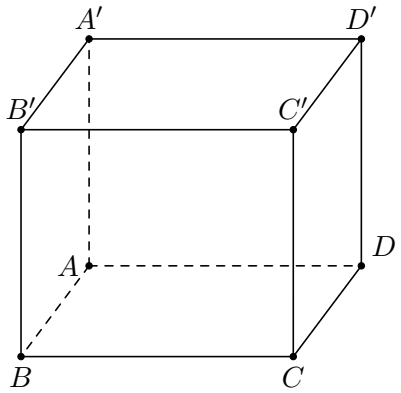
Vậy tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.
Với bốn điểm bất kỳ A, B, C, D ta luôn có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$.
Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 103. Mệnh đề nào sau đây **sai**?
A. Ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng nếu có một trong ba vectơ đó bằng vectơ $\vec{0}$.
B. Ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng nếu có hai trong ba vectơ đó cùng phương.
C. Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ba vectơ $\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{C'A'},\overrightarrow{DA'}$ đồng phẳng.
D. Vectơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ luôn luôn đồng phẳng với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
✍Lời giải.
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và gọi M là trung điểm $C'D'$.
Giả sử $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{c}=\overrightarrow{CM}$.
Khi đó $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{AM}$ không đồng phẳng với hai vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 104. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Mệnh đề nào sau đây **sai**?
A. $\left|\overrightarrow{AC'}\right|=a\sqrt{3}$.
B. $\overrightarrow{AD'}\cdot\overrightarrow{AB'}=a^2$.
C. $\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{CD'}=0$.
D. $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A'}=\vec{0}$.
✍Lời giải.



Ta có $\left|\overrightarrow{AC'}\right| = \sqrt{AB^2 + AD^2 + A'A^2} = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

Ta có $\overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{AB'} = \left|\overrightarrow{AD'}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB'}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{AB'}\right) = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 60^\circ = a^2$.

Dễ dàng chứng minh được $\overrightarrow{AB'} \perp \overrightarrow{CD'} \Rightarrow \overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{CD'} = 0$.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{DA} \end{cases}$.

Khi đó: $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}\right) = \overrightarrow{AB} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 105. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là sai?

A. Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có cặp số m, n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$, ngoài ra cặp số m, n là duy nhất.

B. Nếu có $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ và một trong ba số m, n, p khác 0 thì ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

C. Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi ba vectơ đó cùng có giá thuộc một mặt phẳng.

D. Ba tia Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một thì ba tia đó không đồng phẳng.

✍**Lời giải.**

Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi ba vectơ đó cùng có giá song song với một mặt phẳng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 106. Cho hai điểm phân biệt A, B và một điểm O bất kì. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{BA}$.

B. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$.

C. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB}$.

D. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

✍**Lời giải.**

Ta có $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} = k\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BA} \Rightarrow M, A, B$ thẳng hàng.

Chọn đáp án (C) □

1 ĐÁP ÁN

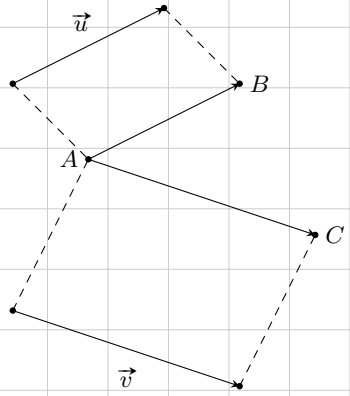
1. B	2. D	3. C	4. A	5. A	6. A	7. B	8. A	9. D	10. C
11. B	12. C	13. D	14. B	15. D	16. A	17. B	18. C	19. B	20. B
21. B	22. C	23. C	24. A	25. A	26. A	27. B	28. C	29. B	30. C
31. A	32. B	33. A	34. A	35. B	36. C	37. C	38. A	39. D	40. B
41. C	42. C	43. A	44. A	45. B	46. C	47. C	48. C	49. C	50. D
51. B	52. C	53. D	54. B	55. C	56. C	57. A	58. A	59. B	60. D
61. C	62. A	63. B	64. A	65. D	66. C	67. B	68. C	69. D	70. B
71. D	72. A	73. B	74. C	75. B	76. B	77. A	78. A	79. A	80. B
81. C	82. B	83. C	84. A	85. B	86. C	87. A	88. A	89. B	90. C
91. C	92. B	93. A	94. C	95. A	96. A	97. D	98. A	99. C	100. C
101. D	102. A	103. D	104. D	105. C	106. C				

BÀI 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A TÓM TẮT LÝ LÝ THUYẾT

1 TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉC-TƠ TRONG KHÔNG GIAN

Định nghĩa 1. Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai véc-tơ khác véc-tơ - không. Lấy một điểm A bất kì, gọi B, C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Khi đó, ta gọi $\widehat{BAC}$ $(0^\circ \leq \widehat{BAC} \leq 180^\circ)$ là góc giữa hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, kí hiệu là $(\vec{u}, \vec{v})$.



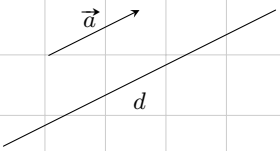
Định nghĩa 2. Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai véc-tơ khác véc-tơ - không. Tích vô hướng của hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu là $\vec{u} \cdot \vec{v}$, và được tính bởi công thức

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

⚠ *Trong trường hợp $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$, ta quy ước $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.*

2 GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Định nghĩa 3.
Véc-tơ $\vec{a}$ khác véc-tơ - không được gọi là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d nếu giá của véc-tơ $\vec{a}$ song song hoặc trùng với đường thẳng d.

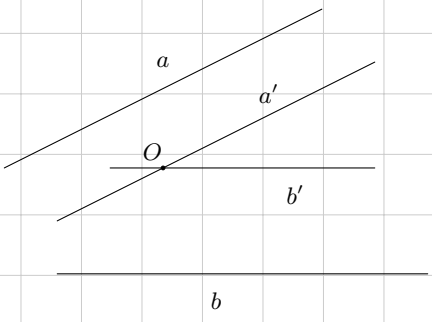


① Nếu $\vec{a}$ là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d thì véc-tơ $k\vec{a}$ với $k \neq 0$ cũng là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d.

② Một đường thẳng d trong không gian hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm A thuộc d và một véc-tơ chỉ phương $\vec{a}$ của nó.

③ Hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ chúng là hai đường thẳng phân biệt và có hai véc-tơ chỉ phương cùng phương.

Định nghĩa 4. Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a và b.



① Để xác định góc giữa hai đường thẳng a và b ta có thể lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng đó rồi vẽ một đường thẳng qua O và song song với đường thẳng còn lại.

② Nếu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ lần lượt là véc-tơ chỉ phương của a và b, đồng thời $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$ thì góc giữa hai đường thẳng a và b bằng α nếu $0° \le \alpha \le 90°$ và bằng $180° - \alpha$ nếu $90° < \alpha \le 180°$.

③ Nếu a và b là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng bằng $0°$.

B CÁC DẠNG TOÁN

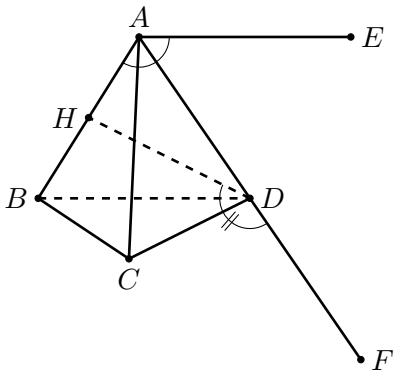
Dạng 1. Xác định góc giữa hai véc-tơ

Ta xác định một điểm cho trước trên hình làm điểm gốc và dời các véc-tơ cần tính góc về điểm gốc đó.

Ví dụ 1. Cho tứ diện đều $ABCD$ có H là trung điểm của cạnh AB. Hãy tính góc giữa các cặp véc-tơ sau đây:

① $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BD}$. ② $\overrightarrow{DH}$ và $\overrightarrow{AD}$.

✍Lời giải.



① Dựng $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD}$. Ta có $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = \widehat{BAE} = 120°$.

② Dựng $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AD}$. Ta có $(\overrightarrow{DH}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DF}) = \widehat{HDF} = 180° - 30° = 150°$.

□

Ví dụ 2. Cho tứ diện $SABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC = a$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{SM}$ và $\overrightarrow{AB}$.

✍Lời giải.

Gọi α là góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{SM}$ và $\overrightarrow{AB}$, ta có $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{AB}}{SM \cdot AB}$.

Có $BC = AB = \sqrt{SA^2 + SB^2} = a\sqrt{2}$, $SM = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

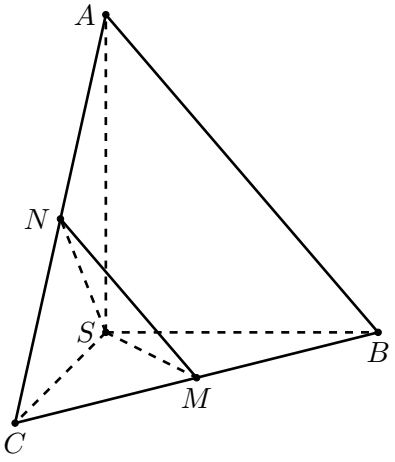
Mặt khác ta có $\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}) \cdot (\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA})$

$= \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{SB}^2 - \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SA}) = \dfrac{a^2}{2}$

Vậy $\cos\alpha = \dfrac{a^2}{2 \cdot a\sqrt{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°$.

Cách khác: Gọi N là trung điểm của AC, ta dễ dàng chứng minh được $\triangle SMN$ đều.

Có $(\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{NM}) = (\overrightarrow{MS}, \overrightarrow{MN}) = \widehat{NMS} = 60°$.



□

Dạng 2. Xác định góc giữa hai đường thẳng trong không gian

Ta thường có hai phương pháp để giải quyết cho dạng toán này.

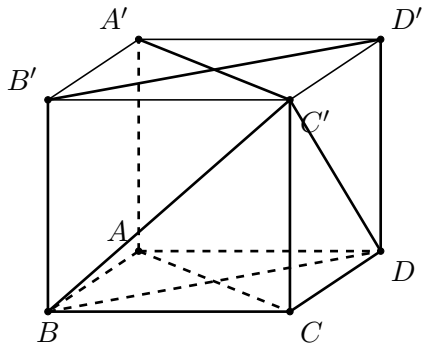
— ***Phương pháp 1:*** *Sử dụng định nghĩa góc giữa hai đường thẳng, kết hợp sử dụng hệ thức lượng trong tam giác (định lý* cos*, công thức trung tuyến).*

— ***Phương pháp 2:*** *Sử dụng tích vô hướng của hai véc-tơ.*

Ví dụ 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a. Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau đây

① AB và $A'D'$. ② AD và $A'C'$. ③ BC' và $B'D'$.

✍Lời giải.



① Ta có $A'D' \parallel AD$ nên $(AB, A'D') = (AB, AD) = \widehat{BAD} = 90°$.

② Ta có $A'C' \parallel AC$ nên $(AD, A'C') = (AD, AC) = \widehat{DAC} = 45°$.

③ Ta có $B'D' \parallel BD$ nên $(BC', B'D') = (BC', BD) = \widehat{DBC'}$.
Ta có $BD = BC' = C'D = AB\sqrt{2}$ nên $\triangle BDC'$ đều, suy ra $\widehat{DBC'} = 60°$.
Vậy $(BC', B'D') = 60°$.

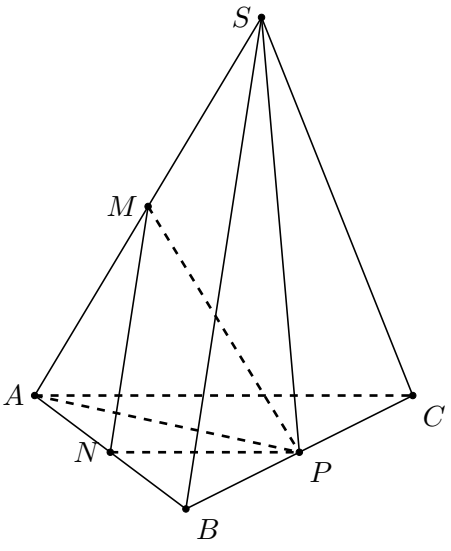
□

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a\sqrt{2}$ và $BC = 2a$. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và SB.

✍Lời giải.

Ta có SAB và SAC là tam giác đều, ABC và SBC là tam giác vuông cân cạnh huyền BC.
Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, AB, BC, ta có $MN \parallel SB$, $NP \parallel AC$ nên $(AC, SB) = (NP, MN)$.
$MN = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $NP = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
$AP = SP = \dfrac{BC}{2} = a$, $SA = a\sqrt{2}$

Nên $\triangle SAP$ vuông cân tại $P \Rightarrow MP = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Vậy $\triangle MNP$ đều $\Rightarrow (AC, SB) = (NP, NM) = \widehat{MNP} = 60°$.



Cách khác:
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{SB} = (\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}) \cdot \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}$
$= 0 - SA \cdot SB \cdot \cos\widehat{ASB} = -a^2$.
$\cos(AC, SB) = \dfrac{|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{SB}|}{AC \cdot SB} = \dfrac{a^2}{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$
$\Rightarrow (AC, SB) = 60°$.

□

Dạng 3. Sử dụng tính chất vuông góc trong mặt phẳng.

Để chứng minh hai đường thẳng $\triangle$ và $\triangle'$ vuông góc với nhau ta có thể sử dụng tính chất vuông góc trong mặt phẳng, cụ thể:

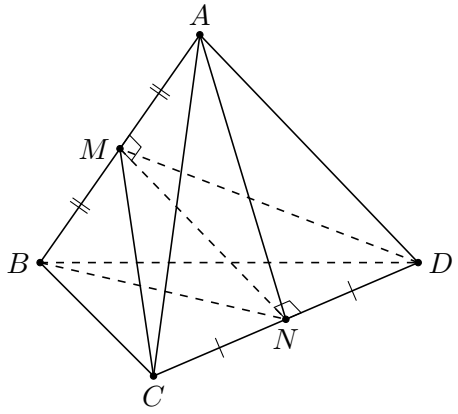
- *Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $\widehat{BAC} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^\circ$.*
- *Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $AB^2 + AC^2 = BC^2$.*
- *Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi trung tuyến xuất phát từ A có độ dài bằng nửa cạnh BC.*
- *Nếu tam giác ABC cân tại A thì đường trung tuyến xuất phát từ A cũng là đường cao của tam giác.*

Ngoài ra, chúng ta cũng sử dụng tính chất: Nếu $d \perp \triangle$ và $\triangle' \parallel d$ thì $\triangle'$ cũng vuông góc với đường thẳng $\triangle$.

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$, $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD, chứng minh rằng MN là đường vuông góc chung của các đường thẳng AB và CD.

✍Lời giải.

Từ giả thiết suy ra các tam giác ABC, ABD đều nên $DM = CM$, do đó $\triangle MCD$ cân tại M.
Từ đó suy ra $MN \perp CD$.
Mặt khác $\triangle BCD = \triangle ACD$ nên $BN = AN$, do đó $\triangle NAB$ cân tại N.
Từ đó suy ra $NM \perp AB$.
Vậy MN là đường vuông góc chung của AB và CD.



□

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 60^\circ, \widehat{BSC} = 90^\circ, \widehat{CSA} = 120^\circ$. Cho H là trung điểm AC. Chứng minh rằng:

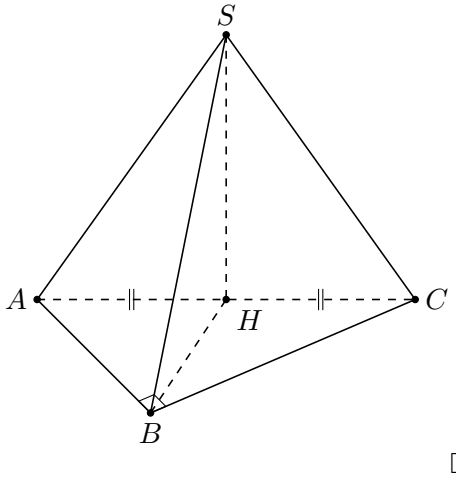
① $SH \perp AC$.

② $AB \perp BC$.

✍Lời giải.

① Do tam giác SAC cân tại S và H là trung điểm AC nên $SH \perp AC$.

② Do $SA = SB = a$ và $\widehat{ASB} = 60^\circ$ nên $\triangle SAB$ đều. Từ đó suy ra $AB = a$. (1)
Áp dụng định lý hàm số cos cho các tam giác SAC ta có $AC^2 = SA^2 + SC^2 - 2SA.SC.\cos\widehat{ASC} = 2a^2 - 2a^2.\cos 120^\circ = 3a^2$. (2)
Áp dụng định lý Pitago cho tam giác SBC, ta có $BC^2 = SB^2 + SC^2 = 2a^2$. (3)
Từ (1), (2), (3) suy ra $AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AB \perp BC$.

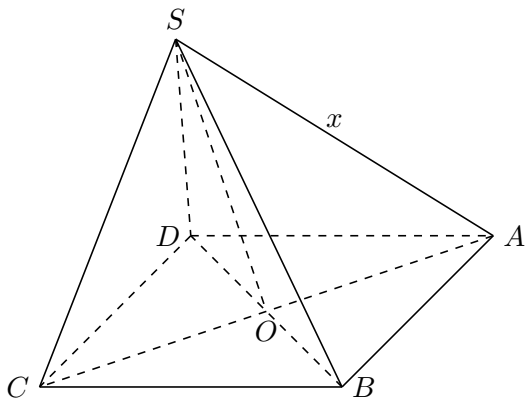


□

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = x$ và tất cả các cạnh còn lại đều bằng 1. Chứng minh rằng $SA \perp SC$.

✍Lời giải.

Ta có $ABCD$ là hình thoi, gọi O là giao điểm của AC và BD suy ra O là trung điểm của AC, BD.
Xét các tam giác SBD và CBD, ta có:
$$\begin{cases} SB = CB \\ SD = CD \\ BD \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle SBD = \triangle CBD.$$
Từ đó suy ra $SO = CO = \dfrac{1}{2}AC$.
Vậy tam giác SAC vuông tại S hay $SA \perp SC$.



□

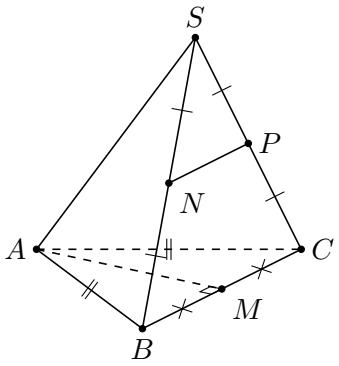
Dạng 4. Hai đường thẳng song song cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba

Để chứng minh đường thẳng $a \perp b$, ta chứng minh $a \parallel a'$, ở đó $a' \perp b$.

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$. Lấy M, N và P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SB và SC. Chứng minh rằng AM vuông góc với NP.

✍Lời giải.

Do N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và SC nên NP là đường trung bình của tam giác SBC, từ đó suy ra $NP \parallel BC$. (1)
Mặt khác, do tam giác ABC cân tại A, suy ra trung tuyến $AM \perp BC$. (2)
Từ (1)(2) suy ra $AM \perp NP$.

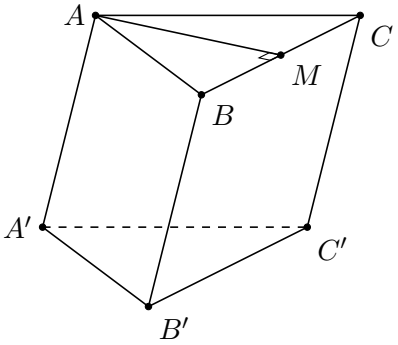


□

Ví dụ 2. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Lấy M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng AM vuông góc với $B'C'$.

✍Lời giải.

Do tứ giác $BB'C'C$ là hình bình hành nên $BC \parallel B'C'$. (1)
Mặt khác, do tam giác ABC đều nên $AM \perp BC$. (2)
Từ (1)(2) suy ra $AM \perp B'C'$.

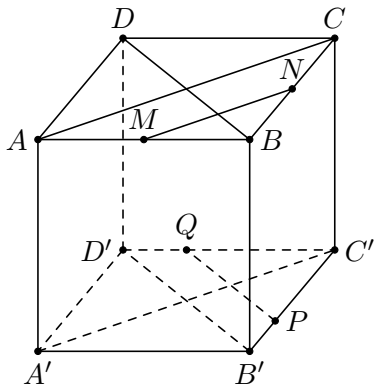


□

Ví dụ 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Trên cạnh $B'C'$ lấy điểm P sao cho $C'P = x$ $(0 < x < a)$. Trên cạnh $C'D'$ lấy điểm Q sao cho $C'Q = x$. Chứng minh rằng MN vuông góc với PQ.

Lời giải.

Do tứ giác $BB'D'D$ là hình chữ nhật, suy ra $BD \parallel B'D'$. (1)
Do $ABCD$ là hình vuông, suy ra $BD \perp AC$. (2)
Từ (1)(2) suy ra $B'D' \perp AC$. (3)
Theo bài ra ta có MN là đường trung bình của tam giác ABC, suy ra $MN \parallel AC$. (4)
Mặt khác, ta có $\dfrac{C'P}{C'B} = \dfrac{C'Q}{C'D'} = \dfrac{x}{a}$, suy ra $PQ \parallel B'D'$. (5)
Từ (3)(4)(5) ta có $MN \perp PQ$.



□

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c khi b song song với c (hoặc b trùng với c).

B. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c thì b song song với c.

C. Góc giữa hai đường thẳng là góc nhọn.

D. Góc giữa hai đường thẳng bằng góc giữa hai véc-tơ chỉ phương của hai đường thẳng đó.

Lời giải.

— Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c thì b song song với c là mệnh đề sai vì có thể b và c chéo nhau.

— Góc giữa hai đường thẳng là góc nhọn là mệnh đề sai vì có thể là góc vuông.

— Góc giữa hai đường thẳng bằng góc giữa hai véc-tơ chỉ phương của hai đường thẳng đó là mệnh đề sai. Nếu góc giữa hai véc-tơ chỉ phương là α với $0° \leq \alpha \leq 90°$ thì góc giữa hai đường thẳng bằng α, nếu góc giữa hai véc-tơ chỉ phương là α với $90° < \alpha \leq 180°$ thì góc giữa hai đường thẳng bằng $180° - \alpha$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại.

C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

Lời giải.

Mệnh đề đúng là: một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia
Chọn đáp án D □

Câu 3. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Nếu $b \perp (P)$ thì $b \parallel a$.
B. Nếu $b \parallel (P)$ thì $b \perp a$.
C. Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$.
D. Nếu $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.

Lời giải.

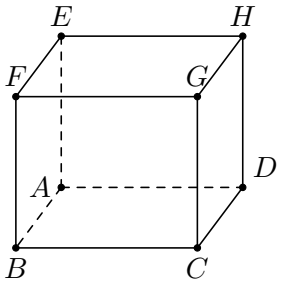
Nếu $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$ là mệnh đề sai vì b có thể nằm trong mặt phẳng (P).
Chọn đáp án D □

Câu 4. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$?

A. 45°. **B**. 90°. **C**. 120°. **D**. 60°.

Lời giải.

Vì $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE}$ ($ADHE$ là hình vuông) nên
$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DH}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right) = \widehat{BAE} = 90^\circ$ ($ABFE$ là hình vuông).



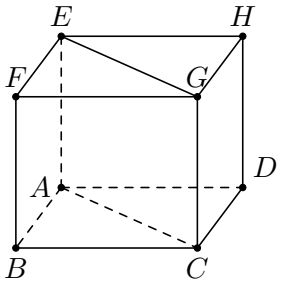
Chọn đáp án B □

Câu 5. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$.

A. 90°. **B**. 60°. **C**. 45°. **D**. 120°.

Lời giải.

Vì $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$ ($AEGC$ là hình chữ nhật) nên
$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \widehat{BAC} = 45^\circ$ ($ABCD$ là hình vuông).



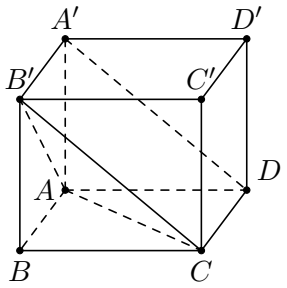
Chọn đáp án C □

Câu 6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa AC và DA' là

A. 45°. **B**. 90°. **C**. 60°. **D**. 120°.

Lời giải.

Gọi a là độ dài cạnh hình lập phương.
Khi đó, tam giác $AB'C$ đều ($AB' = B'C = CA = a\sqrt{2}$).
Suy ra $\widehat{B'CA} = 60^\circ$.
Lại có, DA' song song với CB' nên
$(AC, DA') = (AC, CB') = \widehat{ACB'} = 60^\circ$.



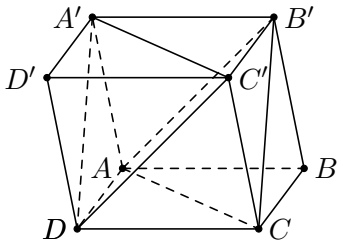
Chọn đáp án C □

Câu 7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử tam giác $AB'C$ và $A'DC'$ đều có ba góc nhọn. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ là góc nào sau đây?

A. $\widehat{AB'C}$. **B**. $\widehat{DA'C'}$. **C**. $\widehat{BB'D}$. **D**. $\widehat{BDB'}$.

Lời giải.

Ta có $AC \parallel A'C'$ ($A'B'CD$ là hình bình hành).
Mà $\widehat{DA'C'}$ nhọn nên $(AC, A'D) = (A'C', A'D) = \widehat{DA'C'}$.



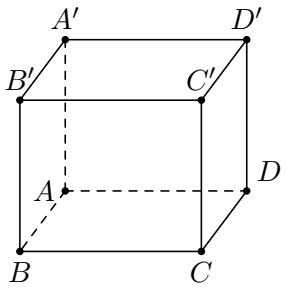
Chọn đáp án B □

Câu 8. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chọn khẳng định **sai**?

A. Góc giữa AC và $B'D'$ bằng 90°.
B. Góc giữa $B'D'$ và AA' bằng 60°.
C. Góc giữa AD và $B'C$ bằng 45°.
D. Góc giữa BD và $A'C'$ bằng 90°.

Lời giải.

Ta có $(AA', B'D') = (BB', B'D') = \widehat{BB'C} = 90°$.
Khẳng định sai là: góc giữa $B'D'$ và AA' bằng $60°$.



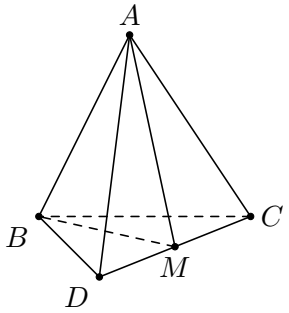
Chọn đáp án B □

Câu 9. Cho tứ diện đều $ABCD$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. $60°$. **B**. $30°$. **C**. $90°$. **D**. $45°$.

✍Lời giải.

Gọi M là trung điểm của CD.
Ta có $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AM} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.
Do đó $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \cdot \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}\right)$
$= \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.
Suy ra $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ nên số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng $90°$.



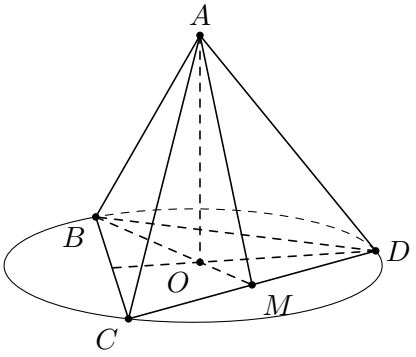
Chọn đáp án C □

Câu 10. Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Góc giữa AO và CD bằng bao nhiêu?

A. $0°$. **B**. $30°$. **C**. $90°$. **D**. $60°$.

✍Lời giải.

Gọi M là trung điểm của CD.
Vì $ABCD$ là tứ diện đều nên $AM \perp CD$, $OM \perp CD$.
Ta có $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{CD} \cdot \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MO}\right)$
$= \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{MO} = \vec{0}$.
Suy ra $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{CD}$ nên số đo góc giữa hai đường thẳng AO và CD bằng $90°$.



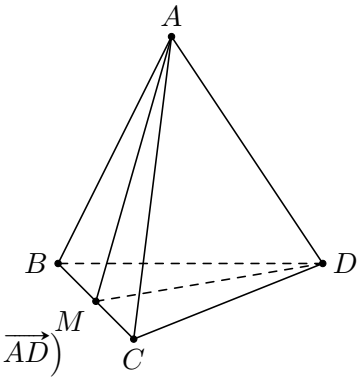
Chọn đáp án C □

Câu 11. Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó $\cos(AB, DM)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B**. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **C**. $\frac{1}{2}$. **D**. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Giả sử cạnh của tứ diện là a.



Tam giác BCD đều $\Rightarrow DM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác ABC đều $\Rightarrow AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DM}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DM}\right|} = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DM}}{a\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}$

Mặt khác: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

$= \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AM}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right) - \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$

$= \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AM}\right|\cdot\cos 30^\circ - \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\cos 60^\circ$

$= a\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} - a\cdot a\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^2}{4}.$

$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{6} > 0 \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}\right) = (AB, DM) \Rightarrow \cos(AB, DM) = \dfrac{\sqrt{3}}{6}.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Hãy xác định góc giữa cặp véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$.

A. 60°. **B**. 45°. **C**. 120°. **D**. 90°.

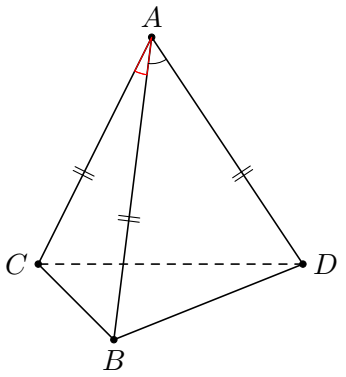
✍Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$= \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) - \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$= \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\cos 60^\circ - \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos 60^\circ.$

Mà $AC = AD \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = 90^\circ$



Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp véc-tơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$?

A. 120°. **B**. 45°. **C**. 60°. **D**. 90°.

✍Lời giải.

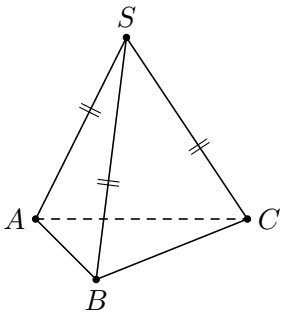
Ta có $\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC}\cdot\left(\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}\right) = \overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{SA}$

$= \left|\overrightarrow{SC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{SB}\right|\cdot\cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SB}) - \left|\overrightarrow{SC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{SA}\right|\cdot\cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SA})$

$= SC\cdot SB\cdot\cos\widehat{BSC} - SC\cdot SA\cdot\cos\widehat{ASC}.$

Mà $SA = SB = SC$ và $\widehat{BSC} = \widehat{ASC} \Rightarrow \overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{AB} = 0.$

Do đó $\left(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}\right) = 90^\circ.$

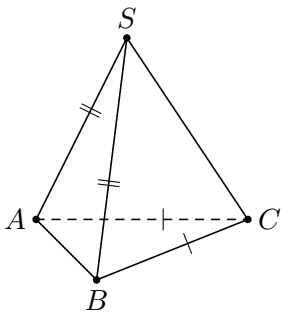


Chọn đáp án (D) □

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB$ và $CA = CB$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng chéo nhau SC và AB.

A. 30°. **B**. 45°. **C**. 60°. **D**. 90°.

✍Lời giải.



Xét $\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CS}\cdot\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)=\overrightarrow{CS}\cdot\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CS}\cdot\overrightarrow{CB}$

$=CS\cdot CA\cdot\cos\widehat{SCA}-CS\cdot CB\cdot\cos\widehat{SCB}$

$=CS\cdot CA\cdot\dfrac{SC^2+CA^2-SA^2}{2SC\cdot CA}-CS\cdot CB\cdot\dfrac{SC^2+CB^2-SB^2}{2SC\cdot CB}$

$=\dfrac{SC^2+CA^2-SA^2}{2}-\dfrac{SC^2+CB^2-SB^2}{2}=0$ (do $SA=SB$ và $CA=CB$).

Vậy $SC\perp AB$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=AC$ và $\widehat{SAC}=\widehat{SAB}$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng chéo nhau SA và BC.

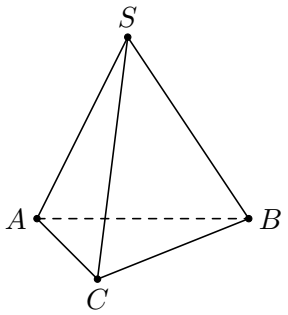
A. 30°. **B**. 45°. **C**. 60°. **D**. 90°.

✍Lời giải.

Xét $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{SA}\cdot\left(\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SB}\right)=\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}$

$=\left|\overrightarrow{SA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{SC}\right|\cdot\cos(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SC})-\left|\overrightarrow{SA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{SB}\right|\cdot\cos\widehat{SAB}$

$=SA\cdot SC\cdot\cos\widehat{ASC}-SA\cdot SB\cdot\cos\widehat{ASB}.$ (1)



Ta có $\begin{cases}SA \text{ chung}\\ AB=AC\\ \widehat{SAB}=\widehat{SAC}\end{cases}\Rightarrow\triangle SAB=\triangle SAC$ (c-g-c) $\Rightarrow\begin{cases}SC=SB\\ \widehat{ASC}=\widehat{ASB}\end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

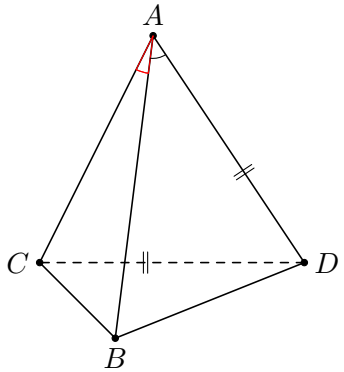
Vậy $SA\perp BC$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC=\dfrac{3}{2}AD$, $\widehat{CAB}=\widehat{DAB}=60^\circ$, $CD=AD$. Gọi φ là góc giữa AB và CD. Chọn khẳng định đúng.

A. $\cos\varphi=\dfrac{3}{4}$. **B**. $\varphi=60^\circ$. **C**. $\varphi=30^\circ$. **D**. $\cos\varphi=\dfrac{1}{4}$.

✍Lời giải.



Ta có $\cos(AB, CD) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|} = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\right|}{AB\cdot CD}$.

Mặt khác $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$= \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) - \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

$= AB\cdot AD\cdot\cos 60^\circ - AB\cdot AC\cdot\cos 60^\circ$

$= AB\cdot AD\cdot\dfrac{1}{2} - AB\cdot\dfrac{3}{2}AD\cdot\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}AB\cdot AD = -\dfrac{1}{4}AB\cdot CD.$

Do có $\cos(AB, CD) = \dfrac{\left|-\frac{1}{4}AB\cdot CD\right|}{AB\cdot CD} = \dfrac{1}{4}$. Vậy $\cos\varphi = \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{CAD} = 90^\circ$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hãy xác định góc giữa cặp véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$?

A. 120°. **B**. 90°. **C**. 60°. **D**. 45°.

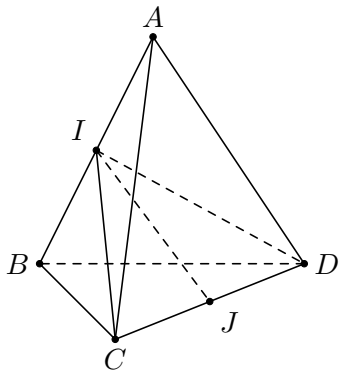
✍Lời giải.

Xét tam giác ICD có J là trung điểm đoạn CD
$\Rightarrow \overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right)$.

Tam giác ABC có $AB = AC$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$
$\Rightarrow \triangle ABC$ đều $\Rightarrow CI \perp AB$.

Tương tự, ta có $\triangle ABD$ đều nên $DI \perp AB$.

Ta có $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right)\cdot\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$
$\Rightarrow \overrightarrow{IJ}\perp\overrightarrow{AB} \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{IJ}\right) = 90^\circ$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD. Góc (IE, JF) bằng

A. 30°. **B**. 45°. **C**. 60°. **D**. 90°.

✍Lời giải.

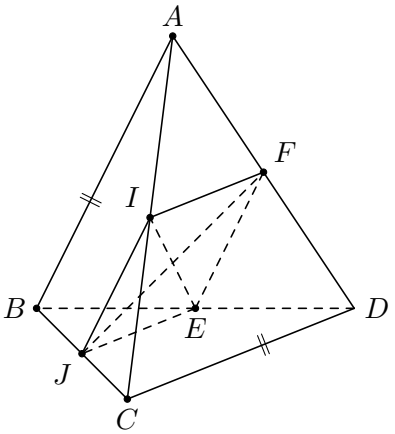
Ta có IF là đường trung bình của $\triangle ACD \Rightarrow \begin{cases} IF \parallel CD \\ IF = \dfrac{1}{2}CD \end{cases}$.

Lại có JE là đường trung bình của $\triangle BCD \Rightarrow \begin{cases} JE \parallel CD \\ JE = \dfrac{1}{2}CD \end{cases}$.

$\Rightarrow \begin{cases} IF = JE \\ IF \parallel JE \end{cases} \Rightarrow$ Tứ giác $IJEF$ là hình bình hành.

Mặt khác: $\begin{cases} IJ = \dfrac{1}{2}AB \\ JE = \dfrac{1}{2}CD \end{cases}$. Mà $AB = CD \Rightarrow IJ = JE$.

Do đó $IJEF$ là hình thoi. Suy ra $(IE, JF) = 90^\circ$.



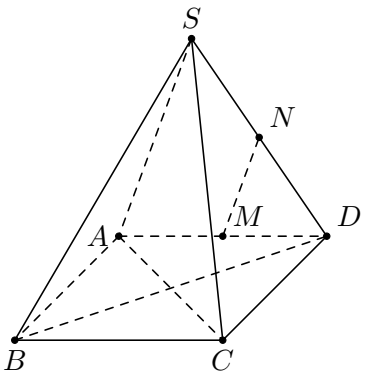
Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc (MN, SC) bằng

A. 45°. **B**. 30°. **C**. 90°. **D**. 60°.

✍Lời giải.

Do $ABCD$ là hình vuông cạnh a
$\Rightarrow AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AC^2 = 2a^2 = SA^2 + SC^2 \Rightarrow \triangle SAC$ vuông tại S.
Từ giả thiết ta có MN là đường trung bình của $\triangle DSA$.
$\Rightarrow \overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA}$. Khi đó $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{SC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = 0$.
$\Rightarrow MN \perp SC \Rightarrow (MN, SC) = 90°$.



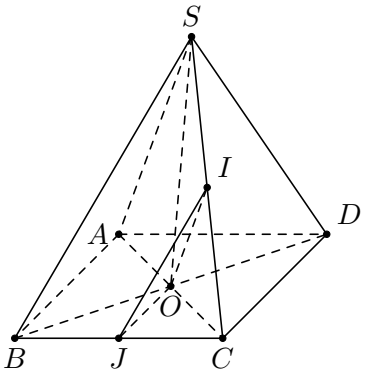
Chọn đáp án C □

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Số đo của góc (IJ, CD) bằng

A. $90°$. **B**. $45°$. **C**. $30°$. **D**. $60°$.

✍Lời giải.

Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$
$\Rightarrow OJ$ là đường trung bình của $\triangle BCD \Rightarrow \begin{cases} OJ \parallel CD \\ OJ = \frac{1}{2}CD. \end{cases}$
Vì $CD \parallel OJ \Rightarrow (IJ, CD) = (IJ, OJ)$.
Xét tam giác IOJ, có $\begin{cases} IJ = \frac{1}{2}SB = \frac{a}{2} \\ OJ = \frac{1}{2}CD = \frac{a}{2} \\ IO = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow \triangle IOJ$ đều.
Vậy $(IJ, CD) = (IJ, OJ) = \widehat{IJO} = 60°$.



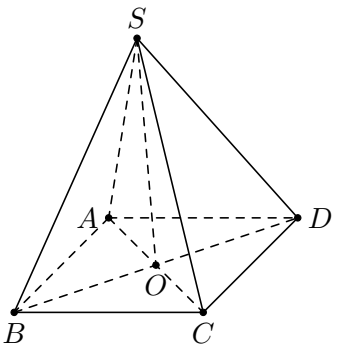
Chọn đáp án D □

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA = x$, tất cả các cạnh còn lại đều bằng a. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng SA và SC.

A. $30°$. **B**. $45°$. **C**. $60°$. **D**. $90°$.

✍Lời giải.

Theo giả thiết, ta có $AB = BC = CD = DA = a$ nên $ABCD$ là hình thoi cạnh a.
Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có $\triangle CBD = \triangle SBD$ (c-c-c).
Suy ra hai đường trung tuyến tương ứng CO và SO bằng nhau.
Xét tam giác SAC, ta có $SO = CO = \frac{1}{2}AC$.
Do đó tam giác SAC vuông tại S (tam giác có đường trung tuyến bằng nửa cạnh đáy).
Vậy $SA \perp SC$.



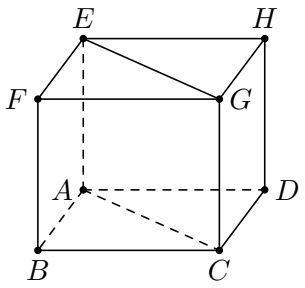
Chọn đáp án D □

Câu 22. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$.

A. $a^2\sqrt{3}$. **B**. a^2. **C**. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **D**. $a^2\sqrt{2}$.

✍Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
Mặt khác $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.
Suy ra $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.
Vì $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AB\perp AD\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$.
$\Rightarrow\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=AB^2+0=a^2$.

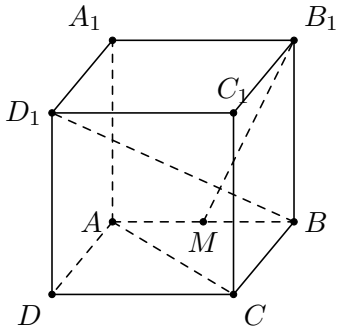


Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a. Gọi M là trung điểm của cạnh AD. Giá trị $\overrightarrow{B_1M}\cdot\overrightarrow{BD_1}$ là

A. $\frac{1}{2}a^2$. **B.** a^2. **C.** $\frac{3}{4}a^2$. **D.** $a^2\sqrt{2}$.

✍Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{B_1M}\cdot\overrightarrow{BD_1}=\left(\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\right)\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}\right)$
$=\underbrace{\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{BA}}_{=0}+\underbrace{\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{AD}}_{=0}+\overrightarrow{B_1B}\cdot\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{BA}^2$
$+\underbrace{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}}_{=0}+\underbrace{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DD_1}}_{=0}+\underbrace{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BA}}_{=0}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AD}+\underbrace{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DD_1}}_{=0}$
$=\overrightarrow{B_1B}\cdot\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AD}=-a^2+a^2+\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC=a, BD=3a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết AC vuông góc với BD. Tính MN.

A. $MN=\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $MN=\frac{a\sqrt{10}}{2}$. **C.** $MN=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $MN=\frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

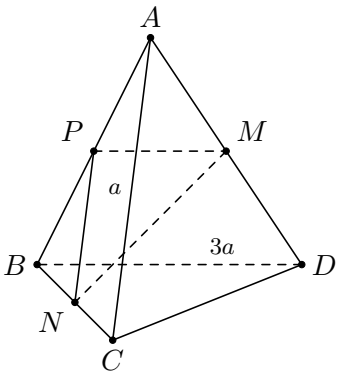
✍Lời giải.

Gọi P là trung điểm của $AB\Rightarrow PN, PM$ lần lượt là đường trung bình của tam giác $\triangle ABC$ và $\triangle ABD$.

Suy ra $\begin{cases}PN=\frac{1}{2}AC=\frac{a}{2}\\ PM=\frac{1}{2}BD=\frac{3a}{2}.\end{cases}$

Ta có $AC\perp BD\Rightarrow PN\perp PM$ hay tam giác $\triangle PMN$ vuông tại P.

Do đó $MN=\sqrt{PN^2+PM^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{9a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{10}}{2}$.



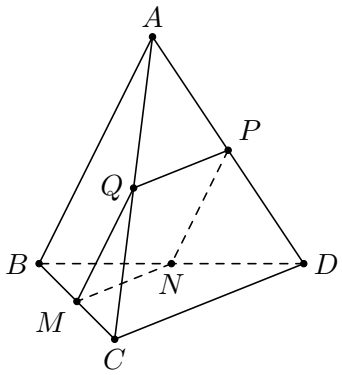
Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD. Mặt phẳng (P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

A. Hình thang. **B.** Hình bình hành.
C. Hình chữ nhật. **D.** Tứ giác không phải hình thang.

✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases}(MNPQ) \parallel AB \\ (MNPQ) \cap (ABC) = MQ\end{cases} \Rightarrow MQ \parallel AB.$
Tương tự ta có $MN \parallel CD$, $NP \parallel AB$, $QP \parallel CD$.
Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.
Lại có $MN \perp MQ$ (do $AB \perp CD$).
Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.



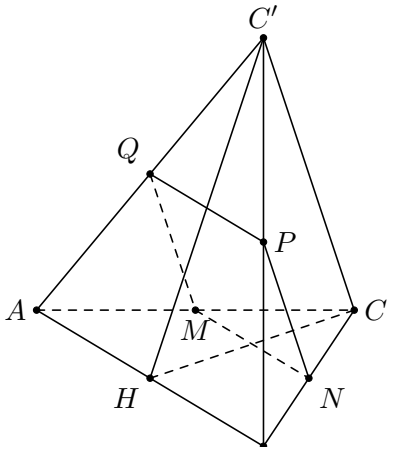
Chọn đáp án C □

Câu 26. Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BC' và $C'A$. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

A. Hình bình hành. **B**. Hình chữ nhật. **C**. Hình vuông. **D**. Hình thang.

✍Lời giải.

Vì M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BC' và $C'A$.
$\Rightarrow \begin{cases}PQ = MN = \dfrac{1}{2}AB \\ PQ \parallel AB \parallel MN\end{cases} \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.
Gọi H là trung điểm của AB.
Vì hai tam giác ABC và ABC' đều nên $\begin{cases}CH \perp AB \\ C'H \perp AB.\end{cases}$
Suy ra $AB \perp (CHC')$. Do đó $AB \perp CC'$.
Ta có $\begin{cases}PQ \parallel AB \\ PN \parallel CC' \\ AB \perp CC'\end{cases} \Rightarrow PQ \perp PN.$
Vậy tứ giác $MNPQ$là hình chữ nhật.



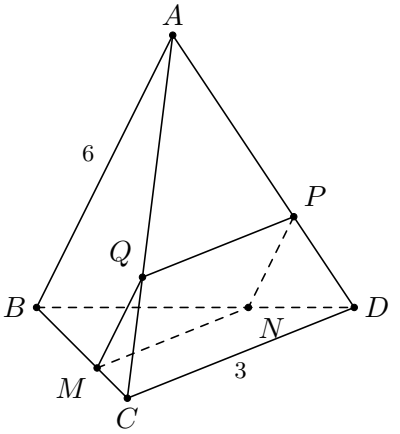
Chọn đáp án B □

Câu 27. Cho tứ diện $ABCD$ trong đó $AB = 6$, $CD = 3$, góc giữa AB và CD là 60° và điểm M trên BC sao cho $BM = 2MC$. Mặt phẳng (P) qua M song song với AB và CD cắt BD, AD, AC lần lượt tại M, N, Q. Diện tích $MNPQ$ bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B**. $\sqrt{3}$. **C**. $2\sqrt{3}$. **D**. $\dfrac{3}{2}$.

✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases}(MNPQ) \parallel AB \\ (MNPQ) \cap (ABC) = MQ\end{cases} \Rightarrow MQ \parallel AB.$
Tương tự ta có $MN \parallel CD$, $NP \parallel AB$, $QP \parallel CD$.
Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.
Ta có $(AB, CD) = (QM, MP) = 60^\circ$.
Suy ra $S_{MNPQ} = QM \cdot QN \cdot \sin 60^\circ$.
Ta có $\triangle CMQ \backsim \triangle CBA \Rightarrow \dfrac{CM}{CB} = \dfrac{MQ}{AB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow MQ = 2.$
$\triangle AQN \backsim \triangle ACD \Rightarrow \dfrac{AQ}{AC} = \dfrac{QN}{CD} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow QN = 2.$
Vậy $S_{MNPQ} = QM \cdot QN \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$



Chọn đáp án C □

Câu 28. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB = 4$, $CD = 6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC = 2BM$. Mặt phẳng (P) đi qua M song song với AB và CD. Diện tích thiết diện của P với tứ diện là

A. 5. **B**. 6. **C**. $\frac{17}{3}$. **D**. $\frac{16}{3}$.

✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases}(MNPQ) \parallel AB \\ (MNPQ) \cap (ABC) = MN\end{cases} \Rightarrow MN \parallel AB.$

Tương tự ta có $MQ \parallel CD$, $NP \parallel CD$, $QP \parallel AB$.

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

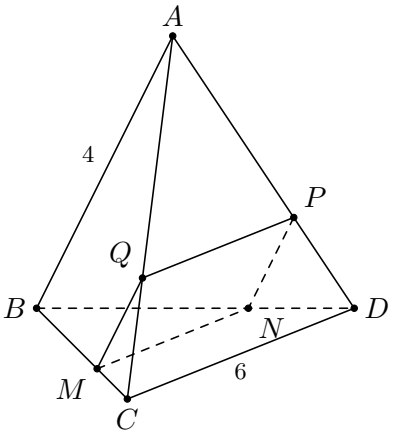
Ta có $(AB, CD) = (MN, MQ) = \widehat{NMQ} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Lại có $\triangle CMN \backsim \triangle CBA \Rightarrow \frac{CM}{CB} = \frac{MN}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN = \frac{4}{3}$;

$\triangle ANP \backsim \triangle ACD \Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{NP}{CD} = \frac{2}{3} \Rightarrow MP = 4.$

Vậy $S_{MNPQ} = MN \cdot NP = \frac{16}{3}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB = CD = 6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC = xBC$ $(0 < x < 1)$. Mặt phẳng (P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q. Diện tích lớn nhất của tứ giác bằng bao nhiêu?

A. 9. **B**. 11. **C**. 10. **D**. 8.

✍Lời giải.

Xét tứ giác $MNPQ$ có $\begin{cases}MQ \parallel NP \parallel AB \\ MN \parallel PQ \parallel CD\end{cases}$

$\Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Mặt khác, $AB \perp CD \Rightarrow MQ \perp MN$.

Do đó, $MNPQ$ là hình chữ nhật.

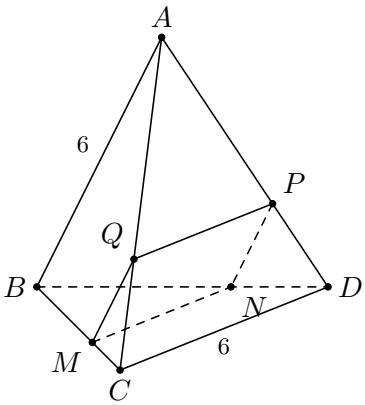
Vì $MQ \parallel AB$ nên $\frac{MQ}{AB} = \frac{CM}{CB} = x \Rightarrow MQ = xAB = 6x$.

Theo giả thiết $MC = xBC \Rightarrow BM = (1-x)\,BC$.

Vì $MN \parallel CD$ nên $\frac{MN}{CD} = \frac{BM}{BC} = 1 - x$

$\Rightarrow MN = (1-x) \cdot CD = 6\,(1-x)$.

Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là:



$$S_{MNPQ} = MN \cdot MQ = 6(1-x) \cdot 6x = 36 \cdot x \cdot (1-x) \le 36\left(\frac{x+1-x}{2}\right)^2 = 9.$$

Ta có $S_{MNPQ} = 9$ khi $x = 1 - x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Vậy diện tích tứ giác $MNPQ$ lớn nhất bằng 9 khi M là trung điểm của BC.

Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Trong không gian cho tam giác ABC. Xác định vị trí của điểm M sao cho giá trị của biểu thức $P = MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. M là trọng tâm tam giác ABC.

B. M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

C. M là trực tâm tam giác ABC.

D. M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

✍Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow G$ cố định và $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Ta có $P = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2$

$= 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) + GA^2 + GB^2 + GC^2$

$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

$\ge GA^2 + GB^2 + GC^2$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv G$.

Vậy $P_{\min} = GA^2 + GB^2 + GC^2$ với $M \equiv G$ là trọng tâm tam giác ABC.

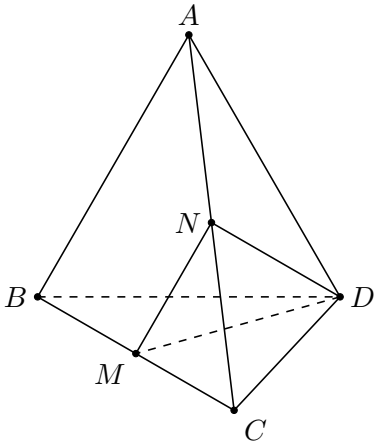
Chọn đáp án A ☐

Câu 31. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi M là trung điểm của BC. Tính cô-sin của góc giữa hai đường thẳng AB và DM.

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi N là trung điểm của AC. Vì $MN \parallel AB$ nên $\cos(AB, DM) = \cos(MN, DM)$.



Tam giác ACD đều cạnh bằng a nên $DN = \frac{a\sqrt{3}}{2} = DM$.

MN là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên $MN = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$.

Xét $\triangle MND$, ta có

$$\cos\widehat{DMN} = \frac{MN^2 + DM^2 - DN^2}{2MN \cdot DM} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Vậy $\cos(AB, DM) = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Chọn đáp án B ☐

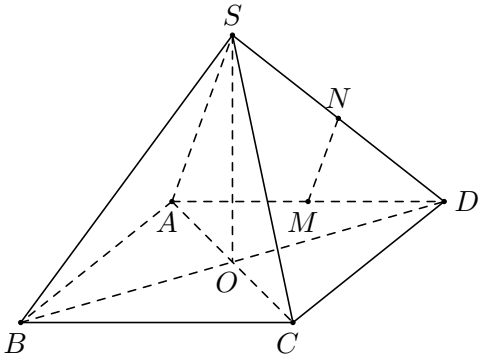
Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo góc (MN, SC) bằng

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $90°$. **D.** $60°$.

✍Lời giải.

Theo giả thiết, suy ra MN là đường trung bình của tam giác DAS nên $MN \parallel SA$, suy ra góc

$$(MN, SC) = \widehat{ASC}.$$



Do $AC = a\sqrt{2}$ suy ra $AC^2 = 2a^2 = SA^2 + SC^2$, từ đó suy ra tam giác SAC vuông cân tại S, suy ra

$$(MN, SC) = \widehat{ASC} = 90°.$$

Chọn đáp án C ☐

Câu 33. Cho tứ diện đều cạnh a, M là trunng điểm của BC. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AB và DM.

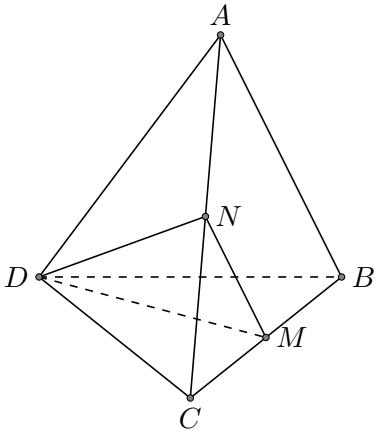
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

✍Lời giải.

Kẻ $MN \parallel AB$, cắt AC tại trung điểm N của AC.

Xét tam giác NMD ta có:

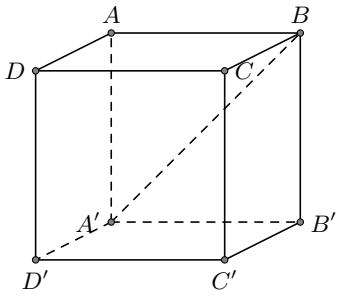
$$\begin{aligned}\cos\widehat{NMD} &= \frac{MN^2 + MD^2 - ND^2}{2MN \cdot MD} \\ &= \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{4}}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.\end{aligned}$$



Chọn đáp án B ☐

Câu 34. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng BA' và CD bằng
A. $90°$. **B**. $60°$. **C**. $30°$. **D**. $45°$.

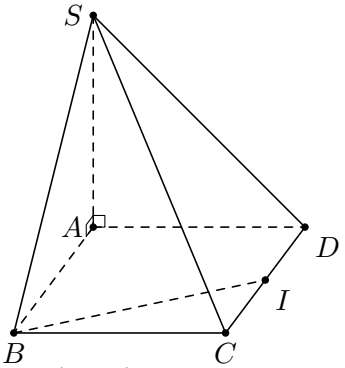
Lời giải.
Ta có $CD \parallel AB$, suy ra góc giữa $A'B$ với CD bằng góc giữa $A'B$ với AB, góc này bằng $45°$.



Chọn đáp án D □

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Đường thẳng SD tạo với mặt phẳng (SAB) một góc $45°$. Gọi I là trung điểm của cạnh CD. Góc giữa hai đường thẳng BI và SD bằng (*số đo góc được làm tròn đến hàng đơn vị*).
A. $39°$. **B**. $42°$. **C**. $51°$. **D**. $48°$.

Lời giải.
Gọi a là số đo cạnh của hình vuông $ABCD$.
Ta có $\begin{cases} DA \perp AB \\ DA \perp SA \end{cases} \Rightarrow DA \perp (SAB)$.
Suy ra $\widehat{DSA} = (SD, (SAB)) = 45°$.
Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$.
I là trung điểm của CD nên $IC = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{a}{2}$.



$\triangle BCI$ vuông tại C có $BI^2 = BC^2 + CI^2$ (định lý Pytago), suy ra $BI = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

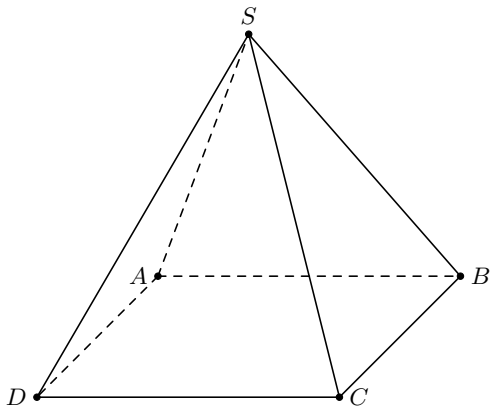
$$\cos(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{SD}) = \frac{\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{SD}}{|\overrightarrow{BI}| \cdot |\overrightarrow{SD}|} = \frac{(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CI}) \cdot \overrightarrow{SD}}{BI \cdot SD} = \frac{(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CI}) \cdot \overrightarrow{SD}}{BI \cdot SD} = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{SD}}{BI \cdot SD}$$

$$= \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{SD}}{BI \cdot SD} = \frac{AD \cdot SD \cdot \cos(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{SD})}{BI \cdot SD} = \frac{AD \cdot \cos 45°}{BI} = \frac{a \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}}}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Suy ra $(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{SD}) \approx 51°$. Vậy $(BI, SD) \approx 51°$.
Chọn đáp án C □

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ đều có $SA = AB = a$. Góc giữa SA và CD là
A. $60°$. **B**. $30°$. **C**. $90°$. **D**. $45°$.

Lời giải.
Vì $AB \parallel CD$ nên góc giữa SA và CD bằng góc giữa SA và AB.
Vì $SA = AB$ nên tam giác SAB đều, vậy góc giữa chúng bằng $60°$.



Chọn đáp án A □

Câu 37. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **đúng**?
A. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì đường thẳng a vuông góc với đường thẳng c.

B. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b song song với đường thẳng c thì đường thẳng a vuông góc với đường thẳng c.

C. Cho ba đường thẳng a, b, c vuông góc với nhau từng đôi một. Nếu có một đường thẳng d vuông góc với a thì d song song với b hoặc c.

D. Cho hai đường thẳng a, b song song với nhau. Một đường thẳng c vuông góc với a thì c vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (a, b).

✍Lời giải.

Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b song song với đường thẳng c thì đường thẳng a vuông góc với đường thẳng c. Đây mệnh đề **đúng**.

Các mệnh đề còn lại **sai**.

Chọn đáp án (B) □

Câu 38. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **đúng**?

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

C. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại.

D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

✍Lời giải.

Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia. Đây mệnh đề **đúng**.

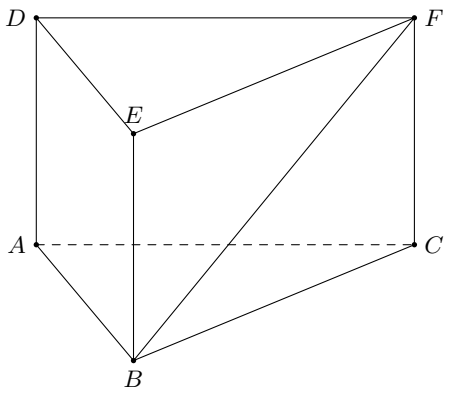
Các mệnh đề còn lại **sai**.

Chọn đáp án (D) □

Câu 39.

Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.DEF$ có cạnh đáy bằng a, chiều cao bằng $2a$. Tính cô-sin của góc tạo bởi hai đường thẳng AC và BF.

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{10}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. **C**. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{3}}{10}$.



✍Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF}$.

Khi đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BF} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EF} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EF} \\ &= \overrightarrow{EF}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Ta suy ra

$$\begin{aligned} & AC \cdot BF \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BF}) = EF \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AC}) \\ \Leftrightarrow\ & \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BF}) = \frac{EF \cdot \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC})}{BF} \\ \Leftrightarrow\ & \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BF}) = \frac{a \cdot \dfrac{1}{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}.\end{aligned}$$

Vậy cô-sin của góc tạo bởi hai đường thẳng AC và BF bằng $\dfrac{\sqrt{5}}{10}$.

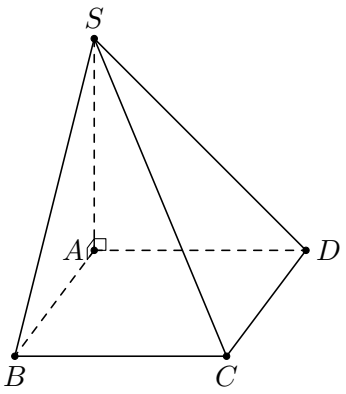
Chọn đáp án (A) □

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SB và CD là

A. 90°. **B**. 60°. **C**. 30°. **D**. 45°.

✍Lời giải.

$\triangle SAB$ vuông tại A có $SA = AB = a$ nên $\triangle SAB$ vuông cân tại A.
$(SB, CD) = (SB, AB) = \widehat{SBA} = 45^\circ$.



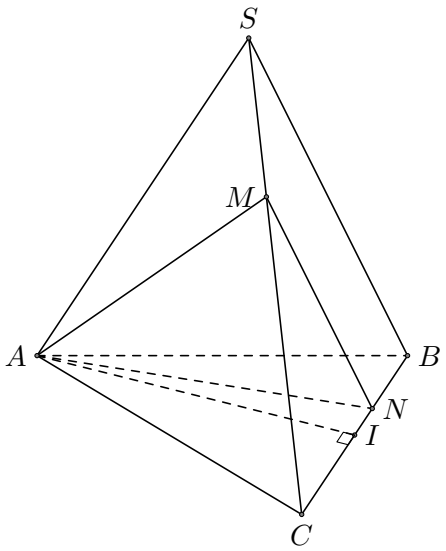
Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $SA = 9a$, $AB = 6a$. Gọi M là điểm thuộc cạnh SC sao cho $SM = \dfrac{1}{2}MC$. Cô-sin của góc giữa hai đường thẳng SB và AM bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{7}{2\sqrt{48}}$. **B**. $\dfrac{1}{2}$. **C**. $\dfrac{\sqrt{19}}{7}$. **D**. $\dfrac{14}{3\sqrt{48}}$.

✍Lời giải.

Gọi N là điểm thuộc cạnh BC sao cho $NB = \dfrac{1}{3}BC$. Khi đó, $MN \parallel SB$ nên $\widehat{(AM, SB)} = \widehat{(AM, MN)}$.
Ta có



— $\cos\widehat{ASM} = \dfrac{81a^2 + 81a^2 - 36a^2}{2 \cdot 9a \cdot 9a} = \dfrac{7}{9}$.

— $AM = \sqrt{81a^2 + 9a^2 - 2 \cdot 9a \cdot 3a \cos\widehat{ASM}} = 4a\sqrt{3}$.

— $MN = \dfrac{2}{3}SB = 6a$.

— $AN = \sqrt{36a^2 + 4a^2 - 2 \cdot 6a \cdot 2a \cdot \cos 60^\circ} = 2a\sqrt{7}$.

Do đó

$$\cos\widehat{(AM, SB)} = \frac{|AM^2 + MN^2 - AN^2|}{2 \cdot AM \cdot MN} = \frac{7\sqrt{3}}{18}.$$

Chọn đáp án (D) □

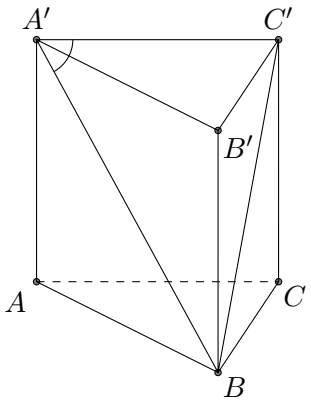
Câu 42. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi φ là góc hợp bởi hai đường thẳng $A'B$ và AC. Tính $\cos\varphi$.

A. $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **B**. $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C**. $\cos\varphi = 0$. **D**. $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

✍Lời giải.

Do $A'C' \parallel AC$ nên $(AC, A'B) = (A'C', A'B) = \widehat{BA'C'}$. Đặt $AB = a$.
Xét $\triangle BA'C'$, có $A'B = BC' = a\sqrt{2}$, $A'C' = a$. Suy ra

$$\cos\varphi = \frac{A'B^2 + A'C'^2 - BC'^2}{2A'B \cdot A'C'} = \frac{a^2}{2 \cdot a\sqrt{2} \cdot a} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$



Chọn đáp án (D) □

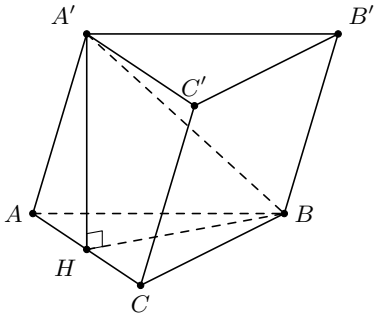
Câu 43. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm cạnh AC, đường thẳng $A'B$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc $30°$. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AB và CC'. Tính $\cos\alpha$.

A. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\cos\alpha = \sqrt{2}$. **C.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

✍Lời giải.

Ta có $A'H \perp (ABC)$ nên $\widehat{A'BH} = (A'B, (ABC)) = 30°$. Suy ra

$$A'H = BH \cdot \tan 30° = \frac{a}{2},$$
$$A'B = \frac{BH}{\cos 30°} = a,$$
$$AA' = \sqrt{AH^2 + A'H^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



Do đó $\cos\alpha = \cos(AB, AA') = \frac{A'A^2 + AB^2 - A'B^2}{2A'A \cdot AB} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

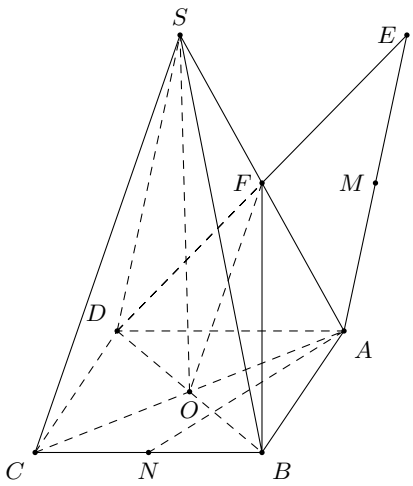
Câu 44. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, E là điểm đối xứng của D qua trung điểm SA. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AE và BC. Tính góc giữa đường thẳng MN và BD.

A. $60°$. **B.** $90°$. **C.** $45°$. **D.** $75°$.

✍Lời giải.

Gọi O làm tâm hình vuông $ABCD$; Tứ giác $SDAE$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SD}$. Khi đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{SD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$



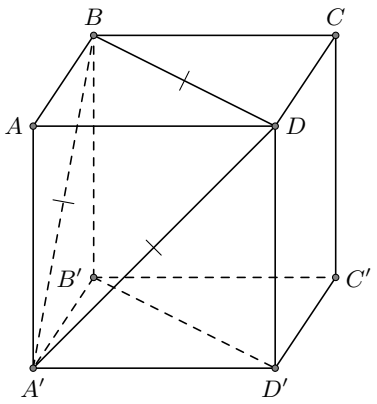
Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BD} &= \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{SD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) \cdot \overrightarrow{BD}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{SD} \cdot \overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{SD} \cdot \overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \cdot \left(\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{AB}\right)\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \cdot \left(\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DC}\right)\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{SC}.\end{aligned}$$

Mà $\begin{cases} BD \perp SO \\ BD \perp AC \end{cases}$ nên $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$ hay $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{SC} = 0$.
Vậy $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ hay $(MN, BD) = 90°$.
Chọn đáp án B □

Câu 45. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng BA' và $B'D'$ bằng
A. $45°$. **B**. $90°$. **C**. $30°$. **D**. $60°$.

Lời giải.
Do $BD \parallel B'D'$ nên góc giữa hai đường thẳng BA' và $B'D'$ bằng góc giữa hai đường thẳng BA' và BD.
Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $\Delta A'BC$ là tam giác đều.
Khi đó góc $\widehat{A'BD} = 60°$.
Vậy góc giữa hai đường thẳng BA' và $B'D'$ bằng $60°$.



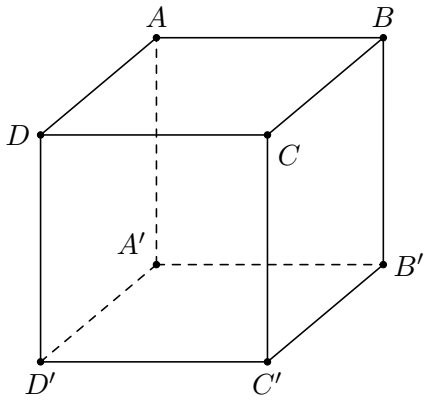
Chọn đáp án D □

Câu 46. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?
A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
B. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc thì song song với đường thẳng còn lại.
C. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng còn lại.
D. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

Lời giải.
Đương nhiên "một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng còn lại ".
Chọn đáp án C □

Câu 47. Trong không gian cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c. Khẳng định nào sau đây **đúng**?
A. Nếu $a \parallel b$ và $c \perp a$ thì $c \perp b$.
B. Nếu góc giữa a và c bằng góc giữa b và c thì $a \parallel b$.
C. Nếu a và b cùng vuông góc với c thì $a \parallel b$.
D. Nếu a và b cùng nằm trong mặt phẳng $(\alpha) \parallel c$ thì góc giữa a và c bằng góc giữa b và c.

Lời giải.
Xét hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$



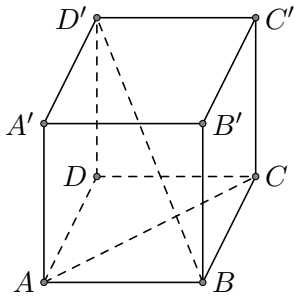
— Mệnh đề: "Nếu góc giữa a và c bằng góc giữa b và c thì $a \parallel b$" là mệnh đề sai. Ví dụ $\widehat{(AD', AA')} = \widehat{(AB', AA')} = 45°$ mà AB' không song song với AD'.

— Mệnh đề: "Nếu a và b cùng vuông góc với c thì $a \parallel b$" là mệnh đề sai. Ví dụ $AB \perp AA'$ và $AB \perp A'D'$ mà AB không song song với $A'D'$.

— Mệnh đề: "Nếu a và b cùng nằm trong mặt phẳng $(\alpha) \parallel c$ thì góc giữa a và c bằng góc giữa b và c" là mệnh đề sai. Ví dụ AB và BC cùng nằm trong mặt phẳng $(ABCD) \parallel B'C'$. Nhưng góc giữa BC với $B'C'$ bằng $0°$, góc giữa AB và $B'C'$ bằng $90°$.

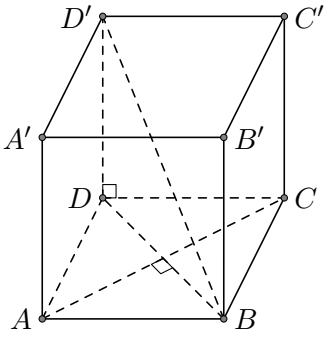
Vậy mệnh đề đúng "Nếu $a \parallel b$ và $c \perp a$ thì $c \perp b$".
Chọn đáp án A □

Câu 48.
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ bên dưới). Góc giữa hai đường thẳng AC và BD' bằng



A. $30°$. **B**. $90°$. **C**. $60°$. **D**. $45°$.

Lời giải.
Ta có $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp DD' \end{cases} \Rightarrow AC \perp (BDD'B')$.
Mà $BD' \subset (BDD'B')$ nên $AC \perp BD'$.
Vậy $(AC, BD') = 90°$.



Chọn đáp án B □

Câu 49. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$, $AC \perp BD$. Góc giữa hai véc tơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$ là
A. $30°$. **B**. $45°$. **C**. $60°$. **D**. $90°$.

Lời giải.
Vì $AB \perp CD$ và $AC \perp BD$ nên ta suy ra

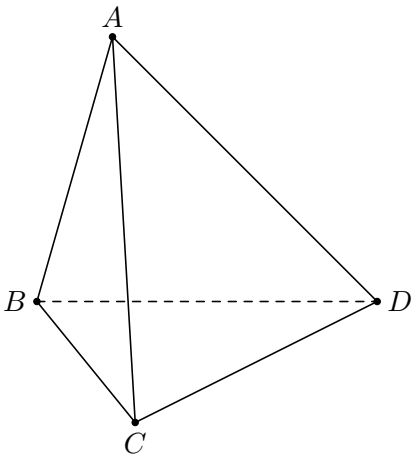
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}\right) \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD}^2 + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DC} \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} + 0 + \overrightarrow{BD}^2 + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DC} \\
&= \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD}^2 + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DC} \\
&= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD}^2 + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DC} \\
&= 0 + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD}^2 + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DC} \\
&= \left(\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DC}\right) + \overrightarrow{BD}^2 \\
&= \left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC}\right) \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD}^2 \\
&= \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD}^2 \\
&= -\overrightarrow{BD}^2 + \overrightarrow{BD}^2 = 0.
\end{aligned}$$

Suy ra $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}\right) = 90°$.
Chọn đáp án D □

Câu 50.

Cho tứ diện $ABCD$ với $AC = \dfrac{3}{2}AD$, $\widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 60^\circ$, $CD = AD$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng AB và CD. Chọn khẳng định đúng về góc φ.

A. $\cos\varphi = \dfrac{3}{4}$. **B.** $\varphi = 30^\circ$. **C.** $\varphi = 60^\circ$. **D.** $\cos\varphi = \dfrac{1}{4}$.

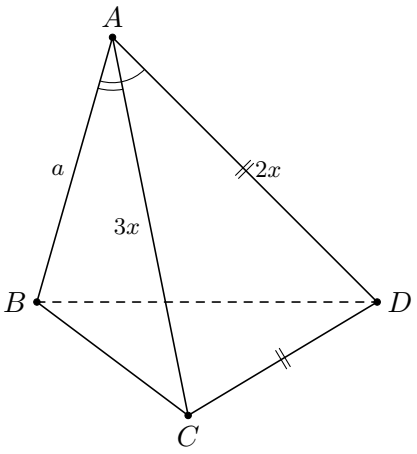


✍Lời giải.

Đặt $AB = a$ và $AD = 2x$ với $a,\ x > 0 \Rightarrow AC = 3x$, $CD = 2x$.

Ta có

$$\begin{aligned}
\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) &= \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{AB\cdot CD} \\
&= \frac{\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})}{a\cdot 2x} \\
&= \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{2ax} \\
&= \frac{AB\cdot AD\cdot\cos 60^\circ - AB\cdot AC\cos 60^\circ}{2ax} \\
&= \frac{a\cdot 2x\cdot\frac{1}{2} - a\cdot 3x\cdot\frac{1}{2}}{2ax} \\
&= -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$



Vì $\cos(AB, CD) = \left|\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})\right| = \dfrac{1}{4}$ hay $\cos\varphi = \dfrac{1}{4}$.

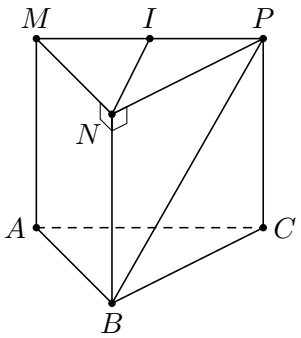
Chọn đáp án (D) □

Câu 51. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.MNP$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi I là trung điểm cạnh MP. Cô-sin của góc giữa hai đường thẳng BP và NI bằng

A. $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

✍Lời giải.

Giả sử tất cả các cạnh đều bằng a. Hình lăng trụ tam giác đều là hình lăng trụ đứng có 2 đáy là tam giác đều nên $BN \perp (MNP)$.



Ta có $\cos\left(\widehat{BP, NI}\right) = \left|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{NI}}\right)\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{NI}\right|}{BP\cdot NI}$.

Mặt khác $BP = a\sqrt{2}$, $NI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$,

$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{NI} = \left(\overrightarrow{NP}-\overrightarrow{NB}\right)\cdot\overrightarrow{NI} = \overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{NI} - \overrightarrow{NB}\cdot\overrightarrow{NI}$

$= NP\cdot NI\cdot\cos\widehat{PNI} - 0 = a\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\cos 30^\circ = \dfrac{3a^2}{4}$.

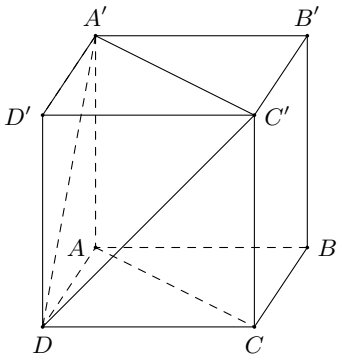
Vậy $\cos\left(\widehat{BP, NI}\right) = \dfrac{\frac{3a^2}{4}}{a\sqrt{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 52.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (hình vẽ bên). Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ bằng

A. $45°$. **B**. $30°$. **C**. $60°$. **D**. $90°$.



✍Lời giải.

Ta có $(AC, A'D) = (A'C', A'D) = \widehat{DA'C'} = 60°$ (vì $A'D = A'C' = C'D$).

Chọn đáp án C □

Câu 53. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AD, $C'D'$. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng MN và CP.

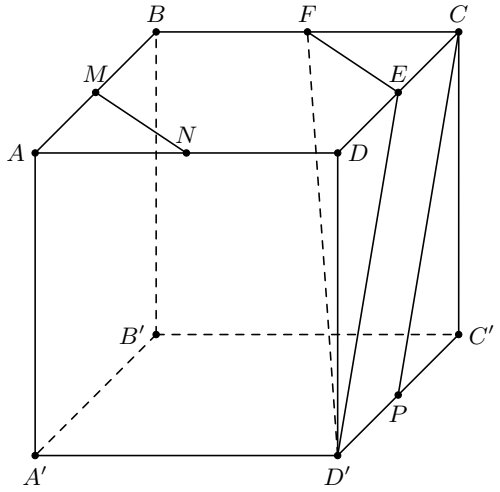
A. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **C**. $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. **D**. $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

✍Lời giải.

Giả sử độ dài cạnh hình lập phương là a.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{CP} &= \left(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'P}\right)\\ &= \left(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}\right)\cdot\overrightarrow{C'P}\\ &= -\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{C'P} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{CD'} = \frac{1}{4}AB^2.\end{aligned}$$



Do đó

$$\begin{aligned}\cos(MN;CP) &= \frac{|\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{CP}|}{MN\cdot CP}\\ &= \frac{\frac{1}{4}a^2}{a\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a\frac{\sqrt{5}}{2}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{10}}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 54. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC$. Gọi M là trung điểm của BC. Góc giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

A. $90°$. **B**. $30°$. **C**. $60°$. **D**. $45°$.

✍Lời giải.

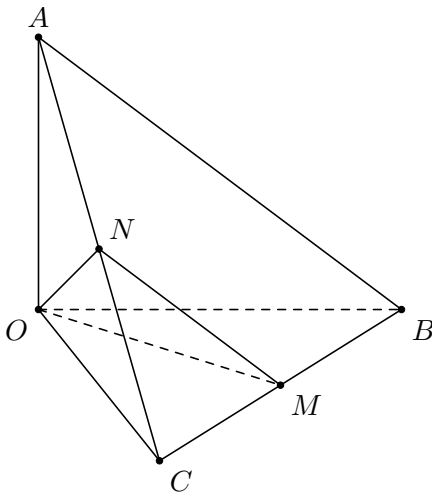
Đặt $OA = OB = OC = a$, suy ra $AB = AC = BC = a\sqrt{2}$.

Gọi N là trung điểm của AC, ta có $MN \parallel AB$ và $MN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra $(OM, AB) = (OM, MN)$.

Xét tam giác OMN có $ON = OM = MN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ nên tam giác OMN đều.

Vậy $(OM, AB) = (OM, MN) = \widehat{OMN} = 60°$.



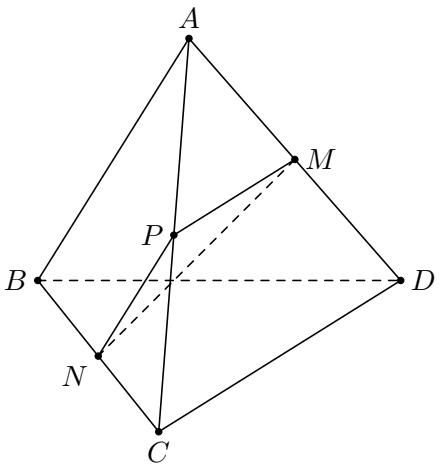
Chọn đáp án C □

Câu 55. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Xác định độ dài đoạn thẳng MN để góc giữa hai đường thẳng AB và MN bằng $30°$.

A. $MN = \dfrac{a}{2}$. **B.** $MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $MN = \dfrac{a}{4}$.

✍Lời giải.

Gọi P là trung điểm của AC.
Khi đó $PM = \dfrac{1}{2}CD = \dfrac{1}{2}AB = PN$.
Ta có tam giác PMN cân tại P. Lại có góc giữa AB và MN bằng $30°$ nên góc giữa MN và PN bằng $30°$. Do đó tam giác PMN là tam giác cân có góc ở đỉnh bằng $120°$.
Ta có $PN\sqrt{3} = MN \Rightarrow MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

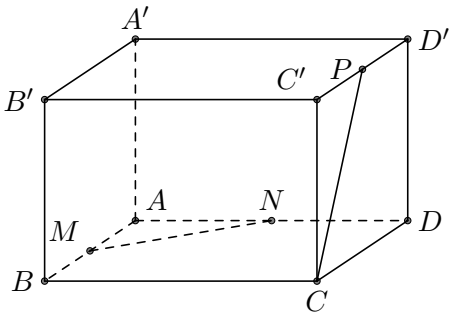


Chọn đáp án B □

Câu 56.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AD và $C'D'$. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng MN và CP.

A. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. **D.** $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$.



✍Lời giải.

Có

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{MN}\left(\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'P}\right) = \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{C'P} = \left(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}\right)\cdot\overrightarrow{C'P}$$
$$= -\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{C'P} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{4}AB^2 = \frac{1}{4}a^2.$$

Có $MN = \dfrac{1}{2}BD = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ và $CP = \sqrt{CC'^2 + C'P^2} = a\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Vậy $\cos(MN, CP) = \left|\dfrac{\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{CP}}{MN\cdot CP}\right| = \dfrac{\frac{1}{4}a^2}{a\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a\frac{\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

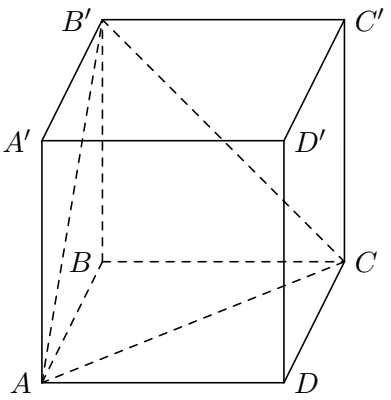
Chọn đáp án C □

Câu 57. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB' và $A'D$.

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

✍Lời giải.

Ta có $A'D \parallel B'C$ nên góc giữa AB' và $A'D$ là góc giữa AB' và $B'C$.
Vì tam giác $AB'C$ đều nên $(AB', B'C) = 60°$.
Vậy $(AB', A'D) = 60°$.



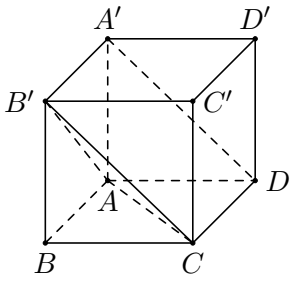
Chọn đáp án C □

Câu 58. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ bằng

A. $45°$. **B**. $60°$. **C**. $30°$. **D**. $90°$.

✍Lời giải.

Gọi $a\,(a > 0)$ là độ dài cạnh của hình lập phương.
Ta có $AC = B'C = AB' = a\sqrt{2}$.
Nên tam giác $AB'C$ là tam giác đều.
Do $A'D$ song song với $B'C$ nên góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ bằng góc giữa AC và $B'C$ và bằng $60°$.



Chọn đáp án B □

Câu 59. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật và $\widehat{CAD} = 40°$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AC và $B'D'$ là

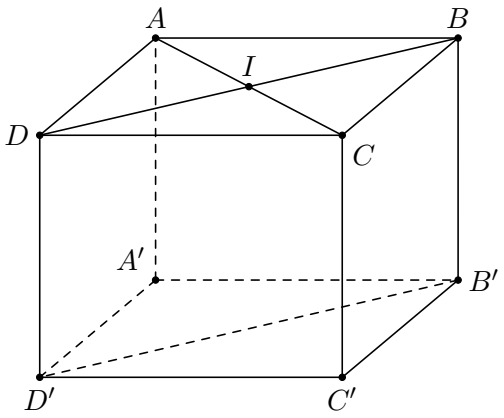
A. $40°$. **B**. $20°$. **C**. $50°$. **D**. $80°$.

✍Lời giải.

Ta có $(AC, B'D') = (AC, BD)$ (do $BD \parallel B'D'$).
Gọi I là tâm của hình chữ nhật $ABCD$, ta có tam giác IAD cân tại I và $\widehat{IAD} = \widehat{IDA} = 40°$.
Suy ra

$$\widehat{AID} = 180° - 40° - 40° = 100°.$$

Do đó $(AC, BD) = 180° - 100° = 80°$.



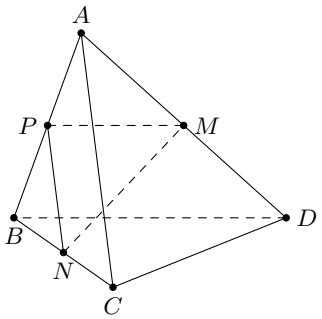
Chọn đáp án D □

Câu 60. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = 3a$, $BD = 4a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết AC vuông góc với BD. Tính độ dài đoạn MN.

A. $MN = \dfrac{\sqrt{5}a}{2}$. **B**. $MN = \dfrac{\sqrt{7}a}{2}$. **C**. $MN = \dfrac{7a}{2}$. **D**. $MN = \dfrac{5a}{2}$.

✍Lời giải.

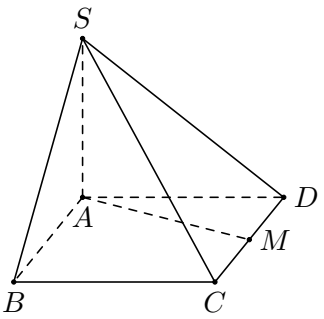
Gọi P là trung điểm của AB
$\Rightarrow (\widehat{AC, BD}) = (\widehat{PM, PN}) = \widehat{NPM} = 90^\circ$.
Suy ra $MN = \sqrt{PN^2 + PM^2} = \sqrt{\dfrac{AC^2}{4} + \dfrac{BD^2}{4}} = \dfrac{5a}{2}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 61.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 2; cạnh $SA = 1$ và vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của CD. Tính $\cos\alpha$ với α là góc tạo bởi hai đường thẳng SB và AM.

A. $\dfrac{2}{5}$. **B.** $-\dfrac{2}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{4}{5}$.



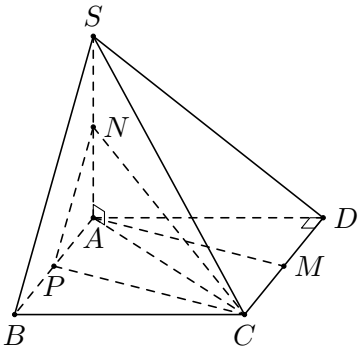
✍Lời giải.
Gọi N, P lần lượt là trung điểm của SA và AB. Ta thấy $NP \parallel SB$, $PC \parallel AM$. Do đó α là góc tạo bởi hai đường thẳng NP và PC.

Ta có $NP = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $PC = AM = \sqrt{5}$.

$NC = \sqrt{NA^2 + AC^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + 8} = \dfrac{\sqrt{33}}{2}$.

Suy ra $\cos\widehat{NPC} = \dfrac{NP^2 + PC^2 - NC^2}{2 \cdot NP \cdot PC} = \dfrac{\dfrac{5}{4} + 5 - \dfrac{33}{4}}{2 \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{5}} = -\dfrac{2}{5}$.

Vậy $\cos\alpha = \dfrac{2}{5}$.

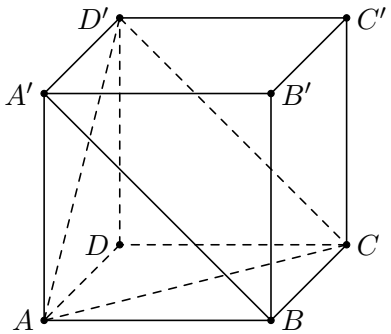


Chọn đáp án (A) □

Câu 62. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và $A'B$.

A. 60°. **B.** 45°. **C.** 75°. **D.** 90°.

✍Lời giải.
Do $A'BCD'$ là hình bình hành nên $A'B \parallel D'C$.
$\Rightarrow (\widehat{AC, A'B}) = (\widehat{AC, D'C}) = \widehat{ACD'} = 60^\circ$ (Do tam giác $D'AC$ đều).



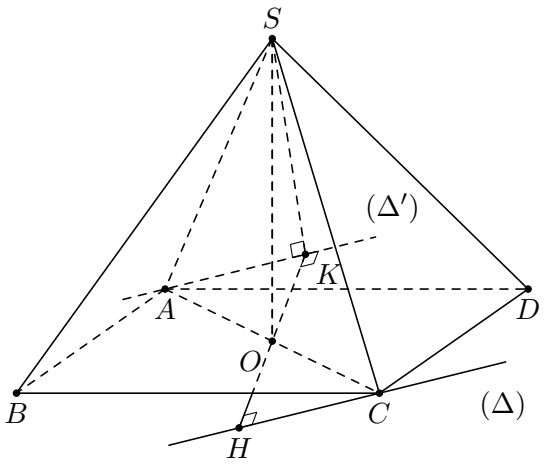
Chọn đáp án (A) □

Câu 63. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a$, O là trung điểm AC và $SO = b$. Gọi (Δ) là đường thẳng đi qua C, (Δ) chứa trong mặt phẳng $(ABCD)$ và khoảng cách từ O đến (Δ) là $\dfrac{a\sqrt{14}}{6}$. Giá trị lượng giác $\cos((SA), (\Delta))$ bằng

A. $\dfrac{2a}{3\sqrt{4b^2 - 2a^2}}$. **B.** $\dfrac{a}{\sqrt{2a^2 + 4b^2}}$. **C.** $\dfrac{2a}{3\sqrt{2a^2 + 4b^2}}$. **D.** $\dfrac{a}{3\sqrt{4b^2 - 2a^2}}$.

✍Lời giải.

Từ A kẻ $(\Delta') \parallel (\Delta)$.
Từ O kẻ $(d) \perp (\Delta)$ cắt (Δ) và (Δ') lần lượt tại H, K.
Ta có $\begin{cases} AK \perp OK \\ AK \perp SO \end{cases}$
$\Rightarrow AK \perp (SOK) \Rightarrow AK \perp SK$.
Ta được $\cos((SA),(\Delta)) = \cos((SA),(\Delta'))$.
Ta có $\begin{cases} SA = \dfrac{\sqrt{4b^2+2a^2}}{2} \\ AK = \dfrac{a}{3}. \end{cases}$
Vậy $\cos((SA),(\Delta)) = \dfrac{AK}{SA} = \dfrac{2a}{3\sqrt{2a^2+4b^2}}$.



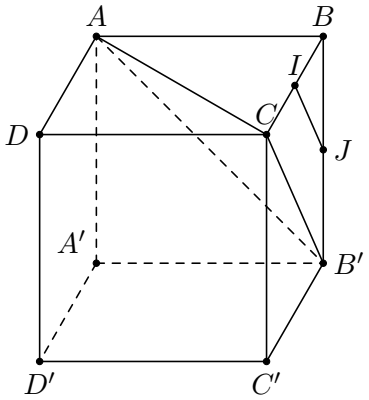
Chọn đáp án C ☐

Câu 64. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có I, J tương ứng là trung điểm của BC, BB'. Góc giữa hai đường thẳng AC, IJ bằng

A. $30°$. **B**. $60°$. **C**. $45°$. **D**. $120°$.

✍Lời giải.

Ta có $IJ \parallel B'C$ nên suy ra $(AC, IJ) = (AC, B'C)$.
Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương (đặt $AB = a$) nên ta có $B'C = AC = AB' = a\sqrt{2}$. Suy ra tam giác $AB'C$ đều nên $(AC, B'C) = 60°$.
Vậy $\widehat{(AC, IJ)} = \widehat{(B'C, AC)} = 60°$.



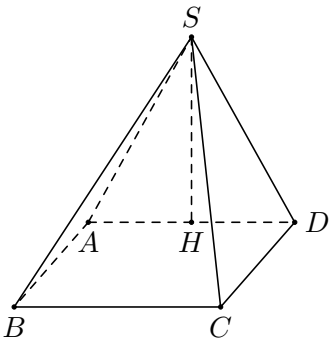
Chọn đáp án B ☐

Câu 65. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Mặt phẳng $(SAD) \perp (ABCD)$, tam giác SAD đều. Góc giữa BC và SA là

A. $90°$. **B**. $45°$. **C**. $60°$. **D**. $30°$.

✍Lời giải.

Vì $AD \parallel BC$ nên $(BC, SA) = (AD, SA) = \widehat{SAD} = 60°$.



Chọn đáp án C ☐

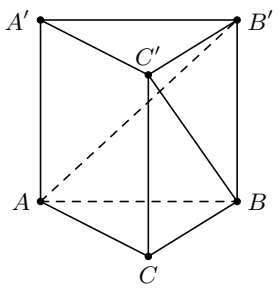
Câu 66. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, $AA' = 2a$. Gọi α là góc giữa AB' và BC'. Tính $\cos\alpha$.

A. $\cos\alpha = \dfrac{5}{8}$. **B**. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{51}}{10}$. **C**. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{39}}{8}$. **D**. $\cos\alpha = \dfrac{7}{10}$.

✍Lời giải.

Ta có $AB' = \sqrt{AB^2 + BB'^2} = a\sqrt{5}$, $BC' = \sqrt{BC^2 + CC'^2} = a\sqrt{5}$.
Xét

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'})(\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{BB'^2} \\ &= -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + BB'^2 = \frac{7a^2}{2}.\end{aligned}$$



Suy ra $\cos(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}) = \dfrac{7a^2}{2} \cdot \dfrac{1}{5a^2} = \dfrac{7}{10}$.
Vậy $\cos\alpha = \left|\cos(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'})\right| = \dfrac{7}{10}$.

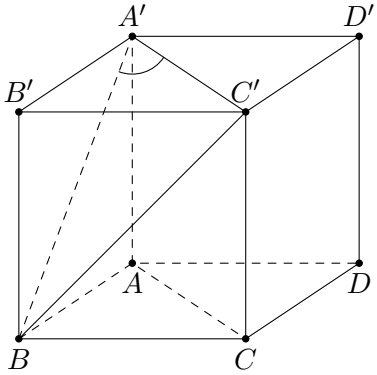
Chọn đáp án (D) □

Câu 67. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và $A'B$.

A. $60°$. **B**. $75°$. **C**. $90°$. **D**. $45°$.

✍Lời giải.

Ta có $AC \parallel A'C'$, do đó $(AC, A'B) = (A'C', A'B) = \widehat{BA'C'}$.
Lại có $A'B = BC' = A'C'$ nên $\triangle BA'C'$ là tam giác đều.
Vậy $(AC, A'B) = \widehat{BA'C'} = 60°$.

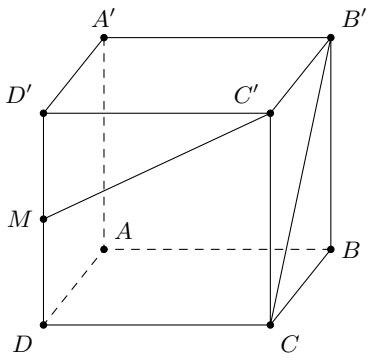


Chọn đáp án (A) □

Câu 68.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của DD' (tham khảo hình vẽ bên). Tính cô-sin của góc giữa hai đường thẳng $B'C$ và $C'M$.

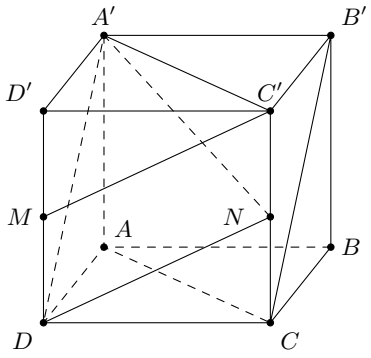
A. $\dfrac{2\sqrt{2}}{9}$. **B**. $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. **C**. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **D**. $\dfrac{1}{3}$.



✍Lời giải.

Gọi N là trung điểm của CC', suy ra $C'M \parallel DN$. Khi đó, góc giữa hai đường thẳng $B'C$ và $C'M$ chính là góc giữa hai đường thẳng $A'D$ và DN.
Giả sử hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a. Ta có $A'D = a\sqrt{2}$, $DN = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, $A'N = \dfrac{3a}{2}$.
Khi đó, áp dụng định lí cô-sin trong tam giác $A'DN$, ta có

$$\cos\widehat{A'DN} = \frac{DA'^2 + DN^2 - A'N^2}{2 \cdot A'D \cdot DN} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$



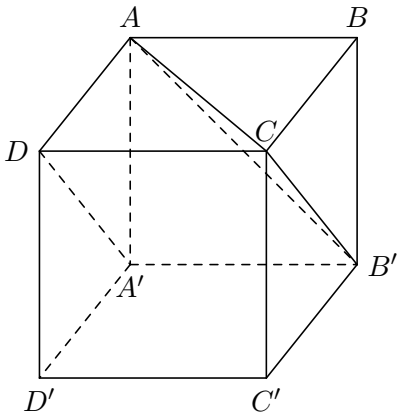
Chọn đáp án (B) □

Câu 69. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng AC và DA' bằng

A. $60°$. **B**. $45°$. **C**. $90°$. **D**. $120°$.

✍Lời giải.

Ta có $\widehat{(AC, DA')} = \widehat{(AC, CB')} = \widehat{ACB'}$.
Xét $\triangle ACB'$ có $AC = CB' = AB' = AB\sqrt{2}$.
Do đó $\triangle ACB'$ là tam giác đều.
Vậy $\widehat{ACB'} = 60^\circ$ hay $\widehat{(AC, DA')} = 60^\circ$.



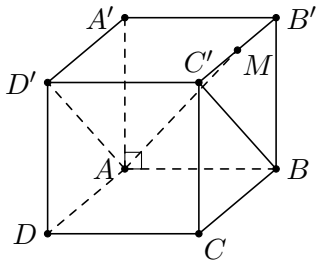
Chọn đáp án A □

Câu 70. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, gọi M là trung điểm của $B'C'$. Góc giữa hai đường thẳng AM và BC' bằng

A. 45°. **B**. 90°. **C**. 30°. **D**. 60°.

Lời giải.

Ta có $BC' \parallel AD'$ nên $(AM, BC') = (AM, AD') = \widehat{D'AM}$.
Gọi a là độ dài một cạnh của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.
Hình vuông $ADD'A'$ có $AD' = AA'\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.
M là trung điểm của $B'C'$ nên $MC' = MB' = \dfrac{1}{2}a$.
$\triangle D'C'M$ vuông tại C' có $D'M = \sqrt{D'C'^2 + MC'^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.



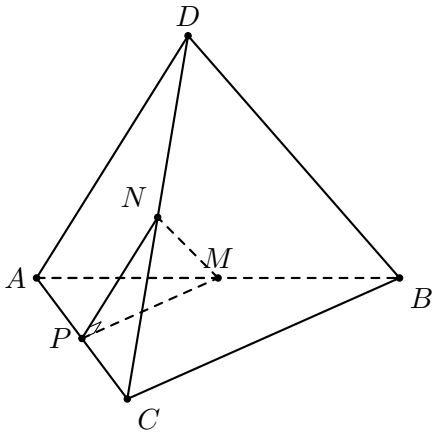
$\triangle AB'M$ vuông tại B' có $AM = \sqrt{AB'^2 + MB'^2} = \dfrac{3a}{2}$.
$\triangle AMD'$ có $\cos\widehat{D'AM} = \dfrac{AD'^2 + AM^2 - D'M^2}{2 \cdot AD' \cdot AM} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Vậy $(AM, BC') = (AM, AD') = \widehat{D'AM} = 45^\circ$.
Chọn đáp án A □

Câu 71. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Tính góc giữa đường thẳng MN với đường thẳng BC.

A. 45°. **B**. 60°. **C**. 30°. **D**. 35°.

Lời giải.

Gọi P là trung điểm của AC. Ta có $PN \parallel AD$ và $PM \parallel BC$.
Vì $AD \perp BC$ nên $PN \perp PM$.
Mặt khác $PN = PM = \dfrac{a}{2}$.
Do đó ΔMNP là tam giác vuông cân tại P.
Góc giữa MN và BC bằng góc giữa MN và PM và bằng góc $\widehat{NMP} = 45^\circ$.

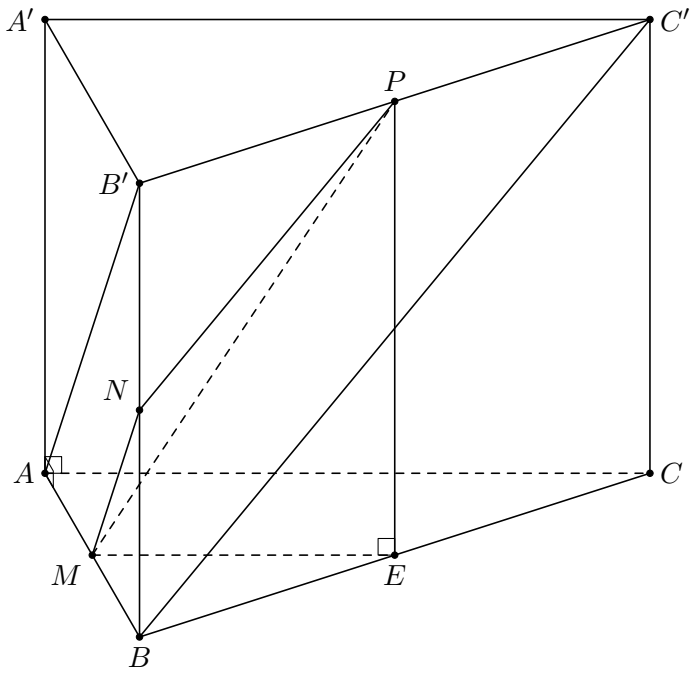


Chọn đáp án A □

Câu 72. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = \sqrt{2}a$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng

A. 90°. **B**. 30°. **C**. 60°. **D**. 45°.

Lời giải.



Gọi M, N, P, E lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, BB', $B'C'$, BC. Suy ra $MN \parallel AB'$ và $NP \parallel BC'$. Khi đó $(AB', BC') = (MN, NP)$.

Ta có $MN = \dfrac{1}{2}AB' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $NP = \dfrac{1}{2}BC' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác PME vuông tại E có $MP^2 = PE^2 + ME^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{9a^2}{4}$.

Theo định lý côsin trong tam giác MNP, ta có

$$\cos\widehat{MNP} = \frac{MN^2 + NP^2 - MP^2}{2 \cdot MN \cdot NP} = \frac{\dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{9a^2}{4}}{2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

Suy ra $\widehat{MNP} = 120^\circ$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng 60°.

Chọn đáp án (C) □

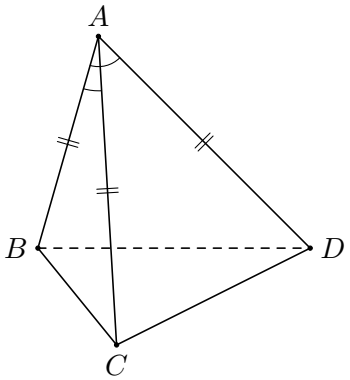
Câu 73. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Xác định góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

A. 45°. **B**. 30°. **C**. 60°. **D**. 90°.

✍Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}
\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{AB \cdot CD} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right)}{AB \cdot CD} \\
&= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot CD} \\
&= \frac{AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ - AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ}{AB \cdot CD} = 0 \\
\Rightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) &= 90^\circ.
\end{aligned}$$



Vậy góc giữa hai đường thẳng AB và CD là 90°.

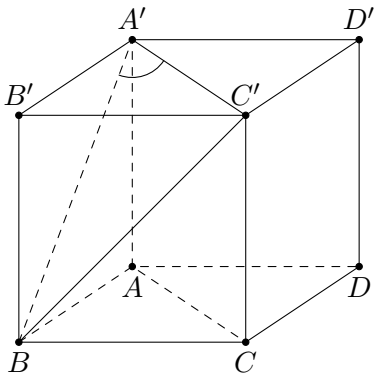
Chọn đáp án (D) □

Câu 74. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và $A'B$.

A. 60°. **B**. 75°. **C**. 90°. **D**. 45°.

✍Lời giải.

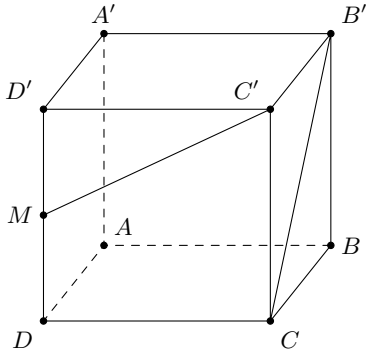
Ta có $AC \parallel A'C'$, do đó $(AC, A'B) = (A'C', A'B) = \widehat{BA'C'}$.
Lại có $A'B = BC' = A'C'$ nên $\triangle BA'C'$ là tam giác đều.
Vậy $(AC, A'B) = \widehat{BA'C'} = 60°$.



Chọn đáp án A □

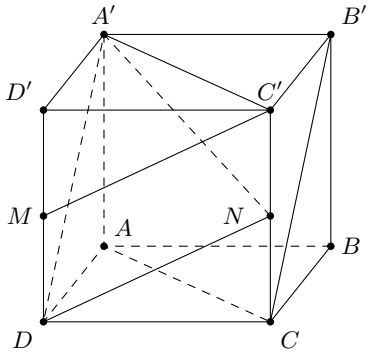
Câu 75.
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của DD' (tham khảo hình vẽ bên). Tính cô-sin của góc giữa hai đường thẳng $B'C$ và $C'M$.

A. $\dfrac{2\sqrt{2}}{9}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.



✍Lời giải.
Gọi N là trung điểm của CC', suy ra $C'M \parallel DN$. Khi đó, góc giữa hai đường thẳng $B'C$ và $C'M$ chính là góc giữa hai đường thẳng $A'D$ và DN.
Giả sử hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a. Ta có $A'D = a\sqrt{2}$, $DN = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, $A'N = \dfrac{3a}{2}$.
Khi đó, áp dụng định lí cô-sin trong tam giác $A'DN$, ta có

$$\cos\widehat{A'DN} = \frac{DA'^2 + DN^2 - A'N^2}{2 \cdot A'D \cdot DN} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

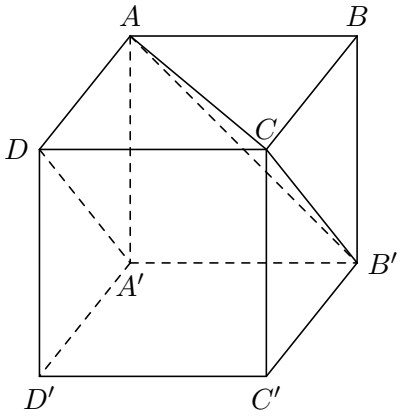


Chọn đáp án B □

Câu 76. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng AC và DA' bằng

A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $90°$. **D.** $120°$.

✍Lời giải.
Ta có $\widehat{(AC, DA')} = \widehat{(AC, CB')} = \widehat{ACB'}$.
Xét $\triangle ACB'$ có $AC = CB' = AB' = AB\sqrt{2}$.
Do đó $\triangle ACB'$ là tam giác đều.
Vậy $\widehat{ACB'} = 60°$ hay $\widehat{(AC, DA')} = 60°$.



Chọn đáp án A □

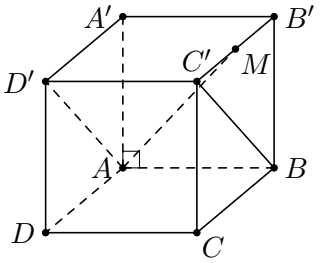
Câu 77. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, gọi M là trung điểm của $B'C'$. Góc giữa hai đường thẳng AM và BC' bằng

A. $45°$. **B.** $90°$. **C.** $30°$. **D.** $60°$.

✍Lời giải.

Ta có $BC' \parallel AD'$ nên $(AM, BC') = (AM, AD') = \widehat{D'AM}$.

Gọi a là độ dài một cạnh của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.



Hình vuông $ADD'A'$ có $AD' = AA'\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.

M là trung điểm của $B'C'$ nên $MC' = MB' = \dfrac{1}{2}a$.

$\triangle D'C'M$ vuông tại C' có $D'M = \sqrt{D'C'^2 + MC'^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

$\triangle AB'M$ vuông tại B' có $AM = \sqrt{AB'^2 + MB'^2} = \dfrac{3a}{2}$.

$\triangle AMD'$ có $\cos\widehat{D'AM} = \dfrac{AD'^2 + AM^2 - D'M^2}{2 \cdot AD' \cdot AM} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $(AM, BC') = (AM, AD') = \widehat{D'AM} = 45°$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 78. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Tính góc giữa đường thẳng MN với đường thẳng BC.

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $35°$.

✍Lời giải.

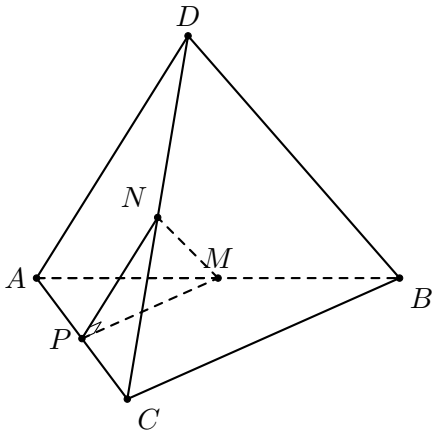
Gọi P là trung điểm của AC. Ta có $PN \parallel AD$ và $PM \parallel BC$.

Vì $AD \perp BC$ nên $PN \perp PM$.

Mặt khác $PN = PM = \dfrac{a}{2}$.

Do đó ΔMNP là tam giác vuông cân tại P.

Góc giữa MN và BC bằng góc giữa MN và PM và bằng góc $\widehat{NMP} = 45°$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 79. Cho tứ diện gần đều $ABCD$, biết $AB = CD = 5$, $AC = BD = \sqrt{34}$, $AD = BC = \sqrt{41}$. Tính sin của góc tạo bởi hai đường thẳng AB và CD.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{7}{25}$. **C.** $\dfrac{24}{25}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

✍Lời giải.

Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của BC, AD, AC.

Ta có $\Delta ABC = \Delta DCB$ $(c.c.c) \Rightarrow AM = DM \Rightarrow MN \perp AD$.

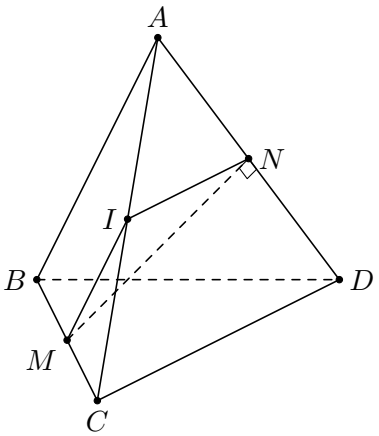
Lại có $AM^2 = \dfrac{AB^2 + AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4} = \dfrac{49}{2}$.

Suy ra $MN = \sqrt{AM^2 - AN^2} = \sqrt{\dfrac{49}{2} - \dfrac{34}{4}} = 4$ và $NI = \dfrac{5}{2}$, $MI = \dfrac{5}{2}$.

Ta có $(AB, CD) = (IM, IB) = \alpha$.

Trong tam giác IMN, ta có

$$\cos\widehat{MIN} = \frac{IM^2 + IN^2 - MN^2}{2IM \cdot IN} = -\frac{7}{25}.$$



Suy ra $\alpha = 180° - \widehat{MIN}$ nên $\cos\alpha = -\cos\widehat{MIN} = \dfrac{7}{25}$.

Vậy $\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(-\dfrac{7}{25}\right)^2} = \dfrac{24}{25}$.

Chọn đáp án (C) □

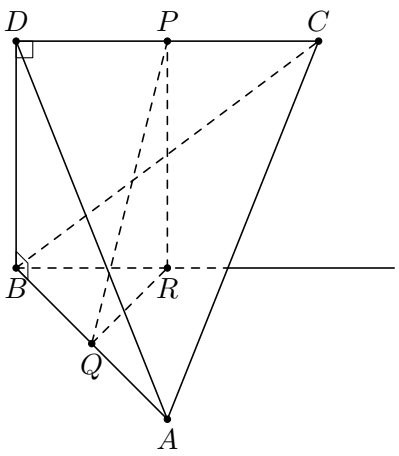
Câu 80. Cho tứ diện $ABCD$ có BD vuông góc AB và CD. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của các cạnh CD và AB thỏa mãn $BD : CD : PQ : AB = 3 : 4 : 5 : 6$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng AB và CD. Giá trị của $\cos\varphi$ bằng

A. $\frac{7}{8}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{11}{16}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

✍Lời giải.

Do AB vuông góc với BD, nên AB nằm trong mặt phẳng (α) chứa AB và vuông góc với BD. Dựng hình chữ nhật $BDPR$, thì góc giữa hai đường thẳng AB và CD cũng là góc giữa hai đường thẳng AB và BR. Ta có

$$\cos\varphi = \frac{|BQ^2 + BR^2 - QR^2|}{2BQ \cdot BR} = \frac{|9 + 4 - 16|}{2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{4}.$$



Chọn đáp án D □

Câu 81. Cho tứ diện $ABCD$ với đáy BCD là tam giác vuông cân tại C. Các điểm M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC, CD. Góc giữa MN và PQ bằng

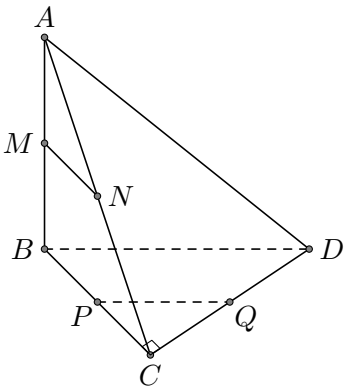
A. $0°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

✍Lời giải.

Ta có MN là đường trung bình tam giác ABC nên $MN \parallel BC$, do đó

$$(MN, PQ) = (BC, PQ).$$

Mặt khác PQ là đường trung bình tam giác vuông cân BCD suy ra $(BC, PQ) = 45°$. Do đó $(MN, PQ) = 45°$.



Chọn đáp án C □

Câu 82. Cho tứ diện $ABCD$ với đáy BCD là tam giác vuông cân tại C. Các điểm M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC, CD. Góc giữa MN và PQ bằng

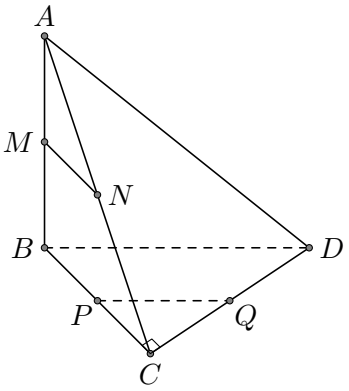
A. $0°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

✍Lời giải.

Ta có MN là đường trung bình tam giác ABC nên $MN \parallel BC$, do đó

$$(MN, PQ) = (BC, PQ).$$

Mặt khác PQ là đường trung bình tam giác vuông cân BCD suy ra $(BC, PQ) = 45°$. Do đó $(MN, PQ) = 45°$.



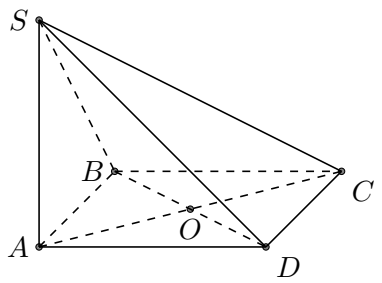
Chọn đáp án C □

Câu 83. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, SA nằm trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $AD \perp SC$. **B.** $SA \perp BD$. **C.** $SO \perp BD$. **D.** $SC \perp BD$.

✍Lời giải.

Nếu $AD \perp SC$ thì $AD \perp (SAC)$. Ta dễ dàng phủ nhận điều này bởi lẽ AD không vuông góc với AC.



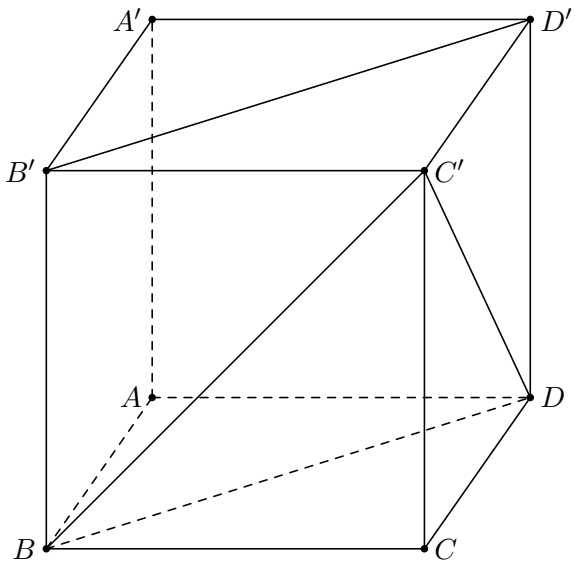
Chọn đáp án A □

Câu 84. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính số đo góc φ giữa hai đường thẳng BC' và $B'D'$.

A. $\varphi = 60°$. **B**. $\varphi = 90°$. **C**. $\varphi = 30°$. **D**. $\varphi = 45°$.

✍Lời giải.

Ta có $BD \parallel B'D' \Rightarrow (BC', B'D') = (BC', BD) = \widehat{C'BD}$.
Xét $\triangle BC'D$ có $BC' = C'D = BD = a\sqrt{2}$ nên $\triangle BC'D$ đều. Suy ra $\widehat{C'BD} = 60°$.
Vậy $(BC', B'D') = 60°$.



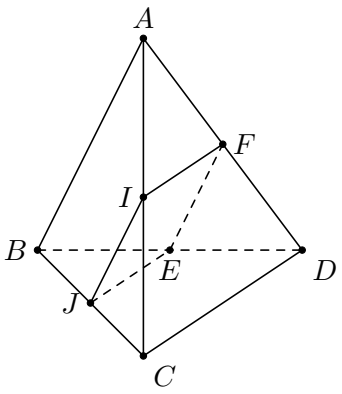
Chọn đáp án A □

Câu 85. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD. Góc giữa IE và JF bằng

A. 30°. **B**. 45°. **C**. 90°. **D**. 60°.

✍Lời giải.

Ta có $IJ \parallel AB$ và $EF \parallel AB$ nên $IJ \parallel EF$. Tương tự $JE \parallel IF$ nên tứ giác $IJEF$ là hình bình hành.
Vì $AB = CD$ nên $IJ = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{CD}{2} = JE$. Do đó $IJEF$ là hình thoi, suy ra $IE \perp JF$. Hay $(IE, JF) = 90°$.



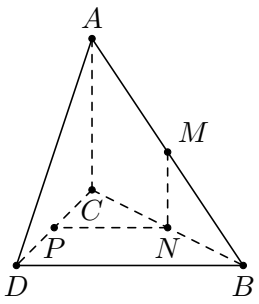
Chọn đáp án C □

Câu 86. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD. Biết $\widehat{MNP} = 120°$. Góc giữa hai đường thẳng AC và BD bằng

A. 60°. **B**. 45°. **C**. 120°. **D**. 30°.

✍Lời giải.

Vì M, N là trung điểm của BA, BC nên $MN \parallel AC$.
Vì P, N là trung điểm của CD, BC nên $NP \parallel CD$.
Do đó $(AC, BD) = (MN, NP) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 87. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $AB = a\sqrt{2}$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng SC và AB bằng

A. 30°. **B.** 90°. **C.** 45°. **D.** 60°.

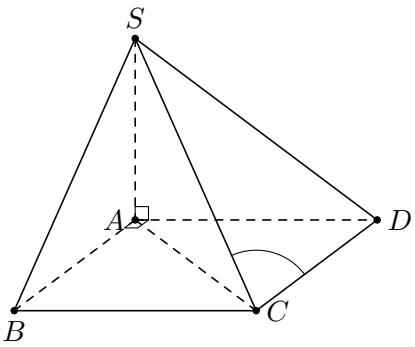
✍Lời giải.

Góc giữa hai đường thẳng SC và AB bằng góc giữa hai đường thẳng SC và CD. Ta có

— $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{6}$.

— $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2a\sqrt{2}$.

— $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{6}$.



Khi đó $\cos\widehat{SCD} = \dfrac{SC^2 + CD^2 - SD^2}{2 \cdot SC \cdot CD} = \dfrac{8a^2 + 2a^2 - 6a^2}{2 \cdot 2a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$.
Vậy góc giữa SC và AB bằng 60°.

Cách khác: Có thể chứng minh $\triangle SCD$ vuông tại D. Khi đó $\cos\widehat{SCD} = \dfrac{CD}{SC} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$.

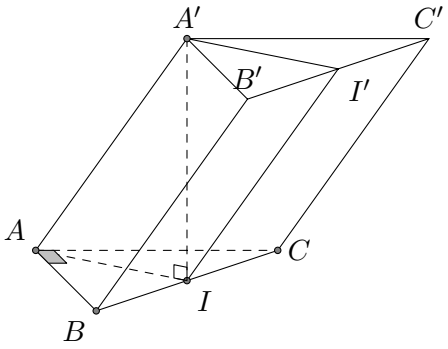
Chọn đáp án (D) □

Câu 88. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ độ dài cạnh bên là $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu A' lên (ABC) trùng với trung điểm I của BC. Khi đó $\cos(AA', B'C')$ là

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Ta có $\cos(AA', B'C') = \cos(II', B'C')$.
Ta có $II' = 2a; BI = a$.
Xét $\Delta A'IA$ vuông tại I: $A'I = \sqrt{AA'^2 - AI^2} = a\sqrt{3}$.
Suy ra $B'I = \sqrt{A'I^2 + A'B'^2} = 2a$.
Vậy $\cos(AA', B'C') = |\cos(B'I'I)| = \left|\dfrac{a^2 + (2a)^2 - (2a)^2}{2a \cdot 2a}\right| = \dfrac{1}{4}$.



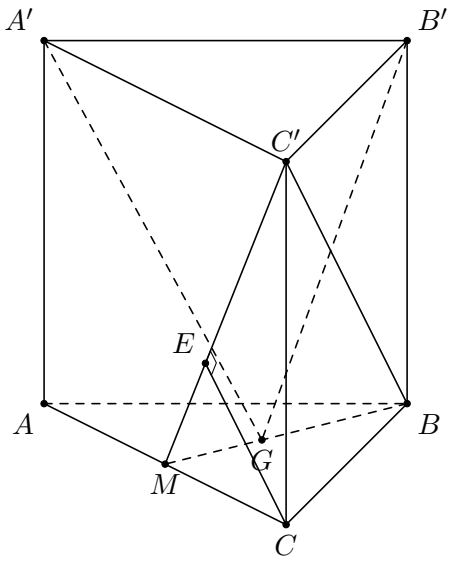
Chọn đáp án (C) □

Câu 89. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Cho khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (BGC') bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Cosin của góc giữa hai đường thẳng $B'G$ và BC bằng

A. $\dfrac{1}{\sqrt{39}}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{39}}$. **C.** $\dfrac{3}{\sqrt{39}}$. **D.** $\dfrac{5}{\sqrt{39}}$.

✍Lời giải.

Ta có $B'C' \parallel BC \Rightarrow \widehat{(BC, B'G)} = \widehat{(B'C', B'G)}$.
Gọi M là trung điểm của AC, ta có
$\begin{cases} BM \perp AC \\ BM \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BM \perp (ACC'A')$.
Vẽ $CE \perp CM$ tại E, ta có
$\begin{cases} CE \perp CM \\ CE \perp BM \text{ (do } BM \perp (ACC'A')) \end{cases}$
$\Rightarrow CE \perp (BGC') \Rightarrow CE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
$\triangle MCC'$ vuông tại C có $CE \perp C'M$
$\Rightarrow \dfrac{1}{CM^2} + \dfrac{1}{CC'^2} = \dfrac{1}{CE^2} \Rightarrow CC' = a\sqrt{3}$.



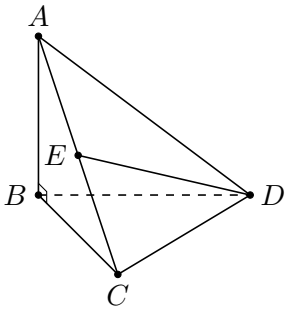
Lại có $BM = a\sqrt{3}$ nên $BG = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$
$\triangle BB'G$ vuông tại $B \Rightarrow B'G = \sqrt{BG^2 + BB'^2} = \dfrac{a\sqrt{39}}{3}$.
$\triangle CC'G$ vuông tại $C \Rightarrow C'G = \sqrt{CG^2 + CC'^2} = \dfrac{a\sqrt{39}}{3}$.
Vậy $\cos \widehat{C'B'G} = \dfrac{C'B'^2 + GB'^2 - GC'^2}{2C'B' \cdot GB'} = \dfrac{3}{\sqrt{39}} = \cos \widehat{(BC, B'G)}$.

Chọn đáp án C □

Câu 90.

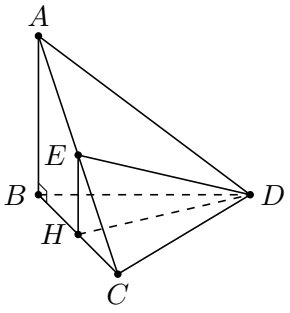
Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với mặt phẳng (BCD). Biết tam giác BCD vuông tại C và $AB = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, $AC = a\sqrt{2}$, $CD = a$. Gọi E là trung điểm của AC (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa đường thẳng AB và DE bằng

A. $45°$. **B**. $60°$. **C**. $30°$. **D**. $90°$.



✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm của BC. Vì $AB \parallel HE$ suy ra góc giữa AB và DE bằng góc giữa HE và DE bằng $\widehat{DEH}$.
Ta có $HE = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$, $DH = \sqrt{HC^2 + CD^2} = \dfrac{3\sqrt{2}a}{4}$.
Khi đó $\tan \widehat{DEH} = \dfrac{DH}{HE} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{DEH} = 60°$.



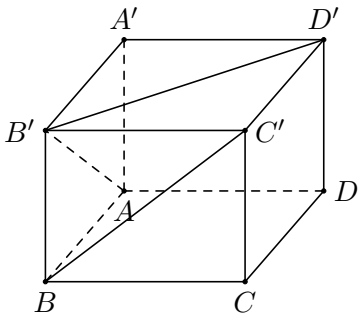
Chọn đáp án B □

Câu 91. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng

A. $60°$. **B**. $45°$. **C**. $90°$. **D**. $30°$.

✍Lời giải.

Ta có $BC' \parallel AD'$ nên $(AB', BC') = (AB', AD') = \widehat{B'AD'}$.
Do tam giác $B'AD'$ đều nên $\widehat{B'AD'} = 60°$.



Chọn đáp án A ☐

Câu 92. Cho tứ diện $ABCD$ gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD. Biết $AB = CD = a$, $MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

A. $30°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $120°$.

✍Lời giải.

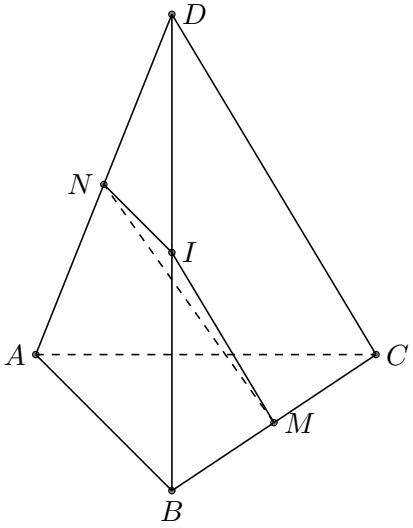
Gọi I là trung điểm của BD, khi đó ta có $IN \parallel AB$ và $IM \parallel CD$ nên $\widehat{(AB, CD)} = \widehat{(IM, IN)}$.
Xét tam giác MIN theo định lý hàm số côsin ta có

$$MN^2 = IM^2 + IN^2 - 2 \cdot IM \cdot IN \cdot \cos \widehat{MIN} \quad (*)$$

Do giả thiết ta có $MI = IN = \dfrac{a}{2}$ thay vào $(*)$ khi đó

$$\frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos \widehat{MIN} \Leftrightarrow \cos \widehat{MIN} = -\frac{1}{2}$$

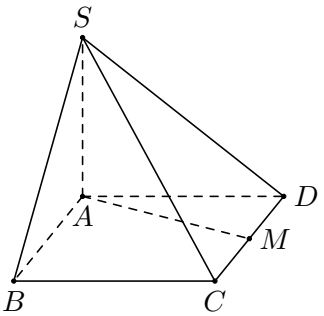
Vì $0° < \widehat{MIN} < 180°$ nên $\cos \widehat{MIN} = -\dfrac{1}{2}$ suy ra $\widehat{MIN} = 120°$.
Do đó $\widehat{(IM, IN)} = 60°$ hay $\widehat{(AB, CD)} = 60°$.



Chọn đáp án C ☐

Câu 93.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 2; cạnh $SA = 1$ và vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của CD. Tính $\cos\alpha$ với α là góc tạo bởi hai đường thẳng SB và AM.

A. $\dfrac{2}{5}$. **B.** $-\dfrac{2}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{4}{5}$.



✍Lời giải.

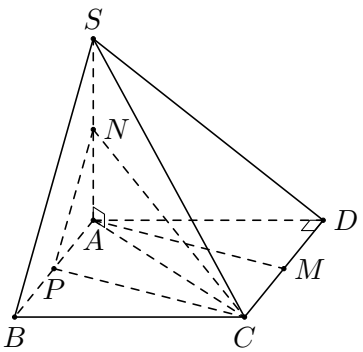
Gọi N, P lần lượt là trung điểm của SA và AB. Ta thấy $NP \parallel SB$, $PC \parallel AM$. Do đó α là góc tạo bởi hai đường thẳng NP và PC.

Ta có $NP = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $PC = AM = \sqrt{5}$.

$NC = \sqrt{NA^2 + AC^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + 8} = \dfrac{\sqrt{33}}{2}$.

Suy ra $\cos \widehat{NPC} = \dfrac{NP^2 + PC^2 - NC^2}{2 \cdot NP \cdot PC} = \dfrac{\dfrac{5}{4} + 5 - \dfrac{33}{4}}{2 \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{5}} = -\dfrac{2}{5}$.

Vậy $\cos\alpha = \dfrac{2}{5}$.



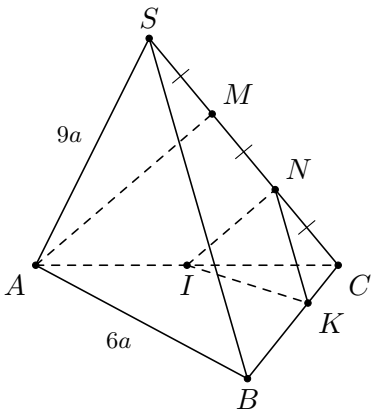
Chọn đáp án A ☐

Câu 94. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $SA = 9a, AB = 6a$. Gọi M là điểm thuộc cạnh SC sao cho $SM = \dfrac{1}{2}MC$. Cô-sin của góc giữa hai đường thẳng SB và AM bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{7}{2\sqrt{48}}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{19}}{7}$. **D.** $\dfrac{14}{3\sqrt{48}}$.

✍Lời giải.

Gọi N là trung điểm MC, I là trung điểm AC và K thuộc cạnh BC sao cho $CK = 2a$.



Ta có $\dfrac{CN}{SC} = \dfrac{CK}{BC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow SB \parallel NK$ và $NK = \dfrac{1}{3}SB = \dfrac{1}{3}SA = 3a$.

Khi đó $\begin{cases} AM \parallel NI \\ SB \parallel NK \end{cases} \Rightarrow (SB, AM) = (NI, NK) = \widehat{INK}$.

Ta có $\cos\widehat{SCA} = \dfrac{CA^2 + CS^2 - SA^2}{2 \cdot CA \cdot CS} = \dfrac{1}{3}$.

Suy ra $IN = \sqrt{CN^2 + CI^2 - 2 \cdot CN \cdot CI \cdot \cos\widehat{SCA}} = 2a\sqrt{3}$.

Lại có $IK = \sqrt{CI^2 + CK^2 - 2 \cdot CI \cdot CK \cdot \cos 60^\circ} = a\sqrt{7}$.

Dẫn tới $\cos\widehat{INK} = \dfrac{NI^2 + NK^2 - IK^2}{2 \cdot NI \cdot NK} = \dfrac{14}{3\sqrt{48}}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 95. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và AD'.

A. 60°. **B.** 30°. **C.** 45°. **D.** 90°.

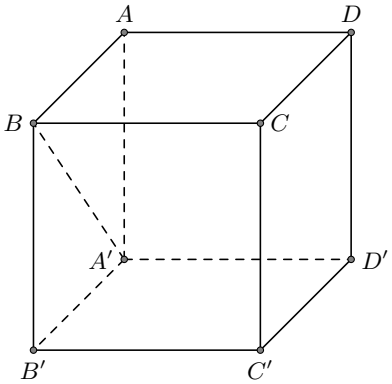
✍Lời giải.

Ta có $AD' \parallel BC'$.

$\Rightarrow (A'B, AD') = (A'B, BC') = \widehat{A'BC'}$.

Vì tam giác $\Delta A'BC'$ đều nên suy ra $\widehat{A'BC'} = 60^\circ$.

$\Rightarrow (A'B, AD') = 60^\circ$.



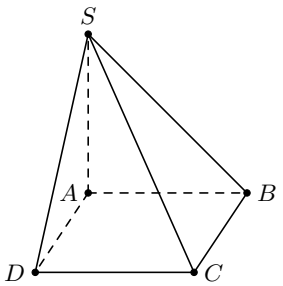
Chọn đáp án (A) □

Câu 96. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, SA vuông góc với mặt đáy $ABCD$. Hỏi góc giữa hai đường thẳng SA và BC là bao nhiêu độ?

A. 135°. **B.** 60°. **C.** 90°. **D.** 45°.

✍Lời giải.

Do $AD \parallel BC$ nên $(SA, BC) = (SA, AD) = 90^\circ$.

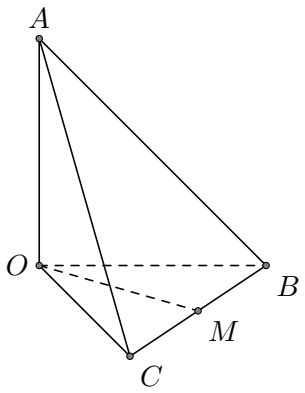


Chọn đáp án (C) □

Câu 97.

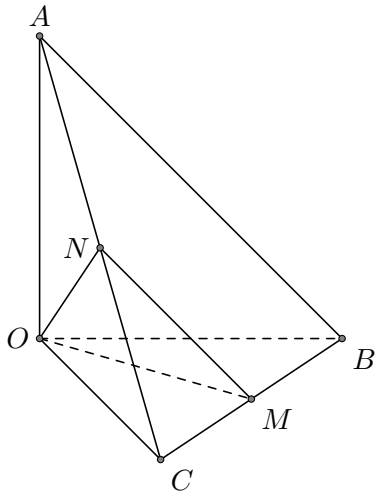
Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình vẽ). Góc giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

A. $90°$. **B**. $30°$. **C**. $45°$. **D**. $60°$.



✍Lời giải.

Gọi N là trung điểm $AC \Rightarrow MN = \dfrac{AC}{2}$
và $\widehat{(OM, AB)} = \widehat{(OM, MN)}$.
Do các tam giác OAC, OBC vuông tại O
nên $OM = \dfrac{BC}{2}; ON = \dfrac{AC}{2}$.
Do OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau
và $OA = OB = OC$ nên $AB = AC = BC$
$\Rightarrow OM = ON = MN \Rightarrow \widehat{(OM, MN)} = 60°$.
Vậy góc giữa hai đường thẳng OM và AB bằng $60°$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 98. Cho tứ diện $ABCD$ có $SC = CA = AB = a\sqrt{2}$, $SC \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại A, các điểm M thuộc SA, N thuộc BC sao cho $AM = CN = t$ $(0 < t < 2a)$. Tìm t để MN ngắn nhất.

A. $t = \dfrac{3a}{2}$. **B**. $t = \dfrac{2a}{3}$. **C**. $t = \dfrac{\sqrt{3}a}{3}$. **D**. $t = a$.

✍Lời giải.

Theo giả thiết, có $SA = 2a, BC = 2a$. Vì $0 < t < 2a$ suy ra

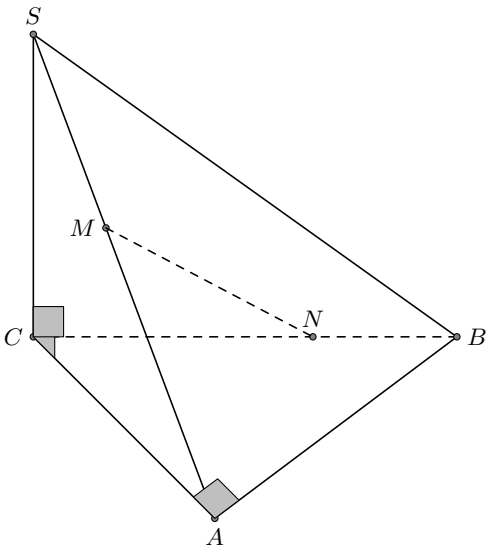
$$\frac{MA}{SA} = \frac{t}{2a} \Rightarrow \overrightarrow{MA} = \frac{t}{2a}\overrightarrow{SA}; \quad \frac{CN}{CB} = \frac{t}{2a} \Rightarrow \overrightarrow{CN} = \frac{t}{2a}\overrightarrow{CB}.$$

Đặt $\vec{x} = \overrightarrow{CA}; \vec{y} = \overrightarrow{CB}; \vec{z} = \overrightarrow{CS}$. Ta có

$$\vec{x} \cdot \vec{z} = \vec{y} \cdot \vec{z} = 0, \vec{x} \cdot \vec{y} = 2a^2.$$

Vì $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$ nên $\overrightarrow{MN} = \dfrac{t}{2a}\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{CA} + \dfrac{t}{2a}\overrightarrow{CB}$.
Từ đó

$$\overrightarrow{MN} = \left(\frac{t}{2a} - 1\right) \cdot \vec{x} + \frac{t}{2a} \cdot \vec{y} - \frac{t}{2a} \cdot \vec{z}.$$



Vậy $MN^2 = \overrightarrow{MN}^2 = \left(\dfrac{t}{2a} - 1\right)^2 \cdot 2a^2 + \dfrac{t^2}{4a^2} \cdot 4a^2 + \dfrac{t^2}{4a^2} \cdot 2a^2 + 2\left(\dfrac{t}{2a} - 1\right) \cdot \dfrac{t}{2a} \cdot 2a^2 = 3t^2 - 4at + 2a^2$.

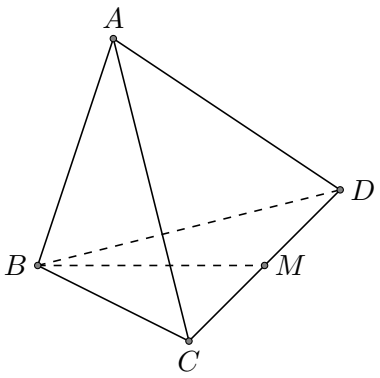
Từ đó, suy ra MN nhỏ nhất khi và chỉ khi MN^2 nhỏ nhất khi và chỉ khi $t = \dfrac{2a}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 99.

Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi M là trung điểm CD. Cosin góc giữa hai đường thẳng AC và BM bằng

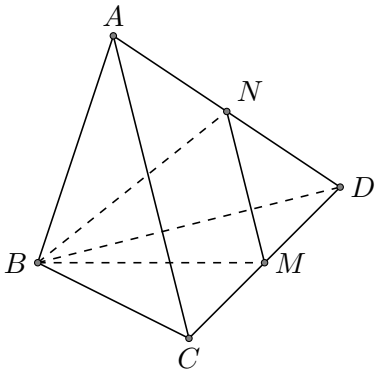
A. $\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



✍Lời giải.

Gọi N là trung điểm AD, ta có $MN \parallel AC$. Do đó ta có

$$(\widehat{AC, BM}) = \widehat{BMN}.$$



Do M, N là trung điểm CD và AD nên ta có

$$BM = BN = \frac{a\sqrt{3}}{2}; MN = \frac{a}{2}.$$

Suy ra

$$\cos \widehat{BMN} = \frac{BM^2 + MN^2 - BN^2}{2BM \cdot MN} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

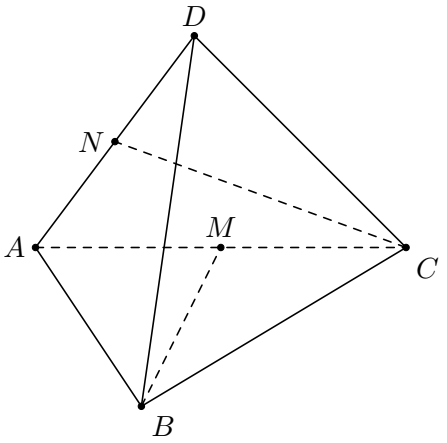
Chọn đáp án (C) □

Câu 100. Cho tứ diện đều $ABCD$ gọi M là trung điểm của AC, N là trung điểm của AD. Gọi α là góc tạo bởi BM và CN. Giá trị $\cos\alpha$ bằng

A. $\dfrac{2}{7}$. **B.** $\dfrac{3}{7}$. **C.** $\dfrac{2}{9}$. **D.** $\dfrac{1}{6}$.

✍Lời giải.

Gọi cạnh của tứ diện đều $ABCD$ là a.



Ta có $BM = CN = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

$\overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{BM} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD}) \cdot (\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CB})$

$= \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB})$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^2}{4} - \dfrac{a^2}{2} - \dfrac{a^2}{2}\right)$

$= -\dfrac{a^2}{8}$.

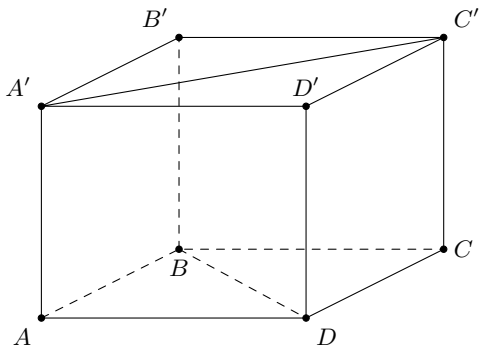
$\cos\alpha = \left|\cos(\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{BM})\right| = \left|\dfrac{\overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{BM}}{BM \cdot CN}\right| = \dfrac{1}{6}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 101.

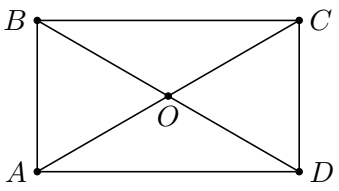
Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ (*tham khảo hình vẽ bên*) có $AD = a$, $BD = 2a$. Góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và BD là

A. $60°$. **B.** $120°$. **C.** $90°$. **D.** $30°$.



✍Lời giải.

Ta có $AC \parallel A'C'$ nên góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và BD cũng chính là góc giữa hai đường thẳng AC và BD.
Gọi O là giao điểm của AC và BD. Khi đó tam giác AOB đều do 3 cạnh bằng a nên $\widehat{AOB} = 60^\circ$.
Vậy $(A'C', BD) = (AC, BD) = \widehat{AOB} = 60^\circ$.

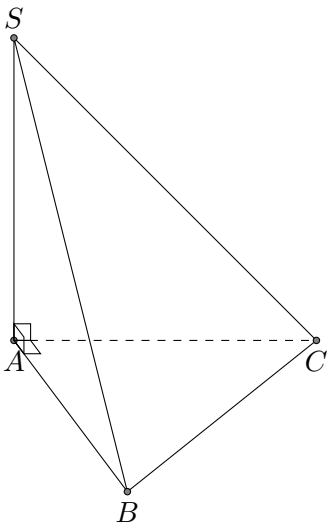


Chọn đáp án A □

Câu 102. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $\triangle ABC$ vuông tại A. Góc giữa 2 đường thẳng AB và SC bằng

A. $\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $\dfrac{3\pi}{4}$. **C.** $\dfrac{\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.
Từ $SA \perp (ABC)$ suy ra $SA \perp AB$.
Từ $AB \perp SA$ và $AB \perp AC$ suy ra $AB \perp SC$.
Như vậy, góc giữa 2 đường thẳng AB và SC bằng $\dfrac{\pi}{2}$.

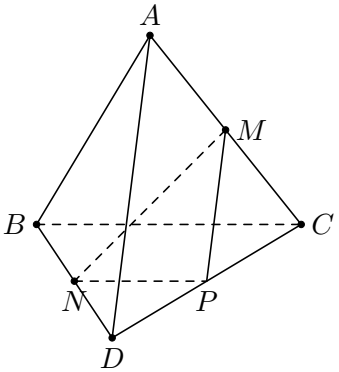


Chọn đáp án D □

Câu 103. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD = 14$, $BC = 6$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BD. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng BC và MN. Biết $MN = 8$, tính $\sin\alpha$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

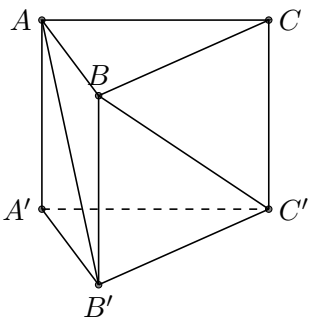
Lời giải.
Gọi P là trung điểm CD ta có $MP = 7$, $NP = 3$ và $\alpha = \widehat{MNP}$.
Do đó $\cos\alpha = \dfrac{NP^2 + NM^2 - MP^2}{2MN \cdot NP} = \dfrac{1}{2}$ nên $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án B □

Câu 104.
Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = \sqrt{2}a$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng

A. 30°. **B.** 90°. **C.** 45°. **D.** 60°.



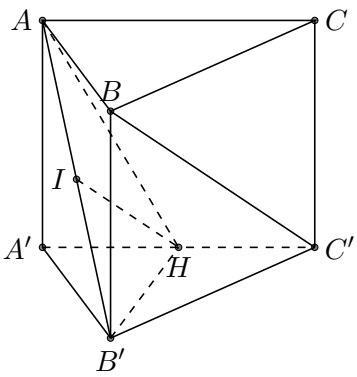
Lời giải.

Gọi I, H lần lượt là trung điểm của AB' và $A'C'$. Khi đó IH là đường trung bình của $\triangle A'BC'$ nên $IH \parallel BC' \Rightarrow (AB', BC') = (AB', IH)$.

Ta có $AB' = a\sqrt{3}$, $B'H = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AH = \dfrac{3a}{2}$ nên $B'H^2 + HA^2 = AB'^2$, hay $\triangle HAB'$ vuông tại H.

$IH = \dfrac{AB'}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Delta B'IH$ đều, suy ra

$(AB', BC') = (AB', IH) = \widehat{B'IH} = 60^\circ$.

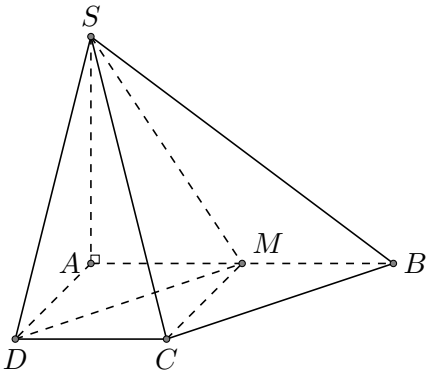


Chọn đáp án (D) □

Câu 105. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và S, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính cô-sin góc giữa 2 đường thẳng SD và BC biết $AD = DC = a$,$AB = 2a$, $SA = \dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$.

A. $\dfrac{1}{\sqrt{42}}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{42}}$. **C.** $\dfrac{3}{\sqrt{42}}$. **D.** $\dfrac{4}{\sqrt{42}}$.

✍Lời giải.



- Gọi M là trung điểm AB, ta có $DM \parallel BC$. Do đó $(BC, SD) = (DM, SD)$.
- Ta có $SD^2 = SA^2 + AD^2 = \dfrac{4a^2}{3} + a^2 = \dfrac{7a^2}{3} \Rightarrow SD = \dfrac{a\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$.

$SM^2 = SA^2 + AM^2 = \dfrac{4a^2}{3} + a^2 = \dfrac{7a^2}{3} \Rightarrow SM = \dfrac{a\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$.

$DM^2 = AM^2 + AD^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow DM = a\sqrt{2}$.

- Ta có $\cos\widehat{SDM} = \dfrac{DS^2 + DM^2 - SM^2}{2 \cdot DS \cdot DM} = \dfrac{\dfrac{7a^2}{3} + 2a^2 - \dfrac{7a^2}{3}}{2 \cdot \dfrac{\sqrt{7}a}{3} \cdot a\sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{14}} = \dfrac{3}{\sqrt{42}}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 106. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA = a$ và vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của SB. Góc giữa hai đường thẳng AM và BD bằng

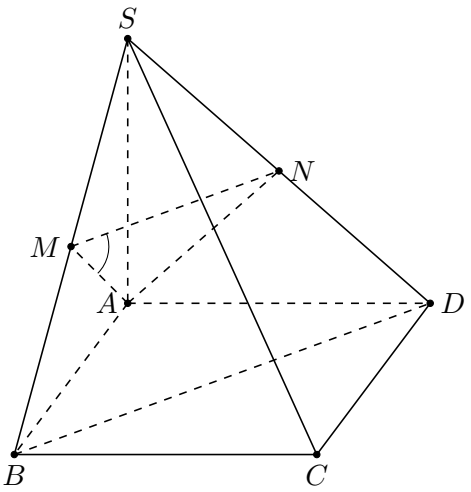
A. 30°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 90°.

✍Lời giải.

Lấy N là trung điểm SD, suy ra $MN \parallel BD$, dẫn tới $(AM, BD) = (AM, MN) = \widehat{AMN}$.

Vì $SA \perp AB \Rightarrow AM = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Tương tự $AN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lại có MN là đường trung bình của $\triangle SBD$ nên ta có $MN = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Suy ra $\triangle AMN$ là tam giác đều, nên $\widehat{AMN} = 60^\circ$.

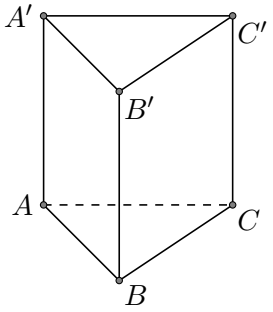


Chọn đáp án (B) □

Câu 107.

Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB' và BC (*tham khảo hình vẽ bên*).

A. 90°. **B**. 30°. **C**. 45°. **D**. 60°.



✍Lời giải.

Dựng AP sao cho song song và bằng với CB như hình vẽ.

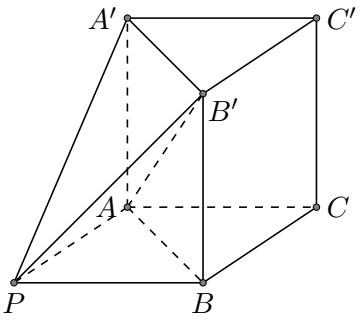
Suy ra $(BC, AB') = (AP, AB')$.

Ta có $AP = CB = a\sqrt{3}$.

Ta lại có $AB' = \sqrt{B'B^2 + AB^2} = a\sqrt{3}$;

$B'P = \sqrt{B'B^2 + PB^2} = a\sqrt{3}$.

Vậy $\triangle APB'$ đều nên $(BC, AB') = (AP, AB') = 60^\circ$.



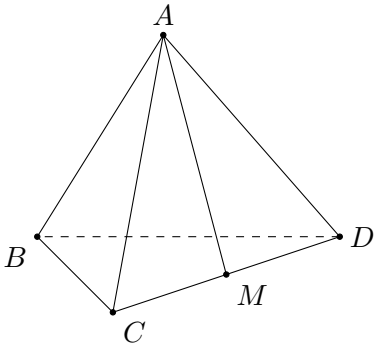
Chọn đáp án (D) □

Câu 108.

Cho tứ diện đều $ABCD$ có M là trung điểm của cạnh CD (tham khảo hình vẽ), φ là góc giữa hai đường thẳng AM và BC. Giá trị $\cos\varphi$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

C. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.



✍Lời giải.

Giả sử cạnh của tứ diện đều bằng a.

Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{CB}\cdot(\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}\\ &= CB\cdot CM\cdot\cos\widehat{ACM} - CB\cdot CA\cdot\cos\widehat{ACB} = -\frac{a^2}{4}.\end{aligned}$$

$$\cos\varphi = \left|\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AM}\right)\right| = \left|\frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AM}}{BC\cdot AM}\right| = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 109. Cho tứ diện $ABCD$ biết $AB = AD = BD = a$, $AC = 2a$ và $\widehat{CAD} = 120^\circ$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}$.

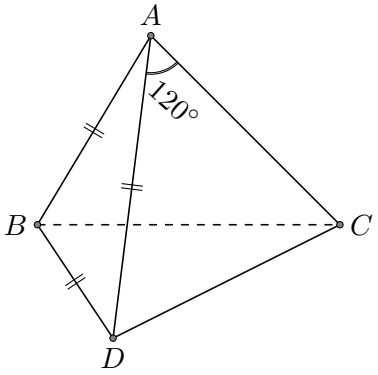
A. $\frac{1}{2}a^2$. **B.** $\frac{3}{2}a^2$. **C.** $\frac{-1}{2}a^2$. **D.** $\frac{-3}{2}a^2$.

Lời giải.

Theo giả thiết tam giác ABD là tam giác đều.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD} &= \left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\\ &= \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\\ &= AC\cdot AD\cdot\cos 120^\circ - AB\cdot AD\cdot\cos 60^\circ\\ &= \frac{-3}{2}a^2.\end{aligned}$$



Chọn đáp án D □

Câu 110. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c thì b song song với c.

B. Góc giữa hai đường thẳng bằng góc giữa hai véc-tơ chỉ phương của hai đường thẳng đó.

C. Góc giữa hai đường thẳng là góc nhọn.

D. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c khi b song song hoặc trùng với c.

Lời giải.

— Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c thì hoặc $b \parallel c$ là phát biểu sai vì b có thể trùng với c

— Góc giữa hai đường thẳng bằng góc giữa hai véc-tơ chỉ phương của hai đường thẳng đó là phát biểu sai vì góc giữa hai đường thẳng thuộc $[0^\circ;90^\circ]$ còn góc giữa hai véc-tơ thuộc $[0^\circ;180^\circ]$

— Góc giữa hai đường thẳng là góc nhọn là phát biểu sai vì góc giữa hai đường thẳng có thể bằng 90°.

Chọn đáp án D □

Câu 111. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$, $IJ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (I, J lần lượt là trung điểm của BC và AD). Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD là

A. 90°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 45°.

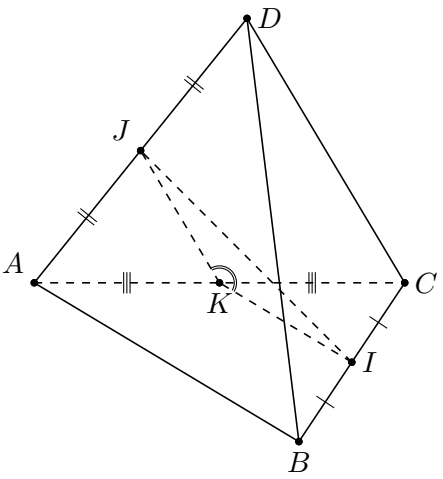
Lời giải.

Gọi K là trung điểm của cạnh AC, ta suy ra $IK \parallel AB$ và $KJ \parallel CD$.

Khi đó ta có:

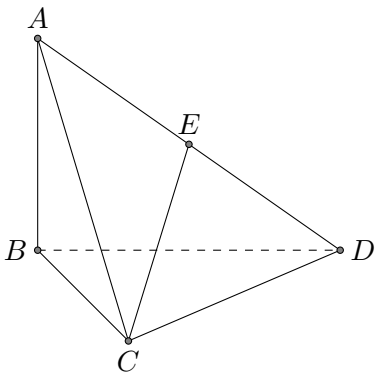
$$\begin{aligned}\cos(AB,CD) &= \cos(KI,KJ) = \left|\cos\widehat{IKJ}\right|\\ &= \left|\frac{KI^2+KJ^2-IJ^2}{2KI\cdot KJ}\right|\\ &= \left|\frac{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}-\frac{3a^2}{4}}{2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}}\right| = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Vậy $(AB,CD) = 60^\circ$.



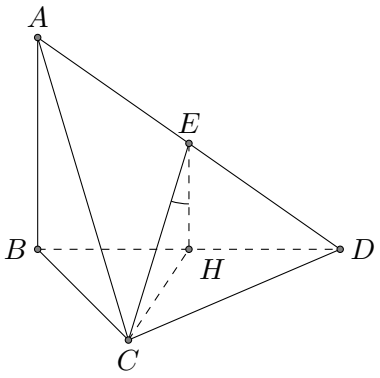
Chọn đáp án C □

Câu 112.
Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với mặt phẳng (BCD). Biết tam giác BCD vuông tại C và $AB = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, $AC = a\sqrt{2}$, $CD = a$. Gọi E là trung điểm của AD (tham khảo hình vẽ bên).
Góc giữa hai đường thẳng AB và CE bằng



A. $45°$. **B**. $60°$.
C. $30°$. **D**. $90°$.

Lời giải.
Gọi H là trung điểm của BD. Khi đó $EH \parallel AB$ và $EH \perp (BCD)$.
Góc giữa AB và CE bằng góc giữa EH và EC và bằng $\widehat{HEC}$.
Ta có $EH = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$, $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$,
$CH^2 = \dfrac{2(CB^2 + CD^2) - BD^2}{4} = \dfrac{3a^2}{8} \Rightarrow CH = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.
Vì $\tan\widehat{HEC} = \dfrac{CH}{EH} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4} \div \dfrac{a\sqrt{6}}{4} = 1$ nên $\widehat{HEC} = 45°$.
Vậy góc giữa AB và CE bằng $45°$.



Chọn đáp án A □

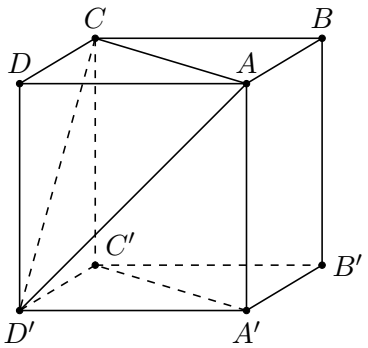
Câu 113. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa $A'C'$ và $D'C$ là
A. $120°$. **B**. $45°$. **C**. $60°$. **D**. $90°$.

Lời giải.
Ta có $A'C' \parallel AC$ nên

$$(A'C', D'C) = (D'C, AC).$$

Dễ thấy tam giác ACD' là tam giác đều nên $\widehat{D'CA} = 60°$, do đó

$$(A'C', D'C) = (D'C, AC) = 60°.$$



Chọn đáp án C □

Câu 114. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $SA = SB = 3a$, $AB = 2a$. Gọi φ là góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AS}$. Tính $\cos\varphi$.
A. $\cos\varphi = -\dfrac{7}{9}$. **B**. $\cos\varphi = \dfrac{7}{9}$. **C**. $\cos\varphi = \dfrac{1}{3}$. **D**. $\cos\varphi = -\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.
Ta có $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ nên $\cos\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AS}\right) = \cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AS}\right) = -\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS}\right) = -\cos\widehat{SAB}$. Mà

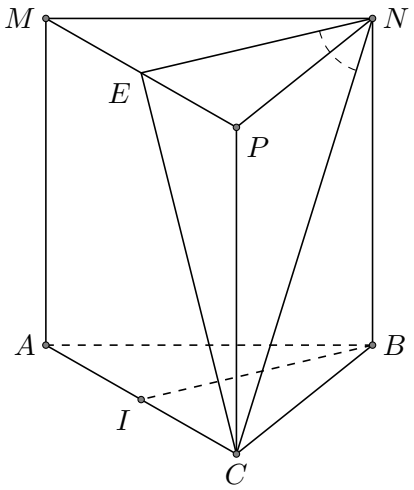
$$\cos\widehat{SAB} = \frac{SA^2 + AB^2 - SB^2}{2 \cdot SA \cdot AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AS}\right) = -\frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 115. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.MNP$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi I là trung điểm của cạnh AC. Cô-sin của góc giữa hai đường thẳng NC và BI bằng
A. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$. **C**. $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải.

Gọi E là trung điểm $MP \Rightarrow NE \parallel BI$.
Suy ra góc giữa 2 đường thẳng NC và BI bằng góc giữa hai đường thẳng NC và NE. Do đó góc cần tính là $\widehat{CNE}$.
Đặt a là chiều dài cạnh của hình lăng trụ. Ta có:



— $NC = a\sqrt{2}$ (đường chéo của hình vuông $CBNP$).

— $NE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (đường cao của $\triangle MNP$ đều).

— $CE = \sqrt{CP^2 + PE^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Áp dụng định lý cos trong tam giác CNE ta có

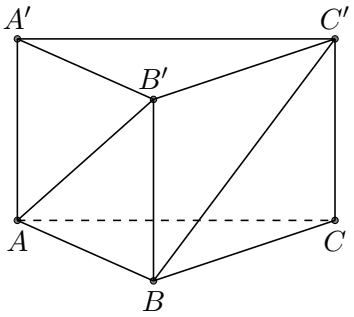
$$\cos\widehat{CNE} = \frac{NC^2 + NE^2 - CE^2}{2NC \cdot NE} = \frac{2a^2 + \dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{5a^2}{4}}{2 \cdot a\sqrt{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 116. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Biết rằng $AB' \perp BC'$, tính độ dài cạnh bên lăng trụ theo a.

A. $3\sqrt{2}a$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$. **C.** $\dfrac{1}{2}a$. **D.** $\sqrt{2}a$.

✍Lời giải.
Ta có



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}) \cdot (\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'}) \\ &= \overrightarrow{BB'}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B'C'} \\ &= \overrightarrow{BB'}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= BB'^2 - \frac{1}{2}a^2.\end{aligned}$$

Mà $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'} = 0$ nên $BB' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

Chọn đáp án B □

Câu 117. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = a$. Gọi M là trung điểm của SB. Góc giữa AM và BD bằng

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $90°$. **D.** $60°$.

✍Lời giải.
Cách 1. Ta có
$2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AB}\right)\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$

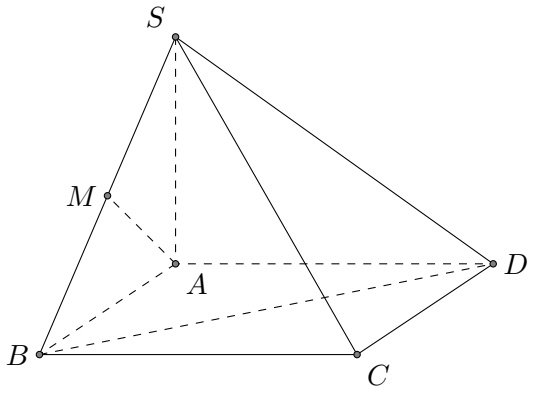
$= AB \cdot BD \cdot \cos 135° = -\dfrac{a \cdot a\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = -a^2.$

Từ đó

$$\cos\left(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BD}\right) = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD}}{AM \cdot BD} = \frac{-\dfrac{a^2}{2}}{\dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2}}$$

$= -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \left(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BD}\right) = 120°.$

Vậy góc giữa AM và BD bằng $60°$.



Cách 2. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng A, các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AB, AD, AS. Không mất tính tổng quát, giả sử $a = 1$. Khi đó ta có tọa độ các điểm $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$,

$S(0;0;1)$, $M\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$. Từ đó $\overrightarrow{AM}=\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{BD}=(-1;1;0)$. Và

$$\cos(AM;BD)=\left|\cos\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BD}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}\right|}{\left|\overrightarrow{AM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD}\right|}=\frac{\left|\frac{1}{2}(-1)+0\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 0\right|}{\sqrt{\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{1+1+0}}=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow (AM;BD)=60^\circ$.

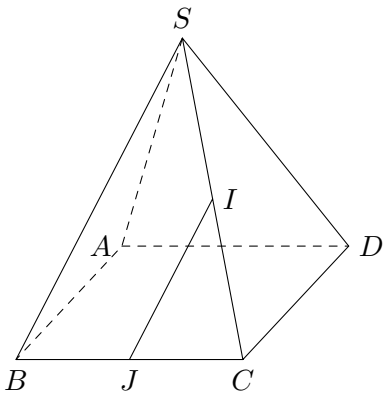
Chọn đáp án D □

Câu 118. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Số đo của góc (IJ,CD) bằng

A. 30°. **B**. 60°. **C**. 45°. **D**. 90°.

✍Lời giải.

$\triangle SBC$ có IJ là đường trung bình $\Rightarrow IJ\parallel SB$
Ta có $AB\parallel CD$
Suy ra $(IJ;CD)=(SB;AB)=\widehat{SBA}=60^\circ$.



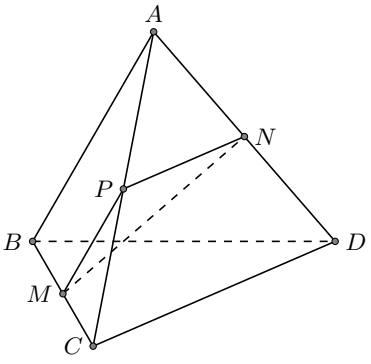
Chọn đáp án B □

Câu 119. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và AD. Biết $AB=CD=2a, MN=a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

A. 45°. **B**. 90°. **C**. 60°. **D**. 30°.

✍Lời giải.

Gọi P là trung điểm $AC\Rightarrow MP\parallel AB, MP=\frac{1}{2}AB=a$ và $NP\parallel CD, NP=\frac{1}{2}CD=a$.
$(AB,CD)=(PM,PN)$.
Ta có $\cos\widehat{MPN}=\frac{PM^2+PN^2-MN^2}{2PM\cdot PN}=\frac{a^2+a^2-3a^2}{2a^2}=-\frac{1}{2}$.
Từ đó suy ra $\widehat{MPN}=120^\circ\Rightarrow(AB,CD)=60^\circ$.



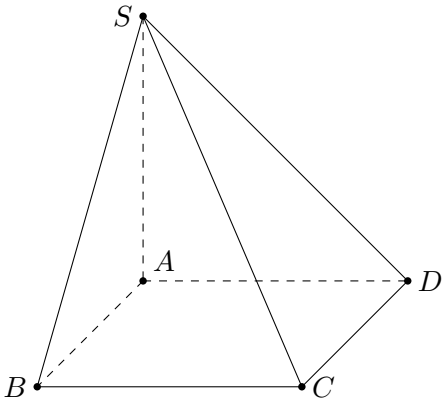
Chọn đáp án C □

Câu 120. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, SA vuông góc với đáy. $AB=a$, $AC=2a$, $SA=a$. Tính góc giữa SD và BC.

A. 30°. **B**. 90°. **C**. 60°. **D**. 45°.

✍Lời giải.

Ta có $AD \parallel BC \Rightarrow (SD, BC) = (SD, AD) = \widehat{SDA}$.
Xét ΔSDA vuông tại A có $AD = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$
$\Rightarrow \tan \widehat{SDA} = \dfrac{SA}{AD} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
$\Rightarrow \widehat{SDA} = 30^\circ$.



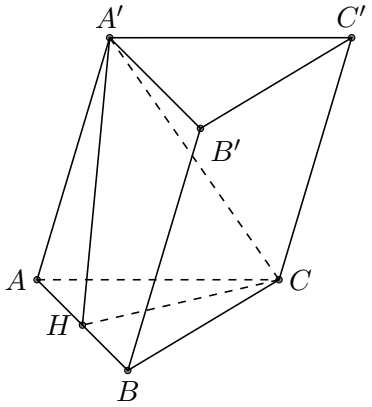
Chọn đáp án A □

Câu 121. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy là tam giác đều cạnh $AB = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh AB. Biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60°. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng AC và BB'. Tính $\cos\varphi$.

A. $\cos\varphi = \dfrac{1}{4}$. **B.** $\cos\varphi = \dfrac{1}{3}$. **C.** $\cos\varphi = \dfrac{2}{5}$. **D.** $\cos\varphi = \dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $A'H \perp (ABC) \Rightarrow AH$ là hình chiếu của AA' lên mặt phẳng (ABC).
$\Rightarrow (AA'; (ABC)) = (AA'; AH) = \widehat{A'AH} = 60^\circ$.
Ta có: $AA' \parallel BB' \Rightarrow (AC; BB') = (AC; AA') = \widehat{A'AC} = \varphi$.
Có $AH = a \Rightarrow A'H = AH \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$; $AA' = \sqrt{AH^2 + A'H^2} = 2a$;
$CH = a\sqrt{3} \Rightarrow A'C = a\sqrt{6}$.
Xét $\Delta A'AC$, ta có: $\cos\widehat{A'AC} = \dfrac{AA'^2 + AC^2 - A'C^2}{2AA' \cdot AC} = \dfrac{4a^2 + 4a^2 - 6a^2}{2 \cdot 2a \cdot 2a} = \dfrac{1}{4}$.



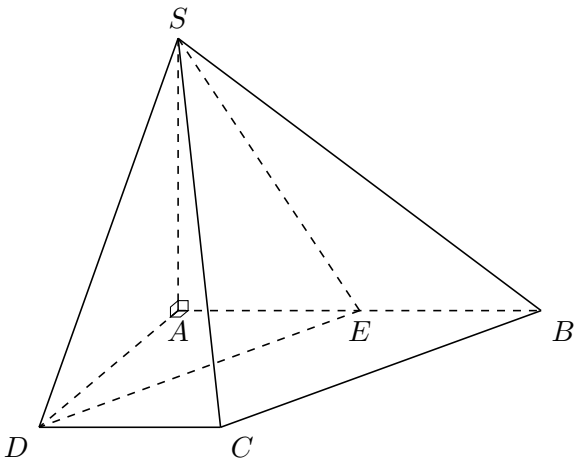
Chọn đáp án A □

Câu 122. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D, cạnh $AB = 2a$, $AD = DC = a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Góc giữa hai đường thẳng SD và BC bằng

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 120°.

Lời giải.

Trong hình thang vuông $ABCD$ ta kẻ $DE \parallel BC$ với E là trung điểm AB.
Suy ra $\widehat{SD; BC} = \widehat{SD; DE} = \widehat{SDE}$.
$\begin{cases} DE = CD = a\sqrt{2} \\ SE = SD = a\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \Delta SDE$đều $\Rightarrow \widehat{SDE} = 60^\circ$.
Vậy góc giữa hai đường thẳng SD và BC bằng 60°.

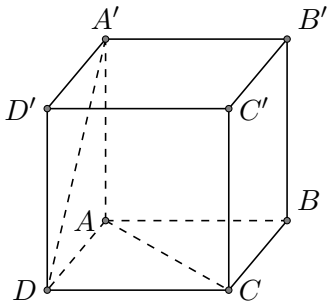


Chọn đáp án C □

Câu 123.

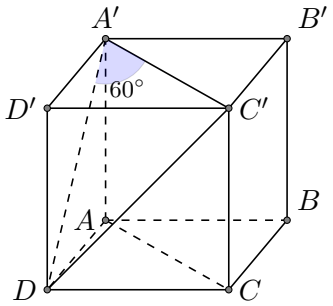
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ bằng

A. $45°$. **B**. $30°$. **C**. $60°$. **D**. $90°$.



✍Lời giải.

Ta có: $AC \parallel A'C' \Rightarrow (AC, A'D) = (A'C', A'D)$.
Mặt khác: $A'C' = A'D = DC' = a\sqrt{2}$ nên suy ra $\triangle A'DC'$ đều.
Do đó $(A'C', A'D) = 60°$.

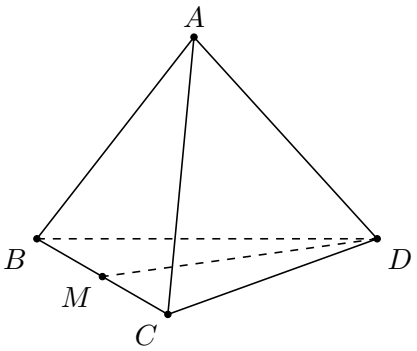


Chọn đáp án C □

Câu 124.

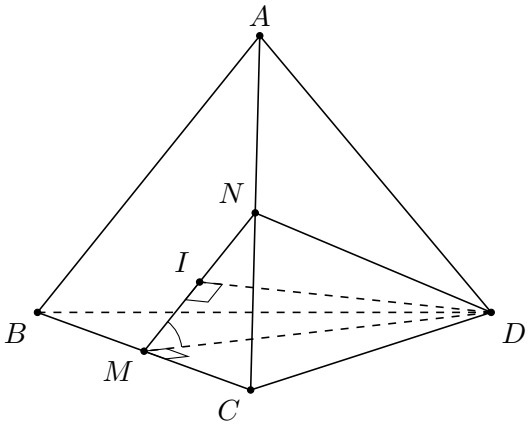
Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi M là trung điểm cạnh BC (tham khảo hình vẽ bên). Giá trị cô-sin của góc giữa hai đường thẳng AB và DM bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C**. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D**. $\dfrac{1}{2}$.



✍Lời giải.

Gọi N là trung điểm AC.
Gọi I là trung điểm MN.
Ta có $\begin{cases} MN \parallel AB \\ DI \perp MN \end{cases} \Rightarrow (AB, DM) = (MN, DM)$.
Do vậy, $\cos(AB, DM) = \cos(MN, DM) = \cos \widehat{IMD}$.
Ta có $\begin{cases} DM = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ MI = \dfrac{a}{4} \end{cases} \Rightarrow \cos \widehat{IMD} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

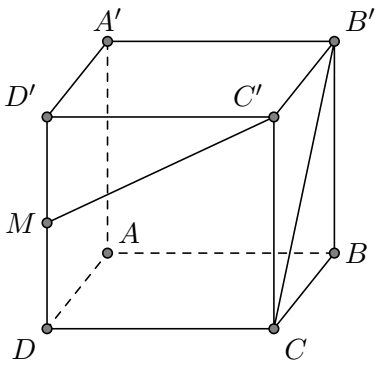


Chọn đáp án A □

Câu 125.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của DD' (tham khảo hình vẽ bên). Tính cô-sin của góc giữa hai đường thẳng $B'C$ và $C'M$.

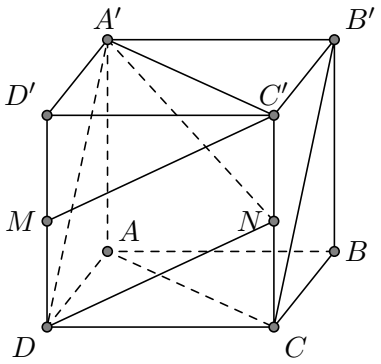
A. $\dfrac{2\sqrt{2}}{9}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.



✍Lời giải.

Gọi N là trung điểm của CC', suy ra $C'M \parallel DN$. Khi đó, góc giữa hai đường thẳng $B'C$ và $C'M$ chính là góc giữa hai đường thẳng $A'D$ và DN.
Giả sử hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a. Ta có $A'D = a\sqrt{2}$, $DN = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, $A'N = \dfrac{3a}{2}$.
Khi đó, áp dụng định lí cô-sin trong tam giác $A'DN$, ta có

$$\cos\widehat{A'DN} = \frac{DA'^2 + DN^2 - A'N^2}{2 \cdot A'D \cdot DN} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$



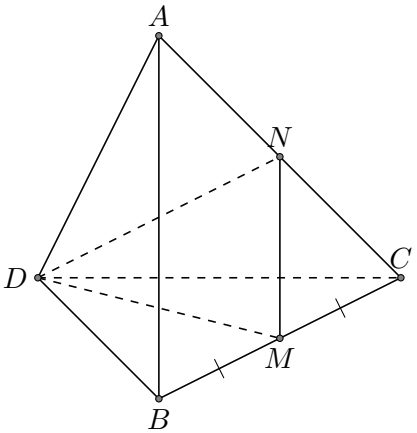
Chọn đáp án (B) □

Câu 126. Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm cạnh BC. Khi đó $\cos(AB, DM)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Giả sử $AB = a$ và gọi N là trung điểm AC, khi đó
$MN \parallel AB$ và $DM = DN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; MN = \dfrac{a}{2}$.
Ta có $\cos\widehat{DMN} = \dfrac{MD^2 + MN^2 - DN^2}{2 \cdot MD \cdot MN} = \dfrac{MN^2}{2 \cdot MD \cdot MN} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.
Vậy $\cos(AB, DM) = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

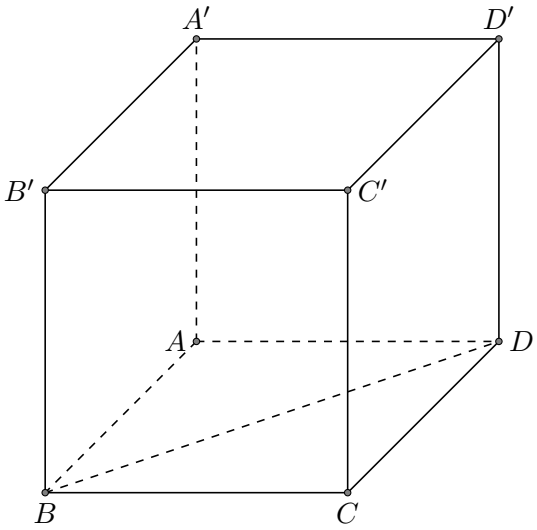


Chọn đáp án (B) □

Câu 127. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính số đo góc tạo bởi hai đường thẳng BD và $B'C'$?

A. $90°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

✍Lời giải.



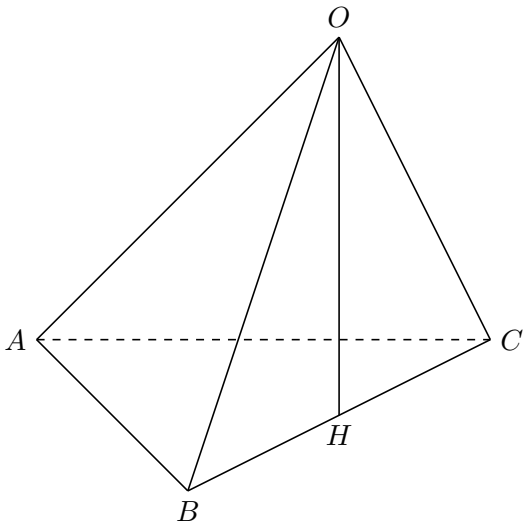
Ta có $B'C' \parallel BC \Rightarrow (BD, B'C') = (BD, BC) = 45°$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 128. Cho tứ diện $OABC$ có $OA = OB = OC = AB = AC = a, BC = a\sqrt{2}$. Tính số đo góc tạo bởi hai đường thẳng OC và AB?

A. $60°$. **B**. $30°$. **C**. $45°$. **D**. $15°$.

✍Lời giải.



Gọi H là trung điểm của BC, dễ thấy các tam giác ABC, OBC vuông cân tại A, O và $OH \perp (ABC)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HO}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = a \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 135° = -\dfrac{a^2}{2}$.

$\cos(AB, OC) = \left|\dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC}}{AB \cdot OC}\right| = \dfrac{1}{2} \Rightarrow (AB, OC) = 60°$.

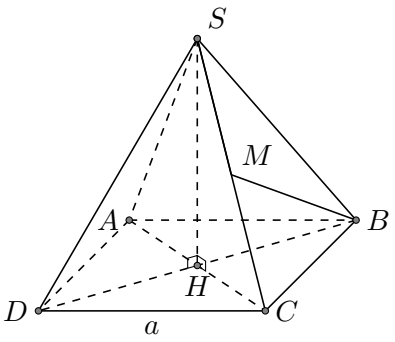
Chọn đáp án (A) □

Câu 129. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm SC. Tính $\cos\varphi$ với φ là góc giữa hai đường thẳng BM và AC.

A. $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **B**. $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **C**. $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{12}$. **D**. $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

✍Lời giải.

Gọi H là tâm của hình vuông $ABCD$, khi đó $SH \perp (ABCD)$.
Ta có $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{HM} - \overrightarrow{HB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{HC}$ và $HC \perp HB$,
$HC \perp SH$ nên $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM} = HC^2 = \dfrac{AC^2}{4} = \dfrac{a^2}{2}$.



Vì tam giác SBC đều cạnh a và BM là trung tuyến nên $BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Khi đó $\cos\left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BM}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM}}{AC \cdot BM} = \dfrac{\frac{a^2}{2}}{a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} > 0$.

Do vậy, $\cos\varphi = \cos\left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BM}\right) = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

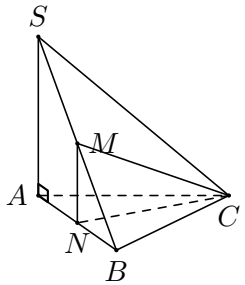
Chọn đáp án (A) □

Câu 130. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $SA = a$. Gọi M là trung điểm cạnh SB. Tính góc giữa hai đường thẳng SA và CM.

A. $45°$. **B**. $90°$. **C**. $60°$. **D**. $30°$.

✍Lời giải.

Gọi N là trung điểm AB. Vì tam giác ABC đều nên
$CN \perp AB$, $CN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Do M là trung điểm SB nên MN là đường trung bình của $\triangle SAB$
$\Rightarrow MN \parallel SA$ và $MN = \dfrac{a}{2} \Rightarrow (\widehat{SA, CM}) = \widehat{CMN}$.
Xét tam giác CMN có $\tan\widehat{CMN} = \dfrac{CN}{NM} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{CMN} = 60°$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 131. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau một góc $120°$ và $|\vec{a}| = 2$, $\left|\vec{b}\right| = 4$. Tính $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|$

A. $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 6$. **B**. $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 2\sqrt{7}$. **C**. $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 2\sqrt{3}$. **D**. $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 2\sqrt{5}$.

✍Lời giải.

Ta có $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 = \left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}\,\vec{b} = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2|\vec{a}| \cdot |b| \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 12$.
$\Rightarrow \left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 2\sqrt{3}$.

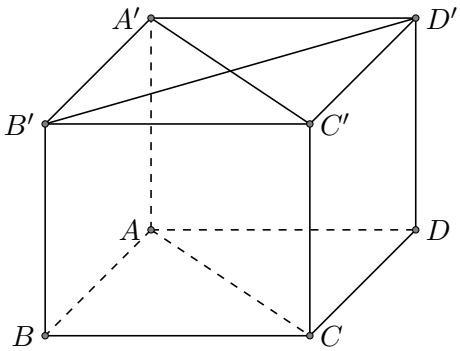
Chọn đáp án (C) □

Câu 132. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và BD bằng

A. $60°$. **B**. $30°$. **C**. $45°$. **D**. $90°$.

✍Lời giải.

Ta có:
$(A'C', BD) = (A'C', B'D') = 90°$.



Chọn đáp án (D) □

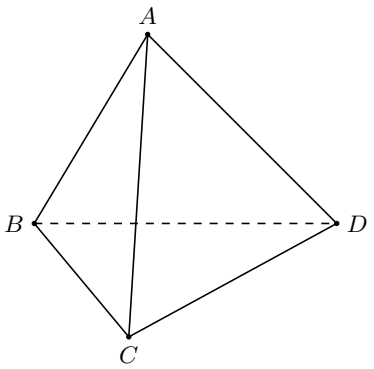
Câu 133. Cho tứ diện $ABCD$ có $DA = DB = DC = AC = AB = a$, $\widehat{ABC} = 45°$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và DC.

A. $120°$. **B**. $60°$. **C**. $30°$. **D**. $90°$.

✍Lời giải.

Do ΔABC cân tại A mà $\widehat{ABC} = 45^\circ$ nên ΔABC vuông cân tại A, $BC = a\sqrt{2} \Rightarrow \Delta BCD$ vuông cân tại D.
Ta có: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC} = \left(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}\right)\cdot\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC} = -a\cdot a\cdot\cos 60^0 = -\dfrac{1}{2}a^2$.

Do đó: $\cos(AB, DC) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}\right|}{AB\cdot DC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow (AB, DC) = 60^\circ$.



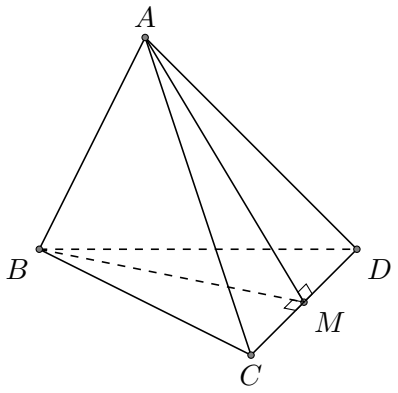
Chọn đáp án B □

Câu 134. Cho tứ diện đều $ABCD$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.
A. 60°. **B**. 90°. **C**. 45°. **D**. 30°.

Lời giải.
Gọi M là trung điểm của CD, ta có

$$\begin{cases} CD \perp AM \\ CD \perp BM \end{cases} \Rightarrow CD \perp AB.$$

Vậy $(AB, CD) = 90^\circ$.

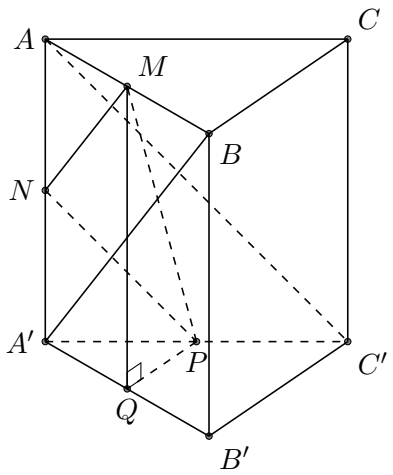


Chọn đáp án B □

Câu 135. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bằng a, chiều cao bằng b. Biết góc giữa hai đường thẳng AC' và $A'B$ bằng 60°, hãy tính b theo a.
A. $b = 2a$. **B**. $b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$. **C**. $b = \sqrt{2}a$. **D**. $b = \dfrac{1}{2}a$.

Lời giải.
Lấy M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AA', $A'C'$, $A'B'$, suy ra MN, NP, PQ và MQ lần lượt là đường trung bình của các tam giác ABA', $AA'C'$, $A'B'C'$ và hình chữ nhật $ABB'A'$. Từ đó suy ra

$$\begin{cases} MN \parallel = \dfrac{1}{2}A'B \\ NP \parallel = \dfrac{1}{2}AC' \\ PQ = \dfrac{1}{2}B'C' = \dfrac{a}{2} \\ MQ \parallel = BB' \end{cases}. \qquad (1)$$



Từ (1) suy ra $\begin{cases} MN = NP \\ (AC', A'B) = (MN, NP) \Rightarrow \widehat{MNP} = 120^\circ \end{cases}$, từ đó suy ra $\triangle MNP$ là tam cân tại N và $\widehat{MNP} = 120^\circ$, suy ra $MP = MN\sqrt{3} = \dfrac{A'B\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3(a^2+b^2)}}{2}$. Kết hợp với $BB' \perp (A'B'C')$, từ (1) suy ra $MQ \perp (A'B'C') \Rightarrow MQ \perp PQ$ suy ra tam giác MPQ vuông ở Q. Từ đó ta có

$$b^2 = MQ^2 = MP^2 - PQ^2 = \frac{3a^2+3b^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2+3b^2}{4} \Rightarrow b^2 = 2a^2 \Rightarrow b = a\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án C □

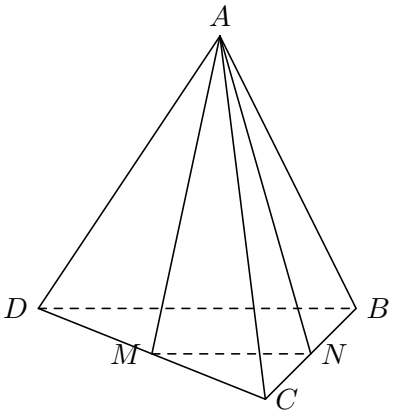
Câu 136. Tứ diện đều $ABCD$ cạnh a, M là trung điểm của cạnh CD. Cô-sin của góc giữa AM và BD là

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

✍Lời giải.

Gọi N là trung điểm của BC. Do $MN \parallel BD$ nên góc giữa AM và BD bằng góc giữa AM và MN. Suy ra góc cần tìm là góc $\widehat{AMN}$. Ta có

$$\begin{aligned}\cos\widehat{AMN} &= \frac{MA^2+MN^2-AN^2}{2MA\cdot MN}\\ &= \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a}{2}}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{6}.\end{aligned}$$



Chọn đáp án (A) □

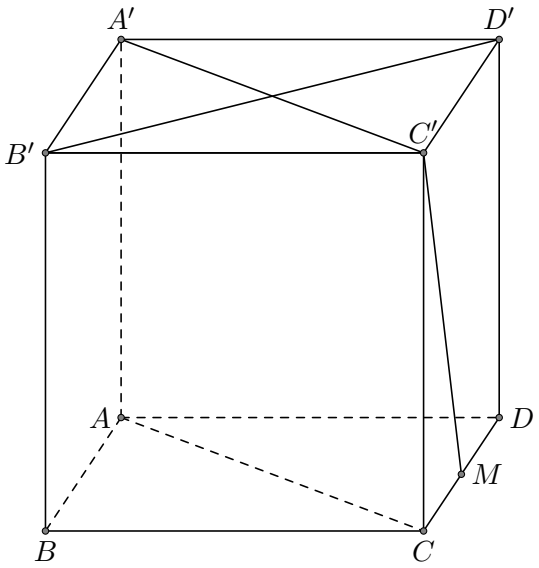
Câu 137. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của CD. Côsin của góc giữa AC và $C'M$ bằng bao nhiêu?

A. 0. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

✍Lời giải.

Giả sử hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.
Ta có $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{C'M} = \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{C'C}+\overrightarrow{CM}\right) = \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{AA'}-\dfrac{\overrightarrow{AB}}{2}\right) = -\dfrac{AB^2}{2} = -\dfrac{a^2}{2}$. (*)

$AC = a\sqrt{2}$, $C'M = \sqrt{C'C^2+CM^2} = \sqrt{a^2+\dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. Từ (*) suy ra $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{C'M}\right) = \left|\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{C'M}}{AC\cdot C'M}\right| = \left|\dfrac{-\frac{a^2}{2}}{a\sqrt{2}\cdot\frac{a\sqrt{5}}{2}}\right| = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$.



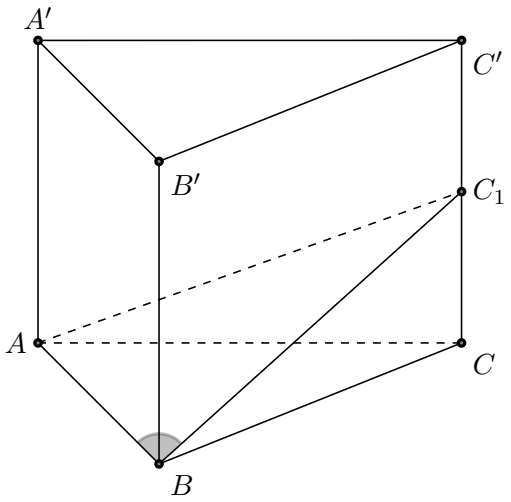
Chọn đáp án (D) □

Câu 138. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng 1, cạnh bên bằng 2. Gọi C_1 là trung điểm của CC'. Tính côsin của góc giữa hai đường thẳng BC_1 và $A'B'$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

✍Lời giải.

$A'B' \parallel AB \Rightarrow (BC_1, A'B') = (BC_1, AB) = \widehat{ABC_1}$.
Tam giác ABC_1 có $AB = 1; AC_1 = BC_1 = \sqrt{2}$ và $\cos\widehat{ABC_1} = \dfrac{AB^2 + BC_1^2 - AC_1^2}{2AB \cdot BC_1} \Leftrightarrow \cos\widehat{ABC_1} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

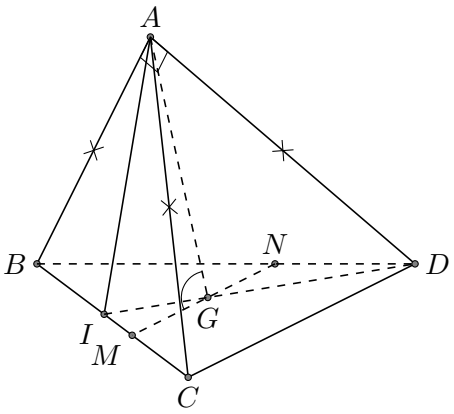


Chọn đáp án (B) □

Câu 139. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD = 1$, $\widehat{BAC} = 60°$, $\widehat{BAD} = 90°$, $\widehat{DAC} = 120°$. Tính côsin của góc tạo bởi hai đường thẳng AG và CD, trong đó G là trọng tâm tam giác BCD.

A. $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{6}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.
*$\triangle ABC$ đều $\Rightarrow BC = 1$.
*$\triangle ACD$ cân tại A có
$CD = \sqrt{AC^2 + AD^2 - 2AC.AD.\cos 120°} = \sqrt{3}$.
*$\triangle ABD$ vuông cân tại A có $BD = \sqrt{2}$.
*$\triangle BCD$ có $CD^2 = BC^2 + BD^2 \Rightarrow \triangle BCD$ vuông tại B.
Dựng đường thẳng d qua G và song song CD, cắt BC, BD lần lượt tại M, N.
Ta có $MG \parallel CD \Rightarrow \widehat{(AG, CD)} = \widehat{(AG, MG)}$.



Gọi I là trung điểm của BC, xét $\triangle BDI$ vuông tại B có $DI = \sqrt{BD^2 + BI^2} = \sqrt{2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{3}{2}$.

Ta có $\dfrac{IM}{IC} = \dfrac{MG}{CD} = \dfrac{IG}{ID} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow IM = \dfrac{1}{3} \cdot IC = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{BC}{2} = \dfrac{1}{6}$;
$MG = \dfrac{1}{3} \cdot CD = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $IG = \dfrac{1}{3} \cdot ID = \dfrac{1}{2}$.

Xét $\triangle AIM$ vuông tại I có $AM = \sqrt{AI^2 + IM^2} = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{6}\right)^2}$

$= \dfrac{\sqrt{7}}{3} \cdot \cos\widehat{AID} = \dfrac{AI^2 + ID^2 - AD^2}{2AI \cdot ID} = \dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 1^2}{2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{3}{2}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{9}$

$AG = \sqrt{AI^2 + IG^2 - 2AI \cdot IG \cdot \cos\widehat{AID}} = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4\sqrt{3}}{9}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Xét $\triangle AMG$ có $\cos(AG, MG) = \left|\cos\widehat{AGM}\right| = \left|\dfrac{AG^2 + GM^2 - AM^2}{2 \cdot AG \cdot GM}\right|$

$= \left|\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)^2}{2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3}}\right| = \dfrac{1}{6}$.

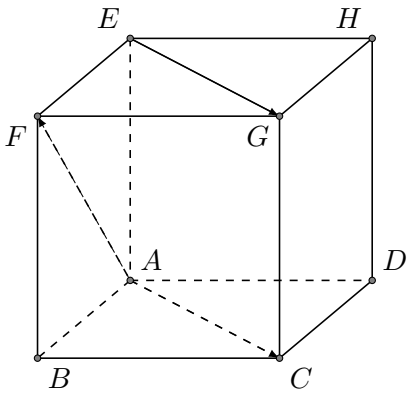
Chọn đáp án C □

Câu 140. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Tính góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EG}$.

A. $0°$. **B**. $60°$. **C**. $90°$. **D**. $30°$.

Lời giải.

Vì $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$ nên $(\overrightarrow{EG}, \overrightarrow{AF}) = \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}\right) = \widehat{FAC} = 60°$ (tam giác FAC đều).



Chọn đáp án B □

Câu 141. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, $C'D'$. Xác định góc giữa hai đường thẳng MN và AP.

A. $60°$. **B**. $90°$. **C**. $30°$. **D**. $45°$.

Lời giải.

Do AC song song với MN nên góc giữa hai đường thẳng MN và AP bằng góc giữa hai đường thẳng AC và AP.

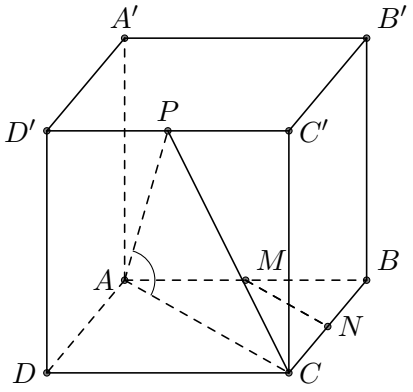
Tính được $PC = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$; $AP = \dfrac{3a}{2}$; $AC = a\sqrt{2}$.

Áp dụng định lý cosin cho $\triangle ACP$ ta có

$$\cos\widehat{CAP} = \frac{AP^2 + AC^2 - PC^2}{2AP \cdot AC} = \frac{\dfrac{9a^2}{4} + 2a^2 - \dfrac{5a^2}{4}}{2 \cdot \dfrac{3a}{2} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\Rightarrow \widehat{CAP} = 45°$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng MN và AP bằng $45°$.



Chọn đáp án D □

Câu 142. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O. Qua O có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với Δ?

A. 1. **B**. 3. **C**. Vô số. **D**. 2.

Lời giải.

Qua điểm O có vô số đường thẳng vuông góc với đường thẳng Δ.

Chọn đáp án C □

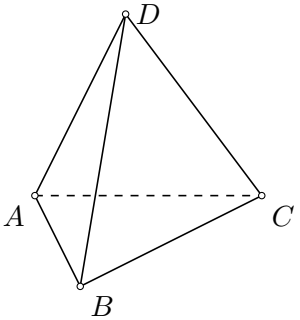
Câu 143. Cho tứ diện đều $ABCD$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ bằng

A. a^2. **B**. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **C**. 0. **D**. $-\dfrac{a^2}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = a \cdot a \cdot \cos 60° - a \cdot a \cos 60° = 0$.



Chọn đáp án C □

Câu 144. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $a = 4\sqrt{2}$ cm, cạnh bên SC vuông góc với đáy và $SC = 2$ cm. Gọi M, N là trung điểm của AB, BC. Góc giữa SN và CM là

A. $45°$. **B**. $30°$. **C**. $60°$. **D**. $90°$.

✍Lời giải.

Ta tính được $CM = 2\sqrt{6}$. Vẽ $NK \parallel CM$ và $K \in AC$.

Do N là trung điểm BC nên K là trung điểm BM.

Ta có $NK = \dfrac{1}{2}CM = \sqrt{6}$.

Xét $\triangle SCN$ vuông tại C, ta có $SN = \sqrt{SC^2 + CN^2} = 2\sqrt{3}$.

Do K là trung điểm BM nên $BK = KM = \dfrac{1}{2}BM = \dfrac{1}{4}BA = \sqrt{2}$.

Xét $\triangle CMB$ vuông tại M, ta có $CK = \sqrt{CM^2 + MK^2} = \sqrt{26}$.

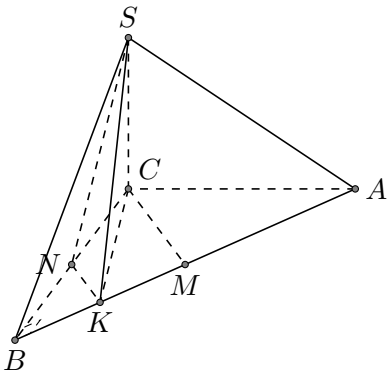
Trong $\triangle SCK$ vuông tại C. Ta có $SK = \sqrt{SC^2 + CK^2} = \sqrt{30}$.

Áp dụng định lý hàm cos trong $\triangle SNK$ ta có

$$\cos\left(\widehat{SN, CM}\right) = \left|\cos\left(\widehat{SNK}\right)\right| = \left|\frac{SN^2 + KN^2 - SK^2}{2 \cdot SN \cdot KN}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\Rightarrow \widehat{SN, CM} = 45°$.

Chọn đáp án (A) □



Câu 145. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Tính cô-sin góc giữa hai đường thẳng AB và CI với I là trung điểm của AD.

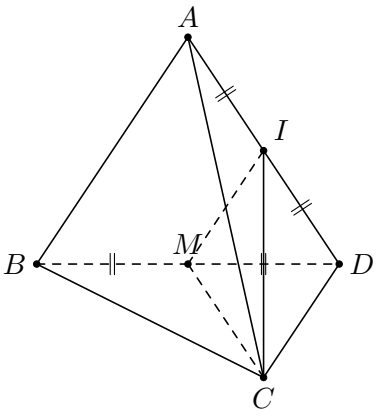
A. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **B**. $\dfrac{1}{2}$. **C**. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi M là trung điểm BD. Khi đó $MI \parallel AB$ nên góc giữa AB và CI là góc giữa MI và CI là $\widehat{CIM}$.

Ta có $CI = CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $MI = \dfrac{a}{2}$.

$$\cos\widehat{CIM} = \frac{IC^2 + IM^2 - CM^2}{2 \cdot IC \cdot IM} = \frac{\dfrac{a^2}{4}}{2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$



Chọn đáp án (A) □

Câu 146. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AD. Biết $MN = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

A. $120°$. **B**. $30°$. **C**. $90°$. **D**. $60°$.

✍Lời giải.

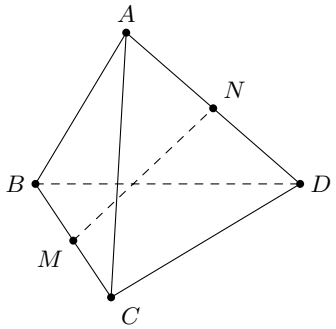
Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{NM}$

$\Rightarrow AB^2 + CD^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 4MN^2$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 4a^2$.

Suy ra $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}}{AB \cdot CD} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}\right) = 60°$.

Vậy $(AB, CD) = 60°$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 147. Trong không gian, tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì song song với nhau.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

✍Lời giải.
Mệnh đề: "Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau" là sai, vì hai đường thẳng đó chưa chắc đồng phẳng.
Chọn đáp án (D) □

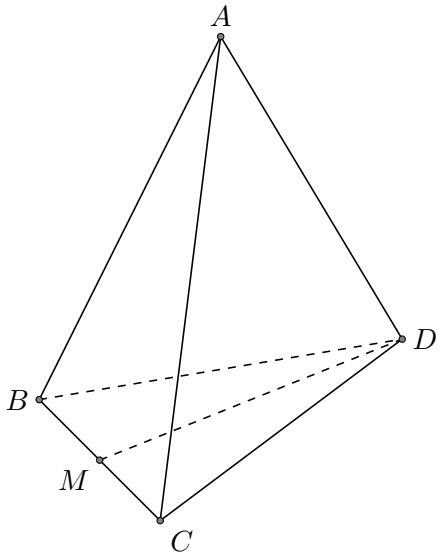
Câu 148. Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó $\cos(AB, DM)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

✍Lời giải.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DM} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})\\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DM} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{1}{2}a^2-a\cdot a\cdot\cos 60^\circ+\frac{1}{2}a\cdot a\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{4}a^2.\end{aligned}$$

$\Rightarrow a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DM}\right)=\frac{1}{4}a^2.$
$\Leftrightarrow \cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DM}\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}\Leftrightarrow\cos(AB;DM)=\frac{\sqrt{3}}{6}.$



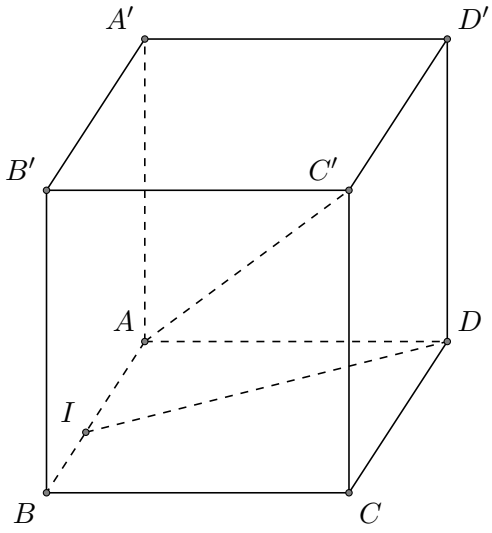
Chọn đáp án (A) □

Câu 149. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi I là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AI=x$, $0<x<a$. Tìm x theo a để góc giữa hai đường thẳng DI và AC' bằng 60°.

A. $x=2a$. **B.** $x=(4-\sqrt{13})a$. **C.** $x=a\sqrt{3}$. **D.** $x=(4-\sqrt{15})a$.

✍Lời giải.

Ta có $DI=\sqrt{AD^2+AI^2}=\sqrt{a^2+x^2}$, $AC'=a\sqrt{3}$.
$\overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{DI}=(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AD})$
$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AD}^2=ax-a^2$
(vì $AA'\perp(ABCD)$ và $AB\perp AD$)
$\cos(AC',DI)=\frac{|\overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{DI}|}{AC'\cdot DI}\Leftrightarrow\cos 60^\circ=\frac{|ax-a^2|}{\sqrt{x^2+a^2}\cdot a\sqrt{3}}$
$\Leftrightarrow\sqrt{3(a^2+x^2)}=2|x-a|\Leftrightarrow 3a^2+3x^2=4(x^2-2ax+a^2)$
$\Leftrightarrow x^2-8ax+a^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=(4-\sqrt{15})a\\ x=(4+\sqrt{15})a.\end{array}\right.$
Do $0<x<a$ nên $x=(4-\sqrt{15})a$.

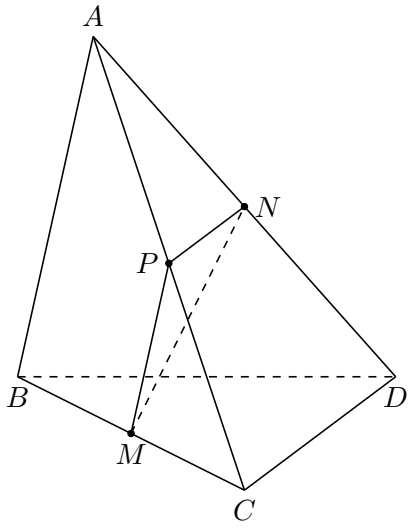


Chọn đáp án (D) □

Câu 150. Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N là trung điểm của BC và AD. Biết $AB=CD=a$, $MN=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.

✍Lời giải.



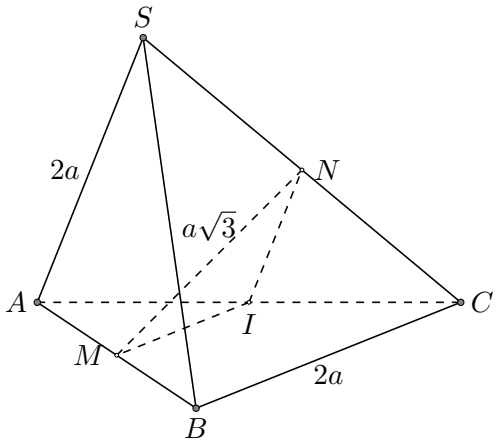
Gọi P là trung điểm AC. Ta có MP, NP lần lượt là đường trung bình của các tam giác $\triangle ABC$, tam giác $\triangle ACD$ nên suy ra $MP = NP = \dfrac{a}{2}$ và góc giữa AB, CD là góc giữa MP và NP.

Trong tam giác $\triangle MNP$ ta có $\cos\widehat{MPN} = \dfrac{MP^2 + NP^2 - MN^2}{2MP \cdot NP} = -\dfrac{1}{2}$ suy ra $\widehat{MPN} = 120^\circ$. Do đó góc giữa AB và CD bằng 60°.
Chọn đáp án C □

Câu 151. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = BC = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và SC, biết $MN = a\sqrt{3}$. Tính số đo góc giữa hai đường thẳng SA và BC.

A. 30°. **B**. 150°. **C**. 60°. **D**. 120°.

Lời giải.
Gọi I là trung điểm cạnh AC. Ta có
$\begin{cases} IN \parallel SA \\ IM \parallel BC \end{cases} \Rightarrow \widehat{(SA, BC)} = \widehat{(IN, IM)}$.
Xét tam giác IMN, có
$\cos\widehat{MIN} = \dfrac{IM^2 + IN^2 - MN^2}{2IM \cdot IN}$
$= \dfrac{2a^2 - 3a^2}{2a^2} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{MIN} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{(SA, BC)} = 60^\circ$.



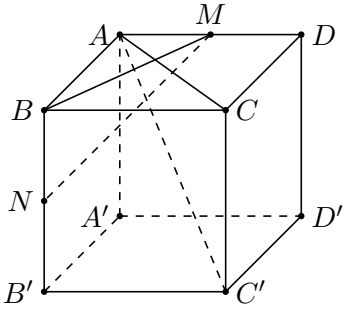
Chọn đáp án C □

Câu 152. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD, BB'. Côsin của góc hợp bởi MN và AC' là

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **C**. $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AB}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\right). \end{aligned}$$



$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Do đó: $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AC'}=\dfrac{1}{2}\left(2AB^2-AD^2+AA'^2\right)=AB^2$.

Mặt khác: $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AC'}=MN\cdot AC'\cdot\cos\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC'}\right)\Leftrightarrow\cos\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC'}\right)=\dfrac{\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AC'}}{MN\cdot AC'}$.

Lại có: $MN=\sqrt{BN^2+BM^2}=\sqrt{\dfrac{1}{4}AA'^2+AB^2+AM^2}=\sqrt{\dfrac{1}{4}AA'^2+AB^2+\dfrac{1}{4}AD^2}=AB\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

Và $AC'=\sqrt{AA'^2+AC^2}=\sqrt{AA'^2+AB^2+AD^2}=AB\sqrt{3}$.

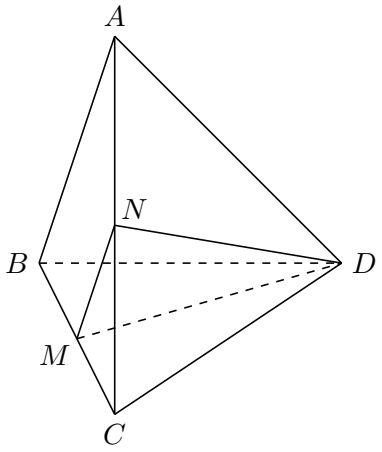
$\Rightarrow\cos\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC'}\right)=\dfrac{AB^2}{AB\dfrac{\sqrt{6}}{2}\cdot AB\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. Hay $\cos\left(MN,AC'\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 153. Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó $\cos(AB,DM)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

✍**Lời giải.**



Gọi N là trung điểm của AC. Ta có $\cos(AB,DM)=\cos(MN,DM)=\dfrac{|MN^2+MD^2-ND^2|}{2MN.MD}=\dfrac{\dfrac{a^2}{4}}{2\cdot\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}=$

$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

Chọn đáp án A □

Câu 154. Tính số đo góc giữa hai đường thẳng AC và BD của tứ diện đều $ABCD$.

A. $90°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

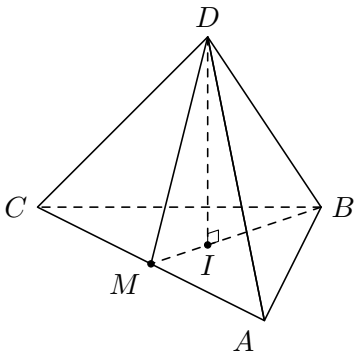
✍**Lời giải.**

Gọi I là tâm của tam giác đều $ABC\Rightarrow DI\perp(ABC)$.

Gọi M là trung điểm AC.

Ta có $\begin{cases}AC\perp BM\\AC\perp DI\ (\text{do } DI\perp(ABC))\end{cases}\Rightarrow AC\perp(MBD)$.

Khi đó $AC\perp BD$. Vậy $(AC,BD)=90°$.



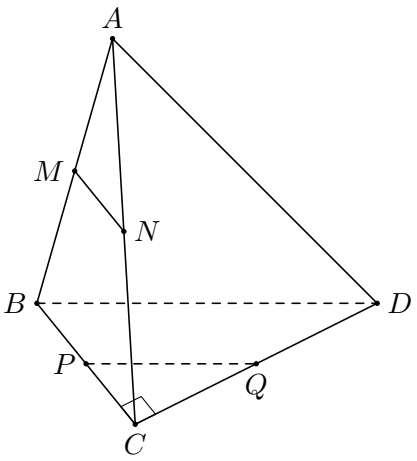
Chọn đáp án A □

Câu 155. Cho tứ diện $ABCD$ với đáy BCD là tam giác vuông cân tại C. Các điểm M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của AB,AC,BC,CD. Góc giữa MN và PQ bằng:

A. $0°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

✍**Lời giải.**

Vì MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $MN \parallel BC$.
Vì PQ là đường trung bình của tam giác BCD nên $PQ \parallel BD$.
Suy ra: $(MN, PQ) = (BC, BD)$.
Vì tam giác BCD vuông cân tại C nên $\widehat{CBD} = 45^\circ$.
Suy ra: $(BC, BD) = \widehat{CBD} = 45^\circ$.
Vậy $(MN, PQ) = 45^\circ$.



Chọn đáp án D □

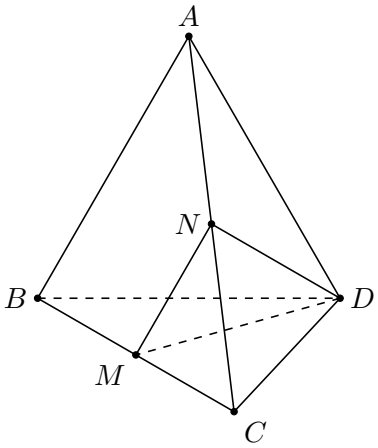
Câu 156. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi M là trung điểm của BC. Tính cô-sin của góc giữa hai đường thẳng AB và DM.

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

✍Lời giải.
Gọi N là trung điểm của AC. Vì $MN \parallel AB$ nên $\cos(AB, DM) = \cos(MN, DM)$.
Tam giác ACD đều cạnh bằng a nên $DN = \frac{a\sqrt{3}}{2} = DM$.
MN là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên $MN = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$.
Xét $\triangle MND$, ta có

$$\cos\widehat{DMN} = \frac{MN^2 + DM^2 - DN^2}{2MN \cdot DM} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Vậy $\cos(AB, DM) = \frac{\sqrt{3}}{6}$.



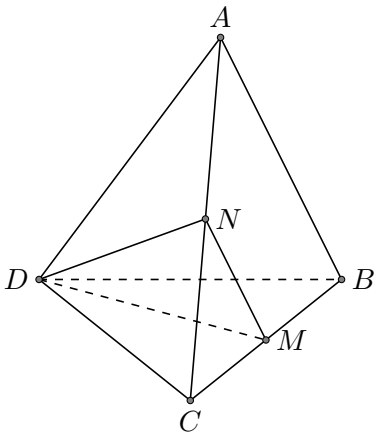
Chọn đáp án B □

Câu 157. Cho tứ diện đều cạnh a, M là trunng điểm của BC. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AB và DM.

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

✍Lời giải.
Kẻ $MN \parallel AB$, cắt AC tại trung điểm N của AC.
Xét tam giác NMD ta có:

$$\begin{aligned}\cos\widehat{NMD} &= \frac{MN^2 + MD^2 - ND^2}{2MN \cdot MD} \\ &= \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{4}}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.\end{aligned}$$



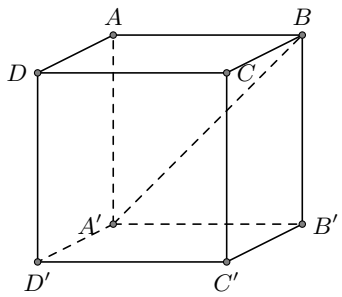
Chọn đáp án B □

Câu 158. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng BA' và CD bằng

A. 90°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 45°.

✍Lời giải.

Ta có $CD \parallel AB$, suy ra góc giữa $A'B$ với CD bằng góc giữa $A'B$ với AB, góc này bằng $45°$.



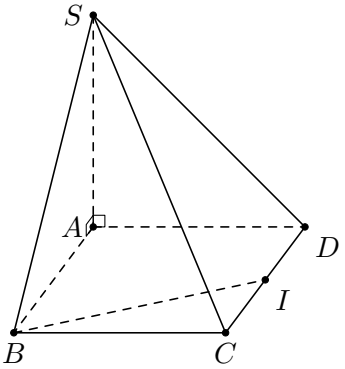
Chọn đáp án D □

Câu 159. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Đường thẳng SD tạo với mặt phẳng (SAB) một góc $45°$. Gọi I là trung điểm của cạnh CD. Góc giữa hai đường thẳng BI và SD bằng (*số đo góc được làm tròn đến hàng đơn vị*).

A. $39°$. **B**. $42°$. **C**. $51°$. **D**. $48°$.

✍Lời giải.

Gọi a là số đo cạnh của hình vuông $ABCD$.



Ta có $\begin{cases} DA \perp AB \\ DA \perp SA \end{cases} \Rightarrow DA \perp (SAB)$.

Suy ra $\widehat{DSA} = (SD, (SAB)) = 45°$.

Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$.

I là trung điểm của CD nên $IC = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{a}{2}$.

$\triangle BCI$ vuông tại C có $BI^2 = BC^2 + CI^2$ (định lý Pytago), suy ra $BI = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

$$\cos(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{SD}) = \frac{\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{SD}}{|\overrightarrow{BI}| \cdot |\overrightarrow{SD}|} = \frac{(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CI}) \cdot \overrightarrow{SD}}{BI \cdot SD} = \frac{(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CI}) \cdot \overrightarrow{SD}}{BI \cdot SD} = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{SD}}{BI \cdot SD}$$

$$= \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{SD}}{BI \cdot SD} = \frac{AD \cdot SD \cdot \cos(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{SD})}{BI \cdot SD} = \frac{AD \cdot \cos 45°}{BI} = \frac{a \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}}}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Suy ra $(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{SD}) \approx 51°$. Vậy $(BI, SD) \approx 51°$.

Chọn đáp án C □

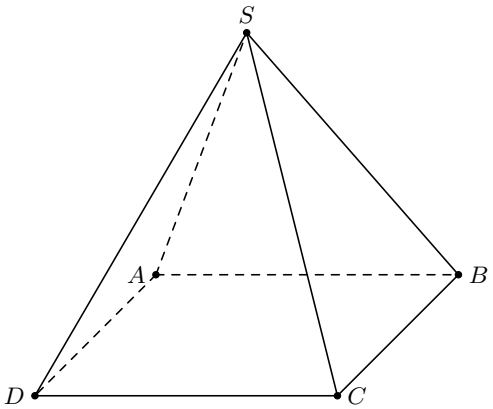
Câu 160. Cho hình chóp $S.ABCD$ đều có $SA = AB = a$. Góc giữa SA và CD là

A. $60°$. **B**. $30°$. **C**. $90°$. **D**. $45°$.

✍Lời giải.

Vì $AB \parallel CD$ nên góc giữa SA và CD bằng góc giữa SA và AB.

Vì $SA = AB$ nên tam giác SAB đều, vậy góc giữa chúng bằng $60°$.



Chọn đáp án A □

Câu 161. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **đúng**?

A. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì đường thẳng a vuông góc với đường thẳng c.

B. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b song song với đường thẳng c thì đường thẳng a vuông góc với đường thẳng c.

C. Cho ba đường thẳng a, b, c vuông góc với nhau từng đôi một. Nếu có một đường thẳng d vuông góc với a thì d song song với b hoặc c.

D. Cho hai đường thẳng a, b song song với nhau. Một đường thẳng c vuông góc với a thì c vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (a, b).

✍Lời giải.

Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b song song với đường thẳng c thì đường thẳng a vuông góc với đường thẳng c. Đây mệnh đề **đúng**.

Các mệnh đề còn lại **sai**.

Chọn đáp án (B) □

Câu 162. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **đúng**?

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

C. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại.

D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

✍Lời giải.

Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia. Đây mệnh đề **đúng**.

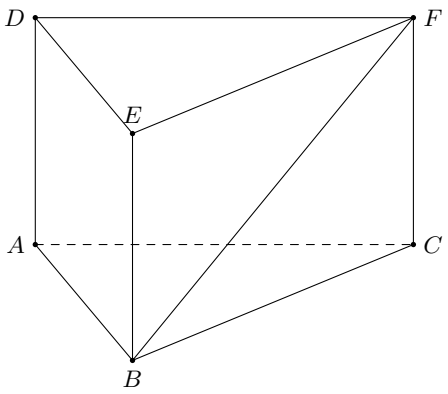
Các mệnh đề còn lại **sai**.

Chọn đáp án (D) □

Câu 163.

Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.DEF$ có cạnh đáy bằng a, chiều cao bằng $2a$. Tính cô-sin của góc tạo bởi hai đường thẳng AC và BF.

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{10}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. **C**. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{3}}{10}$.



✍Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF}$.

Khi đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BF} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EF} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EF} \\ &= \overrightarrow{EF}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Ta suy ra

$$\begin{aligned} & AC \cdot BF \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BF}) = EF \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AC}) \\ \Leftrightarrow\ & \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BF}) = \frac{EF \cdot \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC})}{BF} \\ \Leftrightarrow\ & \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BF}) = \frac{a \cdot \dfrac{1}{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}.\end{aligned}$$

Vậy cô-sin của góc tạo bởi hai đường thẳng AC và BF bằng $\dfrac{\sqrt{5}}{10}$.

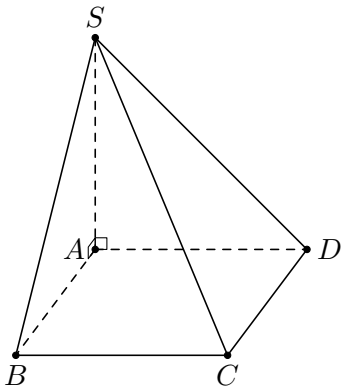
Chọn đáp án (A) □

Câu 164. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SB và CD là

A. 90°. **B**. 60°. **C**. 30°. **D**. 45°.

✍Lời giải.

$\triangle SAB$ vuông tại A có $SA = AB = a$ nên $\triangle SAB$ vuông cân tại A.
$(SB, CD) = (SB, AB) = \widehat{SBA} = 45^\circ$.



Chọn đáp án D □

Câu 165. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $SA = 9a$, $AB = 6a$. Gọi M là điểm thuộc cạnh SC sao cho $SM = \dfrac{1}{2}MC$. Cô-sin của góc giữa hai đường thẳng SB và AM bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{7}{2\sqrt{48}}$. **B**. $\dfrac{1}{2}$. **C**. $\dfrac{\sqrt{19}}{7}$. **D**. $\dfrac{14}{3\sqrt{48}}$.

✍Lời giải.

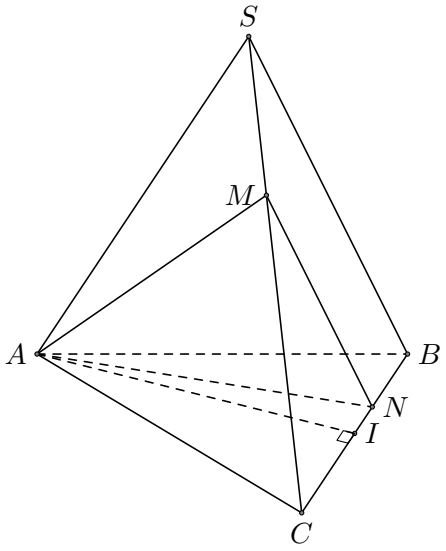
Gọi N là điểm thuộc cạnh BC sao cho $NB = \dfrac{1}{3}BC$. Khi đó, $MN \parallel SB$ nên $\widehat{(AM, SB)} = \widehat{(AM, MN)}$.
Ta có

— $\cos\widehat{ASM} = \dfrac{81a^2 + 81a^2 - 36a^2}{2 \cdot 9a \cdot 9a} = \dfrac{7}{9}$.

— $AM = \sqrt{81a^2 + 9a^2 - 2 \cdot 9a \cdot 3a \cos\widehat{ASM}} = 4a\sqrt{3}$.

— $MN = \dfrac{2}{3}SB = 6a$.

— $AN = \sqrt{36a^2 + 4a^2 - 2 \cdot 6a \cdot 2a \cdot \cos 60^\circ} = 2a\sqrt{7}$.



Do đó

$$\cos\widehat{(AM, SB)} = \frac{|AM^2 + MN^2 - AN^2|}{2 \cdot AM \cdot MN} = \frac{7\sqrt{3}}{18}.$$

Chọn đáp án D □

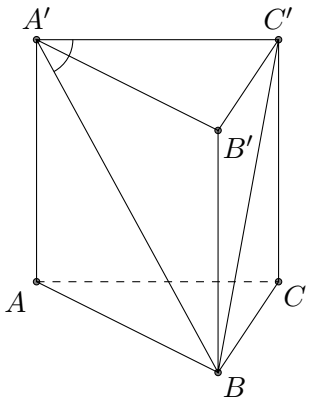
Câu 166. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi φ là góc hợp bởi hai đường thẳng $A'B$ và AC. Tính $\cos\varphi$.

A. $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **B**. $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C**. $\cos\varphi = 0$. **D**. $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

✍Lời giải.

Do $A'C' \parallel AC$ nên $(AC, A'B) = (A'C', A'B) = \widehat{BA'C'}$. Đặt $AB = a$.
Xét $\triangle BA'C'$, có $A'B = BC' = a\sqrt{2}$, $A'C' = a$. Suy ra

$$\cos\varphi = \frac{A'B^2 + A'C'^2 - BC'^2}{2A'B \cdot A'C'} = \frac{a^2}{2 \cdot a\sqrt{2} \cdot a} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$



Chọn đáp án (D) □

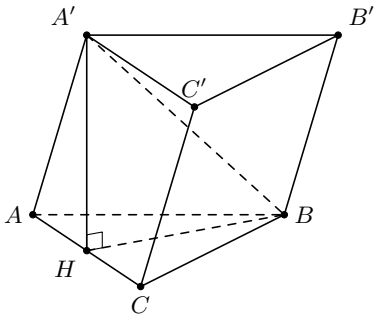
Câu 167. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm cạnh AC, đường thẳng $A'B$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc $30°$. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AB và CC'. Tính $\cos\alpha$.

A. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\cos\alpha = \sqrt{2}$. **C.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

✍Lời giải.

Ta có $A'H \perp (ABC)$ nên $\widehat{A'BH} = (A'B, (ABC)) = 30°$. Suy ra

$$A'H = BH \cdot \tan 30° = \frac{a}{2},$$
$$A'B = \frac{BH}{\cos 30°} = a,$$
$$AA' = \sqrt{AH^2 + A'H^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



Do đó $\cos\alpha = \cos(AB, AA') = \frac{A'A^2 + AB^2 - A'B^2}{2A'A \cdot AB} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

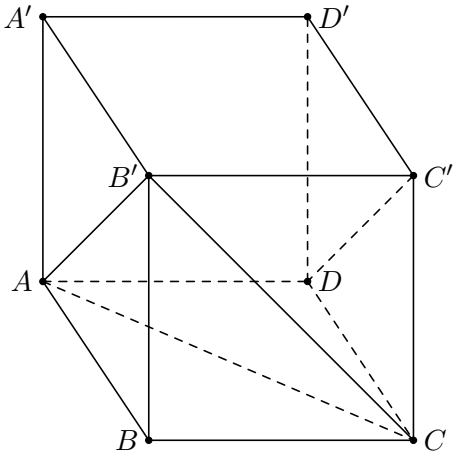
Chọn đáp án (A) □

Câu 168. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng AC và $C'D$ bằng

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

✍Lời giải.

Ta có $C'D \parallel AB'$ suy ra góc giữa hai đường thẳng AC và $C'D$ bằng góc giữa hai đường thẳng AC và AB'.
Mặt khác tam giác $AB'C$ là tam giác đều nên $\widehat{B'AC} = 60°$.
Vậy góc giữa hai đường thẳng AC và $C'D$ bằng $60°$.



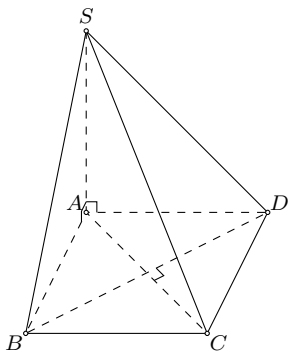
Chọn đáp án (A) □

Câu 169. Cho hình chóp $S.ABCD$. có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Đường thẳng BD vuông góc với đường thẳng nào sau đây?

A. SB. **B.** SD. **C.** SC. **D.** CD.

✍Lời giải.

+ $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$ (1)
+ $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AC \perp BD$ (2)
+ Từ (1) và (2) suy ra $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$



Chọn đáp án C □

Câu 170. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng còn lại.

B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

C. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại.

D. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

Lời giải.

— Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau sai vì chúng có thể chéo nhau hoặc cắt nhau.

— Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại sai vì nó và đường thẳng còn lại có thể chéo nhau hoặc cắt nhau.

— Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau sai vì chúng có thể song song với nhau.

Chọn đáp án A □

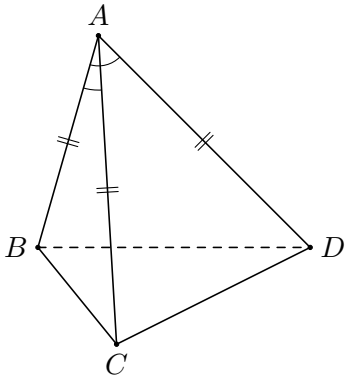
Câu 171. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Xác định góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

A. 45°. **B**. 30°. **C**. 60°. **D**. 90°.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) &= \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{AB\cdot CD} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)}{AB\cdot CD}\\ &= \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\cdot CD}\\ &= \frac{AB\cdot AD\cdot\cos 60^\circ - AB\cdot AC\cdot\cos 60^\circ}{AB\cdot CD} = 0\\ \Rightarrow\ &\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) = 90^\circ.\end{aligned}$$



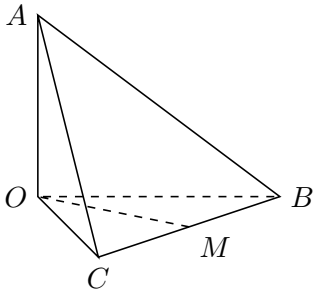
Vậy góc giữa hai đường thẳng AB và CD là 90°.

Chọn đáp án D □

Câu 172.

Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

A. 90°. **B**. 30°. **C**. 60°. **D**. 45°.



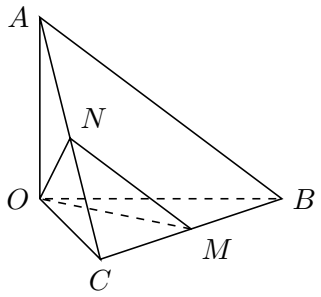
✍**Lời giải.**
Cách 1: Dùng phương pháp cổ điển (dựng góc)
Gọi N là trung điểm của CD, ta có

$$MN \parallel AB \Rightarrow (\widehat{OM, AB}) = (\widehat{OM, MN}).$$

Do $\triangle OAB = \triangle OCB = \triangle OAC$ (lại là các tam giác vuông tại O)

$$\text{nên } OM = ON = MN = \frac{AB}{2}$$

$$\Rightarrow \triangle OMN \text{ đều} \Rightarrow (\widehat{OM, AB}) = \widehat{ONM} = 60^\circ.$$

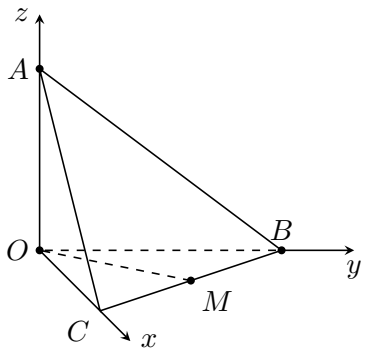


Cách 2: Phương pháp toạ độ hoá hình không gian
Giả sử $OA = OB = OC = 2$.
Gắn hệ toạ độ $Oxyz$ như hình vẽ với toạ độ các đỉnh như sau:

$$O(0;0;0),\ A(0;0;2),\ B(0;2;0),\ C(2;0;0),\ M(1;1;0)$$

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{OM} = (1;1;0) \\ \overrightarrow{AB} = (0;2;-2) \end{cases} \Rightarrow \cos(\widehat{OM, AB}) = \dfrac{\left|\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{OM}\right| . \left|\overrightarrow{AB}\right|} = \dfrac{1}{2}$

Vậy $(\widehat{OM, AB}) = 60^\circ$.



Chọn đáp án C ☐

Câu 173. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O. Qua O có mấy đường thẳng vuông góc với Δ?

A. 3. **B**. Vô số. **C**. 2. **D**. 1.

✍**Lời giải.**
Trong không gian có vô số đường thẳng qua O và vuông góc với Δ.
Chọn đáp án B ☐

Câu 174. Trong không gian cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (P). Tính số đo của góc tạo bởi hai đường thẳng a và b.

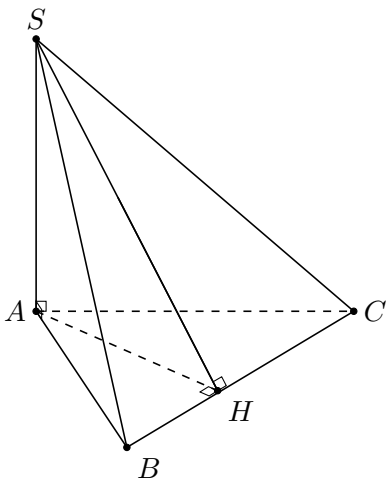
A. 60°. **B**. 30°. **C**. 120°. **D**. 90°.

✍**Lời giải.**
Ta có $\left.\begin{matrix} a \perp (P) \\ b \subset (P) \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \perp b \Rightarrow (a, b) = 90^\circ.$
Chọn đáp án D ☐

Câu 175. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và H là hình chiếu vuông góc của S lên BC. Hãy chọn khẳng định đúng

A. $BC \perp AC$. **B**. $BC \perp AH$. **C**. $BC \perp SC$. **D**. $BC \perp AB$.

✍**Lời giải.**
Do $SH \perp BC; SA \perp BC$ nên $BC \perp (SAH)$. Tức là $BC \perp AH$.



Chọn đáp án B ☐

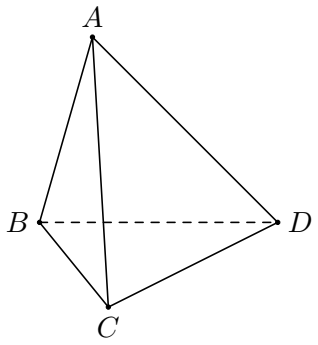
Câu 176. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = \dfrac{1}{2}AD$, $\widehat{CAB} = 60^\circ$, $\widehat{DAB} = 120^\circ$, $CD = AD$. Góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. $\arccos\dfrac{3}{4}$. **B**. 30°. **C**. 60°. **D**. $\arccos\dfrac{1}{4}$.

✍Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2}-\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}\\ &= \frac{AD^2+BC^2-BD^2-AC^2}{2}.\end{aligned}$$



Khai thác giả thiết $\widehat{CAB}=60^\circ$ và $\widehat{DAB}=120^\circ$, ta suy ra

$$\cos\widehat{CAB}=-\cos\widehat{DAB}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=-\frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB\cdot AD}=\frac{1}{2}.$$

Suy ra $AD^2+BC^2-BD^2-AC^2=-AB\cdot AD-AB\cdot AC$. Vì vậy nên

$$\begin{aligned}\cos(AB,CD) &= \frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}|}{AB\cdot CD}=\frac{|AD^2+BC^2-BD^2-AC^2|}{2AB\cdot CD}\\ &= \frac{|-AB\cdot AD-AB\cdot AC|}{2AB\cdot CD}=\frac{|-AD-AC|}{2CD}=\frac{\left|-AD-\frac{1}{2}AD\right|}{2AD}=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 177. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng BC và AB' là

A. $\dfrac{1}{2}$. **B**. $\dfrac{3}{4}$. **C**. $\dfrac{2}{3}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

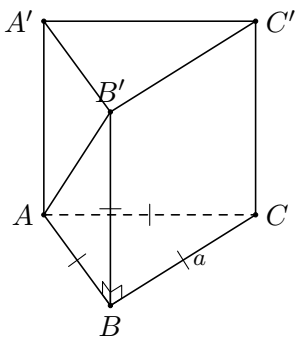
✍Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Vì $BB'\perp(ABC)\Rightarrow BB'\perp BC\Rightarrow\overrightarrow{BB'}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

Do đó $\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-a^2\cos 60^\circ=\dfrac{-a^2}{2}$.

Vậy $\cos(AB',BC)=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{BC}\right|}{AB'\cdot BC}=\dfrac{\frac{a^2}{2}}{a\sqrt{2}\cdot a}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.



Chọn đáp án D □

Câu 178. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c khi b song song với c (hoặc b trùng với c).

B. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c thì b song song với c.

C. Góc giữa hai đường thẳng là góc nhọn.

D. Góc giữa hai đường thẳng bằng góc giữa hai véc-tơ chỉ phương của hai đường thẳng đó.

✍Lời giải.

— Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c thì b song song với c là mệnh đề sai vì có thể b và c chéo nhau.

— Góc giữa hai đường thẳng là góc nhọn là mệnh đề sai vì có thể là góc vuông.

— Góc giữa hai đường thẳng bằng góc giữa hai véc-tơ chỉ phương của hai đường thẳng đó là mệnh đề sai. Nếu góc giữa hai véc-tơ chỉ phương là α với $0^\circ\le\alpha\le 90^\circ$ thì góc giữa hai đường thẳng bằng α, nếu góc giữa hai véc-tơ chỉ phương là α với $90^\circ<\alpha\le 180^\circ$ thì góc giữa hai đường thẳng bằng $180^\circ-\alpha$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 179. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại.

C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

✍Lời giải.

Mệnh đề đúng là: một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia

Chọn đáp án D ☐

Câu 180. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Nếu $b \perp (P)$ thì $b \parallel a$.

B. Nếu $b \parallel (P)$ thì $b \perp a$.

C. Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$.

D. Nếu $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.

✍Lời giải.

Nếu $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$ là mệnh đề sai vì b có thể nằm trong mặt phẳng (P).

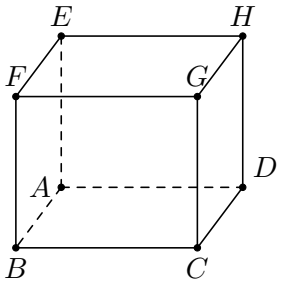
Chọn đáp án D ☐

Câu 181. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$?

A. $45°$. **B**. $90°$. **C**. $120°$. **D**. $60°$.

✍Lời giải.

Vì $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE}$ ($ADHE$ là hình vuông) nên
$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DH}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right) = \widehat{BAE} = 90°$ ($ABFE$ là hình vuông).



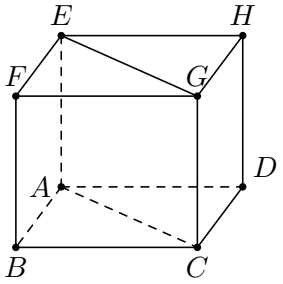
Chọn đáp án B ☐

Câu 182. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$.

A. $90°$. **B**. $60°$. **C**. $45°$. **D**. $120°$.

✍Lời giải.

Vì $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$ ($AEGC$ là hình chữ nhật) nên
$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \widehat{BAC} = 45°$ ($ABCD$ là hình vuông).



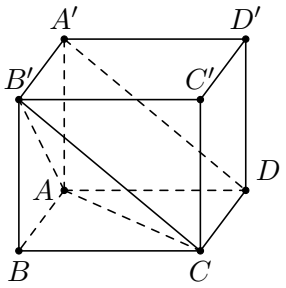
Chọn đáp án C ☐

Câu 183. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa AC và DA' là

A. $45°$. **B**. $90°$. **C**. $60°$. **D**. $120°$.

✍Lời giải.

Gọi a là độ dài cạnh hình lập phương.
Khi đó, tam giác $AB'C$ đều ($AB' = B'C = CA = a\sqrt{2}$).
Suy ra $\widehat{B'CA} = 60^\circ$.
Lại có, DA' song song với CB' nên
$(AC, DA') = (AC, CB') = \widehat{ACB'} = 60^\circ$.



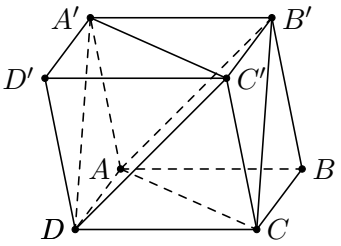
Chọn đáp án C □

Câu 184. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử tam giác $AB'C$ và $A'DC'$ đều có ba góc nhọn. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ là góc nào sau đây?

A. $\widehat{AB'C}$. **B**. $\widehat{DA'C'}$. **C**. $\widehat{BB'D}$. **D**. $\widehat{BDB'}$.

✍Lời giải.

Ta có $AC \parallel A'C'$ ($A'B'CD$ là hình bình hành).
Mà $\widehat{DA'C'}$ nhọn nên $(AC, A'D) = (A'C', A'D) = \widehat{DA'C'}$.



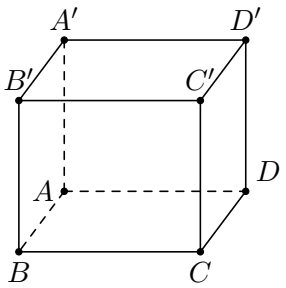
Chọn đáp án B □

Câu 185. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chọn khẳng định **sai**?

A. Góc giữa AC và $B'D'$ bằng 90°.
B. Góc giữa $B'D'$ và AA' bằng 60°.
C. Góc giữa AD và $B'C$ bằng 45°.
D. Góc giữa BD và $A'C'$ bằng 90°.

✍Lời giải.

Ta có $(AA', B'D') = (BB', B'D') = \widehat{BB'C} = 90^\circ$.
Khẳng định sai là: góc giữa $B'D'$ và AA' bằng 60°.



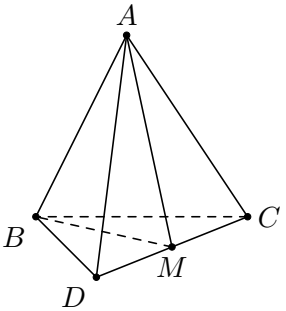
Chọn đáp án B □

Câu 186. Cho tứ diện đều $ABCD$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. 60°. **B**. 30°. **C**. 90°. **D**. 45°.

✍Lời giải.

Gọi M là trung điểm của CD.
Ta có $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AM} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.
Do đó $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \cdot \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}\right)$
$= \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.
Suy ra $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ nên số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng 90°.



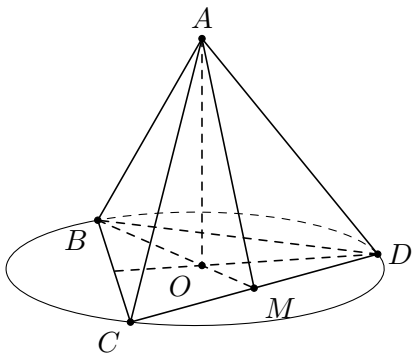
Chọn đáp án C □

Câu 187. Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Góc giữa AO và CD bằng bao nhiêu?

A. 0°. **B**. 30°. **C**. 90°. **D**. 60°.

✍Lời giải.

Gọi M là trung điểm của CD.
Vì $ABCD$ là tứ diện đều nên $AM \perp CD$, $OM \perp CD$.
Ta có $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{CD} \cdot \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MO}\right)$
$= \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{MO} = \vec{0}$.
Suy ra $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{CD}$ nên số đo góc giữa hai đường thẳng AO và CD bằng $90°$.

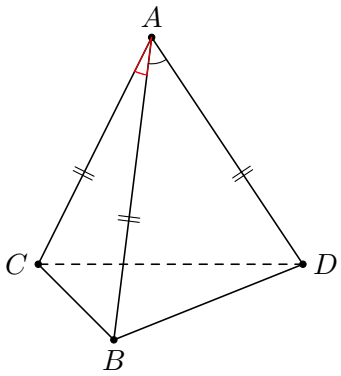


Chọn đáp án C □

Câu 188. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60°$. Hãy xác định góc giữa cặp véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$.

A. $60°$. **B**. $45°$. **C**. $120°$. **D**. $90°$.

✍Lời giải.
Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
$= \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) - \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
$= \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right| \cdot \cos 60° - \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos 60°$.
Mà $AC = AD \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = 90°$

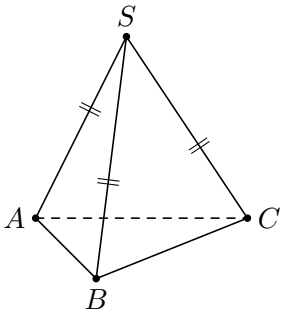


Chọn đáp án D □

Câu 189. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp véc-tơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$?

A. $120°$. **B**. $45°$. **C**. $60°$. **D**. $90°$.

✍Lời giải.
Ta có $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC} \cdot \left(\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}\right) = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SA}$
$= \left|\overrightarrow{SC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{SB}\right| \cdot \cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SB}) - \left|\overrightarrow{SC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{SA}\right| \cdot \cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SA})$
$= SC \cdot SB \cdot \cos \widehat{BSC} - SC \cdot SA \cdot \cos \widehat{ASC}$.
Mà $SA = SB = SC$ và $\widehat{BSC} = \widehat{ASC} \Rightarrow \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
Do đó $\left(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}\right) = 90°$.

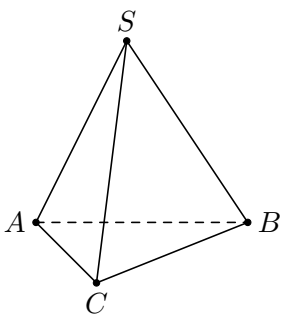


Chọn đáp án D □

Câu 190. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$ và $\widehat{SAC} = \widehat{SAB}$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng chéo nhau SA và BC.

A. $30°$. **B**. $45°$. **C**. $60°$. **D**. $90°$.

✍Lời giải.
Xét $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SA} \cdot \left(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}\right) = \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}$
$= \left|\overrightarrow{SA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{SC}\right| \cdot \cos(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC}) - \left|\overrightarrow{SA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{SB}\right| \cdot \cos \widehat{SAB}$
$= SA \cdot SC \cdot \cos \widehat{ASC} - SA \cdot SB \cdot \cos \widehat{ASB}$. (1)



Ta có $\begin{cases} SA \text{ chung} \\ AB = AC \\ \widehat{SAB} = \widehat{SAC} \end{cases} \Rightarrow \triangle SAB = \triangle SAC$ (c-g-c) $\Rightarrow \begin{cases} SC = SB \\ \widehat{ASC} = \widehat{ASB} \end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Vậy $SA \perp BC$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 191. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60°$, $\widehat{CAD} = 90°$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hãy xác định góc giữa cặp véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$?

A. $120°$. **B**. $90°$. **C**. $60°$. **D**. $45°$.

✍Lời giải.

Xét tam giác ICD có J là trung điểm đoạn CD

$\Rightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}\right)$.

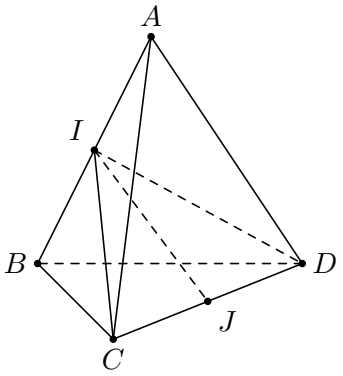
Tam giác ABC có $AB = AC$ và $\widehat{BAC} = 60°$

$\Rightarrow \triangle ABC$ đều $\Rightarrow CI \perp AB$.

Tương tự, ta có $\triangle ABD$ đều nên $DI \perp AB$.

Ta có $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IJ}\right) = 90°$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 192. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD. Góc (IE, JF) bằng

A. $30°$. **B**. $45°$. **C**. $60°$. **D**. $90°$.

✍Lời giải.

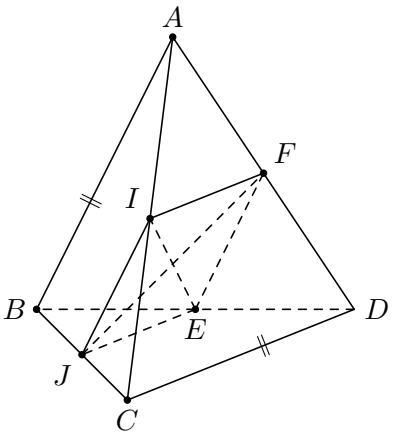
Ta có IF là đường trung bình của $\triangle ACD \Rightarrow \begin{cases} IF \parallel CD \\ IF = \frac{1}{2}CD \end{cases}$.

Lại có JE là đường trung bình của $\triangle BCD \Rightarrow \begin{cases} JE \parallel CD \\ JE = \frac{1}{2}CD \end{cases}$.

$\Rightarrow \begin{cases} IF = JE \\ IF \parallel JE \end{cases} \Rightarrow$ Tứ giác $IJEF$ là hình bình hành.

Mặt khác: $\begin{cases} IJ = \frac{1}{2}AB \\ JE = \frac{1}{2}CD \end{cases}$. Mà $AB = CD \Rightarrow IJ = JE$.

Do đó $IJEF$ là hình thoi. Suy ra $(IE, JF) = 90°$.



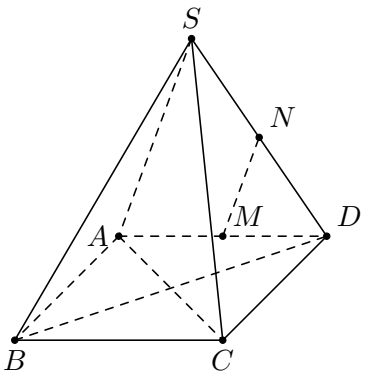
Chọn đáp án (D) □

Câu 193. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc (MN, SC) bằng

A. $45°$. **B**. $30°$. **C**. $90°$. **D**. $60°$.

✍Lời giải.

Do $ABCD$ là hình vuông cạnh a
$\Rightarrow AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AC^2 = 2a^2 = SA^2 + SC^2 \Rightarrow \triangle SAC$ vuông tại S.
Từ giả thiết ta có MN là đường trung bình của $\triangle DSA$.
$\Rightarrow \overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA}$. Khi đó $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{SC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = 0$.
$\Rightarrow MN \perp SC \Rightarrow (MN, SC) = 90°$.



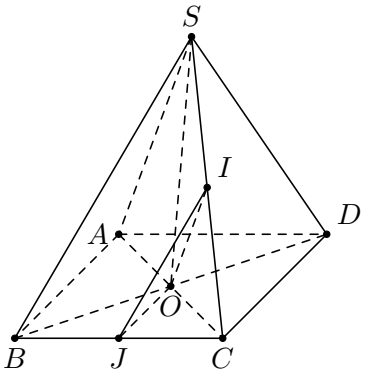
Chọn đáp án C □

Câu 194. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Số đo của góc (IJ, CD) bằng

A. $90°$. **B**. $45°$. **C**. $30°$. **D**. $60°$.

✍Lời giải.

Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$
$\Rightarrow OJ$ là đường trung bình của $\triangle BCD \Rightarrow \begin{cases} OJ \parallel CD \\ OJ = \frac{1}{2}CD. \end{cases}$
Vì $CD \parallel OJ \Rightarrow (IJ, CD) = (IJ, OJ)$.
Xét tam giác IOJ, có $\begin{cases} IJ = \frac{1}{2}SB = \frac{a}{2} \\ OJ = \frac{1}{2}CD = \frac{a}{2} \\ IO = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow \triangle IOJ$ đều.
Vậy $(IJ, CD) = (IJ, OJ) = \widehat{IJO} = 60°$.



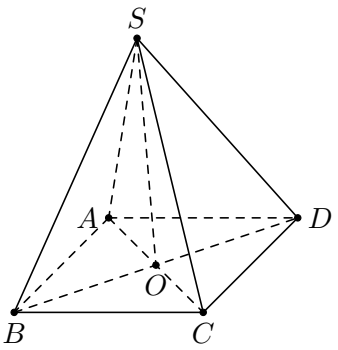
Chọn đáp án D □

Câu 195. Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA = x$, tất cả các cạnh còn lại đều bằng a. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng SA và SC.

A. $30°$. **B**. $45°$. **C**. $60°$. **D**. $90°$.

✍Lời giải.

Theo giả thiết, ta có $AB = BC = CD = DA = a$ nên $ABCD$ là hình thoi cạnh a.
Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có $\triangle CBD = \triangle SBD$ (c-c-c).
Suy ra hai đường trung tuyến tương ứng CO và SO bằng nhau.
Xét tam giác SAC, ta có $SO = CO = \frac{1}{2}AC$.
Do đó tam giác SAC vuông tại S (tam giác có đường trung tuyến bằng nửa cạnh đáy).
Vậy $SA \perp SC$.



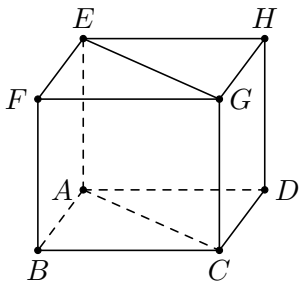
Chọn đáp án D □

Câu 196. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$.

A. $a^2\sqrt{3}$. **B**. a^2. **C**. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **D**. $a^2\sqrt{2}$.

✍Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
Mặt khác $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.
Suy ra $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.
Vì $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AB\perp AD\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$.
$\Rightarrow\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=AB^2+0=a^2$.



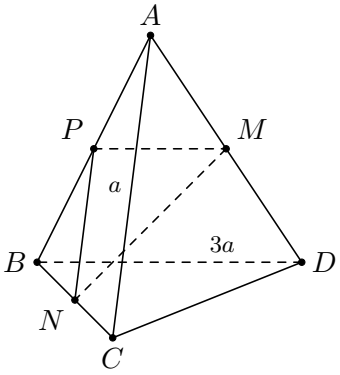
Chọn đáp án B □

Câu 197. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC=a, BD=3a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết AC vuông góc với BD. Tính MN.

A. $MN=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $MN=\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$. **C.** $MN=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $MN=\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi P là trung điểm của $AB\Rightarrow PN, PM$ lần lượt là đường trung bình của tam giác $\triangle ABC$ và $\triangle ABD$.
Suy ra $\begin{cases}PN=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{a}{2}\\ PM=\dfrac{1}{2}BD=\dfrac{3a}{2}.\end{cases}$
Ta có $AC\perp BD\Rightarrow PN\perp PM$ hay tam giác $\triangle PMN$ vuông tại P.
Do đó $MN=\sqrt{PN^2+PM^2}=\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{9a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.



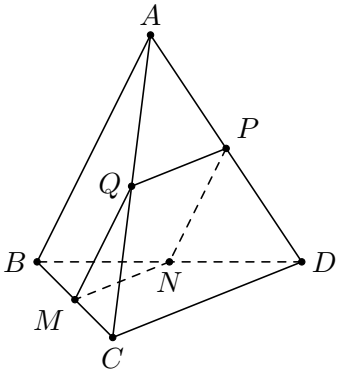
Chọn đáp án B □

Câu 198. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD. Mặt phẳng (P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

A. Hình thang. **B.** Hình bình hành.
C. Hình chữ nhật. **D.** Tứ giác không phải hình thang.

✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases}(MNPQ)\parallel AB\\ (MNPQ)\cap(ABC)=MQ\end{cases}\Rightarrow MQ\parallel AB$.
Tương tự ta có $MN\parallel CD$, $NP\parallel AB$, $QP\parallel CD$.
Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.
Lại có $MN\perp MQ$ (do $AB\perp CD$).
Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.



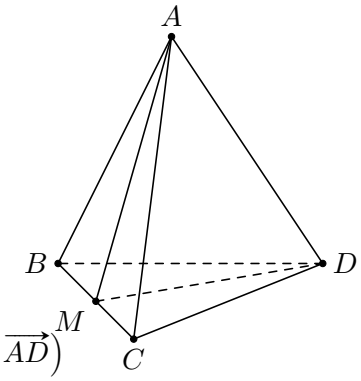
Chọn đáp án C □

Câu 199. Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó $\cos(AB, DM)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Giả sử cạnh của tứ diện là a.



Tam giác BCD đều $\Rightarrow DM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác ABC đều $\Rightarrow AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DM}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DM}\right|} = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DM}}{a\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}$

Mặt khác: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

$= \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AM}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right) - \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$

$= \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AM}\right|\cdot\cos 30^\circ - \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\cos 60^\circ$

$= a\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} - a\cdot a\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^2}{4}.$

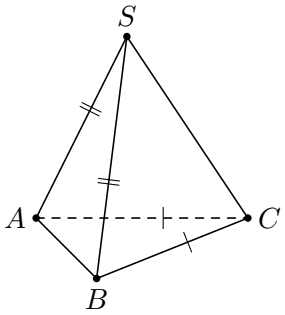
$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{6} > 0 \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}\right) = (AB, DM) \Rightarrow \cos(AB, DM) = \dfrac{\sqrt{3}}{6}.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 200. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB$ và $CA = CB$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng chéo nhau SC và AB.

A. 30°. **B**. 45°. **C**. 60°. **D**. 90°.

✍Lời giải.



Xét $\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CS}\cdot\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right) = \overrightarrow{CS}\cdot\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CS}\cdot\overrightarrow{CB}$

$= CS\cdot CA\cdot\cos\widehat{SCA} - CS\cdot CB\cdot\cos\widehat{SCB}$

$= CS\cdot CA\cdot\dfrac{SC^2+CA^2-SA^2}{2SC\cdot CA} - CS\cdot CB\cdot\dfrac{SC^2+CB^2-SB^2}{2SC\cdot CB}$

$= \dfrac{SC^2+CA^2-SA^2}{2} - \dfrac{SC^2+CB^2-SB^2}{2} = 0$ (do $SA = SB$ và $CA = CB$).

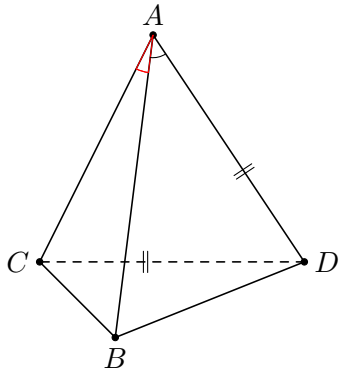
Vậy $SC \perp AB$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 201. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = \dfrac{3}{2}AD$, $\widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 60^\circ$, $CD = AD$. Gọi φ là góc giữa AB và CD. Chọn khẳng định đúng.

A. $\cos\varphi = \dfrac{3}{4}$. **B**. $\varphi = 60^\circ$. **C**. $\varphi = 30^\circ$. **D**. $\cos\varphi = \dfrac{1}{4}$.

✍Lời giải.



Ta có $\cos(AB,CD)=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|}=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\right|}{AB\cdot CD}$.

Mặt khác $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})-\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

$=AB\cdot AD\cdot\cos 60^\circ-AB\cdot AC\cdot\cos 60^\circ$

$=AB\cdot AD\cdot\dfrac{1}{2}-AB\cdot\dfrac{3}{2}AD\cdot\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{4}AB\cdot AD=-\dfrac{1}{4}AB\cdot CD.$

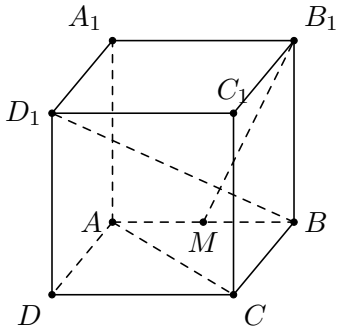
Do có $\cos(AB,CD)=\dfrac{\left|-\dfrac{1}{4}AB\cdot CD\right|}{AB\cdot CD}=\dfrac{1}{4}$. Vậy $\cos\varphi=\dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 202. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a. Gọi M là trung điểm của cạnh AD. Giá trị $\overrightarrow{B_1M}\cdot\overrightarrow{BD_1}$ là

A. $\dfrac{1}{2}a^2$. **B**. a^2. **C**. $\dfrac{3}{4}a^2$. **D**. $a^2\sqrt{2}$.

✍Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{B_1M}\cdot\overrightarrow{BD_1}=\left(\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\right)\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}\right)$

$=\underbrace{\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{BA}}_{=0}+\underbrace{\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{AD}}_{=0}+\overrightarrow{B_1B}\cdot\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{BA}^2$

$+\underbrace{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}}_{=0}+\underbrace{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DD_1}}_{=0}+\underbrace{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BA}}_{=0}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AD}+\underbrace{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DD_1}}_{=0}$

$=\overrightarrow{B_1B}\cdot\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AD}=-a^2+a^2+\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a^2}{2}.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 203. Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BC' và $C'A$. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

A. Hình bình hành. **B**. Hình chữ nhật. **C**. Hình vuông. **D**. Hình thang.

✍Lời giải.

Vì M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BC' và $C'A$.

$\Rightarrow \begin{cases} PQ = MN = \dfrac{1}{2}AB \\ PQ \parallel AB \parallel MN \end{cases} \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

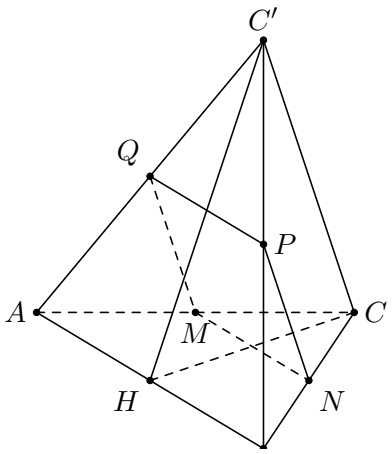
Gọi H là trung điểm của AB.

Vì hai tam giác ABC và ABC' đều nên $\begin{cases} CH \perp AB \\ C'H \perp AB. \end{cases}$

Suy ra $AB \perp (CHC')$. Do đó $AB \perp CC'$.

Ta có $\begin{cases} PQ \parallel AB \\ PN \parallel CC' \\ AB \perp CC' \end{cases} \Rightarrow PQ \perp PN.$

Vậy tứ giác $MNPQ$là hình chữ nhật.



Chọn đáp án B □

Câu 204. Cho tứ diện $ABCD$ trong đó $AB = 6$, $CD = 3$, góc giữa AB và CD là 60° và điểm M trên BC sao cho $BM = 2MC$. Mặt phẳng (P) qua M song song với AB và CD cắt BD, AD, AC lần lượt tại M, N, Q. Diện tích $MNPQ$ bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases} (MNPQ) \parallel AB \\ (MNPQ) \cap (ABC) = MQ \end{cases} \Rightarrow MQ \parallel AB.$

Tương tự ta có $MN \parallel CD$, $NP \parallel AB$, $QP \parallel CD$.

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

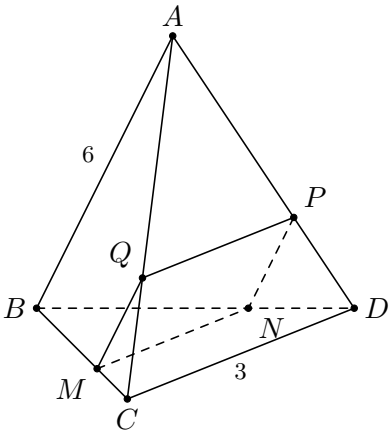
Ta có $(AB, CD) = (QM, MP) = 60^\circ$.

Suy ra $S_{MNPQ} = QM \cdot QN \cdot \sin 60^\circ$.

Ta có $\triangle CMQ \backsim \triangle CBA \Rightarrow \dfrac{CM}{CB} = \dfrac{MQ}{AB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow MQ = 2.$

$\triangle AQN \backsim \triangle ACD \Rightarrow \dfrac{AQ}{AC} = \dfrac{QN}{CD} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow QN = 2.$

Vậy $S_{MNPQ} = QM \cdot QN \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$



Chọn đáp án C □

Câu 205. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB = 4$, $CD = 6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC = 2BM$. Mặt phẳng (P) đi qua M song song với AB và CD. Diện tích thiết diện của P với tứ diện là

A. 5. **B.** 6. **C.** $\dfrac{17}{3}$. **D.** $\dfrac{16}{3}$.

✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases} (MNPQ) \parallel AB \\ (MNPQ) \cap (ABC) = MN \end{cases} \Rightarrow MN \parallel AB.$

Tương tự ta có $MQ \parallel CD$, $NP \parallel CD$, $QP \parallel AB$.

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

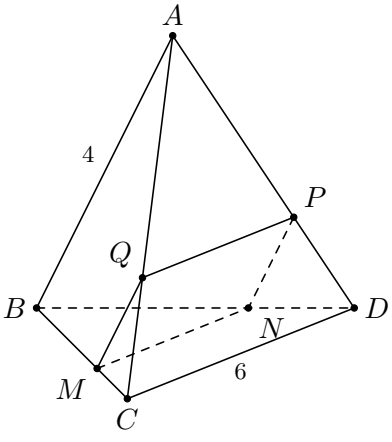
Ta có $(AB, CD) = (MN, MQ) = \widehat{NMQ} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Lại có $\triangle CMN \backsim \triangle CBA \Rightarrow \dfrac{CM}{CB} = \dfrac{MN}{AB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow MN = \dfrac{4}{3};$

$\triangle ANP \backsim \triangle ACD \Rightarrow \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{NP}{CD} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow MP = 4.$

Vậy $S_{MNPQ} = MN \cdot NP = \dfrac{16}{3}.$



Chọn đáp án D □

Câu 206. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB = CD = 6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC = xBC$ $(0 < x < 1)$. Mặt phẳng (P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q. Diện tích lớn nhất của tứ giác bằng bao nhiêu?

A. 9. **B**. 11. **C**. 10. **D**. 8.

✍Lời giải.

Xét tứ giác $MNPQ$ có $\begin{cases} MQ \parallel NP \parallel AB \\ MN \parallel PQ \parallel CD \end{cases}$

$\Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Mặt khác, $AB \perp CD \Rightarrow MQ \perp MN$.

Do đó, $MNPQ$ là hình chữ nhật.

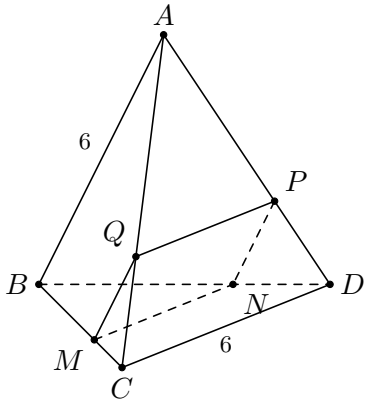
Vì $MQ \parallel AB$ nên $\dfrac{MQ}{AB} = \dfrac{CM}{CB} = x \Rightarrow MQ = xAB = 6x$.

Theo giả thiết $MC = xBC \Rightarrow BM = (1-x)\,BC$.

Vì $MN \parallel CD$ nên $\dfrac{MN}{CD} = \dfrac{BM}{BC} = 1 - x$

$\Rightarrow MN = (1-x) \cdot CD = 6\,(1-x)$.

Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là:



$$S_{MNPQ} = MN \cdot MQ = 6(1-x) \cdot 6x = 36 \cdot x \cdot (1-x) \le 36\left(\frac{x+1-x}{2}\right)^2 = 9.$$

Ta có $S_{MNPQ} = 9$ khi $x = 1 - x \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Vậy diện tích tứ giác $MNPQ$ lớn nhất bằng 9 khi M là trung điểm của BC.

Chọn đáp án (A) □

Câu 207. Trong không gian cho tam giác ABC. Xác định vị trí của điểm M sao cho giá trị của biểu thức $P = MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. M là trọng tâm tam giác ABC.
B. M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
C. M là trực tâm tam giác ABC.
D. M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

✍Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow G$ cố định và $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Ta có $P = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2$

$= 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) + GA^2 + GB^2 + GC^2$

$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

$\ge GA^2 + GB^2 + GC^2$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv G$.

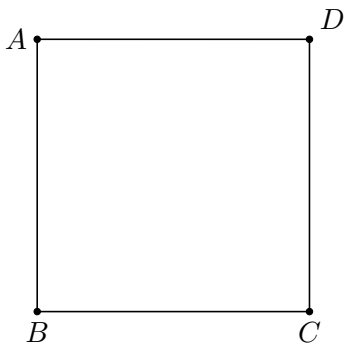
Vậy $P_{\min} = GA^2 + GB^2 + GC^2$ với $M \equiv G$ là trọng tâm tam giác ABC.

Chọn đáp án (A) □

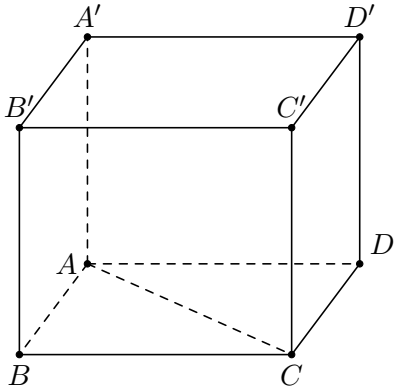
Câu 208. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì a vuông góc với c.
B. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b song song với đường thẳng c thì a vuông góc với c.
C. Cho ba đường thẳng a, b, c vuông góc với nhau từng đôi một. Nếu có một đường thẳng d vuông góc với a thì d song song với b hoặc c.
D. Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Một đường thẳng c vuông góc với a thì c vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (a, b).

✍Lời giải.



Hình 1



Hình 2

Mệnh đề "Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì a vuông góc với c" sai vì a có thể song song với c. Ví dụ: Hình vuông $ABCD$ có $AB \perp BC, BC \perp CD$ và A (Hình 1).

Mệnh đề "Cho ba đường thẳng a, b, c vuông góc với nhau từng đôi một. Nếu có một đường thẳng d vuông góc với a thì d song song với b hoặc c" sai vì d có thể cắt b và c. Ví dụ: Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có ABC đôi một vuông góc với nhau. AC vuông góc với AA' nhưng AC cắt AB và AD. (Hình 2).

Mệnh đề "Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Một đường thẳng c vuông góc với a thì c vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (a, b)" sai vì c có thể song song với đường thẳng nằm trong mặt phẳng $(a; b)$. Ví dụ: Cho hình vuông $ABCD$ có $AB \parallel CD$. Đường thẳng BC vuông góc với AB mà DG (Hình 1).

Chọn đáp án (B) □

1 ĐÁP ÁN

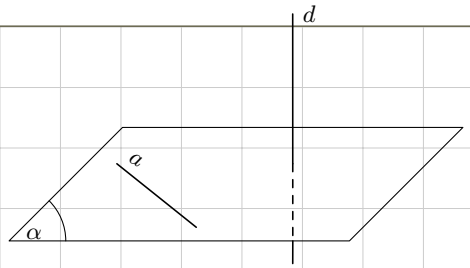
1. A	2. D	3. D	4. B	5. C	6. C	7. B	8. B	9. C	10. C
11. B	12. D	13. D	14. D	15. D	16. D	17. B	18. D	19. C	20. D
21. D	22. B	23. A	24. B	25. C	26. B	27. C	28. D	29. A	30. A
31. B	32. C	33. B	34. D	35. C	36. A	37. B	38. D	39. A	40. D
41. D	42. D	43. A	44. B	45. D	46. C	47. A	48. B	49. D	50. D
51. B	52. C	53. C	54. C	55. B	56. C	57. C	58. B	59. D	60. D
61. A	62. A	63. C	64. B	65. C	66. D	67. A	68. B	69. A	70. A
71. A	72. C	73. D	74. A	75. B	76. A	77. A	78. A	79. C	80. D
81. C	82. C	83. A	84. A	85. C	86. A	87. D	88. C	89. C	90. B
91. A	92. C	93. A	94. D	95. A	96. C	97. D	98. B	99. C	100. D
101. A	102. D	103. B	104. D	105. C	106. B	107. D	108. A	109. D	110. D
111. C	112. A	113. C	114. D	115. C	116. B	117. D	118. B	119. C	120. A
121. A	122. C	123. C	124. A	125. B	126. B	127. D	128. A	129. A	130. C
131. C	132. D	133. B	134. B	135. C	136. A	137. D	138. B	139. C	140. B
141. D	142. C	143. C	144. A	145. A	146. D	147. D	148. A	149. D	150. C
151. C	152. B	153. A	154. A	155. D	156. B	157. B	158. D	159. C	160. A
161. B	162. D	163. A	164. D	165. D	166. D	167. A	168. A	169. C	170. A
171. D	172. C	173. B	174. D	175. B	176. A	177. D	178. A	179. D	180. D
181. B	182. C	183. C	184. B	185. B	186. C	187. C	188. D	189. D	190. D
191. B	192. D	193. C	194. D	195. D	196. B	197. B	198. C	199. B	200. D
201. D	202. A	203. B	204. C	205. D	206. A	207. A	208. B		

BÀI 3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

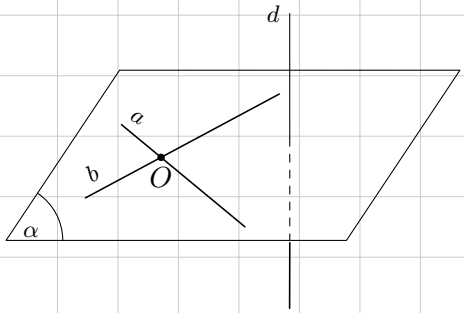
Định nghĩa 1.
Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu d vuông góc với mọi đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α).
Khi đó ta còn nói (α) vuông góc d và kí hiệu $d \perp (\alpha)$ hoặc $(\alpha) \perp d$.



2 ĐIỀU KIỆN ĐỂ ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

Định lí 1. *Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng ấy.*

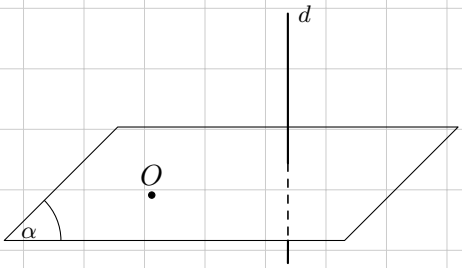
⚠ *Tóm tắt định lí.* $\begin{cases} a, b \subset (\alpha) \\ a \cap b = O \\ d \perp a \\ d \perp b \end{cases} \Rightarrow d \perp (\alpha).$

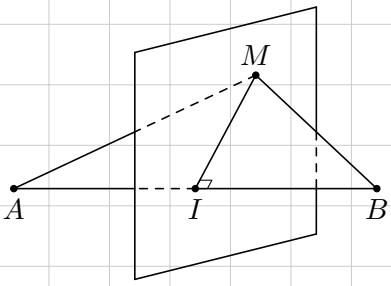


Hệ quả 1. Nếu một đường thẳng vuông góc với hai cạnh của một tam giác thì nó cũng vuông góc với cạnh thứ ba của tam giác đó.

3 TÍNH CHẤT

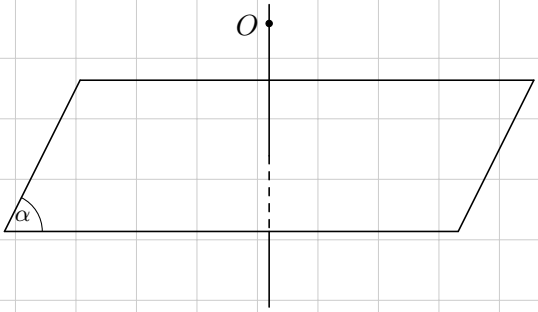
Tính chất 1. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.





⚠ *Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là mặt phẳng đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB.*

Tính chất 2. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.



4 LIÊN HỆ GIỮA QUAN HỆ SONG SONG VÀ QUAN HỆ VUÔNG GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

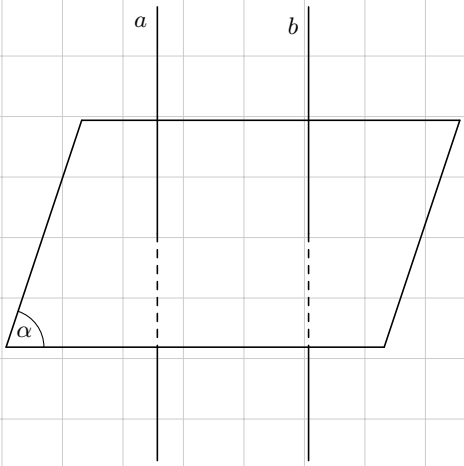
Tính chất 3.

① Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

⚠ *Tóm tắt:* $\begin{cases} a \parallel b \\ (\alpha) \perp a \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \perp b.$

② Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

⚠ *Tóm tắt:* $\begin{cases} a \perp (\alpha) \\ b \perp (\alpha) \\ a \not\equiv b \end{cases} \Rightarrow a \parallel b.$



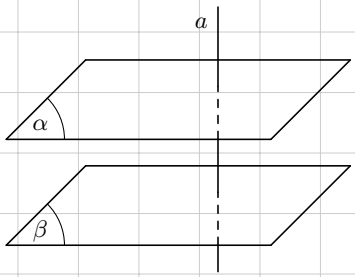
Tính chất 4.

① Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

⚠ *Tóm tắt:* $\begin{cases} (\alpha) \parallel (\beta) \\ a \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp (\beta).$

② Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

⚠ *Tóm tắt:* $\begin{cases} (\alpha) \perp a \\ (\beta) \perp a \\ (\alpha) \not\equiv (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta).$



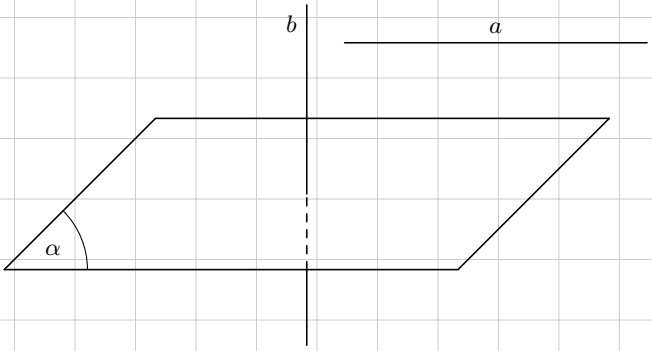
Tính chất 5.

① Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng (α) thì cũng vuông góc với a.

⚠ *Tóm tắt:* $\begin{cases} a \parallel (\alpha) \\ b \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow b \perp a.$

② Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì chúng song song với nhau.

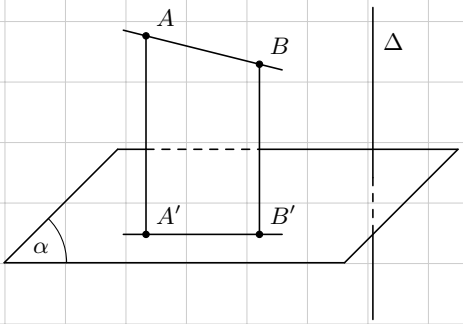
⚠ *Tóm tắt:* $\begin{cases} a \not\subset (\alpha) \\ a \perp b \\ (\alpha) \perp b \end{cases} \Rightarrow a \parallel (\alpha).$



5 PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC VÀ ĐỊNH LÝ BA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC

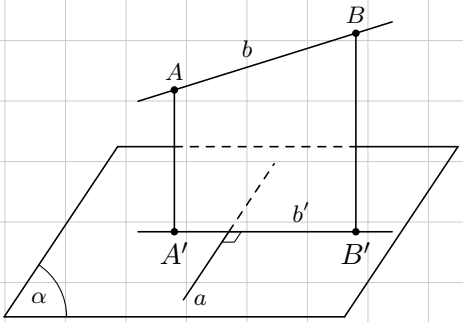
1. Phép chiếu vuông góc

Cho đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α). Phép chiếu song song theo phương của Δ lên mặt phẳng (α) được gọi là *phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng* (α).



2. Định lí ba đường vuông góc

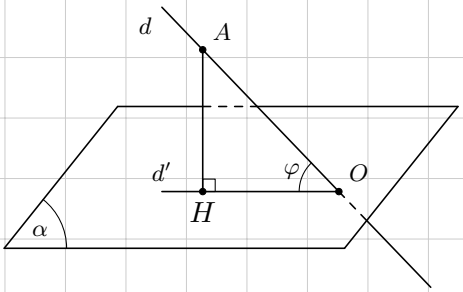
Định lí 2. *Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và b là đường thẳng không thuộc (α) đồng thời không vuông góc với (α). Gọi b' là hình chiếu vuông góc của b trên (α). Khi đó a vuông góc với b khi và chỉ khi a vuông góc với b'.*



⚠ *Tóm tắt:* $\begin{cases} a \subset (\alpha) \\ b \not\subset (\alpha) \\ b \not\perp (\alpha) \\ b' \text{ là hình chiếu vuông góc } b \text{ trên } (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp b \Leftrightarrow a \perp b'.$

3. Góc Giữa đường thẳng và mặt phẳng

Định nghĩa 2. Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α).
Trường hợp đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng 90°.
Trường hợp đường thẳng d không vuông góc với mặt phẳng (α) thì góc giữa đường thẳng d và hình chiếu d' của nó trên (α) gọi là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α).



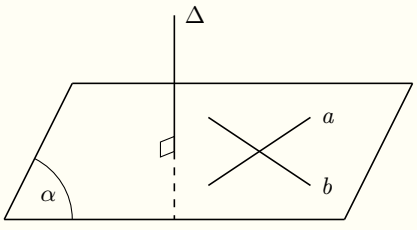
⚠ *Nếu φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) thì ta luôn có $0^\circ \le \varphi \le 90^\circ$.*

B CÁC DẠNG TOÁN

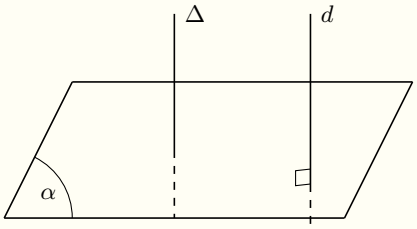
Dạng 1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Để chứng minh đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α), ta thực hiện theo một trong hai cách sau:

① *Chứng minh Δ vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc (α).*

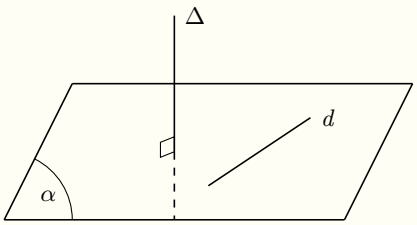


② *Chứng minh Δ song song với đường thẳng (d), trong đó (d) vuông góc với (α).*

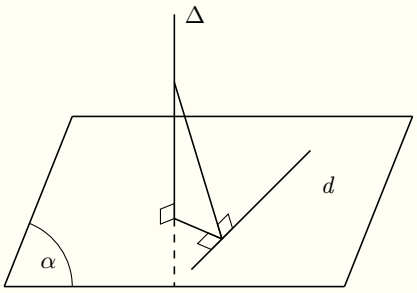


Để chứng minh đường thẳng (Δ) vuông góc với đường thẳng (d), ta thực hiện theo một trong các cách sau:

① *Chứng minh (Δ) vuông góc với mặt phẳng (α) chứa (d).*



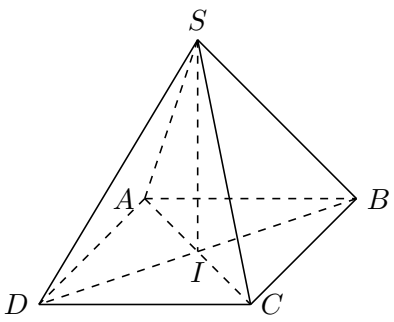
② *Sử dụng định lý ba đường vuông góc.*



③ *Nếu hai đường thẳng cắt nhau thì ta có thể sử dụng các phương pháp chứng minh hai đường thẳng vuông góc trong mặt phẳng.*

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và các cạnh bên bằng nhau. Gọi I là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng $SI \perp (ABCD)$.

✍Lời giải.



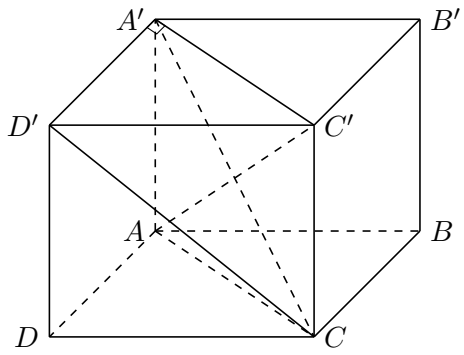
Để chứng minh SI vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ ta cần chứng minh SI vuông góc với hai cạnh cắt nhau trong mặt phẳng đó.
Theo giả thiết, $\triangle SAC$ và $\triangle SBD$ là tam giác cân tại S. Hơn nữa $I = AC \cap BD$ là trung điểm của AC và BD (do $ABCD$ là hình vuông). Từ đó ta có:

$$\begin{cases} SI \perp AC \\ SI \perp BD \\ AC \cap BD = I \end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABCD)$$

Vậy $SI \perp (ABCD)$. □

Ví dụ 2. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, các cạnh bên vuông góc với mặt đáy. $\triangle ACD$ vuông tại A, $AC = AA'$. Chứng minh rằng $AC' \perp (A'D'C)$.

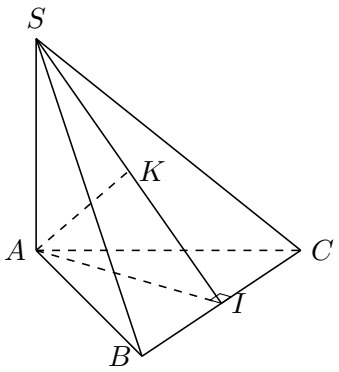
✍Lời giải.



Theo giả thiết ta có $\begin{cases} AA'C'C \text{ là hình chữ nhật} \\ AA' = A'C' \end{cases}$
$\Rightarrow AA'C'C$ là hình vuông $\Rightarrow AC' \perp A'C$ (1)
Lại có $AA' \perp (A'B'C'D') \Rightarrow AA' \perp A'D'$. Lại có $\triangle D'A'C'$ vuông tại A' nên $A'D' \perp A'C'$. Từ đó ta được $A'D' \perp (AA'C'C) \Rightarrow A'D' \perp AC'$ (2).
Từ (1) và (2) ta có $AC' \perp (A'D'C)$. □

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ với đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$, $SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm BC, SI. Chứng minh rằng $AK \perp (SBC)$.

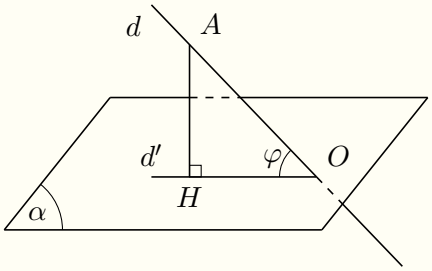
✍Lời giải.



Theo giả thiết $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh a,I là trung điểm BC suy ra $AI \perp BC$ (1) và $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Lại có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$ (2).
Từ (1) và (2) ta có $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AK$. (3)
Tam giác SAI có $SA = AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên $\triangle SAI$ là tam giác cân tại A, hơn nữa K là trung điểm SI suy ra $AK \perp SI$. (4)
Từ (3) và (4) ta có $AK \perp (SBC)$. □

Dạng 2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) cắt nhau.
Nếu $d \perp (P)$ thì $(d, (P)) = 90°$.



Nếu $d \not\perp (P)$ thì để xác định góc giữa d và (P), ta thường làm như sau

① *Xác định giao điểm O của d và (P).*

② *Lấy một điểm A trên d (A khác O). Xác định hình chiếu vuông góc (vuông góc) H của A lên (P). Lúc đó $(d,(P)) = (d,d') = \widehat{AOH}$.*

⚠ $0^\circ \le (d,(P)) \le 90^\circ$.

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{6}$ và SA vuông góc $(ABCD)$. Hãy xác định các góc giữa

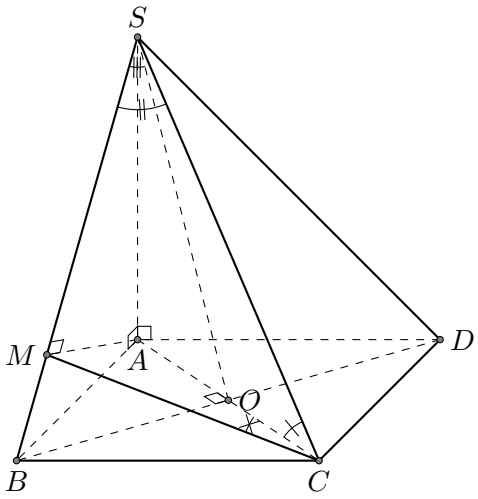
① SC và $(ABCD)$.

② SC và (SAB).

③ SB và (SAC).

④ AC và (SBC).

✍**Lời giải.**



① Vì AC là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$ nên góc giữa SC và $(ABCD)$ là $\widehat{SCA}$.
Trong tam giác SCA, ta có $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{SC} = \sqrt{3}$ nên $(SC,(ABCD)) = \widehat{SCA} = 60^\circ$.

② Vì $BC \perp (SAB)$ tại B nên SB là hình chiếu vuông góc của SC lên (SAB).
Do đó $(SC,(SAB)) = (SC,SB) = \widehat{CSB}$.
Trong tam giác SCB, ta có $\tan\widehat{CSB} = \dfrac{BC}{SB} = \dfrac{a}{a\sqrt{7}}$ nên $(SC,(SAB)) = \arctan\dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

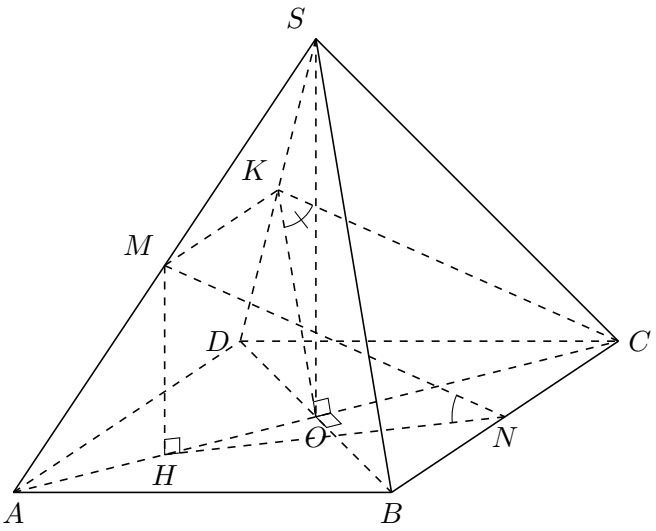
③ Vì $BO \perp (SAC)$ tại O nên SO là hình chiếu vuông góc của SB lên (SAC).
Do đó $(SB,(SAC)) = (SB,SO) = \widehat{BSO}$.
Trong tam giác SBO, ta có $\sin\widehat{BSO} = \dfrac{BO}{SB} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{7}} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}$ nên $(SB,(SAC)) = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{14}}$.

④ Gọi M là hình chiếu vuông góc của A lên SB. Lúc đó $AM \perp SB$ và $AM \perp BC$ (vì $BC \perp (SAB)$ và $AM \subset (SAB)$) nên $AM \perp (SBC)$ tại M. Do đó MC là hình chiếu vuông góc của AC lên (SBC).
Suy ra $(AC,(SBC)) = (AC,MC) = \widehat{ACM}$.
Trong tam giác SAB, ta có $AM = \dfrac{SA.AB}{SB} = \dfrac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$ và trong tam giác ACM, ta có $\sin\widehat{ACM} = \dfrac{MA}{AC} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$ nên $(AC,(SBC)) = \arcsin\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

□

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tâm O, SO vuông góc $(ABCD)$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm SA,BC. Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng $60°$. Tính góc giữa MN và (SBD).

✍**Lời giải.**



Gọi H là trung điểm AO. Ta có $MH \parallel SO$ nên $MH \perp (ABCD)$, suy ra HN là hình chiếu vuông góc của MN lên $(ABCD)$. Do đó $(MN,(ABCD)) = (MN,KN) = \widehat{MNK} = 60°$.
Trong tam giác HCN, ta có $HN^2 = HC^2 + CN^2 - 2HC.CN.\cos\widehat{HCN}$, suy ra $HN = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$.
Mà trong tam giác MNH, ta có $\sqrt{3} = \tan\widehat{MNH} = \dfrac{MH}{HN}$ nên $MH = \dfrac{a\sqrt{30}}{4}$, suy ra $SO = 2MH = \dfrac{a\sqrt{30}}{2}$.
Gọi K là trung điểm SD.
Ta có $MKCN$ là hình bình hành nên MN song song KC. Do đó $(MN,(SBD)) = (KC,(SBD))$.
Mà $CO \perp (SBD)$ tại O (do $CO \perp DO$ và $CO \perp SO$) nên KO là hình chiếu vuông góc của KC lên (SBD).
Suy ra $(KC,(SBD)) = (KC,KO) = \widehat{CKO}$.
Ta có $OK = \dfrac{1}{2}SD = \dfrac{1}{2}\sqrt{OD^2+OS^2} = a\sqrt{2}$.
Mặt khác, trong tam giác COK, ta có $\tan\widehat{CKO} = \dfrac{OC}{OK} = \dfrac{1}{2}$, suy ra $(KC,(SBD)) = \arctan\widehat{CKO} = \arctan\dfrac{1}{2} \approx 26°33'$.

□

Dạng 3. Xác định thiết diện của một khối đa diện cắt bởi mặt phẳng đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng cho trước

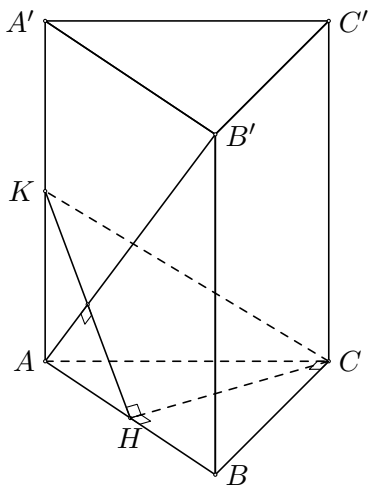
Để xác định thiết diện của một khối đa diện cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua điểm M và vuông góc với Δ cho trước, ta thực hiện như sau:

— *Dựng hai đường thẳng cắt nhau cùng vuông góc với Δ trong đó có ít nhất một đường thẳng đi qua M. Mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng trên chính là (α). Sau đó ta cần tìm giao tuyến của (α) với các mặt của khối đa diện.*

— *Nếu có sẵn hai đường thẳng chéo nhau hoặc cắt nhau a,b vuông góc với Δ thì ta dựng (α) đi qua M và song song với a,b.*

Ví dụ 1. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh C, $CA = 2a$ và mặt bên $ABB'A'$ là hình vuông. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua C và vuông góc với AB'. Xác định thiết diện của hình lăng trụ đã cho khi cắt bởi mặt phẳng (P) và tính diện tích thiết diện đó.

✍Lời giải.

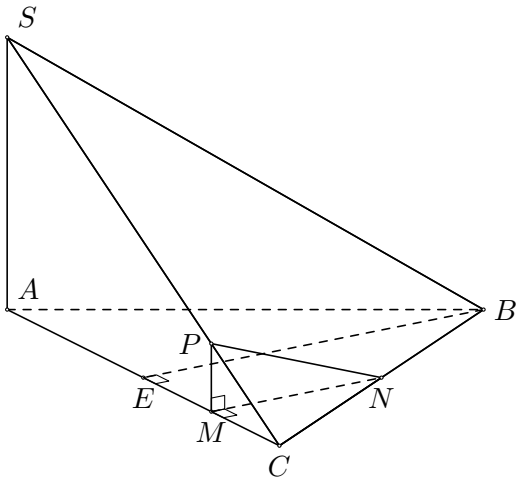


Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow CH \perp AB \Rightarrow CH \perp AB'$.
Dựng $HK \perp AB'$, với K thuộc cạnh AA'.
Suy ra thiết diện là tam giác CHK và tam giác CHK vuông tại H.
$S_{CHK} = \dfrac{1}{2}CH \cdot HK$.
Trong $\triangle ABC$, $CH = \dfrac{AB}{2} = a\sqrt{2}$.
Ta có $\triangle AHK$ vuông cân tại A và $HK = \dfrac{A'B \cdot \sqrt{2}}{2} = 2a$.
Vậy $S_{CHK} = \dfrac{1}{2}CH \cdot HK = \dfrac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot 2a = a^2\sqrt{2}$.

□

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là điểm thuộc cạnh AC sao cho $AM = 3MC$. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và vuông góc với cạnh AC. Xác định thiết diện của hình chóp đã cho khi cắt bởi mặt phẳng (α) và tính diện tích thiết diện đó.

✍Lời giải.



Gọi E là trung điểm $AC \Rightarrow BE \perp AC$.
Trong (ABC), dựng $MN \perp AC$, với N thuộc cạnh $BC \Rightarrow MN \parallel EB$.
Trong (SAC), dựng $MP \perp AC$, với P thuộc cạnh $SC \Rightarrow MP \parallel SA$.
Suy ra thiết diện là tam giác MPN và tam giác MPN vuông tại M.
$S_{MPN} = \dfrac{1}{2}MN \cdot PM$.
Ta có $\triangle SAC \backsim \triangle PMC \Rightarrow \dfrac{PM}{SA} = \dfrac{CM}{CA}$
$\Rightarrow PM = \dfrac{SA \cdot CM}{CA} = a \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{a}{4}$.
Ta có MN là đường trung bình của tam giác $\triangle BEC$
$\Rightarrow MN = \dfrac{1}{2}EB = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.
Vậy $S_{MPN} = \dfrac{1}{2}MN \cdot PM = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{32}$.

□

C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) thì d vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong (α).

B. Nếu đường thẳng $d \perp (\alpha)$ thì d vuông góc với hai đường thẳng trong (α).

C. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) thì $d \perp (\alpha)$.

D. Nếu $d \perp (\alpha)$ và đường thẳng $a \parallel (\alpha)$ thì $d \perp a$.

✍Lời giải.

Mệnh đề sai là "Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) thì $d \perp (\alpha)$".
Vì thiếu điều kiện "cắt nhau" của hai đường thẳng nằm trong (α).
Ví dụ: đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng b và c nằm trong (α) nhưng b và c song song với nhau thì khi đó a chưa chắc vuông góc với (α).

Chọn đáp án C ☐

Câu 2. Trong không gian cho đường thẳng Δ không nằm trong mặt phẳng (P), đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu

A. vuông góc với hai đường thẳng phân biệt nằm trong mặt phẳng (P).

B. vuông góc với đường thẳng a mà a song song với mặt phẳng (P).

C. vuông góc với đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P).

D. vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mp (P).

✍Lời giải.

Đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu Δ vuông góc với mọi đường thẳng trong mặt phẳng (P). (Định nghĩa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng).

Chọn đáp án D ☐

Câu 3. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song.

C. Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

✍Lời giải.

Mệnh đề sai là "Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song".
Vì: hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì có thể cắt nhau, chéo nhau.

Chọn đáp án B ☐

Câu 4. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề dưới đây.

A. Nếu $b \perp (P)$ thì $a \parallel b$.

B. Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$.

C. Nếu $b \subset (P)$ thì $b \perp a$.

D. Nếu $a \perp b$ thì $b \parallel (P)$.

✍Lời giải.

Mệnh đề sai là "Nếu $a \perp b$ thì $b \parallel (P)$", vì b có thể nằm trong (P).

Chọn đáp án D ☐

Câu 5. Cho hai đường thẳng a, b và mặt phẳng (P). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Nếu $a \perp (P)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.

B. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp (P)$ thì $a \perp b$.

C. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.

D. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$.

✍Lời giải.

Mệnh đề "$a \perp (P)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$" sai vì b có thể nằm trong (P).
Mệnh đề "Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$" sai vì b có thể cắt P hoặc b nằm trong (P).
Mệnh đề "Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$" sai vì b có thể nằm trong (P).

Chọn đáp án B ☐

Câu 6. Cho a, b, c là các đường thẳng trong không gian. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \parallel c$.

B. Nếu a vuông góc với mặt phẳng (α) và $b \parallel (\alpha)$ thì $a \perp b$.

C. Nếu $a \parallel b$ và $b \perp c$ thì $c \perp a$.

D. Nếu $a \perp b$, $b \perp c$ và a cắt c thì b vuông góc với mặt phẳng (a, c).

✍Lời giải.

Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \parallel c$ hoặc a cắt c hoặc a trùng c hoặc a chéo c.

Chọn đáp án D ☐

Câu 7. Chỉ ra mệnh đề **sai** trong các mệnh đề dưới đây.

A. Hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau. Khi đó có một và chỉ một mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.

B. Qua một điểm O cho trước có một mặt phẳng duy nhất vuông góc với một đường thẳng Δ cho trước.

C. Qua một điểm O cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

D. Qua một điểm O cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

✍Lời giải.

Mệnh đề sai là "Qua một điểm O cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước".

Vì qua một điểm O cho trước có vô số đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.
Chọn đáp án C □

Câu 8. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

B. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

D. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

✍Lời giải.
Qua một điểm cho trước có thể kẻ được vô số mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng cho trước.
Chọn đáp án D □

Câu 9. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

A. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

C. Với mỗi điểm $A \in (\alpha)$ và mỗi điểm $B \in (\beta)$ thì ta có đường thẳng AB vuông góc với giao tuyến d của (α) và (β).

D. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) đều vuông góc với mặt phẳng (γ) thì giao tuyến d của (α) và (β) nếu có sẽ vuông góc với (γ).

✍Lời giải.

— Mệnh đề "Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia" sai vì nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này vuông góc với giao tuyến sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

— Mệnh đề "Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau" sai vì còn trường hợp hai mặt phẳng cắt nhau.

— Mệnh đề "Với mỗi điểm $A \in (\alpha)$ và mỗi điểm $B \in (\beta)$ thì ta có đường thẳng AB vuông góc với giao tuyến d của (α) và (β)" sai vì ít nhất nếu cả A lẫn B đều thuộc giao tuyến của (α) và (β) thì AB trùng với $(\alpha) \cap (\beta)$.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đã cho.

B. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và đường thẳng b với b vuông góc với (P).

C. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q).

D. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) thì a song song với b.

✍Lời giải.

— Mệnh đề "Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và đường thẳng b với b vuông góc với (P)" sai vì hai góc này phụ nhau.

— Mệnh đề "Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q)" sai vì (P) có thể trùng (Q).

— Mệnh đề "Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) thì a song song với b" sai vì a có thể trùng b.

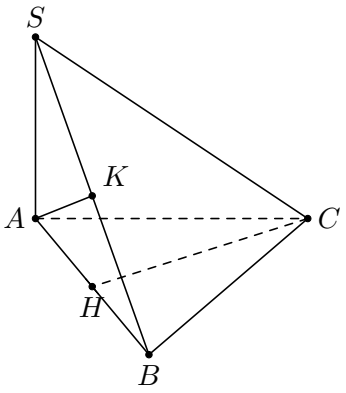
Chọn đáp án A □

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại C. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và SB. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $CH \perp AK$. **B**. $CH \perp SB$. **C**. $CH \perp SA$. **D**. $AK \perp SB$.

✍Lời giải.

Vì H là trung điểm của AB, tam giác ABC cân suy ra $CH \perp AB$.
Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp CH$.
Mà $CH \perp AB$ suy ra $CH \perp (SAB)$.
Mặt khác $AK \subset (SAB)$.
Nên CH vuông góc với các đường thẳng SA, SB, AK.
Và $AK \perp SB$ chỉ xảy ra khi và chỉ khi tam giác SAB cân tại S.



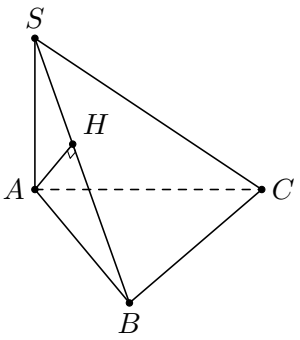
Chọn đáp án D □

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác SAB. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. $SA \perp BC$. **B**. $AH \perp BC$. **C**. $AH \perp AC$. **D**. $AH \perp SC$.

✍Lời giải.

Theo bài ra, ta có $SA \perp (ABC)$ mà $BC \subset (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$.
Tam giác ABC vuông tại B, có $AB \perp BC$.
$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$.
Khi đó $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$.
Nếu có $AH \perp AC$, trong khi $SA \perp AC$ thì $AC \perp (SAH)$
$\Rightarrow AC \perp AB$ (vô lý).



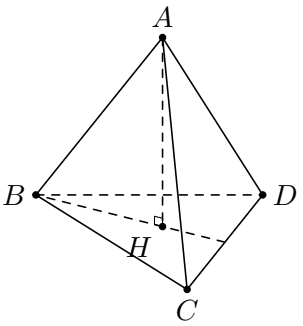
Chọn đáp án C □

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H là trực tâm của tam giác BCD và AH vuông góc với mặt phẳng đáy. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $CD \perp BD$. **B**. $AC = BD$. **C**. $AB = CD$. **D**. $AB \perp CD$.

✍Lời giải.

Vì AH vuông góc với (BCD) nên $AH \perp CD$. (1)
Do H là trực tâm của tam giác BCD nên $BH \perp CD$. (2)
Từ (1), (2) suy ra $\begin{cases} CD \perp AH \\ CD \perp BH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp AB$.



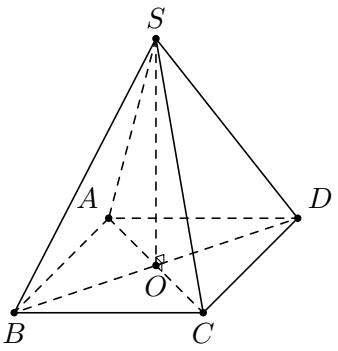
Chọn đáp án D □

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết rằng $SA = SC$, $SB = SD$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $AB \perp (SAC)$. **B**. $CD \perp AC$. **C**. $SO \perp (ABCD)$. **D**. $CD \perp (SBD)$.

✍Lời giải.

Vì $SA = SC$ nên $\triangle SAC$ cân tại S.
Mà O là trung điểm AC nên $SO \perp AC$.
Tương tự, ta cũng có $SO \perp BD$.
Mà $AC \cap BD = O \subset (ABCD) \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.



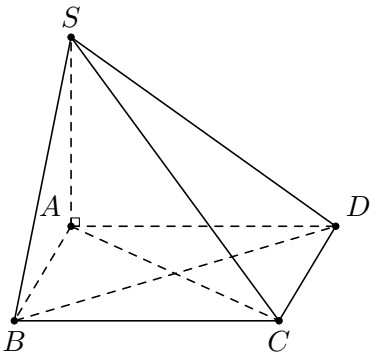
Chọn đáp án C □

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $SA \perp BD$. **B**. $SC \perp BD$. **C**. $SO \perp BD$. **D**. $AD \perp SC$.

✍Lời giải.

Vì SA vuông góc với $(ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$.
Mà $ABCD$ là hình thoi tâm O nên $AC \perp BD$.
Suy ra $BD \perp (SAC)$.
Mặt khác $SO \subset (SAC)$ và $SC \subset (SAC)$ suy ra $\begin{cases} BD \perp SO \\ BD \perp SC. \end{cases}$
Và AD, SC là hai đường thẳng chéo nhau.



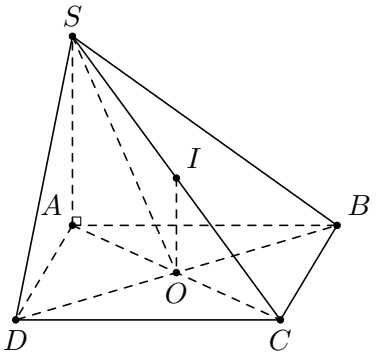
Chọn đáp án D □

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O. Đường thẳng SA cuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi I là trung điểm của SC. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. $IO \perp (ABCD)$. **B**. $BC \perp SB$.
C. Tam giác SCD vuông ở D. **D**. (SAC) là mặt phẳng trung trực của BD.

✍Lời giải.

Vì O, I lần lượt là trung điểm của AC, SC nên OI là đường trung bình của tam giác $SAC \Rightarrow OI \parallel SA$.
Mà $SA \perp (ABCD)$ nên $OI \perp (ABCD)$.
Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow BC \perp AB$.
Mà $SA \perp BC$ suy ra $BC \perp SB$.
Tương tự, ta có được $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA\,(SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow CD \perp SD$.
Nếu (SAC) là mặt phẳng trung trực của $BD \Rightarrow BD \perp AC$: điều này không thể xảy ra vì $ABCD$ là hình chữ nhật.



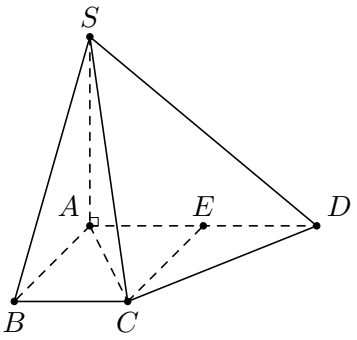
Chọn đáp án D □

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, có $AD = CD = a$, $AB = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$, E là trung điểm của AB. Chỉ ra mệnh đề **sai** trong các mệnh đề dưới đây.

A. $CE \perp (SAB)$. **B**. $CB \perp (SAC)$.
C. Tam giác SDC vuông tại D. **D**. $CE \perp (SDC)$.

✍Lời giải.

Từ giả thết suy ra $ADCE$ là hình vuông $\Rightarrow \begin{cases} CE \perp AB \\ CE = AD = a. \end{cases}$



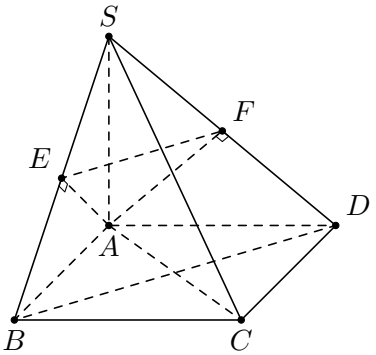
Ta có $\begin{cases} CE \perp AB \\ CE \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow CE \perp (SAB)$.
Do đó $CE \perp (SAB)$ đúng.
Vì $CE = AD = a$ nên $CE = \dfrac{1}{2}AB$.
$\Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại $C \Rightarrow CB \perp AB$.
Kết hợp với $CB \perp SA$ (do $SA \perp (ABCD)$) suy ra $CB \perp (SAC)$.
Do đó $CB \perp (SAC)$ đúng.
Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$. Do đó Tam giác SDC vuông tại D là đúng.
Dùng phương pháp loại trừ, suy ra Tam giác SDC vuông tại D là phương án sai.
Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi AE, AF lần lượt là đường cao của tam giác SAB và tam giác SAD. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $SC \perp (AFB)$. **B**. $SC \perp (AEC)$. **C**. $SC \perp (AED)$. **D**. $SC \perp (AEF)$.

✍Lời giải.

Vì SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ nên $SA \perp BC$.
Mà $AB \perp BC$ nên suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE \subset (SAB)$.
Tam giác SAB có đường cao $AE \Rightarrow AE \perp SB$.
Mà $AE \perp BC \Rightarrow AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SC$.
Tương tự, ta chứng minh được $AF \perp SC$. Do đó $SC \perp (AEF)$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Cho hình chóp $SABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác SBC và ABC. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $BC \perp (SAH)$. **B**. $SB \perp (CHK)$. **C**. $HK \perp (SBC)$. **D**. $BC \perp (SAB)$.

✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH)$.
Ta có $\begin{cases} CK \perp AB \\ CK \perp SA \end{cases} \Rightarrow CK \perp (SAB) \Rightarrow CK \perp SB$.
Mặt khác ta có $CH \perp SB$. Từ đó suy ra $SB \perp (CHK)$.
Ta có $\begin{cases} BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp HK \\ SB \perp (CHK) \Rightarrow SB \perp HK \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SBC)$.
Dùng phương pháp loại trừ suy ra $BC \perp (SAB)$ là sai.

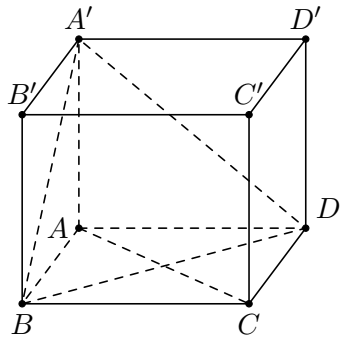
Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $(A'BD)$. **B**. $(A'DC')$. **C**. $(A'CD')$. **D**. $(A'B'CD)$.

✍Lời giải.

Ta có $AA'D'A$ là hình vuông suy ra $AD' \perp A'D$. (1)
Và $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương suy ra $AB \perp A'D$. (2)
Từ (1), (2) suy ra $A'D \perp (ABC'D') \Rightarrow A'D \perp AC'$.
Lại có $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AC \perp BD$.
Mà $AA' \perp BD \Rightarrow BD \perp (AA'C'C) \Rightarrow BD \perp AC'$.
Kết hợp với $A'D \perp AC'$ suy ra $AC' \perp (A'BD)$.

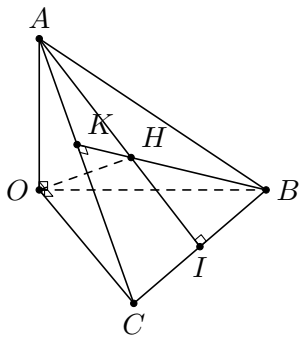


Chọn đáp án A □

Câu 21. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC). Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $OA \perp BC$.
B. $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.
C. H là trực tâm $\triangle ABC$.
D. $3OH^2 = AB^2 + AC^2 + BC^2$.

Lời giải.
$\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$. (1)
Gọi $I = AH \cap BC$.
Theo giả thiết ta có $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp BC$. (2)
Từ (1) và (2), suy ra $BC \perp (AOI) \Rightarrow BC \perp OI$.
Tam giác vuông BOC, ta có $\dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.
Tam giác vuông AOI, ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.
Từ chứng minh trên $BC \perp (AOI) \Rightarrow BC \perp AI$. (3)
Gọi $J = BH \cap AC$. Chứng mình tương tự ta có $AC \perp BJ$. (4)
Từ (3) và (4), suy ra H là trực tâm $\triangle ABC$.
Vậy $3OH^2 = AB^2 + AC^2 + BC^2$ là kết quả sai.

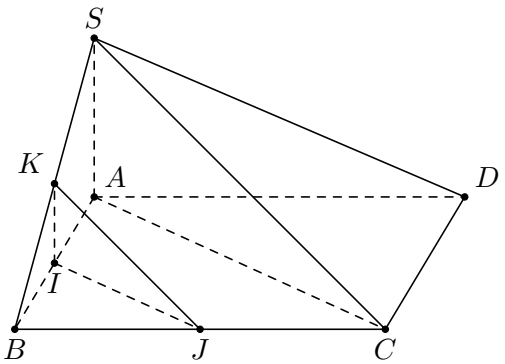


Chọn đáp án D □

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, BC, SB. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $(IJK) \parallel (SAC)$.
B. Góc giữa SC và BD bằng $60°$.
C. $BD \perp (IJK)$.
D. $BD \perp (SAC)$.

Lời giải.
Xét tam giác SBC có $\dfrac{BK}{BS} = \dfrac{BJ}{BC} = \dfrac{1}{2}$.
Suy ra JK song song với SC. (1)
Tam giác SAB có $\dfrac{BI}{BA} = \dfrac{BK}{BS} = \dfrac{1}{2}$.
Suy ra IK song song với SA. (2)
Từ (1), (2) suy ra $(IJK) \parallel (SAC)$. (*)
Vì $ABCD$ là hình vuông nên $BD \perp AC$.
Mà $SA \perp BD$ nên $BD \perp (SAC)$.
Kết hợp với (*), ta được $BD \perp (IJK)$.
Vậy góc giữa hai đường thẳng SC, BD bằng $90°$.



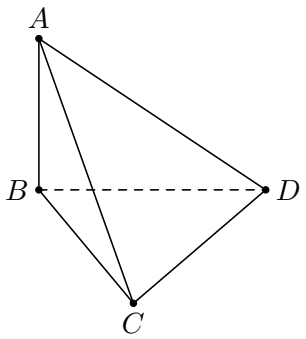
Chọn đáp án B □

Câu 23. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, BC, BD đôi một vuông góc với nhau. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. Góc giữa CD và mặt phẳng (ABD) là góc $\widehat{CBD}$.
B. Góc giữa AC và mặt phẳng (BCD) là góc $\widehat{ACB}$.
C. Góc giữa AD và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{ADB}$.
D. Góc giữa AC và mặt phẳng (ABD) là góc $\widehat{CBA}$.

Lời giải.

Dựa vào các phương án, ta thấy rằng:



— Góc giữa CD và mặt phẳng (ABD) là góc $\widehat{CBD}$ là sai,
vì $\begin{cases} CB \perp BD \\ CB \perp BA \end{cases} \Rightarrow CB \perp (ABD)$
$\Rightarrow B$ là hình chiếu của C trên (ABD).
Suy ra góc giữa CD và mặt phẳng (ABD) là góc $\widehat{CDB}$.

— Góc giữa AC và mặt phẳng (BCD) là góc $\widehat{ACB}$ là đúng,
vì $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp BD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCD)$
$\Rightarrow B$ là hình chiếu của A trên (BCD).

Suy ra góc giữa đường thẳng AC và mặt phẳng (BCD) là góc $\widehat{ACB}$.

— Góc giữa AD và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{ADB}$ là sai,
vì $\begin{cases} BD \perp BA \\ BD \perp BC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (ABC) \Rightarrow B$ là hình chiếu của D trên (ABC).
Suy ra góc giữa AD và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{DAB}$.

— Góc giữa AC và mặt phẳng (ABD) là góc $\widehat{CBA}$ là sai,
vì B là hình chiếu của C trên (ABD).
Suy ra góc giữa AC và mặt phẳng (ABD) là góc $\widehat{CAB}$.

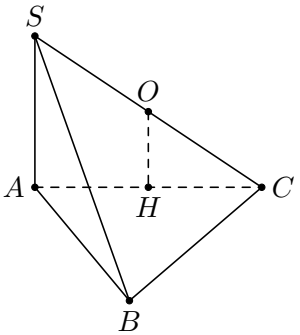
Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC. H là hình chiếu của O trên (ABC). Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. H là trung điểm của cạnh AB.
B. H là trung điểm của cạnh BC.
C. H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
D. H là trọng tâm của tam giác ABC.

✍Lời giải.

Ta có SA vuông góc với $(ABC) \Rightarrow SA \perp BC$.
Mà $AB \perp BC$ suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.
$\Rightarrow$ tam giác SBC vuông tại $B \Rightarrow O$ là trung điểm của SC.
Theo bài ra, ta có $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \parallel SA$.
$\Rightarrow H$ là trung điểm của AC.
Mà tam giác ABC vuông tại B nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



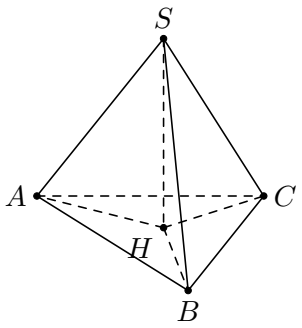
Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác nhọn, cạnh bên $SA = SB = SC$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC), khi đó

A. H là trực tâm của tam giác ABC.
B. H là trọng tâm của tam giác ABC.
C. H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
D. H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

✍Lời giải.

Vì H là hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) nên ta có
Tam giác SAH vuông tại H, có $SA^2 = AH^2 + SH^2$.
Tam giác SBH vuông tại H, có $SB^2 = BH^2 + SH^2$.
Tam giác SCH vuông tại H, có $SC^2 = CH^2 + SH^2$.
Kết hợp điều kiện $SA = SB = SC$ ta có $HA = HB = HC$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

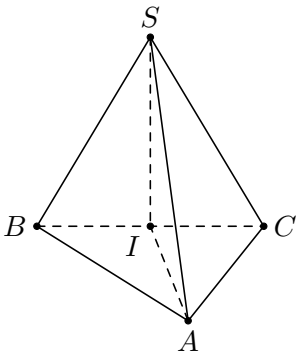


Chọn đáp án C □

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{BSC} = 120^\circ$, $\widehat{CSA} = 60^\circ$, $\widehat{ASB} = 90^\circ$ và $SA = SB = SC$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC), khi đó

A. I là trung điểm của AB.
B. I là trọng tâm của tam giác ABC.
C. I là trung điểm của AC.
D. I là trung điểm của BC.

✍Lời giải.
Đặt $SA = a$.
Tam giác SAB vuông cân tại S, có $AB = \sqrt{SA^2 + SB^2} = a\sqrt{2}$.
Tam giác SAC cân tại S, có $\widehat{CSA} = 60^\circ$ suy ra $SA = SC = AC = a$.
Áp dụng định lí cô-sin cho tam giác SBC, ta có:
$BC^2 = SB^2 + SC^2 - 2SB \cdot SC \cdot \cos\widehat{BSC}$
$\Rightarrow BC^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cdot \cos 120^\circ = 3a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3} = \sqrt{AB^2 + AC^2}$.
Như vậy, tam giác ABC vuông tại A mà I là hình chiếu của S trên (ABC) nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC hay chính là trung điểm BC.

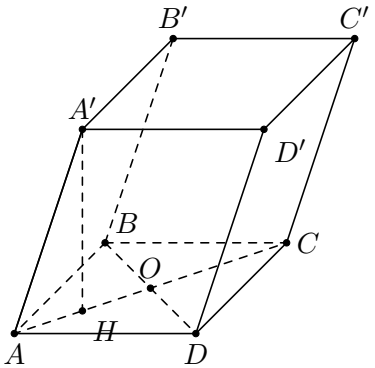


Chọn đáp án D □

Câu 27. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có mặt đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $\widehat{BAD} = 60^\circ$ và $A'A = A'B = A'D$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là

A. trung điểm của AO.
B. trọng tâm của tam giác ABD.
C. tâm O của hình thoi $ABCD$.
D. trọng tâm của tam giác BCD.

✍Lời giải.
Vì $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AB = AD$ mà $\widehat{BAD} = 60^\circ$ suy ra tam giác ABD đều. (1)
Ta có $A'A = A'B = A'D$ nên hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD. (2)
Từ (1), (2) suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD.



Chọn đáp án B □

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABC$có các mặt bên tạo với đáy một góc bằng nhau. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là

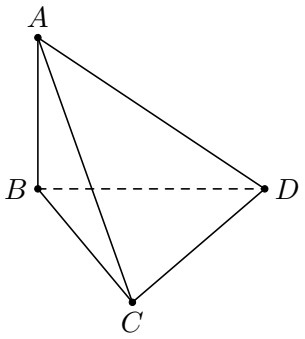
A. tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
B. tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
C. trọng tâm của tam giác ABC.
D. giao điểm của hai đường thẳng AC và BD.

✍Lời giải.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$.
Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của S trên các cạnh AB, AC, BC.
Ta có $\begin{cases} SH \perp AB \\ SM \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHM) \Rightarrow AB \perp HM$.
Tương tự ta được $HN \perp AC, HP \perp BC$.
Khi đó $((SAB);(ABC)) = (SM;HM) = \widehat{SMH}$, tương tự suy ra $\widehat{SMH} = \widehat{SNH} = \widehat{SPH}$.

$\Rightarrow \triangle SMH = \triangle SNH = \triangle SPH \Rightarrow HM = HN = NP.$
$\Rightarrow H$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
Chọn đáp án A □

Câu 29. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, BC, CD đôi một vuông góc với nhau và $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$. Độ dài đoạn thẳng AD bằng
A. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **B.** $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$. **C.** $\sqrt{a^2-b^2+c^2}$. **D.** $\sqrt{-a^2+b^2+c^2}$.

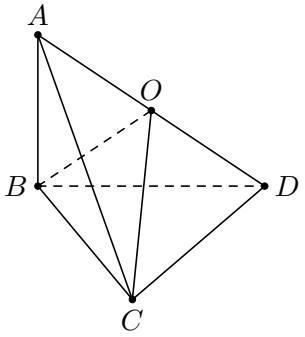
Lời giải.
Ta có $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCD) \Rightarrow$ tam giác ABD vuông tại B.
Lại có $\begin{cases} AB \perp CD \\ BC \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABC) \Rightarrow$ tam giác BCD vuông tại C.
Khi đó $\begin{cases} AD^2 = AB^2 + BD^2 \\ BD^2 = BC^2 + CD^2 \end{cases}$
$\Rightarrow AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 \Rightarrow AD = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.



Chọn đáp án A □

Câu 30. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, BC, CD đôi một vuông góc với nhau. Điểm nào dưới đây các đều bốn đỉnh A, B, C, D của tứ diện $ABCD$?
A. Trung điểm của cạnh BD. **B.** Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
C. Trung điểm của cạnh AD. **D.** Trọng tâm của tam giác ACD.

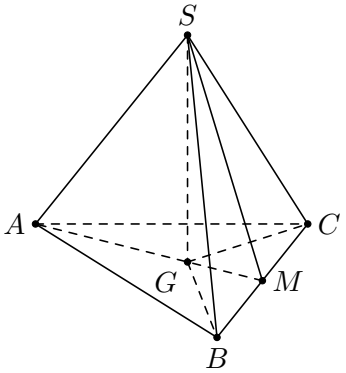
Lời giải.
Ta có $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCD) \Rightarrow$ tam giác ABD vuông tại B.
Suy ra $IA = IB = ID = \dfrac{AD}{2}$, với I là trung điểm của AD. (1)
Lại có $\begin{cases} AB \perp CD \\ BC \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABC) \Rightarrow$tam giác ACD vuông tại C.
Suy ra $EA = EC = ED = \dfrac{AD}{2}$, với E là trung điểm của AD. (2)
Từ (1), (2) suy ra $I \equiv E$.
Vậy trung điểm của cạnh AD cách đều A, B, C, D.



Chọn đáp án C □

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt đáy ABC là tam giác đều cạnh a và độ dài các cạnh bên $SA = SB = SC = b$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Độ dài đoạn thẳng SG bằng
A. $\dfrac{\sqrt{9b^2+3a^2}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{b^2-3a^2}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{9b^2-3a^2}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{b^2+3a^2}}{3}$.

Lời giải.
Vì $SA = SB = SC$ và G là trọng tâm tam giác ABC
suy ra G là chân đường cao kẻ từ đỉnh S xuống mặt phẳng (ABC).
Gọi M là trung điểm của BC suy ra $BM = CM = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{2}$.
Tam giác ABC đều cạnh a, có $GM = \dfrac{AM}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.
Tam giác SBM vuông tại M, có $SM = \sqrt{SB^2 - MB^2} = \sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{4}}$.
Tam giác SGM vuông tại G, có
$SG = \sqrt{SM^2 - GM^2} = \sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{4} - \dfrac{a^2}{12}} = \dfrac{\sqrt{9b^2-3a^2}}{3}$.



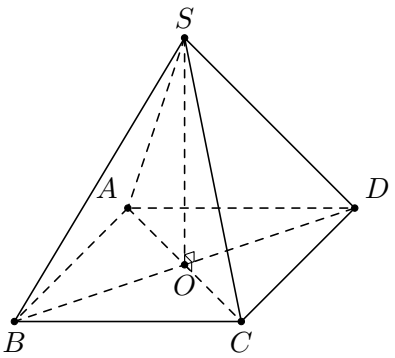
Chọn đáp án C □

Câu 32. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, cạnh bằng $2a$. Trên đường thẳng qua O và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ lấy điểm S. Biết góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $45°$. Độ dài cạnh SO bằng

A. $SO = a\sqrt{3}$. **B**. $SO = a\sqrt{2}$. **C**. $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D**. $SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

✍Lời giải.

Vì O là hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$.
Suy ra OA là hình chiếu của SA trên mặt phẳng $(ABCD)$.
Khi đó $(SA;(ABCD)) = (SA;OA) = \widehat{SAO} = 45^\circ$
$\Rightarrow$ tam giác SAO vuông cân. (1)
Tam giác ABC vuông cân tại B, có
$OA = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{AB\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$. (2)
Từ (1), (2) suy ra $SO = OA = a\sqrt{2}$.



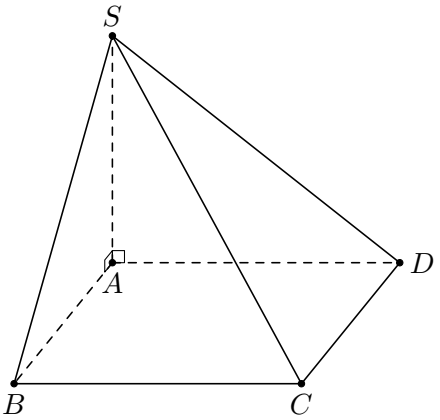
Chọn đáp án B □

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có cạnh $AB = a$, $BC = 2a$. Hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, cạnh $SA = a\sqrt{15}$. Tính góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng (ABD).

A. 30°. **B**. 45°. **C**. 60°. **D**. 90°.

✍Lời giải.

Do $SA \perp (ABCD)$ nên
$(SC,(ABD)) = (SC,(ABCD)) = (SC,AC) = \widehat{SCA}$.
Xét tam giác vuông SAC, ta có
$\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{SA}{\sqrt{AB^2+BC^2}} = \sqrt{3}$.
Suy ra $\widehat{SCA} = 60^\circ$.



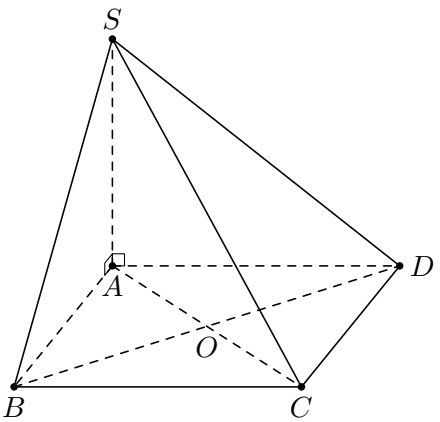
Chọn đáp án C □

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi φ là góc giữa SO và mặt phẳng $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi = 2\sqrt{2}$. **B**. $\varphi = 60^\circ$. **C**. $\tan\varphi = 2$. **D**. $\varphi = 45^\circ$.

✍Lời giải.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SO trên mặt đáy $(ABCD)$ là AO.
Do đó $(SO,(ABCD)) = (SO,OA) = \widehat{SOA}$.
Trong tam giác vuông SAO, ta có $\tan\widehat{SOA} = \dfrac{SA}{OA} = 2\sqrt{2}$.
Vậy SO hợp với mặt đáy $(ABCD)$ một góc nhọn φ thỏa mãn $\tan\varphi = 2\sqrt{2}$.



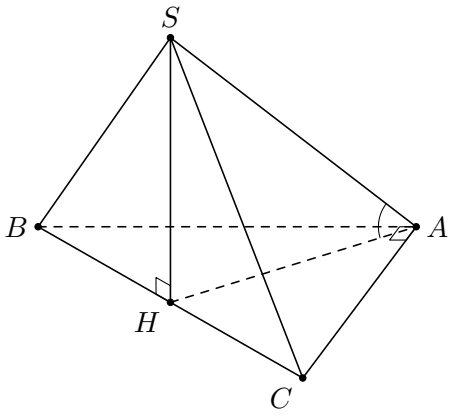
Chọn đáp án A □

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, tam giác SBC là tam giác đều có cạnh bằng $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy (ABC) bằng

A. 30°. **B**. 45°. **C**. 60°. **D**. 90°.

✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm của BC, suy ra $SH \perp (ABC)$.
Vì $SH \perp (ABC)$ nên HA là hình chiếu của SA trên mặt phẳng (ABC).
Do đó $(SA,(ABC)) = (SA,AH) = \widehat{SAH}$.
Tam giác SBC đều cạnh $2a$ nên $SH = a\sqrt{3}$.
Tam giác ABC vuông tại A nên $AH = \dfrac{1}{2}BC = a$.
Tam giác vuông SAH, có $\tan\widehat{SAH} = \dfrac{SH}{AH} = \sqrt{3}$, suy ra $\widehat{SAH} = 60^\circ$.



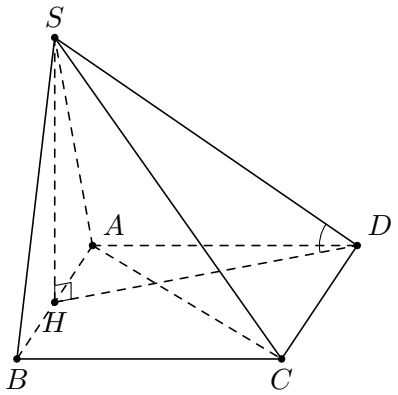
Chọn đáp án C □

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi φ là góc giữa SD và mặt phẳng $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\cot\varphi = \dfrac{5}{\sqrt{15}}$. **B.** $\cot\varphi = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\varphi = 30^\circ$. **D.** $\cot\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm AB, suy ra $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.
Vì $SH \perp (ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SD trên mặt đáy $(ABCD)$ là HD.
Do đó $\varphi = (SD,(ABCD)) = (SD,HD) = \widehat{SDH}$.
Tam giác SAB đều cạnh a nên $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Lại có $HD = \sqrt{AH^2 + AB^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
Tam giác vuông SHD, có $\cot\varphi = \cot\widehat{SDH} = \dfrac{DH}{SH} = \dfrac{5}{\sqrt{15}}$.



Chọn đáp án A □

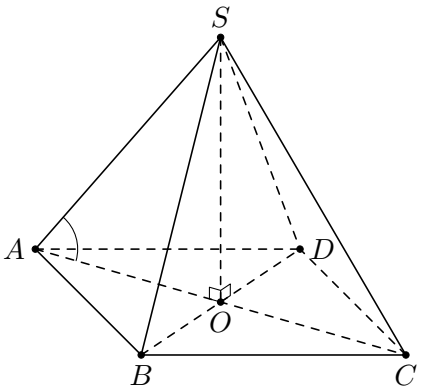
Câu 37. Cho chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 2, cạnh bên bằng 3. Gọi φ là góc giữa giữa cạnh bên và mặt đáy. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi = \sqrt{7}$. **B.** $\varphi = 60^\circ$. **C.** $\varphi = 45^\circ$. **D.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi O là tâm mặt đáy $(ABCD)$, suy ra $SO \perp (ABCD)$.
Vì $SO \perp (ABCD)$, suy ra OA là hình chiếu của SA trên mặt phẳng $(ABCD)$.
Do đó $(SA,(ABCD)) = (SA,AO) = \widehat{SAO}$.
Tam giác vuông SOA, có

$$\tan\widehat{SAO} = \frac{SO}{AO} = \frac{\sqrt{SB^2 - BO^2}}{AO} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$



Chọn đáp án D □

Câu 38. Cho tứ diện $ABCD$ đều. Gọi α là góc giữa AB và mặt phẳng (BCD). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

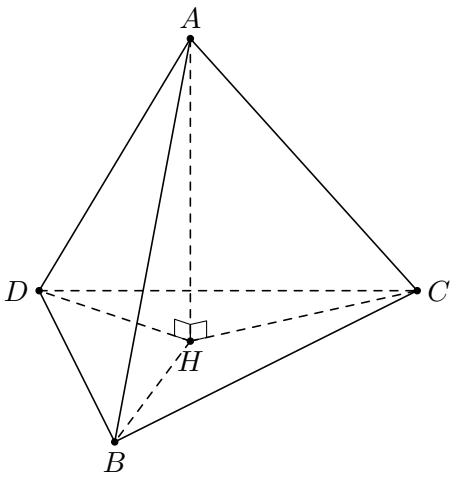
A. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\cos\alpha = 0$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi H là trọng tâm tam giác đều $BCD \Rightarrow AH \perp (BCD)$.

Gọi a là độ dài cạnh của tứ diện $ABCD \Rightarrow BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Khi đó $\alpha = \widehat{ABH} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng $4a$. Cạnh bên $SA = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của H của đoạn thẳng AO. Gọi α là góc giữa SD và mặt phẳng $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\alpha = \sqrt{5}$. **B**. $\tan\alpha = 1$. **C**. $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **D**. $\tan\alpha = \sqrt{3}$.

✍Lời giải.

Vì $SH \perp (ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SD trên mặt phẳng $(ABCD)$ là HD.

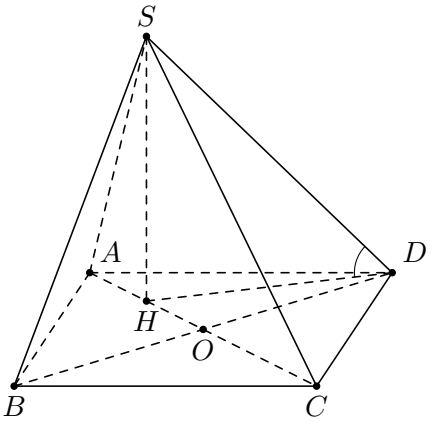
Do đó $(SD, (ABCD)) = (SD, HD) = \widehat{SDH}$.

Tính được $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = a\sqrt{2}$.

Trong tam giác ADH, ta có

$$DH = \sqrt{AH^2 + AD^2 - 2AH \cdot AD \cdot \cos 45^\circ} = a\sqrt{10}.$$

Tam giác vuông SHD, có $\tan\widehat{SDH} = \dfrac{SH}{HD} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 40. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của B' xuống mặt đáy trùng với giao điểm hai đường chéo của đáy và cạnh bên $BB' = a$. Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy.

A. 30°. **B**. 45°. **C**. 60°. **D**. 90°.

✍Lời giải.

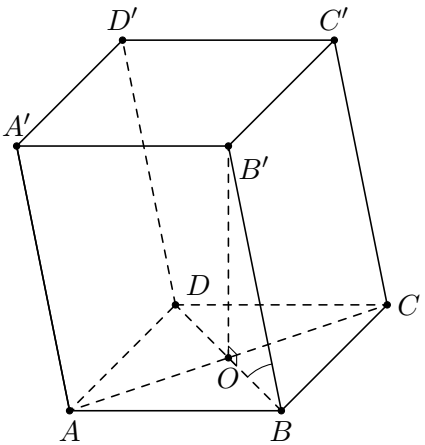
Gọi $O = AC \cap BD$. Theo giả thiết $B'O \perp (ABCD)$.

Do đó $(BB', (ABCD)) = (BB', BO) = \widehat{B'BO}$.

Vì tam giác ABD đều cạnh a, suy ra $BO = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{a}{2}$.

Tam giác vuông $B'BO$, có

$$\cos\widehat{B'BO} = \frac{BO}{BB'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{B'BO} = 60^\circ.$$



Chọn đáp án (C) □

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu

vuông góc H của S trên mặt đáy trùng với trọng tâm tam giác ABC và $SH = \dfrac{a}{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC và SC. Gọi α là góc giữa đường thẳng MN với mặt đáy $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\alpha = \dfrac{4}{3}$. **B.** $\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$. **C.** $\tan\alpha = \dfrac{2}{3}$. **D.** $\tan\alpha = 1$.

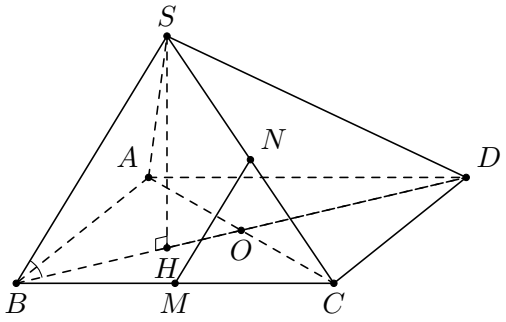
✍Lời giải.

Ta có $MN \parallel SB$.

Do đó $(MN, (ABCD)) = (SB, (ABCD))$.

Do $SH \perp (ABCD)$ nên

$$(MN, (ABCD)) = (SB, (ABCD)) = (SB, HB) = \widehat{SBH}.$$



Ta có $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a$; $BH = \dfrac{BD}{3} = \dfrac{2a}{3}$.

Tam giác SHB, có $\tan\widehat{SBH} = \dfrac{SH}{BH} = \dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng a, SO vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA và BC. Tính góc giữa đường thẳng MN với mặt phẳng $(ABCD)$, biết $MN = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

✍Lời giải.

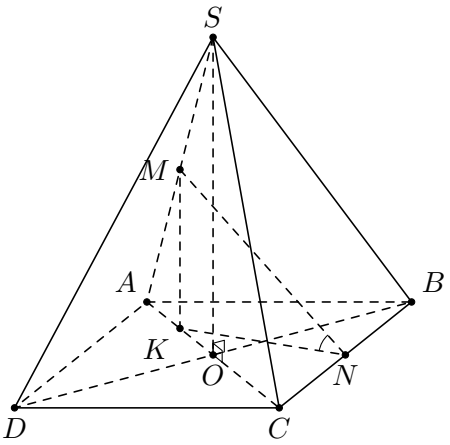
Kẻ $MK \parallel SO$, do $SO \perp (ABCD)$, suy ra $MK \perp (ABCD)$.

Do đó $(MN, (ABCD)) = (MN, NK) = \widehat{MNK}$.

Ta có $CK = \dfrac{3}{4}CA = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Tam giác CNK, có

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45° = \frac{CN^2 + CK^2 - KN^2}{2CN \cdot CK} \Rightarrow KN = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$



Tam giác vuông MNK, có

$$\cos\widehat{MNK} = \frac{NK}{MN} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{MNK} = 60°.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\cos\varphi = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\varphi = 60°$. **D.** $\varphi = 30°$.

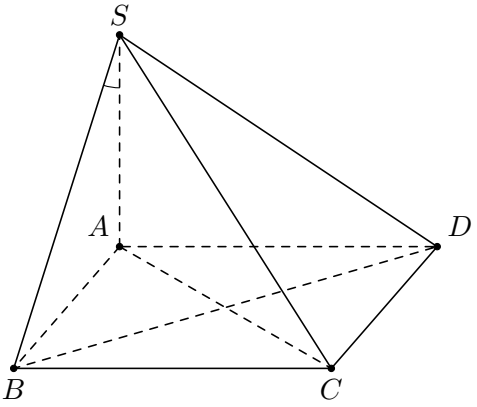
✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BA \perp AD \\ BA \perp SA \end{cases} \Rightarrow BA \perp (SAD)$. Suy ra hình chiếu vuông góc của SB trên mặt phẳng (SAD) là SA.

Do đó $(SB, (SAD)) = (SB, SA) = \widehat{BSA}$.

Tam giác vuông SAB, ta có

$$\cos\widehat{BSA} = \frac{SA}{SB} = \frac{SA}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$



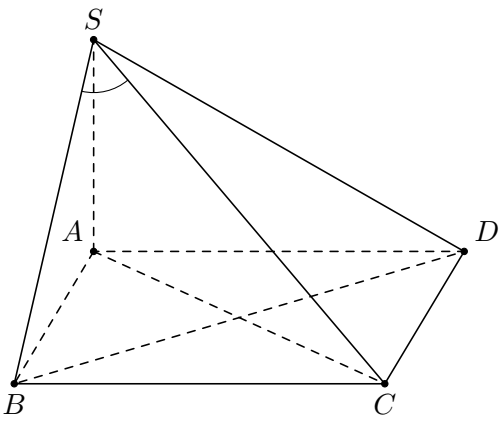
Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy. Gọi α là góc giữa SC và mặt phẳng (SAB). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{8}}$. **B.** $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$. **C.** $\alpha = 30°$. **D.** $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BC \perp BA \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$. Suy ra hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (SAB) là SB.
Do đó $(SC,(SAB)) = (SC,SB) = \widehat{CSB}$.
Tam giác vuông SAB, có $SB = \sqrt{SA^2+AB^2} = a\sqrt{7}$.
Tam giác vuông SBC, có $\tan\widehat{CSB} = \dfrac{BC}{SB} = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$.



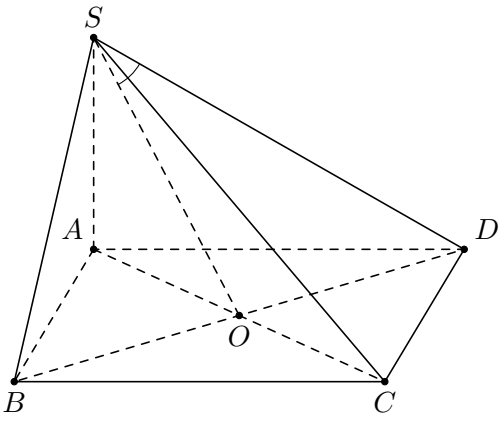
Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc giữa SC và mặt đáy $(ABCD)$ bằng $45°$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\tan\varphi = \sqrt{5}$. **C.** $\varphi = 60°$. **D.** $\varphi = 45°$.

✍Lời giải.

Xác định $45° = (SC,(ABCD)) = (SC,AC) = \widehat{SCA}$, suy ra $SA = AC = 2a\sqrt{2}$.
Gọi $O = AC \cap BD$, ta có $\begin{cases} DO \perp AC \\ DO \perp SA \end{cases} \Rightarrow DO \perp (SAC)$ nên hình chiếu vuông góc của SD trên mặt phẳng (SAC) là SO.
Do đó $(SD,(SAC)) = (SD,SO) = \widehat{DSO}$.
Ta có $DO = \dfrac{1}{2}BD = a\sqrt{2}$; $SO = \sqrt{SA^2+AO^2} = \sqrt{SA^2+DO^2} = a\sqrt{10}$.
Tam giác vuông SOD, có $\tan\widehat{DSO} = \dfrac{OD}{OS} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 46. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2\sqrt{2}$, $AA' = 4$. Tính góc giữa đường thẳng $A'C$ với mặt phẳng $(AA'B'B)$.

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'B'B)$.

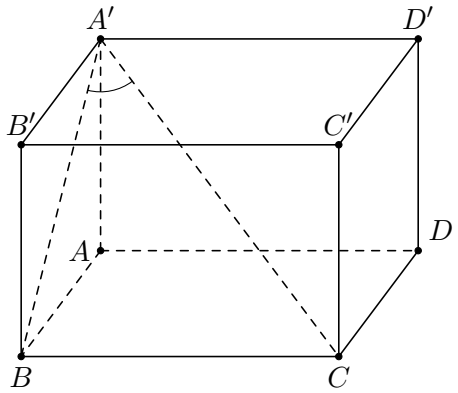
Do đó $(\widehat{A'C, (AA'B'B)}) = (\widehat{A'C, A'B}) = \widehat{CA'B}$.

Vì $BC \perp (AA'B'B) \Rightarrow BC \perp BA'$ nên tam giác $A'BC$ vuông tại B.

Tam giác vuông $A'BC$, có

$$\tan \widehat{CA'B} = \frac{BC}{A'B} = \frac{BC}{\sqrt{AA'^2 + AB^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Vậy $A'C$ tạo với mặt phẳng $(AA'B'B)$ một góc 30°.



Chọn đáp án A □

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD. Gọi φ là góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SHK). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi = \sqrt{7}$. **B**. $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **C**. $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$. **D**. $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$.

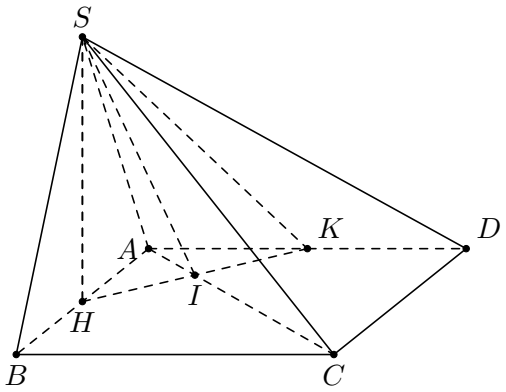
Lời giải.

Gọi $I = HK \cap AC$. Do H, K lần lượt là trung điểm của AB và AD nên $HK \parallel BD$. Suy ra $HK \perp AC$. Lại có $AC \perp SH$ nên suy ra $AC \perp (SHK)$.

Do đó $(SA, (SHK)) = (SA, SI) = \widehat{ASI}$.

Tam giác SIA vuông tại I, có

$$\tan \widehat{ASI} = \frac{AI}{SI} = \frac{\frac{1}{4}AC}{\sqrt{SA^2 - AI^2}} = \frac{\sqrt{7}}{7}.$$



Chọn đáp án C □

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy. Tính góc giữa đường thẳng SC với mặt phẳng (SAD).

A. 30°. **B**. 45°. **C**. 60°. **D**. 90°.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm AD, suy ra $ABCM$ là hình vuông nên $CM \perp AD$.

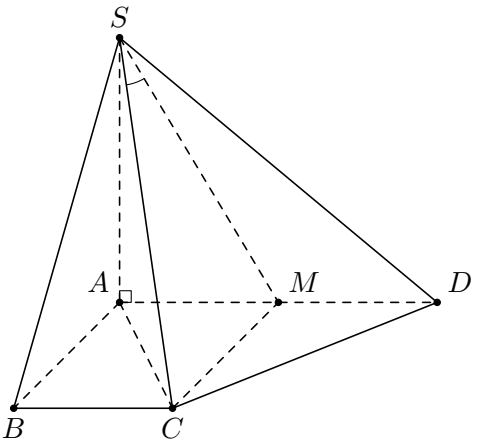
Ta có $\begin{cases} CM \perp AD \\ CM \perp SA \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAD)$.

Suy ra hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (SAD) là SM.

Do đó $(SC, (SAD)) = (SC, SM) = \widehat{CSM}$.

Tam giác vuông SMC, có

$$\tan \widehat{CSM} = \frac{CM}{SM} = \frac{AB}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{CSM} = 30^\circ.$$



Chọn đáp án A □

Câu 49. Cho hình chóp (α) có đáy $ABCD$ là hình vuông. Mặt bên SAB là tam giác đều có đường cao SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa BD và mặt phẳng (SAD). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\alpha = 60°$. **B.** $\alpha = 30°$. **C.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. **D.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

✍Lời giải.

Gọi I là trung điểm SA.

Do tam giác SAD đều nên $BI \perp SA$. (1)

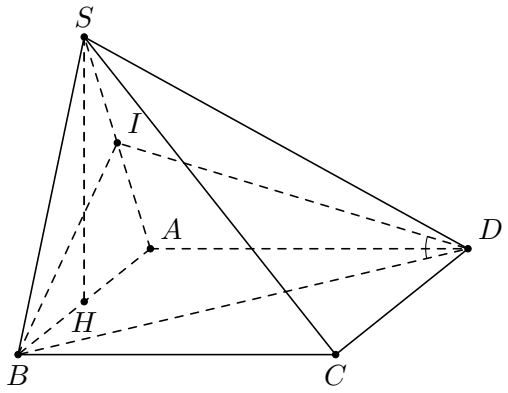
Ta có $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SH \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAD) \Rightarrow AD \perp BI$. (2)

Từ (1) và (2), ta có $BI \perp (SAD)$ nên hình chiếu vuông góc của BD trên mặt phẳng (SAD) là ID.

Do đó $(BD, (SAD)) = (BD, ID) = \widehat{BDI}$.

Tam giác BDI vuông tại I nên

$$\sin\widehat{BDI} = \frac{BI}{BD} = \frac{\frac{AB\sqrt{3}}{2}}{AB\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$



Chọn đáp án D □

Câu 50. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi α là góc giữa AC' và mặt phẳng $(A'BCD')$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\alpha = 30°$. **B.** $\tan\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **C.** $\alpha = 45°$. **D.** $\tan\alpha = \sqrt{2}$.

✍Lời giải.

Gọi $A'C \cap AC' = I; C'D \cap CD' = H$.

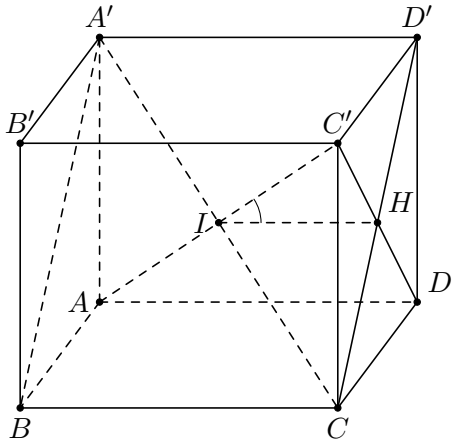
Ta có $\begin{cases} C'D \perp CD' \\ C'D \perp A'D' \end{cases} \Rightarrow C'D \perp (A'BCD') \Rightarrow IH$ là hình chiếu vuông góc của AC' trên mặt phẳng $(A'BCD')$.

Do đó

$$\left(AC', \left(A'BCD'\right)\right) = \left(C'I, \left(A'BCD'\right)\right) = (C'I, HI) = \widehat{C'IH}.$$

Trong tam giác vuông $C'HI$, có

$$\tan\widehat{C'IH} = \frac{C'H}{IH} = \frac{\frac{AB\sqrt{2}}{2}}{\frac{AB}{2}} = \sqrt{2}.$$



Chọn đáp án D □

Câu 51. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $BC = 2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) đi qua S vuông góc với AB. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **B.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $S = a^2\sqrt{3}$. **D.** $S = \dfrac{a^2}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow SH \perp AB$.

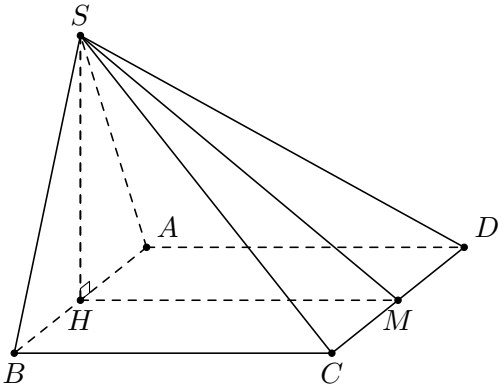
Suy ra $SH \subset (\alpha)$ và $SH \perp (ABCD)$ (do $(SAB) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến AB).

Kẻ $HM \perp AB\,(M \in CD) \Rightarrow HM \subset (\alpha)$.

Do đó thiết diện là tam giác SHM vuông tại H.

Ta có $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $HM = BC = 2a$.

Vậy $S_{\triangle SHM} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot 2a = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.



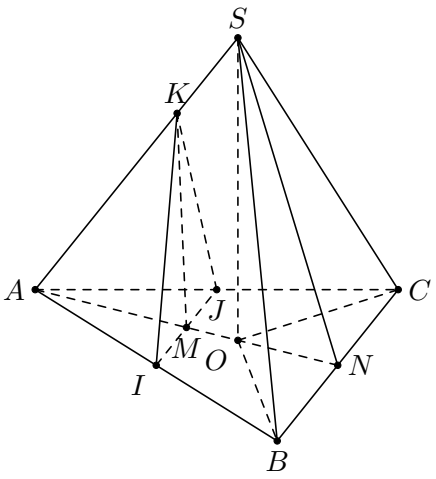
Chọn đáp án B □

Câu 52. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tâm O; $SO = 2a$. Gọi M là điểm thuộc đoạn AO ($M \neq A; M \neq O$). Mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AO. Đặt $AM = x$. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp $S.ABC$.

A. $S = 2a^2$. **B.** $S = 2x^2$. **C.** $S = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(a-x)^2$. **D.** $S = 2(a-x)^2$.

✍Lời giải.

Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABC)$ (O là tâm của tam giác ABC).
Do đó $SO \perp AA'$ mà $(\alpha) \perp AA'$ suy ra $SO \parallel (\alpha)$.
Tương tự ta cũng có $BC \parallel (\alpha)$.
Qua M kẻ $IJ \parallel BC$ với $I \in AB, J \in AC$; kẻ $MK \parallel SO$ với $K \in SA$.
Khi đó thiết diện là tam giác KIJ.



Diện tích tam giác IJK là $S_{\triangle IJK} = \dfrac{1}{2} IJ \cdot MK$.
Trong tam giác ABC, ta có $\dfrac{IJ}{BC} = \dfrac{AM}{AA'}$ suy ra

$$IJ = \frac{AM \cdot BC}{AA'} = \frac{2x\sqrt{3}}{3}.$$

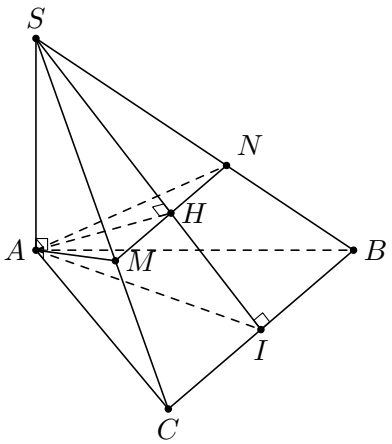
Tương tự trong tam giác SAO, ta có $\dfrac{MK}{SO} = \dfrac{AM}{AO}$ suy ra $MK = \dfrac{AM \cdot SO}{AO} = 2x\sqrt{3}$.
Vậy $S_{\triangle IJK} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2x\sqrt{3}}{3} \cdot 2x\sqrt{3} = 2x^2$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 53. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với trung tuyến SI của tam giác SBC. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S = \dfrac{2a^2\sqrt{21}}{49}$. **B.** $S = \dfrac{4a^2\sqrt{21}}{49}$. **C.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{21}}{7}$. **D.** $S = \dfrac{2a^2\sqrt{21}}{7}$.

✍Lời giải.

Gọi I là trung điểm $BC \Rightarrow AI \perp BC$. Kẻ $AK \perp SI$ ($K \in SI$).
Từ K kẻ đường thẳng song song với BC cắt SB, SC lần lượt tại M, N.
Khi đó thiết diện là tam giác AMN. Ta có



$$\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AK \Rightarrow MN \perp AK.$$

Tam giác vuông SAI, có $AK = \dfrac{SA \cdot AI}{\sqrt{SA^2 + AI^2}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.
Trong tam giác SBC, ta có

$$\frac{MN}{BC} = \frac{SK}{SI} = \frac{SA^2}{SI^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AI^2} = \frac{4}{7} \Rightarrow MN = \frac{4a}{7}.$$

Vậy $S_{\triangle AMN} = \dfrac{1}{2} AK \cdot MN = \dfrac{2a^2\sqrt{21}}{49}$.
Chọn đáp án (A) □

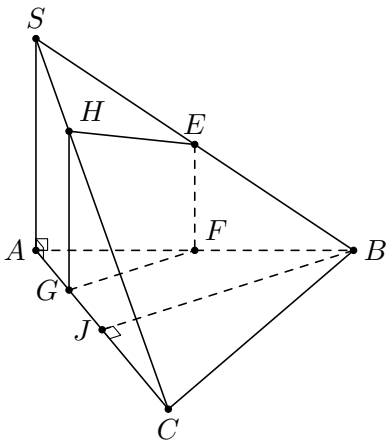
Câu 54. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua trung điểm E của SC và vuông góc với AB. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S = \dfrac{5a^2\sqrt{3}}{16}$. **B.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{7}}{32}$. **C.** $S = \dfrac{5a^2\sqrt{3}}{32}$. **D.** $S = \dfrac{5a^2\sqrt{2}}{16}$.

✍Lời giải.

Gọi F là trung điểm AC, suy ra $EF \parallel SA$.
Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AB$ nên $EF \perp AB$. (1)
Gọi J, G lần lượt là trung điểm AC, AJ.
Suy ra $CJ \perp AB$ và $FG \parallel CJ$ nên $FG \perp AB$. (2)
Trong $\triangle SAB$ kẻ $GH \parallel SA\,(H \in SB)$, suy ra $GH \perp AB$. (3)
Từ (1), (2) và (3), suy ra thiết diện cần tìm là hình thang vuông $EFGH$.
Do đó $S_{EFGH} = \dfrac{1}{2}(EF + GH) \cdot FG$. Ta có

$$EF = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2};\ FG = \frac{1}{2}CJ = \frac{a\sqrt{3}}{4};$$
$$\frac{GH}{SA} = \frac{BG}{BA} \Rightarrow GH = BG = \frac{3a}{4}.$$
$$\text{Vậy } S_{EFGH} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + \frac{3a}{4}\right) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{5a^2\sqrt{3}}{32}.$$



Chọn đáp án C □

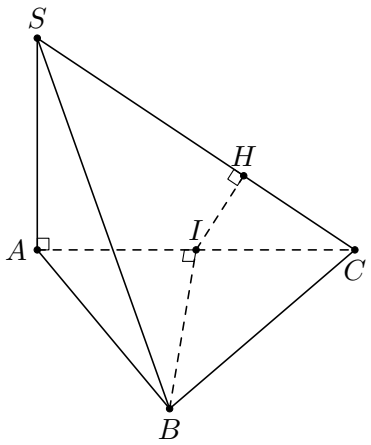
Câu 55. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua B và vuông góc với SC. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{10}$. **B.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{5}}{8}$. **C.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}$. **D.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{20}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AC, suy ra $BI \perp AC$.
Ta có $\begin{cases} BI \perp AC \\ BI \perp SA \end{cases} \Rightarrow BI \perp (SAC) \Rightarrow BI \perp SC$. (1)
Kẻ $IH \perp SC\,(H \in SC)$. (2)
Từ (1) và (2), suy ra $SC \perp (BIH)$.
Vậy thiết diện cần tìm là tam giác IBH.
Do $BI \perp (SAC) \Rightarrow BI \perp IH$ nên $\triangle IBH$ vuông tại I.
Ta có BI đường cao của tam giác đều cạnh a nên $BI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Tam giác CHI đồng dạng tam giác CAS, suy ra

$$\frac{IH}{SA} = \frac{CI}{CS} \Rightarrow IH = \frac{CI \cdot SA}{CS} = \frac{CI \cdot SA}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$



$$\text{Vậy } S_{\triangle BIH} = \frac{1}{2}BI \cdot IH = \frac{a^2\sqrt{15}}{20}.$$

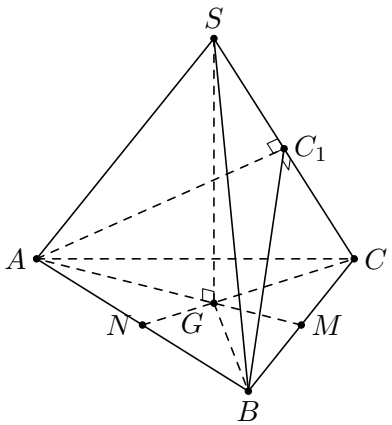
Chọn đáp án D □

Câu 56. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng b. Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC. Tìm hệ thức giữa a và b để (α) cắt SC tại điểm C_1 nằm giữa S và C.

A. $a > b\sqrt{2}$. **B.** $a > b\sqrt{3}$. **C.** $a < b\sqrt{2}$. **D.** $a < b\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Do $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SG \perp (ABC)$. Gọi C' là trung điểm AB. Suy ra C, C', G thẳng hàng.
Ta có $\begin{cases} AB \perp CC' \\ SG \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SCC') \Rightarrow AB \perp SC$. (1)
Trong tam giác SAC, kẻ $AC_1 \perp SC$. (2)
Từ (1) và (2), suy ra $SC \perp (ABC_1)$.
Suy ra thiết diện cần tìm là tam giác ABC_1 thỏa mãn đi qua A và vuông góc với SC. Tam giác SAC cân tại S nên để C_1 nằm giữa S và C khi và chỉ khi $\widehat{ASC} < 90^0$.

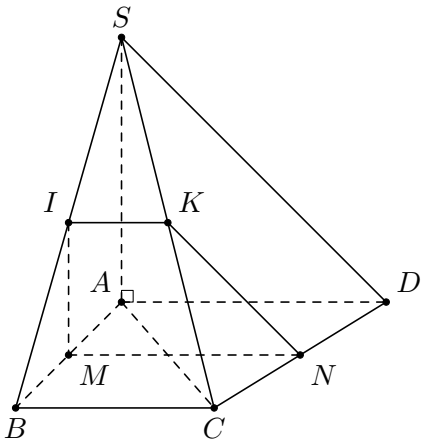


Suy ra $\cos\widehat{ASC} > 0 \Leftrightarrow SA^2 + SC^2 - AC^2 > 0 \Leftrightarrow 2b^2 - a^2 > 0 \Rightarrow a < b\sqrt{2}$.
Chọn đáp án C □

Câu 57. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, đáy lớn $AD = 8$, $BC = 6$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = 6$. Gọi M là trung điểm AB. Gọi (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc vớiAB. Thiết diện của (P) và hình chóp có diện tích bằng:

A. 10. **B**. 20. **C**. 15. **D**. 16.

✍Lời giải.



Do $(P) \perp AB \Rightarrow (P) \parallel SA$.
Gọi I là trung điểm của $SB \Rightarrow MI \parallel SA \Rightarrow MI \subset (P)$.
Gọi N là trung điểm của $CD \Rightarrow MN \perp AB \Rightarrow MN \subset (P)$.
Gọi K là trung điểm của $SC \Rightarrow IK \parallel BC$, mà $MN \parallel BC \Rightarrow MN \parallel IK \Rightarrow IK \subset (P)$.
Vậy thiết diện của P và hình chóp là hình thang $MNKI$ vuông tại M. Ta có MI là đường trung bình của tam giác $SAB \Rightarrow MI = \dfrac{1}{2}SA = 3$; IK là đường trung bình của tam giác $SBC \Rightarrow IK = \dfrac{1}{2}BC = 3$; MN là đường trung bình của hình thang $ABCD \Rightarrow MN = \dfrac{1}{2}(AD + BC) = 7$.
Vậy $S_{MNKI} = \dfrac{IK + MN}{2} \cdot MI = 15$.

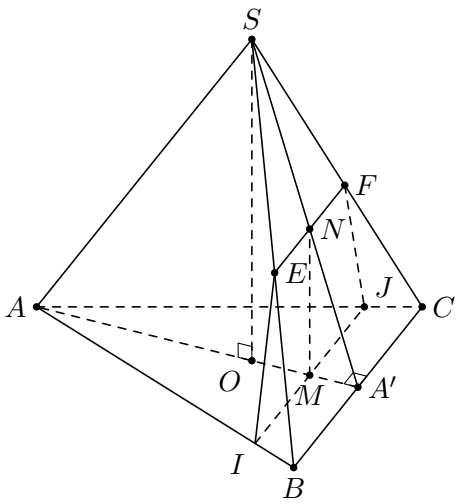
Chọn đáp án C □

Câu 58. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tâm O, đường cao AA'; $SO = 2a$. Gọi M là điểm thuộc đoạn OA' $(M \neq A'; M \neq O)$. Mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AA'. Đặt $AM = x$. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp $S.ABC$.

A. $S = -2\left(8x^2 - 6\sqrt{3}ax + 3a^2\right)$. **B**. $S = 2\left(8x^2 - 6\sqrt{3}ax + 3a^2\right)$.

C. $S = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(a - x)^2$. **D**. $S = 2(a - x)^2$.

✍Lời giải.



Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABC)$ (O là tâm của tam giác ABC).
Do đó $SO \perp AA'$ mà $(\alpha) \perp AA'$ suy ra $SO \parallel (\alpha)$.
Tương tự ta cũng có $BC \parallel (\alpha)$.
Qua M kẻ $IJ \parallel BC$ với $I \in AB, J \in AC$; kẻ $MN \parallel SO$ với $N \in SA'$.
Qua N kẻ $EF \parallel BC$ với $E \in SB, F \in SC$.
Khi đó thiết diện là hình thang $IJFE$.
Diện tích hình thang $S_{IJEF} = \dfrac{1}{2}(IJ + EF)\,MN$.
Trong tam giác ABC, ta có

$$\frac{IJ}{BC} = \frac{AM}{AA'} \Rightarrow IJ = \frac{AM \cdot BC}{AA'} = \frac{2x\sqrt{3}}{3}.$$

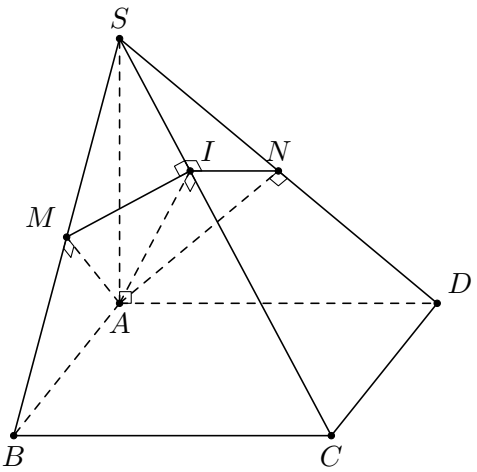
Trong tam giác SBC, ta có $\dfrac{EF}{BC} = \dfrac{SN}{SA'} = \dfrac{OM}{OA'} \Rightarrow EF = \dfrac{OM \cdot BC}{OA'} = 2\left(x\sqrt{3} - a\right)$.
Trong tam giác SOA', ta có $\dfrac{MN}{SO} = \dfrac{MA'}{OA'} \Rightarrow MN = \dfrac{SO \cdot MA'}{OA'} = 2\left(3a - 2x\sqrt{3}\right)$.
Vậy $S_{IJEF} = \dfrac{2}{3}\left(4x\sqrt{3} - 3a\right)\left(3a - 2x\sqrt{3}\right) = -2\left(8x^2 - 6\sqrt{3}ax + 3a^2\right)$.
Chọn đáp án A □

Câu 59. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) đi qua A vuông góc với SC. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{7}$. **B**. $S = \dfrac{12a^2\sqrt{6}}{35}$. **C**. $S = \dfrac{6a^2\sqrt{6}}{35}$. **D**. $S = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{5}$.

✍Lời giải.

Trong tam giác SAC, kẻ $AI \perp SC\,(I \in SC)$.
Trong mp(SBC), dựng đường thẳng đi qua I vuông góc với SC cắt SB tại M.
Trong mp(SCD), dựng đường thẳng qua I vuông góc với SC cắt SD tại N.
Khi đó thiết diện của hình chóp cắt bởi mp (α) là tứ giác $AMIN$.
Ta có $SC \perp (\alpha) \Rightarrow SC \perp AM$. (1)
Lại có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$. (2)
Từ (1) và (2), suy ra $AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp MI$.
Chứng minh tương tự, ta được $AN \perp NI$.

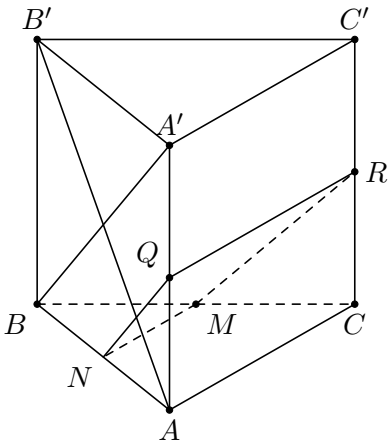


Do đó $S_{AMIN} = S_{\triangle AMI} + S_{\triangle ANI} = \dfrac{1}{2}AM \cdot MI + \dfrac{1}{2}AN \cdot NI$.
Vì AM, AI, AN là các đường cao của các tam giác vuông SAB, SAC, SAD nên:
$AM = \dfrac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$; $AI = \dfrac{SA \cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = a\sqrt{2}$; $AN = \dfrac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$.
Suy ra $MI = \sqrt{AI^2 - AM^2} = \dfrac{a\sqrt{30}}{5}$ và $NI = \sqrt{AI^2 - AN^2} = \dfrac{a\sqrt{14}}{7}$.
Vậy $S_{AMIN} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2a}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{a\sqrt{30}}{5} + \dfrac{2a\sqrt{21}}{7} \cdot \dfrac{a\sqrt{14}}{7}\right) = \dfrac{12a^2\sqrt{6}}{35}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 60. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A với $BC = a\sqrt{2}$; $AA' = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua M là trung điểm của BC và vuông góc với AB'. Thiết diện tạo bởi (α) với hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:
A. Hình thang cân. **B**. Hình thang vuông. **C**. Tam giác. **D**. Hình chữ nhật.
✍Lời giải.
Gọi N là trung điểm $AB \Rightarrow MN \perp AB$. Ta có

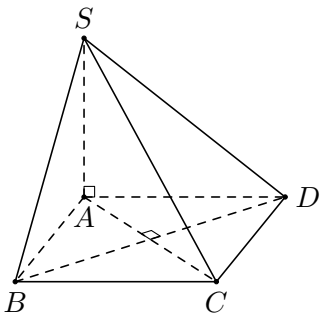
$$\begin{cases} MN \perp AB \\ MN \perp AA' \end{cases} \Rightarrow MN \perp \left(ABB'A'\right) \Rightarrow MN \perp AB' \Rightarrow MN \subset (\alpha).$$

Từ giả thiết suy ra $AB = a = AA' \Rightarrow ABB'A'$ là hình vuông, suy ra $BA' \perp AB'$.
Trong mp $(ABB'A')$ kẻ $NQ \parallel BA'$ với $Q \in AA'$.
Trong mp $(ACC'A')$ kẻ $QR \parallel AC$ với $R \in CC'$.
Vậy thiết diện là hình thang $MNQR$ vuông (do MN và QR cùng song song với AC và $MN \perp NQ$).



Chọn đáp án (B) □

Câu 61. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Đường thẳng BD vuông góc với đường thẳng nào sau đây?
A. SB. **B**. SD. **C**. SC. **D**. CD.
✍Lời giải.
$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$. (1)
$ABCD$ là hình vuông$\Rightarrow AC \perp BD$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$.

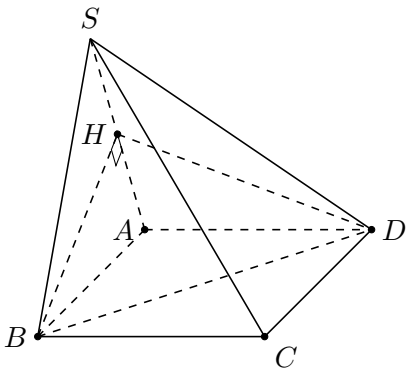


Chọn đáp án C □

Câu 62. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng BD với (SAD). Tính $\sin\alpha$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

✍**Lời giải.**



Trong (SAB), kẻ $BH \perp SA\,(H \in SA)$. (1)

Ta có $\begin{cases}(SAB) \perp (ABCD)\\ (SAB)\cap(ABCD) = AB \Rightarrow AD \perp (SAB), \text{ do đó } AD \perp BH.\\ AD \perp AB\end{cases}$

Kết hợp với (1) suy ra $BH \perp (SAD)$.Do đó HD là hình chiếu của BD trên (SAD).

Từ đó ta có $\alpha = (BD,(SAD)) = (BD,HD) = \widehat{BDH}$.

Tam giác SAB đều cạnh a nên $BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Hình vuông $ABCD$ cạnh a nên $BD = a\sqrt{2}$.

Xét $\triangle BDH$ vuông tại H, ta có

$$\sin\widehat{BDH} = \frac{BH}{BD} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 63. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa SC và $(ABCD)$.

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $75°$. **D.** $45°$.

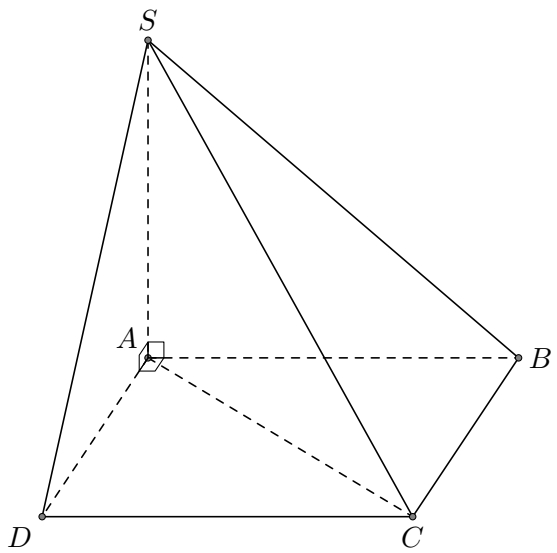
✍**Lời giải.**

Ta có $SA \perp (ABCD)$ tại A và $SC\cap(ABCD) = C$ nên AC là hình chiếu của SC lên $ABCD$.

Suy ra góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCA}$.

Ta có

$$\tan\widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{\dfrac{a\sqrt{6}}{3}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30°.$$



Chọn đáp án A □

Câu 64. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

✍Lời giải.

Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì chưa chắc đồng phẳng nên không phải lúc nào cũng song song nhau.

Chọn đáp án D □

Câu 65. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Đường thẳng BD vuông góc với đường thẳng nào sau đây?

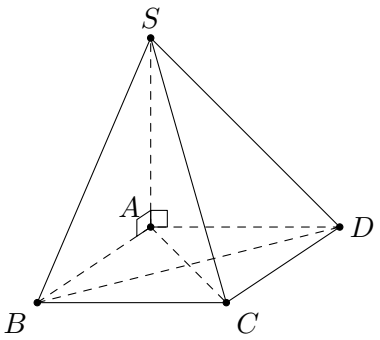
A. SB. **B**. SD. **C**. SC. **D**. CD.

✍Lời giải.

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$. (1)

$ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AC \perp BD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$.

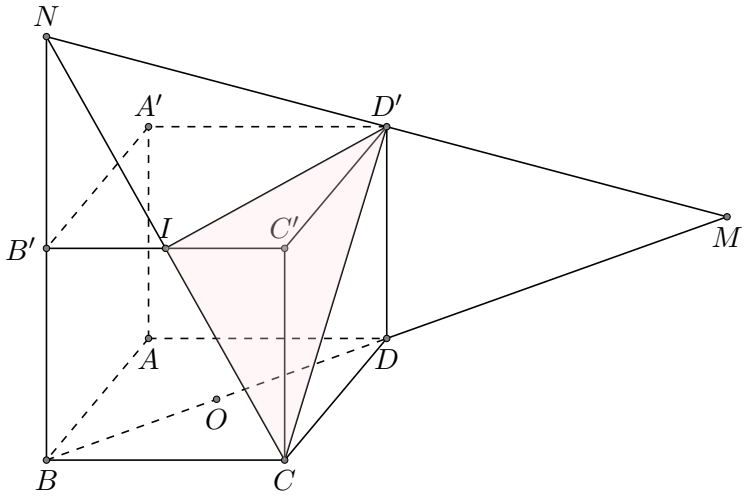


Chọn đáp án C □

Câu 66. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1. Gọi (P) là mặt phẳng chứa CD' và tạo với mặt phẳng $BDD'B'$ một góc x nhỏ nhất, cắt hình lập phương theo một thiết diện có diện tích S. Giá trị của S bằng

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **C**. $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{6}}{12}$.

✍Lời giải.



— Góc của (P) qua CD' hợp với $(BB'D'D)$ một góc nhỏ nhất bằng với góc giữa đường thẳng CD' và $(BB'D'D)$.

— Ta có $\begin{cases} OD = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ OD' = \sqrt{\dfrac{3}{2}} \end{cases} \Rightarrow \cos\widehat{DOD'} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow OM = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow D$ là trung điểm của BM.

— Kéo dài MD' cắt BB' tại N. Đường thẳng CN cắt $B'C'$ tại I, ta được I là trung điểm $B'C'$.

— Ta được thiết diện cần tìm là $\triangle ICD'$.

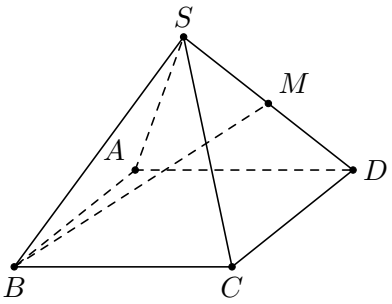
— Tính được $S = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

Chọn đáp án (B) □

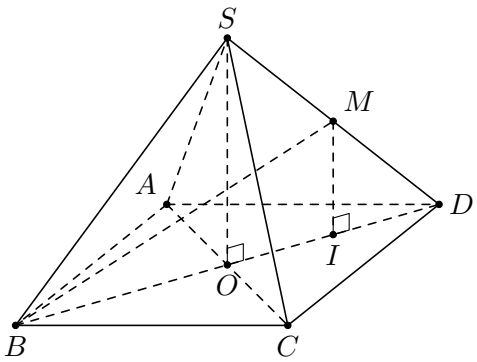
Câu 67.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của SD (tham khảo hình vẽ bên). Tang của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.



✍Lời giải.



Ta chia bài toán thành 2 phần:

Phần 1: Xác định góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Ta có $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều, suy ra $SO \perp (ABCD)$ với O là tâm hình vuông $ABCD$.

Trong tam giác $\triangle SOD$, qua M ta kẻ đường thẳng $MI \parallel SO$ cắt OD tại I.

Do đó I là trung điểm của OD và $MI \perp (ABCD)$.

Nên I là hình chiếu của M lên mặt phẳng $(ABCD)$, suy ra BI là hình chiếu của BM lên mặt phẳng $(ABCD)$.

Vậy $(BM, (ABCD)) = (BM, BI) = \widehat{MBI}$.

Phần 2: Tính tan góc $\widehat{MBI}$

Do I là trung điểm của OD nên $BI = \dfrac{3}{4}BD = \dfrac{3\sqrt{2}a}{4}$.

Áp dụng định lý Pytago cho tam giác $\triangle MID$ vuông tại I ta có:

$$MI^2 = MD^2 - ID^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow MI = \frac{\sqrt{2}a}{4}.$$

Xét tam giác $\triangle MBI$ vuông tại I ta có: $\tan\widehat{MBI} = \dfrac{MI}{BI} = \dfrac{\sqrt{2}a}{4} \cdot \dfrac{4}{3\sqrt{2}a} = \dfrac{1}{3}$.

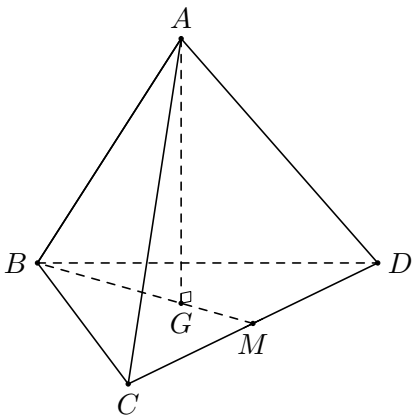
Chọn đáp án (D) □

Câu 68. Cho tứ diện đều $ABCD$. Tính côsin của góc giữa AB và (BCD).

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Đặt $AB = a$. Gọi G là trọng tâm $\triangle BCD$, do tứ diện $ABCD$ đều, suy ra $AG \perp (BCD)$.
Suy ra BG là hình chiếu của AB lên (BCD).
Do đó $\widehat{(AB,(BCD))} = \widehat{(AB,BG)} = \widehat{ABG}$.
Ta có $GB = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
Suy ra $\cos \widehat{ABG} = \dfrac{BG}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



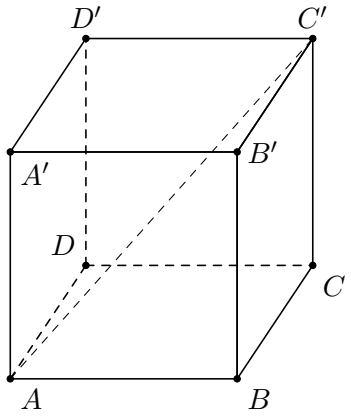
Chọn đáp án A □

Câu 69. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Có bao nhiêu phát biểu đúng trong các phát biểu sau

① $AC \perp B'D'$ ② $AC \perp B'C'$ ③ $AC \perp DD'$ ④ $AC' \perp BD$

A. 4. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 1.

✍Lời giải.
Ta có $AC \perp (BDD'B') \Rightarrow AC \perp B'D'$.
Do $BC \parallel B'C'$ và $(BC, AC) = 45^\circ \Rightarrow (B'C', AC) = 45^\circ$.
Mà $DD' \perp (ABCD) \Rightarrow DD' \perp AC$
$BD \perp (ACC'A') \Rightarrow BD \perp AC'$.



.

Chọn đáp án B □

Câu 70. Cho tứ diện đều $ABCD$ có điểm M là trung điểm của cạnh CD. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

A. $BM \perp AD$. **B**. $BM \perp CD$. **C**. $AM \perp CD$. **D**. $AB \perp CD$.

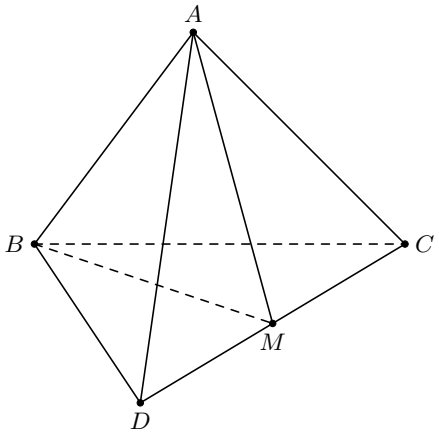
✍Lời giải.
Ta có

— $BM \perp CD$ (vì tam giác BCD đều).

— $AM \perp CD$ (vì tam giác ACD đều).

— $DC \perp (ABM) \Rightarrow DC \perp AB$.

Vậy khẳng định "$BM \perp AD$" là mệnh đề sai.



Chọn đáp án A □

Câu 71. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
B. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.
C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

D. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

✍Lời giải.

Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước. Đây mệnh đề **đúng**.

Các mệnh đề còn lại **sai**.

Chọn đáp án (B) □

Câu 72. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{6}$. Gọi α là góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau?

A. $\alpha = 45°$. **B**. $\alpha = 60°$. **C**. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D**. $\alpha = 30°$.

✍Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên A là hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$.

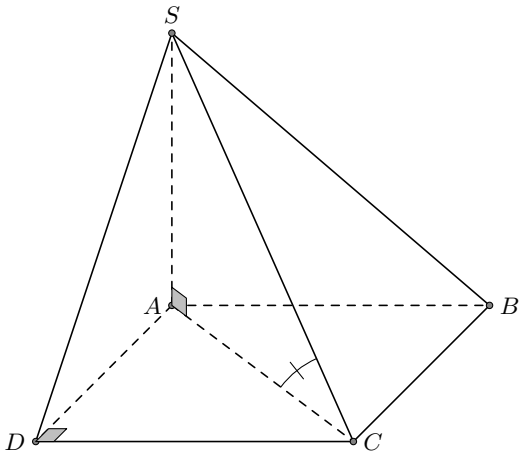
Vậy ta có $\alpha = (SC, (ABCD)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}$ (do $\triangle SAC$ vuông tại A).

* Tính góc α

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AC = a\sqrt{2}$.

Do $\triangle SAC$ vuông tại A nên $\tan\alpha = \dfrac{SA}{AC} = a\sqrt{3}$.

Vậy $\alpha = 60°$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 73. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với $(ABCD)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $SA \perp BD$. **B**. $CD \perp SD$. **C**. $SD \perp AC$. **D**. $BC \perp SB$.

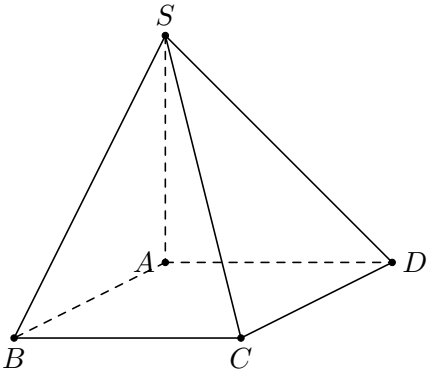
✍Lời giải.

— $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$

— $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$

— $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$

— Mệnh đề $SD \perp AC$ là sai.

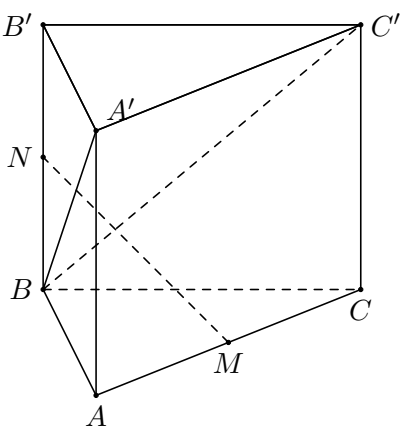


Chọn đáp án (C) □

Câu 74.

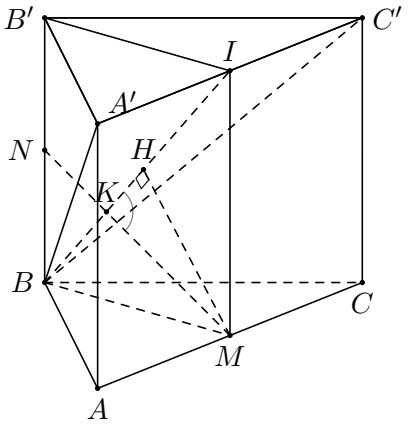
Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Điểm M và N tương ứng là trung điểm các đoạn AC, BB'. Cô-sin góc giữa đường thẳng MN và $(BA'C')$ bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$. **B**. $\dfrac{4\sqrt{21}}{21}$. **C**. $\dfrac{\sqrt{105}}{21}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{7}}{14}$.



✍Lời giải.

Gọi I là trung điểm của $A'C' \Rightarrow BMIB'$ là hình chữ nhật.
Gọi $K = MN \cap BI$.
Ta có $\begin{cases} IM \perp A'C' \\ BI \perp A'C' \end{cases} \Rightarrow A'C' \perp (BMI)$.
Suy ra $\begin{cases} (BMI) \perp (A'C'B) \\ (BMI) \cap (A'C'B) = BI \end{cases}$.
Trong mặt phẳng (BMI), dựng $MH \perp BI$
$\Rightarrow MH \perp (A'C'B)$.
$\Rightarrow \widehat{(MN;(BA'C'))} = \widehat{(MK;(BA'C'))} = \widehat{MKH} = \widehat{MKI}$.



Ta có $\triangle NKB \sim \triangle MKI \Rightarrow \dfrac{NK}{MK} = \dfrac{BK}{IK} = \dfrac{NB}{MI} = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $\begin{cases} NK = \dfrac{1}{2}MK \\ IK = 2KB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} MK = \dfrac{2}{3}MN = \dfrac{2}{3}a \\ IK = \dfrac{2}{3}IB = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{7}}{2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{3}. \end{cases}$

Áp dụng định lý Cô-sin trong tam giác $\triangle IKM$, ta có:

$$\cos \widehat{MKI} = \frac{IK^2 + MK^2 - IM^2}{2 \cdot IK \cdot MK} = \frac{\dfrac{7a^2}{9} + \dfrac{4a^2}{9} - a^2}{2 \cdot \dfrac{a\sqrt{7}}{3} \cdot \dfrac{2a}{3}} = \frac{\sqrt{7}}{14}.$$

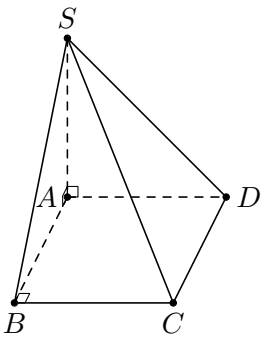
Chọn đáp án (D) □

Câu 75. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

A. $30°$. **B**. $90°$. **C**. $60°$. **D**. $45°$.

✍Lời giải.

Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SBA}$.
Tam giác SAB vuông tại A có $\cos \widehat{SBA} = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$.
Suy ra $\widehat{SBA} = 60°$.

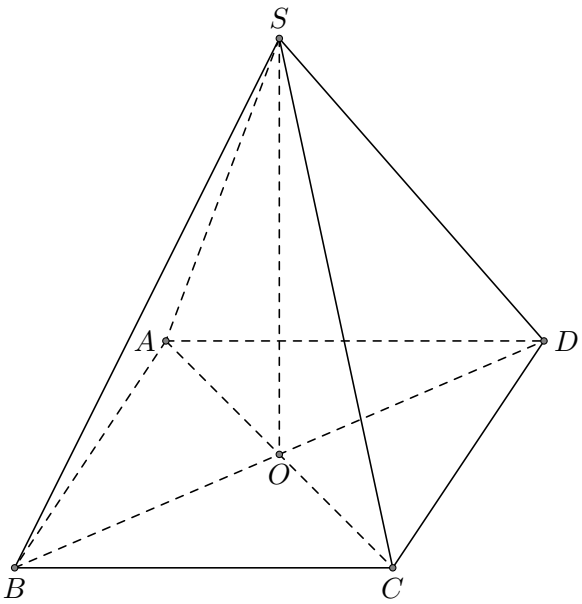


Chọn đáp án (C) □

Câu 76. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SA = SC$ và $SB = SD$. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $AC \perp BD$. **B**. $BD \perp SA$. **C**. $CD \perp (SBD)$. **D**. $SO \perp (ABCD)$.

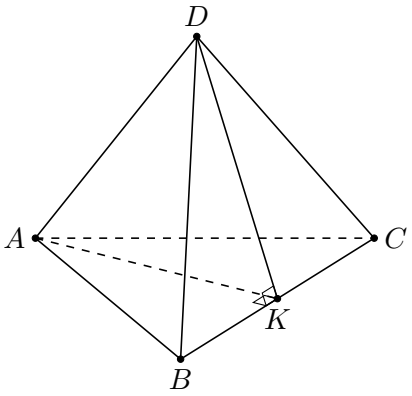
✍Lời giải.



Dễ thấy khẳng định $CD \perp (SBD)$ là khẳng định sai.
Chọn đáp án C □

Câu 77. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$, $DB = DC$. Khẳng định nào sau đây là đúng?
A. $AB \perp BC$. **B**. $CD \perp (ABD)$. **C**. $BC \perp AD$. **D**. $AB \perp (ABC)$.

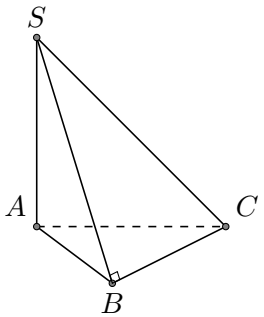
✍Lời giải.
Gọi K là trung điểm BC.
Ta có: $\begin{cases} AK \perp BC \\ DK \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADK) \Rightarrow BC \perp AD$.



Chọn đáp án C □

Câu 78. Hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Số các mặt của hình chóp $S.ABC$ là tam giác vuông là
A. 2. **B**. 3. **C**. 4. **D**. 1.

✍Lời giải.
Do $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AB$, $SA \perp AC$.
Vậy $\triangle SAB$ và $\triangle SAC$ vuông tại A.
Ta có $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.
Vậy $\triangle SBC$ vuông tại B.
Suy ra hình chóp $S.ABC$ có 4 mặt là tam giác vuông.



Chọn đáp án C □

Câu 79. Hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, chiều cao $h = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Góc giữa cạnh bên với mặt đáy là
A. $60°$. **B**. $15°$. **C**. $45°$. **D**. $30°$.

✍Lời giải.

$S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $ABCD$ là hình vuông và $SO \perp (ABCD)$.

Ta có $\begin{cases} O \text{ là hình chiếu của } S \text{ trên } (ABCD) \\ C \text{ là hình chiếu của } C \text{ trên } (ABCD) \end{cases}$.

$\Rightarrow OC$ là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$.

Nên $(SC, (ABCD)) = (SC, OC) = \widehat{SCO}$.

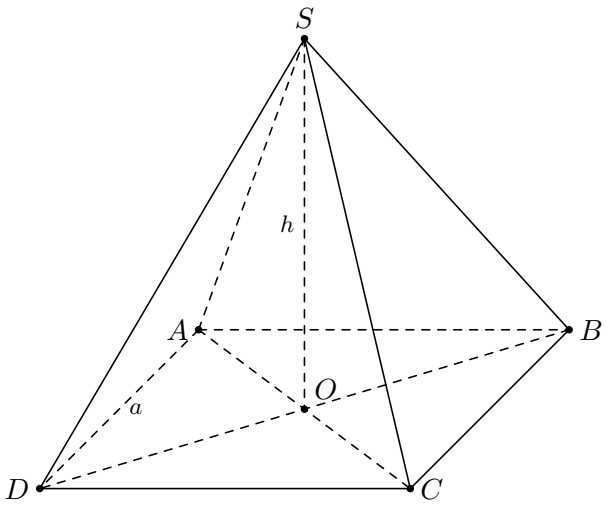
Xét tam giác ADC vuông tại D:

$AC^2 = AD^2 + DC^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$.

$\Rightarrow OC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét tam giác SOC vuông tại O:

$\tan \widehat{SCO} = \dfrac{SO}{OC} = 1 \Rightarrow \widehat{SCO} = 45^\circ$.



Chọn đáp án C □

Câu 80. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SC = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, $SB = a\sqrt{2}$, $AB = BC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $AC = a$. Tính góc $(SB, (ABC))$.

A. 90°. **B**. 45°. **C**. 30°. **D**. 60°.

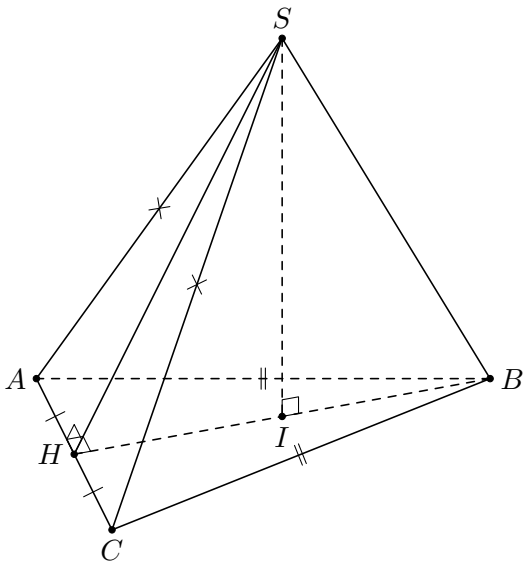
✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm AC.

Do tam giác SAC cân tại S nên $SH \perp AC$, tam giác BAC cân tại B nên $BH \perp AC$ suy ra $AC \perp (SHB)$.

Gọi I là hình chiếu của S trên HB. Suy ra $SI \perp (ABC)$.

Do đó $(SB, (ABC)) = \widehat{SBI} = \widehat{SBH}$.



— Tam giác SHC vuông tại H có

$$SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2};$$

— Tam giác BHC vuông tại H có

$$HB = \sqrt{BC^2 - HC^2} = \frac{a}{2};$$

— $\cos \widehat{SBH} = \dfrac{SB^2 + BH^2 - SH^2}{2 \cdot SB \cdot BH} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

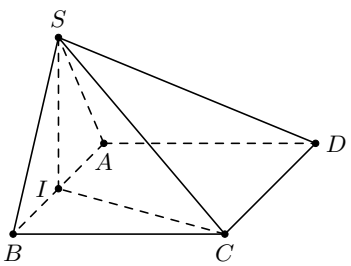
Vậy góc $\widehat{SBH} = 45^\circ$.

Chọn đáp án B □

Câu 81. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2$, $BC = 2\sqrt{2}$, I là trung điểm của AB. Biết SI vuông góc với $(ABCD)$ và $\triangle SAB$ đều. Tính góc φ giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $\varphi = 30^\circ$. **B**. $\varphi = 45^\circ$. **C**. $\varphi = 75^\circ$. **D**. $\varphi = 60^\circ$.

✍Lời giải.



Ta có $SI = \sqrt{3}$, $IC = 3$. Lại có $\varphi = \widehat{SCI}$ nên $\tan \varphi = \dfrac{SI}{CI} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi = 30^\circ$.

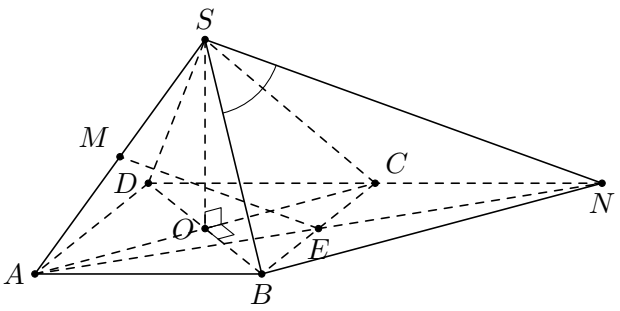
Chọn đáp án A □

Câu 82. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi E, M lần lượt là trung điểm của BC và SA. Gọi α là góc tạo bởi EM và (SBD). Khi đó $\tan\alpha$ bằng

A. 1. **B**. 2. **C**. $\sqrt{2}$. **D**. $\sqrt{3}$.

✍Lời giải.

• Gọi O tâm của hình vuông $ABCD$ cạnh a, N là điểm đối xứng với D qua C. Khi đó $SO \perp (ABCD)$ và có EM là đường trung bình của $\triangle SAN$ nên $EM \parallel SN$.
Do đó $\left(\widehat{EM;(SBD)}\right) = \left(\widehat{SN;(SBD)}\right)$ (1).



• Ta có $\begin{cases} AC \perp SO \ \text{(vì } SO \perp (ABCD)\text{)} \\ AC \perp BD \ \text{(vì } ABCD \text{ là hình vuông)} \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD)$.
Kết hợp $BN \parallel AC$ (vì $ABNC$ là hình bình hành) ta được $BN \perp (SBD)$. (2)
• Từ (1) và (2) ta được $\left(\widehat{EM;(SBD)}\right) = \widehat{BSN} = \alpha$.
Vậy $\tan\alpha = \dfrac{BN}{SB} = \dfrac{AC}{SB} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$.

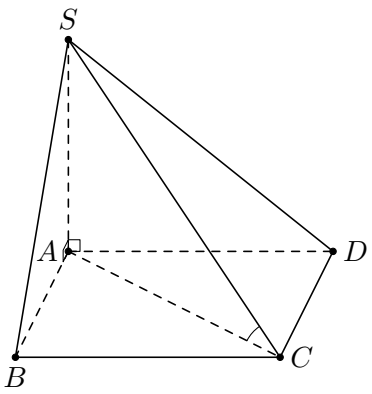
Chọn đáp án C □

Câu 83. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hinh vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với $(ABCD)$. Góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng

A. 45°. **B**. 30°. **C**. 60°. **D**. 90°.

✍Lời giải.

Do giả thiết ta có $SA \perp (ABCD)$ suy ra $SA \perp AC$ và AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$.
Khi đó góc $(SC,(ABCD)) = (SC,AC) = \widehat{SCA}$.
Xét tam giác SAC ta có $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC}$.
Mà $AC = \sqrt{2}a$ nên $\tan\widehat{SCA} = 1 \Leftrightarrow \widehat{SCA} = 45°$.



Chọn đáp án A □

Câu 84. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AB = a$, $SA = \sqrt{3}a$ và vuông góc với $(ABCD)$. Tính góc giữa hai đường thẳng SB và CD.

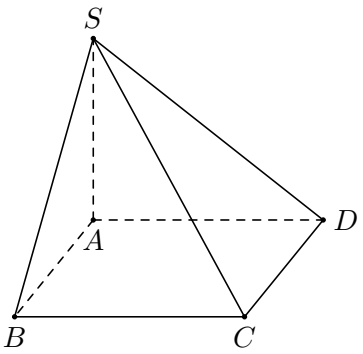
A. 60°. **B**. 30°. **C**. 45°. **D**. 90°.

✍Lời giải.

Ta có $AB \parallel CD$ suy ra $(SB,CD) = (SB,AB) = \widehat{SBA}$.
Trong tam giác SAB vuông tại A, ta có

$$\tan\widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60°.$$

Vậy $(SB,CD) = 60°$.



Chọn đáp án A □

Câu 85. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, cạnh bên $SA = \sqrt{2}a$ và SA vuông góc với $(ABCD)$. Tính góc giữa SB và (SAC).

A. 90°. **B**. 30°. **C**. 45°. **D**. 60°.

✍Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Do $ABCD$ là hình thoi nên $BO \perp AC$ (1).

Lại có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BO$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $BO \perp (SAC)$.

Vậy $(SB, (SAC)) = (SB, SO) = \widehat{BSO}$.

Trong tam giác vuông BOA, ta có $\widehat{ABO} = 30^\circ$ nên suy ra $AO = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a}{2}$ và $BO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông SAO, ta có

$$SO = \sqrt{SA^2 + AO^2} = \sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{3a}{2}.$$

$BO \perp (SAC) \Rightarrow BO \perp SO \Rightarrow \Delta SOB$ vuông tại O.

Ta có $\tan\widehat{BSO} = \dfrac{BO}{SO} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{2}{3a} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $(SB, (SAC)) = (SB, SO) = \widehat{BSO} = 30^\circ$.

Chọn đáp án B □

Câu 86. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $CD \perp (SBC)$. **B**. $SA \perp (ABC)$. **C**. $BC \perp (SAB)$. **D**. $BD \perp (SAC)$.

✍Lời giải.

Từ giả thiết, ta có : $SA \perp (ABC)$.

Ta có : $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Do đó: $CD \perp (SBC)$ sai.

Nhận xét: Ta có cũng có thể giải như sau:

$\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$.

Mà (SCD) và (SAD) không song song hay trùng nhau nên $CD \perp (SCD)$ là sai.

Chọn đáp án A □

Câu 87. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O, $SA = SC, SB = SD$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $SA \perp (ABCD)$. **B**. $SO \perp (ABCD)$. **C**. $SC \perp (ABCD)$. **D**. $SB \perp (ABCD)$.

✍Lời giải.

Ta có $SA = SC$ suy ra $SO \perp AC$.

Ta có $SB = SD$ suy ra $SO \perp BD$.

Vậy $SO \perp (ABCD)$.

Chọn đáp án B □

Câu 88. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (\alpha)$.
B. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (\alpha)$.
C. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $a \perp b$.
D. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel a$ thì $b \parallel (\alpha)$.

✍Lời giải.

Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $a \perp b$.

Chọn đáp án C □

Câu 89. Cho tứ diện $ABCD$ có tất các cạnh bằng $6a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CA, CB, P là điểm trên cạnh BD sao cho $BP = 2PD$. Diện tích S của thiết diện của tứ diện $ABCD$ bị cắt bởi mặt phẳng (MNP) là

A. $S = \dfrac{5\sqrt{147}a^2}{2}$. **B**. $S = \dfrac{5\sqrt{147}a^2}{4}$. **C**. $S = \dfrac{5\sqrt{51}a^2}{2}$. **D**. $S = \dfrac{5\sqrt{51}a^2}{4}$.

✍Lời giải.

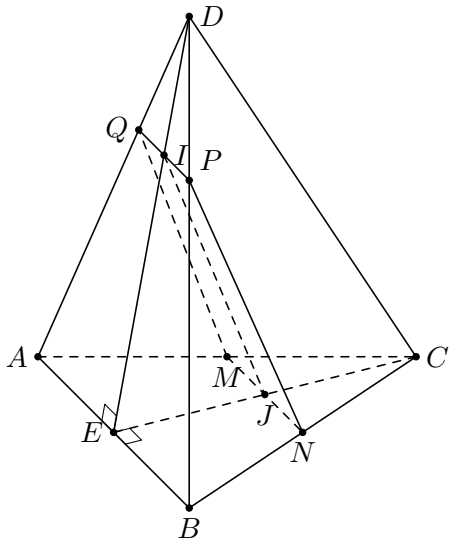
Gọi E là trung điểm của AB.

Do giả thiết $\begin{cases} DE \perp AB \\ CE \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (CED)$.

Dễ thấy MN là đường trung bình trong $\triangle ABC$ nên $MN \parallel AB$.

Gọi Q là giao điểm của DA với mặt phẳng (MNP) suy ra $PQ \parallel AB$ $(Q \in AD)$. Nên $MNPQ$ là hình thang. Mà $BP = 2PD$ nên $\dfrac{DP}{DB} = \dfrac{1}{3}$. Mặt khác, xét tam giác DAB theo định lý Talét ta có $\dfrac{DQ}{DA} = \dfrac{DP}{DB} = \dfrac{PQ}{AB}$.

Suy ra $PQ = \dfrac{1}{3}AB \Leftrightarrow PQ = 2a$.



Gọi $\{I\} = PQ \cap DE$ và $\{J\} = MN \cap CE$. Do $MN \parallel AB$ theo chứng minh trên $MN \perp (DEC)$.

Do đó $MN \perp IJ$ nên $S_{MNPQ} = \dfrac{(PQ + MN) \cdot IJ}{2}$.

Dễ thấy $EJ = \dfrac{CE}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}a}{2}$ và $EI = \dfrac{2}{3}DE = 2\sqrt{3}a$.

Xét tam giác IJE ta có $IJ^2 = IE^2 + JE^2 - 2IE \cdot JE \cdot \cos \widehat{IEJ}$ (1).

Mặt khác trong tam giác EDC ta có

$\cos \widehat{DEC} = \dfrac{DE^2 + EC^2 - DC^2}{2ED \cdot EC} \Leftrightarrow \cos \widehat{DEC} = \dfrac{27a^2 + 27a^2 - 36a^2}{2 \cdot 3\sqrt{3}a \cdot 3\sqrt{3}a} \Leftrightarrow \cos \widehat{DEC} = \dfrac{1}{3}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $IJ^2 = \dfrac{27a^2}{4} + 12a^2 - 2 \cdot \dfrac{3\sqrt{3}a}{2} \cdot 2\sqrt{3}a \cdot \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow IJ^2 = \dfrac{51a^2}{4} \Leftrightarrow IJ = \dfrac{\sqrt{51}a}{2}$.

Do đó $S_{MNPQ} = \dfrac{(2a + 3a) \cdot \dfrac{\sqrt{51}a}{2}}{2} = \dfrac{5\sqrt{51}a^2}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 90. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O. Qua O có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với Δ?

A. Vô số. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 1.

✍Lời giải.

Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O. Qua O có vô số đường thẳng vuông góc với Δ, nằm trên mặt phẳng đi qua O và vuông góc với Δ.

Chọn đáp án A □

Câu 91. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $AB \perp (SAD)$. **B**. $AB \perp (SAC)$. **C**. $AB \perp (SBC)$. **D**. $AB \perp (SCD)$.

✍Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp AB$, mà $AB \perp AD$ nên $AB \perp (SAD)$.

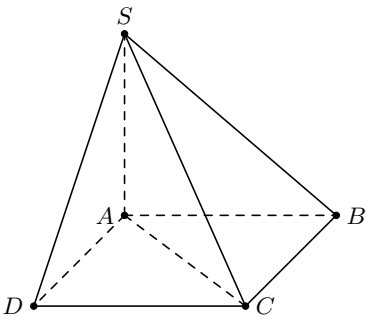
Chọn đáp án A □

Câu 92. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $3a$, $SA \perp (ABCD)$, $SB = 5a$. Tính sin của góc giữa SC và $(ABCD)$.

A. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{34}}{17}$.

✍Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCA}$.
Mà $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = 4a$, $AC = 3a\sqrt{2}$,
$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{34}a$. Suy ra $\sin \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{SC} = \dfrac{2\sqrt{34}}{17}$.



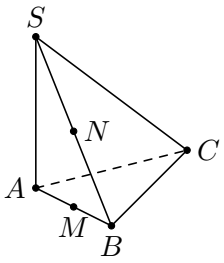
Chọn đáp án D □

Câu 93. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và SB. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $CM \perp AN$. **B.** $AN \perp BC$. **C.** $CM \perp SB$. **D.** $MN \perp MC$.

✍Lời giải.

Ta có $CM \perp AB$, $CM \perp SA$ nên $CM \perp (SAB)$. Từ đó suy ra $CM \perp AN$, $CM \perp SB$, $CM \perp MN$.
Như vậy, lựa chọn còn lại là mệnh đề sai.



Chọn đáp án B □

Câu 94. Trong không gian cho đường thẳng a và điểm M. Có bao nhiêu đường thẳng đi qua M và vuông góc với đường thẳng a?

A. Không có. **B.** Có hai. **C.** Có vô số. **D.** Có một và chỉ một.

✍Lời giải.

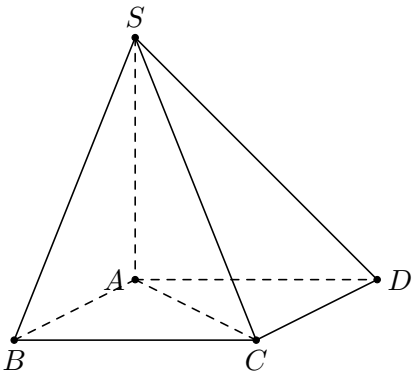
Có vô số đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng a. Các đường thẳng này thuộc mặt phẳng đi qua M và vuông góc với đường thẳng a.
Chọn đáp án C □

Câu 95. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là

A. $\widehat{SCD}$. **B.** $\widehat{CAS}$. **C.** $\widehat{SCA}$. **D.** $\widehat{ASC}$.

✍Lời giải.

Ta có AC là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$ nên $\widehat{(SC, (ABCD))} = \widehat{(SC, AC)} = \widehat{SCA}$.



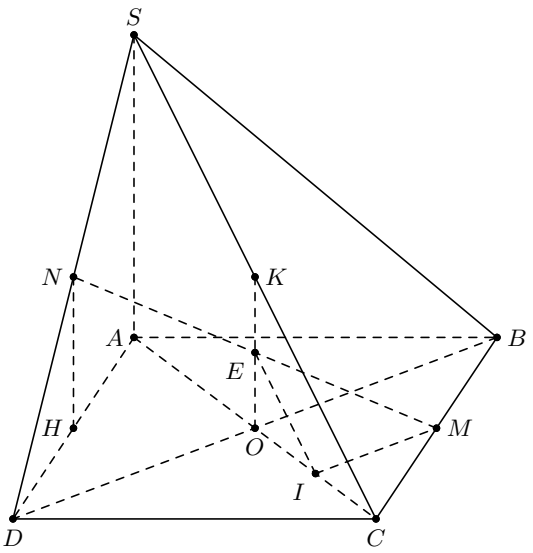
Chọn đáp án C □

Câu 96. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh $SA = a$ vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SD, α là góc giữa đường thẳng MN và (SAC). Giá trị $\tan\alpha$ là

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AD, SC. Khi đó $NK \parallel MH$. Khi đó $MN \subset (MHNK)$ và giao tuyến của $(MHNK)$ với (SAC) là OK (với O là tâm của hình vuông $ABCD$).
Gọi $E = MN \cap OK$ (trong mặt phẳng $(MHNK)$), hay giao điểm của MN với (SAC) là E.
Gọi I là trung điểm OC, suy ra $MI \perp OC$. Lại có $SA \perp MI$ nên $MI \perp (SAC)$.
Khi đó EI là hình chiếu của MN lên (SAC). Do đó góc giữa MN với (SAC) cũng chính là góc giữa MN với EI chính là góc $\widehat{MEI}$ (vì tam giác MIE vuông tại I).



Ta có $ME = \dfrac{1}{2} \cdot MN = \dfrac{1}{2}\sqrt{MH^2 + NH^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{4}$,
và $MI = \dfrac{1}{2} \cdot OB = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$, suy ra $EI = \sqrt{ME^2 - MI^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

$$\text{Vậy} \quad \tan\alpha = \frac{MI}{EI} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{a\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

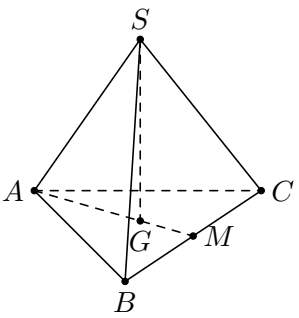
Chọn đáp án A □

Câu 97. Cho hình chóp tam giác đều, có tất cả các cạnh đều bằng a. Tính cotang của góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy của hình chóp.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Giả sử hình chóp thoả mãn đề bài là $S.ABC$.
Gọi M là trung điểm BC, G là trọng tâm $\triangle ABC$, ta có $SG \perp (ABC)$.
Theo đề bài ta cần tính $\cot(SA, (ABC)) = \cot\widehat{SAG}$.
Ta có $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $GA = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$,
$SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.
Khi đó $\cot(SA, (ABC)) = \cot\widehat{SAG} = \dfrac{AG}{SG} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.



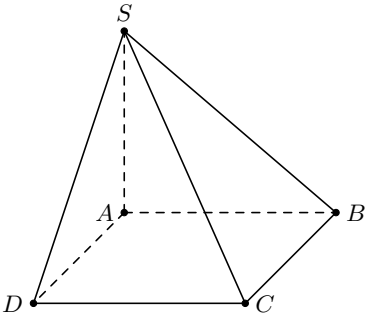
Chọn đáp án C □

Câu 98. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Góc giữa SD và $(ABCD)$ bằng

A. $37°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $30°$.

Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa SD và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SDA}$.
Mà $\tan\widehat{SDA} = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SDA} = 60°$.



Chọn đáp án C □

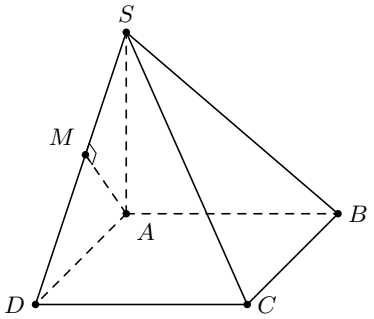
Câu 99. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là hình chiếu của A lên SD. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $AM \perp SD$. **B**. $AM \perp (SCD)$. **C**. $AM \perp CD$. **D**. $AM \perp (SBC)$.

✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases} DC \perp SA \\ DC \perp AD \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SAD) \Rightarrow AM \perp DC$

Mà $AM \perp SD \Rightarrow AM \perp (SCD)$.



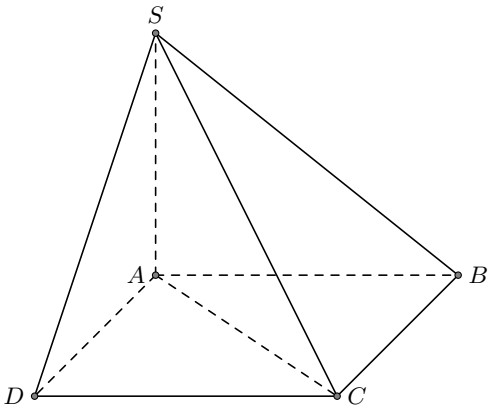
Chọn đáp án D □

Câu 100. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a và $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa SC và $(ABCD)$.

A. $30°$. **B**. $60°$. **C**. $45°$. **D**. $75°$.

✍Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$. Do đó $(\widehat{SC;(ABCD)}) = \widehat{SCA}$ mà $SA = AC = a\sqrt{2}$ nên $(\widehat{SC;(ABCD)}) = \widehat{SCA} = 45°$.



Chọn đáp án C □

Câu 101. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$, tính góc giữa SC và $(ABCD)$.

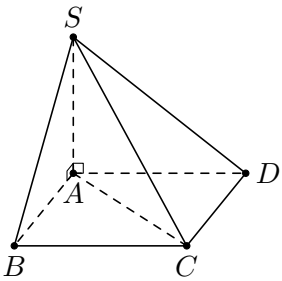
A. $30°$. **B**. $45°$. **C**. $60°$. **D**. $75°$.

✍Lời giải.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCA}$.

Ta có $AC = a\sqrt{2}$, $\tan \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30°$.

Vậy góc giữa SC và $(ABCD)$ là $30°$.



Chọn đáp án A □

Câu 102. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Gọi I là trung điểm của SC. Xét các khẳng định sau

1. $OI \perp (ABCD)$.

2. $BD \perp SC$.

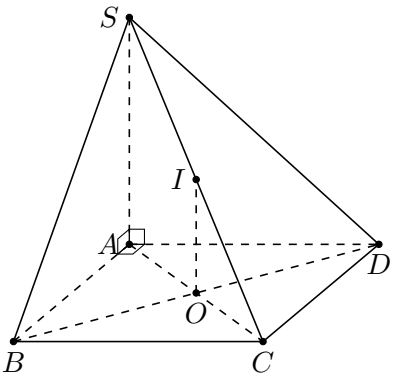
3. (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn BD.

4. $SB = SC = SD$.

Trong bốn khẳng định trên, số khẳng định **sai** là?

A. 1. **B**. 4. **C**. 2. **D**. 3.

✍Lời giải.



— Ta có $OI \parallel SA \Rightarrow OI \perp (ABCD)$.

— Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$.

— Ta có (SAC) đi qua trung điểm và vuông góc với đoạn BD nên (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn BD.

— Ta có $SB = SD < SC$ do $(AB < AC)$.

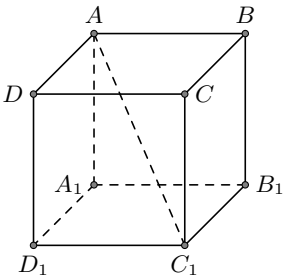
Chọn đáp án A □

Câu 103. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, đường thẳng AC_1 vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. (A_1DC_1). **B**. (A_1BD). **C**. (A_1CD_1). **D**. (A_1B_1CD).

✍Lời giải.

Ta có $CC_1 \perp (ABCD)$ nên $CC_1 \perp BD$.
Lại có $AC \perp BD$ (do $ABCD$ là hình vuông), suy ra $BD \perp (ACC_1)$, suy ra $AC_1 \perp BD$.
Chứng minh tương tự ta cũng có $AC_1 \perp A_1D$.
Từ đây ta được $AC_1 \perp (A_1BD)$.



Chọn đáp án B □

Câu 104. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $2a$. Gọi M là trung điểm của SD. Tính tan của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$.

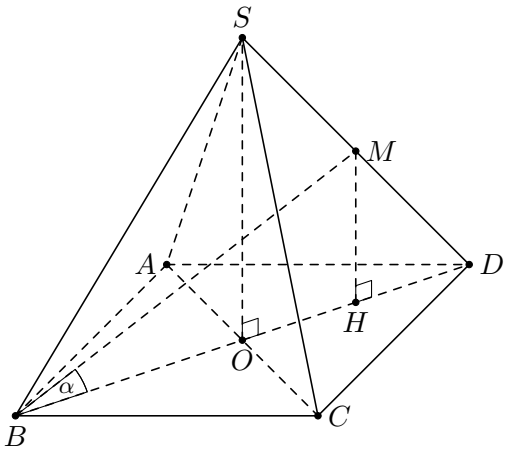
A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C**. $\dfrac{2}{3}$. **D**. $\dfrac{1}{3}$.

✍Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD.
Kẻ $MH \perp BD \Rightarrow SO \parallel MH$.
Mà M là trung điểm SD nên H cũng là trung điểm OD (tính chất trung bình).

Suy ra $MH = \dfrac{1}{2}SO = \dfrac{1}{2}\sqrt{SD^2 - OD^2} = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{(2a)^2 - \left(\dfrac{2\sqrt{2}a}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Do đó $\tan\left(\widehat{BM, (ABCD)}\right) = \tan \widehat{MBH} = \tan\alpha = \dfrac{MH}{BH} = \dfrac{MH}{BO + OH} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{2\sqrt{2}a}{2} + \frac{2\sqrt{2}a}{4}} = \dfrac{1}{3}$.



Chọn đáp án D □

Câu 105. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Gọi I là điểm thuộc cạnh BC sao cho $CI = 2BI$; N là trung điểm của SI; hình chiếu của đỉnh S trên (ABC) là điểm H thuộc đoạn thẳng AI sao cho $\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HI} = \vec{0}$; góc $(SB, (ABC)) = 60°$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (NAB) và (ABC), biết $\tan\alpha = \dfrac{m\sqrt{n}}{p}$, với $m, n, p \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{m}{p}$ là phân số tối giản. Tính $m + n + p$.

A. 53. **B**. 46. **C**. 26. **D**. 9.

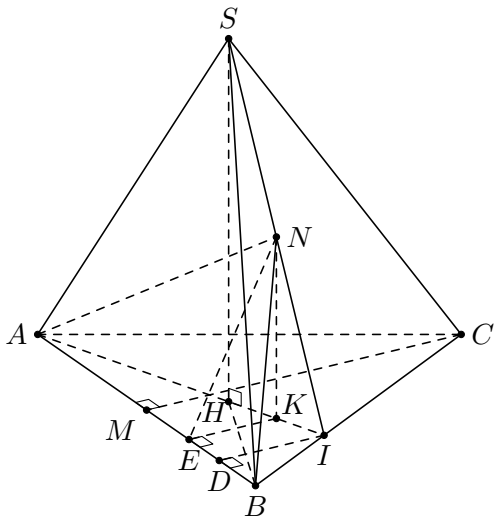
✍Lời giải.

Ta có $SH \perp (ABC) \Rightarrow (SB,(ABC)) = (SB,HB) = \widehat{SBH} = 60^\circ$

$\Rightarrow SH = \sqrt{3}HB.$

Xét $\triangle AIC$

$$AI^2 = AC^2 + IC^2 - 2AC \cdot IC\cos 60^\circ$$
$$= 4a^2 + \frac{16a^2}{9} - 2 \cdot 2a \cdot \frac{4a}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{28a^2}{9}$$
$$\Rightarrow AI = \frac{2\sqrt{7}a}{3} \Rightarrow AH = \frac{2}{3}AI = \frac{4\sqrt{7}a}{9}$$



Xét tam giác ABI: $\cos\widehat{BAI} = \dfrac{AB^2 + AI^2 - BI^2}{2AB \cdot AI} = \dfrac{5}{2\sqrt{7}}$.

Xét tam giác BAH: $BH^2 = AB^2 + AH^2 - 2AB \cdot AH \cdot \cos\widehat{BAI} = \dfrac{76}{81}a^2$

$\Rightarrow BH = \dfrac{a\sqrt{19}a}{9} \Rightarrow SH = \sqrt{3} \cdot \dfrac{2\sqrt{19}a}{9} = \dfrac{2\sqrt{57}a}{9}.$

Gọi K là trung điểm $HI \Rightarrow NK \parallel SH \Rightarrow NK \perp (ABCD)$, $NK = \dfrac{1}{2}SH = \dfrac{2\sqrt{57}a}{18}$.

Gọi M, D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của C, I, K trên AB. Có $(NAB) \cap (ABC) = AB$ và

$\begin{cases} AB \perp NK \\ AB \perp KE \end{cases} \Rightarrow AB \perp NE \Rightarrow ((NAB),(ABC)) = (NE,EK) = \widehat{KEN}.$

Do $KE \parallel CM$, $ID \parallel CM$ nên $\dfrac{ID}{CM} = \dfrac{BI}{BC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow ID = \dfrac{CM}{3}$.

$\dfrac{KE}{ID} = \dfrac{AK}{AI} = \dfrac{5}{6} \Rightarrow KE = \dfrac{5}{6}ID = \dfrac{5}{18}CM = \dfrac{5\sqrt{3}a}{18}.$

Tam giác NKE vuông tại K có $\tan\widehat{KEN} = \dfrac{NK}{KE} = \dfrac{2\sqrt{57}a}{18} \cdot \dfrac{18}{5\sqrt{3}a} = \dfrac{2\sqrt{19}}{5}$.

Do đó $m = 2$, $n = 19$, $p = 5$ và $m + n + p = 2 + 19 + 5 = 26$.

Chọn đáp án (C) □

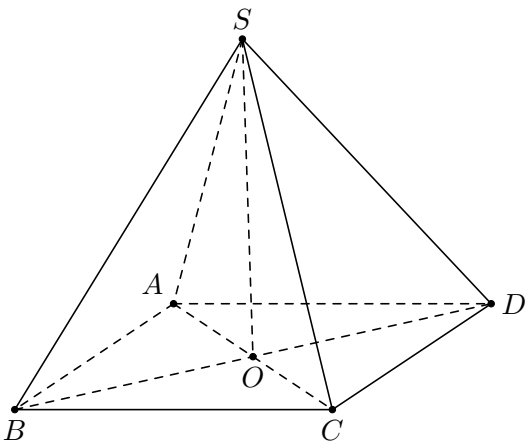
Câu 106. Cosin góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy của hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau là

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

✍Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD và giả sử tất cả các cạnh của hình chóp bằng a. Hình chóp $S.ABCD$ đều nên $SO \perp (ABCD)$, suy ra góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng góc $\widehat{SAO}$. Ta có

$$\cos\widehat{SAO} = \frac{AO}{SA} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



Chọn đáp án (D) □

Câu 107. Trong không gian, cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Trong các mệnh đề sau, có bao nhiêu mệnh đề đúng?

(I) Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$.

(II) Nếu $b \perp (P)$ thì $b \parallel a$.

(III) Nếu $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.

(IV) Nếu $b \parallel (P)$ thì $b \perp a$.

A. 1. **B**. 2. **C**. 4. **D**. 3.

✍Lời giải.

Mệnh đề (I), (II) và (IV) đều đúng (do có trong phần lý thuyết ở Sách giáo khoa). Mệnh đề (III) sai vì kết luận thiếu trường hợp b có thể nằm trong (P).

Chọn đáp án D □

Câu 108. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tìm số đo của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD).

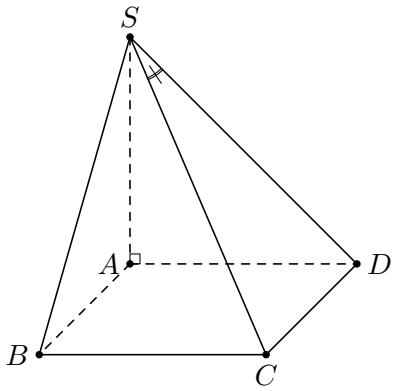
A. 45°. **B**. 30°. **C**. 90°. **D**. 60°.

✍Lời giải.

Ta có $CD \perp AD$ và $CD \perp SA$ nên $CD \perp (SAD)$. Khi đó SD là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng (SAD). Do đó góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD) chính là góc giữa SC và SD và đó là $\widehat{CSD}$.

Ta có $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{3}$.

$\tan \widehat{CSD} = \dfrac{CD}{SD} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ hay $\widehat{CSD} = 30°$.



Vậy số đo của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD) là 30°.

Chọn đáp án B □

Câu 109. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O. Qua O có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với đường thẳng Δ?

A. 3. **B**. Vô số. **C**. 1. **D**. 2.

✍Lời giải.

Có vô số đường thẳng đi qua O và vuông góc với đường thẳng Δ.

Chọn đáp án B □

Câu 110. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Biết tam giác SBC là tam giác đều. Tính số đo của góc giữa SA và (ABC).

A. 60°. **B**. 75°. **C**. 45°. **D**. 30°.

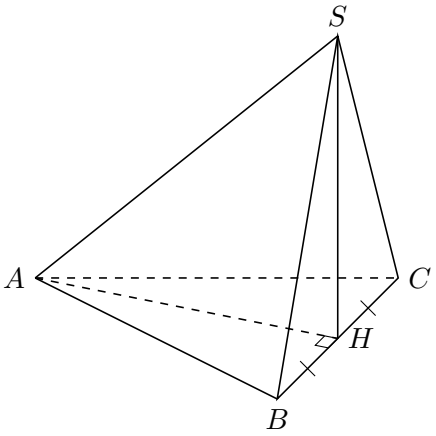
✍Lời giải.

Ta có tam giác ABC đều cạnh a nên $AH \perp BC$, $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Mặt khác tam giác SBC đều cạnh a nên $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp AH \Rightarrow \triangle SHA$ vuông cân tại H.

Khi đó $\widehat{SAH} = 45°$ suy ra $(\widehat{SA, (ABC)}) = 45°$.



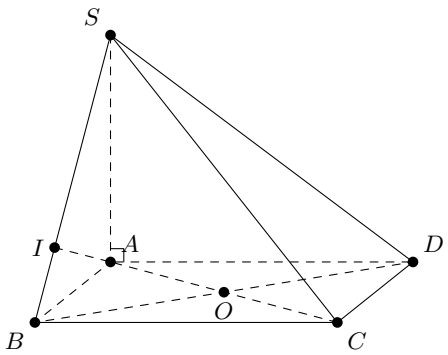
Chọn đáp án C □

Câu 111. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, cạnh SA vuông góc với đáy. Gọi I là hình chiếu vuông góc của điểm A trên cạnh SB. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. AC vuông góc với SB.
B. BD vuông góc với SC.
C. AI vuông góc với SD.
D. AI vuông góc với SC.

✍Lời giải.

Vì $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases}$ nên $BD \perp (SAC)$. Do đó $BD \perp SC$.



Chọn đáp án B ☐

Câu 112. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC). Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$. **B**. $\tan\varphi = \dfrac{1}{7}$. **C**. $\tan\varphi = \sqrt{7}$. **D**. $\tan\varphi = -\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

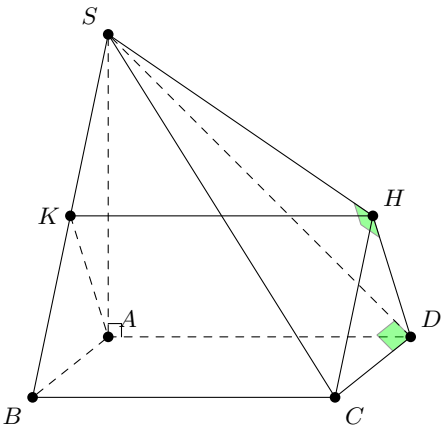
✍Lời giải.

Gọi K là trung điểm đoạn SB. Vì $AB = SA = a$ nên tam giác SAB vuông cân tại A. Suy ra $AK = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Mặt khác, lại có $AK \perp SB$, $BC \perp (SAB)$ nên $AK \perp (SBC)$. Dựng hình bình hành $AKHD$ như hình vẽ, suy ra $HD \perp (SAC)$. Do đó, hình chiếu của SD trên (SBC) là SH. Góc $\widehat{DSH}$ là góc giữa SD và mặt phẳng (SBC).

Xét tam giác SHD vuông tại H, có $HD = AK = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $SD = 2a$.

Vậy



$$\tan\varphi = \tan\widehat{DSH} = \frac{HD}{SH} = \frac{HD}{\sqrt{SD^2 - HD^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}.$$

Chọn đáp án A ☐

Câu 113. Trong không gian, số mặt phẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng a là

A. 1. **B**. 2. **C**. 0. **D**. vô số.

✍Lời giải.

Trong không gian, có một và chỉ một mặt phẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng a.
Chọn đáp án A ☐

Câu 114. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là α. Khi đó $\tan\alpha$ bằng

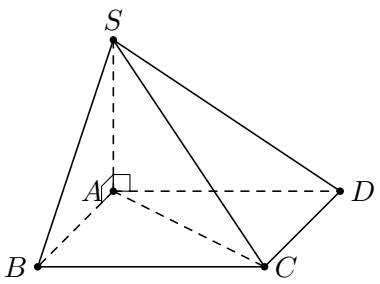
A. $\sqrt{2}$. **B**. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C**. 1. **D**. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

✍Lời giải.

Vì $SA \perp (ABCD)$ tại A nên AC là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$. Do đó

$$\left(\widehat{SC, (ABCD)}\right) = \left(\widehat{SC, AC}\right) = \widehat{SCA}.$$

Xét $\triangle SAC$ vuông tại A có $SA = a$ và $AC = a\sqrt{2}$, suy ra $\tan\alpha = \tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.



Chọn đáp án D ☐

Câu 115. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều, biết $SA \perp (ABC)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. $AB \perp BC$. **B**. $SA \perp BC$. **C**. $SB \perp AB$. **D**. $SC \perp BC$.

✍Lời giải.

Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AB$, $SA \perp BC$ và $SA \perp AC$.

Chọn đáp án B □

Câu 116. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng a, $SA = a$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Tang của góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\sqrt{2}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C**. $\sqrt{5}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

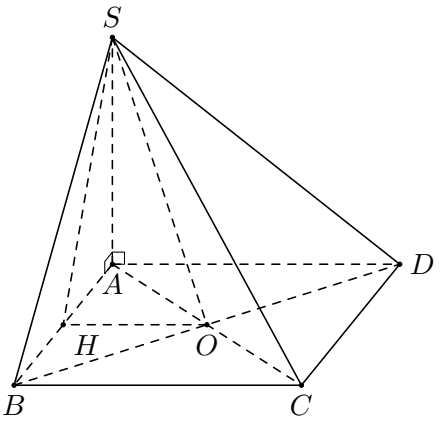
✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AB, ta có $OH \perp (SAB)$ (do $OH \perp AB$ và $OH \perp SA$).

Suy ra góc giữa SO và (SAB) là $\widehat{HSO}$.

Xét tam giác vuông SHO ta có

$$\tan\widehat{HSO} = \frac{OH}{SH} = \frac{OH}{\sqrt{SA^2 + AH^2}} = \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$



Chọn đáp án B □

Câu 117. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

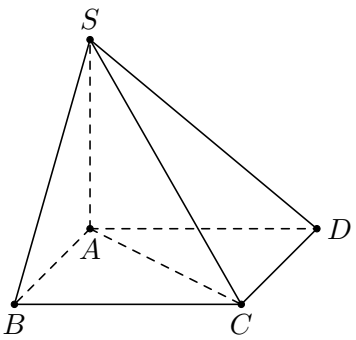
A. $60°$. **B**. $90°$. **C**. $30°$. **D**. $45°$.

✍Lời giải.

Tam giác SAC vuông tại A có $SA = a\sqrt{2} = AC$ nên $\widehat{SCA} = 45°$.

Vì A là hình chiếu của S trên $(ABCD)$ nên AC là hình chiếu của SC trên $ABCD$.

Do đó $(SC, (ABCD)) = (SC, AC) = \widehat{ACS} = 45°$.



Chọn đáp án D □

Câu 118. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = 2$, $DB = DC = 3$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $BC \perp AD$. **B**. $AC \perp BD$. **C**. $AB \perp (BCD)$. **D**. $DC \perp (ABC)$.

✍Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC.

Do ΔABC cân tại A $(AB = AC)$

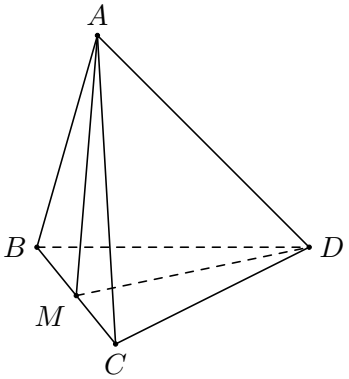
$\Rightarrow AM \perp BC$ (1).

Tương tự, do ΔBCD cân tại D $(DB = DC)$

$\Rightarrow DM \perp BC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (AMD)$.

$\Rightarrow BC \perp AD$.

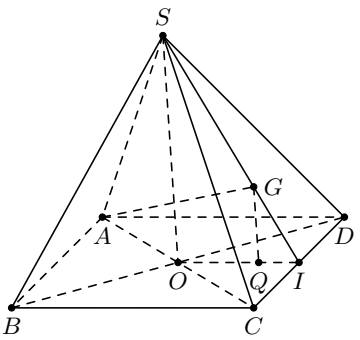


Chọn đáp án A □

Câu 119.

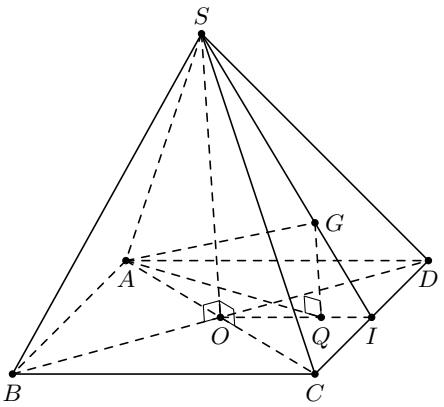
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với tất cả các cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD (tham khảo hình vẽ bên). Tang góc giữa AG và $(ABCD)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{17}}{7}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\sqrt{17}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.



✍Lời giải.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, I là trung điểm CD, Q là trọng tâm tam giác OCD. Khi đó $SO \perp (ABCD)$, $GQ \parallel SO \Rightarrow GQ \perp (ABCD)$.
Do đó góc giữa AG và $(ABCD)$ bằng góc giữa AG và AQ, bằng góc $\widehat{GAQ}$.



Ta có $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Nên suy ra $GQ = \dfrac{1}{3}SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{6}$.

Tam giác AOQ có $OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $OQ = \dfrac{2}{3}OI = \dfrac{a}{3}$ và $\widehat{AOQ} = 135^\circ$ nên

$$AQ^2 = OA^2 + OQ^2 - 2OA \cdot OQ \cdot \cos 135^\circ = \frac{17a^2}{18} \Rightarrow AQ = \frac{a\sqrt{34}}{6}.$$

Do đó $\tan \widehat{GAQ} = \dfrac{GQ}{AQ} = \dfrac{a\sqrt{2}}{6} : \dfrac{a\sqrt{34}}{6} = \dfrac{\sqrt{17}}{7}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 120. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại O và $SA = SB = SC = SD$. Khi đó, khẳng định nào sau đây là **sai**?

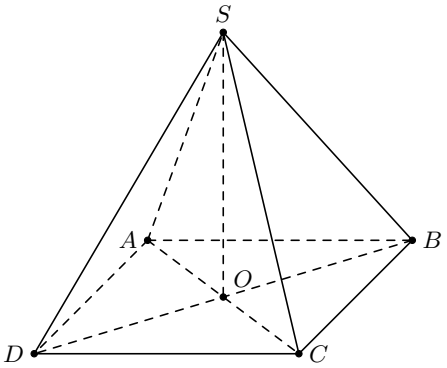
A. $AC \perp BD$. **B.** $SO \perp BD$. **C.** $SO \perp AC$. **D.** $SO \perp (ABCD)$.

✍Lời giải.

— Vì $ABCD$ là hình bình hành nên khẳng định $AC \perp BD$ là sai.

— Ta có $\triangle SAC$, $\triangle SBD$ cân tại O có SO là trung tuyến nên SO đồng thời là đường cao $\Rightarrow SO \perp AC$, $SO \perp BD$.

— Vì $SO \perp AC$, $SO \perp BD$ nên $SO \perp (ABCD)$.

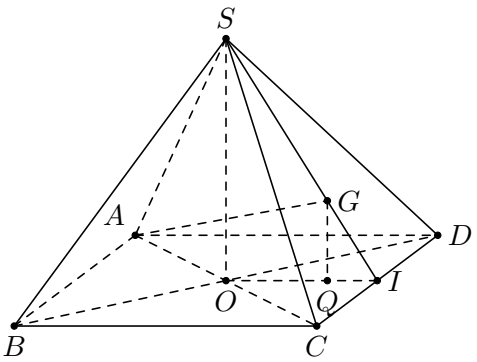


Chọn đáp án (A) □

Câu 121.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với tất cả các cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD (tham khảo hình vẽ bên). Giá trị tan góc giữa AG và $(ABCD)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{17}}{17}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\sqrt{17}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

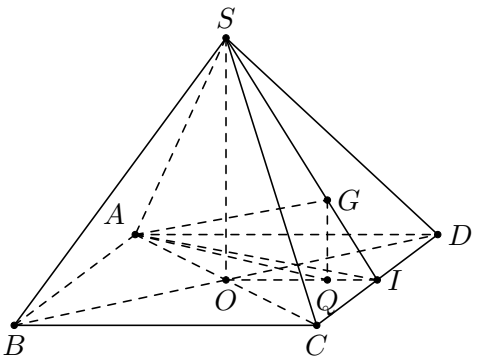


✍Lời giải.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Khi đó, $SO \perp (ABCD)$.

Gọi I là trung điểm của CD. Ta tính được $SI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $SG = \dfrac{2}{3}SI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và

$$SO = \sqrt{SI^2 - OI^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



Gọi Q là hình chiếu vuông góc của G trên $(ABCD)$. Ta có $Q \in OI$ và $GQ = \dfrac{1}{3}SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{6}$.

Ta có

$$\begin{aligned} AG^2 &= SA^2 + SG^2 - 2 \cdot SA \cdot SG \cdot \cos\widehat{ASG} = SA^2 + SG^2 - 2 \cdot SA \cdot SG \cdot \frac{SA^2 + SI^2 - AI^2}{2 \cdot SA \cdot SI} \\ &= SA^2 + SG^2 - \frac{2(SA^2 + SI^2 - (AD^2 + ID^2))}{3} \\ &= a^2 + \frac{a^2}{3} - \frac{2\left(a^2 + \dfrac{3a^2}{4} - a^2 - \dfrac{a^2}{4}\right)}{3} = a^2. \end{aligned}$$

Khi đó, $AQ = \sqrt{AG^2 - GQ^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{2a^2}{36}} = \dfrac{a\sqrt{34}}{6}$.

Vì $AG \cap (ABCD) = A$ và $GQ \perp (ABCD)$ nên góc giữa AG và $(ABCD)$ là $\widehat{GAQ}$.

Vậy $\tan\widehat{GAQ} = \dfrac{GQ}{AQ} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{6}}{\dfrac{a\sqrt{34}}{6}} = \dfrac{\sqrt{17}}{17}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 122. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng a, $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tan của góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

✍Lời giải.

Ta có: $\left.\begin{array}{l} DA \perp AB \\ DA \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow DA \perp (SAB)$.

Gọi H là trung điểm của AB. Khi đó: $OH \parallel DA$

$\Rightarrow OH \perp (SAB)$.

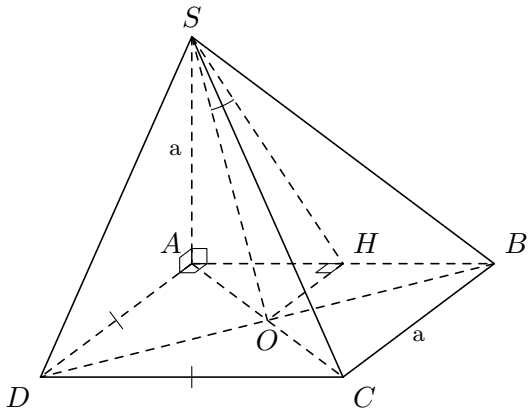
Hình chiếu của SO lên (SAB) là SH nên góc giữa SO và mặt phẳng (SAB) là $\widehat{OSH}$.

Ta có

$OH = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$,

$SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

$\tan\widehat{OSH} = \dfrac{OH}{SH} = \dfrac{\dfrac{a}{2}}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 123. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a, gọi α là góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BB'D'D)$. Tính $\sin\alpha$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Cách 1:

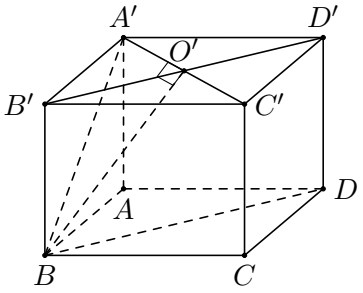
Gọi O' là giao điểm của $D'B'$ và $A'C'$ ta có:

$\begin{cases} A'O' \perp B'D' \\ A'O' \perp B'B \end{cases} \Rightarrow A'O' \perp (BB'D'D)$.

Nên BO' là hình chiếu của BA' lên $(BB'D'D)$

$\Rightarrow \alpha = (\widehat{A'B, (BB'D'D)}) = \widehat{A'BO'}$

$\Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{A'O'}{A'B} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$.

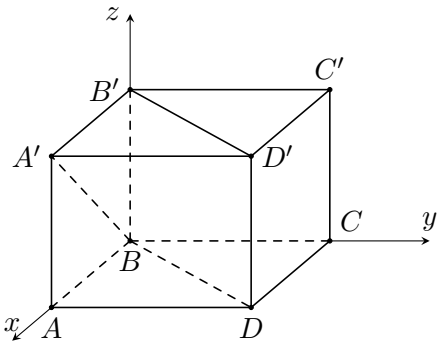


Cách 2:

Chọn hệ trục tọa độ vuông góc Oxyz như hình vẽ với a là 1 đơn vị độ dài, khi đó tọa độ các điểm là: $B(0;0;0)$, $A'(1;0;1)$, $D(1;1;0)$.

Ta có: $\overrightarrow{BA'} = (1;0;1)$, véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(BB'D'D)$ là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{BD}; \vec{k}\right] = (1;-1;0)$.

$\Rightarrow \sin\alpha = \left|\cos(\overrightarrow{BA'}; \vec{n})\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{BA'} \cdot \vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{BA'}\right| \cdot |\vec{n}|} = \dfrac{1^2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 124. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

A. $30°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

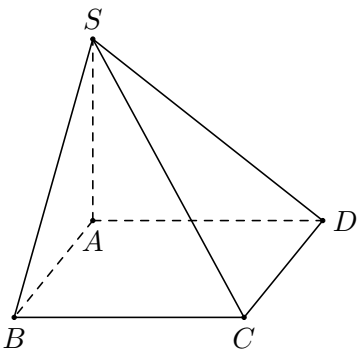
✍Lời giải.

Ta có AB là hình chiếu của SB trên $(ABCD)$.

Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng góc giữa SB và AB là góc $\widehat{ABS}$.

Tam giác SAB vuông tại A, $\cos\widehat{ABS} = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \widehat{ABS} = 60°$.



Chọn đáp án C □

Câu 125.

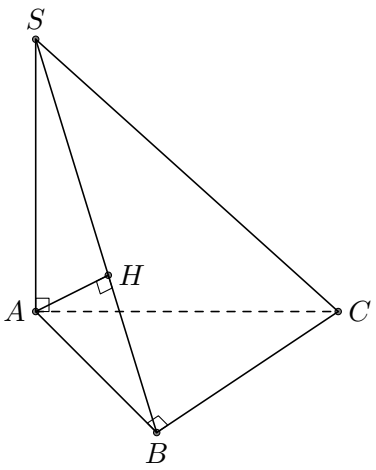
Cho hình chóp $S.ABC$, tam giác ABC vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SB. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Các mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông.

B. $\triangle SBC$ vuông.

C. $AH \perp SC$.

D. Góc giữa đường thẳng SC với mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{SCB}$.



✍Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABC)$ nên AC hình chiếu vuông góc của SC lên (ABC).
Suy ra góc giữa đường thẳng SC với mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{SCA}$.

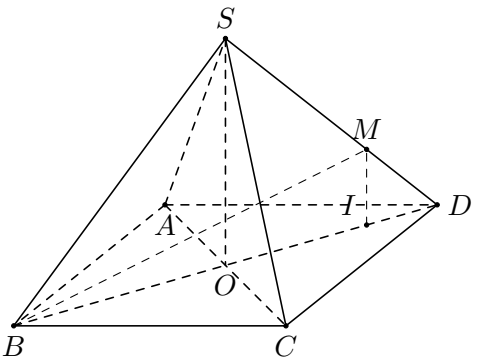
Chọn đáp án D □

Câu 126. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi điểm M là điểm trên SD sao cho $SM = 2MD$. tan góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B**. $\dfrac{1}{5}$. **C**. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **D**. $\dfrac{1}{3}$.

✍Lời giải.

Gọi O là hình chiếu vuông góc của S lên $(ABCD)$. Do đó O là tâm của hình vuông $ABCD$.
Ta có $(BM;(ABCD)) = \widehat{MBD}$.
Gọi I là hình chiếu vuông góc của M lên BD.



Ta có $BD = AB\sqrt{2} \Rightarrow 2OD = a\sqrt{2} \Rightarrow OD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Mặt khác, xét tam giác SOD vuông tại O, ta có: $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Xét tam giác SDO, ta có:
$MI \parallel SO$ (do cùng vuông góc với BD)
$\Rightarrow \dfrac{MI}{SO} = \dfrac{DM}{DS} \Rightarrow MI = SO \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Ta có $BI = BD - ID = BD - \dfrac{1}{3}DO = BD - \dfrac{1}{6}BD = \dfrac{5}{6}BD = \dfrac{5}{6} \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{5a\sqrt{2}}{6}$.

Lại có $\tan \widehat{MBI} = \dfrac{MI}{BI} = \dfrac{\dfrac{a}{3\sqrt{2}}}{\dfrac{5a\sqrt{2}}{6}} = \dfrac{1}{5}$.

Vậy $\tan(BM;(ABCD)) = \dfrac{1}{5}$.

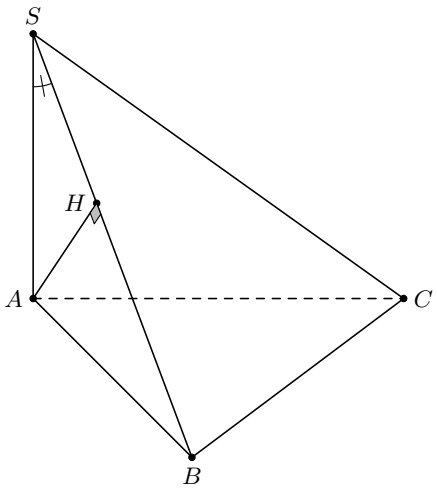
Chọn đáp án B □

Câu 127. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B, $AC = 2a$, $BC = a$, $SB = 2a\sqrt{3}$. Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBC).

A. $45°$. **B**. $30°$. **C**. $60°$. **D**. $90°$.

✍Lời giải.

Trong mặt phẳng (SAB) kẻ $AH \perp SB$ (1).
Ta có $\begin{cases} SA \perp BC \ (\text{do } SA \perp (ABC)) \\ AB \perp BC \end{cases}$ nên $BC \perp (SAB)$.
Do đó $BC \perp AH$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SBC)$.
Khi đó H là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC).Vậy $(SA,(SBC)) = (SA,SH) = \widehat{ASH}$ (do $\triangle SAH$ vuông tại H).
Xét $\triangle ABC$ vuông tại B nên $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = a\sqrt{3}$.
Xét $\triangle SAB$ vuông tại A,
ta có $\sin \widehat{ASB} = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ASB} = 30^\circ$.
Vậy $(SA,(SBC)) = 30^\circ$.

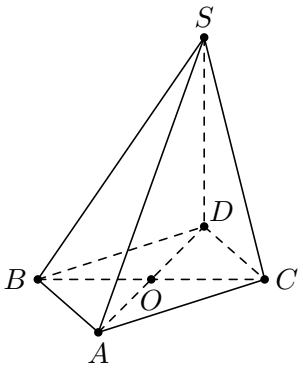


Chọn đáp án B □

Câu 128. Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh bên bằng nhau. Biết rằng ABC là tam giác cân tại A có $\widehat{BAC} = 120^\circ$ Khi đó hình chiếu vuông góc của S lên mặt đáy ABC là

A. Trung điểm của cạnh BC.
B. Đỉnh A của $\triangle ABC$.
C. Đỉnh D của hình thoi $ABDC$.
D. Tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle ABC$.

Lời giải.
Gọi D là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC).
Vì $SA = SB = SC \Rightarrow \triangle SAD = \triangle SBD = \triangle SCD \Rightarrow DA = DB = DC$. Từ đó suy ra D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Ta có $DB = DC, AB = AC \Rightarrow AD$ là đường trung trực của BC.
$\Rightarrow \triangle ABC$ cân có AD là trung trực đồng thời là phân giác $\Rightarrow \widehat{BAD} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABD$ đều.
$\Rightarrow BA = BD = DC = AC \Rightarrow$ tứ giác $ABDC$ là hình thoi.
Vậy hình chiếu vuông góc của S lên mặt đáy ABC là đỉnh D của hình thoi $ABDC$.



Chọn đáp án C □

Câu 129. Cho tứ diện $S.ABC$ có ABC là tam giác nhọn. Gọi hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) trùng với trực tâm tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây **sai** khi nói về tứ diện đã cho?

A. Các đoạn thẳng nối các trung điểm các cặp cạnh đối diện của tứ diện bằng nhau.
B. Tổng các bình phương của mỗi cặp cạnh đối của tứ diện bằng nhau.
C. Tồn tại một đỉnh của tứ diện có ba cạnh xuất phát từ đỉnh đó đôi một vuông góc với nhau.
D. Tứ diện có các cặp cạnh đối vuông góc với nhau.

Lời giải.
Giả sử tồn tại một đỉnh mà có ba cạnh xuất phát từ đỉnh đó đôi một vuông góc. Do tam giác ABC nhọn nên đỉnh đó chỉ có thể là S, khi đó H vừa là trực tâm vừa là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, suy ra tam giác ABC đều.
Chọn đáp án C □

Câu 130. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Điểm M thuộc tia DD' thỏa mãn $DM = a\sqrt{6}$. Góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là

A. 30°. **B**. 45°. **C**. 75°. **D**. 60°.

Lời giải.

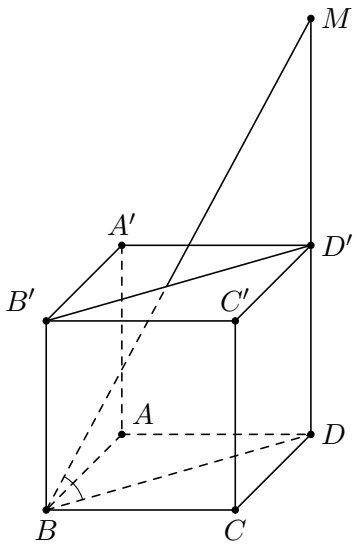
Vì $DD' \perp (ABCD), M \in DD' \Rightarrow MD \perp (ABCD)$
$\Rightarrow D$ là hình chiếu vuông góc của M lên $(ABCD)$. Do đó:

$$(BM, (ABCD)) = (BM, BD) = \widehat{MBD}.$$

Xét tam giác MBD vuông tại D, ta có:

$$\tan \widehat{MBD} = \frac{DM}{BD} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3}.$$

Suy ra $\widehat{MBD} = 60°$. Vậy $(BM, (ABCD)) = 60°$.



Chọn đáp án D □

Câu 131. Cho hình chóp $S.ABC$ với ABC không là tam giác cân. Góc giữa các đường thẳng SA, SB, SC và mặt phẳng (ABC) bằng nhau. Hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt phẳng (ABC) là

A. Tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔABC. **B**. Trực tâm của ΔABC.
C. Trọng tâm của ΔABC. **D**. Tâm đường tròn nội tiếp của ΔABC.

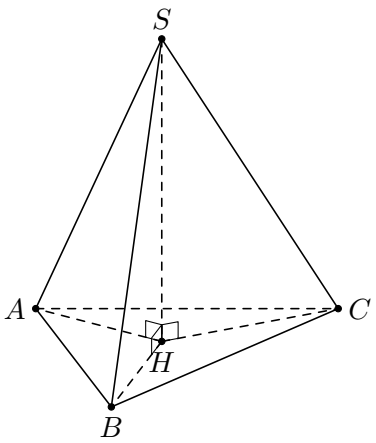
✍Lời giải.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng lên (ABC). Ta có:

$$(SA, (ABC)) = \widehat{SAH}$$
$$(SB, (ABC)) = \widehat{SBH}$$
$$(SC, (ABC)) = \widehat{SCH}$$

Từ giả thiết suy ra $\widehat{SAH} = \widehat{SBH} = \widehat{SCH}$ (1).
Mà các tam giác SBH, SCH, SAH vuông tại H và có cạnh SH chung. (2)
Từ (1) và (2) ta có:

$$\triangle SHA = \triangle SHB = \triangle SHC \Rightarrow HA = HB = HC.$$

Vậy H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



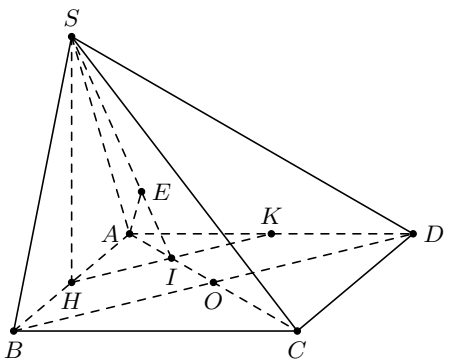
Chọn đáp án A □

Câu 132. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD. Tính sin của góc tạo bởi đường thẳng SA và (SHK).

A. $\frac{\sqrt{7}}{4}$. **B**. $\frac{\sqrt{14}}{4}$. **C**. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **D**. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

✍Lời giải.
Gọi O là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của AC và $HK \Rightarrow I$ là trung điểm của AO và $HK \perp AC$. (1)
Vì tam giác SAB đều và $(SAB) \perp (ABCD)$ nên
$SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp AC$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $AC \perp (SHK)$, do đó hình chiếu vuông góc của SA lên (SHK) là SI. Do vậy góc giữa SA và (SHK) là $\widehat{ISA}$.

Ta có $\sin \widehat{ISA} = \dfrac{AI}{SA} = \dfrac{\frac{AC}{4}}{SA} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{a} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.



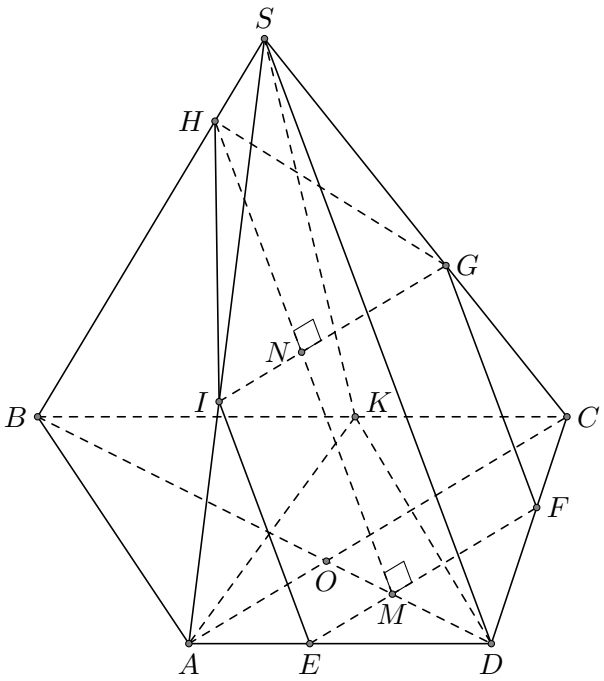
Chọn đáp án C □

Câu 133. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân ($AD \parallel BC$), $BC = 2a$, $AB = AD = DC = a$ với $a > 0$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Biết SD vuông góc AC. M là một điểm thuộc đoạn OD; $MD = x$ với $x > 0$. M khác O và D. Mặt phẳng (α) qua M và song song với hai đường thẳng SD và AC cắt khối chóp $S.ABCD$ theo một thiết diện. Tìm x để diện tích thiết diện là lớn nhất?

A. $a\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** a.

Lời giải.

Trong mp(SBD) kẻ đường thẳng qua M song song với SD, cắt cạnh SB tại H.
Trong mp$(ABCD)$ kẻ đường thẳng qua M song song với AC, cắt các cạnh DA và DC lần lượt tại E và F.
Trong mp(SDA) kẻ đường thẳng qua E song song với SD, cắt cạnh SA tại I.
Trong (SDC) kẻ đường thẳng qua F song song với SD, cắt cạnh SC tại G.
Khi đó thiết diện của khối chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) là ngũ giác $EFGHI$.



Ta có $ABCD$ là nửa lục giác đều có tâm là trung điểm K của BC. Do đó $ADCK$ và $ABND$ là hình thoi nên $AC \perp KD$. Mặt khác $AC \perp SD$ nên $AC \perp (SKD) \Rightarrow AC \perp SK$.
Lại có $SK \perp BC$ (vì$\triangle SBC$ đều), suy ra $SK \perp (ABCD) \Rightarrow SK \perp KD$.
Ta có IG là giao tuyến của (α) với (SAC), mà $AC \parallel (\alpha)$, suy ra $IG \parallel AC$.
Mặt khác $HM \parallel SD$ và $SD \perp AC$, suy ra $HM \perp IG$ và $HM \perp EF$ và $IGEF$ là hình chữ nhật. Diện tích thiết diện $EFGHI$ bằng $S = S_{EFGI} + S_{HGI} = IG \cdot NM + \dfrac{1}{2} IG \cdot HN$.
Ta có $AK = KD = AD = a$ nên $\triangle AKD$ đều.
Mà $BD \perp AK$, $AC \perp KD$ nên O là trọng tâm tam giác $\triangle ADK$. Suy ra $OD = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
$AC = BD = a\sqrt{3}$ ($\triangle BAC$ vuông tại A, do $KA = KB = KC$).
$SD = \sqrt{SK^2 + KD^2} = 2a$.
Ta có $\dfrac{DM}{DO} = \dfrac{EF}{AC} \Rightarrow EF = \dfrac{DM}{DO} \cdot AC = \dfrac{x}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} \cdot a\sqrt{3} = 3x$.
$\dfrac{GF}{SD} = \dfrac{CF}{CD} = \dfrac{OM}{OD} \Rightarrow GF = \dfrac{OM}{OD} \cdot SD = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{3} - x}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} \cdot 2a = 2a - 2\sqrt{3}x$.
$\dfrac{HM}{SD} = \dfrac{BM}{BD} \Rightarrow HM = \dfrac{BM}{BD} \cdot SD = \dfrac{a\sqrt{3} - x}{a\sqrt{3}} \cdot 2a = \dfrac{6a - 2x\sqrt{3}}{3}$.
Suy ra $HN = HM - NM = HN - GF = \dfrac{6a - 2x\sqrt{3}}{3} - \left(2a - 2\sqrt{3}x\right) = \dfrac{4x\sqrt{3}}{3}$.
Vậy $S = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4x\sqrt{3}}{3} \cdot 3x + \left(2a - 2\sqrt{3}x\right) \cdot 3x = -4\sqrt{3}x^2 + 6ax = -\sqrt{3}\left(2x - \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.
Suy ra $S \le \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $2x - \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 134. Cho hình chóp $S.ABC$ có $BC = a\sqrt{2}$, các cạnh còn lại đều bằng a. Góc giữa hai đường thẳng SB và AC bằng

A. $90°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm BC, D là điểm đối xứng của A qua H.

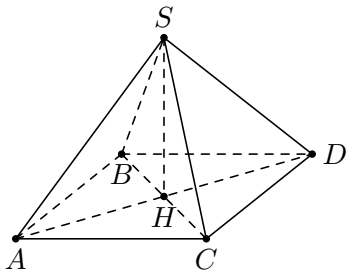
Theo giả thiết ta có $HB = HC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và tam giác ABC vuông tại A, do đó tứ giác $ABDC$ là hình vuông cạnh a.

Vì $SA = SB = SC = a \Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow SD = SA = a$.

Ta có $(SB, AC) = (SB, BD)$.

Tam giác SBD là tam giác đều cạnh a, suy ra $\widehat{SBD} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng SB và AC bằng 60°.



Chọn đáp án (B) □

Câu 135. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB cân tại S có $SA = SB = 2a$ nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $ABCD$. Gọi α là góc giữa SD và mặt phẳng $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\cot\alpha = 2\sqrt{3}$. **B.** $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\tan\alpha = \sqrt{3}$. **D.** $\cot\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AB. Vì $\triangle SAB$ cân nên $SH \perp AB$.

Từ $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \Rightarrow SH \perp (ABCD). \\ SH \perp AB \end{cases}$

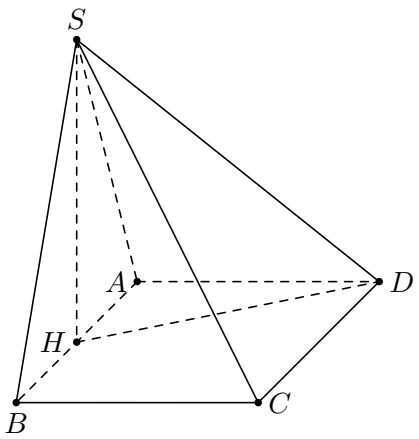
Suy ra HD là hình chiếu vuông góc của SD lên $(ABCD)$.

Khi đó $(SD, (ABCD)) = \widehat{SDH} = \alpha$.

Ta có $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{4a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

$\triangle AHD$ vuông tại A nên $HD = \sqrt{AD^2 + AH^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Khi đó $\tan\alpha = \dfrac{SH}{HD} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{15}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{3}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 136. Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60°. Thể tích của khối chóp là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

✍Lời giải.

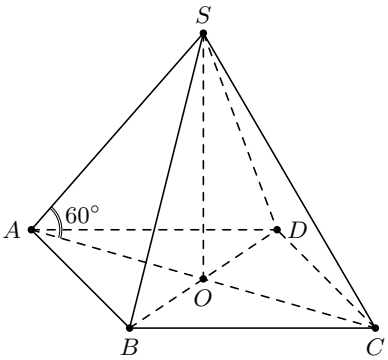
Xét khối chóp tứ giác đều như hình vẽ.

Khi đó $(SA, (ABCD)) = \widehat{SAO} = 60^\circ$

$$\Rightarrow SO = AO\tan\widehat{SAO} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Vậy thể tích khối chóp là:

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}.$$



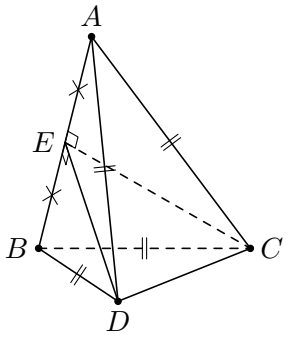
Chọn đáp án (A) □

Câu 137. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

A. 30°. **B.** 60°. **C.** 90°. **D.** 120°.

✍Lời giải.

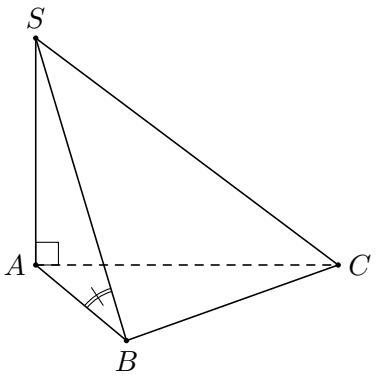
Gọi E là trung điểm AB.
Do hai tam giác ABC và ABD là hai tam giác đều nên
$\begin{cases} DE \perp AB \\ CE \perp AB. \end{cases}$
Suy ra $AB \perp (DEC) \Rightarrow AB \perp CD$.



Chọn đáp án C ☐

Câu 138. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BC = a\sqrt{3}$, $AC = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng
A. $30°$. **B**. $60°$. **C**. $45°$. **D**. $90°$.

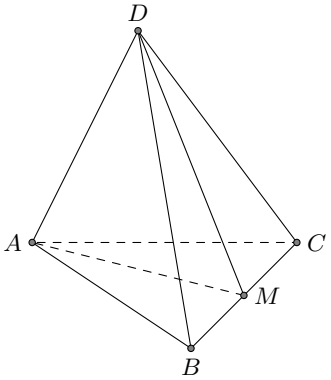
Lời giải.
Xét tam giác ABC vuông tại B, ta có: $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$.
Vì AB là hình chiếu của SB trên mặt phẳng (ABC) nên: $(SB, (ABC)) = (SB, AB) = \widehat{SBA}$.
Xét tam giác SAB vuông tại A ta có:
$\tan \widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$.
Suy ra $\widehat{SBA} = 60°$. Vậy $(SB, (ABC)) = 60°$.



Chọn đáp án B ☐

Câu 139. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$, $DB = DC$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?
A. $BC \perp AD$. **B**. $CD \perp (ABD)$. **C**. $AB \perp BC$. **D**. $AB \perp (ABC)$.

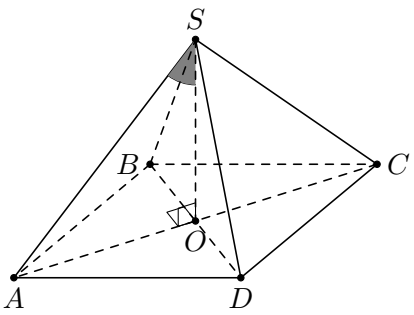
Lời giải.
Gọi M là trung điểm BC.
suy ra $\begin{cases} AM \perp BC \\ DM \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AMD) \Rightarrow BC \perp AD$.



Chọn đáp án A ☐

Câu 140. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O, $SO \perp (ABCD)$. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) là
A. $\widehat{ASO}$. **B**. $\widehat{SAO}$. **C**. $\widehat{SAC}$. **D**. $\widehat{ASB}$.

Lời giải.
Ta có $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp AO$. (1)
Mặt khác $ABCD$ là hình thoi nên $BD \perp AO$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $AO \perp (SBD) \Rightarrow SO$ là hình chiếu vuông góc của SA lên mặt phẳng (SBD).
Vậy góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) là $\widehat{ASO}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 141. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Độ lớn góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy bằng

A. $45°$. **B**. $75°$. **C**. $30°$. **D**. $60°$.

✍Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

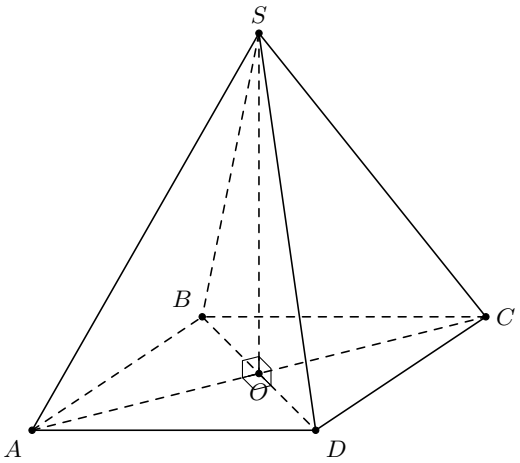
Vì hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$ suy ra OA là hình chiếu của SA trên mặt phẳng $(ABCD)$

$\Rightarrow (SA, (ABCD)) = (SA; AO) = \widehat{SAO}$.

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a suy ra $OA = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác vuông SOA, ta có

$$\cos\widehat{SAO} = \frac{AO}{SA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SAO} = 60°.$$



Vậy góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy bằng $60°$

Chọn đáp án (D) □

Câu 142. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a\sqrt{3}$, $AC = AA' = a$. Gọi α là góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(BCC'B')$, tính $\sin\alpha$.

A. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$. **B**. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **C**. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D**. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

✍Lời giải.

Gọi M là hình chiếu vuông góc của A trên BC.

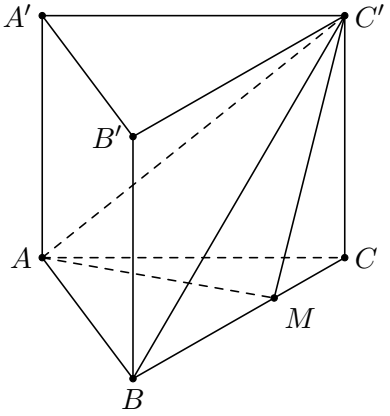
$\Rightarrow AM \perp (BCC'B')$.

$\Rightarrow [\widehat{AC', (BCC'B')}] = \widehat{(AC', C'M)} = \widehat{AC'M}$.

Ta có $\dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} \Rightarrow AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Và $AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} = a\sqrt{2}$.

$\Rightarrow \sin\widehat{AC'M} = \dfrac{AM}{AC'} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 143. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SA = SC$, $SB = SD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

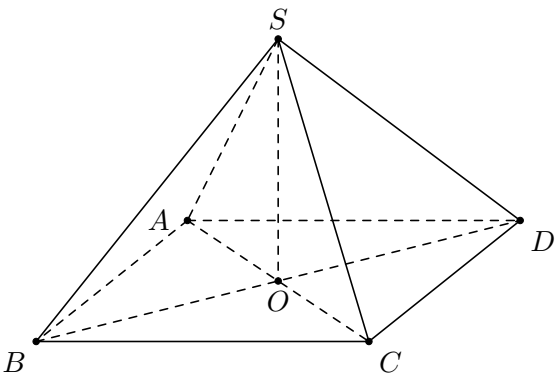
A. $CD \perp (SBD)$. **B**. $CD \perp AC$. **C**. $AB \perp (SAC)$. **D**. $SO \perp (ABCD)$.

✍Lời giải.

Do $SA = SC$ nên tam giác SAC cân tại S và có SO là trung tuyến cũng là đường cao. Suy ra $SO \perp AC$.

Chứng minh tương tự ta có $SO \perp BD$.

Vậy $SO \perp (ABCD)$.



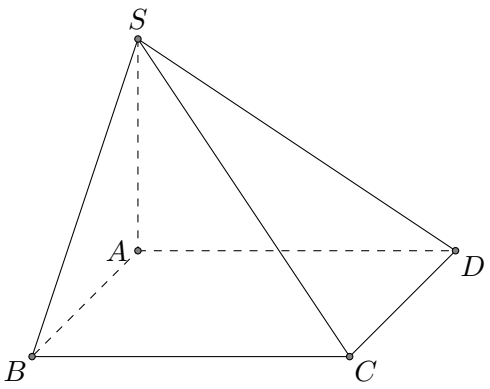
Chọn đáp án (D) □

Câu 144. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$, góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAB) bằng

A. $30°$. **B**. $60°$. **C**. $45°$. **D**. $90°$.

✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases} DA \perp AB \\ DA \perp SA \end{cases} \Rightarrow DA \perp (SAB)$. Suy ra hình chiếu của SD lên mặt phẳng (SAB) là SA. Do đó $(SD, (SAB)) = (SD, SA) = \widehat{DSA}$. Mà $\triangle SAD$ là tam giác vuông cân tại A nên $\widehat{DSA} = 45°$. Vậy góc giữa SD và mặt phẳng (SAB) bằng $45°$.



Chọn đáp án C □

Câu 145. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$.
B. Nếu $a \perp (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $b \parallel (\alpha)$.
C. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $a \perp b$.
D. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (\alpha)$.

✍Lời giải.

— Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$. Sai vì a và b có thể chéo nhau.

— Nếu $a \perp (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $b \parallel (\alpha)$. Sai vì nếu $a \perp (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $b \parallel a$.

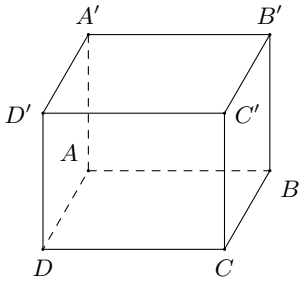
— Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $a \perp b$. Đúng.

— Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (\alpha)$. Sai, ví dụ $b \subset (\alpha)$ và $b \perp a$ nhưng $b \not\perp (\alpha)$.

Chọn đáp án C □

Câu 146.
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa AC' và BD.

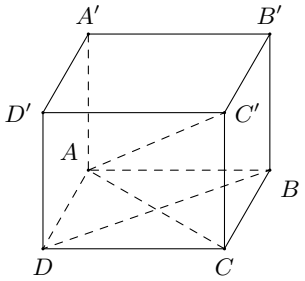
A. $90°$. **B**. $45°$. **C**. $60°$. **D**. $120°$.



✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \text{ (do } ABCD \text{ là hình vuông)} \\ BD \perp CC' \end{cases} \Rightarrow BD \perp AC'$.

Do đó góc giữa AC' và BD bằng $90°$.



Chọn đáp án A □

Câu 147. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
C. Hai mặt phẳng song song khi và chỉ khi góc giữa chúng bằng $0°$.
D. Hai đường thẳng trong không gian cắt nhau khi và chỉ khi góc giữa chúng lớn hơn $0°$ và nhỏ hơn $90°$.

✍Lời giải.
"Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau".
Chọn đáp án B □

Câu 148. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AC = 2$, $BC = 1$, $AA' = 1$. Tính góc giữa AB' và $(BCC'B')$.

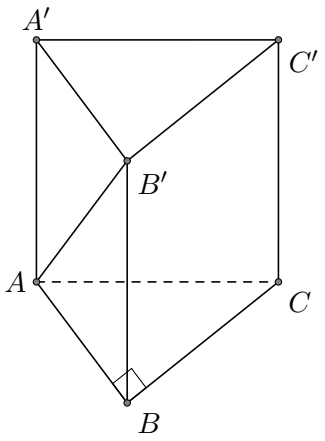
A. $45°$. **B**. $90°$. **C**. $30°$. **D**. $60°$.

✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp BB' \end{cases} \Leftrightarrow BA \perp (BCC'B')$. Khi đó BB' là hình chiếu vuông góc của AB' lên $(BCC'B')$. Hay góc giữa AB' và $(BCC'B')$ là $\widehat{AB'B}$.
Ta có $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{s^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

$$\tan \widehat{AB'B} = \frac{AB}{BB'} = \sqrt{3}.$$

Vậy góc giữa AB' và $(BCC'B')$ là $60°$.



Chọn đáp án D □

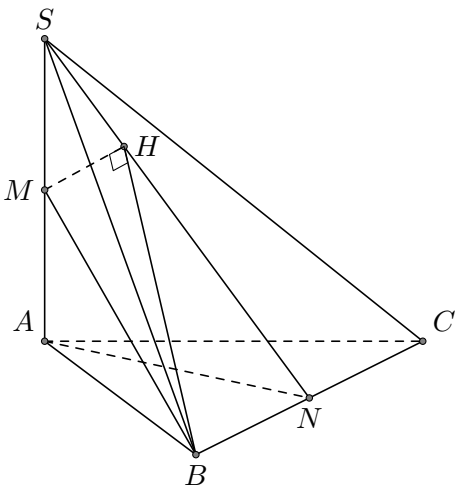
Câu 149. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A cạnh $AB = a$, SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của SA, φ là góc giữa BM và mặt phẳng (SBC). Tính $\sin\varphi$.

A. $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{15}}$. **B**. $\sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{15}}$. **C**. $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$. **D**. $\sin\varphi = \dfrac{1}{2\sqrt{15}}$.

✍Lời giải.

Gọi N là trung điểm của BC, ta có $AN \perp BC$, mà $SA \perp BC$ nên suy ra $(SAN) \perp BC$.
Vậy (SAN) vuông góc (SBC) theo giao tuyến SN, kẻ $MH \perp SN$ tại H, khi đó $MH \perp (SBC)$.
Vậy góc giữa BM và (SBC) là góc $\widehat{MBH}$.
Ta có $AN = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $SN = \sqrt{SA^2 + AN^2} = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.
Mặt khác ta có $\triangle SHM \backsim \triangle SAN$ nên

$$\frac{MH}{AN} = \frac{SM}{SN} \Rightarrow MH = \frac{AN \cdot SM}{SN} = \frac{a\sqrt{10}}{10}.$$



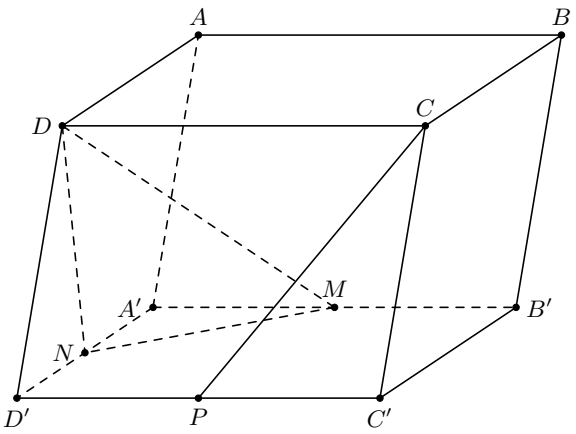
Ta lại có $MB = \sqrt{AB^2 + AM^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.
Xét $\triangle MBH$, có $\sin\widehat{MBH} = \dfrac{MH}{MB} = \dfrac{1}{\sqrt{15}}$.

Chọn đáp án B □

Câu 150.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B'$, $A'D'$, $C'D'$. Góc giữa đường thẳng CP và mặt phẳng (DMN) bằng

A. $60°$. **B**. $30°$. **C**. $0°$. **D**. $45°$.



✍Lời giải.

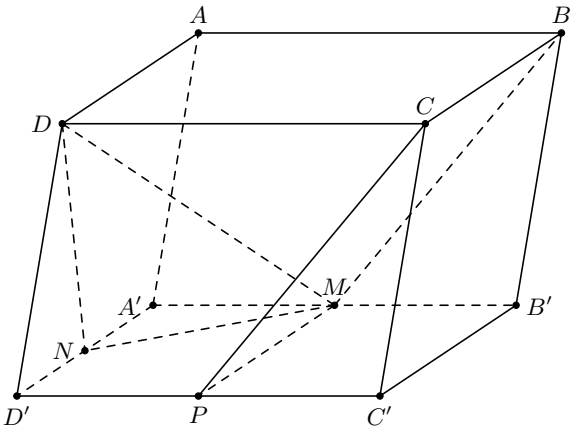
Xét tứ giác $BCPM$ có $\begin{cases} PM = CB \\ PM \parallel BC \end{cases}$

$\Rightarrow BCPM$ là hình bình hành.

Suy ra $CP \parallel MB$ mà $MB \subset (DBMN)$

$\Rightarrow CP \parallel (DBMN)$.

Suy ra $CP \parallel (DMN)$ do đó góc giữa CP và (DMN) bằng $0°$.



Chọn đáp án C □

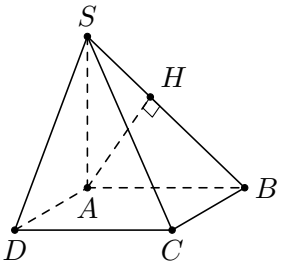
Câu 151. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$, SA vuông góc với đáy. Kẻ AH vuông góc với SB ($H \in SB$). Chọn mệnh đề đúng.

A. $AH \perp SC$. **B**. $AH \perp (SBD)$. **C**. $AH \perp (SCD)$. **D**. $AH \perp SD$.

✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$.

Mà $AH \perp SB$ nên $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$.



Chọn đáp án A □

Câu 152. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, cạnh $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa SC với mặt phẳng $(ABCD)$ là

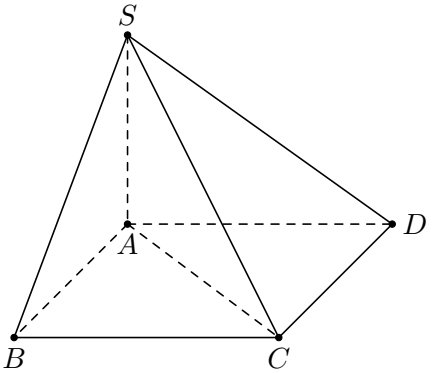
A. $30°$. **B**. $45°$. **C**. $90°$. **D**. $60°$.

✍Lời giải.

Ta có $(SC, (ABCD)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}$.

Lại có $\tan \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{SA}{AB\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = 1$.

Suy ra $\widehat{SCA} = 45°$.



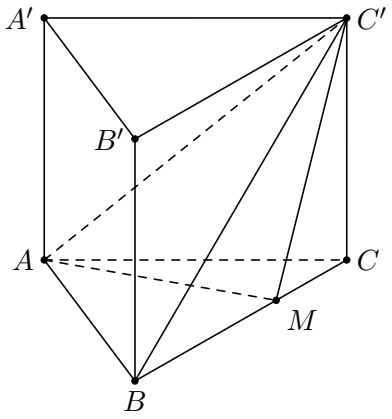
Chọn đáp án B □

Câu 153. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a\sqrt{3}$, $AC = AA' = a$. Gọi α là góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(BCC'B')$, tính $\sin\alpha$.

A. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$. **B.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

✍Lời giải.

Gọi M là hình chiếu vuông góc của A trên BC.
$\Rightarrow AM \perp (BCC'B')$.
$\Rightarrow \widehat{[AC', (BCC'B')]} = \widehat{(AC', C'M)} = \widehat{AC'M}$.
Ta có $\dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} \Rightarrow AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Và $AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} = a\sqrt{2}$.
$\Rightarrow \sin\widehat{AC'M} = \dfrac{AM}{AC'} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.



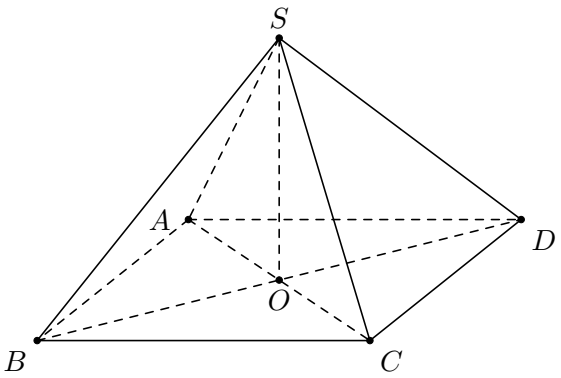
Chọn đáp án D □

Câu 154. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SA = SC$, $SB = SD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $CD \perp (SBD)$. **B.** $CD \perp AC$. **C.** $AB \perp (SAC)$. **D.** $SO \perp (ABCD)$.

✍Lời giải.

Do $SA = SC$ nên tam giác SAC cân tại S và có SO là trung tuyến cũng là đường cao. Suy ra $SO \perp AC$.
Chứng minh tương tự ta có $SO \perp BD$.
Vậy $SO \perp (ABCD)$.



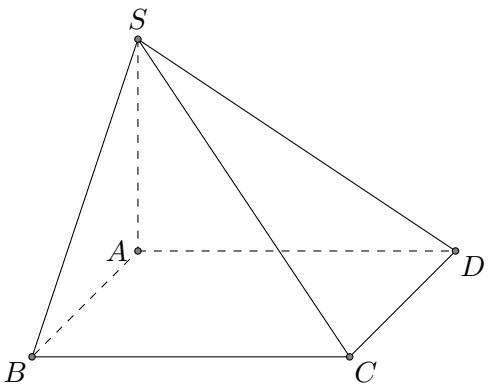
Chọn đáp án D □

Câu 155. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$, góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAB) bằng

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases} DA \perp AB \\ DA \perp SA \end{cases} \Rightarrow DA \perp (SAB)$. Suy ra hình chiếu của SD lên mặt phẳng (SAB) là SA. Do đó $(SD, (SAB)) = (SD, SA) = \widehat{DSA}$. Mà $\triangle SAD$ là tam giác vuông cân tại A nên $\widehat{DSA} = 45°$.
Vậy góc giữa SD và mặt phẳng (SAB) bằng $45°$.



Chọn đáp án C □

Câu 156. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$. **B.** Nếu $a \perp (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $b \parallel (\alpha)$.

C. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $a \perp b$.
D. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (\alpha)$.

✍Lời giải.

— Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$. Sai vì a và b có thể chéo nhau.

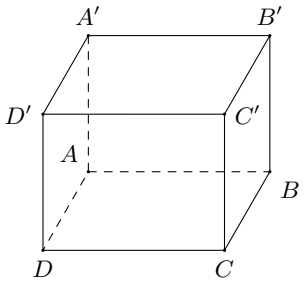
— Nếu $a \perp (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $b \parallel (\alpha)$. Sai vì nếu $a \perp (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $b \parallel a$.

— Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $a \perp b$. Đúng.

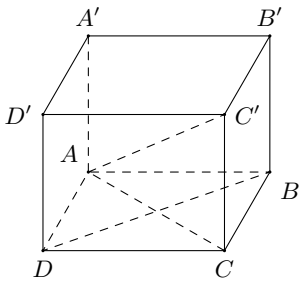
— Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (\alpha)$. Sai, ví dụ $b \subset (\alpha)$ và $b \perp a$ nhưng $b \not\perp (\alpha)$.

Chọn đáp án C □

Câu 157.
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa AC' và BD.
A. $90°$. **B**. $45°$. **C**. $60°$. **D**. $120°$.



✍Lời giải.
Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \text{ (do } ABCD \text{ là hình vuông)} \\ BD \perp CC' \end{cases} \Rightarrow BD \perp AC'$.
Do đó góc giữa AC' và BD bằng $90°$.



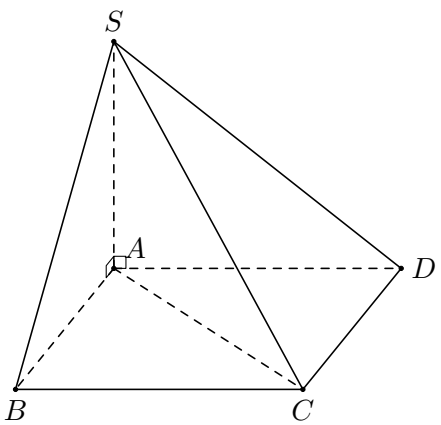
Chọn đáp án A □

Câu 158. Khẳng định nào sau đây đúng?
A. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
C. Hai mặt phẳng song song khi và chỉ khi góc giữa chúng bằng $0°$.
D. Hai đường thẳng trong không gian cắt nhau khi và chỉ khi góc giữa chúng lớn hơn $0°$ và nhỏ hơn $90°$.

✍Lời giải.
"Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau".
Chọn đáp án B □

Câu 159. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Gọi α là góc giữa SC và (SAB). Giá trị $\tan\alpha$ bằng
A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. **C**. $\dfrac{1}{7}$. **D**. $\dfrac{1}{5}$.

✍Lời giải.
Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$
$\Rightarrow SB$ là hình chiếu của SC lên mặt phẳng (SAB)
$\Rightarrow \alpha = \widehat{BSC}$.
Mà $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{7}$.
Vậy $\tan\alpha = \dfrac{BC}{SB} = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$.



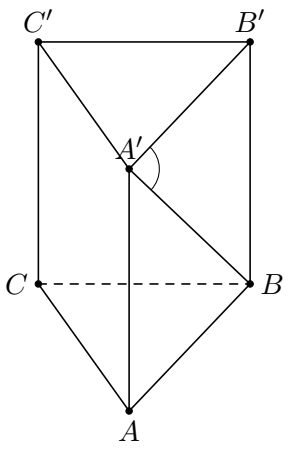
Chọn đáp án B □

Câu 160. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(A'B'C')$ bằng

A. $60°$. **B**. $45°$. **C**. $30°$. **D**. $90°$.

✍Lời giải.

Vì $BB' \perp (A'B'C')$ nên $A'B'$ là hình chiếu vuông góc của $A'B$ lên $(A'B'C')$. Suy ra góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(A'B'C')$ là $\widehat{BA'B'}$.
Ta có $A'B' = BB' = a$ nên tam giác $B'A'B$ vuông cân tại B' suy ra $\widehat{BA'B'} = 45°$.



Chọn đáp án B □

Câu 161. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P). Chọn khẳng định đúng.

A. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$.
B. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp (P)$ thì $b \perp a$.
C. Nếu $a \perp (P)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.
D. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \parallel (P)$ thì $b \parallel a$.

✍Lời giải.

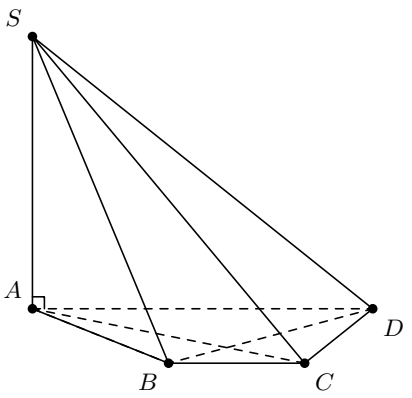
Định lý về liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc trong không gian "Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp (P)$ thì $b \perp a$."
Chọn đáp án B □

Câu 162. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang cân, $SA \perp (ABCD)$, $AD = 2BC = 2AB$. Trong tất cả các tam giác mà 3 đỉnh lấy từ 5 điểm S, A, B, C, D có bao nhiêu tam giác vuông?

A. 5. **B**. 7. **C**. 3. **D**. 6.

✍Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình thang cân nên $AC \perp DC$ và $AB \perp BD$.
Do vậy $DB \perp (SAB)$ và $DC \perp (SAC)$, suy ra $\triangle SCD$ vuông tại C và $\triangle SBD$ vuông tại B.
Lại có, $SA \perp (ABCD)$ nên các tam giác SAD, SAB và SAC vuông tại A.
Mặt khác, tam giác ADC vuông tại C, tam giác ABD vuông tại B.
Vậy có 7 tam giác vuông thỏa mãn yêu cầu bài toán.



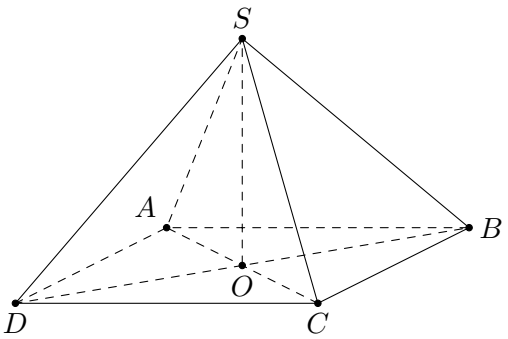
Chọn đáp án B □

Câu 163. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa SB và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc giữa cặp đường thẳng nào sau đây?

A. (SB, SO). **B**. (SB, BD). **C**. (SB, SA). **D**. (SO, BD).

✍Lời giải.

Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cắt nhau theo giao tuyến SO và cùng vuông góc với đáy nên $SO \perp (ABCD)$.
Vậy góc giữa SB và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc giữa SB và BD.



Chọn đáp án (B) □

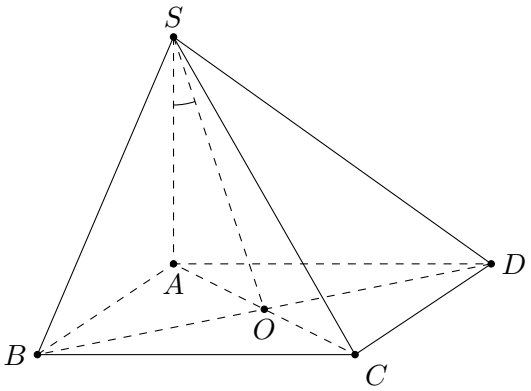
Câu 164. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{ABC} = 60°$, $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD).

A. $60°$. **B**. $90°$. **C**. $30°$. **D**. $45°$.

✍Lời giải.

Vì tam giác ABC cân và có góc $60°$ nên nó là tam giác đều.
Gọi O là trung điểm của AC. Ta có hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) vuông góc nhau theo giao tuyến SO, suy ra hình chiếu vuông góc của SA lên mặt phẳng (SBD) là SO. Do đó

$$(SA, (SBD)) = (SA, SO) = \widehat{ASO}.$$



Xét tam giác vuông SAO, có

$$OA = \frac{AC}{2} = \frac{2a}{2} = a,\ SA = a\sqrt{3}.$$

Suy ra

$$\tan \widehat{ASO} = \frac{AO}{SA} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{ASO} = 30°.$$

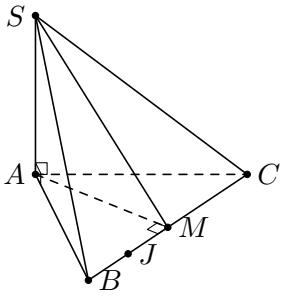
Vậy góc giữa SA và mặt phẳng (SBD) bằng $30°$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 165. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, M là trung điểm của BC, J là trung điểm của BM. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $BC \perp (SAC)$. **B**. $BC \perp (SAJ)$. **C**. $BC \perp (SAM)$. **D**. $BC \perp (SAB)$.

✍Lời giải.

Ta có $BC \perp SA$ (do $SA \perp (ABC)$) và $BC \perp AM$ (do $\triangle ABC$ cân tại A).
Suy ra $BC \perp (SAM)$.



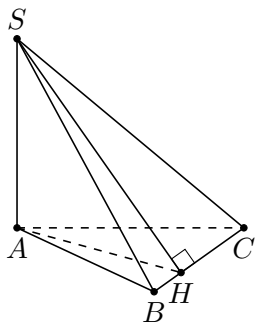
Chọn đáp án (C) □

Câu 166. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác không vuông và SA vuông góc với mặt phẳng đáy, gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên BC. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $BC \perp SC$. **B**. $BC \perp AH$. **C**. $BC \perp AB$. **D**. $BC \perp AC$.

✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BC \perp SH \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp AH.$

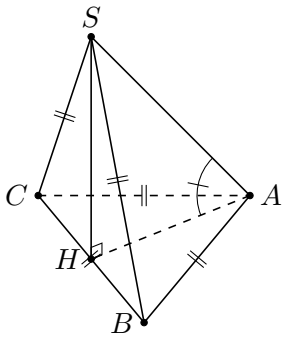


Chọn đáp án (B) □

Câu 167.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Biết tam giác SBC là tam giác đều. Gọi α là số đo của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC). Tính $\tan\alpha$.

A. 1. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.



✍Lời giải.

Hình chiếu của SA lên mặt phẳng (ABC) là AH. Do đó góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{SAH}$.

Tam giác ABC và SBC là các tam giác đều cùng cạnh a nên $AH = SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $\tan\alpha = 1$.

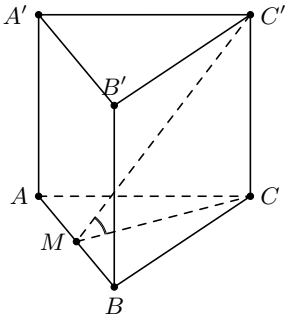
Chọn đáp án (A) □

Câu 168. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của AB và α là góc tạo bởi đường MC' và mặt phẳng (ABC). Khi đó $\tan\alpha$ bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\sqrt{\dfrac{3}{7}}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

✍Lời giải.

Ta có CM là hình chiếu của $C'M$ lên (ABC).
Do đó góc giữa MC' và (ABC) là góc giữa MC' và MC.
Xét tam giác MCC' vuông tại C, $\tan\alpha = \dfrac{CC'}{MC} = \dfrac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.



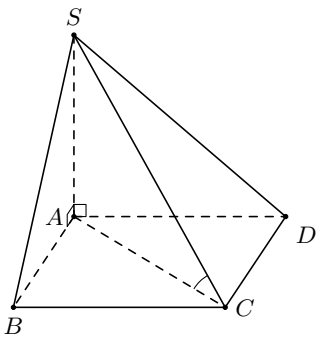
Chọn đáp án (D) □

Câu 169. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy. Góc giữa SC và mặt đáy là góc

A. $\widehat{SCA}$. **B.** $\widehat{SAC}$. **C.** $\widehat{SDA}$. **D.** $\widehat{SBA}$.

✍Lời giải.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$. Bởi vậy, góc giữa SC và mặt đáy $(ABCD)$ là góc giữa SC và AC, bằng góc $\widehat{SCA}$.



Chọn đáp án A □

Câu 170. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB = a$ và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

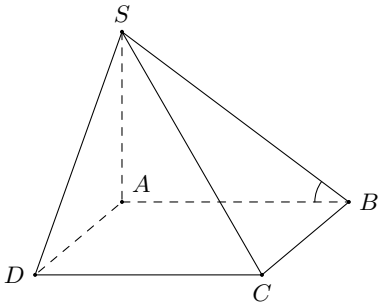
A. $45°$. **B**. $60°$. **C**. $30°$. **D**. $90°$.

✍Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của SB lên $(ABCD)$ là AB.
Khi đó, $(SB, (ABCD)) = (SB, AB) = \widehat{SBA}$.
Xét tam giác vuông SAB, ta có

$$\cos \widehat{SBA} = \frac{AB}{SB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $\widehat{SBA} = 60°$.



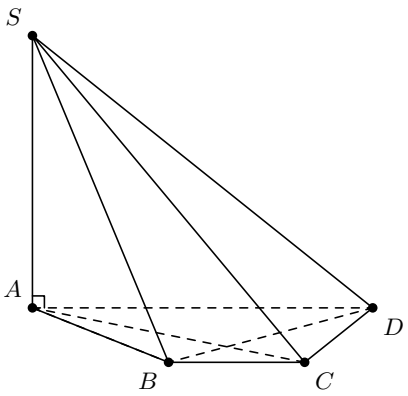
Chọn đáp án B □

Câu 171. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang cân, $SA \perp (ABCD)$, $AD = 2BC = 2AB$. Trong tất cả các tam giác mà 3 đỉnh lấy từ 5 điểm S, A, B, C, D có bao nhiêu tam giác vuông?

A. 5. **B**. 7. **C**. 3. **D**. 6.

✍Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình thang cân nên $AC \perp DC$ và $AB \perp BD$.
Do vậy $DB \perp (SAB)$ và $DC \perp (SAC)$, suy ra $\triangle SCD$ vuông tại C và $\triangle SBD$ vuông tại B.
Lại có, $SA \perp (ABCD)$ nên các tam giác SAD, SAB và SAC vuông tại A.
Mặt khác, tam giác ADC vuông tại C, tam giác ABD vuông tại B.
Vậy có 7 tam giác vuông thỏa mãn yêu cầu bài toán.



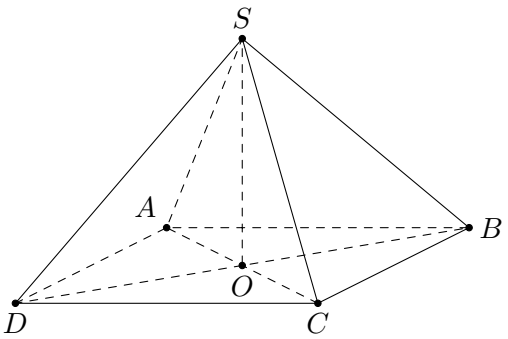
Chọn đáp án B □

Câu 172. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa SB và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc giữa cặp đường thẳng nào sau đây?

A. (SB, SO). **B**. (SB, BD). **C**. (SB, SA). **D**. (SO, BD).

✍Lời giải.

Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cắt nhau theo giao tuyến SO và cùng vuông góc với đáy nên $SO \perp (ABCD)$.
Vậy góc giữa SB và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc giữa SB và BD.



Chọn đáp án (B) □

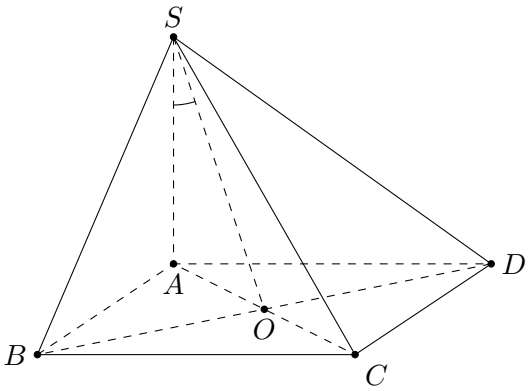
Câu 173. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{ABC} = 60°$, $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD).

A. $60°$. **B**. $90°$. **C**. $30°$. **D**. $45°$.

✍Lời giải.

Vì tam giác ABC cân và có góc $60°$ nên nó là tam giác đều.
Gọi O là trung điểm của AC. Ta có hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) vuông góc nhau theo giao tuyến SO, suy ra hình chiếu vuông góc của SA lên mặt phẳng (SBD) là SO. Do đó

$$(SA, (SBD)) = (SA, SO) = \widehat{ASO}.$$



Xét tam giác vuông SAO, có

$$OA = \frac{AC}{2} = \frac{2a}{2} = a,\ SA = a\sqrt{3}.$$

Suy ra

$$\tan \widehat{ASO} = \frac{AO}{SA} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{ASO} = 30°.$$

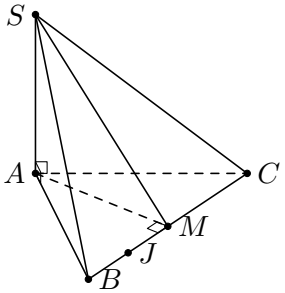
Vậy góc giữa SA và mặt phẳng (SBD) bằng $30°$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 174. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, M là trung điểm của BC, J là trung điểm của BM. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $BC \perp (SAC)$. **B**. $BC \perp (SAJ)$. **C**. $BC \perp (SAM)$. **D**. $BC \perp (SAB)$.

✍Lời giải.

Ta có $BC \perp SA$ (do $SA \perp (ABC)$) và $BC \perp AM$ (do $\triangle ABC$ cân tại A).
Suy ra $BC \perp (SAM)$.



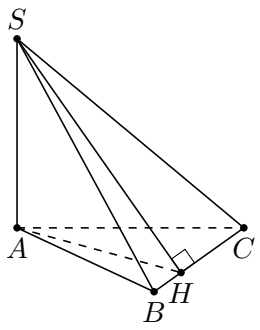
Chọn đáp án (C) □

Câu 175. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác không vuông và SA vuông góc với mặt phẳng đáy, gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên BC. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $BC \perp SC$. **B**. $BC \perp AH$. **C**. $BC \perp AB$. **D**. $BC \perp AC$.

✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BC \perp SH \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp AH.$

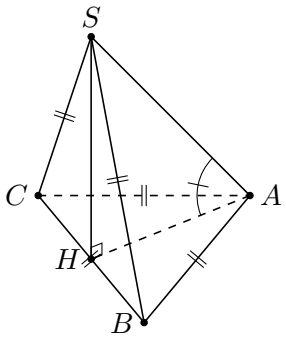


Chọn đáp án B □

Câu 176.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Biết tam giác SBC là tam giác đều. Gọi α là số đo của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC). Tính $\tan\alpha$.

A. 1. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.



✍Lời giải.

Hình chiếu của SA lên mặt phẳng (ABC) là AH. Do đó góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{SAH}$.

Tam giác ABC và SBC là các tam giác đều cùng cạnh a nên $AH = SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $\tan\alpha = 1$.

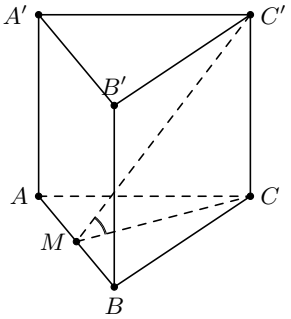
Chọn đáp án A □

Câu 177. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của AB và α là góc tạo bởi đường MC' và mặt phẳng (ABC). Khi đó $\tan\alpha$ bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\sqrt{\dfrac{3}{7}}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

✍Lời giải.

Ta có CM là hình chiếu của $C'M$ lên (ABC).
Do đó góc giữa MC' và (ABC) là góc giữa MC' và MC.
Xét tam giác MCC' vuông tại C, $\tan\alpha = \dfrac{CC'}{MC} = \dfrac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.



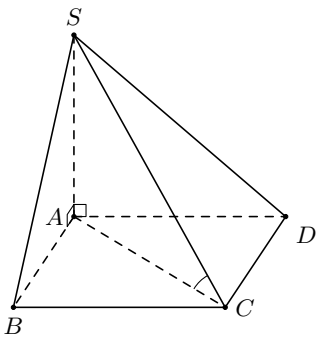
Chọn đáp án D □

Câu 178. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy. Góc giữa SC và mặt đáy là góc

A. $\widehat{SCA}$. **B.** $\widehat{SAC}$. **C.** $\widehat{SDA}$. **D.** $\widehat{SBA}$.

✍Lời giải.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$. Bởi vậy, góc giữa SC và mặt đáy $(ABCD)$ là góc giữa SC và AC, bằng góc $\widehat{SCA}$.



Chọn đáp án A □

Câu 179. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB = a$ và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

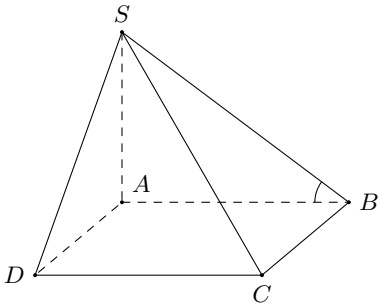
A. $45°$. **B**. $60°$. **C**. $30°$. **D**. $90°$.

✍Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của SB lên $(ABCD)$ là AB.
Khi đó, $(SB, (ABCD)) = (SB, AB) = \widehat{SBA}$.
Xét tam giác vuông SAB, ta có

$$\cos \widehat{SBA} = \frac{AB}{SB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $\widehat{SBA} = 60°$.



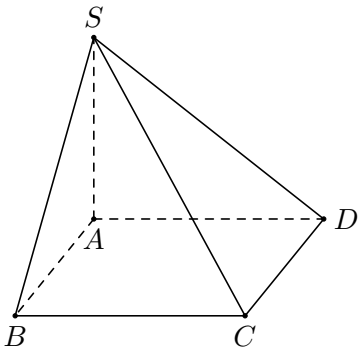
Chọn đáp án B □

Câu 180. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

A. $60°$. **B**. $90°$. **C**. $30°$. **D**. $45°$.

✍Lời giải.

Ta có AB là hình chiếu của SB trên $(ABCD)$.
Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng góc giữa SB và AB là góc $\widehat{ABS}$.
Tam giác SAB vuông tại A, $\cos \widehat{ABS} = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{1}{2}$
$\Rightarrow \widehat{ABS} = 60°$.



Chọn đáp án A □

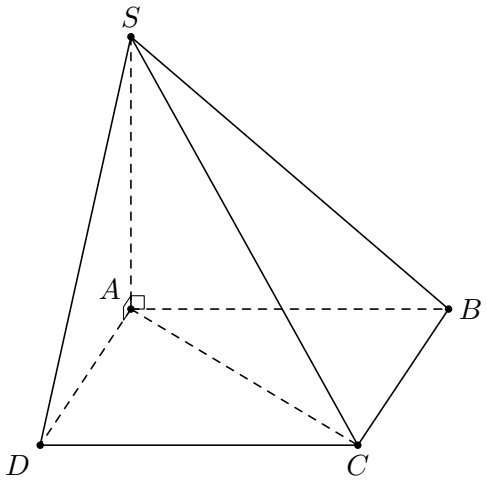
Câu 181. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

A. $45°$. **B**. $60°$. **C**. $30°$. **D**. $90°$.

✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases} SC \cap (ABCD) = C \\ SA \perp (ABCD) \text{ tại } A \end{cases}$
$\Rightarrow (SC, (ABCD)) = \widehat{(SC, AC)} = \widehat{SCA}$.
Xét tam giác SAC vuông tại A, ta có

$$\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^\circ.$$



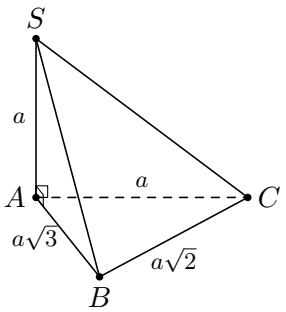
Chọn đáp án A ☐

Câu 182. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C, $AC = a$, $BC = \sqrt{2}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

A. 60°. **B**. 90°. **C**. 30°. **D**. 45°.

✍Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABC)$ nên AB là hình chiếu của SA trên mặt phẳng (ABC)
$\Rightarrow (SB, (ABC)) = (SB, AB) = \widehat{SBA}$.
Mặt khác có $\triangle ABC$ vuông tại C nên $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = a\sqrt{3}$.
Khi đó $\tan \widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
Vậy $(SB, (ABC)) = 30^\circ$.



Chọn đáp án C ☐

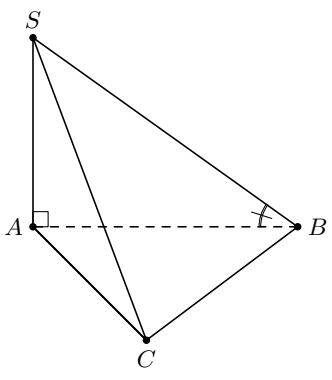
Câu 183. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB = a$ và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

A. 60°. **B**. 45°. **C**. 30°. **D**. 90°.

✍Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABC)$ tại A nên AB là hình chiếu của SB lên mặt phẳng đáy.
Suy ra góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy là góc $\widehat{SBA}$.
Tam giác SAB vuông tại A nên

$$\cos \widehat{SBA} = \frac{AB}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ.$$

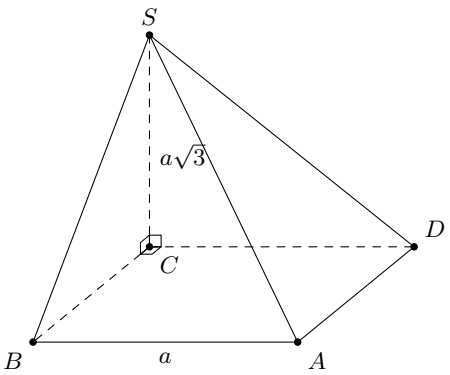


Chọn đáp án A ☐

Câu 184.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SC vuông góc với đáy và $SC = a\sqrt{3}$. Tính tan góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBC).

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.



✍Lời giải.

Ta có $\left.\begin{array}{l} AB \perp SC \\ AB \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp (SBC)$.

Suy ra hình chiếu của SA lên (SBC) là SB.

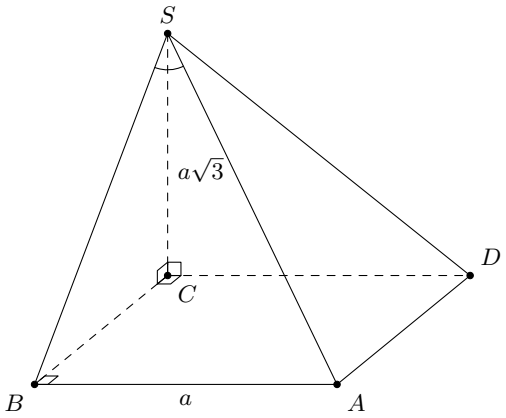
$\Rightarrow (SA, (SBC)) = (SA, SB) = \widehat{ASB}$.

Trong $\triangle SCB$ vuông tại C, ta có

$$SB = \sqrt{SC^2 + CB^2} = \sqrt{4a^2} = 2a.$$

Trong $\triangle SBA$ vuông tại B, ta có

$$\tan \widehat{BSA} = \frac{AB}{SB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$$



Vậy tan góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBC) là $\dfrac{1}{2}$.

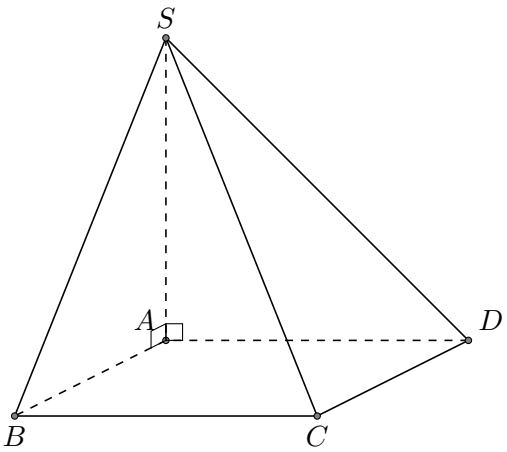
Chọn đáp án A □

Câu 185. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. AB vuông góc với mặt phẳng (SAC) .
B. AB vuông góc với mặt phẳng (SBC).
C. AB vuông góc với mặt phẳng (SAD).
D. AB vuông góc với mặt phẳng (SCD).

✍Lời giải.

Khẳng định đúng là "AB vuông góc với mặt phẳng (SAD)". Thật vậy, do $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp AB$, mặt khác $AB \perp AD$. Từ đó suy ra $AB \perp (SDA)$.



Chọn đáp án C □

Câu 186. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tâm O, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng $(ABCD)$ gần bằng?

A. 71°. **B.** 84°. **C.** 75°. **D.** 73°.

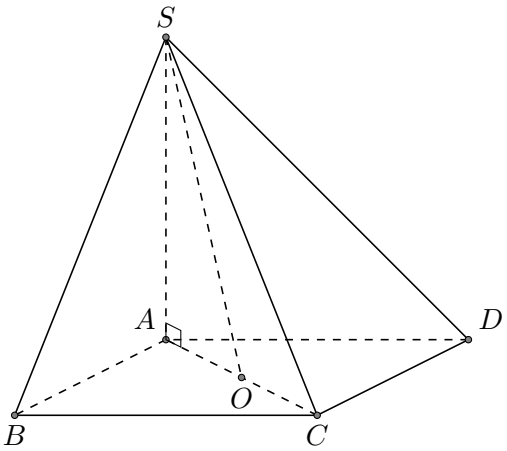
✍Lời giải.

Theo giả thiết thì AO là hình chiếu của SO lên mặt phẳng $(ABCD)$. Do đó góc giữa SO và $(ABCD)$ chính là góc $\widehat{SOA}$.

Ta có $SA = a\sqrt{6}$ và $OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Do đó

$$\tan\widehat{SOA} = \frac{SA}{OA} = 2\sqrt{3}.$$

Vậy góc giữa SO và $(ABCD)$ gần bằng $73°$.



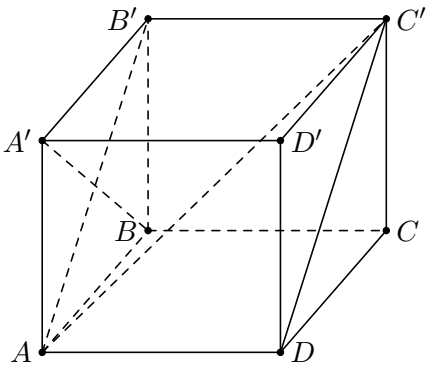
Chọn đáp án (D) □

Câu 187. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và AC' bằng

A. $60°$. **B**. $30°$. **C**. $90°$. **D**. $45°$.

✍Lời giải.

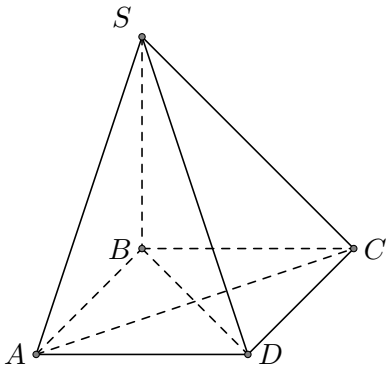
Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên ta có
$AD \perp (ABB'A') \Rightarrow A'B \perp AD$ (1).
$ABB'A'$ là hình vuông nên $A'B \perp AB'$ (2).
Từ (1), (2) $\Rightarrow A'B \perp (ADC'B') \Rightarrow A'B \perp AC'$.
Vậy góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và AC' bằng $90°$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 188.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SB vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ (tham khảo hình vẽ). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $AC \perp (SCD)$. **B**. $AC \perp (SBD)$.
C. $AC \perp (SBC)$. **D**. $AC \perp (SAB)$.



✍Lời giải.

Từ giả thiết $ABCD$ là hình vuông và SB vuông góc với đáy.

Ta có $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SB \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 189. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) thì đường thẳng b song song với mặt phẳng (P).

B. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b song song với mặt phẳng (P) thì đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P).

C. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì đường thẳng a song song với đường thẳng c.

D. Nếu hai đường thẳng phân biệt a và b cùng vuông góc với mặt phẳng (P) thì có đường thẳng c thuộc mặt phẳng (P) thỏa mãn a, b, c đồng phẳng.

✍Lời giải.

Hai đường thẳng a, b cùng vuông góc với mặt phẳng (P) thì a, b song song với nhau và do đó chúng đồng phẳng. Nếu gọi M, N lần lượt là giao điểm của a, b với mặt phẳng (P) thì đường thẳng đi qua MN đồng phẳng với a, b.

Do đó, khẳng định "Nếu hai đường thẳng phân biệt a và b cùng vuông góc với mặt phẳng (P) thì có đường thẳng c thuộc mặt phẳng (P) thỏa mãn a, b, c đồng phẳng "đúng.

Chọn đáp án (D) □

Câu 190. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tang góc giữa đường thẳng BD' và mặt phẳng $(ADD'A')$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **C**. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

✍Lời giải.

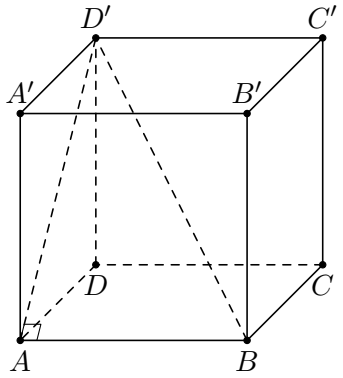
Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $BA \perp (ADD'A')$.

Do đó góc giữa đường thẳng BD' và mặt phẳng $(ADD'A')$ là góc $\widehat{BD'A}$.

Gọi độ dài cạnh của hình lập phương là a.

Khi đó $AB = a$, $AD' = a\sqrt{2}$.

Do đó $\tan \widehat{BD'A} = \dfrac{AB}{AD'} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 191.

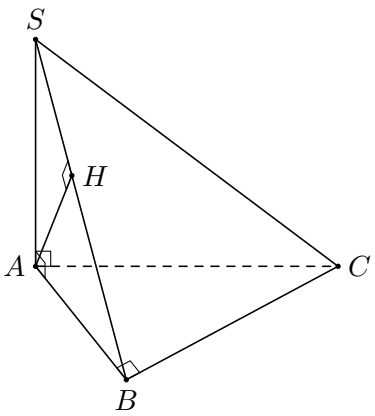
Cho hình chóp $S.ABC$, tam giác ABC vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy (ABC). Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SB (tham khảo hình vẽ bên). Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $AH \perp SC$.

B. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) là góc $\widehat{ASC}$.

C. $BC \perp (SAB)$.

D. Các mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông.



✍Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$.

Mặt khác $BC \perp AB$.

Suy ra $BC \perp (SAB)$ nên hình chiếu vuông góc của SC trên (SAB) là SB.

Vậy $(SC, (SAB)) = (SC, SB) = \widehat{BSC}$ (vì tam giác SBC vuông tại B).

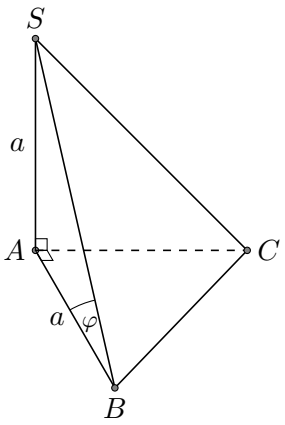
Chọn đáp án (B) □

Câu 192. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB = a$, $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy là

A. $45°$. **B**. $30°$. **C**. $60°$. **D**. $135°$.

✍Lời giải.

Theo bài ta có AB là hình chiếu của SB trên (ABC).
Vậy góc $(SB,(ABC))=(SB,AB)=\widehat{SBA}$.
Mà ΔSBA vuông cân tại A nên $\widehat{SBA}=45^\circ$.

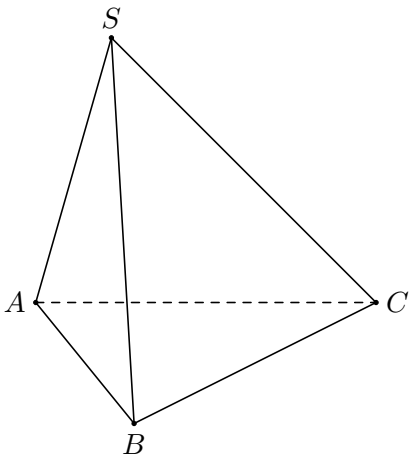


Chọn đáp án A □

Câu 193.

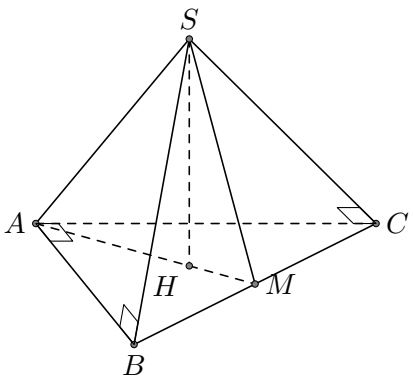
Cho hình chóp $SABC$ có $\widehat{SBA}=\widehat{BAC}=\widehat{ACS}=90^\circ$ và $AB=AC=a$, $SA=2a$ như hình vẽ. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 75°. **B**. 30°. **C**. 45°. **D**. 60°.



✍Lời giải.

• Do $\triangle SAB$ vuông tại B nên $SB=\sqrt{SA^2-AB^2}=a\sqrt{3}$. Tương tự, ta có $SC=a\sqrt{3}$.
• Gọi M là trung điểm BC.
Suy ra $\begin{cases}AM\perp BC\\SM\perp BC\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAM)$.
Gọi H là hình chiếu của S trên AM, suy ra $SH\perp(ABC)$.
Do đó, $(SA,(ABC))=(SA,AH)=\widehat{SAM}$.



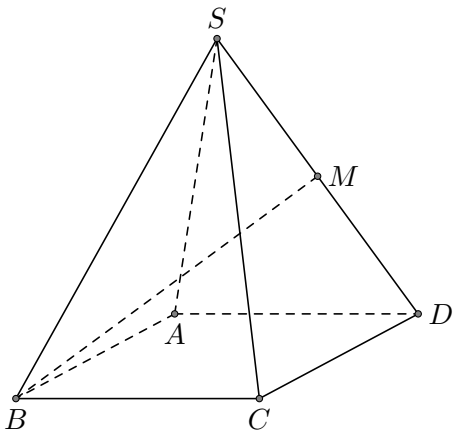
• Ta có $BC=a\sqrt{2}$, $AM=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$, $SM=\sqrt{SB^2-MB^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.
• $\cos\widehat{SAM}=\dfrac{AS^2+AM^2-SM^2}{2AS\cdot AM}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
• Vậy góc giữa SA và (ABC) bằng 45°.

Chọn đáp án C □

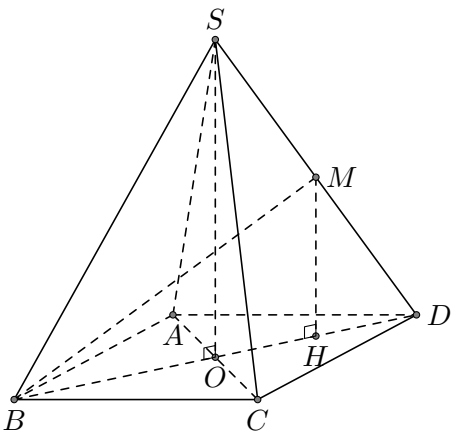
Câu 194.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên dài gấp đôi cạnh đáy. Gọi M là trung điểm của SD như hình vẽ. Tan của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$. **B.** $\dfrac{4}{5}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$. **D.** $\dfrac{6}{\sqrt{14}}$.



✍Lời giải.



- Gọi H là hình chiếu của M trên mặt phẳng $(ABCD)$. Suy ra H là trung điểm của OD.
- Ta có góc giữa BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{MBH}$.
- Không mất tính tổng quát, coi cạnh đáy có độ dài bằng a. Khi đó, cạnh bên có độ dài bằng $2a$.

Ta có $BD = a\sqrt{2}$ nên $OB = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Suy ra $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{7}{2}}a$.

Suy ra $MH = \dfrac{1}{2}SO = \dfrac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$. Lại có $BH = \dfrac{3}{4}BD = \dfrac{3\sqrt{2}a}{4}$.

- Ta có $\tan\widehat{MBH} = \dfrac{MH}{BH} = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 195. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$ và $SA = \dfrac{3a}{2}$. Gọi điểm M là trung điểm của cạnh BC và φ là góc giữa đường thẳng SM và mặt phẳng (ABC). Khi đó $\sin\varphi$ bằng

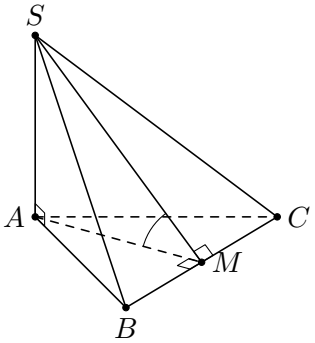
A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

✍Lời giải.

Góc giữa SM và (ABC) là góc $\widehat{SMA} = \varphi$.

Ta có $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $SM = \sqrt{SA^2 + AM^2} = a\sqrt{3}$.

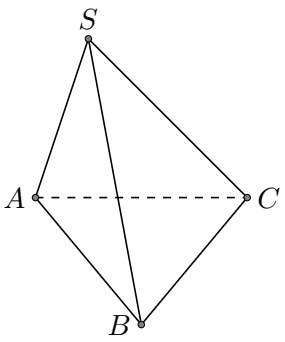
Vậy $\sin\varphi = \dfrac{SA}{SM} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



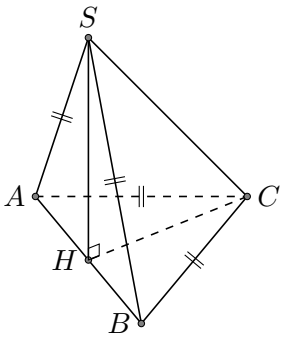
Chọn đáp án A □

Câu 196.
Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = CA = CB$. Tính φ là góc giữa SC và mặt phẳng (ABC), biết (SAB) vuông góc với (ABC).

A. $\varphi = 45°$. **B**. $\varphi = 60°$. **C**. $\varphi = 30°$. **D**. $\varphi = 90°$.



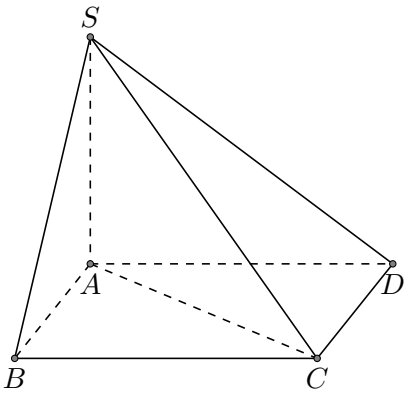
✍Lời giải.
Gọi H là trung điểm của AB, ta có $SH \perp AB$, $CH \perp AB$.
Mà $(SAB) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$.
Suy ra $SH \perp CH$ và $(SC, (ABC)) = \widehat{SCH}$.
Ta có $\triangle SAB = \triangle CAB$ (c.c.c) nên $SH = CH$.
Do đó $\triangle SCH$ vuông cân tại H.
Vậy $(SC, (ABC)) = \widehat{SCH} = 45°$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 197.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tam giác SAC cân và $SC = 2a$. Gọi ϕ là góc giữa SB và CD. Tính $\cos\phi$.

A. $\cos\phi = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **B**. $\cos\phi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
C. $\cos\phi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D**. $\cos\phi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



✍Lời giải.

— Vì $AB \parallel CD$ nên góc giữa SB và CD bằng góc giữa AB và SB. Suy ra $\phi = \widehat{SBA}$.

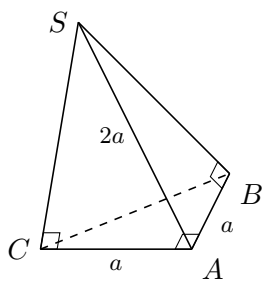
— Tam giác SAC là tam giác vuông cân ở A nên $SA = AC = \dfrac{SC}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}a$.

— $ABCD$ là hình vuông nên $AB = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = a$.

— $SB = \sqrt{AB^2 + SA^2} = \sqrt{3}a \Rightarrow \cos\phi = \cos\widehat{SBA} = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

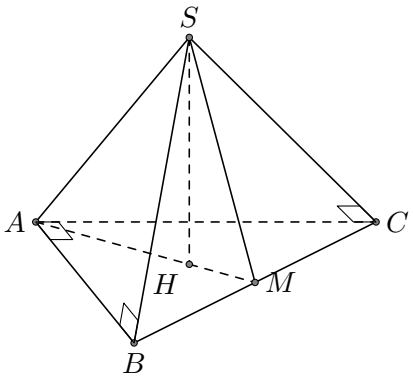
Chọn đáp án (C) □

Câu 198.
Cho hình chóp $SABC$ có $\widehat{SBA} = \widehat{BAC} = \widehat{ACS} = 90^\circ$ và $AB = AC = a$, $SA = 2a$ (tham khảo hình bên).
Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng



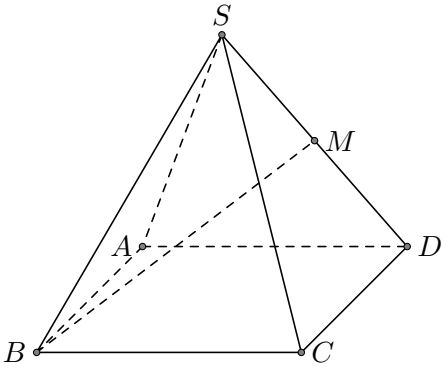
A. 75°. **B**. 60°. **C**. 30°. **D**. 45°.

✍Lời giải.
Do $\triangle SAB$ vuông tại B nên $SB = \sqrt{SA^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$. Tương tự, ta có $SC = a\sqrt{3}$.
Gọi M là trung điểm BC.
Suy ra $\begin{cases} AM \perp BC \\ SM \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM)$.
Gọi H là hình chiếu của S trên AM, suy ra $SH \perp (ABC)$.
Do đó, $(SA, (ABC)) = (SA, AH) = \widehat{SAM}$.



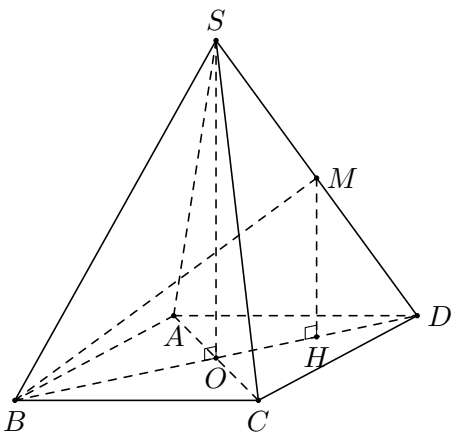
Ta có $BC = a\sqrt{2}$, $AM = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, $SM = \sqrt{SB^2 - MB^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.
$\cos\widehat{SAM} = \dfrac{AS^2 + AM^2 - SM^2}{2AS \cdot AM} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
Vậy góc giữa SA và (ABC) bằng 45°.
Chọn đáp án (D) □

Câu 199.
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên dài gấp đôi cạnh đáy. Gọi M là trung điểm của SD (tham khảo hình vẽ bên).
Tan của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. $\dfrac{6}{\sqrt{14}}$. **B**. $\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$. **C**. $\dfrac{4}{5}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

✍Lời giải.
Gọi H là hình chiếu của M trên mặt phẳng $(ABCD)$. Suy ra H là trung điểm của OD.
Ta có góc giữa BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{MBH}$.
Không mất tính tổng quát, coi cạnh đáy có độ dài bằng a. Khi đó, cạnh bên có độ dài bằng $2a$.
Ta có $BD = a\sqrt{2}$ nên $OB = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.
Suy ra $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{7}{2}}a$.
Suy ra $MH = \dfrac{1}{2}SO = \dfrac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$. Lại có $BH = \dfrac{3}{4}BD = \dfrac{3\sqrt{2}a}{4}$.



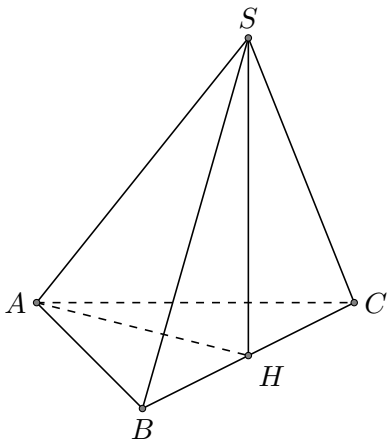
Ta có $\tan\widehat{MBH} = \dfrac{MH}{BH} = \dfrac{a\sqrt{7}}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 200.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Biết tam giác SBC đều (tham khảo hình bên). Tính số đo góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC).

A. $45°$. **B**. $60°$. **C**. $30°$. **D**. $75°$.



✍Lời giải.

Ta có $SH \perp (ABC) \Rightarrow HA$ là hình chiếu của SA lên mặt phẳng (ABC).

Suy ra $\widehat{SAH} = (SA, (ABC))$.

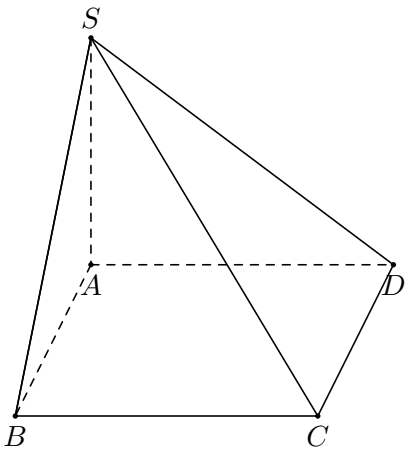
Hai tam giác ABC và SBC đều cạnh a nên tam giác SAH vuông cân tại H. Do đó $\widehat{SAH} = 45°$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 201.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc giữa

A. SC và BC. **B**. SC và DC. **C**. SC và SA. **D**. SC và AC.



✍Lời giải.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$. Do đó góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc giữa SC và AC.

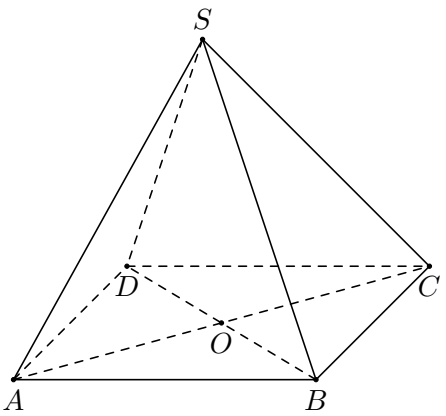
Chọn đáp án (D) □

Câu 202.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O và $SA = SC$, $SB = SD$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $SO \perp (ABCD)$. **B**. $AC \perp (SBD)$.

C. $BD \perp (SAC)$. **D**. $BC \perp (SAB)$.



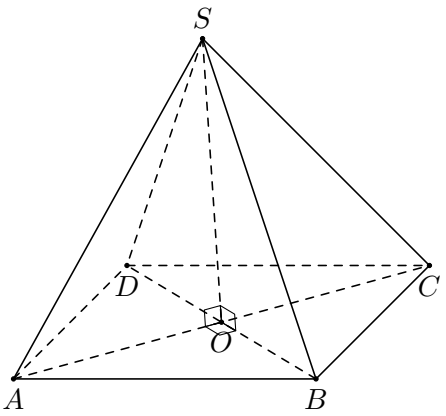
✍Lời giải.

Do $ABCD$ là hình thoi tâm O và $SA = SC$, $SB = SD$ nên $\begin{cases} SO \perp AC \\ SO \perp BD \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Từ $\begin{cases} SO \perp AC \\ AC \perp BD \end{cases}$ suy ra $AC \perp (SBD)$.

Từ $\begin{cases} SO \perp BD \\ AC \perp BD \end{cases}$ suy ra $BD \perp (SAC)$.

Như vậy, các khẳng định "$SO \perp (ABCD)$", "$AC \perp (SBD)$", "$BD \perp (SAC)$" là các khẳng định đúng.



Khẳng định "$BC \perp (SAB)$" là khẳng định sai. Vì nếu $BC \perp (SAB)$ suy ra $BC \perp SB$, cùng với $BC \perp SO$ ta có $BC \perp (SBD)$, nên qua điểm B có hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng BC (vô lí).

Chọn đáp án (D) □

Câu 203. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC. Tính góc giữa đường thẳng MN với mặt phẳng $(ABCD)$ biết $MN = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

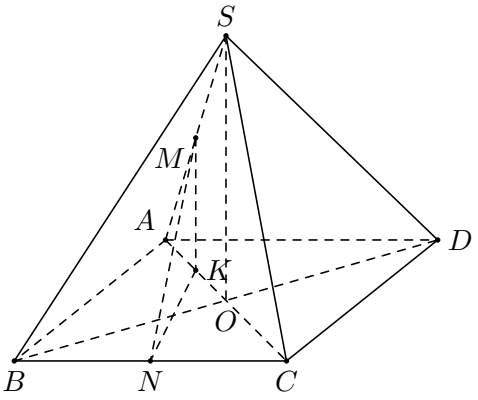
A. 90° . **B.** 30° . **C.** 60° . **D.** 45° .

✍Lời giải.

Gọi K là trung điểm AO thì $MK \parallel SO$ nên $MK \perp (ABCD) \Rightarrow MK \perp KN$.

Ta có $KN^2 = CK^2 + CN^2 - 2CK \cdot CN \cdot \cos 45^\circ = \dfrac{5a^2}{8} \Rightarrow KN = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$.

Đặt $\alpha = (MN, (ABCD)) = \widehat{MNK}$ thì $\cos\alpha = \dfrac{KN}{MN} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$.



Chọn đáp án (C) □

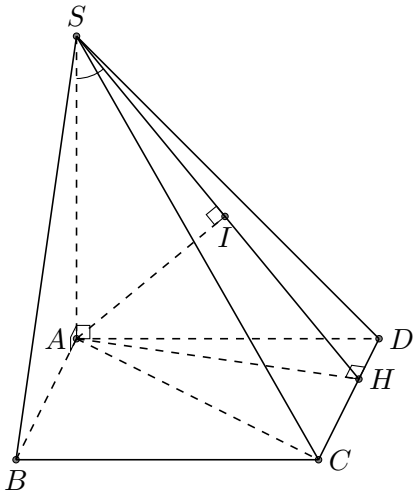
Câu 204. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa SA và mặt phẳng (SCD). Tính $\tan\alpha$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

✍Lời giải.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ hạ $AH \perp CD$ (1).
Do giả thiết $SA \perp (ABCD)$ suy ra $SA \perp CD$ (2).
Từ (1), (2) suy ra $CD \perp (SAH)$.
Tương tự trong mặt phẳng (SAH) kẻ $AI \perp SH$.
Theo chứng minh trên suy ra $CD \perp AI$.
Do đó

$$\begin{cases} AI \perp CD \\ AI \perp SH \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD).$$



Vậy góc giữa SA và mặt phẳng (SCD) bằng $\widehat{ASI} = \alpha$.
Xét tam giác vuông SAH ta có $\tan\alpha = \dfrac{AH}{SA}$.
Do giả thiết suy ra tam giác ACD đều cạnh a nên $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Khi đó $\tan\alpha = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}$.

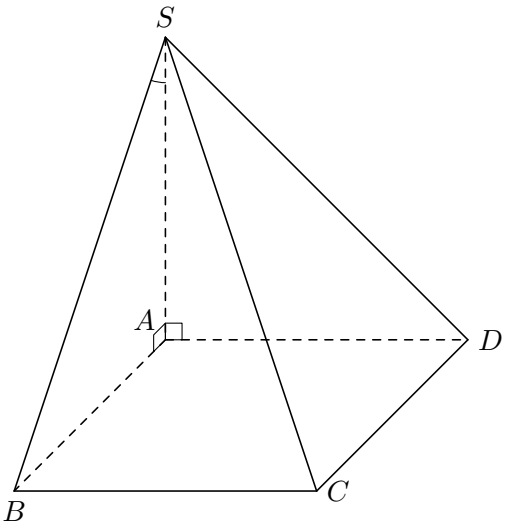
Chọn đáp án A □

Câu 205. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SA = 2a$. Tính cosin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD).

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAC) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (SAC) = SA \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD).$$



A là hình chiếu vuông góc cũa B trên (SAD)
$\Rightarrow SA$ là hình chiếu vuông góc của SB trên (SAD)
$\Rightarrow (SB;(SAD)) = (SB;SA) = \widehat{ASB}$.
Xét ΔSAB vuông tại A
$SB = \sqrt{AB^2 + SA^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$.

$$\Rightarrow \cos\widehat{ASB} = \frac{SA}{SB} = \frac{2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 206. Cho đường thẳng a và các mặt phẳng phân biệt (P), (Q), (R). Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

A. Nếu $\begin{cases} a \perp (P) \\ (P) \parallel (Q) \end{cases}$ thì $a \perp (Q)$.

B. Nếu $\begin{cases} (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \\ (P) \cap (Q) = a \end{cases}$ thì $a \perp (R)$.

C. Nếu $\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (Q) \parallel a \end{cases}$ thì $(P) \perp a$.

D. Nếu $\begin{cases} (P) \parallel (Q) \\ (Q) \perp (R) \end{cases}$ thì $(P) \perp (R)$.

✍Lời giải.

Nếu $\begin{cases}(P)\perp(Q)\\(Q)\parallel a\end{cases}$ thì chưa khẳng định được vị trí tương đối giữa (P) và a.

Chọn đáp án C ☐

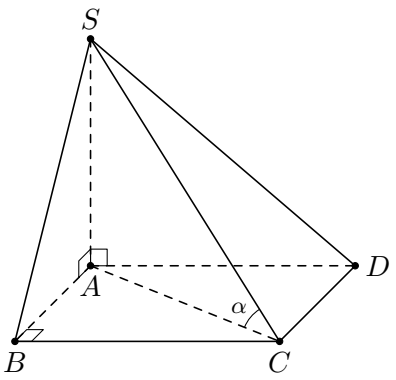
Câu 207. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tâm O. Cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng đáy. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $\alpha=60^\circ$. **B**. $\alpha=75^\circ$. **C**. $\tan\alpha=1$. **D**. $\tan\alpha=\sqrt{2}$.

✍Lời giải.

Ta có AC là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$ nên $\alpha=(SC,(ABCD))=\widehat{SCA}$.
Trong tam giác ABC vuông cân tại B thì $AC=AB\sqrt{2}=a\sqrt{2}$.
Tam giác SAC vuông tại A nên ta có

$$\tan\alpha=\frac{SA}{AC}=\frac{2a}{a\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$



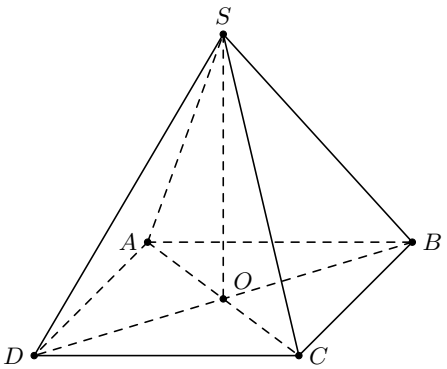
Chọn đáp án D ☐

Câu 208. Cho hình thoi $ABCD$ có tâm O, $BD=4a, AC=2a$. Lấy điểm S không thuộc $(ABCD)$ sao cho $SO\perp(ABCD)$. Biết $\tan\widehat{SBO}=\dfrac{1}{2}$. Tính số đo góc giữa SC và $(ABCD)$.

A. 60°. **B**. 75°. **C**. 30°. **D**. 45°.

✍Lời giải.

Vì $SO\perp(ABCD)$ nên tam giác SBO vuông tại O. Khi đó $\tan\widehat{SBO}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{SO}{BO}=\dfrac{SO}{2a}\Rightarrow SO=a$.
$SO\perp(ABCD)$ suy ra hình chiếu của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$ là CO hay góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCO}$.
Ta có $\tan(SC,(ABCD))=\tan(SC,CO)=\tan\widehat{SCO}=\dfrac{SO}{CO}=\dfrac{a}{a}=1$. Suy ra $\widehat{SCO}=45^\circ$.
Vậy góc SC và $(ABCD)$ là 45°.



Chọn đáp án D ☐

Câu 209. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào sai?

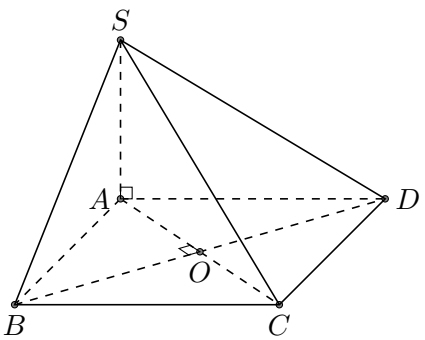
A. $AD\perp SC$. **B**. $SA\perp BD$. **C**. $SO\perp BD$. **D**. $SC\perp BD$.

✍Lời giải.

— Do $ABCD$ là hình thoi nên $AC\perp BD$.

— Có $\begin{cases}SA\perp BD\ (\text{do}\ SA\perp(ABCD))\\AC\perp BD.\end{cases}$

Suy ra $BD\perp(SAC)$, do đó $SC\perp BD$.
Mà $SO\subset(SAC)$ nên suy ra $SO\perp BD$.
Như vậy chỉ có khẳng định $AD\perp SC$ là sai.



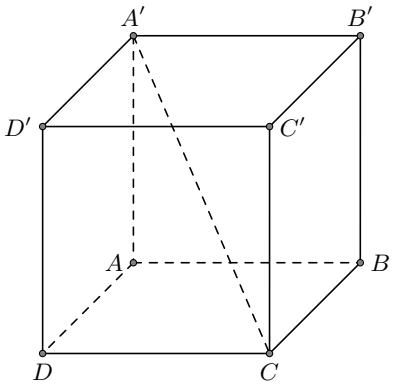
Chọn đáp án A ☐

Câu 210.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi α là góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(A'B'C'D')$. Giá trị của $\tan\alpha$ là

A. $\tan\alpha = \sqrt{2}$. **B**. $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$.

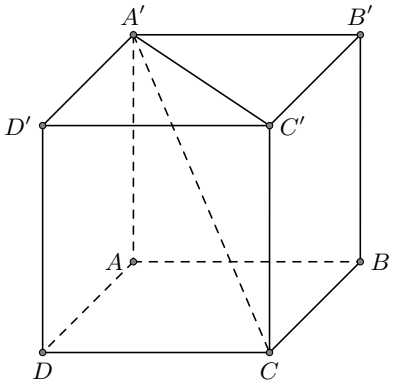
C. $\tan\alpha = \dfrac{1}{3}$. **D**. $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



✍Lời giải.

Góc giữa $A'C$ với $(A'B'C'D')$ là $\alpha = \widehat{CA'C'}$.

Có $\tan\alpha = \dfrac{CC'}{A'C'} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án D □

Câu 211. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Lấy điểm M trên đoạn SD sao cho $MS = 2MD$. Tang của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C**. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D**. $\dfrac{1}{5}$.

✍Lời giải.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có $SO \perp (ABCD)$ và

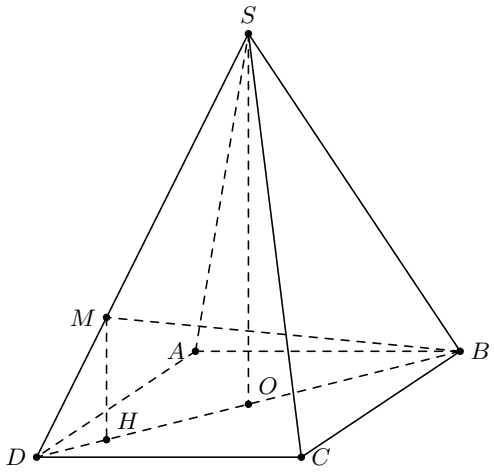
$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên $(ABCD)$.

Khi đó $MH \parallel SO$ và $H \in BD$.

Hơn nữa $\dfrac{MH}{SO} = \dfrac{DH}{DO} = \dfrac{DM}{DS} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow MH = \dfrac{SO}{3} = \dfrac{a\sqrt{2}}{6}$.

Từ $\dfrac{DH}{DO} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow DH = \dfrac{DB}{6} \Rightarrow BH = \dfrac{5DB}{6} = \dfrac{a5\sqrt{2}}{6}$.



Ta có $MH \perp (ABCD)$ và $BM \cap (ABCD) = B$ nên góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{MBH}$.

Tam giác MHB vuông tại H nên $\tan\widehat{MBH} = \dfrac{MH}{BH} = \dfrac{1}{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 212. Cho a, b, c là các đường thẳng trong không gian. Xét các mệnh đề sau

(I) Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \parallel c$.

(II) Nếu $a \perp (\alpha)$ và $b \parallel (\alpha)$ thì $a \perp b$.

(III) Nếu $b \perp c$ và $a \parallel b$ thì $a \perp c$.

(IV) Nếu $a \perp b, b \perp c$ và a cắt c thì $b \perp (a, c)$.

Có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 2. **B**. 1. **C**. 3. **D**. 4.

✍Lời giải.

Mệnh đề (I) sai. Chẳng hạn b vuông góc với mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a và c cắt nhau.
Các mệnh đề (II), (III), (IV) đúng.
Chọn đáp án C □

Câu 213. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC vuông tại B, SA vuông góc với đáy ABC. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. $SB \perp BC$. **B**. $SA \perp AB$. **C**. $SB \perp AC$. **D**. $SA \perp BC$.

✍Lời giải.

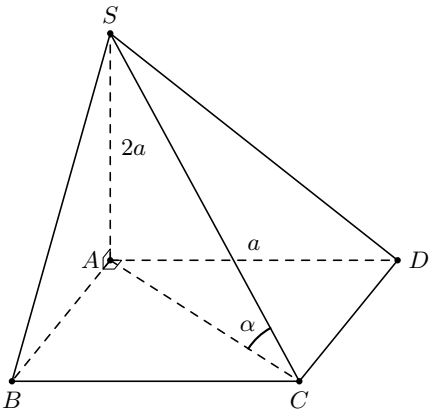
Ta có $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AB$ và $SA \perp BC$.
Mặt khác ta có $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases}$ nên $BC \perp (SAB)$, suy ra $SB \perp BC$.
Vậy khẳng định sai là "$SB \perp AC$".
Chọn đáp án C □

Câu 214. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là α. Khi đó $\tan\alpha$ bằng

A. 2. **B**. $2\sqrt{2}$. **C**. $\sqrt{2}$. **D**. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

✍Lời giải.

Ta có $AC = a\sqrt{2}$.
Xét tam giác SAC vuông tại $A \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{2a}{a\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

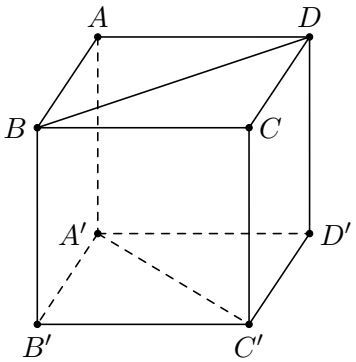


Chọn đáp án C □

Câu 215.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó góc giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng

A. 90°.
B. 30°.
C. 60°.
D. 45°.



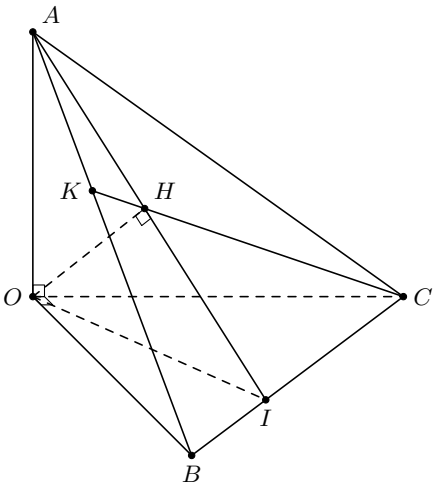
✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases} A'C' \perp B'D' \\ A'C' \perp BB' \end{cases} \Rightarrow A'C' \perp (BDD'B') \Rightarrow A'C' \perp BD$.
Vậy góc giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng 90°.
Chọn đáp án A □

Câu 216. Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi H là hình chiếu của O lên (ABC). Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. H là trực tâm tam giác ABC.
B. $3OH^2 = AB^2 + AC^2 + BC^2$.
C. $OA \perp BC$.
D. $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

✍Lời giải.



— Vì OA, OB, OC đôi một vuông góc nên $OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$.

— Gọi I là giao điểm của AH với BC, K là giao điểm của CH và AB.
Ta có $\begin{cases} OA \perp BC \\ OH \perp BC \quad (OH \perp (ABC)) \end{cases}$
$\Rightarrow BC \perp (OAI) \Rightarrow BC \perp AI \quad (1)$.
Lại có $\begin{cases} OC \perp AB \quad (OC \perp (OAB)) \\ OH \perp AB \quad (OH \perp (ABC)) \end{cases}$
$\Rightarrow AB \perp (OCK) \Rightarrow AB \perp CK \quad (2)$.
Từ (1) và (2) ta suy ra AI và CK là hai đường cao trong tam giác ABC. Chứng tỏ rằng H là trực tâm tam giác ABC.

— Vì $BC \perp (OAI)$ nên $BC \perp OI$. Xét tam giác OAI vuông tại O ta có

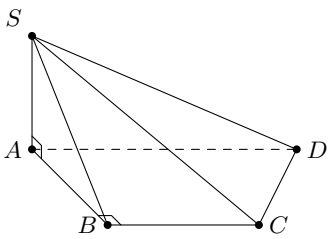
$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 217. Cho hình chóp $S.ABCD$ trong đó SA, AB, BC đôi một vuông góc và $SA = AB = BC = 1$. Khoảng cách giữa hai điểm S và C nhận giá trị nào trong các giá trị sau?

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.
Vì $SA \perp BC$, $AB \perp BC$ nên $BC \perp (SAB) \Rightarrow SB \perp BC$ hay tam giác SBC vuông tại B. Tính được $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{2}$ suy ra $SC = \sqrt{SB^2 + BC^2} = \sqrt{3}$.



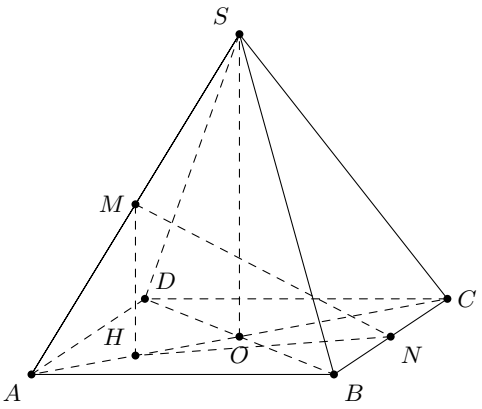
Chọn đáp án B □

Câu 218. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng a, SO vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Tính góc giữa đường thẳng MN với mặt phẳng $(ABCD)$, biết $MN = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

✍Lời giải.
Gọi H là trung điểm của AO suy ra $MH \parallel SO$. Mà $SO \perp (ABCD)$ nên $MH \perp (ABCD)$, do đó góc giữa đường thẳng MN và $(ABCD)$ bằng $\widehat{MNH}$. Theo định lí cô-sin trong $\triangle HNC$ ta có

$$\begin{aligned} HN &= \sqrt{NC^2 + HC^2 - 2NC \cdot HC \cdot \cos 45^\circ} \\ &= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \frac{a\sqrt{10}}{4}. \end{aligned}$$



Xét tam giác MNH có $\cos \widehat{MNH} = \dfrac{NH}{NM} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{MNH} = 60^\circ$. Vậy góc giữa đường thẳng MN với mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60°.
Chọn đáp án C □

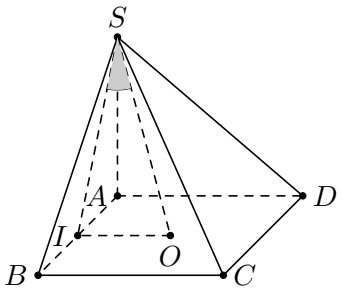
Câu 219. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng a, $SA = a$, và SA vuông góc với đáy. Tang của góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng (SAB) bằng

A. 2. **B**. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C**. $\sqrt{5}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

✍Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AB. Vì $OI \parallel AD$ mà $AD \perp (SAB)$ nên $OI \perp (SAB)$.

Do đó SI là hình chiếu vuông góc của SO trên mặt phẳng (SAB). Nên $\widehat{ISO}$ là góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng (SAB).



Ta có $OI = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{a}{2}$, $SI = \sqrt{SA^2 + AI^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Xét tam giác SOI vuông tại I, ta có

$$\tan \widehat{ISO} = \frac{OI}{SI} = \frac{\dfrac{a}{2}}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 220. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

A. Đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (P) thì $d \perp (P)$.

B. Nếu đường thẳng d nằm trong (P) và $d \perp (Q)$ thì $(P) \perp (Q)$.

C. Nếu $(P) \perp (Q)$ và cắt nhau theo giao tuyến a, $a \subset (P)$ và $a \perp (P)$ thì $a \perp (Q)$.

D. Nếu $a \perp (P)$ và $b \parallel (P)$ thì $a \perp b$.

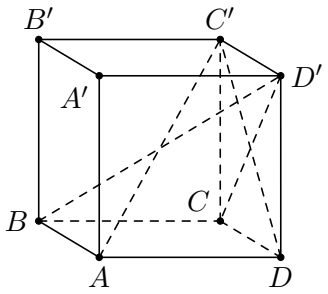
✍Lời giải.

Đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng **cắt nhau** nằm trong (P) thì $d \perp (P)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 221.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa đường thẳng BD' và mặt phẳng (ADC') bằng α. Tính $\tan\alpha$.

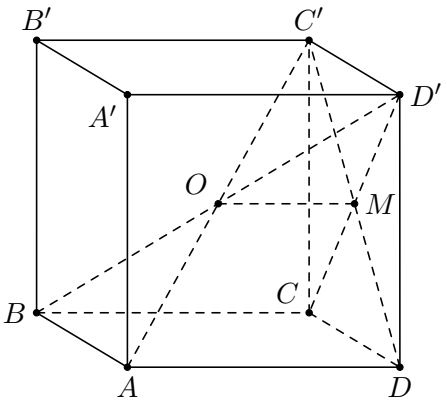


A. $\tan\alpha = 1$. **B**. $\tan\alpha$ không xác định.

C. $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D**. $\tan\alpha = \sqrt{2}$.

✍Lời giải.

Gọi O, M lần lượt là trung điểm của BD', CD'. Ta có $D'C \perp DC'$ và $D'C \perp AD$ nên $D'C \perp (ADC')$, suy ra



$$\alpha = \big(BD', (ADC')\big) = \big(OD', OM\big) = \widehat{MOD'}.$$

Do đó

$$\tan\alpha = \frac{MD'}{MO} = \frac{AD}{2} : \frac{DD'}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 222. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $SA \perp (ABC)$. Cho $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $SA = 2a$. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC. Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P).

A. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$. **B**. $\dfrac{a^2\sqrt{6}}{4}$. **C**. $\dfrac{a^2\sqrt{6}}{3}$. **D**. $\dfrac{a^2\sqrt{6}}{5}$.

✍Lời giải.

Gọi M là trung điểm của SC. Do $SA = AC = 2a$ nên

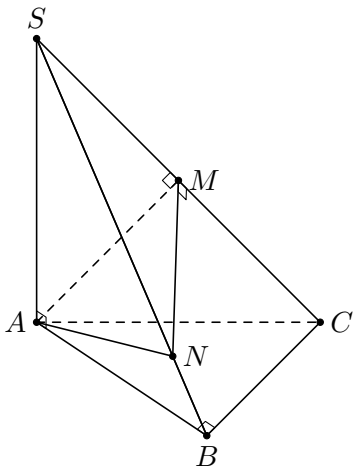
$$AM \perp SC. \tag{1}$$

Trong (SBC), gọi điểm N thuộc cạnh SB sao cho

$$MN \perp SC. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra $SC \perp (AMN)$. Khi đó thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) là tam giác AMN.

Ta có $AM = \dfrac{SC}{2} = a\sqrt{2}$. (3)



Vì $\triangle SMN \sim \triangle SBC$ nên

$$\frac{SM}{SB} = \frac{MN}{BC} \Leftrightarrow MN = \frac{SM \cdot BC}{SB} = \frac{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{3}}{a\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{30}}{5}. \tag{4}$$

$$\frac{SN}{SC} = \frac{MN}{BC} \Leftrightarrow SN = \frac{SC \cdot MN}{BC} = \frac{2a\sqrt{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{30}}{5}}{a\sqrt{3}} = \frac{4a\sqrt{5}}{5}.$$

Cách 1.

Xét $\triangle SAB$, $\cos S = \dfrac{SA}{SB} = \dfrac{2a}{a\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Xét $\triangle SAB$,

$$AN^2 = SA^2 + SN^2 - 2SA \cdot SN \cdot \cos S = 4a^2 + \frac{16a^2}{5} - 2 \cdot 2a \cdot \frac{4a\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{4a^2}{5}.$$

$$\Leftrightarrow AN = \frac{2a\sqrt{5}}{5}. \tag{5}$$

Từ (3),(4) và (5) đặt $p = \dfrac{AM + MN + AN}{2}$. Ta tính được

$$S_{AMN} = \sqrt{p(p - AM)(p - MN)(p - AN)} = \frac{a^2\sqrt{6}}{5}.$$

Cách 2.

Ta có

$$\begin{aligned} & \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ACB}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SN}{SB} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{SM \cdot S_{AMN}}{SA \cdot S_{ACB}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SN}{SB} \\ \Leftrightarrow\ & S_{AMN} = \frac{S_{ACB} \cdot SA \cdot SN}{SC \cdot SB} = \frac{\dfrac{1}{2}a^2\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \dfrac{4a\sqrt{5}}{5}}{2a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{5}} = \frac{a^2\sqrt{6}}{5}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 223. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Nếu $b \parallel (P)$ thì $b \perp a$.
B. Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$.
C. Nếu $b \perp (P)$ thì $b \parallel a$.
D. Nếu $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.

Lời giải.

Mệnh đề **sai** là "Nếu $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$" vì nếu $b \perp a$ có thể $b \subset (P)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 224. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, đường cao $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy của hình chóp.

A. 75°. **B**. 30°. **C**. 45°. **D**. 60°.

✍Lời giải.

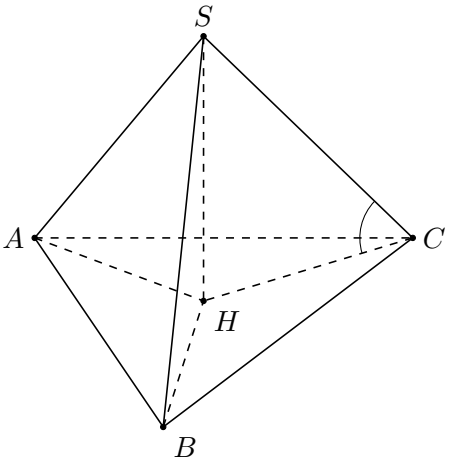
Vì $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều, nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Suy ra CH là hình chiếu của SC trên (ABC),

do đó $(SC;(ABC)) = (SC;CH) = \widehat{SCH}$.

Mặt khác $\tan\widehat{SCH} = \dfrac{SH}{CH} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} : \dfrac{a\sqrt{3}}{3} = 1 \Rightarrow \widehat{SCH} = 45°$.

Vậy góc cần tìm là 45°.



Chọn đáp án C □

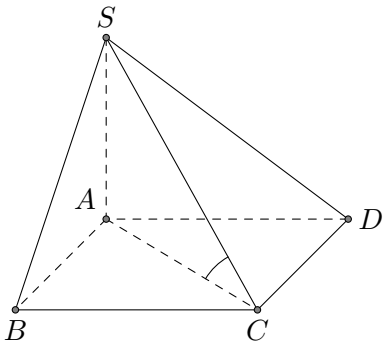
Câu 225. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $ABCD$.

A. 60°. **B**. 45°. **C**. 30°. **D**. 90°.

✍Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng $ABCD$ là AC, do đó góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $ABCD$ là góc giữa SC và AC, hay góc $\widehat{SCA}$.

Xét tam giác SCA vuông tại A có $SA = AC = a\sqrt{2}$, suy ra tam giác SCA vuông cân tại A, do đó $\widehat{SCA} = 45°$.



Chọn đáp án B □

Câu 226. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng $2a$, $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm BC, gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SM. Tính diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$?

A. $\dfrac{a^2\sqrt{6}}{2}$. **B**. $\dfrac{a^2}{2}$. **C**. $\dfrac{a^2\sqrt{6}}{4}$. **D**. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

✍Lời giải.

Dễ thấy $\triangle SAB = \triangle SAC \Rightarrow SB = SC \Rightarrow \triangle SBC$ cân tại S.

Vì M là trung điểm của BC nên $SM \perp BC$.

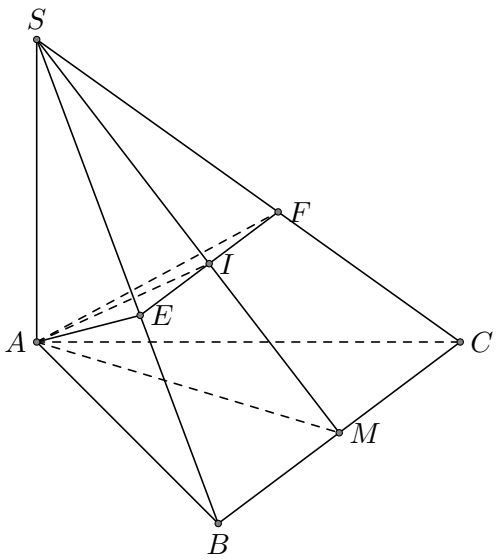
Ta có $\begin{cases} (P) \perp SM \\ BC \perp SM \Rightarrow BC \parallel (P). \\ BC \not\subset (P) \end{cases}$

Kẻ $AI \perp SM$ tại I.

Từ $\begin{cases} BC \parallel (P) \\ BC \subset (SBC) \\ I \in (P) \cap (SBC) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (SBC) = Ix \parallel BC.$

Đường thẳng Ix cắt SB, SC lần lượt tại E và F.

Ta có $AM = AB\sin\widehat{B} = 2a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.



Từ đó suy ra $\triangle SAM$ vuông cân tại A nên I, E, F lần lượt là trung điểm của SM, SB, SC. Trong tam

giác SBC có $EF = \dfrac{1}{2}BC = a$.

Trong tam giác vuông cân SAM có $AI = AM \sin \widehat{M} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Thiết diện cần tìm tam giác SEF.

Diện tích thiết diện $S_{SEF} = \dfrac{1}{2} \cdot SI \cdot EF = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{4}$.

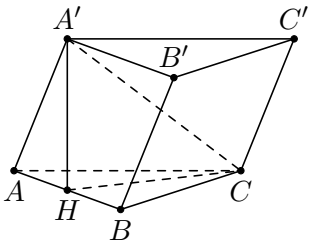
Chọn đáp án C □

Câu 227. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy là tam giác đều cạnh $AB = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của AB. Biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$. Góc giữa đường thẳng $A'C$ và (ABC) là

A. $\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $\dfrac{\pi}{3}$. **C.** $\arcsin \dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{\pi}{6}$.

✍Lời giải.

Ta có $\triangle HAA' = \triangle HAC \Rightarrow HA' = HC \Rightarrow \triangle HA'C$ vuông cân tại H.
Góc giữa $A'C$ và (ABC) là $\widehat{A'CH} = \dfrac{\pi}{4}$.

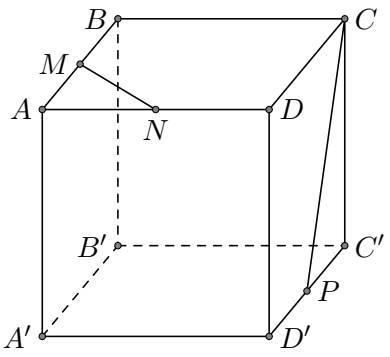


Chọn đáp án A □

Câu 228.

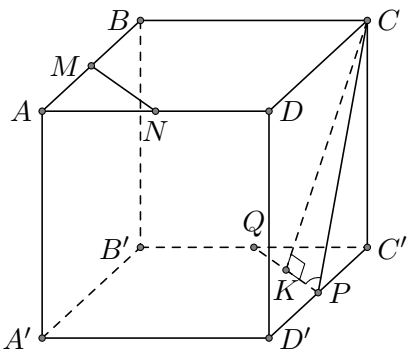
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AD, $C'D'$. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng MN và CP.

A. $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.



✍Lời giải.

Gọi Q là trung điểm của $B'C'$. Ta có $MN \parallel PQ$, do đó $(\widehat{MN, CP}) = (\widehat{PQ, CP}) = \widehat{CPQ}$.
Gọi K là trung điểm PQ, khi đó $CK \perp PQ$ (do ΔCPQ cân tại C).
Gọi a là độ dài cạnh hình lập phương.
Khi đó $KP = \dfrac{1}{2}PQ = \dfrac{1}{2}\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$, $CP = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
Có $\cos \widehat{CPQ} = \dfrac{KP}{CP} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.
Vậy $\cos \widehat{MN, CP} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.



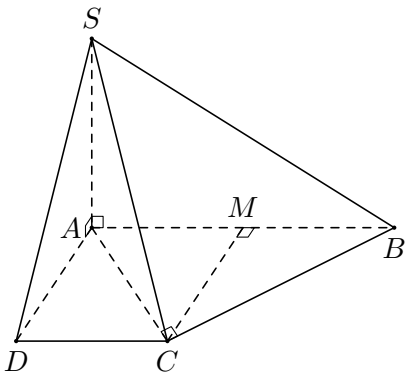
Chọn đáp án C □

Câu 229. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D, $AB = 2a$, $AD = DC = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính số đo của góc giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (SAC).

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

✍Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên $(SAC) \perp (ABCD)$.
Gọi M là trung điểm của AB ta có $AMCD$ là hình vuông nên tính được $AC = CB = a\sqrt{2}$. Mà $AB = 2a$ nên $\triangle ABC$ vuông cân đỉnh C, suy ra $\widehat{BCA} = 90°$. Từ đó suy ra $BC \perp (SAC)$.
Vậy góc giữa BC và (SAC) bằng $90°$.



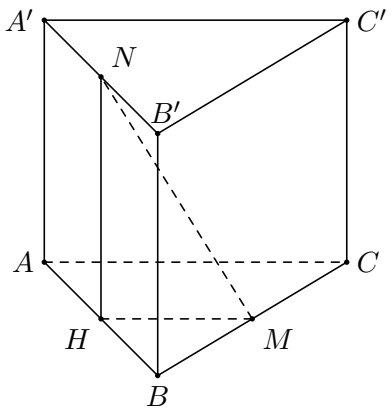
Chọn đáp án (D) □

Câu 230. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, $A'B'$. Tính tan của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (ABC).

A. 2. **B**. $\frac{1}{2}$. **C**. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **D**. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm của cạnh AB, suy ra HM, HN lần lượt là đường trung bình của tam giác ABC và hình chữ nhật $ABB'A'$.
Từ đó suy ra $HM = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a}{2}$ và $HN = a$, $HN \parallel AA' \Rightarrow HN \perp (ABC)$.
Từ đó suy ra góc giữa đường thẳng MN và (ABC) là góc $(MN, MH) = \widehat{NMH}$.
Xét tam giác vuông MNH, ta có $\tan \widehat{NMH} = \dfrac{HN}{HM} = \dfrac{a}{\frac{a}{2}} = 2$.



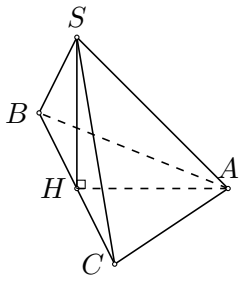
Chọn đáp án (A) □

Câu 231. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh BC. Biết tam giác SBC đều, góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) là

A. 45°. **B**. 90°. **C**. 60°. **D**. 30°.

✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm BC, khi đó H là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC).
$\Rightarrow$ góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{SAH}$.
Hai tam giác đều ABC và SBC chung cạnh BC có hai trung tuyến ứng với cạnh BC lần lượt là AH, SH nên $SH = AH$ hay tam giác SAH vuông cân tại H.
Vậy $\widehat{SAH} = 45°$.



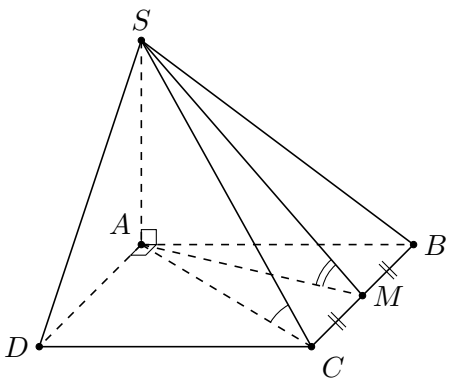
Chọn đáp án (A) □

Câu 232. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $BC = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và M là trung điểm của BC, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng $60°$. Góc giữa SM và mặt phẳng đáy có giá trị gần với giá trị nào nhất sau đây?

A. 60°. **B**. 70°. **C**. 90°. **D**. 80°.

✍Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCA} = 60^\circ$, góc giữa SM và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SMA}$.
Tính:



— $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}$;

— $SA = AC \cdot \tan \widehat{SCA} = a\sqrt{15}$;

— $AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{4a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{17}}{2}$;

— $\tan \widehat{SMA} = \dfrac{SA}{AM} = \dfrac{a\sqrt{15}}{\dfrac{a\sqrt{17}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{15}}{\sqrt{17}}$.

Suy ra $\widehat{SMA} \simeq 62^\circ$.

Chọn đáp án A □

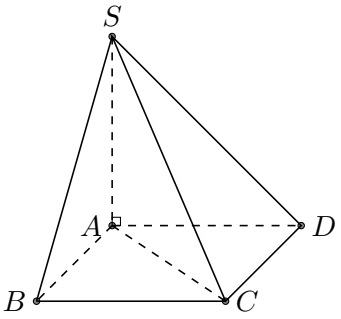
Câu 233. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa cạnh bên SC với đáy bằng bao nhiêu?

A. 60°. **B**. 30°. **C**. 45°. **D**. 90°.

✍Lời giải.

Do $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa SC và đáy là $\widehat{SCA}$.
Ta có $AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.

$$\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^\circ.$$



Chọn đáp án C □

Câu 234. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và $B'C'$, α là góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(A'B'C'D')$. Giá trị $\sin\alpha$ bằng

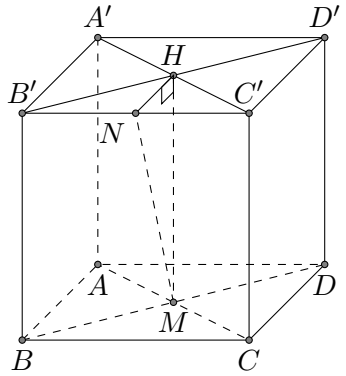
A. $\dfrac{1}{2}$. **B**. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **C**. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi H là tâm hình vuông $A'B'C'D'$, ta có $MH \perp (A'B'C'D')$. Do đó

$$(MN, (A'B'C'D')) = (MN, NH) = \widehat{MNH}.$$

Ta có $MH = a$, $NH = \dfrac{a}{2}$ nên $MN = \sqrt{MH^2 + NH^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
Do đó $\sin \widehat{MNH} = \dfrac{MH}{MN} = \dfrac{a}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

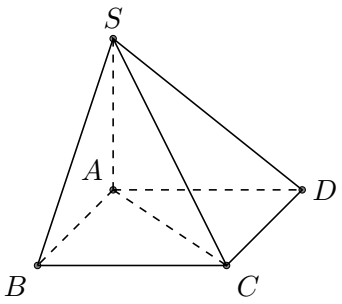


Chọn đáp án B □

Câu 235.

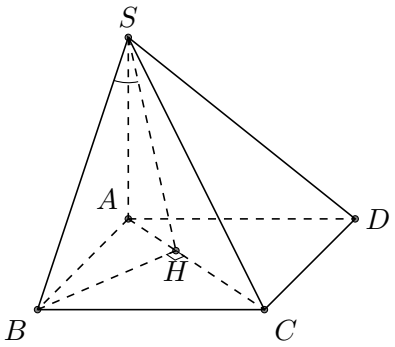
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh $AB = a, AD = \sqrt{3}a$. Cạnh bên $SA = \sqrt{2}a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa SB và mặt phẳng (SAC) bằng

A. $30°$. **B**. $60°$. **C**. $45°$. **D**. $75°$.



✍Lời giải.

Vẽ $BH \perp AC \Rightarrow BH \perp (SAC)$
Suy ra góc giữa SB và mặt phẳng (SAC) là $\widehat{BSH}$
$BH = \dfrac{BA.BC}{AC} = \dfrac{a \cdot a\sqrt{3}}{2a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$
$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{3}$
$\sin \widehat{BSH} = \dfrac{BH}{SB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BSH} = 30°$.

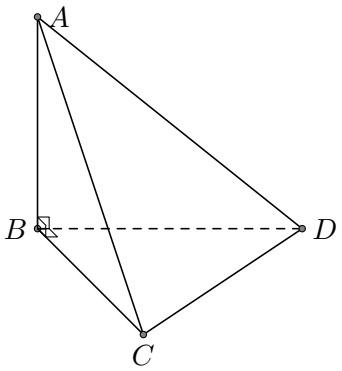


Chọn đáp án A □

Câu 236.

Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh BA, BC, BD vuông góc với nhau từng đôi một (như hình vẽ bên). Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Góc giữa AD và (ABC) là góc $\widehat{ADB}$.
B. Góc giữa CD và (ABD) là góc $\widehat{CDB}$.
C. Góc giữa AC và (BCD) là góc $\widehat{ACB}$.
D. Góc giữa AC và (ABD) là góc $\widehat{CAB}$.



✍Lời giải.

Ta có $CB \perp (ABD)$ nên góc giữa CD và (ABD) là góc $\widehat{CDB}$, góc giữa AC và (ABD) là góc $\widehat{CAB}$.
Ta lại có $AB \perp (BCD)$ nên góc giữa AC và (BCD) là góc $\widehat{ACB}$.
Góc giữa AD và (ABC) chính là góc $\widehat{DAB}$.

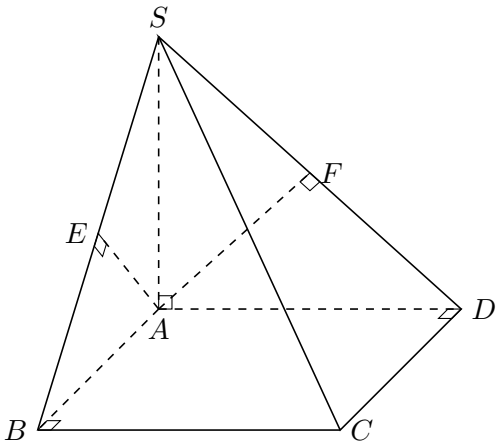
Chọn đáp án A □

Câu 237. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi AE, AF lần lượt là các đường cao của tam giác SAB và SAD. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $SC \perp (AED)$. **B**. $SC \perp (ACE)$. **C**. $SC \perp (AFB)$. **D**. $SC \perp (AEF)$.

✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE$ (1).
Mặt khác ta có $AE \perp SB$ (2).
Từ (1) và (2) ta có $AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SC$ (*).
Chứng minh tương tự ta cũng có $AF \perp (SDC)$
$\Rightarrow AF \perp SC$ (**).
Từ (*) và (**) ta có $SC \perp (AEF)$.



Chọn đáp án D □

Câu 238. Trong không gian, khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường phẳng thì song song với nhau.
B. Nếu ba mặt phẳng cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.
C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
D. Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

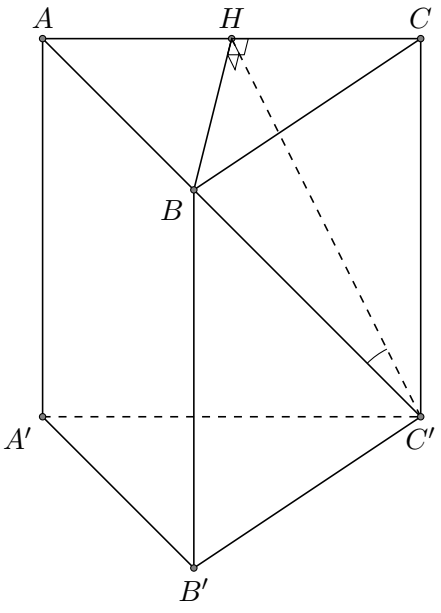
✍Lời giải.
Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau hoặc chéo nhau.
Chọn đáp án C □

Câu 239. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B. Biết $AB = a, BC' = a\sqrt{2}$. Tính góc hợp bởi đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ACC'A')$.

A. $90°$. **B**. $45°$. **C**. $60°$. **D**. $30°$.

✍Lời giải.

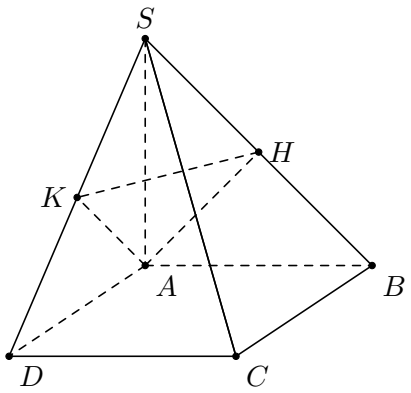
• Gọi H là trung điểm của AC. Do tam giác ABC vuông cân tại B nên $BH \perp AC$. Mặt khác $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $CC' \perp BH$. Do đó $BH \perp (ACC'A')$. Suy ra góc giữa BC' với mặt phẳng $(ACC'A')$ là góc $\widehat{BC'H}$.
• Ta có $BC = AB = a$ nên $AC = a\sqrt{2}$.
Do đó $HB = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
• $\sin \widehat{BC'H} = \dfrac{HB}{BC'} = \dfrac{1}{2}$ nên $\widehat{BC'H} = 30°$.



Chọn đáp án D □

Câu 240.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SD (hình vẽ bên). Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng SD và mặt phẳng (AHK), tính $\tan\alpha$.

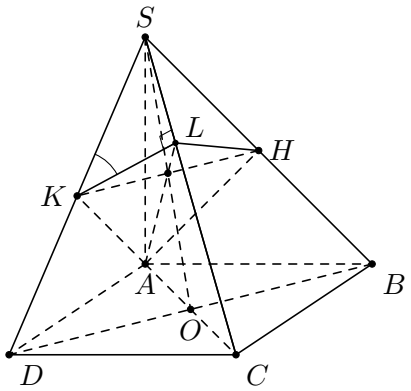


A. $\tan\alpha = \sqrt{3}$.
B. $\tan\alpha = \sqrt{2}$.
C. $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
D. $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi L là giao điểm của SC và (AHK).
Ta có $AK \perp (SCD)$ và $AH \perp (SBC)$ nên $SC \perp (AKLH)$.
Do đó

$$(SD, (AHK)) = (SK, KL) = \widehat{SKL} = \alpha.$$



Xét $\triangle SAC$ ta có

$$SA^2 = SL \cdot SC \Leftrightarrow SL = \frac{SA^2}{SC} = \frac{a^2}{a\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Mặt khác $\triangle SLK \sim \triangle SDC$ nên

$$\frac{LK}{DC} = \frac{SK}{SC} \Leftrightarrow LK = \frac{SK \cdot DC}{SC} = \frac{\dfrac{a}{\sqrt{2}} \cdot a}{a\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Xét $\triangle SLK$ ta có

$$\tan\alpha = \frac{SL}{KL} = \frac{\dfrac{a}{\sqrt{3}}}{\dfrac{a}{\sqrt{6}}} = \sqrt{2}.$$

Vậy $\tan\alpha = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) □

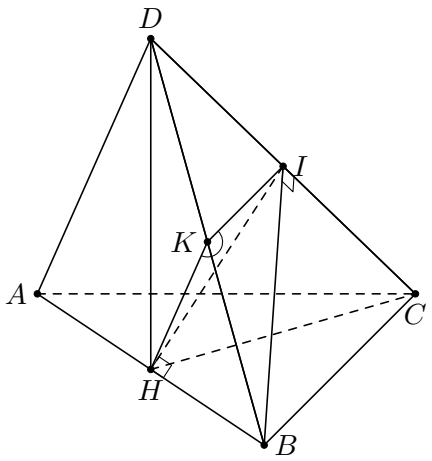
Câu 241. Cho tứ diện $ABCD$ có độ dài các cạnh $AB = AC = AD = BC = BD = a$ và $CD = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AD và BC.

A. $90°$.
B. $45°$.
C. $30°$.
D. $60°$.

✍Lời giải.

Gọi I, K, H lần lượt là trung điểm các cạnh DC, DB, AB.
Suy ra $KH \parallel AD$ và $KI \parallel BC$, khi đó

$$(AD, BC) = (KH, KI) = \widehat{IKH}.$$



Xét $\triangle BIC$, $BI = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Ta có $\begin{cases} AB \perp DH \\ AB \perp HC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (DHC) \Rightarrow AB \perp HI$.

Xét $\triangle BIH$, $HI = \sqrt{IB^2 - HB^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a}{2}$. (1)

Xét $\triangle IHK$, ta có

$$\begin{cases} IK = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{2} \\ HK = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow IK = HK = \dfrac{a}{2}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle IHK$ là tam giác đều. Dó đó $\widehat{IKH} = 60°$.

Chọn đáp án D □

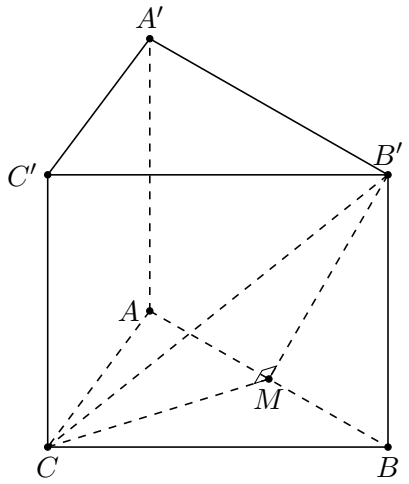
Câu 242. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Tính tan của góc giữa đường thẳng $B'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$.

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

✍Lời giải.

Lấy M là trung điểm AB, khi đó $CM \perp AB$. Mà $CM \perp AA'$ nên $CM \perp (ABB'A') \Rightarrow (B'C, (ABB'A')) = \widehat{CB'M}$.

Ta có $B'M = \sqrt{B'B^2 + BM^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, $CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên suy ra $\tan\widehat{CB'M} = \dfrac{CM}{B'M} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$.



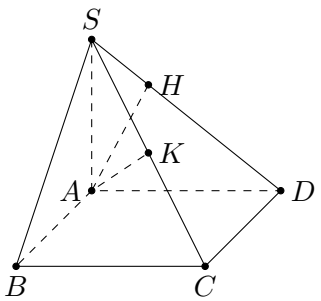
Chọn đáp án C □

Câu 243. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với đáy. H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SD, SC. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. AK vuông góc với (SCD). **B.** BC vuông góc với (SAC).
C. AH vuông góc với (SCD). **D.** BD vuông góc với (SAC).

✍Lời giải.

Ta có $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$ và $AH \perp SD \Rightarrow AH \perp (SCD)$.



Chọn đáp án C □

Câu 244. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P). Chọn khẳng định đúng?

A. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$.
B. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp (P)$ thì $b \perp a$.
C. Nếu $a \perp (P)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.
D. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \parallel (P)$ thì $b \parallel a$.

✍Lời giải.

— Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$ sai vì b có thể nằm trong (P).

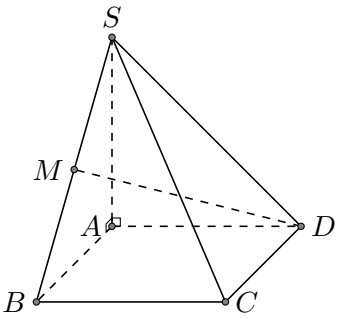
— Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp (P)$ thì $b \perp a$ đúng.

— Nếu $a \perp (P)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$ sai vì b có thể nằm trong (P).

— Nếu $a \parallel (P)$ và $b \parallel (P)$ thì $b \parallel a$ sai vì a, b có thể chéo hoặc cắt nhau.

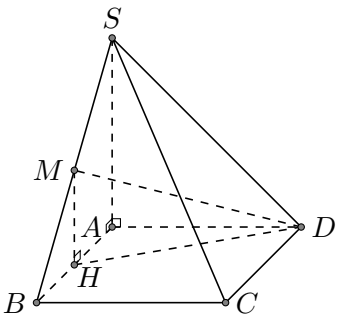
Chọn đáp án B □

Câu 245.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a có $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm SB (*tham khảo hình vẽ bên*). Tính tan của góc giữa đường thẳng DM và $(ABCD)$.



A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$. **C**. $\dfrac{2}{5}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

✍Lời giải.
Gọi H là trung điểm AB. Khi đó, $MH \parallel SA$ nên $MH \perp (ABCD)$, góc giữa DM và $(ABCD)$ là góc $\widehat{MDH}$.



Ta có $MH = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $DH = \sqrt{AH^2 + AD^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Xét tam giác MDH vuông tại H có $\tan \widehat{MDH} = \dfrac{MH}{DH} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

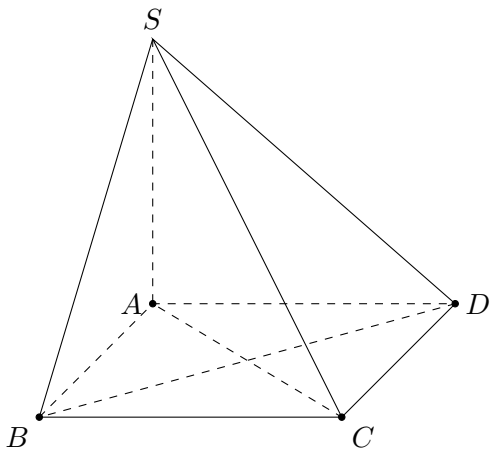
Chọn đáp án D □

Câu 246. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Biết rằng $\triangle SBD$ là tam giác đều. Tính cạnh của hình vuông đáy theo a.

A. $2a$. **B**. a. **C**. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D**. $a\sqrt{2}$.

✍Lời giải.
Gọi cạnh đáy hình vuông là x thì $BD = x\sqrt{2}$, $SB = \sqrt{2a^2 + x^2}$.
Mà $\triangle SBD$ đều nên

$$x\sqrt{2} = \sqrt{2a^2 + x^2} \Leftrightarrow x = a\sqrt{2}.$$



Chọn đáp án D □

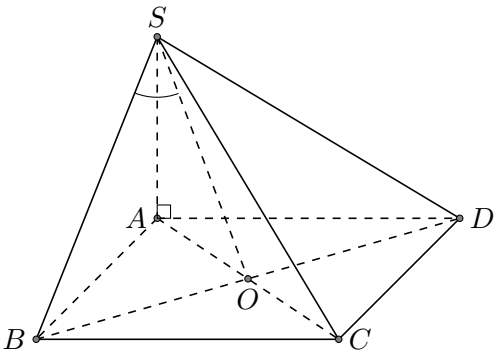
Câu 247. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Góc giữa đường thẳng SB với mặt phẳng (SAC) xấp xỉ

A. $16°$. **B**. $35°$. **C**. $14°$. **D**. $33°$.

✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BO \perp AC \\ BO \perp SA \end{cases} \Rightarrow BO \perp (SAC)$
suy ra SO là hình chiếu của SB trên (SAC).
Vậy $(\widehat{SB, (SAC)}) = \widehat{BSO} = \varphi$.

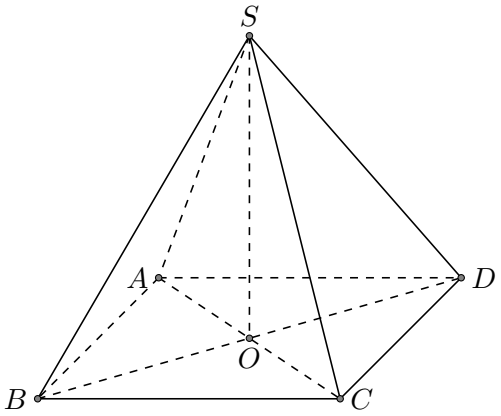
$$\sin\varphi = \frac{BO}{SB} = \frac{OB}{\sqrt{AB^2 + AS^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{14}}{14}.$$
$\Rightarrow \varphi \approx 16°$.



Chọn đáp án A □

Câu 248. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SA = SC$ và $SB = SD$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?
A. $SO \perp (ABCD)$. **B**. $CD \perp (SBD)$. **C**. $AB \perp (SAC)$. **D**. $BC \perp (SAC)$.

Lời giải.
Ta có $\begin{cases} SO \perp AC \\ SO \perp BD \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.



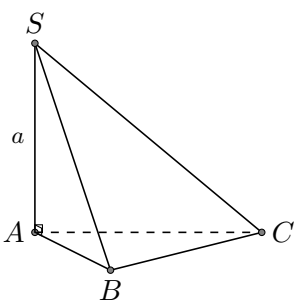
Chọn đáp án A □

Câu 249. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?
A. Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$.
B. Nếu $b \perp (P)$ thì $b \parallel a$.
C. Nếu $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.
D. Nếu $b \parallel (P)$ thì $b \perp a$.

Lời giải.
Nếu $b \perp a$ thì hoặc $b \parallel (P)$ hoặc $b \subset (P)$.
Chọn đáp án C □

Câu 250. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC), SA = a$, tam giác ABC đều cạnh a. Góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) là
A. $\arctan 2$. **B**. $60°$. **C**. $30°$. **D**. $45°$.

Lời giải.
Ta có AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (ABC) nên góc giữa SC và (ABC) là góc $\widehat{SCA}$.
Tam giác SAC vuông cân tại A nên $\widehat{SCA} = 45°$.

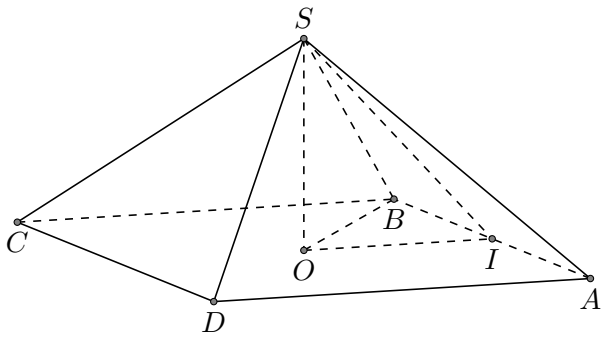


Chọn đáp án D □

Câu 251. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có góc giữa cạnh bên và đáy bằng $60°$. Tìm sin của góc giữa mặt bên và mặt đáy.
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B**. $\frac{1}{2}$. **C**. $\frac{\sqrt{30}}{6}$. **D**. $\frac{\sqrt{42}}{7}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm AB.
Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.
Ta có $\begin{cases}(SB,(ABCD))=\widehat{SBO}\\((SAB),(ABCD)=\widehat{SIO}=\alpha.\end{cases}$
Đặt $AB=2x,(x>0)$, ta được $\begin{cases}BD=2\sqrt{2}x\\SO=\sqrt{6}x\\OI=x.\end{cases}$



Ta được $\cot\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\Rightarrow\dfrac{1}{\sin^2\alpha}=1+\dfrac{1}{6}$. Vậy $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 252. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Cô-sin của góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC) bằng

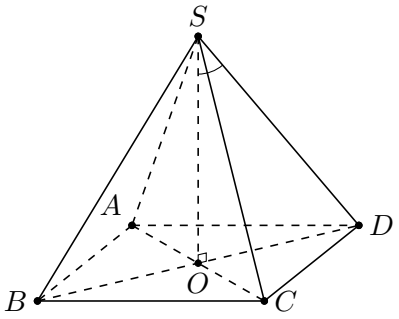
A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 1.

✍Lời giải.

— Ta có $OD\perp(SAC)\Rightarrow(SD,(SAC))=(SD,SO)$.

— Trong tam giác SOD vuông tại O, ta có:

$$\cos\widehat{DSO}=\frac{SO}{SD}=\frac{\sqrt{SA^2-AO^2}}{SD}=\frac{\sqrt{a^2-\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Chọn đáp án (A) □

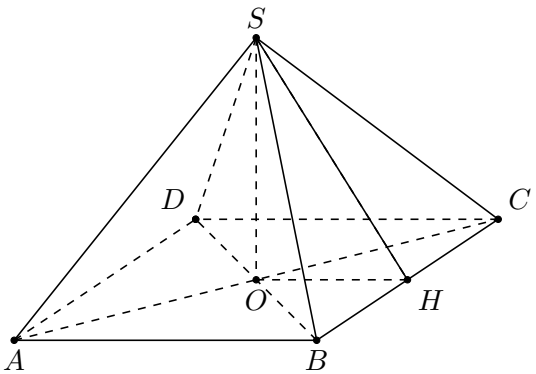
Câu 253. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 4, cạnh bên bằng 3. Gọi φ là góc giữa cạnh bên và mặt đáy. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\varphi=45^\circ$. **B.** $\varphi=60^\circ$. **C.** $\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$. **D.** $\tan\varphi=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

✍Lời giải.

Ta có $OA=\dfrac{AB}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$, $SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=1$, suy ra

$$\varphi=(SA,(ABCD))=(SA,AO)=\widehat{SAO}$$
$$\Rightarrow\quad\tan\varphi=\frac{SO}{AO}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$



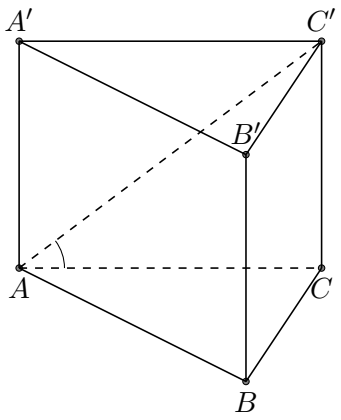
Chọn đáp án (D) □

Câu 254. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=\sqrt{3}$ và $AA'=1$. Góc tạo bởi giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 75°.

✍Lời giải.

Vì $CC' \perp (ABC)$ nên $(AC', (ABC)) = (AC', AC) = \widehat{CAC'}$. Lại có $\tan\widehat{CAC'} = \dfrac{CC'}{AC} = \dfrac{AA'}{AB} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, nên $\widehat{CAC'} = 30^\circ$.

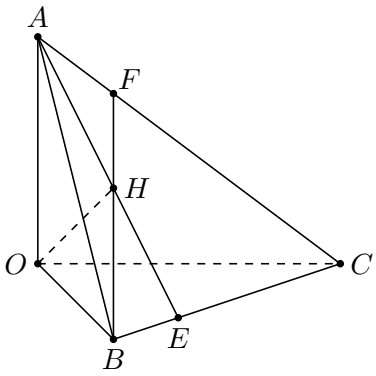


Chọn đáp án (C) □

Câu 255. Cho tứ diện $S.ABC$ có các góc phẳng tại đỉnh S đều vuông. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là

A. trực tâm tam giác ABC.
B. trọng tâm tam giác ABC.
C. tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
D. tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

✍Lời giải.

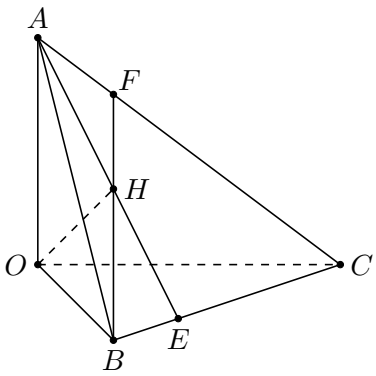


Gọi E, F là giao điểm của AH, BC và BH, AC.
$BC \perp OA$ và $BC \perp OH$ suy ra $BC \perp (AOH) \Rightarrow AH \perp BC$.
Chứng minh tương tự $BH \perp AC$ suy ra H là trực tâm tam giác ABC.
Chọn đáp án (A) □

Câu 256. Cho tứ diện $S.ABC$ có các góc phẳng tại đỉnh S đều vuông. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là

A. trực tâm tam giác ABC.
B. trọng tâm tam giác ABC.
C. tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
D. tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

✍Lời giải.



Gọi E, F là giao điểm của AH, BC và BH, AC.
$BC \perp OA$ và $BC \perp OH$ suy ra $BC \perp (AOH) \Rightarrow AH \perp BC$.
Chứng minh tương tự $BH \perp AC$ suy ra H là trực tâm tam giác ABC.
Chọn đáp án (A) □

Câu 257. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là α. Khi đó $\tan\alpha$ bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **C.** 2. **D.** $2\sqrt{2}$.

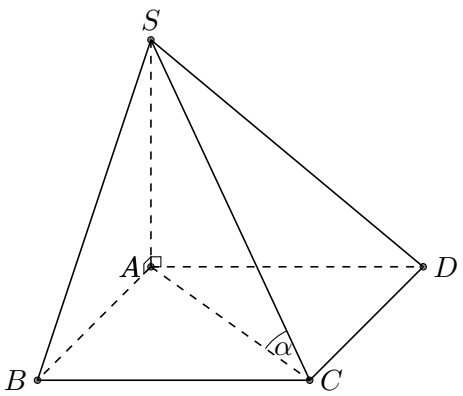
✍Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow AC$ là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$

$\Rightarrow$ góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc giữa SC và AC bằng $\widehat{SCA}$.

Tam giác SAC vuông tại A có

$$\tan\widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{2a}{a\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$



Chọn đáp án A □

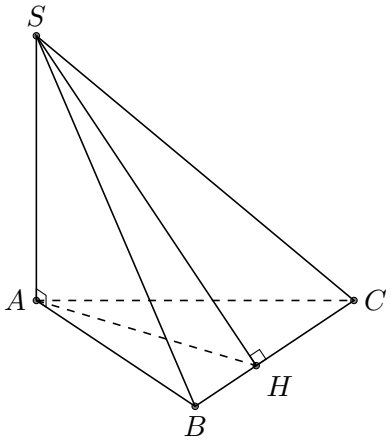
Câu 258. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và H là hình chiếu vuông góc của S lên BC. Hãy chọn khẳng định đúng.

A. $BC \perp SC$. **B.** $BC \perp AH$. **C.** $BC \perp AB$. **D.** $BC \perp AC$.

✍Lời giải.

Ta có $BC \perp SH$ mà $SA \perp BC$ suy ra

$$BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp AH.$$



Chọn đáp án B □

Câu 259. Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Tính góc giữa đường thẳng SA với mp$(ABCD)$.

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

✍Lời giải.

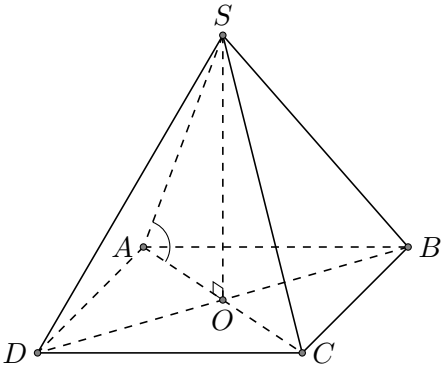
Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ suy ra $SO \perp (ABCD)$ (vì $S.ABCD$ là hình chóp đều).

Hình chiếu vuông góc của SA trên mp$(ABCD)$ là OA.

$(SA, (ABCD)) = (SA, OA) = \widehat{SAO}$ (vì tam giác SAO vuông tại O).

$\triangle SAC = \triangle BAC\,(c.c.c) \Rightarrow \widehat{SAO} = 45°$.

Vậy $(SA, (ABCD)) = 45°$.



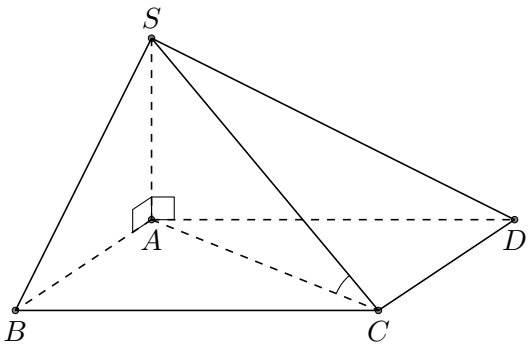
Chọn đáp án B □

Câu 260. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và có độ dài bằng $\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$. Góc giữa SC và mặt $(ABCD)$ bằng

A. 45°. **B**. 60°. **C**. 75°. **D**. 30°.

✍Lời giải.

Góc giữa SC và mặt $(ABCD)$ chính là góc $\angle SCA$. Ta tính được $AC = a\sqrt{2}$, nên $\tan\angle SCA = \dfrac{SA}{CA} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Do đó, $\angle SCA = 30°$.



Chọn đáp án D □

Câu 261. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SA = SC, SB = SD$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

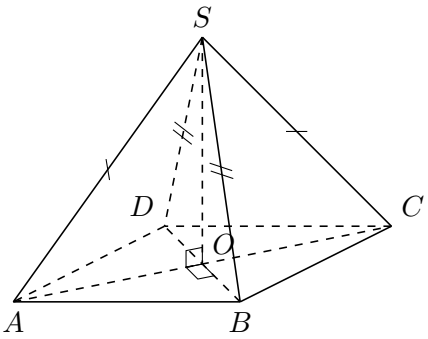
A. $AC \perp (SBD)$. **B**. $AC \perp SO$. **C**. $AC \perp SB$. **D**. $SC \perp AD$.

✍Lời giải.

Do $SA = SC$ nên $AC \perp SO$, mặt khác do $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$. Từ đó nhận được $AC \perp (SBD)$. Hiển nhiên $AC \perp SB$.

Giả sử $SC \perp AD$, do $AD \parallel BC$ nên $SC \perp BC$, theo định lí "Ba đường vuông góc" thì $OC \perp BC$, điều này là vô lí.

Vậy khẳng định **sai** là "$SC \perp AD$".



Chọn đáp án D □

Câu 262. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $SA = SB = SD = a$, $\widehat{BAD} = 60°$. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SCD) bằng

A. 30°. **B**. 60°. **C**. 90°. **D**. 45°.

✍Lời giải.

Vì $\triangle BAD$ cân và có góc 60° nên là tam giác đều.

Gọi H là hình chiếu của S lên $(ABCD)$.

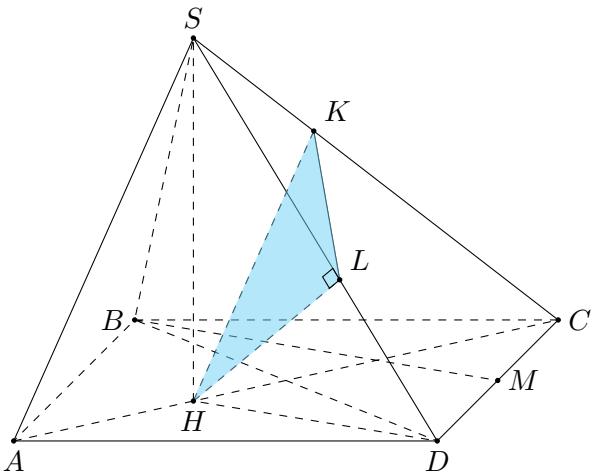
Do $SA = SB = SD$ nên $HA = HB = HD$, suy ra H là tâm của tam giác đều ABD.

Gọi M là trung điểm của CD.

Do $HD \parallel BM$ và $BM \perp CD$ nên $HD \perp CD$.

Từ $CD \perp HD$, $CD \perp SH \Rightarrow CD \perp (SHD)$.

Trong $\triangle SHD$ kẻ $HL \perp SD$ thì $HL \perp (SCD)$.



Trong $\triangle SAC$, kẻ $HK \parallel SA$. Khi đó, góc giữa SA và (SCD) phụ với góc giữa HK và HL.

Ta có

$$\frac{HK}{SA} = \frac{CH}{CA} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow HK = \frac{2}{3}SA = \frac{2a}{3}.$$

$$HL = \frac{HD \cdot HS}{SD} = \frac{HD \cdot \sqrt{SD^2 - HD^2}}{SD} = \frac{\dfrac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{3}}}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

Tam giác HKL vuông tại L nên $\cos\widehat{KHL} = \dfrac{HL}{HK} = \dfrac{a\sqrt{2}}{3} \div \dfrac{2a}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{KHL} = 45^\circ$.
Vậy góc giữa SA và (SCD) bằng $90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.

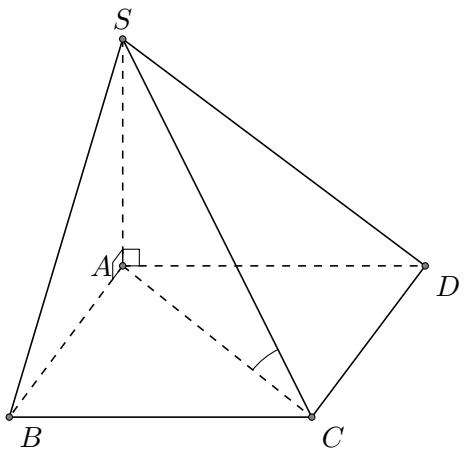
Chọn đáp án D □

Câu 263. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a\sqrt{6}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. 30°. **B**. 60°. **C**. 90°. **D**. 45°.

✍Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow AC$ là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$.
Suy ra $(SC, (ABCD)) = \widehat{SCA}$.
$\tan SCA = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{SA}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3}$
$\Rightarrow \widehat{CSA} = 60^\circ$.



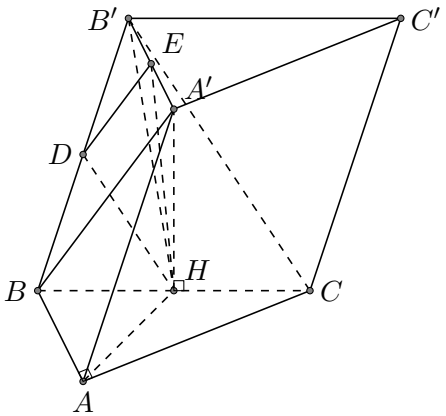
Chọn đáp án B □

Câu 264. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, $A'H = a\sqrt{3}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$. Tính $\cos\varphi$.

A. $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$. **B**. $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{8}$. **C**. $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **D**. $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi D, E lần lượt là trung điểm của $BB', A'B'$.
Ta có $DH \parallel B'C, DE \parallel A'B \Rightarrow \varphi = (DH, DE)$.
Xét $\triangle A'BH$ vuông tại H có $A'B = 2a \Rightarrow DE = a$.
Xét $\triangle HA'E$ vuông tại A' có $HE = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.
Xét $\triangle A'AH$ vuông tại H có $AA' = 2a = BB'$.
Xét $\triangle B'BC$ có $B'H^2 = \dfrac{BB'^2 + B'C^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4}$
$\Rightarrow B'C = a\sqrt{6} \Rightarrow DH = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Suy ra
$\cos\varphi = |\cos(HDE)| = \left|\dfrac{DE^2 + DH^2 - EH^2}{2DE \cdot DH}\right| = \dfrac{\sqrt{6}}{8}$.



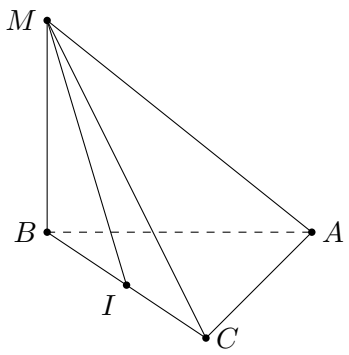
Chọn đáp án B □

Câu 265. Cho tam giác ABC đều cạnh a. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại B ta lấy điểm M sao cho $MB = 2a$. Gọi I là trung điểm của cạnh BC. Tính tan của góc giữa đường thẳng IM và mặt phẳng (ABC).

A. 4. **B**. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C**. $\dfrac{1}{4}$. **D**. $\sqrt{2}$.

✍Lời giải.

Ta có BI là hình chiếu vuông góc của IM lên (ABC)
Khi đó $(IM,(ABC))=(IM,BM)=\widehat{MIB}$.
Xét ΔIBM vuông tại B có $\tan\widehat{MIB}=\dfrac{MB}{BI}=4$.

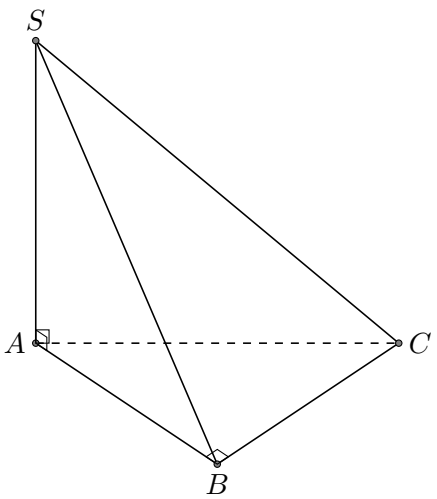


Chọn đáp án A ☐

Câu 266. Hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Số các mặt của hình chóp $S.ABC$ là tam giác vuông là
A. 3. **B**. 4. **C**. 1. **D**. 2.

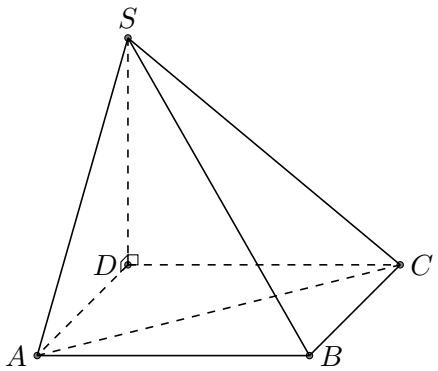
✍Lời giải.

Ta có $SA\perp(ABC)\Rightarrow\begin{cases}SA\perp AC\\SA\perp AB\end{cases}\Rightarrow\triangle SAC$ và $\triangle SAB$ vuông tại A.
Mặt khác $\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp SB\Rightarrow\triangle SBC$ vuông tại B.
Theo giả thiết $\triangle ABC$ là tam giác vuông tại B.
Vậy hình chóp $S.ABC$ có 4 mặt là tam giác vuông.



Chọn đáp án B ☐

Câu 267.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AB=2a, BC=a, \widehat{ABC}=120^\circ$. Cạnh bên $SD=a\sqrt{3}$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy (tham khảo hình vẽ). Tính sin của góc tạo bởi SB và mặt phẳng (SAC).
A. $\dfrac{3}{4}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **C**. $\dfrac{1}{4}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{3}}{7}$.



✍Lời giải.

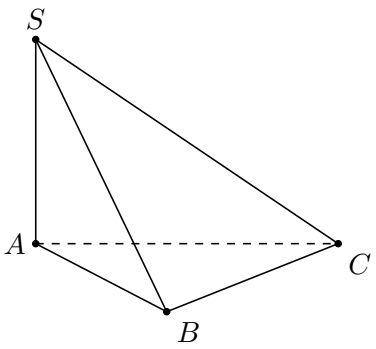
Ta có: $BD=\sqrt{AD^2+AB^2-2AB\cdot AD\cos 60^\circ}=\sqrt{a^2+4a^2-2\cdot 2a\cdot a\cdot\dfrac{1}{2}}=a\sqrt{3}$.
$SB=\sqrt{SD^2+BD^2}=a\sqrt{6}$.
Ta có: $\dfrac{1}{\mathrm{d}^2(D,(SAC))}=\dfrac{1}{SD^2}+\dfrac{1}{\mathrm{d}^2(D,AC)}=\dfrac{1}{3a^2}+\dfrac{AC^2}{4S_{DAC}^2}=\dfrac{1}{3a^2}+\dfrac{7a^2}{4\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot 2a\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\dfrac{8}{3a^2}$

$\Rightarrow \mathrm{d}(D,(SAC))=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}=\mathrm{d}(B,(SAC))$.

Do đó $\sin(SB,(SAC))=\dfrac{\mathrm{d}(B,(SAC))}{SB}=\dfrac{\mathrm{d}(D,(SAC))}{SB}=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{6}}{4}}{a\sqrt{6}}=\dfrac{1}{4}$.

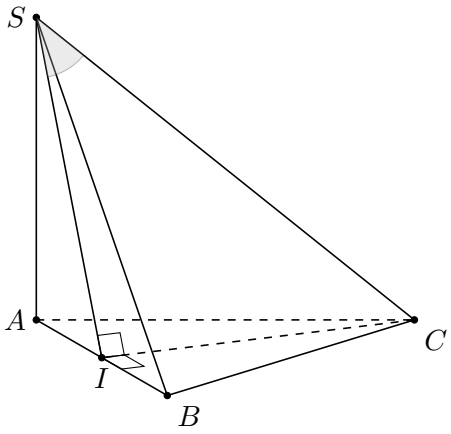
Chọn đáp án C ☐

Câu 268.
Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC đều cạnh a và $SA = a$ (tham khảo hình vẽ bên). Giá trị tang của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng



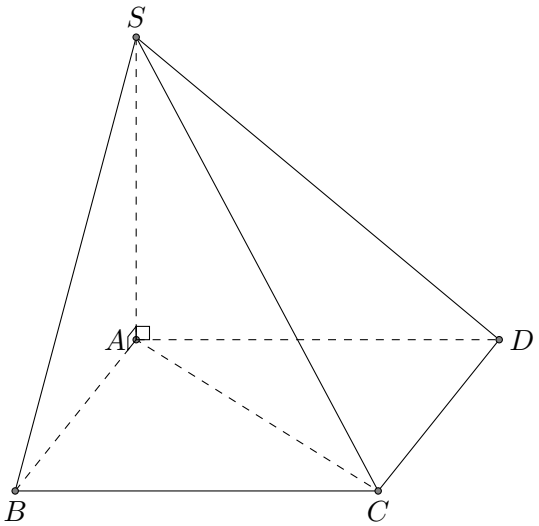
A. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

✍Lời giải.
Gọi I là trung điểm cạnh AB.
Ta có $\begin{cases} CI \perp AB \\ CI \perp SA \end{cases} \Rightarrow CI \perp (SAB)$.
Ta được $(SC, (SAB)) = \widehat{CSI} \Rightarrow \tan \widehat{CSI} = \dfrac{CI}{SI}$.
Ta có $\begin{cases} CI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \\ SI = \sqrt{SA^2 + AI^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$
Vậy $\tan(SC, (SAB)) = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.



Chọn đáp án A □

Câu 269.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.



A. $45°$. **B.** $90°$.
C. $60°$. **D.** $30°$.

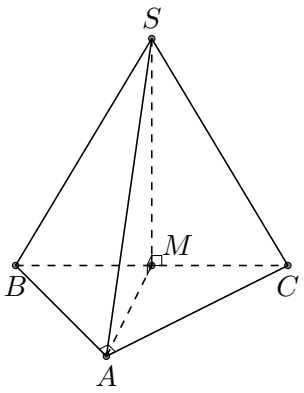
✍Lời giải.
Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$.
Suy ra góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc giữa SC và AC.
Góc giữa SC và AC bằng $\widehat{SCA}$. Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $AC = a\sqrt{2}$.
Xét tam giác SAC vuông tại A có $SA = AC = a\sqrt{2} \Rightarrow \widehat{SCA} = 45°$.
Chọn đáp án A □

Câu 270. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $SA = SB = SC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $BC = a$. Tính cô-sin của góc giữa SA và (ABC).

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{62}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

✍Lời giải.

Do tam giác ABC vuông tại A nên trung điểm M của BC là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Lại có $SA = SB = SC$ nên chóp $S.ABC$ có $SM \perp (ABC)$. Góc giữa SA và (ABC) là góc $\widehat{SAM}$.



Tam giác SMC vuông tại M nên $SM = \sqrt{SC^2 - MC^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

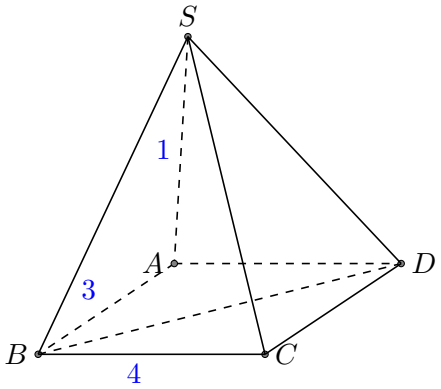
Tam giác SMA vuông tại M nên $AM = \sqrt{SA^2 - SM^2} = \dfrac{a}{2}$.

Khi đó $\cos\widehat{SAM} = \dfrac{AM}{SA} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 271.

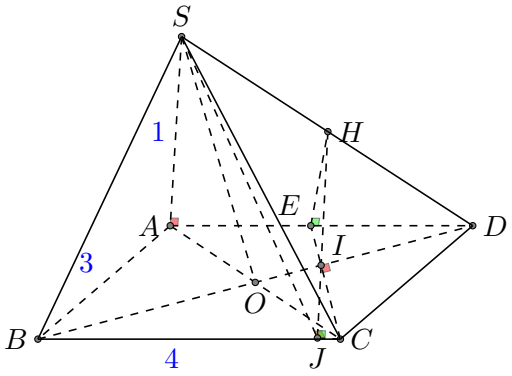
Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, SA vuông góc với $(ABCD)$, $AB = 3$, $BC = 4$, $SA = 1$ (tham khảo hình vẽ bên). Giá trị sin của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SBD) bằng



A. $\dfrac{11\sqrt{26}}{328}$. **B.** $\dfrac{12\sqrt{26}}{338}$. **C.** $\dfrac{13\sqrt{26}}{338}$. **D.** $\dfrac{12}{65}$.

✍Lời giải.

○ **Cách 1:**



Trên mặt phẳng $(ABCD)$, dựng CI vuông góc với DB, cắt AD tại E. Qua E, dựng đường thẳng EH song song với SA. Suy ra $EH \perp (ABCD)$.

Vì $BD \perp (CEH)$ nên $(CEH) \perp (SBD)$.

Gọi J là hình chiếu vuông góc của C trên HI. Khi đó, ta có $CJ \perp (SBD)$. Suy ra hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (SBD) là SJ. Do đó, $(SC, (SBD)) = (SC, SJ)$ (1)

Vì $CJ \perp (SBD)$ nên $CJ \perp SJ$. Suy ra tam giác SJC vuông tại J và

$$\frac{CJ}{\sin\widehat{CSJ}} = \frac{SC}{\sin\widehat{SJC}} \Rightarrow \sin\widehat{CSJ} = \frac{CJ}{\sqrt{26}} \quad (2)$$

Xét hình chữ nhật $ABCD$, ta có $CI = \dfrac{12}{5}$, $IE = \dfrac{27}{20}$, $HE = \dfrac{9}{16}$, $HI = \dfrac{117}{80}$.

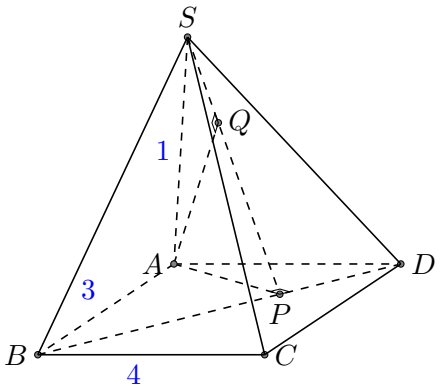
Vì tam giác HEI đồng dạng với tam giác CJI nên ta có

$$\frac{HE}{CJ} = \frac{HI}{CI} \Rightarrow CJ = \frac{HE \cdot CI}{HI} = \frac{12}{13} \quad (3)$$

Từ (2) và (3), ta có $\sin\widehat{CSJ} = \dfrac{CJ}{\sqrt{26}} = \dfrac{6\sqrt{26}}{169}$. (4)

Từ (1) và (4), suy ra $\sin(SC,(SBD)) = \sin\widehat{CSJ} = \dfrac{6\sqrt{26}}{169}$.

∘ **Cách 2:**



Ta có: $\sin(SC,(SBD)) = \dfrac{d(C,(SBD))}{SC} = \dfrac{d(A,(SBD))}{SC}$.

$BD = AC = 5, SC = \sqrt{26}$. Hạ $AP \perp BD,\ AQ \perp SP$.

$\dfrac{1}{AQ^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AD^2} + \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{169}{144} \Rightarrow AQ = \dfrac{12}{13}$.

$\Rightarrow \sin(SC,(SBD)) = \dfrac{12}{13\cdot\sqrt{26}} = \dfrac{6\sqrt{26}}{169}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 272. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với mặt đáy. Gọi H và K là hình chiếu vuông góc của A lên SC, SD. Tính côsin của góc giữa cạnh bên SB với mặt phẳng (AHK).

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

✍**Lời giải.**

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$.

Gọi $SO \cap HK = E$ và $AE \cap SC = I$.

Ta có $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$

và $AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC$.

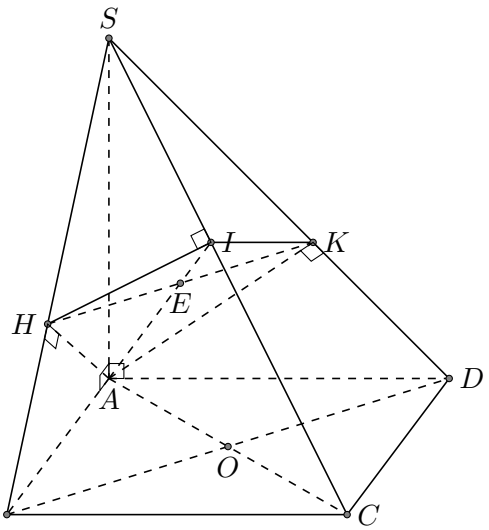
Suy ra $SC \perp (AHIK) \Rightarrow$ góc giữa SB và (AHK) bằng $\widehat{SHI}$.

Xét tam giác vuông SAB có AH là đường cao

$\Rightarrow SH.SB = SA^2 \Leftrightarrow SH = \dfrac{2a^2}{\sqrt{2a^2+a^2}} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Xét tam giác vuông SAC có AI là đường cao

$\Rightarrow SI.SC = SA^2 \Leftrightarrow SI = \dfrac{2a^2}{\sqrt{2a^2+2a^2}} = a$.



Xét tam giác SHI vuông tại $I \Rightarrow IH = \sqrt{SH^2 - SI^2} = \sqrt{\dfrac{4a^2}{3} - a^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \cos\widehat{SHI} = \dfrac{IH}{SH} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{2a\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{1}{2}$.

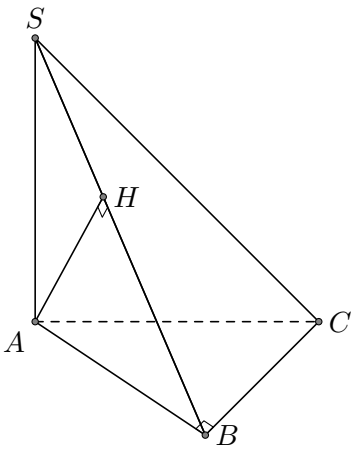
Chọn đáp án (C) □

Câu 273. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $\triangle ABC$ vuông ở B. Gọi AH là đường cao của $\triangle SAB$. Khẳng định nào sau đây là **sai?**

A. $SA \perp BC$. **B**. $AH \perp AC$. **C**. $AH \perp BC$. **D**. $AH \perp SC$.

✍Lời giải.

Ta có $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp BC$ và $AH \perp SC$.
Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$.
Vậy khẳng định **sai** là $AH \perp AC$.



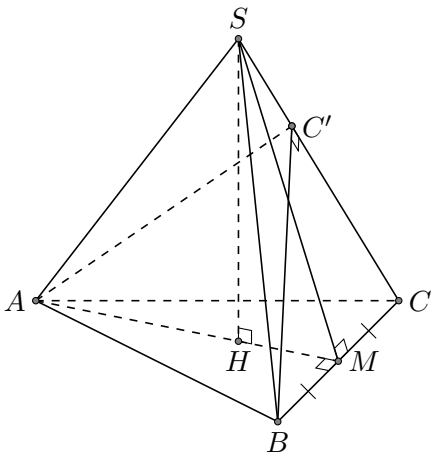
Chọn đáp án B □

Câu 274. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, $SA = SB = SC = b$. Xét mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với SC. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để (P) cắt SC tại điểm C' nằm giữa S và C?

A. $b^2 > 2a^2$. **B**. $a^2 \leq 2b^2$. **C**. $a^2 < 2b^2$. **D**. $b^2 < 2a^2$.

✍Lời giải.

Gọi C' là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng SC và H là trọng tâm $\triangle ABC$, ta có $SH \perp AB$ và $CH \perp AB$ nên $AB \perp SC$.
Suy ra $SC \perp (ABC')$ nên $BC' \perp SC$. Vậy (P) chính là mặt phẳng (ABC').
Ta có C' là chân đường cao hạ từ điểm B. Để C' nằm giữa S và C thì tam giác SBC nhọn.
Suy ra $\cos S > 0 \Leftrightarrow b^2 + b^2 - a^2 > 0 \Leftrightarrow 2b^2 > a^2$.



Chọn đáp án C □

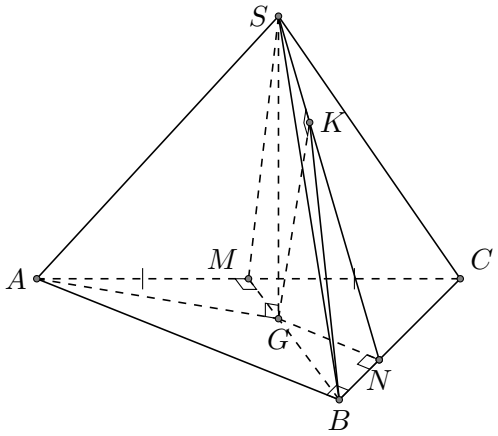
Câu 275. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AC = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm AC, G là trọng tâm tam giác ABC, biết $SG = 2a$ và SG vuông góc với mặt phẳng (ABC). Sin của góc giữa đường thẳng BM va mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{74}}{74}$. **B**. $\dfrac{3\sqrt{74}}{74}$. **C**. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D**. $\dfrac{3\sqrt{74}}{37}$.

✍Lời giải.

Kẻ $GN \perp BC$ với $N \in BC$. Kẻ $GK \perp SN$ với $K \in SN$. Khi đó, $GK \perp (SBC)$, suy ra hình chiếu của BG trên (SBC) là BK. Vậy góc giữa BM và mặt phẳng (SBC) là góc $\widehat{GBK}$.

Xét tam giác SGN vuông tại G có $\begin{cases} SG = 2a \\ GN = \dfrac{1}{3}AB = \dfrac{a}{3} \end{cases}$. Do đó, $GK = \dfrac{2a}{\sqrt{37}}$.



Xét tam giác GKB vuông tại K có $GB = \dfrac{2}{3}BM = \dfrac{2}{3}\dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Ta có $\cos B = \dfrac{GK}{GB} = \dfrac{2a}{\sqrt{37}} : \dfrac{a\sqrt{2}}{3} = \dfrac{3\sqrt{74}}{37}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 276. Chọn câu đúng trong các câu sau.

A. Đường thẳng cắt cả hai đường thẳng chéo nhau a và b là đường vuông góc chung của hai đường thẳng a và b.

B. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng là mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng ấy.

C. Mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng.

D. Đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng chéo nhau a và b là đường vuông góc chung của hai đường thẳng a và b.

✍Lời giải.

Câu đúng là "Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng là mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng ấy".

Chọn đáp án (B) □

Câu 277. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Nếu $d \parallel a$ và $a \subset (P)$ thì đường thẳng $d \parallel (P)$.

B. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (P) thì d vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong (P).

C. Nếu đường thẳng $d \perp a, a \subset (P)$ thì $d \perp (P)$.

D. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) thì $d \perp (\alpha)$.

✍Lời giải.

Khẳng định đúng là "Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (P) thì d vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong (P)".

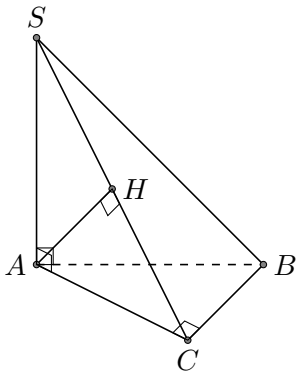
Chọn đáp án (B) □

Câu 278. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $\triangle ABC$ vuông ở C, AH là đường cao của $\triangle SAC$ .Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $SA \perp SC$. **B**. $AH \perp BC$. **C**. $SA \perp AH$. **D**. $AH \perp AC$.

✍Lời giải.

Vì $SA \perp (ABC)$ nên $BC \perp SA$, kết hợp với $BC \perp AC$ suy ra $BC \perp (SAC)$, do đó $BC \perp AH$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 279. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và tam giác ABC vuông tại A. Vẽ $SH \perp (ABC), H \in (ABC)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. H trùng với trung điểm của BC.

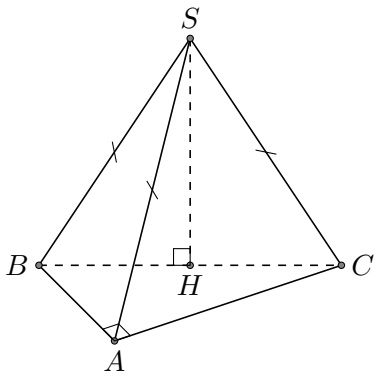
B. H trùng với trực tâm tam giác ABC.

C. H trùng với trọng tâm tam giác ABC.

D. H trùng với trung điểm của AC.

✍Lời giải.

Do $SA = SB = SC$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, suy ra H là trung điểm của BC.



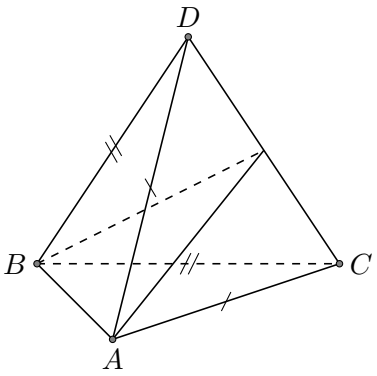
Chọn đáp án A □

Câu 280. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD$ và $BC = BD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $AB \perp (ABC)$. **B**. $BC \perp CD$. **C**. $AB \perp CD$. **D**. $CD \perp (ABC)$.

✍Lời giải.

Theo giả thiết thì A và B cách đều C, D nên A, B nằm trên mặt phẳng trung trực của CD. Vậy $AB \perp CD$.



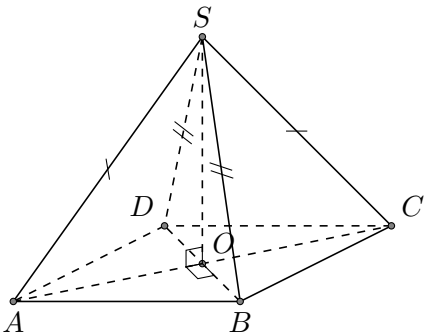
Chọn đáp án C □

Câu 281. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy$ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SA = SC$ và $SB = SD$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $BD \perp (SAC)$. **B**. $AB \perp (SBC)$. **C**. $SO \perp (ABCD)$. **D**. $AC \perp (SBD)$.

✍Lời giải.

Theo giả thiết AC, BD, SO đôi một vuông góc, do đó $SO \perp (ABCD), BD \perp (SAC), AC \perp (SBD)$, do AB có thể không vuông góc với BC nên "$AB \perp (SBC)$" là **sai**.



Chọn đáp án B □

Câu 282. Cho tứ diện $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SB và SC. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $AM \perp SC$. **B**. $AM \perp MN$. **C**. $AN \perp SB$. **D**. $SA \perp BC$.

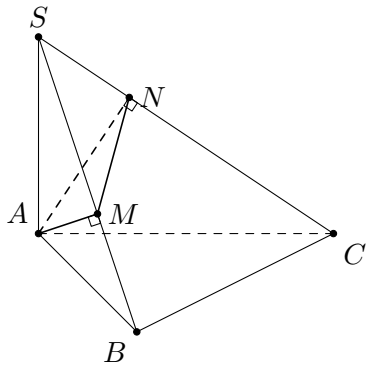
✍Lời giải.

Do

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$$

$$\Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow \begin{cases} AM \perp SC \\ AM \perp MN. \end{cases}$$

Do đó $AN \perp SB$ là sai.



Chọn đáp án C □

Câu 283. Trong không gian cho các đường thẳng a, b, c và mặt phẳng (P). Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Nếu $a \perp (P)$ và $b \parallel (P)$ thì $a \perp b$.
B. Nếu $a \perp b$, $c \perp b$ và a cắt c thì b vuông góc với mặt phẳng chứa a và c.
C. Nếu $a \parallel b$ và $b \perp c$ thì $c \perp a$.
D. Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \parallel c$.

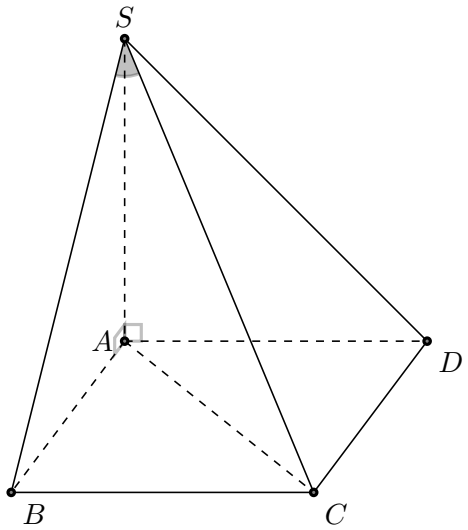
✍Lời giải.
Xét hình tứ diện $OABC$ vuông đỉnh O. Khi đó OB vuông góc với OA và OC nhưng OA và OC không song song. Mệnh đề "Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \parallel c$" sai.
Chọn đáp án D □

Câu 284. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tìm số đo của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB).

A. $30°$. **B**. $90°$. **C**. $45°$. **D**. $60°$.

✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow SB$ là hình chiếu của SC trên (SAB).
Suy ra $(SC, (SAB)) = \widehat{CSB}$.
$\tan CSB = \dfrac{BC}{SB} = \dfrac{BC}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
$\Rightarrow \widehat{CSB} = 30°$



Chọn đáp án A □

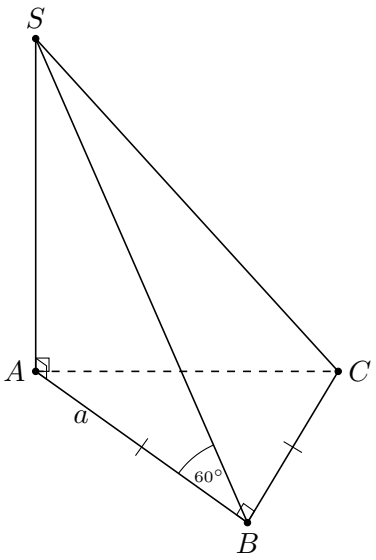
Câu 285. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B có $AB = BC = a$, $SA \perp (ABC)$. Biết mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc bằng $60°$. Cô-sin góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{10}}{20}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. **C**. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{10}}{15}$.

✍Lời giải.

Ta có $(SBC) \cap (ABC) = BC$.
Xét đường thẳng BC và mặt phẳng (SAB) có

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$$



Lại có $BC \perp AB$.
Vậy góc giữa (SBC) và (ABC) bằng góc giữa SB và AB chính là góc $\widehat{SBA}$. Khi đó $\widehat{SBA} = 60°$.
Trong tam giác SAB vuông tại A ta có

$$\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} \Rightarrow SA = AB \tan \widehat{SBA} = a\sqrt{3}.$$

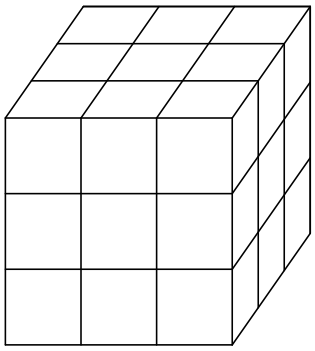
Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$ nên $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{5}$.
Vì $SA \perp (ABC)$ nên A là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC). Suy ra AC là hình chiếu vuông góc của SC lên (ABC).
Vậy góc giữa SC và (ABC) là góc giữa SC và AC bằng góc $\widehat{SCA}$.
Trong tam giác SAC vuông tại A ta có $\cos \widehat{SCA} = \dfrac{AC}{SC} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 286.

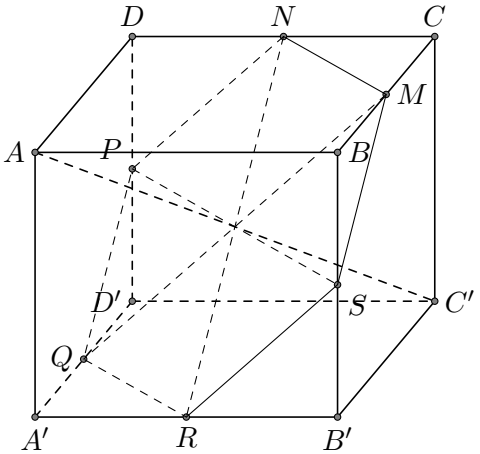
Cho khối lập phương (H) kích thước $3 \times 3 \times 3$ được tạo thành từ 27 khối lập phương đơn vị (xem hình vẽ). Mặt phẳng (P) vuông góc với một đường chéo của (H) tại trung điểm của nó. Hỏi (P) cắt qua bao nhiêu khối lập phương đơn vị?

A. 19. **B**. 8. **C**. 20. **D**. 10.



Lời giải.

Đặt tên các đỉnh của khối lập phương (H) như hình vẽ bên.
Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD, DD', $D'A'$, $A'B'$, $B'B$.
Khi đó mặt phẳng (P) vuông góc với AC' tại trung điểm của AC' đi qua M, N, P, Q, R, S.
Xét mỗi mặt của (H) gồm 9 khối lập phương đơn vị. Khi đó (P) cắt qua 4 khối lập phương mỗi mặt.
Ngoài ra, (P) cắt khối lập phương đơn vị ở trung tâm (chứa trung điểm của AC').



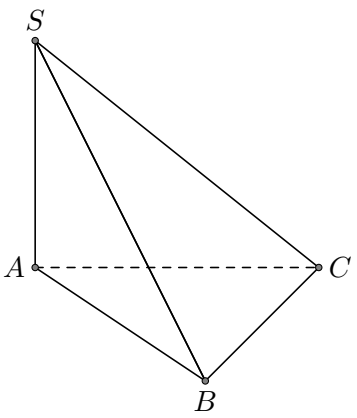
Khi đếm như vậy, các khối lập phương đơn vị chứa các điểm M, N, P, Q, R, S được tính 2 lần bị cắt qua.
Vậy (P) cắt qua số khối lập phương đơn vị là $6 \cdot 4 + 1 - 6 = 19$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 287.

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$; tam giác ABC đều cạnh a và $SA = a$ (tham khảo hình vẽ bên). Tìm góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC).

A. $60°$. **B**. $45°$. **C**. $135°$. **D**. $90°$.



✍Lời giải.

Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SC;(ABC)) = \widehat{SCA}$.
Xét tam giác vuông SAC : $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = 1 \Rightarrow \widehat{SCA} = 45°$.

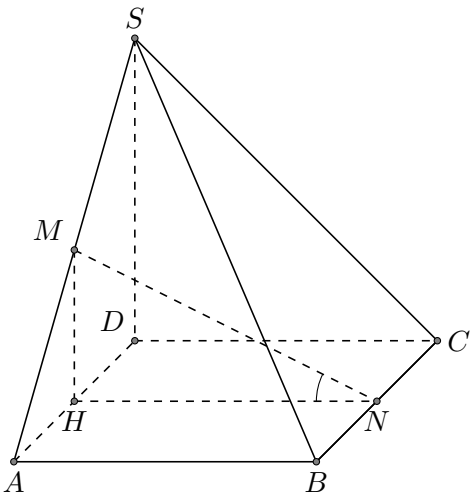
Chọn đáp án B □

Câu 288. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$, $SA \perp AB$, $SC \perp BC$, $SB = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, BC và α là góc giữa MN với (ABC). Tính $\cos\alpha$.

A. $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{11}}{11}$. **B**. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **C**. $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$. **D**. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

✍Lời giải.

Dựng hình bình hành $ABCD$ mà ABC vuông cân tại B nên $ABCD$ là hình vuông.
Ta có
$\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp SD$ và $\begin{cases} BC \perp CD \\ BC \perp SC \end{cases} \Rightarrow$
$BC \perp (SDC) \Rightarrow BC \perp SD$. Vậy $SD \perp (ABCD)$.
Gọi H là trung điểm của $AD \Rightarrow MH \perp (ABCD)$.
Do đó HN là hình chiếu của của MN lên mặt phẳng $(ABCD)$.
Vậy góc giữa đường thẳng MN với (ABC) là góc $\widehat{MNH} = \alpha$.
Xét tam giác vuông MNH có
$\cos\alpha = \dfrac{HN}{MN} = \dfrac{HN}{\sqrt{HN^2 + MH^2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.
Vậy $\alpha = \arccos\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.



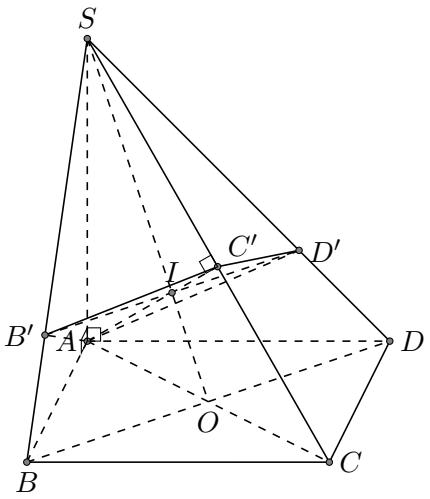
Chọn đáp án B □

Câu 289. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy, cạnh bên SB tạo với đáy góc $45°$. Một mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tứ giác $AB'C'D'$ có diện tích bằng

A. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **B**. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **C**. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$. **D**. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

✍Lời giải.

Do giả thiết $SC \perp (AB'C'D')$ suy ra $SC \perp AC'$ và $SC \perp AB'$ (1).
Mặt khác do $SA \perp (ABCD)$ suy ra $SA \perp BC$ và góc giữa SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $\widehat{SBA} = 45°$.
Mà $BC \perp AB$ do đó $BC \perp (SAB)$ hay $BC \perp B'A$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $AB' \perp (SBC)$ nên $AB' \perp SB$ và $AB' \perp B'C'$. Chứng minh tương tự ta có $AD' \perp SD$ và $AD' \perp D'C'$.
Do giả thiết suy ra tam giác SAB vuông cân tại A và $SA = a$, $SB = a\sqrt{2}$ và $AB' = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



Tương tự ta có $AD' = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Xét tam giác vuông SAC ta có

$$\frac{1}{AC'^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AC' = \frac{\sqrt{6}a}{3}.$$

Xét tam giác vuông $AB'C'$ ta có

$$AC'^2 - AB'^2 = B'C'^2 \Leftrightarrow B'C'^2 = \frac{6a^2}{9} - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{6} \Leftrightarrow B'C' = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Tương tự ta cũng có $D'C' = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. Khi đó

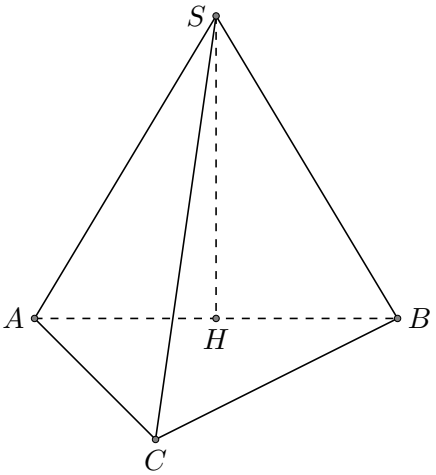
$$S_{AB'C'D'} = S_{\Delta AB'C'} + S_{\Delta AD'C'} = \frac{1}{2}AB' \cdot B'C' + \frac{1}{2}AD' \cdot D'C' = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 290. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và tam giác ABC vuông tại C. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC). Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. H là trung điểm của cạnh AB.
B. H là trọng tâm tam giác ABC.
C. H là trực tâm tam giác ABC.
D. H là trung điểm cạnh AC.

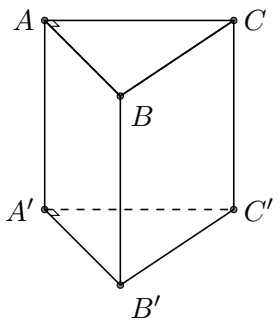
Lời giải.
Vì $SA = SB = SC$ nên hình chiếu của H trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Mặt khác $\triangle ABC$ vuông tại C nên tâm đường tròn ngoại tiếp là trung điểm cạnh AB.
Do đó H là trung điểm AB.



Chọn đáp án (A) □

Câu 291.

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = AA' = a$ (tham khảo hình vẽ bên). Tính tang của góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ABB'A')$.



A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

✍Lời giải.

ΔABC vuông cân tại A nên $\Rightarrow AB = AC = a$.

$\Delta ABA'$ vuông tại A nên $\Rightarrow A'B = a\sqrt{2}$.

Ta có $\begin{cases} C'A' \perp A'B' \\ C'A' \perp AA' \end{cases} \Rightarrow C'A' \perp (ABB'A')$.

$\Rightarrow BA'$ là hình chiếu của BC' lên mặt phẳng $(ABB'A')$.

$\Rightarrow (BC', (ABB'A')) = (BC', BA')$.

$\Delta A'BC'$ vuông tại $A' \Rightarrow \tan \widehat{A'BC'} = \dfrac{A'C'}{A'B} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 292. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, tâm của đáy là O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng $60°$, tính cosin của góc giữa MN và mặt phẳng (SBD).

A. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. **B.** $\dfrac{2}{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

✍Lời giải.

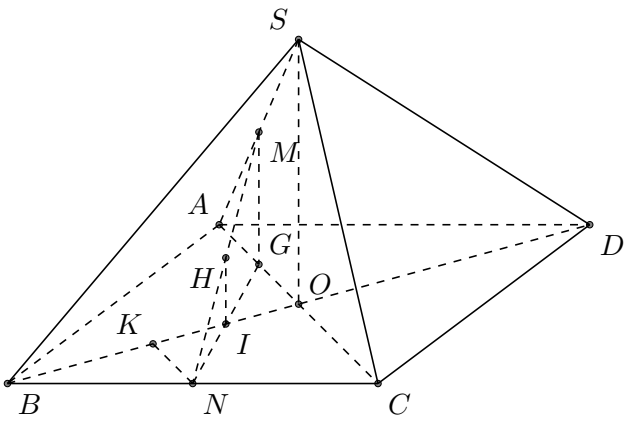
Gọi G là hình chiếu của M lên $(ABCD)$. Ta thấy $G \in AC$. Góc giữa MN và $(ABCD)$ là $\widehat{GNM} = 60°$.

Áp dụng định lý cos cho tam giác CNG, ta có

$$NG^2 = CN^2 + CG^2 - 2NC \cdot CG \cdot \cos \widehat{NCG} = \frac{5a^2}{8}.$$

Suy ra $NG = a\sqrt{\dfrac{5}{8}}$. Vậy

$$MN = \frac{NG}{\cos 60°} = a\frac{\sqrt{10}}{2}.$$



Gọi I là giao điểm của GN và BO. Từ I kẻ đường thẳng song song với MG, cắt MN tại H. Khi đó H là giao điểm của MN và mặt phẳng (SBD). Gọi K là hình chiếu của N lên BD. Khi đó $\begin{cases} NK \perp BD \\ NK \perp SO \end{cases} \Rightarrow NK \perp (SBD)$ suy ra góc tạo bởi MN và mặt phẳng (SBD) là góc $\widehat{NHK}$.

Ta có tứ giác $GONK$ là hình bình hành nên I là trung điểm GN.

Xét tam giác vuông NKH, ta có $NH = \dfrac{1}{2}MN = a\sqrt{\dfrac{5}{8}}$, $NK = \dfrac{1}{2}CO = a\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

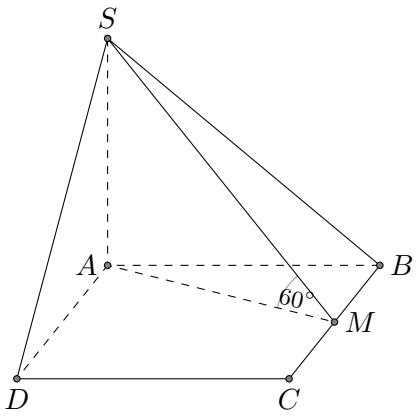
Do đó $\sin \widehat{NHK} = \dfrac{NK}{HN} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 293. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của CD, góc giữa SM và mặt phẳng đáy bằng $60°$. Độ dài cạnh SA là

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{15}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

✍Lời giải.



Ta có góc giữa SM và mặt phẳng đáy là $\widehat{SMA} = 60°$.

Xét tam giác ABM vuông tại B, ta có $AM^2 = a^2 + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{5a^2}{4} \Rightarrow AM = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Xét tam giác SAM vuông tại A, ta có $\tan 60° = \dfrac{SA}{AM} \Rightarrow SA = AM \tan 60° = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 294. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{ADC} = 60°$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, SO vuông góc với $(ABCD)$ và $SO = a$. Góc giữa đường thẳng SD và $(ABCD)$ bằng

A. $60°$. **B**. $75°$. **C**. $30°$. **D**. $45°$.

✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases} O \text{ là hình chiếu của } S \text{ lên } (ABCD) \text{ (do } SO \perp (ABCD)) \\ D \text{ là hình chiếu của } D \text{ lên } (ABCD) \end{cases} \Rightarrow$
OD là hình chiếu của SD lên $(ABCD)$.

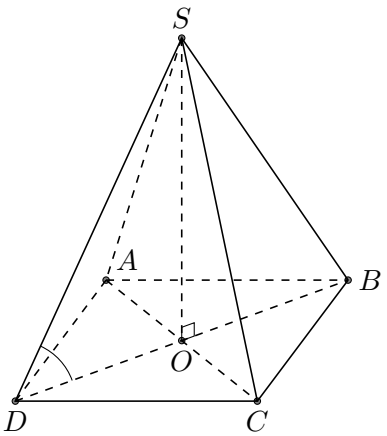
Vậy $[\widehat{SD, (ABCD)}] = \widehat{[SD, OD]} = \widehat{SDO}$.

$\triangle ADC$ cân tại D có $\widehat{ADC} = 60°$ nên $\triangle ADC$ là tam giác đều cạnh $2a \Rightarrow DO = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Xét $\triangle SOD$ vuông tại O (do $SO \perp (ABCD)$ và $OD \subset (ABCD)$).

$\Rightarrow \tan \widehat{SDO} = \dfrac{SO}{OD} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy $\widehat{SDO} = 30°$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 295. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $BC = a$. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S lên mặt phẳng đáy là trung điểm của AB, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng $60°$. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SB và AC.

A. $\dfrac{2}{\sqrt{7}}$. **B**. $\dfrac{2}{\sqrt{35}}$. **C**. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$.

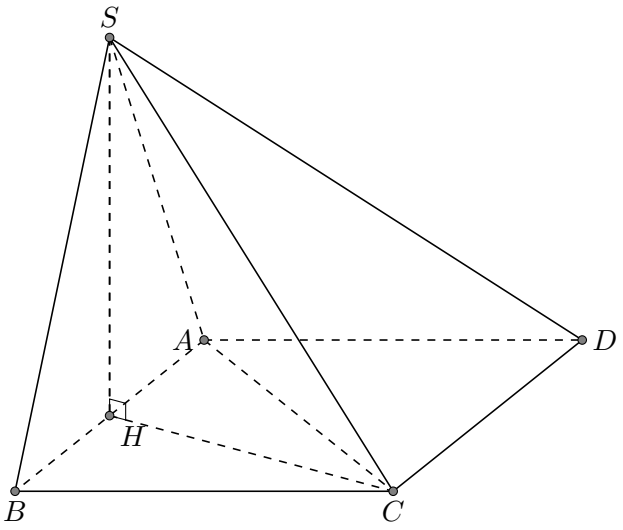
✍Lời giải.

Ta có góc giữa SC và đáy là $\widehat{SCH} = 60^\circ$. Nên
$HC = \sqrt{HB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$,
$SH = HC \cdot \tan \widehat{SCH} = a\sqrt{6}$.
$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{5}$,
$SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = a\sqrt{7}$.
Ta có

$$\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{SH} + \overrightarrow{HB}\right) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC}$$
$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC} = HB \cdot AC \cdot \frac{AB}{AC} = 2a^2.$$

Mà $SB \cdot AC = a\sqrt{7} \cdot a\sqrt{5} = a^2\sqrt{35}$. Do đó

$$\cos(SB, AC) = \frac{\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC}}{SB \cdot AC} = \frac{2}{\sqrt{35}}.$$



Chọn đáp án B □

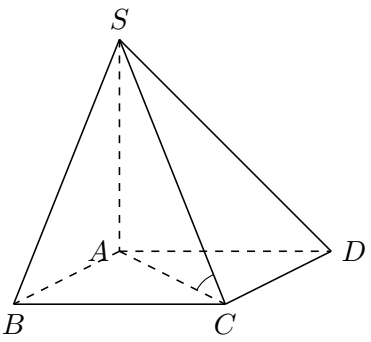
Câu 296. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a\sqrt{2}$, đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính tang của góc giữa đường thẳng SC và đáy.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 3.

Lời giải.

AC là hình chiếu của SC lên mặt đáy nên góc giữa SC là đáy chính là góc $\widehat{SCA}$.

Ta có $\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{2}}{2a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$.



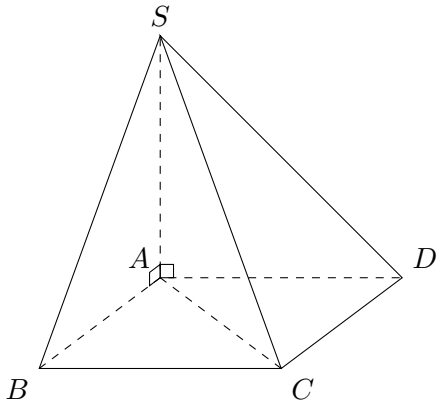
Chọn đáp án B □

Câu 297. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với $(ABCD)$. Hình chóp đã cho có mặt phẳng đối xứng nào?

A. (SAC). **B.** (SAB). **C.** Không có. **D.** (SAD).

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$. (1)
Mặt khác, $ABCD$ là hình vuông nên suy ra $BD \perp AC$. (2)
Từ (1), (2) suy ra $BD \perp (SAC)$, kết hợp tính chất hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường của hình vuông, ta suy ra B và D đối xứng nhau qua mặt phẳng (SAC). Từ đó suy ra (SAC) là mặt phẳng đối xứng.



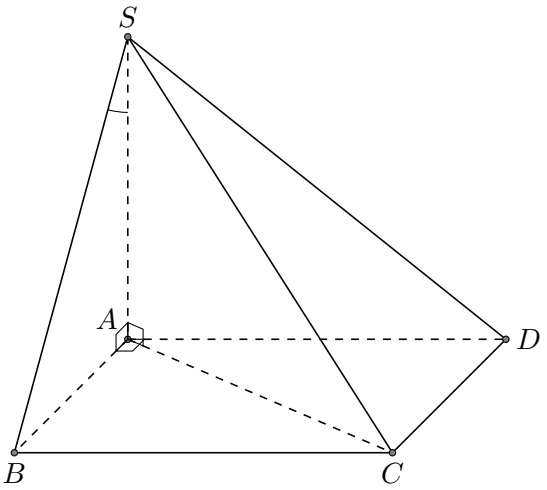
Chọn đáp án A □

Câu 298. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SA = 2a$. Tính cosin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD).

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAC)\perp(ABCD)\end{cases}$
$\Rightarrow SA\perp(ABCD)$.
Lại có $\begin{cases}AB\perp AD\\AB\perp SA\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SAD)$.
Suy ra góc giữa SB và (SAD) là $\widehat{BSA}$.
$\cos\widehat{BSA}=\dfrac{SA}{SB}=\dfrac{SA}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.



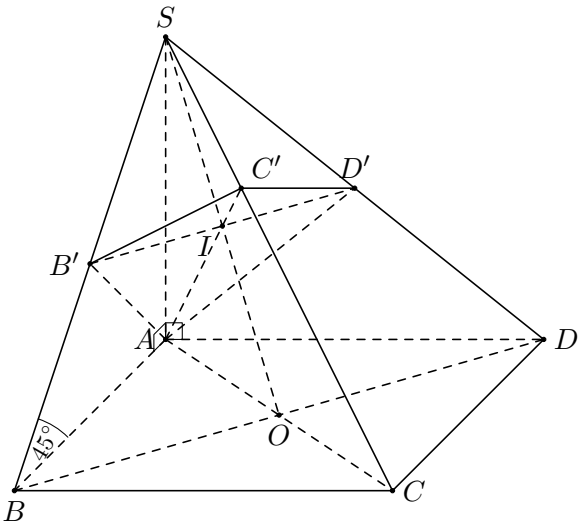
Chọn đáp án (B) □

Câu 299. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau đây:
A. Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
B. Trong không gian, hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.
C. Trong không gian, hai mặt phẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
D. Trong không gian, hai đường thẳng không có điểm chung thì song song với nhau.

✍Lời giải.
Trong không gian, hai đường thẳng vuông góc với nhau thì không trùng nhau và cũng không thể song song với nhau, do đó chúng cắt nhau hoặc chéo nhau.
Chọn đáp án (B) □

Câu 300. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, cạnh bên SB tạo với đáy góc 45°. Một mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tứ giác $AB'C'D'$ có diện tích bằng
A. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **B**. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **C**. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$. **D**. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

✍Lời giải.
Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và kẻ $AC'\perp SC$ với $C'\in SC$.
Gọi $AC'\cap SO=I$ và qua I vẽ đường thẳng $B'D'\parallel BD$ (với $B'\in SB;D'\in SD$).
Khi đó thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) là tứ giác $AB'C'D'$.
Ta có $BD\perp(SAC)\Rightarrow B'D'\perp(SAC)$
$\Rightarrow B'D'\perp AC'$.
Diện tích thiết diện là $S_{AB'C'D'}=\dfrac{1}{2}AC'\cdot B'D'$.
Góc của SB với đáy là $\widehat{SBA}=45^\circ\Rightarrow SA=AB=a$.



Trong tam giác vuông SAC có $\dfrac{1}{AC'^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AC^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{2a^2}=\dfrac{3}{2a^2}\Rightarrow AC'=\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.
Mặt khác, ta có $\begin{cases}AB'\perp BC\\AB'\perp SC\end{cases}\Rightarrow AB'\perp SB$.
Do đó B' là trung điểm SB (do tam giác SAB vuông cân tại A).
Tương tự D' là trung điểm SD (do tam giác SAD vuông cân tại A).
Do đó $B'D'=\dfrac{1}{2}BD=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $S_{AB'C'D'} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$.

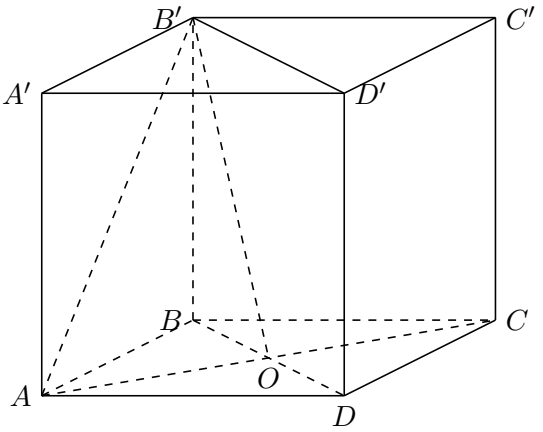
Chọn đáp án C □

Câu 301. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng $(BDD'B')$.

A. $60°$. **B**. $90°$. **C**. $45°$. **D**. $30°$.

✍Lời giải.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ khi đó ta có $AO \perp BD$. (1)
Mặt khác ta lại có $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $BB' \perp (ABCD) \Rightarrow BB' \perp AO$. (2)
Từ (1) và (2) ta có $AO \perp (BDD'B') \Rightarrow \widehat{(AB', (ABCD))} = \widehat{(AB', B'O)} = \widehat{AB'O}$. Xét tam giác vuông $AB'O$ có $\sin AB'O = \dfrac{AO}{AB'} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AB'O} = 30°$. Vậy $\widehat{(AB', (ABCD))} = 30°$.



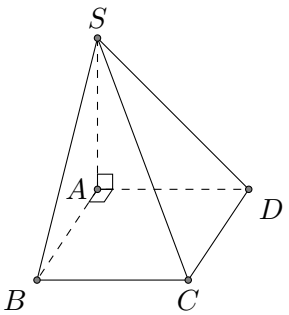
Chọn đáp án D □

Câu 302. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy, góc giữa cạnh SD và đáy bằng $30°$. Độ dài cạnh SD bằng

A. $2a$. **B**. $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C**. $\dfrac{a}{2}$. **D**. $a\sqrt{3}$.

✍Lời giải.

Từ giả thiết ta có $\widehat{SDA} = 30°$ nên $SD = \dfrac{AD}{\cos 30°} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.



Chọn đáp án B □

Câu 303. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC). Khi đó α thỏa mãn hệ thức nào sau đây?

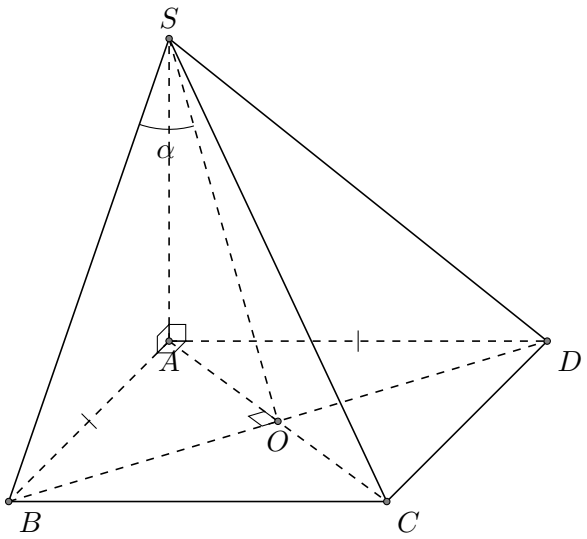
A. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$. **B**. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$. **C**. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **D**. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

✍Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD$.
Ta có $BO \perp AC$ và $BO \perp SA$. Suy ra $BO \perp (SAC)$. Do đó, góc giữa SB và (SAC) là $\widehat{BSO} = \alpha$.
Ta có $BO = AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Xét tam giác SOB vuông tại O, có
$BO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$,

$SO = \sqrt{SA^2 + AO^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}$

$= \dfrac{a\sqrt{14}}{2}$.



$SB = \sqrt{BO^2 + SO^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{14}}{2}\right)^2} = 2a$.

Suy ra $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

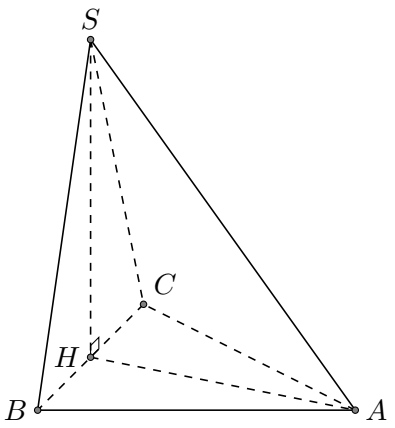
Chọn đáp án C □

Câu 304. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Biết tam giác SBC là tam giác đều. Tính số đo của góc giữa SA và (ABC).

A. $60°$. **B**. $75°$. **C**. $45°$. **D**. $30°$.

✍Lời giải.

Ta có $SA \cap (ABC) = A$ và H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC).
Suy ra $[SA, (ABC)] = \widehat{SAH}$.
Ta có $\triangle ABC, \triangle SBC$ đều suy ra $SH = HA$
$\Rightarrow \triangle SHA$ vuông cân tại H.
Suy ra $[SA, (ABC)] = 45°$.

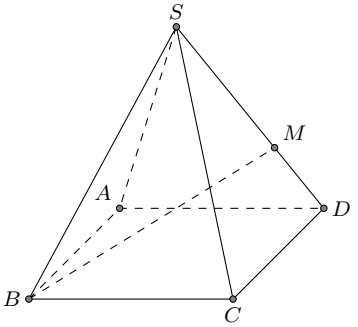


Chọn đáp án C □

Câu 305.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là điểm trên đoạn SD sao cho $SM = 2MD$. Tính tan góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $\dfrac{1}{3}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C**. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D**. $\dfrac{1}{5}$.

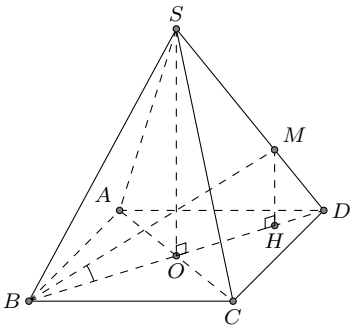


✍Lời giải.

Gọi $\{O\} = AC \cap DB$ và H là hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng $(ABCD) \Rightarrow H \in BD$.

$BH = \dfrac{5}{6}BD = \dfrac{5a\sqrt{2}}{6}$; $MH \parallel SO \Rightarrow MH = \dfrac{1}{3}SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{6}$.

$\Rightarrow \tan(BM, (ABCD)) = \tan \widehat{MBH} = \dfrac{MH}{BH} = \dfrac{1}{5}$.



Chọn đáp án D □

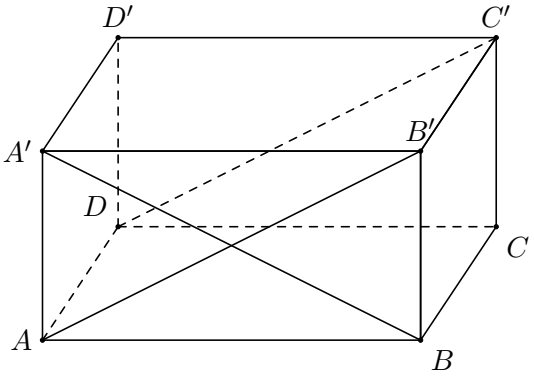
Câu 306. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa $A'B$ và AC'.

A. $90°$. **B**. $45°$. **C**. $30°$. **D**. $60°$.

✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases} A'B \perp AB' \\ A'B \perp AD \end{cases} \Rightarrow A'B \perp (ADC'B')$

$\Rightarrow A'B \perp AC'$.



Chọn đáp án A □

Câu 307. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$ và $SA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB).

A. $60°$. **B**. $90°$. **C**. $30°$. **D**. $45°$.

✍Lời giải.

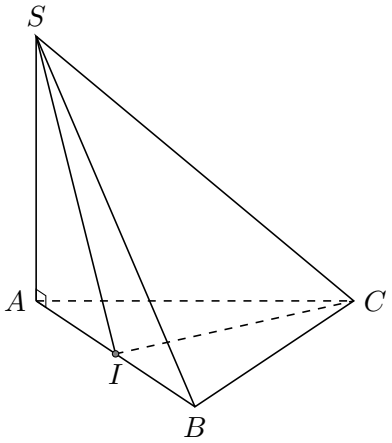
Gọi I là trung điểm của AB. Ta có $\begin{cases} CI \perp AB \\ CI \perp SA \end{cases} \Rightarrow CI \perp (SAB)$. Do đó SI là hình chiếu vuông góc của SC lên (SAB).

Vậy $(SC, (SAB)) = (SC, SI) = \widehat{CSI}$ (do $\triangle SCI$ vuông tại I).

Ta có $SI = \sqrt{SA^2 + AI^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Mà $CI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên $\triangle SCI$ vuông cân tại I, do đó $\widehat{CSI} = 45°$.

Kết luận $(SC, (SAB) = 45°$.

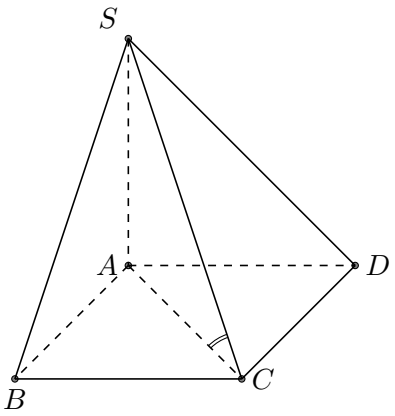


Chọn đáp án D □

Câu 308. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $30°$. **B**. $45°$. **C**. $60°$. **D**. $90°$.

✍Lời giải.



— Vì $SA \perp (ABCD)$ nên A là hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$.

— Suy ra $(SC,(ABCD)) = (SC,AC) = \widehat{SCA}$.

— Xét tam giác SAC vuông tại A có $SA = a\sqrt{2}, AC = a\sqrt{2}$ nên ΔSAC vuông cân tại A.

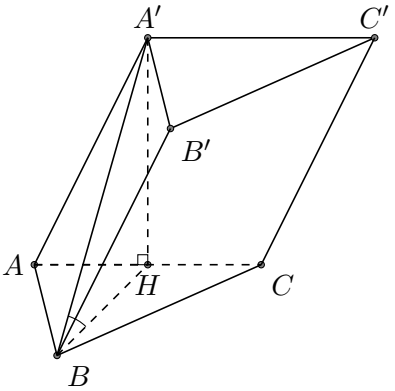
— Vậy $(SC,(ABCD)) = \widehat{SCA} = 45^\circ$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 309. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AC, góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng (ABC) bằng 30°. Tính $\cos\alpha$ với α là góc giữa hai đường thẳng AB và CC'.

A. $\cos\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. **B.** $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{1}{8}$.

✍Lời giải.



— Do $CC' \parallel AA'$ nên góc giữa AB và CC' bằng góc giữa AB và AA'.

— HB là hình chiếu vuông góc của $A'B$ trên mặt phẳng (ABC) nên góc giữa $A'B$ và (ABC) là góc $\widehat{A'BH}$ $\Rightarrow \widehat{A'BH} = 30^\circ$.

— $BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, A'H = BH \cdot \tan\widehat{A'BH} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \tan 30^\circ = \dfrac{a}{2}$.

— Ta có $\triangle A'BH$ và $\triangle A'AH$ vuông tại H nên
$A'B = \sqrt{A'H^2 + BH^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{3a^2}{4}} = a.$
$A'A = \sqrt{A'H^2 + AH^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.$

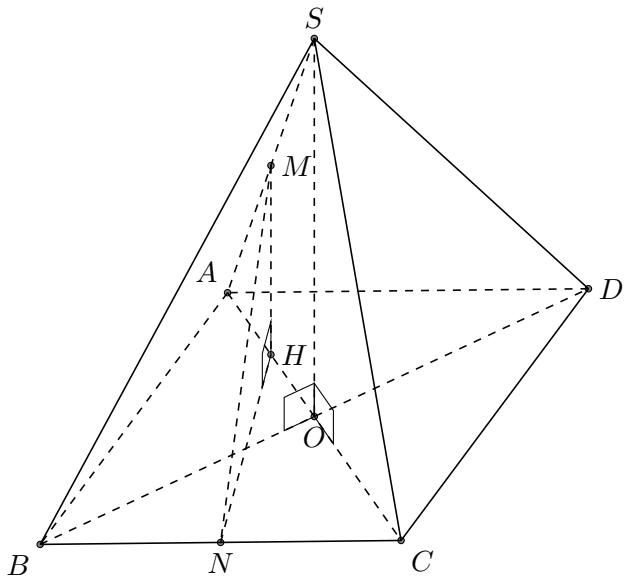
— Suy ra $\cos\alpha = \left|\cos\widehat{A'AB}\right| = \left|\dfrac{AB^2 + AA'^2 - A'B^2}{2 \cdot AA' \cdot AB}\right| = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 310. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng a, SO vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA và BC. Tính góc giữa đường thẳng MN với mặt phẳng $(ABCD)$, biết $MN = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

✍Lời giải.



Lấy H là trung điểm của đoạn AO, suy ra MH là đường trung bình của tam giác SAO, suy ra $MH \parallel SO$.
Mặt khác $SO \perp (ABCD)$ nên $MH \perp (ABCD)$, từ đó suy ra góc giữa MN và $(ABCD)$ là $\widehat{MNH}$.
Xét tam giác NCH có

$$NH^2 = CN^2 + CH^2 - 2CN \cdot CH \cdot \cos\widehat{NCH}$$

$$\Rightarrow NH^2 = \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow NH^2 = \frac{9a^2}{8} + \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4} = \frac{5a^2}{8} \Rightarrow NH = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

Từ đó suy ra $\cos\widehat{MNH} = \dfrac{NH}{MH} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{MNH} = 60^\circ$.

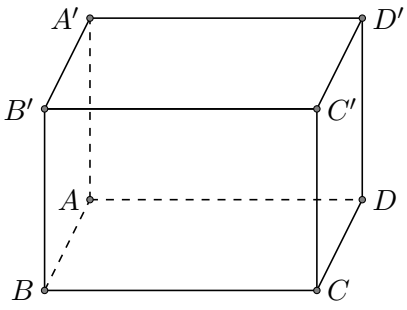
Chọn đáp án (C) □

Câu 311. Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $BB' \perp BD$. **B**. $A'C' \perp BD$. **C**. $A'B \perp DC'$. **D**. $BC' \perp A'D$.

✍Lời giải.

Do $ABCD$, $A'B'BA$, $BB'C'C$ là các hình thoi nên



— $\begin{cases} AC \perp BD \\ B'D' \parallel BD \end{cases} \Rightarrow A'C' \perp BD.$

— $\begin{cases} A'B \perp AB' \\ DC' \parallel AB' \end{cases} \Rightarrow A'B \perp DC'.$

— $\begin{cases} BC' \perp B'C \\ A'D \parallel B'C \end{cases} \Rightarrow BC' \perp A'D.$

Nếu hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ không phải là hình hộp đứng thì ta không có $BB' \perp BD$.

Chọn đáp án (A) □

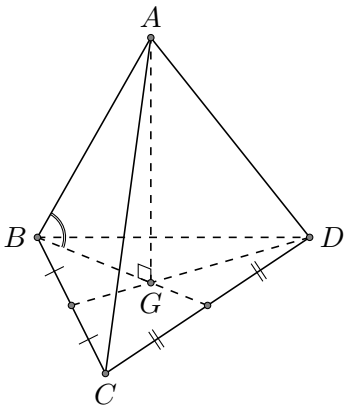
Câu 312. Cho tứ diện đều $ABCD$. Tính tan của góc giữa AB và (BCD).

A. $\sqrt{3}$. **B**. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C**. $\sqrt{2}$. **D**. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

✍Lời giải.

Gọi G là trọng tâm của $\triangle BCD$.
Ta có: $AG \perp (BCD)$, $\widehat{(AB,(BCD))} = \widehat{(AB,BG)} = \widehat{ABG}$ và

$$\tan\widehat{ABG} = \frac{AG}{BG} = \frac{\sqrt{AB^2-BG^2}}{BG} = \frac{\sqrt{a^2-\dfrac{a^2}{3}}}{\dfrac{a}{\sqrt{3}}} = \frac{\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\dfrac{a}{\sqrt{3}}} = \sqrt{2}.$$



Chọn đáp án C □

Câu 313. Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau?

A. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q).

B. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) thì đường thẳng a song song với đường thẳng b.

C. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) thì đường thẳng a song song hoặc trùng với đường thẳng b.

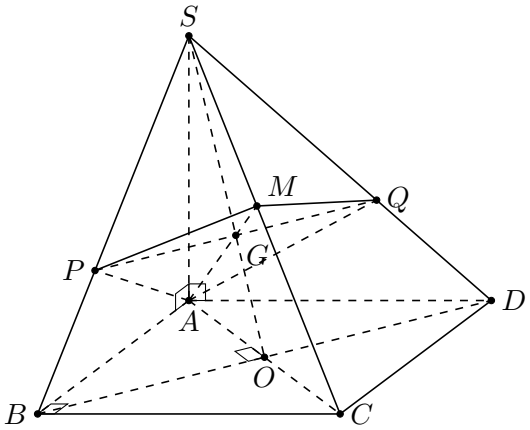
D. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đã cho.

✍Lời giải.
Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đã cho.
Chọn đáp án D □

Câu 314. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt đáy, $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm của cạnh SC, (α) là mặt phẳng đi qua A, M và song song với đường thẳng BD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ bị cắt bởi mặt phẳng (α).

A. $a^2\sqrt{2}$. **B**. $\dfrac{4a^2}{3}$. **C**. $\dfrac{4a^2\sqrt{2}}{3}$. **D**. $\dfrac{2a^2\sqrt{2}}{3}$.

✍Lời giải.
Gọi $O = AC \cap BD$, $G = AM \cap SO$.
$\Rightarrow G$ là trọng tâm $\triangle SAC$.
Qua G kẻ đường thẳng song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại P, Q. Khi đó $APMQ$ là thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ bị cắt bởi mặt phẳng (α).
Ta có $\dfrac{PQ}{BD} = \dfrac{SG}{SO} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow PQ = \dfrac{2}{3}\cdot BD = \dfrac{4a}{3}$.
Lại có $AM = \dfrac{1}{2}\cdot SC = a\sqrt{2}$.
Mà $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AM \Rightarrow PQ \perp AM$.
Do đó $S_{APMQ} = \dfrac{1}{2}\cdot AM \cdot PQ = \dfrac{2a^2\sqrt{2}}{3}$.



Chọn đáp án D □

Câu 315. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

✍Lời giải.
Theo tính chất hai mặt phẳng vuông góc, suy ra khẳng định đúng là hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

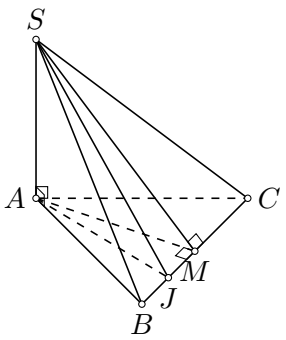
Chọn đáp án B ☐

Câu 316. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, cạnh bên SA vuông góc với đáy, M là trung điểm BC, J là trung điểm BM. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $BC \perp (SAB)$. **B**. $BC \perp (SAM)$. **C**. $BC \perp (SAC)$. **D**. $BC \perp (SAJ)$.

✍Lời giải.

Tam giác ABC cân tại A và M là trung điểm của BC nên $BC \perp AM$. Mặt khác $BC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABC)$). Suy ra $BC \perp (SAM)$.



Chọn đáp án B ☐

Câu 317. Cho tứ diện đều $ABCD$. Côsin của góc giữa AB và mặt phẳng (BCD) bằng

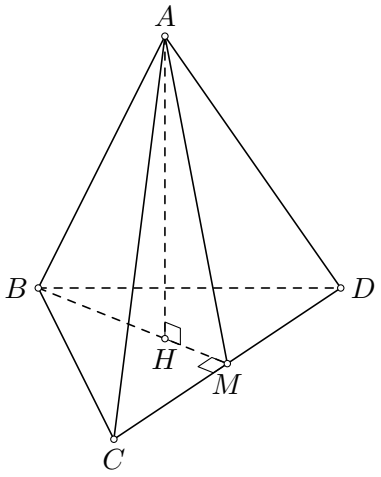
A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C**. $\dfrac{1}{3}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

✍Lời giải.

Gọi cạnh tứ diện đều bằng a, H là trọng tâm tam giác đều BCD.

Ta có $AH \perp (BCD)$ nên góc giữa AB và mặt phẳng (BCD) là góc $\widehat{ABH}$.

$$\cos\widehat{ABH} = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{2}{3}\cdot BM}{AB} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



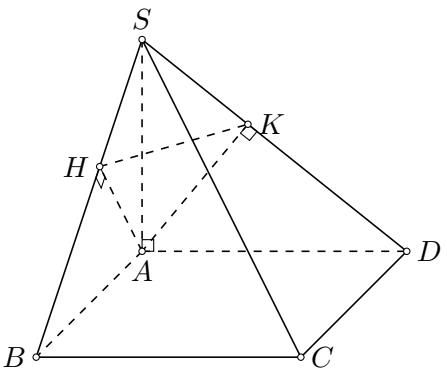
Chọn đáp án B ☐

Câu 318. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, hai mặt bên (SAB) và (SAD) vuông góc với mặt đáy. Gọi AH, AK lần lượt là đường cao của tam giác SAB, tam giác SAD. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $HK \perp SC$. **B**. $SA \perp AC$. **C**. $BC \perp AH$. **D**. $AK \perp BD$.

✍Lời giải.

Ta có: $AH \perp SC$ và $AK \perp SC$ nên $SC \perp (AHK)$
$\Rightarrow SC \perp HK$.
$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC$.
Lại có $AH \perp (SBC)$ nên $BC \perp AH$.
Vậy khẳng định $AK \perp BD$ **sai**.



Chọn đáp án D ☐

Câu 319. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B. Gọi H là hình chiếu của A trên SB. Trong các khẳng định sau

(1): $AH \perp SC$.

(2): $BC \perp (SAB)$.

(3): $SC \perp AB$.

có mấy khẳng định đúng?

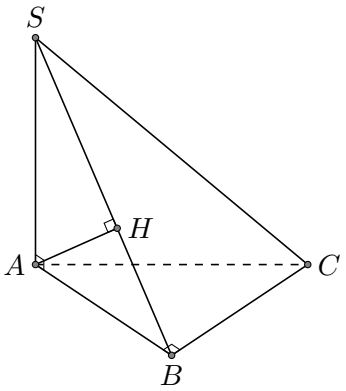
A. 1. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 0.

✍Lời giải.

Ta có:

— $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \quad (*)$.

— $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \text{ (do } (*)) \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$.



Chọn đáp án B □

Câu 320. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

B. Hai đường thẳng không cắt nhau và không song song thì chéo nhau.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

✍Lời giải.

Hai đường thẳng trong không gian không cắt nhau và không song song thì chéo nhau hoặc trùng nhau.

Hai mặt phẳng phân biệt $(P), (Q)$ cùng vuông góc với một mặt phẳng (R) thì song song với nhau hoặc cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (R).

Hai đường thẳng phân biệt a, b cùng vuông góc với một đường thẳng d thì có thể cắt nhau, chéo nhau hoặc song song với nhau.

Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Chọn đáp án A □

Câu 321. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB = 2a, \widehat{BAC} = 60^\circ$ và $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng

A. 45°. **B**. 30°. **C**. 60°. **D**. 90°.

✍Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên $AC \Rightarrow BH \perp (SAC)$

Xét tam giác ABH vuông tại H, ta có

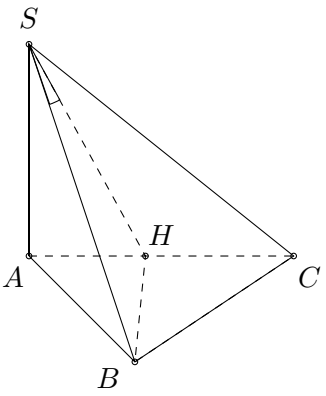
$\sin \widehat{BAH} = \dfrac{BH}{AB} \Rightarrow BH = AB \cdot \sin 60^\circ = a\sqrt{3}$

$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{6}$

Xét tam giác SBH vuông tại H, ta có

$\sin \widehat{BSH} = \dfrac{BH}{SB} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{BSH} = 45^\circ$

Vậy $\widehat{[SB, (SAC)]} = \widehat{BSH} = 45^\circ$



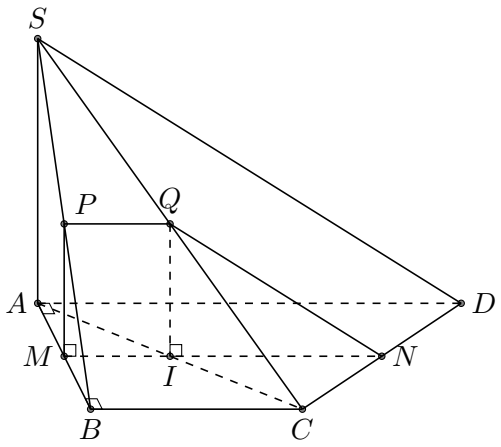
Chọn đáp án A □

Câu 322. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a, AD = 2a$. Cạnh $SA = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB và (α) là mặt phẳng qua M vuông góc với AB. Diện tích thiết diện của mặt phẳng (α) với hình chóp $S.ABCD$ là.

A. $S = a^2$. **B**. $S = \dfrac{3a^2}{2}$. **C**. $S = \dfrac{a^2}{2}$. **D**. $S = 2a^2$.

✍Lời giải.

Mặt phẳng (α) qua trung điểm M và vuông góc AB nên đi qua trung điểm P của SB, trung điểm N của CD.
Gọi I là giao điểm của AC và $MN \Rightarrow I \in (\alpha)$.
Từ I dựng $IQ \perp (ABCD)$ cắt SC tại Q.
Suy ra Q là trung điểm của SC (vì $IQ \parallel SA$).
Thiết diện là hình thang $MPQN$ có $MN = \dfrac{BC+AD}{2} = \dfrac{3a}{2}$.
$PQ = MI = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a}{2}$.
Đường cao hình thang là $MP = \dfrac{1}{2}SA = a$.
Suy ra $S_{MPQN} = \dfrac{(PQ+MN)\cdot MP}{2} = a^2$.

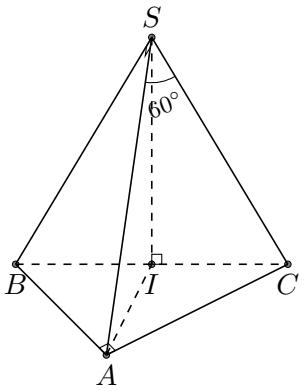


Chọn đáp án A □

Câu 323. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{BSC} = 120°$, $\widehat{ASB} = 90°$, $\widehat{CSA} = 60°$, $SA = SB = SC$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. I là trung điểm của AC. **B**. I là trung điểm của AB.
C. I là trọng tâm của tam giác ABC. **D**. I là trung điểm của BC.

✍Lời giải.
Đặt $SA = SB = SC = a$.
Ta có các tam giác vuông $\Delta SAI = \Delta SBI = \Delta SCI$
nên $IA = IB = IC$ hay I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Áp dụng định lý Cô-sin trong tam giác thì $AB = a\sqrt{2}$, $BC = a\sqrt{3}$,
$AC = a$, do đó tam giác ABC vuông tại A,
suy ra I là trung điểm cạnh BC.

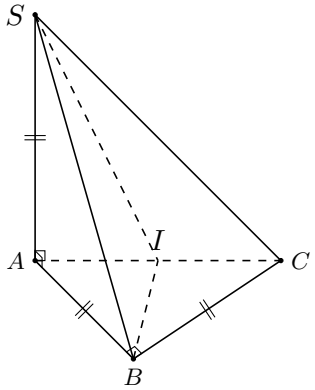


Chọn đáp án D □

Câu 324. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, tam giác ABC vuông tại B. Biết $SA = AB = BC$. Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC).

A. $30°$. **B**. $45°$. **C**. $60°$. **D**. $\arccos\dfrac{1}{3}$.

✍Lời giải.
Gọi I là trung điểm AC, khi đó $BI \perp AC$ hay $BI \perp (SAC)$. Do đó SI là hình chiếu vuông góc của SB lên mặt phẳng (SAC) suy ra góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) là góc $\widehat{BSI}$.
Đặt $SA = AB = BC = a$, suy ra $BI = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và $SB = a\sqrt{2}$. Khi đó $\sin\widehat{BSI} = \dfrac{BI}{SB} = \dfrac{1}{2}$.
Vậy góc cần tìm là $30°$.



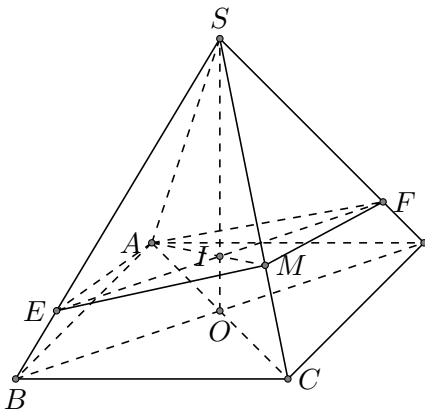
Chọn đáp án A □

Câu 325. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a, điểm M thuộc cạnh SC sao cho $SM = 2MC$. Mặt phẳng (P) chứa AM và song song với BD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (P).

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^2}{5}$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{26}a^2}{15}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{26}a^2}{15}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}a^2}{5}$.

✍Lời giải.

Gọi AM cắt SO tại I. Khi đó $(P)\cap(SBD)=EF\parallel BD$ với E,F lần lượt trên các cạnh SB,SD hay thiết diện của (P) với hình chóp là tứ giác $AEMF$.



Ta có $BD\perp(SAC)$ nên $EF\perp(SAC)$ hay $EF\perp AM$. Áp dụng định lý Menelaus trong tam giác SOC với A,I,M thẳng hàng: $\dfrac{IS}{IO}\cdot\dfrac{AO}{AC}\cdot\dfrac{MC}{MS}=1$ hay $\dfrac{IS}{IO}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=1\Leftrightarrow\dfrac{IS}{IO}=4$.

Khi đó $\dfrac{EF}{BD}=\dfrac{IS}{SO}=\dfrac{4}{5}$ hay $EF=\dfrac{4\sqrt{2}a}{5}$.

Ta có $\cos\widehat{SCA}=\dfrac{AC^2+SC^2-SA^2}{2\cdot AC\cdot SC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Trong $\triangle ACM$ có $MA^2=AC^2+MC^2-2\cdot AC\cdot MC\cos\widehat{SCA}=2a^2+\dfrac{a^2}{9}-2\cdot a\sqrt{2}\cdot\dfrac{a}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{13a^2}{9}$.

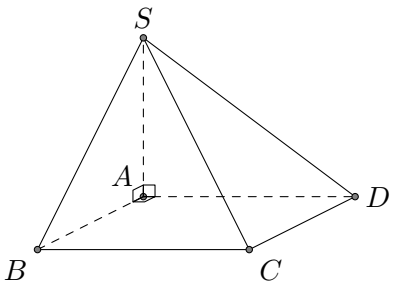
Suy ra $AM=\dfrac{\sqrt{13}a}{3}$; và do đó, diện tích tứ giác $AEMF$ là $\dfrac{EF\cdot AM}{2}=\dfrac{2\sqrt{26}a^2}{15}$.

Chọn đáp án C □

Câu 326. Cho chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $SA\perp(ABCD)$. Góc giữa đường SC và mặt phẳng (SAD) là góc nào trong các góc sau?

A. $\widehat{CSA}$. **B.** $\widehat{CSD}$. **C.** $\widehat{CDS}$. **D.** $\widehat{SCD}$.

✍Lời giải.



Ta có $\begin{cases}CD\perp AD\\CD\perp SA\end{cases}\Rightarrow CD\perp(SAD)$.

Do đó góc giữa SC và (SAD) bằng góc giữa SC và SD.

Do góc $\widehat{CSD}<90^\circ$ nên chọn $\widehat{CSD}$.

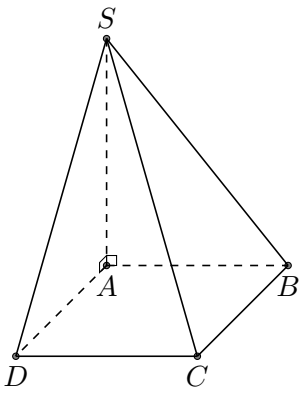
Chọn đáp án B □

Câu 327. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA=a$. Gọi góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) là α. Khi đó $\tan\alpha$ nhận giá trị nào trong các giá trị sau?

A. $\tan\alpha=1$. **B.** $\tan\alpha=\sqrt{2}$. **C.** $\tan\alpha=\sqrt{3}$. **D.** $\tan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

✍Lời giải.

Ta có $BC \perp (SAB)$.
Suy ra $\alpha = \widehat{CSB} \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{BC}{SB} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.



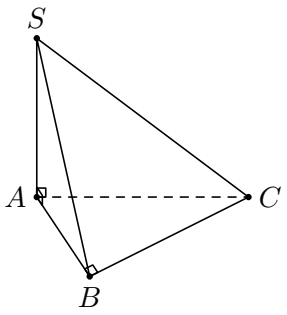
Chọn đáp án (D) □

Câu 328. Cho tứ diện $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$. Tứ diện $S.ABC$ có bao nhiêu mặt là tam giác vuông?

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

✍Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AB$, $SA \perp AC$ hay tam giác SAB và SAC vuông tại A.
Mặt khác $AB \perp BC$ suy ra $\triangle ABC$ vuông tại B.
Cuối cùng $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$, kết hợp $BC \perp AB$ ta có $SB \perp BC$ hay tam giác SBC vuông tại B.



Chọn đáp án (A) □

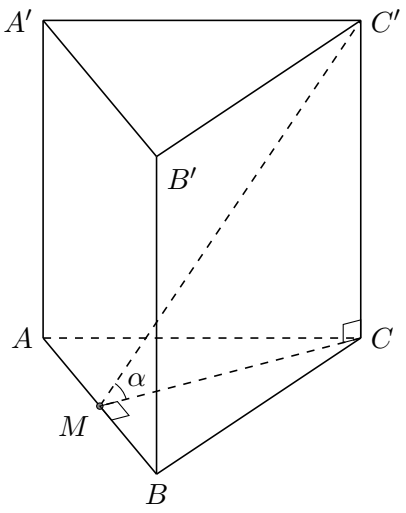
Câu 329. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của AB và α là góc tạo bởi đường thẳng MC' và mặt phẳng (ABC). Khi đó $\tan\alpha$ bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

✍Lời giải.

Ta có MC là hình chiếu của MC' trên mặt phẳng (ABC)
$\Rightarrow \widehat{C'MC}$ là góc giữa đường thẳng MC' và mặt phẳng (ABC). Do đó $\alpha = \widehat{C'MC}$.
Tam giác ABC đều cạnh a có CM là đường cao nên $CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Tam giác $C'MC$ vuông góc tại C có $\alpha = \widehat{C'MC}$ nên

$$\tan\alpha = \frac{C'C}{CM} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$



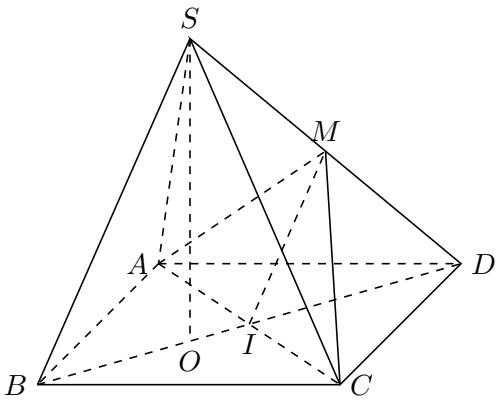
Chọn đáp án (D) □

Câu 330. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SD = x$, tất cả các cạnh còn lại của hình chóp đều bằng a. Biết góc giữa SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $30°$. Tìm x.

A. $x = a\sqrt{2}$. **B.** $x = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $x = a\sqrt{5}$. **D.** $x = a\sqrt{3}$.

✍Lời giải.

Gọi O là hình chiếu của S lên $(ABCD)$. Vì $SA = SB = SC$ nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, suy ra $O \in BD$ và góc giữa SD và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SDO}$, do đó $\widehat{SDO} = 30°$.
Gọi M, I lần lượt là trung điểm SD và AC. Các tam giác SAD, SCD cân nên $CM \perp SD$, $AM \perp SD$, suy ra $IM \perp SD$. .
Xét tam giác MID vuông tại M, có $IM = \dfrac{1}{2}SB = \dfrac{a}{2}$, $\widehat{MDI} = 30°$ suy ra $MD = \dfrac{MI}{\tan \widehat{MDI}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Vậy $SD = a\sqrt{3}$.



Chọn đáp án D □

Câu 331. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và tam giác ABC vuông C. Gọi H hình chiếu của A lên (ABC). Xác định vị trí của H.

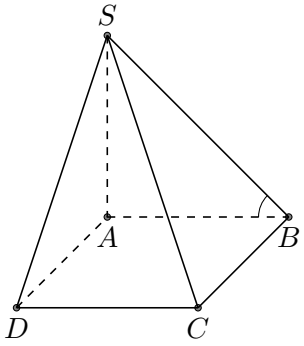
A. H là trung điểm của AB. **B**. H là trọng tâm tam giác ABC.
C. H là trực tâm tam giác ABC. **D**. H là trung điểm cạnh AC.

✍Lời giải.
Vì $SA = SB = SC$ nên hình chiếu của S lên (ABC) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Hơn nữa, tam giác ABC là tam giác vuông tại C nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC chính là trung điểm của cạnh AB.
Hay H là trung điểm của AB.
Chọn đáp án A □

Câu 332. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$; $AD = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{2a^3}{3}$. Tính số đo góc giữa đường thẳng SB với mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $30°$. **B**. $60°$. **C**. $45°$. **D**. $75°$.

✍Lời giải.
Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA = \dfrac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}} = a$
và $(SB, (ABCD)) = (SA, AB) = \widehat{SBA}$.
Ta có $\tan \widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = 1$.
Do đó, $(SB, (ABCD)) = \widehat{SBA} = 45°$.

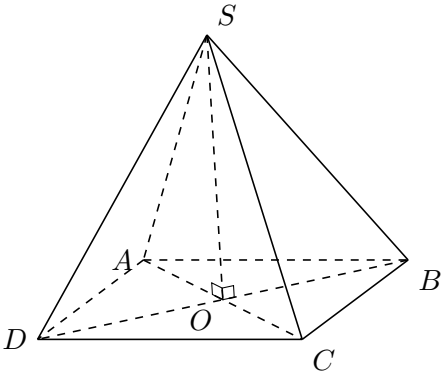


Chọn đáp án C □

Câu 333. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với O là tâm đa giác đáy $ABCD$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $BD \perp (SAC)$. **B**. $BC \perp (SAB)$. **C**. $AC \perp (SBD)$. **D**. $OS \perp (ABCD)$.

✍Lời giải.
Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $OS \perp (ABCD)$ nên phương án D đúng.
Mặt khác $AC \perp BD$ suy ra $BD \perp (SAC)$ và $AC \perp (SBD)$ nên phương án A và C đúng.
Từ đó suy ra không thể có $BC \perp (SAB)$.



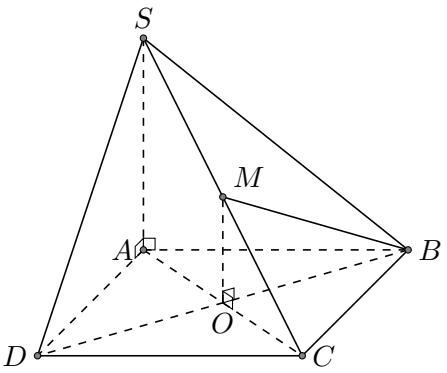
Chọn đáp án B ☐

Câu 334. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $AB = a\sqrt{6}$, cạnh bên $SC = 4\sqrt{3}a$. Hai mặt phẳng (SAD) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và M là trung điểm của SC. Tính góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng (ACD).

A. $30°$. **B**. $60°$. **C**. $45°$. **D**. $90°$.

Lời giải.

Vì $\begin{cases}(SAD)\perp(ABCD)\\(SAC)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(SAC)=SA\end{cases} \Rightarrow SA\perp(ABCD)$.



Xét $\triangle SAC$ có OM là đường trung bình $\Rightarrow OM\perp(ABCD)$.

Suy ra $(\widehat{BM,(ACD)}) = (\widehat{BM,BO}) = \widehat{OBM}$.

Ta có $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = 6a \Rightarrow OM = \dfrac{SA}{2} = 3a$.

Do đó $\tan\widehat{OBM} = \dfrac{OM}{OB} = \dfrac{3a}{a\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{OBM} = 60°$.

Chọn đáp án B ☐

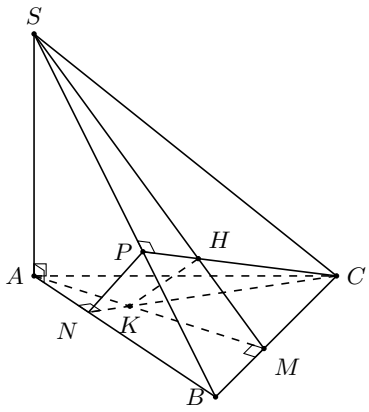
Câu 335. Cho hình chóp $S.ABC$, $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm $\triangle SBC$, $\triangle ABC$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $HK \perp (SBC)$. **B**. $BC \perp (SAB)$.
C. $BC \perp (SAH)$. **D**. SH, AK, BC đồng quy.

Lời giải.

Gọi AM, CN là các đường cao của $\triangle ABC$ và CP là đường cao của tam giác SBC.

Suy ra $\begin{cases}BC \perp AM\\BC \perp SA\end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM$.



Khi đó SM là đường cao $\triangle SBC$ và $H = CP \cap SM$.

Suy ra SH, AK, BC đồng quy tại M.

Ta có: $BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp (SAH)$.

Ta có: $\begin{cases}CN \perp AB\\CN \perp SA\end{cases} \Rightarrow CN \perp (SAB) \Rightarrow CN \perp SB$.

Mặt khác: $\begin{cases}SB \perp CN\\SB \perp CP\end{cases} \Rightarrow SB \perp (CNP) \Rightarrow SB \perp HK\,(1)$.

Vì $BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp HK\,(2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $HK \perp (SBC)$.

Chọn đáp án B ☐

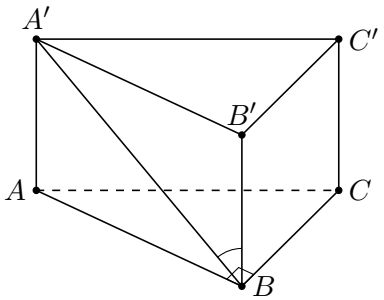
Câu 336. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = BC = a$, $BB' = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BCC'B')$.

A. $45°$. **B**. $60°$. **C**. $90°$. **D**. $30°$.

Lời giải.

Ta có $A'B' \perp B'C'$, $A'B' \perp BB' \Rightarrow A'B' \perp (BCC'B')$

$\Rightarrow (\widehat{A'B,(BCC'B')}) = \widehat{A'BB'}$.



Xét tam giác $A'BB'$ có

$\tan\widehat{A'BB'} = \dfrac{A'B'}{BB'} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{A'BB'} = 30°$.

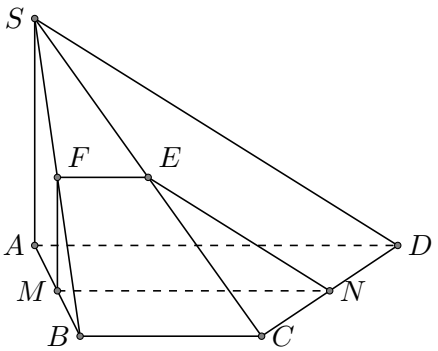
Chọn đáp án D ☐

Câu 337. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, đáy lớn $AD = 8$, đáy nhỏ $BC = 6$, SA vuông góc với đáy, $SA = 6$. Gọi M là trung điểm AB, (P) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với AB. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) có diện tích bằng

A. 20. **B**. 15. **C**. 30. **D**. 16.

Lời giải.

Ta có $\left.\begin{array}{l} SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AB \\ (P) \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow (P) \parallel SA$



Tương tự, $(P) \parallel BC$

Trong (SAB), kẻ đường thẳng qua M song song với SA cắt SB tại F. Khi đó MF là đường trung bình của $\triangle SAB \Rightarrow MF = 3$ và $MF \perp AB$.

Trong $(ABCD)$, kẻ đường thẳng qua M song song với BC cắt CD tại N. Khi đó MN là đường trung bình của hình thang $ABCD \Rightarrow MN = \dfrac{AD + BC}{2} = 7$ và $MN \perp MF$.

Trong (SBC), kẻ đường thẳng qua F song song với BC cắt SC tại E. Khi đó FE là đường trung bình của $\triangle SBC \Rightarrow MF = 3$ và $MF \perp AB$.

$\Rightarrow$ Thiết diện là hình thang vuông $MNEF$ (do $MN \parallel BC \parallel EF$).

$\Rightarrow S_{MNEF} = \dfrac{1}{2} \cdot MF \cdot (MN + EF) = 15$.

Chọn đáp án B □

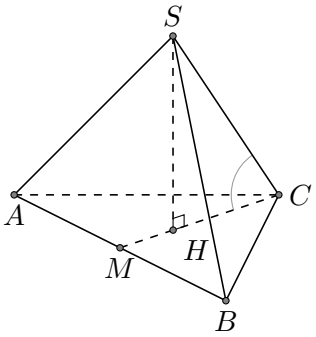
Câu 338. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a. Độ dài cạnh bên của hình chóp bằng bao nhiêu để góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$?

A. $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. **B**. $\dfrac{a}{6}$. **C**. $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **D**. $\dfrac{2a}{3}$.

Lời giải.

Gọi H là tâm của ABC, M là trung điểm BC.

Tam giác ABC đều nên $CH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Theo giả thiết góc giữa cạnh bên và mặt đáy là $60°$ nên $\widehat{SCH} = 60°$ nên $SC = 2 \cdot CH = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án A □

Câu 339. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông tại B, AH là đường cao của tam giác SAB. Khẳng định nào sau đây **sai?**

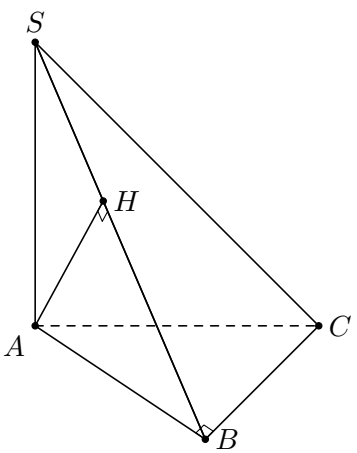
A. $AH \perp BC$. **B**. $AH \perp AC$. **C**. $AH \perp SC$. **D**. $SA \perp BC$.

Lời giải.

Ta có $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp BC$ và $AH \perp SC$.

Mặt khác $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$.

Vậy khẳng định **sai** là $AH \perp AC$.



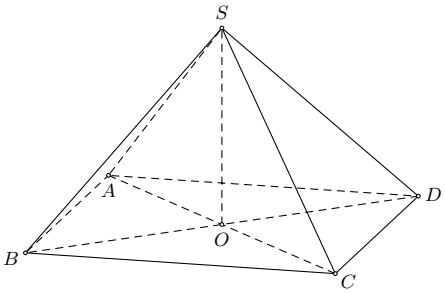
Chọn đáp án B □

Câu 340. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Hai mặt phẳng $(SAC);(SBD)$ cùng vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc giữa cặp đường thẳng nào sau đây?

A. $(SB;SO)$. **B**. $(SB;BD)$. **C**. $(SB;SA)$. **D**. $(SO;BD)$.

✍Lời giải.

$(SAC);(SBD)$ cùng vuông góc với đáy mà $(SAC)\cap(SBD)=SO$.
Suy ra $SO\perp(ABCD)$ tại O. Lại có $SB\cap(ABCD)=B$.
Suy ra OB là hình chiếu của SB lên mặt phẳng $(ABCD)$.
Vậy Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc giữa cặp đường thẳng $(SB;OB)$ hay $(SB;BD)$.



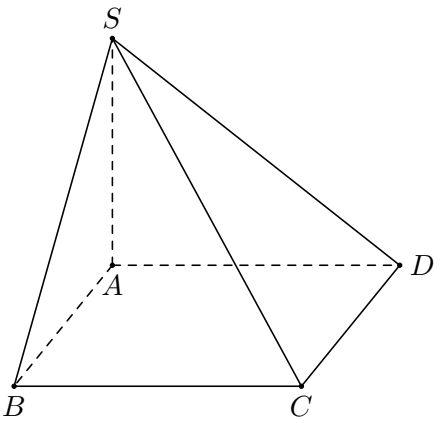
Chọn đáp án B ☐

Câu 341. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. $AB=3a$, $AD=a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA=3a$. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAB) là

A. 60°. **B**. 30°. **C**. 90°. **D**. 45°.

✍Lời giải.

Do $\begin{cases}DA\perp AB\\DA\perp SA\end{cases}\Rightarrow DA\perp(SAB)$
$\Rightarrow (SD,(SAB))=(SD,SA)=\widehat{ASD}$.
Trong tam giác vuông SAD,
ta có $\tan\widehat{ASD}=\dfrac{AD}{SA}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\widehat{ASD}=30^\circ$.



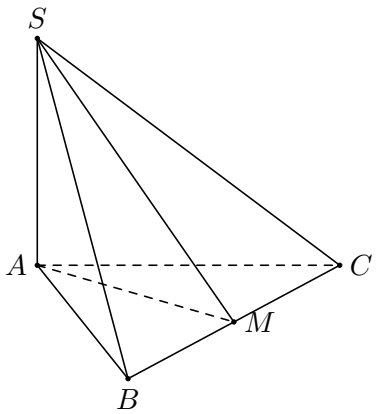
Chọn đáp án B ☐

Câu 342. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, cạnh bên SA vuông góc với đáy, M là trung điểm BC, J là trung điểm BM. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $BC\perp(SAM)$. **B**. $BC\perp(SAC)$. **C**. $BC\perp(SAJ)$. **D**. $BC\perp(SAB)$.

✍Lời giải.

Vì tam giác ABC đều và M là trung điểm BC nên $BC\perp AM$.
Khi đó $\begin{cases}BC\perp AM\\BC\perp SA\,(SA\perp(ABC))\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAM)$.

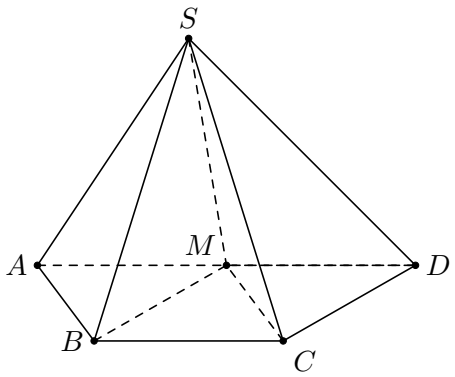


Chọn đáp án A ☐

Câu 343. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang cân, $SA\perp(ABCD), AD=2BC=2AB$. Trong tất cả các tam giác mà 3 đỉnh lấy từ 5 điểm S,A,B,C,D có bao nhiêu tam giác vuông?

A. 5. **B**. 7. **C**. 3. **D**. 6.

✍Lời giải.

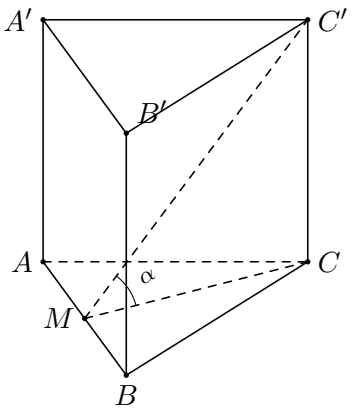


Gọi M là trung điểm AD.
Ta có $BM = CM = \dfrac{AD}{2}$ vậy các tam giác BAD, CAD là các tam giác vuông tại B và C.
Vậy ta có các tam giác vuông là SAB, SAC, SAD, BAD, CAD, SBD, SCD.
Vậy có 7 tam giác vuông.
Chọn đáp án (B) □

Câu 344. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung diểm của AB và α là góc tạo bởi đường thẳng MC' và mặt phẳng (ABC). Khi đó $\tan\alpha$ bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\sqrt{\dfrac{3}{7}}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

✍Lời giải.
Ta thấy $\alpha = \widehat{C'MC}$.



Do ABC là tam giác đều nên $MC = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.
Do đó $\tan\alpha = \dfrac{CC'}{MC} = \dfrac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

1 ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. B	4. D	5. B	6. D	7. C	8. D	9. D	10. A
11. D	12. C	13. D	14. C	15. D	16. D	17. D	18. D	19. D	20. A
21. D	22. B	23. B	24. C	25. C	26. D	27. B	28. A	29. A	30. C
31. C	32. B	33. C	34. A	35. C	36. A	37. D	38. A	39. C	40. C
41. B	42. C	43. B	44. B	45. A	46. A	47. C	48. A	49. D	50. D
51. B	52. B	53. A	54. C	55. D	56. C	57. C	58. A	59. B	60. B
61. C	62. C	63. A	64. D	65. C	66. B	67. D	68. A	69. B	70. A
71. B	72. B	73. C	74. D	75. C	76. C	77. C	78. C	79. C	80. B
81. A	82. C	83. A	84. A	85. B	86. A	87. B	88. C	89. D	90. A
91. A	92. D	93. B	94. C	95. C	96. A	97. C	98. C	99. D	100. C
101. A	102. A	103. B	104. D	105. C	106. D	107. D	108. B	109. B	110. C
111. B	112. A	113. A	114. D	115. B	116. B	117. D	118. A	119. A	120. A
121. A	122. D	123. C	124. C	125. D	126. B	127. B	128. C	129. C	130. D
131. A	132. C	133. A	134. B	135. C	136. A	137. C	138. B	139. A	140. A
141. D	142. D	143. D	144. C	145. C	146. A	147. B	148. D	149. B	150. C
151. A	152. B	153. D	154. D	155. C	156. C	157. A	158. B	159. B	160. B
161. B	162. B	163. B	164. C	165. C	166. B	167. A	168. D	169. A	170. B

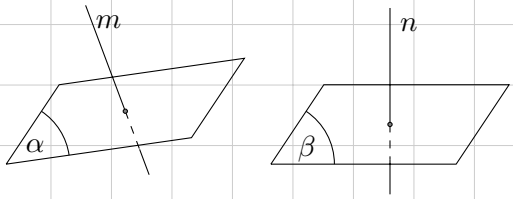
171. B	172. B	173. C	174. C	175. B	176. A	177. D	178. A	179. B	180. A
181. A	182. C	183. A	184. A	185. C	186. D	187. C	188. B	189. D	190. C
191. B	192. A	193. C	194. A	195. A	196. A	197. C	198. D	199. D	200. A
201. D	202. D	203. C	204. A	205. D	206. C	207. D	208. D	209. A	210. D
211. D	212. C	213. C	214. C	215. A	216. B	217. B	218. C	219. D	220. A
221. C	222. D	223. D	224. C	225. B	226. C	227. A	228. C	229. D	230. A
231. A	232. A	233. C	234. B	235. A	236. A	237. D	238. C	239. D	240. B
241. D	242. C	243. C	244. B	245. D	246. D	247. A	248. A	249. C	250. D
251. D	252. A	253. D	254. C	255. A	256. A	257. A	258. B	259. B	260. D
261. D	262. D	263. B	264. B	265. A	266. B	267. C	268. A	269. A	270. D
271. B	272. C	273. B	274. C	275. D	276. B	277. B	278. B	279. A	280. C
281. B	282. C	283. D	284. A	285. B	286. A	287. B	288. B	289. C	290. A
291. A	292. C	293. D	294. C	295. B	296. B	297. A	298. B	299. B	300. C
301. D	302. B	303. C	304. C	305. D	306. A	307. D	308. B	309. A	310. C
311. A	312. C	313. D	314. D	315. B	316. B	317. B	318. D	319. B	320. A
321. A	322. A	323. D	324. A	325. C	326. B	327. D	328. A	329. D	330. D
331. A	332. C	333. B	334. B	335. B	336. D	337. B	338. A	339. B	340. B
341. B	342. A	343. B	344. D						

BÀI 4. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

Định nghĩa 1. Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.
Hai mặt phẳng song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng bằng 0°.

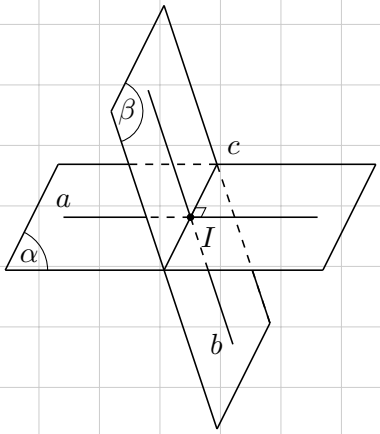


2 CÁCH XÁC ĐỊNH GÓC CỦA HAI MẶT PHẲNG CẮT NHAU

① Tìm giao tuyến c của (α) và (β).

② Tìm hai đường thẳng a, b lần lượt thuộc hai mặt phẳng và cùng vuông góc với c tại một điểm.

③ Góc giữa (α) và (β) là góc giữa a và b.



3 DIỆN TÍCH HÌNH CHIẾU CỦA MỘT ĐA GIÁC

Định nghĩa 2. Cho đa giác $\mathscr{H}$ nằm trong mặt phẳng (α) có diện tích là S và $\mathscr{H}'$ là hình chiếu vuông góc của $\mathscr{H}$ trên mặt phẳng (β). Khi đó diện tích S' của hình $\mathscr{H}$ được tính theo công thức như sau:

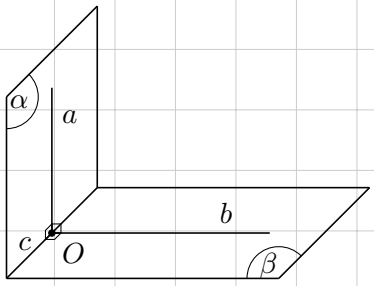
$$S' = S \cdot \cos\varphi$$

với φ là góc giữa (α) và (β).

4 HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

Định nghĩa 3. Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa hai mặt phẳng đó là góc vuông.

Định lí 1. *Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc với nhau là mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.*



Hệ quả 1. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

Hệ quả 2. Cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau. Nếu từ một điểm thuộc mặt phẳng (α) ta dựng một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (β) thì đường thẳng này nằm trong mặt phẳng (α).

Định lí 2. *Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với một mặt phẳng thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng đó.*

5 HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG, HÌNH HỘP CHỮ NHẬT, HÌNH LẬP PHƯƠNG

Định nghĩa 4. Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với đáy. Độ dài cạnh bên được gọi là chiều cao của hình lăng trụ đứng.

Nhận xét: Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy.

Định nghĩa 5. Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

Nhận xét: Các mặt bên của hình lăng trụ đều là những hình chữ nhật bằng nhau và vuông góc với mặt đáy.

Định nghĩa 6. Hình hộp đứng là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.

Nhận xét: Trong hình hộp đứng 4 mặt bên đều là hình chữ nhật.

Định nghĩa 7. Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.

Nhận xét: Tất cả 6 mặt của hình hộp chữ nhật đều là hình chữ nhật.

Định nghĩa 8. Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.

Nhận xét: Tất cả 6 mặt của hình lập phương đều là hình vuông.

6 HÌNH CHÓP ĐỀU VÀ HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

Định nghĩa 9. Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu nó có đáy là một đa giác đều có chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy.

Nhận xét: Hình chóp đều có:

① Các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau. Các mặt bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.

② Các cạnh bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.

Định nghĩa 10. Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một thiết diện song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là hình chóp cụt đều.

Nhận xét: Hình chóp cụt đều có:

① Hai đáy là hai đa giác đều và đồng dạng với nhau.

② Các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng qui tại một điểm.

③ Các mặt bên là các hình thang cân bằng nhau.

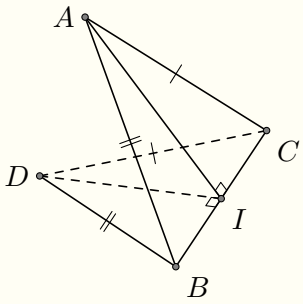
B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tìm góc giữa hai mặt phẳng

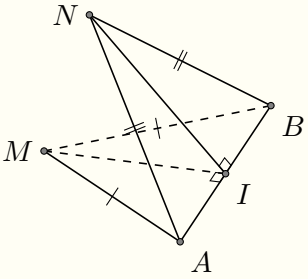
Muốn tìm góc giữa hai mặt phẳng ta có thể tìm góc giữa hai nửa đường thẳng lần lượt nằm trên hai mặt phẳng và vuông góc với giao tuyến của chúng.

Một số trường hợp thường gặp:

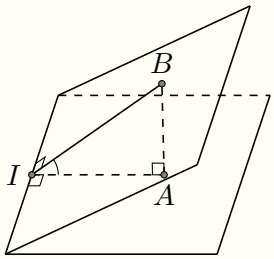
TH1: *$\triangle ABC = \triangle DBC$. Gọi I là chân đường cao của $\triangle ABC$.*
Nối DI. Vì $\triangle ABC = \triangle DBC$ nên $DI \perp BC$.
$\Rightarrow ((ABC),(DBC)) = \widehat{AID}$.



TH2: *Xét góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và (NAB) với $\triangle MAB$ và $\triangle NAB$ cân có cạnh đáy AB.*
Gọi I là trung điểm AB. Khi đó $NI \perp AB$ và $MI \perp AB$.
$\Rightarrow ((MAB),(NAB)) = \widehat{MIN}$.



TH3: *Hai mặt phẳng cắt nhau $(\alpha) \cap (\beta) = \Delta$.*
Tìm giao tuyến Δ của hai mặt phẳng.
Dựng AB có hai đầu mút nằm ở trên hai mặt phẳng và vuông góc với một mặt. (giả sử là (β)).
Chiếu vuông góc của A hoặc B lên Δ là điểm I.
$\Rightarrow \widehat{AIB}$ là góc giữa hai mặt phẳng.

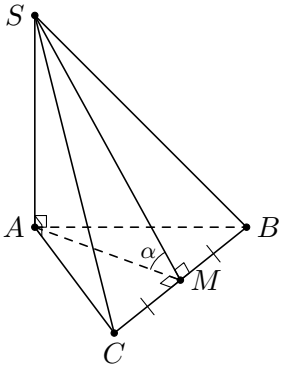


TH4: *Nếu $a \perp (\alpha); b \perp (\beta)$ thì $\widehat{((\alpha),(\beta))} = \widehat{(a,b)}$.*
TH5: *Trường hợp khó vẽ được góc giữa hai mặt phẳng thì có thể dùng công thức phép chiếu diện tích đa giác.*

Ví dụ 1. Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$ và $SA = \dfrac{3a}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

✍Lời giải.

Gọi góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là α.
Gọi M là trung điểm của BC. Do $\triangle ABC$ đều nên $AM \perp BC$. (1)
Theo giả thiết $SA \perp (ABC)$, suy ra theo (1) ta có $SM \perp BC$. (2)
Lại có $(SBC) \cap (ABC) = BC$. (3)
Từ (1), (2) và (3) ta có $\alpha = \widehat{SMA}$.



Ta có $AM = \sqrt{AC^2 - CM^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Xét tam giác SAM vuông tại A, ta có:
$\tan\alpha = \dfrac{SA}{AM} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, suy ra $\alpha = 60^\circ$.

□

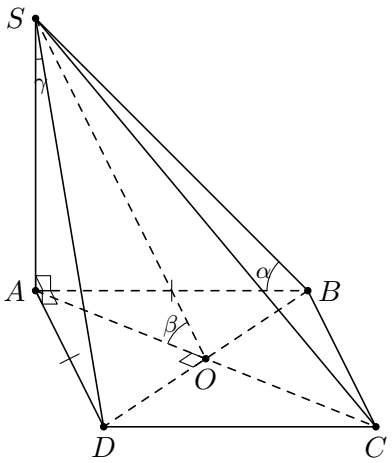
Ví dụ 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a, SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính số đo của góc giữa các mặt phẳng sau:

① Tính $((SBC),(ABC))$.

② Tính $((SBD),(ABD))$.

③ Tính $((SAB),(SCD))$.

✍Lời giải.



a. Gọi $\alpha = (S, BC, A)$. Khi đó ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB$.

Suy ra $\alpha = \widehat{SBA}$.

Trong $\triangle SAB$ có $\tan\alpha = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$.

b. Gọi $\beta = (S, BD, A)$ và $AC \cap BD = O$, ta có $\begin{cases} AO \perp BD \\ SO \perp BD (\text{ Do } BD \perp (SAC)) \end{cases} \Rightarrow \beta = \widehat{SOA}$.

Mà $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, suy ra $\tan\beta = \dfrac{SA}{AO} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{6}$

$\Rightarrow \beta = \arctan(\sqrt{6})$.

c. Gọi $\gamma = ((SAB), (SCD))$.

Khi đó ta có $\gamma = \widehat{ASD}$ và $\tan\gamma = \dfrac{AD}{SA} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \gamma = 30^\circ$.

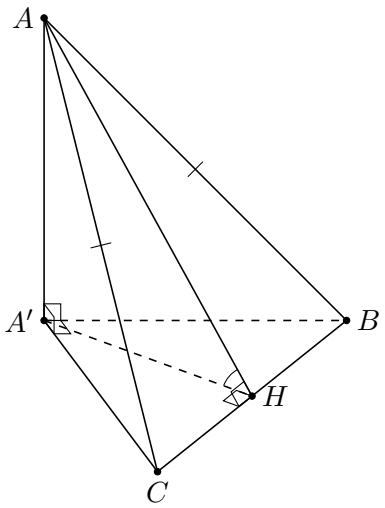
□

Dạng 2. Tính diện tích hình chiếu của đa giác

Gọi S là diện tích của đa giác H trong (P), S' là diện tích của hình chiếu H' của H trên (Q), và $\varphi = ((P), (Q))$. Khi đó: $S' = S \cdot \cos\varphi$.

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ cân tại A, đường cao $AH = a\sqrt{3}, BC = 3a$ có BC nằm trong (P). Gọi A' là hình chiếu của A lên (P). Khi $\triangle A'BC$ vuông tại A', tính $((P), (ABC))$.

✍Lời giải.



Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Do $\triangle ABC$ cân tại A nên $AM \perp BC$.

Mặt khác $AA' \perp (P) \Rightarrow A'H \perp BC$.

Do đó $\alpha = ((P); (ABC)) = ((ABC), (A'BC)) = \widehat{AHA'}$.

Theo đề ta có: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

Lại có $A'H = \dfrac{1}{2} \cdot BC = \dfrac{3a}{2}$. Suy ra $S_{A'BC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3a}{2} \cdot 3a = \dfrac{9a^2}{4}$

Khi đó ta có:

$S_{A'BC} = S_{ABC} \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow \dfrac{9a^2}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $\alpha = 30^\circ$.

□

Dạng 3. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

Cách 1: *Chứng minh mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.* ***Cách 2:*** *Chứng minh góc giữa hai mặt phẳng bằng 90°.*

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng:

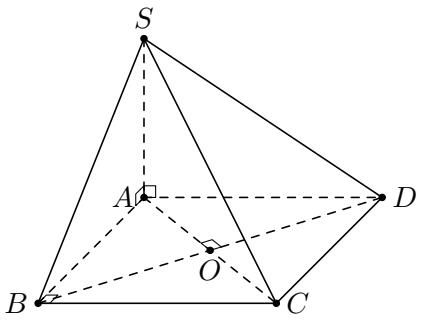
① $(SAC) \perp (SBD)$.

② $(SAB) \perp (SBC)$.

✍Lời giải.

① Ta có $AC \perp BD$, $AC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABCD)$).
Do đó $AC \perp (SBD)$. Vì vậy $(SAC) \perp (SBD)$.

② Ta có $BC \perp AB$, $BC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABCD)$).
Do đó $BC \perp (SBD)$. Vì vậy $(SBC) \perp (SAB)$.

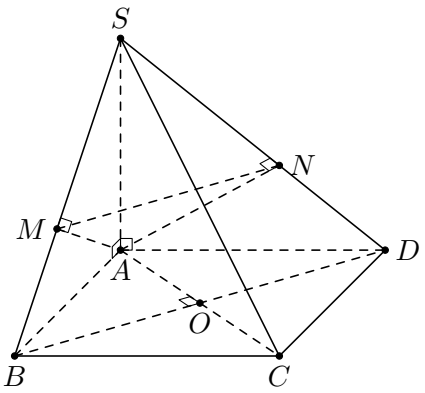


□

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SD. Chứng minh rằng $(SAC) \perp (AMN)$.

✍Lời giải.

Ta có $BD \perp AC$, $BD \perp SA$ (vì $SA \perp (ABCD)$).
Do đó $BD \perp (SAC)$.
Mà $MN \parallel BD$ (do $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SN}{SD}$) nên $MN \perp (SAC)$.
Vì vậy $(SAC) \perp (AMN)$.



□

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A, $SA \perp (ABC)$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của B trên các đường thẳng SA và SC. Chứng minh rằng:

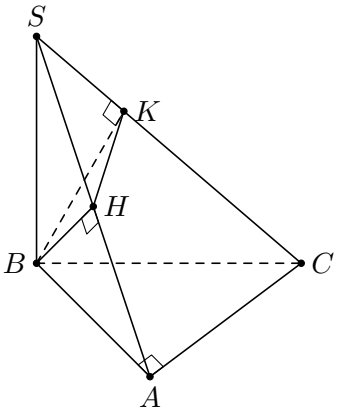
① $(SAC) \perp (SAB)$.

② $(SAC) \perp (BHK)$.

✍Lời giải.

① Ta có $AC \perp AB$, $AC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABC)$).
Do đó $AC \perp (SAB)$. Vì vậy $(SAC) \perp (SAB)$.

② Ta có $SC \perp BK$.
Mặt khác $BH \perp SA$ và $BH \perp AC$ (vì $AC \perp (SAB)$).
Do đó $BH \perp (SAC)$, suy ra $SC \perp BH$.
Từ đó $SC \perp (BHK)$. Vì vậy $(SAC) \perp (BHK)$.

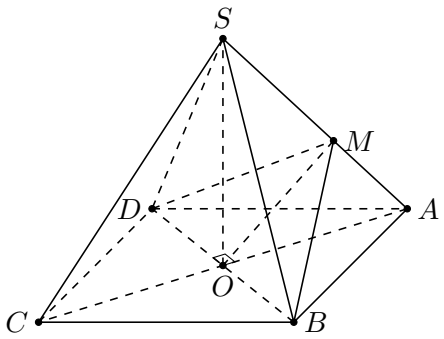


□

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O với $AB = a$, $AC = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$, $SO \perp (ABCD)$, $SB = a$. Chứng minh rằng $(SAB) \perp (SAD)$.

✍Lời giải.

Gọi M là hình chiếu của O lên SA.
Khi đó $SA \perp (MBD)$. Do đó góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) chính là góc giữa hai đường thẳng MB và MD.
Ta có $BD = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$, $SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Suy ra $OM = \dfrac{a}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}BD$.
Vì thế tam giác MBD vuông cân tại M, từ đó $\widehat{BMD} = 90^\circ$ hay $(SAB) \perp (SAD)$.



□

Dạng 4. Thiết diện chứa một đường thẳng và vuông góc với một mặt phẳng

Xác định mặt phẳng (β) chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (α) cho trước bằng cách:

① *Từ điểm A bất kì thuộc đường thẳng d dựng $AH \perp (\alpha)$. Mặt phẳng (AH, d) là mặt phẳng (β).*

② *Tìm giao điểm của mặt phẳng (β) và các cạnh của hình chóp, hình lăng trụ,... Từ đó suy ra thiết diện.*

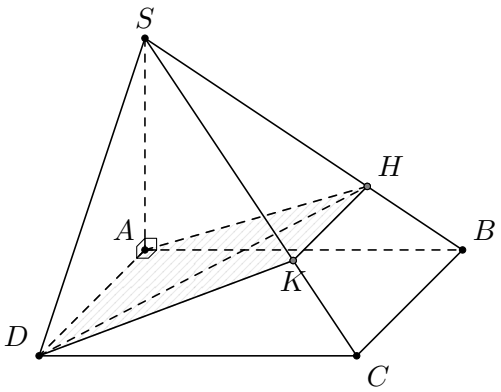
Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc với mặt đáy. Gọi (P) là mặt phẳng chứa AD và vuông góc với mặt phẳng (SBC). Xác định thiết diện do mặt phẳng (P) cắt hình chóp.

✍Lời giải.

Kẻ $AH \perp SB$ $(H \in SB)$. Ta có

$$\begin{cases} AD \perp SA \ (SA \perp (ABCD)) \\ AD \perp AB \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SB.$$

Ta có $AD \perp SB$ và $AH \perp SB$ nên $SB \perp (ADH)$, suy ra $(SBC) \perp (ADH)$.
Do đó, mặt phẳng (P) chứa AD và vuông góc với mặt phẳng (SBC) là (ADH).
Trong mặt phẳng (SBC) dựng $HK \parallel BC (K \in BC)$, suy ra $HK \parallel AD$ (do cùng song song với AD).

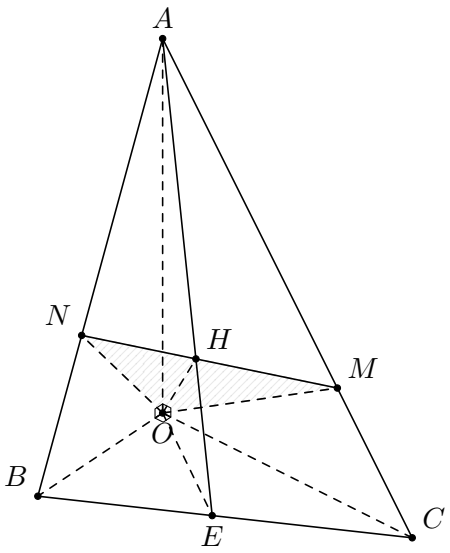


Vậy thiết diện là hình thang $ADKH$ có hai đáy là AD và HK. □

Ví dụ 2. Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc nhau và $OA = OB = OC = a$. Gọi M là điểm trên cạnh AC sao cho $AC = 3MC$. Gọi H là hình chiếu của O lên mặt phẳng (ABC). Gọi (α) là mặt phẳng chứa OM và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Xác định và tính diện tích thiết diện do mặt phẳng (α) cắt tứ diện.

✍Lời giải.

Ta có $OA \perp OB$ và $OA \perp OC$ nên $OA \perp (OBC)$.
Vì $OH \perp BC$ (do $OH \perp (ABC)$) và $OA \perp BC$ (do $OH \perp (ABC)$) nên $BC \perp (OAH)$, suy ra $BC \perp AH$. (1)
Tương tự ta có $AC \perp BH$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra H là trực tâm của $\triangle ABC$.
Ta có $OH \perp (ABC)$ nên mặt phẳng (α) chứa OM và vuông góc với mặt phẳng (ABC) là (OHM).
Trong mặt phẳng (ABC) gọi N là giao điểm của HM và AB, suy ra thiết diện của mặt phẳng (OHM) và tứ diện là $\triangle OMN$.
Do $OA = OB = OC = a$ và OA, OB, OC đôi một vuông góc nhau nên $AB = AC = BC = a\sqrt{2}$, suy ra $\triangle ABC$ đều.
Mà H là trực tâm của $\triangle ABC$ nên AH cắt BC tại trung điểm của đoạn BC.



Gọi E là trung điểm BC.

Ta có H là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $3HE = AE$. Do đó, $MN \parallel BC$, suy ra $MN = \dfrac{2}{3}BC = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Vì $\triangle AOE$ vuông tại A nên $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OE^2} = \dfrac{3}{4a^2}$, suy ra $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $S_{\triangle OMN} = \dfrac{1}{2} \cdot MN \cdot OH = \dfrac{2a^2\sqrt{6}}{9}$. □

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

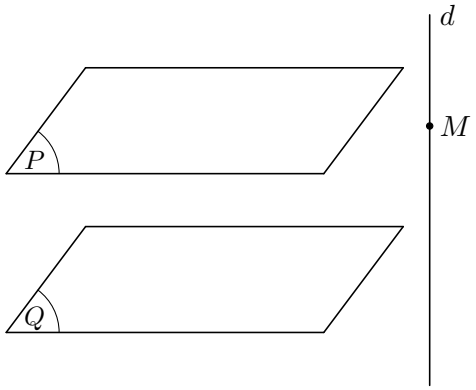
Câu 1. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và một điểm M không thuộc (P) và (Q). Qua M có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P) và (Q)?

A. 2. **B**. 3. **C**. 1. **D**. Vô số.

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng qua M và vuông góc với (P), do $(P) \parallel (Q) \Rightarrow d \perp (Q)$. Giả sử (R) là mặt phẳng chứa d. Mà $\begin{cases} d \perp (P) \\ d \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (R) \perp (P) \\ (R) \perp (P) \end{cases}$.

Có vô số mặt phẳng (R) chứa d. Do đó có vô số mặt phẳng qua M, vuông góc với (P) và (Q).



Chọn đáp án D □

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Cho hai đường thẳng song song a và b và đường thẳng c sao cho $c \perp a$, $c \perp b$. Mọi mặt phẳng (α) chứa c thì đều vuông góc với mặt phẳng (a, b).

B. Cho $a \perp (\alpha)$, mọi mặt phẳng (β) chứa a thì $(\beta) \perp (\alpha)$.

C. Cho $a \perp b$, mọi mặt phẳng chứa b đều vuông góc với a.

D. Cho $a \perp b$, nếu $a \subset (\alpha)$ và $b \subset (\beta)$ thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

Lời giải.

Mệnh đề "Cho hai đường thẳng song song a và b và đường thẳng c sao cho $c \perp a$, $c \perp b$. Mọi mặt phẳng (α) chứa c thì đều vuông góc với mặt phẳng (a, b)" là sai. Trong trường hợp a và b trùng nhau, sẽ tồn tại mặt phẳng chứa a và b không vuông góc với mặt phẳng (α) chứa c.
Mệnh đề "Cho $a \perp b$, mọi mặt phẳng chứa b đều vuông góc với a" là sai. Trong trường hợp a và b cắt nhau, mặt phẳng (a, b) chứa b nhưng không vuông góc với a.
Mệnh đề "Cho $a \perp b$, nếu $a \subset (\alpha)$ và $b \subset (\beta)$ thì $(\alpha) \perp (\beta)$" là sai. Trong trường hợp a và b vuông góc nhau và chéo nhau, nếu $(\alpha) \supset a$, $(\alpha) \parallel b$ và $(\beta) \supset b$, $(\beta) \parallel a$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.
Chọn đáp án B □

Câu 3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

B. Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

D. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

✍Lời giải.

Mệnh đề "Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau" là sai. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau hoặc cắt nhau (giao tuyến vuông góc với mặt phẳng thứ 3).

Mệnh đề "Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước" là sai. Qua một đường thẳng vô số mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Mệnh đề "Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước" là sai. Qua một điểm có vô số mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến d. Với mỗi điểm A thuộc (P) và mỗi điểm B thuộc (Q) thì ta có AB vuông góc với d.

B. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với mặt phẳng (R) thì giao tuyến của (P) và (Q) nếu có cũng sẽ vuông góc với (R).

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

D. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

✍Lời giải.

Mệnh đề "Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến d. Với mỗi điểm A thuộc (P) và mỗi điểm B thuộc (Q) thì ta có AB vuông góc với d" là sai. Trong trường hợp $a \in d$, $b \in d$, khi đó AB trùng với d.

Mệnh đề "Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau" là sai. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau hoặc cắt nhau (giao tuyến vuông góc với mặt phẳng thứ 3).

Mệnh đề "Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia" là sai. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau, đường thẳng thuộc mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

✍Lời giải.

Mệnh đề "Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia" là sai. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì đường thẳng nằm trong mặt phẳng này, vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

Mệnh đề "Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau" và "Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau" là sai. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau hoặc cắt nhau (giao truyến vuông góc với mặt phẳng kia).

Chọn đáp án D □

Câu 6. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Qua một đường thẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau cho trước.

D. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

✍Lời giải.

Mệnh đề "Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau" là sai. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song hoặc trùng nhau.

Mệnh đề "Qua một đường thẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước" là sai. Nếu đường thẳng vuông góc với mặt phẳng cho trước thì có vô số mặt phẳng qua đường thẳng và vuông góc với mặt phẳng đó. Nếu đường thẳng không vuông góc với mặt phẳng cho trước thì không có mặt phẳng nào vuông góc với mặt phẳng đó.

Mệnh đề "Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau" là sai. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau hoặc cắt nhau (giao truyến vuông góc với mặt phẳng kia).

Chọn đáp án C □

Câu 7. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Cho đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và b nằm trong mặt phẳng (P). Mọi mặt phẳng (Q) chứa a và vuông góc với b thì (P) vuông góc với (Q).

B. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và mặt phẳng (P) chứa a, mặt phẳng (Q) chứa b thì (P) vuông góc với (Q).

C. Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P), mọi mặt phẳng (Q) chứa a thì (P) vuông góc với (Q).

D. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

✍Lời giải.

Trong trường hợp a và b vuông góc nhau và chéo nhau, nếu $(P) \supset a$, $(P) \parallel b$ và $(Q) \supset b$, $(Q) \parallel a$ thì $(P) \parallel (Q)$.

Chọn đáp án B □

Câu 8. Trong khẳng định sau về lăng trụ đều, khẳng định nào **sai**?

A. Đáy là đa giác đều.

B. Các mặt bên là những hình chữ nhật nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.

C. Các cạnh bên là những đường cao.

D. Các mặt bên là những hình vuông.

✍Lời giải.

Vì lăng trụ đều là lăng trụ đứng nên các cạnh bên bằng nhau và cùng vuông góc với đáy. Do đó các mặt bên là những hình chữ nhật.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu hình hộp có hai mặt là hình vuông thì nó là hình lập phương.

B. Nếu hình hộp có ba mặt chung một đỉnh là hình vuông thì nó là hình lập phương.

C. Nếu hình hộp có bốn đường chéo bằng nhau thì nó là hình lập phương.

D. Nếu hình hộp có sau mặt bằng nhau thì nó là hình lập phương.

✍Lời giải.

Nếu hình hộp có ba mặt chung một đỉnh là hình vuông thì nó là hình lập phương.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm AC. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $BM \perp AC$. **B**. $(SBM) \perp (SAC)$. **C**. $(SAB) \perp (SBC)$. **D**. $(SAB) \perp (SAC)$.

✍Lời giải.

Tam giác ABC cân tại B có M là trung điểm $AC \Rightarrow BM \perp AC$.

Ta có $\begin{cases} BM \perp AC \\ BM \perp SA \end{cases}$ (do $SA \perp (ABC)$) $\Rightarrow BM \perp (SAC) \Rightarrow (SBM) \perp (SAC)$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp BA \\ BC \perp SA \end{cases}$ (do $SA \perp (ABC)$) $\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$.

Dùng phương pháp loại trừ thì khẳng định "$(SAB) \perp (SAC)$" là **sai**.

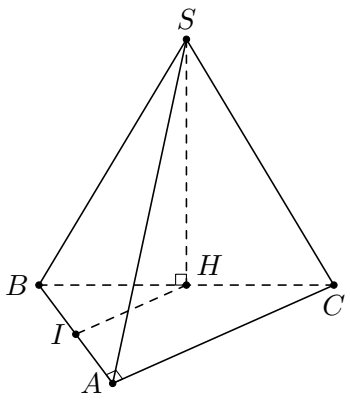
Chọn đáp án D □

Câu 11. Cho tứ diện $SABC$ có SBC và ABC nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Tam giác SBC đều, tam giác ABC vuông tại A. Gọi H, I lần lượt là trung điểm của BC và AB. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $SH \perp AB$. **B**. $HI \perp AB$. **C**. $(SAB) \perp (SAC)$. **D**. $(SHI) \perp (SAB)$.

✍Lời giải.

Do SBC là tam giác đều có H là trung điểm BC nên $SH \perp BC$.
Mà ta có $(SBC) \perp (ABC)$ theo giao tuyến $BC \Rightarrow SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp AB$.
Vì HI là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên $HI \parallel AC \Rightarrow HI \perp AB$.
Ta có $\begin{cases} SH \perp AB \\ HI \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHI) \Rightarrow (SAB) \perp (SHI)$.
Dùng phương pháp loại trừ thì khẳng định "$(SAB) \perp (SAC)$" là **sai**.



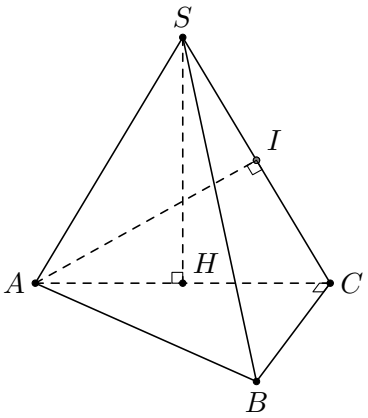
Chọn đáp án C □

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, mặt bên SAC là tam giác đều và mằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của SC. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $AI \perp SC$. **B**. $(SBC) \perp (SAC)$. **C**. $AI \perp BC$. **D**. $(ABI) \perp (SBC)$.

✍Lời giải.

Tam giác SAC đều có I là trung điểm của SC nên $AI \perp SC$.
Gọi H là trung điểm AC suy ra $SH \perp AC$.
Mà $(SAC) \perp (ABC)$ theo giao tuyến AC nên $SH \perp (ABC)$ do đó $SH \perp BC$.
Hơn nữa theo giả thiết tam giác ABC vuông tại C nên $BC \perp AC$.
Từ đó suy ra $BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AI$.
Từ đó suy ra $(ABI) \perp (SBC)$.
Dùng phương pháp loại trừ thì khẳng định "$(SBC) \perp (SAC)$" là **sai**.



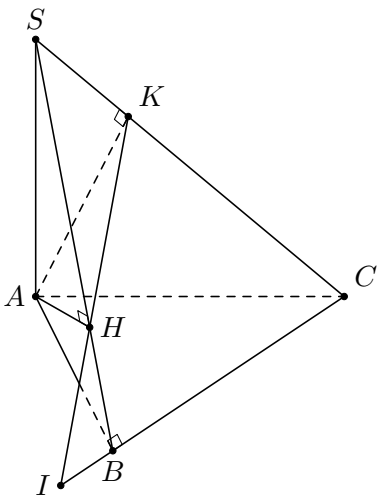
Chọn đáp án B □

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC và I là giao điểm của HK với mặt phẳng (ABC). Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $BC \perp AH$. **B**. $(AHK) \perp (SBC)$. **C**. $SC \perp AI$. **D**. Tam giác IAC đều.

✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$.
Lại có $AH \perp SB$. Từ đó suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$. (1)
Lại có theo giả thiết $SC \perp AK$. (2)
Từ (1) và (2), suy ra $SC \perp (AHK) \Rightarrow (SBC) \perp (AHK)$.
Ta có $\begin{cases} SC \perp (AHK) \\ AI \subset (AHK) \end{cases} \Rightarrow SC \perp AI$.
Dùng phương pháp loại trừ thì khẳng định "Tam giác IAC đều" là **sai**.



Chọn đáp án D □

Câu 14. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại D lấy điểm S sao cho $SD = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi I là trung điểm BC, kẻ IH vuông góc $SA\,(H \in SA)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $SA \perp BH$. **B**. $(SDB) \perp (SDC)$. **C**. $(SAB) \perp (SAC)$. **D**. $BH \perp HC$.

✍Lời giải.

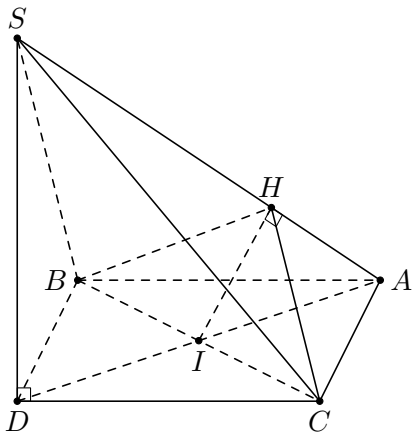
Từ giả thiết suy ra $ABDC$ là hình thoi nên $BC \perp AD$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp SD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp SA$.

Lại có theo giả thiết $IH \perp SA$. Từ đó suy ra $SA \perp (HCB) \Rightarrow SA \perp BH$.

Tính được: $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AD = 2AI = a\sqrt{3}$ và $SA = \sqrt{AD^2 + SD^2} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $\triangle AHI \backsim \triangle ADS \Rightarrow \dfrac{IH}{SD} = \dfrac{AI}{AS} \Rightarrow IH = \dfrac{AI \cdot SD}{AS} = \dfrac{a}{2} = \dfrac{BC}{2} \Rightarrow$ tam giác HBC có trung tuyến IH bằng nửa cạnh đáy BC nên $\widehat{BHC} = 90^0$ hay $BH \perp HC$.



Từ đó suy ra $(SAB) \perp (SAC)$.

Dùng phương pháp loại trừ thì khẳng định "$(SDB) \perp (SDC)$" là **sai**.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC} = 60°$, tam giác SBC là tam giác đều có bằng cạnh $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\varphi = 60°$. **B**. $\tan\varphi = 2\sqrt{3}$. **C**. $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **D**. $\tan\varphi = \dfrac{1}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm của BC, suy ra $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Gọi K là trung điểm AC, suy ra $HK \parallel AB$ nên $HK \perp AC$.

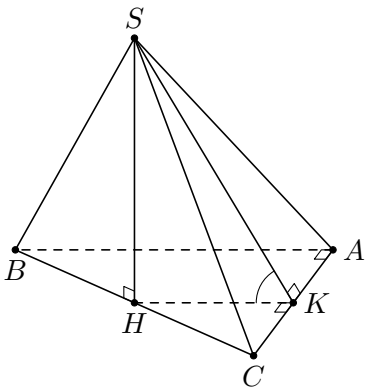
Ta có $\begin{cases} AC \perp HK \\ AC \perp SH \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHK) \Rightarrow AC \perp SK$.

Do đó $((SAC),(ABC)) = (SK, HK) = \widehat{SKH}$.

Tam giác vuông ABC, có

$$AB = BC \cdot \cos\widehat{ABC} = a \Rightarrow HK = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}.$$

Tam giác vuông SHK, có $\tan\widehat{SKH} = \dfrac{SH}{HK} = 2\sqrt{3}$.



Chọn đáp án B □

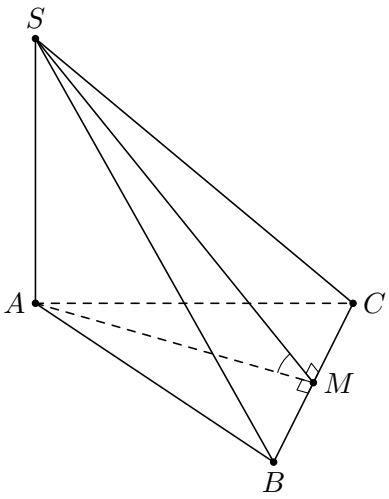
Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC). Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\varphi = 30°$. **B**. $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C**. $\varphi = 60°$. **D**. $\sin\varphi = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

✍Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC, suy ra $AM \perp BC$.
Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM$.
Do đó $((SBC),(ABC)) = (SM, AM) = \widehat{SMA}$.
Tam giác ABC đều cạnh a, suy ra trung tuyến $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Tam giác vuông SAM, có

$$\sin \widehat{SMA} = \frac{SA}{SM} = \frac{SA}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

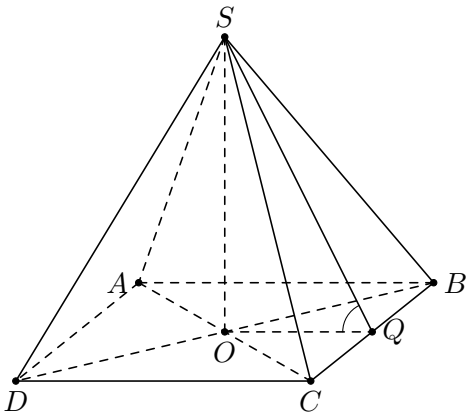


Chọn đáp án D □

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$.

A. $30°$. **B**. $45°$. **C**. $60°$. **D**. $90°$.

✍Lời giải.
Gọi Q là trung điểm BC, suy ra $OQ \perp BC$.
Ta có $\begin{cases} BC \perp OQ \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOQ) \Rightarrow BC \perp SQ$.
Do đó $((SBC),(ABCD)) = (SQ, OQ) = \widehat{SQO}$.
Tam giác vuông SOQ, có $\tan \widehat{SQO} = \dfrac{SO}{OQ} = \sqrt{3}$.
Vậy mặt phẳng (SBC) hợp với mặt đáy $(ABCD)$ một góc $60°$.

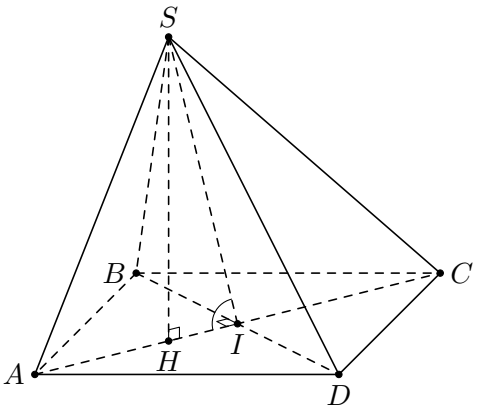


Chọn đáp án C □

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I, cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60°$, $SA = SB = SD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi = \sqrt{5}$. **B**. $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C**. $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D**. $\varphi = 45°$.

✍Lời giải.
Từ giả thiết suy ra tam giác ABD đều cạnh a.
Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$. Do $SA = SB = SD$ nên suy ra H cách đều các đỉnh của tam giác ABD hay H là tâm của tam giác đều ABD.
Suy ra $HI = \dfrac{1}{3}AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$; $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \dfrac{a\sqrt{15}}{6}$.
Vì $ABCD$ là hình thoi nên $HI \perp BD$. Tam giác SBD cân tại S nên $SI \perp BD$.
Do đó $((SBD),(ABCD)) = (SI, AI) = \widehat{SIH}$.
Trong tam vuông SHI, có $\tan \widehat{SIH} = \dfrac{SH}{HI} = \sqrt{5}$.



Chọn đáp án A □

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D, $AB = 2a$, $AD = CD = a$. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng

(SBC) và $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\varphi = 45^\circ$. **C.** $\varphi = 60^\circ$. **D.** $\varphi = 30^\circ$.

Lời giải.

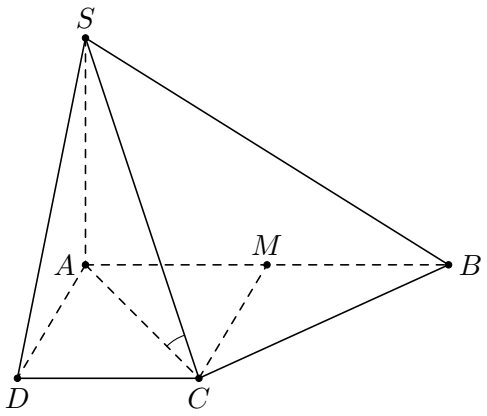
Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow ADCM$ là hình vuông nên $CM = AD = a = \dfrac{AB}{2}$.

Suy ra tam giác ACB có trung tuyến bằng nửa cạnh đáy nên vuông tại C.

Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SC$.

Do đó $((SBC),(ABCD)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}$.

Tam giác SAC vuông tại $A \Rightarrow \tan\varphi = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án A □

Câu 20. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm SC. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$.

A. $\varphi = 90^\circ$. **B.** $\varphi = 60^\circ$. **C.** $\varphi = 45^\circ$. **D.** $\varphi = 30^\circ$.

Lời giải.

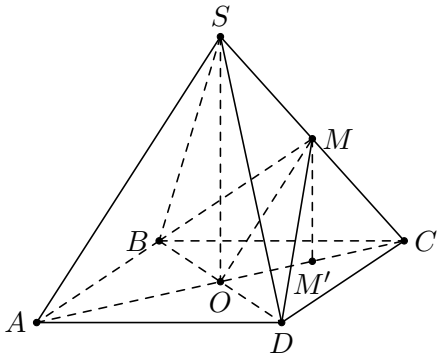
Gọi M' là trung điểm OC.

Khi đó $MM' \parallel SO \Rightarrow MM' \perp (ABCD)$.

Theo công thức diện tích hình chiếu, ta có:

$S_{M'BD} = \cos\varphi \cdot S_{MBD}$

$\Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{S_{M'BD}}{S_{MBD}} = \dfrac{BD \cdot MO}{BD \cdot M'O} = \dfrac{MO}{M'O} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$.



Chọn đáp án C □

Câu 21. Trong không gian cho tam giác đều SAB và hình vuông $ABCD$ cạnh a nằm trên hai mặt phẳng vuông góc. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\tan\varphi = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Dễ dàng xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng d đi qua S và song song với AB.

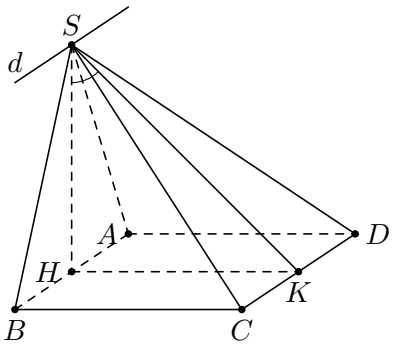
Trong mặt phẳng (SAB) có $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp d$.

Ta có

$$\begin{cases} CD \perp HK \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp SK \Rightarrow d \perp SK.$$

Từ đó suy ra $((SAB),(SCD)) = (SH, SK) = \widehat{HSK}$.

Trong tam giác vuông SHK, có $\tan\widehat{HSK} = \dfrac{HK}{SH} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.



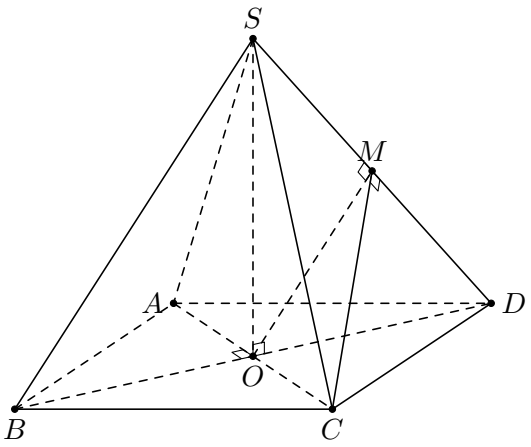
Chọn đáp án B □

Câu 22. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi = \sqrt{6}$. **B.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\tan\varphi = \sqrt{2}$.

Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD$. Do hình chóp $S.ABCD$ đều nên $SO \perp (ABCD)$.
Gọi M là trung điểm của SD. Tam giác SCD đều nên $CM \perp SD$.
Tam giác SBD có $SB = SD = a$, $BD = a\sqrt{2}$ nên vuông tại $S \Rightarrow SB \perp SD \Rightarrow OM \perp SD$.
Do đó $((SBD), (SCD)) = (OM, CM) = \widehat{OMC}$.
Ta có $\begin{cases} OC \perp BD \\ OC \perp SO \end{cases} \Rightarrow OC \perp (SBD) \Rightarrow OC \perp OM$.
Tam giác vuông MOC, có $\tan \widehat{CMO} = \dfrac{OC}{OM} = \sqrt{2}$.



Chọn đáp án (D) □

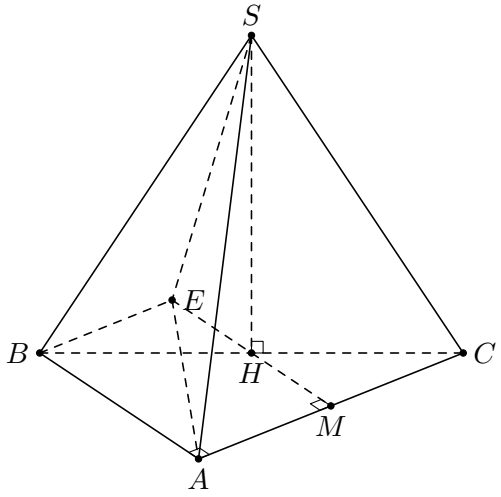
Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = AC = a$. Hình chiếu vuông góc H của S trên mặt đáy (ABC) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $SH = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng SB và AC. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\cot \varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\cot \varphi = \sqrt{7}$. **C.** $\cot \varphi = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\cot \varphi = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$.

✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm BC. Tam giác ABC vuông tại A nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Theo giả thiết, ta có $SH \perp (ABC)$.
Qua B kẻ $Bx \parallel AC$. Khi đó $(SB, AC) = (SB, Bx)$.
Kẻ $HE \perp Bx$ tại E, cắt AC tại M. Suy ra $AMEB$ là hình chữ nhật nên $\begin{cases} BE = AM = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a}{2} \\ HE = HM = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a}{2} \end{cases}$.
Ta có $\begin{cases} Bx \perp HE \\ Bx \perp SH \end{cases} \Rightarrow Bx \perp (SHE) \Rightarrow Bx \perp SE$.
Tam giác vuông SEB, có

$$\cot \widehat{SBE} = \frac{BE}{SE} = \frac{AM}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{\sqrt{7}}{7}.$$



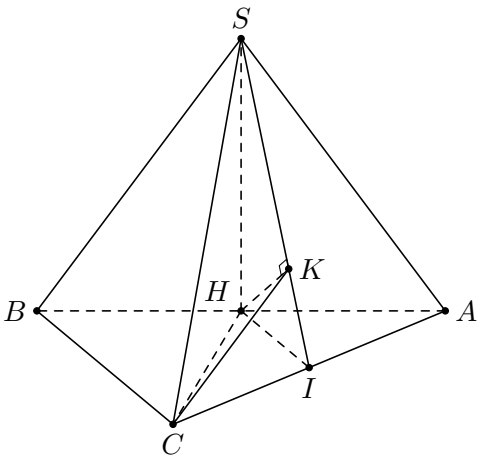
Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C. Gọi H là trung điểm AB. Biết rằng SH vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AB = SH = a$. Tính cosin của góc α tọa bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SAC).

A. $\cos \alpha = \dfrac{1}{3}$. **B.** $\cos \alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\cos \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\cos \alpha = \dfrac{2}{3}$.

✍Lời giải.

Ta có $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp CH$. (1)
Tam giác ABC cân tại C nên $CH \perp AB$. (2)
Từ (1) và (2), suy ra $CH \perp (SAB)$.
Gọi I là trung điểm $AC \Rightarrow HI \parallel BC \Rightarrow HI \perp AC$. (3)
Mặt khác $AC \perp SH$ (do $SH \perp (ABC)$). (4)
Từ (3) và (4), suy ra $AC \perp (SHI)$.
Kẻ $HK \perp SI\,(K \in SI)$. (5)
Từ $AC \perp (SHI) \Rightarrow AC \perp HK$. (6)
Từ (5) và (6), suy ra $HK \perp (SAC)$.
Vì $\begin{cases} HK \perp (SAC) \\ HC \perp (SAB) \end{cases}$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SAB) bằng góc giữa hai đường thẳng HK và HC.



Xét tam giác CHK vuông tại K, có $CH = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a}{2}$; $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HI^2} \Rightarrow HK = \dfrac{a}{3}$.
Do đó $\cos\widehat{CHK} = \dfrac{HK}{CH} = \dfrac{2}{3}$.

Nhận xét. *Bài làm sử dụng lý thuyết* "$\begin{cases} d_1 \perp (\alpha) \\ d_2 \perp (\beta) \end{cases} \Rightarrow ((\alpha),(\beta)) = (d_1, d_2)$".
Nếu ta sử dụng lý thuyết quen thuộc "góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai đường thẳng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng và cùng vuông góc với giao tuyến" thì rất khó.

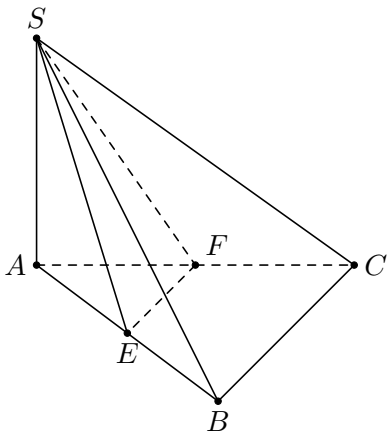
Chọn đáp án D □

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC. Góc giữa hai mặt phẳng (SEF) và (SBC) là

A. $\widehat{CSF}$. **B.** $\widehat{BSF}$. **C.** $\widehat{BSE}$. **D.** $\widehat{CSE}$.

✍Lời giải.

Gọi d là đường thẳng đi qua S và song song với EF.
Vì EF là đường trung bình tam giác ABC suy ra $EF \parallel BC$.
Khi đó $d \parallel EF \parallel BC \Rightarrow (SEF) \cap (SBC) = d$. (1)
Ta có $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases}$ suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow \begin{cases} BC \perp SE \\ BC \perp SB \end{cases}$. (2)
Từ (1), (2) suy ra $\begin{cases} d \perp SE \\ d \perp SB \end{cases}$.
Dẫn tới $((SEF);(SBC)) = (SE;SB) = \widehat{BSE}$.



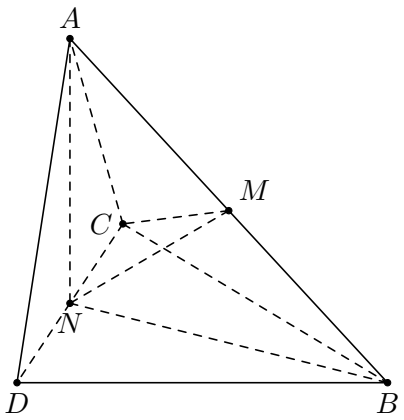
Chọn đáp án C □

Câu 26. Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a, CD = 2x$. Với giá trị nào của x thì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.

✍Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.
Ta có $AN \perp CD$ mà $(ACD) \perp (BCD)$ suy ra $AN \perp (BCD) \Rightarrow AN \perp BN$.
Tam giác ABC cân tại C, có M là trung điểm của AB suy ra $CM \perp AB$.
Giả sử $(ABC) \perp (BCD)$ mà $CM \perp AB$ suy ra $CM \perp (ABD) \Rightarrow CM \perp DM$.
Khi đó, tam giác MCD vuông cân tại $M \Rightarrow MN = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{CD}{2} \Rightarrow AB = CD = 2x$.
Lại có $AN = BN = \sqrt{AC^2 - AN^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$, mà $AB^2 = AN^2 + BN^2$.
Suy ra $2\left(a^2 - x^2\right) = 4x^2 \Leftrightarrow a^2 = 3x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

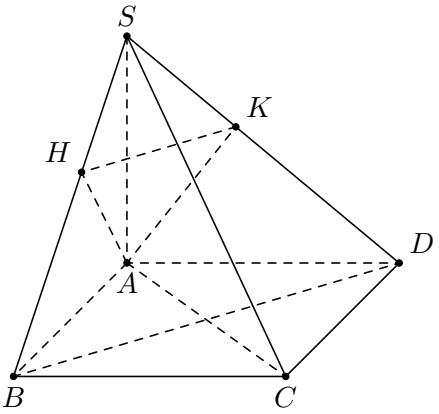


Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên $SA = x$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) tạo với nhau một góc $60°$.

A. $x = \dfrac{3a}{2}$. **B.** $x = \dfrac{a}{2}$. **C.** $x = a$. **D.** $x = 2a$.

✍Lời giải.
Từ A kẻ AH vuông góc với $SB\,(H \in SB)$.
Ta có $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ mà $AH \perp SB$ suy ra $AH \perp (SBC)$.
Từ A kẻ AK vuông góc với $SD\,(K \in SD)$, tương tự, chứng minh được $AK \perp (SCD)$.
Khi đó $SC \perp (AHK)$ suy ra $((SBC);(SCD)) = (AH;AK) = \widehat{HAK} = 60°$.
Lại có $\triangle SAB = \triangle SAD \Rightarrow AH = AK$ mà $\widehat{HAK} = 60^0$ suy ra tam giác AHK đều.



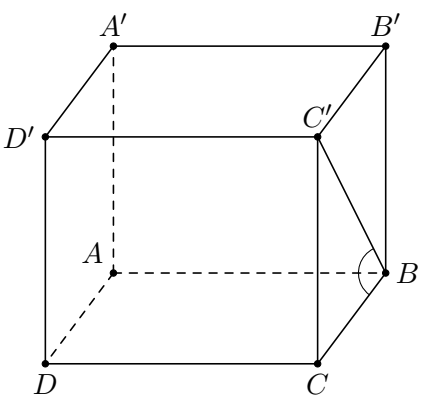
Tam giác SAB vuông tại S, có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} \Rightarrow AH = \dfrac{xa}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.
Suy ra $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} \Rightarrow \dfrac{SH}{SB} = \dfrac{x^2}{x^2 + a^2}$.
Vì $HK \parallel BD$ suy ra $\dfrac{SH}{SB} = \dfrac{HK}{BD} \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x^2 + a^2} = \dfrac{xa}{\sqrt{x^2 + a^2} \cdot a\sqrt{2}} \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = a$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 28. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy cạnh bằng a, góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (ABC') có số đo bằng $60°$. Độ dài cạnh bên của hình lăng trụ bằng

A. $2a$. **B.** $3a$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

✍Lời giải.
Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ tứ giác đều $\Rightarrow \begin{cases} AB \perp BB' \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BB'C'B)$.
Khi đó $\begin{cases} (ABC') \cap (BB'C'B) = BC' \\ (ABCD) \cap (BB'C'B) = BC \text{ suy ra} \\ (ABC') \cap (ABCD) = AB \end{cases}$
$((ABC');(ABCD)) = (BC';BC) = \widehat{C'BC} = 60°$.
Đặt $AA' = x$, tam giác BCC' vuông tại C, có

$$\tan \widehat{C'BC} = \frac{CC'}{BC} \Rightarrow x = \tan 60^0 \cdot a = a\sqrt{3}.$$



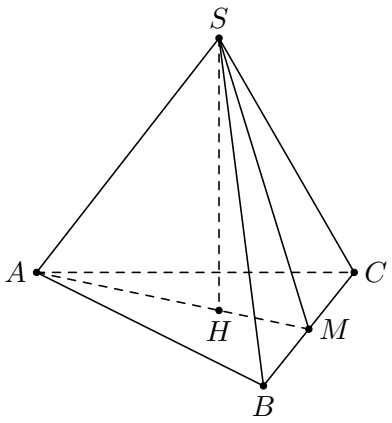
Chọn đáp án (C) □

Câu 29. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60°. Tính độ dài đường cao SH của khối chóp.

A. $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $SH = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $SH = \dfrac{a}{2}$. **D.** $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi H là chân đường cao kẻ từ đỉnh S xuống mặt phẳng $(ABCD)$.
Vì $S.ABC$ là hình chóp đều có $SA = SB = SC$ nên suy ra H chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Gọi M là trung điểm của BC, ta có



$$\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM).$$

Khi đó $((SBC);(ABC)) = (SM;AM) = \widehat{SMA} = 60^\circ$.
Tam giác ABC đều có

$$AM = \sqrt{AB^2 - MB^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HM = \frac{AM}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Tam giác AHM vuông tại H, có $\tan\widehat{SMA} = \dfrac{SH}{HM} \Rightarrow SH = \tan 60^\circ \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{6} = \dfrac{a}{2}$.
Vậy độ dài đường cao $SH = \dfrac{a}{2}$.

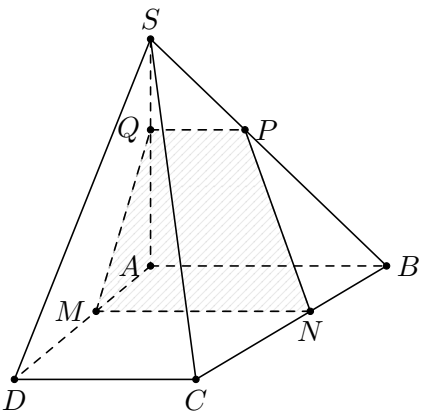
Chọn đáp án C □

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, đáy lớn AB; cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi Q là điểm trên cạnh SA và $Q \neq A, Q \neq S$; M là điểm trên đoạn AD và $M \neq A$. Mặt phẳng (α) qua QM và vuông góc với mặt phẳng (SAD). Thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho là

A. tam giác. **B.** hình thang cân. **C.** hình thang vuông. **D.** hình bình hành.

✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD)$. Mà $(\alpha) \perp (SAD)$ suy ra $AB \parallel (\alpha)$.
Qua M kẻ đường thẳng song song với AB cắt BC tại N.
Qua E kẻ đường thẳng song song với AB cắt SB tại P.
Khi đó thiết diện là hình thang $MNPQ$ (do $MN \parallel PQ$).
Vì $AB \perp (SAD)$ suy ra $MN \perp (SAD)$ nên $MN \perp QM$.
Do đó thiết diện $MNPQ$ là hình thang vuông tại Q và M.



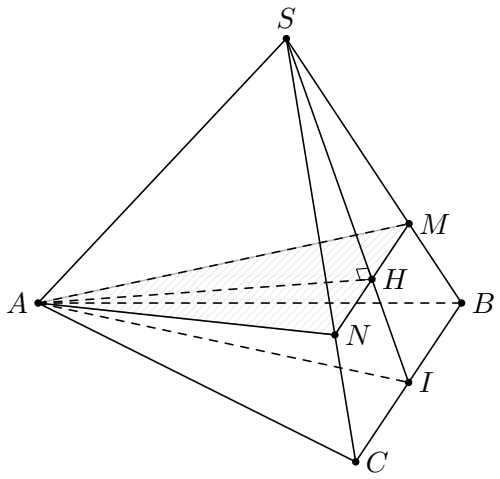
Chọn đáp án C □

Câu 31. Cho hình chóp đều $SABC$. Mặt phẳng (α) qua A, song song với BC và vuông góc với mặt phẳng (SBC). Thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho là

A. tam giác đều. **B.** tam giác cân. **C.** tam giác vuông. **D.** tứ giác.

✍Lời giải.

Gọi I là trung điểm BC. Trong tam giác SAI kẻ $AH \perp SI\,(H \in SI)$.
Trong tam giác SBC, qua H kẻ đường song song với BC, cắt SC ở M, cắt SB ở N.
Qua cách dựng ta có $BC \parallel (AMN)$. (1)
Ta có $\begin{cases} SI \perp AH \\ SI \perp MN \text{ (do } SI \perp BC) \end{cases} \Rightarrow SI \perp (AMN)$
$\Rightarrow (SBC) \perp (AMN)$. (2)
Từ (1) và (2), suy ra thiết diện cần tìm là tam giác AMN.
Dễ thấy H là trung điểm của MN mà $AH \perp (SBC)$ suy ra $AH \perp MN$. Tam giác AMN có đường cao AH vừa là trung tuyến nên nó là tam giác cân đỉnh A.

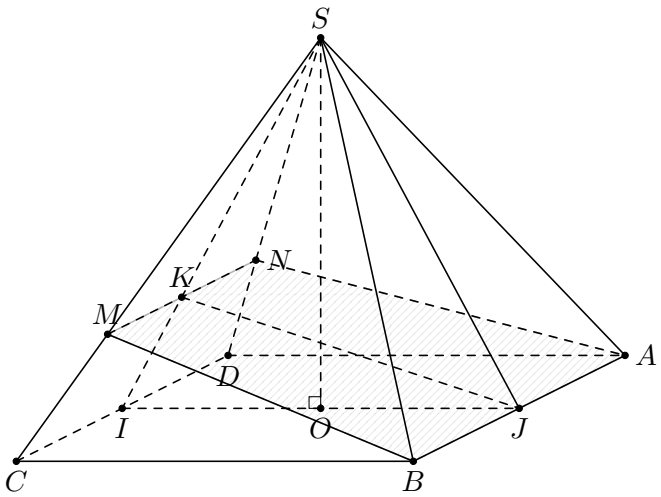


Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Cho hình chóp đều $S.ABCD$. Mặt phẳng (α) qua AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD). Thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho là

A. tam giác cân. **B**. hình hình hành. **C**. hình thang vuông. **D**. hình thang cân.

✍Lời giải.



Gọi I, J lần lượt là trung điểm của CD và AB.
Trong tam giác SIJ kẻ $JK \perp SI$. Trong tam giác SIJ, qua K kẻ đường thẳng song song với CD cắt SC tại M, cắt SD tại N.
Ta dễ dàng chứng minh được $(ABMN) \perp (SCD)$.
Khi đó thiết diện cần tìm là hình thang $ABMN$.
Vì hình chóp đã cho là hình chóp đều nên suy ra $AN = BM$. Vậy thiết diện là hình thang cân.

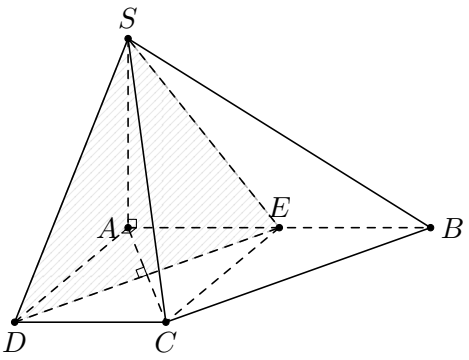
Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AB = 2a, AD = DC = a$; cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua SD và vuông góc với mặt phẳng (SAC). Tính diện tích (α) của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S = \dfrac{a^2}{2}$. **B**. $S = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **C**. $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **D**. $S = \dfrac{a^2}{4}$.

✍Lời giải.

Gọi E là trung điểm AB, suy ra $AECD$ là hình vuông nên $DE \perp AC$. (1)
Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp DE$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $DE \perp (SAC) \Rightarrow (SAD) \perp (SAC)$.
Ta có $\begin{cases} (SDE) \supset SD \\ (SDE) \perp (SAC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \equiv (SDE)$.
Vậy thiết diện là tam giác SDE.
Ta có $SD = \sqrt{SA^2 + DA^2} = a\sqrt{2}; SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = a\sqrt{2}$;
$DE = AC = DC\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.



Do đó tam giác SDE đều có cạnh $a\sqrt{2}$ nên $S_{\triangle SDE} = \dfrac{SD^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

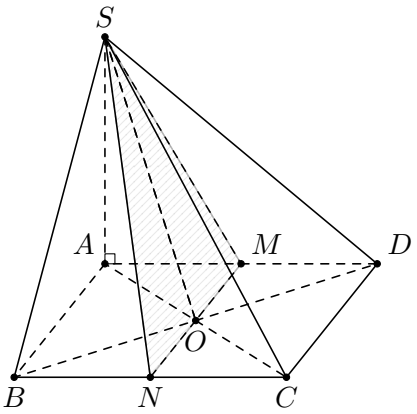
Chọn đáp án C □

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O với $AB = a, AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy. Gọi (α) là mặt phẳng qua SO và vuông góc với (SAD). Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp đã cho.

A. $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **B.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **C.** $S = \dfrac{a^2}{2}$. **D.** $S = a^2$.

✍Lời giải.
Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD, BC. Khi đó:
MN đi qua O và $\begin{cases} MN \perp AD \\ MN \perp SA \end{cases} \Rightarrow MN \perp (SAD)$.
Từ đó suy ra $(\alpha) \equiv (SMN)$ và thiết diện cần tìm là tam giác SMN.
Tam giác SMN vuông tại M nên

$$S_{\triangle SMN} = \frac{1}{2}SM \cdot MN = \frac{1}{2}AB\sqrt{SA^2 + \left(\frac{AD}{2}\right)^2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}.$$



Chọn đáp án B □

Câu 35. Khẳng định nào sau đây đúng?

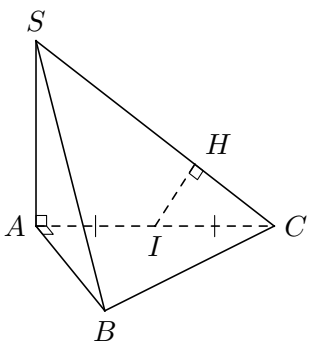
A. Hình lăng trụ đứng có đáy là một đa giác đều là hình lăng trụ đều.
B. Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ đều.
C. Hình lăng trụ có đáy là một đa giác đều là hình lăng trụ đều.
D. Hình lăng trụ tứ giác đều là hình lập phương.

✍Lời giải.
Hình lăng trụ đứng có đáy là một đa giác đều là hình lăng trụ đều.
Chọn đáp án A □

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh bên SA vuông góc với (ABC). Gọi I là trung điểm cạnh AC, H là hình chiếu của I trên SC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(SBC) \perp (IHB)$. **B.** $(SAC) \perp (SAB)$. **C.** $(SAC) \perp (SBC)$. **D.** $(SBC) \perp (SAB)$.

✍Lời giải.
$\begin{cases} SA \perp (ABC) \\ AB \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow SA \perp AB$. (1)
$AB \perp AC$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $AB \perp (SAC)$.
Mà $AB \subset (SAB)$ nên $(SAC) \perp (SAB)$.

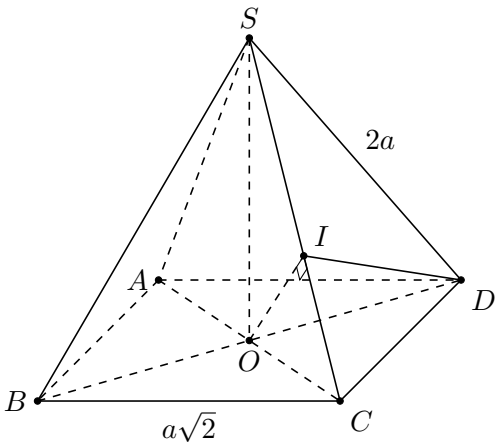


Chọn đáp án B □

Câu 37. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, cạnh bên bằng $2a$. Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và (SCD). Tính $\cos\alpha$.

A. $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{21}}{14}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

✍Lời giải.



Kẻ $OI \perp SC\,(I \in SC)$. (1)

Ta có $\begin{cases} OD \perp OC \\ OD \perp SO \end{cases} \Rightarrow OD \perp (SOC) \Rightarrow OD \perp SC.$

Kết hợp (1) ta được $SC \perp (IOD) \Rightarrow SC \perp ID$.

Do đó ta có $((SAC),(SCD)) = (OI, DI) = \widehat{OID}$.

$ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$ nên $OC = OD = BC \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = a$.

Xét $\triangle SOC$ vuông tại O, ta có

$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

Ta cũng có

$$\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow OI = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Xét $\triangle OID$ vuông tại O, ta có

$$ID = \sqrt{OD^2 + OI^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

Suy ra $\cos\alpha = \dfrac{OI}{OD} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

C. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

✍Lời giải.

Khẳng định đúng là "Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau".

Chọn đáp án D □

Câu 39. Hình lăng trụ tam giác đều **không có** tính chất nào sau đây?

A. Các cạnh bên bằng nhau và hai đáy là tam giác đều.

B. Cạnh bên vuông góc với hai đáy và hai đáy là tam giác đều.

C. Tất cả các cạnh đều bằng nhau.

D. Các mặt bên là các hình chữ nhật.

✍Lời giải.

Trong hình lăng trụ tam giác đều, các cạnh bên và cạnh đáy có thể khác nhau.
Chọn đáp án C □

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại C, mặt phẳng (SAB) vuông góc mặt phẳng (ABC), $SA = SB$, I là trung điểm AB. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) là

A. Góc $\widehat{SCA}$. **B.** Góc $\widehat{SCI}$. **C.** Góc $\widehat{ISC}$. **D.** Góc $\widehat{SCB}$.

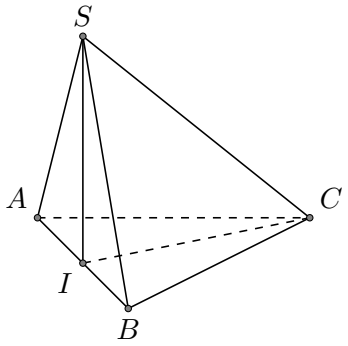
✍Lời giải.

Do $SA = SB$ và I là trung điểm của AB nên $SI \perp AB$.

Ta có $\begin{cases} (SAB) \perp (ABC) \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \Rightarrow SI \perp (ABC). \\ SI \perp AB \text{ trong } (SAB) \end{cases}$

Vậy CI là hình chiếu của SC lên mặt phẳng (ABC).

Nên $[SC, (ABC)] = (SC, CI) = \widehat{SCI}$.



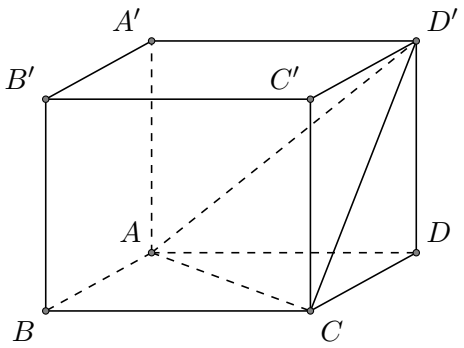
Chọn đáp án B □

Câu 41.

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, $AA' = a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(ABCD)$ (tham khảo hình vẽ). Tính giá trị của $\tan\alpha$.

A. $\tan\alpha = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

C. $\tan\alpha = 2$. **D.** $\tan\alpha = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.



✍Lời giải.

Ta có $(ACD') \cap (ABCD) = AC$.

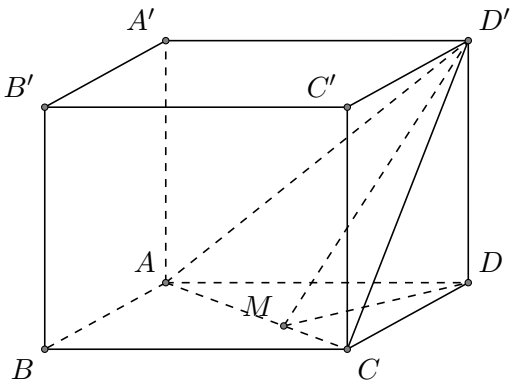
Trong $(ABCD)$, kẻ $DM \perp AC$ thì $AC \perp D'M$

$\Rightarrow ((ACD'), (ABCD)) = \widehat{DMD'}$.

Tam giác ACD vuông tại D có

$$\frac{1}{DM^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{DC^2} \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Tam giác MDD' vuông tại D có $\tan\alpha = \dfrac{DD'}{MD} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

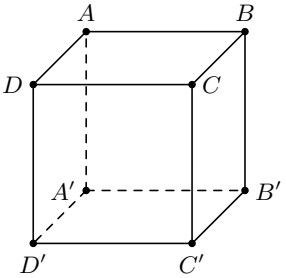


Chọn đáp án A □

Câu 42.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa đường thẳng CA' và mặt phẳng $(A'B'C'D')$ bằng góc nào sau đây?

A. $\widehat{CA'C'}$. **B.** $\widehat{CA'B'}$. **C.** $\widehat{A'C'C}$. **D.** $\widehat{A'AC}$.



✍Lời giải.

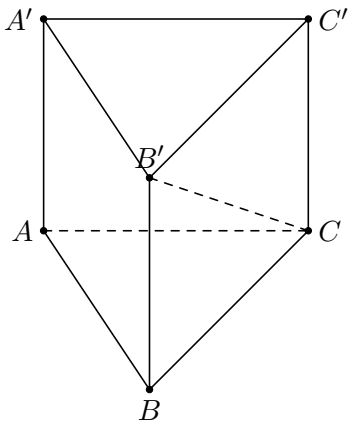
Ta có $\begin{cases} CC' \perp (A'B'C'D') \\ CA' \cap (A'B'C'D') = A' \end{cases} \Rightarrow C'A'$ là hình chiếu của CA' lên $(A'B'C'D')$. Khi đó

$$(\widehat{CA', A'B'C'D'}) = (\widehat{CA', C'A'}) = \widehat{CA'C'}.$$

Chọn đáp án A □

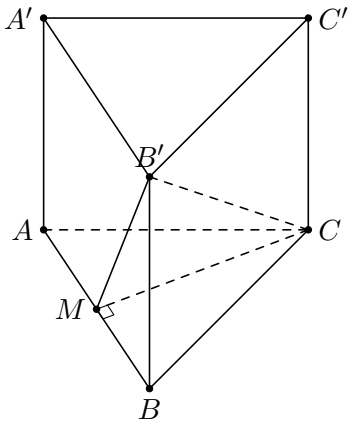
Câu 43.
Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Giá trị côsin của góc giữa đường thẳng $B'C$ và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{13}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{11}}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{39}}{13}$.



✍Lời giải.
Gọi M là trung điểm AB, ta có

$$\begin{cases} CM \perp AB \\ CM \perp AA' \end{cases} \Rightarrow CM \perp (ABB'A').$$



Khi đó hình chiếu của CB' lên $(ABB'A')$ là MB'.
Ta có $(\widehat{CB', (ABB'A')}) = (\widehat{CB', MB'}) = \widehat{CB'M}$. Ta có

$$MB' = \sqrt{BB'^2 + MB^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

$$B'C = \sqrt{BB'^2 + BC^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2} = 2a.$$

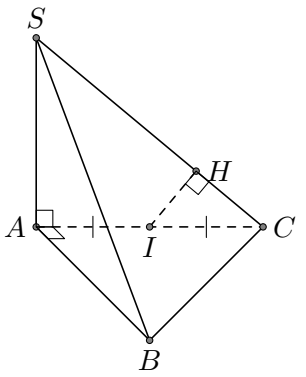
Ta có $\cos\widehat{CB'M} = \dfrac{MB'}{B'C} = \dfrac{\frac{a\sqrt{13}}{2}}{2a} = \dfrac{\sqrt{13}}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh bên SA vuông góc với (ABC). Gọi I là trung điểm cạnh AC, H là hình chiếu của I trên SC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(SBC) \perp (IHB)$. **B.** $(SAC) \perp (SAB)$. **C.** $(SAC) \perp (SBC)$. **D.** $(SBC) \perp (SAB)$.

✍Lời giải.
Do $\begin{cases} SA \perp (ABC) \\ AB \subset (ABC) \end{cases}$ nên ta có $\begin{cases} AB \perp SA \\ AB \perp AC \end{cases}$
$\Rightarrow AB \perp (SAC)$ nên $(SAC) \perp (SAB)$.



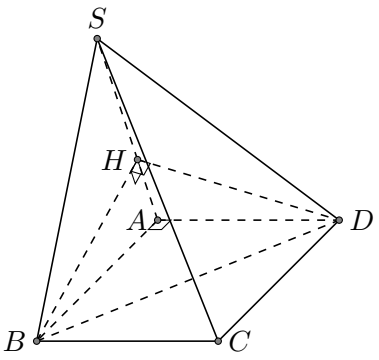
Chọn đáp án B □

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng BD với (SAD). Tính $\sin\alpha$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

✍Lời giải.

Vì $(SAB) \perp (ABCD)$, $AD \perp AB$ nên $AD \perp (SAB)$.
Trong (SAB), kẻ $BH \perp SA = H$, ta có $BH \perp (SAD)$.
Khi đó $\sin(BD, (SAD)) = \sin\alpha = \dfrac{BH}{BD}$.
Tam giác SAB đều cạnh a có đường cao $BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Suy ra $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

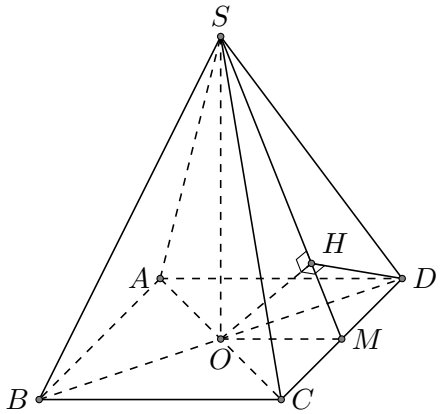


Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$ và cạnh bên bằng $2a$. Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và (SCD). Tính $\cos\alpha$.

A. $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{21}}{14}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải.
Gọi tâm của đáy là O, M là trung điểm của CD.
Trong (SOM), kẻ OH vuông góc với SM tại H.
Khi đó ta có $OH \perp (SCD)$. Mà $OD \perp (SAC)$.
Do đó $((SCD), (SAC)) = (OH, OD) = \widehat{HOD} = \alpha$.
Ta có $OD = a$, $SO = a\sqrt{3}$, $OM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Xét $\triangle OSM$ vuông tại O, có
$\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OS^2} + \dfrac{1}{OM^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.
Xét $\triangle OHD$ vuông tại H, có
$\cos\widehat{HOD} = \cos\alpha = \dfrac{OH}{OD} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

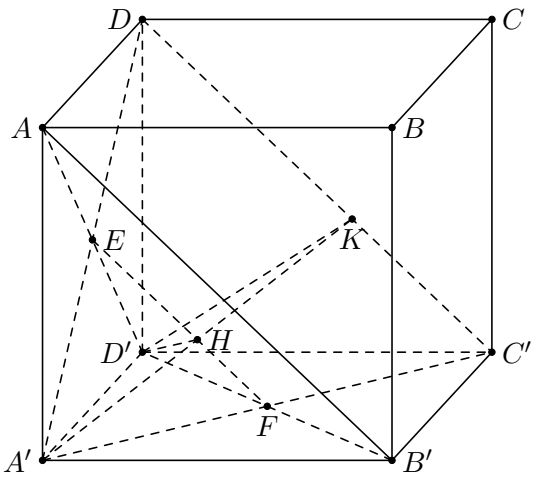


Chọn đáp án D □

Câu 47. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB = 2$, $AD = 3$, $AA' = 4$. Góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$ là α. Tính giá trị gần đúng của α.

A. 61,6°. **B.** 38,1°. **C.** 45,2°. **D.** 53,4°.

Lời giải.



Ta chia bài toán thành 2 phần:
Phần 1: Xác định góc giữa hai mặt phẳng:

— **Bước 1: Tìm giao tuyến giữa hai mặt phẳng:**
Trong mặt phẳng $(ADD'A')$ gọi E là giao điểm của AD' và $A'D$.
Trong mặt phẳng $(A'B'C'D')$ gọi F là giao điểm của $B'D'$ và $A'C'$.
Khi đó EF là giao tuyến của hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$.

— **Bước 2: Trong mỗi mặt phẳng, ta cần tìm đường thẳng vuông góc với giao tuyến:**
Trong mặt phẳng $(DA'C')$ kẻ $A'H \perp EF$ tại H, $A'H$ cắt DC' tại K.
Ta chứng minh $D'H \perp EF$.
Ta có $\begin{cases} DC' \perp A'K \\ DC' \perp A'D' \end{cases} \Rightarrow DC' \perp (A'D'K) \Rightarrow DC' \perp D'H$.
Mặt khác $\begin{cases} DC' \perp D'H \\ D'C \parallel EF \end{cases} \Rightarrow DH' \perp EF$.

— **Bước 3: Xác định góc giữa hai mặt phẳng:**
Ta có $\begin{cases} D'H \subset (AB'D') \\ D'H \perp EF \\ A'H \subset (DA'C') \\ A'H \perp EF \\ (AB'D') \cap (DA'C') = EF \end{cases} \Rightarrow \alpha = ((AB'D'), (DA'C')) = (D'H, A'H)$.

Phần 2: Tính góc α: Ta sẽ sử dụng định lý cosin trong tam giác $A'HD'$:

— **Bước 1: Chứng minh tam giác $A'HD'$ cân:**
Trong tam giác $\triangle A'DC'$ ta có EF là đường trung bình, nên suy ra H là trung điểm $A'K$.
Vì $A'D' \perp (DD'C'C)$ nên $A'D' \perp D'K$. Do đó tam giác $\triangle A'D'K$ vuông tại D'.
Xét tam giác $\triangle A'D'K$ vuông tại D' có $D'K$ là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $D'H = A'H = \dfrac{A'K}{2}$.

— **Bước 2: Tính độ dài cạnh $A'K$:**
Ta tính đường cao $A'K$ của tam giác $\triangle A'DC'$ thông qua diện tích.
Áp dụng định lý Pytago ta tính được độ dài các cạnh tam giác $\triangle A'DC'$ là: $A'D = 5$, $A'C' = \sqrt{13}$, $DC' = 2\sqrt{5}$.
Sử dụng công thức Hê-rông ta tính được $S_{A'DC'} = \sqrt{61}$.
Mặt khác $S_{A'DC'} = \dfrac{1}{2}A'K \times DC' \Rightarrow \sqrt{61} = \dfrac{1}{2}A'K \times 2\sqrt{5} \Rightarrow A'K = \dfrac{\sqrt{305}}{5}$.
Từ đó suy ra $D'H = A'H = \dfrac{A'K}{2} = \dfrac{\sqrt{305}}{10}$.

— **Bước 3: Tính góc α bằng định lý cosin:**
Trong tam giác $\triangle A'HD'$ ta có:

$$\cos \widehat{A'HD'} = \frac{HA'^2 + HD'^2 - A'D'^2}{2HA' \times HD'} = \frac{2\left(\dfrac{\sqrt{305}}{10}\right)^2 - 3^2}{2\left(\dfrac{\sqrt{305}}{10}\right)^2} = \frac{-29}{61}$$

Suy ra $\widehat{A'HD'} = 118{,}4°$. Do đó góc giữa hai đường thẳng $A'H$ và $D'H$ bằng $61{,}6°$.
Vậy $\alpha = 61{,}6°$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 48. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a và $SA \perp (ABCD)$. Để góc giữa (SCB) và (SCD) bằng $60°$ thì độ dài cạnh SA là

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** a. **D.** $2a$.

✍**Lời giải.**

Đặt $SA = a$.

Kẻ $\begin{cases} AM \perp SD, m \in SD \\ AN \perp SB, N \in SB \end{cases}$, ta có $\begin{cases} AM \perp (SCD) \\ AN \perp (SBC). \end{cases}$

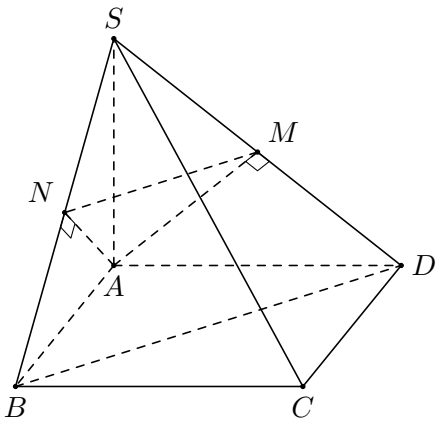
Suy ra $\widehat{((SCD);(SBC))} = \widehat{(AM;AN)}$.

Do $\triangle SAD = \triangle SAB$ (c.g.c) $\Rightarrow AM = AN$.

Do đó $\widehat{((SCD);(SBC))} = 60^\circ \Leftrightarrow \widehat{(AM;AN)} = 60^\circ$.

Xét tam giác SAD, ta có

$$\frac{1}{AM^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{a^2} \Rightarrow AM = \frac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$



Mà $\dfrac{MN}{BD} = \dfrac{SM}{SD} = \dfrac{SM \cdot SD}{SD^2} = \dfrac{SA^2}{SD^2} = \dfrac{x^2}{a^2+x^2} \Rightarrow MN = \dfrac{ax^2\sqrt{2}}{a^2+x^2}$.

— Nếu $\widehat{MAN} = 60^0$ thì $\triangle AMN$ đều $\Leftrightarrow AM = MN \Leftrightarrow x = a$.

— Nếu $\widehat{MAN} = 120^\circ$ thì $MN = \sqrt{3}AM \Leftrightarrow 2x^2 = 3(a^2+x^2)$ (vô lý).

Vậy $SA = a$.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng

A. 60°. **B**. 30°. **C**. 45°. **D**. 90°.

✍Lời giải.

Vẽ $DE \perp SC$ tại E.

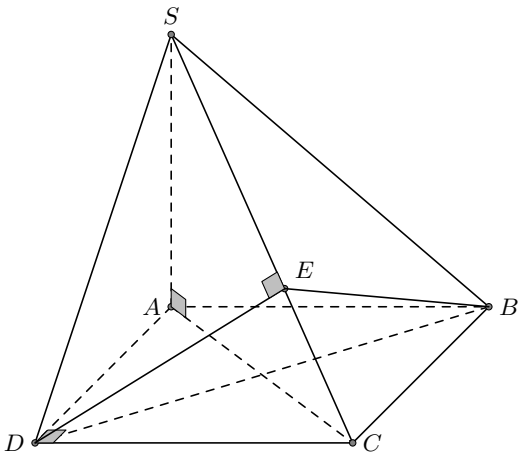
Vì các tam giác SBC và SDC là các tam giác vuông có các cạnh tương ứng bằng nhau nên $BE \perp SC$ và $BE = DE$.

$\triangle SBC$ vuông tại B và BE là đường cao nên $\dfrac{1}{BE^2} = \dfrac{1}{SB^2} + \dfrac{1}{BC^2} = \dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{3}{2a^2}$.

$\Rightarrow BE^2 = \dfrac{2a^2}{3}$.

Khi đó $\begin{cases} SC = (SCD) \cap (SBC) \\ DE \perp SC, DE \subset (SCD) \\ BE \perp SC, BE \subset (SBC) \end{cases}$

Vậy $((SCD),(SBC)) = (DE,BE)$.



* Tính $\widehat{DEB}$

Ta có $\cos\widehat{DEB} = \dfrac{BE^2+DE^2-BD^2}{2 \cdot BE \cdot DE} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{DEB} = 120^\circ$.

Khi đó $(DE,BE) = 60^\circ$. Vậy $((SCD),(SBC)) = 60^\circ$.

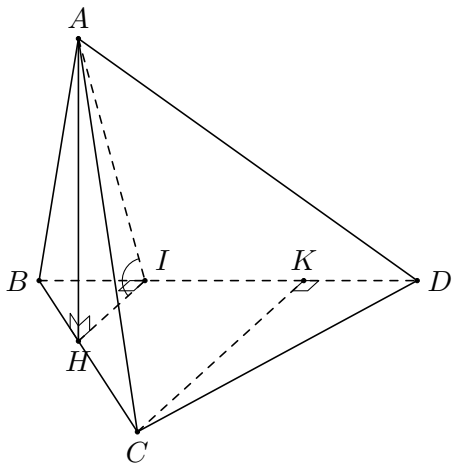
Chọn đáp án A □

Câu 50. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác ABC vuông tại A, $AB = 6$, $AC = 8$. Tam giác BCD có độ dài đường cao kẻ từ đỉnh C bằng 8. Mặt phẳng (BCD) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Cô-sin góc giữa mặt phẳng (ABD) và (BCD) bằng

A. $\dfrac{4}{\sqrt{17}}$. **B**. $\dfrac{3}{\sqrt{17}}$. **C**. $\dfrac{3}{\sqrt{34}}$. **D**. $\dfrac{4}{\sqrt{34}}$.

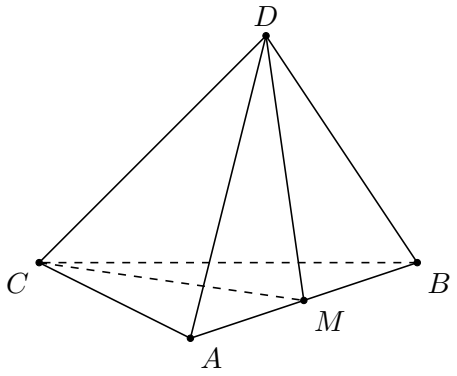
✍Lời giải.

Kẻ $AH \perp BC$ tại H, $CK \perp BD$ tại K, $HI \perp BD$ tại I.
Theo giả thiết suy ra $CK = 8$.
Vì $\begin{cases}(ABC) \perp (BCD)\\ AH \perp BC\end{cases}$ nên $AH \perp (BCD)$.
Ta có $\begin{cases}BD \perp HI\\ BD \perp AH\end{cases} \Rightarrow BD \perp (AHI)$
$\Rightarrow \widehat{AIH}$ là góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (BCD).
Xét $\triangle ABC$ vuông tại A
$\Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{6^2} + \dfrac{1}{8^2} = \dfrac{25}{576} \Rightarrow AH = \dfrac{24}{5}$.
Ta có $BH \cdot BC = AB^2 \Rightarrow \dfrac{BH}{BC} = \dfrac{AB^2}{BC^2} = \dfrac{6^2}{6^2+8^2} = \dfrac{9}{25}$.



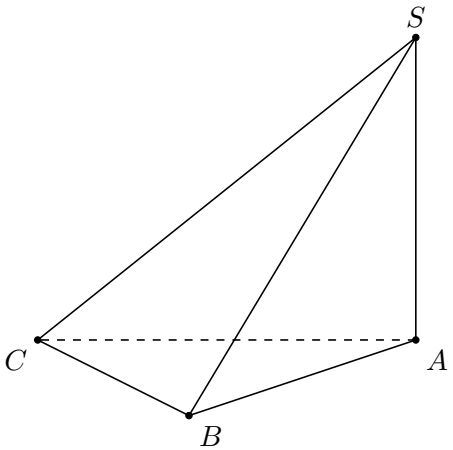
Vì $HI \parallel CK \Rightarrow \dfrac{HI}{CK} = \dfrac{BH}{BC} = \dfrac{9}{25} \Rightarrow HI = \dfrac{9}{25}CK = \dfrac{9}{25} \cdot 8 = \dfrac{72}{25}$.
Xét $\triangle AHI$ vuông tại $H \Rightarrow \tan\widehat{AIH} = \dfrac{AH}{HI} = \dfrac{\frac{24}{5}}{\frac{72}{25}} = \dfrac{5}{3}$.
Ta có $\cos^2\widehat{AIH} = \dfrac{1}{1+\tan^2\widehat{AIH}} = \dfrac{1}{1+\frac{25}{9}} = \dfrac{9}{34} \Rightarrow \cos\widehat{AIH} = \dfrac{3}{\sqrt{34}}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 51. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) là hai tam giác đều. Gọi M là trung điểm của AB. Khẳng định nào sau đây đúng?
A. $CM \perp (ABD)$. **B**. $AB \perp (MCD)$. **C**. $AB \perp (BCD)$. **D**. $DM \perp (ABC)$.
✍Lời giải.
Do $\triangle ABC$ và $\triangle ABD$ đều nên $DM \perp AB$ và $CM \perp AB$. Suy ra $AB \perp (DMC)$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 52. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết $SA = a\sqrt{3}$, $AC = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng bao nhiêu?
A. $30°$. **B**. $45°$. **C**. $60°$. **D**. $90°$.
✍Lời giải.
Ta có AB là hình chiếu của SB lên mặt phẳng (ABC) nên góc tạo bởi SB và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{SBA}$.
Ta có $AB = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = a$ và $\tan\widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \sqrt{3}$
$\Rightarrow \widehat{SBA} = 60°$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 53. Cho tứ diện $S.ABC$ có các tam giác SAB, SAC và ABC vuông cân tại A, $SA = a$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC), khi đó $\tan\alpha$ bằng

A. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **B**. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C**. $\sqrt{3}$. **D**. $\sqrt{2}$.

✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp AC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$.

Gọi I là trung điểm của BC. Ta có

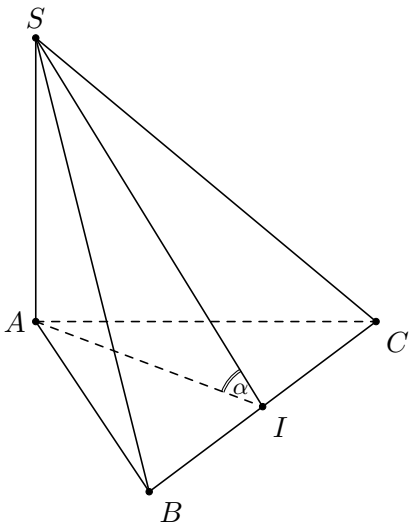
$\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI)$.

Suy ra góc giữa mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc giữa SI và AI hay là góc $\widehat{SIA} = \alpha$.

Xét tam giác SAI vuông tại A. Ta có

$AI = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

$\tan\alpha = \dfrac{SA}{AI} = \sqrt{2}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 54. Xét các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

A. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

✍Lời giải.

Chỉ có mệnh đề "Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau" là đúng. Các mệnh đề còn lại là sai.

Chọn đáp án (C) □

Câu 55. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $SA \perp (ABC)$, $SA = \sqrt{3}$ cm, $AB = 1$ cm. Mặt bên (SBC) hợp với mặt đáy góc bằng

A. $90°$. **B**. $60°$. **C**. $45°$. **D**. $30°$.

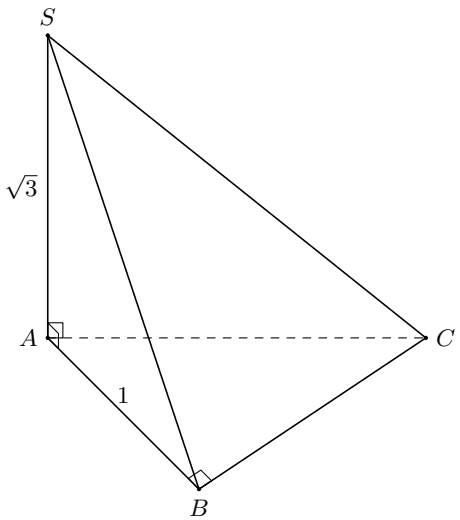
✍Lời giải.

Vì $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases}$ nên $BC \perp (SAB)$.

Khi đó góc giữa (SBC) hợp với mặt đáy bằng $\widehat{SBA}$.

Xét tam giác SAB vuông tại $A \Rightarrow \tan\widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \widehat{SBA} = 60°$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 56. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB = SB = a, SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tìm số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

A. $30°$. **B**. $45°$. **C**. $60°$. **D**. $90°$.

✍Lời giải.

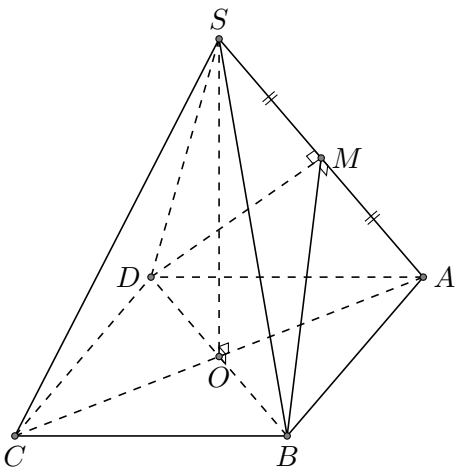
Do $AB = SB$ nên tam giác SAB cân tại B, từ giả thiết dễ thấy $SD = SB, AD = AB$ nên tam giác SAD cân tại D.

Gọi M là trung điểm của SA, khi đó $BM \perp SA, DM \perp SA$, suy ra $\widehat{BMD}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

Từ $SB = AB = SD = AD = a$ ta có $\Delta SBD = \Delta ABD \Rightarrow OA = SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

$\Rightarrow MO = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot SO = \dfrac{a\sqrt{12}}{6}; OD = OB = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \tan\widehat{MDO} = 1 \Rightarrow \widehat{MDO} = 45° \Rightarrow \widehat{BMD} = 90°$.



Chọn đáp án D □

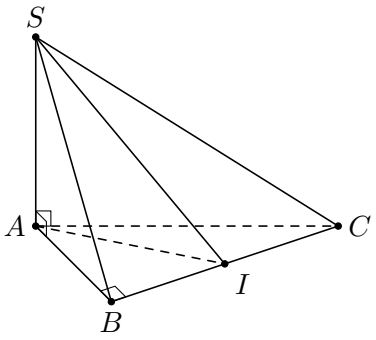
Câu 57. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$. Gọi I là trung điểm của BC. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc nào sau đây?

A. $\widehat{SCA}$. **B**. $\widehat{SIA}$. **C**. $\widehat{SCB}$. **D**. $\widehat{SBA}$.

✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

Hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) có giao tuyến BC, có $BC \perp SB$ và $BC \perp AB$ nên góc giữa hai mặt phẳng đó là $\widehat{SBA}$.



Chọn đáp án D □

Câu 58. Cho hình chóp $S.ABC$ có các mặt bên tạo với đáy một góc bằng nhau và hình chiếu của S lên đáy nằm bên trong tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây luôn đúng?

A. H là trọng tâm tam giác ABC.

B. H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

C. H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

D. H là trực tâm tam giác ABC.

✍Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của S trên (ABC).

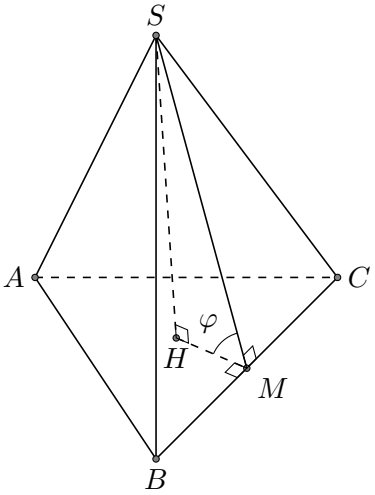
Gọi φ là góc tạo bởi các mặt bên với đáy.

Kẻ $HM \perp BC = M$ ta có $((SBC),(ABC)) = \widehat{SMH}$

và $d(H, BC) = MH = \dfrac{SH}{\tan\varphi}$.

Tương tự, ta có $d(H, AB) = d(H, AC) = \dfrac{SH}{\tan\varphi}$.

Suy ra H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.



Chọn đáp án B □

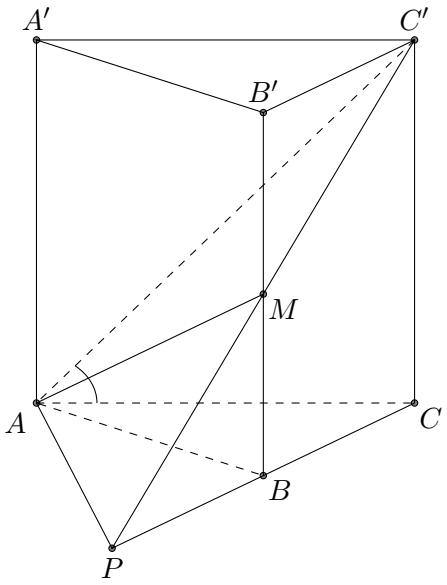
Câu 59. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Gọi M là trung điểm của BB'. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (AMC') và (ABC).

A. $\varphi = 60°$. **B.** $\varphi = 45°$. **C.** $\varphi = 30°$. **D.** $\varphi = 90°$.

✍Lời giải.

Gọi P là giao điểm của BC và $C'M$. Khi đó AP là giao tuyến của (AMC') và (ABC). Vì $MB = \dfrac{1}{2}CC'$ và $MB \parallel CC'$ nên MB là đường trung bình của $\triangle CC'P$, suy ra B là trung điểm của CP. Ta có $AB = BP = BC$ suy ra tam giác ACP vuông tại A. Mặt khác, $AP \perp AC$ và $AP \perp AA'$ nên $AP \perp (AA'C'C) \Rightarrow AP \perp AC'$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (AMC') và (ABC) là góc CAC'.

Tam giác CAC' vuông cân tại C nên $\widehat{CAC'} = 45°$. Vậy $\varphi = 45°$.



Chọn đáp án B □

Câu 60. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ABC'D')$ bằng

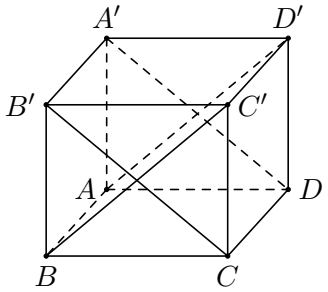
A. 30°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 90°.

✍Lời giải.

Ta có $CD \perp (BCC'B') \Rightarrow CD \perp BC'$.

$\begin{cases} BC' \perp CD \\ BC' \perp B'C \end{cases} \Rightarrow BC' \perp (A'B'CD) \Rightarrow (ABC'D') \perp (A'B'CD)$.

Vậy góc giữa $(A'B'CD)$ và $(ABC'D')$ là 90°.



Chọn đáp án D □

Câu 61. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D$. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ bằng

A. 60°. **B.** 30°. **C.** 45°. **D.** 90°.

✍Lời giải.

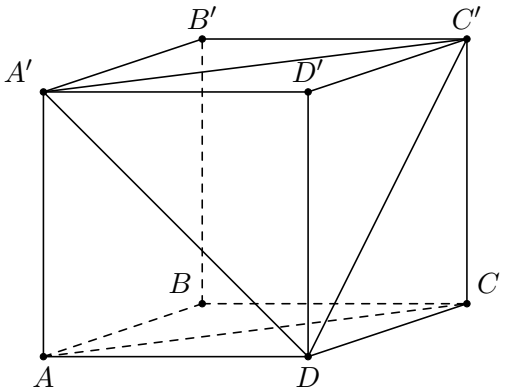
Gọi độ dài các cạnh của hình lập phương là $a > 0$.

Ta có $A'C' = C'D = A'D = \sqrt{2}a$. Suy ra $\triangle A'C'D$ đều.

Suy ra $\widehat{C'A'D} = 60°$.

Do AC song song với $A'C'$ nên

$$\widehat{(AC, A'D)} = \widehat{(A'C', A'D)} = \widehat{C'A'D} = 60°.$$



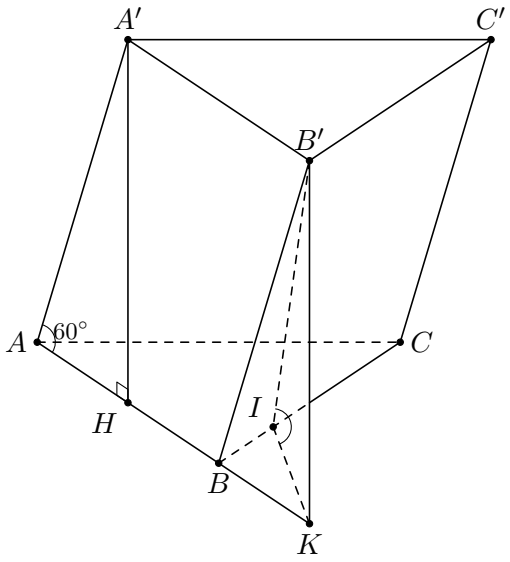
Chọn đáp án A □

Câu 62. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $2a$. Hình chiếu của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AB. Biết góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 60°. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và (ABC). Tính $\cos\varphi$.

A. $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{17}}{17}$. **C.** $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\cos\varphi = \sqrt{\dfrac{16}{17}}$.

✍Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC, suy ra $AM = 2a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.
Gọi K là điểm đối xứng của H qua B, suy ra $B'K \parallel A'H$, suy ra $B'K \perp (ABC)$.
Trong mp(ABC), dựng $BI \perp BC$ (với $I \in BC$). Khi đó, góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và (ABC) là góc $\widehat{KIB'}$.
Do tứ giác $AHKB'$ là hình bình hành nên $B'K = A'H = AH \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.
Ta có $KI = \mathrm{d}_{(H,BC)} = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}_{(A,BC)} = \dfrac{1}{2}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Xét $\Delta B'IK$ vuông tại K, ta có
$B'I = \sqrt{B'K^2 + KI^2} = \sqrt{3a^2 + \dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$,
$\cos\varphi = \cos\widehat{KIB'} = \dfrac{IK}{B'I} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} : \dfrac{a\sqrt{15}}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 63. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC = 2a$, $SA = a$ và SA vuông góc với (ABC). Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

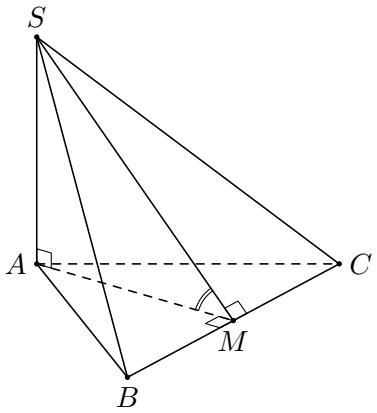
A. 45°. **B**. 30°. **C**. 60°. **D**. 90°.

✍Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC, ta có $\begin{cases}(SBC)\cap(ABC) = BC\\ AM \perp BC\\ SM \perp BC\end{cases}$ nên
$((SBC),(ABCD)) = (SM, AM) = \widehat{SMA}$.
Trong tam giác SAM vuông tại A, ta có

$$\tan\widehat{SMA} = \frac{SA}{AM} = \frac{a}{a} = 1 \Rightarrow \widehat{SMA} = 45^\circ.$$

Vậy $((SBC),(ABCD)) = 45^\circ$.



Chọn đáp án (A) □

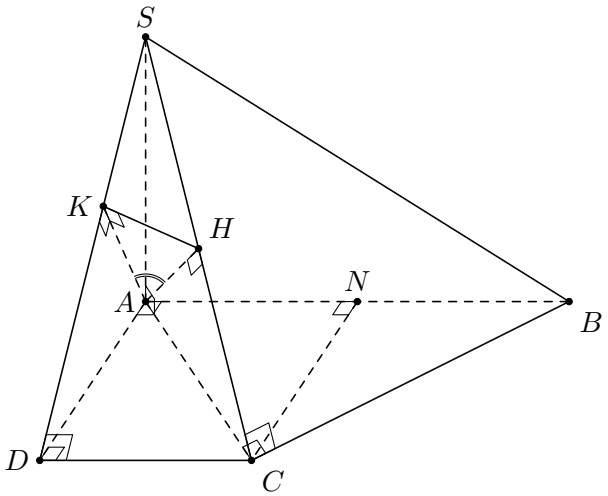
Câu 64. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AB = 2a$, $AD = CD = a$, $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với $(ABCD)$. Tính côsin của góc giữa (SBC) và (SCD).

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **C**. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

✍Lời giải.

Gọi H, N lần lượt là trung điểm của SC, AB.
Ta có $CN = \dfrac{1}{2}AB$ suy ra tam giác ABC vuông cân tại C.
Suy ra $\begin{cases}SA \perp BC\\ AC \perp BC\end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC)$.
Do $\triangle SAC$ vuông cân tại A nên $AH = a$.
Kẻ $AK \perp SD$. Khi đó $\begin{cases}AH \perp (SBC)\\ AK \perp (SCD)\end{cases}$

$\Rightarrow ((SBC),(SCD)) = (AH, AK) = \widehat{KAH} = \varphi$.



Xét tam giác vuông SAD có $\dfrac{1}{AK^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AD^2}\Rightarrow AK=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

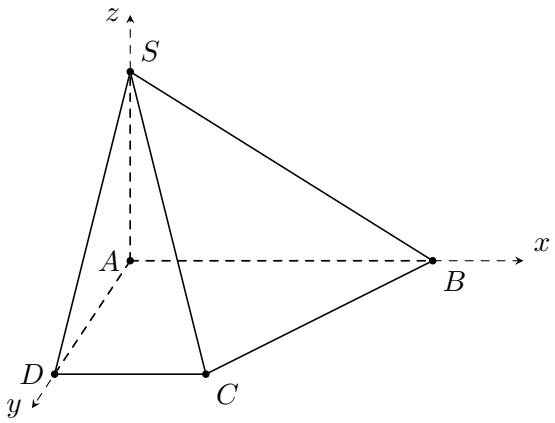
Xét tam giác vuông AKH có $\cos\varphi=\dfrac{AK}{AH}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Cách khác. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ như hình vẽ.

Ta có $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$, $S\left(0;0;\sqrt{2}\right)$.

Ta có véc-tơ pháp tuyến của (SCD) là $\overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}\right]=\left(0;\sqrt{2};1\right)$ và véc-tơ pháp tuyến của (SBC) là $\overrightarrow{n_2}=\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right]=\left(\sqrt{2};\sqrt{2};2\right)$.

Vậy $\cos\left((SBC),(SCD)\right)=\dfrac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.



Chọn đáp án (B) □

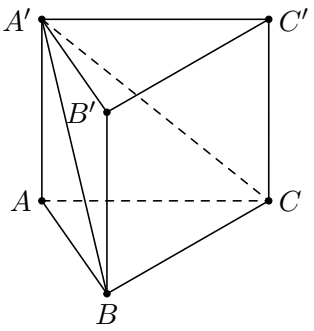
Câu 65. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có diện tích đáy bằng $\sqrt{3}a^2$ (đvdt), diện tích tam giác $A'BC$ bằng $2a^2$ (đvdt). Tính góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC)?

A. 120°. **B**. 60°. **C**. 30°. **D**. 45°.

✍Lời giải.

- Ta có $\triangle ABC$ là hình chiếu vuông góc của $\Delta A'BC$ trên mặt phẳng (ABC).
- Gọi φ là góc giữa $(A'BC)$ và (ABC).

Ta có: $\cos\varphi=\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\Delta A'BC}}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2a^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\varphi=30^\circ$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 66. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau.
C. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này cũng vuông góc với mặt phẳng kia.
D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai mặt phẳng song song thì vuông góc với mặt phẳng kia.

✍Lời giải.

Đáp án đúng là Một đường thẳng vuông góc với một trong hai mặt phẳng song song thì vuông góc với mặt phẳng kia.

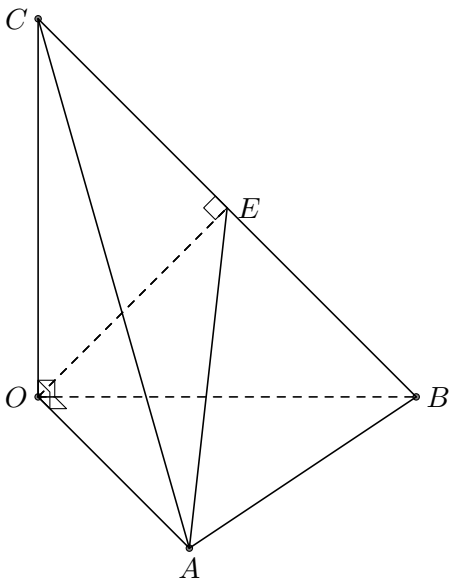
Chọn đáp án (D) □

Câu 67. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB=OC=a\sqrt{6}$, $OA=a$. Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) bằng

A. 30°. **B**. 90°. **C**. 45°. **D**. 60°.

✍Lời giải.

Do giả thiết $\begin{cases} OA \perp OC \\ OA \perp OB \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC)$.
Trong mặt phẳng (OBC) kẻ $OE \perp BC$ (1) $(E \in BC)$.
Từ chứng minh trên suy ra $OA \perp OE$ và $OA \perp BC$ (2).
Từ (1), (2) suy ra $BC \perp (OEA)$.
Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) là góc $\widehat{OEA}$ (vì$\widehat{EOA} = 90°$).
Do $OB = OC$ ta có $OE = \dfrac{BC}{2}$, mà $BC = 2\sqrt{3}a$ nên $OE = \sqrt{3}a$.
Trong tam giác OAE ta có
$\tan\widehat{OEA} = \dfrac{OA}{OE} \Leftrightarrow \tan\widehat{OEA} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \widehat{OEA} = 30°$.



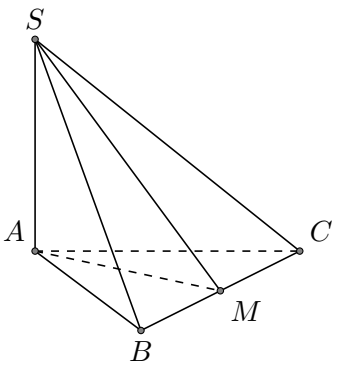
Chọn đáp án A □

Câu 68. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với (ABC), tam giác ABC đều cạnh $2a$, SB tạo với mặt phẳng đáy một góc $30°$. Khi đó (SBC) tạo với đáy một góc x. Tính giá trị của $\tan x$.

A. $\tan x = 2$. **B.** $\tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\tan x = \dfrac{3}{2}$. **D.** $\tan x = \dfrac{2}{3}$.

✍Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC, ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM)$
Vậy góc giữa (SBC) với (ABC) là $\widehat{SMA} = x$.
Do SB tạo với (ABC) một góc $30°$ nên $\widehat{SBA} = 30°$.
Ta có $SA = AB\tan 30° = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$, $AM = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.
Xét tam giác SAM có $\tan x = \dfrac{SA}{AM} = \dfrac{2}{3}$.



Chọn đáp án D □

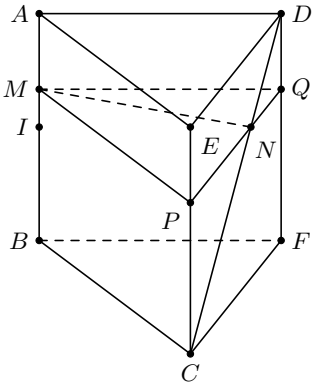
Câu 69. Cho tứ diện $ABCD$ có độ dài các cạnh $AB = a$, $AD = BC = b$, AB là đoạn vuông góc chung của BC và AD và $(AB, CD) = \alpha$, $\left(0 < \alpha < 90°,\ \tan\alpha < \dfrac{2b}{a}\right)$. Gọi I là trung điểm AB, điểm M thuộc đoạn AB sao cho $IM = x$ và (P) là mặt phẳng đi qua M vuông góc với AB đồng thời cắt CD tại N. Diện tích hình tròn tâm M bán kính MN bằng

A. $\dfrac{\pi}{4}\left[4b^2 + \left(4x^2 - a^2\right)\tan^2\alpha\right]$. **B.** $\pi\left[4b^2 + \left(4x^2 - a^2\right)\tan^2\alpha\right]$.
C. $\dfrac{\pi}{4}\left[2b^2 + \left(4x^2 + a^2\right)\tan^2\alpha\right]$. **D.** $\dfrac{\pi}{4}\left[4b^2 + \left(4x^2 - a^2\right)\sin^2\alpha\right]$.

✍Lời giải.

Dựng hình lăng trụ đứng tam giác $ADE.BFC$ như hình vẽ, trong đó AB là cạnh bên. Khi đó mặt phẳng (P) song song với hai mặt phẳng đáy của hình lăng trụ nói trên. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của (P) với CE và DF. Không mất tính tổng quát, giả sử M thuộc đoạn AI.
Ta có $\widehat{CDF} = (CD, DF) = (CD, AB) = \alpha$, suy ra $PQ = CF = a\tan\alpha$. Do đó

$$\frac{NQ}{CF} = \frac{DQ}{DF} = \frac{AM}{AB} = \frac{a - 2x}{2a} \Rightarrow NQ = \frac{(a - 2x)\tan\alpha}{2}.$$



Áp dụng định lí cô-sin ta có

$$\cos\widehat{MQP}=\frac{MQ^2+PQ^2-MP^2}{2MQ\cdot PQ}=\frac{PQ}{2MQ}=\frac{a\tan\alpha}{2b}.$$

Cũng theo định lí cô-sin ta có

$$MN^2=MQ^2+NQ^2-2MQ\cdot NQ\cos\widehat{MQN}=\frac{4b^2+\tan^2\alpha\left(4x^2-a^2\right)}{4}.$$

Vậy diện tích hình tròn cần tìm là $\pi MN^2=\dfrac{\pi}{4}\left[4b^2+\left(4x^2-a^2\right)\tan^2\alpha\right]$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 70. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=BC=a$, $BB'=a\sqrt{3}$. Tính góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BCC'B')$.

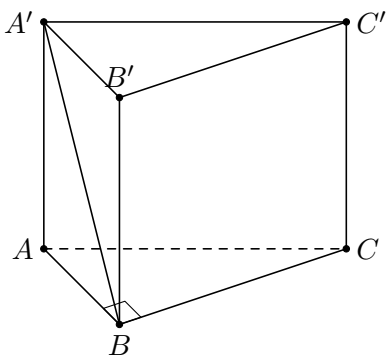
A. 60°. **B**. 90°. **C**. 45°. **D**. 30°.

✍Lời giải.

Do $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ đứng, $\triangle ABC$ vuông tại B nên $A'B'\perp B'C'\Rightarrow A'B'\perp(BB'C'C)$.
Do đó góc giữa $A'B$ và mặt phẳng $(BCCC'B')$ là $\widehat{A'BB'}$.
Xét tam giác $A'BB'$, ta có

$$\cot\widehat{A'BB'}=\frac{BB'}{A'B'}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{A'BB'}=30^\circ.$$

Vậy góc giữa đường thẳng $A'B$ mặt phẳng $(BCC'B')$.



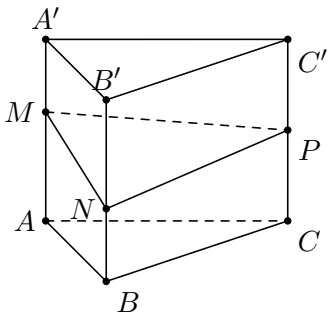
Chọn đáp án (D) □

Câu 71. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có diện tích tam giác ABC bằng 5. Gọi M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' và diện tích tam giác MNP bằng 10. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (MNP).

A. 60°. **B**. 30°. **C**. 90°. **D**. 45°.

✍Lời giải.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (MNP). Ta có $S_{ABC}=S_{MNP}\cos\varphi\Leftrightarrow\cos\varphi=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\varphi=60^\circ$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 72. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a. Cô-sin của góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

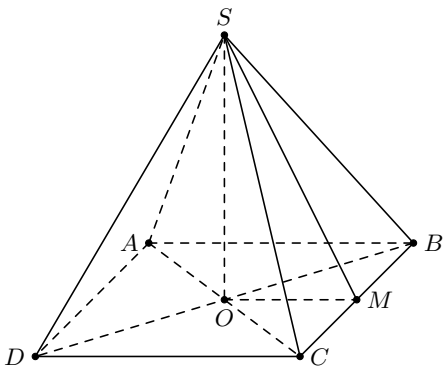
A. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **B**. $\dfrac{1}{3}$. **C**. $\dfrac{1}{2}$. **D**. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

✍Lời giải.

Gọi $S.ABCD$ là hình chóp đều, M là trung điểm BC. Khi đó $BC \perp (SOM)$ nên góc giữa (SBC) và đáy là góc $\widehat{SMO}$.

Lại có $OM = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a}{2}$, $SM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $\cos\widehat{SMO} = \dfrac{OM}{SM} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 73. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là đúng?

A. Hình chóp đều là tứ diện đều.

B. Hình lăng trụ đứng có đáy là một đa giác đều là hình lăng trụ đều.

C. Hình chóp có đáy là một đa giác đều là hình chóp đều.

D. Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ đều.

✍Lời giải.

Mệnh đề đúng là "Hình lăng trụ đứng có đáy là một đa giác đều là hình lăng trụ đều".

Chọn đáp án (B) □

Câu 74. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB = a\sqrt{2}$. Biết SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng

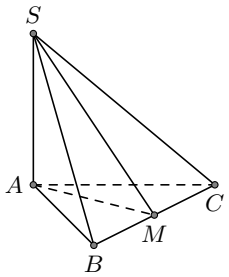
A. $30°$. **B**. $45°$. **C**. $60°$. **D**. $90°$.

✍Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC.

Khi đó, $AM \perp BC$, $AM = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2}AB\sqrt{2} = a$.

Ta có $\widehat{(SBC);(ABC)} = \widehat{SMA} = \arctan\dfrac{SA}{AM} = 45°$.

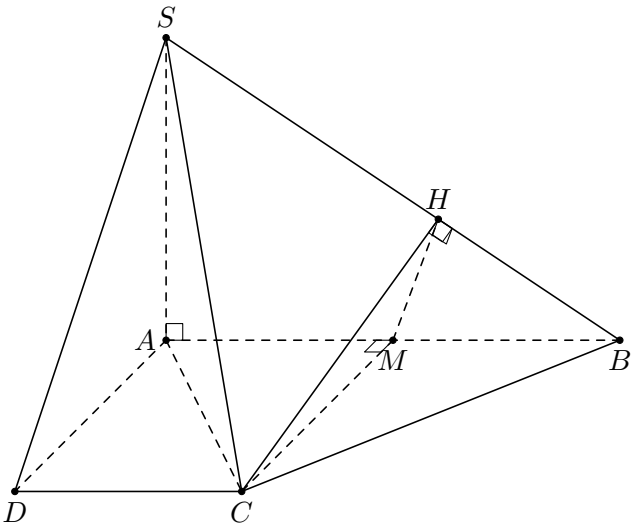


Chọn đáp án (B) □

Câu 75. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Biết $AB = 2AD = 2DC = 2a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là

A. $\dfrac{\pi}{3}$. **B**. $\dfrac{\pi}{4}$. **C**. $\dfrac{\pi}{6}$. **D**. $\dfrac{\pi}{12}$.

✍Lời giải.



Gọi M là trung điểm AB. Kẻ $MH \perp SB$ tại H.

Ta có $\begin{cases} CM \perp AB \\ CM \perp SA \\ AB,\, SA \supset (SAB) \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAB) \Rightarrow CM \perp SB.$

Từ $\begin{cases} SB \perp MH \\ SB \perp CM \end{cases} \Rightarrow SB \perp HC.$

Do đó, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là $\widehat{MHC}$.
Ta có $\triangle BHM \sim \triangle BAS$ nên

$$\frac{MH}{SA} = \frac{BM}{BS} \Rightarrow MH = \frac{a\sqrt{2} \cdot a}{a\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Bởi vậy $\tan \widehat{MHC} = \dfrac{CM}{MH} = \dfrac{a}{\frac{a}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$. Suy ra $\widehat{MHC} = \dfrac{\pi}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 76. Trong không gian cho hai đường thẳng a, b và mặt phẳng (P), xét các phát biểu sau:

(I) Nếu $a \parallel b$ mà $a \perp (P)$ thì luôn có $b \perp (P)$.

(II) Nếu $a \perp (P)$ và $a \perp b$ thì luôn có $b \parallel (P)$.

(III) Qua đường thẳng a chỉ có duy nhất một mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P).

(IV) Qua đường thẳng a luôn có vô số mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P).

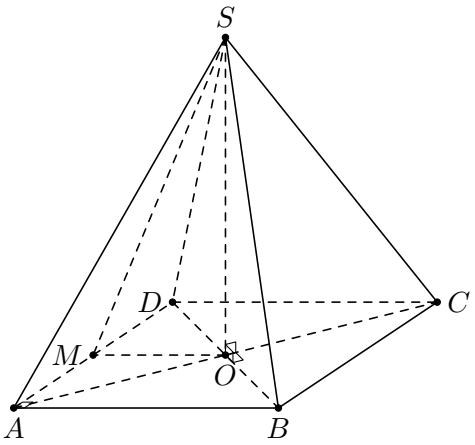
Số khẳng định đúng trong các phát biểu trên là
A. 1. **B**. 4. **C**. 2. **D**. 3.

✍Lời giải.
Chỉ có khẳng định (I) đúng.
Ý (II) sai vì b có thể trùng (P).
Ý (III) sai vì nếu $a \perp (P)$ thì có vô số mặt phẳng (Q) vuông góc với (P).
Ý (IV) sai vì nếu a cắt (P) (không vuông góc) thì chỉ có một mặt phẳng (Q) thỏa yêu cầu.

Chọn đáp án (A) □

Câu 77. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$, đường cao bằng $\dfrac{3a}{2}$. Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng.
A. 45°. **B**. 30°. **C**. 60°. **D**. 75°.

✍Lời giải.
Gọi O là giao điểm của AC và BD.
Gọi M là trung điểm AD suy ra $OM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$
Ta có SM và OM cùng vuông góc AD suy ra $((SAD);(ABCD)) = \widehat{SMO}$.
Ta có
$\tan \widehat{SMO} = \dfrac{SO}{OM} = \dfrac{3a}{2} \cdot \dfrac{2}{a\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.
Suy ra $\widehat{SMO} = 60°$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 78. Cho hình chóp đều, chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau
A. Chân đường cao hạ từ đỉnh của hình chóp đều trùng với tâm của đa giác đáy.
B. Đáy của hình chóp đều là đa giác đều.
C. Các mặt bên của hình chóp đều là những tam giác cân.

D. Tất cả các cạnh của hình chóp đều bằng nhau.

✍Lời giải.

Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều cạnh a, các cạnh bên bằng nhau và bằng b, khi đó a và b có thể khác nhau.

Chọn đáp án D □

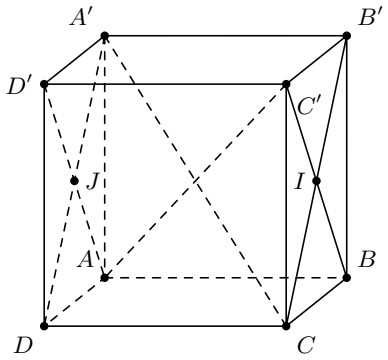
Câu 79. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'C)$ và $(C'D'A)$.

A. $45°$. **B**. $30°$. **C**. $60°$. **D**. $90°$.

✍Lời giải.

Gọi $I = B'C \cap BC'$, $J = A'D \cap AD'$, ta có

$$\begin{cases} (A'B'C) \cap (C'D'A) = IJ \\ IJ \perp B'C \subset (A'B'C) \\ IJ \perp BC' \subset (C'D'A). \end{cases}$$



Từ đó, suy ra góc giữa mặt phẳng $(A'B'C)$ và mặt phẳng $(C'D'A)$ là góc giữa đường thẳng $B'C$ và BC' hay là bằng $90°$.

Chọn đáp án D □

Câu 80. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, $AB = 3, AD = 4, \widehat{BAD} = 120°$. Cạnh bên $SA = 2\sqrt{3}$ vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SA, AD và BC và α là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (MNP). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau đây.

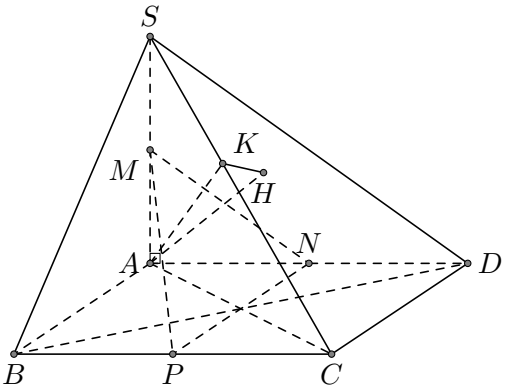
A. $\alpha \in (60°; 90°)$. **B**. $\alpha \in (0°; 30°)$. **C**. $\alpha \in (30°; 45°)$. **D**. $\alpha \in (45°; 60°)$.

✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases} MN \parallel SD \\ NP \parallel CD \end{cases} \Rightarrow (MNP) \parallel (SCD)$

$\Rightarrow ((SAC), (MNP)) = ((SAC), (SCD)) = \alpha$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A xuống (SCD), K là hình chiếu vuông góc của H xuống SC, suy ra $\alpha = \widehat{AKH}$.



Ta có $V_{S.ACD} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD}$ hay

$$V_{S.ACD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 6.$$

Trong tam giác ABC có

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\widehat{ABC} = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 13,$$

suy ra $SC^2 = AC^2 + SA^2 = 13 + 12 = 25$.

Và $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{12 + 16} = \sqrt{28}$. Khi đó

$$\cos\widehat{CSD} = \frac{SC^2 + SD^2 - CD^2}{2 \cdot SC \cdot SD} = \frac{11\sqrt{7}}{35}.$$

Hay $\sin\widehat{CSD} = \sqrt{1 - \cos^2\widehat{CSD}} = \frac{3\sqrt{42}}{35}$.

Do đó diện tích tam giác SCD là

$$S_{SCD} = \frac{1}{2} \cdot SC \cdot SD \cdot \sin\widehat{CSD} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{28} \cdot \frac{3\sqrt{42}}{35} = 3\sqrt{6}.$$

Ta có $S_{SAC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot SA = \frac{1}{2} \cdot AK \cdot SC$ nên

$$AK = \frac{SA \cdot AC}{SC} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{13}}{5} = \frac{2\sqrt{39}}{5}.$$

Theo công thức tính thể tích khối chóp $A.SCD$ thì $AH = \dfrac{3V_{A.SCD}}{S_{SCD}} = \dfrac{3 \cdot 6}{3\sqrt{6}} = \sqrt{6}$.

Do đó $\sin\alpha = \dfrac{AH}{AK} = \dfrac{\sqrt{6}}{\dfrac{2\sqrt{39}}{5}} = \dfrac{5\sqrt{26}}{26} \Rightarrow \alpha \in (60°; 90°)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 81. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, chiều cao của hình chóp bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

A. $60°$. **B**. $75°$. **C**. $30°$. **D**. $45°$.

✍Lời giải.

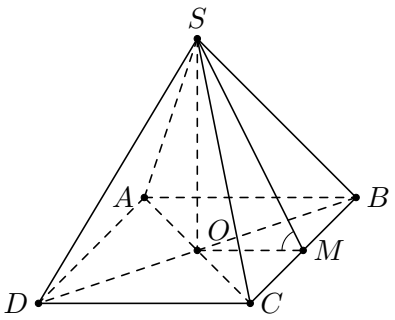
Do $S.ABCD$ là chóp đều nên đáy $ABCD$ là hình vuông, các mặt bên là các tam giác cân.

Gọi M là trung điểm của BC, O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có $\begin{cases} SM \perp BC \\ OM \perp BC. \end{cases}$

Suy ra góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SMO}$.

Do $SO \perp (ABCD) \Rightarrow \triangle OMS$ vuông tại O.



Từ đó suy ra

$$\tan\widehat{OMS} = \frac{SO}{OM} = \frac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{a}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{OMS} = 60°.$$

Vậy góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp bằng $60°$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 82. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

B. Hình chóp có đáy là tam giác đều là hình chóp đều.

C. Hình lăng trụ có đáy là một đa giác đều là hình lăng trụ đều.

D. Hình lăng trụ tứ giác đều là hình lập phương.

✍Lời giải.

Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

Chọn đáp án (A) □

Câu 83. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $BC = SB = a$, $SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tìm số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

A. $90°$. **B**. $60°$. **C**. $45°$. **D**. $30°$.

✍Lời giải.

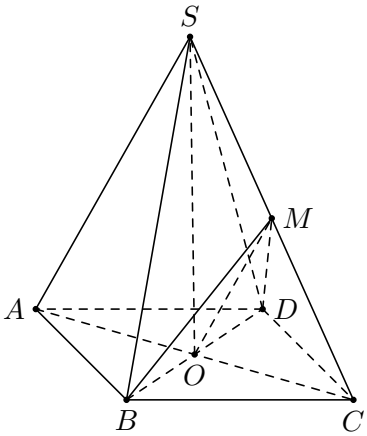
Gọi M là trung điểm của SC, do tam giác SBC cân tại B nên ta có $SC \perp BM$ (1).

Theo giả thiết ta có $BD \perp (SAC) \Rightarrow SC \perp BD$. Do đó $SC \perp (BCM)$ suy ra $SC \perp DM$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là góc giữa hai đường thẳng BM và DM.

Ta có $\triangle SBO = \triangle CBO$ suy ra $SO = CO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Do đó $OM = \dfrac{1}{2}SC = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.



Mặt khác $OB = \sqrt{SB^2 - SO^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Do đó tam giác BMO vuông cân tại M hay góc $\widehat{BMO} = 45°$, suy ra $\widehat{BMD} = 90°$.
Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng $90°$.
Chọn đáp án (A) □

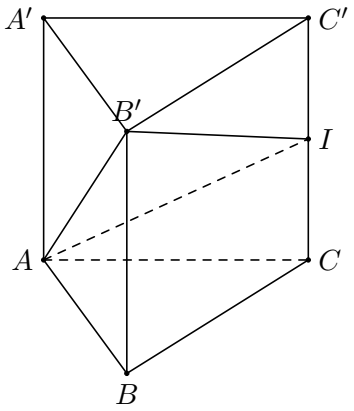
Câu 84. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$ và $\widehat{BAC} = 120°$, cạnh bên $BB' = a$, gọi I là trung điểm của CC'. Côsin của góc tạo bởi mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{20}}{10}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{30}}{5}$. **C.** $\sqrt{30}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

✍Lời giải.

Ta có $BC = a\sqrt{3}; AB' = a\sqrt{2}; AI = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}; B'I = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.
Do $AB'^2 + AI^2 = B'I^2$ nên tam giác $AB'I$ vuông tại A.
Dùng công thức $S' = S.\cos\varphi$ suy ra kết quả.
Vì ΔABC là hình chiếu của ΔABC lên mặt phẳng (ABC) nên gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$ thì ta có

$$S_{ABC} = S_{AB'I}.\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{S_{ABC}}{S_{AB'I}} = \frac{\dfrac{1}{2}a \cdot a \cdot \sin 120°}{\dfrac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$



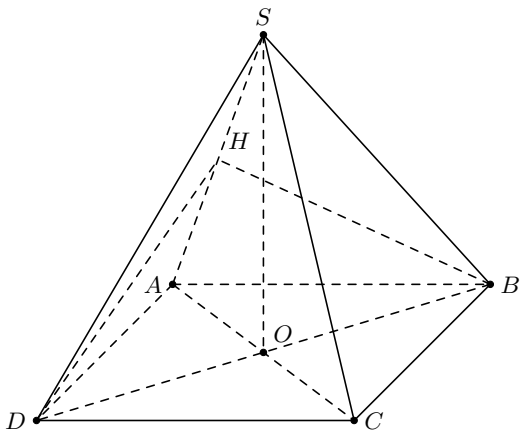
Chọn đáp án (D) □

Câu 85. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy và cạnh bên đều bằng a. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

A. $-\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm SA, α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD). Theo bài ra các tam giác SAD và SAB là các tam giác đều nên $\begin{cases} DH \perp SA \\ BH \perp SA. \end{cases}$
suy ra $\cos\alpha = |\cos\widehat{BHD}|$.
Ta có $BH = DH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $BD = a\sqrt{2}$.



Áp dụng định lí hàm số cosin cho tam giác BDH ta có

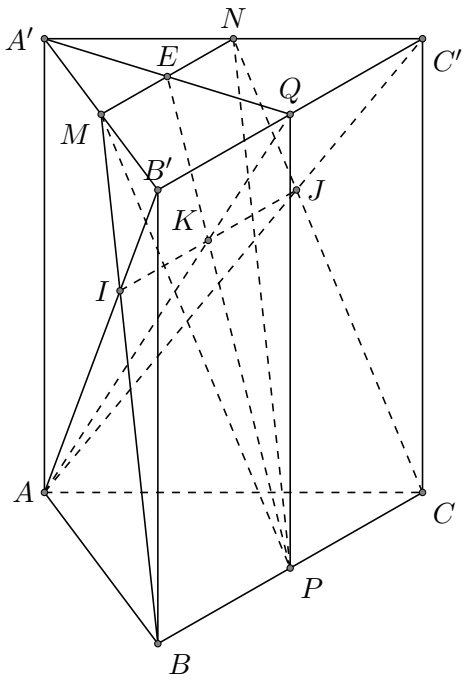
$$\begin{aligned} \cos\widehat{BHD} &= \frac{BH^2 + DH^2 - BD^2}{2BH \cdot DH} \\ &= \frac{2 \cdot \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - (a\sqrt{2})^2}{2 \cdot \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Do α không là góc tù nên $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 86. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B'$, $A'C'$ và BC. Cô-sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) bằng

A. $\dfrac{6\sqrt{13}}{65}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{13}}{65}$. **C.** $\dfrac{17\sqrt{13}}{65}$. **D.** $\dfrac{18\sqrt{13}}{65}$.

✍Lời giải.



Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$; $I = BM \cap AB'$, $J = CN \cap AC'$, $E = MN \cap A'Q$.
Suy ra $(MNP) \cap (AB'C') = (MNCB) \cap (AB'C') = IJ$ và gọi $K = IJ \cap PE \Rightarrow K \in AQ$, với E là trung điểm của MN.
$(AA'QP) \perp IJ \Rightarrow AQ \perp IJ, PE \perp IJ \Rightarrow ((MNP), (AB'C')) = (AQ, PE) = \alpha$.
Ta có $AP = 3, PQ = 2 \Rightarrow AQ = \sqrt{13} \Rightarrow QK = \dfrac{\sqrt{13}}{3}; PE = \dfrac{5}{2} \Rightarrow PK = \dfrac{5}{3}$.
$\cos\alpha = |\cos\widehat{QKP}| = \dfrac{|KQ^2 + KP^2 - PQ^2|}{2KQ \cdot KP} = \dfrac{\sqrt{13}}{65}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 87. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy và cạnh bên đều bằng a. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

A. $-\dfrac{1}{3}$. **B**. $\dfrac{1}{3}$. **C**. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **D**. $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

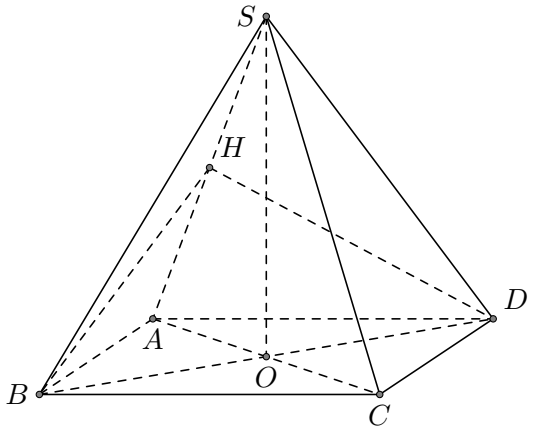
✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm của SA. Theo bài ra ΔSAD, ΔSAB đều nên $\begin{cases} DH \perp SA \\ BH \perp SA. \end{cases}$

Ta có $BH = DH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $BD = a\sqrt{2}$. Áp dụng định lý hàm số cosin trong ΔBDH ta có

$$\cos\widehat{BHD} = \frac{BH^2 + DH^2 - BD^2}{2BH \cdot DH} = -\frac{1}{3}$$

Khi đó $\varphi = ((SAB), (SAD)) = (BH, DH) \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{1}{3}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 88. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Số đo góc giữa hai mặt phẳng $(BA'C)$ và $(DA'C)$ bằng

A. $120°$. **B**. $60°$. **C**. $90°$. **D**. $30°$.

✍Lời giải.

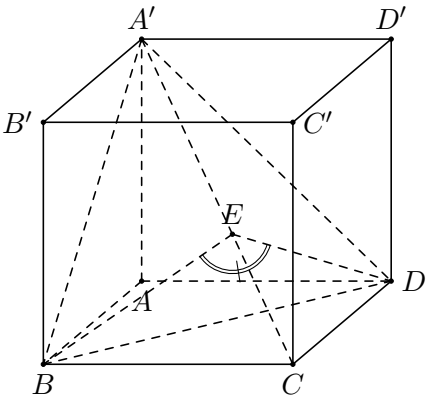
Kẻ $DE \perp A'C$ tại E (1).

Vì $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AA'C) \Rightarrow BD \perp A'C$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A'C \perp (BDE) \Rightarrow A'C \perp BE$.

$\begin{cases} (BA'C) \cap (DA'C) = A'C \\ DE \perp A'C \\ BE \perp A'C \end{cases}$

$\Rightarrow ((BA'C), (DA'C)) = (DE, BE)$.



Tính $\widehat{BED}$.

Ta có $BD = a\sqrt{2}$; $BE = DE = \dfrac{DC \cdot A'D}{A'C} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}a$.

Suy ra $\cos \widehat{BED} = \dfrac{BE^2 + DE^2 - BD^2}{2BE \cdot DE} = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow \widehat{BED} = 120°$.

Vậy $\left[\widehat{(BA'C)}, \widehat{(DA'C)}\right] = 60°$.

Chọn đáp án (B) □

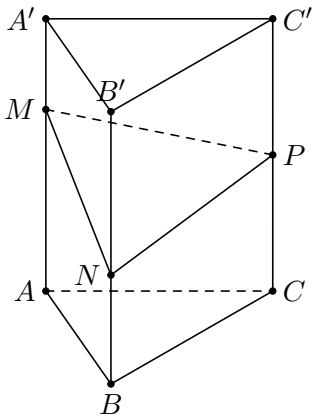
Câu 89. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có diện tích tam giác ABC bằng $2\sqrt{3}$. Gọi M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC', diện tích tam giác MNP bằng 4. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (MNP).

A. $120°$. **B**. $45°$. **C**. $30°$. **D**. $90°$.

✍Lời giải.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (MNP), khi đó ta có

$$\cos \alpha = \frac{S_{ABC}}{S_{MNP}} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30°.$$



Chọn đáp án (C) □

Câu 90. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng $2a$, cạnh đáy bằng a. Gọi α là góc giữa hai mặt bên của hình chóp đó. Hãy tính $\cos \alpha$.

A. $\cos \alpha = \dfrac{8}{15}$. **B**. $\cos \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C**. $\cos \alpha = \dfrac{7}{15}$. **D**. $\cos \alpha = \dfrac{1}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi M, N là chân đường cao hạ từ các đỉnh B, S của tam giác SBC.

Tam giác SBC cân tại S nên N là trung điểm của BC.

Ta có

$$SN = \sqrt{SC^2 - NC^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

$$S_{\triangle SBC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot SN = \frac{1}{2} SC \cdot BM \Rightarrow BM = \frac{SN \cdot BC}{SC} = \frac{a\sqrt{15}}{4}.$$

$\triangle SAC = \triangle SBC \Rightarrow BM = AM$.

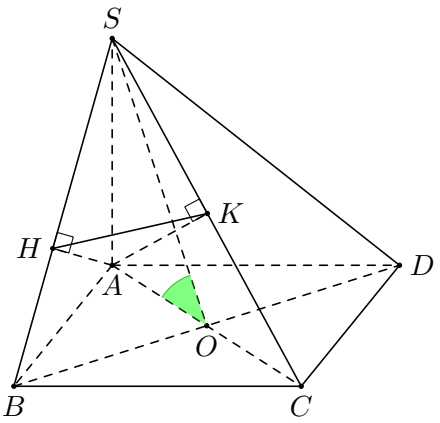
Vậy $\cos \alpha = \dfrac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2AM \cdot BM} = \dfrac{\dfrac{15a^2}{16} + \dfrac{15a^2}{16} - a^2}{2 \cdot \dfrac{15a^2}{16}} = \dfrac{7}{15}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 91. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Nếu $\tan\alpha = \sqrt{2}$ thì góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng

A. $30°$. **B**. $90°$. **C**. $60°$. **D**. $45°$.

✍Lời giải.

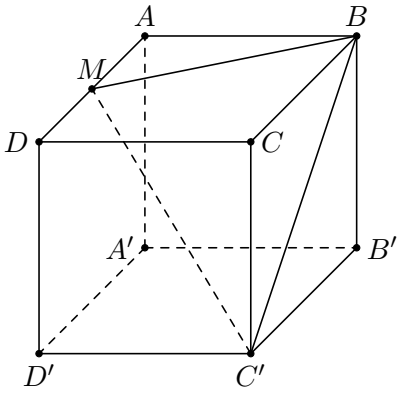


Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SC.
Ta dễ dàng chứng minh được $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$.
Mà $AK \perp SC$ nên $SC \perp (AHK) \Rightarrow SC \perp HK$.
Ta có $\begin{cases} (SAC) \cap (SBC) = SC \\ AK \perp SC \\ HK \perp SC \end{cases}$
$\Rightarrow ((SAC),(SBC)) = (AK;HK) = \widehat{AKH}$.
Ta cũng có $((SBD);(ABCD)) = (SO;AO) = \widehat{SOA} = \alpha \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{SA}{AO} \Rightarrow SA = a$
Do đó $\triangle SAB$ vuông cân tại $A \Rightarrow AH = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$
Xét $\triangle SAC$ có $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AC^2} \Rightarrow AK = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.
Xét $\triangle AHK$ vuông tại H, ta có $\sin\widehat{AKH} = \dfrac{AH}{AK} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{AKH} = 30°$.
Vậy $((SAC);(SBC)) = 30°$.

Chọn đáp án (A) □

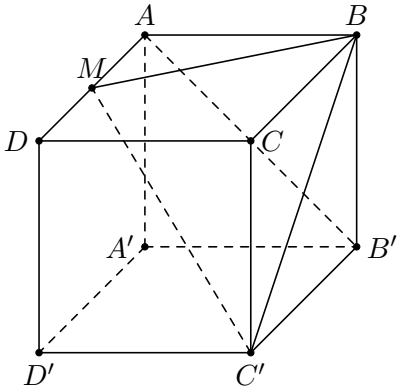
Câu 92. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của AD, ϕ là góc giữa hai mặt phẳng (BMC') và $(ABB'A')$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\cos\phi = \dfrac{3}{4}$.
B. $\cos\phi = \dfrac{4}{5}$.
C. $\cos\phi = \dfrac{1}{3}$.
D. $\cos\phi = \dfrac{2}{3}$.



✍Lời giải.

• **Cách 1:** ***Tính góc theo công thức diện tích hình chiếu.***
Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương $\Rightarrow MA$, CB, $C'B'$ cùng vuông góc với $(ABB'A') \Rightarrow \triangle MBC'$ có hình chiếu vuông góc lên mặt phẳng $(ABB'A')$ là $\triangle ABB'$.



Ta có $S_{\triangle ABB'} = S_{\triangle MBC'} \cdot \cos\phi \Rightarrow \cos\phi = \dfrac{S_{\triangle ABB'}}{S_{\triangle MBC'}}$.
Xét tam giác MBC', ta có

$$\begin{aligned} MB &= \sqrt{MA^2 + AB^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \frac{\sqrt{5}a}{2}. \\ C'B &= \sqrt{2}a. \\ MC' &= \sqrt{DM^2 + DC'^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2a^2} = \frac{3}{2}a. \end{aligned}$$

Đặt $p = \dfrac{MB + MC' + BC'}{2}$.

Áp dụng công thức Hê-rông ta có

$$S_{\triangle MBC'} = \sqrt{p(p-MC')(p-MB)(p-BC')} = \frac{3a^2}{4}.$$

Mặt khác $S_{\triangle ABB'} = \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow \cos\phi = \dfrac{S_{\triangle ABB'}}{S_{\triangle MBC'}} = \dfrac{1}{2}a^2 : \dfrac{3a^2}{4} = \dfrac{2}{3}$.

• **Cách 2:*Phương pháp tọa độ hóa*.**
Không mất tính tổng quát, ta giả sử $AB = 1$.
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với các tọa độ các điểm như sau:

$$A'(0;0;0),\ B'(0;1;0),\ D'(1;0;0),\ A(0;0;1).$$

Khi đó ta có $B(0;1;1),\ M\left(\dfrac{1}{2};0;1\right),\ C'(1;1;0)$.

Ta có $\overrightarrow{BC'} = (1;0;-1),\ \overrightarrow{BM} = \left(\dfrac{1}{2};-1;0\right),\ \left[\overrightarrow{BC'};\overrightarrow{BM}\right] = \left(-1;-\dfrac{1}{2};-1\right)$.

Từ đây suy ra véc-tơ pháp tuyến của các mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(BC'M)$ lần lượt là

$$\vec{n}_1 = (1;0;0),\ \vec{n}_2 = \left(1;\frac{1}{2};1\right).$$

Ta có $\cos\phi = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \dfrac{\left|1\cdot 1 + 0\cdot\dfrac{1}{2} + 0\cdot 1\right|}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+1}} = \dfrac{2}{3}$.

Vậy $\cos\phi = \dfrac{2}{3}$.

• **Lưu ý:** *Ưu điểm của hai cách tính này là không phải dựng góc*

① *Cách 1, mở tư duy vì thường ta chỉ chú ý việc chuyển bài toán tính diện tích thiết diện thành bài toán tính góc mà ít khi nghĩ đến hướng ngược lại. Đặc biệt ở đây ta chỉ cần "một phần thiết diện " chính là $\triangle BC'M$. Việc tính diện tích tam giác này là khá đơn giản.*

② *Cách 2, nhấn mạnh việc tọa độ hóa bài toán liên quan đến hình lập phương là hướng đi tốt. Không cần nhiều tư duy hình.*

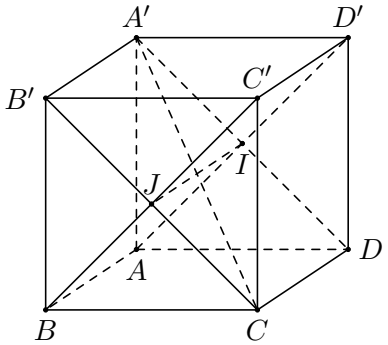
Chọn đáp án (D) □

Câu 93. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $BC = a$, $BB' = a\sqrt{3}$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'C)$ và $(ABC'D')$ bằng

A. $30°$. **B**. $60°$. **C**. $45°$. **D**. $90°$.

✍Lời giải.
Gọi $I = A'D \cap AD'$, $J = BC' \cap B'C$.
Vì $(A'B'CD) \cap (ABC'D') = IJ$ và $IJ \perp ((ADD'A'))$ nên

$$\begin{aligned}\left((A'B'C),(ABC'D')\right) &= \left((A'B'CD),(ABC'D')\right)\\ &= (AD',A'D).\end{aligned}$$



Xét $\triangle ADA' \Rightarrow \tan\widehat{DA'A} = \dfrac{AD}{AA'} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
$\Rightarrow \widehat{IA'A} = \widehat{A'AI} = 30°$
$\Rightarrow \widehat{AIA'} = 120° \Rightarrow (AD',A'D) = 60°$.

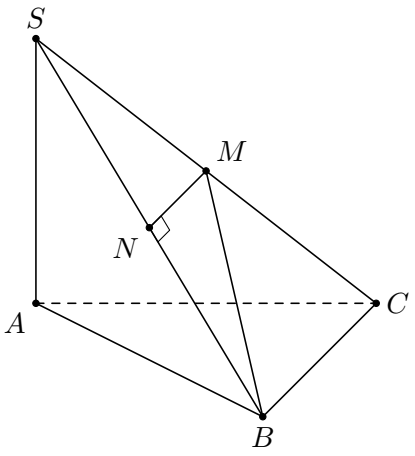
Chọn đáp án (B) □

Câu 94. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = 2a\sqrt{2}$, $AB = 2a$, tam giác ABC vuông cân tại B. Gọi M là trung điểm SC. Góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng (SAB) bằng

A. $30°$. **B**. $90°$. **C**. $45°$. **D**. $60°$.

✍Lời giải.

Ta có $SA \perp BC$ và $AB \perp BC$ nên $BC \perp (SAB)$.
Gọi N là trung điểm SB thì $MN \parallel BC$ nên $MN \perp (SAB)$, suy ra $(BM, (SAB)) = \widehat{MBN}$.
Ta có $MN = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{2a}{2} = a$.
Lại có $AC = AB\sqrt{2} = 2a\sqrt{2} \Rightarrow SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 4a$ nên $BM = \dfrac{SC}{2} = 2a$.
Suy ra $\sin \widehat{MBN} = \dfrac{MN}{MB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{MBN} = 30^\circ$.



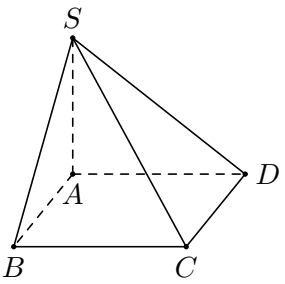
Chọn đáp án A □

Câu 95. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên SA vuông góc mặt đáy và $SA = a$. Gọi φ là góc tạo bởi SB và mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định $\cot \varphi$?

A. $\cot \varphi = 2$. **B.** $\cot \varphi = \dfrac{1}{2}$. **C.** $\cot \varphi = 2\sqrt{2}$. **D.** $\cot \varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

✍Lời giải.

Ta có: $SA \perp (ABCD)$ nên A là hình chiếu của S lên $(ABCD)$.
Do đó, AB là hình chiếu của SB lên mặt phẳng $(ABCD)$.
Suy ra $(\widehat{SB, (ABCD)}) = \widehat{(SB, AB)} = \widehat{SBA} = \varphi$.
Ta có $\cot \varphi = \dfrac{AB}{SA} \Rightarrow \cot \varphi = \dfrac{2a}{a} \Leftrightarrow \cot \varphi = 2$.



Chọn đáp án A □

Câu 96. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các đường thẳng AA', BB', CC' thỏa mãn diện tích của tam giác MNP bằng a^2. Góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và $(ABCD)$ là

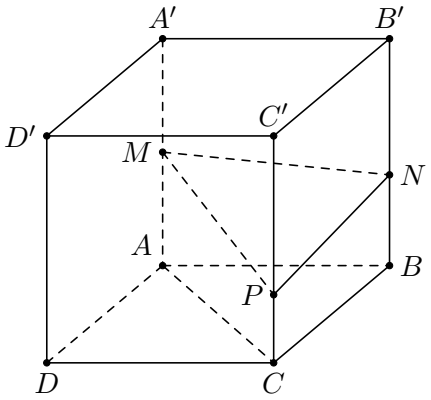
A. 60°. **B.** 30°. **C.** 45°. **D.** 120°.

✍Lời giải.

Ta có hình chiếu vuông góc của tam giác MNP lên mặt phẳng $(ABCD)$ là tam giác ABC. Theo công thức diện tích hình chiếu ta có: $S_{MNP} \cdot \cos((MNP), (ABCD)) = S_{ABC}$. Suy ra

$$\cos((MNP), (ABCD)) = \frac{S_{ABC}}{S_{MNP}} = \frac{\frac{a^2}{2}}{a^2} = \frac{1}{2}.$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và $(ABCD)$ là 60°.



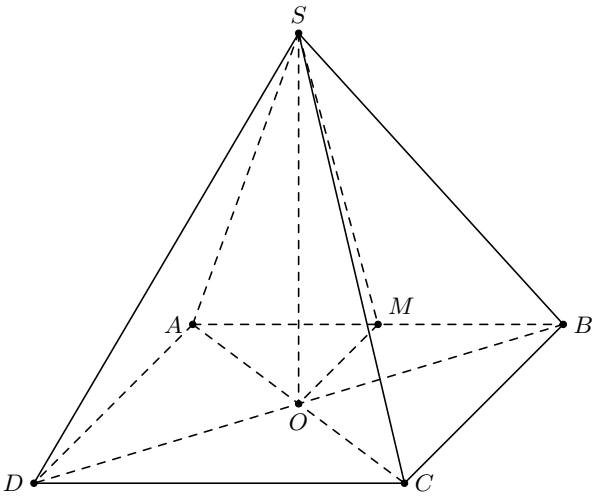
Chọn đáp án A □

Câu 97. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với O là tâm của đáy và chiều cao $SO = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AB$. Tính góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng đáy.

A. 45°. **B.** 90°. **C.** 60°. **D.** 30°.

✍Lời giải.

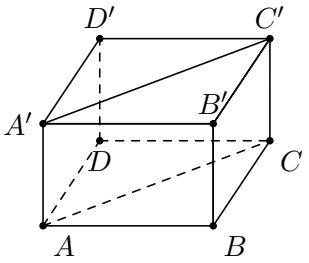
Gọi M là trung điểm của AB. Khi đó $\begin{cases} OM \perp AB \\ SM \perp AB \end{cases} \Rightarrow$ góc giữa (SAB) và đáy bằng góc $\widehat{SMO}$.
Ta có $OM = \dfrac{AB}{2} \Rightarrow \tan \widehat{SMO} = \dfrac{SO}{OM} = \sqrt{3}$.
$\Rightarrow \widehat{SMO} = 60^\circ$.



Chọn đáp án C □

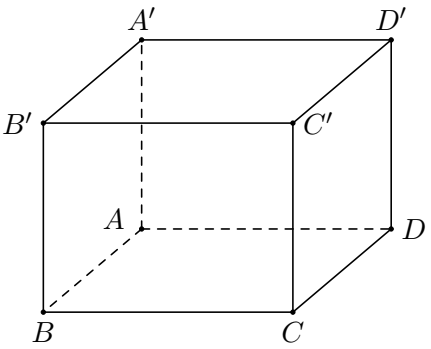
Câu 98. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(ACC'A')$ bằng
A. 60°. **B.** 45°. **C.** 90°. **D.** 30°.

Lời giải.
Vì $AA' \perp (ABCD)$ nên $(ACC'A') \perp (ABCD)$.
Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(ACC'A')$ bằng 90°.



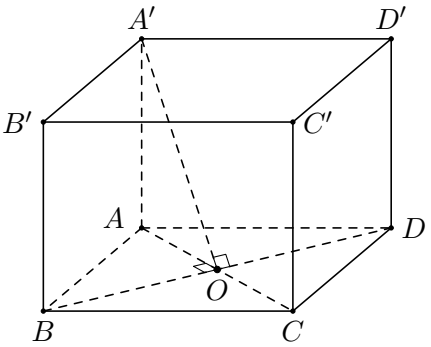
Chọn đáp án C □

Câu 99.
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ). Giá trị sin của góc giữa hai mặt phẳng (BDA') và $(ABCD)$ bằng
A. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



Lời giải.
Gọi $O = AC \cap BD$. Khi đó $AO \perp BD$.
Lại có, $A'O$ có hình chiếu là AO trên $(ABCD)$ nên $A'O \perp BD$. Từ đó suy ra góc giữa (BDA') và $(ABCD)$ bằng $\widehat{A'OA}$.
Xét tam giác $A'AO$ vuông tại A có

$$\sin \widehat{A'OA} = \frac{A'A}{A'O} = \frac{A'A}{\sqrt{A'A^2 + AO^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

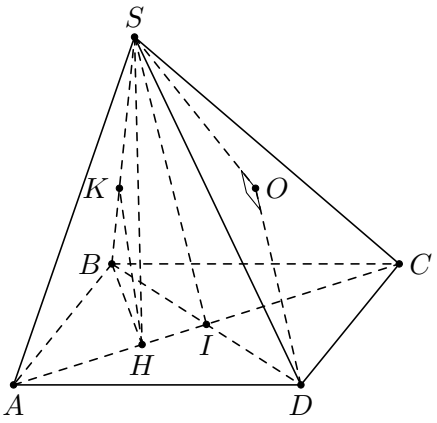


Chọn đáp án C □

Câu 100. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I, cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. $SA = SB = SD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC). Giá trị $\sin\alpha$ bằng
A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

✍Lời giải.

Theo giả thiết, ABD là tam giác đều.
Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD.
Do $SA = SB = SD$ nên S nằm trên trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD suy ra $SH \perp (ABD)$
hay $SH \perp (ABCD)$.
Do $(SBC) \perp (SBH)$ nên từ H kẻ $HK \perp SB$ tại K thì $HK = \mathrm{d}(H,(SBC))$ và $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HB^2} + \dfrac{1}{HS^2}$
$\Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{15}}{9}$.



Mặt khác, $\mathrm{d}(H,(SBC)) = \dfrac{2}{3}\mathrm{d}(A,(SBC)) = \dfrac{2}{3}\mathrm{d}(D,(SBC)) \Rightarrow \mathrm{d}(D,(SBC)) = \dfrac{a\sqrt{15}}{6}$.
Gọi O là hình chiếu vuông góc của điểm D trên (SBC).
Khi đó: $\alpha = (SD,SO) = \widehat{DSO}$ và $DO = \mathrm{d}(D,(SBC)) = \dfrac{a\sqrt{15}}{6}$.
Xét tam giác SDO vuông tại O có $\sin\alpha = \dfrac{DO}{SD} = \dfrac{\frac{a\sqrt{15}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

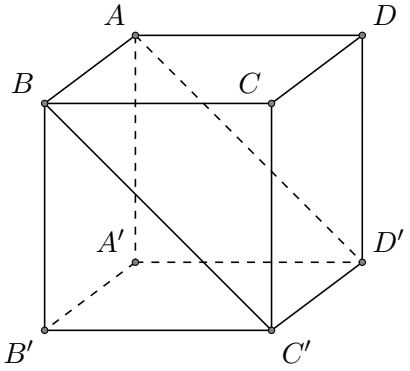
Chọn đáp án C □

Câu 101. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(ABC'D')$.

A. $\varphi = 60°$. **B**. $\varphi = 30°$. **C**. $\varphi = 45°$. **D**. $\varphi = 90°$.

✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases} (ABCD) \cap (ABC'D') = C'D' \\ B'C' \perp C'D' \\ BC' \perp C'D'. \end{cases}$
Nên góc giữa $(ABCD)$ và $(ABC'D')$ là góc $\varphi = \widehat{BC'B'} = 45°$.



Chọn đáp án C □

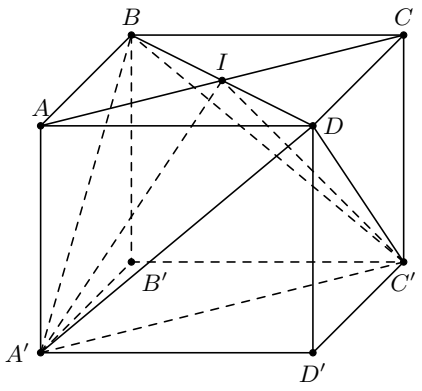
Câu 102. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $AC = 2AA' = 2a\sqrt{3}$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(C'BD)$ bằng

A. $90°$. **B**. $60°$. **C**. $45°$. **D**. $30°$.

✍Lời giải.

Gọi I là tâm của hình thoi $ABCD$.

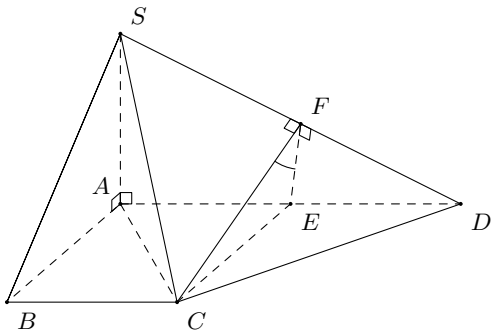
Do $ABCD$ là hình thoi nên $BD \perp AC$.
Và do $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ đứng nên $AA' \perp BD$.
Suy ra $BD \perp (ACC'A') \Rightarrow \begin{cases} A'I \perp BD \\ C'I \perp BD \end{cases}$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(C'BD)$ là góc giữa $A'I$ và $C'I$.



Cách 1:
Theo giả thiết, các tam giác AIA' và CIC' vuông cân lần lượt tại A, C nên $IA' = IC' = a\sqrt{6}$.
Suy ra $IA'^2 + IC'^2 = 6a^2 + 6a^2 = 12a^2 = A'C'^2 \Rightarrow IA' \perp IB'$.
Cách 2:
Gọi H là tâm của mặt đáy $A'B'C'D'$ thì $IH = AA' = \dfrac{1}{2}A'C' \Rightarrow \triangle IA'C'$ vuông tại I, tức là $IA' \perp IC'$.
Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(C'BD)$ bằng $90°$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 103. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, có $AB = BC = a$, $AD = 2a$ và $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD) bằng
A. $75°$. **B**. $30°$. **C**. $45°$. **D**. $60°$.

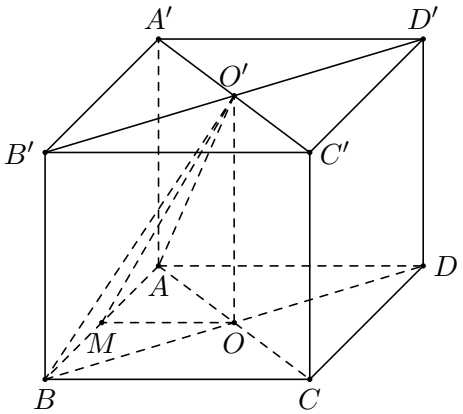
Lời giải.
Gọi E là trung điểm AD. Do đó $AE = ED = a$, $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{6}$.
Trong mặt phẳng (SAD), gọi F là hình chiếu vuông góc của E lên $SD \Rightarrow EF \perp SD$.
Ta có $AB \perp SA$ và $AB \perp AD$ nên $AB \perp (SAD)$.
Mà $ABCE$ là hình vuông nên $CE \parallel AB \Rightarrow CE \perp (SAD)$
$\Rightarrow CE \perp SD$.



Ta có $CE \perp SD$ và $EF \perp SD$ nên $SD \perp CF$.
Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD) bằng $\widehat{EFC}$.
Do $\triangle SAD \backsim \triangle EFD \Rightarrow \dfrac{EF}{SA} = \dfrac{ED}{SD} \Rightarrow EF = \dfrac{ED}{SD} \cdot SA = \dfrac{a}{a\sqrt{6}} \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
Xét tam giác EFC vuông tại E ta có $\tan \widehat{EFC} = \dfrac{EC}{EF} = \dfrac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{EFC} = 60°$.
Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD) bằng $60°$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 104. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi O' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và α là góc giữa hai mặt phẳng $(O'AB)$ và $(ABCD)$. Góc α thỏa mãn
A. $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$. **B**. $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$. **C**. $\tan\alpha = 2$. **D**. $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.
Gọi O, M lần lượt là trung điểm AC, AB.
Ta có $AB \perp (OMO')$
$\Rightarrow$ góc giữa $(O'AB)$ và $(ABCD)$ là $\alpha = \widehat{OMO'}$.
Xét tam giác $OM = \dfrac{a}{2}$, $OO' = a$
$\Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{OO'}{OM} = \dfrac{a}{\frac{a}{2}} = 2$.

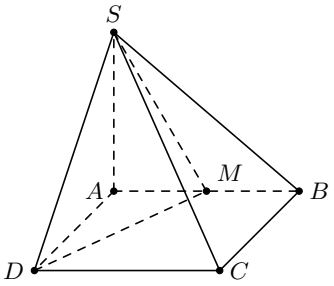


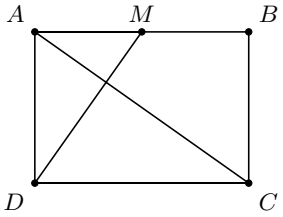
Chọn đáp án C □

Câu 105. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = AD\sqrt{2}$, $SA \perp (ABC)$. Gọi M là trung điểm của AB. Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SDM) bằng

A. $45°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $30°$.

Lời giải.





Đặt $AD = a$. Ta tính được $AB = a\sqrt{2}$, $AM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $AC = a\sqrt{3}$, $DM = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Ta có:

$$\sin \widehat{BAC} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{và} \quad \cos \widehat{AMD} = \frac{AM}{DM} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Suy ra $\widehat{BAC} + \widehat{AMD} = 90°$, hay $DM \perp AC$. Do đó $DM \perp (SAC)$, kéo theo $(SDM) \perp (SAC)$. Vậy $((SDM), (SAC)) = 90°$.

Chọn đáp án B □

Câu 106. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD), SA = AB = a, AD = 3a$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (SDM).

A. $\dfrac{5}{7}$. **B.** $\dfrac{6}{7}$. **C.** $\dfrac{3}{7}$. **D.** $\dfrac{1}{7}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên DM, ta có $DM \perp (SAH)$.

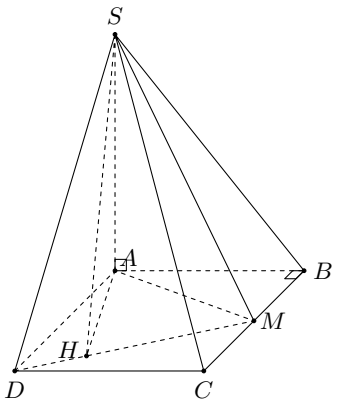
Gọi α là góc giữa (SDM) và $(ABCD)$ ta có $\alpha = \widehat{SHA}$.

Ta có $S_{\triangle ADM} = \dfrac{1}{2} S_{ABCD} = \dfrac{3}{2}a^2, DM = \sqrt{CD^2 + CM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{3}{2}a^2\right)} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}a.$

Ta có $AH = \dfrac{2S_{\triangle ADM}}{DM} = \dfrac{3}{2}a^2 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{13}a} = \dfrac{6\sqrt{13}}{13}.$

Ta có $\tan\alpha = \dfrac{SA}{AH} = \dfrac{1}{\frac{6\sqrt{13}}{13}} = \dfrac{\sqrt{13}}{6} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \dfrac{6}{7}.$

Vậy $\cos\alpha = \dfrac{6}{7}$.



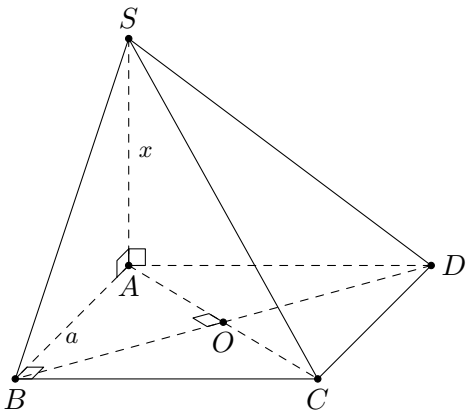
Chọn đáp án B □

Câu 107. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, đường cao $SA = x$. Góc giữa (SBC) và mặt đáy bằng $60°$. Tính x.

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Do $SA \perp (ABCD)$ nên $SB \perp BC$. Suy ra góc giữa (SBC) và mặt đáy là $\widehat{SBA} = 60^\circ$.
Trong tam giác vuông SAB ta có
$x = a \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

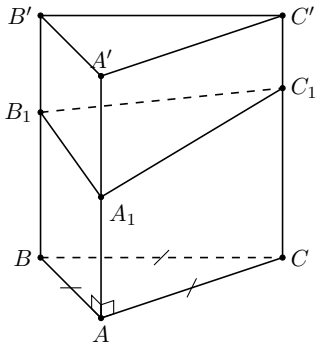


Chọn đáp án (B) □

Câu 108. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Mặt phẳng (P) cắt các cạnh AA', BB' và CC' lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Biết diện tích tam giác $A_1B_1C_1$ bằng $\dfrac{a^2}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (ABC) bằng

A. 15°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 30°.

Lời giải.
Tam giác ABC là hình chiếu vuông góc của tam giác $A_1B_1C_1$ lên mặt phẳng (ABC).
Suy ra $S_{ABC} = S_{A_1B_1C_1} \cdot \cos((ABC), (A_1B_1C_1))$.
Ta có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}a^2 \sin 60^\circ = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$
suy ra $\cos((ABC), (A_1B_1C_1)) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Vậy góc giữa hai mặt phẳng (P) và (ABC) bằng 30°.

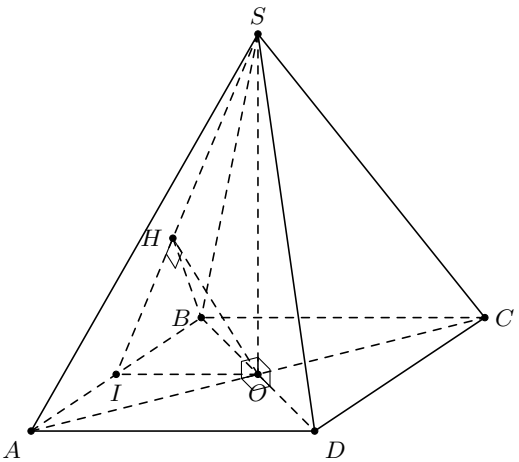


Chọn đáp án (D) □

Câu 109. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 2 và cạnh bên bằng $2\sqrt{2}$. Gọi α là góc của mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SAB). Khi đó $\cos\alpha$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{7}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.
Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có $SO \perp (ABCD)$.
Gọi I là trung điểm của AB, kẻ $OH \perp SI$ $(H \in SI)$.
Ta có: $\begin{cases} AB \perp OI \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOI) \Rightarrow AB \perp OH$.
Suy ra: $OH \perp (SAB)$.
Lại có: $\begin{cases} BO \perp AC \\ BO \perp SO \end{cases} \Rightarrow BO \perp (SAC)$.
Từ đó: $\alpha = (OH, BO) = \widehat{BOH}$.
Ta có: $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 - \sqrt{2}^2} = \sqrt{6}$.



Xét $\triangle SOI$ vuông tại O, đường cao OH ta có: $OH = \dfrac{SO \cdot OI}{\sqrt{SO^2 + OI^2}} = \dfrac{\sqrt{6} \cdot 1}{\sqrt{6+1}} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$.
Xét $\triangle BOH$ vuông tại H, ta có: $\cos\widehat{BOH} = \dfrac{OH}{BO} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.
Vậy $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án C □

Câu 110. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

B. Hai mặt phẳng song song khi và chỉ khi góc giữa chúng bằng $0°$.

C. Hai đường thẳng trong không gian cắt nhau khi và chỉ khi góc giữa chúng lớn hơn $0°$ và nhỏ hơn $90°$.

D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Lời giải.

Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

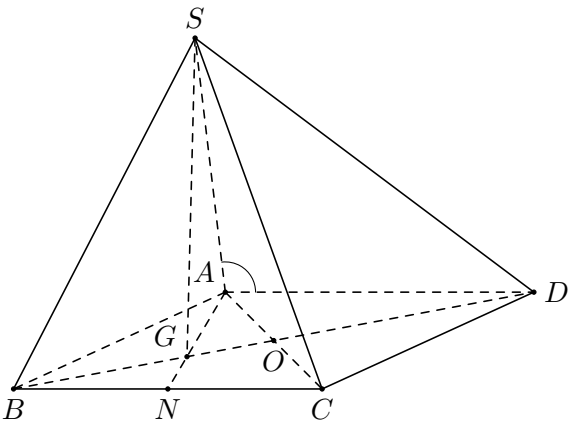
Chọn đáp án A □

Câu 111. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với trọng tâm G. Cạnh bên SA tạo với đáy (ABC) một góc $30°$. Biết hai mặt phẳng (SBG) và (SCG) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SA và BC.

A. $\dfrac{\sqrt{15}}{10}$. **B**. $\dfrac{3\sqrt{15}}{20}$. **C**. $\dfrac{\sqrt{30}}{20}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases}(SBG)\cap(SCG)=SG\\(SBG)\perp(ABC)\\(SCG)\perp(ABC)\end{cases}\Rightarrow SG\perp(ABC)$.



Gọi O, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Gọi D là điểm đối xứng của B qua O.

Khi đó $ABCD$ là hình vuông.

Vì $BC \parallel AD$ nên $(SA, BC) = (SA, AD)$.

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng SA và AD.

Đặt $AB = BC = x \Rightarrow AD = x$.

Ta có

— $AN^2 = AB^2 + BN^2 = x^2 + \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{5x^2}{4} \Rightarrow AN = \dfrac{x\sqrt{5}}{2}$

— $AG = \dfrac{2}{3}AN = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{x\sqrt{5}}{2} = \dfrac{x\sqrt{5}}{3}$

Góc giữa SA và mặt đáy (ABC) là $\widehat{SAG} = 30°$.

Ta có $\cos 30° = \dfrac{AG}{SA} \Rightarrow SA = \dfrac{AG}{\cos 30°} = \dfrac{2x\sqrt{15}}{9}$.

Ta có

— $\tan 30° = \dfrac{SG}{AG} \Rightarrow SG = AG\cdot\tan 30° = \dfrac{x\sqrt{5}}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{x\sqrt{15}}{9}$.

— $GD = \dfrac{2}{3}BD = \dfrac{2}{3}x\sqrt{2}$.

— $SD^2 = SG^2 + GD^2 = \dfrac{15x^2}{81} + \dfrac{8x^2}{9} = \dfrac{87x^2}{81}$

Áp dụng hệ quả của định lí *cosin* trong tam giác SAD ta có:

$\cos SAD = \dfrac{SA^2 + AD^2 - SD^2}{2\cdot SA\cdot AD} = \dfrac{\sqrt{15}}{10}$.

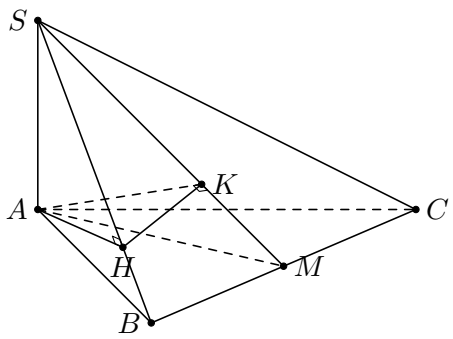
Chọn đáp án A □

Câu 112. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$, $SA = a\sqrt{3}$. cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là

A. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **B**. $\dfrac{-2}{\sqrt{5}}$. **C**. $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **D**. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm BC.
Kẻ $AK \perp SM$ tại K.
Ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow (SBC) \perp (SAM)$.
Lại có $AK \perp SM = (SBC) \cap (SAM)$
Do đó $AK \perp (SBC) \Rightarrow AK \perp SB$. Kẻ $AH \perp SB$ tại H.
Suy ra $SB \perp (AHK) \Rightarrow SB \perp HK$.



Ta có $\begin{cases} (SAB) \cap (SBC) = SB \\ AH \perp SB \\ HK \perp SB \end{cases} \Rightarrow ((SAB),(SBC)) = (AH, HK) = \widehat{AHK}$.

Xét $\triangle SAB$ có $AH = \dfrac{SA \cdot AB}{SB} = \dfrac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$AM = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét $\triangle SAM$ có $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AM^2} \Rightarrow AK = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Xét $\triangle AHK$ vuông tại K có $\sin\widehat{AHK} = \dfrac{AK}{AH} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \cos\widehat{AHK} = \sqrt{1 - \sin^2\widehat{AHK}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Vậy $\cos((SAB),(SBC)) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 113. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Tam giác SAB cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết SC tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$, gọi M là trung điểm của BC. Gọi α là góc giữa đường thẳng SM và mặt phẳng (ABC). Tính $\cos\alpha$.

A. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AB suy ra $SH \perp AB$, vì $(SAB) \perp (ABC)$, suy ra

$$SH \perp (ABC). \quad (1)$$

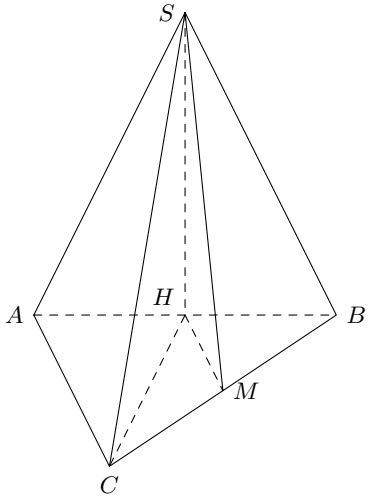
Từ (1) suy ra HM là hình chiếu vuông góc của SM lên mặt phẳng (ABC), suy ra

$$(SM,(ABC)) = (SM,HM) = \widehat{SMH} = \alpha. \quad (2)$$

Ta có $CH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SH = CH \cdot \tan 60° = \dfrac{3a}{2}$.

$HM = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a}{2} \Rightarrow SM = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

Vậy $\cos\alpha = \dfrac{HM}{SM} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.



Chọn đáp án (D) □

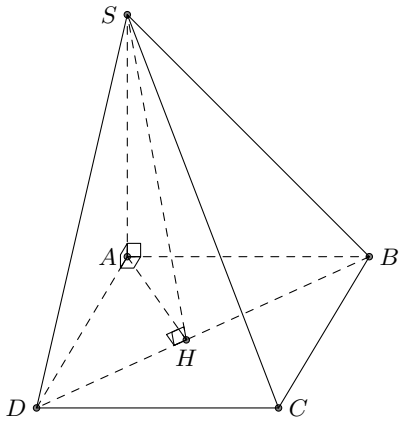
Câu 114. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$, $SA = 2a$. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$.

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

✍Lời giải.

Trong tam giác ABD, kẻ đường cao AH, với $H \in BD$. Khi đó ta có

$$\begin{cases} AH \perp BD \\ SA \perp BD \end{cases} \Rightarrow SH \perp BD.$$



Suy ra

$$((SBD),(ABCD)) = \widehat{SHA}. \qquad (1)$$

Mà $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{5}{4a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Vậy $\tan\widehat{SHA} = \dfrac{SA}{AH} = \sqrt{5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 115. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA là đường cao và đáy là tam giác ABC vuông tại B, $BC = a$. Hai mặt phẳng (SCA) và (SCB) hợp với nhau một góc $60°$ và góc $\widehat{BSC} = 45°$. Tính $\cos\widehat{ASB}$.

A. $\cos\widehat{ASB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B**. $\cos\widehat{ASB} = \sqrt{\dfrac{2}{5}}$. **C**. $\cos\widehat{ASB} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D**. $\cos\widehat{ASB} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

✍Lời giải.

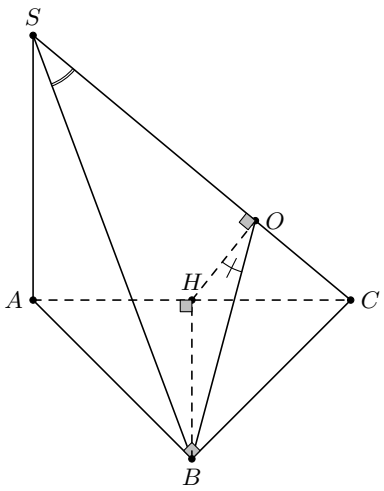
Kẻ $BH \perp AC$. Kẻ $HO \perp SC$.

Do $\begin{cases} BH \perp AC \\ BH \perp SA \ \ (SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BH \perp SC.$

Vì $\begin{cases} OH \perp SC \\ BH \perp SC \end{cases} \Rightarrow BO \perp SC.$

Vậy $\begin{cases} SC = (SAC) \cap (SBC) \\ OH \perp SC, OH \subset (SAC) \\ BO \perp SC, BO \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow ((SAC),(SBC)) = (BO,OH) = \widehat{BOH} = 60°$.



Ta có $\begin{cases} CB \perp AB \\ CB \perp SA \end{cases} \Rightarrow CB \perp SB$ nên $\triangle SBC$ vuông tại B, khi đó $SB = BC \cdot \tan 45° = a$.

Xét $\triangle SBC$ vuông tại B, có BO là đường cao nên $\dfrac{1}{BO^2} = \dfrac{1}{SB^2} + \dfrac{1}{BC^2} = \dfrac{2}{a^2} \Rightarrow OB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét $\triangle BHO$ vuông tại H, ta có $BH = BO \cdot \sin 60° = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B, có BH là đường cao, ta có

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2} \Rightarrow \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{BH^2} - \frac{1}{BC^2} = \frac{8}{3a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow AB^2 = \frac{3a^2}{5}.$$

Xét $\triangle SAB$ vuông tại A, ta có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{3a^2}{5}} = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

Khi đó $\cos\widehat{ASB} = \dfrac{SA}{SB} = \dfrac{a\dfrac{\sqrt{10}}{5}}{a} = \sqrt{\dfrac{2}{5}}$.

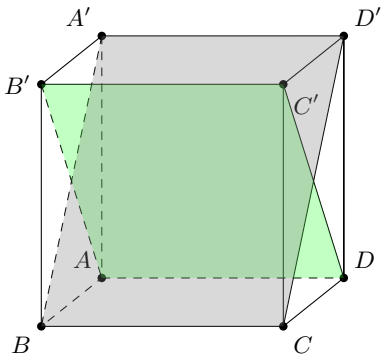
Chọn đáp án B □

Câu 116. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(ADC'D')$ và $(BCD'A')$ là

A. $30°$. **B**. $45°$. **C**. $90°$. **D**. $60°$.

✍Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} AB' \perp A'B \\ AB' \perp A'D' \end{cases}$.
$\Rightarrow AB' \perp (CBA'D') \Rightarrow (ADC'B') \perp (CBA'D')$.
Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(ADB'C')$ và $(BCA'D')$ là $90°$.

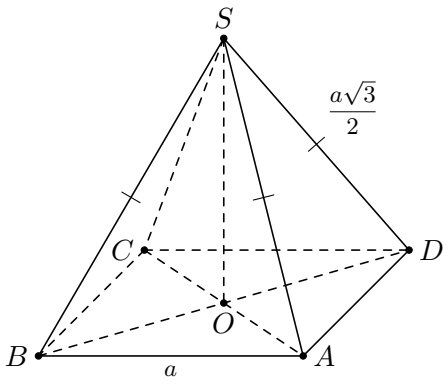


Chọn đáp án C □

Câu 117. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60°$. Biết các cạnh SA, SB, SD đều bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là φ. Tính $\sin\varphi$?

A. $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{6}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.
Gọi O là trung điểm của AC và BD.
$\Rightarrow SO \perp BD$ và $AO \perp BD$ (do $\triangle SBD$ cân tại S và $\triangle ABD$ cân tại A) $\Rightarrow \varphi = ((SBD),(ABCD)) = (SO, AO)$.
Mặt khác $\triangle ABD$ cân và có $\widehat{BAD} = 60°$ nên $\triangle ABD$ đều.
Suy ra $OB = OD = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a}{2}$ và $AO = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AB = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Mà $\triangle SOB$ vuông tại O, suy ra



$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\Rightarrow \cos\widehat{AOS} = \frac{OA^2 + OS^2 - SA^2}{2 \cdot OA \cdot OS} = \frac{\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{2} - \frac{3a^2}{4}}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$\Rightarrow \sin\varphi = \sin\widehat{AOS} = \sqrt{\dfrac{5}{6}} = \dfrac{\sqrt{30}}{6}$ (do $\varphi = (OA, OS)$).

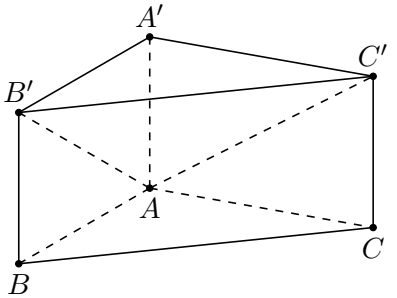
Chọn đáp án B □

Câu 118. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Tính cô-sin của góc tạo bởi hai đường thẳng BC và AB'.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{3}{4}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

✍Lời giải.
Ta thấy $(AB', BC) = (AB', B'C')$.
Ta có

$$\begin{aligned} \cos(AB', BC) &= \left|\cos\widehat{AB'C'}\right| \\ &= \frac{\left|AB'^2 + B'C'^2 - AC'^2\right|}{2AB' \cdot B'C'} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$



Chọn đáp án D □

Câu 119. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi φ là góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy của hình chóp. Giá trị của $\cos\varphi$ là

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

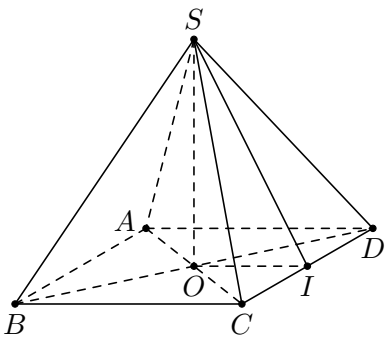
✍Lời giải.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.

Gọi I là trung điểm CD.

Khi đó, góc giữa mặt bên (SCD) và $(ABCD)$ là $\widehat{SIO}$.

Ta có $\begin{cases} OI = \dfrac{a}{2} \\ SI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \cos\varphi = \cos\widehat{SIO} = \dfrac{OI}{SI} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.



Chọn đáp án C ☐

Câu 120. Cho hình chóp tứ giác đều, biết hai mặt bên đối diện tạo với nhau góc 60°, tính góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp.

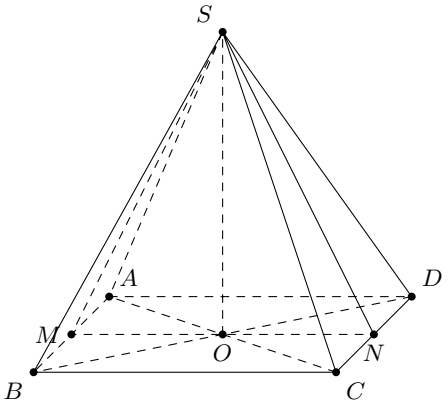
A. 45°. **B**. 60°. **C**. 60° hoặc 30°. **D**. 30°.

✍Lời giải.

Ta có hai cặp mặt phẳng đối diện là (SAB), (SCD) và (SAD), (SBC). Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên góc giữa cặp mặt phẳng (SCD) và (SAD) bằng góc giữa cặp mặt phẳng (SAD), (SBC).

Gọi α là góc giữa cặp mặt phẳng đối diện (SAB), (SCD).

Gọi $O = AC \cap BD$, M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Vậy $\alpha = \widehat{MSN}$ hoặc $\alpha = 180° - \widehat{MSN}$.



Góc giữa mặt bên (SCD) và mặt đáy $(ABCD)$ là góc $\widehat{SNO}$.

— $\widehat{MSN} = \alpha = 60°$. Tam giác SMN cân tại S, suy ra $\widehat{OSN} = 30° \Rightarrow \widehat{SNO} = 60°$.

— $180° - \widehat{MSN} = \alpha = 60°$. Tam giác SMN cân tại S, suy ra $\widehat{OSN} = 60° \Rightarrow \widehat{SNO} = 30°$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 121. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$ và cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC. Gọi β là góc tạo bởi (P) và $(ABCD)$. Tính $\tan\beta$.

A. $\tan\beta = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **B**. $\tan\beta = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **C**. $\tan\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **D**. $\tan\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Do $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a \Rightarrow AC = 2a\sqrt{2}$ và $OC = a\sqrt{2}$.

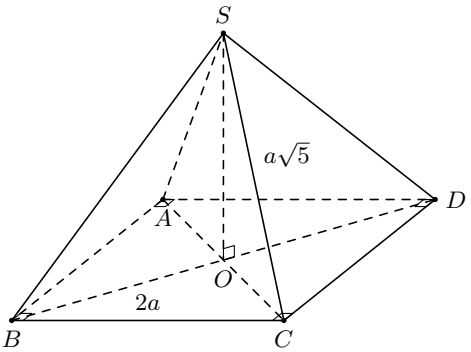
Tam giác SOC vuông tại O

$\Rightarrow SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{5a^2 - 2a^2} = a\sqrt{3}$.

Ta có $\begin{cases} SC \perp (P) \\ SO \perp (ABCD) \end{cases}$

$\Rightarrow$ góc giữa (P) và $(ABCD)$ bằng góc giữa SC và SO

hay $\beta = (SC; SO) = \widehat{CSO}$.



Tam giác SOC vuông tại $O \Rightarrow \tan\beta = \tan\widehat{CSO} = \dfrac{OC}{SO} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

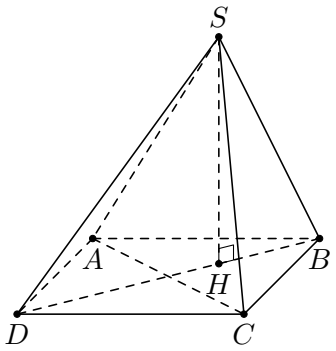
Chọn đáp án B ☐

Câu 122. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và có $SA = SB = SC = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng

A. 30°. **B**. 90°. **C**. 60°. **D**. 45°.

✍Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$. Do $SA = SB = SC$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Mà tam giác ABC có BD là đường trung trực của AC nên $H \in BD$.
Do $SH \subset (SBD)$ và $SH \perp (ABCD)$ nên $(SBD) \perp (ABCD)$. Suy ra góc giữa (SBD) và $(ABCD)$ bằng $90°$.



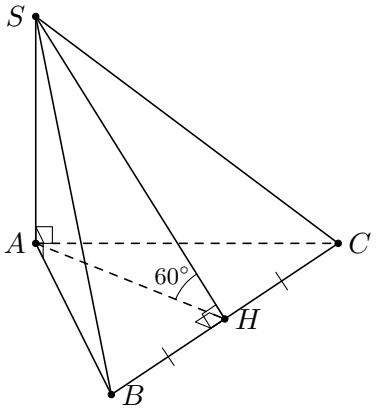
Chọn đáp án (B) □

Câu 123. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng $60°$. Đô dài cạnh SA bằng

A. $\dfrac{3a}{2}$. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm của BC. Khi đó, ta có
$AH \perp BC$ và $SH \perp BC$.
Suy ra $((SBC),(ABC)) = \widehat{SHA} = 60°$.
Do tam giác ABC đều cạnh a nên $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Vậy $SA = AH \cdot \tan 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{3a}{2}$.



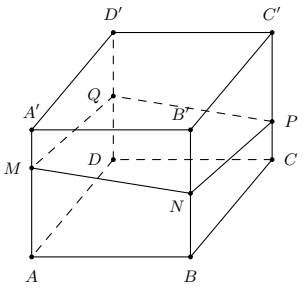
Chọn đáp án (A) □

Câu 124. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 27. Một mặt phẳng (α) tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ góc $60°$ và cắt các cạnh AA', BB', CC', DD' lần lượt tại M, N, P, Q. Tính diện tích của tứ giác $MNPQ$.

A. $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. **B.** $6\sqrt{3}$. **C.** 18. **D.** $\dfrac{9}{2}$.

✍Lời giải.

Đặt $AB = a \Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = a^3 = 27 \Leftrightarrow a = 3$.
Ta có $S_{ABCD} = S_{MNPQ} \cdot \cos 60° \Rightarrow S_{MNPQ} = \dfrac{S_{ABCD}}{\cos 60°} = \dfrac{a^2}{\frac{1}{2}} = 2a^2 = 18$.



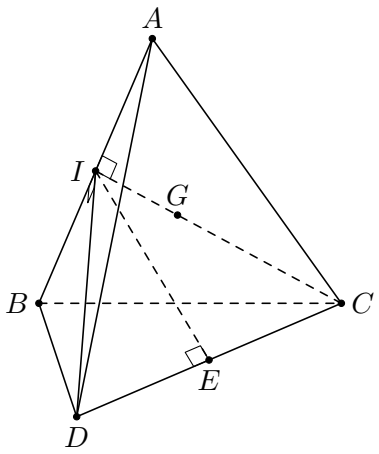
Chọn đáp án (C) □

Câu 125. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh a, gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Cắt tứ diện bởi mặt phẳng (GCD) được thiết diện có diện tích là

A. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

✍Lời giải.

CG cắt AB tại I là trung điểm của AB. Thiết diện là tam giác cân ICD.



Ta có $IC = ID = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi E là trung điểm CD suy ra

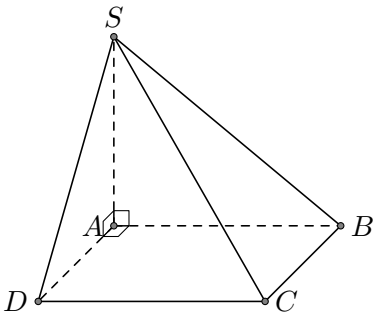
$IE = \sqrt{IC^2 - EC^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$S_{ICD} = \dfrac{1}{2}MH \cdot CD = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 126.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA = a$ (tham khảo hình bên). Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng

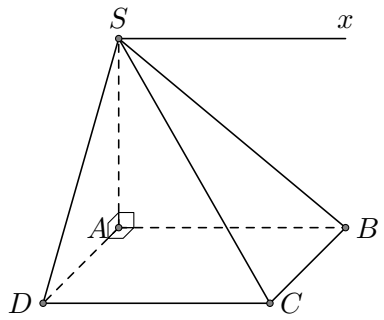


A. $60°$. **B**. $90°$.

C. $30°$. **D**. $45°$.

✍Lời giải.

Vì (SAB) và (SCD) có S chung, AB và CD song song nên giao tuyến của (SAB) và (SCD) là đường thẳng Sx đi qua S và song song với AB (song song với CD).



Ta lại có $SA \perp AB$ nên $SA \perp Sx$; $SD \perp DC$ (do $CD \perp SA$ và $CD \perp AD$) nên $SD \perp Sx$.

Vậy $((SAB),(SCD)) = (SA, SD) = \widehat{ASD} = 45°$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 127. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}$, $OA = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC).

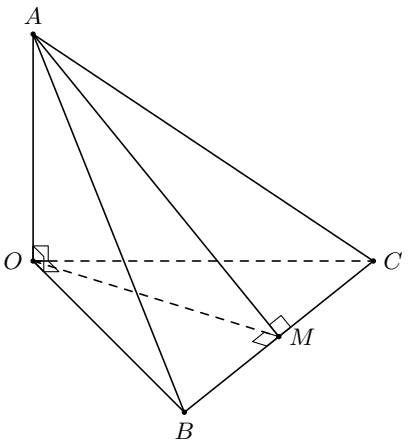
A. $30°$. **B**. $60°$. **C**. $90°$. **D**. $45°$.

✍Lời giải.

Gọi M là trung điểm BC, từ $OB = OC = a\sqrt{6}$, ta có $OM \perp BC$.

Từ $OA \perp OB$ và $OA \perp OC \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$.

Từ $\begin{cases} OA \perp BC \\ OM \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (OAM)$. Từ đây suy ra góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) bằng góc giữa hai đường thẳng AM, OM và bằng góc $\widehat{OMA}$.



Ta có $OM = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2} \cdot a\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác OAM vuông tại O, ta có $\tan\widehat{OMA} = \dfrac{OA}{OM} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{OMA} = 30°$.

Vậy, góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) bằng $30°$.

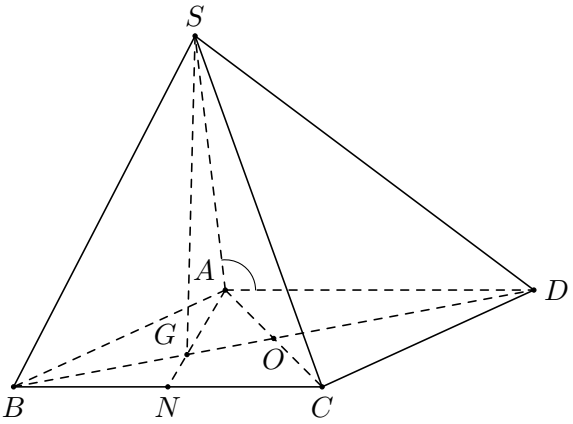
Chọn đáp án A □

Câu 128. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với trọng tâm G. Cạnh bên SA tạo với đáy (ABC) một góc 30°. Biết hai mặt phẳng (SBG) và (SCG) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SA và BC.

A. $\dfrac{\sqrt{15}}{10}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{15}}{20}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{30}}{20}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases}(SBG)\cap(SCG)=SG\\(SBG)\perp(ABC)\\(SCG)\perp(ABC)\end{cases}\Rightarrow SG\perp(ABC)$.



Gọi O, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Gọi D là điểm đối xứng của B qua O.
Khi đó $ABCD$ là hình vuông.
Vì $BC\parallel AD$ nên $(SA,BC)=(SA,AD)$.
Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng SA và AD.
Đặt $AB=BC=x\Rightarrow AD=x$.

Ta có

— $AN^2=AB^2+BN^2=x^2+\dfrac{x^2}{4}=\dfrac{5x^2}{4}\Rightarrow AN=\dfrac{x\sqrt{5}}{2}$

— $AG=\dfrac{2}{3}AN=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{x\sqrt{5}}{2}=\dfrac{x\sqrt{5}}{3}$

Góc giữa SA và mặt đáy (ABC) là $\widehat{SAG}=30^\circ$.
Ta có $\cos 30^\circ=\dfrac{AG}{SA}\Rightarrow SA=\dfrac{AG}{\cos 30^\circ}=\dfrac{2x\sqrt{15}}{9}$.
Ta có

— $\tan 30^\circ=\dfrac{SG}{AG}\Rightarrow SG=AG\cdot\tan 30^\circ=\dfrac{x\sqrt{5}}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{x\sqrt{15}}{9}$.

— $GD=\dfrac{2}{3}BD=\dfrac{2}{3}x\sqrt{2}$.

— $SD^2=SG^2+GD^2=\dfrac{15x^2}{81}+\dfrac{8x^2}{9}=\dfrac{87x^2}{81}$

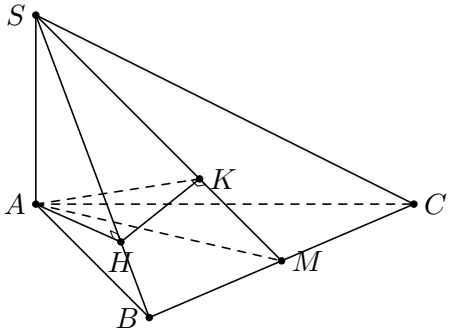
Áp dụng hệ quả của định lí *cosin* trong tam giác SAD ta có:
$\cos SAD=\dfrac{SA^2+AD^2-SD^2}{2\cdot SA\cdot AD}=\dfrac{\sqrt{15}}{10}$.
Chọn đáp án A □

Câu 129. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA\perp(ABC)$, $SA=a\sqrt{3}$. cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là

A. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{-2}{\sqrt{5}}$. **C.** $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm BC.
Kẻ $AK\perp SM$ tại K.
Ta có $\begin{cases}BC\perp AM\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAM)\Rightarrow(SBC)\perp(SAM)$.
Lại có $AK\perp SM=(SBC)\cap(SAM)$
Do đó $AK\perp(SBC)\Rightarrow AK\perp SB$. Kẻ $AH\perp SB$ tại H.
Suy ra $SB\perp(AHK)\Rightarrow SB\perp HK$.



Ta có $\begin{cases}(SAB)\cap(SBC)=SB\\ AH\perp SB\\ HK\perp SB\end{cases}\Rightarrow((SAB),(SBC))=(AH,HK)=\widehat{AHK}.$

Xét $\triangle SAB$ có $AH=\dfrac{SA\cdot AB}{SB}=\dfrac{SA\cdot AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

$AM=\dfrac{AB\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

Xét $\triangle SAM$ có $\dfrac{1}{AK^2}=\dfrac{1}{AS^2}+\dfrac{1}{AM^2}\Rightarrow AK=\dfrac{a\sqrt{15}}{5}.$

Xét $\triangle AHK$ vuông tại K có $\sin\widehat{AHK}=\dfrac{AK}{AH}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\Rightarrow\cos\widehat{AHK}=\sqrt{1-\sin^2\widehat{AHK}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}.$

Vậy $\cos((SAB),(SBC))=\dfrac{\sqrt{5}}{5}.$

Chọn đáp án D □

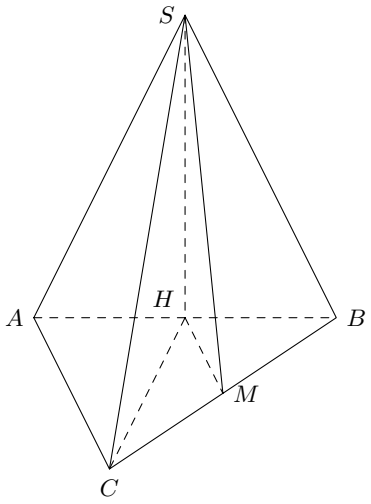
Câu 130. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Tam giác SAB cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết SC tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$, gọi M là trung điểm của BC. Gọi α là góc giữa đường thẳng SM và mặt phẳng (ABC). Tính $\cos\alpha$.

A. $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$. **D.** $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AB suy ra $SH\perp AB$, vì $(SAB)\perp(ABC)$, suy ra

$$SH\perp(ABC).\qquad(1)$$



Từ (1) suy ra HM là hình chiếu vuông góc của SM lên mặt phẳng (ABC), suy ra

$$(SM,(ABC))=(SM,HM)=\widehat{SMH}=\alpha.\qquad(2)$$

Ta có $CH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow SH=CH\cdot\tan 60°=\dfrac{3a}{2}.$

$HM=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{a}{2}\Rightarrow SM=\dfrac{a\sqrt{10}}{2}.$

Vậy $\cos\alpha=\dfrac{HM}{SM}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}.$

Chọn đáp án D □

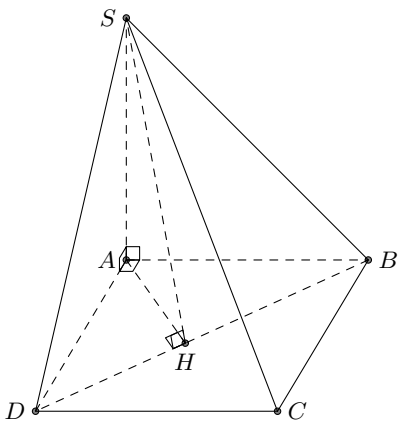
Câu 131. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, $AD=2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$, $SA=2a$. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$.

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

✍Lời giải.

Trong tam giác ABD, kẻ đường cao AH, với $H\in BD$. Khi đó ta có

$$\begin{cases}AH\perp BD\\ SA\perp BD\end{cases}\Rightarrow SH\perp BD.$$



Suy ra

$$((SBD),(ABCD))=\widehat{SHA}.\qquad(1)$$

Mà $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AD^2}=\dfrac{5}{4a^2}\Rightarrow AH=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}.$

Vậy $\tan\widehat{SHA}=\dfrac{SA}{AH}=\sqrt{5}.$

Chọn đáp án B □

Câu 132. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA là đường cao và đáy là tam giác ABC vuông tại B, $BC = a$. Hai mặt phẳng (SCA) và (SCB) hợp với nhau một góc $60°$ và góc $\widehat{BSC} = 45°$. Tính $\cos\widehat{ASB}$.

A. $\cos\widehat{ASB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\cos\widehat{ASB} = \sqrt{\dfrac{2}{5}}$. **C.** $\cos\widehat{ASB} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\cos\widehat{ASB} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

✍Lời giải.

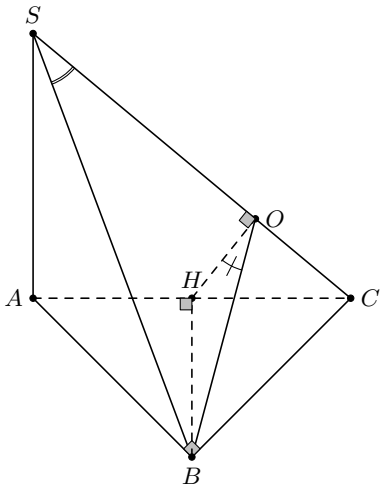
Kẻ $BH \perp AC$. Kẻ $HO \perp SC$.

Do $\begin{cases} BH \perp AC \\ BH \perp SA \ \ (SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BH \perp SC.$

Vì $\begin{cases} OH \perp SC \\ BH \perp SC \end{cases} \Rightarrow BO \perp SC.$

Vậy $\begin{cases} SC = (SAC) \cap (SBC) \\ OH \perp SC, OH \subset (SAC) \\ BO \perp SC, BO \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow ((SAC),(SBC)) = (BO, OH) = \widehat{BOH} = 60°.$



Ta có $\begin{cases} CB \perp AB \\ CB \perp SA \end{cases} \Rightarrow CB \perp SB$ nên $\triangle SBC$ vuông tại B, khi đó $SB = BC \cdot \tan 45° = a$.

Xét $\triangle SBC$ vuông tại B, có BO là đường cao nên $\dfrac{1}{BO^2} = \dfrac{1}{SB^2} + \dfrac{1}{BC^2} = \dfrac{2}{a^2} \Rightarrow OB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét $\triangle BHO$ vuông tại H, ta có $BH = BO \cdot \sin 60° = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B, có BH là đường cao, ta có

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2} \Rightarrow \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{BH^2} - \frac{1}{BC^2} = \frac{8}{3a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow AB^2 = \frac{3a^2}{5}.$$

Xét $\triangle SAB$ vuông tại A, ta có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{3a^2}{5}} = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

Khi đó $\cos\widehat{ASB} = \dfrac{SA}{SB} = \dfrac{a\frac{\sqrt{10}}{5}}{a} = \sqrt{\dfrac{2}{5}}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 133. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(ADC'D')$ và $(BCD'A')$ là

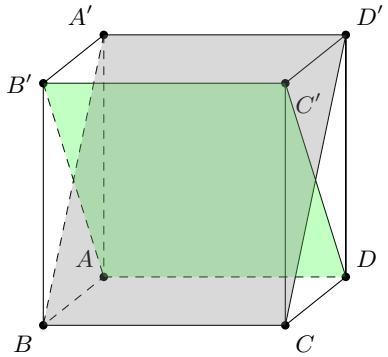
A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $90°$. **D.** $60°$.

✍Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} AB' \perp A'B \\ AB' \perp A'D' \end{cases}$.

$\Rightarrow AB' \perp (CBA'D') \Rightarrow (ADC'B') \perp (CBA'D')$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(ADB'C')$ và $(BCA'D')$ là $90°$.



Chọn đáp án (C) □

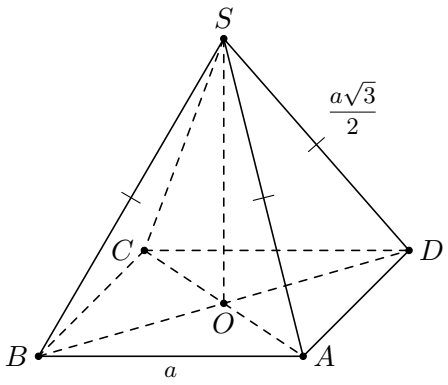
Câu 134. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60°$. Biết các cạnh SA, SB, SD đều bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là φ. Tính $\sin\varphi$?

A. $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{6}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi O là trung điểm của AC và BD.
$\Rightarrow SO \perp BD$ và $AO \perp BD$ (do $\triangle SBD$ cân tại S và $\triangle ABD$ cân tại A) $\Rightarrow \varphi = ((SBD),(ABCD)) = (SO, AO)$.
Mặt khác $\triangle ABD$ cân và có $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên $\triangle ABD$ đều.
Suy ra $OB = OD = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a}{2}$ và $AO = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AB = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Mà $\triangle SOB$ vuông tại O, suy ra

$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



$$\Rightarrow \cos\widehat{AOS} = \frac{OA^2 + OS^2 - SA^2}{2 \cdot OA \cdot OS} = \frac{\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{2} - \frac{3a^2}{4}}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow \sin\varphi = \sin\widehat{AOS} = \sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6} \text{ (do } \varphi = (OA, OS)).$$

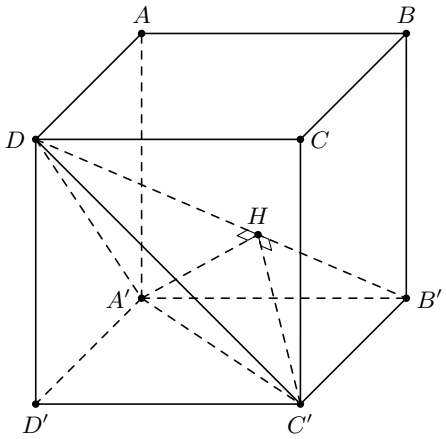
Chọn đáp án (B) □

Câu 135. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(DA'B')$ và $(DC'B')$ bằng

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.

✍Lời giải.

Không mất tính tổng quát, giả sử cạnh hình lập phương bằng a.
Dễ thấy $A'B' = B'C' = a, A'D = C'D = a\sqrt{2}, B'D = a\sqrt{3}$.
Ta có $A'C' \perp (BDD'B')$ nên $A'C' \perp B'D$.
Kẻ $A'H \perp B'D$ thì $B'D \perp (A'HC')$, vậy $B'D \perp C'H$.
Khi đó góc giữa hai mặt phẳng $(DA'B')$ và $(DC'B')$ bằng góc giữa hai đường thẳng $A'H$ và $C'H$.
Xét tam giác $A'HC'$ ta có
$A'C' = a\sqrt{2}, A'H = C'H = \dfrac{A'D \cdot A'B'}{B'D} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.
Vậy $\cos\widehat{A'HC'} = \dfrac{A'H^2 + C'H^2 - A'C'^2}{2A'H \cdot C'H} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{A'HC'} = 120^\circ$.
Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(DA'B')$ và $(DC'B')$ bằng 60°.



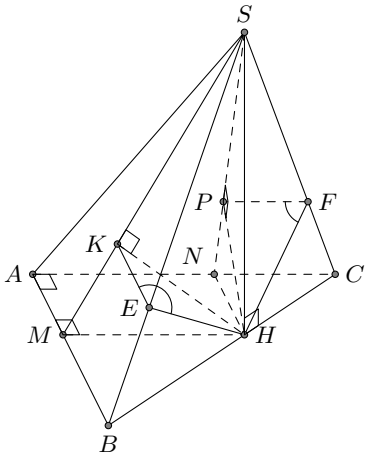
Chọn đáp án (C) □

Câu 136. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) là một điểm nằm trên đoạn thẳng BC. Mặt phẳng (SAB) tạo với (SBC) một góc 60° và mặt phẳng (SAC) tạo với (SBC) một góc φ thỏa mãn $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. Gọi α là góc tạo bởi SA và mặt phẳng (ABC), tính $\tan\alpha$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

✍Lời giải.

Dựng hình chữ nhật $HNAM$, suy ra $\triangle HNC$ vuông cân tại N và $\triangle HMB$ vuông cân tại M, suy ra $AC \perp (SHN)$ và $AB \perp (SHM)$.
Kẻ $HE \perp SB$ và $HF \perp SC$, $HP \perp SN$ và $HK \perp SM$, suy ra $HP \perp (SAC)$, $HK \perp (SAB)$.
Ta có $\widehat{HFP} = \alpha$, $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$, suy ra $\sin\alpha = \sqrt{\dfrac{7}{8}}$.
$\widehat{HEK}$ là góc giữa (SAB) và (SBC) bằng 60°. Suy ra
$\sin\alpha = \dfrac{HP}{HF} = \dfrac{SH\cdot HN}{SN}\cdot\dfrac{SC}{SH\cdot HC} = \dfrac{SC}{SN\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{7}{8}}$.
$\sin\widehat{HEK} = \dfrac{HK}{HE} = \dfrac{SH\cdot MH}{SM}\cdot\dfrac{SB}{SH\cdot BH} = \dfrac{SB}{SM\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



Suy ra $\begin{cases}\dfrac{SC^2}{SN^2} = \dfrac{7}{4}\\ \dfrac{SB^2}{SM^2} = \dfrac{3}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{SH^2+HC^2}{SH^2+HN^2} = \dfrac{SH^2+2NH^2}{SH^2+NH^2} = \dfrac{7}{4}\\ \dfrac{SH^2+BH^2}{SH^2+MH^2} = \dfrac{SH^2+2MH^2}{SH^2+MH^2} = \dfrac{3}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3SH^2 = NH^2\\ SH^2 = MH^2\end{cases}$
$\Rightarrow MH^2 + NH^2 = 4SH^2$.
Suy ra $AH^2 = 4SH^2 \Rightarrow \tan(SA,(ABC)) = \dfrac{AH}{SH} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 137. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 3a$, $AD = a\sqrt{3}$, $AA' = 2a$. Góc giữa đường thẳng AC' với mặt phẳng $(A'B'C')$ bằng

A. 60°. **B.** 45°. **C.** 120°. **D.** 30°.

✍Lời giải.

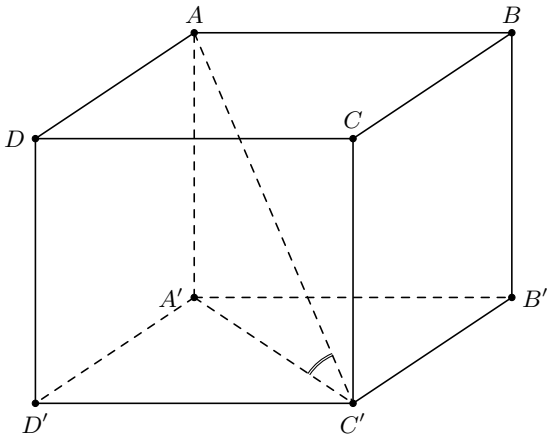
Vì $AA' \perp (A'B'C')$
$\Rightarrow (AC',(A'B'C')) = (AC',A'C') = \widehat{AC'A'}$.
Xét $\triangle A'B'C'$ vuông tại B', ta có

$$A'C' = \sqrt{A'B'^2 + B'C'^2} = \sqrt{9a^2+3a^2} = 2a\sqrt{3}.$$

Xét $\triangle AA'C'$ vuông tại A', ta có

$$\tan\widehat{AC'A'} = \frac{AA'}{A'C'} = \frac{2a}{2a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{AC'A'} = 30^\circ.$$

Vậy $(AC',(A'B'C')) = \widehat{AC'A'} = 30^\circ$.



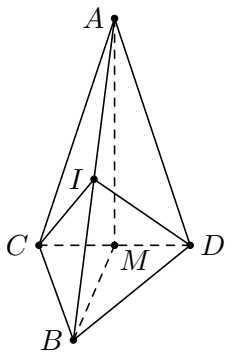
Chọn đáp án D □

Câu 138. Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Biết $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Tìm giá trị của x theo a để hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau.

A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

✍Lời giải.

Ta có $AC = AD = BC = BD = a$, suy ra $\triangle ACD$, $\triangle BCD$, $\triangle CAB$, $\triangle DAB$ cân.
Gọi M là trung điểm của CD, suy ra $AM \perp CD$ và $BM \perp CD$. Suy ra $AM \perp MB$ và $\triangle ABM$ vuông cân tại M.
Ta có $MD = MC = x$, suy ra $AM = AB = \sqrt{a^2 - x^2}$.
Gọi I là trung điểm của AB, suy ra $IM = \dfrac{AM}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{2}}$.
Mặt khác, $(ABC) \perp (ABD)$ nên $\triangle ICD$ vuông tại I.
Suy ra $ID^2 = IC^2 = \dfrac{a^2 + x^2}{2}$.
Ta có $IC^2 + ID^2 = CD^2 \Leftrightarrow a^2 + x^2 = 4x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.



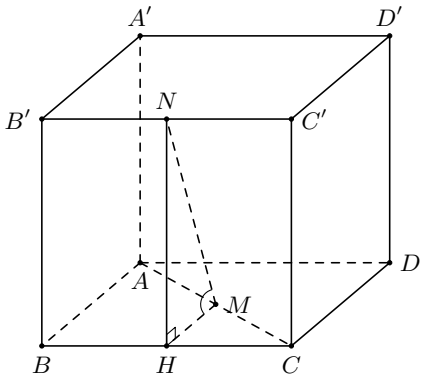
Chọn đáp án C □

Câu 139. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AC và $B'C'$. Gọi α là góc hợp giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(A'B'C'D')$ Tính giá trị của $\sin\alpha$.

A. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$.

✍Lời giải.
Giả sử hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a. Gọi H là trung điểm của BC, ta có $NH \parallel BB' \Rightarrow NH \perp (ABCD)$.
Lại có $(A'B'C'D') \parallel (ABCD)$, tam giác HMN vuông tại H nên $(MN, (A'B'C'D')) = (MN, (ABCD)) = (MN, MH) = \widehat{NMH} = \alpha$.

$$\sin\alpha = \frac{NH}{MN} = \frac{NH}{\sqrt{NH^2 + MH^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$



Chọn đáp án B □

Câu 140. Cho khối tứ diện $ABCD$ có $BC = 3$, $CD = 4$, $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{ADC} = 90^\circ$, góc giữa hai đường thẳng AD và BC bằng 60°. Côsin góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACD) bằng

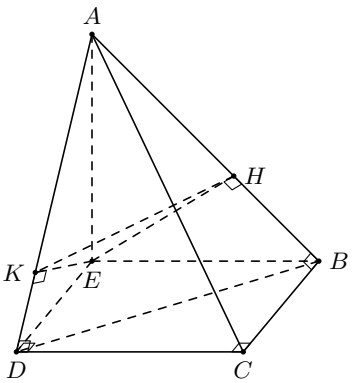
A. $\dfrac{\sqrt{43}}{86}$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{43}}{43}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{43}}{43}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{43}}{43}$.

✍Lời giải.
Dựng điểm E trong mặt phẳng (BCD) sao cho $BCDE$ là hình bình hành.
Từ giả thiết $\widehat{BCD} = 90^\circ$ suy ra $BCDE$ là hình chữ nhật.
Ta có $AB \perp BC \Rightarrow ED \perp AB$, mà $ED \perp EB$ suy ra $DE \perp AE$. Tương tự ta có $BE \perp AE$ nên $AE \perp (BCDE)$.
Lại có $(AD, BC) = (AD, ED) = \widehat{ADE} = 60^\circ$, tam giác AED vuông tại E nên

$$AE = DE \tan\widehat{ADE} = BC \tan 60^\circ = 3\sqrt{3}.$$

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của E trên AB, AD. Khi đó

$$\begin{cases} BC \perp BE \\ BC \perp AE \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AEB) \Rightarrow EH \perp BC.$$



Mà $EH \perp AB \Rightarrow EH \perp (ABC)$. Tương tự $EK \perp (ACD)$.
Do đó $((ABC), (ACD)) = (EH, EK)$. Tam giác AEB vuông tại E, đường cao EH có $AE = 3\sqrt{3}$, $EB = 4$ nên $AB = \sqrt{43}$, $AH = \dfrac{AE^2}{AB} = \dfrac{27}{\sqrt{43}}$, $EH = \dfrac{12\sqrt{3}}{\sqrt{43}}$.
Tương tự với tam giác vuông AED, ta có $AD = 6$, $AK = \dfrac{9}{2}$, $EK = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.
Tam giác ABD có $\cos\widehat{BAD} = \dfrac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB \cdot AD} = \dfrac{9\sqrt{43}}{86}$.
Mặt khác $HK^2 = AH^2 + AK^2 - 2AH \cdot AK \cdot \cos\widehat{HAK} = \dfrac{2025}{172}$.

Tam giác EHK có $\cos\widehat{HEK} = \dfrac{EH^2+EK^2-HK^2}{2EH\cdot EK} = \dfrac{2\sqrt{43}}{43}$.

Vậy $\cos((ABC),(ACD)) = \cos(EH,EK) = \dfrac{2\sqrt{43}}{43}$.

Chọn đáp án C □

Câu 141. Cho hình lập phương $ABCDA'B'C'D'$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (ABC). Tính $\tan\varphi$.

A. $\tan\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\tan\varphi = \sqrt{2}$. **C.** $\tan\varphi = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$. **D.** $\tan\varphi = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

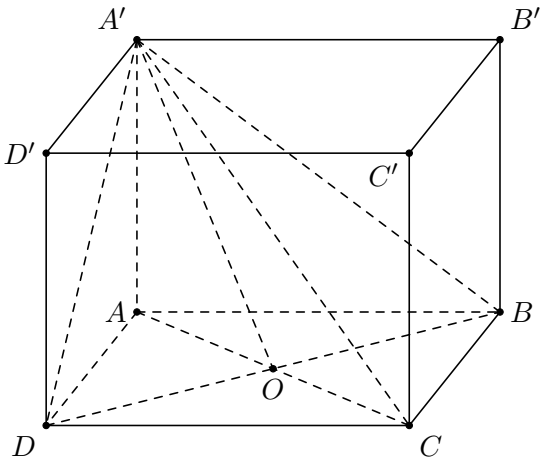
Lời giải.

— Gọi cạnh của hình lập phương là a, tâm của đáy là O.

— Ta có $\begin{cases}(A'DB)\cap(ABC) = DB\\ OA'\perp DB\\ OA\perp DB\end{cases}$

$\Rightarrow ((A'BD),(ABC)) = (OA',OA) = \widehat{A'OA}$.

— $\tan\varphi = \tan\widehat{A'OA} = \dfrac{AA'}{OA} = \dfrac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$.



Chọn đáp án B □

Câu 142. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của SC. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$.

A. $\varphi = 60°$. **B.** $\varphi = 30°$. **C.** $\varphi = 45°$. **D.** $\varphi = 90°$.

Lời giải.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Khi đó $SO\perp(ABCD)$.

Vì $BD\perp SO$ và $BD\perp AC$ nên $BD\perp(SAC)$.

Suy ra $BD\perp OM$.

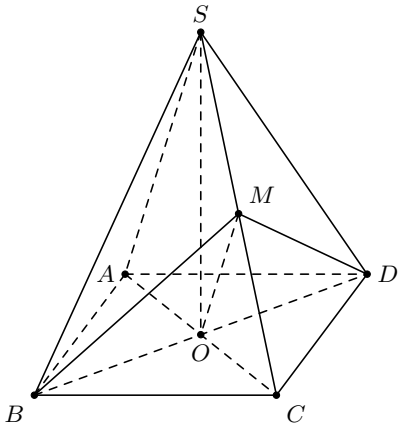
Lại có $OC\perp BD$ và $(MBD)\cap(ABCD) = BD$.

Vậy góc giữa (MBD) và $(ABCD)$ bằng góc giữa OM và OC.

Ta có $OM = CM = \dfrac{a}{2}$ và $OC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác OMC có $OM^2+CM^2 = \dfrac{a^2}{2} = OC^2$.

Vậy tam giác OMC vuông cân tại M.



Do đó góc tạo bởi OM và OC bằng $\widehat{COM} = 45°$ hay $\varphi = 45°$.

Chọn đáp án C □

Câu 143. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B và $\widehat{ACB} = 30°$. Tam giác SAC là tam giác đều và thuộc mặt phẳng vuông góc với (ABC). Xét điểm M thuộc cạnh SC sao cho mặt phẳng (MAB) tạo với hai mặt phẳng (SAB); (ABC) góc bằng nhau. Tỉ số $\dfrac{MS}{MC}$ có giá trị bằng

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AC, suy ra $SH\perp(ABC)$.

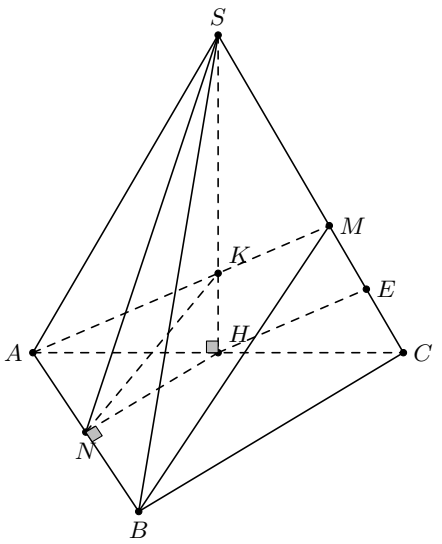
Gọi N là trung điểm của AB, suy ra $AB\perp(SHN)$.

Lấy K là giao điểm của AM, SH. Do đó $\begin{cases}((ABM),(ABC)) = \widehat{HNK}\\ ((ABM),(SAB)) = \widehat{KNS}.\end{cases}$

Theo giả thiết, NK là phân giác của $\widehat{SNH}$.

Giả sử $AB=1\Rightarrow BC=\sqrt{3}\Rightarrow AC=2\Rightarrow SH=\sqrt{3}$.
Mặt khác $HN=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Ta có $SN=\sqrt{HN^2+SH^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}\Rightarrow\dfrac{KH}{KS}=\dfrac{HN}{SN}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ (tính chất phân giác).
Gọi E là trung điểm của CM, theo định lí Ta-lét thì

$$\frac{ME}{MS}=\frac{KH}{KS}=\frac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow\frac{MC}{MS}=\frac{2ME}{MS}=\frac{2}{\sqrt{5}}\Rightarrow\frac{MS}{MC}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$



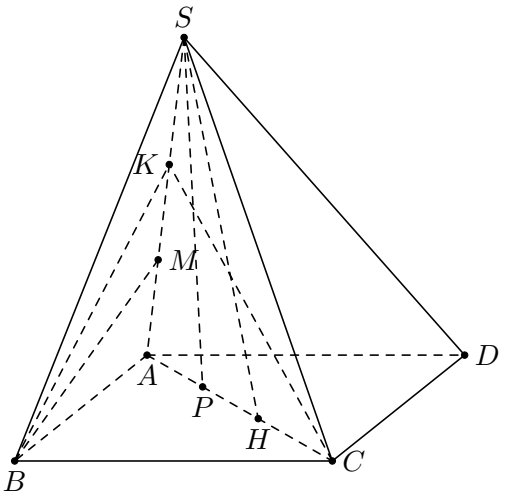
Chọn đáp án (A) □

Câu 144. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=3$, $BC=4$. Tam giác SAC nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng SA bằng 4. Côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{34}}{34}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{34}}{17}$. **D.** $\dfrac{5\sqrt{34}}{17}$.

Lời giải.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B ta có
$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.
Gọi K là chân đường vuông góc kẻ từ C xuống SA. Xét $\triangle CAK$ vuông tại K ta có
$AK=\sqrt{CA^2-CK^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$.
Kẻ $SH\perp AC$, $H\in AC$.
Vì $(SAC)\perp(ABCD)$ và $(SAC)\cap(ABCD)=AC$ nên $SA\perp(ABCD)$.
Kẻ $SH\perp AC$, $H\in AC$ và $KP//SH$, $P\in AC$ thì $KP\perp(ABCD)$.



Xét $\triangle BAC$ vuông tại B và $\triangle KAC$ vuông tại K ta thấy các cạnh tương ứng bằng nhau và KP là đường cao của $\triangle KAC$ nên BP là đường cao của $\triangle BAC$.
Kẻ $PM\perp KA$, $M\in KA$. Vì $KA\perp PB$ và $KA\perp PM$ nên $KA\perp(PMB)$. Suy ra $KA\perp MB$.
Như vậy, góc giữa mặt phẳng (SAC) và (SAB)bằng góc $\widehat{PMB}$.
Xét $\triangle KAC$ vuông tại K ta có $KP\cdot AC=KA\cdot KC\Rightarrow KP=\dfrac{KA\cdot KC}{AC}=\dfrac{3\cdot4}{5}=\dfrac{12}{5}$.
Suy ra $BP=KP=\dfrac{12}{5}$.
Xét $\triangle KPA$ vuông tại P ta có $PA=\sqrt{KA^2-KP^2}=\sqrt{3^2-\left(\dfrac{12}{5}\right)^2}=\dfrac{9}{5}$.
Lại có $PM\cdot AK=PA\cdot PK\Rightarrow PM=\dfrac{PA\cdot PK}{AK}=\dfrac{36}{25}$.
Xét $\triangle PMB$ vuông tại P ta có $MB=\sqrt{PB^2+PM^2}=\sqrt{\left(\dfrac{12}{5}\right)^2+\left(\dfrac{36}{25}\right)^2}=\dfrac{12\sqrt{34}}{25}$.
Ta có $\cos\widehat{PMB}=\dfrac{MP}{MB}=\dfrac{36}{25}\cdot\dfrac{25}{12\sqrt{34}}=\dfrac{3\sqrt{34}}{34}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 145. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$, $SA = \sqrt{3}AB$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD), giá trị $\cos\alpha$ bằng

A. $\frac{1}{4}$. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

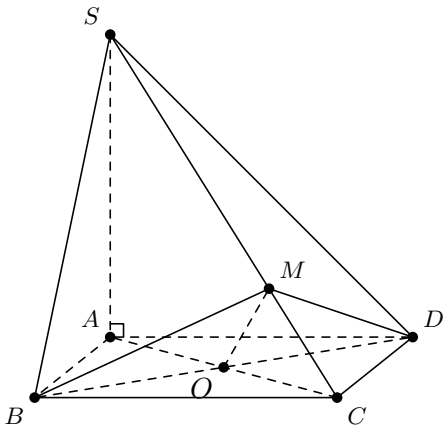
✍Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Kẻ $OM \perp SC$, suy ra $DB \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC \Rightarrow SC \perp (BDM)$.
Góc α bằng hoặc bù với $\widehat{DMB}$ với

$$BM^2 = \frac{SB^2 \cdot BC^2}{SB^2 + BC^2} = \frac{4}{5}.$$

Xét tam giác BMD, có

$$\cos\widehat{DMB} = -\frac{1}{4} < 0 \Rightarrow \cos\alpha = \left|\cos\widehat{DMB}\right| = \frac{1}{4}.$$



Chọn đáp án (A) □

Câu 146. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ bằng bao nhiêu?

A. $45°$. **B.** $90°$. **C.** $0°$. **D.** $60°$.

✍Lời giải.

Hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ song song nên góc giữa chúng bằng $0°$.

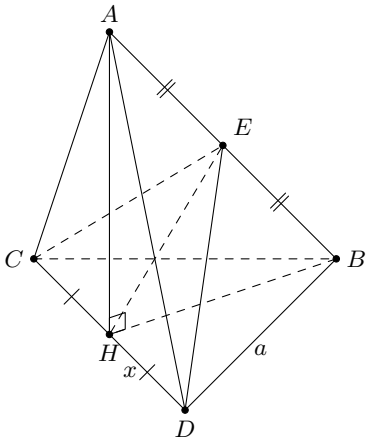
Chọn đáp án (C) □

Câu 147. Cho tứ diện $ABCD$ có $(ACD) \perp (BCD)$, $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Với giá trị nào của x thì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau?

A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{5}}{3}$.

✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm của CD và E là trung điểm của AB.
Do $AC = AD = BC = BD = a$ nên $CE \perp AB$ và $DE \perp AB$.
Suy ra $((ABC),(ABD)) = \widehat{CED}$.
$\widehat{CED} = 90° \Leftrightarrow EH = \frac{1}{2}CD = x$ (1).
Ta có $BH \perp CD$ (do $BC = BD = a$),
suy ra $BH \perp (ACD)$ (do $(ACD) \perp (BCD)$).
Suy ra $BH \perp AH \Rightarrow \triangle ABH$ vuông cân tại H.
Do đó $EH = \frac{BH\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{2}}$ (2).
Từ (1) và (2), ta có phương trình
$\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{2}} = x \Leftrightarrow a^2 - x^2 = 2x^2 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 148. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(BCD'A')$ và $(ABCD)$ bằng

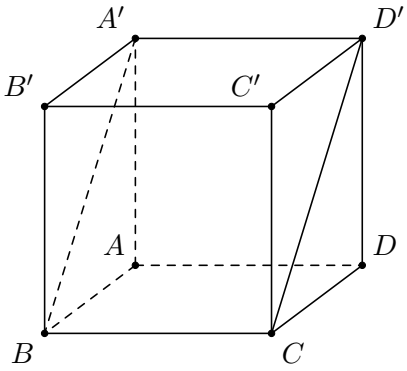
A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $90°$. **D.** $60°$.

✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases}(BCD'A') \cap (ABCD) = BC \\ BC \perp (ABB'A') \\ (BCD'A') \cap (ABB'A') = A'B \\ (ABCD) \cap (ABB'A') = AB.\end{cases}$

Nên suy ra

$$((BCD'A'), (ABCD)) = (AB; A'B) = 45^\circ.$$



Chọn đáp án A ☐

Câu 149. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ACC'A')$ bằng

A. 60°. **B.** 30°. **C.** 45°. **D.** 75°.

✍Lời giải.

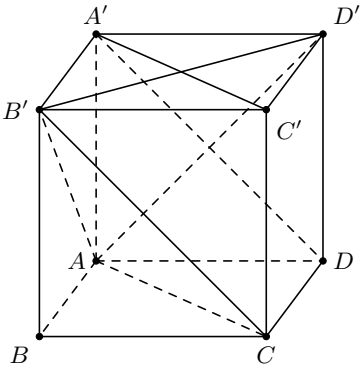
Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ACC'A')$.

Ta có $\begin{cases}B'D' \perp A'C' \\ B'D' \perp AA'\end{cases} \Rightarrow B'D' \perp (ACC'A')$; $\begin{cases}AD' \perp A'D \\ AD' \perp CD\end{cases} \Rightarrow AD' \perp (A'B'CD)$.

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ACC'A')$ chính là góc giữa AD' và $B'D'$.

Xét tam giác $AD'B'$ có $AD' = B'D' = B'A = a\sqrt{2}$.

Suy ra tam giác $AD'B'$ là tam giác đều. Vậy $\alpha = 60^\circ$.



Chọn đáp án A ☐

Câu 150. Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $3a$. Gọi α là góc giữa mặt bên và mặt đáy. Tính $\cos\alpha$.

A. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$. **C.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$.

✍Lời giải.

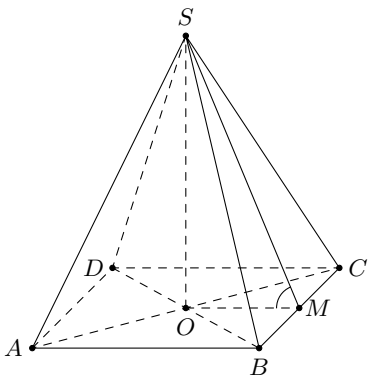
Xét hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh bên bằng $3a$, cạnh đáy bằng $2a$.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, M là trung điểm của BC.

Ta có $\begin{cases}OM \perp BC \\ SM \perp BC\end{cases} \Rightarrow$ góc giữa mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là $\alpha = \widehat{SMO}$.

Ta có $SM = \sqrt{SC^2 - MC^2} = \sqrt{(3a)^2 - a^2} = 2\sqrt{2}a, OM = a$.

Do vậy ta có $\cos\alpha = \dfrac{OM}{SM} = \dfrac{a}{2\sqrt{2}a} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.



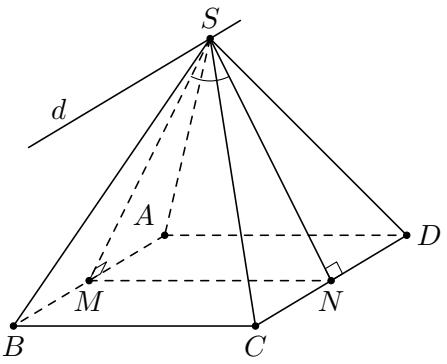
Chọn đáp án A ☐

Câu 151. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Tính cô-sin của góc giữa hai mặt bên không liền kề nhau.

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

✍Lời giải.

Ta có giao tuyến của (SAB) và (SCD) là đường thẳng d đi qua điểm S và song song với AB.
Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.
Tam giác SAB cân tại S nên $SM \perp CD \Rightarrow SM \perp d$.
Tương tự, $SN \perp d$. Do đó, góc tạo bởi hai mặt bên (SAB) và (SCD) là góc tạo bởi hai đường thẳng SM và SN.
Ta tính được $SM = SN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $MN = a$ và



$$\cos\widehat{MSN} = \frac{SM^2 + SN^2 - MN^2}{2SM \cdot SN} = \frac{\dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{3a^2}{4} - a^2}{2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3} > 0.$$

Vậy $\cos((SAB),(SCD)) = \cos(SM,SN) = \cos\widehat{MSN} = \dfrac{1}{3}$.

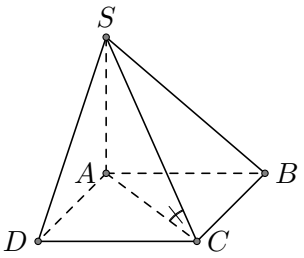
Chọn đáp án (A) □

Câu 152. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa SC và $(ABCD)$.

A. $30°$. **B**. $45°$. **C**. $60°$. **D**. $30°$.

✍Lời giải.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$, suy ra góc giữa SC và $(ABCD)$ là $\widehat{SCA}$.
Do đó $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30°$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 153. Có một khối đá trắng hình lập phương được sơn đen toàn bộ mặt ngoài. Người ta xẻ khối đá đó thành 125 khối đá nhỏ bằng nhau và cũng là hình lập phương. Hỏi có bao nhiêu khối đá nhỏ mà không có mặt nào bị sơn đen?

A. 45. **B**. 48. **C**. 36. **D**. 27.

✍Lời giải.

Ta có $125 - (2 \cdot 25 + 3 \cdot 16) = 27$.

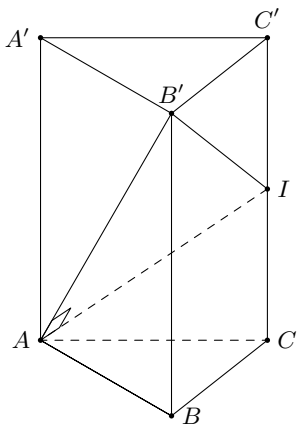
Chọn đáp án (D) □

Câu 154. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân, $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120°$ và cạnh bên $BB' = a$. Tính cô-sin góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$, với I là trung điểm CC'.

A. $\dfrac{\sqrt{30}}{8}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C**. $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

✍Lời giải.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.



Ta có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin\widehat{BAC} = \dfrac{1}{2}a \cdot a \cdot \sin 120^\circ = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Xét tam giác ABC,

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\widehat{BAC}} \\ &= \sqrt{a^2 + a^2 - 2a \cdot a\cos 120^\circ} = a\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Mặt khác,

— $AB' = \sqrt{AA'^2 + A'B'^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

— $AI = \sqrt{AC^2 + CI^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

— $B'I = \sqrt{B'C'^2 + C'I^2} = \sqrt{3a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.

Mà $AB'^2 + AI^2 = 2a^2 + \dfrac{5a^2}{4} = \dfrac{13a^2}{4} = B'I^2$ nên $\triangle AB'I$ vuông tại A.

Ta có $S_{AB'I} = \dfrac{1}{2}AB' \cdot AI = \dfrac{1}{2}a\sqrt{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{5}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{10}}{4}$.

Tam giác ABC là hình chiếu vuông góc của tam giác $AB'I$ trên (ABC), suy ra

$$S_{ABC} = S_{AB'I} \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{S_{ABC}}{S_{AB'I}} = \frac{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{a^2\sqrt{10}}{4}} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

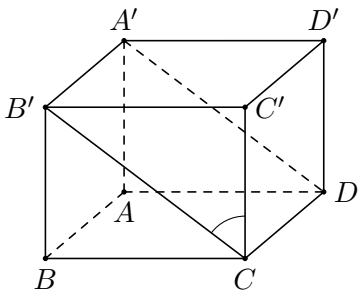
Chọn đáp án (D) □

Câu 155. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(CDD'C')$ bằng

A. 30°. **B**. 60°. **C**. 45°. **D**. 90°.

✍Lời giải.

Ta thấy $(A'B'CD) \cap (CDD'C') = CD$, $B'C \perp CD$, $CC' \perp CD$ nên góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(C'CDD')$ là góc giữa $B'C$ và CC' là $\widehat{B'CC'} = 45^\circ$.



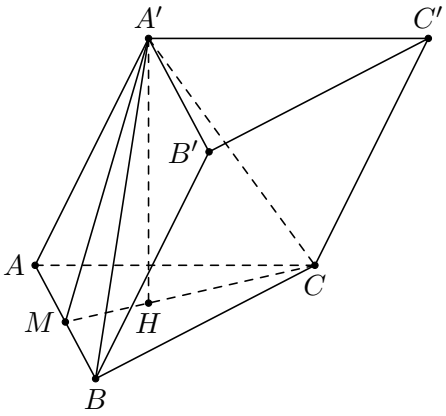
Chọn đáp án (C) □

Câu 156. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $A'A = A'B = A'C = \dfrac{a\sqrt{15}}{6}$. Góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC) bằng

A. 30°. **B**. 45°. **C**. 60°. **D**. 75°.

✍Lời giải.

Gọi M là trung điểm AB, H là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó $A'H \perp (ABC)$ và $(A'HM) \perp AB$.
Suy ra $((ABB'A');(ABC)) = \widehat{A'MH}$.
Ta có $MH = \dfrac{CM}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ và $CH = 2MH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$,
suy ra $A'H = \sqrt{A'C^2 - CH^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.
Xét $\triangle A'MH$, ta có $\tan\widehat{A'MH} = \dfrac{A'H}{MH} = 1$.
Vậy $((ABB'A');(ABC)) = 45°$.



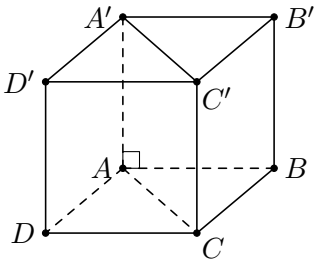
Chọn đáp án (B) □

Câu 157. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(ACC'A')$ là

A. $45°$. **B**. $90°$. **C**. $30°$. **D**. $60°$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}(ABB'A') \cap (ACC'A') = AA' \\ A'C' \perp AA' \\ A'B' \perp AA'\end{cases}$
$\Rightarrow [(ABB'A'),(ACC'A')] = \widehat{B'A'C'} = 45°$.



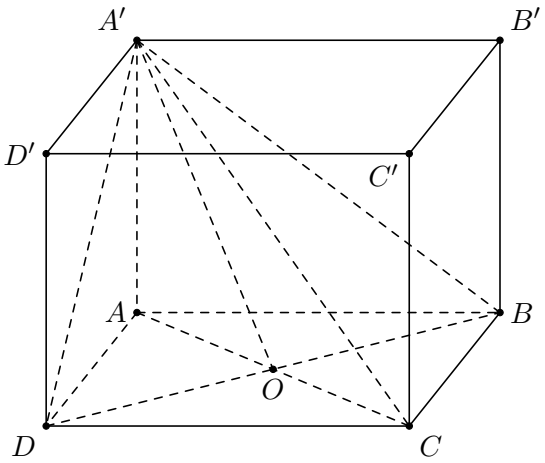
Chọn đáp án (A) □

Câu 158. Cho hình lập phương $ABCDA'B'C'D'$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (ABC). Tính $\tan\varphi$.

A. $\tan\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B**. $\tan\varphi = \sqrt{2}$. **C**. $\tan\varphi = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$. **D**. $\tan\varphi = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Lời giải.

— Gọi cạnh của hình lập phương là a, tâm của đáy là O.
— Ta có $\begin{cases}(A'DB) \cap (ABC) = DB \\ OA' \perp DB \\ OA \perp DB\end{cases}$
$\Rightarrow ((A'BD),(ABC)) = (OA',OA) = \widehat{A'OA}$.
— $\tan\varphi = \tan\widehat{A'OA} = \dfrac{AA'}{OA} = \dfrac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$.



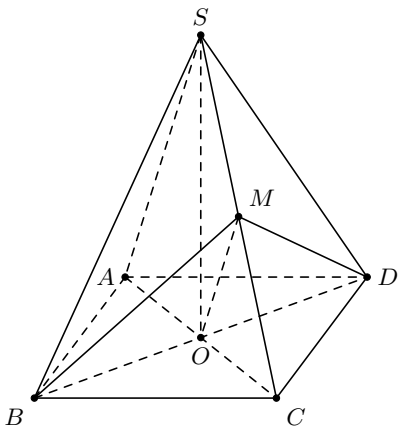
Chọn đáp án (B) □

Câu 159. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của SC. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$.

A. $\varphi = 60°$. **B**. $\varphi = 30°$. **C**. $\varphi = 45°$. **D**. $\varphi = 90°$.

Lời giải.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Khi đó $SO \perp (ABCD)$.
Vì $BD \perp SO$ và $BD \perp AC$ nên $BD \perp (SAC)$.
Suy ra $BD \perp OM$.
Lại có $OC \perp BD$ và $(MBD) \cap (ABCD) = BD$.
Vậy góc giữa (MBD) và $(ABCD)$ bằng góc giữa OM và OC.
Ta có $OM = CM = \dfrac{a}{2}$ và $OC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Trong tam giác OMC có $OM^2 + CM^2 = \dfrac{a^2}{2} = OC^2$.
Vậy tam giác OMC vuông cân tại M.



Do đó góc tạo bởi OM và OC bằng $\widehat{COM} = 45^\circ$ hay $\varphi = 45^\circ$.

Chọn đáp án (C) □

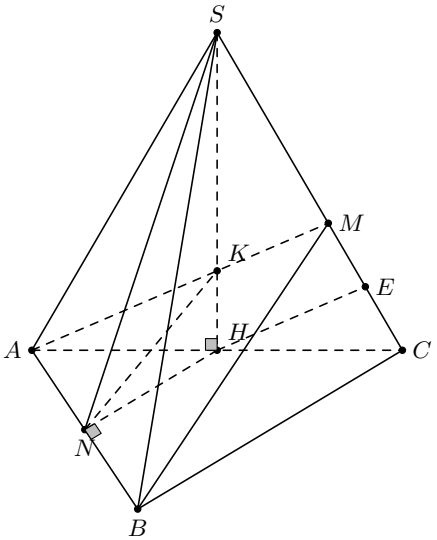
Câu 160. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B và $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Tam giác SAC là tam giác đều và thuộc mặt phẳng vuông góc với (ABC). Xét điểm M thuộc cạnh SC sao cho mặt phẳng (MAB) tạo với hai mặt phẳng (SAB); (ABC) góc bằng nhau. Tỉ số $\dfrac{MS}{MC}$ có giá trị bằng

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AC, suy ra $SH \perp (ABC)$.
Gọi N là trung điểm của AB, suy ra $AB \perp (SHN)$.
Lấy K là giao điểm của AM, SH. Do đó $\begin{cases} ((ABM),(ABC)) = \widehat{HNK} \\ ((ABM),(SAB)) = \widehat{KNS}. \end{cases}$
Theo giả thiết, NK là phân giác của $\widehat{SNH}$.
Giả sử $AB = 1 \Rightarrow BC = \sqrt{3} \Rightarrow AC = 2 \Rightarrow SH = \sqrt{3}$.
Mặt khác $HN = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Ta có $SN = \sqrt{HN^2 + SH^2} = \dfrac{\sqrt{15}}{2} \Rightarrow \dfrac{KH}{KS} = \dfrac{HN}{SN} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ (tính chất phân giác).
Gọi E là trung điểm của CM, theo định lí Ta-lét thì

$$\frac{ME}{MS} = \frac{KH}{KS} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{MC}{MS} = \frac{2ME}{MS} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{MS}{MC} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$



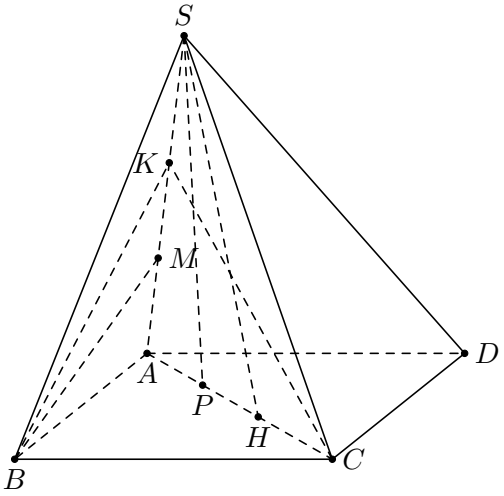
Chọn đáp án (A) □

Câu 161. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 3$, $BC = 4$. Tam giác SAC nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng SA bằng 4. Côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{34}}{34}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{34}}{17}$. **D.** $\dfrac{5\sqrt{34}}{17}$.

✍Lời giải.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B ta có
$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
Gọi K là chân đường vuông góc kẻ từ C xuống SA. Xét $\triangle CAK$ vuông tại K ta có
$AK = \sqrt{CA^2 - CK^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.
Kẻ $SH \perp AC$, $H \in AC$.
Vì $(SAC) \perp (ABCD)$ và $(SAC) \cap (ABCD) = AC$ nên $SA \perp (ABCD)$.
Kẻ $SH \perp AC$, $H \in AC$ và $KP // SH$, $P \in AC$ thì $KP \perp (ABCD)$.



Xét $\triangle BAC$ vuông tại B và $\triangle KAC$ vuông tại K ta thấy các cạnh tương ứng bằng nhau và KP là đường cao của $\triangle KAC$ nên BP là đường cao của $\triangle BAC$.
Kẻ $PM \perp KA$, $M \in KA$. Vì $KA \perp PB$ và $KA \perp PM$ nên $KA \perp (PMB)$. Suy ra $KA \perp MB$.
Như vậy, góc giữa mặt phẳng (SAC) và (SAB)bằng góc $\widehat{PMB}$.
Xét $\triangle KAC$ vuông tại K ta có $KP \cdot AC = KA \cdot KC \Rightarrow KP = \dfrac{KA \cdot KC}{AC} = \dfrac{3 \cdot 4}{5} = \dfrac{12}{5}$.
Suy ra $BP = KP = \dfrac{12}{5}$.
Xét $\triangle KPA$ vuông tại P ta có $PA = \sqrt{KA^2 - KP^2} = \sqrt{3^2 - \left(\dfrac{12}{5}\right)^2} = \dfrac{9}{5}$.
Lại có $PM \cdot AK = PA \cdot PK \Rightarrow PM = \dfrac{PA \cdot PK}{AK} = \dfrac{36}{25}$.
Xét $\triangle PMB$ vuông tại P ta có $MB = \sqrt{PB^2 + PM^2} = \sqrt{\left(\dfrac{12}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{36}{25}\right)^2} = \dfrac{12\sqrt{34}}{25}$.
Ta có $\cos \widehat{PMB} = \dfrac{MP}{MB} = \dfrac{36}{25} \cdot \dfrac{25}{12\sqrt{34}} = \dfrac{3\sqrt{34}}{34}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 162. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$, $SA = \sqrt{3}AB$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD), giá trị $\cos\alpha$ bằng

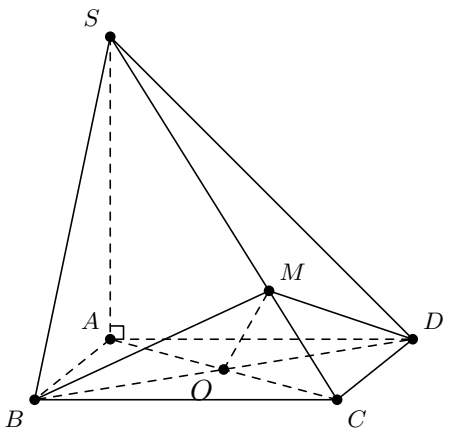
A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

✍**Lời giải.**
Gọi O là giao điểm của AC và BD. Kẻ $OM \perp SC$, suy ra $DB \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC \Rightarrow SC \perp (BDM)$.
Góc α bằng hoặc bù với $\widehat{DMB}$ với

$$BM^2 = \frac{SB^2 \cdot BC^2}{SB^2 + BC^2} = \frac{4}{5}.$$

Xét tam giác BMD, có

$$\cos \widehat{DMB} = -\frac{1}{4} < 0 \Rightarrow \cos\alpha = \left|\cos \widehat{DMB}\right| = \frac{1}{4}.$$



Chọn đáp án (A) □

Câu 163. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ bằng bao nhiêu?

A. $45°$. **B.** $90°$. **C.** $0°$. **D.** $60°$.

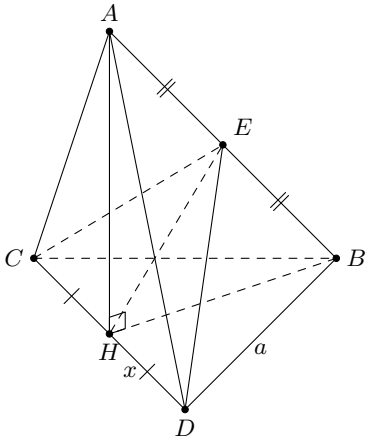
✍**Lời giải.**

Hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ song song nên góc giữa chúng bằng $0°$.
Chọn đáp án C □

Câu 164. Cho tứ diện $ABCD$ có $(ACD) \perp (BCD)$, $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Với giá trị nào của x thì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau?

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.

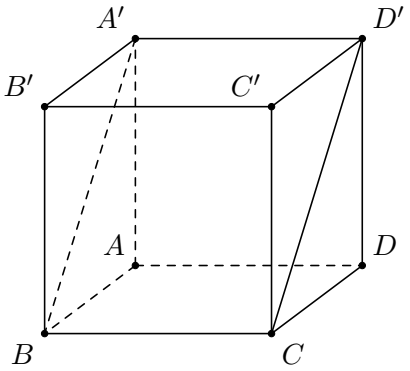


Gọi H là trung điểm của CD và E là trung điểm của AB.
Do $AC = AD = BC = BD = a$ nên $CE \perp AB$ và $DE \perp AB$.
Suy ra $((ABC),(ABD)) = \widehat{CED}$.
$\widehat{CED} = 90° \Leftrightarrow EH = \dfrac{1}{2}CD = x \quad (1)$.
Ta có $BH \perp CD$ (do $BC = BD = a$),
suy ra $BH \perp (ACD)$ (do $(ACD) \perp (BCD)$).
Suy ra $BH \perp AH \Rightarrow \triangle ABH$ vuông cân tại H.
Do đó $EH = \dfrac{BH\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{2}} \quad (2)$.
Từ (1) và (2), ta có phương trình
$\dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{2}} = x \Leftrightarrow a^2 - x^2 = 2x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
Chọn đáp án B □

Câu 165. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(BCD'A')$ và $(ABCD)$ bằng

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $90°$. **D.** $60°$.

Lời giải.



Ta có $\begin{cases} (BCD'A') \cap (ABCD) = BC \\ BC \perp (ABB'A') \\ (BCD'A') \cap (ABB'A') = A'B \\ (ABCD) \cap (ABB'A') = AB. \end{cases}$
Nên suy ra

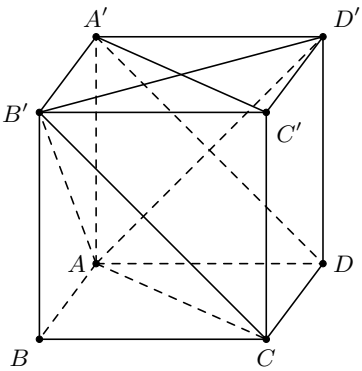
$$((BCD'A'),(ABCD)) = (AB; A'B) = 45°.$$

Chọn đáp án A □

Câu 166. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ACC'A')$ bằng

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $75°$.

Lời giải.



Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ACC'A')$.
Ta có $\begin{cases} B'D' \perp A'C' \\ B'D' \perp AA' \end{cases} \Rightarrow B'D' \perp (ACC'A')$; $\begin{cases} AD' \perp A'D \\ AD' \perp CD \end{cases} \Rightarrow AD' \perp (A'B'CD)$.
Suy ra góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ACC'A')$ chính là góc giữa AD' và $B'D'$.
Xét tam giác $AD'B'$ có $AD' = B'D' = B'A = a\sqrt{2}$.
Suy ra tam giác $AD'B'$ là tam giác đều. Vậy $\alpha = 60°$.

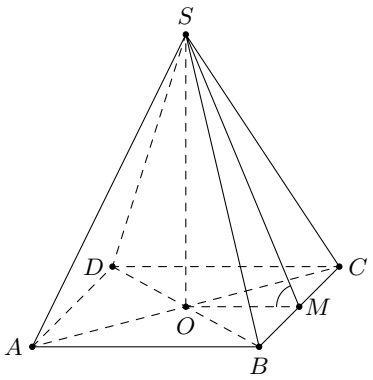
Chọn đáp án A □

Câu 167. Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $3a$. Gọi α là góc giữa mặt bên và mặt đáy. Tính $\cos\alpha$.

A. $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. **C.** $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$.

✍Lời giải.

Xét hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh bên bằng $3a$, cạnh đáy bằng $2a$.
Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, M là trung điểm của BC.



Ta có $\begin{cases}OM\perp BC\\SM\perp BC\end{cases}\Rightarrow$ góc giữa mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là $\alpha=\widehat{SMO}$.

Ta có $SM=\sqrt{SC^2-MC^2}=\sqrt{(3a)^2-a^2}=2\sqrt{2}a, OM=a$.

Do vậy ta có $\cos\alpha=\dfrac{OM}{SM}=\dfrac{a}{2\sqrt{2}a}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

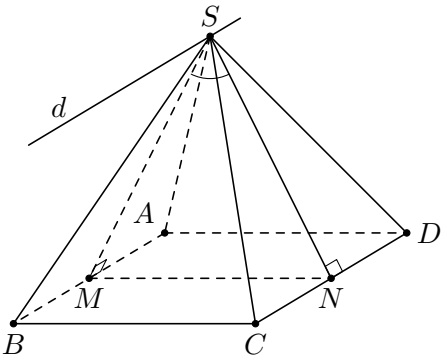
Chọn đáp án A □

Câu 168. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Tính cô-sin của góc giữa hai mặt bên không liền kề nhau.

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

✍Lời giải.

Ta có giao tuyến của (SAB) và (SCD) là đường thẳng d đi qua điểm S và song song với AB.
Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.
Tam giác SAB cân tại S nên $SM\perp CD\Rightarrow SM\perp d$.
Tương tự, $SN\perp d$. Do đó, góc tạo bởi hai mặt bên (SAB) và (SCD) là góc tạo bởi hai đường thẳng SM và SN.



Ta tính được $SM=SN=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $MN=a$ và

$$\cos\widehat{MSN}=\frac{SM^2+SN^2-MN^2}{2SM\cdot SN}=\frac{\dfrac{3a^2}{4}+\dfrac{3a^2}{4}-a^2}{2\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{3}>0.$$

Vậy $\cos\left((SAB),(SCD)\right)=\cos(SM,SN)=\cos\widehat{MSN}=\dfrac{1}{3}$.

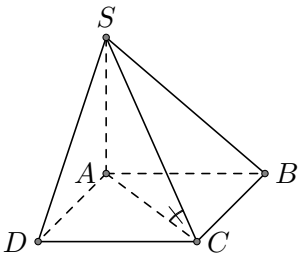
Chọn đáp án A □

Câu 169. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$ và $SA=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa SC và $(ABCD)$.

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 30°.

✍Lời giải.

Vì $SA\perp(ABCD)$ nên AC là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$, suy ra góc giữa SC và $(ABCD)$ là $\widehat{SCA}$.



Do đó $\tan\widehat{SCA}=\dfrac{SA}{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\widehat{SCA}=30^\circ$.

Chọn đáp án A □

Câu 170. Có một khối đá trắng hình lập phương được sơn đen toàn bộ mặt ngoài. Người ta xẻ khối đá đó thành 125 khối đá nhỏ bằng nhau và cũng là hình lập phương. Hỏi có bao nhiêu khối đá nhỏ mà không có mặt nào bị sơn đen?

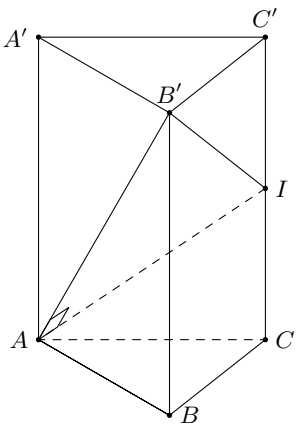
A. 45. **B.** 48. **C.** 36. **D.** 27.

✍Lời giải.
Ta có $125-(2\cdot 25+3\cdot 16)=27$.
Chọn đáp án D □

Câu 171. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân, $AB=AC=a$, $\widehat{BAC}=120^\circ$ và cạnh bên $BB'=a$. Tính cô-sin góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$, với I là trung điểm CC'.

A. $\dfrac{\sqrt{30}}{8}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

✍Lời giải.
Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.



Ta có $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot \sin\widehat{BAC}=\dfrac{1}{2}a\cdot a\cdot \sin 120^\circ=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
Xét tam giác ABC,

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\widehat{BAC}} \\ &= \sqrt{a^2+a^2-2a\cdot a\cos 120^\circ}=a\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Mặt khác,

— $AB'=\sqrt{AA'^2+A'B'^2}=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$.

— $AI=\sqrt{AC^2+CI^2}=\sqrt{a^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

— $B'I=\sqrt{B'C'^2+C'I^2}=\sqrt{3a^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.

Mà $AB'^2+AI^2=2a^2+\dfrac{5a^2}{4}=\dfrac{13a^2}{4}=B'I^2$ nên $\triangle AB'I$ vuông tại A.
Ta có $S_{AB'I}=\dfrac{1}{2}AB'\cdot AI=\dfrac{1}{2}a\sqrt{2}\cdot\dfrac{a\sqrt{5}}{2}=\dfrac{a^2\sqrt{10}}{4}$.
Tam giác ABC là hình chiếu vuông góc của tam giác $AB'I$ trên (ABC), suy ra

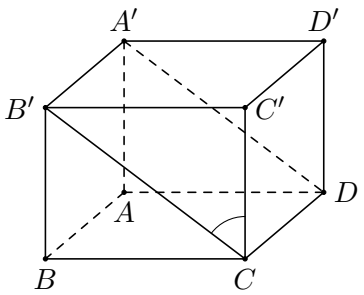
$$S_{ABC}=S_{AB'I}\cdot\cos\alpha\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{S_{ABC}}{S_{AB'I}}=\frac{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{a^2\sqrt{10}}{4}}=\frac{\sqrt{30}}{10}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 172. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(CDD'C')$ bằng

A. 30°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 90°.

✍Lời giải.
Ta thấy $(A'B'CD)\cap(CDD'C')=CD$, $B'C\perp CD$, $CC'\perp CD$ nên góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(C'CDD')$ là góc giữa $B'C$ và CC' là $\widehat{B'CC'}=45^\circ$.



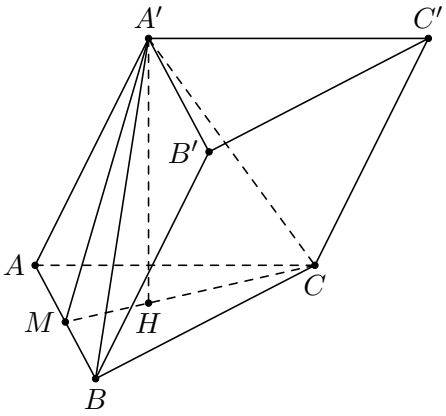
Chọn đáp án C □

Câu 173. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $A'A=A'B=A'C=\dfrac{a\sqrt{15}}{6}$. Góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC) bằng

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 75°.

✍Lời giải.

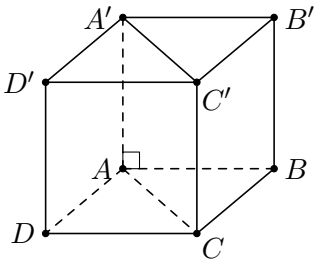
Gọi M là trung điểm AB, H là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó $A'H \perp (ABC)$ và $(A'HM) \perp AB$.
Suy ra $((ABB'A');(ABC)) = \widehat{A'MH}$.
Ta có $MH = \dfrac{CM}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ và $CH = 2MH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$,
suy ra $A'H = \sqrt{A'C^2 - CH^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.
Xét $\triangle A'MH$, ta có $\tan \widehat{A'MH} = \dfrac{A'H}{MH} = 1$.
Vậy $((ABB'A');(ABC)) = 45°$.



Chọn đáp án (B) □

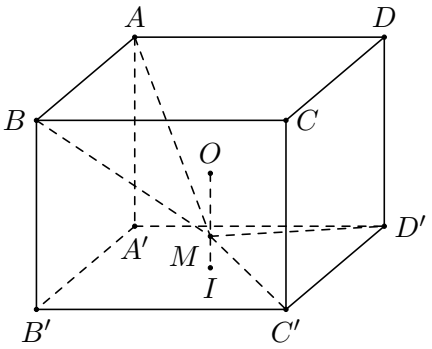
Câu 174. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(ACC'A')$ là
A. $45°$. **B**. $90°$. **C**. $30°$. **D**. $60°$.

✍Lời giải.
Ta có $\begin{cases} (ABB'A') \cap (ACC'A') = AA' \\ A'C' \perp AA' \\ A'B' \perp AA' \end{cases}$
$\Rightarrow [(ABB'A'),(ACC'A')] = \widehat{B'A'C'} = 45°$.

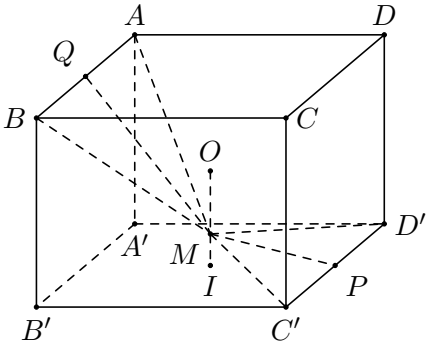


Chọn đáp án (A) □

Câu 175.
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $MO = 2MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó cô-sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng
A. $\dfrac{6\sqrt{85}}{85}$. **B**. $\dfrac{7\sqrt{85}}{85}$. **C**. $\dfrac{17\sqrt{13}}{65}$. **D**. $\dfrac{6\sqrt{13}}{65}$.



✍Lời giải.
Không mất tính tổng quát, ta giả sử các cạnh của hình lập phương bằng 6.
Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của $D'C'$ và AB. Khi đó ta có $MP = \sqrt{IM^2 + IP^2} = \sqrt{10}$, $MQ = \sqrt{34}$, $PQ = 6\sqrt{2}$.
Áp dụng định lí cô-sin ta được
$\cos \widehat{PMQ} = \dfrac{MP^2 + MQ^2 - PQ^2}{2MP \cdot MQ} = \dfrac{-14}{\sqrt{340}}$.
Góc α là góc giữa hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) ta có
$\cos \alpha = \dfrac{14}{\sqrt{340}} = \dfrac{7\sqrt{85}}{85}$.

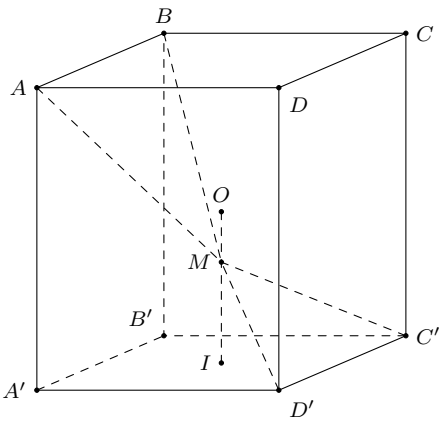


Chọn đáp án (B) □

Câu 176.

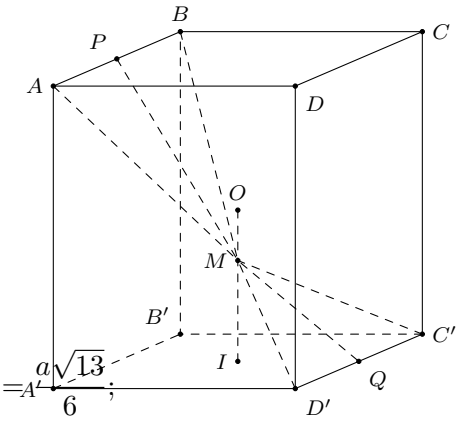
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$ và M là điểm thuộc OI sao cho $MO = \dfrac{1}{2}MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó, cô-sin góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng

A. $\dfrac{6\sqrt{13}}{65}$. **B.** $\dfrac{7\sqrt{85}}{85}$. **C.** $\dfrac{6\sqrt{85}}{85}$. **D.** $\dfrac{17\sqrt{13}}{65}$.



✍Lời giải.

Giả sử hình lập phương có độ dài cạnh bằng a.
Hai mặt phẳng $(MC'D')$, (MAB) lần lượt chứa hai đường thẳng $C'D'$, AB và $AB \parallel C'D'$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng này là đường thẳng đi qua M và song song với AB.
Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của $AB, C'D'$. Các tam giác $MC'D'$, MAB cân ở M nên $MP \perp C'D'$, $MQ \perp AB$.
Do đó, nếu α là góc giữa hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) thì $\cos\alpha = |\cos\widehat{PMQ}|$ (1)
Ta có



$$MQ = \sqrt{MI^2 + IQ^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}OI\right)^2 + IQ^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{6};$$

$$MP = \sqrt{\left(\frac{4}{3}OI\right)^2 + IQ^2} = \frac{5a}{6}; PQ = AD' = a\sqrt{2};$$

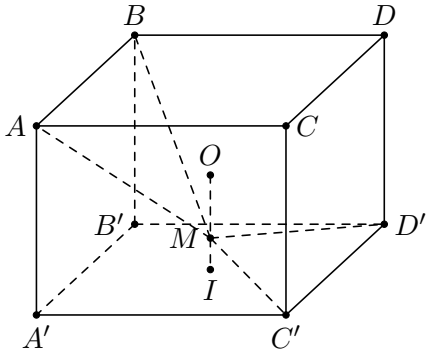
$$\cos\alpha = |\cos\widehat{PMQ}| = \left|\frac{MP^2 + MQ^2 - PQ^2}{2\cdot MP\cdot MQ}\right| = \left|\frac{\dfrac{25a^2}{36} + \dfrac{13a^2}{36} - 2a^2}{2\cdot\dfrac{5a}{6}\cdot\dfrac{a\sqrt{13}}{6}}\right| = \frac{17\sqrt{13}}{65}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 177.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và điểm M thuộc đoạn OI sao cho $MO = 2MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng

A. $\dfrac{6\sqrt{13}}{65}$. **B.** $\dfrac{7\sqrt{85}}{85}$. **C.** $\dfrac{17\sqrt{13}}{65}$. **D.** $\dfrac{6\sqrt{85}}{85}$.



✍Lời giải.

Do $AB \parallel C'D'$ nên giao tuyến của (MAB) và $(MC'D')$ là đường thẳng $\Delta \parallel AB \parallel C'D'$.
Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của $D'C'$ và AB ta có $\begin{cases} MP \perp C'D' \\ MQ \perp AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MP \perp \Delta \\ MQ \perp \Delta. \end{cases}$
Như vậy góc giữa (MAB) và $(MC'D')$ là góc giữa MP và MQ.

Không mất tính tổng quát, ta cho cạnh hình lập phương là 6.

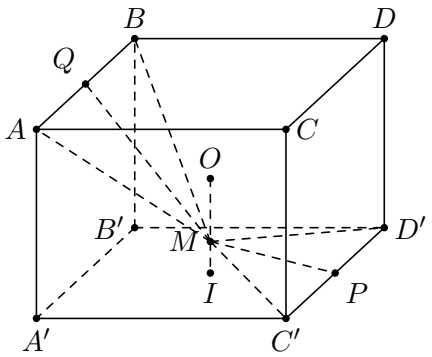
Khi đó $\begin{cases} MP = \sqrt{IM^2 + IP^2} = \sqrt{10} \\ MQ = \sqrt{34}, PQ = 6\sqrt{2}. \end{cases}$

Áp dụng định lí cô-sin cho $\triangle MPQ$ ta được

$$\cos \widehat{PMQ} = \frac{MP^2 + MQ^2 - PQ^2}{2MP \cdot MQ} = \frac{-14}{\sqrt{340}}.$$

Góc α là góc giữa hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) ta có

$$\cos \alpha = \frac{14}{\sqrt{340}} = \frac{7\sqrt{85}}{85} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{6\sqrt{85}}{85}.$$



Chọn đáp án D □

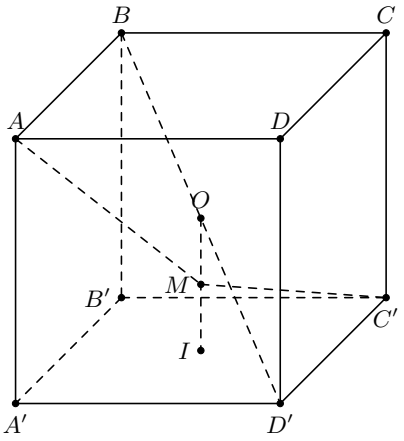
Câu 178. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O.

Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $OM = \frac{1}{2}MI$ (tham khảo hình vẽ).

Khi đó sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng

A. $\frac{17\sqrt{13}}{65}$. **B.** $\frac{6\sqrt{85}}{85}$.

C. $\frac{7\sqrt{85}}{85}$. **D.** $\frac{6\sqrt{13}}{65}$.



✍Lời giải.

Không mất tính tổng quát ta chọn cạnh của hình lập phương bằng 6.

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của $C'D'$ và AB.

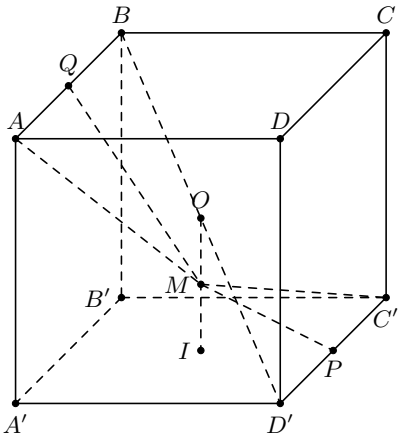
Suy ra $\begin{cases} MP \perp C'D' \\ MQ \perp AB \end{cases}$

$\Rightarrow ((MC'D'); (MAB)) = (MH; MK) = \alpha$.

Khi đó $\begin{cases} MP = \sqrt{MI^2 + IP^2} = \sqrt{13} \\ MQ = 5;\ PQ = 6\sqrt{2}. \end{cases}$

Suy ra $\cos \widehat{PMQ} = \frac{MP^2 + MQ^2 - PQ^2}{2MP \cdot MQ} = -\frac{17\sqrt{13}}{65}$.

Khi đó α là góc giữa $(MC'D')$ và (MAB): $\sin \alpha = \frac{6\sqrt{13}}{65}$.

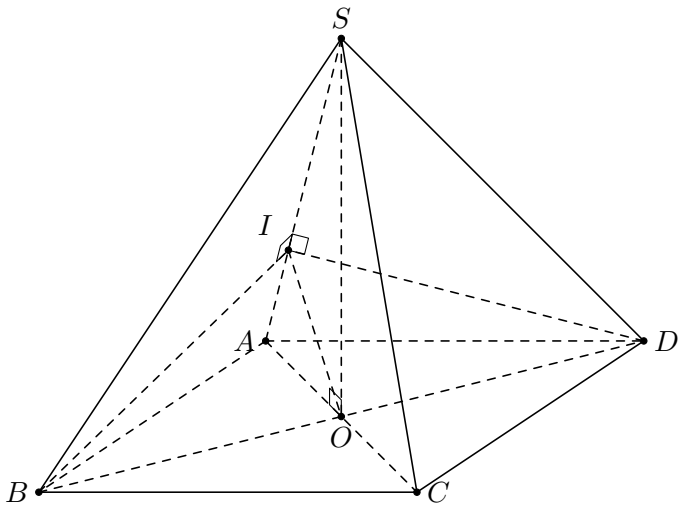


Chọn đáp án D □

Câu 179. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thoi $ABCD$ tâm O, SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = AB = a$, $SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính số đo góc φ giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

A. $\varphi = 30°$. **B.** $\varphi = 45°$. **C.** $\varphi = 90°$. **D.** $\varphi = 60°$.

✍Lời giải.



Dựng $BI \perp SA$, suy ra $DI \perp SA$. Do đó $((SAB),(SAD)) = (BI, DI)$. Ta có

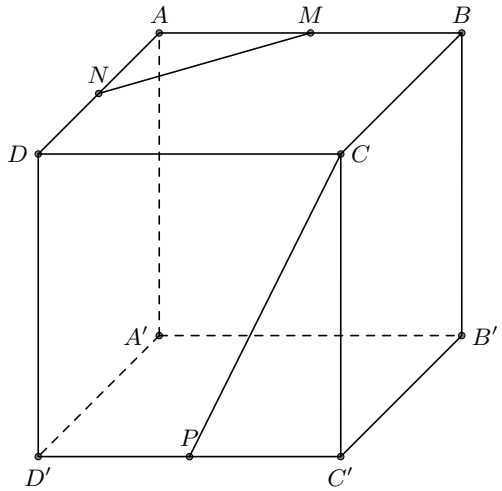
$$AO = \sqrt{SA^2 - SO^2} = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}, \quad SB = \sqrt{SO^2 + BO^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Xét $\triangle SAB$, với $p = \dfrac{SA + AB + SB}{2} = \dfrac{(3+\sqrt{3})a}{3}$, ta có

$$\frac{BI \cdot SA}{2} = \sqrt{p(p-SA)(p-SB)(p-AB)} \Rightarrow BI = \frac{2a\sqrt{2}}{3}.$$

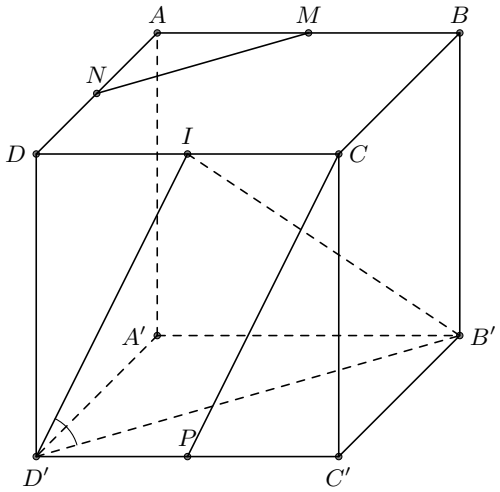
Xét $\triangle BID$ cân tại I nên $\widehat{BID} = 2\widehat{BIO}$.
Với $\sin\widehat{BIO} = \dfrac{BO}{BI} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{BIO} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BID} = 120^\circ$.
Vậy $((SAB),(SAD)) = (BI, DI) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 180. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $AB, AD, C'D'$. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng MN và CP.



A. $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của CD, dễ thấy $D'ICP$ là hình bình hành do có $CI = D'P$ và $CI \parallel D'P$, từ đó $CP \parallel D'I$, mặt khác ta có $MN \parallel D'B'$ nên $(MN, CP) = (D'B', D'I) = \widehat{ID'B'} = \alpha$.
Không mất tính tổng quát gọi $a\,(a > 0)$ là độ dài của cạnh hình lập phương. Khi đó tính được

— $IB' = \sqrt{IC^2 + CB'^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + 2a^2} = \dfrac{3a}{2}$.

— $B'D' = \sqrt{2}a\,; ID' = \sqrt{DD'^2 + ID^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}a}{2}$.
Do đó $\cos\alpha = \dfrac{D'I^2 + D'B'^2 - IB'^2}{2 \cdot ID' \cdot D'B'} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

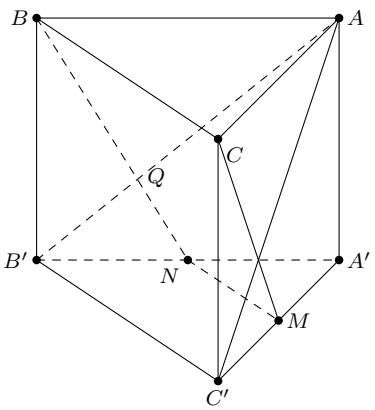
Chọn đáp án A □

Câu 181.

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA" = 2$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm $A'C'$ và $A'B'$. Tính cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(BCMN)$.

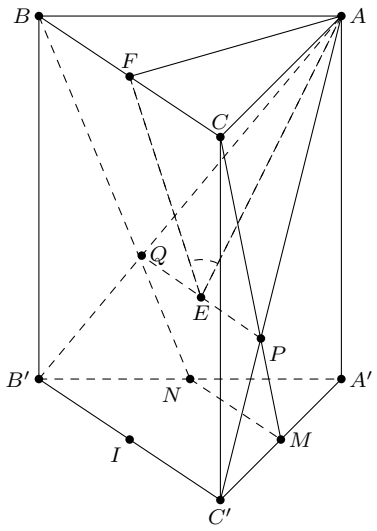
A. $\dfrac{\sqrt{13}}{65}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{13}}{130}$.

C. $-\dfrac{\sqrt{13}}{130}$. **D.** $-\dfrac{\sqrt{13}}{65}$.



✍**Lời giải.**

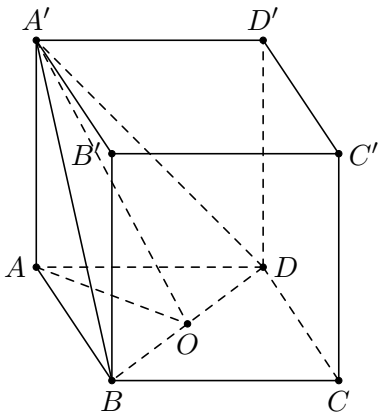
Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của AC' với MC và giao điểm của BN với $B'A$. Ta có PQ là giao tuyến của $(AB'C')$ với $(BCMN)$. Dễ dàng thấy được $PQ \parallel B'C'$.
Vì $\triangle AB'C'$ cân tại A nên gọi I là trung điểm của $B'C'$ thì AI vuông góc với $B'C'$ và đo đó $AI \perp PQ$.
Gọi E là giao điểm của AI với PQ, ta được E là trung điểm của PQ.
Ta có tứ giác $BCMN$ là hình thang cân nên lấy F, K lần lượt là trung điểm của BC và MN. Ta có $FK \perp PQ$ và đi qua trung điểm E của PQ.



Vậy góc tạo bởi 2 mặt phẳng $(AB'C')$ và $(BCMN)$ là góc tạo bởi hai đường thẳng FK và AI.
Ta có $AC' = \sqrt{CC'^2 + AC^2} = 4a$, $AF = 3a$.
Ta tính được $AI = \sqrt{AC'^2 - IC'^2} = \sqrt{16a^2 - 3a^2} = a\sqrt{13}$.
Do $\dfrac{AP}{AC'} = \dfrac{AE}{AI} = \dfrac{2}{3}$ nên $AE = \dfrac{2\sqrt{13}}{3}$.
Ta có độ dài FK bằng độ dài đường cao kẻ từ C của hình thang $BCMN$. Do đó $FK = \dfrac{5a}{2}$.
Vậy $EF = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{5a}{2} = \dfrac{5a}{3}$
Xét $\triangle EFA$, ta có $\cos \widehat{EFA} = \dfrac{AE^2 + EF^2 - AF^2}{2AE \cdot AF} = -\dfrac{\sqrt{13}}{65}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 182.
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ). Tính giá trị sin của góc giữa hai mặt phẳng (BDA') và $(ABCD)$.

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.



✍Lời giải.
Ta có $AA' \perp (ABCD)$. Kẻ $AO \perp BD$ thì suy ra $A'O \perp BD$. Suy ra góc giữa (BDA') và $(ABCD)$ là góc giữa AO và $A'O$.

$$\sin \widehat{AOA'} = \frac{AA'}{A'O} = \frac{a}{\dfrac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 183. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, M là trung điểm AB, N là trung điểm AC, $(SMC) \perp (ABC)$, $(SBN) \perp (ABC)$, G là trọng tâm tam giác ABC, I là trung điểm BC. Khẳng định nào sau đây đúng?

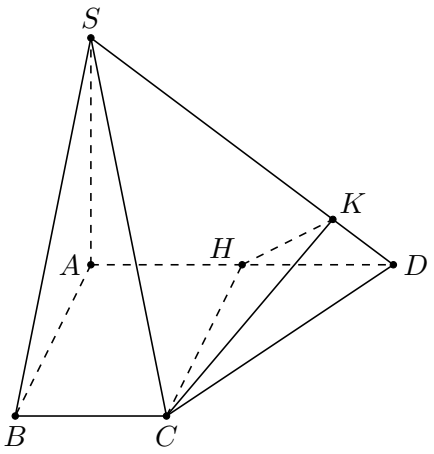
A. $SI \perp (ABC)$. **B.** $SA \perp (ABC)$. **C.** $IA \perp (SBC)$. **D.** $SG \perp (ABC)$.

✍Lời giải.
Do (SMC) và (SBN) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên giao tuyến SG của hai mặt này vuông góc với (ABC).
Chọn đáp án (D) □

Câu 184. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, biết $AB = BC = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Xác định số đo của góc φ là góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SAD).

A. $\varphi = 60°$. **B**. $\varphi = 45°$. **C**. $\varphi = 30°$. **D**. $\varphi = 90°$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của AD, K là hình chiếu vuông góc của H trên cạnh SD. Ta có $CH \perp (SAD) \Rightarrow CH \perp SD$ mà $SD \perp HK$ nên $SD \perp (CHK)$, suy ra

$$\varphi = ((SAD), (SCD)) = \widehat{HKC}.$$

Dễ thấy $HK = \dfrac{SA \cdot HD}{SD} = \dfrac{a\sqrt{2} \cdot a}{a\sqrt{6}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $HC = AB = a$, suy ra

$$\tan\varphi = \frac{HC}{HK} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = 60°.$$

Chọn đáp án A □

Câu 185. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Qua một đường thẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

B. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

C. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

D. Các mặt phẳng cùng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước thì luôn chứa một đường thẳng cố định.

Lời giải.

— Mệnh đề "Qua một đường thẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước" **sai** vì nếu đường thẳng cho trước vuông góc với mặt phẳng cho trước thì có vô số mặt phẳng thỏa mãn.

— Mệnh đề "Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau" **sai** vì hai mặt phẳng đó có thể song song hoặc trùng nhau.

— Mệnh đề "Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau" **sai** vì hai mặt phẳng đó có thể trùng nhau.

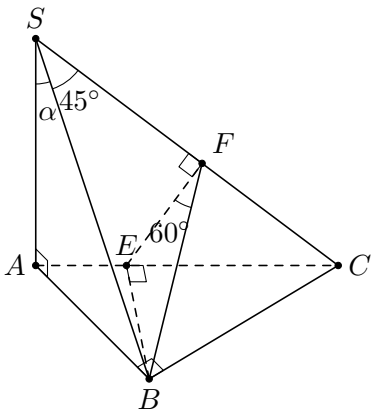
Chọn đáp án D □

Câu 186. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA là đường cao và đáy là tam giác ABC vuông tại B. Cho $\widehat{BSC} = 45°$, gọi $\widehat{ASB} = \alpha$. Tìm $\sin\alpha$ để góc giữa hai mặt phẳng (ASC) và (BSC) bằng $60°$.

A. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **B**. $\sin\alpha = \dfrac{3\sqrt{2}}{9}$. **C**. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D**. $\sin\alpha = \dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

Kẻ $BE \perp AC$ tại E, kẻ $EF \perp SC$ tại F.
Ta có



— $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$

— $\begin{cases} BE \perp AC \\ BE \perp SA \end{cases} \Rightarrow BE \perp (SAC) \Rightarrow BE \perp SC.$

— $\begin{cases} SC \perp EF \\ SC \perp BE \end{cases} \Rightarrow SC \perp (BEF) \Rightarrow SC \perp BF.$

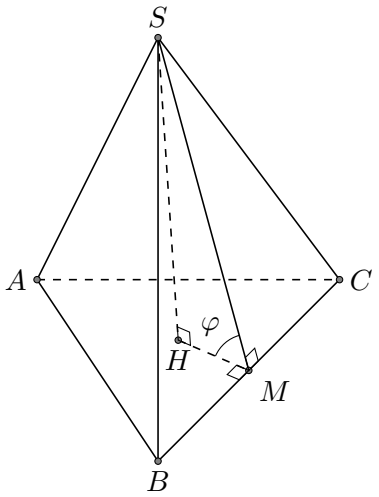
Khi đó góc giữa (ASC) và (BSC) là $\widehat{BFE} = 60°$.
Gọi $BC = x$, $(x > 0)$.
Tam giác SBC vuông cân tại B nên $SB = BC = x$, $SC = x\sqrt{2}$, $BF = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$.
$BE = BF \sin 60° = \dfrac{x\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{x\sqrt{6}}{4}$.
$\dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{BE^2} - \dfrac{1}{BC^2} = \dfrac{8}{3x^2} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{5}{3x^2} \Rightarrow AB = \sqrt{\dfrac{3}{5}}x.$
Vậy $\sin\alpha = \sin\widehat{ASB} = \dfrac{AB}{SB} = \sqrt{\dfrac{3}{5}} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 187. Cho hình chóp $S.ABC$ có các mặt bên tạo với đáy một góc bằng nhau và hình chiếu của S lên đáy nằm bên trong tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây luôn đúng?

A. H là trọng tâm tam giác ABC.
B. H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
C. H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
D. H là trực tâm tam giác ABC.

✍Lời giải.
Gọi H là hình chiếu của S trên (ABC).
Gọi φ là góc tạo bởi các mặt bên với đáy.
Kẻ $HM \perp BC = M$ ta có $((SBC),(ABC)) = \widehat{SMH}$
và $d(H,BC) = MH = \dfrac{SH}{\tan\varphi}$.
Tương tự, ta có $d(H,AB) = d(H,AC) = \dfrac{SH}{\tan\varphi}$.
Suy ra H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.



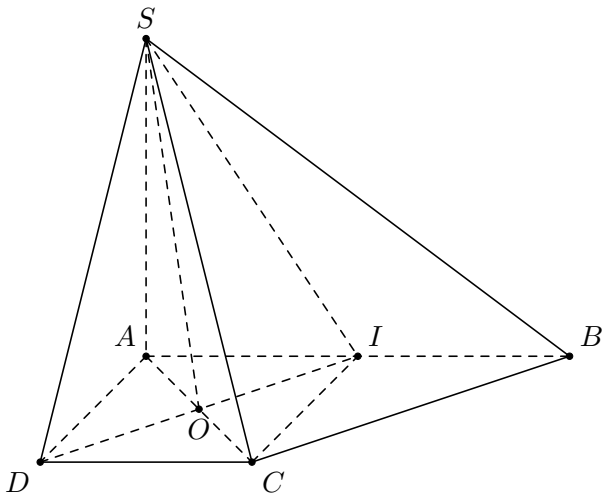
Chọn đáp án B □

Câu 188. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D. $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$, $AB = 2a$, $AD = DC = a$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa SD và vuông góc với mặt phẳng (SAC). Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với (P).

A. $\dfrac{a^2\sqrt{6}}{4}$. **B**. $\dfrac{a^2\sqrt{6}}{2}$. **C**. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **D**. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

✍Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AB.
$\Rightarrow AICD$ là hình vuông
$\Rightarrow DI \perp AC$.
Ta có $\begin{cases} DI \perp AC \\ DI \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABCD)) \end{cases}$
$\Rightarrow DI \perp (SAC) \Rightarrow (SDI) \perp (SAC)$
$\Rightarrow (P) \equiv (SDI)$ và $\triangle SDI$ là thiết diện cần tìm.
Ta có $SI = SD = DI = a\sqrt{2}$.
$\Rightarrow \triangle SDI$ là tam giác đều.
$\Rightarrow S_{\triangle SDI} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

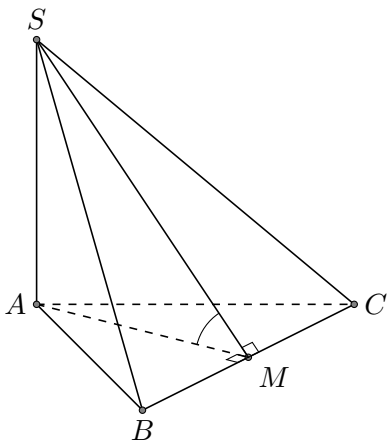


Chọn đáp án D □

Câu 189.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy ABC. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) (tham khảo hình bên). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.
B. $\sin\varphi = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.
C. $\varphi = 30°$.
D. $\varphi = 60°$.



✍Lời giải.

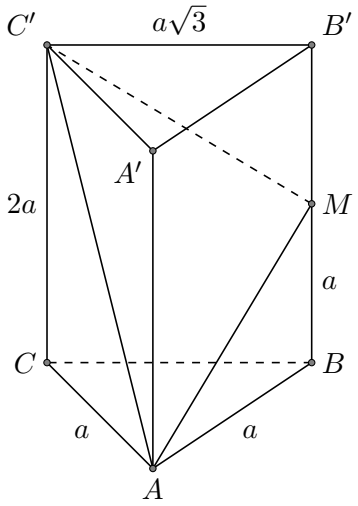
Gọi M là trung điểm của BC, ta có $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SA \perp (ABC) \\ AM \perp BC. \end{cases}$
$\Rightarrow BC \perp SM$ (Định lí ba đường vuông góc).
$\Rightarrow ((SBC), (ABC)) = \widehat{SMA} = \varphi$.
Tam giác SAM vuông tại $A \Rightarrow SM = \sqrt{SA^2 + AM^2} = \sqrt{3a^2 + \dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.
Do đó, ta có $\sin\varphi = \dfrac{SA}{SM} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\dfrac{a\sqrt{15}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 190.

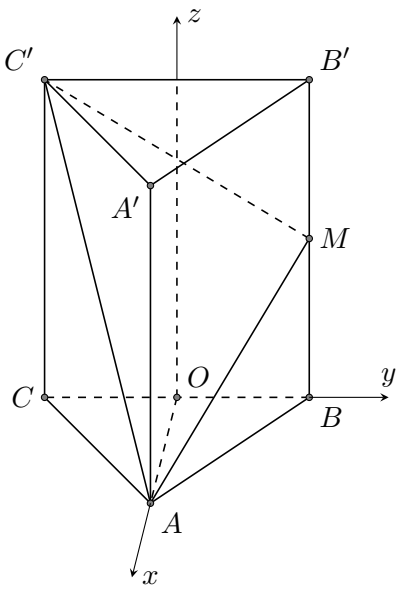
Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên $AA' = 2a$, $AB = AC = a$, góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm của BB' thì cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AC'M)$ là

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{31}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{15}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{93}}{31}$.



✍Lời giải.

Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC, ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \sin A} = a\sqrt{3}$.
Gọi O là trung điểm của BC, ta có $OA \perp BC$, ta có $OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \dfrac{a}{2}$.
Dựng hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.
Không mất tính tổng quát, giả sử $a = 1$. Khi đó, ta có $A\left(\dfrac{1}{2}; 0; 0\right)$, $C'\left(0; -\dfrac{\sqrt{3}}{2}; 2\right)$, $M\left(0; \dfrac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$.
Mặt phẳng (ABC) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0; 0; 1)$. Ta có $\overrightarrow{AC'} = \left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{\sqrt{3}}{2}; 2\right)$, $\overrightarrow{AM} = \left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$. Suy ra $\left[\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AM}\right] = \left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}; -\dfrac{1}{2}; -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}\left(3\sqrt{3}; 1; \sqrt{3}\right)$ hay $\vec{n} = \left(3\sqrt{3}; 1; \sqrt{3}\right)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(AC'M)$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AC'M)$, ta có



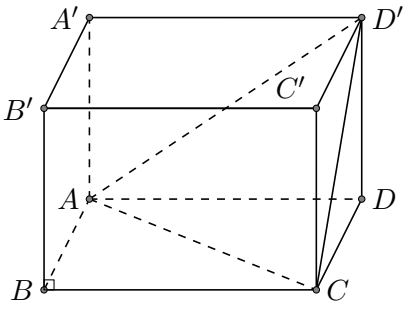
$$\cos\varphi = \frac{|\vec{k} \cdot \vec{n}|}{|\vec{k}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{31}} = \frac{\sqrt{93}}{31}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 191.

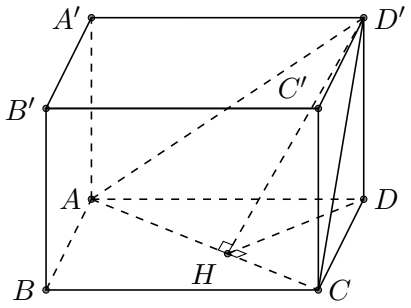
Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, $AA' = a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(ABCD)$ (tham khảo hình vẽ). Giá trị $\tan\alpha$ bằng

A. 2. **B.** $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.



✍Lời giải.

Kẻ $DH \perp AC$, $H \in AC$. Khi đó $D'H \perp AC$.
Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(ABCD)$ là $\widehat{D'HD}$.
Trong tam giác ADC vuông tại D ta có
$\dfrac{1}{DH^2} = \dfrac{1}{DA^2} + \dfrac{1}{DC^2} = \dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{3}{2a^2}$
$\Rightarrow DH^2 = \dfrac{2a^2}{3} \Rightarrow DH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.
Trong tam giác $D'HD$ vuông tại D ta có
$\tan\widehat{D'HD} = \dfrac{D'D}{DH} = a\sqrt{3} \cdot \dfrac{3}{a\sqrt{6}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

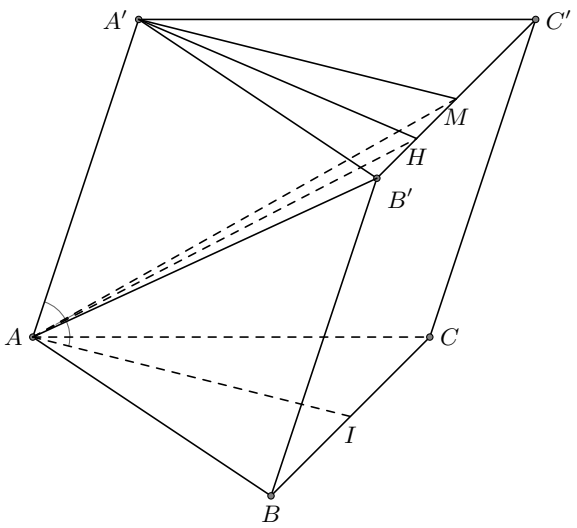


Chọn đáp án (C) □

Câu 192. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Gọi M là trung điểm của $B'C'$, biết $AB' \perp A'M$ và $AB' = AM$. Cạnh bên AA' tạo với đáy một góc $60°$. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và $(A'B'C')$.

A. $\dfrac{13}{8}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{13}{2}$.

✍Lời giải.
Vì tam giác $A'B'C'$ đều nên $A'M \perp B'C'$. Suy ra $A'M \perp (AB'C') \Rightarrow (AB'C') \perp (A'B'C')$.
Gọi H là trung điểm $B'M$, vì tam giác $AB'M$ cân tại A nên $AH \perp B'C' \Rightarrow AH \perp (A'B'C')$.
Suy ra góc giữa AA' và $(A'B'C')$ bằng $\widehat{AA'H} = 60° \Rightarrow A'H = \dfrac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{39}}{4}$.
Do $(ABC) \parallel (A'B'C')$ nên góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và $(A'B'C')$ bằng góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và (ABC).

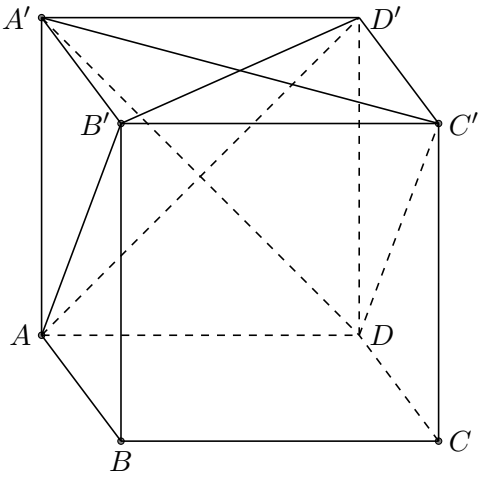


Gọi N là trung điểm của BC suy ra $BC \perp (AHN)$.
Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và $(A'B'C')$ bằng $\widehat{ANH} = \alpha \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{AH}{AN} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 193. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB = 2$, $AD = 3$ và $AA' = 4$. Góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$ là α. Tính giá trị gần đúng của góc α?

A. 45,2°. **B.** 38,1°. **C.** 54,4°. **D.** 61,6°.

✍Lời giải.
Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ sao cho điểm $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $D(0;3;0)$ và $A'(0;0;4)$.
Do giả thiết ta suy ra $B'(2;0;4)$, $D'(0;3;4)$ và điểm $C'(2;3;4)$.
Ta có $\overrightarrow{AB'} = (2;0;4)$; $\overrightarrow{AD'} = (0;3;4)$; $\overrightarrow{A'C'} = (2;3;0)$ và $\overrightarrow{A'D} = (0;3;-4)$.
Khi đó $\left[\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AD'}\right] = (-12;-8;6)$
và $\left[\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'D}\right] = (-12;8;6)$.
Gọi $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ lần lượt là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(AB'D')$ và mặt phẳng $(A'C'D)$.



Ta chọn $\vec{n}_1(-6;-4;3)$ và $\vec{n}_2(-6;4;3)$ khi đó

$$\cos\alpha = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{|(-6)\cdot(-6) + (-4)\cdot 4 + 3\cdot 3|}{\sqrt{(-6)^2 + (-4)^2 + (3)^2} \cdot \sqrt{(-6)^2 + (4)^2 + (3)^2}} = \frac{29}{61}.$$

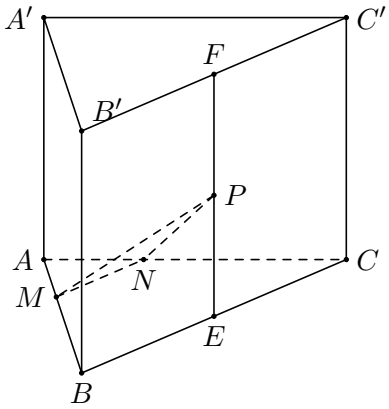
Vì $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ nên $\cos\alpha = \dfrac{29}{61}$ suy ra $\alpha \simeq 61{,}6^\circ$.

Chọn đáp án D □

Câu 194.

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng 4. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên các cạnh AB, AC sao cho $MB = 2MA; NC = 2NA$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm các cạnh $B'C', BC$; P là trung điểm của EF. Tính góc tạo bởi hai mặt phẳng (PMN) và $(A'BC)$.

A. 90°. **B**. 60°. **C**. 45°. **D**. 30°.

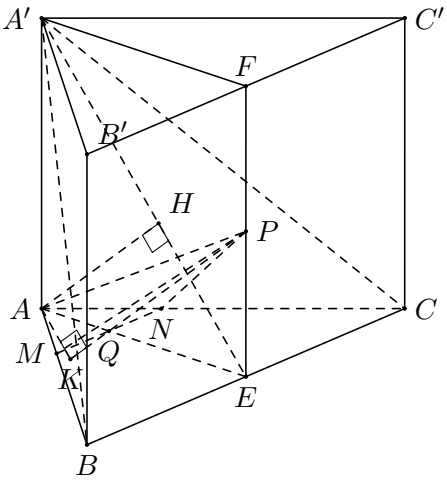


✍Lời giải.

Gọi Q là giao điểm của AE và MN.
Kẻ $AH \perp A'E$. Vì $BC \perp (A'AE) \Rightarrow BC \perp AH$
$\Rightarrow AH \perp (A'BC)$.
Kẻ $AK \perp PQ$. Vì $MN \perp (AEP) \Rightarrow MN \perp AK$
$\Rightarrow AK \perp (MNP)$.
Ta có $\tan\widehat{PQE} = \dfrac{PE}{QE} = \dfrac{2}{\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4\cdot\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

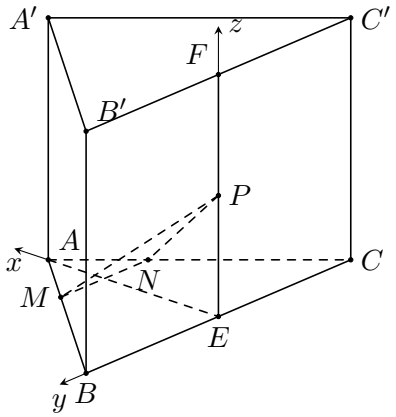
$\tan\widehat{AEA'} = \dfrac{A'A}{AE} = \dfrac{4}{\dfrac{4\cdot\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Suy ra $\widehat{PQE} + \widehat{AEA'} = 90^\circ \Rightarrow PQ \perp A'E \Rightarrow AH \perp AK$.
Vậy góc tạo bởi hai mặt phẳng (PMN) và $(A'BC)$ bằng 90°.



Cách 2:

Dựng hệ trục tọa độ $Exyz$ như hình bên, khi đó ta có tọa độ các điểm $E(0;0;0)$, $A(2\sqrt{3};0;0)$, $B(0;2;0)$, $F(0;0;4)$, $C(0;-2;0)$, $A'(2\sqrt{3};0;4)$.
Vậy $M\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3};\dfrac{2}{3};0\right)$, $N\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3};-\dfrac{2}{3};0\right)$, $P(0;0;2)$.
Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(A'BC)$ là
$\vec{n}_{(A'BC)} = \left[\overrightarrow{EA'}, \vec{j}\right] = (4;0;-2\sqrt{3}) \parallel (2;0;-\sqrt{3})$.
Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (MNP) là
$\vec{n}_{(MNP)} = \left[\vec{j}, \overrightarrow{MP}\right] = \left(-2;0;-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$.
$\Rightarrow \vec{n}_{(A'BC)} \cdot \vec{n}_{(MNP)} = 0 \Rightarrow (MNP) \perp (A'BC)$.



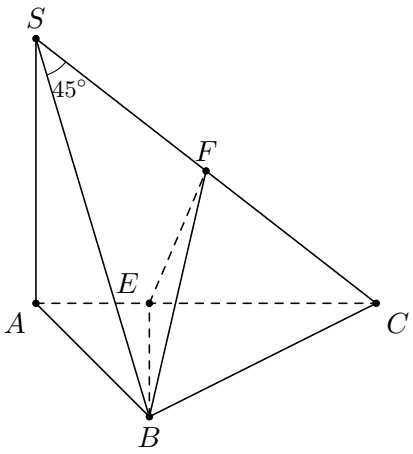
Chọn đáp án A □

Câu 195. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABC)$, $SB = BC = 2a\sqrt{2}$, $\widehat{BSC} = 45^\circ$, $\widehat{BSA} = \alpha$. Tính giá trị α để góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng 45°.

A. $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **B**. $\arcsin\dfrac{\sqrt{14}}{7}$. **C**. $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **D**. $\arccos\dfrac{\sqrt{14}}{14}$.

✍Lời giải.

Kẻ $BE \perp AC \Rightarrow BE \perp (SAC) \Rightarrow BE \perp SC$.
Kẻ $EF \perp SC \Rightarrow SC \perp (BEF) \Rightarrow BF \perp SC$.
Mà $\triangle SBC$ cân tại B (do $SB = SC = 2a\sqrt{2}$) có $\widehat{BSC} = 45^\circ$ nên $\triangle SBC$ vuông cân tại B.
Suy ra F là trung điểm của $SC \Rightarrow BF = SF = FC = 2a$.
Vì $\begin{cases}(SAC) \cap (SBC) = SC \\ EF \perp SC, BF \perp SC\end{cases} \Rightarrow ((SAC), (SBC)) = \widehat{BFE} = 45^\circ$.
$\Rightarrow \triangle BEF$ vuông cân tại $E \Rightarrow BE = EF = a\sqrt{2}$.



Lại có $\begin{cases}BC \perp SB \\ BS \perp SA\end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại $B \Rightarrow \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{BC^2} = \dfrac{1}{BE^2}$
$\Rightarrow AB = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$. Suy ra $\sin\alpha = \sin\widehat{ASB} = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

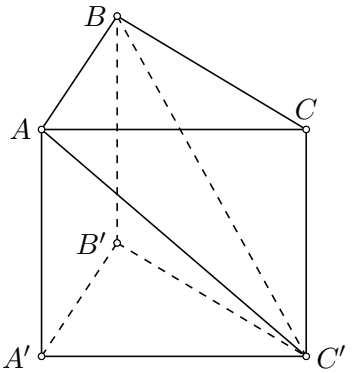
Chọn đáp án A □

Câu 196. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng 1. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng $A'B'$ và BC'. Tính $\cos\varphi$.

A. $\cos\varphi = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. **B.** $\cos\varphi = \dfrac{3}{4}$. **C.** $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $AB \parallel A'B'$ nên góc giữa hai đường thẳng $A'B'$ và BC' là góc giữa AB và BC', lại có $AC' = BC' = a\sqrt{2}$ nên
$\cos\varphi = \dfrac{|AB^2 + C'B^2 - C'A^2|}{AB.C'B} = \dfrac{|a^2 + 2a^2 - 2a^2|}{2a \cdot a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

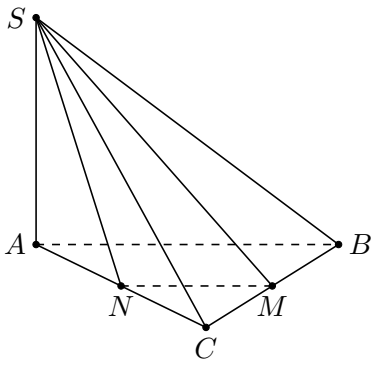


Chọn đáp án A □

Câu 197.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$. Biết $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AC. Tính cô-sin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SMN).

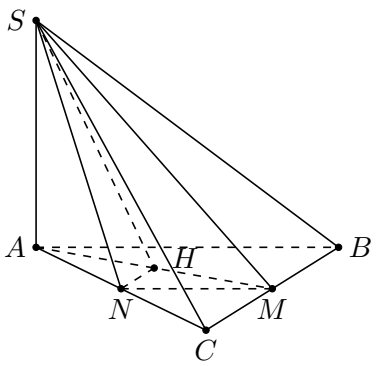
A. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$. **C.** $\dfrac{2}{\sqrt{7}}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.



Lời giải.

Gọi H là trung điểm AM. Ta có $NH \perp AM \Rightarrow NH \perp (SAM)$. Suy ra, tam giác SHM là hình chiếu vuông góc của tam giác SNM lên mặt phẳng (SAM). Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SMN) và (SAM), ta có

$$\cos\alpha = \frac{S_{SHM}}{S_{SNM}} = \frac{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{a^2\sqrt{7}}{4}} = \sqrt{\frac{3}{7}}.$$



Gọi β là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SMN). Vì $(SAM) \perp (SBC)$ nên $\alpha + \beta = 90°$. Do đó,

$$\cos\beta = \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 198. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc nào?

A. $\widehat{SCB}$. **B.** $\widehat{SBA}$.
C. $\widehat{SCA}$. **D.** $\widehat{SIA}$ với I là trung điểm của BC.

✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \text{ (giả thiết)} \\ BC \perp SA \ (SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BA \perp SB.$

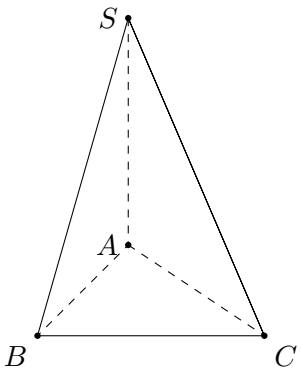
Xét hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) ta có

— $(SBC) \cap (ABC) = BC$.

— Trong mặt phẳng (SBC) có $SB \perp BC$.

— Trong (ABC) có $AB \perp BC$

Suy ra góc giữa (SBC) và (ABC) là góc giữa SB và AB tức là $\widehat{SBA}$.



Chọn đáp án B □

Câu 199. Trong không gian cho hai đường thẳng a, b và mặt phẳng (P). Xét các phát biểu sau

(I) Nếu $a \parallel b$ mà $a \perp (P)$ thì luôn có $b \perp (P)$.

(II) Nếu $a \perp (P)$ và $a \perp b$ thì luôn có $b \parallel (P)$.

(III) Qua đường thẳng a chỉ có duy nhất một mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P).

(IV) Qua đường thẳng a luôn có vô số mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P).

Số khẳng định **sai** trong các phát biểu trên là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

✍Lời giải.

— Phát biểu (II) sai vì nếu $\begin{cases} a \perp (P) \\ a \perp b \end{cases}$ thì $\left[\begin{array}{l} b \parallel (P) \\ b \subset (P) \end{array}\right.$.

— Phát biểu (III) sai vì nếu $a \perp (P)$ thì mọi mặt phẳng (Q) chứa a đều vuông góc với mặt phẳng (P).

— Phát biểu (IV) sai vì nếu $a \subset (P)$ thì chỉ có một mặt phẳng (Q) chứa a và vuông góc với mặt phẳng (P).

Chọn đáp án B □

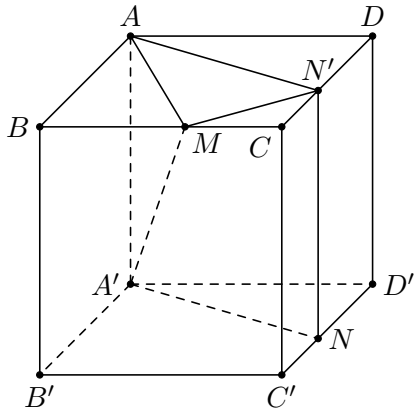
Câu 200. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Hai điểm M và N lần lượt thay đổi trên các cạnh $BC, C'D'$. Đặt $CM = x, C'N = y$. Để góc giữa hai mặt phẳng (AMA') và (ANA') bằng 45° thì biểu thức liên hệ giữa x và y là

A. $a^2 - xy = a(x + y)$.
B. $a^2 + xy = a(x + y)$.
C. $2a^2 - xy = 2a(x + y)$.
D. $2a^2 + xy = 2a(x + y)$.

Lời giải.

Dựng $NN' \parallel AA'$, $(N' \in CD)$.
Khi đó $(ANA') \equiv (AA'NN')$.
Ta có $\begin{cases} AM \perp AA' \\ AM \subset (AMA') \end{cases}$ và $\begin{cases} AN' \perp AA' \\ AN' \subset (ANA') \end{cases}$ nên góc giữa hai mặt phẳng (AMA') và (ANA') là $\widehat{MAN'}$. Suy ra $\widehat{MAN'} = 45^\circ$.
Tam giác ABM vuông tại B nên

$$AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{a^2 + (a - x)^2}.$$



Tam giác ADN' vuông tại D nên $AN' = \sqrt{AD^2 + DN'^2} = \sqrt{a^2 + (a - y)^2}$.
Tam giác MCN' vuông tại C nên $MN' = \sqrt{CM^2 + CN'^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Xét tam giác AMN' ta có

$$\begin{aligned} & MN'^2 = AM^2 + AN'^2 - 2 \cdot AM \cdot AN' \cdot \cos \widehat{MAN'} \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + y^2 = a^2 + (a - x)^2 + a^2 + (a - y)^2 - 2 \cdot AM \cdot AN' \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{2} \cdot AM \cdot AN' = 4a^2 - 2a(x + y). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Lại có

$$\begin{aligned} & S_{ABCD} = S_{ABM} + S_{ADN'} + S_{CMN'} + S_{AMN'} \\ \Leftrightarrow\ & a^2 = \frac{1}{2}a(a - x) + \frac{1}{2}a(a - y) + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2} \cdot AM \cdot AN' \cdot \sin \widehat{MAN'} \\ \Leftrightarrow\ & 4a^2 = 2a(a - x) + 2a(a - y) + 2xy + \sqrt{2} \cdot AM \cdot AN' \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{2} \cdot AM \cdot AN' = 2a(x + y) - 2xy. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Từ (1) và (2) suy ra $4a^2 - 2a(x + y) = 2a(x + y) - 2xy \Leftrightarrow 2a^2 + xy = 2a(x + y)$.
Chọn đáp án (D) □

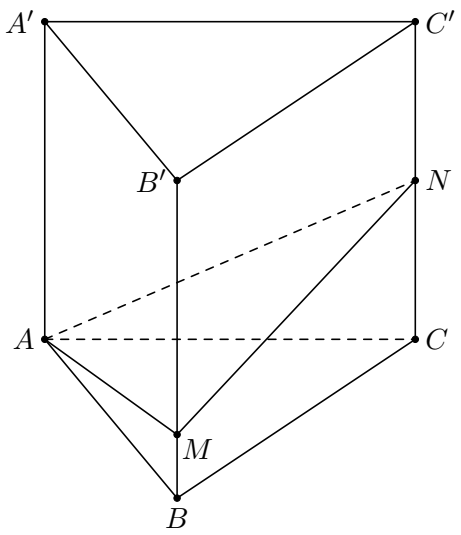
Câu 201. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. M, N là hai điểm lần lượt trên BB' và CC' sao cho diện tích tam giác AMN bằng $\dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4}$. Khi đó, côsin của góc giữa mặt phẳng (AMN) và mặt đáy của hình lăng trụ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
B. $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$.
C. $\dfrac{1}{3}$.
D. $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Gọi α là góc giữa mặt phẳng (AMN) và mặt đáy (ABC) của hình lăng trụ. Theo định lý hình chiếu ta có

$$\cos\alpha = \frac{S_{ABC}}{S_{AMN}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}} = \frac{1}{3}.$$



Chọn đáp án C □

Câu 202. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a, SA$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$; M là điểm nằm trên cạnh BC sao cho $BM = a$. Gọi N là điểm nằm trên cạnh CD sao cho hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau. Khi đó tỷ số $\frac{BM}{DN}$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{5}{3}$.

Lời giải.

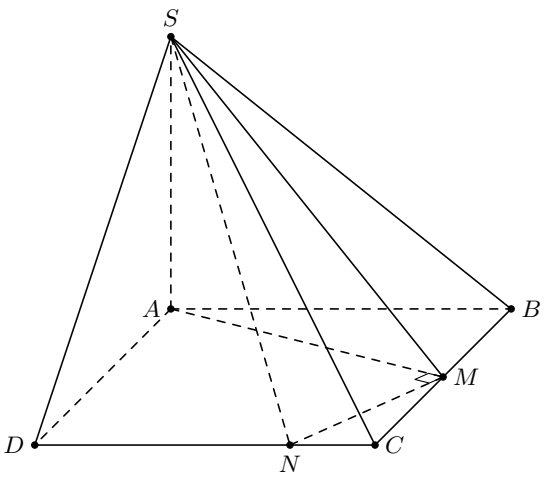
Giả sử $MN \perp AM$, mà ta có $MN \perp SA$, vậy khi đó $MN \perp (SAM)$ hay $(SMN) \perp (SAM)$.

Khi đó $\widehat{NMC} = \widehat{BAM}$ (cùng phụ với góc $\widehat{AMB}$).

Từ đó suy ra $\triangle ABM \sim \triangle MCN(g-g)$, suy ra

$$\frac{NC}{BM} = \frac{CM}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow NC = \frac{a}{2} \Rightarrow DN = \frac{3a}{2}.$$

Vậy $\frac{BM}{DN} = \frac{a}{\frac{3a}{2}} = \frac{2}{3}$.



Chọn đáp án A □

Câu 203. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $BA = a$, $BC = a$, $AD = 2a$. Cho biết SA vuông góc với $(ABCD)$ và $SA = 2a$. Cô-sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

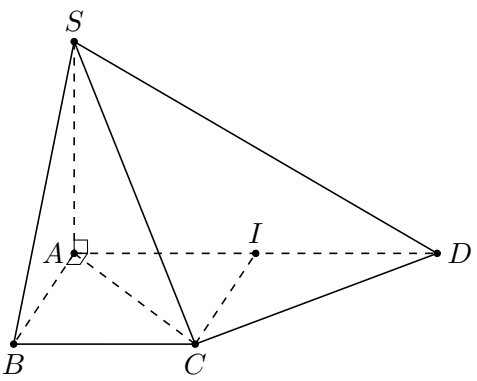
Gọi I là trung điểm của AD, khi đó tứ giác $ABCI$ có $AB = BC = CI = IA = a$ và $\widehat{BAI} = 90^\circ$ nên $ABCI$ là hình vuông, suy ra $AC = a\sqrt{2}$.

Tam giác CID vuông cân tại I nên $CD = a\sqrt{2}$.

Lại có $\widehat{CAI} = 45^\circ$.

Do đó tam giác CAD vuông cân tại C hay $CD \perp AC$.

Mặt khác $CD \perp SA$. Vậy $CD \perp (SAC)$, nên $CD \perp SD$.



Ta thấy $(SCD) \cap (ABCD) = CD$.

Vậy góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ bằng góc giữa SC và AC bằng $\widehat{SCA}$.

Tam giác SAC vuông tại A nên $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{6}$. Khi đó

$$\cos \widehat{SCA} = \frac{AC}{SC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \tag{3.3}$$

Vậy cô-sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 204. Mỗi đỉnh của hình lập phương là đỉnh chung của đúng mấy mặt?

A. 3. **B**. 4. **C**. 2. **D**. 5.

Lời giải.

Mỗi đỉnh của hình lập phương là đỉnh chung của đúng 3 mặt.

Chọn đáp án A □

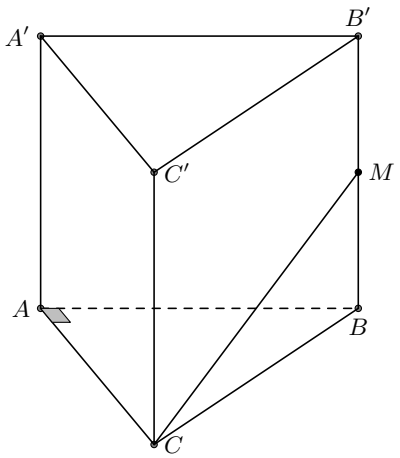
Câu 205. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, cạnh $AB = a$, chiều cao của lăng trụ là $4a$. Gọi M là trung điểm của BB', tính sin góc giữa hai đường thẳng AB và CM.

A. $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **C**. $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$. **D**. $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Theo giả thiết, suy ra

$$|\overrightarrow{AB}| = AB = a; |\overrightarrow{CM}| = CM = \sqrt{BC^2 + BM^2} = \sqrt{2a^2 + 4a^2} = a\sqrt{6}.$$



Lại có $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$.

Từ đó, suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = a^2$. Khi đó, $\cos\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CM}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{6}} > 0$.

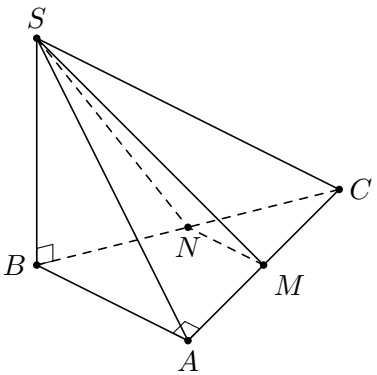
Vậy góc giữa hai đường thẳng AB và CM chính là góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CM}$. Do đó, sin của góc hai đường thẳng AB và CM bằng $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$.

Chọn đáp án A □

Câu 206.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đường cao $SB = \dfrac{2a}{\sqrt{7}}$. Đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AC = 4a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BC. Biết khoảng cách từ C đến đường thẳng SM bằng $a\sqrt{2}$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SMN) và (SAC). Khi đó

A. $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$. **B**. $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$. **C**. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D**. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

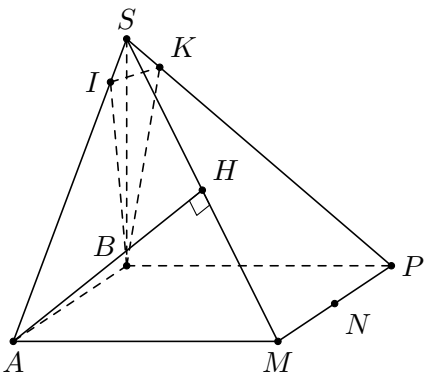


Lời giải.

Gọi P là điểm đối xứng với M qua N. Khi đó $ABPM$ là hình chữ nhật. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu của A trên SM, của B trên SA và SP. Khi đó $BI \perp (SAM)$ và $BK \perp (SMP)$. Do M là trung điểm AC nên ta có

$$d(A, SM) = d(C, SM) = a\sqrt{2}$$

mà $AM = 2a$ nên tam giác AHM vuông cân tại H. Lại có $AM \perp (SAB)$ nên tam giác SAM vuông cân tại A, suy ra $SA = 2a$. Ta có



$$AB = \sqrt{SA^2 - SB^2} = \frac{2a\sqrt{6}}{\sqrt{7}},$$
$$BI = \frac{BS \cdot BA}{SA} = \frac{2a\sqrt{6}}{7},$$
$$\frac{IS}{IA} = \frac{IS \cdot SA}{IA \cdot SA} = \frac{BS^2}{BA^2} = \frac{1}{6}.$$

Suy ra $6\overrightarrow{BS} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ hay $\overrightarrow{BI} = \dfrac{6\overrightarrow{BS} + \overrightarrow{BA}}{7}$. Tương tự ta tính được $BK = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$ và $\overrightarrow{BK} = \dfrac{7\overrightarrow{BS} + \overrightarrow{BP}}{8}$. Suy ra

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BK}\right|}{BI \cdot BK} = \frac{42BS^2}{56} \cdot \frac{7}{2a\sqrt{6}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

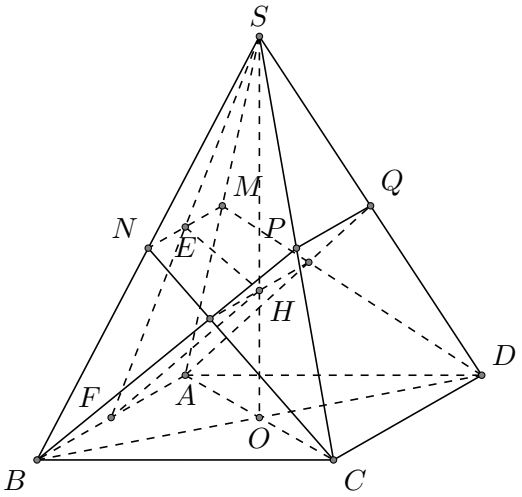
Chọn đáp án (D) □

Câu 207. Cho hình chóp $S.ABCD$ đều có M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Tìm tỉ số độ dài $\dfrac{SA}{AB}$ để hai mặt phẳng $(ABPQ)$, $(CDMN)$ vuông góc.

A. $\dfrac{SA}{AB} = \dfrac{\sqrt{11}}{2}$. **B.** $\dfrac{SA}{AB} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$. **C.** $\dfrac{SA}{AB} = \dfrac{\sqrt{23}}{4}$. **D.** $\dfrac{SA}{AB} = \dfrac{\sqrt{29}}{4}$.

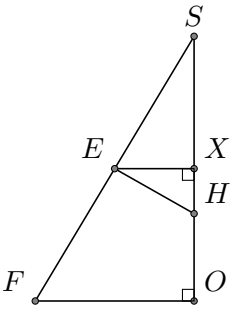
Lời giải.

Gọi O là tâm của đáy hình chóp $S.ABCD$.
Gọi H là giao điểm của SO với giao tuyến của hai mặt phẳng $(ABPQ)$, $(CDMN)$.
Gọi E, F lần lượt là trung điểm của MN và AB.
Do $ABPQ$ và $CDMN$ là các hình thang cân nên EH và FH đều vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng $(ABPQ)$, $(CDMN)$.
Hai mặt phẳng $(ABPQ)$, $(CDMN)$ vuông góc khi tam giác EHF vuông tại H.
Giả sử cho $AB = 2$. Đặt $SO = x$.



Ta dễ dàng tìm được:

$$\begin{aligned} FH &= \sqrt{OH^2 + OF^2} = \sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1} \\ EF &= \frac{1}{2}SF = \frac{1}{2}\sqrt{SO^2 + OF^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + x^2} \\ EH &= \sqrt{EX^2 + XH^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}x\right)^2}. \end{aligned}$$



Tam giác EHF vuông tại H nên $EF^2 = EH^2 + FH^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}\left(1 + x^2\right) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{x^2}{36} + \dfrac{x^2}{9} + 1 \Rightarrow x = 3$.

Khi đó, $SA = \sqrt{AO^2 + SO^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{11}$. Vậy $\dfrac{SA}{AB} = \dfrac{\sqrt{11}}{2}$.

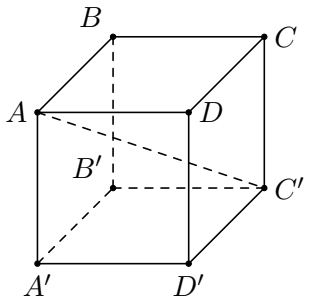
Chọn đáp án (A) □

Câu 208. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng nào dưới đây?

A. $(A'B'CD)$. **B.** $(A'CD')$. **C.** $(A'DC')$. **D.** $(A'BD)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} A'D \perp AD' \\ A'D \perp C'D' \end{cases} \Rightarrow A'D \perp (ABC'D') \Rightarrow A'D \perp AC'$.
Và $BD \perp (ACC'A') \Rightarrow BD \perp AC'$.
Do đó $AC' \perp (A'BD)$.



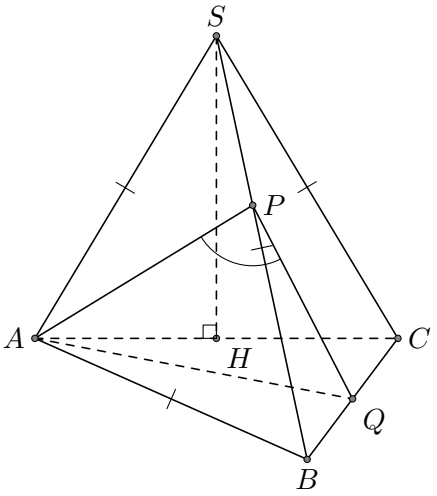
Chọn đáp án (D) □

Câu 209. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác SAB đều, tam giác SBC vuông cân tại S, mặt phẳng (SAC) vuông góc với đáy. Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là

A. $\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{6}}{15}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

✍Lời giải.

Theo giả thiết ta có $SA = SB = SC$, giả sử $SA = SB = SC = 1$.
Trong mặt phẳng (SAC) kẻ SH vuông góc với AC suy ra H là trung điểm AC, do đó $HA = HC$.
Có $HB = \sqrt{SB^2 - SH^2} = \sqrt{SC^2 - SH^2} = HC$. Suy ra $HA = HB = HC$, tam giác ABC vuông tại B, từ đó $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3}$.



Lấy P là trung điểm SB, suy ra $AP \perp SB$. (1)
Lấy Q là trung điểm CB, suy ra $PQ \parallel SC$, suy ra $PQ \perp SB$. (2)
Từ (1) và (2) ta có $SB \perp (APQ)$, mà $(SAB) \cap (SBC) = SB$ nên góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng hoặc bù với góc $\widehat{APQ}$.
Tam giác APQ có $AP = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $PQ = \dfrac{1}{2}$, $AQ = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$, theo định lý Cô-sin ta có $\cos\widehat{APQ} = \dfrac{-\sqrt{3}}{3}$.
Vậy côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

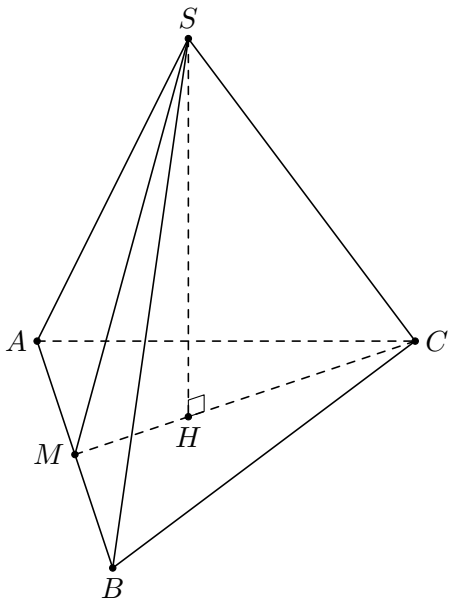
Chọn đáp án (D) □

Câu 210. Cho hình chóp tam giác đều có góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $45°$. Tính sin của góc giữa mặt bên và mặt đáy.

A. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

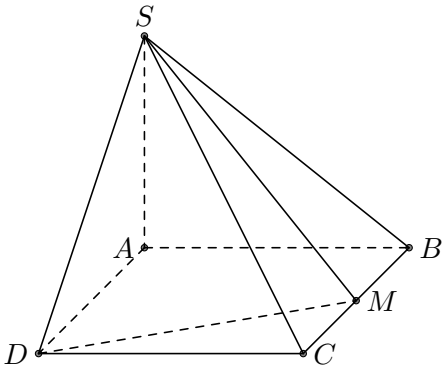
Xét hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SH \perp (ABC)$, M là trung điểm AB.
Khi đó $\widehat{SCH} = 45°$.
Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $\widehat{SMH}$.
Đặt $SH = a$. Suy ra $CH = a; MH = \dfrac{a}{2}; SC = a\sqrt{2}$.
Ta có $SM^2 = SC^2 + CM^2 - 2 \cdot SC \cdot CM \cdot \cos\widehat{SCM} = \dfrac{5a^2}{4}$.
$\Rightarrow SM = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
Vậy $\sin\widehat{SMH} = \dfrac{MH}{SM} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.



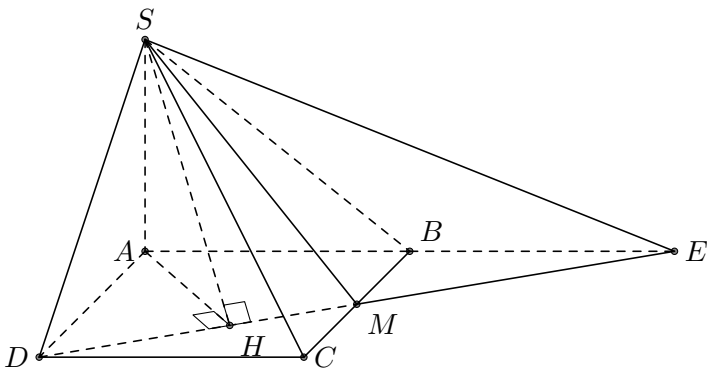
Chọn đáp án B □

Câu 211.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA = a$ và vuông góc $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình vẽ). Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SMD) và $(ABCD)$.

A. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$.



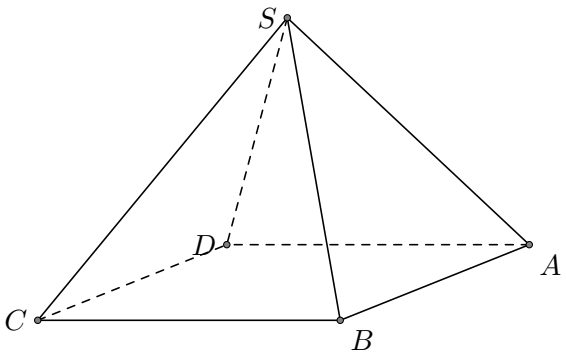
✍Lời giải.
Kéo dài DM cắt AB tại E.
Kẻ $AH \perp DM \quad (H \in DM)$.
Khi đó góc $\widehat{SHA}$ là góc giữa (SMD) và $(ABCD)$.
Ta có $AH = \dfrac{AD \cdot AE}{\sqrt{AD^2 + AE^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.
$\tan\widehat{SHA} = \dfrac{SH}{AH} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \cos\widehat{SHA} = \dfrac{2}{3}$.



Chọn đáp án B □

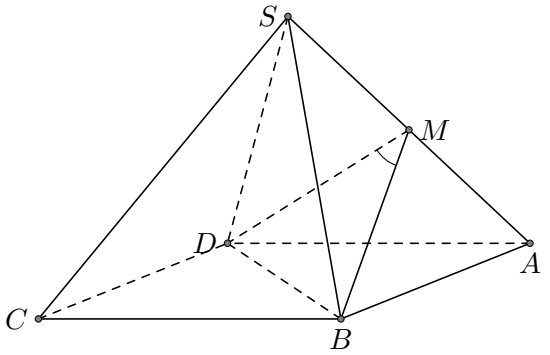
Câu 212.
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy và cạnh bên đều bằng a. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $-\dfrac{1}{3}$. **C.** $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.



✍Lời giải.

Gọi M là trung điểm SA. Ta có $BM \perp SA$, $DM \perp SA$ do đó $\widehat{((SAB),(SAD))} = \widehat{(BM,DM)}$.
$S.ABCD$ là hình chóp đều nên $ABCD$ là hình vuông, do đó $BD = a\sqrt{2}$. ΔSAB và ΔSAD là các tam giác đều cạnh a nên $BM = DM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Áp dụng định lý cô-sin trong tam giác MBD, ta có

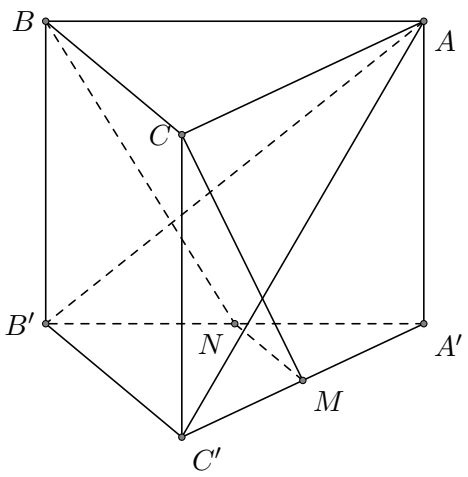
$$\cos\widehat{BMD} = \frac{BM^2 + DM^2 - BD^2}{2 \cdot BM \cdot DM} = \frac{\dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{3a^2}{4} - 2a^2}{2 \cdot \dfrac{3a^2}{4}} = -\frac{1}{3}.$$

Do đó cô-sin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) bằng $\dfrac{1}{3}$.

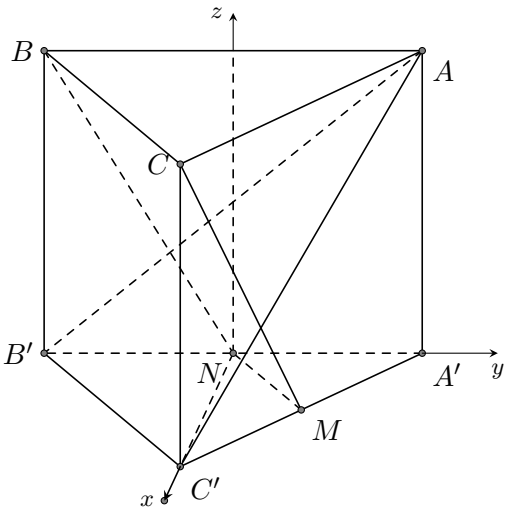
Chọn đáp án (A) □

Câu 213.
Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của $A'C'$ và $A'B'$. Tính cô-sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC') và $(BCMN)$.

A. $\dfrac{\sqrt{13}}{65}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{13}}{130}$. **C.** $-\dfrac{\sqrt{13}}{130}$. **D.** $-\dfrac{\sqrt{13}}{65}$.



✍Lời giải.
Ta có $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều nên $A'B'C'$ là tam giác đều cạnh $2\sqrt{3}$. Do đó $C'N = 3$.
Chọn hệ tọa độ $Nxyz$ như hình vẽ. Khi đó $N(0;0;0)$, $A(0;\sqrt{3};2)$, $B'(0;-\sqrt{3};0)$, $C'(3;0;0)$, $M\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $B(0;-\sqrt{3};2)$.
Mặt phẳng $(AB'C')$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n_1} = [\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC'}]$. Có $\overrightarrow{AB'} = (0;-2\sqrt{3};-2)$, $\overrightarrow{AC'} = (3;-\sqrt{3};-2)$. Suy ra $\vec{n_1} = (2\sqrt{3};-6;6\sqrt{3})$ cùng phương với $\vec{a} = (1;-\sqrt{3};3)$.

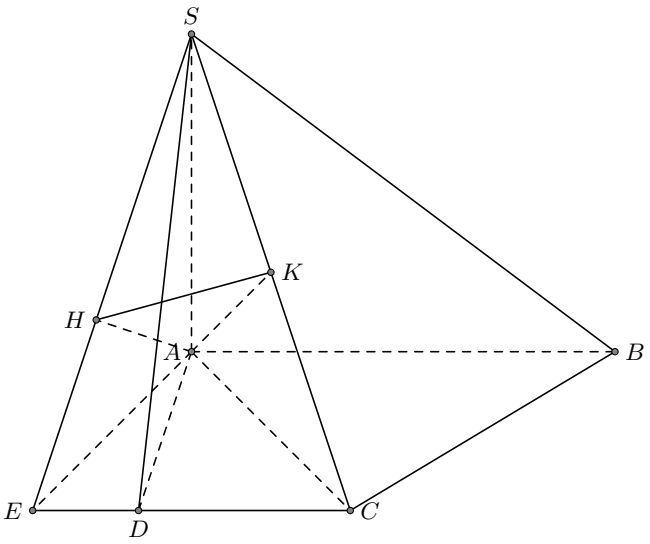


Mặt phẳng $(BCMN)$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n_2} = [\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NB}]$. Có $\overrightarrow{NM} = \left(\dfrac{3}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $\overrightarrow{NB} = (0;-\sqrt{3};2)$.
Suy ra $\vec{n_2} = \left(\sqrt{3};-3;\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ cùng phương với $\vec{b} = (2;-2\sqrt{3};-3)$.
Có $\cos(\widehat{(ABC'),(BCMN)}) = |\cos(\vec{a},\vec{b})| = \dfrac{|1\cdot 2 + (-\sqrt{3})\cdot(-2\sqrt{3}) + 3\cdot(-3)|}{\sqrt{1+3+9}\cdot\sqrt{4+12+9}} = \dfrac{\sqrt{13}}{65}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 214. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AB = 2a$. $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{10}}{15}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{10}}{25}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

✍**Lời giải.**



Vì $ABCD$ là nửa lục giác đều nên ta có $AC \perp BC$.
Lại có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$.
Suy ra $BC \perp (SAC) \Rightarrow (SBC) \perp (SAC)$.
Trong (SAC), dựng $AK \perp SC \Rightarrow AK \perp (SBC)$.
Gọi E là hình chiếu của A xuống CD, ta có $CE \perp AE$.
Mà $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CE$.
Do đó $CE \perp (SAE) \Rightarrow (SCE) \perp (SAE)$.
Trong (SAE), dựng $AH \perp SE \Rightarrow AH \perp (SCE)$. Từ suy ra

$$\cos((SCD),(SBC) = \cos\widehat{HAK}.$$

Ta có, AK là đường cao trong tam giác vuông SAC nên

$$AK^2 = \frac{SA^2 \cdot AC^2}{SA^2 + AC^2} = \frac{3a^2 \cdot 3a^2}{6a^2} = \frac{3a^2}{2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Lại có $AE = a\cos\widehat{DEA} = a\cos 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, suy ra

$$AH^2 = \frac{SA^2 \cdot AE^2}{SA^2 + AE^2} = \frac{3a^2 \cdot \dfrac{3a^2}{4}}{3a^2 + \dfrac{3a^2}{4}} = \frac{3a^2}{5} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

Mặt khác, $AH \perp (SCD) \Rightarrow AH \perp HK$, do đó tam giác AHK vuông tại H. Suy ra

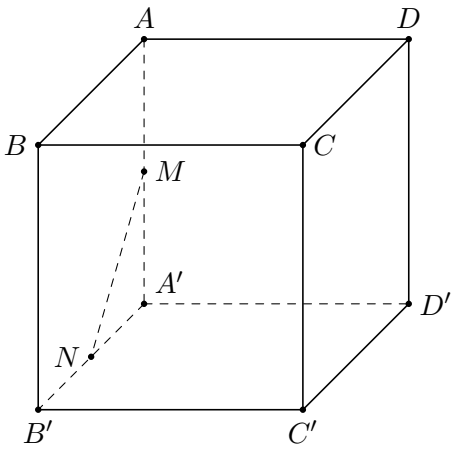
$$\cos\widehat{HAK} = \frac{AH}{AK} = \frac{\dfrac{a\sqrt{15}}{5}}{\dfrac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 215.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AA' và $A'B'$. Tính số đo góc giữa hai đường thẳng MN và BD.

A. $45°$. **B**. $30°$. **C**. $60°$. **D**. $90°$.



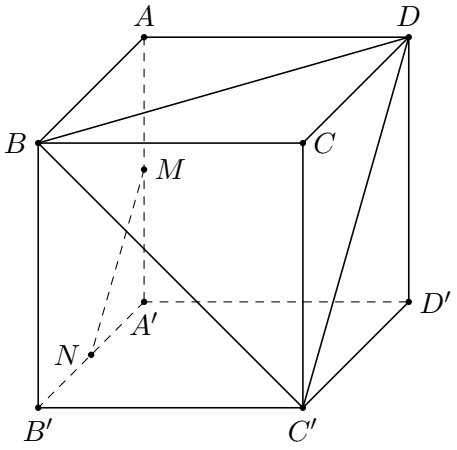
✍Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $MN \parallel AB'$ nên $MN \parallel DC'$. Suy ra góc giữa MN và BD chính bằng góc giữa hai đường thẳng BD và DC'.

Ta xét tam giác BDC' có các cạnh bằng $a\sqrt{2}$ nên là tam giác đều.

Từ đó suy ra $\widehat{BDC'} = 60°$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng MN và BD bằng $60°$.



Chọn đáp án C □

Câu 216. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, $\widehat{BAC} = 120°$, $AB = BB' = a$. Gọi I là trung điểm của CC'. Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.

A. $\dfrac{\sqrt{70}}{10}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C**. $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

✍Lời giải.

Ta có diện tích tam giác ABC là

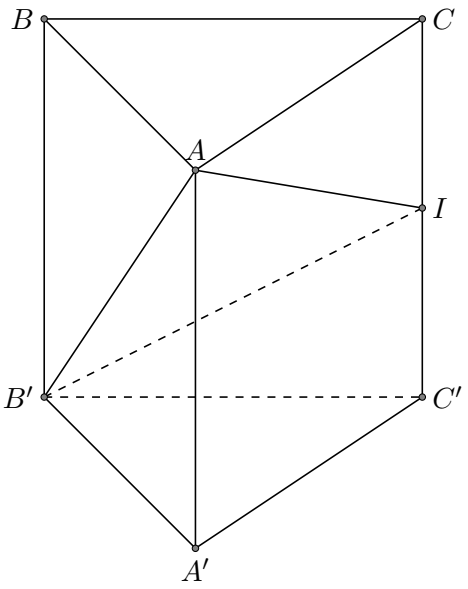
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin 120° = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Xét tam giác $AB'I$ có $AB' = a\sqrt{2}$, $AI = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, $B'I = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

Suy ra $\cos\widehat{AIB'} = \dfrac{AI^2 + B'I^2 - B'A^2}{2B'I \cdot AI} = \dfrac{5}{\sqrt{65}}$

$\Rightarrow \sin\widehat{AIB'} = \dfrac{2\sqrt{26}}{13}$. Từ đó suy ra $S_{\triangle AB'I} = \dfrac{a^2\sqrt{10}}{4}$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$ thì theo công thức hình chiếu ta có $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AB'I} \cdot \cos\alpha$. Từ đó ta suy ra $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{30}}{10}$.



Chọn đáp án C □

Câu 217. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a, tính tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(A'BC)$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B**. 1. **C**. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D**. $\sqrt{3}$.

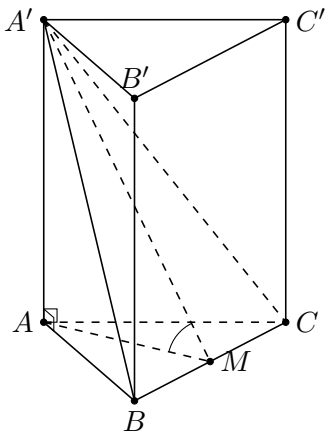
✍Lời giải.

Gọi M là trung điểm BC.
Ta có

— $\begin{cases} A'M \perp BC \\ AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow$ Góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là góc $\widehat{A'MA}$.

— $AM = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

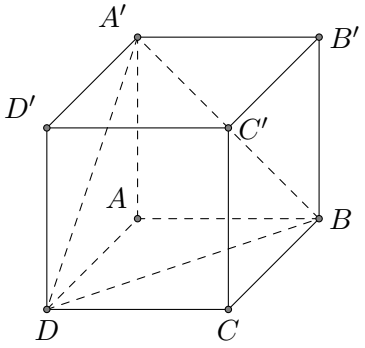
— $\tan \widehat{A'MA} = \dfrac{AA'}{AM} = \dfrac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.



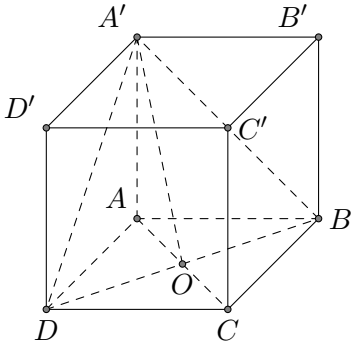
Chọn đáp án C □

Câu 218.
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ). Giá trị sin của góc giữa hai mặt phẳng (BDA') và $(ABCD)$ là

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.



✍Lời giải.
Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow \widehat{A'OA}$ là góc giữa hai mặt phẳng (BDA') và mặt phẳng $(ABCD)$.
Ta có $AO = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Xét $\triangle AA'O$ vuông tại A có $A'O = \sqrt{AA'^2 + AO^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.
Khi đó $\sin \widehat{A'OA} = \dfrac{AA'}{A'O} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

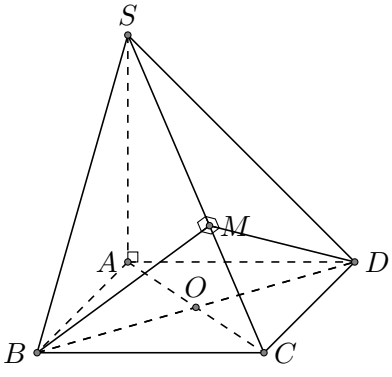


Chọn đáp án C □

Câu 219. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $BD = a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

A. $60°$. **B.** $120°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

✍Lời giải.
Trong mặt phẳng (SBC) dựng $BM \perp SC$ $(M \in SC)$.
$BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC \Rightarrow SC \perp (BDM) \Rightarrow SC \perp DM$.
Vậy $\widehat{(SBC),(SCD)} = \widehat{BMD}$.
Trong tam giác SAB : $SB^2 = SA^2 + AB^2 \Rightarrow SB = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.
Trong tam giác SAC : $SC^2 = SA^2 + AC^2 \Rightarrow SC = \dfrac{3a}{\sqrt{2}}$.
Áp dụng định lý cosin trong tam giác SBC, ta có:
$\cos \widehat{BCS} = \dfrac{SC^2 + BC^2 - SB^2}{2SC \cdot BC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{BCS} = 45°$ hay $\triangle BMC$ vuông cân tại M. Suy ra $DM = BM = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.



Trong tam giác BMD, ta có : $BM^2 + DM^2 = BD^2 \Rightarrow \triangle BMD$ vuông cân tại M hay $\widehat{BMD} = 90°$.
Vậy $\widehat{(SBC),(SCD)} = \widehat{BMD} = 90°$.

Chọn đáp án D □

Câu 220. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC. Tính côsin góc tạo bởi mặt phẳng (SMN) và mặt phẳng (ABC).

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\frac{12}{\sqrt{147}}$. **D.** $\frac{1}{7}$.

✍Lời giải.

Ta có $\widehat{(SMN),(ABC)} = \widehat{SIO}$.

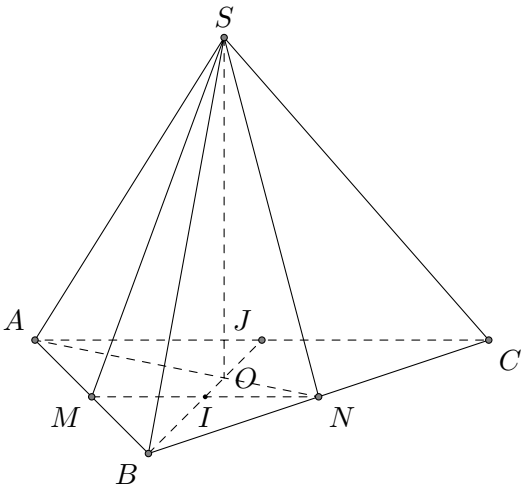
$AN = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AO = \frac{2}{3}AN = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Xét tam giác SOA: $SO = AO \cdot \tan 60° = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a$.

$IO = \frac{1}{6} \cdot BJ = \frac{1}{6} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$SI = \sqrt{SO^2 + IO^2} = \frac{7a\sqrt{3}}{12}$.

Suy ra $\widehat{SIO} = \frac{IO}{IS} = \frac{1}{7}$.

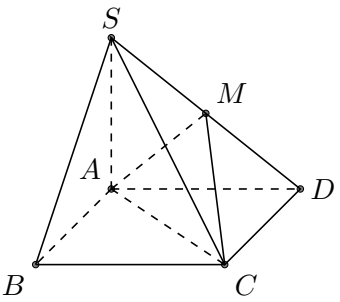


Chọn đáp án D □

Câu 221.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD. Tang của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

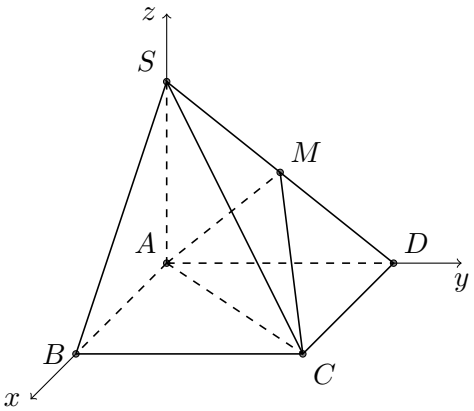


✍Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O \equiv A$, tia Ox trùng với tia AB, tia Oy trùng với tia AD, tia Oz trùng với tia AS.

Khi đó ta có: $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $D(0;a;0)$, $S(0;0;2a)$, $M\left(0;\frac{a}{2};a\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{AM} = \left(0;\frac{a}{2};a\right)$, $\overrightarrow{AC} = (a;a;0)$, $\overrightarrow{SB} = (a;0;-2a)$, $\overrightarrow{SC} = (a;a;-2a)$.



Suy ra:

— Mặt phẳng (AMC) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = \frac{2}{a^2} \cdot \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}\right] = (-2;2;-1)$.

— Mặt phẳng (SBC) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = \frac{1}{a^2} \cdot \left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}\right] = (2;0;1)$.

Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC), ta có:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{5}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Do đó $\tan\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

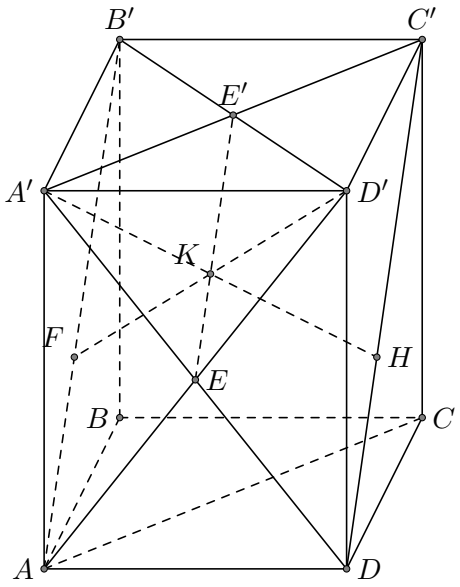
Chọn đáp án (D) □

Câu 222. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2a$, $AD = 3a$, $AA' = 4a$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$. Giá trị của $\cos\alpha$ bằng

A. $\dfrac{29}{61}$. **B.** $\dfrac{27}{34}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{137}{169}$.

✍Lời giải.

Gọi E, E' lần lượt là tâm của hình chữ nhật $ADD'A'$, $A'B'C'D'$.
Khi đó: $EE' = (DA'C') \cap (AB'D')$.
Dựng $A'H$, $D'F$ lần lượt là đường cao của hai tam giác $DA'C'$, $AB'D'$.
Dễ thấy: $A'H$, $D'F$, EE' đồng qui tại K và $\begin{cases} A'K \perp EE' \\ D'K \perp EE'. \end{cases}$
Khi đó ta có góc giữa $(AB'D')$ và $(A'C'D)$ chính là góc giữa hai đường thẳng $A'H$ và $D'F$.
Hình chữ nhật $DD'C'C$ có: $DC' = \sqrt{DD'^2 + D'C'^2} = 2\sqrt{5}a$.
Hình chữ nhật $ADD'A'$ có: $A'D = \sqrt{AD^2 + AA'^2} = 5a$.



Hình chữ nhật $A'B'C'D'$ có: $A'C' = \sqrt{A'B'^2 + B'C'^2} = \sqrt{13}a$.
Suy ra: $S_{\Delta DA'C'} = \sqrt{61}a^2 \Rightarrow A'H = \dfrac{2S_{\Delta DA'C'}}{DC'} = \dfrac{\sqrt{305}}{5}a \Rightarrow A'K = \dfrac{\sqrt{305}}{10}a$.
Hoàn toàn tương tự ta có: $D'K = \dfrac{\sqrt{305}}{10}a$.
Trong tam giác $A'D'K$ có: $\cos\widehat{A'KD'} = \dfrac{A'K^2 + D'K^2 - A'D'^2}{2.A'K.D'K} = -\dfrac{29}{61}$.
$\Rightarrow \cos\alpha = \left|\cos\widehat{A'KD'}\right| = \dfrac{29}{61}$.

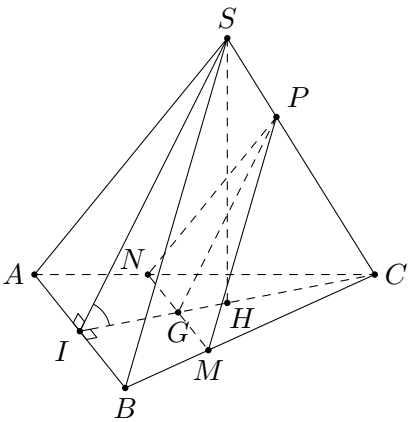
Chọn đáp án (A) □

Câu 223. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = CA = CB = AB = a$, $SC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, G là trọng tâm tam giác ABC, (α) là mặt phẳng đi qua G, song song với các đường thẳng AB và SB. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của (α) và các đường thẳng BC, AC, SC. Góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và (ABC) bằng

A. $90°$. **B.** $45°$. **C.** $30°$. **D.** $60°$.

✍Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AB, H là hình chiếu của S lên IC, ta có $AB \perp (SIC)$ và $SH \perp (ABC)$.
Theo giả thiết, $SI = SC = CI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên
$\triangle SIC$ đều và H là trung điểm của IC.
Do $\begin{cases} SA \parallel (\alpha) \\ AB \parallel (\alpha) \end{cases}$ nên $(SAB) \parallel (\alpha)$ hay $(SAB) \parallel (MNP)$.
Suy ra $((MNP);(ABCD)) = ((SAB);(ABCD)) = \widehat{SIC} = 60°$.

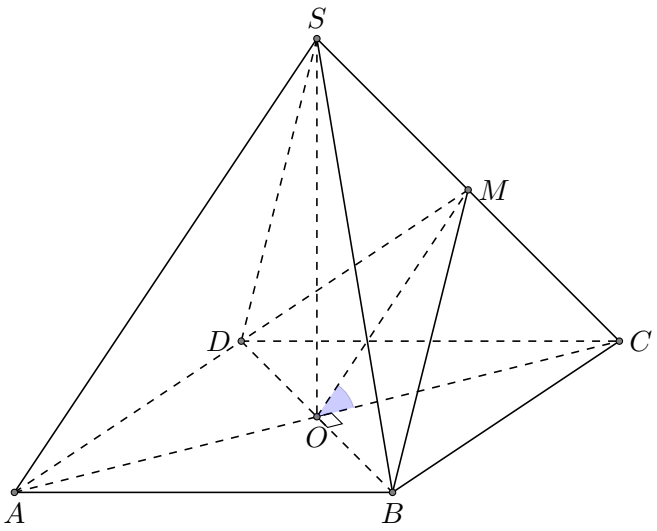


Chọn đáp án (D) □

Câu 224. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên bằng cạnh đáy và bằng a. Gọi M là trung điểm của SC. Góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$ bằng

A. 90°. **B**. 30°. **C**. 45°. **D**. 60°.

✍Lời giải.



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Ta có:

— $\begin{cases} BD \perp SO \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SOC) \Rightarrow BD \perp OM.$

— $\begin{cases} (MBD) \cap (ABCD) = BD \\ BD \perp OM \\ BD \perp OC \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(MBD),(ABCD)}\right) = \left(\widehat{OM,OC}\right) = \widehat{MOC}.$

— $OM = MC = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{a}{2} \Rightarrow \triangle MOC$ cân tại M; $OC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

— $\cos\widehat{MOC} = \cos\widehat{MCO} = \dfrac{OC}{SC} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{MOC} = 45^\circ.$

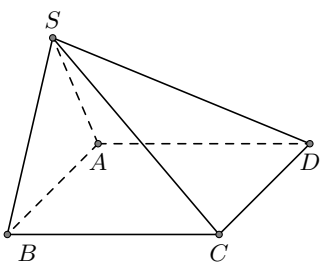
Vậy $\left(\widehat{(MBD),(ABCD)}\right) = 45^\circ$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 225.

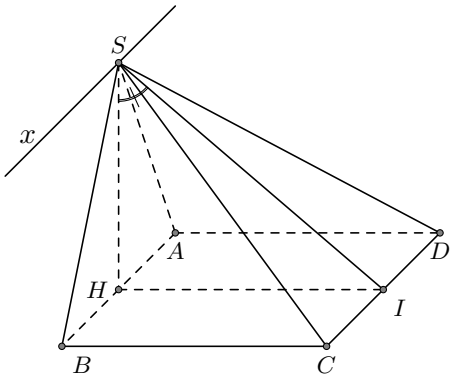
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật thỏa $AD = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AB$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

A. 60°. **B**. 30°. **C**. 90°. **D**. 45°.



✍Lời giải.

$(SAB) \cap (SCD) = Sx \parallel AB \parallel CD$. Gọi H, I lần lượt là trung điểm của AB, $CD \Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp CD$. Đồng thời, $HI \perp CD$ suy ra $CD \perp (SHI) \Rightarrow CD \perp SI$.
Do $Sx \parallel CD \Rightarrow SH \perp Sx$, $SH \perp SI$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là góc $\widehat{HSI}$. Có $SH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2}$, $HI = AD = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan\widehat{HSI} = \dfrac{HI}{SH} = 1 \Rightarrow \widehat{HSI} = 45^\circ$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng 45°.



Chọn đáp án D □

Câu 226. Cho hai mặt phẳng phân biệt α và β và đường thẳng a. Xét các mệnh đề sau đây

I) $\begin{cases} \alpha \perp a \\ \beta \perp a \end{cases} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$;

II) $\begin{cases} \alpha \parallel a \\ \beta \parallel a \end{cases} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$;

III) $\begin{cases} a \perp \beta \\ \alpha \perp \beta \end{cases} \Rightarrow a \parallel \alpha$;

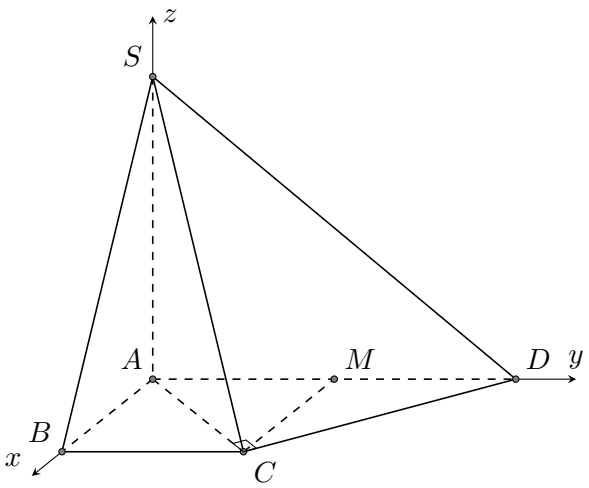
IV) $\begin{cases} \alpha \parallel \beta \\ \alpha \perp a \end{cases} \Rightarrow a \perp \beta$.

Hỏi trong bốn mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề **đúng**?
A. 1. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 4.

Lời giải.
Mệnh đề I đúng.
Mệnh đề II sai vì α và β có thể cắt nhau.
Mệnh đề III sai a có thể thuộc α.
Mệnh đề IV đúng.
Chọn đáp án B □

Câu 227. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{5}$. Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng
A. $\dfrac{2\sqrt{21}}{21}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{21}}{12}$. **C**. $\dfrac{\sqrt{21}}{6}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{21}}{21}$.

Lời giải.
Xét hình chóp $S.ABCD$ trong hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó ta có
$A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;2a;0)$,
$S\left(0;0;a\sqrt{5}\right)$, $M(0;a;0)$, $C(a;a;0)$
Ta có $\overrightarrow{BC} = (0;a;0)$, $\overrightarrow{SB} = \left(a;0;-a\sqrt{5}\right)$
$\Rightarrow \vec{n}_{(SBC)} = \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{SB}\right] = \left(-a^2\sqrt{5};0;-a^2\right)$.
Ta có $\overrightarrow{CD} = (-a;a;0)$, $\overrightarrow{SC} = \left(a;a;-a\sqrt{5}\right)$
$\Rightarrow \vec{n}_{(SCD)} = \left[\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{SC}\right] = \left(-a^2\sqrt{5};-a^2\sqrt{5};-2a^2\right)$.



Ta có $\cos[(SBC),(SCD)] = \dfrac{\left|\vec{n}_{(SBC)} \cdot \vec{n}_{(SCD)}\right|}{\left|\vec{n}_{(SBC)}\right| \cdot \left|\vec{n}_{(SCD)}\right|} = \dfrac{\left|5a^4 + 2a^4\right|}{a^2\sqrt{6} \cdot a^2\sqrt{14}} = \dfrac{\sqrt{21}}{6}$.

Chọn đáp án C □

Câu 228. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ đỉnh S, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cách cạnh SB và SC. Biết mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC). Tính diện tích tam giác AMN theo a.

A. $\dfrac{a^2\sqrt{10}}{24}$. **B.** $\dfrac{a^2\sqrt{10}}{16}$. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{5}}{8}$. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{5}}{4}$.

✍Lời giải.

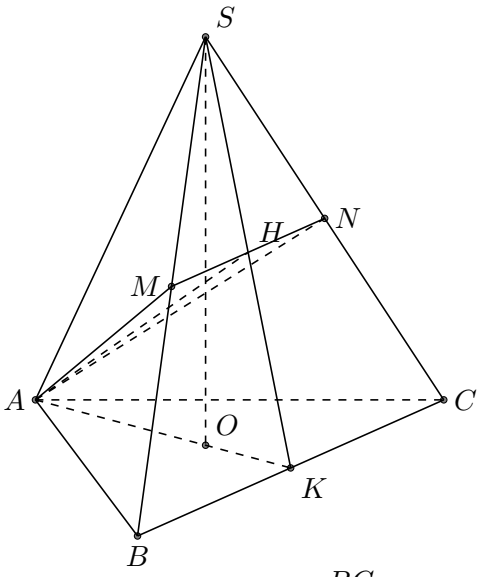
Gọi K là trung điểm của BC và H là giao điểm của SK và MN. Giả sử O là trọng tâm của tam giác ABC do giả thiết suy ra $SO \perp (ABC)$.

Ta có $MN \parallel BC$ và $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SH}{SK} = \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{1}{2}$.

Vì $KB = KC$ nên ta chứng minh được $HM = HN$.

Mặt khác ta dễ chứng minh được $AM = AN$ nên tam giác AMN cân đỉnh A. Vì $(MAN) \cap (SBC) = MN$, $(MAN) \perp (SBC)$, $AH \perp MN$ nên $AH \perp (SBC)$ suy ra $AH \perp SK$.

Theo chứng minh trên ta có $SH = HK$ nên tam giác SAK cân đỉnh A suy ra $SA = AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Trong tam giác vuông SBK ta có $SK^2 = SB^2 - BK^2$. Mà $SA = SB$ và $BK = \dfrac{BC}{2}$. Nên $SK^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{2a^2}{4} \Leftrightarrow SK = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Suy ra $SH = HK = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Tương tự $AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$.

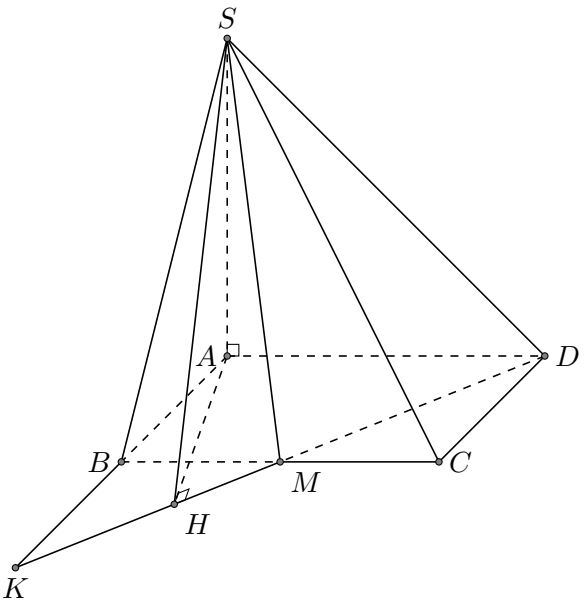
Mà $S_{\Delta MAN} = \dfrac{1}{2}AH \cdot MN = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{10}}{4} \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{10}}{16}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 229. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = AB = a$, $AD = 3a$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính cô-sin góc tạo bởi 2 mặt phẳng $(ABCD)$ và (SDM).

A. $\dfrac{6}{7}$. **B.** $\dfrac{5}{7}$. **C.** $\dfrac{3}{7}$. **D.** $\dfrac{1}{7}$.

✍Lời giải.



• Gọi H là hình chiếu của A trên DM, ta có $DM \perp (SAH)$ nên $DM \perp SH$.
Suy ra $((SDM),(ABCD)) = (SH, AH) = \widehat{SHA}$.
• Gọi K là giao điểm của DM và AB, ta có B là trung điểm AK nên $AK = 2AB = 2a$.
$\triangle ABK$ vuông tại A và có AH là đường cao. Ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AK^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{9a^2} = \frac{13}{36a^2}.$$

nên $AH = \dfrac{6a}{\sqrt{13}}$.
Lại có $SH^2 = SA^2 + AH^2 = a^2 + \dfrac{36a^2}{13} = \dfrac{49a^2}{13}$ nên $SH = \dfrac{7a}{\sqrt{13}}$.
• $\cos\widehat{SHA} = \dfrac{AH}{SH} = \dfrac{6}{7}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 230. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **đúng**?

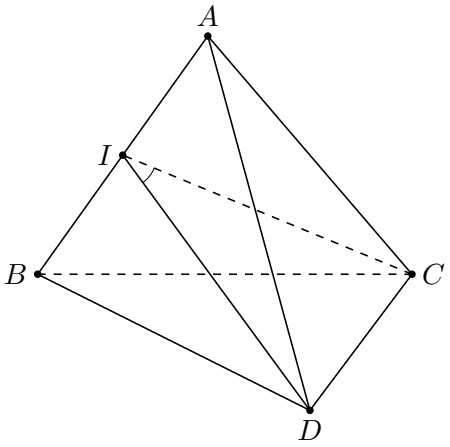
A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
C. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.
D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

✍**Lời giải.**
Mệnh đề đúng là: "Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau".
Chọn đáp án (D) □

Câu 231. Cho tứ diện đều $ABCD$. Cô-sin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B**. $\dfrac{1}{4}$. **C**. $\dfrac{1}{5}$. **D**. $\dfrac{1}{3}$.

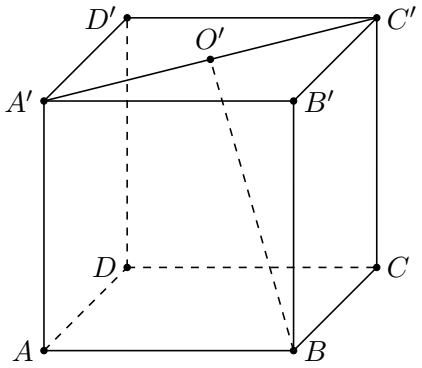
✍**Lời giải.**
Gọi I là trung điểm AB. Khi đó $CI \perp AB$ và $DI \perp AB$, nên $((ABC),(ABD)) = (CI, DI) = \widehat{CID}$.
Giả sử độ dài mỗi cạnh tứ diện $ABCD$ bằng 1, khi đó ta có $CI = DI = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, nên $\cos\widehat{CID} = \dfrac{CI^2 + DI^2 - CD^2}{2 \cdot CI \cdot DI} = \dfrac{1}{3}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 232.
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, gọi O' là trung điểm của $A'C'$. Tính $\tan\alpha$ với α là góc tạo bởi đường thẳng BO' và mặt phẳng $(ABCD)$.

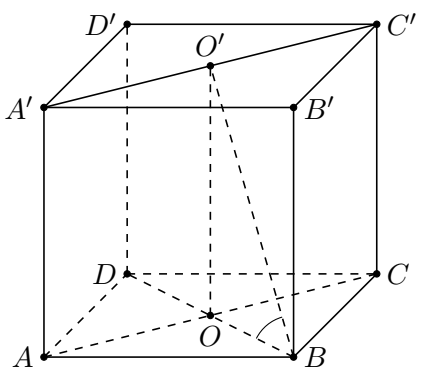
A. $\sqrt{3}$. **B**. $\sqrt{2}$. **C**. 1. **D**. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



✍**Lời giải.**

Gọi O là trung điểm của $AC \Rightarrow OO' \perp (ABCD)$. Suy ra, $\widehat{O'BO}$ là góc giữa đường thẳng $O'B$ và mặt phẳng $(ABCD)$.
Gọi a là cạnh của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, $OO' = a, OB = \dfrac{OB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Tam giác $O'BO$ vuông tại O, suy ra

$$\tan \widehat{O'BO} = \frac{OO'}{OB} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}.$$



Vậy $\tan \alpha = \sqrt{2}$.

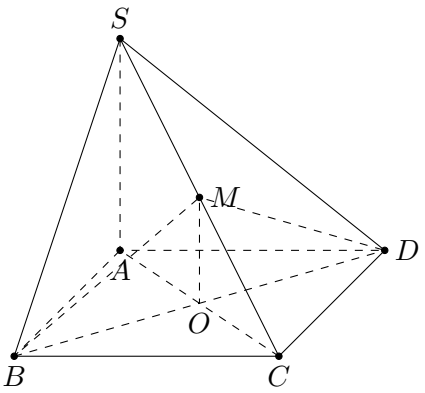
Chọn đáp án (B) □

Câu 233. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 120°$, $SA \perp (ABCD)$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng $60°$. Tính SA.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $a\sqrt{6}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

✍Lời giải.

Ta có $BD \perp SC$, kẻ $OM \perp SC \Rightarrow (BDM) \perp SC$ do đó góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là $\widehat{BMD} = 120°$ hoặc $\widehat{BMD} = 60°$.
Trường hợp 1: $\widehat{BMD} = 120°$ mà tam giác BMD cân tại M nên $\widehat{BMO} = 60°$. Khi đó $MO = BO \cdot \cot 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.
Do $\Delta OCM \backsim \Delta SCA$ nên $OM = \dfrac{SA \cdot CD}{SC} \Rightarrow SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.
Trường hợp 2: $\widehat{BMD} = 60°$ tính ra thì vô lý.



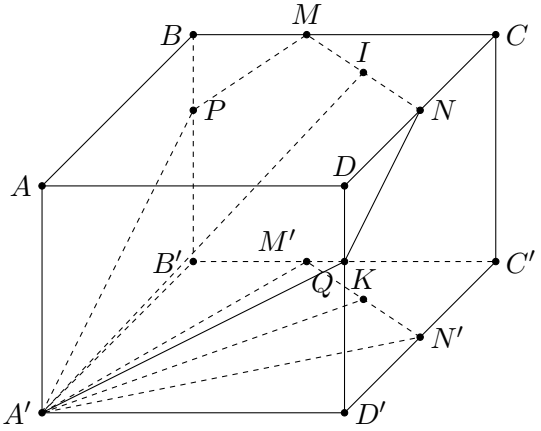
Chọn đáp án (D) □

Câu 234. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là 2. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Tính diện tích thiết diện của hình lập phương khi cắt bởi mặt phẳng $(A'MN)$.

A. $\dfrac{7\sqrt{17}}{6}$. **B.** $\dfrac{5\sqrt{17}}{6}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{35}}{7}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{35}}{7}$.

✍Lời giải.

Thiết diện của hình lập phương khi cắt bởi mặt phẳng $(A'MN)$ là ngũ giác $A'PMNQ$.
Hình chiếu của ngũ giác $A'PMNQ$ lên mặt phẳng $A'B'C'D'$ là ngũ giác $A'B'M'N'D'$.
Áp dụng công thức $S' = S \cdot \cos\varphi \Rightarrow S'_{A'B'M'N'D'} = S_{A'PMNQ} \cdot \cos\varphi$.
Ta có $S'_{A'B'M'N'D'} = S_{A'B'C'D'} - S_{M'C'N'} = 2 \cdot 2 - \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \dfrac{7}{2}$.
Gọi I, K lần lượt là trung điểm của MN và $M'N' \Rightarrow A'I \perp MN$ và $A'K \perp M'N' \Rightarrow \varphi = \widehat{IA'K}$.



Ta có $A'M = \sqrt{A'B^2 + BM^2} = \sqrt{8+1} = 3 \Rightarrow A'I = \sqrt{A'M^2 - MI^2} = \sqrt{9 - \dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$.

$A'M'^2 = A'B'^2 + B'M'^2 = 5 \Rightarrow A'K = \sqrt{A'M'^2 - M'K^2} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Xét tam giác $A'IK$ vuông tại K, ta có $\cos\varphi = \dfrac{A'K}{A'I} = \dfrac{3}{\sqrt{17}}$.

Suy ra $S_{A'PMNQ} = \dfrac{7}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{17}}{3} = \dfrac{7\sqrt{17}}{6}$.

Chọn đáp án A □

Câu 235. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA = 2BC$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Hình chiếu của A trên các đoạn SB, SC lần lượt là M, N. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC)và (AMN).

A. 45°. **B**. 15°. **C**. 30°. **D**. 60°.

✍Lời giải.

Đặt $BC = a$. Dựng đường kính AD của đường tròn ngoại tiếp đáy.

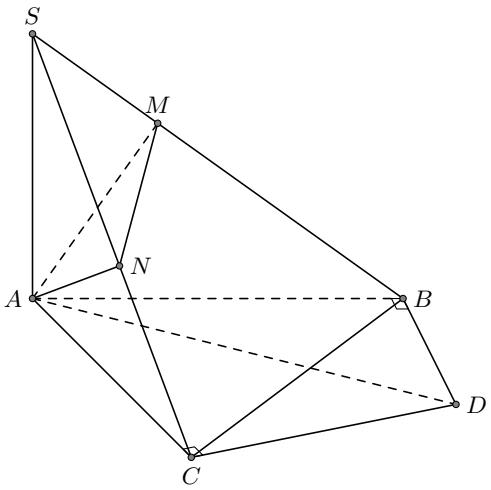
Ta có $\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow CD \perp AN$.

Mà $AN \perp SC \Rightarrow AN \perp (SCD) \Rightarrow AN \perp SD$.

Tương tự ta chứng minh $SD \perp AM$. Suy ra $SD \perp (AMN)$ lại có $SA \perp (ABC)$ nên $((AHK),(ABC)) = (SD,SA) = \widehat{ASD}$.

Ta có $AD = \dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

$\tan \widehat{ASD} = \dfrac{AD}{SA} = \dfrac{\frac{2a\sqrt{3}}{3}}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{ASD} = 30^\circ$.



Chọn đáp án C □

Câu 236. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có G, G' lần lượt là trọng tâm của hai đáy ABC và $A'B'C'$ (tham khảo hình vẽ). Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (AGG') với hình lăng trụ đã cho là

A. tam giác vuông.

B. tam giác cân.

C. hình vuông.

D. hình chữ nhật.

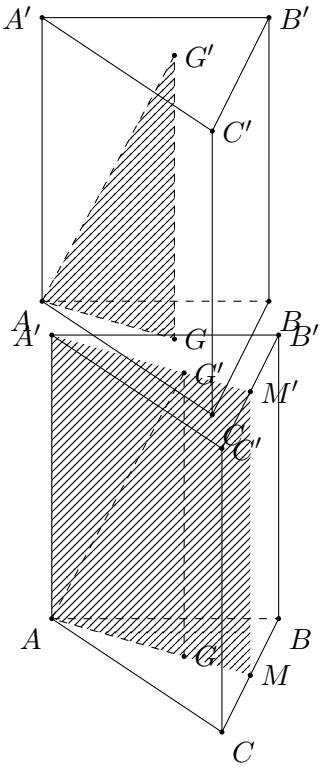
✍Lời giải.

Ta có $(A'B'C') \parallel (ABC)$ nên $(AGG') \cap (A'B'C') = A'M'$.

(M' là trung điểm của $B'C'$).

Gọi M là trung điểm của BC.

Thiết diện là hình chữ nhật $AA'M'M$



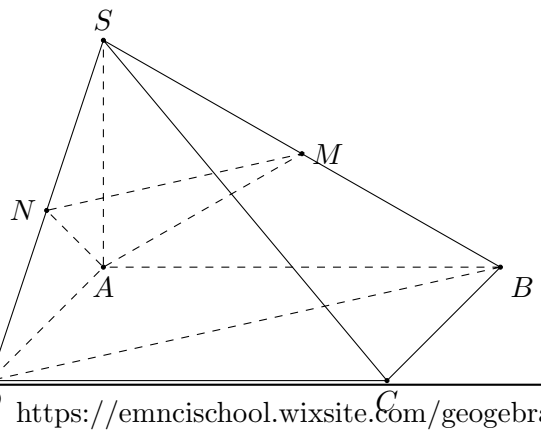
Chọn đáp án D □

Câu 237. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SB và SD (tham khảo hình vẽ), α là góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (SBD). Giá trị $\sin\alpha$ bằng

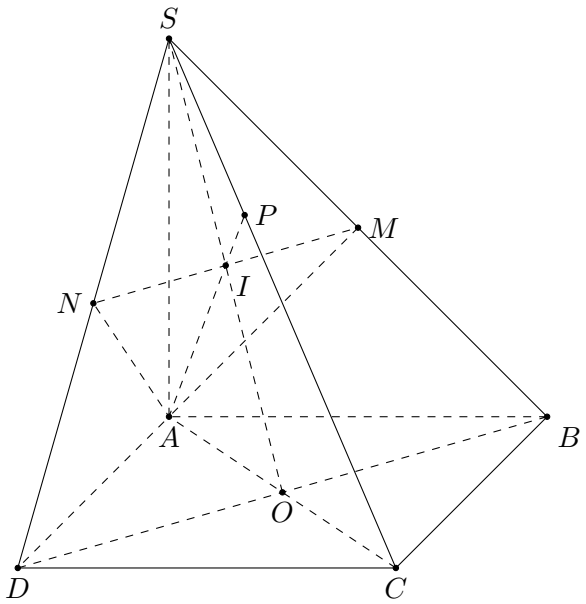
A. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **B**. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

C. $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$. **D**. $\dfrac{1}{3}$.

✍Lời giải.



Gọi O là trung điểm của BD.
Gọi $I = MN \cap SO$, $P = AI \cap SC$.
Ta có $\begin{cases} SB \perp AM \\ BC \perp AM \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SC$.
Tương tự ta có $AN \perp SC$
Suy ra $SC \perp (AMN)$
Mặt khác $\begin{cases} MN \parallel BD \\ BD \perp (SAO) \end{cases} \Leftrightarrow MN \perp (SAO)$.
Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (SBD) là góc giữa AI và SO hay là $\widehat{SIP} = \alpha$.
Xét tam giác vuông SIP vuông tại P. Ta có.
$SI = \dfrac{1}{2}SO = \dfrac{\sqrt{6}}{4}a$.
$SP = \dfrac{SA^2}{SC} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$ (áp dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông SAC).
$\sin\alpha = \dfrac{SP}{SI} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.



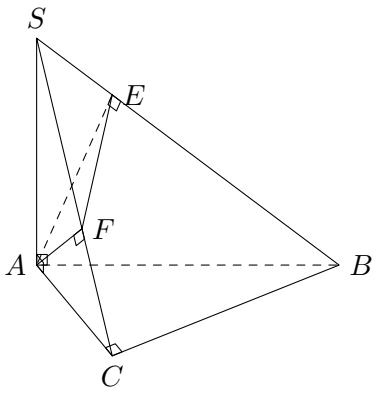
Chọn đáp án (B) □

Câu 238. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABC)$, đáy ABC là tam giác vuông tại C. Cho $\widehat{ASC} = 60°, \widehat{BSC} = 45°$, sin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

✍Lời giải.

Dựng $AE \perp SB, AF \perp SC$. Dễ dàng chứng minh được $SB \perp (AEF)$.
Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là góc $\widehat{AEF}$.
Giả sử $SA = 1 \Rightarrow SC = 2, BC = 2, AC = \sqrt{3}$ và $AB = \sqrt{7}, SB = 2\sqrt{2}$.
Từ đó có $AF = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, AE = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$.
Tam giác AFE vuông tại F nên $\sin\widehat{FEA} = \dfrac{\sqrt{42}}{7}$.

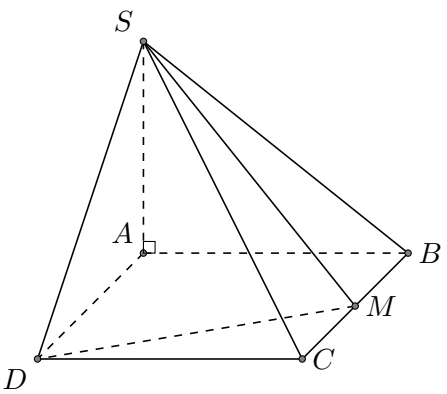


Chọn đáp án (C) □

Câu 239.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA = a$ và vuông góc $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình vẽ bên). Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SMD) và $(ABCD)$.

A. $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

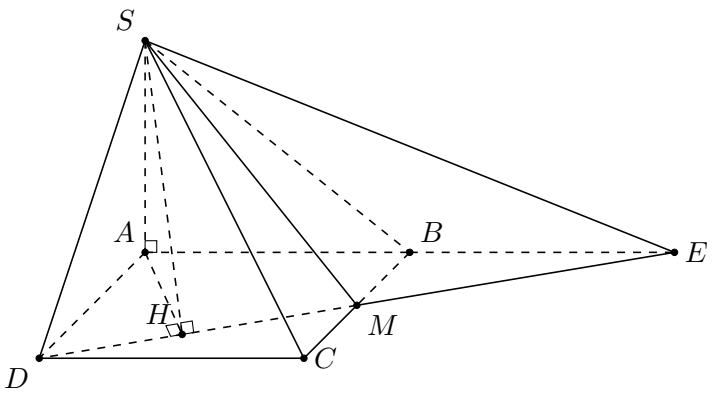


✍Lời giải.

Kéo dài DM cắt AB tại E. Kẻ $AH \perp DM$ ($H \in DM$). Khi đó B là trung điểm của AE ,góc $\widehat{SHA}$ là góc giữa (SMD) và đáy.

Ta có $AH = \dfrac{AD \cdot AE}{\sqrt{AD^2 + AE^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

$\tan \widehat{SHA} = \dfrac{SA}{AH} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \cos \widehat{SHA} = \sqrt{\dfrac{1}{1 + \tan^2 \widehat{SHA}}} = \dfrac{2}{3}$.



Chọn đáp án C □

Câu 240. Cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau, gọi $d = (\alpha) \cap (\beta)$. Xét các mệnh đề sau:
(I). Nếu $a \subset (\alpha)$ và $a \perp d$ thì $a \perp (\beta)$
(II). Nếu $d' \perp (\alpha)$ thì $d' \perp d$.
(III). Nếu $b \perp d$ thì $b \subset (\alpha)$ hoặc $b \subset (\beta)$.
(IV). Nếu $d \perp (\gamma)$ thì $(\gamma) \perp (\alpha)$ và $(\gamma) \perp (\beta)$.
Số mệnh đề **sai** là

A. 4. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Chỉ có mệnh đề (III) sai.
Chọn đáp án B □

Câu 241. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều, $SC = SD = a\sqrt{3}$. Gọi I là trung điểm của AB, J là trung điểm của CD. Gọi H là hình chiếu của S trên $(ABCD)$. Qua H kẻ đường thẳng song song với AB, đường thẳng này cắt AD và BC kéo dài lần lượt tại M, N. Xét các mệnh đề sau
(I). Tam giác SIJ là tam giác nhọn.
(II). $\sin \widehat{SIH} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
(III). $\widehat{MSN}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD).
(IV). $\cos \widehat{MSN} = \dfrac{1}{3}$.
Các mệnh đề **đúng** là

A. (I) và (II). **B**. (II) và (III). **C**. (III). **D**. (III) và (IV).

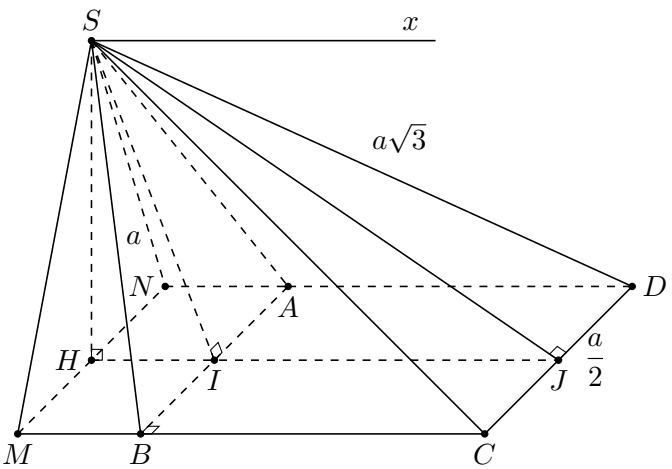
Lời giải.

Vì tam giác SAB và tam giác SCD cân tại S và I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD nên $SI \perp AB$ và $SJ \perp CD \Rightarrow AB \perp SJ$.

Từ $\begin{cases} AB \perp SI \\ AB \perp SJ \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SIJ)$.

Vì $\begin{cases} AB \in (ABCD) \\ AB \perp (SIJ) \end{cases} \Rightarrow (SIJ) \perp (ABCD)$.

Kẻ $SH \perp IJ = (SIJ) \cap (ABCD)$. Suy ra $SH \perp (ABCD)$.



Trong $\triangle SAB$ có $SI = SA \sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Trong $\triangle (SCD)$ có $SJ = \sqrt{SD^2 - JD^2} = \dfrac{a\sqrt{11}}{2}$.

Đặt $HI = x \Rightarrow SH^2 = SI^2 - x^2 = SJ^2 - (a + x)^2 \Rightarrow x = \dfrac{a}{2}$.

— Vì đường thẳng qua H song song với AB cắt các cạnh AD, BC kéo dài nên H nằm ngoài đoạn IJ nên $\triangle SIJ$ tù. Mệnh đề (I) sai.

— $\cos\widehat{SIJ} = \dfrac{SI^2+SJ^2-IJ^2}{2SI\cdot SJ} = \dfrac{5\sqrt{33}}{33}$. Mệnh đề (II) sai

— Vì $AD \parallel BC$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng Sx đi qua S và song song với BC và AD.
Ta có $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp MN$ mà $SH \perp BC$ suy ra $BC \perp (SMN) \Rightarrow Sx \perp (SMN)$ nên $\widehat{MSN}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC). Mệnh đề (III) đúng.

— Ta có $SH = \sqrt{SI^2-HI^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4}-\dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SM = \sqrt{SH^2+HM^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác MSN có $\cos\widehat{MSN} = \dfrac{SM^2+SN^2-AB^2}{2\cdot SM\cdot SN} = \dfrac{\dfrac{3a^2}{4}+\dfrac{3a^2}{4}-a^2}{2\dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{1}{3}$.

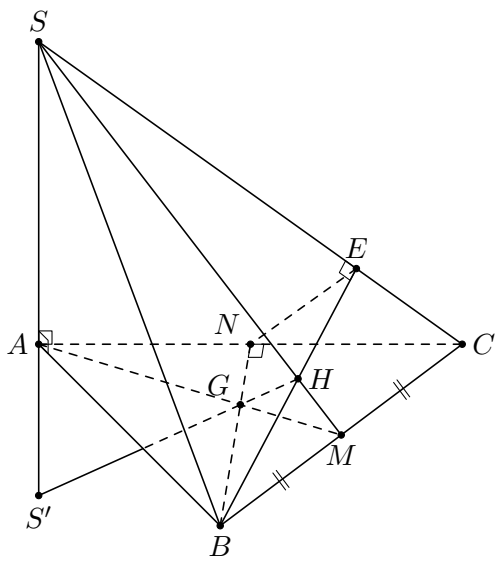
Mệnh đề (IV) đúng.

Vậy các mệnh đề đúng là (III) và (IV).
Chọn đáp án (D) □

Câu 242. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-2;0;0)$, $B(0;4;2)$, $C(2;2;-2)$. Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC), S là điểm di động trên đường thẳng d, G và H lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và trực tâm của tam giác SBC. Đường thẳng GH cắt đường thẳng d tại S'. Tính tích $SA.S'A$.

A. $SA.S'A = \dfrac{3}{2}$. **B.** $SA.S'A = \dfrac{9}{2}$. **C.** $SA.S'A = 12$. **D.** $SA\cdot S'A = 6$.

Lời giải.
Ta có $\overrightarrow{AB} = (2;4;2)$, $\overrightarrow{AC} = (4;2;-2)$, $\overrightarrow{BC} = (2;-2;4)$ nên $AB = BC = CA = 2\sqrt{6}$.
Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AC.
Từ $\begin{cases} BN \perp AC \\ SA \perp BN \end{cases} \Rightarrow BN \perp (SAC) \Rightarrow BN \perp SC$.
Từ $\begin{cases} BN \perp SC \\ BE \perp SC \end{cases} \Rightarrow SC \perp (BNE) \Rightarrow SC \perp GH$.
Mặt khác $\begin{cases} AM \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp GH$.
Vì $\begin{cases} GH \perp SC \\ GH \perp BC \end{cases} \Rightarrow GH \perp (SBC) \Rightarrow GH \perp SM$



Dễ thấy rằng $\triangle MAS \backsim \triangle S'AG \Rightarrow \dfrac{MA}{S'A} = \dfrac{AS}{AG} \Rightarrow AS\cdot AS' = MA\cdot AG = \dfrac{2}{3}AM^2$.
Mà $AM = AB\cdot\sin 60^\circ = 3\sqrt{2} \Rightarrow AS\cdot AS' = \dfrac{2}{3}\left(3\sqrt{2}\right)^2 = 12$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 243. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Gọi α là số đo góc giữa hai đường thẳng AA', $B'C'$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$. **B.** $\cos\alpha = \dfrac{3}{10}$. **C.** $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

— Gọi H là trung điểm của cạnh BC. Ta có
$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a \Rightarrow AH = a \Rightarrow$
$A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = a\sqrt{3}$
$\cos(AA', B'C') = \cos(BB', BC) = \cos\alpha$.

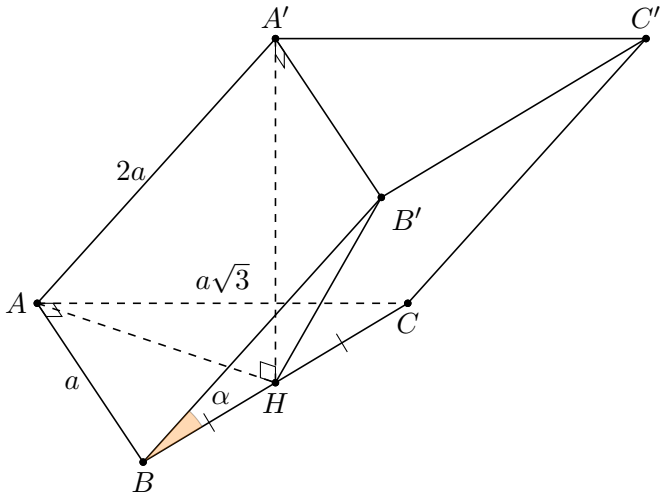
— Ta có
$A'H \perp (ABC) \Rightarrow A'H \perp (A'B'C') \Rightarrow$
$\Delta A'HB'$ vuông tại A'.

— Ta suy ra $B'H^2 = \sqrt{A'H^2 + A'B'^2} = 2a$.

— Trong tam giác $B'BH$ có

$$\cos\widehat{B'BH} = \frac{B'B^2 + BH^2 - B'H^2}{2B'B \cdot BH} = \frac{1}{4}.$$

— Vậy $\cos\alpha = \frac{1}{4}$.



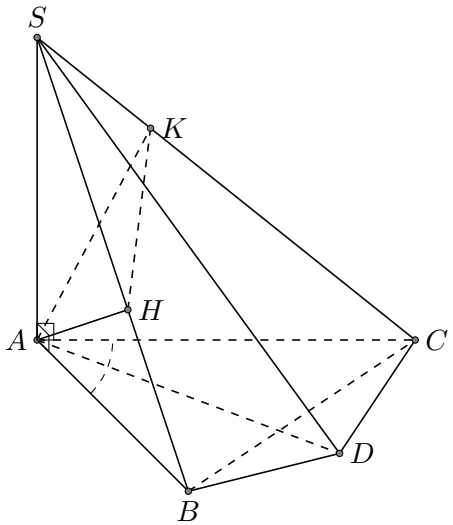
Chọn đáp án A □

Câu 244. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = BC = a$ và $\widehat{BAC} = 60°$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC. Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng (AHK) và (ABC).

A. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{7}$.

✍Lời giải.

Kẻ AD là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Ta có $\begin{cases} DB \perp AB \\ DB \perp SA \end{cases} \Rightarrow DB \perp (SAB) \Rightarrow DB \perp AH$, mà
$AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBD) \Rightarrow AH \perp SD$.
Ta có $\begin{cases} DC \perp AC \\ DC \perp SA \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SAC) \Rightarrow DC \perp AK$, mà
$AK \perp SC \Rightarrow AK \perp (SDC) \Rightarrow AK \perp SD$.
Do đó $SD \perp (AHK)$ (1).
Mà $SA \perp (ABC)$ (2).



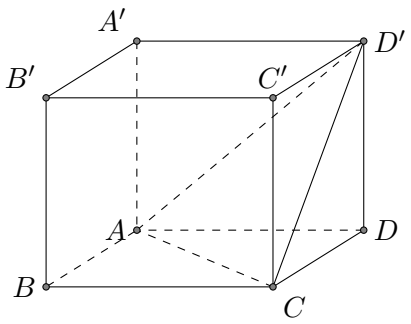
Từ (1) và (2), suy ra góc giữa hai mặt phẳng (AHK) và (ABC) bằng $\widehat{(SD;SA)} = \widehat{ASD} = \alpha$.
Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC, ta có $\frac{BC}{\sin A} = AD \Rightarrow AD = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.
Xét $\triangle SAD$, ta có $\tan\alpha = \frac{AD}{AS} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$

Chọn đáp án A □

Câu 245.

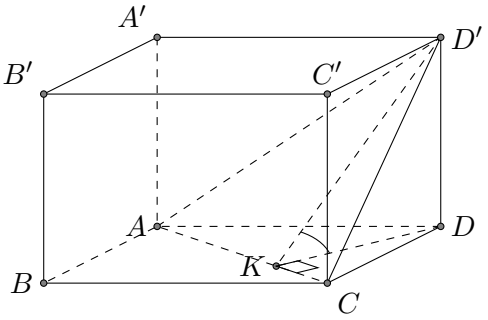
Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = 2a$, $AA' = 3a$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(ABCD)$ (tham khảo hình vẽ bên).
Giá trị của $\tan\alpha$ bằng

A. $\dfrac{6\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$. **C.** 3. **D.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$.



✍Lời giải.

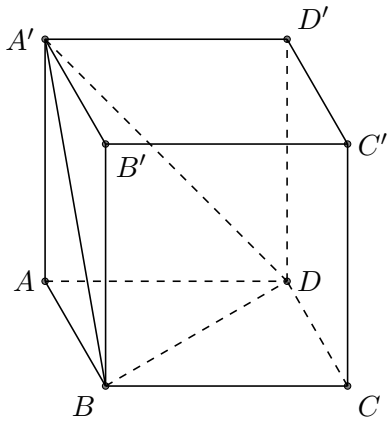
Gọi K là hình chiếu của D trên AC.
Vì $AC \perp DK$ và $AC \perp DD'$ nên $AC \perp KD'$.
Vậy góc giữa (ACD') và $(ABCD)$ bằng góc $\widehat{D'KD}$.
Ta có $KD = \dfrac{AD \cdot CD}{\sqrt{AD^2 + CD^2}} = \dfrac{2a \cdot a}{\sqrt{(2a)^2 + a^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.
$\tan\alpha = \dfrac{DD'}{KD} = 3a \div \dfrac{2a}{\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$.



Chọn đáp án B □

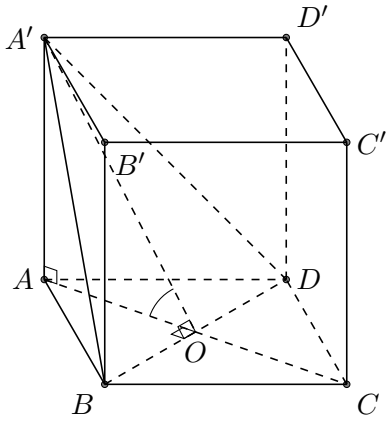
Câu 246.
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (*tham khảo hình vẽ*). Giá trị sin của góc giữa hai mặt phẳng (BDA') và $(ABCD)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.



✍Lời giải.

Gọi O là tâm đáy $ABCD$, suy ra $AO \perp BD$. Mặt khác tam giác $A'BD$ đều nên $A'O \perp BD$, từ đó suy ra $((A'BD),(ABCD)) = \widehat{A'OA}$.
Tam giác ABD vuông tại A, suy ra $A'B = BD = A'D = a\sqrt{2}$, từ đó suy ra $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và $A'O = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.
Tam giác $A'AO$ vuông tại A, suy ra $\sin\widehat{A'OA} = \dfrac{AA'}{A'O} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.



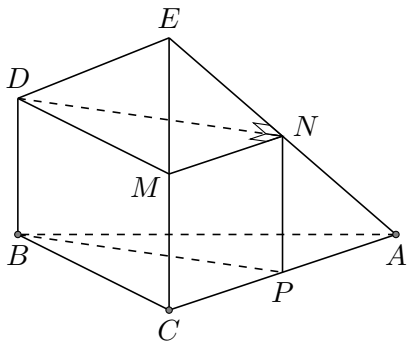
Chọn đáp án C □

Câu 247. Trong mặt phẳng (P) cho tam giác đều ABC cạnh a. Trên các đường thẳng vuông góc (P) tại B và C lần lượt lấy các điểm D, E nằm cùng một bên đối với (P) sao cho $BD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $CE = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ADE).

A. $30°$. **B.** $90°$. **C.** $45°$. **D.** $60°$.

✍Lời giải.

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của EC, EA, AC. Dễ thấy mặt phẳng (DMN) song song với mặt phẳng ABC nên góc giữa mặt phẳng (ADE) và mặt phẳng (P) là góc giữa (ADE) và mặt phẳng (DMN).



Ta có $\begin{cases} BP \perp AC \\ BP \perp CE \end{cases} \Rightarrow BP \perp (ACE)$.

Mặt khác $NP \parallel BD$ và $NP = \dfrac{1}{2}EC = BD$ nên $BPNM$ là hình bình hành. Do đó $BP \parallel DN \Rightarrow DN \perp (EAC)$. Suy ra $DN \perp EN$ và $DN \perp MN$. Vậy góc giữa (P) và mặt phẳng (DMN) là góc giữa EN và MN. Dễ thấy $\widehat{ENM} = \widehat{EAC} = 60^\circ$.

Chọn đáp án D □

Câu 248. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của AC. Khẳng định nào sau đây **sai**?

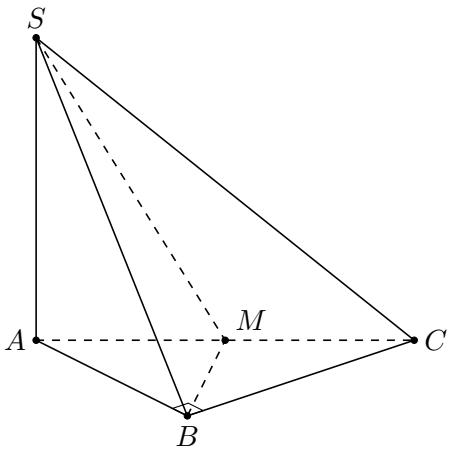
A. $(SAB) \perp (SBC)$. **B**. $(SBC) \perp (SAC)$. **C**. $BM \perp AC$. **D**. $(SBM) \perp (SAC)$.

Lời giải.

— Ta có $BC \perp AB$ và $BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAB)$, suy ra $(SAB) \perp (SBC)$.

— Do ABC là tam giác cân tại B nên $BM \perp AC$.

— Ta có $BM \perp SA$, $BM \perp AC$ nên $BM \perp (SAC)$, suy ra $(SBM) \perp (SAC)$.



Chọn đáp án B □

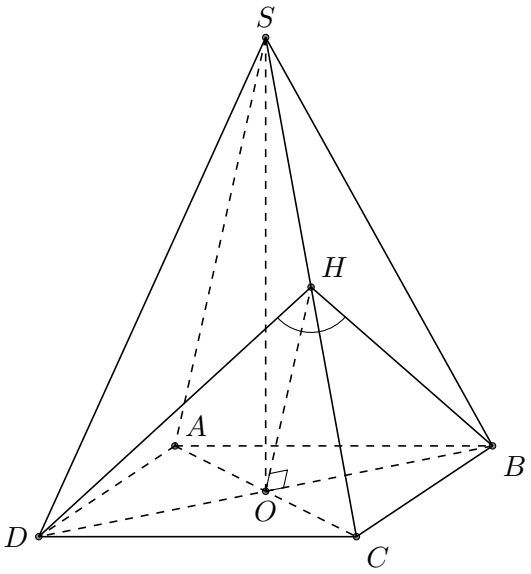
Câu 249. Cho hình chóp tứ giác đều có độ dài cạnh đáy bằng a. Tính cosin của góc giữa 2 mặt phẳng liền kề nhau.

A. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B**. $\dfrac{1}{3}$. **C**. $\dfrac{1}{2}$. **D**. $-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.

• Gọi H là trung điểm SC. Do $\triangle SBC$ và $\triangle SCD$ là các tam giác đều nên $BH \perp SC, DH \perp SC$. Do đó $\cos((SBC),(SCD)) = |\cos \widehat{BHD}|$.

• Ta có $HB = HD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $BD = a\sqrt{2}$ nên theo định lý cosin trong tam giác $\cos \widehat{BHD} = \dfrac{1}{3}$.



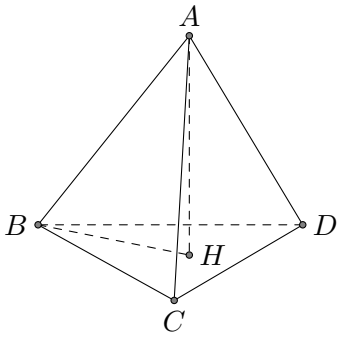
Chọn đáp án B □

Câu 250. Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài các cạnh là a. Gọi ϕ là góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD). Tính $\cos\phi$.

A. $\cos\phi=\dfrac{1}{2}$. **B.** $\cos\phi=0$. **C.** $\cos\phi=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\cos\phi=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

✍Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng BCD. Do $ABCD$ là tứ diện đều nên H là trọng tâm của tam giác đều BCD.



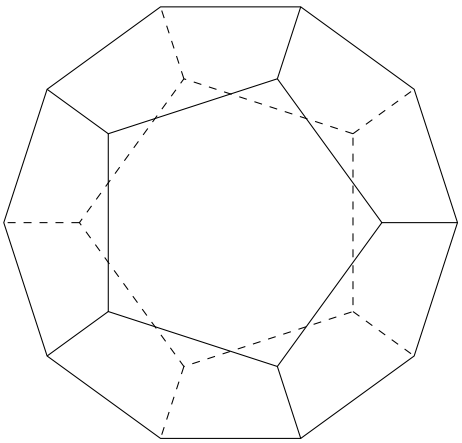
Ta có $BH=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Khi đó $\cos\phi=\cos\widehat{ABH}=\dfrac{BH}{AB}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 251.

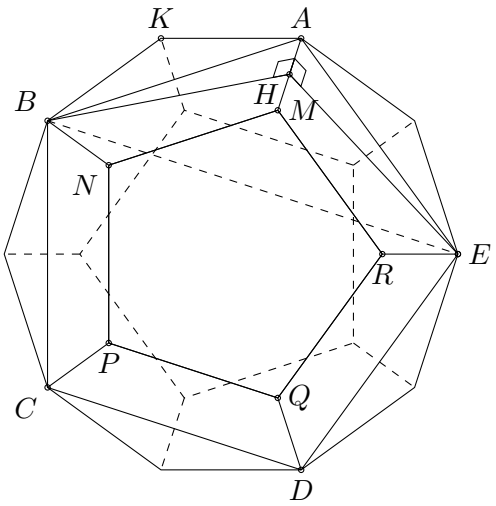
Cho hình thập nhị diện đều (tham khảo hình vẽ bên). Cô-sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng có chung một cạnh của thập nhị diện đều bằng



A. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

✍Lời giải.

Giả sử mỗi cạnh của đa diện đều có độ dài bằng 1 và ký hiệu các đỉnh như hình vẽ.



Mỗi mặt của khối đa diện đều là một ngũ giác đều nên dễ thấy $AB\parallel MN\Rightarrow AB\parallel(MNPQR)$. Tương tự ta có BC,CD,DE,EA song song với mặt phẳng $(MNPQR)$, dẫn tới A,B,C,D,E đồng phẳng và ngũ giác $ABCDE$ đều.

Ta có $\dfrac{AB}{\sin\widehat{AKB}}=\dfrac{AK}{\sin\widehat{ABK}}$ hay $\dfrac{AB}{\sin108^\circ}=\dfrac{AK}{\sin36^\circ}$

$$\Rightarrow AB=\frac{\sin108^\circ}{36^\circ}=\frac{\sin72^\circ}{\sin36^\circ}=2\cos36^\circ.$$

Lại có $BE=2AB\cos\widehat{ABE}=2AB\cos36^\circ\Rightarrow BE=4\cos^2 36^\circ$.

Lấy H là trung điểm AM, khi đó ta có $BH\perp AM$ và $EH\perp AM$.

Góc giữa hai mặt chung cạnh AM là $\alpha=(BH,HE)$.

Ta có $\dfrac{BH}{AH}=\tan\widehat{BAH}=\tan72^\circ\Rightarrow BH=\dfrac{\tan72^\circ}{2}$.

Trong tam giác BHE cân tại H, $\cos\dfrac{\widehat{BHE}}{2}=\dfrac{BE}{2BH}=\dfrac{4\cos^2 36^\circ}{\tan72^\circ}=\dfrac{4\cos^2 36^\circ\cos72^\circ}{\sin72^\circ}=\dfrac{\cos36^\circ}{\cos18^\circ}$.

Từ đó dẫn tới $\cos\widehat{BHE}=\dfrac{2\cos^2 36^\circ}{\cos^2 18^\circ}-1=\dfrac{4\cos^2 36^\circ}{1+\cos36^\circ}-1$.

Ta có

$$\cos108^\circ+\cos72^\circ=0\Leftrightarrow4\cos^3 36^\circ+2\cos^2 36^\circ-3\cos36^\circ-1=0\Leftrightarrow\cos36^\circ=\frac{1+\sqrt{5}}{4}(\text{vì }\cos36^\circ>0).$$

Suy ra $\cos\widehat{BHE}=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, dẫn đến $\cos(BH,HE)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 252. Hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy và $SA = \dfrac{a}{2}$, tam giác ABC vuông tại A, $AC = a\sqrt{3}$, $AB = a$. Tính góc giữa mp(SBC) với mp(ABC).

A. $26°33'54''$. **B**. $30°$. **C**. $60°$. **D**. $63°58'5''$.

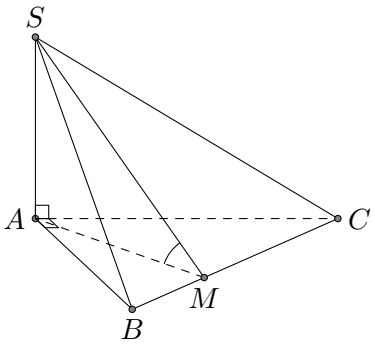
✍Lời giải.

Gọi M là hình chiếu vuông góc của A trên BC.

$\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM)$.

$\Rightarrow BM \perp SM$ (vì $SM \subset (SAM)$).

Vì $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SM \perp BC, SM \subset (SBC) \\ AM \perp BC, AM \subset (ABC) \end{cases}$



$\Rightarrow ((SBC),(ABC)) = (SM, AM) = \widehat{SMA}$ (vì tam giác SAM vuông tại A).

Tam giác ABC vuông tại A suy ra $\dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{(a\sqrt{3})^2} \Rightarrow AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\tan \widehat{SMA} = \dfrac{SA}{AM} = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SMA} = 30°$.

Vậy $((SBC),(ABC)) = 30°$.

Chọn đáp án B □

Câu 253. Chiều cao của khối lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ là

A. $A'H$ với H là trực tâm tam giác ABC. **B**. $A'H$ với H là trọng tâm tam giác ABC.
C. Độ dài một cạnh bên. **D**. $A'H$ với H là trung điểm BC.

✍Lời giải.

Lăng trụ đứng nên mỗi cạnh bên sẽ là một đường cao. Do đó, chiều cao của khối lăng trụ bằng độ dài một cạnh bên.

Chọn đáp án C □

Câu 254. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC = SA = a$, $\widehat{SAB} = \widehat{SAC} = 60°$ và đáy ABC là tam giác vuông tại A. Khi đó số đo góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) bằng

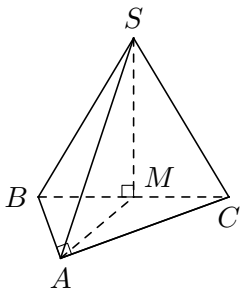
A. $45°$. **B**. $60°$. **C**. $90°$. **D**. $30°$.

✍Lời giải.

Gọi M là trung điểm BC. Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Vì $AB = AC = SA = a$, $\widehat{SAB} = \widehat{SAC} = 60°$ nên các tam giác SAB, SAC là tam giác đều.

Do vậy $SA = SB = SC = a \Rightarrow SM \perp (ABC) \Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) bằng $90°$.



Chọn đáp án C □

Câu 255. Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAB} = 90°$, $AB = 1$, $AC = 2$, $AD = 3$. Côsin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$. **B**. $\dfrac{3\sqrt{5}}{7}$. **C**. $\dfrac{1}{3}$. **D**. $\dfrac{2}{7}$.

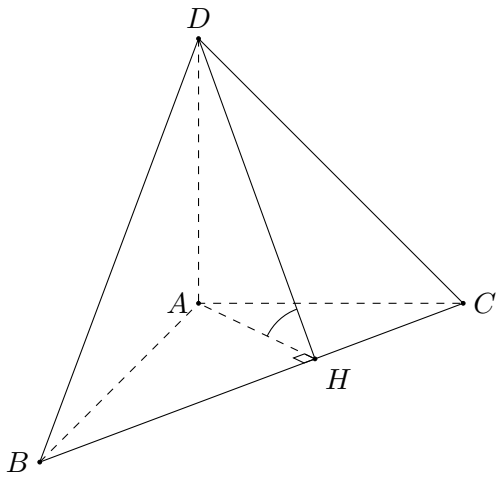
✍Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $AD \perp (ABC)$.
Trong $\triangle ABC$, kẻ $AH \perp AC$. Khi đó $BC \perp (DAH)$.
Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) bằng góc giữa hai đường thẳng AH và DH và bằng góc $\widehat{DHA}$.
Tam giác DAH vuông tại A

$$AH = \frac{AB \cdot AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = \frac{1 \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$DH = \sqrt{AD^2 + AH^2} = \sqrt{3^2 + \frac{4}{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}}.$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{DHA} = \frac{AH}{DH} = \frac{2}{\sqrt{5}} \div \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{2}{7}.$$

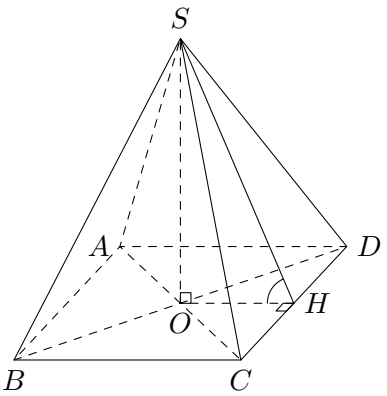


Chọn đáp án (D) □

Câu 256. Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$ và chiều cao bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Giá trị tang của góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

A. 1. **B**. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **C**. $\sqrt{3}$. **D**. $\frac{3}{4}$.

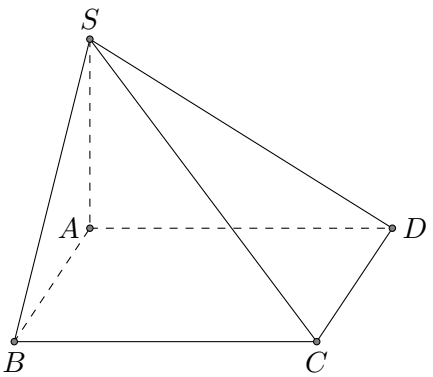
✍Lời giải.
Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$, với O là tâm của hình vuông $ABCD$.
Gọi H là trung điểm của CD.
Tam giác SCD cân tại S nên $SH \perp CD$.
Tam giác OCD cân tại O nên $OH \perp CD$.
Vậy góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ là $\widehat{SHO}$.
Ta có $OH = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ nên $\tan \widehat{SHO} = \frac{SO}{OH} = 1$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 257. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt đáy (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng

A. $\widehat{SDA}$. **B**. $\widehat{SCA}$. **C**. $\widehat{SCB}$. **D**. $\widehat{ASD}$.



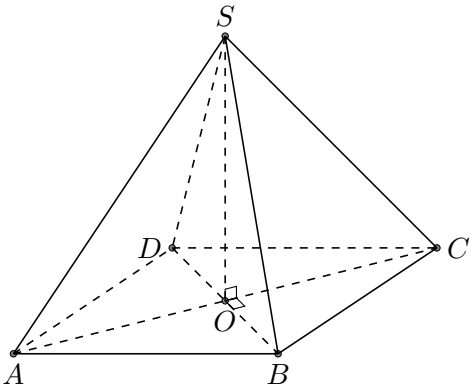
✍Lời giải.
Ta có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases}$ nên $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$ nên góc của (SCD) và $(ABCD)$ bằng $\widehat{SDA}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 258. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $SA = SC$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Mặt phẳng (SBD) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

B. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.
C. Mặt phẳng (SAD) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.
D. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

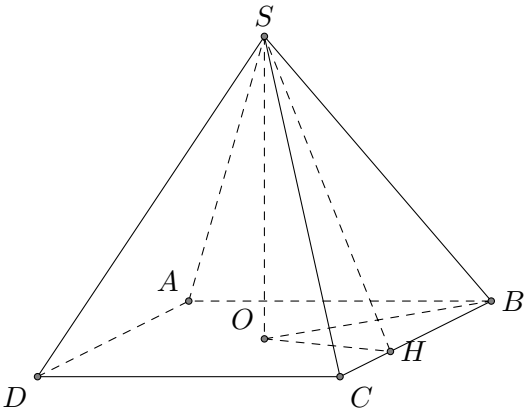
✍Lời giải.
Gọi $O = AC \cap BD$.
Tứ giác $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$ (1).
Mặt khác tam giác SAC cân tại S nên $SO \perp AC$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $AC \perp (SBD)$ nên $(SBD) \perp (ABCD)$.



Chọn đáp án A □

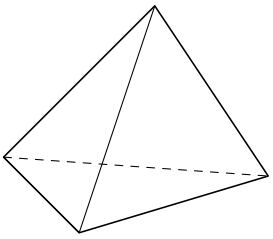
Câu 259. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh bằng a, $OB = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $SO \perp (ABCD)$ và $SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{9}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABDC)$ bằng
A. $30°$. **B**. $45°$. **C**. $60°$. **D**. $90°$.

✍Lời giải.
Kẻ $OH \perp BC$ với $H \in BC$.
$\begin{cases} OH \perp BC \\ SO \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOH)$.
Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABDC)$ bằng $\widehat{SHO}$.
Ta có $\begin{cases} S_{OBC} = \dfrac{1}{2} \cdot S_{BCD} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}a^2 \\ S_{OBC} = \dfrac{1}{2} \cdot OH \cdot BC \end{cases} \Rightarrow OH = \dfrac{\sqrt{2}}{3}a.$
Vậy $\widehat{SHO} = \tan^{-1}\dfrac{SO}{OH} = 30°$.

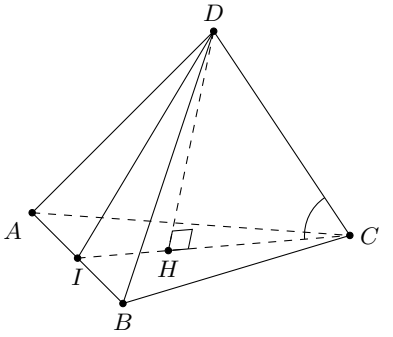


Chọn đáp án A □

Câu 260.
Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a. Góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$ (tham khảo hình vẽ bên). Côsin của góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp là
A. $\frac{1}{\sqrt{13}}$. **B**. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **C**. $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$. **D**. $\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

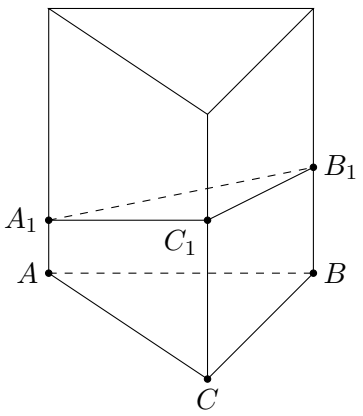


✍Lời giải.
Gọi I là trung điểm của AB. Góc $\widehat{DCH} = 60°$ là góc giữa cạnh bên và đáy, góc $\widehat{DIH}$ là góc giữa mặt bên và mặt đáy.
Ta có $DH = CH \cdot \tan 60° = a$. Vậy $DI = \sqrt{IH^2 + DH^2} = \dfrac{a\sqrt{39}}{6}$.
Vậy $\cos\widehat{DIH} = \dfrac{IH}{DH} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} : \dfrac{a\sqrt{39}}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$.



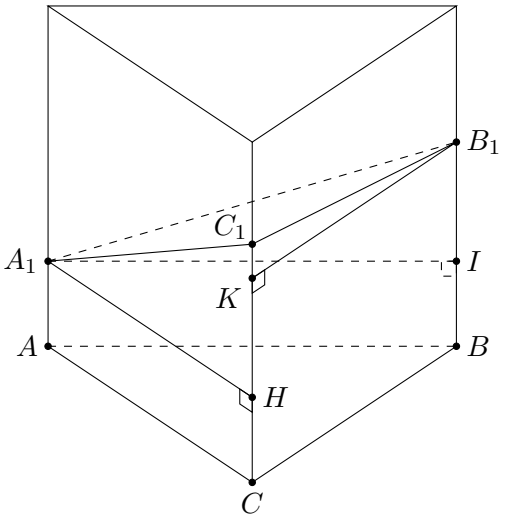
Chọn đáp án A □

Câu 261.
Đáy của một lăng trụ tam giác đều là tam giác ABC có cạnh bằng a. Trên các cạnh bên lấy các điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt cách đáy một khoảng bằng $\frac{a}{2}, a, \frac{3a}{2}$ (tham khảo hình vẽ bên). Côsin góc giữa $(A_1B_1C_1)$ và (ABC) bằng



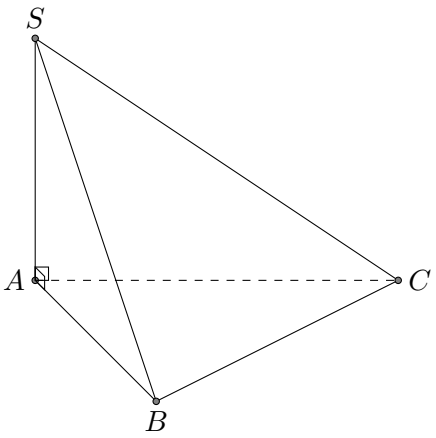
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{13}}{4}$.

✍Lời giải.
Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(A_1B_1C_1)$ và (ABC).
Theo công thức hình chiếu ta có $\cos\alpha = \dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}$.
Ta có $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu của A_1, B_1 lên các cạnh bên (xem hình vẽ).



Khi đó, ta có $\begin{cases} A_1C_1 = \sqrt{A_1H^2 + HC_1^2} = a\sqrt{2} \\ A_1B_1 = B_1C_1 = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} \end{cases}$.
Ta được tam giác $A_1B_1C_1$ cân tại $B_1 \Rightarrow S_{A_1B_1C_1} = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{4}$.
Vậy $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 262.
Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), biết $AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC)?



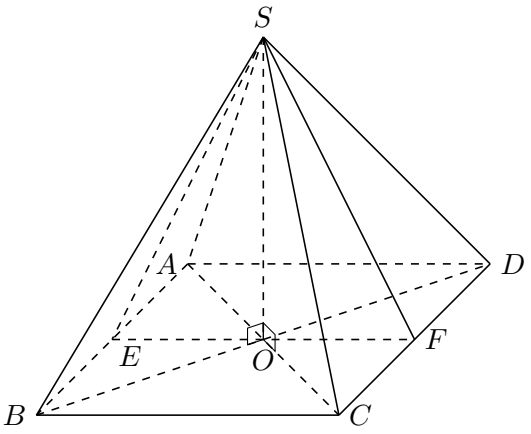
A. $120°$. **B.** $150°$.
C. $60°$. **D.** $30°$.

✍Lời giải.
Ta có $\begin{cases} (SAB) \cap (SAC) = SA \\ (ABC) \perp SA \\ (ABC) \cap (SAB) = AB \\ (ABC) \cap (SAC) = AC \end{cases}$.
Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng góc giữa hai đường thẳng AB và AC.
Xét tam giác $ABC \Rightarrow \cos BAC = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \dfrac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2 \cdot a \cdot a} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 120°$.
Khi đó, góc giữa hai đường thẳng AB và AC bằng $60°$.
Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng $60°$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 263. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng

A. 0. **B**. $\frac{1}{2}$. **C**. $\frac{1}{3}$. **D**. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.



Gọi E, F là trung điểm của AB, CD, d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD), dễ thấy $d \parallel AB \parallel CD$ và $(SEF) \perp d$.

Ta có $\cos((SAB),(SCD)) = |\cos \widehat{ESF}| = \left|\dfrac{SE^2+SF^2-EF^2}{2SE \cdot SF}\right| = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 264. Trong không gian . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

✍Lời giải.

Mệnh đề "Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song" là mệnh đề đúng.

Chọn đáp án B □

Câu 265. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên $AA' = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của đoạn BG (với G là trọng tâm tam giác ABC). Tính cosin của góc φ giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(ABB'A')$.

A. $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{95}}$. **B**. $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{165}}$. **C**. $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{134}}$. **D**. $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{126}}$.

✍Lời giải.

Ta có $(ABC) \cap (A'B'BA) = AB$.

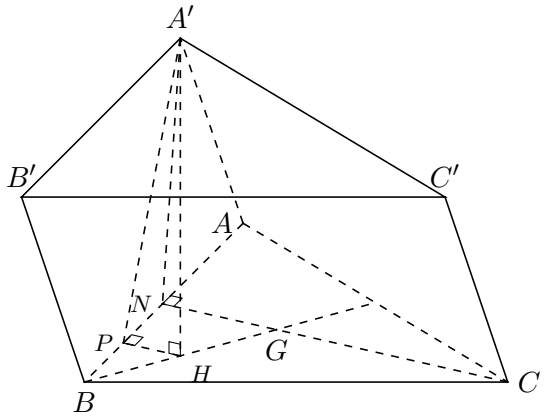
Gọi H, N lần lượt là trung điểm của BG và AB.

Vì $\triangle ABC$ đều nên $CN \perp AB$. Từ H hạ $HP \perp BN$ suy ra P là trung điểm của BN và $AB \perp PH$ (1).

Mặt khác, vì $A'H \perp (ABC) \Rightarrow A'H \perp AB$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra $AB \perp (A'PH) \Rightarrow A'P \perp AB$.

Vậy góc giữa mặt phẳng (ABC) và $(ABA'B')$ là $\varphi = \widehat{A'PH}$.



Tam giác $A'PA$ vuông tại P (vì $A'P \perp AB$) có $A'A = 2a$, $AP = AN + NP = \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{4} = \dfrac{3a}{4}$

$\Rightarrow A'P = \sqrt{A'A^2 - AP^2} = \dfrac{a\sqrt{55}}{4}$, $GN = \dfrac{CN}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Lại có $HP = \dfrac{GN}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{12}$.

Tam giác $A'PH$ vuông tại H, ta có:

$$\cos\varphi = \frac{PH}{A'P} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{12}}{\frac{a\sqrt{55}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{165}}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 266. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Tính côsin của góc hợp bởi giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp.

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

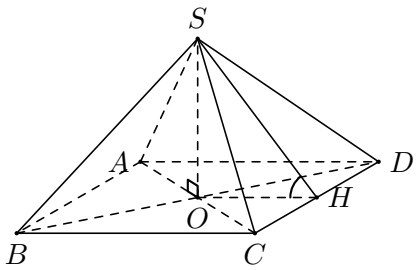
✍Lời giải.

Gọi $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều và O là tâm của đáy. Giả sử H là trung điểm CD.

Ta có $SH \perp CD$, $OH \perp CD \Rightarrow$ góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ là $\widehat{SHO}$.

Xét tam giác SOH có $OH = \frac{a}{2}$, $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \cos\widehat{SHO} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.



Chọn đáp án A □

Câu 267. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc tạo bởi mặt phẳng (SAB) và (SCD).

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $45°$.

✍Lời giải.

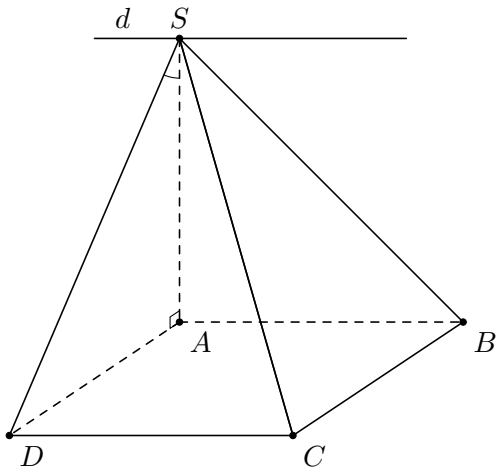
Ta có $\begin{cases} AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ AB \parallel DC \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = d \parallel AB \parallel DC.$

Vì $d \parallel AB \Rightarrow d \perp (SAD) \Rightarrow \begin{cases} d \perp SA \\ d \perp SD. \end{cases}$

Do đó $((SAB),(SCD)) = \widehat{ASD}$.

Xét tam giác ASD,

$$\tan\widehat{ASD} = \frac{AD}{AS} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{ASD} = 30°.$$



Chọn đáp án A □

Câu 268. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = BB' = a, \widehat{BAC} = 120°$. Gọi I là trung điểm của CC'. Tính cos của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{3\sqrt{5}}{12}$. **D.** $\frac{\sqrt{30}}{10}$.

✍Lời giải.

Ta có $AA'B'B$ là hình vuông cạnh a nên $B'A^2 = 2a^2$.

$AI^2 = AC^2 + CI^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$.

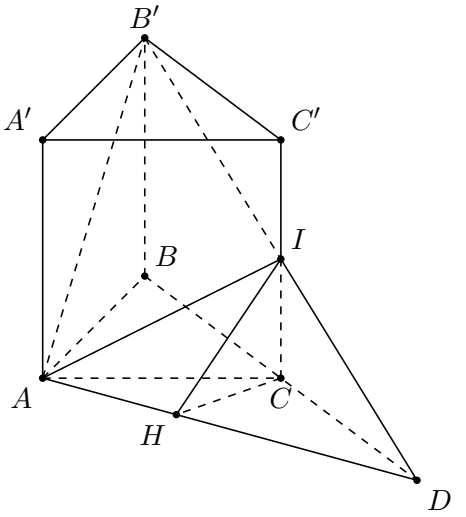
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC\cos 120° = 3a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$.

$B'I^2 = B'C'^2 + C'I^2 = BC^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{13a^2}{4}$.

Từ đó: $AB'^2 + AI^2 = B'I^2$ suy ra $\triangle AB'I$ vuông tại A.

Gọi D là giao điểm của BC và $B'I$, suy ra AD là giao tuyến của (ABC) và $(AB'I)$.

Kẻ $CH \perp AD$ (H thuộc AD).
Vì C là hình chiếu của I trên (ABC) nên $IH \perp AD$, suy ra $\widehat{IHC}$ chính là góc giữa (ABC) và $(AB'I)$.
Vì CI là đường trung bình của $\triangle BB'D$ nên $CD = BC = a\sqrt{3}$. Khi đó:
$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2 \cdot AC \cdot CD \cos 150^\circ = 7a^2 \Rightarrow AD = a\sqrt{7}$. Mà $\dfrac{AC}{\sin \widehat{ADC}} = \dfrac{AD}{\sin 150^\circ} \Rightarrow \sin \widehat{ADC} = \dfrac{AC \sin 150^\circ}{AD} = \dfrac{1}{2\sqrt{7}}$.
Suy ra: $CH = CD \sin \widehat{ADC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$,
$IH^2 = CI^2 + CH^2 = \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{3a^2}{28} = \dfrac{10a^2}{28} \Rightarrow IH = \dfrac{a\sqrt{10}}{2\sqrt{7}}$.
Suy ra: $\cos \widehat{IHC} = \dfrac{CH}{IH} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

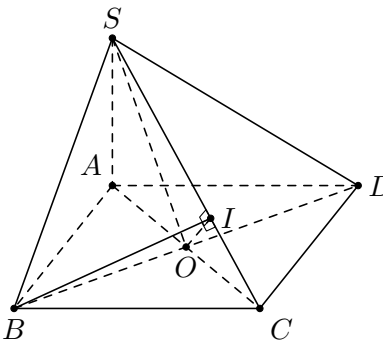


Chọn đáp án (D) □

Câu 269. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Nếu $\tan\alpha = \sqrt{2}$ thì góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng
A. 30°. **B**. 60°. **C**. 45°. **D**. 90°.

✍Lời giải.
Gọi O là giao điểm của AC và BD, hạ $OI \perp SC$. Ta có $BD \perp AC, BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAC)$ suy ra $BD \perp SO$ và $BD \perp SC$ từ đó suy ra $((SBD),(ABCD)) = \widehat{SOA}$. Mặt khác

$$\tan \widehat{SOA} = \frac{SA}{AO} = \sqrt{2} \Rightarrow SA = AO\sqrt{2} = \frac{AC}{2}\sqrt{2} = a.$$



Ta có

$$SC \perp OI, SC \perp BO \Rightarrow SC \perp BI \Rightarrow ((SAC),(SBC)) = \widehat{OIB}.$$

$$\triangle ICO \backsim \triangle ACS \quad (g.g)$$

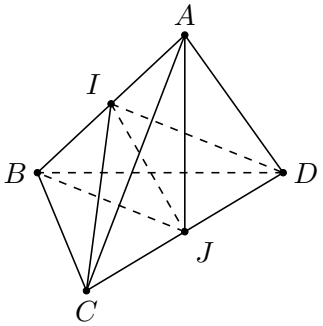
$$\Rightarrow \frac{OI}{SA} = \frac{OC}{SC} \Rightarrow OI = \frac{OC \cdot SA}{SC} = \frac{OC \cdot SA}{\sqrt{AC^2 + SA^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Tam giác BOI vuông tại O nên $\tan \widehat{BIO} = \dfrac{BO}{OI} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{BIO} = 60^\circ$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng 60°.
Chọn đáp án (B) □

Câu 270. Cho tứ diện $ABCD$ có $(ACD) \perp (BCD)$, $AC = AD = BC = BD = a$ và $CD = 2x$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Với giá trị nào của x thì $(ABC) \perp (ABD)$?
A. $x = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B**. $x = a$. **C**. $x = a\sqrt{3}$. **D**. $x = \dfrac{a}{3}$.

✍Lời giải.
Tam giác ACD cân tại A nên $AJ \perp CD$, mà CD là giao tuyến của hai mặt phẳng vuông góc (ACD), (BCD) nên $AJ \perp (BCD)$, suy ra $AJ \perp BJ$. Lại có $\triangle ACD = \triangle BCD$ nên $AJ = BJ = \sqrt{a^2 - x^2}$. Suy ra $AB = \sqrt{2a^2 - 2x^2}$. Tam giác CAB và tam giác DAB lần lượt cân tại C, D nên IC, ID cùng vuông góc AB hay $(IC, ID) = ((ABC),(ABD))$. Do $\triangle CAB = \triangle DAB$ nên

$$IC = ID = \sqrt{BC^2 - \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2 + x^2}{2}}.$$



Suy ra

$$(ABC) \perp (ABD) \Leftrightarrow IC \perp ID \Leftrightarrow CD = IC\sqrt{2}.$$

Suy ra $2x = \sqrt{a^2 + x^2}$ hay $x = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 271. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $BD = a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

A. $60°$. **B**. $120°$. **C**. $45°$. **D**. $90°$.

✍Lời giải.

Trong mặt phẳng (SBC) dựng $BM \perp SC$ $(M \in SC)$.

$BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC \Rightarrow SC \perp (BDM) \Rightarrow SC \perp DM$.

Vậy $\widehat{(SBC),(SCD)} = \widehat{BMD}$.

Trong tam giác SAB : $SB^2 = SA^2 + AB^2 \Rightarrow SB = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

Trong tam giác SAC : $SC^2 = SA^2 + AC^2 \Rightarrow SC = \dfrac{3a}{\sqrt{2}}$.

Áp dụng định lý cosin trong tam giác SBC, ta có:

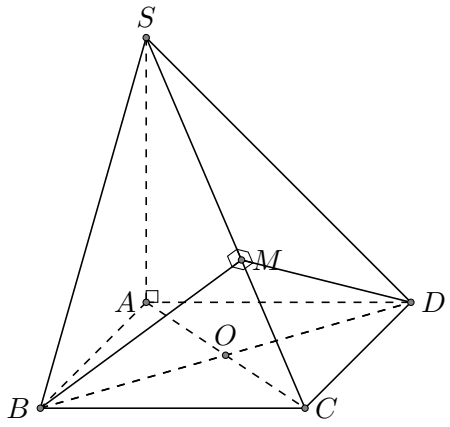
$\cos\widehat{BCS} = \dfrac{SC^2 + BC^2 - SB^2}{2SC \cdot BC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{BCS} = 45°$ hay $\triangle BMC$ vuông cân tại M.

Vậy $DM = BM = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Trong tam giác BMD, ta có : $BM^2 + DM^2 = BD^2$

$\Rightarrow \triangle BMD$ vuông cân tại M hay $\widehat{BMD} = 90°$.

Vậy $\widehat{(SBC),(SCD)} = \widehat{BMD} = 90°$.



Chọn đáp án D □

Câu 272. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng $2a$, góc tạo bởi $A'B$ và mặt đáy bằng $60°$. Gọi M là trung điểm BC. Tính cô-sin góc tạo bởi hai đường thẳng $A'C$ và AM.

A. $\cos(A'C, AM) = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **B**. $\cos(A'C, AM) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\cos(A'C, AM) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **D**. $\cos(A'C, AM) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

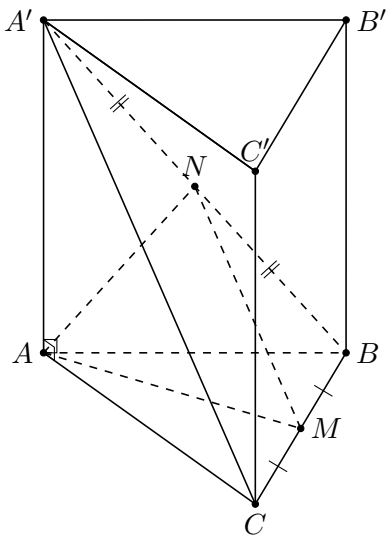
✍Lời giải.

Trong tam giác $AA'B$ vuông tại A ta có

$$\tan\widehat{ABA'} = \frac{AA'}{AB} \Rightarrow AB = \frac{AA'}{\tan\widehat{ABA'}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Gọi N là trung điểm của $A'B$. Khi đó $MN \parallel A'C$. Như vậy góc giữa $A'C$ và AM bằng góc giữa MN và AM.

Ta có $A'C = \sqrt{4a^2 + \dfrac{4a^2}{3}} = \dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$; $MN = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} = AN$ và $AM = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = a$.



Trong tam giác AMN ta có

$$\cos\widehat{AMN} = \frac{MN^2 + AM^2 - AN^2}{2MN \cdot AM} = \frac{\dfrac{4a^2}{3} + a^2 - \dfrac{4a^2}{3}}{2 \cdot \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot a} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy cô-sin góc tạo bởi hai đường thẳng $A'C$ và AM bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 273 (1H3K4-3). Cho hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$. Trên mặt phẳng (α) lấy tam giác ABC có $AB=AC=a\sqrt{2}, BC=2a$. Qua A,B,C lần lượt kẻ các đường thẳng vuông góc với (β) và cắt (β) tại A',B',C' tương ứng. Biết rằng $A'B'=A'C'=a\sqrt{3}$, hai đường thẳng $A'B'$ và $B'C'$ tạo với nhau góc $\arccos\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{7}}{6}}$. Tính góc giữa (α) và (β).

A. $\dfrac{\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{\pi}{5}$. **C.** $\dfrac{\pi}{6}$. **D.** $\dfrac{\pi}{4}$.

✍Lời giải.

Tam giác ABC có $AB^2+AC^2=2a^2+2a^2=4a^2=BC^2$ nên ABC là tam giác vuông cân tại A.

Suy ra $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AC=a^2$.

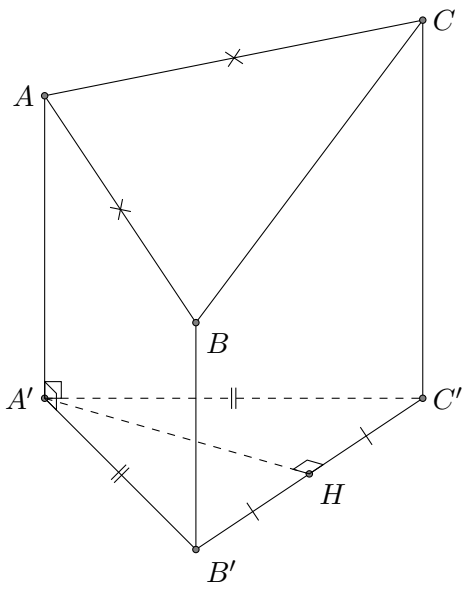
Gọi H là trung điểm của $B'C'$. Do $\triangle A'B'C'$ cân tại A' nên $A'H\perp B'C'$ và $B'H=A'B'\cdot\cos\widehat{A'B'C'}=a\sqrt{3}\cdot\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{7}}{6}}$;

$=a\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}}$;

$B'C'=2B'H=2a\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}}$.

Suy ra $A'H=\sqrt{A'B'^2-B'H^2}=\sqrt{3a^2-a^2\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}}}$

$=a\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}}$.



Suy ra $S_{\triangle A'B'C'}=\dfrac{1}{2}\cdot B'C'\cdot A'H=\dfrac{1}{2}\cdot 2a\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}}\cdot a\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}}=\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β). Khi đó ta có $S_{\triangle A'B'C'}=S_{\triangle ABC}\cdot\cos\varphi$

$\Rightarrow\cos\varphi=\dfrac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{\frac{a^2\sqrt{2}}{2}}{a^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 274 (1H3K4-3). Cho hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$. Trên mặt phẳng (α) lấy tam giác ABC có $AB=AC=a\sqrt{2}, BC=2a$. Qua A,B,C lần lượt kẻ các đường thẳng vuông góc với (β) và cắt (β) tại A',B',C' tương ứng. Biết rằng $A'B'=A'C'=a\sqrt{3}$, hai đường thẳng $A'B'$ và $B'C'$ tạo với nhau góc $\arccos\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{7}}{6}}$. Tính góc giữa (α) và (β).

A. $\dfrac{\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{\pi}{5}$. **C.** $\dfrac{\pi}{6}$. **D.** $\dfrac{\pi}{4}$.

✍Lời giải.

Tam giác ABC có $AB^2+AC^2=2a^2+2a^2=4a^2=BC^2$ nên ABC là tam giác vuông cân tại A.

Suy ra $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AC=a^2$.

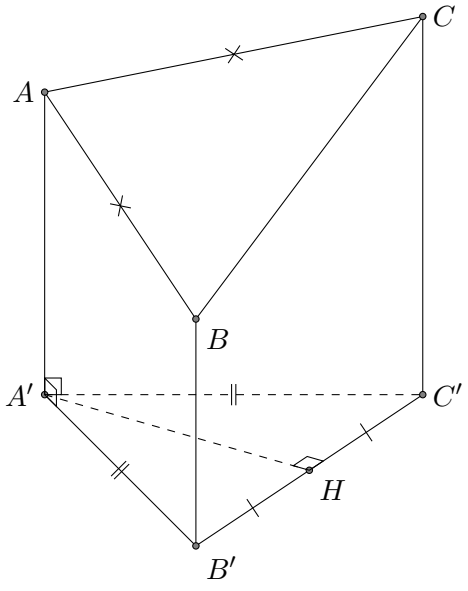
Gọi H là trung điểm của $B'C'$. Do $\triangle A'B'C'$ cân tại A' nên $A'H\perp B'C'$ và $B'H=A'B'\cdot\cos\widehat{A'B'C'}=a\sqrt{3}\cdot\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{7}}{6}}$;

$=a\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}}$;

$B'C'=2B'H=2a\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}}$.

Suy ra $A'H=\sqrt{A'B'^2-B'H^2}=\sqrt{3a^2-a^2\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}}}$

$=a\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}}$.



Suy ra $S_{\triangle A'B'C'} = \dfrac{1}{2} \cdot B'C' \cdot A'H = \dfrac{1}{2} \cdot 2a\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}} \cdot a\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.
Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β). Khi đó ta có $S_{\triangle A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot \cos\varphi$
$\Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}} = \dfrac{\frac{a^2\sqrt{2}}{2}}{a^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

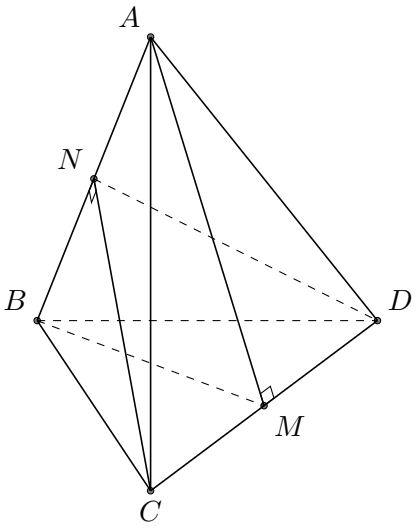
Chọn đáp án (D) □

Câu 275. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD = BC = BD = a$ và hai mặt phẳng $(ACD), (BCD)$ vuông góc với nhau. Tính độ dài cạnh CD sao cho hai mặt phẳng $(ABC), (ABD)$ vuông góc.

A. $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

✍Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và AB. Ta có $AM \perp (BCD)$.
Để hai mặt phẳng $(ABC), (ABD)$ vuông góc thì $CN \perp (ABD)$ suy ra $\triangle AMB = \triangle CND \Rightarrow CD = AB = AM\sqrt{2}$.
Xét $\triangle ACD$:
$AM^2 = \dfrac{AC^2 + AD^2}{2} - \dfrac{CD^2}{4} = a^2 - \dfrac{AM^2 \times 2}{4} \Leftrightarrow AM^2 = \dfrac{2}{3}a^2$.
Suy ra $AM = \dfrac{\sqrt{6}}{3}a \Rightarrow CD = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.



Chọn đáp án (A) □

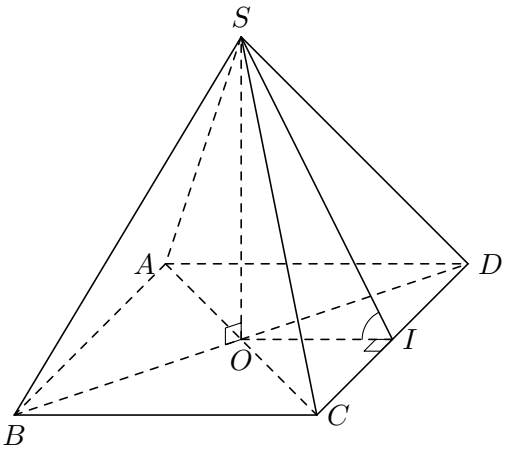
Câu 276. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$, đường cao bằng $\dfrac{3a}{2}$. Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $75°$.

✍Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Do giả thiết ta có $SO \perp (ABCD)$ suy ra $SO \perp CD$ (1).
Trong mặt phẳng $(ABCD)$ hạ $OI \perp CD$ (2).
Từ (1) và (2) ta suy ra $CD \perp (SIO)$ do đó góc giữa mặt bên (SCD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SIO}$. Xét tam giác vuông SIO ta có $\tan\widehat{SIO} = \dfrac{SO}{OI}$.

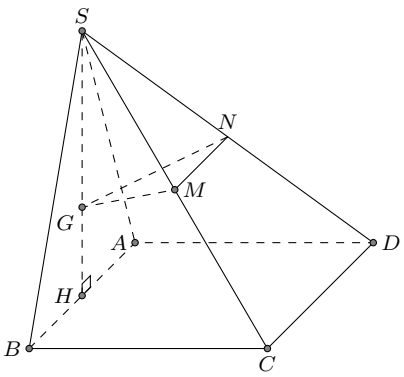
Từ $OI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $SO = \dfrac{3a}{2}$ nên $\tan\widehat{SIO} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{3a}{2}} = \sqrt{3}$, vì $0° < \widehat{SIO} < 90°$ nên $\tan\widehat{SIO} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \widehat{SIO} = 60°$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 277.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và M, N lần lượt là trung điểm của SC, SD (tham khảo hình vẽ bên). Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng (GMN) và $(ABCD)$.



A. $\dfrac{2\sqrt{39}}{39}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$.

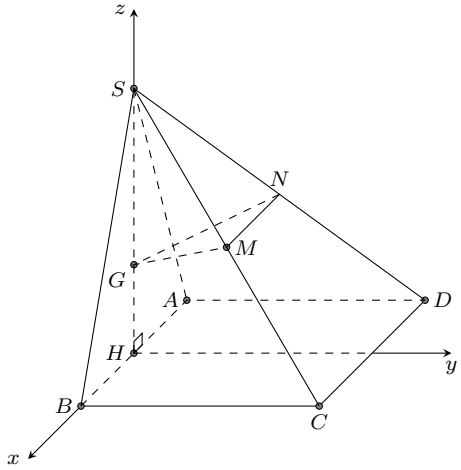
✍Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó

$S\left(0;0;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A\left(\dfrac{-a}{2};0;0\right)$, $B\left(\dfrac{a}{2};0;0\right)$, $C\left(\dfrac{a}{2};a;0\right)$, $D\left(\dfrac{-a}{2};a;0\right)$.

Suy ra $G\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)$; $M\left(\dfrac{a}{4};\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$, $N\left(-\dfrac{a}{4};\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$.

Ta có mặt phẳng $(ABCD)$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0;0;1)$, mặt phẳng (GMN) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{GM}, \overrightarrow{GN}\right] = \left(0; -\dfrac{a\sqrt{3}}{24}; \dfrac{a}{4}\right)$.



Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (GMN) và $(ABCD)$, ta có

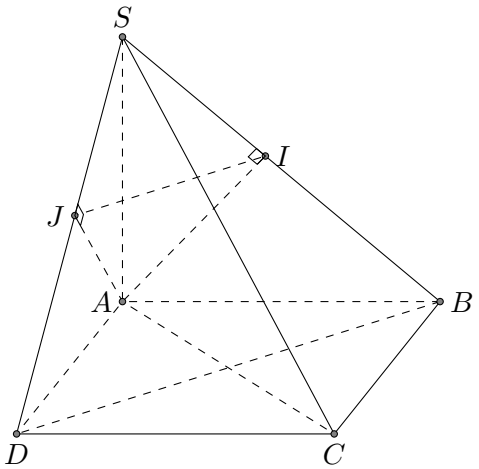
$$\cos\alpha = \frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{k}\right|}{|\vec{n}|\cdot\left|\vec{k}\right|} = \frac{\dfrac{1}{4}}{\dfrac{\sqrt{39}}{24}} = \frac{2\sqrt{39}}{13}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 278. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = x$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) hợp với nhau góc $60°$.

A. $x = \dfrac{3a}{2}$. **B.** $x = \dfrac{a}{2}$. **C.** $x = a$. **D.** $x = 2a$.

✍Lời giải.



Trong mặt phẳng (SAB) dựng $AI \perp SB$, ta được $AI \perp (SBC)$ (1).
Trong mặt phẳng (SAD) dựng $AJ \perp SD$, ta được $AJ \perp (SCD)$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra góc $\big((SBC),(SCD)\big) = (AI, AJ) = \widehat{IAJ}$.
Mặt khác, ta có $\dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AB^2}$, $\dfrac{1}{AJ^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AD^2}$.
Suy ra $AI = AJ$. Do đó nếu góc $\widehat{IAJ} = 60°$ thì $\triangle AIJ$ đều $\Rightarrow AI = AJ = IJ$.
Xét $\triangle SAB$ vuông tại A có AI là đường cao $\Rightarrow AI \cdot SB = SA \cdot AB \Rightarrow AI = \dfrac{SA \cdot AB}{SB}$ (3).

Và có $SA^2 = SI \cdot SB \Rightarrow SI = \dfrac{SA^2}{SB}$ (4); $SA^2 = SJ \cdot SD \Rightarrow SJ = \dfrac{SA^2}{SD}$ (4′).
Suy ra $IJ \parallel BD$ (vì $SB = SD$) $\Rightarrow \dfrac{IJ}{BD} = \dfrac{SI}{SB} \Rightarrow IJ = \dfrac{SI \cdot BD}{SB} = \dfrac{SA^2 \cdot BD}{SB^2}$ (5).
Thế (3) và (5) vào $AI = IJ$ suy ra

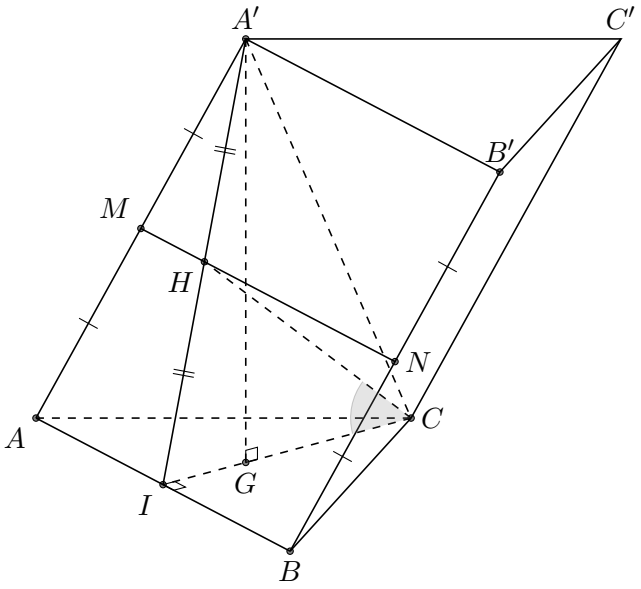
$$AB = \frac{SA \cdot BD}{SB} \Leftrightarrow AB \cdot SB = SA \cdot BD \Leftrightarrow a \cdot \sqrt{x^2 + a^2} = x \cdot a \cdot \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 + a^2 = 2x^2 \Leftrightarrow x = a.$$

Chọn đáp án C □

Câu 279. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'ABC$ là tứ diện đều cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA' và BB'. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (CMN).

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$. **B.** $\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{2}}{15}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của AB, H là giao điểm của MN và $AI \Rightarrow H$ là trung điểm của AI.
Kẻ $Cx \parallel AB \parallel MN$ thì Cx là giao tuyến của (ABC) và (CMN) (1).
Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.
Ta có $\begin{cases} AB \perp CI \\ AB \perp A'G \end{cases} \Rightarrow AB \perp (A'IC)$
Mà $AB \parallel MN$ nên $MN \perp (A'IC) \Rightarrow MN \perp CH \Rightarrow CH \perp Cx$ (2).
Mặt khác $CI \perp AB \Rightarrow CI \perp Cx$ (3).
Từ (1), (2) và (3) suy ra $[(ABC), (CMN)] = (CI, CH) = \widehat{HCI} = \alpha$.
Xét $\triangle A'IC$ có CH là đường trung tuyến.

$$CH^2 = \frac{CA'^2 + CI^2}{2} - \frac{A'I^2}{4} = \frac{a^2 + \dfrac{3a^2}{4}}{2} - \frac{\dfrac{3a^2}{4}}{4} = \frac{11a^2}{16} \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{11}}{4}.$$

Áp dụng định lý cosin cho $\triangle HIC$, ta có:

$$\cos\alpha = \frac{CH^2 + CI^2 - HI^2}{2CH \cdot CI} = \frac{\dfrac{11a^2}{16} + \dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{3a^2}{16}}{2 \cdot \dfrac{a\sqrt{11}}{4} \cdot a\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5\sqrt{33}}{33}.$$

Từ $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$ suy ra $\tan\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1} = \dfrac{2\sqrt{2}}{5}$.
Chọn đáp án C □

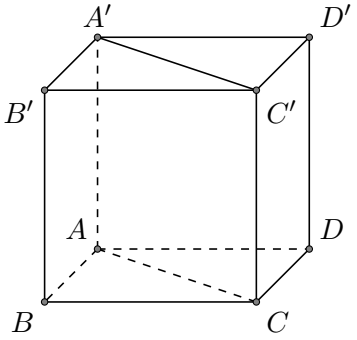
Câu 280. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và mặt phẳng $(ACC'A')$.

A. $30°$. **B**. $60°$. **C**. $90°$. **D**. $45°$.

Lời giải.

Vì $\begin{cases} AA' \perp (ABCD) \\ AA' \subset (ACC'A') \end{cases}$ nên $(ACC'A') \perp (ABCD)$.

Vậy góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng $90°$.



Chọn đáp án C □

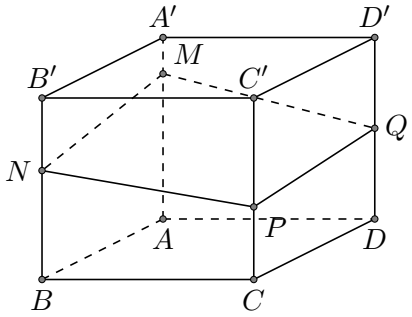
Câu 281. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là một hình vuông cạnh a. Mặt phẳng (α) lần lượt cắt các cạnh bên AA', BB', CC', DD' tại M, N, P, Q. Góc giữa (α) và đáy là $60°$. Tính diện tích tứ giác $MNPQ$.

A. $\dfrac{2}{\sqrt{3}a^2}$. **B**. $\dfrac{1}{2}a^2$. **C**. $2a^2$. **D**. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

Lời giải.

Ta có $ABCD$ là hình chiếu vuông góc của $MNPQ$ lên mặt đáy.

$S_{ABCD} = S_{MNPQ} \cos 60° \Rightarrow S_{MNPQ} = \dfrac{S_{ABCD}}{\cos 60°} = \dfrac{a^2}{\frac{1}{2}} = 2a^2$.



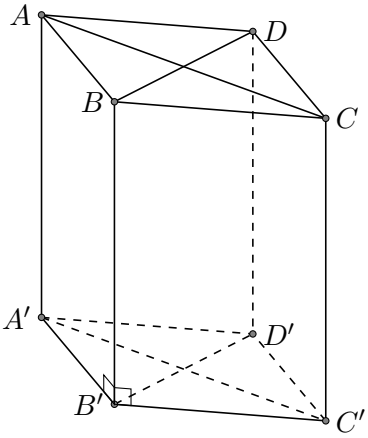
Chọn đáp án C □

Câu 282. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$. Xét tất cả các hình bình hành có đỉnh là đỉnh của hình hộp đó. Hỏi có bao nhiêu hình bình hành mà mặt phẳng chứa nó vuông góc với đáy $(ABCD)$?

A. 4. **B**. 6. **C**. 8. **D**. 10.

Lời giải.

Các mặt phẳng vuông góc với đáy gồm: 4 mặt bên và 2 mặt chéo vuông góc với đáy.



Chọn đáp án B □

Câu 283. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AB = 2a$, $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **C**. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$.

Lời giải.

Gọi I là giao điểm của AD và BC.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AD \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAD)$.

Mà $SI \subset (SAD)$ nên $BD \perp SI$.

Kẻ $DE \perp SI$ tại E.

Ta có $\begin{cases} SI \perp DE \\ SI \perp BD \end{cases} \Rightarrow SI \perp (BDE) \Rightarrow SI \perp BE$.

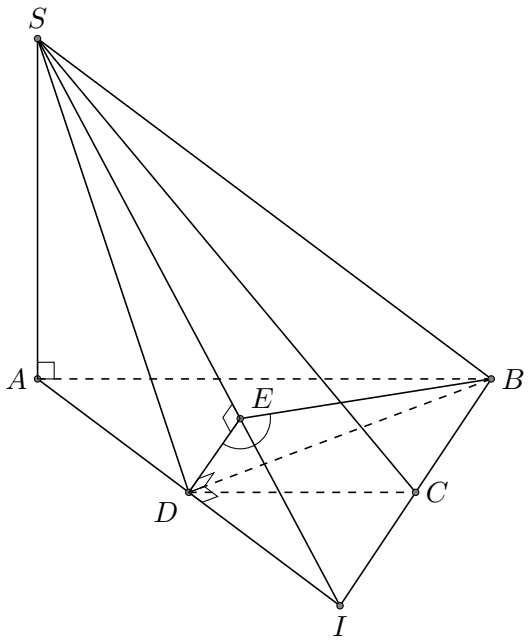
Suy ra góc giữa (SAD) và (SBC) là góc giữa DE và BE.

Tính: $BD = a\sqrt{3}$, $\sin\widehat{AIS} = \dfrac{SA}{SI} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$,

$DE = DI \cdot \sin\widehat{AIS} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$,

$BE = \sqrt{BD^2 + DE^2} = \dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$.

Khi đó $\cos\widehat{BED} = \dfrac{DE}{BE} = \dfrac{a\sqrt{3}}{7} \cdot \dfrac{\sqrt{7}}{2a\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.



Chọn đáp án C □

Câu 284. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{CM} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$. Cô sin của góc giữa hai mặt phẳng $(A'MB)$ và (ABC) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{30}}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{30}}{8}$.

Lời giải.

Đặt φ là góc giữa hai mặt phẳng $(A'MB)$ và (ABC).

Ta có $A'B = a\sqrt{2}$, $BM = \sqrt{BC^2 + CM^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$,

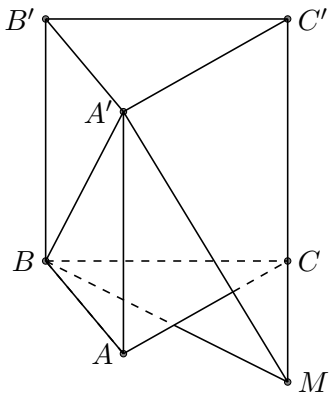
$A'M = \sqrt{A'C'^2 + C'M^2} = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.

Suy ra $A'M^2 = BM^2 + A'B^2$, nên tam giác $A'MB$ vuông tại B.

Do đó $S_{A'MB} = \dfrac{1}{2}BA' \cdot BM = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$, $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vì ΔABC là hình chiếu của $\Delta A'BM$ lên mặt phẳng (ABC) nên cô sin của góc giữa hai mặt phẳng là

$$\cos\varphi = \frac{S_{ABC}}{S_{A'BM}} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$



Chọn đáp án A □

Câu 285. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$, đường cao bằng $\dfrac{3a}{2}$. Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $75°$.

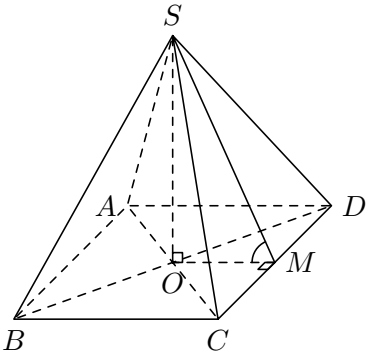
Lời giải.

Gọi M là trung điểm của cạnh CD.

Khi đó góc giữa mặt bên và mặt đáy là góc $\widehat{SMO}$.

Ta có $\tan\widehat{SMO} = \dfrac{SO}{OM} = \dfrac{\frac{3a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$ nên góc $\widehat{SMO} = 60°$.

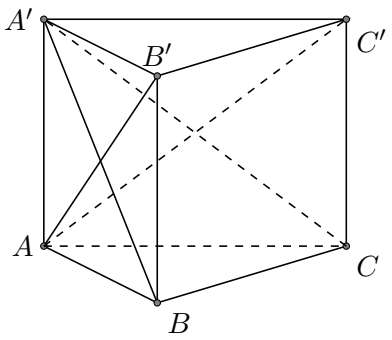
Vậy góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp $S.ABCD$ bằng $60°$.



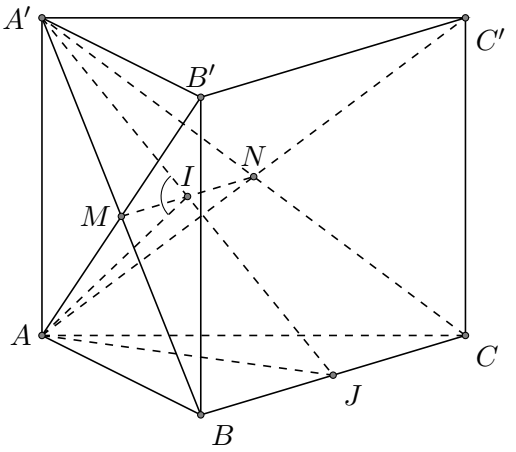
Chọn đáp án C □

Câu 286.
Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'BC)$, tính $\cos\alpha$

A. $\frac{1}{7}$. **B.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\frac{\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\frac{4}{7}$.



✍Lời giải.
Giả sử cạnh của hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài bằng a.
Gọi $M = A'B \cap AB'$ và $N = A'C \cap AC'$.
Khi đó $(AB'C') \cap (A'BC) = MN$.
Kẻ $A'I \perp MN (I \in MN)$ mà $AA' \perp BC, BC \parallel MN \Rightarrow AA' \perp MN$. Vậy $AI \perp MN$.
Khi đó $((AB'C'),(A'BC)) = (AI, A'I) = \alpha$.
Do $\Delta A'BC$ là tam giác cân tại A', nên tam giác $A'MN$ cũng là tam giác cân tại A'. Do đó I là trung điểm của MN.

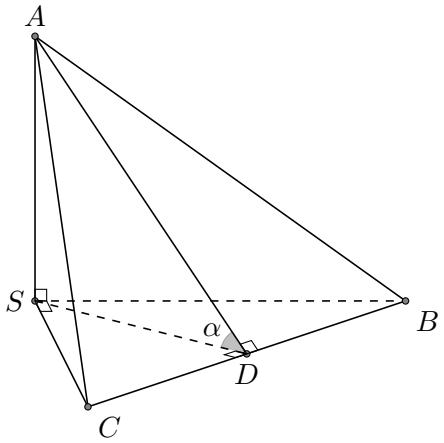


Gọi J là trung điểm BC. Ta có $AJ = \frac{\sqrt{3}}{2}, A'J = \frac{a\sqrt{7}}{2} \Rightarrow A'I = \frac{1}{2}A'J = \frac{a\sqrt{7}}{4}$.
Xét tam giác $A'IA$, ta có
$\cos\widehat{A'IA} = \frac{AI^2 + A'I^2 - AA'^2}{2 \cdot AI \cdot A'I} = -\frac{1}{7} \Rightarrow \cos(AI, A'I) = \cos(180^\circ - \widehat{A'IA}) = \frac{1}{7}$.
Chọn đáp án A □

Câu 287. Cho tứ diện $S.ABC$ có các cạnh $SA; SB; SC$ đôi một vuông góc và $SA = SB = SC = 1$. Tính $\cos\alpha$, trong đó α là góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC)?

A. $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. **C.** $\cos\alpha = \frac{1}{3\sqrt{2}}$. **D.** $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

✍Lời giải.
Gọi D là trung điểm cạnh BC.
Ta có $\begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC) \Rightarrow SA \perp BC$.
Mà $SD \perp BC$ nên $BC \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp AD$.
$\Rightarrow ((SBC),(ABC)) = \widehat{SDA} = \alpha$.
Ta có $SD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.
$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{SD}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

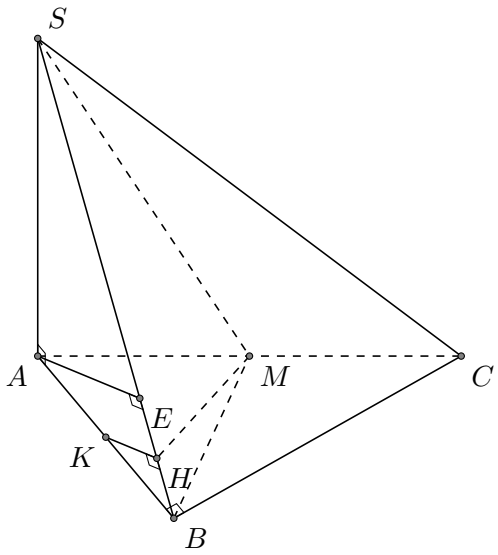


Chọn đáp án D □

Câu 288. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $BC = a$, SA vuông góc (ABC) và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm AC. Tính cô-tang góc giữa hai mặt phẳng (SBM) và (SAB).

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

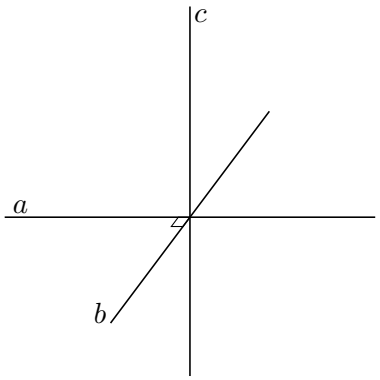
✍Lời giải.



Gọi E là hình chiếu của A lên SB và H là hình chiếu của M lên SB.
Ta có $\dfrac{SE}{SB}=\dfrac{SE\cdot SB}{SB^2}=\dfrac{SA^2}{SA^2+AB^2}=\dfrac{3}{4}$.
Ta có $BM\perp AC$ và $BM\perp SA$ nên $BM\perp(SBC)$, suy ra $BM\perp SM$.
Trong tam giác vuông SMB, ta có $\dfrac{BH}{BS}=\dfrac{BH\cdot BS}{BS^2}=\dfrac{BM^2}{SB^2}=\dfrac{1}{8}$. Do đó H là trung điểm EB.
Gọi K là trung điểm AB. Lúc đó $KH\perp SB$. Như vậy $((SBM),(SAB))=(MH,KH)$.
Ta có $MK^2=\dfrac{BC^2}{4}=\dfrac{a^2}{4}$, $KH^2=\dfrac{AE^2}{4}=\dfrac{SA^2\cdot AB^2}{4SB^2}=\dfrac{3a^2}{16}$, $MH^2=\dfrac{SM^2\cdot BM^2}{SB^2}=\dfrac{7a^2}{16}$, $\cos\widehat{KHM}=\dfrac{KH^2+HM^2-KM^2}{2\cdot KH\cdot KM}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.
Do đó $\tan^2\widehat{KHM}=\dfrac{1}{\cos^2\widehat{KHM}}-1=\dfrac{4}{3}$, suy ra $\cot\widehat{KHM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 289. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?
A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.
B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song.
C. Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau.
D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

✍Lời giải.
Xét mô hình ta thấy 2 đường thẳng a,b cùng vuông góc với đường thẳng c nhưng $a\perp b$.



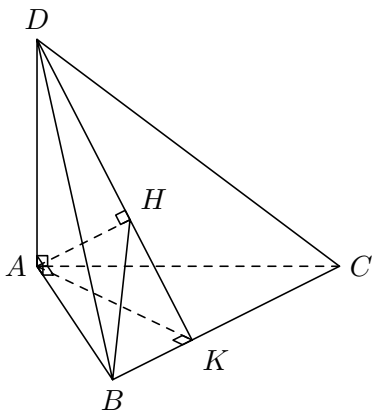
Chọn đáp án (B) □

Câu 290. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc. Hãy chỉ ra mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:
A. Ba mặt phẳng (ABC), (ABD), (ACD) đôi một vuông góc với nhau.
B. Tam giác BCD là tam giác vuông.
C. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (BCD) là trực tâm của tam giác BCD.
D. Các cặp cạnh đối diện của tứ diện đều vuông góc với nhau.

✍Lời giải.

(1). Ta có $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp AC \end{cases} \Rightarrow AD \perp (ABC) \Rightarrow (ABD) \perp (ABC)$ (do $DA \subset (ABD)$).

Tương tự $(ACD) \perp (ABC)$, $(ACD) \perp (ABD)$.



(2). Nếu $\triangle BCD$ vuông, chẳng hạn $BC \perp BD$
Mà $BC \perp DA$ thế thì $BC \perp (ABD) \Rightarrow BC \perp AB$
$\Rightarrow \triangle ABC$ có 2 góc vuông là góc $\widehat{A} = 90^\circ$ và $\widehat{B} = 90^\circ$ (vô lý).
Vậy $\triangle BCD$ vuông là sai.

(3). Kẻ $AH \perp (ABC)$ tại $H \Rightarrow AH \perp BC$.
Ta có $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp AD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp DH (1)$

Từ $\begin{cases} BA \perp AC \\ BA \perp AD \end{cases} \Rightarrow BA \perp (ACD) \Rightarrow BA \perp CD \Rightarrow CD \perp AB$.

Từ $AH \perp (ABC) \Rightarrow AH \perp CD$, từ $\begin{cases} CD \perp AB \\ CD \perp AH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp BH (2)$

Từ (1) và (2) ta được H là trực tâm của $\triangle ABC$.

(4). Từ $\begin{cases} BA \perp AC \\ BA \perp AD \end{cases} \Rightarrow BA \perp (ACD) \Rightarrow BA \perp CD$.
Từ $DA \perp (ABC) \Rightarrow DA \perp BC$.
Vậy các cặp cạnh đối diện của tứ diện đều vuông góc nhau.

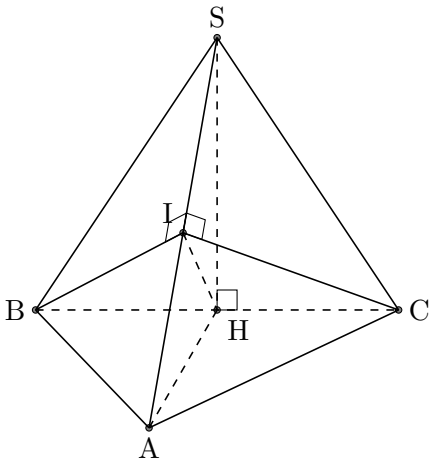
Chọn đáp án (B) □

Câu 291. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có mặt bên (SBC) vuông góc với mặt đáy (ABC). Biết $SB = SC = a$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 60^\circ$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC), β là góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC). Tính đại lượng $S = \tan\alpha + \sin\beta$.

A. $S = 2\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $S = 2\sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $S = \dfrac{\sqrt{2}}{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $S = \sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm BC. Do $\triangle SBC$ đều nên $SH \perp BC$ tại H.
Mà $(SBC) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$.
Suy ra $\widehat{[SA, (ABC)]} = \widehat{(SA, AH)} = \widehat{SAH} = \beta$.
Kẻ $BI \perp SA$, do $\triangle SAB = \triangle SAC$ $(g - c - g)$ nên $CI \perp SA$. Vậy $\widehat{[(SAB), (SAC)]} = \widehat{(IB, IC)} = \widehat{BIC} = \alpha$.
Đặt $SA = x$.
Ta có $x^2 = AH^2 + SH^2 = (AB^2 - BH^2) + SH^2 = AB^2 - \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{3a^2}{4}$.



Suy ra $AB^2 = x^2 - \dfrac{a^2}{2}$. Mà $AB^2 = x^2 + a^2 - ax$. (định lý cosin trong $\triangle SAB$).
Do đó $x^2 - \dfrac{a^2}{2} = x^2 + a^2 - ax \Leftrightarrow x = \dfrac{3a}{2} \Rightarrow \sin\beta = \dfrac{SH}{SA} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
Ta có: $IB = IC = a\sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos\widehat{BIC} = \dfrac{IB^2 + IC^2 - BC^2}{2 \cdot IB \cdot IC} = \dfrac{1}{3}$.
Khi đó $\cos\alpha = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{9} \Rightarrow \tan^2\alpha = 8 \Rightarrow \tan\alpha = 2\sqrt{2}$ (vì $\cos\alpha > 0$).
Theo đó $S = \tan\alpha + \sin\beta = 2\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án (A) □

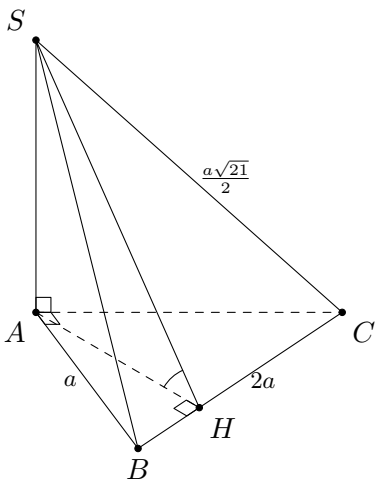
Câu 292. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC), biết rằng $SC = \dfrac{a\sqrt{21}}{2}$.

A. $60°$. **B**. $30°$. **C**. $45°$. **D**. $75°$.

✍Lời giải.

Dựng $AH \perp BC$. Khi đó: $BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH$.

Ta có
$$\left.\begin{array}{l}(ABC) \cap (SBC) = BC\\ BC \perp AH, BC \perp SH\\ AH \subset (ABC), SH \subset (SBC)\end{array}\right\} \Rightarrow [(ABC),(SBC)] = \widehat{SHA}.$$



Ta có $AC = a\sqrt{3}$; $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $SA = \dfrac{3a}{2}$.

Suy ra $\tan \widehat{SHA} = \dfrac{SA}{AH} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SHA} = 60°$.

Vậy $[(ABC),(SBC)] = 60°$.

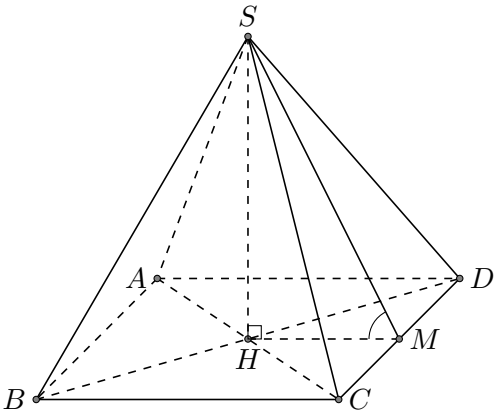
Chọn đáp án A □

Câu 293. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Tính côsin của góc giữa mặt bên và mặt đáy.

A. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **B**. $\dfrac{1}{2}$. **C**. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **D**. $\dfrac{1}{3}$.

✍Lời giải.

Gọi $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a, gọi H là tâm hình vuông $ABCD$, M là trung điểm CD, khi đó $CD \perp (SHM)$ nên góc giữa mặt bên (SCD) và mặt đáy $(ABCD)$ bằng góc $\widehat{SMH}$.



Ta có $HM = \dfrac{a}{2}$, $SM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên

$$\cos \widehat{SMH} = \frac{HM}{SM} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 294. Biết góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là α $(\alpha \neq 90°)$, tam giác ABC nằm trên mặt phẳng (P) có diện tích là S và hình chiếu vuông góc của nó lên mặt phẳng (Q) có diện tích là S' thì

A. $S = S' \cdot \cos\alpha$. **B**. $S' = S \cdot \cos\alpha$. **C**. $S = S' \cdot \sin\alpha$. **D**. $S' = S \cdot \sin\alpha$.

✍Lời giải.

Theo công thức diện tích hình chiếu.

Chọn đáp án B □

Câu 295. Cho các phát biểu sau về góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau:

(I): Góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau bằng góc giữa hai đường thẳng tương ứng vuông góc với hai mặt phẳng đó.

(II): Góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau bằng góc giữa hai đường thẳng tương ứng song song với hai mặt phẳng đó.

(III): Góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau bằng góc giữa hai đường thẳng cùng vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng đó.

Trong các phát biểu trên có bao nhiêu phát biểu là **đúng**?

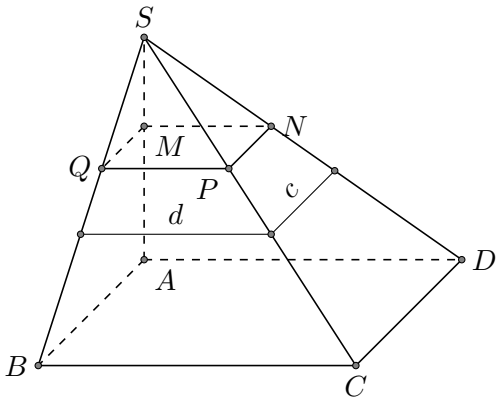
A. 2. **B**. 1. **C**. 3. **D**. 0.

✍Lời giải.

Câu (I) đúng.

Câu (II) sai vì trong hình vẽ dưới có $c \parallel (MNPQ)$; $d \parallel (ABCD)$, $(ABCD) \parallel (MNPQ)$ nhưng góc giữa c, d

khác $0°$.

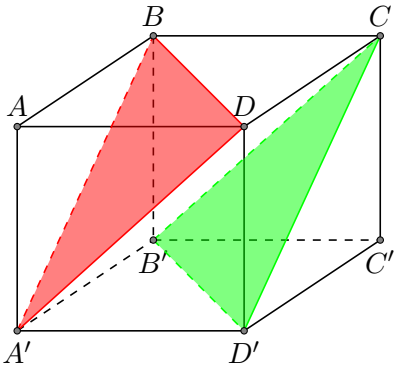


Câu (III) sai vì hai đường thẳng đó phải lần lượt thuộc hai mặt phẳng mới có kết luận đúng.
Chọn đáp án B □

Câu 296. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây đúng khi nói về hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(CB'D')$?

A. Vuông góc với nhau. **B**. Song song với nhau.
C. Trùng nhau. **D**. Cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng BD'.

✍Lời giải.
Quan sát hình vẽ.

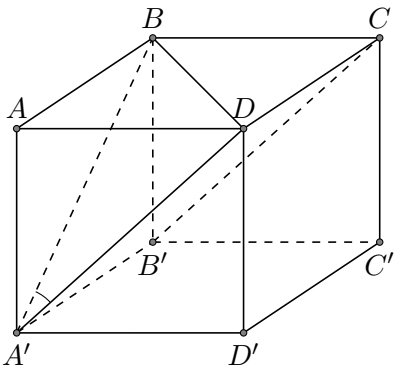


Chọn đáp án B □

Câu 297. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ bằng

A. $90°$. **B**. $60°$. **C**. $30°$. **D**. $45°$.

✍Lời giải.
Vì $A'D \parallel B'C$ nên $\widehat{(A'B, B'C)} = \widehat{(A'B, A'D)} = \widehat{BA'D}$.
Mặt khác, tam giác $A'BD$ là tam giác đều do $A'B = BD = A'D$ vì đều là đường chéo của các mặt hình lập phương.
Vậy góc cần tìm bằng $60°$.



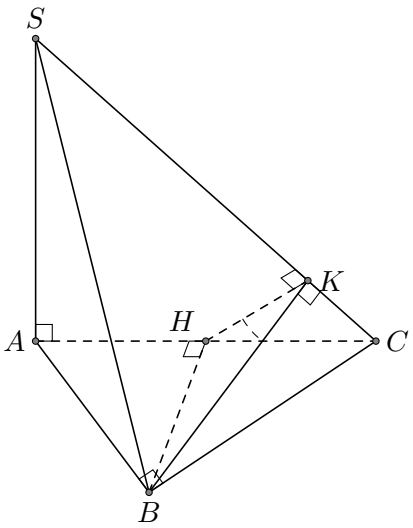
Chọn đáp án B □

Câu 298. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB = BC = a$ và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng

A. $60°$. **B**. $90°$. **C**. $30°$. **D**. $45°$.

✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm cạnh AC
Ta có $(SAC) \perp (ABC)$ (vì $SA \perp (ABC)$) và $BH \perp AC \Rightarrow BH \perp (SAC)$.
Trong mặt phẳng (SAC), kẻ $HK \perp SC$ thì $SC \perp (BHK) \Rightarrow SC \perp BK$.
$\Rightarrow \left(\widehat{(SAC),(SBC)}\right) = \widehat{BKH} = \varphi$.
Mặt khác
Tam giác ABC vuông cân tại B có $AB = BC = a$ nên $AC = a\sqrt{2}$ và $BH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Hai tam giác CKH và CAS đồng dạng nên $HK = \dfrac{HC.SA}{SC} \Leftrightarrow HK = \dfrac{HC.SA}{\sqrt{SA^2+AC^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.
Tam giác BHK vuông tại H có $\tan\varphi = \dfrac{BH}{HK} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = 30^\circ$.
Vậy $\left(\widehat{(SAC),(SBC)}\right) = 30^\circ$.

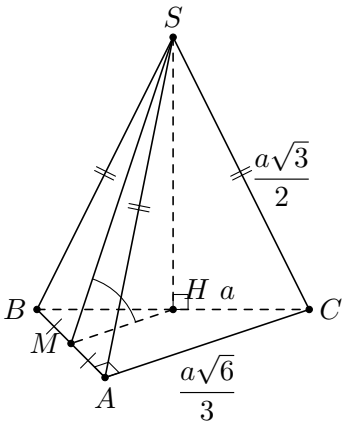


Chọn đáp án C ☐

Câu 299. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại đỉnh A, cạnh $BC = a$, $AC = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$, các cạnh bên $SA = SB = SC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc tạo bởi mặt bên (SAB) và mặt phẳng đáy (ABC).

A. $\dfrac{\pi}{6}$. **B.** $\dfrac{\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{\pi}{4}$. **D.** $\arctan 3$.

Lời giải.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC).
Vì $SA = SB = SC$ nên SH là trục đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$
$\Rightarrow H$ là trung điểm BC.
Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow HM \parallel AC \Rightarrow HM \perp AB$.
Góc giữa (SAB) và (ABC) là góc $\widehat{SMH}$.
Tính $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $MH = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$,
$\tan\widehat{SMH} = \dfrac{SH}{MH} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SMH} = \dfrac{\pi}{3}$.

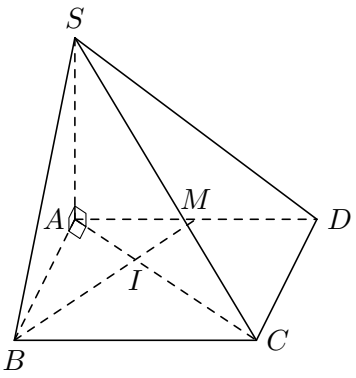


Chọn đáp án B ☐

Câu 300. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của AD, I là giao điểm của AC và BM. Khẳng định nào say đây là đúng?

A. $(SAC) \perp (SMB)$. **B.** $(SAC) \perp (SBD)$. **C.** $(SBC) \perp (SMB)$. **D.** $(SAB) \perp (SBD)$.

Lời giải.
$BM = \sqrt{AB^2 + AM^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$; $AI = \dfrac{1}{3}AC = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
Dễ thấy $AB \cdot AM = AI \cdot BM$ suy ra AI là đường cao của tam giác ABM.
Ta có $BM \perp AI$ và $BM \perp SA \Rightarrow BM \perp (SAC)$.
Vậy, $(SAC) \perp (SMB)$.



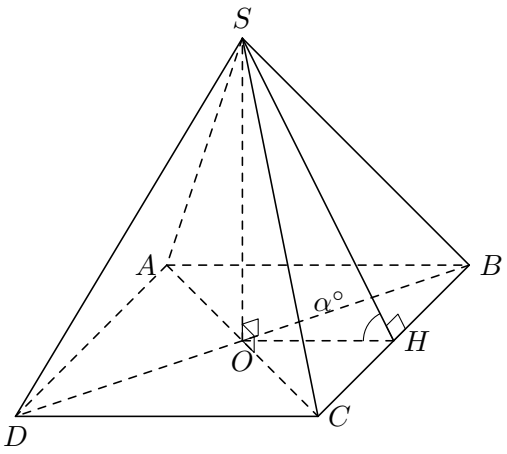
Chọn đáp án A ☐

Câu 301. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Tính cosin của góc giữa một mặt bên và một mặt đáy.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

✍Lời giải.

Gọi O là trung điểm của AC. Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$. Gọi H là trung điểm của BC và góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy $(ABCD)$ là α.
Ta có $(SBC) \cap (ABCD) = BC$ mà $BC \perp SH$ và $BC \perp OH$ nên $\widehat{SHO} = \alpha$.
SH là đường cao của tam giác đều SBC cạnh a nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
Xét tam giác SOH vuông tại O có $\cos\alpha = \frac{OH}{SH} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.



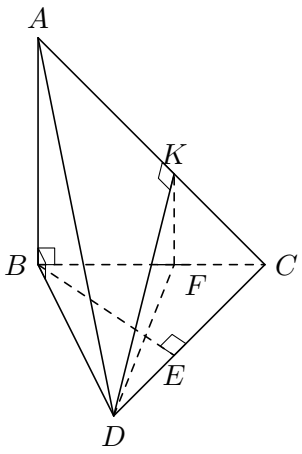
Chọn đáp án (B) □

Câu 302. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) cùng vuông góc với (DBC). Gọi BE và DF là hai đường cao của tam giác BCD, DK là đường cao của tam giác ACD. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau?

A. $(ABE) \perp (ADC)$. **B.** $(ABD) \perp (ADC)$. **C.** $(ABC) \perp (DFK)$. **D.** $(DFK) \perp (ADC)$.

✍Lời giải.

Vì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) cùng vuông góc với (DBC) nên $AB \perp (DBC)$.
Ta có:
+ $\begin{cases} CD \perp BE \\ CD \perp AB \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABE) \Rightarrow (ABE) \perp (ADC)$.
+ $\begin{cases} DF \perp BC \\ DF \perp AB \end{cases} \Rightarrow DF \perp (ABC) \Rightarrow (ABC) \perp (DFK)$.
+ $\begin{cases} AC \perp DK \\ AC \perp DF \end{cases} \Rightarrow AC \perp (DFK) \Rightarrow (DFK) \perp (ADC)$.

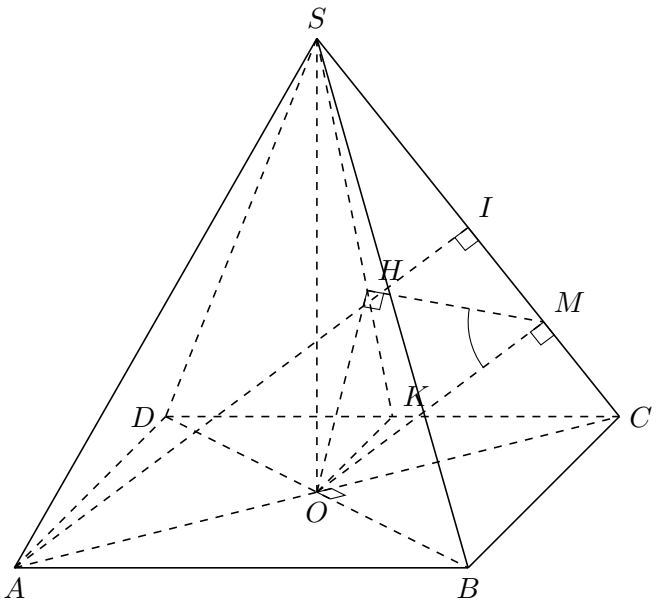


Chọn đáp án (B) □

Câu 303. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a\sqrt{2}$. Tính tang của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và (SCD), biết rằng góc tạo bởi các cạnh bên và mặt đáy hình chóp bằng $60°$.

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{21}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

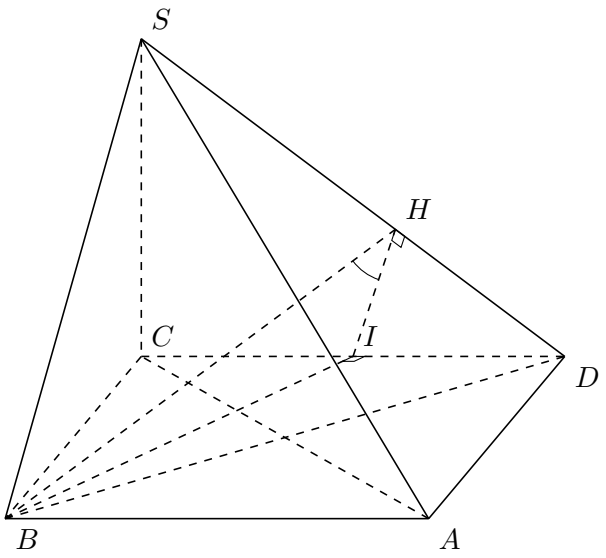


Góc giữa cạnh bên và mặt đáy là $\widehat{SCA} = 60^\circ$.
Nhận thấy rằng tam giác SAC là tam giác đều cạnh $2a$.
Gọi I, K lần lượt là trung điểm SC, DC và M là trung điểm IC. Ta có $OM \perp SC$.
Gọi H là hình chiếu của O lên SK, lúc đó $OH \perp (SCD)$ nên $OH \perp SC$. Từ đó suy ra $SC \perp (OMH)$ nên $SC \perp HM$. Do đó $((SAC),(SCD)) = (OM, HM) = \widehat{HMO}$.
Ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{7}{3a^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.
Ta có $OM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $HM = \sqrt{OM^2 - OH^2} = \dfrac{3a\sqrt{7}}{14}$.
Lúc đó $\tan \widehat{HMO} = \dfrac{OH}{OM} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 304. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a và góc A bằng 60°, cạnh SC vuông góc với đáy và $SC = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính cosin góc hợp bởi hai mặt phẳng (SBD) và (SCD).

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$.

✍**Lời giải.**



Vì $ABCD$ là hình thoi cạnh a và góc A bằng 60° nên $AC = a\sqrt{3}, BD = a$.
Ta có $SB = SD = \sqrt{SC^2 + CD^2} = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.
Gọi I là trung điểm CD và H là hình chiếu của I lên SD.

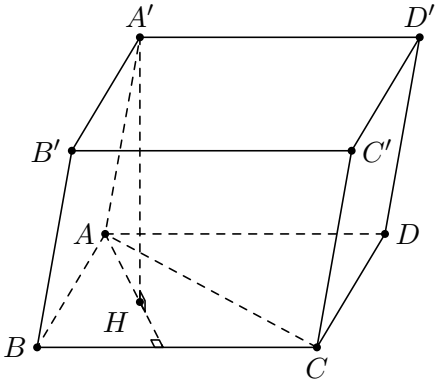
Vì $BI \perp CD$ và $BI \perp SC$ nên $BI \perp SD$.
Mà $HI \perp SD$ nên $SD \perp BH$.
Do đó $((SBD);(SCD)) = (BH, IH) = \widehat{BHI}$.
Ta có $BI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $IH = \dfrac{SC \cdot DC}{2SD} = \dfrac{a\sqrt{15}}{10}$, $BH = \dfrac{3a\sqrt{10}}{10}$.
Ta có $\cos\widehat{BHI} = \dfrac{HI}{BH} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

Chọn đáp án A □

Câu 305. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trực tâm H của tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây **không đúng**?

A. $BB'C'C$ là hình chữ nhật.
B. $(AA'H) \perp (A'B'C')$.
C. $(BB'C'C) \perp (AA'H)$.
D. $(AA'B'B) \perp (BB'C'C)$.

Lời giải.
Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trực tâm H của tam giác ABC.
Suy ra $A'H \perp (ABCD), A'H \perp (A'B'C'D')$
$\Rightarrow (AA'H) \perp (A'B'C')$ đúng.
Vì H là trực tâm tam giác ABC và $A'H \perp (ABCD)$ nên
$\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp A'H \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'H) \Rightarrow (BB'C'C) \perp (AA'H)$ đúng.
$\Rightarrow BC \perp (AA'H) \Rightarrow BC \perp AA'$.
Mà $AA' \parallel BB'$ nên $BC \perp BB' \Rightarrow BB'C'C$ là hình chữ nhật.
Vậy $(AA'B'B) \perp (BB'C'C)$ không đúng.

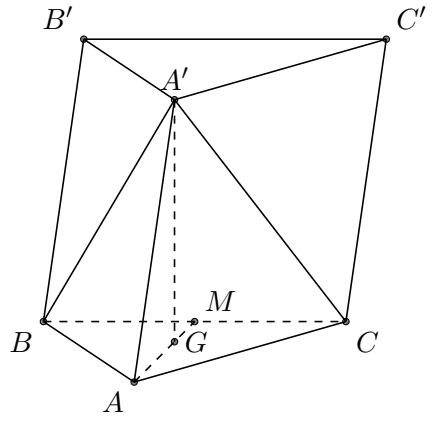


Chọn đáp án D □

Câu 306. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'ABC$ là tứ diện đều. Tính cosin của góc φ giữa AA' và mặt phẳng (ABC).

A. $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
B. $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
C. $\cos\varphi = \sqrt{3}$.
D. $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.
Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.
Do $A'ABC$ là tứ diện đều nên $A'G \perp (ABC)$, suy ra AG là hình chiếu của AA' lên mặt phẳng (ABC).
Vậy $\varphi = (AA', AG) = \widehat{A'AG}$.
Đặt $AB = a$, ta có $AM = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AG = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
$\triangle A'AG$ có $\cos\varphi = \cos\widehat{A'AG} = \dfrac{AG}{AA'} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án A □

Câu 307. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, tính góc φ giữa hai mặt phẳng $(BA'C)$ và $(DA'C)$.

A. $\varphi = 45°$.
B. $\varphi = 90°$.
C. $\varphi = 30°$.
D. $\varphi = 60°$.

Lời giải.

Gọi I và J lần lượt là tâm của $ABB'A'$ và $ADD'A'$.

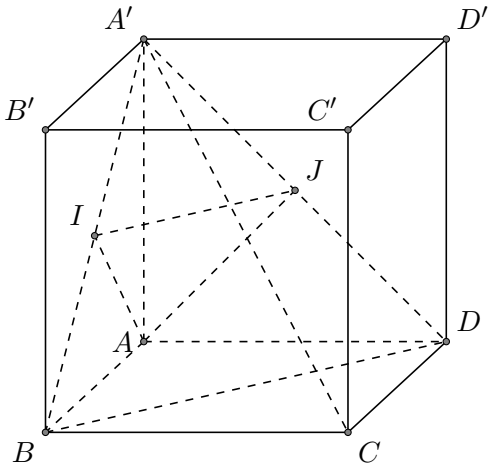
Ta có $\begin{cases} AI \perp A'B \\ AI \perp BC \end{cases} \Rightarrow AI \perp (A'BC)$.

Tương tự ta cũng có $AJ \perp (A'CD)$.

Vậy góc giữa $(A'BC)$ và $(A'CD)$ là $\varphi = (AI, AJ)$.

Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên dễ thấy $\triangle AIJ$ đều.

Vậy $\varphi = \widehat{IAJ} = 60^\circ$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 308. Lăng trụ tam giác đều có bao nhiêu mặt?

A. 6. **B**. 3. **C**. 9. **D**. 5.

✍Lời giải.

Lăng trụ tam giác có 3 mặt bên và 2 đáy.

Chọn đáp án (D) □

Câu 309. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B. Kết luận nào sau đây **sai**?

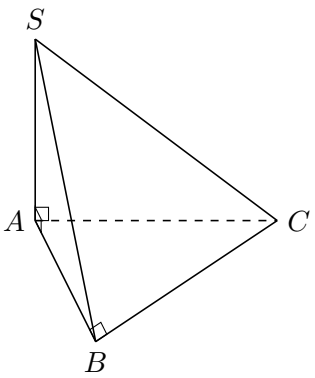
A. $(SAC) \perp (SBC)$. **B**. $(SAB) \perp (SBC)$. **C**. $(SAB) \perp (ABC)$. **D**. $(SAC) \perp (ABC)$.

✍Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow \begin{cases} (SAB) \perp (ABC) \\ (SAC) \perp (ABC). \end{cases}$

Và $BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow (SAB) \perp (SBC)$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 310. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 2a, SA \perp (ABC)$. Tam giác ABC vuông tại $B, AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Tính côsin của góc φ tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và (SBC).

A. $\cos\varphi = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$. **B**. $\cos\varphi = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$. **C**. $\cos\varphi = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$. **D**. $\cos\varphi = \sqrt{\dfrac{1}{5}}$.

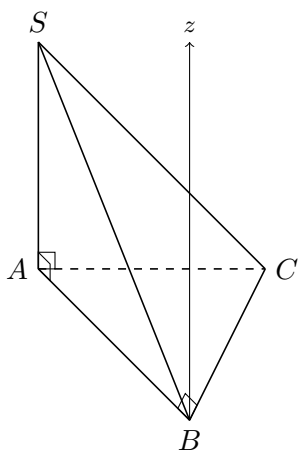
✍Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ $Bxyz$ với BA trùng với Bx, BC trùng với By, $Bz \parallel SA$. Không mất tính tổng quát giả sử $a = 1$, khi đó tọa độ của các điểm $B(0;0;0), A(1;0;0), C(0;\sqrt{3};0), S(1;0;2)$.

Khi đó phương trình của mặt phẳng (SAC) là: $x + \dfrac{\sqrt{3}}{3}y - 1 = 0$. Vậy véc-tơ pháp tuyến của (SAC) là $\vec{n_1} = \left(1; \dfrac{\sqrt{3}}{3}; 0\right)$

phương trình mặt phẳng (SBC) là: $2x - z = 0$. Vậy véc-tơ pháp tuyến của (SBC) là $\vec{n_2} = (2;0;-1)$

Vậy $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|} = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$.



Chọn đáp án (B) □

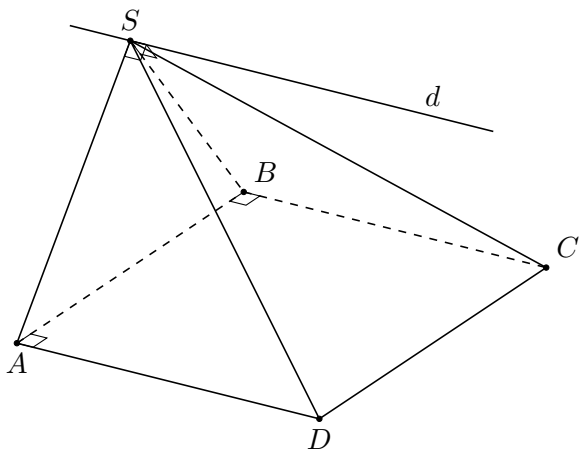
Câu 311. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Mặt bên SAB là tam giác cân đỉnh S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $\widehat{ASB} = 120^\circ$. Tính góc giữa α hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

A. $\alpha = 60^\circ$. **B.** $\alpha = 30^\circ$. **C.** $\alpha = 45^\circ$. **D.** $\alpha = 90^\circ$.

✍Lời giải.

Do $AD \parallel BC$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng d qua S, song song với AD. Đường thẳng AB vuông góc với giao tuyến AB của hai mặt phẳng vuông góc (SAB) và $(ABCD)$ nên $AD \perp (SAB)$, suy ra $AB \perp SA$ hay $d \perp SA$. Chứng minh tương tự ta có $d \perp SB$.

Vậy $((SAD),(SBC)) = 180^\circ - \widehat{ASB} = 90^\circ$.



Chọn đáp án A □

Câu 312. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a; các mặt bên $(SAB),(SAD)$ cùng vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a$; góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) là α. Khi đó $\tan\alpha$ nhận giá trị là bao nhiêu?

A. $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\tan\alpha = 1$. **C.** $\tan\alpha = 3$. **D.** $\tan\alpha = \sqrt{2}$.

✍Lời giải.

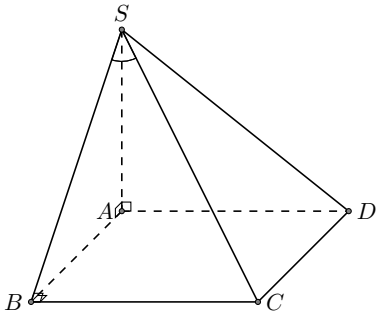
Do $(SAB)\perp(SAD) \Rightarrow SA\perp(ABCD)$.

Mặt khác $BC\perp AB \Rightarrow BC\perp(SAB)$

$\Rightarrow (SC,(SAB)) = (SC,SB) = \widehat{BSC} = \alpha$.

Tam giác SBC vuông tại B nên

$$\tan\widehat{BSC} = \frac{BC}{SB} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



Chọn đáp án A □

Câu 313. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, $AB = 3a$, $AD = 4a$, $\widehat{BAD} = 120^\circ$, biết SA vuông góc với đáy và $SA = 2a\sqrt{3}$. Tính góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và (SCD).

A. 45°. **B.** $\arccos\dfrac{17\sqrt{2}}{26}$. **C.** 60°. **D.** 30°.

✍Lời giải.

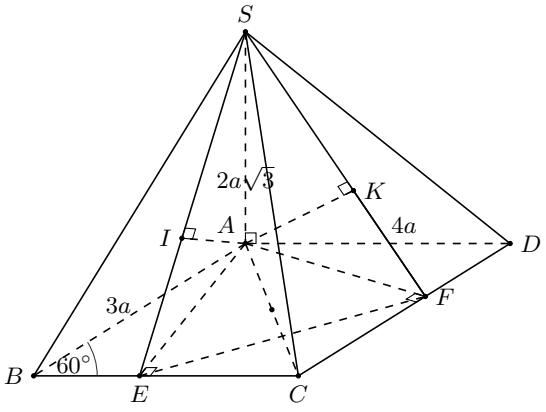
Kẻ $AE \perp BC$ tại E, $AF \perp CD$ tại F, $AI \perp SE$ tại I và $AK \perp SF$ tại K.

Khi đó $AI \perp (SBC)$, $AK \perp (SCD)$. Suy ra góc giữa (SBC) và (SCD) bằng góc giữa AI và AK.

Ta có: $AE = 3a.\sin 60^\circ = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$,

$BE = 3a.\cos 60^\circ = \dfrac{3a}{2} \Rightarrow CE = \dfrac{5a}{2}$.

$AF = 4a.\sin 60^\circ = 2a\sqrt{3}$, $DF = 4a.\cos 60^\circ = 2a \Rightarrow CF = a$.



Ta có: $\dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AE^2} = \dfrac{1}{12a^2} + \dfrac{4}{27a^2} = \dfrac{25}{108a^2}$

$\Rightarrow AI = \dfrac{6a\sqrt{3}}{5} \Rightarrow$

$SI = \sqrt{SA^2 - AI^2} = \sqrt{12a^2 - \dfrac{108a^2}{25}} = \dfrac{8a\sqrt{3}}{5}.$

$\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AF^2} = \dfrac{1}{12a^2} + \dfrac{1}{12a^2} = \dfrac{1}{6a^2}$

$\Rightarrow AK = a\sqrt{6}$

$\Rightarrow SK = \sqrt{SA^2 - AK^2} = \sqrt{12a^2 - 6a^2} = a\sqrt{6}.$

Ta có: $SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = \sqrt{12a^2 + \dfrac{27a^2}{4}} = \dfrac{5a\sqrt{3}}{2}$

$SF = \sqrt{SA^2 + AF^2} = \sqrt{12a^2 + 12a^2} = 2a\sqrt{6}.$

Mặt khác $EF = CE^2 + CF^2 - 2CE.CF.\cos 120^\circ = \dfrac{25a^2}{4} + a^2 - 2.\dfrac{5a}{2}.a.\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{39a^2}{4}.$

$\Rightarrow \cos\widehat{ESF} = \dfrac{SE^2 + SF^2 - EF^2}{2SE.SF} = \dfrac{\dfrac{75a^2}{4} + 24a^2 - \dfrac{39a^2}{4}}{2.\dfrac{5a\sqrt{3}}{2}.2a\sqrt{6}} = \dfrac{11}{10\sqrt{2}}.$

Xét tam giác SIK

$\Rightarrow IK^2 = SI^2 + SK^2 - 2SI.SK.\cos\widehat{ISK} = \dfrac{192a^2}{25} + 6a^2 - 2.\dfrac{8a\sqrt{3}}{5}.a\sqrt{6}.\dfrac{11}{10\sqrt{2}} = \dfrac{78a^2}{25}.$

Xét tam giác AIK

$\Rightarrow \cos\widehat{AIK} = \dfrac{AI^2 + AK^2 - IK^2}{2AI.AK} = \dfrac{\dfrac{108a^2}{25} + 6a^2 - \dfrac{78a^2}{25}}{2.\dfrac{6a\sqrt{3}}{5}.a\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{AIK} = 45^\circ$

$\Rightarrow$ góc giữa (SBC) và (SCD) bằng 45°.

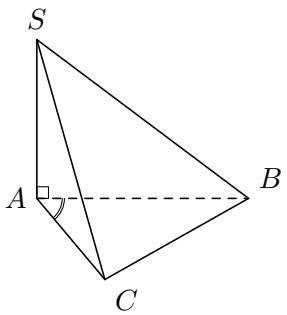
Chọn đáp án (A) □

Câu 314. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy (ABC), $AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC).

A. 30°. **B**. 60°. **C**. 120°. **D**. 150°.

✍Lời giải.

Có $SA \perp AC$, $SA \perp AB$ (do $SA \perp (ABC)$) nên
$\widehat{((SAB);(SAC))} = \widehat{(AB, AC)}$. Mà $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos\widehat{BAC}$
$\Rightarrow \cos\widehat{BAC} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{((SAB);(SAC))} = 60^\circ.$

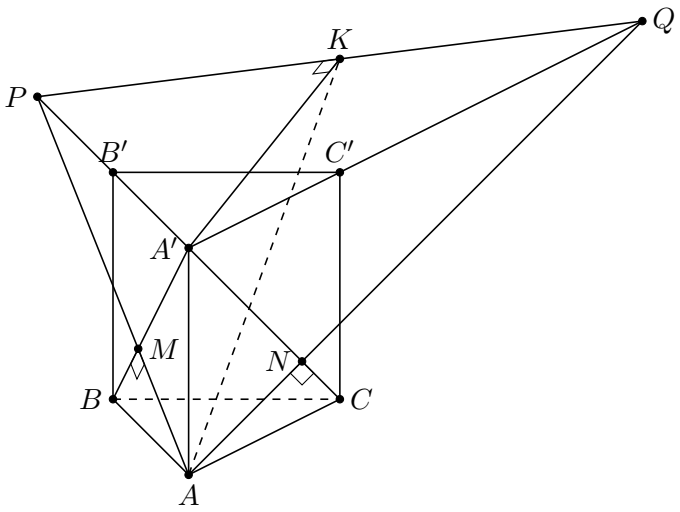


Chọn đáp án (B) □

Câu 315. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA = 2BC$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Hình chiếu vuông góc của A lên các đoạn SB và SC lần lượt là M và N. Góc của hai mặt phẳng (ABC) và (AMN) bằng

A. 45°. **B**. 60°. **C**. 15°. **D**. 30°.

✍Lời giải.



Đặt $BC = a$, $AB = x$, $AC = y$. Dựng hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, gọi P, Q là giao điểm của $AM, A'B'$ và $AN, A'C'$, $A'K$ là đường cao của tam giác $A'PQ$. Dễ thấy góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (ABC) là góc $\widehat{A'KA}$, $\cot \widehat{A'KA} = \dfrac{A'K}{AA'}$.

Hai tam giác vuông $A'AC$ và $QA'A$ đồng dạng suy ra $\dfrac{A'Q}{A'A} = \dfrac{A'A}{AC} \Rightarrow A'P = \dfrac{4a^2}{x}$; tương tự $A'Q = \dfrac{4a^2}{y}$

Ta có $\dfrac{A'P}{A'Q} = \dfrac{y}{x}$ suy ra hai tam giác $A'PQ$ và ACB đồng dạng với tỉ số đồng dạng là $\dfrac{A'P}{AC} = \dfrac{4a^2}{xy} \Rightarrow PQ = BC \cdot \dfrac{4a^2}{xy} = \dfrac{4a^3}{xy}$.

$S_{A'PQ} = \dfrac{1}{2}A'P \cdot A'Q \cdot \sin 120^\circ = \dfrac{1}{2}A'K \cdot PQ \Rightarrow A'K = \dfrac{A'P \cdot A'Q \cdot \sin 120^\circ}{PQ} = \dfrac{\dfrac{4a^2}{x} \cdot \dfrac{4a^2}{y} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{4a^3}{xy}} = 2a\sqrt{3}$ suy ra $\cot \widehat{A'KA} = \dfrac{A'K}{AA'} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2a} = \sqrt{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 316. Cho ba đường thẳng a, b, c. Mệnh đề nào dưới đây **đúng?**

A. Nếu $a \perp b$ và mặt phẳng (α) chứa a, mặt phẳng β chứa b thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

B. Cho $a \perp b$, $a \subset (\alpha)$. Mọi mặt phẳng (β) chứa b và vuông góc a thì $(\beta) \perp (\alpha)$.

C. Cho $a \perp b$. Mọi mặt phẳng chứa b đều vuông góc với a.

D. Cho $a \parallel b$. Mọi mặt phẳng (α) chứa c, trong đó $c \perp a$, $c \perp b$ thì đều vuông góc với mặt phẳng (a, b).

✍Lời giải.

Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc nhau là mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

Chọn đáp án (B) □

Câu 317. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A và $AB = a\sqrt{2}$. Biết $SA \perp (ABC)$ và $AS = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

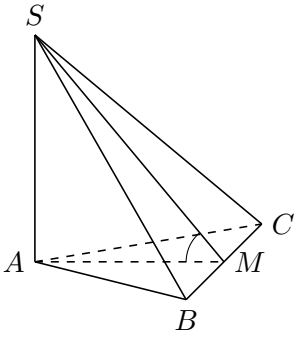
A. 30°. **B**. 45°. **C**. 60°. **D**. 90°.

✍Lời giải.

Gọi M là trung điểm BC thì $AM = a$ và $SM \perp BC$.

Khi đó, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) chính là góc $\widehat{SMA}$.

Ta thấy tam giác SAM vuông cân tại A nên $\widehat{SMA} = 45^\circ$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 318. Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Tính giá trị của x sao cho hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau.

A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

✍Lời giải.

Gọi H, I lần lượt là trung điểm CD, AB.

Ta có $\begin{cases}(ACD) \perp (BCD)\\ (ACD) \cap (BCD) = CD \Rightarrow BH \perp (ACD).\\ BH \perp CD\end{cases}$

Vì các tam giác DAB và CAB cân nên $\begin{cases}DI \perp AB\\ CI \perp AB\end{cases} \Rightarrow ((\widehat{ABD};(CBD)) = \widehat{CID}$.

Ta có $BH = AH = \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow AB = \sqrt{2a^2 - 2x^2}$.

Vì I là trung điểm AB nên $AI = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{2a^2 - 2x^2}}{2}$.

Xét tam giác DIA vuông tại I ta có:

$$DI = \sqrt{AD^2 - AI^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2 - 2x^2}{4}} = \sqrt{\frac{2a^2 + 2x^2}{4}}.$$

Để hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau thì $\widehat{CID} = 90°$, khi đó ta có

$$CD^2 = DI^2 + CI^2 = 2DI^2 \Leftrightarrow 4x^2 = \frac{2a^2 + 2x^2}{4} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 319. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại $B, SA \perp (ABC), SA = a\sqrt{3}$ cm, $AB = 1$ cm, $BC = \sqrt{2}$ cm. Mặt bên (SBC) hợp với đáy một góc bằng

A. $30°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

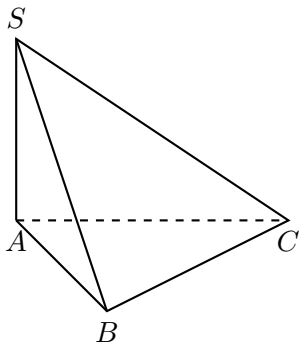
✍Lời giải.

Do $SA \perp (ABC)$ nên $\begin{cases}SA \perp AB\\ SA \perp BC\end{cases}$.

Mặt khác $BC \perp AB$ nên $BC \perp SB$.

Vậy góc giữa (SBC) và đáy là góc $\widehat{SBA} = \alpha$.

Tam giác SAB vuông tại A nên $\tan\alpha = \dfrac{SA}{AB} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60°$.



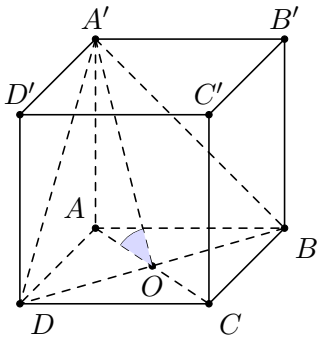
Chọn đáp án C □

Câu 320. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (ABC), tính $\tan\varphi$.

A. $\tan\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\tan\varphi = \sqrt{2}$. **C.** $\tan\varphi = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$. **D.** $\tan\varphi = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

✍Lời giải.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.
Ta có góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (ABC) cũng là góc giữa $(A'BD)$ và $(ABCD)$.
Ta có $\begin{cases} BD \perp AO \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp A'O$.
Khi đó $\begin{cases} (A'BD) \cap (ABCD) = BD \\ A'O \subset (A'BD), A'O \perp BD \Rightarrow ((A'BD),(ABCD)) = \widehat{A'OA}. \\ AO \subset (ABCD), AO \perp BD \end{cases}$
Xét tam giác $A'AO$ vuông tại A có $AO = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{AA'\sqrt{2}}{2}$.
Suy ra $\tan\widehat{A'OA} = \tan\varphi = \dfrac{AA'}{AO} = \sqrt{2}$. Vậy $\tan\varphi = \sqrt{2}$.



Chọn đáp án (B) □

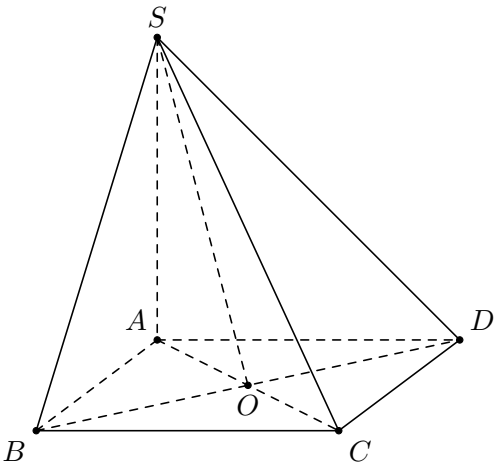
Câu 321. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{ABC} = 60°$, $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. Tính góc giữa SA và (SBD).

A. $60°$. **B**. $90°$. **C**. $30°$. **D**. $45°$.

✍Lời giải.
Gọi $O = AC \cap BD$. Do $ABCD$ là hình thoi nên $BD \perp AC$. Mặt khác do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow BD \perp SA$, vậy $BD \perp (SAC) \Rightarrow (SAC) \perp (SBD)$.
Hình chiếu vuông góc của SA lên mặt (SBD) là SO. Vậy $(SA,(SBD)) = (SA,SO) = \widehat{ASO}$.
Tam giác ABC cân tại B và có $\widehat{ABC} = 60°$ nên tam giác ABC đều cạnh $2a$.
Tam giác SAO vuông tại O, nên ta có

$$\tan\widehat{ASO} = \frac{AO}{SA} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{ASO} = 30°.$$

Vậy góc giữa SA và (SBD) bằng $30°$.

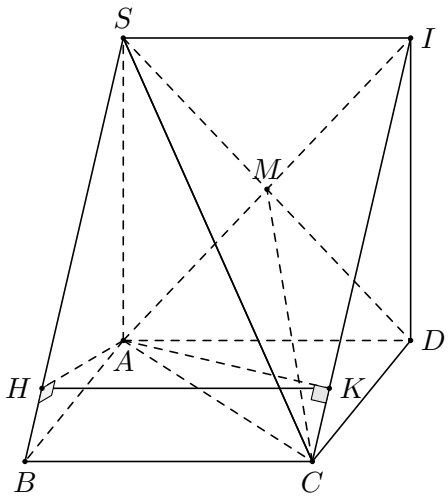


Chọn đáp án (C) □

Câu 322. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của cạnh SD. Tính $\tan\alpha$, với α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC).

A. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C**. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

✍Lời giải.
Dựng hình chữ nhật $SADI$ như hình vẽ, ta có $IC = (AMC) \cap (SBC)$.
Trong tam giác AIC, dựng đường cao AK.
Qua K kẻ $KH \parallel BC$ tại H.
Khi đó $\alpha = ((AMC);(SBC)) = \widehat{AKH}$.
Xét tam giác AIC cân tại I có $IA = IC = 2a$ và $AC = a\sqrt{2}$ nên $S_{\triangle IAC} = \dfrac{a^2\sqrt{7}}{2}$.
Từ đó suy ra $AK = \dfrac{2S_{\triangle IAC}}{IC} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.
Tam giác AHK vuông tại H nên $AH = \sqrt{AK^2 - HK^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Vậy $\tan\alpha = \dfrac{AH}{HK} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

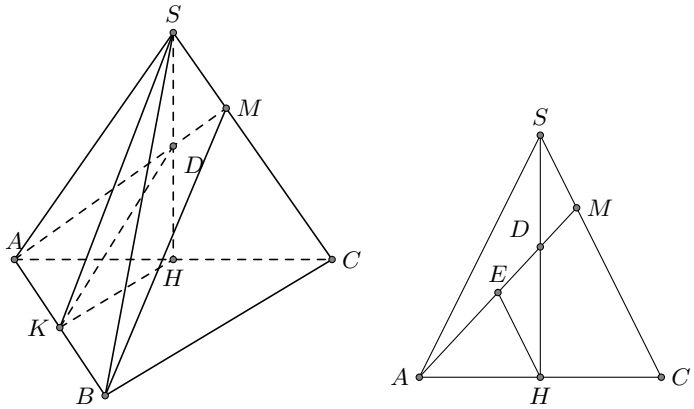


Chọn đáp án (B) □

Câu 323. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B và $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Tam giác SAC đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Xét điểm M thuộc cạnh SC sao cho mặt phẳng (MAB) tạo với hai mặt phẳng (SAB), (ABC) các góc bằng nhau. Tính tỉ số $\dfrac{MS}{MC}$.

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

✍Lời giải.



Gọi H là trung điểm AC, K là trung điểm AB, $D = SH \cap AM$.

Ta có: $\begin{cases} SH \perp (ABC) \\ HK \perp AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} SH \perp AB \\ HK \perp AB \end{cases} \Rightarrow (SHK) \perp AB$.

(MAB) hợp với (SAB) và (CAB) những góc bằng nhau $\Rightarrow \widehat{SKD} = \widehat{DKH}$.

Cho $AC = 2 \Rightarrow AB = 1$, $BC = \sqrt{3}$, $SH = \sqrt{3} \Rightarrow HK = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SK = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$; $\dfrac{DH}{DS} = \dfrac{HK}{SK} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

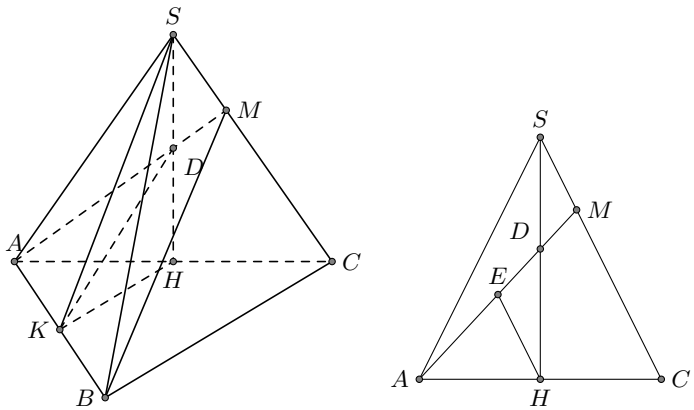
Kẻ $HE \parallel SC\,(E \in AM) \Rightarrow 2 \cdot HE = CM$ và $\dfrac{HE}{SM} = \dfrac{DH}{DS} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow SM = \sqrt{5} \cdot HE \Rightarrow \dfrac{SM}{CM} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 324. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B và $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Tam giác SAC đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Xét điểm M thuộc cạnh SC sao cho mặt phẳng (MAB) tạo với hai mặt phẳng (SAB), (ABC) các góc bằng nhau. Tính tỉ số $\dfrac{MS}{MC}$.

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

✍Lời giải.



Gọi H là trung điểm AC, K là trung điểm AB, $D = SH \cap AM$.

Ta có: $\begin{cases} SH \perp (ABC) \\ HK \perp AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} SH \perp AB \\ HK \perp AB \end{cases} \Rightarrow (SHK) \perp AB$.

(MAB) hợp với (SAB) và (CAB) những góc bằng nhau $\Rightarrow \widehat{SKD} = \widehat{DKH}$.

Cho $AC = 2 \Rightarrow AB = 1$, $BC = \sqrt{3}$, $SH = \sqrt{3} \Rightarrow HK = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SK = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$; $\dfrac{DH}{DS} = \dfrac{HK}{SK} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

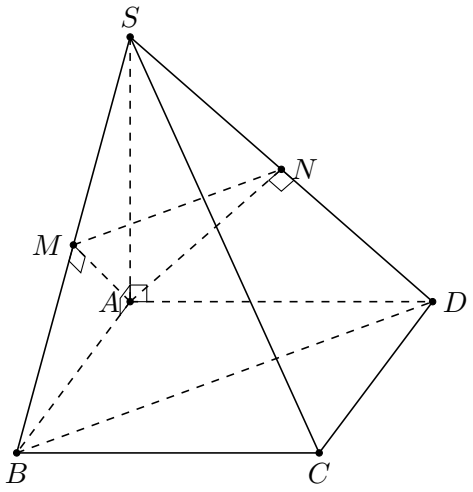
Kẻ $HE \parallel SC\,(E \in AM) \Rightarrow 2 \cdot HE = CM$ và $\dfrac{HE}{SM} = \dfrac{DH}{DS} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow SM = \sqrt{5} \cdot HE \Rightarrow \dfrac{SM}{CM} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 325. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông $SA = \sqrt{3}AB$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SDC). Giá trị $\cos\alpha$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** 0. **D.** $\frac{1}{2}$.

✍Lời giải.

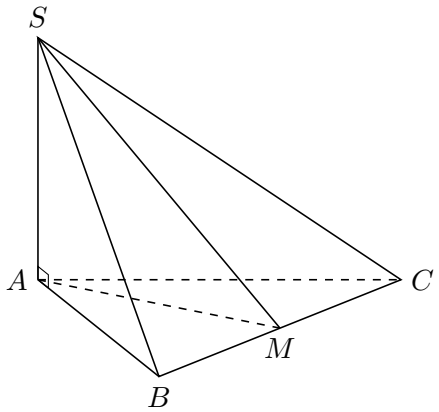


Ta có $(SCD) \perp (SAD)$, vẽ $AN \perp SD$ tại $N \Rightarrow AN \perp (SCD)$.
Tương tự $(SAB) \perp (SBC)$, vẽ $AM \perp SB$ tại $M \Rightarrow AM \perp (SBC)$.
$\Rightarrow \alpha = \widehat{(AM, AN)}$
Giả sử $AB = a \Rightarrow SA = \sqrt{3}a$
Ta có $SB = SD = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a$, $AM = AN = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$
Lại có $\dfrac{MN}{BD} = \dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SM \cdot SB}{SB^2} = \dfrac{SA^2}{SB^2} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow MN = \dfrac{3\sqrt{2}a}{4}$
Ta có $\cos\alpha = \cos(AM, AN) = |\cos(MAN)| = \dfrac{|AM^2 + AN^2 - MN^2|}{2AM \cdot AN} = \dfrac{1}{4}$.
Chú ý: Có thể chuẩn hóa và chọn hệ trục tọa độ sao cho $A(0;0;0)$, $B(0;1;0)$, $D(1;0;0)$, $C(1;1;0)S\left(0;0;\sqrt{3}\right)$,.
Chọn đáp án (B) □

Câu 326. Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) bằng 60° khi và chỉ khi SA bằng

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

✍Lời giải.



Gọi M là trung điểm BC. Ta có $BC \perp AM$, $BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAM)$.
Suy ra, góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) là $\widehat{SMA} = 60^\circ$.
Ta có $AM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Xét tam giác vuông SAM ta có $SA = AM \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 327. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh $B'C'$, $C'D'$. Côsin góc giữa hai mặt phẳng (AEF) và $(ABCD)$ bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{34}}{17}$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{17}}{17}$.

✍Lời giải.

Không mất tổng quát coi hình lập phương có độ dài các cạnh là 1.

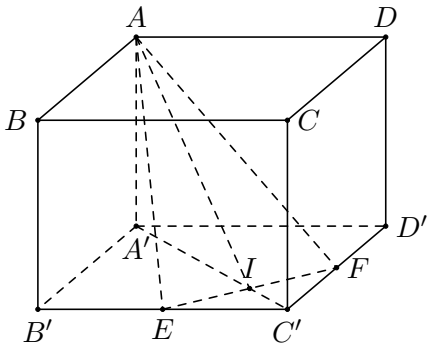
Do $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$ nên góc giữa hai mặt phẳng (AEF) và $(ABCD)$ bằng góc giữa mặt phẳng (AEF) và $(A'B'C'D')$

Gọi I là giao điểm của $A'C'$ và EF, ta có $\widehat{A'AI} = \alpha$ là góc cần tính.

Ta có $A'I = \dfrac{3}{4}A'C' = \dfrac{3}{4}\sqrt{2}$, $AA' = 1$.

Trong tam giác $\Delta A'AI$ vuông tại A' có

$$\tan\alpha = \frac{A'A}{IA} = \frac{3\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3\sqrt{17}}{17}.$$



Chọn đáp án A □

ĐÁP ÁN

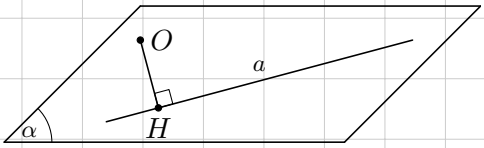
1. D	2. B	3. C	4. B	5. D	6. C	7. B	8. D	9. B	10. D
11. C	12. B	13. D	14. B	15. B	16. D	17. C	18. A	19. A	20. C
21. B	22. D	23. C	24. D	25. C	26. A	27. C	28. C	29. C	30. C
31. B	32. D	33. C	34. B	35. A	36. B	37. D	38. D	39. C	40. B
41. A	42. A	43. A	44. B	45. C	46. D	47. A	48. C	49. A	50. C
51. B	52. C	53. D	54. C	55. B	56. D	57. D	58. B	59. B	60. D
61. A	62. C	63. A	64. B	65. C	66. D	67. A	68. D	69. A	70. D
71. A	72. A	73. B	74. B	75. A	76. A	77. C	78. D	79. D	80. A
81. A	82. A	83. A	84. D	85. B	86. B	87. B	88. B	89. C	90. C
91. A	92. D	93. B	94. A	95. A	96. A	97. C	98. C	99. C	100. C
101. C	102. A	103. D	104. C	105. B	106. B	107. B	108. D	109. C	110. A
111. A	112. D	113. D	114. B	115. B	116. C	117. B	118. D	119. C	120. C
121. B	122. B	123. A	124. C	125. D	126. D	127. A	128. A	129. D	130. D
131. B	132. B	133. C	134. B	135. C	136. C	137. D	138. C	139. B	140. C
141. B	142. C	143. A	144. B	145. A	146. C	147. B	148. A	149. A	150. A
151. A	152. A	153. D	154. D	155. C	156. B	157. A	158. B	159. C	160. A
161. B	162. A	163. C	164. B	165. A	166. A	167. A	168. A	169. A	170. D
171. D	172. C	173. B	174. A	175. B	176. D	177. D	178. D	179. D	180. A
181. D	182. A	183. D	184. A	185. D	186. A	187. B	188. D	189. B	190. D
191. C	192. D	193. D	194. A	195. A	196. A	197. C	198. B	199. B	200. D
201. C	202. A	203. D	204. A	205. A	206. D	207. A	208. D	209. D	210. B
211. B	212. A	213. A	214. D	215. C	216. C	217. C	218. C	219. D	220. D
221. D	222. A	223. D	224. C	225. D	226. B	227. C	228. B	229. A	230. D
231. D	232. B	233. D	234. A	235. C	236. D	237. B	238. C	239. C	240. B
241. D	242. D	243. A	244. A	245. B	246. C	247. D	248. B	249. B	250. D
251. C	252. B	253. C	254. C	255. D	256. A	257. A	258. A	259. A	260. A
261. A	262. C	263. C	264. B	265. B	266. A	267. A	268. D	269. B	270. A
271. D	272. D	273. D	274. D	275. A	276. C	277. C	278. C	279. C	280. C
281. C	282. B	283. C	284. A	285. C	286. A	287. D	288. A	289. B	290. B
291. A	292. A	293. A	294. B	295. B	296. B	297. B	298. C	299. B	300. A
301. B	302. B	303. A	304. A	305. D	306. A	307. D	308. D	309. A	310. B
311. A	312. A	313. A	314. B	315. D	316. B	317. B	318. C	319. C	320. B
321. C	322. B	323. A	324. A	325. B	326. D	327. A			

BÀI 5. KHOẢNG CÁCH

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

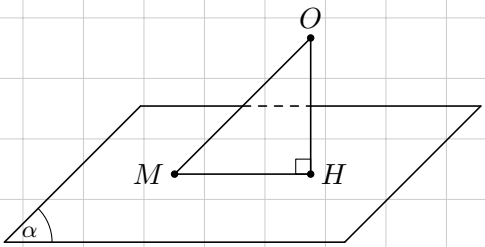
1 KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Cho điểm O và một đường thẳng a. Trong (O, a) gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên a. Khi đó khoảng cách OH được gọi là khoảng cách từ điểm O đến a, kí hiệu $\mathrm{d}(O, a) = OH$.



2 KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM TỚI MỘT MẶT PHẲNG

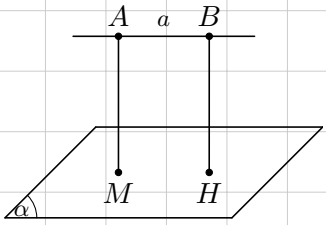
Cho mặt phẳng (α) và một điểm O, gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên mặt phẳng (α). Khi đó khoảng cách OH được gọi là khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α), kí hiệu $\mathrm{d}(O, (\alpha)) = OH$



⚠ $OH \leq MO,\ \forall M \in (\alpha)$.

3 KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐƯỜNG THẲNG TỚI MỘT MẶT PHẲNG SONG SONG

Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) là khoảng cách từ một điểm bất kì của a đến mặt phẳng (α), kí hiệu $\mathrm{d}(a, (\alpha))$.

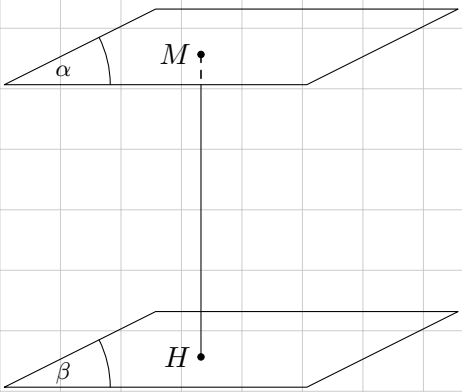


⚠ $\mathrm{d}(a, (\alpha)) = \mathrm{d}(A, (\alpha)),\ \forall A \in a$.

4 KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

Cho hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau, khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia được gọi là khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β).

$$\mathrm{d}((\alpha), (\beta)) = \mathrm{d}(M, (\beta)) = \mathrm{d}(N, (\alpha)),\ M \in (\alpha), N \in (\beta).$$

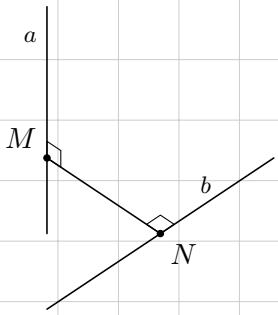


5 ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC CHUNG VÀ KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

Định nghĩa 1.

a Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a, b và cùng vuông góc với mỗi đường thẳng ấy được gọi là đường vuông góc chung của a và b.

b Nếu đường thẳng vuông góc chung Δ cắt hai đường chéo nhau a, b lần lượt tại M, N thì độ dài đoạn MN gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.



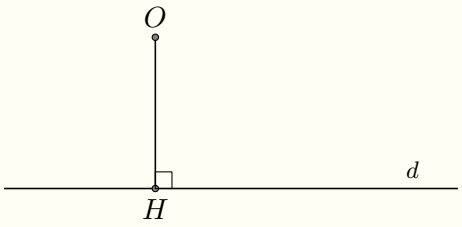
B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng

Để tính khoảng cách từ điểm O tới đường thẳng (d), ta thực hiện các bước sau:

— *Trong mặt phẳng $(O;d)$, hạ $OH \perp (d)$ tại H.*

— *Tính độ dài OH dựa trên các công thức về hệ thức lượng trong tam giác, tứ giác và đường tròn.*

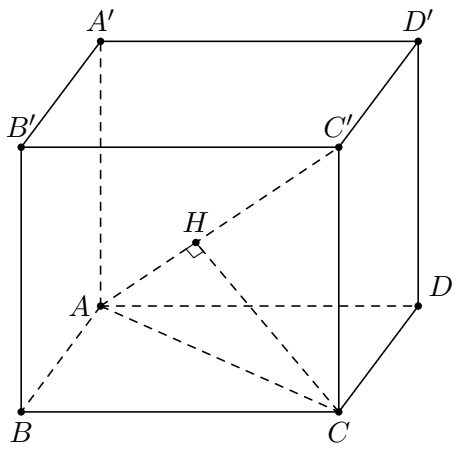


Ví dụ 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Chứng minh rằng khoảng cách từ điểm B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' đều bằng nhau. Tính khoảng cách đó.

✍Lời giải.

Ta có $\triangle BAC' = \triangle CA'A = \triangle DAC' = \triangle A'AC = \triangle B'C'A = \triangle D'C'A$ chung đáy AC' nên khoảng cách từ B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' đều bằng nhau.
Hạ $CH \perp AC'$, ta được

$$\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{C'C^2} \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$



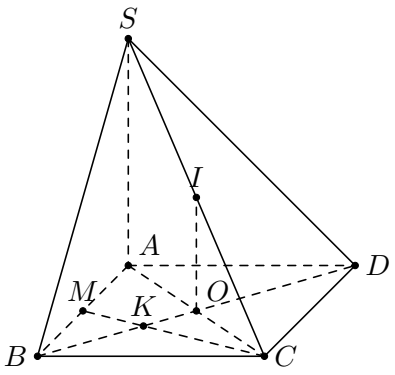
□

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O, $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi I, M theo thứ tự là trung điểm của SC, AB.

① Chứng minh $OI \perp (ABCD)$.

② Tính khoảng cách từ I đến CM, từ đó suy ra khoảng cách từ S tới CM.

✍Lời giải.



① Trong $\triangle SAC$, OI là đường trung bình nên $OI \parallel SA \Rightarrow OI \perp (ABCD)$.

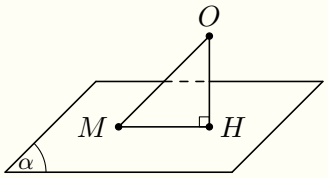
② Hạ $IH \perp CM$ tại H. Vì $CM \perp (IOH)$ nên $CM \perp OH$.
Gọi K là trọng tâm tam giác ABC, ta có $OB = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}; OK = \dfrac{OB}{3} = \dfrac{a\sqrt{2}}{6}$.
Trong $\triangle OCK$ có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OK^2} + \dfrac{1}{OC^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a}{\sqrt{20}}$.
Trong $\triangle OIH$ có $IH^2 = OI^2 + OH^2 \Rightarrow IH = \dfrac{a\sqrt{30}}{10}$.

Ta có $SI \cap CM = C$ suy ra $\dfrac{\mathrm{d}(S,CM)}{\mathrm{d}(I,CM)} = \dfrac{SC}{IC} = 2 \Rightarrow \mathrm{d}(S,CM) = \dfrac{a\sqrt{30}}{5}$.

□

Dạng 2. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Phương pháp: *Cho mặt phẳng (α) và một điểm O, gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên mặt phẳng (α). Khi đó khoảng cách OH được gọi là khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α), kí hiệu $\mathrm{d}(O,(\alpha)) = OH$.*

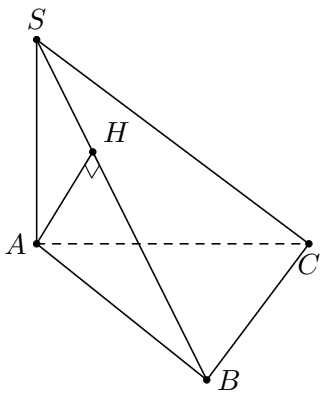


Tính chất 1. Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) thì khoảng cách từ mọi điểm trên đường thẳng d đến mặt phẳng (P) là như nhau.

Tính chất 2. Nếu $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{BM}$ thì $\mathrm{d}(A,(P)) = |k|\mathrm{d}(B,(P))$, trong đó (P) là mặt phẳng đi qua M.

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B và $AB = a$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

✍Lời giải.



Do $SA \perp (ABC)$ và $SA \subset (SAB)$ nên $(SAB) \perp (ABC)$.
Mà $(SAB) \cap (ABC) = AB$ và $AB \perp BC$ nên $BC \perp (SAB)$.
Do $BC \subset (SBC)$ nên $(SBC) \perp (SAB)$.
Kẻ $AH \perp SB$ với $H \in SB$.
Do $(SAB) \cap (SBC) = SB$ nên $AH \perp (SBC) \Rightarrow \mathrm{d}(A,(SBC)) = AH$. Do $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AB$ nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2}.$$

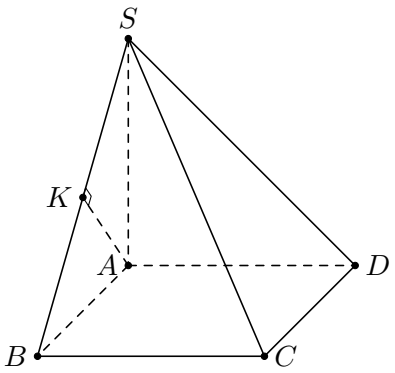
Vậy $\mathrm{d}(A,(SBC)) = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

□

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a\sqrt{2}$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC).

✍Lời giải.

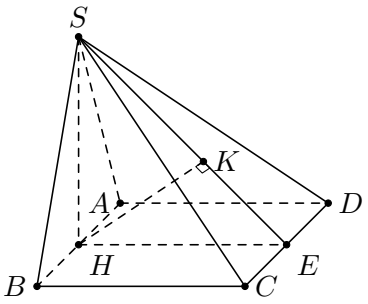
Do $AD \parallel BC$ nên $\mathrm{d}(D,(SBC)) = \mathrm{d}(A,(SBC))$.
Gọi K là hình chiếu của A trên SB, suy ra $AK \perp SB$.
Khi $\mathrm{d}(A,(SBC)) = AK = \dfrac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.



□

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$, tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi H là trung điểm của AB. Tính khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SCD).

✍Lời giải.
Do tam giác SAB đều và H là trung điểm của AB nên $SH \perp AB$.
Mà $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp CD$.
Do $ABCD$ là hình vuông nên gọi E là trung điểm của CD nên $HE \perp CD$.
Vậy $CD \perp (SHE)$.
Mà $CD \subset (SCD)$ nên $(SCD) \perp (SHE)$.
Ta có $(SCD) \cap (SHE) = SE$.
Kẻ $HK \perp SE$ với $K \in SE$ nên $HK \perp (SCD)$.



Khi đó $\mathrm{d}(H,(SCD)) = HK$. Vì $AB = a$ nên $SH = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.
Do $ABCD$ là hình vuông nên $HE = a$. Vì $SH \perp (ABCD)$ nên $SH \perp HE$.
Khi đó $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HE^2} = \dfrac{7}{3a^2}$. Nên $HK = \dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. Vậy $\mathrm{d}(H,(SCD)) = \dfrac{\sqrt{21}a}{7}$.

□

Dạng 3. Khoảng cách giữa đường và mặt song song - Khoảng cách giữa hai mặt song song

① *Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (α), để tính khoảng cách giữa d và (α) ta thực hiện*

— *Chọn điểm A trên d sao cho khoảng cách từ A tới (α) được xác định dễ nhất.*
— *Kết luận* $\mathrm{d}(d;(\alpha)) = \mathrm{d}(A,(\alpha))$.

② *Cho hai mặt phẳng song song $(\alpha),(\beta)$. Để tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng ta thực hiện các bước*

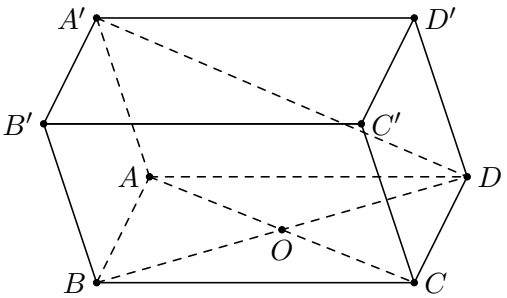
— *Chọn điểm A trên (α) sao cho khoảng cách từ A tới (β) được xác định dễ nhất.*
— *Kết luận* $\mathrm{d}((\beta);(\alpha)) = \mathrm{d}(A,(\beta))$.

Ví dụ 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh đều bằng a và $\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 60^\circ$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $A'B'C'D'$.

✍Lời giải.
Hạ $A'H \perp AC$. Ta có $BD \perp (OAA')$ suy ra $BD \perp A'H \Rightarrow A'H \perp (ABCD)$. Do $(ABCD) \parallel (A'B'C'D)$ nên $A'H$ là khoảng cách giữa hai mặt đáy.

Vì $A'.ABD$ là hình chóp đều nên $AH = \dfrac{2}{3}AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Khi đó

$$A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow A'H = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$



□

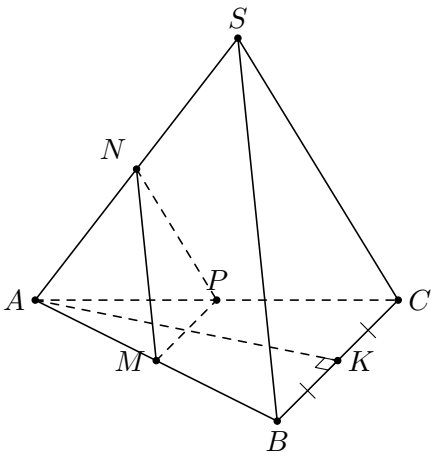
Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, mặt bên (SBC) vuông góc với đáy. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm AB, SA, AC. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (MNP) và (SBC).

✍Lời giải.

Ta chứng minh được $(MNP) \parallel (SBC)$.
Suy ra $\mathrm{d}((MNP),(SBC)) = \mathrm{d}(P,(SBC))$.
Giả sử $AP \cap (SBC) = C$ suy ra

$$\mathrm{d}(P;(SBC)) = \frac{AP}{AC}\mathrm{d}(A,(SBC)) = \frac{1}{2}\mathrm{d}(A,(SBC)).$$

Gọi K là trung điểm của BC. Tam giác ABC đều suy ra $AK \perp BC$.
Do $(ABC) \perp (SBC)$ theo giao tuyến BC nên $AK \perp (SBC)$.
Do đó, $\mathrm{d}(A,(SBC)) = AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Vậy $\mathrm{d}((MNP),(SBC)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.



□

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $(ABCD)$ là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = 2a$.

① Tính khoảng cách từ A, B đến mặt phẳng (SCD).

② Tính khoảng cách từ đường thẳng AD đến mặt phẳng (SBC).

③ Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (SAD) và cách (SAD) một khoảng bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

✍Lời giải.

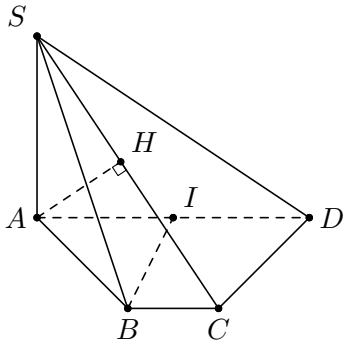
① Ta có $(SCD) \perp (SAC)$. Hạ $AH \perp SC \Rightarrow AH \perp (SCD)$. Suy ra AH là khoảng cách từ A tới (SCD).
Xét $\triangle SAB$: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{SA^2} \Rightarrow AH = a\sqrt{2}$.
Gọi I là trung điểm của AD, suy ra

$$BI \parallel CD \Rightarrow BI \parallel (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}(B,(SCD)) = \mathrm{d}(I,(SCD)).$$

Mặt khác, $AI \cap (SCD) = D$, nên

$$\frac{\mathrm{d}(I,(SCD))}{\mathrm{d}(A,(SCD))} = \frac{ID}{AD} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $\mathrm{d}(I,(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



② Ta có $AD \parallel CD \Rightarrow AD \parallel (SBC) \Rightarrow \mathrm{d}(AD,(SBC)) = \mathrm{d}(A,(SBC))$.
Hạ $AK \perp BC$, ta có $BC \perp (SAK) \Rightarrow (SBC) \perp (SAK)$ và $(SBC) \perp (SAK) = AK$.
Hạ $AG \perp SK$, suy ra $AG \perp (SBC)$.
Xét $\triangle SAK$, ta có

$$\frac{1}{AG^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} \Rightarrow AG = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

③ Ta có $AK \perp (SAD)$. Giả sử $(\alpha) \parallel (SAD)$ cắt AK tại E, khi đó

$$\mathrm{d}((\alpha),(SAD)) = AE = \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}AK.$$

Suy ra E là trung điểm của AK. Ta xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) qua E và song song với (SAD).
Thiết diện là hình thang vuông $MNPQ$ với M, N, Q, P là trung điểm của AB, CD, SB, SC. Ta tính được $S_{MNPQ} = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{2}$.

□

Dạng 4. Đoạn vuông góc chung - Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

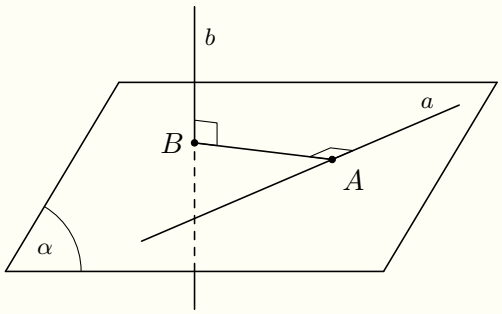
***Phương pháp**: Ta có các trường hợp sau:*

1) *Trường hợp 1*

Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau và $a \perp b$.

— *Ta dựng mặt phẳng (α) chứa a và vuông góc với b tại B.*

— *Trong (α) dựng $BA \perp a$ tại A, ta được độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.*



2) *Trường hợp 2*

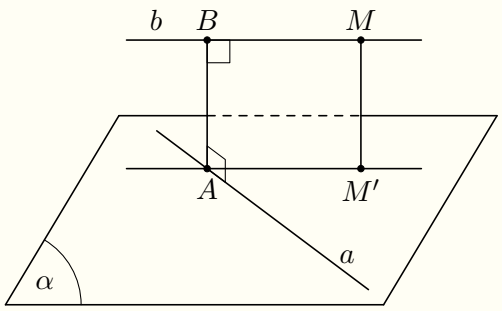
Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau nhưng không vuông góc với nhau.

— *Ta dựng mặt phẳng (α) chứa a và song song với b.*

— *Lấy một điểm M tùy ý trên b và dựng MM' vuông góc với (α) tại M'.*

— *Từ M' dựng b' song song với b cắt a tại A.*

— *Từ A dựng AB song song với MM' cắt b tại B, độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.*



Nhận xét

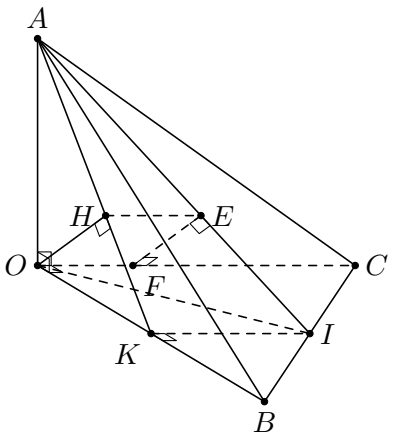
a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó chứa đường thẳng còn lại.

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

Ví dụ 1. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC vuông góc với nhau đôi một và $OA = OB = OC = a$. Gọi I là trung điểm của BC. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng chéo nhau:

① OA và BC. ② AI và OC.

✍Lời giải.



① Ta có $\begin{cases} OA \perp OI \\ BC \perp OI \end{cases} \Rightarrow OI$ là đoạn vuông góc chung của OA và BC.

Tam giác OBC vuông cân tại O nên $OI = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\mathrm{d}(OA, BC) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

② Gọi K là trung điểm của OB, ta có $IK \parallel OC \Rightarrow OC \parallel (AIK)$.

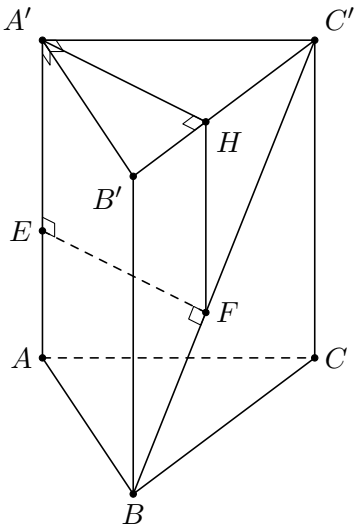
Ta có $\begin{cases} IK \perp OB \\ IK \perp OA \end{cases} \Rightarrow IK \perp (OAB) \Rightarrow (AIK) \perp (OAB)$ theo giao tuyến AK.

Trong mặt phẳng (OAB), kẻ $OH \perp AK$ tại H, ta có: $OH \perp (AIK) \Rightarrow OH \perp AI$.
Trong mặt phẳng (AIK), kẻ $HE \parallel IK$ $(E \in SI)$.
Trong mặt phẳng (HE, OC), kẻ $EF \parallel OH$ $(F \in OC) \Rightarrow EF \perp AI$.
Lại có $OC \perp (OAB) \Rightarrow OC \perp AH \Rightarrow OC \perp EF$.
Do đó EF là đoạn vuông góc chung của OC và AI.
Trong tam giác vuông OAK ta có: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{5}{a^2}$.
Suy ra $EF = OH = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.
Vậy $\mathrm{d}(AI, OC) = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

□

Ví dụ 2. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AB = a$, $AC = 2a$; cạnh bên $AA' = 2a$. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng BC' và AA'.

✍Lời giải.



Ta có $AA' \parallel BB' \Rightarrow AA' \parallel (BB'C'C)$.
Vì $(A'B'C') \perp (BB'C'C)$ theo giao tuyến $B'C'$ nên trong mặt phẳng $(A'B'C')$, kẻ $A'H \perp B'C'$ tại H, ta có: $A'H \perp (BB'C'C) \Rightarrow A'H \perp BC'$.
Trong mặt phẳng $(BB'C'C)$, kẻ $HF \parallel AA'$ $(F \in BC')$. Trong mặt phẳng (HF, AA'), kẻ $FE \parallel A'H$ $(E \in AA') \Rightarrow FE \perp BC'$.
Ta có $AA' \perp (A'B'C') \Rightarrow AA' \perp A'H \Rightarrow AA' \perp FE$.
Do đó EF là đoạn vuông góc chung của AA' và BC'.
Trong tam giác vuông $A'B'C'$ ta có:

$$\frac{1}{A'H^2} = \frac{1}{A'B'^2} + \frac{1}{A'C'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{5}{4a^2}.$$

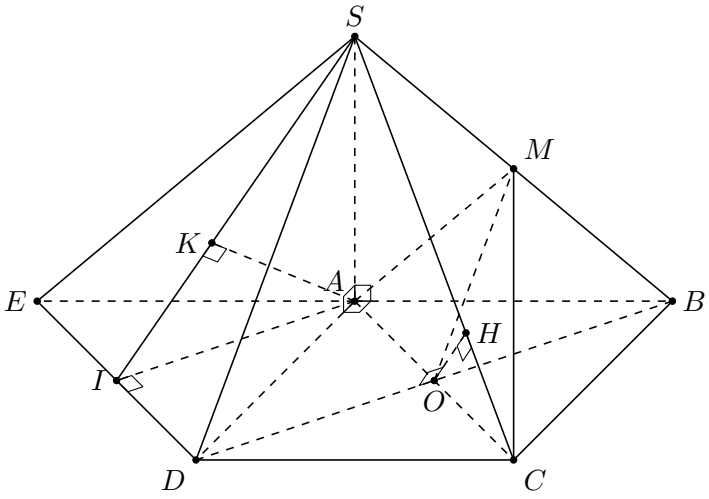
Suy ra $EF = A'H = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.
Vậy $\mathrm{d}(AA', BC') = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

□

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với đáy và $SA = a$. M là trung điểm của SB. Tính khoảng cách giữa các đường thẳng:

① SC và BD. ② AC và SD. ③ SD và AM.

✍Lời giải.



① Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có: $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$ tại O.

Trong mặt phẳng (SAC), kẻ $OH \perp SC$ tại H, ta có $OH \perp SC$ và $OH \perp BD$ (vì $BD \perp (SAC)$).
Vậy OH là đoạn vuông góc chung của BD và SC.

Ta có $\dfrac{OH}{OC} = \dfrac{SA}{SC} = \sin \widehat{ACS} \Rightarrow OH = \dfrac{OC.SA}{SC} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Vậy $\mathrm{d}(SC, BD) = OH = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

② Dựng hình bình hành $ACDE$, ta có: $AC \parallel DE \Rightarrow AC \parallel (SDE)$.
$\Rightarrow \mathrm{d}(AC, SD) = \mathrm{d}(AC, (SDE)) = \mathrm{d}(A, (SDE))$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kẻ $AI \perp DE$ tại I, ta có $\begin{cases} DE \perp AI \\ DE \perp SA \end{cases} \Rightarrow DE \perp (SAI)$.

$\Rightarrow (SDE) \perp (SAI)$ theo giao tuyến SI.
Trong mặt phẳng (SAI), kẻ $AK \perp SI$ tại K, ta có: $AK \perp (SDE) \Rightarrow AK = \mathrm{d}(A, (SDE))$.

Ta có $AIDO$ là hình bình hành nên $AI = OD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác vuông SAI ta có: $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AI^2} + \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{3}{a^2}$.

Suy ra $AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $\mathrm{d}(AC, SD) = \mathrm{d}(A, (SDE)) = AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

③ Ta có $OM \parallel SD$ và $AC \parallel DE$ nên $(AMC) \parallel (SDE)$.

Suy ra $\mathrm{d}(SD, AM) = \mathrm{d}((AMC), (SDE)) = \mathrm{d}(A, (SDE)) = AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

□

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC). Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBC).

A. $d = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **B.** $d = a$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

✍**Lời giải.**

Gọi M là trung điểm BC, suy ra $AM \perp BC$ và $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

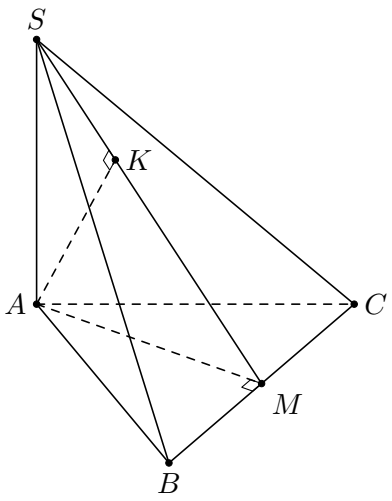
Gọi K là hình chiếu của A trên SM, suy ra $AK \perp SM$. (1)

Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp AK$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $AK \perp (SBC)$ nên $\mathrm{d}\,(A,(SBC)) = AK$.

Trong $\triangle SAM$, có $AK = \dfrac{SA \cdot AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \dfrac{3a}{\sqrt{15}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Vậy $\mathrm{d}\,(A,(SBC)) = AK = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a, AC = a\sqrt{3}$. Tam giác SBC đều và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SAC).

A. $d = \dfrac{a\sqrt{39}}{13}$. **B.** $d = a$. **C.** $d = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

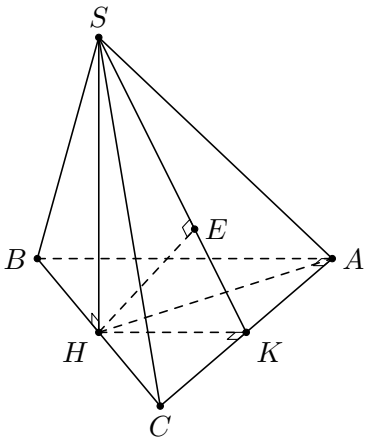
Gọi H là trung điểm của BC, suy ra $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Gọi K là trung điểm AC, suy ra $HK \perp AC$.

Kẻ $HE \perp SK\,(E \in SK)$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\,(B,(SAC)) &= 2\mathrm{d}\,(H,(SAC)) = 2HE \\ &= 2 \cdot \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}. \end{aligned}$$



Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $2a$. Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SCD).

A. $d = \dfrac{a\sqrt{7}}{\sqrt{30}}$. **B.** $d = \dfrac{2a\sqrt{7}}{\sqrt{30}}$. **C.** $d = \dfrac{a}{2}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

✍Lời giải.

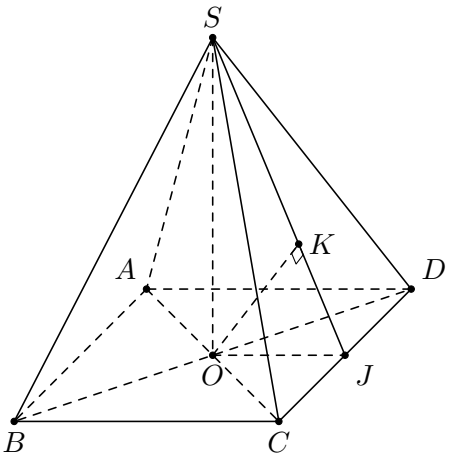
Gọi O là tâm của đáy, suy ra $SO \perp (ABCD)$.

Ta có $\mathrm{d}\,(A,(SCD)) = 2\mathrm{d}\,(O,(SCD))$.

Gọi J là trung điểm CD, suy ra $OJ \perp CD$. Gọi K là hình chiếu của O trên SJ, suy ra $OK \perp SJ$.

Khi đó $\mathrm{d}\,(O,(SCD)) = OK = \dfrac{SO \cdot OJ}{\sqrt{SO^2 + OJ^2}} = \dfrac{a\sqrt{7}}{\sqrt{30}}$.

Vậy $\mathrm{d}\,(A,(SCD)) = 2OK = \dfrac{2a\sqrt{7}}{\sqrt{30}}$.



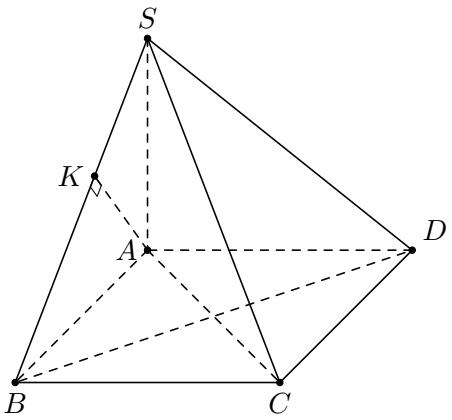
Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a\sqrt{2}$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ D đến mặt phẳng (SBC).

A. $d = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$. **B.** $d = a\sqrt{2}$. **C.** $d = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

✍Lời giải.

Do $AD \parallel BC$ nên $\mathrm{d}\,(D,(SBC)) = \mathrm{d}\,(A,(SBC))$.
Gọi K là hình chiếu của A trên SB, suy ra $AK \perp SB$.
Khi $\mathrm{d}\,(A,(SBC)) = AK = \dfrac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.



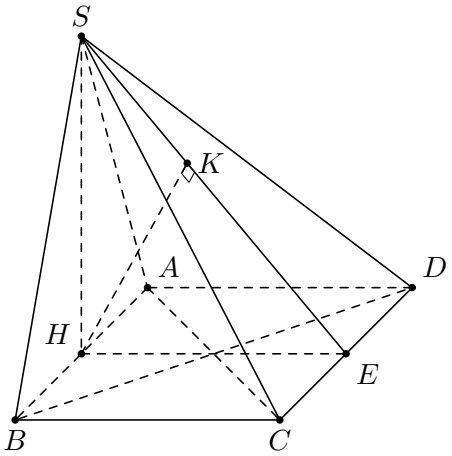
Chọn đáp án C □

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ A đến (SCD).

A. $d = 1$. **B.** $d = \sqrt{2}$. **C.** $d = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $d = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm AB, suy ra $SH \perp AB$. Do đó $SH \perp (ABCD)$.
Do $AH \parallel CD$ nên $\mathrm{d}\,(A,(SCD)) = \mathrm{d}\,(H,(SCD))$.
Gọi E là trung điểm CD; K là hình chiếu vuông góc của H trên SE.
Khi đó $\mathrm{d}\,(H,(SCD)) = HK = \dfrac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.
Vậy $\mathrm{d}\,(A,(SCD)) = HK = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.



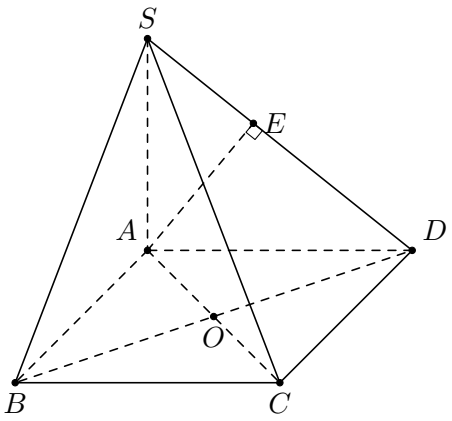
Chọn đáp án D □

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ điểm B đến mặt phẳng (SCD).

A. $d = a$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $d = a\sqrt{3}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Do $AB \parallel CD$ nên $\mathrm{d}\,(B,(SCD)) = \mathrm{d}\,(A,(SCD))$.
Kẻ $AE \perp SD$ tại E. Khi đó $\mathrm{d}\,(A,(SCD)) = AE$.
Tam giác vuông SAD, có $AE = \dfrac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.
Vậy $\mathrm{d}\,(B,(SCD)) = AE = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.



Chọn đáp án B □

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Cạnh bên $SA = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (SBC).

A. $d = \dfrac{a\sqrt{285}}{19}$. **B.** $d = \dfrac{\sqrt{285}}{38}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{285}}{38}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

✍Lời giải.

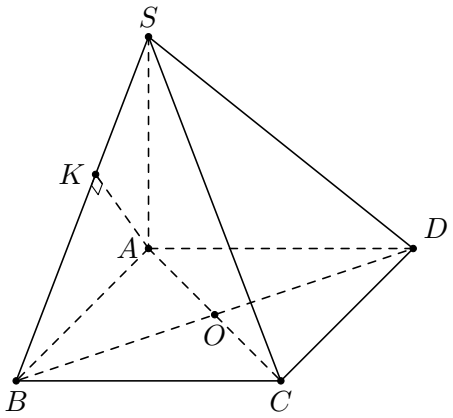
Ta có $\mathrm{d}(O,(SBC)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(A,(SBC))$.

Gọi K là hình chiếu của A trên SB, suy ra $AK \perp SB$.

Khi đó $\mathrm{d}(A,(SBC)) = AK$.

Tam giác vuông SAB, có $AK = \dfrac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{a\sqrt{285}}{19}$.

Vậy $\mathrm{d}(O,(SBC)) = \dfrac{1}{2}AK = \dfrac{a\sqrt{285}}{38}$.



Chọn đáp án C □

Câu 8. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $\dfrac{a\sqrt{21}}{6}$. Tính khoảng cách d từ đỉnh A đến mặt phẳng (SBC).

A. $d = \dfrac{a}{4}$. **B.** $d = \dfrac{3a}{4}$. **C.** $d = \dfrac{3}{4}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

✍Lời giải.

Gọi O là tâm của tam giác đều ABC. Do hình chóp $S.ABC$ đều nên suy ra $SO \perp (ABC)$.

Ta có $\mathrm{d}(A,(SBC)) = 3\mathrm{d}(O,(SBC))$.

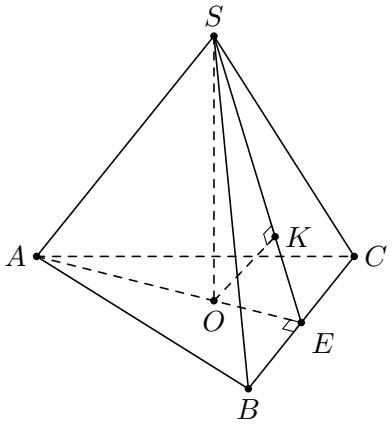
Gọi E là trung điểm BC; kẻ $OK \perp SE$.

Khi đó $\mathrm{d}(O,(SBC)) = OK$.

Tính được $SO = \dfrac{a}{2}$ và $OE = \dfrac{1}{3}AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Tam giác vuông SOE, có $OK = \dfrac{SO \cdot OE}{\sqrt{SO^2 + OE^2}} = \dfrac{a}{4}$.

Vậy $\mathrm{d}(A,(SBC)) = 3OK = \dfrac{3a}{4}$.



Chọn đáp án B □

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, SB hợp với mặt đáy một góc $60°$. Tính khoảng cách d từ điểm D đến mặt phẳng (SBC).

A. $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $d = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $d = a$. **D.** $d = a\sqrt{3}$.

✍Lời giải.

Xác định $60° = (SB,(ABCD)) = (SB,AB) = \widehat{SBA}$.

Suy ra $SA = AB \cdot \tan\widehat{SBA} = a\sqrt{3}$.

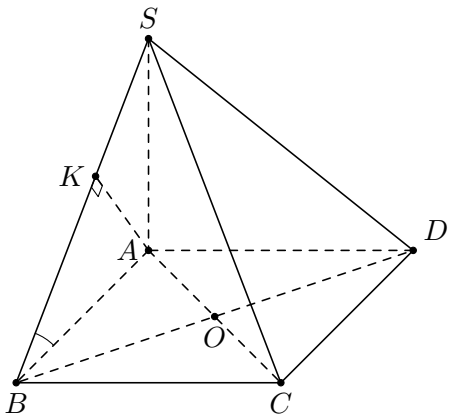
Ta có $AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC)$ nên

$$\mathrm{d}(D,(SBC)) = \mathrm{d}(A,(SBC)).$$

Kẻ $AK \perp SB$.

Khi đó $\mathrm{d}(A,(SBC)) = AK = \dfrac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $\mathrm{d}(D,(SBC)) = AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



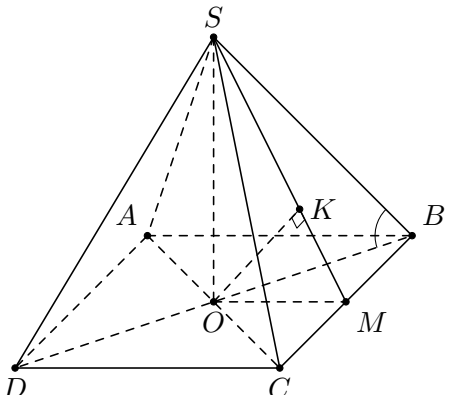
Chọn đáp án A □

Câu 10. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 1, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc $60°$. Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (SBC).

A. $d = \dfrac{1}{2}$. **B.** $d = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $d = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$. **D.** $d = \dfrac{\sqrt{42}}{14}$.

✍Lời giải.

Xác định $60° = (SB, (ABCD)) = (SB, OB) = \widehat{SBO}$
và $SO = OB \cdot \tan \widehat{SBO} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.
Gọi M là trung điểm BC, kẻ $OK \perp SM$.
Khi đó $\mathrm{d}\,(O, (SBC)) = OK$.
Tam giác vuông SOM, có $OK = \dfrac{SO \cdot OM}{\sqrt{SO^2 + OM^2}} = \dfrac{\sqrt{42}}{14}$.
Vậy $\mathrm{d}\,(O, (SBC)) = OK = \dfrac{\sqrt{42}}{14}$.



Chọn đáp án D □

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC); góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SMC).

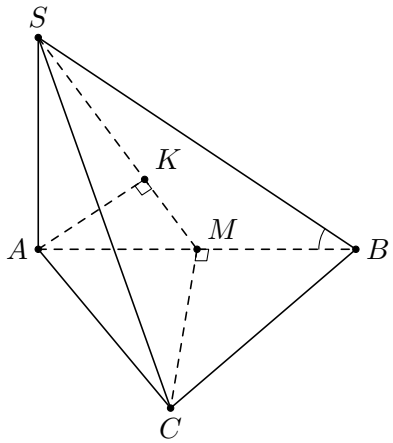
A. $d = a\sqrt{3}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{39}}{13}$. **C.** $d = a$. **D.** $d = \dfrac{a}{2}$.

✍Lời giải.

Xác định $60° = (SB, (ABC)) = (SB, AB) = \widehat{SBA}$
và $SA = AB \cdot \tan \widehat{SBA} = a\sqrt{3}$.
Do M là trung điểm của cạnh AB nên

$$\mathrm{d}\,(B, (SMC)) = \mathrm{d}\,(A, (SMC)).$$

Kẻ $AK \perp SM$. Khi đó $\mathrm{d}\,(A, (SMC)) = AK$.
Tam giác vuông SAM, có $AK = \dfrac{SA \cdot AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \dfrac{a\sqrt{39}}{13}$.
Vậy $\mathrm{d}\,(B, (SMC)) = AK = \dfrac{a\sqrt{39}}{13}$.



Chọn đáp án B □

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AC = 2a, BC = a$. Đỉnh S cách đều các điểm A, B, C. Tính khoảng cách d từ trung điểm M của SC đến mặt phẳng (SBD).

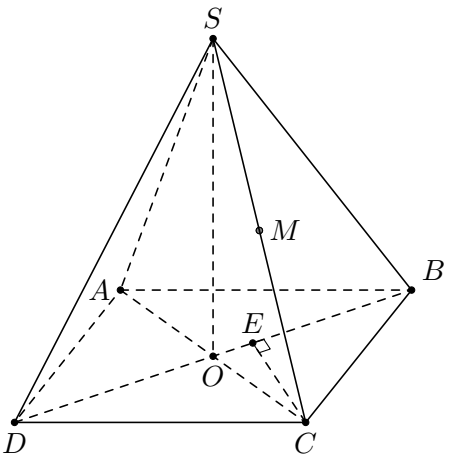
A. $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **C.** $d = a\sqrt{5}$. **D.** $d = a$.

✍Lời giải.

Gọi O là trung điểm AC, suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Do đỉnh S cách đều các điểm A, B, C nên $SO \perp (ABCD)$.
Ta có $\mathrm{d}\,(M,(SBD)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\,(C,(SBD))$.
Kẻ $CE \perp BD$. Khi đó

$$\mathrm{d}\,(C,(SBD)) = CE = \frac{CB \cdot CD}{\sqrt{CB^2 + CD^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $\mathrm{d}\,(M,(SBD)) = \dfrac{1}{2}CE = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.



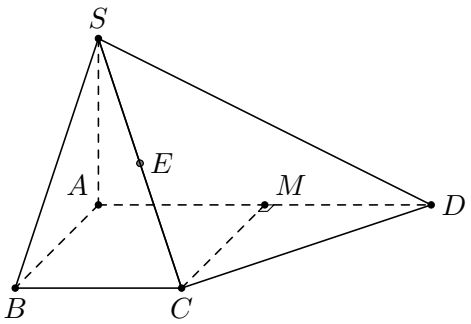
Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AD = 2BC$, $AB = BC = a\sqrt{3}$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi E là trung điểm của cạnh SC. Tính khoảng cách d từ điểm E đến mặt phẳng (SAD).

A. $d = a\sqrt{3}$. **B.** $d = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $d = \sqrt{3}$.

✍Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}\,(E,(SAD)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\,(C,(SAD))$.
Gọi M là trung điểm AD, suy ra $ABCM$ là hình vuông $\Rightarrow CM \perp AD$.
Do $\begin{cases} CM \perp AD \\ CM \perp SA \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAD)$
nên $\mathrm{d}\,(C,(SAD)) = CM = AB = a\sqrt{3}$.
Vậy $\mathrm{d}\,(E,(SAD)) = \dfrac{1}{2}CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



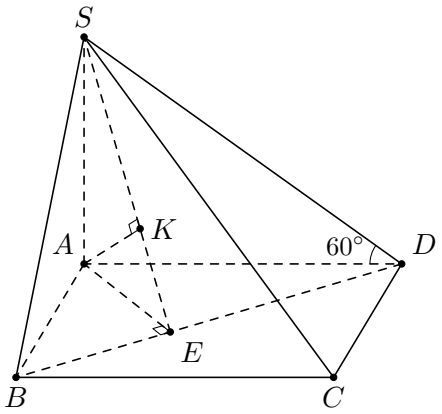
Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc giữa SD với đáy bằng $60°$. Tính khoảng cách d từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) theo a.

A. $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $d = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **D.** $d = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Xác định $60° = (SD,(ABCD)) = (SD,AD) = \widehat{SDA}$ và $SA = AD \cdot \tan\widehat{SDA} = 2a\sqrt{3}$.
Ta có $\mathrm{d}\,(C,(SBD)) = \mathrm{d}\,(A,(SBD))$.
Kẻ $AE \perp BD$ và kẻ $AK \perp SE$. Khi đó $\mathrm{d}\,(A,(SBD)) = AK$.
Tam giác vuông BAD, có $AE = \dfrac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.
Tam giác vuông SAE, có $AK = \dfrac{SA \cdot AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Vậy $\mathrm{d}\,(C,(SBD)) = AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Cho hình chóp $S.ACBD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = AB = BC = 1$, $AD = 2$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SBD).

A. $d = \dfrac{2}{3}$. **B.** $d = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $d = \dfrac{2a}{3}$. **D.** $d = 1$.

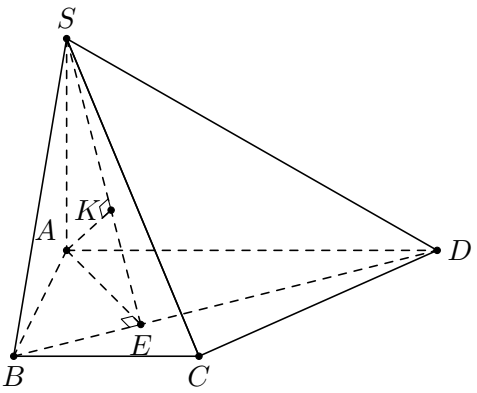
✍Lời giải.

Kẻ $AE \perp BD$, kẻ $AK \perp SE$. Khi đó $\mathrm{d}(A,(SBD)) = AK$.

Tam giác vuông ABD, có $AE = \dfrac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2+AD^2}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Tam giác vuông SAE, có $AK = \dfrac{SA \cdot AE}{\sqrt{SA^2+AE^2}} = \dfrac{2}{3}$.

Vậy $\mathrm{d}(A,(SBD)) = AK = \dfrac{2}{3}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. Tam giác ABC đều, hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Đường thẳng SD hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ góc $30°$. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SCD) theo a.

A. $d = \dfrac{2a\sqrt{21}}{21}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $d = a$. **D.** $d = a\sqrt{3}$.

✍Lời giải.

Xác định $30° = (SD,(ABCD)) = (SD,HD) = \widehat{SDH}$

và $SH = HD\tan\widehat{SDH} = \dfrac{2a}{3}$.

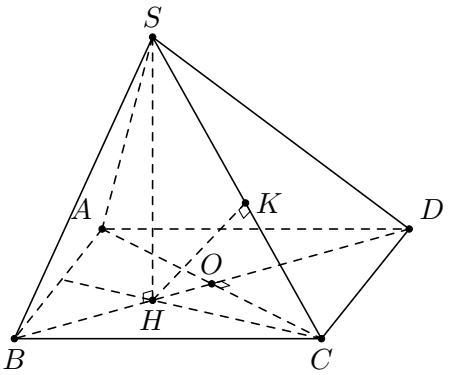
Ta có $\mathrm{d}(B,(SCD)) = \dfrac{BD}{HD}\mathrm{d}(H,(SCD)) = \dfrac{3}{2}\mathrm{d}(H,(SCD))$.

Ta có $HC \perp AB \Rightarrow HC \perp CD$.

Kẻ $HK \perp SC$. Khi đó $\mathrm{d}(H,(SCD)) = HK$.

Tam giác vuông SHC, có $HK = \dfrac{SH \cdot HC}{\sqrt{SH^2+HC^2}} = \dfrac{2a\sqrt{21}}{21}$.

Vậy $\mathrm{d}(B,(SCD)) = \dfrac{3}{2}HK = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a, AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).

A. $d = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. **B.** $d = a\sqrt{2}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $d = 2a$.

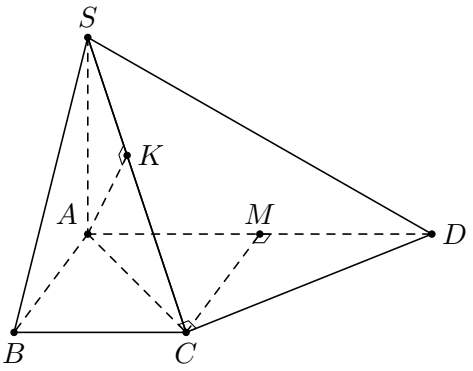
✍Lời giải.

Gọi M là trung điểm AD, suy ra $ABCM$ là hình vuông.

Do đó $CM = MA = \dfrac{AD}{2}$ nên tam gác ACD vuông tại C.

Kẻ $AK \perp SC$. Khi đó

$$\mathrm{d}(A,(SCD)) = AK = \frac{SA \cdot AC}{\sqrt{SA^2+AC^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$



Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AD = 2AB = 2a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD. Tính khoảng cách d từ S đến mặt phẳng (AMN).

A. $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $d = 2a$. **C.** $d = \dfrac{3a}{2}$. **D.** $d = a\sqrt{5}$.

✍Lời giải.

Thể tích khối chóp $V_{S.ABD} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABD} \cdot SA = \dfrac{2a^3}{3}$.

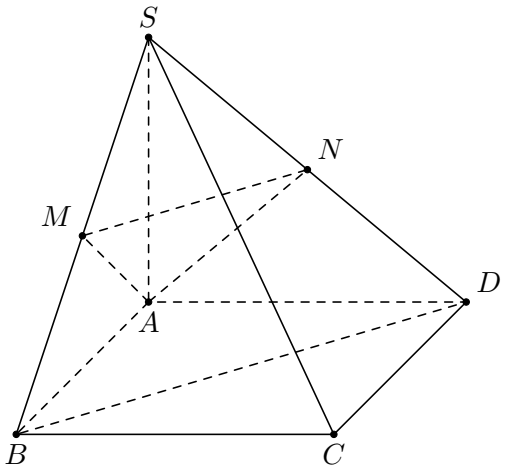
Vì $S_{\Delta SMN} = \dfrac{1}{4}S_{\Delta SBD}$ nên $V_{A.SMN} = \dfrac{1}{4}V_{A.SBD} = \dfrac{a^3}{6}$.

Ta có AM, AN là các đường trung tuyến trong tam giác vuông, MN là đường trung bình nên tính được:

$AM = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, $AN = a\sqrt{2}$, $MN = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Từ đó tính được $S_{\Delta AMN} = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{4}$.

Vậy $\mathrm{d}\,(S,(AMN)) = \dfrac{3V_{S.AMN}}{S_{\Delta AMN}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (BDA').

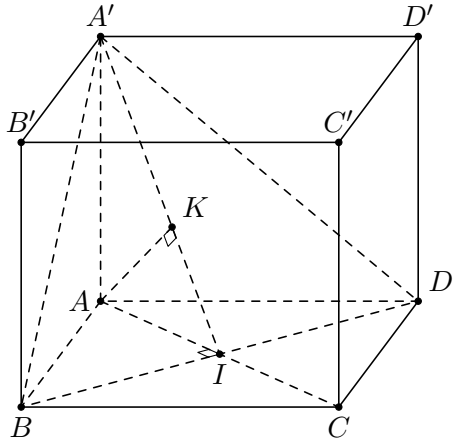
A. $d = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $d = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $d = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **D.** $d = \sqrt{3}$.

✍Lời giải.

Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$, suy ra $AI \perp BD$.

Kẻ $AK \perp A'I$. Khi đó

$$\mathrm{d}\left(A,\left(BDA'\right)\right) = AK = \frac{AA' \cdot AI}{\sqrt{AA'^2 + AI^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với $AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, SB hợp với đáy góc $60°$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AD và SC.

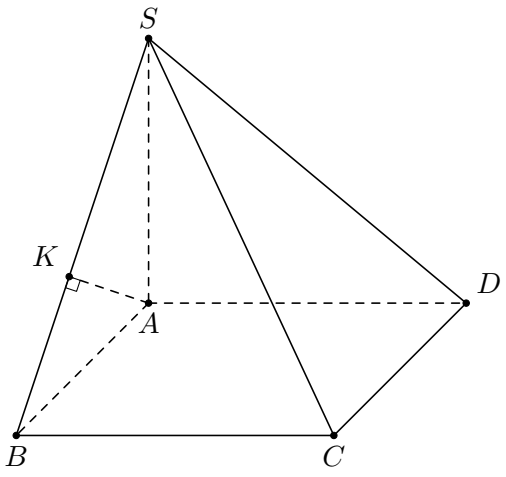
A. $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $d = \dfrac{a}{2}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}\,(AD,SC) = \mathrm{d}\,(AD,(SBC)) = \mathrm{d}\,(A,(SBC))$.

Kẻ $AK \perp SB$. Khi đó

$$\mathrm{d}\,(A,(SBC)) = AK = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$



Chọn đáp án (A) □

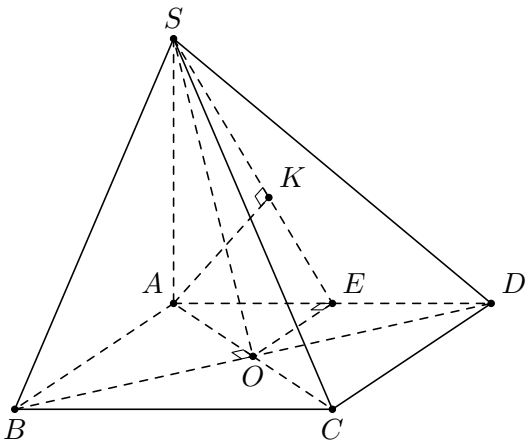
Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $\widehat{SBD} = 60^\circ$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SO.

A. $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

✍Lời giải.

Ta có $\triangle SAB = \triangle SAD$ (c.g.c), suy ra $SB = SD$.
Lại có $\widehat{SBD} = 60^\circ$, suy ra ΔSBD đều cạnh $SB = SD = BD = a\sqrt{2}$.
Tam giác vuông SAB, có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a$.
Gọi E là trung điểm AD, suy ra $OE \parallel AB$ và $AE \perp OE$.
Do đó $\mathrm{d}(AB, SO) = \mathrm{d}(AB, (SOE)) = \mathrm{d}(A, (SOE))$.
Kẻ $AK \perp SE$. Khi đó

$$\mathrm{d}(A, (SOE)) = AK = \frac{SA \cdot AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$



Chọn đáp án (D) □

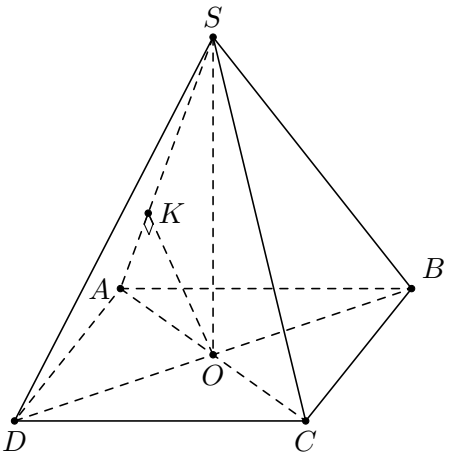
Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng 2. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = \sqrt{3}$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BD.

A. $d = 2$. **B.** $d = \dfrac{\sqrt{30}}{5}$. **C.** $d = 2\sqrt{2}$. **D.** $d = \sqrt{2}$.

✍Lời giải.

Ta có $BD \perp (SAC)$.
Kẻ $OK \perp SA$. Khi đó

$$\mathrm{d}(SA, BD) = \frac{SO \cdot OA}{\sqrt{SO^2 + OA^2}} = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$



Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của cạnh BC và CD. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng HK và SD.

A. $d = \dfrac{a}{3}$. **B.** $d = \dfrac{2a}{3}$. **C.** $d = 2a$. **D.** $d = \dfrac{a}{2}$.

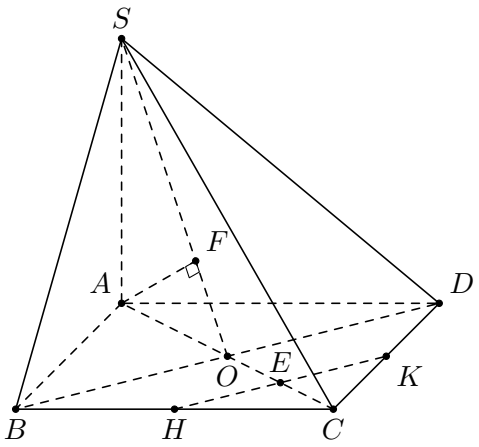
✍Lời giải.

Gọi $E = HK \cap AC$. Do $HK \parallel BD$ nên $\mathrm{d}(HK, SD) = \mathrm{d}(HK, (SBD)) = \mathrm{d}(E, (SBD)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(A, (SBD))$.

Kẻ $AF \perp SO$. Khi đó

$$\mathrm{d}(A, (SBD)) = AF = \frac{SA \cdot AO}{\sqrt{SA^2 + AO^2}} = \frac{2a}{3}.$$

Vậy $\mathrm{d}(HK, SD) = \dfrac{1}{2}AF = \dfrac{a}{3}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh có độ dài bằng $2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của BC. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng BB' và $A'H$.

A. $d = 2a$. **B.** $d = a$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

✍Lời giải.

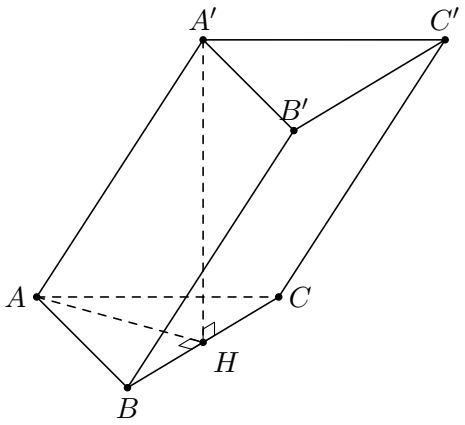
Do $BB' \parallel AA'$ nên

$$\mathrm{d}\left(BB', A'H\right) = \mathrm{d}\left(BB', \left(AA'H\right)\right) = \mathrm{d}\left(B, \left(AA'H\right)\right).$$

Ta có $\begin{cases} BH \perp AH \\ BH \perp A'H \end{cases} \Rightarrow BH \perp (AA'H)$ nên

$$\mathrm{d}\left(B, \left(AA'H\right)\right) = BH = \frac{BC}{2} = a.$$

Vậy $\mathrm{d}(BB', A'H) = a$.

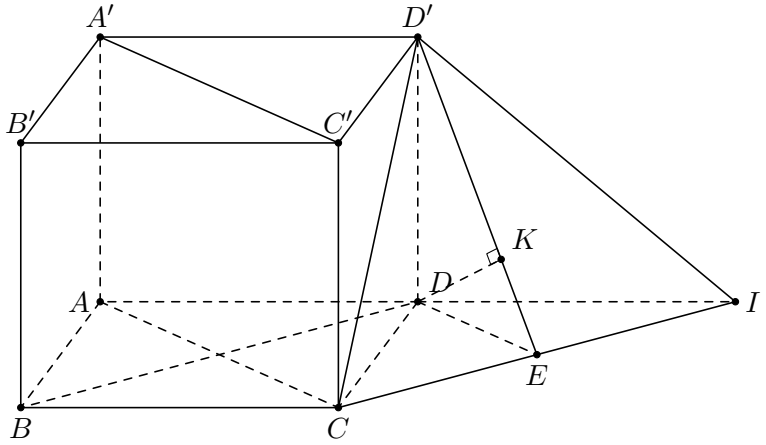


Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $AA' = 2a$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng BD và CD'.

A. $d = a\sqrt{2}$. **B.** $d = 2a$. **C.** $d = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

✍Lời giải.



Gọi I là điểm đối xứng của A qua D, suy ra $BCID$ là hình bình hành nên $BD \parallel CI$.
Do đó $\mathrm{d}(BD, CD') = \mathrm{d}(BD, (CD'I)) = \mathrm{d}(D, (CD'I))$.
Kẻ $DE \perp CI$ tại E, kẻ $DK \perp D'E$. Khi đó $\mathrm{d}(D, (CD'I)) = DK$.
Xét tam giác IAC, ta có $DE \parallel AC$ (do cùng vuông góc với CI) và có D là trung điểm của AI nên suy ra

DE là đường trung bình của tam giác. Suy ra $DE = \dfrac{1}{2}AC = a$.

Tam giác vuông $D'DE$, có $DK = \dfrac{D'D \cdot DE}{\sqrt{D'D^2 + DE^2}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng $4a$. Cạnh bên $SA = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của H của đoạn thẳng AO. Tính khoảng cách d giữa các đường thẳng SD và AB.

A. $d = \dfrac{4a\sqrt{22}}{11}$. **B.** $d = \dfrac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$. **C.** $d = 2a$. **D.** $d = 4a$.

✍Lời giải.

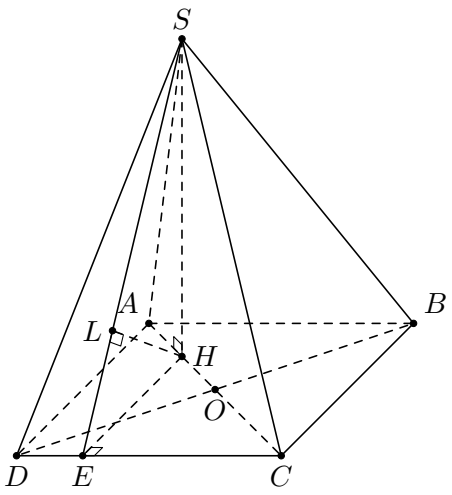
Do $AB \parallel CD$ nên $\mathrm{d}(SD, AB) = \mathrm{d}(AB, (SCD)) = \mathrm{d}(A, (SCD)) = \dfrac{4}{3}\mathrm{d}(H, (SCD))$.

Kẻ $HE \perp CD$, kẻ $HL \perp SE$, ta tính được:

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = a\sqrt{2}, HE = \frac{3}{4}AD = 3a.$$

Khi đó $\mathrm{d}(H, (SCD)) = HL = \dfrac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$.

Vậy $\mathrm{d}(SD, AB) = \dfrac{4}{3}HL = \dfrac{4a\sqrt{22}}{11}$.



Chọn đáp án A □

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 10. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SC = 10\sqrt{5}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD. Tính khoảng cách d giữa BD và MN.

A. $d = 3\sqrt{5}$. **B.** $d = \sqrt{5}$. **C.** $d = 5$. **D.** $d = 10$.

✍Lời giải.

Gọi P là trung điểm BC và $E = NP \cap AC$, suy ra $PN \parallel BD$ nên $BD \parallel (MNP)$. Do đó $\mathrm{d}(BD, MN) = \mathrm{d}(BD, (MNP)) = \mathrm{d}(O, (MNP)) = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}(A, (MNP))$.

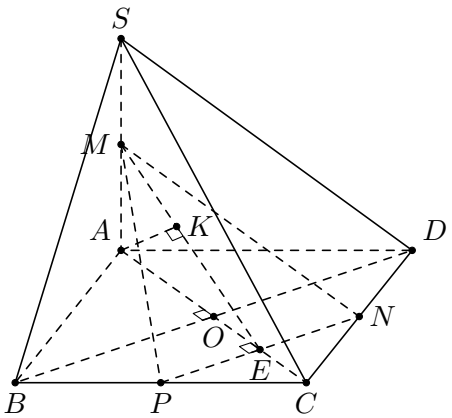
Kẻ $AK \perp ME$. Khi đó $\mathrm{d}(A, (MNP)) = AK$.

Tính được $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = 10\sqrt{3}$

$\Rightarrow MA = 5\sqrt{3}$; $AE = \dfrac{3}{4}AC = \dfrac{15\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác vuông MAE, có $AK = \dfrac{MA \cdot AE}{\sqrt{MA^2 + AE^2}} = 3\sqrt{5}$.

Vậy $\mathrm{d}(BD, MN) = \dfrac{1}{3}AK = \sqrt{5}$.



Chọn đáp án B □

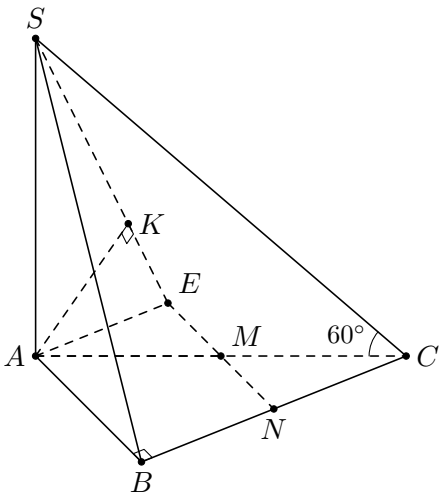
Câu 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 3a$, $BC = 4a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc tạo bởi giữa SC và đáy bằng $60°$. Gọi M là trung điểm của AC, tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SM.

A. $d = a\sqrt{3}$. **B.** $d = 5a\sqrt{3}$. **C.** $d = \dfrac{5a}{2}$. **D.** $d = \dfrac{10a\sqrt{3}}{\sqrt{79}}$.

✍Lời giải.

Xác định $60^\circ = (SC,(ABC)) = (SC,AC) = \widehat{SCA}$
và $SA = AC.\tan\widehat{SCA} = 5a\sqrt{3}$.
Gọi N là trung điểm BC, suy ra $MN \parallel AB$.
Lấy điểm E đối xứng với N qua M, suy ra $ABNE$ là hình chữ nhật.
Do đó $\mathrm{d}\,(AB,SM) = \mathrm{d}\,(AB,(SME)) = \mathrm{d}\,(A,(SME))$.
Kẻ $AK \perp SE$. Khi đó

$$\mathrm{d}\,(A,(SME)) = AK = \frac{SA.AE}{\sqrt{SA^2+AE^2}} = \frac{10a\sqrt{3}}{\sqrt{79}}.$$

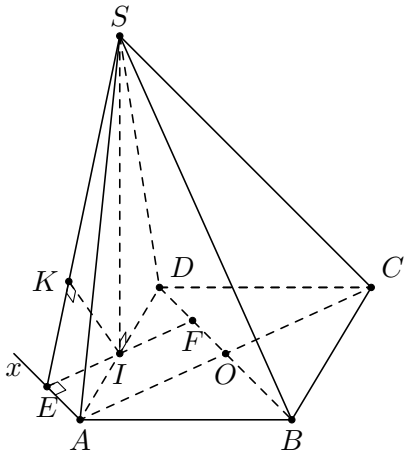


Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BD.

A. $d = \dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $d = a$.

✍Lời giải.
Gọi I là trung điểm của $AD \Rightarrow SI \perp AD \Rightarrow SI \perp (ABCD)$.
Kẻ $Ax \parallel BD$. Ta có $\mathrm{d}\,(BD,SA) = \mathrm{d}\,(BD,(SAx)) = \mathrm{d}\,(D,(SAx)) = 2\mathrm{d}\,(I,(SAx))$.
Kẻ $IE \perp Ax$, kẻ $IK \perp SE$. Khi đó $d\,(I,(SAx)) = IK$. Gọi F là hình chiếu của I trên BD, ta có $IE = IF = \dfrac{AO}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.
Tam giác vuông SIE, có $IK = \dfrac{SI\cdot IE}{\sqrt{SI^2+IE^2}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{14}$.
Vậy $\mathrm{d}\,(BD,SA) = 2IK = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.



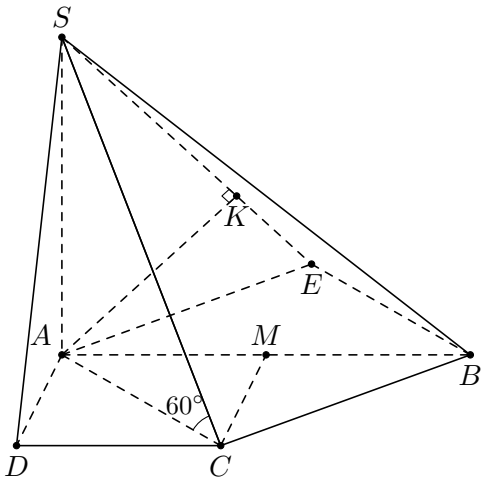
Chọn đáp án (C) □

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $AB = 2a$, $AD = DC = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa SC và mặt đáy bằng 60°. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AC và SB.

A. $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $d = 2a$. **C.** $d = a\sqrt{2}$. **D.** $d = \dfrac{2a\sqrt{15}}{5}$.

✍Lời giải.
Xác định $60^\circ = (SC,(ABCD)) = (SC,AC) = \widehat{SCA}$ và $SA = AC\tan\widehat{SCA} = a\sqrt{6}$.
Gọi M là trung điểm AB, suy ra $ADCM$ là hình vuông nên $CM = AD = a$.
Xét tam giác ACB, ta có trung tuyến $CM = a = \dfrac{1}{2}AB$ nên tam giác ACB vuông tại C.
Lấy điểm E sao cho $ACBE$ là hình chữ nhật,
suy ra $AC \parallel BE$.
Do đó $\mathrm{d}\,(AC,SB) = \mathrm{d}\,(AC,(SBE)) = \mathrm{d}\,(A,(SBE))$.
Kẻ $AK \perp SE$. Khi đó

$$\mathrm{d}\,(A,(SBE)) = AK = \frac{SA\cdot AE}{\sqrt{SA^2+AE^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$



Chọn đáp án (A) □

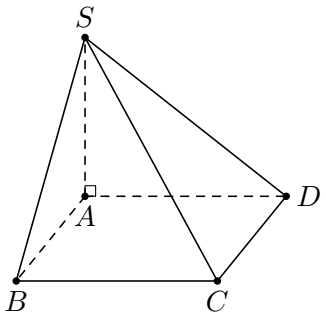
Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{3}$, $BC = a\sqrt{2}$. Cạnh bên $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa SB và DC bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{2a}{3}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Vì $DC \parallel AB$ nên ta có

$$\mathrm{d}(DC, SB) = \mathrm{d}(DC, (SAB)) = \mathrm{d}(D, (SAB)) = AD = a\sqrt{2}.$$



Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $3a$. Khoảng cách từ A đến (SCD) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{14}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{4}$. **C.** $a\sqrt{14}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi $I = AC \cap BD$.

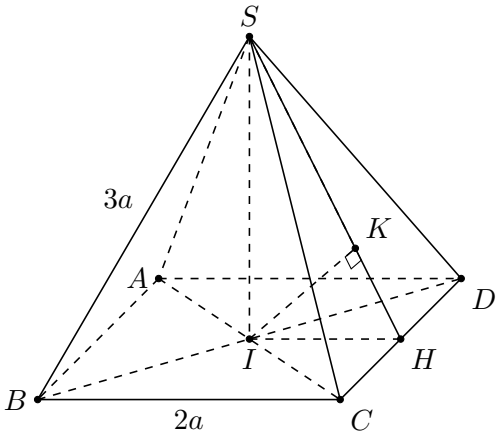
Áp dụng công thức tỉ số khoảng cách, ta có

$$\frac{\mathrm{d}(A, (SCD))}{\mathrm{d}(I, (SCD))} = \frac{AC}{IC} = 2.$$

Kẻ $IH \perp CD$, $(H \in CD)$ và $IK \perp SH$, $(K \in SH)$.

Ta có $\begin{cases} CD \perp IH \\ CD \perp SI,\ (SI \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow CD \perp IK.$

Do đó $IK \perp (SCD)$ hay $\mathrm{d}(I, (SCD)) = IK$.



Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$ nên $BI = BC \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$.

Xét $\triangle SIB$ vuông tại I, ta có

$$SI^2 = SB^2 - BI^2 = 9a^2 - 2a^2 = 7a^2.$$

Tam giác SIH vuông tại I, IK là đường cao nên

$$\frac{1}{IK^2} = \frac{1}{IH^2} + \frac{1}{SI^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{7a^2} = \frac{8}{7a^2},$$

suy ra $IK = \dfrac{a\sqrt{14}}{4}$. Do đó, $\mathrm{d}(A, (SCD)) = 2IK = \dfrac{a\sqrt{14}}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa SC và BD bằng

A. $\dfrac{2a}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{4a}{3}$. **D.** $\dfrac{3a}{2}$.

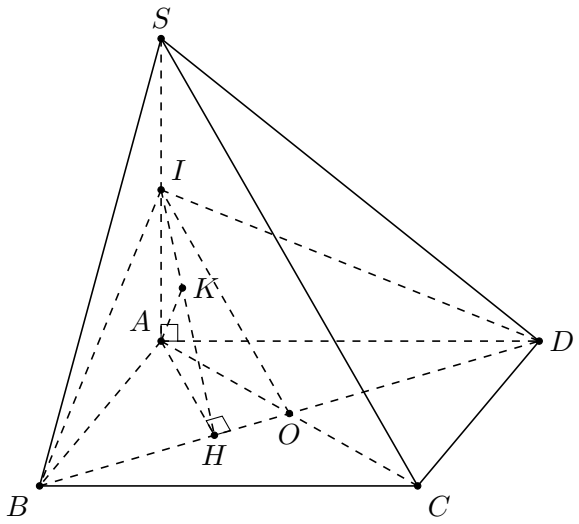
✍Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD$. I là trung điểm của SA.
OI là đường trung bình của $\triangle SAC$ nên $OI \parallel SC$, suy ra $SC \parallel (IBD)$.
Do đó

$$\mathrm{d}(SC, BD) = \mathrm{d}(SC, (IBD)) = \mathrm{d}(C, (IBD)).$$

Kết hợp với $OA = OC$, ta suy ra

$$\mathrm{d}(C, (IBD)) = \mathrm{d}(A, (IBD)).$$



Trong $(ABCD)$, kẻ $AH \perp BD\,(H \in BD)$. Mà $BD \perp AI$ nên $BD \perp (AHI)$.
Trong (AHI) kẻ $AK \perp HI\,(K \in HI)$ thì $\mathrm{d}(A, (IBD)) = AK$.
Xét $\triangle ABD$ vuông tại A, AH là đường cao, ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{5}{4a^2}.$$

Xét $\triangle AHI$ vuông tại A, AK là đường cao, ta có

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{5}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow AK = \frac{2a}{3}.$$

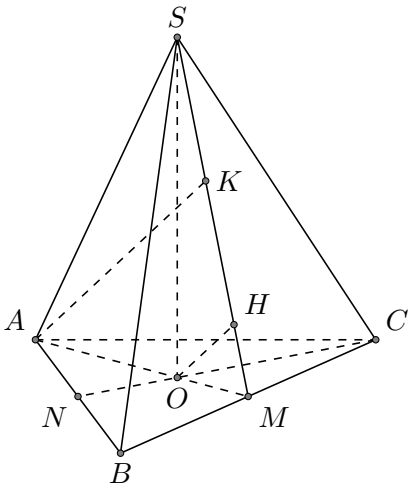
Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Gọi O là tâm của đáy ABC, d_1 là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) và d_2 là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC). Tính $d = d_1 + d_2$.

A. $d = \dfrac{2a\sqrt{22}}{11}$. **B.** $d = \dfrac{2a\sqrt{22}}{33}$. **C.** $d = \dfrac{8a\sqrt{22}}{33}$. **D.** $d = \dfrac{8a\sqrt{22}}{11}$.

✍Lời giải.

Gọi M là trung điểm BC.
Ta có $\begin{cases} BC \perp SO \\ BC \perp AM \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow (SAM) \perp (SBC)$.
Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của O và A lên SM, suy ra $d_1 = AK$ và $d_2 = OH$.
Có $\dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{AK}{OH} = \dfrac{AM}{OM} = 3 \Rightarrow d_1 = 3d_2 \Rightarrow d = 4d_2 = 4OH$.
Ta có $SO^2 = SA^2 - AO^2 = 3a^2 - \dfrac{a^2}{3} = \dfrac{8a^2}{3}$.
Xét tam giác SOM, có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OM^2} = \dfrac{3}{8a^2} + \dfrac{12}{a^2} = \dfrac{99}{8a^2}$.
Vậy $OH = \dfrac{2a\sqrt{22}}{33}$, suy ra $d = 4OH = \dfrac{8a\sqrt{22}}{33}$.



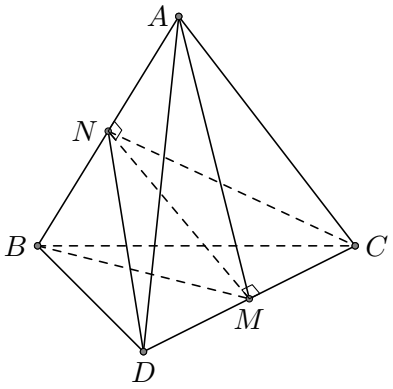
Chọn đáp án (C) □

Câu 35. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** a.

✍Lời giải.

Ta có ND, NC lần lượt là đường cao của các tam giác đều ABD và ABC cạnh a nên $ND = NC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tam giác NCD cân ở N và M là trung điểm CD nên $MN \perp CD$.
Chứng minh tương tự ta có $MN \perp AB$. Suy ra MN là đoạn vuông góc chung của AB và CD nên $\mathrm{d}(AB, CD) = MN$.
Dùng công thức Hê-rông, ta có $S_{NCD} = \dfrac{\sqrt{2}a^2}{4}$.
Suy ra $MN = \dfrac{2S_{NCD}}{CD} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án (A) □

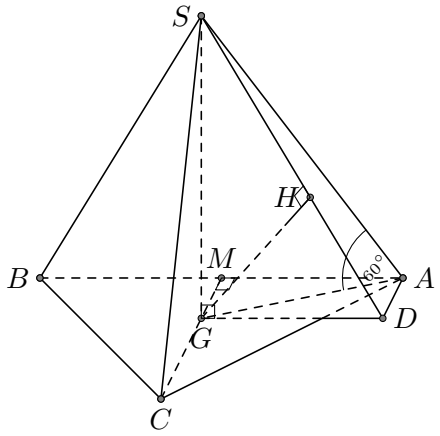
Câu 36. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và góc giữa đường thẳng SA với mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, khoảng cách giữa hai đường thẳng GC và SA bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{10}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{5}$. **D.** $\dfrac{a}{5}$.

✍Lời giải.
Gọi M là trung điểm AB và vẽ hình bình hành $AMGD$.
Ta có $GC \parallel SA$ nên suy ra $GC \parallel (SAD)$. Từ đó ta có

$$\mathrm{d}(GC, SA) = \mathrm{d}(GC, (SAD)) = \mathrm{d}(G, (SAD)).$$

Ta có ABC là tam giác đều nên $CM \perp AB$, suy ra $AMGD$ là hình chữ nhật. Mặt khác ta có $S.ABC$ là hình chóp đều và G là tâm của ABC nên $SG \perp (ABC)$.



— $\begin{cases} AD \perp GD \\ AD \perp SG \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SGD)$.

— Kẻ $GH \perp SD$ tại H.
Ta có $\begin{cases} GH \perp SD \\ GH \perp AD \text{ do } AD \perp (SGD) \end{cases} \Rightarrow GH \perp (SAD) \Leftrightarrow d(G, (SAD)) = GH$.

— Xét tam giác SGD ta có $GH = \dfrac{SG \cdot GD}{\sqrt{SG^2 + GD^2}}$ (1).

— $AG = CG = \dfrac{2}{3}CM = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

— $SG = AG \cdot \tan \widehat{SAG} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \tan 60° = a$.

— $GD = AM = \dfrac{a}{2}$.

— Thay SG, GD tìm được ở trên vào (1) ta có $GH = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = a$, $AC = 2a$. Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ACD') là

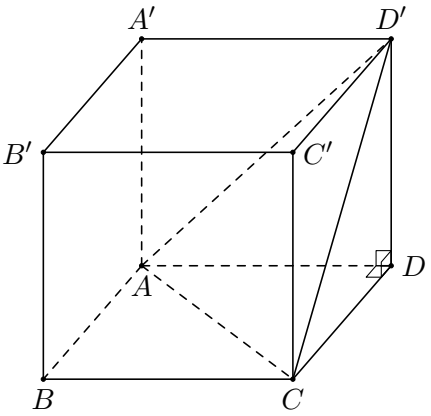
A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

✍Lời giải.

Ta có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.
Do đó $DA = a\sqrt{3}$; $DC = DD' = a$.
Gọi $h = \mathrm{d}(D, (ACD'))$, do tứ diện $DACD'$ vuông tại D nên ta có

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DC'^2} + \frac{1}{DD'^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2}$$

suy ra $h = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy bằng $45°$. Hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt đáy là điểm H thuộc đoạn AB sao cho $HA = 2HB$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{210}}{45}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{210}}{20}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{210}}{15}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{210}}{30}$.

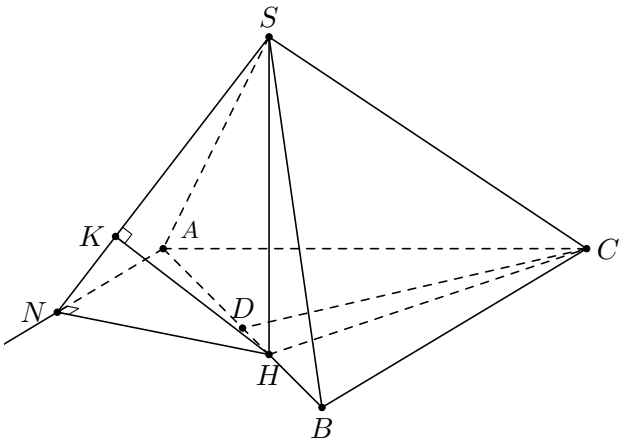
✍Lời giải.

Ta có $\widehat{SCH}$ là góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) $\Rightarrow$
$\widehat{SCH} = 45°$.
Gọi D là trung điểm cạnh AB. Ta có:

$$HD = \frac{a}{6}, \qquad CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$HC = \sqrt{HD^2 + CD^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}.$$

$$SH = HC \cdot \tan 45° = \frac{a\sqrt{7}}{3}.$$



Kẻ Ax song song với BC, gọi N, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên Ax và SN. Ta có BC song song với mặt phẳng (SAN) và $BA = \dfrac{3}{2}HA$. Nên

$$\mathrm{d}(SA, BC) = \mathrm{d}(B, (SAN)) = \frac{3}{2}\mathrm{d}(H, (SAN)) = \frac{3}{2}HK.$$

Mà $AH = \dfrac{2a}{3}$; $HN = AH \sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$$HK = \frac{SH \cdot HN}{\sqrt{SH^2 + HN^2}} = \frac{a\sqrt{210}}{30}.$$

Vậy $\mathrm{d}(SA, BC) = \dfrac{3}{2}HK = \dfrac{a\sqrt{210}}{20}$.

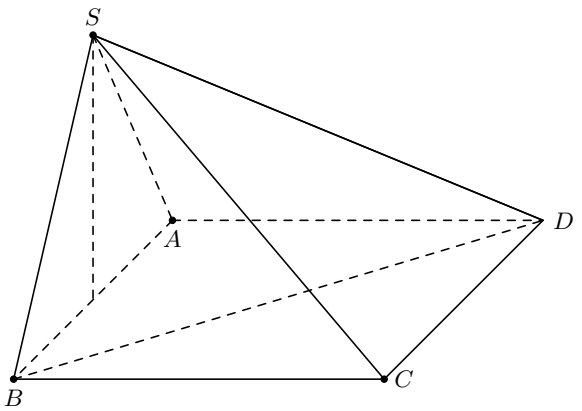
Chọn đáp án (B) □

Câu 39.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, góc $\widehat{BAD} = 60°$. Biết tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách d từ điểm C đến mặt phẳng (SBD).

A. $\mathrm{d} = \dfrac{2a\sqrt{15}}{15}$. **B.** $\mathrm{d} = \dfrac{2a\sqrt{15}}{5}$.

C. $\mathrm{d} = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\mathrm{d} = \dfrac{a\sqrt{15}}{15}$.



✍Lời giải.

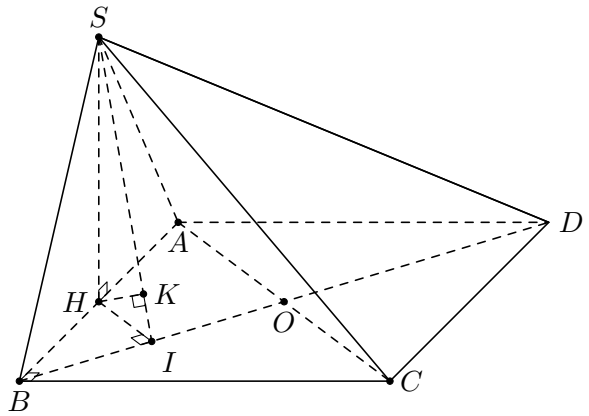
Gọi H là trung điểm AB. Kẻ IH vuông góc BD tại I. Kẻ HK vuông góc SI tại K.

Ta có

$$\begin{cases} IH \perp BD \\ SH \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SHI) \Rightarrow HK \perp BD$$

mà $HK \perp SI$ suy ra $HK \perp (SBD)$.

Ta có $IH \parallel CO$ và $IH = \dfrac{CO}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Khi đó,



$$\mathrm{d}(C,(SBD)) = 2\mathrm{d}(H,(SBD)) = 2HK.$$

Ta có $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{IH^2} = \dfrac{1}{\left(\frac{2a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{5}{3a^2} \Rightarrow HK^2 = \dfrac{3a^2}{5} \Rightarrow KH = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Vậy $\mathrm{d}(C,(SBD)) = \dfrac{2a\sqrt{15}}{5}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{3}, BC = a\sqrt{2}$. Cạnh bên $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa SB và DC bằng

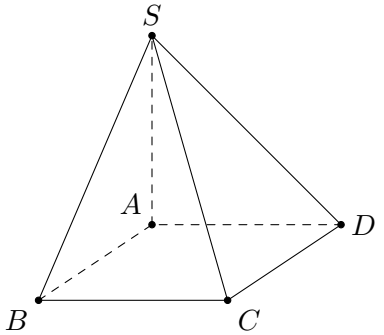
A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{2a}{3}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Vì $DC \parallel AB$ nên khoảng cách giữa SB và DC bằng khoảng cách giữa mặt phẳng (SAB) và DC.

Do đó: $\mathrm{d}(DC,SB) = \mathrm{d}(DC,(SAB))$

$= \mathrm{d}(D,(SAB)) = AD = a\sqrt{2}$.



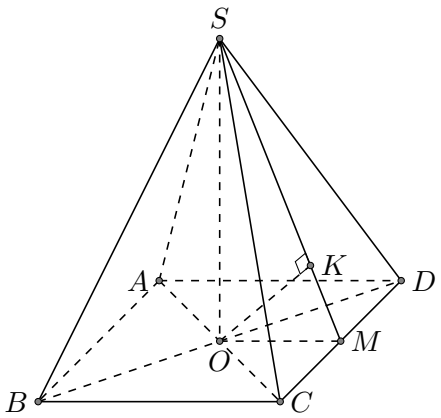
Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Cho hình chóp đều $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh là $2a$, cạnh bên bằng $3a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{14}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{4}$. **C.** $a\sqrt{14}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi tâm của đáy là O, M là trung điểm của CD.
Trong (SOM), kẻ OK vuông góc với SM tại K.
Khi đó ta có $\mathrm{d}(A,(SCD)) = 2\mathrm{d}(O,(SCD)) = 2OK$.
$SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{9a^2 - 2a^2} = \sqrt{7a^2} = a\sqrt{7}$.
$\dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{OS^2} + \dfrac{1}{OM^2} = \dfrac{1}{7a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{8}{7a^2}$.
Suy ra $\mathrm{d}(A,(SCD)) = 2OK = \dfrac{a\sqrt{14}}{2}$.



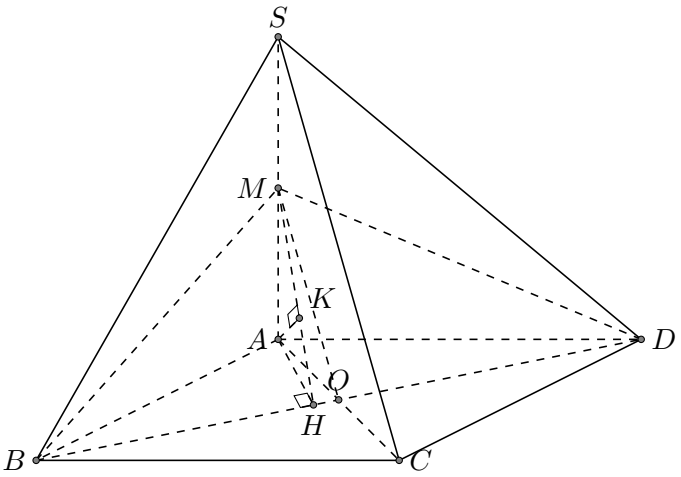
Chọn đáp án (D) □

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa SC và BD bằng

A. $\dfrac{2a}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{4a}{3}$. **D.** $\dfrac{3a}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi O là tâm đáy, M là trung điểm của SA. Khi đó $SC \parallel (BMD)$ và
$\mathrm{d}(SC,BD) = \mathrm{d}(SC,(BMD))$
$= \mathrm{d}(S,(BMD)) = \mathrm{d}(A,(BMD))$.
Trong $(ABCD)$, kẻ $AH \perp BD = H$.
Trong (MAH), kẻ $AK \perp MH = K$.
Khi đó $\mathrm{d}(A,(BMD)) = AK$.
Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{5}{4a^2}$.
$\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AH^2} + \dfrac{1}{AM^2} \Rightarrow AK = \dfrac{2a}{3}$.



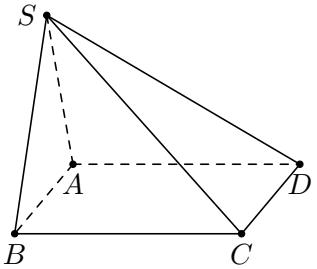
Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $SA = SB$ và $(SAB) \perp (ABCD)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SBA}$.
B. $(SAB) \perp (SAD)$.
C. Khoảng cách giữa BC và SA là AB.
D. Góc giữa BD và (SAD) bằng $45°$.

✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases}(SAB) \perp (ABCD)\\ BC \perp BA\end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.
Từ B kẻ $BK \perp SA \Rightarrow \mathrm{d}(BC,SA) = BK$.
Ta có $\triangle SAB$ cân tại S, do vậy $\mathrm{d}(BC,SA) = BK \neq AB$.



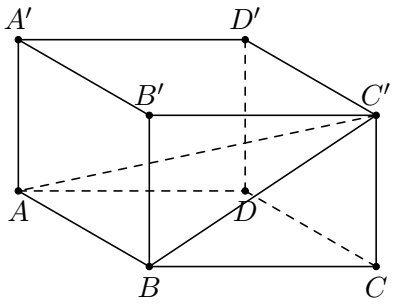
Chọn đáp án (C) □

Câu 44. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (ABC') có số đo bằng $60°$. Khoảng cách $\mathrm{d}(A'D',CD)$ bằng

A. $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **B.** $2a\sqrt{3}$. **C.** $3a$. **D.** $a\sqrt{3}$.

✍Lời giải.

Ta có góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và (ABC') là $\widehat{C'BC} = 60°$.
Ta được $CC' = a\sqrt{3}$.
Ta có $\mathrm{d}(A'D', DC) = DD' = CC' = a\sqrt{3}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 45. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\dfrac{a}{3}$.

B. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(CDD'C')$ bằng a.

C. Độ dài AC' bằng $a\sqrt{a3}$.

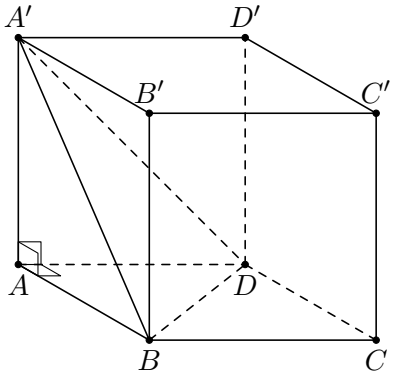
D. Khoảng cách giữa BD và CD' bằng $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

✍Lời giải.

Ta có $A.A'BD$ là tam diện vuông đỉnh A.

Ta có $\dfrac{1}{[\mathrm{d}(A,(A'BD))]^2} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AD^2}$.

$\Rightarrow \mathrm{d}(A,(A'BD)) = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

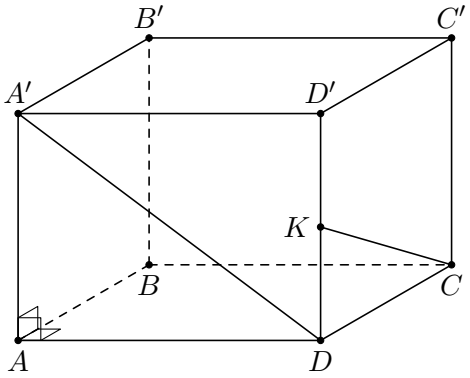


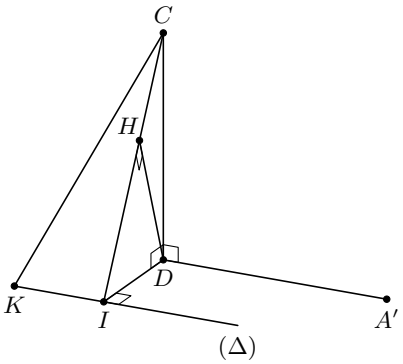
Chọn đáp án (A) □

Câu 46. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi K là trung điểm của DD'. Tính khoảng cách giữa CK và $A'D$.

A. $\dfrac{a}{3}$. **B**. $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **C**. $a\sqrt{a3}$. **D**. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.





Từ K kẻ $(\Delta) \parallel DA'$.
Từ D kẻ $DI \perp (\Delta)$.
Từ D kẻ $DH \perp CI$.
Ta có $DA' \parallel (CK,(\Delta)) \Rightarrow \mathrm{d}(CK, A'D) = \mathrm{d}(A'D,(CK,(\Delta))) = \mathrm{d}(D,(CK,(\Delta)))$.
Ta có $\begin{cases}(\Delta) \perp CD \\ (\Delta) \perp DI\end{cases} \Rightarrow (\Delta) \perp (CDI) \Rightarrow (\Delta) \perp DH \Rightarrow \mathrm{d}\,(D,(CK,(\Delta))) = DH$.
Ta có $\dfrac{1}{DH^2} = \dfrac{1}{CD^2} + \dfrac{1}{DI^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \dfrac{9}{a^2} \Rightarrow \mathrm{d}(CK, A'D) = \dfrac{a}{3}$.

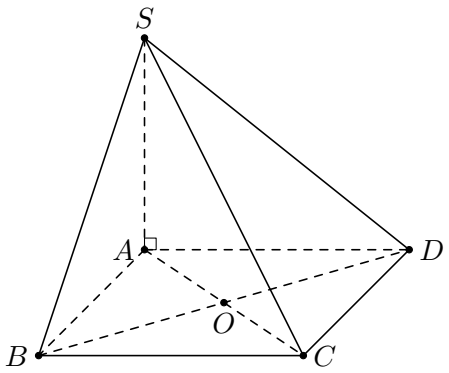
Chọn đáp án A ☐

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng $\dfrac{6a}{7}$. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\dfrac{6a}{7}$. **B.** $\dfrac{12a}{7}$. **C.** $\dfrac{3a}{7}$. **D.** $\dfrac{4a}{7}$.

✍Lời giải.

Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$, ta có AC cắt mặt phẳng (SBD) tại O và O là trung điểm của đoạn thẳng AC nên $\mathrm{d}[C,(SBD)] = \mathrm{d}[A,(SBD)] = \dfrac{6a}{7}$.



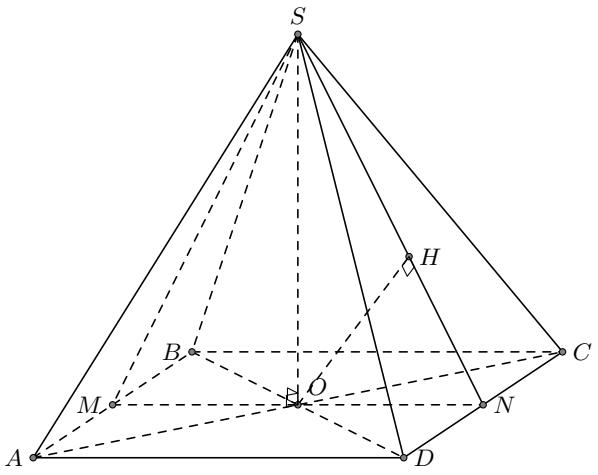
Chọn đáp án A ☐

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = a$. Khoảng cách giữa SC và AB bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{15}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{15}$.

✍Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Ta có $(OSN) \perp (SCD)$ và hai mặt phẳng này cắt nhau theo giao tuyến SN. Từ O kẻ $OH \perp SN$ tại H. Suy ra $OH \perp (SCD)$.
Từ đó ta có $\mathrm{d}(AB,SC) = \mathrm{d}(AB,(SCD)) = \mathrm{d}(M,(SCD)) = 2\mathrm{d}(O,(SCD)) = 2OH$.
Xét tam giác SON có $OH = \dfrac{SO \cdot ON}{SN} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.



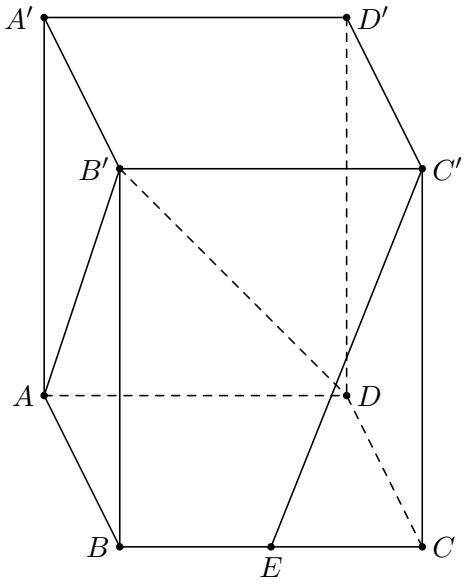
Chọn đáp án A ☐

Câu 49. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, $AB = 6$ cm, $BC = BB' = 2$ cm. Điểm E là trung điểm cạnh BC. Một tứ diện đều $MNPQ$ có hai đỉnh M và N nằm trên đường thẳng $C'E$, hai đỉnh P, Q nằm trên đường thẳng đi qua điểm B' và cắt đường thẳng AD tại F. Khoảng cách DF bằng

A. 1 cm. **B.** 3 cm. **C.** 2 cm. **D.** 6 cm.

✍Lời giải.

Do tứ diện $MNPQ$ đều nên ta có $MN \perp PQ$ hay $EC' \perp B'F$.
Đặt k sao cho $\overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{AD}$.
Ta có $\overrightarrow{B'F} = \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{B'B} + k\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{B'B} + k\overrightarrow{B'C'}$.
Ta lại có $\overrightarrow{EC'} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CC'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B'C'} - \overrightarrow{B'B}$.
Khi đó $\overrightarrow{EC'} \cdot \overrightarrow{B'F} = -B'B^2 + \frac{k}{2}B'C'^2 = -4 + \frac{k}{2} \cdot 4$.
Mà $EC' \perp B'F \Rightarrow \overrightarrow{EC'} \cdot \overrightarrow{B'F} = 0$.
Nên $-4 + \frac{k}{2} \cdot 4 = 0 \Rightarrow k = 2$. Vậy $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AD}$.
Vậy F là điểm trên AD sao cho D là trung điểm của AF. Do đó $DF = BC = 2$ cm.

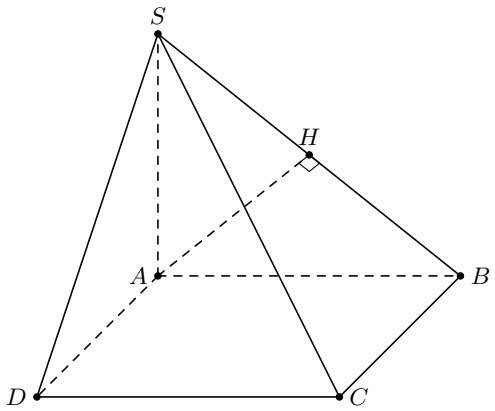


Chọn đáp án (C) □

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA = a, SA \perp (ABCD)$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) là

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** a. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $\frac{a}{2}$.

✍Lời giải.
Kẻ $AH \perp SB$ $(H \in SB)$.
Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$.
Mà $AH \perp SB$ nên $AH \perp (SBC)$ hay $AH = \mathrm{d}(A;(SBC))$.
Vì tam giác SAB vuông cân nên $AH = \frac{1}{2}SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

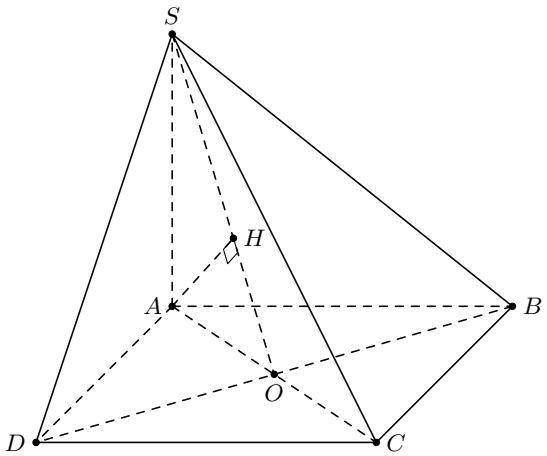


Chọn đáp án (A) □

Câu 51. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA = a, SA \perp (ABCD)$. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) là

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** a. **D.** $\frac{a}{3}$.

✍Lời giải.
Gọi O là tâm hình vuông, vì AC cắt (SBD) tại O nên $\mathrm{d}(C;(SBD)) = \mathrm{d}(A;(SBD))$.
Ta có $\begin{cases} BD \perp AO \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAO) \Rightarrow (SBD) \perp (SAO)$.
Kẻ $AH \perp SO$ $(H \in SO)$. Khi đó $AH \perp (SBD)$ hay $AH = \mathrm{d}(A;(SBD))$.
Ta có $AH = \frac{SA \cdot AO}{\sqrt{SA^2 + AO^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.



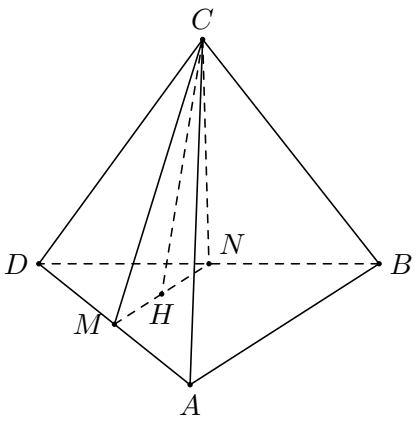
Chọn đáp án (A) □

Câu 52. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi M là trung điểm cạnh AD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CM.

A. $\dfrac{a\sqrt{11}}{2}$. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{22}}{11}$.

✍Lời giải.

Gọi N là trung điểm của BD,
ta có $AB \parallel MN \Rightarrow AB \parallel (CMN)$. Mà $CM \subset (CMN)$,
suy ra $\mathrm{d}(AB, CM) = \mathrm{d}(AB, (CMN)) = \mathrm{d}(A, (CMN)) = \mathrm{d}(D, (CMN))$.



Ta có $CM = CN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, MN = \dfrac{a}{2}$.
Gọi H là trung điểm của MN, ta có $CH \perp MN$, và
$CH = \sqrt{CM^2 - MH^2} = \dfrac{a\sqrt{11}}{4}$.
Suy ra $S_{CMN} = \dfrac{1}{2} CH \cdot MN = \dfrac{a^2\sqrt{11}}{16}$.
Mặt khác $V_{CDMN} = \dfrac{1}{4} V_{ABCD} = \dfrac{1}{4} \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{48}$.
Do đó $\mathrm{d}(D, (CMN)) = \dfrac{3V_{CDMN}}{S_{\triangle CMN}} = \dfrac{a\sqrt{22}}{11}$.

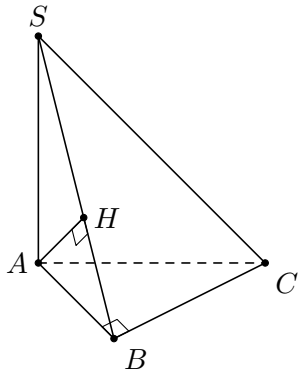
Chọn đáp án (D) □

Câu 53. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{2}a}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}a}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}a}{5}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$.

✍Lời giải.

Kẻ $AH \perp SB$ $(H \in SB)$. Ta có
$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH.$
$\begin{cases} BC \perp AH \\ SB \perp AH \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow \mathrm{d}(A, (SBC)) = AH.$
$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{1}{a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$.



Chọn đáp án (D) □

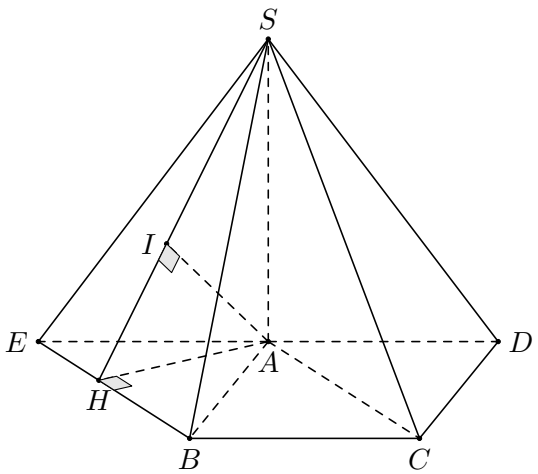
Câu 54. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

A. $\dfrac{a}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}a}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{2a}{3}$.

✍Lời giải.

Dựng hình bình hành $ACBE$, $AH \perp BE$, $AI \perp SH$
$\Rightarrow AC \parallel (SBE)$.
$\Rightarrow \mathrm{d}[AC, SB] = \mathrm{d}[AC, (SBE)] = \mathrm{d}[A, (SBE)] = AI$.
$\dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AE^2} = \dfrac{9}{4a^2}$
$\Rightarrow AI = \dfrac{2a}{3}$.

Vậy khoảng cách giữa AC và SB bằng $\dfrac{2a}{3}$.



Chọn đáp án D □

Câu 55. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy ABC. Biết $SA = 3a$, $AB = a$, $BC = 2a$ và góc $\widehat{ABC}$ bằng $60°$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

A. $3a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{13}}{13}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{13}$.

✍Lời giải.

Kẻ $AI \perp BC$. Xét $\triangle ABI$ vuông tại I, $AI = AB \cdot \sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

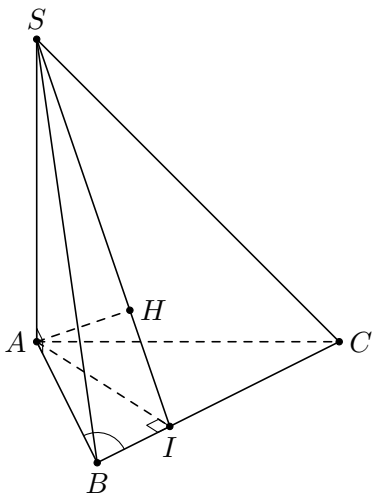
Ta có $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \, (SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI)$.

Trong (SAI) kẻ $AH \perp SI$, ta có $\begin{cases} AH \perp SI \\ AH \perp BC \, (BC \perp (SAI)). \end{cases}$

Suy ra $AH \perp (SBC)$. Do đó $\mathrm{d}(A, (SBC)) = AH$.

Xét $\triangle SAI$ vuông tại A, ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{9a^2} = \frac{13}{9a^2} \Rightarrow AH = \frac{3a\sqrt{13}}{13}.$$



Chọn đáp án C □

Câu 56. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $\widehat{ACB} = 30°$; M là trung điểm của cạnh AC. Góc giữa cạnh bên và mặt đáy của lăng trụ bằng $60°$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BM. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $3a^3\sqrt{3}$. **D.** $a^3\sqrt{3}$.

✍Lời giải.

Ta có

$A'H \perp (ABC) \Rightarrow (AA', (ABC)) = \widehat{HAA'}$.

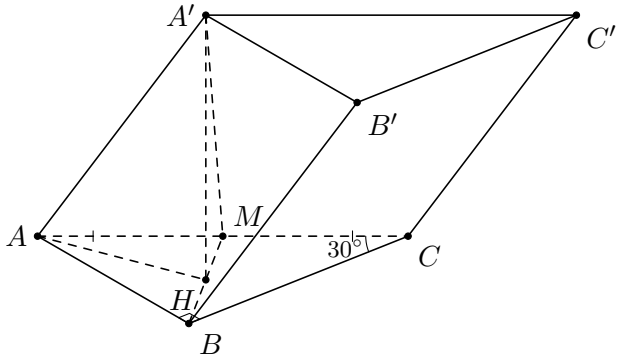
$BC = AB \cot C = a\sqrt{3}$, suy ra $S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vì $\triangle ABC$ vuông tại B và $\widehat{ACB} = 30°$ nên $\triangle AMB$ đều.

Do đó $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $A'H = AH \tan HAA' = \dfrac{a}{2}$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = A'H \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.



Chọn đáp án B □

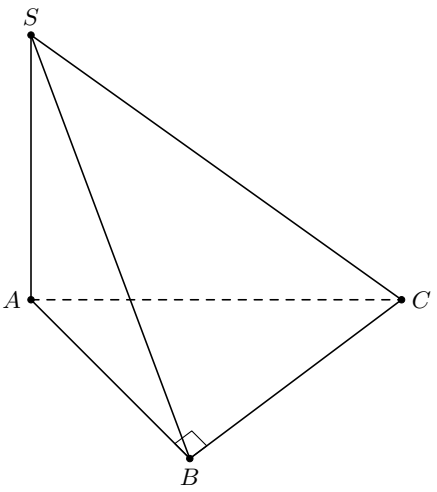
Câu 57. Cho hình chóp $S.ABC$ đáy ABC là tam giác vuông cân với $BA = BC = a$, $SA = a$ và vuông góc với đáy. Khoảng cách từ A tới (SBC) là

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}a$. **B.** $\dfrac{1}{2}a$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

✍Lời giải.

Ta có thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$$\mathrm{V}_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{S}_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} BA \cdot BC \cdot SA = \frac{1}{6} \cdot a \cdot a \cdot a = \frac{1}{6} a^3.$$



Mặt khác $AC = a\sqrt{2}$ nên $SC = a\sqrt{3}$.
Tam giác SBC có $SC = a\sqrt{3}$, $SB = a\sqrt{2}$, $BC = a$ nên tam giác SBC vuông tại B.
Do đó $\mathrm{S}_{SBC} = \frac{1}{2} SB \cdot BC = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.
Vậy

$$d(A,(SBC)) = \frac{3\mathrm{V}_{S.ABC}}{\mathrm{S}_{SBC}} = \frac{3\frac{1}{6}a^3}{\frac{a^2\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

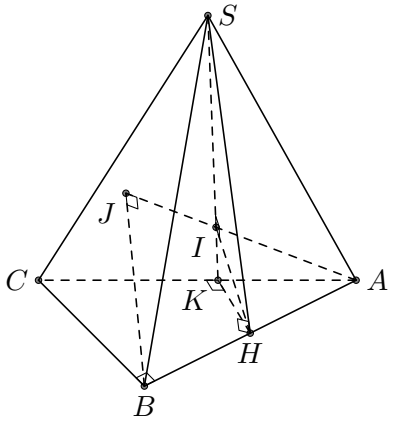
Chọn đáp án (D) □

Câu 58. Cho khối chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính theo a khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC).

A. $\frac{a\sqrt{21}}{14}$. **B.** a. **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AB, do tam giác SAB đều nên $SH \perp AB$.
Mặt khác do giả thiết $(SAB) \perp (ABC)$ suy ra $SH \perp (ABC)$ nên $SH \perp AC$ (1).
Khi đó $SH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
Trong mặt phẳng (ABC) hạ $HK \perp AC (K \in AC)$ (2).
Từ (1), (2) suy ra $AC \perp (SHK)$.
Tương tự trong mặt phẳng (SHK) kẻ $HI \perp SK (I \in SK)$ (3).
Theo chứng minh trên suy ra $HI \perp AC$ (4).



Từ (3), (4) suy ra $HI \perp (SAC)$. Qua B kẻ đường thẳng song song với HI cắt mặt phẳng (SAC) tại J.
Do $BJ \parallel HI$ suy ra $BJ \perp (SAC)$ do đó $\mathrm{d}(B,(SAC)) = BJ$.
Do giả thiết suy ra $\triangle HKA$ vuông cân tại K. Mà $HA = \frac{a}{2}$ suy ra $KH = KA = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.
Xét tam giác vuông SHK ta có

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{SH^2} \Leftrightarrow \frac{1}{HI^2} = \frac{8}{a^2} + \frac{4}{3a^2}$$
$$\Leftrightarrow \quad HI^2 = \frac{3a^2}{28} \Leftrightarrow HI = \frac{a\sqrt{21}}{14}.$$

Do H là trung điểm của AB nên $BJ = 2HI$ suy ra $BJ = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

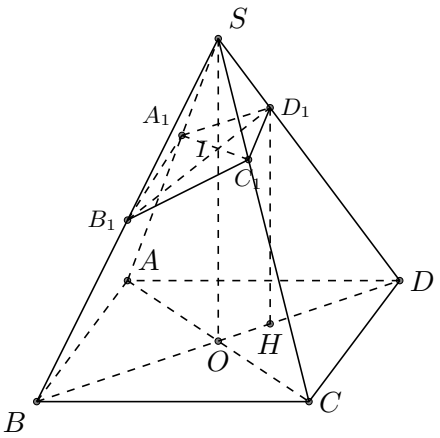
Chọn đáp án (C) □

Câu 59. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có chiều cao bằng 10. Trên các cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A_1, B_1, C_1 sao cho $\frac{SA_1}{SA} = \frac{2}{3}$; $\frac{SB_1}{SB} = \frac{1}{2}$; $\frac{SC_1}{SC} = \frac{1}{3}$. Mặt phẳng đi qua A_1, B_1, C_1 cắt SD tại D_1. Tính khoảng cách từ điểm D_1 đến mặt phẳng đáy của hình chóp $S.ABCD$.

A. 4. **B.** 6. **C.** $\frac{11}{2}$. **D.** 5.

Lời giải.

Gọi O là trọng tâm $ABCD$, trong mặt phẳng (SAC) gọi I là giao điểm của SO và A_1C_1.
Do giả thiết suy ra $SO \perp (ABCD)$. Trong mặt phẳng (SBD) kẻ $D_1H \parallel SO$ suy ra $D_1H \perp (ABCD)$.
Do đó $\mathrm{d}(D_1,(ABCD)) = D_1H$.
Mặt khác ta có $\dfrac{S_{\triangle SA_1C_1}}{S_{\triangle SAC}} = \dfrac{SA_1}{SA}\cdot\dfrac{SC_1}{SC}$ (1).
Tương tự $\dfrac{S_{\triangle SA_1I}}{S_{\triangle SAO}} = \dfrac{SA_1}{SA}\cdot\dfrac{SI}{SO}$ (2).
và $\dfrac{S_{\triangle SC_1I}}{S_{\triangle SCO}} = \dfrac{SC_1}{SC}\cdot\dfrac{SI}{SO}$ (3).



Mà

$$\frac{S_{\triangle SA_1C_1}}{S_{\triangle SAC}} = \frac{1}{2}\left(\frac{S_{\triangle SA_1I}}{S_{\triangle SAO}} + \frac{S_{\triangle SC_1I}}{S_{\triangle SCO}}\right)$$

Từ (1), (2) và (3) và giả thiết ta suy ra

$$\begin{aligned}&\frac{SA_1}{SA}\cdot\frac{SC_1}{SC} = \frac{1}{2}\left(\frac{SA_1}{SA}\cdot\frac{SI}{SO} + \frac{SC_1}{SC}\cdot\frac{SI}{SO}\right)\\ \Leftrightarrow\ &\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{SI}{SO} + \frac{1}{3}\cdot\frac{SI}{SO}\right) \Leftrightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{4}{9}\end{aligned}$$

Chứng minh tương tự ta có

$$\begin{aligned}&\frac{SB_1}{SB}\cdot\frac{SD_1}{SD} = \frac{1}{2}\left(\frac{SB_1}{SB}\cdot\frac{SI}{SO} + \frac{SD_1}{SD}\cdot\frac{SI}{SO}\right)\\ \Leftrightarrow\ &\frac{1}{2}\cdot\frac{SD_1}{SD} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9} + \frac{4}{9}\cdot\frac{SD_1}{SD}\right) \Leftrightarrow \frac{SD_1}{SD} = \frac{2}{5}\end{aligned}$$

Xét tam giác SOD vì $D_1H \parallel SO$ nên theo định lý Ta-lét ta có

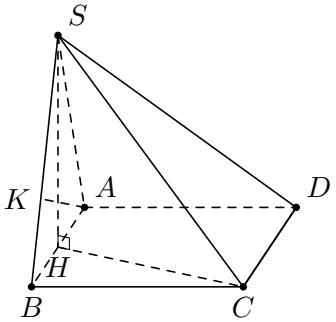
$$\frac{DD_1}{DS} = \frac{DH}{DO} = \frac{HD_1}{SO}$$

Theo chứng minh trên ta có $\dfrac{DD_1}{DS} = \dfrac{3}{5}$ suy ra $\dfrac{HD_1}{SO} = \dfrac{3}{5} \Leftrightarrow HD_1 = \dfrac{3}{5}\cdot 10 = 6$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 60. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, góc giữa SC và đáy bằng $45°$. Tính khoảng cách h từ điểm D đến mặt phẳng (SBC).

A. $h = \dfrac{a\sqrt{6}}{5}$. **B.** $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **C.** $h = \dfrac{a\sqrt{5}}{6}$. **D.** $h = \dfrac{a\sqrt{30}}{6}$.

✍Lời giải.
Ta có $AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC)$.
$\Rightarrow \mathrm{d}(D,(ABC)) = \mathrm{d}(A,(SBC))$ (1).
Gọi H là trung điểm của AB.
Do $\triangle SAB$ cân tại S nên $SH \perp AB$.
Mặt khác $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.
Dựng $AK \perp SB$ $(K \in SB)$.



Ta có $\begin{cases}BC \perp AB \text{ vì } ABCD \text{ là hình vuông}\\ BC \perp SH \text{ vì } SH \perp (ABCD)\end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AK$.
Ta có $\begin{cases}AK \perp SB\\ AK \perp BC\end{cases} \Rightarrow AK \perp (SBC) \Rightarrow \mathrm{d}(A,(ABC)) = AK$ (2).
Từ (1) và (2) $\Rightarrow h = AK$.

$\triangle BHC$ vuông tại $B \Rightarrow HC\sqrt{BH^2+BC^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
Có $SH \perp (ABCD) \Rightarrow$ Góc giữa SC và $(ABCD)$ là $\widehat{SCH} = 45^\circ$.
$\Rightarrow SH = CH \cdot \tan 45^\circ = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
$\triangle SBH$ vuông tại $H \Rightarrow SB = \sqrt{SH^2+BH^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.
Có $SH \cdot AB = AK \cdot SB$ $(= 2S_{\triangle SAB})$.
$\Rightarrow AK = \dfrac{SH \cdot AB}{AK} = \dfrac{a\sqrt{30}}{6}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 61. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, BC, SD. Tính khoảng cách giữa AP và MN.

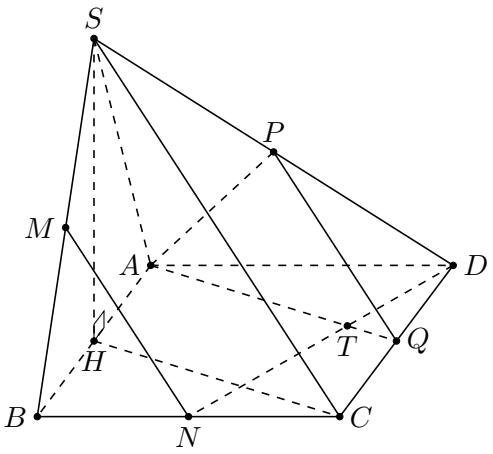
A. $\dfrac{3a}{\sqrt{15}}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{5}}{10}$. **C.** $4a\sqrt{15}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

✍Lời giải.

Gọi Q là trung điểm của CD.
Ta có MN, PQ lần lượt là đường trung bình của tam giác SBC, SCD nên $MN \parallel SC \parallel PQ$.
Suy ra $MN \parallel (APQ)$.
Do đó

$$\mathrm{d}(AP, MN) = \mathrm{d}(MN, (APQ)) = \mathrm{d}(N, (APQ)).$$

Kẻ đường cao SH của tam giác SAB suy ra H là trung điểm của AB và $SH \perp (ABCD)$.



Dễ dàng chứng minh được $ND \perp AQ$ và $ND \perp HC$.
Lại có $ND \perp SH$ nên $ND \perp (SHC)$, suy ra $ND \perp SC$. Do đó $ND \perp PQ$.
Từ đó suy ra $ND \perp (APQ)$.
Vậy $\mathrm{d}(AP, MN) = NT$, với T là giao điểm của ND với AQ.
Trong tam giác CDN vuông tại C ta có $DN = \sqrt{CD^2+NC^2} = \sqrt{a^2+\dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
Trong tam giác ADQ vuông tại D ta có $DT = \sqrt{\dfrac{AD^2 \cdot DQ^2}{AD^2+DQ^2}} = \sqrt{\dfrac{a^2 \cdot \dfrac{a^2}{4}}{a^2+\dfrac{a^2}{4}}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.
Vậy $\mathrm{d}(AP, MN) = NT = ND - DT = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} - \dfrac{a\sqrt{5}}{5} = \dfrac{3a\sqrt{5}}{10}$.

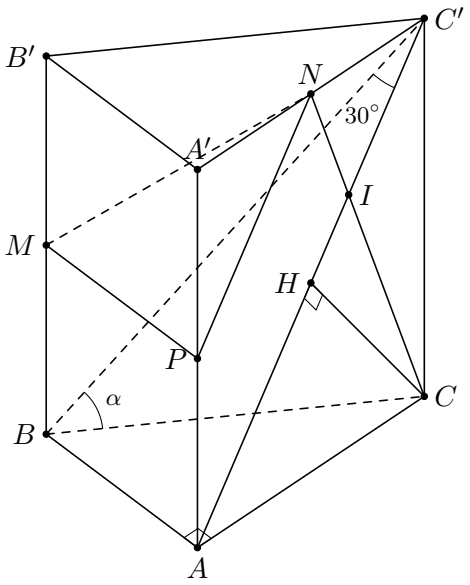
Chọn đáp án (B) □

Câu 62. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AC = a\sqrt{3}$. Biết BC' hợp với mặt phẳng $(AA'C'C)$ một góc 30° và hợp với mặt phẳng đáy góc α sao cho $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh BB' và $A'C'$. Khoảng cách giữa MN và AC' là

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{4}$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.

✍Lời giải.

Do $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $\widehat{C'BC}$ là góc giữa BC' và mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow \widehat{C'BC} = \alpha$; Do $BA \perp (AA'C'C)$ nên $\widehat{AC'B}$ là góc giữa BC' và mặt phẳng $(AA'C'C) \Rightarrow \widehat{AC'B} = 30°$.
Gọi P là trung điểm của AA', $I = NC \cap AC'$.
Có $(MNP) \parallel (ABC') \Rightarrow MN \parallel (ABC') \Rightarrow \mathrm{d}(MN, AC') = \mathrm{d}(MN, (ABC') = \mathrm{d}(N, (ABC')$.
Có $NC \cap (ABC') = I \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}(N, (ABC'))}{\mathrm{d}(C, (ABC'))} = \dfrac{NI}{CI} = \dfrac{NC'}{AC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{d}(N, (ABC')) = \dfrac{1}{2} \cdot \mathrm{d}(C, (ABC'))$.
Có $BA \perp (AA'C'C) \Rightarrow (ABC') \perp (AA'C'C)$. Kẻ $CH \perp AC' \Rightarrow CH \perp (ABC')$. Vậy CH là khoảng cách từ C đến mặt phẳng (ABC').

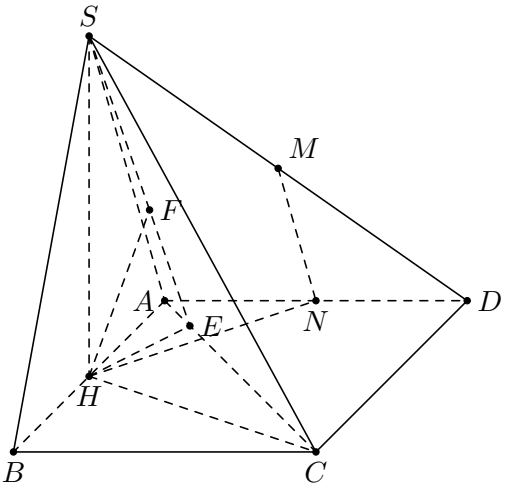


Đặt $CC' = x\,(x > 0)$. Xét $\triangle BCC'$ có $BC' = \dfrac{CC'}{\sin\alpha} = \dfrac{4x}{\sqrt{6}}$;
Xét $\triangle ACC'$ vuông tại C có $AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} = \sqrt{3a^2 + x^2}$.
Xét $\triangle ABC'$ vuông tại A có $\cos 30° = \dfrac{AC'}{BC'} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3a^2 + x^2}}{4x} \Leftrightarrow x^2 = 3a^2$.
Xét $\triangle ACC'$ vuông tại C có CH là đường cao nên $\dfrac{1}{CH^2} = \dfrac{1}{CA^2} + \dfrac{1}{CC'^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{2}{3a^2} \Rightarrow CH = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.
Vậy $\mathrm{d}(N, (ABC')) = \dfrac{1}{2}CH = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 63. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $45°$. Gọi M là trung điểm của SD. Tính theo a khoảng cách d từ điểm M đến mặt phẳng (SAC).

A. $\dfrac{a\sqrt{1315}}{89}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{1315}}{89}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{1513}}{89}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{1513}}{89}$.

✍Lời giải.



Gọi H, M, N là trung điểm các cạnh AB, SD, AD. Từ giả thiết ta có $SH \perp (ABCD)$ và $\widehat{SCH} = 45°$; tam giác SHC vuông cân nên $SH = HC = \dfrac{\sqrt{17}a}{2}$. $MN \parallel SA$ suy ra

$$\mathrm{d}(M, (SAC)) = \mathrm{d}(N, (SAC)) = \mathrm{d}(H, (SAC)). \quad (1)$$

Dựng $HE \perp AC, HF \perp SE$. Dễ thấy $HF \perp (SAC)$ (2). Từ (1) và (2) suy ra

$$\mathrm{d}(M, (SAC)) = HF = \frac{HE \cdot SH}{\sqrt{HE^2 + SH^2}} = \frac{a\sqrt{1513}}{89}.$$

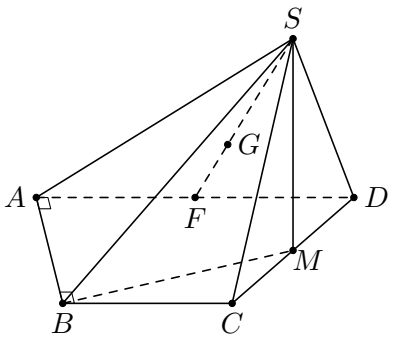
Chọn đáp án (C) □

Câu 64.

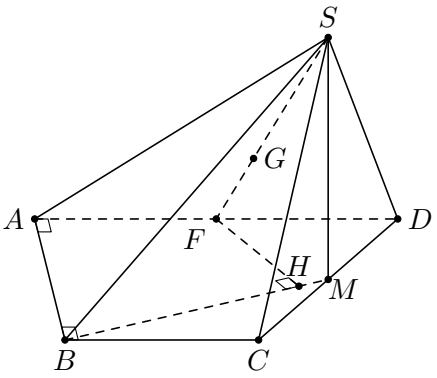
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $CD = 2a\sqrt{2}$, $AD = 2AB = 2BC$. Hình chiếu của S lên mặt đáy là trung điểm M của cạnh CD. Khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác SAD đến mặt phẳng (SBM) bằng

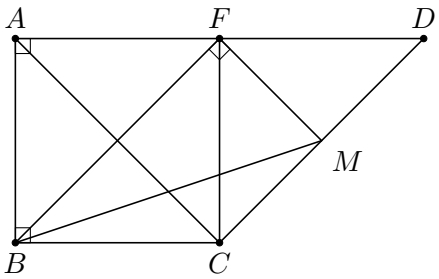
A. $\dfrac{a\sqrt{10}}{15}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{10}}{15}$.

C. $\dfrac{3a\sqrt{10}}{5}$. **D.** $\dfrac{4a\sqrt{10}}{15}$.



✍Lời giải.





Gọi F là trung điểm của AD Vẽ $FH \perp BM$ tại $H \in BM$.
Do $(SBM) \perp (ABCD)$ nên $FH \perp (SBM) \Rightarrow \mathrm{d}\,(F,(SBM)) = FH$.
Do $\begin{cases} FG \cap (SBM) = S \\ GS = \dfrac{2}{3}FS \end{cases}$ nên $\mathrm{d}\,(G,(SBM)) = \dfrac{2}{3}\mathrm{d}\,(F,(SBM)) = \dfrac{2}{3}FH$.
Ta có $\begin{cases} ABCF \text{ là hình vuông} \\ FM \parallel AC \end{cases} \Rightarrow \widehat{BFA} = \widehat{MFD} = 45^\circ \Rightarrow$ tam giác BFM vuông tại F .
Xét tam giác BFM vuông tại F.Ta có
$BF = CD = 2a\sqrt{2} \Rightarrow FM = MD = \dfrac{1}{2}CD = a\sqrt{2}$.
Suy ra $FH = \dfrac{FB \cdot FM}{\sqrt{FB^2 + FM^2}} = \dfrac{2a\sqrt{10}}{5}$.
Vậy $\mathrm{d}\,(G,(SBM)) = \dfrac{2}{3}FH = \dfrac{4a\sqrt{10}}{15}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 65. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, AB, AC đôi một vuông góc, $AB = a$, $AC = a\sqrt{2}$ và diện tích tam giác SBC bằng $\dfrac{a^2\sqrt{33}}{6}$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

A. $\dfrac{a\sqrt{330}}{11}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{330}}{33}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{110}}{33}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{330}}{33}$.

✍Lời giải.

Gọi K, H lần lượt là hình chiếu của A lên BC và SK.

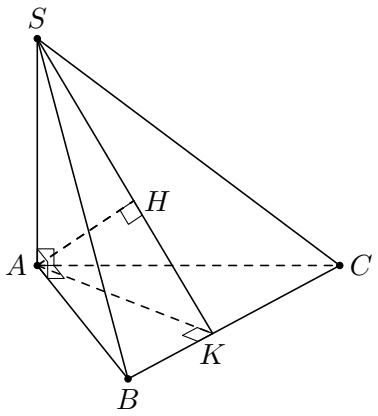
Khi đó $BC \perp (SAK) \Rightarrow BC \perp SK$ và $AH \perp (SBC)$.

Tam giác ABC có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{3}$ và $AK = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Tam giác SBC có $SK = \dfrac{2S_{\triangle SBC}}{BC} = \dfrac{2 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{33}}{6}}{a\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{11}}{3}$.

Tam giác SAK có $SA = \sqrt{SK^2 - AK^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{3}$.

Vậy $\mathrm{d}\,(A, (SBC)) = AH = \dfrac{SA \cdot AK}{SK} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{5}}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\dfrac{a\sqrt{11}}{3}} = \dfrac{a\sqrt{330}}{33}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 66. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với $AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, SB tạo với mp$(ABCD)$ góc $60°$. Khoảng cách giữa AD và SC là

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\dfrac{a}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

✍Lời giải.

$SA \perp (ABCD)$.

AB là hình chiếu vuông góc của SB trên $ABCD$

$\Rightarrow (SB, (ABCD)) = (SB, AB) = \widehat{SBA} = 60°$.

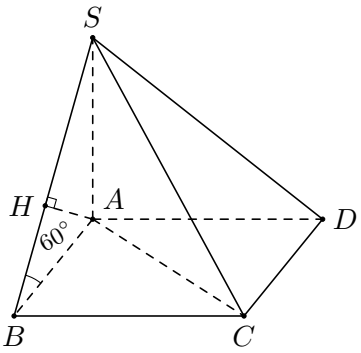
$AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AB = \dfrac{a}{2}$.

Trong tam giác SAB, kẻ $AH \perp SB$ (1)

$BC \perp (SAB)$, (Vì $BC \perp SA$, $BC \perp AB$) $\Rightarrow BC \perp AH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SBC)$.

Vì $AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC)$ nên



$$\mathrm{d}(AD, SC) = \mathrm{d}(AD, (SBC)) = \mathrm{d}(A, (SBC)) = AH = AB \cdot \sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 67. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân, $BA = BC = a$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90°$, biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) là

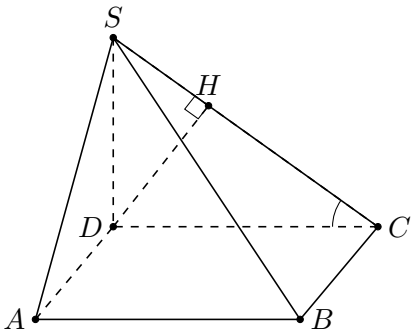
A. $\dfrac{\pi}{6}$. **B.** $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{\pi}{4}$.

✍Lời giải.

Gọi D là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC).

— $\begin{cases} AB \perp SA \\ AB \perp SD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp AD$.

— $\begin{cases} BC \perp SC \\ BC \perp SD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SCD) \Rightarrow BC \perp CD$.



Suy ra $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Kẻ $DH \perp SC$ tại $H \Rightarrow DH \perp BC$, suy ra $DH \perp (SBC)$.

Vì $AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC)$ nên $\mathrm{d}(A, (SBC)) = \mathrm{d}(A, (SBC)) = DH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vì DC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$ nên góc giữa SC và (ABC) bằng góc $\widehat{SCD}$.

Ta có

$$\sin\widehat{SCD} = \frac{DH}{DC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{SCD} = \frac{\pi}{3}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 68. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD).

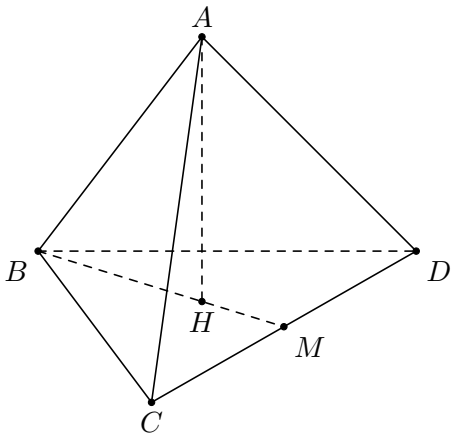
A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{3a}{2}$. **D.** $2a$.

✍Lời giải.

Gọi hình chiếu của A xuống mặt phẳng (BCD) là H và M là trung điểm CD.

Vì tứ diện $ABCD$ đều nên H là trọng tâm tam giác BCD, suy ra $BH = \dfrac{2}{3}BM = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Khi đó $\mathrm{d}(A,(BCD)) = AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.



Chọn đáp án B □

Câu 69. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là nửa lục giác đều $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = a\sqrt{2}$ và có cạnh $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{6}$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) là

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Từ giả thiết ta có $AB = BC = CD = a$. Kẻ $AH \perp SC$.

Ta có $AC \perp CD \Rightarrow AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = a\sqrt{3}$.

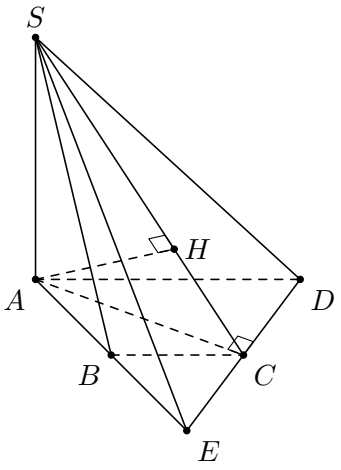
Do $SA \perp CD, AC \perp CD \Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow CD \perp AH$.

Mà $AH \perp SC$ nên $AH \perp (SCD)$.

Suy ra $\mathrm{d}(A,(SCD)) = AH = \dfrac{AS\cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}\cdot a\sqrt{3}}{3a} = a\sqrt{2}$.

Kéo dài AB cắt CD tại E, khi đó B là trung điểm của AE.

Suy ra $\mathrm{d}(B,(SCD)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(A,(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án C □

Câu 70. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $AC = a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC, biết rằng góc giữa đường thẳng SD và mặt đáy bằng $60°$.

A. $\dfrac{a\sqrt{906}}{29}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{609}}{29}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{609}}{19}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{600}}{29}$.

✍Lời giải.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a = 1$.

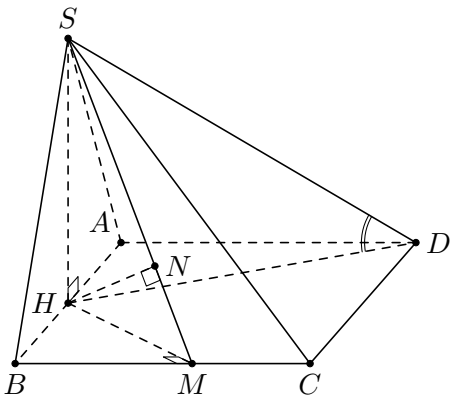
Gọi H là trung điểm của AB. Kẻ $HM \perp BC$ $(M \in BC)$; $HN \perp SM$ $(N \in SM)$.

Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên $SH \perp (ABCD)$.

ÁP dụng định lí hàm số côsin ta có

$$DH^2 = DA^2 + AH^2 - 2DH\cdot AH\cdot\cos 120° = 1 + \frac{1}{4} - 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4} \Rightarrow DH = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Theo bài ra $\widehat{SDH} = 60^\circ$
$\Rightarrow SH = DH \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{\sqrt{7}}{2} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{21}}{2}$.
Lại có $\triangle ABC$ đều nên $\widehat{ABC} = 60^\circ$
$\Rightarrow HM = HB \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.
Ngoài ra $BC \perp SH \Rightarrow BC \perp (SHM) \Rightarrow BC \perp HN \Rightarrow HN \perp (SBC)$;
suy ra $\dfrac{1}{HN^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HM^2} = \dfrac{116}{21} \Rightarrow HN = \dfrac{\sqrt{609}}{58}$.
Chú ý rằng $AD \parallel (SCB)$ nên khoảng cách giữa AD và SC là khoảng cách giữa A và mặt phẳng (SBC), bằng 2 lần khoảng cách từ H (theo định lí Ta-lét), suy ra



$$d = 2HN = \frac{\sqrt{609}}{29}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 71. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm H của AD và $SH = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SCD).

A. $\mathrm{d} = \dfrac{a\sqrt{6}}{8}$. **B.** $\mathrm{d} = a$. **C.** $\mathrm{d} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\mathrm{d} = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

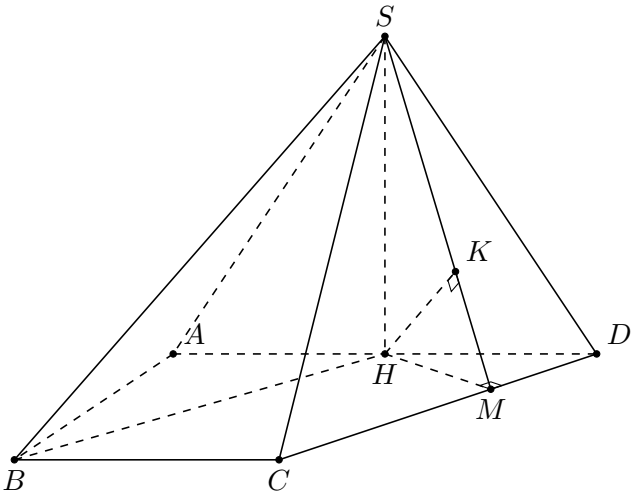
✍Lời giải.

Kẻ $HM \perp CD$ tại M. Kẻ $HK \perp SM$.
Ta có $\begin{cases} SH \perp CD \\ HM \perp CD \end{cases} \Rightarrow HK \perp CD$ mà $HK \perp SM$ nên

$$\mathrm{d}(H, (SCD)) = HK.$$

Ta có H là trung điểm AD suy ra $BH \parallel CD$. Khi đó

$$\mathrm{d}(B, (SCD)) = \mathrm{d}(H, (SCD)) = HK$$



$$HM = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \qquad SH = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

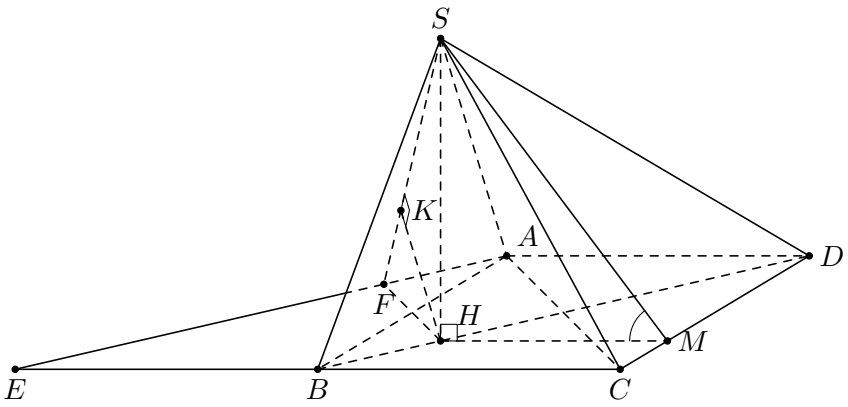
$$\Rightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HM^2} + \frac{1}{HK^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 72. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn BD sao cho $HD = 3HB$. Biết góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng đáy bằng 45°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD là

A. $\dfrac{2a\sqrt{38}}{17}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{13}}{3}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{51}}{13}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{34}}{17}$.

✍Lời giải.



Gọi M là điểm thuộc cạnh CD sao cho $DM = 3MC$. Suy ra $HM = \dfrac{3}{4}BC = \dfrac{3a}{2}$.

Góc giữa (SCD) và mặt $(ABCD)$ là góc $\widehat{SMH} = 45^\circ \Rightarrow SH = \dfrac{3a}{2}$.

Kẻ hình bình hành $ADBE$, suy ra $AE \parallel BD$.
Khi đó $\mathrm{d}(SA, BD) = \mathrm{d}(BD, (SAE)) = \mathrm{d}(H, (SAE))$.
Kẻ $HF \perp AE$ tại $F \Rightarrow AE \perp (SHF) \Rightarrow (SAE) \perp (SHF)$.
Kẻ $HK \perp SF$ tại $K \Rightarrow HK \perp (SAE) \Rightarrow \mathrm{d}(H, (SAE)) = HK$.
Ta có $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HF^2} = \dfrac{4}{9a^2} + \dfrac{1}{2a^2} = \dfrac{17}{18a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{3\sqrt{34}a}{17}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 73. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

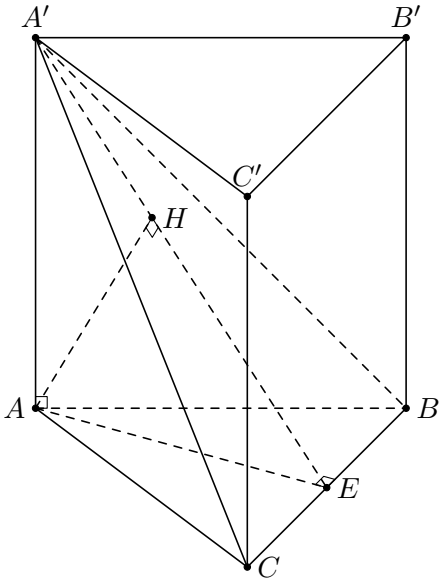
✍Lời giải.

Gọi E là trung điểm của BC.
Do $\triangle ABC$ đều nên $AE \perp BC$ và $AA' \perp BC$
nên $BC \perp (A'AE)$.
Trong tam giác $A'AE$, dựng $AH \perp A'E$ tại H
$\Rightarrow AH \perp (A'BC)$.
Do đó $\mathrm{d}(A, (A'BC)) = AH$.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác $A'AE$ vuông tại A, đường cao AH:
$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{AE^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{7}{3a^2}$.

$\Rightarrow \mathrm{d}(A, (A'BC)) = AH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 74. Cho tứ diện $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC = \sqrt{3}$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) là

A. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

✍Lời giải.

Do $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC)$ (1).

Trong tam giác OBC, dựng $OE \perp BC$ mà $BC \perp OA$ (do (1)) nên $BC \perp (OAE)$.

Trong tam giác OAE, dựng $OH \perp AE$ tại H.

$\Rightarrow OH \perp (ABC)$. Do đó $\mathrm{d}(O,(ABC)) = OH$.

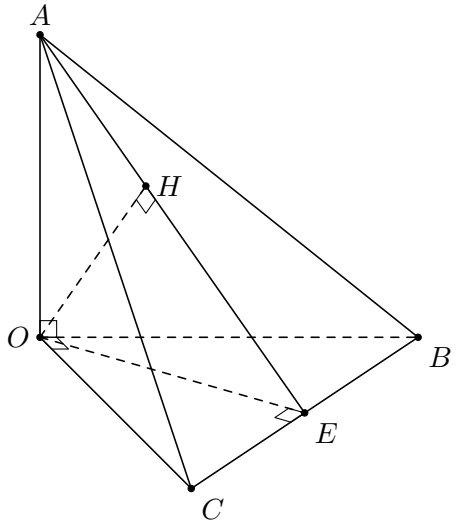
Xét tam giác OBC vuông tại O, đường cao OE:

$\dfrac{1}{OE^2} = \dfrac{1}{OC^2} + \dfrac{1}{OB^2} = \dfrac{2}{3}$.

Xét tam giác OAE vuông tại O, đường cao OH:

$\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OE^2} + \dfrac{1}{OA^2} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} = 1$.

$\Rightarrow \mathrm{d}(O,(ABC)) = OH = 1$.

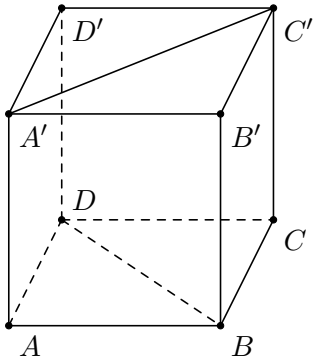


Chọn đáp án (B) □

Câu 75.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng

A. a. **B.** $\sqrt{2}a$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. **D.** $\sqrt{3}a$.



✍Lời giải.

Do $\begin{cases} A'C' \subset (A'B'C'D') \\ DB \subset (ABCD) \\ (ABCD) \parallel (A'B'C'D') \end{cases}$ nên $\mathrm{d}(A'C', BD) = \mathrm{d}((ABCD),(A'B'C'D')) = AA' = a$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 76. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, biết $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SB, SA. Tính khoảng cách từ M đến (NCD) theo a.

A. $\dfrac{a\sqrt{66}}{11}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{66}}{22}$. **C.** $2a\sqrt{66}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{66}}{44}$.

✍Lời giải.

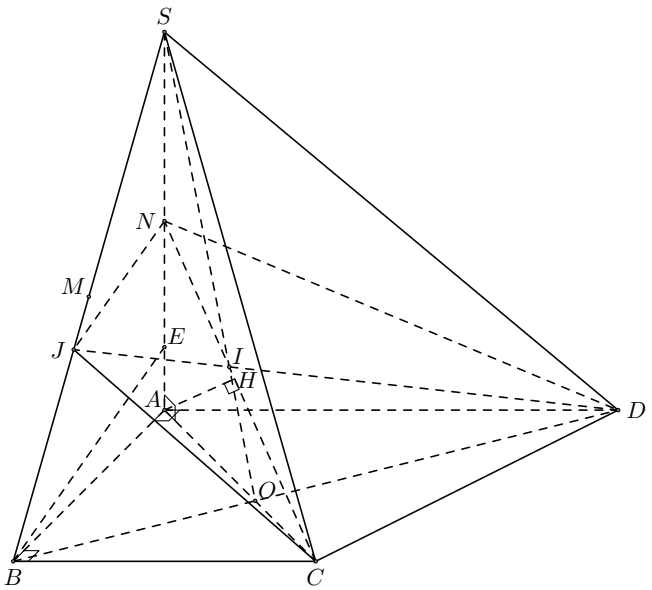
Ta có hai tam giác OBC và OAD đồng dạng và $BC = \dfrac{1}{2}AD$ nên $\dfrac{CO}{CA} = \dfrac{1}{3}$ và $\dfrac{DB}{DO} = \dfrac{3}{2}$.

Áp dụng định lý Mê-nê-la-uýt cho tam giác SAO, ta có

$$\frac{NS}{NA} \cdot \frac{CA}{CO} \cdot \frac{IO}{IS} = 1 \Rightarrow \frac{IO}{IS} = \frac{1}{3}.$$

Áp dụng định lý Mê-nê-la-uýt cho tam giác SBO, ta có

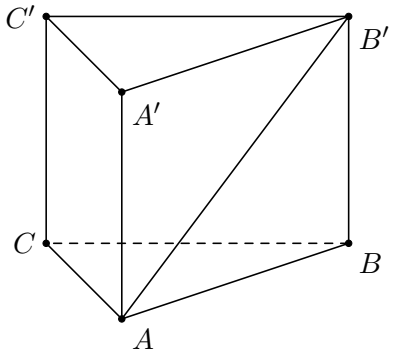
$$\frac{IO}{IS} \cdot \frac{JS}{JB} \cdot \frac{DB}{DO} = 1 \Rightarrow \frac{JS}{JB} = 2.$$



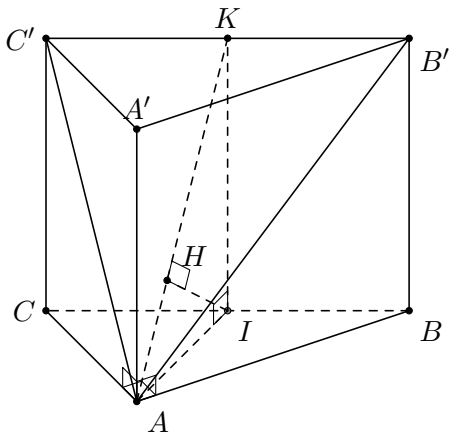
Gọi E là điểm thuộc đoạn SA sao cho $BE \parallel JN$ suy ra $AN = 2EN$.
Suy ra $\mathrm{d}(M,(NCD)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(B,(NCD)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(E,(NCD)) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\mathrm{d}(A,(NCD))$.
Gọi H là hình chiếu của A lên NC, ta có $AH \perp (CND)$ (do $AH \perp NC$, $AH \perp CD$).
Suy ra $\mathrm{d}(A,(NCD)) = AH = \dfrac{AN\cdot AC}{\sqrt{AN^2+AC^2}} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{3a^2}{4}+2a^2}} = \dfrac{a\sqrt{66}}{11}$.
Do đó, $\mathrm{d}(M,(NCD)) = \dfrac{a\sqrt{66}}{44}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 77.
Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = AC = b$ và có các cạnh bên bằng b. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BC bằng

A. b. **B.** $b\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{b\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{b\sqrt{3}}{3}$.



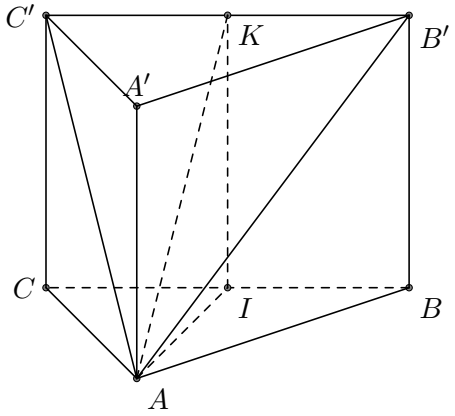
✍Lời giải.
Cách 1:
Gọi I, K lần lượt là trung điểm $BC, B'C'$. Trong tam giác IAK kẻ đường cao IH.
Ta có $BC \parallel B'C' \Rightarrow BC \parallel (AB'C')$. Khoảng cách giữa AB' và BC bằng khoảng cách giữa BC và mặt phẳng $(AB'C')$.
Ta có $BC \perp AI$ (vì ΔABC vuông cân), $BC \perp IK$ nên $BC \perp (AIK) \Rightarrow BC \perp IH$.
Do đó $IH \perp (AB'C')$ (vì $IH \perp AK, IH \perp B'C'$). Nên khoảng cách giữa AB' và BC bằng IH.
Ta có $AI = \dfrac{\sqrt{2}b}{2}$ nên $\dfrac{1}{AI^2}+\dfrac{1}{IK^2} = \dfrac{1}{IH^2} \Rightarrow IH = \dfrac{b\sqrt{3}}{3}$.



Cách 2:
Gọi I, K lần lượt là trung điểm $BC, B'C'$. Trong tam giác IAK kẻ đường cao IH.
Ta có $BC \parallel B'C' \Rightarrow BC \parallel (AB'C')$. Khoảng cách giữa AB' và BC bằng khoảng cách từ C đến mặt phẳng $(AB'C')$.
Ta có

$$AI = AC^2 - CI^2 = AC^2 - \frac{BC^2}{4} = b^2 - \frac{2b^2}{4} = \frac{b^2}{2} \Rightarrow AI = \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

Và $AK = \sqrt{AC'^2 - C'K^2} = \sqrt{2b^2 - \dfrac{b^2}{2}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}b$.



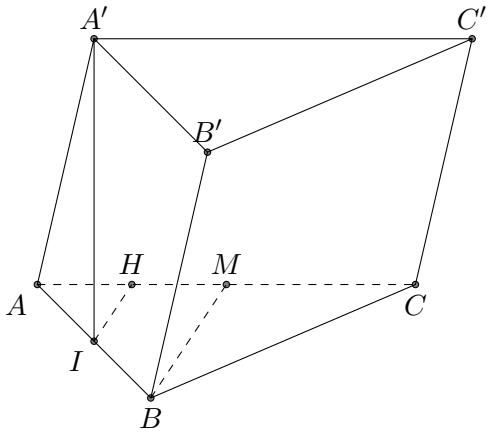
Ta có $V_{C.AB'C'} = \dfrac{1}{3}h\cdot S_{AB'C'} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}h\cdot b^2$.
$V_{A.BCC'} = \dfrac{1}{3}AM\cdot S_{CC'B'} = \dfrac{1}{6}b^3$. Trong đó h là khoảng cách từ C đến mặt phẳng $(AB'C')$.
Do đó $\dfrac{\sqrt{3}}{6}h\cdot b^2 = \dfrac{1}{6}b^3 \Rightarrow h = \dfrac{b\sqrt{3}}{3}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 78. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, I là trung điểm của AB. Tam giác $A'AB$ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy (ABC). Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng $A'I$ và AC.

A. $d=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $d=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $d=\dfrac{1}{2}$. **D.** $d=\dfrac{3}{4}$.

✍Lời giải.

Vì $A'AB$ là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy (ABC) nên $A'I\perp(ABC)$. Gọi M là trung điểm của AC, H là trung điểm của AM. Ta có $IH\parallel BM$, $BM\perp AC$ $\Rightarrow IH\perp AC$. Mặt khác $IH\perp A'I$ nên $d=\mathrm{d}(A'I,AC)=IH$.
Ta có $IH=\dfrac{1}{2}\cdot BM=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. Vậy $d=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

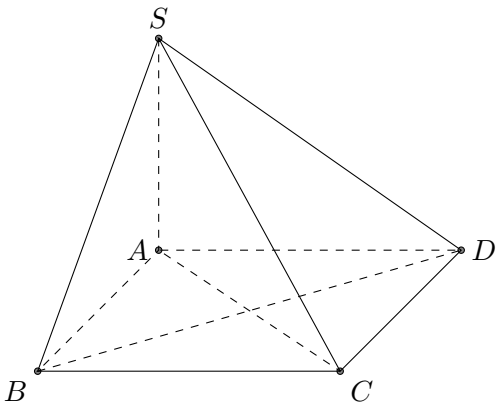


Chọn đáp án (B) □

Câu 79.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{2}$ (tham khảo hình bên). Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng BD và SC.

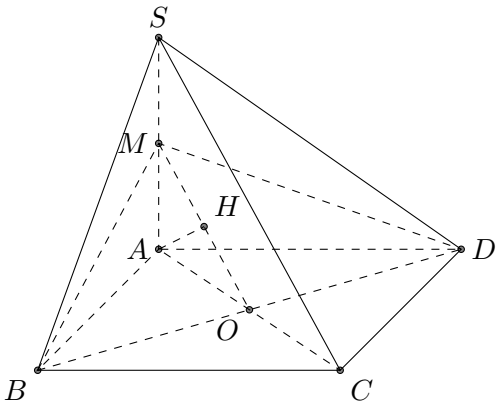
A. $d=a\sqrt{2}$. **B.** $d=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $d=\dfrac{a}{2}$. **D.** $d=a$.



✍Lời giải.

Gọi O là tâm hình vuông và M là trung điểm của SA. Khi đó $SC\parallel(MBD)$ nên $d=d(SB,BD)=d\left(SC,(MBD)\right)=d\left(C,(MBD)\right)=d\left(A,(MBD)\right)$.
Vì $SA=a\sqrt{2}=AC$ nên $\triangle SAC$ và $\triangle MAO$ là các tam giác vuông cân. Gọi H là trung điểm của MO thì $AH\perp(MBD)$. Suy ra

$$d=AH=\frac{MO}{2}=\frac{AM\sqrt{2}}{2}=\frac{a}{2}.$$



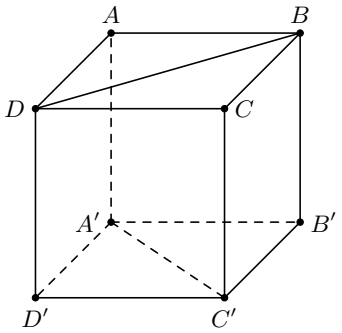
Chọn đáp án (C) □

Câu 80. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** a.

✍Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}(BD, A'C') = \mathrm{d}((ABCD), (A'B'C'D')) = AA' = a$.



Chọn đáp án D ☐

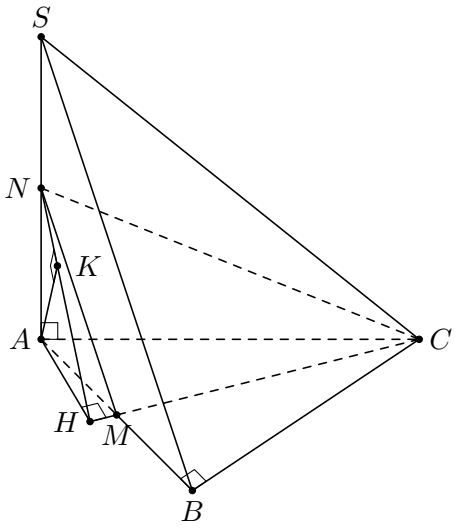
Câu 81. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 2a$, $BC = SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa CM và SB bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **B.** $2a\sqrt{6}$. **C.** $2a\sqrt{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

✍Lời giải.

Gọi N là trung điểm của SA, ta có $SB \parallel (MNC)$.
Do đó

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(SB; MC) &= \mathrm{d}(SB; (MNC)) \\ &= \mathrm{d}(S; (MNC)) = \mathrm{d}(A; (MNC)).\end{aligned}$$



Kẻ AH vuông góc với MC tại H, kẻ AK vuông góc với NH tại K, ta có $\mathrm{d}(A; (MNC)) = AK$.
Ta có $\triangle AMH$ đồng dạng với $\triangle CMB$, suy ra
$AH = \dfrac{AM \cdot CB}{CM} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Ta có $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AH^2} + \dfrac{1}{AN^2} = \dfrac{1}{\frac{3a^2}{4}} + \dfrac{1}{\frac{3a^2}{4}} = \dfrac{8}{3a^2}$.
Suy ra $AK = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

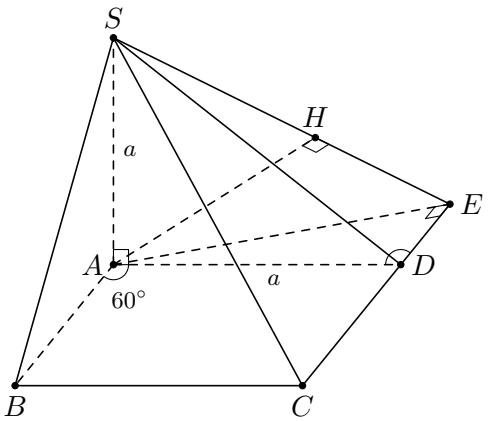
Chọn đáp án D ☐

Câu 82. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SA = a$ và SA vuông góc với mặt đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{15}a}{7}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{21}a}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{15}a}{3}$.

✍Lời giải.

Ta có $AB \parallel (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}(B, (SCD)) = \mathrm{d}(A, (SCD))$.
Trong $(ABCD)$, kẻ $AE \perp CD$ tại E.
Trong (SAE), kẻ $AH \perp SE$ tại H (1).
Ta có $\begin{cases} CD \perp AE \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAE) \Rightarrow CD \perp AH$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SCD)$
$\Rightarrow \mathrm{d}(A, (SCD)) = AH$.
Xét tam giác AED vuông tại E
$\Rightarrow AE = AD \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Xét $\triangle SAE$ vuông tại $A \Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AE^2}$
$\Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.
Vậy $\mathrm{d}(B, (SCD)) = \mathrm{d}(A, (SCD)) = AH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.



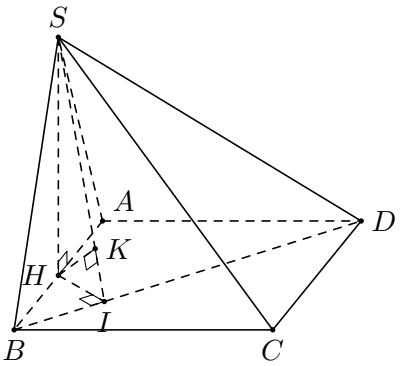
Chọn đáp án A ☐

Câu 83. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = 2AD = 2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD).

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** a.

✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AB. Tam giác SAB đều nên suy ra $SH \perp AB$.
Theo giả thiết (SAB) vuông góc với $(ABCD)$ và có giao tuyến AB nên suy ra $SH \perp (ABCD)$ tại H.
Có $AH \cap (SBD) = B$ nên $\dfrac{\mathrm{d}(A,(SBD))}{\mathrm{d}(H,(SBD))} = \dfrac{AB}{HB} = 2 \Rightarrow \mathrm{d}(A,(SBD)) = 2\mathrm{d}(H,(SBD))$.



Trong $(ABCD)$ kẻ $HI \perp BD$ tại I, kết hợp $SH \perp (ABCD)$ ta suy ra $BD \perp (SHI) \Rightarrow (SHI) \perp (SBD)$, mà $(SHI) \cap (SBD) = SI$ nên trong (SHI) nếu ta kẻ $HK \perp SI$ tại K thì $HK \perp (SBD)$ tại K, do đó $HK = d(H,(SBD))$.
Ta tính được $BD = a\sqrt{5}$, $S_{\triangle HBD} = \dfrac{1}{2}S_{\triangle ABD} = \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow HI = \dfrac{2S_{\triangle HBD}}{BD} = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$.
Tam giác SAB đều cạnh $2a$ nên $SH = a\sqrt{3}$.
Trong $\triangle SHI$ vuông tại H đường cao HK nên

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HI^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{5}{a^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

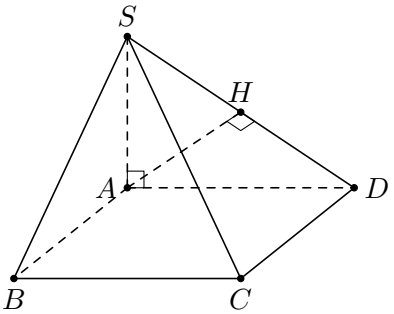
Vậy khoảng cách từ A đến (SBD) là $2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 84. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách từ đường thẳng AB đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** a. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc A lên SD.
Ta có $\begin{cases} CD \perp SA \ \ (\text{vì } SA \perp (ABCD)) \\ CD \perp AD \ \ (\text{vì } ABCD \text{ là hình vuông}) \end{cases}$
$\Rightarrow CD \perp (SAD)$.
Do đó $\begin{cases} AH \perp CD \ \ (\text{vì } CD \perp (SAD)) \\ AH \perp SD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD)$.



Vậy $\mathrm{d}(AB,(SCD)) = \mathrm{d}(A,(SCD)) = AH = \dfrac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Chọn đáp án (D) □

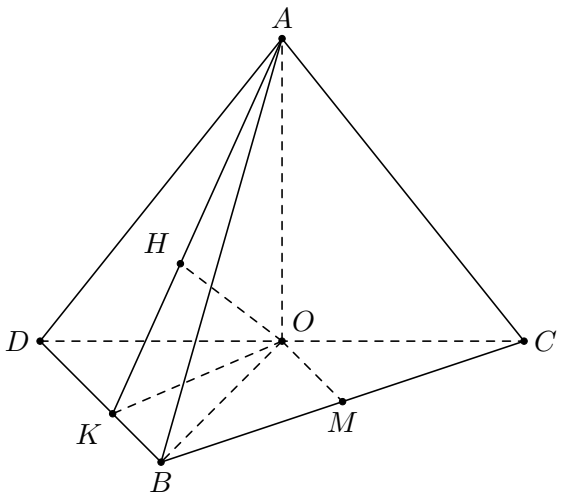
Câu 85. Cho tứ diện $OABC$ có đáy OBC là tam giác vuông tại O, $OA = a\sqrt{3}, OB = a$ và $OC = a\sqrt{3}$. Cạnh OA vuông góc với mặt phẳng (OBC). Gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách h giữa hai đường thẳng AB và OM.

A. $h = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $h = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **D.** $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{15}$.

✍Lời giải.

Gọi D là điểm đối xứng của C qua O. Khi đó OM song song với mp(ABD).
Trong mp(BCD), dựng $OK \perp BD$, với $K \in BD$. Suy ra $BD \perp (AOK) \Rightarrow (AOK) \perp (ABD)$.
Trong mp(AOK), dựng $OH \perp$, với $H \in AK$. Suy ra $OH \perp (ABD)$. Hơn nữa H là hình chiếu vuông góc của O xuống mp(ABD). Từ đó

$$\mathrm{d}_{(OM,AB)} = \mathrm{d}_{(0M,(ABD))} = \mathrm{d}_{(O,(ABD))} = OH.$$



Ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OD^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{3a^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 86. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và CD'.

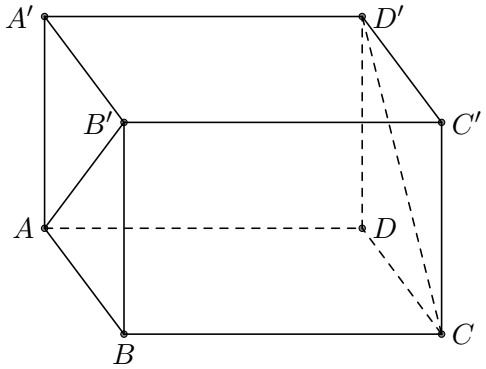
A. $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **B.** a. **C.** $\sqrt{2}a$. **D.** $2a$.

✍Lời giải.

Do giả thiết ta có $(AA'B'B) \parallel (CC'D'D)$.
Nên

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\left(AB', CD'\right) &= \mathrm{d}\left(AB', \left(CC'D'D\right)\right) \\ &= \mathrm{d}\left(A, \left(CC'D'D\right)\right) = AD \end{aligned}$$

Vậy khoảng cách giữa AB' và CD' bằng a.



Chọn đáp án (B) □

Câu 87. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và DD'. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và BD.

A. $\sqrt{3}a$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{6}$.

✍Lời giải.

Gọi O, P, K lần lượt là trung điểm của AC, CD, OC. Kẻ $DI \perp MP$, $DH \perp NI$.
Ta có $ND = \dfrac{a}{2}$, $BD \parallel MP$, tứ giác $DIKO$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow DI = OK = \dfrac{OC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

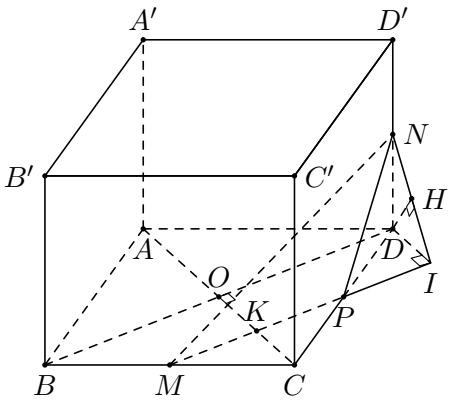
Khi đó:

$$\mathrm{d}(MN, BD) = \mathrm{d}(BD, (MNP)) = \mathrm{d}(D, (MNP)) = DH$$

Xét tam giác vuông NDI có

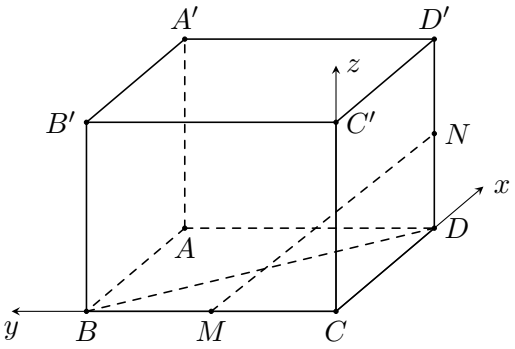
$\dfrac{1}{DH^2} = \dfrac{1}{DN^2} + \dfrac{1}{DI^2} \Rightarrow DH = \dfrac{\sqrt{3}a}{6}$.

Vậy $\mathrm{d}(MN, BD) = \dfrac{\sqrt{3}a}{6}$.



Cách khác.

Xét hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Khi đó $C(0;0;0)$, $D(a;0;0)$, $B(0;a;0)$, $D'(a;0;a)$, $M\left(0;\frac{a}{2};0\right)$, $N\left(a;0;\frac{a}{2}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{MN}=\left(a;-\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{BD}=(a;-a;0)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{BD}\right]=\left(\frac{a^2}{2};\frac{a^2}{2};-\frac{a^2}{2}\right)$, $\overrightarrow{BM}=\left(0;-\frac{a}{2};0\right)$

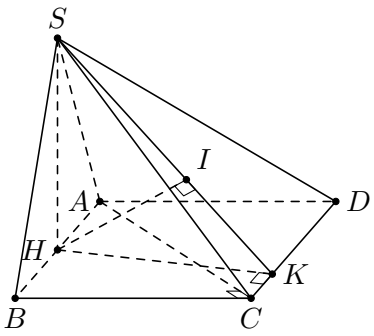
$\Rightarrow \left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{BD}\right]\cdot\overrightarrow{BM}=-\frac{a^3}{4}$ và $\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{BD}\right]\right|=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

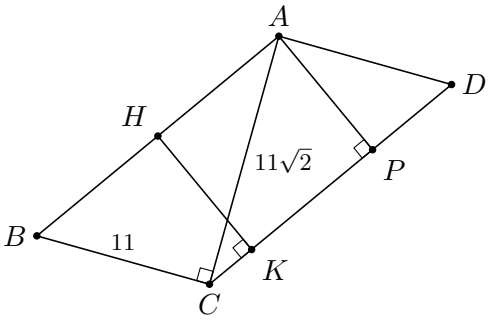
Ta có $\mathrm{d}(MN,BD)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{BD}\right]\cdot\overrightarrow{BM}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{BD}\right]\right|}=\dfrac{\frac{a^3}{4}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 88. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và $SA=SB=SC=11$, $\widehat{SAB}=30^\circ$, $\widehat{SBC}=60^\circ$ và $\widehat{SCA}=45^\circ$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SD.

A. $d=4\sqrt{11}$. **B.** $d=2\sqrt{22}$. **C.** $d=\dfrac{\sqrt{22}}{2}$. **D.** $d=\sqrt{22}$.





✍Lời giải.

Dựa vào định lý cô-sin ta dễ dàng tính được $AB=11\sqrt{3}$, $BC=11$ và $AC=11\sqrt{2}$.

Từ đó suy ra được $\triangle ABC$ vuông tại C.

Do $SA=SB=SC$ nên hình chiếu của S xuống mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của AB tức là $SH\perp(ABCD)$.

Ta có $SH=SA\cdot\sin SAB=\dfrac{11}{2}$.

Kẻ $HK\perp CD$ tại $K\in CD$, $AP\perp CD$ tại $P\in CD$ thì tứ giác $APKH$ là hình chữ nhật.

Ta có $HK=AP=\dfrac{AC\cdot AD}{CD}=\dfrac{11\cdot 11\sqrt{2}}{11\sqrt{3}}=\dfrac{11\sqrt{6}}{3}$.

Trong tam giác vuông SHK, kẻ $HI\perp SK$ tại $I\in SK$.

Do $AB\parallel CD$ nên $\mathrm{d}(AB,SD)=\mathrm{d}\left(AB,(SCD)\right)=\mathrm{d}\left(H,(SCD)\right)=HI=\dfrac{SH\cdot HK}{\sqrt{SH^2+HK^2}}=\sqrt{22}$.

Vậy $\mathrm{d}(AB,SD)=\sqrt{22}$.

Chọn đáp án (D) □

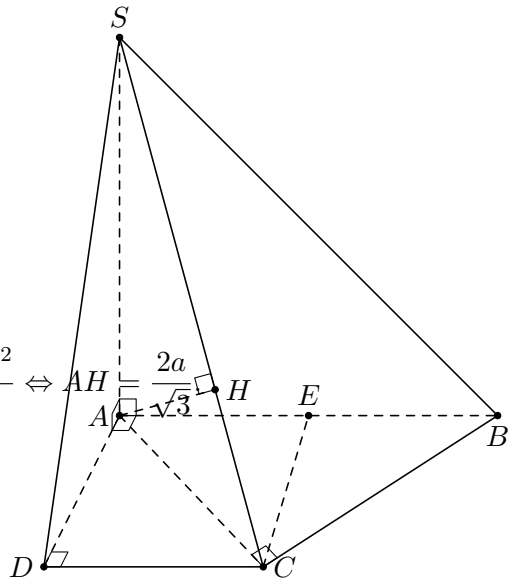
Câu 89. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đường cao $SA=2a$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông ở A và D, $AB=2a$, $AD=CD=a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{2a}{\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{2a}{3}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

✍Lời giải.

Gọi E là trung điểm của AB. Do giả thiết suy ra $AE = EB = a$.
Dễ thấy $AECD$ là hình vuông nên
$EC = AD = a$. Suy ra tam giác ACB là vuông tại C hay $AC \perp BC$ (1).
Theo giả thiết $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp BC$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (SAC)$.
Trong mặt phẳng (SAC) kẻ $AH \perp SC$ (3).
Theo chứng minh trên suy ra $CB \perp AH$ (4).
Từ (3) và (4) suy ra $AH \perp (SBC)$ nên $\mathrm{d}(A,(SBC)) = AH$.
Trong tam giác vuông SAC ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} \Leftrightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{2a^2} \Leftrightarrow AH^2 = \frac{4a^2}{3} \Leftrightarrow AH = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$



Chọn đáp án (A) □

Câu 90. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành tâm O, M là trung điểm SA. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

A. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SCD) bằng khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SCD).
B. $OM \parallel (SCD)$.
C. $OM \parallel (SAC)$.
D. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD).

✍**Lời giải.**

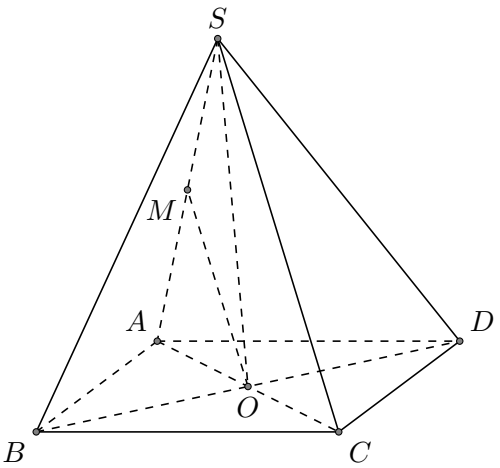
— Do $OM \subset (SAC)$ nên $OM \parallel (SAC)$ là mệnh đề **sai**.

— Có $OM \parallel SC$ nên $OM \parallel (SCD)$, suy ra

$$\mathrm{d}(O,(SCD)) = \mathrm{d}(M,(SCD)).$$

— Có $AB \parallel CD$ nên $AB \parallel (SCD)$, suy ra

$$\mathrm{d}(A,(SCD)) = \mathrm{d}(B,(SCD)).$$



Chọn đáp án (C) □

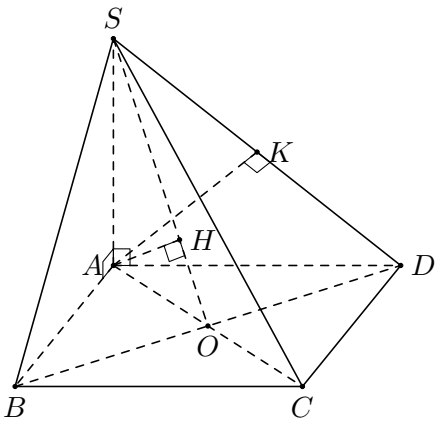
Câu 91. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) là $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. Tính khoảng cách x từ A đến mặt phẳng(SCD).

A. $x = a\sqrt{3}$. **B**. $x = 2a$. **C**. $x = a\sqrt{2}$. **D**. $x = 3a$.

✍**Lời giải.**

Ta có $AC = 2a\sqrt{2}$ nên $AO = a\sqrt{2}$.
Gọi $O = AC \cap BD$, H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SO, SD. Mà O là trung điểm của AC nên

$$\mathrm{d}(C;(SBD)) = \mathrm{d}(A;(SBD)).$$



Ta có $BD \perp (SAO)$ nên $(SBD) \perp (SAO)$
do đó $AH = \mathrm{d}(A;(SBD))$ suy ra $AH = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.
Lại có $DC \perp (SAD)$ nên $(SDC) \perp (SAD)$ suy ra

$$AK = \mathrm{d}(A;(SDC)).$$

Xét tam giác vuông SAO có

$$\begin{aligned}\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AO^2} &\Leftrightarrow \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AO^2}\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{SA^2} = \frac{9}{12a^2} - \frac{1}{2a^2}\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{4a^2}\\ &\Leftrightarrow SA = 2a.\end{aligned}$$

Khi đó xét tam giác vuông SAD có

$$\begin{aligned}\frac{1}{AK^2} &= \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2}\\ &= \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4a^2}\\ &= \frac{2}{4a^2}.\end{aligned}$$

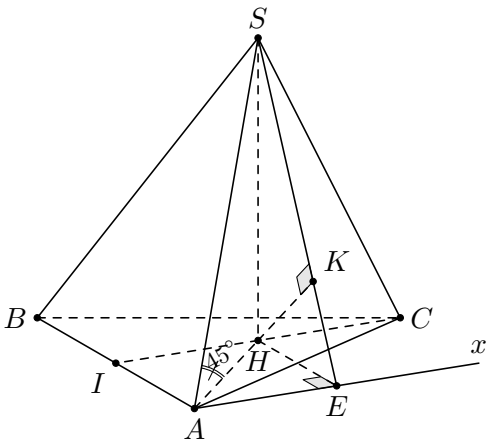
nên $AK^2 = 2a^2 \Leftrightarrow AK = a\sqrt{2}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 92. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, I là trung điểm của AB, hình chiếu S lên mặt đáy là trung điểm I của CI, góc giữa SA và đáy là $45°$. Khoảng cách giữa SA và CI bằng

A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{77}}{22}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{4}$.

Lời giải.
Kẻ đường thẳng Ax song song với IC.
Kẻ HE vuông góc với Ax tại E.
Vì $IC \parallel (SAE)$ nên

$$\mathrm{d}(IC;SA) = \mathrm{d}(IC;(SAE)) = \mathrm{d}(H;(SAE)).$$



Kẻ $HK \perp SE$ tại K, $K \in SE$. (1).
$Ax \perp HE, Ax \perp SH$
$\Rightarrow Ax \perp (SHE) \Rightarrow Ax \perp HK$ (2).
Từ (1), (2) suy ra $HK \perp (SAE)$. Vậy

$$\mathrm{d}(H;(SAE)) = HK.$$

$CH = IH = \dfrac{1}{2}IC = \dfrac{1}{2}\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$;

$AH = \sqrt{IH^2 + IA^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{4}$.

$(\widehat{SA;(ABC)}) = \widehat{SAH} = 45° \Rightarrow \triangle SAH$ vuông cân tại H nên $SH = AH = \dfrac{a\sqrt{7}}{4}$.

Ta có $HE = IA = \dfrac{a}{2}$ (vì tứ giác $AIHE$ là hình chữ nhật).

Nên $HK = \dfrac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{7}}{4} \cdot \dfrac{a}{2}}{\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{7}}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}} = \dfrac{a\sqrt{77}}{22}$.

Chọn đáp án C □

Câu 93. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

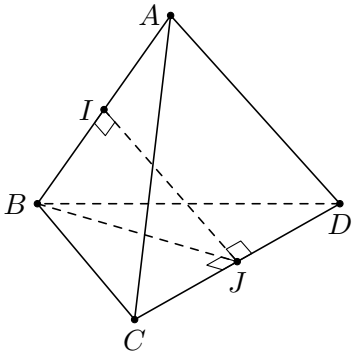
A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Khi đó, $\mathrm{d}(AB, CD) = IJ$.

Ta có $IJ = \sqrt{BJ^2 - BI^2} = a \cdot \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án D □

Câu 94. Cho tứ diện $S.ABC$ có SA, SB, SC vuông góc với nhau đôi một và $SA = a$, $SB = a\sqrt{2}$, $SC = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) bằng

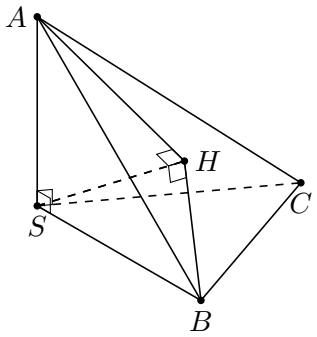
A. $\dfrac{a\sqrt{66}}{11}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{33}}{9}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{13}}{9}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{19}}{11}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC).

Ta có $\dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{SB^2} + \dfrac{1}{SC^2}$.

Ta được $SH = \dfrac{a\sqrt{66}}{11}$.



Chọn đáp án A □

Câu 95. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, cạnh bên SC hợp với đáy (ABC) một góc $45°$ và I là trung điểm AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CI bằng

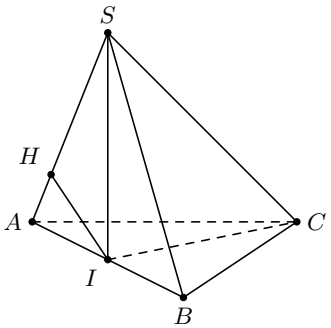
A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của I trên SA. Theo giả thiết $SI \perp AB$ mà $(SAB) \perp (CAB)$ nên $SI \perp (ABC)$, suy ra $SI \perp SI$. Do đó $\widehat{SIC} = (SC, (ABC)) = 45°$, suy ra $SI = CI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lại có $CI \perp AB$ nên $CI \perp (SAB)$, suy ra $CI \perp IH$, từ đó IH là đoạn vuông góc chung của SA và CI. Vậy

$$\mathrm{d}(SA, CI) = IH = \dfrac{SI \cdot IA}{\sqrt{SI^2 + IA^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}.$$

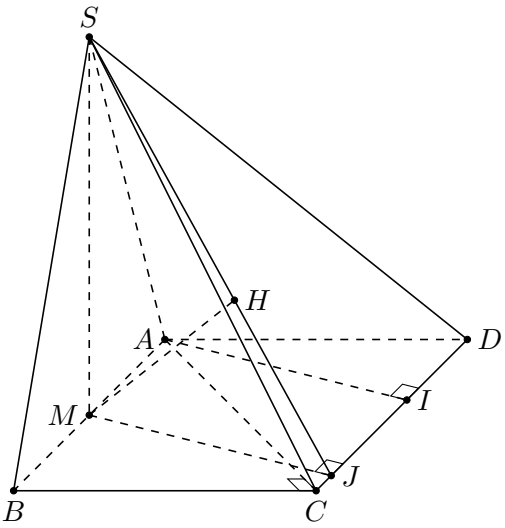


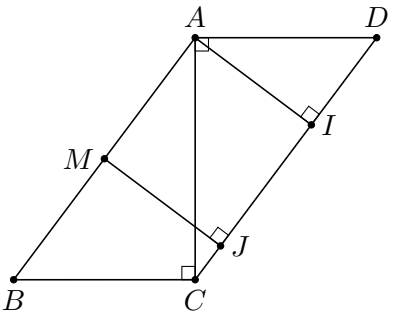
Chọn đáp án D □

Câu 96. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và $SA = SB = SC = 11$, $\widehat{SAB} = 30^\circ$, $\widehat{SBC} = 60^\circ$ và $\widehat{SCA} = 45^\circ$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SD.

A. $d = 4\sqrt{11}$. **B.** $d = 2\sqrt{22}$. **C.** $d = \dfrac{\sqrt{22}}{2}$. **D.** $d = \sqrt{22}$.

Lời giải.





Tam giác SBC có $SB = SC = 11$ và $\widehat{SBC} = 60^\circ$ nên SBC là tam giác đều, suy ra $BC = 11$.
Tam giác SAB cân tại S có $\widehat{SAB} = 30^\circ$, suy ra $\widehat{ASB} = 120^\circ$. Khi đó

$$AB = \sqrt{SA^2 + SB^2 - 2SA \cdot SB \cdot \cos \widehat{ASB}} = 11\sqrt{3}.$$

Tam giác SAC cân tại S có $\widehat{SCA} = 45^\circ$ nên SAC là tam giác vuông tại S. Khi đó

$$AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = 11\sqrt{2}.$$

Lại có $BC^2 + AC^2 = 11^2 + \left(11\sqrt{2}\right)^2 = \left(11\sqrt{3}\right)^2 = AB^2$ nên tam giác ABC vuông tại C.
Gọi M là trung điểm của AB, khi đó M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, suy ra $SM \perp (ABCD)$.
Ta có $AB \parallel CD$ nên $AB \parallel (SCD)$. Do đó

$$\mathrm{d}(AB, SD) = \mathrm{d}(AB, (SCD)) = \mathrm{d}(M, (SCD)).$$

Từ M kẻ $MJ \perp CD$ tại J, kẻ $MH \perp SJ$ tại H.
Ta có $CD \perp MJ$ và $CD \perp SM$ nên $CD \perp (SMJ)$, suy ra $CD \perp MH$.
Lại có $MH \perp SJ$ và $MH \perp CD$ nên $MH \perp (SJD)$ hay $MH \perp (SCD)$.
Vì vậy $\mathrm{d}(M, (SCD)) = MH$.
Tam giác SAM vuông tại M nên

$$\tan \widehat{SAM} = \frac{SM}{AM} \Leftrightarrow SM = AM \tan \widehat{SAM} = \frac{11\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{11}{2}.$$

Kẻ $AI \perp CD$ tại I, khi đó $MJ = AI = \dfrac{AD \cdot AC}{\sqrt{AD^2 + AC^2}} = \dfrac{11 \cdot 11\sqrt{2}}{\sqrt{11^2 + (11\sqrt{2})^2}} = \dfrac{11\sqrt{6}}{3}$.

Trong tam giác SMJ vuông tại M ta có

$$MH = \frac{SM \cdot MJ}{\sqrt{SM^2 + MJ^2}} = \frac{\dfrac{11}{2} \cdot \dfrac{11\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{\left(\dfrac{11}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{11\sqrt{6}}{3}\right)^2}} = \sqrt{22}.$$

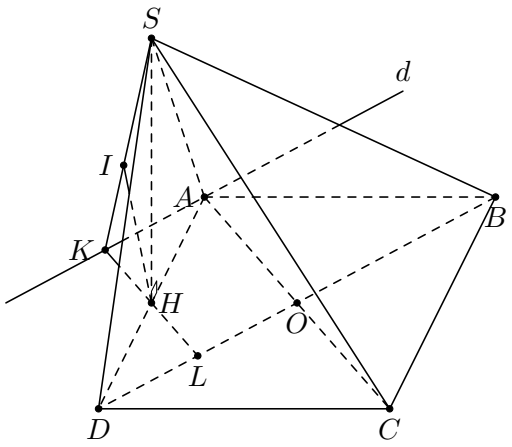
Vậy $\mathrm{d}(AB, SD) = \sqrt{22}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 97. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BD.

A. $\mathrm{d}=\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. **B.** $\mathrm{d}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\mathrm{d}=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\mathrm{d}=a$.

✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm cạnh AD, khi đó $SH\perp(ABCD)$.
Kẻ đường thẳng d qua A và song song với BD và gọi (α) là mặt phẳng qua 2 đường thẳng cắt nhau d và SA.
$\mathrm{d}(SA;BD)=\mathrm{d}(D;(\alpha))=2\mathrm{d}(H;(\alpha))$.
Gọi K là hình chiếu của H trên d, khi đó $d\perp HK, d\perp SH$ nên $d\perp(SHK)$.
Gọi I là hình chiếu của H trên SK, khi đó ta cũng có $d\perp HI$, do đó $HI\perp(\alpha)\Rightarrow HI=\mathrm{d}(H;(\alpha))$.



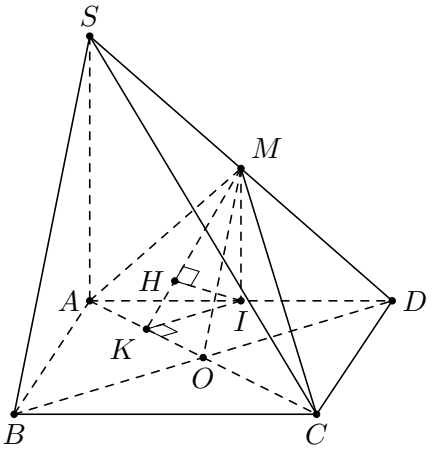
Do tam giác SAD đều và $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Gọi L là giao điểm của KH và BD, khi đó L là trung điểm DO với O là tâm hình vuông $ABCD$.
Ta có $HK=HL=\dfrac{1}{2}AO=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.
Vì $\dfrac{1}{HI^2}=\dfrac{1}{HS^2}+\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{4}{3a^2}+\dfrac{16}{2a^2}=\dfrac{28}{3a^2}\Rightarrow HI=a\sqrt{\dfrac{3}{28}}$.
Vậy $\mathrm{d}(SA;BD)=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.
Chọn đáp án C □

Câu 98. Cho hình chóp có đáy $S.ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA=2a$. Gọi M là trung điểm của SD. Tính khoảng cách d giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ACM).

A. $d=\dfrac{3a}{2}$. **B.** $d=a$. **C.** $d=\dfrac{2a}{3}$. **D.** $d=\dfrac{a}{3}$.

✍Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC, BD.
Khi đó $MO\parallel SB\Rightarrow SB\parallel(ACM)$ nên $\mathrm{d}(SB,(ACM))=\mathrm{d}(B,(ACM))=\mathrm{d}(D,(ACM))$.
Gọi I là trung điểm của AD. Suy ra $MI\parallel SA\Rightarrow MI\perp(ABCD)$ và $\mathrm{d}(D,(ACM))=2\mathrm{d}(I,(ACM))$.
Lấy K là trung điểm AO thì $IK\parallel OB$ nên $IK\perp AC$.
Trong tam giác MIK, kẻ $IH\perp MK$ với $H\in MK$. Ta có $AC\perp MI, AC\perp IK\Rightarrow AC\perp(MIK)\Rightarrow AC\perp IH$.
Từ đó suy ra $IH\perp(ACM)\Rightarrow\mathrm{d}(I,(ACM))=IH$.



Ta có $MI=\dfrac{SA}{2}=a, IK=\dfrac{OD}{2}=\dfrac{BD}{4}=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.
Trong tam giác vuông MIK ta có $\dfrac{1}{IH^2}=\dfrac{1}{IM^2}+\dfrac{1}{IK^2}\Rightarrow IH=\dfrac{IM\cdot IK}{\sqrt{IM^2+IK^2}}=\dfrac{a\cdot\dfrac{a\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{a^2+\dfrac{a^2}{8}}}=\dfrac{a}{3}$.
Vậy $\mathrm{d}(SB,(ACM))=2IH=\dfrac{2a}{3}$.
Chọn đáp án C □

Câu 99. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=a$, $\widehat{ASB}=60^\circ$, $\widehat{BSC}=90^\circ$ và $\widehat{CSA}=120^\circ$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AC và SB.

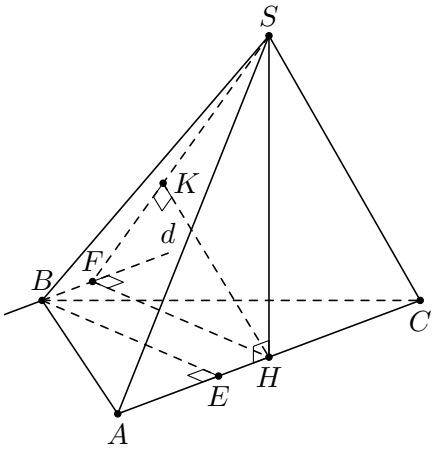
A. $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $d=\dfrac{a\sqrt{22}}{11}$. **D.** $d=\dfrac{a\sqrt{22}}{22}$.

✍Lời giải.

Ta có $\triangle ASB$ đều nên $AB=a$.
Tam giác BSC vuông tại S nên $BC=\sqrt{SB^2+SC^2}=a\sqrt{2}$.
Áp dụng định lý hàm số cos cho tam giác CSA ta có

$$AC^2=AS^2+SC^2+AS\cdot SC=3a^2\Rightarrow AC=a\sqrt{3}.$$

Ta có $AC^2=AB^2+BC^2\Rightarrow\triangle ABC$ vuông tại B.
Gọi H là trung điểm của AC, ta có $HA=HB=HC$ và $SA=SB=SC$ nên $SH\perp(ABC)$.



Gọi d là đường thẳng qua B và song song với AC, (α) là mặt phẳng chứa SB và d.
Khi đó $AC\parallel(\alpha)\Rightarrow \mathrm{d}(AC,SB)=\mathrm{d}\left(AC,(\alpha)\right)=\mathrm{d}\left(H,(\alpha)\right)$.
Kẻ $HF\perp d$ với $F\in d$ và kẻ $HK\perp SF$ với $K\in SF$.
Ta có $SH\perp d, HF\perp d\Rightarrow d\perp(SHF)\Rightarrow d\perp HK\Rightarrow HK\perp(\alpha)\Rightarrow \mathrm{d}\left(H,(\alpha)\right)=HK$.
Kẻ $BE\perp AC$ với $E\in AC$, khi đó $\dfrac{1}{BE^2}=\dfrac{1}{BA^2}+\dfrac{1}{BC^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{2a^2}=\dfrac{3}{2a^2}\Rightarrow\dfrac{1}{HF^2}=\dfrac{3}{2a^2}$.
Vì $\widehat{SAC}=30^\circ$ nên $SH=\dfrac{1}{2}SA=\dfrac{a}{2}$, suy ra $\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{SH^2}+\dfrac{1}{HF^2}=\dfrac{11}{2a^2}\Rightarrow HK=\dfrac{a\sqrt{22}}{11}$.
Vậy $\mathrm{d}(AC,BD)=HK=\dfrac{a\sqrt{22}}{11}$.

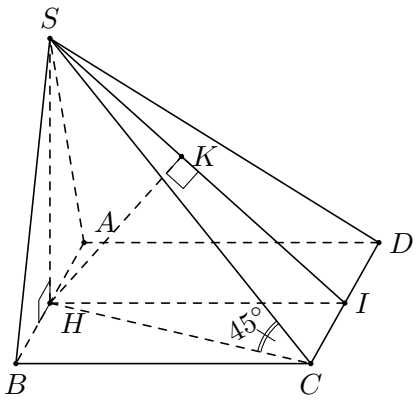
Chọn đáp án C □

Câu 100. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật: $AB=2a$, $AD=a$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng $ABCD$ là trung điểm H của AB, SC tạo với đáy góc 45°. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) là

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

✍Lời giải.

Xét hình chữ nhật $ABCD$ có H là trung điểm $AB\Rightarrow AH=HB=a$.
Suy ra $HC=AH\cdot\sqrt{2}=a\sqrt{2}$.
Lại có SC tạo với đáy góc 45°, suy ra $SH=HC=a\sqrt{2}$.
Vẽ $HI\perp CD$. Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $HI=AD=a$.
Vẽ $HK\perp SI$. Khi đó $\mathrm{d}(H,(SCD))=HK$. Lại có $AB\parallel CD$ nên $\mathrm{d}(A,(SCD))=\mathrm{d}(H,(SCD))=HK$.
Ta có $\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{SH^2}+\dfrac{1}{HI^2}=\dfrac{1}{2a^2}+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{3}{2a^2}\Rightarrow HK=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.
Vậy $\mathrm{d}(A,(SCD))=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

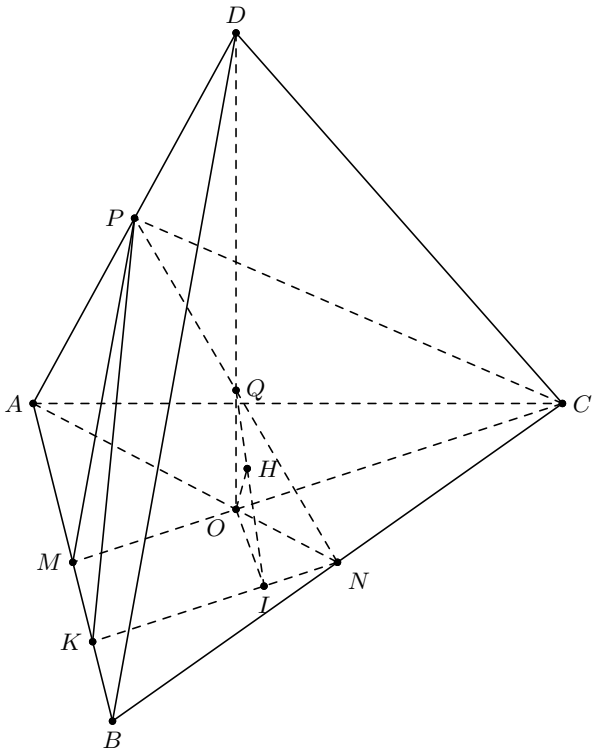


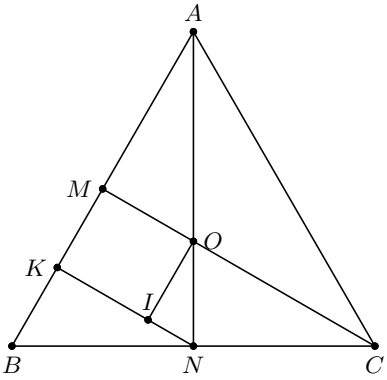
Chọn đáp án D □

Câu 101. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh $AB=1$. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm các cạnh AB,BC,AD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và NP.

A. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{10}}{20}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{10}}{20}$.

✍Lời giải.



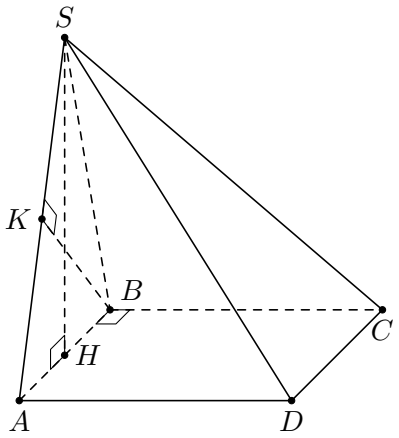


Gọi O là tâm của tam giác ABC, K là trung điểm của BM và có $MK \parallel (CMP)$ nên $\mathrm{d}(CM, NP) = \mathrm{d}\,(CM, (PNK)) = \mathrm{d}\,(O, (PNK))$.
Từ O dựng $OI \perp NK$. Vì $ABCD$ là tứ diện đều nên $DO \perp NK \Rightarrow NK \perp (DOI) \Rightarrow (PNK) \perp (DOI)$ mà $(PNK) \cap (DOI) = IQ$ với Q là giao điểm của DO và PN nên từ O, dựng OH vuông góc IQ tại H thì $OH \perp (PNK) \Rightarrow OH = \mathrm{d}\,(O, (PNK))$.
Ta có $OI = MK = \dfrac{AB}{4} = \dfrac{1}{4}$ (vì $MKIO$ là hình chữ nhật).
Theo cách dựng thì Q là trọng tâm của tứ diện nên $OQ = \dfrac{OD}{4}$ và $OD = \sqrt{DA^2 - AO^2} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ hay $OD = \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.
Xét tam giác vuông OIQ ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OI^2} + \dfrac{1}{OQ^2} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = 40 \Rightarrow OH = \dfrac{\sqrt{10}}{20}$.
Vậy $\mathrm{d}(CM, NP) = \dfrac{\sqrt{10}}{20}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 102. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B**. $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **C**. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D**. a.

✍Lời giải.
Gọi H là trung điểm AB. Do $\triangle SAB$ đều nên $SH \perp AB$.
Vì $\triangle SAB$ nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên $SH \perp (ABCD)$.
Suy ra $SH \perp BC$.
Trong mặt phẳng (SAB), ta kẻ $BK \perp SA$.
Lại có $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp BK$.
Vậy BK là đường vuông góc chung của SA và BC.
Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng BK và bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án (C) □

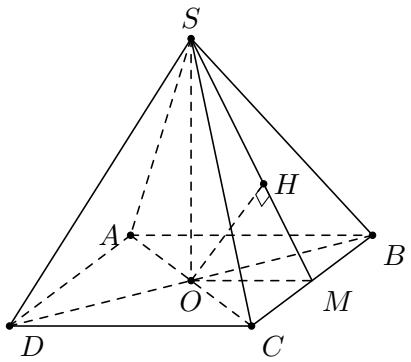
Câu 103. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có tất cả các cạnh đều bằng a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB.

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Ta có $AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC)$. Do đó

$$\mathrm{d}\,(AD, SB) = \mathrm{d}\,(AD, (SBC)) = \mathrm{d}\,(A, (SBC)) = 2\mathrm{d}(O; (SBC)).$$



Gọi M là trung điểm BC. Kẻ $OH \perp SM$, suy ra $OH \perp (SBC)$.

Do đó $OH = \mathrm{d}(O, (SBC))$ và $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OM^2} + \dfrac{1}{SO^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{6}{a^2}$.

Vậy $\mathrm{d}\,(AD; SB) = 2OH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

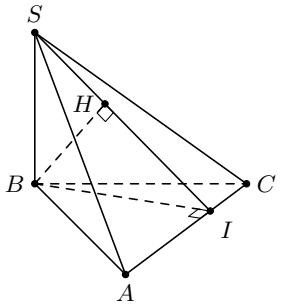
Câu 104. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $SB \perp (ABC)$. Biết $SB = 3a$, $AB = 4a$, $BC = 2a$. Tính khoảng cách từ B đến (SAC).

A. $\dfrac{12\sqrt{61}a}{61}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{14}a}{14}$. **C.** $\dfrac{4a}{5}$. **D.** $\dfrac{12\sqrt{29}a}{29}$.

✍Lời giải.

Kẻ $BI \perp AC$, $BH \perp SI$, suy ra $BH \perp SI$. Suy ra

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BS^2} + \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{BA^2} = \frac{61}{144a^2} \Rightarrow BH = \frac{12\sqrt{61}a}{61}.$$



Mà $BH \perp (SAC)$ nên khoảng cách từ B đến (SAC) bằng $\dfrac{12\sqrt{61}a}{61}$.

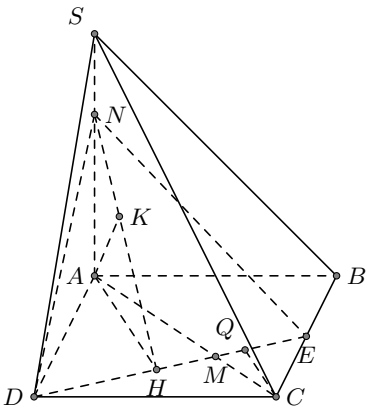
Chọn đáp án (A) □

Câu 105. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc giữa SC và mặt đáy là $45°$. Gọi E là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DE và SC.

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{19}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{38}}{19}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{38}}{5}$.

✍Lời giải.

Gọi E là trung điểm của BC; M là giao điểm của AC và DE;N là điểm thuộc SA sao cho $MN \parallel SC$; H, K lần lượt là hình chiếu của A lên DE và NH; Q là hình chiếu của C lên DE.



Ta có $\dfrac{CM}{AM} = \dfrac{CE}{AD} = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $\dfrac{AN}{AS} = \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{2}{3}$. Do đó, $AN = \dfrac{2}{3}AS = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}a$.

Ta cũng có $\dfrac{AH}{CQ} = \dfrac{AM}{CM} = 2$,

suy ra $AH = 2CQ = 2 \cdot \dfrac{CE \cdot CD}{\sqrt{CE^2 + CD^2}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$.

Do đó, $\mathrm{d}(SC, DE) = \mathrm{d}(C, (NED)) = \dfrac{CN}{AM}\mathrm{d}(A, (NED)) = \dfrac{1}{2}AK = \dfrac{1}{2}\dfrac{AH \cdot AN}{\sqrt{AH^2 + AN^2}} = \dfrac{\sqrt{38}}{19}a$.

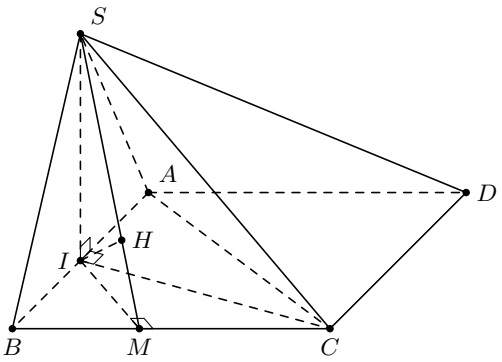
Chọn đáp án (B) □

Câu 106. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt phẳng (SCD) tạo với đáy góc 30°. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SB và AD.

A. $\mathrm{d} = \dfrac{\sqrt{21}}{14}a$. **B.** $\mathrm{d} = \dfrac{\sqrt{3}}{5}a$. **C.** $\mathrm{d} = \dfrac{2\sqrt{3}}{5}a$. **D.** $\mathrm{d} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}a$.

✍Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AB vì (SAB) vuông góc với $(ABCD)$ nên $SI \perp (ABCD)$. Vì góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nên tam giác ABC đều và $IC \perp AB$, suy ra $IC \perp CD$.



Mặt khác $CD \perp SI \Rightarrow CD \perp (SIC) \Rightarrow CD \perp SC$.

Suy ra góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCI} = 30^\circ$.

Trong $\triangle BIC$ kẻ $IM \perp BC$ tại M.

Trong $\triangle SIM$ kẻ $IH \perp SM$ tại H.

Ta có $AD \parallel (SBC) \Rightarrow \mathrm{d}(SB, AD) = \mathrm{d}(AD, (SBC)) = \mathrm{d}(A, (SBC)) = 2 \cdot \mathrm{d}(I, (SBC))$.

Có $\begin{cases} BC \perp IM \\ BC \perp SI \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SIM) \Rightarrow BC \perp IH$ mà $IH \perp SM$.

Suy ra $IH \perp (SBC) \Rightarrow \mathrm{d}(I, (SBC)) = IH$.

Tam giác ABC đều cạnh a nên đường cao có độ dài là $h = IC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vì I là trung điểm của AB nên $IM = \dfrac{1}{2}h = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Xét $\triangle SIC$ có $SI = IC \cdot \tan \widehat{SCI} = \dfrac{a}{2}$.

Xét $\triangle SIM$ có $IH = \dfrac{SI \cdot IM}{\sqrt{SI^2 + IM^2}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{14}$.

Suy ra $d = 2 \cdot \dfrac{a\sqrt{21}}{14} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

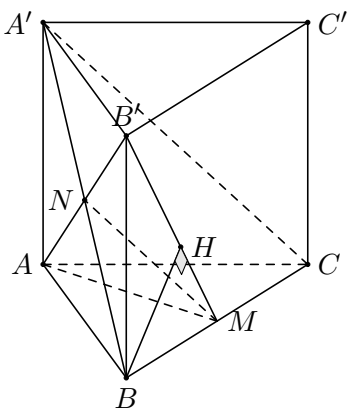
Chọn đáp án (D) □

Câu 107. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $AA' = 2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và $A'C$.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$. **C.** $a\sqrt{5}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{17}}{17}a$.

✍Lời giải.

Gọi M là trung điểm BC và $N = A'B \cap AB'$. Từ đó suy ra N là trung điểm của $A'B$.



Xét tam giác $A'BC$ có M, N lần lượt là trung điểm của $BC, A'B$ nên MN là đường trung bình của tam giác $A'BC$. Do đó $A'C \parallel MN$. Từ đó suy ra $A'C \parallel (AB'M)$.

Ta có:

$$\mathrm{d}(AB', A'C) = \mathrm{d}(A'C, (AB'M)) = \mathrm{d}(C, (AB'M)) = \mathrm{d}(B, (AB'M))$$

Từ B kẻ $BH \perp B'M$. Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ AM \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AM \perp (B'BM)$. Ngoài ra $\begin{cases} BH \perp B'M \\ BH \perp AM \end{cases} \Rightarrow BH \perp (AB'M) \Rightarrow \mathrm{d}(AB', A'C) = BH$.

Ta có $BB' = 2a$ và $BM = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a}{2}$ nên $\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{B'B^2} + \dfrac{1}{BM^2} \Rightarrow BH = \dfrac{2\sqrt{17}}{17}a$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 108. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A.A'B'D'$ là hình chóp đều, $A'B' = AA' = a$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và $A'C'$.

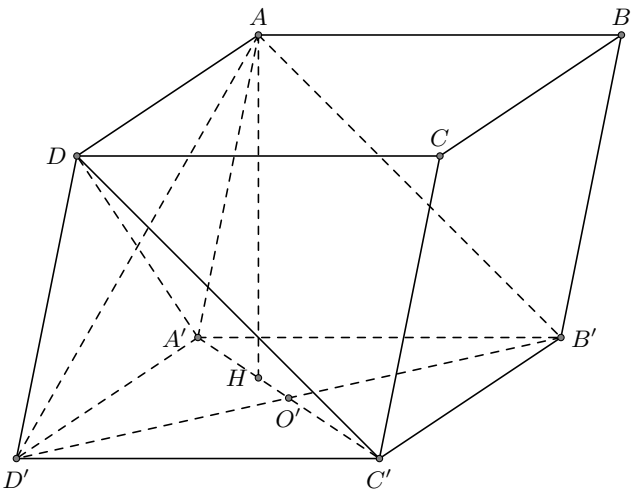
A. $\dfrac{a\sqrt{22}}{22}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{11}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{22}}{11}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{22}}{11}$.

✍Lời giải.

Ta có $AB' \parallel (DA'C')$ nên $\mathrm{d}[AB', A'C'] = \mathrm{d}[B', (DA'C')]$ mà trung điểm O' của $B'D'$ nằm trên $(DA'C')$ suy ra $\mathrm{d}[B', (DA'C')] = \mathrm{d}[D', (DA'C')]$.

Hơn nữa, $V_{D'.DA'C'} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{DA'C'} \mathrm{d}[D', (DA'C')]$ suy ra $\mathrm{d}[D', (DA'C')] = \dfrac{3V_{D.D'A'C'}}{S_{DA'C'}}$.

Mà $V_{D'.DA'C'} = V_{D.D'A'C'} = V_{A.A'B'D'}$ nên $\mathrm{d}[D', (DA'C')] = \dfrac{3V_{A.A'B'D'}}{S_{DA'C'}}$.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên $(A'C'D')$, ta có H là trọng tâm của tam giác đều $A'C'D'$ (vì $A.A'B'D'$ là hình chóp đều).

Khi đó $V_{A.A'B'D'} = \dfrac{1}{3} S_{A'B'D'} AH = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Hơn nữa, ta có $A'D = A'C' = a\sqrt{3}$, $DC' = a$ nên $S_{A'C'D} = \dfrac{a^2\sqrt{11}}{4} \Leftrightarrow \mathrm{d}[AB', A'C'] = \dfrac{a\sqrt{22}}{11}$.

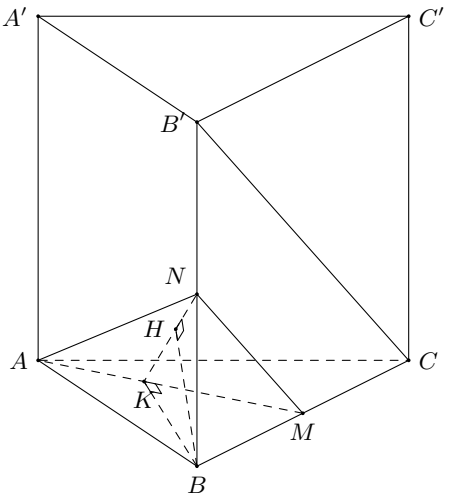
Chọn đáp án C □

Câu 109. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Biết đáy ABC là tam giác vuông có $BA = BC = a$, gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.

A. $\mathrm{d}(AM, B'C) = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\mathrm{d}(AM, B'C) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\mathrm{d}(AM, B'C) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\mathrm{d}(AM, B'C) = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

✍Lời giải.

Gọi N là trung điểm của BB'. Suy ra $MN \parallel B'C \Rightarrow B'C \parallel (AMN)$.
Do đó $\mathrm{d}(AM, B'C) = \mathrm{d}(B'C, (AMN)) = \mathrm{d}(C, (AMN)) = \mathrm{d}(B, (AMN))$ (vì M là trung điểm BC).
Kẻ $BK \perp AM$ $(K \in AM)$, $BH \perp KN$ $(H \in KN)$.
Vì $AM \perp BN$ nên $AM \perp (BKN) \Rightarrow AM \perp BH$.
Suy ra $BH \perp (AMN) \Rightarrow \mathrm{d}(B, (AMN)) = BH$.
Xét tam giác BKN vuông tại B, có $BN = \dfrac{BB'}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, $BK = \dfrac{AB \cdot BM}{AM} = \dfrac{a \cdot \dfrac{a}{2}}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$. Ta được



$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BK^2} + \frac{1}{BN^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{5}{a^2} = \frac{7}{a^2} \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{7}}{7}.$$

Vậy $\mathrm{d}(AM, B'C) = BH = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Lưu ý. Vì $BANM$ là tam diện vuông tại B nên

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BN^2} + \frac{1}{BM^2}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 110. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 3cm. Gọi M là trung điểm CD. Khoảng cách giữa AC và BM là

A. $\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$ cm. **B.** $\dfrac{3\sqrt{22}}{11}$ cm. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{11}$ cm. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{11}$ cm.

✍Lời giải.

Trong mặt phẳng (ABC), dựng hình bình hành $CABG$. Gọi (Δ) là mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau BM, BG. Gọi N là trung điểm AC, gọi P là trung điểm NC. Khi đó $\mathrm{d}(AC, BM) = \mathrm{d}(AC, (\Delta)) = \mathrm{d}(P, (\Delta))$.

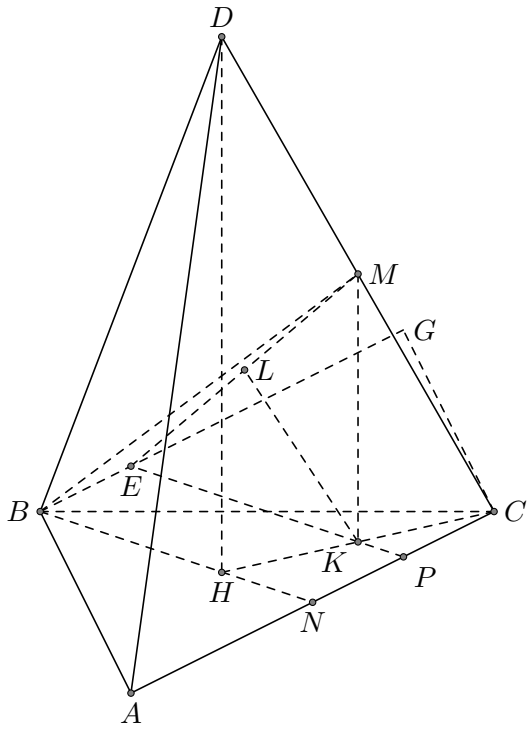
Gọi H là trọng tâm tam giác BCA, K là trung điểm CH, kẻ $KE \perp BG$, kẻ $KL \perp ME$.

Ta có $\begin{cases} BG \perp KE \\ BG \perp KM \end{cases} \Rightarrow BG \perp (MKE) \Rightarrow BG \perp KL$.

$\begin{cases} KL \perp BG \\ KL \perp ME \end{cases} \Rightarrow KL \perp (\Delta)$. Vậy $KL = \mathrm{d}(K, (\Delta))$.

Có $PE \perp BG \Rightarrow PE \perp AC \Rightarrow PE \parallel BN$ và $NP \parallel BE$ nên $BNPE$ là hình bình hành. Mà $BNPE$ có một góc vuông nên là hình chữ nhật.

Vậy $PE = NB = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (cm).



Có PK là đường trung bình trong tam giác CHN nên $PK = \dfrac{1}{2}HN = \dfrac{1}{6}BN = \dfrac{3\sqrt{3}}{12}$ (cm).

Vậy $KE = PE - PK = \dfrac{5\sqrt{3}}{4}$ (cm).

Có KM là đường trung bình trong tam giác DCH nên $KM = \dfrac{1}{2}DH$.

Mà $DH = \sqrt{BD^2 - BH^2} = \sqrt{3^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{6}$ (cm). Vậy $KM = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Có $\dfrac{1}{KL^2} = \dfrac{1}{KE^2} + \dfrac{1}{KM^2} = \dfrac{22}{25} \Rightarrow KL = \dfrac{5\sqrt{22}}{22}$ (cm) $\Rightarrow \mathrm{d}(K, \Delta) = \dfrac{5\sqrt{22}}{22}$ (cm) .

Có $\mathrm{d}(P, \Delta) = \dfrac{PE}{KE} \cdot \mathrm{d}(K, \Delta) = \dfrac{6}{5} \cdot \dfrac{5\sqrt{22}}{22} = \dfrac{3\sqrt{22}}{11}$ (cm).

Vậy $\mathrm{d}(BM, AC) = \dfrac{3\sqrt{22}}{11}$ (cm).

Chọn đáp án (B) □

Câu 111. Cho tứ diện đều $ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng $2a$, gọi M là điểm thuộc cạnh AD sao cho $DM = 2MA$. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (BCD).

A. $\dfrac{2a\sqrt{6}}{9}$. **B.** $a\sqrt{6}$. **C.** $\dfrac{4a\sqrt{6}}{9}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

✍Lời giải.

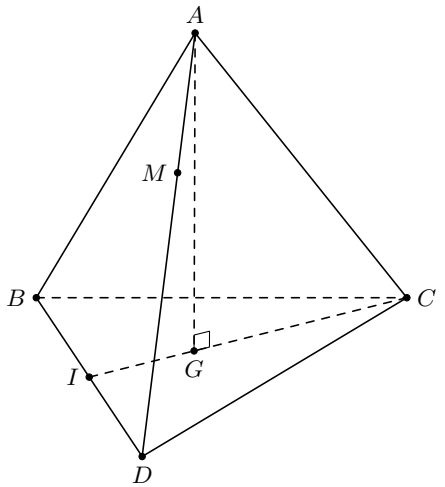
Gọi I là trung điểm của BD. Gọi G là trọng tâm của $\triangle BCD$.

Ta có $\begin{cases} AB = AC = AD \\ GB = GC = GD \end{cases} \Rightarrow AG \perp (BCD)$.

Do đó $\mathrm{d}(A, (BCD)) = AG$.

Mặt khác,

$$MD = \frac{2}{3}AD \Rightarrow \mathrm{d}(M, (BCD)) = \frac{2}{3}\mathrm{d}(A, (BCD)).$$



Tam giác BCD đều cạnh $2a$ nên

$$CI = a\sqrt{3} \Rightarrow GC = \frac{2}{3}CI = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Tam giác AGC vuông tại G nên

$$AG = \sqrt{AC^2 - GC^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{4a^2}{3}} = \frac{2\sqrt{6}a}{3}.$$

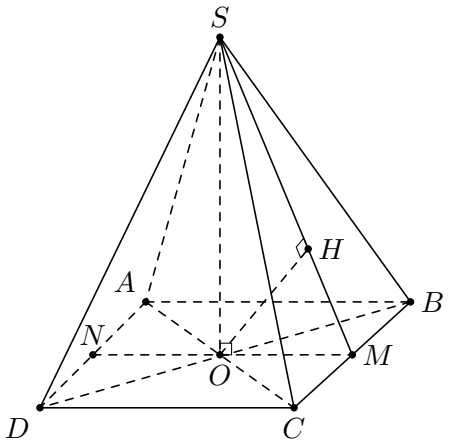
Do đó, $\mathrm{d}(M,(BCD)) = \dfrac{2}{3}\cdot AG = \dfrac{4\sqrt{6}a}{9}$.

Chọn đáp án C □

Câu 112. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng cạnh bên bằng a. Khoảng cách từ AD đến mặt phẳng (SBC) bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{3a}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

✍**Lời giải.**



Gọi M là trung điểm BC. Ta suy ra $OM \perp BC$.
Trong mặt phẳng (SOM), từ O kẻ OH vuông góc với SM.
Ta có $\begin{cases} BC \perp OM \\ BC \perp SO \end{cases} \Leftrightarrow BC \perp (SOM)$.
Suy ra $\begin{cases} OH \perp BC \\ OH \perp SM \end{cases} \Leftrightarrow OH \perp (SBC)$.
Do đó $\mathrm{d}(O,(SBC)) = OH$.

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác $\triangle SOC$ vuông tại O ta có $SO^2 = SC^2 - OC^2 = a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2}{2}$.

Xét tam giác $\triangle SOM$ vuông tại O có OH là đường cao ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OM^2} = \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{6}{a^2} \Leftrightarrow OH = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

Gọi N là trung điểm AD, vì $AD \parallel (SBC)$ nên $\mathrm{d}(AD,(SBC)) = \mathrm{d}(N,(SBC))$.
Ta có $ON \cap (SBC) = M \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}(N,(SBC))}{\mathrm{d}(O,(SBC))} = \dfrac{MN}{MO} = 2$.
Suy ra $\mathrm{d}(N,(SBC)) = 2\mathrm{d}(O,(SBC)) = \dfrac{2a}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án B □

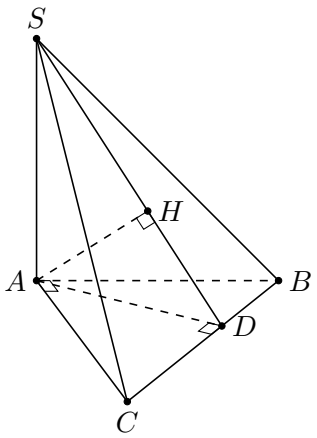
Câu 113. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{3}}{19}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{38}}{19}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{57}}{19}$.

✍**Lời giải.**

Gọi AD là đường cao của tam giác ABC.
Ta có $BC \perp AD$ và $BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAD)$.
Trong (SAD) kẻ $AH \perp SD$ tại H.
Lại có $BC \perp AH$, do đó $AH \perp (SBC)$.
Vậy $\mathrm{d}(A,(SBC)) = AH$.
Trong tam giác vuông ABC ta có

$$\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2}.$$



Trong tam giác vuông SAD ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{19}{12a^2}.$$

$$\Rightarrow \quad AH = \frac{2a\sqrt{57}}{19}.$$

Vậy $\mathrm{d}(A,(SBC)) = \dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$.

Cách khác. Hình chóp $S.ABC$ có AS, AB, AC đôi một vuông góc với nhau tại A nên

$$\frac{1}{\mathrm{d}^2(A,(SBC))} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{19}{12a^2}.$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}(A,(SBC)) = \frac{2a\sqrt{57}}{19}.$$

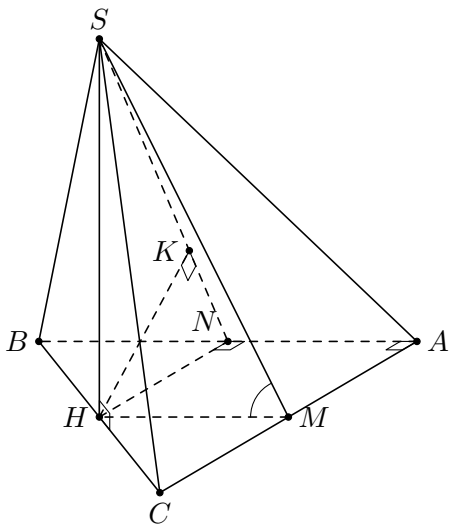
Chọn đáp án (B) □

Câu 114. Hình chóp $S.ABC$ đáy là tam giác vuông tại A, $AB = 2a$, $AC = a$, tam giác SBC cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC). Biết góc hợp bởi (SAC) và (ABC) là $60°$. Khoảng cách từ C đến (SAB) là

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Gọi H, M lần lượt là trung điểm của BC, AC.
Khi đó $HM \parallel AB \Rightarrow HM \perp AC$ (1).
Ta có $\triangle SBC$ cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC).
Suy ra $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp AC$ (2).
Từ (1) và (2) $\Rightarrow AC \perp SM$.
Có $\begin{cases} (SAC) \cap (ABC) = AC \\ AC \perp SM \subset (SAC) \\ AC \perp HM \subset (ABC) \end{cases}$
$\Rightarrow$ Góc hợp bởi (SAC) và (ABC) là $\widehat{SMH} = 60°$.



Có $HM = \dfrac{1}{2}AB = a \Rightarrow SH = HM \cdot \tan\widehat{SMH} = a \cdot \tan 60° = a\sqrt{3}$.

Kẻ $HN \perp AB$, $HK \perp SN$ ($N \in AB$, $K \in SN$). Khi đó $HK \perp (SAB)$ và $HN = \dfrac{1}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Có $\mathrm{d}\,(C,(SAB)) = 2 \cdot \mathrm{d}\,(H,(SAB)) = 2 \cdot HK$.

Lại có $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HN^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{13}{3a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$.

Vậy $\mathrm{d}\,(C,(SAB)) = \dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$.

Chọn đáp án B □

Câu 115. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OC = 2a$, $OA = OB = a$. Gọi M là trung điểm của AB. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AC.

A. $\dfrac{2a}{3}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}a}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.

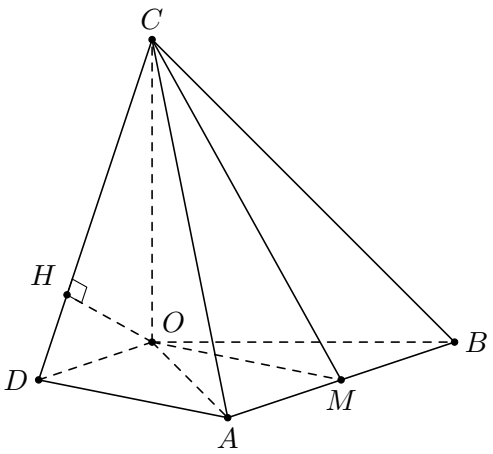
Lời giải.

Dựng hình bình hành $AMOD$, $OM \perp AM$ nên hình bình hành $AMOD$ là hình chữ nhật. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên đường thẳng CD. Ta có

$$\begin{cases} AD \perp DO \\ AD \perp CO \end{cases} \Rightarrow AD \perp OH \Rightarrow OH \perp (ACD). \quad (1)$$

$OM \parallel (ACD) \Rightarrow \mathrm{d}(OM, AC) = \mathrm{d}(O, (ACD))$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra

$$\mathrm{d}(OM, AC) = OH = \frac{OC \cdot OD}{\sqrt{OC^2 + OD^2}} = \frac{2\sqrt{5}a}{5}.$$



Chọn đáp án B □

Câu 116. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

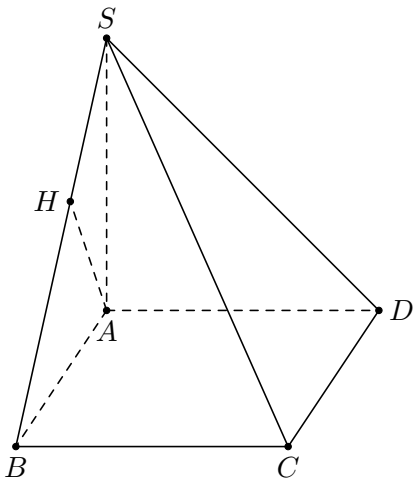
A. $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $BC \perp AB$ và $BC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABCD)$), suy ra $BC \perp (SAB)$.
Kẻ $AH \perp SB$ trong mặt phẳng (SAB). Khi đó $AH \perp (SBC)$, hay $AH = \mathrm{d}(A, (SBC))$. Ta có tam giác SAB vuông tại A và đường cao AH nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{SA^2} \Leftrightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} \Leftrightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án D □

Câu 117. Cho hình trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2a$, $AB = a\sqrt{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC là

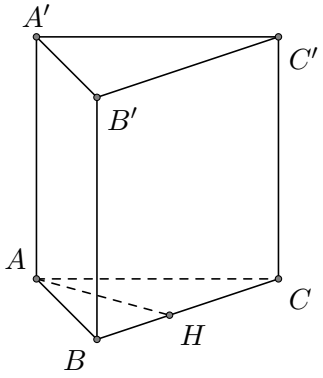
A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{3}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BC. Khi đó $AH \perp BC$.
Mặt khác từ giả thiết thì $AA' \perp AH$. Do đó AH chính là khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC.
Ta có $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a$ Ta có tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2a$, $AB = a\sqrt{3}$ và đường cao AH nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC là $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án B □

Câu 118. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{7}}{7}$.

✍Lời giải.

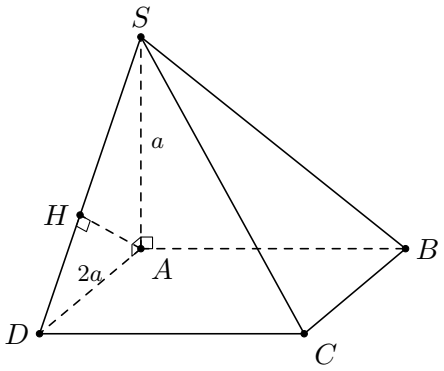
Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$.

Kẻ $AH \perp SD, H \in SD$, mà $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$.

Suy ra $AH \perp (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}(A,(SCD)) = AH$.

Xét tam giác vuông SAD, ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$



Chọn đáp án C □

Câu 119. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $AC = 2a$, $AA' = 2a\sqrt{5}$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi K, I lần lượt là trung điểm của các cạnh CC', BB'. Khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng $(A'BK)$ bằng

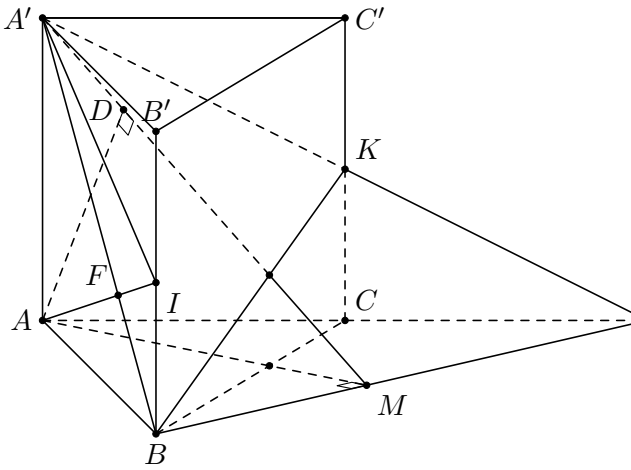
A. $a\sqrt{15}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{6}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$.

✍Lời giải.

Kéo dài $A'K$ và AC cắt nhau tại E, AI cắt $A'B$ tại F.

Gọi M là hình chiếu vuông góc của A lên BE, D là hình chiếu vuông góc của A lên $A'M$.

Ta có $\begin{cases} BE \perp A'A \\ BE \perp AM \end{cases} \Rightarrow BE \perp AD$. Cùng với đó, ta có $AD \perp A'M \Rightarrow AD \perp (A'BE) \Rightarrow \mathrm{d}(A,(A'BK)) = AD$.



Ta có

$$\frac{IF}{FA} = \frac{IB}{A'A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{d}\left(I,(A'BK)\right) = \frac{1}{2}\mathrm{d}\left(A,(A'BK)\right).$$

Do CK là đường trung bình của $\triangle EAA'$ nên ta có

$$AE = 2AC \Rightarrow S_{\triangle BAE} = 2S_{\triangle BAC} = AB \cdot AC \cdot \sin A = a \cdot 2a \cdot \sin 120^\circ = a^2\sqrt{3}.$$

Xét tam giác $\triangle ABE$, ta có

$$BE = \sqrt{AB^2 + AE^2 - 2AB \cdot AE \cdot \cos A} = a\sqrt{21} \Rightarrow AM = \frac{2S_{\triangle ABE}}{BE} = \frac{2\sqrt{7}}{7}a.$$

Xét tam giác $AA'M$ vuông tại A ta có

$$\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{20a^2} + \frac{7}{4a^2} \Rightarrow AD = \frac{a\sqrt{5}}{3}.$$

Từ đây suy ra khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(A'BK)$ là

$$\mathrm{d}\left(I,(A'BK)\right) = \frac{1}{2}\mathrm{d}\left(A,(A'BK)\right) = \frac{1}{2}AD = \frac{a\sqrt{5}}{6}.$$

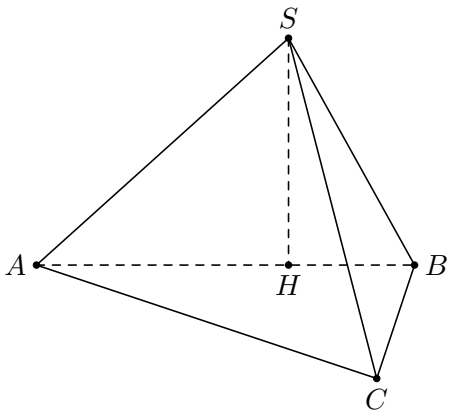
Chọn đáp án B □

Câu 120.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 4, góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) là $45°$. Hình chiếu của S lên (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BC.

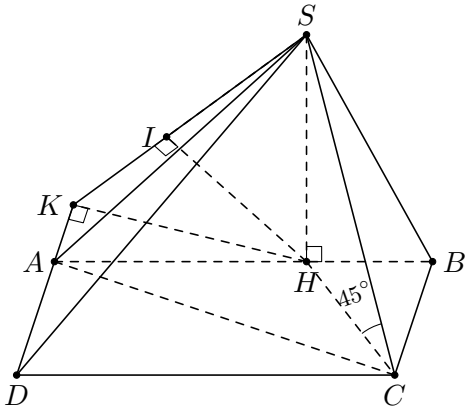
A. $d = \dfrac{4\sqrt{210}}{45}$. **B.** $d = \dfrac{\sqrt{210}}{5}$.

C. $d = \dfrac{4\sqrt{210}}{15}$. **D.** $d = \dfrac{2\sqrt{210}}{15}$.



✍Lời giải.

Dựng hình bình hành $ABCD$.
Ta có $BC \parallel AD \Rightarrow BC \parallel (SAD)$.
Khi đó $\mathrm{d}(SA, BC) = \mathrm{d}(BC, (SAD)) = \mathrm{d}(B, (SAD))$.
Vì $BH \cap (SAD) = A$ nên $\dfrac{\mathrm{d}(B, (SAD))}{\mathrm{d}(H, (SAD))} = \dfrac{AB}{AH} = \dfrac{3}{2}$
hay $\mathrm{d}(B, (SAD)) = \dfrac{3}{2}\mathrm{d}(H, (SAD))$.
Kẻ $HK \perp AD$ tại K và $HI \perp SK$ tại I.
Ta có $\begin{cases} DK \perp HK \\ DK \perp SH \end{cases} \Rightarrow DK \perp (SHK) \Rightarrow DK \perp HI$ (1).
Mặt khác $HI \perp SK$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $HI \perp (SAD) \Rightarrow \mathrm{d}(H, (SAD)) = HI$



Vì $SH \perp (ABC)$ nên góc giữa SC và (ABC) bằng góc $\widehat{SDH} \Rightarrow \widehat{SCH} = 45°$.
Tam giác ABH có $BC = 4$, $HB = \dfrac{1}{3}AB = \dfrac{4}{3}$, $\widehat{CBH} = 60°$
$\Rightarrow CH^2 = BC^2 + BH^2 - 2 \cdot BC \cdot CH \cdot \cos 60° = 16 + \dfrac{16}{9} - 2 \cdot 4 \cdot \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{112}{9} \Rightarrow CH = \dfrac{4\sqrt{7}}{3}$.
Tam giác SHC vuông cân tại $H \Rightarrow SH = CH = \dfrac{4\sqrt{7}}{3}$.
Tam giác AHK vuông tại K có $AH = \dfrac{2}{3}AB = \dfrac{8}{3}$, $\widehat{HAK} = 60°$
$\Rightarrow HK = AH \cdot \sin 60° = \dfrac{8}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.
Tam giác SHK vuông tại H có HI là đường cao $\Rightarrow \dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{1}{HS^2} + \dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{9}{112} + \dfrac{3}{16} = \dfrac{15}{56}$
$\Rightarrow HI = \dfrac{2\sqrt{210}}{15} \Rightarrow \mathrm{d}(B, (SAD)) = \dfrac{3}{2}HI = \dfrac{\sqrt{210}}{5} \Rightarrow \mathrm{d}(SA, BC) = \dfrac{\sqrt{210}}{5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 121. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB = a$, $AD = 2a$. Mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với $(ABCD)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SD. Tính khoảng cách giữa AH và SC biết $AH = a$.

A. $\dfrac{\sqrt{19}}{19}a$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{19}}{19}a$. **C.** $\dfrac{\sqrt{73}}{73}a$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{73}}{73}a$.

✍Lời giải.

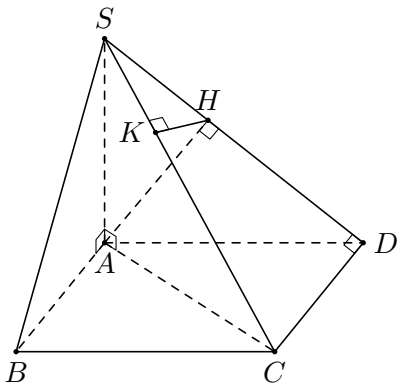
Từ H kẻ HK vuông góc với SC tại K.

Ta có $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAB)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(SAD)=SA\end{cases}\Rightarrow SA\perp(ABCD).$

$\begin{cases}SA\perp CD\ (\text{vì } CD\subset(ABCD))\\AD\perp CD\ (\text{vì } ABCD \text{ là hình chữ nhật})\end{cases}\Rightarrow CD\perp AH.$

$\begin{cases}CD\perp AH\\SD\perp AH\end{cases}\Rightarrow AH\perp(SCD)\Rightarrow AH\perp HK.$

Do đó $HK=\mathrm{d}(AH,SC)$.



Trong $\triangle SAD$ vuông tại A, ta có $\dfrac{1}{SA^2}=\dfrac{1}{AH^2}-\dfrac{1}{AD^2}=\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{(2a)^2}=\dfrac{3}{4a^2}\Rightarrow SA=\dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$.

Trong $\triangle SAH$ vuông tại H, ta có $SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\sqrt{\left(\dfrac{2\sqrt{3}a}{3}\right)^2-a^2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$$\triangle SHK\backsim\triangle SCD\Rightarrow\frac{HK}{CD}=\frac{SH}{SC}\Rightarrow HK=\frac{SH\cdot CD}{SC}=\frac{\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\cdot a}{\sqrt{\left(\dfrac{2\sqrt{3}a}{3}\right)^2+\left(a\sqrt{5}\right)^2}}=\frac{\sqrt{19}}{19}a.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 122. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $4a$. Gọi H là điểm thuộc đường thẳng AB sao cho $3\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{0}$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SHC) đều vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SHC).

A. $\dfrac{5a}{6}$. **B.** $\dfrac{12a}{5}$. **C.** $\dfrac{6a}{5}$. **D.** $\dfrac{5a}{12}$.

✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SHC)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(SHC)=SH\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABCD)$

Kẻ $BK\perp HC$ tại K.

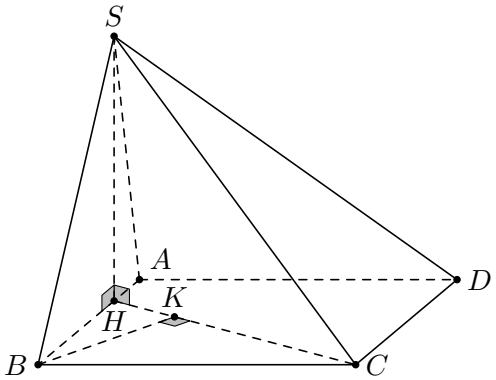
Mặt khác $BK\perp SH$ (do $SH\perp(ABCD)$).

Suy ra $BK\perp(SHC)\Rightarrow\mathrm{d}(B,(SHC))=BK$.

Do $3\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{0}$ nên $HB=3HA\Rightarrow HB=3a$.

Ta có

$$BK=\frac{BH\cdot BC}{\sqrt{BH^2+BC^2}}=\frac{3a\cdot 4a}{\sqrt{9a^2+16a^2}}=\frac{12a}{5}.$$



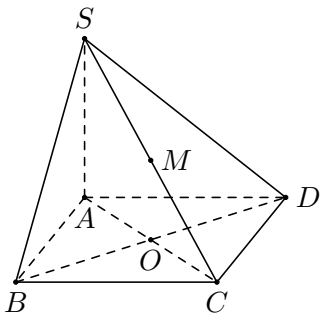
Chọn đáp án (B) □

Câu 123. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, tâm O, cạnh a. SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA=2a$. Gọi M là trung điểm của SC. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SBD).

A. $\mathrm{d}(M,(SBD))=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\mathrm{d}(M,(SBD))=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

C. $\mathrm{d}(M,(SBD))=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\mathrm{d}(M,(SBD))=\dfrac{a}{3}$.

✍Lời giải.



— $\dfrac{\mathrm{d}(M,(SBD))}{\mathrm{d}(C,(SBD))}=\dfrac{SM}{SC}=\dfrac{1}{2}$.

— $\dfrac{\mathrm{d}(C,(SBD))}{\mathrm{d}(A,(SBD))}=\dfrac{OC}{OA}=1$.

— Do đó $\mathrm{d}(M,(SBD))=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}(A,(SBD))$.

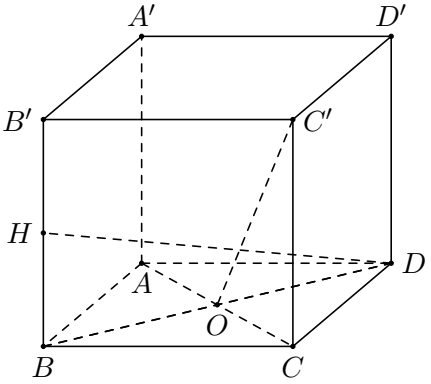
— Gọi $h=\mathrm{d}(A,(SBD))$, ta có

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{9}{4a^2}$$

Suy ra $h=\dfrac{2a}{3}$. Vậy $\mathrm{d}(M,(SBD))=\dfrac{a}{3}$.

Chọn đáp án D □

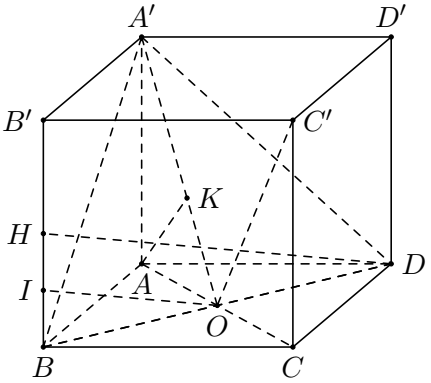
Câu 124.
Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh a, $\widehat{BAD}=120^\circ$. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. Gọi H là trung điểm cạnh BB'. Giá trị cô-sin của góc giữa HD và OC' bằng



A. $\cos(HD,OC')=\dfrac{1}{3}$. **B.** $\cos(HD,OC')=\dfrac{\sqrt{14}}{21}$.

C. $\cos(HD,OC')=\dfrac{2\sqrt{14}}{21}$. **D.** $\cos(HD,OC')=\dfrac{4\sqrt{14}}{21}$.

✍Lời giải.



Dựng $AK\perp A'O$, dễ dàng chứng minh được $AK\perp(A'BD)$.

Ta có $AK=\mathrm{d}(A,(A'BD))=\mathrm{d}(C,(A'BD))=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Tam giác ABD có $AB=AD=a,\widehat{BAD}=120^\circ\Rightarrow AO=\dfrac{a}{2}$.

Xét $\Delta A'AO$ ta có $\dfrac{1}{AK^2}=\dfrac{1}{AO^2}+\dfrac{1}{AA'^2}\Rightarrow AA'=a\sqrt{2}$.

Gọi I là trung điểm $HB\Rightarrow OI\parallel HD$ và $BI=\dfrac{1}{4}AA'=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Xét ΔOBI ta có $OI^2=OB^2+BI^2=\dfrac{7a^2}{8}$,

Xét $\Delta C'CO$ ta có $OC'^2=OC^2+CC'^2=\dfrac{9a^2}{4}$.

Xét $\Delta C'B'I$ ta có $C'I^2=C'B'^2+B'I'^2=\dfrac{17a^2}{8}$.

Áp dụng định lý hàm số cô-sin trong $\Delta C'OI$ suy ra

$$\cos(HD,OC')=\cos(OI,OC')=\frac{OI^2+OC'^2-C'I^2}{2OI\cdot OC'}=\frac{2\sqrt{14}}{21}.$$

Chọn đáp án C □

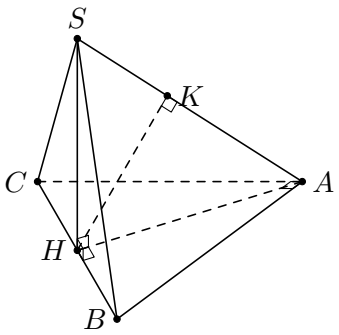
Câu 125. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt đáy. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, BC được kết quả

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm của BC.

Ta có $\begin{cases}(SBC)\perp(ABC)\\(SBC)\cap(ABC)=BC\\SH\perp BC\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABC)$.



Vì $\triangle ABC$ vuông cân tại A nên $AH\perp BC$.

Mặt khác ta cũng có $\begin{cases}BC\perp AH\\BC\perp SH\end{cases}\Rightarrow BC\perp SA$.

Trong tam giác vuông SHA, từ H kẻ $HK\perp SA$ tại K, suy ra $HK\perp BC$.

Vậy HK là đoạn vuông góc chung của SA và BC.

Có $SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AH=\dfrac{a}{2}$ nên $\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{SH^2}+\dfrac{1}{HA^2}\Rightarrow HK=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Suy ra $\mathrm{d}(SA,BC)=HK=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

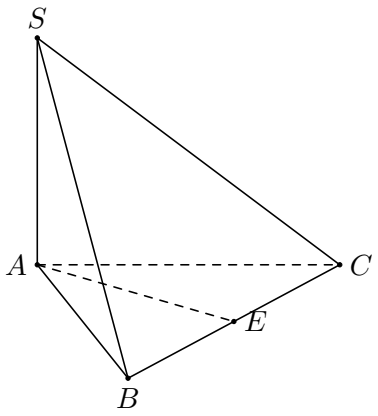
Chọn đáp án (A) □

Câu 126. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** a. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

- Gọi E là trung điểm của BC, ta có tam giác ABC đều nên $BC\perp AE$.
- $SA\perp(ABC)\Rightarrow AE\perp SA$.
- Suy ra AE là đường vuông góc chung của SA và BC.
- Vậy $\mathrm{d}(SA,BC)=AE=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



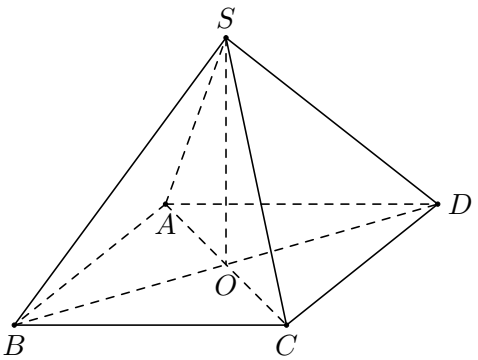
Chọn đáp án (D) □

Câu 127. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 60°. Khoảng cách từ đỉnh S đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** a.

✍Lời giải.

- Gọi O là giao điểm của AC và BD. Hình chóp $S.ABCD$ đều nên $SO\perp(ABCD)$ nên $\mathrm{d}(S,(ABCD))=SO$.
- OB là hình chiếu của SB trên $(ABCD)$ nên $(SB,(ABCD))=(SB,OB)=\widehat{SBO}$ nên $\widehat{SBO}=60^\circ$.
- $SO=OB\tan\widehat{SBO}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\tan 60^\circ=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.



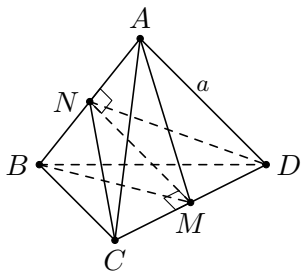
Chọn đáp án (B) □

Câu 128. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng 4. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $2\sqrt{3}$.

✍Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và AB.
Khi đó $\triangle ABM$ cân tại M, $\triangle CDN$ cân tại N.
Do đó $\begin{cases} MN \perp AB \\ MN \perp CD \end{cases}$, suy ra MN là đoạn vuông góc chung của 2 đường thẳng AB và CD.
Xét $\triangle AMN$ vuông tại N có $AN = \dfrac{AB}{2} = 2$, $AM = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ nên $MN = \sqrt{AM^2 - AN^2} = 2\sqrt{2}$.

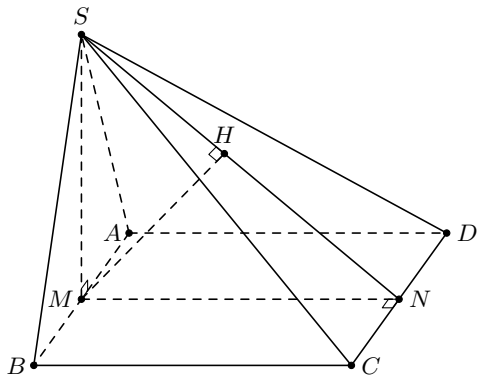


Chọn đáp án (A) □

Câu 129. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách h từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).

A. $h = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $h = a$. **C.** $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{7}$.

✍Lời giải.
Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD; H là hình chiếu vuông góc của M trên SN. Ta có MN là đường trung bình của hình vuông $ABCD$ nên $MN \parallel AD \parallel BC$ và $MN = a$.
Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC) nên $SM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $SM \perp AB \Rightarrow SM \perp (ABC)$.



$\left.\begin{matrix} CD \perp MN \\ CD \perp SM \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \perp (SMN) \Rightarrow CD \perp MH.$
$\left.\begin{matrix} MH \perp CD \\ MH \perp SN \end{matrix}\right\} \Rightarrow MH \perp (SCD).$
Do $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD)$ nên $\mathrm{d}(A,(SCD)) = \mathrm{d}(M,(SCD)) = MH$.
Tam giác SMN vuông tại M nên $\dfrac{1}{MH^2} = \dfrac{1}{MN^2} + \dfrac{1}{SM^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{4}{3a^2} = \dfrac{7}{3a^2}$.
Vậy $\mathrm{d}(A,(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.
Chọn đáp án (A) □

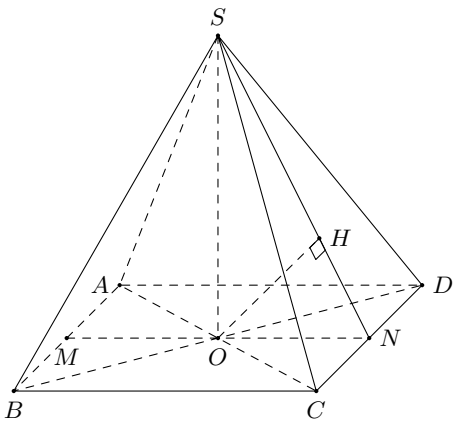
Câu 130. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = a$. Khoảng cách giữa SC và AB bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{15}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{15}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

✍Lời giải.
Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD; H là hình chiếu vuông góc của O lên SN.
Vì $AB \parallel CD$ nên

$$\mathrm{d}(AB,SC) = \mathrm{d}(AB,(SCD)) = \mathrm{d}(M,(SCD)) = 2 \cdot \mathrm{d}(O,(SCD)).$$

(vì O là trung điểm của MN).



Ta có $\begin{cases} CD \perp SO \\ CD \perp ON \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SON) \Rightarrow CD \perp OH.$
Khi đó $\begin{cases} CD \perp OH \\ OH \perp SN \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SCD).$
Suy ra $\mathrm{d}(O,(SCD)) = OH$. Tam giác SON vuông tại O nên

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{ON^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

Vậy $\mathrm{d}(AB,SC) = 2OH = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.
Chọn đáp án (D) □

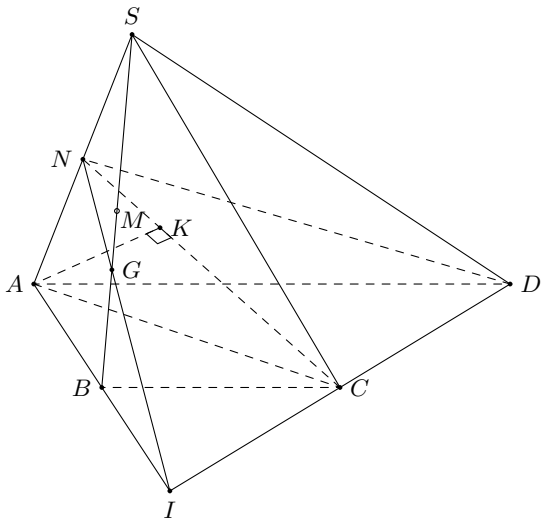
Câu 131. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình thang vuông tại A và B, biết $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SA. Tính khoảng cách từ M đến (NCD) theo a.

A. $\dfrac{a\sqrt{66}}{22}$. **B.** $2a\sqrt{66}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{66}}{11}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{66}}{44}$.

✍Lời giải.

Gọi I là giao điểm của AB và CD. Vì $AD = 2BC$ nên B là trung điểm của AI. Gọi G là giao điểm của SB và IN, dễ thấy G là trọng tâm tam giác SAI. Do đó $SG = \dfrac{2}{3}SB = \dfrac{4}{3}SM \Rightarrow MG = \dfrac{1}{4}SG$, mà $G \in (NCD)$ nên

$$\mathrm{d}(M,(NCD)) = \frac{1}{4}\mathrm{d}(S,(NCD)) = \frac{1}{4}\mathrm{d}(A,(NCD)).$$



Lại có $CD \perp AC$, $CD \perp SA \Rightarrow CD \perp (SAC)$. Gọi K là hình chiếu của A lên SC thì $\mathrm{d}(A,(NCD)) = AK = \dfrac{AN \cdot AC}{\sqrt{AN^2 + AC^2}}$, với $AN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AC = a\sqrt{2}$ ta được $AK = \dfrac{a\sqrt{66}}{11}$.

Vậy $\mathrm{d}(M,(NCD)) = \dfrac{1}{4}AK = \dfrac{a\sqrt{66}}{44}$.

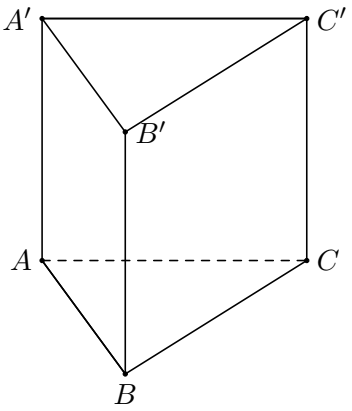
Chọn đáp án (D) □

Câu 132. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $A'C'$ bằng

A. a. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $2a$. **D.** $a\sqrt{3}$.

✍Lời giải.

Ta thấy $AB \subset (ABC)$; $A'C' \subset (A'B'C')$.
Mà $(ABC) \parallel (A'B'C')$.
Nên $\mathrm{d}(AB; A'C') = \mathrm{d}((ABC);(A'B'C')) = AA' = a$.



Chọn đáp án (A) □

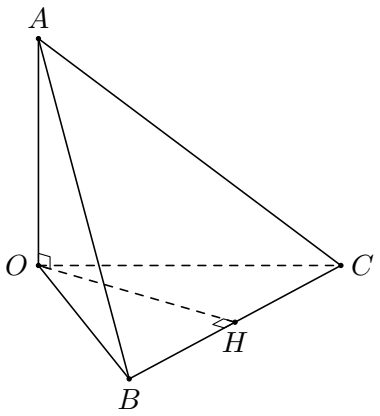
Câu 133. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng OA và BC bằng

A. $\sqrt{2}a$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **C.** a. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm của BC, do OBC là tam giác vuông cân nên OH cũng là đường cao trong tam giác OBC. Suy ra OH là đường vuông góc chung của hai đường thẳng OA và BC.

Khi đó $\mathrm{d}(OA, BC) = OH = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.



□

Câu 134. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Khoảng cách từ A đến (SBC) là

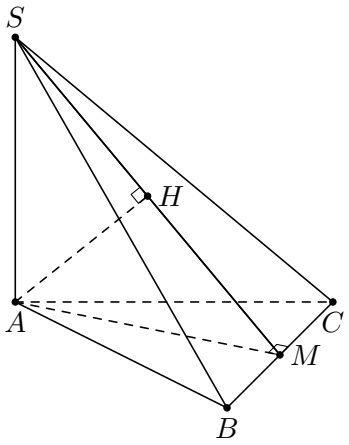
A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC thì $AM \perp BC, AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SM, ta có $AH \perp (SBC)$. Trong tam giác vuông SAM, ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Vậy $\mathrm{d}(A, (SBC)) = AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.



Chọn đáp án (A)

□

Câu 135. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và $B'C'$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và $B'D'$ bằng

A. $a\sqrt{5}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $3a$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.

✍Lời giải.

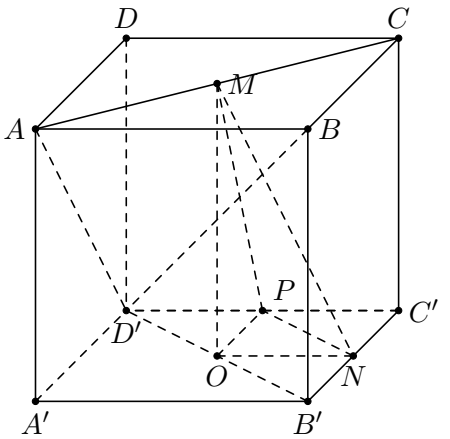
Gọi O, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $B'D', BC', C'D'$. Vì $B'D' \parallel NP$ nên

$$\mathrm{d}(B'D', MN) = \mathrm{d}(B'D', (MNP)) = \mathrm{d}(O, (MNP)).$$

Tứ diện $O.MNP$ có OM, ON, OP đôi một vuông góc, do đó

$$\frac{1}{\mathrm{d}(O, (MNP))^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} + \frac{1}{OP^2}$$

$\Rightarrow \mathrm{d}(O, (MNP)) = \dfrac{a}{3}$. Vậy $\mathrm{d}(B'D', MN) = \dfrac{a}{3}$.



Chọn đáp án (D)

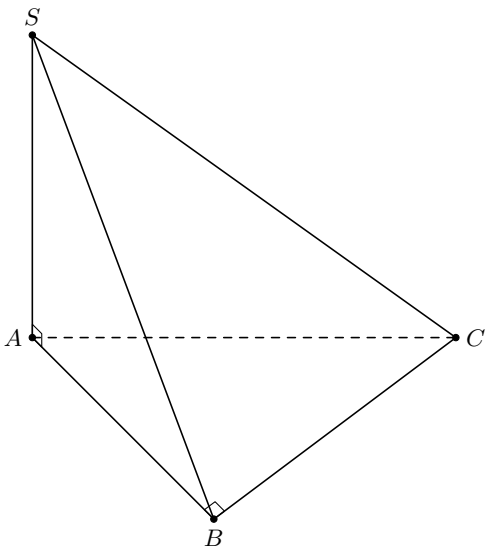
□

Câu 136. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB = 6$, $BC = 8$, $AC = 10$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BC.

A. $d = 0$. **B.** $d = 8$. **C.** $d = 10$. **D.** $d = 6$.

✍Lời giải.

Ta có $AB = 6$, $BC = 8$, $AC = 10$ nên tam giác ABC vuông tại B. Khi đó $\begin{cases} SA \perp AB \\ BC \perp AB \end{cases}$ nên AB là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng SA và BC.
Vậy $d = AB = 6$.

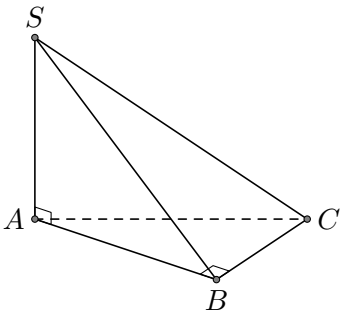


Chọn đáp án D □

Câu 137. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB = 6$, $BC = 8$, $AC = 10$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BC.

A. d $= 0$. **B.** d $= 8$. **C.** d $= 10$. **D.** d $= 6$.

✍Lời giải.
Ta có $AB = 6$, $BC = 8$, $AC = 10$ nên ΔABC vuông tại B.
Khi đó $SA \perp AB$ và $BC \perp AB$ nên AB là đoạn vuông góc chung của SA và BC.
Do hai đường này chéo nhau nên $\mathrm{d}(SA, BC) = AB = 6$.

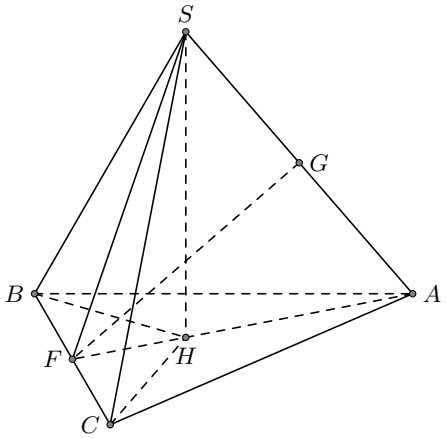


Chọn đáp án D □

Câu 138. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{6}$, khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng $\dfrac{3a}{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

✍Lời giải.
Gọi F là trung điểm của BC, G là hình chiếu vuông góc của F trên SA.
Khi đó $BC \perp (SAF) \Rightarrow BC \perp FG$ hay FG là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau SA và BC.
Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC là độ dài đoạn $FG = \dfrac{3a}{2}$.
Mà FA là đường cao của tam giác đều cạnh bằng $a\sqrt{6}$ nên $FA = \dfrac{a\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.



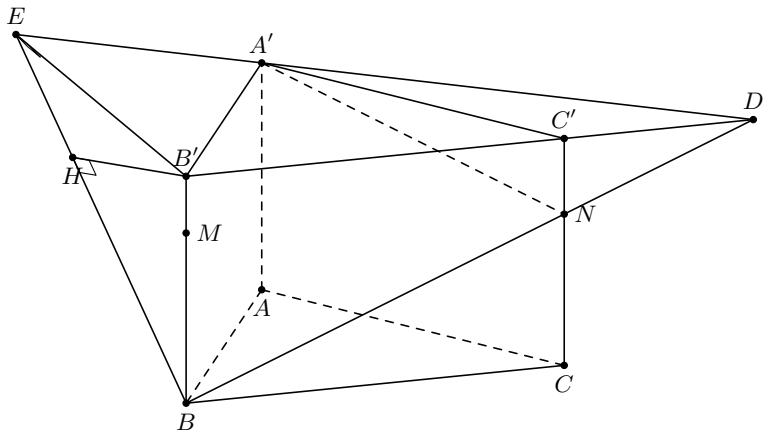
Từ đó suy ra $AG = \sqrt{FA^2 - FG^2} = \sqrt{\left(\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{3a}{2}\right)^2} = \dfrac{3a}{2}$.

Như vậy tam giác AGF vuông cân tại G.
Suy ra tam giác SHA vuông cân tại H.
Do đó $SH = AH = \dfrac{2}{3}AF = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$.
Vậy thể tích của khối chóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3}SH\cdot S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}\cdot a\sqrt{2}\cdot\dfrac{(a\sqrt{6})^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 139. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = 1$, $AC = 2$, $AA' = 3$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên cạnh BB', CC' sao cho $BM = 3B'M$, $CN = 2C'N$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(A'BN)$.

A. $\dfrac{9\sqrt{138}}{184}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{138}}{46}$. **C.** $\dfrac{9\sqrt{3}}{16\sqrt{46}}$. **D.** $\dfrac{9\sqrt{138}}{46}$.

✍Lời giải.



Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\cdot AB\cdot AC\cos\widehat{BAC} = 1^2 + 2^2 - 2\cdot 1\cdot 2\cos 120^\circ = 7$. Suy ra $BC = \sqrt{7}$.
Ta cũng có $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2\cdot AB\cdot BC} = \dfrac{1^2 + \sqrt{7}^2 - 2^2}{2\cdot 1\cdot\sqrt{7}} = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$, suy ra $\cos\widehat{A'B'C'} = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$.
Gọi $D = BN\cap B'C'$, suy ra $\dfrac{DC'}{DB'} = \dfrac{C'N}{BB'} = \dfrac{1}{3}$, nên $DB' = \dfrac{3}{2}B'C' = \dfrac{3\sqrt{7}}{2}$.
Từ đó ta có $A'D^2 = A'B'^2 + B'D^2 - 2\cdot A'B'\cdot B'D\cos\widehat{A'B'D} = 1^2 + \left(\dfrac{3\sqrt{7}}{2}\right)^2 - 2\cdot 1\cdot\dfrac{3\sqrt{7}}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{7}} = \dfrac{43}{4}$. Suy ra $A'D = \dfrac{\sqrt{43}}{2}$.
Kẻ $B'E\perp A'D$ và $B'H\perp BE$, suy ra $B'H\perp(A'BN)$. Do đó $\mathrm{d}\,(B',(A'BN)) = B'H$.
Từ $\cos\widehat{A'B'C'} = \dfrac{2}{\sqrt{7}}\Rightarrow\sin\widehat{A'B'C'} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.
Do đó $S_{A'B'D} = \dfrac{1}{2}\cdot A'B'\cdot B'D\cdot\sin\widehat{A'B'D} = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\dfrac{3\sqrt{7}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

$$B'E = \frac{2S_{A'B'D}}{A'D} = \frac{2\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{\sqrt{43}}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{43}}.$$

$$\frac{1}{B'H^2} = \frac{1}{B'E^2} + \frac{1}{B'B^2} = \frac{1}{\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{43}}\right)^2} + \frac{1}{3^2} = \frac{46}{27}\Rightarrow B'H = \sqrt{\frac{27}{46}}.$$

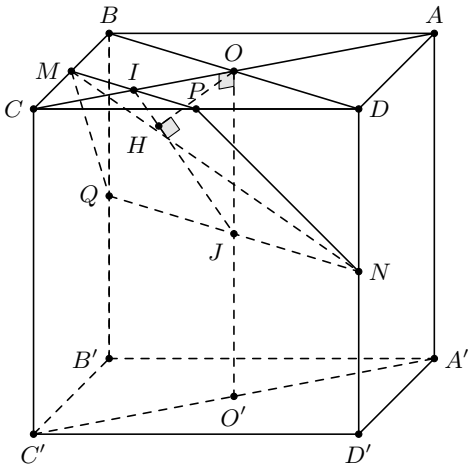
Từ $BM = 3B'M$ suy ra $\mathrm{d}\,(M,(A'BN)) = \dfrac{3}{4}\mathrm{d}\,(B',(A'BN)) = \dfrac{3}{4}\cdot B'H = \dfrac{3}{4}\cdot\sqrt{\dfrac{27}{46}} = \dfrac{9\sqrt{138}}{184}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 140. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và DD'. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và BD.

A. $\sqrt{3}a$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{6}$.

✍Lời giải.

Gọi O, O' lần lượt là tâm hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của CD, BB', ta có $MP \parallel NQ \parallel BD$.
Mặt khác $BD \perp (AA'C'C)$ nên $MP \perp (AA'C'C)$.
Gọi I, J lần lượt là giao điểm của MP và AC, OO' và NQ. Ta có $(AA'C'C)$ cắt $(MPNQ)$ theo giao tuyến IJ. Ta tính được $OI = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$, $OJ = \dfrac{a}{2}$.
Kẻ $OH \perp IJ$ tại H suy ra $OH \perp (MPNQ)$.
$\triangle OIJ$ vuông tại O nên $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OI^2} + \dfrac{1}{OJ^2} = \dfrac{12}{a^2}$
$\Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.



Vì $BD \parallel MP$ nên $BD \parallel (MNP)$.

Vậy $\mathrm{d}(BD, MN) = \mathrm{d}(BD, (MNP)) = \mathrm{d}(O, (MNP)) = OH = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

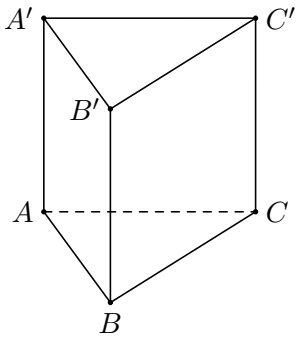
Chọn đáp án (D) □

Câu 141. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $A'C'$ bằng

A. $a\sqrt{3}$. **B.** a. **C.** $2a$. **D.** $a\sqrt{2}$.

✍Lời giải.

Vì $AA' \perp AB$ và $AA' \perp A'C'$ nên AA' là đoạn vuông góc chung của AB và $A'C'$.
Do đó $\mathrm{d}(AB, A'C') = AA' = a$.



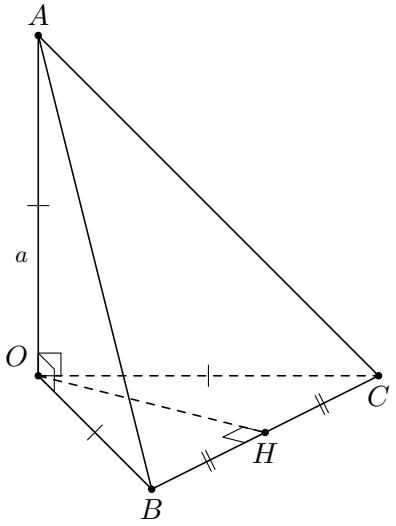
Chọn đáp án (B) □

Câu 142. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và đều bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng OA và BC bằng

A. a. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Dễ thấy $OA \perp (OBC)$ và $\triangle OBC$ vuông cân tại O. Gọi H là trung điểm cạnh BC thì OH là đoạn vuông góc chung của OA và BC.
Vậy: $\mathrm{d}(OA, BC) = OH = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

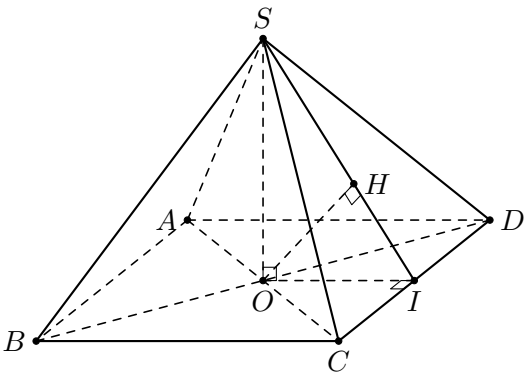


Chọn đáp án (C) □

Câu 143. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh đáy bằng a, độ dài cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.

A. a. **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

✍Lời giải.



Gọi O là tâm của $ABCD$.
Vì $AB \parallel CD$ nên $AB \parallel (SCD)$.
Ta có $\mathrm{d}(AB, SC) = \mathrm{d}(AB, (SCD)) = \mathrm{d}(A, (SCD))$.
Vì AO cắt (SCD) tại C nên $\mathrm{d}(A, (SCD)) = \frac{CA}{CO} \cdot \mathrm{d}(O, (SCD)) = 2\mathrm{d}(O, (SCD))$.
Gọi I là trung điểm CD, H là hình chiếu vuông góc của O lên SI.
Ta có $\begin{cases} OH \perp SI \\ OH \perp CD \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SCD)$
nên $\mathrm{d}(O, (SCD)) = OH$.
Xét tam giác SOD vuông tại O, ta có

$$SO = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$OI = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$.
Xét tam giác SOI vuông tại O, ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

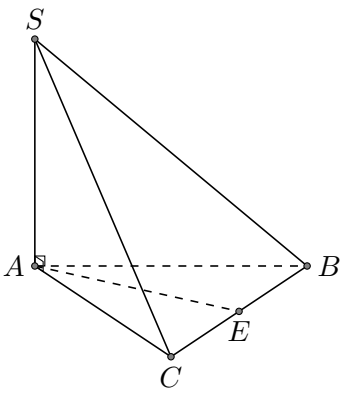
Vậy $\mathrm{d}(AB, SC) = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 144. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** a. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.



Gọi E là trung điểm của BC, ta có $\triangle ABC$ đều $\Rightarrow BC \perp AE$. (1)
Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow AE \perp SA$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra AE là đường vuông góc chung của hai đường thẳng SA và BC.
$\Rightarrow \mathrm{d}(SA, BC) = AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

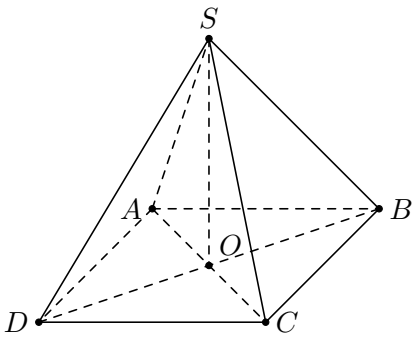
Chọn đáp án D □

Câu 145. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh a. Góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 60°. Khoảng cách từ đỉnh S đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** a.

✍Lời giải.

Trong $(ABCD)$ gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có $SO \perp (ABCD) \Rightarrow \mathrm{d}(S,(ABCD)) = SO$.
Ta lại có: OB là hình chiếu SB lên mặt phẳng $(ABCD)$
$\Rightarrow (SB,(ABCD)) = (SB,OB) = \widehat{SBO} = 60^o$.
Xét tam giác SOB vuông tại O, ta có
$SO = OB.\tan SBO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\tan 60^o = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.
Vậy $d(S,(ABCD)) = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

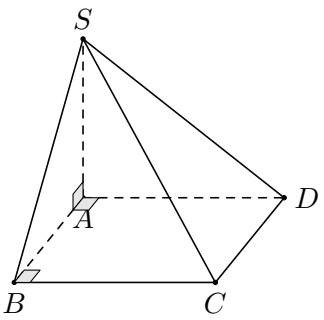


Chọn đáp án (B) □

Câu 146. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AC = a\sqrt{5}$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa SD và BC.

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{3a}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{2a}{3}$.

✍Lời giải.
Ta có $BC \parallel AD \Rightarrow BC \parallel (SAD)$.
Suy ra $\mathrm{d}(SD,BC) = \mathrm{d}(BC,(SAD)) = \mathrm{d}(B,(SAD)) = AB$.
Mà $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = a\sqrt{3}$.
Vậy $\mathrm{d}(SD,BC) = a\sqrt{3}$.

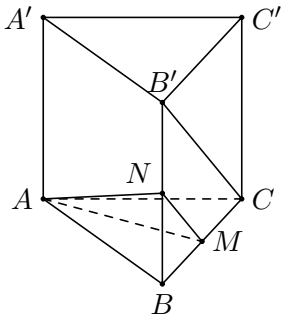


Chọn đáp án (A) □

Câu 147. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $BA = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$, M là trung điểm của BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

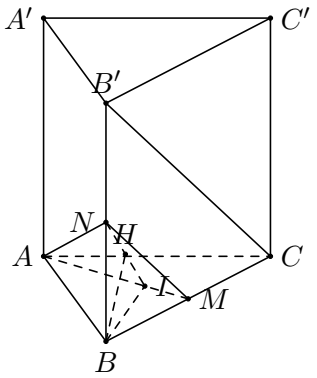
✍Lời giải.
Cách 1:
Gọi N là trung điểm của BB'. Ta có: MN là đường trung bình của $\Delta B'BC \Rightarrow MN \parallel B'C$.
Ta có:
$$\begin{cases} MN \parallel B'C(\text{ cmt }) \\ MN \subset (AMN) \\ B'C \subset (AMN) \end{cases} \Rightarrow B'C \parallel (AMN)$$
$\Rightarrow \mathrm{d}(AM;B'C) = \mathrm{d}(B'C;(AMN)) = \mathrm{d}(C;(AMN)) = \dfrac{3V_{N.AMC}}{S_{\Delta AMN}}$.



Ta có: ΔABC vuông, $BA = BC = a \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại B.
$\Rightarrow S_{\Delta AMC} = \dfrac{1}{2}S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot BA\cdot BC = \dfrac{1}{4}a^2$.
$V_{N.AMC} = \dfrac{1}{2}\cdot V_{N.ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot NB\cdot S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot BB'\cdot\dfrac{1}{2}\cdot BA\cdot BC = \dfrac{1}{24}\cdot a\sqrt{2}\cdot a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{24}$.
Xét ΔANB vuông tại B: $AN = \sqrt{AB^2 + NB^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.
Xét $\Delta BB'C$ vuông tại B:
$B'C = \sqrt{B'B^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow NM = \dfrac{1}{2}.B'C = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Xét ΔAMB vuông tại B: $AM = \sqrt{AB^2 + MB^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
Theo công thức Herong với $p = \dfrac{AN + MN + AM}{2}$.
Ta có: $S_{\Delta AMN} = \sqrt{p(p-AN)(p-AM)(p-NM)} = \dfrac{a^2\sqrt{14}}{8}$.

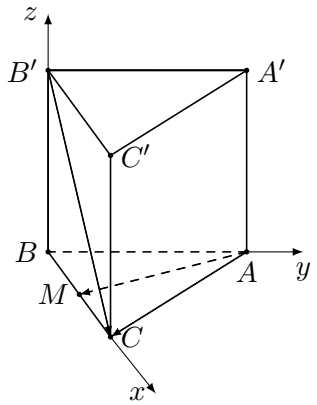
$\Rightarrow \mathrm{d}(AM;B'C)=\mathrm{d}(C;(AMN))=\dfrac{3V_{N.AMC}}{S_{\Delta AMN}}=\dfrac{3.a^3\sqrt{2}}{24}:\dfrac{a^2\sqrt{14}}{8}=\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Cách 2:



Tương tự cách 1 ta có
$\mathrm{d}(AM;B'C)=\mathrm{d}(B'C;(AMN))=\mathrm{d}(C;(AMN))=\mathrm{d}(B;(AMN))$.
Kẻ $BI\perp AM$ tại M.
Kẻ $BH\perp IN$ tại H.
Ta có: $BH\perp IN$ tại H và $BH\perp AM$.
Suy ra $AH\perp(ANM)$ tại $H\Rightarrow \mathrm{d}(B;(ANM))=BH$.
Xét ΔAMB vuông tại B, đường cao BI.
ta có: $\dfrac{1}{BI^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{BM^2}=\dfrac{5}{a^2}$.
Xét ΔIBN vuông tại B, đường cao BH.
Ta có: $\dfrac{1}{BH^2}=\dfrac{1}{IB^2}+\dfrac{1}{BN^2}=\dfrac{7}{a^2}$.
$\dfrac{1}{BH^2}=\dfrac{1}{IB^2}+\dfrac{1}{BN^2}=\dfrac{7}{a^2}\Rightarrow BH^2=\dfrac{a^2}{7}\Rightarrow BH=\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.
Vậy $\mathrm{d}(AM;B'C)=HB=\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Cách 3:



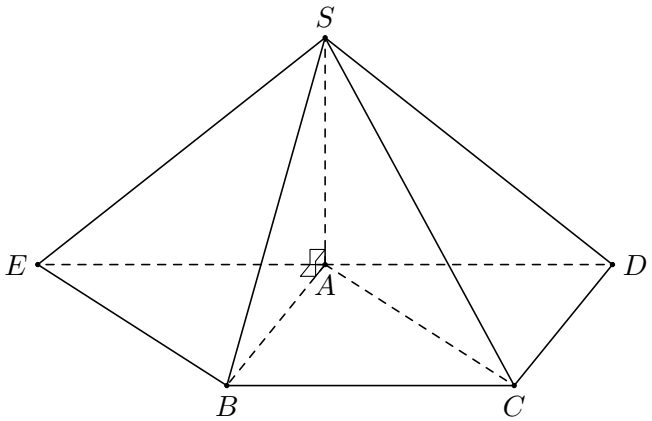
Gắn $ABC.A'B'C'$ lên hệ trục tọa độ $Oxyz$,
sao cho $O\equiv B$; $C\in Ox$; $A\in Oy$; $B'\in Oz$.
Khi đó $B(0;0;0)$, $C(a;0;0)$, $A(0;a;0)$, $B'(0;0;a\sqrt{2})$, $M\left(\dfrac{a}{2};0;0\right)$.
Ta có $\mathrm{d}(AM;B'C)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right]\right|}=\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Chọn đáp án C □

Câu 148. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, $BC=2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Khoảng cách giữa hai đường AC và SB bằng.

A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}a}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{3}$. **D.** $\dfrac{2a}{3}$.

✍**Lời giải.**



Dựng hình bình hành $ACBE$ ta có $AC\parallel(SBE)$ nên $\mathrm{d}(AC,SB)=\mathrm{d}(A,(SBE))=h$.
Do AS,AB,AE đôi một vuông góc nhau nên $\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AE^2}=\dfrac{9}{4a^2}$.
Như vậy $\mathrm{d}(A,(SBE))=h=\dfrac{2a}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 149. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh $2a$, cạnh bên $SA = a\sqrt{5}$. Khoảng cách giữa BD và SC là

A. $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{30}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{6}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{30}}{6}$.

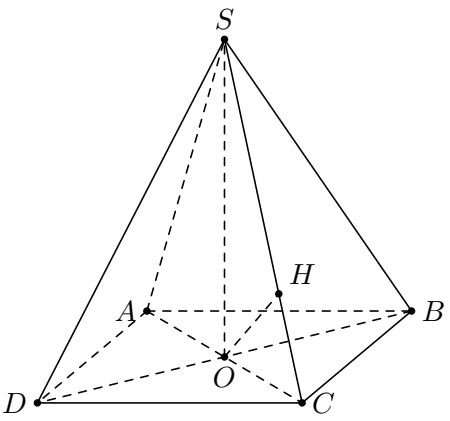
✍Lời giải.

Tam giác ABC vuông tại B, suy ra

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4a^2 + 4a^2} = 2a\sqrt{2} \Rightarrow AO = OC = a\sqrt{2}.$$

Tam giác SOC vuông tại O, suy ra

$$SO = \sqrt{5a^2 - 2a^2} = a\sqrt{3}.$$



Trong mặt phẳng (SAC), kẻ $OH \perp SC$ tại H. (1)

Do $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp OH.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\mathrm{d}(BD; SC) = OH$.

Trong tam giác vuông SOC có

$$OH \cdot SC = SO \cdot OC \Rightarrow OH = \frac{SO \cdot OC}{SC} = \frac{a\sqrt{30}}{5}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 150. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** a. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

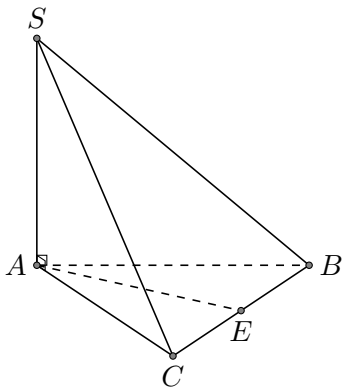
✍Lời giải.

Gọi E là trung điểm của BC, ta có $\triangle ABC$ đều $\Rightarrow BC \perp AE$. (1)

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow AE \perp SA$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra AE là đường vuông góc chung của hai đường thẳng SA và BC.

$\Rightarrow \mathrm{d}(SA, BC) = AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án D □

Câu 151. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh a. Góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 60°. Khoảng cách từ đỉnh S đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** a.

✍Lời giải.

Trong $(ABCD)$ gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có $SO \perp (ABCD) \Rightarrow \mathrm{d}(S, (ABCD)) = SO$.

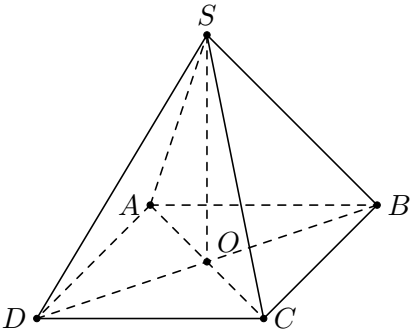
Ta lại có: OB là hình chiếu SB lên mặt phẳng $(ABCD)$

$\Rightarrow (SB, (ABCD)) = (SB, OB) = \widehat{SBO} = 60^o$.

Xét tam giác SOB vuông tại O, ta có

$SO = OB.\tan SBO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\tan 60^o = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

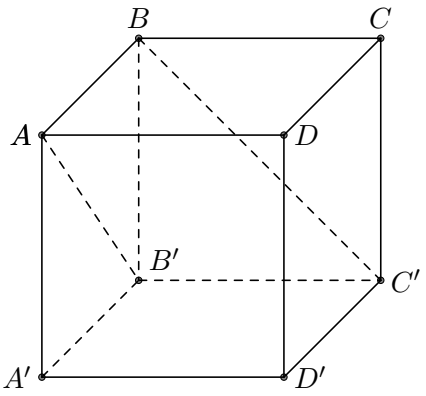
Vậy $d(S, (ABCD)) = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.



Chọn đáp án B □

Câu 152.
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng

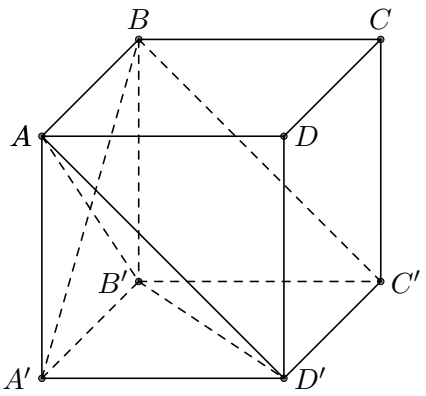
A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{2}$.



✍Lời giải.
Tứ giác $ABC'D'$ là hình bình hành nên $BC' \parallel AD'$ và $AD' \subset (AB'D')$ do đó $BC' \parallel (AB'D')$.
Suy ra $\mathrm{d}(BC', AB') = \mathrm{d}(B, (AB'D')) = \mathrm{d}(A', (AB'D'))$.
Gọi $\mathrm{d} = \mathrm{d}(A', (AB'D'))$. Ta có

$$\frac{1}{\mathrm{d}^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{A'B'^2} + \frac{1}{A'D'^2} = \frac{3}{a^2}.$$

Vậy $\mathrm{d}(BC', AB') = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

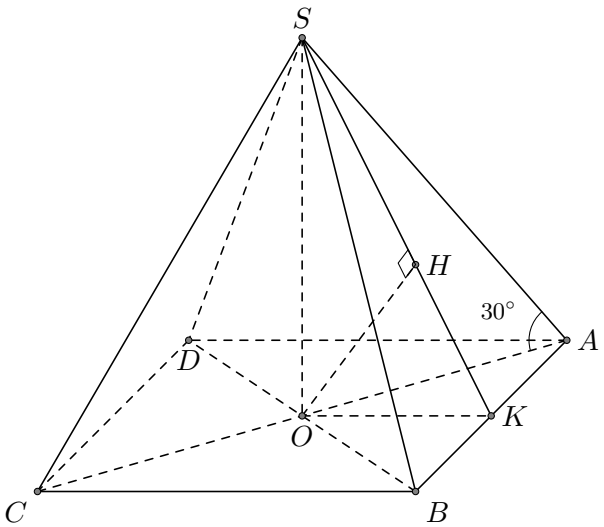


Chọn đáp án (A) □

Câu 153. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, SA tạo với đáy một góc $30°$. Tính theo a khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và CD.

A. $d = \dfrac{2\sqrt{10}a}{5}$. **B.** $d = \dfrac{3\sqrt{14}a}{5}$. **C.** $d = \dfrac{4\sqrt{5}a}{5}$. **D.** $d = \dfrac{2\sqrt{15}a}{5}$.

✍Lời giải.
Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Suy ra $SO \perp (SABD)$.
Ta có$(SA;(ABCD)) = (SA;AO) = \widehat{SAO} = 30°$
$\Rightarrow SO = AO \cdot \tan\widehat{SAO} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.
Kẻ $OK \perp AB$ tại K, $OH \perp SK$ tại H.
Suy ra $OH \perp (SAB) \Rightarrow d(O;(SAB)) = OH$. Ta có: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OK^2} + \dfrac{1}{OS^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{10}}{10}$.
Lại có $\begin{cases} CO \cap (SAB) = A \\ CA = 2OA \end{cases}$ nên $\dfrac{d(C;(SAB))}{d(O;(SAB))} = \dfrac{CA}{OA} = 2$
Ta có $CD \parallel AB$ nên $CD \parallel (SAB)$.
Suy ra $d = d(SA;CD) = d(CD;(SAB)) = d(C;(SAB)) = 2d(O;(SAB)) = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.



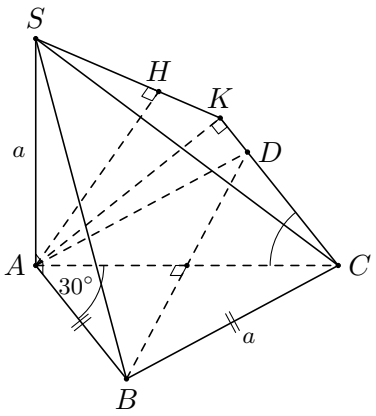
Chọn đáp án (A) □

Câu 154. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết góc $\widehat{BAC} = 30°$, $SA = a$ và $BA = BC = a$. Gọi D là điểm đối xứng với B qua AC. Khoảng cách từ B đến mặt (SCD) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$. **B.** $\dfrac{\sqrt{21}}{7}a$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{21}}{7}a$. **D.** $\dfrac{\sqrt{21}}{14}a$.

✍Lời giải.

Kẻ $AK \perp CD$ tại K và $AH \perp SK$ tại H. Suy ra $AH \perp (SCD)$.
Vì $AB = BC$ và D đối xứng với B qua AC nên $ABCD$ là hình thoi. Mặt khác $\widehat{BAC} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 120^\circ$.
Ta có $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD)$
$\Rightarrow \mathrm{d}(B,(SCD)) = \mathrm{d}(A,(SCD)) = AH$.
Xét $\triangle AKD$ vuông tại K có $AD = BC = a$, $\widehat{ADK} = 60^\circ$
$\Rightarrow AK = AD \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Xét $\triangle SAK$ vuông tại A có AH là đường cao
$\Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{4}{3a^2} = \dfrac{7}{3a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.



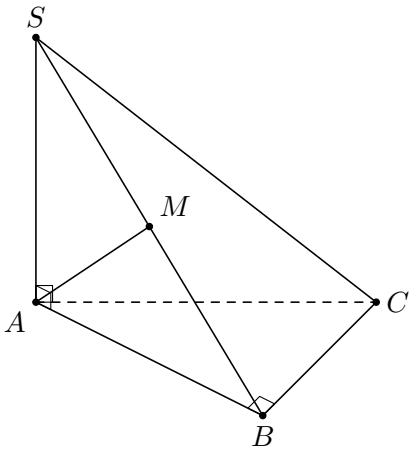
Chọn đáp án (B) □

Câu 155. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = AB = a\sqrt{2}$, tam giác ABC vuông tại B. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** a. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{42}}{7}$.

✍Lời giải.
Lấy M là trung điểm của SB. Vì $\triangle SAB$ vuông cân tại A nên $AM \perp SB$.
Lại có $SA \perp BC$, $AB \perp BC$ nên $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$. Từ đó dẫn tới $AM \perp (SBC)$, suy ra

$$\mathrm{d}\,(A,(SBC)) = AM = \frac{SB}{2} = \frac{SA}{\sqrt{2}} = a.$$



Chọn đáp án (B) □

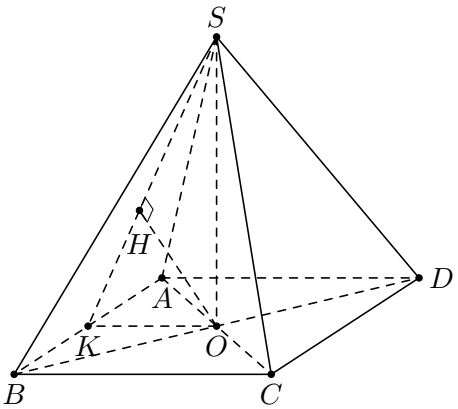
Câu 156. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$. Biết các mặt bên của hình chóp cùng tạo với đáy các góc bằng nhau và thể tích của khối chóp bằng $\dfrac{4\sqrt{3}a^3}{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD.

A. $\sqrt{5}a$. **B.** $3\sqrt{2}a$. **C.** $\sqrt{2}a$. **D.** $\sqrt{3}a$.

✍Lời giải.
Do các mặt bên của hình chóp cùng tạo với đáy các góc bằng nhau nên hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp đều. Gọi O là giao điểm của AC và BD, suy ra $SO \perp (ABCD)$.
Khi đó $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SO \cdot S_{ABCD}$, suy ra

$$SO = \frac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}} = \frac{4\sqrt{3}a^3}{(2a)^2} = a\sqrt{3}.$$

Do $CD \parallel (SAB)$ nên



$$\mathrm{d}(SA,CD) = \mathrm{d}[CD,(SAB)] = \mathrm{d}[C,(SAB)] = 2\mathrm{d}[O,(SAB)].$$

Gọi K là trung điểm của AB. Trong tam giác SOK, kẻ $OH \perp SK$. Khi đó $\mathrm{d}[O,(SAB)] = OH$.
Tam giác SOK có OH là đường cao nên $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{4}{3a^2}$.
Suy ra $OH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy $\mathrm{d}(SA,CD) = 2OH = a\sqrt{3}$.

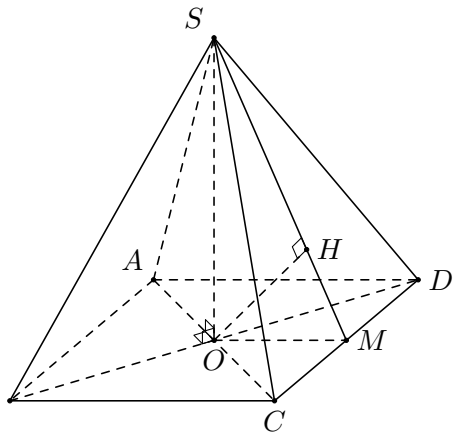
Chọn đáp án (D) □

Câu 157. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách d từ tâm O của đáy $ABCD$ đến một mặt bên theo a.

A. $d=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **B.** $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $d=\dfrac{2a\sqrt{5}}{3}$. **D.** $d=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

✍Lời giải.

Gọi M là trung điểm của CD.
Vì $S.ABCD$ là chóp tứ giác đều nên $SC=SD$.
Do đó $\triangle SCD$ cân tại $S \Rightarrow SM \perp CD$.
Lại có $ABCD$ là hình vuông nên ta có
$OM \perp CD$; $OM=\dfrac{AD}{2}=\dfrac{a}{2}$.
Suy ra $CD \perp (SOM) \Rightarrow CD \perp OH \quad (1)$.
Trong mặt phẳng (SOM) kẻ $OH \perp SM \quad (2)$.
Từ (1) và (2) ta suy ra $OH \perp (SCD)$
nên $\mathrm{d}\,(O;(SCD))=OH$



Xét $\triangle SOM$ vuông tại O (do $SO \perp (ABCD)$) có $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{SO^2}+\dfrac{1}{OM^2}=\dfrac{1}{2a^2}+\dfrac{4}{a^2}=\dfrac{9}{2a^2}$. Suy ra $OH=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

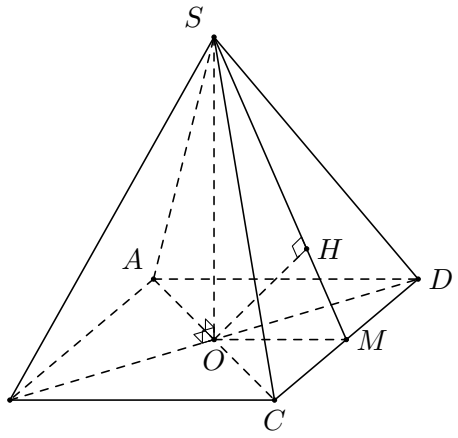
Chọn đáp án (D) □

Câu 158. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách d từ tâm O của đáy $ABCD$ đến một mặt bên theo a.

A. $d=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **B.** $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $d=\dfrac{2a\sqrt{5}}{3}$. **D.** $d=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

✍Lời giải.

Gọi M là trung điểm của CD.
Vì $S.ABCD$ là chóp tứ giác đều nên $SC=SD$.
Do đó $\triangle SCD$ cân tại $S \Rightarrow SM \perp CD$.
Lại có $ABCD$ là hình vuông nên ta có
$OM \perp CD$; $OM=\dfrac{AD}{2}=\dfrac{a}{2}$.
Suy ra $CD \perp (SOM) \Rightarrow CD \perp OH \quad (1)$.
Trong mặt phẳng (SOM) kẻ $OH \perp SM \quad (2)$.
Từ (1) và (2) ta suy ra $OH \perp (SCD)$
nên $\mathrm{d}\,(O;(SCD))=OH$



Xét $\triangle SOM$ vuông tại O (do $SO \perp (ABCD)$) có $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{SO^2}+\dfrac{1}{OM^2}=\dfrac{1}{2a^2}+\dfrac{4}{a^2}=\dfrac{9}{2a^2}$. Suy ra $OH=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

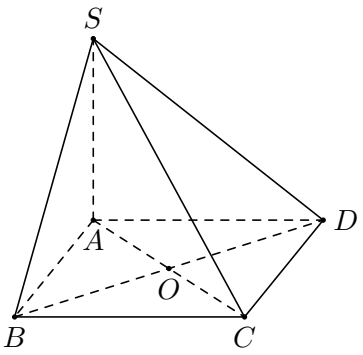
Chọn đáp án (D) □

Câu 159. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O, SA vuông góc với mặt đáy. Hỏi mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\mathrm{d}(B,(SCD))=2\mathrm{d}(O,(SCD))$. **B.** $\mathrm{d}(A,(SBD))=\mathrm{d}(B,(SAC))$.
C. $\mathrm{d}(C,(SAB))=\mathrm{d}(C,(SAD))$. **D.** $\mathrm{d}(S,(ABCD))=SA$.

✍Lời giải.

Vì $BC = 2OC$ nên $\mathrm{d}(B,(SCD)) = 2\mathrm{d}(O,(SCD))$.
Ta có $\mathrm{d}(C,(SAB)) = CB; \mathrm{d}(C,(SAD)) = CD$ mà $CB = CD$ nên $\mathrm{d}(C,(SAB)) = \mathrm{d}(C,(SAD))$.
Vì SA vuông góc với mặt đáy nên $\mathrm{d}(S,(ABCD)) = SA$. Do đó đáp án sai là $\mathrm{d}(A,(SBD)) = \mathrm{d}(B,(SAC))$.



Chọn đáp án B □

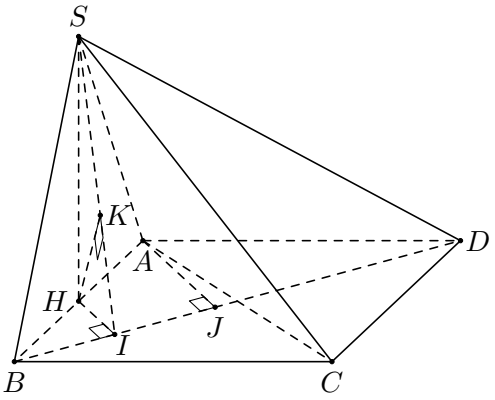
Câu 160. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là chữ nhật, cạnh $AB = 2AD = 2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (SBD).

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** a.

✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.
Kẻ $\begin{cases} HI \perp BD, (I \in BD) \\ HK \perp SI, (K \in SI) \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SHI)$ suy ra $HK \perp BD$.
Do $\begin{cases} HK \perp SI \\ HK \perp BD \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SBD) \Rightarrow \mathrm{d}(H,SBD) = HK$.
Gọi J là hình chiếu của A trên BD

$$\Rightarrow \frac{1}{AJ^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow AJ = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow HI = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$



Lại có: $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HI^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{1}{HI^2} + \frac{1}{SB^2 - BH^2} = \frac{5}{a^2} + \frac{1}{4a^2 - a} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.
Do $AH \cap (SBD) = B \Rightarrow \frac{\mathrm{d}(A,(SBD))}{\mathrm{d}(H,(SBD))} = \frac{AB}{AH} \Rightarrow \mathrm{d}(A,(SBD)) = \frac{AB}{AH} \cdot \mathrm{d}(H,(SBD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

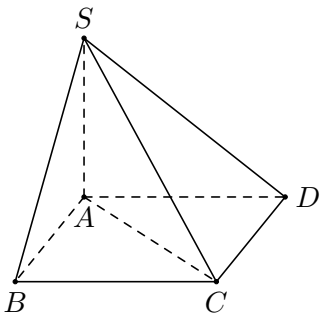
Chọn đáp án B □

Câu 161. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông với đường chéo $AC = 2a$, $SA \perp (ABCD)$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là

A. $\frac{a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

✍Lời giải.

Ta có $CD \parallel AB \Rightarrow \mathrm{d}(SB,CD) = \mathrm{d}(CD,(SAB)) = \mathrm{d}(D,(SAB)) = DA = a\sqrt{2}$.



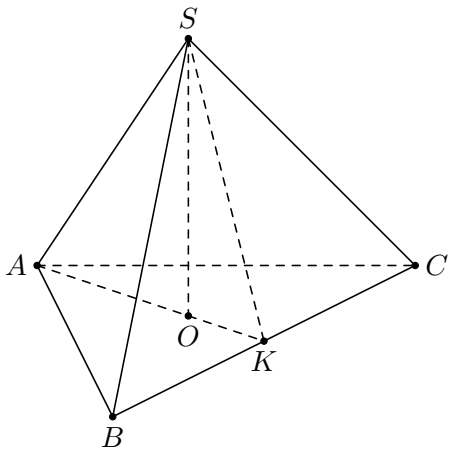
Chọn đáp án C □

Câu 162. Tính độ dài đường cao tứ diện đều cạnh a.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{9}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

✍Lời giải.

Gọi O là trọng tâm của tam giác ABC, khối chóp $S.ABC$ đều nên $SO \perp (ABC)$. Tam giác SAO vuông suy ra $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.



Chọn đáp án C □

Câu 163. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và SD là

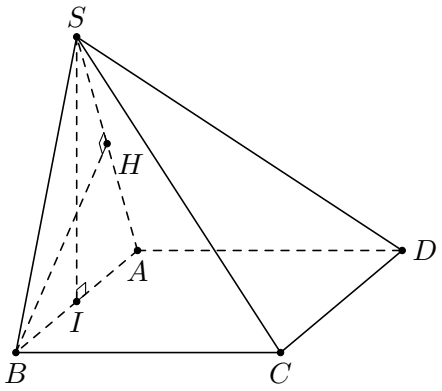
A. a. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi BH là đường cao hạ từ B của tam giác SAB, suy ra $BH \perp (SAD)$.
Vì $BC \parallel AD \Rightarrow BC \parallel (SAD)$.
Do đó

$$\mathrm{d}(BC, SD) = \mathrm{d}\,(BC, (SAD)) = \mathrm{d}\,(B, (SAD)) = BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $\mathrm{d}(BC, SD) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án B □

Câu 164. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm SD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CM.

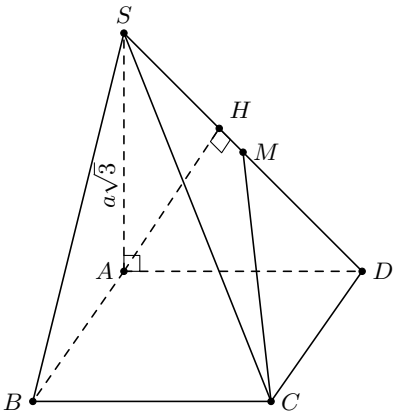
A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{3a}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases} AB \parallel CD \\ AB \not\subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow AB \parallel (SCD)$.
Suy ra $\mathrm{d}\,(AB, CM) = \mathrm{d}\,(AB, (SCD)) = \mathrm{d}\,(A, (SCD))$.
Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng $SD \Rightarrow AH \perp SD$. (1)
Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \ \ (SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow CD \perp AH$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}\,(A, (SCD)) = AH$.

$$AH = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot a}{\sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $\mathrm{d}\,(AB, CM) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án D □

Câu 165. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = a$, $OB = OC = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

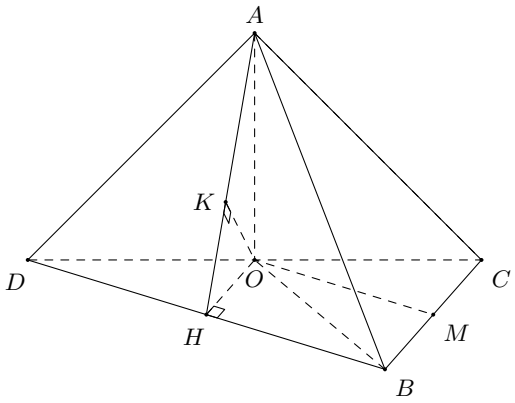
A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** a. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

✍Lời giải.

Qua B kẻ đường thẳng song song OM cắt OC tại D, từ đó suy ra $OM \parallel (ABD)$.
Khi đó

$$\mathrm{d}(OM, AB) = \mathrm{d}(OM, (ABD)) = \mathrm{d}(O, (ABD)).$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên BD và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của O lên AH.



Ta có

$$BD \perp OH \Rightarrow BD \perp (AOH) \Rightarrow BD \perp OK.$$

Mà

$$\begin{cases} OK \perp BD \\ OK \perp AH \end{cases} \Rightarrow OK \perp (ABD) \Rightarrow \mathrm{d}(O, (ABD)) = OK.$$

Ta có

$$OH = \frac{1}{2}BD = OM = \frac{OB \cdot OC}{BC} = \frac{2a \cdot 2a}{2\sqrt{2}a} = a\sqrt{2}.$$

Xét tam giác vuông AOH ta có

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OH^2} + \frac{1}{OA^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2}.$$

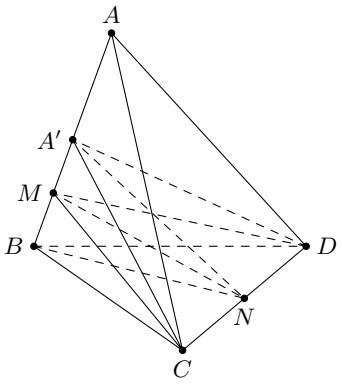
Suy ra $OK = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 166. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác ABD đều cạnh bằng 2, tam giác ABC vuông tại B và $BC = \sqrt{3}$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB và CD bằng $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$. Tính độ dài cạnh CD.

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** 1.

✍Lời giải.

Gọi A', M, N lần lượt là trung điểm của AB, $A'B$, CD. Khi đó ta có $A'D = BC = \sqrt{3}$, $A'C = BD = 2$.
Suy ra $\triangle BCD = \triangle A'BD \Rightarrow BN = A'N$. (1)
Tương tự $\triangle CBA' = \triangle A'BD \Rightarrow CM = DM$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra các tam giác MCD, NBA' lần lượt cân tại M, N. Do đó MN là đường vuông góc chung của AB và CD
$\Rightarrow MN = \dfrac{\sqrt{11}}{2}$.



Xét tam giác BCD có $BN^2 = \dfrac{BC^2 + BD^2}{2} - \dfrac{CD^2}{4} = \dfrac{7}{2} - \dfrac{CD^2}{4}$.
Mà $BN^2 = BM^2 + MN^2 \Rightarrow \dfrac{7}{2} - \dfrac{CD^2}{4} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{11}{4} \Rightarrow CD = \sqrt{2}$.

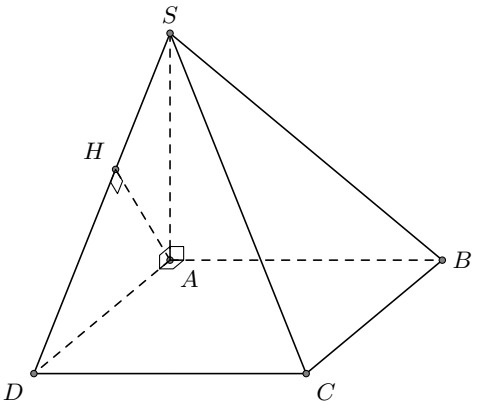
Chọn đáp án (B) □

Câu 167. Cho hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AB bằng

A. $\dfrac{12a}{7}$. **B.** $\dfrac{7a}{12}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{30}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{84}}{7}$.

✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow (SCD) \perp (SAD)$ theo giao tuyến SD.



Trong mặt phẳng (SAD), kẻ $AH \perp SD$ tại H, ta có $AH \perp (SCD) \Rightarrow AH = \mathrm{d}(A,(SCD))$.

Tam giác SAD vuông tại A có đường cao AH nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{7}{12a^2}.$$

Suy ra $AH = \dfrac{a\sqrt{84}}{7}$.

Ta có $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD)$ nên

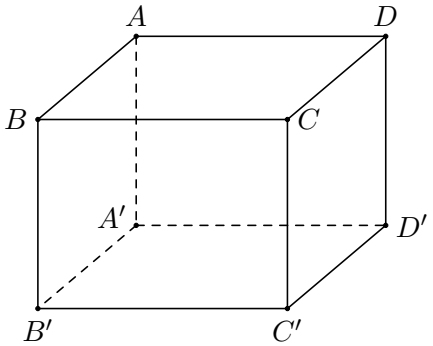
$$\mathrm{d}(SD, AB) = \mathrm{d}(AB,(SCD)) = \mathrm{d}(A,(SCD)) = AH = \frac{a\sqrt{84}}{7}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 168.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và $A'C'$ bằng

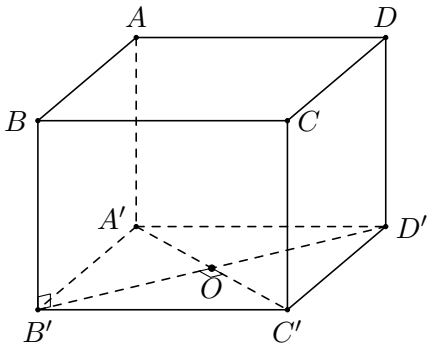
A. $a\sqrt{2}$. **B.** a. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



✍Lời giải.

Ta có $B'O \perp A'C'$ và $BB' \perp B'O$ nên OB' chính là khoảng cách giữa BB' và $A'C'$.

Vậy khoảng cách giữa BB' và $A'C'$ bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



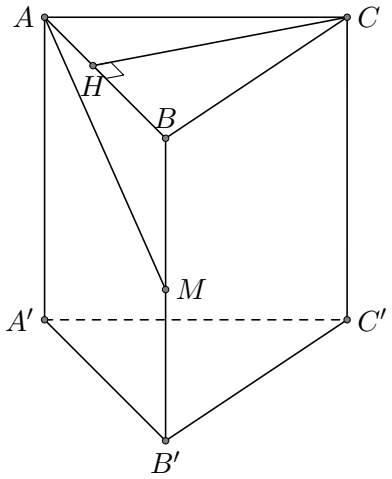
Chọn đáp án (D) □

Câu 169. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AC = a$, $BC = 2a$, $\widehat{ACB} = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm của BB'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và CC' theo a.

A. $a\dfrac{\sqrt{3}}{7}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $a\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. **D.** $a\sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

✍Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB.
Có $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ đứng nên
$CH \perp (ABB'A') \Rightarrow \mathrm{d}(C,(ABB'A') = CH$.
$CC' \parallel BB' \Rightarrow CC' \parallel (ABB'A')$ nên
$d(CC', AM) = \mathrm{d}(CC', (ABB'A')) = \mathrm{d}(C,(ABB'A')) = CH$.
Xét $\triangle ABC$ có
$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2 \cdot CA \cdot CB \cdot \cos 120^\circ = 7a^2 \Rightarrow AB = a\sqrt{7}$.
$S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} CA \cdot CB \cdot \sin C = \dfrac{1}{2} AB \cdot CH$.
$\Rightarrow a \cdot 2a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{7} \cdot CH \Rightarrow CH = a\sqrt{\dfrac{3}{7}}$.
Vậy $\mathrm{d}(AM, CC') = a\sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

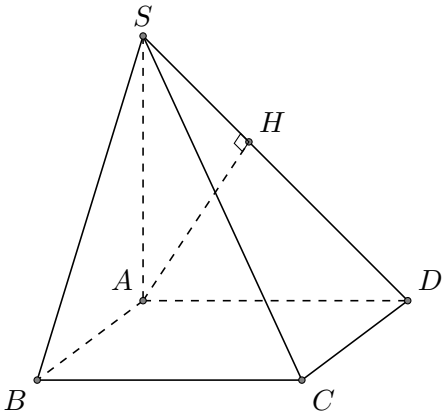


Chọn đáp án (D) □

Câu 170. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$, $AD = 2a$. Tính khoảng cách h từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).

A. $h = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $h = \dfrac{2a\sqrt{21}}{3}$. **C.** $h = \dfrac{a\sqrt{21}}{3}$. **D.** $h = \dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải.
Gọi H là hình chiếu của A lên cạnh SD.
Ta có $\begin{cases} SA \perp CD \\ AD \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$.
Vậy ta có $\begin{cases} AH \perp SD \\ AH \perp CD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow h = AH$.
Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AD^2} + \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{7}{12a^2} \Rightarrow h = AH = \dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$.



Chọn đáp án (D) □

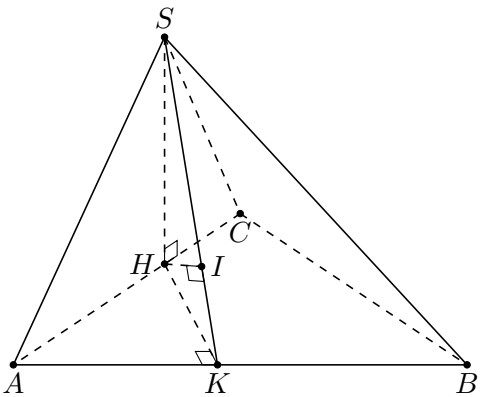
Câu 171. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $3a$. Điểm H thuộc cạnh AC với $HC = a$. Dựng đoạn thẳng SH vuông góc với mặt phẳng (ABC) với $SH = 2a$. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\dfrac{3a}{7}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $3a$.

Lời giải.
Kẻ $HK \perp AB$ tại K, lại có $SH \perp AB \Rightarrow AB \perp (SHK)$.
Trong mặt phẳng (SHK) kẻ $HI \perp SK$ tại I.
Do $AB \perp (SHK) \Rightarrow AB \perp HI$.
Từ $\begin{cases} HI \perp SK \\ AB \perp HI \end{cases} \Rightarrow HI \perp (SAB) \Rightarrow HI = d(H, AB)$.
Ta có $HK = HA \cdot \sin \widehat{HAK} = 2a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.
Tam giác SHK vuông tại H có đường cao HI nên

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{HS^2} \Rightarrow HI = \frac{HS \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}.$$

Mà $\dfrac{d(C,(SAB))}{d(H,(SAB))} = \dfrac{CA}{HA} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow d(C,(SAB)) = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{2a\sqrt{21}}{7} = \dfrac{3a\sqrt{21}}{7}$.



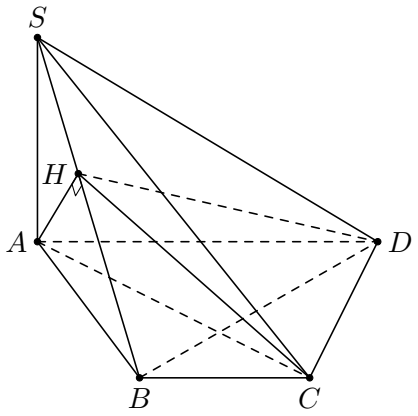
Chọn đáp án (C) □

Câu 172. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AD = 2a$, SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi H là hình chiếu của A trên SB. Khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{6}}{8}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{6}}{16}$.

✍Lời giải.

$ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AD = 2a$ nên $\begin{cases} AB = BC = CD = a \\ CD \perp AC. \end{cases}$



$\triangle SAB$ vuông tại $A \Rightarrow SB^2 = SA^2 + AB^2$

$\Rightarrow SB = 2a$ và $SH = \dfrac{SA^2}{SB} = \dfrac{3a}{2}$.

Có $AC^2 = AD^2 - CD^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow SC = \sqrt{AC^2 + SA^2} = a\sqrt{6}$.

Ta có $\mathrm{d}(H,(SCD)) = \dfrac{3V_{H.SCD}}{S_{SCD}}$.

Mà $V_{H.SCD} = V_{S.HCD} = \dfrac{SH}{SB}V_{S.BCD} = \dfrac{3}{4}V_{S.BCD}$

$= \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot SA\cdot S_{BCD} = \dfrac{1}{4}\cdot a\sqrt{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}a\cdot a\cdot\sin 120^\circ\right) = \dfrac{3a^3}{16}$.

Lại có $CD \perp (SAC) \Rightarrow CD \perp SC \Rightarrow S_{SCD} = \dfrac{1}{2}SC\cdot CD = \dfrac{1}{2}\cdot a\sqrt{6}\cdot a = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $\mathrm{d}(H,(SCD)) = \dfrac{3V_{H.SCD}}{S_{SCD}} = \dfrac{3\cdot\dfrac{3a^3}{16}}{\dfrac{a^2\sqrt{6}}{2}} = \dfrac{3a\sqrt{6}}{16}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 173. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB.

A. $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$. **D.** $2a$.

✍Lời giải.

Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow$ góc giữa SB và đáy là $\widehat{SBA} = 60^\circ$.

Gọi D là đỉnh hình bình hành $ABDC$

$\Rightarrow AC \parallel BD \Rightarrow AC \parallel (SBD)$.

Suy ra $\mathrm{d}(AC,SB) = \mathrm{d}(AC,(SBD)) = \mathrm{d}(A,(SBD))$.

Kẻ $AH \perp BD$ tại H $\left(BH = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{a}{2}\right)$.

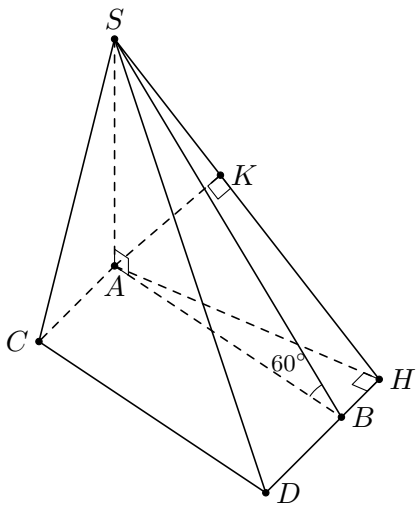
Kẻ $AK \perp SH$ tại K. Ta chứng minh được $AK \perp (SHD)$.

Suy ra $\mathrm{d}(A,(SBD)) = AK$.

Xét $\triangle SAB$ vuông tại A có $SA = AB\cdot\tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Xét $\triangle AHB$ vuông tại H và là nửa tam giác đều

$\Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Xét $\triangle SAH$ vuông tại A có $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{5}{3a^2} \Rightarrow AK = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Vậy khoảng cách giữa đường thẳng AC và SB bằng $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 174. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** a. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi M, N là trung điểm của AB, CD.

Ta có: $\triangle ABC = \triangle ABD \Rightarrow MC = MD$

$\Rightarrow \triangle MCD$ cân $\Rightarrow MN \perp CD$.

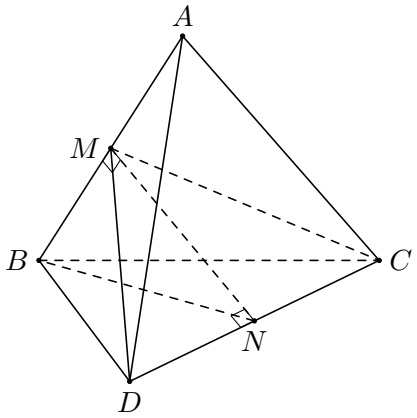
$\Delta ACD = \Delta BCD \Rightarrow NA = NB$

$\Rightarrow \triangle NAB$ cân $\Rightarrow MN \perp AB$.

Suy ra MN là đoạn vuông góc chung của AB, CD.

$\Rightarrow \mathrm{d}(AB, CD) = MN$.

Trong $\triangle BMN$ ta có:$MN = \sqrt{BN^2 - BM^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án (B) □

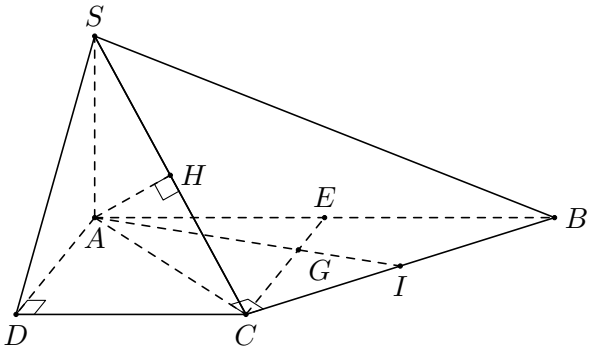
Câu 175. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D, $AD = DC = a$, $AB = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy; mặt bên (SBC) tạo với đáy một góc $60°$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

✍Lời giải.

— Gọi I là trung điểm của BC, G là trọng tâm tam giác ABC.
$\Rightarrow AI = 3GI$
$\Rightarrow \mathrm{d}(A, (SBC)) = 3\mathrm{d}(G, (SBC))$.

— Gọi E là trung điểm của AB
$\Rightarrow AE = \dfrac{1}{2}AB = a$.
$\Rightarrow$ Tứ giác $ADCE$ là hình vuông
$\Rightarrow CE = a = \dfrac{1}{2}AB$.
$\Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại C.
$\Rightarrow BC \perp AC$



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \ \ (SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SC$.

Do $\begin{cases} AC \perp BC \\ SC \perp BC \\ (SBC) \cap (ABCD) = BC \end{cases}$

Nên góc giữa (SBC) và mặt đáy $(ABCD)$ bằng góc $\widehat{SCA} = 60°$.

Tam giác vuông SCA có $\tan 60° = \dfrac{SA}{AC} \Rightarrow SA = AC\sqrt{3} = a\sqrt{6}$.

Kẻ $AH \perp SC$ trong tam giác vuông SCA.

Ta có: $AH \perp BC$ vì $BC \perp (SAC)$.

$\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow \mathrm{d}(A, (SBC)) = AH$.

Mà $AH = AC \cdot \sin 60° = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

$\Rightarrow \mathrm{d}(G, (SBC)) = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}(A, (SBC)) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Chọn đáp án (C) □

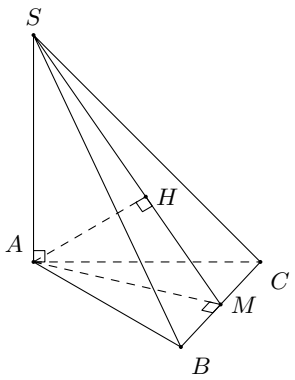
Câu 176. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Khi đó khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $d = \dfrac{a}{2}$. **D.** $d = a$.

✍Lời giải.

Gọi M là trung điểm BC.
Khi đó $BC \perp AM$ và $BC \perp SA$ suy ra $BC \perp (SAM)$.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SM.
Khi đó $AH \perp SM$ và $AH \perp BC$ (do $BC \perp (SAM)$ mà $AH \subset (SAM)$).
Suy ra $AH \perp (SBC)$ và $d = \mathrm{d}(A,(SBC)) = AH$.
Xét tam giác SAM vuông tại A, ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \frac{2}{a^2}.$$



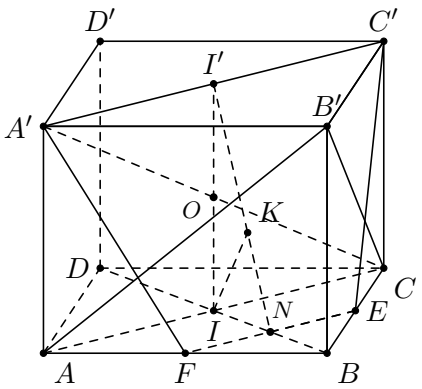
Vậy $d = AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 177. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi E là trung điểm BC. Gọi d là khoảng từ tâm hình lập phương đến mặt phẳng $(A'C'E)$. Tính d?

A. $d = \dfrac{a}{3}$. **B.** $d = \dfrac{a}{6}$. **C.** $d = \dfrac{2a}{3}$. **D.** $d = \dfrac{a}{4}$.

✍Lời giải.
Gọi O là tâm của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Hai điểm I, I' lần lượt là tâm hình vuông $ABCD$, $A'B'C'D'$.
Kẻ EN song song AC, gọi K là hình chiếu vuông góc của I lên NI'.
Ta có $IK \perp I'N$ và $EF \perp (BDD'B')$ mà $IK \subset (BDD'B')$ nên $IK \perp EF$. Do đó $IK \perp (A'C'E)$
Khi đó

$$d = \mathrm{d}(O,(A'C'E)) = \frac{1}{2}\mathrm{d}(C,(A'C'E)) = \frac{1}{2}\mathrm{d}(I,(A'C'E)) = \frac{1}{2}IK.$$



Trong tam giác INI' vuông góc tại I, có $NI = \dfrac{1}{4}BD = \dfrac{1}{4}a\sqrt{2}$ và

$$\frac{1}{IK^2} = \frac{1}{IN^2} + \frac{1}{II'^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{9}{a^2} \Rightarrow IK = \frac{a}{3}.$$

Vậy $d = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a}{3} = \dfrac{a}{6}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 178. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B, $\widehat{C} = 60°$, $AC = 2$, $SA \perp (ABC)$, $SA = 1$. Gọi M là trung điểm của AB. Khoảng cách d giữa SM và BC là

A. $d = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$. **B.** $d = \dfrac{2\sqrt{21}}{7}$. **C.** $d = \dfrac{\sqrt{21}}{3}$. **D.** $d = \dfrac{2\sqrt{21}}{3}$.

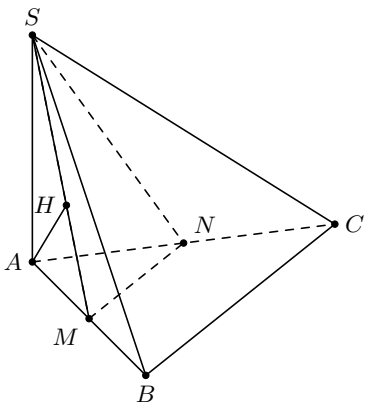
✍Lời giải.
Gọi N là trung điểm AC, H là hình chiếu của A trên SM. Khi đó $AH \perp (SMN)$. Lại có $BC \parallel (SMN)$ nên

$$\mathrm{d}(SM,BC) = \mathrm{d}(B,(SMN)) = \mathrm{d}(A,(SMN)) = AH.$$

Ta có $AB = AC\sin C = \sqrt{3}$, $AM = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{3}{2}$, suy ra

$$AH = \frac{SA\cdot AM}{\sqrt{SA^2+AM^2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Vậy $\mathrm{d}(SM,BC) = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.



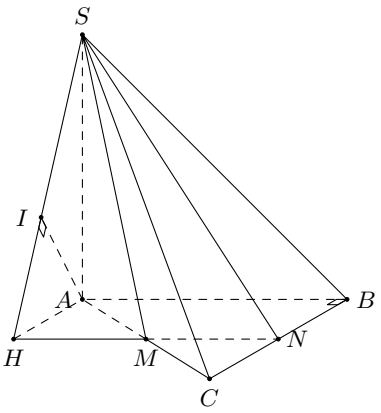
Chọn đáp án A ☐

Câu 179. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy ABC và $SA = 2\sqrt{3}a$. Gọi M là trung điểm của AC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SM bằng

A. $\dfrac{\sqrt{13}a}{13}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{3}a}{13}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{39}a}{13}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{39}a}{13}$.

✍Lời giải.

Gọi N là trung điểm của BC, ta có $AB \parallel MN \Rightarrow AB \parallel (SMN)$.
Do đó $\mathrm{d}(SM, AB) = \mathrm{d}(AB, (SMN)) = \mathrm{d}(A, (SMN))$.
Giả sử H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng qua MN, I là hình chiếu vuông góc của A lên SH.
Do $MN \parallel AB$ ta có $AH = NB = \dfrac{BC}{2} = a$.



Ta có $\begin{cases} MN \perp AH \\ MN \perp SA \end{cases} \Rightarrow MN \perp (SHA) \Rightarrow MN \perp AI.$ (1)
Theo cách dựng $AI \perp SH$, kết hợp với (1) ta có

$$AI \perp (SMN) \Rightarrow \mathrm{d}(A, (SMN)) = AI.$$

Ta có $\dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{AH^2} + \dfrac{1}{AS^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{13}{12a^2} \Rightarrow AI = \dfrac{2\sqrt{39}}{13}a$.
Vậy khoảng cách giữa AB và SM bằng $\dfrac{2\sqrt{39}}{13}a$.

Chọn đáp án D ☐

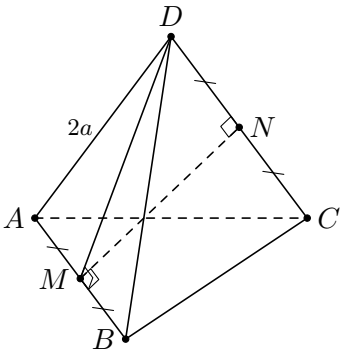
Câu 180. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng $2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

✍Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD thì MN là đoạn vuông góc chung của AB và CD (tính chất tứ diện đều). Do đó, $\mathrm{d}(AB, CD) = MN$.
Tam giác ABD đều cạnh $2a$ nên
$DM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}2a = \sqrt{3}a$. Vậy

$$MN = \sqrt{DM^2 - DN^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}.$$



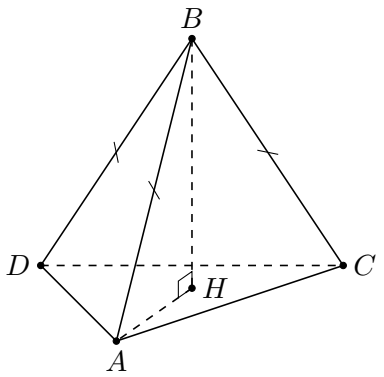
Chọn đáp án C ☐

Câu 181. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 2. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (ACD) bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

✍Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của B lên mặt phẳng (ABC), do $BA = BC = BD$ nên $HA = HC = HD$, suy ra H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD. Ta có $\dfrac{AD}{\sin\widehat{DCA}} = \dfrac{2}{\sin 60^\circ} = 2HA \Rightarrow HA = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.
Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (ACD) bằng $BH = \sqrt{BA^2 - AH^2} = \sqrt{4 - \dfrac{4}{3}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.



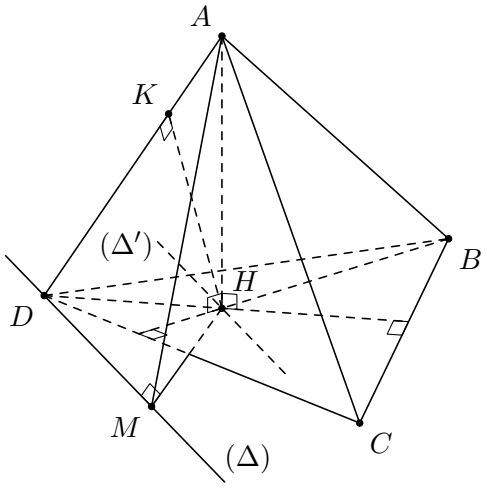
Chọn đáp án A □

Câu 182. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AD, AC, AB vuông góc với nhau đôi một và $AD = 2AC = 3AB = a$. Gọi (Δ) là đường thẳng chứa trong mặt phẳng (BCD) sao cho khoảng cách từ điểm A đến (Δ) là nhỏ nhất và khoảng cách lớn nhất giữa hai đường thẳng (Δ) với (AD) là d. Khẳng định đúng là

A. $\mathrm{d} = \dfrac{a\sqrt{14}}{14}$. **B.** $3a < \mathrm{d} < 4a$. **C.** $\dfrac{3a}{14} < \mathrm{d} < \dfrac{2a}{7}$. **D.** $\mathrm{d} > 4a$.

✍Lời giải.
Gọi H là trực tâm $\triangle BCD$.
Ta có $AH \perp (BCD)$.
Vì (Δ) thuộc (BCD) và khoảng cách từ A đến (Δ) nhỏ nhất nên (Δ) đi qua H.
Từ D kẻ $(\Delta') \parallel (\Delta)$.
Gọi K, M lần lượt là hình chiếu của H lên AD và (Δ').
Ta có $(\Delta) \parallel (AD, (\Delta'))$ nên

$$\mathrm{d}((\Delta), (AD)) = \mathrm{d}((\Delta), (AD, (\Delta'))) = \mathrm{d}(H, (ADM)).$$



Ta thấy

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{d}^2(H,(ADM))} &= \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{HM^2}\\ &\geq \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{DH^2}\\ &= \frac{1}{HK^2}. \qquad (1)\end{aligned}$$

Mặt khác, ta thấy $\begin{cases}\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{AD^2}\\ DH^2 = AD^2 - AH^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}AH^2 = \dfrac{a^2}{14}\\ DH^2 = \dfrac{13a^2}{14}\end{cases} \Rightarrow HK^2 = \dfrac{13a^2}{14^2}.$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $\mathrm{d} = \dfrac{\sqrt{13}a}{14}$.

Chọn đáp án C □

Câu 183. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có thể tích bằng $\dfrac{a^2b}{3}$ với $AB = a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SCD, trên các cạnh AB, SD lần lượt lấy các điểm E, F sao cho EF song song BG. Khoảng cách giữa hai đường thẳng DG và EF bằng

A. $\dfrac{2ab}{3\sqrt{2b^2+a^2}}$. **B.** $\dfrac{ab}{\sqrt{2b^2+a^2}}$. **C.** $\dfrac{a^2b}{3\sqrt{2b^2+a^2}}$. **D.** $\dfrac{ab}{3\sqrt{2b^2+a^2}}$.

✍Lời giải.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.
Gọi I, J lần lượt là trung điểm của CD và SC.

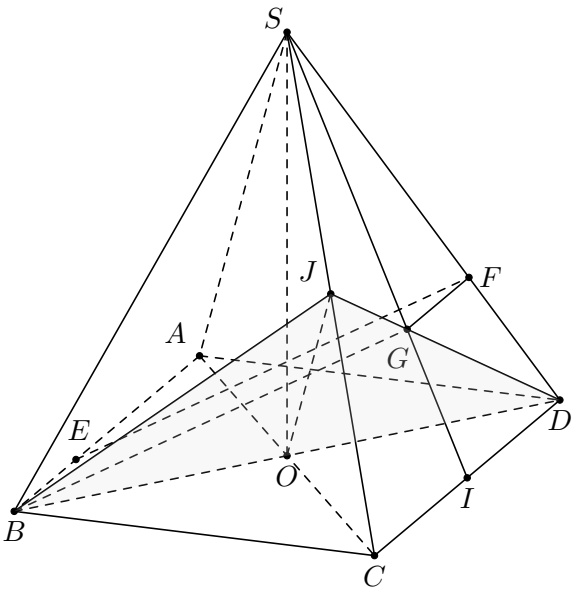
Ta có $\begin{cases} V_{S.ABCD} = \dfrac{a^2 b}{3} \\ AB = a \end{cases} \Rightarrow SO = b.$

Ta được $OJ = \dfrac{1}{2}\sqrt{SO^2 + OC^2} = \dfrac{\sqrt{2b^2 + a^2}}{2\sqrt{2}}.$

Ta thấy $S_{\triangle BJD} = \dfrac{OJ \cdot BD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2b^2 + a^2}}{4}.$

Ta có $V_{B.SJD} = V_{S.BJD} = \dfrac{1}{4} V_{S.ABCD}.$

Ta được $\mathrm{d}(S, (BJD)) = \dfrac{3V_{S.BJD}}{S_{\triangle BJD}} = \dfrac{ab}{\sqrt{2b^2 + a^2}}.$



Mặt khác, $EF \parallel BG \Rightarrow EF \parallel (BJD)$ nên $\mathrm{d}(EF, DG) = \mathrm{d}(EF, (BJD)) = \mathrm{d}(F, (BJD))$.

Hơn nữa, $AB \parallel CD \subset (SDC) \Rightarrow GF \parallel CD \Rightarrow \dfrac{DF}{DS} = \dfrac{\mathrm{d}(F, (BJD))}{\mathrm{d}(S, (BJD))} = \dfrac{1}{3}.$

Vậy $\mathrm{d}(EF, DG) = \dfrac{ab}{3\sqrt{2b^2 + a^2}}.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 184. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Gọi E là trung điểm của AB. Cho biết $AB = 2a$, $BC = \sqrt{13}a$, $CC' = 4a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và CE.

A. $\dfrac{4a}{7}$. **B.** $\dfrac{12a}{7}$. **C.** $\dfrac{3a}{7}$. **D.** $\dfrac{6a}{7}$.

✍Lời giải.

Gọi F là trung điểm của $A'A$, suy ra mặt phẳng $(CEF) \parallel A'B$. Do đó khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và CE bằng khoảng cách giữa $A'B$ với (CEF). Suy ra

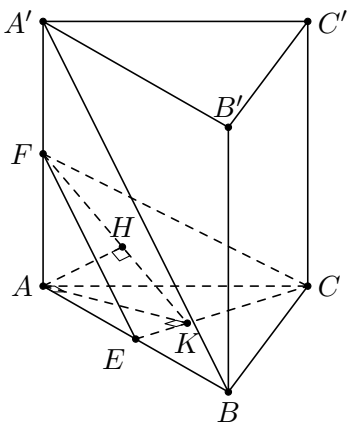
$$\mathrm{d}\left(A'B, (CEF)\right) = \mathrm{d}\left(B, (CEF)\right) = \mathrm{d}\left(A, (CEF)\right).$$

. Kẻ $AK \perp CE; AH \perp FK$ thì $AH \perp (CEF)$ hay $\mathrm{d}\left(A, (CEF)\right) = AH$.

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AF^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AF^2} + \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{9a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{49}{36a^2}.$$

Suy ra $\mathrm{d}\left(CE, A'B\right) = \mathrm{d}\left(A, (CEF)\right) = AH = \dfrac{6a}{7}$.

Vậy khoảng cách giữa $A'B$ và CE là $\mathrm{d}\left(CE, A'B\right) = \dfrac{6a}{7}$.



Chọn đáp án (D) □

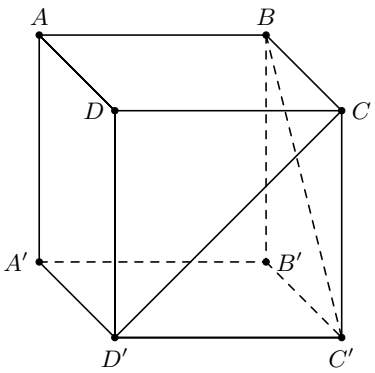
Câu 185. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD'.

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $2a$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

✍Lời giải.

Ta có $CD' \parallel BA'$ suy ra $CD' \parallel (BA'C') \Rightarrow \mathrm{d}(BC', CD') = \mathrm{d}(D', (BA'C')) = \mathrm{d}(B', (BA'C'))$.
Xét tứ diện $B.A'B'C'$ có BB', $B'C'$, $B'A'$ đôi một vuông góc với nhau nên $\dfrac{1}{\mathrm{d}^2(B', (BA'C'))} = \dfrac{1}{B'B^2} + \dfrac{1}{B'A'^2} + \dfrac{1}{B'C'^2} = \dfrac{3}{a^2}$
$\Rightarrow \mathrm{d}(B', (BA'C')) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy khoảng cách giữa 2 đường thẳng BC' và CD' là $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án C □

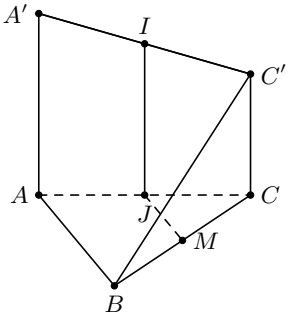
Câu 186. Trong không gian cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 90^\circ$, $AB = a$. Dựng AA' và CC' ở cùng một phía và vuông góc với mp (ABC). Tính khoảng cách từ trung điểm của $A'C'$ đến mp (BCC').

A. a. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{3}$. **D.** $2a$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của $A'C'$ và J là trung điểm của AC suy ra IJ là đường trung bình của hình thang $ACC'A' \Rightarrow IJ \parallel AA' \parallel CC' \Rightarrow IJ \parallel (BCC')$
$\Rightarrow \mathrm{d}(I, (BCC')) = \mathrm{d}(J, (BCC'))$.
Gọi M là trung điểm của BC thì JM là đường trung bình của ΔABC nên $JM \parallel AB$ suy ra $JM \perp BC$. Mà $JM \perp CC'$ (do $CC' \perp (ABC)$) nên $JM \perp (BCC')$.
Suy ra $\mathrm{d}(J, (BCC')) = JM = \dfrac{a}{2}$.

Vậy khoảng cách từ trung điểm của $A'C'$ đến mp (BCC') bằng $\dfrac{a}{2}$.



Chọn đáp án B □

Câu 187. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = AA' = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và DC' bằng

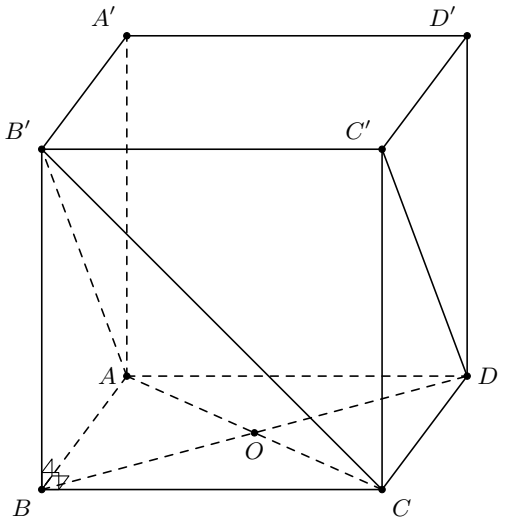
A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{3a}{2}$.

Lời giải.

Trong $(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BD$.
Ta có $C'D \parallel AB' \Rightarrow C'D \parallel (ACB')$.
$\Rightarrow \mathrm{d}(C'D, AC) = \mathrm{d}(C'D, (ACB')) = \mathrm{d}(D, (ACB')) = \mathrm{d}(B, (ACB'))$ (do O là trung điểm BD).
Tứ diện $BACB'$ có BA, BC, BB' đôi một vuông góc nên ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{d}^2(B;(ACB'))} &= \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{BB'^2} \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{6}{4a^2}.\end{aligned}$$

$\Rightarrow d(B, (ACB')) = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \mathrm{d}(C'D, AC) = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.



Chọn đáp án A □

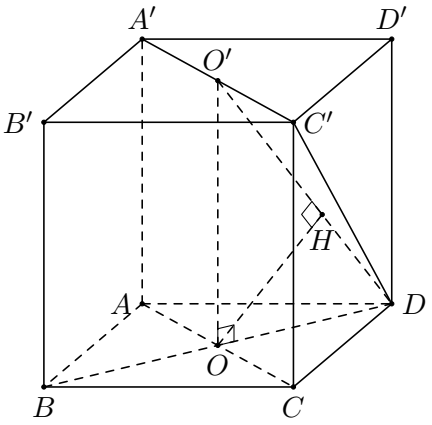
Câu 188. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa AC và DC'.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** a.

Lời giải.

Gọi O, O' lần lượt là tâm các hình vuông $ABCD$, $A'B'C'D'$. Ta có
• $AC \parallel A'C' \Rightarrow AC \parallel (A'C'D)$ nên

$$\mathrm{d}(AC, DC') = \mathrm{d}(AC, (A'C'D)) = \mathrm{d}(O, (A'C'D)).$$



Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên DO', khi đó

$$\begin{cases} AC \perp OD \\ AC \perp OO' \end{cases} \Rightarrow AC \perp (OO'D) \Rightarrow AC \perp OH \text{ tại } O.$$

Vì vậy $OH = \mathrm{d}(O, (A'C'D)) = \mathrm{d}(AC, DC')$. Mặt khác $\triangle OO'D$ vuông tại O, có $OD = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $OO' = AA' = a$.

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{O'O^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow \mathrm{d}(AC, DC') = OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

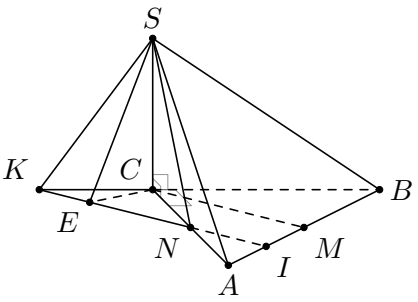
Chọn đáp án C □

Câu 189. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C, $AB = 4\sqrt{2}$, $SC = 4$, hai mặt phẳng (SAC), (SBC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Tính khoảng cách giữa CM và SN.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Qua N kẻ đường thẳng song song với CM và cắt AB, BC lần lượt tại I, K. Ta có $CM \parallel (SKN)$, suy ra $\mathrm{d}(CM; SN) = \mathrm{d}(C; (SKN)) = h$.
Vì ABC là tam giác vuông cân tại C, $AB = 4\sqrt{2}$ nên $CA = CB = 4$.
Do đó $CN = 2$ và $CK = CB \cdot \dfrac{MI}{MB} = 4 \cdot \dfrac{1}{2} = 2$.
Gọi E là hình chiếu của C lên NK, kết hợp SC, CK, CN đôi một vuông góc ta được



$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} &= \frac{1}{SC^2} + \frac{1}{CE^2} \\ &= \frac{1}{SC^2} + \frac{1}{CK^2} + \frac{1}{CN^2} = \frac{9}{16}. \end{aligned}$$

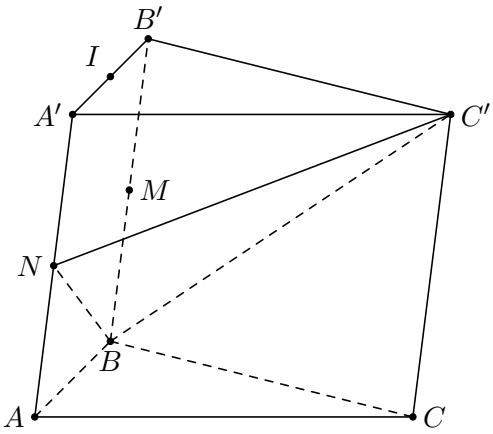
Suy ra $h = \dfrac{4}{3}$. Vậy $\mathrm{d}(CM; SN) = \dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 190. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại C, $AB = 2a$, $AA' = a$, góc giữa BC' và $(ABB'A')$ là $60°$. Gọi N là trung điểm AA' và M là trung điểm BB'. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(BC'N)$.

A. $\dfrac{2a\sqrt{74}}{37}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{74}}{37}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{37}}{37}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{37}}{37}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của $A'B'$. Khi đó $IC' \perp (ABB'A')$, suy ra $\left(\widehat{BC', (ABB'A')}\right) = \widehat{IBC'} = 60^\circ$.

Ta có $IB = \sqrt{B"B^2 + B'I^2} = a\sqrt{2}$, $BC' = \dfrac{IB}{\cos 60^\circ} = 2a\sqrt{2}$, $IC' = BC' \cdot \sin 60^\circ = a\sqrt{6}$,

$NB = \sqrt{AB^2 + AN^2} = \dfrac{a\sqrt{17}}{2}$, $NC' = \sqrt{A'N'^2 + A'C'^2} = \sqrt{A'N'^2 + A'I^2 + IC'^2} = \dfrac{a\sqrt{29}}{2}$.

Kí hiệu $p = \dfrac{1}{2}(NB + BC' + NC')$ thì $S_{\triangle BC'N} = \sqrt{p(p-NB)(p-BC')(p-NC')} = a^2\dfrac{\sqrt{111}}{4}$.

Diện tích tam giác ABN là $S_{\triangle ABN} = \dfrac{a^2}{2}$.

Vậy $\mathrm{d}\,(M, (BC'N)) = \mathrm{d}\,(A', (BC'N)) = \mathrm{d}\,(A, (BC'N)) = \dfrac{3 \cdot V_{ABC'N}}{S_{\triangle BC'N}} = \dfrac{S_{\triangle ABN} \cdot IC'}{S_{\triangle BC'N}} \dfrac{2a\sqrt{74}}{37}$.

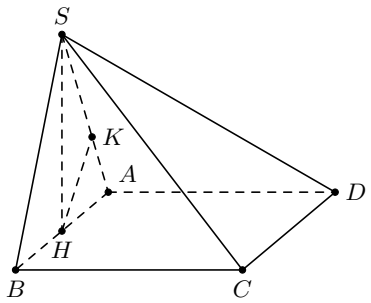
Chọn đáp án (A) □

Câu 191. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAD).

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$. Ta có
$BC \parallel (SAD)$ nên $\mathrm{d}(C;(SAD)) = \mathrm{d}(B;(SAD)) = 2\mathrm{d}(H;(SAD))$.
Gọi K là hình chiếu vuông góc của H lên SA.
Ta có $SH \perp AD$, $AB \perp AD$ nên $AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp HK$. Mà $HK \perp SA$ nên $HK \perp (SAD) \Rightarrow \mathrm{d}(H;(SAD)) = HK$.



Xét $\triangle SHA$ có $AH = \dfrac{a}{2}$, $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy $\mathrm{d}(C;(SAD)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

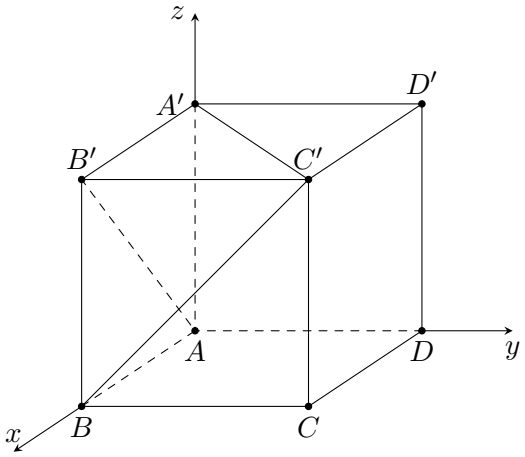
Chọn đáp án (A) □

Câu 192. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

✍Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.
Ta có $A(0;0;0)$, $B'(a;0;a)$, $B(a;0;0)$, $C'(a;a;a)$.
Suy ra $\overrightarrow{AB'} = (a;0;a)$, $\overrightarrow{BC'} = (0;a;a)$.
Khi đó $\left[\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}\right] = (-a^2;-a^2;a^2)$, $\overrightarrow{AB} = (a;0;0)$.



Vậy $\mathrm{d}(AB', BC') = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}\right] \cdot \overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}\right]\right|} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

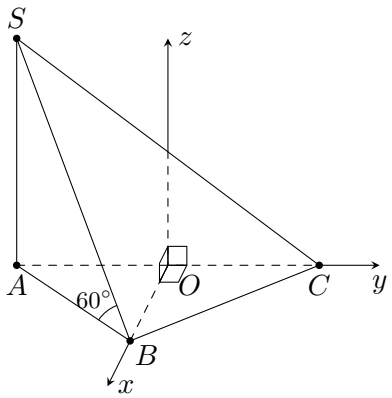
Chọn đáp án (C) □

Câu 193. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB.

A. $\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $2a$.

✍Lời giải.

Ta có $(SB,(ABC))=(SB,AB)=\widehat{SBA}=60^\circ$.
Trong $\triangle SAB$ vuông tại A có $SA=AB\cdot\tan\widehat{SBA}=a\sqrt{3}$.
Gọi O là trung điểm AC, ta có $BO\perp AC$ và $BO=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, trong đó $Oz\parallel SA$.
Ta có



$$A\left(0;-\frac{a}{2};0\right),C\left(0;\frac{a}{2};0\right),S\left(0;-\frac{a}{2};a\sqrt{3}\right),B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right).$$

Suy ra $\overrightarrow{AC}=(0;a;0)$, $\overrightarrow{SB}=\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2};-a\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2};0\right)$.
Do đó $\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SB}\right]=\left(-a^2\sqrt{3};0;-\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)$. Vậy $\mathrm{d}(AC,SB)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SB}\right]\cdot\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SB}\right]\right|}=\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Chọn đáp án (B) □

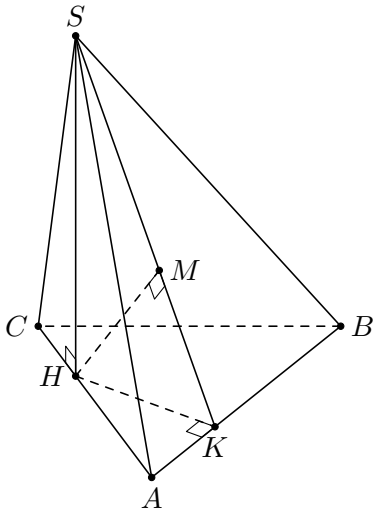
Câu 194. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $3a$. Điểm H thuộc cạnh AC với $HC=a$. Dựng đoạn thẳng SH vuông góc với mặt phẳng (ABC) với $SH=2a$. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) là

A. $3a$. **B.** $\dfrac{\sqrt{21}}{7}a$. **C.** $\dfrac{7}{3}a$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{21}}{7}a$.

✍Lời giải.

Ta có

$$\frac{\mathrm{d}\,(C,(SAB))}{\mathrm{d}\,(H,(SAB))}=\frac{CA}{HC}=\frac{3}{2}\Rightarrow\mathrm{d}\,(C,(SAB))=\frac{3}{2}\mathrm{d}\,(H,(SAB)).$$



Gọi K và M lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB và SK.
Khi đó
$\begin{cases}HM\perp SK\\HM\perp AB\end{cases}\Rightarrow HM\perp(SAB)\Rightarrow HM=\mathrm{d}\,(H,(SAB))$.
Tam giác AKH vuông tại K nên
$HK=AH\cdot\sin 60^\circ=2a\cdot\sin 60^\circ=a\sqrt{3}$.

Tam giác SHK vuông tại H, ta có

$$\frac{1}{HM^2}=\frac{1}{SH^2}+\frac{1}{HK^2}\Leftrightarrow HM=\frac{SH\cdot HK}{\sqrt{SH^2+HK^2}}=\frac{2a\sqrt{21}}{7}.$$

Vậy $\mathrm{d}\,(C,(SAB))=\dfrac{3}{2}\mathrm{d}\,(H,(SAB))=\dfrac{3a\sqrt{21}}{7}$.

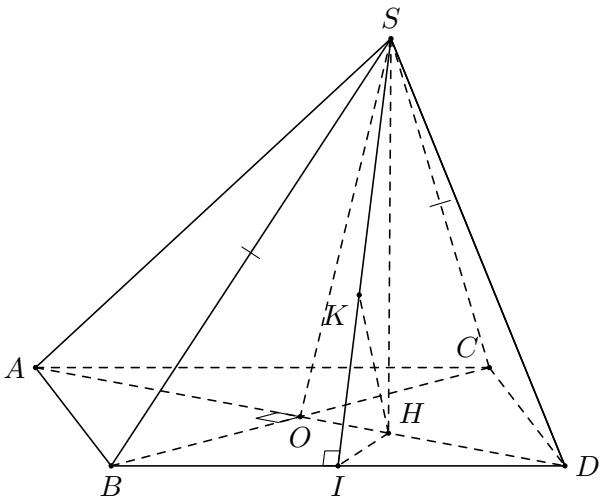
Chọn đáp án (D) □

Câu 195. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $\widehat{SBA}=\widehat{SCA}=90^\circ$. Biết góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng ABC bằng 45°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC là

A. $\dfrac{2\sqrt{13}}{13}a$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{51}}{17}a$. **C.** $\dfrac{\sqrt{39}}{13}a$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}a$.

✍Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC, H là hình chiếu vuông góc của S lên AM.
Dựng hình thoi $ABDC$.
Vì $AB = AC$, $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} \Rightarrow \triangle SBA = \triangle SCA \Rightarrow SB = SC \Rightarrow \Delta SBC$ cân tại $S \Rightarrow SM \perp BC$.
Vì $\triangle ABC$ đều nên $AM \perp BC$ nên $BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SH$.
Mà $SH \perp AM \Rightarrow SH \perp (ABC)$.
Khi đó góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng ABC bằng $\widehat{SAM} = 45^\circ$.



Gọi $SH = x$. Vì $\triangle SAH$ vuông cân tại H nên $AH = x \Rightarrow SA = x\sqrt{2}$. (1)

Ta lại có $HM = \left|x - \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right| \Rightarrow SM^2 = SH^2 + HM^2 = x^2 + \left(x - \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$.

$\Rightarrow SB^2 = SM^2 + BM^2 = x^2 + \left(x - \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \dfrac{a^2}{4}$.

Ta có: $SA^2 = SB^2 + BA^2 = x^2 + \left(x - \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \dfrac{a^2}{4} + a^2 = x^2 + \left(x - \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \dfrac{5a^2}{4}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{aligned} & x^2 + \left(x - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{5a^2}{4} = 2x^2 \\ \Leftrightarrow \quad & -2xa\sqrt{3} + 2a^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = \frac{2\sqrt{3}}{3}a. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $AH = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a > AM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow HM = AH - AM = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a = \dfrac{1}{3}AM$.
Do đó chứng tỏ H là trọng tâm $\triangle BCD$.
Kẻ $HI \perp BD \Rightarrow I$ là trung điểm canh BD, kẻ $HK \perp SI \Rightarrow HK = \mathrm{d}(H, (SBD))$.
Ta có $HI = ID.\tan 45^\circ = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.
Suy ra $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HI^2} + \dfrac{1}{HS^2} = \dfrac{36}{3a^2} + \dfrac{9}{12a^2} = \dfrac{51}{4a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{2\sqrt{51}}{51}a$.
Vì $AC \parallel BD$ suy ra

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(SB, AC) &= d(AC, (SBD)) \\ &= \mathrm{d}(A, (SBD)) = 3\mathrm{d}(H, (SBD)) \\ &= 3 \cdot \frac{2\sqrt{51}}{51}a \\ &= \frac{2\sqrt{51}}{17}a. \end{aligned}$$

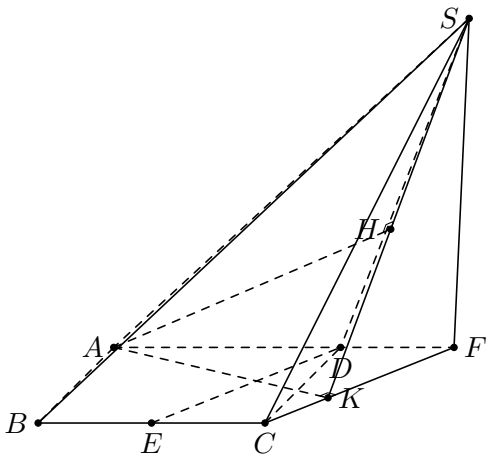
Vậy $\mathrm{d}(SB, AC) = \dfrac{2\sqrt{51}}{17}a$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 196. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $ABCD$. Góc giữa SC và mặt phẳng đáy bằng 45°. Gọi E là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DE và SC.

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{19}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{38}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{38}}{19}$.

✍Lời giải.

Dựng hình bình hành $CEDF$,
ta có: $DE \parallel CF \Rightarrow DE \parallel (SCF)$
Do đó $\mathrm{d}(DE, SC) = \mathrm{d}(D, (SCF))$.
Lại có $AD \cap (SCF) = F$ nên $\dfrac{\mathrm{d}(D,(SCF))}{\mathrm{d}(A,(SCF))} = \dfrac{FD}{FA} = \dfrac{1}{3}$.
Suy ra $\mathrm{d}(DE, SC) = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}(,(SCF))$.



Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên $(SC, (ABCD)) = (SC, AC) = \widehat{SCA} = 45^\circ$.
$\Rightarrow SA = AC \tan \widehat{SCA} = a\sqrt{2}$.
Kẻ $AK \perp CF$ tại K, $AH \perp SK$ tại H.
Ta chứng minh được $AH \perp (SCF)$ hay $\mathrm{d}(A, (SCF)) = AH$.
Ta có $CF = DE = \sqrt{DC^2 + CE^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
$S_{\triangle ACF} = \dfrac{1}{2}CD \cdot AF = \dfrac{1}{2}AK \cdot CF$. Suy ra $AK = \dfrac{AF \cdot CD}{CF} = \dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$.
Xét $\triangle SAK$ có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AK^2} \Rightarrow AH = \dfrac{3a\sqrt{38}}{19}$.
Vậy $d(DE, SC) = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}(A, (SCF)) = \dfrac{1}{3}AH = \dfrac{a\sqrt{38}}{19}$.

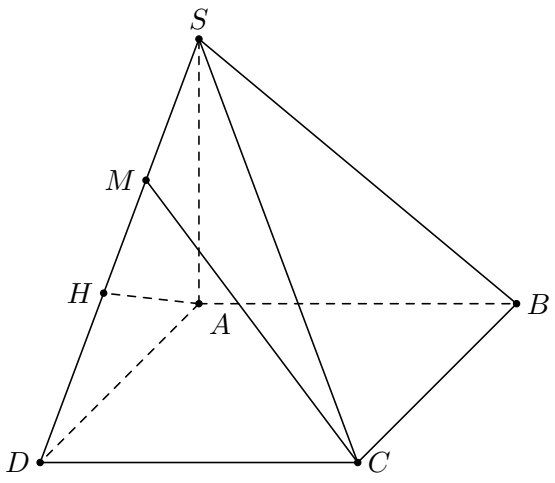
Chọn đáp án (D) □

Câu 197. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là điểm trên đoạn SD sao cho $MD = 2MS$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CM bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{3a}{4}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

✍Lời giải.

Do $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD)$.
$\Rightarrow \mathrm{d}(AB, CM) = \mathrm{d}(AB, (SCD)) = \mathrm{d}(A, (SCD))$.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SD.
Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$.
Vì $\begin{cases} AH \perp SD \\ AH \perp CD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD)$.
$\Rightarrow \mathrm{d}(A, (SCD)) = AH$.
$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AD^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

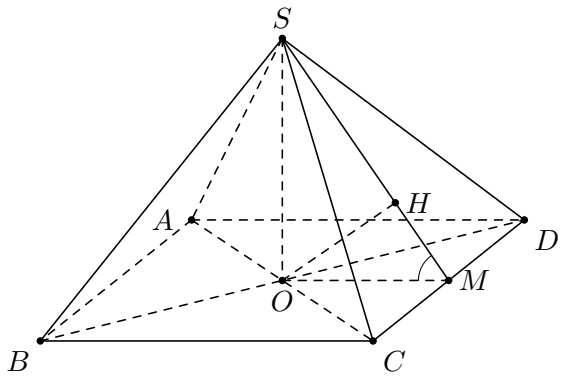


Chọn đáp án (A) □

Câu 198. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy và cạnh bên đều bằng a. Tính khoảng cách từ A đến (SCD).

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{7}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

✍Lời giải.



Gọi O là tâm của mặt đáy. Vẽ $OM \perp CD$ tại M và kẻ $OH \perp SM$ tại H. Khi đó

$$\begin{cases} CD \perp OM \\ CD \perp SO \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOM) \Rightarrow CD \perp OH$$

mà $OH \perp SM$ (theo cách vẽ) nên $OH \perp (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}(O,(SCD)) = OH$.
Ta lại có $\dfrac{CA}{CO} = 2$ nên

$$\mathrm{d}(A,(SCD)) = 2\mathrm{d}(O,(SCD)) = 2OH.$$

Do tam giác SOM vuông tại O có đường cao OH nên

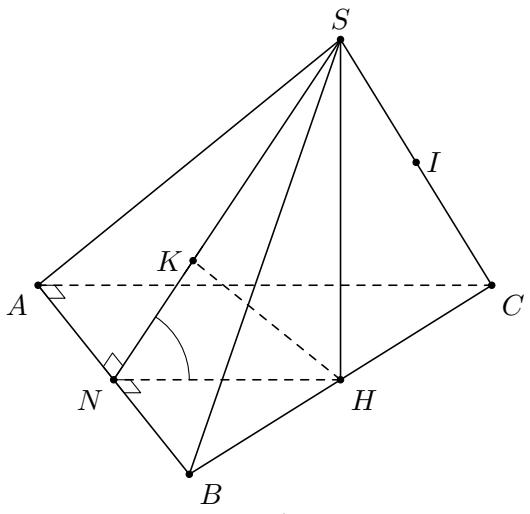
$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OM^2} = \frac{1}{SA^2 - AO^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{1}{a^2 - \dfrac{a^2}{2}} + \frac{4}{a^2} = \frac{6}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Vậy $\mathrm{d}(A,(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 199. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A, $AB = AC = a$, I là trung điểm SC; hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng ABC là trung điểm H của BC; mặt phẳng (SAB) tạo với đáy một góc bằng $60°$. Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SAB) theo a.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.
Từ H vẽ $HN \perp AB$ và $HK \perp SN$.
Ta có $AB \perp NH$ và $AB \perp SH$ nên $AB \perp (SNH)$.
Suy ra $HK \perp AB$.
Ta lại có $HK \perp SN$ nên $HK \perp (SAB)$.
Vậy $\mathrm{d}(H,(SAB)) = HK$.
Mặt khác $(SAB) \cap (ABC) = AB$
và $SN \perp AB$, $NH \perp AB$
nên $((SAB);(ABC)) = \widehat{SNH} = 60°$.
Ta có $\dfrac{SC}{SI} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{d}(I,(SAB)) = \dfrac{1}{2} \cdot \mathrm{d}(C,(SAB))$
và $\dfrac{CB}{HB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{d}(C,(SAB)) = 2\mathrm{d}(H,(SAB))$.



Ta có $\mathrm{d}(I,(SAB)) = \dfrac{1}{2} \cdot \mathrm{d}(C,(SAB)) = \dfrac{1}{2} \cdot 2\mathrm{d}(H,(SAB)) = HK = HN \cdot \sin\widehat{HNK} = \dfrac{1}{2}AC \sin 60°$.
Suy ra $\mathrm{d}(I,(SAB)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 200. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $\triangle SAB$ vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, M lần lượt là trung điểm của AB và CD. Biết khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SHM) bằng a. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{2a}{5}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{a}{5}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

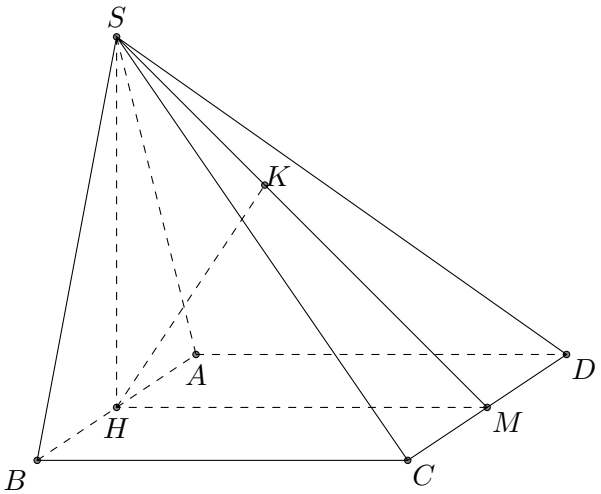
✍Lời giải.

Do $(SAB) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến AB và $SH \perp AB$ nên $SH \perp (ABCD)$. Ta có

$$\begin{cases} BH \perp SH \\ BH \perp HM \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SHM).$$

Từ giả thiết suy ra $\mathrm{d}(B,(SHM)) = BH = a$.
Mặt khác, do

$$AH \parallel (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}(A,(SCD)) = \mathrm{d}(H,(SCD)).$$



Kẻ $HK \perp SM$ tại K. Ta có $CD \parallel BH$ và $BH \perp (SHM)$ nên $CD \perp (SHM)$, suy ra $CD \perp HK$. Từ đó suy ra $HK \perp (SCD)$.
Xét tam giác vuông SHM, có $SH = BH = a,\ HM = 2HB = 2a$. Suy ra

$$\mathrm{d}(H,(SCD)) = HK = \frac{SH \cdot HM}{\sqrt{SH^2 + HM^2}} = \frac{a \cdot 2a}{\sqrt{a^2 + (2a)^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy $\mathrm{d}(A,(SCD)) = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

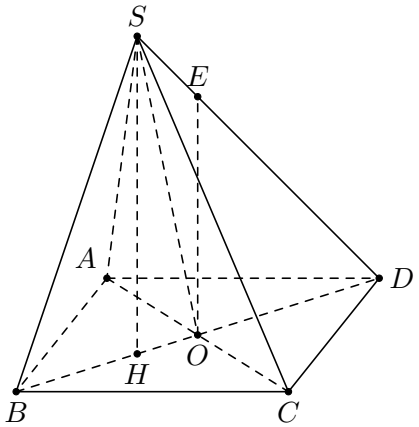
Chọn đáp án (D) □

Câu 201. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAC} = 60°$. Hình chiếu của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của $\triangle ABC$. Góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và $(ABCD)$ là $60°$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{3a}{2\sqrt{7}}$. **B.** $\dfrac{3a}{\sqrt{7}}$. **C.** $\dfrac{9a}{2\sqrt{7}}$. **D.** $\dfrac{a}{2\sqrt{7}}$.

✍Lời giải.

Gọi O là tâm $ABCD$, H là trọng tâm $\triangle ABC$. Ta có
$\begin{cases} SH \perp (ABCD) \\ HO \perp AC \end{cases} \Rightarrow SO \perp AC$ (định lý 3 đường vuông góc).
Khi đó $((\widehat{SAC}),(\widehat{ABCD})) = \widehat{SOH} = 60°$.
$\triangle ABC$ cân tại B có $\widehat{BAC} = 60° \Rightarrow \triangle ABC$ là tam giác đều.
Do đó $OC = \dfrac{a}{2}$; $OH = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ và $OD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
$\triangle SOH$ vuông tại $H \Rightarrow SH = OH \cdot \tan 60° = \dfrac{a}{2}$.
Trong (SBD), kẻ $OE \parallel SH \Rightarrow OE = \dfrac{3a}{8}$.



Ta có OE, OC, OD đôi một vuông góc. Do đó

$$\frac{1}{\mathrm{d}^2(O,(SCD))} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OE^2} \Rightarrow \mathrm{d}(O,(SCD)) = \frac{3a\sqrt{7}}{28}.$$

Mà $\mathrm{d}(B,(SCD)) = 2\mathrm{d}(O,(SCD))$ nên $\mathrm{d}(B,(SCD)) = \dfrac{3a}{2\sqrt{7}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 202. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BD)$ theo a.

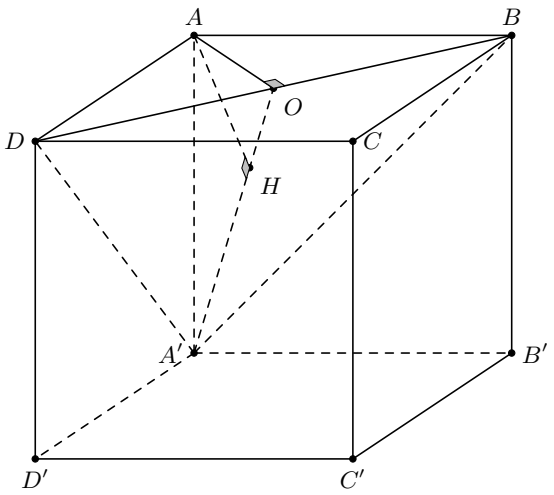
A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

✍Lời giải.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.
Kẻ $AH \perp A'O \quad (1)$
Vì $\begin{cases} AO \perp BD \,(ABCD \text{ là hình vuông tâm } O) \\ AA' \perp BD \;(AA' \perp (ABCD)) \end{cases}$
$\Rightarrow BD \perp (A'AO) \Rightarrow AH \perp BD \quad (2)$.
Từ (1) và (2), suy ra $AH \perp (A'BD)$.
Khi đó $\mathrm{d}(A,(A'BD)) = AH$. Ta có $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Xét $\triangle A'AO$ vuông tại A, AH là đường cao

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AO^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $\mathrm{d}(A,(A'BD)) = AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 203. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$; SA vuông góc với đáy, $SA = 2a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

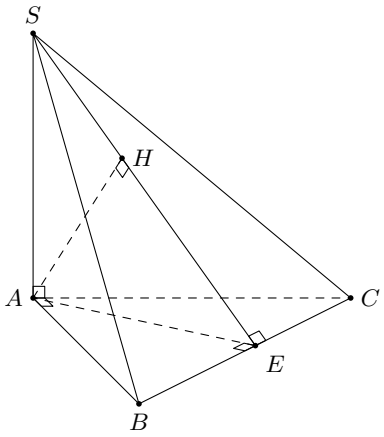
A. $\dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

✍Lời giải.

Kẻ $AE \perp BC$ tại E ; $AH \perp SE$ tại H.
Ta có: $\begin{cases} AE \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAE) \Rightarrow BC \perp AH$.
Suy ra: $AH \perp (SBC)$ hay AH là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC)
.
Tam giác ABC vuông tại A nên ta có: $\dfrac{1}{AE^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$
Tam giác SAE vuông tại A nên ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{AH^2} &= \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AS^2} \\ &= \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AS^2} \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{4a^2} \\ &= \frac{19}{12a^2}. \end{aligned}$$

Suy ra $AH = \dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

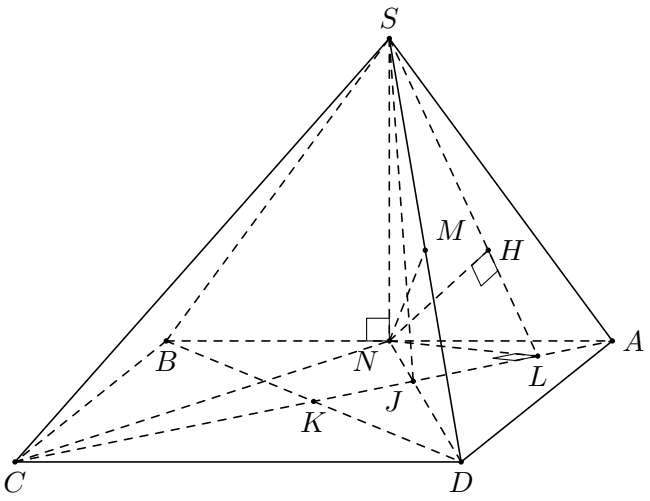


Chọn đáp án (D) □

Câu 204. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $45°$. Gọi M là trung điểm của SD. Tính theo a khoảng cách d từ điểm M đến mặt phẳng (SAC).

A. $\mathrm{d} = \dfrac{a\sqrt{1513}}{89}$. **B.** $\mathrm{d} = \dfrac{2a\sqrt{1315}}{89}$. **C.** $\mathrm{d} = \dfrac{a\sqrt{1315}}{89}$. **D.** $\mathrm{d} = \dfrac{2a\sqrt{1513}}{89}$.

✍Lời giải.



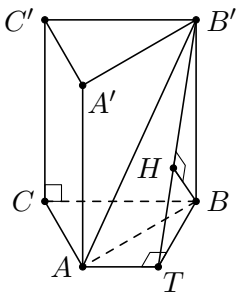
Gọi N là trung điểm AB. Vì tam giác SAB cân tại S nên $SN \perp AB$.
Hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ vuông góc với nhau theo giao tuyến AB nên suy ra $SN \perp (ABCD)$.
CN là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$
$\Rightarrow$ Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SCN} = 45^\circ$.
$\triangle SNC$ vuông cân tại N nên $SN = NC = \sqrt{BC^2 + BN^2} = \sqrt{4a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{17}}{2}$.
M là trung điểm của $SD \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}(M,(SAC))}{\mathrm{d}(D,(SAC))} = \dfrac{SM}{SD} = \dfrac{1}{2}$ (1).
Gọi K là tâm của $ABCD$; $J = ND \cap AK$.
Khi đó J là trọng tâm $\triangle ABD$.
Suy ra $\dfrac{\mathrm{d}(N,(SAC))}{\mathrm{d}(D,(SAC))} = \dfrac{JN}{JD} = \dfrac{1}{2}$ (2).
Từ (1) và (2) ta có $\mathrm{d}(M,(SAC)) = \mathrm{d}(N,(SAC))$.
Gọi L là hình chiếu vuông góc của N lên AK; H là hình chiếu vuông góc của N lên SL.
Mà $AK \perp (SNL)$, $(SNL) \supset NH$ (Vì $AK \perp SN$, $AK \perp NL$) và $NH \perp SL$.
Từ đó ta có $NH \perp (SAC) \Rightarrow \mathrm{d}(N,(SAC)) = NH$.
$\triangle ALN$ và $\triangle ABC$ là hai tam giác đồng dạng nên
$\dfrac{NL}{BC} = \dfrac{AN}{AC} \Leftrightarrow NL = \dfrac{AN \cdot BC}{AC} = \dfrac{\dfrac{a}{2} \cdot 2a}{\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$.
$\triangle SNL$ vuông tại $N \Rightarrow \dfrac{1}{NH^2} = \dfrac{1}{SN^2} + \dfrac{1}{NL^2} = \dfrac{4}{17a^2} + \dfrac{5}{a^2} = \dfrac{89}{17a^2} \Rightarrow NH = \dfrac{\sqrt{1513}}{89}a$.
Vậy $\mathrm{d}(M,(SAC)) = \dfrac{a\sqrt{1513}}{89}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 205. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân, với $AB = AC = 1$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, cạnh bên $AA' = 2$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng BC và AB'.

A. $d = \dfrac{6}{\sqrt{17}}$. **B.** $d = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$. **C.** $d = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$. **D.** $d = \dfrac{2}{\sqrt{17}}$.

✍Lời giải.

Trong mặt phẳng (ABC), vẽ hình thang vuông $ACBT$ ($\widehat{CBT} = \widehat{ATB} = 90^\circ$). Suy ra $\widehat{BAT} = 30^\circ$.
Trong mặt phẳng $(B'BT)$, vẽ $BH \perp B'T$ tại H.
Ta có $AT \perp BT$ và $AT \perp BB'$ nên $AT \perp (B'BT)$.
Ta có $BH \perp B'T$ và $BH \perp AT$ nên $BH \perp (B'AT)$.
Ta có $BC \parallel AT$, suy ra $BC \parallel (B'AT)$.



Suy ra $d = \mathrm{d}(BC, AB') = \mathrm{d}[BC,(B'AT)] = \mathrm{d}[B,(B'AT)] = BH$.
$\triangle ABT$ vuông tại T có $BT = AB \cdot \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$.
$\triangle B'BT$ vuông tại B và đường cao BH có $\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{BB'^2} + \dfrac{1}{BT^2} \Rightarrow d = BH = \dfrac{2}{\sqrt{17}}$.

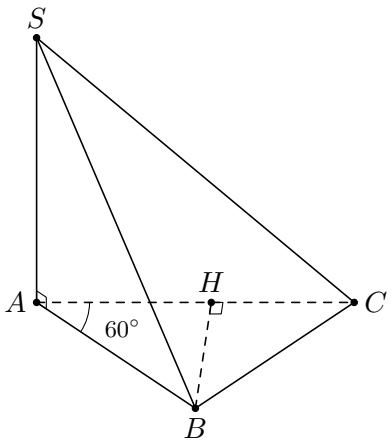
Chọn đáp án D □

Câu 206. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, đáy ABC là tam giác vuông tại B có $\widehat{BAC} = 60^\circ$, $AC = a$. Tính khoảng cách từ điểm B đến (SAC).

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Do $\triangle ABC$ vuông tại B nên $\begin{cases} AB = AC\cos\widehat{BAC} = \dfrac{a}{2} \\ BC = AC\sin\widehat{BAC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.



Gọi H là hình chiếu của B xuống AC, ta có

$$\begin{cases} BH \perp AC \\ SA \perp BH \text{ (do } SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SAC).$$

Vậy $\mathrm{d}[B,(SAC)] = BH = \dfrac{AB\cdot BC}{AC} = \dfrac{\frac{a}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án C □

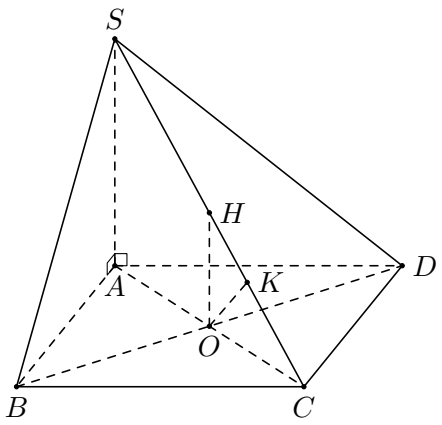
Câu 207. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường chéo nhau SC và BD.

A. $\dfrac{a}{3}$. **B.** $a\sqrt{6}$. **C.** $\dfrac{a}{\sqrt{6}}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Do $BD \perp AC$ và $BD \perp SA$ nên $BD \perp (SAC)$. Suy ra $BD \perp SC$.
Trong mặt phẳng (SAC) gọi K là hình chiếu của O lên SC. Khi đó $\mathrm{d}(BD,SC) = OH$.
Gọi H là trung điểm của SC. Xét tam giác HOC ta có:

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OH^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{6}{a^2} \Rightarrow OK = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$



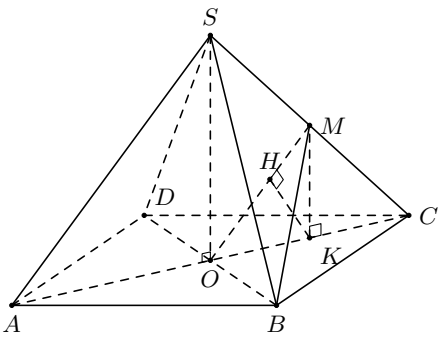
Chọn đáp án C □

Câu 208. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$ có SO vuông góc với đáy và O là giao điểm của AC và BD. Giả sử $SO = 2\sqrt{2}$, $AC = 4$. Gọi M là trung điểm của SC. Khoảng cách từ S đến mặt phẳng (MOB) là $\dfrac{a\sqrt{6}}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b$.

A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

✍Lời giải.

Gọi K là trung điểm của OC. Suy ra $MK \perp (ABCD)$.
Kẻ $KH \perp OM$ với $H \in OM$, suy ra $HK \perp (MOB)$.
Ta có
$\mathrm{d}\,(S,(MOB)) = \mathrm{d}\,(C,(MOB)) = 2\mathrm{d}\,(K,(MOB)) = 2KH$.
Mặt khác $OK = 1$, $MH = \sqrt{2}$. Do đó $HK = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.
Vậy $\mathrm{d}\,(S,(MOB)) = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$. Do đó $a+b = 5$.



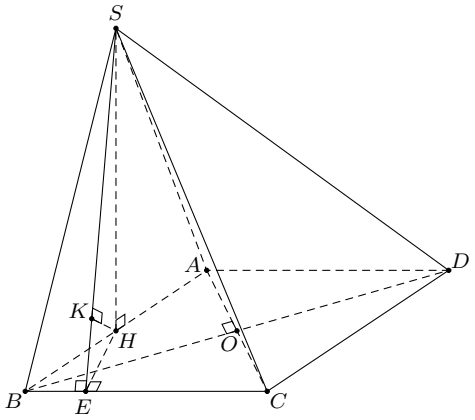
Chọn đáp án (A) □

Câu 209. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AC = 2a$, $BD = 4a$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC.

A. $\dfrac{2a^3\sqrt{15}}{3}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{4a\sqrt{1365}}{91}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD$, H là trung điểm của AB,
suy ra $SH \perp AB$.
Do $AB = (SAB) \cap (ABCD)$ và $(SAB) \perp (ABCD)$,
nên $SH \perp (ABCD)$.



+) Ta có $OA = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{2a}{2} = a$, $OB = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{4a}{2} = 2a$.
$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$.

+) $SH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2}$.
$S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BD = \dfrac{1}{2}2a \cdot 4a = 4a^2$.

Vì $BC \parallel AD$ nên $AD \parallel (SBC)$
$\Rightarrow \mathrm{d}(AD, SC) = \mathrm{d}(AD, (SBC)) = \mathrm{d}(A, (SBC))$.
Do H là trung điểm của AB và $B = AH \cap (SBC)$, nên $\mathrm{d}(A, (SBC)) = 2\mathrm{d}(H, (SBC))$.
Kẻ $HE \perp BC$, $H \in BC$, do $SH \perp BC$, nên $BC \perp (SHE)$.
Kẻ $HK \perp SE$, $K \in SE$, ta có $BC \perp HK \Rightarrow HK \perp (SBC) \Rightarrow HK = \mathrm{d}(H, (SBC))$.
$\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HE^2} + \dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{5}{4a^2} + \dfrac{4}{15a^2} = \dfrac{91}{60a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{2a\sqrt{15}}{\sqrt{91}} = \dfrac{2a\sqrt{1365}}{91}$.
Vậy $\mathrm{d}(AD, SC) = 2HK = \dfrac{4a\sqrt{1365}}{91}$.

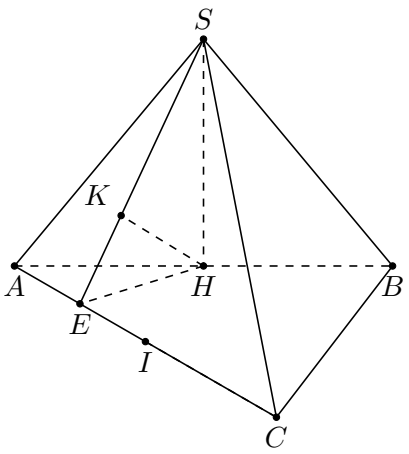
Chọn đáp án (C) □

Câu 210. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác SAB và tam giác ABC là các tam giác đều cạnh a. Mặt phẳng SAB vuông góc với đáy. Khoảng cách từ B đến (SAC) là

A. $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{4}$. **D.** a.

Lời giải.

Gọi I, E, H lần lượt là trung điểm AC, AI, AB.
Ta có $SH \perp (ABC) \Rightarrow \begin{cases} SH \perp AC \\ HE \perp AC \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHE)$.
Trong (SHE) kẻ $HK \perp SE$ tại K. Ta được $HK \perp (SAC)$.
Ta có $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HE^2} + \dfrac{1}{HS^2} \Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{15}}{10}$.
Ta có $\mathrm{d}(B; (SAC)) = 2\mathrm{d}(H; (SAC)) = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 211. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{7}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải.

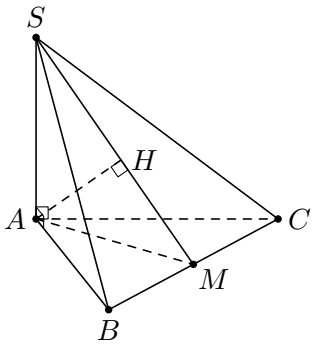
Gọi M là trung điểm BC. Suy ra $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Kẻ $AH \perp SM$. (1)

Ta lại có $BC \perp AM$ và $BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAM)$, suy ra

$$BC \perp AH. \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $AH \perp (SBC)$. Do đó khoảng cách từ A đến (SBC) là AH.



Tam giác SAM vuông tại A có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{4}{3a^2} = \dfrac{7}{3a^2}$.

Vậy $\mathrm{d}(A,(SBC)) = AH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án C □

Câu 212. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy và đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $AB = 4a$, $AD = 3a$, $SB = 5a$. Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD).

A. $\dfrac{12\sqrt{41}a}{41}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{41}a}{12}$. **C.** $\dfrac{12\sqrt{61}a}{61}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{61}a}{12}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$.

Vì O là trung điểm của AC nên

$$\mathrm{d}(C;(SBD)) = \mathrm{d}(A;(SBD)).$$

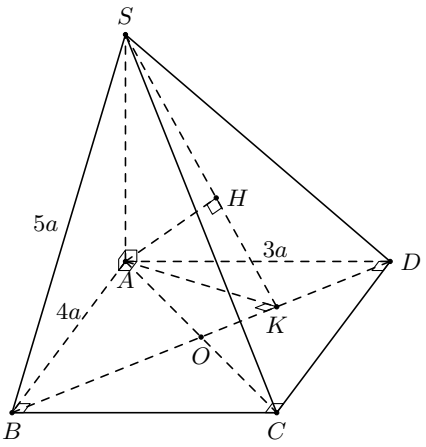
Kẻ $AK \perp OD$ tại K và $AH \perp SK$ tại H.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AK \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAK) \Rightarrow BD \perp AH$.

Khi đó $AH \perp (SBD) \Rightarrow \mathrm{d}(A;(SBD)) = AH$.

Tam giác SAB vuông tại A

$\Rightarrow SA^2 = SB^2 - AB^2 = 25a^2 - 16a^2 = 9a^2$.



Tam giác ABD vuông tại A có AK là đường cao $\Rightarrow \dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{16a^2} + \dfrac{1}{9a^2} = \dfrac{25}{144a^2}$.

Tam giác SAK vuông tại $A \Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{9a^2} + \dfrac{25}{144a^2} = \dfrac{41}{144a^2}$

$\Rightarrow AH = \dfrac{12a\sqrt{41}}{41}$.

Chọn đáp án A □

Câu 213. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng

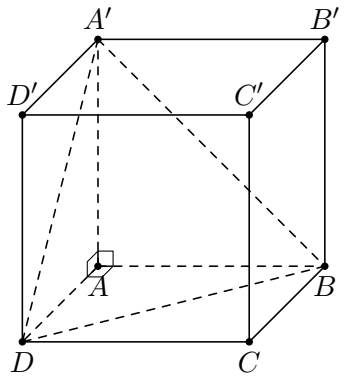
A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** 3. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Đặt $h = \mathrm{d}(A,(A'BD))$.

Tứ diện $A.A'BD$ có AA', AB, AD vuông góc với nhau từng đôi một nên ta có

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = 3 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



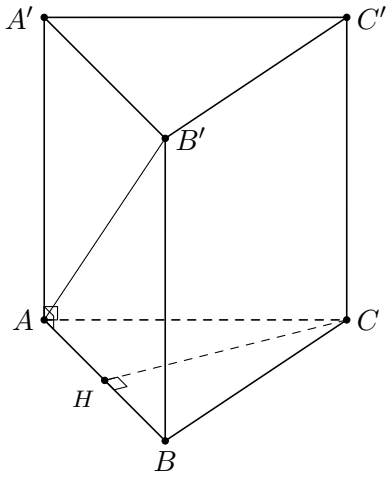
Chọn đáp án C □

Câu 214. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $AA' = 2a$. Khoảng cách giữa AB' và CC' bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **B.** a. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Do $CC' \parallel (AA'B'B)$ nên
$\mathrm{d}(AB', CC') = \mathrm{d}(CC', (AA'B'B)) = \mathrm{d}(C, (AA'B'B))$.
Gọi H là trung điểm của AB.
Do $\triangle ABC$ đều nên $CH \perp AB$ (1).
Mặt khác, $AA' \perp (ABC)$ nên $CH \perp AA'$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $CH \perp (AA'B'B)$.
Vậy $\mathrm{d}(C, (AA'B'B)) = CH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



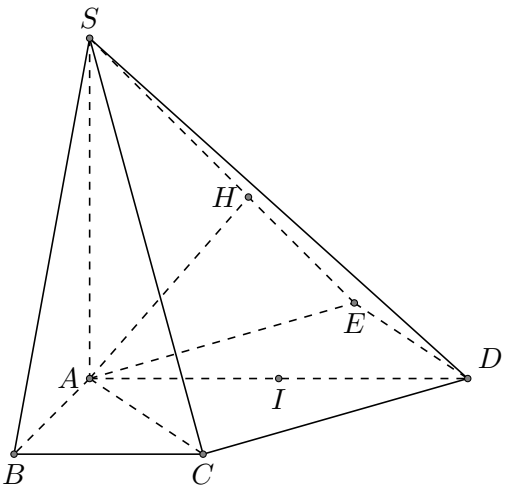
Chọn đáp án D □

Câu 215. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a$, $AD = 2a$ SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD.

A. $\dfrac{\sqrt{6}a}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}a}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}a}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{3}$.

✍Lời giải.

Gọi I là trung điểm của cạnh AD.
ΔABC vuông cân tại B, ΔICD vuông cân tại I và có $AC = IC = a$ nên $AC = CD = a\sqrt{2}$.
Khi đó $AC^2 + CD^2 = AD^2$ nên ΔACD vuông cân tại C.
Trong $(ABCD)$, dựng hình vuông $ACDE$. Trong ΔSAE kẻ $AH \perp SE$ (1).
Ta có $\begin{cases} AD \perp SA \\ ED \perp AE \end{cases} \Rightarrow ED \perp (SAE) \Rightarrow ED \perp AH$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SDE)$.
Vì $AC \parallel ED$ nên $\mathrm{d}[AC, SD] = \mathrm{d}[AC, (SDE)] = \mathrm{d}[A, (SDE)] = AH$.



Trong ΔSAE,

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AE^2} \Leftrightarrow AH = \frac{SA \cdot AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{6}a}{3}.$$

Vậy $\mathrm{d}[AC, SD] = \dfrac{\sqrt{6}a}{3}$.

Chọn đáp án C □

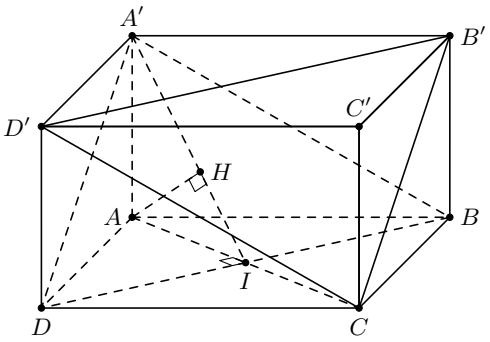
Câu 216. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB = 3$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(B'CD')$ và $(A'BD)$ bằng

A. $\sqrt{6}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

✍Lời giải.

Ta có $(B'CD') \parallel (A'BD)$. Do đó

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\left((B'CD'),(A'BD)\right) &= \mathrm{d}(C,(A'BD)) \\ &= \mathrm{d}(A,(A'BD)) \\ &= AH. \end{aligned}$$



Xét tứ diện $ABDA'$ ta có

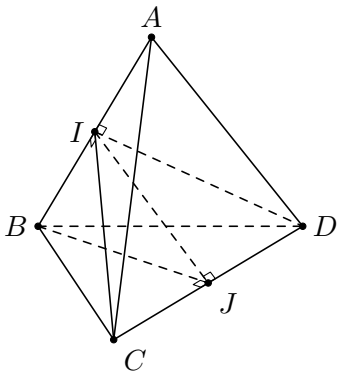
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AA'^2} = \frac{3}{3^2} = \frac{1}{3}.$$

Suy ra $AH = \sqrt{3}$. Vậy $\mathrm{d}\left((B'CD'),(A'BD)\right) = \sqrt{3}$.
Chọn đáp án C □

Câu 217. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 5$, các cạnh còn lại bằng 3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.
Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD. Ta có $\triangle ABC$ và $\triangle ABD$ lần lượt cân tại C, D. Do đó $\begin{cases} CI \perp AB \\ DI \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (ICD)$.
Ta có $\triangle ICD$ cân tại I nên $IJ \perp CD$.
Vậy IJ là đoạn vuông góc chung của AB, CD nên $\mathrm{d}(AB,CD) = IJ$.
Do tam giác BCD đều cạnh bằng 3 nên $BJ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
$IJ = \sqrt{BJ^2 - BI^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \mathrm{d}(AB,CD) = IJ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án D □

Câu 218. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Khoảng cách d từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A. $d = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $d = \frac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $d = \frac{a\sqrt{6}}{4}$. **D.** $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

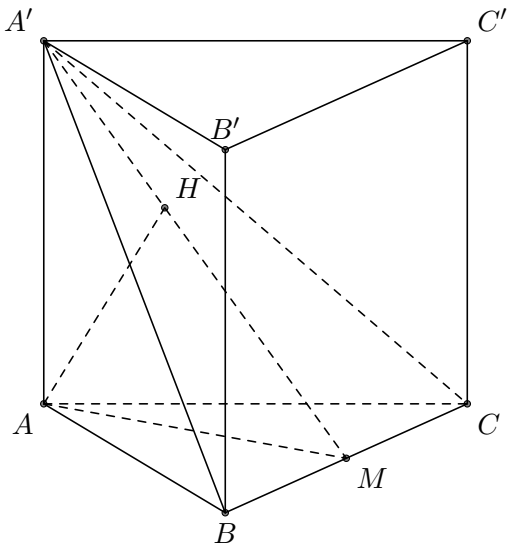
Lời giải.
Gọi M là trung điểm của BC, ta có

$$\begin{cases} AM \perp BC \\ AA' \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'M).$$

Vậy $(AA'M) \perp (A'BC)$ theo giao tuyến $A'M$.
Kẻ $AH \perp A'M$ trong $(AA'M)$, ta suy ra $AH \perp (A'BC)$.
Ta có $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, xét tam giác $AA'M$ có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Vậy khoảng cách từ A đến $(A'BC)$ là $d = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.



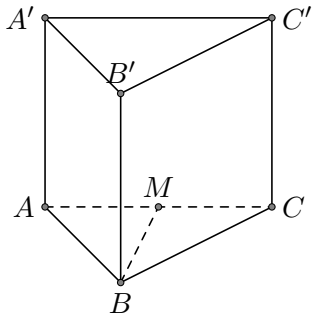
Chọn đáp án B □

Câu 219. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BB' bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

✍Lời giải.

Gọi M là trung điểm của AC.
Vì $\triangle ABC$ đều nên $BM \perp AC$.
Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $BM \perp BB'$.
Vậy BM là đoạn vuông góc chung của BB' và AC.
Suy ra $\mathrm{d}(BB', AC) = BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án (B) □

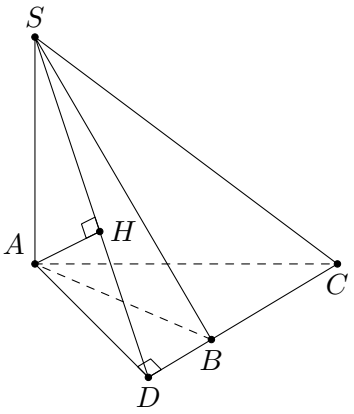
Câu 220. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 3a$ và $SA \perp (ABC)$. Biết $AB = BC = 2a$, $\widehat{ABC} = 120°$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $2a$. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** a. **D.** $\dfrac{3a}{2}$.

✍Lời giải.

Qua A kẻ $AD \perp BC$ tại D và kẻ $AH \perp SD$ tại H.
Suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow \mathrm{d}(A, (SBC)) = AH$.
Ta có $AD = AB \cdot \sin \widehat{ABD} = 2a \cdot \sin 60° = a\sqrt{3}$.
Tam giác SAD vuông tại A, đường cao AH nên

$$AH = \frac{AD \cdot AS}{\sqrt{AD^2 + AS^2}} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{\sqrt{9a^2 + 3a^2}} = \frac{3a}{2}.$$



Chọn đáp án (D) □

Câu 221. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = a$. Khoảng cách giữa SC và AB bằng

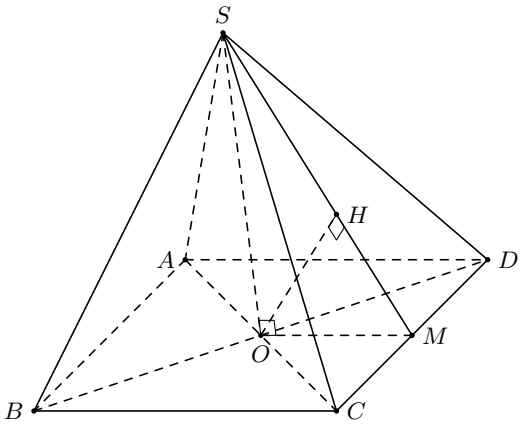
A. $\dfrac{2a\sqrt{3}}{15}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{15}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

✍Lời giải.

Ta có $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD)$. Do đó khoảng cách giữa SC và AB bằng khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD). Vì O là trung điểm AC nên

$$\mathrm{d}\left[A; (SCD)\right] = 2\mathrm{d}\left[A; (SCD)\right].$$

Gọi M là trung điểm CD, H là hình chiếu của O trên đường thẳng SM. Khi đó từ $\begin{cases} CD \perp OM \\ CD \perp SO \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOM) \Rightarrow OH \perp CD$.



Từ $\begin{cases} OH \perp CD \\ OH \perp SM \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SCD)$. Do đó $\mathrm{d}\left[O; (SCD)\right] = OH$.

Xét $\triangle SOM$ vuông tại O, có $SO = a$, $OM = \dfrac{a}{2}$. Do đó

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OM^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy $\mathrm{d}\left[SC; AB\right] = 2OH = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

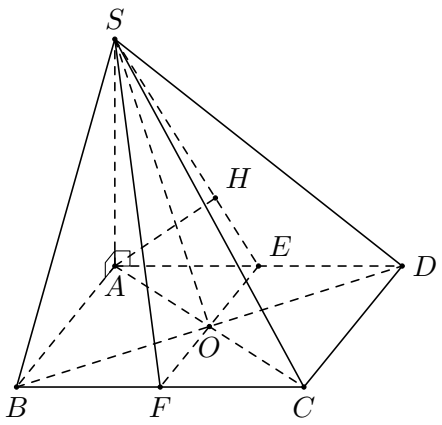
Chọn đáp án (D) □

Câu 222. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $\widehat{SBD} = 60^\circ$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO.

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

✍Lời giải.

Đáy là hình vuông cạnh a nên ta có $AC = BD = a\sqrt{2}$.
Tam giác SBD cân tại S và có góc $\widehat{SBD} = 60^\circ$ do đó tam giác SBD đều $\Rightarrow SB = SD = BD = a\sqrt{2}$.
Xét $\triangle SAB$ vuông tại A: $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a$.
Qua O kẻ đường thẳng song song với AB cắt AD, BC lần lượt tại E và F (E, F là trung điểm của AD và BC).



Ta có $\begin{cases} AB \parallel EF \\ EF \subset (SEF) \end{cases} \Rightarrow AB \parallel (SEF) \Rightarrow \mathrm{d}(AB; SO) = \mathrm{d}(AB; (SEF)) = \mathrm{d}(A; (SEF))$.
Kẻ $AH \perp SE$. (1)
Ta có $EF \perp (SAD) \Rightarrow EF \perp AH$. (2)
Từ (1) và (2), suy ra $AH \perp (SEF) \Rightarrow \mathrm{d}(A; (SEF)) = AH$.
Xét $\triangle SAE$ vuông tại A: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AE^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{5}{a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

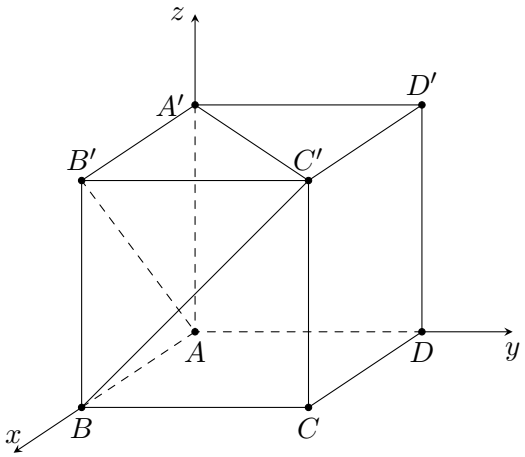
Chọn đáp án (B) □

Câu 223. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

✍Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.
Ta có $A(0;0;0)$, $B'(a;0;a)$, $B(a;0;0)$, $C'(a;a;a)$.
Suy ra $\overrightarrow{AB'} = (a;0;a)$, $\overrightarrow{BC'} = (0;a;a)$.
Khi đó $\left[\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}\right] = \left(-a^2; -a^2; a^2\right)$, $\overrightarrow{AB} = (a;0;0)$.
Vậy $\mathrm{d}(AB', BC') = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}\right] \cdot \overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}\right]\right|} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 224. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB.

A. $\frac{a\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $2a$.

✍Lời giải.

Ta có $(SB,(ABC))=(SB,AB)=\widehat{SBA}=60^\circ$.

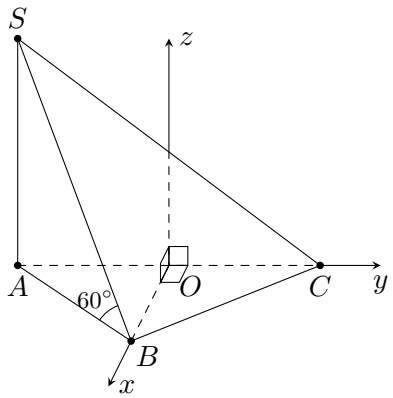
Trong $\triangle SAB$ vuông tại A có $SA=AB\cdot\tan\widehat{SBA}=a\sqrt{3}$.

Gọi O là trung điểm AC, ta có $BO\perp AC$ và $BO=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, trong đó $Oz\parallel SA$.

Ta có

$$A\left(0;-\frac{a}{2};0\right),C\left(0;\frac{a}{2};0\right),S\left(0;-\frac{a}{2};a\sqrt{3}\right),B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right).$$



Suy ra $\overrightarrow{AC}=(0;a;0)$, $\overrightarrow{SB}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};-a\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{AB}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};0\right)$.

Do đó $\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SB}\right]=\left(-a^2\sqrt{3};0;-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)$. Vậy $\mathrm{d}(AC,SB)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SB}\right]\cdot\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SB}\right]\right|}=\frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 225. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $3a$. Điểm H thuộc cạnh AC với $HC=a$. Dựng đoạn thẳng SH vuông góc với mặt phẳng (ABC) với $SH=2a$. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) là

A. $3a$. **B.** $\frac{\sqrt{21}}{7}a$. **C.** $\frac{7}{3}a$. **D.** $\frac{3\sqrt{21}}{7}a$.

✍Lời giải.

Ta có

$$\frac{\mathrm{d}\left(C,(SAB)\right)}{\mathrm{d}\left(H,(SAB)\right)}=\frac{CA}{HC}=\frac{3}{2}\Rightarrow\mathrm{d}\left(C,(SAB)\right)=\frac{3}{2}\mathrm{d}\left(H,(SAB)\right).$$

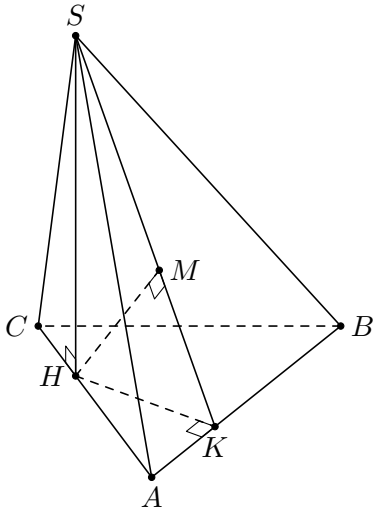
Gọi K và M lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB và SK.

Khi đó

$$\begin{cases}HM\perp SK\\HM\perp AB\end{cases}\Rightarrow HM\perp(SAB)\Rightarrow HM=\mathrm{d}\left(H,(SAB)\right).$$

Tam giác AKH vuông tại K nên

$HK=AH\cdot\sin 60^\circ=2a\cdot\sin 60^\circ=a\sqrt{3}$.



Tam giác SHK vuông tại H, ta có

$$\frac{1}{HM^2}=\frac{1}{SH^2}+\frac{1}{HK^2}\Leftrightarrow HM=\frac{SH\cdot HK}{\sqrt{SH^2+HK^2}}=\frac{2a\sqrt{21}}{7}.$$

Vậy $\mathrm{d}\left(C,(SAB)\right)=\frac{3}{2}\mathrm{d}\left(H,(SAB)\right)=\frac{3a\sqrt{21}}{7}$.

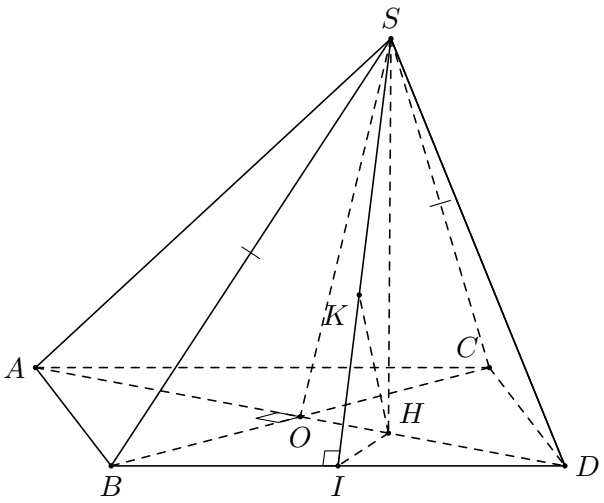
Chọn đáp án (D) □

Câu 226. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $\widehat{SBA}=\widehat{SCA}=90^\circ$. Biết góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng ABC bằng 45°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC là

A. $\frac{2\sqrt{13}}{13}a$. **B.** $\frac{2\sqrt{51}}{17}a$. **C.** $\frac{\sqrt{39}}{13}a$. **D.** $\frac{2\sqrt{7}}{7}a$.

✍Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC, H là hình chiếu vuông góc của S lên AM.
Dựng hình thoi $ABDC$.
Vì $AB = AC$, $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} \Rightarrow \triangle SBA = \triangle SCA \Rightarrow SB = SC \Rightarrow \Delta SBC$ cân tại $S \Rightarrow SM \perp BC$.
Vì $\triangle ABC$ đều nên $AM \perp BC$ nên $BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SH$.
Mà $SH \perp AM \Rightarrow SH \perp (ABC)$.
Khi đó góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng ABC bằng $\widehat{SAM} = 45^\circ$.



Gọi $SH = x$. Vì $\triangle SAH$ vuông cân tại H nên $AH = x \Rightarrow SA = x\sqrt{2}$. (1)

Ta lại có $HM = \left|x - \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right| \Rightarrow SM^2 = SH^2 + HM^2 = x^2 + \left(x - \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$.

$\Rightarrow SB^2 = SM^2 + BM^2 = x^2 + \left(x - \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \dfrac{a^2}{4}$.

Ta có: $SA^2 = SB^2 + BA^2 = x^2 + \left(x - \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \dfrac{a^2}{4} + a^2 = x^2 + \left(x - \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \dfrac{5a^2}{4}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{aligned} & x^2 + \left(x - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{5a^2}{4} = 2x^2 \\ \Leftrightarrow \quad & -2xa\sqrt{3} + 2a^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = \frac{2\sqrt{3}}{3}a. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $AH = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a > AM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow HM = AH - AM = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a = \dfrac{1}{3}AM$.
Do đó chứng tỏ H là trọng tâm $\triangle BCD$.
Kẻ $HI \perp BD \Rightarrow I$ là trung điểm canh BD, kẻ $HK \perp SI \Rightarrow HK = \mathrm{d}(H, (SBD))$.
Ta có $HI = ID.\tan 45^\circ = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.
Suy ra $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HI^2} + \dfrac{1}{HS^2} = \dfrac{36}{3a^2} + \dfrac{9}{12a^2} = \dfrac{51}{4a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{2\sqrt{51}}{51}a$.
Vì $AC \parallel BD$ suy ra

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(SB, AC) &= d(AC, (SBD)) \\ &= \mathrm{d}(A, (SBD)) = 3\mathrm{d}(H, (SBD)) \\ &= 3 \cdot \frac{2\sqrt{51}}{51}a \\ &= \frac{2\sqrt{51}}{17}a. \end{aligned}$$

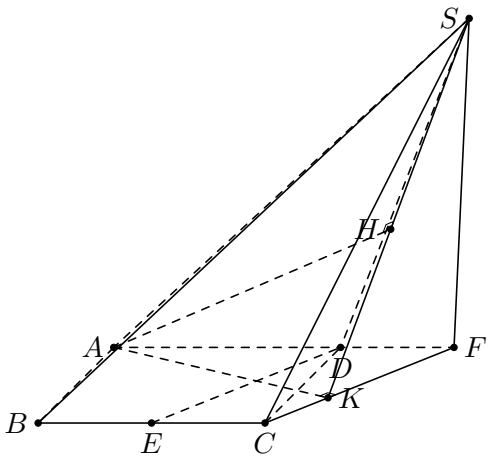
Vậy $\mathrm{d}(SB, AC) = \dfrac{2\sqrt{51}}{17}a$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 227. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $ABCD$. Góc giữa SC và mặt phẳng đáy bằng 45°. Gọi E là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DE và SC.

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{19}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{38}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{38}}{19}$.

Lời giải.

Dựng hình bình hành $CEDF$,
ta có: $DE \parallel CF \Rightarrow DE \parallel (SCF)$
Do đó $\mathrm{d}(DE, SC) = \mathrm{d}(D, (SCF))$.
Lại có $AD \cap (SCF) = F$ nên $\dfrac{\mathrm{d}(D,(SCF))}{\mathrm{d}(A,(SCF))} = \dfrac{FD}{FA} = \dfrac{1}{3}$.
Suy ra $\mathrm{d}(DE, SC) = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}(,(SCF))$.



Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên $(SC, (ABCD)) = (SC, AC) = \widehat{SCA} = 45^\circ$.
$\Rightarrow SA = AC \tan \widehat{SCA} = a\sqrt{2}$.
Kẻ $AK \perp CF$ tại K, $AH \perp SK$ tại H.
Ta chứng minh được $AH \perp (SCF)$ hay $\mathrm{d}(A, (SCF)) = AH$.
Ta có $CF = DE = \sqrt{DC^2 + CE^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
$S_{\triangle ACF} = \dfrac{1}{2}CD \cdot AF = \dfrac{1}{2}AK \cdot CF$. Suy ra $AK = \dfrac{AF \cdot CD}{CF} = \dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$.
Xét $\triangle SAK$ có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AK^2} \Rightarrow AH = \dfrac{3a\sqrt{38}}{19}$.
Vậy $d(DE, SC) = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}(A, (SCF)) = \dfrac{1}{3}AH = \dfrac{a\sqrt{38}}{19}$.

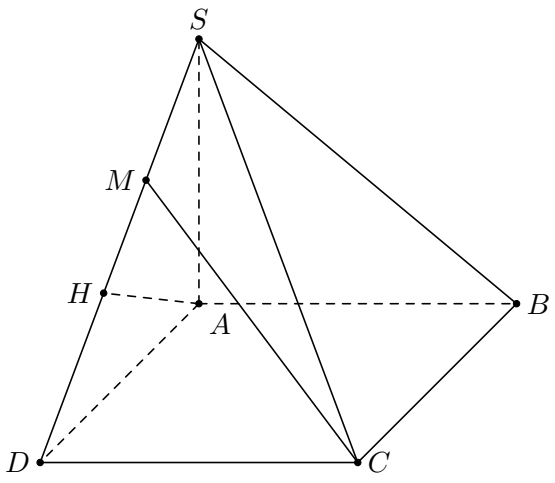
Chọn đáp án (D) □

Câu 228. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là điểm trên đoạn SD sao cho $MD = 2MS$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CM bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{3a}{4}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

✍Lời giải.

Do $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD)$.
$\Rightarrow \mathrm{d}(AB, CM) = \mathrm{d}(AB, (SCD)) = \mathrm{d}(A, (SCD))$.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SD.
Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$.
Vì $\begin{cases} AH \perp SD \\ AH \perp CD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD)$.
$\Rightarrow \mathrm{d}(A, (SCD)) = AH$.
$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AD^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

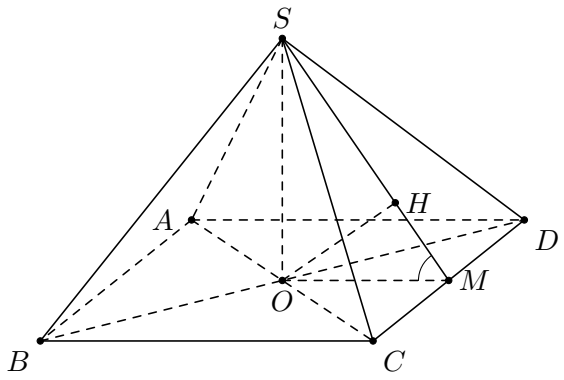


Chọn đáp án (A) □

Câu 229. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy và cạnh bên đều bằng a. Tính khoảng cách từ A đến (SCD).

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{7}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

✍Lời giải.



Gọi O là tâm của mặt đáy. Vẽ $OM \perp CD$ tại M và kẻ $OH \perp SM$ tại H. Khi đó

$$\begin{cases} CD \perp OM \\ CD \perp SO \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOM) \Rightarrow CD \perp OH$$

mà $OH \perp SM$ (theo cách vẽ) nên $OH \perp (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}(O,(SCD)) = OH$.
Ta lại có $\dfrac{CA}{CO} = 2$ nên

$$\mathrm{d}(A,(SCD)) = 2\mathrm{d}(O,(SCD)) = 2OH.$$

Do tam giác SOM vuông tại O có đường cao OH nên

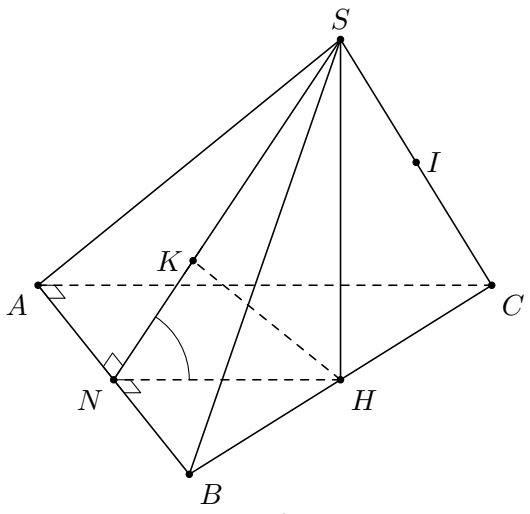
$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OM^2} = \frac{1}{SA^2 - AO^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{1}{a^2 - \dfrac{a^2}{2}} + \frac{4}{a^2} = \frac{6}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Vậy $\mathrm{d}(A,(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 230. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A, $AB = AC = a$, I là trung điểm SC; hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng ABC là trung điểm H của BC; mặt phẳng (SAB) tạo với đáy một góc bằng $60°$. Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SAB) theo a.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.
Từ H vẽ $HN \perp AB$ và $HK \perp SN$.
Ta có $AB \perp NH$ và $AB \perp SH$ nên $AB \perp (SNH)$.
Suy ra $HK \perp AB$.
Ta lại có $HK \perp SN$ nên $HK \perp (SAB)$.
Vậy $\mathrm{d}(H,(SAB)) = HK$.
Mặt khác $(SAB) \cap (ABC) = AB$
và $SN \perp AB$, $NH \perp AB$
nên $((SAB);(ABC)) = \widehat{SNH} = 60°$.
Ta có $\dfrac{SC}{SI} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{d}(I,(SAB)) = \dfrac{1}{2} \cdot \mathrm{d}(C,(SAB))$
và $\dfrac{CB}{HB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{d}(C,(SAB)) = 2\mathrm{d}(H,(SAB))$.



Ta có $\mathrm{d}(I,(SAB)) = \dfrac{1}{2} \cdot \mathrm{d}(C,(SAB)) = \dfrac{1}{2} \cdot 2\mathrm{d}(H,(SAB)) = HK = HN \cdot \sin\widehat{HNK} = \dfrac{1}{2}AC \sin 60°$.
Suy ra $\mathrm{d}(I,(SAB)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 231. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $\triangle SAB$ vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, M lần lượt là trung điểm của AB và CD. Biết khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SHM) bằng a. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{2a}{5}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{a}{5}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

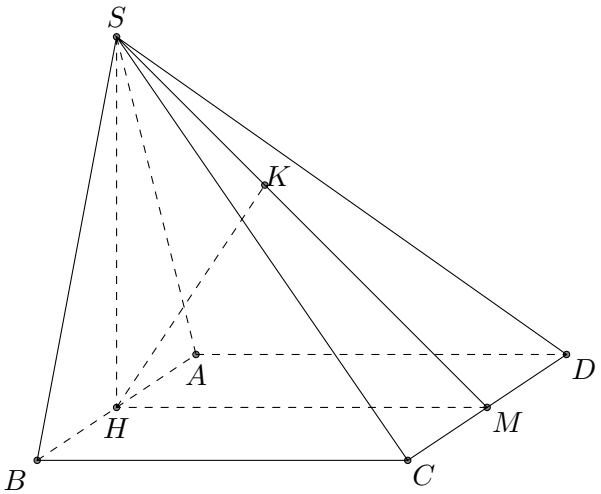
✍Lời giải.

Do $(SAB) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến AB và $SH \perp AB$ nên $SH \perp (ABCD)$. Ta có

$$\begin{cases} BH \perp SH \\ BH \perp HM \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SHM).$$

Từ giả thiết suy ra $\mathrm{d}(B,(SHM)) = BH = a$.
Mặt khác, do

$$AH \parallel (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}(A,(SCD)) = \mathrm{d}(H,(SCD)).$$



Kẻ $HK \perp SM$ tại K. Ta có $CD \parallel BH$ và $BH \perp (SHM)$ nên $CD \perp (SHM)$, suy ra $CD \perp HK$. Từ đó suy ra $HK \perp (SCD)$.
Xét tam giác vuông SHM, có $SH = BH = a,\ HM = 2HB = 2a$. Suy ra

$$\mathrm{d}(H,(SCD)) = HK = \frac{SH \cdot HM}{\sqrt{SH^2 + HM^2}} = \frac{a \cdot 2a}{\sqrt{a^2 + (2a)^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy $\mathrm{d}(A,(SCD)) = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

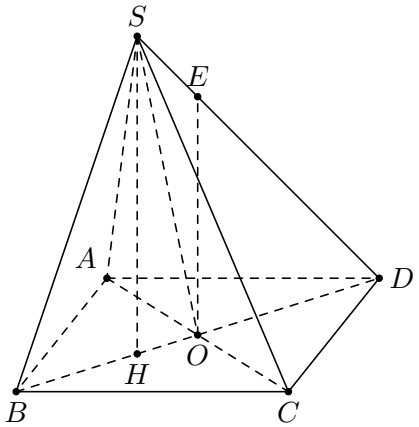
Chọn đáp án (D) □

Câu 232. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAC} = 60°$. Hình chiếu của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của $\triangle ABC$. Góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và $(ABCD)$ là $60°$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{3a}{2\sqrt{7}}$. **B.** $\dfrac{3a}{\sqrt{7}}$. **C.** $\dfrac{9a}{2\sqrt{7}}$. **D.** $\dfrac{a}{2\sqrt{7}}$.

✍Lời giải.

Gọi O là tâm $ABCD$, H là trọng tâm $\triangle ABC$. Ta có
$\begin{cases} SH \perp (ABCD) \\ HO \perp AC \end{cases} \Rightarrow SO \perp AC$ (định lý 3 đường vuông góc).
Khi đó $((\widehat{SAC}),(\widehat{ABCD})) = \widehat{SOH} = 60°$.
$\triangle ABC$ cân tại B có $\widehat{BAC} = 60° \Rightarrow \triangle ABC$ là tam giác đều.
Do đó $OC = \dfrac{a}{2}$; $OH = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ và $OD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
$\triangle SOH$ vuông tại $H \Rightarrow SH = OH \cdot \tan 60° = \dfrac{a}{2}$.
Trong (SBD), kẻ $OE \parallel SH \Rightarrow OE = \dfrac{3a}{8}$.



Ta có OE, OC, OD đôi một vuông góc. Do đó

$$\frac{1}{\mathrm{d}^2(O,(SCD))} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OE^2} \Rightarrow \mathrm{d}(O,(SCD)) = \frac{3a\sqrt{7}}{28}.$$

Mà $\mathrm{d}(B,(SCD)) = 2\mathrm{d}(O,(SCD))$ nên $\mathrm{d}(B,(SCD)) = \dfrac{3a}{2\sqrt{7}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 233. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BD)$ theo a.

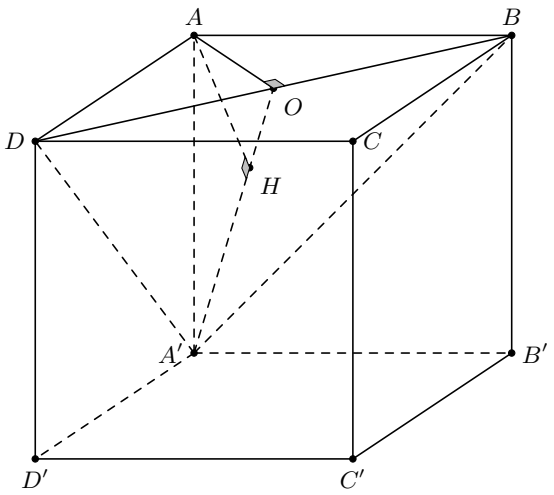
A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

✍Lời giải.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.
Kẻ $AH \perp A'O \quad (1)$
Vì $\begin{cases} AO \perp BD \,(ABCD \text{ là hình vuông tâm } O) \\ AA' \perp BD \;(AA' \perp (ABCD)) \end{cases}$
$\Rightarrow BD \perp (A'AO) \Rightarrow AH \perp BD \quad (2)$.
Từ (1) và (2), suy ra $AH \perp (A'BD)$.
Khi đó $\mathrm{d}(A,(A'BD)) = AH$. Ta có $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Xét $\triangle A'AO$ vuông tại A, AH là đường cao

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AO^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $\mathrm{d}(A,(A'BD)) = AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 234. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$; SA vuông góc với đáy, $SA = 2a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

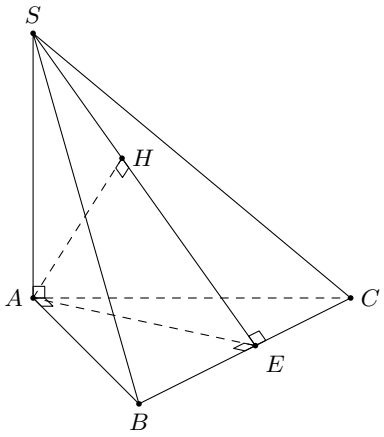
A. $\dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

✍Lời giải.

Kẻ $AE \perp BC$ tại E ; $AH \perp SE$ tại H.
Ta có: $\begin{cases} AE \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAE) \Rightarrow BC \perp AH$.
Suy ra: $AH \perp (SBC)$ hay AH là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC)
.
Tam giác ABC vuông tại A nên ta có: $\dfrac{1}{AE^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$
Tam giác SAE vuông tại A nên ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{AH^2} &= \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AS^2} \\ &= \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AS^2} \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{4a^2} \\ &= \frac{19}{12a^2}. \end{aligned}$$

Suy ra $AH = \dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

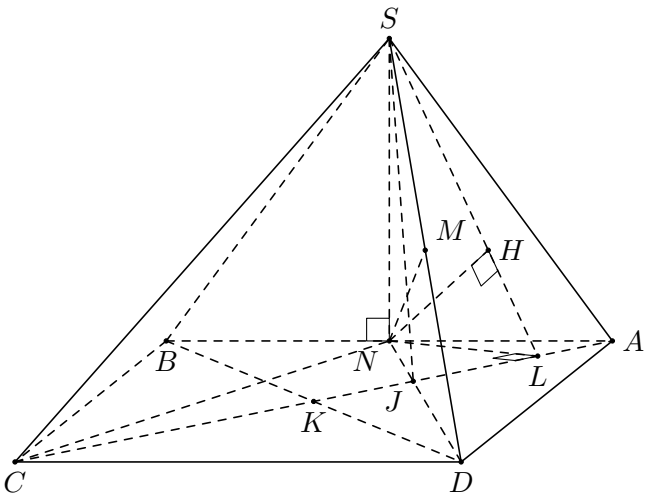


Chọn đáp án (D) □

Câu 235. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $45°$. Gọi M là trung điểm của SD. Tính theo a khoảng cách d từ điểm M đến mặt phẳng (SAC).

A. $\mathrm{d} = \dfrac{a\sqrt{1513}}{89}$. **B.** $\mathrm{d} = \dfrac{2a\sqrt{1315}}{89}$. **C.** $\mathrm{d} = \dfrac{a\sqrt{1315}}{89}$. **D.** $\mathrm{d} = \dfrac{2a\sqrt{1513}}{89}$.

✍Lời giải.



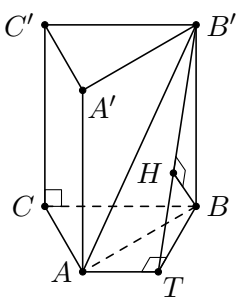
Gọi N là trung điểm AB. Vì tam giác SAB cân tại S nên $SN \perp AB$.
Hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ vuông góc với nhau theo giao tuyến AB nên suy ra $SN \perp (ABCD)$.
CN là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$
$\Rightarrow$ Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SCN} = 45^\circ$.
$\triangle SNC$ vuông cân tại N nên $SN = NC = \sqrt{BC^2 + BN^2} = \sqrt{4a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{17}}{2}$.
M là trung điểm của $SD \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}(M,(SAC))}{\mathrm{d}(D,(SAC))} = \dfrac{SM}{SD} = \dfrac{1}{2}$ (1).
Gọi K là tâm của $ABCD$; $J = ND \cap AK$.
Khi đó J là trọng tâm $\triangle ABD$.
Suy ra $\dfrac{\mathrm{d}(N,(SAC))}{\mathrm{d}(D,(SAC))} = \dfrac{JN}{JD} = \dfrac{1}{2}$ (2).
Từ (1) và (2) ta có $\mathrm{d}(M,(SAC)) = \mathrm{d}(N,(SAC))$.
Gọi L là hình chiếu vuông góc của N lên AK; H là hình chiếu vuông góc của N lên SL.
Mà $AK \perp (SNL)$, $(SNL) \supset NH$ (Vì $AK \perp SN$, $AK \perp NL$) và $NH \perp SL$.
Từ đó ta có $NH \perp (SAC) \Rightarrow \mathrm{d}(N,(SAC)) = NH$.
$\triangle ALN$ và $\triangle ABC$ là hai tam giác đồng dạng nên
$\dfrac{NL}{BC} = \dfrac{AN}{AC} \Leftrightarrow NL = \dfrac{AN \cdot BC}{AC} = \dfrac{\dfrac{a}{2} \cdot 2a}{\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$.
$\triangle SNL$ vuông tại $N \Rightarrow \dfrac{1}{NH^2} = \dfrac{1}{SN^2} + \dfrac{1}{NL^2} = \dfrac{4}{17a^2} + \dfrac{5}{a^2} = \dfrac{89}{17a^2} \Rightarrow NH = \dfrac{\sqrt{1513}}{89}a$.
Vậy $\mathrm{d}(M,(SAC)) = \dfrac{a\sqrt{1513}}{89}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 236. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân, với $AB = AC = 1$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, cạnh bên $AA' = 2$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng BC và AB'.

A. $d = \dfrac{6}{\sqrt{17}}$. **B.** $d = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$. **C.** $d = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$. **D.** $d = \dfrac{2}{\sqrt{17}}$.

✍Lời giải.

Trong mặt phẳng (ABC), vẽ hình thang vuông $ACBT$ ($\widehat{CBT} = \widehat{ATB} = 90^\circ$). Suy ra $\widehat{BAT} = 30^\circ$.
Trong mặt phẳng $(B'BT)$, vẽ $BH \perp B'T$ tại H.
Ta có $AT \perp BT$ và $AT \perp BB'$ nên $AT \perp (B'BT)$.
Ta có $BH \perp B'T$ và $BH \perp AT$ nên $BH \perp (B'AT)$.
Ta có $BC \parallel AT$, suy ra $BC \parallel (B'AT)$.



Suy ra $d = \mathrm{d}(BC, AB') = \mathrm{d}[BC,(B'AT)] = \mathrm{d}[B,(B'AT)] = BH$.
$\triangle ABT$ vuông tại T có $BT = AB \cdot \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$.
$\triangle B'BT$ vuông tại B và đường cao BH có $\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{BB'^2} + \dfrac{1}{BT^2} \Rightarrow d = BH = \dfrac{2}{\sqrt{17}}$.

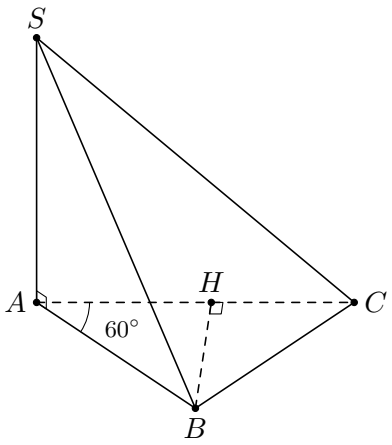
Chọn đáp án D □

Câu 237. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, đáy ABC là tam giác vuông tại B có $\widehat{BAC} = 60^\circ$, $AC = a$. Tính khoảng cách từ điểm B đến (SAC).

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Do $\triangle ABC$ vuông tại B nên $\begin{cases} AB = AC\cos\widehat{BAC} = \dfrac{a}{2} \\ BC = AC\sin\widehat{BAC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.



Gọi H là hình chiếu của B xuống AC, ta có

$$\begin{cases} BH \perp AC \\ SA \perp BH \text{ (do } SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SAC).$$

Vậy $\mathrm{d}[B,(SAC)] = BH = \dfrac{AB\cdot BC}{AC} = \dfrac{\frac{a}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án C □

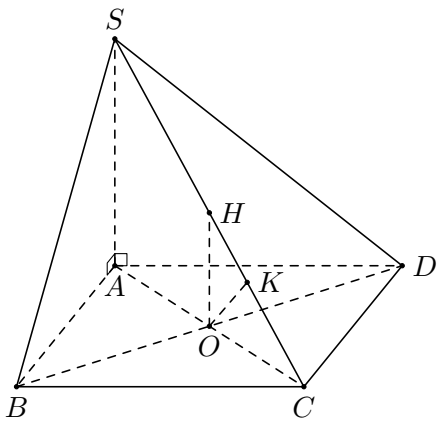
Câu 238. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường chéo nhau SC và BD.

A. $\dfrac{a}{3}$. **B.** $a\sqrt{6}$. **C.** $\dfrac{a}{\sqrt{6}}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Do $BD \perp AC$ và $BD \perp SA$ nên $BD \perp (SAC)$. Suy ra $BD \perp SC$.
Trong mặt phẳng (SAC) gọi K là hình chiếu của O lên SC. Khi đó $\mathrm{d}(BD,SC) = OH$.
Gọi H là trung điểm của SC. Xét tam giác HOC ta có:

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OH^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{6}{a^2} \Rightarrow OK = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$



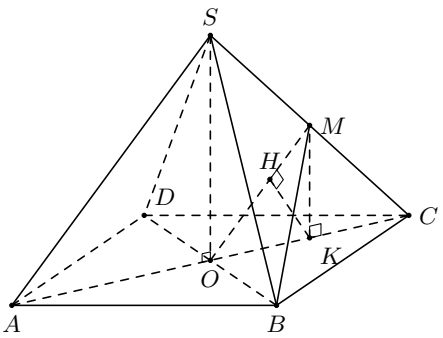
Chọn đáp án C □

Câu 239. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$ có SO vuông góc với đáy và O là giao điểm của AC và BD. Giả sử $SO = 2\sqrt{2}$, $AC = 4$. Gọi M là trung điểm của SC. Khoảng cách từ S đến mặt phẳng (MOB) là $\dfrac{a\sqrt{6}}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b$.

A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

✍Lời giải.

Gọi K là trung điểm của OC. Suy ra $MK \perp (ABCD)$.
Kẻ $KH \perp OM$ với $H \in OM$, suy ra $HK \perp (MOB)$.
Ta có
$\mathrm{d}\,(S,(MOB)) = \mathrm{d}\,(C,(MOB)) = 2\mathrm{d}\,(K,(MOB)) = 2KH$.
Mặt khác $OK = 1$, $MH = \sqrt{2}$. Do đó $HK = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.
Vậy $\mathrm{d}\,(S,(MOB)) = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$. Do đó $a+b = 5$.

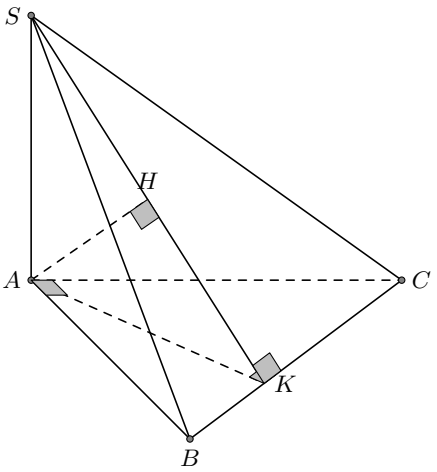


Chọn đáp án A □

Câu 240. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, biết $SA \perp (ABC)$ và $AB = 2a$, $AC = 3a$, $SA = 4a$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

A. $\dfrac{2a}{\sqrt{11}}$. **B.** $\dfrac{6a\sqrt{29}}{29}$. **C.** $\dfrac{12a\sqrt{61}}{61}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{43}}{12}$.

✍Lời giải.



— Gọi K, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên BC, SK. (1)

— Vì $\begin{cases} SA \perp BC \\ AK \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAK) \Rightarrow BC \perp AH.$ (2)

— Từ (1), (2) $\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow \mathrm{d}\,[A,(SBC)] = AH$.
Xét $\triangle SAH$ vuông tại A có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = \frac{12a\sqrt{61}}{61}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 241. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Tính theo a khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng (SCD).

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{9}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{6}}{9}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

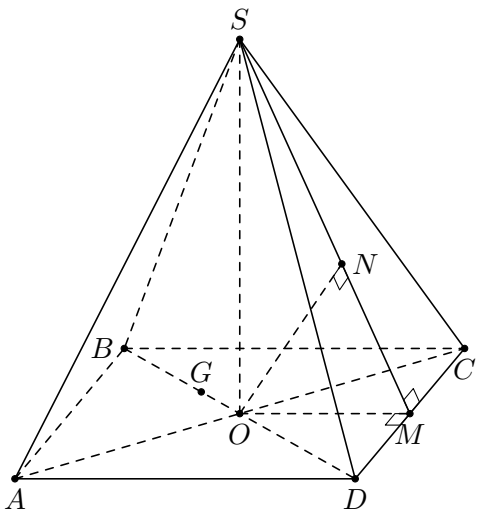
✍Lời giải.

Vì $OG \cap (SCD) = D$ nên $\dfrac{\mathrm{d}(G,(SCD))}{\mathrm{d}(O,(SCD))} = \dfrac{DG}{DO} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow$ $\mathrm{d}(G,(SCD)) = \dfrac{4}{3}\mathrm{d}(O,(SCD))$.

Gọi M là trung điểm CD, từ O kẻ $ON \perp SM$. Khi đó $\mathrm{d}(O,(SCD)) = ON = \dfrac{SO \cdot OM}{\sqrt{SO^2 + M^2}}$.

Ta có $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $OM = \dfrac{a}{2}$, do đó $\mathrm{d}(O,(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Vậy $\mathrm{d}(G,(SCD)) = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{6} = \dfrac{2a\sqrt{6}}{9}$.



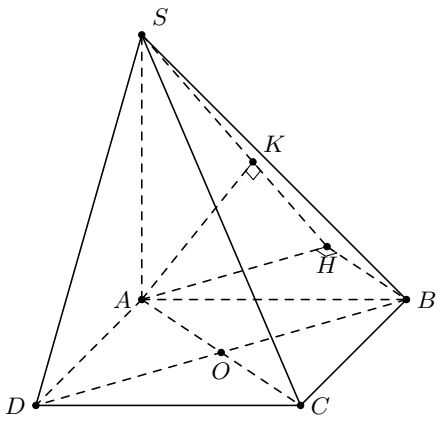
Chọn đáp án C □

Câu 242. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $45°$. Tính khoảng cách giữa hai đường SB và AC theo a.

A. a. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{7}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{5}$.

✍Lời giải.

Ta có $(SC;(ABCD)) = (SC,AC) = \widehat{SCA} = 45°$.
Vậy $SA = AC = a\sqrt{2}$.
Từ B kẻ đường thẳng song song với AC, từ A kẻ đường thẳng song song với OB cắt đường thẳng trên tại H.
Khi đó $\mathrm{d}(SB,AC) = \mathrm{d}(AC,(SHB)) = \mathrm{d}(A;(SHB))$.
Vì $AH \parallel OB, HB \parallel OA$ nên $AH \perp HB$. Mà $HB \perp SA$ nên $HB \perp (SAH)$.
Kẻ $AK \perp SH, (K \in SH)$. Khi đó $AK \perp (SHB)$ hay $AK = \mathrm{d}(A;(SHB))$.



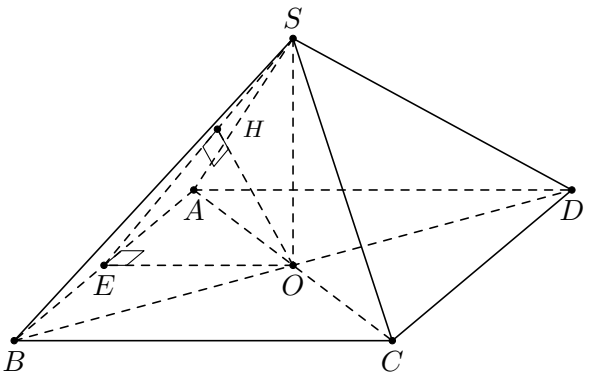
Ta có $AH = OB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, SA = a\sqrt{2}$.
Vậy $AK = \dfrac{SA \cdot AH}{\sqrt{SA^2 + AH^2}} = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 243. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB).

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a}{4}$. **C.** $\dfrac{a}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.
Gọi E là trung điểm AB.
Ta có $\begin{cases} AB \perp OE \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOE) \Rightarrow \widehat{SEO} = 60°$.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên SE.
Ta có $\mathrm{d}(O,(SAB)) = OH$.
Ta có $OH = OE \sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.



Chọn đáp án A □

Câu 244. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SD = \dfrac{a\sqrt{17}}{2}$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của đoạn thẳng AB. Gọi E là trung điểm của AD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng HE và SB.

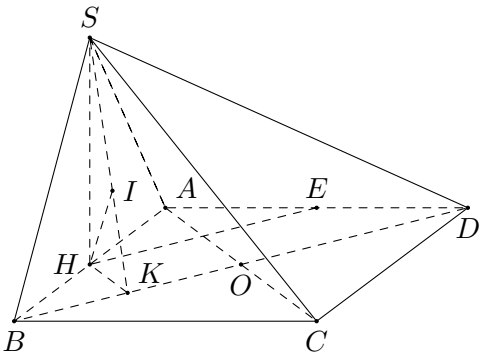
A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{5}$.

✍Lời giải.
Ta có $HE \parallel BD \Rightarrow HE \parallel (SBD)$.
Do đó $\mathrm{d}(HE,SB) = \mathrm{d}(HE,(SBD)) = \mathrm{d}(H,(SBD))$.
Gọi $O = AC \cap BD$ và K là trung điểm BO, ta có

$$\begin{cases} HK \perp BD \\ SH \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SHK).$$

Gọi I là hình chiếu của H trên SK, ta có

$$\begin{cases} HI \perp SK \\ HI \perp BD \end{cases} \Rightarrow HI \perp (SBD) \Rightarrow \mathrm{d}(H,(SBD)) = HI.$$



Ta có $HK = \dfrac{1}{4}AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$, $HD = \sqrt{AH^2 + AD^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, $SH = \sqrt{SD^2 - HD^2} = a\sqrt{3}$.
Vậy $\mathrm{d}(HE,SB) = \mathrm{d}(H,(SBD)) = HI = \dfrac{HS \cdot HK}{\sqrt{HS^2 + HK^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{5}$.

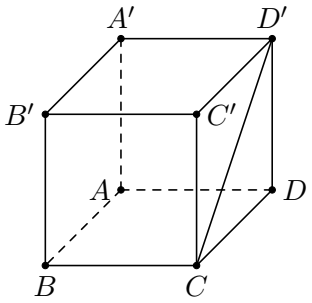
Chọn đáp án D □

Câu 245. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Khoảng cách giữa hai đường thẳng CD' và AB là

A. 1. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $AB \parallel (CDD'C') \Rightarrow \mathrm{d}(AB, CD') = \mathrm{d}(A, (CDD'CC')) = 1$.



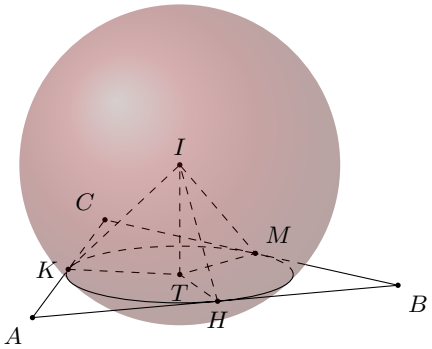
Chọn đáp án A □

Câu 246. Cho hình cầu (S) có tâm I, bán kính bằng 13 cm. Tam giác (T) với độ dài ba cạnh là 27 cm, 29 cm, 52 cm được đặt trong không gian sao cho các cạnh của tam giác tiếp xúc với mặt cầu (S). Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng chứa tam giác (T) là

A. 12 cm. **B.** $3\sqrt{2}$ cm. **C.** 5 cm. **D.** $2\sqrt{3}$ cm.

Lời giải.

Nửa chu vi tam giác là
$p = \dfrac{27 + 29 + 52}{2} = 54$.
Diện tích tam giác là
$S = \sqrt{54 \cdot (54 - 27) \cdot (54 - 29) \cdot (54 - 52)} = 270$.
Suy ra bán kính đường tròn nội tiếp tam giác là
$r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{270}{54} = 5$ (cm).
Suy ra khoảng cách cần tìm là $\mathrm{d} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (cm).



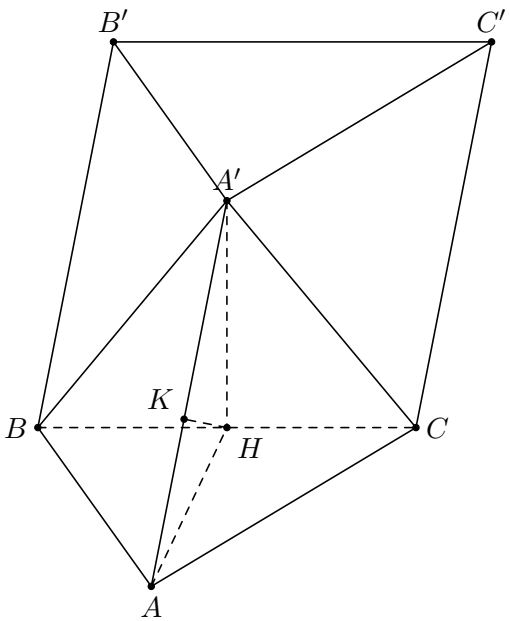
Chọn đáp án A □

Câu 247. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC cân tại A có $AB = AC = 2a$; $BC = 2a\sqrt{3}$. Tam giác $A'BC$ vuông cân tại A' và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABC). Khoảng cách giữa hai AA' và BC bằng

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của cạnh BC.
$\Rightarrow A'H \perp (ABC) \Rightarrow A'H \perp HC$.
$\triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow AH \perp HC \Rightarrow \begin{cases} HC \perp HA \\ HC \perp HA' \end{cases}$
$\Rightarrow HC \perp (A'AH) \Rightarrow BC \perp (A'AH)$.
Kẻ $HK \perp A'A$ $(K \in A'A) \Rightarrow BC \perp HK$.
$\Rightarrow HK$ là đường vuông góc chung của $A'A$ và $BC \Rightarrow \mathrm{d}(A'A, BC) = HK$.
$\triangle A'BC$ vuông cân tại $A' \Rightarrow A'H = \dfrac{BC}{2} = a\sqrt{3}$.
Ta có $HA = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$.
$HK = \dfrac{A'H \cdot HA}{\sqrt{A'H^2 + HA^2}} = \dfrac{a\sqrt{3} \cdot a}{\sqrt{3a^2 + a^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án D □

Câu 248. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = a$, $OB = OC = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** a. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

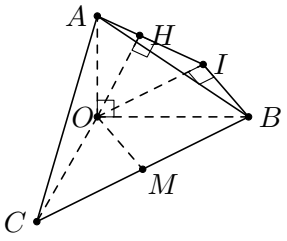
$\triangle OBC$ vuông cân ($OB = OC$) có M là trung điểm BC.

Suy ra $OM \perp BC$ và $MB = \dfrac{OB}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$.

Trong mặt phẳng (OBC), vẽ hình chữ nhật $OMBI$.

Trong mặt phẳng (AOI), vẽ $OH \perp AI$ tại H.

$\triangle AOI$ vuông tại O có $OH = \dfrac{AO \cdot OI}{\sqrt{AO^2 + OI^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

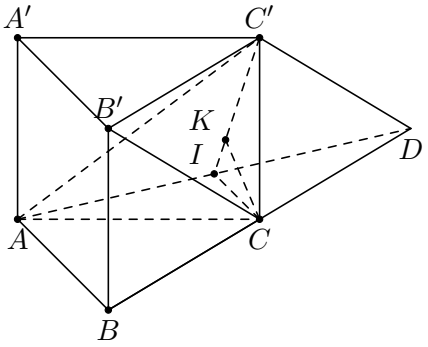


Chọn đáp án D □

Câu 249. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 2\sqrt{3}a$, $BC = a$, $AA' = \dfrac{3a}{2}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và $B'C$ bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{7}}{7}a$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{10}}{20}a$. **C.** $\dfrac{3}{4}a$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{13}}{13}a$.

Lời giải.



— Kẻ $C'D \parallel B'C$ ($D \in CB$), từ đó thì $CB' \parallel (AC'D)$
Suy ra

$$\mathrm{d}(B'C, AC') = \mathrm{d}(CB', (AC'D)) = \mathrm{d}(C, (AC'D)).$$

— Kẻ $CI \perp AD$ ($I \in AD$); $CK \perp C'I$ ($K \in C'I$).
Ta có $CB'C'D$ là hình bình hành
$\Rightarrow CD = C'B' = CB = a$.

— $\triangle ABD$ vuông tại B, có $AD = \sqrt{BA^2 + BD^2} = \sqrt{12a^2 + 4a^2} = 4a$.

— $\triangle DIC \backsim \triangle DBA \Rightarrow \dfrac{CI}{AB} = \dfrac{CD}{AD} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow CI = \dfrac{1}{4}AB = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

— Ta có $\dfrac{1}{CK^2} = \dfrac{1}{CI^2} + \dfrac{1}{CC'^2} = \dfrac{4}{3a^2} + \dfrac{4}{9a^2} = \dfrac{16}{9a^2} \Rightarrow CK = \dfrac{3a}{4}$.

— Vậy $\mathrm{d}(B'C, AC') = CK = \dfrac{3a}{4}$.

Chọn đáp án C □

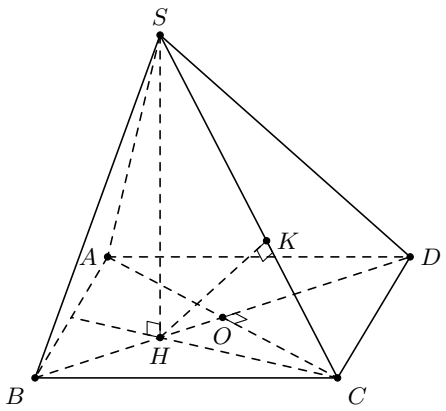
Câu 250. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. Tam giác ABC đều, hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Đường thẳng SD hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ góc $30°$. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SCD) theo a.

A. $d = a\sqrt{3}$. **B.** $d = \dfrac{2a\sqrt{21}}{21}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $d = \dfrac{2a\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.

Vì H là hình chiếu vuông góc của S lên $(ABCD)$ nên HD là hình chiếu vuông góc của SD lên $(ABCD)$.
Vậy góc tạo bởi SD và $(ABCD)$ bằng góc giữa SD và HD chính là $\widehat{SDH}$. Khi đó $\widehat{SDH} = 30^\circ$.
Gọi O là giao điểm của AC và BD.
Vì H là trọng tâm của tam giác ABC nên

$$BH = \frac{2}{3}BO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



Mặt khác $BH = \frac{2}{3}BO = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}BD = \frac{1}{3}BD$.
Suy ra $DH = \frac{2}{3}BD = \frac{4}{3}BO = \frac{4}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.
Trong tam giác vuông SHD ta có $SH = DH \tan \widehat{SDH} = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2a}{3}$.
Ta có $HC \perp AB$, $AB \parallel CD$ nên $HC \perp CD$.
Lại có $CD \perp SH$. Do đó $CD \perp (SHC)$, suy ra $(SHC) \perp (SCD)$.
Kẻ $HK \perp SC$ tại K. Suy ra $HK \perp (SCD)$.
Vậy $\mathrm{d}(H, (SCD)) = HK = \dfrac{HC \cdot SH}{\sqrt{HC^2 + SH^2}} = \dfrac{2a\sqrt{21}}{21}$.
Ta lại có

$$\frac{\mathrm{d}(B, (SCD))}{\mathrm{d}(H, (SCD))} = \frac{BD}{DH} = \frac{3}{2} \Rightarrow \mathrm{d}(B, (SCD)) = \frac{3}{2}\mathrm{d}(H, (SCD)) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2a\sqrt{21}}{21} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

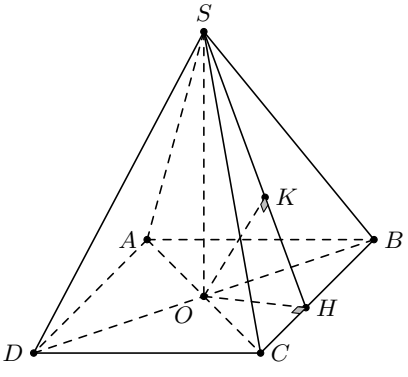
Chọn đáp án C □

Câu 251. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a; $\widehat{DAB} = 120^\circ$. Gọi O là giao điểm của AC, DB. Biết rằng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.
Do DO cắt (SBC) tại B, suy ra

$$\frac{\mathrm{d}(D, (SBC))}{\mathrm{d}(O, (SBC))} = \frac{BD}{BO} = 2 \Rightarrow \mathrm{d}(D, (SBC)) = 2\mathrm{d}(O, (SBC)).$$



Kẻ $OH \perp BC$ tại H và $OK \perp SH$ tại K nên $OK \perp (SBC)$.
Do $\triangle ABC$ đều cạnh a nên $OH = OC \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.
Do $\triangle SOH$ vuông tại O, có OK là đường cao, ta có

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OH^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{16}{3a^2} + \frac{8}{3a^2} = \frac{8}{a^2} \Rightarrow OK = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

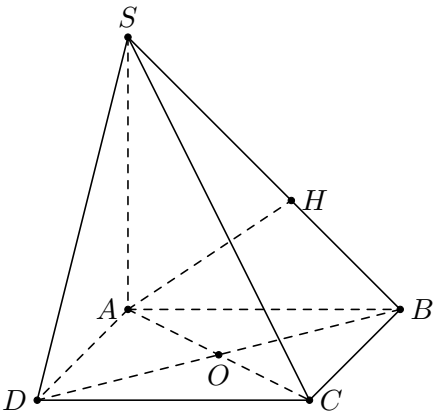
Vậy $\mathrm{d}(D, (SBC)) = 2OK = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Chọn đáp án A □

Câu 252. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tâm O. Biết $SA = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{4a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Ta có O là trung điểm của AC nên
$\mathrm{d}(O,(SBC)) = \dfrac{1}{2}d(A,(SBC))$.
Kẻ $AH \perp SB$.
Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$ và $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow$ $AB \perp BC$. Từ đó suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$.
Từ đây ta suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH = \mathrm{d}(A,(SBC))$.
Xét $\triangle SAB$ vuông tại A đường cao AH có
$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{5}{4a^2}$.
$\Rightarrow AH = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. Vậy $\mathrm{d}(O,(SBC)) = \dfrac{1}{2}AH = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.



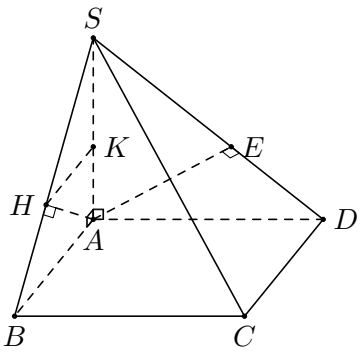
Chọn đáp án (A) □

Câu 253. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$. Tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = 2a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Tính khoảng cách từ H đến (SCD).

A. $\dfrac{4a\sqrt{5}}{25}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{4a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{8a\sqrt{5}}{25}$.

Lời giải.

Ta có $SH = \dfrac{SA^2}{SB} = \dfrac{4a^2}{a\sqrt{5}} = \dfrac{4a\sqrt{5}}{5}$.
Kẻ $HK \parallel AB$ ta có $\mathrm{d}(H,(SCD)) = \mathrm{d}(K,(SCD))$
$\Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}(K,(SCD))}{\mathrm{d}(A,(SCD))} = \dfrac{SK}{SA} = \dfrac{SH}{SB} = \dfrac{4a\sqrt{5}}{5} : a\sqrt{5} = \dfrac{4}{5}$.
Kẻ $AE \perp SD \Rightarrow AE \perp (SCD)$
$\Rightarrow \mathrm{d}(A,(SCD)) = AE = \sqrt{\dfrac{SA^2 \cdot AD^2}{SA^2 + AD^2}} = \sqrt{\dfrac{4a^2 \cdot a^2}{4a^2 + a^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.
$\Rightarrow \mathrm{d}(K,(SCD)) = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{2a}{\sqrt{5}} = \dfrac{8a\sqrt{5}}{25} \Rightarrow \mathrm{d}(H,(SCD)) = \dfrac{8a\sqrt{5}}{25}$.

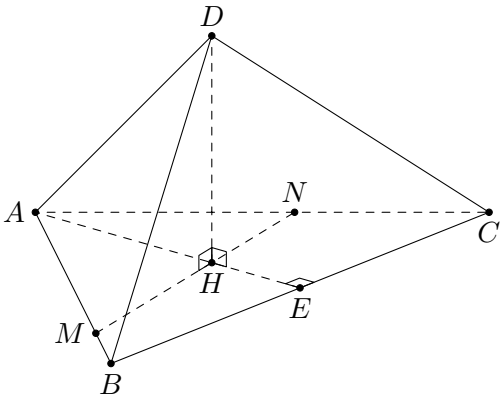


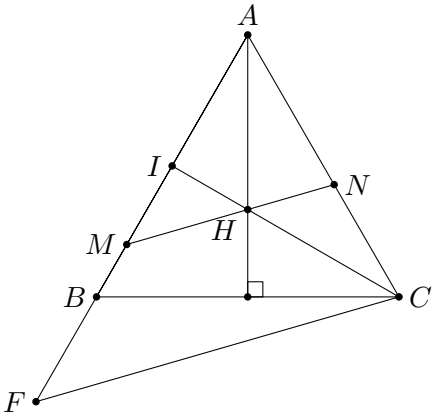
Chọn đáp án (D) □

Câu 254. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. M, N lần lượt là các điểm di động trên các cạnh AB, AC sao cho hai mặt phẳng (DMN), (ABC) vuông góc với nhau. Đặt $AM = x$, $AN = y$. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $xy(x+y) = 3$. **B.** $x + y = 3xy$. **C.** $x + y = 3 + xy$. **D.** $xy = 3(x+y)$.

Lời giải.





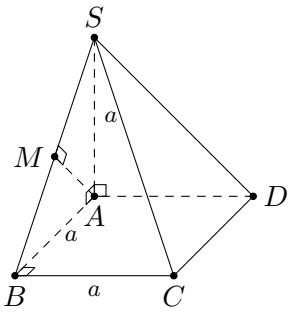
Gọi H là trọng tâm của tam giác ABC thì $DH \perp (ABC)$. Mặt khác $(DMN) \perp (ABC)$ nên $DH \subset (DMN)$ và $DH \perp MN$. Từ đó suy ra $H \in MN$.
Kẻ đường thẳng đi qua C song song với MN và cắt AB tại F.
Ta có $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{AF}{AC} \Rightarrow \dfrac{x}{y} = AF \Rightarrow x = y \cdot AF$.
Gọi I là trung điểm của AB, ta có $\dfrac{IM}{MF} = \dfrac{IH}{HC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow MF = 2IM$.

Do đó $AF = AM + MF = AM + 2IM = AM + 2(AM - IA) = 3x - 1$.
Suy ra $x = y(3x-1) \Leftrightarrow x + y = 3xy$.
Chọn đáp án B □

Câu 255. Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến (SBC).

A. $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $d = a$. **C.** $d = \dfrac{a}{2}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.
Gọi M là trung điểm của SB, suy ra $AM \perp SB$.
Mặt khác $AM \perp BC$ (do $BC \perp (SAB)$).
Do đó $AM \perp (SBC)$.
Suy ra $d = \mathrm{d}(A,(SBC)) = AM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

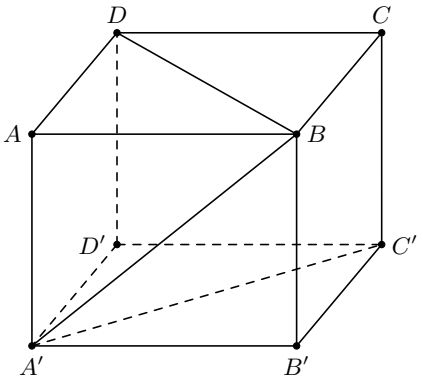


Chọn đáp án D □

Câu 256. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a. Góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $60°$. Tính khoảng cách d giữa đường thẳng BD và $A'C'$.

A. $d = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$. **B.** $d = \dfrac{1}{2}a$. **C.** $d = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$. **D.** $d = \sqrt{3}a$.

Lời giải.
Do $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ là cặp mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng chéo nhau BD và $A'C'$ nên
$d = \mathrm{d}(BD, A'C') = \mathrm{d}((ABCD),(A'B'C'D')) = AA'$.
Do $(A'B,(ABCD)) = \widehat{A'BA} = 60°$ nên $AA' = AB \cdot \tan 60° = a\sqrt{3}$.

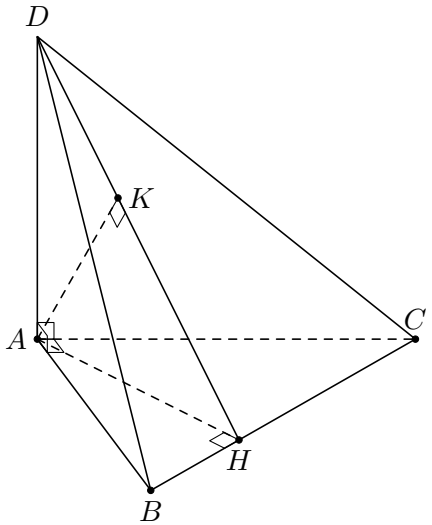


Chọn đáp án D □

Câu 257. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = a$, $AC = a\sqrt{2}$, $AD = a\sqrt{3}$, các tam giác ABC, ACD, ABD là các tam giác vuông tại đỉnh A. Khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (BCD) là

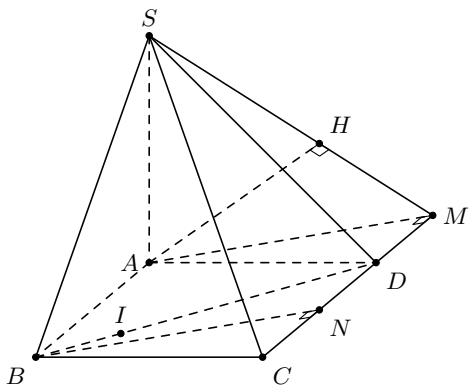
A. $d = \dfrac{a\sqrt{66}}{11}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{30}}{5}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.
Kẻ $AH \perp BC$ tại H, kẻ $AK \perp DH$ tại K.
Ta có $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp AD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AHD) \Rightarrow BC \perp AK$.
Có $\begin{cases} AK \perp BC \\ AK \perp HD \end{cases} \Rightarrow AK \perp (BCD)$
$\Rightarrow AK$ là khoảng cách từ A đến (BCD).
Xét $\triangle ABC$ có
$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$



Xét $\triangle AHD$ có
$\dfrac{1}{AK^2}=\dfrac{1}{AD^2}+\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AD^2}+\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{2a^2}+\dfrac{1}{3a^2}=\dfrac{11}{6a^2}$.
Suy ra $d=AK=\dfrac{a\sqrt{66}}{11}$.
Chọn đáp án A □

Câu 258. Cho hình chóp $ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD}=60^\circ$, $SA=a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi I là điểm thuộc cạnh BD sao cho $ID=3IB$. Khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (SCD) bằng
A. $\dfrac{4a\sqrt{21}}{21}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{21}}{28}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{21}}{14}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{21}}{21}$.
Lời giải.
Gọi N là trung điểm CD, M là hình chiếu của A lên CD và H là hình chiếu vuông góc của A lên SM.
Do $ABCD$ là hình thoi và $\widehat{BAD}=60^\circ$ nên tam giác BCD đều, $BN=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $BN\perp CD$.

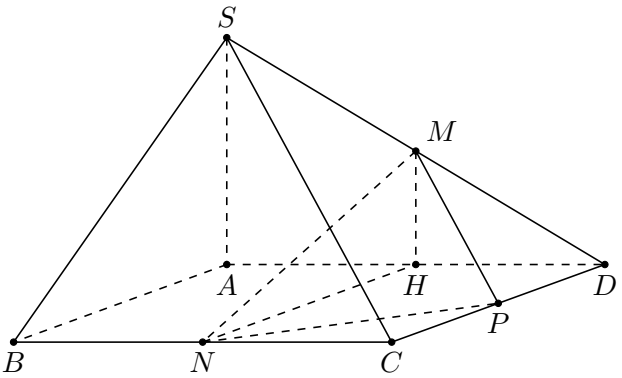


Ta có tứ giác $ABNM$ là hình bình hành nên $AM=BN=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $AM\perp CD$.
Mà $CD\perp SA$ suy ra $CD\perp(SAM)$.
Do đó $\begin{cases}AH\perp CD\\AH\perp SM\end{cases}\Rightarrow AH\perp(SCD)$.
Vậy $\mathrm{d}\,(A,(SCD))=AH=\dfrac{AS\cdot AM}{\sqrt{AS^2+AM^2}}=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.
Ta có $AB\parallel(SCD)$ và $IB\cap(SCD)=D$ suy ra

$$\mathrm{d}\,(I,(SCD))=\frac{DI}{DB}\cdot\mathrm{d}\,(B,(SCD))=\frac{3}{4}\mathrm{d}\,(B,(SCD))=\frac{3}{4}\mathrm{d}\,(A,(SCD))=\frac{3a\sqrt{21}}{28}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 259. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AD=2a$, $AB=a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SD và BC. Khoảng cách giữa SC và MN bằng
A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{12}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{24}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{21}$.
Lời giải.
Goi H,P lần lượt là trung điểm AD,CD.
Ta có $\begin{cases}MP=\dfrac{\sqrt{6}a}{2}\\NP=\dfrac{\sqrt{5}a}{2}\\MN=\dfrac{\sqrt{5}a}{2}\end{cases}\Rightarrow S_{\triangle MNP}=\dfrac{\sqrt{21}a^2}{8}$.
Mặt khác, ta có $V_{M.NCP}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{a^3}{24}$.

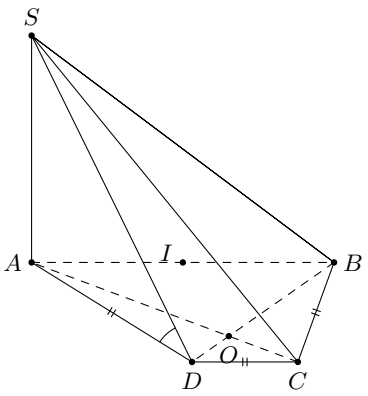


Ta có $MP\parallel SC$ nên $\mathrm{d}(SC,MN)=\mathrm{d}(SC,(MNP))=\mathrm{d}(C,(MNP))=\dfrac{3V_{C.MNP}}{S_{\triangle MNP}}=\dfrac{a\sqrt{21}}{21}$.
Chọn đáp án D □

Câu 260. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, đáy lớn AB. Biết rằng $AD=CD=BC=a, AB=2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và mặt phẳng (SBD) tạo với đáy một góc 45°. Gọi I là trung điểm của AB. Tính khoảng cách từ I đến (SBD).
A. $\dfrac{a}{4}$. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Lời giải.

Do $IA = ID = IC = IB \Rightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $ABCD \Rightarrow \triangle ABD$ vuông tại D.
Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow$ góc giữa (SBD) và $(ABCD)$ là góc

$$\widehat{SDA} \Rightarrow \widehat{SDA} = 45^\circ.$$



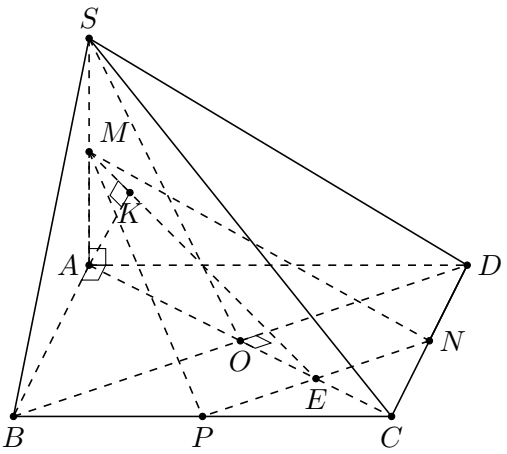
Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SD, ta có $DB \perp (SAD) \Rightarrow AH \perp BD$.
Suy ra H cũng chính là hình chiếu vuông góc của A lên (SBD).
Ta có $\mathrm{d}\,(A,(SBD)) = AH = AD \cdot \sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.
Suy ra khoảng cách từ I đến (SBD) là $\mathrm{d}\,(I,(SBD)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\,(A,(SBD)) = \dfrac{\sqrt{2}a}{4}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 261. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh 10, SA vuông góc với đáy và $SC = 10\sqrt{5}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD. Tính khoảng cách d giữa BD và MN.

A. $d = 3\sqrt{5}$. **B**. $d = \sqrt{5}$. **C**. $d = 5$. **D**. $d = 10$.

✍Lời giải.
Gọi P là trung điểm của BC và $E = NP \cap AC$, suy ra $PN \parallel BD$, nên $BD \parallel (MNP)$.
Do đó

$$\begin{aligned} \mathrm{d}[BD, MN] &= \mathrm{d}[BD,(MNP)] \\ &= \mathrm{d}[O,(MNP)] \\ &= \frac{1}{3}\mathrm{d}[A,(MNP)]. \end{aligned}$$

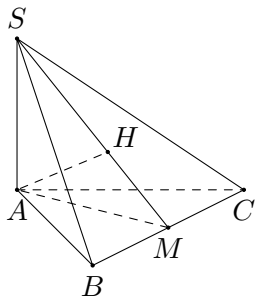


Ta tính được $SA = \sqrt{SC^2 - SA^2} = 10\sqrt{3}$
$\Rightarrow MA = 5\sqrt{3}$; $AE = \dfrac{3}{4}AC = \dfrac{15\sqrt{2}}{2}$.
Trong tam giác vuông MAE, ta có
$AK = \dfrac{MA \cdot AE}{\sqrt{MA^2 + AE^2}} = 3\sqrt{5}$.
Vậy $\mathrm{d}[BD, MN] = \dfrac{1}{3}AK = \sqrt{5}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 262. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều, $SA = a$, hai mặt phẳng (SAB), (SAC) cùng vuông góc với đáy. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính thể tích V của hình chóp $S.ABC$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B**. $V = a^3\sqrt{3}$. **C**. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D**. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

✍Lời giải.
Ta có $(SAB) \perp (ABC)$ và $(SAC) \perp (ABC)$, suy ra $SA \perp (ABC)$.
Gọi M trung điểm BC, ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AM \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM)$.
Gọi H là hình chiếu của A trên SM, ta có $\begin{cases} AH \perp SM \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$.
Theo giả thiết ta có $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Khi đó $\dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{1}{AH^2} - \dfrac{1}{AS^2} = \dfrac{4}{3a^2} - \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{3a^2} \Rightarrow AM = a\sqrt{3}$.
Vì $\triangle ABC$ đều nên $AB = \dfrac{2AM}{\sqrt{3}} = 2a$, suy ra $S_{\triangle ABC} = a^2\sqrt{3}$.

Vậy thể tích khối chóp là $V = \dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot SA = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

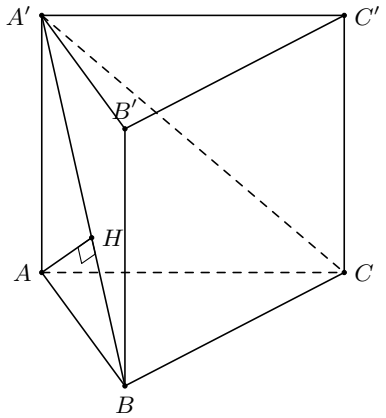
Câu 263. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = a\sqrt{5}$. Góc giữa cạnh $A'B$ và mặt đáy là $60°$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$.

A. $\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải.

Ta có AB là hình chiếu vuông góc của $A'B$ trên mặt phẳng (ABC) nên

$$\widehat{(A'B;(ABC))} = \widehat{(A'B;AB)} = \widehat{ABA'} \Rightarrow \widehat{ABA'} = 60°.$$



Do đó $AA' = AB\tan\widehat{ABA'} = a\sqrt{5}\tan 60° = a\sqrt{15}$.
Kẻ $AH \perp A'B$ tại H.
Từ $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp BB' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ABB'A') \Rightarrow BC \perp AH$.

Từ $AH \perp A'H$ và $AH \perp BC$ suy ra $AH \perp (A'BC)$. Do đó $\mathrm{d}\,[A;(A'BC)] = AH$.
Trong tam giác $A'AB$ vuông tại A, ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{(a\sqrt{15})^2} + \frac{1}{(a\sqrt{5})^2} = \frac{4}{15a^2}$$

$$\Rightarrow \quad AH = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

Vậy $\mathrm{d}\,[A;(A'BC)] = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

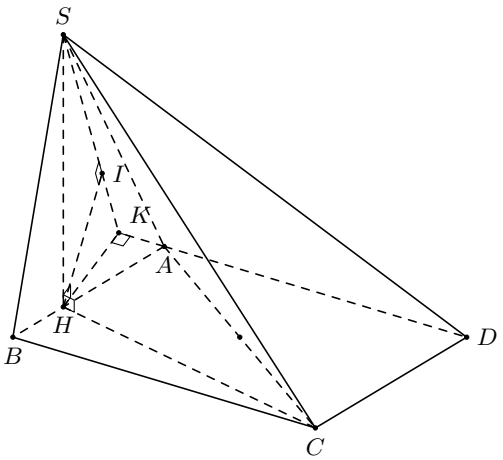
Câu 264. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, góc giữa SC và mp(ABC) là $45°$. Hình chiếu của S lên mp(ABC) là điểm H thuộc AB sao cho $HA = 2HB$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

A. $\dfrac{a\sqrt{210}}{45}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{210}}{20}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{210}}{15}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{210}}{30}$.

Lời giải.

Dựng hình bình hành $ABCD$, khi đó $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $BC \parallel AD \Rightarrow BC \parallel (SAD)$.
Do đó

$$\mathrm{d}\,(SA;BC) = \mathrm{d}\,[BC;(SAD)] = \mathrm{d}\,[B;(SAD)]\,.$$



Từ $\dfrac{BA}{HA} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \mathrm{d}\,[B;(SAD)] = \dfrac{3}{2}\mathrm{d}\,[H;(SAD)]$.
Ta có $SH \perp (ABC)$ nên suy ra

$$\widehat{(SC;(ABC))} = \widehat{(SC;HC)} = \widehat{SCH}.$$

Suy ra $\widehat{SCH} = 45°$.

$HC^2 = HB^2 + BC^2 - 2HB \cdot BC \cdot \cos\widehat{HBC} = \left(\dfrac{a}{3}\right)^2 + a^2 - 2 \cdot \dfrac{a}{3} \cdot a\cos 60° = \dfrac{7a^2}{9} \Rightarrow HC = \dfrac{a\sqrt{7}}{3}$.
Tam giác SHC vuông tại H và $\widehat{SCH} = 45°$ nên tam giác SHC vuông cân tại H. Từ đó ta có $SH = HC = \dfrac{a\sqrt{7}}{3}$.

Kẻ $HK \perp AD$ tại $K \Rightarrow \widehat{HAK} = 60^\circ$. Do đó

$$HK = HA \cdot \sin \widehat{HAK} = \frac{2a}{3} \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Kẻ $HI \perp SK$ tại K, suy ra $HI \perp (SAD) \Rightarrow \mathrm{d}\,[H;(SAD)] = HI$.
Xét tam giác SHA vuông tại H, ta có

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{7}}{3}\right)^2} = \frac{30}{7a^2}$$

$$\Rightarrow \quad HI = \frac{a\sqrt{210}}{30}.$$

Vậy $\mathrm{d}\,(SA;BC) = \frac{3}{2}\mathrm{d}\,[H;(SAD)] = \frac{3}{2}HI = \frac{3}{2} \cdot \frac{a\sqrt{210}}{30} = \frac{\sqrt{210}}{20}$.

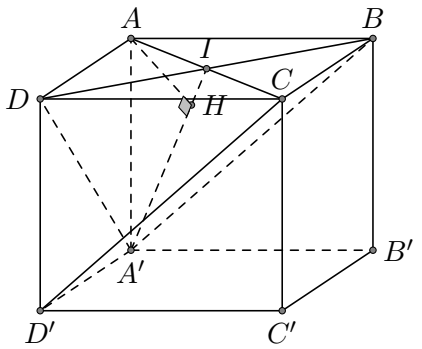
Chọn đáp án (B) □

Câu 265. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $AA' = 2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và CD'.

A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $2a$. **D.** $a\sqrt{2}$.

✍Lời giải.
Vì $CD' \parallel A'B \Rightarrow CD' \parallel (A'BD)$.
$\Rightarrow \mathrm{d}\,[BD, CD'] = \mathrm{d}\,[C,(A'BD)] = \mathrm{d}\,[A,(A'BD)] = AH$.
Xét $\triangle A'AI$ vuông tại A có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

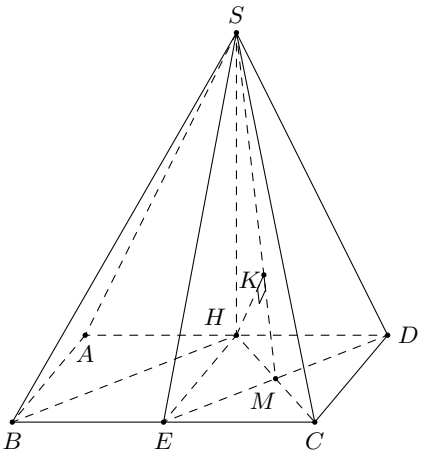


Chọn đáp án (B) □

Câu 266. Cho hình chóp $S.ACBD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy là trung điểm H của AD, góc giữa SB và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ bằng 45°. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và BH theo a.

A. $a\sqrt{\frac{2}{5}}$. **B.** $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. **C.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. **D.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

✍Lời giải.
Gọi E là trung điểm $BC \Rightarrow ED \parallel BH \Rightarrow BH \parallel (SDE)$.
Ta có $\mathrm{d}(SD, BH) = \mathrm{d}(BH,(SDE)) = \mathrm{d}(H,(SDE))$.
Gọi M là tâm hình vuông $HDCE$, ta có $DE \perp HM$ và $DE \perp SH$ nên $DE \perp (SHM)$.
Hai mặt phẳng (SHM) và (SDE) vuông góc nhau theo giao tuyến SM. Gọi K là hình chiếu vuông góc của H lên $SM \Rightarrow HK \perp (SDE)$.
Suy ra $\mathrm{d}(H,(SDE)) = HK$.



Ta có $BH = ED = a\sqrt{2}$ và $(SB,(ABCD)) = (SB,BH) = \widehat{SBH} = 45^\circ \Rightarrow SH = SB = a\sqrt{2}$.
Xét $\triangle SHM$ vuông tại H ta có

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HM^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{1}{\frac{a^2}{2}} + \frac{1}{2a^2} \Leftrightarrow HK = a\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

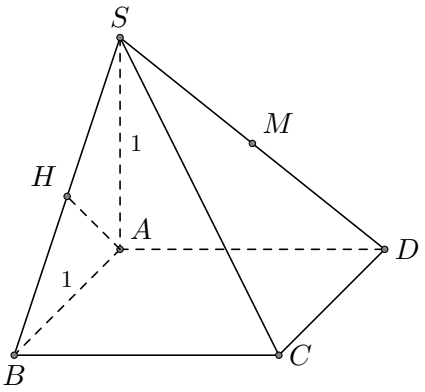
Chọn đáp án A □

Câu 267. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = 1$. Gọi M là trung điểm của SD. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAC)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(SAC)=SA\end{cases}\Rightarrow SA\perp(ABCD)$.



Vì $DM\cap(SBC)=\{S\}\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}(M,(SBC))}{\mathrm{d}(D,(SBC))}=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \mathrm{d}(M,(SBC))=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}(D,(SBC))$.

Tính $\mathrm{d}(D,(SBC))$.

Vì $AD\parallel BC\Rightarrow AD\parallel(SBC)$

$\Rightarrow \mathrm{d}(D,(SBC))=\mathrm{d}(A,(SBC))$.

Ta kẻ $AH\perp SB$ (1) và chứng minh $AH\perp(SBC)$. Thật vậy ta có

$\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp SA\\SA\cap AB=A\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AH$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $AH\perp(SBC)\Rightarrow \mathrm{d}(A,(SBC))=AH=\dfrac{SA\cdot AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\mathrm{d}(M,(SBC))=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 268. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SB=\sqrt{5}a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC) theo a.

A. $\frac{4\sqrt{57}}{57}a$. **B.** $\frac{2\sqrt{57}}{57}a$. **C.** $\frac{3\sqrt{57}}{57}a$. **D.** $\frac{2\sqrt{57}}{19}a$.

Lời giải.

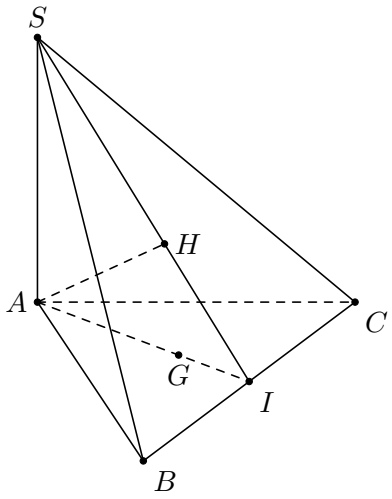
Ta có $\mathrm{d}(G,(SBC))=\dfrac{1}{3}\mathrm{d}(A,(SBC))$.

Gọi I là trung điểm của BC.

Ta có $\begin{cases}BC\perp AI\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAI)\Rightarrow(SBC)\perp(SAI)$.

Gọi H là hình chiếu của A lên SI. Ta có $AH\perp(SBC)$.

Suy ra $\mathrm{d}(A,(SBC))=AH$.



Ta có $SA=\sqrt{SB^2-AB^2}=2a$, $AI=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

$\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AI^2}=\dfrac{1}{4a^2}+\dfrac{4}{3a^2}=\dfrac{19}{12a^2}\Rightarrow AH=\dfrac{2\sqrt{57}}{19}$.

Vậy $\mathrm{d}(G,(SBC))=\dfrac{2\sqrt{57}}{57}$.

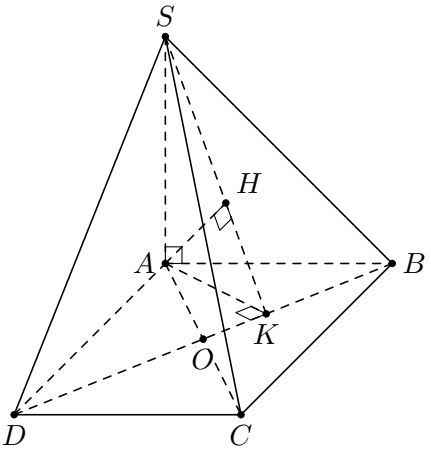
Chọn đáp án B □

Câu 269. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB=a$, $AD=a\sqrt{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD).

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{66}}{11}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{33}}{6}$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD.
Ta có AC cắt (SBD) tại O nên $\dfrac{\mathrm{d}(C,(SBD))}{\mathrm{d}(A,(SBD))}=\dfrac{CO}{AO}=1$.
Kẻ $AK\perp BD$ tại K và $AH\perp SK$ tại H.
Khi đó $BD\perp(SAK)\Rightarrow AH\perp BD\Rightarrow AH\perp(SBD)$ nên ta có $\mathrm{d}(C,(SBD))=\mathrm{d}(A,(SBD))=AH$.
Ta có $\dfrac{1}{AK^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AD^2}$ và $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AK^2}$ nên suy ra $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AD^2}=\dfrac{11a^2}{6}\Rightarrow AH=\dfrac{a\sqrt{66}}{11}$.



Chọn đáp án (B) □

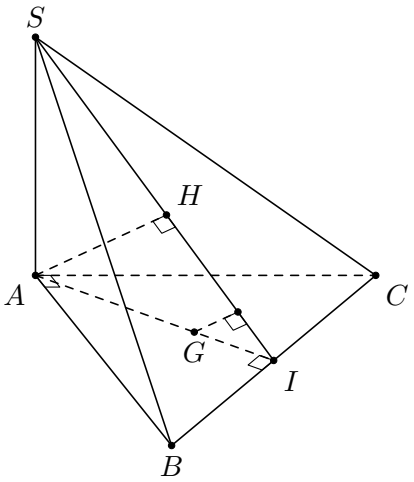
Câu 270. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A và $BC=a\sqrt{2}$. Cạnh bên SC tạo với mặt đáy góc 60° và SA vuông góc với mặt đáy. Tính khoảng cách từ trọng tâm $\triangle ABC$ đến mặt (SBC).

A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{21}$. **D.** $a\sqrt{21}$.

✍Lời giải.
Gọi I là trung điểm $\triangle ABC\Rightarrow AI\perp BC$.
Vẽ $AH\perp SI$ tại H.
Ta có $BC\perp AI$ và $BC\perp SA$ nên $BC\perp(SAI)\Rightarrow BC\perp AH$.
Mà $AH\perp SI$ nên $AH\perp(SBC)\Rightarrow\mathrm{d}(A,(SBC))=AH$.
Ta lại có $\dfrac{IG}{IA}=\dfrac{1}{3}$ nên $\mathrm{d}(G,(SBC))=\dfrac{1}{3}\mathrm{d}(A,(SBC))=\dfrac{AH}{3}$.
Mặt khác, trong tam giác SAI ta có

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AI^2}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Do đó $\mathrm{d}(G,(SBC))=\dfrac{a\sqrt{21}}{21}$.

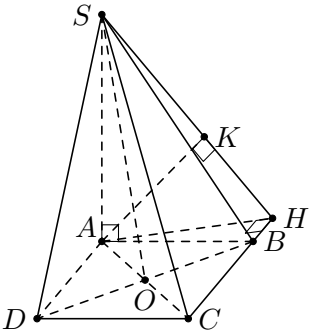


Chọn đáp án (C) □

Câu 271. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD}=60^\circ$, $SA=a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. O là tâm hình thoi $ABCD$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{7}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{14}$.

✍Lời giải.
Ta có $AC\cap(SBC)=C$ nên $\mathrm{d}[O,(SBC)]=\dfrac{OC}{AC}\mathrm{d}[A,(SBC)]=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}[A,(SBC)]$.
Trong mặt phẳng $(ABCD)$, vẽ $AH\perp BC$ tại H.
Trong mặt phẳng (SAH) vẽ $AK\perp SH$ tại K.
Ta có $\begin{cases}BC\perp AH\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAH)$.
Ta có $\begin{cases}AK\perp SH\\AK\perp BC\end{cases}\Rightarrow AK\perp(SBC)$.
Suy ra $\mathrm{d}[A,(SBC)]=AK$.
$\triangle ABH$ vuông tại H có $AH=AB\sin 60^\circ=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
$\triangle SAH$ vuông tại A có $\dfrac{1}{AK^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AH^2}\Rightarrow AK=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.
Vậy $\mathrm{d}[O,(SBC)]=\dfrac{1}{2}AK=\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$.



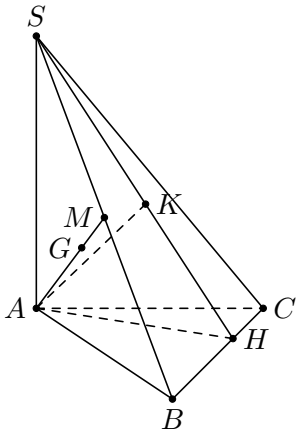
Chọn đáp án A □

Câu 272. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = 7$, $\widehat{ACB} = 30^\circ$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và đường thẳng SC tạo với mặt phẳng đáy một góc 60°. Khoảng cách từ trọng tâm của tam giác SAB đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{7\sqrt{13}}{13}$. **B.** $\dfrac{21\sqrt{13}}{13}$. **C.** $\dfrac{14\sqrt{13}}{13}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{13}}{26}$.

✍Lời giải.

Ta có AC là hình chiếu vuông góc của SC lên (ABC).
Do đó $\widehat{(SC,(ABC))} = \widehat{SCA} = 60^\circ$.
Gọi M là trung điểm của SB, G là trọng tâm $\triangle SAB$. Ta có
$\dfrac{GM}{AM} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}(G,(SBC))}{\mathrm{d}(A,(SBC))} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \mathrm{d}(G,(SBC)) = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}(A,(SBC))$.
Kẻ $AH \perp BC$ tại H, ta có
$\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH)$.
Kẻ $AK \perp SH$ tại K, ta có



$\begin{cases} AK \perp SH \\ AK \perp BC \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SBC) \Rightarrow \mathrm{d}(A,(SBC)) = AK$.

$\triangle ABC$ vuông tại $A \Rightarrow AC = AB \cdot \cot 30^\circ = 7\sqrt{3}$ và $AH = \dfrac{AB \cdot AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = \dfrac{7\sqrt{3}}{2}$.
$\triangle SAC$ vuông tại $A \Rightarrow SA = AC \cdot \tan 60^\circ = 3 \cdot 7 = 21$.
$\triangle SAH$ vuông tại $A \Rightarrow AK = \dfrac{SA \cdot AH}{\sqrt{SA^2 + AH^2}} = \dfrac{21\sqrt{13}}{13}$.
Vậy $\mathrm{d}(G,(SBC)) = \dfrac{7\sqrt{13}}{13}$.

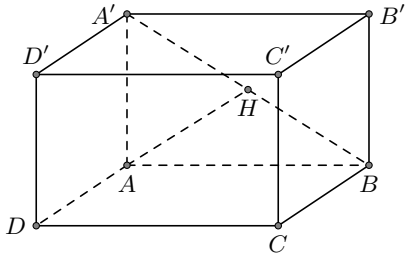
Chọn đáp án A □

Câu 273. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, tam giác $A'AC$ vuông cân, $A'C = 2$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD').

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

✍Lời giải.

Ta có $AC = AA' = \dfrac{A'C}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, suy ra $AB = 1$.
Kẻ $AH \perp A'B$, ta chứng minh được $AH \perp (A'BCD')$
Suy ra $d(A,(BCD')) = AH = \dfrac{AB \cdot AA'}{A'B} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.



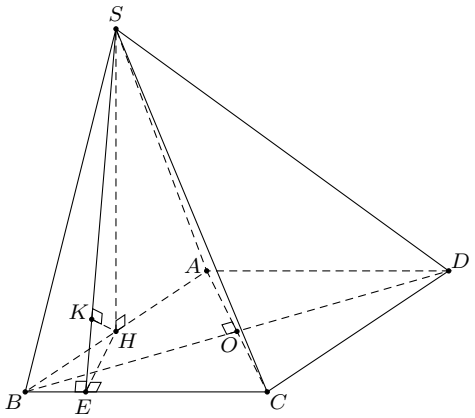
Chọn đáp án C □

Câu 274. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AC = 2a$, $BD = 4a$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC.

A. $\dfrac{2a^3\sqrt{15}}{3}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{4a\sqrt{1365}}{91}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD$, H là trung điểm của AB,
suy ra $SH \perp AB$.
Do $AB = (SAB) \cap (ABCD)$ và $(SAB) \perp (ABCD)$,
nên $SH \perp (ABCD)$.



+) Ta có $OA = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{2a}{2} = a$, $OB = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{4a}{2} = 2a$.
$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$.

+) $SH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.
$S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BD = \dfrac{1}{2}2a \cdot 4a = 4a^2$.

Vì $BC \parallel AD$ nên $AD \parallel (SBC)$
$\Rightarrow \mathrm{d}(AD, SC) = \mathrm{d}(AD, (SBC)) = \mathrm{d}(A, (SBC))$.
Do H là trung điểm của AB và $B = AH \cap (SBC)$, nên $\mathrm{d}(A, (SBC)) = 2\mathrm{d}(H, (SBC))$.
Kẻ $HE \perp BC$, $H \in BC$, do $SH \perp BC$, nên $BC \perp (SHE)$.
Kẻ $HK \perp SE$, $K \in SE$, ta có $BC \perp HK \Rightarrow HK \perp (SBC) \Rightarrow HK = \mathrm{d}(H, (SBC))$.
Ta có H là trung điểm AB nên
$\dfrac{\mathrm{d}(H; BC)}{\mathrm{d}(A, BC)} = \dfrac{HB}{HA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow HE = \dfrac{\mathrm{d}(A; BC)}{2} = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{2BC} = \dfrac{2a^2}{a\sqrt{5}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.
Xét tam giác SHE vuông tại H có HK là đường cao, ta có:
$\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HE^2} + \dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{5}{4a^2} + \dfrac{4}{15a^2} = \dfrac{91}{60a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{2a\sqrt{15}}{\sqrt{91}} = \dfrac{2a\sqrt{1365}}{91}$.
Vậy $\mathrm{d}(AD, SC) = 2HK = \dfrac{4a\sqrt{1365}}{91}$.

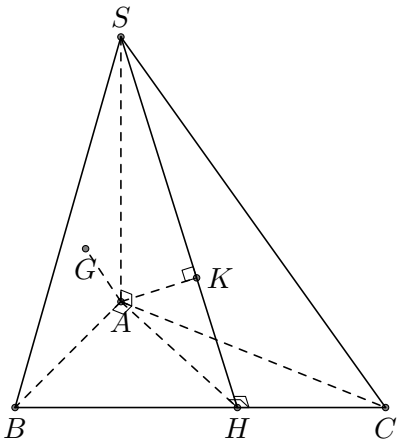
Chọn đáp án C □

Câu 275. Cho hình chóp $S.ABC$ có dáy là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $\widehat{ACB} = 30^\circ$, SA vuông góc với đáy và góc giữa mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng đáy một góc 60°. Khoảng cách từ trọng tâm của tam giác (SAB) đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

✍Lời giải.

Kẻ $AH \perp BC$ (trong mặt phẳng (ABC)). Khi đó vì $AH \perp (ABC)$ nên $SH \perp BC$. Suy ra góc giữa mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng đáy là $\widehat{AHS} = 60^\circ$.
Trong (SAH), kẻ $AK \perp SH$ thì $AH \perp (SBC)$ (vì $BC \perp (SAH)$). Khi đó $\mathrm{d}[A, (SBC)] = AH$.



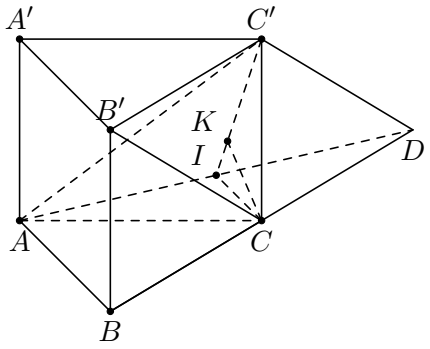
Xét tam giác vuông AHK có $\widehat{AHS} = 60^\circ$ và $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (vì tam giác AHB là nửa tam giác đều với cạnh huyền $AB = a$). Khi đó $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.
Vì trọng tâm G của tam giác SAB nên ta có $\dfrac{\mathrm{d}[G, (SBC)]}{\mathrm{d}[A, (SBC)]} = \dfrac{1}{3}$.
Vậy khoảng cách từ trọng tâm của tam giác (SAB) đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{12}$.

Chọn đáp án A □

Câu 276. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 2\sqrt{3}a$, $BC = a$, $AA' = \dfrac{3a}{2}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và $B'C$ bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{7}}{7}a$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{10}}{20}a$. **C.** $\dfrac{3}{4}a$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{13}}{13}a$.

✍Lời giải.



— Kẻ $C'D \parallel B'C$ $(D \in CB)$, từ đó thì $CB' \parallel (AC'D)$
Suy ra

$$\mathrm{d}(B'C, AC') = \mathrm{d}(CB', (AC'D)) = \mathrm{d}(C, (AC'D)).$$

— Kẻ $CI \perp AD$ $(I \in AD)$; $CK \perp C'I$ $(K \in C'I)$.
Ta có $CB'C'D$ là hình bình hành
$\Rightarrow CD = C'B' = CB = a$.

— $\triangle ABD$ vuông tại B, có $AD = \sqrt{BA^2 + BD^2} = \sqrt{12a^2 + 4a^2} = 4a$.

— $\triangle DIC \backsim \triangle DBA \Rightarrow \dfrac{CI}{AB} = \dfrac{CD}{AD} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow CI = \dfrac{1}{4}AB = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

— Ta có $\dfrac{1}{CK^2} = \dfrac{1}{CI^2} + \dfrac{1}{CC'^2} = \dfrac{4}{3a^2} + \dfrac{4}{9a^2} = \dfrac{16}{9a^2} \Rightarrow CK = \dfrac{3a}{4}$.

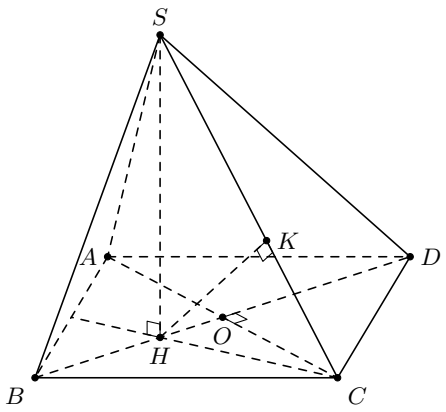
— Vậy $\mathrm{d}(B'C, AC') = CK = \dfrac{3a}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 277. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. Tam giác ABC đều, hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Đường thẳng SD hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ góc $30°$. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SCD) theo a.

A. $d = a\sqrt{3}$. **B.** $d = \dfrac{2a\sqrt{21}}{21}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $d = \dfrac{2a\sqrt{5}}{3}$.

✍Lời giải.



Vì H là hình chiếu vuông góc của S lên $(ABCD)$ nên HD là hình chiếu vuông góc của SD lên $(ABCD)$.
Vậy góc tạo bởi SD và $(ABCD)$ bằng góc giữa SD và HD chính là $\widehat{SDH}$. Khi đó $\widehat{SDH} = 30°$.
Gọi O là giao điểm của AC và BD.
Vì H là trọng tâm của tam giác ABC nên

$$BH = \frac{2}{3}BO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Mặt khác $BH = \dfrac{2}{3}BO = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{1}{3}BD$.
Suy ra $DH = \dfrac{2}{3}BD = \dfrac{4}{3}BO = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.
Trong tam giác vuông SHD ta có $SH = DH \tan \widehat{SDH} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2a}{3}$.
Ta có $HC \perp AB$, $AB \parallel CD$ nên $HC \perp CD$.
Lại có $CD \perp SH$. Do đó $CD \perp (SHC)$, suy ra $(SHC) \perp (SCD)$.
Kẻ $HK \perp SC$ tại K. Suy ra $HK \perp (SCD)$.
Vậy $\mathrm{d}(H, (SCD)) = HK = \dfrac{HC \cdot SH}{\sqrt{HC^2 + SH^2}} = \dfrac{2a\sqrt{21}}{21}$.
Ta lại có

$$\frac{\mathrm{d}(B, (SCD))}{\mathrm{d}(H, (SCD))} = \frac{BD}{DH} = \frac{3}{2} \Rightarrow \mathrm{d}(B, (SCD)) = \frac{3}{2}\mathrm{d}(H, (SCD)) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2a\sqrt{21}}{21} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Chọn đáp án C □

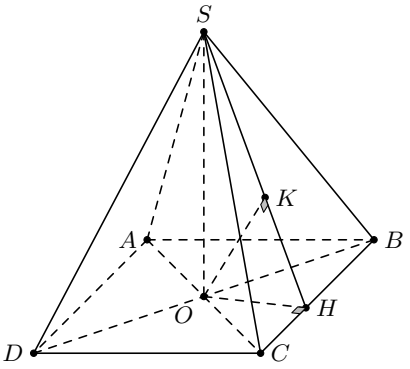
Câu 278. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a; $\widehat{DAB} = 120^\circ$. Gọi O là giao điểm của AC, DB. Biết rằng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Do DO cắt (SBC) tại B, suy ra

$$\frac{\mathrm{d}(D,(SBC))}{\mathrm{d}(O,(SBC))} = \frac{BD}{BO} = 2 \Rightarrow \mathrm{d}(D,(SBC)) = 2\mathrm{d}(O,(SBC)).$$



Kẻ $OH \perp BC$ tại H và $OK \perp SH$ tại K nên $OK \perp (SBC)$.
Do $\triangle ABC$ đều cạnh a nên $OH = OC \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.
Do $\triangle SOH$ vuông tại O, có OK là đường cao, ta có

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OH^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{16}{3a^2} + \frac{8}{3a^2} = \frac{8}{a^2} \Rightarrow OK = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Vậy $\mathrm{d}(D,(SBC)) = 2OK = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

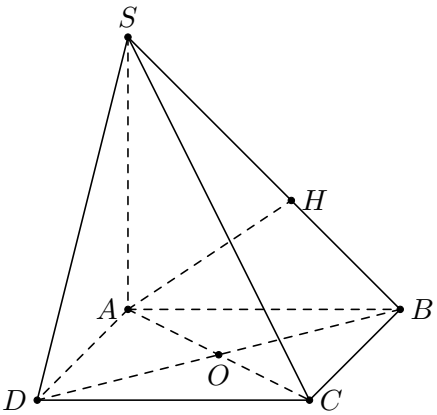
Chọn đáp án (A) □

Câu 279. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tâm O. Biết $SA = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{4a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$.

✍Lời giải.

Ta có O là trung điểm của AC nên
$\mathrm{d}(O,(SBC)) = \dfrac{1}{2}d(A,(SBC))$.
Kẻ $AH \perp SB$.
Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$ và $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow$ $AB \perp BC$. Từ đó suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$.
Từ đây ta suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH = \mathrm{d}(A,(SBC))$.
Xét $\triangle SAB$ vuông tại A đường cao AH có
$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{5}{4a^2}$.
$\Rightarrow AH = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. Vậy $\mathrm{d}(O,(SBC)) = \dfrac{1}{2}AH = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.



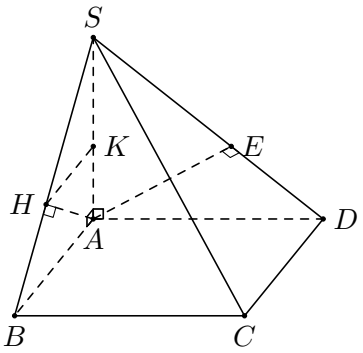
Chọn đáp án (A) □

Câu 280. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$. Tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = 2a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Tính khoảng cách từ H đến (SCD).

A. $\dfrac{4a\sqrt{5}}{25}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{4a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{8a\sqrt{5}}{25}$.

✍Lời giải.

Ta có $SH = \dfrac{SA^2}{SB} = \dfrac{4a^2}{a\sqrt{5}} = \dfrac{4a\sqrt{5}}{5}$.
Kẻ $HK \parallel AB$ ta có $\mathrm{d}(H,(SCD)) = \mathrm{d}(K,(SCD))$
$\Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}(K,(SCD))}{\mathrm{d}(A,(SCD))} = \dfrac{SK}{SA} = \dfrac{SH}{SB} = \dfrac{4a\sqrt{5}}{5} : a\sqrt{5} = \dfrac{4}{5}$.
Kẻ $AE \perp SD \Rightarrow AE \perp (SCD)$
$\Rightarrow \mathrm{d}(A,(SCD)) = AE = \sqrt{\dfrac{SA^2 \cdot AD^2}{SA^2 + AD^2}} = \sqrt{\dfrac{4a^2 \cdot a^2}{4a^2 + a^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.
$\Rightarrow \mathrm{d}(K,(SCD)) = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{2a}{\sqrt{5}} = \dfrac{8a\sqrt{5}}{25} \Rightarrow \mathrm{d}(H,(SCD)) = \dfrac{8a\sqrt{5}}{25}$.

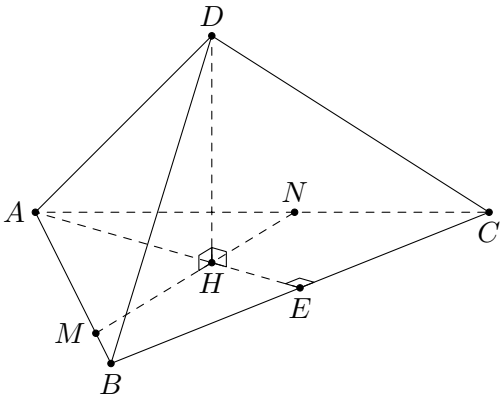


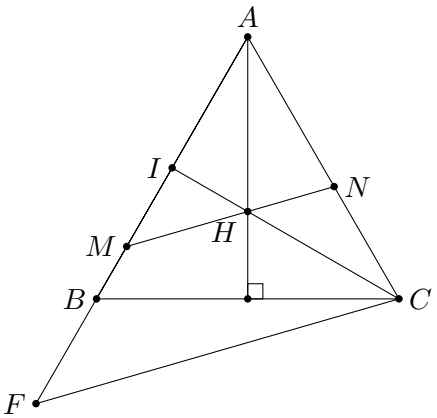
Chọn đáp án (D) □

Câu 281. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. M, N lần lượt là các điểm di động trên các cạnh AB, AC sao cho hai mặt phẳng (DMN), (ABC) vuông góc với nhau. Đặt $AM = x$, $AN = y$. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $xy(x+y) = 3$. **B.** $x + y = 3xy$. **C.** $x + y = 3 + xy$. **D.** $xy = 3(x+y)$.

Lời giải.





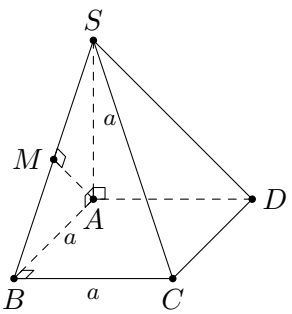
Gọi H là trọng tâm của tam giác ABC thì $DH \perp (ABC)$. Mặt khác $(DMN) \perp (ABC)$ nên $DH \subset (DMN)$ và $DH \perp MN$. Từ đó suy ra $H \in MN$.
Kẻ đường thẳng đi qua C song song với MN và cắt AB tại F.
Ta có $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{AF}{AC} \Rightarrow \dfrac{x}{y} = AF \Rightarrow x = y \cdot AF$.
Gọi I là trung điểm của AB, ta có $\dfrac{IM}{MF} = \dfrac{IH}{HC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow MF = 2IM$.
Do đó $AF = AM + MF = AM + 2IM = AM + 2(AM - IA) = 3x - 1$.
Suy ra $x = y(3x-1) \Leftrightarrow x + y = 3xy$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 282. Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến (SBC).

A. $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $d = a$. **C.** $d = \dfrac{a}{2}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của SB, suy ra $AM \perp SB$.
Mặt khác $AM \perp BC$ (do $BC \perp (SAB)$).
Do đó $AM \perp (SBC)$.
Suy ra $d = \mathrm{d}(A,(SBC)) = AM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



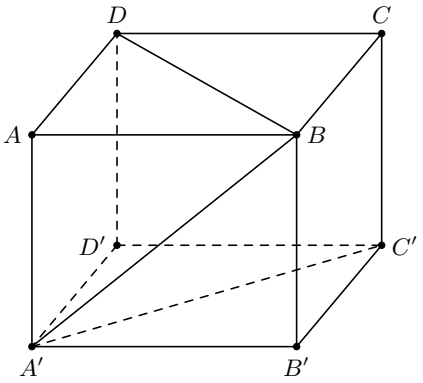
Chọn đáp án (D) □

Câu 283. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a. Góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $60°$. Tính khoảng cách d giữa đường thẳng BD và $A'C'$.

A. $d=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$. **B.** $d=\dfrac{1}{2}a$. **C.** $d=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$. **D.** $d=\sqrt{3}a$.

✍Lời giải.

Do $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ là cặp mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng chéo nhau BD và $A'C'$ nên
$d=\mathrm{d}(BD,A'C')=\mathrm{d}((ABCD),(A'B'C'D'))=AA'$.
Do $(A'B,(ABCD))=\widehat{A'BA}=60^\circ$ nên $AA'=AB\cdot\tan 60^\circ=a\sqrt{3}$.



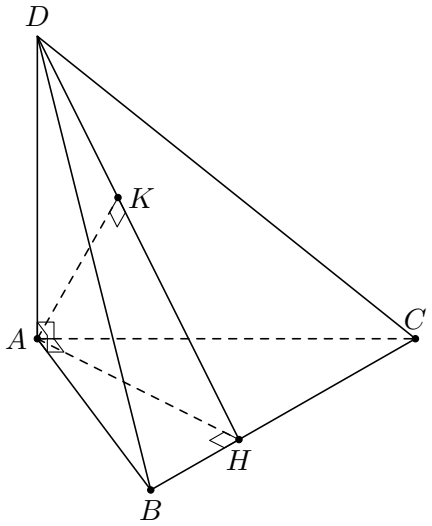
Chọn đáp án (D) □

Câu 284. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=a$, $AC=a\sqrt{2}$, $AD=a\sqrt{3}$, các tam giác ABC, ACD, ABD là các tam giác vuông tại đỉnh A. Khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (BCD) là

A. $d=\dfrac{a\sqrt{66}}{11}$. **B.** $d=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $d=\dfrac{a\sqrt{30}}{5}$. **D.** $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Kẻ $AH\perp BC$ tại H, kẻ $AK\perp DH$ tại K.
Ta có $\begin{cases}BC\perp AH\\BC\perp AD\end{cases}\Rightarrow BC\perp(AHD)\Rightarrow BC\perp AK$.
Có $\begin{cases}AK\perp BC\\AK\perp HD\end{cases}\Rightarrow AK\perp(BCD)$
$\Rightarrow AK$ là khoảng cách từ A đến (BCD).
Xét $\triangle ABC$ có
$\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}$



Xét $\triangle AHD$ có
$\dfrac{1}{AK^2}=\dfrac{1}{AD^2}+\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AD^2}+\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{2a^2}+\dfrac{1}{3a^2}=\dfrac{11}{6a^2}$.
Suy ra $d=AK=\dfrac{a\sqrt{66}}{11}$.

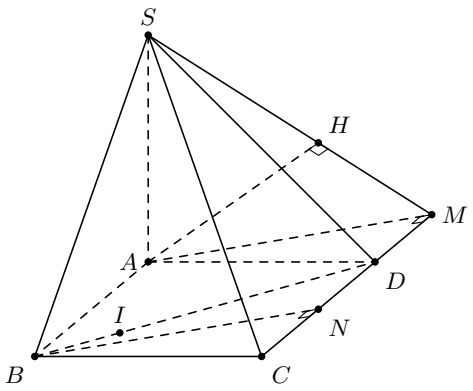
Chọn đáp án (A) □

Câu 285. Cho hình chóp $ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD}=60^\circ$, $SA=a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi I là điểm thuộc cạnh BD sao cho $ID=3IB$. Khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{4a\sqrt{21}}{21}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{21}}{28}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{21}}{14}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{21}}{21}$.

✍Lời giải.

Gọi N là trung điểm CD, M là hình chiếu của A lên CD và H là hình chiếu vuông góc của A lên SM.
Do $ABCD$ là hình thoi và $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên tam giác BCD đều, $BN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $BN \perp CD$.



Ta có tứ giác $ABNM$ là hình bình hành nên $AM = BN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $AM \perp CD$.
Mà $CD \perp SA$ suy ra $CD \perp (SAM)$.
Do đó $\begin{cases} AH \perp CD \\ AH \perp SM \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD)$.

Vậy $\mathrm{d}\,(A,(SCD)) = AH = \dfrac{AS \cdot AM}{\sqrt{AS^2 + AM^2}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.
Ta có $AB \parallel (SCD)$ và $IB \cap (SCD) = D$ suy ra

$$\mathrm{d}\,(I,(SCD)) = \frac{DI}{DB} \cdot \mathrm{d}\,(B,(SCD)) = \frac{3}{4}\mathrm{d}\,(B,(SCD)) = \frac{3}{4}\mathrm{d}\,(A,(SCD)) = \frac{3a\sqrt{21}}{28}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 286. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AD = 2a$, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SD và BC. Khoảng cách giữa SC và MN bằng

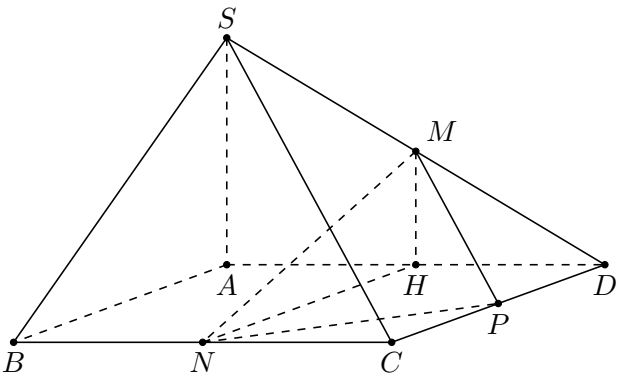
A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{12}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{24}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{21}$.

✍Lời giải.

Goi H, P lần lượt là trung điểm AD, CD.

Ta có $\begin{cases} MP = \dfrac{\sqrt{6}a}{2} \\ NP = \dfrac{\sqrt{5}a}{2} \\ MN = \dfrac{\sqrt{5}a}{2} \end{cases} \Rightarrow S_{\triangle MNP} = \dfrac{\sqrt{21}a^2}{8}$.

Mặt khác, ta có $V_{M.NCP} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{a^3}{24}$.



Ta có $MP \parallel SC$ nên $\mathrm{d}(SC, MN) = \mathrm{d}(SC,(MNP)) = \mathrm{d}(C,(MNP)) = \dfrac{3V_{C.MNP}}{S_{\triangle MNP}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{21}$.

Chọn đáp án D □

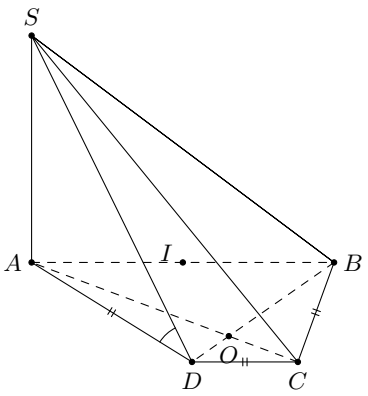
Câu 287. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, đáy lớn AB. Biết rằng $AD = CD = BC = a, AB = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và mặt phẳng (SBD) tạo với đáy một góc 45°. Gọi I là trung điểm của AB. Tính khoảng cách từ I đến (SBD).

A. $\dfrac{a}{4}$. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

✍Lời giải.

Do $IA = ID = IC = IB \Rightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $ABCD \Rightarrow \triangle ABD$ vuông tại D.
Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow$ góc giữa (SBD) và $(ABCD)$ là góc

$$\widehat{SDA} \Rightarrow \widehat{SDA} = 45^\circ.$$



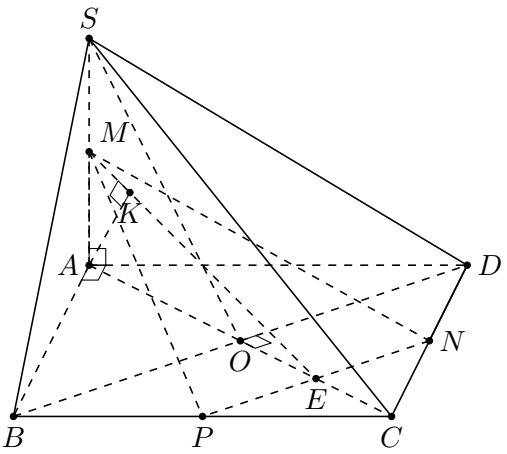
Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SD, ta có $DB \perp (SAD) \Rightarrow AH \perp BD$.
Suy ra H cũng chính là hình chiếu vuông góc của A lên (SBD).
Ta có $\mathrm{d}(A,(SBD)) = AH = AD \cdot \sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.
Suy ra khoảng cách từ I đến (SBD) là $\mathrm{d}(I,(SBD)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(A,(SBD)) = \dfrac{\sqrt{2}a}{4}$.
Chọn đáp án C □

Câu 288. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh 10, SA vuông góc với đáy và $SC = 10\sqrt{5}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD. Tính khoảng cách d giữa BD và MN.

A. $d = 3\sqrt{5}$. **B.** $d = \sqrt{5}$. **C.** $d = 5$. **D.** $d = 10$.

Lời giải.
Gọi P là trung điểm của BC và $E = NP \cap AC$, suy ra $PN \parallel BD$, nên $BD \parallel (MNP)$.
Do đó

$$\begin{aligned} \mathrm{d}[BD, MN] &= \mathrm{d}[BD, (MNP)] \\ &= \mathrm{d}[O, (MNP)] \\ &= \frac{1}{3}\mathrm{d}[A, (MNP)]. \end{aligned}$$

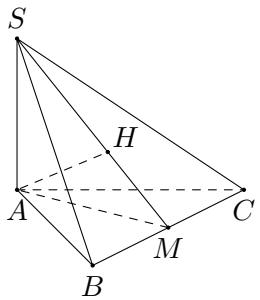


Ta tính được $SA = \sqrt{SC^2 - SA^2} = 10\sqrt{3}$
$\Rightarrow MA = 5\sqrt{3}$; $AE = \dfrac{3}{4}AC = \dfrac{15\sqrt{2}}{2}$.
Trong tam giác vuông MAE, ta có
$AK = \dfrac{MA \cdot AE}{\sqrt{MA^2 + AE^2}} = 3\sqrt{5}$.
Vậy $\mathrm{d}[BD, MN] = \dfrac{1}{3}AK = \sqrt{5}$.
Chọn đáp án B □

Câu 289. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều, $SA = a$, hai mặt phẳng (SAB), (SAC) cùng vuông góc với đáy. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính thể tích V của hình chóp $S.ABC$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $V = a^3\sqrt{3}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.
Ta có $(SAB) \perp (ABC)$ và $(SAC) \perp (ABC)$, suy ra $SA \perp (ABC)$.
Gọi M trung điểm BC, ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AM \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM)$.
Gọi H là hình chiếu của A trên SM, ta có $\begin{cases} AH \perp SM \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$.
Theo giả thiết ta có $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Khi đó $\dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{1}{AH^2} - \dfrac{1}{AS^2} = \dfrac{4}{3a^2} - \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{3a^2} \Rightarrow AM = a\sqrt{3}$.
Vì $\triangle ABC$ đều nên $AB = \dfrac{2AM}{\sqrt{3}} = 2a$, suy ra $S_{\triangle ABC} = a^2\sqrt{3}$.

Vậy thể tích khối chóp là $V = \dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot SA = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

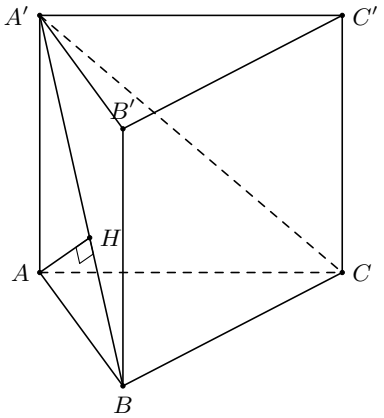
Câu 290. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = a\sqrt{5}$. Góc giữa cạnh $A'B$ và mặt đáy là $60°$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$.

A. $\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{3}$.

✍Lời giải.

Ta có AB là hình chiếu vuông góc của $A'B$ trên mặt phẳng (ABC) nên

$$\widehat{(A'B;(ABC))} = \widehat{(A'B;AB)} = \widehat{ABA'} \Rightarrow \widehat{ABA'} = 60°.$$



Do đó $AA' = AB\tan\widehat{ABA'} = a\sqrt{5}\tan 60° = a\sqrt{15}$.
Kẻ $AH \perp A'B$ tại H.
Từ $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp BB' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ABB'A') \Rightarrow BC \perp AH$.

Từ $AH \perp A'H$ và $AH \perp BC$ suy ra $AH \perp (A'BC)$. Do đó $\mathrm{d}\,[A;(A'BC)] = AH$.
Trong tam giác $A'AB$ vuông tại A, ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{(a\sqrt{15})^2} + \frac{1}{(a\sqrt{5})^2} = \frac{4}{15a^2}$$

$$\Rightarrow \quad AH = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

Vậy $\mathrm{d}\,[A;(A'BC)] = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

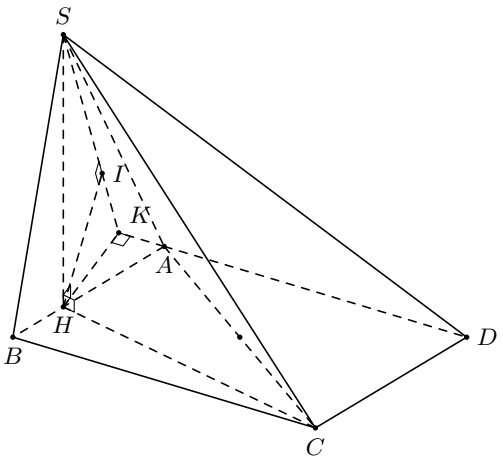
Câu 291. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, góc giữa SC và mp(ABC) là $45°$. Hình chiếu của S lên mp(ABC) là điểm H thuộc AB sao cho $HA = 2HB$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

A. $\dfrac{a\sqrt{210}}{45}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{210}}{20}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{210}}{15}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{210}}{30}$.

✍Lời giải.

Dựng hình bình hành $ABCD$, khi đó $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $BC \parallel AD \Rightarrow BC \parallel (SAD)$.
Do đó

$$\mathrm{d}\,(SA;BC) = \mathrm{d}\,[BC;(SAD)] = \mathrm{d}\,[B;(SAD)]\,.$$



Từ $\dfrac{BA}{HA} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \mathrm{d}\,[B;(SAD)] = \dfrac{3}{2}\mathrm{d}\,[H;(SAD)]$.
Ta có $SH \perp (ABC)$ nên suy ra

$$\widehat{(SC;(ABC))} = \widehat{(SC;HC)} = \widehat{SCH}.$$

Suy ra $\widehat{SCH} = 45°$.

$HC^2 = HB^2 + BC^2 - 2HB \cdot BC \cdot \cos\widehat{HBC} = \left(\dfrac{a}{3}\right)^2 + a^2 - 2 \cdot \dfrac{a}{3} \cdot a\cos 60° = \dfrac{7a^2}{9} \Rightarrow HC = \dfrac{a\sqrt{7}}{3}$.
Tam giác SHC vuông tại H và $\widehat{SCH} = 45°$ nên tam giác SHC vuông cân tại H. Từ đó ta có $SH = HC = \dfrac{a\sqrt{7}}{3}$.

Kẻ $HK \perp AD$ tại $K \Rightarrow \widehat{HAK} = 60^\circ$. Do đó

$$HK = HA \cdot \sin \widehat{HAK} = \frac{2a}{3} \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Kẻ $HI \perp SK$ tại K, suy ra $HI \perp (SAD) \Rightarrow \mathrm{d}\,[H;(SAD)] = HI$.
Xét tam giác SHA vuông tại H, ta có

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{7}}{3}\right)^2} = \frac{30}{7a^2}$$

$$\Rightarrow \quad HI = \frac{a\sqrt{210}}{30}.$$

Vậy $\mathrm{d}\,(SA;BC) = \frac{3}{2}\mathrm{d}\,[H;(SAD)] = \frac{3}{2}HI = \frac{3}{2} \cdot \frac{a\sqrt{210}}{30} = \frac{\sqrt{210}}{20}$.

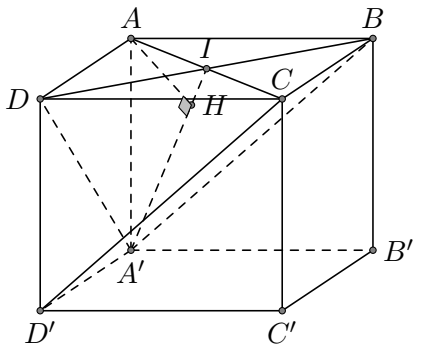
Chọn đáp án (B) □

Câu 292. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $AA' = 2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và CD'.

A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $2a$. **D.** $a\sqrt{2}$.

✍Lời giải.
Vì $CD' \parallel A'B \Rightarrow CD' \parallel (A'BD)$.
$\Rightarrow \mathrm{d}\,[BD, CD'] = \mathrm{d}\,[C,(A'BD)] = \mathrm{d}\,[A,(A'BD)] = AH$.
Xét $\triangle A'AI$ vuông tại A có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

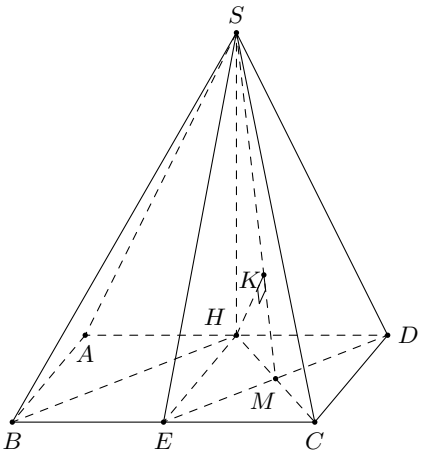


Chọn đáp án (B) □

Câu 293. Cho hình chóp $S.ACBD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy là trung điểm H của AD, góc giữa SB và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ bằng 45°. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và BH theo a.

A. $a\sqrt{\frac{2}{5}}$. **B.** $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. **C.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. **D.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

✍Lời giải.
Gọi E là trung điểm $BC \Rightarrow ED \parallel BH \Rightarrow BH \parallel (SDE)$.
Ta có $\mathrm{d}(SD, BH) = \mathrm{d}(BH,(SDE)) = \mathrm{d}(H,(SDE))$.
Gọi M là tâm hình vuông $HDCE$, ta có $DE \perp HM$ và $DE \perp SH$ nên $DE \perp (SHM)$.
Hai mặt phẳng (SHM) và (SDE) vuông góc nhau theo giao tuyến SM. Gọi K là hình chiếu vuông góc của H lên $SM \Rightarrow HK \perp (SDE)$.
Suy ra $\mathrm{d}(H,(SDE)) = HK$.



Ta có $BH = ED = a\sqrt{2}$ và $(SB,(ABCD)) = (SB,BH) = \widehat{SBH} = 45^\circ \Rightarrow SH = SB = a\sqrt{2}$.
Xét $\triangle SHM$ vuông tại H ta có

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HM^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{1}{\frac{a^2}{2}} + \frac{1}{2a^2} \Leftrightarrow HK = a\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

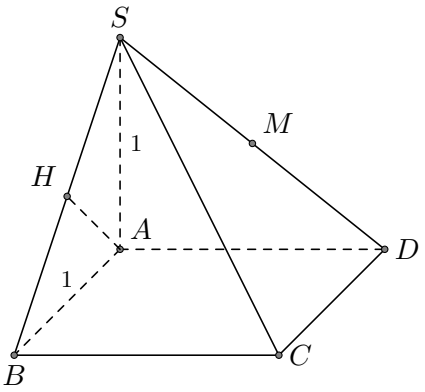
Chọn đáp án A □

Câu 294. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = 1$. Gọi M là trung điểm của SD. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}(SAB) \perp (ABCD)\\(SAC) \perp (ABCD)\\(SAB) \cap (SAC) = SA\end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD)$.



Vì $DM \cap (SBC) = \{S\} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}(M,(SBC))}{\mathrm{d}(D,(SBC))} = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \mathrm{d}(M,(SBC)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(D,(SBC))$.

Tính $\mathrm{d}(D,(SBC))$.

Vì $AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC)$

$\Rightarrow \mathrm{d}(D,(SBC)) = \mathrm{d}(A,(SBC))$.

Ta kẻ $AH \perp SB$ (1) và chứng minh $AH \perp (SBC)$. Thật vậy ta có

$\begin{cases}BC \perp AB\\BC \perp SA\\SA \cap AB = A\end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $AH \perp (SBC) \Rightarrow \mathrm{d}(A,(SBC)) = AH = \dfrac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\mathrm{d}(M,(SBC)) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 295. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SB = \sqrt{5}a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC) theo a.

A. $\frac{4\sqrt{57}}{57}a$. **B.** $\frac{2\sqrt{57}}{57}a$. **C.** $\frac{3\sqrt{57}}{57}a$. **D.** $\frac{2\sqrt{57}}{19}a$.

Lời giải.

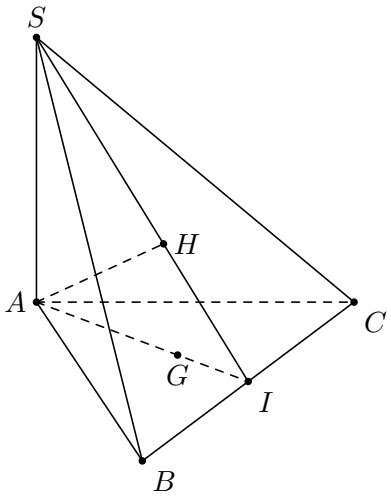
Ta có $\mathrm{d}(G,(SBC)) = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}(A,(SBC))$.

Gọi I là trung điểm của BC.

Ta có $\begin{cases}BC \perp AI\\BC \perp SA\end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow (SBC) \perp (SAI)$.

Gọi H là hình chiếu của A lên SI. Ta có $AH \perp (SBC)$.

Suy ra $\mathrm{d}(A,(SBC)) = AH$.



Ta có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = 2a$, $AI = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{4}{3a^2} = \dfrac{19}{12a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{2\sqrt{57}}{19}$.

Vậy $\mathrm{d}(G,(SBC)) = \dfrac{2\sqrt{57}}{57}$.

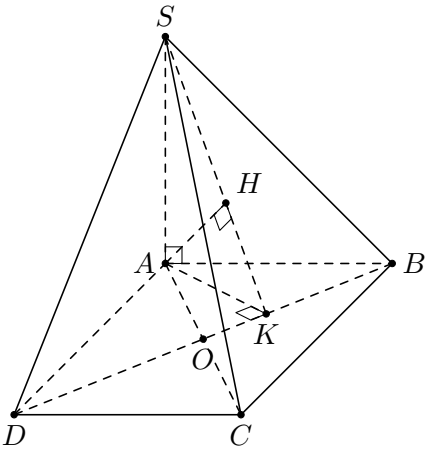
Chọn đáp án B □

Câu 296. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD).

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{66}}{11}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{33}}{6}$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD.
Ta có AC cắt (SBD) tại O nên $\dfrac{\mathrm{d}(C,(SBD))}{\mathrm{d}(A,(SBD))}=\dfrac{CO}{AO}=1$.
Kẻ $AK\perp BD$ tại K và $AH\perp SK$ tại H.
Khi đó $BD\perp(SAK)\Rightarrow AH\perp BD\Rightarrow AH\perp(SBD)$ nên ta có $\mathrm{d}(C,(SBD))=\mathrm{d}(A,(SBD))=AH$.
Ta có $\dfrac{1}{AK^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AD^2}$ và $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AK^2}$ nên suy ra $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AD^2}=\dfrac{11a^2}{6}\Rightarrow AH=\dfrac{a\sqrt{66}}{11}$.



Chọn đáp án (B) □

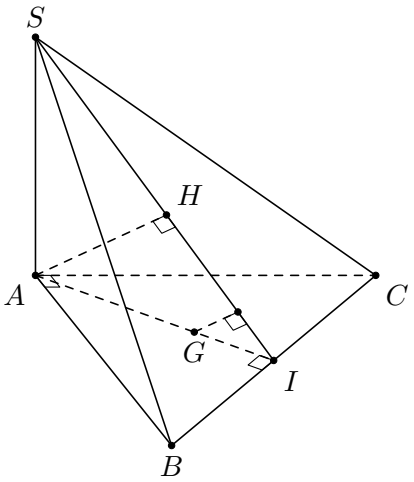
Câu 297. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A và $BC=a\sqrt{2}$. Cạnh bên SC tạo với mặt đáy góc 60° và SA vuông góc với mặt đáy. Tính khoảng cách từ trọng tâm $\triangle ABC$ đến mặt (SBC).

A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{21}$. **D.** $a\sqrt{21}$.

✍Lời giải.
Gọi I là trung điểm $\triangle ABC\Rightarrow AI\perp BC$.
Vẽ $AH\perp SI$ tại H.
Ta có $BC\perp AI$ và $BC\perp SA$ nên $BC\perp(SAI)\Rightarrow BC\perp AH$.
Mà $AH\perp SI$ nên $AH\perp(SBC)\Rightarrow\mathrm{d}(A,(SBC))=AH$.
Ta lại có $\dfrac{IG}{IA}=\dfrac{1}{3}$ nên $\mathrm{d}(G,(SBC))=\dfrac{1}{3}\mathrm{d}(A,(SBC))=\dfrac{AH}{3}$.
Mặt khác, trong tam giác SAI ta có

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AI^2}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Do đó $\mathrm{d}(G,(SBC))=\dfrac{a\sqrt{21}}{21}$.

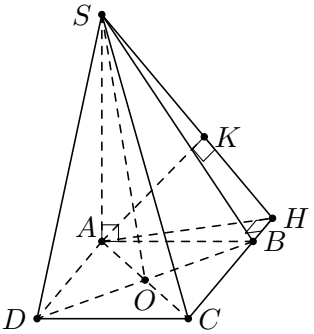


Chọn đáp án (C) □

Câu 298. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD}=60^\circ$, $SA=a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. O là tâm hình thoi $ABCD$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{7}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{14}$.

✍Lời giải.
Ta có $AC\cap(SBC)=C$ nên $\mathrm{d}[O,(SBC)]=\dfrac{OC}{AC}\mathrm{d}[A,(SBC)]=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}[A,(SBC)]$.
Trong mặt phẳng $(ABCD)$, vẽ $AH\perp BC$ tại H.
Trong mặt phẳng (SAH) vẽ $AK\perp SH$ tại K.
Ta có $\begin{cases}BC\perp AH\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAH)$.
Ta có $\begin{cases}AK\perp SH\\AK\perp BC\end{cases}\Rightarrow AK\perp(SBC)$.
Suy ra $\mathrm{d}[A,(SBC)]=AK$.
$\triangle ABH$ vuông tại H có $AH=AB\sin 60^\circ=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
$\triangle SAH$ vuông tại A có $\dfrac{1}{AK^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AH^2}\Rightarrow AK=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.
Vậy $\mathrm{d}[O,(SBC)]=\dfrac{1}{2}AK=\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$.



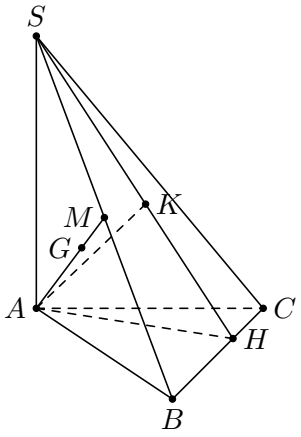
Chọn đáp án A □

Câu 299. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = 7$, $\widehat{ACB} = 30^\circ$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và đường thẳng SC tạo với mặt phẳng đáy một góc 60°. Khoảng cách từ trọng tâm của tam giác SAB đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{7\sqrt{13}}{13}$. **B.** $\dfrac{21\sqrt{13}}{13}$. **C.** $\dfrac{14\sqrt{13}}{13}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{13}}{26}$.

✍Lời giải.

Ta có AC là hình chiếu vuông góc của SC lên (ABC).
Do đó $\widehat{(SC,(ABC))} = \widehat{SCA} = 60^\circ$.
Gọi M là trung điểm của SB, G là trọng tâm $\triangle SAB$. Ta có
$\dfrac{GM}{AM} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}(G,(SBC))}{\mathrm{d}(A,(SBC))} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \mathrm{d}(G,(SBC)) = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}(A,(SBC))$.
Kẻ $AH \perp BC$ tại H, ta có
$\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH)$.
Kẻ $AK \perp SH$ tại K, ta có



$\begin{cases} AK \perp SH \\ AK \perp BC \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SBC) \Rightarrow \mathrm{d}(A,(SBC)) = AK$.

$\triangle ABC$ vuông tại $A \Rightarrow AC = AB \cdot \cot 30^\circ = 7\sqrt{3}$ và $AH = \dfrac{AB \cdot AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = \dfrac{7\sqrt{3}}{2}$.
$\triangle SAC$ vuông tại $A \Rightarrow SA = AC \cdot \tan 60^\circ = 3 \cdot 7 = 21$.
$\triangle SAH$ vuông tại $A \Rightarrow AK = \dfrac{SA \cdot AH}{\sqrt{SA^2 + AH^2}} = \dfrac{21\sqrt{13}}{13}$.
Vậy $\mathrm{d}(G,(SBC)) = \dfrac{7\sqrt{13}}{13}$.

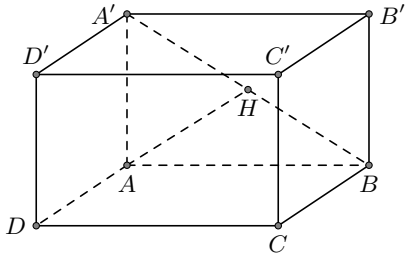
Chọn đáp án A □

Câu 300. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, tam giác $A'AC$ vuông cân, $A'C = 2$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD').

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

✍Lời giải.

Ta có $AC = AA' = \dfrac{A'C}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, suy ra $AB = 1$.
Kẻ $AH \perp A'B$, ta chứng minh được $AH \perp (A'BCD')$
Suy ra $d(A,(BCD')) = AH = \dfrac{AB \cdot AA'}{A'B} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.



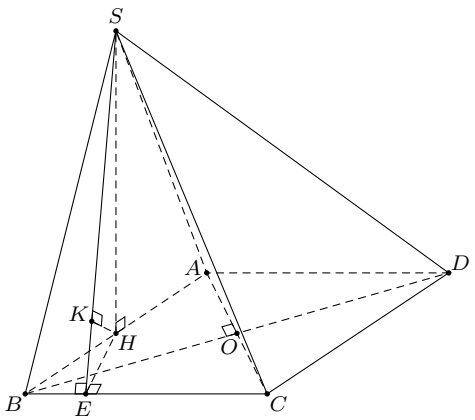
Chọn đáp án C □

Câu 301. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AC = 2a$, $BD = 4a$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC.

A. $\dfrac{2a^3\sqrt{15}}{3}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{4a\sqrt{1365}}{91}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD$, H là trung điểm của AB,
suy ra $SH \perp AB$.
Do $AB = (SAB) \cap (ABCD)$ và $(SAB) \perp (ABCD)$,
nên $SH \perp (ABCD)$.



+) Ta có $OA = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{2a}{2} = a$, $OB = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{4a}{2} = 2a$.
$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$.

+) $SH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.
$S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BD = \dfrac{1}{2}2a \cdot 4a = 4a^2$.

Vì $BC \parallel AD$ nên $AD \parallel (SBC)$
$\Rightarrow \mathrm{d}(AD, SC) = \mathrm{d}(AD, (SBC)) = \mathrm{d}(A, (SBC))$.
Do H là trung điểm của AB và $B = AH \cap (SBC)$, nên $\mathrm{d}(A, (SBC)) = 2\mathrm{d}(H, (SBC))$.
Kẻ $HE \perp BC$, $H \in BC$, do $SH \perp BC$, nên $BC \perp (SHE)$.
Kẻ $HK \perp SE$, $K \in SE$, ta có $BC \perp HK \Rightarrow HK \perp (SBC) \Rightarrow HK = \mathrm{d}(H, (SBC))$.
Ta có H là trung điểm AB nên
$\dfrac{\mathrm{d}(H; BC)}{\mathrm{d}(A, BC)} = \dfrac{HB}{HA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow HE = \dfrac{\mathrm{d}(A; BC)}{2} = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{2BC} = \dfrac{2a^2}{a\sqrt{5}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.
Xét tam giác SHE vuông tại H có HK là đường cao, ta có:
$\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HE^2} + \dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{5}{4a^2} + \dfrac{4}{15a^2} = \dfrac{91}{60a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{2a\sqrt{15}}{\sqrt{91}} = \dfrac{2a\sqrt{1365}}{91}$.
Vậy $\mathrm{d}(AD, SC) = 2HK = \dfrac{4a\sqrt{1365}}{91}$.

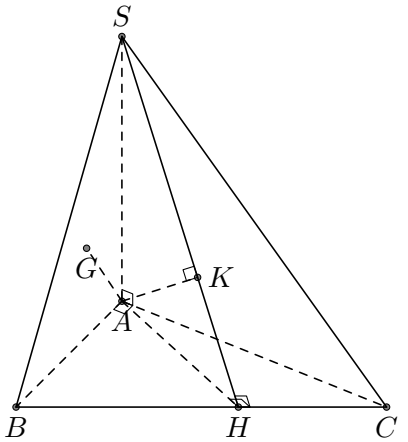
Chọn đáp án C □

Câu 302. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $\widehat{ACB} = 30^\circ$, SA vuông góc với đáy và góc giữa mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng đáy một góc 60°. Khoảng cách từ trọng tâm của tam giác (SAB) đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

✍Lời giải.

Kẻ $AH \perp BC$ (trong mặt phẳng (ABC)). Khi đó vì $AH \perp (ABC)$ nên $SH \perp BC$. Suy ra góc giữa mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng đáy là $\widehat{AHS} = 60^\circ$.
Trong (SAH), kẻ $AK \perp SH$ thì $AH \perp (SBC)$ (vì $BC \perp (SAH)$). Khi đó $\mathrm{d}[A, (SBC)] = AH$.



Xét tam giác vuông AHK có $\widehat{AHS} = 60^\circ$ và $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (vì tam giác AHB là nửa tam giác đều với cạnh huyền $AB = a$). Khi đó $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.
Vì trọng tâm G của tam giác SAB nên ta có $\dfrac{\mathrm{d}[G, (SBC)]}{\mathrm{d}[A, (SBC)]} = \dfrac{1}{3}$.
Vậy khoảng cách từ trọng tâm của tam giác (SAB) đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{12}$.

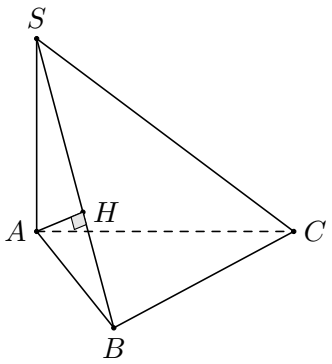
Chọn đáp án A □

Câu 303. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}a}{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{2}a}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}a}{5}$.

✍Lời giải.

Trong tam giác SAB dựng AH vuông góc SB thì $AH \perp (SBC)$.
Do đó khoảng cách cần tìm là AH.
Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{5}{4a^2}$ suy ra $AH = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

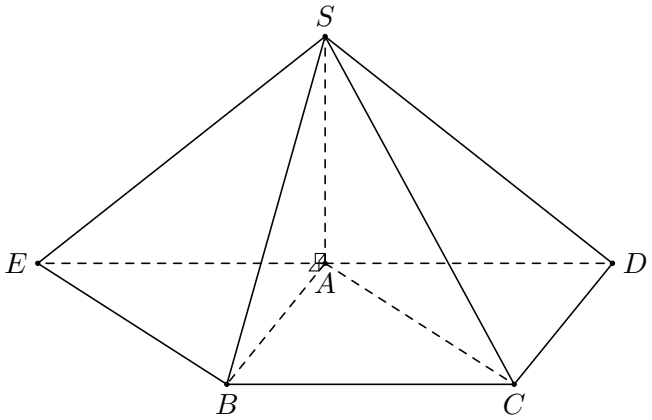


Chọn đáp án A □

Câu 304. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

A. $\dfrac{\sqrt{6}a}{2}$. **B.** $\dfrac{2a}{3}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.

✍Lời giải.



Dựng hình bình hành $ACBE$ ta có $AC \parallel (SBE)$ nên $\mathrm{d}(AC, SB) = \mathrm{d}(A, (SBE)) = h$.
Do AS, AB, AE đôi một vuông góc nhau nên $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AE^2} = \dfrac{9}{4a^2}$.
Như vậy $\mathrm{d}(A, (SBE)) = h = \dfrac{2a}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 305. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** a. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}a}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.

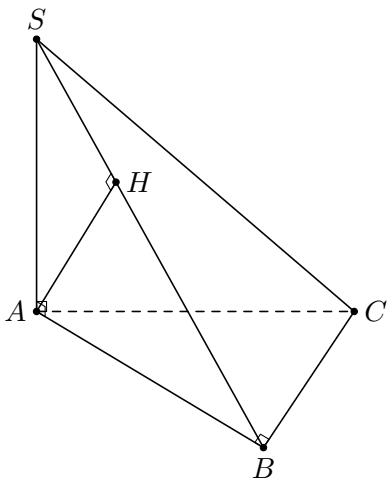
✍Lời giải.
Gọi H là hình chiếu của A lên SB.
Ta có

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$$

$$\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \text{ (vì } BC \perp (SAB), AH \subset (SAB)) \end{cases}$$

$\Rightarrow AH \perp (SBC)$ tại $H \Rightarrow \mathrm{d}(A, (SBC)) = AH$.
Tam giác SAB vuông tại A có AH là đường cao nên

$$AH = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a^2}{a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



Chọn đáp án D □

Câu 306. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $\sqrt{3}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{5}a}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}a}{6}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{3}$.

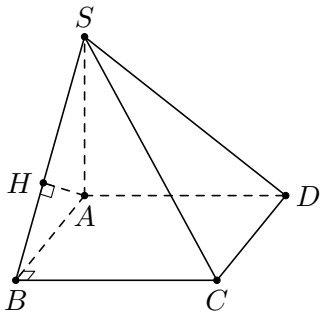
✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (SBC)$.

Trong mặt phẳng (SAB), kẻ $AH \perp SB$ tại $B \in SB$ thì $AH \perp (SBC)$. Suy ra $AH = \mathrm{d}(A;(SBC))$.

$\triangle SAB$ có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{4}{3a^2}$.

Vậy $\mathrm{d}(A,(SBC)) = AH = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 307. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, và $OA = OB = a$, $OC = 2a$. Gọi M là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AC bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}a}{3}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **D.** $\dfrac{2a}{3}$.

✍Lời giải.

Lấy điểm B' đối xứng với B qua O ta có ngay $OM \parallel AB'$.

Suy ra $OM \parallel (AB'C)$.

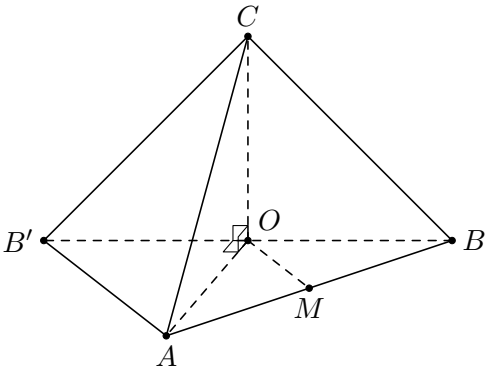
$\Rightarrow \mathrm{d}(OM,AC) = \mathrm{d}(OM,(AB'C)) = \mathrm{d}(O,(AB'C)) = h$.

Dễ thấy OA, OB', OC đôi một vuông góc với nhau do đó

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB'^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{9}{4a^2}.$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{4a^2}{9}.$$

Vậy $\mathrm{d}(OM,AC) = h = \dfrac{2a}{3}$.



Lưu ý:

Với tứ diện $O.ABC$ ban đầu có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, việc giải bài toán này bằng phương pháp toạ độ hoá cũng là một lựa chọn dễ dàng thực hiện được với học sinh.

Tóm tắt: gắn hệ toạ độ để $O(0;0;0), A(a;0;0), B(0;a;0), C(0;0;2a) \Rightarrow M\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};0\right)$.

Dùng công thức $\mathrm{d}(OM,AC) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{OA}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{AC}\right]\right|}$ sẽ được đáp số $\dfrac{2a}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 308. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C, $BC = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\sqrt{2}a$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

✍Lời giải.

Vì $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC)$.

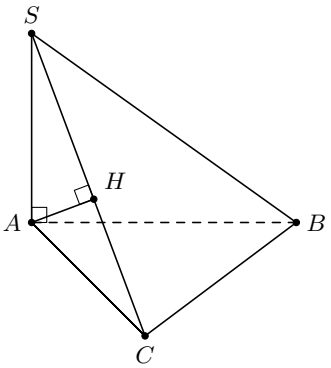
Khi đó $(SBC) \perp (SAC)$ theo giao tuyến là SC.

Trong (SAC), kẻ $AH \perp SC$ tại H suy ra $AB \perp (SBC)$ tại H.

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng AH.

Ta có $AC = BC = a$, $SA = a$ nên tam giác SAC vuông cân tại A.

Suy ra $AH = \dfrac{1}{2}SC = \dfrac{1}{2}a\sqrt{2}$.



Chọn đáp án B □

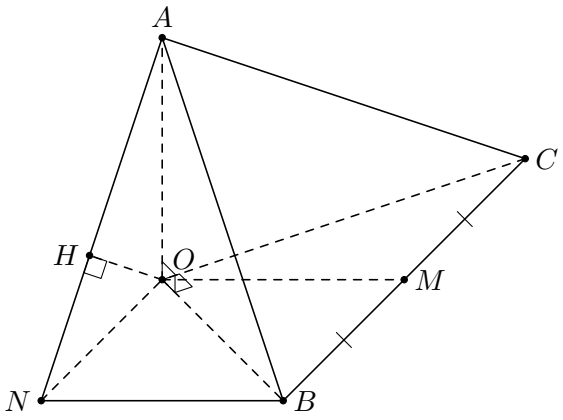
Câu 309. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = a$ và $OB = OC = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **B.** a. **C.** $\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}a}{3}$.

✍Lời giải.

Ta có $\triangle OBC$ vuông cân tại O, M là trung điểm $BC \Rightarrow OM \perp BC$.

Dựng hình chữ nhật $OMBN$, ta có $\begin{cases} OM \parallel BN \\ BC \subset (ABN) \end{cases} \Rightarrow OM \parallel (ABN)$.



Suy ra

$$\mathrm{d}(AB, OM) = \mathrm{d}(OM, (ABN)) = \mathrm{d}(O, (ABN)).$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên AN ta có

$$\begin{cases} BN \perp ON \\ BN \perp OA \end{cases} \Rightarrow BN \perp (OAN) \Rightarrow OH \perp BN$$

Mà $OH \perp AN \Rightarrow OH \perp (ABN) \Rightarrow \mathrm{d}(O, (ABN)) = OH$.

Tam giác OAN vuông tại O, đường cao OH

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{OH^2} &= \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{BM^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{4}{BC^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{4}{OB^2 + OC^2} \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{4}{4a^2 + 4a^2} = \frac{3}{2a^2} \\ \Rightarrow OH &= \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \mathrm{d}(AB, OM) = OH = \frac{a\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 310. Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC = 1$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng OA và BC là

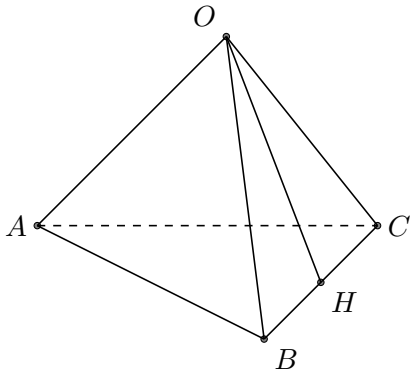
A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

✍Lời giải.

Trong mặt phẳng (OBC), gọi H là hình chiếu của O trên BC.

Do $\begin{cases} OH \perp OA \\ OH \perp BC \end{cases}$ nên $\mathrm{d}(OA, BC) = OH$.

Dễ có $OH = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

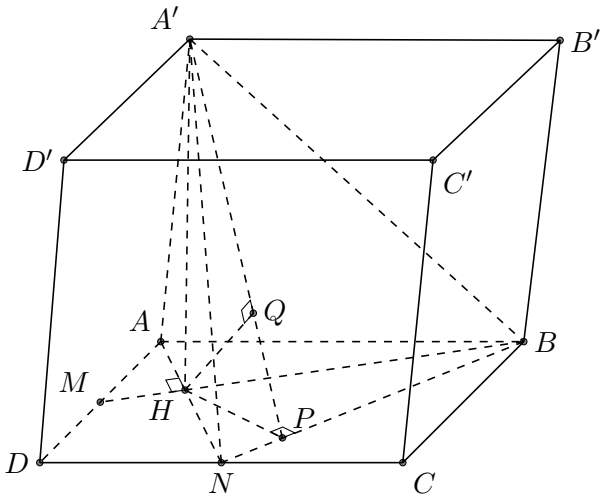


Chọn đáp án B □

Câu 311. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên $AA' = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và DC. Biết rằng hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm H của AN và BM. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(A'BN)$ bằng

A. $\dfrac{3a\sqrt{170}}{68}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{175}}{68}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{172}}{68}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{173}}{68}$.

✍Lời giải.



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi P là hình chiếu của H trên BN. Trong mặt phẳng $(A'HP)$, gọi Q là hình chiếu của H trên $A'P$. Tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên dễ có $AN \perp BM$.

Xét tam giác ABM vuông tại A có $AH = \dfrac{AB \cdot AM}{\sqrt{AB^2 + AM^2}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Ta suy ra, độ dài các cạnh

— $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{5}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

— $NH = AN - AH = \dfrac{3a\sqrt{5}}{10}$.

— $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{5}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

— $HP = \dfrac{HN \cdot HB}{\sqrt{HN^2 + HB^2}} = \dfrac{\dfrac{3a\sqrt{5}}{10} \cdot \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{\dfrac{9a^2}{20} + \dfrac{4a^2}{5}}} = \dfrac{\dfrac{3a^2}{5}}{\dfrac{\sqrt{5}a}{2}} = \dfrac{6a\sqrt{5}}{25}$.

— $HQ = \dfrac{HP \cdot A'H}{\sqrt{HP^2 + A'H^2}} = \dfrac{\dfrac{6a\sqrt{5}}{25} \cdot \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{\dfrac{36a^2}{125} + \dfrac{4a^2}{5}}} = \dfrac{3a\sqrt{170}}{85}$.

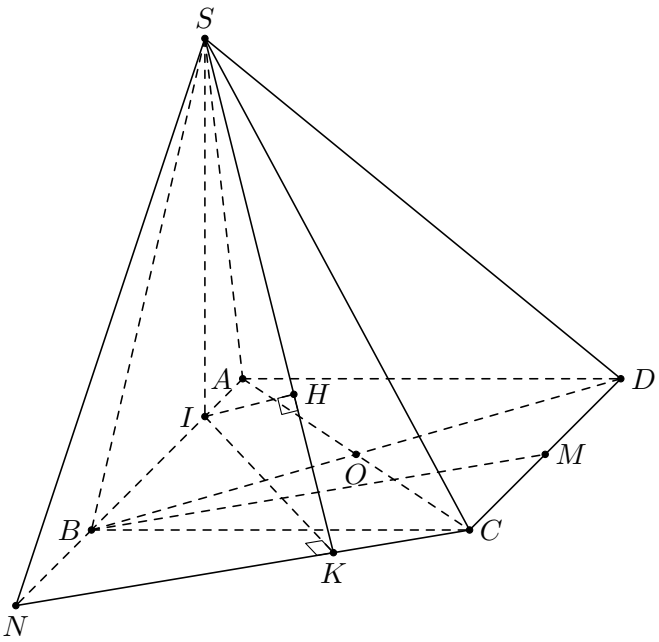
Ta có $\mathrm{d}(M, (A'BN)) = HQ \cdot \dfrac{BM}{BH} = \dfrac{3a\sqrt{170}}{85} \cdot \dfrac{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}}{\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}} = \dfrac{3a\sqrt{170}}{85} \cdot \dfrac{5}{4} = \dfrac{3a\sqrt{170}}{68}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 312. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng $2a$, $AC = 2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của các cạnh CD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BM bằng

A. $\dfrac{5a\sqrt{6}}{24}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{8}$. **C.** $\dfrac{5a\sqrt{6}}{32}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{16}$.

✍**Lời giải.**

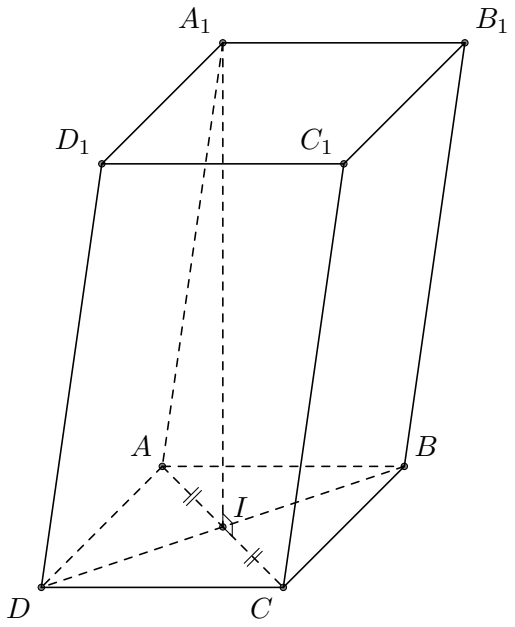


Kẻ đường cao SI của $\triangle SAB$. Vì $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SI \perp (ABCD)$.
Trên tia đối của tia BA lấy điểm N sao cho $BN = a$.
Ta có $BN \parallel CM$ và $BN = CM = a$ nên $BNCM$ là hình bình hành.
$\Rightarrow BM \parallel CN \Rightarrow BM \parallel (SCN)$.
Do đó $\mathrm{d}(SC, BM) = \mathrm{d}(BM, (SCN)) = \mathrm{d}(B, (SCN))$.
Kẻ $IK \perp NC\,(K \in NC), \quad IH \perp SK\,(H \in SK)$.
Ta có $\begin{cases} NC \perp IK \\ NC \perp SI \end{cases} \Rightarrow NC \perp (SIK) \Rightarrow NC \perp IH.$
Suy ra $\begin{cases} IH \perp SK \\ IH \perp NC \end{cases} \Rightarrow IH \perp (SNC) \Rightarrow \mathrm{d}(I, (SNC)) = IH.$
Xét $\triangle SAB$ có $SA^2 + SB^2 = AB^2$ nên $\triangle SAB$ vuông tại S.
$\Rightarrow SI = \dfrac{SA \cdot SB}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, \quad BI = \dfrac{SB^2}{AB} = \dfrac{3a}{2}.$
Xét $\triangle ABC$ có $AB = BC = CA = 2a \Rightarrow \triangle ABC$ đều $\Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ$.
$\Rightarrow NC = \sqrt{AN^2 + AC^2 - 2 \cdot AN \cdot AC \cdot \cos 60^\circ} = a\sqrt{7}.$
Ta có $\cos \widehat{ANC} = \dfrac{NC^2 + NA^2 - AC^2}{2 \cdot NA \cdot NC} = \dfrac{2\sqrt{7}}{7} \Rightarrow \sin \widehat{ANC} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$
Do đó $IK = NI \cdot \sin \widehat{ANC} = \dfrac{5a\sqrt{21}}{14}.$
$SK = \sqrt{SI^2 + IK^2} = \dfrac{2a\sqrt{42}}{7}.$
$IH = \dfrac{SI \cdot IK}{SK} = \dfrac{5a\sqrt{6}}{16} \Rightarrow \mathrm{d}(I, (SNC)) = \dfrac{5a\sqrt{6}}{16}.$
Ta có

$$\frac{\mathrm{d}(B, (SNC))}{\mathrm{d}(I, (SNC))} = \frac{BN}{IN} = \frac{a}{a + \dfrac{3a}{2}} = \frac{2}{5} \Rightarrow \mathrm{d}(B, (SNC)) = \frac{2}{5}\mathrm{d}(I, (SNC)) = \frac{a\sqrt{6}}{8}.$$

Vậy $\mathrm{d}(SC, BM) = \dfrac{a\sqrt{6}}{8}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 313. Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của A_1 lên $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (A_1BD).



A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B**. $2\sqrt{2}a$. **C**. $a\sqrt{2}$. **D**. $2a$.

✍Lời giải.

Có ngay $AI \perp BD$ và $AI \perp A_1I$ nên $AI \perp (A_1BD)$, do đó

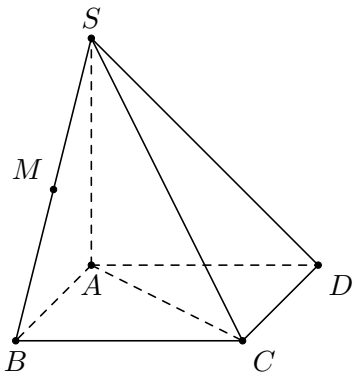
$$\mathrm{d}(A,(A_1BD)) = AI = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(2a)^2+(2a)^2} = a\sqrt{2}$$

Chọn đáp án C □

Câu 314.

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $60°$. Gọi M là trung điểm của cạnh SB (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ điểm M tới mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. $2a\sqrt{3}$. **B**. $\dfrac{a}{2}$. **C**. $\dfrac{3a}{2}$. **D**. $a\sqrt{3}$.



✍Lời giải.

Góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCA}$.
$SA = AC\cdot\tan\widehat{SCA} = \sqrt{AB^2+AD^2}\cdot\tan 60° = 3a$.
Vì M là trung điểm của SB nên $\mathrm{d}[M,(ABCD)] = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}[A,(ABCD)] = \dfrac{3a}{2}$.

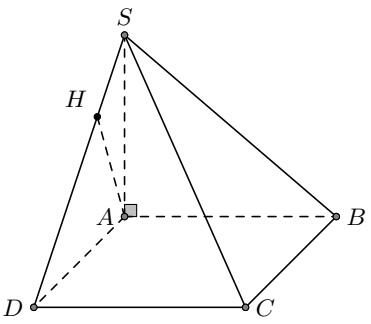
Chọn đáp án C □

Câu 315. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AC = 2AB = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SD = a\sqrt{5}$. Tính khoảng cách h từ điểm B đến (SCD).

A. $h = \dfrac{a\sqrt{30}}{6}$. **B**. $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C**. $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **D**. $h = \dfrac{a\sqrt{30}}{5}$.

✍Lời giải.

Vì $AB \parallel CD$ nên $\mathrm{d}[B;(SCD)] = \mathrm{d}[A;(SCD)]$.
$CD \perp AD$ và $CD \perp SA$ nên $CD \perp (SAD) \Rightarrow (ABCD) \perp (SAD)$.
Từ A kẻ AH vuông góc với giao tuyến SD của hai mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$ tại H.
Ta có $AD = BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.
$SA = \sqrt{SD^2 - AD^2} = \sqrt{5a^2 - 3a^2} = a\sqrt{2}$.
Vì $\triangle SAD$ vuông tại A nên $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AD^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{30}}{5}$.

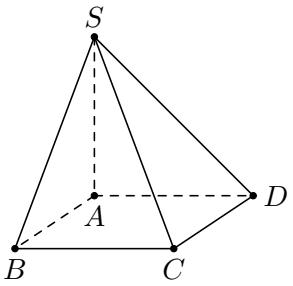


Chọn đáp án (D) □

Câu 316. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{3}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SB và CD.

A. $3a$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

✍Lời giải.
Ta có $BC \perp AB$ và $BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$. Do đó BC là đoạn vuông góc chung của SB và CD.
Hay $\mathrm{d}(SB, CD) = BC = a\sqrt{3}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 317. Hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BA = 3a$, $BC = 4a$, $(SBC) \perp (ABC)$. Biết $SB = 6a$, $\widehat{SBC} = 60^\circ$. Tính khoảng cách từ điểm B đến (SAC).

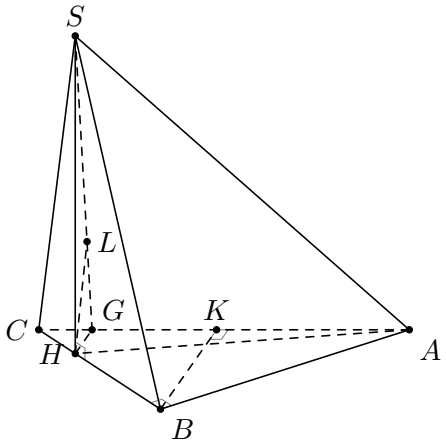
A. $\dfrac{6a\sqrt{57}}{19}$. **B.** $\dfrac{19a\sqrt{57}}{57}$. **C.** $\dfrac{17a\sqrt{57}}{57}$. **D.** $\dfrac{16a\sqrt{57}}{57}$.

✍Lời giải.
Gọi H là hình chiếu của S lên BC. Gọi K, G lần lượt là hình chiếu của B, H lên AC và L là hình chiếu của H lên SG. Khi đó $HL \perp (SAC)$ nên $\mathrm{d}(H,(SAC)) = HL$.
Trong tam giác vuông BCA, ta có

$$BK = \frac{BC \cdot BA}{\sqrt{BC^2 + BA^2}} = \frac{3a \cdot 4a}{\sqrt{9a^2 + 16a^2}} = \frac{12a}{5}.$$

Ta lại có $BH = SB \cdot \cos 60^\circ = 6a \cdot \cos 60^\circ = 3a \Rightarrow CH = a$
$SH = SB \cdot \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}a$ và

$$\frac{HG}{BK} = \frac{CH}{CB} \Rightarrow HG = \frac{12a}{5} \cdot \frac{a}{4a} = \frac{3a}{5}$$



Ta có $HL = \dfrac{SH \cdot HG}{SG} = \dfrac{SH \cdot HG}{\sqrt{SH^2 + HG^2}} = \dfrac{3\sqrt{3}a \cdot \dfrac{3a}{5}}{\sqrt{27a^2 + \dfrac{9a^2}{25}}} = \dfrac{3\sqrt{57}}{38}$.

Mặt khác $\dfrac{\mathrm{d}\,(B,(SAC))}{\mathrm{d}\,(H,(SAC))} = \dfrac{BC}{HC} \Rightarrow \mathrm{d}\,(B,(SAC)) = \dfrac{BC}{HC} \cdot HL = \dfrac{4a}{a} \cdot \dfrac{3\sqrt{57}}{38} = \dfrac{6\sqrt{57}a}{19}$.

Chọn đáp án (A) □

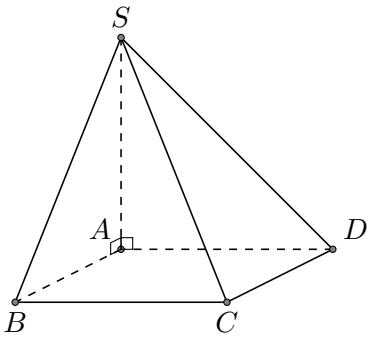
Câu 318. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AC = a\sqrt{5}$, và $BC = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa SD và BC.

A. $\dfrac{3a}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{2a}{3}$.

✍Lời giải.

Ta có $BC \parallel AD$ nên $BC \parallel (SDA)$. Do đó khoảng cách giữa SD và BC chính là khoảng cách giữa BC và (SDA).
Ta chứng minh $BA \perp (SAD)$. Thật vậy, do $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp AB$, mặt khác $AB \perp AD$. Từ đó suy ra $BA \perp (SDA)$, hay $\mathrm{d}_{(BC,(SDA))} = BA$. Ta có

$$BA^2 = AC^2 - BC^2 = 5a^2 - 2a^2 = 3a^2 \Rightarrow BA = a\sqrt{3}.$$



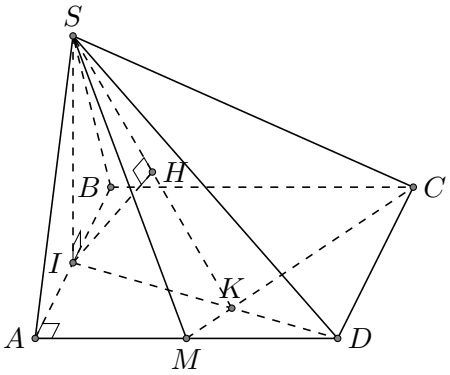
Vậy khoảng cách giữa SD và BC là $a\sqrt{3}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 319. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của AB và M là trung điểm của AD. Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SMC) bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{2}a}{8}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{30}a}{10}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{30}a}{8}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{7}a}{14}$.

✍Lời giải.

Gọi K là giao điểm của ID với MC, và H là hình chiếu của I lên SK.
Ta chứng minh $IK \perp MC$. Thật vậy, do hai tam giác ADI và DCM bằng nhau nên $\widehat{ADI} = \widehat{DCM}$. Do đó $\widehat{KMD} + \widehat{MDK} = \widehat{CMD} + \widehat{DCM} = 90^\circ$, suy ra $\widehat{MKD} = 90^\circ$ hay $IK \perp MC$.
Ta chứng minh $IH \perp (SMC)$.



Thật vậy, do tam giác SAB đều nên $SI \perp AB$, vì $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SI \perp (ABCD)$, nên $SI \perp MC$, kết hợp với $MC \perp IK$ suy ra $MC \perp IH$. Theo cách dựng ta có $IH \perp SK$, do đó $IH \perp (SMC)$.
Lúc này khoảng cách từ I đến (SMC) chính là độ dài đoạn IH.
Ta có $\dfrac{1}{DK^2} = \dfrac{1}{DC^2} + \dfrac{1}{DM^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{5}{a^2}$, suy ra $DK = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.
Lại có $ID^2 = a^2 + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{5a^2}{4}$, suy ra $DI = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
Từ đó suy ra $IK = DI - DK = \dfrac{3a\sqrt{5}}{10}$. Ta có $SI = \dfrac{a}{2} \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Do đó

$$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IK^2} + \frac{1}{SI^2} = \frac{20}{9a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{32}{9a^2} \Rightarrow IH = \frac{3a\sqrt{2}}{8}.$$

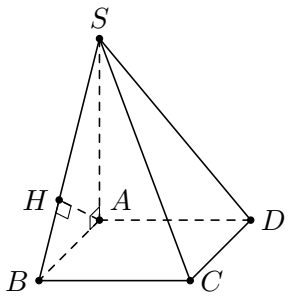
Vậy khoảng cách từ I đến (SMC) là $\dfrac{3a\sqrt{2}}{8}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 320. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Do $AD \parallel (SBC)$ nên $\mathrm{d}(D,(SBC)) = \mathrm{d}(A,(SBC))$.
Kẻ $AH \perp SB$ tại H, suy ra AH là khoảng cách từ A đến (SBC).
Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Vậy $\mathrm{d}(D,(SBC)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

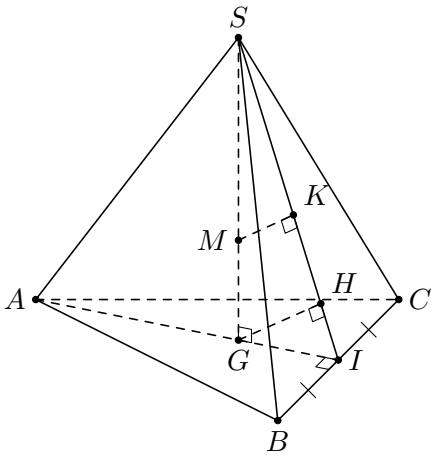


Chọn đáp án (D) □

Câu 321. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $SA = 2$ cm và cạnh đáy bằng 1 cm. Gọi M là một điểm thuộc miền trong của hình chóp này sao cho $\overrightarrow{SM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{SG}$, với G là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Gọi a, b, c lần lượt là khoảng cách từ điểm M đến các mặt phẳng (SAB), (SAC), $SBC)$. Tính giá trị biểu thức $P = a + b + c$.

A. $P = \dfrac{\sqrt{165}}{45}$. **B.** $P = \dfrac{7\sqrt{165}}{45}$. **C.** $P = \dfrac{2\sqrt{165}}{135}$. **D.** $P = \dfrac{2\sqrt{165}}{45}$.

✍Lời giải.
Do $S.ABC$ là chóp đều, có $AB = 1$, $SA = 2$. Gọi I là trung điểm BC suy ra $AG = \dfrac{2}{3}AI = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $GI = \dfrac{1}{3}AI = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.
Xét tam giác SAG có $SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{4 - \dfrac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{11}{3}}$.
Do $\overrightarrow{SM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{SG} \Rightarrow S, M, G$ thẳng hàng và $SM = \dfrac{2}{3}SG$
$\Rightarrow \mathrm{d}(M,(SBC)) = \dfrac{2}{3}\mathrm{d}(G,(SBC))$.
Kẻ $GH \perp SI$ tại H, suy ra $GH \perp (SBC)$. Vậy $\mathrm{d}(G,(SBC)) = GH$.



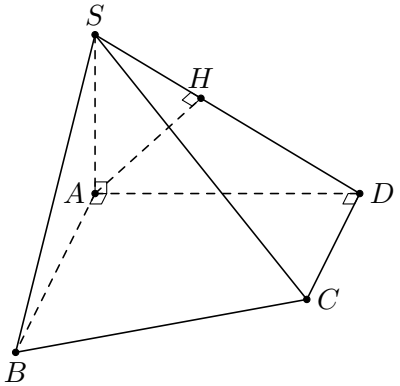
Xét tam giác SGI có $\dfrac{1}{GH^2} = \dfrac{1}{GS^2} + \dfrac{1}{GI^2} = \dfrac{3}{11} + \dfrac{36}{3} = \dfrac{135}{11} \Rightarrow GH = \dfrac{\sqrt{11}}{3\sqrt{15}}$.
Vậy $\mathrm{d}(M,(SBC)) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{11}}{3\sqrt{15}} = \dfrac{2\sqrt{11}}{9\sqrt{15}} \Rightarrow c = \dfrac{2\sqrt{11}}{9\sqrt{15}}$.
Do $S.ABC$ là chóp đều nên khoảng cách từ điểm M đến các mặt bên bằng nhau $\Rightarrow a = b = c \Rightarrow P = a + b + c = 3c = \dfrac{2\sqrt{11}}{3\sqrt{15}} = \dfrac{2\sqrt{165}}{45}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 322. Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông ở A và D, $AD = 2a$. Trên đường thẳng vuông góc tại A với $(ABCD)$ lấy điểm S với $SA = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và (SCD).

A. $\dfrac{2\sqrt{21}a}{3}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{21}a}{7}$. **C.** $\dfrac{14\sqrt{3}a}{7}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$.

✍Lời giải.
Từ giả thiết suy ra $AB \parallel (SCD)$.
Gọi H là hình chiếu của A lên SD.

$$\begin{aligned}\text{Ta có } \mathrm{d}(AB,(SCD)) &= \mathrm{d}(A,(SCD)) = AH = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} \\ &= \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{21}a}{7}.\end{aligned}$$



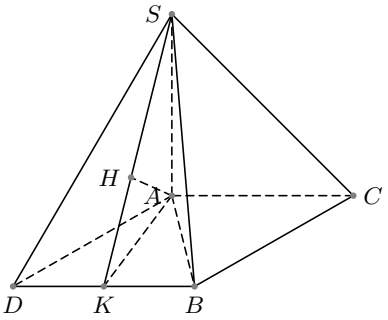
Chọn đáp án (B) □

Câu 323. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với đáy, góc giữa SC và mặt đáy bằng $60°$. Tính khoảng cách giữa AC và SB.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{15}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

✍**Lời giải.**

Dựng hình bình hành $ACBD$, khi đó $d(AC, SB) = d(S, (SBD))$.
Trong $(ACBD)$ hạ $AK \perp BD$, trong (SAK), hạ $AH \perp SK$. Ta có $d(A, (SBD)) = AH$.
$AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $SA = AC \tan 60° = a\sqrt{3}$.
$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AK^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

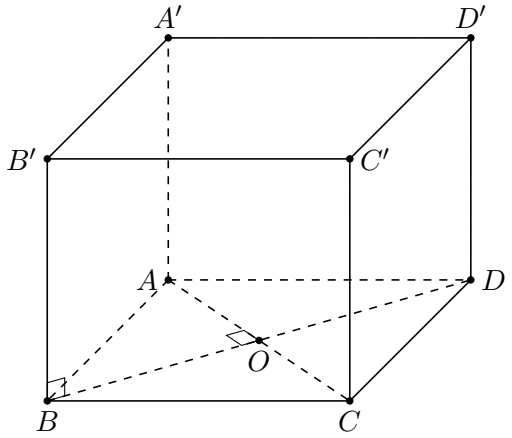


Chọn đáp án B □

Câu 324. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.

✍**Lời giải.**



Dễ thấy BO là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AC, BB', suy ra

$$\mathrm{d}(AC, BB') = BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

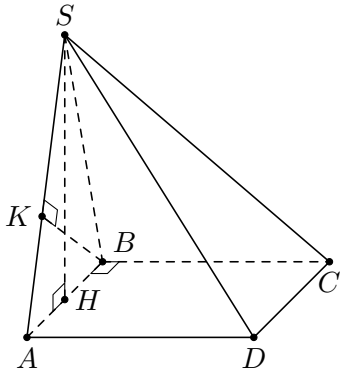
Chọn đáp án C □

Câu 325. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** a.

✍**Lời giải.**

Gọi H là trung điểm AB. Do $\triangle SAB$ đều nên $SH \perp AB$.
Vì $\triangle SAB$ nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên $SH \perp (ABCD)$.
Suy ra $SH \perp BC$.
Trong mặt phẳng (SAB), ta kẻ $BK \perp SA$.
Lại có $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp BK$.
Vậy BK là đường vuông góc chung của SA và BC.



Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng BK và là $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 326. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng $2a$, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 30°. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC).

A. $a\sqrt{2}$. **B.** a. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

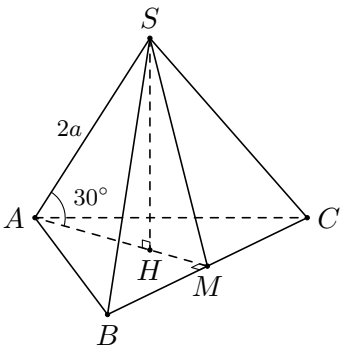
Lời giải.

Vì $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên gọi H là tâm của tam giác ABC thì $SH \perp (ABC)$.

Do đó khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) là SH.

Ta có góc giữa cạnh bên và mặt đáy là $\widehat{SAH} = 30^\circ$.

$$\Rightarrow SH = SA \cdot \sin 30^\circ = 2a \cdot \frac{1}{2} = a.$$



Chọn đáp án B □

Câu 327. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H trên cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

A. $\dfrac{a\sqrt{42}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{42}}{8}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{8}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{7}$.

Lời giải.

Do $SH \perp (ABC) \Rightarrow (SC,(ABC)) = (SC,HC) = \widehat{SCH} \Rightarrow \widehat{SCH} = 60^\circ$. Ta có

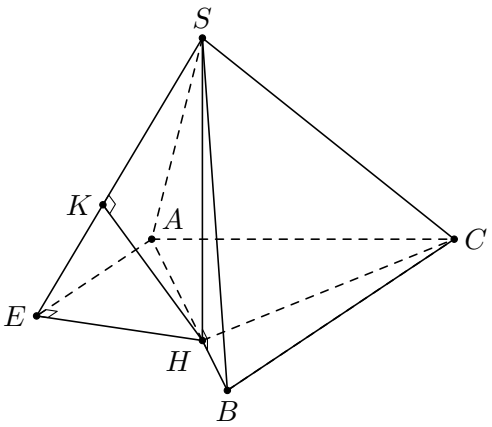
$$HC = \sqrt{HB^2 + BC^2 - 2HB \cdot BC \cdot \cos 60^\circ} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

và

$$SH = HC \cdot \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{21}}{3}a.$$

Dựng qua A đường thẳng d song song với BC; $HE \perp d, E \in d$, $HK \perp SE, K \in SE$.

$\Rightarrow \mathrm{d}(H,(SAE)) = HK$.



Do tam giác đều cạnh a nên $AH = \dfrac{2}{3}a$, $\widehat{HAE} = 60^\circ$. Khi đó:

$$HE = AH \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

và

$$HK = \sqrt{\frac{HE^2 \cdot HS^2}{HE^2 + HS^2}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{6}}a.$$

Do đó

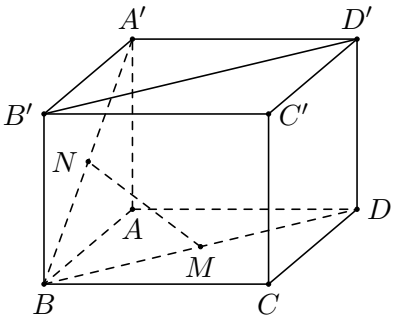
$$\frac{\mathrm{d}(B,(SAE))}{\mathrm{d}(H,(SAE))} = \frac{BA}{HA} = \frac{3}{2} \Rightarrow \mathrm{d}(B,(SAE)) = \frac{3}{2}\mathrm{d}(H,(SAE)) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{6}}a = \frac{\sqrt{42}}{8}a.$$

Mà $\mathrm{d}(BC,SA) = \mathrm{d}(B,(SAE))$. Vậy $\mathrm{d}(BC,SA) = \dfrac{\sqrt{42}}{8}a$.

Chọn đáp án B □

Câu 328.

Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, tam giác $A'AC$ vuông cân, $A'C = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BD, BA'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và $B'D'$ (tham khảo hình vẽ bên).



A. $\dfrac{a}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{10}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

✍Lời giải.

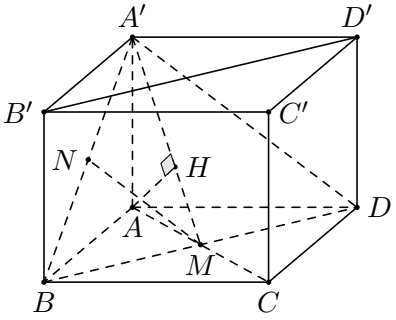
Tam giác $AA'C$ vuông cân tại A suy ra $AA' = AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên AM.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp AH$.

Ta lại có $AH \perp A'M$ nên $AH \perp (A'BD)$.

Vì $B'D' \parallel BD$ nên $B'D' \parallel (A'BD)$.



Mặt khác $MN \subset (A'BD)$ suy ra

$$\mathrm{d}(B'D', MN) = \mathrm{d}(B'D', (A'BD)) = \mathrm{d}(B', (A'BD)) = \mathrm{d}(A, (A'BD)) = AH.$$

Tam giác $AA'M$ vuông tại A nên

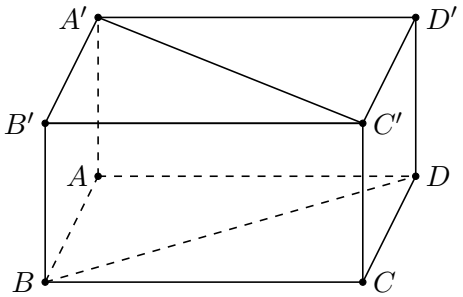
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{10}{a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{10}}{10}.$$

Vậy $\mathrm{d}(B'D', MN) = \dfrac{a\sqrt{10}}{10}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 329.

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên $AA' = a$ (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng



A. $a\sqrt{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** a. **D.** $2a$.

✍Lời giải.

Do $BD \subset (ABCD)$ và $A'C' \subset (A'B'C'D')$.

Mà $(ABCD) \parallel (A'B'C'D') \Rightarrow \mathrm{d}(BD, A'C') = \mathrm{d}((ABCD), (A'B'C'D')) = AA' = a$.

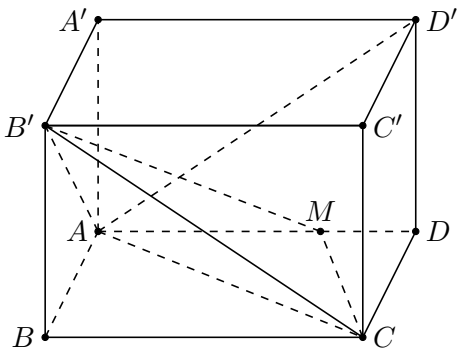
Chọn đáp án (C) □

Câu 330. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2a$, $AA' = a$. Lấy điểm M trên cạnh AD sao cho $AM = 3MD$. Đặt $x = d(AD', B'C)$ và $y = d(M; (AB'C))$. Tính $x \cdot y$.

A. $\dfrac{a^2}{2}$. **B.** $\dfrac{5a^5}{3\sqrt{6}}$. **C.** $\dfrac{3a^5}{2\sqrt{6}}$. **D.** $\dfrac{3a^2}{4}$.

✍Lời giải.

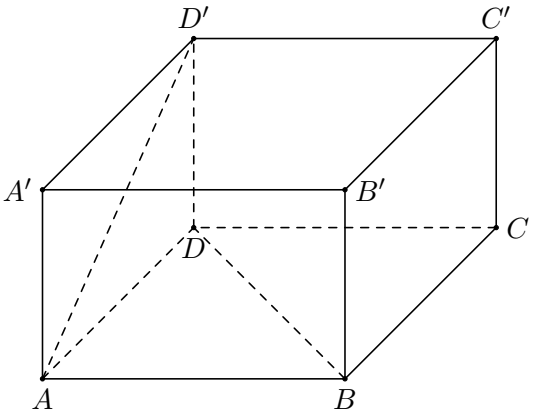
Ta có:
$x = dd\,(AD'; B'C) = \mathrm{d}((ADD'A'); (BCC'B')) = AB = a$.
Theo định lý Pitago ta có $AC = B'C = a\sqrt{5}$, $AM = \dfrac{3a}{2}$, $MC = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, $AB' = a\sqrt{2}$.
Theo công thức Hê-rông ta có $S_{\Delta AMC} = \dfrac{3a^2}{4}$ (đvdt), $S_{\Delta AB'C} = \dfrac{3a^2}{2}$ (đvdt).
Ta có $V_{M.AB'C} = V_{B'.AMC} = \dfrac{1}{3} \cdot B'A \cdot S_{\Delta AMC} = \dfrac{a^3}{4}$ (đvtt).
Vậy $y = d\,[M; (AB'C)] = \dfrac{3 \cdot V_{M.AB'C}}{S_{\Delta AB'C}} = \dfrac{a}{2}$.
Từ đó $x \cdot y = \dfrac{a^2}{2}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 331.
Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $AB = 2a$, $AD = AA' = a$ như hình vẽ. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và AD' bằng

A. a. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{2a}{3}$.



✍Lời giải.

— Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A(0;0;0)$, $B(2a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $A'(0;0;a)$. Ta có $D'(0;a;a)$.

— Khi đó $\overrightarrow{BD} = (-2a;a;0)$, $\overrightarrow{AD'} = (0;a;a)$, $\overrightarrow{AB} = (2a;0;0)$.

— Ta có $\overrightarrow{AD'} \wedge \overrightarrow{BD} = (-a^2;-2a^2;2a^2)$, $(\overrightarrow{AD'} \wedge \overrightarrow{BD})\overrightarrow{AB} = -2a^3$.

— $\mathrm{d}\,(AD', BD) = \dfrac{\left|(\overrightarrow{AD'} \wedge \overrightarrow{BD})\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{AD'} \wedge \overrightarrow{BD}\right|} = \dfrac{2a^3}{3a^2} = \dfrac{2a}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 332. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, O là giao điểm của AC và BD, $AB = SA = a$. Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAD).

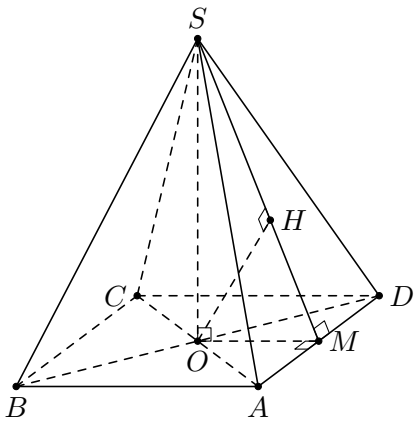
A. $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

✍Lời giải.

Gọi M là trung điểm AD, kẻ $OH \perp SM$ tại H.

— Ta có $\begin{cases} AD \perp OM \\ AD \perp SM \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SOM) \Rightarrow AD \perp OH$.

— Ta có $\begin{cases} OH \perp SM \\ OH \perp AD \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SAD)$
$\Rightarrow \mathrm{d}(O,(SAD)) = OH$.



Tính: $OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
$\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OM^2} = \dfrac{6}{a^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 333. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Tính khoảng cách giữa đường thẳng BD' và $B'C$.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

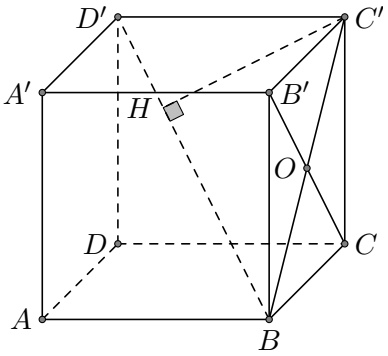
✍Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}(BD', B'C) = \mathrm{d}(O, BD') = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(C', B'D) = \dfrac{1}{2}C'H$.

Xét $\Delta BC'D'$ vuông tại C'.

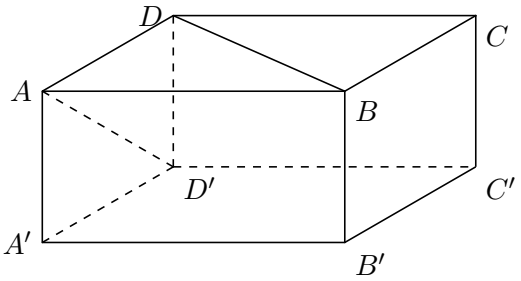
$\dfrac{1}{(C'H)^2} = \dfrac{1}{(BC')^2} + \dfrac{1}{(CD')^2} = \dfrac{1}{(a\sqrt{2})^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{3}{2a^2} \Rightarrow C'H = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $\mathrm{d}(BD', B'C) = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 334.
Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $AB = 2a$, $AD = AA' = a$. Tham khảo hình bên.
Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và AD' bằng



A. a. **B.** $\dfrac{2a}{3}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

✍Lời giải.

— Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A(0;0;0)$, $B(2a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $A'(0;0;a)$. Ta có $D'(0;a;a)$.

— Khi đó $\overrightarrow{BD} = (-2a;a;0)$, $\overrightarrow{AD'} = (0;a;a)$, $\overrightarrow{AB} = (2a;0;0)$.

— Ta có $\overrightarrow{AD'} \wedge \overrightarrow{BD} = (-a^2;-2a^2;2a^2)$, $(\overrightarrow{AD'} \wedge \overrightarrow{BD})\overrightarrow{AB} = -2a^3$.

— $\mathrm{d}(AD', BD) = \dfrac{\left|(\overrightarrow{AD'} \wedge \overrightarrow{BD})\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{AD'} \wedge \overrightarrow{BD}\right|} = \dfrac{2a^3}{3a^2} = \dfrac{2a}{3}$.

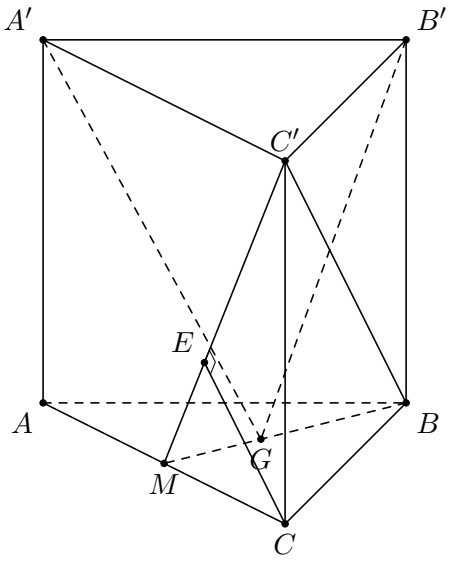
Chọn đáp án (B) □

Câu 335. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Cho khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (BGC') bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Cosin của góc giữa hai đường thẳng $B'G$ và BC bằng

A. $\dfrac{1}{\sqrt{39}}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{39}}$. **C.** $\dfrac{3}{\sqrt{39}}$. **D.** $\dfrac{5}{\sqrt{39}}$.

✍Lời giải.

Ta có $B'C' \parallel BC \Rightarrow \widehat{(BC, B'G)} = \widehat{(B'C', B'G)}$.
Gọi M là trung điểm của AC, ta có
$\begin{cases} BM \perp AC \\ BM \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BM \perp (ACC'A')$.
Vẽ $CE \perp CM$ tại E, ta có
$\begin{cases} CE \perp CM \\ CE \perp BM \text{ (do } BM \perp (ACC'A')) \end{cases}$
$\Rightarrow CE \perp (BGC') \Rightarrow CE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
$\triangle MCC'$ vuông tại C có $CE \perp C'M$
$\Rightarrow \dfrac{1}{CM^2} + \dfrac{1}{CC'^2} = \dfrac{1}{CE^2} \Rightarrow CC' = a\sqrt{3}$.



Lại có $BM = a\sqrt{3}$ nên $BG = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$
$\triangle BB'G$ vuông tại $B \Rightarrow B'G = \sqrt{BG^2 + BB'^2} = \dfrac{a\sqrt{39}}{3}$.
$\triangle CC'G$ vuông tại $C \Rightarrow C'G = \sqrt{CG^2 + CC'^2} = \dfrac{a\sqrt{39}}{3}$.
Vậy $\cos \widehat{C'B'G} = \dfrac{C'B'^2 + GB'^2 - GC'^2}{2C'B' \cdot GB'} = \dfrac{3}{\sqrt{39}} = \cos \widehat{(BC, B'G)}$.

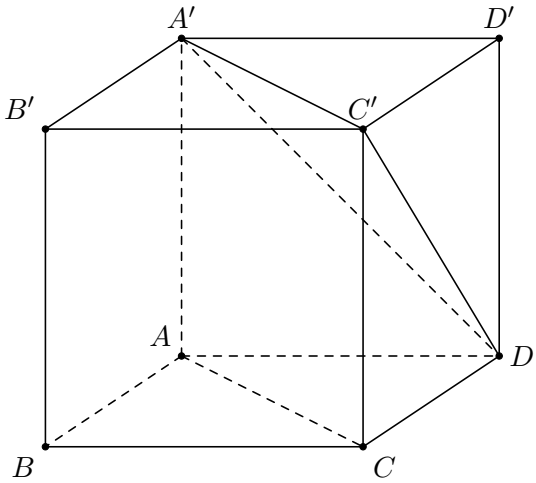
Chọn đáp án (C) □

Câu 336. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AC, DC' theo a.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{3}$. **D.** a.

✍Lời giải.

Vì $AC \parallel A'C'$ nên $AC \parallel (DA'C')$.
$\Rightarrow \mathrm{d}(AC, DC') = \mathrm{d}(A, (DA'C')) = \mathrm{d}(D', (DA'C'))$.
Tứ diện $D'.A'DC'$ là tứ diện vuông tại D' nên
$\dfrac{1}{(\mathrm{d}(D', (DA'C')))^2} = \dfrac{1}{D'A'^2} + \dfrac{1}{D'D^2} + \dfrac{1}{D'C'^2}$
$\Rightarrow \dfrac{1}{(\mathrm{d}(D', (DA'C')))^2} = \dfrac{3}{a^2}$
$\Rightarrow \mathrm{d}(D', (DA'C')) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \mathrm{d}(AC, DC')$.

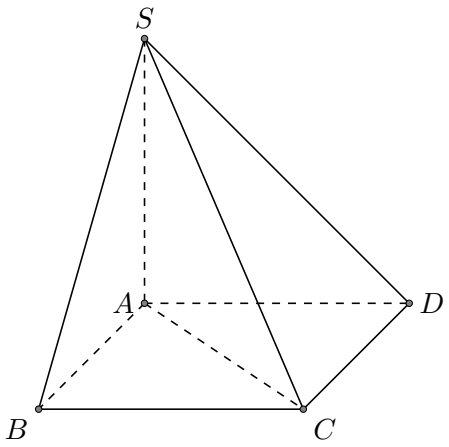


Chọn đáp án (A) □

Câu 337.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ (tham khảo hình bên). Khi đó khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) bằng

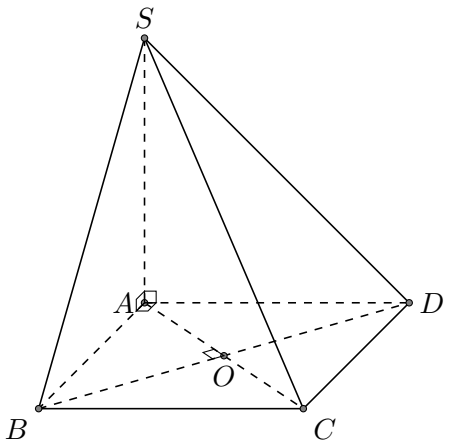
A. $a\sqrt{2}$. **B**. a. **C**. $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. **D**. $2a$.



✍Lời giải.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, ta có $\begin{cases} BO \perp AC \\ BO \perp SA \end{cases} \Rightarrow BO \perp (SAC)$.

Suy ra $\mathrm{d}\,(B,(SAC)) = BO = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

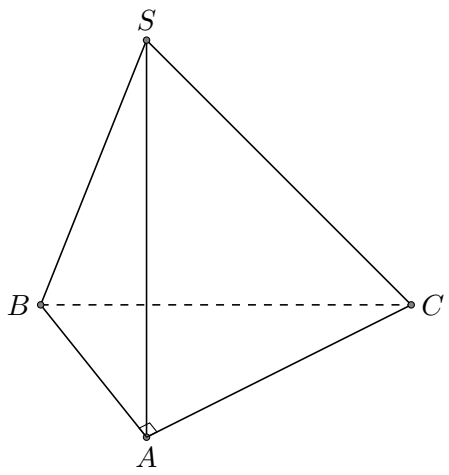


Chọn đáp án C □

Câu 338.

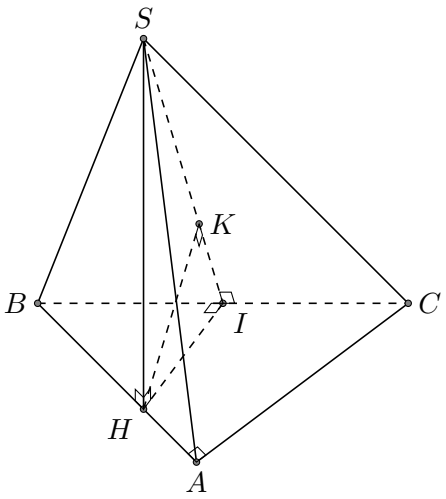
Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A góc $\widehat{ABC} = 30^\circ$; tam giác SBC là tam giác đều cạnh a và măt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (ABC) (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B**. $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. **C**. $\dfrac{a\sqrt{6}}{5}$. **D**. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.



✍Lời giải.

Ta có $(SAB) \perp (ABC)$ theo giao tuyến AB.
Trong mặt phẳng (SAB), kẻ $SH \perp AB$ tại H, ta có $SH \perp (ABC)$.
Gọi I là trung điểm của BC, ta có $\begin{cases} BC \perp SI \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHI) \Rightarrow$ $(SBC) \perp (SHI)$ theo giao tuyến SI.
Trong mặt phẳng (SHI), kẻ $HK \perp SI$ tại K, ta có $HK \perp (SBC) \Rightarrow HK = d(H, (SBC))$.
Tam giác BHI vuông tại I có $\widehat{IBH} = 30^\circ$ nên $IH = BI \cdot \tan 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$; $BH = \dfrac{IB}{\cos 30^\circ} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.



Tam giác SHI vuông tại H nên $SH^2 = SI^2 - HI^2 = \dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{3a^2}{36} = \dfrac{6a^2}{9} \Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Tam giác SHI vuông tại H có HK là đường cao nên $HK = \dfrac{SH \cdot HI}{SI} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{6}}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{9}$.

Tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = 30^\circ$ nên $AB = BC \cdot \cos 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

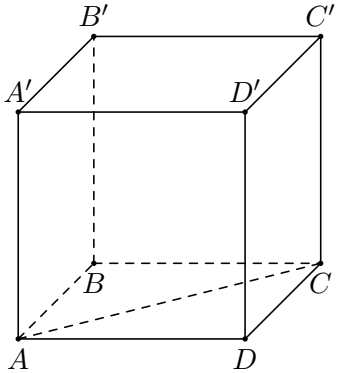
Ta có $AH \cap (SBC) = B$ nên $\dfrac{d(A, (SBC))}{d(H, (SBC))} = \dfrac{AB}{HB} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{3}{2}$.

$\Rightarrow d(A, (SBC)) = \dfrac{3}{2} d(H, (SBC)) = \dfrac{3}{2} HK = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{9} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

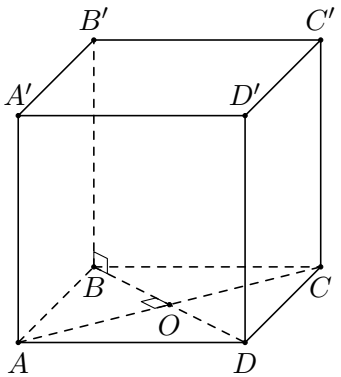
Chọn đáp án B □

Câu 339.
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách giữa BB' và AC bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.



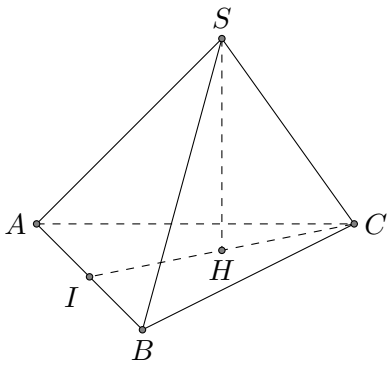
✍Lời giải.
Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, khi đó $BO \perp AC$ và $BO \perp BB'$ nên BO là khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC. Như vậy $\mathrm{d}(BB', AC) = BO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án B □

Câu 340.

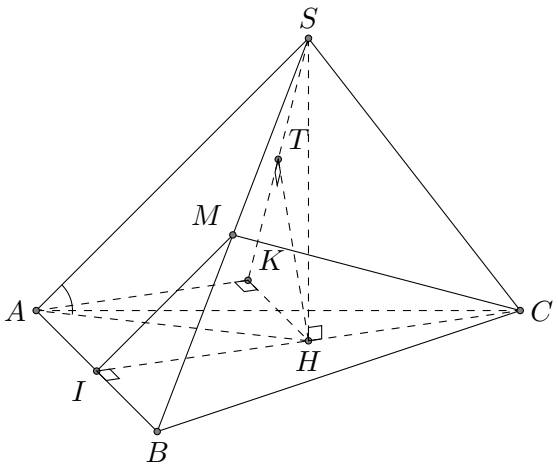
Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a; gọi I là trung điểm của AB, hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của CI, góc giữa SA và mặt đáy bằng 45° (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CI bằng



A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{77}}{22}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{8}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

✍Lời giải.

Vì AH là hình chiếu của SA lên mặt đáy nên góc giữa SA và mặt đáy bằng góc $\widehat{SAH}$, suy ra $\widehat{SAH} = 60^\circ$.
Gọi M là trung điểm SB, K là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật $HIAK$. Khi đó $(SAK) \parallel (MIC)$. Suy ra khoảng cách giữa SA và CI bằng khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SAK).
Ta có $AK \perp (SKH)$, do đó nếu trong $\triangle SHK$ ta kẻ $HT \perp SK$ thì $HT \perp (SAK)$. Từ đó, khoảng cách từ H đến (SAK) bằng HT.



Ta có $HK = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$, $AK = HI = \dfrac{1}{2}CI = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Suy ra $HS = AH \cdot \tan 45^\circ = AH = \sqrt{AK^2 + HK^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{3a^2}{16}} = \dfrac{a\sqrt{7}}{4}$,

$HT = \dfrac{HK \cdot HS}{\sqrt{HK^2 + HS^2}} = \dfrac{\dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{7}}{4}}{\sqrt{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{7a^2}{16}}} = \dfrac{a\sqrt{77}}{22}$. Vậy khoảng cách giữa SA và CI bằng $\dfrac{a\sqrt{7}}{5}$.

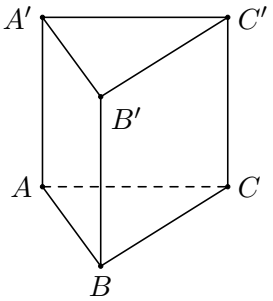
Chọn đáp án (B) □

Câu 341. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a, AA' = 3a$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$.

A. $2a$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $3a$. **D.** a.

✍Lời giải.

Ta có $(ABC) \parallel (A'B'C')$ và $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều nên $\mathrm{d}\left((ABC), (A'B'C')\right) = AA' = 3a$.



Chọn đáp án (C) □

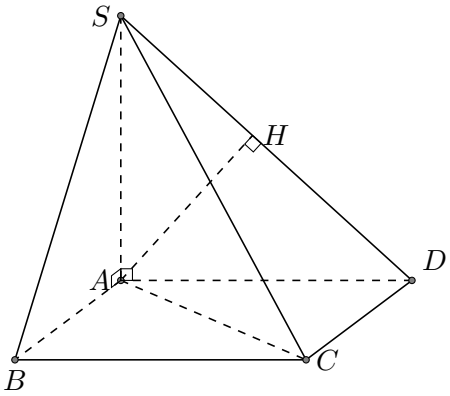
Câu 342. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD.

A. $2a$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** a. **D.** $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

✍Lời giải.

Trong mặt phẳng (SAD) hạ $AH \perp SD$. Do $SA \perp (ABCD)$ suy ra $SA \perp AB$ (1).
Theo giả thiết $AB \perp AD$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $AB \perp (SAD)$ nên $AB \perp AH$. Vậy $\mathrm{d}(AB, SD) = AH$.

Xét tam giác vuông SAC, do $SA = AD = 2a$ nên $AH = \dfrac{SD}{2}$.
Mà $SD = SA\sqrt{2} \Leftrightarrow SD = 2\sqrt{2}a$ suy ra $SD = a\sqrt{2}$.



Chọn đáp án B □

Câu 343. Nếu $z = i$ là nghiệm phức của phương trình $z^2 + az + b = 0$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thì $a + b$ bằng
A. -1. **B.** -2. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Do giả thiết ta có $i^2 + ai + b = 0 \Leftrightarrow b - 1 + ai = 0$ suy ra $\begin{cases} b - 1 = 0 \\ a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$.

Do đó $a + b = 1$.
Chọn đáp án C □

Câu 344. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 16$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu đó.
A. $I(-1;3;0)$; $R = 16$. **B.** $I(-1;3;0)$; $R = 4$. **C.** $I(1;-3;0)$; $R = 16$. **D.** $I(1;-3;0)$; $R = 4$.

Lời giải.

Từ phương trình mặt cầu ta suy ra $I(-1;3;0)$ và $R = 4$.

Chọn đáp án B □

Câu 345. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tâm O và $SO = a$. Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SCD).
A. $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}a}{3}$. **C.** $\sqrt{3}a$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}a}{5}$.

Lời giải.

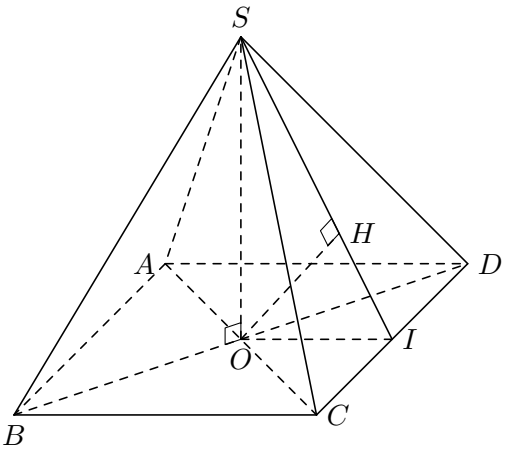
Gọi I là trung điểm CD. Trong mặt phẳng (SOI), dựng $OH \perp SI$ tại H.
Ta có

$$\begin{cases} CD \perp OI & (\Delta OCD \text{ cân tại } O) \\ CD \perp SO & (SO \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOI).$$

Vì $OH \subset (SOI)$ nên suy ra $OH \perp CD$.

$$\begin{cases} OH \perp SI \\ OH \perp CD \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SCD) \text{ tại } H.$$

$\Rightarrow \mathrm{d}(O, (SCD)) = OH$.



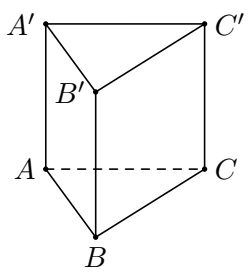
Vì OI là đường trung bình của tam giác BCD nên $OI = \dfrac{BC}{2} = a$.
Xét tam giác SOI vuông tại O

$$\begin{aligned} \frac{1}{OH^2} &= \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{OS^2} \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{2}{a^2} \\ \Rightarrow OH &= \frac{\sqrt{2}a}{2}. \end{aligned}$$

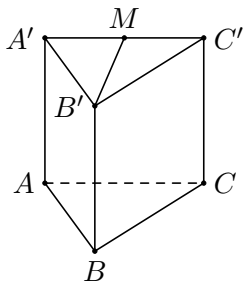
Chọn đáp án A ☐

Câu 346.
Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng $2a$. Gọi M là trung điểm của $A'C'$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và $B'M$ theo a.

A. $2a$. **B**. a. **C**. $a\sqrt{2}$. **D**. $2a\sqrt{2}$.



✍Lời giải.
Ta có $\mathrm{d}(AC, B'M) = \mathrm{d}(AC, (A'B'C')) = \mathrm{d}(A, (A'B'C')) = 2a$.



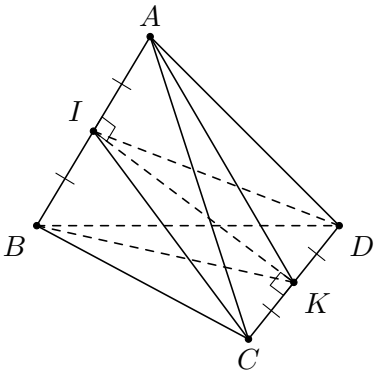
Chọn đáp án A ☐

Câu 347. Khoảng cách giữa hai cạnh đối trong một tứ diện đều cạnh a bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B**. $\dfrac{2a}{3}$. **C**. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D**. $2a$.

✍Lời giải.
Xét tứ diện đều $ABCD$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD. Do tứ diện $ABCD$ đều nên tam giác ABK cân tại K và tam giác CDI cân tại I, dẫn tới $IK \perp AB$ và $IK \perp CD$ nên IK là đoạn vuông góc chung của AB và CD. Suy ra

$$\mathrm{d}(AB, CD) = IK = \sqrt{AK^2 - AI^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



Chọn đáp án A ☐

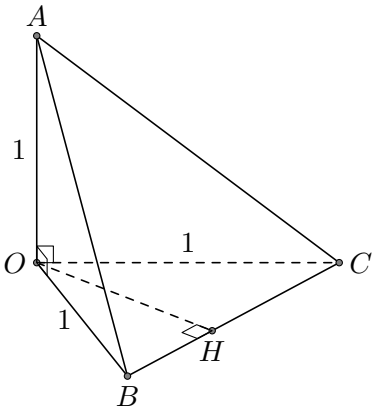
Câu 348. Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = 1$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng OA và BC bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C**. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **D**. $\dfrac{1}{2}$.

✍Lời giải.
Trong (OBC), vẽ $OH \perp BC$.
Dễ thấy $OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp OH$.
Vậy $\mathrm{d}(OA; BC) = OH$ (1)

Vì $\triangle OBC$ là tam giác vuông cân tại O nên $OH = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $d(OA; BC) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án B ☐

Câu 349. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ACBD$ có tất cả các cạnh bằng 1. Gọi O là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

✍Lời giải.

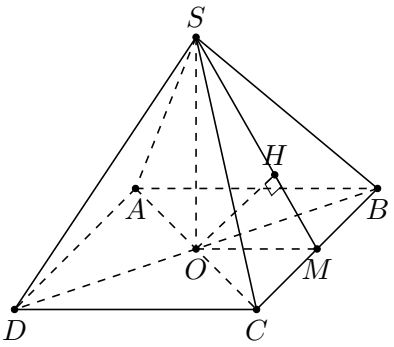
Gọi M là trung điểm của BC, hạ $OH \perp SM$.

Dễ chứng minh $\mathrm{d}(O,(SBC)) = OH$.

$OB = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $SO^2 = SB^2 - OB^2 = \dfrac{1}{2}$.

Trong tam giác SOM vuông tại O ta có

$\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OM^2} = 5 \Rightarrow OH = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

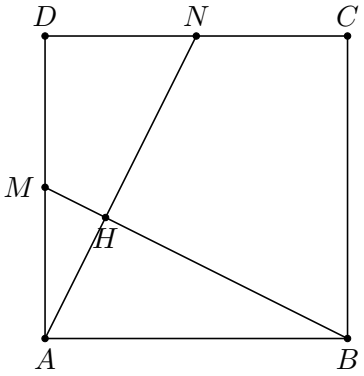


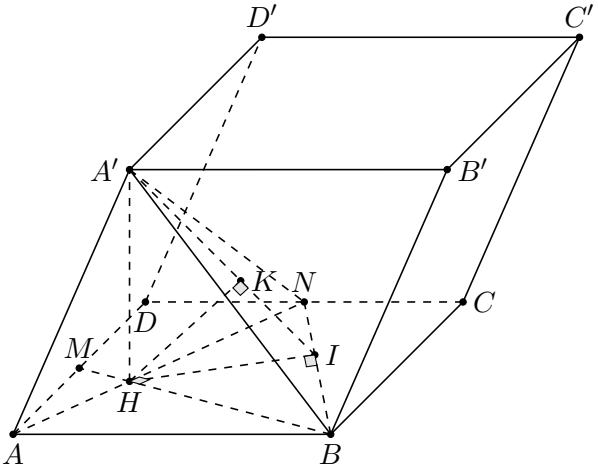
Chọn đáp án D □

Câu 350. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên $A'A = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD, DC. Biết rằng hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm H của AN và BM. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(A'BN)$ bằng

A. $\dfrac{3a\sqrt{170}}{68}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{175}}{68}$. **C.** $\dfrac{3q\sqrt{172}}{68}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{173}}{68}$.

✍Lời giải.





Xét hình vuông $ABCD$ có $\triangle ABM = \triangle DAN$ suy ra $\widehat{AMB} = \widehat{DNA}$.

Do đó: $\widehat{MAH} + \widehat{AMB} = \widehat{MAH} + \widehat{DNA} = 90^\circ$ suy ra $AN \perp BM$.

Do $\triangle ABH \backsim \triangle MBA$ nên: $BH = \dfrac{AB^2}{BM} = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Xét tam giác vuông MAB có: $AH = \dfrac{AM \cdot AB}{\sqrt{AM^2 + AB^2}} = \dfrac{a^2}{2\sqrt{\dfrac{a^2}{4} + a^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$.

Xét tam giác vuông $A'HA$ có: $A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{5}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Xét tam giác vuông BNH có: $HN = \sqrt{BN^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4} - \dfrac{4a^2}{5}} = \dfrac{3a}{2\sqrt{5}}$.

Kẻ $HI \perp BN, HK \perp A'I$. Khi đó: $\mathrm{d}(H,(A'BN)) = HK$.

$\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HA'^2} + \dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{1}{HA'^2} + \dfrac{1}{HB^2} + \dfrac{1}{HN^2} = \dfrac{5}{4a^2} + \dfrac{5}{4a^2} + \dfrac{20}{9a^2} = \dfrac{85}{18a^2}$.

$\mathrm{d}(H,(A'BN)) = \dfrac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{85}}$.

$$\mathrm{d}(M,(A'BN)) = \frac{MB}{HB}\cdot \mathrm{d}(H,(A'BN)) = \frac{a\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{4a}\cdot\frac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{85}} = \frac{3a\sqrt{170}}{68}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 351. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** a. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

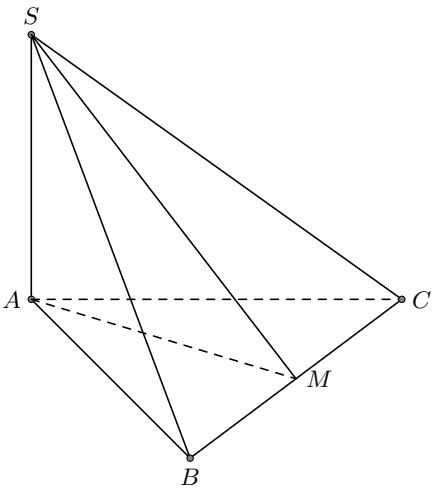
✍Lời giải.

Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Có $SA \perp (ABC)$ và $AM \subset (ABC)$ nên suy ra $SA \perp AM$. (1)

Mà $BC \perp AM$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $d(SA, BC) = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án D □

Câu 352. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân đỉnh C, $AB = AA' = a$ và $AC = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Gọi M là trung điểm của BB'. Tính khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng (MAC).

A. $\frac{a\sqrt{35}}{7}$. **B.** $\frac{a\sqrt{35}}{14}$. **C.** $\frac{a\sqrt{37}}{7}$. **D.** $\frac{a\sqrt{37}}{14}$.

✍Lời giải.

Gọi $Q = MC \cap BC'$.

Gọi P và N lần lượt là hình chiếu của B và C' lên mặt phẳng (MAC)

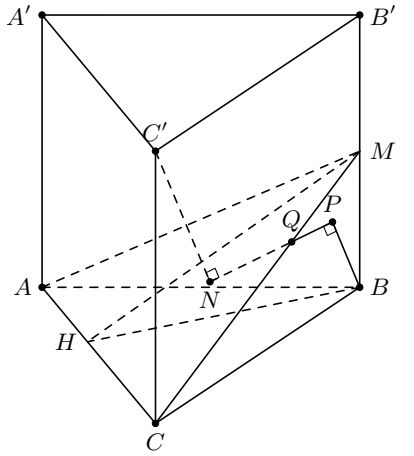
Ta có

$\frac{BP}{C'N} = \frac{BQ}{QC'} = \frac{BM}{CC'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{d}(C',(MAC)) = 2\mathrm{d}(B,(MAC))$.

Kẻ $BH \perp AC$. Có $(MAC) \perp (BHM) = HM$.

Từ B, kẻ $BK \perp HM \Rightarrow \mathrm{d}(B,(MAC)) = BK = \frac{a\sqrt{35}}{14}$.

$\Rightarrow \mathrm{d}(C',(MAC)) = \frac{a\sqrt{35}}{7}$.

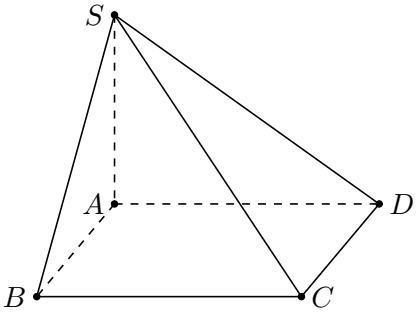


Chọn đáp án A □

Câu 353.

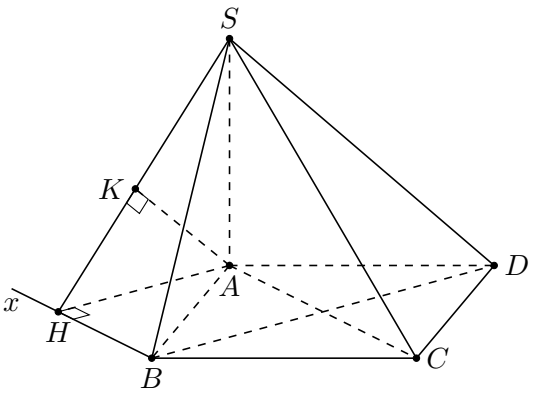
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, đường thẳng SC tạo với mặt đáy $ABCD$ một góc $45°$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC là

A. $\frac{a\sqrt{10}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\frac{a\sqrt{10}}{10}$. **D.** $\frac{a\sqrt{10}}{15}$.



✍Lời giải.

Góc giữa đường thẳng SC và $(ABCD)$ bằng góc giữa SC và AC, suy ra $\widehat{SCA} = 45^\circ$.
Ta có $SA = AC \cdot \tan 45^\circ = a\sqrt{2}$.
Kẻ tia $Bx \parallel AC$, kẻ $AH \perp Bx$ tại H.
Khi đó, $AC \parallel (SBH)$
$\Rightarrow \mathrm{d}(AC, SB) = \mathrm{d}(AC, (SBH)) = \mathrm{d}(A, (SBH))$.
Kẻ $AK \perp SH$ tại K, suy ra $AK \perp (SBH)$.
Do đó, $\mathrm{d}(A, (SBH)) = AK$.

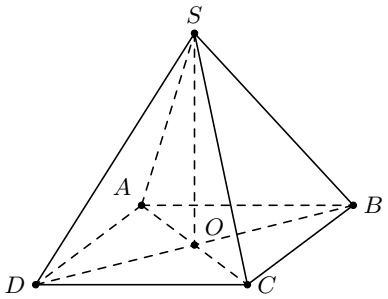


Ta có $AK = \dfrac{AH \cdot AS}{\sqrt{AH^2 + AS^2}} = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$. Vậy $\mathrm{d}(AC, SB) = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

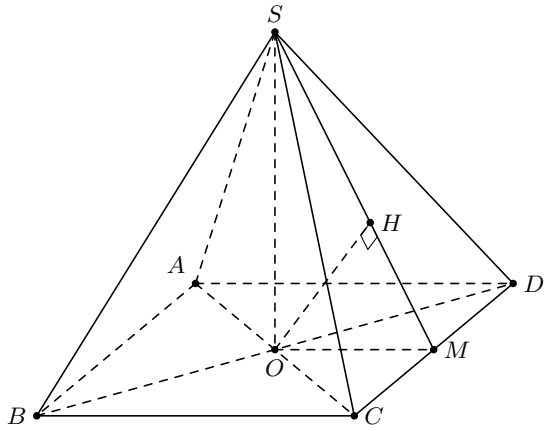
Chọn đáp án (B) □

Câu 354.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O có cạnh $AB = a$, đường cao SO vuông góc với đáy và $SO = a$. Khoảng cách giữa SC và AB là

A. $\dfrac{2a\sqrt{5}}{7}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{7}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.



✍Lời giải.
Do $AB \parallel CD$ nên $\mathrm{d}(AB, SC) = \mathrm{d}(AB, (SCD)) = \mathrm{d}(A, (SCD)) = 2\mathrm{d}(O, (SCD))$.
Gọi M là trung điểm của DC và H là hình chiếu vuông góc của O lên SM. Khi đó
$\begin{cases} DC \perp SO \\ DC \perp OM \end{cases} \Rightarrow DC \perp SM \Rightarrow DC \perp OH$
mà $OH \perp SM$ nên $OH \perp (SDC)$.
$\Rightarrow \mathrm{d}(O, (SCD)) = OH$.
$OM = \dfrac{a}{2}$.
$SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
$OH = \dfrac{SO.OM}{SM} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.
$\Rightarrow \mathrm{d}(A, (SCD)) = 2\mathrm{d}(O, (SCD)) = 2OH = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

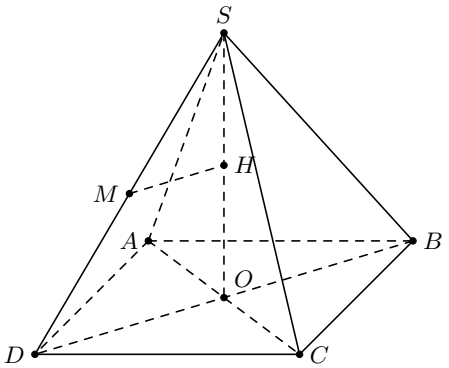


Chọn đáp án (D) □

Câu 355. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi M là trung điểm SD. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAC).

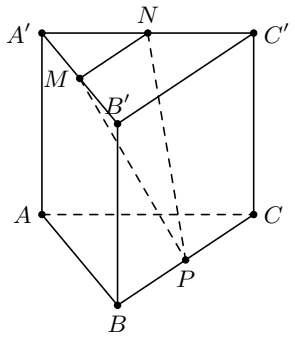
A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{4}$.

✍Lời giải.
Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, H là trung điểm của SO.
Vì $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $DO \perp (SAC)$ hay $\mathrm{d}(A, (SAC)) = DO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Từ giả thiết ta suy ra MH là đường trung bình của tam giác SDO nên $MH \perp (SAC)$ và $MH = \dfrac{DO}{2}$.
Vậy khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAC) là $MH = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.



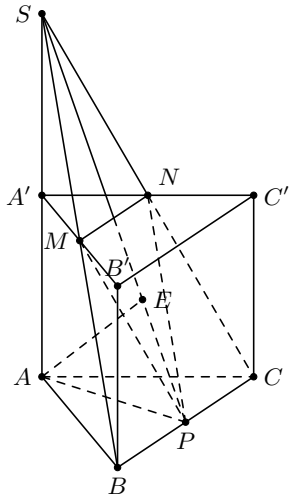
Chọn đáp án B □

Câu 356.
Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}, AA' = 2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B', A'C', BC$ (tham khảo hình vẽ bên). Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (MNP).



A. $\dfrac{17}{65}$. **B.** $\dfrac{5\sqrt{13}}{65}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{13}}{65}$. **D.** $\dfrac{12}{5}$.

✍Lời giải.
Vì $MN \parallel BC$ nên $(MNP) \equiv (MNCB)$.
Gọi S là giao điểm của MB với AA'. Khi đó $(MNP) \equiv (MNCB) \equiv (SBC)$.
Ta có $BC \perp AP$ và $BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAP)$. Trong (SAP), kẻ $AE \perp SP$ thì $AE \perp BC$. Khi đó $AE \perp (SBC)$, hay $AE = \mathrm{d}[A, (SBC)]$.



Theo giả thuyết $AP = AB \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3$, $SA = 2AA' = 4$.
Trong tam giác SAP vuông tại A có đường cao AE nên

$$\frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AP^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{16} = \frac{25}{9 \cdot 16}.$$

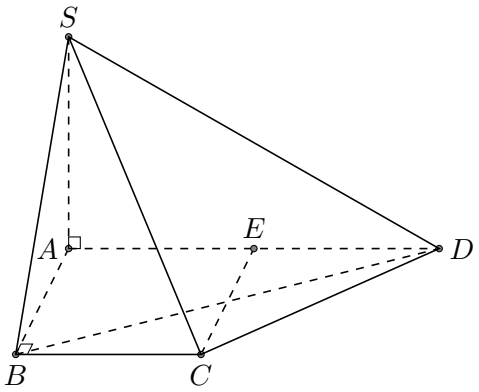
Vậy khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (MNP) là $AE = \dfrac{12}{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 357. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $SA \perp (ABCD)$, $SA = AB = BC = a$, $AD = 2a$. Khoảng cách từ điểm B đến (SCD) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

✍Lời giải.



— Tính thể tích khối chóp $S.BCD$.
Ta có thể tích hình chóp $S.ABCD$ là

$$V_1 = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{(a + 2a) \cdot a}{2} = \frac{a^3}{2}.$$

Thể tích hình chóp $S.ABD$ là

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\triangle ABD} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a = \frac{a^3}{3}.$$

Khi đó thể tích khối chóp $S.BCD$ là $V_3 = V_1 - V_2 = \dfrac{a^3}{6}$.
(1)

— Tính diện tích $\triangle SCD$.
+) $\triangle SAD$ vuông ở A suy ra $SD = \sqrt{AD^2 + SA^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$.
+) $\triangle BAC$ vuông ở B suy ra $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$.
+) $\triangle SAC$ vuông ở A suy racó $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{3}$.
+) $\triangle CED$ vuông ở E suy ra $CD = \sqrt{EC^2 + ED^2} = a\sqrt{2}$.

Khi đó diện tích $\triangle SCD$ là

$$S = \sqrt{p(p-SC)(p-SD)(p-CD)} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}. \quad (2)$$

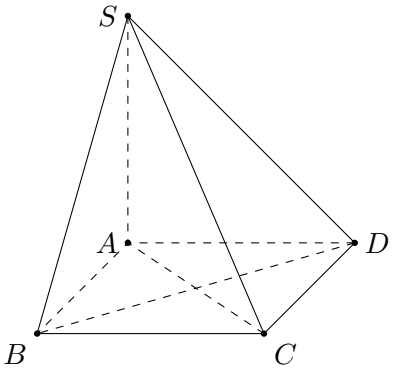
với p là nửa chu vi của $\triangle SCD$.

Từ (1) và (2) suy ra

$$\mathrm{d}(B,(SCD)) = \frac{3V_3}{S} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

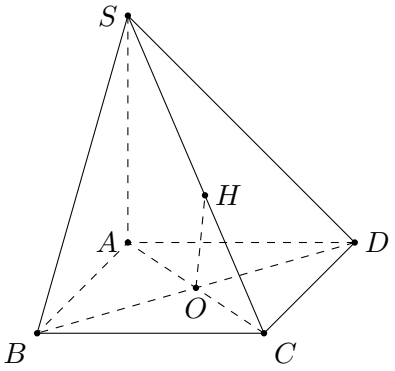
Chọn đáp án (B) □

Câu 358.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, cạnh bên SC tạo với mặt đáy một góc 60° (tham khảo hình bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD bằng



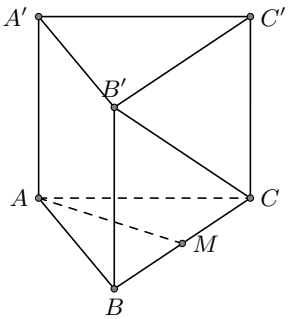
A. a. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **C.** $\frac{a\sqrt{33}}{6}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

✍Lời giải.
Dễ thấy $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$.
Gọi O là tâm hình vuông, trong ΔSAC kẻ $OH \perp SC$ với $H \in SC$.
Khi đó ta cũng có $BD \perp OH$ do $BD \perp (SAC)$.
Khi đó $\mathrm{d}(BD, SC) = OH$.
Ta có $\widehat{SCA}$ là góc giữa SC và mặt phẳng đáy $\Rightarrow \widehat{SCA} = 60^\circ$.
Xét tam giác OHC vuông tại H có $OH = OC \cdot \sin\widehat{SCA} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.



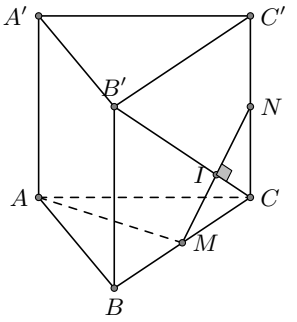
Chọn đáp án (D) □

Câu 359.
Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a (tham khảo hình bên). Gọi M là trung điểm cạnh BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.



A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **D.** a.

✍Lời giải.
Gọi N là trung điểm CC' và $I = MN \cap B'C$.
Ta có $MN \parallel BC'$ nên $MN \perp B'C$ tại I.
$AM \perp BC$ nên $AM \perp (BB'C'C) \Rightarrow AM \perp MI$.
Vậy $d(AM, B'C) = MI = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{4}BC' = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.



Chọn đáp án (C) □

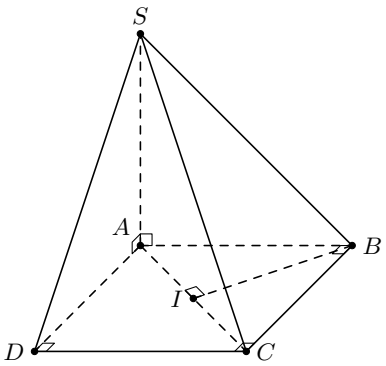
Câu 360. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Khi đó khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) là

A. $\mathrm{d}(B,(SAC)) = a\sqrt{2}$. **B.** $\mathrm{d}(B,(SAC)) = a$.

C. $\mathrm{d}(B,(SAC)) = 2a$. **D.** $\mathrm{d}(B,(SAC)) = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

✍Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AC.
Vì $ABCD$ là hình vuông nên $BI \perp AC$.
Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BI$.
Suy ra $BI \perp (SAC)$.
Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $BI = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.
Vậy $\mathrm{d}(B,(SAC)) = BI = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.



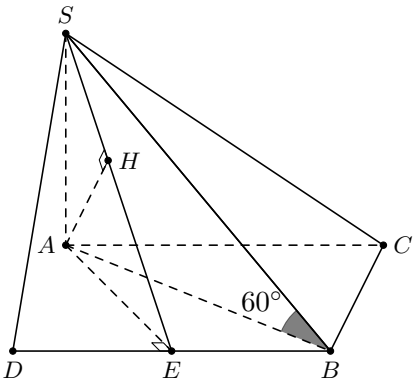
Chọn đáp án (D) □

Câu 361. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và góc giữa đường thẳng SB với mặt phẳng đáy bằng $60°$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

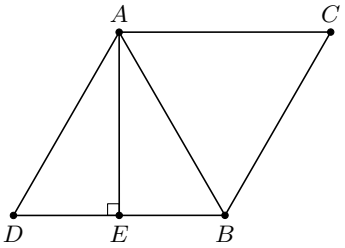
A. $\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **C.** $2a$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

✍Lời giải.

Dựng điểm D sao cho $ACBD$ là hình bình hành.
Khi đó, $AC \parallel BD \Rightarrow AC \parallel (SBD)$.
Suy ra $\mathrm{d}(AC,SB) = \mathrm{d}(AC,(SBD)) = \mathrm{d}(A,(SBD))$.
Ta có $SA \perp (ABC)$ và $SA \cap (ABC) = A$ nên góc giữa đường thẳng SB với mặt phẳng (ABC) là $\widehat{SBA} = 60°$.
Tam giác SAB vuông tại A nên $SA = AB\tan\widehat{SBA} = a\sqrt{3}$.
Vì tam giác ABC đều nên ABD cũng là tam giác đều.



Gọi E là trung điểm của BD thì $AE \perp BD$ và $AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Ta có $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BD$.
Suy ra $BD \perp (SAE)$.
Dựng $AH \perp SE, H \in SE$.
Khi đó, $BD \perp AH$. Như thế $AH \perp (SBD)$.



Tam giác SAE vuông tại A có AH là đường cao nên $AH = \sqrt{\dfrac{AE^2 \cdot SA^2}{AE^2 + SA^2}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.
Vậy $\mathrm{d}(AC,SB) = AH = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

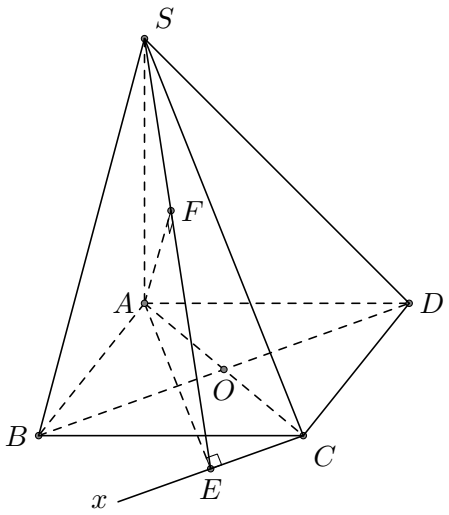
Chọn đáp án (B) □

Câu 362. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $SA = 2\sqrt{2}a$, $AB = a$, $BC = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC bằng

A. $\dfrac{\sqrt{6}a}{5}$. **B.** $\sqrt{7}a$. **C.** $\dfrac{\sqrt{7}a}{7}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{7}a}{7}$.

✍Lời giải.

Gọi O là tâm hình chữ nhật $ABCD$. Dựng $Cx \parallel BD$
$\Rightarrow d(BD;SC) = d(BD;(SCx)) = d(O;(SCx)) = \dfrac{1}{2}d(A;(SCx))$.
Dựng $AE \perp Cx$, $AF \perp SE \Rightarrow d(A;(SCx)) = AF$.
Do $BD \parallel Cx \Rightarrow AE = 2d(A;BD) = 2\dfrac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2+AD^2}} = \dfrac{4a}{\sqrt{5}}$.
Suy ra $AF = \dfrac{AE \cdot SA}{\sqrt{AE^2+SA^2}} = \dfrac{4a\sqrt{7}}{7} \Rightarrow d = \dfrac{2a\sqrt{7}}{7}$.

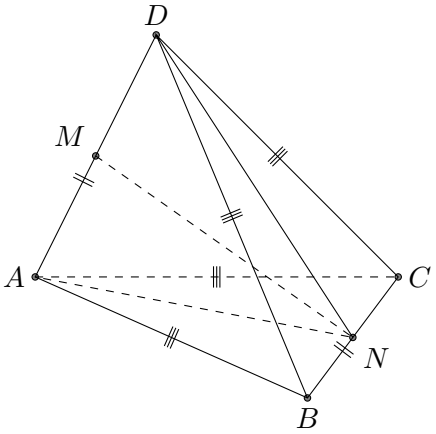


Chọn đáp án (D) □

Câu 363. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD = BC = a\sqrt{2}$, $AB = CD = AC = BD = 2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và BC.

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** a. **D.** $2a$.

✍Lời giải.
Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC.
Các tam giác ABC và DBC lần lượt cân tại A và D nên $AN \perp BC$, $DN \perp BC$. Suy ra $BC \perp MN$.
Chứng minh tương tự ta được $AD \perp MN$.
Vậy khoảng cách giữa AD và BC bằng đoạn MN.
Ta có $AN^2 = AB^2 - BN^2 = (2a)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{7a^2}{2}$.
$\mathrm{d}(AD,BC) = MN = \sqrt{AN^2 - AM^2} = \sqrt{\dfrac{7a^2}{2} - \dfrac{2a^2}{4}} = a\sqrt{3}$.

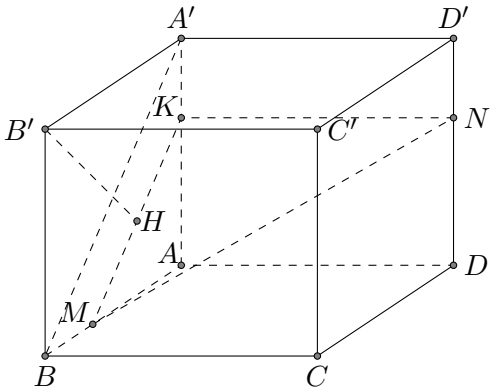


Chọn đáp án (A) □

Câu 364. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là các điểm di động trên hai cạnh AB và DD'. Tìm giá trị nhỏ nhất của khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và $B'C'$.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** a. **D.** $a\sqrt{2}$.

✍Lời giải.
Kẻ $NK \parallel A'D' \parallel B'C'$, $K \in AA'$. Ta có
$B'C' \parallel (MNK) \Rightarrow \mathrm{d}(B'C', MN) = \mathrm{d}(\mathrm{B}', (\mathrm{MNK}))$.
Kẻ $B'H \perp MK$ tại H. Do $B'H \perp MK$ và $B'H \perp NK$ nên $B'H \perp (MNK)$. Suy ra $\mathrm{d}(\mathrm{B}', (\mathrm{MNK})) = B'H$.
Trong mặt phẳng $(ABB'A')$, xét đường tròn tâm B' bán kính $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ tiếp xúc với đường chéo BA' của hình vuông $ABB'A'$. Rõ ràng MK không cắt đường tròn nói trên. Do đó $B'H \geq R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



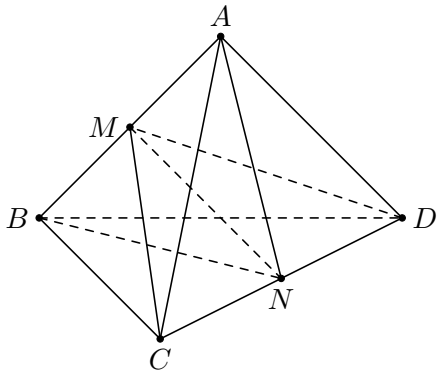
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi M trùng B còn N trùng D'.
Vậy khoảng cách nhỏ nhất giữa hai đường thẳng MN và $B'C'$ bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 365. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = BC = AD = BD = a$, $CD = b$, $AB = c$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3a^2 - b^2 - c^2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{4a^2 - b^2 - c^2}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2a^2 - b^2 - c^2}}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.
Tam giác ACD cân tại A nên $AN \perp CD$.
Tam giác BCD cân tại B nên $BN \perp CD$.
Suy ra $CD \perp (ABN) \Rightarrow CD \perp MN$. (1)
Tam giác ABC cân tại C nên $CM \perp AB$.
Tam giác ABD cân tại D nên $DM \perp AB$.
Suy ra $AB \perp (CDM) \Rightarrow AB \perp MN$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\mathrm{d}(AB, CD) = MN$.



Xét tam giác ACM vuông tại M nên $CM^2 = AC^2 - AM^2 = a^2 - \dfrac{c^2}{4}$.

Xét tam giác CMN vuông tại N nên $MN = \sqrt{CM^2 - CN^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{c^2}{4} - \dfrac{b^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{4a^2 - b^2 - c^2}}{2}$.

Chọn đáp án B □

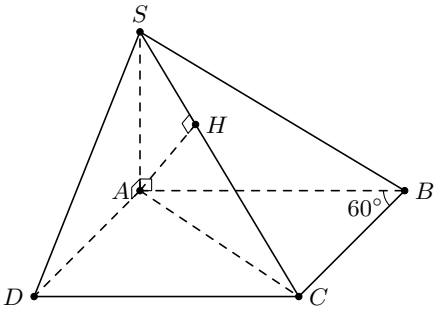
Câu 366. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Biết $SA = 2a$. Tính khoảng cách từ A đến SC.

A. $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{5a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$.

✍Lời giải.

Kẻ $AH \perp SC$ $(H \in SC)$.
Do $ABCD$ là hình thoi có $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên ABC là tam giác đều.
Từ đó có $AC = AB = a$.
Trong tam giác SAC vuông tại A ta có

$$AH = \frac{SA \cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$



Chọn đáp án A □

Câu 367. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Biết diện tích tam giác SAB bằng $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$, tính khoảng cách d từ điểm B đến mặt phẳng (SAC).

A. $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{10}}{3}$.

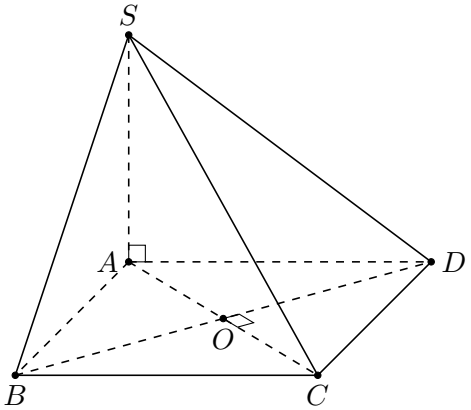
✍Lời giải.

Diện tích tam giác SAB là

$$S_{SAB} = \frac{1}{2} SA \cdot AB \Leftrightarrow AB = \frac{2S_{SAB}}{SA} = a.$$

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.
Ta có $BO \perp AC$ và $BO \perp SA$ nên $BO \perp (SAC)$, suy ra

$$d = \mathrm{d}(B, (SAC)) = BO = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



Chọn đáp án A □

Câu 368. Cho hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau và bằng $2a$, đáy là hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2a$, $AD = a$. Gọi K là điểm thuộc BC sao cho $3 \cdot \overrightarrow{BK} + 4 \cdot \overrightarrow{CK} = \vec{0}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SK.

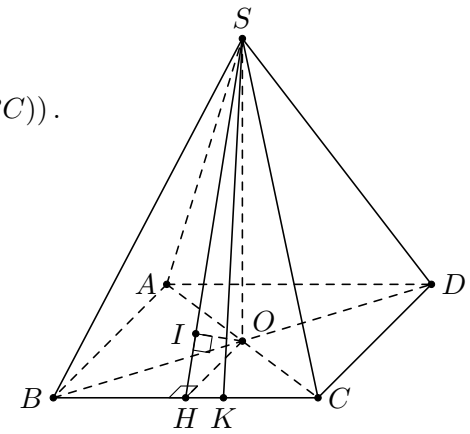
A. $\dfrac{a\sqrt{165}}{15}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{135}}{15}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{165}}{15}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{125}}{15}$.

✍Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD.
Khi đó $SO \perp (ABCD)$. Vì $AD \parallel (SBC)$ nên

$$\mathrm{d}(AD, SK) = \mathrm{d}\,(AD, (SBC)) = \mathrm{d}\,(A, (SBC)) = 2\,\mathrm{d}\,(O, (SBC)).$$

Gọi H là trung điểm BC. Khi đó $OH \perp BC$.
Gọi I là hình chiếu vuông góc của O lên SH.
Suy ra $OI \perp SH$. Vì $BC \perp (SOH)$ nên $BC \perp OI$.
Suy ra $OI \perp (SBC)$ hay $\mathrm{d}\,(O, (SBC)) = OI$.



Ta có $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{SA^2 - \dfrac{AC^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{11}}{2}$ và $OH = \dfrac{AB}{2} = a$.
Do đó $OI = \dfrac{SO \cdot OH}{\sqrt{SO^2 + OH^2}} = \dfrac{a\sqrt{165}}{15}$. Vậy $\mathrm{d}(AD, SK) = 2OI = \dfrac{2a\sqrt{165}}{15}$.
Chọn đáp án (C) □

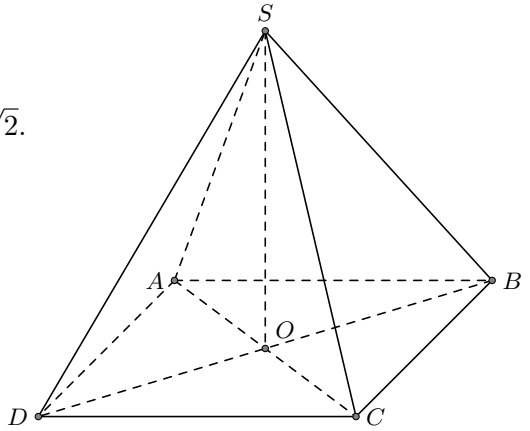
Câu 369. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $2a$. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$.

A. a. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $a\sqrt{6}$. **D.** $2\sqrt{2}a$.

✍Lời giải.

Gọi O là hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Khi đó

$$\mathrm{d}[S; (ABCD)] = SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(a\sqrt{2}\right)^2} = a\sqrt{2}.$$



Chọn đáp án (B) □

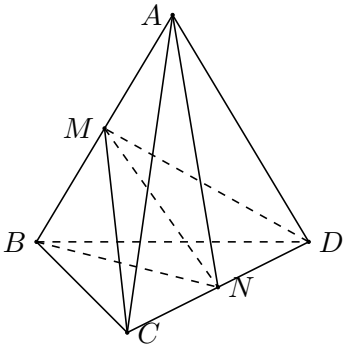
Câu 370. Tứ diện $ABCD$ có $AB = 5$, các cạnh còn lại đều bằng 3. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Khi đó

ΔACD và BCD là 2 tam giác đều cạnh 3 nên $AN = BN = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.
Đồng thời $\Delta ABC = \Delta ABD$ nên $CM = DM$.
Do đó, MAB và NCD là hai tam giác cân tại M và N.
Vậy $MN \perp BA$ và $MN \perp CD$.
Ta có: $MN = \sqrt{NB^2 - MB^2} = \sqrt{\dfrac{27}{4} - \dfrac{25}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án B □

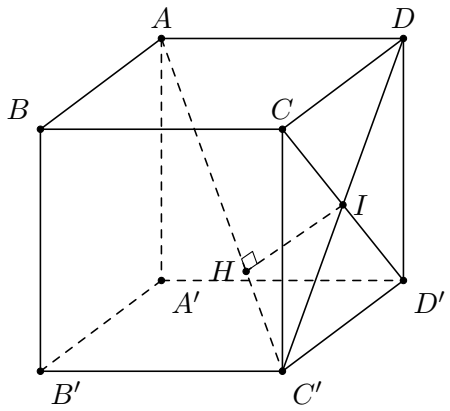
Câu 371. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa AC' và CD'.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{30}}{10}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

✍Lời giải.

Ta có $AD \perp CD'$, $DC' \perp CD'$ suy ra $(ADC') \perp CD'$. Gọi I là giao điểm của CD' và DC', trong mặt phẳng (ADC') kẻ IH vuông góc với AC' khi đó $IH \perp CD'$, $IH \perp AC'$ hay IH là khoảng cách giữa AC' và CD'.

Tam giác ADC' có $AD = a\sqrt{3}$, $DC' = a\sqrt{2}$, $AC' = a\sqrt{5}$ do đó tam giác ADC' vuông tại D.



Tam giác HIC' vuông tại H có $IC' = \dfrac{DC'}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $\sin\widehat{IC'H} = \dfrac{AD}{AC'} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$, từ đó

$$IH = IC' \cdot \sin\widehat{IC'H} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{30}}{10}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 372. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng $2a$. Gọi K là trung điểm của DD'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D'$.

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$.

✍Lời giải.

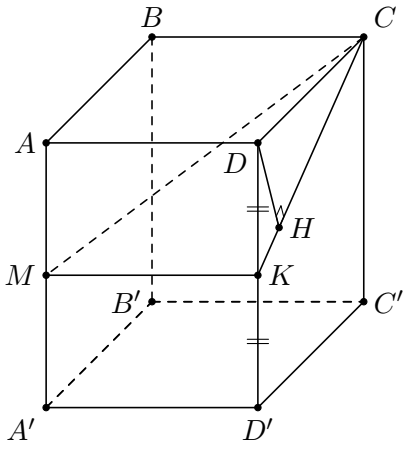
Kẻ $KM \parallel A'D' (M \in AA')$, $DH \perp CK (H \in CK)$.

Khi đó $DH \perp (CKM)$.

$\mathrm{d}(CK, A'D') = \mathrm{d}(A'D', (CKM)) = \mathrm{d}(D', (CKM)) = \mathrm{d}(D, (CKM)) = DH$.

Mà $\dfrac{1}{DH^2} = \dfrac{1}{DK^2} + \dfrac{1}{CD^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{5}{4a^2} \Rightarrow DH = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Vậy $\mathrm{d}(CK, A'D') = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.



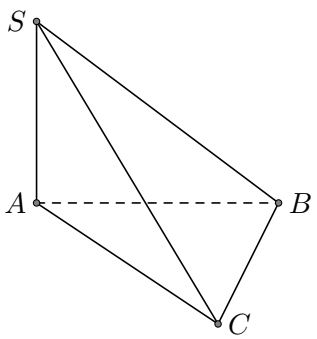
Chọn đáp án B □

Câu 373.

Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $AB = 6$, $BC = 8$, $AC = 10$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BC.

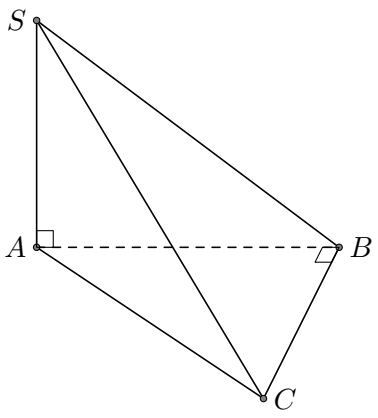
A. Không tính được d. **B.** $d = 8$.

C. $d = 6$. **D.** $d = 10$.



✍Lời giải.

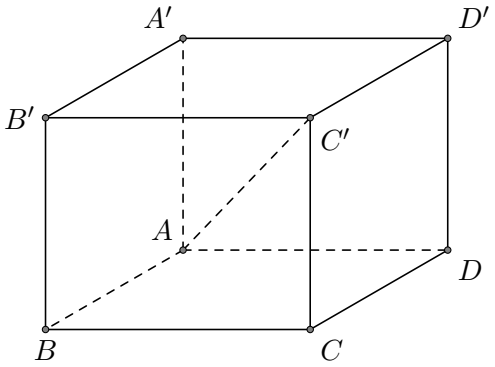
Có $SA \perp (ABC) \Rightarrow AB \perp SA$ (1)
Ta có $AB = 6$, $BC = 8$, $AC = 10$ suy ra ΔABC vuông tại B hay $AB \perp BC$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra AB là đoạn vuông góc chung của SA và BC.
Vậy $d = AB = 10$.



Chọn đáp án C □

Câu 374.
Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC' bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $a\sqrt{5}$. **C.** $2a$. **D.** a.



✍Lời giải.
Trong $(ABCD)$ dựng $BH \perp AC$. Mà $BH \perp AA'$, suy ra

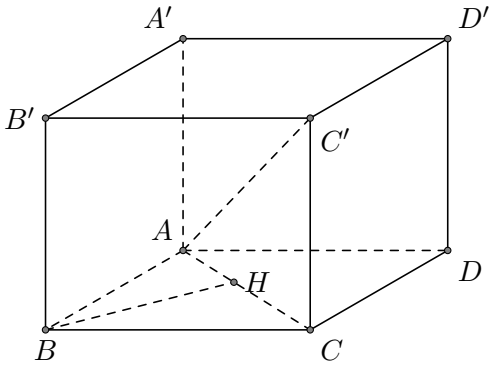
$$BH \perp (AA'C'C) \Rightarrow BH \perp AC'.$$

Lại có $BB' \perp (ABCD) \Rightarrow BB' \perp BH$. Do đó

$$\mathrm{d}_{(BB',AC')} = BH.$$

Xét tam giác vuông ABC vuông tại B, có đường cao BH

$$BH^2 = \frac{AB^2 \cdot BC^2}{AB^2 + BC^2} = \frac{a^2 \cdot 4a^2}{a^2 + 4a^2} = \frac{4a^2}{5} \Rightarrow BH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

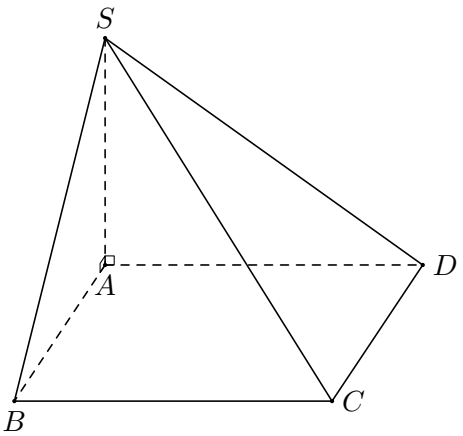


Chọn đáp án A □

Câu 375. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $AB = a$, $BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD.

A. $a\sqrt{6}$. **B.** $a\sqrt{5}$. **C.** a. **D.** $2a$.

✍Lời giải.
Ta có $AD \perp SA$, $AD \perp CD$ nên AD là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng SA và CD.
Mà $AD = BC = 2a$ nên khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD bằng $2a$.



Chọn đáp án D □

Câu 376. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $AD = 2a$. Các tam giác SAB, SAC vuông tại A và $SA = 4a$. Tính khoảng cách giữa BD và SC theo a.

A. $\sqrt{6}a$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}a$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}a$.

✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp AC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD)$.

Từ C kẻ đường thẳng Cx song song với BD.

Khi đó $\mathrm{d}(BD, SC) = \mathrm{d}(BD, (SC, Cx))$.

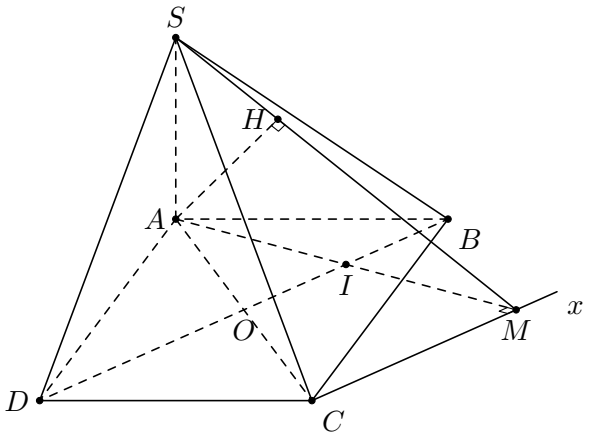
Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có

$\mathrm{d}(BD, SC) = \mathrm{d}(O, (SC, Cx)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(A, (SC, Cx))$.

Gọi M là hình chiếu của A lên Cx.

Khi đó ta có $\begin{cases} CM \perp SA \\ CM \perp AM \end{cases}$

$\Rightarrow CM \perp (SAM) \Rightarrow (SCM) \perp (SAM)$.



Gọi H là hình chiếu của A lên SM.

Ta có $AH \perp (SCM)$ hay $\mathrm{d}(A, (SCM)) = AH$.

Gọi $I = AM \cap BD$. Ta có $\dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{5}{4a^2}$.

$\dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{1}{4AI^2} = \dfrac{5}{16a^2}$.

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{1}{16a^2} + \dfrac{5}{16a^2} = \dfrac{3}{8a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}a$.

Vậy $\mathrm{d}(BD, SC) = \dfrac{\sqrt{6}}{3}a$.

Chọn đáp án C □

Câu 377. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SB = \sqrt{5}a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC) theo a.

A. $\dfrac{4\sqrt{57}}{57}a$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{57}}{57}a$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{57}}{57}a$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{57}}{19}a$.

✍Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}(G, (SBC)) = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}(A, (SBC))$.

Gọi I là trung điểm của BC.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow (SBC) \perp (SAI)$.

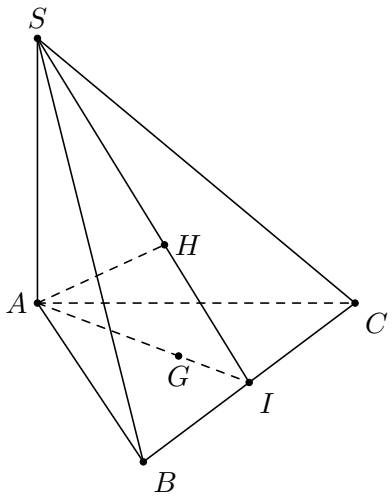
Gọi H là hình chiếu của A lên SI. Ta có $AH \perp (SBC)$.

Suy ra $\mathrm{d}(A, (SBC)) = AH$.

Ta có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = 2a$, $AI = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{4}{3a^2} = \dfrac{19}{12a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{2\sqrt{57}}{19}$.

Vậy $\mathrm{d}(G, (SBC)) = \dfrac{2\sqrt{57}}{57}$.

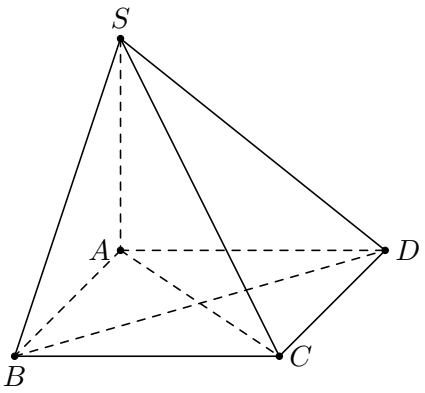


Chọn đáp án B □

Câu 378.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

A. $a\sqrt{2}$. **B.** a. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.



✍Lời giải.

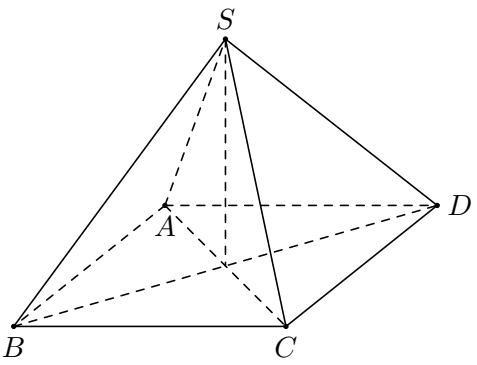
Vì hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy nên $SA \perp (ABCD)$. Vậy AB là đoạn vuông góc chung của SA và BC hay khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng $AB = a$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 379.

Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a (*tham khảo hình vẽ bên*). Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và DC.

A. $\dfrac{2a}{\sqrt{6}}$. **B.** $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



✍Lời giải.

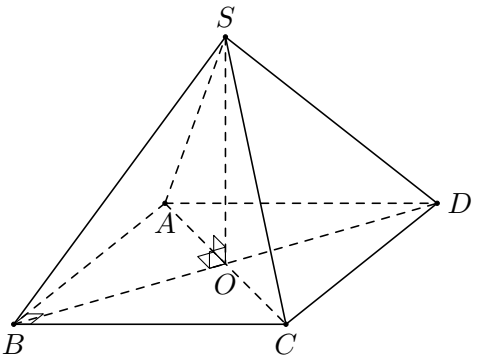
Nhận thấy các tam giác ABC, BAD và ASC bằng nhau theo trường hợp (c-c-c), từ đó suy ra $OS = OA = OB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Gọi h là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB), khi đó ta có

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{3}{OA^2} = \frac{6}{a^2}.$$

Từ đó suy ra $h = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

Mặt khác, do $CD \parallel AB$, suy ra



$$\mathrm{d}\,(CD, SA) = \mathrm{d}\,(CD, (SAB)) = \mathrm{d}\,(D, (SAB)) = 2\mathrm{d}\,(O, (SAB)) \text{ (do } O \text{ là trung điểm của } BD).$$

Vậy $\mathrm{d}\,(CD, SA) = 2\mathrm{d}\,(O, (SAB)) = 2h = \dfrac{2a}{\sqrt{6}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 380. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Độ dài đoạn $A'G$ là

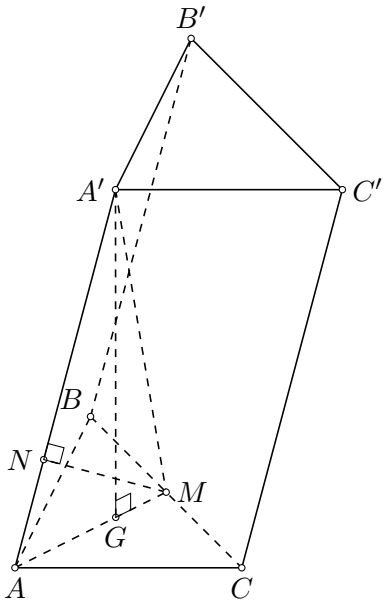
A. $\dfrac{2a}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{a}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Do tam giác ABC đều nên G là tâm tam giác ABC.
Gọi M là trung điểm BC. Khi đó:

$$AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$\Rightarrow AG = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.
Do $BC \perp AM$ và $BC \perp A'M$ nên $BC \perp (A'AM)$.
Kẻ $MN \perp A'C$, khi đó MN là đường vuông góc chung của $A'A$ và BC.
$\Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow AN = \sqrt{AM^2 - MN^2} = \frac{3a}{4}$.
Trong tam giác $AA'M$ có hai đường cao $A'G$ và MN nên $AN. \cdot AA' = AG \cdot AM$ hay $AA' = \frac{AG \cdot AM}{AN_a} = \frac{2a}{3}$.
$\Rightarrow A'G = \sqrt{A'A^2 - AG^2} = \frac{a}{3}$.



Chọn đáp án C □

Câu 381. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 10. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SC = 10\sqrt{5}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD. Tính khoảng cách d giữa BD và MN.

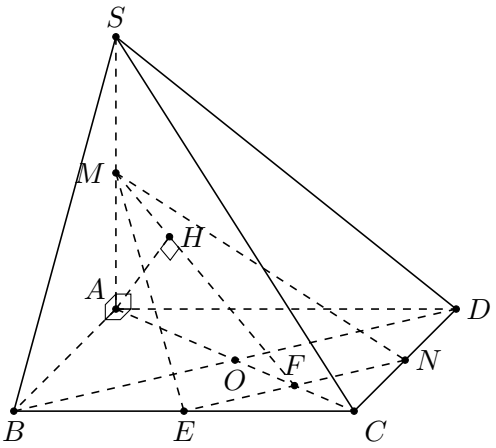
A. $\mathrm{d} = 3\sqrt{5}$. **B**. $\mathrm{d} = \sqrt{5}$. **C**. $\mathrm{d} = 5$. **D**. $\mathrm{d} = 10$.

✍Lời giải.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.
Gọi E là trung điểm BC, suy ra $NE \parallel BD$.
NE cắt AC tại F.
Kẻ $AH \perp MF$ tại H. Ta có

— $\begin{cases} NE \perp AC \\ NE \perp SA \end{cases} \Rightarrow NE \perp (SAC) \Rightarrow NE \perp AH.$

— $\begin{cases} AH \perp MF \\ AH \perp NE \end{cases} \Rightarrow AH \perp (MNE).$



Khi đó $\mathrm{d}(BD, MN) = \mathrm{d}(BD, (MNE)) = \mathrm{d}(O, (MNE)) = \frac{1}{3}\mathrm{d}(A, (MNE)) = \frac{1}{3}AH$.
Tính:

— $AC = AB\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$, $AF = \frac{3}{4}AC = \frac{15\sqrt{2}}{2}$.

— $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = 10\sqrt{3} \Rightarrow AM = \frac{1}{2}SA = 5\sqrt{3}$.

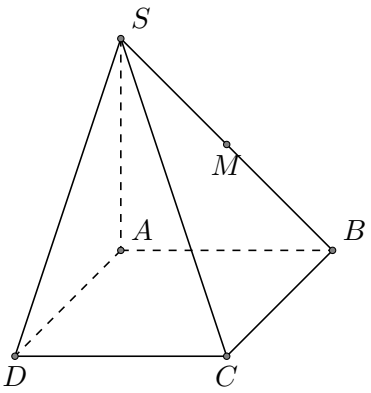
— $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{1}{75} + \frac{2}{225} = \frac{1}{45} \Rightarrow AH = 3\sqrt{5}$.

Vậy $\mathrm{d}(BD, MN) = \frac{1}{3}AH = \sqrt{5}$.
Chọn đáp án B □

Câu 382.

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $60°$. Gọi M là trung điểm của cạnh SB (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ điểm M tới mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

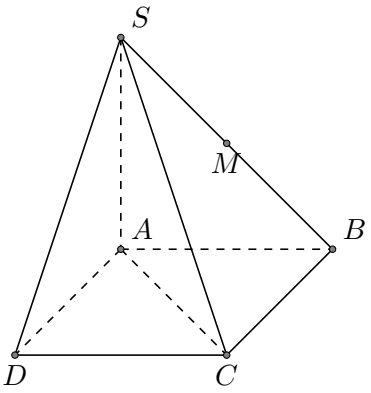
A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{3a}{2}$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{3}$.



✍Lời giải.

Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{SCA}$ là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.
Ta có $AC = a\sqrt{3}$.
Xét tam $\triangle SAC$ có $\mathrm{d}(S,(ABCD)) = SA = AC \cdot \tan\widehat{SCA} = 3a$.
Vì M là trung điểm của SB nên

$$\mathrm{d}(M,(ABCD)) = \frac{1}{2}\mathrm{d}(S,(ABCD)) = \frac{3a}{2}.$$



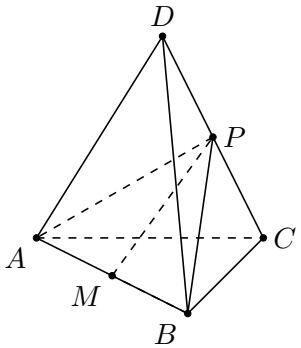
Chọn đáp án (B) □

Câu 383. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. $\dfrac{3a}{2}$. **B.** a. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi M, P lần lượt là trung điểm của AB và CD.
Vì $\triangle ADC = \triangle DBC \Rightarrow AP = BP \Rightarrow \triangle APB$ cân tại $P \Rightarrow PM \perp AB$.
Chứng minh tương tự ta có $MP \perp DC$.
Do đó đoạn vuông góc chung của AB và CD là MP.
Ta có $AP = BP = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Xét $\triangle ABP$ có $PM = \sqrt{AP^2 - AM^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Vậy $\mathrm{d}(AB,CD) = MP = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



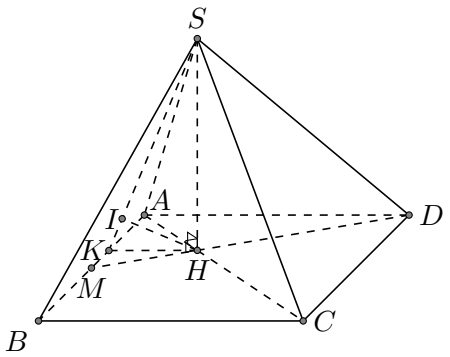
Chọn đáp án (D) □

Câu 384. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Đường thẳng SD tạo với đáy $ABCD$ một góc $60°$. Gọi M là trung điểm AB. Biết $MD = \dfrac{3a\sqrt{5}}{2}$, mặt phẳng (SDM) và mặt phẳng (SAC) cùng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SM theo a.

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{4}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{5}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{4}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{15}}{4}$.

✍Lời giải.

Giả sử $AD = x$, khi đó ta có
$DM^2 = AD^2 + AM^2 = x^2 + \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{5x^2}{4} \Rightarrow DM = \dfrac{x\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = 3a$
Gọi $H = DM \cap AC$, khi đó $SH \perp (ABCD)$ và $\Delta HAM \backsim \Delta HDC$.
Từ đó ta có $HD = 2HM$ hay $MD = 3MH$.
Ta có $SM \subset (SAB)$ và do $AB \parallel CD$ nên $CD \parallel (SAB)$
$\Rightarrow \mathrm{d}(CD, SM) = \mathrm{d}(CD, (SAB)) = \mathrm{d}(D, (SAB)) = 3\mathrm{d}(H, (SAB))$.



Kẻ $HK \perp AB$, $K \in AB$ và $HI \perp SK, I \in SK$ ta có $HI \perp (SAB) \Rightarrow \mathrm{d}(H, (SAB)) = HI$. $\dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{1}{HS^2} + \dfrac{1}{HK^2}$.
$DH = \dfrac{2}{3}DM = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3a\sqrt{5}}{2} = a\sqrt{5} \Rightarrow HS = HD \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{15}$.
$HK = \dfrac{1}{3}AD = a \Rightarrow \dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{1}{15a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{16}{15a^2} \Rightarrow HI = \dfrac{a\sqrt{15}}{4} \Rightarrow \mathrm{d}(CD, SM) = \dfrac{3a\sqrt{15}}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

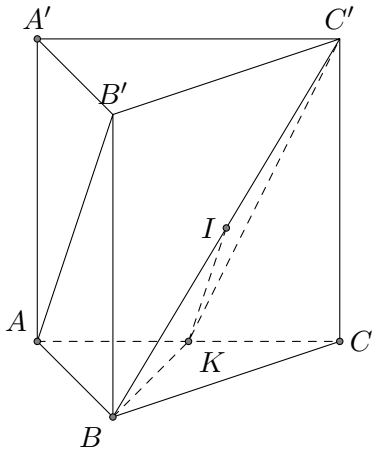
Câu 385. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân, $AB = AC = a$, $AA' = 2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BC'

A. $\dfrac{2a}{\sqrt{21}}$. **B.** $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{a}{\sqrt{21}}$. **D.** $\dfrac{2a}{\sqrt{17}}$.

Lời giải.
Gọi I, K lần lượt là trung điểm BC' và AC.
$\Rightarrow AB' \parallel IK \Rightarrow AB' \parallel (BKC')$.
$\Rightarrow d(AB'; BC') = d(AB'; (BKC')) = d(C; (BKC'))$.
Mặt khác $V_{C'.BKC} = \dfrac{1}{6}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{a^3}{6}$.

$$\begin{cases} BK = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} \\ KC' = \dfrac{a\sqrt{17}}{2} \\ BC' = a\sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow S_{\Delta BKC'} = \dfrac{a^2\sqrt{21}}{4}.$$

Suy ra $d(AB'; BC') = d(C; (BKC')) = \dfrac{3V_{C'.BKC}}{S_{\Delta BKC'}} = \dfrac{2a}{\sqrt{21}}$.

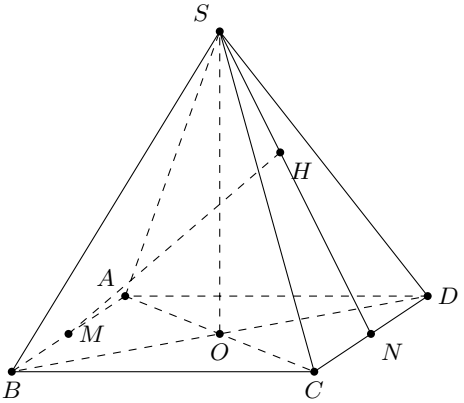


Chọn đáp án (A) □

Câu 386. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng 1, biết $SO = \sqrt{2}$ và vuông góc với mặt đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB.

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.
Vì $AB \parallel (SCD)$ nên $d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(M, (SCD))$, trong đó M là trung điểm của AB.
Gọi N là trung điểm của CD và H là hình chiếu vuông góc của M trên (SCD) thì $H \in SN$. Tính được $SN = \sqrt{SO^2 + \dfrac{BC^2}{4}} = \dfrac{3}{2}$ và
$S_{\triangle SMN} = \dfrac{1}{2}SO \cdot MN = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Do đó $d(AB, SC) = d(M, (SCD)) = MH = \dfrac{2S_{\triangle SMN}}{SN} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.



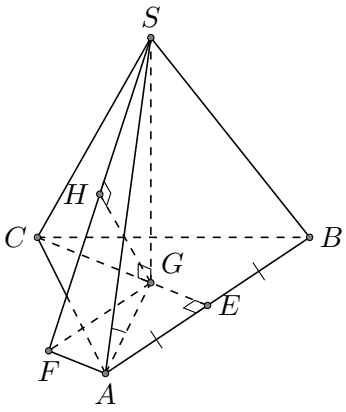
Chọn đáp án (D) □

Câu 387. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và góc giữa đường thẳng SA với mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng GC và SA.

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{10}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{5}$. **D.** $\dfrac{a}{5}$.

✍Lời giải.

Do $S.ABC$ là chóp tam giác đều, G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên SG là đường cao của chóp $S.ABC$. Dựng hình chữ nhật $AEGF$,
H là hình chiếu vuông góc của G lên $SF \Rightarrow GH \perp (SAF)$.
Ta có $GE \parallel AF$ nên $GE \parallel (SAF)$ suy ra
$\mathrm{d}(CG, SA) = \mathrm{d}(CG, (SAF)) = \mathrm{d}(G, (SAF)) = GH$
Góc giữa SA và (ABC) là $\widehat{SAG} = 60°$.
$\triangle ABC$ đều cạnh a nên $AG = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
Trong $\triangle SGA$ có $SG = \tan 60° \cdot AG = a$; $GF = AE = \dfrac{a}{2}$.



Do GH là đường cao trong $\triangle SGF$ vuông tại G nên
$$\frac{1}{GH^2} = \frac{1}{GF^2} + \frac{1}{SG^2} \Rightarrow GH = \sqrt{\frac{SG^2 \cdot GF^2}{SG^2 + GF^2}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

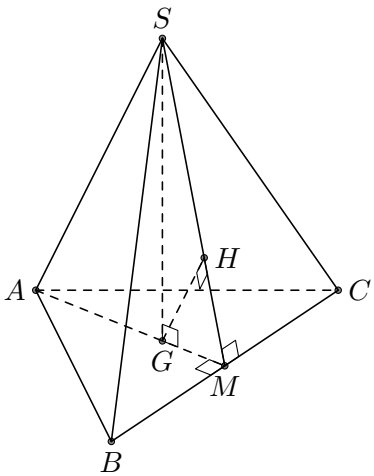
Chọn đáp án (B) □

Câu 388. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Góc giữa mặt bên với mặt đáy bằng $60°$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a}{4}$. **C.** $\dfrac{3a}{2}$. **D.** $\dfrac{3a}{4}$.

✍Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, M là trung điểm của BC, H là hình chiếu vuông góc của G lên SM.
Theo đề góc giữa (SBC) và (ABC) là góc $\widehat{SMA} = 60°$.
Do G là trọng tâm tam giác ABC ta có $AM = 3GM$,
suy ra $\mathrm{d}(A, (SBC)) = 3\mathrm{d}(G, (SBC)) = 3GH$
Trong $\triangle GHM$ vuông tại H có
$GH = GM \cdot \sin 60° = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a}{4}$.
Suy ra $\mathrm{d}(A, (SBC)) = 3GH = \dfrac{3a}{4}$.



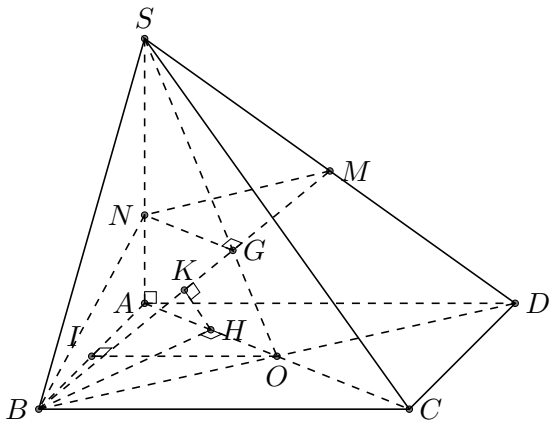
Chọn đáp án (D) □

Câu 389. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy là hình chữ nhật có $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của SD và (P) là mặt phẳng đi qua B, M sao cho (P) cắt mặt phẳng (SAC) theo một đường thẳng vuông góc với BM. Khoảng cách từ điểm S đến (P) bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{9}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{4a\sqrt{2}}{9}$.

✍Lời giải.

Gọi O là tâm hình chữ nhật $ABCD$. G là giao điểm của SO và BM.
Suy ra G là trọng tâm của tam giác SAC và SBD. Gọi N là giao điểm của (P) và SA. H là hình chiếu vuông góc của B lên AC. K là hình chiếu vuông góc của H lên BG.



Ta có $OA = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi I là trung điểm $AB \Rightarrow OI = \dfrac{1}{2} \cdot BC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$S_{ABO} = \frac{1}{2} \cdot OI \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot OA \Rightarrow BH = \frac{OI \cdot AB}{AO} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$\triangle ABH$ vuông tại H có $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$\Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{1}{3}AC \Rightarrow \dfrac{OH}{AH} = \dfrac{OG}{OS} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow GH \parallel SA$

Ta có $BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp NG$

Khi đó $\begin{cases} NG \perp BM \\ BH \perp NG \end{cases} \Rightarrow NG \perp GH \Rightarrow NG \parallel AC \Rightarrow (P) \parallel AC$ và $SN = 2AN$.

$\mathrm{d}\,(S,(P)) = 2\mathrm{d}\,(A,(P)) = 2\mathrm{d}\,(H,(P)) = 2HK$.

$\triangle OSA$ có $GH = \dfrac{1}{3}SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$; $\triangle AHB$ vuông tại H có $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

$\triangle GHB$ vuông tại H có $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HG^2} + \dfrac{1}{HB^2} \Rightarrow HK = \sqrt{\dfrac{HG^2 \cdot HB^2}{HG^2 + HB^2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

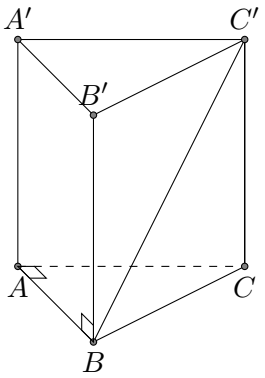
Chọn đáp án C □

Câu 390. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BB' là

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$. **B.** a. **C.** $\sqrt{2}a$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

✍Lời giải.

Từ giả thiết $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ đứng có đáy ABC là tam giác vuông tại A ta có AB cắt và vuông góc với cả hai đường thẳng AC và BB' nên AB là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AC và BB'.
Bởi vậy, khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BB' là $AB = a$.



Chọn đáp án B □

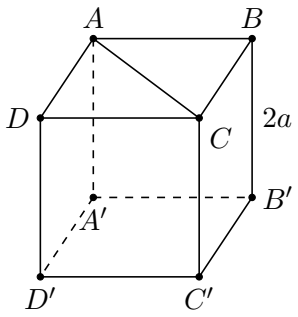
Câu 391. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và $A'B'$.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $2a$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

✍Lời giải.

Vì $A'B' \parallel AB$ nên $A'B' \parallel ((ABCD))$.
Vì vậy

$$\mathrm{d}(A'B', AC) = \mathrm{d}(A'B', (ABCD)) = \mathrm{d}(A', (ABCD)) = AA' = 2a.$$



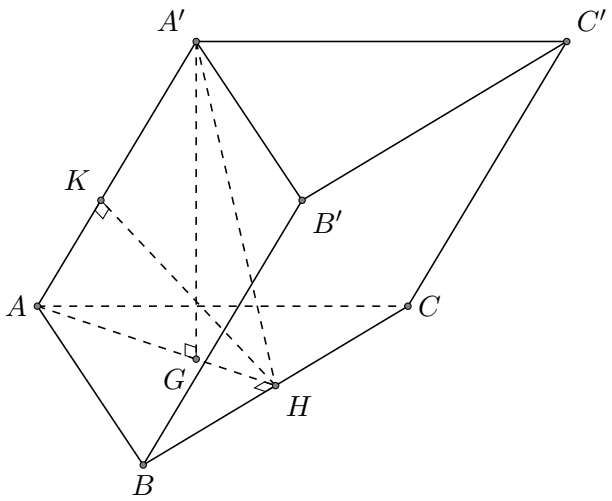
Chọn đáp án (B) □

Câu 392. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính $A'G$.

A. $A'G = \dfrac{a}{3}$. **B.** $A'G = \dfrac{2a}{3}$. **C.** $A'G = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $A'G = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm của BC, ta có $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp A'G \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'AH)$.
Trong mặt phẳng $(A'AH)$, kẻ $HK \perp A'A$ tại K, ta có HK là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AA' và BC. Do đó $HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.
Tam giác AHK vuông tại K nên $AK^2 = AH^2 - HK^2 = \dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{3a^2}{16} = \dfrac{9a^2}{16} \Rightarrow AK = \dfrac{3a}{4}$.
Hai tam giác AKH vuông tại K và AGA' vuông tại G có $\widehat{A'AH}$ chung nên $\triangle AKH \backsim \triangle AGA'$.



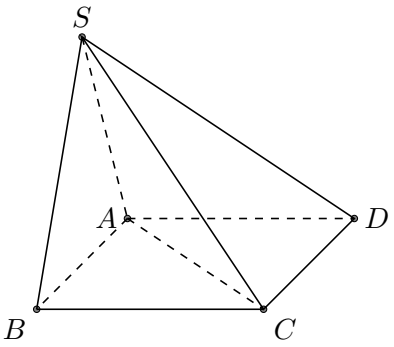
$$\Rightarrow \frac{A'G}{HK} = \frac{AG}{AK} \Rightarrow A'G = \frac{HK \cdot AG}{AK} = \frac{\dfrac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{3}}{\dfrac{3a}{4}} = \frac{a}{3}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 393.

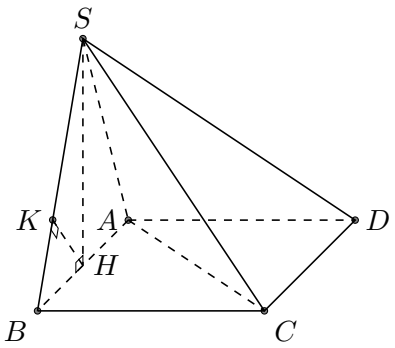
Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên $SA = a\sqrt{5}$, mặt bên SAB là tam giác cân đỉnh S và thuộc mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC bằng

A. $\dfrac{4\sqrt{5}a}{5}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{15}a}{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{15}a}{5}$.



✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$. Hạ $HK \perp SB$.
$\mathrm{d}(AD, SC) = \mathrm{d}(AD, (SBC)) = \mathrm{d}(A, (SBC)) = 2\mathrm{d}(H, (SBC)) = 2HK$.
$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = 2a$.
$\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{BH^2} + \dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{5}{4a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.
Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC bằng $\dfrac{4\sqrt{5}a}{5}$.

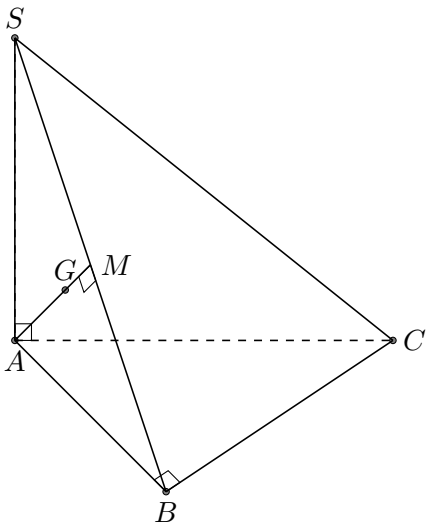


Chọn đáp án (A) □

Câu 394. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với mặt đáy và $SA = AB = \sqrt{3}$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB. Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

✍Lời giải.



Gọi M là trung điểm của $SB \Rightarrow AM \perp SB$ (vì tam giác SAB cân).
Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$.
Và $\begin{cases} AM \perp SB \\ AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow GM \perp (SBC)$ tại M.
Do đó $d(G, (SBC)) = GM$.

$$SB = AB\sqrt{2} = \sqrt{6}, AM = \frac{SB}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow GM = \frac{AM}{3} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

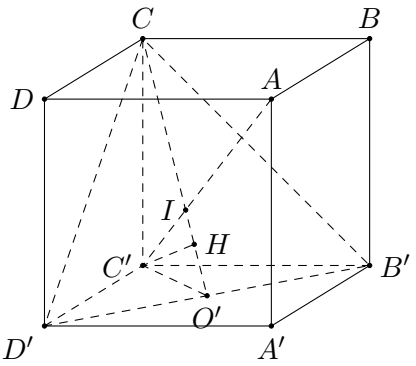
Chọn đáp án (B) □

Câu 395. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(CB'D')$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

✍Lời giải.

Gọi $I = AC' \cap CO'$ ta có $I = AC' \cap (CB'D')$.
Gọi H là hình chiếu của C' lên CO'.



Khi đó $\mathrm{d}(C';(CB'D')) = C'H = \dfrac{CC' \cdot C'O'}{\sqrt{CC'^2 + C'O'^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
Mặt khác, ta có $AI = 2C'I$ nên
$\mathrm{d}(A;(CB'D')) = 2\mathrm{d}(C';(CB'D')) = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Lưu ý:
Nếu sử dụng công thức tính độ dài đường cao của tứ diện đều thì bài toán sẽ được giải rất nhanh gọn. Cụ thể như sau:

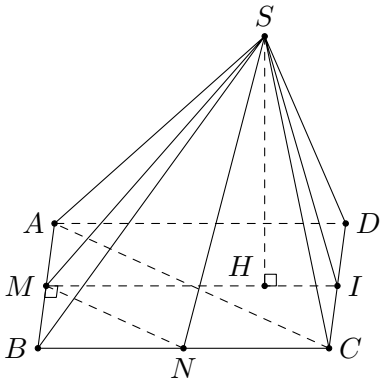
$\mathrm{d}(A,(CB'D'))$ chính là độ dài đường cao của tứ diện đều $ACB'D'$ (cạnh bằng $a\sqrt{2}$).
Khoảng cách đó bằng $a\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{6}}{3} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 396. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB đều, góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ bằng $60°$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Biết rằng hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ nằm trong hình vuông $ABCD$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AC là

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{10}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{5}}{10}$. **D.** $\dfrac{5a\sqrt{3}}{3}$.

✍**Lời giải.**

Gọi I là trung điểm cạnh CD, khi đó $\begin{cases} AB \perp SM \\ AB \perp MI \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SMI)$.



Do $CD \parallel AB$ nên $CD \perp (SMI) \Rightarrow ((SCD),(ABCD)) = \widehat{SIM}$.
Vẽ $SH \perp MI$ tại $H \in MI$ thì $SH \perp (ABCD)$.
$\triangle SMI$ có $SM^2 = MI^2 + SI^2 - 2MI \cdot SI \cos\widehat{SIM}$
$\Leftrightarrow 3a^2 = 4a^2 + SI^2 - 2aSI$
$\Leftrightarrow SI^2 - 2aSI + a^2 = 0 \Leftrightarrow SI = a$.

Cách 1:
Theo định lý Pythagore đảo thì $\triangle SMI$ vuông tại $S \Rightarrow SH = \dfrac{SM \cdot SI}{MI} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Gọi N là trung điểm cạnh BC ta có $AC \parallel MN$
$\Rightarrow \mathrm{d}(AC,SM) = \mathrm{d}(AC,(SMN)) = \mathrm{d}(C,(SMN)) = \dfrac{3V_{SMNC}}{S_{\triangle SMN}}$.
Ta có $V_{SMNC} = V_{S.MNB} = \dfrac{1}{3}SH \cdot \dfrac{1}{2}BM \cdot BN = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.
Tam giác SIC có $SC = \sqrt{SI^2 + IC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.
Tam giác SBC có $SN^2 = \dfrac{SB^2 + SC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4} = 2a^2 \Rightarrow SN = a\sqrt{2}$.
Tam giác SMN có nửa chu vi $p = \dfrac{SM + SN + MN}{2} = \dfrac{a\sqrt{3} + a\sqrt{2} + a\sqrt{2}}{2}$.
Và diện tích $\triangle SMN$ là $S_{\triangle SMN} = \sqrt{p(p - SM)(p - SN)(p - BC)} = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{4}$.

Vậy $\mathrm{d}(AC,SM) = \dfrac{3V_{SMNC}}{S_{\triangle SMN}} = \dfrac{3 \cdot \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}}{\dfrac{a^2\sqrt{15}}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

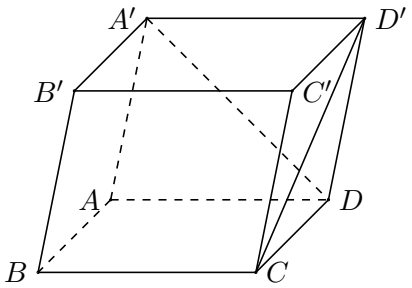
Cách 2:
Ta thấy $SM^2 + SI^2 = MI^2$ nên $\triangle SMI$ vuông tại S. Suy ra $SH = \dfrac{SM \cdot SI}{MI} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $HM = \dfrac{3a}{2}$.
Gọi $O = AC \cap BD$; N là trung điểm cạnh BC ta có $AC \parallel (SMN)$.
Do đó, $\mathrm{d}(AC,SM) = \mathrm{d}(AC,(SMN)) = \mathrm{d}(O,(SMN)) = \dfrac{2}{3}d(H,(SMN))$.

Gọi K là hình chiếu của H lên MN, ta có $\triangle HKM$ vuông cân tại K nên $HK = \dfrac{HM}{\sqrt{2}} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Vậy $\mathrm{d}(AC, SM) = \dfrac{2}{3}\dfrac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

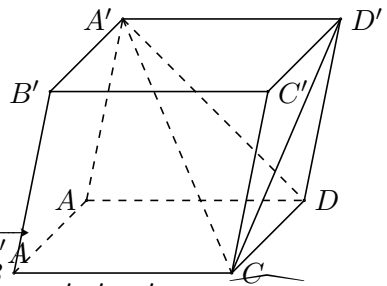
Chọn đáp án (A) □

Câu 397.
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng a, $\widehat{BCD} = \widehat{A'D'D} = \widehat{BB'A'} = 60^\circ$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'D$ và CD' bằng



A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B**. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.
C. $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **D**. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

✍Lời giải.
Từ dữ kiện đề bài, ta suy ra $CD' = a$; $A'D = a$, $\widehat{B'AA'} = 120^\circ$, $\widehat{AA'D'} = 120^\circ$.
Ta có

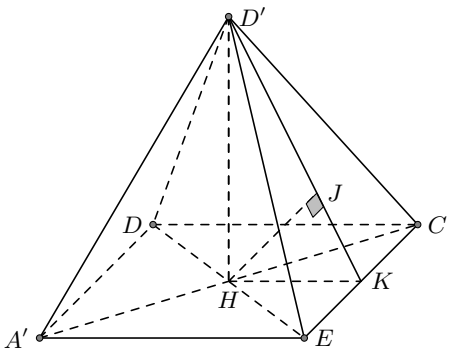


$$\begin{aligned} A'C^2 &= \overrightarrow{A'C}^2 \\ &= \left(\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{A'A}\right)^2 \\ &= A'B'^2 + A'D'^2 + A'A^2 + 2\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'D'} + 2\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'A} + 2\overrightarrow{A'D'} \cdot \overrightarrow{A'A} \\ &= a^2 + a^2 + a^2 + 2A'B' \cdot A'D' \cos \widehat{B'A'D'} + 2A'B' \cdot A'A \cos \widehat{B'A'A} + 2A'D' \cdot A'A \cos \widehat{D'A'A} \\ &= 3a^2 + 2 \cdot a \cdot a \cos 60^\circ + 2 \cdot a \cdot a \cos 120^\circ + 2 \cdot a \cdot a \cos 120^\circ \\ &= 2a^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow A'C = a\sqrt{2}$. Suy ra $\Delta A'DC$, $\Delta D'AC$ vuông cân lần lượt tại D và D'.
Gọi H là trung điểm của $A'C \Rightarrow DH \perp (A'D'C)$. Đặt $\mathrm{d}(A'D, CD') = h$.
Dựng hình chữ nhật $A'D'CE$ sao cho

$$\begin{aligned} h &= \mathrm{d}(A'D, (D'CE)) \\ &= \mathrm{d}(A', (D'CE)) \\ &= 2 \cdot \mathrm{d}(H, (D'CF)) \\ &= 2HJ. \end{aligned}$$

Gọi K là trung điểm CE: $HK = \dfrac{1}{2}DC = \dfrac{a}{2}$.
$D'H = \dfrac{1}{2}A'C = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ (Do $\Delta D'A'C$ vuông cân tại D').
Suy ra $\dfrac{1}{HJ^2} = \dfrac{1}{HK^2} + \dfrac{1}{D'H^2} = \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{2}{a^2} \Rightarrow HJ = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.
Vậy $\mathrm{d}(A'D, CD') = 2HJ = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.



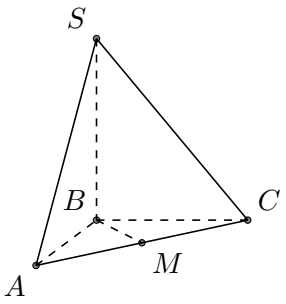
Chọn đáp án (B) □

Câu 398. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $AB = BC = 6$ cm và SB vuông góc với mặt phẳng (ABC). Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC là

A. 6 cm. **B**. $3\sqrt{2}$ cm. **C**. $6\sqrt{2}$ cm. **D**. 3 cm.

✍Lời giải.

Gọi M là trung điểm của AC.
Tam giác ABC vuông cân tại B nên $BM \perp AC$.
Mặt khác $BM \perp SB$ nên BM là đoạn vuông góc chung của SB và AC.
Suy ra $\mathrm{d}(AC, SB) = BM = \dfrac{AB\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ cm.



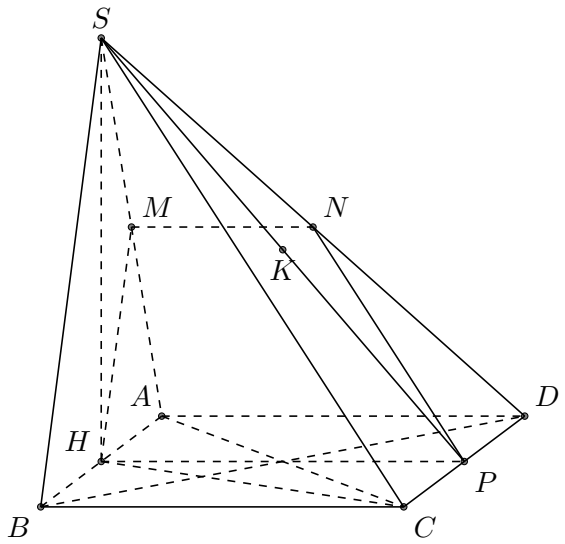
Chọn đáp án (B) □

Câu 399. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, SA, SD và P là giao điểm của (HMN) với CD. Khoảng cách từ trung điểm K của đoạn thẳng SP đến mặt phẳng (HMN) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{15}}{30}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{20}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{15}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{10}$.

✍Lời giải.

Xét hình chóp $S.ABCD$ trong hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.
Khi đó ta có
$H(0;0;0)$, $A\left(-\dfrac{a}{2};0;0\right)$, $B\left(\dfrac{a}{2};0;0\right)$,
$S\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $D\left(-a;\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$.
Có $MN \parallel AD$ nên suy ra P là trung điểm của CD.
Theo công thức trung điểm, ta suy ra
$M\left(-\dfrac{a}{4};0;\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$, $N\left(-\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{4};\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$,
$P\left(-\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $K\left(-\dfrac{a}{4};\dfrac{a\sqrt{3}}{4};\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$
Ta có $\overrightarrow{MN} = \left(-\dfrac{a}{4};\dfrac{a\sqrt{3}}{4};0\right)$, $\overrightarrow{HM} = \left(-\dfrac{a}{4};0;\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$.



Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (HMN) là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{HM}\right] = \left(\dfrac{3a^2}{16};\dfrac{a^2\sqrt{3}}{16};\dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}\right)$.

Phương trình mặt phẳng (HMN) là

$$\frac{3a^2}{16}(x-0) + \frac{a^2\sqrt{3}}{16}(y-0) + \frac{a^2\sqrt{3}}{16}(z-0) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x + y + z = 0.$$

Vậy khoảng cách cần tìm là $\mathrm{d}\left[K,(HMN)\right] = \dfrac{\left|-\dfrac{a\sqrt{3}}{4} + \dfrac{a\sqrt{3}}{4} + \dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right|}{\sqrt{3+1+1}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{20}$.

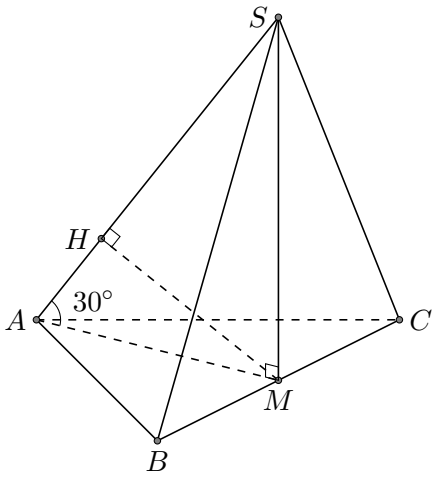
Chọn đáp án (B) □

Câu 400. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là một tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của BC. Cho SA hợp với đáy một góc 30°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

✍Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC. Do tam giác ABC đều nên $AM \perp BC$. Khi đó $\begin{cases} SM \perp BC \\ AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AMS)$.
Trong mặt phẳng (SAM) kẻ $MH \perp SA$. Theo chứng minh trên ta có $BC \perp MH$. Do đó $\mathrm{d}(SA, BC) = HM$.
Vì $SM \perp (ABC)$ nên $\widehat{(SA, (ABC))} = \widehat{(SA, AM)} = \widehat{SAM}$. Do giả thiết suy ra $\widehat{SAM} = 30^\circ$.
Xét tam giác vuông AMH ta có
$MH = AM \cdot \sin \widehat{HAM} = AM \cdot \sin 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.



Chọn đáp án D □

Câu 401. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là một hình thoi cạnh a, góc $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C$ và BB'.

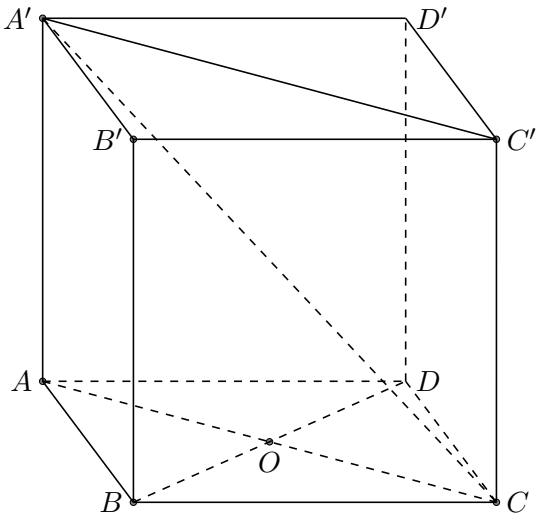
A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

✍Lời giải.

Do giả thiết suy ra $BB' \parallel (AA'C'C)$.
Do đó

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\left(BB', A'C\right) &= \mathrm{d}\left(BB', \left(AA'C'C\right)\right) \\ &= \mathrm{d}\left(B, \left(AA'C'C\right)\right) \end{aligned}$$

Vì $AA' \perp (ABCD)$ nên $AA' \perp BD$. Do $ABCD$ là hình thoi, ta suy ra $BD \perp AC$. Khi đó $BD \perp (AA'C'C)$. Giả sử $\{O\} = AC \cap BD$ suy ra $\mathrm{d}(B, (AA'C'C)) = OB$.
Vì $\widehat{ABC} = 120^\circ$ suy ra $\widehat{BAD} = 60^\circ$ do đó tam giác ABD là tam giác đều. Ta có $BD = a$ nên $OB = \dfrac{a}{2}$.



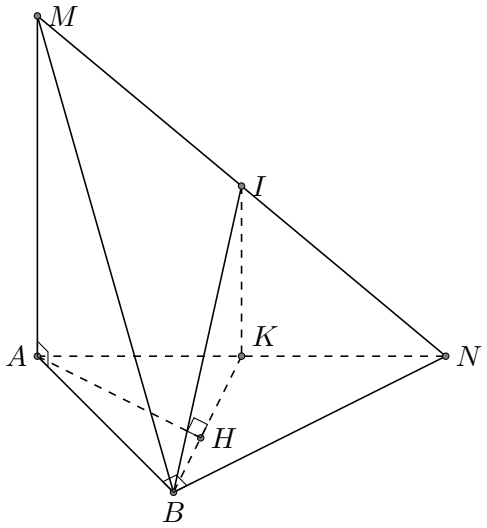
Chọn đáp án C □

Câu 402. Trong không gian cho hai đường thẳng chéo nhau d và Δ, vuông góc với nhau và nhận $AB = a$ làm đoạn vuông góc chung $A \in d$, $B \in \Delta$. Trên d lấy điểm M, trên Δ lấy điểm N sao cho $AM = 2a$, $BN = 4a$. Gọi I là tâm mặt cầu ngoài tiếp tứ diện $ABMN$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và BI là

A. $\dfrac{4a}{\sqrt{17}}$. **B.** a. **C.** $\dfrac{4a}{5}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{2}a}{3}$.

✍Lời giải.

Do giả thiết ta có
$\begin{cases} BN \perp AB \\ BN \perp AM \end{cases} \Rightarrow BN \perp (MAB)$.
Suy ra $BN \perp BM$. Chứng minh tương tự ta có $MA \perp (MAB)$ suy ra $AN \perp AM$.
Do đó hai điểm A, B nhìn MN dưới góc 90° nên A, B, M, N cùng thuộc mặt cầu đường kính MN.
Trong mặt phẳng (MAB) ta kẻ $IK \parallel MA$.
Trong mặt phẳng (NAB) ta kẻ $AH \perp BK$.
Theo chứng minh trên suy ra $IK \perp (ABN)$ nên $IK \perp AH$.



Khi đó $\begin{cases} AH \perp BK \\ AH \perp IK \end{cases} \Rightarrow AH \perp (IKB)$.
Do đó

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\,(AM, IB) &= \mathrm{d}\,(AM, (IKB)) \\ &= \mathrm{d}\,(A, (IKB)) = AH \end{aligned}$$

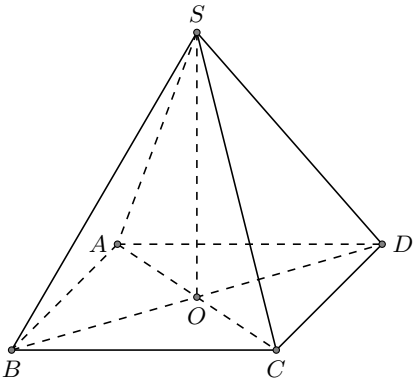
Xét tam giác vuông ABN ta có $AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = \sqrt{a^2 + (4a)^2} = \sqrt{17}a$.
Do cách dựng ta có $KA = KN$ nên $BK = \dfrac{AN}{2} = \dfrac{\sqrt{17}a}{2}$.
Ta có $\sin \widehat{BAN} = \dfrac{BN}{AN} = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$.
Mà $S_{\Delta ABK} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AK \cdot \sin \widehat{BAK} = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot \dfrac{\sqrt{17}a}{2} \cdot \dfrac{4}{\sqrt{17}}$.
Mặt khác $S_{\Delta ABK} = \dfrac{1}{2} \cdot AH \cdot BK = \dfrac{1}{2} \cdot AH \cdot \dfrac{\sqrt{17}a}{2}$. Suy ra $AH = \dfrac{4a}{\sqrt{17}}$.
Vậy khoảng cách giữa AM và BI bằng $\dfrac{4a}{\sqrt{17}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 403. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) là $a\sqrt{6}$. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD).

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $2\sqrt{6}a$. **D.** $a\sqrt{6}$.

Lời giải.
• Gọi O là giao điểm của 2 đường chéo AC, BD. Khi đó, O là giao điểm của AC và mặt phẳng (SBD).
• Ta có $\dfrac{\mathrm{d}(C,(SBD))}{\mathrm{d}(A,(SBD))} = \dfrac{OC}{OA} = 1$
nên $\mathrm{d}(C,(SBD)) = \mathrm{d}(A,(SBD)) = a\sqrt{6}$.



Chọn đáp án (D) □

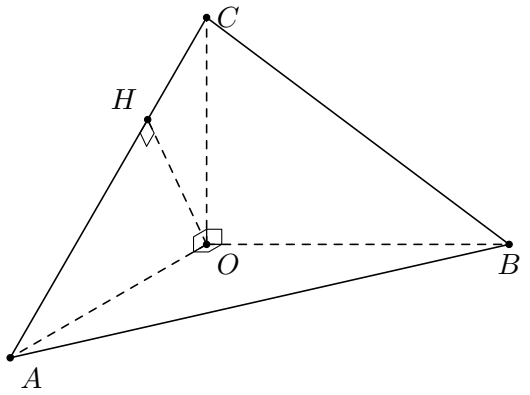
Câu 404. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OB = \dfrac{a}{2}$, $OA = 2OB$, $OC = 2OA$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng OB và AC bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{3a}{2\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

✍Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên cạnh AC. (1)
Ta có $OB \perp (OAC)$ nên $OB \perp OH$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra OH là đoạn vuông góc chung của OB và AC.
Do đó

$$\mathrm{d}(OB, AC) = OH = \frac{OA \cdot OC}{AC} = \frac{a \cdot 2a}{\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$



Chọn đáp án C □

Câu 405. Cho tứ diện $ABCD$ có ΔBCD vuông cân tại C và ABD là tam giác đều cạnh a nằm trong mặt phẳng vuông góc với mp(BCD). Tính khoảng cách giữa AC với BD.

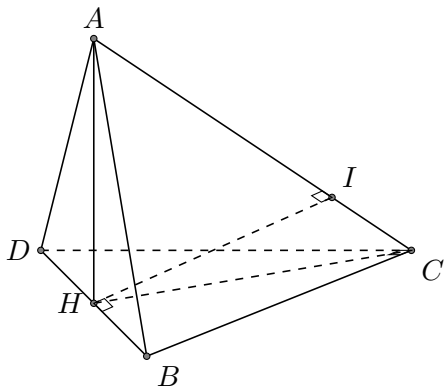
A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm BD nên từ giả thiết suy ra $AH \perp BD$ và $CH \perp BD$.
Khi đó $BD \perp (AHC)$.
Trong mặt phẳng (AHC), kẻ $HI \perp AC$.
Hơn nữa, từ $BD \perp (AHC)$ ta suy ra $HI \perp BD$.
Vậy HI là đoạn vuông góc chung của AC với BD.
Tam giác AHC vuông tai H có đường cao HI nên

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{HC^2} = \frac{1}{\frac{3a^2}{4}} + \frac{1}{\frac{a^2}{4}} = \frac{16}{3a^2}.$$

Vậy khoảng cách giữa AC và BD là $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.



Chọn đáp án B □

Câu 406. Cho $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$; góc giữa SC với $(ABCD)$ bằng $45°$. Khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác SBC đến mặt phẳng (SAC) bằng

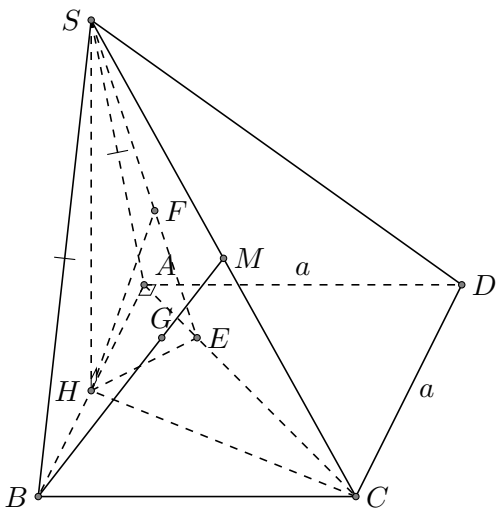
A. $\dfrac{a\sqrt{55}}{33}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{55}}{22}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{55}}{33}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{21}$.

✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AB.
Vì tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.
Khi đó góc giữa SC với $(ABCD)$ là $\widehat{SCH} = 45°$. Suy ra tam giác SCH vuông cân tại H nên

$$SH = CH = \sqrt{BC^2 + BH^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Ta có $\dfrac{\mathrm{d}(G,(SAC))}{\mathrm{d}(B,(SAC))} = \dfrac{GM}{BM} = \dfrac{1}{3}$ (với M là trung điểm SC).
Hơn nữa $\dfrac{\mathrm{d}(B,(SAC))}{\mathrm{d}(H,(SAC))} = \dfrac{BA}{HA} = 2$.
Khi đó $\mathrm{d}(G,(SAC)) = \dfrac{2}{3}\mathrm{d}(H,(SAC))$.



Kẻ $HE \perp AC$ (trong mặt phẳng $(ABCD)$). Khi đó $AC \perp (SHE)$.
Kẻ $HF \perp SE$ (trong mặt phẳng (SHE)). Khi đó $HF \perp (SAC)$ hay $HF = \mathrm{d}(H,(SAC))$.
Ta có tam giác AHE vuông cân tại E và $AH = \dfrac{a}{2}$ nên $HE = \dfrac{a}{2\sqrt{2}}$.
Hơn nữa, vì tam giác SHE vuông tại H và có đường cao HF nên

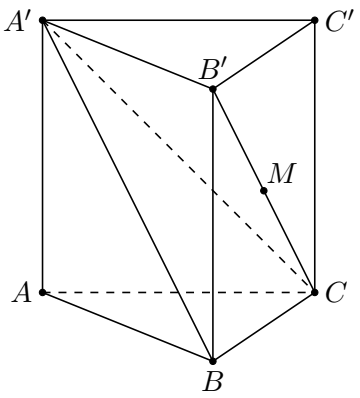
$$\frac{1}{HF^2} = \frac{1}{HE^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{4}{5a^2} + \frac{8}{a^2} \Leftrightarrow HF = \frac{\sqrt{55}a}{22}.$$

Vậy khoảng cách cần tìm là $\mathrm{d}(G,(SAC)) = \dfrac{2}{3}\mathrm{d}(H,(SAC)) = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{55}a}{22} = \dfrac{2\sqrt{55}a}{33}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 407.

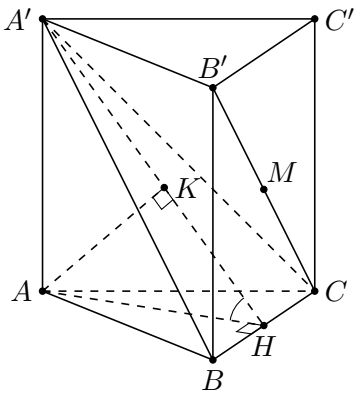
Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(A'B'C')$ bằng $60°$, M là trung điểm của $B'C$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(A'BC)$.



A. $\dfrac{3}{8}a$. **B.** $\dfrac{1}{3}a$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}a$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$.

✍Lời giải.

Ta có $\dfrac{\mathrm{d}(M,(A'BC))}{\mathrm{d}(B,(A'BC))} = \dfrac{MC}{B'C} = \dfrac{1}{2}$; $\mathrm{d}(B',(A'BC)) = \mathrm{d}(A,(A'BC))$.
Vì $(A'B'C') \parallel (ABC)$ nên góc giữa $(A'BC)$ và $(A'B'C')$ bằng góc giữa $(A'BC)$ và (ABC).
Kẻ $AH \perp BC$ tại $H \Rightarrow A'H \perp BC$. Suy ra, $\widehat{A'HA}$ là góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC). Do đó, $\widehat{A'HA} = 60°$.
Kẻ $AK \perp A'H$ tại $K \Rightarrow AK \perp (A'BC)$.
Do đó, $\mathrm{d}(A,(A'BC)) = AK$.
Ta có $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $A'A = AH \cdot \tan\widehat{A'HA} = \dfrac{3a}{2}$.



Tam giác $A'AH$ vuông tại A có AK là đường cao, suy ra $AK = \dfrac{AA' \cdot AH}{\sqrt{AA'^2 + AH^2}} = \dfrac{3a}{4}$.
Vậy $\mathrm{d}(M,(A'BC)) = \dfrac{1}{2}AK = \dfrac{3a}{8}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 408. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = \dfrac{3a}{2}$. Tính khoảng cách giữa BD và SC.

A. $\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{5a\sqrt{2}}{12}$. **D.** $\dfrac{5a\sqrt{2}}{4}$.

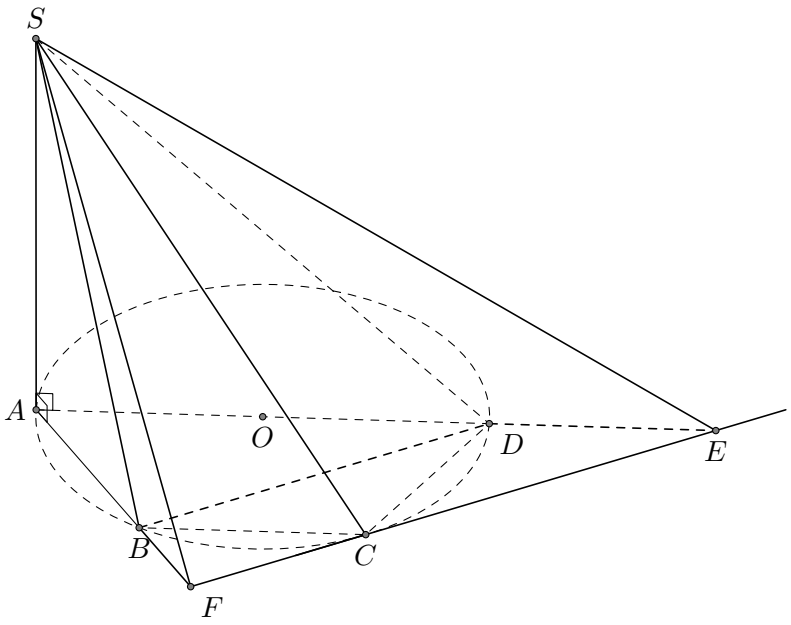
✍Lời giải.

Kẻ đường thẳng CE song song với BD $(E \in AD); CE \cap AB = F$. Khi đó $\mathrm{d}(BD, SC) = \mathrm{d}(BD, (SCE)) = \mathrm{d}(D, (SCE)) = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}(A; (SCE))$. Ta có tam giác AFE vuông tại F và $AF = \dfrac{3a}{2}$.

Hạ $AH \perp SF$ tại $H \Rightarrow AH \perp (SCE)$.

$\Rightarrow \mathrm{d}(A; (SCE)) = AH = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Từ đó có $\mathrm{d}(BD, SC) = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.



Chọn đáp án B □

Câu 409. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng $a > 0$. Khi đó khoảng cách từ đỉnh A đến mặt phẳng (BCD) bằng

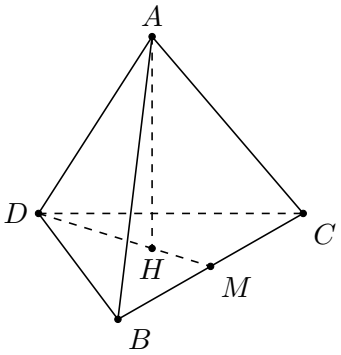
A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{8}}{3}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của A trên mặt phẳng (DBC). Khi đó $\mathrm{d}(A, (DBC)) = AH$. Vì $AD = AB = AC$ nên $HD = HB = HC$

hay H là trọng tâm của tam giác ABC. Ta có $DH = \dfrac{2}{3}DM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.



Chọn đáp án B □

Câu 410. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với $(ABCD)$, $ABCD$ là hình thang vuông có đáy lớn AD gấp đôi đáy nhỏ BC, đồng thời đường cao $AB = BC = a$. Biết $SA = a\sqrt{3}$, khi đó khoảng cách từ đỉnh B đến đường thẳng SC là

A. $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $a\sqrt{10}$. **D.** $2a$.

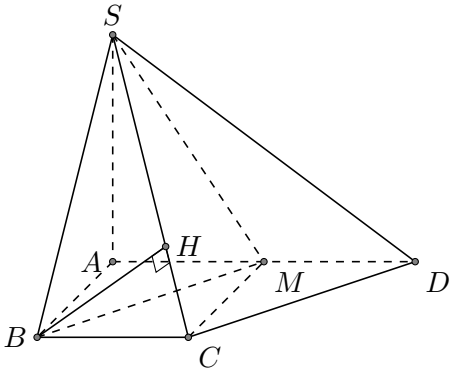
Lời giải.

Kẻ $BH \perp SC$ $(H \in SC)$ thì $\mathrm{d}(B, SC) = BH$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$. Suy ra $\triangle SBC$ vuông tại B. Xét tam giác SBC, ta có

$\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{SB^2} + \dfrac{1}{BC^2} = \dfrac{1}{SA^2 + AB^2} + \dfrac{1}{BC^2} = \dfrac{5}{4a^2}$.

$\Rightarrow BH = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.



Chọn đáp án B □

Câu 411. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy $\triangle ABC$ đều cạnh a tâm O. Hình chiếu của C' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của $\triangle ABC$. Cạnh bên CC' tạo với mặt phẳng đáy (ABC) một góc $60°$.

Tính khoảng cách từ O đến đường thẳng $A'B'$.

A. $\dfrac{7a}{4}$. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$. **D.** $\dfrac{7a}{2}$.

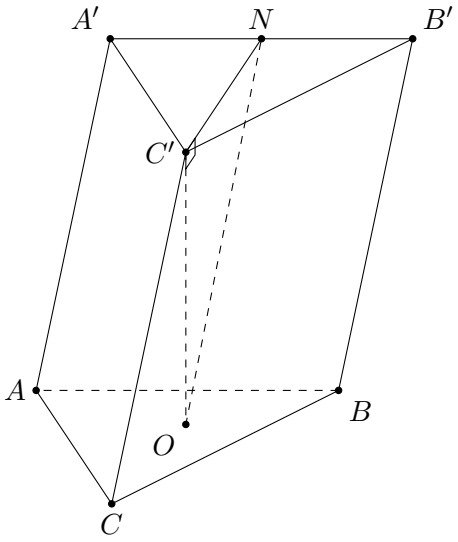
✍Lời giải.

Gọi N là trung điểm $A'B'$, ta có $A'B' \perp (OC'N)$ nên khoảng cách từ O đến $A'B'$ chính là đoạn ON.

Ta có $C'N = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $OC = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $OC' = OC \cdot \tan 60^\circ = a$.

Mà $A'B' \perp (OC'N)$ nên $\triangle OC'N$ vuông tại C', suy ra

$$ON = \sqrt{OC'^2 + C'N^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$



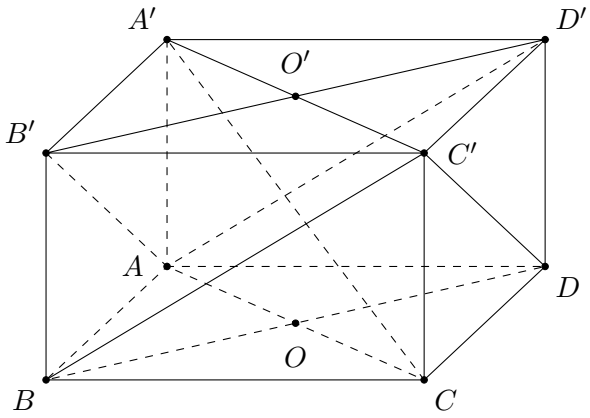
Chọn đáp án C □

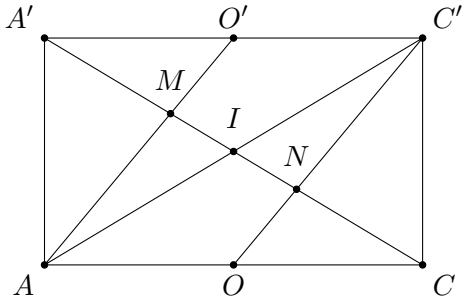
Câu 412. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = b$, $CC' = c$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AD'B')$ và $(C'BD)$.

A. $\dfrac{abc}{6\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$. **B.** $\dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$.

C. $\dfrac{abc}{3\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$. **D.** $\dfrac{abc}{2\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$.

✍Lời giải.





Gọi thêm các điểm như hình vẽ. khi đó M, N là giao điểm của $A'C$ với mặt phẳng $(AD'B')$ và mặt phẳng $(C'BD)$.

Do I là trung điểm $A'C$ và M, N là trọng tâm $\triangle AA'O'$ và $\triangle CC'O$ nên suy ra $A'M = MN = NC$.

Lại có $(AB'D') \parallel (C'BD)$. Từ đó ta có $\mathrm{d}(A', (AB'D')) = \mathrm{d}((AB'D'), (C'BD))$.

Mà $\dfrac{1}{\mathrm{d}^2(A', (AB'D'))} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{A'B'^2} + \dfrac{1}{A'D'^2} \Rightarrow \mathrm{d}(A', (AB'D')) = \dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$.

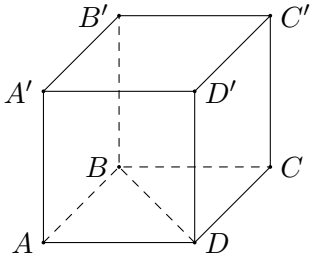
Chọn đáp án B □

Câu 413.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1 (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BD bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 1.

C. $\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

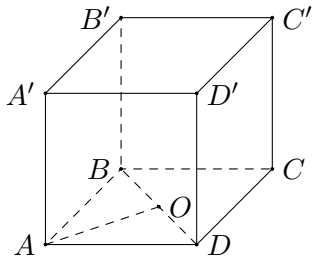


✍Lời giải.

Gọi O là trung điểm của BD.

Ta có $\begin{cases} AO \perp AA' \\ AO \perp BD. \end{cases}$

Suy ra $\mathrm{d}(AA', BD) = AO = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 414. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a > 0$, $AC = BD = b > 0$, $AD = BC = c > 0$. Các biểu thức $a^2 + b^2 - c^2$, $a^2 + c^2 - b^2$, $c^2 + b^2 - a^2$ đều có giá trị dương. Khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. $d = \sqrt{\dfrac{b^2 + c^2 + a^2}{2}}$. **B.** $d = \sqrt{\dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2}}$. **C.** $d = \sqrt{\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}$. **D.** $d = \sqrt{\dfrac{b^2 + a^2 - c^2}{2}}$.

✍Lời giải.

Gọi E, F lần lượt là trung điểm cảu AB và CD.

Dễ chứng minh được các tam giác CED cân tại E và tam giác AFB cân tại F.

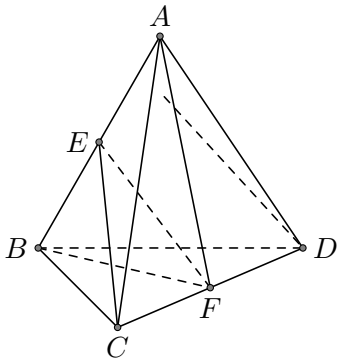
Suy ra EF là đoạn vuông góc chung của AB và CD. Vậy $\mathrm{d} = EF$.

Trong tam giác ABC trung tuyến $CE^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$.

Trong tam giác CFE vuông tại F có:

$FE = \sqrt{CE^2 - CF^2} = \sqrt{\left(\dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}\right) - \dfrac{a^2}{4}}$.

Suy ra $d = EF = \sqrt{\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 415. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD.

A. $2a$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** a.

✍Lời giải.

Vì $CD \parallel AB$ nên $CD \parallel (SAB)$.

Mà $SB \subset (SAB)$ nên

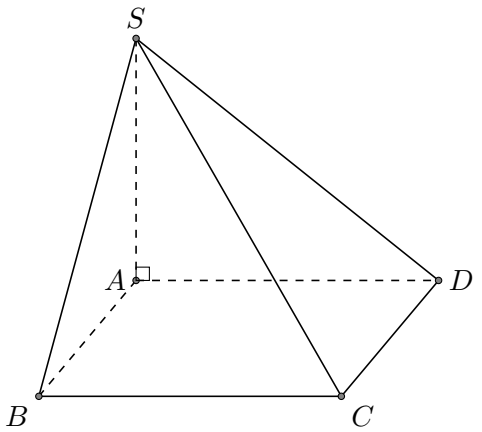
$$\mathrm{d}(CD, SB) = \mathrm{d}\left[CD, (SAB)\right] = \mathrm{d}\left[D, (SAB)\right].$$

Ta có $\begin{cases} DA \perp SA \, (SA \perp (ABCD)) \\ DA \perp AB \end{cases} \Rightarrow DA \perp (SAB)$,

do đó

$$\mathrm{d}\left[D, (SAB)\right] = DA = a.$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là a.



Chọn đáp án (D) □

Câu 416. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a, $\widehat{ABC} = 60°$, $SO \perp (ABCD)$ và $SO = \dfrac{3a}{4}$. Đặt $x = \mathrm{d}\left(O, (SAB)\right)$, $y = \mathrm{d}\left(D, (SAB)\right)$, $z = \mathrm{d}\left(CD, SA\right)$. Tổng $x + y + z$ bằng

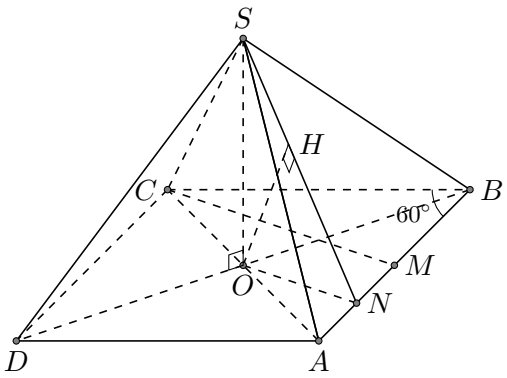
A. $\dfrac{15a}{8}$. **B.** $\dfrac{15a}{4}$. **C.** $\dfrac{9a}{8}$. **D.** $\dfrac{15a\sqrt{13}}{26}$.

✍Lời giải.

Tam giác ABC đều cạnh a nên đường cao $CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi N là trung điểm của $AM \Rightarrow ON \perp AB$ và $ON = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Kẻ $OH \perp SN \Rightarrow \mathrm{d}\,(O,(SAB)) = OH$.
$\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{ON^2}$; $ON = \dfrac{1}{2}CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$; $SO = \dfrac{3a}{4} \Rightarrow$
$OH = \dfrac{3a}{8}$.
$x = \mathrm{d}\,(O,(SAB)) = \dfrac{3a}{8}$.
$y = \mathrm{d}\,(D,(SAB)) = 2\mathrm{d}\,(O,(SAB)) = 2x$
$z = \mathrm{d}\,(CD,SA) = \mathrm{d}\,(D,(SAB)) = 2x$.
Vậy $x + y + z = 5x = \dfrac{15a}{8}$.



Chọn đáp án (A) □

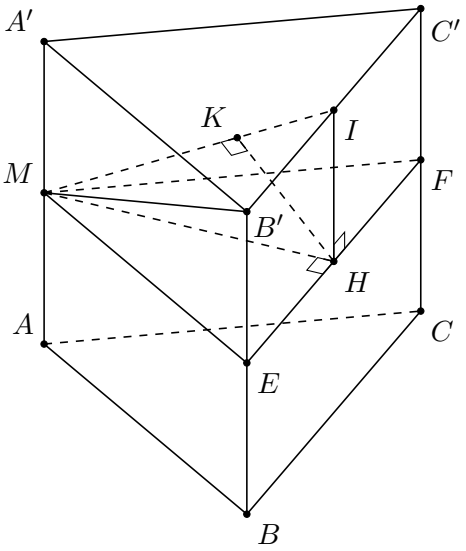
Câu 417. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. M là trung điểm của AA'. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng MB' và BC.

A. a. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.
Gọi E, F lần lượt là trung điểm BB' và CC'.
Gọi H, I lần lượt là trung điểm EF và $B'C'$.
Gọi K là hình chiếu vuông góc của H lên MI.
Ta có $EF \parallel B'C' \Rightarrow EF \parallel (MB'C')$.
Ta được

$$\mathrm{d}(MB', BC) = 2\mathrm{d}(MB', EF) = 2\mathrm{d}(EF, (MB'C')) = 2HK.$$

Ta có $\triangle MEF$ đều cạnh a nên $MH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.
Ta có $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{MH^2} + \dfrac{1}{HI^2} \Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Vậy $\mathrm{d}(MB', BC) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

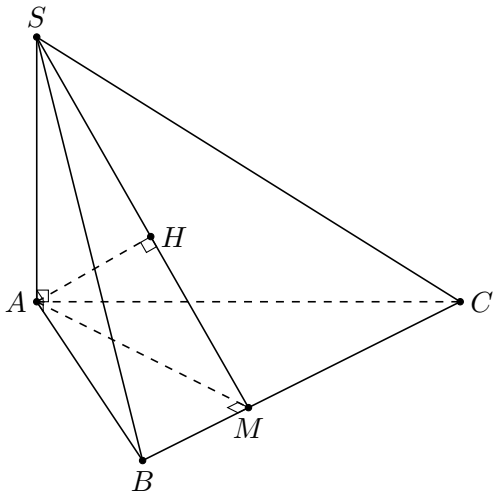


Chọn đáp án (D) □

Câu 418. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, biết $SA \perp (ABC)$ và $AB = 2a$, $AC = 3a$, $SA = 4a$. Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBC).

A. $d = \dfrac{12a\sqrt{61}}{61}$. **B.** $d = \dfrac{2a}{\sqrt{11}}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{43}}{12}$. **D.** $d = \dfrac{6a\sqrt{29}}{29}$.

✍Lời giải.
Kẻ $AM \perp BC$ tại M. Kẻ $AH \perp SM$ tại H.
Vì $\begin{cases} SA \perp BC \\ AM \perp \end{cases}$ nên $BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp AH$.
Từ $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SM \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$.
Nên AH là khoảng cách từ A đến (SBC).
Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$
$\Rightarrow AH = \dfrac{12a\sqrt{61}}{61}$.

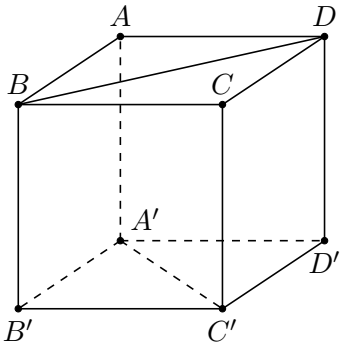


Chọn đáp án (A) □

Câu 419.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và $A'C'$ bằng

A. $\sqrt{3}a$. **B.** a. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **D.** $\sqrt{2}a$.

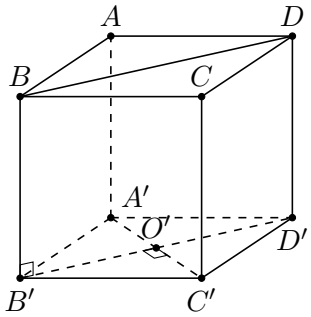


✍Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} B'O' \perp A'C' \\ B'O' \perp BB' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}(BB', A'C') = B'O' = \frac{B'D'}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



Chọn đáp án C □

Câu 420. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = AC = a$. Biết tam giác SAB có $\widehat{ABS} = 60^\circ$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) theo a.

A. $d = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $d = 3\sqrt{3}$. **C.** $d = 2a\sqrt{3}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

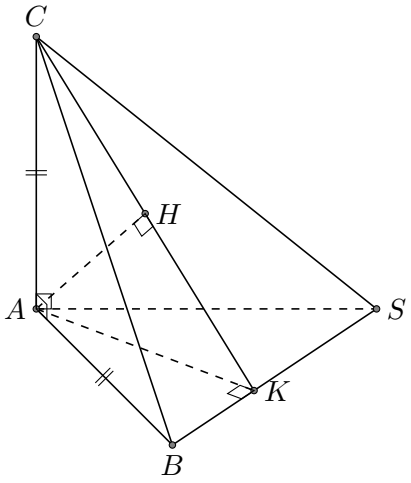
Ta có $\begin{cases} CA \perp AB \\ (ABC) \perp (SAB) \\ (ABC) \cap (SAB) = AB \end{cases} \Rightarrow CA \perp (SAB).$

Kẻ $AK \perp SB$ tại K và $AH \perp CK$ tại H.

Ta có $\begin{cases} SB \perp AK \\ SB \perp CA \end{cases} \Rightarrow SB \perp (ACK) \Rightarrow SB \perp AH.$

Do $\begin{cases} AH \perp CK \\ AH \perp SB \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow \mathrm{d}(A;(SBC)) = AH.$

Xét $\triangle ABK$, ta có $AK = AB \cdot \sin\widehat{ABK} = a\sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Xét $\triangle ACK$, ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AK^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{7}{3a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án A □

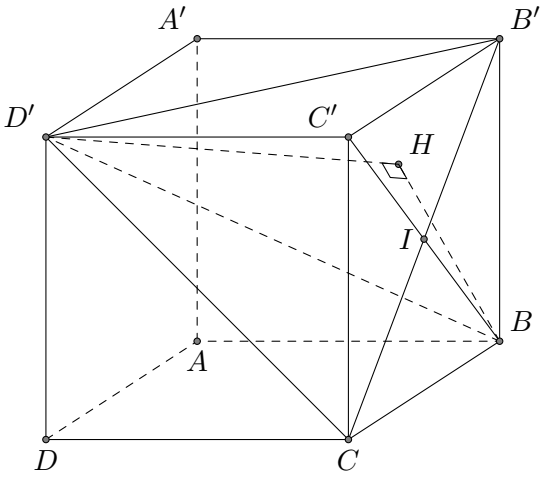
Câu 421. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB = a\sqrt{2}$, $AD = a\sqrt{6}$, $AA' = 2a\sqrt{2}$. Tính côsin của góc giữa đường thẳng BD' và mặt phẳng $(B'D'C)$.

A. $\sqrt{\dfrac{35}{38}}$. **B.** $\sqrt{\dfrac{1}{3}}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$. **D.** $\sqrt{\dfrac{3}{11}}$.

✍Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên mặt phẳng $(B'D'C)$, suy ra $D'H$ là hình chiếu của $D'B$ trên mặt phẳng $(B'D'C)$. Do đó góc $\widehat{BD'H} = \varphi$ là góc giữa đường thẳng BD' và mặt phẳng $(B'D'C)$.
Gọi I là giao điểm của $B'C$ và CB', ta có I là trung điểm của $BC' \Rightarrow \mathrm{d}(B,(B'D'C)) = \mathrm{d}(C',(B'D'C))$.
Xét $\triangle BD'H$, ta có

$$\sin\varphi = \frac{BH}{D'B} = \frac{\mathrm{d}(B,(B'D'C))}{D'B} = \frac{\mathrm{d}(C',(B'D'C))}{D'B} \quad (*).$$



Xét tứ diện $C'.D'B'C$ có $C'D'$; $C'B'$; $C'C$ đôi một vuông góc với nhau tại C', ta có

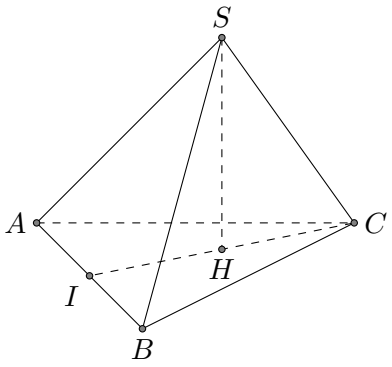
$$\frac{1}{\mathrm{d}^2(B,(B'D'C))} = \frac{1}{CC'^2} + \frac{1}{C'B^2} + \frac{1}{C'D'^2} = \frac{19}{24a^2} \Rightarrow \mathrm{d}(C',(B'D'C)) = a\sqrt{\frac{24}{19}}.$$

Mà độ dài đường chéo hộp $DB' = \sqrt{2a^2+6a^2+8a^2} = 4a$.
Từ $(*)$, suy ra $\sin\varphi = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{6}{19}} \Rightarrow \cos\varphi = \sqrt{\frac{35}{38}}$.

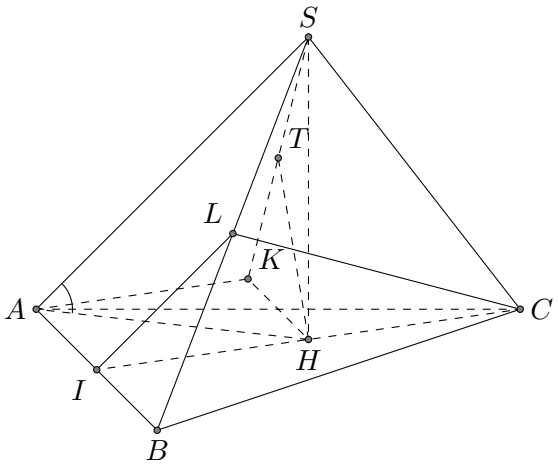
Chọn đáp án (A) □

Câu 422.
Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $2a$. Gọi I là trung điểm của AB. Biết hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của CI, góc giữa SA và mặt đáy bằng $60°$ (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CI bằng

A. $\frac{a\sqrt{57}}{19}$. **B.** $\frac{a\sqrt{7}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{5}$. **D.** $\frac{a\sqrt{42}}{8}$.



✍Lời giải.
Vì AH là hình chiếu của SA lên mặt đáy nên góc giữa SA và mặt đáy bằng góc $\widehat{SAH}$, suy ra $\widehat{SAH} = 60°$.
Gọi L là trung điểm SB, K là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật $HIAK$. Khi đó $(SAK) \parallel (LIC)$. Suy ra khoảng cách giữa SA và CI bằng khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SAK).
Ta có $AK \perp (SKH)$, do đó nếu trong $\triangle SHK$ ta kẻ $HT \perp SK$ thì $HT \perp (SAK)$. Từ đó, khoảng cách từ H đến (SAK) bằng HT.



Ta có $HK = \frac{AB}{2} = a$, $SH = AH\cdot\tan 60° = \sqrt{a^2+\left(\frac{1}{2}\cdot a\sqrt{3}\right)^2}\cdot\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{21}}{2}$,

$$HT = \frac{HK\cdot HS}{\sqrt{HK^2+HS^2}} = \frac{a\cdot\frac{a\sqrt{21}}{2}}{\sqrt{a^2+\frac{21a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{21}}{5}.$$

Vậy khoảng cách giữa SA và CI bằng $\frac{a\sqrt{21}}{5}$.

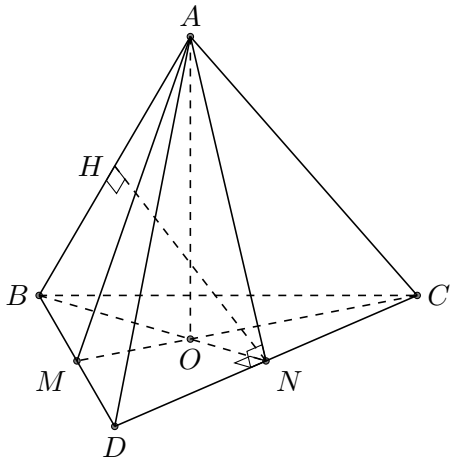
Chọn đáp án C □

Câu 423. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD.

A. $\mathrm{d}(AB,CD)=\dfrac{3a}{2}$. **B.** $\mathrm{d}(AB,CD)=a$. **C.** $\mathrm{d}(AB,CD)=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\mathrm{d}(AB,CD)=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

✍Lời giải.

Lấy N, H lần lượt là trung điểm của CD, AB.



Theo bài ra, hai tam giác ACD và BCD đều, suy ra $\begin{cases}AN\perp CD\\BN\perp CD\end{cases}\Rightarrow$ $CD\perp(ABN)\Rightarrow CD\perp NH$. (1)

Hơn nữa, $AN=BN=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ suy ra tam giác ABN cân tại N, suy ra $NH\perp AB$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\mathrm{d}(AB,CD)=NH$.

Xét tam giác vuông AHN, có

$$NH=\sqrt{AN^2-AH^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}-\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy $\mathrm{d}(AB,CD)=NH=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

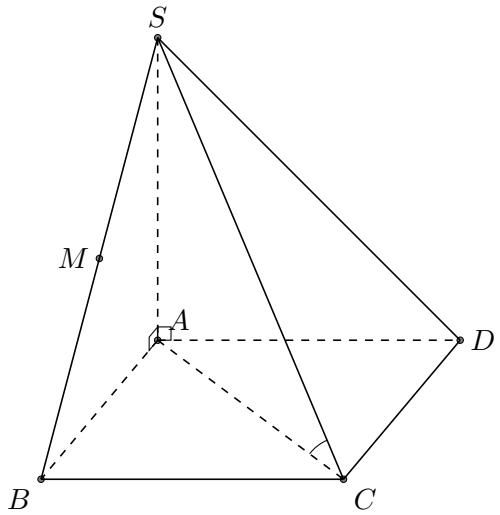
Chọn đáp án D □

Câu 424.

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB=a$, $AD=a\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60°. Gọi M là trung điểm của cạnh SB (*tham khảo hình vẽ*). Tính khoảng cách từ điểm M tới mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $\mathrm{d}\left(M,(ABCD)\right)=\dfrac{a}{2}$. **B.** $\mathrm{d}\left(M,(ABCD)\right)=\dfrac{3a}{2}$.

C. $\mathrm{d}\left(M,(ABCD)\right)=2a\sqrt{3}$. **D.** $\mathrm{d}\left(M,(ABCD)\right)=a\sqrt{3}$.



✍Lời giải.

Do $SA\perp(ABCD)$ suy ra góc giữa SC và đáy là $\widehat{SCA}=60^\circ$. (1)

Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên $AC=a\sqrt{3}$. (2)

Trong tam giác vuông SAC có $SA=AC\cdot\tan 60^\circ=3a$.

Do M là trung điểm cạnh SB nên $\mathrm{d}(M,(ABCD))=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}(S,(ABCD))=\dfrac{3a}{2}$.

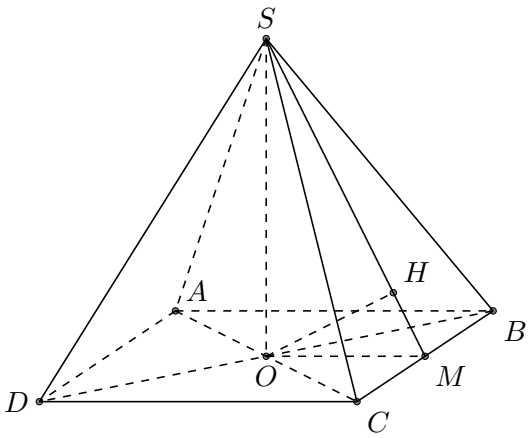
Chọn đáp án B □

Câu 425. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O, có cạnh a và có góc $\widehat{BAD}=60^\circ$. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO=\dfrac{3a}{4}$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) là

A. $\dfrac{3\sqrt{2}a}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{3a}{4}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$.

✍Lời giải.

• Gọi O là giao điểm của AC và BD, H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (SBC).
Ta có $\mathrm{d}(A,(SBC)) = 2\mathrm{d}(O,(SBC)) = 2OH$.
• $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên $\widehat{OCB} = 30^\circ$.
Do đó $OB = \dfrac{a}{2}$ và $OC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
• $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$. Do đó $OSBC$ là một tam diện vuông.



Ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{4}{a^2} + \frac{16}{9a^2} = \frac{64}{9a^2}.$$

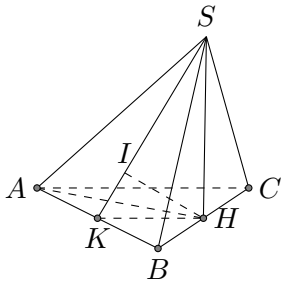
Suy ra $OH = \dfrac{3}{8}a \Rightarrow \mathrm{d}(A,(SBC)) = \dfrac{3}{4}a$.
Chọn đáp án C □

Câu 426. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC} = 30^\circ$, tam giác SBC là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách h từ điểm C đến mặt phẳng (SAB).

A. $h = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$. **B.** $h = \dfrac{a\sqrt{39}}{13}$. **C.** $h = \dfrac{a\sqrt{39}}{26}$. **D.** $h = \dfrac{a\sqrt{39}}{52}$.

✍Lời giải.

• Gọi H là hình chiếu của S lên $(ABC) \Rightarrow H$ là trung điểm của BC. Gọi K là trung điểm của AB, do $\triangle ABC$ vuông tại A nên $AB \perp HK$. Lại có $AB \perp SH$ nên $AB \perp (SHK)$. Gọi I là hình chiếu của H trên SK, ta có $HI \perp (SAB)$.
• Ta có $\dfrac{\mathrm{d}(C,(SAB))}{\mathrm{d}(H,(SAB))} = 2 \Rightarrow \mathrm{d}(C,(SAB)) = 2\mathrm{d}(H,(SAB)) = 2HI$.



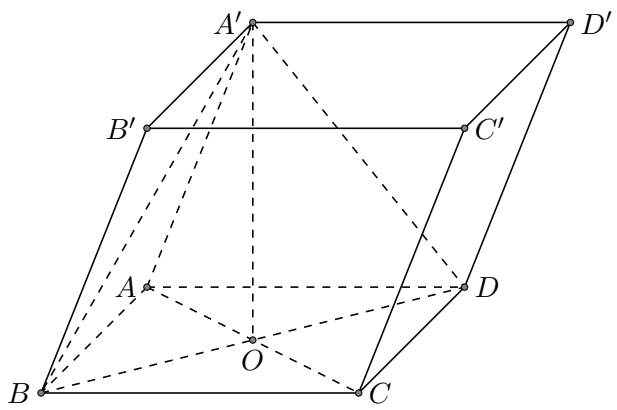
• Ta có $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $HK = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a}{4}$. Tam giác SHK vuông tại H, có HI là đường cao nên

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{16}{a^2} = \frac{52}{3a^2} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{39}}{26}.$$

Vậy $\mathrm{d}(C,(SAB)) = \dfrac{a\sqrt{39}}{13}$.
Chọn đáp án B □

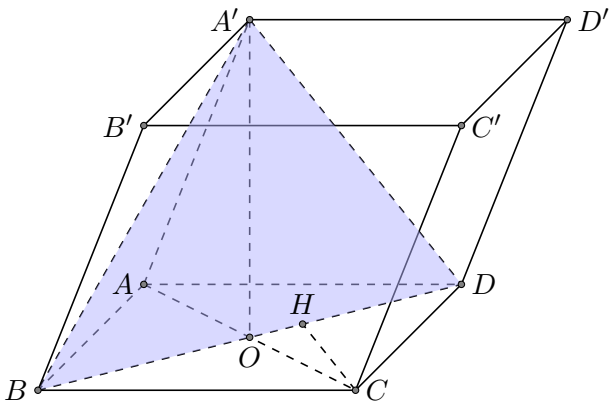
Câu 427.
Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD. Tính khoảng cách từ điểm B' đến mặt phẳng $(A'BD)$.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.



✍Lời giải.

• Ta có $B'C$ song song với $(A'BD)$ nên $\mathrm{d}(B',(A'BD)) = \mathrm{d}(C,(A'BD))$.
• Gọi H là hình chiếu của C lên BD. Khi đó $CH \perp (A'BD)$ nên $\mathrm{d}(C,(A'BD)) = CH$.
• Ta có
$CH = CD \cdot \sin\widehat{ODC} = a \cdot \dfrac{BC}{BD} = a \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



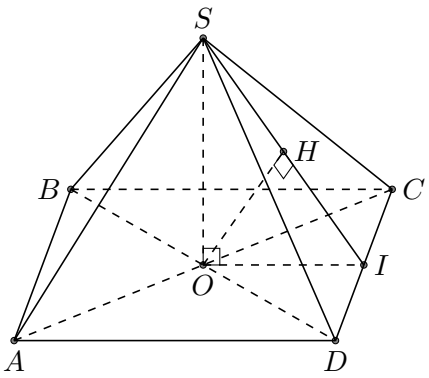
Chọn đáp án C ☐

Câu 428. Cho hình chóp $S.ABCD$ đều có $AB = 2a, SO = a$ với O là giao điểm của AC và BD. Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi I là trung điểm của CD và H là trung điểm SI.
Vì $SC = SD$ nên $SI \perp CD$ mà $SO \perp CD \Rightarrow CD \perp (SOI)$.
Suy ra $CD \perp OH$. (1)
Lại có $OI = \dfrac{BC}{2} = a$ nên $\triangle SOI$ cân tại $O \Rightarrow OH \perp SI$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $OH \perp (SCD)$.
Dẫn tới $\mathrm{d}\,[O,(SCD)] = OH = \dfrac{SI}{2} = \dfrac{SO\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án D ☐

Câu 429. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC = a$. Gọi M là trung điểm của BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OM bằng

A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{2a}{3}$. **C.** $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

✍Lời giải.

Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ sao cho OA, OB, OC lần lượt là Ox, Oy, Oz và $A(a;0;0)$, $B(0;a;0)$, $C(0;0;a)$, $M\left(0;\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{AB} = (-a;a;0)$, $\overrightarrow{OA} = (a;0;0)$, $\overrightarrow{OM} = \left(0;\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2}\right)$.

Ta có $d(AB,OM) = \dfrac{\left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{OM}\right)\overrightarrow{OA}\right|}{\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{OM}\right|} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 430. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC = a$. Gọi M là trung điểm của BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OM bằng

A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{2a}{3}$. **C.** $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

✍Lời giải.

Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ sao cho OA, OB, OC lần lượt là Ox, Oy, Oz và $A(a;0;0)$, $B(0;a;0)$, $C(0;0;a)$, $M\left(0;\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{AB} = (-a;a;0)$, $\overrightarrow{OA} = (a;0;0)$, $\overrightarrow{OM} = \left(0;\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2}\right)$.

Ta có $d(AB,OM) = \dfrac{\left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{OM}\right)\overrightarrow{OA}\right|}{\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{OM}\right|} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 431. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 6. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. $3\sqrt{3}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** 3. **D.** 4.

✍Lời giải.

Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Ta có $AK = BK = \dfrac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ (đường cao của hai tam giác đều ACD và BCD)

$\Rightarrow$ tam giác ABK cân tại K

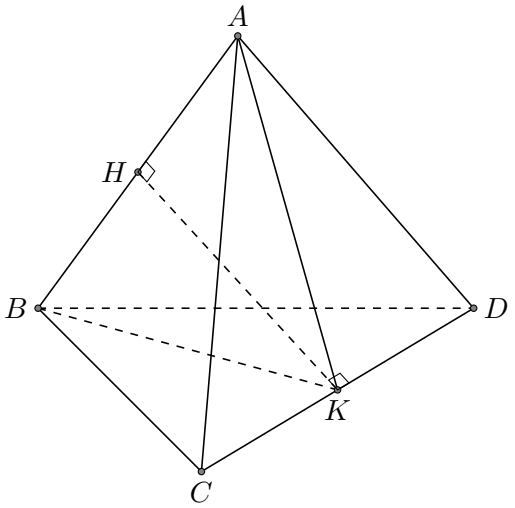
$\Rightarrow HK \perp AB$. (1)

Mặt khác $CD \perp (ABK)$ (do $AK \perp CD$, $BK \perp CD$)

$\Rightarrow HK \perp CD$. (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow HK$ là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AB và CD.

$\Rightarrow \mathrm{d}(AB, CD) = HK = \sqrt{AK^2 - AH^2} = 3\sqrt{2}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 432. Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Tính khoảng cách từ A đến mặt bên (SBC).

A. $a\sqrt{6}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

✍Lời giải.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, M là trung điểm của BC, H là hình chiếu của O trên SM.

$\mathrm{d}(A, (SBC)) = 2\mathrm{d}(O, (SBC))$.

$\begin{cases} BC \perp OM \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOM) \Rightarrow (SOM) \perp (SBC)$.

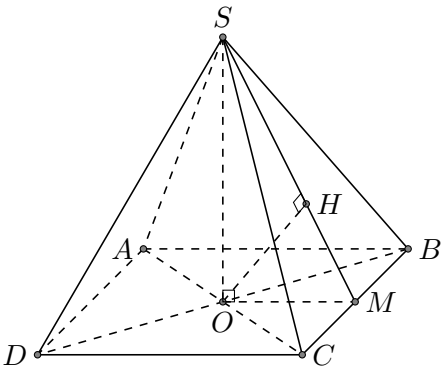
$\Rightarrow OH \perp (SBC)$ nên $\mathrm{d}(O, SBC) = OH$.

Ta có $SO = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $OM = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Xét $\triangle SOM$ vuông tại O ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OM^2} + \dfrac{1}{SO^2} = \dfrac{6}{a^2}$.

$\Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Vậy $\mathrm{d}(A, (SBC)) = 2 \cdot OH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

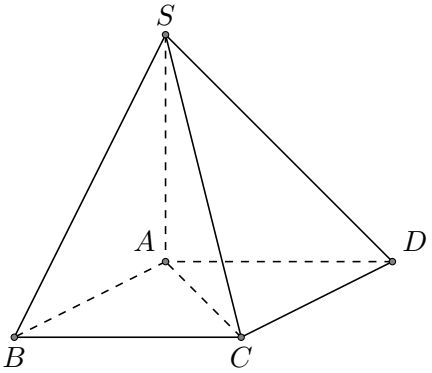


Chọn đáp án (D) □

Câu 433.

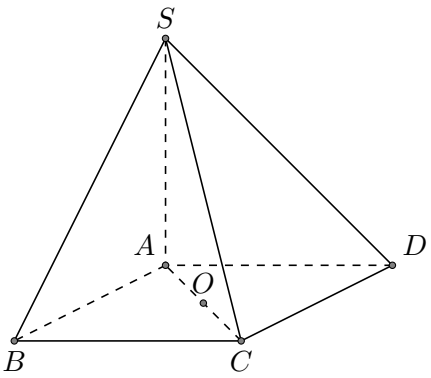
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. (Tham khảo hình vẽ bên). Khi đó khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) bằng

A. $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $2a$. **D.** a.



✍Lời giải.

Gọi O là trung điểm của AC.
Do $ABCD$ là hình vuông nên $OB \perp AC$.
Do $SA \perp (ABCD)$ và OB nằm trên mặt phẳng $(ABCD)$ nên $SA \perp OB$.
Do $OB \perp AC$ và $OB \perp SA$ nên $OB \perp (SAC)$, hay $BO = \mathrm{d}(B,(SAC))$.
Do BO có độ dài bằng nửa đường chéo hình vuông cạnh a nên $BO = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.



Vậy khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) bằng $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

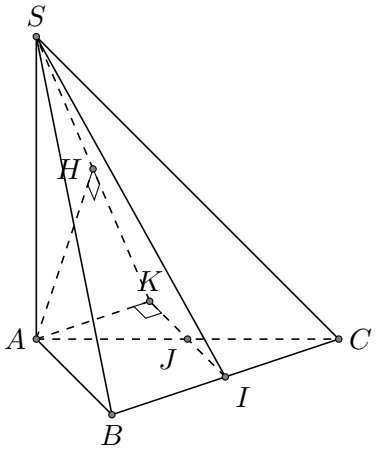
Chọn đáp án (A) □

Câu 434. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều ABC cạnh a, cạnh bên $SA = a$, $SA \perp (ABC)$, I là trung điểm của BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SI và AB là?

A. $\dfrac{a\sqrt{17}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{57}}{19}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{23}}{7}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{17}}{7}$.

✍Lời giải.

Gọi J là trung điểm của AC, K là hình chiếu của A lên IJ, H là hình chiếu của A lên SK.
Do AB song song với IJ nên $AB \parallel (SIJ)$, do đó $\mathrm{d}(AB,SI) = \mathrm{d}(AB,(SIJ)) = \mathrm{d}(A,(SIJ))$.
Theo cách dựng có $IJ \perp AK$, lại có $IJ \parallel AB \perp SA$ nên $IJ \perp (SAK)$.
Do $(SAK) \perp IJ$ nên $AH \perp IJ$, và $AH \perp SK$ theo cách dựng nên $AH \perp (SIJ)$.
Từ đó suy ra $\mathrm{d}(AB,SI) = AH$.



Ta có $AK = \mathrm{d}(A,IJ) = \mathrm{d}(AB,IJ) = \mathrm{d}(I,AB) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(C,AB) = \dfrac{1}{2}AC\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SAK ta được

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AK^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{16}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{19}{3a^2}.$$

Vậy $\mathrm{d}(AB,SI) = AH = \dfrac{a\sqrt{57}}{19}$.

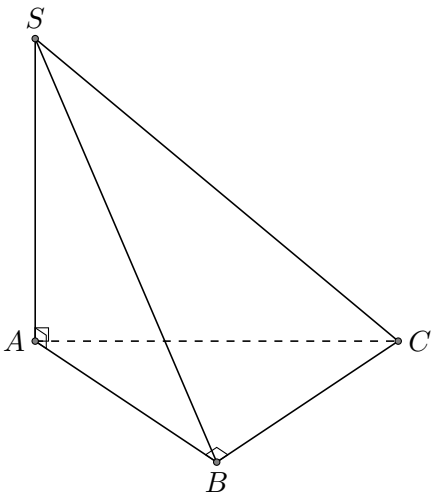
Chọn đáp án (B) □

Câu 435. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $AB = a, BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng

A. $2a$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** a. **D.** $a\sqrt{5}$.

✍Lời giải.

Dễ thấy AB là đường vuông góc chung của SA và BC, từ đó suy ra $\mathrm{d}(SA, BC) = AB = a$.



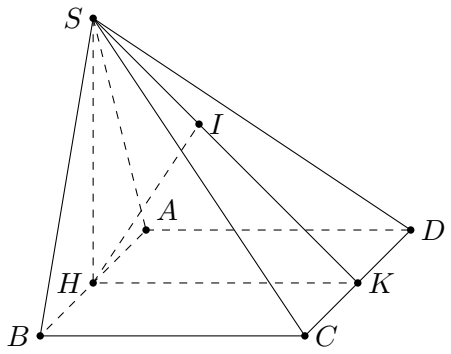
Chọn đáp án C □

Câu 436. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh 1. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ A đến (SCD).

A. 1. **B.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\sqrt{2}$.

✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.
Gọi K là trung điểm của $CD \Rightarrow HK \perp CD \Rightarrow CD \perp (SHK)$.
Trong mặt phẳng (SHK) dựng $HI \perp SK \Rightarrow HI \perp (SCD)$.
Ta có $AH \parallel (SCD) \Rightarrow d(A, (SCD)) = d(H, SCD) = HI$.
Tam giác SAB đều $\Rightarrow SH = \frac{\sqrt{3}}{2}$ và $HK = 1$.
Xét ΔSHK có $\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} \Rightarrow HI = \frac{\sqrt{21}}{7}$.



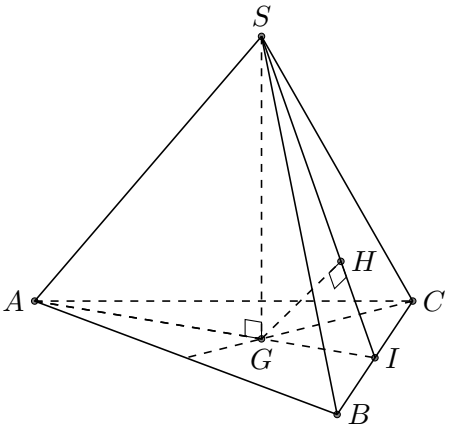
Chọn đáp án B □

Câu 437. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, G là trọng tâm tam giác ABC. Góc giữa mặt bên với đáy bằng $60°$. Khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a}{4}$. **C.** $\frac{3a}{4}$. **D.** $\frac{3a}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi I là trung điểm BC.
Trong mặt phẳng (SAI), kẻ $GH \perp SI$ (1)
Ta có: $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SI \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp GH$ (2).
Từ (1), (2) $\Rightarrow GH \perp (SBC) \Rightarrow \mathrm{d}(G; (SBC)) = GH$.
Có: $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SI \perp BC \\ AI \perp BC \end{cases} \Rightarrow ((SBC); (ABC)) = (SI; AI) = \widehat{SIA} = \widehat{SIG} = 60°$.
Ta có $GI = \frac{1}{3}AI = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow GH = GI \sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{4}$.



Chọn đáp án B □

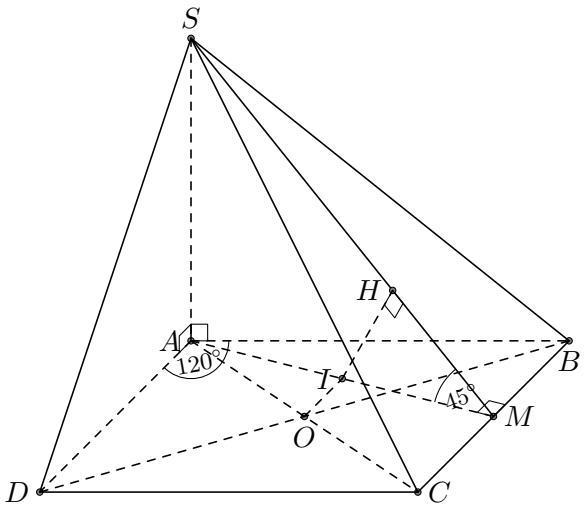
Câu 438. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh $AB = 2a\sqrt{3}$, góc $\widehat{BAD}$ bằng $120°$. Hai mặt phẳng SAB và SAD cùng vuông góc với đáy. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng $45°$. Tính khoảng cách h từ O đến mặt phẳng (SBC).

A. $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $h = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$. **C.** $h = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $h = 3a$.

✍Lời giải.

Vì $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAD)\perp(ABCD)\end{cases}\Rightarrow SA\perp(ABCD)$. Từ giả thiết ta suy ra ΔABC đều và ΔSBC cân tại S. Gọi M là trung điểm của BC. Ta có $AM\perp BC$ và $SM\perp BC$ do đó $((SBC),(ABCD))=\widehat{SMA}=45^\circ$.

Gọi I là trung điểm của AM suy ra $OI\parallel BC\Rightarrow OI\parallel(SBC)$. Do đó $d(O,(SBC))=d(I,(SBC))$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên SM, ta có $d(I,(SBC))=IH$.



Vì ΔABC đều và ΔSAM vuông cân nên

$$AM=SA=\frac{2a\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2}=3a\Rightarrow SM=3a\sqrt{2}.$$

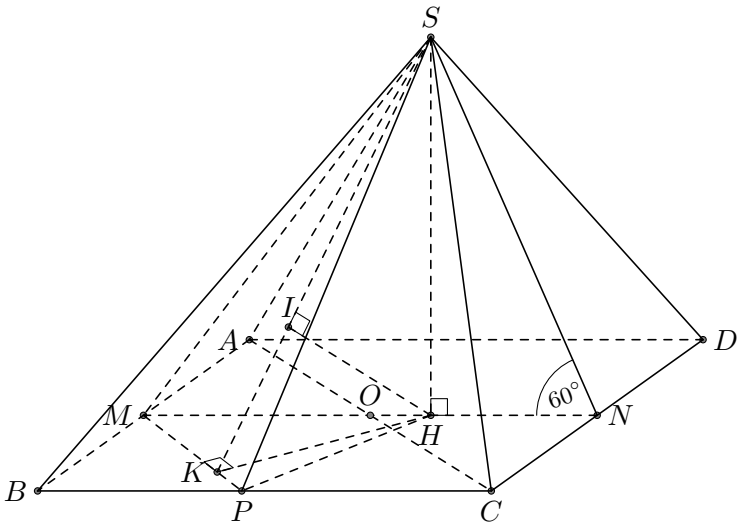
Vì $\Delta HIM\sim\Delta SAM$ nên $IH=\dfrac{IM\cdot SA}{SM}=\dfrac{\frac{1}{2}3a\cdot 3a}{3a\sqrt{2}}=\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 439. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB đều, góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ bằng 60°. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Biết hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ nằm trong hình vuông $ABCD$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AC.

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{5a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{15}}{3}$.

✍Lời giải.



Gọi H là hình chiếu của S lên $(ABCD)$, vì $SA=SB$ nên $HA=HB$. Do đó H nằm trên đường trung trực của AB, mà M là trung điểm AB suy ra MH là trung trực của AB. Gọi $N=MH\cap CD$ suy ra N là trung điểm của CD.

Xét ΔSMN ta có $SM=a\sqrt{3},MN=2a,\widehat{SNM}=60^\circ$. Áp dụng định lí sin ta được

$$\frac{MN}{\sin(\widehat{MSN})}=\frac{SM}{\sin(\widehat{SNM})}\Rightarrow\sin(\widehat{MSN})=1\Rightarrow\widehat{MSN}=90^\circ.$$

Vậy ΔSMH vuông tại S và SH là đường cao. Suy ra

$$MH\cdot MN=MS^2\Rightarrow MH=\frac{MS^2}{MN}=\frac{\left(\frac{2a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2a}=\frac{3}{4}\cdot 2a\Rightarrow MH=\frac{3}{4}\cdot MN.\quad(1)$$

Gọi P là trung điểm của BC, suy ra $MP\perp BD$. (2)

Gọi K là điểm thuộc MP sao cho $MK=\dfrac{3}{4}\cdot MP$. (3)

Từ (1) và (3), áp dụng định lí Talet cho tam giác MNP, suy ra $HK \parallel PN \parallel BD$. (4)
Từ (2) và (4), suy ra $HK \perp MP$.
Gọi I là hình chiếu của H lên SK, suy ra $IH \perp (SMP)$. Ta lại có

$$SH = HN \tan 60^\circ = \frac{1}{4}MN \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ và } HK = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}BD = \frac{3a}{2\sqrt{5}}.$$

Vì $AC \parallel MP \Rightarrow AC \parallel (SMP)$ nên

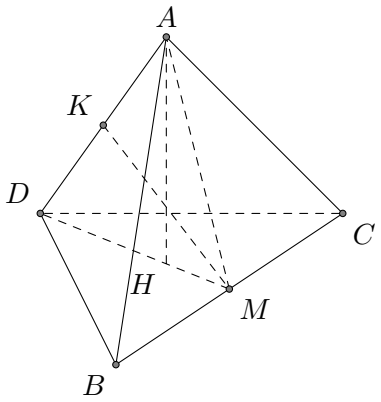
$$d(AC, SM) = d(AC, (SMP)) = d(O, (SMP)) = \frac{2}{3}d(H, (SMP)) = \frac{2}{3}IH = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 440. Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và BC bằng

A. a. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $2a$.

Lời giải.
Gọi M là trung điểm BC.
Ta có $\begin{cases} DM \perp BC \\ AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADM)$.
Từ M kẻ $MK \perp AD$ với K là trung điểm AD.
Suy ra $\mathrm{d}(AD; BC) = MK$.
$S_{\Delta ADM} = \sqrt{P(P-AD)(P-AM)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a^2$.
Mặt khác $S_{ADM} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot MK \Rightarrow MK = a$.

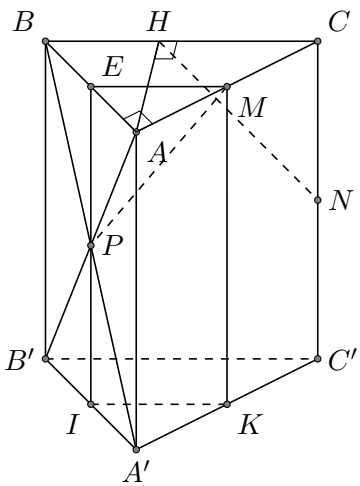


Chọn đáp án A □

Câu 441. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $BC = 2a$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AC, CC', $A'B$ và H là hình chiếu của A lên BC. Tính khoảng cách giữa MP và NH.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $a\sqrt{6}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** a.

Lời giải.
Gọi E, I, K lần lượt là trung điểm của AB, $A'B'$, $A'C'$, ta có $(BCC'B') \parallel (EMKI)$.
Mà $NH \subset (BCC'B')$; $MP \subset (EMKI)$.
$\Rightarrow d(MP, NH) = d((BCC'B'), (EMKI)) = \frac{1}{2}AH$.
Do $AH = \frac{AB.AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
$\Rightarrow d(MP, NH) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.



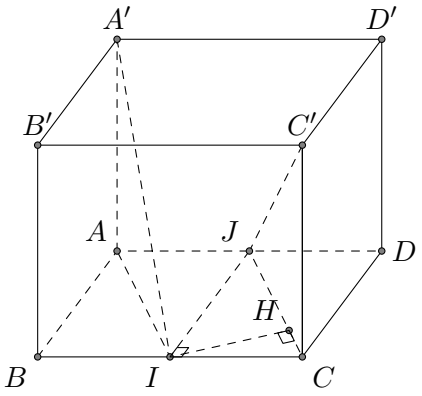
Chọn đáp án A □

Câu 442. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC và AD. Tính khoảng cách d giữa hai mặt phẳng (AIA') và (CJC').

A. $\mathrm{d} = 2a\sqrt{\frac{5}{2}}$. **B.** $\mathrm{d} = 2a\sqrt{5}$. **C.** $\mathrm{d} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\mathrm{d} = \frac{3a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Từ $\begin{cases} AI \parallel CJ \\ AA' \parallel CC' \end{cases} \Rightarrow (AIA') \parallel (CJC')$.
Kẻ $IH \perp CJ \Rightarrow IH \perp (CJC')$.
Do đó $\mathrm{d}\left((AIA'),(CJC')\right) = \mathrm{d}\left(I,(CJC')\right) = IH$.
Ta có $IH = \dfrac{IJ \cdot IC}{\sqrt{IJ^2 + IC^2}} = \dfrac{a \cdot \dfrac{a}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.
Vậy $\mathrm{d}\left((AIA'),(CJC')\right) = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.



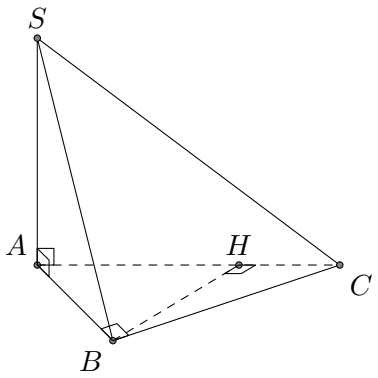
Chọn đáp án C □

Câu 443. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B, SA vuông góc với đáy và $2AB = BC = 2a$. Gọi d_1 là khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) và d_2 là khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC). Tính $\mathrm{d} = \mathrm{d}_1 + \mathrm{d}_2$.

A. $\mathrm{d} = 2\left(5+\sqrt{2}\right)a$. **B.** $\mathrm{d} = 2\left(\sqrt{5}+2\right)a$. **C.** $\mathrm{d} = \dfrac{2\left(5+\sqrt{5}\right)a}{5}$. **D.** $\mathrm{d} = \dfrac{2\left(5+\sqrt{2}\right)a}{5}$.

✍Lời giải.

Từ giả thiết SA vuông góc với đáy và ABC vuông tại B suy ra $\begin{cases} CB \perp SA \\ CB \perp AB \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAB)$.
Do đó $\mathrm{d}_1 = \mathrm{d}\left(C,(SAB)\right) = BC = 2a$.
Kẻ $BH \perp AC$ với $H \in AC$, suy ra $BH \perp (SAC)$.
Vì tam giác ABC vuông tại B nên:
$BH = \dfrac{AB \cdot BC}{\sqrt{AB^2 + BC^2}} = \dfrac{a \cdot 2a}{\sqrt{a^2 + (2a)^2}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.
Do đó $\mathrm{d}_2 = \mathrm{d}\left(B,(SAC)\right) = BH$.
Vậy $\mathrm{d} = \mathrm{d}_1 + \mathrm{d}_2 = 2a + \dfrac{2a\sqrt{5}}{5} = \dfrac{2\left(5+\sqrt{5}\right)a}{5}$.



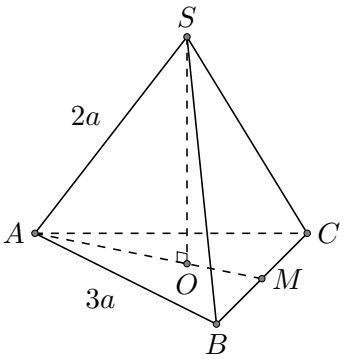
Chọn đáp án C □

Câu 444. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA = a, AB = 3a$. Khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$. **B.** a. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi O là tâm của tam giác đều ABC
$\Rightarrow SO \perp (ABC) \Rightarrow \mathrm{d}\left(S,(ABC)\right) = SO$.
Ta có $AO = \dfrac{AB\sqrt{3}}{3} = a\sqrt{3} \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = a$.
Vậy $\mathrm{d}\left(S,(ABC)\right) = SO = a$.

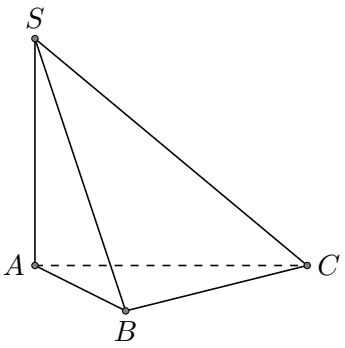


Chọn đáp án B □

Câu 445.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $B, AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) bằng 60° (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng

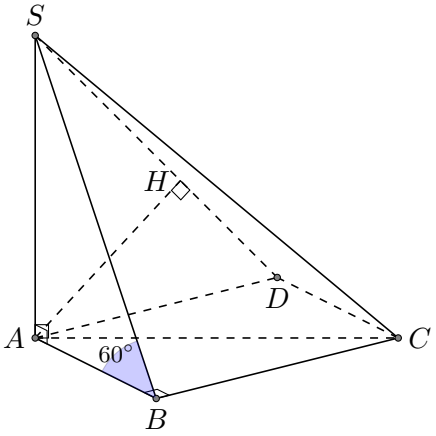
A. a. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



✍Lời giải.

Góc giữa (SBC) và đáy là góc $\widehat{SBA} = 60^\circ \Rightarrow SA = a\sqrt{3}$.
Dựng hình vuông $ABCD$, ta có $\mathrm{d}(AB, SC) = \mathrm{d}(AB, (SCD)) = \mathrm{d}(A, (SCD)) = AH$, với H là hình chiếu của A lên SD.
Xét tam giác SAD vuông tại A, ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

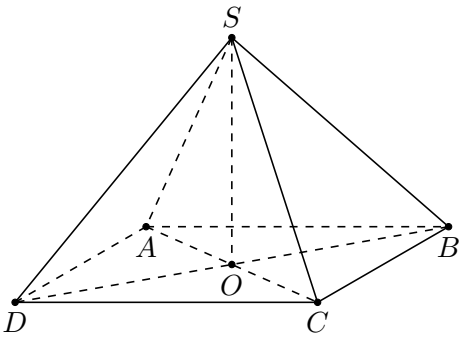


Chọn đáp án D □

Câu 446.

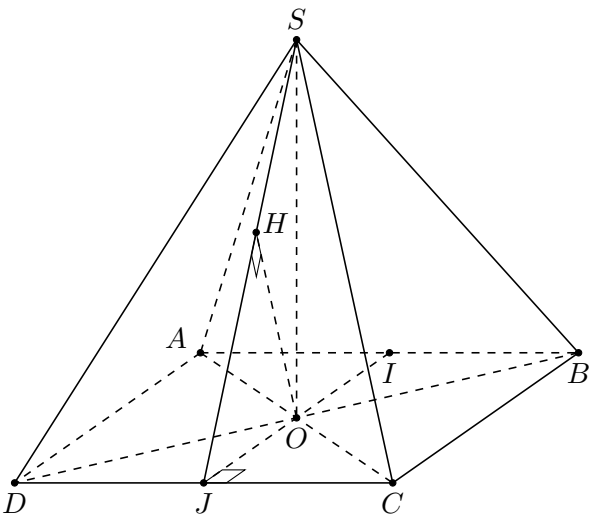
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O có cạnh $AB = a$, đường cao SO vuông góc với mặt đáy và $SO = a$ (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa SC và AB là

A. $\dfrac{2a\sqrt{5}}{7}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{7}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.



✍Lời giải.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB, CD.
Gọi H là hình chiếu của O lên SJ.
Ta có $AB \parallel DC \Rightarrow AB \parallel (SCD)$.
Ta được $\mathrm{d}(AB, SC) = \mathrm{d}(AB, (SCD))$.
Do vậy, $\mathrm{d}(AB, SC) = \mathrm{d}(I, (SCD)) = 2 \cdot \mathrm{d}(O, (SCD))$.
Ta có $\begin{cases} CD \perp IJ \\ CD \perp SO \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SIJ) \Rightarrow CD \perp OH$.
Ta được $\mathrm{d}(O, (SCD)) = OH$.
Ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OJ^2} + \dfrac{1}{SO^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.
Vậy $\mathrm{d}(AB, SC) = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.



Chọn đáp án D □

Câu 447.

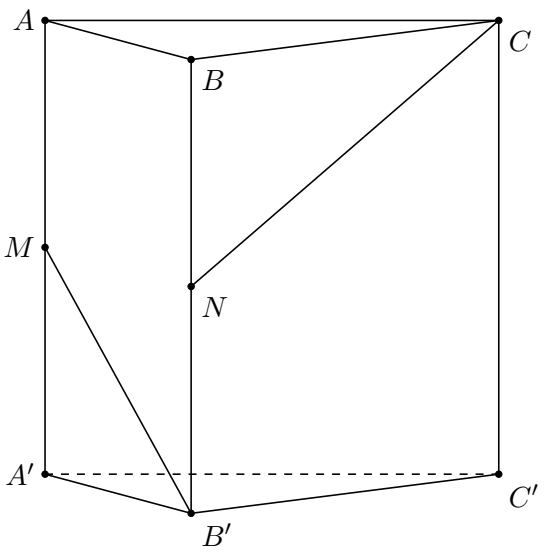
Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $AA' = b$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', BB' (tham khảo hình vẽ bên). Tính khoảng cách của hai đường thẳng $B'M$ và CN.

A. $\mathrm{d}(B'M, CN) = \dfrac{\sqrt{3}ab}{\sqrt{12a^2 + 4b^2}}$.

B. $\mathrm{d}(B'M, CN) = \dfrac{\sqrt{3}ab}{\sqrt{4a^2 + 12b^2}}$.

C. $\mathrm{d}(B'M, CN) = \dfrac{a}{2}$.

D. $\mathrm{d}(B'M, CN) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



✍Lời giải.

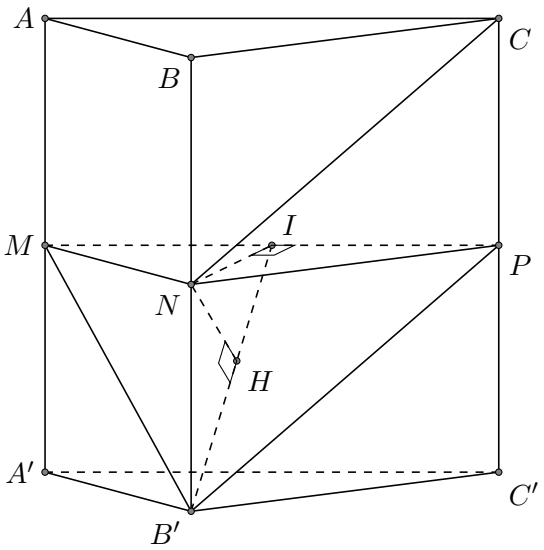
Gọi P, I lần lượt là trung điểm của CC', MP.
Gọi H là hình chiếu của N lên $B'I$.

Ta có $\begin{cases} MP \perp NI \\ MP \perp B'N \end{cases} \Rightarrow MP \perp (B'NI)$.

Ta có $\begin{cases} NH \perp B'I \\ NH \perp MP \end{cases} \Rightarrow NH \perp (MPB')$.

Vì $CN \parallel B'P$ nên

$$\begin{aligned} & \mathrm{d}(B'M, CN) = \mathrm{d}(CN, (MPB')) \\ \Rightarrow\ & \mathrm{d}(B'M, CN) = \mathrm{d}(N, (MPB')) \\ \Rightarrow\ & \mathrm{d}(B'M, CN) = NH. \end{aligned}$$



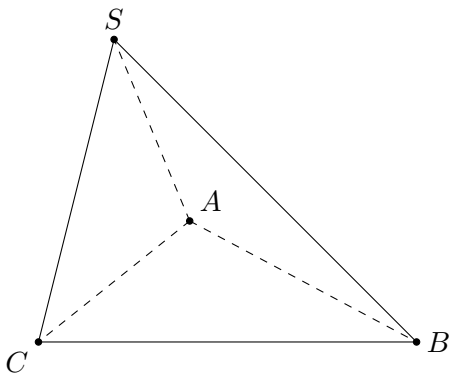
Ta có $\dfrac{1}{NH^2} = \dfrac{1}{B'N^2} + \dfrac{1}{NI^2} = \dfrac{4}{b^2} + \dfrac{4}{3a^2} \Rightarrow NH = \dfrac{\sqrt{3}ab}{\sqrt{12a^2 + 4b^2}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 448.

Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông cân tại B có $AB = BC = a$, tam giác SAC đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng

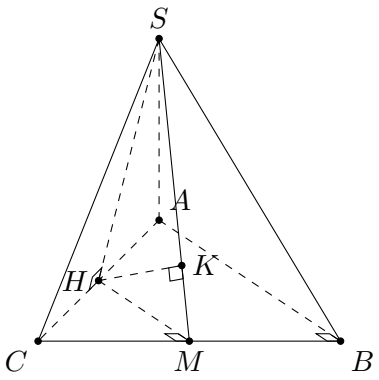
A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. **B.** $2a$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{42}}{7}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{42}}{14}$.



✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AC thì $SH \perp (ABC)$. Ta có

$$\frac{\mathrm{d}(A;(SBC))}{\mathrm{d}(H;(SBC))} = \frac{AC}{HC} = 2$$



Từ H kẻ HM vuông góc với BC (M là trung điểm của BC và $HK \perp SM$ (K thuộc SM). Khi đó HK là khoảng cách từ H đến (SBC).

Ta có $AC = a\sqrt{2}, SH = \dfrac{a\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}, HM = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Vậy $HK = \dfrac{SH \cdot HM}{\sqrt{SH^2 + HM^2}} = \dfrac{a\sqrt{42}}{14}$. Từ đó suy ra $\mathrm{d}(A;(SBC)) = \dfrac{a\sqrt{42}}{7}$.

Chọn đáp án C □

Câu 449. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh $3a$. Khoảng cách giữa hai cạnh AB, CD là

A. $\dfrac{3a}{2}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$. **C.** a. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.

✍Lời giải.

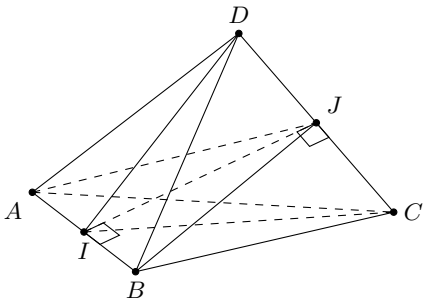
Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Ta có tam giác AJB cân tại J nên $IJ \perp AB$.

Tương tự cũng có $IJ \perp DC$ nên $\mathrm{d}(AB, CD) = IJ$.

Ta có $AJ = AD\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $IJ = \sqrt{AJ^2 - AI^2} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.



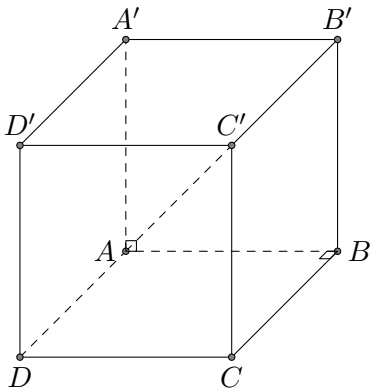
Chọn đáp án D □

Câu 450.

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC'.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$.

C. $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



✍Lời giải.

Vì $BB' \parallel AA'$ nên $BB' \parallel (ACC'A')$.

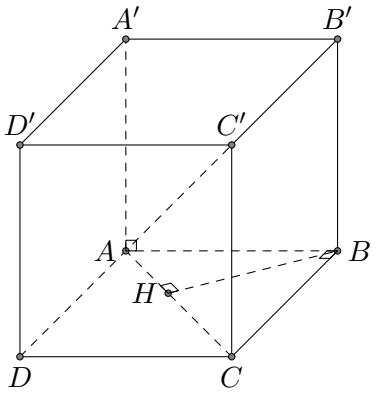
Suy ra $\mathrm{d}(BB', CC') = \mathrm{d}(BB', (ACC'A')) = \mathrm{d}(B, (ACC'A'))$.

Kẻ $BH \perp AC$ tại H, mặt khác $BH \perp AA'$ nên $BH \perp (ACC'A')$

$\Rightarrow \mathrm{d}(B, (ACC'A')) = BH$.

Xét $\triangle ABC$ có BH là đường cao,

suy ra $\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{BC^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{4}{3a^2} \Rightarrow BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

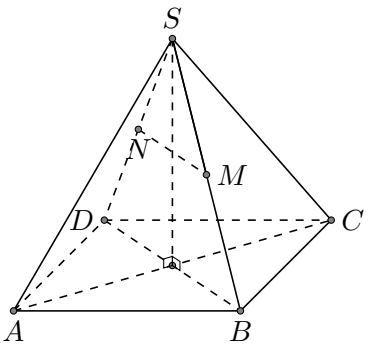


Chọn đáp án D □

Câu 451.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy và cạnh bên đều bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SB, SD (tham khảo hình vẽ bên). Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AB.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{32}$. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



✍Lời giải.

Vì AB nằm trên mặt phẳng $(ABCD)$ nên $d(MN,AB) = d\left(MN,(ABCD)\right)$. Mặt khác, vì M,N lần lượt là trung điểm các đường thẳng SB,SD nên MN là đường trung bình của tam giác SBD. Khi đó, $\dfrac{d\left(MN,(ABCD)\right)}{d\left(S,(ABCD)\right)} = \dfrac{MN}{BD} = \dfrac{1}{2}$.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Tam giác SOC vuông tại O có $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra, $d(MN,AB) = d\left(MN,(ABCD)\right) = \dfrac{1}{2}d(S,(ABCD)) = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 452. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Đường thẳng SD tạo với đáy $ABCD$ một góc $60°$. Gọi M là trung điểm AB. Biết $MD = \dfrac{3a\sqrt{5}}{2}$, mặt phẳng (SDM) và mặt phẳng (SAC) cùng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SM theo a.

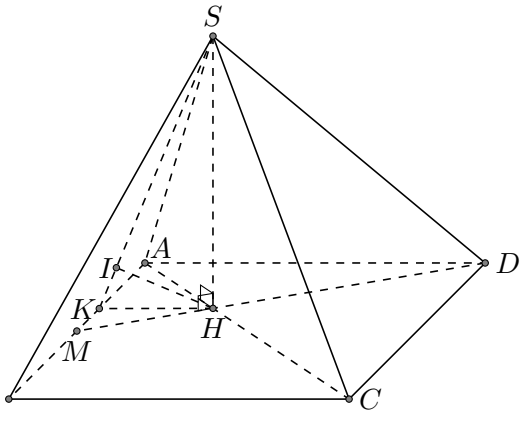
A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{4}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{5}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{4}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{15}}{4}$.

✍Lời giải.

Giả sử $AD = x$, khi đó ta có

$$DM^2 = AD^2 + AM^2 = x^2 + \frac{x^2}{4} = \frac{5x^2}{4}$$

$$\Rightarrow DM = \frac{x\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = 3a$$



Gọi $H = DM \cap AC$, khi đó $SH \perp (ABCD)$ và $\Delta HAM \backsim \Delta HDC$.
Từ đó ta có $HD = 2HM$ hay $MD = 3MH$.
Ta có $SM \subset (SAB)$ và do $AB \parallel CD$ nên $CD \parallel (SAB)$

$\Rightarrow \mathrm{d}\left(CD,SM\right) = \mathrm{d}\left(CD,(SAB)\right) = \mathrm{d}\left(D,(SAB)\right) = 3\mathrm{d}\left(H,(SAB)\right)$.

Kẻ $HK \perp AB$, $K \in AB$ và $HI \perp SK, I \in SK$ ta có $HI \perp (SAB) \Rightarrow \mathrm{d}\left(H,(SAB)\right) = HI$. $\dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{1}{HS^2} + \dfrac{1}{HK^2}$.

$DH = \dfrac{2}{3}DM = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3a\sqrt{5}}{2} = a\sqrt{5} \Rightarrow HS = HD \cdot \tan 60° = a\sqrt{15}$.

$HK = \dfrac{1}{3}AD = a \Rightarrow \dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{1}{15a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{16}{15a^2} \Rightarrow HI = \dfrac{a\sqrt{15}}{4} \Rightarrow \mathrm{d}\left(CD,SM\right) = \dfrac{3a\sqrt{15}}{4}$.

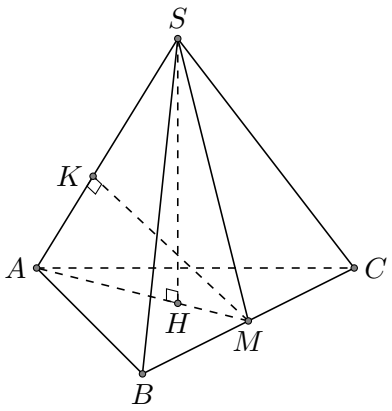
Chọn đáp án D □

Câu 453. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và thể tích bằng $\dfrac{a^3}{12}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{20}$.

✍Lời giải.

Gọi H là tâm của tam giác đều ABC.
Thể tích khối chóp $S.ABC$ là
$V = \dfrac{a^3}{12} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}.S_{\triangle ABC} \cdot SH \Leftrightarrow \dfrac{a^3}{12} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot SH \Leftrightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
Gọi M là trung điểm của BC, kẻ $MK \perp SA$ tại K.
Ta có $BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp HK$.
Suy ra MK là đoạn vuông góc chung của SA và BC.



Vì tam giác ABC đều cạnh a nên $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $AH = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$
Tam giác SAH vuông tại $H \Rightarrow SA = \sqrt{AH^2 + SH^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{3} + \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.
Xét tam giác SAM, ta có $S_{\triangle SAM} = \dfrac{1}{2}AM.SH = \dfrac{1}{2}SA.MK$.
$\Leftrightarrow AM.SH = SA.HM \Leftrightarrow MK = \dfrac{AM.SH}{SA} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{3}}{\dfrac{a\sqrt{6}}{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

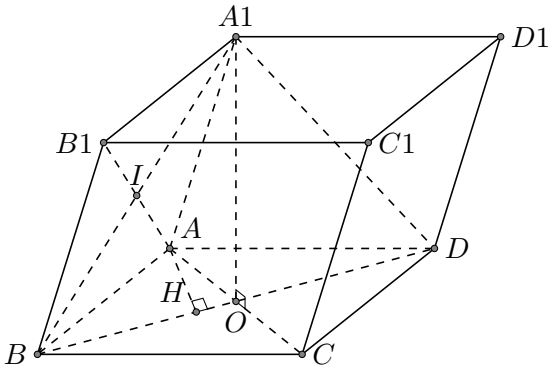
Chọn đáp án (B) □

Câu 454. Cho hình lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm AC và BD. Tính khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Kẻ $AH \perp BD$ tại $H \Rightarrow AH \perp (A_1BD)$.
Gọi I là trung điểm của AB_1.
$\Rightarrow \mathrm{d}(B,(A_1BD)) = \mathrm{d}(A,(A_1BD)) = AH$.
Xét tam giác ABD vuông tại A có AH là đường cao $\Rightarrow$
$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{3a^2}$
$\Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 455. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC'.

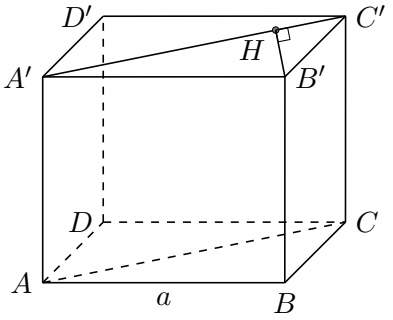
A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

✍Lời giải.

Kẻ $B'H$ vuông góc với $A'C'$ ($H \in A'C'$) thì $BH \perp (ACC'A')$.
Vì $BB' \parallel (ACC'A')$ nên $\mathrm{d}(BB'; AC') = \mathrm{d}(BB'; (ACC'A')) = B'H$.
Xét tam giác $A'B'C'$ vuông tại B' có

$$\frac{1}{B'H^2} = \frac{1}{B'A'^2} + \frac{1}{B'C'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow B'H = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $\mathrm{d}(BB'; AC') = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

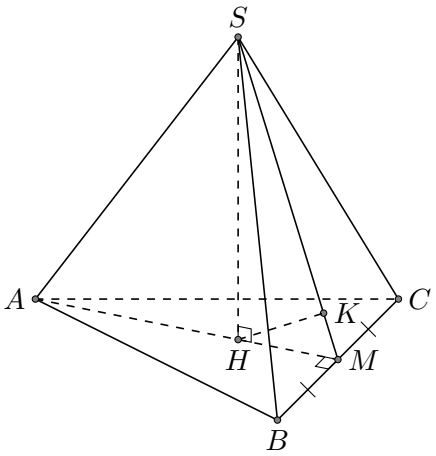


Chọn đáp án C ☐

Câu 456. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{3a}{4}$. **B.** $\dfrac{a}{4}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{3a}{2}$.

Lời giải.
Gọi H là tâm của tam giác đều ABC. Gọi $M = AH \cap BC$ suy ra M là trung điểm cạnh BC. Do đó, góc $\widehat{SMH} = 60°$.
Kẻ $HK \perp SM$ với $K \in SM$. Khi đó $HK \perp (SBC)$.
Ta có $\mathrm{d}(A; (SBC)) = \dfrac{AM}{HM} \cdot \mathrm{d}(H; (SBC)) = 3HK$.
Lại có
$\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HM^2} + \dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{12}{a^2} + \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{16}{a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{a}{4}$. Do đó
$\mathrm{d}(A; (SBC)) = \dfrac{3a}{4}$.

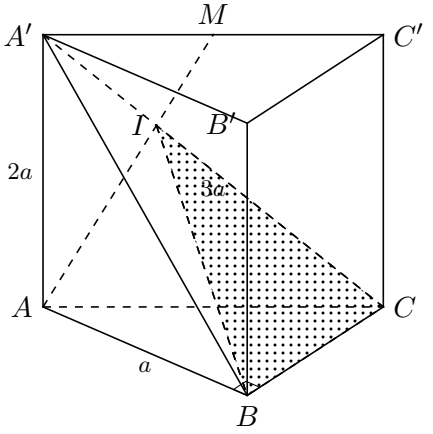


.
Chọn đáp án A ☐

Câu 457. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại B với $AB = a$, $AA' = 2a$, $A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm cạnh $C'A'$, I là giao điểm của các đường thẳng AM và $A'C$. Tính khoảng cách d từ A tới (IBC).

A. $d = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$. **B.** $d = \dfrac{a}{2\sqrt{5}}$. **C.** $d = \dfrac{5a}{3\sqrt{2}}$. **D.** $d = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.
Tam giác $A'AB$ vuông tại A nên $A'B = \sqrt{A'A^2 + AB^2} = a\sqrt{5}$.
Mặt khác ta dễ dàng chứng minh được $BC \perp (AA'B)$ nên tam giác $\triangle A'BC$ vuông tại $B \Rightarrow BC = \sqrt{A'C^2 - A'B^2} = 2a$
$\Rightarrow$ diện tích tam giác $A'BC$ là $S_{A'BC} = a^2\sqrt{5}$.
Mặt khác, vì $I \in A'C \Rightarrow (IBC) \equiv (A'BC)$ nên
$d\,(A, (IBC)) = d\,(A, (A'BC))$.
Hình chóp $A.A'BC$ có $AA' \perp (ABC)$
$\Rightarrow V_{A.A'BC} = \dfrac{1}{3}AA' \cdot S_{ABC} = \dfrac{2a^3}{3}$.
Vậy $d = d\,(A, (IBC)) = \dfrac{3V_{A.A'BC}}{S_{A'BC}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.



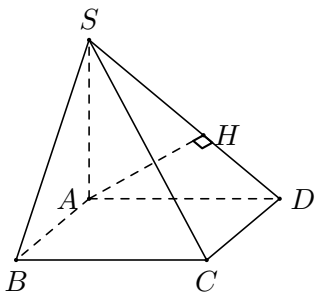
Chọn đáp án D ☐

Câu 458. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD.

A. $2a$. **B**. $a\sqrt{2}$. **C**. $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. **D**. a.

✍Lời giải.

Vì $AB \parallel CD$ nên $AB \parallel (SCD)$
$\Rightarrow \mathrm{d}(AB, SD) = \mathrm{d}(AB, (SCD)) = \mathrm{d}(A, (SCD))$.
Kẻ $AH \perp SD$ $(H \in SD)$.
Ta có $CD \perp AD$, $CD \perp SA \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$
$\Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}(A, (SCD)) = AH$.
Xét tam giác SAD có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{2a^2}$
$\Rightarrow AH = a\sqrt{2}$.



Chọn đáp án B □

Câu 459. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$.

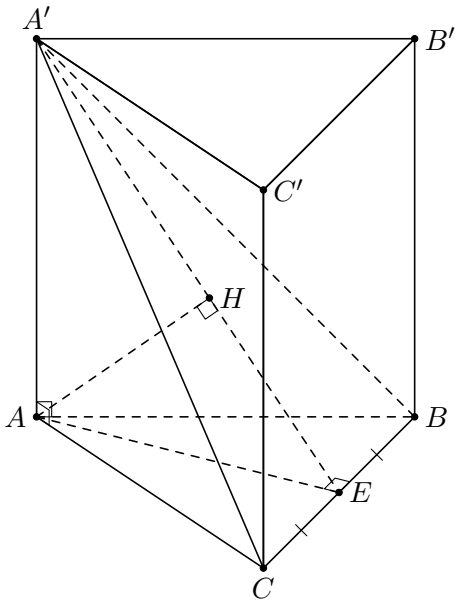
A. $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B**. $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **C**. $d = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **D**. $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

✍Lời giải.

Gọi E là trung điểm của BC và H là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh $A'E$.
Ta có $\begin{cases} BC \perp AE \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp AH \quad (1)$.
Mặt khác, $AH \perp A'E \quad (2)$.
Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (A'BC)$,
khi đó $\mathrm{d}(A, (A'BC)) = AH$.
Xét $\triangle AA'E$, ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{AH^2} &= \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AE^2} \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{7}{3a^2}. \end{aligned}$$

Vậy $\mathrm{d} = AH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.



Chọn đáp án C □

Câu 460. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$ và $SA = SB = SD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC). Tính giá trị $\sin\alpha$.

A. $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$. **B**. $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$. **C**. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **D**. $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

✍Lời giải.

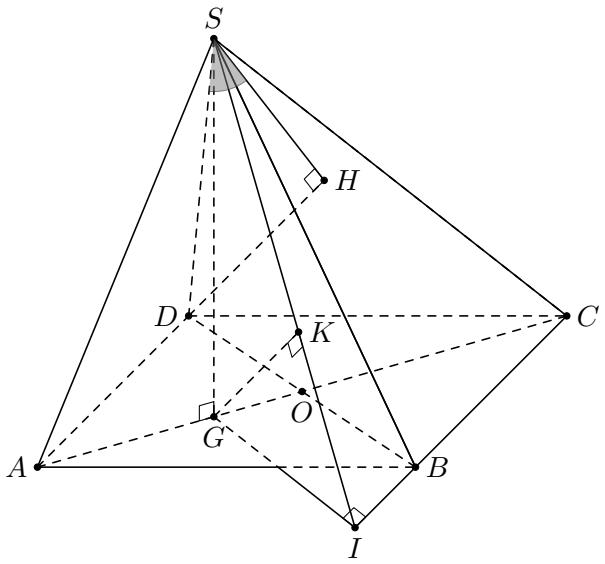
Gọi O là giao điểm của AD và BC, G là trọng tâm tam giác ABC.
Vì $SA = SB = SD$ nên $SG \perp (ABCD)$.
Gọi H là hình chiếu của D xuống mặt phẳng (SBC), khi đó

$$\alpha = \widehat{DSH} \Rightarrow \sin\alpha = \sin\widehat{DSH} = \frac{DH}{SD}.$$

Gọi I là hình chiếu của G lên BC. Xét $\triangle GIC$,

$$GI = GC \cdot \sin\widehat{GCB} = \frac{1}{2}GC = GA = \frac{2}{3}AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Xét $\triangle SAG$,



$$SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{15}}{6}.$$

Gọi K là hình chiếu của G lên SI. Xét $\triangle SGI$,

$$\frac{1}{GK^2} = \frac{1}{SG^2} + \frac{1}{GI^2} = \frac{12}{5a^2} + \frac{3}{a^2} = \frac{27}{5a^2} \Rightarrow GK = \frac{\sqrt{5}a}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}a}{9}.$$

Ta có $DH = \mathrm{d}(A,(SBC)) = \frac{3}{2}\mathrm{d}(G,(SBC)) = \frac{3}{2}GK = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{15}a}{9} = \frac{\sqrt{15}a}{6}$.

Do đó $\sin\alpha = \dfrac{DH}{SD} = \dfrac{\frac{\sqrt{15}a}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 461. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có thể tích $V = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$. Gọi M là trung điểm của cạnh SD. Nếu $SB \perp SD$ thì khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (MAC) bằng bao nhiêu?

A. $d = \frac{1}{2}$. **B.** $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $d = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $d = \frac{3}{4}$.

✍Lời giải.

Gọi O là tâm của đáy $ABCD$. Giả sử $SO = x$, vì $SB \perp SD$ nên $BO = DO = SO = x$.

Khi đó: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3}\cdot x \cdot 2x^2$, suy ra: $\frac{2x^3}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vì tam giác SOD vuông cân tại O nên $OM = \frac{1}{\sqrt{2}}SO = \frac{1}{2}$.

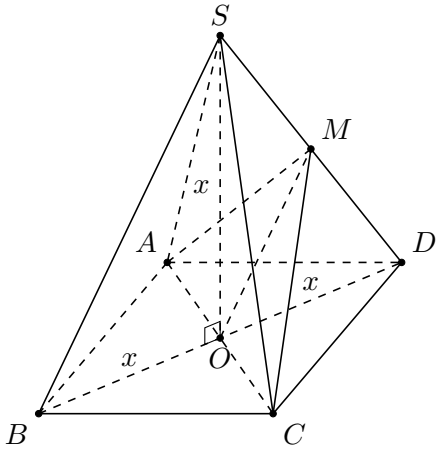
Lại có: $SO \perp AC, OD \perp AC \Rightarrow OM \perp AC$

$\Rightarrow S_{MAC} = \frac{1}{2}OM \cdot AC = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Ta có: $V_{MABC} = \dfrac{S_{ABC}\cdot \mathrm{d}\,[M,(ABC)]}{3}$

$= \dfrac{\frac{1}{2}S_{ABCD}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}\,[S,(ABC)]}{3} = \frac{1}{4}V_{S.ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{24}$.

Suy ra: $\mathrm{d}\,[B,(MAC)] = \dfrac{3V_{MABC}}{S_{MAC}} = \frac{1}{2}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 462. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với mặt phẳng $ABCD$. Biết góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $60°$. Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD).

A. $h=\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$. **B.** $h=a\sqrt{2}$. **C.** $h=a$. **D.** $h=\dfrac{a\sqrt{42}}{7}$.

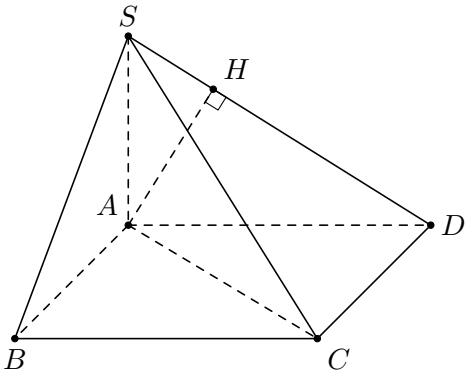
✍Lời giải.

Ta có: $AC=a\sqrt{2}$ (đường chéo hình vuông cạnh a).

$$SA=AC\cdot\tan 60^\circ=a\sqrt{6}.$$

Kẻ $AH\perp SD\Rightarrow AH\perp(SCD)$.

$$\Rightarrow\quad d(B,(SCD))=d(A,(SCD))=AH$$
$$\Rightarrow\quad AH=\frac{SA\cdot AD}{\sqrt{SA^2+AD^2}}=\frac{a\sqrt{6}\cdot a}{\sqrt{(a\sqrt{6})^2+a^2}}=\frac{a\sqrt{42}}{7}.$$



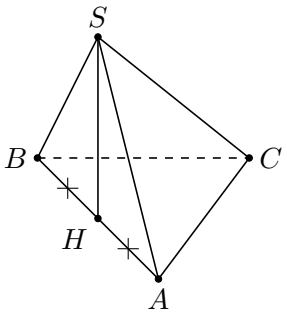
Chọn đáp án D □

Câu 463. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (ABC).

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{6}$.

✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AB, khi đó $\begin{cases}SH\perp AB\\(SAB)\cap(ABC)=AB\\(SAB)\perp(ABC)\end{cases}$ nên $SH\perp(ABC)$. Vậy $d(S,(ABC))=SH=a\sqrt{3}$.



Chọn đáp án B □

Câu 464. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Cắt hình lập phương bằng một mặt phẳng chứa đường chéo AC'. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích thiết diện thu được.

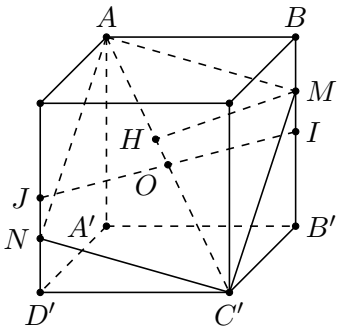
A. $2\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** 4. **D.** $4\sqrt{2}$.

✍Lời giải.

Giả sử (P) là mặt phẳng chứa AC'. Không mất tính tổng quát, giả sử (P) cắt BB' tại M, gọi O là tâm hình lập phương, N là giao điểm của MO và DD'. Khi đó hình bình hành $AMC'N$ là thiết diện của hình lập phương cắt bởi (P).

Gọi H là hình chiếu của M trên AC', I, J lần lượt là trung điểm của BB', DD'. Dễ thấy tam giác AIC' là cân tại I nên $OI\perp AC'$, mà $OI\perp BB'$ nên OI là đoạn vuông góc chung của AC' và BB', do đó $OI\le MH$. Ta có

$$S_{AMC'N}=AC'\cdot MH\ge AC'\cdot OI=2\sqrt{6}.$$



Dấu bằng xảy ra khi $M\equiv I$, hay tứ giác $AMC'N$ trở thành tứ giác $AIC'J$. Vậy $\min S_{AMC'N}=2\sqrt{6}$.

Chọn đáp án A □

Câu 465. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO=a$. Khoảng cách giữa SC và AB bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{3}}{15}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{15}$.

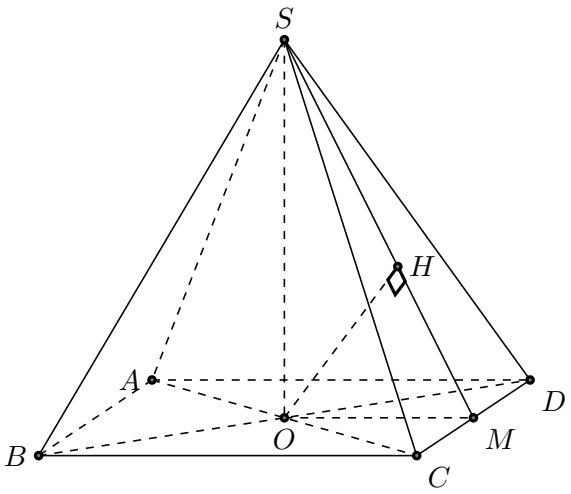
✍Lời giải.

Gọi M là trung điểm CD, H là hình chiếu của O trên SM. Ta có

- $\begin{cases} CD \perp OM \\ SO \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOM) \Rightarrow CD \perp OM.$
- $\begin{cases} OH \perp CD \\ OH \perp SM \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SCD)$.

Ta có $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathrm{d}(AB, SC) &= \mathrm{d}(AB, (SCD) \\ &= \mathrm{d}(A, (SCD)) \\ &= 2\mathrm{d}(O, (SCD)) \\ &= 2OH. \end{aligned}$$



Ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OM^2} = \dfrac{5}{a^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. Suy ra $\mathrm{d}(AB, SC) = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

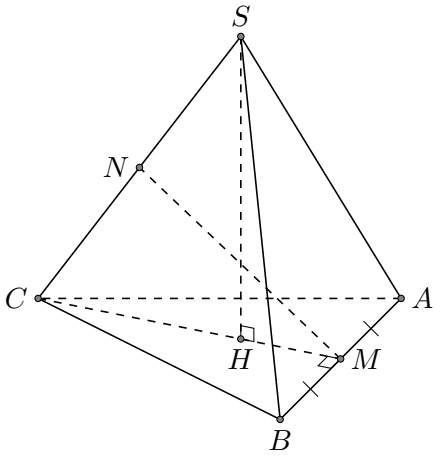
Chọn đáp án (B) □

Câu 466. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b ($a \neq b$). Phát biểu nào dưới đây **sai**?

A. Đoạn thẳng MN là đường vuông góc chung của AB và SC (M và N lần lượt là trung điểm của AB và SC).
B. Góc giữa các cạnh bên và mặt đáy bằng nhau.
C. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm tam giác ABC.
D. SA vuông góc với BC.

✍Lời giải.

Do $a \neq b$ nên $SM \neq CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, suy ra tam giác SMC không phải là tam giác cân tại M, do đó MN không vuông góc với SC.



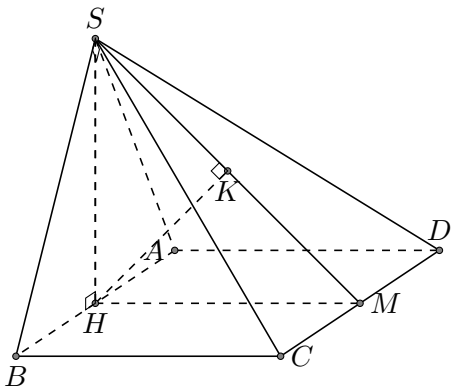
Chọn đáp án (A) □

Câu 467. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trên mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B**. $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C**. $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D**. $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

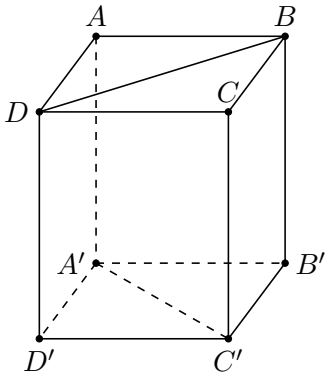
✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.
Ta có $AB \parallel CD \subset (SCD) \Rightarrow AB \parallel (SCD)$
$\Rightarrow d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(H, (SCD))$.
Gọi M là trung điểm của $CD \Rightarrow HM \perp CD$.
$SH \perp (ABCD) \supset CD \Rightarrow SH \perp CD$.
Suy ra $CD \perp (SHM)$.
Mà $CD \subset (SCD) \Rightarrow (SCD) \perp (SHM)$.
Trong mặt phẳng (SHM), dựng $HK \perp SM \Rightarrow HK \perp (SCD)$ hay $d(H, (SCD)) = HK$.
Trong tam giác SHK , ta có: $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HM^2} = \dfrac{5}{4a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 468.
Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên $AA' = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng
A. $a\sqrt{2}$. **B.** a. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $2a$.

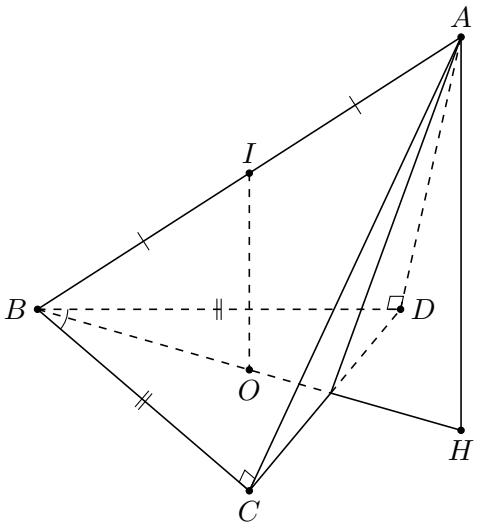


✍Lời giải.
Ta có $BD \parallel B'D'$ nên $BD \parallel (A'B'C'D')$.
Vậy $d(BD, A'C') = d(BD, (A'B'C'D')) = d(B, (A'B'C'D')) = BB' = AA' = a$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 469. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 2a$, $CD = a$, $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 90°$. Đáy BCD là tam giác cân tại B và $\widehat{CBD} = 2\alpha$. Tính khoảng cách từ A đến (BCD) theo a và α.
A. $\dfrac{a}{\sin 2\alpha}\sqrt{4\sin^2 2\alpha - 2}$. **B.** $\dfrac{a}{\sin 2\alpha}\sqrt{4\sin^2 2\alpha - 1}$.
C. $\dfrac{a}{2\sin 2\alpha}\sqrt{4\sin^2 2\alpha - 1}$. **D.** $\dfrac{2a}{\sin 2\alpha}\sqrt{4\sin^2 2\alpha - 1}$.

✍Lời giải.
Vì $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 90°$ nên $ABCD$ nội tiếp mặt cầu đường kính AB.
Gọi I là trung điểm AB, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Suy ra, $OI \perp (BCD)$.
Gọi H là điểm thuộc đường thẳng BO sao cho O là trung điểm của BH. Khi đó $AH \parallel IO$ nên $AH \perp (BCD)$ và $AH = 2OI$.
Vậy $d(A, (BCD)) = AH$.
Trong tam giác BCD ta có

$$\frac{CD}{\sin \widehat{CBD}} = 2OD \Leftrightarrow OD = \frac{a}{2\sin 2\alpha}.$$



Ta có $ID = \dfrac{AB}{2} = a$.

Do đó $d(A, (BCD)) = AH = 2OI = 2\sqrt{ID^2 - OD^2} = 2\sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{4\sin^2 2\alpha}} = \dfrac{a}{\sin 2\alpha}\sqrt{4\sin^2 2\alpha - 1}$.

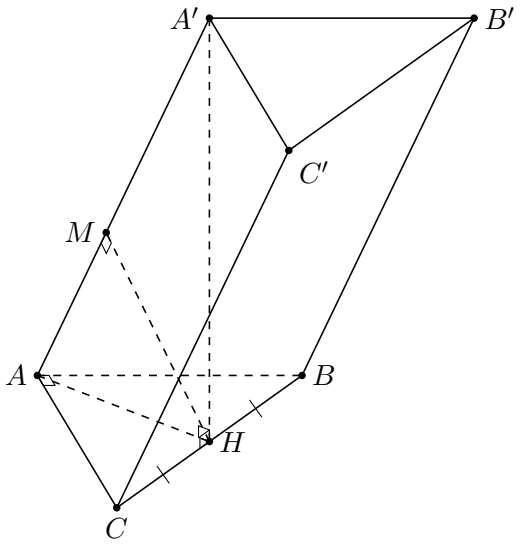
Chọn đáp án (B) □

Câu 470. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $30°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AA' và BC.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\dfrac{5a\sqrt{29}}{7}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{7}}{7}$.

✍Lời giải.

Vì H là hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) nên $A'H \perp (ABC)$, suy ra $BC \perp A'H$. Lại có H là trung điểm của BC và tam giác ABC cân nên $BC \perp AH$. Vậy $BC \perp (A'AH)$.
Trong tam giác $A'AH$ kẻ đường cao HM, với $M \in AA'$. Suy ra, HM là đoạn vuông góc của hai đường thẳng chéo nhau AA' và BC.
Vậy $d(AA', BC) = MH$.
Ta có $BC^2 = 2AC^2 = 6a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{6}$;
$AH = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.
Lại có AH là hình chiếu vuông góc của $A'H$ lên (ABC). Suy ra, góc giữa AA' và (ABC) bằng góc giữa AA' và AH chính là góc $\widehat{A'AH} = 30°$.



Khi đó,

$$\sin\widehat{A'AH} = \frac{MH}{AH} \Rightarrow MH = AH\sin\widehat{A'AH} = \frac{a\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Vậy $d(AA', BC) = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 471. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng thứ nhất đến mặt phẳng thứ hai.
B. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm bất kì trên đường thẳng thứ nhất đến đường thẳng thứ hai.
C. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Khoảng cách giữa a và (α) là khoảng cách từ một điểm bất kì của (α) đến a.
D. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa cặp mặt phẳng song song mà mỗi mặt phẳng chứa một đường thẳng đã cho.

✍Lời giải.
Khẳng định "Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Khoảng cách giữa a và (α) là khoảng cách từ một điểm bất kì của (α) đến a" là sai.
Khẳng định đúng "Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Khoảng cách giữa a và (α) là khoảng cách từ một điểm bất kì của a đến (α)."
Chọn đáp án (C) □

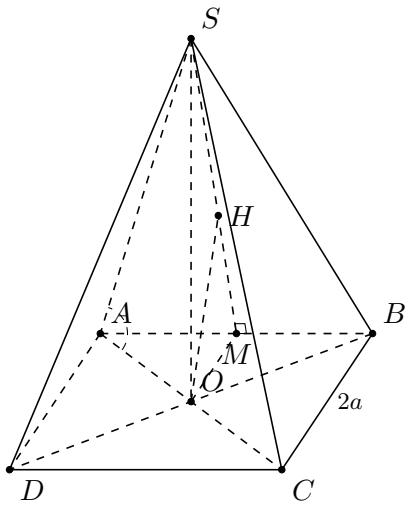
Câu 472. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, SA tạo với mặt phẳng đáy một góc $30°$. Tính theo a khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và CD.

A. $\mathrm{d} = \dfrac{3\sqrt{14}a}{5}$. **B.** $\mathrm{d} = \dfrac{2\sqrt{10}a}{5}$. **C.** $\mathrm{d} = \dfrac{2\sqrt{15}a}{5}$. **D.** $\mathrm{d} = \dfrac{4\sqrt{15}a}{5}$.

✍Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$
Do đó $\left(\widehat{SA,(ABCD)}\right) = \widehat{SAO} = 30°$.
Ta có $CD \parallel (SAB) \Rightarrow \mathrm{d} = \mathrm{d}(CD, SA) = \mathrm{d}(CD, (SAB)) = d(C, (SAB)) = 2\mathrm{d}(O, (SAB))$.
Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow AB \perp OM$, gọi H là hình chiếu của O lên $SM, H \in SM$
Có $\begin{cases} OM \perp AB \\ SO \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp OH$ mà $OH \perp SM \Rightarrow OH \perp (SAB)$.
Vậy $\mathrm{d} = 2OH$.

Tam giác SOM vuông tại O có $OM = a, SO = AO \tan \widehat{SAO} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow$
$OH = a\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.
Vậy $\mathrm{d} = 2a\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.



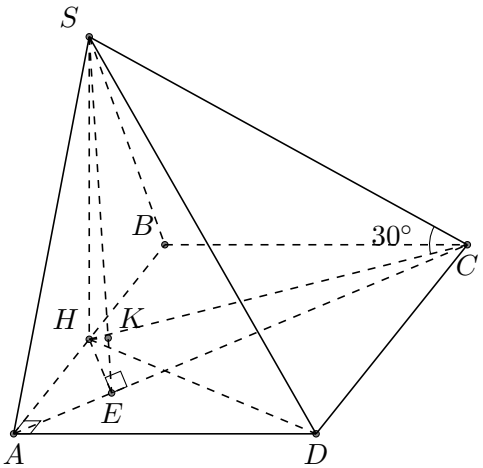
Chọn đáp án (B) □

Câu 473. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc mặt phẳng đáy. Biết $SD = 2a\sqrt{3}$ và góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $30°$. Tính khoảng cách h từ điểm B đến mặt phẳng (SAC).

A. $h = \dfrac{a\sqrt{13}}{3}$. **B.** $h = \dfrac{2a\sqrt{66}}{11}$. **C.** $h = \dfrac{2a\sqrt{13}}{3}$. **D.** $h = \dfrac{4a\sqrt{66}}{11}$.

✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AB và đặt $SH = x$ với $x > 0$. Vì SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên $SH \perp (ABCD)$.
Khi đó $(\widehat{SC,(ABCD)}) = \widehat{SCH} = 30°$.
Trong $(ABCD)$ kẻ $HE \perp AC$ tại E.
Khi đó $AC \perp (SHE)$.
Trong (SHE) kẻ $HK \perp SE$ tại K.
$\Rightarrow HK \perp (SAC)$. Xét $\triangle SHC$ vuông tại H có $HC = \dfrac{SH}{\tan \widehat{SCH}} = x\sqrt{3}$.
Dễ thấy tam giác HDC cân tại H.
$\Rightarrow HD = HC = x\sqrt{3}$.



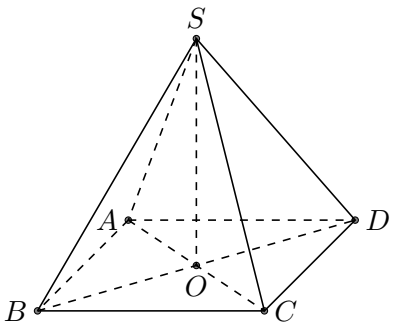
Xét $\triangle SHD$ vuông tại H có $SD^2 = SH^2 + HD^2 \Leftrightarrow 12a^2 = 4x^2 \Leftrightarrow x = SH = a\sqrt{3}$.
$\Rightarrow HD = HC = 3a$. Do $\triangle SAB$ đều $\Rightarrow AB = 2a \Rightarrow BC = \sqrt{HC^2 - HB^2} = 2a\sqrt{2}$.
Khi đó $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a\sqrt{3}$.
Diện tích tam giác HBC là $S_{HBC} = \dfrac{1}{2}HB \cdot BC = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2}AB \cdot BC = \dfrac{1}{2}S_{ABC} = a^2\sqrt{2}$.
$\Rightarrow S_{HAC} = S_{HBC} = a^2\sqrt{2} = \dfrac{1}{2}HE \cdot AC \Rightarrow HE = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.
Xét $\triangle SHE \Rightarrow HK = \dfrac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \dfrac{a\sqrt{66}}{11}$.
Vì H là trung điểm AB nên $h = \mathrm{d}(B; (SAC)) = 2\mathrm{d}(H; (SAC)) = \dfrac{2a\sqrt{66}}{11}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 474.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tâm $O, SO = a$ (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{5}a}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}a}{3}$. **D.** $\sqrt{3}a$.



✍Lời giải.

Gọi I là trung điểm CD. Trong mặt phẳng (SOI), kẻ $OH \perp SI$ tại H. Ta có: $\begin{cases} CD \perp OI \\ CD \perp SO \end{cases}$.

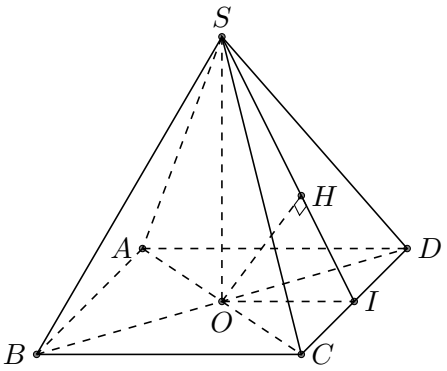
Mà $OH \perp SI \Rightarrow OH \perp (SCD)$.

Suy ra $\mathrm{d}(O,(SCD)) = OH$.

Ta có $OI = \dfrac{1}{2}BC = a, SO = a \Rightarrow \Delta SOI$ vuông cân tại O nên

$\Rightarrow OH = \dfrac{1}{2}SI = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.

Vậy $\mathrm{d}(O,(SCD)) = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.

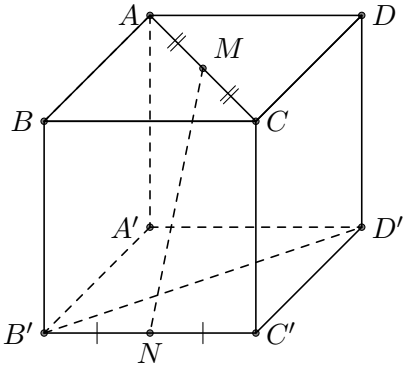


Chọn đáp án (B) □

Câu 475.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AC và $B'C'$ (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và $B'D'$ bằng

A. $\sqrt{5}a$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}a}{5}$. **C.** $3a$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.



✍Lời giải.

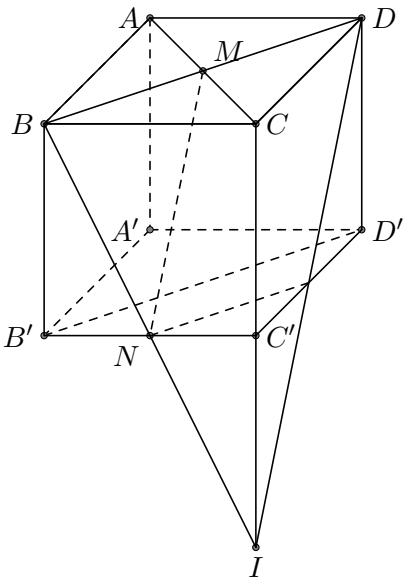
Ta có $B'D' \parallel BD \Rightarrow B'D' \parallel (NBD)$.

$\Rightarrow \mathrm{d}(MN, B'D') = \mathrm{d}(B'D', (NDB)) = \mathrm{d}(B', (NDB)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(C, (NBD))$.

Gọi h là khoảng cách từ C đến (NBD), $I = CC' \cap BN$. Ta có

$\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{CB^2} + \dfrac{1}{CD^2} + \dfrac{1}{CI^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{9}{4a^2} \Rightarrow h = \dfrac{2a}{3}$.

Vậy $\mathrm{d}(MN, B'D') = \dfrac{a}{3}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 476. Khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B và $AB = a$, $SA \perp (ABC)$. Góc giữa cạnh bên SB và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Khi đó khoảng cách từ A đến (SBC) là

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Kẻ đường cao AH trong tam giác SAB.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$ mà $AH \subset (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$. Do $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC)$. Khi đó ta được $\mathrm{d}(A,(SBC)) = AH$.

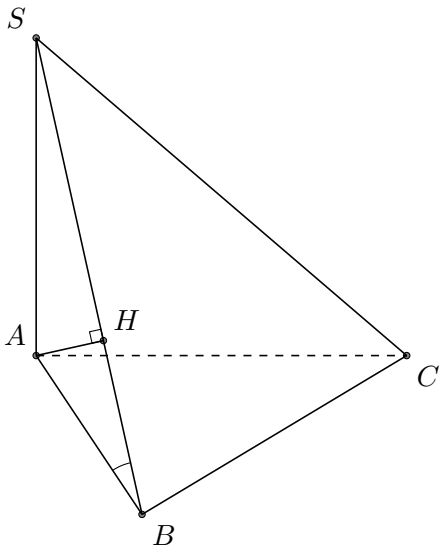
$SA \perp (ABC)$ nên AB là hình chiếu của SB lên mặt phẳng (ABC). Nên góc giữa SB và (ABC) là góc $\widehat{SBA} = 60^\circ$.

Xét tam giác SAB vuông tại A có $SA = AB\tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2}$$

$$\Rightarrow AH^2 = \frac{SA^2 \cdot AB^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{(a\sqrt{3})^2 \cdot a^2}{(a\sqrt{3})^2 + a^2} = \frac{3a^2}{4}.$$

Suy ra $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 477. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng $B'D$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

✍Lời giải.

Vì $\begin{cases} AD \perp AB \ (ABCD \text{ là h.vuông}) \\ AD \perp AA' \ (ADD'A' \text{ là h.vuông}) \end{cases}$

$\Rightarrow AD \perp (ABB'A') \Rightarrow AD \perp AB'$.

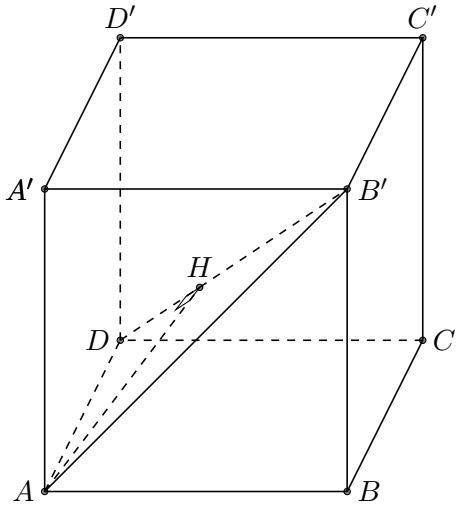
Trong $\triangle ADB'$ vuông tại A ta vẽ đường cao AH.

Vậy $AH = \mathrm{d}(A, B'D)$.

Theo hệ thức lượng trong $\triangle ADB'$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AB'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2}$$

Suy ra $AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 478. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $2a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

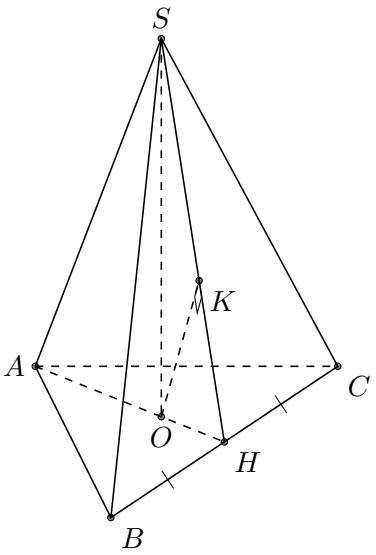
A. $\dfrac{a\sqrt{165}}{30}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{165}}{45}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{165}}{15}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{165}}{15}$.

✍Lời giải.

Gọi O là tâm của tam giác đều ABC và H là trung điểm của BC.

Ta có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{33}}{3}$.

Ta có $SH = \sqrt{SO^2 + OH^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{33}}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$.



Cách 1.

Tính $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{33}}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{11}}{12}$.

Vậy $\mathrm{d}[A,(SBC)] = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\triangle SBC}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3\sqrt{11}}{12}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{15}}{2} \cdot a} = \frac{a\sqrt{165}}{15}$.

Cách 2.

Ta có $\frac{\mathrm{d}[A,(SBC)]}{\mathrm{d}[O,(SBC)]} = \frac{AH}{OH} = 3$. Trong (SAH) vẽ $OK \perp SH$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp OK$.

Mà $OK \perp SH \Rightarrow OK \perp (SBC)$. Khi đó $OK = \mathrm{d}[O,(SBC)]$.

Vì $\triangle SOH$ vuông tại O có OK là đường cao

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{\frac{11}{3}a^2} + \frac{1}{\frac{a^2}{12}} \Rightarrow OK = \frac{a\sqrt{165}}{45}.$$

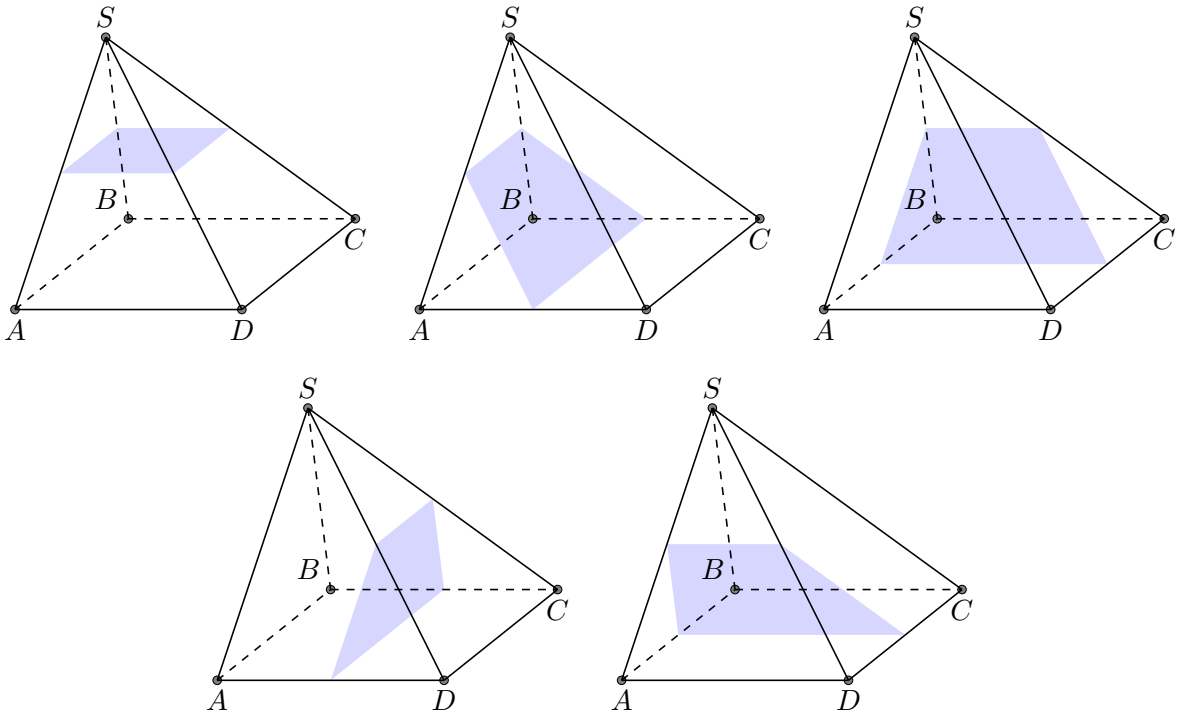
Do đó $\mathrm{d}[A,(SBC)] = 3 \cdot \frac{a\sqrt{165}}{45} = \frac{a\sqrt{165}}{15}$.

Chọn đáp án C □

Câu 479. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Dựng mặt phẳng (P) cách đều năm điểm A, B, C, D và S. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng (P) như vậy?

A. 4 mặt phẳng. **B**. 2 mặt phẳng. **C**. 1 mặt phẳng. **D**. 5 mặt phẳng.

Lời giải.



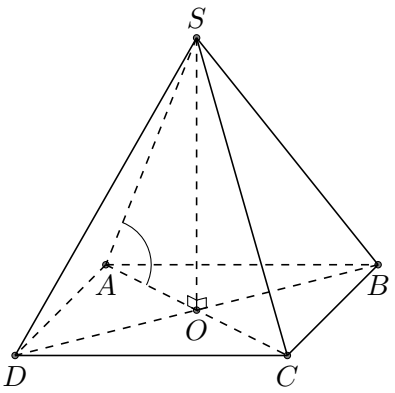
Chọn đáp án D □

Câu 480. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng $60°$. Tính khoảng cách từ đỉnh S đến mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** a. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

✍Lời giải.

Gọi O là tâm của hình vuông $(ABCD)$.
Ta có $S.ABCD$ là hình chóp đều
$\Rightarrow SO \perp (ABCD) \Rightarrow (SA,(ABCD)) = \widehat{SAO} = 60°$.
Lại có tam giác SAC cân tại S.
Suy ra tam giác SAC đều và cạnh $AC = a\sqrt{2}$
$\Rightarrow \mathrm{d}(S,(ABCD)) = SO = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.



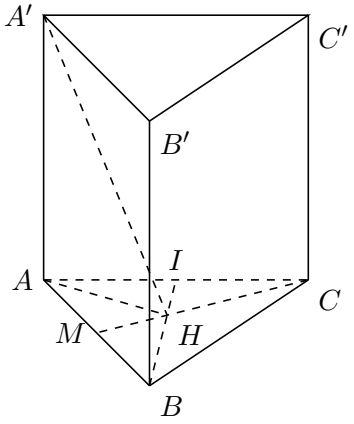
Chọn đáp án (C) □

Câu 481. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$. M là điểm di động trên AB. Gọi H là hình chiếu của A' trên đường thẳng CM. Tính độ dài đoạn thẳng BH khi tam giác AHC có diện tích lớn nhất.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$. **C.** $a\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1\right)$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

✍Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} AA' \perp MC \\ A'H \perp MC \end{cases} \Rightarrow MC \perp AH \Rightarrow \Delta AHC$ vuông tại H.
Trong (ABC): ΔAHC nội tiếp trong đường tròn đường kính AC.
$\Rightarrow \Delta AHC$ có diện tích lớn nhất khi nó là tam giác vuông cân.
$\Rightarrow AH = HC \Rightarrow B, H, I$ thẳng hàng và $HI = \dfrac{a}{2}$.
$\Rightarrow BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} - \dfrac{a}{2} = \dfrac{a\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$.

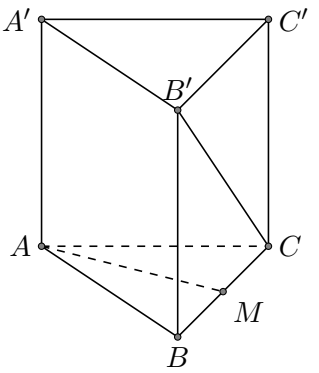


Chọn đáp án (B) □

Câu 482.

Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.

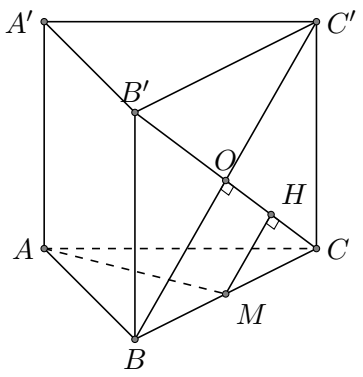
A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **C.** a. **D.** $a\sqrt{2}$.



✍Lời giải.

Ta có $AM \perp BC$ và $AM \perp BB'$ nên $AM \perp (BB'C'C)$. Trong $(BB'C'C)$, kẻ $MH \perp B'C$ $(H \in B'C)$ thì $AM \perp MH$, suy ra MH là đoạn vuông góc chung của AM và $B'C$. Gọi O là trung điểm của $B'C$ thì $BO \perp B'C$ và $MH = \dfrac{BO}{2}$.

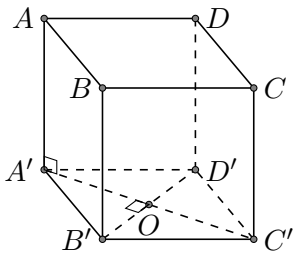
Ta có $BC' = a\sqrt{2}$ nên $BO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, do đó $MH = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.



Chọn đáp án B □

Câu 483.
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a như hình bên. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'D'$.

A. a. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $a\sqrt{2}$.



✍Lời giải.
Giả sử $A'C' \cap B'D'$ tại O suy ra $A'O \perp B'D'$ (1)(do $A'B'C'D'$ là hình vuông).
Mặt khác ta có $AA' \perp (A'B'C'D')$ nên $AA' \perp A'O$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $A'O$ là đoạn vuông góc chung giữa hai đường thẳng AA' và $B'D'$. Từ đó suy ra $\mathrm{d}(AA', B'D') = A'O = \dfrac{A'C'}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 484. Cho khối chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 4, biết $SA = 3$. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng SB và AD là

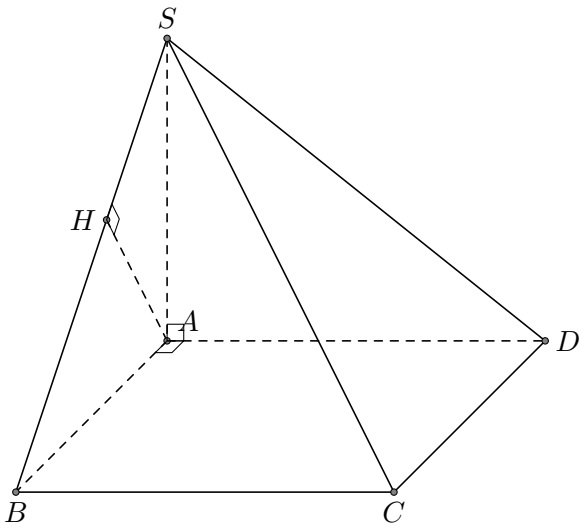
A. $\dfrac{4}{5}$. **B.** $\dfrac{12}{5}$. **C.** $\dfrac{6}{5}$. **D.** 4.

✍Lời giải.
Kẻ $AH \perp SB$ tại H. (1).
Ta có:

— $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB)$.

— $\begin{cases} AD \perp (SAB) \\ AH \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow AD \perp AH$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\mathrm{d}(AD, SB) = AH$.
Tính $AH = \dfrac{SA \cdot AB}{SB} = \dfrac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{12}{5}$.



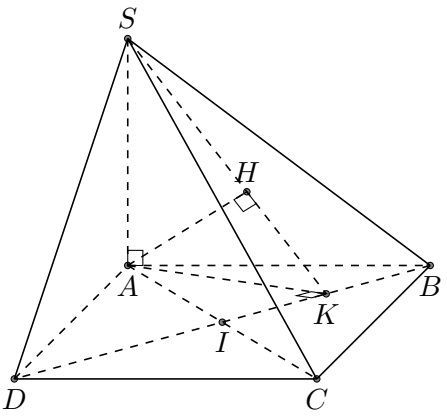
Chọn đáp án B □

Câu 485. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Tính khoảng cách d từ điểm C đến mặt phẳng (SBD).

A. $d = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. **B.** $d = \dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{57}}{19}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi I là giao điểm của AC và BD.
AC cắt (SBD) tại I nên $\dfrac{\mathrm{d}(C,(SBD))}{\mathrm{d}(A,(SBD))}=\dfrac{CI}{AI}=1$.
Kẻ $AK\perp BD,\ AH\perp SK$, ta có
$\mathrm{d}=\mathrm{d}(C,(SBD))=\mathrm{d}(A,(SBD))=AH$.
$AK=\dfrac{AB\cdot AD}{\sqrt{AB^2+AD^2}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;
$AH=\dfrac{AK\cdot SA}{\sqrt{AK^2+SA^2}}=\dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$.



Chọn đáp án B □

Câu 486. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=2a,\ AD=a,\ AA'=a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Tính khoảng cách h từ điểm D đến mặt phẳng $(B'MC)$.

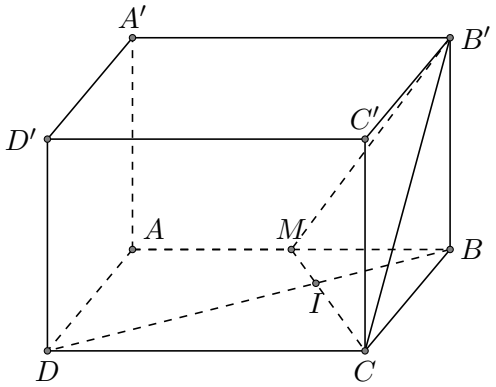
A. $h=\dfrac{a}{\sqrt{21}}$. **B.** $h=\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. **C.** $h=\dfrac{3a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $h=\dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$.

✍Lời giải.

Gọi I là giao điểm của BD với CM, ta có $\dfrac{\mathrm{d}(D,(B'MC))}{\mathrm{d}(B,(B'MC))}=\dfrac{DI}{BI}$.
Ta có $\triangle DIC\backsim\triangle BIM\Rightarrow\dfrac{DI}{BI}=\dfrac{DC}{BM}=2$
$\Rightarrow h=2\,\mathrm{d}(B,(B'MC))$.
Đặt $\mathrm{d}(B,(B'MC))=\mathrm{d}$.
Do tứ diện $BB'MC$ là tứ diện vuông tại B nên

$$\frac{1}{\mathrm{d}^2}=\frac{1}{BB'^2}+\frac{1}{BM^2}+\frac{1}{BC^2}=\frac{7}{3a^2}\Rightarrow\mathrm{d}=\frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Do đó $h=2\mathrm{d}=\dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$.



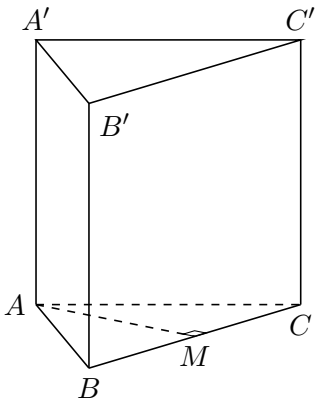
Chọn đáp án D □

Câu 487. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** a. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC.
Do ABC là tam giác đều cạnh a nên ta có $AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $AM\perp BC$. (1)
Mặt khác ta lại có $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều nên $AA'\perp(ABC)\Rightarrow AA'\perp AM$. (2)
Từ (1) và (2) ta có AM là đoạn vuông góc chung của AA' và BC.
Vậy $d\,(AA',BC)=AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

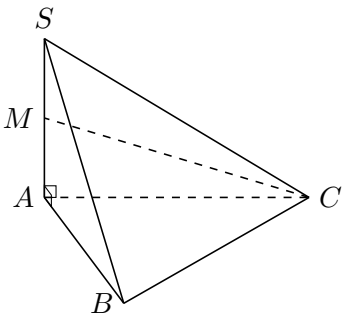


Chọn đáp án D □

Câu 488.

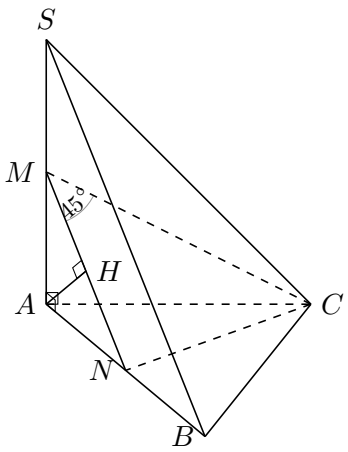
Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của SA (hình vẽ bên cạnh). Biết hai đường thẳng CM và SB hợp nhau một góc 45°, khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và SB bằng bao nhiêu?

A. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{6}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{1}{2}$.



✍Lời giải.

Gọi N là trung điểm cạnh AB nên $MN \parallel AB$, suy ra $\widehat{(CM,SB)} = \widehat{(CM,MN)} = \widehat{CMN}$. Suy ra $\widehat{CMN} = 45°$.
Ta có $CN \perp AB, CN \perp SA$ suy ra $CN \perp (SAB)$ hay $CN \perp NM$.
Ta có $CN = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan\widehat{CMN} = \frac{CN}{MN} \Leftrightarrow MN = \frac{\sqrt{3}}{2}, AM = \sqrt{MN^2 - AN^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
và $d(CM,SB) = d(SB,(CMN)) = d(B,(CMN)) = d(A,(CMN))$.
Kẻ $AH \perp MN$ suy ra $d(A,(CMN)) = AH$.
Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AM^2} \Leftrightarrow AH = \frac{\sqrt{6}}{6}$.



Chọn đáp án B □

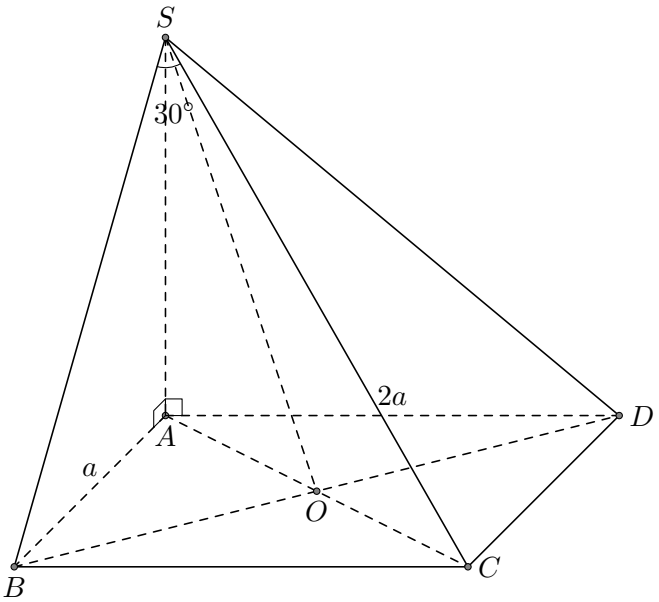
Câu 489. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Biết $AB = a, AD = 2a$, góc giữa SC và (SAB) là 30°. Tính khoảng cách từ điểm B đến (SCD).

A. $\frac{2a}{\sqrt{15}}$. **B.** $\frac{2a}{\sqrt{7}}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{11}}{\sqrt{15}}$. **D.** $\frac{22a}{\sqrt{15}}$.

✍Lời giải.

Ta có $BC \perp AB$ và $BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAB)$ hay hình chiếu của C lên (SAB) là điểm B nên $\widehat{(SC,(SAB))} = \widehat{(SC,SB)} = \widehat{BSC} = 30°$. Suy ra $SB = \frac{BC}{\tan 30°} = 2a\sqrt{3}$ và $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a\sqrt{11}$.
Ta có $AB \parallel CD$ hay $AB \parallel (SCD)$ nên $d(B,(SCD)) = d(A,(SCD))$.
Tương tự như trên ta chứng minh được $CD \perp (SAD)$. Trong mặt phẳng (SAD), kẻ $AH \perp SD$. Khi đó $AH \perp (SCD)$ hay $d(A,(SCD)) = AH = d(B,(SCD))$.
Ta có AH là đường cao trong tam giác vuông SAD nên $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{1}{11a^2} + \frac{1}{4a^2}$ suy ra $AH = \frac{2a\sqrt{11}}{\sqrt{15}}$.

Vậy khoảng cách từ điểm B đến (SCD) là $\frac{2a\sqrt{11}}{\sqrt{15}}$.



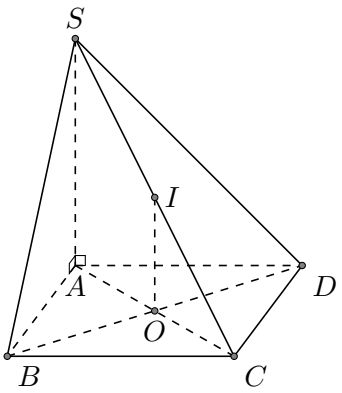
Chọn đáp án C □

Câu 490. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, $SA \perp (ABCD)$. Gọi I là trung điểm SC. Khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng độ dài đoạn nào?

A. IO. **B.** IA. **C.** IC. **D.** IB.

✍Lời giải.

Ta có $IO \parallel SA$ và $SA \perp (ABCD)$, suy ra $IO \perp (ABCD)$, do đó khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng độ dài đoạn thẳng IO.



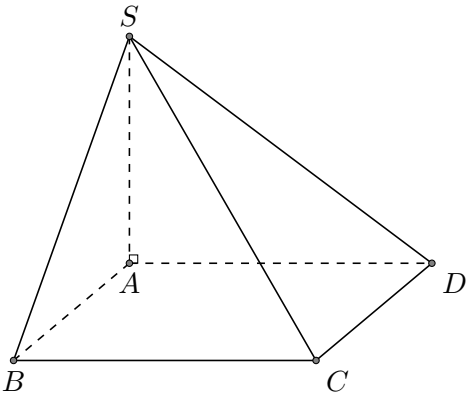
Chọn đáp án A □

Câu 491. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, SA vuông góc với $(ABCD)$ và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD.

A. a. **B.** $2a$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $a\sqrt{5}$.

Lời giải.

Vì $(SAB) \parallel CD$ nên $d(SB, CD) = d(D, (SAB)) = AD = 2a$.



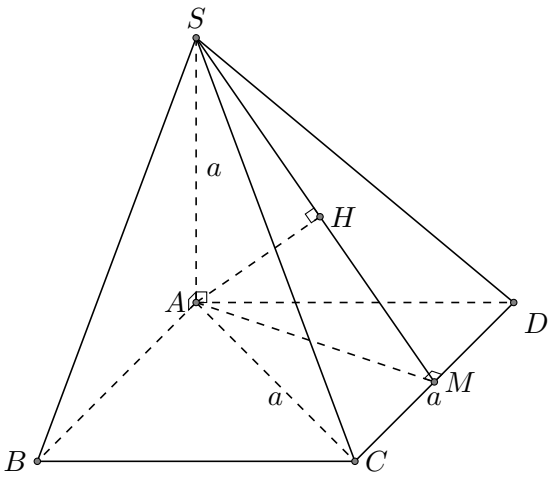
Chọn đáp án B □

Câu 492. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa SC và AB.

A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Dựng hình bình hành $ABCD$, khi đó $AB \parallel CD$
$\Rightarrow AB \parallel (SCD)$.
Suy ra $d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD))$.
Gọi M là trung điểm của $CD \Rightarrow AM \perp CD$, nối S với M, kẻ $AH \perp SM$. Suy ra $CD \perp (SAM)$
$\Rightarrow CD \perp AH \Rightarrow AH \perp (SCD)$.
Xét tam giác SAM vuông tại A có $SA = a$,
$AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{7}{3a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.
Vậy $d(SC, AB) = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.



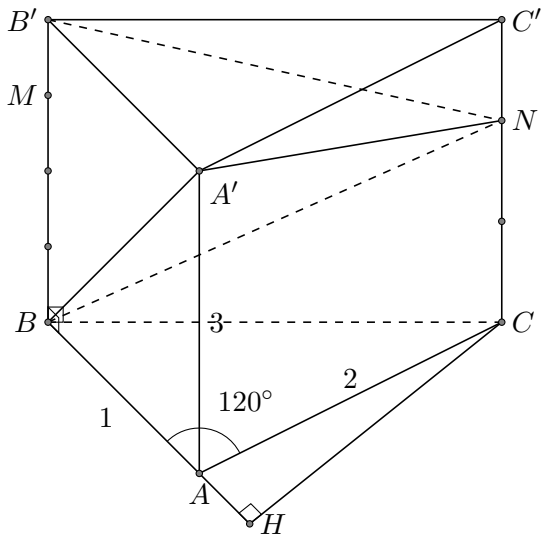
Chọn đáp án C □

Câu 493. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = 1$, $AC = 2$, $AA' = 3$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên cạnh BB', CC' sao cho $BM = 3B'M$, $CN = 2C'N$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(A'BN)$.

A. $\dfrac{9\sqrt{138}}{184}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{138}}{46}$. **C.** $\dfrac{9\sqrt{3}}{16\sqrt{46}}$. **D.** $\dfrac{9\sqrt{138}}{46}$.

Lời giải.

Ta có $V_{B'.A'BN} = V_{N.A'B'B}$ (1).
Diện tích tam giác $A'B'B$ là
$S_{A'B'B} = \dfrac{1}{2} \cdot BB' \cdot A'B' = \dfrac{3}{2}$.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB.
Ta có $CH \perp (A'B'B)$
và $CH = AC \sin \widehat{CAH} = 2 \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$.
Do $CC' \parallel (A'B'B)$ nên khoảng cách từ N đến $(A'B'B)$ bằng khoảng cách từ C đến $(A'B'B)$, $d(N, (A'B'B)) = d(C, (A'B'B)) = \sqrt{3}$.



Suy ra $V_{N.A'B'B} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{A'B'B} \cdot d(N, (A'B'B)) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{2} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (2).
Ta có:
$A'B = \sqrt{BB'^2 + A'B'^2} = \sqrt{10}$;
$A'N = \sqrt{A'C'^2 + NC'^2} = \sqrt{5}$;
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = 7$;
$BN = \sqrt{BC^2 + CN^2} = \sqrt{11}$.
Suy ra diện tích tam giác $A'BN$ là
$$S_{A'BN} = \sqrt{\frac{\sqrt{10}+\sqrt{5}+\sqrt{11}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{11}-\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{11}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}+\sqrt{11}-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{184}}{4}.$$
$V_{B'.A'BN} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{A'BN} \cdot d(B', (A'BN))$ (3).
Từ (1), (2) và (3), ta có $\dfrac{1}{3} \cdot S_{A'BN} \cdot d(B', (A'BN)) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow d(B', (A'BN)) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2S_{A'BN}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{184}}$.
Do $BM = 3B'M$ nên $d(M, (A'BN)) = \dfrac{3}{4} d(B', (A'BN)) = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{184}} = \dfrac{9\sqrt{138}}{184}$.

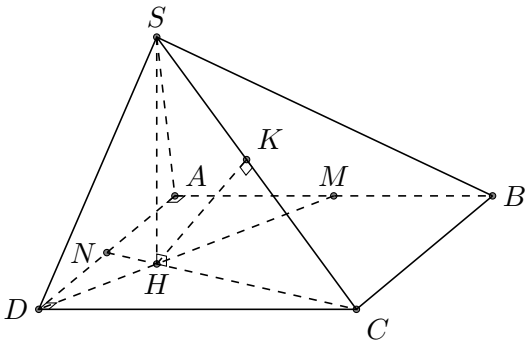
Chọn đáp án (A) □

Câu 494. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD; H là giao điểm của CN và DM; $SH \perp (ABCD)$, $SH = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC.

A. $\dfrac{a\sqrt{13}}{5}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{12}}{\sqrt{19}}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$.

✍Lời giải.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên AC.
Do $ABCD$ là hình vuông nên $CN \perp DM$, suy ra $DM \perp (SHC) \Rightarrow DM \perp HK$.
Vậy HK là đoạn vuông góc chung của MD và SC.
Có $\dfrac{1}{DH^2} = \dfrac{1}{DN^2} + \dfrac{1}{DC^2} = \dfrac{5}{a^2} \Rightarrow DH^2 = \dfrac{a^2}{5}$.
$HC^2 = DC^2 - DH^2 = \dfrac{4a^2}{5}$.
$\dfrac{1}{KH^2} = \dfrac{1}{CH^2} + \dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{5}{4a^2} + \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{19}{12a^2}$
$\Rightarrow HK = a\sqrt{\dfrac{12}{19}}$.



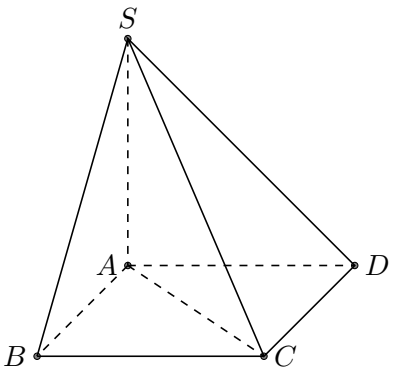
Chọn đáp án (B) □

Câu 495.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Khi đó khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) bằng

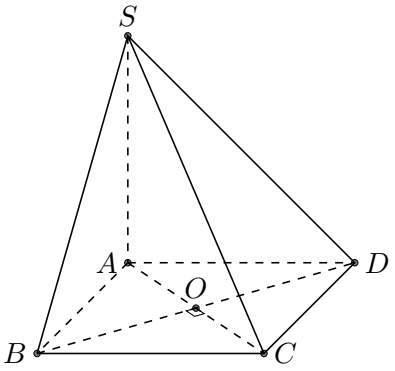
A. $\mathrm{d}(B,(SAC)) = a$. **B.** $\mathrm{d}(B,(SAC)) = a\sqrt{2}$.

C. $\mathrm{d}(B,(SAC)) = 2a$. **D.** $\mathrm{d}(B,(SAC)) = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.



✍Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}(B,(SAC)) = BO = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



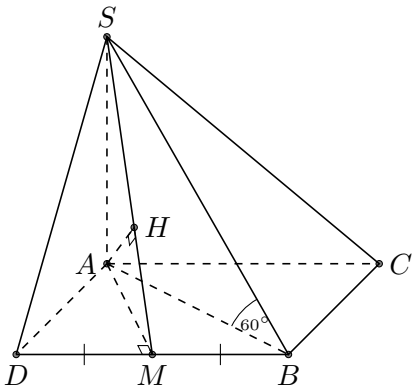
Chọn đáp án D □

Câu 496. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **C.** $2a$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

✍Lời giải.

Vì $SA \perp (ABC)$ nên A là hình chiếu của S xuống mặt phẳng (ABC).
Khi đó góc SB và (ABC) là góc giữa SB và AB bằng $\widehat{ABS} = 60°$.
Ta có $SA = AB\tan\widehat{ABS} = a\sqrt{3}$.
Gọi D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ACBD$. Ta có $AC \parallel BD$ nên $AC \parallel (SBD)$. Do đó $d(AC,SB) = d(AC,(SBD)) = d(A,(SBD))$.
Gọi M là trung điểm BD và H là hình chiếu của A lên SM.



Vì ABC là tam giác đều nên ABD cũng là tam giác đều.
Ta có

$$\begin{cases} BD \perp AM \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAM) \Rightarrow BD \perp AH.$$

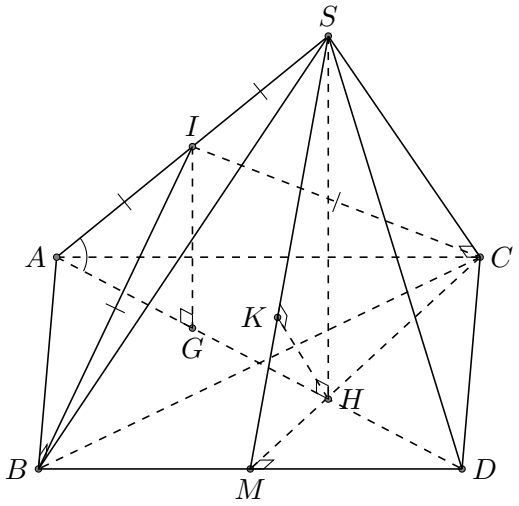
Lại có $AH \perp SM$. Cho nên $AH \perp (SBD)$.
Vậy $d(AC,SB) = d(A,(SBD)) = AH$.
Ta có $AH = \sqrt{\dfrac{SA^2 \cdot AM^2}{SA^2 + AM^2}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.
Vậy $d(AC,SB) = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 497. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90°$, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC.

A. $\dfrac{6a}{7}$. **B.** $\dfrac{2a}{7}$. **C.** $\dfrac{2a}{\sqrt{57}}$. **D.** $\dfrac{6a}{\sqrt{57}}$.

✍Lời giải.



— Gọi I là trung điểm của SA, do $\triangle SBA$ và $\triangle SCA$ lần lượt vuông tại B, C nên $IS = IA = IB = IC$. Suy ra hình chiếu vuông góc của I trên (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

— $\triangle ABC$ đều nên hình chiếu vuông góc của I trên (ABC) là trọng tâm G của $\triangle ABC$.

— Góc giữa SA và (ABC) là góc $\widehat{IAG} = 60^\circ$, $IG = AG \cdot \tan \widehat{IAG} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \tan 60^\circ = a$.

— Vẽ hình bình hành $ABDC$, ta có hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) là trọng tâm H của tam giác đều BCD và $SH = 2IG = 2a$.

— $d(AC, SB) = d\left(AC, (SBD)\right) = d\left(C, (SBD)\right) = 3d\left(H, (SBD)\right)$.

— Gọi M là trung điểm của BD ta có $HM \perp BD$, kẻ $HK \perp SM$. Suy ra $HK \perp (SBD)$ và $d\left(H, (SBD)\right) = HK$.

— Ta có $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HS^2} + \dfrac{1}{HM^2} = \dfrac{1}{(2a)^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \dfrac{49}{4a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{2a}{7}$.

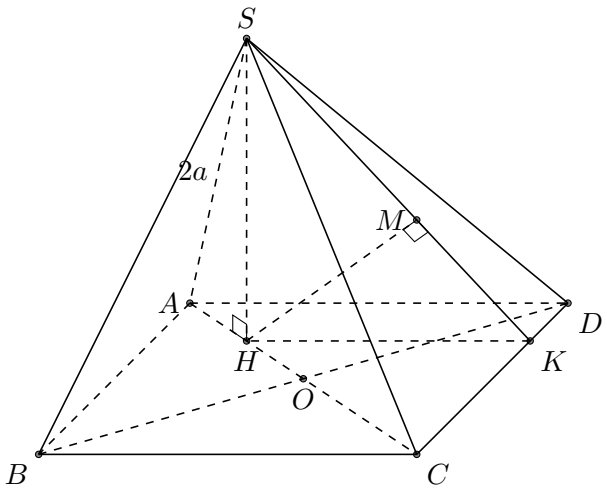
— Vậy $d(AC, SB) = 3HK = \dfrac{6a}{7}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 498. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng $4a$. Cạnh bên $SA = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của H của đoạn thẳng AO. Tính khoảng cách d giữa các đường thẳng SD và AB.

A. $d = \dfrac{4a\sqrt{22}}{11}$. **B.** $d = \dfrac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$. **C.** $d = 2a$. **D.** $d = 4a$.

✍Lời giải.



Do $AB \parallel CD$ suy ra $AB \parallel (SCD)$ suy ra

$$d(AB, SD) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)) = \frac{4}{3}d(H, (SCD)).$$

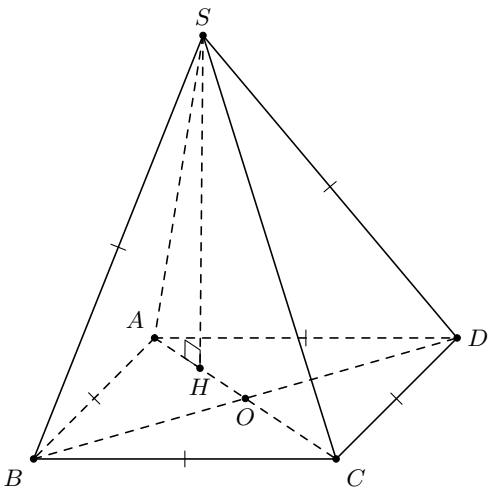
Trên cạnh CD lấy điểm K sao cho $\dfrac{CK}{CD} = \dfrac{3}{4}$, suy ra $HK \parallel AD$ suy ra $CD \perp HK$. (1)
Mặt khác $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp CD$. (2)
Trong mặt phẳng (SHK) kẻ $HM \perp SK$ tại M. (3)
Từ (1), (2) suy ra $CD \perp (SHK)$ suy ra $CD \perp HM$. (4)
Từ (3), (4) suy ra $HM \perp (SCD)$ suy ra $d(H, (SCD)) = HM$.
Theo bài ra ta có $AC = 4a\sqrt{2} \Rightarrow AH = a\sqrt{2}$.
Xét tam giác vuông SHA ta có $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = a\sqrt{2}$.
Ta lại có $HK = \dfrac{3}{4}AD = 3a$. Xét tam giác vuông SHK ta có $HM^2 = \dfrac{SH^2 \cdot HK^2}{SH^2 + HK^2} \Rightarrow HM = \dfrac{3a\sqrt{22}}{11} \Rightarrow$
$d(A, (SCD)) = \dfrac{4a\sqrt{22}}{11}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 499. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Biết $SB = SD = AB = 2a, SA = a$ và $SC = a\sqrt{2}$. Hãy tính theo a khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

✍Lời giải.

Gọi O là giao điểm của BD và AC.
Ta có ΔSBD cân tại S nên $SO \perp BD$, mà $AC \perp BD$, suy ra $BD \perp (SAC)$.
$BA = BS = BC$ nên hình chiếu của B lên (SAC) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAC.
Mà BO vuông góc với (SAC) nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAC.
Mặt khác O là trung điểm AC nên tam giác SAC là tam giác vuông tại S.
Kẻ SH vuông AC tại H, suy ra $SH \perp (ABCD)$.
$\Rightarrow SH = \sqrt{\dfrac{SA^2 \cdot SC^2}{SA^2 + SC^2}} = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.
$\Rightarrow \mathrm{d}(S, (ABCD)) = SH = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.



Chọn đáp án (A) □

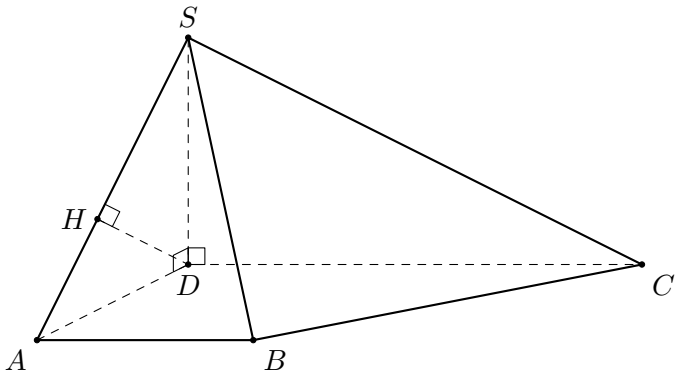
Câu 500. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D; SD vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$; $AD = 2a$; $SD = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa đường thẳng CD và mặt phẳng (SAB).

A. $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

✍Lời giải.
Do $CD \parallel AB$ nên suy ra $CD \parallel (SAB)$, bởi vậy: $d(CD;(SAB)) = d(D;(SAB))$.
Kẻ $DH \perp SA$, với $H \in SA$,khi đó $DH \perp (SAB)$, nên $d(D;(SAB)) = DH$.
Trong $\triangle SAD$ vuông tại D và có đường cao DH, ta có

$$\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{SD^2} = \frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} = \frac{3}{4a^2}$$
$$\Rightarrow DH = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

Như vậy $d(CD;(SAB)) = d(D;(SAB)) = DH = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.



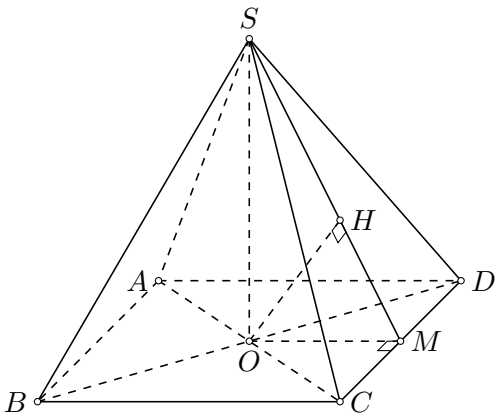
Chọn đáp án (A) □

Câu 501. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng cách đều 5 điểm S, A, B, C, D?
A. 5 mặt phẳng. **B**. 2 mặt phẳng. **C**. 1 mặt phẳng. **D**. 4 mặt phẳng.

✍Lời giải.
Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA và H, I, J, K lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD.
Ta có các mặt phẳng cách đều 5 điểm S, A, B, C, D là $(MPJI), (MPKH), (HINQ), (JKQN), (HIJK)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 502. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi O là tâm đáy. Tính khoảng cách từ O tới mặt phẳng (SCD).
A. $\dfrac{a}{\sqrt{6}}$. **B**. $\dfrac{a}{2}$. **C**. $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **D**. $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

✍Lời giải.
Gọi M là trung điểm CD. Khi đó $(SOM) \perp (SCD)$ theo giao tuyến SM.
Trong mặt phẳng (SOM) hạ $OH \perp SM$, ta có:
$OH \perp (SCD) \Rightarrow OH = d(O,(SCD))$.
Do đó: $OH = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OM^2} = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 503. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB bằng
A. $\dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. **C**. $\dfrac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{7}}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{3}a}{\sqrt{7}}$.

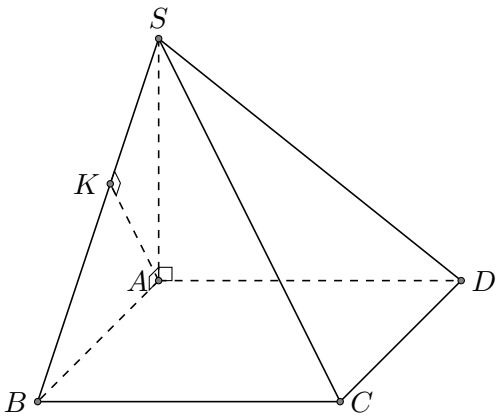
✍Lời giải.

Dựng AK là đường cao của tam giác SAB.

Ta có: $AK = \dfrac{SA \cdot AB}{SB} = \dfrac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{2a \cdot a\sqrt{3}}{\sqrt{4a^2 + 3a^2}} = \dfrac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{7}}$.

$$\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \\ AB \cap SA = A \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp AK.$$

$$\begin{cases} AK \perp AD \\ AK \perp SB \end{cases} \Rightarrow \mathrm{d}(AD, SB) = AK = \frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{7}}.$$



Chọn đáp án C □

Câu 504. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song với nó đồng thời chứa đường thẳng kia.

B. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

C. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.

D. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

Lời giải.

Mệnh đề "Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia" là sai. Thật vậy, xét hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh 1. Theo định nghĩa $d(AB, A'D') = AA' = 1$, tuy nhiên $d(B, A'D') = BA' = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 505. Đường thẳng AM tạo với mặt phẳng chứa tam giác đều ABC một góc $60°$. Biết rằng cạnh của tam giác đều ABC bằng a và $\widehat{MAB} = \widehat{MAC}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và BC.

A. $\dfrac{3a}{4}$. **B**. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C**. a. **D**. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

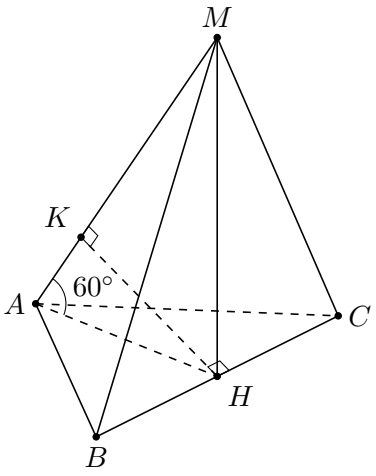
Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (ABC). Ta có $\triangle MAB = \triangle MAC$ (c.g.c) nên $MB = MC$, suy ra $HB = HC$, kéo theo $AH \perp BC$. Do đó không mất tính tổng quát, ta coi H là trung điểm BC. Khi đó $BC \perp (AMH)$.

Gọi K là hình chiếu của H trên AM, ta có $HK \perp AM$. Theo chứng minh trên $BC \perp (AHM)$ nên $BC \perp HK$. Vậy $d(AM, BC) = HK$.

Dễ thấy $\widehat{MAH} = (AM, (ABC)) = 60°$, suy ra

$$HK = AH \sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4}.$$



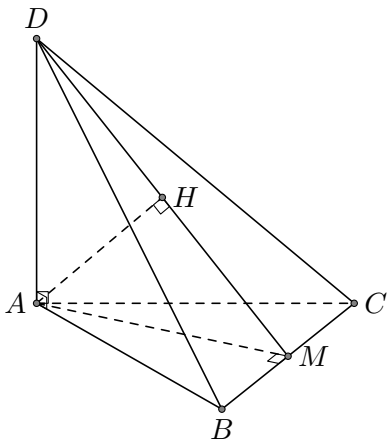
Chọn đáp án A □

Câu 506. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC), $AC = AD = 4$, $AB = 3$, $BC = 5$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (BCD).

A. $\mathrm{d} = \dfrac{12}{\sqrt{34}}$. **B**. $\mathrm{d} = \dfrac{60}{\sqrt{769}}$. **C**. $\mathrm{d} = \dfrac{\sqrt{769}}{60}$. **D**. $\mathrm{d} = \dfrac{\sqrt{34}}{12}$.

Lời giải.

Ta có $AB^2+AC^2=BC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A. Kẻ $AM \perp BC, M \in BC$ và $AH \perp DM$, $H \in DM$ khi đó ta có $AH \perp (BCD)$ nên $\mathrm{d}=AH$.
Ta có
$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AM^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{9}=\frac{17}{72}.$$
Từ đó suy ra $\mathrm{d}=\dfrac{12}{\sqrt{34}}$.

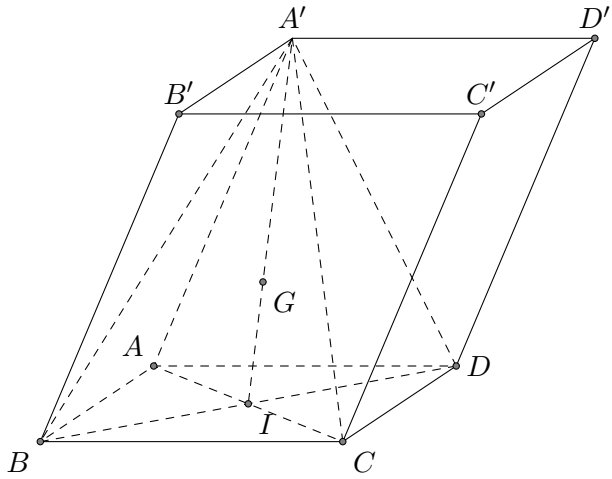


Chọn đáp án A ☐

Câu 507. Cho hình hộp xiên $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng nhau và bằng a, $\widehat{BAD}=\widehat{BAA'}=\widehat{DAA'}=60^\circ$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và BD bằng

A. a. **B.** $\dfrac{a}{2\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.
Gọi G là trọng tâm tam giác $A'BD$, I là trung điểm BD.
Ta có tứ diện $ABDA'$ là tứ diện đều cạnh a nên $AG \perp (A'BD)$
Suy ra $AC' \perp (A'BD) \Rightarrow AC' \perp GI$
$AC \perp BD$ (do $ABCD$ là hình thoi)
$$\left.\begin{array}{l} BD \perp AG \\ BD \perp AC \end{array}\right\} \Rightarrow BD \perp (ACA') \Rightarrow BD \perp GI$$
Vậy $\mathrm{d}(AC', BD)=GI=\dfrac{1}{3}A'I=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

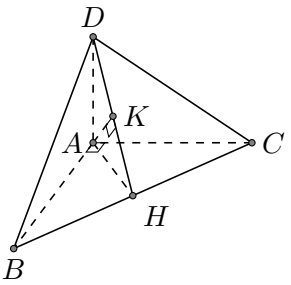


Chọn đáp án B ☐

Câu 508. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh DA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AB=3$ cm, $AC=4$ cm,$AD=\sqrt{6}$ cm, $BC=5$ cm. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) bằng

A. $\dfrac{12}{5}$ cm. **B.** $\dfrac{12}{7}$ cm. **C.** $\sqrt{6}$ cm. **D.** $\dfrac{6}{\sqrt{10}}$ cm.

✍Lời giải.
Do $BC^2=AB^2+AC^2$. Nên $\triangle ABC$ vuông tại A. Vẽ AH vuông góc với BC $(H \in BC)$. Mà $AD \perp BC$ nên $(AHD) \perp BC$.
Ta có $AH=\dfrac{AB \cdot AC}{BC}=\dfrac{12}{5}$.
Vẽ $AK \perp DH$ $(K \in DH)$, mà $AK \perp BC$ nên $AK \perp (BCD)$.
Ta có $AK=\sqrt{\dfrac{AD^2 \cdot AH^2}{AD^2+AH^2}}=\dfrac{12}{7}$.



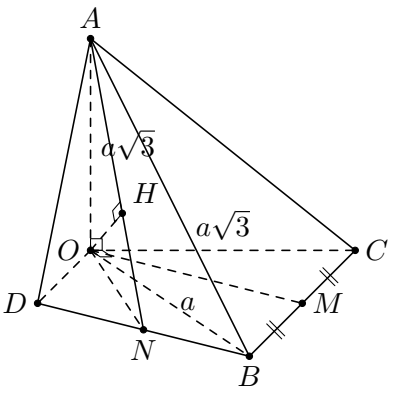
Chọn đáp án B ☐

Câu 509. Cho hình tứ diện $OABC$ có đáy OBC là tam giác vuông tại O, $OB=a$, $OC=a\sqrt{3}$. Cạnh OA vuông góc với mặt phẳng (OBC), $OA=a\sqrt{3}$, gọi M là trung điểm của BC. Tính theo a khoảng cách h giữa hai đường thẳng AB và OM.

A. $h=\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $h=\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **C.** $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{15}$.

✍Lời giải.

Dựng hình bình hành $OMBD$.
Ta có $OM \parallel BD$, $BD \subset (ABD)$ nên $OM \parallel (ABD)$. Suy ra $\mathrm{d}(OM, AB) = \mathrm{d}(OM, (ABD))$.
Kẻ $ON \perp BD$ tại N, $OH \perp AN$ tại H
$\Rightarrow OH \perp (ABD)$ tại H.
Suy ra $\mathrm{d}(OM, AB) = \mathrm{d}(OM, (ABD))$
$= \mathrm{d}(O, (ABD)) = OH$.
$BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = 2a \Rightarrow OM = BM = \dfrac{BC}{2} = a$. Suy ra $\triangle ABC$ đều cạnh a hay $\triangle OBD$ đều
$\Rightarrow ON = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{ON^2} = \dfrac{5}{3a^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.
Vậy $h = \mathrm{d}(OM, AB) = OH = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

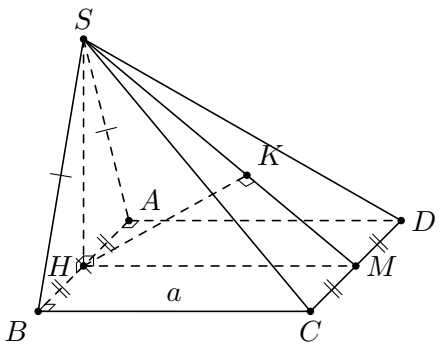


Chọn đáp án B □

Câu 510. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách h từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).

A. $h = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $h = a$. **C.** $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{7}$.

✍Lời giải.
Gọi H là trung điểm AB. Ta có $SH \perp AB$ nên $SH \perp (ABCD)$.
Vì $AH \parallel CD$, $CD \subset (SCD)$ nên
$\mathrm{d}(A, (SCD)) = \mathrm{d}(H, (SCD))$.
Kẻ $HK \perp SM$ tại K.
Ta có: $\begin{cases} CD \perp HM \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHM)$.
Lại có $\begin{cases} HK \perp SM \\ HK \perp CD \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SCD)$ tại K.



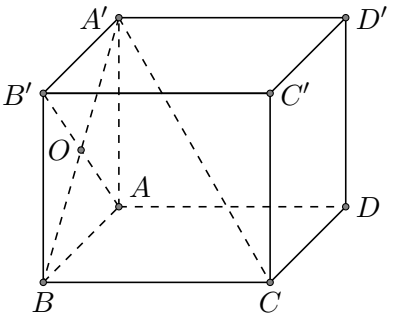
Khi đó $\mathrm{d}(A, (SCD)) = \mathrm{d}(H, (SCD)) = HK$.
Ta có $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $HM = a$, $SM = \sqrt{SH^2 + HM^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.
Suy ra $HK = \dfrac{SH \cdot HM}{SM} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a}{\frac{a\sqrt{7}}{2}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. Vậy $h = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án A □

Câu 511. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính theo a khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

✍Lời giải.
Gọi $O = AB' \cap A'B$.
Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên các mặt bên là các hình vuông. Đồng thời, $BC \perp (ABB'A') \Rightarrow BC \perp AB'$ (1).
Mặt khác, $AB' \perp A'B$ (2) (Tính chất hai đường chéo hình vuông).
Từ (1) và (2) suy ra $AB' \perp (A'BC)$
$\Rightarrow \mathrm{d}(A, (A'BC)) = AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án A □

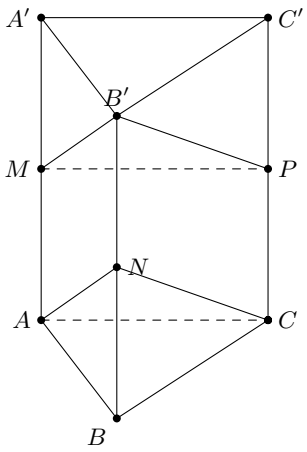
Câu 512. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', BB'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'M$ và CN.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{8}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

✍Lời giải.

Gọi P là trung điểm của CC'. Khi đó

$$d(B'M, CN) = d((B'MP), (ANC)) = \frac{V_{ACN.MPB'}}{S_{\Delta ANC}}$$
$$= \frac{V_{ABC.A'B'C'} - V_{B'.A'MPC'} - V_{N.ABC}}{\frac{1}{2}AC \cdot \sqrt{AN^2 - \frac{AC^2}{4}}}$$
$$= \frac{\frac{a^3\sqrt{3}}{4} - \frac{a^3\sqrt{3}}{12} - \frac{a^3\sqrt{3}}{24}}{\frac{1}{2}a \cdot \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$



Chọn đáp án A □

Câu 513. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $AA' = 2a$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$.

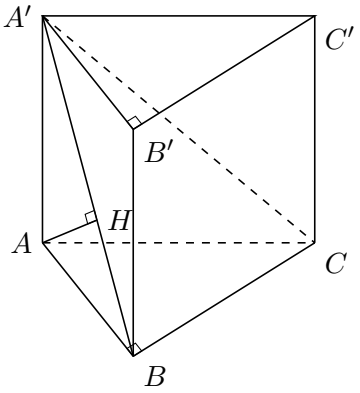
A. $2\sqrt{5}a$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}a}{5}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{5}a}{5}$.

✍Lời giải.

Kẻ $AH \perp A'B$. Ta có: $\begin{cases} AH \perp A'B \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (A'BC)$.

Suy ra $d(A, (A'BC)) = AH$.

Ta có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{A'A^2} = \dfrac{5}{4a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$.



Chọn đáp án B □

Câu 514. Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A_1 lên $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD. Tính khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD).

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

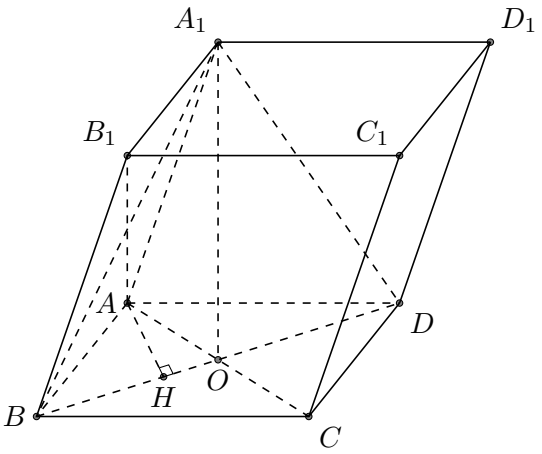
✍Lời giải.

Ta có B_1A đi qua trung điểm của A_1B nên $d(B_1, (A_1BD)) = d(A, (A_1BD))$.

Kẻ $AH \perp BD$ tại H.

Ta có $AH \perp BD$ và $AH \perp A_1O$ nên $AH = d(A, (A_1BD))$.

Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AD^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



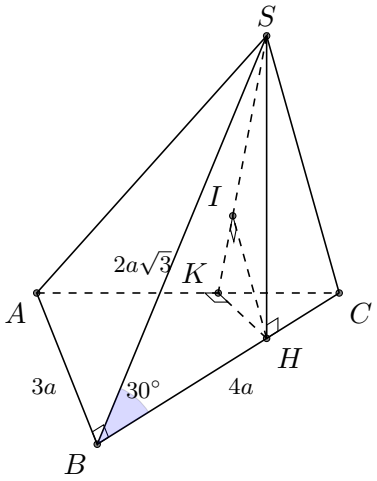
Chọn đáp án C □

Câu 515. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 3a, BC = 4a$, mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB = 2\sqrt{3}a, \widehat{SBC} = 30^\circ$. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC).

A. $6\sqrt{7}a$. **B.** $\dfrac{6\sqrt{7}a}{7}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{7}a}{14}$. **D.** $a\sqrt{7}$.

Lời giải.

Ta có $(SBC) \perp (ABC)$ và $(SBC) \cap (ABC) = BC$.
Trong mặt phẳng (SBC), kẻ $SH \perp BC$ thì $SH \perp (ABC)$
$\Rightarrow SH \perp BC$.
Tam giác SBH vuông tại H có $SH = SB \cdot \sin 30^\circ = a\sqrt{3}$;
$BH = SB \cdot \cos 30^\circ = 3a \Rightarrow HC = a$.
Vì $\dfrac{BC}{HC} = 4$ nên $d(B,(SAC)) = 4d(H,(SAC))$.
Trong mặt phẳng (ABC), kẻ $HK \perp AC$; $SH \perp AC$
$\Rightarrow AC \perp (SHK)$; $AC \subset (SAC) \Rightarrow (SAC) \perp (SHK)$ và $(SAC) \cap (SHK) = SK$.



Trong mặt phẳng (SHK), kẻ $HI \perp SK$ thì $HI \perp (SAC) \Rightarrow HI = d(H,(SAC))$.
Tam giác CKH và tam giác CBA đồng dạng nên $\dfrac{HK}{AB} = \dfrac{CH}{CA} \Rightarrow HK = \dfrac{CH \cdot AB}{\sqrt{AB^2 + BC^2}} = \dfrac{3a}{5}$.
Tam giác SHK vuông tại H có $\dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HK^2} \Rightarrow HI = \dfrac{3\sqrt{7}a}{14}$.
Vậy $d(B,(SAC)) = \dfrac{6\sqrt{7}a}{7}$.

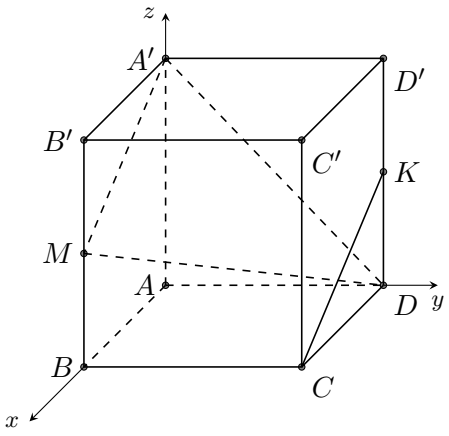
Chọn đáp án B □

Câu 516. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Gọi K là trung điểm DD'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$.

A. $\dfrac{4a}{3}$. **B.** $\dfrac{a}{3}$. **C.** $\dfrac{2a}{3}$. **D.** $\dfrac{3a}{4}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm BB'. Ta có: $CK \parallel A'M \Rightarrow CK \parallel (A'MD)$.
Khi đó:
$d(CK, A'D) = d(CK,(A'MD)) = d(C,(A'MD))$.
Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ:
Ta có: $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $A'(0;0;a)$, $B'(a;0;a)$, $C(a;a;0)$, $M\left(a;0;\dfrac{a}{2}\right)$.
$\overrightarrow{A'M} = \left(a;0;-\dfrac{a}{2}\right)$,
$\overrightarrow{A'D} = (0;a;-a)$, $\left[\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{A'D}\right] = \left(\dfrac{a^2}{2}; a^2; a^2\right)$.



Vậy mặt phẳng $(A'MD)$ nhận $\vec{n} = (1;2;2)$ làm vectơ pháp tuyến.
Phương trình mp$(A'MD)$: $x + 2y + 2z - 2a = 0$.
Do đó:
$d(C,(A'DM)) = \dfrac{|a + 2a - 2a|}{3} = \dfrac{a}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 517. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2a$, $AA' = a$. Gọi M là điểm trên đoạn AD với $\dfrac{AM}{MD} = 3$. Gọi x là độ dài khoảng cách giữa hai đường thẳng AD', $B'C$ và y là độ dài khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(AB'C)$. Tính giá trị xy.

A. $\dfrac{5a^5}{3}$. **B.** $\dfrac{a^2}{2}$. **C.** $\dfrac{3a^2}{4}$. **D.** $\dfrac{3a^2}{2}$.

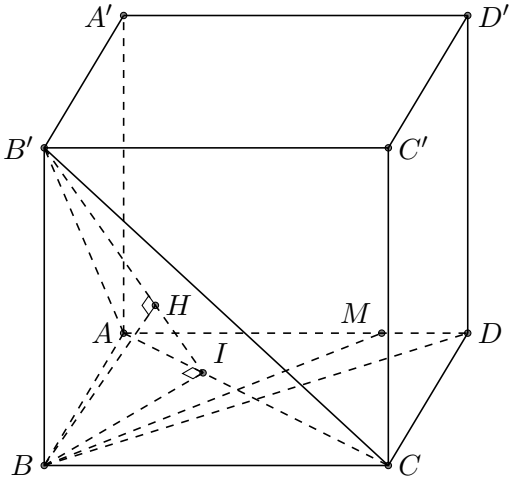
✍Lời giải.

Ta có $B'C \parallel A'D \Rightarrow B'C \parallel (ADD'A') \Rightarrow d(B'C, AD') = d(C, (ADD'A')) = CD = a$.

Suy ra $x = a$.

Lại có: $\dfrac{MA}{DA} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow d(M, (AB'C)) = \dfrac{3}{4}d(D, (AB'C)) = \dfrac{3}{4}d(B; (AB'C))$.

Gọi I là hình chiếu vuông góc của B lên AC ta có: $\begin{cases} AC \perp BI \\ AC \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AC \perp (BB'I)$.



Gọi H là hình chiếu của B lên $B'I$ ta có:

$\begin{cases} BH \perp B'I \\ BH \perp AC \end{cases} \Rightarrow BH \perp (B'AC) \Rightarrow d(B, (AB'C)) = BH$.

Trong tam giác ABC, ta có:

$AB \cdot BC = AC \cdot BI \Rightarrow BI = \dfrac{AB \cdot BC}{AC} = \dfrac{a \cdot 2a}{a\sqrt{5}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Trong tam giác $BB'I$, ta có:

$\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{BI^2} + \dfrac{1}{BB'^2} \Rightarrow BH = \dfrac{2a}{3} \Rightarrow d(B, (AB'C)) = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{2a}{3} = \dfrac{a}{2}$.

Suy ra $y = \dfrac{a}{2}$.

Vậy $xy = \dfrac{a^2}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 518. Cho hình chóp $S.ABC$ có hai mặt ABC và SBC là tam giác đều, hai mặt còn lại là tam giác vuông. Tính khoảng cách từ A đến (SBC) biết $BC = a\sqrt{2}$.

A. $d(A; (SBC)) = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. **B.** $d(A; (SBC)) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

C. $d(A; (SBC)) = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $d(A; (SBC)) = a\sqrt{2}$.

✍Lời giải.

Vì $CS = CA$ nên $\triangle SCA$ là tam giác vuông tại C; tương tự $\triangle SBA$ là tam giác vuông tại B.

Gọi M là trung điểm của BC, H là hình chiếu của A lên SM.

Khi đó H là hình chiếu của A lên (SBC). Thật vậy:

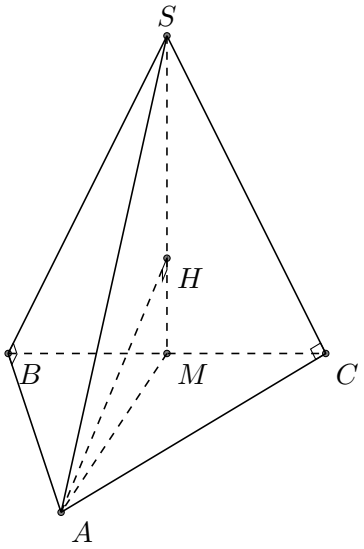
Vì $BC \perp SM$, $BC \perp AM$ nên $BC \perp (SAM)$.

Do đó, $BC \perp AH$. Suy ra $AH \perp (SBC)$.

Ta có $SM = AM = BC\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}a$; $SA = \sqrt{SC^2 + AC^2} = 2a$.

Áp dụng công thức Hê-rông ta tính được $S_{\triangle SMA} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a^2$.

Hơn nữa, $S_{\triangle SMA} = \dfrac{1}{2} \cdot AH \cdot SM$. Từ đó ta tính được $SM = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.



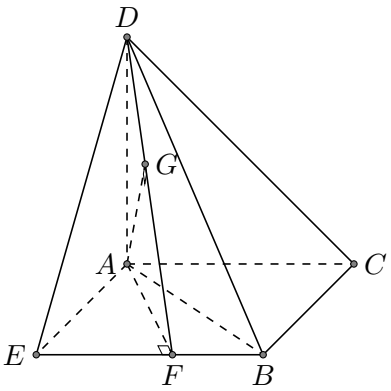
Chọn đáp án (A) □

Câu 519. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 2, AC = 3, AD = BC = 4$, $BD = 2\sqrt{5}$, $CD = 5$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BD gần với giá trị nào sau đây?

A. 4. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 3.

✍Lời giải.

Ta có $AD^2+AC^2=DC^2$ nên tam giác ADC vuông tại A hay $AD\perp AC$.
Tương tự $AD^2+AB^2=DB^2$ nên tam giác ADB vuông tại A.
Khi đó $AD\perp(ABC)$.
Dựng hình bình hành $ACBE$. Khi đó $AC\parallel(BDE)$.
Suy ra $\mathrm{d}(AC,BD)=\mathrm{d}(AC,(BDE))=\mathrm{d}(A,(BDE))$.
Kẻ $AF\perp BE$ suy ra $BE\perp(DAF)$.
Kẻ $AG\perp DF\Rightarrow AG\perp(DBE)$.



Ta có nửa chu vi tam giác ABE bằng $\dfrac{9}{2}$ nên diện tích $S_{ABE}=\dfrac{3\sqrt{15}}{4}=\dfrac{1}{2}AF\cdot BE$

$\Rightarrow AF=\dfrac{\sqrt{15}}{2}\dfrac{1}{AG^2}=\dfrac{1}{AF^2}+\dfrac{1}{DA^2}\Rightarrow AG=\dfrac{240}{79}$.

Chọn đáp án C □

Câu 520. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B. Biết $AD=2a$, $AB=BC=SA=a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, gọi M là trung điểm của AD. Tính khoảng cách h từ M đến mặt phẳng (SCD).

A. $h=\dfrac{a}{3}$. **B**. $h=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. **C**. $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **D**. $h=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

✍Lời giải.

Vì M là trung điểm AD nên $\dfrac{\mathrm{d}\,(A,(SCD))}{\mathrm{d}\,(M,(SCD))}=2$

$\Rightarrow \mathrm{d}\,(M,(SCD))=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}\,(A,(SCD))$.

Dựng $AH\perp SC$ (1)

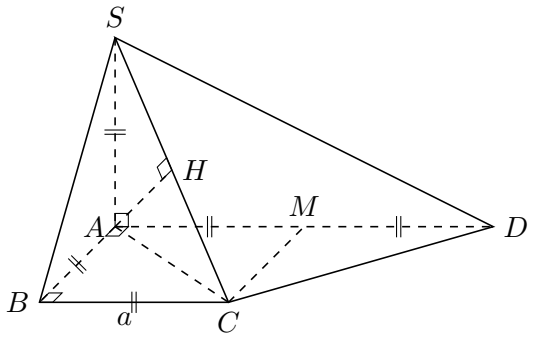
Ta có $\begin{cases}AC\perp CD\\ SA\perp CD\end{cases}\Rightarrow CD\perp(SAC)\Rightarrow CD\perp AH$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AH\perp(SCD)\Rightarrow \mathrm{d}\,(A,(SCD))=AH$.

Xét tam giác vuông SAC vuông tại A

Ta có $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AC^2}+\dfrac{1}{AS^2}\Rightarrow AH=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $\mathrm{d}\,(M,(SCD))=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.



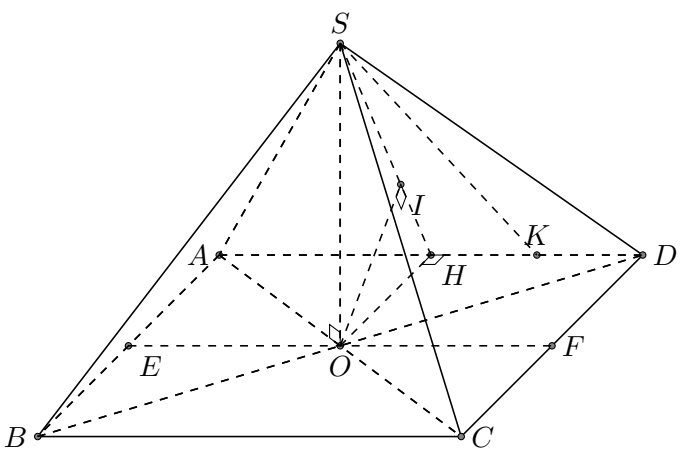
Chọn đáp án B □

Câu 521. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật và $AB=2a$, $BC=a$. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{2}$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD, K là điểm bất kì thuộc đường thẳng AD. Hãy tính khoảng cách giữa hai đường thẳng EF và SK theo a.

A. $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **B**. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C**. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **D**. $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

✍Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}\,(EF,SK)=\mathrm{d}\,(EF,(SAD))$
$=\mathrm{d}\,(O,(SAD))$ do $EF\parallel AD$.
Hạ $OH\perp AD\Rightarrow(SOH)\perp(SAD)$, $BD=a\sqrt{5}$.
Hạ $OI\perp SH\Rightarrow OI$ là khoảng cách cần tìm.
$OH=a$ và $SO=\sqrt{SD^2-OD^2}$
$=\sqrt{SD^2-\dfrac{BD^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SOH ta có: $\dfrac{1}{OI^2}=\dfrac{1}{OH^2}+\dfrac{1}{SO^2}\Rightarrow OI=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.



Chọn đáp án D □

Câu 522. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).

A. $\frac{2a\sqrt{3}}{7}$. **B.** $\frac{3a}{7}$. **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{7}$.

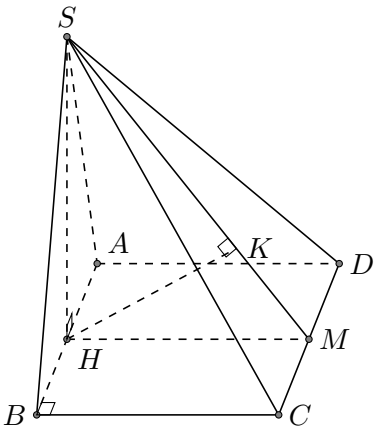
✍Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AB. Vì $\triangle SAB$ đều và vuông góc với đáy nên SH là đường cao của hình chóp.

Ta có $AH \parallel (SCD) \Rightarrow d(A,(SCD)) = d(H,(SCD))$.

Gọi M là trung điểm của CD, ta có $CD \perp (SHM)$.

Trong (SHM), gọi K là hình chiếu của H trên SM, ta có $\begin{cases} HK \perp SM \\ HK \perp CD \end{cases} \Rightarrow$ $HK \perp (SCD)$.



Xét tam giác vuông SHM có $HM = a$, $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HM^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{7}{3a^2}$$

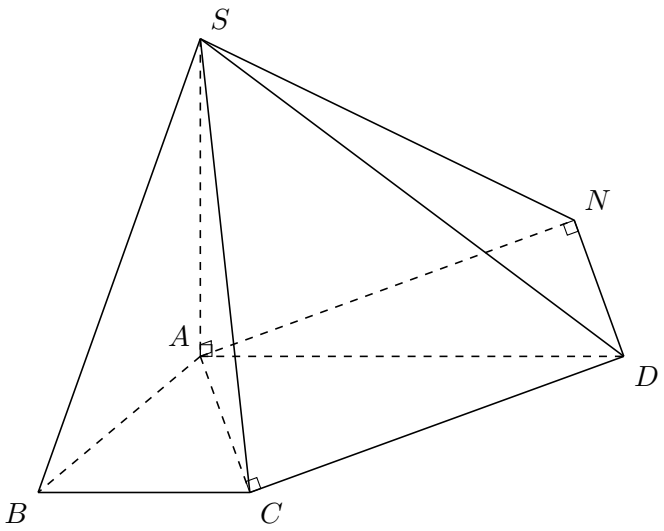
$$\Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{21}}{7} = d(A,(SCD)).$$

Chọn đáp án C □

Câu 523. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a, AD = 2a, SA$ vuông góc đáy, $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{9}$.

✍Lời giải.



Gọi N là điểm thuộc $(ABCD)$ sao cho $ACDN$ là hình bình hành.

Lúc đó AC song song (SND) nên $d = d(AC,SD) = d(A,(SND))$.

Ta có $\frac{1}{d^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{CD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án C □

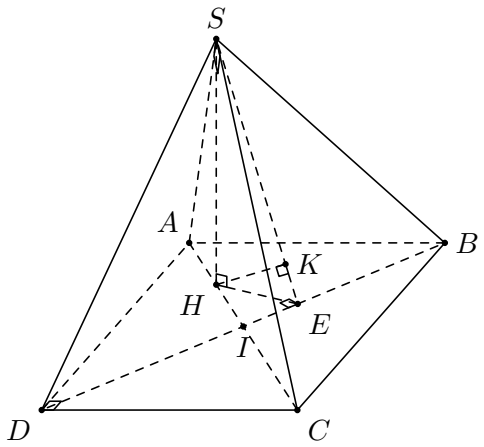
Câu 524. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật tâm $I, AB = a, BC = a\sqrt{3}$; H là trung điểm của AI. Biết SH vuông góc với đáy và tam giác SAC vuông tại S. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SBD).

A. $d = \frac{a\sqrt{15}}{15}$. **B.** $d = \frac{a\sqrt{15}}{5}$. **C.** $d = a\sqrt{15}$. **D.** $d = \frac{3a\sqrt{15}}{5}$.

✍Lời giải.

Dựng $HE \perp BD$ tại $E \in BD$; $HK \perp SE$ tại $K \in SE$

suy ra $HK \perp (SBD)$ do đó
$\mathrm{d}(A,(SBD)) = 2\mathrm{d}(H,(SBD)) = 2HK$.
Do $AC = BD = 2a$ nên $IA = IB = AB = a \Rightarrow \triangle IAB$ đều
Suy ra $HE = HI\sin 60^\circ = \dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.
Lại có $SA^2 = AH\cdot AC = \dfrac{a}{2}\cdot 2a = a^2 \Rightarrow SA = a$;
$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Do đó $HK = \dfrac{SH\cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{10}$.
Vậy $\mathrm{d}(A,(SBD)) = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

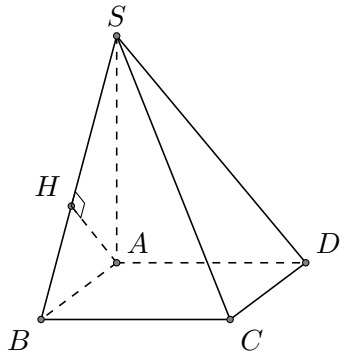


Chọn đáp án (B) □

Câu 525. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$, $AB = a$. Tính khoảng cách h giữa hai đường thẳng AD và SB.

A. $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $h = a\sqrt{3}$. **C.** $h = a$. **D.** $h = \dfrac{a}{2}$.

✍Lời giải.
Ta có $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB)$.
Kẻ $AH \perp SB$ tại H, ta có $AD \perp AH$ tại A
nên AH là đoạn vuông góc chung của SB và AD.
Vậy $d(SB, AD) = AH$.
$\triangle SAB$ có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

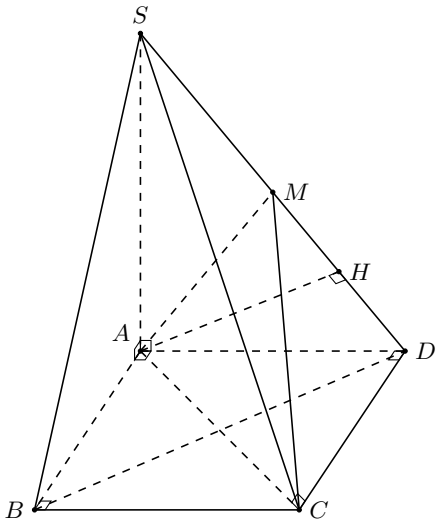


Chọn đáp án (A) □

Câu 526. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của SD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CM.

A. $\dfrac{3a}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

✍Lời giải.
Kẻ $AH \perp SD$ tại $H \Rightarrow AH \perp (SCD)$.
Vì $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD)$ nên
$d(AB; CM) = d(AB; (SCD)) = d(A; (SCD)) = AH$.
Xét tam giác SAD vuông tại A có $SA = a\sqrt{3}$, $AD = a$
$\Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{1}{a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 527. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD.

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** a.

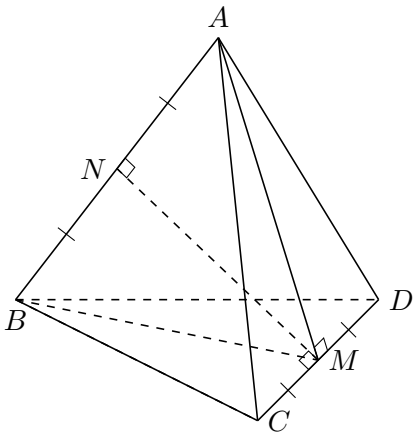
✍Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm CD và AB. Các tam giác ACD, BCD đều nên $AM\perp CD$, $BM\perp CD$ suy ra $CD\perp(ABM)\Rightarrow CD\perp MN$ (1).

Mặt khác $AM=BM$ nên tam giác ABM cân tại M, suy ra $MN\perp AB$ (2).

Từ (1) và (2) ta có MN là đường vuông góc chung của AB và CD.

Ta có $AM=\dfrac{a3}{2}$, trong tam giác vuông AMN có $MN=\sqrt{AM^2-AN^2}=\sqrt{\dfrac{3a^2}{4}-\dfrac{a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



.

Chọn đáp án C □

Câu 528. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA=a$, $SB=a\sqrt{2}$, $SC=a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ S đến (ABC).

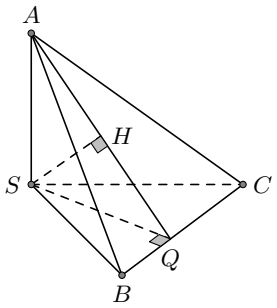
A. $\dfrac{11a}{6}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{66}}{6}$. **C.** $\dfrac{6a}{11}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{66}}{11}$.

✍Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC).

Vì SA, SB, SC đôi một vuông góc nên $\dfrac{1}{SH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{SB^2}+\dfrac{1}{SC^2}$.

Từ đây ta giải được $d(S,(ABC))=SH=\dfrac{a\sqrt{66}}{11}$.



Chọn đáp án D □

Câu 529. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB=BC=a$, $AD=2a$. Biết $SA=a\sqrt{3}, SA\perp(ABCD)$. Gọi H là hình chiếu của A trên (SBC). Tính khoảng cách d từ H đến mặt phẳng (SCD).

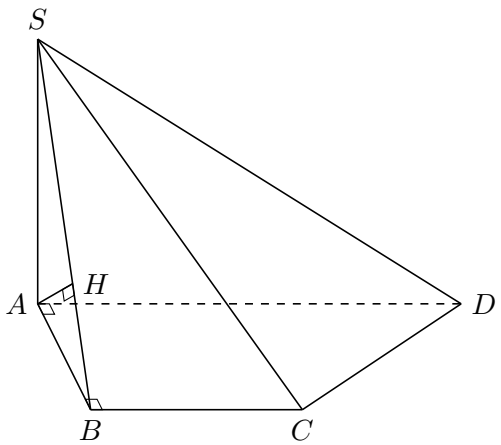
A. $d=\dfrac{3a\sqrt{50}}{80}$. **B.** $d=\dfrac{3a\sqrt{30}}{40}$. **C.** $d=\dfrac{3a\sqrt{10}}{20}$. **D.** $d=\dfrac{3a\sqrt{15}}{60}$.

✍Lời giải.

Dựng hệ trục tọa độ $Axyz$ với AD trùng với Ox, AB trùng với Oy, AS trùng với Oz. Không mất tính tổng quát ta có thể cho $a=1$, khi đó ta có $A(0;0;0), B(0;1;0), D(2;0;0), S(0;0;\sqrt{3}), C(1;1;0)$.

Vì $(SBC)\perp(SAB)$ nên $H\in SB$. Phương trình đường $SB:\begin{cases}x=0\\y=1+t\\z=-\sqrt{3}t\end{cases},t\in\mathbb{R}\Rightarrow H(0;1+t;-\sqrt{3}t)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{SB}=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{4}\Rightarrow H\left(0;\dfrac{3}{4};\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$.



Phương trình mặt phẳng (SCD) đi qua D và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CS}\right]=(\sqrt{3};\sqrt{3};2)$: $\sqrt{3}x+\sqrt{3}y+2z-2\sqrt{3}=0$.

Vậy $d_{(H,(SCD))}=\dfrac{\left|0+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}+\dfrac{2\sqrt{3}}{4}-2\sqrt{3}\right|}{\sqrt{3+3+4}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{10}}=\dfrac{3\sqrt{30}}{40}$.

Chọn đáp án B □

Câu 530. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của BC. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng $B'C'$ và AA' biết góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(A'B'C')$ là $60°$.

A. $d=\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. **B.** $d=\dfrac{3a\sqrt{7}}{14}$. **C.** $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $d=\dfrac{3a}{4}$.

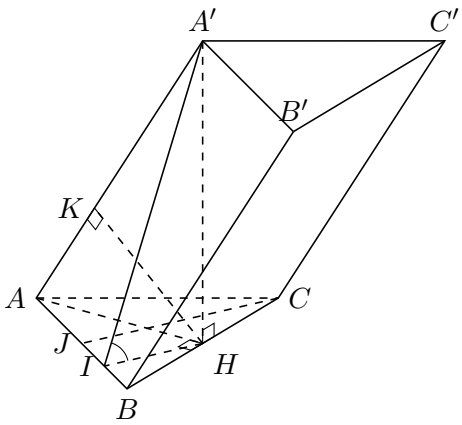
✍Lời giải.

Gọi H, J lần lượt là trung điểm của BC, BA K, I lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AA', AB.

Ta có $d(B'C', AA')=d(AA', (BCC'B'))=d(K,(BCC'B'))$.

Do $HK\perp BC$ (vì $BC\perp(AA'H)$) và $HK\perp BB'$ (vì $BB'\parallel AA'$.) nên $HK\perp(BCC'B')$, suy ra $d(B'C', AA')=HK$.

Góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(A'B'C')$ bằng góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC).



Ta có $HI\perp AB, A'I\perp AB$ nên góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC) là góc $\widehat{A'IH}=60°$, suy ra $A'H=HI\cdot\tan\widehat{A'IH}=\dfrac{CJ}{2}\cdot\tan 60°=\dfrac{3a}{4}$.

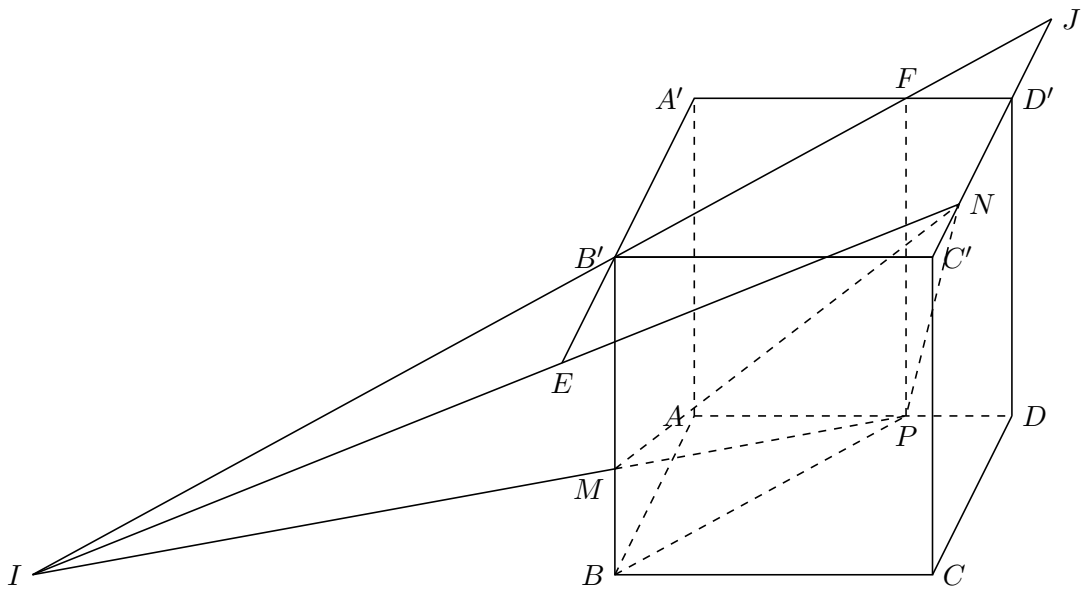
Từ đó ta có $\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{HA^2}+\dfrac{1}{HA'^2}=\dfrac{4}{3a^2}+\dfrac{16}{9a^2}=\dfrac{28}{9a^2}$, suy ra $HK=\dfrac{3a\sqrt{7}}{14}$.

Chọn đáp án B □

Câu 531. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm M, N, P theo thứ tự đó thuộc các cạnh $BB', C'D', DA$ sao cho $BM=C'N=DP=\dfrac{a}{3}$. Mặt phẳng (MNP) cắt đường thẳng $A'B'$ tại E. Tính độ dài đoạn thẳng $A'E$.

A. $A'E=\dfrac{5a}{4}$. **B.** $A'E=\dfrac{5a}{3}$. **C.** $A'E=\dfrac{3a}{4}$. **D.** $A'E=\dfrac{4a}{3}$.

✍Lời giải.



Gọi $F\in D'A'$ sao cho $D'F=\dfrac{a}{3}$; $I=FB'\cap PM$, $E=A'B'\cap IN$, $J=FB'\cap C'D'$.

Ta có

$$\frac{JF}{JB'}=\frac{JD'}{JC'}=\frac{FD'}{B'C'}=\frac{1}{3}\Rightarrow B'F=2FJ.$$

$$\frac{IB'}{IF}=\frac{B'M}{PF}=\frac{2}{3}\Rightarrow IB'=2B'F=4FJ.$$

Suy ra $\dfrac{B'E}{JN}=\dfrac{IB'}{IJ}=\dfrac{4}{7}$.

Mặt khác $JN=JD'+D'N=\dfrac{a}{2}+\dfrac{2a}{3}=\dfrac{7a}{6}$.

Vậy $A'E=A'B'+B'E=a+\dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{7a}{6}=\dfrac{5a}{3}$.

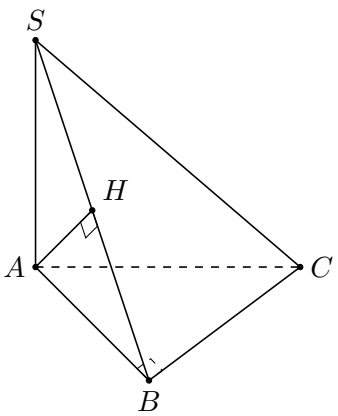
Chọn đáp án (B) □

Câu 532. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=SA=a$. Gọi H là hình chiếu của A trên SB. Tính khoảng cách d giữa AH và BC.

A. $d=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $d=a$. **C.** $d=\dfrac{a}{2}$. **D.** $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

Do $SA\perp(ABC)$ nên $BC\perp SA$, mà $BC\perp AB$ nên $BC\perp(SAB)$, suy ra $BC\perp HB$. Mặt khác $AH\perp HB$ nên $d=HB$. Dễ thấy tam giác SAB vuông cân tại A nên $d=HB=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 533. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc BAD bằng 60°. Hình chiếu của S lên mặt phẳng $ABCD$ là trọng tâm tam giác ABC. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ bằng 60°. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD).

A. $\dfrac{3a\sqrt{17}}{14}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{7}}{14}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{17}}{4}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{7}}{4}$.

✍Lời giải.

Gọi H là trọng tâm tam giác ABC.

Gọi K,E lần lượt là hình chiếu của H trên AB,CD.

Dựng $HF\perp SE$ tại F.

Khi đó $\begin{cases}HF\perp SE\\HF\perp CD\end{cases}\Rightarrow HF\perp(SCD)$.

Do vậy $HF=\mathrm{d}(H,(SCD))$.

Ta có $AB\perp(SHK)\Rightarrow\widehat{SKH}=60^\circ$

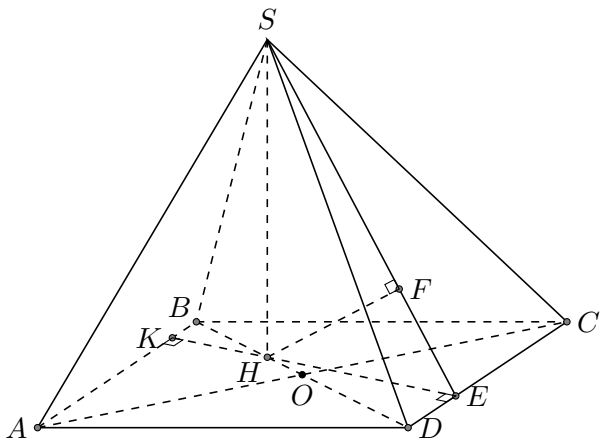
và $SH=HK\cdot\tan 60^\circ=\dfrac{a}{2}$.

$\left(\text{với } HK=HB\cdot\sin 60^\circ=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)$.

$\Rightarrow HE=2HK=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$\Rightarrow \mathrm{d}\,(H,(SCD))=HF=\dfrac{SH\cdot HE}{\sqrt{SH^2+HE^2}}=\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

và $\mathrm{d}\,(B,(SCD))=\dfrac{3}{2}\mathrm{d}\,(H,(SCD))=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{a\sqrt{7}}{7}=\dfrac{3a\sqrt{7}}{14}$.



Chọn đáp án (B) □

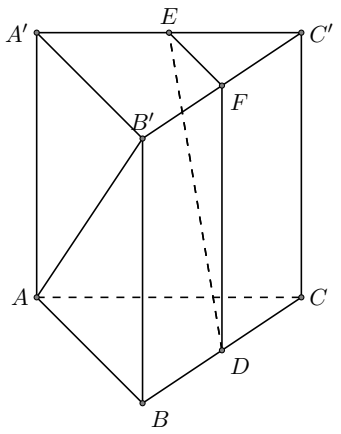
Câu 534. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các mặt bên đều là hình vuông cạnh a; gọi D,E,F lần lượt là trung điểm các cạnh BC, $A'C'$, $C'B'$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng DE và AB'.

A. $d=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $d=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $d=\dfrac{a\sqrt{5}}{4}$.

✍Lời giải.

Theo giả thiết suy ra hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (DEF) song song nhau. Khi đó:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\left(DE, AB'\right) &= \mathrm{d}\left(E, (ABB'A')\right) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{d}\left(C, (ABB'A')\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$



Vậy khoảng cách giữa DE và AB' là $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 535. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông cạnh a, $SA = a$ và SA vuông góc với đáy . Gọi M là trung điểm của SD. Tính khoảng cách giữa AM và SC.

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{21}$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi E, N lần lượt là trung điểm của $AB, SC \Rightarrow AMNE$ là hình bình hành

$\Rightarrow AM \parallel EN \Rightarrow AM \parallel (SCE)$

$\Rightarrow d(AM; SC) = d(AM; (SCE)) = d(A; (SCE))$.

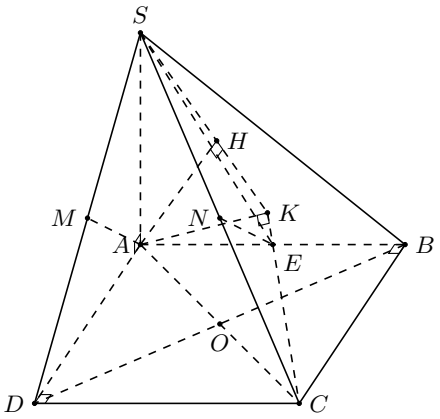
Kẻ $AK \perp CE$ tại K và $AH \perp SK$ tại H.

Suy ra $d(A; (SCE)) = AH$.

Ta có: $S_{\triangle ACE} = \dfrac{1}{2}CE.AK = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\cdot AK$.

Mặt khác: $S_{\triangle ACE} = \dfrac{1}{4}S_{ABCD} = \dfrac{1}{4}a^2 \Rightarrow AK = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$.

Suy ra $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{5}{a^2} = \dfrac{6}{a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

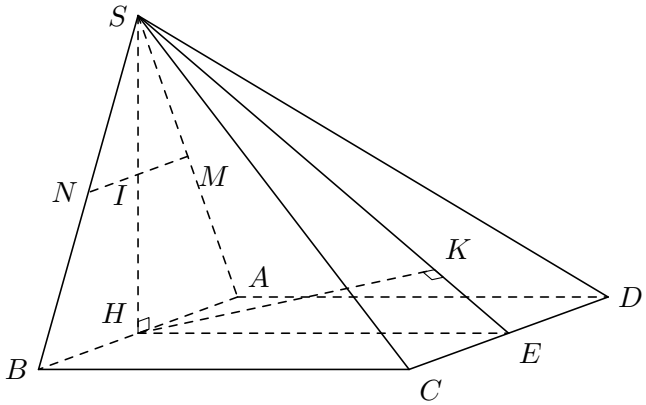


Chọn đáp án B □

Câu 536. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, mặt phẳng (SAB) vuông góc với đáy và tam giác SAB đều. Gọi M là trung điểm của SA. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SCD).

A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{14}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{7}$.

✍Lời giải.



Gọi H, E, N, I lần lượt là trung điểm của AB, CD, SB, SH. Vì $(SAB) \perp (ABCD)$ và tam giác SAB đều nên $SH \perp (ABCD)$.

Do MN là đường trung bình của tam giác SAB và I là trung điểm của SH nên M, I, N thẳng hàng và $MN \parallel (SCD) \Rightarrow d(M, (SCD)) = d(I, (SCD)) = \dfrac{1}{2}d(H, (SCD))$.

Gọi K là đường cao kẻ từ H xuống $SE \Rightarrow HK = d(H,(SCD))$.

Xét tam giác SHE có $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $HE = a$

$\Rightarrow \dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{4}{3a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{7}{3a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \Rightarrow d(M,(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{21}}{14}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 537. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông và $AB = BC = a$; $AA' = a\sqrt{2}$, M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.

A. $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

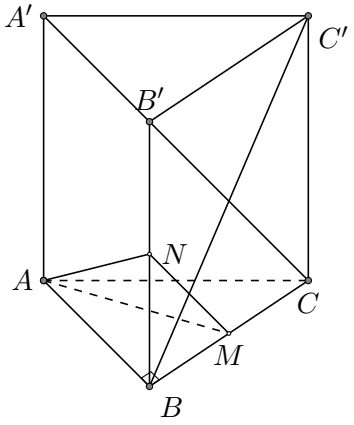
Lời giải.

Gọi N là trung điểm $BB' \Rightarrow B'C \parallel (AMN)$

$\Rightarrow d(B'C, AM) = d(B'C,(AMN)) = d(C,(AMN)) = d(B,(AMN))$.

Gọi d là khoảng cách từ B đến (AMN), ta có

$\dfrac{1}{d^2} = \dfrac{1}{BA^2} + \dfrac{1}{BC^2} + \dfrac{1}{BN^2} = \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{7}{a^2} \Rightarrow d = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 538. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $AD = a$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của AB, SC tạo với đáy một góc $45°$. Khoảng cách h từ điểm A đến (SCD) là

A. $h = \dfrac{\sqrt{6}}{3}a$. **B.** $h = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$. **C.** $h = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a$. **D.** $h = \dfrac{\sqrt{6}}{4}a$.

Lời giải.

Vì $SH \perp (ABCD) \Rightarrow HC$ là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$.

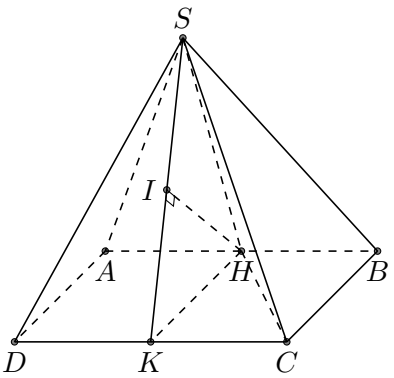
Suy ra $(\widehat{SC,(ABCD)}) = \widehat{SCA} = 45°$.

Tam giác HBC vuông tại B có: $HC = \sqrt{HB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$.

Tam giác SHC vuông cân tại H nên $SH = HC = a\sqrt{2}$.

Vì $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD) \Rightarrow d(A,(SCD)) = d(H,(SCD))$.

Gọi K là trung điểm CD; I là hình chiếu vuông góc của H lên SK.



Ta có: $\begin{cases} CD \perp HK \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp HI$, mà $HI \perp SK \Rightarrow HI \perp (SCD) \Rightarrow HI = d(H,(SCD))$.

Xét tam giác SHK vuông tại H có: $\dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{3}{2a^2} \Rightarrow HI = \dfrac{\sqrt{6}a}{3}$.

Vậy, $d(A,(SCD)) = \dfrac{\sqrt{6}}{3}a$.

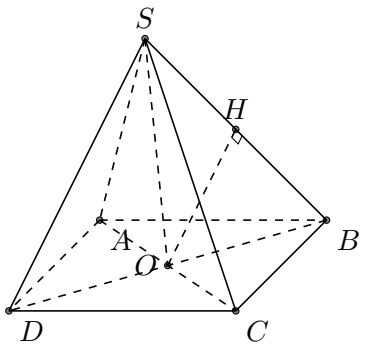
Chọn đáp án (A) □

Câu 539. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Biết rằng tứ diện $SABD$ là tứ diện đều cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC.

A. $\dfrac{3a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD.
$SABD$ là tứ diện đều nên tam giác SBD là tam giác đều $\Rightarrow BD \perp SO$ (1).
Mặt khác, $ABCD$ là hình thoi nên $BD \perp AC$ (2).
Từ (1) và (2) ta có: $BD \perp (SAC)$ tại $O \Rightarrow BD \perp SC$.
Trong (SAC), kẻ $OH \perp SC$ $(H \in SC)$ (3)

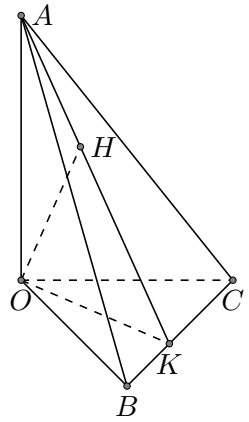


Ta có $OH \subset (SAC)$, mà $BD \perp (SAC)$, suy ra $BD \perp OH$ (4).
Từ (3) và (4) ta có OH là đoạn vuông góc chung của BD và $SC \Rightarrow \mathrm{d}(BD, SC) = OH$.
Tam giác SBD và ABD là tam giác đều cạnh a nên $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Xét tam giác SAC có: $SO = AO = OC$ nên tam giác SAC vuông tại S. Suy ra trong tam giác SAC có $SA \perp SC$ và $OH \perp SC$ nên $OH \parallel SA$. Mặt khác O là trung điểm của AC nên OH là đường trung bình trong tam giác SAC. Suy ra $OH = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{a}{2}$. Vậy $\mathrm{d}(BD, SC) = OH = \dfrac{a}{2}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 540. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, biết $OA = a$, $OB = 2a$, $OC = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC).

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. **B.** $\dfrac{a}{\sqrt{19}}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{17}}{\sqrt{19}}$.

Lời giải.
Gọi K, H lần lượt là hình chiếu cuông góc của O lên BC, AK.
Khi đó từ $BC \perp OA$ và $BC \perp OK$ nên $BC \perp (OAK)$ hay $BC \perp OH$.
Do đó $OH \perp (ABC)$.
Ta có



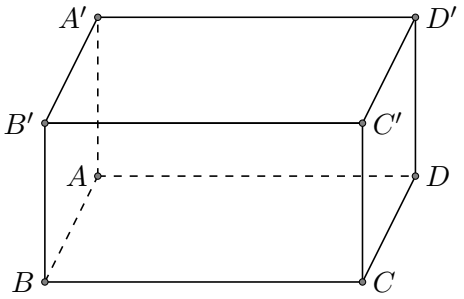
$$\begin{aligned}\frac{1}{OH^2} &= \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{OA^2} \\ &= \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{3a^2} \\ &= \frac{19}{12a}\end{aligned}$$

hay khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) là $OH = \dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 541. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 10. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và $(BCC'B')$.

A. 10. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** 100. **D.** 5.

Lời giải.
Theo tính chất của hình lập phương thì $AB \perp (ADD'A')$ và $AB \perp (BCC'B')$.
Hay khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và $(BCC'B')$ bằng $AB = 10$.



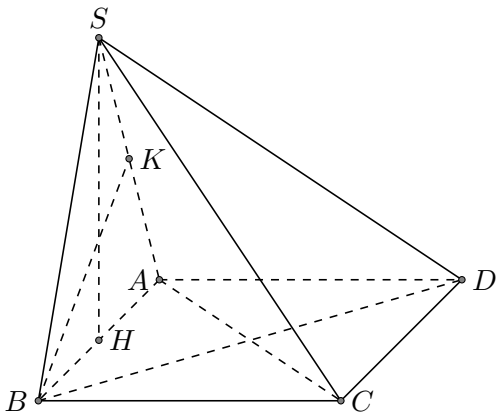
Chọn đáp án (A) □

Câu 542. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường chéo nhau SA và BC.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** a. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

✍Lời giải.

Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và SA. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên $SH \perp (ABCD)$ suy ra $SH \perp BC$.
Hơn nữa $AB \perp BC$.
Do đó $BC \perp (SAB)$ hay $BC \perp BK$ (vì $BK \subset (SAB)$).
Mặt khác, theo cách gọi điểm K thì $BK \perp SA$.
Khi đó BK là đoạn vuông góc chung của SA và BC. Hay khoảng cách giữa chúng bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



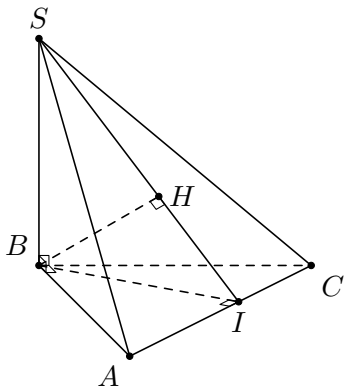
Chọn đáp án A □

Câu 543. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và cạnh bên SB vuông góc với mặt phẳng đáy. Cho biết $SB = 3a$, $AB = 4a$, $BC = 2a$. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC).

A. $\dfrac{12\sqrt{61}a}{61}$. **B.** $\dfrac{4a}{5}$. **C.** $\dfrac{12\sqrt{29}a}{29}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{14}a}{14}$.

✍Lời giải.

Trong tam giác ABC kẻ $BI \perp AC$ và trong tam giác SBI kẻ $BH \perp SI$.
Ta có $\begin{cases} AC \perp BI \\ AC \perp SB \end{cases}$
$\Rightarrow AC \perp (SBI) \Rightarrow (SAC) \perp (SBI)$.
Ta có $\begin{cases} (SAC) \perp (SBI) \\ (SAC) \cap (SBI) = SI \\ BH \perp SI \end{cases}$
$\Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow \mathrm{d}\,(B, (SAC)) = BH$.
Ta có $\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{BI^2} + \dfrac{1}{BS^2} = \dfrac{1}{BA^2} + \dfrac{1}{BC^2} + \dfrac{1}{BS^2} = \dfrac{61}{144a^2}$.
Suy ra $\mathrm{d}\,(B, (SAC)) = BH = \dfrac{12a\sqrt{61}}{61}$.



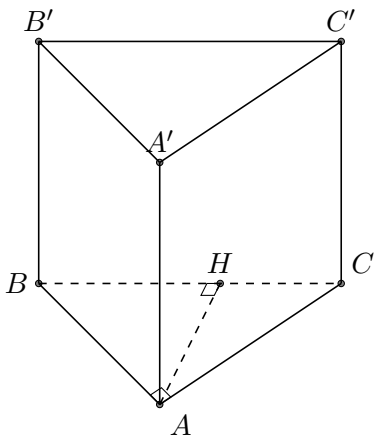
Chọn đáp án A □

Câu 544. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2a$, $AB = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng $(BCC'B')$.

A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{3}$.

✍Lời giải.

Trong mặt phẳng (ABC) kẻ AH vuông góc BC tại H, khi đó $\mathrm{d}\,(AA', (BB'C'C)) = \mathrm{d}\,(A, (BB'C'C)) = AH$.
Tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2a$, $AB = a\sqrt{3}$ nên $AC = a$.
$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

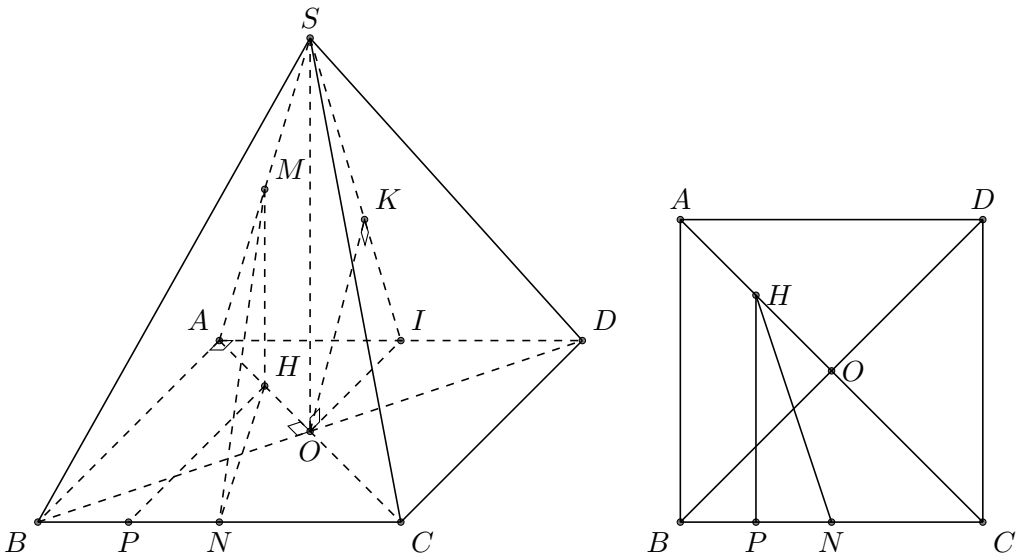


Chọn đáp án B □

Câu 545. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA và BC. Biết góc giữa MN và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $60°$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và DM là

A. $a\sqrt{\dfrac{15}{62}}$. **B.** $a\sqrt{\dfrac{30}{31}}$. **C.** $a\sqrt{\dfrac{15}{68}}$. **D.** $a\sqrt{\dfrac{15}{17}}$.

✍Lời giải.



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, H là trung điểm AO. Khi đó $MH \parallel SO$ nên góc giữa MN và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{MNH} = 60^\circ$.

Ta có $NP = \dfrac{a}{4}$, $PH = \dfrac{3a}{4}$ nên $HN = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$. Suy ra$MH = HN \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{30}}{4} \Rightarrow SO = \dfrac{a\sqrt{30}}{2}$.

Gọi I là trung điểm AD và kẻ $OK \perp SI$, suy ra $\mathrm{d}(O,(SAD)) = OK$.

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{62}{15} \Rightarrow OK = \frac{a\sqrt{930}}{62}.$$

Ta có $BC \parallel (SAD)$ nên $\mathrm{d}(BC, DM) = \mathrm{d}(C,(SAD)) = 2\mathrm{d}(O,(SAD)) = \dfrac{a\sqrt{930}}{31}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 546. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng 2. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(BC'D)$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

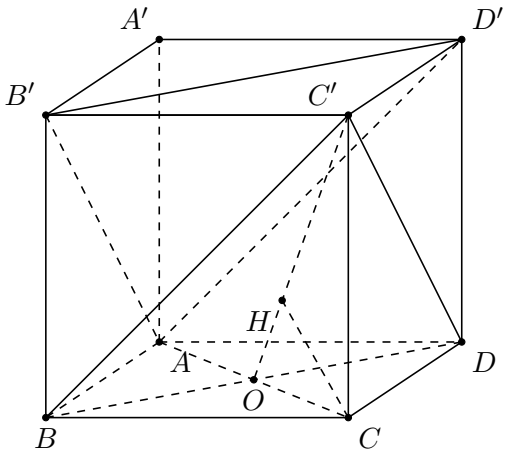
✍Lời giải.

Ta có $CO = \dfrac{AB\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$. Dựng $CH \perp C'O$ (hình vẽ).

Do $AB' \parallel C'D; AD' \parallel BC' \Rightarrow (AB'D') \parallel (BC'D)$.

Khi đó $d\left((AB'D'), (BC'D)\right) = d\left(A, (BC'D)\right)$

$= d\left(C, (BC'D)\right) = CH = \dfrac{CO.CC'}{\sqrt{CO^2 + CC'^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 547. Hình chóp $S.ABCD$ đáy hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$; $SA = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng bao nhiêu?

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

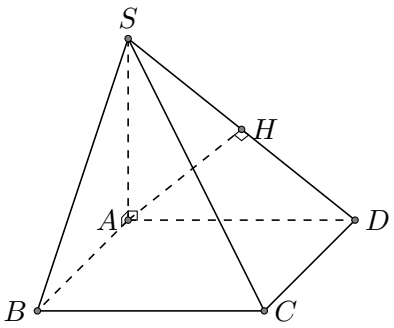
✍Lời giải.

Do $AB \parallel CD \Rightarrow \mathrm{d}\,(B;(SCD)) = \mathrm{d}\,(A;(SCD))$.

Dựng $AH \perp SD$, do $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp AH \Rightarrow AH \perp (SCD)$.

Lại có $AH = \dfrac{SA.AD}{\sqrt{SA^2+AD^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do đó $\mathrm{d}\,(B;(SCD)) = AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 548. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của AC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SM bằng bao nhiêu?

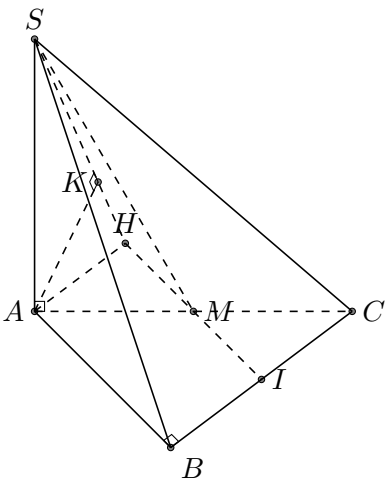
A. $\dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{39}}{13}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{13}$. **D.** $\dfrac{2a}{\sqrt{13}}$.

✍Lời giải.

Qua M kẻ đường thẳng $d \parallel AB$ và cắt BC tại $I \Rightarrow AB \parallel (SMI) \Rightarrow \mathrm{d}\,(AB;SM) = \mathrm{d}\,(AB;(SMI))$. Kẻ $AH \perp d$, $(H \in d)$, kẻ $AK \perp SH$ $(K \in SH)$.

Suy ra $\mathrm{d}\,(AB;SM) = \mathrm{d}\,(A;(SMH)) = AK = \dfrac{SA.AH}{\sqrt{SA^2+AH^2}}$.

Mà $SA = 2a\sqrt{3}$, $AH = \dfrac{BC}{2} = a \Rightarrow AK = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$.

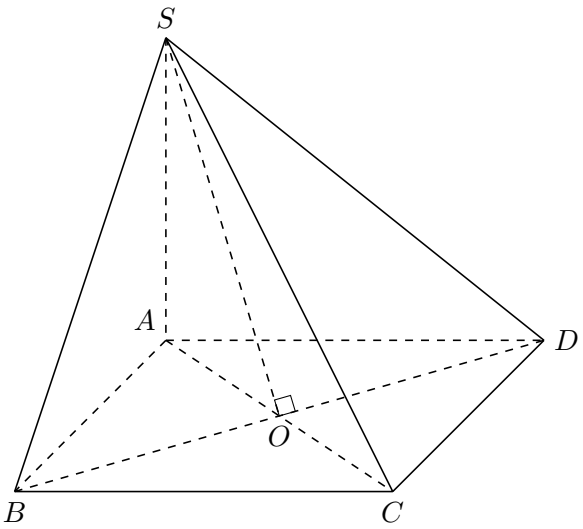


Chọn đáp án (A) □

Câu 549. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Biết SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Tính khoảng cách từ điểm A đến $mp(SBD)$.

A. $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{a}{2\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{6}$.

✍Lời giải.



Ta có $d(A,(SBD)) = \dfrac{3V_{ASBD}}{S_{SBD}} = \dfrac{SA \cdot AB \cdot AD}{SO \cdot BD} = \dfrac{a^3}{a^2\sqrt{3}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

Chọn đáp án (B) □

Câu 550. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD.

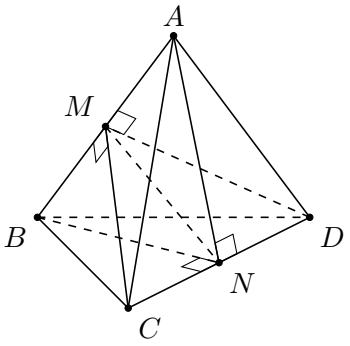
A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** a.

✍Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD.

Do $ABCD$ là tứ diện đều nên $MN \perp AB$ và $MN \perp CD$.

Suy ra $\mathrm{d}(AB, CD) = MN = \sqrt{BN^2 - BM^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án B □

Câu 551. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông có chiều cao $AB = a$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm AB, CD. Tính khoảng cách giữa đường thẳng IJ và mặt phẳng (SAD)

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{3}$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

✍Lời giải.

Ta có $IJ \parallel AD \Rightarrow IJ \parallel (SAD)$.

Khi đó

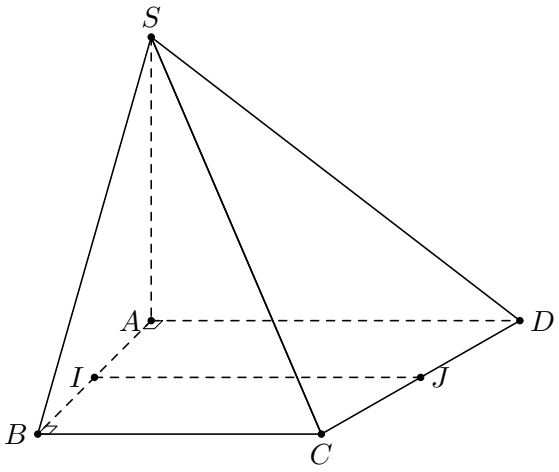
$$\mathrm{d}(IJ; (SAD)) = \mathrm{d}(I; (SAD)).$$

Mà

$$AB \perp (SAD) \Rightarrow \mathrm{d}(B; (SAD)) = AB = a.$$

Do I là trung điểm của AB nên

$$\mathrm{d}(I; (SAD)) = \frac{1}{2}\mathrm{d}(B; (SAD)) = \frac{a}{2}.$$



Chọn đáp án D □

Câu 552. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh $SA = a$ và vuông góc với mặt đáy $ABCD$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

✍Lời giải.

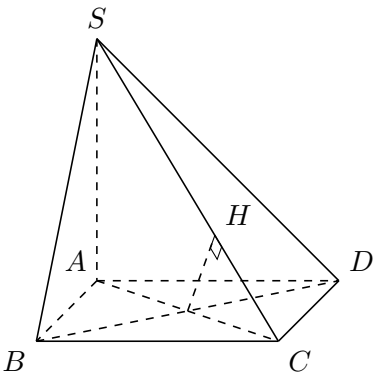
Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và H là chân đường cao kẻ từ O đến SC.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp OH$.

Suy ra OH là đoạn vuông góc chung của SC và BD.

Xét hai tam giác đồng dạng OHC và SAC, ta có $\dfrac{OH}{SA} = \dfrac{OC}{SC}$.

Suy ra $OH = \dfrac{OC \cdot SA}{SC} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a}{\sqrt{a2 + 2a^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.



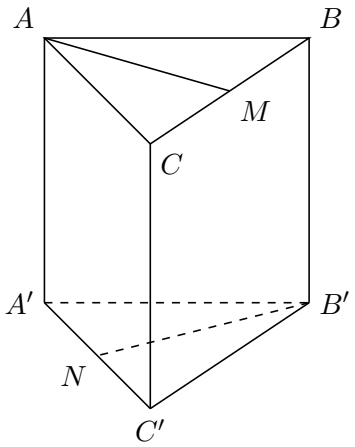
Chọn đáp án D □

Câu 553. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và $A'C'$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'N$.

A. $2a$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** a. **D.** $a\sqrt{2}$.

✍Lời giải.

Ta có $\begin{cases} AM \subset (ABC) \\ B'N \subset (A'B'C') \\ (ABC) \parallel (A'B'C') \end{cases}$
nên $\mathrm{d}(AM, B'N) = \mathrm{d}((ABC), (A'B'C')) = 2a$.



Chọn đáp án (A) □

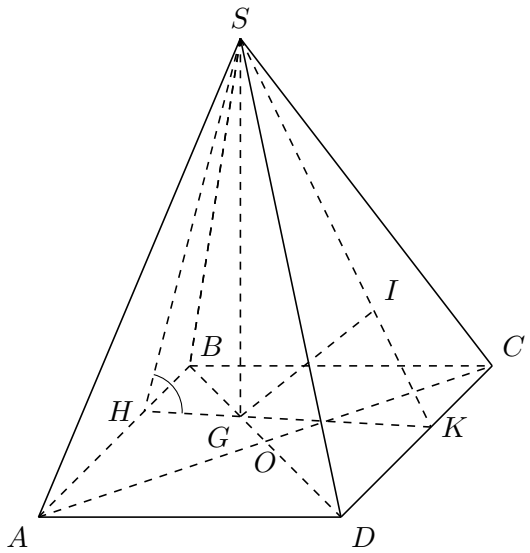
Câu 554. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a và $\widehat{BAD} = 60°$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác (ABC). Góc giữa mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ bằng $60°$. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD).

A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{7}}{14}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{7}}{7}$.

✍Lời giải.

Từ giả thiết ta có tam giác ABD đều và $BG = \dfrac{BD}{3}$.
Qua G, kẻ HK vuông góc với AB và CD ($H \in AB$, $K \in CD$)
thì $HK = h_D = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (đường cao từ D của tam giác ABC).
Hơn nữa, $\begin{cases} GH \perp AB \\ SG \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHG) \Rightarrow SH \perp AB$.
Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ chính là góc $\widehat{SHG}$.
Ta có $HG = \dfrac{HK}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ suy ra

$$SG = HG \cdot \tan 60° = \frac{a}{2}.$$



Trong mặt phẳng (SGK), kẻ $GI \perp SK$.
Lại có $GI \perp CD$ (do $CD \perp (SGK)$) suy ra $GI \perp (SCD)$.
Ta có $GK = \dfrac{2}{3} \cdot HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\dfrac{1}{GI^2} = \dfrac{1}{SG^2} + \dfrac{1}{GK^2}$ suy ra $GI = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.
Do đó, $d(B, (SCD)) = \dfrac{3}{2} \cdot d(G, (SCD)) = \dfrac{3}{2} \cdot GI = \dfrac{3a\sqrt{7}}{14}$.

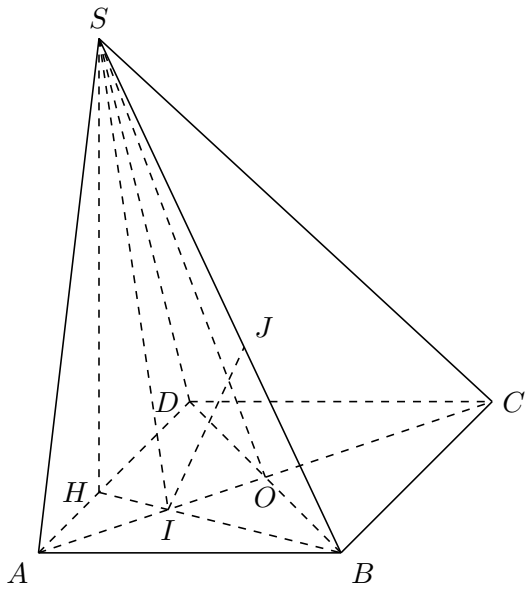
Chọn đáp án (C) □

Câu 555. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Tam giác SAO cân tại S, mặt phẳng (SAD) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa SD và $(ABCD)$ bằng $60°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{3a}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{3a}{4}$.

✍Lời giải.

Ta có $AB = a, BC = a\sqrt{3}$ suy ra $AC = 2a$, do đó $AO = a$.
Vậy tam giác OAB đều.
Gọi I là trung điểm của AO ta có $SI \perp AO$ (tam giác SAO cân) và $BI \perp AO$ (tam giác OAB đều).
Suy ra $AO \perp (SIB)$, do đó $(SIB) \perp (ABCD)$.
Mà $(SAD) \perp (ABCD)$ nên giao tuyến của (SIB) và (SAD) cũng vuông góc với $(ABCD)$.
Kéo dài BI cắt AD tại H thì SH chính là giao tuyến cần tìm, suy ra $SH \perp (ABCD)$.
Từ đó, góc $\widehat{SDH} = 60^\circ$.
Ta có $AB = a$, $\widehat{ABH} = 30^\circ$ suy ra $AH = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



Do đó $HD = AD - AH = \sqrt{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, suy ra $SH = HD \cdot \tan 60^\circ = 2a$.
Lại có $HB = \sqrt{AH^2 + AB^2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.
Suy ra $\tan \widehat{SBH} = \dfrac{SH}{HB} = \sqrt{3}$ suy ra $\widehat{SBH} = 60^\circ$.
Trong mặt phẳng (SHB), kẻ $IJ \perp SB$ thì IJ là đoạn vuông góc chung của AC và SB.
Ta có $IJ = IB \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}a}{2} = \dfrac{3a}{4}$.

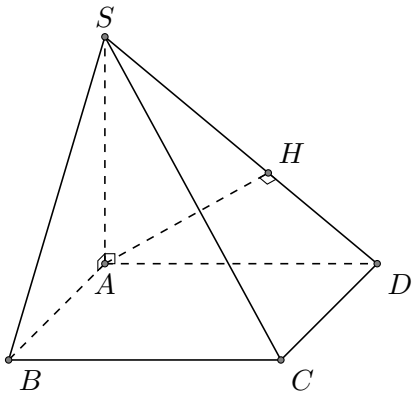
Chọn đáp án (D) □

Câu 556. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD.

A. a. **B.** $2a$. **C.** $S = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

✍Lời giải.

Ta có $d(AB, SD) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)) = AH$.
Với $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{2a^2} \Rightarrow AH = a\sqrt{2}$.

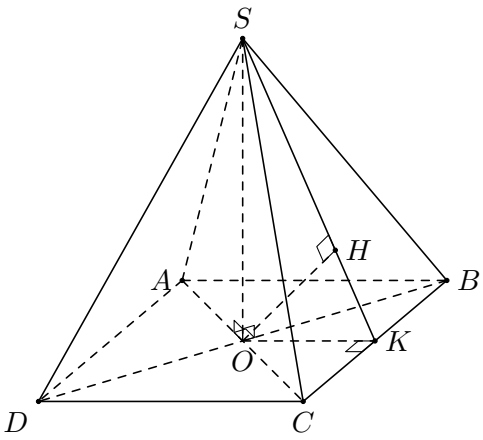


Chọn đáp án (D) □

Câu 557. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a và $\widehat{DAB} = 120^\circ$. Gọi O là giao điểm của AC, BD. Biết $SO \perp (ABCD)$ và $SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.

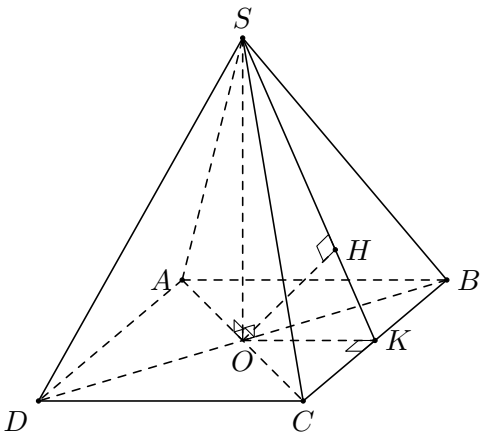


Kẻ $OK \perp BC$ mà $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BC$ nên $BC \perp (SOK) \Rightarrow (SBC) \perp (SOK)$.
Mặt khác: $(SBC) \cap (SOK) = SK$.
Trong $mp(ABCD)$, kẻ $OH \perp SK \Rightarrow OH \perp (SBC)$ nên $\mathrm{d}(O;(SBC)) = OH$.
Ta có: $\widehat{DAB} = 120^\circ$ nên $\widehat{CAB} = \widehat{ACB} = \widehat{CBA} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ đều.
$\triangle ABC$ đều$\Rightarrow OB = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $OC = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a}{2}$.
Trong $\triangle OBC$ vuông tại $O \Rightarrow \dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{OC^2} + \dfrac{1}{OB^2} = \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{4}{3a^2} = \dfrac{16}{3a^2}$.
Mà trong $\triangle OSK$ ta có: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{16}{6a^2} + \dfrac{16}{3a^2} = \dfrac{8}{a^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.
Ta thấy O là trung điểm của DB nên $\mathrm{d}(D;(SBC)) = 2\mathrm{d}(O;(SBC)) = 2OH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 558. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a và $\widehat{DAB} = 120^\circ$. Gọi O là giao điểm của AC, BD. Biết $SO \perp (ABCD)$ và $SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

✍Lời giải.



Kẻ $OK \perp BC$ mà $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BC$ nên $BC \perp (SOK) \Rightarrow (SBC) \perp (SOK)$.
Mặt khác: $(SBC) \cap (SOK) = SK$.
Trong $mp(ABCD)$, kẻ $OH \perp SK \Rightarrow OH \perp (SBC)$ nên $\mathrm{d}(O;(SBC)) = OH$.
Ta có: $\widehat{DAB} = 120^\circ$ nên $\widehat{CAB} = \widehat{ACB} = \widehat{CBA} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ đều.
$\triangle ABC$ đều$\Rightarrow OB = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $OC = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a}{2}$.
Trong $\triangle OBC$ vuông tại $O \Rightarrow \dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{OC^2} + \dfrac{1}{OB^2} = \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{4}{3a^2} = \dfrac{16}{3a^2}$.
Mà trong $\triangle OSK$ ta có: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{16}{6a^2} + \dfrac{16}{3a^2} = \dfrac{8}{a^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.
Ta thấy O là trung điểm của DB nên $\mathrm{d}(D;(SBC)) = 2\mathrm{d}(O;(SBC)) = 2OH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 559. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D, $AB = 2a$, $AD = DC = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa SC và mặt đáy bằng $60°$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

A. $2a$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{15}}{5}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

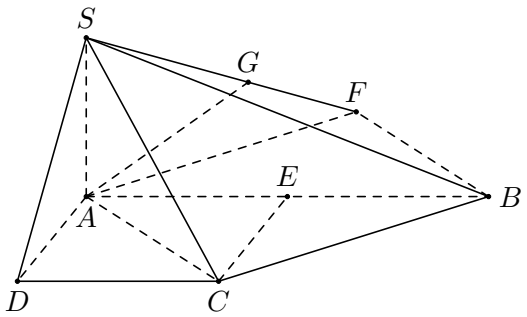
✍Lời giải.

Cách 1

Do (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy nên suy ra $SA \perp (ABCD)$.

Khi đó $(SC, (ABCD)) = \widehat{SCA} = 60°$.

Gọi E là trung điểm AB. Khi đó, tứ giác $ADCE$ là hình vuông. Suy ra $AE = EB$ và $CE = \dfrac{1}{2}AB$. Vậy tam giác ACB vuông tại C. Suy ra $BC \perp AC$.



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kẻ Bx song song với AC. Từ A kẻ $AF \perp Bx$.

Do $AC \parallel BF$ nên $AC \parallel (SBF) \Rightarrow \mathrm{d}(AC, SB) = \mathrm{d}(AC, (SBF)) = \mathrm{d}(A, (SBF))$.

Do $\begin{cases} BF \perp AF \\ BF \perp SA \end{cases} \Rightarrow BF \perp (SAF) \Rightarrow (SAF) \perp (SBF)$.

Từ A kẻ $AG \perp SF \Rightarrow AG \perp (SBF) \Rightarrow \mathrm{d}(A, (SBF)) = AG$.

Ta có $AC = a\sqrt{2}$, $BC = AF = a\sqrt{2}$ và $SA = AC \cdot \tan \widehat{SCA} = a\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = a\sqrt{6}$.

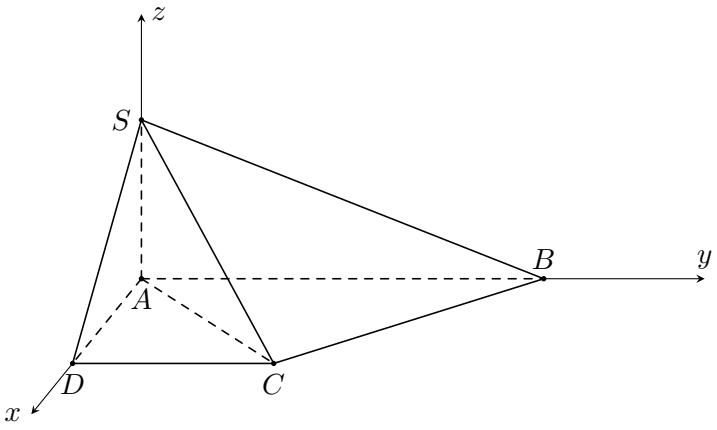
Trong tam giác vuông SAF, ta có $\dfrac{1}{AG^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AF^2} = \dfrac{4}{6a^2} \Rightarrow AG = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

cách 2: Dùng phương pháp tọa độ

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Ta có $A(0;0;0)$, $B(0;2a;0)$, $C(a;a;0)$, $D(a;0;0)$, $S\left(0;0;a\sqrt{6}\right)$.

$\overrightarrow{AC} = (a;a;0)$, $\overrightarrow{SB} = \left(0;2a;-a\sqrt{6}\right)$, $\overrightarrow{AB} = (0;2a;0)$.

$\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SB}\right] = \left(-a^2\sqrt{6}; a^2\sqrt{6}; 2a^2\right)$, $\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SB}\right] \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^3\sqrt{6}$.



Khi đó $\mathrm{d}(AC, SB) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SB}\right] \cdot \overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SB}\right]\right|} = \dfrac{2a^3\sqrt{6}}{\sqrt{\left(-a^2\sqrt{6}\right)^2 + \left(a^2\sqrt{6}\right)^2 + (2a^2)^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

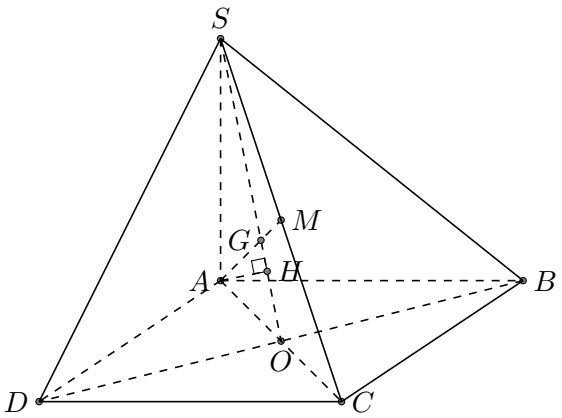
Chọn đáp án B □

Câu 560. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm cạnh SC. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{10}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

✍Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD$, $G = AM \cap SO$, suy ra G là trọng tâm tam giác $SAC \Rightarrow \mathrm{d}(M,(SBD)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(A,(SBD))$.
Do $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$ nên $BD \perp AC$, $BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAC)$.
Kẻ $AH \perp SO$, $H \in SO$.
Do $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AH \Rightarrow AH \perp (SBD) \Rightarrow \mathrm{d}(A,(SBD)) = AH$.
Tam giác SAO vuông tại A, có $SA = a\sqrt{2}$, $AO = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{1}{\frac{a^2}{2}} = \dfrac{5}{2a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.



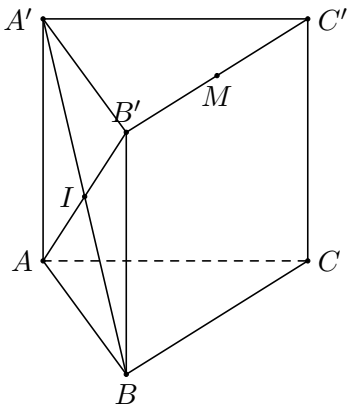
Vậy $\mathrm{d}(M,(SBD)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(A,(SBD)) = \dfrac{1}{2}AH = \dfrac{a\sqrt{10}}{10}$.

Chọn đáp án B □

Câu 561. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $6a$. Khoảng cách từ trung điểm M cạnh $B'C'$ đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A. $2a$. **B**. $4a$. **C**. $6a$. **D**. $3a$.

Lời giải.
Ta có $\mathrm{d}(M,(A'BC)) = \mathrm{d}(B',(A'BC)) = \mathrm{d}(A,(A'BC)) = 6a$.



Chọn đáp án C □

ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. B	4. C	5. D	6. B	7. C	8. B	9. A	10. D
11. B	12. A	13. C	14. A	15. A	16. B	17. C	18. A	19. B	20. A
21. D	22. B	23. A	24. B	25. C	26. A	27. B	28. D	29. C	30. A
31. A	32. D	33. A	34. C	35. A	36. B	37. D	38. B	39. A	40. A
41. D	42. A	43. C	44. D	45. A	46. A	47. A	48. A	49. C	50. A
51. A	52. D	53. D	54. D	55. C	56. B	57. D	58. C	59. B	60. D
61. B	62. A	63. C	64. D	65. B	66. C	67. C	68. B	69. C	70. B
71. C	72. D	73. B	74. B	75. A	76. D	77. D	78. B	79. C	80. D
81. D	82. A	83. B	84. D	85. C	86. B	87. D	88. D	89. A	90. C
91. C	92. C	93. D	94. A	95. D	96. D	97. C	98. C	99. C	100. D
101. B	102. C	103. B	104. A	105. B	106. D	107. D	108. C	109. D	110. B
111. C	112. B	113. B	114. B	115. B	116. D	117. B	118. C	119. B	120. B
121. A	122. B	123. D	124. C	125. A	126. D	127. B	128. A	129. A	130. D
131. D	132. A	134. A	135. D	136. D	137. D	138. A	139. A	140. D	141. B
142. C	143. C	144. D	145. B	146. A	147. C	148. D	149. B	150. D	151. B
152. A	153. A	154. B	155. B	156. D	157. D	158. D	159. B	160. B	161. C
162. C	163. B	164. D	165. D	166. B	167. D	168. D	169. D	170. D	171. C
172. D	173. A	174. B	175. C	176. B	177. B	178. A	179. D	180. C	181. A
182. C	183. D	184. D	185. C	186. B	187. A	188. C	189. D	190. A	191. A
192. C	193. B	194. D	195. B	196. D	197. A	198. A	199. A	200. D	201. A

202. A	203. D	204. A	205. D	206. C	207. C	208. A	209. C	210. A	211. C
212. A	213. C	214. D	215. C	216. C	217. D	218. B	219. B	220. D	221. D
222. B	223. C	224. B	225. D	226. B	227. D	228. A	229. A	230. A	231. D
232. A	233. A	234. D	235. A	236. D	237. C	238. C	239. A	240. C	241. C
242. C	243. A	244. D	245. A	246. A	247. D	248. D	249. C	250. C	251. A
252. A	253. D	254. B	255. D	256. D	257. A	258. B	259. D	260. C	261. B
262. A	263. A	264. B	265. B	266. A	267. A	268. B	269. B	270. C	271. A
272. A	273. C	274. C	275. A	276. C	277. C	278. A	279. A	280. D	281. B
282. D	283. D	284. A	285. B	286. D	287. C	288. B	289. A	290. A	291. B
292. B	293. A	294. A	295. B	296. B	297. C	298. A	299. A	300. C	301. C
302. A	303. A	304. B	305. D	306. B	307. D	308. B	309. D	310. B	311. A
312. B	313. C	314. C	315. D	316. D	317. A	318. C	319. A	320. D	321. D
322. B	323. B	324. C	325. C	326. B	327. B	328. B	329. C	330. A	331. D
332. D	333. B	334. B	335. C	336. A	337. C	338. B	339. B	340. B	341. C
342. B	343. C	344. B	345. A	346. A	347. A	348. B	349. D	350. A	351. D
352. A	353. B	354. D	355. B	356. D	357. B	358. D	359. C	360. D	361. B
362. D	363. A	364. B	365. B	366. A	367. A	368. C	369. B	370. B	371. B
372. B	373. C	374. A	375. D	376. C	377. B	378. B	379. A	380. C	381. B
382. B	383. D	384. D	385. A	386. D	387. B	388. D	389. C	390. B	391. B
392. A	393. A	394. B	395. D	396. A	397. B	398. B	399. B	400. D	401. C
402. A	403. D	404. C	405. B	406. A	407. A	408. B	409. B	410. B	411. C
412. B	413. D	414. C	415. D	416. A	417. D	418. A	419. C	420. A	421. A
422. C	423. D	424. B	425. C	426. B	427. C	428. D	429. C	430. C	431. B
432. D	433. A	434. B	435. C	436. B	437. B	438. B	439. A	440. A	441. A
442. C	443. C	444. B	445. D	446. D	447. A	448. C	449. D	450. D	451. C
452. D	453. B	454. D	455. C	456. A	457. D	458. B	459. C	460. C	461. A
462. D	463. B	464. A	465. B	466. A	467. D	468. B	469. B	470. B	471. C
472. B	473. B	474. B	475. D	476. D	477. B	478. C	479. D	480. C	481. B
482. B	483. B	484. B	485. B	486. D	487. D	488. B	489. C	490. A	491. B
492. C	493. A	494. B	495. D	496. B	497. A	498. A	499. A	500. A	501. A
502. A	503. C	504. C	505. A	506. A	507. B	508. B	509. B	510. A	511. A
512. A	513. B	514. C	515. B	516. B	517. B	518. A	519. C	520. B	521. D
522. C	523. C	524. B	525. A	526. B	527. C	528. D	529. B	530. B	531. B
532. A	533. B	534. B	535. B	536. A	537. C	538. A	539. B	540. C	541. A
542. A	543. A	544. B	545. B	546. B	547. B	548. A	549. B	550. B	551. D
552. D	553. A	554. C	555. D	556. D	557. B	558. B	559. B	560. B	561. C

D ÔN TẬP CHƯƠNG III

Câu 1. Mệnh đề nào sau đây đúng?

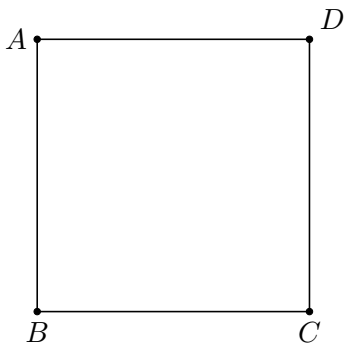
A. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì a vuông góc với c.

B. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b song song với đường thẳng c thì a vuông góc với c.

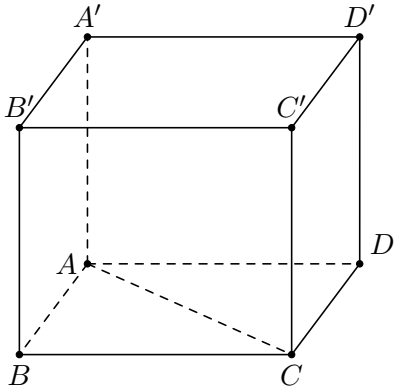
C. Cho ba đường thẳng a, b, c vuông góc với nhau từng đôi một. Nếu có một đường thẳng d vuông góc với a thì d song song với b hoặc c.

D. Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Một đường thẳng c vuông góc với a thì c vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (a, b).

✍**Lời giải.**



Hình 1



Hình 2

Mệnh đề "Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì a vuông góc với c" sai vì a có thể song song với c. Ví dụ: Hình vuông $ABCD$ có $AB \perp BC, BC \perp CD$ và A (Hình 1).
Mệnh đề "Cho ba đường thẳng a, b, c vuông góc với nhau từng đôi một. Nếu có một đường thẳng d vuông góc với a thì d song song với b hoặc c" sai vì d có thể cắt b và c. Ví dụ: Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có ABC đôi một vuông góc với nhau. AC vuông góc với AA' nhưng AC cắt AB và AD. (Hình 2).
Mệnh đề "Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Một đường thẳng c vuông góc với a thì c vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (a, b)" sai vì c có thể song song với đường thẳng nằm trong mặt phẳng $(a; b)$. Ví dụ: Cho hình vuông $ABCD$ có $AB \parallel CD$. Đường thẳng BC vuông góc với AB mà DG (Hình 1).
Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Mệnh đề nào sau đây đúng?

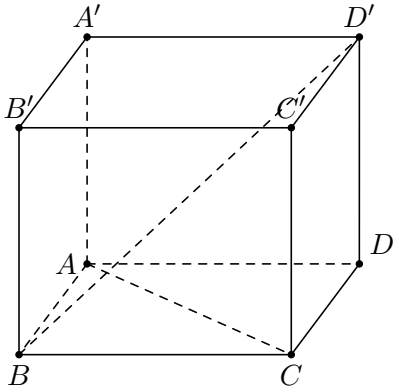
A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

C. Hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến d. Với mỗi điểm A thuộc (α) và mỗi điểm B thuộc (β) thì ta có đường thẳng AB vuông góc với d.

D. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) đều vuông góc với mặt phẳng (γ) thì giao tuyến d của (α) và (β) nếu có sẽ vuông góc với (γ).

✍Lời giải.



Mệnh đề "Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau" sai vì hai mặt phẳng có thể cắt nhau. Ví dụ: Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $(AA'D'D)$ và $(AA'B'B)$ cùng vuông góc với $(ABCD)$ và $(AA'D'D) \cap (AA'B'B) = AA'$.
Mệnh đề "Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia" sai vì thiếu điều kiện đường thẳng phải vuông góc với giao tuyến. Ví dụ: Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $(AA'D'D)$ vuông góc với $(ABCD)$ nhưng $A'D' \parallel (ABCD)$.
Mệnh đề "Hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến d. Với mỗi điểm A thuộc (α) và mỗi điểm B thuộc (β) thì ta có đường thẳng AB vuông góc với d" sai. Ví dụ: Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $(AA'D'D)$ vuông góc với $(ABCD)$ và $(AA'D'D) \cap (ABCD) = AD$ mà BD' không vuông góc với AD.
Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Hai đường thẳng a và b trong không gian có các vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}$ và $\vec{v}$. Điều kiện cần và đủ để a và b chéo nhau là a và b không có điểm chung và hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ không cùng phương.

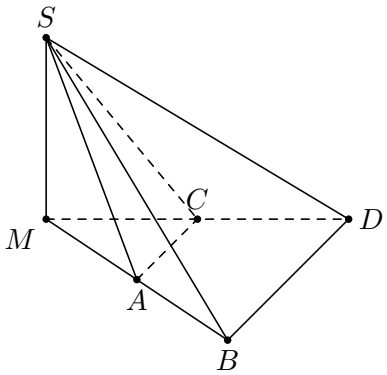
B. Cho a, b là hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau. Đường vuông góc chung của a và b nằm trong mặt phẳng chứa đường này và vuông góc với đường kia.

C. Không thể có một hình chóp tứ giác $S.ABCD$ nào có hai mặt bên (SAB) và (SCD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy.

D. Cho $\vec{u}, \vec{v}$ là hai vectơ chỉ phương của hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng (α) và $\vec{n}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ. Điều kiện cần và đủ để $\Delta \perp (\alpha)$ là $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ và $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.

✍Lời giải.

"Không thể có một hình chóp tứ giác $S.ABCD$ nào có hai mặt bên (SAB) và (SCD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy" là mệnh đề sai.
Ví dụ: Cho hình chóp $S.MBD$ trong đó $SM \perp (MBD) \Rightarrow (SMB)$ và (SMD) là hai mặt phẳng vuông góc với đáy. Trên mỗi cạnh MB, MD lần lượt lấy A và C. Khi đó, $(SAB) \equiv (SMB), (SCD) \equiv (SMD) \Rightarrow (SAB)$ và (SCD) cùng vuông góc với đáy.



Chọn đáp án C □

Câu 4. Mệnh đề nào sau đây đúng?

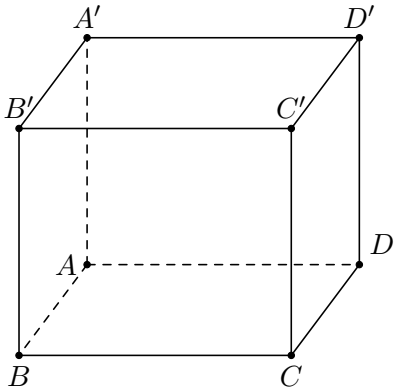
A. Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng.

B. Một đường cắt hai đường thẳng cắt nhau cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng.

C. Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một thì cùng nằm trong một mặt phẳng.

D. Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một và không nằm trong một mặt phẳng thì đồng quy.

✍Lời giải.



Mệnh đề "Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng" sai. Ví dụ Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có AA' cắt AB và $A'D'$ nhưng ba đường thẳng AA', AB và $A'D'$ không đồng phẳng.
Mệnh đề "Một đường cắt hai đường thẳng cắt nhau cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng" sai. Ví dụ: Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'B'$ cắt hai đường thẳng cắt nhau cho trước là AA' và $A'D'$ nhưng ba đường thẳng $AA', A'B'$ và $A'D'$ không đồng phẳng.
Mệnh đề "Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một thì cùng nằm trong một mặt phẳng" sai. Ví dụ: Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'B', AA', A'D'$ cắt nhau từng đôi một nhưng không cùng nằm trong một mặt phẳng.
Chọn đáp án D □

Câu 5. Mệnh đề nào sau đây đúng?

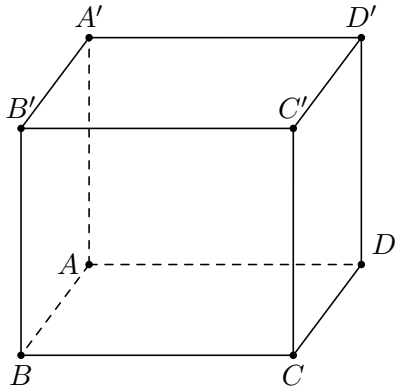
A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

D. Hai đường thẳng không cắt nhau và không song song thì chéo nhau.

✍Lời giải.



Mệnh đề "Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song" sai vì chúng có thể cắt nhau. Ví dụ: Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $(AA'D'D)$ và $(AA'B'B)$ cùng vuông góc với $(ABCD)$ và $(AA'D'D) \cap (AA'B'B) = AA'$.

Mệnh đề "Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song" sai vì chúng có thể cắt nhau. Ví dụ: Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có AB, AD cùng vuông góc với AA', $AB \cap AD = A$.

Mệnh đề "Hai đường thẳng không cắt nhau và không song song thì chéo nhau" sai vì chúng có thể trùng nhau.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Mệnh đề nào sau đây đúng?

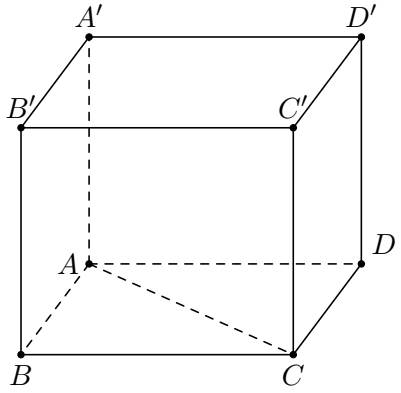
A. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì cắt nhau.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

D. Một mặt phẳng (α) và một đường thẳng a không thuộc (α) cùng vuông góc với đường thẳng b thì (α) song song với a.

✍Lời giải.



Mệnh đề "Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau" sai. Ví dụ: Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có AD và AC cùng song song với $(A'B'C'D')$ mà $AD \cap AC = A$.

Mệnh đề "Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì cắt nhau" sai vì hai mặt phẳng có thể song song với nhau. Ví dụ: Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $(AA'D'D)$ và $(BB'C'C)$ cùng vuông góc với $(ABCD)$ và $(AA'D'D) \parallel (BB'C'C)$.

Mệnh đề "Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau" sai. Ví dụ: Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có AD và AC cùng vuông góc với AA' nhưng AD và AC không vuông góc với nhau.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Mệnh đề nào sau đây đúng?

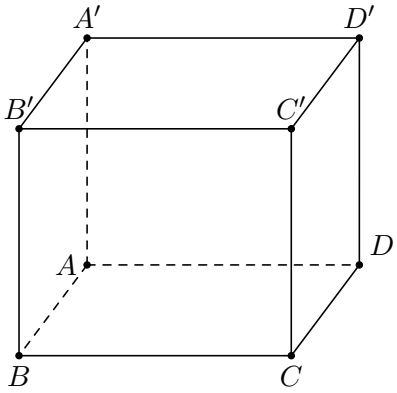
A. Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau là đoạn ngắn nhất trong các đoạn thẳng nối hai điểm bất kì lần lượt nằm trên hai đường thẳng ấy và ngược lại.

B. Qua một điểm cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Qua một điểm cho trước có duy nhất một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

D. Cho ba đường thẳng a, b, c chéo nhau từng đôi một. Khi đó ba đường thẳng này sẽ nằm trong ba mặt phẳng song song với nhau từng đôi một.

✍Lời giải.



Mệnh đề "Qua một điểm cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước" sai. Ví dụ: Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ qua điểm A' có hai mặt phẳng $(A'ABB')$ và $(A'ADD')$ cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.
Mệnh đề "Qua một điểm cho trước có duy nhất một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước" sai. Ví dụ: Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ qua điểm A' có $A'B'$ và $A'D'$ cùng vuông góc với AA'.
Mệnh đề "Cho ba đường thẳng a, b, c chéo nhau từng đôi một. Khi đó ba đường thẳng này sẽ nằm trong ba mặt phẳng song song với nhau từng đôi một" sai. Ví dụ: Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có ba đường thẳng $AB, CC', A'D$ là ba đường thẳng chéo nhau từng đôi một nhưng các mặt phẳng chứa các đường này không song song với nhau từng đôi một.
Chọn đáp án (A) □

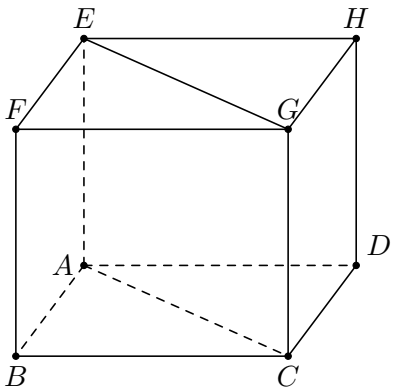
Câu 8. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a. Tính $P = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$.

A. $P = a^2$. **B**. $P = a^2\sqrt{2}$. **C**. $P = a^2\sqrt{3}$. **D**. $P = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

✍Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$.
Do đó

$$\begin{aligned} P &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= AB \cdot AC \cdot \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= a^2. \end{aligned}$$



Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Tính khoảng cách d giữa hai cạnh đối của một tứ diện đều cạnh a.

A. $d = \dfrac{3a}{2}$. **B**. $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C**. $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D**. $d = a\sqrt{2}$.

✍Lời giải.

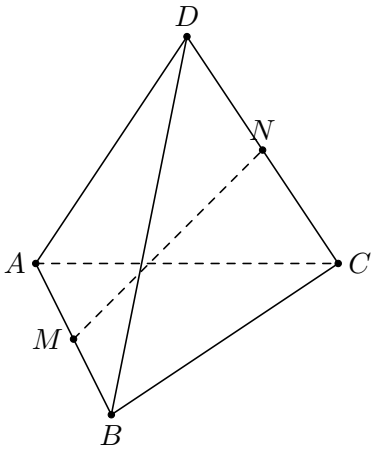
Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Suy ra $\begin{cases} CD \perp BN \\ CD \perp AN \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABN) \Rightarrow CD \perp MN.$ (1)

Ta có $AN = BN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Delta ABN$ cân tại $N \Rightarrow MN \perp AB.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra

$$\mathrm{d}\left[AB, CD\right] = MN = \sqrt{BN^2 - BM^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

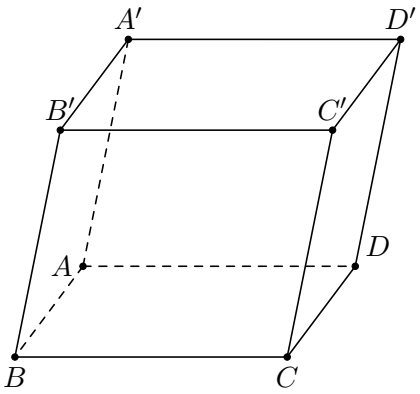


Chọn đáp án B □

Câu 10. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ với tâm O. Hãy chỉ ra đẳng thức **sai** trong các đẳng thức sau đây

A. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.
B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A} = \vec{0}$.
C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'}$.
D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'O} + \overrightarrow{OC'}$.

✍Lời giải.

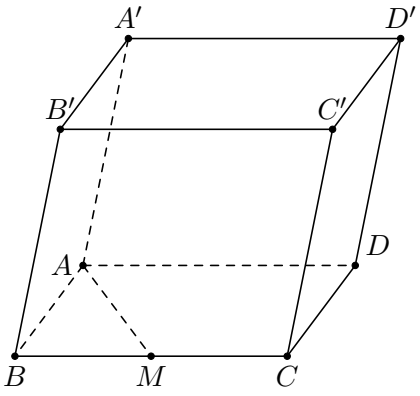


Theo qui tắc hình hộp thì $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.
Ta có $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{C'D'} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'A} = \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{C'A} = \vec{0}$.
Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'O} + \overrightarrow{OC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC'}$.
Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB'}$ (quy tắc hình bình hành) và $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AD'}$ nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} \neq \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'}$.
Chọn đáp án C □

Câu 11. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{d}$. Trong các biểu thức vectơ sau đây, biểu thức nào là đúng?

A. $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.
B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.
C. $\vec{b} + \vec{d} - \vec{c} = \vec{0}$.
D. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$.

✍Lời giải.



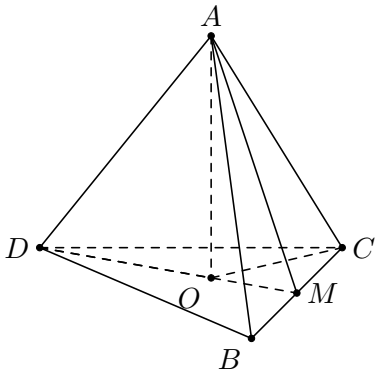
Gọi M là trung điểm BC khi đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM} \Rightarrow \vec{b} + \vec{c} = 2\overrightarrow{AM} \neq \vec{a}$.
Dựng hai điểm D, D' để $ABDC.A'B'D'C'$ là hình hộp.

Ta có $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=-\vec{d}$.
Mà $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD'} \Rightarrow \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{AD'} \neq -\vec{d} \neq \vec{d}$.
Ta có $\vec{b}+\vec{d}-\vec{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}=\vec{0}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{2}$.
B. $AB\perp CD$ hay $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.
C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$.
D. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}$.

Lời giải.
Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=a\cdot a\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{a^2}{2}$.
Gọi M là trung điểm CD và O là trọng tâm tam giác BCD.
Ta có $\begin{cases}AO\perp CD\\ BM\perp CD\end{cases}\Rightarrow CD\perp AB$ hay $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.
Theo quy tắc ba điểm $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.



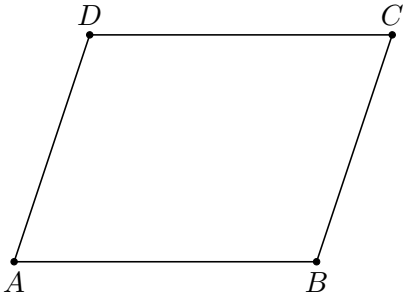
Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=a\cdot a\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{a^2}{2}\\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}=-\left(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}\right)=-\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}\right)=-a\cdot a\cdot\cos 60^\circ=-\dfrac{a^2}{2}.\end{cases}$
Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Cho hình chóp $S.ABCD$. Nếu có $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$ thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
B. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.
C. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$.
D. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC} &\Leftrightarrow \overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SD}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\end{aligned}$$



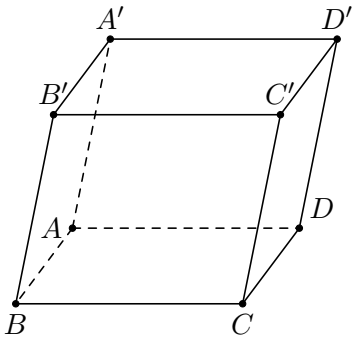
Vậy tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.
Với bốn điểm bất kỳ A, B, C, D ta luôn có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$.
Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng nếu có một trong ba vectơ đó bằng vectơ $\vec{0}$.
B. Ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng nếu có hai trong ba vectơ đó cùng phương.
C. Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ba vectơ $\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{C'A'},\overrightarrow{DA'}$ đồng phẳng.
D. Vectơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ luôn luôn đồng phẳng với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lời giải.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và gọi M là trung điểm $C'D'$.
Giả sử $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CM}$.
Khi đó $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{AM}$ không đồng phẳng với hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$.

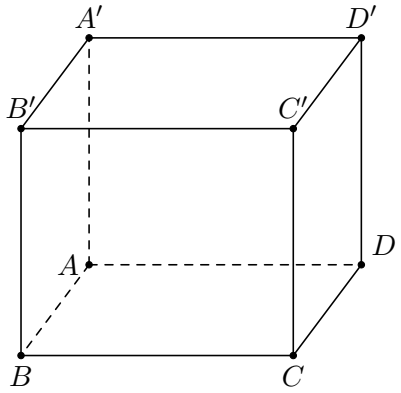


Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\left|\overrightarrow{AC'}\right| = a\sqrt{3}$.
B. $\overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{AB'} = a^2$.
C. $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{CD'} = 0$.
D. $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A'} = \vec{0}$.

✍**Lời giải.**



Ta có $\left|\overrightarrow{AC'}\right| = \sqrt{AB^2 + AD^2 + A'A^2} = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.
Ta có $\overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{AB'} = \left|\overrightarrow{AD'}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB'}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{AB'}\right) = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 60^\circ = a^2$.
Dễ dàng chứng minh được $\overrightarrow{AB'} \perp \overrightarrow{CD'} \Rightarrow \overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{CD'} = 0$.
Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{DA} \end{cases}$.
Khi đó: $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}\right) = \overrightarrow{AB} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là sai?

A. Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có cặp số m, n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$, ngoài ra cặp số m, n là duy nhất.
B. Nếu có $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ và một trong ba số m, n, p khác 0 thì ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.
C. Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi ba vectơ đó cùng có giá thuộc một mặt phẳng.
D. Ba tia Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một thì ba tia đó không đồng phẳng.

✍**Lời giải.**
Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi ba vectơ đó cùng có giá song song với một mặt phẳng.
Chọn đáp án (C) □

Câu 17. Cho hai điểm phân biệt A, B và một điểm O bất kì. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{BA}$.
B. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$.
C. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB}$.
D. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

✍**Lời giải.**
Ta có $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} = k\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BA} \Rightarrow M, A, B$ thẳng hàng.
Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

D. Mặt phẳng (α) và đường thẳng a cùng vuông góc với đường thẳng b thì song song với nhau.

✍Lời giải.

Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Cho $a,\ b,\ c$ là các đường thẳng. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \parallel c$.

B. Nếu $a \parallel b$ và $b \perp c$ thì $a \perp c$.

C. Nếu $a \perp (\alpha)$ và $b \parallel (\alpha)$ thì $a \perp b$.

D. Nếu $a \perp b$, $c \perp b$ và a cắt c thì $b \perp (a, c)$.

✍Lời giải.

Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì hoặc $a \parallel c$ hoặc a, c chéo nhau hoặc a, c cắt nhau.

Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Cho các mệnh đề sau với (α) và (β) là hai mặt phẳng vuông góc với nhau với giao tuyến $m = (\alpha) \cap (\beta)$ và a, b, c, d là các đường thẳng. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Nếu $a \subset (\alpha)$ và $a \perp m$ thì $a \perp (\beta)$.

B. Nếu $b \perp m$ thì $b \subset (\alpha)$ hoặc $b \subset (\beta)$.

C. Nếu $c \parallel m$ thì $c \parallel (\alpha)$ hoặc $c \parallel (\beta)$.

D. Nếu $d \perp m$ thì $d \perp (\alpha)$.

✍Lời giải.

Nếu $a \subset (\alpha)$ và $a \perp m$ thì $a \perp (\beta)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Cho a, b, c là các đường thẳng. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Nếu $a \perp b$, $(\alpha) \supset a$ và $(\beta) \supset b$ thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

B. Cho $a \perp b$ và $b \subset (\alpha)$. Mọi mặt phẳng (β) chứa a và vuông góc với b thì thì vuông góc (α).

C. Cho $a \perp b$. Mọi mặt phẳng chứa b đều vuông góc với a.

D. Cho $a \parallel b$. Mọi mặt phẳng (α) chứa c trong đó $c \perp a$ và $c \perp b$ thì đều vuông góc với mặt phẳng (a, b).

✍Lời giải.

Cho $a \perp b$ và $b \subset (\alpha)$. Mọi mặt phẳng (β) chứa a và vuông góc với b thì thì vuông góc (α).

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Qua một đường thẳng, có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng khác.

B. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc nhau. Nếu mặt phẳng (α) chứa a và mặt phẳng (β) chứa b thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

D. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b đồng thời $a \perp b$. Luôn có mặt phẳng (α) chứa a để $(\alpha) \perp b$.

✍Lời giải.

Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b đồng thời $a \perp b$. Luôn có mặt phẳng (α) chứa a để $(\alpha) \perp b$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc nhau, nếu mặt phẳng (α) chứa a và mặt phẳng (β) chứa b thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

B. Cho đường thẳng a vuông góc mặt phẳng (α), mọi mặt phẳng (β) chứa a thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

C. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc nhau, mặt phẳng nào vuông góc với đường này thì song song với đường kia.

D. Cho hai đường thẳng chéo nhau, luôn luôn có một mặt phẳng chứa đường này và vuông góc với đường kia.

✍Lời giải.

Cho đường thẳng a vuông góc mặt phẳng (α), mọi mặt phẳng (β) chứa a thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Cho tứ diện đều $ABCD$. Trong các mệnh đề trên mệnh đề nào là sai? Khoảng cách từ điểm D tới mặt phẳng (ABC) là:

A. Độ dài đoạn DG trong đó G là trọng tâm tam giác ABC.

B. Độ dài đoạn DH trong đó H là hình chiếu vuông góc của điểm D trên mặt phẳng (ABC).

C. Độ dài đoạn DK trong đó K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

D. Độ dài đoạn DI trong đó I là trung điểm đoạn AM với M là trung điểm của đoạn BC.

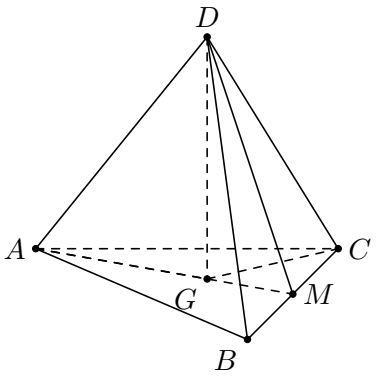
✍Lời giải.

Gọi M là trung điểm AB và G là trọng tâm tam giác ABC.

Do $ABCD$ là tứ diện đều $\Rightarrow DG \perp (ABC)$.

Do đó, $\mathrm{d}\,(D,(ABC)) = DG$ và G cũng là hình chiếu của D trên mặt phẳng (ABC).

Tam giác ABC đều $\Rightarrow G$ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng?

A. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\dfrac{a}{3}$.

B. Độ dài đoạn AC' bằng $a\sqrt{3}$.

C. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(CDD'C')$ bằng $a\sqrt{2}$.

D. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $\dfrac{3a}{2}$.

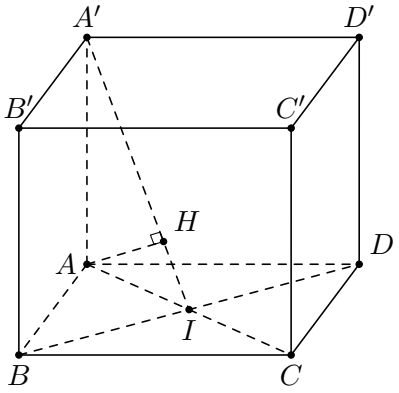
✍Lời giải.

Gọi $I = BD \cap AC$ và H là hình chiếu của điểm A trên đường thẳng $A'I$.

Dễ dàng chứng minh được $d\,(A,(A'BD)) = AH$.

Ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



Đường chéo hình lập phương $AC' = a\sqrt{3}$.

Ta có $AD \perp (CDD'C') \Rightarrow \mathrm{d}\,(A,(CDD'C')) = AD = a$.

Ta có $AB \perp (BCC'B') \Rightarrow \mathrm{d}\,(A,(BCC'B')) = AB = a$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Khoảng cách giữa hai cạnh đối trong một tứ diện đều cạnh a bằng:

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B**. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C**. $\dfrac{2a}{3}$. **D**. $2a$.

✍Lời giải.

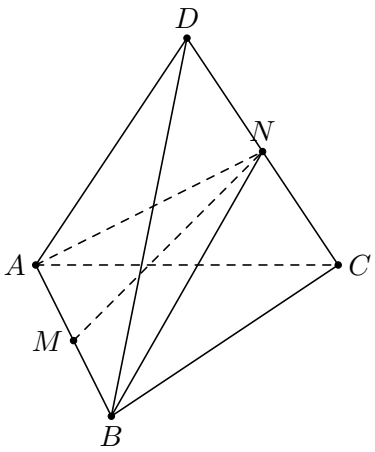
Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Suy ra $\begin{cases} CD \perp BN \\ CD \perp AN \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABN) \Rightarrow CD \perp MN.$ (1)

Ta có $AN = BN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Delta ABN$ cân tại $N \Rightarrow MN \perp AB.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra

$$\mathrm{d}\,[AB,CD] = MN = \sqrt{BN^2 - BM^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. Khoảng cách từ đỉnh S đến mặt phẳng đáy là

A. $\dfrac{3}{2}a$. **B**. a. **C**. $a\sqrt{2}$. **D**. $a\sqrt{3}$.

✍Lời giải.

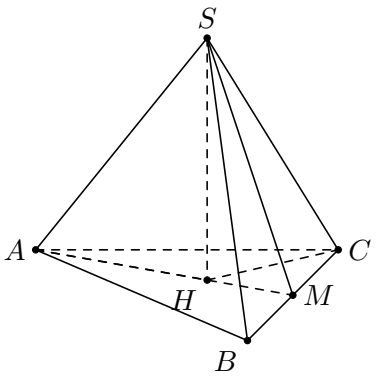
Gọi M là trung điểm BC và H là trọng tâm tam giác ABC.

Ta dễ dàng chứng minh được $SH \perp (ABC)$

$\Rightarrow d(S,(ABC)) = SH$.

Ta có $AM = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2}, AH = \dfrac{2}{3}AM = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - HA^2} = a$.



Chọn đáp án B □

Câu 28. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng a và b chéo nhau là một đường thẳng d vừa vuông góc với a và vừa vuông góc với b..

B. Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau là đoạn ngắn nhất trong các đoạn nối hai điểm bất kì lần lượt nằm trên hai đường thẳng ấy và ngược lại.

C. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Đường vuông góc chung luôn luôn nằm trong mặt phẳng vuông góc với a và chứa đường thẳng b..

D. Hai đường thẳng chéo nhau là hai đường thẳng không song song với nhau.

✍Lời giải.

Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau là đoạn ngắn nhất trong các đoạn nối hai điểm bất kì lần lượt nằm trên hai đường thẳng ấy và ngược lại.

Chọn đáp án B □

Câu 29. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$. Trong các kết quả sau đây, kết quả nào là sai?

A. $BD' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. **B**. $d(AB, CC') = b$.

C. $d(BB', DD') = \sqrt{a^2 + b^2}$. **D**. $d(A,(A'BD)) = \dfrac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

✍Lời giải.

Ta có $BD' = AC' = \sqrt{AB^2 + AD^2 + A'A^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp CC' \end{cases} \Rightarrow \mathrm{d}(AB, CC') = BC = b$.

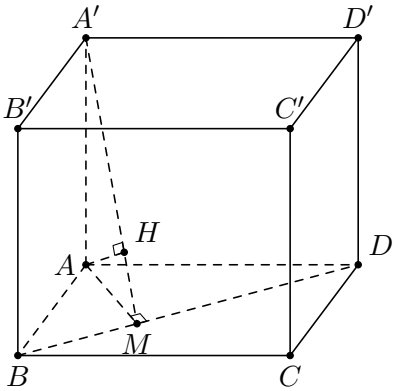
Ta có $BB' \parallel DD' \Rightarrow \mathrm{d}(BB', DD') = BD = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Gọi M là hình chiếu của A trên AB, H là hình chiếu của A trên AM.

Dễ dàng chứng minh được $AH \perp (A'BD) \Rightarrow \mathrm{d}(A,(A'BD)) = AH$.

Lại có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AA'^2} = \dfrac{1}{a^2 + b^2} + \dfrac{1}{c^2}$

$\Rightarrow AH = \sqrt{\dfrac{c^2(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2 + c^2}}$.



Chọn đáp án D □

Câu 30. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với a là khoảng cách từ một điểm A bất kì thuộc a tới mặt phẳng (α).

B. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b là khoảng cách từ một điểm M thuộc mặt phẳng (α) chứa a và song song với b đến một điểm N bất kì trên b.

C. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm M bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

D. Nếu hai đường thẳng a và b chéo nhau và vuông góc với nhau thì đường vuông góc chung của chúng nằm trong mặt phẳng (α) chứa đường này và (α) vuông góc với đường kia.

✍Lời giải.

Mệnh đề sai là mệnh đề "Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b là khoảng cách từ một điểm M thuộc mặt phẳng (α) chứa a và song song với b đến một điểm N bất kì trên b".
Chọn đáp án (B) □

1 ĐÁP ÁN

1. B	2. D	3. C	4. D	5. A	6. D	7. A	8. A	9. B	10. C
11. C	12. D	13. A	14. D	15. D	16. C	17. C	18. A	19. A	20. A
21. B	22. D	23. B	24. D	25. B	26. A	27. B	28. B	29. D	30. B