

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm 06 câu, 01 trang)

Môn: **TOÁN – Bảng A**
Thời gian: **180** phút (không kể thời gian giao đề)
Ngày thi: **15/12/2024**

Câu 1 (4,0 điểm). Giải các phương trình sau:

a) $\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2 x = \cos^2 x$. b) $3\log_3(x-1) - \log_{\frac{1}{3}}(x-5)^3 = 3$.

Câu 2 (4,0 điểm). Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$, tam giác ABC vuông cân tại A và cạnh $BC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh BC .

- a) Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.
b) Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(AA'C'C)$.
c) Gọi α là số đo góc nhị diện $[C, AA', B]$. Tính $\cos \alpha$.

Câu 3 (4,0 điểm).

a) Hằng ngày mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (tính bằng mét) của mực nước trong kênh tại thời điểm t (tính bằng giờ, $0 \leq t < 24$) trong ngày được xác định bởi công thức $h(t) = 2\cos\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3}\right) + 5$. Hãy xác định khoảng thời gian trong ngày mà mực nước trong kênh tăng dần.

b) Một lớp học có 35 học sinh. Các học sinh tham gia vào tổng cộng n câu lạc bộ. Chứng minh rằng nếu mỗi câu lạc bộ có ít nhất 15 học sinh tham gia và hai học sinh bất kỳ tham gia chung nhiều nhất một câu lạc bộ thì $n \leq 5$.

Câu 4 (3,0 điểm). Cho dãy số (x_n) xác định bởi:

$$x_1 = 3; x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + 2 + \sqrt{x_n^2 - 4}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.

b) Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(x_i - 2)^2}$.

Câu 5 (2,0 điểm). Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $2(x^2y + xy^2) = x + y + 2xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 50xy$.

Câu 6 (3,0 điểm). Xét hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(2x + f(y)) = 2(x + y) + f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

- a) Chứng minh rằng hàm số $f(x)$ là đơn ánh.
b) Tìm tất cả các hàm số $f(x)$.

-----HẾT-----

(Thí sinh không được sử dụng tài liệu, Giám thị không giải thích gì thêm)

Họ tên thí sinh:

Số báo danh: Phòng thi:

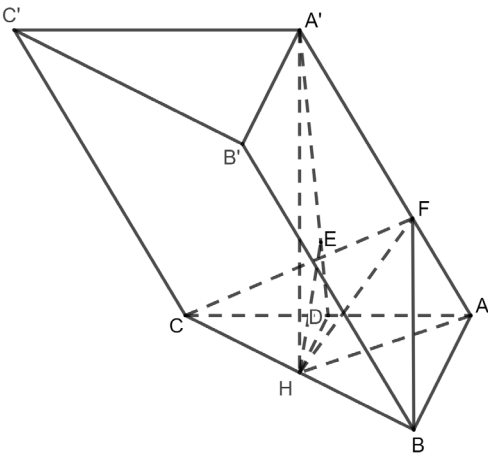
**HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ THI CHÍNH THỨC**

(Hướng dẫn chấm gồm 06 câu, 05 trang)

Môn: **TOÁN – Bảng A**

Thời gian: **180** phút

Ngày thi: **15/12/2024**

Câu	Hướng dẫn chấm	Thang điểm
Câu 1 (4,0 đ)	a) Ta có $\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2 x = \cos^2 x \Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos(2x)$	1,0
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - \frac{\pi}{6} = 2x + k2\pi \\ 4x - \frac{\pi}{6} = -2x + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{36} + \frac{k\pi}{3} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}) .$	1,0
	Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = \frac{\pi}{12} + k\pi; x = \frac{\pi}{36} + \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$.	
	b) ĐKXD: $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow x > 5$	0,5
	Ta có $\log_3[(x-1)(x-5)] = 1 \Leftrightarrow (x-1)(x-5) = 3$	0,5
	$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \sqrt{7} \\ x = 3 - \sqrt{7} \end{cases} .$	0,5
	Kết hợp điều kiện xác định ta thu được $x = 3 + \sqrt{7}$.	0,5
Câu 2 (4,0 đ)		

	a) Gọi H là trung điểm của BC. Khi đó $AH = \frac{1}{2}BC = a$ và $A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = a\sqrt{2}$.	0,5
	Có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = a^2$.	0,5
	Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{ABC} = a\sqrt{2}.a^2 = a^3\sqrt{2}$ (đvtt).	0,5
	b) Do H là trung điểm của BC nên $d(B, (AA'C'C)) = 2.d(H, (AA'C'C))$. Dựng HE là khoảng cách từ H đến mặt phẳng $(AA'C'C)$. Vậy $d(B, (AA'C'C)) = 2.d(H, (AA'C'C)) = 2HE$.	0,5
	Tam giác ABC vuông cân tại A và $BC = 2a$ nên tìm được $AB = AC = a\sqrt{2}$. Do HD là đường trung bình của tam giác ABC nên $HD = \frac{1}{2}AB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.	0,5
	Từ $\frac{1}{HE^2} = \frac{1}{HD^2} + \frac{1}{HA^2} \Rightarrow HE = \frac{a\sqrt{10}}{5}$. Suy ra $d(B, (AA'C'C)) = \frac{2\sqrt{10}}{5}a$.	0,5
	c) Do tam giác ABC vuông cân tại A nên $AH \perp BC$, lại có $A'H \perp BC$, suy ra $(A'HA) \perp BC$, mà H là trung điểm của BC nên $(A'HA)$ là mặt phẳng trung trực của BC. Kẻ $BF \perp AA' (F \in AA')$, khi đó $CF \perp AA'$. Do đó góc nhị diện $[C, AA', B]$ có số đo bằng số đo $\widehat{BFC}$.	0,5
Câu 3 (4,0 đ)	Trong tam giác $A'AH$ vuông tại H tính được $HF = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Trong tam giác FHB tính được $FB = \frac{a\sqrt{15}}{3}$. Do $(A'HA)$ là mặt phẳng trung trực của BC nên $FC = FB = \frac{a\sqrt{15}}{3}$. Trong tam giác BFC tính được $\cos \widehat{BFC} = \frac{FB^2 + FC^2 - BC^2}{2FB.FC} = -\frac{1}{5}$.	0,5
	a) Ta có $h'(t) = -\frac{\pi}{6} \sin\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow t = -4 + 12k, (k \in \mathbb{Z})$.	0,5
	Theo giả thiết $0 \leq t < 24 \Leftrightarrow 0 \leq -4 + 12k < 24 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq k < \frac{7}{3}$. Do $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 1; 2$. Với $k = 1 \Rightarrow t = 8$ và $k = 2 \Rightarrow t = 20$.	0,5

	Ta có bảng biến thiên <table><tr><td>t</td><td>0</td><td>8</td><td>20</td><td>24</td></tr><tr><td>$h'(t)$</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr><tr><td>$h(t)$</td><td>6</td><td></td><td></td><td></td><td>7</td><td></td><td>6</td></tr></table>	t	0	8	20	24	$h'(t)$		-	0	+	0	-	$h(t)$	6				7		6	0,5
t	0	8	20	24																		
$h'(t)$		-	0	+	0	-																
$h(t)$	6				7		6															
	Từ bảng biến thiên ta xác định được khoảng thời gian trong ngày mà mực nước trong kênh tăng dần là từ 8 giờ đến 20 giờ.	0,5																				
	b) Ta đi đếm các bộ (a, b, T) (trong đó a, b là hai học sinh cùng tham gia câu lạc bộ T, không kể đến thứ tự của a, b) theo hai cách + Có n cách chọn T, vì trong mỗi câu lạc bộ có ít nhất 7 học sinh tham gia nên có ít nhất C_{15}^2 cách chọn ra hai thành viên a, b. Do đó số bộ $(a, b, T) \geq n.C_{15}^2 = 105n$ cách.	1,0																				
	+ Số cách chọn ra hai học sinh (a, b) bất kỳ là C_{35}^2, do hai học sinh bất kỳ tham gia chung nhiều nhất một câu lạc bộ, do đó với hai học sinh (a, b) số cách chọn T không vượt quá 1. Nên số bộ $(a, b, T) \leq C_{35}^2 = 595$. Từ đây có bất phương trình $105n \leq 595 \Rightarrow n \leq 5$.	1,0																				
Câu 4 (3,0 đ)	a) Ta chứng minh $x_n > 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ bằng phương pháp quy nạp. Thật vậy: - Với $n = 1$ có $x_1 = 3 > 2$, mệnh đề đúng. - Giả sử mệnh đề đúng tới $n = k, (k \in \mathbb{N}^*)$, tức là $x_k > 2$. Ta chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$. Có $x_{k+1} - 2 = \frac{1}{2}(x_k - 2 + \sqrt{x_k^2 - 4}) > 0$ do $x_k > 2$. Vậy $x_n > 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.	0,5																				
	Xét hiệu $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}[\sqrt{x_n^2 - 4} - (x_n - 2)] > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ do $\sqrt{x_n^2 - 4} = \sqrt{(x_n - 2)(x_n + 2)} > \sqrt{(x_n - 2)^2} = x_n - 2$. Suy ra (x_n) là dãy số tăng. Giả sử (x_n) bị chặn trên, suy ra tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim x_n = L$, cho công thức truy hồi qua giới hạn ta có phương trình $L = \frac{1}{2}(L + 2 + \sqrt{L^2 - 4}) \Leftrightarrow L - 2 = \sqrt{L^2 - 4} \Rightarrow L^2 - 4L + 4 = L^2 - 4 \Rightarrow L = 2$	0,5																				
	Điều này là không thể vì dãy số (x_n) tăng và $x_1 = 3 > 2$. Dẫn đến điều giả sử là sai, tức là (x_n) không bị chặn trên, hay $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.	0,5																				
	b) Từ công thức truy hồi ta có $2x_{n+1} - x_n - 2 = \sqrt{x_n^2 - 4}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ $\Leftrightarrow (2x_{n+1} - x_n - 2)^2 = x_n^2 - 4, \forall n \in \mathbb{N}^*$	0,5																				

	$\Leftrightarrow 4x_{n+1}^2 - 4x_{n+1}x_n - 8x_n + 4x_n + 8 = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ $\Leftrightarrow x_{n+1}^2 - x_{n+1}x_n - 2x_{n+1} + x_n + 2 = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ $\Leftrightarrow (x_{n+1}^2 - x_{n+1}x_n) - 2(x_{n+1} - x_n) = x_n - 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ $\Leftrightarrow (x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - 2) = x_n - 2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$												
	Chia hai vế cho $(x_n - 2)(x_{n+1} - 2)^2$, đồng thời viết lại $x_{n+1} - x_n = (x_{n+1} - 2) - (x_n - 2)$ ta thu được đẳng thức $\frac{1}{x_n - 2} - \frac{1}{x_{n+1} - 2} = \frac{1}{(x_{n+1} - 2)^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$ Từ đây thu được $\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(x_i - 2)^2} &= \frac{1}{(x_1 - 2)^2} + \frac{1}{(x_2 - 1)^2} + \dots + \frac{1}{(x_n - 2)^2} \\ &= \frac{1}{(x_1 - 2)^2} + \left(\frac{1}{x_1 - 2} - \frac{1}{x_2 - 2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{x_{n-1} - 2} - \frac{1}{x_n - 2} \right) \\ &= \frac{1}{(x_1 - 2)^2} + \frac{1}{x_1 - 2} - \frac{1}{x_n - 2}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$	0,5											
	Do $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ và $x_1 = 3$, ta tính được $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(x_i - 2)^2} = 2$	0,5											
Câu 5 (2,0 đ)	Theo giả thiết có $2xy(x + y) = x + y + 2xy \Leftrightarrow 2(x + y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 2$, Mặt khác $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x + y}$. Đặt $x + y = t > 0$, có bất đẳng thức: $2t \geq \frac{4}{t} + 2 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 2 \\ t \leq -1(L) \end{cases}$	0,5											
	Theo giả thiết ta có $2xy(x + y) = x + y + 2xy \Leftrightarrow 2xy.t = t + 2xy \Rightarrow xy = \frac{t}{2(t-1)}$. Khi đó $P = (x + y)^2 + 48xy = t^2 + \frac{24t}{t-1} = t^2 + \frac{24}{t-1} + 24 = f(t)$ với $t \geq 2$.	0,5											
	Có $f'(t) = 2t - \frac{24}{(t-1)^2} = 0 \Leftrightarrow t^3 - 2t^2 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = 3 > 2$. Ta lập được bảng biến thiên <table><tr><td>t</td><td>2</td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(t)$</td><td></td><td>- 0 +</td><td></td></tr><tr><td>$f(t)$</td><td>52</td><td style="text-align: center;">↘ 45 ↗</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	t	2	3	$+\infty$	$f'(t)$		- 0 +		$f(t)$	52	↘ 45 ↗	$+\infty$
t	2	3	$+\infty$										
$f'(t)$		- 0 +											
$f(t)$	52	↘ 45 ↗	$+\infty$										

	Từ bảng biến thiên ta có giá trị nhỏ nhất của $f(t)$ là 45, dấu bằng xảy ra khi $t = 3$. Với $t = 3$ có $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = \frac{3}{4} \end{cases}$, tìm được $\begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{6}}{2}, y = \frac{3 - \sqrt{6}}{2} \\ x = \frac{3 - \sqrt{6}}{2}, y = \frac{3 + \sqrt{6}}{2} \end{cases}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 45.	0,5
	a) $f(2x + f(y)) = 2(x + y) + f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ (1) Giả sử tồn tại a, b thoả mãn $f(a) = f(b)$. Trong (1) cho $y = a$ ta có $f(2x + f(a)) = 2(x + a) + f(x) + f(a), \forall x \in \mathbb{R}$ Trong (1) cho $y = b$ ta có $f(2x + f(b)) = 2(x + b) + f(x) + f(b), \forall x \in \mathbb{R}$ Do $f(a) = f(b)$ nên $f(2x + f(a)) = f(2x + f(b)), \forall x \in \mathbb{R}$, từ đó suy ra $2(x + a) + f(x) + f(a) = 2(x + b) + f(x) + f(b), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow a = b$. Vậy có $f(x)$ là đơn ánh.	2,0
Câu 6 (3,0 đ)	b) Trong (1) thay x bởi y và y bởi x ta thu được $f(2y + f(x)) = 2(y + x) + f(y) + f(x), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (2)$ Kết hợp (1) và (2) rút ra được $f(2x + f(y)) = f(2y + f(x)), \forall x, y \in \mathbb{R}$ Do $f(x)$ đơn ánh nên thu được $2x + f(y) = 2y + f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow f(y) - 2y = f(x) - 2x, \forall x, y \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow f(x) - 2x = c, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ với } c \text{ là hằng số}$ $\Rightarrow f(x) = 2x + c, \forall x \in \mathbb{R}.$ Thử lại: $2(2x + 2y + c) + c = 2(x + y) + 2x + c + 2y + c, \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow c = 0$ Vậy hàm số cần tìm $f(x) = 2x, \forall x \in \mathbb{R}$.	1,0

Xem thêm: ĐỀ THI HSG TOÁN 12
<https://toanmath.com/de-thi-hsg-toan-12>